SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 15 • 2022

Alessa Waldvogel

Dualität in der Funktionalanalysis

Zur historischen Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren in der geometrisierten Analysis

Dualität in der Funktionalanalysis

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Herausgegeben von

Ralf Krömer und Gregor Nickel

Band 15 (2022)

Alessa Waldvogel

Dualität in der Funktionalanalysis

Zur historischen Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren in der geometrisierten Analysis

Alessa Waldvogel
Gewerbliche Schule Schwäbisch Hall
Max-Eyth-Straße 9
74523 Schwäbisch Hall

alessa.waldvogel@gbs-sha.de

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation zur Erlangung eines Doktors der Naturwissenschaften von der Bergischen Universität Wuppertal angenommen.
Gutachter: Prof. Dr. Ralf Krömer (Wuppertal), Prof. Dr. Gregor Nickel (Siegen) und Prof. (i. R.) Dr. Klaus Volkert (Wuppertal)
Tag der mündlichen Prüfung: 3. November 2021

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 15 (2022)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2022

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

„Die Rolle der Klasse $[L^2]$ übernehmen hier je zwei Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$."

Frigyes Riesz

Für alle Studierenden der Mathematik, die sich mit dem ‚Wesen' mathematischer Begriffe befassen möchten

Geleitwort

Die Funktionalanalysis gehört zweifellos zu den Schlüsseldisziplinen der modernen Mathematik und hat einen zentralen Beitrag zu deren Ausprägung in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts geleistet. Bei diesen Entwicklungen haben wiederum Begriffe rund um die Idee von "Dualität" eine zentrale und faszinierende Rolle gespielt, da sie einerseits die Entwicklung der Funktionalanalysis selbst stark beeinflusst haben, andererseits aus der Funktionalanalysis bedeutende Impulse für mögliche mathematische Präzisierungen dieser Idee (über die klassische Dualität in der Geometrie des 19. Jahrhunderts hinaus) kamen.

Gemeinsam mit meinem Mitherausgeber Gregor Nickel freue ich mich daher sehr, mit der vorliegenden Monographie von Alessa Waldvogel unseren Leserinnen und Lesern die erste detaillierte mathematikhistorische Untersuchung dieser Entwicklungen unterbreiten zu können. Die Arbeit ist entstanden als Dissertation an der Bergischen Universität Wuppertal im Rahmen des 2016-2019 von Klaus Volkert und mir geleiteten DFG-Projekts "Dualität als Archetypus mathematischen Denkens".

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile, deren erster die Geschichte des Begriffs des Dualraums behandelt, während der zweite sich den dualen Operatoren widmet. Teil I umfasst drei große, chronologisch, aber aus thematischen Gründen auch teilweise überlappend angeordnete Kapitel zu Riesz' Arbeiten über die L^p-Räume, zum Satz von Hahn-Banach sowie zur Auflösungstheorie unendlicher linearer Gleichungssysteme. In Teil II wird ein etwas anderer Weg beschritten: Frau Waldvogel nimmt als Ausgangspunkt einen vorläufigen Endpunkt der betrachteten Entwicklung, nämlich einen von Banach 1932 gegebenen Überblick, und verfolgt dann in den Kapiteln 6-8 Banachs Literaturverweise zurück.

Die Gestaltung des Titels und der erste Abschnitt des Vorworts lassen aufhorchen: es geht Frau Waldvogel zwar um eine historische Darstellung der Thematik, jedoch eingebettet in die Zielrichtung eines tieferen Verständnisses des Begriffs Dualität in der Funktionalanalysis. In der Arbeit greifen denn auch historische und systematische Behandlung ineinander. Hierbei liegt meines Erachtens eine besondere Stärke der Arbeit bei der Durchdringung der mathematischen Sachverhalte in den untersuchten Quellen und ihrer sehr gelungenen systematischen Einordnung.

Die Funktionalanalysis hat schon vielfach die Aufmerksamkeit der Mathematikhistoriker*innen auf sich gezogen. Auch viele der hier betrachteten Entwicklungen wurden bereits anderweitig untersucht — doch stets unter anderem Blickwinkel.

Das vorliegende Werk stellt eine (überfällige und sehr gelungene) Zusammenschau der wichtigsten Entwicklungsschritte im vorliegenden Kontext dar. Gleichzeitig bietet es aber auch einiges Neue: man findet hier erstmalig Längsschnittstudien nicht nur zu den beiden Schlüsselbegriffen Dualraum und dualer Operator, sondern auch etwa zu Lösbarkeitsbedingungen für lineare Gleichungssysteme oder zum Begriff der Vollstetigkeit. Die historische Bedeutung des Satzes von Hahn-Banach für die Entwicklung von Dualitätskonzepten in der Funktionalanalysis wird sehr klar herausgearbeitet. Die Wahl von Dieudonnés Arbeit von 1942 (in der die beiden untersuchten Entwicklungsstränge aufeinandertreffen) als Schlusspunkt der Darstellung ist sehr plausibel.

Man steht beim Verfassen eines solchen Werkes immer irgendwann vor der Entscheidung, einen Schlussstrich ziehen zu müssen: es gäbe immer noch mehr Material, mehr Entwicklungsstränge etc., die Berücksichtigung finden könnten, die aber im Interesse einer Fertigstellung der Arbeit explizit ausgeblendet und zukünftiger Erforschung vorbehalten werden müssen. Frau Waldvogel spricht (in Abschnitt 9.2) selbst einige Problemkreise kurz an, die in der Arbeit keine eingehende Behandlung finden konnten. Hierdurch weist die Arbeit bereits über sich hinaus und zeigt auf, wie die Erforschung der Geschichte der Funktionalanalysis weitergehen kann. Für eine solche Weiterverfolgung wird die Leserschaft, davon sind wir überzeugt, im vorliegenden Buch eine sehr tragfähige Grundlage und vielerlei Anregung finden.

Ralf Krömer

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zu einem tieferen Verständnis des Begriffs *Dualität* in der Funktionalanalysis leisten. Diesem wollen wir näher kommen, indem wir untersuchen, wie der Begriff in der Funktionalanalysis verwendet wird. Dabei stoßen wir nicht zuletzt auf die beiden Konzepte *dualer Räume* und *dualer Operatoren*. Um eine rein formalistische Bedeutung, die wir mit einem Blick auf den *momentanen* Gebrauch der Begriffe erhalten können, zu überschreiten, wollen wir die historischen Entwicklungen untersuchen, die zu den aktuellen Definitionen geführt haben. Dabei werden wir bedeutsame Ideen und Konstruktionen kennenlernen, die uns einen gehaltvollen Einblick in das Konzept *Dualität* in der Funktionalanalysis ermöglichen.

Duale Räume Was sind duale Räume in der Funktionalanalysis? Zu dieser Frage finden sich mindestens drei Antwortmöglichkeiten: 1) Der exemplarische Weg: Ein Paradebeispiel zweier dualer Räume in der Funktionalanalysis liefern die von Riesz' eingeführten L^p- und $L^{\frac{p}{p-1}}$-Räume. 2) Die aktuell meist verwendete Definition: Der Dualraum X' eines normierten Raums X ist der Raum aller stetigen linearen Funktionale auf X. 3) Die Suche nach der allgemeinsten Form dieses Konzepts: Wie kann man dieses Konzept auf Räume übertragen, die nicht notwendigerweise mit einer Metrik ausgestattet sind?

Die historischen Entwicklungen hinter diesen drei Annäherungsmöglichkeiten an die Bedeutung des Begriffs *dualer Räume* in der Funktionalanalysis sollen Inhalt von Teil I dieser Arbeit sein. Dabei wird Kapitel 1 zeigen, wie es mit dem Satz von Fischer-Riesz (1907) und Schmidts Untersuchungen (1908) zu Riesz' Einführung der L^p- und l^p-Räume in den Jahren 1910 und 1913 kam. In Kapitel 2 wollen wir darstellen, wie unser heutiger Begriff des *Dualraums* eines normierten Raums von Hahn im Jahr 1927 eingeführt wurde. Die wichtigste Grundlage für Hahn war Hellys bedeutsames *Polaritätskonzept* von 1921, das wiederum wichtige Konzepte von Minkowski (1896) enthält. In Kapitel 3 verfolgen wir schließlich Köthes und Toeplitz' Einführung dualer Folgenräume (1934), die nicht notwendigerweise mit einer Metrik ausgestattet zu sein brauchen, sowie Dieudonnés Definition dualer Systeme (1942), bestehend aus beliebigen Vektorräumen.

Duale Operatoren Wie kam es zu unserem heutigen Begriff dualer Operatoren in der Funktionalanalysis? Da dieser Begriff eng mit dem *dualer Gleichungen* verknüpft ist, besteht eine mögliche Vorgehensweise zur Beantwortung der Frage darin, die zugehörige Lösungstheorie zu verfolgen. Dies wollen wir in Teil II dieser Arbeit tun. In Banachs Monografie *Théorie des opérations linéaires* (1932) findet sich eine entsprechende Übersicht, die wir in Kapitel 5 vorstellen. Geht man den darin enthaltenen Verweisen nach, so stößt man zum einen auf die Entwicklung dualer Operatoren zu gewissen *linearen* Operatoren, die sich u.a. in den Arbeiten (Riesz, 1910), (Saks, 1929) und (Banach, 1929b) vollzieht, zum anderen auf die Entwicklung dualer Operatoren zu *kompakten* („vollstetigen") Operatoren, die sich u.a. in den Arbeiten (Fredholm, 1903), (Riesz, 1916), (Hildebrandt, 1928) und (Schauder, 1930c) findet. Diese Entwicklungsstränge wollen wir in den Kapiteln 6 und 7 verfolgen. In Kapitel 8 zeigen wir, wie Dieudonné (1942) duale Operatoren bzgl. allgemeinen Vektorräumen einführt – ausgehend von den allgemeinen Definitionen im normierten Fall bei Banach (1932) und Hausdorff (1932).

Die geometrisierte Analysis Ein Hauptmerkmal der heute als *Funktionalanalysis* bezeichneten mathematischen Disziplin besteht darin, ein geometrisches Vokabular für Funktionen(mengen) zu verwenden. Dies führt uns zu der alternativen Bezeichnung der ‚geometrisierten Analysis', mit der wir in dieser Arbeit auf zwei Dinge hinweisen wollen:

Zum einen besteht ein Zusammenhang zwischen der Entwicklung des Dualitätsbegriffs und der Einführung geometrischer Begriffe in der sich entwickelnden Analysis. So setzt bspw. schon der Begriff des dualen *Raums* eine geometrische Interpretation voraus. Die dazu einschneidendste Entwicklung in den von uns betrachteten Untersuchungen findet sich, neben Riesz' und Fischers „synthetischem" Abstands- bzw. Konvergenzbegriff (siehe Unterkapitel 1.3), bei Schmidt (1908), der eine „Geometrie in einem Functionenraum" einführt (siehe Unterkapitel 1.5). Es stellt sich die Frage, ob sich die Entwicklung des Raumbegriffs und die des Dualitätsbegriffs gegenseitig beeinflussten. Bei der Einführung von Riesz' $[L^p]$-Klassen finden wir hierzu einen möglichen Hinweis (siehe Abschnitt 1.6.c).

Die Bezeichnung ‚geometrisierte Analysis' macht uns außerdem bewusst, dass die Entstehung der Funktionalanalysis ein *Prozess* war: Verschiedene Entwicklungen in bestimmten mathematischen Bereichen haben nach und nach zur Etablierung der Funktionalanalysis als eigenständige mathematische Disziplin geführt. So schreiben bspw. Birkhoff und Kreyszig in *The establishment of functional analysis*:[1]

[1] Siehe auch Kreyszigs Artikel zu den zentralen Ideen in der Funktionalanalysis bis 1932: (Kreyszig, 1986b) und (Kreyszig, 1986a).

> Ihre Anfänge waren eng mit der Variationsrechnung, den Operatormethoden und der Integralgleichungstheorie verbunden. Ihre strenge Entwicklung wurde vor allem durch die Entwicklung der Cantorschen Mengenlehre, der mengentheoretischen Topologie, die präzise Definition der Funktionenräume sowie der axiomatischen Mathematik und der abstrakten Strukturen ermöglicht.
>
> (Birkhoff und Kreyszig, 1984, 258)

Birkhoff und Kreyszig schätzen „ihre Konsolidierung als ein selbständiges Gebiet um etwa 1933“ (Birkhoff und Kreyszig, 1984, 258).[2] Das bedeutet, dass sämtliche der von uns betrachteten Arbeiten zum normierten Fall in einer Zeit verfasst wurden, bei der man rückblickend eigentlich noch gar nicht von einer Funktionalanalysis als eigenständigem Gebiet spricht. Erst die Arbeiten von Köthe, Toeplitz und Dieudonné gehören zu dieser Einordnung. Neben Birkhoffs und Kreyszigs Artikel gibt es viele weitere Untersuchungen zur Geschichte der frühen Funktionalanalysis. So z.B. die Monografien von Monna (1973) und Dieudonné (1981) oder die Artikel von Bernkopf (1966) und Siegmund-Schultze (1982). In dieser Arbeit wollen wir im Gegensatz zu diesen allgemeinen Darstellungen den Fokus auf die historische Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren legen, eingegrenzt auf den Zeitraum von 1903 bis 1942. Wichtige Informationen hierzu finden sich in Pietschs *History of Banach spaces and linear operators* (Pietsch, 2007).[3] Außerdem ist Hellingers und Toeplitz' Enzyklopädieartikel (Hellinger und Toeplitz, 1927) ein interessantes Nachschlagewerk aus der Zeit vieler der hier dargestellten Entwicklungen, das uns in den folgenden Kapiteln gelegentlich begegnen wird.

Zum Aufbau dieser Arbeit Die Kapitel 1, 2 und 3 sind so gestaltet, dass sie unabhängig voneinander gelesen werden können. Jedes dieser Kapitel endet außerdem – ebenso wie die Kapitel 6, 7 und 8 – mit sich anschließenden Bemerkungen, die Überblicke, Zusammenhänge und Interpretationen der vorgestellten Untersuchungen geben. Teil I und Teil II dieser Arbeit enden jeweils mit einem Abschlusskapitel (Kapitel 4 und 9), das eine Übersichtstabelle über die vorangehenden Untersuchungen enthält. Zur besseren Übersicht sind die darin aufgelisteten Stellen in den entsprechenden Kapiteln mit einem Kasten umrahmt: In Teil I sind dies jeweils Ausgangsproblem und Resultat der betrachteten Arbeiten, im zweiten Teil entsprechende Formulierungen dualer Operatoren oder dualer Verhältnisse. Zu einem

[2] Allerdings wird oftmals schon das Jahr 1887 als ‚Geburtsjahr‘ der Funktionalanalysis bezeichnet. In diesem Jahr betrachtete Volterra *Funktionen, die von anderen Funktionen abhängen* (deutsche Übersetzung des Titels von (Volterra, 1887)), d.h. Funktionale.

[3] Pietschs Ziel ist darin hauptsächlich die Darstellung der Entwicklungen der *späteren* Funktionalanalysis. Dennoch finden sich in diesem umfangreichen Werk auch zu unseren Betrachtungen detailreich gesammelte Informationen.

gründlichen Verständnis der hier vorgestellten historischen Entwicklungen gehört natürlich auch das Wissen darüber, wie die jeweiligen Mathematiker[4] zu ihren Konstruktionen gekommen sind: Was führte Riesz zur Definition eines Abstandsbegriffs für Funktionen? Woher hatte Hahn die Idee, einen „polaren Raum“ aus *Funktionalen* einzuführen? Welche Verhältnisse im normierten Fall waren die Basis für Dieudonnés Einführung seiner Begriffe im Fall allgemeiner Vektorräume? Dabei ist neben einem Verweis auf die jeweils zitierten Arbeiten natürlich interessant, wie die Autoren überhaupt auf diese Arbeiten gestoßen sind. Oftmals gibt hier ein Blick in die entsprechenden Lebensumstände Auskunft. Daher finden sich vor den Untersuchungen der entsprechenden Arbeiten jeweils kurze Abschnitte zu den auftretenden Protagonisten.[5] Schließlich sei noch bemerkt, dass die auftretenden Gleichungsnummern bis auf wenige offensichtliche Ausnahmen den Originalnummern aus den jeweiligen Zitaten entsprechen und dass eine Jahreszahl in Klammern bis auf wenige offensichtliche Ausnahmen immer einen zugehörigen Literaturverweis darstellt.

Abbildungen Die 14 Portraitskizzen stammen von Xavier Coley.

Danksagung Ganz herzlich danken möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Ralf Krömer, der mir meine Promotionsstelle ermöglicht hat. Stets unterstützend und wohlwollend hat er viele Stunden seiner Zeit der sorgfältigen und kritischen Lektüre meiner Texte gewidmet. Ich danke ihm für viele angenehme konstruktive Gespräche mit zahlreichen Anstößen. Weiter danke ich Prof. Dr. Gregor Nickel, der mir durch einen dreimonatigen Aufenthalt an der Universität Siegen einen ersten Blick in die Richtung eines Promotionsvorhabens geboten hat. Außerdem danke ich den Mitgliedern unseres Dualitätsprojekts – es sei auf (Etwein et al., 2019) und (Krömer et al., 2022) verwiesen – und meinen Kolleginnen und Kollegen in Wuppertal und Siegen für Anstöße und eine stets nette Arbeitsatmosphäre. Ein besonderer Dank geht an die Schulleitung der Gewerblichen Schule Schwäbisch Hall, die mich von Anfang an bei meinem Promotionsvorhaben unterstützt hat. Ich danke Xavier Coley für das Gestalten der Portraitskizzen, sowie Elisabeth Waldvogel, Joachim Härtig und Simone Wein für nützliche Anmerkungen. Zu guter Letzt danke ich meinem Mann Max Waldvogel für seinen unentwegten und liebevollen Beistand, mit dem ich den Abschluss dieser Dissertation in Angriff nehmen konnte, und Frieda für die entbehrte gemeinsame Zeit.

[4] Tatsächlich sind alle hier betrachteten Autoren männlich.

[5] Für Minkowski, Hausdorff, Riesz und Hildebrandt finden sich in der Arbeit (Rodríguez Hernández, 2006) weitere biographische Informationen.

Teil I

Duale Räume

1 Riesz' Einführung der L^p-Räume

1.1 Einleitung

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie es zu Riesz' Einführung der $L^p(a, b)$- und l^p-Räume kam. Dabei wird sich zeigen, dass sich der Weg dorthin in drei Etappen einteilen lässt:

1) Satz von Fischer-Riesz (1907),

2) Schmidts Resultat in (Schmidt, 1908),

3) Riesz' Arbeiten (Riesz, 1910) und (Riesz, 1913).

Zu diesen Entwicklungsschritten gibt es neben den allgemeinen Darstellungen zur Geschichte der frühen Funktionalanalysis (siehe Vorwort) zahlreiche speziellere Untersuchungen. Wir greifen hier Horváths Beitrag *On the Riesz-Fischer theorem* (Horváth, 2004), Pietschs Arbeit *Erhard Schmidt and his contributions to functional analysis* (Pietsch, 2009) sowie Kreyszigs Artikel *Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis* (Kreyszig, 1990) heraus. Zu Riesz' wichtigstem Werkzeug in (Riesz, 1910) siehe außerdem Hawkins' Arbeit *Lebesgue's theory of integration: its origins and development* (Hawkins, 1970). Wie bereits erwähnt, wollen wir uns in den Darstellungen in diesem Kapitel auf den Aspekt der Dualität konzentrieren. Dieser wird sich schon jeweils im Ausgangsproblem der entsprechenden Arbeiten andeuten: In jeder der drei Etappen war ein lineares Gleichungssystem der Ausgangspunkt, im Fall von (Riesz, 1910) bestehend aus Integralgleichungen, in den anderen Fällen aus Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Jedes dieser Gleichungssysteme stimmt dabei in seiner Form mit den anderen überein. Im endlichdimensionalen Fall finden wir diese Form in folgender Gleichung:

$$Ax = c.$$

Dabei sind die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und die rechte Seite $c \in \mathbb{K}^m$ gegeben, $x \in \mathbb{K}^n$ wird gesucht. Schreiben wir diese Gleichung als das folgende Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

so können wir die linke Seite als *Paarung* zweier Elementarten betrachten: zum einen aus den gegebenen Koeffizientenvektoren $\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$, zum anderen aus dem gesuchten Lösungsvektor x. Wir werden sehen, dass diese beiden Elementarten aus zwei ‚zugeordneten' Räumen stammen müssen, um eine Lösbarkeitsbedingung für das Gleichungssystem zu erhalten. Die Beziehung dieser beiden Räume kann man dabei als *dual* bezeichnen. Im endlichdimensionalen Fall sowie im Fall von Schmidt und dem Satz von Fischer-Riesz sind die beiden entsprechenden Räume identisch, womit kein Grund besteht, solch eine Beziehung zu formulieren. In Riesz' Fall von 1910 unterscheiden sich diese Räume erstmals und Riesz beschreibt ihre Beziehung sehr klar und explizit, jedoch ohne sie als ‚dual' zu bezeichnen. Dieselbe Beziehung finden wir dann wieder in (Riesz, 1913). Hier untersucht Riesz die Folgenräume l^p und erhält analoge Resultate zum Fall der Funktionenräume $L^p(a, b)$ in (Riesz, 1910). Diese Resultate bilden den Ausgangspunkt für Hellys Untersuchungen von *allgemeinen* normierten Folgenräumen in (Helly, 1921). Hellys Konstruktionen bilden wiederum die Grundlage für Hahns Einführung des polaren Raums, der unserer heutigen Definition des Dualraums eines normierten Raums in der Funktionalanalysis entspricht. Hellys und Hahns Untersuchungen werden wir in Kapitel 2 verfolgen.

1.2 Frigyes Riesz (1880-1956)

> Ohne Zweifel gehört Friedrich Riesz zusammen mit Fréchet, Hilbert und Banach zu den Hauptbegründern und Führern während der ersten Jahrzehnte der Entwicklung der Funktionalanalysis.
>
> (Kreyszig, 1990, 117)

Frigyes Riesz wurde am 22. Januar 1880 in Győr bei Budapest geboren.[6] Sein Bruder Marcel folgte sechs Jahre später. Im Jahr des Ersten Internationalen Mathematikerkongresses in Zürich (1897) begann Riesz ein Ingenieurstudium am Eidgenössischen Polytechnikum, der heutigen ETH, wechselte jedoch bald zum Mathematikstudium, zunächst noch in Zürich, dann in Budapest, wo er 1902 unter G. Vályi den Doktorgrad erwarb. Im Gegensatz zu Lebesgues berühmter Dissertation (Lebesgue, 1902), die im selben Jahr erschien und die den Ausgangspunkt für die Einführung des Lebesgue-Integrals bildete – Riesz' Werkzeug in (Riesz, 1910) (siehe Abschnitt 1.6.a) –, blieb Riesz' Dissertation aus dem Bereich der projektiven Geometrie weitgehend unbeachtet. Bald darauf wandte sich Riesz funktionalanalytischen Problemen zu, wozu sicherlich sein einjähriger Aufenthalt in Göttingen vor dem Abschluss seiner Promotion beitrug. Dabei entwickelte sich ein enger Kontakt zu Hilbert und später auch zu Schmidt und Weyl, woraus Freundschaften hervorgingen. Somit ist es nicht überraschend, dass, wie wir gleich sehen werden, Riesz

[6] Diese biographische Skizze basiert auf Kreyszigs Artikel *Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis* (Kreyszig, 1990), für den Kreyszig einige Anregungen von F. Riesz' Bruder M. Riesz sowie von T. Radó erhalten hat.

und Schmidt gut über die Arbeiten des jeweils anderen Bescheid wussten. 1904 begann Riesz als Oberlehrer zu arbeiten, zunächst in Leutschau, dann in Budapest. Während dieser Zeit entstanden sämtliche der Riezschen Arbeiten, die wir in diesem Kapitel betrachten. Im Alter von 32 Jahren erhielt Riesz einen Ruf nach Klausenburg, wo er 1914 zum Ordinarius ernannt wurde. Im Jahr 1918, als Klausenburg zu Rumänien geschlagen wurde, arbeitete Riesz wieder für zwei Jahre in Budapest, bis er 1920 damit beginnen konnte, zusammen mit A. Haar, Riesz' Kollege aus der Zeit in Klausenburg, das Mathematische Institut der neuen Universität Szeged aufzubauen. 1946 erhielt er schließlich einen Ruf zurück nach Budapest, wo er die letzten zehn Jahre seines Lebens verbrachte und am 28. Februar 1956 verstarb.

1.3 Der Satz von Fischer-Riesz (1907)

1.3.a Ein Abstandsbegriff für Funktionen

In Riesz' Artikel *Sur les ensembles de fonctions* aus den *Comptes rendus* vom 12. November 1906 (Riesz, 1906) finden wir einen ersten, kleinen Schritt, der zur späteren Konstruktion der L^p-Räume führte. Riesz übernimmt in diesem Beitrag die Fréchetsche Idee aus (Fréchet, 1906), Methoden für Punktmengen auf allgemeinere Mengen zu übertragen – insbesondere auf Mengen aus Funktionen. Als Anwendung dieses Konzepts führt Riesz einen Abstandsbegriff für Funktionen ein, welche beschränkt und Lebesgue-integrierbar sind:[7]

> En fait, si l'on regarde comme identiques deux fonctions dont la difference est une fonction de l'intégrale nulle, on peut définir pour les fonctions intégrables une notion de distance, généralisation de la même notion pour les ensembles de points et qui jouira des propriétés analogues à celles de l'écart. On appellera distance $d(f_1, f_2)$ des fonctions f_1 et f_2 la valeur absolue de $\sqrt{\int (f_1 - f_2)^2}$, l'intégrale étant prise sur tout l'ensemble parfait. On n'aura $d(f_1, f_2) = 0$ que si la différence $f_1 - f_2$ est une fonction de l'intégrale nulle; et comme on le prouve aisément, pour trois fonctions quelconques f_1, f_2, f_3 on a $d(f_1, f_2) \leq d(f_1, f_3) + d(f_2, f_3)$. Je me bornerai à l'ensemble des fonctions bornées et intégrables au sens de M. Lebesgue, définies sur l'intervalle 0...2π. (Riesz, 1906, 740)

[7] Im Originalzitat steht $d(f_1, f_2) = d(f_1, f_3) + d(f_2, f_3)$ statt $d(f_1, f_2) \leq d(f_1, f_3) + d(f_2, f_3)$. Aus dem Kontext ergibt sich, dass die Ungleichung gemeint ist.

Diese Äquivalenzklassen aus Funktionen werden also als Punkte betrachtet – mit einem analogen Abstandskonzept. Rückblickend wird dies oft als die Einführung der L^2-Norm bezeichnet. Riesz verwendet diese Definition, um Schmidts Satz in (Schmidt, 1905) über die Abzählbarkeit vollständiger Orthogonalsysteme aus auf einer perfekten Menge definierten, stetigen Funktionen zu verallgemeinern. Dabei formuliert er für die Orthogonalität zweier Funktionen: „On dit que les fonctions f_1, f_2 de l'ensemble sont *orthogonales* si l'integrale définie de leur produit pris sur l'ensemble parfait est nulle.“ (Riesz, 1906, 739), d.h.[8]

$$\int f_1(x) f_2(x)\, dx = 0.$$

Durch die Verbindung der Gedanken von Schmidt, Lebesgue und Fréchet, von dem auch die Bezeichnung „écart“ stammt (Fréchet, 1906, 30), ist Riesz somit auf eine für die späteren Entwicklungen sehr wichtige Idee gestoßen: eine Norm für Funktionen.

1.3.b Ein Isomorphismus zwischen Funktionen- und Folgenraum

Nur ein paar Monate später, im März 1907, erschien der nächste kleine Schritt in Richtung L^p-Räume: Auf deutsch und auf französisch stellt sich Riesz in seinem Artikel *Über orthogonale Funktionensysteme* in den *Göttinger Nachrichten* (Riesz, 1907d) und in der französischen Version *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* in den *Comptes rendus* (Riesz, 1907a) die folgende Frage:

Riesz' Ausgangsproblem von 1907

> Man ordne jeder Funktion eines orthogonalen Funktionensystems eine bestimmte reelle Zahl zu. Unter welchen Bedingungen gibt es dann eine Funktion von der Beschaffenheit, daß für jede Funktion des orthogonalen Systems das Integral des Produktes dieser Funktion und der in Frage stehenden Funktion, erstreckt über den Definitionsbereich des orthogonalen Systems, die zugeordnete Zahl ergebe? (Riesz, 1907d, 116)

[8] auf der zugehörigen perfekten Menge

Mit anderen Worten: Unter welchen Bedingungen existiert eine Funktion $f(x)$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = a_i \qquad (i = 1, 2, ...),$$

wobei $\{\varphi_i(x)\}$ ein Orthogonalsystem bildet und die a_i gegebene Konstanten sind? Wie Riesz erklärt, geht die Motivation dazu aus Hilberts Methode zur Lösung linearer Integralgleichungen hervor. Dies sei kurz erläutert: In seiner fünften Mitteilung (Hilbert, 1906a) ‚übersetzt' Hilbert die folgende Integralgleichung zweiter Art, wie sie von Fredholm (1903) eingeführt wurde:

$$\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\varphi(s)\,dt = f(s)$$

in ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Unbekannten. Die rechte Seite wird mittels

$$a_p = \int_a^b f(s)\phi_p(s)\,ds$$

in eine unendliche Folge transformiert und der Integralkern $K(s,t)$ entsprechend in eine unendliche Matrix, wobei $\{\phi_p(s)\}$ ein „orthogonales vollständiges Funktionensystem"[9] (Hilbert, 1906a, 443) ist. Die a_p sind damit Koeffizienten „analog den

[9] Für eine ausführlichere Erläuterung des folgenden Hilbertschen Zitats siehe z.B. (Dorier, 1996, 281f).

> Als Bindeglied und zur Vermittlung zwischen der Theorie der Funktionen und Gleichungen mit *unendlich vielen Variablen*, wie ich sie in meiner vierten Mitteilung entwickelt habe, und andererseits der Theorie der Integralgleichungen, die doch Relationen für Funktionen einer Variablen s ausdrücken, bedarf es irgend eines Systems von *unendlich vielen stetigen Funktionen*
>
> $$\Phi_1(s), \Phi_2(s), ...$$
>
> *der Variablen* s, die im Intervalle $s = a$ bis $s = b$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:
>
> I. die sogenannte Orthogonalitäts-Eigenschaft:
>
> $$\int_a^b \Phi_p(s)\Phi_q(s)\,ds = 0, \qquad (p \neq q)$$
>
> $$\int_a^b (\Phi_p(s))^2\,ds = 1;$$
>
> II. die Vollständigkeits-Relation, die darin besteht, daß identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s), v(s)$ der Variablen s
>
> $$\int_a^b u(s)v(s)\,ds =$$
>
> $$\int_a^b u(s)\Phi_1(s)\,ds \int_a^b v(s)\Phi_1(s)\,ds + \int_a^b u(s)\Phi_2(s)\,ds \int_a^b v(s)\Phi_2(s)\,ds + ...$$
>
> wird.

Fourierschen Koeffizienten“ (Riesz, 1907d, 116). Riesz untersucht in seinem Artikel nun die ‚Umkehrung‘ dieser Transformation: Anstatt zu einer vorgegebenen Funktion die zugehörigen Fourier-Koeffizienten zu bilden, seien die a_p vorgegeben und die zugehörige Funktion $f(x)$ wird gesucht. Riesz beantwortet seine Frage für eine „ausgedehnte Klasse von Funktionen [...], die Funktionen, die samt ihren Quadraten im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind“ (Riesz, 1907d, 117):

Riesz' Resultat von 1907

> Hauptsatz: *Es sei $\{\varphi_i(x)\}$ ein normiertes Orthogonalsystem integrierbarer Funktionen von integrierbarem Quadrate, die für ein Intervall ab definiert sind; d.h. ein System, für welches*
>
> $$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \ \ (i \neq j) \ \textit{und} \ \int_a^b (\varphi_i(x))^2\,dx = c^2$$
>
> *und zwar für jede Funktion des Systems. Ordnen wir jeder Funktion des Systems eine Zahl a_i zu. Dann ist die Konvergenz von $\sum_i a_i^2$ eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, damit es eine integrierbare Funktion $f(x)$ von integrierbarem Quadrate gebe, so daß*
>
> $$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = a_i$$
>
> *sei für jede Funktion $\varphi_i(x)$ und jede Zahl a_i.* (Riesz, 1907d, 117)

Modern gesprochen ist damit die Isomorphie des Funktionenraums $L^2(a,b)$ und des Folgenraums l^2 gezeigt:

$$L^2(a,b) \cong l^2.$$

Heute nennen wir dieses Resultat den *Satz von Fischer-Riesz.* Fischer (1907b) zeigte gleichzeitig und unabhängig von Riesz eine äquivalente Form des Satzes: die Vollständigkeit von $L^2(a,b)$. Dazu führte Fischer das Konzept der „convergence en moyenne“ (Fischer, 1907b, 1023) ein – d.h. Konvergenz bzgl. der L^2-Norm. Riesz' gezeigte Isomorphie kommt in seinem nächsten Beitrag sogleich zur Anwendung.

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ als ein *orthogonales vollständiges Funktionensystem* für das Intervall $s = a$ bis $s = b$.
(Hilbert, 1906a, 442f)

1.3.c Analytische Geometrie für ein Funktionensystem

Weitere drei Monate später, im Juni 1907, reichte Riesz seinen Artikel *Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables* (Riesz, 1907c) ein. Dem Titel entsprechend setzt sich Riesz darin das folgende Ziel: „Approfondir la méthode des coordonnées appliquée à l'étude des systèmes de fonctions sommables“ (Riesz, 1907c, 1409). Durch die gezeigte Isomorphie $L^2(a,b) \cong l^2$ ergibt sich für Riesz die Möglichkeit, für die Menge der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen eine analytische Geometrie einzuführen. Diese Funktionen können mithilfe ihrer Fourierkoeffizienten dargestellt werden. Somit kann man vom *Funktionen*raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen in den *Folgen*raum l^2 übergehen, in dem man im Gegensatz zu ersterem Punktkoordinaten zur Verfügung hat und damit Konzepte der analytischen Geometrie anwenden kann. Darüber hinaus erklärt Riesz, dass es für den Funktionenraum $L^2(a,b)$, ohne diesen jedoch als solchen zu bezeichnen, nicht nur die Möglichkeit einer *analytischen* Geometrie gibt, sondern auch die einer *synthetischen*: „une théorie géométrique des systèmes de fonctions, une théorie qui ressemble à la géométrie synthétique“ (Riesz, 1907c, 1409). Eine ‚synthetische‘ Geometrie bedeutet dabei die direkte Einführung geometrischer Begriffe für Funktionen, d.h. ohne den Umweg über den Folgenraum l^2 zu machen. Riesz verweist hierbei auf seine eigene synthetische Abstandsdefinition für quadratisch Lebesgue-integrierbare Funktionen in seinem vorigen Artikel sowie auf Fischers synthetisch eingeführtes Konzept der „convergence en moyenne“. Dieser „parallélisme“ (Riesz, 1907c, 1410) zwischen den beiden geometrischen Theorien, analytisch und synthetisch, ist ein Merkmal des Exponenten $p = 2$. Es wird sich zeigen, dass bei der Untersuchung der allgemeinen $L^p(a,b)$-Räume, wo mit Ausnahme von $p = 2$ keine Isomorphie zu den entsprechenden Folgenräumen besteht, „die Übersetzbarkeit der Resultate, wie für $p = 2$, und damit die Möglichkeit einer ähnlich einfachen analytischen Theorie [...] in allen übrigen Fällen verloren [geht]; und somit [...] die synthetische Behandlungsweise in ihre vollen Rechte [tritt].“ (Riesz, 1910, 452f)

1.3.d Der Rieszsche Darstellungssatz

Noch im selben Artikel finden wir Riesz' erste Anwendung dieser Überlegungen: den – wie wir ihn heute nennen – *Rieszschen Darstellungssatz* für stetige lineare Funktionale auf dem Funktionenraum $L^2(a,b)$. Nach einem Verweis auf Fréchet,[10]

[10]Riesz verweist außerdem auf den Darstellungssatz von Hadamard (1903) für stetige lineare Funktionale auf dem Raum aller auf einem beschränkten Intervall definierten, stetigen Funktionen. Im Gegensatz zu Hadamard verwendet Riesz hier allerdings nicht den Begriff

der gleichzeitig und unabhängig von Riesz in (Fréchet, 1907) dasselbe Resultat gezeigt hat, sodass wir heute auch vom *Darstellungssatz von Fréchet-Riesz* sprechen, schreibt Riesz:

> Pour l'ensemble des fonctions sommables, de carré sommable, j'appelle opération continue chaque opération faisant correspondre à toute fonction f de l'ensemble un nombre $U(f)$ et telle que, quand f_n converge en moyenne vers f, $U(f_n)$ converge vers $U(f)$. L'opération est dite linéaire si $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$ et $U(cf) = cU(f)$. Alors pour chaque opération linéaire continue il existe une fonction k telle que la valeur de l'opération pour une fonction quelconque f est donnée par l'intégrale du produit des fonctions f et k. (Riesz, 1907c, 1410)

Riesz zeigt also, dass alle stetigen linearen Funktionale auf $L^2(a, b)$ in der Form

$$\int_a^b \cdot k \, dx, \qquad k \in L^2(a, b)$$

dargestellt werden können. Heute formulieren wir dies, indem wir sagen, dass der *Dualraum* von $L^2(a, b)$, bestehend aus allen stetigen linearen Funktionalen auf $L^2(a, b)$, isomorph zu $L^2(a, b)$ ist, bzw. dass $L^2(a, b)$ ‚selbstdual' ist. Riesz spricht allerdings nicht von einem ‚Dualraum' und auch nicht von einem ‚Raum' aus Funktionen.

1.3.e Vollständigkeit der $L^p(a, b)$-Räume

In Riesz' Artikel *Sur les suites de fonctions mesurables* (Riesz, 1909) finden wir noch vor der Einführung seiner $[L^p]$-Klassen den Satz, dass – wie wir heute sagen würden – die $L^p(a, b)$-Räume für jedes $p > 0$ bzgl. der jeweiligen L^p-Norm vollständig sind.[11] Wieder formuliert Riesz dies, ohne von einem ‚Funktionenraum' oder einer ‚Norm' zu sprechen. Er schreibt:[12]

> En appliquant notre critère de convergence (en mesure), on en déduira le théorème très général: *Soit p un nombre positif quelconque et soit $[f_n(x)]$ une suite de fonctions mesurables telles que les intégrales*
>
> $$I_{i,k} = \int_\varepsilon |f_i(x) - f_k(x)|^p \, dx$$

„fonctionnelle".

[11] Fischer zeigte dies schon zuvor für $p = 2$ (Fischer, 1907b).

[12] Zur Notation „$\int_\varepsilon \ldots dx$" siehe (Riesz, 1909, 1303).

existent et que

$$\lim_{i=\infty,\, k=\infty} I_{i,k} = 0;$$

alors il existe toujours une fonction mesurable $f(x)$ telle que

$$\lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon} |f(x) - f_n(x)|^p \, dx = 0.$$

> Ce théorème contient en cas particulier un théorème fondamental énoncé par M. E. Fischer, lié d'autre part intimement à bien des résultats, trouvés par l'auteur, concernant les systèmes de fonctions orthogonales.
> (Riesz, 1909, 1305)

Riesz arbeitete also schon mit den L^p-Normen bevor er die $[L^p]$-Klassen einführte und stellte deren Vollständigkeit fest. Offensichtlich bestand für ihn bisher kein Grund, die $L^p(a, b)$-Räume explizit einzuführen. Dies änderte sich in der folgenden Arbeit (Riesz, 1910). Darin untersucht Riesz ein System aus linearen Integralgleichungen, welche L^p-Funktionen enthalten. Dieses ähnelt dem System aus seiner Version des Satzes von Fischer-Riesz, ist jedoch viel allgemeiner. Eine diskrete Version dieses Problems finden wir bei Schmidt (1908).

1.4 Erhard Schmidt (1876-1959)

Oswald Johannes Erhard Schmidt wurde am 13. Januar 1876 in Dorpat, heutiges Tartu (Estland), geboren.[13] Dort begann er 1893 u.a bei A. Kneser sein Mathematikstudium, das er 1899 bis 1901 in Berlin fortsetzte. In Berlin wurde er wesentlich von H. Schwarz geprägt. Anschließend ging er nach Göttingen, wo er 1905 bei Hilbert promovierte (Schmidt, 1905). Schon ein Jahr später folgte seine Habilitation an der Universität Bonn bei E. Study. Wie wir sehen werden, verwendet Schmidt bei der Einführung seiner „Geometrie in einem Functionenraum“ in (Schmidt, 1908) Ideen von Study (siehe Abschnitt 1.5.b). 1907 veröffentlichte Schmidt einen zweiteiligen Artikel (Schmidt, 1907b,a) über Integralgleichungen, in dem er die Resultate von Hilberts Theorie auf einfachere und zum Teil voraussetzungsärmere Weise beweist. Pietsch hebt neben dieser Leistung im Bereich der Hilbertraum-Theorie auch Schmidts Unterstützung von Kollegen hervor:

> Each of his papers contains essential ideas that have influenced our mathematical understanding significantly. [...] Around 1905/07, he wrote a series of famous papers on *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Therefore, together with D. Hilbert (1862-1943), F. Riesz (1880-1956), J. von Neumann (1903-1957), and M. H. Stone (1903-1989), he became one of the founders of Hilbert space theory. [...] As shown by the following examples, Schmidt was very generous in providing his colleagues with new ideas.
>
> (Pietsch, 2009, 7f)

Pietsch verweist beispielhaft auf Zermelo und von Neumann (zu letzterem siehe Abschnitt 9.2.b). 1907 reichte Schmidt außerdem seine Arbeit *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* (Schmidt, 1908) ein, mit der er wesentlich zur ‚Geometrisierung‘ der Analysis und damit zur Entstehung der Funktionalanalysis beitrug. Bernkopf schreibt:

> Although his paper (Schmidt, 1908) is in one sense a definitive work on the subject, its chief importance was the explicit development of the concept of a Hilbert space and also the geometry of such space ideas that were only latent in Hilbert's own work. [...] Schmidt's work on Hilbert space represents a long step toward modern mathematics. He was one of the earliest mathematicians to demonstrate that the ordinary experience of Euclidean concepts can be extended meaningfully beyond geometry into the idealized constructions of more complex abstract mathematics. (Bernkopf, 1975)

[13]Die folgenden Informationen stammen aus (Pietsch, 2009) und (Bernkopf, 1975).

Im Jahr der Veröffentlichung dieser Schmidtschen Arbeit, die wir im folgenden Unterkapitel untersuchen wollen, wurde Schmidt in Zürich zum Ordinarius ernannt. Nach Professuren in Erlangen (1910-1911) und Breslau (1911-1917) wurde er an der Friedrich-Wilhelms Universität in Berlin, der heutigen Humboldt Universität, Nachfolger von Schwarz, wo er 1929/30 das Amt des Rektors innehatte und bis zur Emeritierung 1950 verweilte. Am 6. Dezember 1959 verstarb Schmidt im Alter von 83 Jahren.

1.5 Schmidts Ergebnisse (1908)

1.5.a Ausgangspunkt: Folgenraum l^2

Schmidts Artikel *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* (Schmidt, 1908) beginnt mit der Formulierung des Ausgangsproblems:

Schmidts Ausgangsproblem von 1908

Es seien gegeben die Gleichungen

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n \qquad (n = 1, 2, .., \text{ad inf.}).$$

I. Es mögen nur solche Lösungen in Betracht gezogen werden, für welche

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} |Z_m|^2$$

convergiert.

II. Es sei in jeder einzelnen Gleichung die Quadratsumme der absoluten Beträge der Coefficienten convergent. (Schmidt, 1908, 53)

Modern gesprochen wird also gefordert, dass sowohl die gesuchten Lösungen als auch die vorgegebenen Koeffizientenfolgen Elemente des Folgenraums l^2 sind. Hierbei verweist Schmidt auf Hilbert (1906b) und Toeplitz (1907), die die von Hill, Poincaré, von Koch und anderen begonnene Theorie linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten fortgesetzt haben. Hilbert und Toeplitz forderten neben den obigen beiden Bedingungen noch eine dritte:

> III. Hilbert und Toeplitz fügen noch die Voraussetzung hinzu, dass das Coefficientensystem der Gleichungen das einer beschränkten quadratischen Form sei; d.h. dass es eine positive Größe M giebt, so dass für jedes n
>
> $$\left|\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_iy_k\right| < M$$
>
> bleibt für alle x_i, y_k für welche
>
> $$\sum_{i=1}^{i=n}|x_i|^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{k=n}|y_k|^2 = 1$$
>
> ist. (Schmidt, 1908, 53)

Schmidts Ziel ist es nun, eine notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung für das obige lineare Gleichungssystem ohne die zusätzliche dritte Voraussetzung zu finden. Dazu entwickelt er eine

1.5.b Geometrie in einem Functionenraum

(Titel von Schmidts erstem Kapitel). Mit der Idee, für einen „Functionenraum“ eine Geometrie einzuführen, macht Schmidt nach Hilberts *analytischer* Vorgehensweise zur Lösung unendlichdimensionaler linearer Gleichungssysteme einen großen Schritt in Richtung *Geometrisierung* der Analysis für Funktionen, d.h. in die Richtung der heutigen Funktionalanalysis. Schmidts „Functionenraum“ ist der Folgenraum l^2. Für den Funktionenraum $L^2(a,b)$ haben wir schon geometrische Begrifflichkeiten kennengelernt: Riesz’ Einführung seines Abstandsbegriffes (siehe Abschnitt 1.3.a) und Fischers Definition der „convergence en moyenne“ (siehe Abschnitt 1.3.b). Schmidt verweist auf diese Ansätze:

> Vergl. zu diesem Kapitel die analogen Begriffsbildungen in der Thèse von Fréchet (1906) und in den Noten von Riesz (1906, 1907a,b,c) und insbesondere die Noten von E. Fischer (1907b,a), die unter Zugrundelegung eines anderen Funktionenraumes[14] eine mit den Entwicklungen dieses Kapitels voellig analoge Theorie enthalten.
> (Schmidt, 1908, 56, Fußnote)

[14]Tatsächlich heißt es in der Überschrift von Schmidts Kapitel „Functionenraum“ und hier „Funktionenraum“.

In einer weiteren Fußnote verweist Schmidt auf den Ursprung seiner geometrischen Konzepte:

> Die geometrische Deutung der in diesem Kapitel entwickelten Begriffe und Theoreme verdanke ich Kowalewski. Sie tritt noch klarer hervor, wenn $A(x)$ statt als Funktion als Vector in einem Raume von unendlich vielen Dimensionen definiert wird. Die zugrunde gelegte Definition der Länge $\|A\|$ und der Orthogonalität sind die von Study (1905, 372) in die Geometrie eingeführten. (Schmidt, 1908, 56, Fußnote)

Schmidt führt die „Größe $\|A\|$" (l^2-Norm) sowie den zugehörigen Begriff der „starken Convergenz" (Normkonvergenz) ein. Außerdem verallgemeinert er entsprechend den „pythagoräischen Lehrsatz und die Besselsche Ungleichung" und überträgt[15] sein in seiner Dissertation vorgestelltes „Orthogonalisierungsverfahren" für den Raum $C(a, b)$ auf den Folgenraum l^2. Weiter führt Schmidt das „lineare Funktionengebilde" und die „Perpendikelfunktion" (orthogonale Projektion) ein.

1.5.c Schmidts Auflösungsmethode

In Schmidts zweitem Kapitel kommt das geschaffene geometrische Konzept zur Anwendung. Zunächst werden homogene Gleichungssysteme untersucht, dann folgen drei „Auflösungsmethoden der inhomogenen Gleichungen". Die dritte lautet:

Schmidts Resultat von 1908

> Durch das [...] angegebene Verfahren erhält man eine mit der Reihe $A_1(x), A_2(x), ...$ ad inf. linear aequivalente Reihe zueinander orthogonaler und normierter Funktionen $B_1(x), B_2(x), ...$ ad inf.
>
> Und zwar wird wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit jedes endlichen Systems in der Reihe $A_1(x), A_2(x), ...$ ad inf. die

[15] Schmidt schreibt zur Anwendung seines Orthogonalisierungsverfahrens:

> Durch eine Anwendung der in meiner Dissertation auseinandergesetzten Methoden (Schmidt, 1905, letztes Kapitel), welche ihre volle Gültigkeit behalten, wenn statt des Bereiches der stetigen Funktionen der Bereich der unendlichen Zahlenreihen von convergenter Quadratsumme der absoluten Beträge zu Grunde gelegt wird, gelingt es in der vorliegenden Untersuchung, *nur unter den Voraussetzungen I und II die notwendigen und hinreichenden Kriterien für die Lösbarkeit unserer Gleichungen herzuleiten* [...]. (Schmidt, 1908, 55)

> lineare Aequivalenz unserer beiden Funktionenreihen durch Gleichungen der Form
>
> $$B_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_{n\nu} A_\nu(x)$$
>
> gegeben, wo die Coefficienten [...] sich bestimmen lassen und sämtliche $\gamma_{n\nu}$ von Null verschieden sind. [...]
>
> *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit unserer Gleichungen [$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n$, A.W.] besteht nun in der Convergenz der quadratischen Form*
>
> $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \Big| \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \overline{\gamma_{n\nu}} c_\nu \Big|^2.$$
>
> (Schmidt, 1908, 73)

Dazu drei Bemerkungen: Bei dem „angegebenen Verfahren“ handelt es sich um Schmidts Orthogonalisierungsverfahren. Die „Reihe $A_1(x), A_2(x), ...$ ad inf.“ besteht aus den Folgen $(\overline{a_{1m}})_m, (\overline{a_{2m}})_m, ...$ Die „Coefficienten $\gamma_{n\nu}$“ lassen sich anhand des Orthogonalisierungsverfahrens bestimmen.

Man beachte die Ähnlichkeit zwischen Schmidts Resultat und Riesz’ Version des Satzes von Fischer-Riesz: quadratische Konvergenz der rechten Seiten. In beiden Fällen bilden die Koeffizienten ein Orthogonalsystem, bei Schmidt nach entsprechender Transformation. Um die beiden Resultate mit denen in (Riesz, 1910) und (Riesz, 1913) zu vergleichen, wo die Koeffizienten kein Orthogonalsystem bilden, betrachten wir eine äquivalente Formulierung von Schmidts Resultat. Diese stammt von Köthe:[16]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i,\ i = 1, 2, ... \tag{1}$$

> [...] Ist $\mathfrak{A}$ eine Matrix, die auf alle Stellen $\mathfrak{x}$ des Hilbertschen Raumes anwendbar ist in dem Sinn, daß die Summen (1) stets konvergieren, so ist für die Lösbarkeit von (1) notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl $m > 0$, so daß für alle komplexen $u_1, u_2, ..., u_n$
>
> $$\Big|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i\Big| \leq m \Big|\sum_{i=1}^{n} u_i \mathfrak{a}_i\Big| \tag{2}$$

[16] Köthe verwendet das Wort „Stelle“ für eine Folge.

> gilt. Dabei ist $\mathfrak{a}_i$ die i-te Zeile von $\mathfrak{A}$ und die Absolutstriche auf der rechten Seite bedeuten den absoluten Betrag in der Metrik des Hilbertschen Raumes. (Köthe, 1938, 193f)

In Abschnitt 1.7.a zeigen wir, wie sich diese Lösbarkeitsbedingung ausgehend vom endlichdimensionalen Fall entwickelt hat.

1.6 Die Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ (1910)

Dieudonné beschreibt Riesz' *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* aus dem Jahr 1910 (Riesz, 1910) als „fundamental paper, second only in importance for the development of Functional Analysis to Hilbert's 1906 paper“ (Dieudonné, 1981, 124). Dabei ist Riesz' Artikel insbesondere für die Entwicklung des Dualitätskonzepts in der Funktionalanalysis von großer Bedeutung. Zum einen liefert er ein oder sogar das Paradebeispiel zweier dualer Räume in der Funktionalanalysis, zum anderen ist er der Ausgangspunkt für Hellys Polaritätskonzept, welches wiederum Hahn zur Einführung des „polaren Raums“ führt (siehe Kapitel 2). Um Riesz' Untersuchungen übersichtlich darzustellen, verwenden wir seine sehr verständlich formulierte Einleitung als roten Faden. Riesz beginnt mit der Formulierung des Ausgangsproblems:

Riesz' Ausgangsproblem von 1910

> Im Mittelpunkte der vorliegenden Untersuchungen steht die Frage nach der Auflösbarkeit eines Systems von Funktionalgleichungen der Form
> $$\int_a^b f(x)\xi(x)\,dx = c$$
> nach der unbekannten Funktion $\xi(x)$. (Riesz, 1910, 449)

Die gegebene Funktion $f(x)$ und die rechte Seite c sind dabei als $f_i(x)$ und c_i zu verstehen, sodass hier ein Integralgleichungs*system* vorliegt. Im Gegensatz zu Riesz' früherem Problem in (Riesz, 1907d) wird nicht gefordert, dass die $f_i(x)$ ein Orthogonalsystem bilden.

1.6.a Das Lebesguesche Integral und zwei wichtige Ungleichungen

Riesz bemerkt, dass „schon manche, unter anderen besonders Stieltjes“ (Riesz, 1910, 449) dieses Problem untersucht haben. Allerdings habe bisher das entsprechende Werkzeug gefehlt:

> Jedoch die Möglichkeit, in sehr allgemeinen Fällen entscheidende Kriterien zu entwickeln, ist erst seit kurzem gegeben, seitdem nämlich der Begriff des Integrals durch Lebesgue jene geistreiche und glückliche Erweiterung erfahren hat, welcher nun manche, bisher gescheiterte Probleme ihre sinngemäße Erledigung verdanken. (Riesz, 1910, 450)

„Das Lebesguesche Integral“ lautet damit auch der Titel von Riesz’ §1 und wird darin ausführlich erklärt. Neben einem kurzen Verweis auf Borels Maßtheorie nennt Riesz Lebesgues entsprechende Arbeiten: (Lebesgue, 1902), (Lebesgue, 1904) und (Lebesgue, 1909)[17]. Der „geistreiche und glückliche“ Integralbegriff von Lebesgue beinhaltet eine „genetische Definition des Integrals“(Riesz, 1910, 453), mit der bestimmte Sätze für Reihen auf Integrale übertragen werden können. Die entsprechenden Sätze für Integrale finden wir in Riesz’ §2 (Riesz, 1910, 456):

- Hölder-Ungleichung

$$\left|\int_{\mathfrak{R}} f(x)h(x)\,dx\right| \leq \left[\int_{\mathfrak{R}} |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathfrak{R}} |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}, \quad p > 1,$$

- Minkowski-Ungleichung

$$\left[\int_{\mathfrak{R}} |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\mathfrak{R}} |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\mathfrak{R}} |g(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1.$$

Die zugehörigen Sätze für Summen (Riesz, 1910, 455):

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \Big[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^{\frac{p}{p-1}}\Big]^{\frac{p-1}{p}}, \quad p > 1, \tag{1}$$

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leq \Big[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1 \tag{2}$$

[17] Die Arbeit (Lebesgue, 1909) erschien erst nach Abschluss von (Riesz, 1910). Riesz schreibt dazu: „Dieselbe weist auch mit den Paragraphen 2, 3 unserer Arbeit manche Berührungspunkte auf, die jedoch nur den Fall $p = 2$ betreffen.“ (Riesz, 1910, 453, Fußnote)

führen auf Hölder (1889) und Minkowski (1907) zurück. Riesz schreibt in einer Fußnote:

> Meines Wissens wurde die Ungleichung (2) [...] von H. Minkowski aufgestellt: (Minkowski, 1907, 95). Bez. der Literatur der Cauchy-Hölderschen Ungleichung (1) siehe (Landau, 1907). (Riesz, 1910, 455)

Landau (1907) beschrieb noch vor Riesz eine duale Beziehung zwischen den Folgenräumen l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$ sehr ähnlich zur heutigen Formulierung (siehe Abschnitt 1.6.f). Für Beispiele der „bekannten Relation" (Landau, 1907, 26), d.h. der Hölder-Ungleichung, verweist Landau auf Hölder (1889, 44), Pringsheim (1903, 174) und Jensen (1906, 181). In seinem Artikel *Why Hölder's inequality should be called Roger's inequality* untersucht Maligranda (1998) die Geschichte der Hölder-Ungleichung – man beachte, dass Hölder auf Rogers (1888) verweist – und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, d.h. Hölder für $p = 2$.

> Für den Fall $p = 2$ ist die [Hölder-, A.W.] Ungleichung unter dem Namen Schwarzsche Ungleichung bekannt. Für diesen Fall folgt [die Minkowski-Ungl., A.W.] aus [der Hölder-Ungl., A.W.] durch einfache Umformung. S. (Fischer, 1907b). (Riesz, 1910, 456)

Die beiden entsprechenden Ungleichungen für Integrale sind sehr wichtig für Riesz' Untersuchung seines Ausgangsproblems und für Untersuchungen der L^p-Funktionen allgemein. In seiner Einleitung verweist Riesz auf den Fall $p = 2$ und seine Überlegungen in (Riesz, 1907a):

1.6.b Die quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen

Wie schon erwähnt, stellt das Ausgangsproblem

$$\int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx = c_i$$

eine Verallgemeinerung von Riesz' Fragestellung von 1907 dar:

> Vor einigen Jahren haben E. Fischer und Verfasser gleichzeitig die Frage nach der Auflösbarkeit des Systems für den Fall beantwortet, daß die für irgend eine Strecke (a, b) erklärten, reellen, integrierbaren Funktionen $f(x)$ ein *normiertes Orthogonalsystem* bilden, d.i. ihre Produktintegrale $= 0$ und ihre Quadratintegrale $= 1$ sind und auch von der lösenden Funktion quadratische Integrierbarkeit gefordert wird.
> (Riesz, 1910, 450)

Riesz verweist auf (Fischer, 1907b) und (Riesz, 1907a) und formuliert noch einmal das Resultat:

> *Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Systems*
> $$\int_a^b f_k(x)\xi(x)\,dx = c_k \qquad (k = 1, 2, ...)$$
> *ergab sich die Existenz der Summe*
> $$\sum_k c_k^2.$$
> (Riesz, 1910, 450)

Dieses Resultat kennen wir schon aus Abschnitt 1.3.b und sicherlich kannten es seiner Zeit auch viele Leserinnen und Leser von (Riesz, 1910). Dass Riesz es dennoch noch einmal formuliert, spricht für seine verständliche Art, seine Untersuchungen darzustellen. Er erklärt, dass eine Lösungsfunktion $\xi^*(x)$ durch die Reihe

$$\sum_k c_k f_k(x)$$

dargestellt werden kann und verweist dazu auf (Fischer, 1907b), (Riesz, 1909) und (Weyl, 1909). Diese Darstellungsmöglichkeit führt zur Identität

$$\int_a^b [\xi^*(x)]^2\,dx = \sum_k c_k^2,$$

welche „im Falle des trigonometrischen Orthogonalsystems“ (Riesz, 1910, 451) von Fatou (1906) gezeigt wurde.[18] Die entscheidende Methode ist hier die Verwendung von Fourierkoeffizienten. Mit ihnen konnte Riesz 1907 die Isomorphie

$$L^2(a, b) \cong l^2$$

zeigen, mit der wiederum viele Resultate durch reine Übertragung gezeigt werden können:

> Es ist nun wohlbekannt, wie man mit den angeführten Resultaten – ja auch schon mit der engeren Formulierung derselben z. B. für das trigonometrische Orthogonalsystem – an die von Hilbert begründete, von Hellinger, Toeplitz, E. Schmidt, Hilb, Weyl u.a. weiterentwickelte schö-

[18] Riesz verweist außerdem auf Hurwitz (1903).

> ne Theorie der Funktionen abzählbar unendlich vieler Veränderlichen anknüpfen kann. (Riesz, 1910, 451)

Riesz verweist auf (Riesz, 1907b,c) (vergleiche Unterkapitel 1.3), außerdem auf Fréchet (1907, 1908) und Plancherel (1909a,b).

> Man gelangt zu einer Fülle von Tatsachen über quadratisch integrierbare Funktionen. [...] Es bedarf hierzu fast rein formaler Übersetzbarkeit. (Riesz, 1910, 451)

Diese „formalen Übersetzungen" sind, wie gesagt, möglich aufgrund der Darstellung der L^2-Funktionen durch ihre Fourierkoeffizienten. Eine davon ist sehr interessant: Wie wir wissen, entwickelte Schmidt eine Lösbarkeitsbedingung für Riesz' Ausgangsproblem für den Fall, dass sowohl die gegebenen Koeffizienten als auch die gesuchten Lösungen Elemente des Folgenraums l^2 sind (siehe Unterkapitel 1.5). Mit dem Satz von Fischer-Riesz kann dieses Resultat auf den Fall, dass sowohl Koeffizienten als auch Lösungen aus dem Funktionenraum $L^2(a, b)$ stammen, übertragen werden. Damit ist Riesz' Ausgangsproblem für den Fall $p = 2$ gelöst:

> Unter andern ist damit auch das anfangs gestellte Problem für die genannte Funktionenklasse [$L^2(a, b)$, A.W.] vollständig erledigt, nachdem die Kriterien für die Auflösbarkeit des entsprechenden Gleichungssystems mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten bei Schmidt (1908) fertig vorliegen. (Riesz, 1910, 451)

1.6.c Zwei zugeordnete Klassen

Die Fragestellung für quadratisch integrierbare Funktionen wird nun von Riesz verallgemeinert. In seinem Artikel (Riesz, 1909) hat Riesz schon mit einem beliebigen Exponenten $p > 0$ gearbeitet. Wie wir gesehen haben, zeigt er darin die Vollständigkeit der $L^p(a, b)$-Räume, ohne allerdings den Begriff ‚Raum' zu verwenden. Dies ändert sich nun.

> In der vorliegenden Arbeit wird nun die Voraussetzung der quadratischen Integrierbarkeit durch jene der *Integrierbarkeit von* $|f(x)|^p$ ersetzt; p bedeutet eine beliebige, rationale oder irrationale Zahl > 1.[19] Jede Zahl p bestimmt eine Funktionenklasse [L^p]. Die Rolle der Klasse

[19] Riesz bemerkt hier: „Ich hatte mich schon in der Note (Riesz, 1909) mit derartigen Funktionen beschäftigt. Es wird dort jedoch nur $p > 0$ vorausgesetzt, was für die Gültigkeit der entwickelten Sätze schon hinreicht."

> $[L^2]$ übernehmen hier je zwei Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$; sie haben die Eigenschaft, daß *jede Funktion, die mit allen Funktionen der einen Klasse integrierbare Produkte ergibt, sicher der andern Klasse angehört.* Die Untersuchung dieser Funktionenklassen wird auf die wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p = 2$ ein ganz besonderes Licht werfen; und man kann auch behaupten, daß sie für eine axiomatische Untersuchung der Funktionenräume brauchbares Material liefert.
> (Riesz, 1910, 452)

Die Verallgemeinerung des Exponenten p führt Riesz zu einer *dualen* Beziehung, wenn auch nicht so benannt, zwischen den „Funktionenklassen" $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. Die Schreibweise mit den eckigen Klammern stammt dabei von Riesz – ebenso wie die Hervorhebung der gegenseitigen Beziehung, „daß *jede Funktion, die mit allen Funktionen der einen Klasse integrierbare Produkte ergibt, sicher der andern Klasse angehört*". Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass diese duale Beziehung zwischen zwei Funktionenräumen besteht und nicht zwischen einem Raum und zugehörigem Dualraum aus *Funktionalen*, wie wir es in der heutigen Funktionalanalysis gewohnt sind. Darauf wollen wir in Unterkapitel 1.7 zurückkommen. Riesz' klarer Beschreibung dieser dualen Beziehung folgen zwei weitere Gedankenschritte: 1) Riesz erkennt die bislang noch nicht beschriebene Selbstdualität der Klasse $[L^2]$ als etwas, das im Allgemeinen von *zwei* Klassen, nämlich $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$, übernommen wird. 2) Direkt im Anschluss, nach einem Verweis auf die „wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p = 2$", die auf der Isomorphie $L^2(a,b) \cong l^2$ basieren, spricht Riesz' erstmals von Funktionen*räumen* statt Funktionenklassen. Dies könnte ein Hinweis auf einen gegenseitigen Einfluss des sich entwickelnden Dualitäts- und Raumbegriffs in der Funktionalanalysis sein. Man könnte sich vorstellen, dass Riesz möglicherweise aufgrund der zu formulierenden Abgrenzung der beiden *verschiedenen* Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ im Gegensatz zur vorigen ‚allumfassenden Umgebung' L^2 auf die Verwendung des Raumbegriffs gebracht wurde. Außerdem spricht Riesz genau in diesem Satz von einer „axiomatischen Untersuchung" dieser Funktionenräume.

Eingeführt wird die „Funktionenklasse $[L^p]$" dann in §3, nachdem Riesz zuvor gezeigt hat, dass

a) „das Produkt der Funktionen $f(x), h(x)$ sicher integrierbar [ist], wenn es eine Zahl $p > 1$ gibt, derart daß die Funktionen $|f(x)|^p, |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}$ integrierbar ausfallen." Ferner:

b) „Ist das Produkt $f(x), h(x)$ für alle integrierbaren Funktionen $f(x)$, für welche die Potenz $|f(x)|^p$ $(p > 1)$ integrierbar ist, ebenfalls integrierbar, so ist es auch die Potenz $|h(x)|^{\frac{p}{p-1}}$." (Riesz, 1910, 457)

Erst jetzt ist die *duale Paarung* (siehe Abschnitt 1.7.b)

$$\int_a^b fh\,dx$$

mit

$$f \in [L^p] \text{ und } h \in \left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$$

wohldefiniert und die duale Beziehung der Funktionenklassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ gezeigt:

> Bezeichnen wir die Gesamtheit jener integrierbaren Funktionen, für welche die p^{te} Potenz des absoluten Betrages (also aufgrund [einer Ungleichung, die zuvor gezeigt wurde, A.W.] auch alle niedrigeren Potenzen) integrierbar ist, als Funktionenklasse $[L^p]$, so besagen [die beiden Resultate a) und b), A.W.], daß *jede der Klassen* $[L^p]$, $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *genau aus jenen Funktionen besteht, die mit jeder Funktion der andern Klasse multipliziert, integrierbare Produkte ergeben.* Ist $p = 2$, so ist auch $\frac{p}{p-1} = 2$; die Klasse $[L^2]$ hat somit die Eigenschaft, daß *jede Funktion, die mit allen Funktionen der Klasse integrierbare Produkte ergibt, selbst der Klasse angehört.* In dieser Eigenschaft der Klasse $[L^2]$ liegt ein Grund dafür, daß dieselbe in allen Fragestellungen, in welchen das Produktintegral auftritt, eine ausgezeichnete Rolle spielt. Sucht man dann die für die Klasse $[L^2]$ geltenden Resultate auf andere Klassen $[L^p]$ auszudehnen, so müssen die Klassen $[L^p]$, $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ gleichzeitig betrachtet werden.
>
> Für das Weitere ist es noch wichtig, festzustellen, daß *die Klasse* $[L^p]$ *alle linearen Verknüpfungen je einer endlichen Anzahl in ihr enthaltener Funktionen ebenfalls enthält.* (Riesz, 1910, 459)

Die erste kursiv gedruckte Aussage beschreibt die duale Beziehung der Funktionenklassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$: Diese charakterisieren sich gegenseitig und liefern eine wohldefinierte duale Paarung. Ein weiterer Grund, diese Beziehung *dual* zu nennen, besteht im möglichen Vertauschen der Exponenten p und $\frac{p}{p-1}$ ohne damit den Wahrheitswert zu ändern. Anschließend stellt Riesz die Selbstdualität von $[L^2]$ mittels Exponentenvergleich fest. Er erklärt weiter, dass die Klasse $[L^2]$ eine „ausgezeichnete Rolle" spiele. Man könnte also sagen, dass Riesz hier die Selbstdualität des $L^2(a,b)$-Raums als *Spezialfall* der Dualität der $L^p(a,b)$-Räume erkennt, auch wenn er weder von ‚Dualität' noch von ‚Selbstdualität' spricht. Ein weiterer interessanter Punkt ist die anschließende Feststellung der Linearität der $[L^p]$-Klassen.

1.6.d Lösbarkeit im Rahmen dualer Räume und schwache Konvergenz

In Riesz' Einleitung erfolgt eine erste Antwort zum Ausgangsproblem:

> Was nun insbesondere die anfangs gestellte Frage angeht, so wird dieselbe in der Folge *unter der Voraussetzung, daß die Koeffizientenfunktionen der einen, die gesuchte Funktion der andern je zweier zugeordneten Klassen angehören, vollständig erledigt.* (Riesz, 1910, 452)

Bei dieser Formulierung („insbesondere“) könnte man fälschlicherweise den Eindruck bekommen, dass sich die Beantwortung des Ausgangsproblems fast zufällig im Rahmen der Erkenntnis der dualen Beziehung zwischen den Funktionenklassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ ergeben hat. Stattdessen hat sich ja gerade umgekehrt, ausgehend vom zu lösenden Gleichungssystem, die Beschreibung der dualen Beziehung der dabei auftretenden Räume ergeben. Bislang, bei Riesz (1907d) und Schmidt (1908), waren diese Räume identisch und selbstdual. Nun aber sind sie verschieden und zeigen eine gegenseitige Beziehung, die man formulieren kann – und die von Riesz auch explizit formuliert wird: „zwei zugeordnete Klassen“.

In seiner Einleitung gibt Riesz eine kurze Zusammenfassung seines Vorgehens zur Lösung des Ausgangsproblems:

> Für eine endliche Anzahl von Gleichungen gelingt dies durch die Betrachtung eines einfachen Variationsproblems; und der Übergang zu unendlich vielen Gleichungen wird sich nachher mit Hilfe des Begriffs der *schwachen* Konvergenz äußerst leicht gestalten. Das einfache Kriterium, das wir erhalten, ist auch für den Fall $p = 2$ bisher unbekannt. Es ergeben sich daraus entsprechende Kriterien für die *Umkehrbarkeit gewisser Funktionaltransformationen.* Die Anwendbarkeit dieser Kriterien wird an einzelnen speziellen Typen von Funktionalgleichungen ausgeprobt, wobei sich auch für diese Typen manche neue Gesichtspunkte ergeben. (Riesz, 1910, 452)

Dies wollen wir hier verfolgen: Nach einem *Satz über die Annäherung der Funktionen der Klasse* $[L^p]$ *durch streckenweise konstante Funktionen* (§4) und Eigenschaften über das *unbestimmte Integral der Funktionen einer Klasse* $[L^p]$ (§5) führt Riesz in §6 die „starke und schwache Konvergenz in bezug auf den Exponenten p“ ein. Die hier als „starke Konvergenz“ bezeichnete Konvergenz bezeichnen wir heute als die p-Normkonvergenz einer Funktionenfolge $f_i(x)$ gegen eine Grenzfunktion

$f(x)$, jeweils Elemente der $[L^p]$-Klasse:

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b |f(x) - f_i(x)|^p \, dx = 0$$

(Riesz, 1910, 464). Riesz verweist dabei auf Fischers „convergence en moyenne“ für den Fall $p = 2$ (siehe Abschnitt 1.3.b). Aus dieser „starken Konvergenz“ folgt leicht unser heutiger Begriff der schwachen Konvergenz[20]. Siehe erste „Grenzgleichung“:

> *... daß aus der starken Konvergenz der Folge $\{f_i(x)\}$ gegen $f(x)$ auch das Bestehen der Grenzgleichungen*
>
> $$\lim_{i=\infty} \int_a^b f_i(x)g(x)\, dx = \int_a^b f(x)g(x)\, dx; \; \lim_{i=\infty} \int_a^b |f_i(x)|^p \, dx = \int_a^b |f(x)|^p \, dx$$
>
> *folgt*; in der ersten der beiden Gleichungen bedeutet $g(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. (Riesz, 1910, 464)

Allerdings führt Riesz nicht diese Art von Konvergenz unter der Bezeichnung der schwachen Konvergenz ein, sondern einen „noch umfassenderen Konvergenzbegriff“, aus dem die erste Grenzgleichung und somit auch unser heutiger Begriff der schwachen Konvergenz folgt:

> *Die Folge $\{f_i(x)\}$ von Funktionen der Klasse $[L^p]$ konvergiert in bezug auf den Exponenten p schwach gegen die Funktion $f(x)$ derselben Klasse, wenn a) die Integralwerte*
>
> $$\int_a^b |f_i(x)|^p \, dx$$
>
> *insgesamt unterhalb einer endlichen Schranke liegen; b) für alle Stellen $a \leq x \leq b$*
>
> $$\lim_{i=\infty} \int_a^x f_i(x)\, dx = \int_a^x f(x)\, dx$$
>
> *ausfällt.* (Riesz, 1910, 465)

Dabei verweist Riesz im Fall $p = 2$ auf einen Zusammenhang mit Hilberts Konvergenzbegriff zur Definition der „vollstetigen“ Funktionen (siehe Abschnitt 7.9.a): „indem nämlich der schwachen Konvergenz einer Folge von Funktionen jene Hilbertsche Konvergenz ihrer Fourierschen Konstanten entspricht“ (Riesz, 1910, 465,

[20] Heute verwenden wir im Fall eines allgemeinen normierten Raums X die folgende Definition: Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *schwach konvergent*, wenn die Folgen $(x'(x_n))_n$ für jedes $x' \in X'$ im zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$ konvergieren.

Fußnote). In einer anderen Fußnote erfahren wir von Riesz, dass unser heutiger Begriff der schwachen Konvergenz nicht nur eine Folgerung seiner Definition ist, sondern dass sie äquivalent dazu ist.[21] In §7 erhält Riesz eine „Ausdehnung des Fischerschen Satzes“ aus (Fischer, 1907b) als Anwendung seines „Hauptsatzes über schwache Konvergenz“: die Vollständigkeit der $L^p(a,b)$-Räume bzgl. der L^p-Normen ($p > 1$). Riesz schreibt:

> Vergleiche (Riesz, 1909), wo derselbe Satz (auch für $0 < p \leq 1$) auf andere Weise entwickelt wird. (Riesz, 1910, 468, Fußnote)

(Vergleiche hierzu Abschnitt 1.3.e.) In §8 beginnt Riesz schließlich damit, die Lösbarkeitsbedingung zu seinem Ausgangsproblem

$$\int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx = c_i$$

zu bestimmen. Dabei wird, wie gesagt, gefordert, dass die Koeffizientenfunktionen $f_i(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ und die Lösungsfunktionen $\xi(x)$ der Klasse $[L^p]$ angehören. Im Fall $p = 2$ kann auf zwei verschiedene Arten auf Schmidt (1908) zurückgegriffen werden:

- Man kann, wie schon erläutert, Schmidts *Resultat* für den Folgenraum l^2 mittesls der Isomorphie $L^2(a,b) \cong l^2$ (Satz von Fischer-Riesz) auf den Funktionenraum $L^2(a,b)$ übertragen und erhält dadurch die entsprechende Lösbarkeitsbedingung.

- Man kann aber auch Schmidts *Methode* auf das $L^2(a,b)$-Problem anwenden, wenn man Schmidts Konvergenzsatz durch den Fischerschen ersetzt.

Diese Möglichkeit des Rückgriffs auf Schmidts Untersuchungen, sei es auf das Resultat oder auf die Methode, ist jedoch ein Sonderfall:

> Die Ausdehnung dieser gewissermaßen geometrischen Methode auf beliebige Exponenten scheint dagegen auf unhebbare Schwierigkeiten zu stoßen. Demgemäß weicht unsere Methode, die auch im Falle $p = 2$ manches Neue bieten dürfte, wesentlich von der Schmidtschen ab.
> (Riesz, 1910, 469)

Mit anderen Worten: Man kann nur im Fall $p = 2$ analytische Geometrie betreiben, für alle anderen Exponenten muss man synthetisch vorgehen. In §9 und §10 zeigt Riesz schließlich:

[21] Riesz verweist auf Lebesgue (1909) für den Fall $p = 2$.

Riesz' Resultat von 1910

Ein endliches oder abzählbar unendliches System von linearen Integralgleichungen

$$\int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx = c_i \qquad (i = 1, 2, ...),$$

deren Koeffizienten $f_i(x)$ *der Klasse* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *angehören, läßt dann und nur dann eine der Bedingung*

$$\int_a^b |\xi(x)|^p\,dx < M^p$$

genügende lösende Funktion $\xi(x)$ *zu, wenn für alle* n *bei beliebigen Zahlen* μ_i *die Ungleichung*

$$\Big|\sum_{i=1}^n \mu_i c_i\Big|^{\frac{p}{p-1}} \leq M^{\frac{p}{p-1}} \int_a^b \Big|\sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x)\Big|^{\frac{p}{p-1}}\,dx$$

besteht.

Ist speziell M^* *die kleinste Zahl von der geforderten Eigenschaft, so besitzt das System eine einzige der gestellten Bedingung genügende Lösung.* (Riesz, 1910, 474)

Im Originalzitat heißt es $M^{\frac{1}{p-1}}$ statt $M^{\frac{p}{p-1}}$, dies ist jedoch ein Tippfehler, siehe (Riesz, 1910, 470) bzw. (Riesz, 1910, 479f) mit Erläuterung in Abschnitt 6.1.c. Man beachte die Ähnlichkeit mit Schmidts Resultat, formuliert von Köthe in Abschnitt 1.5.c. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt mithilfe der Hölder-Ungleichung (siehe Abschnitt 1.7.b); um zu zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist, verwendet Riesz seinen *Hauptsatz über schwache Konvergenz* (Riesz, 1910, 466-468).

1.6.e Darstellungssatz für die $L^p(a, b)$-Räume

In §11 zeigt Riesz zweierlei: Zum einen erklärt er, dass die Notwendigkeit seiner Lösbarkeitsbedingung problemlos auch für den Fall überabzählbar vieler Gleichungen bewiesen werden kann. Um zu zeigen, dass die Lösbarkeitsbedingung in diesem

Fall hinreichend ist, wird für *beliebige* Mengen das Auswahlaxiom benötigt. „Für jene Mengen jedoch, die wir in der Folge betrachten werden, ergibt sich das Vorhandensein entsprechender Teilmengen unmittelbar aus unseren früheren Entwicklungen.“ (Riesz, 1910, 475) Zum anderen formuliert Riesz in diesem Paragraphen seinen Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale auf den $L^p(a,b)$-Räumen, wie er es in (Riesz, 1907c) schon für den Fall $p = 2$ getan hat (siehe Abschnitt 1.3.d):[22]

> *Wird durch eine Vorschrift jeder Funktion $f(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ eine Zahl A_f zugeordnet, und genügt diese Zuordnung den Forderungen:*
>
> $$A_{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2} = \mu_1 A_{f_1} + \mu_2 A_{f_2};$$
>
> $$|A_f| \leq M \left[\int_a^b |f(x)|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right]^{\frac{p-1}{p}},$$
>
> *wo die Schranke M nur von der Vorschrift abhängt, so gibt es eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte Funktion $a(x)$ der Klasse $[L^p]$ derart, daß für alle $f(x)$*
>
> $$A_f = \int_a^b a(x) f(x) \, dx$$
>
> *ist.* (Riesz, 1910, 475)

Damit sind, wie auch im Darstellungssatz für den Fall $p = 2$ von 1907, die Elemente des *Dualraums* – im heutigen Sinne – von $L^{\frac{p}{p-1}}(a,b)$ bestimmt:

$$A_{(\cdot)} = \int_a^b a(x) \;\cdot\; dx, \quad a \in [L^p].$$

Jedoch spricht Riesz auch hier nicht von einem ‚Dualraum‘ oder einem ähnlichen Konzept. In den folgenden Paragraphen (§§12-15) führt Riesz *duale Operatoren* („Transponierte“ (Riesz, 1910, 479)) bzgl. den $[L^p]$-Klassen ein – ein weiterer interessanter Zweig in der Entwicklung des Dualitätsbegriffs in der Funktionalanalysis, zu dem wir in Teil II dieser Arbeit kommen werden – und entwickelt Ansätze zur Fredholmschen Alternative. Riesz’ Artikel endet schließlich mit Bemerkungen zur möglichen Übertragung seiner Resultate auf Funktionen, die auf beliebigen messbaren Mengen definiert sind, nicht nur auf Intervallen.

[22] Riesz verweist auf (Riesz, 1907c) und (Fréchet, 1907).

1.6.f Die Funktionenräume $L^p(a,b)$ und die Folgenräume l^p

Riesz' Einleitung endet mit dem Ausblick, dass man durch die Anwendung ähnlicher Methoden auch die Folgenräume l^p untersuchen könne. Riesz verweist auf Landau (1907) mit der Bemerkung, dass dieser „einen Satz von Hellinger und Toeplitz, nach welchem aus der Konvergenz einer linearen Form für alle Variablenreihen konvergenter Quadratsumme die Beschränktheit der Form folgt, auf den Fall eines beliebigen Exponenten $p > 1$" (Riesz, 1910, 452, Fußnote) ausgedehnt hat. Bei Landau (1907) finden wir Folgendes:

> Indem ich mir einen Beweis für diesen Satz (Hellinger und Toeplitz, 1906, 353) zurechtlegte, fand ich folgende Verallgemeinerung, welche vielleicht für die Zwecke der Herren Hellinger und Toeplitz nützlich sein kann, und in welcher der obige Hilfssatz als Spezialfall $p = 2$ enthalten ist.
>
> *Es sei p eine reelle Größe* > 1,
>
> $$a_i > 0 \qquad (i = 1, 2, ...);$$
>
> *die unendliche Reihe*
>
> $$L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$
>
> *sei für alle Systeme positiver Größen* x_i $(i = 1, 2, ...)$ *konvergent, für welche*
>
> $$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p = 1$$
>
> *ist. Dann liegt L für alle jene Systeme* x_i *unterhalb einer endlichen Schranke, und zwar ist*
>
> $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}}$$
>
> *konvergent und*
>
> $$L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$
>
> (Landau, 1907, 25f)

Damit kam Landau schon drei Jahre vor Riesz' Untersuchungen zu den $L^p(a,b)$-Räumen bzw. sechs Jahre vor Riesz' Untersuchungen zu den l^p-Räumen in (Riesz,

1913) sehr nahe an die Beschreibung einer dualen Beziehung zwischen den Räumen l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$. Der Schlusssatz in Riesz' Einleitung formuliert schließlich die Beziehung zwischen den Funktionenräumen $L^p(a,b)$ und den Folgenräumen l^p:

> Doch ist hier ein wesentlicher Unterschied zu verzeichnen. Denn die Resultate, zu welchen man gelangen wird, zeigen auch hier völlige Analogie mit jenen, zu welchen die Untersuchung der Funktionenklassen $[L^p]$ führt. *Jedoch die Übersetzbarkeit der Resultate, wie für* $p = 2$, *und damit die Möglichkeit einer ähnlich einfachen analytischen Theorie geht in allen übrigen Fällen verloren; und somit tritt die synthetische Behandlungsweise in ihre vollen Rechte.* (Riesz, 1910, 452f)

Eine „ähnlich einfache analytische Theorie", d.h. die Rückführung des Falles der Funktionenräume $L^p(a,b)$ auf den Fall der Folgenräume l^p, ist im Allgemeinen nicht gegeben, da es für $p \neq 2$ keinen Isomorphismus zwischen $L^p(a,b)$ und l^p gibt. Es kann zur Untersuchung des Funktionenraums $L^p(a,b)$ also nicht der Folgenraum l^p herangezogen werden. Die entsprechenden Integralgleichungen können damit nicht auf entsprechende unendlichdimensionale Gleichungssysteme zurückgeführt werden wie in Hilberts Untersuchungen. Stattdessen muss unabhängig davon, *synthetisch*, vorgegangen werden. Dies finden wir in Riesz' Arbeit *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Riesz, 1913), die drei Jahre nach seinem Beitrag zu den $[L^p]$-Klassen veröffentlicht wurde. Riesz zeigt darin das folgende Resultat zum analogen Ausgangsproblem:

Riesz' Resultat von 1913

> *Pour que le système d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'équations*
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, ...),$$
>
> *dont les coefficients* a_{ik} *sont tels que les séries*
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \qquad (i = 1, 2, ...)$$
>
> *convergent, admette au moins une solution* (x_k) *telle que*
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \leq M^p,$$

il faut et il suffit que l'inégalité

$$|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i| \leq M\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\sum_{i_1}^{n}\mu_i a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

ait lieu, quels que soient n *et les nombres, réels ou non,* μ_i.

En particulier, si M *désigne le plus petit des nombres pour lesquels la condition est remplie, il n'y a qu'une seule solution jouissant de la propriété exigée. Au cas d'une infinité d'équations, cette solution extrémale* (x_k^*) *est liée aux solutions extrémales* (x_k^n) *des systèmes partiels* $[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = c_i$, A.W.] *par la relation*

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^* - x_k^n|^p = 0.$$

(Riesz, 1913, 61)

Dieses Resultat bildet den Ausgangspunkt für Hellys Polaritätskonzept in (Helly, 1921) (siehe Kapitel 2).

1.7 Abschließende Bemerkungen

1.7.a Die Lösbarkeitsbedingung

Um Riesz' und Schmidts Untersuchungen besser zu verstehen, betrachten wir die endlichdimensionale Version ihres Problemtyps: die lineare Gleichung

$$Ax = c,$$

wobei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sowie die rechte Seite $c \in \mathbb{K}^m$ gegeben sind und $x \in \mathbb{K}^n$ gesucht wird. Schreiben wir diese Gleichung als das folgende Gleichungssystem:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

so sehen wir die Verbindung zu Schmidts unendlichdimensionalen Gleichungssystem von 1908:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n, \quad n = 1, 2, ...$$

(siehe (Schmidt, 1908, 53), sowohl die Koeffizientenfolgen $\mathfrak{a}_n$ als auch die Lösungsfolgen Z sollen aus dem Folgenraum l^2 stammen) und zu Riesz' Gleichungssystem von 1913:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

(siehe (Riesz, 1913, 61), die Koeffizientenfolgen $\mathfrak{a}_i$ sollen aus dem Folgenraum $l^{\frac{p}{p-1}}$ stammen, die Lösungsfolgen x aus l^p). Riesz' Integralgleichungssystem von 1910 stellt eine kontinuierliche Form davon dar:

$$\int_a^b f_i(x) \xi(x)\, dx = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

(siehe (Riesz, 1910, 474), die Koeffizientenfunktionen $f_i(x)$ sollen aus der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ stammen, die Lösungsfunktionen $\xi(x)$ aus $[L^p]$). Riesz' System von 1907 bildet hiervon einen Spezialfall:

$$\int_a^b f(x) \varphi_i(x)\, dx = a_i, \quad i = 1, 2, ...$$

(siehe (Riesz, 1907d, 117), sowohl die Koeffizientenfunktionen $\varphi_i(x)$ als auch die Lösungsfunktionen $f(x)$ sollen aus dem Funktionenraum $L^2(a, b)$ stammen, zusätzlich wird gefordert, dass die $\varphi_i(x)$ ein Orthogonalsystem bilden). Im endlichdimensionalen Fall ist die Gleichung $Ax = c$ genau dann lösbar,[23] wenn

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c).$$

Das bedeutet: Für jede Linearkombination der Zeilen von A, die eine Nullzeile ergibt, muss dieselbe Linearkombination der zugehörigen rechten Seiten Null ergeben:

$$\forall u_i : \quad \sum_{i=1}^{m} u_i \mathfrak{a}_i = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{m} u_i c_i = 0.$$

Köthe (1938) formuliert dies folgendermaßen:

[23] Das folgende ‚Rangkriterium' finden wir bei Frobenius (1905), der auf (Fontené, 1875), (Rouché, 1875) und (Frobenius, 1877) verweist.

> Jede lineare Abhängigkeit zwischen den Zeilen der Matrix [gilt] auch für die entsprechenden Koordinaten von $\mathfrak{c}$. (Köthe, 1938, 193)

Damit zeigt sich die Verbindung zwischen endlich- und unendlichdimensionalem Fall: Das Schmidtsche Resultat von 1908 – in Köthes Formulierung (siehe Abschnitt 1.5.c) – entspricht einer Verallgemeinerung der obigen Beziehung zwischen den Zeilen von A (den Koeffizienten des Gleichungssystems) und den rechten Seiten:

> Ist $\mathfrak{A}$ eine Matrix, die auf alle Stellen $\mathfrak{x}$ des Hilbertschen Raumes anwendbar ist in dem Sinn, daß die Summen [$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$, A.W.] stets konvergieren, so ist für die Lösbarkeit von [$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = c_i$, A.W.] notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl $m > 0$, so daß für alle komplexen $u_1, u_2, ..., u_n$
>
> $$|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i| \leq m|\sum_{i=1}^{n} u_i \mathfrak{a}_i| \tag{2}$$
>
> gilt. Dabei ist $\mathfrak{a}_i$ die i-te Zeile von $\mathfrak{A}$ und die Absolutstriche auf der rechten Seite bedeuten den absoluten Betrag in der Metrik des Hilbertschen Raumes.
>
> (2) ist offenbar eng verwandt mit der Lösbarkeitsbedingung für endliche Gleichungssysteme, verlangt aber nicht nur, daß die linearen Abhängigkeiten der $\mathfrak{a}_i$ für die c_i gelten, sondern daß auch die Unabhängigkeit der c_i nicht ein gewisses Maß der Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_i$ übersteigt.
>
> Die Bedingung (2) ist nun in der Theorie der linearen metrischen Räume auf Räume sehr allgemeiner Natur übertragen worden.
> (Köthe, 1938, 193f)

Die Bedingung (2) findet sich auch in Riesz' Resultat von 1910:

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i|^{\frac{p}{p-1}} \leq M^{\frac{p}{p-1}} \int_a^b |\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx$$

(Riesz, 1910, 474) sowie in der Folgenversion von 1913:

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i| \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{i_1}^{n} \mu_i a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

(Riesz, 1913, 61). Riesz und Schmidt verweisen jeweils auf die vorangehende Problemversion: Schmidt (1908) verweist auf Riesz (1907d); Riesz (1910) verweist auf die Arbeiten (Riesz, 1907d) und (Schmidt, 1908). Es sei darauf hingewiesen, dass die obige Bedingung sowohl in (Riesz, 1907d) wie auch in (Schmidt, 1908) nicht direkt zu finden ist. In beiden Fällen bilden die Koeffizienten (schließlich) ein Orthogonalsystem und die Bedingung ‚versteckt' sich hinter einer äquivalenten Form. Die Übertragung dieser Bedingung auf „Räume sehr allgemeiner Natur" findet sich bei Helly (1921), Hahn (1927) und Banach (1929a). Dies stellen wir in Kapitel 2 dar.

1.7.b Die Hölder-Ungleichung

In jedem der obigen Probleme folgt die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung aus der Hölder-Ungleichung.[24] Dies wollen wir hier erläutern. Innerhalb Schmidts l^2-Folgenräumen entspricht die Hölder-Ungleichung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\|F\|\,\|G\| \geq |(F;G)|$$

(Schmidt, 1908, 58). Die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung für das Gleichungssystem

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n, \quad n = 1, 2, ...$$

folgt nun mit der (Un-)Gleichungskette:[25]

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} Z_m\Big| = \Big|\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i a_{im} Z_m\Big| \leq \|Z\| \left\|\sum_{i=1}^{n} u_i \mathfrak{a}_i\right\|.$$

In Riesz' Version von 1910 finden wir die Hölder-Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)h(x)\,dx\right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}, \quad p > 1$$

[24] Zum historischen Hintergrund der Hölder-Ungleichung siehe Abschnitt 1.6.a.

[25] Es sei bemerkt, dass Schmidt selbst die „Besselsche Ungleichung" (Schmidt, 1908, 73), welche die Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert, verwendet, um die Notwendigkeit der von ihm formulierten Lösbarkeitsbedingung zu zeigen.

(Riesz, 1910, 456) und die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung für das Integralgleichungssystem

$$\int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

folgt aus (Riesz, 1910, 469):

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i|^{\frac{p}{p-1}} = |\sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx|^{\frac{p}{p-1}} = |\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)\xi(x)\,dx|^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leq \left(\left[\int_a^b |\xi(x)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$$= \left[\int_a^b |\xi(x)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p-1}} \int_a^b |\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx.$$

Auf analoge Weise wird die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung in Riesz' Version von 1913 gezeigt (Riesz, 1913, 49). Hier finden wir die Hölder-Ungleichung

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p > 1)$$

(Riesz, 1913, 43). Die allgemeinste Form der Probleme von Schmidt und Riesz – formuliert in heutiger Schreibweise – lautet:

$$\ell(x_i) = c_i \;\; i = 1, 2, ...,$$

wobei das Funktional ℓ aus dem Dualraum des normierten Raums der x_i stammt. Hier folgt die Notwendigkeit durch:

$$|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i| = \left| \ell\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i \right) \right| \leq \|\ell\| \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \right\|.$$

Schmidts und Riesz' Sätze sind also Spezialfälle desselben allgemeinen Problems. Nun folgt ein wichtiger Punkt: Die Hölder-Ungleichung bildet die Grundlage für den Beweis der Notwendigkeit der obigen Lösbarkeitsbedingung. Die Hölder-Ungleichung gilt jedoch nur für eine Paarung aus Funktionen/Folgen/..., die aus „zwei zugeordneten Klassen" (Riesz, 1910, 452) gebildet wird – aus zwei zueinander *dualen* Räumen! Womit wir diese Paarung in der Hölder-Ungleichung als *duale*

Paarung bezeichnen wollen. In Riesz' Arbeit von 1910 sind die dualen Räume

- die Funktionenräume $L^p(a,b)$ und $L^{\frac{p}{p-1}}(a,b)$.

In (Riesz, 1913) sind es

- die Folgenräume l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$.

In Schmidts Untersuchungen sind es

- die Folgenräume l^2 und l^2.

In Schmidts Fall besteht noch keine Notwendigkeit, die Beziehung der Elemente aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zu formulieren, denn alle vorkommenden Folgen – die gegebenen Koeffizienten und die gesuchten Lösungen – stammen aus demselben Raum. Im Fall von Riesz gibt es dann *zwei* Räume, die „die Rolle" des Folgenraums l^2 oder des Funktionenraums $L^2(a,b)$ „übernehmen". Damit kann Riesz zum einen damit beginnen, die Beziehung zwischen diesen beiden Räumen zu formulieren, und zum anderen kann er Schmidts Version und die Version des Satzes von Fischer-Riesz als *Spezialfall* der beschriebenen Beziehung betrachten. Heute würden wir sagen: Selbstdualität ist ein Spezialfall von Dualität.

1.7.c Duale Räume

Riesz beschreibt eine duale Beziehung zwischen zwei Funktionenräumen bzw. Folgenräumen. Unser heutiger Gebrauch des Wortes ‚dual' in der Funktionalanalysis ist jedoch ein anderer: Zu einem gegebenen normierten Raum wird der *Dualraum* definiert, welcher aus allen auf dem gegebenen Raum definierten, stetigen linearen Funktionalen besteht. Damit ist der Dualraum von $L^p(a,b)$ also *nicht* $L^{\frac{p}{p-1}}(a,b)$, sondern lediglich isomorph dazu, wie Riesz in seinem Darstellungssatz gezeigt hat. Wir wollen Riesz' Formulierung hier noch einmal lesen:

> *Wird durch eine Vorschrift jeder Funktion $f(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ eine Zahl A_f zugeordnet, und genügt diese Zuordnung den Forderungen:*
>
> $$A_{\mu_1 f_1+\mu_2 f_2} = \mu_1 A_{f_1} + \mu_2 A_{f_2};$$
>
> $$|A_f| \leq M \left[\int_a^b |f(x)|^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

wo die Schranke M nur von der Vorschrift abhängt, so gibt es eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte Funktion a(x) der Klasse [L^p] derart, daß für alle f(x)

$$A_f = \int_a^b a(x) f(x)\, dx$$

ist. (Riesz, 1910, 475)

Riesz' Darstellungssatz[26] zeigt, bei Vertauschen von p und $\frac{p}{p-1}$, dass der Dualraum von $L^p(a,b)$, wie er heute definiert ist, gegeben ist durch

$$(L^p(a,b))' = \left\{ \int_a^b a(x) \cdot dx \;\middle|\; a \in L^{\frac{p}{p-1}}(a,b) \right\}.$$

Allerdings spricht Riesz nicht von einem ‚dualen Raum', der hier definiert wird, oder überhaupt von einem ‚Raum' aus „opérations", wie er es im Fall der Funktionenräume tut. Eine solche Formulierung erscheint später in (Hahn, 1927). Hahns „polarer Raum" besteht aus allen entsprechenden „Linearformen" und enthält auch eine *Norm* für sie – was vielleicht ein Grund für Hahn war, von einem ‚Raum' zu sprechen. Es könnte also interessant sein herauszufinden, wann erstmals eine Norm für Funktionale eingeführt wurde und wann ein System bestehend aus allen entsprechenden Funktionalen zu einem gegebenen Raum erstmals als ‚Dualraum' bezeichnet wurde. Dies soll im nächsten Kapitel behandelt werden.

[26] Man beachte, dass die genannten Eigenschaften für eine „Zuordnung" gelten, obwohl A_f weiter als „Zahl" bezeichnet wird. In seinem Darstellungssatz für den $L^2(a,b)$-Raum in (Riesz, 1907c) spricht Riesz von einer „nombre" $U(f)$, jedoch auch von einer „opération", die die zugehörigen Voraussetzungen erfüllt. Man fragt sich, warum Riesz nicht Hadamards Bezeichnung „fonctionnelle" verwendet. Hadamard verwendet dieses Wort in (Hadamard, 1903), wo er seinen Darstellungssatz für das System aller auf einem beschränkten Intervall definierten, stetigen Funktionen beweist und Riesz verweist darauf.

2 Hellys Polaritätskonzept und der Satz von Hahn-Banach

2.1 Einleitung

Die heutige Verwendung des Begriffs ‚Dualraum' in der Funktionalanalysis basiert hauptsächlich auf folgender Definition:

> Zu einem normierten Raum X besteht der zugehörige *Dualraum* X' aus allen stetigen linearen Funktionalen auf X. Ist $\|x\|$ die Norm von X, so ist X' mit der zugehörigen dualen Norm $\|x'\| = \sup_{\|x\|=1} |x'(x)|$ ausgestattet.

Es gibt viele nützliche Beziehungen zwischen X und X'. So kann man z.B. etwas über X erfahren, indem man die Auswirkungen der zugehörigen Funktionale auf X untersucht. Zum Beispiel:[27]

> Seien X ein normierter Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt: Die Menge M ist genau dann beschränkt in X, wenn die Mengen $x'(M)$ für jedes $x' \in X'$ beschränkt in $\mathbb{K}$ sind.

Ein weiteres nützliches Konzept, das sich mit der Definition des Dualraums ergibt, ist das der *schwachen Konvergenz*:[28]

> Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *schwach konvergent*, wenn die Folgen $(x'(x_n))_n$ für jedes $x' \in X'$ in $\mathbb{K}$ konvergieren.

[27] Die Implikation '$\Rightarrow$' ist klar. Um '$\Leftarrow$' zu zeigen, wird der Satz von Hahn-Banach benötigt. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

[28] Bzgl. der Entwicklung des Begriffs der schwachen Konvergenz siehe (Pietsch, 2007, 56-58). Pietsch verweist für den normierten Fall auf Hilberts Definition der Vollstetigkeit in (Hilbert, 1906b), siehe Abschnitt 7.9.a, auf das erste Vorkommen der Bezeichnung „schwache Konvergenz" in (Weyl, 1908, 8), auf Riesz' Erweiterung des Konzepts in (Riesz, 1910, 465), siehe Abschnitt 1.6.d, auf (Riesz, 1913, 55) und schließlich auf (Banach, 1929b, 231) und (Banach, 1932, 122, 133).

Das obige Konzept des Dualraums ermöglicht es also, Eigenschaften des Raums X durch möglicherweise einfachere Untersuchungen im zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$ zu erhalten sowie mit einem schwachen Konvergenzbegriff zu arbeiten, wenn das übliche Konzept nicht anwendbar ist. In diesem Kapitel wollen wir den beiden folgenden Fragen nachgehen:

1) Welche Ideen und Konzepte gehen dem Begriff unseres heutigen Dualraums voraus?

2) Wofür steht der Terminus ‚dual' in ‚Dualraum'?

Zu 1) Wie wir gesehen haben und sehen werden, begannen die Entwicklungen in diesem Bereich jeweils mit dem Problem der Lösung eines linearen Gleichungssystems. Dabei wurden unterschiedliche Versionen desselben Problemtyps betrachtet: zunächst in den Untersuchungen von Schmidt und Riesz aus den Jahren 1907 bis 1913 (siehe Kapitel 1), dann in Hellys Arbeit von 1921 und schließlich bei Hahns Einführung des polaren Raums im Jahr 1927. Hahn verweist in seiner Arbeit auf Helly, der wiederum auf Schmidt und Riesz verweist, sodass wir von einer expliziten Verbindung dieser Arbeiten sprechen und die darin enthaltenen Konzepte bzgl. Frage 1) herausstellen können.

Zu 2) Hier könnte man darauf verweisen, dass, wenn man zu einem Dualraum eines normierten Raums X wiederum den Dualraum, also den Bidualraum zu X, bildet, man wieder ‚etwas Ähnliches' wie den Ausgangsraum X erhält. Im Allgemeinen gilt jedoch *nicht* $X \cong X''$. Wir werden Frage 2) näher kommen, wenn wir untersuchen, warum Hahn unser heutiges Konzept des Dualraums ursprünglich als „polaren Raum" bezeichnet hat. Wie wir sehen werden, basiert dieses Konzept auf dem von Helly entwickelten *Polaritätskonzept*.

In diesem Kapitel soll also zunächst auf die Verbindung zwischen Hellys Arbeit von 1921 und den Untersuchungen von Riesz und Schmidt zu den jeweiligen Problemversionen eingegangen werden. Dann wollen wir Hellys Konstruktion seines Polaritätskonzepts vorstellen. Da Helly hierfür Begriffe aus Minkowskis Theorie in (Minkowski, 1896) verwendet, erkunden wir die entsprechenden Konzepte. Nach der Darstellung von Hellys Untersuchungen werden wir Hahns Arbeit (Hahn, 1927) und auch die davon unabhängig erhaltenen Resultate von Banach (1929a) untersuchen. Unser Fokus ist dabei wieder sehr speziell. Ausführlichere Untersuchungen – neben den allgemeinen Darstellungen zur Geschichte der frühen Funktionalanalysis (siehe Vorwort) – zu den Arbeiten von Helly, Hahn und Banach finden wir bspw. in Hochstadts Artikel *Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem* (Hochstadt, 1980), Heusers *Commentary on Hans Hahn's contributions to functional analysis*

(Heuser, 1995) und Naricis und Beckensteins Artikel *The Hahn-Banach theorem: the life and times* (Narici und Beckenstein, 1997).[29]

2.2 Eduard Helly (1884-1943)

Eduard Helly wurde am 1. Juni 1884 in Wien geboren.[30] Sein Mathematikstudium an der Wiener Universität schloss er 1907 mit einer Promotion über Fredholm-Gleichungen unter der Betreuung von W. Wirtinger und F. Mertens ab. Wirtinger vermittelte ihm ein Stipendium an der Universität Göttingen, wo er Vorlesungen von Hilbert, Klein und Minkowski besuchen konnte. Wie wir sehen werden, basieren die Konstruktionen in (Helly, 1921) auf Konzepten von Minkowski (1896) (siehe Unterkapitel 2.5). Zurück in Wien arbeitete Helly als Oberlehrer an Gymnasien und Privatschulen, wobei es ihm gelang, sich parallel Forschungsarbeiten im Bereich der Funktionalanalysis zuzuwenden. Dabei bewies er in (Helly, 1912) 15 Jahre vor Hahn (siehe Abschnitt 2.8.b) eine Vorversion des Satzes von Hahn-Banach. Im Ersten Weltkrieg diente Helly als Leutnant. 1915 wurde er durch einen Lungenschuss verwundet, der auch sein Herz verletzte, und von russischen Soldaten gefangen genommen. Aufgrund der Kämpfe in Russland konnte Helly erst nach einer langen Reise über Japan, den fernen Osten und Ägypten 1920 wieder

[29] Siehe außerdem Jaëcks Arbeiten zu Banach: (Jaëck, 2016), (Jaëck, 2020) und (Jaëck, 2021).

[30] Die folgenden Informationen stammen aus (Butzer et al., 1980) und (Hochstadt, 1980).

nach Wien zurückkehren. Im Jahr 1921 erwarb er mit der von uns in diesem Kapitel betrachteten Habilitationsschrift (Helly, 1921) die Lehrbefugnis. Allerdings erlangte Helly keine Professur – seiner Frau, Elise Bloch, zufolge, „partly because Helly was Jewish and also because Hahn thought a younger person should be preferred“ (Hochstadt, 1980, 123). Dennoch trafen sich Helly und Hahn, der 1921 zum Ordinarius ernannt wurde, regelmäßig in den folgenden Jahren. Aus dieser Zeit geht sicherlich Hahns Bezugnahme auf Hellys Konstruktionen in seiner Arbeit zur Einführung des polaren Raums (Hahn, 1927) hervor (siehe Unterkapitel 2.8). Auch in seinem restlichem Leben sollte Helly die Möglichkeit einer mathematischen Karriere verwehrt bleiben. Nachdem er in Bank- und Versicherungsunternehmen gearbeitet hatte, musste er 1938 in die USA emigrieren, wo er mit Einsteins Unterstützung 1939 eine Stelle am Paterson Junior College (New Jersey) erhielt. Zwei Jahre später wechselte er zum Monmouth Junior College (New Jersey). Im Jahr 1943 wurde Helly dann ein Lehrstuhl am Mathematischen Institut des Illinois Institute of Technology angeboten. Unglücklicherweise verstarb Helly fünf Wochen später, am 28. November 1943, an einem Herzinfarkt in Folge seiner Kriegsverletzung.

2.3 Verbindung zu Riesz und Schmidt

Helly beginnt seinen Artikel *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* von 1921 (Helly, 1921) mit einer Bezugnahme auf Schmidts und Riesz' Untersuchungen zu ihren jeweiligen unendlichdimensionalen linearen Gleichungssystemen mit unendlich vielen Unbekannten. Wie in Kapitel 1 dargestellt, hat Schmidts Gleichungssystem von 1908 die folgende Form:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n, \quad n = 1, 2, ...$$

(Schmidt, 1908, 53), wobei sowohl die Koeffizientenfolgen $(a_{nm})_m$ als auch die Lösungsfolgen $(Z_m)_m$ Elemente des Folgenraums l^2 sein sollen. Riesz' Gleichungssystem von 1913 ist allgemeiner und enthält Schmidts Problem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

(Riesz, 1913, 61). Hier sollen die Koeffizientenfolgen $(a_{ik})_k$ aus dem Folgenraum $l^{\frac{p}{p-1}}$ stammen und die Lösungsfolgen $(x_k)_k$ aus l^p. Schmidt und Riesz haben jeweils eine Lösbarkeitsbedingung in Form einer Ungleichung zwischen den rechten Seiten

c_i und den vorgegebenen Koeffizienten erhalten. In Riesz' Fall ist dies die folgende Ungleichung, siehe (Riesz, 1913, 61):

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i| \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{i_1}^{n} \mu_i a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} .$$

Die Notwendigkeit dieser Lösbarkeitsbedingung ergibt sich in Riesz' wie auch in Schmidts Fall aus „gewissen Ungleichungen", wie Helly formuliert:

> Die Bedingungen der Lösbarkeit eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten wurden, besonders durch die Arbeiten von E. Schmidt (1908) und F. Riesz (1913), für den Fall aufgestellt, daß die Koeffizienten und Lösungen gewissen Ungleichungen zu genügen haben. (Helly, 1921, 60).

Mit den „gewissen Ungleichungen", welche von den Koeffizienten und Lösungen erfüllt sein müssen, um die jeweilige Lösbarkeitsbedingung zu erhalten, sind gemeint:

- (Cauchy-)Schwarz-Ungleichung, siehe (Schmidt, 1908, 58):

  $$\|F\| \, \|G\| \geq |(F;G)|,$$

  wobei F und G Elemente des Folgenraums l^2 sind,

- Hölder-Ungleichung, siehe (Riesz, 1913, 43):

  $$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p > 1),$$

  wobei (a_k) und (b_k) jeweils aus den Folgenräumen $l^{\frac{p}{p-1}}$ und l^p stammen. Diese Version der Hölder-Ungleichung enthält die obige Schwarz-Ungleichung als Spezialfall. Das zugehörige Kapitel bei Riesz trägt den Titel *Les inégalités fondamentales.*

Helly soll es sich nun zur Aufgabe machen, diese Beziehung zwischen den Koeffizienten und den gesuchten Lösungen zu verallgemeinern. Heute würde man sagen: Helly strebt eine Verallgemeinerung der Voraussetzung der Folgenräume l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$ hin zu allgemeineren Folgenräumen an. Wie wir sehen werden, bezeichnet Helly analog zu Riesz' Formulierung die entsprechende Ungleichung als „fundamentale Ungleichung". Helly schreibt:

> In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß der wesentliche Inhalt der betreffenden Bedingungen darin liegt, daß im Raum von abzählbar unendlich vielen Dimensionen, in welchem die geometrische Interpretation des Gleichungssystems vor sich geht, eine Abstandsbestimmung vorliegt, für welche das „Dreiecksaxiom" gilt, oder, um den Zusammenhang mit den Minkowskischen Begriffsbildungen hervorzuheben, der „Aichkörper" ein konvexer Körper ist. (Helly, 1921, 60)

Eine „Abstandsbestimmung, für welche das ‚Dreiecksaxiom' gilt", bezeichnen wir heute als *Norm.* Mittels der genannten „geometrischen Interpretation des Gleichungssystems" entwirft Helly ein Polaritätskonzept, um damit eine Lösbarkeitsbedingung für beliebige lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten zu finden. Dieses Konzept stellt, wie wir sehen werden, eine Verbindung zwischen Geometrie, linearer Algebra und Funktionalanalysis dar. Bevor wir dies erläutern können, müssen wir zunächst einige Konzepte und Notationen aus Minkowskis Theorie der *Geometrie der Zahlen* (1896) erfassen.

2.4 Hermann Minkowski (1864-1909)

Hermann Minkowski wurde am 22. Juni 1864 in Aleksotas, heutiges Kaunas (Litauen), geboren.[31] Als er acht Jahre alt war, emigrierten seine (deutschen) Eltern

[31] Die folgende biographische Skizze basiert auf (Dieudonné, 1974) und (Strobl, 1985).

mit ihm und seinen drei Geschwistern aufgrund antisemitischer Maßnahmen aus dem russischen Zarenreich ins preußische Königsberg. Schon im Gymnasium in Königsberg las Minkowski Arbeiten von Dedekind, Dirichlet und Gauß. Im April 1880 begann er sein Mathematikstudium an der Königsberger Universität, die er nur für drei Semester in Berlin verließ. In Königsberg schloss er Freundschaft mit Hilbert, der ebenfalls zu dieser Zeit in Königsberg studierte, und A. Hurwitz, der dort 1884 einen Lehrstuhl erhielt. Mit 18 Jahren erhielt er den *Grand Prix des Sciences Mathématiques* für seine eingereichte Arbeit *Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten.* Diese sollte die Grundlage für seine Dissertation *Untersuchungen über quadratische Formen, Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält* sein, mit welcher er 1885 unter der Betreuung von F. von Lindemann promovierte. 1887 bewarb er sich um eine Professur an der Universität Bonn, wofür er die Habilitationsschrift *Räumliche Anschauung und Minima positiv definiter quadratischer Formen* verfasste. 1892 wurde er hier zum Assistenzprofessor befördert. Zwei Jahre später lehrte er für zwei Jahre in Königsberg, bis er ans Eidgenössische Polytechnikum Zürich kam. Hier wurde er Kollege seines Freundes Hurwitz, der Frobenius' Lehrstuhl übernommen hatte, und Dozent von Einstein. 1902 übernahm Minkowski eine speziell für ihn von Hilbert geschaffene Lehrstuhlstelle an der Universität Göttingen. Diese sollte er für den Rest seines Lebens innehaben. In Göttingen begann er sich für mathematische Physik zu interessieren und entwickelte den Begriff des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums, welcher bedeutenden Einfluss auf Einsteins Arbeit haben sollte. Wir konzentrieren uns hier jedoch auf Minkowskis zahlentheoretisches Interesse. Dieudonné schreibt:

> From his Grand Prix paper to his last work Minkowski never ceased to return to the arithmetic of quadratic forms in n variables („n-ary forms"). Ever since Gauss's pioneering work on binary quadratic forms at the beginning of the nineteenth century, the generalization of his results to n-ary forms had been the goal of many mathematicians, including Eisenstein, Hermite, Smith, Jordan, and Poincaré. Minkowski's most important contributions to the theory were (1) for quadratic forms with rational coefficients, a characterization of equivalence of such forms under a linear transformation with rational coefficients, through a system of three invariants of the form and (2) in a paper of 1905 (Minkowski, 1905), the completion of the theory of reduction for positive definite n-ary quadratic forms with real coefficients, begun by Hermite. [...]
>
> This 1905 paper was greatly influenced by the geometric outlook that Minkowski had developed fifteen years earlier – the „geometry of numbers", as he called it, his most original achievement. (Dieudonné, 1974)

Die *Geometrie der Zahlen* (Minkowski, 1896)[32] sollte eine wichtige Grundlage für Hellys Arbeit von 1921 werden. 1907 erschien Minkowskis zweites großes zahlentheoretisches Werk *Diophantische Approximationen* (Minkowski, 1907) mit Anwendungen der *Geometrie der Zahlen*. Am 12. Januar 1909 starb Minkowski im Alter von 44 Jahren an einem Blinddarmdurchbruch.

2.5 Minkowskis Aichkörper (1896)

Kommen wir zu Minkowskis *Geometrie der Zahlen* (Minkowski, 1896). Um die darin enthaltene Definition eines „Aichkörpers" zu verstehen, benötigt man den Begriff der „Strahldistanz":

> Man denke sich eine Function von zwei Punkten[33] – sie möge, wenn der erste Punkt $\mathfrak{a}$, der zweite $\mathfrak{b}$ heisst, mit $S(\mathfrak{ab})$ bezeichnet werden – von folgender Art: Es soll $S(\mathfrak{ab})$ für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ und einen beliebigen Punkt $\mathfrak{b}$ stets einen bestimmten Werth haben; [...]
> (Minkowski, 1896, 1)

> Es soll sein: $S(\mathfrak{ab}) = 0$, wenn $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = 0$ ist, $S(\mathfrak{ab}) > 0$, wenn $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ nicht $= 0$ ist, ferner $S(\mathfrak{cd}) = tS(\mathfrak{ab})$, wenn $\mathfrak{d} - \mathfrak{c} = t(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$ und darin $t > 0$ ist. (Minkowski, 1896, 11)

Eine Strahldistanz wird „einhellig" genannt, wenn die heute so genannte Dreiecksungleichung[34] erfüllt ist:

> Für irgend drei verschiedene Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ soll immer
> $$S(\mathfrak{ac}) < S(\mathfrak{ab}) + S(\mathfrak{bc})$$
> sein. (Minkowski, 1896, 1)

Um eine Metrik im heutigen Sinne zu definieren, fehlt also nur noch die Symmetrieeigenschaft. Strahldistanzen, welche diese erfüllen, nennt Minkowski „wechselseitig" (Minkowski, 1896, 2). Minkowski gibt ein Beispiel für eine solche Strahldistanz:

[32] Die *Geometrie der Zahlen* wurde erstmals 1910 veröffentlicht. Jedoch erschienen die ersten 240 Seiten schon 1896 als erster Abschnitt.

[33] „Es bedeute n irgend eine Anzahl, und die n Zeichen $x_1, ..., x_n$ sollen, ein jedes unabhängig von den anderen, jeden reellen Werth vorstellen dürfen. Ein einzelnes System von Werthen dieser Zeichen heisse ein *Punkt*, die Werthe selbst die *Coordinaten* des Punktes." (Minkowski, 1896, 1)

[34] Minkowski verwendet bei der Ungleichung das Symbol ‚$<$'. Leider findet sich keine Erklärung dazu. Wahrscheinlich verwendet Minkowski es im Sinne von ‚$\leq$'.

Die „Spanne“ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ ist definiert als das „Maximum unter den absoluten Beträgen der n relativen Coordinaten eines Punktes $\mathfrak{b}$ in Bezug auf einen Punkt $\mathfrak{a}$“ (Minkowski, 1896, 2). Damit entspricht die Punktmenge $\mathfrak{W}$ – der „Bereich sämtlicher Punkte, nach welchen die Spanne von $\mathfrak{o}$ [d.h. vom Ursprung, A.W.] Eins beträgt“(Minkowski, 1896, 3) – unserer heutigen endlichdimensionalen Einheitssphäre bezüglich der Maximumsnorm, welche als einhellige und wechselseitige Strahldistanz betrachtet werden kann. Jetzt können wir Minkowskis Definition einer „Aichfläche“ und eines „Aichkörpers“, formuliert für *beliebige* Strahldistanzen, verstehen:

> Die Menge dieser[35] Punkte $\mathfrak{r}$, für welche $S(\mathfrak{or}) = 1$ ist, möge die *Aichfläche* der Strahldistanzen $S(\mathfrak{ab})$ heissen. Der Bereich $\mathfrak{W}$ stellt eine specielle solche Aichfläche vor. Ferner möge die Menge derjenigen Punkte $\mathfrak{r}$, für welche $S(\mathfrak{or}) < 1$ ist, der *Aichkörper* der Strahldistanzen $S(\mathfrak{ab})$ heissen. [...] (Minkowski, 1896, 9)
>
> Für einhellige Strahldistanzen trägt nun der Aichkörper folgenden Charakter:
>
> *Gehören irgend zwei Punkte dem Aichkörper an, so ist dasselbe mit jedem Punkte der sie verbindenden Strecke der Fall.*
> (Minkowski, 1896, 12)

Verwenden wir unsere heutigen Begriffsbildungen, so ist Minkowskis Aichfläche also die Einheitssphäre, sein Aichkörper die Einheitskugel – und dies jeweils bezüglich einer beliebigen Strahldistanz, wobei eine einhellige und wechselseitige Strahldistanz einer Norm im heutigen Sinne entspricht. Im Fall einer einhelligen Strahldistanz ist der Aichkörper konvex.

2.6 Hellys Polaritätskonzept (1921)

2.6.a Die konvexe Abstandsfunktion

In Übereinstimmung mit Minkowskis Konzept einer einhelligen Strahldistanz führt Helly in seiner Arbeit von 1921 die „konvexe Abstandsfunktion“ (Helly, 1921, 62) ein, welche unserem heutigen Normbegriff entspricht.[36] Dabei erinnert der Begriff

[35] Siehe (Minkowski, 1896, 2-9).

[36] In (Heuser, 1992) finden wir die Bemerkung: „Hier sehen wir übrigens noch viel deutlicher als bei Riesz, daß paradoxerweise die abstrakte Norm vor dem abstrakten Vektorraum da ist.“ (Heuser, 1992, 647) Ist es tatsächlich paradox, wenn das Konzept einer Norm oder eines Abstands vor dem eines Raums eingeführt wird? Wie wir sehen, geschah dies mehr als einmal.

„Abstandsfunktion“ an Minkowskis Strahldistanz und „konvex“ an die Konvexität des Aichkörpers im Fall einer einhelligen Strahldistanz, d.h. im Fall, dass die heute so genannte Dreiecksungleichung erfüllt ist.

> Es seien $x_1, x_2, ...x_n$ kartesische Koordinaten irgend eines Punktes eines n-dimensionalen Raumes R_n. Die Größen x_k seien vorläufig reell vorausgesetzt und zur Abkürzung soll der zugehörige Punkt einfach mit x bezeichnet werden.
>
> [...] In diesem Raume sei jedem Punkte x eine reelle positive Zahl $D(x) = D(x_1, x_2, ..., x_n)$ zugeordnet, die folgenden Bedingungen genügt:
> $D(\lambda x) = |\lambda| D(x)$ (I)
> $D(x + y) \leq D(x) + D(y)$ (II)
> Aus $D(x) = 0$ folgt $x = 0$, d.h. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. (III)
> (Helly, 1921, 60f)

Helly bemerkt, dass aus dieser Definition direkt die Stetigkeit von $D(x)$ folgt und dass „die Gesamtheit aller Punkte, für welche $D(x) \leq 1$ ist, einen konvexen Bereich erfüllen“ (Helly, 1921, 61). Dann schreibt er Folgendes:

> Die Begrenzung dieses „Aichkörpers“ wird aus den Punkten x gebildet, für welche $D(x) = 1$ ist. Sie ist zentrisch symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprunges und ist eine abgeschlossene Punktmenge, die R_n in zwei Teile zerlegt und für welche die Koordinaten sämtlicher Punkte unter einer endlichen Grenze liegen. (Helly, 1921, 61)

Diese „Begrenzung“ ist für Hellys Untersuchungen von zentraler Bedeutung. Wie wir sehen werden, spielt sie im Folgenden die gleiche Rolle wie ein Kreis im Zweidimensionalen, bezüglich dem eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge aller Punkte[37] und der Menge aller Geraden[38] definiert werden kann – also einem Kreis, der eine Polarität zwischen Pol und Polare impliziert. Helly beweist eine Verallgemeinerung eines Satzes[39] aus (Minkowski, 1896):

> Durch jeden Punkt dieser Begrenzung geht mindestens ein linearer R_{n-1}, der nicht in das Innere des Aichkörpers eindringt, der – nach Minkowski – den Aichkörper „stützt“. Oder anders und gleich für einen beliebigen Punkt verallgemeinert ausgesprochen:

[37] außer dem Kreismittelpunkt
[38] außer den Geraden durch den Kreismittelpunkt
[39] „Die Aichfläche einhelliger Strahldistanzen besitzt durch jeden ihrer Punkte mindestens eine Stützebene.“ (Minkowski, 1896, 13)

Wenn irgend ein Punkt y gegeben ist, für welchen

$$D(y) \geq M,$$

so existiert mindestens eine lineare Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = 1,$$

so daß

$$\sum_{k=1}^{n} u_k y_k = 1$$

und für jeden Punkt x, dessen Koordinaten der Gleichung genügen, immer

$$D(x) \geq M$$

ist.

Im folgenden soll abkürzend $\sum_{k=1}^{n} u_k x_k$ mit (u, x) bezeichnet werden.
(Helly, 1921, 61)

In anderen Worten: Zu einem beliebigen Punkt y des endlichdimensionalen Raums R_n mit $D(y) \geq M$ existiert mindestens ein affiner Unterraum R_{n-1}, in dem der Punkt y enthalten ist und in dem für die Elemente x aus R_{n-1} gilt: $D(x) \geq M$. Im zweidimensionalen Fall bedeutet dies zum Beispiel, dass für jeden Kreis und jeden Punkt P auf oder außerhalb des Kreises mindestens eine Gerade existiert, die den Punkt P so enthält, dass sich Gerade und Kreis nicht schneiden. Im Fall, dass P auf dem Kreis liegt, ist die entsprechende Gerade die Tangente am Kreis in P.

2.6.b Die polare Abstandsfunktion (endlichdimensional)

Die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = 1$$

aus Hellys obigem Satz definiert einen affinen Unterraum in R_{n-1}. Dabei ist der Punkt $u = (u_1, ..., u_n)$ fest, während die Punkte x Elemente des affinen Unterraums sind. Es können nun aber auch umgekehrt die Punkte x fest gehalten werden, sodass man zu einem vorgegebenen affinen Unterraum den Punkt u erhält. Dies wird in der Geometrie bei der Konstruktion von Pol und Polare verwendet – woher Helly die Gleichung sicherlich kannte. In (Hesse, 1873)[40] finden wir z.B.:

> Man nennt zwei Punkte, deren Verbindungslinie den Kreis in einem Punktpaare schneidet, welches harmonisch[41] ist mit den beiden Punkten, *harmonische Pole des Kreises.* [...]
>
> $$9)\ \ (x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)-r^2=0$$
>
> Es ist dieses [...] die Gleichung einer geraden Linie, auf welcher der eine Pol variiert, wenn der andere unverändert bleibt; mit anderen Worten:
>
> *Der geometrische Ort des einem gegebenen Punkte zugeordneten, harmonischen Poles des Kreises ist eine gerade Linie.*
>
> Diese gerade Linie führt den Namen der *Polare* des gegebenen Punktes und der gegebene Punkt den Namen des *Poles* der geraden Linie. *Die Gleichung* 9) *stellt also die Polare des durch seine Koordinaten* x_1, y_1 *gegebenen Punktes dar.* (Hesse, 1873, 182)

Durch Hesses Gleichung 9) wird die Polare, welche die Punkte (x, y) enthält, zum Pol (x_1, y_1) bzgl. des Kreises mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r beschrieben. Wählen wir den Einheitskreis, d.h. $a = b = 0$ und $r = 1$, so erhalten wir Hellys Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = 1.$$

Somit kann die Beziehung zwischen u und x in dieser Gleichung als *polar* bezeichnet werden. Mit dieser Auffassung erscheint es dann ganz natürlich, dass Helly die Norm, die er für die u einführt, als „die zu $D(x)$ polare Abstandsfunktion“ (Helly, 1921, 62) bezeichnet. Diese wird definiert als

$$\Delta(u) = \overline{|(u, x)|}_{D(x)=1},$$

d.h. als „das Maximum der Summe (u, x) mit der Nebenbedingung $D(x) = 1$“ (Helly, 1921, 62). Aus dieser Definition ergibt sich, dass die zugehörige Polare im Fall $\Delta(u) = 1$ einer Tangenten entspricht:

> *Der durch die Gleichung* $(u, x) = 1$ *dargestellte* R_{n-1} *schneidet den Aichkörper, stützt ihn, oder hat keinen Punkt mit ihm gemein, je nach-*

[40] Die Erstauflage erschien schon 1865.
[41] Zu „harmonisch“ siehe (Hesse, 1873, 55ff).

> *dem*
>
> $$\Delta(u) \gtreqqless 1 \textit{ ist.}$$
>
> (Helly, 1921, 62)

Außerdem ist die Definition von $\Delta(u)$ äquivalent zur folgenden Charakterisierung, was sicherlich die Intention war: die kleinste Zahl $c \geq 0$, sodass gilt

$$\forall x \in R_n : |(u, x)| \leq c\, D(x).$$

Damit ist die „fundamentale Ungleichung“ (Helly, 1921, 62)

$$|(u, x)| \leq \Delta(u) D(x)$$

erfüllt, welche Helly für seine Lösungstheorie benötigt. Sie enthält die Schwarz- und Hölder-Ungleichung, die wir aus Schmidts und Riesz' Untersuchungen kennen, als Spezialfälle. Helly bemerkt, dass die Beziehung zwischen $D(x)$ und $\Delta(u)$ „umkehrbar“ ist:

> Nebenbei mag bemerkt werden, daß die Beziehung zwischen $D(x)$ und $\Delta(u)$ umkehrbar ist, d.h. es ist
>
> $$D(x) = \overline{|(u, x)|}_{\Delta(u)=1}.$$
>
> (Helly, 1921, 63)

Diese „Umkehrbarkeit“ ist im endlichdimensionalen Fall einfach zu zeigen, nicht jedoch im unendlichdimensionalen Fall, wie Helly später in seiner Arbeit bemerkt. Heute würden wir sagen: Dazu muss erst noch der Satz von Hahn-Banach bewiesen werden.

Schließlich verdeutlicht Helly die Verbindung zwischen seinen Konstruktionen und denen von Riesz: Er zeigt, dass die polare Abstandsfunktion von

$$D(x) = \left(\sum |x_k^p|\right)^{\frac{1}{p}}$$

tatsächlich gegeben ist durch

$$\Delta(u) = \left(\sum |u_k^{\frac{p}{p-1}}|\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

und erhält das folgende Resultat:

> Die fundamentale Ungleichung [...] liefert jetzt die als Höldersche Ungleichung bekannte Beziehung
>
> $$|(u,x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^p|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k^{\frac{p}{p-1}}|\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$
>
> (Helly, 1921, 65)

Nach der Erweiterung seines Ansatzes für komplexwertige Punkte in §2 überträgt Helly in §3 seine Begriffsbildungen auf den unendlichdimensionalen Raum R_ω.

2.6.c Der Raum R_ω von abzählbar unendlich vielen Dimensionen

Auch für den allgemeinen *unendlichdimensionalen* Folgenraum R_ω führt Helly ein entsprechendes geometrisches Vokabular ein:

> Als Punkt x eines Raumes R_ω von abzählbar unendlich viel Dimensionen sei jede Zahlfolge $x_1, x_2, x_3...$ bezeichnet, wobei die Größen x_i beliebige reelle oder komplexe Zahlen sein können. [...] Die Gesamtheit aller Punkte, für welche die Reihe
>
> $$(u,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$$
>
> konvergiert und für welche die Gleichung
>
> $$(u,x) = c$$
>
> besteht, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit, die mit $R_{\omega-1}$ bezeichnet werden soll. [...] Die Begriffe Gerade, Strecke, Ebene lassen sich ohne weiteres übertragen. (Helly, 1921, 66)

Durch die Gleichung

$$(u,x) = c$$

mit festem $u = (u_1, u_2, ...)$ wird hier also eine unendlichdimensionale Hyperebene $R_{\omega-1}$ definiert. Dann folgt die Einführung der „Abstandsfunktion“ $D(x)$ fast analog zum endlichdimensionalen Fall. Der einzige Unterschied ist, dass hier nicht notwendigerweise ganz R_ω den Definitionsbereich von $D(x)$ bildet, sondern ein linearer Unterraum. Anschließend führt Helly den „Begriff der Grenze“ ein, bei dem wir heute von Normkonvergenz sprechen würden:

> Mit Hilfe der Funktion $D(x)$ kann jetzt der Begriff der Grenze definiert werden: Es sei $x = \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}$ wenn $D(x - x^{(\nu)})$ durch genügend große Wahl von ν beliebig klein gemacht werden kann. Die Begriffe Umgebung, Häufungsstelle, Ableitung einer Punktmenge ergeben sich in bekannter Weise. (Helly, 1921, 67)

Schließlich folgt analog zum endlichdimensionalen Fall die Einführung der „polaren Funktion“ $\Delta(u)$ mithilfe der „oberen Grenze“, d.h. dem Supremum:[42]

$$\Delta(u) = \overline{|(u,x)|}_{D(x)=1}.$$

Damit gilt wieder die wichtige „fundamentale Ungleichung“:

$$|(u,x)| \leq \Delta(u)D(x).$$

Außerdem sind die obigen Normeigenschaften I und II erfüllt. Jedoch „muß $\Delta(u)$ nicht der Bedingung III genügen“ (Helly, 1921, 67). Die nicht erfüllte Definitheit ist auch in Riesz' Theorie der Grund, *Äquivalenzklassen* der L^p-Klassen zu betrachten. (Siehe hierzu z.B. Riesz' Einführung der L^2-Norm in Abschnitt 1.3.a.) Weiter stellt Helly, wie oben erwähnt, fest:

> Auch läßt sich im Falle unendlicher Dimensionszahl die völlige Reziprozität von $D(x)$ und $\Delta(u)$ nicht ohne weiteres behaupten [...]. (Helly, 1921, 68)

Auch der Satz über die gegenseitige Lage von Aichkörper und entsprechender Hyperebene gilt im unendlichdimensionalen Fall nur in abgeschwächter Form:

> *Der durch die Gleichung $(u,x) = c$ dargestellte $R_{\omega-1}$ schneidet den Körper $D(x) \leq M$ oder hat keine Punkte mit ihm gemein, je nachdem [ob] $M\Delta(u) > c$ oder $< c$ ist.* Über den Grenzfall $M\Delta(u) = c$ läßt sich hier im allgemeinen nichts aussagen. (Helly, 1921, 68)

2.6.d Die Fragestellung ändert sich

In Hellys §4 finden wir:

[42] Die Definition verlangt noch entsprechende Voraussetzungen an den Definitionsbereich, sodass die Funktion auch wohldefiniert ist.

Hellys Ausgangsproblem von 1921

> Es liege nun ein System unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten vor:
>
> $$(a^{(\nu)}, x) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, ...). \tag{1}$$
>
> Ferner sei eine konvexe Abstandsfunktion $D(x)$ gegeben, und es seien sämtliche $\Delta(a^{(\nu)})$ endlich, wenn $\Delta(u)$ die zu $D(x)$ polare Funktion bedeutet. (Helly, 1921, 69)

Die Koeffizientenfolgen $a^{(\nu)}$ und die rechten Seiten c_ν sind gegeben, x wird gesucht. Es wird gefordert, dass x bzgl. $D(x)$ und die $a^{(\nu)}$ bzgl. $\Delta(u)$ endlich sein sollen. Dies entspricht den Voraussetzungen in Schmidts und Riesz' Problemen, ist jedoch viel allgemeiner. In Schmidts und Riesz' Versionen waren die konvexen Abstandsfunktionen konkret gegeben: die l^2- bzw. die l^p-Norm. Helly führt dagegen eine *allgemeine* Norm mit zugehöriger dualer Norm ein, welche gemeinsam die wichtige ‚fundamentale Ungleichung' erfüllen. Aus dieser Ungleichung folgt die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung, welche wir in analoger Form aus den Untersuchungen von Schmidt und Riesz kennen – die folgende Ungleichung zwischen den rechten Seiten c_i und den gegebenen Koeffizienten:

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu c_\nu\Big| \leq M\Delta\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a^{(\nu)}\Big) \tag{B}$$

(Helly, 1921, 69). Es stellt sich die Frage, ob diese Bedingung auch hinreichend ist für die Existenz einer Lösung mit $D(x) \leq M$. Helly gibt zwei Beispiele, die zeigen, dass dies im Allgemeinen nicht so ist. Jedoch erhält Helly für den Fall, dass das gegebene System nur endlich viele Gleichungen enthält, folgendes Resultat:

> *Für ein endliches Gleichungssystem ist also die Bedingung (B) hinreichend für die Existenz eines Lösungssystems, das der Ungleichung [$D(x) \leq M_1$, wobei M_1 irgend eine Zahl $> M$ ist, A.W.] genügt.*
> (Helly, 1921, 73)

Spannend ist nun der Fall eines Systems mit unendlich vielen Gleichungen: Hier betrachtet Helly die Paarung (u, x) als „lineare Operation":[43]

[43] Helly bemerkt anschließend, dass aus II. die Stetigkeit von $L(u)$ folgt.

Wenn beachtet wird, daß

$$L(u) = (u, x)$$

eine an u ausgeübte lineare Operation darstellt, welche den Bedingungen

$$L(a^{(\nu)}) = c_\nu \ \ (\nu = 1, 2, 3...)$$

$$|L(u)| \leq M_1 \Delta(u)$$

genügt, so zeigt sich, daß das Auflösungsproblem des Systems (1) ein Spezialfall folgendes Problems ist:

Es soll im Bereich der unendlich vielen Variablen u_1, u_2, u_3... eine Operation $L(u)$ gesucht werden, die folgenden Forderungen genügt:

I. Die Forderungen der Linearität [...].

II. $|L(u)| \leq M_1 \Delta(u)$, wobei M_1 eine beliebige Zahl $> M$ ist.

III. $L(a^{(\nu)}) = c_\nu \ \ (\nu = 1, 2, 3...)$.

Kann eine Operation, die den gestellten Bedingungen genügt, gefunden werden, und kann dann ferner gezeigt werden, daß sich diese Operation in der Form

$$L(u) = (p, u), \ D(p) \leq M_1$$

darstellen läßt, so ist $x = p$ die gesuchte Lösung von (1).

(Helly, 1921, 74f)

Helly fragt hier also nicht mehr nach einer Lösungs*folge*, sondern nach einer beschränkten linearen Operation $L(u)$, d.h. nach einem stetigen linearen *Funktional* im heutigen Sinne. Das ist ein entscheidender Schritt in der Entwicklung des Konzepts unseres heutigen Dualraums. Es bleibt die Frage, ob jedes $L(u)$ mithilfe einer Folge dargestellt werden kann, d.h. ob immer eine Folge q mit $L(u) = (u, q)$ existiert.

2.6.e Nichtreflexivität

Helly gibt eine klare Antwort:[44]

[44]Helly fügt jedoch hinzu, dass es immer eine Darstellung der Form $L(u) = \lim_{\nu\to\infty}(u, q^{(\nu)})$ gibt.

> Im allgemeinen kann nicht behauptet werden, daß sich $L(u)$ in der Form
> $$L(u) = (u, q)$$
> darstellen läßt. (Helly, 1921, 80)

Als Beleg bringt Helly das erste[45] – wie wir heute sagen – *nichtreflexive* Beispiel an. Heute nennen wir einen normierten Raum X *reflexiv*, wenn er zu seinem Bidualraum isomorph bzgl. der dualen Paarung ist. Das Konzept reflexiver Räume findet sich erstmals bei Hahn (1927) („reguläre Räume“, siehe Abschnitt 2.8.d). In folgendem Zitat erfahren wir Hellys Motivation für die Untersuchung der Reflexivität:

> Die Frage, wann das gegebene Gleichungssystem Lösungen im gewöhnlichen Sinne besitzt, ist identisch mit der Frage, wann sich eine lineare Operation $L(u)$ durch *eine* lineare Form (q, u) darstellen läßt. Die bisherigen Bedingungen sind dazu nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt: [...] (Helly, 1921, 82)

Helly erstellt also nicht nur die Grundlage für Hahns Einführung des polaren Raums, welcher aus „Linearformen“ besteht, die auf Hellys linearen Operationen („Linearoperationen“, siehe unten) basieren, sondern auch für Hahns Einführung des Begriffs „regulärer Räume“.

Bevor wir zu Hahns Konzepten kommen, betrachten wir noch Hellys Resultat. Zum einen sehen wir darin die Ähnlichkeit zu Riesz’ Resultat: Ungleichung zwischen den rechten Seiten c_i und den gegebenen Koeffizienten $a^{(\nu)}$. Zum anderen taucht darin eine neue Lösungsform auf: eine „Linearoperation“, die im Allgemeinen nicht durch eine Folge dargestellt werden kann.

Hellys Resultat von 1921

> Es sei $D(x)$ irgend eine konvexe Abstandsfunktion, $\Delta(u)$ die polare Funktion und es werde vorausgesetzt, daß innerhalb der Punktmenge, für welche $\Delta(u)$ endlich ist, eine abzählbare Menge überall dicht sei.
>
> Für das Gleichungssystem
> $$(a^{(\nu)}, x) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, ...)$$

[45] Siehe (Pietsch, 2007, 30).

ist dann das Erfülltsein der Ungleichung

$$|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu c_\nu| \leq M\Delta\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a^{(\nu)}\right)$$

für beliebige Wahl der Zahlen n und λ_ν die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für jede Zahl $M_1 > M$ eine im Bereiche u definierte Linearoperation $L(u)$ existiert, für welche

$$L(a^{(\nu)}) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, ...)$$

$$|L(u)| \leq M_1\Delta(u).$$

Es existiert dann auch stets eine Punktfolge $q^{(h)}$, so daß

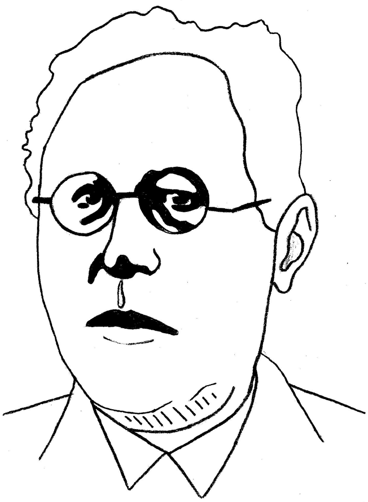
$$\lim_{h\to\infty}(a^{(\nu)}, q^{(h)}) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, ...)$$

$$|\lim_{h\to\infty}(u, q^{(h)})| \leq M_1\Delta(u).$$

(Helly, 1921, 81)

2.7 Hans Hahn und Stefan Banach

2.7.a Hans Hahn (1879-1934)



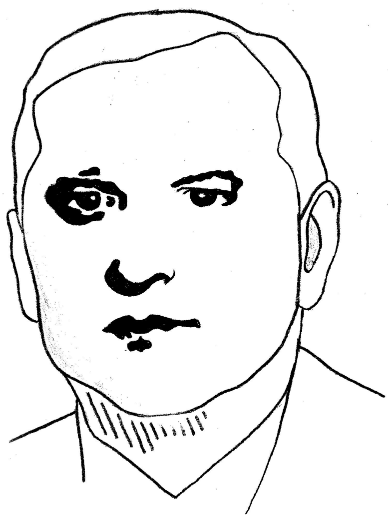
Hans Hahn wurde am 27. September 1879 in Wien geboren.[46] 1898 begann er in seiner Heimatstadt ein Studium der Rechtswissenschaften, wechselte nach einem Jahr jedoch zur Mathematik. Er studierte zunächst in Wien, dann in Straßburg, München und Göttingen und kehrte 1901 wieder nach Wien zurück, wo er unter G. von Escherich mit seiner Dissertation *Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale* den Doktorgrad erwarb. 1905 habilitierte er sich mit der Arbeit *Bemerkungen zur Variationsrechnung* ebenfalls in Wien. Anschließend wurde er Lehrbeauftragter in Wien und Innsbruck sowie von 1909 bis 1914 in Czernowitz als außerordentlicher Professor. Während des Ersten Weltkriegs diente er in der österreichisch-ungarischen Armee, wo er schwer verwundet wurde. Im Jahr 1916 lehrte er zunächst als außerordentlicher Professor in Bonn bis er 1917 einen Lehrstuhl erhielt. 1921 wurde er Nachfolger von G. von Escherich in Wien. Neben bedeutsamen Schülern, wie z.B. K. Menger, W. Hurewicz und K. Gödel, traf Hahn hier auf Helly, der ihn wesentlich bei seiner Arbeit zum Beweis des Fortsetzungssatzes und zur Einführung des polaren Raums beeinflusste. Monna schreibt:

[46] Die folgende biographische Skizze basiert auf Nachrufen von Mayrhofer (1934) und Menger (1934).

> Functional analysis could only start its rapid development after the so called theorem of Hahn-Banach had been proved. Fundamental work was done by H. Hahn in his paper *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, published in 1927 (Hahn, 1927). (Monna, 1973, 76)

Hahns mathematisches Interesse war breit gefächert. So forschte er in den Bereichen der Variationsrechnung, der Theorie der reellen Funktionen, der mengentheoretischen Geometrie, der Funktionalanalysis, der Maßtheorie, der harmonischen Analysis und der allgemeinen Topologie. Hahn ist jedoch auch wegen seines großen Interesses an philosophischen Themen bekannt. Zusammen mit P. Frank, O. Neurath und M. Schlick gründete er den Wiener Kreis und veröffentlichte einige grundlegende wissenschaftstheoretische Arbeiten. Er verstarb am 24. Juli 1934 an den Folgen einer Operation.

2.7.b Stefan Banach (1892-1945)



Zu Stefan Banach, der spätestens seit der Herausgabe seiner Monografie im Jahr 1932 (Banach, 1932) als Hauptbegründer der Funktionalanalysis angesehen werden kann, gibt es zahlreiche Literatur.[47] Wir stützen uns hier hauptsächlich auf einen Artikel von H. Steinhaus (1963), Banachs Förderer und Freund. Banach wurde am 30. März 1892 in Krakau geboren. Schon zu Schulzeiten waren seine

[47]Siehe insbesondere das Buch von Kałuża (1995).

mathematischen Fähigkeiten herausragend. Da sein Vater ihn nicht unterstützte (seine Mutter kannte er nicht) musste er mit 15 Jahren selbst für seinen Lebensunterhalt sorgen. Von 1911 bis 1913 studierte er Mechanik am Polytechnikum in Lemberg, wo er sein Vordiplom erwarb. Nach dem Ausbruch des Ersten Weltkriegs kehrte Banach nach Krakau zurück, wo er zwar Vorlesungen von S. Zaremba hörte, jedoch nur unregelmäßig und für kurze Zeit. Mathematisches Wissen erwarb er sich hauptsächlich im Eigenstudium. Seinen Lebensunterhalt verdiente er mit Nachhilfestunden. Eines Tages wurde er von Steinhaus entdeckt, der gerade darauf wartete, eine Stelle an der Lemberger Universität anzutreten:

> One summer evening, in 1916, as I was walking along the „Planty" (a park surrounding the city), I heard a conversation, or rather a few words. I was so struck by the words „the Lebesgue integral" that I came nearer to the bench on which the speakers were sitting and, then and there, I made their acquaintance. The speakers, Stefan Banach and Otto Nikodym, were discussing mathematics. They told me they had another chum – Wilkosz. It was not only mathematics that bound together those three young men, it was the hopeless situation of young people in the „fortress Cracow" (such was the official status of Cracow in those days of war), the insecurity of the future, the difficulty of earning one's living, the lack of contacts not only with foreign scientists, but even with the Polish ones – such was the atmosphere of this city in 1916. But all that did not prevent the three young men from spending a lot of time in cafés discussing mathematical problems admidst a noisy crowd. (Steinhaus, 1963, 7f)

Kurz darauf verfassten Banach und Steinhaus einen gemeinsamen Artikel (Banach und Steinhaus, 1918)[48]. Mit Steinhaus' Hilfe erhielt Banach von 1920 bis 1922 eine Assistenzstelle bei A. Łomnicki am Lehrstuhl für Mathematik in der Abteilung für Mechanik des Polytechnikums Lemberg. 1922 wurde Banach ohne vorherigen mathematischen Abschluss mit seiner siebten Veröffentlichung *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (Banach, 1922) an der Universität Lemberg promoviert. Noch im selben Jahr habilitierte er ebenfalls in Lemberg und wurde außerordentlicher Professor, 1927 dann ordentlicher Professor.

> The Lwów mathematicians understood at once that Banach would make Polish mathematics famous. (Steinhaus, 1963, 8)

[48] Diese erste Arbeit von Banach wurde 1917 von S. Zaremba präsentiert, jedoch aufgrund des Krieges erst 1918 veröffentlicht.

Ohne Zweifel wurde Banach mit seinen Arbeiten zur Funktionalanalysis kurzerhand berühmt. Der *Satz von Hahn-Banach* und der *Banachraum* sind nur zwei von vielen Benennungen. S. Ulam, ein Schüler Banachs, berichtet z.B. 1946 zur Verbreitung von Banachs Ideen, hier zitiert von Steinhaus:

> Banach's work has set off for the first time in a general case the success of geometrical and algebraic approach to the problems of linear analysis, reaching far beyond the rather formal discoveries of Volterra, Hadamard and their successors. His results embraced more general spaces than the works of such mathematicians as Hilbert, E. Schmidt, von Neumann, F. Riesz and others. Many American mathematicians, particularly the younger ones, have taken up the idea of geometrical and algebraic study of linear functional spaces, and this work is still (1946) going on vigorously and bringing about important results.
>
> (Steinhaus, 1963, 10)

1939 bis 1941 war Banach Dekan der Mathematisch-Physikalischen Fakultät an der Lemberger Universität. Steinhaus zufolge gab es die Lemberger Mathematikerschule erst mit Banachs Erscheinen. Zusammen mit Steinhaus gründete Banach 1929 die *Studia Mathematica* als wesentliches Publikationsorgan der Lemberger Schule. Die Mitglieder – unter ihnen auch Saks (siehe Unterkapitel 6.3) und Schauder (siehe Unterkapitel 7.8) – diskutierten oft im „Schottischen Café“ und hielten ihre Ergebnisse, hauptsächlich aus dem Bereich der Funktionalanalysis, im sogenannten *Schottischen Buch* fest. Viele Mitglieder der Lemberger Schule wurden während der Zeit der Besetzung Polens durch die Nationalsozialisten oder die sowjetischen Besatzer ermordet. Banach musste während der deutschen Besatzung sein Amt niederlegen, wurde aber 1944 wieder Mathematikprofessor. Am 31. August 1945 verstarb er an Lungenkrebs.

2.8 Hahns polarer Raum (1927)

Wie wir in Unterkapitel 2.2 und Abschnitt 2.7.a erfahren haben, arbeiteten Hahn und Helly in den Jahren nach 1921 beide in Wien – womit Hahn Gelegenheit hatte, sich in Hellys Konstruktionen hineinzudenken. So ist es nicht verwunderlich, dass, wie wir gleich sehen werden, viele der Konzepte aus Hahns Artikel *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen* (Hahn, 1927) auf Hellys Ideen aufbauen.

2.8.a Ausgangspunkt: Integralgleichungen

Wie auch bei den entsprechenden Untersuchungen von Schmidt, Riesz und Helly bildet bei Hahn ein lineares Gleichungssystem und die Frage, wie es zu lösen ist, den Ausgangspunkt. Hahn beschreibt, wie er anhand der Untersuchung von Integralgleichungen zweiter Art auf das Problem gestoßen ist:

> Bekanntlich sind die Integralgleichungen zweiter Art:
>
> $$\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$
>
> der Untersuchung erheblich leichter zugänglich, als die Integralgleichungen erster Art:
>
> $$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s).$$
>
> Es liegt das offenbar daran, daß wir die Auflösung der Gleichung
>
> $$\varphi(s) = f(s)$$
>
> vollständig beherrschen, und durch Hinzutreten des Zusatzgliedes
>
> $$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$
>
> die für die Gleichung $\varphi(s) = f(s)$ herrschenden durchsichtigen Verhältnisse nicht allzu sehr gestört werden. Es liegt also die Frage nahe: sei in irgendeinem linearen Raume, dessen Punkte wir mit x bezeichnen, ein lineares Gleichungssystem gegeben:
>
> $$u_y(x) = c_y,$$
>
> von dem wir wissen, daß es auflösbar ist; unter welchen Umständen wird man daraus auf die Auflösbarkeit des linearen Gleichungssystems:
>
> $$u_y(x) + v_y(x) = c_y$$
>
> schließen können? Im Falle der Integralgleichungen bedeutet x die Funktion $\varphi(s)$ und y durchläuft alle Werte des Intervalles $[a, b]$.
>
> (Hahn, 1927, 214)

Interessant ist Hahns allgemeine Formulierung des linearen Gleichungssystems:

$$u_y(x) = c_y.$$

Dabei sind die u_y *Funktionale* und nicht etwa Folgen oder Funktionen. Somit ist Hahns Gleichungssystem viel allgemeiner als die Systeme von Schmidt, Riesz und Helly. Im Fall einer Integralgleichung erster Art hat u_y die Form

$$u_y(\cdot) = \int_a^b K(y,t)(\cdot)(t)\,dt$$

und die Integralgleichung

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

wird als überabzählbares System der folgenden Gleichungen betrachtet, jeweils mit festem $y \in [a,b]$:

$$\int_a^b K(y,t)\varphi(t)\,dt = f(y), \qquad y \in [a,b].$$

Hahns Frage ist nun: Unter welchen Voraussetzungen folgt aus der Lösbarkeit des Systems

$$u_y(x) = c_y$$

die Lösbarkeit von

$$u_y(x) + v_y(x) = c_y?$$

Er beantwortet dies mithilfe des Begriffs der „Vollstetigkeit“:

> Als ausschlaggebend erweist sich dabei der in §3 auseinandergesetzte Begriff der *Vollstetigkeit* des Systems der Linearformen $v_y(x)$ in bezug auf das System der Linearformen $u_y(x)$, der eine direkte Verallgemeinerung des von Fr. Riesz (1916) eingeführten Begriffes der Vollstetigkeit einer linearen Transformation darstellt. (Hahn, 1927, 214)

In diesem Kapitel beschränken wir uns jedoch auf Hahns Untersuchungen zum System

$$u_y(x) = c_y.$$

2.8.b Der Fortsetzungssatz

Gemäß dem Titel seiner Arbeit führt Hahn in §1 einen *allgemeinen* normierten Raum ein:[49]

> Sei $\mathfrak{R}$ ein linearer Raum; seine Punkte bezeichnen wir mit x. Ist dann λ eine reelle Zahl, so kommt neben x auch der Punkt λx in $\mathfrak{R}$ vor; sind x_1 und x_2 Punkte von $\mathfrak{R}$, so kommt auch der Punkt $x_1 + x_2$ in $\mathfrak{R}$ vor.
>
> Sei in $\mathfrak{R}$ eine konvexe Maßbestimmung gegeben; d.h. es sei in $\mathfrak{R}$ eine Funktion $D(x)$ definiert mit folgenden Eigenschaften:
>
> 1. Es ist $D(x) \geq 0$, und zwar $= 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
> 2. $D(\lambda x) = |\lambda| D(x)$.
> 3. $D(x_1 + x_2) \leq D(x_1) + D(x_2)$.
>
> Die Zahl $D(x_1 - x_2)$ gilt dann als der Abstand der Punkte x_1 und x_2. Auf Grund dieser Maßbestimmung ist $\mathfrak{R}$ ein *metrischer* Raum.
>
> (Hahn, 1927, 215)

Sowohl Definition als auch Notation der „konvexen Maßbestimmung“ stimmen fast gänzlich mit Hellys konvexer Abstandsfunktion überein (siehe Abschnitt 2.6.a bzw. 2.6.c).[50] Man beachte, dass Hahn bei $\mathfrak{R}$ von einem linearen *Raum* spricht, obwohl es hier im Allgemeinen keine Punktkoordinaten gibt. Der mit der konvexen Maßbestimmung ausgestattete lineare Raum $\mathfrak{R}$ wird dann als „metrischer Raum“ (Hahn, 1927, 215) bezeichnet. Es folgen entsprechende Definitionen des „Grenzpunkts“ bzgl. der konvexen Maßbestimmung, d.h. unserer heutigen Normkonvergenz, der „Cauchyschen Folge“ und der „Vollständigkeit“, die im Folgenden immer vorausgesetzt werden soll. $\mathfrak{R}$ ist also ein Banachraum im heutigen Sinne. Weiter führt Hahn Funktionale im heutigen Sinne ein – „Linearformen“ (vergleiche Hellys „Linearoperationen“ in Abschnitt 2.6.d):

> Eine in einem linearen Raume $\mathfrak{R}$ definierte Funktion $f(x)$ heiße eine Linearform in $\mathfrak{R}$, wenn sie folgende Eigenschaften hat:
>
> 1. Für jeden Punkt x von $\mathfrak{R}$ und jedes reelle λ ist:
>
> $$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

[49] Hahn verweist auf (Hahn, 1922, 3) und (Banach, 1922).

[50] Es sei bemerkt, dass die Äquivalenz in Eigenschaft 1. unnötig gefordert wird. Die Rückrichtung folgt aus der Homogenität in Eigenschaft 2.

2. Für je zwei Punkte x_1 und x_2 von $\mathfrak{R}$ ist:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

3. Es gibt eine Zahl M, so daß für alle x von $\mathfrak{R}$:

$$|f(x)| \leq MD(x).$$

> Man erkennt sofort, daß es unter allen diese Ungleichung erfüllenden Zahlen M eine kleinste gibt. Sie werde als die Steigung der Linearform $f(x)$ bezeichnet.
>
> Da ferner aus den Eigenschaft 1., 2., 3. von $f(x)$ folgt:
>
> $$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M \cdot D(x_1 - x_2),$$
>
> so sieht man, daß jede Linearform in $\mathfrak{R}$ *gleichmäßig stetig* ist. Wir werden uns nun überzeugen, daß es in $\mathfrak{R}$ Linearformen gibt, die nicht identisch verschwinden. (Hahn, 1927, 215f)

Ähnlich zu Hellys Konstruktion der polaren Abstandsfunktion $\Delta(u)$ wird die „Steigung der Linearform $f(x)$" als die kleinste Zahl M mit $|f(x)| \leq MD(x)$ definiert. Hahn bezeichnet diese jedoch (noch) nicht als etwas ‚Polares' oder als „Maßbestimmung". Zunächst formuliert er sein Ziel: Hahn möchte zeigen, dass es zu jedem allgemeinen Banachraum nichttriviale Linearformen gibt. Das schließt an Hellys Suche nach Linearoperationen bzgl. allgemeinen normierten Folgenräumen an, worauf Hahn auch verweist: (Helly, 1921, 75ff). In diesem Abschnitt aus Hellys Artikel finden wir eine Vorversion von Hahns *Satz II*, mit dem gezeigt wird, dass eine Linearform, die auf einer Punktmenge von $\mathfrak{R}$ definiert ist, zu einer Linearform auf dem zugehörigen aufgespannten linearen Raum fortgesetzt werden kann. Der anschließende *Satz III* ist heute bekannt als Satz von Hahn-Banach und wird als einer der bedeutendsten Sätze in der Funktionalanalysis betrachtet:[51]

> **Satz III.** *Sei $\mathfrak{R}_0$ ein vollständiger linearer Teilraum von $\mathfrak{R}$ und $f_0(x)$ eine Linearform in $\mathfrak{R}_0$ der Steigung M. Dann gibt es eine Linearform $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ der Steigung M, die auf $\mathfrak{R}_0$ mit $f_0(x)$ übereinstimmt.* (Hahn, 1927, 217)

Eine Folgerung dieses Satzes zeigt die Existenz einer nichttrivialen Linearform bzgl. eines allgemeinen Banachraums:

[51] Es sei bemerkt, dass die Forderung der Vollständigkeit nicht notwendig ist. Vergleiche Banachs Version später in diesem Unterkapitel.

Satz IVa. *Ist der vollständige lineare Raum $\mathfrak{R}_0$ echter Teil von $\mathfrak{R}$, so gibt es eine nicht identisch verschwindende Linearform in $\mathfrak{R}$, die in allen Punkten von $\mathfrak{R}_0$ den Wert* 0 *hat.* (Hahn, 1927, 218)

2.8.c Der polare Raum

Nachdem Hahn die Existenz eines nichttrivialen Funktionals zu einem allgemeinen Banachraum gezeigt hat, führt er in §2 den zugehörigen *Raum* ein. Dabei ist es interessant, zu sehen, an welcher Stelle Hahn erstmals von einem ‚Raum' dieser Linearformen spricht.

> Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{S}$ aller Linearformen $u = f(x)$ im Raume $\mathfrak{R}$. (Hahn, 1927, 218)

Zunächst wird also die ‚Menge' aller Linearformen betrachtet, welche nun mit u statt mit $f(x)$ bezeichnet werden. Dies erinnert zum einen an Hellys polaren Unterraum der u mit $\Delta(u) < \infty$; zum anderen deutet diese Schreibweise eine Betrachtung der Linearformen als *Punkte* an (statt Operationen). Die Steigung der Linearformen bekommt nun ein Symbol, das uns wieder an Hellys Notation erinnert:

> Verstehen wir unter $\Delta(u)$ die Steigung der Linearform $u = f(x)$, so hat $\Delta(u)$ offenbar folgende Eigenschaften: [...] (Hahn, 1927, 218)

Hahn erklärt, dass $\Delta(u)$ sämtliche Eigenschaften einer konvexen Maßbestimmung erfüllt. Jetzt (erst) spricht Hahn von einem *Raum*. Dies lässt vermuten, dass es für Hahn einen Zusammenhang des Normbegriffs und des Raumkonzepts gibt.

> Durch $\Delta(u)$ ist also eine konvexe Maßbestimmung im Raume $\mathfrak{S}$ gegeben. Jeder Punkt u von $\mathfrak{S}$ bedeutet eine Linearform von x in $\mathfrak{R}$. Bezeichnen wir den Wert der Linearform u im Punkte x mit $B(u, x)$, so gilt die Ungleichung:
>
> $$|B(u, x)| \leq \Delta(u)D(x).$$
>
> (Hahn, 1927, 219)

Dies ist eine noch allgemeinere Form der ‚fundamentalen Ungleichung', die wir von Hellys Untersuchungen im Fall eines allgemeinen normierten Folgenraums kennen.

Wie auch in Hellys Fall ist diese Ungleichung der Schlüssel für die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung in Hahns Resultat. Hahn verwendet das Symbol

$$B(u, x),$$

wobei B wahrscheinlich für ‚Bild' oder ‚Bilinearform' steht, statt (u, x), möglicherweise um anzudeuten, dass wir es in diesem Fall mit einer allgemeineren Operation als der des konkreten Skalarprodukts zu tun haben. Unter Verwendung der Hölder-Ungleichung zeigt Hahn, dass der Raum $\mathfrak{S}$ vollständig ist. Jetzt (erst) erhält $\mathfrak{S}$ seinen Namen – mit Verweis auf Helly:

> Wir bezeichnen[52] $\mathfrak{S}$ als den zu $\mathfrak{R}$ *polaren* Raum, $\Delta(u)$ als die zu $D(x)$ *polare* Maßbestimmung. (Hahn, 1927, 219)

2.8.d Reguläre Räume

Direkt nach der Definition des polaren Raums, unseres heutigen Dualraums, führt Hahn Elemente des – wie wir heute sagen würden – *Bidualraums* ein:

> Setzt man in $B(u, x)$ für x einen festen Punkt $\overline{x}$ von $\mathfrak{R}$ ein, so wird $B(u, \overline{x})$ eine Linearform in $\mathfrak{S}$ (im allgemeinen ist aber nicht jede Linearform in $\mathfrak{S}$ in dieser Gestalt darstellbar). (Hahn, 1927, 219)

Mithilfe eines festen Punktes $\overline{x}$ aus $\mathfrak{R}$ kann eine Linearform in $\mathfrak{S}$, d.h. ein Element des Dualraums von $\mathfrak{S}$, d.h. ein Element des Bidualraums von $\mathfrak{R}$, dargestellt werden. Aber nicht jede Linearform in $\mathfrak{S}$ kann durch ein Element aus $\mathfrak{R}$ dargestellt werden. Wir würden heute sagen: Es gibt Banachräume, die nicht *reflexiv* sind. Helly hat dies schon gezeigt, indem er ein Beispiel eines nichtreflexiven Folgenraums gegeben hat. Allerdings hat er dieses Phänomen nicht *benannt*, im Gegensatz zu Hahn:

Hahns Ausgangsproblem von 1927

> Sei nun $\mathfrak{B}$ eine Punktmenge im Raume $\mathfrak{S}$ (d.h. eine Menge von Linearformen in $\mathfrak{R}$). Die zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Linearformen bezeichnen wir ausführlicher mit $u_y(x)$, wobei der Index y eine zu $\mathfrak{B}$ äquivalente Menge $\mathfrak{Y}$ durchläuft. Bedeuten dann die c_y reelle Zahlen, so ist:
>
> $$u_y(x) = c_y \quad \text{(für alle } y \text{ von } \mathfrak{Y}) \tag{5}$$

[52] Hier verweist Hahn auf (Helly, 1921, 62). In diesem Abschnitt führt Helly die Maximumsnorm $\Delta(u)$ als „die zu $D(x)$ *polare* Abstandsfunktion" ein.

> ein lineares Gleichungssystem in $\mathfrak{R}$. Sei $\mathfrak{S}_0$ der von $\mathfrak{B}$ aufgespannte lineare Teilraum von $\mathfrak{S}$. Wir werden uns insbesondere mit dem Falle befassen, daß jede Linearform $g(u)$ in $\mathfrak{S}_0$ die Gestalt hat: $g(u) = B(u, \overline{x})$, wo $\overline{x}$ einen Punkte von $\mathfrak{R}$ bedeutet. In diesem Falle heiße das Gleichungssystem (5) *regulär*. Hat insbesondere jede Linearform in $\mathfrak{S}$ die Gestalt $B(u, \overline{x})$, so ist jedes Gleichungssystem (5) regulär. Wir nennen dann den Raum $\mathfrak{R}$ *regulär*.
>
> (Hahn, 1927, 220)

Dies ist höchstwahrscheinlich die erste Einführung reflexiver Räume.[53] Mit diesem neuen Konzept gelangt Hahn dann zu folgendem Resultat:

Hahns Resultat von 1927

> **Satz VII**. Damit es einen dem regulären Gleichungssysteme (5) genügenden Punkt x von $\mathfrak{R}$ gebe, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl M, so daß für jede endliche Linearkombination $\lambda_1 u_{y_1} + \lambda_2 u_{y_2} + ... + \lambda_n u_{y_n}$ aus den u_y des Systems (5) die Ungleichung gelte:
>
> $$|\lambda_1 c_{y_1} + \lambda_2 c_{y_2} + ... + \lambda_n c_{y_n}| \leq M\Delta(\lambda_1 u_{y_1} + \lambda_2 u_{y_2} + ... + \lambda_n u_{y_n}).$$
>
> (Hahn, 1927, 220)

Wie auch in Schmidts, Riesz' und Hellys Fall finden wir hier die bekannte Ungleichung zwischen den rechten Seiten c_i und den gegebenen Koeffizienten.[54]

2.8.e Banachs Version

Zwei Jahre nach der Veröffentlichung von Hahns Fortsetzungssatz wurde dieser wiederum gezeigt – unabhängig von Hahns Arbeit. Wie wir aus Abschnitt 2.7.b

[53] Siehe (Pietsch, 2007, 30).

[54] Man beachte, dass hier im Gegensatz zu Hellys Problem, wo eine *Linearoperation* gesucht wird, die *Linearformen* u_y gegeben sind. Man könnte sagen, dass dies eine ‚duale' Form von Hellys Problem ist. Die Situation ist mit der Vertauschung der Exponenten in Riesz' $l^p/l^{\frac{p}{p-1}}$-Problem vergleichbar. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, entspricht Banachs Problemversion wiederum Hellys Form, sodass Banachs Version das duale Problem zu Hahns ist. Dadurch wird die Forderung der Regularität, wie Hahn sie stellen muss, bei Banach unnötig.

wissen, gründete Banach im Jahr 1929 zusammen mit Steinhaus die Zeitschrift *Studia Mathematica*. Direkt im ersten Band (elfter Artikel) zeigt Banach seine Version des Fortsetzungssatzes, womit wir dieses bedeutende Resultat heute als Satz von Hahn-Banach bezeichnen. Eine wichtige Vorarbeit, auf die auch Hahn verwiesen hat, liefert dabei Banachs Dissertation aus dem Jahr 1922 (Banach, 1922). Darin führt Banach „ensembles vectoriels normés“ ein, welche den Ausgangspunkt in seinem Artikel *Sur les fonctionelles linéaires* (Banach, 1929a) bilden:

> L'ensemble E est dit *vectoriel* lorsque pour ses éléments sont définies les opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel, conformément aux règles d'algèbre. Un ensemble vectoriel est dit *normé* lorsqu' à tout son élément x est attribué un nombre réel [sic], désigné par $\|x\|$ – la *norme* de cet élément –, de manière que: 1° $\|x\| > 0$ pour tout $x \neq \Theta$; $\|\Theta\| = 0$, le symbole Θ désignant l'élément *nul* (module d'addition), 2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ pour tout α réel, 3° $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$. La suite $\{x_n\}$ des éléments d'un ensemble vectoriel normé est, par définition, *convergente* vers l'élément x lorsque $\lim \|x_n - x\| = 0$. – Pour une exposition détailée voir (Banach, 1922).
> (Banach, 1929a, 211, Fußnote)

Banach führt weiter „les fonctionelles linéaires $f(x)$“ ein, die auf „un ensemble linéaire G ($\subset E$)“ definiert, additiv und stetig sein sollen. Dann definiert er die *Norm* dieser Funktionale:

> On prouve aisément qu'il existe alors un nombre $M > 0$, de sorte que
>
> $$|f(x)| \leq M\|x\|$$
>
> pour tout $x \subset G$. Le plus petit possible des nombres M est dit la *norme* de $f(x)$ dans G. Nous la désignons par $\|f\|_G$ ou bien simplement par $\|f\|$ si $G = E$. On a donc
>
> $$|f(x)| \leq \|f\|_G\|x\|. \qquad (x \subset G)$$
>
> (Banach, 1929a, 211)

Dies ist wieder die ‚fundamentale Ungleichung', wie wir sie schon von Helly und Hahn kennen. Es folgt wie bei Hahn (1927) eine Vorversion des Fortsetzungssatzes und schließlich die allgemeine Version:

> **Théorème 2.** *G étant un ensemble linéaire et $f(x)$ une fonctionelle linéaire définie dans G, il existe une fonctionelle linéaire $\varphi(x)$, définie*

dans E, telle que

$$\varphi(x) = f(x) \qquad (x \subset G)$$
$$\|\varphi\| = \|f\|_G.$$

(Banach, 1929a, 213)

Banach bemerkt, dass aus diesem Satz die Existenz eines nichttrivialen Funktionals für jedes „ensemble vectoriel normé“ folgt.

In §2 von Banachs Artikel finden wir dann das folgende Resultat mit der bekannten Ungleichung zwischen den rechten Seiten c_i und den gegebenen Koeffizienten:[55]

Banachs Resultat von 1929

> **Théorème 3**. Soient $\{x_n\}$ une suite des éléments de E, $\{c_n\}$ une suite numérique et M un nombre positif. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonctionelle linéaire $f(x)$, remplissant les relations
>
> 1. $f(x_n) = c_n \qquad (n = 1, 2, ...)$
> 2. $\|f\| \leq M$,
>
> est que l'on ait l'inégalité
>
> $$\left|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i\right| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right\|$$
>
> pour tout système fini des nombres réels λ_i.(Banach, 1929a, 213)

In einer Fußnote gibt Banach – als einzigen Verweis im Artikel, abgesehen von dem auf (Banach, 1922) – die folgende Information:

> Ce théorème a été démontré pour certains ensembles particuliers par M. F. Riesz (1913, 1910, 449) et dans quelques cas plus généraux par M. Helly (1912, 265). Notre démonstration est très simple et ne suppose sur l'ensemble E que ce qui est dit dans l'introduction. Notamment nous ne supposons pas que l'ensemble E soit complet ou séparable. (Banach, 1929a, 213, Fußnote)

[55] Man beachte, dass in Banachs *Théorème 3* im Gegensatz zu Hahns Resultat das Funktional f gesucht wird, während die „éléments x_n de E“ gegeben sind. In Hahns Version sind die Funktionale u_y gegeben und es wird nach einem „Punkt x von $\mathfrak{R}$“ gesucht.

Die Untersuchungen von Helly (1921) und Hahn (1927) waren Banach also unbekannt, dennoch gelangte er zu denselben Ergebnissen – noch mehr: E muss nicht vollständig oder separabel sein.

2.9 Abschließende Bemerkungen

Zusammenfassend können wir die historische Entwicklung des Konzepts unseres heutigen Dualraums zu einem normierten Raum in der Funktionalanalysis in drei Schritte einteilen:

1. zwei *konkrete* normierte duale Folgenräume l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$ (Riesz),
2. zwei *allgemeine* normierte duale Folgenräume mit der Entdeckung der Nichtreflexivität (Helly) und
3. ein allgemeiner normierter Raum und sein Dualraum, bestehend aus allen zugehörigen *Funktionalen* (Hahn und Banach).

2.9.a Riesz: zwei konkrete normierte duale Folgenräume

Bei Riesz (1913) bildet das folgende lineare Gleichungssystem den Ausgangspunkt:[56]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

Die gegebenen Koeffizienten $\mathfrak{a}_i$ sollen aus dem Folgenraum $l^{\frac{p}{p-1}}$ stammen, die gesuchten Lösungen x aus l^p.[57] Diese Voraussetzungen werden wegen der Hölder-Ungleichung gefordert:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p > 1)$$

[56] Eine ausführlichere Darstellung von Riesz' (und Schmidts) Untersuchungen findet sich in Kapitel 1.

[57] Für $p = 2$ ergibt sich das Problem von Schmidt (1908). Außerdem findet sich die ‚Integralversion' davon in (Riesz, 1910):

$$\int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

(Riesz, 1910, 474), wobei die Koeffizientenfunktionen $f_i(x)$ aus der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ stammen sollen und die Lösungsfolgen $\xi(x)$ aus $[L^p]$.

(Riesz, 1913, 43). Die Hölder-Ungleichung wird benötigt, um die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung für das Problem zu zeigen, welche in der folgenden Ungleichung zwischen den rechten Seiten c_i und den gegebenen Koeffizienten $\mathfrak{a}_i$ besteht:

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i| \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{i_1}^{n} \mu_i a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

(Riesz, 1913, 61). Man kann also behaupten, dass Riesz auf die spezielle (duale) Beziehung zwischen den beiden Folgenräumen l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$ gestoßen ist, während er nach einer Lösbarkeitsbedingung für sein lineares Gleichungssystem gesucht hat.[58]

2.9.b Helly: zwei allgemeine normierte duale Folgenräume

Bei Helly (1921) ist der Ausgangspunkt das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(a^{(\nu)}, x) = c_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, ...).$$

Dabei sollen die Lösungsfolgen x endlich bzgl. einer beliebigen konvexen Abstandsfunktion $D(x)$ sein und die Koeffizientenfolgen $a^{(\nu)}$ endlich bzgl. der zugehörigen polaren Abstandsfunktion $\Delta(u)$. Damit sind sowohl die Koeffizienten als auch die Lösungen *Folgen* wie bei Riesz, jedoch sind die Voraussetzungen viel allgemeiner. Wir würden heute sagen: Helly führt *allgemeine duale Normen* ein, statt die konkreten l^p- und $l^{\frac{p}{p-1}}$-Normen zu verwenden. Analog zu Riesz' Untersuchungen gehen die Voraussetzungen, jeweils endlich bzgl. den dualen Normen zu sein, aus der wichtigen ‚fundamentalen Ungleichung' hervor, die für die Lösbarkeitsbedingung gebraucht wird:

$$|(u, x)| \leq \Delta(u) D(x)$$

(Helly, 1921, 62). Allerdings – und das ist ein entscheidender Punkt – kann Helly Beispiele angeben, in denen das Problem keine „Lösung im gewöhnlichen Sinne" besitzt, d.h. keine Lösungs*folge*. Stattdessen erhält Helly das Resultat, dass die Lösbarkeitsbedingung, d.h. die folgende Ungleichung zwischen den rechten Seiten c_i und den gegebenen Koeffizienten:

$$|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu c_\nu| \leq M\Delta \left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a^{(\nu)} \right)$$

[58] In (Riesz, 1910) finden sich die beiden dualen Funktionenräume $L^p(a, b)$ und $L^{\frac{p}{p-1}}(a, b)$.

(Helly, 1921, 81), eine stetige *Linearoperation* $L(u)$ liefert, für die gilt:

$$L(a^{(\nu)}) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, ...).$$

Damit ist also ein neues Problem formuliert, bestehend aus *Folgen* und *Funktionalen*. Dieses stellt den Ausgangspunkt für den nächsten Schritt dar.

2.9.c Hahn und Banach: ein allgemeiner normierter Raum und sein Dualraum

Bei Hahn (1927) und Banach (1929a) finden wir schließlich die allgemeinste Form der linearen Gleichungssysteme, die wir von Riesz und Helly kennen, für den normierten Fall:

$$u_y(x) = c_y$$

(Hahn, 1927, 220). Hier soll eine Lösung x Element eines beliebigen normierten Raums $\mathfrak{B}$ sein und die u_y sollen Linearformen auf $\mathfrak{B}$ sein, d.h. Elemente des zugehörigen polaren Raums $\mathfrak{S}$. Damit haben wir zum einen beliebige Elemente, zum anderen zugehörige Funktionale. Banach untersucht die duale Version des Problems: $f(x_n) = c_n$ (Banach, 1929a, 213), wobei die x_n gegeben sind und das Funktional f gesucht ist. Wie in Riesz' und Hellys Untersuchungen wird auch hier gefordert, dass die beiden ‚Elementarten' die ‚fundamentale Ungleichung' erfüllen:

$$|B(u, x)| \leq \Delta(u)D(x)$$

(Hahn, 1927, 219) bzw. entsprechend (Banach, 1929a, 211). Für den Fall reflexiver Räume erhält Hahn die Lösbarkeitsbedingung zwischen den rechten Seiten c_i und den gegebenen Koeffizienten:

$$|\lambda_1 c_{y_1} + \lambda_2 c_{y_2} + ... + \lambda_n c_{y_n}| \leq M\Delta(\lambda_1 u_{y_1} + \lambda_2 u_{y_2} + ... + \lambda_n u_{y_n})$$

(Hahn, 1927, 220) bzw. entsprechend (Banach, 1929a, 213).

Abschließend fassen wir zusammen: Die Folgenräume l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$ sind durch ihre Rollen in der Hölder-Ungleichung verbunden, bei der die Exponenten vertauscht werden können, sodass man diese Beziehung als *dual* bezeichnen kann. Die *Dualität der beiden Folgenräume l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$* entwickelte sich durch Hellys Beitrag in ein Konzept von *Raum und zugehörigem Dualraum aus Funktionalen*, bei dem die zugehörigen Normen die ‚fundamentale Ungleichung' erfüllen.

3 Köthes Auflösungskriterium

3.1 Einleitung

In den vorigen beiden Kapiteln haben wir die Entwicklung einer Lösungstheorie für Gleichungssysteme des folgenden Typs dargestellt:

$$\ell(x_i) = c_i \;\; i = 1, 2, ...$$

Dabei ist das stetige lineare Funktional ℓ Element des Dualraums X' eines normierten Raums X, aus dem die x_i stammen, womit die rechten Seiten c_i Elemente des zugrundeliegenden Körpers sind. Diese Form, wie wir sie bei Banach (1929a) und in dualer Form bei Hahn (1927) finden, enthält die Versionen von Schmidt (siehe Abschnitt 1.5.a), Riesz (siehe Abschnitte 1.6.d und 1.6.f) und Helly (siehe Abschnitt 2.6.d) als Spezialfälle und ist die allgemeinste Form dieses Typs im normierten Fall. In diesem Kapitel wollen wir die Arbeiten von Köthe und Toeplitz untersuchen, die sich diesem Problem im Fall linearer Folgenräume stellten, die nicht notwendigerweise mit einer Metrik ausgestattet sind. Wie wir in Kapitel 2 erfahren haben, basiert Hahns Arbeit bzgl. beliebigen normierten Räumen auf Hellys Konzept für normierte Folgenräume. Wir werden sehen, dass auf ähnliche Weise auch Köthes und Toeplitz' Ergebnisse eine Grundlage für Dieudonnés Untersuchungen bilden: Neben Köthes und Toeplitz' Konzept dualer *Folgenräume* werden wir mit Dieudonné auf duale Systeme *beliebiger Vektorräume* stoßen.

Zunächst wollen wir Köthes und Toeplitz' Konzept dualer Folgenräume von 1934 (Köthe und Toeplitz, 1934) vorstellen, welches, wie gesagt, im Rahmen linearer Folgenräume besteht, die nicht notwendigerweise mit einer Metrik ausgestattet sind – im Folgenden kurz: ‚metrikfreier Fall'. Dabei soll zum einen der Unterschied zwischen diesem Konzept und dem dualer Räume im normierten Fall aufgezeigt werden. Zum anderen wollen wir Köthes und Toeplitz' schwache Versionen einiger Definitionen vorstellen, die wir aus dem normierten Fall kennen. Weiter betrachten wir die Folgearbeiten von Köthe (1938, 1939) mit einem „Auflösungskriterium" für das obige Problem im Fall metrikfreier Folgenräume. Köthes Auflösungskriterium wird von Dieudonné bei der Formulierung seines *Théorème 12* in (Dieudonné,

1942) zitiert. Die Verbindung werden wir näher erläutern. Dieudonnés Arbeit ist aus mindestens zwei Gründen für die Untersuchung des Dualitätsbegriffs in der Funktionalanalysis interessant: Zum einen führt Dieudonné duale Systeme beliebiger Vektorräume ein; zum anderen enthält Dieudonnés *Théorème 12* zwei Bedingungen, die zwei ‚Entwicklungszweige' vereinen: erstens eine Bedingung, die auf Köthes Auflösungskriterium basiert, womit, wie wir sehen werden, *Théorème 12* mit den in den vorigen Kapiteln dargestellten Entwicklungen verbunden ist; zweitens eine Bedingung, die uns auf den in Teil II behandelten Entwicklungszweig dualer Operatoren führt.

Bei unseren Betrachtungen der Arbeiten von Köthe, Toeplitz und Dieudonné liegt der Schwerpunkt wieder auf dem Aspekt der Dualität. Für ausführlichere Informationen zu den Theorien von Köthe, Toeplitz und Dieudonné verweisen wir bspw. auf Pietsch (2007).

3.2 Otto Toeplitz und Gottfried Köthe

3.2.a Otto Toeplitz (1881-1940)

Otto Toeplitz wurde am 1. August 1881 in Breslau geboren.[59] Nach dem Abitur begann er in Breslau bei J. Rosanes und R. Sturm Mathematik zu studieren. Er widmete sich fast ausschließlich der algebraischen Geometrie, worüber er 1905 promovierte. 1906 ging er nach Göttingen, wo er sich im folgenden Jahr mit der Arbeit *Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen* habilitierte und anschließend als Privatdozent lehrte. Behnke schreibt zu Toeplitz' Göttinger Zeit:

> Toeplitz gehörte bald zum engeren Kreis der Hilbert-Schüler. Er begann auf dem Gebiete der Integralgleichungen und der Gleichungen mit unendlich vielen Veränderlichen mitzuarbeiten. Zeit seines Lebens, also etwa 30 Jahre, hat er sich dann weiterhin auf diesem Gebiete betätigt. Der Enzyklopädieartikel über Integralgleichungen ist von ihm gemeinsam mit Ernst Hellinger verfaßt, und in den letzten 10 Jahren seines Lebens hat er mit Gottfried Köthe über Räume von unendlich vielen Veränderlichen wissenschaftlich gearbeitet.
> (Behnke und Köthe, 1963, 3)

Hellingers und Toeplitz' Enzyklopädieartikel (Hellinger und Toeplitz, 1927) wird uns in dieser Arbeit immer wieder begegnen. Zu Toeplitz' Arbeit mit Köthe kommen wir in Unterkapitel 3.3. Neben Hilberts Einfluss auf Toeplitz berichtet Behnke auch vom damaligen Wirken F. Kleins, das Toeplitz veranlasste, sich schon früh mit didaktischen Fragen zu beschäftigen. Außerdem traf Toeplitz in Göttingen auf Minkowski. 1913 wurde er außerordentlicher Professor in Kiel, 1920 dann ordentlicher Professor. Hier entstand 1927 der gemeinsame Enzyklopädieartikel mit Hellinger. Behnke berichtet jedoch auch von Toeplitz' Engagement in der Lehre der Didaktik zu dieser Zeit, das ihn auch veranlasste sich der Geschichte der Mathematik zuzuwenden, und weiter:

> In diesen Kieler Jahren hat dann Toeplitz sein pädagogisches Können zu der ganz erstaunlichen Höhe gebracht, die seinen Ruf als Vortragender begründete und besonders auffiel, wenn es sich um einen Vortrag vor einem Laienpublikum handelte. (Behnke und Köthe, 1963, 3)

1928 folgte Toeplitz einem Ruf nach Bonn als Nachfolger von Study.

> Und nun folgt die Zeit, die in jeder Beziehung den Höhepunkt seines Lebens darstellt. (Behnke und Köthe, 1963, 5)

[59] Die folgenden Informationen stammen aus Behnkes Nachruf auf Toeplitz in (Behnke und Köthe, 1963). Der zweite Teil dieses Artikels besteht aus Köthes Würdigung von Toeplitz' mathematischem Werk.

Behnke erzählt vom aufblühenden Bonn, wo Toeplitz eine große Hörerschaft verantwortungsvoll betreute, von lebhaften Gedankenaustauschen mit Kollegen, unter ihnen Hausdorff, Philosophen, Historikern und Nationalökonomen, von der Herausgabe der sich weit verbreitenden Einführung in die Mathematik *Von Zahlen und Figuren* (Rademacher und Toeplitz, 1930) und von seiner großartigen Lehre zur Didaktik.

> 1931 knüpfte er an seine Untersuchungen aus seiner frühen Göttinger Zeit an und veröffentlicht gemeinsam mit Gottfried Köthe wieder einen Aufsatz zur Theorie der linearen Koordinatenräume von unendlich vielen Veränderlichen. (Behnke und Köthe, 1963, 6)

Behnke erklärt, warum Toeplitz die Arbeit mit Köthe nicht fortsetzen konnte:

> Viele weitere Projekte waren verfolgt und ihre Ausführung in Angriff genommen [...] als der schleichende Beginn der deutschen Katastrophe ihn, den Juden, sogleich packte. Schon Ostern 1933 wurde er seines Amtes enthoben. Da er als älterer Professor seine wirtschaftliche Existenz damit zunächst noch nicht völlig verlor, blieb er in Deutschland. Doch hielt es ihn jetzt nur noch wenig bei der wissenschaftlichen Arbeit. (Behnke und Köthe, 1963, 7)

Stattdessen unterstützte Toeplitz seine jüdischen Glaubensgenossen, wobei er viel Leid und Ungerechtigkeit zu Gesicht bekam.

> Trotzdem harrte er hier aus, bis mit den Ereignissen vom 8. November 1938 die Nacht völlig über Deutschland hereingebrochen war. Dann wanderte er nach Palästina aus und wurde dort Referent in der Hochschulverwaltung. Doch sein Leben ging jetzt schnell zur Neige. Er starb am 15. Februar 1940. (Behnke und Köthe, 1963, 7f)

3.2.b Gottfried Köthe (1905-1989)

Gottfried Maria Hugo Köthe wurde am 25. Dezember 1905 in Graz geboren.[60] 1923 begann er an der Grazer Universität ein Chemiestudium, wechselte jedoch schnell zur Mathematik und Philosophie und erwarb 1927 seinen Doktorgrad. Seine Dissertation, betreut von T. Rella und R. Daublewsky von Sterneck, trug den Titel *Beiträge zu Finslers Grundlegung der Mengenlehre*. Anschließend arbeitete Köthe für ein Jahr bei Finsler in Zürich, wo er auch Vorlesungen von Weyl besuchte, bis ihn ein Stipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft nach Göttingen führte. Dort besuchte er Vorlesungen von E. Noether und van der Waerden. Aufgrund eines Empfehlungsschreibens von Noether ernannte ihn schließlich Toeplitz 1929/30 zu seinem Assistenten in Bonn. Dort beschäftigte er sich nach seinen bisherigen Untersuchungen im Bereich der Ringtheorie nun gemeinsam mit Toeplitz mit topologischen Vektorräumen. Köthe und Toeplitz arbeiteten auch nach Köthes Jahr in Bonn weiterhin zusammen und veröffentlichten 1934 eine bedeutende Arbeit zu dualen Folgenräumen (Köthe und Toeplitz, 1934), die wir in Unterkapitel 3.3 untersuchen werden. Köthe und Toeplitz blieben zwar auch nach der Entziehung von Toeplitz' Lehrstuhls (siehe Abschnitt 3.2.a) in Kontakt, dennoch veröffentlichte Köthe die nächsten beiden Arbeiten zu ihrer gemeinsamen Theorie allein (Köthe, 1938, 1939). Später schrieb Köthe über seine Zusammenarbeit mit Toeplitz, hier zitiert von Weidmann (1990):

[60] Die folgenden Informationen basieren auf Artikeln von Tillmann (1990) und Weidmann (1990).

> Wir haben dann gemeinsam die Theorie der vollkommenen Räume entwickelt, ein Gegenstück zur Theorie der Banachräume. Beide Theorien sind nach dem zweiten Weltkrieg in der allgemeinen Theorie der topologischen linearen Räume aufgegangen, die durch die französischen Mathematiker des Bourbakikreises ihre endgültige Gestalt erhielt, nachdem die allgemeine Topologie als Hilfsmittel genügend weit entwickelt war. Seit diesen ersten Arbeiten mit Toeplitz bin ich im wesentlichen diesem Problemkreis treu geblieben, der auch als das Gebiet der Funktionalanalysis bezeichnet wird und der methodisch als Durchdringung und Fortentwicklung der klassischen Analysis mit topologisch-algebraischen Begriffen gekennzeichnet werden kann.
>
> (Weidmann, 1990, 3)

Im Jahr 1930 arbeitete Köthe als Assistent von Behnke und L. Neder in Münster, wo er 1931 eine rein algebraische Habilitationsschrift abschloss und 1937 zum außerordentlichen Professor ernannt wurde. 1940 wechselte er nach Gießen, wo er 1943 zum Ordinarius ernannt wurde. Nach dem Zweiten Weltkrieg wurde Köthe zum Professor an der neueröffneten Universität Mainz ernannt, wo er erst Leiter des Mathematischen Instituts, dann Dekan und schließlich Rektor von 1954 bis 1956 wurde. Zu diesem Zeitpunkt fokussierte sich Köthes Forschung fast gänzlich auf den Bereich der Funktionalanalysis. 1957 wurde Köthe Leiter des neu gegründeten Instituts für Angewandte Mathematik in Heidelberg, wo er 1960 den ersten Teil seiner Abhandlung *Topologische lineare Räume* veröffentlichte. Noch im selben Jahr wurde er Rektor der Universität Heidelberg bis 1961. 1965 erhielt Köthe den Lehrstuhl für Angewandte Mathematik an der Universität Frankfurt. Mit dem Wunsch nach mehr Zeit zur Verfassung des zweiten Teils seiner Abhandlung entschloss er sich 1971 in den Ruhestand zu treten und veröffentlichte den zweiten Band schließlich 1979, der wie auch schon der erste Band große Resonanz fand. Am 30. April 1989 verstarb Köthe vollkommen unerwartet und bis zum letzten Tag wissenschaftlich aktiv.

3.3 Köthes und Toeplitz' duale Folgenräume (1934)

In ihrer Arbeit *Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen* von 1934 (Köthe und Toeplitz, 1934) setzen sich Köthe und Toeplitz das Ziel, eine allgemeine Theorie für Folgenräume zu entwickeln, welche die folgenden Untersuchungen vereint:

- Hilberts Theorie der quadratischen bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen innerhalb des Raums l^2 (bzw. σ_2 in der Notation von Köthe und Toeplitz) in (Hilbert, 1906b),
- Hellingers und Toeplitz' Untersuchungen in (Hellinger und Toeplitz, 1906) der „Gesamtheit $\Sigma(\sigma_2)$ aller derjenigen linearen Transformationen (Matrizen) [...], bei denen für jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus σ_2 die Summen [$y_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}x_q$, A.W.] alle konvergieren und die transformierte Stelle $\mathfrak{y}$ wieder zu σ_2 gehört"(Köthe und Toeplitz, 1934, 194) – „Stellen" $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, ...)$ bezeichnen Folgen –,
- Hellingers und Toeplitz' Untersuchungen des Raums ω aller Folgen und des Raums φ aller Folgen mit endlich vielen Gliedern ungleich Null in (Hellinger und Toeplitz, 1906) sowie
- Toeplitz' Untersuchungen zum Raum σ_∞ aller beschränkten Folgen (heute bezeichnet mit l^∞) in (Toeplitz, 1911).

3.3.a Duale und vollkommene Räume

Köthes und Toeplitz' Vorgehen wurde von zwei interessanten Entdeckungen geprägt: Zum einen gibt es einen linearen Folgenraum, dessen zugehörige lineare Transformationen in sich selbst keinen Ring[61] bilden. Zum anderen gibt es einen „maximalen Matrizenring",[62] der nicht als ein System $\Sigma(\lambda)$ aller linearen Transformationen eines linearen Folgenraums λ in sich aufgefasst werden kann. Diese Feststellungen führten Köthe und Toeplitz zur Einführung der folgenden Definitionen „dualer Räume" und „vollkommener Räume":

> Ist λ irgendein linearer Koordinatenraum, d.h. eine Teilmenge von ω mit den formalen Linearitätseigenschaften, so verstehen wir unter seinem *dualen* Raum λ^* die Menge der Stellen $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, ...)$, für die $\sum_n u_n x_n$ stets *absolut* konvergiert, was auch $\mathfrak{x}$ [$= (x_1, x_2, ...)$, A.W.] für eine Stelle aus λ ist. Ist der duale Raum des dualen Raumes mit λ

[61] „Eine Menge von unendlichen Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{pq}), p, q = 1, 2, 3, ...$, heiße ein *Matrizenring*, wenn für je zwei Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ der Menge die Summen $\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}b_{\alpha q}$ alle absolut konvergieren, wenn Summe und Produkt zweier Matrizen der Menge wiederum der Menge angehören und wenn die Regeln der Addition, das assoziative Gesetz der Multiplikation und die distributiven Gesetze gelten." (Köthe und Toeplitz, 1934, 205) Köthe und Toeplitz geben in §6 von (Köthe und Toeplitz, 1934) ein Beispiel eines linearen Folgenraums, dessen zugehörige linearen Transformationen in sich selbst keinen Ring bilden.

[62] „Ein Matrizenring M heiße *maximal*, wenn er nicht echter Teil eines anderen Matrizenringes ist." (Köthe und Toeplitz, 1934, 210) Köthe und Toeplitz geben in §9 von (Köthe und Toeplitz, 1934) ein Beispiel eines maximalen Matrizenrings, der nicht als System $\Sigma(\lambda)$ aller linearen Transformationen eines linearen Folgenraums λ in sich aufgefasst werden kann.

> identisch, so nennen wir λ *vollkommen.* Wir betrachten ferner diejenigen linearen Transformationen [$y_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}x_q$, A.W.], bei denen für alle Stellen $\mathfrak{x}$ aus λ die unendlichen Summen rechterhand sämtlich *absolut* konvergieren und die transformierte Stelle $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, ...)$ wieder eine Stelle aus λ ist; das System aller dieser Transformationen heiße $\Sigma(\lambda)$. (Köthe und Toeplitz, 1934, 194f)

Köthes und Toeplitz' Definition eines dualen Raums bezieht sich also auf lineare Folgenräume („lineare Koordinatenräume"). Allerdings verweisen Köthe und Toeplitz in ihrer Einleitung auf Hausdorffs und Banachs Konzept des „konjugierten Raums" eines allgemeinen normierten Raums. Dies wollen wir kurz vorstellen: Wie in Unterkapitel 2.8 erläutert, führte Hahn 1927 den polaren Raum aller stetigen linearen Funktionale bzgl. eines allgemeinen normierten Raums ein. Eben dieses Konzept finden wir bei Hausdorff (1932) und Banach (1932):

> Sie [alle „Linearformen", die auf dem linearen metrischen Raum E_x definiert sind, A.W.] bilden [...] einen [...] *vollständigen* linearen metrischen Raum E_u, den zu E_x *konjugierten* Raum.
> (Hausdorff, 1932, 299)

> Etant donné un espace E du type (B), l'espace $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E est évidemment aussi du type (B). Nous appellerons $\overline{E}$ l'espace *conjugué* avec E. (Banach, 1932, 188)

Im Fall von Folgenräumen können manche dieser stetigen linearen Funktionale („Linearformen", „fonctionnelles linéaires") – jedoch nicht alle, wie Helly gezeigt hat (siehe Abschnitt 2.6.e) – durch eine Folge dargestellt werden:

$$\sum_n u_n(\cdot)_n.$$

Diese Funktionale sind stetig und beschränkt, wenn

$$|\sum_n u_n x_n| \leq \left\| \sum_n u_n(\cdot)_n \right\| \, \|x\| = \|u\| \, \|x\|$$

für alle Elemente x des entsprechenden Folgenraums und die zugehörigen Normen gilt. Köthe und Toeplitz fordern dagegen nun *absolute* Konvergenz. Dadurch erhalten sie Resultate, die im Fall der gewöhnlichen Konvergenz nicht gelten.[63] Zum

[63]Siehe §16 in (Köthe und Toeplitz, 1934).

Beispiel ist, wenn λ vollkommen ist, $\Sigma(\lambda)$ ein maximaler Matrizenring.[64]

Man beachte, dass immer, wenn wir im Folgenden Köthes und Toeplitz' *dualen Raum* mit Hausdorffs und Banachs *konjugiertem Raum* vergleichen wollen, die Identifizierung einer Folge $\mathfrak{u}$ mit der Abbildung $\sum_n u_n(\cdot)_n$ gedacht werden muss. Neben Köthes und Toeplitz' Konzept des dualen Raums ist auch ihre Definition eines vollkommenen Raums speziell für Folgenräume gemacht. Somit kann der duale Raum des dualen Raums eines linearen Koordinatenraums λ mit λ identisch sein – und nicht nur isomorph dazu wie im Fall des konjugierten Raums.

3.3.b Dualer Raum und konjugierter Raum

Köthe und Toeplitz schreiben zum bestehenden Unterschied zwischen ihren Untersuchungen im metrikfreien Fall und denen von Hausdorff und Banach (und denen von Schmidt, Riesz, Helly und Hahn, siehe Kapitel 1 und 2):

> Herr F. Hausdorff und kurz darauf auch Herr St. Banach haben eine Reihe von Untersuchungen verwandter Tendenz von F. Riesz, H. Hahn, E. Helly, I. Schauder mit eigenen Untersuchungen zu einer geschlossenen Theorie zusammengefaßt, die sich ein von dem unsrigen wesentlich verschiedenes Ziel setzt. Bei Hausdorff und Banach wird der lineare Raum λ abstrakt durch Linearitätsaxiome definiert [...] – insoweit sind unsere Koordinatenräume als spezielle Fälle darin enthalten –, und dazu wird, ebenfalls abstrakt durch Axiome, in dem Raum eine Metrik aufgestellt, womit ein Begriff des Limes und der Stetigkeit gegeben sind. Es werden sodann die linearen stetigen Funktionen des Raumes als Elemente seines ‚konjugierten' Raumes betrachtet; speziell für σ_∞ wird gezeigt, daß sein konjugierter Raum nicht identisch ist mit dem oben definierten dualen Raum σ_∞^*; bei den Koordinatenräumen braucht also dualer und konjugierter Raum nicht übereinzustimmen. Im Gefolge davon sind also auch die abstrakten linearen, stetigen Transformationen von λ in sich nicht mit unserem System $\Sigma(\lambda)$ identisch; daß das System *dieser* abstrakten linearen stetigen Transformationen einen Ring bildet, ist kein Problem, sondern versteht sich von selbst. Nur kann daraus für unsere Theorie nicht gefolgert werden.
>
> (Köthe und Toeplitz, 1934, 195)

Dass der konjugierte Raum im Sinne von Hausdorff und Banach von σ_∞ nicht mit Köthes und Toeplitz' definiertem dualen Raum σ_∞^* übereinstimmt, kann bewiesen

[64]Siehe §§ 6,7,9 in (Köthe und Toeplitz, 1934).

werden, indem gezeigt wird, dass es Funktionale („Linearformen“ in der Schreibweise von Hausdorff, „Linearfunktionen“ in der von Köthe und Toeplitz) bzgl. σ_∞ gibt, die nicht mithilfe einer entsprechenden Folge dargestellt werden können, vergleiche bspw. (Hausdorff, 1932, 305). Dass das System aus Hausdorffs und Banachs abstrakt eingeführten stetigen linearen Transformationen einen Ring bildet, folgt aus ihrer Normdefinition, die ja von Köthe und Toeplitz nicht verwendet wird.

Köthe und Toeplitz entwickeln eine Bedingung, unter der dualer und konjugierter Raum im Sinne der oben genannten Identifikation übereinstimmen. Interessant bzgl. der Beziehung der beiden Räume ist dabei der Gebrauch der Wörter „Linearfunktion“ und „Linearform“:[65]

> **Definition 5.** *Eine Linearfunktion, d.h. eine Funktion $u(\mathfrak{x})$, die jeder Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ eine komplexe Zahl u in der Weise zuordnet, daß*
>
> $$u(r\mathfrak{x}) = r \cdot u(\mathfrak{x}), u(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{x}) + u(\mathfrak{y})$$
>
> *ist, heiße **stetig**, wenn für jede Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ mit Limes aus λ gilt:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} u(\mathfrak{x}^{(n)}) = u(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)}).$$
>
> *Der von den stetigen Linearfunktionen gebildete lineare Raum heiße der zu λ **konjugierte Raum** λ'.*
>
> **Satz 6.** *Ist $\lambda \geq \varphi$ und normal, so stellt jede „Linearform“ $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$, wo $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus λ^* ist, eine stetige Linearfunktion dar und umgekehrt; in diesem Sinne ist $\lambda' = \lambda^*$.* (Köthe und Toeplitz, 1934, 200)

In einer Fußnote machen Köthe und Toeplitz noch einmal auf den unterschiedlichen Gebrauch der Begriffe „Linearfunktion“ und „Linearform“ aufmerksam und betonen den Unterschied zwischen ihrem Konzept und dem von Hausdorff und Banach:

> Hausdorff gebraucht das Wort „Linearform“ für den unserer „Linearfunktion“ analogen Begriff seiner Theorie. Da wir zwischen dem Ausdruck $\sum u_i x_i$ und der abstrakten Linearfunktion sorgfältig unterscheiden müssen, sind wir genötigt, die Hausdorffsche Benennung umzustürzen. (Köthe und Toeplitz, 1934, 200, Fußnote)

[65] $\lambda \geq \varphi$ bedeutet, dass λ den Raum φ aller Folgen mit endlich vielen Gliedern ungleich Null enthält. Ein Folgenraum heißt *normal*, wenn er mit jedem Element $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, ...)$ auch das Element $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, ...)$ mit $|y_i| \leq |x_i|$ enthält.

Im Sinne Köthes und Toeplitz' ist eine „Linearform" $\sum u_i x_i$ also eine spezielle „Linearfunktion". Wie bereits erläutert, gibt es Elemente in Hausdorffs und Banachs konjugiertem Raum, d.h. „Linearfunktionen", die nicht mithilfe einer Folge, d.h. als „Linearform" dargestellt werden können.

3.3.c Schwache Konvergenz

Für ihre Untersuchungen im Rahmen metrikfreier Räume benötigen Köthe und Toeplitz einen Konvergenzbegriff. Diesen finden wir in

> **Definition 1.** *Die Folge von Stellen* $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ *eines Raumes* λ *heiße* ***konvergent****, wenn* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ *für jede Stelle* $\mathfrak{u}$ *aus* λ^* *existiert.*
> (Köthe und Toeplitz, 1934, 197)

Im Fall eines normierten Raums X und seines zugehörigen Dualraums X' aus stetigen linearen Funktionalen x' formulieren wir heute: Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *schwach konvergent* in X, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x'(x_n)$$

im zugrunde liegenden Körper $\mathbb{K}$ für alle x' in X' existiert. Schwache Konvergenz wird also *indirekt* mittels allen entsprechenden Funktionalen definiert – bzw. in Köthes und Toeplitz' Fall mittels allen entsprechenden Folgen des dualen Raums. Köthe und Toeplitz sprechen hier (noch) nicht von ‚schwacher Konvergenz', auch wenn diese Bezeichnung seinerzeit schon verwendet wurde (siehe z.B. Abschnitt 1.6.d zu Riesz' Definition). Das Konzept der schwachen Konvergenz finden wir wieder in Köthes späteren Arbeiten, zu denen wir jetzt kommen.

3.4 Köthes Auflösungskriterium für lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten (1938 und 1939)

3.4.a Ein Blick auf den normierten Fall

Mit Köthes und Toeplitz' Konstruktionen von 1934 sollte die Grundlage einer Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten im Rahmen metrikfreier Folgenräume geschaffen werden. In seinem Artikel *Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* von 1938 (Köthe, 1938) formuliert Köthe das Problem:

Köthes Ausgangsproblem von 1938

> Es sollen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit eines Gleichungssystems
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \qquad i = 1, 2, ..., \tag{1}$$
>
> durch eine Stelle $\mathfrak{x}$ eines vorgegebenen vollkommenen Raumes abgeleitet werden. (Köthe, 1938, 193)

Köthes Idee ist die folgende:

> Man deutet die Matrix $\mathfrak{A}$ des Gleichungssystems als Matrix einer linearen Transformation [$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$, A.W.], die einen geeignet zu wählenden linearen Raum λ von Stellen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, ...)$ in einen Teil eines anderen Raumes μ abbildet, und versucht durch das Studium dieser linearen Transformationen Aufschluß über die Lösungsverhältnisse zu bekommen. (Köthe, 1938, 193)

Dabei bieten sich nach Köthe für λ und μ „in natürlicher Weise" (Köthe, 1938, 193) die vollkommenen Räume im Sinne von (Köthe und Toeplitz, 1934) an. Diese ‚natürliche' Heranziehung findet sich auch bei Hahn (1927), der reguläre Räume voraussetzt, um eine Lösbarkeitsbedingung für sein allgemeines lineares Gleichungssystem im normierten Fall zu erhalten (siehe Unterkapitel 2.8). In seiner Einleitung verweist Köthe auf die Entwicklung der Lösungstheorie im normierten Fall: Er erklärt, dass sich die entsprechende Lösbarkeitsbedingung, welche auf das Rangkriterium im endlichdimensionalen Fall zurückgeführt werden kann (siehe Abschnitt 1.7.a), im Rahmen eines unendlichdimensionalen Problems erstmals bei Schmidt (1908) findet (siehe Unterkapitel 1.5). Schmidt untersuchte das Problem

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c},$$

mit $\lambda = \mu = l^2$ und erhielt die folgende Lösbarkeitsbedingung, hier in Köthes Schreibweise:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i\Big| \leq m \Big|\sum_{i=1}^{n} u_i \mathfrak{a}_i\Big|.$$

Dabei ist $\mathfrak{a}_i$ die i-te Zeile von $\mathfrak{A}$. Diese Bedingung „ist nun in der Theorie der linearen metrischen Räume auf Räume sehr allgemeiner Natur übertragen worden" (Köthe, 1938, 194). Köthe verweist beispielhaft auf Banach (1932). Köthes Ziel besteht darin, analoge Beziehungen für den metrikfreien Fall zu finden. Zur besseren Verständlichkeit seiner Untersuchungen stellt er die Idee des Beweises vor, der zeigt, dass die obige Bedingung im normierten Fall hinreichend für die Lösbarkeit des Gleichungssystems ist (Köthe, 1938, 194). Dies wollen wir hier verfolgen, wieder unter Verwendung von Köthes Schreibweise:

Ausgangspunkt ist das lineare Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}.$$

Dabei soll die Transformation $\mathfrak{A}$ zur Vereinfachung eine lineare Transformation $\lambda \to \lambda$ sein (die Aussage gilt auch für $\lambda \to \mu$), wobei λ ein vollkommener Folgenraum ist. Mit λ^* soll der zugehörige duale Raum bezeichnet werden. Sei nun $\mathfrak{u}$ ein Element aus λ^*, dann gilt durch Multiplikation mit u von links:

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{c}.$$

Diese Beziehung lässt sich auch so interpretieren, dass es eine Abbildung x gibt, die jedem $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$, d.h. einem Element aus λ^*, eine Zahl $\mathfrak{u}\mathfrak{c}$ zuordnet:

$$x(\mathfrak{u}\mathfrak{A}) = \mathfrak{u}\mathfrak{c}.$$

Wenn nun die Ungleichung

$$|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i| \leq m |\sum_{i=1}^{n} u_i \mathfrak{a}_i|$$

erfüllt ist, ergeben sich für die Abbildung x die folgenden Eigenschaften:

- Die Zuordnung ist eindeutig.[66] D.h. durch x wird auf dem Raum $\nu \leq \lambda^*$ aller $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ eine Linearform (Köthes Formulierung) definiert.
- Die Abschätzung bedeutet die Stetigkeit dieser Linearform in ν im Sinne der Norm von λ^*.

Mit dem Fortsetzungssatz (Satz von Hahn-Banach) gilt: Jede auf einem Teilraum (hier ν) eines linearen normierten Raums (hier λ^*) erklärte, dort im Sinne der Norm stetige Linearform kann auf dem ganzen Raum fortgesetzt werden. Ist λ^*

[66] Seien u_1 und u_2 aus λ^* mit $u_1 A = u_2 A$. Dann gilt $|u_1 c - u_2 c| = |(u_1 - u_2)c| \leq m|(u_1 - u_2)A| = m|u_1 A - u_2 A| = 0$ (jeweils entsprechende Normen).

außerdem separabel, so kann jede auf ganz λ^* erklärte stetige Linearform $x(u)$ durch ein Element $\bar{\mathfrak{x}}$ aus λ dargestellt werden:

$$x(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}\bar{\mathfrak{x}} = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \overline{x}_j,$$

für alle $\mathfrak{u}$ aus λ^*. Die Folge $\bar{\mathfrak{x}}$ ist Lösung des Gleichungssystems.

Köthes nächstes Ziel besteht also darin, einen Fortsetzungssatz für metrikfreie Räume zu finden bzw. zu konstruieren.[67]

3.4.b Köthes schwache Topologie

Analog zur Definition der Konvergenz in metrikfreien Räumen in (Köthe und Toeplitz, 1934) führt Köthe einen metrikfreien Beschränktheitsbegriff ein und greift den Konvergenzbegriff aus (Köthe und Toeplitz, 1934) wieder auf, diesmal unter der Bezeichnung „schwache Konvergenz“:

> Eine Menge M von Stellen $\mathfrak{x}$ aus λ heißt *beschränkt*, wenn zu jedem $\mathfrak{u}$ aus λ^* eine reelle Zahl $k(\mathfrak{u}) \geq 0$ gehört, so daß $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leq k(\mathfrak{u})$ ist für alle $\mathfrak{x}$ aus M. Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ von Stellen des vollkommenen Raumes λ heißt *schwach konvergent*, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ für jedes $\mathfrak{u}$ aus λ^* existiert.
> (Köthe, 1938, 195f)

Dadurch sind Beschränktheit und Konvergenz also jeweils indirekt mittels allen Elementen $\mathfrak{u}$ des zugehörigen dualen Raums λ^* definiert. Jetzt kann Köthe seine *schwache Topologie* einführen:

> **Definition 1.** *N sei eine beschränkte Menge des dualen Raumes λ^*. Ist $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus λ, so werde $\sup_{\mathfrak{b}\in N} |\mathfrak{b}\mathfrak{x}|$ mit $(\mathfrak{x})_N$ bezeichnet. Die Menge N heiße* ***begrenzt****, wenn für jede schwach gegen $\mathfrak{o}$ konvergente Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ $(\mathfrak{x}^{(n)})_N$ gegen Null geht.*

> **Definition 2.** *M sei eine begrenzte Menge aus $\lambda^*, \varepsilon > 0, \mathfrak{x}$ eine Stelle aus λ. Die Gesamtheit aller Stellen $\mathfrak{y}$ aus λ, die der Ungleichung*
>
> $$(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})_M < \varepsilon$$

[67] Köthe muss sich außerdem um die Bedingung der Separabilität kümmern. Dies werden wir hier jedoch nicht verfolgen.

> *genügen, bezeichnen wir als eine* ***schwache Umgebung*** *der Stelle* $\mathfrak{x}$*.*
> *Die Gesamtheit aller dieser Umgebungen heiße die* ***schwache Topologie*** *von* λ*.*
>
> Die schwache Topologie von λ erfüllt die vier Hausdorffschen Umgebungsaxiome. (Köthe, 1938, 196)

Anschließend führt Köthe die „starke Topologie“ ein, die sich auch schon in (Köthe und Toeplitz, 1934) findet. Diese unterscheidet sich von der Definition der schwachen Topologie dadurch, dass statt begrenzten Mengen beschränkte Mengen verwendet werden.

3.4.c Köthes Resultat von 1938

Mit diesen Definitionen gelingt es Köthe, eine metrikfreie Version des Fortsetzungssatzes zu zeigen. In Kurzform lautet dieser:[68]

> Jede Linearfunktion, die auf einem Teilraum von λ erklärt und dort im Sinne der starken oder schwachen Topologie stetig ist, kann auf ganz λ stetig fortgesetzt werden. (Köthe, 1938, 194f)

Damit erhält Köthe schließlich das folgende Resultat:

Köthes Resultat von 1938

> **Satz 1.** $\mathfrak{A}$ *bilde den vollkommenen Raum* λ *in einen Teilraum des vollkommenen Raumes* μ *ab,* $\mathfrak{c}$ *sei eine Stelle aus* μ*.* (1) *ist dann und nur dann durch ein* $\mathfrak{x}$ *aus* λ *lösbar, wenn durch*
>
> $$x(\mathfrak{A}'\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$
>
> *auf* $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ *eine im Sinne von* λ^* *schwach top. stetige Linearform eindeutig erklärt ist, d.h. wenn es in* λ *eine begrenzte Menge* M *gibt, so daß für alle* $\mathfrak{b}$ *aus* μ^*
>
> $$|\mathfrak{b}\mathfrak{c}| \leq (\mathfrak{A}'\mathfrak{b})_M$$
>
> *gilt.* (Köthe, 1938, 204)

[68] Siehe (Köthe, 1938, 199ff) für die Ausformulierung des Satzes.

Zum einen erkennen wir die Ähnlichkeit zwischen Köthes Lösbarkeitsbedingung und der Lösbarkeitsbedingung im normierten Fall – vergleiche obige Formulierung von Schmidts Problem:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i\right| \leq m\left|\sum_{i=1}^{n} u_i \mathfrak{a}_i\right|.$$

Zum anderen erfahren wir im Resultat, dass das Erfülltsein der Ungleichung

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{c}| \leq (\mathfrak{A}'\mathfrak{b})_M$$

äquivalent ist zur Existenz der Linearform x in obiger Beweisskizze. Dies werden wir wieder aufgreifen, wenn wir Dieudonnés Sätze untersuchen. Anschließend zeigt Köthe fast[69] denselben Satz für separable Räume (*Satz 2* (Köthe, 1938, 204)).

3.4.d Köthes Resultat von 1939

Ein Jahr später macht es sich Köthe in seinem Artikel *Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen* (Köthe, 1939) zur Aufgabe, sein Resultat von 1938 zu „verschärfen und auf endgültige Gestalt [zu] bringen“ (Köthe, 1939, 719). Dazu führt er eine noch ‚bessere‘ schwache Topologie ein:

> Die wesentliche Idee ist die Einführung einer neuen Topologie in den vollkommenen Räumen, der auf den beschränkten, schwach kompakten Mengen des dualen Raumes aufgebauten k-Topologie. Sie ist einfacher als die in (Köthe, 1938) betrachtete schwache Topologie, und es läßt sich zeigen, daß sie die schärfste Topologie ist, für die noch gilt, daß eine auf einem linearen Teilraum erklärte, im Sinne der Topologie stetige Linearfunktion stets durch eine Stelle des dualen Raumes erzeugt wird.
> (Köthe, 1939, 719)

Analog zu seinen Konstruktionen in (Köthe, 1938) definiert Köthe die k-Topologie auf folgende Weise:[70]

> Auf die beschränkten, schwach kompakten Mengen des dualen Raumes λ^* läßt sich nach dem Muster von (Köthe, 1938) eine Topologie in λ aufbauen.

[69] Man ersetze „schwach“ durch „stark“ und „begrenzt“ durch „beschränkt“.

[70] Köthe nennt eine Menge M aus Elementen eines vollkommenen Folgenraums λ „schwach bzw. stark kompakt“ in λ, wenn jede unendliche Teilmenge von M eine schwach bzw. stark konvergente Teilfolge enthält. Es sei außerdem an Köthes Notation von 1938 erinnert: $(\mathfrak{x})_K$ bedeutet $\sup_{\mathfrak{u}\in K} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}|$.

Definition 1. K sei eine beschränkte, schwach kompakte Menge aus λ^*, $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus λ. Die Gesamtheit aller Stellen $\mathfrak{y}$ aus λ, die der Ungleichung

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})_K = \sup_{\mathfrak{u} \in K} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| < \varepsilon$$

genügen, bezeichnen wir als eine **k-Umgebung der Stelle** $\mathfrak{x}$. Die Gesamtheit dieser Umgebungen erzeugt die **k-Topologie** von λ.

Der Nachweis der Umgebungsaxiome bietet keine Schwierigkeiten.
(Köthe, 1939, 724)

Es gelingt Köthe wieder, einen entsprechenden Fortsetzungssatz zu zeigen, womit er schließlich sein „Auflösungskriterium“ beweisen kann, das *Satz 1* und *Satz 2* aus (Köthe, 1938) als Spezialfälle enthält:

Köthes Resultat von 1939

Satz 6 (Auflösungskriterium). $\mathfrak{A}$ *bilde den vollkommenen Raum* λ *auf einen Teilraum des vollkommenen Raumes* μ *ab,* $\mathfrak{c}$ *sei eine Stelle aus* μ*.*

Die Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$$

ist dann und nur dann durch ein $\mathfrak{x} \,\varepsilon\, \lambda$ *lösbar, wenn durch*

$$x(\mathfrak{A}'\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{v} \,\varepsilon\, \mu^*,$$

auf ganz $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ *eine im Sinne von* λ^* *k-top. stetige Linearfunktion eindeutig erklärt ist, d.h. wenn es in* λ *eine beschränkte, schwach kompakte Menge* K *gibt, so daß für alle* $\mathfrak{v}$ *aus* μ^*

$$|\mathfrak{v}\mathfrak{c}| \leq (\mathfrak{A}'\mathfrak{v})_K$$

gilt. (Köthe, 1939, 730)

Wie wir sehen werden verweist Dieudonné (1942) auf dieses Resultat, dem wir uns nun zuwenden wollen.

3.5 Jean Dieudonné (1906-1992)

Jean Alexandre Eugène Dieudonné wurde am 1. Juli 1906 in Lille geboren.[71] Schon in der Schulzeit begann Dieudonnés mathematische Karriere, die er engagiert und diszipliniert verfolgte und die im Laufe seines Lebens eine Größenordnung annahm, die wir hier auch näherungsweise nicht einfangen können. Wir beschränken uns auf die folgenden Stationen: Im Jahr 1924 begann Dieudonnés Mathematikstudium an der *École Normale Supérieure*, wo er Freundschaft mit Cartan und Weil schloss und 1931 bei P. Montel über Nullstellen komplexer Polynome promovierte. Nach einem Jahr in Bordeaux und vier Jahren in Rennes lehrte er von 1937 bis 1952 in Nancy. Mit 34 Jahren wurde er zum ordentlichen Professor ernannt. 1952 ging er für sieben Jahre in die USA, zunächst an die University of Michigan, dann an die Northwestern University. Zurück in Frankreich beteiligte er sich an der Gründung des *Institut des Hautes Études Scientifiques* (I.H.É.S., Bures-sur-Yvette), wo er mit Grothendieck zusammenarbeitete. 1964 erhielt er einen Lehrstuhl in Nizza, wo er von 1964 bis 1968 Dekan war und 1970 den Internationalen Mathematikerkongress ausrichtete. Den Rest seines Lebens zog er sich zurück, um Bücher zu schreiben. Dies waren die Hauptstationen von Dieudonnés mathematischem Leben, wobei wir zahlreiche Zwischenaufenthalte und Gastprofessuren nicht erwähnt haben. Dieudonné verfasste über 300 Artikel, 26 Bücher, außerdem einen großen

[71] Die folgende biographische Skizze basiert auf einem Bericht von Cartier (2005), der auf die Biographie von Dugac (1995) verweist.

Teil der Abhandlungen der Bourbaki-Gruppe (Bourbaki, 1998), die er zusammen mit Cartan, Chevalley, Delsarte, de Possel und Weil gründete, sowie acht Bände der Reihe *Éléments de Géométrie Algébrique* zusammen mit Grothendiek (Grothendiek und Dieudonné, 1967). Seine mathematischen Beiträge lassen sich sehr grob in die Bereiche Funktionalanalysis, Ringtheorie und Gruppentheorie einteilen. Der in dieser Arbeit untersuchte Beitrag (Dieudonné, 1942) stammt aus Dieudonnés Zeit in Nancy:

> The theory of normed spaces was developed around 1920 by Banach and his school. Later on, around 1935, Toeplitz and Köthe studied in depth spaces consisting of sequences of numbers. Using the general notion of locally convex space introduced by von Neumann, Dieudonné extended in 1942 to this broader framework the results of Banach, mainly the duality, the weak convergence and the perturbation of operators. (Cartier, 2005, 3)

In seinem Ruhestand wandte sich Dieudonné der Geschichte der Mathematik zu und schrieb unter anderen die Arbeiten *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900* (Dieudonné, 1978), *History of functional analysis* (Dieudonné, 1981) und *A history of algebraic and differential topology 1900-1960* (Dieudonné, 1989). Am 29. November 1992 verstarb er im Alter von 86 Jahren.

3.6 Dieudonnés Resultat (1942)

3.6.a Ein vollkommen duales System

Dieudonnés Vorhaben in seinem Artikel *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* von 1942 (Dieudonné, 1942) lautet wie folgt:[72]

> Nous nous proposons, dans ce travail, de donner un exposé d'ensemble de la théorie de la *dualité* dans les espaces vectoriels topologiques [...]. Cette théorie s'est développée autour du problème de la résolution des *équations linéaires*, c'est-à-dire de la forme $f(x) = y_0$, où l'inconnue x est un élément d'un espace vectoriel E, le second membre y_0 un élément d'un espace vectoriel F (distinct ou non de E), et f une *application linéaire* donnée de E dans F [...]. (Dieudonné, 1942, 107)

[72] Dieudonné bemerkt, dass sich eine Zusammenfassung der Untersuchungen in (Dieudonné, 1942) schon in den beiden Artikeln (Dieudonné, 1940b) und (Dieudonné, 1940a) findet. Er verweist auf eine rege Korrespondenz mit Cartan bzgl. dieser Theorie.

Man beachte, dass der Problemtyp

$$f(x) = y_0$$

mit

$$f : E \to F$$

von allgemeinerer Form ist als der, den wir in diesem Kapitel untersucht haben. Hier ist f ein allgemeiner Operator, wogegen in (siehe Einleitung 3.1)

$$\ell(x_i) = c_i$$

ℓ ein Funktional

$$\ell : E \to \mathbb{K}$$

ist. Die historische Entwicklung des Problems, das Dieudonné beschreibt, vollzieht sich für den normierten Fall u.a. mit/in den Arbeiten von Riesz (1910, 1916), Banach (1929b, 1932), Schauder (1930c) und Hausdorff (1932). Diese werden wir in Teil II dieser Arbeit untersuchen. Auf der Suche nach Lösbarkeitsbedingungen entwickelten die genannten Autoren nach und nach das Konzept allgemeiner *dualer Operatoren.* Bei Banach (1929b) finden wir bspw. für einen stetigen linearen Operator $U : E \to E'$, wobei E und E' zwei beliebige Banachräume sind:

> Une opération $U(x)$ fait correspondre à toute fonctionnelle linéaire Y définie dans E' une fonctionnelle $X = Y[U(x)]$ définie dans E, aussi linéaire. [...] Cette correspondance entre X et Y est une nouvelle opération linéaire
>
> $$X = \bar{U}(Y)$$
>
> définie dans le domaine des fonctionnelles linéaires Y, le contredomaine étant contenu dans l'ensemble des fonctionnelles linéaires X. [...]
>
> Nous l'appellerons *l'opération adjointe* à l'opération $y = U(x)$.
>
> (Banach, 1929b, 235)

Wir werden sehen, dass Dieudonné auf analoge Weise ein Konzept für duale Operatoren im metrikfreien Fall einführt.

Mit dem Vorhaben, so allgemein wie möglich zu arbeiten, führt Dieudonné ein duales System zweier *beliebiger* Vektorräume ein, die nicht notwendigerweise mit einer Topologie ausgestattet sein müssen:

> Considérons deux espaces vectoriels E, E' (qui peuvent être éventuellement munis de topologies; lorsqu'il en est ainsi, il est fait abstraction

> de ces topologies dans ce paragraphe). Supposons donnée dans le produit $E \times E'$ une *forme bilinéaire* $(x, x') \to B(x, x')$ (c'est-à-dire une application de $E \times E'$ dans le corps $\mathbb{C}$, linéaire par rapport à chacune des variables $x \in E$, $x' \in E'$); supposons en outre que cette forme satisfasse aux deux conditions suivantes:
>
> ($\mathrm{D_I}$) *La relation «quel que soit $x \in E, B(x, x') = 0$» entraîne $x' = 0$.*
>
> ($\mathrm{D_{II}}$) *La relation «quel que soit $x' \in E', B(x, x') = 0$» entraîne $x = 0$.*
>
> Nous désignerons par $B_{x'}$ la forme linéaire $x \to B(x, x')$ définie dans E, par B'_x la forme linéaire $x' \to B(x, x')$ définie dans E'.
>
> (Dieudonné, 1942, 112)

Im Gegensatz zu den Konstruktionen im normierten Fall, die wir in den vorigen Kapiteln verfolgt haben, führt Dieudonné ein gänzlich *symmetrisches* duales System ein, wobei E' ein beliebiger weiterer Vektorraum neben E ist und nicht notwendigerweise der Dualraum von E. Dieudonné zeigt jedoch (Dieudonné, 1942, 113): Wenn man für E einen lokalkonvexen Raum, ausgestattet mit der Topologie $\mathfrak{T}$, wählt und für E' den zugehörigen Dualraum aller linearen Funktionale x' auf E, die bzgl. $\mathfrak{T}$ stetig sind, so sind die beiden Bedingungen ($\mathrm{D_I}$) und ($\mathrm{D_{II}}$) mit $B(x, x') = x'(x)$ erfüllt. Im normierten Fall gibt es hierzu eine analoge Argumentation, welche, wie auch bei Dieudonné, den Satz von Hahn-Banach beinhaltet.[73] Dieudonné möchte in seiner Arbeit zunächst Aussagen für *allgemeine* Vektorräume zeigen, die nicht notwendigerweise mit einer Topologie ausgestattet sind, um dann Folgerungen für lokalkonvexe und normierte Räume herleiten zu können; diese Fälle sind für ihn „les plus importants en pratique“ (Dieudonné, 1942, 110). Dieudonnés Ziel besteht also darin, ein allgemeines ‚Gerüst‘ einzuführen, welches verwendet werden kann, um Resultate in spezielleren, praktischeren Fällen zu beweisen.

Zurück zu diesem allgemeinen Gerüst: zwei Vektorräume, Bilinearform $B(x, x')$ mit ($\mathrm{D_I}$) und ($\mathrm{D_{II}}$). Dieudonné erklärt, dass innerhalb dieser Bedingungen eine „topologie d'*espace localement convexe*“ (Dieudonné, 1942, 113) auf E mittels den Halbnormen $|B_{x'}|$ definiert werden kann: „la *topologie faible* définie par E' sur

[73] 1) Sei $x' \in X'$ so, dass für alle $x \in X$ gilt: $x'(x) = 0$. Dann gilt aufgrund der Definition der Norm des Dualraums X':

$$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x' = 0.$$

2) Sei $x \in X$ so, dass für alle $x' \in X'$ gilt: $x'(x) = 0$. Dann gilt mit dem Satz von Hahn-Banach:

$$\|x\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |x'(x)| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

E“, bezeichnet mit $\sigma(E, E')$. Dies ist die gröbste Topologie für einen lokalkonvexen Raum, für die alle $B_{x'}$ stetig sind. $\sigma(E', E)$ kann entsprechend symmetrisch eingeführt werden:

> On définit de façon analogue la topologie faible $\sigma(E', E)$ définie par E sur E'; en raison de la symétrie évidente que présentent ces deux topologies, nous nous contenterons, en général, d'énoncer les propriétés de $\sigma(E, E')$, celles de $\sigma(E', E)$ s'en déduisant en permutant les rôles de E et E'. (Dieudonné, 1942, 113)

Anschließend führt Dieudonné eine „application linéaire u de E dans F“ ein, die „faiblement continue“ ist:

> Considérons maintenant deux couples d'espaces vectoriels, E, E' et F, F'; supposons données une forme bilinéaire B définie dans $E \times E'$, et une forme bilinéaire C définie dans $F \times F'$, ces deux formes satisfaisant aux axiomes $(\mathrm{D_I})$ et $(\mathrm{D_{II}})$. Munissons E et E' des topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$, F et F' des topologies $\sigma(F, F')$ et $\sigma(F', F)$, et considérons une application linéaire u de E dans F; [...] nous dirons que u est *faiblement continue* sie elle est continue pour les topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(F, F')$. (Dieudonné, 1942, 118)

Dieudonné zeigt,[74] dass für jedes $y' \in F'$ ein eindeutiges $x' \in E'$ existiert, sodass gilt:

$$C(u(x), y') = B(x, x').$$

Diese Beziehung definiert eine Abbildung $u' : F' \to E'$ – „la *transposée* de u“ – die durch

$$B(x, u'(y')) = C(u(x), y')$$

bestimmt ist. Dies entspricht Banachs Definition eines dualen Operators im normierten Fall. Jetzt formuliert Dieudonné das Problem:

Dieudonnés Ausgangsproblem von 1942

> Cherchons maintenant les propriétés de la transposée u' qui équivalent à l'existence d'une solution (au moins) de l'*équation linéaire* $u(x) = y_0$, où y_0 est un élément donné de F.
> (Dieudonné, 1942, 119)

[74]Siehe *Théorèmes 2 et 9* in (Dieudonné, 1942, 114, 118).

3.6.b Dieudonnés Théorème 12

Dieudonnés Resultat von 1942

> **Théorème 12** *Pour que l'équation* $u(x) = y_0$ *admette une solution au moins, il faut et il suffit que* y_0 *soit orthogonal à* $\overset{-1}{u'}(0)$*, et que la forme linéaire* H_{y_0}*, définie dans* $u'(F')$*, soit continue dans ce sous-espace.* (Dieudonné, 1942, 120)

Dieudonnés *Théorème 12* liefert eine Lösung zum Ausgangsproblem. In einer Fußnote verweist Dieudonné dazu auf Köthe (1939). Betrachten wir zunächst die Bedingung „que y_0 soit orthogonal à $\overset{-1}{u'}(0)$“. Dieudonnés *Théorème 11* liefert die Notwendigkeit dieser Bedingung (zweite Gleichung):

> **Théorème 11** *On a*
>
> $$(u(E))^* = \overset{-1}{u'}(0), \qquad \left(\overset{-1}{u'}(0)\right)^* = \overline{u(E)}.$$
>
> (Dieudonné, 1942, 119)

Mit „∗“ werden dabei die Annihilatoren der entsprechenden Mengen gekennzeichnet:

> Nous dirons qu'un élément $x \in E$ et un élément $x' \in E'$ sont *orthogonaux* si $B(x, x') = 0$.
>
> Soit M une partie quelconque de E; nous désignerons par M^* l'ensemble des $x' \in E'$ qui sont orthogonaux à *tous* les $x \in M$.
> (Dieudonné, 1942, 115)

Ist $u(E)$ abgeschlossen, so ergibt sich aus *Théorème 11* die folgende Behauptung:

> **Théorème 13** *Si* $u(E)$ *est fermé dans* F*, pour que l'équation* $u(x) = y_0$ *admette au moins une solution, il faut et il suffit que* y_0 *soit orthogonal à* $\overset{-1}{u'}(0)$*.* (Dieudonné, 1942, 120)

Eine analoge Aussage für den normierten Fall findet sich z.B. in Hausdorffs *Zweitem Hauptsatz* über „normale Auflösbarkeit“ in (Hausdorff, 1932, 307f) (siehe Abschnitt 8.2.c). Zurück zu *Théorème 12*. Ist umgekehrt die Bedingung „que y_0

soit orthogonal à $\overset{-1}{u'}(0)$“ erfüllt, so erhält $C(y_0, y')$ für alle y' derselben Klasse mod. $\overset{-1}{u'}(0)$ denselben Wert – „mais ces classes ne sont autres que les ensembles $\overset{-1}{u'}(x')$, où x' parcourt $u'(F')$“ (Dieudonné, 1942, 120). Damit definiert Dieudonné

$$H_{y_0}(x') := C(y_0, y')$$

für alle y' derselben Klasse $\overset{-1}{u'}(x')$ und erhält die wohldefinierte „forme linéaire“ auf $u'(F')$:

$$x' \to H_{y_0}(x').$$

3.6.c Verbindung zu Köthe

In seinem *Théorème 12* verweist Dieudonné auf Köthe:

> Voir par exemple (Köthe, 1939, 730); on trouvera à cet endroit des indications bibliographiques sur d'autres théorèmes analogues du même auteur. (Dieudonné, 1942, 108, Fußnote)

Dieudonnés Verweis auf (Köthe, 1939) bezieht sich auf Köthes *Auflösungskriterium (Satz 6)* (siehe Abschnitt 3.4.d). Die „autres théorèmes analogues du mème auteur“ sind *Satz 1* und *Satz 2* in (Köthe, 1938) (Abschnitt 3.4.c). Dieudonné schreibt in seiner Einleitung:

> Le critère de résolubilité de $f(x) = y_0$ que nous obtenons dans ce Chapitre, généralise celui obtenu par G. Köthe[75] dans un cas particulier; il redonne aussi le critère *algébrique* de résolubilité énoncé plus haut, en spécialisant convenablement la topologie faible considérée.
> (Dieudonné, 1942, 108)

Dieudonnés *Théorème 12* stellt also zum einen eine Verallgemeinerung von Köthes Ergebnissen dar, zum anderen enthält es das „critère algébrique“, d.h. die Bedingung „que y_0 soit orthogonal à $\overset{-1}{u'}(0)$“. Dieudonné hat schon gezeigt, dass 1) diese Bedingung notwendig ist für die Lösbarkeit des obigen Problems und dass 2), wenn die Bedingung erfüllt ist, die Abbildung H_{y_0} eine wohldefinierte Linearform auf $u'(F')$ darstellt. Somit muss Dieudonné im Beweis von *Théorème 12* nur noch zeigen, dass 3) die Bedingung „que la forme linéaire H_{y_0}, définie dans $u'(F')$, soit continue dans ce sous-espace“ notwendig ist und dass 4) sie – zusammen mit der

[75] Auch hier verweist Dieudonné auf die Fußnote zu Köthe.

zusätzlichen Bedingung „que y_0 soit orthogonal à $\overset{-1}{u'}(0)$" – hinreichend ist. Die Verbindung zu Köthe besteht in der Abbildung H_{y_0}. Dies sei kurz erläutert:

Köthe zeigt innerhalb seiner Voraussetzungen in Folgenräumen, dass die lineare Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$$

genau dann lösbar ist, wenn die Abbildung

$$x(\mathfrak{A}'\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{v} \in \mu^*$$

wohldefiniert und stetig bzgl. Köthes schwachen Definitionen auf $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ ist. Eben dies fordert Dieudonné von der Abbildung H_{y_0} auf $u'(F')$. Bei genauerer Betrachtung erkennen wir, dass H_{y_0} dieselbe Rolle wie Köthes Abbildung x spielt. Wie oben dargestellt, ist sie bzgl. der linearen Gleichung

$$u(x) = y_0$$

definiert durch $H_{y_0}(x') = C(y_0, y')$ (zur Erinnerung: x' ist Element aus $u'(F')$). Damit bestehen also die folgenden Entsprechungen:

Köthe	Dieudonné
$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c},\ \mathfrak{x} \in \lambda, \mathfrak{c} \in \mu$	$u(x) = y_0,\ x \in E, y_0 \in F$
$x(\mathfrak{A}'\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\mathfrak{c},\ \mathfrak{v} \in \mu^*$	$H_{y_0}(x') = C(y_0, y'),\ y' \in \overset{-1}{u'}(x') \subseteq F'$
$\mathfrak{A}'\mathfrak{v},\ \mathfrak{v} \in \mu^*$	$x' \in u'(F')$
$\mathfrak{v}\mathfrak{c}$	$C(y_0, y')$

Köthes Konzepte, insbesondere seine schwache Topologie, wurden speziell für Folgenräume entwickelt, Dieudonnés Konzepte für allgemeine Vektorräume.

3.7 Abschließende Bemerkungen

Wir wollen die verschiedenen Konzepte dualer Räume bzw. Systeme im normierten und im metrikfreien Fall vergleichen. Dazu betrachten wir genauer Hellys und Hahns Konstruktionen als Grundlage für den Begriff des *konjugierten Raums* und Köthes, Toeplitz' und Dieudonnés Konstruktionen im metrikfreien Fall. In beiden Fällen finden wir in einem ersten Schritt die entsprechenden Konstruktionen für Folgenräume (Helly, Köthe und Toeplitz) und schließlich die für allgemeine Vektorräume (Hahn und Dieudonné).

3.7.a Hellys und Hahns Konstruktionen im normierten Fall

Eine Ausführung der entsprechenden Untersuchungen findet sich in Kapitel 2. Hellys Ausgangspunkt ist das lineare Gleichungssystem

$$(a^{(\nu)}, x) = c_\nu$$

(Helly, 1921, 69) im Rahmen beliebiger normierter Folgenräume, wobei die Koeffizientenfolgen $a^{(\nu)}$ und die rechten Seiten c_ν gegeben sind und x die gesuchte Folge ist. Zu einer beliebigen konvexen Abstandsfunktion $D(x)$ wird die zugehörige polare Funktion $\Delta(u)$ gebildet. Die Folgen $a^{(\nu)}$ sollen endlich bzgl. $\Delta(u)$ sein und x endlich bzgl. $D(x)$. Dadurch ergeben sich zwei duale Folgenräume:

$$\{x : D(x) < \infty\} \text{ und } \{u : \Delta(u) < \infty\}.$$

Hahns Ausgangspunkt ist das lineare System

$$u_y(x) = c_y$$

(Hahn, 1927, 220). Hier soll eine Lösung x Element eines beliebigen normierten Raums $\mathfrak{B}$ sein und die u_y sollen Linearformen im Hahnschen und Hausdorffschen Sinne auf $\mathfrak{B}$ darstellen. Damit ergibt sich auf der einen Seite ein normierter Raum $\mathfrak{B}$ und auf der anderen Seite der zugehörige polare Raum $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{B} = \{x : D(x) < \infty\} \text{ und } \mathfrak{S} = \{u : u \text{ ist Linearform auf } \mathfrak{B}; \Delta(u) < \infty\}.$$

Die Normen $D(x)$ und $\Delta(u)$ sind so definiert, dass sie die ‚fundamentale Ungleichung' erfüllen:

$$|(u,x)| \leq \Delta(u)D(x) \text{ (Helly)},$$

$$|B(u,x)| \leq \Delta(u)D(x) \text{ (Hahn)}.$$

Diese Ungleichung wird gebraucht, um die Notwendigkeit der folgenden Lösbarkeitsbedingung zu zeigen:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu c_\nu\right| \leq M\Delta\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a^{(\nu)}\right)$$

(Helly, 1921, 81),

$$|\lambda_1 c_{y_1} + \lambda_2 c_{y_2} + ... + \lambda_n c_{y_n}| \leq M\Delta(\lambda_1 u_{y_1} + \lambda_2 u_{y_2} + ... + \lambda_n u_{y_n})$$

(Hahn, 1927, 220). Um zu zeigen, dass diese Lösbarkeitsbedingung auch hinreichend ist, wird ein Fortsetzungssatz benötigt, im allgemeinen normierten Fall also der Satz von Hahn-Banach. Wie wir gesehen haben, hat auch Köthe für sein Resultat einen Fortsetzungssatz im Rahmen metrikfreier Folgenräume gezeigt.

3.7.b Köthes, Toeplitz' und Dieudonnés Konstruktionen im metrikfreien Fall

Im Gegensatz zu Hellys und Hahns ‚fundamentaler Ungleichung' fordern Köthe und Toeplitz *absolute* Konvergenz der dualen Paarung (u, x), um den dualen Raum zu einem linearen Folgenraum zu definieren. Köthes *Auflösungskriterium* von 1939

$$|\mathfrak{v}\mathfrak{c}| \leq (\mathfrak{A}'\mathfrak{v})_K$$

zum Ausgangsproblem $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ ähnelt und unterscheidet sich von Hellys und Hahns Lösbarkeitsbedingung: Einerseits erkennen wir die Ungleichung zwischen den rechten Seiten und den gegebenen Koeffizienten. Andererseits gibt es für die Koeffizienten keine Norm, sondern eine schwache Topologie, die eine schwache Version des Fortsetzungssatzes ermöglicht.

Während Köthe den Fall der Folgenräume betrachtet, d.h. das lineare Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}\ \mathfrak{x} \in \lambda, \mathfrak{c} \in \mu,$$

man beachte die Ähnlichkeit zu Hellys System: $(a^{(\nu)}, x) = c_\nu$, untersucht Dieudonné einen allgemeineren Fall

$$u(x) = y_0,\ x \in E, y_0 \in F,$$

man beachte die Ähnlichkeit zu Hahns System: $u_y(x) = c_y$, wobei E mit E' (und entsprechend F mit F') mittels der Bilinearform B, die auf $E \times E'$ definiert ist und die Bedingungen $(\mathrm{D_I})$ und $(\mathrm{D_{II}})$ erfüllt, ein *duales System* bildet. Wie schon erwähnt, sind diese beiden Bedingungen im normierten Fall erfüllt, d.h. im Fall eines normierten Raums X und seines Dualraums X'. Damit ist Dieudonnés duales System also eine Verallgemeinerung des normierten Falls. Es sei betont, dass Dieudonné bspw. im Gegensatz zu Hahn direkt ein gänzlich symmetrisches System zweier Vektorräume E und E' einführt. Hahn hat mit der Einführung eines Raums begonnen und dann den zugehörigen Dualraum definiert. Mit Dieudonnés Verweis auf Köthes *Auflösungskriterium* bzgl. der Bedingung „que la forme linéaire H_{y_0} soit continue", welches wir auf den normierten Fall zurückführen können, kann man außerdem sagen, dass Dieudonnés Lösbarkeitsbedingung eine Verallgemeinerung des normierten Falls darstellt. Jedoch gibt es da noch die andere Bedingung in Dieudonnés Theorem: „que y_0 soit orthogonal à $\overset{-1}{u'}(0)$“. Diese führt uns zu einem anderen ‚Zweig‘: dem der Entwicklung *dualer Gleichungen* und ihren Lösungsansätzen. Dies wollen wir in Teil II verfolgen. Vorab nur ein kurzer Ausblick: Bei Hausdorff (1932) finden wir für den normierten Fall bspw. die Gleichungen:

$$y = sx \qquad u = vs,$$

wobei jeweils die eine Gleichung die „konjugierte Abbildung“ (Hausdorff, 1932, 307) der anderen darstellt. Hausdorff zeigt dazu den folgenden Satz, welcher Dieudonnés Lösbarkeitsbedingung sehr ähnlich ist:

> IX. *Zur Auflösbarkeit von $y = sx$ nach x ist notwendig, daß für alle v_0 mit $v_0 s = 0$ auch $v_0 y = 0$ sei. Zur Auflösbarkeit von $u = vs$ nach v ist notwendig, daß für alle x_0 mit $sx_0 = 0$ auch $ux_0 = 0$ sei.*
>
> (Hausdorff, 1932, 307)

Den historischen Hintergrund dieses ‚Zweiges‘, d.h. *dualer Gleichungen* und *dualer Operatoren*, wollen wir, wie gesagt, in Teil II untersuchen. An dieser Stelle hoffen wir, die Entwicklungen und die verschiedenen Konzepte *dualer Räume* in der Funktionalanalysis beleuchtet zu haben: Riesz' „zugeordnete Klassen“, Hellys durch die „polare Abstandsfunktion“ verbundenen Folgenräume, Hahns „polaren Raum“ und Banachs „l'espace conjugué“, Köthes und Toeplitz' „duale Räume“ und Dieudonnés duale Systeme.

4 Überblick

4.1 Momentenproblem

In Hellingers und Toeplitz' Enzyklopädie-Artikel (Hellinger und Toeplitz, 1927) finden wir den folgenden Abschnitt zum *Momentenproblem*:

> *Das Momentenproblem.* Dem Wesen nach äquivalent mit der Lösung der Integralgleichung 1. Art ist das Problem der Bestimmung einer Funktion $\varphi(s)$ durch abzählbar unendlich viele lineare Integralgleichungen
>
> $$\int_a^b k_n(t)\varphi(t)\,dt = c_n \qquad (n = 1, 2, ...), \tag{3}$$
>
> wo die $k_n(t)$ gegebene Funktionen, die c_n gegebene Konstanten sind; [...].[76] Für den Fall, daß die $k_n(t)$ gleich den Potenzen t^{n-1} sind, ist das Problem (3) lange vor dem Entstehen der Theorie der Integralgleichungen behandelt worden (Pincherle, 1905, 805) und namentlich von T. J. Stieltjes (1894) als *Momentenproblem* zum Gegenstand einer klassischen Untersuchung im Zusammenhang mit der Theorie der Kettenbrüche gemacht worden. (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1457)

Da dieser Problemtyp eine spezielle Version der linearen Gleichungssysteme ist, die wir in diesem Teil der Arbeit behandelt haben, wollen wir untersuchen, ob hier eine historische Verbindung besteht. Zunächst werfen wir einen Blick in (Stieltjes, 1894), um etwas über Stieltjes' Motivation zu erfahren, das „problème des moments" zu untersuchen:

> Considérons sur une droite infinie OX... une distribution de masse (positive), la masse m_i se trouvant concentrée à la distance ξ_i de l'origine O. La somme
>
> $$\sum m_i \xi_i^k$$

[76] Hellinger und Toeplitz erklären, dass diese Übertragung mittels eines „vollständigen Orthogonalsystems" möglich ist.

> peut être appelée le *moment* d'ordre k de la masse par rapport à l'origine. [...]
>
> Nous appellerons *problème des moments* le problème suivant:
>
> *Trouver une distribution de masse positive sur une droite* $(O\infty)$, *les moments d'ordre* k $(k = 0, 1, 2, 3, ...)$ *étant donnés.*
>
> (Stieltjes, 1894, J48)

Die Summe ist zu verstehen als $\sum_{i=1}^{\infty} m_i \xi_i^k,\ k = 0, 1, 2, ...$ Stieltjes fragt hier also nach einer Massenverteilung bzgl. vorgegebenen Momenten: Massenpunkte m_i auf einer Geraden jeweils mit Abstand ξ_i zum Ursprung O. Auf Stieltjes Arbeit folgten weitere Untersuchungen zu diesem Problemtyp. Bei Kjeldsen (1993) können wir *The early history of the moment problem* verfolgen:

> In the present study it is discussed how the moment problem naturally arose within Stieltjes' creation of the analytical theory of continued fractions. Further it is shown how the moment problem in the work of Hamburger came to be regarded as an important problem in its own right. From then on it moved away from its origin into other fields of mathematics – complex function theory and functional analysis – in the work of Nevanlinna and M. Riesz respectively. In the end it was made completely independent from continued fractions.
>
> (Kjeldsen, 1993, 19)

Im Rahmen dieser Arbeit interessieren wir uns natürlich für die Entwicklung des Momentenproblems innerhalb der Funktionalanalysis. Bei Banach (1932) finden wir z.B.:

> On a donné le nom du problème des moments au problème qui consiste à établir des conditions pour l'existence d'une fonction f satisfaisant à l'infinité d'équations
>
> $$\int_a^b f\varphi_i dz = c_i \ \text{ où } \ i = 1, 2, ...$$
>
> pour une suite de fonctions $\{\varphi_i\}$ et une suite de nombres $\{c_i\}$ données d'avance. (Banach, 1932, 74)

Im Jahr 1932 wurde die Bezeichnung ‚Momentenproblem' also weiterhin für diesen Problemtyp verwendet. Es stellt sich die Frage: Besteht auch eine Verbindung zwischen dem Momentenproblem und den Entwicklungen, die z.B. zu Banachs

Untersuchungen des Gleichungssystems

$$f(x_n) = c_n$$

in (Banach, 1929a) geführt haben (siehe Abschnitt 2.8.e), wovon das Momentenproblem einen Spezialfall darstellt? Tatsächlich finden wir bei Pietsch (2007) den folgenden Abschnitt unter dem Titel „abstract moment problem“:

> What conditions must be satisfied by the elements $x_1, x_2, ... \in X$ and the constants $\gamma_1, \gamma_2, ...$ in order to guarantee the existence of a functional $\ell \in X^*$ such that
>
> $$\ell(x_h) = \gamma_h \quad \text{for } h = 1, 2, ...?$$
>
> (Pietsch, 2007, 37)

So weit wir jedoch wissen, entstand die Entwicklung, die wir in den Kapiteln 1, 2 und 3 dargestellt haben, *nicht* aus den Untersuchungen der Kettenbrüche, die mit Stieltjes Arbeit begannen. Der wahrscheinlichere Ausgangspunkt ist wohl Riesz' Frage in (Riesz, 1907d):

> Man ordne jeder Funktion eines orthogonalen Funktionensystems eine bestimmte reelle Zahl zu. Unter welchen Bedingungen gibt es dann eine Funktion von der Beschaffenheit, daß für jede Funktion des orthogonalen Systems das Integral des Produktes dieser Funktion und der in Frage stehenden Funktion, erstreckt über den Definitionsbereich des orthogonalen Systems, die zugeordnete Zahl ergebe?
> (Riesz, 1907d, 116)

In Abschnitt 1.3.b haben wir gesehen, dass die Motivation dieser Fragestellung höchstwahrscheinlich aus der Umkehrung von Hilberts Konstruktion von Fourierkoeffizienten hervorging. Die darauf folgenden Untersuchungen von Schmidt, Riesz, Helly, Hahn, Banach, Köthe und Dieudonné hatten sicherlich die Intention, Lösbarkeitsbedingungen für immer allgemeinere lineare Gleichungssysteme zu finden. Trotzdem kann man bei den Problemen, die wir in diesem Teil der Arbeit präsentiert haben, natürlich aufgrund der Ähnlichkeit von ‚Versionen des Momentenproblems‘ in der Funktionalanalysis sprechen – d.h. aufgrund ihrer *systematischen* Verbindung anstatt einer *historischen*.

4.2 Betrachtete Entwicklungen zum Begriff dualer Räume in der Funktionalanalysis

Wir wollen die einzelnen Versionen der ‚Momentenproblem-Reihe' noch einmal im Überblick betrachten. Die folgende Tabelle zeigt die jeweilige Problemversion mit zugehöriger Lösbarkeitsbedingung in Originalschreibweise. Die zugehörigen Voraussetzungen finden sich jeweils auf der in der letzten Spalte angegebenen Seite dieser Arbeit.

Arbeit	Problem	Lösbarkeitsbedingung	Siehe Seite
(Riesz, 1907d)	$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = a_i$ (Orthogonalsystem, $L^2(a,b)$)	Konvergenz von $\sum_i a_i^2$	13
(Schmidt, 1908)	$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n$	Konvergenz von $\sum_{n=1}^{n=\infty} \left\| \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \overline{\gamma_{n\nu}} c_\nu \right\|^2$	21
	$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i$ (l^2)	$\left\| \sum_{i=1}^n u_i c_i \right\| \leq m \left\| \sum_{i=1}^n u_i \mathfrak{a}_i \right\|$	21
(Riesz, 1910)	$\int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx = c_i$ ($L^p(a,b), p > 1$)	$\left\| \sum_{i=1}^n \mu_i c_i \right\|^{\frac{p}{p-1}} \leq M^{\frac{p}{p-1}} \int_a^b \left\| \sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x) \right\|^{\frac{p}{p-1}} dx$	32
(Riesz, 1913)	$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i$ ($l^p, p > 1$)	$\left\| \sum_{i=1}^n \mu_i c_i \right\| \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i_1}^n \mu_i a_{ik} \right\|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$	36
(Helly, 1921)	$(a^{(\nu)}, x) = c_\nu$ (normierter Folgenraum)	$\left\| \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu c_\nu \right\| \leq M\Delta \left(\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu a^{(\nu)} \right)$	61
(Hahn, 1927)	$u_y(x) = c_y$ (Banachraum)	$\|\lambda_1 c_{y_1} + \ldots + \lambda_n c_{y_n}\| \leq M\Delta(\lambda_1 u_{y_1} + \ldots + \lambda_n u_{y_n})$	72
(Banach, 1929a)	$f(x_n) = c_n$ (normierter Raum)	$\left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i \right\| \leq M \left\Vert \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \right\Vert$	74
(Köthe, 1939)	$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ (linearer Folgenraum)	$\|\mathfrak{v}\mathfrak{c}\| \leq (\mathfrak{A}'\mathfrak{v})_K$ (gdw. $x(\mathfrak{A}'\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\mathfrak{c}$ stetig)	95
(Dieudonné, 1942)	$u(x) = y_0$ (Vektorraum)	y_0 orthogonal zu $\overset{-1}{u'}(0)$ und H_{y_0} stetig	101

Teil II

Duale Operatoren

5 Banachs Überblick über lineare Funktionalgleichungen (1932)

In Teil II dieser Arbeit soll es um die historische Entwicklung *dualer Operatoren* in der Funktionalanalysis gehen. Hierbei liefert Banachs Monografie *Théorie des opérations linéaires* (Banach, 1932) einen guten Überblick über *Equations fonctionnelles linéaires* (Banach, 1932, Kapitel X), die wiederum einen[77] Ausgangspunkt zur Einführung bzw. zum Gebrauch dualer Operatoren bilden. Dabei gibt es oftmals natürliche Überschneidungen mit den Entwicklungen des Konzepts *dualer Räume* in der Funktionalanalysis, die in Teil I dargestellt sind. Zum besseren Verständnis wollen wir Banachs Überblick mit zum Teil durch moderne Notationen ersetzten bzw. ergänzten Schreibweisen darstellen. Außerdem benennen wir an den einzelnen Stellen Banachs Verweise auf entsprechende Arbeiten, die einen ersten Zugang zur historischen Untersuchung der jeweiligen Entwicklungen geben.

Als Grundlagen (Banach, 1932, Kapitel VI, §3) setzt Banach zwei Banachräume „E et E_1“ und eine „opération linéaire“

$$U(x) = y$$

mit

$$U : E \to E_1$$

voraus. Eine „opération linéaire“ ist eine „opération additive et continue“, wobei ein solcher stetiger linearer Operator immer auch beschränkt ist und umgekehrt. Wir verwenden entsprechend im Folgenden den Begriff ‚linearer Operator‘, meinen aber immer auch die Stetigkeit/Beschränktheit. Mit X bzw. Y bezeichnet Banach die stetigen linearen Funktionale, definiert auf E bzw. E_1. Betrachtet man den Ausdruck $Y[U(x)]$, so kann man ihn auch als ein auf E definiertes Funktional interpretieren:

$$X(x) = Y[U(x)].$$

[77]In Unterkapitel 9.2 findet sich ein Ausblick zu weiteren Entwicklungen bzgl. des Konzepts dualer Operatoren.

Es lässt sich zeigen, dass X linear und stetig ist, womit man durch

$$\bar{U}(Y) = X$$

(Banachs Schreibweise) einen neuen linearen Operator

$$\bar{U} : \bar{E}_1 \to \bar{E}$$

gegeben hat: den *dualen Operator* zu U („opération conjuguée/associée“ (Banach, 1932, 100)). $\bar{E_1}$ und $\bar{E}$ (Banachs Schreibweise) sind dabei die zugehörigen Dualräume aller stetigen linearen Funktionale definiert auf E_1 bzw. E. Die Normen von U und $\bar{U}$ stimmen überein. Ist U vollstetig, so ist es auch $\bar{U}$. Dabei gilt: „Une opération linéaire $U(x)$ s'appelle *totalement continue*, si elle transforme tout ensemble borné en ensemble compact.“ (Banach, 1932, 96) Eine Menge heißt für Banach *kompakt*, wenn jede unendliche Folge der Menge eine konvergente Teilfolge enthält. In der Schreibweise der dualen Paarung[78]:

$$(U(x), Y) := Y[U(x)],$$

die wir im Folgenden immer verwenden wollen, um die Dualität zwischen Operator und zugehörigem dualen Operator darzustellen, ergibt sich[79] für den dualen Operator:

$$(U(x), Y) \ = \ (x, \bar{U}(Y)).$$

Banachs Verweise: Banach bemerkt, dass der Begriff des dualen Operators in dieser Allgemeinheit erstmals in (Banach, 1929b) eingeführt wurde, wo auch die Aussage der Normgleichheit zu finden ist. Für den Beweis der Aussage, dass mit U auch $\bar{U}$ vollstetig ist, verweist Banach auf Schauder (1930c).

5.1 Relations entre les opérations linéaires et les opérations conjuguées avec elles

Siehe (Banach, 1932, Kapitel X, §1). Als ersten Gleichungstyp bringt Banach

$$U(x) = y$$

[78]Siehe Abschnitt 1.7.b zum Begriff der dualen Paarung.
[79]$(U(x), Y) = Y[U(x)] = X(x) = \bar{U}(Y)(x) = (x, \bar{U}(Y))$

an, wobei U ein linearer Operator

$$U : E \to E'$$

und E, E' Banachräume sind. Man beachte, dass E' hier *nicht* den Dualraum zu E darstellt. Im Spezialfall $E' = \mathbb{R}$ geht eine Möglichkeit, Gleichungen dieses Typs zu lösen, auf das endlichdimensionale *Rangkriterium* zurück. Eine ausführliche Untersuchung der historischen Entwicklungen hierzu findet sich in Teil I. Eine andere Möglichkeit basiert, wie Banachs Titel des Paragraphen §1 andeutet, auf der Betrachtung des zu U dualen Operators $\bar{U}$ mit

$$\bar{U} : \bar{E}' \to \bar{E}.$$

Es wird damit gleichzeitig zur ursprünglichen Gleichung auch die dazu duale Gleichung

$$\bar{U}(Y) = X$$

untersucht. Wieder werden die stetigen linearen Funktionale auf E bzw. E' mit X bzw. Y bezeichnet.

Betrachtete Gleichungen

$$U(x) = y \;\; (U \text{ linear}) \quad \text{und} \quad \bar{U}(Y) = X \tag{5.1}$$

Hier ergeben sich die folgenden Sätze:

> Théorème 1. *Si l'opération associée $X = \bar{U}(Y)$ admet l'opération inverse continue, l'equation $y = U(x)$ admet une solution pour tout y.*
>
> (Banach, 1932, 146)
>
> Théorème 2. *Si l'équation $X = \bar{U}(Y)$ admet une solution pour tout X, alors*
>
> *1° l'opération $y = U(x)$ admet l'opération inverse continue,*
>
> *2° le contredomaine de $U(x)$ est l'ensemble des y qui satisfont à la condition*
>
> $$Y(y) = 0, \quad \textit{si} \quad \bar{U}(Y) = 0.$$
>
> (Banach, 1932, 147)

Man beachte, dass die Inverse eines linearen Operators nicht notwendigerweise stetig ist. Es gilt jedoch Folgendes:[80]

> Si la transformation de E en E_1 déterminée par l'opération linéaire $y = U(x)$ est biunivoque, l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est évidemment additive. Il est facile de voir que pour l'existence de l'opération inverse, il faut et il suffit que
>
> $$U(x) = \Theta \text{ entraîne } x = \Theta.$$
>
> Si l'opération inverse est continue, il existe un $M > 0$ tel que $\|x\| \leq M \cdot \|y\|$.
>
> Réciproquement, s'il existe un nombre $m > 0$ tel que $m \cdot \|x\| \leq \|U(x)\|$, il existe l'opération inverse continue. (Banach, 1932, 145)

Durch Vertauschen der entsprechenden Objekte in den *Théorèmes 1 et 2* erhält man die dazu dualen Aussagen (siehe hierzu Abschnitt 6.5.b):

> Théorème 3. *Si l'opération associée $y = U(x)$ admet l'opération inverse continue, l'equation $X = \bar{U}(Y)$ admet une solution pour toute fonctionnelle linéaire X définie dans E.*
>
> Théorème 4. *Si l'équation $y = U(x)$ admet une solution pour tout y, alors*
>
> *1° l'opération $X = \bar{U}(Y)$ admet l'opération inverse continue,*
>
> *2° son contredomaine est l'ensemble des X remplissant pour tout $x \subset E$ la condition*
>
> $$X(x) = 0, \quad si \quad U(x) = 0.$$
>
> (Banach, 1932, 148)

Aus den *Théorèmes 1-4* ergeben sich weitere, z.T. duale Resultate:

- Ist $U(x) = y$ für jedes y eindeutig lösbar, so ist auch $\bar{U}(Y) = X$ für jedes X eindeutig lösbar und umgekehrt.
- Besitzen die Operatoren U und $\bar{U}$ stetige Inversen, so gibt es für jedes y und jedes X genau ein x und ein Y mit $U(x) = y$ und $\bar{U}(Y) = X$.

[80] Mit Θ wird der Nullvektor bezeichnet.

- Sind die Gleichungen $U(x) = y$ und $\bar{U}(Y) = X$ lösbar für jedes y und jedes X, so sind sie eindeutig lösbar.

- Bei abgeschlossenem Bild von $U(x)$ (bzw. $\bar{U}(Y)$) besteht das Bild von $\bar{U}(Y)$ (bzw. $U(x)$) aus allen X mit

$$U(x) = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

(bzw. allen y mit $\bar{U}(Y) = 0 \Rightarrow Y(y) = 0$).

Banachs Verweise: Banach verweist zur Theorie des Gleichungstyps (5.1) auf Hausdorff (1932). Weiter bemerkt er, dass sich die gezeigten Sätze in dieser allgemeinen Form in (Banach, 1929b) finden. Für speziellere Fälle wurden diese schon früher gezeigt:

- (Hellinger und Toeplitz, 1927):[81] Für $E = E' = L^2$ alle Sätze in Banachs §1.

- (Riesz, 1910), (Riesz, 1913): Für $E = E' = L^p$ bzw. $E = E' = l^p$ $(p > 1)$ *Théorème 1* und *Théorème 3*.

- (Saks, 1929): Für $E = E' = L^p$, $E = E' = l^p$ $(p \geq 1)$ *Théorème 2* und *Théorème 4*.

Zu Banachs Aufzählung lässt sich hinzufügen, dass sich in (Banach, 1929b) ein Verweis auf den im Band der Zeitschrift direkt vorausgehenden Artikel (Saks, 1929) findet. Saks verweist auf Riesz (1910, 1913) und Riesz verweist auf Toeplitz (1907) für den Fall $p = 2$. Toeplitz' bilineare Formen und reziproke Matrizen bilden dabei eine Weiterführung von Hilberts Untersuchungen in (Hilbert, 1906b).

5.2 La théorie de Riesz des équations linéaires totalement continues

Siehe (Banach, 1932, Kapitel X, §2). Es sei U ein vollstetiger linearer Operator mit

$$U : E \to E.$$

Es lässt sich zeigen, dass die Bilder von $Id - U$ und $Id - \bar{U}$ (mit Id bezeichnen wir die identische Abbildung) abgeschlossen sind. Untersucht werden die Gleichungen $(Id - U)(x) = y$ und $(Id - \bar{U})(X) = Y$:

[81] Gemeint ist höchstwahrscheinlich (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1376f).

Betrachtete Gleichungen

$$x - U(x) = y \ \ (U \text{ vollstetig}) \quad \text{und} \quad X - \bar{U}(X) = Y \tag{5.2}$$

Es ergeben sich folgende Sätze, wobei die Beweise für die beiden Gleichungen analog verlaufen:

- Die homogenen Gleichungen

  $$x - U(x) = 0 \quad \text{und} \quad X - \bar{U}(X) = 0$$

  besitzen die gleiche endliche Anzahl an linear unabhängigen Lösungen.

- Ist $x - U(x) = y$ (bzw. $X - \bar{U}(X) = Y$) für jedes y (bzw. Y) lösbar, so ist die zugehörige homogene Gleichung nur trivial lösbar und umgekehrt.

Banachs Verweise: Banach bemerkt, dass sich alle Resultate des Paragraphen §2, abgesehen von der Verwendung des Konzepts eines allgemeinen dualen Operators, erstmals bei Riesz (1916) finden. Weiter verweist er bei der Aussage über die gleiche Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der beiden homogenen Gleichungen auf Hildebrandt (1928) und Schauder (1930c).

5.3 Valeurs régulières et valeurs propres dans les équations linéaires

Siehe (Banach, 1932, Kapitel X, §3). Sei U nun wieder linear und nicht notwendigerweise vollstetig mit

$$U : E \to E.$$

Der duale Operator von $Id - hU$ ($h \in \mathbb{R}$) ist gegeben durch $Id - h\bar{U}$.

Betrachtete Gleichungen

$$x - hU(x) = y \ \ (U \text{ linear}) \quad \text{und} \quad X - h\bar{U}(X) = Y \tag{5.3}$$

Ist die erste bzw. zweite Gleichung von (5.3) für ein festes $h_0 \in \mathbb{R}$ für jedes y bzw. Y eindeutig lösbar, so heißt h_0 *regulärer Wert* („valeur régulière") dieser Gleichung. Ansonsten heißt h_0 *Eigenwert* („valeur propre"). Die Menge aller Eigenwerte heißt *Spektrum*. Ist x bzw. X Lösung der ersten bzw. zweiten homogenen Gleichung

$$x + hU(x) = 0 \quad \text{und} \quad X + h\bar{U}(X) = 0,$$

so heißt x *Eigenvektor* („élément propre") bzw. X *Eigenfunktional* („fonctionnelle propre"). Da die Operatoren $Id - hU$ und $Id - h\bar{U}$ mit U wieder linear sind, lassen sich die z.T. dualen Resultate zu den Gleichungen (5.1) auch für (5.3) zeigen. Insbesondere haben die beiden Gleichungen (5.3) die gleiche Menge von regulären Werten und damit auch das gleiche Spektrum. Außerdem gilt:

- Die Menge der regulären Werte ist offen.
- Gilt $|h| < \frac{1}{|U|}$, dann ist h regulärer Wert.
- Gilt für $h \neq h'$

  $$x - hU(x) = 0 \quad \text{und} \quad X - h'\bar{U}(X) = 0,$$

  dann gilt $X(x) = 0$. „En d'autres termes: *l'élément propre de la valeur h est orthogonal à toute fonctionnelle propre de la valeur h′ distancte de h.*" (Banach, 1932, 159)

Banachs Verweise: In Paragraph §3 gibt Banach keine Verweise.

5.4 Théorèmes de Fredholm dans la théorie des équations linéaires totalement continues

Siehe (Banach, 1932, Kapitel X, §4). Wenn man nun zusätzlich voraussetzt, dass U vollstetig ist, ergibt sich eine Verallgemeinerung der Fredholmschen Sätze.[82]

Betrachtete Gleichungen

$$x - hU(x) = y \;\; (U \text{ vollstetig}) \quad \text{und} \quad X - h\bar{U}(Y) = Y \tag{5.4}$$

[82] Zu den Fredholmschen Sätzen kommen wir in Kapitel 7.

Die zugehörigen homogenen Gleichungen erhalten die Nummer (5.5):

$$x + hU(x) = 0 \quad \text{und} \quad X + h\bar{U}(X) = 0 \tag{5.5}$$

- Die beiden homogenen Gleichungen (5.5) haben dieselbe endliche Anzahl $d(h)$ an linear unabhängigen Lösungen.
- Ist $d(h) = 0$, so ist h regulärer Wert.
- Ist $d(h) > 0$ und seien x_i bzw. X_i $(i = 1, 2, ..., d(h))$ die Lösungen der homogenen Gleichungen (5.5), so sind die inhomogenen Gleichungen (5.4) lösbar für alle y mit $X_i(y) = 0$ bzw. alle Y mit $Y(x_i) = 0$.

Außerdem lässt sich zeigen:

- Die Eigenwerte der ersten Gleichung in (5.4) bilden eine Menge isolierter Punkte.

Banachs Verweise: Für die Verallgemeinerung der Fredholmschen Sätze verweist Banach auf Schauder (1930c), für den hier letztgenannten Satz auf Riesz (1916).

Es soll nun die historische Entwicklung der folgenden beiden Gleichungspaare im Hinblick auf die Entstehung des Begriffs des allgemeinen *dualen Operators* untersucht werden:

A) In Kapitel 6 wollen wir die Entwicklung des Gleichungstyps (5.1) verfolgen. Hieraus kann für den Fall der Gleichungen (5.3) gefolgert werden.

$$U(x) = y \;\; (U \text{ linear}) \quad \text{und} \quad \bar{U}(Y) = X \tag{5.1}$$

Banachs Verweisen folgend stoßen wir hier auf die Arbeiten (Riesz, 1910), (Saks, 1929) und (Banach, 1929b).

B) In Kapitel 7 wollen wir die Entwicklung des Gleichungstyps (5.4) verfolgen. Hiervon ist (5.2) ein Spezialfall.

$$x - hU(x) = y \;\; (U \text{ vollstetig}) \quad \text{und} \quad X - h\bar{U}(Y) = Y \tag{5.4}$$

Hier stoßen wir mit Banachs Verweisen auf Riesz (1916), Hildebrandt (1928) und Schauder (1930c).

In Kapitel 8 werden wir dann die verallgemeinerten Darstellungen von Banach, Hausdorff und Dieudonné für normierte bzw. metrikfreie Räume betrachten.

Auch in diesem Teil II der Arbeit gilt: Unser Fokus liegt auf dem Aspekt der Dualität. Ausführlichere Darstellungen finden sich z.B. in den in Teil I genannten Arbeiten.

6 Duale Operatoren zu linearen Operatoren

Banachs Verweisen in (Banach, 1932) folgend beginnen wir bei der Untersuchung der Entwicklung des Gleichungstyps (5.1) mit Riesz' Arbeit von 1910, die wir schon aus Teil I kennen. Nach der Betrachtung der entsprechenden Gleichungen mit *linearem* Operator, womit wir immer auch die Stetigkeit/Beschränktheit des Operators meinen, kommen wir in Kapitel 7 dann zu den entsprechenden Gleichungen mit *vollstetigem* Operator.

6.1 Riesz' Transponierte (1910)

6.1.a Lineare Funktionaloperation und -transformation

Bei Riesz (1910) finden wir die für den Dualitätsbegriff in der Funktionalanalysis so wichtige Einführung der $[L^p]$-Klassen (siehe hierzu Unterkapitel 1.6). Im Titel von Riesz' §11 stoßen wir auf den Begriff der „linearen Funktionaloperation“: Bei der *Darstellung der linearen Funktionaloperation durch ein Integral* handelt es sich um Riesz' Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale auf den Räumen $L^p(a, b)$ (siehe hierzu Abschnitt 1.6.e). Heute sagen wir, dass mit diesem Satz die Elemente des *Dualraums* von $L^{\frac{p}{p-1}}(a, b)$ durch die folgenden Funktionale bestimmt sind:

$$A_{(\cdot)} = \int_a^b a(x) \ \cdot \ dx, \ \ a \in [L^p].$$

In §12 finden wir dann die Einführung der „Funktionaltransformation $T[f(x)]$“:

> Über die *Funktionaltransformation* $T[f(x)]$, welche jeder Funktion der Klasse $[L^p]$ eine Funktion derselben Klasse zuordnet, setzen wir voraus, daß sie *distributiv und in Bezug auf den Exponenten p beschränkt sei.*
>
> (Riesz, 1910, 477)

Im Gegensatz zur *Funktionaloperation* A_f aus §11, die jeder Funktion der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ eine Zahl zuordnet, ordnet die *Funktionaltransformation* $T(f(x))$ jeder Funktion der Klasse $[L^p]$ eine Funktion derselben Klasse zu. Statt einem Funktional haben wir mit T also einen Operator

$$T : L^p(a,b) \to L^p(a,b)$$

gegeben. Riesz' Motivation dieser Einführung lässt hier noch auf sich warten. $T[f(x)]$ soll linear[83] und beschränkt sein, dann heißt die Funktionaltransformation „lineare Transformation der Klasse $[L^p]$“. Die Definition der *Beschränktheit*, die äquivalent zur Stetigkeit des Operators ist, liefert auch die *Norm* des Operators:

> Beschränkt in bezug auf den Exponenten p heißt die Transformation dann, wenn es eine absolute Konstante M_T gibt derart, daß für alle Funktionen $f(x)$, für welche
>
> $$\int_a^b |f(x)|^p \, dx \leq 1$$
>
> ist, das mit der transformierten Funktion gebildete Integral
>
> $$\int_a^b |T(f(x))|^p \, dx \leq M_T^p$$
>
> ausfällt. (Riesz, 1910, 477)

> Wir setzen sofort fest, daß wir in den weiteren Entwicklungen unter M_T immer die kleinstmögliche positive Zahl von den hier angegebenen Eigenschaften verstehen. (Riesz, 1910, 477, Fußnote)

[83] Dabei gilt:

> Die Transformation heißt distributiv, wenn identisch für alle f
>
> $$T[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 T[f_1(x)] + c_2 T[f_2(x)]$$
>
> ist; die Identität ist so aufzufassen, daß sich die auf beiden Seiten stehenden Ausdrücke höchstens um eine additive Nullfunktion unterscheiden. (Riesz, 1910, 477)

6.1.b Ähnlich zu transponierten Matrizen

Als Anwendung seines Darstellungssatzes für stetige lineare Funktionale auf $[L^p]$ (siehe hierzu Abschnitt 1.6.e) führt Riesz die „Transponierte“ zur Transformation $T[f(x)]$ ein. Dazu betrachte man das Integral

$$\int_a^b T[f(x)]g(x)\,dx$$

mit $f(x)$ aus $[L^p]$ und $g(x)$ aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. Hält man hier $g(x)$ fest, so kann dies, wie man leicht zeigen kann, als ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(a,b)$ („lineare Funktionaloperation auf der Klasse $[L^p]$“) aufgefasst werden. Nach Riesz' Darstellungssatz gibt es damit eine bis auf eine additive Nullfunktion eindeutige Funktion $\psi(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$, sodass für jedes $f(x)$ aus $[L^p]$ gilt:

$$\int_a^b T[f(x)]g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx.$$

Auf diese Weise wird jedem $g(x)$ aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ ein $\psi(x)$ aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ zugeordnet. Man kann leicht zeigen, dass diese Zuordnung linear und beschränkt ist. Damit gilt – analog zur Transponierten A^T einer endlichdimensionalen Matrix A mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$:

Riesz' Transponierte von 1910

Die Vorschrift

$$\int_a^b T[f(x)]g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\mathfrak{T}[g(x)]\,dx$$

definiert somit eine lineare Transformation $\mathfrak{T}[g(x)]$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$; für dieselbe ist $M_{\mathfrak{T}} = M_T$.

Durch dieselbe Vorschrift wird, wenn die Transformation $\mathfrak{T}$ die gegebene ist, die Transformation T definiert.

Die Transformation $\mathfrak{T}[g(x)]$ heißt die *Transponierte* zur Transformation $T[f(x)]$; letztere heißt wieder Transponierte zu $\mathfrak{T}[g(x)]$.

(Riesz, 1910, 478f)

6.1.c Die Verbindung

In §13 finden wir Riesz' Anlass zur Einführung einer linearen Transformation und der zugehörigen Transponierten (vergleiche Gleichungstyp (5.1) in Kapitel 5):

> Wir fragen nach der Lösbarkeit der Funktionalgleichung
>
> $$T[\xi(x)] = f(x). \tag{34}$$
>
> Darin bedeutet $f(x)$ die gegebene, $\xi(x)$ die gesuchte Funktion aus der Klasse $[L^p]$. Das Gleichheitszeichen ist bis auf eine additive Nullfunktion zu deuten. (Riesz, 1910, 479)

Die Gleichung (34) ist nach Riesz' vorausgehender Untersuchung gleichwertig mit dem Gleichungssystem

$$\int_a^b \xi(x)\mathfrak{T}[g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \qquad g(x) \in \left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]. \tag{35}$$

Hier haben wir die Verbindung zu den Untersuchungen aus Teil I (siehe hierzu auch Abschnitt 6.5.a): Das Gleichungssystem (35) hat nämlich die Form[84]

$$\int_a^b f_i(x)\xi(x)\,dx = c_i$$

mit den Koeffizienten f_i aus der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ und den gesuchten Lösungen $\xi(x)$ aus der Klasse $[L^p]$, wofür Riesz in den vorigen Paragraphen seiner Arbeit die Lösbarkeitsbedingung

$$\Big|\sum_{i=1}^n \mu_i c_i\Big|^{\frac{p}{p-1}} \leq M^{\frac{p}{p-1}} \int_a^b \Big|\sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x)\Big|^{\frac{p}{p-1}}\,dx$$

(Riesz, 1910, 474) gefunden hat (siehe Abschnitt 1.6.d). Mit dieser Lösbarkeitsbedingung ergibt sich der folgende Satz:[85]

---

[84] mit i aus einer überabzählbaren Indexmenge

[85] Dass sich dieser Satz mittels der obigen Lösbarkeitsbedingung ergibt, ist leicht einzusehen, da „das System der $\mathfrak{T}[g(x)]$ alle linearen Verbindungen dieser Funktionen mit enthält" (Riesz, 1910, 479).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Funktionalgleichung (34) *durch eine Funktion* $\xi(x)$, *für welche*

$$\int_a^b |\xi(x)|^p \, dx \leq M^p$$

ausfällt, besteht darin, daß die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq M \left[\int_a^b |\mathfrak{T}[g(x)]|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

für alle Funktionen $g(x)$ *der Klasse* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *erfüllt ist.*

(Riesz, 1910, 479f)

Mithilfe dieses Satzes kann Riesz der folgenden Fragestellung nachgehen:

> Unter welchen Bedingungen gibt es eine lineare Transformation T^{-1} der Klasse $[L^p]$ derart, daß für alle Funktionen $f(x)$ dieser Klasse die Gleichung (34) gleichwertig sei der Gleichung
>
> $$T^{-1}[f(x)] = \xi(x);$$
>
> mit andern Worten: unter welchen Bedingungen gibt es zu T eine lineare *Umkehrtransformation*? (Riesz, 1910, 480)

Gesucht wird also ein stetiger linearer Operator

$$T^{-1} : [L^p] \to [L^p]$$

mit

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E.$$

Mit E bezeichnet Riesz die „identische Transformation“. Ist $\mathfrak{T}^{-1}$ die Transponierte zu T^{-1}, so sind diese Gleichungen nach Definition der Transponierten äquivalent zu

$$\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{T}^{-1} = E.$$

Angenommen, es gibt eine solche Umkehrtransformation T^{-1} und damit auch $\mathfrak{T}^{-1}$, dann gelten (mit $M = M_{T^{-1}} = M_{\mathfrak{T}^{-1}}$) die folgenden beiden Ungleichungen (vergleiche Abschnitt 6.5.a):

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^p \, dx &\leq M^p \int_a^b |T[f(x)]|^p \, dx, \\ \int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} \, dx &\leq M^{\frac{p}{p-1}} \int_a^b |\mathfrak{T}[g(x)]|^{\frac{p}{p-1}} \, dx. \end{aligned} \tag{R}$$

Riesz zeigt, dass das Bestehen dieser Ungleichungen, die wir hier mit (R) für Riesz bezeichnen, notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer linearen Umkehrtransformation ist:

> *Die lineare Transformation $T[f(x)]$ der Klasse $[L^p]$ besitzt dann und nur dann eine lineare Transformation T^{-1} als eindeutige Umkehrung, wenn es eine Zahl M gibt derart, daß für alle $f(x)$ aus $[L^p]$ und alle $g(x)$ aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ [die Ungleichungen (R) erfüllt sind, A.W.].*
>
> *Ist diese Bedingung erfüllt und bedeutet M_1 die kleinste Zahl M, bei welcher noch die erste Ungleichung für alle f besteht, M_2 die entsprechende Zahl für die zweite Ungleichung, so ist*
>
> $$M_1 = M_2 = M_{T^{-1}} = M_{\mathfrak{T}^{-1}}.$$
>
> (Riesz, 1910, 482)

Banachs *Théorème 1* und *Théorème 3* aus Unterkapitel 5.1 ergeben sich für die $[L^p]$-Klassen folgendermaßen: Angenommen, $\mathfrak{T}$ (bzw. T) besitzt eine eindeutige stetige Umkehrung $\mathfrak{T}^{-1}$ (bzw. T^{-1}), dann gelten äquivalent dazu die Ungleichungen (R). Mit der Hölder-Ungleichung folgt aus ihnen

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq M \left[\int_a^b |\mathfrak{T}[g(x)]|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

und auch

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq M \left[\int_a^b |T[f(x)]|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Dass dazu äquivalent die Gleichung $T[\xi(x)] = f(x)$ (bzw. $\mathfrak{T}[\nu(x)] = g(x)$) für jedes f aus $[L^p]$ (bzw. $g(x)$ aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$) lösbar ist, folgt aus Riesz' obigem Satz (siehe Seite 129), siehe (Riesz, 1910, 481).

6.1.d Bezug zu Toeplitz

Riesz verweist bei seinem letztgenannten Resultat für den Fall des Folgenraums l^2 auf Toeplitz (1907). Toeplitz verwendet in seinem Artikel (Toeplitz, 1907) sowohl die „Symbolik des Matrizen-Calcüls“, wobei er beispielhaft auf Frobenius (1878) und Kronecker (1903) verweist, als auch Begriffsbildungen aus Hilberts Theorie in (Hilbert, 1906b), wie z.B. die folgenden: Eine *Bilinearform*

$$A(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$$

heißt *beschränkt*, wenn für alle n gilt:

$$|A_n(x, y)| = \left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p y_q \right| \leq M \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{n} x_p^2 \leq 1, \ \sum_{p=1}^{n} y_p^2 \leq 1,$$

vergleiche (Hilbert, 1906b, 158, 176). Das System der Koeffizienten (a_{pq}) wird in diesem Fall *beschränkte unendliche Matrix* A genannt. In Hellingers und Toeplitz’ Enzyklopädieartikel (Hellinger und Toeplitz, 1927) – wo Toeplitz’ entsprechender Satz rückblickend erläutert wird – finden wir den von Toeplitz verwendeten Begriff der *hinteren Reziproken* und eine Aussage darüber, warum diese von Interesse ist:

> Eine beschränkte Matrix $\mathfrak{B}$ heißt *(hintere) Reziproke* zu [der beschränkten Matrix, A.W.] $\mathfrak{A}$, wenn
>
> $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}.$$
>
> Existiert sie, so hat [...] das zur Matrix $\mathfrak{A}$ gehörige *beschränkte Gleichungssystem*
>
> $$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, ...)$$
>
> für beliebige rechte Seiten y_p mit konvergenter Quadratsumme die Lösungen
>
> $$x_q = \sum_{r=1}^{\infty} b_{qr} y_r \qquad (q = 1, 2, ...),$$
>
> die [...] gleichfalls konvergente Quadratsummen besitzen.
>
> (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1428f)

Toeplitz’ Resultat lautet nun folgendermaßen, wobei auf den ersten Blick ein Zusammenhang zu Riesz' Ergebnis schwer zu erkennen ist:[86]

> *Eine reelle, beschränkte Bilinearform A besitzt dann und nur dann eine hintere beschränkte Reziproke, wenn AA' nicht den Verdichtungswert ∞ hat, dann und nur dann eine vordere, wenn $A'A$ derselben Bedingung genügt, und beides zugleich, also eine eindeutige, beschränkte Resolvente dann und nur dann, wenn sowohl AA' als auch $A'A$ in ∞ keinen Verdichtungswert aufweisen.* (Toeplitz, 1907, 108)

Den Zusammenhang zu Riesz' Ergebnis sehen wir leichter in Hellingers und Toeplitz' späterer Formulierung des Resultats:

> *Eine beschränkte Matrix $\mathfrak{A}$ besitzt dann und nur dann eine beschränkte hintere Reziproke, wenn die Werte der quadratischen Form $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x,x)$ [...] für alle Wertsysteme von der Quadratsumme $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = 1$ oberhalb einer Zahl $m > 0$ liegen, d.h. wenn*
>
> $$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x,x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p \right)^2 \geq m \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2, \qquad m > 0.$$
>
> *Für die Existenz einer vorderen Reziproken ist die gleiche Eigenschaft von $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}(x,x)$, für die einer eindeutigen Reziproken sind diese beiden Eigenschaften charakteristisch.* (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1430)

Wählen wir in Riesz' Ungleichungen (R) erstens $p = 2$, zweitens statt der L^2- die l^2-Norm, d.h. statt den Integralen entsprechende Reihen, und drittens $T = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, womit $\mathfrak{T} = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ ist, so erhalten wir Toeplitz' Resultat.

6.1.e Anwendung von Riesz' Resultat

Da mit $K : L^p(a,b) \to L^p(a,b)$ auch $E - \lambda K$ linear ist, kann Riesz (in §14) seine Untersuchungen auf die Funktionalgleichung

$$\xi(x) - \lambda K[\xi(x)] = f(x)$$

übertragen, d.h. auf die Spektraltheorie – was sicher die Hauptmotivation für die Einführung der linearen Transformation und der zugehörigen Transponierten war.

[86] Mit A' wird die Transponierte bezeichnet.

> Es bedeute K eine beliebige lineare Transformation der Klasse $[L^p]$; λ sei ein veränderlicher Parameter. Die obige Funktionalgleichung ist eine Verallgemeinerung der bekannten Fredholmschen Integralgleichung.
>
> Das Problem, die Funktionalgleichung für jeden einzelnen Wert von λ in bezug auf ihre Lösbarkeit zu untersuchen, läßt sich bei beliebigem Exponenten p mit unseren Hilfsmitteln vollständig erledigen. [...] Wir beschränken uns hier auf einige Betrachtungen bei $p = 2$ und behandeln auch nur gewisse spezielle Typen der Funktionalgleichung, bei denen die Anwendung unserer Resultate sich äußerst einfach und natürlich gestaltet. (Riesz, 1910, 482f)

Zunächst beweist Riesz den folgenden Satz für $p = 2$ (siehe Unterkapitel 5.3):

> *Bedeutet M_K die der Transformation K entsprechende (kleinste) absolute Konstante, so ist obige Funktionalgleichung für alle Parameterwerte λ, für welche*
> $$|\lambda| < \frac{1}{M_K}$$
> *ausfällt, sicher eindeutig lösbar und die Transformation $E - \lambda K$ hat eine eindeutig bestimmte Umkehrung.* (Riesz, 1910, 483)

Riesz zeigt dazu, dass „für die Transformation $T = E - \lambda K$, wie auch für die Transformierte $\mathfrak{T} = E - \lambda\mathfrak{K}$“ die Ungleichungen (R) gelten, wenn $|\lambda| < \frac{1}{M_K}$ erfüllt ist. Es folgen weitere wichtige Resultate der Spektraltheorie, mit denen Riesz die Hilbertsche Theorie in (Hilbert, 1904) und (Hilbert, 1906b) weiterführt. Wir wollen hier nur die Untersuchungen herausgreifen, die für die weitere Entwicklung des Begriffs des dualen Operators eine Rolle spielen. Ein Aspekt ist z.B. die schwache Konvergenz (siehe Abschnitt 1.6.d):

> Aus der Definition der linearen Transformation folgt unmittelbar, daß, wenn eine Folge $\{f_n(x)\}$ stark gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert, dies auch für die Folge $\{T[f_n(x)]\}$ und die Funktion $T[f(x)]$ der Fall ist. Weniger evident ist, daß bei jeder linearen Transformation *auch die schwache Konvergenz erhalten bleibt.* Dies folgt nun aus der Existenz der transponierten Transformation. (Riesz, 1910, 486)

Das erkennen wir anhand der Gleichungen:

$$\int_a^b T[f(x)]h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\mathfrak{T}[h(x)]\,dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)\mathfrak{T}[h(x)]\,dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b T[f_n(x)]h(x)\,dx$$

(Riesz, 1910, 486), wobei $\{f_n(x)\}$ eine schwach gegen $f(x)$ konvergente Folge in $[L^p]$ und $h(x)$ aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ ist. Mit dieser Feststellung kann Riesz seine Resultate noch „etwas weiter ausbauen“. Für uns ist hier das Anbringen des Begriffs der *Vollstetigkeit* interessant. In seinen Untersuchungen zu vollstetigen Transformationen in (Riesz, 1916) finden wir nämlich einen weiteren Zwischenschritt zur Entwicklung des Begriffs eines allgemeinen dualen Operators (siehe Unterkapitel 7.4). Dabei geht es um die Existenz einer genauen Lösung statt einer Lösung durch Approximation der Gleichung

$$\int_a^b |\xi(x) - \frac{1}{M_K} K[\xi(x)]|^2 \, dx = 0,$$

die bewiesen werden könnte, wenn man an einer bestimmten Stelle des Beweises nicht davon ausgehen müsste, dass eine gewisse Menge von schwach konvergenten Folgen alle gegen Nullfunktionen konvergieren könnten. Für Genaueres siehe (Riesz, 1910, 486f). An dieser Stelle ist jedenfalls die folgende Definition von Nutzen:

> Hier greift der Begriff der Vollstetigkeit ein. [...] Wir nennen nämlich eine Funktionaltransformation vollstetig, wenn bei ihr jede schwach konvergente Folge in eine stark konvergente übergeht.
>
> (Riesz, 1910, 487)

Riesz’ Paragraph endet mit dem Beweis des Satzes über die Zerlegung von reell symmetrischen, vollstetigen Lineartransformationen in elementare Transformationen, „welcher dem Hilbertschen Satze über die Normalzerlegung einer reellen quadratischen Form entspricht“ (Riesz, 1910, 489).

6.1.f Analoge Resultate für die Folgenräume l^p

Banach verweist für *Théorème 1* und *Théorème 3* aus Unterkapitel 5.1 bzgl. der Folgenräume l^p $(p > 1)$ auf (Riesz, 1913). Allerdings sind in dieser Rieszschen Arbeit, abgesehen von der Lösbarkeitsbedingung

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i| \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{i_1}^{n} \mu_i a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

für das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

(Riesz, 1913, 61), wobei die Koeffizientenfolgen $\mathfrak{a}_i$ aus $l^{\frac{p}{p-1}}$ und die gesuchten Lösungsfolgen x aus l^p stammen sollen (siehe Abschnitt 1.6.f), die entsprechenden Untersuchungen nur für den Fall $p = 2$ ausformuliert. Die Definition der Transponierten erfolgt also zunächst für x und y aus l^2, kann aber auf l^p und $l^{\frac{p}{p-1}}$ übertragen werden:

Riesz' „transposée" von 1913

$$x'_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \ (i = 1, 2, ...) \tag{4}$$

$$y''_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} y_i \ (k = 1, 2, ...). \tag{10}$$

Les deux substitutions sont liées entre elles par la relation

$$\sum_{i=1}^{\infty} x'_i y_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y''_k.$$

(Riesz, 1913, 84)

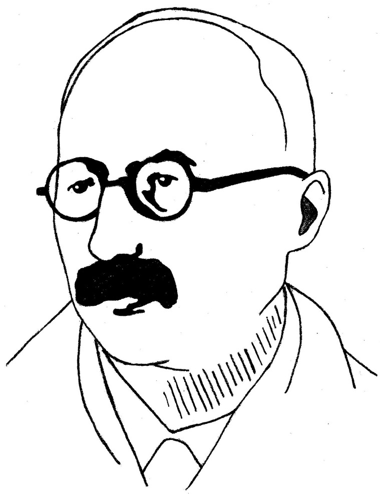
Nous dirons que les substitutions (4) et (10) sont les *transposées* l'une de l'autre. Pour abréger, nous désignerons la substitution (4) par A et sa transposée (10) par $\mathfrak{A}$. (Riesz, 1913, 85)

Siehe hierzu (Riesz, 1913, 78-85). Riesz formuliert die entsprechenden Resultate zwar nur für den Fall $p = 2$ und bemerkt dabei, dass dies schon von Toeplitz (1907) und Hilb (1909) gezeigt wurde, betont jedoch, dass sein Vorgehen im Gegensatz zu denen von Toeplitz und Hilb auf den allgemeinen Fall ($p \geq 1$) übertragen werden kann:

> Mais dans l'ordre historique, il fut découvert par M. Toeplitz, indépendamment de cette theorie génerérale et même avant que cette théorie fût développée (Toeplitz, 1907). Une autre démonstration, très simple et intéressante, est due à M. Hilb (1909). Mais ces deux démonstrations ne semblent pas susceptibles d'ètre étendues à des cas plus généraux, tandis que notre démonstration s'étend immédiatement à $p \geq 1$ quelconque. (Riesz, 1913, 89)

Als Anwendung der Resultate untersucht Riesz auch in dieser Arbeit entsprechende Verhältnisse aus der Spektraltheorie.

6.2 Stanisław Saks (1897-1942)



Stanisław Saks wurde am 30. Dezember 1897 in Kalisz geboren.[87] 1915 begann er an der Universität Warschau zu studieren, wo er 1922 bei S. Mazurkiewicz mit der Dissertationsschrift *A contribution to the theory of surfaces and plane domains* promovierte und neben seinem Doktorvater auch von W. Sierpinski geprägt wurde. Schon ab 1921 lehrte er an der Technischen Universität Warschau. 1926 habilitierte er sich an der Universität Warschau und lehrte auch hier bis 1939. Sowohl K. Kuratowski als auch A. Zygmund lobten seine Lehrkunst. 1931 erhielt er ein Rockefeller-Stipendium und ging für ein Jahr in die USA. Außerdem war er für längere Aufenthalte in Lemberg und Vilnius. Er beschäftigte sich hauptsächlich mit der Theorie der reellen Funktionen und Themen der Topologie und Funktionalanalysis. Neben anderen Arbeiten – hauptsächlich Artikel in der Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae* – veröffentlichte er 1933 das Lehrbuch *Théorie de l'intégrale*, das heute auch außerhalb Polens verbreitet ist. Als Mitglied der Lemberger Schule trug sich Saks ins *Schottische Buch* ein (siehe Abschnitt 2.7.b). Ab 1939 war er in Lemberg, wo 1941 die Deutschen einmarschierten. Saks, der einer jüdischen Familie angehörte, floh nach Warschau. Dort wurde er verhaftet und am 23. November 1942 von der Gestapo erschossen.

[87] In dieser biographischen Skizze stützen wir uns hauptsächlich auf den Eintrag von Hawkins (1975) im *Dictionary of Scientific Biography* und den *Mathteacher* (http://www.tomaszgrebski.pl, 17.05.21). Zur weiteren Lektüre verweisen wir auf die Beiträge von Zygmund (1987) und Wojtaszczyk (1987).

6.3 Saks' Ergänzung (1929)

6.3.a Zwischen Banachs Arbeiten

Saks ergänzt in seinem Artikel *Remarque sur les fonctionnelles linéaires dans les champs L^p* (Saks, 1929) Riesz' Resultate, die wir in Unterkapitel 6.1 vorgestellt haben. Der Artikel befindet sich im ersten Band der *Studia Mathematica* genau zwischen den beiden Artikeln von Banach *Sur les fonctionnelles linéaires* (Banach, 1929a) und *Sur les fonctionnelles linéaires II* (Banach, 1929b) – und dies natürlich nicht zufällig. In (Banach, 1929a) finden wir (siehe Abschnitt 2.8.e) neben Banachs Version des Fortsetzungsatzes (Satz von Hahn-Banach) die Lösbarkeitsbedingung

$$|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \right\|$$

für das Ausgangsproblem

$$f(x_n) = c_n \qquad (n = 1, 2, ...)$$

(Banach, 1929a, 213), wobei die Unbekannte f ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum der x_n sein soll. Eben diese Aussage zeigt Riesz für den konkreten Fall der Funktionenräume $L^p(a, b)$ in (Riesz, 1910) und den Fall der Folgenräume l^p in (Riesz, 1913), worauf Saks auch verweist. Riesz leitet daraus die von Banach genannten *Théorèmes 1* und *3* (siehe Unterkapitel 5.1) für den $L^p(a, b)$- und l^p-Fall her. Saks' Ziel ist nun eine Umkehrung dieser Theoreme, welche sich wiederum in der allgemeinsten Form in (Banach, 1929b) findet.

6.3.b Saks' Transponierte

Saks bezeichnet den heute und auch von Riesz als l^p bezeichneten Folgenraum mit L^p $(p > 1)$, was ein wenig verwirrend sein kann, da Riesz' $[L^p]$-Klassen ja die entsprechenden Funktionenklassen sind. Weiter verwendet er wie Banach im Artikel vorher die doppelten Normstriche. In Saks' Fall stehen diese für die l^p-Norm:

$$\|X\| = \left[\sum_n |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

siehe (Saks, 1929, 217). $U(X)$ sei „une fonctionelle linéaire définie dans L^p“ mit

$$U : L^p \to L^p.$$

Es folgt die Einführung der Transponierten mit Verweis auf (Riesz, 1913, Kap. III, IV), wo wir die Einführung im Fall $p = 2$ finden (vergleiche Abschnitt 6.1.f). Zwar stellt Riesz dies analog für die Funktionenklassen $[L^p]$ mit $p \geq 1$ in (Riesz, 1910) vor, dennoch ist es an dieser Stelle interessant, die Einführung für die Folgenräume l^p mit beliebigem $p > 1$ zu verfolgen: Zunächst kann man in diesem Fall jede Operation (Saks Schreibweise)

$$Y = U(X)$$

als „substitution linéaire" der Form

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, ...)$$

ausdrücken. Dann folgt die Einführung der „transposée" $U^*(X)$:

Saks 1929

> Le *tableau* de coëfficients a_{ik} donnant lieu à une relation fonctionnelle linéaire $[Y = U(X)]$ dans l'espace L^p, s'appelle *borné* de rang p. On sait que, si le tableau (a_{ik}) est borné de rang p, le tableau *transposé* (a_{ki}) est borné de rang q, p et q étant liés par la relation connue $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $U(X)$ étant une fonctionelle correspondant au tableau (a_{ik}), on désignera par $U^*(X)$ la fonctionelle attachée au tableau transposé et définie dans l'espace L^q; elle est appelée *transposée* de $U(X)$. (Saks, 1929, 217)

6.3.c Im Anschluss an Riesz

Saks formuliert ein „théorème connu de M. F. Riesz" und verweist dabei auf (Riesz, 1913, 59):

> Si un nombre positif M existe, tel que
>
> $$\|U^*(X)\| \geq \frac{\|X\|}{M}$$
>
> ait lieu pour tout élément $X \leq L^q$ $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$, l'équation
>
> $$U(X) = Y$$

> admet une solution $X \in L^p$ pour chaque vecteur $Y \in L^p$. Le but de la note présente est de prouver la réciproque de ce théorème [...].
> (Saks, 1929, 218)

Tatsächlich finden wir bei (Riesz, 1913, 59) nicht diesen Satz, sondern die Lösbarkeitsbedingung des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1, 2, ...$$

für den l^p-Fall. Saks Formulierung ergibt sich daraus analog zu unseren Überlegungen in Abschnitt 6.1.c, wobei $\|U^*(X)\| \geq \frac{\|X\|}{M}$ einer der Rieszschen Ungleichungen (R) entspricht. Saks zeigt nun den folgenden Satz, der obige Aussage enthält und erweitert:[88]

> **Théorème.** $U(X)$ *étant une fonctionnelle linéaire dans l'espace* L^p*, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*
>
> *(A)* $U(L^p) = L^p$,
>
> *(B)* $U(L^p)$ *est un ensemble de deuxième catégorie (au sens de Baire),*
>
> *(C) il existe un nombre positif* M *tel que l'inégalité*
>
> $$\|U^*(X)\| \geq \frac{\|X\|}{M}$$
>
> *ait lieu pour chaque vecteur* X *de* $L^{\frac{p}{p-1}}$.
>
> (Saks, 1929, 218)

Saks bemerkt mit Verweis auf Riesz (1910) ergänzend für die Funktionenräume:

> On énonce mutatis mutandis, une proposition analogue pour les champs de fonctions sommables de puissance p (> 1). (Saks, 1929, 218)

Mit Saks' Satz ist Banachs *Théorème 4* (siehe Unterkapitel 5.1) gegeben. Saks bemerkt außerdem, dass die Existenz einer positiven Zahl M mit

$$\|U^*(X)\| \geq \frac{\|X\|}{M}$$

im Fall des Hilbertraums l^2 („espace hilbertien H“) äquivalent ist zur Existenz einer hinteren Reziproken („réciproque à droite“[89]), womit folgt:

[88] Zu Baires Kategorienbegriff siehe bspw. (Pietsch, 2007, 42).

[89] Saks verweist für den Begriff auf (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1428f) (siehe Abschnitt 6.1.d).

> *Pour qu'il existe une réciproque à droite de la fonctionnelle linéaire $U(X)$ dans l'espace hilbertien, il faut et il suffit que l'equation*
>
> $$U(X) = Y$$
>
> *admette une solution en X pour chaque vecteur Y de cet espace.* Il paraît que la proposition analogue pour des espaces généraux L^p $(p > 1)$ n'est pas encore connue. (Saks, 1929, 221)

> Cependant, M. Banach a prouvé le théorème suivant qui est valable pour *tout* espace linéaire complet: si l'equation $U(X) = Y$ admet pour chaque vecteur Y une seule solution en X, la fonctionnelle U possède la réciproque complète U^{-1}. (Saks, 1929, 221, Fußnote)

Saks verweist für den Fall des „l'espace hilbertien H" auf Toeplitz (1907), Hilb (1909), Hellinger und Toeplitz (1927, 1430f) und Riesz (1913, 89-94).

6.3.d Vollstetiger Fall

Als Anwendung seiner Untersuchungen zeigt Saks noch einen Satz für vollstetige Operatoren:

> *$U(X)$ désignant une fonctionnelle linéaire et complètement continue dans un espace linéaire E, l'ensemble $U(E)$ est un ensemble compact dans E, ou bien il est de première catégorie dans E.* (Saks, 1929, 221)

Interessant sind dabei vor allem die Verweise von Saks: Für den Begriff „complètement continue" verweist Saks auf die Arbeit (Riesz, 1916, 74), zu der wir in Unterkapitel 7.4 kommen werden. Dabei gilt: „Une fonctionnelle linéaire $U(X)$ est dite complètement continue lorsqu'elle transforme chaque ensemble borné en un ensemble compact." (Saks, 1929, 221, Fußnote) Zum Begriff „compact" schreibt er:

> Nous employons ici le term „compact" dans un sens un peu différent de celui qui lui est attribué habituellement; on appelle ordinairement un ensemble *compact* si chaque son sous-ensemble infini [sic] admet de points limites; cependant, nous dirons dans le texte qu'un ensemble est *compact* si chacun de ses sous-ensembles infinis et bornés possède de tels points. (Saks, 1929, 221, Fußnote)

Hinsichtlich der Fredholmschen Alternative bemerkt er:

> L'énoncé que nous venons d'établir, étend le fait bien connu que l'equation de Fredholm de première éspèce n'est pas, en général, résoluble. D'ailleurs, dans le cas où l'espace E est l'espace hilbertien, notre énoncé découle du théorème connu de MM. Picard-Schmidt sur l'equation intégrale de première éspèce, ce théorème s'étendant sans modifications à toute équation de la forme $U(X) = Y$, où U désigne une fonctionnelle linéaire complètement continue dans l'espace de Hilbert. (Voir, p. ex. (Lalesco, 1912, Kap. IV).) (Saks, 1929, 222, Fußnote)

6.4 Banachs Verallgemeinerung (1929)

In §4 von Banachs zweitem Artikel[90] im ersten Band der *Studia Mathematica* (Banach, 1929b) finden wir die in Kapitel 5 beschriebene Einführung eines allgemeinen dualen Operators im normierten Fall, sowie die *Théorèmes 1-4*. Bzgl. einer „opération linéaire" $U(x)$ (Banach, 1929b, 235) – d.h. eines stetigen/beschränkten linearen Operators im heutigen Sinn – die von E nach E' abbildet, wobei E und E' Banachräume („deux ensembles vectoriels normés et complets") sind, definiert Banach:[91]

Banachs „l'opération adjointe" von 1929

> Une opération $U(x)$ fait correspondre à toute fonctionnelle linéaire Y définie dans E' une fonctionnelle $X = Y[U(x)]$ définie dans E, aussi linéaire. [...] Cette correspondance entre X et Y est une nouvelle opération linéaire
>
> $$X = \bar{U}(Y)$$
>
> définie dans le domaine des fonctionnelles linéaires Y, le contredomaine étant contenu dans l'ensemble des fonctionnelles linéaires X. [...] Nous l'appellerons *l'opération adjointe* à l'opération $y = U(x)$. (Banach, 1929b, 235)

Dies entspricht einer Verallgemeinerung von Riesz' „Transponierten" im Fall $E = E' = L^p(a, b)$ in (Riesz, 1910) (siehe Unterkapitel 6.1). Zwar verweist Banach im

[90] Zum ersten Artikel (Banach, 1929a) siehe Abschnitt 2.8.e.

[91] In (Banach, 1932) verwendet Banach die Begriffe „opération conjuguée"/„opération associée" (Banach, 1932, 100).

gesamten Artikel lediglich auf (Banach, 1929a) und seine Dissertation (Banach, 1922), jedoch werden die Arbeiten (Riesz, 1910) und auch (Riesz, 1916) mit Riesz' Einführung des dualen Integraloperators im Fall $C(a, b)$ (siehe Unterkapitel 7.4) von Saks im direkt vorausgehenden Artikel zitiert. Wir können also davon ausgehen, dass Banach diese Arbeiten kannte. Nach dieser Definition folgen, wie gesagt, die in Unterkapitel 5.1 genannten *Théorèmes 1-4*, hier unter den Namen *Théorème 5. I.*, *Théorème 5. II.*, *Théorème 6. I.* und *Théorème 6. II.* Der Beweis zu *Théorème 6.* lautet dabei wie folgt:

> **Démonstration.** Elle est tout à fait analogue à celle du théorème précédent. On remplacera dans celle-ci les lettres $x, y, X, Y, U, \bar{U}$ resp. par $Y, X, y, x, \bar{U}, U$ et on s'appuiera sur le théorème cité dans le renvoi au lieu du théorème 2 et réciproquement. (Banach, 1929b, 238)

Wie auch in (Banach, 1932) (siehe Abschnitt 6.5.b) beschreibt Banach mit diesem Beweis die klare duale Beziehung der beiden *Théorèmes 5 et 6.*

6.5 Abschließende Bemerkungen

6.5.a Zusammenhänge

In den Entwicklungen, die in Teil I dieser Arbeit dargestellt sind, geht es um die Lösung von Spezialfällen des Gleichungssystems

$$\ell(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2, ..., \tag{6.1}$$

wobei das gesuchte stetige lineare Funktional

$$\ell : X \to \mathbb{K}$$

ein Element des zum Raum X der x_i gehörigen Dualraums X' sein soll. Die Untersuchungen von Riesz, die wir in Unterkapitel 6.1 verfolgt haben, beziehen sich dagegen auf die Lösung eines Spezialfalls der Gleichung

$$T(x) = y, \tag{6.2}$$

wobei x gesucht und T ein linearer Operator

$$T : X \to Y$$

ist, bei Riesz mit $X = Y = L^p(a,b)$. Für das Gleichungssystem (6.1) ergibt sich (siehe Abschnitt 1.7.a) die Lösbarkeitsbedingung

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i\Big| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\Big\|, \tag{6.3}$$

für ein $M \geq 0$ und sämtliche Parameter u_i aus $\mathbb{K}$. Für die folgende Überlegung betrachten wir außerdem das zu (6.1) duale Problem

$$\ell_i(x) = c_i, \;\; i = 1, 2, ..., \tag{6.1_D}$$

bei dem nun x die Unbekannte ist, mit der analogen Lösbarkeitsbedingung

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i\Big| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{n} u_i \ell_i\Big\|. \tag{6.3_D}$$

Riesz' Vorgehen war mit $X = Y = L^p(a,b)$ und $X' = Y' = L^{\frac{p}{p-1}}(a,b)$ das folgende:[92] Die Lösbarkeitsbedingung (6.3_D) kann für die Lösung von Gleichung (6.2) genutzt werden, wenn man eine zu (6.2) äquivalente Darstellung mit der Form von (6.1_D) findet. Mithilfe der Dualität zwischen T und dem zugehörigen dualen Operator $T' : Y' \to X'$ erhält man im Fall $T(x) = y$ mit der Schreibweise der dualen Paarung:

$$(y, y') = (T(x), y') = (x, T'(y')),$$

für alle y' aus Y' und umgekehrt. Damit ist (6.2) äquivalent zu

$$T'(y')(x) = y'(y), \;\; y' \in Y', \tag{6.4}$$

wobei

$$T'(y') : X \to \mathbb{K}$$

für jedes y' aus Y' ein stetiges lineares Funktional aus dem Dualraum X' ist. Dadurch ergibt sich[93] mit der Lösbarkeitsbedingung (6.3_D) die folgende Lösbarkeitsbedingung für (6.4) und damit auch für (6.2):

$$|y'(y)| \leq M\, |T'(y')|, \tag{6.5}$$

für alle y' aus Y'.

[92] Wir benutzen zum besseren Verständnis unsere heutige Schreibweise. Für Riesz' Formulierungen siehe Abschnitt 6.1.c

[93] Mit $y'(y)$ und $T'(y'), y' \in Y'$, sind alle linearen Kombinationen enthalten.

Der duale Operator wird hier also benötigt, um für die Lösung der Gleichung (6.2)

$$T(x) = y$$

die in Teil I vorgestellte Lösbarkeitsbedingung für Gleichung (6.1) nutzen zu können. Damit ist eine mögliche Motivation zur Einführung eines dualen Operators dargestellt, die wir im Fall der $L^p(a,b)$-Räume bei Riesz (1910) vorfinden. Riesz verwendet diese Überlegungen, um im Bestehen der Ungleichungen (R) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer stetigen Umkehrtransformation zu erhalten. Dass die Ungleichungen notwendig sind, sieht man mit

$$\|f\| = \|T^{-1}T(f)\| \leq \|T^{-1}\| \, \|T(f)\|.$$

Saks greift den von Riesz verwendeten dualen Operator im l^p- (und $L^p(a,b)$-) Fall auf, um Riesz' Resultate zu ergänzen. Bei Banach (1929b) finden wir die Resultate und den dualen Operator schließlich in allgemeiner Form für den Fall allgemeiner Banachräume.

6.5.b Duale Resultate durch Vertauschen

Banachs Formulierung zum Erhalt der *Théorèmes 3 et 4* aus den *Théorèmes 1 et 2* (siehe Unterkapitel 5.1) mittels entsprechendem Vertauschen enthält eine explizite Form von Dualität:

> En remplaçant dans les théorèmes 1 et 2 qui précèdent x, y, X, Y, U et $\bar{U}$ respectivement par $Y, X, y, x, \bar{U}$ et U et en appliquant dans le raisonnement les théorèmes sur les fonctionnelles là où on a fait appel aux théorèmes concernant les éléments, on obtient [les théorèmes 3 et 4, A.W.]. (Banach, 1932, 148)

Man erhält jeweils zwei zueinander duale Sätze allein durch formales Vertauschen. Dies ist für Banach so einsichtig, dass er z.B. Saks für den l^p- und $L^p(a,b)$-Fall *Théorème 2* und das dazu duale *Théorème 4* zuspricht, obwohl Saks ‚nur' einen wesentlichen Baustein für *Théorème 4* ausformuliert.

6.5.c Die Orthogonalitätsbedingung

Banachs *Théorème 2* und *Théorème 4* aus Unterkapitel 5.1 enthalten eine Eigenschaft, die wir im Folgenden als ‚Orthogonalitätsbedingung' bezeichnen wollen. So lesen wir in *Théorème 2* (und alles Folgende gilt analog für *Théorème 4* in dualer

Form): Ist die Gleichung $X = \bar{U}(Y)$ für jedes X lösbar, so besteht das Bild von $U(x)$ aus den Elementen y, für die gilt: $Y(y) = 0$ für alle Y mit $\bar{U}(Y) = 0$. Zur Erinnerung: Für Banachs *Théorèmes* ist U definiert durch

$$U : E \to E',$$

wobei mit E' ein weiterer allgemeiner Banachraum neben E gemeint ist und nicht der Dualraum von E. Die Dualräume werden stattdessen mit $\bar{E}$ und $\bar{E}'$ bezeichnet und es gilt für den dualen Operator

$$\bar{U} : \bar{E}' \to \bar{E}.$$

Die Aussage von *Théorème 2* kann man nun auch folgendermaßen formulieren: Ist die Gleichung

$$\bar{U}(Y) = X$$

für jedes X lösbar, so sind genau die $y \in E'$, für die gilt:

$$U(x) = y,$$

‚orthogonal'[94] zu allen Lösungen $Y \in \bar{E}'$ der homogenen Gleichung

$$\bar{U}(Y) = 0.$$

Das für diese Arbeit Interessante an dieser Eigenschaft ist, dass hier sowohl der entsprechende Operator als auch der zugehörige duale Operator auftreten. Oder: sowohl die entsprechende (inhomogene) Gleichung und die zugehörige (homogene) *duale* Gleichung. Damit ist eine weitere Motivation zur Einführung des Begriffs eines dualen Operators gegeben. Wir wollen Banachs Beweis (siehe (Banach, 1932, 148)) dieser Aussage aus *Théorème 2* verfolgen und zeigen, wo die Dualität zwischen Operator und dualem Operator verwendet wird:

1) Es sei y_0 gegeben mit $Y(y_0) = 0$ für alle Y mit $\bar{U}(Y) = 0$. G' sei das Bild von $U(x)$, welches, wie man zeigen kann, abgeschlossen ist. Angenommen, y_0 ist *nicht* im Bild G' enthalten, so existiert, wie Banach mithilfe seines Fortsetzungssatzes zeigen kann, ein Funktional Y_0 mit $Y_0(y_0) = 1, Y_0(y) = 0,\ y \in G'$. Wegen $Y_0(y) = 0,\ y \in G'$, gilt – und hier wird nun die Dualität zwischen $U(x)$ und $\bar{U}(Y)$ benutzt

[94] Die Bezeichnung ‚orthogonal' verwenden in diesem Zusammenhang z.B. Banach (1932, 159), siehe Unterkapitel 5.3, Schauder (1930c, 191), siehe Unterkapitel 7.8 oder Dieudonné (1942, 115), siehe Unterkapitel 3.6.

(wir verwenden die Schreibweise der dualen Paarung):

$$(x, \bar{U}(Y_0)) = (U(x), Y_0) = 0, \quad x \in E.$$

Daher ist $\bar{U}(Y_0) = 0$. Dies steht im Widerspruch zu $Y_0(y_0) = 1$.

2) Ist $y_0 = U(x_0)$ im Bild G' und Y gegeben mit $\bar{U}(Y) = 0$, so gilt (und wieder wird die Dualität benutzt):

$$(U(x), Y) = (x, \bar{U}(Y)) = 0, \quad x \in E$$

und damit $Y(U(x)) = 0$, $x \in E$, d.h. insbesondere $Y(U(x_0)) = 0$, also $Y(y_0) = 0$.

7 Duale Operatoren zu vollstetigen Operatoren

7.1 Endlichdimensionale lineare Gleichungssysteme und die Fredholmsche Alternative

Die Gleichung

$$Ax = c$$

mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, x \in \mathbb{K}^n$ und $c \in \mathbb{K}^m$ beschreibt ein endlichdimensionales lineares Gleichungssystem, bestehend aus m Gleichungen mit n Unbekannten. Es ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $A|c$ ist. Dieses Kriterium von Frobenius (1905) (siehe Abschnitt 1.7.a) bildet den Ausgangspunkt für die in Teil I dargestellten Entwicklungen. Ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich der Anzahl der Unbekannten, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die homogene Gleichung $Ax = 0$ besitzt in diesem Fall nur die triviale Lösung. Bei einem quadratischen Gleichungssystem ($A \in \mathbb{K}^{n\times n}$) kann man anhand der Determinante Aussagen über die Lösbarkeit machen: Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$. Die Lösung kann in diesem Fall mithilfe der Cramerschen Regel (Cramer, 1750) explizit angegeben werden. Ist $\det(A) = 0$, so besitzt das homogene System $Ax = 0$ auch nichttriviale Lösungen und es kann, neben der Überprüfung, ob alle Nebendeterminanten den Wert Null haben, z.B. folgendermaßen untersucht werden, ob das inhomogene System lösbar ist: Es seien mit x' die Lösungen der homogenen adjungierten Gleichung

$$A'x = 0$$

bezeichnet. A' sei die zu A adjungierte Matrix, d.h. transponiert und konjugiert.

Angenommen, es existiert eine Lösung x^* des Gleichungssystems $Ax = c$. Dann gilt (und hier wird die Dualität von A und A' benutzt):

$$\langle c, x' \rangle = \langle Ax^*, x' \rangle = \langle x^*, A'x' \rangle = \langle x^*, 0 \rangle = 0,$$

das heißt, c ist orthogonal zu den (nichttrivialen) Lösungsvektoren des homogenen adjungierten Systems $A'x = 0$. Betrachtet man A als lineare Abbildung, so kann man dies auch folgendermaßen formulieren: Die Gleichung $Ax = c$ ist genau dann lösbar, wenn c im Bild von A ist:

$$Ax = c \text{ lösbar } \Leftrightarrow \ c \in \mathrm{im}\,(A).$$

Das Bild von A ist orthogonal zum Kern von A':

$$\mathrm{im}\,(A) \perp \ker(A').$$

Im Fall einer endlichdimensionalen linearen Abbildung gilt sogar, dass das Bild von A das gesamte orthogonale Komplement des Kerns von A' ist:

$$\mathrm{im}\,(A) = \ker(A')_{\perp},$$

womit die Orthogonalität von b zu den Lösungsvektoren von $A'x = 0$ also notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von $Ax = c$ ist. Die Notwendigkeit der Bedingung entspricht der Aussage von Banachs *Théorème 4* für lineare Operatoren (siehe Unterkapitel 5.1), deren Beweis wir in Abschnitt 6.5.c dargestellt haben. Dass die ‚Orthogonalitätsbedingung' auch hinreichend ist, gilt im unendlichdimensionalen Fall im Allgemeinen nicht. Allerdings ist die Bedingung hinreichend im Fall *kompakter* Operatoren. Dies finden wir in der *Fredholmschen Alternative*, worunter wir heute die folgende Aussage verstehen:

Fredholmsche Alternative

Sei X ein Banachraum, $T : X \to X$ ein kompakter Operator und $T' : X' \to X'$ der dazu duale Operator sowie $\lambda \neq 0$ ein Element des zugrunde liegenden Körpers $\mathbb{K}$.

Betrachtet wird die Gleichung

$$\lambda x - Tx = y \qquad (F)$$

und die dazu duale Gleichung

$$\lambda x' - T'x' = y'. \qquad (F^D)$$

Entweder (**erster Fall**) besitzen sowohl die homogene Gleichung

$$\lambda x - Tx = 0 \tag{F_H}$$

als auch die dazu duale Gleichung

$$\lambda x' - T'x' = 0 \tag{F_H^D}$$

nur die triviale Lösung und die inhomogenen Gleichungen (F) und (F^D) sind für jedes $y \in X$ bzw. $y' \in X'$ eindeutig lösbar,

oder (**zweiter Fall**) es existieren $n = \dim\ker(\lambda - T) = \dim\ker(\lambda - T') < \infty$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichungen (F_H) und (F_H^D) und die inhomogene Gleichung (F) ist genau dann lösbar, wenn

$$y \in \ker(\lambda - T')_\perp$$

ist, die inhomogene Gleichung (F^D) ist genau dann lösbar, wenn

$$y' \in \ker(\lambda - T)^\perp$$

ist.

Die in der Fredholmschen Alternative enthaltenen Aussagen wurden im Laufe ihrer Entwicklung oftmals ohne die jeweiligen dualen Aussagen formuliert, d.h. ohne gleichzeitige Betrachtung der dualen Gleichungen (F^D) und (F_H^D). Oft werden diese dann rückblickend ergänzt. Hinsichtlich einer historischen Untersuchung des Dualitätsbegriffs ist es natürlich interessant zu sehen, in welchen Arbeiten die dualen Formulierungen explizit auftreten.

Für die obige heutige Formulierung der Fredholmschen Alternative verwenden wir die folgenden Notationen und Begriffe:

- Ein Operator $T : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen X und Y heißt *kompakt*, wenn er beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet, d.h. auf Mengen, deren Abschluss kompakt ist. Dies ist äquivalent dazu, dass für jede beschränkte Folge (x_n) in X die Folge (Tx_n) in Y eine konvergente Teilfolge enthält. Da kompakte Mengen beschränkt sind, sind kompakte Operatoren stetig. In Abschnitt 7.9.a geben wir einen kleinen Überblick über die verschiedenen Verwendungsweisen des Begriffs kompakter („vollstetiger") Operatoren, die uns im Folgenden begegnen werden.

- Der zu einem linearen Operator $T : X \to Y$ *duale Operator* $T' : Y' \to X'$ ist (wie z.B. bei Banach (1929b),[95] siehe Unterkapitel 6.4) für alle $y' \in Y'$ und $x \in X$ definiert durch
$$(T'y')(x) = y'(Tx),$$
in der Schreibweise der dualen Paarung:
$$(Tx, y') = (x, T'y').$$

- Für die Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset X'$ eines normierten Raums X und seines Dualraums X' sind die *Annihilatoren*, entsprechend den orthogonalen Komplementen im Hilbertraumfall, wiefolgt definiert:
$$U^{\perp} := \{x' \in X' : x'(x) = 0 \ \ \forall x \in U\},$$
$$V_{\perp} := \{x \in X : x'(x) = 0 \ \ \forall x' \in V\}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit im zweiten Fall der Fredholmschen Alternative beruht auf den folgenden Aussagen für kompakte Operatoren:
$$\overline{\mathrm{im}\,(T)} = \ker(T')_{\perp},$$
bzw.
$$\overline{\mathrm{im}\,(T')} = \ker(T)^{\perp}.$$
Wie schon in Abschnitt 6.5.c angesprochen, tauchen in dieser ‚Orthogonalitätsbedingung' sowohl der Operator T als auch der dazu duale Operator T' auf, ebenso – durch die Definitions- und Wertemengen und insbesondere die Annihilatoren – der Raum X und der zugehörige Dualraum X'. Dadurch ist eine mögliche Motivation zur Einführung dieser Konzepte (dualer Operator, dualer Raum) bei der Untersuchung des Gleichungstyps (F) gegeben. Wir wollen daher die Entwicklung des Begriffs eines allgemeinen dualen Operators, den wir bei Schauder (1930c) im Rahmen der allgemeinen Fredholmschen Alternative finden, verfolgen. Schauder verallgemeinert darin Resultate von Riesz (1916). Ausgangspunkt ist für uns die Arbeit von Fredholm (1903).

[95] Bei Banach sind die entsprechenden Räume Banachräume, in obiger Definition genügen jedoch normierte Räume.

7.2 Ivar Fredholm (1866-1927)

> Ivar Fredholm's small but pithy output was concentrated in the area of the equations of mathematical physics. Most significantly, he solved, under quite broad hypotheses, a very general class of integral equations that had been the subject of extensive research for almost a century. His work led indirectly to the development of Hilbert spaces and so to other more general function spaces. (Bernkopf, 1972)

Erik Ivar Fredholm wurde am 7. April 1866 in Stockholm geboren.[96] 1885 studierte er für ein Jahr an der Königlichen Technischen Hochschule in Stockholm. Bernkopf schreibt zu dieser prägenden Zeit:

> During this single year he developed an interest in the technical problems of practical mechanics that was to last all his life and that accounted for his continuing interest in applied mathematics.
> (Bernkopf, 1972)

1886 ging Fredholm an die Universität Uppsala, die damals als einzige Universität in Schweden Doktorgrade verlieh. Dort erhielt er 1893 den Doctor philosophiae und 1898 den Doktor der Naturwissenschaften. Tatsächlich promovierte er jedoch

[96] Die folgenden Informationen stammen aus den Beiträgen von Bernkopf (1972) und Zeilon (1930).

unter der Betreuung von Mittag-Leffler an der Universität Stockholm, wo er anschließend lehrte. 1899 ging Fredholm für ein Jahr nach Paris zu Hadamard, Picard und Poincaré. An letzteren hatte Mittag-Leffler schon 1890 Fredholms erste Arbeit *On a special class of functions* geschickt. In Paris entstand beim Studium des Dirichlet-Problems der Potentialtheorie Fredholms bekannte Theorie der Integralgleichungen, die bald von Hilbert aufgegriffen und weiterentwickelt wurde. Die Hauptarbeit, in der er seine Theorie darlegte, war *Sur une classe d'equations fonctionelles* (Fredholm, 1903). Sie ist Gegenstand von Unterkapitel 7.3. Im Jahr 1906 wurde er Professor für Mechanik und mathematische Physik an der Universität Stockholm, wo er 1910 auch Dekan war. Am 17. August 1927 verstarb Fredholm im Alter von 61 Jahren.

7.3 Fredholms Alternative (1903)

7.3.a Abelsche und Volterrasche Integralgleichungen

In seiner Arbeit *Sur une classe d'équations fonctionnelles* von 1903 (Fredholm, 1903) untersucht Fredholm Integralgleichungen der Form

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\,dy = \psi(x), \tag{b}$$

(Fredholm, 1903, 365), wobei $f(x,y)$ und $\psi(x)$ gegebene Funktionen sind und $\varphi(x)$ gesucht ist. Fredholm gibt selbst einige Hinweise zur historischen Vorgeschichte seiner Untersuchungen, die wir hier nennen wollen. Für eine ausführliche Darstellung der vorausgehenden Entwicklungen – wie z.B. die der Neumannschen Reihendarstellung, der Volterraschen Integralgleichungen, der Poincaréschen Untersuchungen zu Randwertaufgaben, der von Kochschen Theorie der unendlichen Determinanten oder des Hadamardschen Determinantensatzes – lese man z.B. den Enzyklopädieartikel von Hellinger und Toeplitz (Hellinger und Toeplitz, 1927). Ein Zitat wollen wir an dieser Stelle daraus entnehmen:

> Aus diesem Komplex von Einzeltatsachen hat *Fredholm* die Konzeption der allgemeinen Gleichung [(b), A.W.] und die Idee ihrer Behandlung nach dem Muster der Determinantentheorie entnommen; an diesem Komplex von Einzeltatsachen orientiert, gewinnt er die Lösung von [(b), A.W.] oder vielmehr von der Gleichung
>
> $$\varphi(s) - \lambda \int_a^b k(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s),$$

> die aus [(b), A.W.] durch Einfügung des Parameters λ hervorgeht, als Quotient zweier ganzen transzendenten Funktionen von λ. Indem er nicht nur die Tatsachen, sondern auch die Methoden der Determinantentheorie formal nachbildet, gelangt er ganz im Rahmen dieser elementaren Operationsmittel und ohne Benutzung der bei Poincaré entscheidenden funktionentheoretischen Schlußweise zu einer *einfachen* Theorie von *allgemeinem* Charakter.
>
> (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1355)

Fredholms Integralgleichungen *zweiter Art* gehen historisch die Integralgleichungen *erster Art* voraus. Fredholm verweist dabei auf Abel (1823), der sich mit der Lösung des folgenden Gleichungstyps („*équation fonctionnelle abélienne*“ (Fredholm, 1903, 365)) beschäftigte:[97]

$$\int f(x,y)\varphi(y)\,dy = \psi(x). \tag{a}$$

Fredholm erklärt, dass sich ein Großteil der Probleme der mathematischen Physik auf Gleichungen der Form (b), bzw. der Form

$$\varphi(x_1...x_n) + \int ... \int f(x_1...x_n, \xi_1...\xi_n)\varphi(\xi_1...\xi_n)\,d\xi_1...d\xi_n = \psi(x_1...x_n)$$

zurückführen lässt. Dabei verweist er auf das Dirichletsche Problem und analoge Probleme der Magnetismus- und Elastizitätstheorie. Der erste Artikel zum Problem der Lösung einer Gleichung vom Typ (b) stammt nach Fredholm von Neumann (vermutlich ist (Neumann, 1877) gemeint). Neumann findet darin eine Reihenentwicklung für $\varphi(x)$, die zwar im Fall des Dirichletschen Problems konvergiert, nicht aber im allgemeinen Fall. In der von Fredholm als „travail important“ (Fredholm, 1903, 366) bezeichneten Arbeit hat Volterra (1896) die Neumannsche Methode erfolgreich auf Gleichungen vom Typ

$$\varphi(x) + \int_0^x f(x,y)\varphi(y)\,dy = \psi(x), \tag{c}$$

[97] Fredholm schreibt dazu:

> En effet, si on introduit au lieu de $f(x,y)$ et $\psi(x)$, $\frac{1}{\lambda}f(x,y)$ et $\frac{1}{\lambda}\psi(x)$, l'équation (b) s'écrit
>
> $$\lambda\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\,dy = \psi(x),$$
>
> équation qui se transforme en l'équation (a) en posant $\lambda = 0$. Ainsi la solution de l'équation (a) peut être considérée comme implicitement contenue dans la solution de l'équation (b). (Fredholm, 1903, 365)

(Fredholm, 1903, 366) angewandt. Fredholm erklärt, dass die von ihm zu untersuchende Gleichung (b) als Spezialfall der Volterraschen Gleichung (c) aufgefasst werden werden kann: für den Fall, dass $f(x, y)$ für $y > x$ verschwindet. In den folgenden Untersuchungen soll $f(x, y)$ derart vorausgesetzt werden, dass für $\alpha < 1$ die Funktion $(x - y)^\alpha f(x, y)$ „finie et intégrable“ ist. Fredholm schreibt dazu:

> Ainsi je ne vais pas traiter l'équation (b) dans toute sa généralité. Mais les restrictions que j'ai imposées à la fonction sont justifiées par les applications de l'équation (b) à la Physique mathématique auxquelles je me réserve de revenir dans un autre travail. (Fredholm, 1903, 367)

Im folgenden Abschnitt wollen wir Fredholms Ansatz verfolgen. Siehe hierzu auch (Hellinger und Toeplitz, 1927, II. A.), wo wir auch eine Auflistung wiederholter Entwicklungen der Fredholmschen Theorie finden.

7.3.b Die Fredholmsche Determinate und die zwei Möglichkeiten

Ausgehend vom Konzept der Determinante für endlichdimensionale Matrizen führt Fredholm in §1 seiner Arbeit eine entsprechende Größe D_f für Funktionen f ein:

> Supposons que $f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable soit par rapport à une seule ou par rapport aux deux variables réelles x et y qui, pour fixer les idées, seront supposées positives et moindres que l'unité.
>
> Dans ce cas il existe une quantité D_f qui joue par rapport à l'équation fonctionnelle (b) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d'équation linéaires. (Fredholm, 1903, 367)

Für die genaue Definition von D_f durch Reihendarstellungen, die Wohldefiniertheit[98] und die Eigenschaften von D_f sowie die Minoren („les mineurs de D_f“ (Fredholm, 1903, 369)) lese man (Fredholm, 1903, 367-371). Für unsere Betrachtungen genügt hier eine oberflächliche Darstellung der Untersuchungen. Hellinger und Toeplitz schreiben:

> Wie *Fredholm* diese Bildungen und Relationen nach dem Vorbilde der H. *v. Koch*schen Theorie der unendlichen Determinanten gewonnen hat, ist in Nr. 5 angedeutet worden.[99] Er gewinnt aus ihnen die gesamte Theorie der linearen Integralgleichungen 2. Art in der gleichen Weise,

[98] Bzgl. der Konvergenz nutzt Fredholm den *Determinantensatz* von Hadamard (1893).
[99] Siehe (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1356) und (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1372, Fußnote).

> wie man mit Hilfe der Unterdeterminanten und der zwischen ihnen geltenden Relationen die gesamte Theorie der linearen Gleichungssysteme abzuleiten pflegt. (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1371f)

Dies finden wir in Fredholms §2. Untersucht wird die Gleichung vom Typ (b):

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,s)\varphi(s)\,ds = \psi(x), \tag{7}$$

„où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $\psi(x)$ une fonction finie et intégrable.“ (Fredholm, 1903, 372). Fredholm ‚übersetzt‘ diese Gleichung sogleich in Operatorform:

> En considérant l'équation (7) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\psi(x)$ j'écris cette même équation
>
> $$S_f\varphi(x) = \psi(x), \tag{7}$$
>
> et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction $f(x,y)$.
>
> *Les transformations (7) forment un groupe.* (Fredholm, 1903, 372)

Für die letzte Behauptung setzt Fredholm für eine Funktion $g(x,y)$ mit den gleichen Anforderungen wie $f(x,y)$:

$$S_gS_f\varphi(x) := S_F\varphi(x),$$

wobei

$$F(x,y) = g(x,y) + f(x,y) + \int_0^1 g(x,t)f(t,y)\,dt,$$

und untersucht Gleichung (7) bzgl. möglicher Invertierbarkeit:

> Quant à l'inversion de l'équation (7) deux cas sont possibles: D_f est différent de zéro ou $D_f = 0$. (Fredholm, 1903, 372)

<u>1. Fall: $D_f \neq 0$</u>:

Setzt man

$$g(x,y) := -\frac{D_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{D_f},$$

so ergibt sich aus Vorüberlegungen in Fredholms §1, auf die wir hier nicht näher eingehen, dass $F(x,y)$ identisch verschwindet. Damit gilt

$$S_gS_f\psi(x) = \psi(x).$$

Ebenso lässt sich zeigen, dass

$$S_f S_g \psi(x) = \psi(x)$$

ist. S_g ist also die inverse Transformation zu S_f und Fredholm erhält den folgenden Satz:

> *Si le déterminant D_f d'une équation fonctionnelle de la forme*
>
> $$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,s)\varphi(s)\, ds = \psi(x),$$
>
> *où $f(x,s)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions finies et intégrables, est différent de zéro, il existe une et une seule fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à cette équation.*
>
> *Cette fonction est donnée par l'équation:*
>
> $$\varphi(x) = \psi(x) - \int_0^1 \frac{D_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_f} \psi(y)\, dy.$$
>
> (Fredholm, 1903, 373)

Hellinger und Toeplitz bemerken (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1372f), dass ebenso wie

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 g(x,y)\psi(y)\, dy$$

stets eine und die einzige Lösung von (7) ist, auch

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^1 g(y,x)\psi(y)\, dy$$

stets eine und die einzige Lösung von der transponierten Gleichung[100]

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(s,x)\varphi(s)\, ds = \psi(x) \tag{7^T}$$

ist und dass man hier bei $g(x,y)$ von dem *lösenden Kern* oder der *Resolvente* spricht. Fredholm formuliert diese duale Aussage jedoch nicht explizit.

[100] Die Nummerierung (7) stammt von Fredholm, die Zusätze (7^T) für die transponierte und (7_H) für die homogene Gleichung haben wir hier zur besseren Übersicht ergänzt. Bei Fredholm (1903, 374) wird die homogene Gleichung (7_H) mit $(7')$ bezeichnet.

2. Fall: $D_f = 0$:

Aus den Vorüberlegungen aus Fredholms §1 folgt außerdem, dass es in diesem Fall „un premier mineur de D_f qui n'est pas identiquement nul“ (Fredholm, 1903, 373) gibt. Damit lässt sich für die homogene Gleichung

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,s)\varphi(s)\,ds = 0 \tag{7_H}$$

Folgendes zeigen:

> *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation*
>
> $$S_f\varphi(x) = 0$$
>
> *c'est que $D_f = 0$. Si n est l'ordre du premier mineur du D_f qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède n solutions linéairement indépendantes.* (Fredholm, 1903, 375)

Es sind dabei n linear unabhängige Lösungen gegeben durch

$$\Phi_1(x) = D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2(x) = D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & x & \dots & \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix},$$

$$\dots,$$

$$\Phi_n(x) = D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2 & \dots & x \\ \eta_1, & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix},$$

wobei

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & \dots & \xi_n \\ \eta_1, & \dots & \eta_n \end{pmatrix}$$

der erste Minor von D_f ist, der nicht identisch verschwindet. Jede Lösung der homogenen Gleichung lässt sich aus ihnen durch Linearkombinationen darstellen. Auch hier weist Fredholm nicht – wie Hellinger und Toeplitz (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1373) – eigens darauf hin, dass analog dazu die Funktionen

$$\Psi_1(x) = D_f \begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2 & ... & \xi_n \\ x, & \eta_2 & ... & \eta_n \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2(x) = D_f \begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2 & ... & \xi_n \\ \eta_1, & x & ... & \eta_n \end{pmatrix},$$

$$...,$$

$$\Psi_n(x) = D_f \begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2 & ... & \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 & ... & x \end{pmatrix}$$

die Lösungen der transponierten homogenen Gleichung

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(s,x)\varphi(s)\,ds = 0 \qquad (7_H^T)$$

bilden.[101] Dennoch tauchen diese Lösungsfunktionen bei Fredholm direkt im Anschluss auf, wenn er für die inhomogene Gleichung (7) zeigt:

> Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation
>
> $$S_f\varphi(x) = \psi(x)$$
>
> ait une solution s'expriment par les n équations (15).
>
> (Fredholm, 1903, 378)

Die Erfüllung der Gleichungen (15) (siehe (Fredholm, 1903, 377)) ist äquivalent dazu, dass die rechte Seite $\psi(x)$ die n Gleichungen

$$\int_0^1 \psi(x)\Psi_\nu(x)\,dx = 0, \qquad \nu = 1, ..., n$$

erfüllt, wobei n die Ordnung des ersten Minors ist, der nicht identisch verschwindet, und die n linear unabhängigen Ψ_ν wie oben gegeben sind. In dem Fall ist eine

[101] Hellinger und Toeplitz bemerken außerdem, dass n der *Defekt* des Kernes $f(x,y)$ genannt wird.

Lösung von (7) gegeben durch:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ y, & \eta_1, & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & \dots & \xi_n \\ \eta_1, & \dots & \eta_n \end{pmatrix}} \psi(y)\, dy,$$

aus der sich alle weiteren durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung ergeben.[102]

7.3.c Ein dualer Operator

In §3 bestimmt Fredholm „la première variation du déterminant D_f" (Fredholm, 1903, 379) und „la variation logarithmique de D_f" (Fredholm, 1903, 381). Bei letzterer führt er – vergleiche $S_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\, dy$ – die Notation

$$T_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y,x)\varphi(y)\, dy$$

ein (Fredholm, 1903, 381) und zeigt, dass sowohl

$$\delta \log D_f = \int_0^1 [S_f^{-1}\delta f(x,y)]_{[x=y]}\, dx$$

als auch

$$\delta \log D_f = \int_0^1 [T_f^{-1}\delta f(x,y)]_{[x=y]}\, dx$$

gilt. T_f taucht auch im nächsten Paragraphen §4 *Le théorème de multiplication* auf: Ausgehend von obiger Definition des Produkts

$$S_f S_g = S_F$$

wird mit obiger Definition für T_f (und entsprechend T_g) gezeigt, dass

$$T_g T_f = S_G$$

mit

$$G(x,y) = f(y,x) + g(y,x) + \int_0^1 f(y,t)g(t,x)\, dt = F(y,x)$$

[102]Hellinger und Toeplitz bemerken, dass der hier auftretende Kern gelegentlich als *Pseudoresolvente* bezeichnet wird (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1374).

gilt (Fredholm, 1903, 381f). Damit erhält Fredholm schließlich die Aussage

$$D_F = D_f D_g.$$

Im letzten Paragraphen §6 finden wir Folgendes: Es sei $f(x, y)$ eine endliche und integrierbare Funktion, $i(x, y)$ eine Funktion, sodass $(x - y)^\alpha i(x, y)$ beschränkt und integrierbar ist. Weiter befinden wir uns im 2.Fall: $D_f = 0$, womit es also einen ersten Minor gibt, der nicht identisch verschwindet und dessen Ordnung n sei. Weiter gelte

$$S_f S_i = S_i S_f.$$

Die n linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung

$$S_f \varphi(x) = 0$$

werden wieder mit

$$\Phi_1(x), ..., \Phi_n(x)$$

bezeichnet. Dann gibt es Koeffizienten $p_{\lambda\mu}$ mit

$$S_i \Phi_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\mu} \Phi_\mu(x), \quad \lambda = 1, ..., n.$$

Ebenso gibt es Koeffizienten $q_{\lambda\mu}$ mit

$$T_i \Psi_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\lambda\mu} \Psi_\mu(x), \quad \lambda = 1, ..., n,$$

wobei

$$\Psi_1(x), ..., \Psi_n(x)$$

die n linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung

$$T_f \Psi(x) = 0$$

sind. Fredholm zeigt nun mit der gleich folgenden Identität die Behauptung:

> Je dis que le déterminant des coefficients $p_{\lambda\mu}$ est égal à celui des coefficients $q_{\lambda\mu}$. (Fredholm, 1903, 385)

Fredholm 1903

$$\int_0^1 \Psi(x) S_i \Phi(x)\, dx = \int_0^1 \Phi(x) T_i \Psi(x)\, dx.$$

(Fredholm, 1903, 385)

Heute würden wir sagen, dass diese Identität aus der Dualität der Operatoren S_i und T_i hervorgeht. Es folgen weitere Untersuchungen für den Fall, dass die Funktion $i(x, y)$ unbeschränkt und $(x - y)^\alpha i(x, y)$ beschränkt ist.

7.3.d Weitere Entwicklungen

Zum Zusammenhang der Fredholmschen Theorie und Hilberts Spektraltheorie bzw. zur allgemeinen Untersuchung des Gleichungstyps

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b k(s, t)\varphi(t)\, dt = f(s)$$

siehe (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1375f). Fredholms Ansatz wurde, wie gesagt, wiederholt entwickelt – auch ohne den Begriff der Fredholmschen Determinante zu verwenden. Da insbesondere Schauder (1930c) auf diese „determinantenfreien" Sätze, wie sie in (Hellinger und Toeplitz, 1927) formuliert sind, Bezug nimmt, wollen wir sie hier zitieren:

> Man hat eine Reihe von weit einfacheren Theorien aufgestellt, die die Auflösung der linearen Integralgleichungen 2. Art leisten, ohne den immerhin verwickelten Apparat der Fredholmschen Formeln zu benötigen. Es versteht sich, daß man auf solche Art nicht die [obigen Fredholmschen, A.W.] Tatsachen erhält, mit deren Wortlaut der Begriff der Fredholmschen Minoren eng verflochten ist, sondern nur denjenigen Kern der Tatsachen, der sich ohne Benutzung dieser Bildungen herausschälen läßt, und deren Komplex im folgenden stets als die *determinantenfreien Sätze* bezeichnet werden soll. Wenn man die in Rede stehenden Integralgleichungen wieder folgendermaßen bezeichnet:
>
> $$(J)\ \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt = f(s), \quad (J_h)\ \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt = 0,$$
>
> $$(J')\ \psi(s) + \int_a^b K(t, s)\psi(t)\, dt = g(s), \quad (J'_h)\ \psi(s) + \int_a^b K(t, s)\psi(t)\, dt = 0,$$

so kann man sie so formulieren:

Die determinantenfreien Sätze:

Satz 1. Die Anzahl d der linear-unabhängigen Lösungen $\varphi_1(s)$, ..., $\varphi_d(s)$ *von* (J_h) *ist endlich und gleich der Anzahl der linear-unabhängigen Lösungen* $\psi_1(s), ..., \psi_d(s)$ *von* (J'_h); *d heiße der „Defekt" des Kernes* $K(s,t)$.

Satz 2. Ist $d = 0$, *so ist* (J) *bei willkürlich gegebenem* $f(s)$, (J') *bei willkürlich gegebenem* $g(s)$ *lösbar, und zwar nur auf eine Weise. Es existiert überdies ein „lösender Kern"* $\mathsf{K}(s,t)$ *derart, daß diese Lösungen von* (J) *und* (J') *gegeben sind durch*

$$(\mathfrak{J})\ \varphi(s) = f(s) + \int_a^b \mathsf{K}(s,t) f(t)\,dt, \quad (\mathfrak{J}')\ \psi(s) = g(s) + \int_a^b \mathsf{K}(t,s) g(t)\,dt.$$

Satz 3. Ist $d > 0$, *so existiert dann und nur dann eine Lösung von* (J), *wenn*

$$\int_a^b \psi_i(s) f(s)\,ds = 0 \text{ für } i = 1, ..., d$$

gilt, und ebenso dann und nur dann eine Lösung von (J'), *wenn*

$$\int_a^b \varphi_i(s) g(s)\,ds = 0 \text{ für } i = 1, ..., d$$

gilt; jede Lösung von (J) *ergibt sich aus dieser einen durch Addition einer Lösung von* (J_h), *jede Lösung von* (J') *aus dieser einen durch Addition einer Lösung von* (J'_h). *Auch hier kann man eine Funktion* $\mathsf{K}(s,t)$ *finden, durch die sich die Lösung, soweit sie vorhanden, in der Gestalt* $(\mathfrak{J})$ *und* $(\mathfrak{J}')$ *ausdrückt (Pseudoresolvente).*

(Hellinger und Toeplitz, 1927, 1376f)

In *Satz 3* finden wir die von uns als ‚Orthogonalitätsbedingung' bezeichnete Bedingung. Diese Formulierung der „determinatenfreien Sätze" von Hellinger und Toeplitz soll uns im Folgenden eine Orientierung und Vergleichsmöglichkeit bieten.

7.4 Riesz' Betrachtungen auf $C(a, b)$ (1916)

Im Jahr 1916 veröffentlichte Riesz seine Arbeit *Über lineare Funktionalgleichungen* (Riesz, 1916).[103] In der Einleitung schreibt er:

> Die vorliegende Arbeit behandelt das Umkehrproblem für eine gewisse Klasse von linearen Transformationen stetiger Funktionen, nebst Anwendung auf die Fredholmsche Integralgleichung. Dabei kommt es uns weniger auf neue Resultate an, als auf die Erprobung einer äusserst elementaren Methode. (Riesz, 1916, 71)

Die „gewisse Klasse" von linearen Transformationen sind die „vollstetigen Transformationen", dabei verweist Riesz auf die Verwendung von Fréchets Begriff der kompakten Menge und auf Hilberts ähnliche Begriffsbildung der vollstetigen Transformationen:

> Der wichtigste Begriff, der hierbei zur Verwendung kommt, ist der von Herrn Fréchet in die allgemeine Mengenlehre eingeführte Begriff der kompakten Menge (hier spezieller kompakte Folge), der sich in verschiedenen Zweigen der Analysis ganz besonders bewährt hat. Dieser Begriff gestattet eine besonders einfache und glückliche Formulierung der Definition der vollstetigen Transformation, die im wesentlichen einer ähnlichen Begriffsbildung von Herrn Hilbert für Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen nachgebildet ist. (Riesz, 1916, 71)

(Vergleiche hierzu Abschnitt 7.9.a.) Mit dem Begriff der Vollstetigkeit kann Riesz in seiner Theorie zur Umkehrung dieser Transformationen zeigen, dass „gewisse Prozesse sich nicht ins Unendliche fortsetzen lassen, sondern notwendig abbrechen" (Riesz, 1916, 71). Diese „Erprobung einer äusserst elementaren Methode" wollen wir im Folgenden darstellen. Zugrunde gelegt wird dabei die Menge aller auf einem beschränkten Intervall definierten, komplexwertigen[104] stetigen Funktionen, die Riesz „der Kürze halber als *Funktionalraum*" (Riesz, 1916, 72) bezeichnet. Noch in der Einleitung finden wir allerdings die Bemerkung:

> Die in der Arbeit gemachte Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. Der in den neueren Untersuchungen über diverse Funktionalräume bewanderte Leser wird die allgemeinere Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen, er wird auch bemerken, dass gewisse

[103] Anlässlich des *100th Jubilee of Riesz Theory* verfasste Pietsch (2019) einen Bericht.

[104] Riesz bemerkt, dass sämtliche Resultate auch für die entsprechende Klasse der reellwertigen Funktionen gelten.

> unter diesen, so die Gesamtheit der quadratisch integrierbaren Funktionen und der Hilbertsche Raum von unendlich vielen Dimensionen noch Vereinfachungen gestatten, während der hier behandelte scheinbar einfachere Fall als Prüfstein für die allgemeine Verwendbarkeit betrachtet werden darf. (Riesz, 1916, 71)

Auf diese angedeutete, jedoch nicht ausgeführte Möglichkeit der Verallgemeinerung von Riesz' Theorie kommen wir in Abschnitt 7.9.b zurück. Zunächst wollen wir die für *Die Umkehrung der linearen Transformationen* (Riesz' §2) nötigen *Definitionen und Hilfssätze* (Riesz' §1) betrachten.

7.4.a Der Funktionalraum

Für den „Funktionalraum" der auf einem beschränkten Intervall definierten, komplexwertigen stetigen Funktionen definiert Riesz die „Norm" einer Funktion, die „Distanz" zweier Funktionen sowie die „gleichmäßige Konvergenz" einer Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion jeweils bzgl. der – wie wir heute sagen würden – Maximumsnorm. Eine Transformation T auf dem Funktionalraum heißt „linear", wenn sie „distributiv" und „beschränkt" ist. Riesz bemerkt sogleich, dass ein solcher beschränkter linearer Operator auch stetig ist. Ausgangspunkt soll das Umkehrproblem der Transformation vom Typ

$$B = E - A$$

sein. Dabei bezeichnet E die identische und A eine vollstetige Transformation. Der Begriff der Vollstetigkeit wird, wie schon angesprochen, mithilfe Fréchets Begriff der kompakten Folge erklärt:

> Eine Folge $\{f_n\}$ heisse nach Fréchet kompakt, wenn jede Teilfolge derselben eine gleichmässig konvergente weitere Teilfolge enthält. (Riesz, 1916, 73)

Riesz zeigt, dass zwar jede kompakte Folge beschränkt ist, jedoch nicht jede beschränkte Folge kompakt zu sein braucht. Dies ist eine wesentliche Eigenschaft für Riesz' Theorie:

> Auf der soeben hervorgehobenen Tatsache, dass nämlich eine Folge beschränkt sein kann, ohne kompakt zu sein, beruht nun das Spezielle der *vollstetigen* linearen Transformation gegenüber der allgemeinen. [...] Wir erklären nun: eine lineare Transformation heisse vollstetig, wenn sie jede *beschränkte* Folge in eine *kompakte* überführt. (Riesz, 1916, 74)

Riesz nennt einige Beispiele für vollstetige Transformationen, darunter auch den Integraloperator

$$K[f] = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy,$$

auf den er im Rahmen der „Anwendung auf die Fredholmsche Integralgleichung“ später zurückkommt. Es folgt die Definition einer „linearen Mannigfaltigkeit“:

> Darunter verstehen wir jede Mannigfaltigkeit von Elementen unseres Funktionalraumes, die folgenden Bedingungen genügt: 1) mit f, f_1, f_2 zugleich sind auch cf, f_1+f_2 darin enthalten; 2) sind die Elemente einer gleichmässig konvergenten Folge $\{f_n\}$ darin enthalten, so ist es auch die Grenzfunktion f. Beispiele für lineare Mannigfaltigkeiten bietet der Funktionalraum selbst [...]. (Riesz, 1916, 74)

Wie wir heute sagen würden, ist der Funktionalraum aller auf einem beschränkten Intervall definierten, komplexwertigen stetigen Funktionen ein *Banachraum* und Bedingung 2) äquivalent zur Vollständigkeit von $C(a, b)$. Es folgen einige Hilfssätze über lineare Mannigfaltigkeiten, die „fast unmittelbar aus den Definitionen fliessen“. Es sei bemerkt, dass diese Arbeit sechs Jahre vor Banachs Dissertation (Banach, 1922) entstand, in der der Begriff des abstrakten Banachraums erstmals wesentlich geprägt wird. Bei Werner (2011) finden wir die Anmerkung, dass bei Riesz (1916) die „Banachraumaxiome schon klar zu Tage [treten], auch wenn Riesz sich weigert, diese abstrakt zu formulieren, und stets im Rahmen der sup-Norm auf $C[a, b]$ argumentiert“ (Werner, 2011, 41). Wir verweisen allerdings auf Riesz’ in der Einleitung gemachte Bemerkung zur möglichen einfachen Verallgemeinerung seiner Theorie. Zu Riesz’ Vorgehensweise schreibt Werner weiter: „Obwohl er eigentlich nur kompakte Integraloperatoren auf $C[a, b]$ betrachtet, sind seine Argumente vollkommen allgemein [...]; sie sind so elegant, daß sie bis heute nicht vereinfacht wurden.“ (Werner, 2011, 314)

7.4.b Abbrechende Prozesse

Mit Riesz betrachten wir also die Transformation

$$B = E - A,$$

wobei E die identische und A eine vollstetige Transformation auf dem Funktionalraum $C(a, b)$ ist. Für die homogene Funktionalgleichung

$$B[\varphi] = 0$$

zeigt Riesz den folgenden Satz:

> *Satz 1. Die Lösungen der homogenen Gleichung*
>
> $$B[\varphi] = 0$$
>
> *bilden eine lineare Mannigfaltigkeit von* ***endlicher*** *Dimensionszahl.*
> (Riesz, 1916, 80)

Vergleiche hierzu Banachs Verweis in Unterkapitel 5.2 und auch Hellingers und Toeplitz' Formulierung der *determinantenfreien Sätze* in Abschnitt 7.3.d: Riesz zeigt hier eine verallgemeinerte Form von Hellingers und Toeplitz' *Satz 1* – für einen allgemeinen vollstetigen Operator auf $C(a, b)$ – jedoch ohne Betrachtung der dualen Gleichung. Im direkt folgenden *Satz 1'* zeigt Riesz, dass dies auch für die homogene Gleichung

$$B^n[\varphi] = 0$$

(mit $n = 1, 2, ...$) gilt und stellt die folgende bedeutsame Überlegung an:

> Bevor wir den Satz 2 ansprechen, bemerken wir zunächst, dass jede Lösung der Gleichung $B^n[\varphi] = 0$ wegen $B^{n+1} = BB^n$ auch die Gleichung $B^{n+1}[\varphi] = 0$ befriedigt. Also definieren die Gleichungen $B^n[\varphi] = 0$ für $n = 1, 2, ...$ eine Folge von linearen Mannigfaltigkeiten, deren jede in allen Folgenden enthalten ist. Es frägt sich nun, ob die einzelnen Mannigfaltigkeiten *echte* Teile der folgenden sind? Vor allem ist klar, dass wenn z.B. die m-te Mannigfaltigkeit kein echter Teil der $m+1$-ten und also mit dieser identisch ist, dies dann auch für alle folgenden der Fall ist. [...][105] Es sind also nur zwei Fälle möglich: entweder treten bei jedem Schritte neue Lösungen auf, oder es bricht dies bei einem Exponenten n ab, von wo an sämtliche Mannigfaltigkeiten identisch sind.
> (Riesz, 1916, 80)

In *Satz 2* zeigt Riesz, dass der zweite Fall eintritt:

[105] Zur Begründung schreibt Riesz:

> Gäbe es nämlich eine erste Mannigfaltigkeit, für welche dies nicht mehr zutrifft, und bezeichnen wir den entsprechenden Exponent mit $n+1$, so würde es also eine Funktion φ geben, für welche $B^{n+1}[\varphi] = 0, B^n[\varphi] \neq 0$ wäre. Wir setzen $\psi = B^{n-m}[\varphi]$; dann wird $B^{m+1}[\psi] = B^{n+1}[\varphi] = 0$ und $B^m[\psi] = B^n[\varphi] \neq 0$, d.i. es wäre schon die $m+1$-te Mannigfaltigkeit nicht mehr mit der m-ten identisch, entgegen der Voraussetzung.
> (Riesz, 1916, 80f)

Satz 2. Es gibt eine Zahl ν derart, dass für $n > \nu$ jede Lösung der Gleichung

$$B^n[\varphi] = 0$$

auch schon die Gleichung

$$B^\nu[\varphi] = 0$$

befriedigt, während für $n < \nu$ die Gleichung

$$B^{n+1}[\varphi] = 0$$

auch neue, d.i. solche Lösungen besitzt, welche die Gleichung

$$B^n[\varphi] = 0$$

nicht befriedigen. (Riesz, 1916, 81)

Aus *Satz 2* ergibt sich (Riesz, 1916, 82), dass wenn die inhomogene Gleichung

$$B[\varphi] = g$$

für jedes g des Funktionalraums $C(a, b)$ lösbar ist, die entsprechende homogene Gleichung außer der trivialen Lösung keine weiteren Lösungen besitzt. Das bedeutet wiederum, dass in diesem Fall die jeweilige Lösung der inhomogenen Gleichung für jede rechte Seite g eindeutig ist. Diese Feststellungen, die Riesz in *Satz 3* formuliert, finden wir in Banachs Überblick (siehe Unterkapitel 5.2). Sie entsprechen einer Verallgemeinerung von Hellingers und Toeplitz' *Satz 2* (für einen allgemeinen vollstetigen Operator auf $C(a, b)$) der *determinantenfreien Sätze* (siehe Abschnitt 7.3.d), jedoch wieder ohne Betrachtung der dualen Gleichung. Anschließend stellt Riesz die Frage, „wie die Mannigfaltigkeit der Funktionen g, für welche die Gleichung lösbar ist, ausschaut? Die Antwort erteilt der *Satz 5*." (Riesz, 1916, 82)

Satz 5. Die Transformation B überführt den Funktionalraum in eine lineare Mannigfaltigkeit. (Riesz, 1916, 83)

Dies gilt damit auch für die Transformationen B^n, die ja „von demselben Typus" wie B sind. Jede Transformation B^n bildet also den Funktionalraum $C(a, b)$ auf eine lineare Mannigfaltigkeit ab. Diese bezeichnet Riesz jeweils mit L_n. Der ursprüngliche Funktionalraum $C(a, b)$ wird entsprechend als L_0 bezeichnet. Nun folgt – wie auch bei den obigen Lösungsmengen der homogenen Gleichungen – eine bedeutsame Überlegung zu diesen Bildräumen:

> Da der Funktionalraum, den wir hier mit L_0 bezeichnen wollen, die Mannigfaltigkeit L_1 enthält und da L_n und L_{n+1} aus L_0 und L_1 durch Anwendung ein und derselben Transformation, nämlich von B^n, entstehen, so ist auch L_{n+1} in L_n enthalten. Wir fragen nun, ob L_{n+1} *echter* Teil von L_n ist oder aber die beiden identisch sind. Es leuchtet unmittelbar ein, dass in dem in Satz 3 behandelten Falle, wo $L_0 = L_1$ ist, d.i. L_1 sämtliche Funktionen enthält, dies auch für alle L_n zutrifft. Allgemeiner folgt aus $L_{m+1} = L_m$ die Beziehung $L_n = L_m$ für alle $n > m$. Es sind also hiernach nur zwei Fälle möglich: entweder es fallen bei jedem Schritte Elemente weg, oder aber ist dies nur zu einem gewissen n der Fall, von wo an dann sämtliche Mannigfaltigkeiten identisch sind. (Riesz, 1916, 85)

Ähnlich zu *Satz 2* bzgl. der Lösungsmengen der homogenen Gleichungen zeigt hier *Satz 6*, dass der zweite Fall gilt. Außerdem enthält er eine wichtige Aussage zur Verbindung zu *Satz 2*.

> *Satz 6. Es gibt eine Zahl ν derart, dass für $n > \nu$ immer $L_n = L_\nu$ wird, während für $n < \nu$ die Mannigfaltigkeit L_{n+1} echter Teil von L_n ist. Diese und die in Satz 2 definierte Zahl ν sind identisch.*
> (Riesz, 1916, 85)

Verwenden wir für die entsprechenden Lösungsmengen der homogenen Gleichungen die moderne Abkürzung $\ker_k$, also

$$\ker_k(E - A) := \{x \in C(a, b) : (E - A)^k x = 0\},$$

und für die Bildmengen L_n die Abkürzung im_h, d.h.

$$\mathrm{im}_h\,(E - A) := \{(E - A)^h x : x \in C(a, b)\},$$

so kann man Riesz' bisherige Resultate folgendermaßen formulieren:[106]

- Die Lösungsmengen $\ker_k(E - A)$ der homogenen Gleichungen sind endlichdimensional.
- $\{0\} = \ker_0(E - A) \subseteq \ker_1(E - A) \subseteq \ker_2(E - A) \subseteq ...$
- $... \subseteq \mathrm{im}_2\,(E - E) \subseteq \mathrm{im}_1\,(E - A) \subseteq \mathrm{im}_0\,(E - A) = C(a, b)$

[106] Werner schreibt dazu: „Die Idee, Kern und Bild von $(Id{-}T)^n$ zu analysieren, ist sicherlich durch die Konstruktion der Jordanschen Normalform einer Matrix nach dieser Methode inspiriert (siehe (Weyr, 1890); in Büchern über lineare Algebra [werden diese Aussagen, A.W.] im endlichdimensionalen Fall häufig Fitting zugeschrieben, der aber erst 10 Jahre alt war, als Riesz seine Arbeit schrieb).“ (Werner, 2011, 314f)

- Es existiert eine kleinste Zahl k mit

$$\ker_k(E-A) = \ker_{k+1}(E-A) = \ker_{k+2}(E-A) = ...$$

- Es existiert eine kleinste Zahl h mit

$$\mathrm{im}_h\,(E-A) = \mathrm{im}_{h+1}\,(E-A) = \mathrm{im}_{h+2}\,(E-A) = ...$$

- Es gilt der Zusammenhang $k = h \ (= \nu)$.

Aus diesen Resultaten ergibt sich Riesz' *Satz 7*. Wie Riesz erklärt, enthält dieser als Spezialfall die *Fredholmsche Alternative* bzgl. der Lösbarkeit der entsprechenden homogenen und inhomogenen Integralgleichungen.

> *Satz 7. Entweder lässt sich die Transformation B umkehren, d.h. es gibt eine inverse lineare Transformation B^{-1}, für welche $BB^{-1} = B^{-1}B = E$ ist; oder aber besitzt die homogene Gleichung $B[\varphi] = 0$ ausser der identisch verschwindenden auch weitere Lösungen.* (Riesz, 1916, 86)

Da im Fall der Umkehrbarkeit das Bild von B ganz $C(a, b)$ ist, ist der Fall $\nu = 0$ für Riesz damit erledigt:

> Den Fall $\nu = 0$ wollen wir nun als durch den Satz erledigt betrachten und wenden uns der näheren Untersuchung des Falles $\nu \geq 1$ zu.
> (Riesz, 1916, 86)

Dazu führt Riesz neue Bezeichnungen ein: Die Bildmenge L^ν heißt dabei die „Kernmannigfaltigkeit“ mit den „Kernelementen“. Die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $B^\nu[\varphi] = 0$, die wir heute auch als Kern oder Nullraum bezeichnen, heißt „Nullmannigfaltigkeit“ mit den „Nullelementen“. Aus den obigen Resultaten ergibt sich:

> Unabhängig von der Zahl ν kann man die Kernelemente g auch durch die Eigenschaft charakterisieren, dass die Gleichung $B^n[\varphi] = g$ für jedes n lösbar ist, die Nullelemente wieder dadurch, dass sie für genügend grosse n die Gleichung $B^n[\varphi] = 0$ befriedigen. (Riesz, 1916, 87)

Es folgen bedeutende (Zerlegungs-) Sätze zu den Kern- und Nullmannigfaltigkeiten und den Transformationen, siehe (Riesz, 1916, 87-90). Als Abschluss seines §2 zeigt Riesz zwei Resultate zur Spektraltheorie, die „für die meisten verwandten Untersuchungen von Anfang an grundlegend“ sind. Dazu wird statt der einzelnen Transformation $E - A$ die „Schar“ $E - \lambda A$ betrachtet, wobei λ ein beliebiger komplexwertiger Parameter ist. Riesz bemerkt, dass, da mit A auch λA vollstetig ist, für sämtliche Transformationen der Schar die bisherigen Resultate gelten. Mit der Einführung der Zahl ν lassen sich hier mit Riesz zwei Fälle formulieren:

- Im Fall $\nu(\lambda) = 0$ heißt λ in Bezug auf A ein „regulärer Parameterwert".
- Im Fall $\nu(\lambda) > 0$ („wo nach den Sätzen 2. und 6. die Gleichung $\varphi = \lambda A[\varphi]$ wenigstens eine nicht identisch verschwindende Lösung zulässt" (Riesz, 1916, 90)) heißt λ ein „singulärer Parameterwert" oder auch „Eigenwert" von A.

Riesz zeigt den folgenden Satz:

> *Satz 12. Die Eigenwerte λ besitzen im Endlichen keine Häufungsstelle.*
> (Riesz, 1916, 90)

Hierauf verweist Banach in seinem Überblick (siehe Unterkapitel 5.4).

7.4.c Anwendung auf Integralgleichungen

Obwohl Riesz in (Riesz, 1910) für die $[L^p]$-Klassen schon das Konzept eines dualen Operators eingeführt hat (siehe Unterkapitel 6.1), taucht der Begriff in den bisher dargestellten Untersuchungen von (Riesz, 1916) nicht auf. Dies ändert sich in §3 (*Anwendung auf Integralgleichungen*). Allerdings finden wir das Konzept hier nur für den Fall von Integraloperatoren. Riesz schreibt:

> Um Anschluss an die Theorie der Integralgleichungen zu gewinnen, betrachten wir die Transformation vom „Integraltypus"
>
> $$K[f] = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy,$$
>
> wo wir, um zunächst nur den wichtigsten Fall vor Augen zu halten, die Funktion $K(x,y)$ für $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ stetig voraussetzen. Um unsere allgemeinen Resultate auf die sogenannte *Fredholmsche Integralgleichung* oder – nach Hilbert – *Integralgleichung zweiter Art*: $\varphi - K[\varphi] = g$ anwenden zu können, müssen wir vorerst zeigen, dass die Transformation vom Integraltypus $K[f]$ *linear* und *vollstetig* ist.
> (Riesz, 1916, 92)

Nachdem Riesz dies gezeigt hat, untersucht er die Transformation

$$B = E - K$$

unter der folgenden Fallunterscheidung (B injektiv, B nicht injektiv):

Regulärer Fall: $\nu = 0$

Hier existiert zur Ausgangstransformation $B = E - K$ eine inverse Transformation B^{-1}. Für diese gilt $B^{-1} - B^{-1}K = B^{-1}(E - K) = B^{-1}B = E$ und damit $B^{-1} = E - H$, wobei $H := -B^{-1}K$ auch eine vollstetige Transformation ist. Es ergibt sich die Vermutung, ...

> [...] dass also die *Umkehrung der Integralgleichung*
>
> $$f(x) - \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy = g(x)$$
>
> *durch eine Gleichung vom selben Typus*
>
> $$f(x) = g(x) - \int_a^b H(x,y)g(y)\,dy$$
>
> *geschieht*, (Riesz, 1916, 94)

welche Riesz auch beweist. An dieser Stelle führt Riesz die zugehörige *transponierte Gleichung* ein:

Riesz' „transponierte Integralgleichung" von 1916

> Nun sind wir in der Lage, sofort auch die sogenannte *transponierte* Integralgleichung zu erledigen. Setzen wir $\mathfrak{K}(x,y) = K(y,x)$ und sei $\mathfrak{K}$ die entsprechende Transformation; dann sagt man, die Gleichung $\mathfrak{f} - \mathfrak{K}[f] = \mathfrak{g}$ sei in Bezug auf die vorhin behandelte vom transponierten Typus. Umgekehrt ist $f - K[f] = g$ der zu $\mathfrak{f} - \mathfrak{K}[f] = \mathfrak{g}$ transponierte Typus. Tritt nun für den einen Typus die allgemeine Umkehrbarkeit ein, *so ist es auch für den andern der Fall*, da nämlich aus den obigen Beziehungen zwischen $K(x,y)$ und $H(x,y)$ die ähnlichen Beziehungen zwischen $\mathfrak{K}(x,y)$ und $\mathfrak{H}(x,y) = H(y,x)$ durch Vertauschung der Variablen unmittelbar folgen. *Die Lösung der transponierten Integralgleichung wird hiernach durch die Formel*
>
> $$\mathfrak{f}(y) = \mathfrak{g}(y) - \int_a^b H(x,y)\mathfrak{g}(x)\,dx$$
>
> *geleistet.* (Riesz, 1916, 95)

Diese Aussagen haben die duale Form von *Satz 2* der *determinantenfreien Sätze* bei Hellinger und Toeplitz (siehe Abschnitt 7.3.d). In Abschnitt 7.9.b kommen wir auf diese explizite Beschreibung der Dualität zwischen der ursprünglichen Integralgleichung und der dazu transponierten Gleichung zurück. Allein „durch Vertauschung der Variablen“ folgt unmittelbar die duale Aussage mit dem entsprechenden dualen Operator. Es stellt sich hier die Frage, warum Riesz diesen Gedanken nicht auch für allgemeine Operatoren auf $C(a,b)$ verfolgt hat (auch hierzu siehe Abschnitt 7.9.b). Wir betrachten den zweiten Fall:

Singulärer Fall: $\nu > 0$

Riesz erklärt, dass er – statt sämtliche Resultate aus §2 „in die Sprache der Theorie der Integralgleichungen zu übersetzen“ – sich auf das Wesentliche beschränken wird. Zunächst bemerkt er, dass sich aus dem soeben festgestellten dualen Verhältnis ergibt, dass der Fall $\nu > 0$ entweder für die beiden Transformationen $B = E - K$ und $\mathfrak{B} = E - \mathfrak{K}$ gleichzeitig eintritt oder gar nicht. Mit *Satz 7* erhält man somit die folgende Fredholmsche Alternative:

> *Entweder besitzen die Gleichungen*
>
> $$f(x) - \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy = g(x), \quad \mathfrak{f}(y) - \int_a^b K(x,y)\mathfrak{f}(x)\,dx = \mathfrak{g}(y)$$
>
> *für alle g und $\mathfrak{g}$ je eine eindeutig bestimmte Lösung, oder, wenn dies nicht der Fall ist, dann haben die entsprechenden homogenen Gleichungen ausser der identisch verschwindenden noch weitere Lösungen.*
>
> (Riesz, 1916, 95f)

Riesz erklärt weiter:

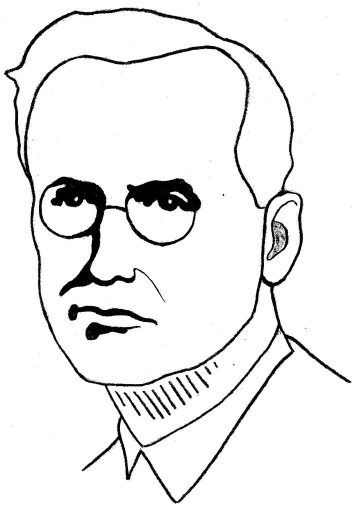
> Die weiteren Fredholmschen Sätze, nämlich das Übereinstimmen der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der beiden homogenen Gleichungen und die durch diese „Nullösungen“ ausgedrückte Bedingung für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung bei vorgegebenem g resp. $\mathfrak{g}$, erhält man aus obigem Satze, wie Herr W. A. Hurwitz (1912) vor Kurzem gezeigt hat, durch einen sehr einfachen Kunstgriff. Die Sätze 10., 11. und 13. gestatten es uns, einen andern Weg einzuschlagen,[107]

[107] Riesz zeigt, dass $K(x,y)$ bei einigen Fragen „wie z.B. Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung, Anzahl der unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung oder allgemeiner kanonische Gruppierung der Nullelemente“ (Riesz, 1916, 97) durch die Funktion $K_2(x,y)$ ersetzt werden kann. Dabei wird K gemäß den vorangehenden Resultaten in zwei orthogonale Teile $K = K_1 + K_2$ zerlegt, womit sich auch für die Transponierte eine entsprechende Zerlegung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ ergibt. Siehe für eine genauere Ausführung dieser Zerlegung mit den zugehörigen Eigenschaften (Riesz, 1916, 96-98). $K_2(x,y)$ hat nun die interessante Eigenschaft, in der

der weiter führt und tieferen Einblick in das Verhalten sämtlicher Nullelemente gewährt. (Riesz, 1916, 96)

Das „Übereinstimmen der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der beiden homogenen Gleichungen“ finden wir in *Satz 1*, „die durch diese ‚Nullösungen‘ ausgedrückte Bedingung für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung bei vorgegebenem g resp. $\mathfrak{g}$“, d.h. die ‚Orthogonalitätsbedingung‘, in *Satz 3* der von Hellinger und Toeplitz formulierten *determinantenfreien Sätzen*. Damit hat Riesz im Fall der Integraloperatoren auf $C(a, b)$ alle Fredholmschen Sätze in dualer Form formuliert (siehe hierzu Abschnitt 7.9.b). Riesz' Resultate wurden zunächst von Hildebrandt (1928), dann von Schauder (1930c) verallgemeinert.

7.5 Theophil Hildebrandt (1888-1980)



Form

$$K_2(x, y) = f_1(x)\mathfrak{f}_1(y) + ... + f_m(x)\mathfrak{f}_m(y),$$

wobei $f_1, ..., f_m$ Nullelemente von B, $\mathfrak{f}_1, ..., \mathfrak{f}_m$ Nullelemente von $\mathfrak{B}$ sind, dargestellt werden zu können. Dabei sind $B = E - K$ und $\mathfrak{B} = E - \mathfrak{K}$ die Transponierten voneinander. Aufgrund dieser Darstellung kann $K_2(x, y)$ auf eine quadratische Matrix zurückführt werden mit den Elementen

$$\alpha_{ij} = \int_a^b f_i(x)\mathfrak{f}_j(x)\, dx.$$

Für eine ausführlichere Untersuchung hierzu verweist Riesz auf Lalesco (1912, 49-59).

Theophil Henry Hildebrandt wurde am 24. Juli 1888 in Dover (Ohio) geboren.[108] Er studierte an der University of Illinois und an der University of Chicago. An letzterer promovierte er 1910 bei E. H. Moore mit der Dissertationsschrift *A contribution to the foundations of Fréchet's calcul fonctionnel*. Ab 1909 lehrte er an der University of Michigan, wo er 1923 auch eine Professurstelle erhielt. Von 1934 bis zu seiner Emeritierung 1957 leitete er die dortige Mathematische Fakultät. Hildebrandt beschäftigte sich mit Themen der Funktionalanalysis und der Integralgleichungstheorie. Einer seiner Doktoranden war J. Wehausen. Am 9. Oktober 1980 verstarb Hildebrandt im Alter von 92 Jahren.

7.6 Hildebrandts Verallgemeinerung (1928)

7.6.a Ausgangspunkt: allgemeiner Banachraum

Im Anschluss an Riesz (1916) verfolgt Hildebrandt in seinem Artikel *Über vollstetige lineare Transformationen* (Hildebrandt, 1928) das Ziel, einen Teil der von Riesz angedeuteten möglichen Verallgemeinerungen zu beweisen.

> In seiner Abhandlung *Über lineare Funktionalgleichungen* (Riesz, 1916) hat Friedrich Riesz eine elegante und allgemeine Methode zur Behandlung der linearen Integralgleichungen entwickelt. Es gelingt ihm, die Haupteigenschaften dieser Gleichungen aus der Betrachtung der charakteristischen Eigenschaften allgemeinerer Funktionaltransformationen und Funktionalräume herzuleiten. Den Beweis des Satzes jedoch, dass die Anzahl der Lösungen für die homogene Fredholmsche Integralgleichung und für die transponierte oder adjungierte Gleichung dieselbe ist, zieht er nicht aus allgemeinen Überlegungen, sondern bedient sich der expliziten Integralgestalt der Transformation. Es ist nun Zweck dieser Arbeit, eine Herleitung dieses Satzes lediglich aus den Eigenschaften der Transformation durchzuführen, ohne deren Integralgestalt zu benützen. Dabei legen wir statt des Raumes der stetigen Funktionen einen allgemeineren Funktionalraum zu Grunde. Andeutungen über die Möglichkeit einer solchen Ausdehnung finden sich schon am Anfang der Abhandlung von Riesz. (Hildebrandt, 1928, 311)

Hildebrandt führt einen „allgemeinen Raum $\mathfrak{F}$ aus Elementen f (oder g, h)" (Hildebrandt, 1928, 311) ein, wobei er auf Banach (1922, 134-136) und Wiener (1922,

[108] Die folgenden Informationen stammen hauptsächlich aus der Seite der *American Mathematical Society* (www.ams.org, 18.05.21), wo Hildebrandt 1945/46 Präsident war.

123) verweist. Dabei handelt es sich um einen linearen Raum, der mit einer Norm ausgestattet ist (Hildebrandt verwendet die Notation $\|\cdot\|$) und bzgl. dieser vollständig (Hildebrandts Formulierung) ist; also um einen Banachraum im heutigen Sinne.

> In einem solchen Raume gelten die Resultate, welche Riesz in dem allgemeinen Theil seiner Arbeit hergeleitet hat, mit der Ausnahme, dass an die Stelle der gleichmäßigen Konvergenz die Konvergenz im Sinne
>
> $$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0,$$
>
> wir wollen sagen *im Sinn der Norm*, gesetzt wird.
> (Hildebrandt, 1928, 312)

Riesz verwendet für seine Untersuchungen im Raum $C(a,b)$ die Maximumsnorm, bzgl. der $C(a,b)$ vollständig ist. Hildebrandt fordert nun axiomatisch, dass der Raum $\mathfrak{F}$ mit einer Norm ausgestattet ist, bzgl. der er vollständig ist.

> Mit Riesz beschäftigen wir uns mit Transformationen B, durch welche jeder Funktion f von $\mathfrak{F}$ eine Funktion $B(f)$ oder Bf aus $\mathfrak{F}$, oder einem Raume $\mathfrak{G}$, welcher denselben Bedingungen wie $\mathfrak{F}$ genügt, zugeordnet ist. (Hildebrandt, 1928, 312)

Das heißt

$$B : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G},$$

wobei im Spezialfall $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ sein kann. Hildebrandt nennt eine solche Transformation „linear“, wenn sie linear („$B(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 B(f_1) + c_2 B(f_2)$“, für alle komplexen Zahlen c_1, c_2) und beschränkt („$\|B(f)\| \leq M\|f\|$“) ist.

> Der Kernpunkt der Rieszschen Entwicklung liegt nun in der Definition vollstetiger Transformationen. Während eine lineare Transformation eine beschränkte Folge in eine beschränkte Folge und eine kompakte Folge in eine kompakte Folge überführt, wird eine Transformation, welche eine beschränkte Folge in eine kompakte Folge transformiert, als *vollstetig* definiert. Die Resultate von Riesz beziehen sich auf eine lineare Transformation von der Form
>
> $$B(f) = f - A(f) = (E - A)f,$$
>
> wobei A vollstetig ist und E die Einheitstransformation $E(f) = f$ bedeutet. (Hildebrandt, 1928, 312f)

Hildebrandt formuliert die entsprechenden Rieszschen Ergebnisse zum vollstetigen Operator $B = E - A$ (vergleiche Unterkapitel 7.4). Wir greifen hier zwei heraus:

> 2. Die Lösungen der homogenen Gleichungen
>
> $$Bf = 0;\ B^n f = 0$$
>
> bilden lineare Mannigfaltigkeiten endlicher Dimensionszahl oder Ordnung. Man kann also alle Lösungen als lineare Verbindung einer endlichen Anzahl von ihnen darstellen. (Hildebrandt, 1928, 313)

> 4. Jede Funktion des Raumes $\mathfrak{F}$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Summe einer Lösung von $B^m f = 0$ und einer Funktion der Mannigfaltigkeit $B^m\mathfrak{F}$ darstellen, d.h.
>
> $$f = \sum_{i=1}^{n_m} c_i g_i + f_0,$$
>
> wobei f_0 zu $B^m\mathfrak{F}$ gehört. Diese Zerlegung definiert eine lineare Transformation $B_0 :\ B_0 f = f_0$ und $(E - B_0)f = \sum_{i=1}^{n_m} c_i g_i$, für welche $AB_0 = B_0 A$ ist.[109] (Hildebrandt, 1928, 314)

Mit n_j wird die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$B^j f = 0$$

bezeichnet, wobei $j = 1, ..., m$ ist und m der Rieszschen Zahl ν aus Abschnitt 7.4.b entspricht. Die Abbildung B_0 bildet ein $f \in \mathfrak{F}$ auf den Teil der obigen Zerlegung ab, der zur Bildmenge $B^m\mathfrak{F}$ gehört.

Im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik lesen wir:

> Die Arbeit (Hildebrandt, 1928) ergänzt die Abhandlung von F. Riesz ((Riesz, 1916), JFM 46.0635). Dort werden die Eigenschaften der linearen Integralgleichungen aus allgemeinen Funktionaltransformationen hergeleitet außer dem Satz, daß die homogene Integralgleichung und ihre transponierte die gleiche Anzahl linear unabhängiger Lösungen besitzt. Den Beweis hierfür erbringt Verf. in der vorliegenden Abhandlung etwa auf folgendem Wege: Die in Rede stehende Transformation

[109] Bzgl. $AB_0 = B_0 A$ schreibt Hildebrandt: „Wenn eine Gleichung für alle Elemente von $\mathfrak{F}$ besteht, werden wir öfters die Funktion f nicht ausdrücklich dazu schreiben.“ (Hildebrandt, 1928, 314)

> lautet $f - A(f)$. Es wird gezeigt, daß die Existenz einer Transformation A_0, die den Bedingungen $A_0 = AA_0 = A_0A_0$ genügt, die einer mit $\bar{A}_0 = \bar{A}_0 = \bar{A}_0\bar{A}_0$ nach sich zieht und umgekehrt. Die Maximalordnung der linearen Mannigfaltigkeiten A_0f und $\bar{A}_0f$ ist dieselbe.
>
> (A. Hammerstein, JFM 54.0427.03)

Dies wollen wir im Folgenden ausführen.

7.6.b Zur transponierten Gleichung

Hildebrandt schreibt:

> Eine Andeutung, wie man die Lösungen der transponierten Gleichung von $Bf = 0$ erhalten kann, liegt in der folgenden Bemerkung: Wenn man die Transformation A_0 durch die Gleichung
>
> $$A_0f = A_0\big(\sum_1^{n_m} c_ig_i + B_0f\big) = \sum_1^{n_1} c_ig_i$$
>
> definiert, dann ergibt einerseits $A_0\mathfrak{F}$ die lineare Mannigfaltigkeit der Lösungen der Gleichung $Bf = 0$, andererseits hat man für alle f
>
> $$BA_0 = 0 \text{ oder } AA_0 = A_0 \text{ und auch } A_0A_0 = A_0.$$
>
> Man könnte also für die transponierte Gleichung erwarten, dass sich eine Transformation $\bar{A}_0$ finden lässt, welche der Bedingung
>
> $$\bar{A}_0B = 0 \text{ oder } \bar{A}_0A = \bar{A}_0$$
>
> für jedes f des Raumes $\mathfrak{F}$ genügt. (Hildebrandt, 1928, 314f)

Die Abbildung A_0 soll also ein $f \in \mathfrak{F}$ auf den Teil der obigen Zerlegung abbilden, der zur Lösungsmenge der Gleichung

$$Bf = 0$$

gehört. Damit gilt zum einen, dass $A_0\mathfrak{F}$ der Lösungsmenge von $Bf = 0$ entspricht; zum anderen gilt

$$BA_0f = B\big(\sum_1^{n_1} c_ig_i\big) = 0,$$

d.h.

$$(E - A)A_0 = 0$$

also

$$AA_0 = A_0;$$

und außerdem

$$A_0A_0f = A_0\Big(\sum_1^{n_1} c_ig_i\Big) = \sum_1^{n_1} c_ig_i = A_0f.$$

Hildebrandt schreibt nun zwar, dass man für die „transponierte Gleichung“ erwarten könne, dass sich eine Transformation $\bar{A}_0$ mit

$$\bar{A}_0B = 0 \text{ oder } \bar{A}_0A = \bar{A}_0$$

finden lasse, jedoch formuliert er die transponierte Gleichung nicht. Wir versuchen, Hildebrandts Überlegung zu formulieren: $A_0\mathfrak{F}$ liefert die Lösungsmenge von $Bf = 0$ und es gilt $BA_0 = 0$. Eine Transformation, für die nun $\bar{A}_0B = 0$ gilt, liefert durch $\bar{A}_0\mathfrak{F}$ die Lösungsmenge der transponierten Gleichung.

Hildebrandt 1928

$$BA_0 = 0 \text{ und } \bar{A}_0B = 0$$

Dabei liefert $A_0\mathfrak{F}$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$Bf = 0$$

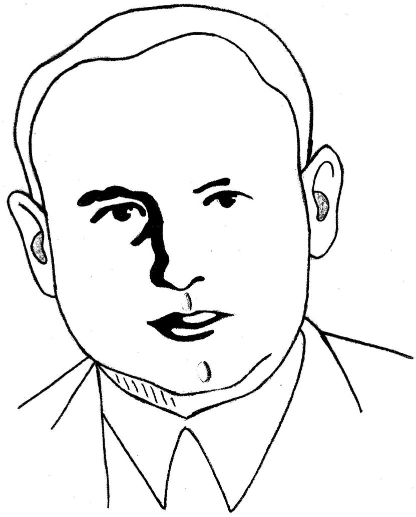
und $\bar{A}_0\mathfrak{F}$ die Lösungsmenge der dazu transponierten Gleichung.

Für die Verallgemeinerung von Riesz' Satz ist zu zeigen, dass die Lösungsmengen $A_0\mathfrak{F}$ und $\bar{A}_0\mathfrak{F}$ von derselben Ordnung sind. Dies gelingt Hildebrandt mit folgendem Satz:

> *Die Existenz einer Transformation, welche den Bedingungen $A_0 = AA_0 = A_0A_0$ genügt, zieht die Existenz einer Transformation mit $\bar{A}_0 = \bar{A}_0A = \bar{A}_0\bar{A}_0$ nach sich und umgekehrt. Die Maximalordnung der linearen Mannigfaltigkeiten $A_0\mathfrak{F}$ und $\bar{A}_0\mathfrak{F}$ ist dieselbe. Im Falle $\bar{A}_0\mathfrak{F}$ die maximale Ordnung hat, lautet die Bedingung, dass f zu $B\mathfrak{F}$ gehört: $\bar{A}_0f = 0$.* (Hildebrandt, 1928, 317)

In der letzten Aussage erkennen wir wieder die ‚Orthogonalitätsbedingung‘. Wir bemerken abschließend, dass Hildebrandt in seiner Arbeit *nicht* den Begriff eines allgemeinen dualen Operators verwendet. Diesen finden wir bei Schauder (1930c).

7.7 Juliusz Schauder (1899-1943)



Juliusz Paweł Schauder wurde am 21. September 1899 in Lemberg geboren.[110] Direkt nach seinem Abitur wurde er 1917 in die österreichisch-ungarische Armee einberufen und geriet in italienische Kriegsgefangenschaft. 1919 begann er sein Studium in Lemberg, wo er 1923 bei H. Steinhaus mit der Dissertationsschrift *The theory of surface measure* promovierte. Zunächst unterrichtete er als Gymnasiallehrer und betrieb seine mathematische Forschung nebenher. 1928 hielt er, nach der Veröffentlichung seiner Arbeit *Contributions to the theory of continuous mappings on function spaces*, seine erste Vorlesung an der Lemberger Universität, wo er neben seiner Gymnasiallehrstelle auch eine Assistenzstelle antrat. 1930 veröffentlichte er neben seinem bekannten Fixpunktsatz (Schauder, 1930a) auch die Arbeit *Über lineare, vollstetige Funktionalaperationen* (Schauder, 1930c), die wir in Unterkapitel 7.8 untersuchen. 1932 erhielt er ein Stipendium, durch das er nach Leipzig und Paris konnte, wo er mit J. Leray zusammenarbeitete.

> With J. Leray he published a paper (1934) considered to be a landmark in topological thinking in connection with partial differential equations. In this paper what is now known as Leray-Schauder degree (a homotopy invariant) is defined. This degree is then used in an ingenious method

[110] Die folgende biographische Skizze basiert auf einem Beitrag von Forster (1975). Zur weiteren Lektüre sei auf den Nachruf von J. Leray (1980) verwiesen.

> to prove the existence of solutions to complicated partial differential equations. (Forster, 1975)

1939 wurde er an der Universität Lemberg zum Professor ernannt. Er gehörte mit Steinhaus, Banach (siehe Abschnitt 2.7.b) und Saks (siehe 6.2) zur Lemberger Schule. Als Jude wurde er im September 1943 von der Gestapo ermordet. Forster schreibt:

> A last desperate plea for help, delivered by a Polish student who escaped to Switzerland, reached the topologist Heinz Hopf. Among other things, Schauder wrote that he had many important new results but no paper to write them on. He implored the Swiss mathematicians to ask the German physicist Werner Heisenberg to intervene with the German authorities so that his life would be spared. The Swiss physicist W. Scherrer wrote a letter to Heisenberg, but to no avail. Schauder died in September 1943. According to one version he was betrayed to the Gestapo, was arrested, and disappeared; according to another (more probable) version he was shot after one of the regular roundups.
> (Forster, 1975)

7.8 Schauders Verallgemeinerung (1929)

In seinem Artikel *Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen* (Schauder, 1930c) beginnt Schauder mit einer Einordnung seiner Beiträge:

> In der vorliegenden Arbeit werden alle drei Fredholmschen für die Integralgleichungen geltenden „determinatenfreien“ Sätze in präziser Fassung auf allgemeine vollstetige Funktionaloperationen übertragen, wobei der zugrunde gelegte Raum linear, normiert und vollständig ist. Solche Räume werden wir kurz als Räume „vom Typus B“ bezeichnen. Derselbe Gegenstand wurde in einer früheren, grundlegenden Arbeit von Herrn F. Riesz behandelt und ein Teil der in Betracht kommenden Fredholmschen Sätze bereits bewiesen. Für den Fall eines *allgemeinen* Raumes vom Typus B konnten mittels Rieszscher Methoden diejenigen Sätze nicht erledigt werden, bei welchen der Begriff der „transponierten Gleichung“ eine Rolle spielte. In dieser Note bringen wir die noch nötige Ergänzung. Dabei tritt die restlose Dualität zwischen einer Funktionaloperation und ihrer konjugierten Funktionaloperation klar zutage.
> (Schauder, 1930c, 183)

Schauder fügt als Fußnote hinzu, dass der Hauptteil der vorliegenden Arbeit schon am 8. Juni 1929 in der Sitzung der *Polnischen Mathematischen Gesellschaft (Abteilung Lemberg)* vorgetragen wurde. Außerdem gibt Schauder den Hinweis, dass man den genauen Wortlaut der „drei Fredholmschen für die Integralgleichungen geltenden determinantenfreien Sätze“ in (Hellinger und Toeplitz, 1927) findet (siehe Abschnitt 7.3.d). Schauders Ziel ist es nun, diese für allgemeine vollstetige Operatoren, definiert auf allgemeinen Räumen „vom Typus B“, zu verallgemeinern. Für Räume „vom Typus B“ verweist er in seiner kurzen Einleitung wie auch Hildebrandt auf Banach (1922). Hier finden wir – nach der axiomatischen Einführung eines linearen „champ“ E, bei der Banach als Beispiele „les vecteurs, les formes de Grassmann, les quaternions, les nombres complexes etc.“ (Banach, 1922, 135) anführt – die folgenden Voraussetzungen:

> Admettons ensuite que
>
> II *Il existe une opération appelée norme* (nous la désignerons par le symbole $\|X\|$), *définie dans le champ E, ayant pour contredomaine l'ensemble de nombres réels et satisfaisant aux conditions suivantes:*
>
> II_1 $\|X\| \geq 0$,
>
> II_2 $\|X\| = 0$ *équivaut à* $X = \theta$.
>
> II_3 $\|a.X\| = |a|.\|X\|$,
>
> II_4 $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$,
>
> III *Si*
>
> 1° $\{X_n\}$ *est une suite d'éléments de* E,
>
> 2° $\lim_{\substack{r=\infty \\ p=\infty}} \|X_r - X_p\| = 0$,
>
> il existe un élément X tel que
>
> $$\lim_{n=\infty} \|X - X_n\| = 0.$$
>
> (Banach, 1922, 135f)

Als Anhänger von Banachs Lemberger Schule kannte Schauder natürlich Banachs Konzept eines allgemeinen normierten, vollständigen Raums, eines Raums „vom Typus B“, also eines Banachraums. Neben der Verallgemeinerung der Fredholmschen Sätze für allgemeine vollstetige Operatoren, definiert auf allgemeinen Banachräumen, sollen außerdem die Rieszschen Resultate in dualer Hinsicht erweitert werden: Während Riesz den Begriff der „Transponierten“ nur bei der Anwendung seiner Sätze auf Integralgleichungen anbringt, macht es sich Schauder zur Aufgabe, „die noch nötige Ergänzung“ zu bringen. Dazu wird, wie Schauder explizit formuliert, die „restlose Dualität“ zwischen einem Operator und seinem dualen Operator herangezogen, um so alle, insbesondere die dualen, Aussagen der Fredholmschen Sätze in allgemeiner Form zu erhalten.

7.8.a Der Satz von Schauder

Als *Satz von Schauder* wird heute oft die folgende Aussage bezeichnet (und auch Banach verweist hier auf Schauder, siehe Kapitel 5):

> Seien X und Y Banachräume, dann ist ein stetiger linearer Operator $K : X \to Y$ genau dann kompakt, wenn der duale Operator $K' : Y' \to X'$ kompakt ist.

Wir wollen verfolgen, wie Schauder für diesen Satz das zugrunde liegende Konzept eines allgemeinen dualen Operators einführt. Ausgangspunkt ist ein allgemeiner Banachraum R. Weiter sei $X(x)$ ein „lineares und stetiges Funktional, welches im Raume R erklärt ist“ (Schauder, 1930c, 183f). Unserer heutigen Definition eines Funktionals als speziellem Operator entsprechend, erklärt Schauder:

> Eine Funktion, die jedem Elemente x eines x-Raumes ein Element y eines y-Raumes zuordnet, bezeichnen wir als Funktionaloperation (Abbildung, Transformation). Sind die Elemente y reelle Zahlen, so spricht man von einem Funktional. (Schauder, 1930c, 184, Fußnote)

Es sind im Folgenden immer stetige lineare Funktionale gemeint. Analog zu Hahns Einführung (siehe Unterkapitel 2.8) des polaren Raums und zugehöriger Norm, jedoch ohne darauf zu verweisen, erklärt Schauder:

> Die Gesamtheit aller Funktionale X bildet eine abstrakte Menge, welche durch passende Normierung wieder zu einem Raume R^* vom Typus B zusammengefaßt werden kann. Als Norm des Funktionals X (in Zeichen $\|X\|$) definieren wir die kleinste Zahl M, welche die Ungleichung
>
> $$|X(x)| \leq M$$
>
> – unter der Zusatzbedingung $\|x\| \leq 1$ – erfüllt. War der ursprüngliche Raum vom Typus B, so gilt dies auch vom Raume der Funktionale, dem s.g. konjugierten (transponierten) Raume. (Schauder, 1930c, 184)

Gegeben sei nun eine Funktionaloperation $y = f(x)$, „welche den ganzen x-Raum R linear und stetig auf eine echte oder unechte Teilmenge des y-Raumes R' abbildet“ (Schauder, 1930c, 184). Wir würden dies heute notieren als:

$$f : R \to R'; \;\; f(x) = y,$$

wobei R' *nicht* den zu R konjugierten Raum darstellt – das tut R^* –, sondern neben R einen weiteren allgemeinen Banachraum. Anschließend führt Schauder den Begriff des dualen Operators ein, wobei er auf Banach (1929b) verweist (siehe hierzu Unterkapitel 6.4). Schauder formuliert entsprechend:

Schauders „konjugierte (transponierte) Funktionaloperation“

> Wir wollen nun festsetzen, was unter der konjugierten (transponierten) Funktionaloperation verstanden werden soll. Sie soll nämlich den Y-Raum (den Raum aller Funktionale über R') auf den X-Raum (den zum x-Raume konjugierten Raum) abbilden. Sei nämlich $Y(y)$ ein beliebiges Funktional im y-Raume. Dem Y – als selbstständiges Element betrachtet – ordnen wir das Funktional
>
> $$X(x) = Y[f(x)] \;\; (x \in \mathbb{R})$$
>
> zu. Wir schreiben dann
>
> $$X = Y[f(x)] = F(Y)$$
>
> und dies ist die gewünschte konjugierte Funktionaloperation. Sie ist linear und stetig in dem (konjugierten) Y-Raume als Definitionsbereiche und dem (konjugierten) X-Raume als Wertbereiche. Es sei nochmals hervorgehoben, daß F in ganz anderen Räumen als $y = f(x)$ erklärt ist. (Schauder, 1930c, 184)

Wir würden dies heute wohl auf folgende Weise formulieren: Zu einer Funktionaloperation

$$f : R \to R'; \;\; f(x) = y$$

wird die konjugierte Funktionaloperation definiert durch

$$F : R'^* \to R^*; \;\; F(Y) = X,$$

wobei

$$F(Y)[x] = X[x] := Y[f(x)] \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Verwenden wir die Schreibweise der dualen Paarung, so gilt also:

$$(f(x), Y) = (x, F(Y)).$$

Für die Einführung des Begriffs eines kompakten Operators verwendet Schauder Riesz' Definition der „vollstetigen Funktionaloperation" in (Riesz, 1916):

> Herr Riesz (1916) nennt eine Funktionaloperation vollstetig, wenn diese beschränkte Mengen in kompakte überführt. (Schauder, 1930c, 184)

Damit zeigt Schauder schließlich die Aussage des heutigen Satzes von Schauder in zwei Schritten:

> Satz I. *Ist $y = f(x)$ linear und vollstetig, so ist auch $X = F(Y)$ in entsprechenden Räumen linear und vollstetig.* (Schauder, 1930c, 185)

> Satz II. *Ist die konjugierte Funktionaloperation $X = F(Y)$ vollstetig (nach der in den X und Y-Räumen üblichen Normierung), so trifft dies auch für die ursprüngliche Funktionaloperation $y = f(x)$ zu.*
> (Schauder, 1930c, 187)

7.8.b Der Bidualraum

Für ein besseres Verständnis der folgenden Erläuterungen sei hier noch einmal Schauders Terminologie zusammengefasst: Zu einer gegebenen stetigen linearen Funktionaloperation

$$f : R \ \to \ R'; \ \ f(x) = y,$$

wobei R der „x-Raum" und R' der „y-Raum" ist, gehört die wie oben definierte „konjugierte (transponierte) Funktionaloperation"

$$F : (R')^* \ \to \ R^*; \ \ F(Y) = X,$$

wobei $(R')^*$ der „Y-Raum" ist, d.h. der „Raum aller Funktionale über R'" – es sind immer stetige lineare Funktionale gemeint – und R^* der „zu x-Raum konjugierte (transponierte) X-Raum".

Im Beweis von *Satz II* finden wir nun eine Einführung des *Bidualraums*.

> Wir betrachten die zum x-Raume bezw. y-Raume konjugierten Räume X, Y. Auch diese Räume besitzen ihre eigenen konjugierten Räume, die durch Bildung von Funktionalen $\alpha(X), \beta(Y)$ über dem X bezw. Y-Raum erhalten werden. Wir bezeichnen den α-Raum als den zum x-Raume bikonjugierten Raum; eine ähnliche Definition besteht für den β-Raum. (Schauder, 1930c, 187)

Schauder erklärt, dass die Ausgangsräume mittels der – wie wir heute sagen würden – kanonischen Abbildung der dualen Paarung jeweils isomorph zu einer Teilmenge des zugehörigen Bidualraums sind:

> Die ursprünglichen Räume der Elemente x, bezw. y sind mit einer Teilmenge ihrer bikonjugierten α-, bezw. β-Räume homeomorph und sogar isomorph. In der Tat, ist x_0 ein beliebiges festes Element aus dem x-Raum X, so stellt uns
>
> $$X(x_0) = \alpha(X) = \alpha_{x_0}(X)$$
>
> bei veränderlichem X ein Funktional über dem Funktional X, also ein Element α_{x_0} aus dem bikonjugierten α-Raum dar. [...] Man überzeugt sich nun sehr leicht von der folgenden Beziehung:
>
> $$\text{Norm des Funktionals } \alpha_{x_0} = \|x_0\|.$$
>
> (Schauder, 1930c, 187)

Durch (wieder in der Schreibweise der dualen Paarung)

$$(x_0, X) = (X, \alpha)$$

für alle X aus dem Dualraum wird also jedem x_0 aus dem ursprünglichen Raum eindeutig ein Element α_{x_0} des Bidualraums zugeordnet. Dass die Norm des Elements x_0 aus dem ursprünglichen Raum mit der des ihm eindeutig zugeordneten „bikonjugierten Funktionals α_{x_0}“ (Schauder, 1930c, 187, Fußnote) übereinstimmt, zeigt Schauder mithilfe des „Erweiterungssatzes des Herrn Hahn“. Dabei verweist er neben Hahn (1927) auch auf Banach (1929a). Der Beweis von Schauders *Satz II* verläuft nun folgendermaßen: *Satz I* gilt generell für vollstetige Funktionaloperationen, also auch für die zur Funktionaloperation $y = f(x)$ konjugierte Funktionaloperation $X = F(Y)$, wenn diese als vollstetig vorausgesetzt wird:

> In den abstrakten X, bezw. Y-Räumen gilt nun unser Satz I. Betrachten wir also die (konjugierte) Funktionaloperation $X = F(Y)$ und ist

> diese vollstetig, so ist auch die zu ihr konjugierte Funktionaloperation
>
> $$\beta = f^*(\alpha),$$
>
> $$\beta = \beta(Y) = \alpha[F(Y)], \qquad (\alpha = \alpha(X))$$
>
> vollstetig. Wir wollen nun beweisen, daß die ursprüngliche Funktionaloperation $y = f(x)$ vollstetig ist. (Schauder, 1930c, 188)

Zur besseren Übersicht hier noch einmal in der Schreibweise der dualen Paarung:

$$(F(Y), \alpha) = (Y, f^*(\alpha)).$$

Es soll nun mithilfe der Betrachtung von f^* gezeigt werden, dass f eine beliebige beschränkte Menge Δ auf eine kompakte Menge $f(\Delta)$ abbildet. Hierfür wird zu jedem Element der x-Raum Menge Δ das über die duale Paarung eindeutig zugeordnete bikonjugierte Element α_x gebildet (siehe oben). Mit Δ ist wegen der Normgleichheit auch die Menge der α_x beschränkt. Nach *Satz 1* bilden die Elemente

$$\beta_x = f^*(\alpha_x)$$

eine kompakte Menge, d.h. es gibt eine Teilfolge der α_x, sodass (in Anlehnung an Schauders Schreibweise):

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \text{Norm } (f^*(\alpha_{x_m}) - f^*(\alpha_{x_n})) = 0.$$

Es gilt nun für alle x der Menge Δ (mit der Schreibweise der dualen Paarung):

$$(Y, f^*(\alpha_x)) = (F(Y), \alpha_x) = (x, F(Y)) = (f(x), Y)$$

für alle Funktionale Y auf dem y-Raum. Hier erkennt man sehr schön die Nutzung der Dualität. Daraus folgt die folgende Normgleichheit und damit die Behauptung (in Anlehnung an Schauders Schreibweise):

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f(x_n) - f(x_m)\| = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \text{Norm } (f^*(\alpha_{x_m}) - f^*(\alpha_{x_n})) = 0.$$

Schauder formuliert dies folgendermaßen:[111]

[111] In der zweiten Zeile ist sicherlich $\beta_m(Y) = \beta_m = Y[f(x_m)]$ gemeint. Interessant ist, dass Schauder für die Norm im Bidualraum nicht die Doppelstriche, sondern das *Wort* ‚Norm' verwendet.

Nun ist [...]

$$\beta_n = \beta_n(Y) = f^*(\alpha_n) = \alpha_{x_n}[F(Y)] = \alpha_{x_n}[Yf(x)] = Y[f(x_n)],$$

$$\beta_m(Y) = \beta_m = Y[f(x)],$$

wo Y ein beliebiges im y-Raume erklärtes Funktional bedeutet. [Daraus] folgt

$$\beta_n - \beta_m = Y[f(x_n) - f(x_m)],$$

also [...]

$$\text{Norm } (\beta_n - \beta_m) = \|f(x_n) - f(x_m)\|.$$

[Also] [...]

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f(x_n) - f(x_m)\| = 0.$$

(Schauder, 1930c, 189)

In diesem Beweis erkennt man deutlich die Heranziehung der „restlosen Dualität zwischen einer Funktionaloperation und ihrer konjugierten Funktionaloperation“ (Schauder, 1930c, 183), die einer ‚restlosen‘ Verallgemeinerung der Fredholmschen Sätze noch gefehlt hat. Schauder erklärt in *Satz III*, dass – in unserer heutigen Schreibweise – für zwei lineare Operatoren $T : X \to Y$ und $S : Y \to Z$ der duale Operator der Verknüpfung $S \circ T$ gegeben ist durch die entsprechende Verknüpfung der dualen Operatoren $T' : Y' \to X'$ und $S : Z' \to Y'$, d.h.

$$(S \circ T)' = T' \circ S'.$$

7.8.c Verallgemeinerung der Fredholmschen Alternative

Es folgen Schauders „Hauptsätze“ (siehe hierzu auch Banachs Verweis aus Unterkapitel 5.4). Dazu sei der Fall angenommen, dass „der x-Raum mit dem y-Raume übereinstimmt“ (Schauder, 1930c, 189).

Hauptsatz I. *Die beiden homogenen Gleichungen*

$$x + f(x) = 0$$

$$Y + F(Y) = 0$$

besitzen dieselbe Anzahl von linear unabhängigen Lösungen, wenn eine der beiden Funktionaloperationen $f(x)$ resp. $F(Y)$ als vollstetig vorausgesetzt wird. (Schauder, 1930c, 189f)

Schauder weist darauf hin, dass Riesz diese Aussage im Fall der Integraloperatoren auf $C(a, b)$ schon bewiesen hat und verwendet dessen Argumentation, indem er auf die entsprechenden Stellen in (Riesz, 1916) verweist:

> Herr F. Riesz hat nun den Satz vom Übereinstimmen der Anzahl der Lösungen von [den beiden obigen homogenen Gleichungen, A.W.] im Felde der stetigen Funktionen bewiesen, wenn dazu noch $f(x)$ von spezieller Form ist. Nun sind wir aber im Besitze der Sätze I, II, III und diese Sätze erlauben uns die Rieszsche Methode auf den allgemeinen Fall zu übertragen. Wir setzen also im Folgenden die Kenntnis der Arbeit des Herrn Riesz voraus und verzichten auf den ausführlichen Beweis. (Schauder, 1930c, 190)

Am Ende des Beweises von *Hauptsatz I* verweist Schauder auf Hildebrandt (vergleiche Unterkapitel 7.6):

> Wir machen auf eine Arbeit des Herrn T. H. Hildebrandt aufmerksam: (Hildebrandt, 1928). Der von Herrn Hildebrandt bewiesene Satz läßt sich leicht aus dem Hauptsatze I gewinnen. Aber auch umgekehrt bietet, (wie es Herr S. Mazur mir gegenüber bemerkte) das Hildebrandtsche Ergebnis einen anderen Weg, um zum Hauptsatze I zu gelangen mit Benutzung der in dieser Arbeit vorkommenden Sätze I, II. Bei Herrn Hildebrandt kommt aber der Begriff der konjugierten Funktionaloperation nicht vor. (Schauder, 1930c, 191, Fußnote)

Dann folgt *Hauptsatz II*:

> Hauptsatz II. *a) Ist $f(x)$ vollstetig, so ist die Gleichung*
>
> $$y_0 = x + f(x) = h(x)$$
>
> *für gegebenes y_0 dann und nur dann lösbar, wenn y zu allen Nullösungen Y der konjugierten Gleichung orthogonal ist, d.h. wenn $Y(y_0) = 0$ ist. Dabei wird als Nullösung Y jede Lösung von*
>
> $$Y + F(Y) = 0$$
>
> *bezeichnet.*
>
> *b) Ist $F(Y)$ vollstetig, so ist die Gleichung*
>
> $$X_0 = Y + F(Y) = H(Y)$$

> *für gegebenes X_0 dann und nur dann lösbar, wenn X_0 zu allen Nullösungen x der ursprünglichen Gleichung $y = f(x)$ orthogonal ist, d.h. wenn $X_0(x) = 0$. Dabei wird als Nullösung x jede Lösung von*
>
> $$x + f(x) = 0$$
>
> *bezeichnet.* (Schauder, 1930c, 191f)

Im Beweis von *Hauptsatz II* wird der „Erweiterungssatz des Herrn Hahn (1927)" sowie wieder eine Überlegung von Riesz (1916, 82, Satz 4) benutzt. Riesz hat Schauders *Hauptsatz II* für den Fall von Integraloperatoren auf $C(a, b)$ gezeigt (siehe Abschnitt 7.4.c). Schließlich folgt *Hauptsatz III* „durch formell-logische Schlüsse aus den Hauptsätzen I, II" (Schauder, 1930c, 193):

> Hauptsatz III. *Voraussetzung: Eine der Funktionaloperationen $f(x)$ bezw. $F(Y)$ ist vollstetig.*
>
> *Behauptung: Die vier folgenden Eigenschaften sind einander gleichwertig:*
> *a) die Gleichung $y = x + f(x)$ ist für jedes y lösbar,*
> *b) die Gleichung $X = Y + F(Y)$ ist für jedes X lösbar,*
> *c) die Gleichung $0 = x + f(x)$ besitzt keine „Nullösungen",*
> *d) die Gleichung $0 = Y + F(Y)$ besitzt keine „Nullösungen".*
> (Schauder, 1930c, 193)

Schauder bemerkt, dass die Gleichwertigkeit von a) und c) bereits von Riesz (1916) bewiesen wurde. In der Tat finden wir dies für allgemeine vollstetige Transformationen auf $C(a, b)$ in Riesz' *Satz 7* (siehe Abschnitt 7.4.b). Außerdem ergänzt Schauder in einer ausführlichen Fußnote – wieder mit Verweisen auf (Riesz, 1916) und für den „Fall des Hilbertschen Raumes" auf (Riesz, 1913) – wie mit den erhaltenen Resultaten die Funktionaloperation

$$y = x + \lambda f(x),$$

wobei $f(x)$ vollstetig ist, untersucht werden kann, d.h. wie man zu gewissen Aussagen der Spektraltheorie gelangen kann. Den Abschluss von Schauders Arbeit bildet eine Anwendung der Resultate auf die Potentialtheorie, worauf wir hier jedoch nicht mehr eingehen.

> Diese Sätze über vollstetige Funktionaloperationen können auf heutzutage fast klassische Probleme angewendet werden. Wir zeigen es an dem Beispiel der Integralgleichungen der Potentialtheorie.
> (Schauder, 1930c, 193)

7.9 Abschließende Bemerkungen

7.9.a Ein kurzer Überblick zum Begriff der Vollstetigkeit

Im Großen und Ganzen finden sich hier zwei Verwendungsweisen:

1) Hilberts Definition in (Hilbert, 1906b), die Riesz in (Riesz, 1910) in äquivalenter Form übernimmt, und

2) Riesz' Modifikation in (Riesz, 1916), die von Hildebrandt (Abschnitt 7.6.a), Schauder (Abschnitt 7.8.a), Saks (Abschnitt 6.3.d), Banach (Kapitel 5) und Hausdorff (Abschnitt 8.2.c) aufgegriffen wird.

1) In (Riesz, 1910) lesen wir (siehe Abschnitt 6.1.e):

> Wir nennen nämlich eine Funktionaltransformation vollstetig, wenn bei ihr jede schwach konvergente Folge in eine stark konvergente übergeht. (Riesz, 1910, 487)

Riesz bemerkt (Riesz, 1910, 487), dass diese Definition mit der Hilbertschen (Hilbert, 1906b) übereinstimmt. Bei Hilbert finden wir:

> Wir nennen eine Funktion $F(x_1, x_2, ...)$ der unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, ...$ für ein bestimmtes Wertesystem derselben *vollstetig*, wenn die Werte von $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, ...)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, ...)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ für sich zur Null werden läßt, d.h. wenn
>
> $$L_{\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0,...} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, ...) = F(x_1, x_2, ...)$$
>
> wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(h)}, \varepsilon_2^{(h)}, ...$ durchlaufen läßt, daß einzeln
>
> $$L_{h=\infty} \varepsilon_1^{(h)} = 0, L_{h=\infty} \varepsilon_2^{(h)} = 0, ...$$
>
> ist. Wenn eine Funktion für jedes Wertsystem der Variablen vollstetig ist, so heiße sie schlechthin *vollstetig*. (Hilbert, 1906b, 200)

Dabei zieht Hilbert „nur solche Wertsysteme der unendlich vielen Variablen x_1, x_1, ..., $y_1, y_2, ...$ u.s.f. in Betracht, die der Bedingung

$$(x, x) \leq 1, \quad (y, y) \leq 1, ...$$

genügen“ (Hilbert, 1906b, 177). Hilbert verwendet für seine Definition das Konzept der *schwachen Konvergenz*: Seien $x_1 = (\xi_k^1), x_2 = (\xi_k^2), ...$ und $x = (\xi_k)$ Folgen der abgeschlossenen Einheitskugel in l^2, dann konvergiert die Folge aus Folgen (x_n) schwach gegen die Folge x, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^n = \xi_k, \quad k = 1, 2, ...,$$

d.h. wenn sie *punktweise* gegen x konvergiert.

2) In (Riesz, 1916) modifiziert Riesz – aufgrund der Feststellung, dass eine Folge beschränkt sein kann, ohne kompakt[112] zu sein – seinen Begriff der Vollstetigkeit aus (Riesz, 1910). Dabei gilt (siehe Abschnitt 7.4.a):

> Eine lineare Transformation heisse vollstetig, wenn sie jede *beschränkte* Folge in eine *kompakte* überführt. (Riesz, 1916, 74)

Pietsch schreibt dazu:

> This terminology was used for many years. Since 1950, on the suggestion of Hille (1948, 14), „vollstetig“ is mostly replaced by „compact“. (Pietsch, 2007, 50)

Riesz’ vollstetige Funktionaltransformationen in (Riesz, 1910) sind auf reflexiven Banachräumen gerade vollstetig im Sinne von (Riesz, 1916), d.h. kompakt im heutigen Sinne.[113]

7.9.b Duale Operatoren, duale Gleichungen, duale Aussagen

Fredholm (1903) (siehe Abschnitt 7.3.c) führt den zu

$$S_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)\, dy$$

dualen Integraloperator

$$T_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y, x)\varphi(y)\, dy$$

[112] „Eine Folge $\{f_n\}$ heisse nach Fréchet kompakt, wenn jede Teilfolge derselben eine gleichmässig konvergente weitere Teilfolge enthält.“ (Riesz, 1916, 73) Heute nennen wir (vergleiche z.B. (Werner, 2011, 66)) einen linearen Operator $T : X \to Y$ kompakt, wenn er beschränkte Mengen auf relativkompakte Mengen abbildet, bzw. wenn für jede Folge (x_n) in X die Folge (Tx_n) in Y eine konvergente Teilfolge enthält.

[113] Siehe z.B. (Werner, 2011, 128).

ein, ohne diesen als solchen zu bezeichnen. Allerdings tut er dies *nicht* zur Formulierung der Fredholmschen Sätze, insbesondere nicht zur Formulierung der ‚Orthogonalitätsbedingung'. Stattdessen formuliert er die Lösungen der homogenen dualen Gleichung explizit. Weiter betrachtet Fredholm *nicht* explizit die jeweilige duale Gleichung, auch wenn Hellinger und Toeplitz dies in ihrer Beschreibung sogleich ergänzen. Die Notation T_f taucht das erste Mal als abkürzende Schreibweise bei den Untersuchungen zur ersten Variation von D_f auf und dann wieder bei Fredholms „théorème de multiplication". Erst in §6 stoßen wir auf eine Beziehung zwischen S_i und T_i, von der wir heute sagen würden, sie entspringe aus der Dualität der beiden Operatoren.

Riesz betrachtet in (Riesz, 1916) vollstetige Transformationen auf $C(a, b)$. Obwohl er für diese einen Teil der Fredholmschen Sätze beweist und obwohl er in (Riesz, 1910) schon duale Operatoren auf den $L^p(a, b)$-Räumen verwendet hat, führt er hier keinen zugehörigen dualen Operator ein und formuliert somit auch nicht die jeweiligen dualen Aussagen der Fredholmschen Sätze. Sobald es dann jedoch zur *Anwendung auf Integralgleichungen* kommt, erscheinen duale Integralkerne:

$$\mathfrak{K}(x, y) = K(y, x),$$

und „transponierte Integralgleichungen":

> Dann sagt man, die Gleichung $\mathfrak{f} - \mathfrak{K}[f] = \mathfrak{g}$ sei in Bezug auf die vorhin behandelte vom transponierten Typus. Umgekehrt ist $f - K[f] = g$ der zu $\mathfrak{f} - \mathfrak{K}[f] = \mathfrak{g}$ transponierte Typus. (Riesz, 1916, 95)

Außerdem formuliert Riesz hier die dualen Aussagen der Fredholmschen Sätze, insbesondere mit den jeweiligen ‚Orthogonalitätsbedingungen'. Es stellen sich zwei Fragen: 1) Warum verzichtet Riesz im allgemeineren Fall der vollstetigen Transformationen auf $C(a, b)$ auf die Einführung eines dualen Operators, mit der er auch die jeweiligen dualen Gleichungen hätte betrachten können, die ihn im Integraloperatorfall zu den entsprechenden dualen Aussagen führen? 2) Warum schränkt sich Riesz trotz seiner Bemerkung in der Einleitung auf vollstetige Operatoren auf $C(a, b)$ ein? Zur Erinnerung:

> Die in der Arbeit gemachte Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. (Riesz, 1916, 71)

Neben der Anwendbarkeit seiner Argumente auf $L^2(a, b)$ und den „Hilbertschen Raum" l^2, die Riesz selbst als Beispiel nennt, lassen sich seine Resultate aus §2, wie oben erwähnt, ohne weiteres auf allgemeine Banachräume übertragen. Pietsch schreibt dazu:

> Riesz was not able to express the relationship between the transposed
>
> $$f(t) \mapsto \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt \quad \text{and} \quad \mathfrak{f}(s) \mapsto \int_a^b K(s,t)\mathfrak{f}(s)\,ds$$
>
> in an abstract form. This could have been the reason why he continued working in $C[a,b]$. Only after the discovery of the Hahn-Banach theorem did duality provide the way out. (Pietsch, 2007, 51)

Tatsächlich ist die Definition eines *allgemeinen* dualen Operators erst dann sinnvoll, wenn der Dualraum eines allgemeinen normierten Raums nicht nur aus dem Nullfunktional besteht. Dies zeigt der Satz von Hahn-Banach (erst) im Jahr 1927 bzw. 1929. Schauder (1930c) verallgemeinert die Rieszsche Theorie – in den Worten von Werner:

> [Riesz'] Resultate wurden durch Schauder (1930c) komplementiert, der gleichzeitig den adjungierten Operator betrachtete.
> (Werner, 2011, 314)

Dabei liegen sämtliche Resultate Schauders bei Riesz für den Spezialfall der Integraloperatoren auf $C(a,b)$ vor. In Riesz' allgemeinem Fall der vollstetigen Operatoren auf $C(a,b)$ wird ‚nur' die endliche Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung

$$x + f(x) = 0$$

aus Schauders *Hauptsatz I* gezeigt (Riesz' *Satz 1*), sowie die Alternativen a)-c) aus Schauders *Hauptsatz III* (Riesz' *Satz 7*), nicht jedoch die entsprechende Orthogonalitätsbedingung aus Schauders *Hauptsatz II* für den Fall der Gleichung

$$x + f(x) = y.$$

Für Schauder treffen damit drei wichtige Errungenschaften aufeinander: 1) Riesz' vollständige duale Formulierung der Fredholmschen Sätze für den Fall der Integraloperatoren auf $C(a,b)$, 2) Riesz' Resultate für allgemeine vollstetige Operatoren auf $C(a,b)$ (in nicht-dualer Form) und 3) Banachs Einführung des allgemeinen dualen Operators in (Banach, 1929b), worauf Schauder jeweils verweist. Somit vollendet Schauder die von Riesz' begonnene Theorie mit dem Resultat der Formulierung der allgemeinen Fredholmschen Sätze in dualer Form, ist jedoch nicht als Urheber des Konzepts eines allgemeinen dualen Operators oder der Idee, die entsprechenden zueinander dualen Gleichungen zu untersuchen, zu sehen.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass Schauder, im Gegensatz zu Banach in (Banach, 1929b), wo der allgemeine duale Operator eingeführt wird, in seiner kurz darauf veröffentlichten Arbeit (Schauder, 1930c), deren Inhalte ja schon im Juni 1929 vorgetragen wurden, den (Raum-) Begriff des „konjugierten Raums“ verwendet. Da Schauder Hahns Arbeit (Hahn, 1927) kannte, ist dies nicht verwunderlich. Dennoch ist interessant, dass Banach diesen Begriff 1929 noch nicht verwendet.

8 Duale Operatoren in normierten und metrikfreien Räumen

8.1 Felix Hausdorff (1868-1942)

Auf der Seite des Projekts der *Hausdorff Edition*[114] lesen wir:

> Felix Hausdorff (1868-1942) gehört zu den herausragenden Mathematikern der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Er ist einer der Begründer der Topologie, einer für die moderne Mathematik grundlegenden Disziplin, und er leistete bedeutende Beiträge zur Mengenlehre, Maßtheorie, Funktionalanalysis, Algebra und angewandten Mathematik. Als

[114] Siehe http://www.hausdorff-edition.de, 19.05.21. Produkt des Projekts ist eine kommentierte und um Nachlassmaterial ergänzte Ausgabe von Hausdorffs gesammelten Werken: (Brieskorn et al., 2020).

> Protagonist der mathematischen Moderne ist er nicht ohne seine philosophischen Arbeiten zu verstehen. Dies und auch seine literarischen Arbeiten machen Hausdorff zu einem exzeptionellen Intellektuellen und produktiven Mathematiker der Zeit von der Jahrhundertwende bis zum Ende der Weimarer Republik. Wegen seiner jüdischen Herkunft wurde er von den Nationalsozialisten verfolgt und schließlich in den Tod getrieben. Hausdorff hat bis zu seinem Tod wissenschaftlich gearbeitet, konnte aber in Deutschland nicht mehr publizieren. Er hinterließ neben seinem publizierten Werk ein ungewöhnlich umfangreiches Korpus an wissenschaftlichen Manuskripten. Diese spiegeln in ihrer Gesamtheit die Entwicklung wesentlicher Teile der Mathematik in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts wider.

Felix Hausdorff wurde am 8. November 1868 in Breslau geboren. 1870 zog die Familie nach Leipzig, wo Hausdorff von 1887 bis 1891 Mathematik und Astronomie studierte, unterbrochen durch Aufenthalte in Freiburg im Breisgau und Berlin. 1891 promovierte er bei H. Bruns mit der Arbeit *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung*. 1895 habilitierte er sich ebenfalls im Bereich der Astronomie und an der Universität Leipzig, wo er eine Stelle als Privatdozent erhielt und neben der Lehre und Forschung in der Mathematik auch seine literarischen und philosophischen Interessen verfolgte. Unter dem Pseudonym *Paul Mongré* veröffentlichte er einige philosophisch-literarische Schriften. 1901 wurde Hausdorff außerordentlicher Professor an der Universität Leipzig. Als Mitglied einer jüdischen Familie bedrückte ihn hier immer mehr eine antisemitische Atmosphäre. Sein Hauptarbeitsgebiet wurde bald die Mengenlehre. 1910 wurde er als planmäßiger Extraordinarius an die Universität Bonn berufen, wo er die Arbeit an seinem Buch *Grundzüge der Mengenlehre* (Hausdorff, 1914) begann. 1913 folgte er einem Ruf als Ordinarius an die Universität Greifswald, wo er zeitweise der einzige Mathematiker und durch die Lehre fast vollständig ausgelastet war. Als er 1921 nach Bonn berufen wurde, konnte er sich wieder mehr in Forschung und Lehre (z.B. in einer Vorlesung über Wahrscheinlichkeitstheorie) entfalten. In Bonn schloss er außerdem Freundschaft mit Study und Toeplitz. In dieser Zeit entstand auch seine Arbeit *Zur Theorie der linearen metrischen Räume* (Hausdorff, 1932), die wir im folgenden Unterkapitel vorstellen wollen. Purkert berichtet in Band III von (Brieskorn et al., 2020), dass Hausdorff sich schon früh intensiv mit Gebieten der entstehenden Funktionalanalysis beschäftigt hat. 1931 gab er dann mit der Vorlesung *Punktmengen* Purkert zufolge eine „vorzügliche Einführung in den aktuellen Stand der linearen Funktionalanalysis“. Aus dieser Vorlesung ging die Arbeit (Hausdorff, 1932) hervor. Zwar hat sich Hausdorff auch danach noch mit Themen der Funktionalanalysis beschäftigt, jedoch nichts mehr dazu veröffentlicht. Im Jahr 1935 wurde Hausdorff als Jude emeritiert. Er veröffentlichte noch sieben Arbeiten aus dem Bereich der Mengenlehre und der Topologie. 1941 wurde dann damit begonnen, die Bonner Juden in das Kloster in Bonn-Endenich zu deportieren, von wo aus später die Transporte in die Vernichtungslager erfolgen sollten. Nachdem Hausdorff und seine Frau den Befehl erhalten hatten, sich ins Endenicher Lager zu begeben, nahmen sie sich am 26. Januar 1942 das Leben. Hausdorff hatte seinen handschriftlichen Nachlass zuvor H. Bonnet überbracht.

8.2 Der allgemeine normierte Fall bei Banach und Hausdorff (1932)

In seinem Artikel *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* von 1942 verweist Dieudonné auf die Arbeiten (Banach, 1932) und (Hausdorff, 1932) zum normierten Fall. Das entsprechende Kapitel aus Banachs *Théorie des opérations linéaires* haben wir schon vorgestellt (siehe Kapitel 5). Nun wollen wir auch einen Blick in Hausdorffs *Theorie der linearen metrischen Räume* werfen. Diese enthält ebenso wie Banachs Monografie eine Übersicht der bis 1932 errungenen Resultate in der Funktionalanalysis. Uns genügen an dieser Stelle die entsprechenden Untersuchungen bzgl. der dualen Gleichungen $y = sx, u = s'v$ und des dabei auftretenden dualen Operators.

Hausdorffs Abhandlung entstand aus der Aufgabe heraus, die bisherigen Resultate aus der Theorie der normierten Räume zusammenhängend darzustellen und daraufhin zu untersuchen, wo die Voraussetzung der Vollständigkeit tatsächlich notwendig ist.[115]

> Die folgende, möglichst allgemein gehaltene Darstellung, die auch auf die Verschiedenheit der Baireschen Kategorie bei linearen Räumen eingeht, möge daher nicht als überflüssig angesehen werden, obwohl sie natürlich auch viel Bekanntes wiederbringt; ihr Kern liegt in den drei einfachen Hauptsätzen (VI, X, XI), die sich auf die beiden Begriffe „stetig umkehrbar“, „normal auflösbar“ beziehen und alle bisher aufgestellten speziellen Sätze in sich enthalten dürften.
>
> (Hausdorff, 1932, 294)

[115] Zu den bisher aufgestellten speziellen Sätzen gibt Hausdorff die folgenden Literaturangaben: (Schmidt, 1908), (Riesz, 1913), (Helly, 1912), (Helly, 1921), (Hahn, 1922), (Hahn, 1927), (Banach, 1922), (Banach, 1929a), vergleiche Teil I; (Toeplitz, 1907), (Riesz, 1913), (Banach, 1922), (Banach, 1929b), vergleiche Kapitel 6; (Riesz, 1916), (Schauder, 1930b), (Schauder, 1930c), vergleiche Kapitel 7; außerdem (Kuratowski, 1924), (Sierpiński, 1930) und (Toeplitz, 1911).

8.2.a Die konjugierte Abbildung

Grundlage für Hausdorffs Untersuchungen sind zwei normierte Räume („lineare metrische Räume“ (Hausdorff, 1932, 295)) E_x und E_y.

> Durch
> $$y = sx,$$
> wo s ein Funktionszeichen ist, werde jedem Punkt $x \in E_x$ eindeutig ein Punkt $y \in E_y$ als *Bild* zugeordnet, so daß
> $$sE_x = L_y \leq E_y$$
> das Bild des ganzen Raumes E_x ist. (Hausdorff, 1932, 296)

Hausdorff weist darauf hin, dass bei sx absichtlich keine Klammern verwendet werden, da sich dies in gewissen Fällen als Matrizenprodukt auffassen lässt. Die Abbildung $y = sx$ soll stets als linear und stetig vorausgesetzt werden, wobei die Stetigkeit äquivalent zur Beschränktheit ist (Hausdorff, 1932, 297). Als Spezialfall dieser linearen Operatoren – auch in diesem Kapitel verstehen wir darunter immer auch die Stetigkeit/Beschränktheit – führt Hausdorff stetige lineare Funktionale ($E_y = \mathbb{R}$) und damit schließlich den Dualraum ein (vergleiche Abschnitt 2.8.c):

> *Die sämtlichen stetigen linearen Abbildungen s des festen Raumes E_x in den festen Raum E_y bilden, mit dem Betrag $|s|$ metrisiert, wieder einen linearen metrischen Raum E_s.* [...]
>
> **II**. *Der Raum E_s ist vollständig, falls E_y vollständig ist* (auf E_x kommt es nicht an). [...]
>
> In dem besonderen Falle, daß E_y der Raum der reellen Zahlen ist, haben wir die *reellen linearen stetigen Funktionen* von $x \in E_x$ vor uns, die man auch *lineare Funktionale* oder *Linearformen* nennt; wir werden sie in der Regel mit ux bezeichnen. Sie bilden mit dem Betrage
> $$|u| = \sup_{x \neq 0} \frac{|ux|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |ux|$$
> einen (wegen der Vollständigkeit des reellen Zahlenraumes) *vollständigen* linearen metrischen Raum E_u, den zu E_x *konjugierten* Raum.
> (Hausdorff, 1932, 298f)

Hausdorff erklärt, dass sich zwei lineare Operatoren

$$s : E_x \to E_y, \;\; t : E_y \to E_z$$

– in moderner Schreibweise – folgendermaßen zu einem linearen Operator

$$z : E_x \to E_z$$

zusammensetzen lassen:

$$zx = t(sx) = (ts)x.$$

Als Spezialfall dieser Zusammensetzung ergibt sich analog zu Banach (1929b) (siehe Unterkapitel 6.4) der duale Operator:

Hausdorff 1932

> Ist z.B. E_z der Raum der reellen Zahlen, so erhalten wir vermöge der stetigen linearen Abbildung $y = sx$ von E_x in E_y aus jeder in E_y definierten Linearform vy eine in E_x definierte Linearform
>
> $$vy = v(sx) = (vs)x = ux,$$
>
> oder es gibt eine wegen $|u| \leq |v|\,|s|$ stetige lineare Abbildung des zu E_y konjugierten Raumes E_v auf einen linearen Teilraum $L_u = E_v s$ des zu E_x konjugierten Raumes E_u. Diese Abbildung $u = vs$ heißt die zu $y = sx$ *konjugierte Abbildung*. Ihr Betrag
>
> $$\|s\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|vs|}{|v|} = \sup_{|v|=1} |vs|$$
>
> ist jedenfalls $\leq |s|$, wird sich aber $= |s|$ ergeben.
>
> (Hausdorff, 1932, 299)

In unserer heutigen Schreibweise: Mittels eines linearen Operators

$$s : E_x \to E_y$$

ergibt sich für jedes stetige lineare Funktional v auf E_y

$$v : E_y \to E_z = \mathbb{R}$$

ein stetiges lineares Funktional u auf E_x:

$$vy = v(sx) = (vs)x = ux.$$

Bzgl. dieser Identität lässt sich ein weiterer linearer Operator s' definieren:

$$s' : E_v = E'_y \to L_u = E_v s \subseteq E'_x; \;\; s'(v) = u.$$

Hausdorff stellt diesen dualen Operator s' jedoch durch Vertauschen der Reihenfolge in den Abbildungen $u = vs$ und $y = sx$ dar: Die Abbildung

$$y = sx,$$

mit s an vorderer Stelle, würden wir heute formulieren als

$$s : E_x \to E_y, \;\; s(x) = y$$

und die Abbildung

$$u = vs,$$

mit s an hinterer Stelle, als

$$E'_y \to E'_x, \;\; s'(v)(= vs) = u.$$

Damit ist auch mit der Norm $\|s\|$ in unserer heutigen Schreibweise $\|s'\|$ gemeint und mit $|s|$ die Norm des ursprünglichen Operators, in unserer heutigen Schreibweise $\|s\|$. Hausdorff drückt mit dieser Notation, im Gegensatz zu den vorigen Darstellungen aus Kapitel 6 und 7,[116] neben der Eigenschaft $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$ den Zusammenhang der Idee eines dualen Operators mit der einer transponierten Matrix aus: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ihre Transponierte $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(Ax)^T = x^T A^T.$$

8.2.b Aussagen zu Reziproken

Hausdorff gibt einige Aussagen zu Reziproken, die u.a. wegen Riesz' Verweis auf Toeplitz in (Riesz, 1910) (siehe Abschnitt 6.1.d) für diese Arbeit interessant sind. Es seien $y = sx$ eine stetige lineare Abbildung von E_x in E_y und $x' = ty$ eine stetige lineare Abbildung von E_y in E_x, und damit ts eine stetige lineare Abbildung von E_x in sich und st eine stetige lineare Abbildung von E_y in sich. Ist dann $ts = 1_x$ die

[116]Eine Ausnahme bildet Hildebrandt (1928), siehe Abschnitt 7.6.b.

identische Abbildung von E_x auf sich, so heißt t eine „linke Reziproke" von s und s eine „rechte Reziproke" von t; entsprechend umgekehrt für den Fall $st = 1_y$.[117]

> Die Existenz einer linken Reziproken t zu s ist damit gleichbedeutend, daß die Abbildung $y = sx$ eine eindeutige stetige Umkehrung $x = \tilde{s}y$, Abbildung von L_y auf E_x, besitzt, die sich zu einer stetigen linearen Abbildung $x = ty$ des ganzen Raumes E_y auf E_x *erweitern* lässt. Die Existenz einer rechten Reziproken t zu s ist damit gleichbedeutend, daß die Abbildung $y = sx$, auf eine geeignete lineare Teilmenge L_x von E_x *eingeschränkt*, diese schlicht [d.h. eindeutig umkehrbar, A.W.] und beiderseits stetig auf den ganzen Raum E_y abbildet.
> (Hausdorff, 1932, 300)

Zum Kriterium der Existenz der linken Reziproken schreibt Hausdorff, dass diese Erweiterungsfähigkeit im Fall des „Hilbertschen Raumes", d.h. im Folgenraum l^2, auf Grund von Schmidts Resultat über orthogonale Projektionen in (Schmidt, 1908) sicher besteht. Daraus folgen die Reziprokensätze von Toeplitz (1907) (siehe Abschnitt 6.1.d).

> Wenn s sowohl eine linke Reziproke t ($ts = 1_x$) als auch eine rechte t' ($st' = 1_y$) hat, so stimmen sie überein [...]; man spricht in diesem Fall von einer *Reziproken* schlechthin, und hierfür ist notwendig und hinreichend, daß die Abbildung $y = sx$ (mit der Umkehrung $x = ty$) eine lineare Homöomorphie zwischen E_x und E_y darstelle.
> (Hausdorff, 1932, 300)

D.h. dass die Abbildung $y = sx$ stetig ist und (mit $x = ty$) eine eindeutige stetige Umkehrung besitzt.

8.2.c Duale Gleichungen

Im letzten seiner vier Paragraphen konzentriert Hausdorff sich auf den Einsatz des dualen Operators. Zunächst nennt er die Paradebeispiele für duale Räume: Der konjugierte Raum des Folgenraums l^p („H^p") mit $p > 1$ ist $l^{\frac{p}{p-1}}$; „der Hilbertsche Raum H^2 ist zu sich selbst konjugiert"; der konjugierte Raum von l^1 ist l^∞, der konjugierte Raum der Nullfolgen aus l^∞ ist l^1. Dann folgt mit einem Verweis auf Hahn (1927) und Banach (1929a) der Satz von Hahn-Banach mit anschließendem Korollar über die Existenz eines nichttrivialen Funktionals (siehe Abschnitte 2.8.b und 2.8.e).

[117] Vergleiche (Hellinger und Toeplitz, 1927, 1428f) und Abschnitt 6.1.d zu „vorderer und hinterer Reziproke".

> **VIII**. (Erweiterungssatz) *Eine in der linearen Menge $L < E_x$ definierte Linearform ux mit der Schranke M ($|ux| \leq M|x|$ für $x \in L$) läßt sich auf den ganzen Raum E_x mit derselben Schranke erweitern.* [...]
>
> **VIII$_0$**. *Ist $L < E_x$ linear und in E_x abgeschlossen, so gibt es eine in L verschwindende, aber in einem vorgegebenen Punkte $x_0 \in E_x - L$ nicht verschwindende Linearform ux. Zu einem vorgegebenen Punkte $x_0 \neq 0$ gibt es eine in x_0 nicht verschwindende Linearform mit $|ux_0| = |u|\,|x_0|$.*
> (Hausdorff, 1932, 306)

Schließlich erfolgt die Einführung des Bidualraums und die Feststellung der allgemeinen Nichtreflexivität (vergleiche Abschnitt 2.8.d):

> Die Linearformen von u, die wir unter Nachsetzung des Funktionszeichens $\mathfrak{x}$ mit $u\mathfrak{x}$ bezeichnen, bilden den zu E_u konjugierten Raum $E_\mathfrak{x}$. Dieser Raum ist $\geq E_x$ in dem Sinne, daß er eine zu E_x linear isometrische Teilmenge enthält, die man mit E_x identifizieren kann. [...] Im allgemeinen gilt hier nicht das Gleichheitszeichen.
> (Hausdorff, 1932, 306)

Als Begründung, dass im Allgemeinen *nicht* gilt $E_x = E_\mathfrak{x}$, d.h. dass E_x im Allgemeinen nicht isomorph zu seinem Bidualraum ist, nennt Hausdorff zum einen das folgende Gegenbeispiel: „Zum Raum der Nullfolgen aus H^∞ ist H^1 der konjugierte Raum, zu diesem H^∞, zu diesem ein Raum $> H^1$“ (Hausdorff, 1932, 306); zum anderen das folgende Argument: „schon weil jeder konjugierte Raum vollständig ist, was E_x nicht zu sein braucht“ (Hausdorff, 1932, 306).

Jetzt folgen die für uns interessanten Untersuchungen zu dualen Gleichungen: Es seien (in Hausdorffs Sprechweise) E_x und E_y lineare metrische Räume und E_u und E_v die jeweils konjugierten Räume. Weiter sei

$$y = sx \tag{1}$$

eine stetige lineare Abbildung von E_x auf $L_y \leq E_y$ und

$$u = vs \tag{2}$$

die zu (1) konjugierte Abbildung (und damit linear und stetig) von E_v auf $L_u \leq E_u$.

> Wir fragen nach der *Auflösbarkeit* von (1) bei gegebenem y nach x und von (2) bei gegebenem u nach v. (Hausdorff, 1932, 307)

Hausdorffs gleich folgenden beiden *Hauptsätzen* dazu geht ein Satz voraus:

> **IX**. *Zur Auflösbarkeit von $y = sx$ nach x ist notwendig, daß für alle v_0 mit $v_0 s = 0$ auch $v_0 y = 0$ sei. Zur Auflösbarkeit von $u = vs$ nach v ist notwendig, daß für alle x_0 mit $sx_0 = 0$ auch $ux_0 = 0$ sei.*
>
> Das folgt unmittelbar aus $v_0 y = (v_0 s)x$ und $ux_0 = v(sx_0)$. Es ist ferner klar, daß aus einer Lösung x von (1) alle Lösungen durch $x + x_0$, aus einer Lösung von (2) alle Lösungen durch $v + v_0$ erhalten werden. (Hausdorff, 1932, 307)

Dies ist die ‚Orthogonalitätsbedingung': Zur Auflösbarkeit von $y = sx$ ist notwendig, dass y orthogonal zu allen Lösungen v_0 der homogenen dualen Gleichung $v_0 s = 0$ ist. Analoges gilt für die duale Gleichung $u = vs$. Im Fall endlicher Räume und im Fall kompakter Operatoren ist diese Bedingung auch hinreichend. Hausdorff nennt nun eine der Gleichungen (1) und (2) „normal auflösbar", wenn die Bedingung auch hinreichend ist, und bemerkt:

> Man beachte, daß die Forderung normaler Auflösbarkeit für beide Gleichungen nicht dasselbe bedeutet, sondern für die Gleichung (2) schärfer ist als für (1). (Hausdorff, 1932, 307)

Dies liegt an der Tatsache, dass Banachräume im Allgemeinen nicht reflexiv sind. Hausdorff führt folgende Abkürzungen ein (Hausdorff, 1932, 307), die wir mit der Schreibweise aus Unterkapitel 7.1 jeweils wie ganz rechts angegeben notieren würden:

$L_y = sE_x$ das Bild von E_x bei der Abbildung $y = sx$	$= \operatorname{im} s$
$L_u = E_v s$ das Bild von E_v bei der Abbildung $u = vs$	$= \operatorname{im} s'$
$F_x =$ Menge der Punkte x_0 mit $sx_0 = 0$	$= \ker s$
$F_v =$ Menge der Punkte v_0 mit $v_0 s = 0$	$= \ker s'$
$F_y =$ Menge der Punkte y mit $v_0 y = 0$ (für $v_0 \in F_v$)	$= (\ker s')_\perp$
$F_u =$ Menge der Punkte u mit $ux_0 = 0$ (für $x_0 \in F_x$)	$= (\ker s)^\perp$

Hausdorff bemerkt, dass die mit F bezeichneten Mengen alle abgeschlossen sind.

> Der Satz IX besagt nun einfach, daß
>
> $$L_y \leq F_y, \quad L_u \leq F_u,$$
>
> und die Forderung normaler Auflösbarkeit verlangt, daß für $y = sx$ in der ersten, für $u = vs$ in der zweiten dieser Formeln das Gleichheitszeichen gelte. (Hausdorff, 1932, 307)

Das heißt, dass gelte:

$$\operatorname{im} s = (\ker s')_\perp, \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{im} s' = (\ker s)^\perp.$$

Hausdorff erklärt, dass immer gilt

$$\overline{\operatorname{im} s} = (\ker s')_\perp$$

und für reflexive Räume auch

$$\overline{\operatorname{im} s'} = (\ker s)^\perp.$$

Daraus folgt Hausdorffs *Zweiter Hauptsatz*:

> **X**. (Zweiter Hauptsatz) *Zur normalen Auflösbarkeit von $y = sx$ ist notwendig und hinreichend, daß die Menge $L_y = sE_x$ in E_y abgeschlossen sei. Zur normalen Auflösbarkeit von $u = vs$ ist notwendig und, falls der zu E_u konjugierte Raum wieder E_x ist, auch hinreichend, daß die Menge $L_u = E_v s$ in E_u abgeschlossen sei.*
>
> Weiter aber gilt:
>
> **XI**. (Dritter Hauptsatz) *Zur normalen Auflösbarkeit von $u = vs$ ist die stetige Umkehrbarkeit von $y = sx$ notwendig und hinreichend.*
> (Hausdorff, 1932, 308)

Es folgen weitere Aussagen zur normalen Auflösbarkeit, siehe (Hausdorff, 1932, 308-310). Zusammenfassend schreibt Hausdorff:

> *Bei vollständigem E_x und E_y ist für jede der Abbildungen $y = sx$, $u = vs$ die stetige Umkehrbarkeit mit der normalen Auflösbarkeit äquivalent, und nach XI sind alle vier Eigenschaften miteinander äquivalent.* (Hausdorff, 1932, 310)

Abschließend geht Hausdorff auf *vollstetige* lineare Abbildungen ein. Dabei gilt „etwas modifiziert nach Riesz (1910, 74)“:

> Die lineare Abbildung $y = tx$ von E_x in E_y heißt *vollstetig*, wenn sie jede beschränkte Menge in eine total beschränkte oder, was dasselbe ist, jede beschränkte Folge x_n in eine solche Folge $y_n = tx_n$ verwandelt, die eine Fundamentalfolge y_p enthält. (Hausdorff, 1932, 310)

Eine „Fundamentalfolge“ ist dabei eine Cauchyfolge im heutigen Sinne. „Eine Menge heißt total beschränkt, wenn sie für jedes $\delta > 0$ Summe endlich vieler Mengen von Durchmessern $\leq \delta$ ist.“ (Hausdorff, 1932, 310) Hausdorff zeigt für die vollstetige Abbildung t von E_x in E_x den folgenden Satz:

> **XIII**. Die Abbildung $y = sx = x - tx$ des vollständigen Raumes E_x in sich ist, wenn tx vollstetig ist, stetig umkehrbar.
> (Hausdorff, 1932, 311)

Außerdem ergänzt Hausdorff, dass unter den Voraussetzungen von *Satz XIII* nicht nur die beiden Abbildungen $y = sx$ und $u = vs$ normal auflösbar sind, sondern – mit Verweis auf Riesz (1916) – auch die homogenen Gleichungen $sx_0 = 0$ und $v_0 s = 0$ dieselbe Anzahl linear unabhängiger Lösungen haben.

8.3 Der metrikfreie Fall bei Dieudonné (1942)

In Unterkapitel 3.6 haben wir schon einen Blick in Dieudonnés Theorie in (Dieudonné, 1942) geworfen. Zur Übersicht hier noch einmal die wichtigsten Schritte mit kleinen Ergänzungen: Ausgangspunkt von Dieudonnés Arbeit ist der Gleichungstyp

$$f(x) = y_0,$$

wobei $f : E \to F$ ein Operator zwischen zwei Vektorräumen E und F sein soll. Dieudonné verweist auf den endlichdimensionalen Fall dieses Problems (vergleiche Unterkapitel 7.1):

> Lorsque E et F ont un nombre *fini* de dimensions, de problème se ramène à la résolution d'un *système* d'équations linéaires $f_i(x) = y_{i,0}$ $(1 \leq i \leq n)$, où les f_i sont des *formes linéaires* et les seconds membres, des scalaires donnés: problème purement algébrique, dont la solution classique fait intervenir les matrices; ...(Dieudonné, 1942, 107)

Unabhängig von der Anzahl der Dimensionen von E und F findet sich hier die oben angesprochene ‚Orthogonalitätsbedingung‘ in rein algebraischer Form:

> ... mais il est possible de mettre cette solution sous une forme qui s'étende aussitôt au cas où on ne fait aucune hypothèse sur le nombre de dimensions de E et F. Il faut pour cela introduire la notion de *dual algébrique* d'un espace vectoriel E: on entend par là un nouvel espace vectoriel dont les éléments sont les *formes linéaires* définies dans E. A toute application linéaire f de E dans F est alors associée une application linéaire f^* du *dual* de F dans le *dual* de E, dite *transposée* de f (lorsqu'on rapporte E, F et leurs duals à des bases convenables,

> la matrice associée à f^* n'est autre que la matrice transposée, c'est-à-dire obtenue par échange des lignes et des colonnes, de la matrice associée à f); et la condition de résolubilité de l'équation $f(x) = y_0$ est que $u(y_0) = o$ pour toute forme linéaire u définie sur F et telle que $f^*(u) = O$.[118] (Dieudonné, 1942, 107)

Diese rein algebraische Lösbarkeitsbedingung ist nun aber nicht sehr nützlich für die allgemeine Anwendung:

> Cette forme de la condition de résolubilité est toutefois *trop générale* pour être utile dans les équations linéaires que l'on rencontre en pratique, où l'innconnue et le second membre parcourent des espaces vectoriels à une infinité de dimensions (le plus souvent des *espaces fonctionnels*); c'est que, dans ces équations, les applications linéaires f qui interviennent ne sont pas du type le plus général, mais sont assujetties à des conditions liées à la présence de *topologies* sur les espaces vectoriels E et F; [...] (Dieudonné, 1942, 107f)

Hier setzt Dieudonné an, wobei er so allgemein wie möglich bleiben möchte. Er führt das in Abschnitt 3.6.a dargestellte, symmetrische duale System zweier beliebiger Vektorräume mit einer Bilinearform ein, welche den Bedingungen (D_I) und (D_{II}) genügt. Zu einer „application linéaire u de E dans F" definiert er bzgl. der „topologie faible" den zugehörigen dualen Operator (siehe auch hierzu Abschnitt 3.6.a):

Dieudonnés „transposée" von 1942

> Si u est faiblement continue, il résulte des théorèmes 2 et 9 qu'à tout $y' \in F'$ correspond un $x' \in E'$ et un seul tel que $C(u(x), y') = B(x, x')$; la donnée de l'application linéaire u de E dans F définit donc une *application* de F' dans E', que nous designerons par u', et appellerons la *transposée* de u; il est immédiat que u' est une application *linéaire*; elle satisfait à l'identité fondamentale
>
> $$B(x, u'(y')) = C(u(x), y'). \qquad \text{(I)}$$
>
> Inversement, cette identité *caractérise* u' [...].
> (Dieudonné, 1942, 118)

[118] Dieudonné verwendet o für das Nullelement des zugrunde liegenden Körpers und O für das Nullelement des Dualraums von E.

Dieudonnés Aussagen zur schwachen Stetigkeit in den *Théorèmes 2 et 9* (Dieudonné, 1942, 114, 118) zeigen in diesem allgemeinen Fall zweier beliebiger Vektorraumpaare das, was Riesz' Darstellungssatz im Fall der $L^p(a,b)$-Räume zeigt (vergleiche Abschnitt 6.1.b): die Möglichkeit einer eindeutigen Zuordnung eines Elements $x' \in E'$ zu jedem $y' \in F'$ mit der obigen Eigenschaft. Der duale Operator zu u' ist wiederum u:

> On peut donc définir la *transposée* de l'application linéaire continue u'; *cette transposée n'est autre que* u (en d'autres termes, la relation entre u et u' est *symétrique*). (Dieudonné, 1942, 119)

Aus der „identité fondamentale (I)" ergibt sich nun „une série de conséquences, par où se relient étroitement les propriétés d'une application linéaire u et de sa transposée u'." (Dieudonné, 1942, 119) So z.B. die folgenden Sätze aus Abschnitt 3.6.b:

> **Théorème 11** *On a*
>
> $$(u(E))^* = \overset{-1}{u'}(0), \qquad \left(\overset{-1}{u'}(0)\right)^* = \overline{u(E)}.$$
>
> (Dieudonné, 1942, 119)

Bei der Suche nach Lösbarkeitskriterien für die lineare Gleichung

$$u(x) = y_0$$

erhält Dieudonné zum einen das uns bekannte Resultat mit Verweis auf Köthe:

> **Théorème 12** *Pour que l'équation $u(x) = y_0$ admette une solution au moins, il faut et il suffit que y_0 soit orthogonal à $\overset{-1}{u'}(0)$, et que la forme linéaire H_{y_0}, définie dans $u'(F')$, soit continue dans ce sous-espace.*
> (Dieudonné, 1942, 120)

Zum anderen das

> **Théorème 13** *Si $u(E)$ est fermé dans F, pour que l'équation $u(x) = y_0$ admette au moins une solution, il faut et il suffit que y_0 soit orthogonal à $\overset{-1}{u'}(0)$.* (Dieudonné, 1942, 120)

Analoge Aussagen zu *Théorème 11* und *Théorème 13* im normierten Fall finden wir bei Hausdorff (1932) (siehe Abschnitt 8.2.c). Dieudonné bemerkt, dass sein *Théorème 13* das in der Einleitung vorgebrachte algebraische Lösbarkeitskriterium impliziert:

> Le critère de résolubilité algébrique d'une équation linéaire $f(x) = y_0$, rappelé dans l'Introduction (§1), se déduit facilement du théorème 13; il suffit en effet de prendre pour E' et F' les *duals algébriques* de E et F respectivement; alors toute forme linéaire sur E (resp. F) est continue, donc (§3) tout sous-espace vectoriel de E (resp. F) est fermé, et le théorème 13 est par suite applicable. (Dieudonné, 1942, 121)

Mit den Konzepten seines ersten Kapitels zeigt Dieudonné dann im zweiten Kapitel weitere Resultate für den normierten Fall, die sich schon bei Banach (1932) und Hausdorff (1932) finden:[119]

> Comme nous l'avons déjà signalé (Introduction, §1), à l'exception du théorème 20, aucun des résultats de ce Chapitre ne doit être considéré comme nouveau; les principaux sont dus à M. Banach (1932) et à M. Hausdorff (1932). Ce sont d'ailleurs ces résultats qui nous ont servi de guides dans la théorie générale exposée au Chapitre I; en particulier, la *forme* des principaux théorèmes que nous avons obtenus sur les topologies faibles est calquée sur les théorèmes analogues de M. Hausdorff pour les topologies d'espace normé (bien que le principe de leur démonstration soit tout à fait différent). (Dieudonné, 1942, 122)

8.4 Abschließende Bemerkungen

8.4.a Dieudonné und die Arbeiten von Banach und Hausdorff

Bei der Herausgabe von Hausdorffs gesammelten Werken schreibt Chatterji, wie Dieudonnés Arbeit von 1942 zu (Banach, 1932) und (Hausdorff, 1932) steht:

> Dieudonné [...] was strongly motivated in writing his 1942 paper by the problem of solving the equations $y = sx$, $u = s'v$ (in our notation) in the general framework of two vector spaces in duality; indeed (Dieudonné, 1942) can be said to be the birthplace of this duality theory. Two sources seemed to have influenced Dieudonné: Banachs book (Banach, 1932) and this paper of Hausdorff (1932); he refers to them several times and although his methodology is quite different, it is clear that he is aiming at the clearest possible formulation of the theorems concerning s, s' given by Banach and Hausdorff.
> (Chatterji et al., 2001, 296)

[119] **Théorème 20** *Pour qu'un espace localement convexe E soit normable, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de* 0 *faiblement borné dans E.* (Dieudonné, 1942, 126) Dieudonné verweist hier auf Wehausen (1938).

Wie bereits angemerkt, verläuft Dieudonnés Einführung der „transposée“ (siehe Unterkapitel 3.6 und 8.3) analog zu der von Banachs „opération adjointe“ (siehe Unterkapitel 6.4) und der von Hausdorffs „konjugierter Abbildung“ (siehe Abschnitt 8.2.a). Auch die in dieser Arbeit dargestellten Resultate Dieudonnés, welche die ‚Orthogonalitätsbedingung‘ enthalten, finden wir analog bei Banach (siehe Kapitel 5) und Hausdorff (siehe Abschnitt 8.2.c). Dieudonnés Ziel war es, ein sehr allgemeines ‚Gerüst‘ zu schaffen, welches dann verwendet werden kann, um Resultate in spezielleren Fällen zu beweisen. Genauer: Aus Aussagen zu allgemeinen Vektorräumen, die nicht notwendigerweise mit einer Topologie ausgestattet sein müssen, sollen Folgerungen für lokalkonvexe und normierte Räume hergeleitet werden; diese Fälle sind für Dieudonné „les plus importants en pratique“ (Dieudonné, 1942, 110).

8.4.b Dieudonné und die Entwicklungszweige dualer Räume und dualer Operatoren

Sowohl der in Teil I dargestellte Entwicklungszweig des Begriffs dualer Räume als auch der in Teil II dargestellte Entwicklungszweig dualer Operatoren endet mit einem Unterkapitel zu Dieudonné (1942). Natürlich finden sich neben (Dieudonné, 1942) (und (Riesz, 1910)) weitere Überschneidungen dieser beiden Entwicklungszweige – und auch viele ‚Abzweigungen‘. Wir hoffen aber, einen Großteil der historischen Entwicklungen der beiden Konzepte dargestellt und damit das Verständnis für diese Begriffe vertieft zu haben. Selbstverständlich ist (Dieudonné, 1942) auch nicht das Ende dieser Entwicklungen. Für ein Ende unserer Betrachtungen eignet sich die Arbeit jedoch gut: Einerseits wird darin das allgemeine Konzept eines dualen Systems und eines dualen Operators eingeführt, welches die vorigen Konzepte als Spezialfälle enthält; andererseits treffen in Dieudonnés *Théorème 12* die Lösbarkeitsbedingung, welche uns in Teil I begleitet hat (Ungleichung zwischen den rechten Seiten und den gegebenen Koeffizienten) und die Lösbarkeitsbedingung aus Teil II (‚Orthogonalitätsbedingung‘) aufeinander.

9 Überblick

9.1 Betrachtete Entwicklungen zum Begriff dualer Operatoren in der Funktionalanalysis

Die folgende Tabelle zeigt einen Überblick über die in Teil II dargestellten Entwicklungen. Die zweite Spalte nennt jeweils den Raum, auf dem die betrachteten Operatoren definiert sind. Die zugehörigen Rahmenbedingungen finden sich auf der in der letzten Spalte angegebenen Seite dieser Arbeit.

Arbeit	Räume	Dualer Operator / Dualität (Originalschreibweise)	Bezeichnung	Siehe Seite
(Fredholm, 1903)	beschr.&R-intgrb. auf $(0,1)$	$\int_0^1 \Psi(x) S_i \Phi(x)\,dx = \int_0^1 \Phi(x) T_i \Psi(x)\,dx$		161
(Riesz, 1910)	$L^p(a,b)$	$\int_a^b T[f(x)]g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\mathfrak{T}[g(x)]\,dx$	Transponierte	127
(Riesz, 1913)	l^2 (bzw. l^p)	$\sum_{i=1}^{\infty} x'_i y_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y''_k$	transposée	135
(Riesz, 1916)	$C(a,b)$	$\mathfrak{K}(x,y) = K(y,x)$	transponierte Integralgleichung	171
(Hildebrandt, 1928)	Banachraum	$BA_0 = 0$ und $\bar{A}_0 B = 0$	transponierte/ adjungierte Gleichung	178
(Saks, 1929)	l^p	$U(X),\ U^*(X)$	transposée	138
(Banach, 1929b)	Banachraum	$y = U(x),\ X = \bar{U}(Y)$	opération adjointe (Banach, 1929b) opération conjuguée/associée (Banach, 1932)	141
(Schauder, 1930c)	Banachraum	$y = f(x),\ X = F(Y)$	konjugierte/ transponierte Funktionaloperation	183
(Hausdorff, 1932)	norm. Raum	$u = vs,\ y = sx$	konjugierte Abbildung	199
(Dieudonné, 1942)	Vektorraum	$B(x, u'(y')) = C(u(x), y')$	transposée	206

9.2 Ein Blick auf parallele Entwicklungen

Nach diesem *Überblick* über die in dieser Arbeit dargestellten Entwicklungen zum Begriff dualer Operatoren, die mehr oder weniger alle miteinander verbunden sind, wollen wir einen *Blick über* den Tellerrand werfen. Tatsächlich gibt es noch weitere Untersuchungen in diesem Bereich.

9.2.a Salvatore Pincherle

Bislang haben wir in dieser Arbeit noch nicht darauf hingewiesen, dass zur Zeit (und auch schon früher) der hier betrachteten Untersuchungen auch in Italien bedeutsame funktionalanalytische Beiträge verfasst wurden. Dies holen wir nun nach:

> It is generally agreed that functional analysis, properly speaking, originated in Italy. During the last four decades of the 19th century, there occured a powerful resurgence of Italian mathematical creativity. First came three great geometers, Betti, Beltrami, and Cremona, and not long after six notable analysts, each of whose contributions related to early functional analysis [...]: Giulio Ascoli (1843-1896), Cesare Arzelà (1847-1912), Ulisse Dini (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), Salvatore Pincherle (1853-1936), and Vito Volterra (1860-1940).
> (Birkhoff und Kreyszig, 1984, 264)

Leider blieben jedoch einige Arbeiten dieser Autoren weitgehend ohne Beachtung. So auch eine Arbeit von Salvatore Pincherle (*1853; †1936), welche uns im Rahmen des Aspekts der Dualität besonders interessiert: der Artikel *Funktionaloperationen und -gleichungen* aus der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* von 1905. Darin finden wir lineare Operatoren auf unendlichdimensionalen Räumen:

> Die Prinzipien des Rechnens mit Symbolen zusammen mit Überlegungen der Geometrie der linearen Räume geben der Theorie der distributiven Operationen einen hohen Grad an Klarheit und Einfachheit, soweit diese Operationen an den Elementen einer linearen Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionenzahl ausgeübt werden, mögen diese Elemente nun Funktionen sein oder nicht. Man kann sich fragen, ob sich diese Überlegungen auf alle Funktionen einer linearen Mannigfaltigkeit ausdehnen lassen, wenn die Anzahl der Dimensionen dieser Mannigfaltigkeit (abzählbar) unendlich ist. Die Frage ist zu bejahen: so kann man z.B. die Mannigfaltigkeit S (*Funktionalraum*) der Potenzreihen α einer

> Variablen x ins Auge fassen und dann die Gesamtheit der distributiven Operationen untersuchen, die jedes Element dieser Mannigfaltigkeit in ein Element derselben Mannigfaltigkeit überführen.
>
> (Pincherle, 1905, 777)

Pincherle stellt fest, dass diese Operationen eine Gruppe bilden und man für sie eine zur Stetigkeit analoge Eigenschaft definieren kann, siehe (Pincherle, 1905, 777). Sowohl die Arbeit mit Operatoren auf unendlichdimensionalen Räumen wie auch die geometrische Interpretation analytischer Probleme finden wir sogar noch früher in der Arbeit *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale* von 1896/1897 (Pincherle, 1897a). Auch hier verwendet Pincherle eine Geometrie in einem unendlichdimensionalen Funktionenraum. Dies lesen wir mit Monna (1973):[120]

> Here he [Pincherle, A.W.] considers the set of all analytic functions in a variable x, writing (Pincherle, 1897a, 368):
>
> > Ad une tale varietà, evidentemente ad un numero infinito di dimensioni, si può dare il nome di *spazio funzionale*; ogni serie di potenze di x sarà un *punto* di questo spazio ed i coefficienti della serie si potranno riguardare come le coordinate del punto.
>
> He knows the concept of linear space.
>
> > Essendo $c_1, c_2, ..., c_n$ numeri arbitrari ed $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ funzioni linearmente indipendenti, l'insieme dei punti
> >
> > $$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n$$
> >
> > costituirà una varietà o spazio lineare ad $n - 1$ dimensioni contenuto nello spazio funzionale.
>
> In this paper Pincherle defines continuity of a distributive functional. [...] (Monna, 1973, 124f)

[120] Monnas Übersetzung (Monna, 1973, 152)

> Such a variety, which has evidently infinitely many dimensions, can be given the name *function space*; then every power series in x is a *point* of this space, and the coefficients of the series can be considered as the coordinates of the point.
>
> If $c_1, c_2, ...c_n$ are arbitrary numbers and $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ linearly independent functions, then the set of the points
>
> $$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n$$
>
> forms a variety of linear space of $n-1$ dimensions which is contained in the function space.

Monna bemerkt, dass Pincherle in zahlreichen Arbeiten zu „opérations fonctionnelles“ zwar mit konkreten Funktionenräumen und konkreten Operatoren arbeitet, allerdings:

> But he must have known the definition of an abstract linear space, for in the paper *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* (Pincherle, 1897b) [...] he refers to Peano's *Calcolo geometrico*, chapter IX and also to Grassmann. (Monna, 1973, 125)

Bei Monna (1973) finden sich weitere interessante Informationen zu Pincherles Arbeiten. Wir kehren hier zurück zu dem Abschnitt aus (Pincherle, 1905), der Pincherle für uns interessant macht:

> Die Gesamtheit derjenigen Elemente von S, die einer linearen Relation (mit endlicher oder unendlicher Gliederzahl) genügen, kann als *Ebene* von S bezeichnet werden. Jeder Operation A, die die Elemente von S transformiert, entspricht eine Operation $\overline{A}$, die die Ebenen so transformiert, dass dabei die Bedingung der Koinzidenz von Punkten und Ebenen erhalten bleibt, sie heisst die *Adjungierte* von A. Sind dann $\overline{B}, \overline{C}$ die Adjungierten von B, C, so gilt:
>
> $$\text{wenn } A = BC, \text{ so ist } \overline{A} = \overline{C}\,\overline{B}.$$
>
> (Pincherle, 1905, 778)

Pincherle führt damit mittels Linearformen Hyperebenen in Funktionenräumen ein; und darauf aufbauend zu einer Operation A ihre *Adjungierte* $\overline{A}$, die „die Ebenen so transformiert, dass dabei die Bedingung der Koinzidenz von Punkten und Ebenen erhalten bleibt“. Diesen Gedanken finden wir 16 Jahre später bei Helly (1921), wenn er seine polare Abstandsfunktion einführt (siehe Unterkapitel 2.6). Leider blieben Pincherles Arbeiten, wie gesagt, weitgehend unbeachtet. Pincherle fügt noch hinzu:

> Ist A ein linearer Differentialausdruck, so ist $\overline{A}$ seine *Lagrangesche* Adjungierte. (Pincherle, 1905, 778)

Die Lagrangesche Adjungierte begegnet uns auch bei den Entwicklungen unseres zweiten Ausblicks:

9.2.b Marshall Stone

In (Krömer, 2022) beschreibt Krömer, wie Marshall Stone (*1903; †1989) in seinem Artikel *Linear transformations in Hilbert space I* aus dem Jahr 1929 (Stone, 1929) einen allgemeinen dualen Operator auf komplexen Hilberträumen definiert. Damit finden wir dieses Konzept unabhängig und zeitgleich zu dem von Banach (1929b) (siehe Unterkapitel 6.4). Wie Krömer erklärt, nahmen Stones Überlegungen ihren Ausgangspunkt bei *adjungierten Differentialgleichungen*,[121] welche ursprünglich von Lagrange stammten, siehe hierzu (Bôcher, 1917, 23),[122] und wurden durch Arbeiten von von Neumann zur Quantenmechanik auf das Konzept eines allgemeinen dualen Operators („adjoint“) geführt. Krömer bemerkt dazu, dass unter dem Gesichtspunkt der Dualität die *Adjungiertheit* zwischen zwei Operatoren interessant ist, da es sich hierbei um eine Involution („réciprocit“ in Bôchers Worten) handelt, wogegen das Phänomen der *Selbstadjungiertheit* aus dieser Sicht eher uninteressant ist (hier sind Operator und dualer Operator identisch). Das Hauptproblem in den von Krömer betrachteten Entwicklungen bestand darin, eine Definition der Selbstadjungiertheit zu finden, welche bestmöglich für gewisse für die Quantenmechanik relevante Probleme der Operatortheorie geeignet ist. An dieser Stelle trat Stone hervor, der sich mit Operatoren auf Hilberträumen beschäftigte und auf von Neumanns Vorhaben stieß, eine systematischere mathematische Annäherung an die Probleme der Quantenmechanik durch die Verwendung von komplexen Hilberträumen und darauf definierten Operatoren zu entwickeln. Zu von Neumanns Vorhaben siehe (Krömer, 2022). Es sei hier nur erwähnt, dass es von Neumanns Ziel war, Hilberts Spektraltheorie für beschränkte Operatoren (Hilbert, 1906a) und die Rieszsche Erweiterung für kompakte Operatoren (Riesz, 1913) auf unbeschränkte Operatoren zu übertragen, und dass von Neumanns besonderer Dank Schmidts Anregungen dazu gilt. Stone erklärt zu seinem durch von Neumanns Arbeiten motivierten Vorhaben:

> My own interest in Hilbert space problems was aroused by reading the page proofs of von Neumann's paper when they were given to me by Professor Caratheodory, an editor at that time of the Mathematische Zeitschrift, just as he was finishing a visiting lectureship at Harvard in the spring of 1928. I saw almost at once that von Neumann needed the concept of adjoint as a key to his problem and that a successful

[121] Krömer bemerkt, dass die Bezeichnung „adjungiert“ wohl erstmals bei Fuchs (1873) („adjungirt“ (Fuchs, 1873, 183)) zu finden ist. Zuvor verwendet bspw. Liouville den Begriff „l'équation conjuguée“ (Liouville, 1838, 605).

[122] Wie Krömer schreibt, macht Bôcher die Anmerkung (Bôcher, 1917, 31), dass die adjungierte Gleichung der adjungierten Gleichung wieder die ursprüngliche Gleichung ist, sodass die Operation der Bildung der adjungierten Gleichung eine Involution ist, was zur Zeit Bôchers als Reziprozität bezeichnet wurde.

> approach to the spectral theorem for self-adjoint operators could be made by the use of methods already familiar in the theory of differential equations. (MacLane, 1970, 236f)

Bei Krömer (2022) finden wir aufschlussreiche Bemerkungen zu diesem Zitat, hier zitiert aus einem Anhang von (MacLane, 1970), sowie eine Darstellung von Stones Arbeiten zu obigem Vorhaben. Dort lesen wir Stones Definition dualer Operatoren auf Hilberträumen:[123]

> Associated with a given linear transformation T is a unique linear transformation T^*, the adjoint of T; if there exist elements g and g^* such that $(Tf; g) = (f; g^*)$ for all f in the field of T, then g is in the field of T^* and $T^*g = g^*$, and conversely. [...] We shall consider mainly [...] the self-adjoint transformations T, for which T and T^* are identical. (Stone, 1929, 199)

In Stones Buch *Linear Transformations in Hilbert space and their applications to analysis* (Stone, 1932) finden wir diese Definition noch einmal. Hier betrachtet Stone lineare Operatoren, definiert auf (Untermengen von) dem komplexen Hilbertraum L^2 mit dem inneren Produkt $(f,g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

> Definition 2.7. Two transformations T_1 and T_2 are said to be adjoint to each other [...] if they satisfy the relation $(T_1 f, g) = (f, T_2 g)$ for every f in $\mathfrak{D}_1$ and every g in $\mathfrak{D}_2$. (Stone, 1932, 41)

$\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ sind jeweils die Definitionsmengen von T_1 und T_2. Interessant ist hierbei auch Stones Erklärung zur Bezeichnung „adjoint“:

> This concept of adjointness receives its name from its analogy with certain concepts of algebra and analysis. As we shall see in the next chapter, the adjoint operators of analysis satisfy the condition imposed by the definition, in a sense which will be made more precise [...]. On the other hand, we could quite as well introduce a different terminology based upon a geometrical analogy, for the relation with which we are dealing is satisfactorily described as one of duality. We prefer the term with an analytical background because it will be more suggestive of the uses we shall find for it. (Stone, 1932, 41)

Wir verweisen außerdem auf die verschiedenen Bezeichnungen innerhalb der Arbeiten, die wir hier in Teil II dargestellt haben (siehe Unterkapitel 9.1). Krömer bemerkt, dass auch die Bezeichnungen in den Arbeiten bzgl. Hilberträumen und

[123] Wir haben Stones Schreibweise $Q(\cdot,\cdot)$ des inneren Produkts des Hilbertraums durch $(\cdot,\cdot)$ ersetzt.

insbesondere in von Neumanns Arbeiten variieren: In (von Neumann, 1932, 48) stoßen wir auf „adjungiert“, in (von Neumann, 1930, 373) auf „konjugiert“ und in (von Neumann, 1931, 572) auf „transponiert-konjugiert“.

Abschließend wollen wir Krömers Eindruck bzgl. der Verbindung zwischen adjungierten Operatoren (unendlichdimensionaler Fall) und adjungierten Matrizen[124] (endlichdimensionaler Fall) wiedergeben. Krömer erklärt, dass zwar Hilberts Integralgleichungstheorie weitgehend auf der Analogie zu Matrizen basiert: Die Permutation der beiden Variablen im Kern entspricht der Transposition einer Matrix, symmetrische bzw. hermitesche Kerne entsprechen symmetrischen bzw. hermiteschen Matrizen und wir können heute die Symmetrie bzw. hermitesche Symmetrie einer reellen bzw. komplexen Matrix als Selbstadjungiertheit bezeichnen. Allerdings wurde eine *allgemeine* Notation adjungierter Operatoren und nicht nur die der Selbstadjungiertheit erst später betrachtet. Damit ergibt sich für die von Krömer untersuchten Entwicklungen des adjungierten Operators, dass dieser wohl nicht von Anfang an als Analogon zum Begriff der adjungierten Matrix konzipiert wurde und dass auch die Bezeichnung nicht aus diesem Grund gewählt wurde. Dagegen bestreitet Körmer nicht, dass Rechenregeln für Operatoren, insbesondere die Operation der Adjunktion, von entsprechenden Matrizenoperationen inspiriert worden sein könnten. Krömer verweist dazu bspw. auf Rechenregeln für Operatoren in (Hilbert et al., 1928) sowie auf von Neumanns Gebrauch der Cayley-Transformation und allgemeiner von unitären Operatoren. Wir verweisen bspw. auf Hildebrandts Vorgehen in (Hildebrandt, 1928) (siehe Unterkapitel 7.6).

[124] Krömer ergänzt, dass die moderne Bezeichnung adjungierter Matrizen auf Cauchy zurückzuführen ist, der auf Gauß verweist. Den historischen Hintergrund hierzu liefert Hawkins (2013).

Schlusswort

Was ist Dualität in der Funktionalanalysis? Wir wollen diese Frage im Sinne einer Wittgensteinschen *Familienähnlichkeit* beantworten: Dazu betrachten wir den Begriff ‚Dualität in der Funktionalanalysis' als Mitglied der Familie ‚Dualität in der Mathematik' und fragen, welche Rolle es darin einnimmt. In einem Verwandtschaftsverhältnis zur Logik finden wir auch in der Funktionalanalysis die Idee und Möglichkeit, Aussagen bzw. Beweise aus dazu dualen Aussagen bzw. Beweisen allein durch Vertauschen der Objekte (und eventuell Relationen) zu erhalten, wie etwa bei Banachs *Théorèmes 1 - 4* (siehe Abschnitt 6.5.b):

> En remplaçant dans les théorèmes 1 et 2 qui précèdent x, y, X, Y, U et $\bar{U}$ respectivement par $Y, X, y, x, \bar{U}$ et U et en appliquant dans le raisonnement les théorèmes sur les fonctionnelles là où on a fait appel aux théorèmes concernant les éléments, on obtient [les théorèmes 3 et 4, A.W.]. (Banach, 1932, 148)

Weiter stoßen wir in der Funktionalanalysis – mit einer Ähnlichkeit bspw. zur Dualität in der projektiven Geometrie – auf das Konzept ‚Das Duale zum Dualen ist das Ausgangsobjekt', wenn wir die Konstruktion von dualen Räumen betrachten. So gilt etwa für Riesz' Funktionenklassen mit $1 < p < \infty$:

> Die Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ haben die Eigenschaft, daß jede Funktion, die mit allen Funktionen der einen Klasse integrierbare Produkte ergibt, sicher der andern Klasse angehört. (Riesz, 1910, 452)

Nun kam es jedoch nach Riesz' Einführung der $[L^p]$- und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$-Klassen und seiner Beschreibung der dualen Beziehung zwischen ihnen zu einem entscheidenden Schritt in der Entwicklung des Dualitätsbegriffs in der Funktionalanalysis: Helly (1921) änderte bei seinem Ausgangsproblem die Fragestellung (Abschnitt 2.6.d). Er fragte statt nach Lösungsfolgen oder -funktionen nach *Funktionalen*. Dabei stellte er fest, dass nicht jede zu seinem Ausgangsproblem gefundene „Linearoperation" durch eine Folge darstellbar war (Abschnitt 2.6.e). Tatsächlich gilt im Allgemeinen *nicht*, dass ein Bidualraum zu seinem Ausgangsraum isomorph ist. Hahn (1927) führte aufgrund dieser Feststellung reguläre Räume ein (Abschnitt 2.8.d) und man könnte behaupten, dass es eine Besonderheit der Funktionalanalysis ist, eine Klasse von Räumen zu fixieren (reflexive Räume), bei der das Konzept ‚Das Duale zum Dualen ist das Ausgangsobjekt' eingehalten wird. Köthe und Toeplitz (1934) sprachen hier bei der Schaffung ihrer Grundlage einer Lösungstheorie für metrikfreie Folgenräume gerade von „vollkommenen Räumen". (Ihre Definitionen dualer und vollkommener Räume (Abschnitt 3.3.a) waren dabei ‚symmetrischer' als die des konjugierten Raums (Abschnitt 3.3.b) im normierten Fall.) Einen wichtigen Aspekt der Dualitätstheorie in der Funktionalanalysis beschreibt Kreyszig: Darunter verstehen wir nämlich ...

> ... die Idee, die auf einem Raum definierten stetigen linearen Funktionale zu untersuchen und damit zugleich Aufschluss über den betreffenden Raum selbst zu erhalten. (Kreyszig, 1990, S.120f)

Es geht in der Funktionalanalysis also darum, das Duale zu verwenden, um damit Informationen über das Ausgangsobjekt zu erhalten. Dazu sei noch einmal bemerkt, dass hierbei der Satz von Hahn-Banach (bzw- ein entsprechender Erweiterungssatz für metrikfreie Räume) ein wesentlicher Entwicklungsschritt war (Abschnitte 2.8.b, 2.8.e). Erst mit ihm wurden einige der in dieser Arbeit betrachteten Resultate möglich, bzw. einige Definitionen gehaltvoll, so z.B. die entsprechenden Versionen der Lösbarkeitsbedingung aus Teil I im normierten und metrikfreien Fall, die Einführung des polaren Raums oder die Einführung eines dualen Operators auf allgemeinen Banachräumen.

Welche Rolle spielte die Geometrisierung? Es kann wohl behauptet werden, dass die Entwicklung des Dualitätsbegriffs in der Funktionalanalyis und die ‚Geometrisierung', d.h. die Einführung eines geometrischen Vokabulars für Funktionen(mengen), oder anders gesagt, für die Analysis, sich gegenseitig beeinflusst haben. Wie wir gesehen haben, ging Riesz' Beschreibung der dualen Beziehung der $[L^p]$- und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$-Klassen in (Riesz, 1910) (Abschnitt 1.6.c) aus der dualen Paarung der Koeffizienten- und Lösungsfunktionen in der Hölder-Ungleichung hervor, aus welcher sich die Notwendigkeit der Lösbarkeitsbedingung zu Riesz' Ausgangsproblem ergab (Abschnitt 1.7.a). Ein entscheidendes Werkzeug war hier das Lebesgue-Integral, dessen genetische Definition die Übertragung von Reihensätzen ermöglichte (Abschnitt 1.6.a). Der Hölder-Ungleichung ging jedoch Riesz' Abstandbegriff für Funktionen voraus, zunächst für Funktionen aus $[L^2]$ in (Riesz, 1906) (Abschnitt 1.3.a), dann allgemeiner für Funktionen aus $[L^p], 1 < p < \infty$. (Hier muss bemerkt werden, dass Schmidt (1908) (Abschnitt 1.5.b), in Erweiterung und mit neuer Vorgehensweise von Hilberts Untersuchungen, einen wesentlichen Grundstein zur Geometrisierung der Analysis, und damit zur Herausbildung der

Funktionalanalysis, geschaffen hat.) Es war dann gerade das erste Auftreten zweier *verschiedener* Räume im Ausgangsproblem bei Riesz (1910) (Abschnitt 1.6.c), das Riesz' Formulierung der gegenseitigen Beziehung ermöglichte. Bei Schmidts Betrachtungen in l^2 und Riesz' vorhergehenden Untersuchungen von Funktionen aus $[L^2]$ stimmte jeweils der Raum der gegebenen Koeffizienten mit dem der gesuchten Lösungen überein. Riesz (1910) konnte diese Fälle als Spezialfälle benennen. Heute sagen wir: Selbstdualität ist ein Spezialfall von Dualität. Bei dieser Rieszschen Untersuchung ist etwas ganz Entscheidendes passiert: Der vertraute (jedoch ins Unendlichdimensionale erweiterte) euklidische Raum teilte sich auf in *zwei* Räume:

> Die Rolle der Klasse $[L^2]$ übernehmen hier je zwei Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. (Riesz, 1910, 452)

Dieser Sachverhalt bestärkte Riesz darin, für seine Funktionenklassen eine „synthetische" statt „analytische" Geometrie (Abschnitt 1.3.c) zu betreiben. Die Möglichkeit einer analytischen Geometrie, d.h. die Rückführung des Funktionenraums $L^2(a,b)$ auf den Folgenraum l^2, war ohnehin nur im Fall $p = 2$ gegeben, wo die Isomorphie $L^2(a,b) \cong l^2$ bestand:

> Die Untersuchung dieser Funktionenklassen wird auf die wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p = 2$ ein ganz besonderes Licht werfen; und man kann auch behaupten, daß sie für eine axiomatische Untersuchung der Funktionenräume brauchbares Material liefert. [...] *Die Übersetzbarkeit der Resultate, wie für* $p = 2$, *und damit die Möglichkeit einer ähnlich einfachen analytischen Theorie geht in allen übrigen Fällen verloren; und somit tritt die synthetische Behandlungsweise in ihre vollen Rechte.* (Riesz, 1910, 452f)

Riesz spricht gerade in dieser Textstelle, wo es um die Abgrenzung der beiden Funktionenklassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ im Gegensatz zur alleinigen Umgebung $[L^2]$ geht, zum ersten Mal von Funktionen*räumen* statt von Funktionenklassen.

Die Einführung eines Abstandsbegriffs für Funktionen ging auch Hellys Einführung zweier allgemeiner dualer Normen in (Helly, 1921) voraus (Abschnitt 2.6.b). Die gegenseitige Beziehung dieser Normen übertrug Helly dabei innerhalb einer beeindruckenden geometrischen Interpretation normierter Folgenräume aus der dualen Beziehung von Pol und Polare im endlichdimensionalen euklidischen Raum.

Weitere und weit tiefer gehende Untersuchungen zur Frage, wie es dazu kam, dass Funktionenklassen als „Räume" angesehen und bezeichnet werden, finden sich in (Epple et al., 2002) und in (Rodríguez Hernández, 2006).

Welche Motive regten die Entwicklung des Dualitätsbegriffs in der Funktionalanalysis an? In Abschnitt 1.3.b haben wir gesehen, dass Riesz' Motivation zur Frage, unter welchen Bedingungen eine Funktion $f(x)$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = a_i \qquad (i = 1, 2, ...)$$

existiert, wobei $\{\varphi_i(x)\}$ ein Orthogonalsystem bildet und die a_i gegebene Konstanten sind, aus Hilberts Fourierkoeffizientenbildung hervorging. Riesz fragte hier nach der zugehörigen Umkehrung. Diese Fragestellung führte ihn zur Entdeckung der Isomorphie des Funktionenraums $L^2(a, b)$ und des Folgenraums l^2. Seine Untersuchungen in (Riesz, 1910) verallgemeinerten diese Fragestellung und führten zur Einführung der $[L^p]$-Klassen. Das zu (Riesz, 1910) analoge Problem für die Folgenräume l^p in (Riesz, 1913) (Abschnitt 1.6.f) enthält wiederum die Version von Schmidt (1908) (Abschnitt 1.5.a) und ist darüber hinaus als Spezialfall in allgemeineren Versionen dieses Problemtyps von Helly (1921) (Abschnitt 2.6.d), Hahn (1927) (Abschnitt 2.8.d) und Banach (1929a) (Abschnitt 2.8.e) enthalten. Bei der ‚Reihe' dieser verschiedenen Problemversionen, die man aus systematischen Gründen als *Momentenproblem* bezeichnen kann (Unterkapitel 4.1), erkennen wir eine fortschreitende Verallgemeinerung (Unterkapitel 1.7, 2.9), die schließlich die Einführung von Hahns *polarem Raum* (Abschnitt 2.8.c), dem heutigen *Dualraum*, motivierte. Es ist anzunehmen, dass es gerade die voranschreitende Verallgemeinerung dieses Problemtyps war, die die Entwicklung des Dualitätsbegriffs in der Funktionalanalysis nach sich zog.

Auch bei der Einführung dualer Operatoren lag die Motivation im Lösen von Gleichungen. Dies haben wir in Abschnitt 6.1.c gesehen: In (Riesz, 1910) finden wir die Verbindung des Gleichungstyps der Momentenproblemreihe aus Teil I dieser Arbeit (Abschnitt 1.7.a) und des Gleichungstyps aus Teil II (Kapitel 5), zu dem oft auch die duale Gleichung betrachtet wurde. Riesz' Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale auf $L^p(a, b)$ ermöglichte es ihm, duale Operatoren auf diesen Räumen einzuführen (Abschnitt 6.1.b). Banach (1929b) verallgemeinerte dieses Konzept und definierte duale Operatoren auf allgemeinen Banachräumen (Unterkapitel 6.4). Zwischen (Riesz, 1910) und (Banach, 1929b) lagen allerdings weitere Entwicklungen zum Konzept eines allgemeinen dualen Operators, die zeigen, dass der Satz von Hahn-Banach hierfür wesentlich war.[125]

Als Abschluss dieser voranschreitenden Verallgemeinerungen, sowohl bzgl. dua-

[125] Riesz (1916) verallgemeinerte die Fredholmschen Sätze teilweise für kompakte Operatoren auf $C(a, b)$, behandelte die zugehörige duale Gleichung jedoch nur für Integraloperatoren (Unterkapitel 7.4). Schauder (1930c) brachte mit Banachs Definition eines dualen Operators auf allgemeinen Banachräumen die restliche Ergänzung (Unterkapitel 7.8).

ler Operatoren wie auch dualer Räume, haben wir für diese Arbeit (Dieudonné, 1942) gewählt. Hier treffen innerhalb eines allgemeinen dualen Systems, wovon die Konstruktionen der vorangehenden Arbeiten Spezialfälle bilden, die beiden Lösbarkeitsbedingungen zu den Problemversionen aus Teil I und Teil II aufeinander, mit denen sich die Begriffe dualer Räume und dualer Operatoren entwickelt haben (Abschnitte 3.7.b, 8.4.b).

Beteiligte mathematische Zentren Wie aus den biographischen Skizzen hervorgeht, war natürlich Göttingen ein Zentrum für unsere betrachteten Entwicklungen. Hier verweilten (der eine länger, der andere kürzer) Minkowski, Schmidt, Hahn, Riesz, Toeplitz, Helly und Köthe (wenn auch nicht alle zur selben Zeit). Ein weiterer Schwerpunkt lag später in der Lemberger Schule, welcher Banach, Saks und Schauder angehörten. Es steht hier zum einen noch die Frage nach französischen Beiträgen aus. (Der Einfluss von Lebesgue, Fréchet, Poincaré und Hadamard wurde in unseren Untersuchungen nur angedeutet.) Zum anderen die Frage nach den Wechselwirkungen zwischen diesen Zentren. Auch hier liefert die Arbeit von Rodríguez Hernández (2006) einen tiefen Einblick.

Literaturverzeichnis

Abel, N. H. (1823). Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies (Oplösning af et par opgaver ved hjelp af bestemt integraler). *Magazin for Naturvidenskaberne*, 1:55–68.

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3:133–181.

Banach, S. (1929a). Sur les fonctionelles linéaires. *Studia Mathematica*, 1:211–216.

Banach, S. (1929b). Sur les fonctionelles linéaires II. *Studia Mathematica*, 1:223–239.

Banach, S. (1932). *Théorie des opérations linéaires*. Warszawa.

Banach, S. und Steinhaus, H. (1918). Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier. *Bulletin International de L'Acádemie des Sciences de Cracovie*, 1918:87–96.

Behnke, H. und Köthe, G. (1963). Otto Toeplitz zum Gedächtnis. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 66:1–16.

Bernkopf, M. (1966). The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 3:1–96.

Bernkopf, M. (1972). Fredholm, (Erik) Ivar. *Dictionary of Scientific Biography*, V:https://www.encyclopedia.com, 15. Apr. 2021.

Bernkopf, M. (1975). Schmidt, Erhard. *Dictionary of Scientific Biography*, XII:https://www.encyclopedia.com, 15. Apr. 2021.

Birkhoff, G. und Kreyszig, E. (1984). The establishment of functional analysis. *Historia Mathematica*, 11:258–321.

Bôcher, M. (1917). *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes*. Gauthier-Villars, Paris.

Bourbaki, N. (1939-1998). *Éléments de mathématique*, Band 1-27. Hermann et Masson, Paris.

Brieskorn, E., Hirzebruch, F., Purkert, W., Remmert, R., und Scholz, E., Herausgeber (2001-2020). *Felix Hausdorff - Gesammelte Werke*, Band I-IX. Springer, Heidelberg.

Butzer, P., Gieseler, S., Kaufmann, F., Nessel, R., und Stark, E. (1980). Eduard Helly (1884-1943). Eine nachträgliche Würdigung. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 82:128–151.

Cartier, P. (2005). Jean Dieudonné (1906-1992), mathematician. Technischer bericht, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette.

Chatterji, S. D., Remmert, R., und Scharlau, W., Herausgeber (2001). *Felix Hausdorff. Gesammelte Werke. Band IV: Analysis, Algebra und Zahlentheorie*. Springer, Berlin-Heidelberg.

Cramer, G. (1750). *Introduction à l'analyse des lignes courbes*. Cramer, Genève.

Dieudonné, J. (1940a). Équations linéaires dans les espaces normés. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 211:129–131.

Dieudonné, J. (1940b). Topologies faibles dans les espaces vectoriels. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 211:94–97.

Dieudonné, J. (1942). La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 59:107–139.

Dieudonné, J. (1974). Minkowski, Hermann. *Dictionary of Scientific Biography*, IX:https://www.encyclopedia.com, 15. Apr. 2021.

Dieudonné, J. (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Band 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32. Hermann, Paris.

Dieudonné, J. (1981). *History of functional analysis*. North Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

Dieudonné, J. (1989). *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*. Birkhäuser, Boston.

Dorier, J.-L. (1996). Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions. *Revue d'histoire des mathématiques*, 2:265–307.

Dugac, P. (1995). *Jean Dieudonné, mathématicien complet*. Editions Jacques Gabay, Paris.

Epple, M., Herrlich, H., Husek, M., Preuß, G., Purkert, W., und Scholz, E. (2002). Zum Begriff des topologischen Raumes. In Brieskorn, E., Hirzebruch, F., Purkert, W., Remmert, R., und Scholz, E., Herausgeber, *Felix Hausdorff - Gesammelte Werke, Band 2, Grundzüge der Mengenlehre*, Seiten 675–744. Springer, Heidelberg.

Etwein, F., Voelke, J. D., und Volkert, K. (2019). *Dualität als Archetypus mathematischen Denkens. Klassische Geometrie und Polyedertheorie*. Cuvillier Verlag, Göttingen.

Fatou, P. (1906). Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Mathematica*, 30:335–400.

Fischer, E. (1907a). Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 144:1148–1150.

Fischer, E. (1907b). Sur la convergence en moyenne. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 144:1022–1024.

Fontené, G. (1875). Théorème pour la discussion d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 14:481–487.

Forster, W. (1975). Schauder, Juliusz Paweł. *Dictionary of Scientific Biography*, XII:https://www.encyclopedia.com, 15. Apr. 2021.

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22:1–71.

Fréchet, M. (1907). Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 144:1414–1416.

Fréchet, M. (1908). Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées. *Nouvelles annales de mathématiques*, 8:97–116.

Fredholm, I. (1903). Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, 27:365–390.

Frobenius, G. (1877). Über das Pfaffsche Problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 82:230–315.

Frobenius, G. (1878). Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:1–63.

Frobenius, G. (1905). Zur Theorie der linearen Gleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 129:175–180.

Fuchs, L. (1873). Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 76:177–213.

Grothendiek, A. und Dieudonné, J. (1960-1967). *Éléments de géométrie algébrique*, Band 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32. Publ. Math. I.H.É.S.

Hadamard, J. (1893). Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 116:1500–1501.

Hadamard, J. (1903). Sur les opérations fonctionelles. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 136:351–354.

Hahn, H. (1922). Über Folgen linearer Operationen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 32:3–88.

Hahn, H. (1927). Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 157:214–229.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig.

Hausdorff, F. (1932). Zur Theorie der linearen metrischen Räume. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 167:294–311.

Hawkins, T. (1970). *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development.* University of Wisconsin Press, Madison-London.

Hawkins, T. (1975). Schmidt, Erhard. *Dictionary of Scientific Biography*, XII:https://www.encyclopedia.com, 15. Apr. 2021.

Hawkins, T. (2013). *Mathematics of Frobenius in context.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

Hellinger, E. und Toeplitz, O. (1906). Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1906:351–356.

Hellinger, E. und Toeplitz, O. (1927). Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. In *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band II C, Seiten 1335–1601. Teubner, Leipzig.

Helly, E. (1912). Über lineare Funktionaloperationen. *Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Sitzungsberichte*, 121:265–297.

Helly, E. (1921). Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 32:60–91.

Hesse, O. (1873). *Vorlesungen aus der analytischen Geomtrie*. Teubner, Leipzig, 2. Auflage.

Heuser, H. (1992). Ein Blick auf die werdende Funktionalanalysis. In *Funktionalanalysis*, Kapitel XIX. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage.

Heuser, H. (1995). Commentary on Hans Hahn's contributions to functional analysis. In *Hans Hahn. Collected Works*, Band I, Seiten 37–55. Springer, Wien.

Hilb, E. (1909). Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 66:215–257.

Hilbert, D. (1904). Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linaren Integralrechnungen (Erste Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1904:49–91.

Hilbert, D. (1906a). Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Fünfte Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1906:439–462.

Hilbert, D. (1906b). Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Vierte Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1906:157–227.

Hilbert, D., von Neumann, J., und Nordheim, L. (1928). Über die Grundlagen der Quantenmechanik. *Mathematische Annalen*, 98:1–30.

Hildebrandt, T. H. (1928). Über vollstetige lineare Transformationen. *Acta Mathematica*, 51:311–318.

Hille, E. (1948). *Functional analysis and semi-groups*. American Mathematical Society, New York.

Hochstadt, H. (1980). Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem. *The Mathematical Intelligencer*, 2:123–125.

Hölder, O. (1889). Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. *Mathematische Annalen*, 34:26–56.

Horváth, J. (2004). On the Riesz-Fischer theorem. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 41:467–478.

Hurwitz, A. (1903). Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. *Mathematische Annalen*, 57:425–446.

Hurwitz, W. A. (1912). On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 13:405–418.

Jaëck, F. (2016). Generality and structures in functional analysis. The influence of Stefan Banach. In Chemla, K., Chorlay, R., und Rabouin, D., Herausgeber, *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*. Oxford University Press.

Jaëck, F. (2020). What were the genuine Banach spaces in 1922? Reflection on axiomatisation and progression of the mathematical thought. *Archive for History of Exact Sciences*, 74:109–129.

Jaëck, F. (2021). From Fundamenta Mathematicae to Studia Mathematica. The renaissance of Polish mathematics in light of Banach's publications 1919-1940. In Mazilak, L. und Tazzioli, R., Herausgeber, *Mathematical communities in the reconstruction after the Great War 1918-1928*. Springer Nature Switzerland.

Jensen, J. L. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, 30:175–193.

Kałuża, R. (1995). *Through a reporter's eyes. The life of Stefan Banach*. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

Kjeldsen, T. H. (1993). The early history of the moment problem. *Historia Mathematica*, 20:19–44.

Köthe, G. (1938). Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 178:193–213.

Köthe, G. (1939). Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen. *Mathematische Annalen*, 116:719–732.

Köthe, G. und Toeplitz, O. (1934). Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 171:193–226.

Kreyszig, E. (1986a). Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932. *Elemente der Mathematik*, 41:49–57.

Kreyszig, E. (1986b). Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis. *Elemente der Mathematik*, 41:25–35.

Kreyszig, E. (1990). Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis. *Elemente der Mathematik*, 45:117–130.

Krömer, R. (2022). Marshall Stone and duality. From differential equations to Boolean algebras. In Krömer, R., Haffner, E., und Volkert, K., Herausgeber, *Duality in 19th and 20th century mathematical thinking*. Zur Veröffentlichung vorgesehen bei Birkhäuser, Basel.

Krömer, R., Haffner, E., und Volkert, K., Herausgeber (2022). *Duality in 19th and 20th century mathematical thinking.* Zur Veröffentlichung vorgesehen bei Birkhäuser, Basel.

Kronecker, L. (1903). *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten.* Teubner, Leipzig.

Kuratowski, K. (1924). Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie. *Fundamenta Mathematicae*, 5:75–86.

Lalesco, T. (1912). *Introduction à la théorie des équations intégrales.* Hermann, Paris.

Landau, E. (1907). Über einen Konvergenzsatz. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1907:25–27.

Lebesgue, H. (1902). Intégrale, longueur, aire. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 7:231–359.

Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, Paris.

Lebesgue, H. (1909). Sur les intégrales singulières. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, 1:25–117.

Leray, J. (1980). My friend Julius Schauder. In Forster, W., Herausgeber, *Numerical Solution of Highly Nonlinear Problems*, Seiten 427–439. North-Holland, Amsterdam.

Liouville, J. (1838). Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires et sur le développement des fonctions en séries. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 3:561–614.

MacLane, S. (1970). The influence of M.H. Stone on the origins of category theory. In *Functional analysis and related fields*, Seiten 228–241. Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

Maligranda, L. (1998). Why Hölder's inequality should be called Rogers' inequality. *Mathematical Inequalities and Applications*, 1:69–83.

Mayrhofer, K. (1934). Hans Hahn. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 41:221–238.

Menger, K. (1934). Hans Hahn. *Fundamenta Mathematicae*, 24:317–320.

Minkowski, H. (1896). *Geometrie der Zahlen.* Teubner, Leipzig.

Minkowski, H. (1905). Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 129:220–274.

Minkowski, H. (1907). *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie*. Teubner, Stuttgart.

Monna, A. F. (1973). *Functional analysis in historical perspective*. Oosthoek, Utrecht.

Narici, L. und Beckenstein, E. (1997). The Hahn-Banach theorem. The life and times. *Topology and its Applications*, 77:193–211.

Neumann, C. (1877). *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential*. Teubner, Leipzig.

Pietsch, A. (2007). *History of Banach spaces and linear operators*. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

Pietsch, A. (2009). Erhard Schmidt and his contributions to functional analysis. *Mathematische Nachrichten*, 283:6–20.

Pietsch, A. (2019). The 100th jubilee of Riesz theory. *European Mathematical Society Newsletter*, 3:31–33.

Pincherle, S. (1896-1897a). Cenno sulla geometria dello spazio funzionale. In *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*. In *Opere scelte (1954)*, Seiten 368–377. Roma.

Pincherle, S. (1897b). Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif. *Mathematische Annalen*, 49:325–382.

Pincherle, S. (1905). Funktionaloperationen und-gleichungen. In *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band II A 11, Seiten 761–817. Teubner.

Plancherel, M. (1909a). Note sur les équations intégrales singulières. *Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali*, 19:37–53.

Plancherel, M. (1909b). Über singuläre Integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 67:515–518.

Pringsheim, A. (1903). Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen von endlichem Range. *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akadmie der Wissenschaften*, 13:101–130.

Rademacher, H. und Toeplitz, O. (1930). *Von Zahlen und Figuren*. Springer, Berlin-Heidelberg.

Riesz, F. (1906). Sur les ensembles de fonctions. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 143:738–741.

Riesz, F. (1907a). Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 144:615–619.

Riesz, F. (1907b). Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 144:734–736.

Riesz, F. (1907c). Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 144:1409–1411.

Riesz, F. (1907d). Über orthogonale Funktionensysteme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1907:116–122.

Riesz, F. (1909). Sur les suites de fonctions mesurables. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 148:1303–1305.

Riesz, F. (1910). Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. *Mathematische Annalen*, 69:449–497.

Riesz, F. (1913). *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* Gauthier-Villars, Paris.

Riesz, F. (1916). Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Mathematica*, 41:71–98.

Rodríguez Hernández, L. (2006). *Friedrich Riesz' Beiträge zur Herausbildung des modernen mathematischen Konzepts abstrakter Räume. Synthesen intellektueller Kulturen in Ungarn, Frankreich und Deutschland.* Dissertation, Mainz.

Rogers, L. J. (1888). An extension of a certain theorem in inequalities. *Messenger of Mathematics*, 17:145–151.

Rouché, E. (1875). Sur la discussion des équations du premier degré. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 81:1050–1052.

Saks, S. (1929). Remarque sur les fonctionelles linéaires dans les champs L^p. *Studia Mathematica*, 1:217–222.

Schauder, J. (1930a). Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Mathematica*, 2:171–180.

Schauder, J. (1930b). Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen. *Studia Mathematica*, 2:1–6.

Schauder, J. (1930c). Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. *Studia Mathematica*, 2:183–196.

Schmidt, E. (1905). *Entwickelung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener*. Dissertation, Göttingen.

Schmidt, E. (1907a). Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. *Mathematische Annalen*, 64:161–174.

Schmidt, E. (1907b). Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Mathematische Annalen*, 63:433–476.

Schmidt, E. (1908). Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 25:53–77.

Siegmund-Schultze, R. (1982). Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozeß der Mathematik um 1900. *Archive for History of Exact Sciences*, 26:13–71.

Sierpiński, W. (1930). Sur une propriété des ensembles G_δ. *Fundamenta Mathematicae*, 16:173–180.

Steinhaus, H. (1963). Stefan Banach. *Studia Mathematica, Seria Specjalna*, I:7–15.

Stieltjes, T. J. (1894). Recherches sur les fractions continues. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, 8:1–122.

Stone, M. H. (1929). Linear transformations in Hilbert space. I. Geometrical Aspects. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 15:198–200.

Stone, M. H. (1932). *Linear transformations in Hilbert space.* American Mathematical Society, New York.

Strobl, W. (1985). Aus den wissenschaftlichen Anfängen Hermann Minkowskis. *Historia Mathematica*, 12:142–156.

Study, E. (1905). Kürzeste Wege im komplexen Gebiet. *Mathematische Annalen*, 60:321–378.

Tillmann, H. G. (1990). Gottfried Köthe, 1905-1989. *Note di Matematica*, 10:9–21.

Toeplitz, O. (1907). Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1907:101–109.

Toeplitz, O. (1911). Über allgemeine lineare Mittelbildungen. *Prace matematyczno-fizyczne*, 22:113–119.

Volterra, V. (1887). *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Tipografia della R. Accademia dei Lincei, Roma.

Volterra, V. (1896). *Sulla inversione degli integrali definiti*. Tipografia della R. Accademia dei Lincei, Roma.

von Neumann, J. (1930). Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. *Mathematische Annalen*, 102:370–427.

von Neumann, J. (1931). Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. *Mathematische Annalen*, 104:570–578.

von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, Berlin.

Wehausen, J. (1938). Transformations in linear topological spaces. *Duke Mathematical Journal*, 4:157–169.

Weidmann, J. (1990). Gottfried Köthe, 1905-1989. *Note di Matematica*, 10:1–7.

Werner, D. (2011). *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin-Heidelberg, 7. Auflage.

Weyl, H. (1908). *Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems*. Dissertation, Göttingen.

Weyl, H. (1909). Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten. *Mathematische Annalen*, 67:225–245.

Weyr, E. (1890). Zur Theorie der bilinearen Formen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1:163–263.

Wiener, N. (1922). Limit in terms of continuous transformation. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 50:119–134.

Wojtaszczyk, P. (1987). The work of Saks in functional analysis. *The Mathematical Intelligencer*, 9:41–43.

Zeilon, N. (1930). Ivar Fredholm. *Acta Mathematica*, 54:I–XVI.

Zygmund, A. (1987). Stanislaw Saks 1897-1942. *The Mathematical Intelligencer*, 9:36–41.

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro

Susanne Spies:
Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro

Henrike Allmendinger:
Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro

Martin Rathgeb:
George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro

Tanja Hamann:
Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

Band 11 (2019), 204 S., kart., 13,– Euro

Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani und Ralf Krömer (Hrsg.):
Mathematik in der Tradition des Neukantianismus.
Mit Beiträgen von Gottfried Gabriel & Sven Schlotter, Kay Herrmann, Daniel Koenig, Thomas Mormann, Matthias Neuber, Shafie Shokrani, Merlin Carl & Eva-Maria Engelen, Gregor Nickel, Christian Thiel

Band 12 (2019), 338 S., kart., 22,– Euro

Sara Confalonieri, Peter-Maximilian Schmidt, Klaus Volkert (Hrsg.):
Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern

Band 13 (2020), 322 S., kart., 18,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Stephan Berendonk, Rosmarie Junker & Susanne Spies, Edward Kanterian, Martin Mattheis, Gregor Nickel, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Moritz Vogel, Matthias Wille

Band 14 (2021), 216 S., kart., 18,– Euro

Mit Beiträgen von Henning Heske, Hannes Junker, Andreas Kirchartz, Oliver Passon und Tassilo von der Twer, Toni Reimers, Susanne Spies und Claus-Peter Wirth

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 18,– Euro (monographische Bände ggf. abweichend)

Alessa Waldvogel

Dualität in der Funktionalanalysis

Zur historischen Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren in der geometrisierten Analysis

Unter Dualitätstheorie in der Funktionalanalysis verstehen wir im Allgemeinen, lineare stetige Funktionale zu untersuchen, um damit Informationen über den zugrunde liegenden Raum selbst zu erhalten. Entwicklungsschritte zu dieser Dualitätstheorie waren:

Das erste Auftreten zweier unterschiedlicher dualer Funktionenräume in der Funktionalanalysis: Riesz' $[L^p]$-Klassen. Eine allgemeine Norm für lineare Folgenräume und die dazu duale Norm: Hellys Polaritätskonzept. Schließlich der Gedanke, einen Dualraum aus Funktionalen statt aus Funktionen zu bilden: Hellys und Hahns Einführung des „polaren Raums".

Diese überaus spannende Entwicklung in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wird in dieser Arbeit anhand einer gründlichen begrifflichen Analyse dargestellt. Dabei stößt man immer wieder auf die parallel verlaufende Geometrisierung, also auf die Einführung geometrischer Begriffe für Funktionen(mengen). Darüber hinaus wird die Entwicklung von Ansätzen einer Dualitätstheorie bei Räumen, die nicht notwendigerweise mit einer Norm ausgestattet sind, vorgestellt, sowie die mit der Entwicklung dualer Räume eng verbundene Entwicklung dualer Operatoren.

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN