Nicht-isotrope Abschätzungen für lineal konvexe Gebiete endlichen Typs

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Dem Fachbereich Mathematik der
Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal
vorgelegt von

Michael Conrad

Dezember 2002

Referent:	Prof. Dr. Klas Diederich
Korreferent:	Dr. Bert Fischer
Tag der Disputation:	12. Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Ergebnisse

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ heißt *lineal konvex*, wenn für jeden Randpunkt $z \in \partial\Omega$ eine komplexe Hyperebene S_z existiert mit $z \in S_z$ und $S_z \cap \Omega = \emptyset$. Ist Ω glatt berandet mit einer definierenden C^∞-Funktion r, so ist die komplexe Tangentialebene von $\partial\Omega$ in z der einzige Kandidat für eine solche Ebene. Bezeichnen wir mit $\partial r(z) := (\partial r(z)/\partial z_1, \ldots, \partial r(z)/\partial z_n)$ den komplexen Gradienten von r in z und mit $T_z^{10}\partial\Omega := \{\xi \in \mathbb{C}^n : \partial r(z) \cdot \xi = 0\}$ den holomorphen Tangentialraum von $\partial\Omega$ in z, so ist Ω genau dann lineal konvex, wenn für alle Randpunkte $z \in \partial\Omega$ gilt

$$z + \xi \notin \Omega \quad \text{für alle} \quad \xi \in T_z^{10}\partial\Omega.$$

Wie andere Formen der Konvexität lässt sich auch lineale Konvexität für glatte Gebiete über die komplexe Hesse- und die Leviform ausdrücken. Nach C. Kiselman [Ki] sind C^2-glatte Gebiete Ω genau dann lineal konvex, wenn für jeden Randpunkt die *Behnke-Peschl Bedingung* [BP] erfüllt ist, d.h. für alle $z \in \partial\Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H_r(z,\xi) + \mathcal{L}_r(z,\xi) &:= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.1) \\ \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial z_k}\xi_j\xi_k + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k &\geq 0 \quad \text{für alle} \quad \xi \in T_z^{10}\partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit $\xi \in T_z^{10}\partial\Omega$ ist auch $i \cdot \xi \in T_z^{10}\partial\Omega$ und es folgt $\mathcal{L}_r(z,\xi) \geq 0$. Linear konvexe Gebiete sind also lineal konvex, lineal konvexe Gebiete sind pseudokonvex. Lineale Konvexität ist invariant unter komplex linearen Koordinatenwechseln.

Es sei hier $\Omega = \{z : r(z) < 0\}$ ein beschränktes, C^∞-glatt berandetes, lineal konvexes Gebiete von endlichem Typ im Sinne von J. D'Angelo. Ziel dieser Arbeit ist es zum einen, die Randgeometrie solcher Gebiete zu untersuchen und damit zum anderen nicht-isotrope Abschätzungen zu erzielen. Wir zeigen, dass die Geometrie lineal konvexer Ränder in wesentlichen Punkten mit der linear konvexer Gebiete vergleichbar ist. So werden die Einträge des Multityps von D. Catlin auch hier durch lineare Koordinatenwechsel realisiert; sie stimmen mit den q-Typen von J. D'Angelo überein. Lineal konvexe Gebiete sind also insbesondere semiregulär im Sinne von K. Diederich und G. Herbort [DH2].

Wir wählen eine Umgebung $U = U(\partial\Omega)$ des Randes und eine natürliche Zahl $m \geq 2$ so, dass die Kontaktordnung jeder komplexen Geraden in jedem Punkt $q \in U$ mit der zugehörigen Niveaumenge $\partial\Omega_{q,0} := \{z \in U : r(z) = r(q) + 0\}$ kleiner gleich m ist. Für $q \in U$, Vektoren v aus der komplexen Einheitssphäre S^{n-1} und $\delta > 0$ klein genug definieren wir die Polyradien $\tau(q,v,\delta)$ als den Abstand des Punktes q zur Niveaumenge $\partial\Omega_{q,\delta}$ entlang der komplexen Geraden $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto q + \lambda v$. Nach Wahl einer geeigneten Basis $e_1, \ldots, e_n$ bzgl. des Punktes q und $\delta > 0$ assoziieren wir dazu die Standardradien $\tau_1(q,\delta), \ldots, \tau_n(q,\delta)$. Damit definieren wir Polyzylinder $P_\delta(q)$ und deren Multiplikation mit positiven Konstanten c durch

$$c \cdot P_\delta(q) \quad := \quad \{z : |z_k - q_k| < c \cdot \tau_k(q,\delta) \text{ für alle } k = 1, \ldots, n\}.$$

Es werden die Ergebnisse von J. McNeal [McN2] für linear konvexe Gebiete verallgemeinert. Die Existenz bzw. der Nachweis der Eigenschaften der Polyzylinder ermöglicht es nun, nicht-isotrope Abschätzungen und Ergebnisse auf den lineal konvexen Fall zu übertragen. So konstruieren wir auf den $P_\delta(q)$ beschränkte Gewichtsfunktionen $\omega_{q,\delta}$, deren Leviform guten unteren Abschätzungen genügt,

$$\mathcal{L}_{\omega_{q,\delta}}(z,X) \quad \geq \quad C \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}.$$

Wir summieren die Funktionen geeignet und erhalten nach D. Catlin [Ca3] das bestmögliche Resultat für subelliptische Abschätzungen.

Theorem I *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, glattes, pseudokonvexes Gebiet mit einer definierenden C^∞-Funktion r. Es sei $p \in \partial\Omega$ ein Randpunkt von endlichem Typ und es gebe eine Umgebung $U = U(p)$, so dass $\partial\Omega \cap U$ lineal konvex ist. Es sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass der 1-Typ jedes Punktes $q \in U$ kleiner gleich m ist. Dann gibt es eine Umgebung $V = V(p) \subset U$, so dass auf V eine subelliptische Abschätzung der Ordnung $\varepsilon = 1/m$ für das $\bar\partial$-Neumann Problem auf (0,1)-Formen gilt.*

Wir beschäftigen uns dann mit der Fragestellung, ob jede Nullstellenvarietät, die die Blaschke-Bedindung erfüllt, von einer holomorphen Funktion aus der Nevanlinna-Klasse induziert wird. Dabei betrachten wir den zu der Varietät assoziierten (1,1)-Strom und schätzen diesen nicht-isotrop ab. Definieren wir für 1-Formen ω auf Ω die gewichtete Norm $\|\omega(z)\|_\kappa$ im Punkt $z \in \Omega$ durch

$$\|\omega(z)\|_\kappa \quad := \quad \sup\left\{ |\omega(z)(v)| \cdot \frac{\tau(z,v,|r(z)|)}{|r(z)|} : v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}, \tag{1.2}$$

so lautet unser Ergebnis

Theorem II *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet mit glattem Rand und von endlichem Typ. Ist Θ ein d-geschlossener, positiver $(1,1)$-Strom auf Ω, der die Blaschke-Bedingung erfüllt, so gibt es eine Lösung ω der Gleichung $id\omega = \Theta$ mit*

$$\int_\Omega \|\omega(z)\|_\kappa \, dV_z \quad < \quad +\infty. \tag{1.3}$$

Nach E. M. Stein [St] ist bekannt, dass die Funktionen der Hardy-Räume fast überall nicht-tangentiale Grenzwerte besitzen. Allerdings sind im allgemeinen Fall die verwendeten Näherungskegel isotrop und spiegeln daher nur unzureichend die Geometrie des Randes wieder. Speziell für linear konvexe Gebiete endlichen Typs gelang es F. Di Biase und B. Fischer [DBF] aber optimale Näherungsregionen anzugeben. Sie verwenden eine Regularisierung $P''(q,\delta)$ der konstruierten Polyzylinder, wie sie nun auch für lineal konvexe Gebiete endlichen Typs zur Verfügung stehen. Wir überprüfen hier, dass sich mit den Methoden aus [DBF] auch in dieser Situation – d.h. genauer für beschränkte, lineal konvexe Gebiete mit C^∞-glattem Rand und von endlichem Typ – ein analoges Resultat erzielen lässt. Wir definieren für Randpunkte $w \in \partial\Omega$ und $\alpha > 0$ die Näherungsumgebungen $\mathcal{A}_\alpha(w)$ durch

$$\mathcal{A}_\alpha(w) \quad := \quad \{z \in U \cap \Omega : \pi(z) \in P''(w, \alpha|r(z)|)\}. \tag{1.4}$$

Dabei ist $\pi : U \to \partial\Omega$ die Projektionsabbildung. Wir erhalten

Theorem III *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet mit C^∞-glattem Rand und von endlichem Typ. Weiter seien $0 < p \leq +\infty$, $f \in H^p(\Omega)$ und $\mathcal{A}_\alpha(w)$ wie oben. Dann existiert für σ-fast alle $w \in \partial\Omega$ der Grenzwert*

$$\lim_{\mathcal{A}_\alpha(w) \ni z \to w} f(z).$$

Tangentiale Grenzwerte müssen im allgemeinen Fall nicht existieren, wie schon das Beispiel von J.E. Littlewood [L] im Einheitskreis zeigt. Trotzdem kann es Näherungsregionen geben, die größer sind als Kegel der Art (1.4). Solche Näherungsregionen heißen exotisch. Mit Hilfe der Arbeiten von F. Di Biase [DB1, DB2] ist es möglich, deren Existenz herzuleiten. Wir zeigen also

Theorem IV *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ wie in Theorem III und $\mathcal{A}_\alpha(w)$ für $w \in \partial\Omega$ die passenden Näherungsregionen nach (1.4). Dann gibt es für jeden Randpunkt $w \in \partial\Omega$ eine Menge $L(w) \subset \Omega$ mit $w \in \partial L(w)$, so dass gilt*

a) Für σ-fast alle Randpunkte $w \in \partial\Omega$ enthält $L(w)$ eine Folge $(z_k)_k$, die gegen w konvergiert und die für jedes $\alpha > 0$ eine Teilfolge $(z_{k_j})_j$ enthält mit $\{z_{k_j}\} \cap \mathcal{A}_\alpha(w) = \emptyset$.

b) Für jede Funktion $f \in H^p(\Omega)$ existiert der Grenzwert $\lim_{L(w) \ni z \to w} f(z)$ für σ-fast alle Randpunkte $w \in \partial\Omega$.

Für ein bestimmtes α_0 gilt $\mathcal{A}_{\alpha_0}(w) \subset L(w)$.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: in Teil I befassen wir uns zunächst mit der Geometrie lineal konvexer Ränder. Dazu klären wir in Abschnitt 2 Typfragen für solche Ränder und konstruieren in Abschnitt 3 die angesprochene δ-minimal Basis mit der Beweisführung aller benötigten Eigenschaften.
Teil II ist der Frage subelliptischer Abschätzungen gewidmet. Wir geben in Abschnitt 4 eine kurze Einführung in das $\bar{\partial}$-Neumann Problem und zitieren die Bedeutung der Existenz plurisubharmonischer Gewichtsfunktionen mit guten unteren Abschätzungen der Leviform. Damit ist der Beweis von Theorem I auf die Konstruktion solcher Funktionen gemäß Theorem 4.4 zurückgeführt. Wir konstruieren die angesprochenen Funktionen $\omega_{q,\delta}$ auf den Polyzylinder $P_\delta(q)$ in Abschnitt 5. Durch einen Summationsprozess beweisen wir Theorem 4.4 und damit Theorem I in Abschnitt 6.
In Teil III geht es um nicht-isotrope Abschätzungen für Ströme. Diese wurden als verallgemeinerte Distributionen eingeführt, eine kurze Darstellung bekannter Tatsachen findet man in Abschnitt 7. Insbesondere wird zu jeder holomorphen Funktion ein positiver (1,1)-Strom der zugehörigen Varietät assoziiert. Um diesen nicht-isotrop abzuschätzen, konstruieren wir in Abschnitt 8 eine geeignete Überlagerung von Ω nach Vorlage von [BCD]. In Analogie erhalten wir in Abschnitt 9 eine zur Blaschke-Bedingung äquivalente, nicht-isotrope Abschätzung für Ströme Θ wie in Theorem II. Wir lösen die Gleichung $id\omega = \Theta$ zunächst lokal für den sternförmigen Fall in Abschnitt 10. Zur Lösung des allgemeinen Falls benötigen wir Elemente der Garbentheorie, wie sie in Abschnitt 11 dargestellt sind. In Abschnitt 12 wird damit Theorem II bewiesen.
Im vierten Teil dieser Arbeit untersuchen wir schließlich das Randverhalten von H^p-Funktionen. Wir führen die Regularisierung der Polyzylinder und damit die passenden

Näherungsregionen in Abschnitt 13 ein und verifizieren die benötigten Eigenschaften gemäß [DBF]. Nach den nötigen Abschätzungen für Maximalfunktionen beweisen wir Theorem III nach der klassischen Methode von E. M. Stein [St] in Abschnitt 14. Der Nachweis von Theorem IV erfolgt schließlich in Abschnitt 15.

Herrn Prof. Dr. Klas Diederich gilt mein Dank für seine Unterstützung und fruchtbare Diskussionen während der Anfertigung dieser Arbeit.

Teil I
Randgeometrie lineal konvexer Gebiete

2 Der Multityp, q-Typen und Semiregularität

Der Catlinsche Multityp Bevor wir den Multityp nach D. Catlin [Ca2] definieren können, bedarf es einiger Notationen.
Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes Gebiet mit einer definierenden Funktion r und $z_0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt. Es bezeichne Γ_n die Menge aller n-Tupel $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ mit $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq +\infty$, für die gilt:

> Für jedes $k = 1, \ldots, n$ ist entweder $\lambda_k = +\infty$ oder es gibt nicht negative ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_k$, so dass gilt:

$$a_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j} = 1.$$

Solche $\Lambda \in \Gamma_n$ nennen wir *Gewichte.* Γ_n kann lexikographisch geordnet werden: Sind $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $\Lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ zwei Gewichte, so ist $\Lambda < \Lambda'$, falls für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\lambda_j = \lambda'_j \quad \text{für } j < k, \quad \text{aber} \quad \lambda_k < \lambda'_k.$$

Ein Gewicht $\Lambda \in \Gamma_n$ heißt *ausgezeichnet*, wenn es holomorphe Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n)$ um z_0 gibt, die z_0 auf den Ursprung abbilden, so dass

$$D^\alpha \bar{D}^\beta r(0) = 0 \quad \text{für alle } (\alpha, \beta) \text{ mit } \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j + \beta_j}{\lambda_j} < 1 \tag{2.1}$$

gilt; dabei bezeichnen D^α bzw. $\bar{D}^\beta$ die üblichen Ableitungen $\partial^{|\alpha|}/\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}$ bzw. $\partial^{|\beta|}/\partial \bar{z}_1^{\beta_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{\beta_n}$. Der *Multityp* $M(\partial\Omega, z_0) = (m_1, \ldots, m_n)$ ist dann definiert als das Infimum aller Gewichte, die größer sind als jedes ausgezeichnete Gewicht bzgl. der lexikographischen Ordnung.

Nach J. Yu [Y] nennen wir weiter ein Gewicht $\Lambda \in \Gamma_n$ *linear ausgezeichnet*, falls es einen komplex linearen Koordinatenwechsel gibt, so dass (2.1) in den neuen Koordinaten gilt. Wir definieren den *lineare Multityp* $L(\partial\Omega, z_0) = (l_1, \ldots, l_n)$ als das Infimum aller Gewichte, die größer sind als jedes linear ausgezeichnete Gewicht Λ.

Per definitionem ist $L(\partial\Omega, z_0)$ invariant unter komplex linearen Koordinatenwechseln und es gilt stets $L(\partial\Omega, z_0) \leq M(\partial\Omega, z_0)$. Das Beispiel $r(z) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2^2 + |z_2|^4$ aus [Y] zeigt, dass Gleichheit im allgemeinen nicht erwartet werden kann – hier sind $L(\partial\Omega, 0) = (1, 2)$ und $M(\partial\Omega, 0) = (1, 4)$. Ein Ergebnis dieses Abschnitts ist

Theorem 2.1 *Ist Ω ein glatt berandetes, lineal konvexes Gebiet, so gilt $L(\partial\Omega, z) = M(\partial\Omega, z)$ für jeden Randpunkt $z \in \partial\Omega$.*

Wir verschieben den Beweis und führen zunächst weitere Begriffe ein.

Die q-Typen von D'Angelo Es sei $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine C^∞-Funktion auf U, so ist ihre Verschwindungsordnung in z_0 durch $\nu(f, z_0) := \min\{k \geq 0 : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$ definiert. Für eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}^n$ mit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sei

$$\nu(f, z_0) := \min\{\nu(f_i, z_0) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Die maximale Kontaktordnung einer komplex analytischen, eindimensionalen Varietät mit dem Rand $\partial\Omega$ eines Gebietes $\Omega = \{r < 0\}$ in $z_0 \in \partial\Omega$ definieren wir durch

$$\Delta_1(\partial\Omega, z_0) := \sup \frac{\nu(r \circ \gamma, 0)}{\nu(\gamma - z_0, 0)},$$

wobei das Supremum über alle holomorphen, nicht konstanten Kurven $\gamma : \Delta(0, a) \to \mathbb{C}^n$ mit $\gamma(0) = z_0$ gebildet wird. Wir nennen $\Delta_1(\partial\Omega, z_0)$ den *D'Angelo-Typ* (*1-Typ*) von $\partial\Omega$ in z_0 und sagen, das Gebiet Ω ist in $z_0 \in \partial\Omega$ von *endlichem Typ*, falls $\Delta_1(\partial\Omega, z_0) < +\infty$ gilt. Die Bedingung endlichen Typs ist nach D'Angelo [DA1, DA2] offen, d.h., gilt $\Delta_1(\partial\Omega, z_0) < +\infty$, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(z_0)$ mit

$$\Delta_1(\partial\Omega_w, w) \leq 2\,(\Delta_1(\partial\Omega, z_0) - 1)^{n-1} \quad \text{für } w \in U \tag{2.2}$$

mit $\partial\Omega_w = \{z : r(z) = r(w)\}$. Ist $\partial\Omega$ pseudokonvex nahe z_0, so lässt sich diese obere Schranke in Abhängigkeit vom Rang der Leviform in z_0 noch verbessern.

Ist nun $S \subset \mathbb{C}^n$ eine $(n-q+1)$-dimensionale komplexe Hyperebene durch $z_0, 1 \leq q \leq n$, so ist der D'Angelosche *q-Typ*

$$\Delta_q(\partial\Omega, z_0) := \inf_S \Delta_1(\partial\Omega \cap S, z_0), \quad 1 \leq q \leq n,$$

wobei das Infimum über alle solchen Hyperebenen gebildet S wird und $\Delta_1(\partial\Omega \cap S, z_0)$ der 1-Typ des Gebietes $\Omega \cap S \subset S$ ist.

Semireguläre Punkte Allgemein gilt nach Catlin [Ca2] für $1 \leq q \leq n$

$$m_{n-q+1} \quad \leq \quad \Delta_q(\partial\Omega, z_0), \tag{2.3}$$

wobei m_i den i-ten Eintrag des Multityps von $\partial\Omega$ in z_0 bezeichnet.

Gebiete endlichen Typs, für die in (2.3) Gleichheit für alle q gilt, werden von K. Diederich und G. Herbort [DH2] betrachtet und heißen *semiregulär*. Semiregularität ist keine offene Bedingung, wie ein Beispiel aus [DH2] zeigt: für $\Omega = \{r < 0\} \subset \mathbb{C}^4$ mit

$$r(z) = \operatorname{Re} z_1 + |z_2|^6 + |z_3|^6 + |z_4|^6 + |z_2|^2|z_3|^2|z_4|^2$$

gilt nämlich $M(\partial\Omega, 0) = (1, 6, 6, 6)$ und $\Delta_q(\partial\Omega, 0) = 6$ für $q = 1, 2, 3$. Aber für $z = (-a^6, a, 0, 0) \in \partial\Omega$ sind $M(\partial\Omega, z) = (1, 2, 4, 4)$ und $\Delta_1(\partial\Omega, z) = 6$.

Wir zeigen, dass lineal konvexe Gebiete semiregulär sind.

Theorem 2.2 *Es seien Ω ein glatt berandetes, lineal konvexes Gebiet und $M(\partial\Omega, z_0) = (1, m_2, \ldots, m_n)$ der Multityp von $\partial\Omega$ in $z_0 \in \partial\Omega$. Dann gilt $m_{n-q+1} = \Delta_q(\partial\Omega, z_0)$ für alle $1 \leq q \leq n$.*

Das Theorem verallgemeinert die Aussagen über die Gleichheit des 1-Typs mit dem linearen Typ für linear konvexe Gebiete von J. McNeal [McN1] bzw. H. Boas und E. Straube [BS] für eine etwas größere Klasse von Gebieten. Die Übereinstimmung der Einträge des Multityps mit den q-Typen im linear konvexen Fall wurde von J. Yu [Y] gezeigt.

Zunächst zeigen wir

Lemma 2.3 *Es seien $r(z) = \operatorname{Re} z_1 + h(\operatorname{Im} z_1, z')$ eine C^∞-Funktion mit $h(0) = 0$, $dh(0) = 0$ und $h(0, z') \geq 0$ für alle $z' = (z_2, \ldots, z_n)$ sowie $\Omega = \{r < 0\}$ ein Gebiet. Dann wird der Multityp $M(\partial\Omega, 0)$ durch einen linearen Koordinatenwechsel realisiert.*

Offenbar sind die Voraussetzungen für glatte lineal konvexe Gebiete erfüllt. Damit folgt die Behauptung von Theorem 2.1 unmittelbar aus Lemma 2.3. Es verallgemeinert die Ergebnisse von Yu [Y] für den linear konvexen Fall, was die Gleichheit von $L(\partial\Omega, z_0)$ und $M(\partial\Omega, z_0)$ betrifft. Für Gebiete Ω wie in Lemma 2.3 stimmen jedoch die Einträge des Multityps im allgemeinen nicht mit den D'Angeloschen q-Typen überein; betrachten wir $\Omega_k := \{r_k(z) < 0\}$ mit

$$r_k(z) = \operatorname{Re} z_1 + |z_2 z_3|^2 + |z_2|^8 + |z_3|^k, \quad k \geq 8,$$

so gelten $L(\partial\Omega_k, 0) = M(\partial\Omega_k, 0) = (1, 4, 4)$, aber $\Delta_1(\partial\Omega_k, 0) = k$; fällt der Term $|z_3|^k$ weg, so ist $\partial\Omega_k$ in 0 noch nicht einmal von endlichem Typ.

Beweis von Lemma 2.3: Es sei r wie in Lemma 2.3 gegeben. Wir wählen nahe 0 lokale Koordinaten $(z) = (z_1, z')$, die den linearen Multityp $L(\partial\Omega, 0) = (1, l_2, \ldots, l_n)$ realisieren, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} r(z) &= \operatorname{Re} z_1 + h(\operatorname{Im} z_1, z') \\ &= \operatorname{Re} z_1 + P(z') + R(\operatorname{Im} z_1, z'). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dabei ist $P(z') \neq 0$ ein vom Grad 1 homogen bzgl. $(l_2, \ldots, l_n)$ gewichtetes Polynom, d.h., es gilt für $t > 0$

$$t \cdot P(z') = P(t^{1/l_2} z_2, \ldots, t^{1/l_n} z_n), \tag{2.5}$$

und R genügt für geeignete Konstanten $C > 0, \delta > 0$ nahe 0 der Abschätzung

$$|R(\operatorname{Im} z_1, z')| \leq C \cdot \left(|z_1| + \sum_{k=2}^{n} |z_k|^{l_k} \right)^{1+\delta}. \tag{2.6}$$

Nach Voraussetzung gilt $r(0, z') \geq 0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \cdot h(0, t^{1/l_2} z_2, \ldots, t^{1/l_n} z_n) \\ &= P(z') + \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \cdot R(0, t^{1/l_2} z_2, \ldots, t^{1/l_n} z_n) \\ &= P(z'), \end{aligned}$$

das Polynom P ist also ebenfalls nicht negativ. Es ist

$$P(z') = \sum_{(\alpha,\beta) \in E} c_{\alpha\beta} z'^{\alpha} \bar{z}'^{\beta} \quad \text{mit} \quad E = \{(\alpha, \beta) : w_L(\alpha, \beta) = 1\}, \tag{2.7}$$

wobei wir

$$w_L(\alpha,\beta) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k + \beta_k}{l_k}$$

gesetzt haben. Es sei $c_{\alpha 0} z'^{\alpha}$ mit $c_{\alpha 0} \neq 0$ ein reiner Term aus der Darstellung von P. Dabei kann ohne Einschränkung $\alpha_k \neq 0$ für alle $k = 2,\dots,n$ angenommen werden, sonst betrachen wir im folgenden die Einschränkung von P auf $\{z' : z_k = 0 \text{ falls } \alpha_k = 0\}$. Wir definieren für $k = 2,\dots,n$ und den k-ten Einheitsvektor e_k die positiven Polynome p_k durch

$$p_k : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto p_k(\lambda) := P(\lambda e_k) = \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in E \\ \alpha_k+\beta_k = l_k}} c_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha_k} \bar{\lambda}^{\beta_k}.$$

Wegen der Positivität gibt es einen Koeffizienten $c_{\alpha\beta} \neq 0$ mit $(\alpha,\beta) \in E, \alpha_k \neq 0, \beta_k \neq 0$ und $\alpha_k + \beta_k = l_k$. Für alle $(\alpha,\beta) \in E$ gilt außerdem $l_2 \leq \sum_{k=2}^{n} \alpha_k + \beta_k \leq l_n$. Damit gibt es $(\alpha',\beta'), (\alpha'',\beta'') \in E$ mit $c_{\alpha'\beta'} \neq 0, c_{\alpha''\beta''} \neq 0, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'' \neq 0$ und

$$|\alpha' + \beta'| \;\leq\; |\alpha| \;\leq\; |\alpha'' + \beta''|. \tag{2.8}$$

Zu jedem reinen Term $c_{\alpha 0} z'^{\alpha}$ von P gibt es also unreine Terme mit (2.8). Diese können durch biholomorphe Koordinatenwechsel jedoch nicht wegtransformiert werden. Wir benutzen dazu die von K. Diederich und G. Herbort [DH1] in einem Spezialfall angewandte Vorgehensweise und zeigen so, dass der Multityp hier mit dem linearen Multityp übereinstimmt. Es seien dazu $U = U(0), V = V(0) \subset \mathbb{C}^n$ offene Nullumgebungen und $F : U \to V$ ein lokaler Koordinatenwechsel, der ein ausgezeichnetes Gewicht $\Lambda = (1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ mit $\Lambda > L(\partial\Omega, 0)$ realisiert. Dann gilt

$$D^{\alpha} \bar{D}^{\beta} (r \circ F^{-1})(0) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } \alpha_1 = \beta_1 = 0\,, \quad w_{\Lambda}(\alpha,\beta) < 1.$$

Ist $F'(0) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, so ist $a_{1k} = 0$ für $k = 2,\dots,n$, denn sonst wäre $m_{\iota} = 1$ für ein $\iota \geq 2$ und damit $\Lambda \leq L(\partial\Omega, 0)$. Damit ist aber mit

$$F'(0)^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \cdots 0 \\ \star & \\ \vdots & \star \\ \star & \end{pmatrix}$$

auch die Matrix $(b_{ij})_{i,j=2}^{n}$ invertierbar und es gilt

$$r \circ F^{-1}(w) = \operatorname{Re} w_1 + P(F^{-1}(w)) + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Setzen wir $F^{-1}(w)$ in einen gewichteten Ausdruck $z'^{\alpha} \bar{z}'^{\beta}$ ein, so erhalten wir

$$(F^{-1}(w))'^{\alpha} (\overline{F^{-1}(w)})'^{\beta} = \prod_{k=2}^{n} \left(\sum_{j=2}^{n} b_{kj} w_j \right)^{\alpha_k} \left(\sum_{j=2}^{n} \bar{b}_{kj} \bar{w}_j \right)^{\beta_k} + \text{T.h.O.}$$

Für jede Permutation σ von $\{2,\dots,n\}$ taucht dabei der Term

$$T_{\sigma}(w) := \prod_{k=2}^{n} b_{k\sigma(k)}^{\alpha_k} \bar{b}_{k\sigma(k)}^{\beta_k} w_{\sigma(k)}^{\alpha_k} \bar{w}_{\sigma(k)}^{\beta_k}$$

auf. Da $F'(0)^{-1}$ invertierbar ist, gibt es jedoch mindestens eine Permutation σ mit $T_\sigma(w) \neq 0$. Damit gilt für (α, β) mit $c_{\alpha,\beta} \neq 0$ aus (2.7)

$$D^\alpha \bar{D}^\beta (r \circ F^{-1})(0) \neq 0.$$

Es sei j_0 der kleinste Index mit $\lambda_{j_0} > l_{j_0}$. Mit $w_\Lambda(\alpha, \beta) < w_L(\alpha, \beta) = 1$ erhalten wir einen Widerspruch. Also gilt $L(\partial\Omega, 0) = M(\partial\Omega, 0)$ und das Lemma ist bewiesen. □

Es lohnt sich, die Darstellung (2.4) der definierenden Funktion r in den den (linearen) Multityp realisierenden Koordinaten mit den Abschätzungen (2.5) und (2.6) noch etwas genauer zu betrachten. Wir zeigen

Lemma 2.4 *Es seien r und damit P wie in (2.4) mit den Abschätzungen (2.5) und (2.6) gegeben und $\Omega = \{r < 0\}$ sei lineal konvex. Dann ist P eine konvexe Funktion.*

Der Beweis benutzt die gleiche Strategie, mit der im allgemeinen pseudokonvexen Fall gezeigt wird, dass P plurisubharmonisch ist.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die reelle Hesse-Matrix von $P(z')$ nahe $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$ positiv semidefinit ist. Dazu definieren wir für $t > 0$

$$\begin{aligned} r_t(z) &:= \tfrac{1}{t} \cdot r(tz_1, t^{1/l_2} z_2, \ldots, t^{1/l_n} z_n) \\ &= \operatorname{Re} z_1 + P(z') + \tfrac{1}{t} \cdot R(t \operatorname{Im} z_1, t^{1/l_2} z_2, \ldots, t^{1/l_n} z_n). \end{aligned}$$

Da dieser Koordinatenwechsel linear ist, sind alle Gebiete $\Omega_t := \{r_t < 0\}$ lineal konvex nahe 0. Außerdem gilt

$$r_0(z) = \operatorname{Re} z_1 + P(z') = \lim_{t \to 0} r_t(z)$$

nahe 0 gleichmäßig. Es sei nun $z' \in U(0')$ beliebig vorgegeben. Mit $x_1 = x_1(t, z') := -P(z') - \frac{1}{t} \cdot R(0, t^{1/l_2} z_2, \ldots, t^{1/l_n} z_n)$ ist dann $q(t) := (x_1(t, z'), 0, z') \in \partial\Omega_t$. Zu beliebigem $\xi' \in \mathbb{C}^{n-1}$ sei nun weiter

$$\xi_1(t) := -\left(\frac{\partial r_t(q(t))}{\partial z_1} \right)^{-1} \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial r_t(q(t))}{\partial z_k} \cdot \xi_k.$$

Per constructionem gilt $\xi(t) := (\xi_1(t), \xi') \in T^{10}_{q(t)} \partial\Omega_t$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \to 0} \operatorname{Re} H_{r_t}(q(t), \xi(t)) + \mathcal{L}_{r_t}(q(t), \xi(t)) \\ &= \operatorname{Re} H_{r_0}(q(t), \xi(t)) + \mathcal{L}_{r_0}(q(t), \xi(t)) \\ &= \operatorname{Re} H_P(z', \xi') + \mathcal{L}_P(z', \xi'). \end{aligned}$$

Da $\xi' \in \mathbb{C}^{n-1}$ beliebig gewählt war, ist damit die reelle Hessematrix von $P(z')$ positiv semidefinit; d.h., P ist ein konvexes Polynom. □

Wir zeigen damit nun Theorem 2.2, wobei wir uns auf bekannte Ergebnisse für semireguläre Gebiete [DH2] bzw. den linear konvexen Fall [Y] zurückziehen.

Beweis von Theorem 2.2: Es sei ein C^∞-glattes, lineal konvexes Gebiet gegeben, ohne Einschränkung gelte $0 \in \partial\Omega$. Wir wählen die Koordinaten um 0 wieder so, dass der lineare Multityp $L(\partial\Omega, 0) = (1, l_2, \ldots, l_n)$ — und damit nach Theorem 2.1 auch der Multityp $M(\partial\Omega, 0) = (1, m_2, \ldots, m_n)$ — realisiert wird. Die definierende Funktion r ist dann von der Form (2.4) mit den Abschätzungen (2.5) und (2.6). Nach Lemma 2.4 ist das Gebiet $\Omega_0 = \{z : r_0(z) = \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\}$ linear konvex nahe 0 und nach [Y] gilt für $1 \leq q \leq n$

$$l_{n-q+1} \;=\; m_{n-q+1} \;=\; \Delta_q(\partial\Omega_0, 0). \tag{2.9}$$

Außerdem zeigen die Überlegungen im Beweis von Lemma 2.3, dass gilt

$$M(\partial\Omega, 0) \;=\; M(\partial\Omega_0, 0). \tag{2.10}$$

Ist nun Ω_0 in 0 von endlichem Typ, so ist Ω nach [DH2, Theorem 1.9] semiregulär und nach Definition gilt $m_{n-q+1} = \Delta_q(\partial\Omega, 0)$ für alle q. Ist andererseits $\Delta_q(\partial\Omega_0, 0) = +\infty$ für ein q, so gilt mit (2.9) und (2.10), sowie der allgemeinen Ungleichung (2.3)

$$+\infty \;=\; \Delta_q(\partial\Omega_0, 0) \;=\; m_{n-q+1} \;\leq\; \Delta_q(\partial\Omega, 0).$$

Also gilt auch in diesem Fall Gleichheit für alle q und das Theorem ist bewiesen. □

3 Lokale Geometrie lineal konvexer Ränder

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ beschränkt, glatt berandet und lineal konvex auf einer Umgebung U eines Randpunktes $p \in \partial\Omega$ von endlichem Typ. Nach einem linearen Koordinatenwechsel, der die lineale Konvexität erhält, sei

$$U \cap \partial\Omega = \{z \in U : \operatorname{Re} z_1 + h(\operatorname{Im} z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0\}.$$

Man sieht leicht, dass die Behnke-Peschl Bedingung (1.1) und die definierende Gleichung des holomorphen Tangentialraumes an $\partial\Omega$ von $\operatorname{Re} z_1$ unabhängig sind. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Niveaumengen $\{z \in U : r(z) = \delta\}$ mit $|\delta| < \delta_0, \delta_0 > 0$ klein, alle lineal konvex sind. Wir wählen weiter $m \in \mathbb{N}$ nach (2.2) so, dass der 1-Typ jedes Punktes $q \in U$ kleiner gleich m ist.

Im folgenden seien stets $q \in U \cap \Omega$ mit $|r(q)| < \delta_0/2$, $v \in S^{n-1}$ ein Einheitsvektor und $\delta_0/2 > \delta > 0$. Hängen A und B von diesen drei Parametern ab und gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass $A(q, v, \delta) \leq c \cdot B(q, v, \delta)$ für alle q, v, δ gilt, so schreiben wir abkürzend $A \lesssim B$. $A \gtrsim B$ bzw. $A \approx B$ haben dann die offensichtliche Bedeutung. Wir definieren nun durch

$$\tau(q, v, \delta) := \sup\{\rho > 0 : r(q + \lambda v) - r(q) < \delta \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } |\lambda| < \rho\}$$

den Randabstand des Punktes q zu $\partial\Omega_{q,\delta} := \{z : r(z) = r(q) + \delta\}$ gemessen entlang der von v aufgespannten komplexen Geraden. Da alle Punkte $q \in \partial\Omega_{q,0}$ von endlichem Typ sind, sind diese Radien für $\delta > 0$ klein genug endlich. In Abhängigkeit von q und δ wählen wir nun in Analogie zu T. Hefer für den linear konvexen Fall [Hf] induktiv und durch einen linearen Koordinatenwechsel, der q in den Nullpunkt überführt, unsere Koordinaten wie folgt: Zunächst seien

$$e_1 := \frac{\nabla r(q)}{|\nabla r(q)|} \quad \text{und} \quad \tau_1(q, \delta) := \tau(q, e_1, \delta).$$

$p^1 \in \partial\Omega_{q,\delta}$ sei ein Punkt auf der Geraden $z_1 : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto q + \lambda e_1$, der $\tau_1(q,\delta)$ realisiert. Dabei sei die Gerade so parametrisiert, dass $z_1(0) = q$ gilt und p^1 auf der positiven $\operatorname{Re} z_1$-Achse liegt, also $p^1 = q + \tau_1(q,\delta)e_1$. Nach Wahl der z_1-Achse gilt $\frac{\partial r(q)}{\partial x_1} = 1$ und damit $\frac{\partial r(z)}{\partial x_1} \approx 1$ für alle $z \in U$. Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen sieht man dann, dass

$$\tau_1(q,\delta) \approx \operatorname{dist}(q, \partial\Omega_{q,\delta}) \approx \delta \tag{3.1}$$

mit von q und δ unabhängigen Konstanten gilt. Es seien nun paarweise senkrechte Vektoren $e_1, \ldots, e_{k-1} \in S^{n-1}$ mit $\tau_i(q,\delta) := \tau(q, e_i, \delta)$ und realisierenden Punkten $p^i \in \partial\Omega_{q,\delta}$ so konstruiert, dass jeweils $z_i(0) = q$ gilt und die p^i auf den positiven $\operatorname{Re} z_i$-Achsen liegen. Es sei dann $e_k \in \langle e_1, \ldots, e_{k-1}\rangle^\perp$ ein Einheitsvektor, der $\tau(q, v, \delta)$ minimiert, $\tau_k(q,\delta) := \tau(q, e_k, \delta)$ und $p^k \in \partial\Omega_{q,\delta}$ ein Punkt, in dem $\tau_k(q,\delta)$ realisiert wird. Dabei sei wieder die zugehörige komplexe Gerade z_k von q nach p^k so parametrisiert, dass p^k auf der positiven $\operatorname{Re} z_k$-Achse liegt und $z_k(0) = q$ gilt. Insbesondere gelten für $k \geq 2$

$$\tau_k(q,\delta) = \operatorname{dist}(q, \partial\Omega_{q,\delta} \cap \{z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0\})$$

und $\tau_1(q,\delta) \lesssim \tau_2(q,\delta) \leq \cdots \leq \tau_n(q,\delta)$. Wir nennen $(e_1, \ldots, e_n)$ eine δ-*minimal Basis* in q und $z_1, \ldots, z_n$ die zugehörigen Koordinaten. Aus der orthogonalen und minimalen Wahl der Achsen $z_k = x_k + iy_k$ bzw. ihrer Parametrisierung folgt sofort, dass gilt

$$\frac{\partial r(p^k)}{\partial z_j} = 0 \text{ und } \frac{\partial r(p^k)}{\partial y_k} = 0 \qquad \text{für} \qquad j > k \geq 2. \tag{3.2}$$

Mit Hilfe der Polyradien $\tau_k(q,\delta)$ definieren wir nun für $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$ Polyzylinder $P_\delta(q)$ und deren Multiplikation mit positiven Konstanten $c > 0$ durch

$$c \cdot P_\delta(q) \quad := \quad \{z : |z_k - q_k| < c \cdot \tau_k(q,\delta) \text{ für alle } k = 1, \ldots, n\}. \tag{3.3}$$

Wir zeigen zunächst das fundamentale

Lemma 3.1 *Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $q \in U \cap \Omega$ und $\delta_0/2 > \delta > 0$ gilt*

$$c \cdot P_\delta(q) \subset \Omega_{q,\delta}. \tag{3.4}$$

Beweis: Im linear konvexen Fall gilt (3.4) mit $c := 1/4^n$. Wir zeigen, dass dieses c auch hier die gewünschte Eigenschaft besitzt und arbeiten in den zu q und δ assoziierten Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ der δ-minimal Basis $e_1, \ldots, e_n$. Dazu sei ein beliebiger Punkt $Q \in \partial\Omega_{q,\delta} \cap U \cap P_\delta(q)$ gegeben. Ist $Q_k = x_k + iy_k$ für $k = 1, \ldots, n$, so definieren wir

$$a_k := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x_k \geq 0 \\ -1 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_k := \begin{cases} 1 & \text{, falls } y_k \geq 0 \\ -1 & \text{, sonst} \end{cases},$$

sowie

$$h(z) \quad := \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{a_k z_k}{\tau_k(q,\delta)} + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \frac{b_k z_k}{\tau_k(q,\delta)}.$$

Es gilt dann $h(z) < 1$ für alle $z \in c \cdot P_\delta(q)$. Wir nehmen an, es gelte auch $h(Q) < 1$ und betrachten eine beliebige komplexe Hyperebene $\mathcal{H}$ durch Q. Dann gibt es ein

$X \in \mathbb{C}^n, X \neq 0$ mit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, X\rangle = \langle Q, X\rangle\}$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $X_k \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt, denn sonst betrachten wir im folgenden $\tilde{Q} \in \mathcal{H} \cap P_\delta(q)$ auf $U \cap \{z : z_k = 0 \text{ falls } X_k = 0\}$ mit

$$\tilde{Q}_k \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{, falls } X_k = 0 \\ Q_k & \text{, falls } X_k \neq 0 \end{cases} .$$

Die Ebene $\mathcal{H}$ ist komplex $(n-1)$-dimensional und wegen $X_k \neq 0$ für alle k schneidet sie jede der Achsen z_k. Es seien $z^k = \lambda_k e_k, \lambda_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ldots, n$ die Schnittpunkte von $\mathcal{H}$ mit den Koordinatenachsen. Weiter gelte

$$|z^k| \;\geq\; \tau_k(q,\delta) \quad \text{für alle} \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Die Hyperebene lässt sich dann auch darstellen durch

$$\mathcal{H} \;=\; \left\{ z = z^1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha'_k (z^1 - z^k) : \alpha'_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Wegen $Q \in \mathcal{H}$ ist $Q = z^1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k (z^1 - z^k)$ mit komplexen Zahlen $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, woraus wir für die Koordinaten von Q

$$Q_1 \;=\; \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right) \cdot z_1^1 \quad \text{und} \quad Q_k \;=\; -\alpha_k \cdot z_k^k, \quad k = 2, \ldots, n \tag{3.6}$$

erhalten. $h(Q) < 1$ impliziert $1 > h(Q) = \sum_1^n \frac{|x_k|+|y_k|}{\tau_k(q,\delta)} \geq \sum_1^n \frac{|Q_k|}{\tau_k(q,\delta)}$, also

$$\frac{|Q_1|}{\tau_1(q,\delta)} \;<\; 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{|Q_k|}{\tau_k(q,\delta)} \;\leq\; 1 - \sum_{k=2}^{n} |\alpha_k| \tag{3.7}$$

mit (3.5) und (3.6). Mit (3.6) erhalten wir aber auch

$$|Q_1| \;=\; \left|1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right| \cdot |z^1| \;\geq\; \left|1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right| \cdot \tau_1(q,\delta). \tag{3.8}$$

(3.7) und (3.8) ergeben nun wegen $1 - \sum_2^n |\alpha_k| > |1 + \sum_2^n \alpha_k| \geq 1 - \sum_2^n |\alpha_k|$ einen Widerspruch. Die Annahme (3.5) ist also falsch, es gibt einen Schnittpunkt z^k der komplexen Hyperebene $\mathcal{H}$ mit einer Koordinatenachse, für den $|z^k| < \tau_k(q,\delta)$ gilt. Damit ist $z^k \in \Omega_{q,\delta}$. Wählen wir als Hyperebene nun die komplexe Tangentialebene an $\partial\Omega_{q,\delta}$ in Q, so widerspricht dies der linealen Konvexität von $\partial\Omega_{q,\delta}$ in Q. Es gilt also $h(Q) \geq 1$ und das Lemma ist bewiesen. □

Mit Hilfe dieses Lemmas lassen sich nun nicht nur die Ableitungen der definierenden Funktion r in q bis zur Ordnung m durch die Polyradien τ_k abschätzen, sondern auch die Ableitungen in allen anderen Punkten des Polyzylinders.

Lemma 3.2 *Es sei $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$ klein genug. Dann gilt bzgl. der zu q und δ assoziierten Koordinaten für alle $z \in \bar{P}_\delta(q)$*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha+\beta|} r(z)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right| \;\lesssim\; \frac{\delta}{\prod_{k=1}^n \tau_k(q,\delta)^{\alpha_k+\beta_k}} \tag{3.9}$$

für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $1 \leq |\alpha+\beta| \leq m$.

Beweis: Nach Wahl der Koordinaten $z = (z_1, z')$ bzgl. q und δ besitzt r eine Darstellung der Gestalt

$$r(z) - r(q) \; = \; \operatorname{Re} z_1 + h_1(z') + h_2(\operatorname{Im} z_1, z') \tag{3.10}$$

mit einer nicht negativen Funktion h_1 (aufgrund der linealen Konvexität von $\partial\Omega_{q,0}$) und einer Funktion h_2, die einer Abschätzung der Art $|h_2(\operatorname{Im} z_1, z')| \lesssim |\operatorname{Im} z_1|$ genügt. Für $z \in P_\delta(q)$ folgt mit (3.1)

$$r(z) - r(q) \; \geq \; \operatorname{Re} z_1 + 0 - C|\operatorname{Im} z_1| \; \gtrsim \; -|z_1| \; \gtrsim \; -\tau_1(q,\delta) \; \approx \; -\delta. \tag{3.11}$$

Mit Lemma 3.1 gilt also $|r(z) - r(q)| \lesssim \delta$ für alle $z \in c \cdot P_\delta(q)$. Der Restterm R der Taylorentwicklung von r um q,

$$r(z) - r(q) \; = \; \sum_{|\alpha|+|\beta|=1}^{m} c_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + R(z),$$

lässt sich gleichmäßig durch $C \cdot |z|^{m+1}$ abschätzen. Da die Kontaktordnung jeder komplexen Geraden an $\partial\Omega_{q,0}$ in q höchstens m ist, folgt $\tau_k(q,\delta)^{m+1} \lesssim \delta$ für alle k: Andernfalls gäbe es für jedes $C > 0$ einen Punkt $q \in U \cap \Omega$ und ein $\delta > 0$ mit $\tau_k(q,\delta)^{m+1} \geq C \cdot \delta$. Es gilt jedoch $\delta \geq r(q + \lambda e_k) - r(q)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < \tau_k(q,\delta)$, also $\tau_k(q,\delta)^{m+1} \geq C \cdot (r(q + \lambda e_k) - r(q))$ für alle $|\lambda| < \tau_k(q,\delta)$. Das bedeutet, dass die komplexe Gerade $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto q + \lambda e_k$ mit $\partial\Omega_{q,0}$ eine Kontaktordnung $\geq m + 1$ hat, was durch die Wahl von m aber ausgeschlossen ist.
Wir erhalten also

$$\left| \sum_{|\alpha|+|\beta|=1}^{m} c_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta \right| \lesssim \delta + C \cdot \tau_n(q,\delta)^{m+1} \lesssim \delta \quad \text{für alle } z \in c \cdot P_\delta(q). \tag{3.12}$$

Auf dem endlichdimensionalen Vektorraum aller Polynome bis zum Grad m sind alle Normen äquivalent, d.h. ist $\tau(q,\delta)^\alpha := \prod_{k=1}^n \tau_k(q,\delta)^{\alpha_k}$ und $\Delta_1(0) \subset \mathbb{C}^n$ der Einheitspolyzylinder, so gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \sup_{z \in c \cdot P_\delta(q)} \left| \sum_{|\alpha|+|\beta|=1}^{m} c_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta \right| \; &= \; \sup_{z \in \Delta_1(0)} \left| \sum_{|\alpha|+|\beta|=1}^{m} c_{\alpha\beta} c^{|\alpha+\beta|} \tau(q,\delta)^{\alpha+\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta \right| \\ &\approx \; \sum_{|\alpha|+|\beta|=1}^{m} |c_{\alpha\beta}| \tau(q,\delta)^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Aus (3.12) und (3.13) folgt die Behauptung für $z = q$. Es sei nun $z \in \bar{P}_\delta(q)$ beliebig. Für einen Multiindex α sei D^α ein Differentialoperator bzgl. der assoziierten Koordinaten. Ist $|\beta| \leq m$, so erhalten wir aus der Taylorformel unter Benutzung von (3.9) für $z = q$

$$\begin{aligned} |D^\beta r(z) - D^\beta r(q)| \; &\lesssim \; \sum_{|\alpha|=1}^{m-|\beta|} |D^\alpha D^\beta r(q)| \cdot \tau(q,\delta)^\alpha + C\tau_n(q,\delta)^{m-|\beta|+1} \\ &\lesssim \; \sum_{|\alpha|=1}^{m-|\beta|} \frac{\delta}{\tau(q,\delta)^{\alpha+\beta}} \cdot \tau(q,\delta)^\alpha + C\tau_n(q,\delta)^{m-|\beta|+1} \\ &\lesssim \; \frac{\delta}{\tau(q,\delta)^\beta}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt nun die Behauptung. □

Wir benutzen die Abschätzungen aus Lemma 3.2, um die Ableitungen 1. Ordnung in den Punkten p^k weiter zu quantifizieren (vgl. Lemma 3.4). Dazu benötigen wir

Lemma 3.3 *Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $q \in U \cap \Omega$ gilt $\Gamma_q \cap \Omega_{q,0} \cap U = \emptyset$ mit*

$$\Gamma_q \;:=\; \{z \in \mathbb{C}^n : \gamma_q(z) := \operatorname{Re}[\partial r(q) \cdot (z-q)] - C \cdot |\operatorname{Im} \partial r(q) \cdot (z-q)| \geq 0\} \tag{3.15}$$

Beweis: Wir wählen einen linearen Koordinatenwechsel, der q in den Nullpunkt überführt und erhalten in den Koordinaten $z = (z_1, z')$ eine Darstellung wie in (3.10) mit einer Funktion $h_1 \geq 0$ und einer Funktion h_2 mit $|h_2(\operatorname{Im} z_1, z')| \leq A \cdot |\operatorname{Im} z_1|$ für alle $z \in U \cap \Omega$. Dabei kann die Konstante $A > 0$ von q unabhängig gewählt werden. Für $z \in \Omega_{q,0} \cap U$ gilt dann $0 > r(z) - r(q) \geq \operatorname{Re} z_1 - A \cdot |\operatorname{Im} z_1|$. Nach Wahl der Koordinaten ist $\partial r(q) = (1, 0, \ldots, 0)$; damit ist $\gamma_q(z) = \operatorname{Re} z_1 - C \cdot |\operatorname{Im} z_1|$. Wählen wir $C \geq A$, folgt $\gamma_q(z) \leq \operatorname{Re} z_1 - A \cdot |\operatorname{Im} z_1| < 0$ für alle $z \in \Omega_{q,0} \cap U$ und so $\Gamma_q \cap \Omega_{q,0} \cap U = \emptyset$. □

Lemma 3.4 *Es sei $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$. Man betrachte die assoziierten Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$ bzgl. q und δ. Es gilt:*

a) Für $1 \leq k \leq n$ ist

$$\left|\frac{\partial r(p^k)}{\partial z_k}\right| \approx \frac{\tau_1(q,\delta)}{\tau_k(q,\delta)}.$$

b) Für $j < k$ ist

$$\left|\frac{\partial r(p^k)}{\partial z_j}\right| \lesssim \frac{\tau_1(q,\delta)}{\tau_j(q,\delta)}.$$

Beweis: Nach Wahl der z_1-Achse, wegen der Glattheit von r und nach eventueller Verkleinerung von U gilt $\partial r(z)/\partial x_1 \approx 1$ für alle $z \in U \cap \Omega$, insbesondere also für die Punkte p^k. Es gilt aber auch $\partial r(q)/\partial y_1 = 0$ und daher ohne Einschränkung $|\partial r(z)/\partial y_1| \lesssim \frac{1}{2}$ für alle $z \in U \cap \Omega$. Es folgen die Abschätzungen $|\partial r(p^k)/\partial z_1| \approx 1$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Wir betrachten nun die Kegel Γ_{p^k} aus (3.15) für $k \geq 2$. Es gilt $\operatorname{Im} \partial r(p^k) \cdot p^k = 0$ wegen (3.2). Setzen wir

$$\alpha_k \;:=\; \tau_1(q,\delta) \cdot \overline{\frac{\partial r(p^k)}{\partial z_1}},$$

so gilt $|\alpha_k| \approx \tau_1(q,\delta)$. Für ein geeignetes (und unabhängiges) $c > 0$ gilt also $w^k \in \Omega_{q,\delta}$ mit $w^k := (c\alpha_k, 0, \ldots, 0)$ und es ist $\operatorname{Im} \alpha_k \cdot \partial r(p^k)/\partial z_1 = 0$. Nach Lemma 3.3 erhalten wir $\gamma_{p^k}(w^k) \leq 0$, was wir zu

$$\operatorname{Re} \frac{\partial r(p^k)}{\partial z_1} \cdot c\alpha_k \;\leq\; \operatorname{Re} \frac{\partial r(p^k)}{\partial z_k} \cdot \tau_k(q,\delta) \tag{3.16}$$

umformen. Wegen $\operatorname{Re} \frac{\partial r(p^k)}{\partial z_1} \cdot c\alpha_k \approx |\frac{\partial r(p^k)}{\partial z_1}|^2 \cdot \tau_1(q,\delta) \gtrsim \tau_1(q,\delta)$ folgt damit die untere Abschätzung aus a) auch für $2 \leq k \leq n$. Die oberen Abschätzungen der Ableitungen folgen aus Lemma 3.2. □

Wie im linear konvexen Fall können die Radien $\tau(q, v, \delta)$ durch die Standardradien $\tau_k(q,\delta)$ kontrolliert werden. In Anlehnung an J. McNeal [McN2] und den Beweis des entsprechenden Satzes für linear konvexe Gebiete zeigen wir

Lemma 3.5 *Es sei $q \in U \cap \Omega$ und $v = \sum_1^n v_k e_k$ ein Einheitsvektor, dargestellt in den zu q und $\delta > 0$ gehörigen Koordinaten. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|v_k|}{\tau_k(q,\delta)} \approx \frac{1}{\tau(q,v,\delta)}, \tag{3.17}$$

wobei die Konstanten in $\approx$ unabhängig von q, δ und v gewählt werden können.

Beweis: Es sei $Q = \lambda v \in \partial\Omega_{q,\delta}$ ein Punkt mit $|\lambda| = \tau(q,v,\delta)$, der den Radius $\tau(q,v,\delta)$ realisiert. Wir wählen einen Winkel $\theta_1 \in \mathbb{R}$, so dass $e^{i\theta_1} Q_1 = |Q_1| \in \mathbb{R}_0^+$ gilt. Mit (3.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau_1(q,\delta) &\approx \delta \\ &\gtrsim r(e^{i\theta_1}Q) - r(q) \\ &\approx \operatorname{Re} e^{i\theta_1} Q_1 + h_1(e^{i\theta_1}Q') + h_2(0, e^{i\theta}Q') \\ &\gtrsim |Q_1|. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nach (3.15) gilt

$$\operatorname{Re}\left[\partial r(p^2)\cdot(z-p^2)\right] \lesssim \left|\operatorname{Im}\left[\partial r(p^2)\cdot(z-p^2)\right]\right| \qquad \text{für alle } z \in \bar{\Omega}_{q,\delta} \cap U. \tag{3.19}$$

Wir wählen $\theta_2 \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} e^{i\theta_2} Q_2 = |Q_2|$. Es ist dann $\operatorname{Im} e^{i\theta_2} Q_2 \cdot \frac{\partial r(p^2)}{\partial z_2} = 0$ und mit (3.19) folgt

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial r(p^2)}{\partial z_1} e^{i\theta_2} Q_1 + \frac{\partial r(p^2)}{\partial z_2} e^{i\theta_2} Q_2\right] - \tau_2(q,\delta)\left|\frac{\partial r(p^2)}{\partial z_2}\right| \lesssim \tau_2(q,\delta)\left|\frac{\partial r(p^2)}{\partial z_2}\right| + |Q_1|\left|\frac{\partial r(p^2)}{\partial z_1}\right|,$$

also

$$|Q_2| \lesssim \left|\frac{\partial r(p^2)}{\partial z_2}\right|^{-1} \cdot \left(\tau_2(q,\delta)\cdot\left|\frac{\partial r(p^2)}{\partial z_2}\right| + |Q_1|\cdot\left|\frac{\partial r(p^2)}{\partial z_1}\right|\right),$$

woraus $|Q_2| \lesssim \tau_2(q,\delta)$ mit (3.18) sowie den Abschätzungen aus Lemma 3.4 folgt. Wir können analog fortfahren: Wählen wir $\theta_k \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} e^{i\theta_k} Q_k = |Q_k|$ für $k = 3, \ldots, n$, so gilt jeweils $\operatorname{Im} e^{i\theta_k} Q_k \cdot \frac{\partial r(p^k)}{\partial z_k} = 0$. Mit den vorher erzielten Abschätzungen und Lemma 3.4 folgt $|Q_k| \lesssim \tau_k(q,\delta)$ induktiv auch für $k = 3, \ldots, n$. Damit sind

$$|Q_k| = \tau(q,v,\delta)\cdot|v_k| \lesssim \tau_k(q,\delta) \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n,$$

womit wir die Abschätzung $\lesssim$ in (3.17) erhalten. Im Beweis von Lemma 3.1 haben wir bereits gesehen, dass für $Q = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \partial\Omega_{q,\delta}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|Q_k|}{\tau_k(q,\delta)} \gtrsim \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k| + |y_k|}{\tau_k(q,\delta)} \geq 1,$$

womit auch die andere Abschätzung folgt. □

Die Polyzylinder $P_\delta(q)$ können also in dem Sinne als maximal angesehen werden, dass alle Radien $\tau(q,v,\delta)$ über ihre Achsen kontrolliert werden. Dies zeigt auch das folgende Korollar, dessen Beweis sich unmittelbar aus Lemma 3.5 ergibt.

Korollar 3.6 *Es seien $q \in \Omega \cap U, \delta > 0$ und v ein Einheitsvektor. Dann gilt mit unabhängigen Konstanten*

a) Ist $z = q + \lambda v \in P_\delta(q)$, so ist $|\lambda| \lesssim \tau(q, v, \delta)$

b) $\{z = q + \lambda v : |\lambda| \leq \tau(q, v, \delta)\} \subset C \cdot P_\delta(q)$.

Beweis: Für $z = q + \lambda v \in P_\delta(q)$ gilt $|z_k| = |\lambda v_k| \leq \tau_k(q, \delta)$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Damit ist

$$1 \gtrsim |\lambda| \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{|v_k|}{\tau_k(q, \delta)} \gtrsim \frac{|\lambda|}{\tau(q, v, \delta)}$$

und a) folgt. Andererseits gilt nach Lemma 3.5 stets $|v_k| \cdot \tau(q, v, \delta) \lesssim \tau_k(q, \delta)$, so dass für $z = q + \lambda v$ mit $|\lambda| \leq \tau(q, v, \delta)$ wegen $|z_k| \leq |v_k| \cdot \tau(q, v, \delta)$ auch b) gilt. □

In Analogie zu Bruna, Charpentier und Dupain [BCD] definieren wir mit $\delta_q := |r(q)|$

$$\kappa(q, v, \delta) := \frac{\delta_q}{\tau(q, v, \delta)} \quad \text{für } v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \tag{3.20}$$

und $\kappa(q, 0, \delta) := 0$. Zeigt v dabei in die Normalenrichtung in q, so ist $\kappa(q, v, \delta_q)$ mit $|v|$ vergleichbar, womit sich die Rolle der normierenden Konstanten δ_q in der Definition von κ erklärt. Mit Hilfe von $\kappa(q, v, \delta)$ lässt sich die Aussage von Lemma 3.5 durch

$$\sum_{k=1}^{n} |v_k| \cdot \kappa(q, e_k, \delta) \approx \kappa(q, v, \delta) \tag{3.21}$$

darstellen. Damit ist die Bezeichnung von $e_1, \ldots, e_n$ als δ-Extremalbasis im linear konvexen Fall gerechtfertigt.

Während κ im linear konvexen Fall die Eigenschaften einer Norm erfüllt, müssen wir hier bei der Dreiecksungleichung die Multiplikation mit einer universellen Konstanten zulassen. $\kappa(q, \cdot, \delta)$ ist also eine Pseudonorm auf $\mathbb{C}^n$.

Lemma 3.7 *Es seien $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$*

a) $\kappa(q, v, \delta) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

b) $\kappa(q, \lambda \cdot v, \delta) = |\lambda| \cdot \kappa(q, v, \delta)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$

c) $\kappa(q, v + w, \delta) \lesssim \kappa(q, v, \delta) + \kappa(q, w, \delta)$

Beweis: a) ist trivial, b) folgt unmittelbar aus der Definition der Radien $\tau(q, v, \delta)$. Weiter impliziert b), dass (3.21) für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt. Damit erhalten wir c). □

Zu $q \in U \cap \Omega$ und einem Vektor $v \in S^{n-1}$ sei die komplexe Gerade $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto q + \lambda v$ nun so parametrisiert, dass ein Punkt Q, in dem $\tau(q, v, \delta)$ realisiert wird, auf der positiven $\operatorname{Re} \lambda$-Achse liegt. Es ist dann

$$\varphi(\lambda) := r(q + \lambda v) - r(q) = \sum_{j+k=1}^{m} a_{jk}(q, v) \lambda^j \bar{\lambda}^k + R(\lambda) \tag{3.22}$$

mit $|R(\lambda)| \lesssim |\lambda|^{m+1}$ und

$$a_{jk}(q,v) \;=\; \frac{\partial^{j+k} r(q+\lambda v)}{\partial\lambda^j \partial\bar{\lambda}^k}\bigg|_{\lambda=0} \;=\; \sum_{|\alpha|=j,|\beta|=k} \frac{\partial^{j+k} r(q)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} v^\alpha \bar{v}^\beta \tag{3.23}$$

mit $v^\alpha := v_1^{\alpha_1}\cdots v_n^{\alpha_n}$. Wir schreiben wieder $\tau(q,\delta)^\alpha = \prod_{k=1}^n \tau_k(q,\delta)^{\alpha_k}$ und $|v|^\alpha := |v_1|^{\alpha_1}\cdots|v_n|^{\alpha_n}$ und zeigen

Korollar 3.8 *Für alle $q \in U \cap \Omega, v \in S^{n-1}, \delta > 0$ und j,k mit $1 \le j+k \le m$ gilt*

$$|a_{jk}(q,v)| \;\lesssim\; \frac{\delta}{\tau(q,v,\delta)^{j+k}}$$

Beweis: Mit Lemma 3.2 und Lemma 3.5 erhalten wir

$$|a_{jk}(q,v)| \lesssim \delta \cdot \sum_{|\alpha|=j,|\beta|=k} \left(\frac{|v|}{\tau(q,\delta)}\right)^{\alpha+\beta} \lesssim \delta \cdot \sum_{|\alpha|=j,|\beta|=k} \frac{1}{\tau(q,v,\delta)^{j+k}}$$

und so die Behauptung. □

Nach Wahl von m gibt es außerdem ein $\eta > 0$ mit

$$\sum_{j+k=1}^{m} |a_{jk}(q,v)| \;\ge\; \eta \tag{3.24}$$

für alle $q \in U \cap \Omega$ und $v \in S^{n-1}$. Damit gilt nach der Darstellung (3.22)

$$\begin{aligned} \delta &= \varphi(\tau(q,v,\delta)) \\ &\le \sum_{j+k=1}^{m} |a_{jk}(q,v)| \cdot \tau(q,v,\delta)^{j+k} + C \cdot \tau(q,v,\delta)^{m+1} \\ &\lesssim \sum_{j+k=1}^{m} |a_{jk}(q,v)| \cdot \tau(q,v,\delta)^{j+k}. \end{aligned}$$

Dabei wurde der Term $C \cdot \tau(q,v,\delta)^{m+1}$ mit (3.24) abgeschätzt:

$$C \cdot \tau(q,v,\delta)^{m+1} \le \frac{C}{\eta} \cdot \sum_{j+k=1}^{m} |a_{jk}(q,v)|\tau(q,v,\delta)^{m+1} \lesssim \sum_{j+k=1}^{m} |a_{jk}(q,v)|\tau(q,v,\delta)^{j+k}.$$

Zusammen mit Korollar 3.8 haben wir also gezeigt:

Lemma 3.9 *Es gibt unabhängige Konstanten, so dass für jedes $q \in U \cap \Omega$, jeden Einheitsvektor v und $\delta > 0$ mit der Darstellung (3.22) gilt*

$$\sum_{j+k=1}^{m} |a_{jk}(q,v)| \cdot \tau(q,v,\delta)^{j+k} \;\approx\; \delta.$$

Ist also $v \in T_q^{10}\partial\Omega_{q,0}$ ein Tangentialvektor in q, so folgt $\delta^{1/2} \lesssim \tau(q,v,\delta) \lesssim \delta^{1/m}$.

Definieren wir für $\nu = 1, \dots, m$ mit $a_\nu(q,v) := \max_{j+k=\nu} |a_{jk}(q,v)|$ in Analogie zu [McN2]

$$\sigma(q,v,\delta) \;:=\; \min\left\{ \left(\frac{\delta}{a_\nu(q,v)}\right)^{1/\nu} : 1 \le \nu \le m \right\},$$

so erhalten wir

Lemma 3.10 *Für $q \in U \cap \Omega, v \in S^{n-1}$ und $\delta > 0$ gilt $\tau(q,v,\delta) \approx \sigma(q,v,\delta)$.*

Beweis: Die Beziehung $\lesssim$ folgt aus Korallar 3.8. Für die umgekehrte Relation bemerken wir, dass nach der Definition von $\sigma(q,v,\delta)$

$$\sum_{j+k=1}^{m} |a_{jk}(q,v)| \cdot \sigma(q,v,\delta)^{j+k} \;\lesssim\; \delta$$

gilt und da das Polynom $t \mapsto \sum_{j+k} |a_{jk}(q,v)| \cdot t^{j+k}$ für $t \geq 0$ monoton wachsend ist, folgt die Behauptung mit Lemma 3.9. □

Als Konsequenzen halten wir fest

Korollar 3.11 *Sei $q \in U \cap \Omega$ und $v \in T_q^{10}\partial\Omega_{q,0}$ ein tangentialer Einheitsvektor. Sind $\delta > \delta' > 0$, so gilt*

$$\left(\tfrac{\delta'}{\delta}\right)^{1/2} \cdot \tau(q,v,\delta) \;\lesssim\; \tau(q,v,\delta') \;\lesssim\; \left(\tfrac{\delta'}{\delta}\right)^{1/m} \cdot \tau(q,v,\delta).$$

Beweis: Wir wählen ν' mit $\tau(q,v,\delta') \approx (\delta'/a_{\nu'}(q,v))^{1/\nu'}$. Es folgt

$$\tau(q,v,\delta') \;\approx\; \left(\tfrac{\delta'}{\delta}\right)^{1/\nu'} \left(\tfrac{\delta}{a_{\nu'}(q,v)}\right)^{1/\nu'} \;\gtrsim\; \left(\tfrac{\delta'}{\delta}\right)^{1/2} \cdot \tau(q,v,\delta)$$

und analog die andere Abschätzung. □

Korollar 3.12 *Für jedes $c > 0$ gibt es Konstanten $c', c'' > 0$, die nicht von $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$ abhängen, mit $c' \cdot P_\delta(q) \subset P_{c\delta}(q) \subset c'' \cdot P_\delta(q)$.*

Beweis: Dies ergibt sich aus Korollar 3.11. □

Wir nutzen die äquivalente Darstellung der Radien, um – in Analogie zu J. McNeal – zu zeigen, dass sich die Abstände $\tau(z,v,\delta)$ für $z \in P_\delta(q)$ nicht unkontrolliert ändern.

Lemma 3.13 *Es seien $q^1, q^2 \in U \cap \Omega, \delta > 0$ und es gelte $q^2 \in P_\delta(q^1)$. Dann gilt für jedes $v \in S^{n-1}$*

$$\tau(q^1,v,\delta) \;\approx\; \tau(q^2,v,\delta),$$

wobei die Konstanten von q^1, q^2, v und δ unabhängig sind.

Beweis: Nach Lemma 3.2 und Lemma 3.5 gilt mit (3.23) und den dort eingeführten Notationen

$$\begin{aligned} |a_{jk}(q^2,v)| \;&\lesssim\; \sum_{|\alpha|=j,|\beta|=k} \left|\frac{\partial^{j+k} r(q^2)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right| \cdot |v|^{\alpha+\beta} \\ &\lesssim\; \delta \cdot \sum_{|\alpha|=j,|\beta|=k} \left(\frac{|v|}{\tau(q^1,\delta)}\right)^{\alpha+\beta} \;\lesssim\; \frac{\delta}{\tau(q^1,v,\delta)^{j+k}}. \end{aligned}$$

Damit ist $\tau(q^2, v, \delta) \approx \sigma(q^2, v, \delta) \gtrsim \tau(q^1, v, \delta)$. Für die umgekehrte Ungleichung erhalten wir für $q^2 \in c \cdot P_\delta(q^1)$ in Analogie zu (3.14) aus dem Beweis von Lemma 3.2

$$|D^\beta r(q^2) - D^\beta r(q^1)| \lesssim \frac{c\delta}{\tau(q^1, \delta)^\beta}.$$

Ist nun ν_0 mit $a_{\nu_0}(q^1, v) \gtrsim \delta/\tau(q^1, v, \delta)^{\nu_0}$ gewählt, so folgt

$$\begin{aligned} a_{\nu_0}(q^2, v) &\gtrsim \sum_{j+k=\nu_0} (|a_{jk}(q^1, v)| - |a_{jk}(q^2, v) - a_{jk}(q^1, v)|) \\ &\gtrsim \frac{\delta}{\tau(q^1, v, \delta)^{\nu_0}} - \sum_{|\alpha|+|\beta|=\nu_0} c\delta \cdot \left(\frac{|v|}{\tau(q^1, \delta)}\right)^{\alpha+\beta} \\ &\gtrsim \frac{\delta}{\tau(q^1, v, \delta)^{\nu_0}}, \end{aligned}$$

nach Lemma 3.5, falls c klein genug gewählt wurde. Damit ist

$$\sigma(q^2, v, \delta) \lesssim \tau(q^1, v, \delta) \quad \text{für} \quad q^2 \in c \cdot P_\delta(q^1).$$

Zu diesem c wählen wir gemäß Korollar 3.12 ein $c_1 > 0$ mit $P_{c_1\delta}(q) \subset c \cdot P_\delta(q)$ für alle $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$. Im allgemeinen Fall $q^2 \in P_\delta(q^1)$ setzen wir dann $\delta' = \delta/c_1$. Damit ist $q^2 \in P_{c_1\delta'}(q^1) \subset c \cdot P_{\delta'}(q^1)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sigma(q^2, v, \delta) &\lesssim c_1^{1/m} \sigma(q^2, v, \delta') &&\lesssim \tau(q^1, v, \delta') \\ &\lesssim \sigma(q^1, v, \delta') &&\lesssim \sigma(q^1, v, \delta) \\ &\lesssim \tau(q^1, v, \delta) \end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Als Konsequenz erhalten wir eine „Verschlingungseigenschaft“ für die Polyzylinder:

Lemma 3.14 *Es gibt eine unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für $q^1, q^2 \in \Omega \cap U$ und $\delta > 0$ mit $P_\delta(q^1) \cap P_\delta(q^2) \neq \emptyset$ gilt*

$$P_\delta(q^1) \subset C \cdot P_\delta(q^2) \quad \textit{und} \quad P_\delta(q^2) \subset C \cdot P_\delta(q^1).$$

Beweis: Es sei $q \in P_\delta(q^1) \cap P_\delta(q^2)$. Nach Lemma 3.13 gilt $\tau(q^1, v, \delta) \approx \tau(q^2, v, \delta)$ für alle Einheitsvektoren v. Es sei nun v der Einheitsvektor von q^2 nach q und w der normierte Vektor von q^1 nach q. Es ist dann $q = q^2 + \lambda v = q^1 + \mu w$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und nach Korollar 3.6 gilt $|\lambda| \lesssim \tau(q^2, v, \delta), |\mu| \lesssim \tau(q^1, w, \delta) \lesssim \tau(q^2, w, \delta)$. Damit ist aber bzgl. der zu q^2 und δ assoziierten Koordinaten mit Lemma 3.5

$$|q_k^1| = |q_k^2 + \lambda v_k + \mu w_k| \lesssim |v_k| \cdot \tau(q^2, v, \delta) + |w_k| \cdot \tau(q^2, w, \delta) \lesssim \tau_k(q^2, \delta)$$

für alle k. Mit einer (eventuell größeren) Konstanten gilt somit $P_\delta(q^1) \subset C \cdot P_\delta(q^2)$. Die andere Abschätzung erhält man analog. □

Wir beobachten, dass die Polyzylinder eine Quasidistanz induzieren: für $q^1, q^2 \in U \cap \Omega$ definieren wir dazu

$$d(q^1, q^2) \;:=\; \inf\left\{\delta > 0 : q^2 \in P_\delta(q^1)\right\}$$

und zeigen

Lemma 3.15 *Es gibt unabhängige Konstanten, so dass für alle* $q^1, q^2, q^3 \in \Omega \cap U$ *gilt*

a) $d(q^1, q^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; q^1 = q^2$

b) $d(q^1, q^2) \approx d(q^2, q^1)$

c) $d(q^1, q^2) \lesssim d(q^1, q^3) + d(q^3, q^2)$

Beweis: a) ist klar. Sei $\delta_{ij} := d(q^i, q^j)$. Wir wählen $\delta > 0$ mit $\delta_{12} \leq \delta \leq 2\delta_{12}$ und $q^2 \in P_\delta(q^1)$. Mit Lemma 3.14 bzw. Korollar 3.12 gilt

$$q^1 \in P_\delta(q^1) \subset C \cdot P_\delta(q^2) \subset P_{c\delta}(q^2),$$

es folgt $d(q^2, q^1) \leq c\delta \lesssim d(q^1, q^2)$ und die Gleichheit analog. Zur Dreiecksungleichung bemerken wir nur, dass $q^2 \in P_{c(\delta_{13}+\delta_{23})}(q^3) \subset P_{c(\delta_{13}+\delta_{23})}(q^1)$ gilt. □

Teil II
Subelliptische Abschätzungen

4 Das $\bar\partial$-Neumann Problem und Subelliptizität

Die folgende Darstellung des $\bar\partial$-Neumann Problems ist allgemein bekannt und kann in der Literatur gefunden werden. Für eine ausführlichere Darstellung sei beispielsweise auf [DA3, DL, Hö1, Ko3, Kr] verwiesen.

Das $\bar\partial$-Neumann Problem Es sei $0 \le q \le n$. Es sei weiter $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und es bezeichne $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ die $(0,q)$-Formen auf Ω mit quadratintegrierbaren Koeffizienten. Ist u eine solche Form, so können wir sie durch

$$u = {\sum_I}' u_I \, d\bar z^I \quad \text{mit } d\bar z^I = d\bar z_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{i_q}$$

darstellen. Es durchläuft $I = \{i_1, \ldots, i_q\}$ alle streng monoton geordneten q-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Der Strich am Summenzeichen weist auf die strenge Monotonie hin. Ist $v = {\sum}'_I v_I \, d\bar z^I$ eine weitere $(0,q)$-Form mit L^2-Koeffizienten, so wird $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ mit dem inneren Produkt

$$\langle u, v\rangle := {\sum_I}' \int_\Omega u_I \bar v_I \, dV \quad \text{und} \quad \|u\|^2 := \langle u, u\rangle \; = \; \int_\Omega |u|^2 \, dV$$

zu einem Hilbertraum. Dabei ist $|u|^2 := {\sum}'_I |u_I|^2$. Wir bezeichnen mit $D(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$ die beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω und mit $D_{(0,q)}(\Omega) \subset L^2_{(0,q)}(\Omega)$ die $(0,q)$-Formen mit Koeffizienten aus $D(\Omega)$. Für eine Form $u = {\sum}'_I u_I \, d\bar z^I$ aus $D_{(0,q)}(\Omega)$ ist der $\bar\partial$-Operator bekanntermaßen definiert als

$$\bar\partial u := \sum_{k=1}^n {\sum_I}' \frac{\partial u_I}{\partial \bar z_k} \, d\bar z_k \wedge d\bar z^I.$$

Da sich jede L^2-Funktion durch Funktionen aus $D(\Omega)$ approximieren lässt, können wir $\bar\partial$ als dicht definierten Operator auf $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ ansehen. Eine Form $u \in L^2_{(0,q)}(\Omega)$ ist dann aus $\operatorname{dom}\bar\partial$, falls $\bar\partial u$ im Sinne der Distributionentheorie eine $(0,q+1)$-Form mit L^2-Koeffizienten ist. Genauer ist $\bar\partial : L^2_{(0,q)}(\Omega) \to L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$ ein abgeschlossener, dicht definierter, unbeschränkter Operator. Der formal adjungierte Operator ist $\bar\partial^* : L^2_{(0,q+1)} \to L^2_{(0,q)}$; es ist $u \in \operatorname{dom}\bar\partial^*$, wenn das Funktional $L^2_{(0,q)}(\Omega) \ni v \mapsto \langle \bar\partial v, u\rangle$ stetig ist. Ist r eine glatte, definierende Funktion für Ω, so beschreibt

$$u \lrcorner \partial r := {\sum_{|I|=q-1}}' \left(\sum_{k=1}^n u_{kI} \frac{\partial r}{\partial z_k} \right) d\bar z^I$$

die Kontraktion einer $(0,q)$-Form u mit dem Rand $\partial\Omega$. Bekanntermaßen gilt $u \in \operatorname{dom}\bar\partial^* \;\Leftrightarrow\; u \lrcorner \partial r = 0$ auf $\partial\Omega$.

Für $q \geq 1$ ist $\Box = \Box_q : L^2_{(0,q)}(\Omega) \to L^2_{(0,q)}(\Omega)$ der durch

$$\begin{aligned} \Box &:= \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial \\ \operatorname{dom}\Box &= \left\{u \in \operatorname{dom}\bar\partial \cap \operatorname{dom}\bar\partial^* : \bar\partial u \in \operatorname{dom}\bar\partial^*, \bar\partial^* u \in \operatorname{dom}\bar\partial\right\}. \end{aligned}$$

definierte *Laplace-Beltrami Operator*. Er ist selbst adjungiert und abgeschlossen.

Zwischen der $\bar\partial$-Gleichung und dem Laplace-Beltrami Operator besteht der folgende interessante Zusammenhang: Es sei Ω glatt berandet und $\alpha \in C^\infty_{(0,q)}(\bar\Omega)$ eine $\bar\partial$-geschlossene $(0,q)$-Form mit glatten Koeffizienten. Gibt es nun ein $u \in \operatorname{dom}\Box$ mit $\Box u = \alpha$, so ist $\bar\partial^* u$ eine Lösung der Gleichung $\bar\partial f = \alpha$.

Dies motiviert die Lösung der $\Box$-Gleichung und führt auf das *$\bar\partial$-Neumann Problem*:

$$\begin{aligned} \text{Löse } \Box u = \alpha &\qquad \text{Laplace-Beltrami Gleichung} \\ \text{mit } \alpha \perp \ker\Box &\qquad \text{Integrabilitätsbedingung} \\ \text{durch } u \in \operatorname{dom}\Box &\qquad \text{Randbedingung.} \end{aligned}$$

Die Bezeichnung Randbedingung ist hier gerechtfertigt, weil genau dann $u \in \operatorname{dom}\Box$ gilt, wenn $u \lrcorner \partial r = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\bar\partial u \lrcorner \partial r = 0$ auf $\partial\Omega$ sind.

Sind Ω beschränkt und pseudokonvex und $q \geq 1$, so gilt $\ker\bar\partial^\perp = \operatorname{Im}\bar\partial^*$. Jedes $\alpha \in L^2_{(0,q)}(\Omega)$ lässt sich dann eindeutig in $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ mit $\alpha_1 \in \ker\bar\partial$ und $\alpha_2 \in \operatorname{Im}\bar\partial^*$ zerlegen. Nun gibt es eindeutig bestimmte $v_1 \in \operatorname{dom}\bar\partial \cap \operatorname{Im}\bar\partial^*$ mit $\bar\partial v_1 = \alpha_1$ und $v_2 \in \operatorname{dom}\bar\partial^* \cap \ker\bar\partial$ mit $\bar\partial^* v_2 = \alpha_2$. Analog gibt es wieder eindeutig bestimmte $u_1 \in \operatorname{dom}\bar\partial^* \cap \ker\bar\partial$ mit $\bar\partial^* u_1 = v_1$ und $u_2 \in \operatorname{dom}\bar\partial \cap \ker\bar\partial^*$ mit $\bar\partial u_2 = v_2$. Insgesamt ist also $\alpha = \bar\partial\bar\partial^* u_1 + \bar\partial^*\bar\partial u_2$. Definieren wir nun $N_q\alpha := u_1 + u_2$, so ist $N_q : L^2_{(0,q)}(\Omega) \to L^2_{(0,q)}(\Omega)$ ein linearer, beschränkter Operator mit $N_q\alpha \in \operatorname{dom}\Box$ für alle $\alpha \in L^2_{(0,q)}(\Omega)$. Es gilt $\Box N_q\alpha = \alpha$ und $N_q\alpha$ ist eine Lösung der $\Box$-Gleichung; das $\bar\partial$-Neumann Problem auf beschränkten, pseudokonvexen Gebieten ist also lösbar.

Ist $\bar\partial\alpha = 0$, so ist die Lösung der $\bar\partial$-Gleichung $\bar\partial u = \alpha$, die auf $\ker\bar\partial$ senkrecht steht, $u = \bar\partial^* N_q\alpha$. Der Operator N_q heißt der *$\bar\partial$-Neumann Operator* für $(0,q)$-Formen.

Subelliptische Abschätzungen Es stellt sich die Frage, welche Regularitätseigenschaften wir für die Lösung u erwarten können, wenn das Datum α glatt gegeben ist. Im globalen Fall ist diese Frage durch das folgende Theorem [Ko1] gelöst.

Theorem 4.1 (J. J. Kohn) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet mit glattem Rand und $\alpha \in C^\infty_{(0,1)}(\bar\Omega)$ eine glatte, $\bar\partial$-geschlossene $(0,1)$-Form. Dann gibt es eine glatte Lösung $u \in C^\infty(\bar\Omega)$ der Gleichung $\bar\partial u = \alpha$.*

Anders stellt sich die Situation dar, wenn α nur auf einer (offenen) Teilmenge des Randes eines Gebietes glatt ist. Eine Antwort liefern hier subelliptische Abschätzungen. Dazu bedarf es zunächst weiterer Notationen.

Auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ ist die Einschränkung der Fouriertransformation $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \cdot e^{-i\langle x,y\rangle}\, dy$$

auf die schnellfallenden Funktionen $\mathcal{S}_n$ eine Isometrie. Es sei $p_s(x) = (1+|x|^2)^s$ mit $s \geq 0$. Wir definieren $\Lambda_s u := \mathcal{F}^{-1}(p_s \cdot \mathcal{F}u)$ für $u \in \mathcal{S}_n$. Der *Sobolev-Raum* der Ordnung s ist dann $W^s(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \Lambda_s u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$. Mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle_s := \langle \Lambda_s u, \Lambda_s v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ für $u, v \in W^s(\mathbb{R}^N)$ und der induzierten Norm $\|u\|_s^2 = \langle u, u\rangle_s$ wird $W^s(\mathbb{R}^N)$ zu einem Hilbertraum. Für natürliche Zahlen s ist W^s genau die Vervollständigung der glatten L^2-Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung s wieder quadratintegrierbar sind. Ist $D \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge, so ist $W^s(D)$ der Raum der Funktionen auf D, die durch Einschränkung einer $W^s(\mathbb{R}^N)$-Funktion auf D gegeben sind. Für $u \in W^s(D)$ gibt es dann ein $u^* \in W^s(\mathbb{R}^N)$ mit $\|u\|_s = \|u^*\|_s$. $\|\cdot\|_s$ ist eine Norm auf $W^s(D)$, die von einem Skalarprodukt induziert wird. Mit dieser Norm ist $W^s(D)$ vollständig, also ein Hilbertraum.

Es sei nun $\Omega = \{r < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes pseudokonvexes Gebiet, $z^0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt und $U = U(z^0)$ eine offene Umgebung von z^0. Weiter sei

$$\mathcal{D}_{(0,q)}(U) := \{\alpha \in D_{(0,q)}(U \cap \bar{\Omega}) : \alpha \in \operatorname{dom} \bar{\partial}^*\}.$$

Dann erfüllt das $\bar{\partial}$-Neumann Problem eine *subelliptische Abschätzung* der Ordnung ε auf U, falls mit einer Konstanten $C = C(U, \varepsilon) > 0$ für alle $\alpha \in \mathcal{D}_{(0,q)}(U)$ gilt

$$\|\alpha\|_\varepsilon^2 \quad \leq \quad C \cdot \left(\|\bar{\partial}\alpha\|^2 + \|\bar{\partial}^*\alpha\|^2 + \|\alpha\|^2\right).$$

Wir erkennen die Bedeutung subelliptischer Abschätzungen anhand des folgenden Theorems [Ko2], garantiert es doch Regularität im lokalen Analogon zur Theorem 4.1.

Theorem 4.2 (J. J. Kohn) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes, pseudokonvexes Gebiet. Nahe $z^0 \in \partial\Omega$ gelte eine subelliptische Abschätzung für $(0,q)$-Formen der Ordnung ε. Es sei $U = U(z_0)$ eine offene Umgebung und $\alpha \in L^2_{(0,q)}(\Omega) \cap C^\infty(U)$ eine $\bar{\partial}$-geschlossene $(0,q)$-Form. Dann ist auch die $\bar{\partial}$-Neumann Lösung $\bar{\partial}^* N\alpha$ der Gleichung $\bar{\partial}u = \alpha$ glatt auf U. Genauer gilt: Ist $\alpha \in W^s(U)$, so sind $N\alpha \in W^{s+2\varepsilon}(U)$ und $\bar{\partial}^* N\alpha \in W^{s+\varepsilon}(U)$.*

Es bezeichne $H^2(\Omega) = L^2(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ die quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen auf Ω. Das Theorem beinhaltet, dass der Bergman-Projektor $P : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ die Räume W^s in sich selbst überführt, da wir P durch $Pu = u - \bar{\partial}^* N_{q+1} \bar{\partial} u$ ausdrücken können. Insbesondere gilt $P(C^\infty(U)) \subset C^\infty(U)$. Diese *Condition R* wurde von S. Bell [B] zum Studium glatter Fortsetzbarkeit eigentlich holomorpher bzw. biholomorpher Abbildungen eingeführt.

Maximale subelliptische Abschätzungen Die ursprüngliche Motivation zur Untersuchung von Punkten endlichen Typs, wie sie in Abschnitt 2 eingeführt wurden, war der Versuch, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit subelliptischer Abschätzungen zu finden. J.J. Kohn [Ko2] erhielt durch den Gebrauch der Methoden von K. Diederich und J.E. Fornæss [DF2] eine notwendige Bedingung für Gebiete mit reell analytischen Rändern. Diese Bedingung ist äquivalent mit der Nichtexistenz komplex analytischer Varietäten im Rand. D. Catlin zeigte schließlich [Ca1, Ca2, Ca3], dass die Bedingung endlichen Typs notwendig und hinreichend für die Subelliptizität von pseudokonvexen Gebieten ist.

Theorem 4.3 (D. Catlin) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes, pseudokonvexes Gebiet und $z_0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt. Das $\bar{\partial}$-Neumann Problem erfüllt genau dann eine subelliptische Abschätzung für $(0,1)$-Formen in z_0, wenn z_0 von endlichem Typ ist.*

Insbesondere zeigt D. Catlin dabei, dass für die Ordnung ε der Subelliptizität

$$\frac{1}{\Delta_1(\partial\Omega, z_0)^{n^2 T}} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\Delta_1(\partial\Omega, z_0)} \qquad \text{mit } T = \Delta_1(\partial\Omega, z_0)^{n^2}$$

gilt. Über den bestmöglichen Wert von ε ist im allgemeinen nichts bekannt. Im lineal konvexen Fall besagt Theorem I jedoch, dass hier eine optimale Abschätzung für ε gilt. Es verallgemeinert damit die Ergebnisse für den Fall $n = 2$ [Ca4, FS] bzw. den linear konvexen Fall [FS, McN2] auf lineal konvexe Gebiete. Nach [Ca3, Thm 2.2] erhalten wir Theorem I durch die Konstruktion geeigneter plurisubharmonischer Gewichtsfunktionen, deren Leviform guten unteren Abschätzungen genügt. Wir zeigen

Theorem 4.4 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einer definierenden C^∞-Funktion r. Es sei $p \in \partial\Omega$ ein Randpunkt von endlichem Typ und auf einer Umgebung $U = U(p)$ sei Ω lineal konvex. Es sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass der 1-Typ jedes Punktes $q \in U$ kleiner gleich m ist. Zu $\delta > 0$ klein genug sei $S_\delta := \{z \in U : -\delta < r(z) \leq 0\}$. Dann gibt es eine Funktion $\lambda_\delta \in C^\infty(U)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $0 \leq \lambda_\delta(z) \leq 1$ *für alle* $z \in \Omega \cap U$.

b) λ_δ *ist plurisubharmonisch auf* $\Omega \cap U$.

c) Ist $z \in S_\delta$ *und* $X \in \mathbb{C}^n$, *so ist*

$$\mathcal{L}_{\lambda_\delta}(z, X) \gtrsim \frac{|X|^2}{\delta^{2/m}}.$$

Die Vorgehensweise ist wie folgt: zunächst werden in Abschnitt 5 auf den Polyzylinder aus Abschnitt 3 beschränkte Funktionen, deren Leviform guten, nicht-isotropen Abschätzungen genügen, konstruiert. Grundlage ist dabei der zweidimensionale Fall von D. Catlin [Ca4] bzw. die Darstellung dieser Ergebnisse aus [Hb]. Der Beweis von Theorem 4.4 erfolgt schließlich in Abschnitt 6 durch Summation der Funktionen aus Abschnitt 5.

5 Plurisubharmonische Gewichtsfunktionen

Es seien Ω und $p \in \partial\Omega$ wie in Theorem 4.4. Wir arbeiten im folgenden für $q \in \Omega \cap U$ und $\delta > 0$ stets in den gemäß Abschnitt 3 assoziierten z-Koordinaten der δ-minimal Basis. Zunächst sei außerdem a klein und positiv, später werden wir a fest wählen. Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist die pseudokonvexe Ausdehnbarkeit lineal konvexer Gebiete endlichen Typs.

Lemma 5.1 *Es sei $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$ klein genug, sowie $z = (z_1, \ldots, z_n)$ die zu q und δ assoziierten Koordinaten.*

a) Es gibt Konstanten $d > 0$ und $b = b(q) > 0$ und eine C^3-glatte, plurisubharmonische Funktion $\hat{\rho}_{q,\delta} : \Delta_d(q) \to \mathbb{R}$, so dass für $z \in \Omega_{q,0}$ gilt

$$\tfrac{1}{b}(r(z) - r(q) - |z-q|^2) \;\leq\; \hat{\rho}_{q,\delta}(z) \;\leq\; r(z) - r(q) - b|z-q|^m. \tag{5.1}$$

b) Sei $1 \gg a > 0$. Dann gibt es eine C^∞-glatte, plurisubharmonische Funktion $\rho_{q,\delta} : \Delta_d(q) \to \mathbb{R}$, so dass für $z \in \Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q)$ gilt

$$\tfrac{1}{b}(r(z) - r(q) - |z-q|^2) \;\leq\; \rho_{q,\delta}(z) \;\leq\; 2a\delta - b|z-q|^m.$$

Beweis: Es ist $q \in \partial\Omega_{q,0}$ von endlichem Typ und $\Omega_{q,0}$ ist lineal konvex nahe q. Damit stimmen die Einträge des Multiptyps mit den D'Angelo-Typen nach Theorem 2.2 überein und q ist ein semiregulärer Punkt im Sinne von K. Diederich und G. Herbort [DH2]. Insbesondere ist der Multityp $M(\partial\Omega_{q,0}, q)$ damit auch ein Ausdehnungstupel [DH1, DH2] und es gibt eine plurisubharmonische C^3-Funktion $\hat{\rho}_{q,\delta}$, die (5.1) erfüllt. $\rho_{q,\delta}$ erhält man aus $\hat{\rho}_{q,\delta}$ durch Faltung mit einer geeigneten C_0^∞-Funktion. Die Wahl von a ist beliebig. □

Wir erhalten damit eine beschränkte Funktion, deren Leviform in Tangentialrichtung guten unteren Abschätzungen genügt.

Lemma 5.2 *Es seien $q \in U \cap \Omega$ und $1 \gg a, \delta > 0$. Dann gibt es eine Funktion*

$$\psi_{q,\delta} \;\in\; PSH \cap C^\infty(\Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q))$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\psi_{q,\delta}(z) \leq 0$ für $z \in \Omega_{q,a\delta} \cap P_\delta(q)$.

b) $\psi_{q,\delta}(q) \gtrsim -a^{2/m}$ mit einer von a unabhängigen Konstanten.

c) Unabhängig von δ gilt $\psi_{q,\delta}(z) \gtrsim -1$ für alle $z \in \Omega_{q,a\delta} \cap P_\delta(q)$.

d) Für alle $z \in \Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q)$ und $X \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\mathcal{L}_{\psi_{q,\delta}}(z, X) \;\gtrsim\; \sum_{k=2}^{n} \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}.$$

Beweis: Nach Korollar 3.8 gibt es eine Konstante c, so dass für alle $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0, k = 1, \ldots, n$ und $\nu = 1, \ldots, m$, mit den dort verwendeten Notationen $c \cdot \tau_k(q,\delta)^\nu \cdot a_\nu(q, e_k) \leq \delta$ gilt. Dabei hängt die Konstante $c > 0$ nicht von q, δ oder k ab. Wir definieren für $k = 2, \ldots, n$ und $\nu = 2, \ldots, m$

$$\psi_{q,\delta}^{k,\nu}(z) \;:=\; -\left(\frac{3a\delta - \rho_{q,\delta}(z)}{\delta}\right)^{2/\nu} + (ac)^{2/\nu}\left(\frac{a_\nu(q, e_k)}{\delta}\right)^{2/\nu} \cdot |z_k|^2.$$

Die Funktionen $\psi_{q,\delta}^{k,\nu}$ sind plurisubharmonisch und glatt auf $\Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q)$ und es ist $3a\delta - \rho_{q,\delta} \geq a\delta \geq ac \cdot a_\nu(q, z_k) \cdot \tau_k(q,\delta)^\nu$. Also gilt auf $\Omega_{q,a\delta} \cap P_\delta(q)$

$$-\left(\frac{3a\delta - \rho_{q,\delta}}{\delta}\right)^{2/\nu} \;\leq\; -(ac)^{2/\nu}\left(\frac{a_\nu(q, z_k)}{\delta}\right)^{2/\nu} \cdot |z_k|^2$$

und damit dort $\psi^{k,\nu}_{q,\delta} \leq 0$. Wir definieren nun

$$\psi_{q,\delta}(z) := \sum_{k=2}^{n} \sum_{\nu=2}^{m} \psi^{k,\nu}_{q,\delta}(z).$$

Nach Lemma 5.1b) gilt $0 \leq \rho_{q,\delta}(q) \leq 2a\delta$. Damit ist $\psi^{k,\nu}_{q,\delta}(q) \gtrsim -a^{2/\nu}$, woraus b) folgt; wegen $|3a\delta - \rho_{q,\delta}| \lesssim \delta$ – wieder nach Lemma 5.1b) – folgt c). Außerdem ist

$$\mathcal{L}_{\psi_{q,\delta}}(z, X) \gtrsim \sum_{k=2}^{n} \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}$$

mit einer Konstanten, die von a aber nicht von q und δ abhängt, da es für alle k ein ν_k mit $\tau_k(q,\delta)^{\nu_k} \gtrsim \delta / |a_{\nu_k}(q, e_k)|$ gibt, und $\psi_{q,\delta}$ erfüllt die Bedingungen des Lemmas. □

Im nächsten Schritt wird zunächst eine Funktion mit guten unteren Abschätzungen für die Leviform in Normalenrichtung konstruiert. Durch Anwendung der Exponentialfunktion und Addition von $\exp \psi_{q,\delta}$ erfolgt dann eine Normierung. Zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir einen Vektor $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}^n$ mit dem holomorphen Tangentialvektor

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial}{\partial z_k} \in T^{10}\mathbb{C}^n$$

und schreiben $(\partial\varphi, X) := X(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}$ für glatte Funktionen φ.

Lemma 5.3 *Es sei $q \in \Omega \cap U$ und $a > 0$. Es gibt eine Konstante $c_0 > 0$, unabhängig von $q \in \Omega \cap U$ und $0 < \delta \ll 1$ klein genug, so dass eine glatte, plurisubharmonische Funktion $W_{q,\delta}$ auf $\Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q)$ existiert, für die gilt*

a) $0 \leq W_{q,\delta} \leq 1$.

b) Für alle $(z, X) \in P_\delta(q) \times \mathbb{C}^n$ gilt

$$\mathcal{L}_{W_{q,\delta}}(z, X) \geq c_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}.$$

Beweis: Nach K. Diederich und J.E. Fornæss [DF1] gibt es Konstanten $0 < \alpha \ll 1$ und $L = L(\alpha) \gg 1$, so dass mit

$$\hat{r}_{q,\delta}(z) := (r(z) - r(q) - 2a\delta) \cdot \exp(-L|z|^2)$$

dann $-(-\hat{r}_{q,\delta})^\alpha$ streng plurisubharmonisch ist. Damit ist auch

$$V_{q,\delta}(z) := \exp\left(-\left(\frac{-\hat{r}_{q,\delta}(z)}{\delta}\right)^\alpha\right) \tag{5.2}$$

streng plurisubharmonisch auf $\Omega_{q,a\delta}$ und es ist $0 \leq V_{q,\delta}(z) \leq 1$. Auf $P_\delta(q)$ ist $|\hat{r}_{q,\delta}(z)| \leq c_1 \cdot \delta$ und es gilt ohne Einschränkung

$$\left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_1}\right| \geq \frac{1}{4} \quad \text{und für } k = 2, \ldots, n \quad \left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_k}\right| \leq c_2 \frac{\delta}{\tau_k(q,\delta)}.$$

Damit gilt für alle $z \in P_\delta(q)$ und $X \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}
|(\partial \hat{r}_{q,\delta}, X)|^2 &\geq \left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_1} X_1\right|^2 - 2\left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_1} X_1\right| \cdot \left|\sum_{k=2}^n \frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_k} X_k\right| + \left|\sum_{k=2}^n \frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_k} X_k\right|^2 \\
&= \left(\left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_1} X_1\right| - \left|\sum_{k=2}^n \frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_k} X_k\right|\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_1}\right|^2 \cdot |X_1|^2 - 2\left|\sum_{k=2}^n \frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_k} X_k\right|^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_1}\right|^2 \cdot |X_1|^2 - c(n)\sum_{k=2}^n \left|\frac{\partial \hat{r}_{q,\delta}}{\partial z_k}\right|^2 \cdot |X_k|^2 \\
&\geq \frac{1}{32}|X_1|^2 - c_3 \sum_{k=2}^n \frac{\delta^2 |X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2},
\end{aligned}$$

wobei $c(n)$ nur von der Dimension n abhängt und $c_3 = c_2 c(n)$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V_{q,\delta}}(z, X) &= V_{q,\delta}(z) \cdot \left(\delta^{-\alpha}\mathcal{L}_{-(-\hat{r}_{q,\delta})^\alpha}(z, X) + \alpha^2 \cdot \frac{|(\partial \hat{r}_{q,\delta}(z), X)|^2}{\delta^{2\alpha}|\hat{r}_{q,\delta}(z)|^{2-2\alpha}}\right) \\
&\geq V_{q,\delta}(z) \cdot \frac{\alpha^2}{\delta^2 c_1^{2-2\alpha}} \cdot \left(\frac{1}{32}|X_1|^2 - c_3 \sum_{k=2}^n \frac{\delta^2 |X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}\right) \\
&\geq c' \cdot \frac{|X_1|^2}{\delta^2} - c'' \cdot \sum_{k=2}^n \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2},
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten c' und c'' nicht von q und δ abhängig sind. Wählen wir nun $0 < t \ll 1$ geeignet, so erfüllt $W_{q,\delta}(z) := tV_{q,\delta}(z) + (1-t) \cdot \exp(\psi_{q,\delta}(z))$ die Bedingungen des Lemmas. □

Im folgenden Lemma wird eine Funktion mit Träger in $P_\delta(q)$ konstruiert, wobei die guten Abschätzungen der Leviform auf $P_{\gamma\delta}(q)$ erhalten bleiben. Dabei ist wichtig, dass die Konstante γ unabhängig von q und δ gewählt werden kann.

Lemma 5.4 *Es gibt eine Konstante $c_0 > 0$, so dass für alle $q \in \Omega \cap U$ und $0 < \delta \ll 1$ eine Funktion*

$$\omega_{q,\delta} \in PSH \cap C^\infty(\Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q))$$

existiert, für die gilt

a) $0 \leq \omega_{q,\delta} \leq 1$.

b) $\operatorname{supp} \omega_{q,\delta} \subset P_\delta(q)$.

c) Auf $\gamma \cdot P_\delta(q) \subset \Omega_{q,a\delta}$ gilt

$$\mathcal{L}_{\omega_{q,\delta}}(z, X) \geq c_0 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}.$$

Dabei kann $1 \gg \gamma > 0$ unabhängig von q und δ gewählt werden.

Beweis: Es seien $f_{q,\delta}(z) := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}$ und $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ wie folgt gewählt:

i) $\xi(x) = 1$ für $x \leq \frac{3}{4}, \xi(1) = \frac{7}{8}, \xi(n) = \frac{1}{4}$ und $\xi(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) ξ ist monoton fallend und es ist $|\xi'(x)| \leq 100\xi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Mit $L > 1$ definieren wir $g : \Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(z) \quad := \quad (\xi \circ f_{q,\delta})(z) \cdot \exp(LW_{q,\delta}(z)).$$

L soll so gewählt werden, dass g auf $P_\delta(q)$ plurisubharmonisch ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass g auf $\{z : f_{q,\delta}(z) \leq \frac{3}{4}\}$ plurisubharmonisch ist, denn dort ist $g(z) = \exp(LW_{q,\delta}(z))$. Wir berechnen die Leviform von g auf $S := \{z : \frac{3}{4} \leq f_{q,\delta}(z) \leq n\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g(z,X) \quad = \quad & \exp(LW_{q,\delta}(z)) \cdot [\mathcal{L}_{\xi \circ f_{q,\delta}}(z,X) \\ & +2L \operatorname{Re}(\partial(\xi \circ f_{q,\delta})(z), X) \cdot \overline{(\partial W_{q,\delta}(z), X)} \\ & +L \cdot \xi \circ f_{q,\delta} \cdot (\mathcal{L}_{W_{q,\delta}}(z,X) + L|(\partial W_{q,\delta}(z),X)|^2)]. \end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen

$$\begin{aligned} & 2L|\operatorname{Re}(\partial(\xi \circ f_{q,\delta})(z), X) \cdot \overline{(\partial W_{q,\delta}(z), X)}| \\ & \quad \leq \quad \frac{|(\partial(\xi \circ f_{q,\delta})(z), X)|^2}{(\xi \circ f_{q,\delta})(z)} + L^2(\xi \circ f_{q,\delta})(z) \cdot |(\partial W_{q,\delta}(z),X)|^2 \end{aligned}$$

und

$$|(\partial f_{q,\delta}, X)|^2 \;\leq\; c_n \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k X_k}{\tau_k(q,\delta)^2} \right|^2 \;\leq\; c_n \sum_{k=1}^{n} \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2}$$

auf S erhalten wir nach Wahl von ξ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g(z,X) \quad \geq \quad & \exp(LW_{q,\delta}(z)) \cdot [\mathcal{L}_{\xi \circ f_{q,\delta}}(z,X) \\ & +(\xi'' \circ f_{q,\delta}(z) - 100) \cdot |(\partial f_{q,\delta}, X)|^2 + \tfrac{L}{4} c \mathcal{L}_{f_{q,\delta}}(z,X)] \\ \geq \quad & c_0 \cdot \mathcal{L}_{f_{q,\delta}}(z,X), \end{aligned}$$

wenn $L \gg 1$ groß genug gewählt ist. Es sei nun $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine konvexe Funktion mit $\lambda(x) = 0$ für $x \leq c_4$, $\lambda', \lambda'' > 0$ auf $(c_4, +\infty)$ und $\lambda(x) \leq 1$ für alle $x \leq \exp L$. Dabei wollen wir c_4 so wählen, dass $\{z : g(z) \geq c_4\} \subset P_\delta(q)$ gilt. Dazu setzen wir

$$c_4 \;:=\; \tfrac{15}{16} \cdot g(0)$$

und beachten, dass mit Lemma 5.2 b) und nach Definition (5.2) von $V_{q,\delta}$ mit von q und δ unabhängigen Konstanten für eine gute Wahl von $s > 0$ gilt

$$\begin{aligned} W_{q,\delta}(0) \quad & = \quad tV_{q,\delta}(0) + (1-t)\exp(\psi_{q,\delta}(0)) \\ & \geq \quad te^{-ca^\alpha} + (1-t)e^{-c'a^{2/m}} \\ & \geq \quad 1 - c''a^s, \end{aligned} \tag{5.3}$$

falls $a \ll 1$ genügend klein gewählt wurde. Daraus folgt

$$\begin{aligned} c_4 \cdot \exp(-LW_{q,\delta}(z)) &= \tfrac{15}{16}\exp(L(W_{q,\delta}(0) - W_{q,\delta}(z))) \\ &\geq \tfrac{15}{16}\exp(L \cdot (W_{q,\delta}(0) - 1)) \\ &\geq \tfrac{15}{16}\exp(-Lc''a^s) \\ &\geq \tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} \{z : g(z) \geq c_4\} &\subset \{z : \xi \circ f_{q,\delta}(z) \geq c_4 \exp(-LW_{q,\delta}(z))\} \\ &\subset \{z : \xi \circ f_{q,\delta}(z) \geq \tfrac{7}{8}\} \\ &\subset \{z : f_{q,\delta}(z) \leq 1\} \\ &\subset P_\delta(q). \end{aligned}$$

Wir definieren $\omega_{q,\delta} : \Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q) \to \mathbb{R}$ durch

$$\omega_{q,\delta}(z) := (\lambda \circ g)(z).$$

Dann ist $\omega_{q,\delta}$ glatt auf $\Omega_{q,a\delta} \cap \Delta_d(q)$ und es ist $0 \leq \omega_{q,\delta} \leq 1$, wegen $g(z) \leq e^L$ und nach Wahl von λ, d.h. $\omega_{q,\delta}$ erfüllt die Bedingung a) des Lemmas. b) gilt, weil $\operatorname{supp} \omega_{q,\delta} \subset \{z : g(z) \geq c_4\} \subset P_\delta(q)$; außerdem ist $\omega_{q,\delta}$ auf $P_\delta(q)$ nach Konstruktion von g auch plurisubharmonisch.
Wir suchen nun eine von q und δ unabhängige Konstante $\gamma \ll 1$, so dass

$$g(z) \geq \tfrac{31}{32} g(0) = \tfrac{31}{30} c_4 \quad \text{für} \quad z \in \gamma \cdot P_\delta(q) \tag{5.4}$$

gilt, denn dann folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega_{q,\delta}}(z, X) &\geq \lambda''(g(z)) \cdot |(\partial g(z), X)|^2 + \lambda'(g(z)) \cdot \mathcal{L}_g(z, X) \\ &\geq \lambda'(\tfrac{31}{30} c_4) \cdot \mathcal{L}_g(z, X) \\ &\geq c_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{|X_k|^2}{\tau_k(q,\delta)^2} \end{aligned}$$

auf $\gamma P_\delta(q) \subset P_\delta(q)$ und c_0 hängt nicht von q und δ ab.
Dazu beachten wir zunächst, dass nach (5.3) gilt

$$W_{q,\delta}(z) - W_{q,\delta}(0) \leq 1 + Ca^s - 1 = Ca^s$$

und weiter

$$|g(z)| \geq |g(0)| - |g(z) - g(0)| = \tfrac{16}{15} c_4 - |g(z) - g(0)|.$$

Ist $a \ll 1$ klein genug, so gilt $f_{q,\delta}(z) \leq \frac{3}{4}$ für $z \in a \cdot P_\delta(q)$ und damit dort $\xi \circ f_{q,\delta}(z) = 1$.
Wegen $|\exp x - 1| \leq 2|x|$ nahe Null schätzen wir also ab

$$\begin{aligned} |g(z) - g(0)| &\leq \exp(LW_{q,\delta}(z)) \cdot |\xi \circ f_{q,\delta}(z) - 1| + |\exp(LW_{q,\delta}(z)) - \exp(LW_{q,\delta}(0))| \\ &\leq e^L \cdot |\exp[LW_{q,\delta}(z) - LW_{q,\delta}(0)] - 1| \\ &\leq Ca^s \\ &< \tfrac{1}{30} c_4 \end{aligned}$$

für $0 < a \ll 1$ klein genug. Nach Lemma 3.1 und Korollar 3.12 gibt es eine unabhängige Konstante c und ein $c' = c'(a)$ mit $\Omega_{q,a\delta} \supset c \cdot P_{a\delta}(q) \supset c' \cdot P_\delta(q)$. Wählen wir nun γ mit $0 < \gamma < \min\{c', a\}$, so ist $\gamma \cdot P_\delta(q) \subset \Omega_{q,a\delta} \cap a \cdot P_\delta(q)$ und für $z \in \gamma \cdot P_\delta(q)$ gilt (5.4). Damit folgt die Behauptung. □

6 Der Beweis von Theorem 4.4

Es sei $\delta > 0$ gegeben, wir fixieren a und die Konstante γ gemäß Lemma 5.4. Für jeden Punkt $q \in \Omega \cap U$ und $\delta > 0$ konstruieren wir die zugehörigen Koordinaten und betrachten die Polyzylinder $P_\delta(q)$. Mit Hilfe eines Kompaktheitarguments wählen wir Punkte $q^1, \ldots, q^N$ mit $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$, so dass mit $I := \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq N\}$

$$S_\delta \subset \bigcup_{j\in I} \gamma \cdot P_\delta(q^j) \qquad \text{und} \qquad q^k \notin \bigcup_{j<k} \gamma \cdot P_\delta(q^j) \quad \text{für alle } k \in I \tag{6.1}$$

gilt und zeigen zunächst das folgende

Lemma 6.1 *Es existiert eine obere Schranke $M = M(\gamma) > 0$, die nicht von δ abhängt, so dass für alle $q \in \Omega \cap U$ die Menge $\Sigma_q^\delta := \{j \in I : \gamma \cdot P_\delta(q^j) \cap \gamma \cdot P_\delta(q) \neq \emptyset\}$ höchstens M Elemente besitzt.*

Beweis: Es sei $q \in U \cap \Omega$. Ist $j \in \Sigma_q^\delta$, so gibt es eine unabhängige Konstante $C > 0$ mit $\gamma \cdot P_\delta(q^j) \subset C\gamma \cdot P_\delta(q)$. Wir setzen $c := 1/2C$. Dann gilt für $j, k \in \Sigma_q^\delta, j < k$

$$c\gamma \cdot P_\delta(q^j) \cap c\gamma \cdot P_\delta(q^k) = \emptyset,$$

denn andernfalls wäre $q^k \in c\gamma \cdot P_\delta(q^k) \subset Cc\gamma \cdot P_\delta(q^j) \subset \gamma \cdot P_\delta(q^j)$, was der Konstruktion (6.1) widerspricht. Es gilt weiter

$$\bigcup_{j\in\Sigma_q^\delta} c\gamma \cdot P_\delta(q^j) \subset C\gamma \cdot P_\delta(q)$$

und somit, da die Vereinigung auf der linken Seite disjunkt ist,

$$\sum_{j\in\Sigma_q^\delta} \operatorname{vol} c\gamma \cdot P_\delta(q^j) = \operatorname{vol} \bigcup_{j\in\Sigma_q^\delta} c\gamma \cdot P_\delta(q^j) \leq \operatorname{vol} C\gamma \cdot P_\delta(q).$$

Das Volumen jedes Polyzylinders $\gamma \cdot P_\delta(q^j), j \in \Sigma_q^\delta$, ist aber nach Lemma 3.14 auch nach unten durch $\operatorname{vol} \gamma \cdot P_\delta(q)$ beschränkt. Damit folgt $\#\Sigma_q^\delta \leq M$ mit einer von δ unabhängigen Konstanten M. □

Mit dieser Konstanten M und den Funktionen $\omega_{q^j,\delta}$ aus Lemma 5.4 definieren wir

$$\lambda_\delta(z) := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \omega_{q^j,\delta}(z)$$

und prüfen nach, dass diese Funktion die Bedingungen des Theorems erfüllt. Aus Lemma 6.1 folgt a) mit $0 \leq \omega_{q^j,\delta} \leq 1$; b) ist offensichtlich. Auf jedem der Polyzylinder $\gamma \cdot P_\delta(q^j)$ schreiben wir $X = (X_1, \ldots, X_n)$ bzgl. der zu q^j und δ assoziierten Koordinaten. Es gilt $\tau_k(q, \delta) \lesssim \delta^{1/m}$ für $1 \leq k \leq n$, unabhängig von q und δ. Damit folgt c), weil S_δ durch die Polyzylinder überdeckt wird und wegen der entsprechenden Eigenschaften der $\omega_{q^j,\delta}$. Das Theorem ist bewiesen. □

Teil III
Nicht-isotrope Abschätzungen für Ströme

Ziel dieses dritten Teils ist der Beweis von Theorem II. Dazu motivieren wir vorher kurz die Fragestellung. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\log^+ t = \log t$ für $t \geq 1$ und $\log^+ t = 0$ für $t < 1$.

Die *Nevanlinna-Klasse* $N(\Omega)$ eines glatten Gebietes $\Omega = \{r(z) < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ besteht aus den holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, die der Bedingung

$$\sup_{\delta} \int_{\partial\Omega^\delta} \log^+ |f(z)| \, d\sigma_\delta(z) \quad < \quad +\infty$$

genügen. Dabei sind $\partial\Omega^\delta = \{z : r(z) = -\delta\}$ und $d\sigma_\delta(z)$ das euklidische Maß auf $\partial\Omega^\delta$. Für eine Funktion $f \in N(\Omega)$ bezeichne $X := X_f := \{z : f(z) = 0\}$ die zugehörige Varietät und $\hat{X} = (X_k, n_k)$ ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten mit den zugehörigen Vielfachheiten n_k. $\tilde{X}_k$ bezeichne den regulären Teil von X_k. Es ist bekannt, dass Funktionen aus der Nevannlinna-Klasse die *Blaschke-Bedingung* erfüllen:

$$\sum_k n_k \int_{\tilde{X}_k} |r(z)| \, d\mu_{\tilde{X}_k}(z) \; < \; +\infty \tag{B}$$

Es stellt sich die Frage, ob die Blaschke-Bedingung für Divisoren (X_k, n_k) auch hinreichend ist, damit diese durch ein $f \in N(\Omega)$ definiert werden können. Für streng pseudokonvexe Gebiete mit gewissen topologischen Zusatzvoraussetzungen ist dies nach (voneinander unabhängigen) Arbeiten von H. Skoda [Sk] und G.M. Henkin [Hk] der Fall. Auch im linear konvexen Fall endlichen Typs ist Antwort positiv. Dabei behandeln J. Bruna, P. Charpentier und Y. Dupain [BCD] zunächst den Fall *strikten* Typs; die allgemeine Aussage stammt von K. Diederich und E. Mazilli [DM] und benutzt die von K. Diederich und J.E. Fornæss in [DF3] konstruierten Trägerfunktionen.

7 Ströme

Den klassischen Lösungsansatz liefert die Theorie der Ströme. Ströme wurden von G. de Rham als verallgemeinerte Distributionen eingeführt und von P. Lelong auf die angesprochene Problemstellung angewandt. Exemplarisch sei hier auf die Quellen [dR] und [LG], sowie die Einleitung aus [BCD] verwiesen, an denen sich die folgenden Darstellungen orientieren. Es sei dabei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet.

Ströme Für eine Testfunktion $\varphi \in D(\Omega)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\|\varphi\|_k \; := \; \sup\{|D^\alpha \varphi(z)| : z \in \Omega, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}.$$

Eine Folge $(\varphi_j)_j \subset D(\Omega)$ konvergiert gegen $\varphi \in D(\Omega)$, wenn es ein Kompaktum $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \; K$ für alle j gibt und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\lim\limits_{j \to \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_k = 0$.

Für Differentialformen $\varphi \in D_{(p,q)}(\Omega)$ vom Bigrad (p,q) mit Koeffizienten aus $D(\Omega)$,

$$\varphi(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \varphi_{IJ}(z)\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

und $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\|\varphi\|_k = \sup\{|D^\alpha \varphi_{IJ}(z)| : z \in \Omega, |\alpha| \leq k, |I| = p, |J| = q\}$ und Konvergenz in $D_{(p,q)}(\Omega)$ wird analog zu oben erklärt.
Ein $(n-p, n-q)$-*Strom* auf Ω ist ein Element des Dualraums von $D_{(p,q)}(\Omega)$, also ein stetiges, lineares Funktional $\Theta : D_{(p,q)}(\Omega) \to \mathbb{C}$; d.h., es gibt zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ Konstanten $C_K > 0$ und $k_K \in \mathbb{N}_0$ mit $|\Theta(\varphi)| \leq C_K \cdot \|\varphi\|_{k_K}$ für $\varphi \in D_{(p,q)}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Gibt es ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit $k_K \leq l$ für alle Kompakta K, so heißt Θ Strom von einer Ordnung $\leq l$. Ist Θ von einer Ordnung $\leq l$ aber nicht von einer Ordnung $\leq l-1$, so heißt Θ Strom der *Ordnung* l. Ströme der Ordnung 0 setzen sich zu linearen Funktionalen auf $C_{0,(p,q)}(\Omega)$, den Raum der (p,q)-Formen mit stetigen Koeffizienten mit kompaktem Träger, fort. (n,n)-Ströme werden auf Testfunktionen angewandt, sind also Distributionen.

Ist $M \subset \Omega$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension p, so definiert

$$\varphi \mapsto [M](\varphi) := \int_M \varphi \quad \text{für } \varphi \in D_{(p,p)}(\Omega) \tag{7.1}$$

einen *Integrationsstrom*. Ist $X \subset \Omega$ eine Varietät der Dimension p und $\tilde{X}$ die Untermannigfaltigkeit der regulären Punkte von X, so setzt sich der Integrationsstrom $[\tilde{X}]$, definiert auf $\Omega \setminus (X \setminus \tilde{X})$, zu einem Strom auf ganz Ω fort. Dieser wird mit $[X]$ bezeichnet.

Positivität Wir benutzen die übliche Notation und schreiben

$$\beta = \tfrac{i}{2}\partial\bar{\partial}|z|^2 = \tfrac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j \quad \text{sowie} \quad \beta_p = (p!)^{-1}\beta^p \quad \text{für } 1 \leq p \leq n.$$

Eine Form φ mit Koeffizienten aus $D(\Omega)$ heißt *positiv vom Grad p*, falls sie homogen vom Grad (p,p) ist und für jedes System $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}$ von 1-Formen $\alpha_j = \sum \alpha_{ij}\, dz_i$ mit konstanten Koeffizienten gilt

$$\varphi \wedge i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_{n-p} \wedge \bar{\alpha}_{n-p} = \psi \cdot \beta_n \quad \text{mit einer Funktion } \psi \geq 0.$$

Die positiven Formen vom Grad p bezeichnen wir mit $D_p^+(\Omega)$, die positiven Testfunktionen einfach mit $D^+(\Omega)$. Ein Strom Θ heißt *positiv vom Grad* $(n-p)$, wenn Θ ein $(n-p, n-p)$-Strom ist und für jedes System $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ von Linearformen in dz_j mit konstanten Koeffizienten und $\varphi \in D^+(\Omega)$ gilt

$$\Theta(\varphi i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p) \geq 0.$$

Es seien $T_{n-p}^+(\Omega)$ die positiven Ströme vom Grad $n-p$ auf Ω. Insbesondere definiert beispielsweise jede positive Form $\psi \in D_{n-p}^+(\Omega)$ einen positiven Strom vom Grad $n-p$ über Integration durch

$$D_p^+(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega \psi \wedge \varphi.$$

Ein positiver Strom $\Theta \in T^+_{n-p}(\Omega)$ kann durch eine homogene Differentialform vom Typ $(n-p, n-p)$ in kanonischer Weise durch

$$\Theta \;=\; t_p \cdot \sum_{|I|=|J|=n-p}{}' \Theta_{IJ}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J \tag{7.2}$$

mit $t_p = 2^{-(n-p)}$ für $n-p$ gerade bzw. $t_p = i2^{-(n-p)}$ für $n-p$ ungerade dargestellt werden. Für jeden Index $I = (i_1, \ldots, i_{n-p})$ mit $i_1 < \ldots < i_{n-p}$ sind die Distributionen $\Theta_{II}\beta_n$ dann positive Maße. Durch Faltung mit geeigneten Testfunktionen lässt sich jeder positive Strom durch positive Ströme mit glatten Koeffizienten approximieren. Genauer gilt (vgl. [LG, § 2]):

Theorem 7.1 *Ein Strom $\Theta \in T^+_{n-p}(\Omega)$ ist auf jeder kompakten Teilmenge von Ω der Limes einer Folge positiver Ströme $(t_j)_j \subset D^+_{n-p}(\Omega)$.*

Für positive Ströme $\Theta \in T^+_{n-p}(\Omega)$ definieren wir ihre *Spur* $\mathrm{tr}\,(\Theta)$ durch $\mathrm{tr}\,(\Theta) = \Theta \wedge \beta_p$.

Geschlossene Ströme Wir definieren die Operatoren d, ∂ und $\bar\partial$ für Ströme auf Ω über Dualität. Für $\Theta \in D'_{(p,q)}(\Omega)$ sei $d\Theta(\varphi) := (-1)^{p+q}\Theta(d\varphi)$ mit $\varphi \in D_{(p-1,q-1)}(\Omega)$. $\partial\Theta$ bzw. $\bar\partial\Theta$ werden analog erklärt. Ist der Strom Θ durch Integration von Formen definiert, also $\Theta(\varphi) = \int_\Omega \psi \wedge \varphi$ für ein $\psi \in D_{(n-p,n-q)}(\Omega)$, so gilt

$$d\Theta(\varphi) = (-1)^{p+q}\Theta(d\varphi) = (-1)^{p+q} \int_\Omega \psi \wedge d\varphi = \int_\Omega d\psi \wedge \varphi,$$

d.h. $d\Theta$ wird durch $d\psi$ dargestellt und die Definition ist konsistent. Ein Strom Θ heißt *d-geschlossen*, falls $d\Theta = 0$, also genauer $d\Theta(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in D_{(p-1,q-1)}(\Omega)$, gilt. Ist $\Theta \in T^+_{n-p}(\Omega)$ geschlossen, so sind auch $\partial\Theta = \bar\partial\Theta = 0$.

Ist wieder $X \subset \Omega$ eine Varietät der Dimension p, so ist der gemäß (7.1) assoziierte Integrationsstrom $[X]$ positiv und geschlossen, es gilt also $[X] \in T^+_{n-p}(\Omega)$ mit $d[X] = 0$.

Positive, geschlossene Ströme vom Grad 1 Wir betrachten nun speziell den Fall $p = n-1$ und damit positive, geschlossene Ströme vom Grad 1. Ein solcher Strom Θ kann nach (7.2) durch

$$\Theta \;=\; i \sum_{j,k=1}^{n} \Theta_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k, \tag{7.3}$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten Θ_{jk} komplexe Maße sind. Positivität besagt, dass für beliebige komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ stets gilt

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Theta_{jk}\lambda_j\bar\lambda_k \;\geq\; 0.$$

Insbesondere sind dann alle Θ_{jj} und die Spur $\mathrm{tr}\,(\Theta) = \sum_j \Theta_{jj}$ positiv und es gilt für $z \in \Omega$ und Tangentialvektoren $u, v \in T_z$

$$|\Theta(z)(u,v)| \;\leq\; \Theta(z)(u,iu)^{1/2}\Theta(z)(v,iv)^{1/2}. \tag{7.4}$$

Ist V eine plurisubharmonische Funktion auf Ω, so definiert

$$\Theta = i\partial\bar{\partial}V = i\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

im Distributionensinne einen d-geschlossenen, positiven $(1,1)$-Strom auf Ω. Die Umkehrung gilt zumindest lokal: Ist $\Theta \in T_1^+(\Omega)$ geschlossen, so gibt es zu jedem Punkt $z \in \Omega$ eine offene Umgebung $U = U(z) \subset \Omega$ und eine Funktion $V \in PSH(U)$ mit $\Theta|U = i\partial\bar{\partial}V$.

Cousin II-Daten, Divisoren und assoziierte Ströme Wir wollen nun zu jeder holomorphen Funktion auf Ω – oder genauer: ihrer Nullstellenvarietät – einen positiven, geschlossenen Strom assoziieren und wiederholen dazu kurz die Fragestellung des Cousin II-Problems:

Gibt es für jede lokal definierte Nullstellenmenge in $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine globale Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, die genau die vorgeschriebene Varietät besitzt? D.h. exakt: Existiert zu jeder abzählbaren, offenen Überdeckung $(U_j)_j$ von Ω und nirgends lokal identisch verschwindenden Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$ mit $f_j/f_k \in \mathcal{O}^*(U_j \cap U_k)$ für alle Paare j,k ein $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f/f_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$ für alle j? Dabei bezeichnet $\mathcal{O}^*(D)$ die holomorphen Funktionen auf $D \subset \mathbb{C}^n$ ohne Nullstellen.
Bekanntermaßen ist die Antwort im allgemeinen selbst im pseudokonvexen Fall negativ. Ist jedoch Ω pseudokonvex und einfach zusammenhängend, so ist die Existenz einer solchen Funktion f gesichert.
Wir nennen $(U_j, f_j)_j$ wie oben ein *Cousin II-Datum* für Ω und zwei Daten $(U_j, f_j)_j$ und $(V_j, g_j)_j$ *äquivalent*, falls $f_j/g_k \in \mathcal{O}^*(U_j \cap V_k)$ für alle j,k gilt. Die Äquivalenzklassen sind *(multiplikative) Divisoren* auf Ω. Jedes Cousin II-Datum (U_j, f_j) definiert auf Ω eine *Cousin II-Verteilung* (U_j, h_{jk}) mit $h_{jk} := f_k/f_j$, denn es gelten $h_{jk}h_{kj} = 1$ auf $U_j \cap U_k$ und $h_{jk}h_{kl}h_{lj} = 1$ auf $U_j \cap U_k \cap U_l$. Wir sprechen von einer *Lösung* (U_j, h_j) mit $h_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$ der Cousin II-Verteilung, falls $h_j/h_k = h_{jk}$ auf $U_j \cap U_k$ gilt. Es ist dann dort $f_j h_j = f_k h_k$. Also ist $f := f_j h_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ wohldefiniert und heißt *Lösung* des Cousin II-Datums.

Jedem Cousin II-Datum $Y = (U_j, f_j)_j$ wird über

$$\Theta_Y \;=\; i\partial\bar{\partial}\log|f_j| \quad \text{auf } U_j$$

ein auf ganz Ω wohldefinierter $(1,1)$-Strom zugeordnet. Dieser ist positiv und geschlossen. Ist nun f eine Lösung des Cousin II-Datum, so sei $X = X_f = \{z : f(z) = 0\}$ die zugehörige Varietät und $\hat{X} = (X_k, n_k)$ ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten mit den zugehörigen Vielfachheiten n_k. Bezeichnet wieder $\tilde{X}_k$ die regulären Punkte von X_k, so gilt $\Theta_Y = \sum_k n_k [X_k]$, d.h.

$$\Theta_Y(\varphi) \;=\; \sum_k n_k \int_{\tilde{X}_k} \varphi \quad \text{für } \varphi \in D_{(n-1,n-1)}(\Omega),$$

wobei sich die Summe über die k erstreckt, die den Träger von φ treffen.

Anwendung auf die Nevanlinna-Klasse Es seien nun $\Omega = \{r(z) < 0\}$ ein glatt berandetes Gebiet mit einer definierenden Funktion r, $\hat{X} = (X_k, n_k)$ die Zerlegung einer Varietät $X \subset \Omega$ in irreduzible Komponenten mit den zugehörigen Vielfachheiten und $\Theta = \Theta_X$ der zugehörige positive, geschlossene (1,1)-Strom von der Form (7.3). Θ genüge der Blaschke-Bedingung (B). Mit $|\Theta| = \sum_{j,k} |\Theta_{jk}|$ können wir diese auch darstellen als

$$\int_\Omega |r|\, d|\Theta| = B(\Theta) \;<\; +\infty.$$

Lokal sind Lösungen u der Gleichung $i\partial\bar\partial u = \Theta$ von der Form $u = \log|f|$ mit einer holomorphen Funktion f. Um zu beweisen, dass jeder Divisor, der die Blaschke-Bedingung erfüllt, durch eine Funktion $f \in N(\Omega)$ definiert werden kann, ist also zu zeigen, dass es zu jedem geschlossenen, positiven (1,1)-Strom, der (B) genügt, eine (auf Ω plurisubharmonische) Funktion u mit $i\partial\bar\partial u = \Theta$ und

$$\sup_\delta \int_{\partial\Omega^\delta} |u(z)|\, d\sigma_\delta(z) \;\le\; \text{const}\; B(\Theta)$$

gibt. Durch eine Standardargumentation mit Regularisierung und Approximation können wir dabei annehmen, dass Θ glatt bis auf den Rand ist und die obige Ungleichung für $\delta = 0$ zeigen. Die Lösung der Gleichung $i\partial\bar\partial u = \Theta$ erfolgt dabei in zwei Schritten: Zuerst löst man $id\omega = \Theta$. Ist dann $\omega = \omega_{1,0} + \omega_{0,1}$ mit Komponenten vom Bigrad (1,0) bzw. (0,1) eine reelle Lösung, so ist $\bar\omega_{0,1} = \omega_{1,0}$ und man sieht leicht, dass mit der Lösung U der $\bar\partial$-Gleichung $\bar\partial U = \omega_{0,1}$ dann $u = 2\,\mathrm{Re}\, U$ die gesuchte Funktion ist. Dieses Schema führt also auf $L^1(\partial\Omega)$-Abschätzungen für die $\bar\partial$-Gleichung $\bar\partial U = \omega$ mit einer glatten $\bar\partial$-geschlossenen (0,1)-Form ω. Hinreichende Bedingungen an ω für die Existenz einer solchen Lösung müssen nicht-isotrop sein und hängen stark von der Geometrie der Gebiete ab. Da der d-Operator vollständig isotrop ist und die Lösung noch einen Faktor $|r|$ enthält, müssen diese nicht-isotropen Bedingung an ω von analogen Bedingungen an den Strom Θ stammen. Theorem II besagt also, dass wir hier den ersten Schritt $id\omega = \Theta$ mit den nötigen nicht-isotropen Abschätzungen lösen.

Es sei nun wieder Ω wie in Theorem II eine beschränktes, lineal konvexes, glatt berandetes Gebiet von endlichem Typ mit einer definierenden C^∞-Funktion r. Um eine nicht-isotrope Norm für (1,1)-Ströme Θ einzuführen, bedienen wir uns der Polyradien τ aus Abschnitt 3 sowie der in (3.20) eingeführten Pseudonorm

$$\kappa(z, v, \delta) \;:=\; \frac{\delta_z}{\tau(z, v, \delta)},$$

wobei wir wieder $\delta_z = |r(z)|$ schreiben. Weiter schreiben wir einfach $\tau(z, v)$ und $\kappa(z, v)$ statt $\tau(z, v, \delta_z/2)$ bzw. $\kappa(z, v, \delta_z/2)$. Für glatte (1,1)-Formen Θ und $z \in \Omega$ definieren wir nun die nicht-isotrope Norm der bilinearen Abbildung $\Theta(z)$ auf T_z durch

$$\|\Theta(z)\|_\kappa \;:=\; \sup_{u,v\neq 0} \frac{|\Theta(z)(u, v)|}{\kappa(z, u)\cdot\kappa(z, v)},$$

und wie in (1.2) die nicht-isotrope Norm der linearen Abbildung $\omega(z)$ auf T_z für 1-Formen ω auf Ω durch

$$\|\omega(z)\|_\kappa \;:=\; \sup\left\{ \frac{|\omega(z)(v)|}{\kappa(z, v)} : v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

Analog ist die euklidische Norm von Θ gegeben durch

$$\|\Theta(z)\| := \sup_{\|u\|=1, \|v\|=1} |\Theta(z)(u,v)|.$$

Wir bezeichnen mit dV_z das euklidische Volumenelement und unterteilen den Beweis von Theorem II in Analogie zu J. Bruna, P. Charpentier und Y. Dupain [BCD] in zwei Teile. In einem ersten Schritt zeigen wir

Theorem 7.2 *Für jedes glatte, beschränkte, lineal konvexe Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ von endlichem Typ gibt es eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass für alle glatten, d-geschlossenen, positiven $(1,1)$-Ströme Θ auf Ω gilt*

$$\int_\Omega \delta_z \, \|\Theta(z)\|_\kappa \, dV_z \quad \leq \quad C \cdot \int_\Omega \delta_z \, \|\Theta(z)\| \, dV_z.$$

Dazu konstruieren wir in Abschnitt 8 basierend auf den Polyzylinder $P_\delta(q)$ aus Abschnitt 3 eine geeignete Überlagerung von Ω. In Abschnitt 9 beweisen wir damit Theorem 7.2. Grundlage beider Abschnitte ist die Arbeit [BCD].

Im zweiten Schritt zum Beweis von Theorem II lösen wir die Gleichung $id\omega = \Theta$ mit einer Abschätzung

$$\int_\Omega \|\omega(z)\|_\kappa \, dV_z \quad \leq \quad C(\Omega, \Theta) \cdot \int_\Omega \delta_z \, \|\Theta(z)\|_\kappa \, dV_z. \tag{7.5}$$

Dieser Schritt zum Beweis von Theorem II orientiert sich an den Methoden von H. Skoda [Sk] für den streng pseudokonvexen Fall und besteht im wesentlichen aus einer lokalen und einer globalen Aussage. Zunächst wird in Abschnitt 10 eine Lösung für sternförmige Gebiete gezeigt. Sternförmigkeit wird hierbei benötigt, um die Formel von Poincaré zur Lösung der Gleichung $id\omega = \Theta$ anwenden zu können. Um ein globales Resultat im allgemeinen Fall zu erzielen, bedienen wir uns Methoden der Garbentheorie. Die nötigen Begriffe und Hilfsmittel werden in Abschnitt 11 zur Verfügung gestellt. Damit ist es in Abschnitt 12 dann möglich, die Aussage von Theorem II zu beweisen, da sich dieses aus Theorem 7.2 und (7.5) unmittelbar ergibt.

8 Eine geeignete Überlagerung von Ω

Für $q \in \Omega$ nahe $\partial\Omega$ und $\delta > 0$ bezeichne $\partial\Omega_{q,\delta}$ wie in Abschnitt 3 die Niveaumenge $\partial\Omega_{q,\delta} = \{z : r(z) = r(q) + \delta\}$. Wir schreiben nun auch $\partial\Omega^\delta := \{z : r(z) = -\delta\}$ und $\partial\Omega_q := \partial\Omega_{q,0}$. Wir definieren das Flächenstück $S_\delta(q)$ und dessen Multiplikation mit positiven Konstanten c in Analogie zu (3.3) durch

$$c \cdot S_\delta(q) := c \cdot P_\delta(q) \cap \partial\Omega_q.$$

Sei $0 < \gamma < 1$ zunächst beliebig. Wir wählen zu $\delta > 0$ nun $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ Punkte $q^1, \ldots, q^N \in \partial\Omega^\delta$, so dass $S_\delta(q^1), \ldots, S_\delta(q^N)$ im folgenden Sinn maximal sind:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot S_\delta(q^j) \cap \gamma \cdot S_\delta(q^k) = \emptyset \qquad & \text{für } j \neq k \\ \gamma \cdot S_\delta(z) \cap \bigcup_{j=1}^N \gamma \cdot S_\delta(q^j) \neq \emptyset \qquad & \text{für alle } z \in \partial\Omega^\delta \end{aligned} \tag{8.1}$$

Nach Lemma 3.14 gibt es ein $C > 0$ mit

$$\partial\Omega^\delta \subset \bigcup_{j=1}^{N} C\gamma \cdot S_\delta(q^j).$$

Wir wählen nun γ nach Korollar 3.12 so klein, dass

$$2C\gamma \cdot P_\delta(z) \subset P_{\delta/2}(z) \tag{8.2}$$

für alle $z \in \Omega$ nahe $\partial\Omega$ gilt. Zur Vereinfachung schreiben wir für diese z mit $\delta_z := |r(z)|$

$$S(z) \;:=\; C\gamma \cdot S_{\delta_z}(z) \quad \text{und} \quad S^*(z) \;:=\; 2C\gamma \cdot S_{\delta_z}(z).$$

Eine Argumentation wie in Lemma 6.1 zeigt, dass es ein $M = M(\Omega) < +\infty$ gibt, so dass jeder Punkt $z \in \partial\Omega^\delta$ in höchstens M der Flächen $S^*(q^1), \dots, S^*(q^N)$ enthalten ist.

Für z nahe $\partial\Omega$ und $\delta > 0$ klein genug, sei $\pi_\delta(z)$ die Projektion von z entlang des Gradienten $\nabla r(z)$ auf die Niveaufläche $\partial\Omega^\delta$. Die Abbildung π_δ ist wohldefiniert und gleichmäßig in δ von der Klasse C^∞ auf einer Umgebung U von $\partial\Omega$.

Zu einem noch fest zu wählenden $\alpha, 1 > \alpha > 0$, wählen wir für $\partial\Omega^{\alpha^k}, k \in \mathbb{N}$ groß genug, Punkte $q^{1,k}, \dots, q^{N_k,k}$ in Analogie zu (8.1). Es sei $\{q^j\}$ die Familie all dieser Punkte. Wir definieren mit $\delta_j := \delta_{q^j} = |r(q^j)| = \alpha^k$ die Mengen

$$\begin{aligned} Q_j &:= \{z \in \Omega : \alpha^k \geq \delta_z \geq \alpha^{k+1}, \pi_{\delta_j}(z) \in S(q^j)\} \\ Q_j^* &:= \{z \in \Omega : \alpha^{k-1} \geq \delta_z \geq \alpha^{k+2}, \pi_{\delta_j}(z) \in S^*(q^j)\}. \end{aligned}$$

Dann ist $Q_j \subset Q_j^*$ für alle j und $S_{\delta_0} := \{z : -\delta_0 < r(z) \leq 0\} \subset \bigcup_j Q_j$ mit $\delta_0 > 0$ geeignet. Weiter ist jeder Punkt aus U in maximal M verschiedenen Q_j^* enthalten, wobei die Schranke M nicht von α abhängt.

Für $z \in \Omega$ und $w \in \Omega$ nahe $\partial\Omega$ mit $z = \pi_{\delta_z}(w)$ sowie Einheitsvektoren $v \in S^{n-1}$ können wir die Polyradien $\tau(z, v)$ und $\tau(w, v)$ leicht vergleichen:

Lemma 8.1 *Es seien $z, w \in \Omega$ nahe $\partial\Omega$ mit $z = \pi_{\delta_z}(w)$ und $v \in S^{n-1}$ ein Einheitsvektor. Es gilt*

a) Ist $\delta_w \leq \delta_z$, so ist $\tau(w, v, \delta_z) \approx \tau(z, v)$.

b) Für $v \in T_z^{10}\partial\Omega_z$ und $\delta_w \leq \delta_z$ gilt

$$\tau(z, v)\left(\tfrac{\delta_w}{\delta_z}\right)^{1/2} \lesssim \tau(w, v) \lesssim \tau(z, v)\left(\tfrac{\delta_w}{\delta_z}\right)^{1/m},$$

bzw. für $\delta_w \geq \delta_z$

$$\tau(z, v)\left(\tfrac{\delta_w}{\delta_z}\right)^{1/m} \lesssim \tau(w, v) \lesssim \tau(z, v)\left(\tfrac{\delta_w}{\delta_z}\right)^{1/2}.$$

Beweis: b) folgt mit Korollar 3.11 direkt aus a). $\delta_w \leq \delta_z$ impliziert jedoch $w \in C \cdot P_{\delta_z}(z)$ und damit a) nach Lemma 3.13. □

Es seien $e_1, \dots, e_n$ eine $\delta_j/2$-minimal Basis in q^j, $w_1, \dots, w_n$ die zugehörigen Koordinaten und $z = \pi_{\delta_j}(w)$ die Projektion von $w \in Q_j^*$. Offenbar verschwinden die Ableitungen $\frac{\partial z_i}{\partial w_1}$ für $i = 2, \dots, n$ und $\frac{\partial \operatorname{Im} z_1}{\partial w_1}$ in q^j. Da π_δ gleichmäßig glatt in δ ist, sind auf Q_j^*

$$\left|\frac{\partial \operatorname{Im} z_1}{\partial w_1}\right| \lesssim \lambda_j \quad \text{und} \quad \left|\frac{\partial z_i}{\partial w_1}\right| \lesssim \lambda_j \quad \text{für } i = 2, \dots, n \tag{8.3}$$

mit $\lambda_j \approx \operatorname{diam} Q_j^*$. Man beachte, dass $\lambda_j \to 0$ für $j \to \infty$. Die ersten Ableitungen von π_{δ_j} lassen sich auf Q_j^* mit Hilfe der Polyradien $\tau(q^j, e_i)$ aber auch qualitativer abschätzen:

Lemma 8.2 *Mit nur von α abhängigen Konstanten gelten auf Q_j^* die Abschätzungen*

$$\left|\frac{\partial z_i(w)}{\partial w_l}\right| \lesssim \frac{\tau(q^j, e_i)}{\tau(q^j, e_l)} \quad \text{\textit{für} } 1 \le i, l \le n.$$

Beweis: Wir bemerken, dass mit Lemma 8.1 für $v \in S^{n-1}$ gilt

$$\tau(w, v) \approx \tau(q^j, v), \tag{8.4}$$

wobei die involvierten Konstanten wegen $\delta_j/\alpha \ge \delta_w \ge \delta_j \alpha^2$ auf Q_j^* nur von α abhängen. Es seien zunächst $\delta_w = \delta_j$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ eine $\delta_w/2$-minimal Basis bzgl. w sowie

$$e_l = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^l \gamma_\mu \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^1 e_\nu.$$

Es bezeichne $d\pi_{\delta_j}^\xi$ das Differential der Abbildung π_{δ_j} im Punkte ξ. Offenbar sind $d\pi_{\delta_j}^w(\gamma_1) = \gamma_1$ und $d\pi_{\delta_j}^w(\gamma_\mu) = 0$ für $2 \le \mu \le n$ und somit

$$d\pi_{\delta_j}^w(e_l) = a_1^l \gamma_1 = \sum_{\nu=1}^{n} a_1^l b_\nu^1 e_\nu,$$

d.h. mit (3.17) und (8.4) folgt

$$\left|\frac{\partial z_i(w)}{\partial w_l}\right| = |a_1^l b_i^1| \lesssim \frac{\tau(w, \gamma_1)}{\tau(w, e_l)} \cdot \frac{\tau(q^j, e_i)}{\tau(q^j, \gamma_1)} \approx \frac{\tau(q^j, e_i)}{\tau(q^j, e_l)}.$$

Für w mit $\delta_w \ne \delta_j$ folgt die Behauptung mit Hilfe der Taylorformel und einer analogen Argumentation zum Beweis von Lemma 3.2 durch

$$\left|\frac{\partial z_i(w)}{\partial w_l}\right| \lesssim \left|\frac{\partial z_i(\pi_{\delta_j}(w))}{\partial w_l}\right| + C\delta_j,$$

wobei wir die bereits gezeigten Abschätzungen benutzen und δ_j diesen offenbar ebenfalls genügt. $\square$

9 Nicht-isotrope Abschätzungen für positive, d-geschlossene (1,1)-Ströme

Zum Beweis von Theorem 7.2 zeigen wir für d-geschlossene, glatte und positive Formen Θ vom Bigrad $(1,1)$ mit der in Abschnitt 8 konstruierten Überdeckung der Q_j, Q_j^* eine Abschätzung der Art

$$\int_{Q_j} \delta_w \left\|\Theta(w)\right\|_\kappa \, dV_w \quad \leq \quad C(\alpha) \cdot \int_{Q_j^*} \delta_w \left\|\Theta(w)\right\| \, dV_w. \tag{9.1}$$

Dazu schätzen wir $\|\Theta(w)\|_\kappa$ für ein $w \in Q_j^*$ ab. Für $z \in S^*(q^j)$ ist $\tau(z,v) \approx \tau(q^j,v)$ wegen (8.2) und Lemma 3.13. Damit folgt für $w \in Q_j^*$ mit $\delta_w \leq \delta_j$ nach Lemma 8.1

$$\begin{aligned} \frac{\delta_j}{\delta_w} \cdot \sup_{u,v\neq 0} \frac{|\Theta(w)(u,v)|}{\kappa(q^j,u)\cdot\kappa(q^j,v)} \quad &\lesssim \quad \|\Theta(w)\|_\kappa \qquad\qquad (9.2) \\ &\lesssim \quad \left(\frac{\delta_j}{\delta_w}\right)^{2-\frac{2}{m}} \cdot \sup_{u,v\neq 0} \frac{|\Theta(w)(u,v)|}{\kappa(q^j,u)\cdot\kappa(q^j,v)}. \end{aligned}$$

Ist $\delta_w \geq \delta_j$, so gilt diese Ungleichungskette mit $\gtrsim$ statt $\lesssim$, die Konstanten hängen dabei nicht von α ab. Wir folgen der Idee von J. Bruna, P. Charpentier, Y. Dupain aus [BCD] und zeigen analog, dass das Supremum durch eine $\delta_j/2$-minimal Basis in q^j realisiert wird.

Lemma 9.1 *Es sei $e_1,\dots,e_n$ eine $\delta_j/2$-minimal Basis in q^j. Dann gilt mit $u = \sum_k u_k e_k, v = \sum_k v_k e_k$ und für $w \in Q_j^*$*

$$\sup_{u,v\neq 0} \frac{|\Theta(w)(u,v)|}{\kappa(q^j,u)\cdot\kappa(q^j,v)} \approx \sum_{k=1}^n \frac{\Theta(w)(e_k,ie_k)}{\kappa(q^j,e_k)^2}.$$

Beweis: Zunächst ist $|\Theta(w)(u,v)| \leq \sum_{k,l=1}^n |u_k|\cdot|v_l|\cdot|\Theta(w)(e_k,e_l)|$. Mit (3.21) gilt $|u_k| \lesssim \frac{\kappa(q^j,u)}{\kappa(q^j,e_k)}$ bzw. $|v_k| \lesssim \frac{\kappa(q^j,v)}{\kappa(q^j,e_k)}$, so dass wir insgesamt

$$|\Theta(w)(u,v)| \lesssim \kappa(q^j,u)\cdot\kappa(q^j,v) \sum_{k,l=1}^n \frac{|\Theta(w)(e_k,e_l)|}{\kappa(q^j,e_k)\cdot\kappa(q^j,e_l)}$$

erhalten. Nach (7.4) ist $|\Theta(z)(e_k,e_l)| \leq \Theta(z)(e_k,ie_k)^{1/2}\Theta(z)(e_l,ie_l)^{1/2}$ und mit $ab \lesssim a^2+b^2$ folgt die Behauptung. □

Nach Lemma 9.1 ergeben sich für (9.2) und $w \in Q_j^*$ mit $\delta_w \leq \delta_j$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_j}\sum_{k=1}^n \Theta(w)(e_k,ie_k)\tau(q^j,e_k)^2 \quad &\lesssim \quad \delta_w \cdot \|\Theta(w)\|_\kappa \qquad\qquad (9.3) \\ &\lesssim \quad \delta_w^{\frac{2}{m}-1}\delta_j^{-\frac{2}{m}} \sum_{k=1}^n \Theta(w)(e_k,ie_k)\tau(q^j,e_k)^2, \end{aligned}$$

bzw. eine analoge Ungleichungskette mit $\gtrsim$ falls $\delta_w \geq \delta_j$. Insbesondere folgt

$$\int_{Q_j} \delta_w \left\|\Theta(w)\right\|_\kappa dV_w \quad \lesssim \quad \delta_j^{-\frac{2}{m}} \sum_{k=1}^{n} \tau(q^j, e_k)^2 \int_{Q_j} \delta_w^{\frac{2}{m}-1} \Theta(w)(e_k, ie_k)\, dV_w. \qquad (9.4)$$

Es sei $w = (w_1, \ldots, w_n)$ die Darstellung von w bzgl. der zu q^j und $\delta_j/2$ assoziierten Basis $e_1 \ldots, e_n$. Mit $\eta_k := i^{n-1} \bigwedge_{l \neq k} dw_l \wedge d\bar{w}_l$ ist $2^n \Theta(w)(e_k, ie_k)\, dV_w = \Theta \wedge \eta_k$. Um das Integral links in (9.4) abzuschätzen, können wir also Integrale der Form

$$\int_{Q_j} \delta_w^{\frac{2}{m}-1} \Theta \wedge \eta_k \qquad (9.5)$$

für $k = 1, \ldots, n$ untersuchen. Betrachten wir dabei das Integral auf der linken Seite von (9.1), so erfüllt der Term für $k = 1$ bereits eine gute Abschätzung. Es gilt dann nämlich $\tau(q^j, e_1) \approx \delta_j$ und $\delta_w \geq \alpha\delta_j$ auf Q_j, d.h. wir erhalten

$$\delta_j^{-\frac{2}{m}} \tau(q^j, e_1)^2 \delta_w^{\frac{2}{m}-1} \lesssim C(\alpha) \cdot \delta_w.$$

Wir wollen nun eine Funktion $\varphi, 0 \leq \varphi \leq 1$, in den zu q^j und $\delta_j/2$ gehörigen Koordinaten mit Träger in Q_j^* und $\varphi|_{Q_j} \equiv 1$ einführen. Dazu seien zunächst φ_0 und $\Psi = \Psi_\alpha$ wie folgt gewählt:

a) $\varphi_0 \in C_0^\infty([-2, 2])$ mit $\varphi_0|_{[-1,1]} \equiv 1$ und $0 \leq \varphi_0 \leq 1$

b) $\Psi \in C_0^1([\alpha^2, \alpha^{-1}])$ mit $\Psi|_{[\alpha,1]} \equiv 1$ und $0 \leq \Psi \leq 1$

Wir schreiben $\Psi^*(t) := \Psi_\alpha^*(t) := \Psi(t) + \frac{m}{2} t\Psi'(t)$ und nehmen dabei an, dass Ψ so gewählt wurde, dass Ψ^* folgendem technischen Lemma genügt.

Lemma 9.2 ([BCD]) *Für α klein genug gibt es ein Ψ_α mit den Eigenschaften aus b), so dass Ψ^* auf $[\alpha^2, \frac{1}{2\alpha}]$ positiv ist und für $t \in [\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$ gilt $|t\Psi_\alpha'(t)| \leq \beta(\alpha)$ mit* $\lim_{\alpha \to 0} \beta(\alpha) = 0$.

Den einfachen Beweis findet man in [BCD]. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi(w) \quad &:= \quad \Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \cdot \varphi_0\left(\frac{|\operatorname{Im} z_1|}{C\gamma\tau(q^j, e_1)}\right) \cdot \prod_{l=2}^{n} \varphi_0\left(\frac{|z_l|}{C\gamma\tau(q^j, e_l)}\right) \\ &=: \quad \Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \cdot \Phi(w); \end{aligned} \qquad (9.6)$$

dabei sind $z = (z_1, \ldots, z_n) = \pi_{\delta_j}(w)$ und C und γ die Konstanten aus (8.2); φ erfüllt die gewünschten Eigenschaften. Für $2 \leq k \leq n$ sei $\tilde{\eta}_k$ die Form

$$\tilde{\eta}_k \;=\; i^{n-1} d\bar{w}_1 \wedge \bigwedge_{\substack{l=2 \\ l \neq k}}^{n} dw_l \wedge d\bar{w}_l.$$

Dann sind $\eta_k = dw_1 \wedge \tilde{\eta}_k$ und $\Theta \wedge \tilde{\eta}_k$ eine d-geschlossene $(n-1,n)$-Form. Wir wenden den Satz von Stokes auf $\varphi \cdot (-r)^{\frac{2}{m}}\, \Theta \wedge \tilde{\eta}_k$ an:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot (-r)^{\frac{2}{m}}\, \Theta \wedge \tilde{\eta}_k \\
&= \int_{Q_j^*} d\left[\varphi \cdot (-r)^{\frac{2}{m}}\, \Theta \wedge \tilde{\eta}_k\right] \\
&= -\frac{2}{m} \int_{Q_j^*} \varphi \cdot (-r)^{\frac{2}{m}-1}\, \Theta \wedge \partial r \wedge \tilde{\eta}_k + \int_{Q_j^*} (-r)^{\frac{2}{m}}\, \Theta \wedge \partial\varphi \wedge \tilde{\eta}_k,
\end{aligned}$$

wobei wir $\operatorname{supp}\varphi \subset Q_j^*$ benutzen. Aus der Darstellung von $\Theta \wedge \tilde{\eta}_k$ ergibt sich, dass bei der Berechnung von ∂r und $\partial\varphi$ nur Terme in dw_1 und dw_k berücksichtigt werden müssen. Schreiben wir wieder $\delta_w = |r(w)| = -r(w)$ für $w \in Q_j^*$, so folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_j^*} \delta_w^{\frac{2}{m}-1} \left[\frac{\partial r}{\partial w_1}\varphi + \frac{m}{2} r \frac{\partial\varphi}{\partial w_1}\right] \Theta \wedge \eta_k \\
&\quad = \frac{m}{2} \int_{Q_j^*} \delta_w^{\frac{2}{m}} \frac{\partial\varphi}{\partial w_k}\, \Theta \wedge dw_k \wedge \tilde{\eta}_k - \int_{Q_j^*} \varphi \delta_w^{\frac{2}{m}-1} \frac{\partial r}{\partial w_k}\, \Theta \wedge dw_k \wedge \tilde{\eta}_k \\
&\quad =: \mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
r \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial w_1} &= r \cdot \frac{\partial}{\partial w_1}\left(\Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \cdot \Phi(w)\right) \\
&= \frac{\delta_w}{\delta_j} \cdot \Psi'\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial w_1} \cdot \Phi(w) + r \cdot \Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial w_1},
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial r}{\partial w_1}\varphi + \frac{m}{2} r \frac{\partial\varphi}{\partial w_1} = \Phi(w) \frac{\partial r}{\partial w_1} \cdot \left[\Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) + \frac{m}{2}\frac{\delta_w}{\delta_j} \cdot \Psi'\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right)\right] + \frac{m}{2} r \Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial w_1}.$$

Benutzen wir nun Ψ^* gemäß Lemma 9.2, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{Q_j^*} \delta_w^{\frac{2}{m}-1} \Phi(w) \frac{\partial r}{\partial w_1} \Psi^*\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \Theta \wedge \eta_k &= \mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k + \frac{m}{2} \int_{Q_j^*} \delta_w^{\frac{2}{m}} \Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial w_1}\, \Theta \wedge \eta_k \\
&=: \mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k + \mathrm{III}_k. \qquad (9.7)
\end{aligned}$$

Wir wollen die Integrale aus (9.7) abschätzen und stellen zunächst den Bezug zu (9.4) und (9.5) her: dazu können wir annehmen, dass Q_j^* so nahe am Rand $\partial\Omega$ ist, dass $\operatorname{Re} \frac{\partial r}{\partial w_1} \geq c > 0$ auf Q_j^* gilt. Für $w \in Q_j^* \cap \{\delta_w \leq \delta_j\}$ ist Ψ^* positiv, insbesondere sind Φ und Ψ^* identisch 1 auf Q_j; andererseits ist für $w \in Q_j^* \cap \{\delta_w \geq \delta_j\}$

$$\Psi^*\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) = \Psi\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right)\Psi'\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right) \gtrsim -\beta(\alpha)$$

nach Lemma 9.2. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_{Q_j^*}\delta_w^{\frac{2}{m}-1}\Phi(w)\frac{\partial r}{\partial w_1}\Psi^*\left(\frac{\delta_w}{\delta_j}\right)\Theta\wedge\eta_k & \\ \gtrsim\ \int_{Q_j}\delta_w^{\frac{2}{m}-1}\Theta\wedge\eta_k-\beta(\alpha)\int_{Q_j^*\cap\{\delta_w\geq\delta_j\}}\delta_w^{\frac{2}{m}-1}\Theta\wedge\eta_k &\end{aligned}\tag{9.8}$$

und damit nach (9.4)–(9.8)

$$\begin{aligned}\int_{Q_j}\delta_w\left\|\Theta(w)\right\|_\kappa dV_w\ &\lesssim\ \delta_j^{-\frac{2}{m}}\cdot\sum_{k=1}^n\tau(q^j,e_k)^2\cdot|\operatorname{Re}(\mathrm{I}_k+\mathrm{II}_k+\mathrm{III}_k)| \\ &\quad+\delta_j^{-\frac{2}{m}}\cdot\sum_{k=1}^n\tau(q^j,e_k)^2\cdot\beta(\alpha)\int_{Q_j^*\cap\{\delta_w\geq\delta_j\}}\delta_w^{\frac{2}{m}-1}\Theta\wedge\eta_k.\end{aligned}\tag{9.9}$$

Durch Anwendung des Analogons von (9.3) für $\delta_w\geq\delta_j$ folgt für das letzte Integral

$$\begin{aligned}\beta(\alpha)\cdot\sum_{k=1}^n\delta_j^{-\frac{2}{m}}\tau(q^j,e_k)^2\cdot\int_{Q_j^*\cap\{\delta_w\geq\delta_j\}}\delta_w^{\frac{2}{m}-1}\Theta\wedge\eta_k & \\ \lesssim\ \beta(\alpha)\cdot\int_{Q_j^*}\delta_w\left\|\Theta(w)\right\|_\kappa dV_w. &\end{aligned}\tag{9.10}$$

Wir schätzen nun die Integrale $\mathrm{I}_k,\mathrm{II}_k$ und III_k ab. Nachrechnen ergibt mit (8.3)

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Re}\frac{\partial\Phi}{\partial w_1}\right|\ &\lesssim\ \frac{1}{\tau(q^j,e_1)}\left|\operatorname{Re}\frac{\partial\operatorname{Im}z_1}{\partial w_1}\right|+\sum_{l=2}^n\frac{1}{\tau(q^j,e_l)}\left|\operatorname{Re}\frac{\partial z_l}{\partial w_1}\right| \\ &\lesssim\ \frac{\lambda_j}{\tau(q^j,e_1)},\end{aligned}\tag{9.11}$$

dabei sind wie bisher $z=\pi_{\delta_j}(w)$ mit $w\in Q_j^*$, $e_1,\dots,e_n$ eine $\delta_j/2$-minimal Basis in q^j und $w_1,\dots,w_n$ die zugehörigen Koordinaten. Mit $\delta_j\approx\tau(q^j,e_1)$ folgt

$$|\operatorname{Re}\mathrm{III}_k|\ \lesssim\ \frac{\lambda_j}{\delta_j}\int_{Q_j^*}\delta_w^{\frac{2}{m}}\,\Theta\wedge\eta_k.\tag{9.12}$$

In Q_j^* gilt per constructionem $\delta_j/\alpha\geq\delta_w\geq\alpha^2\delta_j$. Damit und durch (9.3) für $\delta_w\geq\delta_j$ resp. der umgekehrten Ungleichung für $\delta_j\geq\delta_w$ erhalten wir in jedem Fall auf Q_j^*

$$\begin{aligned}\delta_j^{-\frac{2}{m}}\delta_w^{\frac{2}{m}}\cdot\sum_{k=1}^n\tau(q^j,e_k)^2\Theta(w)(e_k,ie_k)\ &\lesssim\ \max(\delta_w,\delta_j)\cdot\delta_w\left\|\Theta(w)\right\|_\kappa \\ &\lesssim\ \frac{\delta_j}{\alpha}\delta_w\left\|\Theta(w)\right\|_\kappa.\end{aligned}$$

(9.9) – (9.12) liefern nun

$$\begin{aligned}\int_{Q_j}\delta_w\left\|\Theta(w)\right\|_\kappa dV_w\ &\lesssim\ \delta_j^{-\frac{2}{m}}\cdot\sum_{k=1}^n\tau(q^j,e_k)^2\cdot|\operatorname{Re}(\mathrm{I}_k+\mathrm{II}_k)| \\ &\quad+\left(\beta(\alpha)+c\frac{\lambda_j}{\alpha}\right)\cdot\int_{Q_j^*}\delta_w\left\|\Theta(w)\right\|_\kappa dV_w.\end{aligned}\tag{9.13}$$

Um die Integrale I_k und II_k abzuschätzen, berechnen wir $\frac{\partial\varphi}{\partial w_k}$ und benutzen Lemma 8.2, (8.4) sowie die Abschätzung $\left|\frac{\partial r}{\partial w_k}\right| \lesssim \delta_j/\tau(q^j, e_k)$ aus Lemma 3.2. Es ist dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial w_k}\right| &\lesssim \frac{1}{\delta_j}\left|\frac{\partial r}{\partial w_k}\right| + \frac{1}{\delta_j}\left|\frac{\partial \operatorname{Im} z_1}{\partial w_k}\right| + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau(q^j, e_i)}\left|\frac{\partial z_i}{\partial w_k}\right| \\ &\lesssim \frac{1}{\tau(q^j, e_k)} \end{aligned} \tag{9.14}$$

und daher

$$\begin{aligned}&\delta_j^{-\frac{2}{m}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \tau(q^j, e_k)^2 \cdot |\operatorname{Re}(\mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k)| \qquad (9.15)\\ &\lesssim \sum_{k=1}^{n} \tau(q^j, e_k)^2 \int_{Q_j^*} \delta_j^{-\frac{2}{m}} \delta_w^{\frac{2}{m}} \cdot \frac{1}{\tau(q^j, e_k)} |\Theta \wedge dw_k \wedge \tilde{\eta}_k| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \tau(q^j, e_k)^2 \int_{Q_j^*} \delta_j^{-\frac{2}{m}} \delta_w^{\frac{2}{m}-1} \cdot \frac{\delta_j}{\tau(q^j, e_k)} |\Theta \wedge dw_k \wedge \tilde{\eta}_k| \\ &\lesssim C(\alpha) \cdot \sum_{k=1}^{n} \tau(q^j, e_k) \int_{Q_j^*} |\Theta \wedge dw_k \wedge \tilde{\eta}_k|.\end{aligned}$$

Da Θ positiv ist, folgt mit (7.4) und der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{Q_j^*} |\Theta \wedge dw_k \wedge \tilde{\eta}_k| \leq \left(\int_{Q_j^*} |\Theta \wedge \eta_k|\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{Q_j^*} |\Theta \wedge \eta_1|\right)^{1/2}.$$

Auf Q_j^* gilt $\delta_w/\delta_j \approx C(\alpha)$. Nach (9.3) für $\delta_w \leq \delta_j$ bzw. dem Analogon für $\delta_w \geq \delta_j$ folgt für $w \in Q_j^*$ somit $\delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \approx \frac{1}{\delta_j}\sum_{k=1}^n \tau(q^j, e_k)^2 \Theta_{kk}(w)$, wobei die Konstanten nur von α abhängen. Mit $ab \lesssim \varepsilon a^2 + C(\varepsilon) b^2$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}&\tau(q^j, e_k) \cdot \int_{Q_j^*} |\Theta \wedge dw_k \wedge \tilde{\eta}_k| \qquad (9.16)\\ &\leq \varepsilon \frac{\tau(q^j, e_k)^2}{\delta_j} \cdot \int_{Q_j^*} \Theta \wedge \eta_k + C(\varepsilon)\delta_j \cdot \int_{Q_j^*} \Theta \wedge \eta_1 \\ &\leq \varepsilon C(\alpha) \cdot \int_{Q_j^*} \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w + C(\varepsilon) C(\alpha) \cdot \int_{Q_j^*} \delta_w \|\Theta(w)\| \, dV_w,\end{aligned}$$

so dass unsere Rechnungen mit (9.13) – (9.16) statt (9.1) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_{Q_j} \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w &\leq \left[\beta(\alpha) + \frac{\lambda_j}{\alpha} + \varepsilon C(\alpha)\right] \cdot \int_{Q_j^*} \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w \\ &\quad + C(\varepsilon) C(\alpha) \cdot \int_{Q_j^*} \delta_w \|\Theta(w)\| \, dV_w\end{aligned}$$

ergeben. Durch Summation erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{j=j_0} \int_{Q_j} \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w \;&\leq\; \sum_{j=j_0} \left[\beta(\alpha) + \frac{\lambda_j}{\alpha} + \varepsilon C(\alpha)\right] \cdot \int_{Q_j^*} \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w \\
&\quad + C(\varepsilon) C(\alpha) \cdot \sum_{j=j_0} \int_{Q_j^*} \delta_w \|\Theta(w)\| \, dV_w \\
&\leq\; M \cdot \left[\beta(\alpha) + \frac{\lambda_{j_0}}{\alpha} + \varepsilon C(\alpha)\right] \cdot \int_\Omega \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w \\
&\quad + M C(\varepsilon) C(\alpha) \cdot \int_\Omega \delta_w \|\Theta(w)\| \, dV_w.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun zunächst α so klein, dass $M\beta(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ und dann j_0 so groß, bzw. ε so klein, dass $M\lambda_{j_0}/\alpha \leq \frac{1}{4}$ und $M\varepsilon C(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ gelten. Wir erhalten für ein geeignetes δ_0

$$\int_{\{w:\delta_w \leq \delta_0\}} \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w \;\leq\; \tfrac{3}{4} \cdot \int_\Omega \delta_w \|\Theta(w)\|_\kappa \, dV_w \,+\, C \int_\Omega \delta_w \|\Theta(w)\| \, dV_w,$$

woraus die Behauptung von Theorem 7.2 unmittelbar folgt. □

Damit ist Schritt eins zum Beweis von Theorem II abgeschlossen.

10 Der sternförmige Fall

Im zweiten Schritt setzen wir zunächst die Sternförmigkeit der Gebiete zusätzlich voraus und lösen die Gleichung $id\omega = \Theta$. Es sei hier also $\Omega = \{r(z) < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet von endlichem Typ $\leq m$ mit einer definierenden C^∞-Funktion r. Ω sei weiter sternförmig bzgl. einer offenen Menge $U \subset \Omega$, d.h. sternförmig bzgl. jedes Punktes $p \in U$. Wir zeigen:

Lemma 10.1 *Seien Ω wie angegeben und $\delta_z = |r(z)|$ für $z \in \Omega$. Zu jedem d-geschlossenen (1,1)-Strom Θ gibt es eine Konstante $C = C(\Omega, \Theta)$, so dass für die Poincaré-Lösung ω der Gleichung $id\omega = \Theta$ gilt*

$$\int_\Omega \|\omega(z)\|_\kappa \, dV_z \;\leq\; C \cdot \int_\Omega \delta_z \|\Theta(z)\|_\kappa \, dV_z.$$

Der Beweis des Lemmas erfolgt nach der Methode von Skoda [Sk] für den Fall streng linear konvexer Gebiete mit den nötigen Anpassungen an die nicht-isotropen Normen $\|\cdot\|_\kappa$ für 1-Formen bzw. (1,1)-Ströme aus [BCD].
Es ist zu beachten, dass die Konstante C vom Strom Θ abhängt. Ist das Integral auf der rechten Seite also endlich – was nach Theorem 7.2 genau denn der Fall ist, wenn Θ der Blaschke-Bedingung genügt –, so gibt es eine Lösung ω der Gleichung $id\omega = \Theta$, deren Integral über die nicht-isotrope Norm ebenfalls endlich ist.

Beweis des Lemmas: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass Ω sternförmig bzgl. des Nullpunktes ist und der Träger von Θ diesen nicht enthält. Ist dann $p(z) = \inf\{t > 0 : z \in t\Omega\}$ die Gauge-Funktion, so ist $r(z) := p(z) - 1$

eine definierende Funktion für Ω. Es ist $p(tz) = t \cdot p(z)$ für alle $t \geq 0$ und aus der Definition der Radien τ folgt sofort, dass auch $\tau(tz, tv, t\delta) = \tau(z, v, \delta)$ gilt. In Analogie zu [BCD] erhalten wir für $z \in \Omega, 0 < t \leq 1$ und $v \in \mathbb{C}^n$

$$\tau(tz, tv) \ \gtrsim \ \left(\frac{\delta_{tz}}{\delta_z}\right)^{1/m} \cdot \tau(z, v). \tag{10.1}$$

Verwenden wir als Weg zwischen 0 und z die direkte Verbindungslinie, so ergibt die Formel von Poincaré die Lösung

$$\omega(z)(v) \ = \ \int_0^1 \Theta(tz)(z/t, tv)\, dt.$$

Wir schätzen $\|\omega(z)\|_\kappa$ ab. Wegen $\delta_z \lesssim \tau(z, v)$ gilt für $v \in S^{n-1}$ stets $\kappa(tz, \frac{z}{t}) = \frac{|z|}{t} \cdot \kappa(tz, \frac{z}{|z|}) \lesssim \frac{|z|}{t}$. Benutzen wir die Beschränktheit von Ω und (10.1), so folgt

$$\begin{aligned}
|\omega(z)(v)| \ &\leq \ \int_0^1 \left|\Theta(tz)\left(\frac{z}{t}, tv\right)\right| dt \\
&\lesssim \ \int_0^1 \|\Theta(tz)\|_\kappa \cdot \frac{\kappa(tz, tv)}{t}\, dt \\
&\lesssim \ \frac{\delta_z^{\frac{1}{m}}}{\tau(z, v)} \cdot \int_0^1 \|\Theta(tz)\|_\kappa \cdot \frac{\delta_{tz}^{1-\frac{1}{m}}}{t}\, dt.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\|\omega(z)\|_\kappa \ = \ \sup_v \frac{|\omega(z)(v)|\tau(z, v)}{\delta_z} \ \lesssim \ \delta_z^{\frac{1}{m}-1} \cdot \int_0^1 \|\Theta(tz)\|_\kappa \cdot \frac{\delta_{tz}^{1-\frac{1}{m}}}{t}\, dt$$

und wir erhalten mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|\omega(z)\|_\kappa \, dV_z \ &\lesssim \ \int_\Omega \delta_z^{\frac{1}{m}-1} \cdot \int_0^1 \|\Theta(tz)\|_\kappa \cdot \frac{\delta_{tz}^{1-\frac{1}{m}}}{t}\, dt\, dV_z \\
&\approx \ \int_0^1 \int_\Omega \delta_z^{\frac{1}{m}-1} \cdot \|\Theta(tz)\|_\kappa \cdot \frac{\delta_{tz}^{1-\frac{1}{m}}}{t}\, dV_z\, dt \qquad =: \mathrm{I}.
\end{aligned}$$

Für $t > 0$ sei $\xi = tz$. Dann ist $t\Omega = \{tz : p(z) < 1\} = \{\xi : p(\xi) < t\}$ und daher

$$\int_\Omega \delta_z^{\frac{1}{m}-1} \cdot \|\Theta(tz)\|_\kappa \cdot \frac{\delta_{tz}^{1-\frac{1}{m}}}{t}\, dV_z \ = \ \int_{t\Omega} \delta_{\xi/t}^{\frac{1}{m}-1} \cdot \|\Theta(\xi)\|_\kappa \cdot \frac{\delta_\xi^{1-\frac{1}{m}}}{t^{2n+1}}\, dV_\xi.$$

Offenbar gelten genau dann $\xi \in \Omega$ und $p(\xi) < t \leq 1$, wenn $\xi \in t\Omega$ und $t \in [0, 1]$. Mit einer weiteren Anwendung des Satzes von Fubini schätzen wir also ab

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} \ &= \ \int_0^1 \int_{t\Omega} (\delta_{\xi/t})^{\frac{1}{m}-1} \, \|\Theta(\xi)\|_\kappa \, \frac{\delta_\xi^{1-\frac{1}{m}}}{t^{2n+1}}\, dV_\xi\, dt \\
&= \ \int_\Omega \|\Theta(\xi)\|_\kappa \, \delta_\xi^{1-\frac{1}{m}} \int_{p(\xi)}^1 \frac{(\delta_{\xi/t})^{\frac{1}{m}-1}}{t^{2n+1}}\, dt\ dV_\xi \\
&\leq \ \int_\Omega \frac{\|\Theta(\xi)\|_\kappa \, \delta_\xi^{1-\frac{1}{m}}}{[p(\xi)]^{2n+1}} \int_{p(\xi)}^1 (\delta_{\xi/t})^{\frac{1}{m}-1}\, dt\ dV_\xi.
\end{aligned}$$

Wir berechnen das innere Integral: Es ist $\delta_{\xi/t} = |r(\xi/t)| = 1 - \frac{p(\xi)}{t}$ definitionsgemäß; mit $\tau = \delta_{\xi/t}$ erhält man $(1-\tau)^2 = \frac{p(\xi)^2}{t^2}$ und $d\tau = \frac{p(\xi)}{t^2}\,dt = \frac{(1-\tau)^2}{p(\xi)}\,dt$ und daher

$$\begin{aligned}\int_{p(\xi)}^{1} (\delta_{\xi/t})^{\frac{1}{m}-1}\,dt &= p(\xi)\cdot\int_0^{1-p(\xi)} \frac{\tau^{\frac{1}{m}-1}}{(1-\tau)^2}\,d\tau \\ &\leq \frac{1}{p(\xi)}\cdot\int_0^{1-p(\xi)} \tau^{\frac{1}{m}-1}\,d\tau \\ &= m\cdot\frac{[1-p(\xi)]^{\frac{1}{m}}}{p(\xi)} \approx \frac{\delta_\xi^{\frac{1}{m}}}{p(\xi)}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\int_\Omega \|\omega(z)\|_\kappa\,dV_z \lesssim \mathrm{I} \lesssim \int_\Omega \frac{\delta_\xi\,\|\Theta(\xi)\|_\kappa}{[p(\xi)]^{2n+2}}\,dV_\xi.$$

Wegen $0 \notin \operatorname{supp}\Theta$ ist $p(\xi)|_{\operatorname{supp}\Theta} \geq t(\Theta) > 0$ und die Behauptung des Lemmas folgt. Es ist klar, warum die Wahl der Konstanten von Θ abhängt. □

11 Elemente der Garbentheorie

Es werden nun einige Elemente der Garbentheorie eingeführt. Damit wollen wir im nächsten Abschnitt die gewonnene lokale Aussage globalisieren. Im einzelnen definieren wir Garben und Prägarben, sowie ihren kanonischen Zusammenhang, und geben kurze Einführungen in Cohomologiegruppen sowie exakte Sequenzen davon.
Alle angesprochenen Resultate dieses Abschnitts sind wohl bekannt und können in der Literatur gefunden werden. Es sei hier auf die Darstellungen in [GF, GR, Kr] verwiesen, an denen wir uns orientieren.

Auch wenn die Garbentheorie für allgemeine topologische Räume zur Verfügung steht, beschränken wir uns auf den Fall des $\mathbb{C}^n$. Im folgenden sei also $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet.

Garben und Prägarben Ist $\mathcal{F}$ ein topologischer Raum und $\pi : \mathcal{F} \to \Omega$ eine lokal topologische Abbildung, so heißt $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}, \pi)$ eine *Garbe* über Ω, π heißt die *Projektion* der Garbe. Ist klar, welche Projektion gemeint ist, so bezeichnen wir die Garbe einfach mit $\mathcal{F}$. Für $z \in \Omega$ sei $\mathcal{F}_z := \pi^{-1}(\{z\})$ der *Halm* von $\mathcal{F}$ über z. Es sei $U \subset \Omega$ eine offene Teilmenge. Eine stetige Abbildung $s : U \to \mathcal{F}$ heißt *Schnitt* von $\mathcal{F}$ über U, wenn $\pi \circ s = id_U$ gilt. Die Menge aller Schnitte über U ist $\Gamma(U, \mathcal{F})$.
Es seien $(\mathcal{F}, \pi)$ und $(\mathcal{F}, \pi')$ Garben über Ω. Versehen wir

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' := \{(f, f') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}' : \pi(f) = \pi'(f')\} = \bigcup_{z\in\Omega} \mathcal{F}_z \times \mathcal{F}'_z$$

mit der Relativtopologie in $\mathcal{F} \times \mathcal{F}'$, so ist die Projektion $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' \to \Omega$ mit $(f, f') \mapsto \pi(f)$ lokal topologisch; mit anderen Worten: die so definierte *Whitney-Summe* der Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ ist wieder eine Garbe über Ω.
Eine Garbe $\mathcal{F}$ über Ω heißt *Garbe von (abelschen) Gruppen*, wenn jeder Halm $\mathcal{F}_z$ mit $z \in \Omega$ die (additiv geschriebene) Struktur einer (abelschen) Gruppe trägt und die

Subtraktionsabbildung $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $(f_1, f_2) \mapsto f_1 - f_2$ stetig ist. Bezeichnet dann 0_z das neutrale Element der Gruppe $\mathcal{F}_z$ und ist $U \subset \Omega$ offen, so ist $0 : U \to \mathcal{F}$ mit $z \mapsto 0_z$ ein Schnitt von $\mathcal{F}$ über U, der *Nullschnitt*. Für jede offene Menge $U \subset \Omega$ besitzt dann auch $\Gamma(U, \mathcal{F})$ Gruppenstruktur: man definiert $s_1 - s_2 \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ für $s_1, s_2 \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ durch $(s_1 - s_2)(z) = s_1(z) - s_2(z)$. Einfaches Beispiel ist die *Nullgarbe* $0 = \Omega \times \{0\}$, versehen mit der Projektion $\pi : 0 \to \Omega, (z, 0) \mapsto z$. Jeder Halm 0_z ist die triviale Gruppe. Garben mit anderen algebraischen Strukturen werden analog erklärt.
Sind $(\mathcal{F}, \pi)$ und $(\mathcal{F}', \pi')$ Garben über Ω, so heißt eine Abbildung $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ *halmtreu*, wenn $\pi' \circ \varphi = \pi$ gilt – d.h. für alle $z \in \Omega$ ist $\varphi(\mathcal{F}_z) \subset \mathcal{F}'_z$. Eine stetige, halmtreue Abbildung $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ heißt *Garbenmorphismus*. Ein solcher Garbenmorphismus definiert für jede offene Teilmenge $U \subset \Omega$ eine Abbildung

$$\varphi^* : \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \quad \text{mit} \quad \varphi^*(s) = \varphi \circ s. \tag{11.1}$$

Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ Garben von (abelschen) Gruppen und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ ein Morphismus zwischen ihnen, so heißt φ *Garbenhomomorphismus*, wenn für jedes $z \in \Omega$ die Einschränkung $\varphi_z : \mathcal{F}_z \to \mathcal{F}'_z$ von φ auf $\mathcal{F}_z$ ein Homomorphismus ist. Der *Kern* und das *Bild* eines Garbenhomomorphismus sind definiert durch

$$\ker \varphi = \bigcup_{z \in \Omega} \ker \varphi_z \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im} \varphi = \bigcup_{z \in \Omega} \operatorname{Im} \varphi_z. \tag{11.2}$$

Gibt es für jede offene Menge $W \subset \Omega$ eine Menge M_W und für zwei offene Mengen $V \subset W \subset \Omega$ eine Abbildung $r_V^W : M_W \to M_V$ mit $r_W^W = id_{M_W}$ und $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$ für alle offenen $U \subset V \subset W \subset \Omega$, so heißt das System $\{M_W, r_V^W\}$ *Prägarbe*. Die Abbildungen r_V^W heißen *Restriktionsabbildungen*. Jede Garbe $\mathcal{F}$ induziert über $M_W := \Gamma(W, \mathcal{F})$ und $r_V^W(s) := s|V$ für $s \in \Gamma(W, \mathcal{F})$ die ihr zugeordnete *kanonische Prägarbe*.
Ebenso induziert jede Prägarbe eine Garbe: Es sei das System $\{M_W, r_V^W\}$ gegeben; wir fixieren ein $z \in \Omega$ und führen auf $\{(W, s) : W = W(z) \text{ offen}, s \in M_W\}$ folgende Äquivalenzrelation ein:

$$\begin{aligned}(W_1, s_1) \sim_z (W_2, s_2) \quad :\Leftrightarrow \quad & \exists V = V(z) \text{ offen mit} \\ & V \subset W_1 \cap W_2 \text{ und } r_V^{W_1}(s_1) = r_V^{W_2}(s_2).\end{aligned}$$

Die Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $(W, s)_z$ und definieren den Halm $\mathcal{F}_z$ als Vereinigung der Klassen $(W, s)_z$ und die Garbe $\mathcal{F}$ als (disjunkte) Vereinigung der Halme $\mathcal{F}_z$. Natürlich ist $\pi : \mathcal{F} \to \Omega$ die kanonische Projektion. Ist $W \subset \Omega$ offen, so induziert jedes $s \in M_W$ einen Schnitt rs mit der Eigenschaft $rs(z) := (W, s)_z$. Definieren wir nun $\mathfrak{B} := \{rs(W) : W \subset \Omega \text{ offen}, s \in M_W\}$, so lässt sich zeigen, dass $\mathfrak{B}$ die Basis einer Topologie bildet, mit der π lokal topologisch wird. Auf die beschriebene Weise erhalten wir für jede offene Menge $W \subset \Omega$ also eine Abbildung $\iota_W : M_W \to \Gamma(W, \mathcal{F})$. Eine Prägarbe heißt *kanonisch*, wenn jede der Abbildungen $\iota_W, W \subset \Omega$, bijektiv ist. Eine Prägarbe ist genau dann kanonisch, wenn die *Serre'schen Bedingungen* gelten:

(S1) Für alle $s, t \in M_W$, zu denen eine offene Überdeckung $\{W_i\}_{i \in I}$ von W mit $r_{W_i}^W(s) = r_{W_i}^W(t)$ existiert, gilt $s = t$.

(S2) Sind $W = \bigcup_i W_i$ und $s_i \in M_{W_i}$ mit $r_{W_i \cap W_j}^{W_i}(s_i) = r_{W_i \cap W_j}^{W_j}(s_j)$ für alle i, j, so gibt es (genau) ein $s \in M_W$ mit $r_{W_i}^W(s) = s_i$.

Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist die Garbe, die aus der $\mathcal{F}$ zugeordneten kanonischen Prägarbe $\{\Gamma(W,\mathcal{F}), r_V^W\}$ gewonnen wird, isomorph zu $\mathcal{F}$. Eine Garbe lässt sich also über ihre Schnitte bereits definieren.
Eine Prägarbe $F = \{M_W, r_V^W\}$ heißt *Prägarbe (abelscher) Gruppen*, wenn jedes M_W eine (abelsche) Gruppe und jede Abbildung r_V^W ein Gruppen-Homomorphismus sind. Die zur Prägarbe F assoziierte Garbe $\mathcal{F}$ ist dann eine Garbe (abelscher) Gruppen und andererseits ist die zu einer Garbe abelscher Gruppen kanonische Prägarbe dann auch eine Prägarbe abelscher Gruppen. Ist $F' = \{M'_W, r'^W_V\}$ eine weitere Prägarbe abelscher Gruppen über Ω, so ist ein *Prägarbenhomomorphismus* $\Phi : F \to F'$ eine Familie $\{\Phi_W\}$ von Abbildungen $\Phi_W : M_W \to M'_W$, so dass für jedes Paar $V \subset W$ offener Mengen gilt $\Phi_V \circ r_V^W = r'^W_V \circ \Phi_W$ und jede der Abbildungen Φ_W die Gruppenstruktur respektiert. Analoge Definitionen und Resultate gelten für andere algebraische Strukturen.

Cohomologie Es seien nun $\mathcal{F}$ eine Garbe (additiv geschriebener) abelscher Gruppen und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine abzählbare, lokal endliche, offene Überdeckung von Ω. Wir schreiben abkürzend $U_{i_0,\ldots,i_r}$ statt $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_r}$. Mit $r \in \mathbb{N}$ sei

$$C^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \;=\; \prod_{i_0,\ldots,i_r} \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_r},\mathcal{F});$$

die $f \in C^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$ sind Funktionen, die jedem $(r+1)$-Tupel alternierend einen Schnitt $f(i_0,\ldots,i_r) \in \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_r},\mathcal{F})$ zuordnen und heißen *r-Coketten*. $C^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ist auf natürliche Weise wieder abelsche Gruppe. $\delta = \delta^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) : C^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{r+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ mit

$$\delta f(i_0,\ldots,i_{r+1}) \;:=\; \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j f(i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{r+1})|_{U_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{r+1}}}$$

ist der *Corand-Operator*, wobei der Index mit ˆ jeweils entfällt. Direktes Nachrechnen ergibt $\delta^2 = 0$. Es bezeichne $Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \{f \in C^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \delta f = 0\}$ für $r \in \mathbb{N}_0$ die *r-Cozyklen* von $\mathcal{F}$ bzgl. der Überdeckung $\mathcal{U}$ und $B^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \delta(C^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}))$ für $r \in \mathbb{N}$ bzw. speziell $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \{0\}$ die *r-Coränder*. Offenbar sind Z^r und B^r Untergruppen von C^r und die $r$te-*Cohomologiegruppe* von Ω bzgl. $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$

$$H^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \;:=\; Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^r(\mathcal{U},\mathcal{F}), \quad r \geq 1$$

ist wohldefiniert. Wegen $B^0 = \{0\}$ wird vereinbarungsgemäß $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) := Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ definiert. Der Corand-Operator induziert also eine semiexakte Sequenz

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

mit $B^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \operatorname{Im}\delta|_{C^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})} \subseteq \ker\delta|_{C^r(\mathcal{U},\mathcal{F})} = Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Wir nennen zwei Cozyklen *cohomolog* bzgl. einer Überdeckung, wenn sie sich bloß um einen Corand unterscheiden, d.h. die gleiche Cohomologieklasse in $H^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$ repräsentieren. Für $f \in Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$ bezeichne $[f]$ die Äquivalenzklasse von f in $H^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
Eine abzählbare, offene, lokal endliche Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ von Ω ist eine Verfeinerung der Überdeckung $\mathcal{U}$, wenn es eine *Affinitätsfunktion* $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $V_i \subset U_{\sigma(i)}$ für alle i gibt. σ induziert durch $(\sigma^* f)(i_0,\ldots,i_r) = f(\sigma(i_0),\ldots,\sigma(i_r))|_{V_{i_0,\ldots,i_r}}$ für $f \in$

$C^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$ und $(i_0,\ldots,i_r) \in \mathbb{N}^{n+1}$ einen Homomorphismus $\sigma^* : C^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^r(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Es gelten $\delta\sigma^* = \sigma^*\delta, \sigma^*(Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F})) \subset Z^r(\mathcal{V},\mathcal{F})$ und $\sigma^*(B^r(\mathcal{U},\mathcal{F})) \subset B^r(\mathcal{V},\mathcal{F})$; wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung

$$\sigma^* : H^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^r(\mathcal{V},\mathcal{F}). \tag{11.3}$$

Sind σ und σ' zwei Affinitätsfunktionen der Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$, so stimmen sie auf H^r überein. Jedes $f \in Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$ induziert damit eine wohldefinierte Cohomologieklasse bzgl. $\mathcal{V}$, nämlich $\sigma^* f$ (für jede Affinitätsfunktion σ). Sei

$$\mathcal{Z}^r(\Omega,\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathcal{U}} Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

$f, g \in \mathcal{Z}^r(\Omega,\mathcal{F})$, also etwa $f \in Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$ und $g \in Z^r(\mathcal{V},\mathcal{F})$, sind äquivalent, $f \sim g$, wenn es eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{W}$ von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ gibt, so dass die von f und g induzierten Cohomologieklassen bzgl. $\mathcal{W}$ übereinstimmen. Die $r$te-Cohomologiegruppe $H^r(\Omega,\mathcal{F})$ ist dann die Vereinigung all dieser Äquivalenzklassen. Wieder ist $H^r(\Omega,\mathcal{F})$ auf offensichtliche Art eine abelsche Gruppe; $H^r(\Omega,\mathcal{F})$ ist der *direkte Limes* der Gruppen $H^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
Zu jedem Element aus $H^r(\Omega,\mathcal{F})$ gehört also eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ und ein Element aus $H^r(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Speziell ist $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ die Gruppe der Funktionen f, die jedem $i \in \mathbb{N}$ einen Schnitt $f_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{F})$ zuordnen, so dass auf $U_i \cap U_j$ gilt $f_i = f_j$. Damit ist $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \Gamma(\Omega,\mathcal{F})$ und insbesondere ist $H^0(\Omega,\mathcal{F})$ auf natürliche Weise zu den globalen Schnitten $\Gamma(\Omega,\mathcal{F})$ isomorph.

Exakte Sequenzen Sind A, B und C abelsche Gruppen und $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ Homomorphismen, so heißt diese Sequenz *exakt* an der Stelle B, wenn $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$ gilt. Ist speziell $C = \{0\}$, so bedeutet Exaktheit, dass φ surjektiv ist; für $A = \{0\}$ bedeutet Exaktheit die Injektivität von ψ.
Es seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Garben abelscher Gruppen über Ω. Sind nun

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

Homomorphismen, so wird Exaktheit auf offensichtliche Weise definiert: Die Sequenz ist (exemplarisch) exakt an der Stelle $\mathcal{G}$, wenn mit Definition (11.2) gilt $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$; die Sequenz ist exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.
Für jedes $r > 0$ und jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_j\}$ werden Homomorphismen

$$0 \to C^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} C^r(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} C^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) \tag{11.4}$$

gemäß (11.1) über $\varphi^* : f \mapsto \varphi \circ f$ bzw. $\psi^* : g \mapsto \psi \circ g$ induziert. Die Sequenz (11.4) ist wieder exakt; man beachte allerdings, dass ψ^* nicht notwendig surjektiv ist, weswegen die abschließende 0 weggelassen wird. Schreibt man statt (11.4)

$$0 \to C^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} C^r(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} C_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to 0$$

mit $C_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) = \psi^*(C^r(\mathcal{U},\mathcal{G}))$, so ist diese Sequenz exakt. Sie und diese Überlegungen führen auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\psi^*} & C_0^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
0 & \longrightarrow & C^{r}(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^{r}(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\psi^*} & C_0^{r}(\mathcal{U},\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
0 & \longrightarrow & C^{r+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^{r+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\psi^*} & C_0^{r+1}(\mathcal{U},\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Kommutativität bedeutet $\varphi^* \circ \delta = \delta \circ \varphi^*$ und $\psi^* \circ \delta = \delta \circ \psi^*$, womit man mit $Z_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) = C_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) \cap Z^r(\mathcal{U},\mathcal{H})$ bzw. $B_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) = C_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) \cap B^r(\mathcal{U},\mathcal{H})$

$$0 \to Z^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow Z^r(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow Z_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to 0$$
$$0 \to B^r(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow B^r(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow B_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to 0$$

und daher wohldefinierte Abbildungen

$$\begin{array}{rl}
0 \to & H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H_0^0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \\
 & H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H_0^1(\mathcal{U},\mathcal{H}) \\
 & \vdots
\end{array}$$

erhält. Ist nun $[h] \in H_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H})$ und h ein Repräsentant, so gibt es ein $g \in Z^r(\mathcal{U},\mathcal{G})$ mit $\psi^* g = h$. Dann macht der Ausdruck $[(\varphi^*)^{-1}\delta g] =: \delta^*[h]$ Sinn (vgl. [Kr]) und ist durch $[h]$ als Element von $H^{r+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ eindeutig bestimmt. Das Schlangen-Lemma garantiert nun die Exaktheit der resultierenden Sequenz

$$\begin{array}{rl}
0 \to \quad H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H_0^0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\
 & \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H_0^1(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \cdots
\end{array}$$

Wir wollen diese lange exakte Cohomologiesequenz anwenden und dafür die zunächst notwendige Einschränkung auf die Gruppen $H_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H})$ eliminieren. Dazu benutzen wir wieder den von einer Verfeinerung $\mathcal{V} = \{V_i\}$ und der zugehörigen Affinitätsfunktion σ gemäß (11.3) induzierten Homomorphismus. Entscheidend ist, dass es für jedes $h \in C^r(\mathcal{U},\mathcal{H})$ eine Verfeinerung $\mathcal{V}$ und eine Affinitätsfunktion σ gibt, so dass $\sigma^* h \in C_0^r(\mathcal{V},\mathcal{H})$ gilt. Bezeichnet $H_0^r(\Omega,\mathcal{H})$ den direkten Limes von $H_0^r(\mathcal{U},\mathcal{H})$, so ist damit die kanonische Abbildung von $H_0^r(\Omega,\mathcal{H})$ nach $H^r(\Omega,\mathcal{H})$ ein Isomorphismus. Insgesamt erhalten wir

Theorem 11.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen über Ω. Dann gibt es eine lange, exakte Cohomologiesequenz*

$$\begin{array}{rl}
0 \quad \longrightarrow & H^0(\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\Omega,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(\Omega,\mathcal{H}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{F}) \\
\longrightarrow & H^1(\Omega,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{H}) \longrightarrow H^2(\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Bei der Anwendung dieser Cohomologiesequenz erweist es sich natürlich als nützlich, die auftretenden Cohomologiegruppen gut zu kennen. Besonders wichtig ist dabei der Fall, wenn einige davon sogar verschwinden. Eine Klasse von Garben, für die dies gilt, sind feine Garben, die nun eingeführt werden sollen.

Feine Garben Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ sei $D(U)$ der Ring (ohne Eins) der Testfunktionen auf U. Bekanntermaßen gibt es zu jeder offenen, lokal endlichen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Ω eine C^∞ Teilung der Eins bzgl. $\mathcal{U}$; d.h., es existieren Funktionen $\varphi_i \in D(U_i)$ mit $0 \leq \varphi_i \leq 1$ und $\sum_i \varphi_i \equiv 1$.
Eine Garbe $\mathcal{F}$ von D-Moduln heißt *fein*, wenn für jede offene, lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ und jede C^∞-Teilung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ bzgl. $\mathcal{U}$ gilt

a) $(\varphi_i)_z \cdot f = 0_z$, für $f \in \mathcal{F}_z$ und $z \notin \operatorname{supp} \varphi_i$

b) $(\varphi_i)_z \cdot f = f$, für $f \in \mathcal{F}_z$ und $z \notin \operatorname{supp}(1 - \varphi_i)$.

Dabei bezeichnet ψ_z den Keim von ψ in z. Die Cohomologiegruppen feiner Garben verschwinden; wir zitieren hier nur das Ergebnis, den Beweis findet man z. B. in [GF].

Theorem 11.2 *Ist $\mathcal{F}$ eine feine Garbe, so gilt $H^r(\Omega, \mathcal{F}) = 0$ für alle $r \geq 1$.*

12 Globalisierung: Beweis des Theorems

Wir wollen die Aussage von Lemma 10.1 nun auf Gebiete erweitern, die nicht notwendig sternförmig sind, sonst aber den dort genannten Voraussetzungen genügen. Damit beweisen wir Theorem II. Es sei also $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet mit glattem Rand und von endlichem Typ. Zu einer lokal endlichen Überdeckung $(\Omega_j)_j$ seien ω_j Lösungen der Gleichung $id\omega = \Theta$ auf Ω_j, die eine Abschätzung der Art (1.3) erfüllen. Ist $(\varphi_j)_j$ eine C^∞-Teilung der Eins bzgl. dieser Überdeckung, so gilt

$$\Theta - i \cdot d \sum_j \varphi_j \omega_j = -i \sum_j d\varphi_j \wedge \omega_j.$$

Die d-geschlossene Form $\sum d\varphi_j \wedge \omega_j$ hat dann meßbare Koeffizienten auf Ω und unterscheidet sich von Θ bloß um eine weitere d-geschlossene Form. Wir benutzen also die in Abschnitt 11 bereit gestellten Methoden der Garbentheorie und zeigen Theorem II:

Beweis: Wir benutzen die Idee von Skoda [Sk]. Dazu definieren wir zunächst drei Garben über ihre Schnitte und gehen dann ähnlich vor, wie es beim Beweis des Lemmas von Dolbeault gemacht wird (vgl. hierzu [Kr]).

Es sei U eine offene Teilmenge von Ω. Die Garben $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ seien wie folgt definiert:

a) Es ist $\Theta \in \Gamma(U, \mathcal{H})$ genau dann, wenn Θ ein d-geschlossener 2-Strom der Ordnung null ist und für jedes Kompaktum $K \subset U$ gilt

$$\int_K \delta_z \, \|\Theta(z)\| \, dV_z \quad < \quad +\infty.$$

b) Es ist $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ genau dann, wenn ω ein 1-Strom der Ordnung null ist und für jedes Kompaktum $K \subset U$ gilt

$$\int_K \|\omega(z)\|_\kappa + \delta_z \, \|d\omega(z)\| \, dV_z \quad < \quad +\infty. \tag{12.1}$$

c) Es ist $f \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ genau dann, wenn f ein 0-Strom der Ordnung null ist und für jedes Kompaktum $K \subset U$ gilt

$$\int_K |f(z)| + \|df(z)\|_\kappa \, dV_z \quad < \quad +\infty.$$

Die konstante Garbe $\mathbb{C}$ ist eine Untergarbe von $\mathcal{F}$ und man erhält die Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{G} \xrightarrow{d} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

Lemma 10.1 zeigt, dass diese Sequenz exakt ist, da es für jeden Punkt $z \in \Omega$ eine Umgebung in Ω gibt, die den Bedingungen des Lemmas genügt. Wie in [Sk] benutzen wir, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ fein sind: dazu seien $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ und $\varphi \in D(U)$. $\varphi\omega$ erfüllt wegen $d(\varphi\omega) = d\varphi \wedge \omega + \varphi \cdot d\omega$ die Abschätzung (12.1) und es ist $\varphi\omega \in \Gamma(U, \mathcal{G})$. Das gleiche Argument wirkt für $\mathcal{F}$ und wir können nun in Analogie zum Lemma von Dolbeault vorgehen.

Es sei $\mathcal{G}^0 = \{g \in \mathcal{G} : dg = 0\}$ der Kern von d bzgl. $\mathcal{G}$. Die Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}^0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{d} & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{d} & \mathcal{G}^0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sind exakt und führen auf die korrespondierenden exakten Cohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\Omega, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(\Omega, \mathcal{H}) & \longrightarrow & H^1(\Omega, \mathcal{G}^0) & \longrightarrow & H^1(\Omega, \mathcal{G}) \\ H^1(\Omega, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(\Omega, \mathcal{G}^0) & \longrightarrow & H^2(\Omega, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^2(\Omega, \mathcal{F}). \end{array}$$

Da $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ feine Garben sind, verschwinden ihre Cohomologiegruppen für $r \geq 1$ und aus der Exaktheit folgt

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega, \mathcal{G}^0) & \cong & H^0(\Omega, \mathcal{H})/d(H^0(\Omega, \mathcal{G})) \\ H^1(\Omega, \mathcal{G}^0) & \cong & H^2(\Omega, \mathbb{C}), \end{array}$$

d.h. wir erhalten

$$H^2(\Omega, \mathbb{C}) \cong H^0(\Omega, \mathcal{H})/d(H^0(\Omega, \mathcal{G})). \tag{12.2}$$

Es ist zu klären, warum $H^2(\Omega, \mathbb{C})$ verschwindet: Beschränkte, glatte, lineal konvexe Gebiete sind $\mathbb{C}$-konvex, d.h. der Durchschnitt von Ω mit jeder komplexen Geraden ist zusammenhängend und einfach zusammenhängend. $\mathbb{C}$-konvexe Gebiete aber sind einfach zusammenhängend (vgl. [Hö2, §4.6]). Bekanntermaßen ist dann $H^2(\Omega, \mathbb{C}) = \{0\}$. Da die Elemente aus $H^0(\Omega, \cdot)$ den globalen Schnitten entsprechen, gibt es nach (12.2) zu jedem Strom $\Theta \in \Gamma(\Omega, \mathcal{H})$ einen Strom $\omega \in \Gamma(\Omega, \mathcal{G})$ mit $d\omega = \Theta$, wobei die entsprechenden Integralabschätzungen gelten. Das aber ist genau die Behauptung von Theorem II, das damit bewiesen ist. □

Teil IV
Das Randverhalten von H^p-Funktionen

Ist $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : r(z) < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, C^∞-glattes Gebiet mit definierender Funktion r, so bezeichne wieder $\partial\Omega^\delta = \{z : r(z) = -\delta\}$ für positve δ und σ bzw. σ_δ das Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$ bzw. $\partial\Omega^\delta$.

Eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gehört zum *Hardy-Raum* $H^p(\Omega)$, wenn gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p(\Omega)} \;:=\; \sup_{\delta>0}\left(\int_{\partial\Omega^\delta} |f(z)|^p \, d\sigma_\delta(z)\right)^{1/p} \quad &< \quad +\infty \qquad \text{für } 0 < p < +\infty \\ \text{bzw.} \qquad \|f\|_{H^\infty(\Omega)} \;:=\; \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \quad &< \quad +\infty \qquad \text{für } p = \infty. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $H^\infty(\Omega) \subset H^p(\Omega) \subset N(\Omega)$ für positive p. Für σ-fast alle Randpunkte besitzen Funktionen $f \in H^p(\Omega)$ nicht-tangentiale Grenzwerte nach E. M. Stein [St]. Die verwendeten Näherungsregionen basieren auf „Kugeln“ $B(w, \rho) \subset \partial\Omega$. Diese haben in komplexe Tangentialrichtungen einen Durchmesser proportional zu $\sqrt{\rho}$ und verhalten sich in der Normalenrichtung wie ρ. Sie sind also nur im streng pseudokonvexen Fall optimal. Zum Beweis von Theorem III folgen wir daher der Vorgehensweise von F. Di Biase und B. Fischer [DBF] für den linear konvexen Fall und verwenden eine Regularisierung der Polyzylinder aus Abschnitt 3.

13 Passende Näherungsumgebungen

Es sei wieder $\Omega = \{r(z) < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet von endlichem Typ $\leq m$ mit einer definierenden C^∞-Funktion r. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir bei einem gegebenen Randpunkt $w \in \partial\Omega$ davon ausgehen, dass r so gewählt wurde, dass in einer offenen Umgebung $U = U(w)$ die zugehörigen Niveaumengen alle lineal konvex und von endlichem Typ $\leq m$ sind.

Die Polyzylinder $P_\delta(q)$ sind weder bzgl. q noch bzgl. δ stetig. Da wir sie zur Definition der Näherungsumgebungen benutzen wollen, ist also eine Regularisierung notwendig. Es seien daher $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$ klein genug. Wir definieren

$$P'(q, \delta) := \bigcup_{\delta'<\delta} P_{\delta'}(q) \quad \text{und} \quad P''(q, \delta) := \bigcup_{P'(p,\delta)\ni q} P'(p, \delta)$$

und nun mit Hilfe der Projektionsabbildung $\pi : U \to \partial\Omega$ für einen Randpunkt $w \in \partial\Omega$ und $\alpha > 0$ die Näherungsumgebung $\mathcal{A}_\alpha(w)$ gemäß (1.4) durch

$$\mathcal{A}_\alpha(w) \quad := \quad \{z \in U \cap \Omega : \pi(z) \in P''(w, \alpha|r(z)|)\}.$$

Es gilt $\mathcal{A}_\alpha(w) \subset \mathcal{A}_{\alpha'}(w)$ für $\alpha < \alpha'$. Weiter enthält offenbar jedes $\mathcal{A}_\alpha(w)$ eine Folge $(z_k)_k \subset \Omega$, die gegen w konvergiert, was die Bezeichnung *Näherungsumgebung* rechtfertigt. Zunächst befassen wir uns jedoch mit den Eigenschaften von P' und P''. Diese Mengen sind keine Polyzylinder mehr. Es besteht jedoch ein enger Zusammenhang zu $P_\delta(q)$, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 13.1 *Es seien $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$. Es existieren unabhängige Konstanten $c_1, c_2, C_1, C_2 > 0$ mit*

$$\begin{aligned} P_{c_1\delta}(q) \subset \;& P'(q,\delta) \;\subset P_{C_1\delta}(q) \\ P'(q,c_2\delta) \subset \;& P''(q,\delta) \;\subset P'(q,C_2\delta). \end{aligned}$$

Beweis: Man sieht direkt, dass $0 < c_1 < 1$ beliebig und $c_2 = 1$ gewählt werden können. Als Konsequenz aus Lemma 3.10 erhalten wir $\tau(q,v,\delta') < C' \cdot \tau(q,v,\delta)$ für alle $q \in U \cap \Omega, v \in S^{n-1}$ und $\delta' < \delta$ mit einer unabhängigen Konstanten C'. Damit folgt $P_{\delta'}(q) \subset C' P_\delta(q) \subset P_{C_1\delta}(q)$ nach Korallar 3.12 für alle $\delta' < \delta$ und damit der erste Teil der Behauptung. Ist $p \in P'(q,\delta)$, so liefert diese mit Lemma 3.14 auch $P'(p,\delta) \subset P'(q,C\delta)$ und so die noch fehlende Inklusion. □

Als unmittelbare Konsequenz erhalten wir, dass durch

$$d''(p,q) \;:=\; \inf\{\delta > 0 : q \in P''(p,\delta)\}$$

eine – zu $d(p,q)$ äquivalente – Quasidistanz gegeben ist. Es gilt – anders als für $P_\delta(q)$ und $d(p,q)$ – hier $P''(q,\delta) \;=\; \{z : d''(q,z) < \delta\}$. Damit ist

$$\mathcal{A}_\alpha(w) \;=\; \{z \in U \cap \Omega : d''(w,\pi(z)) < \alpha|r(z)|\}.$$

Zu zeigen ist, dass die Mengen $\mathcal{A}_\alpha(w)$ offen sind. Dazu benötigen wir das

Lemma 13.2 *Ist $z \in P''(q,\delta)$, so gibt es ein $\eta > 0$ und eine offene Umgebung $B = B(z)$ mit $B \subset P''(q,\delta')$ für alle δ' mit $|\delta - \delta'| < \eta$.*

Beweis: Ist $z \in P''(q,\delta)$, so existiert ein p mit $q \in P'(p,\delta)$ und $z \in P'(p,\delta)$. Per definitionem gibt es ein $\delta_1 < \delta$ und, weil die Polyzylinder offen sind, eine Umgebung $B = B(z)$ mit $B \subset P_{\delta_1}(p)$. Es gilt $B \subset P'(p,\delta')$ für δ' mit $|\delta - \delta'| < \delta - \delta_1 =: \eta$. □

Lemma 13.3 *Sind $w \in \partial\Omega \cap U$ und $\alpha > 0$, so ist $\mathcal{A}_\alpha(w)$ offen.*

Beweis: Ist $z_0 \in \mathcal{A}_\alpha(w)$, so ist $\pi(z_0) \in P''(w, \alpha|r(z_0)|)$. Nach Lemma 13.2 existieren $\eta > 0$ und $B = B(\pi(z_0))$ offen mit $B \subset P''(w,\delta)$ für $|\alpha|r(z_0)| - \delta| < \eta$. Sei $V = \pi^{-1}(B \cap \partial\Omega)$. Weil die Projektion stetig ist, ist V offen, und auch $W := V \cap \{z \in \Omega : |\alpha|r(z_0)| - \alpha|r(z)|| < \eta\}$ ist offen; es gilt $W \subset \mathcal{A}_\alpha(w)$ und $\mathcal{A}_\alpha(w)$ ist offen. □

Für $q \in U \cap \Omega$ und $\eta > 0$ klein gilt mit der Definition

$$D_\eta(q) \;:=\; P''(q, \eta|r(q)|)$$

Lemma 13.4 *Ist $\eta > 0$ klein genug, so gilt $|r(z)| \approx |r(q)|$ für alle $z \in D_\eta(q)$.*

Beweis: Es sei wieder $\partial\Omega_{q,\delta} = \{z \in U : r(z) = r(q) + \delta\}$ für $q \in U \cap \Omega$ und $\delta > 0$. Nach Lemma 3.1 gibt es ein $c > 0$, so dass für $1 \gg \eta > 0$ und nach Lemma 13.1 gilt

$$\Omega_{q,\frac{1}{2}|r(q)|} \;\supset\; c \cdot P_{\frac{1}{2}|r(q)|}(q) \;\supset\; P_{c'\eta|r(q)|}(q) \;\supset\; D_\eta(q).$$

Damit folgt $r(z) < r(q) + \frac{1}{2}|r(q)| = -\frac{1}{2}|r(q)|$ für $z \in D_\eta(q)$, also $|r(z)| \gtrsim |r(q)|$. Für $z \in c \cdot P_\delta(q)$ gilt aber auch $|r(z) - r(q)| \lesssim \delta$ nach (3.11) im Beweis von Lemma 3.2; speziell mit $\delta = \frac{1}{2}|r(q)|$ erhalten wir hier $|r(q)| \gtrsim |r(z) - r(q)| \gtrsim |r(z)| - |r(q)|$ und das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 13.5 *Es seien $q \in U \cap \Omega$ und $\eta > 0$ klein genug. Dann gilt:*

a) $D_\eta(q) \subset P_{|r(z)|}(z)$ für alle $z \in D_\eta(q)$.
Das (eindimensionale) Maß von $\pi^{-1}(w) \cap D_\eta(q)$ lässt sich für jedes $w \in \pi(D_\eta(q))$ durch $C \cdot |r(q)|$ abschätzen, wobei $C > 0$ nicht von q, w oder η abhängt.

b) Es gibt ein $C > 0$ mit $\pi(D_\eta(q)) \subset P''(\pi(q), C|r(q)|)$ für alle $q \in U \cap \Omega$.

c) Zu jedem α gibt es ein α', so dass aus $q \in \mathcal{A}_\alpha(w)$ und $z \in D_\eta(q)$ folgt $z \in \mathcal{A}_{\alpha'}(w)$. Dabei hängt α' nicht von w sondern nur von α ab.

Beweis: Für $z \in D_\eta(q)$ gilt mit (wechselnden, aber stets) unabhängigen Konstanten

$$P_{|r(z)|}(z) \supset P_{c|r(q)|}(z) \supset P_{c|r(q)|}(q) \supset P''(q, \eta|r(q)|) = D_\eta(q)$$

nach Lemma 13.4, Lemma 3.14 und Lemma 13.1, falls η klein genug ist. Für $z \in D_\eta(q)$ ist $\pi^{-1}(\pi(z)) \cap D_\eta(q)$ ein Teil der x_1-Achse in den zu z und $\delta = |r(z)|$ assoziierten Koordinaten. Teil zwei von a) folgt dann mit Lemma 13.4. Für b) benutzen wir die Quasidistanz d'' und Lemma 13.4; sei $z \in D_\eta(q)$, die Behauptung folgt aus

$$d''(\pi(z), \pi(q)) \lesssim d''(\pi(z), z) + d''(z, q) + d''(q, \pi(q)) \lesssim |r(q)|.$$

Der Nachweis von c) verläuft ähnlich. Es ist $\pi(z) \in P(w, \alpha'|r(z)|)$ für ein α' zu zeigen, welches nur von α abhängt. Wieder benutzen wir die Quasidistanz d'' und bemerken nur, dass sich $d''(w, \pi(q)), d''(\pi(q), q), d''(q, z)$ und $d''(z, \pi(z))$ nach Lemma 13.4 durch $C(\alpha) \cdot |r(z)|$ abschätzen lassen. □

Insbesondere sind also nach c) die Mengen $D_\eta(q)$ Teilmengen von Ω und nach Lemma 13.1 gibt es einen Polyzylinder $P_{a\eta|r(q)|}(q)$, der wiederum in $D_\eta(q)$ enthalten ist. Diesen Polyzylinder bezeichnen wir mit $d_\eta(q)$, die Konstante a hängt dabei von nichts ab.

Ebenso sind im folgenden die Konstanten $c > 0$ ggf. wechselnd aber stets unabhängig von q. Wir definieren für $q \in U \cap \Omega$ und $c > 0$

$$S_c(q) := P_{c|r(q)|}(\pi(q)) \cap \partial\Omega.$$

Nach Lemma 13.5 b) und Lemma 13.1 gibt es eine Konstante, so dass die Projektion von $D_\eta(q)$ in $S_c(q)$ enthalten ist. Speziell für $q \in \mathcal{A}_\alpha(w)$, w ein Randpunkt, gilt wegen der Äquivalenz der Distanzen d und d''

$$\pi(q) \in P_{c\alpha|r(q)|}(w).$$

Daher gibt es eine Konstante c_α, die nur von α abhängt, mit $w \in S_{c_\alpha}(q)$. Ist σ das Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$, so ist für $w \in \partial\Omega$ und $\delta > 0$

$$\sigma(P_\delta(w) \cap \partial\Omega) \approx \delta \cdot \prod_{k=2}^{n} \tau_k(w, \delta)^2.$$

Sind nun also $q \in U \cap \Omega, \eta > 0$ klein genug und fest sowie $w \in \partial\Omega$ so gewählt, dass $q \in \mathcal{A}_\alpha(w)$ gilt, so folgt mit Konstanten c_α, c'_α, die nur von α abhängen,

$$\begin{aligned}
\eta \cdot |r(q)| \cdot \sigma(S_{c_\alpha}(q)) &\approx c_\alpha \eta \cdot |r(q)|^2 \cdot \prod_{k=2}^n \tau_k(\pi(q), c_\alpha |r(q)|)^2 \\
&\approx c_\alpha \eta \cdot |r(q)|^2 \cdot \prod_{k=2}^n \tau_k(q, c_\alpha |r(q)|)^2 \\
&\lesssim c'_\alpha \eta^2 \cdot |r(q)|^2 \cdot \prod_{k=2}^n \tau_k(q, a\eta |r(q)|)^2 \\
&\approx c'_\alpha \cdot \operatorname{vol} d_\eta(q). \qquad (13.1)
\end{aligned}$$

14 Nicht-tangentiale Grenzwerte

Die klassische Beweisführung aus [St] verlangt Abschätzungen für $L^1(\partial\Omega)$-Funktionen bzw. der zugehörigen Maximalfunktionen. Wir führen zunächst die benötigten Bezeichnungen ein:

Sind $w \in \partial\Omega$ ein Randpunkt und $r > 0$ ein Radius, so definieren wir die nicht-isotrope Kugel $\beta''(w,r)$ durch

$$\beta''(w,r) := P''(w,r) \cap \partial\Omega.$$

Für $f \in L^p(\partial\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$, bezeichne $M''f$ die *Maximalfunktion* von f bzgl. der Kugeln $\beta''(w,r)$,

$$M''f(w) := \sup_{r>0} \frac{1}{\sigma(\beta''(w,r))} \int_{\beta''(w,r)} |f(\xi)|\, d\sigma(\xi)$$

und analog Mf die Maximalfunktion bzgl. $\beta(w,r) := \{z \in \partial\Omega : |z-w| < r\}$,

$$Mf(w) := \sup_{r>0} \frac{1}{\sigma(\beta(w,r))} \int_{\beta(w,r)} |f(\xi)|\, d\sigma(\xi).$$

Es gilt, die Maximalfunktion abzuschätzen. Wir überprüfen, dass die Kugeln β'' die Bedingungen von K.T. Smith ([Sm], vgl. [Kr]) erfüllen. Im einzelnen gilt

a) Jede Kugel $\beta''(w,r)$ ist offen (in $\partial\Omega$), enthält w und hat endliches Maß.

b) Für $r_1 \le r_2$ gilt $\beta''(w,r_1) \subset \beta''(w,r_2)$.

c) Es gibt eine Konstante $c_0 > 0$, so dass für $\beta''(w_1,r) \cap \beta''(w_2,s) \ne \emptyset$ mit $r \ge s$ gilt $\beta''(w_2,s) \subset \beta''(w_1,c_0 r)$.

d) Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $\sigma(\beta''(w,c_0 r)) \le C\sigma(\beta''(w,r))$.

Dazu: a) und b) sind klar; wegen b) genügt es, c) für $r = s$ zu zeigen. Das folgt jedoch mit Lemma 13.1 wie d) direkt aus Lemma 3.14 bzw. Korollar 3.12. □

Damit erfolgt auch der Nachweis des nicht-isotropen Analogons zu dem Überdeckungssatz von Wiener (vgl. [Kr]). Genauer gilt: ist $K \subset \partial\Omega$ kompakt und $\{\beta''(w_\alpha, r_\alpha)\}_{\alpha \in I}$

eine (relativ) offene Überdeckung von K, so gibt es endlich viele, paarweise disjunkte Kugeln $\beta''(w_{\alpha_1}, r_{\alpha_1}), \ldots, \beta''(w_{\alpha_k}, r_{\alpha_k})$, so dass mit $c_0 > 0$ aus c) gilt

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} \beta''(w_{\alpha_j}, c_0 r_{\alpha_j}). \tag{14.1}$$

Einen Beweis findet man in [Kr, § 8.4]. Wir erhalten damit das folgende Lemma, dessen Beweis wir aus Gründen der Vollständigkeit angeben.

Lemma 14.1 *Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $f \in L^1(\partial\Omega)$ und $\lambda > 0$ gilt*

$$\sigma(\{w \in \partial\Omega : M''f(w) > \lambda\}) \quad \leq \quad C \cdot \frac{\|f\|_{L^1(\partial\Omega)}}{\lambda}.$$

Beweis: Es seien $f \in L^1(\partial\Omega)$, $\lambda > 0$ gegeben und $S_\lambda := \{w \in \partial\Omega : M''f(w) > \lambda\}$. Es genügt, $\sigma(K)$ für eine kompakte Teilmenge $K \subset S_\lambda$ mit $\sigma(S_\lambda) \leq 2\sigma(K)$ abzuschätzen. Für jedes $w \in K$ gibt es eine Kugel $\beta''(w, r_w)$ mit

$$\frac{1}{\sigma(\beta''(w, r_w))} \int_{\beta''(w, r_w)} |f(\xi)| \, d\sigma(\xi) \quad > \quad \lambda. \tag{14.2}$$

Aus der Überdeckung $\{\beta''(w, r_w)\}_{w \in K}$ von K wählen wir gemäß (14.1) Kugeln $\beta''(w_1, r_{w_1}), \ldots, \beta''(w_k, r_{w_k})$. Es ist dann nach a) - d) und (14.2)

$$\begin{aligned}
\sigma(K) \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^{k} \sigma(\beta''(w_j, c_0 r_{w_j})) \\
&\lesssim \quad \sum_{j=1}^{k} \sigma(\beta''(w_j, r_{w_j})) \\
&\lesssim \quad \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \int_{\beta''(w_j, r_{w_j})} |f(\xi)| \, d\sigma(\xi) \\
&\lesssim \quad \frac{\|f\|_{L^1(\partial\Omega)}}{\lambda},
\end{aligned}$$

wobei die involvierten Konstanten nur von Ω abhängen. □

Eine analoge Aussage gilt für die Maximalfunktion Mf bzgl. euklidischer Kugeln. Wie in [St] zeigt man nun mit Hilfe von Lemma 14.1, dass M und analog auch M'' beschränkte Operatoren von $L^p(\partial\Omega)$ nach $L^p(\partial\Omega)$ sind. Darin liegt die Bedeutung des Lemmas für den Beweis des Theorems. Es gilt also

Lemma 14.2 *Für $f \in L^p(\partial\Omega)$ gilt $\|Mf\|_{L^p}^p \lesssim \|f\|_{L^p}^p$ bzw. $\|M''f\|_{L^p}^p \lesssim \|f\|_{L^p}^p$.*

Als entscheidend erweist sich das folgende Lemma, das wir in Analogie zu [DBF] zeigen.

Lemma 14.3 *Für eine nichtnegative, plurisubharmonische Funktion u mit $u \in C(\bar{\Omega})$ sei $f := u|\partial\Omega$. Zu jedem $\alpha > 0$ gibt es eine Konstante C_α, die nicht von $w \in \partial\Omega$ abhängt, so dass für alle Randpunkte w gilt*

$$\sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha(w)} u(z) \;\leq\; C_\alpha M''(Mf)(w).$$

Beweis: Es seien $w \in \partial\Omega$, $\alpha > 0$ beliebig und $\eta > 0$ klein genug und fest gewählt. Weiter bezeichne Pf die eindeutig bestimmte, harmonische Poissonfortsetzung von f auf Ω. Wegen der Plurisubharmonizität von u und nach Theorem 3 aus [St] gilt $u(z) \leq Pf(z) \lesssim Mf(\pi(z))$. Gemäß den Überlegungen aus Abschnitt 13 betrachten wir $d_\eta(z) \subset D_\eta(z) \subset \Omega$. $|u|$ ist plurisubharmonisch auf $d_\eta(z)$. Die Mittelwerteigenschaft führt zunächst zu

$$\begin{aligned} |u(z)| &\leq \frac{1}{\operatorname{vol} d_\eta(z)} \int_{d_\eta(z)} |u(\zeta)|\, dV(\zeta) \\ &\lesssim \frac{1}{\operatorname{vol} d_\eta(z)} \int_{D_\eta(z)} Mf(\pi(\zeta))\, dV(\zeta), \end{aligned}$$

nach (13.1) und Lemma 13.5 folgt nun für $z \in \mathcal{A}_\alpha(w)$

$$\begin{aligned} &\lesssim C_\alpha \frac{1}{|r(z)|\sigma(S_{c_\alpha}(z))} |r(z)| \cdot \int_{S_{c_\alpha}(z)} Mf(\xi)\, d\sigma(\xi) \\ &\lesssim C_\alpha \cdot M''(Mf(w)) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Wir beweisen nun Theorem III und folgen dabei dem Lösungsweg aus [St], wie er auch in [Kr] aufgezeigt wird. Zunächst wählen wir eine endliche Überdeckung $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ von Ω mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$ aus glatt berandeten Gebieten Ω_j mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $j = 1, \dots, k$ ist $\partial\tilde{\Omega}_j := \partial\Omega \cap \partial\Omega_j$ eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit glattem Rand.

b) Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und für jedes $j = 1, \dots, k$ einen zu $\partial\tilde{\Omega}_j$ transversalen Vektor ν_j, der aus Ω herauszeigt, so dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ gilt

$$\Omega_j - \varepsilon\nu_j \;=\; \{z - \varepsilon\nu_j : z \in \Omega_j\} \subset\subset \Omega.$$

Dies ist ohne weiteres möglich. In dieser Situation gilt (vgl. [Kr, §§ 8.3, 8.5])

Theorem 14.4 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ beschränkt mit C^2-glattem Rand, $0 < p \leq +\infty$ und $f \in H^p(\Omega)$. Es sei $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ eine Überdeckung mit den angegeben Eigenschaften und $\nu_1, \dots, \nu_k$ bezeichne die assoziierten Normalenvektoren. Dann existiert für alle $j = 1, \dots, k$ der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(w - \varepsilon\nu_j) = \tilde{f}(w)$ für σ-fast alle $w \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_j$.*

Beweis von Theorem III: Wir wissen bereits, dass die Grenzwerte im speziellen Sinne von Theorem 14.4 σ-fast überall existieren. Es bezeichne $\tilde{f}$ die Grenzfunktion und $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ eine endliche Überdeckung von Ω aus C^∞-glatten, lineal konvexen Gebieten endlichen Typs mit den oben angegebenen Eigenschaften. Ohne Einschränkung betrachten wir nur Ω_1 und den zugehörigen äußeren Normalenvektor $\nu = \nu_1$. Weiter genügt es wegen $H^\infty(\Omega) \subset H^p(\Omega)$ für alle positiven p, den Fall $p < +\infty$ zu betrachten: Nach Theorem 14.4 und dem Satz über die majorisierte Konvergenz von Lebesgue gilt für $\partial\tilde{\Omega}_1 := \partial\Omega \cap \partial\Omega_1$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} |f(w - \varepsilon\nu) - \tilde{f}(w)|^p\, d\sigma(w) \;=\; 0. \tag{14.3}$$

Für $j,k \in \mathbb{N}$ definieren wir Funktionen $f_{jk} : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ durch

$$f_{jk}(z) \;:=\; \left| f(z - \tfrac{1}{j}\,\nu) - f(z - \tfrac{1}{k}\,\nu) \right|^{p/2}.$$

Diese Funktionen sind stetig auf einer Umgebung von $\bar{\Omega}_1$ und plurisubharmonisch auf Ω_1. Wir erhalten mit Lemma 14.3 und Lemma 14.2

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\tilde{\Omega}_1} \left[\sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha(w)} f_{jk}(z) \right]^2 d\sigma(w) \;&\le\; C_\alpha \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} |M''(Mf_{jk})(w)|^2 \, d\sigma(w) \\
&\le\; C'_\alpha \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} |Mf_{jk}(w)|^2 \, d\sigma(w) \\
&\le\; C''_\alpha \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} |f_{jk}(w)|^2 \, d\sigma(w).
\end{aligned}$$

Lassen wir nun j gegen $+\infty$ streben und wenden (14.3) an, so folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\tilde{\Omega}_1} \sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha(w)} |f(z) - f(z - \tfrac{1}{k}\,\nu)|^p \, d\sigma(w) \\
&\qquad\qquad \le\; C''_\alpha \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} |\tilde{f}(w) - f(w - \tfrac{1}{k}\,\nu)|^p \, d\sigma(w). \qquad (14.4)
\end{aligned}$$

Mit $\lambda > 0$ sei $A_\lambda := \{w \in \partial\tilde{\Omega}_1 : \limsup_{\mathcal{A}_\alpha(w) \ni z \to w} |f(z) - \tilde{f}(w)| > \lambda\}$; zu zeigen ist, dass A_λ eine Menge vom Maß Null ist. Wir benutzen, dass für $f \in L^p(\partial\Omega)$ und $\lambda > 0$

$$\sigma(\{w \in \partial\Omega : |f(w)| > \lambda\}) \;\le\; \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{w \in \partial\Omega : |f(w)| > \lambda\}} |f(w)|^p \, d\sigma(w)$$

gilt und schätzen ab

$$\begin{aligned}
\sigma(A_\lambda) \;&\le\; \sigma(\{w \in \partial\tilde{\Omega}_1 : \limsup_{\mathcal{A}_\alpha(w) \ni z \to w} |f(z) - f(z - \tfrac{1}{k}\,\nu)| > \lambda/3\}) \\
&\quad + \sigma(\{w \in \partial\tilde{\Omega}_1 : \limsup_{\mathcal{A}_\alpha(w) \ni z \to w} |f(z - \tfrac{1}{k}\,\nu) - f(w - \tfrac{1}{k}\,\nu)| > \lambda/3\}) \\
&\quad + \sigma(\{w \in \partial\tilde{\Omega}_1 : \limsup_{\mathcal{A}_\alpha(w) \ni z \to w} |f(w - \tfrac{1}{k}\,\nu) - \tilde{f}(w)| > \lambda/3\}) \\
&\le\; C \cdot \frac{1}{\lambda^p} \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} \sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha(w)} |f(z) - f(z - \tfrac{1}{k}\,\nu)|^p \, d\sigma(w) \;+\; 0 \\
&\quad + C \cdot \frac{1}{\lambda^p} \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} |f(w - \tfrac{1}{k}\,\nu) - \tilde{f}(w)|^p \, d\sigma(w) \\
&\le\; C(\alpha) \cdot \frac{1}{\lambda^p} \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} |f(w - \tfrac{1}{k}\,\nu) - \tilde{f}(w)|^p \, d\sigma(w)
\end{aligned}$$

nach (14.4). Das letzte Integral hat nun nach (14.3) für $k \to +\infty$ den Grenzwert 0. Damit ist $\sigma(A_\lambda) = 0$ und da $\lambda > 0$ beliebig gewählt war, folgt

$$\limsup_{\mathcal{A}_\alpha(w) \ni z \to w} |f(z) - \tilde{f}(w)| \;=\; 0$$

für σ-fast alle w und so die Behauptung des Theorems. $\square$

15 Exotische Näherungsregionen

Der Beweis von Theorem IV beruht im wesentlichen auf der Arbeit von Fausto Di Biase [DB1, DB2]. Die Behauptung ergibt sich nach [DB1, Theorem 5.32] bzw. [DB2, Theorem 5.12] in der vorliegenden Situation aus der Konstruktion geeigneter Familien von Näherungsumgebungen sowie passender Einbettungen eines Baumes T.
Dazu bedarf es zunächst natürlich weiterer Definitionen. Die Darstellung der Näherungssysteme und -familien richtet sich dabei nach F. Di Biase mit den angegebenen Quellen und wird unserem Fall angepasst. Die Zerlegung des Randes mit der resultierenden Baumstruktur stammt von M. Christ [Ch]. Der Nachweis der benötigten Eigenschaften erfolgt jeweils oft in Analogie zu [DBF].

Ausgangspunkt der Überlegungen sind die Näherungsregionen $\mathcal{A}_\alpha$. Wir definieren für $z \in \Omega$ und $\alpha > 0$ das *Duale* oder auch den *Schatten* $\mathcal{A}_\alpha^*$ von $\mathcal{A}_\alpha$ durch

$$\mathcal{A}_\alpha^*(z) := \{w \in \partial\Omega : z \in \mathcal{A}_\alpha(w)\} = \{w \in \partial\Omega : \pi(z) \in P''(w, \alpha|r(z)|)\}.$$

Offenbar gilt $z \in \mathcal{A}_\alpha(w) \;\Leftrightarrow\; w \in \mathcal{A}_\alpha^*(z)$. Wieder sei $\beta''(w,r)$ für einen Randpunkt w der Durchschnitt von $P''(w,r)$ mit dem Rand $\partial\Omega \cap U$.

Zu überprüfen ist, dass die Näherungsumgebungen $\mathcal{A}_\alpha(w)$ ein Näherungssystem bilden. Dazu fixieren wir zunächst ein $\alpha > 0$. $\mathcal{A}_\alpha := \{\mathcal{A}_\alpha(w)\}_{w\in\partial\Omega}$ ist dann eine *Näherungsfamilie*. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}_\alpha$ sogar eine *natürliche Näherungsfamilie* ist, also den folgenden Bedingungen [DB1, DB2] genügt:

a) Für jedes $w \in \partial\Omega$ enthält $\mathcal{A}_\alpha(w)$ eine Folge aus Ω, die gegen w konvergiert.

b) Für jedes $z \in U \cap \Omega$ ist $\mathcal{A}_\alpha^*(z)$ offen.

c) Für jedes $z \in U \cap \Omega$ gibt es von z unabhängige Konstanten c und C sowie Kugeln $\beta''(w_z, cr_z)$ und $\beta''(w_z, Cr_z)$ mit $\beta''(w_z, cr_z) \subset \mathcal{A}_\alpha^*(z) \subset \beta''(w_z, Cr_z)$.

d) Strebt eine Folge $(z_k)_k \subset U \cap \Omega$ gegen $w \in \partial\Omega$, so gelten

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} \mathcal{A}_\alpha^*(z_k) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \sup_{\zeta\in\mathcal{A}_\alpha^*(z_k)} d''(\zeta, z_k) = 0.$$

a) ist klar, b) wird in Lemma 15.1 gezeigt, c) verschieben wir für einen Moment und zeigen die Behauptung gleich in einem allgemeineren Kontext; d) schließlich folgt aus c), da wir sehen werden, dass $w_z = \pi(z)$ und $r_z = |r(z)|$ gewählt werden können.

Lemma 15.1 $\mathcal{A}_\alpha^*(z)$ *ist offen.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass für $q \in P''(w_0, \eta)$ eine offene Umgebung $U = U(w_0)$ mit $q \in P''(w, \eta)$ für alle $w \in U$ existiert. Für $q \in P''(w_0, \eta)$ gibt es jedoch per definitionem einen Punkt ζ mit $q \in P'(\zeta, \eta)$ und $w_0 \in P'(\zeta, \eta)$. Außerdem finden wir dann $U = U(w_0)$ offen mit $U \subset P'(\zeta, \eta)$. Damit ist aber $q \in P'(\zeta, \eta) \subset P''(w, \eta)$ für alle $w \in U$ und die Behauptung folgt. □

Nun lassen wir auch $\alpha > 0$ variieren. $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$ heißt dann *Näherungssystem* für $\partial\Omega$ oder auch *einparametrige Familie von natürlichen Näherungsfamilien*, wenn jedes $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha > 0$, eine natürliche Näherungsfamilie im Sinne der obigen Definition a) – d) ist und weiter gilt

e) $\mathcal{A}_\alpha(w) \subset \mathcal{A}_\beta(w)$ für alle $w \in \partial\Omega \cap U$ und alle $0 < \alpha < \beta$.

f) Für jedes $z \in U \cap \Omega$ und $\alpha > 0$ gibt es ein $w_z \in \partial\Omega \cap U$ und ein $r_z > 0$ mit

$$\beta''(w_z, c_0(\alpha) r_z) \subset \mathcal{A}^*_\alpha(z) \subset \beta''(w_z, C_0(\alpha) r_z). \tag{15.1}$$

Dabei hängen $c_0(\alpha), C_0(\alpha) > 0$ zwar von α aber nicht von z ab.

Hier ist e) klar. f) verallgemeinert c) und ist Inhalt des nächsten Lemmas.

Lemma 15.2 *Zu jedem $\alpha > 0$ gibt es positive Konstanten $c_0(\alpha)$ und $C_0(\alpha)$, so dass (15.1) für $z \in U \cap \Omega$ mit $w_z := \pi(z)$ und $r_z := |r(z)|$ gilt.*

Beweis: Es bezeichne C die Konstante, für die $p \in P''(q, r)$ impliziert $q \in P''(p, Cr)$. Es genügt, $c_0(\alpha) = \alpha/C$ und $C_0(\alpha) = C\alpha$ zu wählen. □

Es seien $\{\mathcal{A}_\alpha\}_\alpha$ ein Näherungssystem für $\partial\Omega$ und $\mathcal{L} = \{L(w)\}$ eine Näherungsfamilie. Wir sagen, $\mathcal{L}$ ist *exotisch im Punkt* $w \in \partial\Omega$ bzgl. $\{\mathcal{A}_\alpha\}_\alpha$, wenn $L(w)$ eine Folge $(z_k(w))_k$ mit $\lim_k z_k(w) = w$ enthält und es für jedes α unendlich viele k mit $z_k(w) \notin \mathcal{A}_\alpha(w)$ gibt. Die Familie $\mathcal{L}$ ist *exotisch auf einer Teilmenge* $E \subset \partial\Omega$ bzgl. $\{\mathcal{A}_\alpha\}$, wenn sie exotisch in jedem Punkt von E ist. Wir wollen hier also die Existenz einer exotischen Näherungsfamilie beweisen; dies ist eine einfache Umformulierung von Theorem IV.

Auf Grundlage einer Arbeit von M. Christ [Ch] wollen wir nun für $\partial\Omega \cap U$ versehen mit der Quasidistanz d'' eine Zerlegung des Randes dyadischer Art konstruieren. Wir fixieren eine Konstante $c_1 > 1$ mit

$$d''(w_1, w_2) \leq c_1 \cdot [d''(w_1, w_3) + d''(w_3, w_2)] \quad \text{für alle } w_1, w_2, w_3 \in \partial\Omega \cap U.$$

Es sei $1 \gg h > 0$ klein genug, gemäß [Ch, Theorem 11] geeignet gewählt. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ wählen wir eine maximale Anzahl von Punkten $w_{k,\alpha} \in \partial\Omega \cap U, \alpha \in I_k$, mit $d''(w_{k,\alpha}, w_{k,\beta}) \geq h^k$ für alle $\alpha, \beta \in I_k, \alpha \neq \beta$. Nach Wahl der $w_{k,\alpha}$ gilt auch eine umgekehrte Relation; d.h., zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ und $w \in \partial\Omega \cap U$ gibt es ein $\alpha \in I_k$ mit

$$d''(w, w_{k,\alpha}) < h^k. \tag{15.2}$$

Auf den geordneten Paaren (k, α) definieren wir eine partielle Ordnung $\leq$ wie folgt: zu jedem (k, α) überprüfen wir, ob es ein β mit $d''(w_{k,\alpha}, w_{k-1,\beta}) \leq \frac{1}{2c_1} h^{k-1}$ gibt. Ist dies der Fall, so sagen wir $(k, \alpha) \leq (k-1, \beta)$. Dieses Paar $(k-1, \beta)$ ist dann eindeutig bestimmt (vgl. [Ch]) und (k, α) steht in keiner Beziehung zu einem anderen Paar der Form $(k-1, \gamma)$. Gibt es kein solches β, so wählen wir nach (15.2) ein β mit $d''(w_{k,\alpha}, w_{k-1,\beta}) < h^{k-1}$, schreiben wieder $(k, \alpha) \leq (k-1, \beta)$ und (k, α) steht in keiner Beziehung zu einem anderen Paar $(k-1, \gamma)$. Durch Transivität wird die Relation $\leq$ ausgedehnt, sie erfüllt damit die Eigenschaften eines *Baumes* nach [Ch]. Es gilt:

a) Ist $(k, \alpha) \leq (l, \beta)$, so ist $k \geq l$.

b) Für jedes (k, α) und $l \leq k$ gibt es genau ein β mit $(k, \alpha) \leq (l, \beta)$.

c) $(k, \alpha) \leq (k-1, \beta)$ impliziert $d''(w_{k,\alpha}, w_{k-1,\beta}) < h^{k-1}$.

d) Aus $d''(w_{k,\alpha}, w_{k-1,\beta}) \leq \frac{1}{2c_1} h^{k-1}$ folgt $(k, \alpha) \leq (k-1, \beta)$.

Den konstruierten Baum nennen wir T, $T = \{w_{k,\alpha} : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k\}$; k heißt die *Generation* von $w_{k,\alpha}$. Für eine wiederum geeignet wählbare Konstante a_0, $1 \gg a_0 > 0$, sei weiter

$$Q_{k,\alpha} := \bigcup_{(l,\beta)\leq(k,\alpha)} \beta''(w_{l,\beta}, a_0 h^l).$$

Wieder vereinfachen wir die Notation und schreiben im folgenden nur $T = \{x\}$, $|x|$ für die Generation von x und Q_x statt $Q_{k,\alpha}$.

Die offenen Mengen $\{Q_x\}_x$ der konstruierten, ineinander liegenden Zerlegungen von $\partial\Omega \cap U$ stehen in Zusammenhang mit Kugeln $\{\beta''_x\}_x$, deren Radius mit wachsender Generation von x kleiner wird,

$$\beta''_x = \beta''(\varphi(x), h^{|x|}),$$

um gewisse Randpunkte $\varphi(x) \in \partial\Omega \cap U$: nach [Ch, Theorem 11] gibt es positive Konstanten a_1, a_2 und η, so dass für alle $x \in T$

$$\beta''(\varphi(x), a_0 h^{|x|}) \subset Q_x \subset \beta''(\varphi(x), a_1 h^{|x|})$$

und $\sigma(\{w \in Q_x : d''(w, \partial\Omega \setminus Q_x) \leq t h^{|x|}\}) \leq a_2 t^\eta \cdot \sigma(Q_x)$ für positive t gelten.

Eine Abbildung $q : T \to U \cap \Omega$ eines Baumes $T \subset \partial\Omega$ nach $U \cap \Omega$ nennen wir *Einbettung*. Sie heißt *passend* bzgl. der quasi-dyadischen Zerlegung $Q = \{Q_x\}$ und des Näherungssystems $\mathcal{A}$, wenn es Konstanten c_α und C_α gibt, die nur von α aber nicht von x abhängen, so dass für alle $x \in T$ gilt

$$\beta''(w_Q(x), c_\alpha r_Q(x)) \subset \mathcal{A}^*_\alpha(q(x)) \subset \beta''(w_Q(x), C_\alpha r_Q(x)).$$

Wir zeigen, dass es bei fest gewählter Zerlegung stets eine passende Einbettung gibt.

Lemma 15.3 *Für jedes positive α gibt es Konstanten $c_2(\alpha)$ und $C_2(\alpha)$ mit $c_2(1) = a_1$, so dass für alle $x \in T$, $|x| \gg 1$, ein $z_x \in U \cap \Omega$ existiert mit*

$$\beta''(\varphi(x), c_2(\alpha) h^{|x|}) \subset \mathcal{A}^*_\alpha(z_x) \subset \beta''(\varphi(x), c_2(\alpha) h^{|x|}).$$

Beweis: ν_w sei der innere Normalenvektor an $\partial\Omega$ für $w \in \partial\Omega$. c' und C' seien so gewählt, dass $c'R \leq |r(w + R\nu_w)| \leq C'R$ für jeden Randpunkt w und alle $R > 0$ gilt. Wir definieren für $|x|$ genügend groß

$$z_x := \varphi(x) + \frac{a_1 h^{|x|}}{c' c_0(1)} \nu_{\varphi(x)};$$

insbesondere gelten $\pi(z_x) = \varphi(x)$ und $\frac{a_1}{c_0(1)} \cdot h^{|x|} \leq |r(z_x)| \leq \frac{C' a_1}{c' c_0(1)} \cdot h^{|x|}$. Mit Lemma 15.2 folgt die Behauptung:

$$\beta''\left(\varphi(x), \frac{c_0(\alpha) a_1}{c_0(1)}\, h^{|x|}\right) \subset \mathcal{A}^*_\alpha(z_x) \subset \beta''\left(\varphi(x), \frac{C' C_0(\alpha) a_1}{c' c_0(1)}\, h^{|x|}\right).$$

□

Damit sind nun alle nötigen Vorkehrungen getroffen, um die Ergebnisse von F. Di Biase anwenden zu können.

Beweis von Theorem IV: $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ ist ein Näherungssystem für $\partial\Omega$ und die Einbettung $T \ni x \mapsto z_x \in D$ ist passend. Damit sind die Voraussetzungen von [DB1, Theorem 5.32] bzw. [DB2, Theorem 5.12] erfüllt und die Behauptung folgt. □

Literatur

[BP] H. Behnke, E. Peschl, *Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen*, Math. Ann. **111** (1935), 158-177

[B] S. R. Bell, *Biholomorphic mappings and the $\bar{\partial}$-problem*, Ann. of Math. **114** (1981), 103-113

[BS] H. Boas, E. Straube, *On Equality of Line Type and Variety Type of Real Hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$*, J. Geom. Ana. **2** (1992), 95-98

[BCD] J. Bruna, P. Charpentier, Y. Dupain, *Zero varieties for the Nevanlinna class in convex domains of finite type in $\mathbb{C}^n$*, Ann. of Math. **147** (1998), 391-415

[Ca1] D. Catlin, *Necessary conditions for the subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Ann. of Math. **117** (1983), 147-171

[Ca2] D. Catlin, *Boundary invariants of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **120** (1984), 529-586

[Ca3] D. Catlin, *Subelliptic Estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **126** (1987), 131-191

[Ca4] D. Catlin, *Estimates of Invariant Metrics on Pseudoconvex Domains of Dimension Two*, Math. Z. **200** (1989), 429-466

[Ch] M. Christ, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Coll. Math. **60/61** (1990), 601-628

[DA1] J. P. D'Angelo, *Real hypersurfaces, order of contact and applications*, Ann. of Math. **115** (1982), 615-637

[DA2] J. P. D'Angelo, *Finite type conditions for hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$*, Complex Analysis, Lecture Notes in Math. 1268, Springer 1987, 83-102

[DA3] J. P. D'Angelo, *Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press 1993

[DB1] F. Di Biase, *Approach regions and maximal functions in theorems of Fatou type*, Ph.D. thesis, Washington University, 1995

[DB2] F. Di Biase, *Fatou Type Theorems, Maximal Functions and Approach Regions*, Progress in Mathematics **147**, Birkhäuser 1998

[DBF] F. Di Biase, B. Fischer, *Boundary behaviour of H^p functions on convex domains of finite type in $\mathbb{C}^n$*, Pac. J. Math. **183**, No.1 (1998), 25-38

[DF1] K. Diederich, J. E. Fornæss, *Pseudoconvex Domains: Bounded Strictly Plurisubharmonic Exhaustion Functions*, Inv. math. **39** (1977), 129-141

[DF2] K. Diederich, J. E. Fornæss, *Pseudoconvex domains with real analytic boundary*, Ann. of Math. **107** (1978), 371-384

[DF3] K. Diederich, J. E. Fornæss, *Support functions for convex domains of finite type*, Math. Z. **230** (1999), no. 1, 145-164

[DH1] K. Diederich, G. Herbort, *Geometric and Analytic Boundary Invariants on Pseudoconvex Domains. Comparison Results*, J. Geom. Ana. **3** (1993), 237-267

[DH2] K. Diederich, G. Herbort, *Pseudoconvex domains of semiregular type*, Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry (H. Skoda, J.-M. Trépreau eds.), vieweg 1994, 127-161

[DL] K. Diederich, I. Lieb, *Konvexität in der komplexen Analysis*, DMV Seminar, Birkhäuser 1981

[DM] K. Diederich, E. Mazzilli, *Zero varieties for the Nevanlinna class on all convex domains of finite type*, Nagoya Math. J. **163** (2001), 215-227

[dR] G. de Rham, *Differentiable Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 266, Springer 1984

[FS] J. E. Fornæss, N. Sibony, *Construction of plurisubharmonic functions on weakly pseudoconvex domains*, Duke Math. J. **58** (1989), 633-655

[GF] H. Grauert, K. Fritzsche, *Several Complex Variables*, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1976

[GR] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 265, Springer 1984

[Hf] T. Hefer, *Hölder and L^p estimates for $\bar\partial$ on convex domains of finite type depending on Catlin's multitype*, Math. Z. **242** (2002), 367-398

[Hk] G. M. Henkin, *The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds I*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), no. 3, 57-118

[Hb] G. Herbort, *Geometrische und analytische Invarianten pseudokonvexer Hyperflächen*, Vorlesung an der Bergischen Universität GH Wuppertal, Wintersemester 1997/98

[Hö1] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland 1990

[Hö2] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Mathematics **127**, Birkhäuser Boston 1994

[Ki] C. Kiselman, *A differential inequality characterizing weak lineal convexity*, Math. Ann. **311** (1998), 1-10

[Ko1] J. J. Kohn, *Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds*, Trans. of Am. Math. Soc. **181** (1973), 273-292

[Ko2] J. J. Kohn, *Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions*, Acta Math. **142** (1979), 79-122

[Ko3] J. J. Kohn, *A Survey of the $\bar{\partial}$-Neumann Problem*, Proc. Symp. Pure Math. **41** (1984), 137-145

[Kr] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Wadsworth & Brooks/Cole 1992

[LG] P. Lelong, L. Gruman, *Entire Functions of Several Complex Variables*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 282, Springer 1986

[L] J. E. Littlewood, *On a theorem of Fatou*, London Math. Soc. J. **2** (1927), 172-176

[McN1] J. McNeal, *Convex domains of finite type*, J. Funct. Ana. **108** (1992), 361-373

[McN2] J. McNeal, *Estimates on the Bergman Kernels of Convex Domains*, Adv. in Math. **109** (1994), 108-139

[Sk] H. Skoda, *Valeurs au bord pur les solutions de l'opérateur $\bar{\partial}$, et caractérisation des zéroes des fonctions de la classe des Nevanlinna*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 225-299

[Sm] K. T. Smith, *A generalization of an inequality of Hardy and Littlewood*, Can. J. Math. **8** (1956), 157-170

[St] E. M. Stein, *Boundary behaviour of holomorphic functions of several complex variables*, Princeton University Press, 1972

[Y] J. Yu, *Multitypes of Convex Domains*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), 837-849

Danksagung

Zum Abschluss möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Klas Diederich für die interessante Themenstellung, seine Unterstützung und fruchtbare Diskussionen. Weiter ermöglichte er mir einen Gastaufenthalt an der Indiana University Bloomington, USA, mit Förderung durch den Deutschen Akademischen Austausch Dienst (DAAD) und gab mir die Gelegenheit, auf der Konferenz *Complex Analysis and Analytic Geometry* in Wuppertal über meine Ergebnisse vorzutragen. Dafür danke ich recht herzlich.

Herrn Dr. Bert Fischer danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Andrei Duma, FernUniversität Hagen, für die freundliche Aufnahme in das Lehrgebiet Komplexe Analysis und die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten. Ihm und seinen Mitarbeitern Herrn AOR Dr. Gerhard Garske, Herrn Dipl.-Math. Ulrich Scheja und Frau Monika Düsterer danke ich für die gute, kollegiale Zusammenarbeit.

Herrn Prof. Dr. Peter Beisel danke ich für die gute Zeit am Haspel als Mitarbeiter im Fachbereich Bauingenieurwesen der Bergischen Universität Wuppertal.

Mein großer Dank gilt meinen Eltern, die mir ermöglicht haben, meinen Weg zu gehen und mich auf diesem immer unterstützen. Meiner Frau Sabine *Bobby* danke ich für ihre Geduld und dafür, dass es sie gibt.