

**Ein diskreter  
Differentialformenkalkül  
zur Modellierung der  
Maxwellschen Gleichungen auf  
vierdimensionalen Simplizes**

von

Peter Feuerstein



Vom Fachbereich 7 – Mathematik  
der Bergischen Universität –  
Gesamthochschule Wuppertal (D-468)  
angenommene Inauguraldissertation  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften

Wuppertal 2001

Gutachter: Prof. Dr. Gerhard Heindl  
Prof. Dr. Hans-Jürgen Buhl

Eingereicht am: 8. Januar 2001  
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Mai 2001

*„Mir ist bis heute kein auch noch so kompliziertes Problem begegnet,  
das nicht, richtig betrachtet, noch komplizierter wurde.“*

Poul Anderson

für Egbert, Hanns-Peter

und Tina



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>I Ein diskreter Differentialformenkalkül</b> . . . . .	<b>1</b>
I.1 Geometrische Grundlagen, Grundbegriffe und Bezeichnungen . . . . .	1
I.1.1 Inneres Produkt und quadratische Form . . . . .	2
I.1.2 Orthogonale Transformationen . . . . .	8
I.1.3 Affine Punkträume . . . . .	11
I.2 Affine Polynome . . . . .	20
I.2.1 Affin lineare Abbildungen . . . . .	20
I.2.2 Affin polynomiale Abbildungen . . . . .	27
I.3 Multilinearformen . . . . .	36
I.3.1 Grundbegriffe . . . . .	36
I.3.2 Äußere Produkte von Multilinearformen . . . . .	39
I.3.3 Innere Produkte alternierender Multilinearformen . . . . .	42
I.3.4 Orientierung und kanonische n-Form . . . . .	49
I.3.5 Die Dualitätsabbildung . . . . .	53
I.4 Affine r-Formen . . . . .	56
I.4.1 Grundbegriffe . . . . .	56
I.4.2 Zurückgeholte Form und äußere Ableitung . . . . .	59
I.4.3 Hodge-Operator und Koableitung . . . . .	67
I.4.4 Exkurs: Die klassischen Differentialoperatoren . . . . .	69
I.5 Das affine Integral . . . . .	71
I.5.1 Integration von n-Formen . . . . .	71
I.5.2 Integration von r-Formen kleineren Grades . . . . .	79
I.5.3 Der Stokessche Integralsatz auf k-Simplizes . . . . .	81
<b>II Stückweise affine r-Formen</b> . . . . .	<b>87</b>
II.1 Simplizialzerlegungen . . . . .	87
II.2 Simpliziale r-Formen . . . . .	90
II.2.1 Grundbegriffe . . . . .	90
II.2.2 Tangentialstetigkeit . . . . .	92
II.2.3 Simpliziale Stammformen stückweise konstanter Formen . . . . .	94
II.2.4 Simpliziale Stammformen stückweise affin linearer Formen . . . . .	101
<b>III Elektromagnetische Felder</b> . . . . .	<b>107</b>
III.1 Die Minkowski-Raum-Zeit . . . . .	107
III.1.1 Definitionen, Bezeichnungen und grundlegende Eigenschaften . . . . .	108
III.1.2 Lorentztransformationen . . . . .	114
III.2 Die Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	121
III.2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen im Wandel der Zeit . . . . .	121
III.2.2 Materialeigenschaften . . . . .	125
III.2.3 Die diskreten Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	130
III.2.4 Die komponentenweise Formulierung der diskreten Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	133

<b>IV</b>	<b>Das diskrete Modell der Maxwell'schen Gleichungen auf vierdimensionalen</b>	
	<b>Simplizes</b>	<b>139</b>
IV.1	Die diskrete Modellierung elektromagnetischer Felder	139
IV.1.1	Die diskreten Maxwell'schen Gleichungen unter Verwendung der klassischen Feldkomponenten	140
IV.1.2	Diskretisierung der Minkowski-Raum-Zeit	145
IV.1.3	Eigenschaften des diskreten Modells	147
IV.2	Ein numerisches Beispiel	148
IV.2.1	Das transversale magnetische Feld	148
IV.2.2	Die Simplizialzerlegung einer Quaderzerlegung	151
IV.2.3	Das Gleichungssystem	161
IV.2.4	Die Implementation	164
IV.2.5	Numerische Ergebnisse	165
IV.3	Ausblick	169
<b>A</b>	<b>Quellcodes</b>	<b>171</b>
	<b>Literatur</b>	<b>185</b>
	<b>Index</b>	<b>187</b>

# Einleitung

„So auch sagt es nichts über die Welt aus, daß sie sich durch die Newtonsche Mechanik beschreiben läßt; wohl aber, daß sie sich so durch jene beschreiben läßt, wie dies eben der Fall ist.“

Ludwig Wittgenstein

Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen spielt eine große Rolle in der naturwissenschaftlichen Forschung sowie in Anwendungen der Physik und der Elektrotechnik. Diese Gleichungen, in denen Maxwell die Erkenntnisse Faradays in Formeln gefaßt hat, beschreiben die elektromagnetischen Erscheinungen durch Abhängigkeiten elektrischer und magnetischer Felder:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{div} B = 0 & \operatorname{div} D = \rho & \left( \begin{array}{l} D = \varepsilon E \\ B = \mu H \end{array} \right) \\ \operatorname{rot} E = -\dot{B} & \operatorname{rot} H = J + \dot{D} & \end{array}$$

So erfordert beispielsweise der erhebliche Herstellungsaufwand bei der Konstruktion elektromagnetischer Apparaturen etwa der Hochenergiephysik (Teilchenbeschleuniger, etc.), die aufgrund ihrer mitunter enormen Ausmaße nur noch einen einmaligen Bau der Anlage erlauben, eine möglichst genaue Vorhersage der zeitabhängigen elektromagnetischen Feldgrößen. Leider sind, außer in wenigen Spezialfällen, keine expliziten Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen bekannt, insbesondere kann im allgemeinen keine Aussage über das Verhalten elektromagnetischer Felder innerhalb der meist sehr komplizierten Strukturen realer oder geplanter Apparaturen gemacht werden.

Aus diesem Grund wurde eine Reihe numerischer Verfahren zur näherungsweise Lösung der Maxwell'schen Gleichungen entwickelt. Die übliche Vorgehensweise ist hierbei zunächst eine Diskretisierung des Raumes, etwa die Betrachtung der Eckpunkte einer Zerlegung in Würfel oder Simplexes, und ausgehend von vorgegebenen Anfangsbedingungen an diesen diskreten Stellen die Durchführung einer Zeititeration über (meist äquidistante) diskrete Zeitpunkte, wobei die in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden Differentialoperatoren durch Differenzenoperatoren ersetzt werden, indem man also von partiellen Differentialgleichungen übergeht zu Differenzgleichungen. Zur Lösung der durch diesen Diskretisierungsansatz aus Systemen partieller Differentialgleichungen entstehenden Differenzgleichungssysteme ist die Vorgabe von Anfangs- und Randwerten erforderlich, es handelt sich hierbei somit um Anfangsrandwertprobleme.

Sehr erfolgreich ist die von Kane S. Yee in [37] vorgestellte und darauf aufbauend von Thomas Weiland weiterentwickelte<sup>1</sup> Methode, die Komponenten des elektrischen Feldes und die Komponenten des magnetischen Feldes in den Knoten zueinander versetzter („dualer“) Raumgitter sowie in um einen halben Zeitschritt versetzten Zeitpunkten zu plazieren, um dann die jeweils neuen Komponenten (zum Zeitpunkt  $t$  bzw.  $t + \frac{1}{2}$ ) abwechselnd in Form eines sogenannten „Leap-Frog“-Verfahrens aus den vorherigen (älteren) Komponenten (an den Zeitpunkten  $t - 1$  und  $t - \frac{1}{2}$  bzw.  $t - \frac{1}{2}$  und  $t$ ) zu berechnen. Eine auf dieser Idee basierende Modellierung des Rowland-Versuchs unter Berücksichtigung absorbierender Randbedingungen<sup>2</sup> wurde erfolgreich in [1] durchgeführt.

Die beschriebene Vorgehensweise zur numerischen Lösung der Maxwell'schen Gleichung trennt zwischen Raum und Zeit, indem beide separat diskretisiert werden und anschließend eine reine Zeititeration durchgeführt wird. Da die Stabilität der numerischen Verfahren ein

<sup>1</sup> Vgl. [35, 34, 36].

<sup>2</sup> Zur Modellierung absorbierender Randbedingungen innerhalb der Diskretisierung von K. S. Yee, vgl. [25].

spezielles Verhältnis der gewählten Diskretisierungen erfordert, führt diese Trennung insbesondere dazu, daß die Größe der für die Zeititeration zu verwendenden Zeitintervalle durch den kleinsten Abstand benachbarter Raumpunkte bestimmt wird: Die Zeitdiskretisierung muß mindestens so fein gewählt werden, daß die Größe der Zeitintervalle  $\delta_t$  multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  höchstens der Distanz zweier benachbarter Raumpunkte entspricht, daß also für zwei solche Punkte  $P$  und  $Q$  stets  $c \cdot \delta_t \leq \text{dist}(P, Q)$  gilt. Anschaulich heißt das, daß die Zeitintervalle mindestens so klein gewählt sein müssen, daß die Feinheit der diskreten räumlichen Struktur bei einer sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitenden elektromagnetischen Welle Berücksichtigung findet. Bei der Modellierung spezieller Situationen besteht also nicht die Möglichkeit, in Regionen, die eine gröbere Raumdiskretisierung zulassen, auch die Zeitdiskretisierung gröber zu wählen und damit den Rechenaufwand zu senken. Während den obigen Ansätzen die klassische Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen zugrunde liegt, in der insbesondere die beschriebene Trennung von Raum und Zeit zum Ausdruck kommt, trägt ihre zeitgemäße Formulierung der speziellen Verwobenheit von Raum und Zeit sowie der Untrennbarkeit von elektrischen und magnetischen Erscheinungen Rechnung: Raum und Zeit werden in der vierdimensionalen Minkowski-Raum-Zeit vereinigt, in der die Sonderrolle der Zeit durch das dort definierte Pseudoskalarprodukt repräsentiert wird, ein indefinites inneres Produkt, dessen assoziierte quadratische Form durch das Vorzeichen zwischen raumartigen und zeitartigen Vektoren unterscheidet. Die elektromagnetischen Feldstärken werden in 2-Formen  $F$  und  $\tilde{F}$  zusammengefaßt, deren äußere Ableitung in einem Fall verschwindet (homogene Maxwell'sche Gleichung):

$$dF = 0$$

und deren Koableitung im anderen Fall eine 1-Form ist, die Ladungsdichte und Stromdichte zur Gesamtladung verbindet (inhomogene Maxwell'sche Gleichung):

$$\delta\tilde{F} = -J$$

Die Lorentztransformationen, als die mit der Pseudometrik verträglichen orthogonalen Transformationen der Minkowski-Raum-Zeit und gleichzeitig als die Abbildungen, unter denen die Maxwell'schen Gleichungen forminvariant sind, zeigen die fundamentale Verbundenheit der Minkowski-Raum-Zeit mit den Feldgleichungen.

Diese durch den Cartanschen Kalkül ermöglichte moderne Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen ist Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Eine Diskretisierung der Minkowski-Raum-Zeit in Form einer Zerlegung der betrachteten Teilmenge in vierdimensionale Simplizes und Platzierung der Feldgrößen in deren Eckpunkten legt nahe, den Kalkül der alternierenden Differentialformen im Hinblick auf diese Situation zu modifizieren, indem affine Formen als eindeutig bestimmte affin linear Interpolierende der Werte in den Ecken der Simplizes betrachtet werden. Die Minkowski-Raum-Zeit wird aufgrund der ihr inhärenten Ursprungsfreiheit (im Sinne des in der Speziellen Relativitätstheorie durchgeführten Verzichtes auf einen absoluten Raum zugunsten relativer, zueinander äquivalenter Bezugssysteme, der Inertialsysteme) konsequenterweise als vierdimensionaler affiner Punktraum betrachtet. Im Gegensatz zu den auf Zeititerationen führenden klassischen Verfahren erhält man durch die Simplizialzerlegung der vierdimensionalen Minkowski-Raum-Zeit ein lineares Gleichungssystem, das durch entsprechend andere Methoden zu lösen ist. Eine Unterscheidung zwischen Anfangs- und Randbedingungen im Sinne der klassischen Problemstellung ist bei dieser vierdimensionalen Betrachtungsweise nicht sinnvoll, da es in der Minkowski-Raum-Zeit keine absolute, sondern nur relative, vom gewählten Bezugssystem abhängige Gleichzeitigkeit gibt. Es sollte daher ohne Auszeichnung eines speziellen Inertialsystems nur noch von Randbedingungen die Rede sein.

Zum Aufbau dieser Arbeit:

Zunächst wird ein Kalkül affiner  $r$ -Formen entwickelt, eine an die beschriebene Situation angepaßte Version des klassischen Differentialformenkalküls. Dazu werden alle Begriffe und Methoden geliefert, die für die Betrachtung affiner  $r$ -Formen benötigt werden; es werden neben Operatoren und Abbildungen für Vektoren, wie innere Produkte und orthogonale Transformationen, auch affine Punkträume, affin lineare Abbildungen, Polynome höheren Grades und Multilinearformen betrachtet. Aus Gründen der Notationskonsistenz werden dabei auch Begriffe und Methoden aufgeführt, die sich nicht oder nur wenig von denen des klassischen Kalküls alternierender Differentialformen unterscheiden. Im Hinblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten des hier entwickelten diskreten Kalküls wurde besonders großer Wert auf die Vollständigkeit der vorgestellten Methoden gelegt. Die numerische Lösung der Maxwell'schen Gleichungen im Rahmen der Theorie elektromagnetischer Felder ist nur ein mögliches Anwendungsfeld.

Da diese Arbeit die Bestimmung von Feldkomponenten in Eckpunkten eine Teilmenge der Minkowski-Raum-Zeit zerlegender vierdimensionaler Simplizes zum Ziel hat, folgt die Betrachtung stückweise affiner  $r$ -Formen, die auf Vereinigungen aneinandergrenzender Simplizes definiert sind. Stetigkeitsbedingungen an die lokalen  $r$ -Formen auf gemeinsamen Seiten benachbarter Simplizes stellen dabei die Eindeutigkeit der Werte in den Eckpunkten dieser Untersimplizes sicher, womit eine solche simpliziale  $r$ -Form auf dem betrachteten Polyeder eineindeutig einer diskreten Lösung in den Eckpunkten aller beteiligten Simplizes entspricht. Im anschließenden dritten Teil wird der entwickelte Kalkül auf die Theorie elektromagnetischer Felder angewandt. Dazu werden zunächst die im ersten Teil allgemein formulierten Eigenschaften affiner Punkträume unter Berücksichtigung der in der Physik üblichen Bezeichnungen für die Situation der vierdimensionalen Minkowski-Raum-Zeit formuliert. Es folgt ein kurzer Überblick über die innerhalb der Theorie elektromagnetischer Felder benötigten Begriffe und die Anwendung des Kalküls auf diese Situation, die als Ergebnis alle für die Modellierung einer realen Situation notwendigen Zusammenhänge liefert.

Schließlich folgt die explizite Darstellung des diskreten Modells der Maxwell'schen Gleichungen auf vierdimensionalen Simplizes, also die Anwendung der entwickelten Methoden auf in vierdimensionale Simplizes zerlegte Teilmengen der Minkowski-Raum-Zeit mit in den Ecken der Simplizes platzierten Feldkomponenten. Die Lösung eines Problems innerhalb des diskreten Modells wird abschließend an einem numerischen Beispiel demonstriert.

Die vorliegende Arbeit eröffnet ein breites Feld möglicher weiterführender Forschung zur Klärung der Zusammenhänge zwischen

- der Wahl der vierdimensionalen simplizialen Zerlegung,
- der Auswahl und Modellierung von Randbedingungen sowie
- der Strategie zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems.

Hierbei setzt eine realistische Modellierung komplizierterer Strukturen ein tiefes Verständnis elektromagnetischer Erscheinungen voraus. Der genaue Einfluß und die Abhängigkeiten der vielfältigen eine konkrete Problemmodellierung determinierenden Faktoren auf Effizienz und Stabilität erfordern umfassende numerische Tests und sind ein vielversprechendes Feld für zukünftige Untersuchungen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meiner Arbeitsgruppe für die freundschaftliche und angenehme Arbeitssituation bedanken, insbesondere bei Prof. Dr. Gerhard Heindl für seinen stets wachen Blick für die vielen Dinge in der Mathematik, die klar scheinen, es aber nicht sind, bei Prof. Dr. Hans-Jürgen Buhl für seine Eigenschaft als wandelnde universalinteressierte Enzyklopädie und meinem Freund und Korrekturleser Dipl. Math. Thorsten Hübschen. Schließlich gilt mein Dank Prof. Dr. Erich Ossa und Prof. Dr. Klaus Fritzsche, die beide erheblichen Anteil an meinem mathematischen Werdegang haben und nicht ganz unschuldig an meiner Liebe zu Differentialformen sind.

Wuppertal, im Dezember 2000

Peter Feuerstein

# I Ein diskreter Differentialformenkalkül

*„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald etwas ganz anderes.“*

Johann Wolfgang von Goethe

Es wird ein Kalkül affiner  $r$ -Formen, ein an die Situation diskreter Daten in den Eckpunkten von Simplexes angepaßter affin linearer Spezialfall des Differentialformenkalküls, dargestellt. Dazu sind, im Anschluß an einige grundlegende Definitionen, verschiedene Vorbereitungen erforderlich: zunächst werden affine Punkträume, affin lineare und affin polynomiale Abbildungen und Multilinearformen eingeführt und untersucht. Schließlich werden die affinen  $r$ -Formen definiert und, unter besonderer Berücksichtigung ihrer speziellen Eigenschaften, die bekannten algebraischen Operationen, die äußere Ableitung sowie das Integral über ein Simplex betrachtet.<sup>3</sup>

## I.1 Geometrische Grundlagen, Grundbegriffe und Bezeichnungen

*„[...] jeder, der mal in irgendeiner der höheren Dimensionen gewesen ist, wird auch wissen, daß die da oben eine ziemlich grauenhafte, unzivilisierte Meute sind, die einfach kurz und klein gehauen und um die Ecke gebracht werden müßte, und das würde ja auch passieren, wenn jemand auf den Dreh käme, wie man Raketen im rechten Winkel zur Realität abfeuert.“*

Douglas Adams

Ein geeigneter „Lebensraum“ der später einzuführenden affinen  $r$ -Formen sind pseudoeuklidische Punkträume, eine Verallgemeinerung euklidischer Punkträume. Beispielsweise ist die der Speziellen Relativitätstheorie zugrundeliegende Minkowski-Raum-Zeit als vierdimensionaler Minkowski-Raum ein pseudoeuklidischer Punktraum. Zunächst wird daher das Pseudoskalarprodukt auf einem reellen Vektorraum definiert und ein grundlegendes Konstruktionsverfahren für Orthonormalbasen beschrieben. Anschließend wird der pseudoeuklidische Punktraum eingeführt, dessen Verschiebungsvektorraum ein mit einem Pseudoskalarprodukt versehener reeller Vektorraum ist.<sup>4</sup>

---

<sup>3</sup> Grundlagen des Differentialformenkalküls und der klassischen Vektoranalysis finden sich beispielsweise in [6, 18, 27, 3, 22, 32, 33, 9, 13, 14], dabei mit spezieller Berücksichtigung affiner Koordinaten und affin linearer Abbildungen in [27]. Für die grundlegenden topologischen Begriffe sei auf [2, 11, 12], für den Infinitesimalkalkül speziell auf [5] und [10] verwiesen.

<sup>4</sup> Anschauliche Behandlungen euklidischer Punkt- und Vektorräume finden sich in [3] und [8].

## I.1.1 Inneres Produkt und quadratische Form

### Definition 1

$\mathcal{V}$  sei ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum für eine natürliche Zahl  $n \geq 0$ .

a) Ein *inneres Produkt* auf  $\mathcal{V}$  ist eine nicht entartete, symmetrische Bilinearform

$$\xi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} .$$

$\xi$  ist also in beiden Komponenten linear, und es gilt:

- $\xi(v, w) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$  ,
- $\forall v, w \in \mathcal{V} : \xi(v, w) = \xi(w, v)$  .

b) Ein inneres Produkt  $\xi$  auf  $\mathcal{V}$  heißt

- *positiv definit* :  $\Leftrightarrow (v \neq 0 \Rightarrow \xi(v, v) > 0)$  ,
- *negativ definit* :  $\Leftrightarrow (v \neq 0 \Rightarrow \xi(v, v) < 0)$  ,
- *indefinit* :  $\Leftrightarrow \xi$  ist weder positiv noch negativ definit.

c) Zwei Vektoren  $v, w \in \mathcal{V}$  heißen  *$\xi$ -orthogonal* :  $\Leftrightarrow \xi(v, w) = 0$ .

d) Für eine Teilmenge  $\mathcal{W}$  von  $\mathcal{V}$  ist der  *$\xi$ -orthogonale Untervektorraum* von  $\mathcal{W}$  in  $\mathcal{V}$  definiert durch

$$\mathcal{W}^\perp := \{v \in \mathcal{V} \mid \xi(v, w) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}\} .$$

### Bezeichnung

a) Ein inneres Produkt  $\xi$ , also eine symmetrische, nicht entartete, aber nicht notwendigerweise positiv definite Bilinearform heißt auch *Pseudoskalarprodukt*, geschrieben als  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi$  mit

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \xi(u, v) =: \langle u, v \rangle_\xi . \end{aligned}$$

b) Im folgenden wird anstelle von „ $\xi$ -orthogonal“ kurz *orthogonal* verwandt.

### Bemerkung

Der eingeführte Orthogonalitätsbegriff läßt die Möglichkeit *selbstorthogonaler* Vektoren  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  mit  $\langle v, v \rangle_\xi = 0$  zu.

Sei etwa  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  mit Standardbasis und (indefinitem) innerem Produkt

$$\langle v, w \rangle_\xi := \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i - v_n w_n$$

für  $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$ , dann gilt für  $u := (0, \dots, 0, 1, 1)^\top$  :

$$\langle \lambda u, \mu u \rangle_\xi = \lambda \mu \langle u, u \rangle_\xi = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} ,$$

offenbar ist also

$$\mathcal{W} := \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{W}^\perp .$$

**Definition 2**

Sei  $\mathcal{V}$  wie oben und  $\xi$  ein inneres Produkt auf  $\mathcal{V}$ .

- a) Die *assoziierte quadratische Form* zu  $\xi$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} q_\xi : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto q_\xi(v) := \langle v, v \rangle_\xi . \end{aligned}$$

- b) Die durch  $\xi$  induzierte *Pseudonorm* auf  $\mathcal{V}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\xi : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \|v\|_\xi := \begin{cases} \sqrt{q_\xi(v)} & \text{falls } q_\xi(v) \geq 0 , \\ i\sqrt{-q_\xi(v)} & \text{falls } q_\xi(v) < 0 . \end{cases} \end{aligned}$$

**Bemerkung**

- a) Unterschiedliche innere Produkte definieren unterschiedliche quadratische Formen, denn das innere Produkt läßt sich durch seine assoziierte quadratische Form ausdrücken („*Polarisierungslemma*“):

$$\langle v, w \rangle_\xi = \frac{1}{4}(q_\xi(v+w) - q_\xi(v-w)) .$$

- b) Zu jedem  $v \in \mathcal{V}$  gibt es genau ein Element  $v^\xi$  des Dualraums  $\mathcal{V}^*$ , so daß für alle  $w \in \mathcal{V}$  gilt:

$$\langle v, w \rangle_\xi = v^\xi(w) .$$

Für eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  und die zugehörige duale Basis  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  von  $\mathcal{V}^*$  läßt sich  $v^\xi \in \mathcal{V}^*$  folgendermaßen schreiben:

$$v^\xi = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle_\xi v_i^* = \sum_{i,j=1}^n \langle v_j, v_i \rangle_\xi v_j^*(v) v_i^* .$$

- c) Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ , so ist  $(v_1^\xi, \dots, v_n^\xi)$  eine Basis des Dualraums  $\mathcal{V}^*$ , denn:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1^\xi + \dots + \lambda_n v_n^\xi &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 v_1^\xi + \dots + \lambda_n v_n^\xi)(v) &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \\ \Leftrightarrow \langle \lambda_1 v_1, v \rangle_\xi + \dots + \langle \lambda_n v_n, v \rangle_\xi &= \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v \rangle_\xi = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \\ \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n &= 0 . \end{aligned}$$

Folglich ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}^* \\ v &\longmapsto v^\xi \end{aligned}$$

ein Isomorphismus des Vektorraums  $\mathcal{V}$  auf seinen Dualraum  $\mathcal{V}^*$ .

- d) Ist  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  ein Untervektorraum, so gilt:

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = 0 \Leftrightarrow \xi \text{ ist auf } \mathcal{U} \text{ nicht entartet.}$$

In diesem Fall läßt sich  $\mathcal{V}$  als direkte Summe schreiben:

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp .$$

(Ein Beweis hierzu findet sich in [14].)

Im folgenden sei  $\mathcal{V}$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum für eine natürliche Zahl  $n > 0$ ,  $\xi$  ein inneres Produkt auf  $\mathcal{V}$  und  $q_\xi$  die zu  $\xi$  assoziierte quadratische Form.

### Bezeichnung

Für eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  heißt  $(v_1^\xi, \dots, v_n^\xi)$  die zugehörige  $\xi$ -Basis von  $\mathcal{V}^*$ .

### Definition 3

- a) Eine Vektor  $v \in \mathcal{V}$  mit  $|q_\xi(v)| = 1$  heißt *Einheitsvektor*.  
 b) Eine Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren heißt *Orthonormalbasis*.

### Satz 1

- a) Es gibt eine Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$ .  
 b) Es gibt eine Zahl  $r \in \{0, \dots, n\}$ , so daß für jede Orthonormalbasis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  gilt:

$$\#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid q_\xi(v_i) = -1\} = r .$$

### Beweis:

- a) (Modifiziertes *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*<sup>5</sup>)<sup>6</sup>

Sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ . Das Ziel ist, daraus eine Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  zu konstruieren. Es sind zwei Fälle zu betrachten:

- i. [ $\dim(\mathcal{V}) = n = 1$ , d.h.  $\mathcal{V} = \text{span}(u_1)$ ]

Da  $u_1 \neq 0$  und  $\xi$  nicht entartet ist, gibt es ein  $v \in \mathcal{V}$ , mit  $\langle u_1, v \rangle_\xi \neq 0$ . Nun gilt aber:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } v = \lambda u_1 \Rightarrow 0 \neq \langle u_1, v \rangle_\xi = \lambda \langle u_1, u_1 \rangle_\xi .$$

Folglich ist  $q_\xi(u_1) \neq 0$ . Mit

$$e_1 := \frac{1}{\sqrt{|q_\xi(u_1)|}} u_1$$

folgt:

$$\langle e_1, e_1 \rangle_\xi = \frac{q_\xi(u_1)}{|q_\xi(u_1)|} = \pm 1 .$$

- ii. [ $\dim(\mathcal{V}) = n > 1$ ]

1. Schritt: Konstruktion des Vektors  $e_1$ :

- Falls es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $q_\xi(u_i) \neq 0$  gibt, vertauscht man  $u_i$  mit  $u_1$ . Mit

$$e_1 := \frac{1}{\sqrt{|q_\xi(u_1)|}} u_1$$

folgt wie oben:

$$\langle e_1, e_1 \rangle_\xi = \frac{q_\xi(u_1)}{|q_\xi(u_1)|} = \pm 1 .$$

<sup>5</sup> Vgl. etwa [27, 14].

<sup>6</sup> Da die in der Literatur zu findenden Versionen dieses Verfahrens ohne Voraussetzung der Definitheit des inneren Produktes meist nichtkonstruktive Anteile enthalten, wird hier eine rein konstruktive und im Hinblick auf Anwendungen leicht implementierbare Form vorgestellt.

- Ansonsten gilt  $q_\xi(u_i) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Man wählt nun ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $q_\xi(u_1 + u_i) \neq 0$ . Solch ein  $i$  existiert, denn unter der Annahme

$$q_\xi(u_1 + u_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

erhielte man:

$$0 = \frac{1}{2} \left( q_\xi(u_1) + 2 \langle u_1, u_i \rangle_\xi + q_\xi(u_i) \right) = \langle u_1, u_i \rangle_\xi \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

und damit (mit Koordinatenfunktionen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  bezüglich  $(u_1, \dots, u_n)$ )

$$\forall v = \sum_{i=1}^n \alpha_i(v) u_i \in \mathcal{V} : \langle u_1, v \rangle_\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i(v) \langle u_1, u_i \rangle_\xi = 0 .$$

Da  $\xi$  nicht entartet ist, müßte also  $u_1 = 0$  gelten, was ein Widerspruch wäre!

Man setzt nun

$$e_1 := \frac{1}{\sqrt{|q_\xi(u_1 + u_i)|}} (u_1 + u_i) .$$

2. Schritt: Konstruktion der  $e_i$  für  $i > 1$ :

Dazu sei bereits eine Basis  $(e_1, \dots, e_{i-1}, u_i, \dots, u_n)$  von  $\mathcal{V}$  mit folgenden Eigenschaften gegeben:

- $(e_1, \dots, e_{i-1})$  sei ein Orthonormalsystem, es gelte also
 
$$|q_\xi(e_k)| = 1 \text{ für } k \in \{1, \dots, i-1\} \text{ und}$$

$$\langle e_j, e_k \rangle_\xi = 0 \text{ für } j, k \in \{1, \dots, i-1\}, k \neq j .$$
- Im Fall  $i > 2$  seien die Vektoren  $u_i, \dots, u_n$  bereits orthogonal zu  $e_1, \dots, e_{i-2}$ , es sei also

$$\langle u_j, e_k \rangle_\xi = 0 \text{ für } j \in \{i, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, i-2\} .$$

Für  $j = i, \dots, n$ :

Man setzt

$$\tilde{u}_j := u_j - \langle u_j, e_{i-1} \rangle_\xi q_\xi(e_{i-1}) e_{i-1} .$$

Dann gilt für  $l < i-1$

$$\langle \tilde{u}_j, e_l \rangle_\xi = \langle u_j, e_l \rangle_\xi - \langle u_j, e_{i-1} \rangle_\xi q_\xi(e_{i-1}) \langle e_{i-1}, e_l \rangle_\xi = 0$$

und

$$\langle \tilde{u}_j, e_{i-1} \rangle_\xi = \langle u_j, e_{i-1} \rangle_\xi - \langle u_j, e_{i-1} \rangle_\xi q_\xi(e_{i-1}) q_\xi(e_{i-1}) = 0 ,$$

also gilt

$$\tilde{u}_j \in \{e_1, \dots, e_{i-1}\}^\perp .$$

Schließlich setzt man

$$u_j := \tilde{u}_j .$$

(Damit ist die zweite Voraussetzung für den nächsten Induktionsschritt erfüllt.)

Offensichtlich ist  $(e_1, \dots, e_{i-1}, u_i, \dots, u_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ , da nur Vielfache linear unabhängiger Vektoren subtrahiert, also nur zulässige Basistransformationen durchgeführt werden.

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Falls es ein  $j \in \{i, \dots, n\}$  mit  $q_\xi(u_j) \neq 0$  gibt, vertauscht man  $u_i$  mit  $u_j$ . Dieser Fall tritt speziell für  $i = n$  ein, denn für ein beliebiges

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(v) e_i + \alpha_n(v) u_n \in \mathcal{V}$$

(mit Koordinatenfunktionen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  bezüglich  $(e_1, \dots, e_{n-1}, u_n)$ ) gilt dann

$$\langle u_n, v \rangle_\xi = \alpha_n(v) \langle u_n, u_n \rangle_\xi = \alpha_n(v) q_\xi(u_n),$$

und da  $u_n \neq 0$  und  $\xi$  nicht entartet ist, muß  $q_\xi(u_n) \neq 0$  gelten.

Man setzt

$$e_i := \frac{1}{\sqrt{|q_\xi(u_i)|}} u_i,$$

und damit gilt:

$$|q_\xi(e_i)| = 1 \quad \text{und} \quad \langle e_i, e_k \rangle_\xi = 0, \quad k = 1, \dots, i-1.$$

- Es gelte  $q_\xi(u_j) = 0$  für  $j = i, \dots, n$  und ohne Einschränkung (siehe oben) sei  $i < n$ . Man wählt nun ein  $j \in \{i, \dots, n\}$ , für das  $q_\xi(u_i + u_j) \neq 0$  gilt. Wie im ersten Schritt existiert solch ein  $j$ , denn unter der Annahme

$$q_\xi(u_i + u_j) = 0 \quad \forall j \geq i$$

erhielte man einen Widerspruch:

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle_\xi &= 0 \quad \forall j \geq i \\ \Rightarrow \langle u_i, v \rangle_\xi &= 0 \quad \forall v \left( = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j(v) e_j + \sum_{j=i}^n \alpha_j(v) u_j \right) \in \mathcal{V} \\ \Rightarrow u_i &= 0 \end{aligned}$$

(mit Koordinatenfunktionen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  bezüglich  $(e_1, \dots, e_{i-1}, u_i, \dots, u_n)$ ).

Man setzt nun

$$e_i := \frac{1}{\sqrt{|q_\xi(u_i + u_j)|}} (u_i + u_j).$$

Damit gilt

$$|q_\xi(e_i)| = 1,$$

und ferner gilt für alle  $l < i$ :

$$\langle e_i, e_l \rangle_\xi = \frac{1}{\sqrt{|q_\xi(u_i + u_j)|}} \left( \langle u_i, e_l \rangle_\xi + \langle u_j, e_l \rangle_\xi \right) = 0.$$

Auch hier ist offensichtlich, daß  $(e_1, \dots, e_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  ist.

(Damit ist auch die erste Voraussetzung für den nächsten Induktionsschritt erfüllt.)

b) (Spezialfall des *Trägheitssatzes von Sylvester*<sup>7)</sup><sup>8</sup>

Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}$  und  $r := \#\{i \mid q_\xi(e_i) = -1\}$ .

- Falls  $r = 0$  ist, ist  $\xi$  positiv definit, es gilt also  $q_\xi(v) > 0$  für alle  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ , woraus sofort die Behauptung folgt.
- Sei also  $r > 0$ . Ohne Einschränkung seien die Basiselemente so sortiert, daß  $q_\xi(e_i) = -1$  für  $1 \leq i \leq r$  gilt. Es sei  $\mathcal{U} := \text{span}\{e_1, \dots, e_r\}$  und  $\mathcal{W}$  ein beliebiger maximaler Untervektorraum von  $\mathcal{V}$ , auf dem  $\xi$  negativ definit ist. Dann gilt zunächst, da  $\xi$  auf  $\mathcal{U}$  negativ definit ist:

$$\dim(\mathcal{W}) \geq \dim(\mathcal{U}) = r.$$

Nun sei mit Koordinatenfunktionen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  bezüglich  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$  definiert durch:

$$\Phi : w = \sum_{i=1}^n \lambda_i(w) e_i \longmapsto \Phi(w) := \sum_{i=1}^r \lambda_i(w) e_i.$$

Diese Abbildung ist offenbar linear, und es gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(w) = 0 &\Rightarrow \lambda_i(w) = 0, \quad i = 1, \dots, r \\ &\Rightarrow 0 \geq \langle w, w \rangle_\xi = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i(w)^2 q_\xi(e_i) = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i(w)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i(w) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad w = 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $\ker(\Phi)$  der Nullvektorraum,  $\Phi$  also ein Monomorphismus, und man erhält:

$$\dim(\mathcal{W}) \leq \dim(\mathcal{U}).$$

Es folgt:

$$\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{U}) = r,$$

also ist  $r$  unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis.

□

#### Definition 4

Für eine (beliebige!) Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  heißt

$$\text{Index}(\xi) := \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid q_\xi(e_i) = -1\}$$

der *Index* von  $\xi$ . (Satz 1 garantiert die Wohldefiniiertheit.)

#### Bemerkung

Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Orthonormalbasis.

a) Ist  $\alpha \in \mathcal{V}^*$ , so gilt mit  $v := \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle_\xi \alpha(e_i) e_i$ :

$$\langle v, w \rangle_\xi = \alpha(w) \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

und damit  $v^\xi = \alpha$ .

<sup>7</sup> Ein Beweis des allgemeinen Satzes findet sich in den gängigen Büchern über Lineare Algebra (vgl. etwa [14]).

<sup>8</sup> Siehe auch [26].

b) Ist zusätzlich  $r := \text{Index}(\xi)$  und

$$q_\xi(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq i \leq n-r, \\ -1 & \text{falls } n-r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

dann gilt für  $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ ,  $w = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ :

$$\langle v, w \rangle_\xi = \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \mu_{n-r} - \lambda_{n-r+1} \mu_{n-r+1} - \cdots - \lambda_n \mu_n.$$

Ist  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  die zugehörige duale Basis und  $(e_1^\xi, \dots, e_n^\xi)$  die zugehörigen  $\xi$ -Basis von  $\mathcal{V}^*$ , dann erhält man folgenden Zusammenhang:

$$e_i^\xi = \langle e_i, e_i \rangle_\xi e_i^* = \begin{cases} e_i^* & \text{falls } i \leq n-r, \\ -e_i^* & \text{falls } i > n-r. \end{cases}$$

## I.1.2 Orthogonale Transformationen

### Bezeichnung

Im folgenden sei

- $\mathcal{V}$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum,
- $\xi$  ein inneres Produkt auf  $\mathcal{V}$ ,
- $q_\xi$  die zu  $\xi$  assoziierte quadratische Form und
- $\|\cdot\|_\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$  die durch  $\xi$  induzierte Pseudonorm auf  $\mathcal{V}$ .

Weiter seien Orthonormalbasen  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  wie folgt sortiert:

$$q_\xi(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq i \leq n - \text{Index}(\xi), \\ -1 & \text{falls } n - \text{Index}(\xi) + 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (*)$$

### Definition 5

Eine lineare Abbildung  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  heißt *orthogonale Transformation* (bezüglich  $\xi$ ), wenn  $L$  mit  $\xi$  verträglich ist, wenn also gilt:

$$\langle v, w \rangle_\xi = \langle L(v), L(w) \rangle_\xi \quad \forall v, w \in \mathcal{V}.$$

### Bemerkung

a) Jede orthogonale Transformation  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  ist ein Isomorphismus, denn es gilt:

$$\begin{aligned} v \in \ker(L) &\Rightarrow \langle v, w \rangle_\xi = \langle L(v), L(w) \rangle_\xi = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V} \\ &\Rightarrow v = 0, \end{aligned}$$

da  $\xi$  nicht entartet ist.  $L$  ist also ein injektiver Endomorphismus und damit bijektiv.

b) Orthogonale Transformationen  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  bilden selbstorthogonale Vektoren auf selbst-orthogonale Vektoren ab:

$$0 = q_\xi(v) = \langle v, v \rangle_\xi = \langle L(v), L(v) \rangle_\xi = q_\xi(L(v)).$$

**Lemma 1**

Für eine lineare Abbildung  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $L$  ist eine orthogonale Transformation.
- b)  $L$  ist verträglich mit der zu  $\xi$  assoziierten quadratischen Form, es gilt also:

$$\|L(v)\|_{\xi}^2 = q_{\xi}(L(v)) = \langle L(v), L(v) \rangle_{\xi} = \langle v, v \rangle_{\xi} = q_{\xi}(v) = \|v\|_{\xi}^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

- c)  $L$  bildet Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab, wobei eine Anordnung gemäß (\*) erhalten bleibt.

Beweis:

- a)  $\Rightarrow$  c) Ist  $L$  eine orthogonale Transformation und  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}$ , so ist auch  $(L(e_1), \dots, L(e_n))$  eine Orthonormalbasis, denn  $L$  ist ein Isomorphismus, und es gilt:

$$\langle L(e_i), L(e_j) \rangle_{\xi} = \langle e_i, e_j \rangle_{\xi} = \begin{cases} 0, & i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ 1, & 1 \leq i = j \leq n - \text{Index}(\xi), \\ -1, & n - \text{Index}(\xi) < i = j \leq n. \end{cases}$$

- c)  $\Rightarrow$  b) Es seien  $(e_1, \dots, e_n)$  und  $(L(e_1), \dots, L(e_n))$  Orthonormalbasen von  $\mathcal{V}$ , dann gilt für jedes  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in \mathcal{V}$ :

$$L(v) = L\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i L(e_i),$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned} q_{\xi}(L(v)) &= \langle L(v), L(v) \rangle_{\xi} = \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \langle L(e_i), L(e_j) \rangle_{\xi} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 q_{\xi}(L(e_i)) = \sum_{i=1}^n v_i^2 q_{\xi}(e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \langle e_i, e_j \rangle_{\xi} = \langle v, v \rangle_{\xi} = q_{\xi}(v). \end{aligned}$$

- b)  $\Rightarrow$  a) Es gelte

$$q_{\xi}(v) = q_{\xi}(L(v)) \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

dann folgt für alle  $v, w \in \mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_{\xi} &= \frac{1}{4}(q_{\xi}(v+w) - q_{\xi}(v-w)) \\ &= \frac{1}{4}(q_{\xi}(L(v+w)) - q_{\xi}(L(v-w))) \\ &= \frac{1}{4}(q_{\xi}(L(v)+L(w)) - q_{\xi}(L(v)-L(w))) = \langle L(v), L(w) \rangle_{\xi}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung**

Es sei  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  eine orthogonale Transformation. Weiter seien  $\mathfrak{v} := (e_1, \dots, e_n)$  und  $\tilde{\mathfrak{v}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  mit  $\tilde{e}_i = L(e_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  Orthonormalbasen von  $\mathcal{V}$ .

Dann ist die zu der inversen Transformation  $L^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  bezüglich der Basis  $\tilde{\mathfrak{v}}$  gehörige Matrix  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$  mit

$$e_j = L^{-1}(\tilde{e}_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} \tilde{e}_i, \quad j = 1, \dots, n$$

die Koordinatentransformationsmatrix  $M_{L,\mathfrak{v}} := M_{\mathfrak{v},\tilde{\mathfrak{v}}} = M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von  $\mathfrak{v}$  nach  $\tilde{\mathfrak{v}}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_{L,\mathfrak{v}}} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow \mathfrak{v} & \downarrow \tilde{\mathfrak{v}} \\ & & \mathcal{V} \end{array}$$

mit als  $(1 \times n)$ -Matrizen zu interpretierenden Basen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n m_{ji} \tilde{e}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n m_{ji} x_i \right) \tilde{e}_j = \tilde{\mathfrak{v}} \left( M_{L,\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Die Matrix  $M_{L,\mathfrak{v}}$  heißt auch die *mit der orthogonalen Transformation  $L$  und der Orthonormalbasis  $\mathfrak{v}$  assoziierte Matrix*.

Wegen

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\xi} = \left\langle \sum_{k=1}^n m_{ki} \tilde{e}_k, \sum_{l=1}^n m_{lj} \tilde{e}_l \right\rangle_{\xi} = \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle_{\xi}$$

folgt mit

$$E_{\xi} := \left( \langle e_i, e_j \rangle_{\xi} \right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} I_{n-\text{Index}(\xi)} & 0 \\ 0 & -I_{\text{Index}(\xi)} \end{pmatrix}$$

aus der Orthogonalität der Basiselemente:

$$E_{\xi} = M_{L,\mathfrak{v}}^{\top} \cdot E_{\xi} \cdot M_{L,\mathfrak{v}}.$$

Betrachtet man analog  $\tilde{M} = (\tilde{m}_{ij})_{i,j=1}^n$  mit

$$\tilde{e}_j = L(e_j) = \sum_{i=1}^n \tilde{m}_{ij} e_i = \sum_{i,k=1}^n \tilde{m}_{ij} m_{ki} \tilde{e}_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

so gilt offenbar

$$\tilde{M} = M_{L^{-1},\tilde{\mathfrak{v}}} = M_{L,\mathfrak{v}}^{-1} = E_{\xi} \cdot M_{L,\mathfrak{v}}^{\top} \cdot E_{\xi},$$

insbesondere erhält man für  $M_{L,\mathfrak{v}} = (m_{ij})_{i,j=1}^n$  (und  $k := n - \text{Index}(\xi)$ ) die inverse Matrix:

$$M_{L,\mathfrak{v}}^{-1} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{k,1} & -m_{k+1,1} & \cdots & -m_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{1,k} & \cdots & m_{k,k} & -m_{k+1,k} & \cdots & -m_{n,k} \\ -m_{1,k+1} & \cdots & -m_{k,k+1} & m_{k+1,k+1} & \cdots & m_{n,k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -m_{1,n} & \cdots & -m_{k,n} & m_{k+1,n} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} E_\xi &= \left(M_{L,\mathfrak{b}}^{-1}\right)^\top \cdot E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{b}}^{-1} = \left(E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{b}}^\top \cdot E_\xi\right)^\top \cdot E_\xi \cdot \left(E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{b}}^\top \cdot E_\xi\right) \\ &= E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{b}} \cdot E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{b}}^\top \cdot E_\xi \end{aligned}$$

und es folgt

$$E_\xi = M_{L,\mathfrak{b}} \cdot E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{b}}^\top \left(= M_{L,\mathfrak{b}}^\top \cdot E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{b}}\right).$$

Ist umgekehrt  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix mit

$$E_\xi = M^\top E_\xi M = M E_\xi M^\top,$$

so ist  $M$  die Koordinatentransformationsmatrix des Basiswechsels

$$(e_1, \dots, e_n) \rightsquigarrow (L(e_1), \dots, L(e_n))$$

für eine orthogonale Transformation  $L$ . Die Menge der Matrizen mit dieser Eigenschaft bildet mit der Matrixmultiplikation offenbar eine Untergruppe von  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ :

- Für  $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $E_\xi = M^\top E_\xi M = N^\top E_\xi N$  gilt:

$$E_\xi = N^\top E_\xi N = N^\top \left(M^\top E_\xi M\right) N = (MN)^\top E_\xi (MN).$$

- Für  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $E_\xi = M^\top E_\xi M$  gilt:

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_\xi M M^{-1} = (E_\xi M E_\xi) E_\xi M^{-1} = \left(E_\xi M^\top E_\xi\right)^\top E_\xi M^{-1} \\ &= (M^{-1})^\top E_\xi M^{-1}. \end{aligned}$$

- Es ist offenbar  $E_\xi = I_n^\top E_\xi I_n$ .

### I.1.3 Affine Punkträume

#### Definition 6

Zu einer Menge  $\mathcal{M}$  gebe es eine Menge  $\mathcal{V}$  von bijektiven Abbildungen  $v : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , so daß gilt:

- 1) Für alle  $(P_1, P_2) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  gibt es genau ein  $v \in \mathcal{V}$  mit  $v(P_1) = P_2$ .
- 2) Es gibt Verknüpfungsabbildungen

$$\begin{aligned} + : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (v, w) &\longmapsto v + w := w \circ v \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v, \end{aligned}$$

so daß  $(\mathcal{V}, +, \cdot)$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum ist.

Dann heißt  $\mathcal{M}$   $n$ -dimensionaler (affiner) Punktraum bezüglich  $\mathcal{V}$  (oder mit zugehörigem (Verschiebungs-)Vektorraum  $\mathcal{V}$ ). Die Elemente von  $\mathcal{M}$  heißen Punkte, die Elemente von  $\mathcal{V}$  heißen (Verschiebungs-)Vektoren.

**Beispiel**

Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum, so ist die Menge  $\mathcal{V}_V := \{f_w \mid w \in V\}$  der Abbildungen

$$f_w : V \ni v \mapsto f_w(v) := v + w \in V$$

bezüglich

$$\begin{aligned} f_{w_1} + f_{w_2} &:= f_{w_2} \circ f_{w_1} \quad \forall w_1, w_2 \in V \quad \text{und} \\ \lambda f_w &:= f_{\lambda w} \quad \forall w \in V, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vermöge der linearen Bijektion

$$V \ni w \mapsto f_w \in \mathcal{V}_V$$

ein zu  $V$  isomorpher reeller Vektorraum. Folglich ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum bezüglich  $\mathcal{V}_V$ .

**Vorbemerkung** (zum folgenden Lemma)

Das im Anschluß zitierte Ergebnis aus [14] garantiert die Existenz einer Topologie auf dem zu einem  $n$ -dimensionalen Punktraum  $\mathcal{M}$  gehörigen Vektorraum  $\mathcal{V}$ , bezüglich der die obigen Verknüpfungsabbildungen sowie Linearformen stetig sind.

Offene Mengen in  $\mathcal{V}$  werden dazu für eine fest gewählte Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top &\longmapsto \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \end{aligned}$$

als Bilder offener Mengen des  $\mathbb{R}^n$  definiert. Diese Topologie ist dieselbe, die durch jede Norm auf  $\mathcal{V}$  induziert wird und ist insbesondere eindeutig bestimmt.

**Lemma 2**

Auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  existiert genau eine Topologie, so daß

1)  $V$  ein *topologischer Vektorraum* ist, also die beiden Verknüpfungsabbildungen

- Addition zweier Vektoren und
- Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor

stetig sind, und

2) jedes lineare Funktional  $l \in V^*$  stetig ist.

Im folgenden sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum bezüglich  $\mathcal{V}$ .

**Schreibweise**

Für  $v \in \mathcal{V}$ ,  $P_1, P_2 \in \mathcal{M}$  mit  $v(P_1) = P_2$  schreibt man auch

$$\begin{aligned} v &=: P_1 \vec{P}_2 = P_2 - P_1, \\ v(P_1) &=: P_1 + v \\ &\left( \Rightarrow P_1 + P_1 \vec{P}_2 = P_2 = P_1 + (P_2 - P_1) \right). \end{aligned}$$

**Rechenregeln**

Es gilt:

- a)  $(P + v) + w = P + (v + w) \quad \forall P \in \mathcal{M}, v, w \in \mathcal{V}$ ,
- b)  $P_1 \vec{P}_2 = -P_2 \vec{P}_1 \quad \forall P_1, P_2 \in \mathcal{M}$ ,
- c)  $P_2 - P_1 = (P_2 - P_3) + (P_3 - P_1) \quad \forall P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{M}$ .

Beweis:

a) Für alle  $P \in \mathcal{M}$  und  $v, w \in \mathcal{V}$  gilt:

$$(P + v) + w = w(v(P)) = (w \circ v)(P) = P + (v + w) .$$

b) Für  $P_1, P_2 \in \mathcal{M}$  gilt:

$$\begin{aligned} P_1 \vec{P}_2(P_1) = P_2 &\Rightarrow P_1 = P_2 \vec{P}_1(P_2) = P_2 \vec{P}_1(P_1 \vec{P}_2(P_1)) \\ &\Rightarrow P_1 \vec{P}_2 = -P_2 \vec{P}_1 . \end{aligned}$$

c) Für  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{M}$  gilt:

$$P_1 + (P_3 \vec{P}_2 + P_1 \vec{P}_3) = (P_1 + P_1 \vec{P}_3) + P_3 \vec{P}_2 = P_3 + P_3 \vec{P}_2 = P_2 .$$

**Definition 7**

$P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathcal{M}$  heißen genau dann *affin linear unabhängig* wenn gilt:

Für alle  $i \in \{0, \dots, r\}$  sind die Vektoren  $P_i \vec{P}_j \in \mathcal{V}$  für  $j \in \{0, \dots, r\} \setminus \{i\}$  linear unabhängig.

**Bemerkung**

Die affin lineare Unabhängigkeit der  $P_0, \dots, P_r \in \mathcal{M}$  folgt bereits aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $P_0 \vec{P}_1, \dots, P_0 \vec{P}_r$ , denn für  $k \in \{1, \dots, r\}$  gilt

$$P_k \vec{P}_i = P_k \vec{P}_0 + P_0 \vec{P}_i, \quad i = 0, \dots, r,$$

und somit erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \lambda_i P_k \vec{P}_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r \lambda_i (P_k \vec{P}_0 + P_0 \vec{P}_i) + \lambda_0 P_k \vec{P}_0 \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r \lambda_i P_0 \vec{P}_i - \left( \lambda_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r \lambda_i \right) P_0 \vec{P}_k \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, r\} \setminus \{k\} . \end{aligned}$$

**Lemma 3** („O-Lemma“, [16])

Für  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{M}$  und  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$  ist der Punkt

$$P := O + \sum_{i=0}^k \lambda_i O \vec{P}_i \in \mathcal{M}$$

unabhängig von  $O \in \mathcal{M}$ .

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} O' + \sum_{i=0}^k \lambda_i O' \vec{P}_i &= O + O \vec{O}' + \sum_{i=0}^k \lambda_i (O' \vec{O} + O \vec{P}_i) \\ &= O + O \vec{O}' + \sum_{i=0}^k \lambda_i O' \vec{O} + \sum_{i=0}^k \lambda_i O \vec{P}_i = O + \sum_{i=0}^k \lambda_i O \vec{P}_i . \end{aligned}$$

□

### Schreibweise

Nun können *affine Linearkombinationen* von Punkten aus  $\mathcal{M}$  definiert werden:

Für  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{M}$ ,  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$  sei

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k := O + \sum_{i=0}^k \lambda_i O \vec{P}_i$$

für einen beliebig gewählten Punkt  $O \in \mathcal{M}$ .

### Bemerkung

a) Offenbar ist

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^k \lambda_{\sigma(i)} P_{\sigma(i)}$$

für jede Permutation  $\sigma$  von  $\{0, \dots, k\}$ .

b) Falls  $\lambda_i = \delta_{ij}$ ,  $i = 0, \dots, k$ , für ein  $j \in \{0, \dots, k\}$ , so gilt:

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i = P_j .$$

c) Für einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  als Punktraum bezüglich  $\mathcal{V}_V$  ist eine affine Linearkombination von  $v_0, \dots, v_k \in V$  eine Linearkombination

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 .$$

### Definition 8

Eine Teilmenge  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  heißt *konvex*, wenn gilt:

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{N} : \{ \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \} \subset \mathcal{N} .$$

Für eine Teilmenge  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  ist die *konvexe Hülle* von  $\mathcal{N}$  definiert als kleinste konvexe Menge, die  $\mathcal{N}$  enthält. Da Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind, gilt also

$$\text{conv}(\mathcal{N}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{N}' \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{N}' \text{ konvex}}} \mathcal{N}' .$$

Speziell heißt für affin linear unabhängige Punkte  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{M}$

$$\langle P_0, \dots, P_k \rangle := \text{conv}(\{P_0, \dots, P_k\}) = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

das von den *Eckpunkten*  $P_0, \dots, P_k$  aufgespannte  $k$ -*Simplex*.

Ist  $\{Q_0, \dots, Q_r\} \subset \{P_0, \dots, P_k\}$  mit affin linear unabhängigen Punkten  $Q_0, \dots, Q_r$  und  $0 \leq r \leq k$  eine Teilmenge der Eckpunkte eines  $k$ -Simplex, so heißt das von diesen Punkten aufgespannte  $r$ -Simplex

$$\langle Q_0, \dots, Q_r \rangle = \text{conv}(\{Q_0, \dots, Q_r\}) \subset \text{conv}(\{P_0, \dots, P_k\}) =: \mathcal{K}$$

( $r$ -dimensionale) *Seite* oder *Untersimplex* von  $\mathcal{K}$ . Dabei spricht man nur im Fall  $r < k$  von einer *eigentlichen Seite*;  $\mathcal{K}$  selbst heißt *uneigentliche Seite*.

Der *Rand*  $\partial\mathcal{K}$  von  $\mathcal{K}$  ist die Vereinigung aller eigentlichen Seiten von  $\mathcal{K}$ :

$$\partial\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \exists j \in \{0, \dots, k\} : \lambda_j = 0 \right\}.$$

Die eindimensionalen Seiten eines Simplex nennt man *Kanten*, nulldimensionale Seiten sind offenbar Eckpunkte.

### Definition 9

Für  $k \geq 1$  zerfallen die  $(k+1)!$  Anordnungen der Eckpunkte eines  $k$ -Simplex  $\langle P_0, \dots, P_k \rangle$  in zwei Klassen, wobei Elemente derselben Klasse durch gerade Permutationen und Elemente unterschiedlicher Klassen durch ungerade Permutationen auseinander hervorgehen. Diese beiden Klassen nennt man die *Orientierungen* des Simplex.

Ein Simplex  $\langle P_0, \dots, P_k \rangle$  zusammen mit einer Orientierung des  $(k+1)$ -Tupels der Ecken  $(P_0, \dots, P_k)$  heißt *orientiertes Simplex*; man schreibt dafür  $\langle (P_0, \dots, P_k) \rangle$ .

Für die zu einem orientierten Simplex  $\mathcal{N}$  gehörige Punktmenge schreibt man  $|\mathcal{N}|$ .

### Bemerkung

a) Es gilt:

$$|\langle (P_0, \dots, P_k) \rangle| = \langle P_0, \dots, P_k \rangle.$$

b) Ist  $S_k^0$  die Menge der Permutationen von  $\{0, \dots, k\}$  und

$$\text{or} : \{(P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(k)}) \mid \sigma \in S_k^0\} \rightarrow \{\alpha, \beta\}$$

die Zuordnung der Orientierung, dann gilt für ein orientiertes Simplex  $\langle (P_0, \dots, P_k) \rangle$  der Orientierung  $\alpha$  :

$$\text{or}(\langle (P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(k)}) \rangle) = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \sigma \text{ gerade,} \\ \beta & \text{falls } \sigma \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Folglich gilt für jede gerade Permutation  $\sigma$  :

$$\langle (P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(k)}) \rangle = \langle (P_0, \dots, P_k) \rangle.$$

Für  $k \geq 1$  gibt es also genau zwei orientierte Simplexe, nämlich  $\langle (P_0, P_1, P_2, \dots, P_k) \rangle$  und  $\langle (P_1, P_0, P_2, \dots, P_k) \rangle$ . Im Fall  $k = 0$  gibt es nur das eine orientierte Simplex  $\langle (P_0) \rangle$ .

**Definition 10**

Es sei  $\mathcal{M}$  ein Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$ .

Eine Teilmenge  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  heißt (*affiner*) *Unterpunktraum* von  $\mathcal{M}$ , wenn es einen Untervektorraum  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{V}$  gibt, so daß gilt:

- 1)  $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{N} : P_1 \vec{P}_2 \in \mathcal{U}$ ,
- 2)  $\forall P \in \mathcal{N}, v \in \mathcal{U} : P + v \in \mathcal{N}$ .

**Bemerkung** (Eigenschaften von Unterpunkträumen)

- a) Affine Unterpunkträume sind affine Punkträume.
- b) Für alle  $P \in \mathcal{N}$  gilt

$$\mathcal{N} = P + \mathcal{U} := \{P + v \mid v \in \mathcal{U}\},$$

wobei der Untervektorraum  $\mathcal{U}$  eindeutig bestimmt ist.

- c) Für zwei Unterpunkträume  $\mathcal{N} = P + \mathcal{U}$  und  $\mathcal{N}' = P' + \mathcal{U}'$  von  $\mathcal{M}$  gilt:

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{N}' \Leftrightarrow (P \in \mathcal{N}' \text{ und } \mathcal{U} \subset \mathcal{U}').$$

- d) Der Durchschnitt von Unterpunkträumen ist entweder leer oder ein Unterpunktraum.

**Definition 11**

Die *affine Hülle*  $\text{aff}(\mathcal{T})$  einer nichtleeren Teilmenge  $\mathcal{T}$  eines Punktraumes  $\mathcal{M}$  ist der Durchschnitt aller Unterpunkträume  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ , die  $\mathcal{T}$  enthalten.

( $\text{aff}(\mathcal{T})$  ist also der kleinste Unterpunktraum, der  $\mathcal{T}$  enthält.)

Die *Dimension* einer Teilmenge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$  ist definiert durch

$$\dim(\mathcal{T}) := \max \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \text{Es gibt } (k+1) \text{ affin linear unabh. Punkte in } \mathcal{T}\}.$$

**Lemma 4**

Ist  $\dim(\mathcal{T}) = k$  und sind  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{T}$  affin linear unabhängig, so gilt:

$$\text{aff}(\mathcal{T}) = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\} = \text{aff}(\langle P_0, \dots, P_k \rangle)$$

und folglich ist  $\dim(\text{aff}(\mathcal{T})) = \dim(\mathcal{T})$ .

Beweis:

Für  $k = 0$  ist die Aussage trivial.

Sei also  $k > 0$  und  $\mathcal{N} = P + \mathcal{U}$  ein Unterpunktraum von  $\mathcal{M}$ , der  $\mathcal{T}$  enthält.

Dann gilt  $\mathcal{N} = P_0 + \mathcal{U}$  und

$$P_0 \vec{P}_i \in \mathcal{U} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\},$$

folglich enthält  $\mathcal{N}$  den Unterpunktraum

$$\begin{aligned} \mathcal{N}' &:= \left\{ P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i P_0 \vec{P}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k \right\} \\ &= \left\{ P_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i\right) P_0 \vec{P}_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i P_0 \vec{P}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen:  $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}'$ .

Sei dazu  $P \in \mathcal{T}$ . Dann sind die Punkte  $P_0, \dots, P_k, P$  affin linear abhängig und damit die Vektoren  $P_0\vec{P}_1, \dots, P_0\vec{P}_k, P_0\vec{P}$  linear abhängig. Da nach Voraussetzung  $P_0, \dots, P_k$  affin linear unabhängig, also  $P_0\vec{P}_1, \dots, P_0\vec{P}_k$  linear unabhängig sind, gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  mit

$$P_0\vec{P} = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_0\vec{P}_i.$$

Damit ist

$$P = P_0 + P_0\vec{P} = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i P_0\vec{P}_i \in \mathcal{N}'.$$

□

### Bemerkung

Der obige Beweis zeigt auch, daß die Definition der Dimension von Teilmengen affiner Punkträume verträglich ist mit der Definition eines  $n$ -dimensionalen Punktraumes (also der Dimension von Punkträumen und damit insbesondere von Unterpunkträumen) am Anfang dieses Abschnittes.

### Definition 12

Eine Teilmenge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$  heißt *maximaldimensional*, wenn gilt:

$$\dim(\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{M}) \quad (\Leftrightarrow \text{aff}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}).$$

### Definition 13

Ein  $n$ -dimensionaler *pseudoeuklidischer* Punktraum ist ein  $n$ -dimensionaler Punktraum  $\mathcal{M}$ , auf dessen zugehörigem Verschiebungsvektorraum  $\mathcal{V}$  ein Pseudoskalarprodukt  $\xi$  definiert ist.

Ein pseudoeuklidischer Punktraum mit  $\text{Index}(\xi) = 1$  heißt *Minkowski-Raum*.

Falls  $\text{Index}(\xi) = 0$  gilt, also  $\xi$  ein Skalarprodukt ist, heißt  $\mathcal{M}$  *euklidisch*.

### Bemerkung

- a) Die durch die zum Pseudoskalarprodukt  $\xi$  assoziierte quadratische Form  $q_\xi$  definierte Pseudonorm  $\|\cdot\|_\xi$  auf  $\mathcal{V}$  induziert eine *Pseudometrik* auf  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ :

$$d_\xi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(P, Q) \longmapsto d_\xi(P, Q) := \|P\vec{Q}\|_\xi.$$

- b) Unterpunkträume euklidischer Punkträume sind euklidisch, da sich Skalarprodukte auf Untervektorräume vererben. Unterpunkträume pseudoeuklidischer Punkträume müssen dagegen nicht pseudoeuklidisch sein, da die Einschränkungen indefiniter innerer Produkte entartet sein können. Der Index eines eingeschränkten inneren Produktes kann dabei stets nur kleiner werden.

**Vorbemerkung** (zur folgenden Definition)

Es sei  $\mathcal{M}$  ein Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  ein  $k$ -dimensionaler Unterpunktraum mit zugehörigem Untervektorraum  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{V}$ . Weiter seien  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}$  affin linear unabhängig.

Dann gibt es für alle  $P \in \mathcal{N}$  eindeutig bestimmte  $\lambda_1(P), \dots, \lambda_k(P) \in \mathbb{R}$ , so daß gilt:

$$P_0 \vec{P} = \sum_{i=1}^k \lambda_i(P) P_0 \vec{P}_i = \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i(P)\right) P_0 \vec{P}_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(P) P_0 \vec{P}_i$$

und somit

$$P = P_0 + P_0 \vec{P} = \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i(P)\right) P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(P) P_i.$$

Daher definiert man:

**Definition 14**

Ein  $(k+1)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_k)$  affin linear unabhängiger Punkte  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}$  mit

$$\text{aff}(\{P_0, \dots, P_k\}) = \mathcal{N}$$

heißt (*affines*) *Koordinatensystem* von  $\mathcal{N}$ .

Für einen Punkt  $P \in \mathcal{N}$  mit

$$P = \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i(P)\right) P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(P) P_i$$

heißt  $\lambda_i(P)$  für  $i = 1, \dots, k$  die *i-te (affine) Koordinate* von  $P$  bezüglich  $(P_0, \dots, P_k)$ .

**Bemerkung**

- Für eine Basis  $(v_1, \dots, v_k)$  von  $\mathcal{U}$  und einen Punkt  $P \in \mathcal{N}$  ist  $(P, P + v_1, \dots, P + v_k)$  ein Koordinatensystem von  $\mathcal{N}$ .
- Setzt man zusätzlich

$$\lambda_0(P) := 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i(P) \quad \left( \Rightarrow \sum_{i=0}^k \lambda_i(P) = 1 \right),$$

so heißen  $\lambda_0(P), \dots, \lambda_k(P)$  *baryzentrische Koordinaten* von  $P$  bezüglich  $(P_0, \dots, P_k)$ .

**Bezeichnung**

Ist  $(P_0, \dots, P_k)$  ein affines Koordinatensystem von  $\mathcal{N}$ , so ist der Punkt  $P_0$  als *Ursprung* des von den Vektoren  $P_0 \vec{P}_1, \dots, P_0 \vec{P}_k$  aufgespannten Unterraumes gewählt. Man schreibt daher für  $(P_0, \dots, P_k)$  auch  $(P_0; P_0 \vec{P}_1, \dots, P_0 \vec{P}_k)$ . Ist also  $\mathcal{N} = P + \mathcal{U}$  ein  $k$ -dimensionaler affiner Unterraum von  $\mathcal{M}$ ,  $O \in \mathcal{N}$  und  $(v_1, \dots, v_k)$  eine Basis von  $\mathcal{U}$ , so schreibt man für das affine Koordinatensystem  $(O, O + v_1, \dots, O + v_k)$  von  $\mathcal{N}$  auch  $(O; v_1, \dots, v_k)$ .

**Lemma 5** (Koordinatentransformation)

Es seien

$$\begin{aligned} (P_0; v_1, \dots, v_k) &\hat{=} (P_0, \dots, P_k) \text{ mit } v_i = P_0 \vec{P}_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ (P'_0; v'_1, \dots, v'_k) &\hat{=} (P'_0, \dots, P'_k) \text{ mit } v'_i = P'_0 \vec{P}'_i, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

affine Koordinatensysteme von  $\mathcal{N}$ .

Für  $i = 1, \dots, k$  seien die affinen Koordinaten eines Punktes  $P \in \mathcal{N}$  mit  $\lambda_i(P)$  bezüglich  $(P_0, \dots, P_k)$  und mit  $\lambda'_i(P)$  bezüglich  $(P'_0, \dots, P'_k)$  bezeichnet. Es gelte weiter

$$P'_0 = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(P'_0) v_i = \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i(P'_0)\right) P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(P'_0) P_i$$

und

$$\begin{aligned} v'_j &= \sum_{i=1}^k x_{ij} v_i, \quad j = 1, \dots, k \\ (\Rightarrow P'_j &= P_0 + P_0 \vec{P}'_0 + P'_0 \vec{P}'_j = P_0 + \sum_{i=1}^k \underbrace{(\lambda_i(P'_0) + x_{ij})}_{\lambda_i(P'_j)} P_0 \vec{P}_i, \quad j = 1, \dots, k) \end{aligned}$$

mit einer regulären Matrix  $(x_{ij})_{i,j=1}^k$ .

Dann erhält man die folgende *Koordinatentransformationsformel*:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda'_1(P) \\ \vdots \\ \lambda'_k(P) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1(P) - \lambda_1(P'_0) \\ \vdots \\ \lambda_k(P) - \lambda_k(P'_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(P'_1) - \lambda_1(P'_0) & \cdots & \lambda_1(P'_k) - \lambda_1(P'_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_k(P'_1) - \lambda_k(P'_0) & \cdots & \lambda_k(P'_k) - \lambda_k(P'_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1(P) - \lambda_1(P'_0) \\ \vdots \\ \lambda_k(P) - \lambda_k(P'_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Diese Transformationsformel für affine Koordinaten läßt sich leicht durch Koeffizientenvergleich verifizieren.<sup>9</sup>)

<sup>9</sup> Vgl. etwa [3].

## I.2 Affine Polynome

„Der leere Raum ist verdammt viel besser als so manche Materie, mit der die Natur ihn füllt.“

Tennessee Williams

Zunächst werden affin lineare Abbildungen zwischen affinen Punkträumen betrachtet. Solche Abbildungen bilden affine Linearkombinationen von Punkten auf die entsprechenden Kombinationen der Bildpunkte ab. Die Definition läßt sich dabei analog auf Vektorräume als spezielle affine Punkträume übertragen. Anschließend wird im Hinblick auf den zu entwickelnden Kalkül affiner  $r$ -Formen und deren Integration der allgemeinere Begriff affin polynomialer Abbildungen eingeführt, wobei eine zu der in [5] analoge Vorgehensweise gewählt wurde. Diese Abbildungen stellen sich in natürlicher Weise als homogene Polynome in baryzentrischen Koordinaten dar, wobei affine Polynome ersten Grades gerade die zuvor betrachteten affin linearen Abbildungen sind. Eine ausführliche Untersuchung von Abbildungen bezüglich baryzentrischer Koordinaten sowie zahlreiche Transformations- und Umrechnungsformeln finden sich in [4].

### I.2.1 Affin lineare Abbildungen

#### Definition 1

Es sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{M}'$  ein  $m$ -dimensionaler Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}'$  und  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$  eine nichtleere konvexe Teilmenge.

Eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  heißt genau dann *affin linear*, wenn gilt:

Für alle  $P_0, P_1 \in \mathcal{N}'$ ,  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$  und  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$  ist

$$\Phi(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1) = \lambda_0 \Phi(P_0) + \lambda_1 \Phi(P_1).$$

#### Bemerkung

- Für ein solches  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  ist auch das Bild  $\Phi(\mathcal{N}') \subset \mathcal{M}$  konvex.
- Verkettungen affin linearer Abbildungen sind ebenfalls affin linear.

#### Lemma 1

Sei  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  affin linear.

Dann gilt für alle  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}'$ ,  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$  und  $\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \in \mathcal{N}'$ :

$$\Phi\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \Phi(P_i).$$

Beweis: (Induktion über  $k$ )

- $k = 0$ :

$$\Phi(1 \cdot P_0) = 1 \cdot \Phi(P_0).$$

- $k = 1$ :

i) Für  $P_0, P_1 \in \mathcal{N}'$  und  $0 \leq \lambda \leq 1$  gilt offenbar

$$\Phi(\lambda P_0 + (1 - \lambda)P_1) = \lambda\Phi(P_0) + (1 - \lambda)\Phi(P_1).$$

ii) Mit  $P_0, P_1 \in \mathcal{N}'$  sei nun  $P := \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 \in \mathcal{N}'$  mit  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ . Weiter sei etwa  $\lambda_1 < 0$  und damit  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 > 0$ . Dann gilt:

$$\Phi(P_0) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda_0}P + \frac{-\lambda_1}{\lambda_0}P_1\right) = \frac{1}{\lambda_0}\Phi(P) + \frac{-\lambda_1}{\lambda_0}\Phi(P_1)$$

und man erhält

$$\Phi(P) = \Phi(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1) = \lambda_0\Phi(P_0) + \lambda_1\Phi(P_1).$$

- $(k - 1) \rightarrow k \geq 2$ :

Es sei  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$  und  $P := \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \in \mathcal{N}'$ .

i) Zunächst sei  $\lambda_i \geq 0$  für alle  $i \in \{0, \dots, k\}$ .

Dann gibt es ein  $i^* \in \{0, \dots, k\}$  mit  $\lambda_{i^*} < 1$ , denn sonst wäre  $\sum_{i=0}^k \lambda_i \geq k + 1 > 1$ .

Es sei  $\lambda^* := 1 - \lambda_{i^*} = \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i^*\}} \lambda_i \neq 0$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \Phi\left(O + \sum_{i=0}^k \lambda_i O\vec{P}_i\right) \\ &= \Phi\left(O + \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i^*\}} \lambda_i O\vec{P}_i + \lambda_{i^*} O\vec{P}_{i^*}\right) \\ &= \Phi\left(O + \lambda^* \left(\sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i^*\}} \frac{\lambda_i}{\lambda^*} O\vec{P}_i\right) + \lambda_{i^*} O\vec{P}_{i^*}\right) \\ &= \Phi\left(O + \lambda^* O\vec{P}^* + \lambda_{i^*} O\vec{P}_{i^*}\right) \end{aligned}$$

mit

$$P^* := O + \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i^*\}} \frac{\lambda_i}{\lambda^*} O\vec{P}_i = \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i^*\}} \frac{\lambda_i}{\lambda^*} P_i \in \mathcal{N}'$$

und somit

$$\Phi(P) = \Phi(\lambda^* P^* + \lambda_{i^*} P_{i^*}) = \lambda^* \Phi(P^*) + \lambda_{i^*} \Phi(P_{i^*}).$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\Phi(P) = \lambda^* \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i^*\}} \frac{\lambda_i}{\lambda^*} \Phi(P_i) + \lambda_{i^*} \Phi(P_{i^*}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \Phi(P_i).$$

ii) Es sei nun etwa  $\lambda_{i^*} < 0$  für  $i^* \in \{0, \dots, k\}$  und  $\lambda^* := 1 - \lambda_{i^*} = \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i^*\}} \lambda_i > 0$ .

Wegen

$$\frac{1}{\lambda^*} + \frac{-\lambda_{i^*}}{\lambda^*} = 1, \quad \frac{1}{\lambda^*} > 0, \quad \frac{-\lambda_{i^*}}{\lambda^*} > 0 \quad \text{und} \quad P, P_{i^*} \in \mathcal{N}'$$

ist dann

$$P^* := \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus i^*} \frac{\lambda_i}{\lambda^*} P_i = \frac{1}{\lambda^*} P + \frac{-\lambda_{i^*}}{\lambda^*} P_{i^*} \in \mathcal{N}'.$$

Damit gilt:

$$\Phi(P^*) = \frac{1}{\lambda^*} \Phi(P) + \frac{-\lambda_{i^*}}{\lambda^*} \Phi(P_{i^*}),$$

und mit der Induktionsvoraussetzung erhält man:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \lambda^* \Phi(P^*) + \lambda_{i^*} \Phi(P_{i^*}) \\ &= \lambda^* \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus i^*} \frac{\lambda_i}{\lambda^*} \Phi(P_i) + \lambda_{i^*} \Phi(P_{i^*}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \Phi(P_i). \end{aligned}$$

□

### Lemma 2

Seien  $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{V}, \mathcal{V}'$  und  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$  wie oben mit  $\dim(\mathcal{N}') = k$ .

Dann gibt es zu affin linear unabhängigen Punkten  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}'$  und beliebigen Punkten  $Q_0, \dots, Q_k \in \mathcal{M}$  genau eine affin lineare Abbildung

$$\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M} \text{ mit } \Phi(P_i) = Q_i, \quad i = 0, \dots, k.$$

### Beweis:

1) Eindeutigkeit: Sei  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  affin linear mit  $\Phi(P_i) = Q_i, \quad i = 0, \dots, k$ .

Zu jedem  $P \in \mathcal{N}' \subset \text{aff}(\mathcal{N}')$  existieren eindeutig bestimmte  $\lambda_0(P), \dots, \lambda_k(P) \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{i=0}^k \lambda_i(P) = 1$  und  $P = \sum_{i=0}^k \lambda_i(P) P_i$ . Folglich gilt:

$$\Phi(P) = \Phi\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i(P) P_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i(P) \Phi(P_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_i(P) Q_i.$$

Also ist  $\Phi$  eindeutig bestimmt.

2) Existenz: Offenbar ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{N}' &\longrightarrow \mathcal{M} \\ P &\longmapsto \Phi(P) := \sum_{i=0}^k \lambda_i(P) Q_i \end{aligned}$$

affin linear mit  $\Phi(P_i) = Q_i, \quad i = 0, \dots, k$ .

□

### Folgerung

Ist  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$  eine nichtleere konvexe Menge und  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  affin linear, so gibt es genau eine affin lineare Abbildung  $\hat{\Phi} : \text{aff}(\mathcal{N}') \rightarrow \mathcal{M}$ , die eingeschränkt auf  $\mathcal{N}'$  mit  $\Phi$  übereinstimmt, für die also gilt

$$\hat{\Phi}|_{\mathcal{N}'} = \Phi.$$

Beweis:

Es sei  $\dim(\mathcal{N}') = k$ , weiter seien  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}'$  affin linear unabhängig.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte affin lineare Abbildung

$$\hat{\Phi} : \text{aff}(\mathcal{N}') \rightarrow \mathcal{M} \quad \text{mit} \quad \hat{\Phi}(P_i) = \Phi(P_i), \quad i = 0, \dots, k.$$

Da die Einschränkung  $\hat{\Phi}|_{\mathcal{N}'}$  affin linear ist, folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit.

**Bemerkung**

Ist  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$  eine maximaldimensionale konvexe Teilmenge eines  $m$ -dimensionalen Punkt-raums, so ist eine affin lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  durch ihre Werte auf  $(m + 1)$  affin linear unabhängigen Punkten  $P_0, \dots, P_m \in \mathcal{N}'$  eindeutig festgelegt.

**Lemma 3**

Seien  $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{V}, \mathcal{V}'$  wie oben.  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$  sei eine nichtleere konvexe Teilmenge und  $\mathcal{U}'$  der Unterraum von  $\mathcal{V}'$  mit

$$\text{aff}(\mathcal{N}') = P + \mathcal{U}' \quad \forall P \in \text{aff}(\mathcal{N}').$$

Weiter sei  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  affin linear.

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $L_\Phi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}$  mit

$$\Phi(P + v) = \Phi(P) + L_\Phi(v) \quad \forall P \in \mathcal{N}', v \in \mathcal{U}' \text{ mit } P + v \in \mathcal{N}'.$$

Beweis:

- 1) Existenz:  $\hat{\Phi}$  sei die eindeutig bestimmte affin lineare Fortsetzung von  $\Phi$  auf  $\text{aff}(\mathcal{N}')$ . Für einen beliebigen, fest gewählten Punkt  $P \in \mathcal{N}'$  sei

$$L_P(v) := \hat{\Phi}(P + v) - \hat{\Phi}(P) \quad \forall v \in \mathcal{U}'.$$

- $L_P$  ist linear, denn für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $v, w \in \mathcal{U}'$  gilt:

$$\begin{aligned} & L_P(\lambda v + \mu w) \\ &= \hat{\Phi}(P + ((P + \lambda v) - P) + ((P + \mu w) - P)) - \hat{\Phi}(P) \\ &= \hat{\Phi}\left(\frac{1}{2}(P + 2\lambda v) + \frac{1}{2}(P + 2\mu w)\right) - \hat{\Phi}(P) \\ &= \left(\frac{1}{2}\hat{\Phi}(P + 2\lambda v) + \frac{1}{2}\hat{\Phi}(P + 2\mu w)\right) - \hat{\Phi}(P) \\ &= \left(\frac{1}{2}\hat{\Phi}((1 - 2\lambda)P + 2\lambda(P + v)) + \frac{1}{2}\hat{\Phi}((1 - 2\mu)P + 2\mu(P + w))\right) - \hat{\Phi}(P) \\ &= \left(\frac{(1 - 2\lambda)}{2}\hat{\Phi}(P) + \lambda\hat{\Phi}(P + v) + \frac{(1 - 2\mu)}{2}\hat{\Phi}(P) + \mu\hat{\Phi}(P + w)\right) - \hat{\Phi}(P) \\ &= \left((1 - \lambda - \mu)\hat{\Phi}(P) + \lambda\hat{\Phi}(P + v) + \mu\hat{\Phi}(P + w)\right) - \hat{\Phi}(P) \\ &= \left(\hat{\Phi}(P) + \lambda(\hat{\Phi}(P + v) - \hat{\Phi}(P)) + \mu(\hat{\Phi}(P + w) - \hat{\Phi}(P))\right) - \hat{\Phi}(P) \\ &= \lambda(\hat{\Phi}(P + v) - \hat{\Phi}(P)) + \mu(\hat{\Phi}(P + w) - \hat{\Phi}(P)) \\ &= \lambda L_P(v) + \mu L_P(w). \end{aligned}$$

- Die Abbildung ist unabhängig von  $P$ , denn für  $Q \in \mathcal{N}'$  gilt  $L_P = L_Q$ :

$$\begin{aligned}
 L_P(v) &= \hat{\Phi}(P+v) - \hat{\Phi}(P) \\
 &= \hat{\Phi}(Q + ((P+v) - Q)) - \hat{\Phi}(Q + (P - Q)) \\
 &= \left( \hat{\Phi}(Q) - \hat{\Phi}(Q + \vec{Q}P) \right) + \left( \hat{\Phi}(Q + \vec{Q}P + v) - \hat{\Phi}(Q) \right) \\
 &= -L_Q(\vec{Q}P) + \underbrace{L_Q(\vec{Q}P + v)}_{L_Q(\vec{Q}P) + L_Q(v)} = L_Q(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}' .
 \end{aligned}$$

Aus

$$\hat{\Phi}(P+v) = \hat{\Phi}(P) + L_P(v) \quad \forall P \in \mathcal{N}', v \in \mathcal{U}'$$

folgt nun

$$\Phi(P+v) = \Phi(P) + L_P(v) \quad \forall P \in \mathcal{N}', v \in \mathcal{U}' \text{ mit } P+v \in \mathcal{N}' .$$

- 2) Eindeutigkeit: Sei  $k := \dim(\mathcal{N}')$  und  $L : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}$  eine lineare Abbildung mit

$$\Phi(P+v) = \Phi(P) + L(v) \quad \forall P \in \mathcal{N}', v \in \mathcal{U}' \text{ mit } P+v \in \mathcal{N}' .$$

Im Fall  $k = 0$  ist  $\mathcal{U}' = \{0\}$  und  $L = 0$  die Nullabbildung.

Falls  $k \geq 1$  ist, existieren affin linear unabhängige Punkte  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}'$ .

Damit ist  $(P_0\vec{P}_1, \dots, P_0\vec{P}_k)$  eine Basis von  $\mathcal{U}'$  und

$$L(P_0\vec{P}_i) = \hat{\Phi}(P_i) - \hat{\Phi}(P_0), \quad i = 1, \dots, k,$$

wodurch  $L$  eindeutig bestimmt ist.

Mit  $L_\Phi(v) := L_P(v)$  für ein  $P \in \mathcal{N}'$  und alle  $v \in \mathcal{U}'$  mit  $P+v \in \mathcal{N}'$  gilt also die Behauptung.

□

### Bemerkung

Sind  $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{M}''$  Punkträume,  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$ ,  $\mathcal{N}'' \subset \mathcal{M}''$  nichtleere konvexe Teilmengen und  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}$  sowie  $\Psi : \mathcal{N}'' \rightarrow \mathcal{N}'$  affin lineare Abbildungen, so gilt:

$$L_{\Phi \circ \Psi} = L_\Phi \circ L_\Psi,$$

denn für alle  $P, P+v \in \mathcal{N}''$  gilt einerseits

$$\begin{aligned}
 (\Phi \circ \Psi)(P+v) &= \Phi(\Psi(P+v)) = \Phi(\Psi(P) + L_\Psi(v)) \\
 &= \Phi(\Psi(P)) + L_\Phi(L_\Psi(v))
 \end{aligned}$$

und andererseits, da die Komposition  $\Phi \circ \Psi$  affin linear ist,

$$\begin{aligned}
 (\Phi \circ \Psi)(P+v) &= (\Phi \circ \Psi)(P) + L_{\Phi \circ \Psi}(v) \\
 &= \Phi(\Psi(P)) + L_{\Phi \circ \Psi}(v) .
 \end{aligned}$$

**Definition 2**

Es sei  $\mathcal{M}$  ein pseudoeuklidischer Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$  und Pseudoskalarprodukt  $\xi$ .

Eine affin lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  heißt *affin orthogonale Transformation* (bezüglich  $\xi$ ), wenn die zugehörige lineare Abbildung  $L_\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  eine orthogonale Transformation ist.

**Vorbemerkung** (zum folgenden Beispiel)

Da man jeden reellen Vektorraum als speziellen affinen Punktraum mit ausgezeichnetem Nullpunkt betrachten kann, dessen zugehöriger Vektorraum zu ihm selbst isomorph ist, lassen sich die obigen Bezeichnungen und Eigenschaften auf Abbildungen von Punkträumen in Vektorräume, von Vektorräumen in Punkträume und auf Abbildungen zwischen Vektorräumen übertragen. Der erste Fall, Abbildungen von Punkträumen in Vektorräume, soll hier näher betrachtet werden.

**Beispiel**

Es sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine nichtleere konvexe Teilmenge.  $\mathcal{U}$  sei der Unterraum von  $\mathcal{V}$  mit

$$\text{aff}(\mathcal{N}) = P + \mathcal{U} \quad \forall P \in \text{aff}(\mathcal{N}).$$

Eine Abbildung  $f : \mathcal{N} \rightarrow V$  in einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  heißt genau dann *affin linear*, wenn für alle  $P_0, P_1 \in \mathcal{M}$ ,  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$  und  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$  gilt:

$$f(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1) = \lambda_0 f(P_0) + \lambda_1 f(P_1).$$

Es gelten die auf diese Situation übertragbaren bereits für affin lineare Abbildungen in affine Punkträume gezeigten Eigenschaften.

Insbesondere gibt es genau eine lineare Abbildung  $L_f : \mathcal{U} \rightarrow V$  mit

$$f(P + v) = f(P) + L_f(v) \quad \forall P \in \mathcal{N}, v \in \mathcal{U} \text{ mit } P + v \in \mathcal{N}.$$

Umgekehrt ist für jede lineare Abbildung  $L : \mathcal{U} \rightarrow V$ , jeden Punkt  $P \in \mathcal{N}$  und jeden Vektor  $v \in V$  die Abbildung

$$\begin{aligned} f_{L,v} : \mathcal{N} &\longrightarrow V \\ Q &\longmapsto f_{L,v}(Q) := v + L(P\vec{Q}) \end{aligned}$$

affin linear, denn es gilt für alle  $Q_0, Q_1 \in \mathcal{N}$ ,  $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$  mit  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$  :

$$\begin{aligned} f_{L,v}(\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1) &= v + L(\lambda_0 P\vec{Q}_0 + \lambda_1 P\vec{Q}_1) \\ &= (\lambda_0 + \lambda_1) v + \lambda_0 L(P\vec{Q}_0) + \lambda_1 L(P\vec{Q}_1) \\ &= \lambda_0 f_{L,v}(Q_0) + \lambda_1 f_{L,v}(Q_1). \end{aligned}$$

**Folgerung**

Die Menge der affin linearen Abbildungen

$$\text{Aff}(\mathcal{M}, V) := \{f : \mathcal{M} \rightarrow V \text{ affin linear}\}$$

von einem  $n$ -dimensionalen Punktraum  $\mathcal{M}$  in einen  $m$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  ist vermöge der Vektorraumoperationen in  $V$  ein  $((n+1) \cdot m)$ -dimensionaler reeller Vektorraum.

Beweis:

Die Vektorraumeigenschaften sind leicht nachzuweisen, und es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1) &= \alpha f(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1) + \beta g(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1) \\ &= \alpha \cdot (\lambda_0 f(P_0) + \lambda_1 f(P_1)) + \beta \cdot (\lambda_0 g(P_0) + \lambda_1 g(P_1)) \\ &= \lambda_0 \cdot (\alpha f + \beta g)(P_0) + \lambda_1 \cdot (\alpha f + \beta g)(P_1) \end{aligned}$$

für alle  $f, g \in \text{Aff}(\mathcal{M}, V)$ ,  $P_0, P_1 \in \mathcal{M}$  und  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ .

Seien nun  $P_0, \dots, P_n \in \mathcal{M}$  affin linear unabhängige Punkte, und sei  $\{v_1, \dots, v_m\}$  eine Basis von  $V$ .

Dann ist  $\{\varphi_{ij} \mid 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  mit

$$\varphi_{ij}(P_k) := \begin{cases} v_j & \text{falls } i = k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $0 \leq k \leq n$  eine Basis von  $\text{Aff}(\mathcal{M}, V)$ , denn jedes  $f \in \text{Aff}(\mathcal{M}, V)$  ist durch

$$f(P_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v_j, \quad i = 0, \dots, n \text{ mit } \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

eindeutig festgelegt, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(P_i) &= \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v_j = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \varphi_{ij}(P_i) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n \lambda_{kj} \varphi_{kj}(P_i) = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n \lambda_{kj} \varphi_{kj} \right) (P_i), \quad i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n \alpha_{kj} \varphi_{kj} = 0 &\Leftrightarrow \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n \alpha_{kj} \varphi_{kj} \right) (P_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n \alpha_{kj} \varphi_{kj}(P_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} v_j = 0, \quad i = 0, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \alpha_{i1} = \dots = \alpha_{im} = 0, \quad i = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

□

**Vorbemerkung** (zur folgenden Definition)

Ist  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen und  $v \in \mathcal{V}'$  fest gewählt, dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_v : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}' \\ w &\longmapsto \varphi_v(w) := v + \varphi(w) \end{aligned}$$

affin linear. Lineare Abbildungen sind also spezielle affin lineare Abbildungen (mit  $v = 0$ ). Die obige Bezeichnung der zu einer affin linearen Abbildung gehörigen eindeutig bestimmten linearen Abbildung wird daher übernommen:

**Definition 3**

Für eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  zwischen reellen Vektorräumen  $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$  sei  $L_\varphi := \varphi$ .

## I.2.2 Affin polynomiale Abbildungen

### Definition 4

Es sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine nichtleere konvexe Teilmenge. Weiter sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum und  $r$  eine natürliche Zahl mit  $r \geq 1$ .

Eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{N} \rightarrow V$  heißt genau dann *affin polynomial (affines Polynom)* vom Grad  $r$ , wenn es eine in jeder Komponente affin lineare ( $r$ -fach *affin lineare*) Abbildung

$$\Psi : \underbrace{\mathcal{N} \times \cdots \times \mathcal{N}}_{r \text{ mal}} \longrightarrow V$$

gibt, so daß gilt:

$$\Phi(P) = \Psi(\underbrace{P, \dots, P}_{r \text{ mal}}) \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

Die Menge der affin polynomialen Abbildungen von  $\mathcal{N}$  nach  $V$  vom Grad  $r$  wird mit  $\mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V)$  bezeichnet.

Speziell sei noch  $\mathcal{P}^0(\mathcal{N}, V)$  die Menge der konstanten Abbildungen von  $\mathcal{N}$  nach  $V$ .

### Bemerkung

- $\mathcal{P}(\mathcal{N}, V) := \mathcal{P}^1(\mathcal{N}, V)$  ist die Menge der affin linearen Abbildungen von  $\mathcal{N}$  nach  $V$ .
- Es gilt:

$$\mathcal{P}^0(\mathcal{N}, V) \subset \mathcal{P}^1(\mathcal{N}, V) \subset \mathcal{P}^2(\mathcal{N}, V) \subset \mathcal{P}^3(\mathcal{N}, V) \subset \cdots$$

und damit

$$\mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V) \subset \mathcal{P}^{r+s}(\mathcal{N}, V) \quad \forall r, s \geq 0,$$

denn für jede  $r$ -fach affin lineare Abbildung  $\Psi : \mathcal{N}^r \rightarrow V$  und  $s \geq 0$  ist auch die (in den letzten  $s$  Komponenten konstante) Abbildung  $\tilde{\Psi} : \mathcal{N}^{r+s} \rightarrow V$  mit

$$\tilde{\Psi}(P_1, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_s) := \Psi(P_1, \dots, P_r)$$

in jeder Komponente affin linear.

### Lemma 4

Ist  $\Phi : \mathcal{N} \rightarrow V$  eine affin polynomiale Abbildung vom Grad  $r$ , so gibt es eine  $r$ -fach affin lineare symmetrische Abbildung

$$\Xi : \underbrace{\mathcal{N} \times \cdots \times \mathcal{N}}_{r \text{ mal}} \longrightarrow V,$$

für die gilt:

$$\Phi(P) = \Xi(\underbrace{P, \dots, P}_{r \text{ mal}}) \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

Beweis:

Setzt man mit den Bezeichnungen der Definition

$$\Xi(P_1, \dots, P_r) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \Psi(P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(r)}) \quad \forall P_1, \dots, P_r \in \mathcal{N},$$

so ist  $\Xi$  symmetrisch,  $r$ -fach affin linear, und es gilt:

$$\begin{aligned} \Xi(P, \dots, P) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \Psi(P, \dots, P) \\ &= \Psi(P, \dots, P) = \Phi(P) \quad \forall P \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

□

### Bemerkung

Es sei  $\Phi \in \mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V)$  und

$$\Phi(P) = \Xi(P, \dots, P) \quad \forall P \in \mathcal{N}$$

für eine  $r$ -fach affin lineare symmetrische Abbildung  $\Xi$ .

Sind nun  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}$  affin linear unabhängig, so gilt mit  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ :

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i\right) &= \Xi\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \dots, \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i\right) \\ &= \sum_{i_1=0}^k \lambda_{i_1} \Xi\left(P_{i_1}, \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \dots, \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i\right) \\ &= \dots = \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_r=0}^k \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} \Xi(P_{i_1}, \dots, P_{i_r}). \end{aligned}$$

Folglich läßt sich  $\Phi$  als „Linearkombination“ (mit Vektoren aus  $V$  als Koeffizienten!) der Monome

$$\left\{ \lambda_0^{\alpha_0} \dots \lambda_k^{\alpha_k} \mid \alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=0}^k \alpha_i = r \right\}$$

schreiben. Da  $\Xi$  symmetrisch ist, sind dabei die Koeffizienten dieses Polynoms in baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  für ein festes  $(k+1)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_k)$  durch die Werte

$$\Xi(P_{i_1}, \dots, P_{i_r}) \in V, \quad 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq k$$

festgelegt. Diese von  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  unabhängigen Koeffizienten lassen sich wiederum in eindeutiger Weise als Linearkombinationen bezüglich einer Basis  $(v_1, \dots, v_m)$  von  $V$  darstellen. Sei dazu  $(v_1^*, \dots, v_m^*)$  die duale Basis, dann sind die Komponentenfunktionen  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  mit

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^m v_i^*(\Phi(P)) v_i = \sum_{i=1}^m \Phi_i(P) v_i \quad \forall P \in \mathcal{N}$$

Polynome in den baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  mit reellen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \Phi \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \right) &= \sum_{j=1}^m \Phi_j \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \right) \cdot v_j \\ &= \sum_{j=1}^m v_j^* \left( \sum_{i_1=0}^k \cdots \sum_{i_r=0}^k \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} \Xi(P_{i_1}, \dots, P_{i_r}) \right) \cdot v_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i_1=0}^k \cdots \sum_{i_r=0}^k \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} v_j^*(\Xi(P_{i_1}, \dots, P_{i_r})) \right) \cdot v_j \\ \Rightarrow \Phi_j \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \right) &= \sum_{i_1=0}^k \cdots \sum_{i_r=0}^k \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} \Xi_j(P_{i_1}, \dots, P_{i_r}), \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

mit Komponentenfunktionen  $\Xi_1, \dots, \Xi_m$  von  $\Xi$  bezüglich der Basis  $(v_1, \dots, v_m)$  :

$$\begin{aligned} \Xi(P_1, \dots, P_r) &= \sum_{i=1}^m v_i^*(\Xi(P_1, \dots, P_r)) v_i \\ &= \sum_{i=1}^m \Xi_i(P_1, \dots, P_r) v_i \quad \forall P_1, \dots, P_r \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Sind umgekehrt  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \in \mathcal{P}^r(\mathcal{N}, \mathbb{R})$  affine Polynome und sind  $\Xi_1, \dots, \Xi_m : \mathcal{N}^r \rightarrow \mathbb{R}$   $r$ -fach affin lineare Abbildungen mit

$$\Phi_i(P) = \Xi_i(\underbrace{P, \dots, P}_{r \text{ mal}}) \quad \forall P \in \mathcal{N}, \quad i = 1, \dots, m,$$

so gilt:

$$\sum_{i=1}^m \Phi_i(P) v_i = \sum_{i=1}^m \Xi_i(P, \dots, P) v_i =: \Xi(P, \dots, P)$$

mit einer offenbar  $r$ -fach affin linearen Abbildungen  $\Xi : \mathcal{N}^r \rightarrow V$ . Damit folgt:

$$\Phi := \sum_{i=1}^m \Phi_i v_i \in \mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V).$$

Die obige Definition affiner Polynome soll nun mit der nachfolgenden üblichen Definition homogener sowie nicht notwendigerweise homogener Polynome<sup>10</sup> in Zusammenhang gebracht werden.

### Definition 5

$U$  sei ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum.

Eine Abbildung  $f : U \rightarrow V$  heißt *homogenes Polynom* vom Grad  $r$ , wenn es eine in jeder Komponente lineare Abbildung

$$g : \underbrace{U \times \cdots \times U}_{r \text{ mal}} \longrightarrow V$$

<sup>10</sup> Vgl. [5]

gibt, so daß gilt:

$$f(v) = g(\underbrace{v, \dots, v}_{r \text{ mal}}) \quad \forall v \in U.$$

Eine Abbildung  $f : U \rightarrow V$  heißt *Polynom* vom Grad  $r$ , wenn es für  $i = 0, \dots, r$  homogene Polynome  $f_i : U \rightarrow V$  vom Grad  $i$  gibt, so daß gilt:

$$f = f_0 + \dots + f_r.$$

### Bemerkung

Es sei nun  $\mathcal{U}$  der zu  $\text{aff}(\mathcal{N})$  gehörige Vektorraum.

In [4] wird unter Verwendung der letzten Definition eine Abbildung

$$\varphi : \text{aff}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R}$$

als homogenes Polynom  $r$ -ten Grades bezüglich eines Entwicklungspunktes  $P_0 \in \text{aff}(\mathcal{N})$  definiert, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{P_0} &:= \varphi \circ t_{P_0} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \varphi(P_0 + v) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} t_{P_0}(v) &:= P_0 + v \in \text{aff}(\mathcal{N}) \quad \forall v \in \mathcal{U} \quad \text{und} \\ t_{P_0}^{-1}(P) &:= P - P_0 \in \mathcal{U} \quad \forall P \in \text{aff}(\mathcal{N}) \end{aligned}$$

ein homogenes Polynom  $r$ -ten Grades ist.

Nicht notwendigerweise homogene Polynome (genau)  $r$ -ten Grades werden dann in üblicher Weise als Summe  $\varphi = \varphi_0 + \dots + \varphi_r$  homogener Polynome

$$\varphi_0, \dots, \varphi_r : \text{aff}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad  $0, \dots, r$  mit  $\varphi_r \neq 0$  eingeführt.

Motiviert durch die Gleichheit der Kardinalität

$$\# \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k \alpha_i = r \right\} = \binom{k+r}{r}$$

und der Dimension des Vektorraums der Polynome höchstens  $r$ -ten Grades über einem  $k$ -dimensionalen Vektorraum wird dann nachgewiesen<sup>11</sup>, daß sich jedes reellwertige Polynom höchstens  $r$ -ten Grades<sup>12</sup> als homogenes Polynom genau  $r$ -ten Grades in baryzentrischen Koordinaten darstellen läßt. Weiter wird gezeigt, daß für jedes Polynom  $\Phi \in \mathcal{P}^r(\mathcal{N}, \mathbb{R})$  die Koeffizienten der Monome in baryzentrischen Koordinaten bezüglich eines affinen Koordinatensystems  $(P_0, \dots, P_k)$

$$\left\{ \lambda_0^{\alpha_0} \dots \lambda_k^{\alpha_k} \mid \sum_{i=0}^k \alpha_i = r \right\}$$

unabhängig vom Entwicklungspunkt  $P_0$  sind. Durch Anwendung dieser Ergebnisse auf die Komponentenfunktionen der am Anfang dieses Abschnittes eingeführten affin polynomialen Abbildungen erhält man damit folgendes Resultat:

<sup>11</sup> Vgl. [4].

<sup>12</sup> Im Sinne der Definition in dieser Bemerkung gemäß [4, 5].

**Lemma 5**

Die Menge  $\mathcal{P}^r(\text{aff}(\mathcal{N}), V)$  der affin polynomialen Abbildungen  $r$ -ten Grades von  $\text{aff}(\mathcal{N})$  nach  $V$  ist vermöge der Vektorraumoperationen in  $V$  ein reeller Vektorraum.

Ist  $k := \dim(\mathcal{N})$  und  $(P_0, \dots, P_k)$  ein affines Koordinatensystem von  $\text{aff}(\mathcal{N})$ ,  $m := \dim(V)$  und  $(v_1, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$ , so ist die Menge

$$\left\{ (\lambda_0^{\alpha_0} \cdots \lambda_k^{\alpha_k}) \cdot v_j \mid \alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=0}^k \alpha_i = r, j \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

eine Basis dieses Vektorraums, wobei  $(\lambda_0^{\alpha_0} \cdots \lambda_k^{\alpha_k})$  die Monome in baryzentrischen Koordinaten bezüglich des affinen Koordinatensystems sind. Es gilt:

$$\dim(\mathcal{P}^r(\text{aff}(\mathcal{N}), V)) = m \cdot \binom{k+r}{r}.$$

**Folgerung**

Da wegen  $\dim(\mathcal{N}) = k$  stets auch ein affines Koordinatensystem  $(P_0, \dots, P_k)$  mit Punkten  $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{N}$  gewählt werden kann, gilt die Aussage entsprechend für  $\mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V)$ . Folglich gibt es für jedes affine Polynom  $\varphi \in \mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V)$  ein eindeutig bestimmtes affines Polynom  $\hat{\varphi} \in \mathcal{P}^r(\text{aff}(\mathcal{N}), V)$ , das auf  $\mathcal{N}$  mit  $\varphi$  übereinstimmt.

**Vorbemerkung** (zur Definition der Ableitung)

Während im klassischen Infinitesimalkalkül Abbildungen zwischen Banachräumen betrachtet werden, können für polynomiale Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen Ableitungen rein algebraisch, ohne Voraussetzung der Vollständigkeit und Normiertheit, so eingeführt werden, daß dieser Ableitungsbegriff mit dem analytischen verträglich ist.<sup>13</sup> Dabei ist ausschlaggebend, daß verschiedene Normen auf den betrachteten Vektorräumen auf den gleichen Ableitungsbegriff und die gleichen Ableitungen führen. Eine beliebige Norm auf einem Vektorraum induziert dabei stets diejenige eindeutig bestimmte Topologie, bezüglich der alle Vektorraumoperationen und linearen Funktionale stetig sind.<sup>14</sup> Desweiteren induziert jede Norm auf einem Verschiebungsvektorraum in natürlicher Weise einen Distanzbegriff auf dem zugrundeliegenden affinen Punktraum.

Im Anschluß soll nun in Anlehnung an die übliche Vorgehensweise die Ableitung affin polynomialer Abbildungen eingeführt werden. Für diese Betrachtungen können alle Vektorräume als normiert und vollständig vorausgesetzt werden. Desweiteren sind aufgrund der Stetigkeit der Vektorraumoperationen alle polynomialen Abbildungen stetig.<sup>15</sup>

Zur Berechnung der Ableitung sei dazu  $r \geq 1$  und  $f : U \rightarrow V$  ein homogenes Polynom mit

$$f(v) = g(\underbrace{v, \dots, v}_{r \text{ mal}}) \quad \forall v \in U$$

für eine  $r$ -fach lineare Abbildung  $g : U^r \rightarrow V$ .

Setzt man nun wie im affin linearen Fall

$$h(v_1, \dots, v_r) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in U,$$

<sup>13</sup> Ableitungen von Polynomen ohne Voraussetzung normierter Vektorräume werden in [27] betrachtet.

<sup>14</sup> Vgl. dazu das Lemma auf Seite 12.

<sup>15</sup> Zur Stetigkeit von Polynomen (im Fall endlichdimensionaler Vektorräume) vgl. [5].

so ist  $h : U^r \rightarrow V$  eine  $r$ -fach lineare symmetrische Abbildung mit

$$f(v) = h(v, \dots, v) \quad \forall v \in U.$$

Üblicherweise definiert man für  $x, v \in U$  die Ableitung von  $f$  in  $x$  in Richtung  $v$  durch:

$$Df|_x(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(x + tv) &= h(x + tv, \dots, x + tv) \\ &= \underbrace{h(x, \dots, x)}_{f(x)} + \binom{r}{1} \cdot \underbrace{h(x, \dots, x, tv)}_{t \cdot h(x, \dots, x, v)} + \binom{r}{2} \cdot \underbrace{h(x, \dots, x, tv, tv)}_{t^2 \cdot h(x, \dots, x, v, v)} + \dots \\ &\quad \dots + \binom{r}{r-1} \cdot \underbrace{h(x, tv, \dots, tv)}_{t^{r-1} \cdot h(x, v, \dots, v)} + \binom{r}{r} \cdot \underbrace{h(tv, tv, \dots, tv)}_{t^r \cdot f(v)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} Df|_x(v) &= r \cdot h(x, \dots, x, v) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} (t \cdot K_2(x, v) + t^2 \cdot K_3(x, v) + \dots + t^{n-1} \cdot K_n(x, v)) \end{aligned}$$

mit nicht von  $t$  abhängigen  $K_1(x, v), \dots, K_n(x, v) \in V$  und damit

$$Df|_x(v) = r \cdot h(x, \dots, x, v).$$

(Für  $r = 1$  erhält man speziell  $Df|_x(v) = f(v)$ , für  $r = 0$  gilt  $Df|_x(v) = 0$ .)

Sei jetzt  $\Phi \in \mathcal{P}^r(\text{aff}(\mathcal{N}), V)$  ein affines Polynom,  $\mathcal{U}$  der zu  $\text{aff}(\mathcal{N})$  gehörige Vektorraum und

$$\begin{aligned} \Phi_{P_0} : \mathcal{U} &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \Phi_{P_0}(v) := \Phi(P_0 + v) \end{aligned}$$

das zugehörige Polynom bezüglich eines Entwicklungspunktes  $P_0 \in \text{aff}(\mathcal{N})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(Q + tv) - \Phi(Q)}{t} &= \frac{\Phi(P_0 + P_0 \vec{Q} + tv) - \Phi(P_0 + P_0 \vec{Q})}{t} \\ &= \frac{\Phi_{P_0}(P_0 \vec{Q} + tv) - \Phi_{P_0}(P_0 \vec{Q})}{t} \end{aligned} \quad (*)$$

für alle  $Q \in \text{aff}(\mathcal{N})$ ,  $v \in \mathcal{U}$  und  $t \neq 0$ . Dieser Zusammenhang ist dabei offenbar unabhängig vom Entwicklungspunkt, denn mit

$$\Phi_{P_1}(v) := \Phi(P_1 + v) \quad \left( = \Phi(P_0 + P_0 \vec{P}_1 + v) = \Phi_{P_0}(P_0 \vec{P}_1 + v) \right) \quad \forall v \in \mathcal{U}$$

für einen weiteren Entwicklungspunkt  $P_1 \in \text{aff}(\mathcal{N})$  erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(Q + tv) - \Phi(Q)}{t} &= \frac{\Phi_{P_0}(P_0 \vec{Q} + tv) - \Phi_{P_0}(P_0 \vec{Q})}{t} \\ &= \frac{\Phi_{P_0}(P_0 \vec{P}_1 + P_1 \vec{Q} + tv) - \Phi_{P_0}(P_0 \vec{P}_1 + P_1 \vec{Q})}{t} \\ &= \frac{\Phi_{P_1}(P_1 \vec{Q} + tv) - \Phi_{P_1}(P_1 \vec{Q})}{t}. \end{aligned}$$

Gilt nun  $\Phi_{P_0} = \Phi_{P_0}^0 + \dots + \Phi_{P_0}^r$  mit homogenen Polynomen  $\Phi_{P_0}^0, \dots, \Phi_{P_0}^r : \mathcal{U} \rightarrow V$  vom Grad  $0, \dots, r$  und symmetrischen Abbildungen  $\Psi_{P_0}^i : \mathcal{U}^i \rightarrow V$  mit

$$\Phi_{P_0}^i(v) = \Psi_{P_0}^i(\underbrace{v, \dots, v}_{i \text{ mal}}) \quad \forall v \in \mathcal{U}, i = 1, \dots, r,$$

so gilt für  $x, v \in \mathcal{U}$  :

$$\begin{aligned} D\Phi_{P_0}^0|_x(v) &= 0, \\ D\Phi_{P_0}^i|_x(v) &= i \cdot \Psi_{P_0}^i(\underbrace{x, \dots, x, v}_{i-1 \text{ mal}}), \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

und folglich (unter Verwendung der Ableitungsregel für Summen):

$$\begin{aligned} D\Phi_{P_0}|_x(v) &= D(\Phi_{P_0}^0 + \dots + \Phi_{P_0}^r)|_x(v) \\ &= \sum_{i=1}^r i \cdot \Psi_{P_0}^i(\underbrace{x, \dots, x, v}_{i-1 \text{ mal}}). \end{aligned}$$

Wegen (\*) setzt man daher naheliegenderweise:

$$\begin{aligned} D\Phi|_Q(v) &:= D\Phi_{P_0}|_{P_0\vec{Q}}(v) \\ &= \sum_{i=1}^r i \cdot \Psi_{P_0}^i(\underbrace{P_0\vec{Q}, \dots, P_0\vec{Q}, v}_{i-1 \text{ mal}}). \end{aligned}$$

### Definition 6

Es sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine nichtleere konvexe Teilmenge und  $\mathcal{U}$  der zu  $\text{aff}(\mathcal{N})$  gehörige Vektorraum. Weiter sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $r$  eine natürliche Zahl mit  $r \geq 0$ .

Für  $\varphi \in \mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V)$  sei  $\Phi : \text{aff}(\mathcal{N}) \rightarrow V$  das (eindeutig bestimmte) affine Polynom mit  $\Phi|_{\mathcal{N}} = \varphi$ . Weiter sei

$$\Phi_{P_0} = \Phi_{P_0}^0 + \dots + \Phi_{P_0}^r : \mathcal{U} \rightarrow V$$

das zu  $\Phi$  gehörige Polynom bezüglich eines Entwicklungspunktes  $P_0 \in \text{aff}(\mathcal{N})$  mit homogenen Polynomen

$$\Phi_{P_0}^0, \dots, \Phi_{P_0}^r : \mathcal{U} \rightarrow V$$

vom Grad  $0, \dots, r$  und symmetrischen Abbildungen  $\Psi_{P_0}^i : \mathcal{U}^i \rightarrow V$  mit

$$\Phi_{P_0}^i(v) = \Psi_{P_0}^i(\underbrace{v, \dots, v}_{i \text{ mal}}) \quad \forall v \in \mathcal{U}, i = 1, \dots, r.$$

Für  $P \in \mathcal{N}$  und  $v \in \mathcal{U}$  heißt

$$\begin{aligned} D\varphi|_P(v) &:= D\Phi|_P(v) := D\Phi_{P_0}|_{P_0\vec{P}}(v) \\ &= \sum_{i=1}^r i \cdot \Psi_{P_0}^i(\underbrace{P_0\vec{P}, \dots, P_0\vec{P}, v}_{i-1 \text{ mal}}) \in V \end{aligned}$$

*Ableitung von  $\varphi$  an der Stelle  $P$  in Richtung  $v$ .*

Die Abbildung

$$D\varphi : \mathcal{N} \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{U}, V) := \{f : \mathcal{U} \rightarrow V \text{ linear}\}$$

$$P \longmapsto D\varphi(P) := D\varphi|_P : \mathcal{U} \ni v \longmapsto D\varphi|_P(v) \in V$$

heißt *Ableitung* von  $\varphi$ .

### Bemerkung

a) Für eine affin lineare Abbildung  $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{N}, V)$  gilt

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L_\varphi(v) \quad \forall P \in \mathcal{N}, v \in \mathcal{U} \text{ mit } P + v \in \mathcal{N}$$

mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung  $L_\varphi : \mathcal{U} \rightarrow V$ .

Nun ist  $\varphi = \varphi^0 + \varphi^1$  mit

$$\varphi^0(Q) := \varphi(P), \quad \varphi^1(Q) := \varphi(Q) - \varphi(P) \quad \forall Q \in \mathcal{N}$$

und

$$\varphi_P^0(v) = \varphi^0(P + v) = \varphi(P),$$

$$\varphi_P^1(v) = \varphi^1(P + v) = \varphi(P + v) - \varphi(P) = L_\varphi(v) \quad \forall v \in \mathcal{U} \text{ mit } P + v \in \mathcal{N}.$$

Es folgt:

$$D\varphi|_P(v) = \varphi_P^1(v) = L_\varphi(v) \quad \forall P \in \mathcal{N}, v \in \mathcal{U}$$

und somit (als konstante Abbildung  $D\varphi : \mathcal{N} \ni P \longmapsto L_\varphi$ )

$$D\varphi \equiv L_\varphi.$$

b) Für ein konstantes affines Polynom  $\varphi \in \mathcal{P}^0(\mathcal{N}, V)$  ist

$$D\varphi = 0 : \mathcal{N} \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{U}, V)$$

$$P \longmapsto L_\varphi \equiv 0 : \mathcal{U} \ni v \longmapsto 0 \in V.$$

c) Für  $r > 0$  und festes  $v \in \mathcal{U}$  ist die Abbildung

$$D\varphi(v) : \mathcal{N} \longrightarrow V$$

$$P \longmapsto D\varphi|_P(v)$$

ein affines Polynom vom Grad  $r - 1$ , denn

$$D\Phi_{P_0}|_x(v) = \sum_{i=1}^r i \cdot \Psi_{P_0}^i(\underbrace{x, \dots, x}_{i-1 \text{ mal}}, v)$$

mit  $(i - 1)$ -fach linearen Abbildungen

$$x \longmapsto \Psi_{P_0}^i(\underbrace{x, \dots, x}_{i-1 \text{ mal}}, v), \quad i = 1, \dots, r.$$

### Vorbemerkung (zur Definition höherer Ableitungen)

Es sollen nun höhere Ableitungen affin polynomialer Abbildungen eingeführt werden. Da für endlichdimensionale reelle Vektorräume  $\mathcal{U}$  und  $V$  auch  $\text{Hom}(\mathcal{U}, V)$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum ist, kann dazu der oben eingeführte Ableitungsoperator auf die Abbildung  $D\varphi$  angewandt werden. So erhält man eine rekursive Definition höherer Ableitungen durch mehrfache Anwendung des Operators  $D$ .

**Definition 7**

$\mathcal{M}$  sei ein  $n$ -dimensionaler Punktraum mit zugehörigem reeller Vektorraum  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine nichtleere konvexe Teilmenge,  $\mathcal{U}$  der zu  $\text{aff}(\mathcal{N})$  gehörige Vektorraum,  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum und  $r$  eine natürliche Zahl mit  $r \geq 0$ .

Für eine natürliche Zahl  $i \geq 0$  ist die  $i$ -te Ableitung von  $\varphi \in \mathcal{P}^r(\mathcal{N}, V)$  definiert durch

$$D^i \varphi := \begin{cases} \varphi : \mathcal{N} \rightarrow V, & i = 0, \\ D\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{U}, V), & i = 1, \\ D^{i-1}(D\varphi) : \mathcal{N} \rightarrow \text{Hom}^i(\mathcal{U}, V), & i \geq 2, \end{cases}$$

wobei  $\text{Hom}^j(\mathcal{U}, V)$  für  $j \geq 1$  definiert ist durch die rekursive Vorschrift

$$\begin{aligned} \text{Hom}^1(\mathcal{U}, V) &:= \text{Hom}(\mathcal{U}, V) \quad \text{und} \\ \text{Hom}^j(\mathcal{U}, V) &:= \text{Hom}(\mathcal{U}, \text{Hom}^{j-1}(\mathcal{U}, V)), \quad j \geq 2. \end{aligned}$$

**Bemerkung**

a) Für  $r \geq i > 0$  und fest gewählte  $v_1, \dots, v_i \in \mathcal{U}$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} D^i \varphi(v_1, \dots, v_i) : \mathcal{N} &\longrightarrow V \\ P &\longmapsto D^i \varphi|_P(v_1) \dots (v_i) \end{aligned}$$

ein affines Polynom vom Grad  $r - i$ .

Insbesondere ist  $D^i \varphi(v_1, \dots, v_i)$  für  $i = r$  konstant, und es gilt:

$$D^i \varphi = 0 \quad \forall i > r.$$

b) Ist  $\Phi : \text{aff}(\mathcal{N}) \rightarrow V$  das (eindeutig bestimmte) affine Polynom mit  $\Phi|_{\mathcal{N}} = \varphi$  und

$$\Phi_{P_0} = \Phi_{P_0}^0 + \dots + \Phi_{P_0}^r : \mathcal{U} \rightarrow V$$

das zu  $\Phi$  gehörige Polynom bezüglich eines Entwicklungspunktes  $P_0 \in \text{aff}(\mathcal{N})$  mit homogenen Polynomen

$$\Phi_{P_0}^0, \dots, \Phi_{P_0}^r : \mathcal{U} \rightarrow V$$

vom Grad  $0, \dots, r$  und symmetrischen Abbildungen  $\Psi_{P_0}^i : \mathcal{U}^i \rightarrow V$  mit

$$\Phi_{P_0}^i(v) = \Psi_{P_0}^i(\underbrace{v, \dots, v}_{i \text{ mal}}) \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad i = 1, \dots, r,$$

so gilt für  $r \geq i > 0$ ,  $P \in \mathcal{N}$  und  $v_1, \dots, v_i \in \mathcal{U}$ :

$$\begin{aligned} D^i \varphi|_P(v_1, \dots, v_i) &= D^i \Phi_{P_0}|_{P_0 \vec{P}}(v_1, \dots, v_i) \\ &= \sum_{j=i}^r j \cdot (j-1) \cdots (j-i+1) \cdot \Psi_{P_0}^j(\underbrace{P_0 \vec{P}, \dots, P_0 \vec{P}}_{j-i \text{ mal}}, v_1, \dots, v_i). \end{aligned}$$

c) Eine ausführliche Behandlung der Ableitungen von Polynomen sowie explizite Umrechnungsformeln zwischen kartesischen und baryzentrischen Koordinatendarstellungen finden sich in [4].

## I.3 Multilinearformen

„Warum kann uns nicht jemand ein Verzeichnis der Dinge geben, die jeder denkt und keiner sagt, und eines derjenigen, die jeder sagt und keiner denkt?“

Oliver Wendell Holmes

Es wird der reelle Vektorraum der Multilinearformen sowie dessen Untervektorraum der alternierenden Multilinearformen eingeführt und neben der Behandlung der üblichen algebraischen Operationen das oben eingeführte Pseudoskalarprodukt für Multilinearformen verallgemeinert. Anschließend wird die kanonische  $n$ -Form definiert, die eine Standard-Orientierung auf dem zugrundeliegenden Vektorraum und damit auf dem affinen Punktraum induziert. Durch die verallgemeinerte innere Multiplikation mit der kanonischen  $n$ -Form wird schließlich die Dualitätsabbildung definiert, die es erlaubt, die Vektorräume der  $r$ -fachen und der  $(n-r)$ -fachen alternierenden Multilinearformen als zueinander dual aufzufassen.

### I.3.1 Grundbegriffe

Im folgenden sei

- $\mathcal{V}$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und
- $S_r$  für  $r \in \mathbb{N}$  die Menge der Permutationen von  $\{1, \dots, r\}$ , d.h.

$$S_r := \{\sigma : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\} \text{ bijektiv} \} .$$

#### Definition 1

- a) Eine Abbildung  $F : \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{r \text{ mal}} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt genau dann  *$r$ -fach multilinear*, wenn  $F$  linear in jeder Variablen ist.

Solch eine Abbildung  $F$  heißt ( *$r$ -fache*) *Multilinearform*, die Vielfachheit  $r$  heißt auch der *Grad* von  $F$ . Die Menge der  $r$ -fachen Multilinearformen wird mit  $M_r \mathcal{V}^*$  bezeichnet.

- b) Eine  $r$ -fache Multilinearform  $F \in M_r \mathcal{V}^*$  heißt genau dann *alternierend*, wenn für jede Permutation  $\sigma \in S_r$  gilt:

$$F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot F(v_1, \dots, v_r) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V} .$$

$\Lambda_r \mathcal{V}^*$  bezeichnet die Menge der alternierenden  $r$ -fachen Multilinearformen.

- c) Speziell sei noch  $\Lambda_0 \mathcal{V}^* := \mathbb{R}$  und  $M_0 \mathcal{V}^* := \mathbb{R}$  .

#### Bemerkung

- a)  $M_r \mathcal{V}^*$  ist ein reeller Vektorraum vermöge der Addition und Multiplikation in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} (F + G)(v_1, \dots, v_r) &:= F(v_1, \dots, v_r) + G(v_1, \dots, v_r) , \\ (\lambda F)(v_1, \dots, v_r) &:= \lambda \cdot F(v_1, \dots, v_r) \text{ mit } F, G \in M_r \mathcal{V}^* , \lambda \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

- b)  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$  ist ein Untervektorraum von  $M_r \mathcal{V}^*$ , denn für  $F, G \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in S_r$  gilt offenbar:

$$\begin{aligned} (F + G)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) &= \text{sign}(\sigma)(F + G)(v_1, \dots, v_r) , \\ (\lambda F)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) &= \text{sign}(\sigma)(\lambda F)(v_1, \dots, v_r) . \end{aligned}$$

**Definition 2**

Für  $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{V}^*$  wird das *Tensorprodukt*  $F_1 \otimes \dots \otimes F_r \in M_r \mathcal{V}^*$  definiert durch

$$(F_1 \otimes \dots \otimes F_r)(v_1, \dots, v_r) := F_1(v_1) \cdots F_r(v_r) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V}.$$

Das *äußere Produkt*  $F_1 \wedge \dots \wedge F_r \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  wird definiert durch

$$(F_1 \wedge \dots \wedge F_r)(v_1, \dots, v_r) := \det (F_i(v_j))_{i,j=1}^r \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V}.$$

**Bemerkung**

Die so definierten Produkte haben folgende Eigenschaften:

a) Falls für  $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{V}^*$  und  $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V}$  mindestens eine der Bedingungen

$$\begin{aligned} \exists i, j \in \{1, \dots, r\}, i \neq j, \text{ mit } v_i = v_j, \\ \exists i, j \in \{1, \dots, r\}, i \neq j, \text{ mit } F_i = F_j \end{aligned}$$

erfüllt ist, so gilt stets

$$(F_1 \wedge \dots \wedge F_r)(v_1, \dots, v_r) = 0.$$

b) Falls  $\dim(\text{span}(v_1, \dots, v_r)) < r$  ist, gilt:

$$\begin{aligned} \text{rang} \left( (F_i(v_j))_{i,j=1}^r \right) < r &\Rightarrow \det \left( (F_i(v_j))_{i,j=1}^r \right) = 0 \\ &\Rightarrow (F_1 \wedge \dots \wedge F_r)(v_1, \dots, v_r) = 0. \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man für  $r > n = \dim(\mathcal{V})$ :

$$\begin{aligned} (F_1 \wedge \dots \wedge F_r)(v_1, \dots, v_r) &= 0 \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V} \\ &\Rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* = 0 \quad \forall r > n. \end{aligned}$$

**Schreibweise**

Im folgenden wird das Auslassen eines Faktors in mehrfachen Produkten, eines Elementes in Mengen, etc., durch ein Dach über dem auszulassenden Element bezeichnet, also z. B.:

$$\begin{aligned} F_1 \wedge \dots \wedge \widehat{F_i} \wedge \dots \wedge F_r &:= F_1 \wedge \dots \wedge F_{i-1} \wedge F_{i+1} \wedge \dots \wedge F_r, \\ \{v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_r\} &:= \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}. \end{aligned}$$

**Lemma 1**

Es sei  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  eine Basis von  $\mathcal{V}^*$ .

Dann ist für  $1 \leq r \leq n$

$$\{e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_r}^* \mid 1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n\}$$

eine Basis des Vektorraums der  $r$ -fachen Multilinearformen  $M_r \mathcal{V}^*$ . Insbesondere gilt für die Dimension:

$$\dim(M_r \mathcal{V}^*) = n^r.$$

Beweis: Siehe z. B. [22].

**Bemerkung**

Ist  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  mit zugehöriger dualer Basis  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ , so gilt:

$$F = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n} F(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \cdot (e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_r}^*) \quad \forall F \in M_r \mathcal{V}^*.$$

**Definition 3**

Der *alternierende Anteil* einer Multilinearform wird definiert durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Alt} : M_r \mathcal{V}^* &\rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* \\ \text{Alt}(F)(v_1, \dots, v_r) &:= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sign}(\sigma) \cdot F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) . \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Offenbar ist  $\text{Alt}(F)$  für alle  $F \in M_r \mathcal{V}^*$  alternierend, denn

$$\text{Alt}(F)(v_{\kappa(1)}, \dots, v_{\kappa(r)}) = \text{sign}(\kappa) \text{Alt}(F)(v_1, \dots, v_r) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V}, \kappa \in S_r .$$

Desweiteren gilt  $\text{Alt}|_{\Lambda_r \mathcal{V}^*} = \text{id}|_{\Lambda_r \mathcal{V}^*}$ , die Abbildung  $\text{Alt}$  ist also eine Projektion.

**Beispiel**

Für  $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{V}^*$  gilt

$$F_1 \wedge \dots \wedge F_r = r! \cdot \text{Alt}(F_1 \otimes \dots \otimes F_r) ,$$

denn es ist

$$\begin{aligned} (F_1 \wedge \dots \wedge F_r)(v_1, \dots, v_r) &= \det (F_i(v_j))_{i,j=1}^r \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \text{sign}(\sigma) \cdot \underbrace{F_1(v_{\sigma(1)}) \cdots F_r(v_{\sigma(r)})}_{(F_1 \otimes \dots \otimes F_r)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})} \\ &= r! \cdot \text{Alt}(F_1 \otimes \dots \otimes F_r)(v_1, \dots, v_r) . \end{aligned}$$

**Rechenregeln** (für äußere Produkte)

Es seien  $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{V}^*$ . Dann gelten die folgenden Regeln:

a) Für  $F, F' \in \mathcal{V}^*$  und  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} F_1 \wedge \dots \wedge F_{i-1} \wedge (\alpha F + \alpha' F') \wedge F_{i+1} \wedge \dots \wedge F_r \\ = \alpha F_1 \wedge \dots \wedge F_{i-1} \wedge F \wedge F_{i+1} \wedge \dots \wedge F_r \\ + \alpha' F_1 \wedge \dots \wedge F_{i-1} \wedge F' \wedge F_{i+1} \wedge \dots \wedge F_r . \end{aligned}$$

b) Für  $\sigma \in S_r$  gilt:

$$F_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge F_{\sigma(r)} = \text{sign}(\sigma) \cdot F_1 \wedge \dots \wedge F_r .$$

c) Für  $G_i := \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} F_j$ ,  $i = 1, \dots, r$ , mit  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ , gilt:

$$G_1 \wedge \dots \wedge G_r = \det (\alpha_{ij})_{i,j=1}^r \cdot F_1 \wedge \dots \wedge F_r .$$

d) Aus  $F_i = F_j$  für  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  und  $i \neq j$  folgt  $F_1 \wedge \dots \wedge F_r = 0$ .

**Lemma 2**

Es sei  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  eine Basis von  $\mathcal{V}^*$ .

Dann ist für  $1 \leq r \leq n$

$$\{e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_r}^* \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n\}$$

eine Basis des Vektorraums der alternierenden Multilinearformen  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$ . Insbesondere gilt für die Dimension:

$$\dim(\Lambda_r \mathcal{V}^*) = \binom{n}{r}.$$

Beweis: Siehe z. B. [22].

**Bemerkung**

Ist  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  mit zugehöriger dualer Basis  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ , so gilt:

$$F = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} F(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \cdot (e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_r}^*) \quad \forall F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*.$$

**I.3.2 Äußere Produkte von Multilinearformen****Definition 4**

Für zwei Multilinearformen  $F \in M_r \mathcal{V}^*$  und  $G \in M_s \mathcal{V}^*$  wird das *Tensorprodukt*

$$F \otimes G \in M_{r+s} \mathcal{V}^*$$

definiert durch

$$(F \otimes G)(v_1, \dots, v_{r+s}) := F(v_1, \dots, v_r) \cdot G(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \quad \forall v_1, \dots, v_{r+s} \in \mathcal{V}.$$

Das *äußere Produkt* zweier alternierender Multilinearformen  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  und  $G \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$  wird definiert durch

$$F \wedge G := \frac{(r+s)!}{r!s!} \text{Alt}(F \otimes G) \in \Lambda_{r+s} \mathcal{V}^*.$$

**Bemerkung**

a) Das äußere Produkt zweier alternierender Multilinearformen ist wegen

$$F_1 \wedge F_2 = 2 \cdot \text{Alt}(F_1 \otimes F_2) \quad \forall F_1, F_2 \in \mathcal{V}^*$$

verträglich mit dem bereits definierten äußeren Produkt zweier Linearformen.

b) Diese Definition des äußeren Produktes alternierender Multilinearformen liegt aufgrund des folgenden Zusammenhanges nahe:

Für  $F_1, \dots, F_r, G_1, \dots, G_s \in \mathcal{V}^*$ ,  $F := F_1 \wedge \dots \wedge F_r$ ,  $G := G_1 \wedge \dots \wedge G_s$  gilt:

$$\text{Alt}(F \otimes G) = \frac{r!s!}{(r+s)!} (F_1 \wedge \dots \wedge F_r \wedge G_1 \wedge \dots \wedge G_s).$$

**Beweis:** (zu Teil b) der Bemerkung)

Für  $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s} \in \mathcal{V}$  gilt einerseits

$$\begin{aligned} & (F_1 \wedge \dots \wedge F_r \wedge G_1 \wedge \dots \wedge G_s)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &= \det \begin{pmatrix} F_1(v_1) & \dots & F_r(v_1) & G_1(v_1) & \dots & G_s(v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(v_{r+s}) & \dots & F_r(v_{r+s}) & G_1(v_{r+s}) & \dots & G_s(v_{r+s}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) F_1(v_{\sigma(1)}) \cdots F_r(v_{\sigma(r)}) \cdot G_1(v_{\sigma(r+1)}) \cdots G_s(v_{\sigma(r+s)}) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} & \text{Alt}(F \otimes G)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) (F \otimes G)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\ &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\ &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) \left( \sum_{\varrho \in S_r} \text{sign}(\varrho) F_1(v_{\sigma(\varrho(1))}) \cdots F_r(v_{\sigma(\varrho(r))}) \right) \\ & \quad \cdot \left( \sum_{\tau \in S_s} \text{sign}(\tau) G_1(v_{\sigma(r+\tau(1))}) \cdots G_s(v_{\sigma(r+\tau(s))}) \right). \end{aligned}$$

Nun gibt es für Permutationen  $\sigma \in S_{r+s}$ ,  $\varrho \in S_r$  und  $\tau \in S_s$  stets eine eindeutig bestimmte Permutation  $\tilde{\sigma} \in S_{r+s}$  mit

$$(\tilde{\sigma}(1), \dots, \tilde{\sigma}(r+s)) = (\sigma(\varrho(1)), \dots, \sigma(\varrho(r)), \sigma(r+\tau(1)), \dots, \sigma(r+\tau(s))).$$

Dabei gilt:

$$\text{sign}(\tilde{\sigma}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\varrho) \cdot \text{sign}(\tau).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \text{Alt}(F \otimes G)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &= \frac{r!s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) F_1(v_{\sigma(1)}) \cdots F_r(v_{\sigma(r)}) \\ & \quad \cdot G_1(v_{\sigma(r+1)}) \cdots G_s(v_{\sigma(r+s)}) \\ &= \frac{r!s!}{(r+s)!} (F_1 \wedge \dots \wedge F_r \wedge G_1 \wedge \dots \wedge G_s)(v_1, \dots, v_{r+s}). \end{aligned}$$

□

### Bemerkung

Man erhält im obigen Beweis insbesondere den Zusammenhang

$$\begin{aligned} & (F_1 \wedge \dots \wedge F_r \wedge G_1 \wedge \dots \wedge G_s)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}). \end{aligned}$$

**Folgerung**

Für  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ ,  $G \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$  und  $v_1, \dots, v_{r+s} \in \mathcal{V}$  gilt allgemein:

$$\begin{aligned} (F \wedge G)(v_1, \dots, v_{r+s}) &= \frac{(r+s)!}{r!s!} \cdot \text{Alt}(F \otimes G)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+s}, \sigma(1) < \dots < \sigma(r) \\ \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)}} \text{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) . \end{aligned}$$

**Beweis:**

Es genügt,  $F := F_1 \wedge \dots \wedge F_r$  und  $G := G_1 \wedge \dots \wedge G_s$  mit  $F_1, \dots, F_r, G_1, \dots, G_s \in \mathcal{V}^*$  zu betrachten. Wegen

$$\begin{aligned} (F \wedge G)(v_1, \dots, v_{r+s}) &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \end{aligned}$$

bleibt nur zu zeigen:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\ = r!s! \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+s}, \sigma(1) < \dots < \sigma(r) \\ \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)}} \text{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) . \end{aligned}$$

Sei dazu  $\sigma \in S_{r+s}$ , dann gilt:

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\} \cup \{\sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s)\} = \{1, \dots, r+s\} .$$

Nun gibt es genau zwei Permutationen  $\alpha \in S_r$ ,  $\beta \in S_s$ , so daß gilt:

$$\sigma(\alpha(1)) < \dots < \sigma(\alpha(r)) \quad \text{und} \quad \sigma(r+\beta(1)) < \dots < \sigma(r+\beta(s)) .$$

Definiert man nun  $\tau \in S_{r+s}$  mit

$$\tau(1, \dots, r, r+1, \dots, r+s) := (\alpha(1), \dots, \alpha(r), r+\beta(1), \dots, r+\beta(s))$$

so ist

$$(\sigma \circ \tau)(1, \dots, r+s) = (\sigma(\alpha(1)), \dots, \sigma(\alpha(r)), \sigma(r+\beta(1)), \dots, \sigma(r+\beta(s))) .$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(1, \dots, r, r+1, \dots, r+s) \\ = (\alpha^{-1}(1), \dots, \alpha^{-1}(r), r+\beta^{-1}(1), \dots, r+\beta^{-1}(s)) \end{aligned}$$

und

$$\text{sign}(\sigma) = \text{sign}((\sigma \circ \tau) \circ \tau^{-1}) = \text{sign}((\sigma \circ \tau)) \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \text{sign}(\beta) .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\ = \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+s}, \sigma(1) < \dots < \sigma(r) \\ \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)}} \text{sign}(\sigma) \sum_{\substack{\alpha \in S_r \\ \beta \in S_s}} \text{sign}(\alpha) \text{sign}(\beta) F(v_{\sigma(\alpha(1))}, \dots, v_{\sigma(\alpha(r))}) \\ \cdot G(v_{\sigma(r+\beta(1))}, \dots, v_{\sigma(r+\beta(s))}) \\ = \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+s}, \sigma(1) < \dots < \sigma(r) \\ \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)}} \text{sign}(\sigma) r!s! F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot G(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) . \end{aligned}$$

□

**Bemerkung** (Eigenschaften des äußeren Produktes)

Für alle  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ ,  $G \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$ ,  $H \in \Lambda_t \mathcal{V}^*$  gilt:

- Homogenität:  $(\lambda F) \wedge (\mu G) = \lambda \mu (F \wedge G) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
- Assoziativität:  $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$ ,
- Distributivität:  $F \wedge (G + H) = F \wedge G + F \wedge H$  und  $(F + G) \wedge H = F \wedge H + G \wedge H$ ,
- Alternierendheit:  $F \wedge G = (-1)^{r \cdot s} G \wedge F$ .

**Bemerkung**

- a) Aus d) folgt  $F \wedge F = -F \wedge F = 0$  für  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  mit ungeradem  $r$ . Aber es gilt zum Beispiel für  $v_0^*, v_1^*, v_2^*, v_3^* \in \mathcal{V}^*$ :

$$(v_0^* \wedge v_1^* + v_2^* \wedge v_3^*) \wedge (v_0^* \wedge v_1^* + v_2^* \wedge v_3^*) = 2 v_0^* \wedge v_1^* \wedge v_2^* \wedge v_3^* .$$

- b) Die Vereinigung  $\bigcup_{r=0}^n \Lambda_r \mathcal{V}^*$  hat durch das äußere Produkt die Struktur einer graduierten Algebra. Da das äußere Produkt für die diese Algebra erzeugenden Dualbasiselemente  $e_1^*, \dots, e_n^*$  antikommutativ ist, ist  $\bigcup_{r=0}^n \Lambda_r \mathcal{V}^*$  eine Grassmann-Algebra.

**I.3.3 Innere Produkte alternierender Multilinearformen**

Es sei nun zusätzlich ein Pseudoskalarprodukt  $\xi$  auf  $\mathcal{V}$  gegeben:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\xi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle_\xi . \end{aligned}$$

**Vorbemerkung** (zur folgenden Definition)

Durch den durch  $\xi$  induzierten Isomorphismus  $\mathcal{V} \ni v \longmapsto v^\xi \in \mathcal{V}^*$  mit

$$v^\xi(w) = \langle v, w \rangle_\xi \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

erhält man ein Pseudoskalarprodukt auf  $\mathcal{V}^*$ :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\xi : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u^\xi, v^\xi) &\longmapsto \left\langle u^\xi, v^\xi \right\rangle_\xi := \langle u, v \rangle_\xi . \end{aligned}$$

Dieses Produkt soll nun zu einem Pseudoskalarprodukt für alternierende Multilinearformen verallgemeinert werden. Sei dazu  $r \geq 1$ , dann gilt für  $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned} (v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi)(w_1, \dots, w_r) &= \det \left( v_i^\xi(w_j) \right)_{i,j=1}^r \\ &= \det \left( \langle v_i, w_j \rangle_\xi \right)_{i,j=1}^r \\ &= \det \left( w_i^\xi(v_j) \right)_{i,j=1}^r \\ &= \left( w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right)(v_1, \dots, v_r) . \end{aligned}$$

Setzt man

$$\left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi, w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right\rangle_\xi := \det \left( \langle v_i, w_j \rangle_\xi \right)_{i,j=1}^r = \det \left( \left\langle v_i^\xi, w_j^\xi \right\rangle_\xi \right)_{i,j=1}^r ,$$

so ist für fest gewählte  $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V}$  die Abbildung

$$\Xi_{v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi} : (w_1, \dots, w_r) \longmapsto \left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi, w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right\rangle_\xi$$

offenbar  $r$ -fach multilinear und alternierend, womit die Abbildung

$$\left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi, \cdot \right\rangle_\xi : \left( w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right) \longmapsto \left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi, w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right\rangle_\xi$$

linear und eindeutig bestimmt ist. Hierzu verwendet man

$$\dim((\Lambda_r \mathcal{V}^*)^*) = \dim(\Lambda_r \mathcal{V}^*) = \binom{n}{r}$$

und die Injektivität<sup>16</sup> der Zuordnung

$$\left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi, \cdot \right\rangle_\xi \longmapsto \Xi_{v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi} .$$

Analog zeigt sich, daß für fest gewählte  $w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}$  die Abbildung

$$\Xi_{w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi} : (v_1, \dots, v_r) \longmapsto \left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi, w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right\rangle_\xi$$

$r$ -fach multilinear und alternierend ist, und damit ist die Abbildung

$$\left\langle \cdot, w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right\rangle_\xi : \left( v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi \right) \longmapsto \left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_r^\xi, w_1^\xi \wedge \dots \wedge w_r^\xi \right\rangle_\xi$$

linear und eindeutig bestimmt.

Man hat somit also eine wohldefinierte symmetrische bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi : \Lambda_r \mathcal{V}^* \times \Lambda_r \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R} ,$$

die für  $r = 1$  mit dem Pseudoskalarprodukt auf  $\mathcal{V}^*$  übereinstimmt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß diese Abbildung nicht entartet ist. Sei dazu  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}$  mit

$$\langle e_i, e_j \rangle_\xi = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \leq n - \text{Index}(\xi) , \\ -1 & \text{falls } i = j > n - \text{Index}(\xi) , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

dann gilt mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  und  $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$  :

$$\begin{aligned} \left\langle e_{i_1}^\xi \wedge \dots \wedge e_{i_r}^\xi, e_{j_1}^\xi \wedge \dots \wedge e_{j_r}^\xi \right\rangle_\xi &= \det \left( \left\langle e_{i_k}, e_{j_l} \right\rangle_\xi \right)_{k,l=1}^r \\ &= \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \{i_1, \dots, i_r\} = \{j_1, \dots, j_r\} , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases} \end{aligned}$$

Da  $\left\{ e_{j_1}^\xi \wedge \dots \wedge e_{j_r}^\xi \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n \right\}$  eine Basis von  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$  ist, folgt damit die Behauptung.

<sup>16</sup> Vgl. dazu [22].

**Definition 5**

Es sei  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  eine Basis von  $\mathcal{V}^*$  und für  $1 \leq r \leq n$  seien  $F, G \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  mit

$$F = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} F_{k_1, \dots, k_r} \cdot (v_{k_1}^* \wedge \dots \wedge v_{k_r}^*),$$

$$G = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} G_{k_1, \dots, k_r} \cdot (v_{k_1}^* \wedge \dots \wedge v_{k_r}^*).$$

Das (durch das Pseudoskalarprodukt  $\xi$  auf  $\mathcal{V}$  induzierte) *Pseudoskalarprodukt* von  $F$  und  $G$  ist definiert durch

$$\langle F, G \rangle_\xi := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}} F_{i_1, \dots, i_r} \cdot G_{j_1, \dots, j_r} \cdot \det \left( \langle v_{i_k}^*, v_{j_l}^* \rangle_\xi \right)_{k, l=1}^r.$$

Speziell für  $r = 0$  und  $\alpha, \beta \in \Lambda_0 \mathcal{V}^* = \mathbb{R}$  sei  $\langle \alpha, \beta \rangle_\xi := \alpha \cdot \beta$ .

**Bemerkung**

- Wie bereits gesehen ist das Pseudoskalarprodukt alternierender Multilinearformen wohldefiniert, also insbesondere unabhängig von der gewählten Basis von  $\mathcal{V}^*$ , und stimmt für  $r = 1$  mit dem durch das Pseudoskalarprodukt  $\xi$  auf  $\mathcal{V}$  induzierten Pseudoskalarprodukt auf  $\mathcal{V}^*$  überein.
- Für  $r = n$  ist das obige Produkt die eindeutig bestimmte bilineare Abbildung auf dem 1-dimensionalen Vektorraum  $\Lambda_n \mathcal{V}^*$ , so daß für jede Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  gilt:

$$\langle e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*, e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \rangle_\xi = (-1)^{\text{Index}(\xi)}.$$

- Ist auf  $\mathcal{V}$  ein Skalarprodukt gegeben, so ist auch das oben definierte Pseudoskalarprodukt auf  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$  positiv definit.
- Für eine Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  mit

$$\langle e_i, e_j \rangle_\xi = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \leq n - \text{Index}(\xi), \\ -1 & \text{falls } i = j > n - \text{Index}(\xi), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$F = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} F(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \cdot (e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge e_{k_r}^*),$$

$$G = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} G(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \cdot (e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge e_{k_r}^*) \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$$

erhält man wegen

$$e_i^* = \begin{cases} e_i^\xi & \text{falls } i \leq n - \text{Index}(\xi), \\ -e_i^\xi & \text{falls } i > n - \text{Index}(\xi) \end{cases}$$

für das Pseudoskalarprodukt von  $F$  und  $G$

$$\langle F, G \rangle_\xi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} F(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \cdot G(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \cdot (-1)^{\#\{k \in \{1, \dots, r\} | i_k > n - \text{Index}(\xi)\}}.$$

**Vorbemerkung** (zur folgenden Definition)

Für  $0 \leq r, s \leq n$  mit  $r + s \leq n$  seien Multilinearformen  $F \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$  und  $H \in \Lambda_{r+s} \mathcal{V}^*$  gegeben. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi_{F,H} : \Lambda_r \mathcal{V}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ G &\longmapsto \Psi_{F,H}(G) := \langle F \wedge G, H \rangle_\xi \end{aligned}$$

offenbar ein lineares Funktional auf  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$ . Da das oben definierte Pseudoskalarprodukt nicht entartet ist, gibt es nun eine eindeutig bestimmte Multilinearform  $I_{F,H} \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ , so daß gilt:

$$\Psi_{F,H}(G) = \langle F \wedge G, H \rangle_\xi = \langle G, I_{F,H} \rangle_\xi \quad \forall G \in \Lambda_r \mathcal{V}^* .$$

Man erhält damit eine Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : \Lambda_{r+s} \mathcal{V}^* \times \Lambda_r \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_s \mathcal{V}^* \\ (H, F) &\longmapsto \iota(H, F) := I_{F,H} . \end{aligned}$$

### Definition 6

Für  $n \geq r \geq s \geq 0$  definiert man das *innere Produkt* durch

$$\begin{aligned} \iota : \Lambda_r \mathcal{V}^* \times \Lambda_s \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_{r-s} \mathcal{V}^* \\ (F, G) &\longmapsto \iota_G F := \iota(F, G) . \end{aligned}$$

### Lemma 3

Das innere Produkt genügt der folgenden rekursiven Vorschrift:

- (1) Für  $0 \leq r \leq n$ ,  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  und  $\alpha \in \Lambda_0 \mathcal{V}^* = \mathbb{R}$  ist

$$\iota_\alpha F = \alpha \cdot F .$$

- (2) Für  $F, G \in \Lambda_1 \mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*$  ist

$$\iota_G F = \langle F, G \rangle_\xi .$$

- (3) Für  $1 \leq r_1, r_2 \leq n$ ,  $F_1 \in \Lambda_{r_1} \mathcal{V}^*$ ,  $F_2 \in \Lambda_{r_2} \mathcal{V}^*$  und  $G \in \Lambda_1 \mathcal{V}^*$  ist

$$\iota_G(F_1 \wedge F_2) = (\iota_G F_1) \wedge F_2 + (-1)^{r_1} F_1 \wedge (\iota_G F_2) .$$

- (4) Für  $0 \leq r_1, r_2, s \leq n$  mit  $r_1 + r_2 \leq s$ ,  $G_1 \in \Lambda_{r_1} \mathcal{V}^*$ ,  $G_2 \in \Lambda_{r_2} \mathcal{V}^*$  und  $F \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$  ist

$$\iota_{G_1 \wedge G_2} F = \iota_{G_2}(\iota_{G_1} F) .$$

### Beweis:

- 1) Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $G, H \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge G, H \rangle_\xi &= \langle \alpha G, H \rangle_\xi = \alpha \langle G, H \rangle_\xi = \langle G, \alpha H \rangle_\xi \\ &\Rightarrow \iota_\alpha H = \alpha H . \end{aligned}$$

- 2) Für  $F, H \in \Lambda_1 \mathcal{V}^*$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle F \wedge \alpha, H \rangle_\xi &= \alpha \langle F, H \rangle_\xi = \left\langle \alpha, \langle F, H \rangle_\xi \right\rangle_\xi \\ &\Rightarrow \iota_F H = \langle F, H \rangle_\xi . \end{aligned}$$

3) Es reicht, diese Eigenschaft für Basiselemente  $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*$  der Multilinearformen bezüglich einer Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  mit

$$\langle e_i, e_j \rangle_\xi = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \leq n - \text{Index}(\xi), \\ -1 & \text{falls } i = j > n - \text{Index}(\xi), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

nachzuweisen. Sei dazu

$$\begin{aligned} F &:= e_k^*, \quad G := e_{k_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{k_{r+s-1}}^*, \\ H_1 &:= e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*, \quad H_2 := e_{i_{r+1}}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_{r+s}}^*. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\langle F \wedge G, H_1 \wedge H_2 \rangle_\xi = \left\langle e_k^* \wedge e_{k_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{k_{r+s-1}}^*, e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_{r+s}}^* \right\rangle_\xi$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur dann nicht, wenn gilt:

- $\#\{i_1, \dots, i_{r+s}\} = r + s$  und
- $\{k, k_1, \dots, k_{r+s-1}\} = \{i_1, \dots, i_{r+s}\}$ .

Andererseits erhält man mit obiger Regel (3):

$$\iota_F(H_1 \wedge H_2) = \sum_{j=1}^{r+s} (-1)^{j-1} \langle e_k, e_{i_j} \rangle_\xi \left( e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}^*} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r+s}}^* \right).$$

Damit verschwindet  $\langle G, \iota_F(H_1 \wedge H_2) \rangle_\xi$  nur dann nicht, falls gilt:

- $\#\{k_1, \dots, k_{r+s-1}\} = r + s - 1$ ,
- $k \in \{i_1, \dots, i_{r+s}\}$  und
- $\{k_1, \dots, k_{r+s-1}\} = \{i_1, \dots, i_{r+s}\} \setminus \{k\}$ .

Da die Bedingungen, unter denen die beiden Ausdrücke notwendigerweise verschwinden, offenbar äquivalent sind, genügt die Betrachtung des Falles, in dem  $\langle F \wedge G, H_1 \wedge H_2 \rangle_\xi$  und  $\langle G, \iota_F(H_1 \wedge H_2) \rangle_\xi$  nicht verschwinden müssen. Die obigen Bedingungen seien also erfüllt, und es sei  $k = i_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, r + s\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle G, \iota_F(H_1 \wedge H_2) \rangle_\xi &= (-1)^{j-1} \cdot \langle e_k, e_k \rangle_\xi \cdot (-1)^{\#\{l \in \{k_1, \dots, k_{r+s-1}\} \mid l > n - \text{Index}(\xi)\}} \\ &\quad \cdot \text{sgn} \begin{pmatrix} k_1 \dots k_{r+s-1} \\ i_1 \dots \widehat{i_j} \dots i_{r+s} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\langle F \wedge G, H_1 \wedge H_2 \rangle_\xi = (-1)^{\#\{j \in \{i_1, \dots, i_{r+s}\} \mid j > n - \text{Index}(\xi)\}} \cdot \text{sgn} \begin{pmatrix} k, k_1 \dots k_{r+s-1} \\ i_1 \dots i_{r+s} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\langle F \wedge G, H_1 \wedge H_2 \rangle_\xi = \langle G, \iota_F(H_1 \wedge H_2) \rangle_\xi,$$

und da  $\iota_F(H_1 \wedge H_2)$  eindeutig bestimmt ist, ist die Regel (3) verifiziert.

4) Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle G, \iota_{F_1 \wedge F_2} H \rangle &= \langle (F_1 \wedge F_2) \wedge G, H \rangle_\xi \\ &= \langle F_1 \wedge (F_2 \wedge G), H \rangle_\xi \\ &= \langle F_2 \wedge G, \iota_{F_1} H \rangle_\xi \\ &= \langle G, \iota_{F_2}(\iota_{F_1} H) \rangle_\xi. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung**

a) Faßt man die äußere Multiplikation mit  $F \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$  als Abbildung

$$\begin{aligned} (F \wedge \cdot) : \Lambda_r \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_{r+s} \mathcal{V}^* \\ G &\longmapsto F \wedge G \end{aligned}$$

auf, so ist dies die zur inneren Multiplikation mit  $F$

$$\begin{aligned} \iota_F : \Lambda_{r+s} \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* \\ G &\longmapsto \iota_F G = \iota(G, F) \end{aligned}$$

adjungierte Abbildung bezüglich des Pseudoskalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi$ . Es gilt also für zwei Multilinearformen  $G \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  und  $H \in \Lambda_{r+s} \mathcal{V}^*$ :

$$\langle F \wedge G, H \rangle_\xi = \iota_{F \wedge G} H = \iota_G(\iota_F H) = \langle G, \iota_F H \rangle_\xi.$$

b) Mit der obigen rekursiven Vorschrift zur Berechnung des inneren Produktes folgt dessen Distributivität aus der Bilinearität des Pseudoskalarproduktes  $\xi$  :

Für  $r \geq s$  und  $F, F' \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ ,  $G, G' \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$ ,  $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} \iota_{(\mu G + \mu' G')} F &= \iota_{(\mu G)} F + \iota_{(\mu' G')} F \\ &= \mu \cdot \iota_G F + \mu' \cdot \iota_{G'} F \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \iota_G(\mu F + \mu' F') &= \iota_G(\mu F) + \iota_G(\mu' F') \\ &= \mu \cdot \iota_G F + \mu' \cdot \iota_G F'. \end{aligned}$$

**Beispiel**

Es sei  $n \geq 5$  und  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ .

Mit  $\xi_{ij} := \langle e_i^\xi, e_j^\xi \rangle_\xi \stackrel{(\text{Def.})}{=} \langle e_i, e_j \rangle_\xi$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , gilt dann:

$$\begin{aligned} &\iota_{e_1^\xi \wedge e_2^\xi} (e_3^\xi \wedge e_4^\xi \wedge e_5^\xi) \\ &= \iota_{e_2^\xi} \left( \iota_{e_1^\xi} (e_3^\xi \wedge e_4^\xi \wedge e_5^\xi) \right) \\ &= \iota_{e_2^\xi} \left( \left( \iota_{e_1^\xi} e_3^\xi \right) \wedge e_4^\xi \wedge e_5^\xi - e_3^\xi \wedge \left( \iota_{e_1^\xi} (e_4^\xi \wedge e_5^\xi) \right) \right) \\ &= \iota_{e_2^\xi} \left( \xi_{13} \cdot e_4^\xi \wedge e_5^\xi - e_3^\xi \wedge \left( \xi_{14} \cdot e_5^\xi - e_4^\xi \cdot \xi_{15} \right) \right) \\ &= \xi_{24} \xi_{13} e_5^\xi - \xi_{25} \xi_{13} e_4^\xi - \xi_{23} \xi_{14} e_5^\xi + \xi_{23} \xi_{15} e_4^\xi + \xi_{25} \xi_{14} e_3^\xi - \xi_{24} \xi_{15} e_3^\xi \\ &= (\xi_{14} \xi_{25} - \xi_{15} \xi_{24}) e_3^\xi + (\xi_{15} \xi_{23} - \xi_{13} \xi_{25}) e_4^\xi + (\xi_{13} \xi_{24} - \xi_{14} \xi_{23}) e_5^\xi. \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Bezüglich einer Basis  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  von  $\mathcal{V}^*$  und Basen

$$\{e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_r}^* \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n\} \text{ von } \Lambda_r \mathcal{V}^*, \quad 0 \leq r \leq n,$$

berechnet sich das innere Produkt von

$$\begin{aligned} F &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} F(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \cdot (e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge e_{k_p}^*) \in \Lambda_p \mathcal{V}^*, \\ G &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n} G(e_{k_1}, \dots, e_{k_q}) \cdot (e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge e_{k_q}^*) \in \Lambda_q \mathcal{V}^* \end{aligned}$$

für  $q \leq p$  wie folgt:

$$\begin{aligned}
\iota_G F &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} G(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \iota_{e_{j_q}^*} \circ \dots \circ \iota_{e_{j_2}^*} \\
&\quad \circ \iota_{e_{j_1}^*} \left( \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} F(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \cdot e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge e_{k_p}^* \right) \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} G(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \iota_{e_{j_q}^*} \circ \dots \circ \iota_{e_{j_3}^*} \\
&\quad \circ \iota_{e_{j_2}^*} \left( \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} F(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \right. \\
&\quad \quad \cdot \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} \cdot \langle e_{j_1}^*, e_{k_l}^* \rangle_{\xi} \cdot e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{e_{k_l}^*} \wedge \dots \wedge e_{k_p}^* \left. \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n}} G(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \cdot F(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \cdot \sum_{\substack{\{l_1, \dots, l_p\} = \{k_1, \dots, k_p\} \\ l_{q+1} < \dots < l_p}} \langle e_{j_1}^*, e_{l_1}^* \rangle_{\xi} \cdots \\
&\quad \cdots \langle e_{j_q}^*, e_{l_q}^* \rangle_{\xi} \cdot \text{sign} \binom{l_1, \dots, l_p}{k_1, \dots, k_p} e_{l_{q+1}}^* \wedge \dots \wedge e_{l_p}^* .
\end{aligned}$$

Für den Fall, daß  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  die duale Basis zu einer Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  ist, erhält man:

$$\begin{aligned}
\iota_G F &= \sum_{\substack{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n, 1 \leq j_{q+1} < \dots < j_p \leq n \\ \{j_1, \dots, j_p\} = \{k_1, \dots, k_p\}}} G(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \cdot F(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \\
&\quad \cdot (-1)^{\#\{l \in \{1, \dots, q\} | j_l > n - \text{Index}(\xi)\}} \cdot \text{sign} \binom{j_1, \dots, j_p}{k_1, \dots, k_p} e_{j_{q+1}}^* \wedge \dots \wedge e_{j_p}^* .
\end{aligned}$$

### Bemerkung

a) Für  $F_1, F_2 \in \Lambda_p \mathcal{V}^*$  gilt:

$$\langle F_1, F_2 \rangle_{\xi} = \langle F_1 \wedge 1, F_2 \rangle_{\xi} = \langle 1, \iota_{F_1} F_2 \rangle_{\xi} = \iota_{F_1} F_2 ,$$

und somit folgt die Symmetrie:

$$\iota_{F_1} F_2 = \langle F_1, F_2 \rangle_{\xi} = \langle F_2, F_1 \rangle_{\xi} = \iota_{F_2} F_1 .$$

b) Für eine Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  mit zugehöriger  $\xi$ -Basis  $(e_1^{\xi}, \dots, e_n^{\xi})$  von  $\mathcal{V}^*$  und

$$F_1 = \alpha_1 e_{i_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{i_p}^{\xi} , \quad F_2 = \alpha_2 e_{j_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{j_p}^{\xi} \in \Lambda_p \mathcal{V}^*$$

erhält man speziell:

$$\begin{aligned}
\iota_{F_1} F_2 &= \alpha_1 \cdot \iota_{e_{i_p}^{\xi}} \circ \dots \circ \iota_{e_{i_1}^{\xi}} \left( \alpha_2 e_{j_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{j_p}^{\xi} \right) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \cdot \iota_{e_{i_p}^{\xi}} \circ \dots \circ \iota_{e_{i_2}^{\xi}} \left( \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \langle e_{i_1}, e_{j_k} \rangle_{\xi} e_{j_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{j_k}^{\xi}} \wedge \dots \wedge e_{j_p}^{\xi} \right) \\
&= \dots = \alpha_1 \alpha_2 \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) \langle e_{i_1}, e_{j_{\sigma(1)}} \rangle_{\xi} \cdots \langle e_{i_p}, e_{j_{\sigma(p)}} \rangle_{\xi} \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \det \left( \langle e_{i_k}, e_{j_l} \rangle_{\xi} \right)_{k,l=1}^p = \langle F_1, F_2 \rangle_{\xi} = \langle F_2, F_1 \rangle_{\xi} = \iota_{F_2} F_1 .
\end{aligned}$$

### I.3.4 Orientierung und kanonische n-Form

#### Definition 7

Es sei  $n \geq 1$  und  $\mathfrak{B}$  die Menge der (geordneten) Basen  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$ .

Für zwei Basen  $\mathfrak{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathfrak{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathfrak{B}$  sei

$$T = \left( (s_{ij})_{i,j=1}^n \right)^{-1} \quad \text{mit} \quad w_i = \sum_{j=1}^n s_{ji} v_j, \quad i = 1, \dots, n$$

der Basiswechsel. Dann heißen  $\mathfrak{v}$  und  $\mathfrak{w}$

- *gleich orientiert*, wenn die Determinante  $\det(T)$  des Basiswechsels positiv ist,
- *entgegengesetzt orientiert*, wenn die Determinante des Basiswechsels negativ ist.

Durch die (offensichtliche) Äquivalenzrelation „gleich orientiert“ erhält man eine eindeutig bestimmte (disjunkte) Zerlegung der Basen in zwei gleichmächtige Äquivalenzklassen

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_+ \dot{\cup} \mathfrak{B}_-,$$

so daß für  $\epsilon \in \{+, -\}$  je zwei Basen  $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathfrak{B}_\epsilon$  gleich orientiert sind. Diese beiden Klassen heißen die *Orientierungen* auf  $\mathcal{V}$ . Die Elemente  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{B}_+$  heißen *positiv orientiert*, die Elemente  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{B}_-$  *negativ orientiert*.

Ein *orientierter Vektorraum* ist ein Vektorraum  $\mathcal{V}$  mit gewählten Orientierungen  $\mathfrak{B}_+ \dot{\cup} \mathfrak{B}_-$  auf  $\mathcal{V}$ .

#### Bemerkung

Die Bezeichnung mit  $\mathfrak{B}_+$  ( $\mathfrak{B}_-$ ) sowie mit positiv (negativ) ist dabei willkürlich und kann ebenso ausgetauscht werden.

#### Schreibweise

Für einen orientierten Vektorraum  $\mathcal{V}$  bezeichne

$$\mathfrak{B}(\mathcal{V}) = \mathfrak{B}_+(\mathcal{V}) \dot{\cup} \mathfrak{B}_-(\mathcal{V})$$

die Zerlegung in positiv orientierte und negativ orientierte Basen.

$\text{or} : \mathfrak{B}(\mathcal{V}) \rightarrow \{-1, +1\}$  sei die durch die Orientierung eindeutig bestimmte Abbildung mit

$$\text{or}(\mathfrak{v}) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \mathfrak{v} \in \mathfrak{B}_+(\mathcal{V}), \\ -1 & \text{falls } \mathfrak{v} \in \mathfrak{B}_-(\mathcal{V}). \end{cases}$$

Da durch Auszeichnung einer Orientierung auf einer Basis  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{B}(\mathcal{V})$  eine Orientierung auf ganz  $\mathcal{V}$  festgelegt ist, wird im folgenden eine Orientierung auch durch  $(\mathfrak{v}, \epsilon)$  mit  $\epsilon \in \{+1, -1\}$  und  $\text{or}(\mathfrak{v}) = \epsilon$  bezeichnet.

#### Vorbemerkung (zur kanonischen n-Form)

Für eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  mit zugehöriger  $\xi$ -Basis  $(v_1^\xi, \dots, v_n^\xi)$  von  $\mathcal{V}^*$  sowie  $\xi_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle_\xi$  läßt sich wegen

$$\begin{aligned} 0 &\neq v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_n^\xi \\ &\Rightarrow 0 \neq \left\langle v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_n^\xi, v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_n^\xi \right\rangle_\xi = \det (\xi_{ij})_{i,j=1}^n \end{aligned}$$

eine  $n$ -Form  $E_{(v_1, \dots, v_n)} \in \Lambda_n \mathcal{V}^*$  definieren durch

$$E_{(v_1, \dots, v_n)} := \frac{1}{\sqrt{|\det(\xi_{ij})_{i,j=1}^n|}} v_1^\xi \wedge \dots \wedge v_n^\xi.$$

Für diese  $n$ -Form gilt

$$\iota_{E_{(v_1, \dots, v_n)}} E_{(v_1, \dots, v_n)} = \langle E_{(v_1, \dots, v_n)}, E_{(v_1, \dots, v_n)} \rangle_\xi = \frac{1}{|\det(\xi_{ij})|} \det(\xi_{ij}) = \pm 1.$$

Für eine Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathcal{V}$  erhält man den Zusammenhang mit dem Index des Pseudoskalarproduktes  $\xi$ . In diesem Fall ist

$$E_{(e_1, \dots, e_n)} = e_1^\xi \wedge \dots \wedge e_n^\xi = (-1)^{\text{Index}(\xi)} e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} \iota_{E_{(e_1, \dots, e_n)}} E_{(e_1, \dots, e_n)} &= \langle E_{(e_1, \dots, e_n)}, E_{(e_1, \dots, e_n)} \rangle_\xi \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle_\xi \cdots \langle e_n, e_n \rangle_\xi = (-1)^{\text{Index}(\xi)}. \end{aligned}$$

Nun ist eine  $n$ -Form  $E$  wegen  $\dim(\Lambda_n \mathcal{V}^*) = 1$  durch die Gleichung

$$\iota_E E = (-1)^{\text{Index}(\xi)}$$

bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Daher wird  $E$  noch folgendermaßen normiert:

### Definition 8

a) Auf  $\mathcal{V}$  sei eine *Standard-Orientierung* dadurch festgelegt, daß eine beliebige, aber fest gewählte *Standard-Orthonormalbasis*

$$\mathfrak{b}_s := (e_1, \dots, e_n) \in \mathfrak{B}$$

als positiv orientiert definiert wird, es sei also  $\mathfrak{b}_s \in \mathfrak{B}_+$ .

b) Die *kanonische  $n$ -Form*  $E \in \Lambda_n \mathcal{V}^*$  auf  $\mathcal{V}$  ist die eindeutig bestimmte  $n$ -Form, so daß für jede positiv orientierte Orthonormalbasis  $(e'_1, \dots, e'_n) \in \mathfrak{B}_+$  gilt:

$$E(e'_1, \dots, e'_n) = (-1)^{\text{Index}(\xi)}.$$

### Bemerkung

a) Wegen  $\dim(\mathcal{V}) = n$  und  $\dim(\Lambda_n \mathcal{V}^*) = 1$  ist  $E$  als Vielfaches der Determinantenform durch die obige Definition eindeutig bestimmt und wohldefiniert. Mit der gewählten Standard-Orthonormalbasis gilt dabei:

$$E = e_1^\xi \wedge \dots \wedge e_n^\xi,$$

denn für jede positiv orientierte Orthonormalbasis  $(e'_1, \dots, e'_n) \in \mathfrak{B}_+$  ist

$$E(e'_1, \dots, e'_n) = \det \left( e_i^\xi(e'_j) \right)_{i,j=1}^n = \det \left( \langle e_i, e'_j \rangle_\xi \right)_{i,j=1}^n = (-1)^{\text{Index}(\xi)}.$$

Es gilt also insbesondere auch:

$$E = (e'_1)^\xi \wedge \dots \wedge (e'_n)^\xi.$$

b) Man erhält mit der gewählten Standard-Orientierung

$$\mathfrak{B}_+ = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{B} \mid (-1)^{\text{Index}(\xi)} \cdot E(v_1, \dots, v_n) > 0 \right\},$$

$$\mathfrak{B}_- = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{B} \mid (-1)^{\text{Index}(\xi)} \cdot E(v_1, \dots, v_n) < 0 \right\},$$

denn für  $v_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i e_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt

$$\begin{aligned} E(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}} \alpha_{i_1}^1 \cdots \alpha_{i_n}^n \cdot E(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} \cdot \det(\alpha_j^i)_{i,j=1}^n, \end{aligned}$$

die Determinante des Basiswechsels hat also das entsprechende Vorzeichen.

c) Im Fall  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt und -Orientierung mißt  $E(v_1, \dots, v_n)$  das orientierte Volumen des von  $v_1, \dots, v_n$  aufgespannten Parallelotops. Deshalb wird  $E$  auch *Volumenform* genannt.

Man erhält in diesem Fall für  $v_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i e_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} E(v_1, \dots, v_n) &= (e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(v_1, \dots, v_n) \\ &= \det(\alpha_i^j)_{i,j=1}^n = \sqrt{\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle} \end{aligned}$$

und insbesondere

$$E(e_1, \dots, e_n) = \sqrt{\langle E, E \rangle} = 1.$$

### Definition 9

Eine Orientierung auf  $\mathcal{V}$  induziert eine Orientierung auf  $(n+1)$ -Tupeln affin linear unabhängiger Punkte in  $\mathcal{M}$  sowie auf von diesen Punkten aufgespannten  $n$ -Simplizes:

a) Seien  $P_0, \dots, P_n \in \mathcal{M}$  affin linear unabhängig und  $v_i := P_0 \vec{P}_i \in \mathcal{V}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann heißt das geordnete  $(n+1)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_n)$

- *positiv orientiert*  $:\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{B}_+$ ,
- *negativ orientiert*  $:\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{B}_-$ .

b) Eine *Orientierung des Punktraums*  $\mathcal{M}$  ist die durch die Orientierung des zugehörigen Vektorraums induzierte disjunkte Zerlegung der Menge geordneter  $(n+1)$ -Tupel affin linear unabhängiger Punkte in  $\mathcal{M}$  in die Menge positiv orientierter und die Menge negativ orientierter  $(n+1)$ -Tupel.

c) Sei  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine konvexe Teilmenge mit  $\text{aff}(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$ , dann heißt eine bijektive affin lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{N} \rightarrow \Phi(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$

- *orientierungserhaltend* (oder *orientierungstreu*), falls  $L_\Phi$  die Orientierung von  $\mathcal{V}$  erhält, wenn also mit  $\epsilon \in \{+, -\}$  für eine orientierte Basis  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{B}_\epsilon$  stets auch  $(L_\Phi(v_1), \dots, L_\Phi(v_n)) \in \mathfrak{B}_\epsilon$  gilt, und
- *orientierungsumkehrend*, falls  $\Phi$  nicht orientierungserhaltend ist.

d) Ein *positiv (negativ) orientiertes  $n$ -Simplex* ist ein orientiertes  $n$ -Simplex  $\langle (P_0, \dots, P_n) \rangle$ , dessen  $(n+1)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_n)$  der Eckpunkte positiv (negativ) orientiert ist.

**Bemerkung**

a) Für eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  gilt:

- $\Phi$  ist genau dann orientierungserhaltend, wenn gilt:

$$\text{sign}(E(L_\Phi(v_1), \dots, L_\Phi(v_n))) = \text{sign}(E(v_1, \dots, v_n)),$$

- $\Phi$  ist genau dann orientierungsumkehrend, wenn gilt:

$$\text{sign}(E(L_\Phi(v_1), \dots, L_\Phi(v_n))) = -\text{sign}(E(v_1, \dots, v_n)).$$

b) Die durch die Orientierung auf  $\mathcal{V}$  induzierte Orientierung auf Simplizes ist mit der Definition in Kapitel I.1.3 auf Seite 15 verträglich.

Sei dazu  $\sigma : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  eine Permutation,  $(P_0, \dots, P_n)$  ein geordnetes  $(n+1)$ -Tupel,  $v_i := P_i - P_0 \in \mathcal{V}$  und  $w_i := P_{\sigma(i)} - P_{\sigma(0)} \in \mathcal{V}$  für  $i = 1, \dots, n$ .

- Ist  $\sigma(0) = 0$ , so gilt  $w_i = P_{\sigma(i)} - P_0 = v_{\sigma(i)}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Damit hat die Determinante des Basiswechsels von  $(v_1, \dots, v_n)$  nach  $(w_1, \dots, w_n)$  das gleiche Vorzeichen wie die Permutation  $\sigma$ .
- Es genügt nun, die (ungerade) Permutation

$$(P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(n)}) = (P_1, P_0, P_2, \dots, P_n)$$

zu betrachten, da sich für jedes  $\mu : \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{0, \dots, n\}$  mit  $\mu(0) \neq 0$  die Permutation der Eckpunkte als Verkettung

$$\begin{aligned} (P_0, P_1, \dots, P_n) &\rightsquigarrow (P_0, P_{\mu(0)}, P_2, \dots, P_{\mu(0)-1}, P_1, P_{\mu(0)+1}, \dots, P_n) \\ &\rightsquigarrow (P_{\mu(0)}, P_0, P_2, \dots, P_{\mu(0)-1}, P_1, P_{\mu(0)+1}, \dots, P_n) \\ &\rightsquigarrow (P_{\mu(0)}, P_{\mu(1)}, \dots, P_{\mu(n)}) \end{aligned}$$

schreiben läßt. Damit gilt:

$$(w_1, \dots, w_n) = (-v_1, -v_1 + v_2, \dots, -v_1 + v_n).$$

Folglich sind  $(v_1, \dots, v_n)$  und  $(w_1, \dots, w_n)$  wegen

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1$$

entgegengesetzt orientiert.

c) Zur Wahl einer Orientierung besteht auch die Möglichkeit, von geordneten  $(n+1)$ -Tupeln affin linear unabhängiger Punkte auszugehen und als Äquivalenzrelation gerade Permutationen solcher Tupel zu betrachten. Auf diesem Weg induziert ein positiv orientiertes  $n$ -Simplex  $\langle (P_0, \dots, P_n) \rangle$  eine positive Orientierung einer Basis  $(P_0 \vec{P}_1, \dots, P_0 \vec{P}_n)$  und damit auf dem zugehörigen Verschiebungsvektorraum sowie auf dem von den Punkten aufgespannten affinen Punktraum.

d) Im folgenden werden Orientierungen auf Punkträumen und Orientierungen auf den zugehörigen Verschiebungsvektorräumen synonym behandelt.

### I.3.5 Die Dualitätsabbildung

Der Zusammenhang

$$\dim(\Lambda_r \mathcal{V}^*) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \binom{n}{n-r} = \dim(\Lambda_{n-r} \mathcal{V}^*)$$

zeigt, daß die Vektorräume  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$  und  $\Lambda_{n-r} \mathcal{V}^*$  identifiziert werden können. Dazu soll nun ein von  $\xi$  abhängiger Isomorphismus eingeführt werden:

#### Definition 10

Die *Dualitätsabbildung* ist für  $0 \leq r \leq n$  definiert durch

$$\begin{aligned} * &= *_{\xi}^r : \Lambda_r \mathcal{V}^* \longrightarrow \Lambda_{n-r} \mathcal{V}^* \\ F &\longmapsto *F := \iota_F E . \end{aligned}$$

#### Bemerkung

a) Die Dualitätsabbildung ist ein Isomorphismus, also insbesondere bijektiv:

Dazu sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}$  und  $0 \leq r \leq n$ .

Für ein Basiselement

$$e_{i_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{i_r}^{\xi} \in \left\{ e_{j_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{j_r}^{\xi} \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n \right\} \subset \Lambda_r \mathcal{V}^*$$

und  $\{i_1, \dots, i_r, i_{r+1}, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$  erhält man:

$$\begin{aligned} * \left( e_{i_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{i_r}^{\xi} \right) &= \iota_{e_{i_1}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{i_r}^{\xi}} E = \iota_{e_{i_r}^{\xi}} \circ \dots \circ \iota_{e_{i_1}^{\xi}} \left( e_1^{\xi} \wedge \dots \wedge e_n^{\xi} \right) \\ &= \text{sign} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} \langle e_{i_1}, e_{i_1} \rangle_{\xi} \cdots \langle e_{i_r}, e_{i_r} \rangle_{\xi} \left( e_{i_{r+1}}^{\xi} \wedge \dots \wedge e_{i_n}^{\xi} \right) . \end{aligned}$$

Folglich ist die Dualitätsabbildung eine Bijektion der Basiselemente und somit ein Isomorphismus der Vektorräume.

b) Der Name „Dualitätsabbildung“ ist motiviert durch die Möglichkeit, vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} [\cdot, G] &: \Lambda_r \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ F &\longmapsto [F, G] \end{aligned}$$

für  $G \in \Lambda_{n-r} \mathcal{V}^*$ , wobei  $[F, G]$  durch die Gleichung

$$F \wedge G = [F, G] \cdot E \in \Lambda_n \mathcal{V}^*$$

eindeutig definiert ist, den Vektorraum  $\Lambda_{n-r} \mathcal{V}^*$  als Dualraum von  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$  aufzufassen.

Mit den im Anschluß aufgeführten Eigenschaften d) und b) erhält man

$$\begin{aligned} F \wedge G &= (-1)^{r(n-r)+\text{Index}(\xi)} F \wedge (*(*G)) \\ &= (-1)^{r(n-r)+\text{Index}(\xi)} \iota_F * G \cdot E , \end{aligned}$$

folglich ist

$$[F, G] = (-1)^{r(n-r)+\text{Index}(\xi)} \iota_F * G .$$

**Lemma 4** (Eigenschaften der Dualitätsabbildung)

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} *1 &= E, \\ *E &= (-1)^{\text{Index}(\xi)}. \end{aligned}$$

b) Für  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  gilt:

$$*(F) = (-1)^{r(n-r)+\text{Index}(\xi)} F.$$

c) Bezüglich obigen Dualitätsbegriffes sind innere und äußere Multiplikation zueinander duale Abbildungen, denn für  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ ,  $G \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$ ,  $r \leq n - s$  gilt:

$$\iota_F(*G) = *(G \wedge F).$$

Man hat also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_s \mathcal{V}^* & \xrightarrow{\wedge^F} & \Lambda_{r+s} \mathcal{V}^* \\ * \downarrow & \circlearrowleft & * \downarrow \\ \Lambda_{n-s} \mathcal{V}^* & \xrightarrow{\iota_F(\dots)} & \Lambda_{n-r-s} \mathcal{V}^* \end{array}$$

d) Für  $F, G \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  gilt:

$$F \wedge *G = \iota_F G \cdot E = G \wedge *F = (-1)^{\text{Index}(\xi)} \iota_{*F}(*G) \cdot E.$$

Beweis:

a) Anwendung der Definition:

$$\begin{aligned} *1 &= \iota_1 E = 1 \cdot E, \\ *E &= \iota_E E = (-1)^{\text{Index}(\xi)}. \end{aligned}$$

b) Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}$ . Mit  $\xi_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle_\xi$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , und

$$\begin{aligned} F &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} F(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_r}^*, \\ E &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} *(F) &= * \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-1)^{\text{Index}(\xi)} \cdot F(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \right. \\ &\quad \left. \cdot \text{sign} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} \cdot \xi_{i_1 i_1} \dots \xi_{i_r i_r} \cdot e_{i_{r+1}}^* \wedge \dots \wedge e_{i_n}^* \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} F(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \cdot \underbrace{\xi_{i_1 i_1} \dots \xi_{i_n i_n}}_{(-1)^{\text{Index}(\xi)}} \\ &\quad \cdot \underbrace{\text{sign} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} \cdot \text{sign} \begin{pmatrix} i_{r+1} & \dots & i_n, i_1 & \dots & i_r \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}}_{(-1)^{r(n-r)}} \cdot e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_r}^*. \end{aligned}$$

c) Für  $F \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ ,  $G \in \Lambda_s \mathcal{V}^*$ ,  $r \leq n - s$  gilt:

$$\iota_F(*G) = \iota_F(\iota_G E) = \iota_{G \wedge F} E = *(G \wedge F) .$$

d) Seien  $F, G \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ . Durch Anwendung der schon bewiesenen Rechenregeln und Ausnutzung der Symmetrie des Pseudoskalarproduktes und damit des inneren Produktes zweier alternierender Multilinearformen gleichen Grades erhält man:

$$\begin{aligned} \underbrace{F \wedge *G}_{\in \Lambda_n \mathcal{V}^*} &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} * *(F \wedge *G) = (-1)^{\text{Index}(\xi)} * \underbrace{(\iota_{F \wedge *G} E)}_{\in \mathbb{R}} \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} (\iota_{F \wedge *G} E) \cdot E . \end{aligned}$$

Es folgen die zu beweisenden Identitäten:

$$\begin{aligned} F \wedge *G &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} (\iota_{*G}(\iota_F E)) \cdot E \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} \iota_{*G} * F \cdot E \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} \iota_{*F} * G \cdot E , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \wedge *G &= (-1)^{\text{Index}(\xi) + r(n-r)} (\iota_{*G \wedge F} E) \cdot E \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi) + r(n-r)} (\iota_F(* * G)) \cdot E \\ &= \iota_F G \cdot E , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \wedge *G &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} * (\iota_{*G}(\iota_F E)) \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} * (\iota_{*G} * F) \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} * (\iota_{*F} * G) \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} * (\iota_{*F}(\iota_G E)) \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} * (\iota_{G \wedge *F} E) \\ &= (-1)^{\text{Index}(\xi)} * *(G \wedge *F) \\ &= G \wedge *F . \end{aligned}$$

□

## I.4 Affine $r$ -Formen

„Dieses Prinzip ist so vollkommen allgemein, daß keine Anwendung möglich ist.“

George Polya

Es werden affin polynomiale  $r$ -Formen als affin polynomiale Abbildungen von konvexen Teilmengen affiner Punkträume in den Vektorraum der  $r$ -fachen alternierenden Multilinearformen über dem zu dem affinen Punktraum gehörigen Verschiebungsvektorraum eingeführt. Affin polynomiale  $r$ -Formen ersten Grades, also affin lineare Abbildungen, heißen affine  $r$ -Formen. Alle weiteren Betrachtungen erfolgen im Hinblick auf die Anwendung und die damit verbundene Notwendigkeit, den Raum der affin linearen Formen nicht zu verlassen, um so die Möglichkeit zu erhalten, die Abbildungen als eindeutig bestimmte Interpolierende mit in affin linear unabhängigen Punkten gegebenen Werten zu identifizieren. Dabei werden neben den von alternierenden Multilinearformen durch punktweise Betrachtung vererbten Operationen die äußere Ableitung, die mittels einer affin linearen Abbildung zurückgeholte Form und unter Verwendung des Hodge-Operators, der punktweise durch die Dualitätsabbildung definiert wird, die Koableitung als Verallgemeinerung der Divergenz eingeführt.

### I.4.1 Grundbegriffe

Im folgenden sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum,  $\mathcal{V}$  der zugehörige Vektorraum der Parallelverschiebungen und  $S_r$  für  $r \in \mathbb{N}$  die Menge der Permutationen von  $\{1, \dots, r\}$ .

#### Definition 1

Es sei  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine nichtleere konvexe Teilmenge und  $\mathcal{U}$  der zu  $\text{aff}(\mathcal{N})$  gehörige Verschiebungsvektorraum.

Eine *affin polynomiale  $r$ -Form* vom Grad  $q$  auf  $\mathcal{N}$  ist eine affin polynomiale Abbildung

$$\eta : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{U}^*$$

vom Grad  $q$ .

$\Omega_r^q(\mathcal{N})$  bezeichnet die Menge der affin polynomialen  $r$ -Formen vom Grad  $q$  auf  $\mathcal{N}$ .

Eine *affine  $r$ -Form* auf  $\mathcal{N}$  ist eine affin polynomiale  $r$ -Form vom Grad 1, also eine affin lineare Abbildung

$$\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{U}^* .$$

Mit  $\Omega_r(\mathcal{N}) := \Omega_r^1(\mathcal{N})$  wird die Menge der affinen  $r$ -Formen auf  $\mathcal{N}$  bezeichnet.

Für  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  und  $P \in \mathcal{N}$  ist der Wert von  $\omega$  an der Stelle  $P$  definiert durch

$$\omega_P := \omega(P) \in \Lambda_r \mathcal{U}^* .$$

Da  $\mathcal{N}$  stets eine maximaldimensionale konvexe Teilmenge in  $\text{aff}(\mathcal{N})$  ist, sei im folgenden zur Vereinfachung  $\mathcal{N}$  als maximaldimensional in  $\mathcal{M}$  angenommen, es sei also  $\text{aff}(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$  und  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ .

**Bemerkung**

a)  $\Omega_r^q(\mathcal{N})$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum vermöge der Vektorraumoperationen in  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$ :

$$(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2)_P := \alpha_1 (\omega_1)_P + \alpha_2 (\omega_2)_P \\ \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega_r^q(\mathcal{N}), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, P \in \mathcal{N}.$$

b) Für  $q_1 \leq q_2$  ist  $\Omega_r^{q_1}(\mathcal{N}) \subset \Omega_r^{q_2}(\mathcal{N})$  ein Untervektorraum.

c) Für  $\omega \in \Omega_0^q(\mathcal{N})$  gilt:

$$\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_0 \mathcal{V}^* = \mathbb{R},$$

$\Omega_0^q(\mathcal{N})$  ist also die Menge der affinen Polynome  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $q$ , speziell ist  $\Omega_0(\mathcal{N})$  die Menge der affin linearen Abbildungen von  $\mathcal{N}$  nach  $\mathbb{R}$ .

d) Wegen  $\Lambda_n \mathcal{V}^* \cong \Lambda_0 \mathcal{V}^* = \mathbb{R}$  gilt die obige Aussage entsprechend für  $\omega \in \Omega_n^q(\mathcal{N})$ .

e) Für  $r > n$  ist  $\Lambda_r \mathcal{V}^* = 0$  und damit auch

$$\Omega_r^q(\mathcal{N}) = \{f : \mathcal{N} \rightarrow 0\} = 0 \quad \forall q \geq 0.$$

**Lemma 1**

a) Sei  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  eine Basis von  $\mathcal{V}^*$ . Dann ist die Menge  $(dv_1^*, \dots, dv_n^*)$  mit

$$dv_i^* : \mathcal{N} \longrightarrow \Lambda_1 \mathcal{V}^* \\ P \longmapsto dv_i^*(P) = (dv_i^*)_P := v_i^*$$

eine Basis des Vektorraums der konstanten 1-Formen  $\Omega_1^0(\mathcal{N})$ .

b) Es gilt:

$$\dim(\Omega_1(\mathcal{N})) = n^2 + n.$$

Beweis:

a) Für die konstanten und damit insbesondere affin linearen Abbildungen gilt offenbar

$$dv_i^* \in \Omega_1(\mathcal{N}) \cong \{\omega : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{V}^* \mid \omega \text{ affin linear}\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Basiseigenschaft der Menge der (konstanten) 1-Formen  $(dv_1^*, \dots, dv_n^*)$  folgt unmittelbar aus der punktweisen Definition der Vektorraumoperationen auf  $\Omega_1(\mathcal{N})$  und der Basiseigenschaft von  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ .

b) Aus

$$\Omega_1(\mathcal{N}) = \text{Aff}(\mathcal{N}, \Lambda_1 \mathcal{V}^*) \cong \text{Aff}(\mathcal{M}, \Lambda_1 \mathcal{V}^*)$$

erhält man mit der Folgerung auf Seite 25:

$$\dim(\Omega_1(\mathcal{N})) = (n+1) \cdot \binom{n}{1} = n^2 + n.$$

□

**Definition 2**

Für  $\omega_1 \in \Omega_1^{q_1}(\mathcal{N}), \dots, \omega_r \in \Omega_1^{q_r}(\mathcal{N})$  ist das *äußere Produkt*

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) \in \Omega_r^{q_1 + \dots + q_r}(\mathcal{N})$$

definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r)_P := (\omega_1)_P \wedge \dots \wedge (\omega_r)_P \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

**Bemerkung**

Für  $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega_1(\mathcal{N})$  mit

$$\#\{j \in \{1, \dots, r\} \mid \omega_j \in \Omega_1^0(\mathcal{N})\} \geq r - 1$$

(es darf also höchstens ein  $\omega_j$  nichtkonstant sein) ist das äußere Produkt eine affine  $r$ -Form:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) \in \Omega_r(\mathcal{N}).$$

**Folgerung**

a) Für eine Basis  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  von  $\mathcal{V}^*$  und  $1 \leq r \leq n$  ist

$$\{dv_{j_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{j_r}^* \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n\}$$

eine Basis des Vektorraums der konstanten  $r$ -Formen  $\Omega_r^0(\mathcal{N})$ .

b) Mit den Formeln von Seite 31 und Seite 39 erhält man:

$$\dim(\Omega_r^q(\mathcal{N})) = \dim(\mathcal{P}^q(\mathcal{N}, \Lambda_r \mathcal{V}^*)) = \binom{n}{r} \cdot \binom{n+q}{q} = \frac{(n+q)!}{r!(n-r)!q!}$$

und speziell

$$\dim(\Omega_r(\mathcal{N})) = (n+1) \binom{n}{r}.$$

**Schreibweise**

Für  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  und  $P \in \mathcal{N}$  ist  $\omega_P \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ , also gilt:

$$\begin{aligned} \omega_P &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r}(P) \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r}(P) \cdot (dv_{i_1}^*)_P \wedge \dots \wedge (dv_{i_r}^*)_P \end{aligned}$$

und folglich

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} \cdot dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^*$$

mit affin polynomialen Abbildungen vom Grad  $q$  :

$$\alpha_{i_1, \dots, i_r} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n.$$

(Im Fall  $\omega \in \Omega_r(\mathcal{N})$  sind dies affin lineare Abbildungen.)

**Definition 3**

Für  $\omega_1 \in \Omega_{r_1}^{q_1}(\mathcal{N})$  und  $\omega_2 \in \Omega_{r_2}^{q_2}(\mathcal{N})$  ist das *äußere Produkt*  $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_{r_1+r_2}^{q_1+q_2}(\mathcal{N})$  definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)_P := (\omega_1)_P \wedge (\omega_2)_P \in \Lambda_{r_1+r_2} \mathcal{V}^* \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

**Bemerkung**

Für  $\omega \in \Omega_r(\mathcal{N})$ ,  $\eta \in \Omega_s(\mathcal{N})$  sei  $\omega|_{\mathcal{N}}$  konstant oder  $\eta|_{\mathcal{N}}$  konstant.

Dann ist das äußere Produkt eine affine  $(r+s)$ -Form:

$$\omega \wedge \eta \in \Omega_{r+s}(\mathcal{N}).$$

In den Fällen

$$\begin{aligned} \eta \in \Omega_s(\mathcal{N}), f \in \Omega_0^0(\mathcal{N}) &= \{f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ konstant}\} \quad \text{sowie} \\ \eta \in \Omega_s^0(\mathcal{N}), f \in \Omega_0(\mathcal{N}) &= \{f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ affin linear}\} \end{aligned}$$

erhält man speziell:

$$f \wedge \eta = f \cdot \eta = \eta \wedge f \in \Omega_s(\mathcal{N}).$$

**I.4.2 Zurückgeholte Form und äußere Ableitung****Definition 4**

Es seien  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$  maximaldimensionale konvexe Teilmengen affiner Punkträume mit zugehörigen Verschiebungsvektorräumen  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{V}'$ . Weiter sei  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  affin linear und es sei  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$ .

Die mittels  $\Phi$  zurückgeholte affin polynomiale  $r$ -Form  $\Phi^* \omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N}')$  ist definiert durch

$$(\Phi^* \omega)_Q(v_1, \dots, v_r) := \omega_{\Phi(Q)}(L_{\Phi}(v_1), \dots, L_{\Phi}(v_r)) \quad \forall Q \in \mathcal{N}', v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V}'.$$

**Definition 5**

Es seien  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{V}$  wie oben, und es sei  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$ . Weiter sei die Abbildung

$$\begin{aligned} F_{\omega} : \mathcal{N} &\longrightarrow M_{r+1} \mathcal{V}^* \\ P &\longmapsto F_{\omega}(P) = F_{\omega}|_P \end{aligned}$$

definiert durch

$$F_{\omega}|_P(v_1, v_2, \dots, v_{r+1}) := (D\omega|_P)(v_1)(v_2, \dots, v_{r+1}) \quad \forall P \in \mathcal{N}, v_1, \dots, v_{r+1} \in \mathcal{V}.$$

Dann ist die *äußere Ableitung*  $d\omega \in \Omega_{r+1}^{q-1}(\mathcal{N})$  von  $\omega$  definiert durch

$$(d\omega)_P := (r+1) \cdot \text{Alt}(F_{\omega}|_P) \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

**Bemerkung**

Für  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  und  $P \in \mathcal{N}$  ist  $D\omega|_P \in \text{Hom}(\mathcal{V}, \Lambda_r \mathcal{V}^*)$ . Damit ist die Abbildung

$$F_{\omega}|_P : \mathcal{V}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

in jeder Komponente linear und in den hinteren  $r$  Komponenten alternierend.

**Folgerung**

- a) Ist  $\omega$  affin linear, also  $\omega \in \Omega_r(\mathcal{N})$  mit der (eindeutig bestimmten) zugehörigen linearen Abbildung  $L_\omega : \mathcal{V} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$ , so ist die oben definierte Abbildung  $F_\omega$  konstant. Daher setzt man in diesem Fall  $F_\omega \in M_{r+1} \mathcal{V}^*$  mit

$$F_\omega(v_1, v_2, \dots, v_{r+1}) := L_\omega(v_1)(v_2, \dots, v_{r+1}) \quad \forall v_1, \dots, v_{r+1} \in \mathcal{V},$$

und es gilt für die äußere Ableitung  $d\omega \in \Omega_{r+1}^0(\mathcal{N}) \subset \Omega_{r+1}(\mathcal{N})$  von  $\omega$  :

$$(d\omega)_P = (r+1) \cdot \text{Alt}(F_\omega) \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

- b) Mit der Folgerung auf Seite 41 erhält man für  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  :

$$\begin{aligned} (d\omega)_P(v_1, \dots, v_{r+1}) &= \frac{r+1}{(r+1)!} \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \text{sign}(\sigma) \\ &\quad \cdot (D\omega|_P)(v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+1} \\ \sigma(2) < \dots < \sigma(r+1)}} \text{sign}(\sigma) (D\omega|_P)(v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}) \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (D\omega|_P)(v_i)(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{r+1}) \\ &\quad \forall P \in \mathcal{N}, v_1, \dots, v_{r+1} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Im affin linearen Fall, also für  $\omega \in \Omega_r(\mathcal{N})$  erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned} (d\omega)_P(v_1, \dots, v_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} L_\omega(v_i)(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{r+1}) \\ &\quad \forall P \in \mathcal{N}, v_1, \dots, v_{r+1} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

**Lemma 2**

Es sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ ,  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  die zugehörige duale Basis von  $\mathcal{V}^*$  und

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$$

mit affin polynomialen Abbildungen

$$\alpha_{i_1, \dots, i_r} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$$

vom Grad  $q$ .

Dann gilt die *Koordinatendarstellung der äußeren Ableitung*:

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left( \sum_{j=1}^n (D\alpha_{i_1, \dots, i_r})(v_j) dv_j^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \right).$$

**Beweis:**

Es genügt offenbar, die Behauptung für einen einzelnen Summanden zu beweisen. Sei also  $\omega = \alpha dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^*$ ,  $P \in \mathcal{N}$  und  $w_1, \dots, w_{r+1} \in \mathcal{V}$ . Durch Einsetzen von

$$(D\omega|_P)(w_i) = (D\omega|_P) \left( \sum_{j=1}^n (v_j^*(w_i) \cdot v_j) \right) = \sum_{j=1}^n v_j^*(w_i) \cdot (D\omega|_P)(v_j)$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
d\omega_P(w_1, \dots, w_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \cdot (D\omega|_P)(w_i)(w_1, \dots, \widehat{w}_i, \dots, w_{r+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^n v_j^*(w_i) \cdot (D\omega|_P)(v_j)(w_1, \dots, \widehat{w}_i, \dots, w_{r+1}) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} v_j^*(w_i) \cdot ((D\alpha|_P)(v_j) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*)(w_1, \dots, \widehat{w}_i, \dots, w_{r+1}) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} v_j^*(w_i) \cdot (D\alpha|_P)(v_j) \\
&\quad \cdot \det \begin{pmatrix} v_{i_1}^*(w_1) & \dots & v_{i_1}^*(\widehat{w}_i) & \dots & v_{i_1}^*(w_{r+1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{i_r}^*(w_1) & \dots & v_{i_r}^*(\widehat{w}_i) & \dots & v_{i_r}^*(w_{r+1}) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n (D\alpha|_P)(v_j) \cdot \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \text{sign}(\sigma) \cdot v_j^*(w_{\sigma(1)}) \cdot v_{i_1}^*(w_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot v_{i_r}^*(w_{\sigma(r+1)}) \\
&= \sum_{j=1}^n (D\alpha|_P)(v_j) \cdot (v_j^* \wedge v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*)(w_1, \dots, w_{r+1}) \\
&= \left( \sum_{j=1}^n (D\alpha|_P)(v_j) \cdot (dv_j^*)_P \wedge (dv_{i_1}^*)_P \wedge \dots \wedge (dv_{i_r}^*)_P \right) (w_1, \dots, w_{r+1}) \\
&= \left( \sum_{j=1}^n D\alpha(v_j) dv_j^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \right)_P (w_1, \dots, w_{r+1}) .
\end{aligned}$$

□

### Folgerung

Für eine affine  $r$ -Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \in \Omega_r(\mathcal{N})$$

mit affin linearen Abbildungen

$$\alpha_{i_1, \dots, i_r} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} , 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$$

erhält man entsprechend als Koordinatendarstellung der äußeren Ableitung:

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left( \sum_{j=1}^n L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) dv_j^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \right) .$$

**Bemerkung**

Es seien  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$  maximaldimensionale konvexe Teilmengen affiner Punkträume mit zugehörigen Verschiebungsvektorräumen  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{V}'$ . Weiter sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  und  $(w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $\mathcal{V}'$ .

Schreibt man eine affin lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  mit Komponentenabbildungen

$$\Phi(P + w) = \Phi(P) + L_\Phi(w) = \Phi(P) + \sum_{i=1}^n (L_\Phi)_i(w) \cdot v_i,$$

so erhält man für

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$$

und

$$d\Phi_i := \sum_{j=1}^m (L_\Phi)_i(w_j) dw_j^*, \quad i = 1, \dots, n$$

die zurückgeholte Form

$$\Phi^* \eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (\alpha_{i_1, \dots, i_r} \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_r} \in \Omega_r^q(\mathcal{N}'),$$

denn es gilt für  $Q \in \mathcal{N}'$  und  $v = \sum_{j=1}^m w_j^*(v) w_j \in \mathcal{V}'$ :

$$\begin{aligned} (d\Phi_i)_Q(v) &= \sum_{j=1}^m (L_\Phi)_i(w_j) (dw_j^*)_Q(v) \\ &= \sum_{j=1}^m (L_\Phi)_i(w_j) \cdot w_j^*(v) \\ &= (L_\Phi)_i \left( \sum_{j=1}^m w_j^*(v) w_j \right) = (L_\Phi)_i(v) \\ &= v_i^*(L_\Phi(v)) = (dv_i^*)_{\Phi(Q)}(L_\Phi(v)) \quad \left( = (\Phi^* dv_i^*)_Q(v) \right). \end{aligned}$$

**Rechenregeln**

Es seien  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}'$ ,  $\mathcal{N}'' \subset \mathcal{M}''$  maximaldimensionale konvexe Teilmengen affiner Punkträume mit zugehörigen Verschiebungsvektorräumen  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}'$ ,  $\mathcal{V}''$ .

a) Für  $\omega_i \in \Omega_{r_i}^{q_i}(\mathcal{N})$ ,  $i = 1, 2, 3$  gilt:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) \quad \left( \in \Omega_{r_1+r_2+r_3}^{q_1+q_2+q_3}(\mathcal{N}) \right).$$

b) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$ ,  $\eta \in \Omega_s^q(\mathcal{N})$  gilt:

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{r \cdot s} \omega \wedge \eta \quad \left( \in \Omega_{r+s}^{p+q}(\mathcal{N}) \right).$$

c) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$ ,  $\eta \in \Omega_s^q(\mathcal{N})$  gilt:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta \quad \left( \in \Omega_{r+s+1}^{p+q-1}(\mathcal{N}) \right).$$

d) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  gilt:

$$d(d\omega) = 0.$$

e) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$ ,  $\eta \in \Omega_s^q(\mathcal{N})$  und eine affin lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  gilt:

$$\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\eta) \quad \left( \in \Omega_{r+s}^{p+q}(\mathcal{N}') \right).$$

f) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  und affin lineare Abbildungen  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$ ,  $\Psi : \mathcal{N}'' \rightarrow \mathcal{N}'$  gilt:

$$\Psi^*(\Phi^*\omega) = (\Phi \circ \Psi)^*\omega \quad \left( \in \Omega_r^q(\mathcal{N}'') \right).$$

g) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  und eine affin lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  gilt:

$$d(\Phi^*(\omega)) = \Phi^*(d\omega) \quad \left( \in \Omega_{r+1}^{p-1}(\mathcal{N}') \right).$$

Beweis: (Siehe auch [6, 9].)

- a) , b) folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften alternierender Multilinearformen.  
c) folgt aus der Produktregel

$$d(\alpha \cdot \beta) = d\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot d\beta$$

und der Rechenregel b).

d) Für  $\omega = \alpha dv_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge dv_{i_r}^* \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  gilt:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\alpha \wedge dv_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge dv_{i_r}^*) = d\alpha \wedge dv_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge dv_{i_r}^* \\ &\Rightarrow d(d\omega) = d(d\alpha \wedge dv_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge dv_{i_r}^*) = d(d\alpha) \wedge dv_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge dv_{i_r}^*. \end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung wegen

$$\begin{aligned} (d(d\alpha))|_P(v, w) &= D(d\alpha)|_P(v)(w) - D(d\alpha)|_P(w)(v) \\ &= D(D\alpha|_P(v))(w) - D(D\alpha|_P(w))(v) \\ &= D^2\alpha|_P(v, w) - D^2\alpha|_P(w, v). \end{aligned}$$

aus der Symmetrie der zweiten Ableitung.

- e) folgt aus der Definition von  $\Phi^*\omega$ .  
f) Für  $Q \in \mathcal{N}''$  und  $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{V}''$  gilt:

$$\begin{aligned} ((\Phi \circ \Psi)^*\omega)_Q(v_1, \dots, v_r) &= \omega_{(\Phi \circ \Psi)(Q)}(L_{\Phi \circ \Psi}(v_1), \dots, L_{\Phi \circ \Psi}(v_r)) \\ &= \omega_{\Phi(\Psi(Q))}(L_{\Phi}(L_{\Psi}(v_1)), \dots, L_{\Phi}(L_{\Psi}(v_r))) \\ &= (\Phi^*\omega)_{\Psi(Q)}(L_{\Psi}(v_1), \dots, L_{\Psi}(v_r)) \\ &= (\Psi^*(\Phi^*\omega))_Q(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

g) Es sei  $\alpha \in \Omega_0^p(\mathcal{N})$  eine affin polynomiale 0-Form,  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ ,  $(w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $\mathcal{V}'$  und  $L_\Phi = ((L_\Phi)_1, \dots, (L_\Phi)_n)$  in Komponentenabbildungen. Dann erhält man mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
d(\Phi^* \alpha) &= d(\alpha \circ \Phi) \\
&= \sum_{j=1}^m D(\alpha \circ \Phi)(w_j) dw_j^* \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (D\alpha(v_i) \circ \Phi) \cdot (L_\Phi)_i(w_j) dw_j^* \\
&= \sum_{i=1}^n (D\alpha(v_i) \circ \Phi) \cdot \sum_{j=1}^m (L_\Phi)_i(w_j) dw_j^* \\
&= \sum_{i=1}^n (D\alpha(v_i) \circ \Phi) d\Phi_i \\
&= \Phi^* \left( \sum_{i=1}^n D\alpha(v_i) dv_i^* \right) \\
&= \Phi^*(d\alpha) .
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun per Induktion für

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_r^p(\mathcal{N}) \text{ mit } \omega_1 \in \Omega_s^q(\mathcal{N}), \omega_2 \in \Omega_{r-s}^{p-q}(\mathcal{N})$$

unter Ausnutzung von c) und e):

$$\begin{aligned}
d(\Phi^* \omega) &= d(\Phi^* \omega_1 \wedge \Phi^* \omega_2) \\
&= d\Phi^* \omega_1 \wedge \Phi^* \omega_2 + (-1)^s \Phi^* \omega_1 \wedge d\Phi^* \omega_2 \\
&= \Phi^* d\omega_1 \wedge \Phi^* \omega_2 + (-1)^s \Phi^* \omega_1 \wedge \Phi^* d\omega_2 \\
&= \Phi^* (d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^s \omega_1 \wedge d\omega_2) \\
&= \Phi^* d\omega
\end{aligned}$$

und aufgrund der Linearität der Operatoren für beliebige  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$ .

□

### Definition 6

Es sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Punktraum mit zugehörigem Verschiebungsvektorraum  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine maximaldimensionale konvexe Teilmenge.

Eine affin polynomiale  $r$ -Form  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  heißt

- *geschlossen* : $\Leftrightarrow d\omega = 0$  ,
- *exakt* : $\Leftrightarrow \exists \eta \in \Omega_{r-1}^{q+1}(\mathcal{N})$  mit  $d\eta = \omega$  . (Die  $r$ -Form  $\omega$  besitzt eine *Stammform*  $\eta$ .)

### Bemerkung

Eine exakte affin polynomiale  $r$ -Form ist stets geschlossen, denn für  $\omega = d\eta$  gilt:

$$d\omega = d(d\eta) = 0 .$$

**Lemma 3** (Zwei Spezialfälle des Poincaréschen Lemmas)<sup>17</sup>

Für  $r \geq 1$  gilt:

a) Jede konstante  $r$ -Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \in \Omega_r^0(\mathcal{N})$$

ist exakt.

b) Jede geschlossene affine  $r$ -Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \in \Omega_r(\mathcal{N})$$

ist exakt.

Beweis:

a) Sei  $Q \in \mathcal{N}$  und  $\eta$  für alle  $P \in \mathcal{N}$ ,  $w_1, \dots, w_{r-1} \in \mathcal{V}$  definiert durch

$$\eta_P(w_1, \dots, w_{r-1}) := \frac{1}{r} \omega_Q(\vec{Q}P, w_1, \dots, w_{r-1}),$$

dann ist  $\eta \in \Omega_{r-1}(\mathcal{N})$ , denn für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $P_1, P_2 \in \mathcal{N}$  mit  $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in \mathcal{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} \eta_{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2}(w_1, \dots, w_{r-1}) &= \frac{1}{r} \omega_Q((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - Q, w_1, \dots, w_{r-1}) \\ &= \frac{1}{r} \omega_Q(\lambda_1 Q \vec{P}_1 + \lambda_2 Q \vec{P}_2, w_1, \dots, w_{r-1}) \\ &= \frac{\lambda_1}{r} \omega_Q(Q \vec{P}_1, w_1, \dots, w_{r-1}) + \frac{\lambda_2}{r} \omega_Q(Q \vec{P}_2, w_1, \dots, w_{r-1}) \\ &= \lambda_1 \cdot \eta_{P_1}(w_1, \dots, w_{r-1}) + \lambda_2 \cdot \eta_{P_2}(w_1, \dots, w_{r-1}). \end{aligned}$$

Nun gilt für  $P + v \in \mathcal{N}$

$$\eta_{P+v} = \eta_P + L_\eta(v)$$

und damit

$$\begin{aligned} L_\eta(v)(w_1, \dots, w_{r-1}) &= \eta_{P+v}(w_1, \dots, w_{r-1}) - \eta_P(w_1, \dots, w_{r-1}) \\ &= \frac{1}{r} \left( \omega_Q(Q \vec{P} + v, w_1, \dots, w_{r-1}) - \omega_Q(Q \vec{P}, w_1, \dots, w_{r-1}) \right) \\ &= \frac{1}{r} \omega_Q(v, w_1, \dots, w_{r-1}). \end{aligned}$$

Mit der in Teil b) der Folgerung auf Seite 60 angegebenen Darstellung der äußeren Ableitung gilt nun:

$$\begin{aligned} (d\eta)_P(w_1, \dots, w_r) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} L_\eta(w_i)(w_1, \dots, \widehat{w}_i, \dots, w_r) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \omega_Q(w_i, w_1, \dots, \widehat{w}_i, \dots, w_r) \\ &= \omega_Q(w_1, \dots, w_r). \end{aligned}$$

Die affine  $(r-1)$ -Form  $\eta$  ist also eine Stammform der konstanten  $r$ -Form  $\omega$ .

<sup>17</sup> Ein allgemeiner Beweis des Lemmas von Poincaré für Differentialformen auf sternförmigen Mengen findet sich etwa in [6, 9]. Die hier betrachteten konvexen Mengen sind natürlich stets sternförmig, ebenso sind alle betrachteten affin polynomialen  $r$ -Formen differenzierbar. Daher ist das allgemeine Ergebnis auch hier gültig. Da jedoch für die im nächsten Kapitel zu untersuchenden stückweise auf Simplexpolyedern definierten Abbildungen Stammformen explizit benötigt werden, wird an dieser Stelle ein konstruktiver Beweis für die im Blickpunkt stehenden affin linearen Spezialfälle angegeben.

b) Für ein  $Q \in \mathcal{N}$  und Koordinatenfunktionen  $\beta_1, \dots, \beta_n$  bezüglich einer Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  mit

$$\vec{Q}P = \sum_{i=1}^n \beta_i(P) \cdot v_i \quad \forall P \in \mathcal{N}$$

setzt man für alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  und  $P \in \mathcal{N}$  :

$$(\eta_{i_1, \dots, i_r}^1)_P := \frac{1}{r} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_r} \left( Q + \frac{r}{r+1} \vec{Q}P \right),$$

$$(\eta_{i_1, \dots, i_r}^2)_P := \sum_{k=1}^r \beta_{i_k}(P) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*.$$

Dann gilt offenbar

$$\eta_{i_1, \dots, i_r}^1 \in \Omega_0(\mathcal{N}), \quad \eta_{i_1, \dots, i_r}^2 \in \Omega_{r-1}(\mathcal{N}) \quad \text{und}$$

$$\eta_{i_1, \dots, i_r} := \eta_{i_1, \dots, i_r}^1 \wedge \eta_{i_1, \dots, i_r}^2 \in \Omega_{r-1}^2(\mathcal{N}).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (d\eta_{i_1, \dots, i_r})_P &= (d\eta_{i_1, \dots, i_r}^1)_P \wedge (\eta_{i_1, \dots, i_r}^2)_P + (\eta_{i_1, \dots, i_r}^1)_P \wedge (d\eta_{i_1, \dots, i_r}^2)_P \\ &= \left( \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \frac{r}{r+1} L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) v_j^* \right) \\ &\quad \wedge \left( \sum_{k=1}^r \beta_{i_k}(P) (-1)^{k+1} v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_r} \left( Q + \frac{r}{r+1} \vec{Q}P \right) \cdot r \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) \beta_{i_k}(P) (-1)^{k+1} \\ &\quad \cdot v_j^* \wedge v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \\ &\quad + \left( \alpha_{i_1, \dots, i_r}(Q) + \frac{r}{r+1} L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(\vec{Q}P) \right) \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*. \end{aligned}$$

Aus

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^n L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) dv_j^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* = 0$$

folgt nun für alle  $P \in \mathcal{N}$  und  $w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_Q(\vec{Q}P, w_1, \dots, w_r) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i(P) d\omega_Q(v_i, w_1, \dots, w_r) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i(P) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^n L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) \\ &\quad \cdot (v_j^* \wedge v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*)(v_i, w_1, \dots, w_r) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^n L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) \cdot \left( \beta_j(P) \cdot (v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*)(w_1, \dots, w_r) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^r \beta_{i_k}(P) (-1)^k (v_j^* \wedge v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*)(w_1, \dots, w_r) \right). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^n L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) \beta_j(P) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) \beta_{i_k}(P) (-1)^{k+1} \\ & \quad \cdot v_j^* \wedge v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* . \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man für

$$\eta := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \eta_{i_1, \dots, i_r} \quad (\in \Omega_{r-1}^2(\mathcal{M}))$$

das Ergebnis:

$$\begin{aligned} d\eta_P &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d((\eta_{i_1, \dots, i_r}^1) \wedge (\eta_{i_1, \dots, i_r}^2))_P \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^n L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(v_j) \beta_j(P) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \right. \\ & \quad \left. + \left( \alpha_{i_1, \dots, i_r}(Q) + \frac{r}{r+1} L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(\vec{Q}P) \right) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left( \frac{1}{r+1} L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(\vec{Q}P) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \right. \\ & \quad \left. + \left( \alpha_{i_1, \dots, i_r}(Q) + \frac{r}{r+1} L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(\vec{Q}P) \right) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left( \alpha_{i_1, \dots, i_r}(Q) + L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}}(\vec{Q}P) \right) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r}(P) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* = \omega_P \quad \forall P \in \mathcal{M} . \end{aligned}$$

Die affin polynomiale  $(r-1)$ -Form zweiten Grades (affin *quadratische* Form)  $\eta$  ist also eine Stammform der geschlossenen affinen  $r$ -Form  $\omega$  .

□

### I.4.3 Hodge-Operator und Koableitung

Im folgenden sei  $\mathcal{M}$  zusätzlich pseudoeuklidisch und  $\xi$  das Pseudoskalarprodukt auf  $\mathcal{V}$ .

#### Definition 7

Die *kanonische affine  $n$ -Form*  $\varepsilon \in \Omega_n(\mathcal{M})$  ist definiert durch

$$\varepsilon_P := E \quad \forall P \in \mathcal{M} .$$

#### Bemerkung

Im vorliegenden Fall eines pseudoeuklidischen Punktraums  $\mathcal{M}$  mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$  existiert die kanonische  $n$ -Form stets global.  $\mathcal{M}$  ist daher stets orientierbar.

Betrachtet man dagegen die allgemeinere Situation von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten mit punktweise definierten Tangentialräumen, so ist die Orientierbarkeit, äquivalent zur globalen Existenz einer solchen  $n$ -Form, keineswegs garantiert.

**Definition 8**

Für  $s \leq r \leq n$  sei  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  und  $\eta \in \Omega_s^q(\mathcal{N})$ .

Das *innere Produkt*  $\iota_\eta \omega \in \Omega_{r-s}^{p+q}(\mathcal{N})$  ist definiert durch

$$(\iota_\eta \omega)_P := \iota_{\eta_P} \omega_P \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

**Bemerkung**

- a) Wie die Definition des inneren Produktes zweier Multilinearformen ist diese punktweise Definition abhängig vom Pseudoskalarprodukt  $\xi$  auf  $\mathcal{V}$ .
- b) Es besteht die Möglichkeit, zunächst das Skalarprodukt zweier Multilinearformen zu verallgemeinern und anschließend daraus das innere Produkt herzuleiten. Hierzu definiert man für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  und  $\eta \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  punktweise:

$$\left( \langle \omega, \eta \rangle_\xi \right)_P := \langle \omega_P, \eta_P \rangle_\xi,$$

man hat also eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi : \Omega_r^p(\mathcal{N}) \times \Omega_r^q(\mathcal{N}) \ni (\omega, \eta) \longmapsto \langle \omega, \eta \rangle_\xi$$

mit einer polynomialen Abbildung

$$\langle \omega, \eta \rangle_\xi : \mathcal{N} \ni P \longmapsto \left( \langle \omega, \eta \rangle_\xi \right)_P = \langle \omega_P, \eta_P \rangle_\xi \in \mathbb{R}.$$

vom Grad  $p + q$ . Sind dabei  $\omega, \eta \in \Omega_r(\mathcal{N})$  und ist mindestens eine der beiden Formen konstant, so ist  $\langle \omega, \eta \rangle_\xi \in \Omega_0(\mathcal{N})$  eine affin lineare Abbildung.

Das innere Produkt von  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  und  $\eta \in \Omega_s^q(\mathcal{N})$  mit  $r \geq s$  läßt sich dann durch die folgende rekursive Vorschrift berechnen:

- (1)  $\iota_\eta \omega := \langle \omega, \eta \rangle_\xi$  für  $r = s$ ,
- (2)  $\iota_\eta(\omega_1 \wedge \omega_2) := (\iota_\eta \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1} \omega_1 \wedge (\iota_\eta \omega_2)$   
für  $\omega_1 \in \Omega_{r_1}^{p_1}(\mathcal{N})$ ,  $\omega_2 \in \Omega_{r_2}^{p_2}(\mathcal{N})$  und  $\eta \in \Omega_1^q(\mathcal{N})$ ,
- (3)  $\iota_{\eta_1 \wedge \eta_2} := \iota_{\eta_2} \circ \iota_{\eta_1}$ .

Mit diesen Regeln gilt für  $\eta \in \Omega_s^{q_1}(\mathcal{N})$ ,  $\omega \in \Omega_r^{q_2}(\mathcal{N})$  und  $\zeta \in \Omega_{r+s}^{q_3}(\mathcal{N})$ :

$$\langle \eta \wedge \omega, \zeta \rangle_\xi = \iota_{\eta \wedge \omega} \zeta = \iota_\omega (\iota_\eta \zeta) = \langle \omega, \iota_\eta \zeta \rangle_\xi,$$

inneres und äußeres Produkt sind also adjungierte Abbildungen bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi$ .

**Definition 9**

Der *Hodgesche \*-Operator* wird punktweise durch die Dualitätsabbildung definiert:

$$\begin{aligned} * : \Omega_r^q(\mathcal{N}) &\longrightarrow \Omega_{n-r}^q(\mathcal{N}) \\ \omega &\longmapsto * \omega \quad \text{mit } (*\omega)_P := *(\omega_P) \quad \forall P \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Aufgrund der punktweisen Definition gilt für den \*-Operator die der Definition der Dualitätsabbildung entsprechende Eigenschaft:

$$\begin{aligned} (*\omega)_P &= *(\omega_P) = \iota_{\omega_P} E = \iota_{\omega_P} \varepsilon_P = (\iota_\omega \varepsilon)_P \\ &\Rightarrow *\omega = \iota_\omega \varepsilon. \end{aligned}$$

**Lemma 4** (Eigenschaften des \*-Operators)

Die folgenden Eigenschaften lassen sich aufgrund der punktwweisen Definition der verwendeten Produkte und Abbildungen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen über die Dualitätsabbildung herleiten:

a) Es gilt

$$*1 = \varepsilon, \quad *\varepsilon = (-1)^{\text{Index}(\xi)},$$

wobei reelle Konstanten als konstante 0-Formen zu verstehen sind.

b) Für  $\omega \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  gilt

$$*(*\omega) = (-1)^{r(n-r)+\text{Index}(\xi)} \cdot \omega.$$

c) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$ ,  $\eta \in \Omega_s^q(\mathcal{N})$ ,  $r + s \leq n$  gilt:

$$\iota_\eta(*\omega) = *(\omega \wedge \eta) = (-1)^{r \cdot s} *(\eta \wedge \omega) = (-1)^{r \cdot s} \iota_\omega(*\eta).$$

Inneres und äußeres Produkt vertauschen also bezüglich des \*-Operators:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_r^p(\mathcal{N}) & \xrightarrow{\dots \wedge \eta} & \Omega_{r+s}^{p+q}(\mathcal{N}) \\ * \downarrow & \circlearrowleft & * \downarrow \\ \Omega_{n-r}^p(\mathcal{N}) & \xrightarrow{\iota_\eta(\dots)} & \Omega_{n-r-s}^{p+q}(\mathcal{N}) \end{array}$$

d) Für  $\omega \in \Omega_r^p(\mathcal{N})$  und  $\eta \in \Omega_r^q(\mathcal{N})$  gilt:

$$\eta \wedge *\omega = \iota_\eta \omega \cdot \varepsilon = \omega \wedge *\eta = (-1)^{\text{Index}(\xi)} \iota_{*\eta}(*\omega) \cdot \varepsilon.$$

**Definition 10**

Die *Koableitung*  $\delta\omega$  einer affin polynomialen  $r$ -Form  $\omega$  ist definiert durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \delta : \Omega_r^q(\mathcal{N}) &\longrightarrow \Omega_{r-1}^{q-1}(\mathcal{N}) \\ \omega &\longmapsto \delta\omega := *d* \left( (-1)^{n(r+1)+\text{Index}(\xi)} \cdot \omega \right). \end{aligned}$$

**I.4.4 Exkurs: Die klassischen Differentialoperatoren**

Die klassischen Differentialoperatoren der Vektoranalysis (*Rotation, Gradient, Divergenz*) lassen sich in einfacher Weise durch die Operatoren des Differentialformenkalküls ausdrücken. Spezielle Eigenschaften wie das Verschwinden der Divergenz eines Rotationsfeldes folgen dabei aus dem Verschwinden der zweimaligen äußeren Ableitung.

Es sei nun  $\mathcal{V} = \mathcal{M} = \mathbb{R}^3$  mit Standardbasis und Standardskalarprodukt.

- Ist ein Vektorfeld

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gegeben, so gilt für  $\omega := f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$  :

$$\begin{aligned} \delta\omega &= *d*\omega = *(f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy) \\ &= * \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \text{div } f. \end{aligned}$$

Die Koableitung ist also eine Verallgemeinerung der Divergenz.

- Weiter gilt:

$$d\omega = \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\ + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx ,$$

man erhält also einen Zusammenhang mit der Rotation des Vektorfeldes  $f$  :

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} f = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} , \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} , \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = 0 .$$

- Für  $\zeta := f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$  gilt:

$$d\zeta = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \operatorname{div} f \, dx \wedge dy \wedge dz$$

Aus

$$0 = dd\omega \\ = \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

folgt damit:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0 .$$

- Mit den durch das Skalarprodukt induzierten Abbildungen

$$i^\uparrow : \mathcal{V} \ni v \longmapsto \langle v, \cdot \rangle \in \mathcal{V}^* , \quad (i^\uparrow(v))(w) = \langle v, w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

und

$$i^\downarrow := (i^\uparrow)^{-1} : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{V}$$

erhält man:

$$\operatorname{rot} f = i^\downarrow * d i^\uparrow f , \\ \operatorname{div} f = *d * i^\uparrow f .$$

- Sei nun  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarfeld, dann folgt mit

$$\eta := dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

aus

$$0 = ddg = d\eta = \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) dy \wedge dz \\ + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} \right) dz \wedge dx$$

das Verschwinden der Rotation eines Gradientenfeldes:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} g) = \operatorname{rot} \left( \frac{\partial g}{\partial x} , \frac{\partial g}{\partial y} , \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ = \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} , \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} , \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right) = 0 .$$

## I.5 Das affine Integral

„Die Konstruktion selbst ist eine Kunst, ihre Anwendung auf die Welt ein böser Schmarotzer.“

Luitzen Brouwer

Es wird nun das Integral einer  $n$ -Form über ein  $n$ -Simplex sowie einer Form kleineren Grades über ein entsprechend kleinerdimensionales Simplex für die spezielle affin lineare Situation betrachtet. Dazu wird zunächst eine (bis auf einen konstanten Faktor) zu der in [27] angegebenen Berechnungsvorschrift für das affine Integral eines linearen Operators äquivalente Definition verwendet. Da die zu integrierende Form dort allerdings im Schwerpunkt ausgewertet wird, folgt eine weniger allgemeine Darstellung, die es gestattet, das Integral durch Funktionswerte in den Eckpunkten zu berechnen, um so der Anwendung innerhalb eines diskreten Modell auf Basis von in Simplexecken plazierten Größen gerecht zu werden. Schließlich wird der Satz von Stokes für affine  $r$ -Formen auf Simplizes unter Verwendung der eingeführten Begriffe und Werkzeuge bewiesen.

### I.5.1 Integration von $n$ -Formen

**Vorbemerkung** (zur Definition des Integrals)

$(v_1, \dots, v_n)$  und  $(w_1, \dots, w_n)$  seien Basen von  $\mathcal{V}$ ,  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  und  $(w_1^*, \dots, w_n^*)$  seien die zugehörigen dualen Basen,  $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  sei der Basiswechsel mit  $\Psi(v_i) = w_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Vermöge der dualen Abbildung  $\Psi^* : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$  mit

$$(\Psi^*(f))(v) := f(\Psi(v)) \quad \forall f \in \mathcal{V}^*, v \in V$$

folgt aus

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = w_i^*(w_j) = w_i^*(\Psi(v_j)) = \Psi^*(w_i^*)(v_j) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

für  $i = 1, \dots, n$ :

$$v_i^* = w_i^* \circ \Psi = \Psi^*(w_i^*).$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} dv_i^* &= d(w_i^* \circ \Psi) = \sum_{j=1}^n L_{w_i^* \circ \Psi}(w_j) dw_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n (L_{w_i^*} \circ L_{\Psi})(w_j) dw_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n L_{\Psi_i}(w_j) dw_j^* = \sum_{j=1}^n \Psi_i(w_j) dw_j^*, \end{aligned}$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_n^* &= \left( \sum_{j=1}^n \Psi_1(w_j) dw_j^* \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j=1}^n \Psi_n(w_j) dw_j^* \right) \\ &= \det(\Psi_i(w_j))_{i,j=1}^n dw_1^* \wedge \dots \wedge dw_n^*. \end{aligned}$$

Für die Definition des Integrals einer affinen  $n$ -Form  $\omega \in \Omega_n(\mathcal{N})$  über ein  $n$ -Simplex müssen nun noch lokale Koordinaten eingeführt werden. Dazu sei  $(P_0, \dots, P_n) \subset \mathcal{M}$  ein orientiertes  $(n+1)$ -Tupel affin linear unabhängiger Punkte, also  $\langle (P_0, \dots, P_n) \rangle$  ein orientiertes  $n$ -Simplex,

$$\mathcal{N} := \langle P_0, \dots, P_n \rangle = \text{conv}\{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{M}$$

sei das zugehörige  $n$ -dimensionale Simplex,

$$(v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{B}(\mathcal{V}) \text{ mit } v_i := P_0 \vec{P}_i, i = 1, \dots, n$$

die orientierte Basis der Verschiebungsvektoren, und es sei

$$\omega := \alpha dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_n^* \in \Omega_n(\mathcal{N})$$

eine affine  $n$ -Form mit einer affin linearen Abbildung  $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Weiter sei eine Abbildung  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$  definiert durch

$$p(t_1, \dots, t_n) := P_0 + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n,$$

dann gilt mit

$$\Delta^n := \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^n t_i \leq 1 \right\}$$

offenbar:

$$\mathcal{N} = \langle P_0, \dots, P_n \rangle = \left\{ P_0 + \sum_{i=1}^n t_i v_i \mid t_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^n t_i \leq 1 \right\} = p(\Delta^n).$$

Da  $\alpha$  affin linear ist, gilt nun:

$$\begin{aligned} \alpha(p(t_1, \dots, t_n)) &= \alpha\left(P_0 + \sum_{i=1}^n t_i v_i\right) \\ &= \alpha\left(P_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^n t_i\right)(P_0 \vec{P}_0) + \sum_{i=1}^n t_i(P_0 \vec{P}_i)\right) \\ &= \alpha\left(\left(1 - \sum_{i=1}^n t_i\right)P_0 + \sum_{i=1}^n t_i P_i\right) \\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^n t_i\right)\alpha(P_0) + \sum_{i=1}^n t_i \alpha(P_i) \\ &= \alpha(P_0) + \sum_{i=1}^n t_i (\alpha(P_i) - \alpha(P_0)) \\ &= \alpha(P_0) + \sum_{i=1}^n t_i L_\alpha(v_i). \end{aligned}$$

Üblicherweise definierte man nun das Integral von  $\omega$  über  $\mathcal{N}$  durch

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\Delta^n} \alpha(p(t_1, \dots, t_n)) dt_1 \dots dt_n,$$

im vorliegenden Fall läßt sich dieses Integral jedoch explizit berechnen:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta^n} \alpha(p(t_1, \dots, t_n)) dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-t_n} \dots \int_0^{1-\sum_{i=2}^n t_i} \left( \left(1 - \sum_{i=1}^n t_i\right) \alpha(P_0) + \sum_{i=1}^n t_i \alpha(P_i) \right) dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Es werden zwei Zwischenbehauptungen bewiesen:

1) Für  $k = 2, \dots, n+1$  gilt:

$$\int_0^1 \int_0^{1-t_n} \dots \int_0^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \frac{\left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-1}}{(k-1)!} dt_{k-1} \dots dt_n \stackrel{!}{=} \frac{1}{(n+1)!}.$$

Beweis:  $(n-k+2)$ -malige Integration:

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-\sum_{i=l}^n t_i} \frac{\left(1 - \sum_{i=l-1}^n t_i\right)^{l-1}}{(l-1)!} dt_{l-1} = \left[ -\frac{\left(1 - \sum_{i=l-1}^n t_i\right)^l}{l!} \right]_{t_{l-1}=0}^{1-\sum_{i=l}^n t_i} \\ &= \frac{\left(1 - \sum_{i=l}^n t_i\right)^l}{l!} \\ \Rightarrow & \int_0^1 \int_0^{1-t_n} \dots \int_0^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \frac{\left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-1}}{(k-1)!} dt_{k-1} \dots dt_n \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-t_n} \dots \int_0^{1-\sum_{i=k+1}^n t_i} \frac{\left(1 - \sum_{i=k}^n t_i\right)^k}{k!} dt_k \dots dt_n \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t_n)^n}{n!} dt_n = \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

2) Für  $k = 2, \dots, n+1$  gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \frac{\left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{i=k-1}^n t_i \alpha(P_i) dt_{k-1} \\ & \stackrel{!}{=} \frac{\left(1 - \sum_{i=k}^n t_i\right)^k}{k!} \alpha(P_{k-1}) + \frac{\left(1 - \sum_{i=k}^n t_i\right)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i=k}^n t_i \alpha(P_i). \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \frac{\left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{i=k-1}^n t_i \alpha(P_i) dt_{k-1} \\
&= \int_0^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \frac{t_{k-1} \left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-2}}{(k-2)!} \alpha(P_{k-1}) dt_{k-1} \\
&\quad + \left[ -\frac{\left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i=k}^n t_i \alpha(P_i) \right]_{t_{k-1}=0}^{1-\sum_{i=k}^n t_i}.
\end{aligned}$$

Die beiden Summanden werden getrennt berechnet:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \frac{t_{k-1} \left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-2}}{(k-2)!} \alpha(P_{k-1}) dt_{k-1} \\
&= \int_0^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \frac{\left(1 - \sum_{i=k}^n t_i - s\right)^{k-2}}{(k-2)!} \alpha(P_{k-1}) ds \\
&= \left[ \left( \frac{\left(1 - \sum_{i=k}^n t_i\right)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{s^k}{k(k-2)!} \right) \alpha(P_{k-1}) \right]_{s=0}^{1-\sum_{i=k}^n t_i} \\
&= \frac{\left(1 - \sum_{i=k}^n t_i\right)^k}{k!} \alpha(P_{k-1})
\end{aligned}$$

und

$$\left[ -\frac{\left(1 - \sum_{i=k-1}^n t_i\right)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i=k}^n t_i \alpha(P_i) \right]_{t_{k-1}=0}^{1-\sum_{i=k}^n t_i} = \frac{\left(1 - \sum_{i=k}^n t_i\right)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i=k}^n t_i \alpha(P_i).$$

Unter Verwendung der Zwischenergebnisse 1) und 2) folgt nun:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta^n} \alpha(p(t_1, \dots, t_n)) dt_1 \dots dt_n \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-t_n} \dots \int_0^{1-\sum_{i=2}^n t_i} \left( \left( 1 - \sum_{i=1}^n t_i \right) \alpha(P_0) + \sum_{i=1}^n t_i \alpha(P_i) \right) dt_1 \dots dt_n \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \alpha(P_0) + \int_0^1 \dots \int_0^{1-\sum_{i=3}^n t_i} \frac{\left( 1 - \sum_{i=2}^n t_i \right)^2}{2} \alpha(P_1) dt_2 \dots dt_n \\
&\quad + \int_0^1 \dots \int_0^{1-\sum_{i=3}^n t_i} \left( 1 - \sum_{i=2}^n t_i \right) \sum_{i=2}^n t_i \alpha(P_i) dt_2 \dots dt_n \\
&= \frac{1}{(n+1)!} (\alpha(P_0) + \alpha(P_1)) + \int_0^1 \dots \int_0^{1-\sum_{i=4}^n t_i} \frac{\left( 1 - \sum_{i=3}^n t_i \right)^3}{3!} \alpha(P_2) dt_3 \dots dt_n \\
&\quad + \int_0^1 \dots \int_0^{1-\sum_{i=4}^n t_i} \left( 1 - \sum_{i=3}^n t_i \right) \sum_{i=3}^n t_i \alpha(P_i) dt_3 \dots dt_n \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^n \alpha(P_i).
\end{aligned}$$

Man erhält damit also eine Berechnungsvorschrift für das Integral einer affinen  $n$ -Form über ein  $n$ -Simplex, die nur von den Werten der affin linearen Funktion  $\alpha$  in den Eckpunkten des Simplex abhängt. Allerdings muß dazu die  $n$ -Form  $\omega$  bezüglich der dualen Basis zu der durch die Eckpunkte gegebenen Basis des Vektorraums  $\mathcal{V}$  dargestellt werden. Daher wird nun zunächst eine allgemeinere Definition des Integrals<sup>18</sup> angegeben, die anschließend in obigem Sinne spezialisiert wird:

### Definition 1

Es sei  $(P_0, \dots, P_n)$  ein orientiertes  $(n+1)$ -Tupel (nicht notwendigerweise affin linear unabhängiger) Punkte in  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine konvexe Menge maximaler Dimension mit  $\langle P_0, \dots, P_n \rangle \subset \mathcal{N}$ .

Das *Integral* einer  $n$ -Form  $\omega \in \Omega_n(\mathcal{N})$  über das orientierte  $(n+1)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_n)$  ist definiert durch:

$$\int_{(P_0, \dots, P_n)} \omega := \frac{1}{n!} \omega \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} P_i \right) (P_0 \vec{P}_1, \dots, P_0 \vec{P}_n).$$

<sup>18</sup> Diese Definition stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit dem Integral eines linearen Operators in [27] überein.

**Bemerkung**

Im Fall  $\dim(\{P_0, \dots, P_n\}) < n$  verschwindet das Integral, da für nicht affin linear unabhängige Punkte  $P_0, \dots, P_n$  die Vektoren  $P_0\vec{P}_1, \dots, P_0\vec{P}_n$  linear abhängig sind und damit die auf diesen Vektoren ausgewertete alternierende Multilinearform verschwindet.

Spannen dagegen  $(P_0, \dots, P_n)$  ein  $n$ -Simplex auf, so ist

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} P_i \in \langle P_0, \dots, P_n \rangle$$

das Baryzentrum, und es gilt für

$$\omega := \alpha dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_n^* \in \Omega_n(\mathcal{N})$$

mit  $v_i := P_0\vec{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \int_{(P_0, \dots, P_n)} \omega &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \omega(P_i)(P_0\vec{P}_1, \dots, P_0\vec{P}_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \alpha(P_i) \cdot (v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*)(v_1, \dots, v_n) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^n \alpha(P_i). \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang legt im Sinne der Vorbemerkung und eines diskreten Modells mit in den Eckpunkten der Simplexes platzierten Werten nahe, das Integral einer  $n$ -Form über ein orientiertes  $n$ -Simplex unter Vermeidung der Auswertung im Schwerpunkt zu definieren. Das betrachtete  $(n+1)$ -Tupel muß nun also ein  $n$ -Simplex aufspannen und die zu integrierende  $n$ -Form bezüglich der durch die Eckpunkte des Simplex gegebenen Basis des Vektorraums  $\mathcal{V}$  dargestellt werden:

**Definition 2**

Es sei

- $(P_0, \dots, P_n)$  ein orientiertes  $(n+1)$ -Tupel affin linear unabhängiger Punkte in  $\mathcal{M}$ ,
- $v_i := P_0\vec{P}_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und
- $\mathcal{N} := \langle P_0, \dots, P_n \rangle$ .

Das *Integral* von

$$\omega := \alpha dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_n^* \in \Omega_n(\mathcal{N})$$

über das orientierte  $n$ -Simplex  $\langle (P_0, \dots, P_n) \rangle$  ist definiert durch

$$\int_{\langle (P_0, \dots, P_n) \rangle} \omega := \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^n \alpha(P_i).$$

Für  $r < n$  ist das Integral über ein orientiertes  $r$ -Simplex  $\langle (Q_0, \dots, Q_r) \rangle$  in  $\mathcal{N}$  definiert durch

$$\int_{\langle (Q_0, \dots, Q_r) \rangle} \omega := 0.$$

**Bemerkung**

Im Fall  $n = 0$  ist  $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \{P_0\}$ ,  $\mathcal{V} = 0$ ,  $\omega = \alpha \in \Omega_0(\mathcal{N}) \cong \mathbb{R}$  und damit

$$\int_{\langle(P_0)\rangle} \omega = \frac{1}{1!} \alpha(P_0) = \alpha.$$

**Lemma 1**

Es sei  $\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle$  ein orientiertes  $n$ -Simplex in  $\mathcal{M}$ . Weiter sei

$$\Phi : \mathcal{N} := \langle(P_0, \dots, P_n)\rangle \rightarrow \Phi(\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle) = \langle\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n)\rangle =: \mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$$

eine bijektive affin lineare Abbildung und  $\omega \in \Omega_n(\mathcal{N}')$ .

Dann gilt:

$$\int_{\langle(\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n))\rangle} \omega = \int_{\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle} \Phi^* \omega.$$

**Beweis:**

Es sei  $(P_0, \dots, P_n)$  ein orientiertes  $(n+1)$ -Tupel in  $\mathcal{M}$ ,  $v_i := P_0 \vec{P}_i$ ,  $w_i := \Phi(P_0) \vec{\Phi}(P_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\omega := \alpha dw_1^* \wedge \dots \wedge dw_n^* \in \Omega_n(\mathcal{N}')$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\langle(\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n))\rangle} \omega &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^n \alpha(\Phi(P_i)) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^n (\alpha \circ \Phi)(P_i) \\ &= \int_{\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle} (\alpha \circ \Phi) dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_n^* = \int_{\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle} \Phi^* \omega. \end{aligned}$$

□

**Folgerung**

Das Integral ist wohldefiniert, da es invariant unter geraden (also zulässigen) Permutationen der Eckpunkte des orientierten Simplex ist.

Für orientierungserhaltende Permutationen der Eckpunkte des  $n$ -Simplex  $\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle$ , also bijektive, orientierungserhaltende affin lineare Abbildungen

$$\Phi : \mathcal{N} = \langle(P_0, \dots, P_n)\rangle \rightarrow \langle\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n)\rangle = \Phi(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$$

erhält man:

$$\int_{\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle} \omega = \int_{\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle} \Phi^* \omega = \int_{\langle(\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n))\rangle} \omega.$$

Ist  $\Phi$  orientierungsumkehrend, so gilt:

$$\int_{\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle} \omega = - \int_{\langle(P_0, \dots, P_n)\rangle} \Phi^* \omega = - \int_{\langle(\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n))\rangle} \omega.$$

**Beweis:** (Siehe dazu auch Teil b) der Bemerkung auf Seite 52.)

Sei  $\sigma : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  eine Permutation mit  $\Phi(P_i) = P_{\sigma(i)}$  für  $i = 0, \dots, n$ .

1) Im Fall  $\sigma(0) = 0$ , also  $\Phi(P_0) = P_0$ , gilt mit

$$w_i := P_0 \vec{P}_i, \quad \tilde{w}_i := P_{\sigma(0)} \vec{P}_{\sigma(i)} = P_0 \vec{P}_{\sigma(i)}, \quad i = 1, \dots, n$$

und dem Basiswechsel  $L_\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  mit  $L_\Phi(w_i) = \tilde{w}_i$  für  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \alpha dw_1^* \wedge \cdots \wedge dw_n^* &= \det((L_\Phi)_i(\tilde{w}_j))_{i,j=1}^n \cdot \alpha d\tilde{w}_1^* \wedge \cdots \wedge d\tilde{w}_n^* \\ &= \text{sign}(\sigma) \cdot \alpha d\tilde{w}_1^* \wedge \cdots \wedge d\tilde{w}_n^* . \end{aligned}$$

Das Vorzeichen einer bezüglich der entsprechenden Basen dargestellten  $n$ -Form ändert sich also genau dann, wenn  $\Phi$  orientierungsumkehrend ist und somit die Orientierung des  $(n+1)$ -Tupel  $(P_0, \dots, P_n)$  ändert. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\langle (P_0, \dots, P_n) \rangle} \alpha dw_1^* \wedge \cdots \wedge dw_n^* &= \int_{\langle (P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(n)}) \rangle} \alpha d\tilde{w}_1^* \wedge \cdots \wedge d\tilde{w}_n^* \\ &= \text{sign}(\sigma) \int_{\langle (P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(n)}) \rangle} \alpha dw_1^* \wedge \cdots \wedge dw_n^* . \end{aligned}$$

2) Es reicht, die (ungerade) Permutation

$$(P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(n)}) = (P_1, P_0, P_2, \dots, P_n)$$

zu betrachten.<sup>19</sup> Für die Vektoren

$$w_i := P_0 \vec{P}_i, \quad \tilde{w}_i := P_{\sigma(0)} \vec{P}_{\sigma(i)}, \quad i = 1, \dots, n$$

gilt also

$$(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) = (-w_1, -w_1 + w_2, \dots, -w_1 + w_n)$$

und somit

$$\begin{aligned} dw_1^* &= -d\tilde{w}_1^* - \cdots - d\tilde{w}_n^* , \\ dw_i^* &= d\tilde{w}_i^* , \quad i = 2, \dots, n . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\langle (P_0, \dots, P_n) \rangle} \alpha dw_1^* \wedge \cdots \wedge dw_n^* &= \int_{\langle (P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(n)}) \rangle} \alpha d\tilde{w}_1^* \wedge \cdots \wedge d\tilde{w}_n^* \\ &= \int_{\langle (P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(n)}) \rangle} (-\alpha) \cdot (-d\tilde{w}_1^* - \cdots - d\tilde{w}_n^*) \wedge d\tilde{w}_2^* \wedge \cdots \wedge d\tilde{w}_n^* \\ &= - \int_{\langle (P_{\sigma(0)}, \dots, P_{\sigma(n)}) \rangle} \alpha dw_1^* \wedge \cdots \wedge dw_n^* . \end{aligned}$$

Da sich eine beliebige Permutation der Eckpunkte mit  $P_{\sigma(0)} \neq P_0$  als Verkettung einer Permutation der letzten  $n$  Punkte, einer Vertauschung der ersten beiden Punkte und einer weiteren Permutation der letzten  $n$  Punkte darstellen läßt und das Vorzeichen der Verkettung der Permutationen das Produkt der Vorzeichen der Einzelpermutationen ist, folgt somit die Behauptung. □

<sup>19</sup> Vgl. Bemerkung auf Seite 52, Teil b).

**Definition 3**

Gegeben seien orientierte  $n$ -Simplizes

$$\mathcal{N}_i^{\text{or}} := \langle (P_0^i, \dots, P_n^i) \rangle, \quad i = 1, \dots, m$$

mit

$$\mathcal{N}_i := |\mathcal{N}_i^{\text{or}}| = \langle P_0^i, \dots, P_n^i \rangle \subset \mathcal{M}, \quad i = 1, \dots, m$$

und paarweise nicht maximaldimensionaler Schnittmenge, also

$$\text{aff}(\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j) \neq \mathcal{M}, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad i \neq j.$$

Weiter sei  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$  eine konvexe Teilmenge mit  $\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$ .

Das Integral von  $\omega \in \Omega_n(\mathcal{N}')$  über  $\mathcal{K} := \mathcal{N}_1^{\text{or}} \cup \dots \cup \mathcal{N}_m^{\text{or}}$  ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{K}} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{N}_j^{\text{or}}} \omega.$$

**Bemerkung**

Es gilt folgende Linearität:

$$\int_{\mathcal{K}} (t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2) = t_1 \int_{\mathcal{K}} \omega_1 + t_2 \int_{\mathcal{K}} \omega_2 \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega_n(\mathcal{N}'), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

**I.5.2 Integration von r-Formen kleineren Grades**

**Vorbemerkung** (zur folgenden Definition des Integrals)

Mit  $r \geq 1$  sei  $(P_0, \dots, P_r) \subset \mathcal{M}$  ein  $(r+1)$ -Tupel affin linear unabhängiger Punkte und

$$\mathcal{N} := \langle P_0, \dots, P_r \rangle = \text{conv}\{P_0, \dots, P_r\} \subset \mathcal{M}$$

das von diesen Punkten aufgespannte  $r$ -dimensionale Simplex.  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  sei der von den Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  mit  $v_i := \vec{P_0 P_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$  aufgespannte  $r$ -dimensionale Untervektorraum von  $\mathcal{V}$ . Für die affine Hülle von  $\mathcal{N}$  gilt somit:

$$\text{aff}(\mathcal{N}) = \{P_0 + u \mid u \in \mathcal{U}\} = P_0 + \mathcal{U}.$$

Weiter sei  $\mathcal{N}^{\text{or}} := \langle (P_0, \dots, P_r) \rangle$  eines der beiden zu  $\mathcal{N}$  gehörenden orientierten  $r$ -Simplizes mit einer Orientierung  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ . Damit ist auch auf der Basis  $\mathfrak{v} := (v_1, \dots, v_r)$  von  $\mathcal{U}$  eine Orientierung  $(\mathfrak{v}, \varepsilon)$  festgelegt, wodurch der Unterraum  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  zu einem orientierten Vektorraum wird. Die Basis  $\mathfrak{v}$  sei zu einer Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathcal{V}$  ergänzt, und es sei  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$  eine maximaldimensionale konvexe Teilmenge mit  $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ .

Nun läßt sich mit der zu  $(v_1, \dots, v_n)$  gehörigen dualen Basis  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  eine beliebige  $r$ -Form  $\omega \in \Omega_r(\mathcal{N}')$  schreiben als

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} \alpha_{j_1, \dots, j_r} dv_{j_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{j_r}^*$$

mit affin linearen Abbildungen  $\alpha_{j_1, \dots, j_r} : \mathcal{N}' \rightarrow \mathbb{R}$  für  $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ .

Vermöge der Inklusionsabbildung  $\iota : \text{aff}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{M}$  läßt sich  $\omega$  nach  $\text{aff}(\mathcal{N})$  zurückholen. Es gilt:

$$d\iota_k = \sum_{j=1}^r (L_\iota)_k(v_j) dv_j^* = \begin{cases} dv_k^* & \text{falls } k \leq r, \\ 0 & \text{falls } k > r, \end{cases}$$

also gilt für die zurückgeholte Form

$$\iota^* \omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} (\alpha_{i_1, \dots, i_r} \circ \iota) d\iota_{j_1} \wedge \dots \wedge d\iota_{j_r} = \alpha_{1, \dots, r} dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_r^*.$$

Diese  $r$ -Form „lebt“ auf  $\mathcal{N}' \cap \text{aff}(\mathcal{N})$ , ist also auch über  $\langle (P_0, \dots, P_r) \rangle$  integrierbar. Man setzt naheliegenderweise:

$$\int_{\langle (P_0, \dots, P_r) \rangle} \omega := \int_{\langle (P_0, \dots, P_r) \rangle} \iota^* \omega.$$

#### Definition 4

Es sei  $\mathcal{N}^{\text{or}} := \langle (P_0, \dots, P_r) \rangle$  ein orientiertes  $r$ -Simplex in  $\mathcal{M}$  und  $v_i := P_0 \vec{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Weiter sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$  eine maximaldimensionale konvexe Teilmenge mit  $\mathcal{N} := |\mathcal{N}^{\text{or}}| \subset \mathcal{N}'$ .

Das *Integral* von

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} \alpha_{j_1, \dots, j_r} dv_{j_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{j_r}^* \in \Omega_r(\mathcal{N}')$$

über  $\mathcal{N}^{\text{or}}$  ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} \omega := \frac{1}{(r+1)!} \sum_{i=0}^r \alpha_{1, \dots, r}(P_i).$$

#### Bemerkung

a) Im Fall  $r = 0$  setzt man für  $\omega = \alpha \in \Omega_0(\mathcal{N}')$ :

$$\int_{\langle (P_0) \rangle} \omega := \frac{1}{1!} \alpha(P_0) = \alpha(P_0).$$

b) Wie oben gilt für bijektive affin lineare Abbildungen  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  mit

$$\Phi|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} = \langle P_0, \dots, P_r \rangle \rightarrow \langle \Phi(P_0), \dots, \Phi(P_r) \rangle = \Phi(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$$

im Fall der Orientierungserhaltung auf  $\mathcal{N}$  die Gleichung

$$\int_{\langle (P_0, \dots, P_r) \rangle} \omega = \int_{\langle (P_0, \dots, P_r) \rangle} \Phi^* \omega = \int_{\langle (\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_r)) \rangle} \omega$$

und im Fall der Orientierungsumkehrung

$$\int_{\langle (P_0, \dots, P_r) \rangle} \omega = - \int_{\langle (P_0, \dots, P_r) \rangle} \Phi^* \omega = - \int_{\langle (\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_r)) \rangle} \omega.$$

c) Es gilt:

$$\int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} (t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2) = t_1 \int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} \omega_1 + t_2 \int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} \omega_2 \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega_r(\mathcal{N}'), t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Linearität vererbt sich auch auf das im Anschluß an diese Bemerkung definierte Integral über Vereinigungen orientierter Simplexes.

**Definition 5**

Gegeben seien orientierte  $r$ -Simplizes

$$\mathcal{N}_i^{\text{or}} := \langle (P_0^i, \dots, P_r^i) \rangle, \quad i = 1, \dots, m$$

mit

$$\mathcal{N}_i := |\mathcal{N}_i^{\text{or}}| = \langle P_0^i, \dots, P_r^i \rangle \subset \mathcal{M}, \quad i = 1, \dots, m$$

und paarweise höchstens  $(r - 1)$ -dimensionalen Schnittmengen<sup>20</sup>, es gelte also:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j : \dim(\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j) < r.$$

Weiter sei  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$  eine konvexe Teilmenge maximaler Dimension mit

$$\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}' \subset \mathcal{M}.$$

Das *Integral* von  $\omega \in \Omega_r(\mathcal{N}')$  über  $\mathcal{K} := \mathcal{N}_1^{\text{or}} \cup \dots \cup \mathcal{N}_m^{\text{or}}$  ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{K}} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{N}_j^{\text{or}}} \omega.$$

**I.5.3 Der Stokessche Integralsatz auf k-Simplizes****Bezeichnung**

- Für  $n \geq 2$  sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum mit zugehörigem Vektorraum  $\mathcal{V}$ .
- Für  $2 \leq k \leq n$  sei  $(P_0, \dots, P_k)$  ein orientiertes  $(k + 1)$ -Tupel affin linear unabhängiger Punkte in  $\mathcal{M}$ .
- $\mathcal{N}^{\text{or}} := \langle (P_0, \dots, P_k) \rangle$  sei das von  $P_0, \dots, P_k$  aufgespannte orientierte  $k$ -Simplex, und es sei  $\mathcal{N} := |\mathcal{N}^{\text{or}}| = \langle P_0, \dots, P_k \rangle$ .
- Es sei  $v_i := \vec{P_0 P_i}$  für  $i = 1, \dots, k$  und  $\mathcal{U} := \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ , also  $\text{aff}(\mathcal{N}) = P_0 + \mathcal{U}$ .
- $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$  sei eine konvexe Teilmenge maximaler Dimension mit  $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ .
- $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$  sei eine Basis von  $\mathcal{V}$  und  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  die duale Basis.

**Lemma 2**

Es sei

$$\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_{k-1}} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{k-1}}^* \in \Omega_{k-1}(\mathcal{N}')$$

eine  $(k - 1)$ -Form auf  $\mathcal{N}'$  mit affin linearen Abbildungen

$$\alpha_{i_1, \dots, i_{k-1}} : \mathcal{N}' \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n.$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} d\omega = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left( \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_j) - \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_0) \right). \quad (\text{S1})$$

<sup>20</sup> Für  $i \neq j$  ist  $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j$  also entweder leer oder es ist  $\text{aff}(\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j) = P_{i,j} + \mathcal{U}_{i,j}$  für ein  $P_{i,j} \in \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j$  und einen höchstens  $(r - 1)$ -dimensionalen Untervektorraum  $\mathcal{U}_{i,j} \subset \mathcal{V}$ .

**Beweis:**

Aus  $d\omega \in \Omega_k(\mathcal{N}')$  mit

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \left( \sum_{\substack{j \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\} \\ 1 \leq j \leq n}} L_{\alpha_{i_1, \dots, i_{k-1}}}(v_j) dv_j^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{k-1}}^* \right)$$

erhält man vermöge der Inklusionsabbildung  $\iota : \text{aff}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{M}$  die zurückgeholte Form

$$\iota^* d\omega \in \Omega_k(\mathcal{N}' \cap \text{aff}(\mathcal{N})) \subset \Omega_k(\mathcal{N})$$

mit

$$\begin{aligned} \iota^* d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq k} \left( \sum_{\substack{j \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\} \\ 1 \leq j \leq k}} L_{\alpha_{i_1, \dots, i_{k-1}}}(v_j) dv_j^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{k-1}}^* \right) \\ &= \sum_{j=1}^k L_{\alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}}(v_j) (-1)^{j-1} dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_k^*. \end{aligned}$$

Für das Integral über das  $k$ -Simplex gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} d\omega &= \int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} \iota^* d\omega = \int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} \sum_{j=1}^k L_{\alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}}(v_j) (-1)^{j-1} dv_1^* \wedge \dots \wedge dv_k^* \\ &= \frac{1}{(k+1)!} (k+1) \left( \sum_{j=1}^k L_{\alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}}(v_j) (-1)^{j-1} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left( \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_j) - \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_0) \right). \end{aligned}$$

□

Um nun die Gleichheit des Integrals einer  $(k-1)$ -Form über den Rand eines  $k$ -Simplex (also eine Vereinigung von  $(k-1)$ -Simplizes) und des Integrals der äußeren Ableitung dieser Form über das gesamte Simplex zu zeigen, wird die durch die Orientierung des Simplex induzierte Orientierung des Randes benötigt.

**Definition 6**

Eine *orientierte Seite* des orientierten  $k$ -Simplex  $\mathcal{N}^{\text{or}}$  ist ein orientiertes Simplex

$$\mathcal{N}_j^{\text{or}} := \langle (P_0, \dots, \widehat{P}_j, \dots, P_k) \rangle, \quad j \in \{0, \dots, k\}.$$

Eine orientierte Seite  $\mathcal{N}_j^{\text{or}} = \langle (P_{i_1}, \dots, P_{i_k}) \rangle$  für  $\{i_1, \dots, i_k\} = \{0, \dots, k\} \setminus \{j\}$  heißt *nach außen orientiert*, wenn die  $(k+1)$ -Tupel  $(P_j, P_{i_1}, \dots, P_{i_k})$  und  $(P_0, \dots, P_k)$  die gleiche Orientierung haben; andernfalls heißt  $\mathcal{N}_j^{\text{or}}$  *nach innen orientiert*.

Der *nach außen orientierte Rand*  $\partial\mathcal{N}^{\text{or}}$  von  $\mathcal{N}^{\text{or}}$  ist die Vereinigung

$$\partial\mathcal{N}^{\text{or}} = \bigcup_{j=0}^k \mathcal{N}_j^{\text{or}}$$

der  $k+1$  nach außen orientierten Seiten  $\mathcal{N}_j^{\text{or}}$  von  $\mathcal{N}^{\text{or}}$ .

**Bemerkung**

Für das orientierte  $k$ -Simplex  $\langle (P_0, \dots, P_k) \rangle$  ist die orientierte Seite  $\langle (P_0, \dots, \widehat{P}_j, \dots, P_k) \rangle$  nach außen (innen) orientiert, falls  $j$  gerade (ungerade) ist.

**Lemma 3**

Es sei  $\omega \in \Omega_{k-1}(\mathcal{N}')$  wie im letzten Lemma definiert. Dann gilt für das Integral von  $\omega$  über den nach außen orientierten Rand von  $\mathcal{N}^{\text{or}}$ :

$$\int_{\partial \mathcal{N}^{\text{or}}} \omega = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \left( \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_j) - \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_0) \right). \quad (\text{S2})$$

Beweis:

Es sei

$$\mathcal{N}_j^{\text{or}} = \langle (P_0, \dots, \widehat{P_j}, \dots, P_k) \rangle, \quad \mathcal{N}_j := |\mathcal{N}_j^{\text{or}}|, \quad j = 0, \dots, k.$$

(Damit ist  $\mathcal{N}_j^{\text{or}}$  für gerades  $j$  nach außen und für ungerades  $j$  nach innen orientiert.)

Nun werden die mittels der Inklusionsabbildungen  $\iota_j : \text{aff}(\mathcal{N}_j) \hookrightarrow \mathcal{M}$  zurückgeholten  $(k-1)$ -Formen  $\iota_j^* \omega$  betrachtet:

1) Für  $j \in \{1, \dots, k\}$  ist  $\text{aff}(\mathcal{N}_j) = P_0 + \text{span}\{v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_k\}$ , also gilt:

$$\iota_j^* \omega = \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k} dv_1^* \wedge \dots \wedge \widehat{dv_j^*} \wedge \dots \wedge dv_k^*.$$

2) Für  $j = 0$ , also  $\mathcal{N}_0 = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$  ist  $\text{aff}(\mathcal{N}_0) = P_1 + \mathcal{U}_0$  mit

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &:= \text{span}\{P_1 \vec{P}_2, \dots, P_1 \vec{P}_k\} \\ &= \text{span}\left\{ \left( P_1 \vec{P}_0 + P_0 \vec{P}_2 \right), \dots, \left( P_1 \vec{P}_0 + P_0 \vec{P}_k \right) \right\} \\ &= \text{span}\{(-v_1 + v_2), \dots, (-v_1 + v_k)\}. \end{aligned}$$

Durch die Zuordnung<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} w_1 &:= -v_1, \\ w_j &:= -v_1 + v_j, \quad j = 2, \dots, k \end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} dv_1^* &= -dw_1^* - \dots - dw_k^*, \\ dv_i^* &= dw_i^*, \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Mit der Inklusionsabbildung  $\iota : \text{aff}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{M}$  gilt

$$\iota \circ \iota_0 = \iota_0 \Rightarrow \iota_0^* = (\iota \circ \iota_0)^* = \iota_0^* \circ \iota^*,$$

und unter Verwendung von

$$\mathcal{U}_0 = \text{span}\{(v_2 - v_1), \dots, (v_k - v_1)\} = \text{span}\{w_2, \dots, w_k\}$$

<sup>21</sup> Vgl. Teil b) der Bemerkung auf Seite 52.

folgt:

$$\begin{aligned}
\iota_0^* \omega &= \iota_0^*(\iota^* \omega) \\
&= \iota_0^* \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_{k-1}} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{k-1}}^* \right) \\
&= \iota_0^* \left( \sum_{j=2}^k \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k} (-dw_1^* - \dots - dw_k^*) \wedge dw_2^* \wedge \dots \wedge \widehat{dw_j^*} \wedge \dots \wedge dw_k^* \right) \\
&\quad + \alpha_{2, \dots, k} dw_2^* \wedge \dots \wedge dw_k^* \\
&= \sum_{j=2}^k \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k} (-dw_j^*) \wedge dw_2^* \wedge \dots \wedge \widehat{dw_j^*} \wedge \dots \wedge dw_k^* \\
&\quad + \alpha_{2, \dots, k} dw_2^* \wedge \dots \wedge dw_k^* \\
&= \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k} dw_2^* \wedge \dots \wedge dw_k^* .
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der orientierungsabhängigen Vorzeichen<sup>22</sup> erhält man somit für das Integral von  $\omega$  über den nach außen orientierten Rand von  $\mathcal{N}^{\text{or}}$  :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \mathcal{N}^{\text{or}}} \omega &= \sum_{j=0}^k \int_{\mathcal{N}_j^{\text{or}}} (-1)^j \iota_j^* \omega \\
&= \int_{\mathcal{N}_0^{\text{or}}} \iota_0^* \omega + \sum_{j=1}^k \int_{\mathcal{N}_j^{\text{or}}} (-1)^j \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k} dv_1^* \wedge \dots \wedge \widehat{dv_j^*} \wedge \dots \wedge dv_k^* \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^k \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_l) \right) + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{k!} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^k \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_l) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k \left( (-1)^{j+1} \sum_{l=1}^k \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_l) + (-1)^j \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^k \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_l) \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \left( \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_j) - \alpha_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k}(P_0) \right) .
\end{aligned}$$

□

### Bemerkung

Im Fall  $k = 1$  ist  $\mathcal{N}^{\text{or}} = \langle (P_0, P_1) \rangle$  und  $\omega = \alpha \in \Omega_0(\mathcal{N}^1)$ .

Damit ist  $\mathcal{N}_0^{\text{or}} = \langle (P_1) \rangle$  nach außen und  $\mathcal{N}_1^{\text{or}} = \langle (P_0) \rangle$  nach innen orientiert, und man erhält:

$$\int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} d\omega = \int_{\langle (P_0, P_1) \rangle} L_\alpha(v_1) dv_1^* = L_\alpha(v_1) = \alpha(P_1) - \alpha(P_0) = \int_{\partial \mathcal{N}^{\text{or}}} \omega .$$

<sup>22</sup> Vgl. dazu Teil b) der Bemerkung auf Seite 80.

Aus (S1) und (S2) folgt nun (zusammen mit obigem Sonderfall) :

**Satz 1** (Stokesscher Integralsatz auf  $k$ -Simplizes)

Für  $1 \leq k \leq n$  sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum,  $\mathcal{N}^{\text{or}}$  ein orientiertes  $k$ -Simplex in  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$  eine konvexe Teilmenge maximaler Dimension mit  $|\mathcal{N}^{\text{or}}| \subset \mathcal{N}'$  und  $\omega \in \Omega_{k-1}(\mathcal{N}')$ .

Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{N}^{\text{or}}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{N}^{\text{or}}} \omega .$$



## II Stückweise affine $r$ -Formen

*„Daten ohne Verallgemeinerung sind nur Klatsch und Tratsch.“*

Robert Pirsig

Nachdem im ersten Kapitel affine  $r$ -Formen auf konvexen Teilmengen affiner Punkträume und speziell auf einzelnen Simplizes untersucht wurden, wodurch sie als eindeutig bestimmte affin linear Interpolierende in den Eckpunkten der Simplizes den Übergang zu diskreten Daten ermöglichen und damit Grundlage des diskreten Modells sind, werden nun stückweise affine  $r$ -Formen auf endlichen Simplexpolyedern betrachtet, also auf Vereinigungen endlich vieler aneinander grenzender Simplizes gleicher Dimension, die (zusammen mit ihren Untersimplizes) als Simplizialzerlegung ihrer Vereinigungsmenge einen Simplizialkomplex bilden. Die Stetigkeit der stückweise auf jedem Simplex definierten Abbildung ist in natürlicher Weise durch die Werte in den Eckpunkten gemeinsamer Seiten garantiert und vererbt sich auf die stückweisen äußeren Ableitungen als Tangentialstetigkeit. Umgekehrt läßt sich unter Voraussetzung einer der Tangentialstetigkeit ähnlichen Bedingung an lokal definierte konstante  $(r + 1)$ -Formen auf den einzelnen Simplizes sowie des einfachen Zusammenhangs des Simplizialkomplexes die Existenz einer durch stückweise Integration konstruierbaren simplizialen Stammform zeigen, also einer stetigen stückweisen  $r$ -Form, deren äußere Ableitung auf jedem Simplex der entsprechenden vorgegebenen  $(r + 1)$ -Form entspricht. Man erhält auf diesem Weg eine diskrete Version des Poincaréschen Lemmas für stückweise konstante  $(r + 1)$ -Formen auf einfach zusammenhängenden Simplexpolyedern.<sup>23</sup> Betrachtet man simplizial affin lineare  $(r + 1)$ -Formen auf Simplexpolyedern bezüglich vorgegebener Simplizialzerlegungen, also stetige Abbildungen, die sich aus stückweise definierten  $(r + 1)$ -Formen auf den einzelnen Simplizes zusammensetzen, so genügt der einfache Zusammenhang im allgemeinen nicht mehr. In diesem Fall läßt sich eine diskrete Version des Lemmas von Poincaré unter Voraussetzung der Geschlossenheit der lokal definierten Formen und der Sternförmigkeit des Polyeders bezüglich eines Eckpunktes zeigen.

### II.1 Simplizialzerlegungen

*„Es gibt einen sehr guten Ausspruch, wonach Dreiecke, wenn sie einen Gott erfunden hätten, ihn dreiseitig gemacht hätten.“*

Baron de Montesquieu

Es wird eine an die vorliegende Situation angepaßte Definition einer Simplizialzerlegung eines Simplexpolyeders vorgestellt. Da ein endliches diskretes Modell das Ziel ist, genügt es, sich auf endliche Simplizialkomplexe zu beschränken; desweiteren ist es im Hinblick auf die für die Modellierung in Betracht kommenden Teilmengen affiner Punkträume angemessen, Grundsimplizes gleicher Dimension zu fordern. Die hier (zum Teil in spezialisierter Weise) eingeführten, ebenso wie ohne explizite Definition Verwendung findende Begriffe (konvexe Zellen, Zellenkomplexe, Zellenhülle, etc.) lassen sich Büchern über Topologie<sup>24</sup> entnehmen, wobei die Bezeichnungen dieses Kapitels speziell an [11] angelehnt sind.

<sup>23</sup> Eine vergleichbare Methode zur Konstruktion von Spline-Funktionen durch Integration findet sich in [15].

<sup>24</sup> Vgl. z. B. [2, 11, 12]. Für Kantenwege und deren Deformationen sei speziell auf [31] verwiesen.

Im folgenden sei  $\mathcal{M}$  ein  $n$ -dimensionaler Punktraum und  $\mathcal{V}$  der zugehörige Vektorraum der Parallelverschiebungen  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ .

### Definition 1

Eine endliche Menge  $\mathcal{K} := \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m\}$  von Simplizes  $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{M}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , heißt (*endlicher*) *Simplizialkomplex*, wenn gilt:

- Mit jedem Simplex ist auch jede seiner Seiten in  $\mathcal{K}$  enthalten.
- Der Durchschnitt zweier Simplizes in  $\mathcal{K}$  ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite.

Unter den *Grundsimplizes* von  $\mathcal{K}$  versteht man die Simplizes  $\mathcal{K}_i \in \mathcal{K}$ , die selbst nicht Seite eines  $\mathcal{K}_j \in \mathcal{K} \setminus \{\mathcal{K}_i\}$  sind.

$\mathcal{K}$  heißt *homogen  $k$ -dimensional*, wenn alle seine Grundsimplizes  $k$ -Simplizes sind.

Unter dem *Körper* (der *geometrischen Realisierung*) von  $\mathcal{K}$  versteht man die Vereinigung aller seiner Simplizes als Punktmengen:

$$|\mathcal{K}| := \bigcup_{i=1}^m \mathcal{K}_i .$$

### Bemerkung

- Gemeinsame Seiten zweier Simplizes können dabei je nach Bezug eigentlich und uneigentlich sein. So ist der Durchschnitt eines Simplex mit einem seiner Untersimplizes für letzteres eine uneigentliche Seite.
- Der Körper eines Simplizialkomplexes ist die Vereinigung seiner Grundsimplizes, da jedes weitere Simplex als Seite eines Grundsimplizes bereits in der Vereinigung enthalten ist.

### Definition 2

Eine Teilmenge  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  heißt *Polyeder*, wenn es einen Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  gibt, dessen Körper  $\mathcal{N}$  ist, wenn also  $|\mathcal{K}| = \mathcal{N}$  gilt.  $\mathcal{K}$  heißt dann *Simplizialzerlegung* von  $\mathcal{N}$ .

Für  $0 \leq m \leq n$  heißt ein Polyeder  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$   *$m$ -dimensionales Simplexpolyeder* oder kurz  *$m$ -Simplexpolyeder*, wenn es eine homogen  $m$ -dimensionale Simplizialzerlegung von  $\mathcal{N}$  gibt.

### Bemerkung

- Sind  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$  die  $m$ -dimensionalen Grundsimplizes der Simplizialzerlegung eines  $m$ -Simplexpolyeders

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K \subset \mathcal{M} ,$$

so ist die Schnittmenge zweier Simplizes  $\mathcal{N}_i$  und  $\mathcal{N}_j$  für  $1 \leq i, j \leq K$ ,  $i \neq j$  stets entweder leer oder ein höchstens  $(m - 1)$ -dimensionales Untersimplex. Für zwei Grundsimplizes

$$\mathcal{N}_i = \langle P_0^i, \dots, P_m^i \rangle, \mathcal{N}_j = \langle P_0^j, \dots, P_m^j \rangle \subset \mathcal{N}, 1 \leq i, j \leq K, i \neq j$$

eines  $m$ -Simplexpolyeders gilt also:

$$(1) \#(\{P_0^i, \dots, P_m^i\} \cap \{P_0^j, \dots, P_m^j\}) \leq m .$$

(2) Falls  $\{P_0^i, \dots, P_m^i\} \cap \{P_0^j, \dots, P_m^j\} = \{Q_0, \dots, Q_l\}$  für  $l \in \{0, \dots, m - 1\}$ , so gilt:

$$\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \langle Q_0, \dots, Q_l \rangle .$$

Falls  $\{P_0^i, \dots, P_m^i\} \cap \{P_0^j, \dots, P_m^j\} = \emptyset$ , so gilt:

$$\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \emptyset .$$

- b) Aus dem Pflastersatz<sup>25</sup> folgt, daß jede Simplicialzerlegung eines  $m$ -Simplexpolyeders homogen  $m$ -dimensional ist.

### Definition 3

Es sei

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

ein  $m$ -Simplexpolyeder, wobei  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$  die  $m$ -dimensionalen Grundsimplizes einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{N}$  seien.  $\{P_0, \dots, P_L\} \subset \mathcal{N}$  sei die Menge aller nulldimensionalen Simplizes (Eckpunkte) in  $\mathcal{K}$ .

- a) Eine endliche Folge  $(Q_0, \dots, Q_l)$  mit  $l \geq 0$  von Punkten  $Q_0, \dots, Q_l \in \{P_0, \dots, P_L\}$  heißt *Kantenzug* (der Länge  $l$ ) in  $\mathcal{K}$ , wenn jeweils zwei aufeinanderfolgende Punkte die Kante eines Simplex aufspannen, also wenn für alle  $\mu \in \{0, \dots, l-1\}$  gilt:

$$Q_\mu \neq Q_{\mu+1} \quad \text{und} \quad \langle Q_\mu, Q_{\mu+1} \rangle \in \mathcal{K}.$$

- b) Ein Kantenzug  $(Q_0, \dots, Q_l)$  heißt *geschlossen*, wenn  $Q_0 = Q_l$  ist.
- c) Eine *elementare Deformation* eines Kantenzuges  $\mathcal{Q} := (Q_0, \dots, Q_l)$  in  $\mathcal{K}$  in einen Kantenzug  $\mathcal{Q}'$  in  $\mathcal{K}$  ist eine der folgenden Abbildungen:
- $\mathcal{Q} = (Q_0, \dots, Q_{\mu-1}, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \dots, Q_l) \mapsto (Q_0, \dots, Q_{\mu-1}, Q_{\mu+1}, \dots, Q_l) = \mathcal{Q}'$ ,  
für  $\langle Q_{\mu-1}, Q_\mu, Q_{\mu+1} \rangle \in \mathcal{K}$ ,
  - $\mathcal{Q} = (Q_0, \dots, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \dots, Q_l) \mapsto (Q_0, \dots, Q_\mu, P_\xi, Q_{\mu+1}, \dots, Q_l) = \mathcal{Q}'$ ,  
für  $\langle Q_\mu, Q_{\mu+1}, P_\xi \rangle \in \mathcal{K}$ ,
  - $\mathcal{Q} = (Q_0, \dots, Q_{\mu-1}, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \dots, Q_l) \mapsto (Q_0, \dots, Q_{\mu-1}, \dots, Q_l) = \mathcal{Q}'$ ,  
für  $Q_{\mu-1} = Q_{\mu+1}$ ,
  - $\mathcal{Q} = (Q_0, \dots, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \dots, Q_l) \mapsto (Q_0, \dots, Q_\mu, P_\xi, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \dots, Q_l) = \mathcal{Q}'$ ,  
für  $\langle Q_\mu, P_\xi \rangle \in \mathcal{K}$ ,
  - $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_l) \mapsto (Q_1, \dots, Q_l, Q_1) = \mathcal{Q}'$ ,  
falls  $l \geq 2$  und  $Q_0 = Q_l$  (also  $\mathcal{Q}$  geschlossen) ist.
- d)  $\mathcal{K}$  heißt *zusammenhängend*, wenn es für je zwei Eckpunkte  $P_\mu, P_\nu$  einen Kantenzug  $(Q_0, \dots, Q_l)$  in  $\mathcal{K}$  mit  $Q_0 = P_\mu$  und  $Q_l = P_\nu$  gibt.
- e)  $\mathcal{K}$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn  $\mathcal{K}$  zusammenhängend ist und sich jeder geschlossene Kantenzug  $(Q_0, \dots, Q_l)$  in  $\mathcal{K}$  durch Anwendung endlich vieler elementarer Deformationen in einen Kantenzug der Länge 0 überführen läßt.

### Bemerkung

Die obigen über Kantenzüge eingeführten Zusammenhangsbegriffe für Simplicialkomplexe sind äquivalent zu den topologischen, sich auf Polyeder als Körper der Komplexe beziehenden. Für den Zusammenhang läßt sich diese Äquivalenz recht einfach zeigen, wogegen für den einfachen Zusammenhang, also den Nachweis der Isomorphie der Fundamentalgruppen simplicialer Komplexe und der Fundamentalgruppen ihrer geometrischen Realisierungen Sätze über simpliciale Abbildungen, simpliciale Approximation und Unterteilungen simplicialer Komplexe erforderlich sind.<sup>26</sup>

<sup>25</sup> Vgl. [11].

<sup>26</sup> Vgl. dazu etwa [2].

## II.2 Simpliziale r-Formen

„Das Universum besteht aus dem fortgesetzten Verschwinden aller Mengen der Möglichkeiten bis auf eine.“

David Cottingham

Simplizial affin polynomiale  $r$ -Formen auf Simplexpolyedern sind stetige stückweise auf den Grundsimplizes definierte Abbildungen. Im affin linearen Fall sind auf jedem Simplex der Simplizialzerlegung affine  $r$ -Formen durch ihre Werte in den affin linear unabhängigen Eckpunkten eindeutig bestimmt. Setzt man in gemeinsamen Eckpunkten verschiedener Simplizes gleiche Werte voraus, so erhält man eine stetige Abbildung auf dem gesamten Simplexpolyeder, deren Einschränkung auf jedes Grundsimpliz eine affine  $r$ -Form ist. Die äußeren Ableitungen dieser  $r$ -Formen stimmen dabei tangential in Richtung von Vektoren auf gemeinsamen Seiten überein. Unter stärkeren, dieser Tangentialstetigkeit ähnlichen Voraussetzungen an stückweise definierte konstante  $(r + 1)$ -Formen lassen sich umgekehrt stetige simpliziale Stammformen konstruieren, wodurch man eine Verallgemeinerung des ersten Spezialfalls des Lemmas von Poincaré auf einfach zusammenhängenden Simplexpolyedern erhält. Für den zweiten Spezialfall, also simplizial affin lineare und damit auf gemeinsamen Kanten stetige  $(r + 1)$ -Formen, ist mit der Sternförmigkeit des Polyeders bezüglich eines gemeinsamen Eckpunktes aller Grundsimplizes eine stärkere Voraussetzungen für die Existenz einer simplizialen Stammform erforderlich.

### II.2.1 Grundbegriffe

#### Definition 1

Es sei

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

ein  $m$ -Simplexpolyeder mit einer Simplizialzerlegung  $\mathcal{K}$  und Grundsimplizes  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$ .

Eine *simplizial (affin) polynomiale  $r$ -Form* vom Grad  $q$  auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$  ist eine stetige Abbildung

$$\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* ,$$

die auf jedem Simplex die Einschränkung einer affin polynomiale  $r$ -Form vom Grad  $q$  ist.

Für jedes Simplex  $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}$ ,  $i = 1, \dots, K$  gibt es also eine konvexe Menge maximaler Dimension  $\mathcal{N}'_i \subset \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}'_i$  sowie eine affin polynomiale  $r$ -Form  $\omega'_i \in \Omega_r^q(\mathcal{N}'_i)$ , so daß gilt:

$$\omega_i := \omega'_i|_{\mathcal{N}_i} = \omega|_{\mathcal{N}_i} : \mathcal{N}_i \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* .$$

Eine *simpliziale  $r$ -Form* auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$  ist eine simplizial affin lineare  $r$ -Form, also eine simplizial polynomiale  $r$ -Form vom Grad 1 auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$ .

#### Bemerkung

Jede affin polynomiale Abbildung  $\omega : \mathcal{L} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$  vom Grad  $q$  auf einem  $k$ -dimensionalen Simplex  $\mathcal{L} = \langle P_0, \dots, P_k \rangle$  in  $\mathcal{K}$  läßt sich zu einer affin polynomiale  $r$ -Form  $\omega' \in \Omega_r^q(\mathcal{M})$  fortsetzen, indem man  $(P_0, \dots, P_k)$  zu einem affinen Koordinatensystem  $(P_0, \dots, P_n)$  von  $\mathcal{M}$  ergänzt und definiert:

$$\omega'(P) := \omega \left( \left( 1 - \sum_{l=1}^k \lambda_l \right) P_0 + \sum_{l=1}^k \lambda_l P_l \right) \quad \forall P = \sum_{l=0}^n \lambda_l P_l, \quad \sum_{l=0}^n \lambda_l = 1 .$$

**Lemma 1**

Eine simpliciale  $r$ -Form  $\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$  bezüglich  $\mathcal{K}$  ist durch ihre Werte in den Eckpunkten der Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  (also auf den 0-Simplizes der Zerlegung des Polyeders  $\mathcal{N}$ ) eindeutig bestimmt.

Beweis:

Für jedes  $m$ -Simplex  $\mathcal{N}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$  ist die affin lineare Abbildung  $\omega_i = \omega|_{\mathcal{N}_i}$  durch ihre Werte in den  $(m + 1)$  affin linear unabhängigen Eckpunkten eindeutig bestimmt. Es ist also nur zu zeigen, daß man durch die Vorgabe von Werten in allen Eckpunkten eine simpliciale  $r$ -Form, also eine insbesondere stetige Abbildung erhält.

Sei dazu  $\mathcal{N}_j = \langle P_0^j, \dots, P_m^j \rangle$  für  $j \in \{1, \dots, K\}$ . Weiter seien Werte

$$\omega_i^j \in \Lambda_r \mathcal{V}^* \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, K\}$$

mit der Verträglichkeitsbedingung für gemeinsame Eckpunkte

$$\omega_k^i = \omega_l^j \quad \forall P_k^i = P_l^j \in \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j, i, j \in \{1, \dots, K\}, k, l \in \{0, \dots, m\}$$

gegeben. Dann definiert man in einem Punkt

$$P := \sum_{i=0}^m \lambda_i P_i^j \in \mathcal{N}_j, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, m$$

den Wert von  $\omega$  durch

$$\omega(P) := \sum_{i=0}^m \lambda_i \omega_i^j \in \Lambda_r \mathcal{V}^*.$$

Insbesondere gilt damit:

$$\omega(P_i^j) = \omega_i^j \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, K\}.$$

Durch diese Vorschrift erhält man eine stückweise affin lineare Abbildung auf der gesamten Simplicialzerlegung. Die Wohldefiniertheit folgt dabei aus der durch die Konstruktion erfüllten Stetigkeit. Sei dazu für  $k \in \{0, \dots, m - 1\}$

$$\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \langle Q_0, \dots, Q_k \rangle = \langle P_{\mu_0}^i, \dots, P_{\mu_k}^i \rangle = \langle P_{\nu_0}^j, \dots, P_{\nu_k}^j \rangle$$

ein gemeinsames Untersimplex von  $\mathcal{N}_i$  und  $\mathcal{N}_j$  mit

$$Q_l = P_{\mu_l}^i = P_{\nu_l}^j, \quad l = 0, \dots, k,$$

und

$$P := \sum_{l=0}^k \lambda_l Q_l \in \langle Q_0, \dots, Q_k \rangle$$

mit  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{l=0}^k \lambda_l = 1$ ,  $\lambda_l \geq 0$ ,  $l = 0, \dots, k$  ein Punkt in diesem Untersimplex.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{l=0}^k \lambda_l Q_l = \sum_{l=0}^k \lambda_{\mu_l}^i P_{\mu_l}^i = \sum_{q=0}^m \lambda_q^i P_q^i \quad (\in \mathcal{N}_i) \\ &= \sum_{l=0}^k \lambda_{\nu_l}^j P_{\nu_l}^j = \sum_{q=0}^m \lambda_q^j P_q^j \quad (\in \mathcal{N}_j) \end{aligned}$$

mit reellen Zahlen  $\lambda_0^i, \dots, \lambda_m^i, \lambda_0^j, \dots, \lambda_m^j \geq 0$ ,

$$\sum_{q=0}^m \lambda_q^i = \sum_{l=0}^k \lambda_{\mu_l}^i = \sum_{q=0}^m \lambda_q^j = \sum_{l=0}^k \lambda_{\nu_l}^j = 1$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_q^i &= \lambda_p^j = 0 \quad \forall q \in \{0, \dots, m\} \setminus \{\mu_0, \dots, \mu_k\}, p \in \{0, \dots, m\} \setminus \{\nu_0, \dots, \nu_k\}, \\ \lambda_{\mu_l}^i &= \lambda_{\nu_l}^j = \lambda_l, \quad l = 0, \dots, k. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \omega(P) &= \sum_{l=0}^k \lambda_l \omega(Q_l) = \sum_{l=0}^k \lambda_{\mu_l}^i \omega(P_{\mu_l}^i) = \sum_{q=0}^m \lambda_q^i \omega(P_q^i) \\ &= \sum_{l=0}^k \lambda_{\nu_l}^j \omega(P_{\nu_l}^j) = \sum_{q=0}^m \lambda_q^j \omega(P_q^j). \end{aligned}$$

Der Wert von  $\omega$  im Punkt  $P$  hängt also nur von Werten in den gemeinsamen Ecken der Simplexe  $\mathcal{N}_i$  und  $\mathcal{N}_j$  ab. Da dies für beliebige gemeinsame Untersimplizes in  $\mathcal{K}$  gilt, ist  $\omega$  eine simpliziale  $r$ -Form auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$ . □

### Folgerung

Ist  $\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$  eine simpliziale  $r$ -Form auf  $\mathcal{N} = |\mathcal{K}|$  bezüglich  $\mathcal{K}$ , so ist für beliebige Untersimplizes  $\mathcal{L} \in \mathcal{K}$  die Einschränkung  $\omega|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$  eine affin lineare Abbildung.

## II.2.2 Tangentialstetigkeit

Es seien

$$\mathcal{N}_i = \langle P_0^i, \dots, P_m^i \rangle, \mathcal{N}_j = \langle P_0^j, \dots, P_m^j \rangle \subset \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

zwei Grundsimplexe eines  $m$ -Simplexpolyeders  $\mathcal{N}$ , die sich in einem gemeinsamen  $k$ -dimensionalen Untersimplex

$$\mathcal{L} = \langle Q_0, \dots, Q_k \rangle = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j$$

mit  $k \geq 1$  schneiden.

Mit  $v_l := Q_0 \vec{Q}_l$  für  $l = 1, \dots, k$  sei  $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  mit der zugehörigen dualen Basis  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ .

Ist nun  $\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$  eine simpliziale  $r$ -Form auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$ , so lassen sich die Einschränkungen von  $\omega$  auf die einzelnen Simplexe schreiben durch

$$\omega_\xi = \omega|_{\mathcal{N}_\xi} = \omega'_\xi|_{\mathcal{N}_\xi} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r}^\xi|_{\mathcal{N}_\xi} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^*, \quad \xi = 1, \dots, K$$

mit  $\omega'_\xi \in \Omega_r(\mathcal{N}'_\xi)$  und maximaldimensionalen konvexen Mengen  $\mathcal{N}'_\xi \subset \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{N}_\xi \subset \mathcal{N}'_\xi$ . Für eine gemeinsame Kante  $\langle Q_\alpha, Q_\beta \rangle \subset \mathcal{L}$  und  $\xi = i, j$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \omega_\xi(Q_\beta) &= \omega_\xi(Q_\alpha) + L_{\omega_\xi}(Q_\alpha \vec{Q}_\beta) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left( \alpha_{i_1, \dots, i_r}^\xi(Q_\alpha) + L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^\xi}(Q_\alpha \vec{Q}_\beta) \right) v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von  $\omega$ , speziell aus

$$\omega_i(Q_\zeta) = \omega_j(Q_\zeta), \quad \zeta = 0, \dots, k \quad (\Rightarrow \omega_i(Q) = \omega_j(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{L})$$

folgt

$$L_{\omega_i}(Q_\alpha \vec{Q}_\beta) = L_{\omega_j}(Q_\alpha \vec{Q}_\beta).$$

Aus der Darstellung bezüglich der Basis erhält man weiter

$$L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^i}(Q_\alpha \vec{Q}_\beta) = L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^j}(Q_\alpha \vec{Q}_\beta), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n.$$

Diese Gleichheit gilt für beliebige Kanten in  $\mathcal{L}$  und damit für beliebige Linearkombinationen innerhalb des durch das Simplex  $\mathcal{L}$  aufgespannten Unterraums von  $\mathcal{V}$ . Somit stimmen alle Richtungsableitungen auf gemeinsamen Untersimplizes überein, es gilt also für alle  $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$  :

$$L_{\omega_i}(v) = L_{\omega_j}(v) \quad \text{und} \quad L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^i}(v) = L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^j}(v), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n.$$

Betrachtet man nun die äußeren Ableitungen

$$d\omega'_\xi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left( \sum_{l=1}^n L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^\xi}(v_l) dv_l^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* \right), \quad \xi = i, j,$$

so folgt die Gleichheit aller derjenigen Summanden in  $d\omega'_i$  und  $d\omega'_j$ , in denen  $v_l$  einer der Basisvektoren  $v_1, \dots, v_k$  ist, also auf dem gemeinsamen Untersimplex  $\mathcal{L}$  liegt.

### Bezeichnung

Die Eigenschaft

$$L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^i}(v_l) dv_l^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^* = L_{\alpha_{i_1, \dots, i_r}^j}(v_l) dv_l^* \wedge dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_r}^*$$

für  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  und  $l \in \{1, \dots, k\}$ , die für  $\omega_i = \omega|_{\mathcal{N}_i}$  und  $\omega_j = \omega|_{\mathcal{N}_j}$  auf zwei beliebigen Grundsimplizes  $\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}$  mit einem gemeinsamen Untersimplex  $\mathcal{L}$  erfüllt ist, nennt man *Tangentialstetigkeit* der äußeren Ableitungen der Einschränkungen der simplizialen  $r$ -Form  $\omega$  bezüglich des Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$ .

### Bemerkung

Da die Tangentialstetigkeit der äußeren Ableitungen  $d\omega'_i \in \Omega_{r+1}^0(\mathcal{N}'_i)$  der lokalen affinen  $r$ -Formen  $\omega'_i \in \Omega_r(\mathcal{N}'_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$  aus den Eigenschaften der simplizialen  $r$ -Form  $\omega$  folgt, ist sie bei einer stückweise gegebenen konstanten  $(r+1)$ -Form als Kandidat für eine stückweise äußere Ableitung eine notwendige Bedingung für die Existenz einer (globalen) simplizialen  $r$ -Form auf einem Simplexpolyeder bezüglich einer Simplicialzerlegung.

Nun ist aber im allgemeinen bei zwei benachbarten Simplizes  $\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}$  (außer im Spezialfall einer affinen  $r$ -Form auf  $\text{aff}(\mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j)$ ) in den ergänzten linear unabhängigen Richtungen  $v_{k+1}, \dots, v_n$  keine Gleichheit der entsprechenden Richtungsableitungen gegeben. Das führt insbesondere dazu, daß die Tangentialstetigkeit einer gegebenen stückweise konstanten  $(r+1)$ -Form als mögliche stückweise äußere Ableitung einer simplizialen  $r$ -Form nicht direkt überprüfbar ist, da sich die Koeffizienten der einzelnen  $(r+1)$ -Formen bezüglich der Basis

$$\{dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{r+1}}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n\}$$

als Summen zusammensetzen. Im Falle der Tangentialstetigkeit sind dabei einige Summanden notwendigerweise gleich, andere müssen aber nicht gleich sein, womit im allgemeinen auch keine Gleichheit der Koeffizienten gegeben ist.

### II.2.3 Simpliciale Stammformen stückweise konstanter Formen

Ausgehend von einer stückweise konstanten  $(r + 1)$ -Form ist neben der notwendigen, aber nicht direkt überprüfaren Bedingung der Tangentialstetigkeit, eine stärkere, hinreichende, aber nicht notwendige, dafür aber leicht als erfüllt zu verifizierende Bedingung für die Existenz einer simplicialen  $r$ -Form auf zwei benachbarten Simplizes die Gleichheit aller Summanden, in denen ein  $dv_l^*$  mit  $1 \leq l \leq k$  auftritt. Die Existenz der lokalen Stammformen folgt dabei aus dem Lemma von Poincaré. Unter Voraussetzung entsprechender Verträglichkeitsbedingungen auf gemeinsamen Seiten aneinander grenzender Simplizes lassen sich auf diesem Weg simpliciale Stammformen auf einfach zusammenhängenden Simplexpolyedern konstruieren.

#### Definition 2

Es sei

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

ein  $m$ -Simplexpolyeder mit einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  und Grundsimplizes  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$ .

a) Eine Abbildung

$$\eta : \dot{\mathcal{K}} := \bigcup_{i=1}^K (\mathcal{N}_i \setminus \partial \mathcal{N}_i) \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$$

heißt *stückweise konstant* bezüglich  $\mathcal{K}$ , wenn  $\eta|_{\mathcal{N}_i \setminus \partial \mathcal{N}_i}$  für  $i = 1, \dots, K$  konstant ist.

b) Es sei

$$\eta : \dot{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda_{r+1} \mathcal{V}^*$$

eine stückweise konstante Abbildung bezüglich  $\mathcal{K}$  und

$$\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$$

eine simpliciale  $r$ -Form bezüglich  $\mathcal{K}$  mit

$$\omega|_{\mathcal{N}_i} = \omega_i^l|_{\mathcal{N}_i}, \quad \omega_i^l \in \Omega_r(\mathcal{N}_i^l), \quad i = 1, \dots, K$$

für maximaldimensionale Teilmengen  $\mathcal{N}_i^l \subset \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_i^l$ . Weiter gelte:

$$d\omega_i^l|_{\mathcal{N}_i \setminus \partial \mathcal{N}_i} = \eta|_{\mathcal{N}_i \setminus \partial \mathcal{N}_i}, \quad i = 1, \dots, K.$$

Dann heißt  $\omega$  eine *simpliciale Stammform* von  $\eta$ .

#### Lemma 2

Es seien

$$\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j \subset \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

zwei Grundsimplizes einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  eines  $m$ -Simplexpolyeders  $\mathcal{N}$ , die sich in einem gemeinsamen  $k$ -Simplex

$$\mathcal{L} = \langle Q_0, \dots, Q_k \rangle = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j$$

mit  $k \geq 1$  schneiden. Weiter sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  mit  $v_l = Q_0 \vec{Q}_l$ ,  $l = 1, \dots, k$ , und  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  sei die duale Basis.

Mit  $0 \leq r < n$  und  $\xi = i, j$  seien

$$\eta_\xi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^\xi dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{r+1}}^* \in \Omega_{r+1}^0(\mathcal{N}'_\xi)$$

konstante  $(r+1)$ -Formen auf maximaldimensionalen konvexen Mengen in  $\mathcal{M}$  mit  $\mathcal{N}_\xi \subset \mathcal{N}'_\xi$ , so daß gilt:

$$\alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^i = \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^j \quad \forall (i_1, \dots, i_{r+1}) : \{i_1, \dots, i_{r+1}\} \cap \{1, \dots, k\} \neq \emptyset.$$

Dann gibt es affine  $r$ -Formen  $\omega_i \in \Omega_r(\mathcal{N}'_i)$  und  $\omega_j \in \Omega_r(\mathcal{N}'_j)$ , so daß gilt:

$$d\omega_i = \eta_i, \quad d\omega_j = \eta_j \quad \text{und} \quad \omega_i|_{\mathcal{L}} = \omega_j|_{\mathcal{L}}.$$

Beweis:

Als konstante  $(r+1)$ -Formen sind  $\eta_i$  und  $\eta_j$  exakt. Daher sei für  $\xi = i, j$  wie im Beweis des ersten Spezialfalls des Poincaréschen Lemmas<sup>27</sup>  $\omega_\xi \in \Omega_r(\mathcal{N}'_\xi)$  mit  $d\omega_\xi = \eta_\xi$  definiert durch

$$\omega_\xi := \frac{1}{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^\xi \sum_{l=1}^{r+1} \beta_{i_l} \cdot (-1)^{l+1} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{dv_{i_l}^*} \wedge \dots \wedge dv_{i_{r+1}}^*$$

mit Koordinatenfunktionen  $\beta_1, \dots, \beta_n$  bezüglich  $(Q_0; v_1, \dots, v_n)$ .

Damit gilt für alle  $w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}$ :

$$(\omega_\xi)_P(w_1, \dots, w_r) = \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_\xi)_{Q_0}(Q_0 \vec{P}, w_1, \dots, w_r) \quad \forall P \in \mathcal{N}'_\xi.$$

Ist nun  $P \in \mathcal{L}$  ein Punkt auf dem gemeinsamen Untersimplex, so gilt  $Q_0 \vec{P} = \sum_{l=1}^k \lambda_l v_l$  mit geeigneten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , und wegen  $v_l^*(Q_0 \vec{P}) = 0$  für  $k < l \leq n$  gilt:

$$\begin{aligned} & (\eta_i)_{Q_0}(Q_0 \vec{P}, w_1, \dots, w_r) \\ &= \left( \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n \\ \{i_1, \dots, i_{r+1}\} \cap \{1, \dots, k\} \neq \emptyset}} \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^i v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right) (Q_0 \vec{P}, w_1, \dots, w_r) \\ &= \left( \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n \\ \{i_1, \dots, i_{r+1}\} \cap \{1, \dots, k\} \neq \emptyset}} \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^j v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right) (Q_0 \vec{P}, w_1, \dots, w_r) \\ &= (\eta_j)_{Q_0}(Q_0 \vec{P}, w_1, \dots, w_r) \end{aligned}$$

und folglich

$$(\omega_i)_P(w_1, \dots, w_r) = (\omega_j)_P(w_1, \dots, w_r) \quad \forall P \in \mathcal{L}, \quad w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}. \quad (\text{V1})$$

□

<sup>27</sup> Siehe Seite 65.

**Folgerung**

Da die Einschränkungen der beiden  $r$ -Formen  $\omega_i$  und  $\omega_j$  auf das gemeinsame Untersimplex  $\mathcal{L} = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j$  identisch sind, erhält man durch

$$\omega|_{\mathcal{N}_\xi} := \omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \xi = i, j$$

eine (wohldefinierte) simpliziale  $r$ -Form

$$\omega : \mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$$

bezüglich der Simplizialzerlegung

$$\tilde{\mathcal{K}} := \{\mathcal{K}_l \in \mathcal{K} \mid \mathcal{K}_l \subset \mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j\} = \{\mathcal{K}_l \in \mathcal{K} \mid \mathcal{K}_l \text{ ist Seite von } \mathcal{N}_i \text{ oder } \mathcal{N}_j\}$$

mit den Eigenschaften:

$$\omega|_{\mathcal{N}_\xi} = \omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \omega_\xi \in \Omega_r(\mathcal{N}'_\xi) \quad \text{und} \quad d\omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi} = \eta_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \xi \in \{i, j\}.$$

**Bemerkung**

Im obigen Beweis werden die Stammformen bezüglich eines affinen Koordinatensystems  $(Q_0; v_1, \dots, v_n)$  definiert, wobei der Punkt  $Q_0 \in \mathcal{L}$  willkürlich als Ursprung gewählt ist. Betrachtet man für zwei Ursprungspunkte  $Q, Q' \in \mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}$  die entsprechenden Stammformen  $\omega_i, \omega'_i \in \Omega_r(\mathcal{N}'_i)$  bezüglich der affinen Koordinatensysteme  $(Q; v_1, \dots, v_n)$  und  $(Q'; v_1, \dots, v_n)$  mit

$$\begin{aligned} (\omega_i)_P(w_1, \dots, w_r) &= \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_i)_Q(Q\vec{P}, w_1, \dots, w_r), \\ (\omega'_i)_P(w_1, \dots, w_r) &= \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_i)_{Q'}(Q'\vec{P}, w_1, \dots, w_r) \quad \forall w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}, \end{aligned}$$

so gilt:

$$\begin{aligned} (\omega'_i)_P(w_1, \dots, w_r) &= \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_i)_{Q'}(Q'\vec{Q} + Q\vec{P}, w_1, \dots, w_r) \\ &= \frac{1}{r+1} (\eta_i)_Q(Q\vec{P}, w_1, \dots, w_r) \\ &\quad + \frac{1}{r+1} (\eta_i)_Q(Q'\vec{Q}, w_1, \dots, w_r) \\ &= (\omega_i)_P(w_1, \dots, w_r) - (\omega_i)_{Q'}(w_1, \dots, w_r) \end{aligned}$$

also

$$(\omega'_i)_P = (\omega_i)_P - (\omega_i)_{Q'} \quad \left( = (\omega_i)_P + (\omega'_i)_Q \right) \quad (\text{V2})$$

für beliebige Punkte  $P \in \mathcal{N}'_i$ . Dabei hängt  $(\omega_i)_{Q'} \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  nicht von  $P$  ab.

- Betrachtet man nun für  $\xi = i, j$  jeweils zwei wie im obigen Beweis konstruierte  $r$ -Formen  $\omega_\xi$  und  $\omega'_\xi$  bezüglich der Ursprungspunkte  $Q \in \mathcal{L}$  bzw.  $Q' \in \mathcal{L}$ , so gilt aufgrund der Stetigkeit:

$$(\omega_i)_{P_i} - (\omega'_i)_{P_i} = (\omega_i)_{Q'} = (\omega_j)_{Q'} = (\omega_j)_{P_j} - (\omega'_j)_{P_j} \quad \forall P_i \in \mathcal{N}'_i, P_j \in \mathcal{N}'_j.$$

Die entsprechenden simplizialen  $r$ -Formen  $\omega$  und  $\omega'$  unterscheiden sich also auf  $\mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j$  um eine konstante  $r$ -Form  $\zeta \in \Omega_r^0(\mathcal{M})$  mit

$$\zeta(P) := \omega_{Q'} = -\omega'_Q \quad \forall P \in \mathcal{M}.$$

- Wählt man als Ursprungspunkte  $Q' \in \mathcal{N}_i$  und  $Q'' \in \mathcal{N}_j$ ,  $r$ -Formen  $\omega'_i \in \Omega_r(\mathcal{N}'_i)$  mit

$$(\omega'_i)_P(w_1, \dots, w_r) = \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_i)_{Q'} \left( Q' \vec{P}, w_1, \dots, w_r \right) \\ \forall w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}, P \in \mathcal{N}'_i,$$

sowie  $\omega''_j \in \Omega_r(\mathcal{N}'_j)$  mit

$$(\omega''_j)_P(w_1, \dots, w_r) = \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_j)_{Q''} \left( Q'' \vec{P}, w_1, \dots, w_r \right) \\ \forall w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}, P \in \mathcal{N}'_j,$$

und definiert man  $\omega'_j \in \Omega_r(\mathcal{N}'_j)$  für einen beliebigen Punkt  $Q \in \mathcal{L}$  durch

$$\omega'_j(P) := (\omega''_j)_P - (\omega''_j)_Q + (\omega'_i)_Q \quad \forall P \in \mathcal{N}'_j, \quad (*)$$

so erhält man eine simpliciale  $r$ -Form  $\omega'$  auf  $\mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j$  durch

$$\omega'|_{\mathcal{N}'_\xi} := \omega'_\xi|_{\mathcal{N}'_\xi}, \quad \xi = i, j,$$

denn  $\omega'$  unterscheidet sich von der in obiger Folgerung konstruierten simplicialen  $r$ -Form  $\omega$  nur durch eine konstante  $r$ -Form; es gilt:

$$(\omega'_i)_P = (\omega_i)_P - (\omega_i)_{Q'} \quad \forall P \in \mathcal{N}_i$$

sowie

$$\begin{aligned} (\omega'_j)_P &= (\omega''_j)_P - (\omega''_j)_Q + (\omega'_i)_Q \\ &= \left( (\omega_j)_P - (\omega_j)_{Q''} \right) - \left( (\omega_j)_Q - (\omega_j)_{Q''} \right) + \left( (\omega_i)_Q - (\omega_i)_{Q'} \right) \\ &= (\omega_j)_P - (\omega_i)_{Q'} \quad \forall P \in \mathcal{N}_j \end{aligned}$$

und speziell:

$$\begin{aligned} (\omega'_i)_P &= (\omega_i)_P - (\omega_i)_{Q'} \\ &= (\omega_j)_P - (\omega_i)_{Q'} = (\omega'_j)_P \quad \forall P \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Es zeigt sich hier insbesondere, daß diese Konstruktion unabhängig von  $Q \in \mathcal{L}$  ist.

Wählt man nun zusätzlich noch

$$Q = Q'' \in \mathcal{L} = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j,$$

so vereinfacht sich  $\omega'_j \in \Omega_r(\mathcal{N}'_j)$  in (\*) wegen  $(\omega''_j)_Q = (\omega''_j)_{Q''} = 0$  zu

$$\omega'_j(P) = (\omega''_j)_P + (\omega'_i)_{Q''} \quad \forall P \in \mathcal{N}'_j. \quad (V3)$$

Zur stetigen Fortsetzung der in  $Q'$  entwickelten Stammform  $\omega'_i$  muß also nur der Wert  $(\omega'_i)_{Q''}$  zu der in  $Q''$  entwickelten Stammform  $\omega''_j$  addiert werden.

**Satz 1**

Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes  $m$ -Simplexpolyeder

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

mit einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  und Grundsimplices  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$ .

Mit  $0 \leq r < n$  seien

$$\eta_\xi \in \Omega_{r+1}^0(\mathcal{N}'_\xi), \quad \xi = 1, \dots, K$$

konstante  $(r+1)$ -Formen auf maximaldimensionalen konvexen Mengen mit  $\mathcal{N}_\xi \subset \mathcal{N}'_\xi \subset \mathcal{M}$ .

Weiter gelte für je zwei Grundsimplices  $\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}$ , die sich in einem gemeinsamen  $k$ -Simplex

$$\mathcal{L} := \langle Q_0, \dots, Q_k \rangle = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j$$

mit  $1 \leq k \leq m$  schneiden:

Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  mit  $v_l = Q_0 \vec{Q}_l$ ,  $l = 1, \dots, k$ , und ist  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  die zugehörige duale Basis, und schreibt man ferner

$$\eta_\xi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^\xi dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{r+1}}^*, \quad \xi = i, j,$$

so ist

$$\alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^i = \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^j \quad \forall (i_1, \dots, i_{r+1}) : \{i_1, \dots, i_{r+1}\} \cap \{1, \dots, k\} \neq \emptyset.$$

Dann gibt es eine simpliciale  $r$ -Form  $\omega$  auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$  mit

$$\omega|_{\mathcal{N}_\xi} = \omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \omega_\xi \in \Omega_r(\mathcal{N}'_\xi), \quad \xi = 1, \dots, K,$$

so daß gilt:

$$d\omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi} = \eta_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \xi = 1, \dots, K.$$

**Beweis:**

Es seien  $\{P_1, \dots, P_L\} \subset \mathcal{K}$  alle nulldimensionalen Simplizes in  $\mathcal{K}$ . Für zwei Eckpunkte

$$P_\mu, P_\nu \in \mathcal{N}_\xi \subset \mathcal{N}, \quad \mu, \nu \in \{1, \dots, L\}, \quad \xi \in \{1, \dots, K\}$$

eines Grundsimplex  $\mathcal{N}_\xi$  sei  $\omega_{\mu\nu} \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  definiert als Wert der in  $P_\mu$  entwickelten Stammform zu  $\eta_\xi$  im Punkt  $P_\nu$ :

$$\omega_{\mu\nu}(w_1, \dots, w_r) := \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_\xi)_{P_\mu} \left( P_\mu \vec{P}_\nu, w_1, \dots, w_r \right) \quad \forall w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}.$$

Damit ist  $\omega_{\mu\nu}$  durch die vorausgesetzte Verträglichkeitsbedingung wohldefiniert.<sup>28</sup>

Nun sei  $P_\alpha$  für ein  $\alpha \in \{1, \dots, L\}$  beliebig, aber fest gewählt.

Für ein Simplex  $\mathcal{N}_\xi$ ,  $\xi \in \{1, \dots, K\}$ , gibt es dann einen Eckpunkt  $P_\beta \in \mathcal{N}_\xi$  und einen Kantenzug  $(P_{\mu_0}, \dots, P_{\mu_l})$  mit  $P_{\mu_0} = P_\alpha$  und  $P_{\mu_l} = P_\beta$ , also eine Folge von Eckpunkten,

<sup>28</sup> Siehe Gleichung (V1).

so daß jeweils zwei aufeinanderfolgende Punkte in einem Simplex liegen. Man definiert auf  $\mathcal{N}'_\xi$  die Stammform:

$$(\omega_\xi)_P(w_1, \dots, w_r) := \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_\xi)_{P_\beta} \left( P_\beta \vec{P}, w_1, \dots, w_r \right) + \sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}}(w_1, \dots, w_r) \quad \forall w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}, P \in \mathcal{N}'_\xi.$$

Es sind nun zwei Teilbehauptungen zu beweisen:

- 1)  $\omega_\xi$  ist unabhängig vom Kantenzug  $(P_{\mu_0}, \dots, P_{\mu_l})$  von  $P_\alpha$  nach  $P_\beta$ .

Dazu wird gezeigt, daß für elementare Deformationen  $(P_{\mu_0}, \dots, P_{\mu_l}) \rightsquigarrow (P_{\nu_0}, \dots, P_{\nu_k})$  gilt:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}} = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_{\nu_i \nu_{i+1}}.$$

Für Eckpunkte  $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}, P_{\lambda_3} \in \mathcal{N}'_\zeta \subset \mathcal{N}$ ,  $\zeta \in \{1, \dots, K\}$  gilt offenbar<sup>29</sup>

$$\omega_{\lambda_1 \lambda_3} = \omega_{\lambda_1 \lambda_2} + \omega_{\lambda_2 \lambda_3}$$

sowie

$$\omega_{\lambda_1 \lambda_1} = \omega_{\lambda_1 \lambda_2} + \omega_{\lambda_2 \lambda_1} = 0,$$

woraus die Gleichheit der obigen Summen für die ersten vier elementaren Deformationen<sup>30</sup> folgt. Die Fünfte der Deformationen, also die Verschiebung des Anfangspunktes innerhalb eines geschlossenen Kantenzuges, äußert sich nur in einer Umnummerierung, denn mit  $\mu_l = \mu_0$  gilt:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}} = \omega_{\mu_0 \mu_1} + \sum_{i=1}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}} = \sum_{i=1}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}} + \omega_{\mu_l \mu_1}.$$

Sind nun  $(P_{\mu_0}, \dots, P_{\mu_l})$  und  $(P_{\nu_0}, \dots, P_{\nu_k})$  zwei Kantenzüge von  $P_\alpha$  nach  $P_\beta$ , so ist  $(P_{\mu_0}, \dots, P_{\mu_l} = P_{\nu_k}, P_{\nu_{k-1}}, \dots, P_{\nu_0})$  ein geschlossener Kantenzug. Da  $\mathcal{N}$  einfach zusammenhängend ist, läßt sich jeder geschlossene Kantenzug durch endlich viele elementare Deformationen in einen Kantenzug der Länge 0 überführen. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}} + \sum_{i=0}^{k-1} \omega_{\nu_{k-i} \nu_{k-i-1}} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}} &= - \sum_{i=0}^{k-1} \omega_{\nu_{k-i} \nu_{k-i-1}} = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_{\nu_{k-i-1} \nu_{k-i}} = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_{\nu_i \nu_{i+1}}. \end{aligned}$$

Die Stammform  $\omega_\xi$  ist also wegen

$$\sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}}(w_1, \dots, w_r) = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_{\nu_i \nu_{i+1}}(w_1, \dots, w_r) \quad \forall w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}$$

unabhängig von der speziellen Wahl des Kantenzuges von  $P_\alpha$  nach  $P_\beta$ .

<sup>29</sup> Siehe Gleichung (V2) in obiger Bemerkung.

<sup>30</sup> Ersetzen zweier Seiten eines Dreiecks durch die Dritte (und umgekehrt) sowie Streichen (Einfügen) eines „Hin-und-Zurück“-Weges.

2)  $\omega_\xi$  ist unabhängig vom gewählten Eckpunkt  $P_\beta \in \mathcal{N}_\xi$ .

Sei dazu  $P_\gamma \in \mathcal{N}_\xi$  ein Eckpunkt. Dann gilt für alle  $P \in \mathcal{N}_\xi$  :

$$\begin{aligned}
 (\omega_\xi)_P(w_1, \dots, w_r) &= \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_\xi)_{P_\beta} \left( P_\beta \vec{P}_\gamma + P_\gamma \vec{P}, w_1, \dots, w_r \right) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}}(w_1, \dots, w_r) \\
 &= \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_\xi)_{P_\gamma} \left( P_\gamma \vec{P}, w_1, \dots, w_r \right) + \omega_{\beta\gamma}(w_1, \dots, w_r) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{l-1} \omega_{\mu_i \mu_{i+1}}(w_1, \dots, w_r) \\
 &= \frac{1}{r+1} \cdot (\eta_\xi)_{P_\gamma} \left( P_\gamma \vec{P}, w_1, \dots, w_r \right) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^l \omega_{\mu_i \mu_{i+1}}(w_1, \dots, w_r) \quad \forall w_1, \dots, w_r \in \mathcal{V}
 \end{aligned}$$

mit  $\mu_{l+1} := \gamma$ . Man erhält also den Wert der in  $P_\gamma$  entwickelten Stammform zu  $\eta_\xi$  im Punkt  $P$  zuzüglich des durch den Kantenzug  $(P_{\mu_0}, \dots, P_{\mu_{l+1}})$  von  $P_\alpha$  nach  $P_\gamma$  definierten zu addierenden Anteils. Die Stammform  $\omega_\xi$  ist somit auch unabhängig vom gewählten Entwicklungspunkt  $P_\beta \in \mathcal{N}_\xi$ .

Da die lokalen Stammformen

$$\omega_\xi \in \Omega_r(\mathcal{N}_\xi^l), \quad \xi = 1, \dots, K$$

unter Verwendung der Verträglichkeitsbedingung für die stetige Fortsetzung (V3) konstruiert wurden, stimmen sie auf gemeinsamen Seiten aneinandergrenzender Simplexes überein. Durch die Einschränkung

$$\omega|_{\mathcal{N}_\xi} := \omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \xi = 1, \dots, K$$

erhält man also eine (wohldefinierte) simpliziale  $r$ -Form  $\omega$  auf  $\mathcal{N}$  mit den gewünschten Eigenschaften. □

**Folgerung** (Poincarésches Lemma für stückweise konstante  $(r+1)$ -Formen auf einfach zusammenhängenden Simplexpolyedern)

Ist mit den Voraussetzungen des letzten Satzes

$$\eta : \dot{\mathcal{K}} = \bigcup_{\xi=1}^K (\mathcal{N}_\xi \setminus \partial \mathcal{N}_\xi) \rightarrow \Lambda_{r+1} \mathcal{V}^*$$

stückweise konstant bezüglich  $\mathcal{K}$  mit

$$\eta|_{\mathcal{N}_\xi \setminus \partial \mathcal{N}_\xi} = \eta_\xi|_{\mathcal{N}_\xi \setminus \partial \mathcal{N}_\xi}, \quad \eta_\xi \in \Omega_{r+1}^0(\mathcal{N}_\xi^l), \quad \xi = 1, \dots, K,$$

so ist die oben konstruierte simpliziale  $r$ -Form  $\omega$  eine simpliziale Stammform von  $\eta$ .

**Bemerkung**

- a) Ist  $\mathcal{N}$  nicht zusammenhängend, so kann, da zwischen verschiedenen Zusammenhangskomponenten keine Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen sind, jede der Komponenten für sich betrachtet werden. Der Satz gilt also auch für nichtzusammenhängende Simplexpolyeder, deren sämtliche Zusammenhangskomponenten einfach zusammenhängend sind.
- b) Die aus der Tangentialstetigkeit einer stückweise konstanten  $(r + 1)$ -Form folgende Existenz einer simplicialen Stammform entspricht innerhalb der klassischen Vektoranalysis der aus der Tangentialstetigkeit eines stückweise konstanten Vektorfeldes folgenden Existenz einer stückweise affin linearen Funktion, deren Gradient das (somit konservative) Vektorfeld ist.<sup>31</sup>

**II.2.4 Simpliciale Stammformen stückweise affin linearer Formen**

Der zweite in Kapitel I behandelte Spezialfall des Poincaréschen Lemmas besagt, daß jede geschlossene (affin lineare)  $r$ -Form auf einer konvexen Menge exakt ist. Setzt man nun eine simpliciale  $(r + 1)$ -Form auf einem Simplexpolyeder voraus, die auf jedem Simplex Einschränkung einer geschlossenen Form ist, so lassen sich lokale Stammformen auf benachbarten Simplexes in Punkten gemeinsamer Untersimplizes entwickeln, wodurch man eine simpliciale Stammform auf den beteiligten Simplexes erhält. Folglich läßt sich der zweite Spezialfall des Lemmas von Poincaré für sternförmige Simplexpolyeder mit einem gemeinsamen Eckpunkt aller Grundsimplizes verallgemeinern. Da sich aber im affin linearen Fall die in verschiedenen Punkten entwickelten (quadratischen) Stammformen um geschlossene  $r$ -Formen unterscheiden, die im allgemeinen nicht konstant sind, ist es nicht möglich, wie im letzten Abschnitt simpliciale Stammformen auf einfach zusammenhängenden Polyedern durch Anpassung von Konstanten zu konstruieren.

**Definition 3**

Es sei

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

ein  $m$ -Simplexpolyeder mit einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  und Grundsimplizes  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$ . Eine *simpliciale Stammform* einer simplicial polynomialen  $(r + 1)$ -Form

$$\eta : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_{r+1} \mathcal{V}^*$$

vom Grad  $q$  auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$  ist eine simpliciale  $r$ -Form

$$\omega : \mathcal{N} \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^*$$

(vom Grad  $q + 1$ ) bezüglich  $\mathcal{K}$  mit

$$\omega|_{\mathcal{N}_i} = \omega_i|_{\mathcal{N}_i}, \quad \omega_i \in \Omega_r^{q+1}(\mathcal{N}_i'), \quad i = 1, \dots, K,$$

und maximaldimensionalen konvexen Mengen  $\mathcal{N}_i' \subset \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_i'$ ,  $i = 1, \dots, K$ , so daß gilt:

$$d\omega_i|_{\mathcal{N}_i} = \eta|_{\mathcal{N}_i}, \quad i = 1, \dots, K.$$

<sup>31</sup> Vgl. dazu I.4.4 Exkurs: Die klassischen Differentialoperatoren.

**Lemma 3**

Es seien

$$\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j \subset \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

zwei Grundsimplizes einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  eines  $m$ -Simplexpolyeders  $\mathcal{N}$ , die sich in einem gemeinsamen  $k$ -Simplex

$$\mathcal{L} = \langle Q_0, \dots, Q_k \rangle = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j$$

mit  $k \geq 1$  schneiden.

Mit  $0 \leq r < n$  sei  $\eta$  eine simpliziale (also simplizial affin lineare)  $(r+1)$ -Form auf  $\mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j$  bezüglich der Simplicialzerlegung

$$\mathcal{K}' := \{\mathcal{K}_l \in \mathcal{K} \mid \mathcal{K}_l \subset \mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j\} = \{\mathcal{K}_l \in \mathcal{K} \mid \mathcal{K}_l \text{ Seite von } \mathcal{N}_i \text{ oder } \mathcal{N}_j\}$$

mit

$$\eta|_{\mathcal{N}_\xi} = \eta_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \eta_\xi \in \Omega_{r+1}(\mathcal{N}'_\xi), \quad \xi = i, j,$$

und maximaldimensionalen konvexen Mengen  $\mathcal{N}'_i, \mathcal{N}'_j \subset \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}'_i$  und  $\mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}'_j$ .

Sind nun  $\eta_i$  und  $\eta_j$  geschlossen, gilt also

$$d\eta_i = 0 \quad \text{und} \quad d\eta_j = 0,$$

so besitzt  $\eta$  eine simpliziale Stammform bezüglich  $\mathcal{K}'$ . Es gibt also eine simpliziale  $r$ -Form  $\omega$  auf  $\mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j$  vom Grad 2 bezüglich  $\mathcal{K}'$  mit

$$\omega|_{\mathcal{N}_\xi} = \omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \omega_\xi \in \Omega_r^2(\mathcal{N}'_\xi), \quad \xi = i, j,$$

so daß gilt:

$$d\omega_i|_{\mathcal{N}_i} = \eta|_{\mathcal{N}_i} \quad \text{und} \quad d\omega_j|_{\mathcal{N}_j} = \eta|_{\mathcal{N}_j}.$$

**Beweis:**

Nach Voraussetzung sind die  $(r+1)$ -Formen  $\eta_i$  und  $\eta_j$  geschlossen und damit exakt.

Sei nun  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  mit  $v_l = Q_0 \vec{Q}_l$ ,  $l = 1, \dots, k$  und  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  die zugehörige duale Basis. Weiter sei

$$\eta_\xi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^\xi dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{r+1}}^*, \quad \xi = i, j.$$

Mit Koordinatenfunktionen  $\beta_1, \dots, \beta_n$  bezüglich  $(Q_0; v_1, \dots, v_n)$  setzt man:

$$(\omega_\xi)_P := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^\xi \left( Q_0 + \frac{r+1}{r+2} Q_0 \vec{P} \right) \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta_{i_k}(P) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right)$$

für  $\xi = i, j$  und  $P \in \mathcal{N}'_\xi$ . Dann ist  $\omega_\xi \in \Omega_r^2(\mathcal{N}'_\xi)$  und es gilt  $d\omega_\xi = \eta_\xi$  für  $\xi = i, j$ .<sup>32</sup>

<sup>32</sup> Vgl. dazu Teil b) des Beweises des Poincaréschen Lemmas auf Seite 66.

Da die simpliciale  $(r + 1)$ -Form  $\eta$  stetig ist, gilt für alle Punkte  $P \in \mathcal{L}$  des gemeinsamen Untersimplex:

$$(\eta_i)_P = (\eta_j)_P \Rightarrow \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^i(P) = \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}^j(P) \quad \forall 0 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n,$$

und da mit  $Q_0, P \in \mathcal{L}$  auch  $\left(Q_0 + \frac{r+1}{r+2} Q_0 \vec{P}\right) \in \mathcal{L}$  ist, folgt:

$$(\omega_i)_P = (\omega_j)_P \quad \forall P \in \mathcal{L}.$$

Damit ist

$$\omega : \mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j \rightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* \quad \text{mit} \quad \omega|_{\mathcal{N}_\xi} := \omega_\xi, \quad \xi = i, j$$

eine (wegen  $\omega_i|_{\mathcal{L}} = \omega_j|_{\mathcal{L}}$  wohldefinierte und stetige) simplicial quadratische  $r$ -Form auf  $\mathcal{N}_i \cup \mathcal{N}_j$  bezüglich  $\mathcal{K}'$  mit

$$d\omega_\xi|_{\mathcal{N}_\xi} = \eta_\xi|_{\mathcal{N}_\xi} = \eta|_{\mathcal{N}_\xi}, \quad \xi = i, j.$$

□

**Folgerung** (Poincarésches Lemma für simplicial affin lineare  $(r+1)$ -Formen auf sternförmigen Simplexpolyedern)

Ein  $m$ -Simplexpolyeder

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

mit einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  und Grundsimplizes  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$  sei *sternförmig* bezüglich eines gemeinsamen Eckpunktes  $Q \in \mathcal{K}$ , es gelte also  $Q \in \mathcal{N}_i$  für  $i = 1, \dots, K$ .

Mit  $0 \leq r < n$  sei  $\eta$  eine simpliciale  $(r + 1)$ -Form auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$  mit

$$\eta|_{\mathcal{N}_i} = \eta_i|_{\mathcal{N}_i}, \quad \eta_i \in \Omega_{r+1}(\mathcal{N}'_i), \quad i = 1, \dots, K$$

und maximaldimensionalen konvexen Mengen  $\mathcal{N}'_i \subset \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}'_i$ , wobei die lokalen  $(r + 1)$ -Formen geschlossen seien:

$$d\eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, K.$$

Dann besitzt  $\eta$  eine simpliciale Stammform bezüglich  $\mathcal{K}$ .

**Bemerkung**

Betrachtet man für zwei Ursprungspunkte  $Q, Q' \in \mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}$  und

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}} dv_{i_1}^* \wedge \dots \wedge dv_{i_{r+1}}^* \in \Omega_{r+1}(\mathcal{N}'_i)$$

zwei Stammformen  $\omega, \omega' \in \Omega_r^2(\mathcal{N}'_i)$  mit

$$\omega_P = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}} \left( Q + \frac{r+1}{r+2} Q \vec{P} \right) \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta_{i_k}(P) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right)$$

bezüglich des affinen Koordinatensystems  $(Q; v_1, \dots, v_n)$  und  $\vec{Q}P = \sum_{l=1}^n \beta_l(P) \cdot v_l$  sowie

$$\omega'_P = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}} \left( Q' + \frac{r+1}{r+2} \vec{Q}P \right) \right. \\ \left. \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta'_{i_k}(P) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right)$$

bezüglich  $(Q'; v_1, \dots, v_n)$  und  $\vec{Q}'P = \sum_{l=1}^n \beta'_l(P) \cdot v_l$ , so gilt wegen

$$\begin{aligned} Q' + \frac{r+1}{r+2} \vec{Q}'P &= Q' + \frac{r+1}{r+2} \vec{Q}'Q + \frac{r+1}{r+2} \vec{Q}'P \\ &= Q' + \vec{Q}'Q + \frac{1}{r+2} \vec{Q}'Q' + \frac{r+1}{r+2} \vec{Q}'P \\ &= Q + \frac{r+1}{r+2} \vec{Q}'P + \frac{1}{r+2} \vec{Q}'Q' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{Q}'P = \vec{Q}'Q + \vec{Q}'P &\Rightarrow \sum_{l=1}^n \beta'_l(P) \cdot v_l = \sum_{l=1}^n (\beta'_l(Q) + \beta_l(P)) \cdot v_l \\ &\Rightarrow \beta'_l(P) = \beta'_l(Q) + \beta_l(P), \quad l = 1, \dots, n \end{aligned}$$

der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \omega'_P &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}} \left( Q + \frac{r+1}{r+2} \vec{Q}'P \right) \right. \\ &\quad \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta'_{i_k}(Q) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \\ &\quad + \frac{1}{(r+1)(r+2)} \cdot L_{\alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}} \left( \vec{Q}'Q' \right) \\ &\quad \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta_{i_k}(P) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \\ &\quad + \frac{1}{(r+1)(r+2)} \cdot L_{\alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}}} \left( \vec{Q}'Q' \right) \\ &\quad \left. \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta'_{i_k}(Q) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right) \\ &\quad + \omega_P. \end{aligned}$$

Die beiden Stammformen unterscheiden sich also wegen

$$d(\omega_i - \omega'_i) = d\omega_i - d\omega'_i = \eta_i - \eta_i = 0$$

um eine geschlossene affine  $r$ -Form, die im allgemeinen nicht konstant und damit auch nicht allein von den Punkten  $Q$  und  $Q'$  abhängig ist. Insbesondere gilt wegen

$$\begin{aligned} \omega_{Q'} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}} \left( Q + \frac{r+1}{r+2} Q \vec{Q}' \right) \right. \\ &\quad \left. \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta_{i_k}(Q') \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}} \left( Q' + \frac{1}{r+2} Q' \vec{Q} \right) \right. \\ &\quad \left. \wedge \sum_{k=1}^{r+1} (-\beta'_{i_k}(Q)) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \omega'_Q &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} \left( \frac{1}{r+1} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_{r+1}} \left( Q' + \frac{r+1}{r+2} Q' \vec{Q} \right) \right. \\ &\quad \left. \wedge \sum_{k=1}^{r+1} \beta'_{i_k}(Q) \cdot (-1)^{k+1} \cdot v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_k}^*} \wedge \dots \wedge v_{i_{r+1}}^* \right) \end{aligned}$$

im allgemeinen

$$\omega_{Q'} \neq -\omega'_Q \quad \text{und} \quad \omega_P \neq \omega'_P + \omega_{Q'} .$$

Die Konstruktion einer simplicialen Stammform auf einem Simplexpolyeder durch Auswahl eines Startpunktes und Addition von Werten entlang Kantenzügen, wie sie im konstanten Fall durchgeführt wurde, wäre also, da die zu addierenden Anteile auf geschlossenen Kantenzügen im allgemeinen nicht verschwinden, stets von den speziell gewählten Eckpunktfolgen abhängig. Der einfache Zusammenhang des Simplicialkomplexes genügt in diesem Fall offenbar nicht. Desweiteren ist nicht garantiert, daß man durch eine solche Konstruktionsvorschrift eine stetige Abbildung und damit eine simpliciale Stammform erhalte, da die Stetigkeitsbedingungen zwischen benachbarten Simplizes nur bei Auswahl eines gemeinsamen Entwicklungspunktes der Stammformen Berücksichtigung finden, nicht aber bei Addition von geschlossenen Formen entlang Kantenzügen.

**Bemerkung**

Die lokale Geschlossenheit einer simplicialen  $(r+1)$ -Form und die daraus folgende Existenz einer simplicialen Stammform (vom Grad 2) entspricht innerhalb der klassischen Vektoranalysis der aus dem lokalen Verschwindens der Rotation eines Vektorfeldes folgenden Existenz einer stückweise quadratischen Funktion, deren Gradient das Vektorfeld ist (also der Konservativität des Feldes).<sup>33</sup> Da sich zwei quadratische Funktionen mit identischen Gradientenfeldern nur um eine Konstante unterscheiden, ist es im klassischen Analogon aber möglich, globale Lösungen auf Simplexpolyedern bereits unter Voraussetzung des einfachen Zusammenhangs zu konstruieren.

<sup>33</sup> Vgl. dazu I.4.4 Exkurs: Die klassischen Differentialoperatoren.



# III Elektromagnetische Felder

*„Es gibt ein Paradoxon, auf das ich schon im Alter von 16 Jahren stieß. Wenn ich einen Lichtstrahl verfolge,... sollte ich einen solchen Lichtstrahl als ein ruhendes, im Raum oszillierendes elektromagnetisches Feld sehen. So etwas scheint es jedoch nicht zu geben, weder auf Grund der Erfahrung noch nach den Maxwellschen Gleichungen.“*

Albert Einstein

Im folgenden wird der diskrete Differentialformenkalkül auf die Maxwellschen Gleichungen angewandt, die – beruhend auf den Ergebnissen Faradays – als Grundformeln einer vereinheitlichenden Theorie elektrischer und magnetischer Kräfte die elektromagnetischen Erscheinungen als Eigenschaften des kontinuierlichen Modells elektromagnetischer Felder beschreiben. Erst durch den von E. Cartan geschaffenen Differentialformenkalkül lassen sich die Maxwellschen Gleichungen dem besonderen Zusammenhang von Raum und Zeit sowie der Verwobenheit von elektrischem und magnetischem Feld angemessen formulieren. In der hier betrachteten Situation diskreter Daten in Eckpunkten vierdimensionaler Simplizes und damit eindeutig bestimmter affin linearer Interpolierender auf den gesamten Simplizes erweist sich der diskrete Differentialformenkalkül als angemessenes Werkzeug.

## III.1 Die Minkowski-Raum-Zeit

*„Zeit, Ort und Bewegung, als allen bekannt, erkläre ich nicht. Ich bemerke nur, daß man gewöhnlich diese Größen nicht anders als in bezug auf die Sinne auffaßt und so gewisse Vorurteile entstehen.“*

Isaac Newton

Elektrisches und magnetisches Feld lassen sich in einer 2-Form  $F$  zusammenfassen, die auf dem erweiterten Konfigurationsraum (Ereignisraum), dem kartesischen Produkt des Anschauungsraumes mit der Zeit und damit einem vierdimensionalen affinen Punktraum, definiert ist. Der erweiterte Konfigurationsraum ist mit einer durch die relativistischen Gleichungen aufgeprägten Pseudometrik, der Minkowski-Metrik versehen, die durch ein Pseudoskalarprodukt des Index 1 auf dem zugehörigen Verschiebungsvektorraum induziert wird. Unter diesen Voraussetzungen „sieht in gleichförmig zueinander bewegten Bezugssystemen alles gleich aus“, sofern affine Koordinatensysteme gemäß der Poincaré-Gruppe (Verschiebungen und Lorentz-Transformationen) transformiert werden. Insbesondere sind die Maxwellschen Gleichungen für die 2-Form  $F$  und die Minkowski-Metrik forminvariant unter der Poincaré-Gruppe. Man nennt den mit dieser Metrik versehenen erweiterten Konfigurationsraum (der ein vierdimensionaler Minkowski-Raum im Sinne der Definition in I.1.3 ist) Minkowski-Raum-Zeit.

Im folgenden wird die geometrische Struktur der Minkowski-Raum-Zeit im Hinblick auf die diskrete Formulierung der Maxwellschen Gleichungen betrachtet. Die speziellen Eigenschaften setzen dabei zumeist nicht die Vierdimensionalität sondern nur ein Pseudoskalarprodukt des Index 1 voraus. Als Grundlage dieser Betrachtungen dienen im wesentlichen [26] und [14]; auf Beweise wird, soweit sie dort nachzulesen sind, verzichtet. Eine Untersuchung von Minkowski-Räumen (gemäß der Definition in I.1.3) als affine Punkträume finden sich in [3].

### III.1.1 Definitionen, Bezeichnungen und grundlegende Eigenschaften

Im folgenden sei

- $\mathcal{M}$  ein vierdimensionaler Minkowski-Raum (die *Minkowski-Raum-Zeit*),
- $\mathcal{V}$  der zugehörige vierdimensionale Vektorraum der Parallelverschiebungen  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,
- $\xi$  das Pseudoskalarprodukt

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \xi(u, v) =: \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

mit  $\text{Index}(\xi) = 1$ ,

- $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$  die durch  $\xi$  induzierte Pseudonorm auf  $\mathcal{V}$ ,
- $d$  die durch diese Pseudonorm induzierte Pseudo-Abstandsfunktion

$$\begin{aligned} d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (P, Q) &\longmapsto d(P, Q) := \|\vec{PQ}\|. \end{aligned}$$

Desweiteren sei jede Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  so sortiert, daß gilt:

$$q_\xi(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in \{1, 2, 3\}, \\ -1 & \text{falls } i = 4. \end{cases}$$

#### Bemerkung

a) Für jede Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  gilt:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ 1, & i = j \in \{1, 2, 3\}, \\ -1, & i = j = 4, \end{cases}$$

und damit

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \quad \|e_4\| = i.$$

Für zwei Vektoren  $v, w \in \mathcal{V}$  mit  $v = \sum_{i=1}^4 v_i e_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^4 w_i e_i$  gilt also:

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - v_4 w_4.$$

b) Für eine Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  und einen beliebigen Punkt  $O \in \mathcal{M}$  ist  $(O, O + e_1, O + e_2, O + e_3, O + e_4)$  ein affines Koordinatensystem von  $\mathcal{M}$ .

Für zwei Punkte

$$P = O + \sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i, \quad P' = O + \sum_{i=1}^4 \lambda'_i e_i \in \mathcal{M}$$

erhält man als Abstand von  $P$  und  $P'$ :

$$d(P, P') = \|\vec{PP'}\| = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda'_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda'_2)^2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)^2 - (\lambda_4 - \lambda'_4)^2}.$$

Für den Abstand des Punktes  $P$  vom Ursprung  $O$  erhält man:

$$d(P, O) = \|\vec{PO}\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2}.$$

**Bezeichnung**

Üblicherweise nennt man

- die Punkte  $P \in \mathcal{M}$  (*raum-zeitliche Ereignisse*),
- das innere Produkt  $\xi$  *Lorentzprodukt* und
- (nichttriviale) Vektoren  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  mit  $\|v\| = 0$  *selbstorthogonal, lichtartig* oder *isotrop*.

**Bemerkung**

Es gibt Basen von  $\mathcal{V}$ , die nur aus selbstorthogonalen Vektoren bestehen. Für eine Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  ist eine solche beispielsweise

$$\left\{ e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 + e_4, e_1 + e_2 + \sqrt{2} e_4 \right\}.$$

**Lemma 1**

Zwei selbstorthogonale Vektoren  $v, w \in \mathcal{V}$  sind genau dann orthogonal, wenn sie linear abhängig sind.

Beweis:

Für eine Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  seien

$$v = \sum_{i=1}^4 v_i e_i = v' + v_4 e_4, \quad w = \sum_{i=1}^4 w_i e_i = w' + w_4 e_4 \in \mathcal{V}$$

mit  $v', w' \in \text{span}(e_1, e_2, e_3)$ . Auf diesem Untervektorraum ist  $\xi$  positiv definit.

Sind nun  $v$  und  $w$  selbstorthogonal, so gilt:

$$\langle v, v \rangle = \langle v', v' \rangle - v_4^2 = 0 \quad \text{und} \quad \langle w, w \rangle = \langle w', w' \rangle - w_4^2 = 0.$$

1) Sind  $v$  und  $w$  zueinander orthogonal, so gilt:

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle v', w' \rangle - v_4 w_4.$$

Da (per def.)  $v, w \neq 0$  sind, gilt weiter:

$$\langle v', v' \rangle = v_4^2 > 0 \quad \text{und} \quad \langle w', w' \rangle = w_4^2 > 0.$$

Man erhält:

$$\langle v', w' \rangle^2 = v_4^2 w_4^2 = \langle v', v' \rangle \langle w', w' \rangle.$$

Damit ist Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für  $v', w' \in \text{span}(e_1, e_2, e_3)$  erfüllt, und es folgt die lineare Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w' &= \lambda v' \\ \Rightarrow v_4 w_4 &= \langle v', w' \rangle = \lambda \langle v', v' \rangle = \lambda v_4^2 \\ \Rightarrow w_4 &= \lambda v_4. \end{aligned}$$

Man erhält:

$$w = w' + w_4 e_4 = \lambda v' + \lambda v_4 e_4 = \lambda v.$$

2) Sind umgekehrt  $v$  und  $w$  linear abhängig, so erhält man sofort die Orthogonalität:

$$v = \lambda w \Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle \lambda w, w \rangle = \lambda \langle w, w \rangle = 0.$$

□

**Definition 1**

Für  $P_0 \in \mathcal{M}$  heißt

$$K_L(P_0) := \left\{ P \in \mathcal{M} \mid \|P_0 \vec{P}\| = 0 \right\}$$

Lichtkegel von  $P_0$  in  $\mathcal{M}$ . Für  $P \in K_L(P_0) \setminus \{P_0\}$  heißt

$$S_{P_0, P} := \left\{ P_0 + t P_0 \vec{P} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Licht-Weltlinie oder Lichtstrahl durch  $P_0$  und  $P$ .

**Bemerkung**

Die Bezeichnungen „Lichtkegel“ und „Lichtstrahl“ sind motiviert durch die Lichtartigkeit der Verschiebungsvektoren  $P_0 \vec{P}$  für Punkte  $P \in K_L(P_0)$ . Die zwei Punkte  $P_0$  und  $P$  lassen sich in diesem Fall als zwei mögliche Ereignisse eines sich mit (der als  $c := 1$  festgelegten) Lichtgeschwindigkeit fortbewegenden Teilchens interpretieren, also als zwei auf der Weltlinie eines Photons liegende Ereignisse.

**Lemma 2**

a) Für alle  $P_0, P \in \mathcal{M}$  gilt:

$$P \in K_L(P_0) \Leftrightarrow P_0 \in K_L(P).$$

b) Sei  $P_0 \in \mathcal{M}$ , dann gilt:

$$S_{P_0, P} = S_{P, P_0} \quad \forall P \in K_L(P_0) \setminus \{P_0\}.$$

c) Für alle  $P_0 \in \mathcal{M}$  gilt:

$$K_L(P_0) = \bigcup_{P \in K_L(P_0) \setminus \{P_0\}} S_{P_0, P}.$$

d) Für zwei Punkte  $P, Q \in \mathcal{M}, P \neq Q$  mit  $\|P \vec{Q}\| = 0$  gilt:

$$S_{P, Q} = K_L(P) \cap K_L(Q).$$

Beweis: (Siehe auch [26].)

a) Es gilt:

$$\|P_0 \vec{P}\| = \|P \vec{P}_0\| \quad \forall P_0, P \in \mathcal{M}.$$

b) Sei  $P_0 \in \mathcal{M}, P \in K_L(P_0) \setminus \{P_0\}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} Q \in S_{P_0, P} \\ \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : Q = P_0 + t P_0 \vec{P} &= (1-t)P_0 + tP = P + (1-t)P \vec{P}_0 \\ \Leftrightarrow Q \in S_{P, P_0}. \end{aligned}$$

c) Für  $P_0 \in \mathcal{M}, P \in K_L(P_0) \setminus \{P_0\}$  und  $Q = P_0 + t P_0 \vec{P} \in S_{P_0, P}$  mit  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\|P_0 \vec{Q}\| = |t| \|P_0 \vec{P}\| = 0$$

und folglich ist

$$S_{P_0, P} \subset K_L(P_0) \quad \forall P \in K_L(P_0) \setminus \{P_0\}.$$

Umgekehrt gilt:

$$P = P_0 + P_0 \vec{P} \in S_{P_0, P} \quad \forall P \in K_L(P_0).$$

## d) Die Inklusionsbeziehung

$$S_{P,Q} = S_{Q,P} \subset K_L(P) \cap K_L(Q)$$

wurde durch b) und c) bereits gezeigt.

Sei also  $R \in K_L(P) \cap K_L(Q)$ . Für  $R = P$  oder  $R = Q$  gilt dann offenbar

$$R \in \{P, Q\} \subset S_{P,Q} = S_{Q,P} .$$

Für  $R \notin \{P, Q\}$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{P}R, \vec{P}R \rangle \\ &= \langle \vec{P}Q + \vec{Q}R, \vec{P}Q + \vec{Q}R \rangle \\ &= \underbrace{\langle \vec{P}Q, \vec{P}Q \rangle}_0 + 2\langle \vec{P}Q, \vec{Q}R \rangle + \underbrace{\langle \vec{Q}R, \vec{Q}R \rangle}_0 , \end{aligned}$$

die Vektoren  $\vec{P}Q$  und  $\vec{Q}R$  sind also selbstorthogonal und zueinander orthogonal; folglich<sup>34</sup> sind sie linear abhängig. Es sei etwa  $\vec{Q}R = \lambda \vec{P}Q$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} R &= Q + \vec{Q}R = Q + (-\lambda)\vec{Q}P \\ &= (1 + \lambda)Q - \lambda P = P + (1 + \lambda)\vec{P}Q \\ \Rightarrow R &\in S_{P,Q} = S_{Q,P} . \end{aligned}$$

□

**Bezeichnung**

Ein Verschiebungsvektor  $v := \vec{P}Q \in \mathcal{V}$  zweier Ereignisse  $P, Q \in \mathcal{M}$  heißt

- *zeitartig* : $\Leftrightarrow \langle v, v \rangle < 0$  ( $\Leftrightarrow Q$  liegt innerhalb des Lichtkegels  $K_L(P)$ ),
- *raumartig* : $\Leftrightarrow \langle v, v \rangle > 0$  ( $\Leftrightarrow Q$  liegt außerhalb des Lichtkegels  $K_L(P)$ ).

**Lemma 3**

Es seien  $v, w \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  zwei Vektoren mit

$$v = \sum_{i=1}^4 v_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^4 w_i e_i$$

bezüglich einer Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$ . Weiter sei  $v$  zeitartig und  $w$  zeitartig oder lichtartig, es gelte also

$$\langle v, v \rangle < 0 \quad \text{und} \quad \langle w, w \rangle \leq 0 .$$

Dann ist  $v_4 \cdot w_4 \neq 0$  und  $\langle v, w \rangle \neq 0$ , und es gilt:

$$\text{sign}(v_4 \cdot w_4) = -\text{sign}(\langle v, w \rangle) .$$

Beweis: (Siehe [26].)

Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wie im Beweis zu Lemma 1.

**Folgerung**

Ist  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  mit  $\langle v, v \rangle < 0$  und  $w \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$ , so gilt  $\langle w, w \rangle > 0$ .

Jeder nichttriviale Vektor, der orthogonal zu einem zeitartigen Vektor ist, ist also raumartig.

<sup>34</sup> Vgl. Lemma 1

**Bemerkung**

Man kann nun auf der Menge der zeitartigen Vektoren

$$\tau := \{v \in \mathcal{V} \mid \langle v, v \rangle < 0\}$$

eine Äquivalenzrelation  $\sim$  definieren:

$$\forall v, w \in \tau : (v \sim w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0).$$

Die Äquivalenzrelationseigenschaften (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) sind offensichtlich.

Nun ist für alle  $v \in \tau$  offenbar auch  $-v \in \tau$ , und es ist  $v \not\sim -v$ . Desweiteren gilt wegen des letzten Lemmas für alle  $v, w \in \tau$ :

$$v \sim w \text{ oder } v \sim -w.$$

Damit wird  $\tau$  durch  $\sim$  in genau zwei Äquivalenzklassen zerlegt:

Für eine beliebige fest gewählte *Standard-Orthonormalbasis*  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  sei

- $\tau^+$  die Äquivalenzklasse, in der  $e_4$  enthalten ist, und
- $\tau^-$  die Äquivalenzklasse, in der  $-e_4$  enthalten ist.

Da aufgrund obigen Lemmas für  $v, w \in \mathcal{V}$  mit  $\langle v, v \rangle < 0$ ,  $\langle w, w \rangle < 0$  und  $\langle v, w \rangle < 0$  bezüglich jeder Orthonormalbasis stets  $v_4 \cdot w_4 > 0$  gilt, haben die vierten Komponenten äquivalenter Vektoren das gleiche Vorzeichen. Die beiden Äquivalenzklassen werden nun wie folgt bezeichnet:

- Die Äquivalenzklasse der *zukunftsorientierten* zeitartigen Vektoren

$$\tau^+ = \{v \in \tau \mid v_4 > 0\}.$$

- Die Äquivalenzklasse der *vergangenheitsorientierten* zeitartigen Vektoren

$$\tau^- = \{v \in \tau \mid v_4 < 0\}.$$

Bei den Mengen  $\tau^+$  und  $\tau^-$  handelt es sich offenbar um Kegel, denn für  $\varepsilon \in \{+, -\}$  gilt:

$$\begin{aligned} v, w \in \tau^\varepsilon &\Rightarrow v + w \in \tau^\varepsilon, \\ v \in \tau^\varepsilon, r > 0 &\Rightarrow r \cdot v \in \tau^\varepsilon. \end{aligned}$$

*Hinweis:* Diese Klassifizierung ist zunächst willkürlich und von der gewählten Orthonormalbasis abhängig, ebenso wie die anschließenden Definitionen und Bemerkungen dieses Abschnittes, in denen Zeitorientierungen verwendet werden. Die Basisunabhängigkeit wird erst im folgenden Punkt III.1.2 über Lorentztransformationen durch die Beschränkung auf spezielle Orthonormalbasen, die durch Anwendung besonderer orthogonaler Transformationen aus der Standardbasis hervorgehen, sichergestellt.

**Definition 2**

Für  $P_0 \in \mathcal{M}$  heißt

- $K_Z(P_0) := \left\{ P \in \mathcal{M} \mid P_0 \vec{P} \in \tau \right\}$  *Zeitkegel* von  $P_0$  in  $\mathcal{M}$ ,
- $K_Z^+(P_0) := \left\{ P \in \mathcal{M} \mid P_0 \vec{P} \in \tau^+ \right\}$  *Zukunftszeitkegel* von  $P_0$  in  $\mathcal{M}$  und
- $K_Z^-(P_0) := \left\{ P \in \mathcal{M} \mid P_0 \vec{P} \in \tau^- \right\}$  *Vergangenheitszeitkegel* von  $P_0$  in  $\mathcal{M}$ .

**Bemerkung**

- a) Für ein Ereignis  $P_0 = (x_0, t_0)$  läßt sich  $K_Z^+(P_0)$  als raum-zeitliche Geschichte einer vom Raumpunkt  $x_0$  ab dem Zeitpunkt  $t_0$  ausgehenden sphärischen elektromagnetischen Welle, also gleichzeitig in alle Richtungen ausgesandter, sich mit (der als  $c := 1$  festgelegten) Lichtgeschwindigkeit fortbewegender Photonen, interpretieren.
- b) Der Begriff der Vergangenheits- und Zukunftsorientiertheit läßt sich auch auf den Lichtkegel ausweiten: Für  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  mit  $\langle v, v \rangle = 0$  gilt:

$$\exists \varepsilon \in \{+1, -1\} : \text{sign}(\langle v, w \rangle) = \varepsilon \quad \forall w \in \tau^+ .$$

Beweis:

Zunächst gilt nach Lemma 3:

$$\langle v, w \rangle \neq 0 \quad \forall w \in \tau^+ .$$

Angenommen, es gibt  $w, w' \in \tau^+$  mit  $\langle v, w \rangle < 0$  und  $\langle v, w' \rangle > 0$ , dann gibt es eine reelle Zahl  $\lambda > 0$  mit

$$|\langle v, w \rangle| = \lambda |\langle v, w' \rangle| = |\langle v, \lambda w' \rangle|$$

und es folgt:

$$0 = \langle v, w \rangle + \langle v, \lambda w' \rangle = \langle v, w + \lambda w' \rangle .$$

Also ist  $v$  orthogonal zu  $w + \lambda w' \in \tau^+$  und damit raumartig (Widerspruch!).

**Definition 3**

Ein lichtartiger Vektor  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  heißt

- *zukunftsorientiert*  $:\Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0 \quad \forall w \in \tau^+$ ,
- *vergangenheitsorientiert*  $:\Leftrightarrow \langle v, w \rangle > 0 \quad \forall w \in \tau^+$ .

**Bemerkung**

Zwei lichtartige Vektoren  $v, v' \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  haben genau dann die gleiche zeitliche Orientierung, wenn bezüglich jeder Orthonormalbasis ihre vierten Komponenten das gleiche Vorzeichen haben.

**Definition 4**

Für  $P_0 \in \mathcal{M}$  heißt

- $K_L^+(P_0) := \left\{ P \in K_L(P_0) \mid P_0 \vec{P} \text{ ist zukunftsorientiert} \right\}$  *Zukunftslichtkegel* und
  - $K_L^-(P_0) := \left\{ P \in K_L(P_0) \mid P_0 \vec{P} \text{ ist vergangenheitsorientiert} \right\}$  *Vergangenheitslichtkegel*
- von  $P_0$  in  $\mathcal{M}$ .

### III.1.2 Lorentztransformationen

Im folgenden werden orthogonale Transformationen, also lineare Abbildungen  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  mit der Eigenschaft

$$\langle v, w \rangle = \langle L(v), L(w) \rangle \quad \forall v, w \in \mathcal{V},$$

und affin orthogonale Transformationen  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , deren zugehörige lineare Abbildungen  $L_\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  orthogonale Transformationen sind, betrachtet. Zunächst werden die wichtigsten Eigenschaften aus I.1.2 für den Spezialfall der Minkowski-Raum-Zeit formuliert.

#### Eigenschaften orthogonaler Transformationen

- Jede orthogonale Transformation  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  ist ein Isomorphismus.
- Orthogonale Transformationen bilden lichtartige Vektoren auf lichtartige Vektoren ab. Folglich bilden affin orthogonale Transformationen Lichtstrahlen auf Lichtstrahlen und Lichtkegel auf Lichtkegel ab.
- Orthogonale Transformationen sind mit der zu  $\xi$  assoziierten quadratischen Form verträglich und durch diese Eigenschaft charakterisiert.
- Orthogonale Transformationen bilden (unter Berücksichtigung der Position des zeitartigen Vektors) Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab und sind durch diese Eigenschaft charakterisiert.

#### Vorbemerkung (zur folgenden Definition)

Sind  $L, L_1, L_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  orthogonale Transformationen, so gilt:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle (L \circ L^{-1})(v), (L \circ L^{-1})(w) \rangle \\ &= \langle L^{-1}(v), L^{-1}(w) \rangle \quad \forall v, w \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle L_1(v), L_1(w) \rangle \\ &= \langle (L_2 \circ L_1)(v), (L_2 \circ L_1)(w) \rangle \quad \forall v, w \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Folglich bildet die Menge der orthogonalen Transformation zusammen mit der Verkettung von Abbildungen eine Gruppe.

#### Definition 5

Eine orthogonale Transformation  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  heißt *allgemeine (homogene) Lorentztransformation*. Die Menge der allgemeinen Lorentztransformationen versehen mit der Abbildungsverknüpfung heißt *allgemeine (homogene) Lorentzgruppe*. Man schreibt dafür:

$$\mathfrak{L}_A := (\{L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \text{ orthogonal}\}, \circ).$$

#### Bemerkung

Es sei  $L \in \mathfrak{L}_A$  eine allgemeine Lorentztransformation und es seien  $\mathfrak{v} := (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  und  $\mathfrak{w} := (e''_1, e''_2, e''_3, e''_4)$  mit  $e''_i = L(e'_i)$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  Orthonormalbasen von  $\mathcal{V}$ .

Dann ist die mit der orthogonalen Transformation  $L$  und der Orthonormalbasis  $\mathfrak{v}$  assoziierte Matrix die Koordinatentransformationsmatrix von  $\mathfrak{v}$  nach  $\mathfrak{w}$ :

$$M_{L, \mathfrak{v}} = M_{\mathfrak{v}, \mathfrak{w}} = (m_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Mit

$$E_\xi := (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{pmatrix} \left( = (\langle e'_i, e'_j \rangle)_{i,j=1}^4 = (\langle e''_i, e''_j \rangle)_{i,j=1}^4 \right)$$

gilt dann:

$$E_\xi = M_{L,\mathfrak{v}} \cdot E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{v}}^\top = M_{L,\mathfrak{v}}^\top \cdot E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{v}},$$

und man erhält in Komponenten:

$$M_{L,\mathfrak{v}}^{-1} = E_\xi \cdot M_{L,\mathfrak{v}}^\top \cdot E_\xi = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & -m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & -m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & -m_{43} \\ -m_{14} & -m_{24} & -m_{34} & m_{44} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend gilt umgekehrt: Zu einer gewählten Orthonormalbasis  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$  ist jede Matrix  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mit

$$E_\xi = M^\top E_\xi M = M E_\xi M^\top$$

die Koordinatentransformationsmatrix des Basiswechsels

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4) \rightsquigarrow (L(\tilde{e}_1), L(\tilde{e}_2), L(\tilde{e}_3), L(\tilde{e}_4))$$

für eine orthogonale Transformation  $L$ . Die Menge der Matrizen mit dieser Eigenschaft bildet zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Untergruppe von  $\text{GL}(4, \mathbb{R})$ .

### Definition 6

Eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mit der Eigenschaft

$$E_\xi = M^\top E_\xi M \left( = M E_\xi M^\top \right)$$

heißt *allgemeine Lorentzmatrix*. Die Menge der allgemeinen Lorentzmatrizen versehen mit der Matrixmultiplikation heißt *allgemeine Lorentzmatrizengruppe*:

$$\mathfrak{LM}_A := \left( \left\{ M \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid E_\xi = M^\top E_\xi M \right\}, \cdot \right).$$

### Vorbemerkung (zu folgendem Lemma)

Für  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathfrak{LM}_A$  gilt wegen  $E_\xi = M^\top E_\xi M$ :

$$-1 = \sum_{i,j=1}^4 m_{i4} m_{j4} \langle e_i, e_j \rangle = m_{14}^2 + m_{24}^2 + m_{34}^2 - m_{44}^2.$$

Es folgt:

$$m_{44}^2 = 1 + m_{14}^2 + m_{24}^2 + m_{34}^2 \geq 1 \Rightarrow |m_{44}| \geq 1.$$

Die Gruppe  $\mathfrak{LM}_A$  wird dadurch in zwei Teilmengen zerlegt, die durch das Vorzeichen der Komponente  $m_{44}$  bestimmt werden. Diese beiden Teilmengen unterscheiden sich durch die Wirkung ihrer Elemente auf die Zeitorientierung lichtartiger und zeitartiger Vektoren.

**Lemma 4**

Sei  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathfrak{LM}_A$  und  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{V}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $m_{44} \geq 1$ .  
 b)  $M$  erhält die Zeitorientierung aller (nicht-trivialen) lichtartigen Vektoren, es gilt also:

$$\forall v = \sum_{i=1}^4 v_i \tilde{e}_i \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, \|v\| = 0 : \text{sign}(v_4) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^4 m_{4i} v_i\right).$$

- c)  $M$  erhält die Zeitorientierung aller zeitartigen Vektoren:

$$\forall v = \sum_{i=1}^4 v_i \tilde{e}_i \in \mathcal{V}, \langle v, v \rangle < 0 : \text{sign}(v_4) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^4 m_{4i} v_i\right).$$

Beweis: Siehe [26].

Damit zeigt sich, daß die durch das Vorzeichen der Komponente  $m_{44}$  bestimmten Äquivalenzklassen der Lorentzmatrizen Klassen von Lorentztransformationen entsprechen, welche die Zeitorientierung erhalten bzw. ändern. Dabei wird die Unabhängigkeit von der gewählten Orthonormalbasis gerade durch das obige Lemma sichergestellt. Man definiert daher:

**Definition 7**

Eine allgemeine Lorentzmatrix  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathfrak{LM}_A$  heißt

- *kausalitätserhaltend (orthochron)* : $\Leftrightarrow m_{44} \geq 1$  ,
- *nicht kausalitätserhaltend* : $\Leftrightarrow m_{44} \leq -1$  .

Entsprechend heißt eine allgemeine Lorentztransformation  $L \in \mathfrak{L}_A$

- *kausalitätserhaltend (orthochron)* , wenn  $L$  die Orientierung aller zeitartigen Vektoren erhält, wenn also gilt:

$$\langle L(v), v \rangle < 0 \quad \forall v \in \tau ,$$

- *nicht kausalitätserhaltend*, wenn  $L$  die Orientierung aller zeitartigen Vektoren umkehrt:

$$\langle L(v), v \rangle > 0 \quad \forall v \in \tau .$$

Nicht kausalitätserhaltende allgemeine Lorentztransformationen ändern die Zeitorientierung aller zeitartigen und (nichttrivialen) lichtartigen Vektoren und sollen im folgenden nicht mehr betrachtet werden. Desweiteren werden nur noch solche Orthonormalbasen zugelassen, die mit der bereits fest gewählten Standard-Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  gleich orientiert sind und deren zeitartiger Vektor zukunftsorientiert ist:

**Definition 8**

Eine *zulässige Basis* von  $\mathcal{V}$  ist eine mit  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  gleichorientierte geordnete Orthonormalbasis  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$  mit zukunftsorientiertem zeitartigen Vektor  $\tilde{e}_4$ .

**Bemerkung**

Eine weitere Möglichkeit, die Orientierung der Basis in eher klassischer Weise festzulegen, ist zusätzlich zur Zeitorientierung die Forderung der „Rechtshändigkeit“ der raumartigen Vektoren  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$  bezüglich der Restriktion des inneren Produktes auf den Unterraum  $\text{span}(e_1, e_2, e_3)$  (das dort positiv definit, also ein Skalarprodukt ist) und des durch  $(e_1, e_2, e_3)$  auf  $\text{span}(e_1, e_2, e_3)$  definierten Vektorproduktes.

Man fordert dazu für  $\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^4 v_{ij} e_j$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\left\langle \left( \begin{array}{c} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{array} \right) \right\rangle > 0 .$$

**Vorbemerkung** (zur folgenden Definition)

Die Beschränkung auf zulässige Basen wirkt sich auch auf die als Basiswechsel in Frage kommenden Lorentztransformationen und Matrizen aus:

Für  $M \in \mathcal{LM}_A$  gilt wegen  $E_\xi = M^\top E_\xi M$ :

$$\begin{aligned} \det \left( M^\top E_\xi M \right) &= \det M^\top \cdot \det E_\xi \cdot \det M = \det E_\xi \\ &\Rightarrow (\det M)^2 = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1 . \end{aligned}$$

Setzt man  $\tilde{M} := \tilde{E}M$  mit

$$\tilde{E} := \begin{pmatrix} -1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} ,$$

so gilt:

$$\tilde{M}^\top E_\xi \tilde{M} = M^\top \tilde{E}^\top E_\xi \tilde{E} M = M^\top E_\xi M = E_\xi \Rightarrow \tilde{M} \in \mathcal{LM}_A$$

und

$$\det \tilde{M} = \det \tilde{E} \cdot \det M = -\det M .$$

Sind nun aber  $\mathfrak{v} := (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  und  $\mathfrak{w} := (e''_1, e''_2, e''_3, e''_4)$  zulässige Basen von  $\mathcal{V}$ , so gilt für die Koordinatentransformationsmatrix  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathcal{LM}_A$  von  $\mathfrak{v}$  nach  $\mathfrak{w}$ :

- $\det M = 1$ , denn  $\mathfrak{v}$  und  $\mathfrak{w}$  sind gleich orientiert und
- $m_{44} \geq 1$ , denn  $e'_4$  und  $e''_4$  sind zukunftsorientiert.

**Definition 9**

Eine allgemeine (homogene) Lorentztransformation heißt *eigentlich*, wenn sie orientierungserhaltend ist.

Die Menge der *eigentlichen kausalitätserhaltenden homogenen Lorentztransformationen* ist definiert durch

$$\mathcal{L} := \{L \in \mathcal{L}_A \mid \langle L(e_4), e_4 \rangle < 0, L \text{ orientierungserhaltend} \} .$$

Entsprechend ist die Menge der *eigentlichen kausalitätserhaltenden Lorentzmatrizen* definiert durch

$$\mathcal{LM} := \left\{ M = (m_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathcal{LM}_A \mid m_{44} \geq 1, \det M = 1 \right\} .$$

**Bezeichnung**

Zur Vereinfachung wird im folgenden  $\mathcal{L}$  kurz *Lorentzgruppe* genannt, die Elemente  $L \in \mathcal{L}$  heißen kurz *Lorentztransformationen*. Matrizen  $M \in \mathcal{LM}$  heißen kurz *Lorentzmatrizen*.

**Bemerkung**

- Es ist leicht nachzuweisen, daß  $\mathcal{L}$  eine Untergruppe von  $\mathcal{L}_A$  (und  $\mathcal{LM}$  eine Untergruppe von  $\mathcal{LM}_A$ ) ist.
- Jede Lorentztransformation  $L \in \mathcal{L}$  überführt zulässige Basen in zulässige Basen.

**Definition 10**

Die *Poincaré-Gruppe (inhomogene Lorentzgruppe)*  $\mathfrak{P}$  ist die Menge der affin orthogonalen Transformationen, deren zugehörige lineare Abbildungen Lorentztransformationen sind:

$$\mathfrak{P} := \{ \Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \mid \Phi \text{ affin linear, } L_\Phi \in \mathcal{L} \} .$$

**Beispiele für Lorentzmatrizen**

Im folgenden werden zwei spezielle Untergruppen der Lorentzmatrizen betrachtet. Dabei ist zu beachten, daß eine entsprechende Bezeichnung für Lorentztransformationen erst dann Sinn macht, wenn durch Auszeichnung einer zulässigen Basis  $\mathfrak{v}$  ein Bezugssystem fest gewählt ist und so die eindeutige Zuordnung

$$\mathcal{L} \ni L \xrightarrow{\sim} M_{L, \mathfrak{v}} \in \mathcal{LM}$$

von Transformationen und Matrizen ermöglicht wird.

- Die Untergruppe der *Raumdrehungen*

$$\mathfrak{R} := \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{R} & \\ & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \tilde{R} \in SO_3(\mathbb{R}) \right\} \subset \mathcal{LM} .$$

Die Gruppeneigenschaften folgen unmittelbar daraus, daß  $SO_3(\mathbb{R}) \subset GL(3, \mathbb{R})$  eine Untergruppe ist. Es gilt hierbei für jede Lorentzmatrix  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^4 \in \mathcal{LM}$  :

$$\begin{aligned} M \in \mathfrak{R} &\Leftrightarrow m_{14} = m_{24} = m_{34} = 0 \\ &\Leftrightarrow m_{41} = m_{42} = m_{43} = 0 \\ &\Leftrightarrow m_{44} = 1 , \end{aligned}$$

jede Lorentzmatrix mit der letzten Eigenschaft ist also bereits eine Raumdrehung.

- Die Untergruppen der *Schübe (boosts)* in Richtung der ersten drei Einheitsvektoren

$$\mathfrak{S}_i := \{ M_i(\beta) \mid -1 < \beta < 1 \} \subset \mathcal{LM} , \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei man für  $-1 < \beta < 1$  setzt:

$$M_1(\beta) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & & & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & & & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

und entsprechend durch Vertauschung von Zeilen und Spalten

$$M_2(\beta) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ & & 1 & \\ & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix},$$

$$M_3(\beta) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ & & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Für  $i = 1, 2, 3$  gilt dann die *relativistische Geschwindigkeitsadditionsformel*:

$$M_i(\beta_1) \cdot M_i(\beta_2) = M_i\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\right) \in \mathfrak{S}_i \quad \forall M_i(\beta_1), M_i(\beta_2) \in \mathfrak{S}_i.$$

sowie

$$(M_i(\beta))^{-1} = M_i(-\beta) \quad \forall M_i(\beta) \in \mathfrak{S}_i.$$

Die Gruppeneigenschaft folgt schließlich mit  $M_i(0) = I$ .

Vermöge der Variablentransformation

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\longrightarrow ]-1, 1[ \\ \vartheta &\longmapsto \tanh \vartheta =: \beta \end{aligned}$$

erhält man die hyperbolische Form eines Schubes:

$$\begin{aligned} L_1(\vartheta) &:= \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & & & -\sinh \vartheta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\sinh \vartheta & & & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \vartheta}} & & & \frac{-\tanh \vartheta}{\sqrt{1-\tanh^2 \vartheta}} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{-\tanh \vartheta}{\sqrt{1-\tanh^2 \vartheta}} & & & \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \vartheta}} \end{pmatrix} = M_1(\tanh \vartheta) = M_1(\beta) \end{aligned}$$

und analog

$$L_2(\vartheta) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cosh \vartheta & & -\sinh \vartheta \\ & & 1 & \\ & -\sinh \vartheta & & \cosh \vartheta \end{pmatrix} = M_2(\beta),$$

$$L_3(\vartheta) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cosh \vartheta & -\sinh \vartheta \\ & & -\sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} = M_3(\beta).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 L_i(\vartheta_1) \cdot L_i(\vartheta_2) &= M_i(\tanh \vartheta_1) \cdot M_i(\tanh \vartheta_2) \\
 &= M_i\left(\frac{\tanh \vartheta_1 + \tanh \vartheta_2}{1 + \tanh \vartheta_1 \cdot \tanh \vartheta_2}\right) \\
 &= M_i(\tanh(\vartheta_1 + \vartheta_2)) \\
 &= L_i(\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

### Satz 1

Für jede Lorentzmatrix  $M \in \mathcal{LM}$  gibt es einen Schub  $L_1(\vartheta)$  mit  $\vartheta \in \mathbb{R}$  und zwei Raumdrehungen  $R, R' \in \mathfrak{R}$ , so daß gilt:

$$M = R' \cdot L_1(\vartheta) \cdot R.$$

Beweis: Siehe [26].

### Bemerkung (Physikalische Interpretation)

Ist  $M \in \mathcal{LM}$  die Koordinatentransformationsmatrix eines Basiswechsels

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4) \rightsquigarrow (L(\tilde{e}_1), L(\tilde{e}_2), L(\tilde{e}_3), L(\tilde{e}_4))$$

für eine Lorentztransformation  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , so entspricht obige Zerlegung

1. einer Raumdrehung des ersten Bezugssystems, so daß die erste Raumachse in Richtung der Bewegung des zweiten Bezugssystems relativ zum ersten zeigt,
2. einem Schub in Richtung der Ersten der gedrehten Achsen (also in Richtung der Bewegung des zweiten Bezugssystems relativ zum ersten), so daß die Raumachsen des gedrehten ersten Bezugssystems sich bezüglich des zweiten in Ruhe befinden und
3. einer weiteren Drehung dieser Raumachsen auf die Achsen des zweiten Bezugssystems.

## III.2 Die Maxwell'schen Gleichungen

„Die Wissenschaft ist eine Differentialgleichung.  
Die Religion ist eine Randbedingung.“

Alan Turing

Elektrisches Feld  $E$  und magnetisches Feld  $B$  werden in einer affinen 2-Form  $F$  zusammengefaßt, die auf konvexen maximaldimensionalen Teilmengen der Minkowski-Raum-Zeit definiert ist. In dieser Betrachtungsweise sind die homogenen Maxwell'schen Gleichungen äquivalent zur Geschlossenheit dieser 2-Form. Durch Kombination der elektrischen Erregung  $D$  und der magnetischen Erregung  $H$  in einer weiteren 2-Form  $\tilde{F}$  sowie der Ladungsdichte (als zeitlicher Teil) und der Stromdichte (als räumlicher Teil) in einer 1-Form  $J$  erhält man eine entsprechend elegante Formulierung der inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen.<sup>35</sup>

### III.2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen im Wandel der Zeit

Es soll nun kurz die zeitliche Entwicklung der Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen nachgezeichnet werden.<sup>36</sup> Auf die Betrachtung physikalischer Hintergründe und der speziellen in der Physik Verwendung findenden differentialgeometrischen Methoden wird an dieser Stelle verzichtet.<sup>37</sup>

In der anfänglichen Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen werden Abhängigkeiten von Vektorfeldern

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ni (x, t) \longmapsto f(x, t) \in \mathbb{R}^3$$

beschrieben, die jedem raum-zeitlichen Ereignis (bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  zusammen mit der Zeit) einen (Raum-)Vektor zuordnen, der die Feldkomponenten in Richtung der kanonischen Basisvektoren enthält:

$$f\left(x = (x_1, x_2, x_3)^\top, t\right) = (f_1(x, t), f_2(x, t), f_3(x, t))^\top.$$

Im einzelnen betrachtet man dabei folgende Vektorfelder:

- Das (*äußere*) *elektrische Feld*  $E$ 
  - die Wirkung der elektrischen Kraft auf eine Ladung als passives Objekt –,
- die *elektrische Erregung (Verschiebung)*  $D$ 
  - die aktiv durch eine Ladung erzeugte elektrische Kraft –,
- das (*äußere*) *magnetische Feld (magnetische Induktion)*  $B$ 
  - die Wirkung der magnetischen Kraft auf eine Ladung als passives Objekt –,
- die *magnetische Erregung (Verschiebung, Feldstärke)*  $H$ 
  - die aktive Rolle einer Ladung, die ein magnetisches Feld erzeugt – und
- die *elektrische Stromdichte*  $J$ 
  - die Ladung, die sich durch eine Fläche hindurch bewegt.

Weiterhin findet ein Skalarfeld Verwendung, die *Ladungsdichte*

$$\varrho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ni (x, t) \longmapsto \varrho(x, t) \in \mathbb{R}.$$

<sup>35</sup> Betrachtungen elektromagnetischer Erscheinungen in Differentialformenschreibweise finden sich beispielsweise in [32, 33, 24].

<sup>36</sup> Vgl. dazu speziell [33].

<sup>37</sup> Weiterführende physikalische Einzelheiten finden sich etwa in [21, 19, 32, 33].

Der Zusammenhang dieser Felder wird durch die Maxwell'schen Feldgleichungen und durch Materialgleichungen beschrieben.<sup>38</sup>

In den *Materialgleichungen*

$$D(x, t) = \varepsilon(x, t) E(x, t)$$

$$B(x, t) = \mu(x, t) H(x, t)$$

$$J(x, t) = \sigma(x, t) E(x, t)$$

für raum-zeitliche Ereignisse  $(x, t)$  treten „Tensoren“ auf:

- Die *elektrische Permittivität*  $\varepsilon$ ,
- die *magnetische Permeabilität*  $\mu$  und
- die *Konduktivität*  $\sigma$ .

Für ein Ereignis  $(x, t)$  sind die linearen Abbildungen  $\varepsilon(x, t)$  und  $\mu(x, t)$  stets positiv definit<sup>39</sup>,  $\sigma(x, t)$  ist entweder positiv definit oder verschwindet. Im Spezialfall eines *isotropen* („richtungsunabhängigen“) *Mediums* sind die Matrizen Vielfache der Einheitsmatrix; man kann die obigen Tensoren in diesem Fall also als (skalare) Funktionen<sup>40</sup> betrachten:

$$\varepsilon, \mu, \sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die *Maxwell'schen Gleichungen* in ihrer anfänglichen Form sind partielle Differentialgleichungen der mit 1, 2, 3 indizierten Komponentenfunktionen der elektromagnetischen Felder in Richtung der Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^3$ . Die räumlichen Koordinaten werden dabei mit  $x, y, z$  bezeichnet, die partielle Ableitung nach der Zeit  $t$  üblicherweise durch den Punkt:

- Die *homogenen Maxwell'schen Gleichungen*:

(1) Die *Quellenfreiheit*:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0$$

(2) Das *Induktionsgesetz*:

$$\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} = -\dot{B}_1$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = -\dot{B}_2$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = -\dot{B}_3$$

- Die *inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen*:

(3) Die Eigenschaft „*elektrische Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes*“:

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = \rho$$

(4) Das *Durchflutungsgesetz*:

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} = J_1 + \dot{D}_1$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} = J_2 + \dot{D}_2$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = J_3 + \dot{D}_3$$

<sup>38</sup> Die klassischen Formulierungen und Bezeichnungen finden sich etwa in [19, 21, 23].

<sup>39</sup> Mit thermodynamischen Mittel kann gezeigt werden, daß  $\varepsilon(x, t)$  und  $\mu(x, t)$  zusätzlich symmetrisch sind (Vgl. [21]).

<sup>40</sup> Vgl. [19].

Eine kürzere, seit Ende des 19. Jahrhunderts Verwendung findende Schreibweise ermöglichen die Operatoren „Divergenz“ und „Rotation“:<sup>41</sup>

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{div} B &= 0 \\ (2) \quad \operatorname{rot} E &= -\dot{B} \\ (3) \quad \operatorname{div} D &= \varrho \\ (4) \quad \operatorname{rot} H &= J + \dot{D} \end{aligned}$$

Seit Mitte des 20. Jahrhunderts verwendet man schließlich eine der vierdimensionalen Situation angemessene Differentialformenschreibweise:

- Die *homogene Maxwell'sche Gleichung*:

$$(H) \quad dF = 0$$

- Die *inhomogene Maxwell'sche Gleichung*:

$$(I) \quad \delta \tilde{F} = -J \quad \left( \Leftrightarrow *d* \tilde{F} = J \right)$$

Die elektromagnetischen Felder sind dabei in den Formen  $F$ ,  $\tilde{F}$  und  $J$  zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} F &:= E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt \\ &\quad + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy, \\ \tilde{F} &:= D_1 dx \wedge dt + D_2 dy \wedge dt + D_3 dz \wedge dt \\ &\quad + H_1 dy \wedge dz + H_2 dz \wedge dx + H_3 dx \wedge dy, \\ J &:= J_1 dx + J_2 dy + J_3 dz - \varrho dt. \end{aligned}$$

### Bemerkung

- a) In der Minkowski-Raum-Zeit gelten zwischen äußerer Ableitung und Koableitung unabhängig vom Grad  $r$  des Operanden stets die Beziehungen

$$\begin{aligned} \delta &= - * d * , \\ d &= * \delta * , \end{aligned}$$

denn für eine  $r$ -Form  $\omega$  mit  $r \in \{1, 2, 3, 4\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \delta \omega &\stackrel{\text{Def}}{=} (-1)^{4(r+1)+1} * d * \omega \\ &= - * d * \omega \end{aligned}$$

und folglich auch

$$\begin{aligned} * \delta * \omega &= - * (* d *) * \omega \\ &= -(-1)^{(r+1)(4-r-1)+1} d (-1)^{r(4-r)+1} \omega \\ &= (-1)^{(r+1)^2+r^2+1} d \omega \\ &= d \omega . \end{aligned}$$

- b) Man erhält die klassischen Maxwell'schen Gleichungen aus den Gleichungen (H) und (I) durch komponentenweise Betrachtung bezüglich der Standardbasis:

<sup>41</sup> Vgl. dazu I.4.4 Exkurs: Die klassischen Differentialoperatoren.

Aus der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned}
0 = dF &= \frac{\partial E_1}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_1}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt \\
&+ \frac{\partial E_2}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial E_2}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt \\
&+ \frac{\partial E_3}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial E_3}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt \\
&+ \frac{\partial B_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \dot{B}_1 dt \wedge dy \wedge dz \\
&+ \frac{\partial B_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \dot{B}_2 dt \wedge dz \wedge dx \\
&+ \frac{\partial B_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \dot{B}_3 dt \wedge dx \wedge dy
\end{aligned}$$

folgt aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basiselemente komponentenweise das Induktionsgesetz (2)

$$\begin{aligned}
0 &= \left( \dot{B}_3 - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dt \\
&- \left( \dot{B}_2 - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial z} \right) dx \wedge dz \wedge dt \\
&+ \left( \dot{B}_1 - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{\partial E_3}{\partial y} \right) dy \wedge dz \wedge dt
\end{aligned}$$

und die Quellenfreiheit (1)

$$0 = \left( \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz .$$

Entsprechend erhält man die klassischen inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (3) und (4) aus der inhomogenen Gleichung

$$\delta \tilde{F} = -J \quad (\Leftrightarrow *d * \tilde{F} = J \quad \Leftrightarrow d * \tilde{F} - *J = 0)$$

durch komponentenweise Betrachtung, denn bezüglich der Standardbasis gilt:

$$\begin{aligned}
d * \tilde{F} &= d \left( -D_1 dy \wedge dz + D_2 dx \wedge dz - D_3 dx \wedge dy \right. \\
&\quad \left. + H_1 dx \wedge dt + H_2 dy \wedge dt + H_3 dz \wedge dt \right) \\
&= -\frac{\partial D_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz - \dot{D}_1 dt \wedge dy \wedge dz \\
&+ \frac{\partial D_2}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \dot{D}_2 dt \wedge dx \wedge dz \\
&- \frac{\partial D_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy - \dot{D}_3 dt \wedge dx \wedge dy \\
&+ \frac{\partial H_1}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial H_1}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt \\
&+ \frac{\partial H_2}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial H_2}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt \\
&+ \frac{\partial H_3}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial H_3}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt ,
\end{aligned}$$

zusammengefaßt also

$$\begin{aligned} d * \tilde{F} &= \left( -\frac{\partial D_1}{\partial x} - \frac{\partial D_2}{\partial y} - \frac{\partial D_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - \left( \dot{D}_3 + \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dt \\ &\quad + \left( \dot{D}_2 + \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) dx \wedge dz \wedge dt \\ &\quad - \left( \dot{D}_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y} \right) dy \wedge dz \wedge dt, \end{aligned}$$

sowie

$$*J = J_1 dy \wedge dz \wedge dt - J_2 dx \wedge dz \wedge dt + J_3 dx \wedge dy \wedge dt - \rho dx \wedge dy \wedge dz .$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \rho - \frac{\partial D_1}{\partial x} - \frac{\partial D_2}{\partial y} - \frac{\partial D_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - \left( J_3 + \dot{D}_3 + \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dt \\ &\quad + \left( J_2 + \dot{D}_2 + \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) dx \wedge dz \wedge dt \\ &\quad - \left( J_1 + \dot{D}_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y} \right) dy \wedge dz \wedge dt . \end{aligned}$$

- c) Die *Kontinuitätsgleichung*, also die lokale Formulierung der *Ladungserhaltung*, folgt aus der inhomogenen Maxwell'schen Gleichung (I):

$$\delta \tilde{F} = -J \Rightarrow 0 = \delta \delta \tilde{F} = -\delta J$$

und folglich gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= *d*(J_1 dx + J_2 dy + J_3 dz - \rho dt) \\ &= \left( \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_2}{\partial y} + \frac{\partial J_3}{\partial z} + \dot{\rho} \right) \\ &= \operatorname{div} J + \dot{\rho} . \end{aligned}$$

### III.2.2 Materialeigenschaften

In der Theorie elektromagnetischer Felder sind Materialeigenschaften abhängig von einem raum-zeitlichen Ereignis und einer Richtung. Man hat es dabei mit Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} &\longrightarrow \operatorname{Hom}(V(\mathcal{U}), V(\mathcal{U})) \\ P &\longmapsto \varphi_P : V(P) \longrightarrow V(P) \end{aligned}$$

zu tun, wobei  $\mathcal{U}$  eine Teilmenge des Ereignisraums  $\mathcal{M}$  und  $V(P)$  für jedes  $P \in \mathcal{U}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist. Betrachtet man zum Beispiel das Tangentialbündel  $V(\mathcal{U}) := T(\mathcal{U})$  einer  $k$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ , so ist die Abbildung  $\varphi_P$  ein Endomorphismus des  $k$ -dimensionalen Tangentialraums  $V(P) := T_P(\mathcal{U})$  von  $\mathcal{U}$  in  $P$ .

Da in dieser Arbeit maximaldimensionale konvexe Teilmengen  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  des Ereignisraums betrachtet werden, deren Verschiebungsvektorraum stets der gesamte zu  $\mathcal{M}$  gehörige Vektorraum  $\mathcal{V}$  ist, wird zur Vereinfachung im folgenden  $V$  als von  $P$  unabhängig angenommen. Man kann daher als Materialeigenschaften Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{N} \times V &\longrightarrow V \\ (P, v) &\longmapsto \varphi(P, v) \end{aligned}$$

für einen endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  betrachten.

### III.2.2.1 Materialeigenschaften in klassischer Formulierung

In der klassischen Formulierung elektromagnetischer Zusammenhänge ist

$$\begin{aligned} \varphi_P := \varphi(P) : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \varphi_P(v) := \varphi(P, v) \end{aligned}$$

für einen festen Punkt  $P$  eine Abbildungen zwischen 3-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, deren Elemente Bilder der betrachteten elektromagnetischen Felder sind. Die Abhängigkeit zweier Vektorfelder  $f_1, f_2 : \mathcal{N} \rightarrow V$  läßt sich also beschreiben durch:

$$f_1(P) = \varphi_P(f_2(P)) = \varphi(P, f_2(P)) \quad \forall P \in \mathcal{N} .$$

Die Maxwellsche Elektrodynamik gründet auf der Voraussetzung eines punktweise linearen Zusammenhangs elektromagnetischer Felder,  $\varphi(P)$  ist also für jedes  $P \in \mathcal{M}$  eine lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  als Matrix geschrieben werden kann:

$$f_1(P) = \varphi(P) f_2(P) \quad \forall P \in \mathcal{N} .$$

Die auftretenden Matrizen sind dabei diagonalisierbar,  $\varepsilon$  und  $\mu$  sind positiv definit,  $\sigma$  ist positiv definit oder verschwindet.

Ist  $\varphi(P)$  zusätzlich richtungsunabhängig, so spricht man von Isotropie. In diesem Fall sind die Matrizen  $\varphi(P)$  stets proportional zur Einheitsmatrix, es gilt also:

$$f_1(P) = \varphi_P \cdot f_2(P) \quad \forall P \in \mathcal{N}$$

mit einer Funktion

$$\varphi : \mathcal{N} \ni P \longmapsto \varphi_P \in \mathbb{R} .$$

### III.2.2.2 Materialeigenschaften in Differentialformnotation

Im vorliegenden Modell, dem die Differentialformenschreibweise der Maxwellschen Gleichungen zugrunde liegt, verwendet man anstelle der üblicherweise betrachteten Vektorfelder affine  $r$ -Formen, also affin lineare Abbildungen von maximaldimensionalen konvexen Teilmengen  $\mathcal{N}$  des Ereignisraums  $\mathcal{M}$  in den Vektorraum der alternierenden  $r$ -fachen Multilinearformen  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$ . Die zugehörigen Materialeigenschaften sind Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{N} \times \Lambda_r \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* \\ (P, G) &\longmapsto \varphi(P, G) \end{aligned}$$

für  $r$ -fache Multilinearformen  $G \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$ , wobei hier die Unabhängigkeit des Vektorraums  $\mathcal{V}$  und damit auch des Vektorraums  $\Lambda_r \mathcal{V}^*$  vom Ereignis  $P$  ausgenutzt wird.

**Bezeichnung**

In Anlehnung an die klassische Terminologie lassen sich die Bezeichnungen für spezielle Materialeigenschaften auf die Differentialformennotation übertragen und somit als Eigenschaften der Abbildung  $\varphi$  ausdrücken:

- Die Abbildung  $\varphi$  heißt *affin linear*, wenn sie in der ersten Komponente affin linear ist, wenn also für jedes  $G \in \Lambda_r \mathcal{V}^*$  die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_G : \mathcal{N} &\longrightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* \\ P &\longmapsto \varphi_G(P) := \varphi(P, G)\end{aligned}$$

affin linear ist.

- Die Abbildung  $\varphi$  heißt *linear*, wenn sie in der zweiten Komponenten linear ist, also wenn für jedes  $P \in \mathcal{N}$  die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_P : \Lambda_r \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_r \mathcal{V}^* \\ G &\longmapsto \varphi_P(G) := \varphi(P, G)\end{aligned}$$

linear ist.

- $\mathcal{N}$  heißt *homogen* bezüglich  $\varphi$ , wenn  $\varphi$  unabhängig vom betrachteten Ereignis ist, also wenn gilt:

$$\varphi(P, G) = \varphi(Q, G) \quad \forall P, Q \in \mathcal{N}, G \in \Lambda_r \mathcal{V}^* .$$

*Hinweis:* Eine solche Abbildung  $\varphi$  ist also konstant in der ersten Variablen, dem raumzeitlichen Ereignis. Da es in der Minkowski-Raum-Zeit keine absolute, sondern nur relative, vom gewählten Bezugssystem abhängige Gleichzeitigkeit gibt, ist auch ein rein räumlicher Homogenitätsbegriff (für jeden festen Zeitpunkt) stets bezugssystemabhängig.

- Ist  $\mathcal{N}$  nicht homogen bezüglich  $\varphi$ , so nennt man  $\mathcal{N}$  *heterogen* bezüglich  $\varphi$ .

**Die affine Materialgleichung**

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen erhält man für den Zusammenhang der affinen 2-Formen  $F$  und  $\tilde{F}$  eine *Materialgleichung*

$$\tilde{F}_P = \psi_P(F_P) \quad \forall P \in \mathcal{N}$$

mit

$$\begin{aligned}\psi_P : \Lambda_2 \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_2 \mathcal{V}^* \\ G &\longmapsto \psi_P(G) := \psi(P, G)\end{aligned}$$

für eine affin lineare und lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{N} \times \Lambda_2 \mathcal{V}^* &\longrightarrow \Lambda_2 \mathcal{V}^* \\ (P, G) &\longmapsto \psi(P, G) .\end{aligned}$$

**Bemerkung**

Um auch in der Differentialformennotation einen an die Anschauung angelehnten Isotropiebegriff einzuführen, ist es notwendig, zwischen Raum- und Zeitrichtungen zu unterscheiden. Dazu sei  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  eine zulässige Basis von  $\mathcal{V}$ . Dann ist

$$\mathfrak{v} := \{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*, e_1^* \wedge e_4^*, e_2^* \wedge e_4^*, e_3^* \wedge e_4^*\}$$

eine Basis von  $\Lambda_2 \mathcal{V}^*$ . Weiter habe die Abbildung  $\psi$  in einem Punkt  $P \in \mathcal{N}$  bezüglich  $\nu$  Diagonalgestalt mit positiven Diagonalelementen. Dann gibt es reelle Konstanten

$$\psi_P^{12}, \psi_P^{13}, \psi_P^{23}, \psi_P^{14}, \psi_P^{24}, \psi_P^{34} > 0,$$

so daß für alle

$$G = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* \in \Lambda_2 \mathcal{V}^*$$

gilt:

$$\psi(P, G) = \psi_P \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \psi_P^{ij} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^*.$$

Um die Unabhängigkeit der Konstanten von der gewählten (zulässigen) Basis sicherzustellen, ist die Verträglichkeit mit Lorentztransformationen erforderlich. Es genügt dazu, die Verträglichkeit mit Raumdrehungen und Schüben zu überprüfen:<sup>42</sup>

a) Für die (spezielle) Raumdrehung mit

$$\begin{aligned} v_1 &:= e_2, \quad v_2 := e_3, \quad v_3 := e_1, \quad v_4 := e_4 \\ (\Rightarrow v_1^* &= e_2^*, \quad v_2^* = e_3^*, \quad v_3^* = e_1^*, \quad v_4^* = e_4^*) \end{aligned}$$

erhält man wegen

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} G(v_i, v_j) v_i^* \wedge v_j^* \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} G(v_i, v_j) v_i^* \wedge v_j^* \\ \left( \sum_{i=1}^3 G(e_i, e_4) e_i^* \right) \wedge e_4^* = \left( \sum_{i=1}^3 G(v_i, e_4) v_i^* \right) \wedge e_4^* \end{array} \right. \end{aligned}$$

aus der Bedingung

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \psi_P^{ij} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* \stackrel{!}{=} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \psi_P^{ij} G(v_i, v_j) v_i^* \wedge v_j^*,$$

für die Konstanten die Beziehungen:

$$\psi_P^{12} = \psi_P^{23} = \psi_P^{13} \quad \text{und} \quad \psi_P^{14} = \psi_P^{24} = \psi_P^{34}.$$

Umgekehrt ist leicht verifizierbar, daß diese Bedingung hinreichend für die Verträglichkeit mit beliebigen Raumdrehungen ist.

b) Die Verträglichkeit mit Raumdrehungen sei nun bereits erfüllt, es sei also

$$\psi(P, G) = \psi_P^I \cdot \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 3} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* \right) + \psi_P^{II} \cdot \left( \sum_{i=1}^3 G(e_i, e_4) e_i^* \wedge e_4^* \right)$$

mit reellen Konstanten  $\psi_P^I, \psi_P^{II} > 0$ . Durch den (speziellen) Schub in Richtung des ersten Basisvektors

$$L_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & & & \sinh \vartheta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \sinh \vartheta & & & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow L_1(\vartheta)^{-1} = L_1(-\vartheta))$$

<sup>42</sup> Vgl. III.1.2, Satz 1.

erhält man mit

$$\sigma := \sinh \vartheta, \quad \tau := \cosh \vartheta \quad (\Rightarrow \tau^2 - \sigma^2 = 1)$$

die Verträglichkeitsbedingung:

$$\begin{aligned} & \psi'_P \cdot \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 3} G(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* \right) + \psi''_P \cdot \left( \sum_{i=1}^3 G(e_i, e_4) e_i^* \wedge e_4^* \right) \\ & \stackrel{!}{=} \psi'_P \cdot \left( G(\tau e_1 - \sigma e_4, e_2) (\tau e_1^* + \sigma e_4^*) \wedge e_2^* \right. \\ & \quad + G(\tau e_1 - \sigma e_4, e_3) (\tau e_1^* + \sigma e_4^*) \wedge e_3^* \\ & \quad \left. + G(e_2, e_3) e_2^* \wedge e_3^* \right) \\ & \quad + \psi''_P \cdot \left( G(\tau e_1 - \sigma e_4, \tau e_4 - \sigma e_1) (\tau e_1^* + \sigma e_4^*) \wedge (\tau e_4^* + \sigma e_1^*) \right. \\ & \quad + G(e_2, \tau e_4 - \sigma e_1) e_2^* \wedge (\tau e_4^* + \sigma e_1^*) \\ & \quad \left. + G(e_3, \tau e_4 - \sigma e_1) e_3^* \wedge (\tau e_4^* + \sigma e_1^*) \right) \\ & = ((\psi'_P \tau^2 - \psi''_P \sigma^2) \cdot G(e_1, e_2) + ((\psi'_P - \psi''_P) \tau \sigma) \cdot G(e_2, e_4)) e_1^* \wedge e_2^* \\ & \quad + ((\psi'_P \tau^2 - \psi''_P \sigma^2) \cdot G(e_1, e_3) + ((\psi'_P - \psi''_P) \tau \sigma) \cdot G(e_3, e_4)) e_1^* \wedge e_3^* \\ & \quad + (\psi'_P \cdot G(e_2, e_3)) e_2^* \wedge e_3^* \\ & \quad + (\psi''_P \cdot G(e_1, e_4)) e_1^* \wedge e_4^* \\ & \quad + (((\psi''_P - \psi'_P) \tau \sigma) \cdot G(e_1, e_2) + (\psi''_P \tau^2 - \psi'_P \sigma^2) \cdot G(e_2, e_4)) e_2^* \wedge e_4^* \\ & \quad + (((\psi''_P - \psi'_P) \tau \sigma) \cdot G(e_1, e_3) + (\psi''_P \tau^2 - \psi'_P \sigma^2) \cdot G(e_3, e_4)) e_3^* \wedge e_4^* . \end{aligned}$$

Damit diese Gleichheit und damit auch die Gleichheit aller Koeffizienten in der Darstellung bezüglich der Basis für beliebige  $\vartheta \in \mathbb{R}$  und alle  $G \in \Lambda_2 \mathcal{V}^*$  erfüllt ist, müssen die Konstanten  $\psi'_P$  und  $\psi''_P$  notwendigerweise gleich sein.

Wie bei der Betrachtung der Raumdrehung ist hier leicht nachweisbar, daß diese Bedingung für die Verträglichkeit mit Schüben auch hinreichend ist.

### Bezeichnung

- $\mathcal{N}$  heißt *isotrop in einem Punkt*  $P \in \mathcal{N}$  *bezüglich*  $\psi$ , wenn es eine reelle Konstante  $\psi'_P > 0$  gibt, so daß für jede alternierende 2-fache Multilinearform  $G \in \Lambda_2 \mathcal{V}^*$  gilt:

$$\psi(P, G) = \psi'_P \cdot G .$$

Die Abbildung  $\psi$  ist in diesem Punkt also linear und richtungsunabhängig in allen Variablen.

$\mathcal{N}$  heißt *isotrop* bezüglich  $\psi$ , wenn die Isotropie bezüglich  $\psi$  in jedem Punkt  $P \in \mathcal{N}$  erfüllt ist.

- Für den Fall, daß  $\mathcal{N}$  homogen und isotrop bezüglich einer Materialeigenschaft  $\psi$  ist, gibt es eine Konstante  $\psi' \in \mathbb{R}$ , so daß gilt:

$$\psi(P, G) = \psi' \cdot G \quad \forall P \in \mathcal{N}, G \in \Lambda_2 \mathcal{V}^* .$$

In genau diesem Fall nennt man  $\psi'$  eine *Materialkonstante*.

**Bemerkung**

- a) Ohne Normierung der Lichtgeschwindigkeit  $c > 0$  erhält man für die Verträglichkeit mit Lorentztransformationen die Bedingung<sup>43</sup>

$$\psi'_P = \frac{1}{c^2} \psi''_P .$$

Umgekehrt impliziert die Forderung der „Invarianz des Vakuums“ (und damit des Übergangs von Galileitransformationen zu Lorentztransformationen) zusammen mit obigem Transformationsverhalten (für eine zunächst beliebige reelle Konstante  $c > 0$ ) eine Lichtgeschwindigkeit, die der Gleichung

$$c = \sqrt{\psi''_P (\psi'_P)^{-1}} ,$$

genügt<sup>44</sup>, im vorliegenden normierten Fall also  $c = 1$ .

- b) Die oben gestellte Forderung der Basisunabhängigkeit der die Abbildung  $\psi$  definierenden reellen Konstanten schließt nicht die Möglichkeit aus, basisabhängige Materialeigenschaften zu betrachten. Bei der Modellierung realer Strukturen ist es sogar erforderlich, solche zuzulassen. So sind natürlich Materialeigenschaften, die etwa das elektrische und magnetische Verhalten von Festkörpern beschreiben, im allgemeinen nicht invariant gegenüber Raumdrehungen (zum Beispiel bei Gitterstrukturen), geschweige denn gegenüber Schüben, also bei Übergang von einem Bezugssystem, in dem der Körper ruht, zu einem sich dazu gleichmäßig gradlinig bewegenden Inertialsystem. Die klassischen nur die Raumdimensionen berücksichtigenden Bezeichnungen „homogen“, „heterogen“ und „isotrop“ sind daher stets als *homogen, heterogen bzw. isotrop bezüglich des gewählten Bezugssystems* zu verstehen. Beim Wechsel zu einer anderen zulässigen Basis und der damit verbundenen orthogonalen Transformation der Koordinaten sind dann stets auch die basisabhängigen Materialeigenschaften entsprechend zu transformieren.

**III.2.3 Die diskreten Maxwell'schen Gleichungen**

Die Maxwell'schen Gleichungen in Differentialformenschreibweise werden an die Situation diskreter Daten in Eckpunkten vierdimensionaler Simplizes angepaßt. Man erhält Gleichungen für die eindeutig bestimmten Interpolierenden der Funktionswerte in den Ecken dieser Simplizes, also Gleichungen für affine  $r$ -Formen auf 4-Simplizes.

Dazu sei  $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$  ein orientiertes 5-Tupel affin linear unabhängiger Punkte in  $\mathcal{M}$ , es sei  $\mathcal{N} := \langle (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) \rangle$  das orientierte (maximaldimensionale) von diesen Punkten aufgespannte 4-Simplex und  $v_i := \vec{P_0 P_i}$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Weiter seien  $F, \tilde{F} \in \Omega_2(|\mathcal{N}|)$  mit

$$F := E_1 de_1^* \wedge de_4^* + E_2 de_2^* \wedge de_4^* + E_3 de_3^* \wedge de_4^* \\ + B_1 de_2^* \wedge de_3^* + B_2 de_3^* \wedge de_1^* + B_3 de_1^* \wedge de_2^* ,$$

$$\tilde{F} := D_1 de_1^* \wedge de_4^* + D_2 de_2^* \wedge de_4^* + D_3 de_3^* \wedge de_4^* \\ + H_1 de_2^* \wedge de_3^* + H_2 de_3^* \wedge de_1^* + H_3 de_1^* \wedge de_2^*$$

<sup>43</sup> Eine Behandlung der Invarianz der Materialgleichungen findet sich etwa in [23].

<sup>44</sup> Vgl. dazu [7, 30].

affine 2-Formen auf  $|\mathcal{N}|$  und

$$J := J_1 de_1^* + J_2 de_2^* + J_3 de_3^* - \varrho de_4^* \in \Omega_1(|\mathcal{N}|)$$

eine affine 1-Form auf  $|\mathcal{N}|$ , wobei  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$  die duale Basis zu einer zulässigen Basis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  sei.

Ist nun

$$\partial\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3 \cup \mathcal{N}_4$$

die Zerlegung in nach außen orientierte 3-Simplizes, so folgt aus

$$dd\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega_2(|\mathcal{N}|)$$

mit dem Stokesschen Integralsatz auf Simplizes:

$$\forall \omega \in \Omega_2(|\mathcal{N}|) : 0 = \int_{\mathcal{N}} dd\omega = \int_{\partial\mathcal{N}} d\omega = \sum_{j=0}^4 \int_{\mathcal{N}_j} d\omega = \sum_{j=0}^4 \int_{\partial\mathcal{N}_j} \omega .$$

### III.2.3.1 Die Integralform der diskreten homogenen Maxwell'schen Gleichung

Aus der homogenen Maxwell'schen Gleichung (H) erhält man nicht nur das Verschwinden der Summe der Integrale über die Ränder der Randsimplizes  $\mathcal{N}_j$ , sondern sogar das Verschwinden jedes einzelnen Summanden. Mit dem Stokesschen Integralsatz auf Simplizes folgt aus

$$dF = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{N}_j} dF = 0, \quad j = 0, \dots, 4$$

die *Integralform der diskreten homogenen Maxwell'schen Gleichung auf  $\mathcal{N}$*  :

$$\int_{\partial\mathcal{N}_j} F = 0, \quad j = 0, \dots, 4. \quad (\text{DH})$$

#### Bemerkung

Durch das Verschwinden der Summe aller fünf Integrale folgt jeweils eine der Gleichungen aus den vier übrigen. Gilt nämlich für  $i \in \{0, \dots, 4\}$

$$\int_{\partial\mathcal{N}_j} F = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, 4\} \setminus \{i\},$$

so erhält man:

$$\sum_{j=0}^4 \int_{\partial\mathcal{N}_j} F = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial\mathcal{N}_i} F = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^4 \int_{\partial\mathcal{N}_j} F = 0 .$$

### III.2.3.2 Die Integralform der diskreten inhomogenen Maxwell'schen Gleichung

Aus der inhomogenen Maxwell'schen Gleichung (I) folgt:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{F} &= -J \quad \left( \Leftrightarrow *d*\tilde{F} = J \Leftrightarrow (-1)^{3 \cdot 1 + 1} d*\tilde{F} = *J \right) \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{N}_j} d*\tilde{F} = \int_{\mathcal{N}_j} *J, \quad j = 0, \dots, 4. \end{aligned}$$

Mit dem Stokesschen Integralsatz erhält man die *Integralform der diskreten inhomogenen Maxwell'schen Gleichung auf  $\mathcal{N}$* :

$$\int_{\partial \mathcal{N}_j} *\tilde{F} = \int_{\mathcal{N}_j} *J, \quad j = 0, \dots, 4. \quad (\text{DI})$$

#### Bemerkung

Auch hier läßt sich der Stokessche Integralsatz auf  $\mathcal{N}$  anwenden. Es gilt:

$$\sum_{j=0}^4 \int_{\mathcal{N}_j} d*\tilde{F} = \int_{\partial \mathcal{N}} d*\tilde{F} = \int_{\mathcal{N}} dd*\tilde{F} = 0$$

und mit (DI) erhält man:

$$\sum_{j=0}^4 \int_{\mathcal{N}_j} d*\tilde{F} = \sum_{j=0}^4 \int_{\partial \mathcal{N}_j} *\tilde{F} = \sum_{j=0}^4 \int_{\mathcal{N}_j} *J = \int_{\partial \mathcal{N}} *J = \int_{\mathcal{N}} d*J.$$

Aus der Gültigkeit der inhomogenen Maxwell'schen Gleichung auf  $\mathcal{N}$  und dem Stokesschen Integralsatz folgt also die *Ladungserhaltung auf  $\mathcal{N}$* :

$$0 = \int_{\mathcal{N}} d*J = \int_{\mathcal{N}} (L_{J_1}(e_1) + L_{J_2}(e_2) + L_{J_3}(e_3) + L_{J_4}(e_4)) de_1^* \wedge \dots \wedge de_4^*.$$

Diese Eigenschaft der 1-Form  $J$  ist somit eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der diskreten Maxwell'schen Gleichungen auf dem orientierten 4-Simplex  $\mathcal{N}$ .

Dabei folgt wie oben aus dem (stets erfüllten) Verschwinden der Summe der Integrale und der (Voraussetzung der) Ladungserhaltung jeweils eine der Gleichungen aus den vier übrigen.

Sei dazu

$$\sum_{j=0}^4 \int_{\partial \mathcal{N}_j} *\tilde{F} = \sum_{j=0}^4 \int_{\mathcal{N}_j} *J = 0$$

und für ein  $i \in \{0, \dots, 4\}$

$$\int_{\partial \mathcal{N}_j} *\tilde{F} = \int_{\mathcal{N}_j} *J \quad \forall j \in \{0, \dots, 4\} \setminus \{i\},$$

dann gilt:

$$\int_{\partial \mathcal{N}_i} *\tilde{F} = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^4 \int_{\partial \mathcal{N}_j} *\tilde{F} = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^4 \int_{\mathcal{N}_j} *J = \int_{\mathcal{N}_i} *J.$$

### III.2.4 Die komponentenweise Formulierung der diskreten Maxwell'schen Gleichungen

Zur Verkürzung der Schreibweise sei nun

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F_{ij} de_i^* \wedge de_j^*, \quad \tilde{F} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \tilde{F}_{ij} de_i^* \wedge de_j^*, \quad J = \sum_{i=1}^4 J_i de_i^*$$

mit den Komponenten

$$(F_{ij})_{i,j=1}^4 := \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ & 0 & B_1 & E_2 \\ & & 0 & E_3 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{F}_{ij})_{i,j=1}^4 := \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & D_1 \\ & 0 & H_1 & D_2 \\ & & 0 & D_3 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

sowie mit  $J_4 := -\rho$ .

Zur komponentenweisen Formulierung der diskreten Maxwell'schen Gleichungen ist es erforderlich, die betrachteten affinen Formen zu transformieren. Dazu sei  $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  ein Basiswechsel mit  $\psi(e_i) = v_i$  für  $i = 1, \dots, 4$  und  $\psi^* : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$  die duale Abbildung. Dann gilt:

$$e_i^* = v_i^* \circ \psi = \psi^*(v_i^*)$$

und folglich:

$$de_i^* = d(v_i^* \circ \psi) = \sum_{j=1}^4 L_{\psi_i}(v_j) dv_j^* = \sum_{j=1}^4 \psi_i(v_j) dv_j^*, \quad i = 1, \dots, 4.$$

#### III.2.4.1 Die homogene Gleichung

Für die in der homogenen Gleichung betrachtete 2-Form  $F$  erhält man:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F_{ij} de_i^* \wedge de_j^* \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F_{ij} \left( \sum_{k=1}^4 \psi_i(v_k) dv_k^* \right) \wedge \left( \sum_{l=1}^4 \psi_j(v_l) dv_l^* \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^4 \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F_{ij} \psi_i(v_k) \psi_j(v_l) \right) dv_k^* \wedge dv_l^* \\ &= \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F_{ij} (\psi_i(v_k) \psi_j(v_l) - \psi_i(v_l) \psi_j(v_k)) \right) dv_k^* \wedge dv_l^*. \end{aligned}$$

Es sei nun ein  $j \in \{0, \dots, 4\}$  fest gewählt. Da für die Gleichung (DH) die Orientierung auf den dreidimensionalen Randsimplizes von  $\mathcal{N}$  unerheblich ist, kann man (willkürlich) eine Orientierung auf  $\langle P_{j_0}, P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3} \rangle$  mit  $\{j_0, j_1, j_2, j_3\} = \{0, \dots, 4\} \setminus \{j\}$  wählen.

Es sei also  $\mathcal{N}_j := \langle (P_{j_0}, P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3}) \rangle$  ein orientiertes Simplex. Diese Orientierung legt auf dem Rand

$$|\partial \mathcal{N}_j| = \bigcup_{k=0}^3 \langle P_{j_0}, \dots, \widehat{P_{j_k}}, \dots, P_{j_3} \rangle$$

eine Orientierung nach außen fest: Mit

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_j^0 &:= \langle (P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3}) \rangle, & \mathcal{N}_j^2 &:= \langle (P_{j_0}, P_{j_1}, P_{j_3}) \rangle, \\ \mathcal{N}_j^1 &:= \langle (P_{j_2}, P_{j_0}, P_{j_3}) \rangle, & \mathcal{N}_j^3 &:= \langle (P_{j_0}, P_{j_2}, P_{j_1}) \rangle\end{aligned}$$

gilt für den nach außen orientierten Rand:

$$\partial\mathcal{N}_j = \bigcup_{k=0}^3 \mathcal{N}_j^k.$$

Man setzt nun

$$v_1 := P_{j_0} \vec{P}_{j_1}, \quad v_2 := P_{j_0} \vec{P}_{j_2}, \quad v_3 := P_{j_0} \vec{P}_{j_3}, \quad v_4 := P_{j_0} \vec{P}_j.$$

Dann erhält man mit dem (von  $j$  abhängigen) Basiswechsel

$$\begin{aligned}\psi: \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ e_i &\mapsto v_i, \quad i = 1, \dots, 4\end{aligned}$$

und

$$\alpha_{kl} := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} F_{i_1 i_2} (\psi_{i_1}(v_k) \psi_{i_2}(v_l) - \psi_{i_1}(v_l) \psi_{i_2}(v_k)), \quad 1 \leq k < l \leq 4$$

für das Integral von  $F$  über  $\partial\mathcal{N}_j$ :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{N}_j} F &= \int_{\partial\mathcal{N}_j} \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \alpha_{kl} dv_k^* \wedge dv_l^* \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \left( \alpha_{1, \dots, \hat{k}, \dots, 3}(P_{j_k}) - \alpha_{1, \dots, \hat{k}, \dots, 3}(P_{j_0}) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( \alpha_{23}(P_{j_1}) - \alpha_{23}(P_{j_0}) - \alpha_{13}(P_{j_2}) + \alpha_{13}(P_{j_0}) + \alpha_{12}(P_{j_3}) - \alpha_{12}(P_{j_0}) \right).\end{aligned}$$

Es folgt die *komponentenweise Darstellung der diskreten homogenen Maxwellschen Gleichung in Integralform für die Seite  $\mathcal{N}_j$  des Simplex  $\mathcal{N}$* :

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F_{kl}(P_{j_1}) - F_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_2) \psi_l(v_3) - \psi_k(v_3) \psi_l(v_2)) \\ &\quad - \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F_{kl}(P_{j_2}) - F_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_1) \psi_l(v_3) - \psi_k(v_3) \psi_l(v_1)) \\ &\quad + \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F_{kl}(P_{j_3}) - F_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_1) \psi_l(v_2) - \psi_k(v_2) \psi_l(v_1)).\end{aligned}$$

**Achtung:** Der Basiswechsel  $\psi$ , die Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  und die Indizes  $j_0, \dots, j_3$  hängen von  $j \in \{0, \dots, 4\}$  ab! Die in der Gleichung auftretenden reellen Zahlen

$$\psi_k(v_l) = L_{\psi_k}(v_l), \quad 1 \leq k \leq 4, \quad 1 \leq l \leq 3,$$

sind aber nur einmal zu bestimmen, da sie durch die Diskretisierung festgelegt sind.

### Bemerkung

Die durch Ersetzen der Komponenten  $F_{12}, \dots, F_{34}$  durch die klassischen Feldkomponenten  $B_1, B_2, B_3$  und  $E_1, E_2, E_3$  entstehenden Gleichungen sind aus Gründen der Übersichtlichkeit im anschließenden Kapitel aufgeführt.

### III.2.4.2 Die inhomogene Gleichung

Für die inhomogene Gleichung (DI) müssen die 2-Form  $*\tilde{F}$  und die 3-Form  $*J$  transformiert werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} * \tilde{F} &= * \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \tilde{F}_{ij} de_i^* \wedge de_j^* \right) \\ &= \tilde{F}_{12} de_3^* \wedge de_4^* - \tilde{F}_{13} de_2^* \wedge de_4^* + \tilde{F}_{23} de_1^* \wedge de_4^* \\ &\quad - \tilde{F}_{14} de_2^* \wedge de_3^* + \tilde{F}_{24} de_1^* \wedge de_3^* - \tilde{F}_{34} de_1^* \wedge de_2^* \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F'_{ij} de_i^* \wedge de_j^* =: F' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} *J &= * \left( \sum_{i=1}^4 J_i de_i^* \right) \\ &= J_1 de_2^* \wedge de_3^* \wedge de_4^* - J_2 de_1^* \wedge de_3^* \wedge de_4^* \\ &\quad + J_3 de_1^* \wedge de_2^* \wedge de_4^* + J_4 de_1^* \wedge de_2^* \wedge de_3^* \\ &= \sum_{i=1}^4 J'_i de_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{de_i^*} \wedge \cdots \wedge de_4^* =: J' \end{aligned}$$

mit

$$(F'_{ij})_{i,j=1}^4 := \begin{pmatrix} 0 & -D_3 & D_2 & H_1 \\ & 0 & -D_1 & H_2 \\ & & 0 & H_3 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (J'_i)_{i=1}^4 := \begin{pmatrix} J_1 \\ -J_2 \\ J_3 \\ -\varrho \end{pmatrix}.$$

Mit einem Basiswechsel

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ e_i &\longmapsto v_i, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

erhält man

$$F' = \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F'_{ij} (\psi_i(v_k) \psi_j(v_l) - \psi_i(v_l) \psi_j(v_k)) \right) dv_k^* \wedge dv_l^*$$

sowie

$$\begin{aligned} J' &= \sum_{i=1}^4 J'_i \left( \sum_{k=1}^4 \psi_i(v_k) dv_k^* \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{k=1}^4 \psi_i(v_k) dv_k^* \right) \wedge \cdots \\ &\quad \cdots \wedge \left( \sum_{k=1}^4 \psi_4(v_k) dv_k^* \right). \end{aligned}$$

Wie oben sei nun ein  $j \in \{0, \dots, 4\}$  fest gewählt. Da auch für die Gleichung (DI) die Orientierung auf den Seiten von  $\mathcal{N}$  unerheblich ist, kann man für  $\langle P_{j_0}, P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3} \rangle$  mit  $\{j_0, j_1, j_2, j_3\} = \{0, \dots, 4\} \setminus \{j\}$  wiederum willkürlich eine Orientierung wählen, indem das orientierte Simplex  $\mathcal{N}_j := \langle (P_{j_0}, P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3}) \rangle$  betrachtet und damit auf dem Rand  $\partial \mathcal{N}_j$  eine Orientierung nach außen festgelegt wird.

Setzt man weiterhin wie oben

$$v_1 := P_{j_0} \vec{P}_{j_1}, \quad v_2 := P_{j_0} \vec{P}_{j_2}, \quad v_3 := P_{j_0} \vec{P}_{j_3}, \quad v_4 := P_{j_0} \vec{P}_j,$$

so erhält man mit dem (von  $j$  abhängigen) Basiswechsel

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ e_i &\mapsto v_i, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

und

$$\alpha'_{kl} := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} F'_{i_1 i_2} (\psi_{i_1}(v_k) \psi_{i_2}(v_l) - \psi_{i_1}(v_l) \psi_{i_2}(v_k)), \quad 1 \leq k < l \leq 4$$

für das Integral von  $F'$  über  $\partial \mathcal{N}_j$  :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{N}_j} F' &= \int_{\partial \mathcal{N}_j} \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \alpha'_{kl} dv_k^* \wedge dv_l^* \\ &= \frac{1}{6} \left( \alpha'_{23}(P_{j_1}) - \alpha'_{23}(P_{j_0}) - \alpha'_{13}(P_{j_2}) + \alpha'_{13}(P_{j_0}) + \alpha'_{12}(P_{j_3}) - \alpha'_{12}(P_{j_0}) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F'_{kl}(P_{j_1}) - F'_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_2) \psi_l(v_3) - \psi_k(v_3) \psi_l(v_2)) \right. \\ &\quad - \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F'_{kl}(P_{j_2}) - F'_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_1) \psi_l(v_3) - \psi_k(v_3) \psi_l(v_1)) \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F'_{kl}(P_{j_3}) - F'_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_1) \psi_l(v_2) - \psi_k(v_2) \psi_l(v_1)) \right). \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \alpha : &= J_1' \left( \psi_2(v_1) \psi_3(v_2) \psi_4(v_3) - \psi_2(v_1) \psi_3(v_3) \psi_4(v_2) \right. \\ &\quad - \psi_2(v_2) \psi_3(v_1) \psi_4(v_3) + \psi_2(v_2) \psi_3(v_3) \psi_4(v_1) \\ &\quad \left. + \psi_2(v_3) \psi_3(v_1) \psi_4(v_2) - \psi_2(v_3) \psi_3(v_2) \psi_4(v_1) \right) \\ &+ J_2' \left( \psi_1(v_1) \psi_3(v_2) \psi_4(v_3) - \psi_1(v_1) \psi_3(v_3) \psi_4(v_2) \right. \\ &\quad - \psi_1(v_2) \psi_3(v_1) \psi_4(v_3) + \psi_1(v_2) \psi_3(v_3) \psi_4(v_1) \\ &\quad \left. + \psi_1(v_3) \psi_3(v_1) \psi_4(v_2) - \psi_1(v_3) \psi_3(v_2) \psi_4(v_1) \right) \\ &+ J_3' \left( \psi_1(v_1) \psi_2(v_2) \psi_4(v_3) - \psi_1(v_1) \psi_2(v_3) \psi_4(v_2) \right. \\ &\quad - \psi_1(v_2) \psi_2(v_1) \psi_4(v_3) + \psi_1(v_2) \psi_2(v_3) \psi_4(v_1) \\ &\quad \left. + \psi_1(v_3) \psi_2(v_1) \psi_4(v_2) - \psi_1(v_3) \psi_2(v_2) \psi_4(v_1) \right) \\ &+ J_4' \left( \psi_1(v_1) \psi_2(v_2) \psi_3(v_3) - \psi_1(v_1) \psi_2(v_3) \psi_3(v_2) \right. \\ &\quad - \psi_1(v_2) \psi_2(v_1) \psi_3(v_3) + \psi_1(v_2) \psi_2(v_3) \psi_3(v_1) \\ &\quad \left. + \psi_1(v_3) \psi_2(v_1) \psi_3(v_2) - \psi_1(v_3) \psi_2(v_2) \psi_3(v_1) \right) \end{aligned}$$

erhält man für das Integral von  $J'$  über  $\mathcal{N}_j$ :

$$\int_{\mathcal{N}_j} J' = \int_{\mathcal{N}_j} \alpha dv_1^* \wedge dv_2^* \wedge dv_3^* = \frac{1}{4!} \sum_{i=0}^3 \alpha(P_{j_i}).$$

Somit folgt die *komponentenweise Darstellung der diskreten inhomogenen Maxwell'schen Gleichung in Integralform für die Seite  $\mathcal{N}_j$  des Simplex  $\mathcal{N}$* :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \alpha(P_{j_i}) = & \\ & \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F'_{kl}(P_{j_1}) - F'_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_2) \psi_l(v_3) - \psi_k(v_3) \psi_l(v_2)) \\ & - \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F'_{kl}(P_{j_2}) - F'_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_1) \psi_l(v_3) - \psi_k(v_3) \psi_l(v_1)) \\ & + \sum_{1 \leq k < l \leq 4} (F'_{kl}(P_{j_3}) - F'_{kl}(P_{j_0})) (\psi_k(v_1) \psi_l(v_2) - \psi_k(v_2) \psi_l(v_1)) . \end{aligned}$$

*Hinweis:* Auch hier sind der Basiswechsel  $\psi$ , die Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  und die Indizes  $j_0, \dots, j_3$  von  $j \in \{0, \dots, 4\}$  abhängig. Es ist daher naheliegend, diese Größen und damit die reellen Zahlen

$$\psi_k(v_l) = L_{\psi_k}(v_l) , \quad 1 \leq k \leq 4 , \quad 1 \leq l \leq 3 ,$$

vom homogenen Fall zu übernehmen.

### **Bemerkung**

Die durch Ersetzen der Komponenten  $J'_1, \dots, J'_4$  und  $F'_{12}, \dots, F'_{34}$  durch die klassischen Feldkomponenten  $H_1, H_2, H_3, D_1, D_2, D_3, J_1, J_2, J_3$  und  $\varrho$  entstehenden Gleichungen sind wie bei den homogenen Gleichungen im nächsten Kapitel aufgeführt.



# IV Das diskrete Modell der Maxwell'schen Gleichungen auf vierdimensionalen Simplizes

*„Der naive Realismus führt zur Physik, und die Physik zeigt, daß der naive Realismus falsch ist. Deshalb ist der naive Realismus, falls er wahr ist, falsch; deshalb ist er falsch.“*

Bertrand Russell

Die im vorherigen Kapitel durch Anwendung des diskreten Differentialformenkalküls auf die Maxwell'schen Gleichungen erhaltenen Versionen bilden die Grundlage des diskreten Modells elektromagnetischer Felder auf vierdimensionalen Simplizes. Im folgenden werden nun die für diese Modellierung erforderlichen Hilfsmittel und Techniken vorgestellt. Dazu werden die diskreten Maxwell'schen Gleichungen unter Verwendung der klassischen Feldkomponenten auf vierdimensionalen Simplexpolyedern, die in den Gleichungen auftretenden Materialeigenschaften sowie die für die Lösbarkeit notwendigerweise zu setzenden Randbedingungen betrachtet. Abschließend wird an einem numerischen Beispiel die Verwendung des entwickelten diskreten Modells demonstriert.

## IV.1 Die diskrete Modellierung elektromagnetischer Felder

*„Viele physikalische Systeme sind rechnerisch irreduzibel; das effizienteste Verfahren, ihre Zukunft zu bestimmen, ist also ihre eigene Entwicklung.“*

Stephen Wolfram

Nachfolgend werden Hinweise für die Modellierung einer realen Situation im Blick auf die Verwendung der Ergebnisse der vorausgehenden Kapitel zusammengetragen. Bei Betrachtung konkreter Beispiele sind die Komponenten der in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden Felder bezüglich eines gewählten Bezugssystems, im allgemeinen des Ruhesystems der betrachteten Situation, zumeist also des näherungsweise Inertialsystems eines Ortes auf der Erdoberfläche, von Interesse. Daher werden zunächst die als Ergebnis des letzten Kapitels gewonnenen komponentenweisen Darstellungen der Maxwell'schen Gleichungen nach Ersetzen der aus Gründen der Übersichtlichkeit eingeführten Hilfskomponenten durch die klassischen Feldkomponenten aufgeführt. Anschließend wird die Einbeziehung von Materialeigenschaften und Randbedingungen diskutiert. Im darauf folgenden Unterkapitel sind Hinweise für die Diskretisierung der betrachteten Teilmenge der Minkowski-Raum-Zeit zusammengestellt. Es wird ein einfaches Verfahren beschrieben, um aus einer gegebenen dreidimensionalen Simplizialzerlegung des Raumes durch Zylinderkonstruktionen eine Zerlegung der Minkowski-Raum-Zeit in vierdimensionale Simplizes zu erhalten. Es folgen einige Bemerkungen bezüglich der Umsetzung des klassischen Stabilitätskriteriums. Schließlich werden die speziellen Eigenschaften des vorgestellten diskreten Modells zusammengefaßt.

### IV.1.1 Die diskreten Maxwell'schen Gleichungen unter Verwendung der klassischen Feldkomponenten

Es sei  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  eine zulässige Basis von  $\mathcal{V}$  und  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$  die zugehörige duale Basis. Weiter sei

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_K = |\mathcal{K}| \subset \mathcal{M}$$

ein vierdimensionales Simplexpolyeder, wobei  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$  die vierdimensionalen Grundsimplizes einer Simplicialzerlegung  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{N}$  seien. Für zwei Simplicizes

$$\mathcal{N}_i = \langle P_0^i, \dots, P_4^i \rangle, \mathcal{N}_j = \langle P_0^j, \dots, P_4^j \rangle \subset \mathcal{N}, \quad i \neq j,$$

gilt damit also:

$$\# \left( \{P_0^i, \dots, P_4^i\} \cap \{P_0^j, \dots, P_4^j\} \right) \leq 4,$$

$$\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \begin{cases} \langle Q_0, \dots, Q_k \rangle & \text{falls } \{P_0^i, \dots, P_4^i\} \cap \{P_0^j, \dots, P_4^j\} = \\ & \{Q_0, \dots, Q_k\}, \quad 0 \leq k \leq 3, \\ \emptyset & \text{falls } \{P_0^i, \dots, P_4^i\} \cap \{P_0^j, \dots, P_4^j\} = \emptyset. \end{cases}$$

#### IV.1.1.1 Die Diskretisierung der elektromagnetischen Felder

Auf jedem vierdimensionalen Simplex werden die durch die Werte in den Eckpunkten eindeutig bestimmten affinen 2-Formen  $F$  und  $\tilde{F}$  sowie die affine 1-Form  $J$  betrachtet. Dazu seien die Werte in einem Punkt

$$P = \sum_{i=0}^4 \lambda_i P_i \in \mathcal{N}_j = \langle P_0, \dots, P_4 \rangle, \quad \sum_{i=0}^4 \lambda_i = 1,$$

definiert durch

$$F(P) = \sum_{i=0}^4 \lambda_i F(P_i), \quad \tilde{F}(P) = \sum_{i=0}^4 \lambda_i \tilde{F}(P_i), \quad J(P) = \sum_{i=0}^4 \lambda_i J(P_i).$$

Durch diese Vorschriften erhält man simpliciale 2-Formen  $F$  und  $\tilde{F}$  sowie eine simpliciale 1-Form  $J$  auf  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\mathcal{K}$ :

$$\forall j \in \{1, \dots, K\} : F|_{\mathcal{N}_j}, \tilde{F}|_{\mathcal{N}_j} \in \Omega_2(\mathcal{N}_j), \quad J|_{\mathcal{N}_j} \in \Omega_1(\mathcal{N}_j).$$

Es sei nun  $\tilde{\mathcal{K}}$  die Menge der dreidimensionalen Seitensimplizes in  $\mathcal{K}$ . Für jedes solche Randsimplex  $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{K}}$  wird

- ein vierdimensionales Simplex  $\mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}$  mit

$$\mathcal{L} = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle \subset \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle = \mathcal{N}_j,$$

- eine Orientierung  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  der Eckpunkte,
- Basisvektoren

$$v_1 := P_0 \vec{P}_1, \quad v_2 := P_0 \vec{P}_2, \quad v_3 := P_0 \vec{P}_3, \quad v_4 := P_0 \vec{P}_4$$

von  $\mathcal{V}$  sowie

- ein Basiswechsel  $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  mit  $\Psi(e_i) = v_i, \quad i = 1, \dots, 4$

gewählt. Für die Anwendung der diskreten Maxwell'schen Gleichungen werden die Einschränkungen von  $F$ ,  $\tilde{F}$  und  $J$  auf  $\mathcal{N}_j$ , also die affinen 2-Formen  $F|_{\mathcal{N}_j}$ ,  $\tilde{F}|_{\mathcal{N}_j}$  sowie die affine 1-Form  $J|_{\mathcal{N}_j}$  betrachtet. Damit erhält man für die orientierte Seite  $\langle (P_0, P_1, P_2, P_3) \rangle$  folgende Ergebnisse:

## IV.1.1.2 Die diskrete inhomogene Maxwellsche Gleichung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(J_1(P_0) + J_1(P_1) + J_1(P_2) + J_1(P_3)) \cdot \\
& \quad [\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_2(v_1)\Psi_3(v_3)\Psi_4(v_2) \\
& \quad - \Psi_2(v_2)\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_3) + \Psi_2(v_2)\Psi_3(v_3)\Psi_4(v_1) \\
& \quad + \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_2)\Psi_4(v_1)] \\
& - \frac{1}{4}(J_2(P_0) + J_2(P_1) + J_2(P_2) + J_2(P_3)) \cdot \\
& \quad [\Psi_1(v_1)\Psi_3(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_1)\Psi_3(v_3)\Psi_4(v_2) \\
& \quad - \Psi_1(v_2)\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_3) + \Psi_1(v_2)\Psi_3(v_3)\Psi_4(v_1) \\
& \quad + \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_2)\Psi_4(v_1)] \\
& + \frac{1}{4}(J_3(P_0) + J_3(P_1) + J_3(P_2) + J_3(P_3)) \cdot \\
& \quad [\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_1)\Psi_2(v_3)\Psi_4(v_2) \\
& \quad - \Psi_1(v_2)\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_3) + \Psi_1(v_2)\Psi_2(v_3)\Psi_4(v_1) \\
& \quad + \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_2)\Psi_4(v_1)] \\
& - \frac{1}{4}(\varrho(P_0) + \varrho(P_1) + \varrho(P_2) + \varrho(P_3)) \cdot \\
& \quad [\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_2)\Psi_3(v_3) - \Psi_1(v_1)\Psi_2(v_3)\Psi_3(v_2) \\
& \quad - \Psi_1(v_2)\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_3) + \Psi_1(v_2)\Psi_2(v_3)\Psi_3(v_1) \\
& \quad + \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_2) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_2)\Psi_3(v_1)] \\
& = - (D_1(P_1) - D_1(P_0))(\Psi_2(v_2)\Psi_3(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_2)) \\
& \quad + (D_1(P_2) - D_1(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_1)) \\
& \quad - (D_1(P_3) - D_1(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_2) - \Psi_2(v_2)\Psi_3(v_1)) \\
& \quad + (D_2(P_1) - D_2(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_3(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_2)) \\
& \quad - (D_2(P_2) - D_2(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_3(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_1)) \\
& \quad + (D_2(P_3) - D_2(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_3(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_3(v_1)) \\
& \quad - (D_3(P_1) - D_3(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_2(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_2)) \\
& \quad + (D_3(P_2) - D_3(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_1)) \\
& \quad - (D_3(P_3) - D_3(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_2(v_1)) \\
& \quad + (H_1(P_1) - H_1(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_4(v_2)) \\
& \quad - (H_1(P_2) - H_1(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_4(v_1)) \\
& \quad + (H_1(P_3) - H_1(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_4(v_1)) \\
& \quad + (H_2(P_1) - H_2(P_0))(\Psi_2(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_4(v_2)) \\
& \quad - (H_2(P_2) - H_2(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_4(v_1)) \\
& \quad + (H_2(P_3) - H_2(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_2(v_2)\Psi_4(v_1)) \\
& \quad + (H_3(P_1) - H_3(P_0))(\Psi_3(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_3(v_3)\Psi_4(v_2)) \\
& \quad - (H_3(P_2) - H_3(P_0))(\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_3(v_3)\Psi_4(v_1)) \\
& \quad + (H_3(P_3) - H_3(P_0))(\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_3(v_2)\Psi_4(v_1)) .
\end{aligned}$$

Die in der Gleichung auftretende Gesamtladung, zusammengesetzt aus der skalaren Ladungsdichte  $\varrho$  und den Komponenten  $J_1, J_2, J_3$  des Stromdichtevektors, wird in jedem Punkt  $P_i$  durch die zu modellierende Situation vorgegeben.

### IV.1.1.3 Die diskrete homogene Maxwell'sche Gleichung

$$\begin{aligned}
0 = & (B_1(P_1) - B_1(P_0))(\Psi_2(v_2)\Psi_3(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_2)) \\
& - (B_1(P_2) - B_1(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_1)) \\
& + (B_1(P_3) - B_1(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_2) - \Psi_2(v_2)\Psi_3(v_1)) \\
& - (B_2(P_1) - B_2(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_3(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_2)) \\
& + (B_2(P_2) - B_2(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_3(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_1)) \\
& - (B_2(P_3) - B_2(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_3(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_3(v_1)) \\
& + (B_3(P_1) - B_3(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_2(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_2)) \\
& - (B_3(P_2) - B_3(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_1)) \\
& + (B_3(P_3) - B_3(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_2(v_1)) \\
& + (E_1(P_1) - E_1(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_4(v_2)) \\
& - (E_1(P_2) - E_1(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_4(v_1)) \\
& + (E_1(P_3) - E_1(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_4(v_1)) \\
& + (E_2(P_1) - E_2(P_0))(\Psi_2(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_4(v_2)) \\
& - (E_2(P_2) - E_2(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_4(v_1)) \\
& + (E_2(P_3) - E_2(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_2(v_2)\Psi_4(v_1)) \\
& + (E_3(P_1) - E_3(P_0))(\Psi_3(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_3(v_3)\Psi_4(v_2)) \\
& - (E_3(P_2) - E_3(P_0))(\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_3(v_3)\Psi_4(v_1)) \\
& + (E_3(P_3) - E_3(P_0))(\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_3(v_2)\Psi_4(v_1)) .
\end{aligned}$$

### IV.1.1.4 Materialeigenschaften

Der Zusammenhang der Feldkomponenten in beiden Gleichungen wird durch die Materialgleichungen

$$\begin{aligned}
D(P) &= \varepsilon(P)E(P) \\
B(P) &= \mu(P)H(P) \\
J(P) &= \sigma(P)E(P)
\end{aligned}$$

hergestellt. Die dabei auftretenden Tensoren sind bei einer Modellierung von Materialien (also nicht des Vakuums) im allgemeinen vom gewählten Bezugssystem abhängig. Für die Gewährleistung der Invarianz des Vakuums, einem insbesondere (im allgemeinen Sinne) isotropen Medium, wo also anstelle der bezüglich einer gewählten zulässigen Basis auftretenden Matrizen positive reelle Konstanten  $\varepsilon_0 := \varepsilon(P)$  und  $\mu_0 := \mu(P)$  verwendet werden können, ist zu beachten, daß die in III.2.2 für die Einführung eines allgemeinen Isotropiebegriffs geforderte Basisunabhängigkeit der Materialgleichung durch die Bedingung

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0}$$

erfüllt wird. Diese Bedingung entspricht (ohne Normierung der Lichtgeschwindigkeit) der klassischen Bedingung

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

wobei die *Permittivität des Vakuums*  $\varepsilon_0$  und die *Permeabilität des Vakuums*  $\mu_0$  physikalische Konstanten sind.<sup>45</sup>

So ist es also bei konkreter Modellierung neben der Betrachtung der Maxwell'schen Gleichungen zusätzlich erforderlich, den lokalen Zusammenhang der Feldkomponenten in jedem Knotenpunkt durch folgende lineare Gleichungssysteme herzustellen:

$$D_i(P) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}(P) \cdot E_j(P), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$B_i(P) = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij}(P) \cdot H_j(P), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$J_i(P) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(P) \cdot E_j(P), \quad i = 1, 2, 3.$$

Die auftretenden Matrizen sind dabei zwar stets diagonalisierbar, haben aber im allgemeinen bezüglich der gewählten zulässigen Basis keine Diagonalgestalt. In einem im klassischen Sinne (also basisabhängig) isotropen Medium vereinfachen sich die Zusammenhänge durch den Übergang zu reellen Konstanten:

$$D_i(P) = \varepsilon(P) \cdot E_i(P), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$B_i(P) = \mu(P) \cdot H_i(P), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$J_i(P) = \sigma(P) \cdot E_i(P), \quad i = 1, 2, 3.$$

#### IV.1.1.5 Randbedingungen

Für die eindeutige Lösbarkeit des durch das vorgestellte Verfahren entstehenden Gleichungssystems ist es im allgemeinen erforderlich, Randbedingungen vorzugeben, wobei aufgrund der vierdimensionalen Betrachtungsweise und der nur relativen (bezugssystemabhängigen) Gleichzeitigkeit erst nach Auszeichnung einer Basis und damit der Wahl eines Inertialsystems zwischen klassischen Anfangs- und Randbedingungen unterschieden werden kann.

In bezug auf die Anzahl von Gleichungen und Unbekannten hat man folgende Situation:

- In jedem Knotenpunkt  $P_i$  sind jeweils drei Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes, also sechs Unbekannte plazierte. (Durch die Materialgleichungen können die elektrischen Felder  $E$  und  $D$  sowie die magnetischen Felder  $B$  und  $H$  jeweils identifiziert werden.)
- Auf jedem dreidimensionalen Randsimplex hat man zwei Gleichungen gegeben.
- Auf jedem vierdimensionalen Simplex folgt die homogene Maxwell'sche Gleichung auf einer der Seiten aus den vier übrigen. Ebenso folgt unter der (notwendigen) Voraussetzung der Ladungserhaltung auf dem gesamten Simplex eine der inhomogenen Gleichungen aus den anderen. Von den insgesamt zehn Gleichungen sind also stets zwei automatisch miterfüllt.
- Durch Hinzunahme eines weiteren Punktes über einer Seite erhält man sechs weitere Unbekannte und acht weitere Gleichungen, von denen aber zwei aus den restlichen folgen. Die Anzahl der zusätzlichen Gleichungen kann sich dabei durch Einführung weiterer Seiten erhöhen.

<sup>45</sup> Siehe z. B. [19].

Auf einem vierdimensionalen Simplex ohne Vorgabe von Randbedingungen hat man somit 30 Unbekannte, aber nur acht Gleichungen.

Nun ist für die konkrete Formulierung von Randbedingungen ebenso wie für die Einbeziehung von Materialeigenschaften die konkrete zu modellierende Situation ausschlaggebend. Neben der Möglichkeit der Einbeziehung klassischer Anfangsbedingungen in das diskrete Modell seien hier zwei der üblichen klassischen Randbedingungstypen betrachtet:

- a) *Anfangsbedingungen* lassen sich durch die Vorgabe von Feldkomponenten in einer „Gleichzeitigkeitshyperebene“ des Ereignisraums, also innerhalb eines nur von den räumlichen Basisvektoren aufgespannten dreidimensionalen affinen Unterraumes modellieren. Entweder verringert sich dabei innerhalb des Gleichungssystems durch Einsetzen der Feldkomponenten die Zahl der Unbekannten bei gleichbleibender Gleichungszahl, oder man nimmt für jede vorzugebene Feldkomponente eine zusätzliche Gleichung in das System auf, wodurch sich bei unveränderter Variablenzahl die Anzahl der Gleichungen erhöht.
- b) Die *Oberfläche eines perfekten Leiters* läßt sich durch das Verschwinden der zu dieser Oberfläche tangentialen Komponenten des elektrischen und der zur Oberfläche normalen Komponente des magnetischen Feldes modellieren.<sup>46</sup> Man erhält so zu jedem Ereignis, das sich auf der Weltlinie eines Punktes auf der Leiteroberfläche befindet, entsprechende Bedingungen an die Feldkomponenten. Die Einbeziehung solcher Randbedingungen in das zu lösende Gleichungssystem gestaltet sich insbesondere dann sehr einfach, wenn die Oberfläche des Leiters bereits in Richtung der Standardbasisvektoren verläuft und damit nur die entsprechenden Komponenten des elektrischen bzw. magnetischen Feldes als Null vorzugeben sind. Wie bei den Anfangsbedingungen verringert sich dabei entweder die Zahl der Unbekannten, oder die Anzahl der Gleichungen erhöht sich.
- c) Um ein den Versuchsaufbau *umgebendes (unendliches) Vakuum* durch endlich viele Punkte nachzubilden, verwendet man absorbierende Randbedingungen, die die Eigenschaft haben, Reflexionen an den Rändern, wie sie bei der obigen Modellierung perfekter Leiter auftreten, zu vermeiden.<sup>47</sup> Der Gedanke dabei ist, unter Annahmen über die Gestalt der auftretenden Felder eine sich fortsetzende Welle nachzubilden, indem Feldkomponenten in Randpunkten aus Feldkomponenten innerer Punkte des betrachteten Gebietes extrapoliert werden. Diese Vorgehensweise erfordert eine sehr gute Abstimmung der Diskretisierung auf die zu modellierende Situation. Man erhält dabei für die absorbierenden Randpunkte bei gleichbleibender Variablenzahl zusätzliche in das System einzubeziehende (im allgemeinen nichtlineare) Gleichungen.

Eine alternative Modellierungsmöglichkeit eines umgebenden Vakuums besteht darin, den betrachteten räumlichen Bereich in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit sich ausbreitender Einflüsse zu vergrößern. Bei einer vierdimensionalen Modellierung läßt sich dies sehr leicht realisieren, indem als Teilmenge der Minkowski-Raum-Zeit die Vereinigung aller Zeitkegel der zur Anfangszeit betrachteten Ereignisse verwendet wird.

Eine umfassende Untersuchung vierdimensionaler Randbedingungsmodellierung, also insbesondere der Einbeziehung stets sehr eng mit dem konkreten zu modellierenden Beispiel verknüpfter klassischer Anfangs- und Randbedingungen, ist ein interessantes Feld für weitergehende Forschung.

<sup>46</sup> Vgl. [37].

<sup>47</sup> Für die Einbeziehung solcher Randbedingungen in das in [37] vorgestellte Verfahren: Siehe [25].

## IV.1.2 Diskretisierung der Minkowski-Raum-Zeit

Die entwickelten diskreten Maxwell'schen Gleichungen setzen ein vierdimensionales Simplexpolyeder voraus, es wird also eine Diskretisierung der für die Modellierung betrachteten Teilmenge der Minkowski-Raum-Zeit durch Zerlegung in vierdimensionale Simplizes benötigt. Vor allgemeinen Überlegungen zu einer (im Sinne der Stabilität) günstigen Wahl einer solchen Diskretisierung sollen kurz Möglichkeiten aufgezeigt werden, unter Verwendung einer bereits erfolgten Simplizialzerlegung des dreidimensionalen Raumes eine vierdimensionale Zerlegung der Minkowski-Raum-Zeit zu konstruieren.

### IV.1.2.1 Zylinderkonstruktionen

Ist eine Zerlegung des betrachteten räumlichen Gebietes in dreidimensionale Simplizes gegeben, also eine Unterteilung des Raumes auf einem Niveau gleicher Zeit bezüglich eines gewählten Bezugssystems, so kann durch Bildung eines Zeitzyinders über jedem dreidimensionalen Simplex und anschließende Simplizialzerlegung dieser Zylinder ein vierdimensionales Simplexpolyeder konstruiert werden. Dabei stößt man auf das Problem, daß die durch Zerlegung der vierdimensionalen Zylinder entstehenden benachbarten Simplizes gemeinsame Seiten oder Untersimplizes kleinerer Dimension haben müssen, um so eine Diskretisierung im Sinne der entwickelten Methode zu erhalten. Es sollen hier zwei Verfahren vorgestellt werden, die dies leisten:

Es sei

$$\mathcal{N} = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle \subset \mathcal{M}$$

ein dreidimensionales Simplex auf einem Gleichzeitkeitsniveau bezüglich  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ , es gelte also

$$\text{aff}(\mathcal{N}) = P_0 + \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}.$$

Mit  $Q_i := P_i + e_4$  für  $i = 0, \dots, 3$  ist dann ein Zylinder über  $\mathcal{N}$  definiert:

$$\mathcal{Z} := \text{conv}(\{P_0, P_1, P_2, P_3, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}).$$

a)  $\mathcal{Z}$  läßt sich durch *sukzessives Abscheiden* von Simplizes wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \langle P_0, P_1, P_2, P_3, Q_0 \rangle \cup \langle P_1, P_2, P_3, Q_0, Q_1 \rangle \\ & \cup \langle P_2, P_3, Q_0, Q_1, Q_2 \rangle \cup \langle P_3, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \rangle. \end{aligned} \quad (*)$$

Diese Zerlegung hat den Nachteil, daß benachbarte Zylinderzerlegungen zunächst nicht zusammenpassen, da nicht notwendigerweise gemeinsame Seiten auftreten. Das Problem läßt sich lösen, indem das Ausgangssimplex  $\mathcal{N}$  zunächst feiner unterteilt wird und dann Zylinder über diesen kleineren Simplizes gebildet werden. Als Punkte verwendet man

1. die Eckpunkte
2. jeweils einen Punkt im Inneren der Kanten  $\langle P_i, P_j \rangle$  für  $i \neq j$ ,
3. jeweils einen Punkt im Inneren der Seiten  $\langle P_i, P_j, P_k \rangle$  für paarweise verschiedene  $i, j, k$  und
4. einen Punkt im Inneren des Simplex  $\mathcal{N}$ ,

wobei jeweils die Baryzentren gewählt werden können. Anschließend betrachtet man als feinere Unterteilung die durch Numerierung der Punkte in obigem Sinne (Ecke, Kante, Seite, Simplex) entstehenden 24 kleineren Simplexes (6 über jeder der 4 Seiten) und führt über diesen die angegebene Zylinderkonstruktion durch.

- b) Eine weitere Methode, die eine feinere als die in (\*) angegebene Simplicialzerlegung des Zylinders über  $\mathcal{N}$  zum Ergebnis hat, ist ausführlich in [2] beschrieben:
1. Für jedes Untersimplex  $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$  wird ein fester Punkt im Inneren des Zylinders über  $\mathcal{L}$  ausgewählt.
  2. Mit aufsteigender Dimension wird für jedes Untersimplex  $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$  die Zentralunterteilung<sup>48</sup> in bezug auf die gewählten Punkte im Inneren und die bereits vorhandenen Randunterteilungen durchgeführt.

Wenn bei diesem Verfahren als Punkte im Inneren der Zylinder über den Teilsimplexes die Baryzentren gewählt werden, so passen die entstehenden Simplicialzerlegungen benachbarter Zylinder in der Weise zusammen, daß als Durchschnitte zweier Simplexes stets nur die leere Menge oder gemeinsame Untersimplexes auftreten.

Auch bei Verwendung einer bestehenden dreidimensionalen Simplicialzerlegung ist es möglich, die Größe der Zeitintervalle, die hier der Höhe der Zylinder über den Simplexes entspricht, der Feinheit der gegebenen räumlichen Unterteilung anzupassen. Dazu wählt man die Kanten über den verschiedenen Eckpunkten unterschiedlich lang. In diesem Fall hat man zwar deformierte Zylinder, die hier angegebenen Konstruktionen lassen sich aber dennoch ohne weiteres durchführen.

#### IV.1.2.2 Geometrische Stabilitätsbedingungen

Eine Übersetzung des klassischen Stabilitätskriteriums auf die vierdimensionale Situation, also der Bedingung, daß (bei einer Lichtgeschwindigkeit von  $c = 1$ ) die Zeitdiskretisierung stets so fein gewählt werden muß, daß die Größe der Zeitintervalle  $\delta_t$  kleiner als die Distanz zweier benachbarter Raumpunkte ist und somit für zwei solche Punkte  $P$  und  $Q$  stets  $\delta_t \leq \text{dist}(P, Q)$  gilt<sup>49</sup>, führt zu einer lokalen, rein geometrischen Bedingung an die Wahl der Simplexes. Geht man von (bezüglich eines Bezugssystems) räumlich fest gewählten Punkten aus, so dürfen, mit einer Ausnahme, alle von einem Ereignis  $P_i$  in zukünftiger Richtung ausgehende Kanten nicht innerhalb des Lichtkegels verlaufen, wobei die ausgenommene Kante zu einem zukünftigen Ereignis des räumlich ruhenden Punktes verläuft. Aus Symmetriegründen läßt sich diese Bedingung entsprechend auch in Richtung der Vergangenheit formulieren. Diese Einschränkung stellt sicher, daß sich das elektromagnetische Feld innerhalb eines Zeitschrittes nicht signifikant verändern kann. Es liegt nahe, eine etwas allgemeinere Bedingung zu formulieren:

*Von einem Eckpunkt  $P_i$  darf in zukünftiger Richtung höchstens eine Kante innerhalb des Lichtkegels verlaufen.*

Weiterhin scheint es angebracht, zu starke Größenunterschiede zwischen den Seitenflächen eines Simplex, die entsprechende Unterschiede der in den Gleichungen auftretenden Summanden zur Folge haben und dadurch zu numerischen Problemen führen können, zu vermeiden. Eine klassische Bedingung hierfür ist, die Simplexes nicht zu spitz zu wählen. Bei entsprechender Formulierung ist das obige Kriterium nur ein Spezialfall (in Zeitrichtung) dieser allgemeineren Bedingung. Dabei ist allerdings zu beachten, daß sich die geometrische Struktur des (dreidimensionalen) Raumes bei Übergang zu einem anderen Bezugssystem

<sup>48</sup> Siehe [2].

<sup>49</sup> Vgl. z. B. [37].

verändern kann: Die Lorentzkontraktion verändert die Koordinaten in Richtung eines Schubes. Da aber für die Modellierung ein Ruhesystem ausgezeichnet wird, bezüglich dessen die Feldkomponenten betrachtet werden und in den Gleichungen Basistransformationen verwendet werden, die durch die gewählte zulässige Basis und die Simplexkanten festgelegt sind, genügt es, eine „ausgewogene“ Form der Simplizes innerhalb des betrachteten Inertialsystems zu fordern. Die obige kursiv gesetzte Bedingung ist dabei allerdings durch die spezielle Eigenschaft der Lorentztransformationen, stets Lichtkegel auf Lichtkegel abzubilden, unabhängig vom gewählten Bezugssystem.

### IV.1.3 Eigenschaften des diskreten Modells

Durch das vorgestellte Verfahren erhält man ein Gleichungssystem, in dem alle Bedingungen für die Gültigkeit der diskreten Maxwell'schen Gleichungen bezüglich der gewählten Simplizialzerlegung, die Materialeigenschaften sowie die für die Lösbarkeit notwendigen Randbedingungen zusammengefaßt sind.

Bei entsprechend gewählten Randbedingungen handelt es sich bei diesem Gleichungssystem um ein im allgemeinen sehr großes und durch die rein nachbarschaftliche Verknüpfung der Feldkomponenten dünn besetztes lineares Gleichungssystem, dessen Gestalt entscheidend durch die Numerierung der Eckpunkte beeinflusst wird. Eine entsprechend geschickte Vorgehensweise sollte dabei zu einem durch bekannte numerische Verfahren effizient lösbaren System führen. Bei Wahl von Randbedingungen, die nicht zu einem linearen Gleichungssystem führen, sind entsprechend andere Lösungsstrategien zu wählen.

Da die Maxwell'schen Gleichungen fester Bestandteil des zu lösenden Systems sind, müssen, anders als bei herkömmlichen Zeititerationsverfahren, zusätzliche Forderungen an die zu wählenden Anfangs- und Randbedingungen gestellt werden. Wählt man etwa einen auf einigen dreidimensionalen Simplizes nicht den diskreten Gleichungen genügenden Anfangszustand, so ist das gesamte Gleichungssystem nicht lösbar, während herkömmliche Verfahren zum Teil auch aus inkonsistenten Anfangswerten entsprechende Ergebnisse berechnen. Ebenso kann die Vorgabe von zu vielen oder inkonsistenten Anfangs- und Randbedingungen zur Überbestimmtheit und zur Unlösbarkeit des Systems führen, wogegen eine zu geringe Zahl oder die Redundanz der Bedingungen zu einem unterbestimmten und damit nicht eindeutig lösbaren Gleichungssystem führen wird. Im Fall der Überbestimmtheit besteht hier die Möglichkeit, das System als Ausgleichsproblem zu behandeln und so eine Näherungslösung zu ermitteln.

Schließlich ist zu beachten, daß, um eine realistische Modellierung im Sinne eines elektromagnetischen Feldes zu gewährleisten, dessen Veränderungen durch sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitende Wellen hervorgerufen werden, entsprechende Bedingungen an die für die Zerlegung der betrachteten Teilmenge der Minkowski-Raum-Zeit zu wählenden Simplizes zu stellen sind.

## IV.2 Ein numerisches Beispiel

*„Es gibt keinen weiter verbreiteten Irrtum als die Annahme, langwierige und genaue mathematische Berechnungen könnten garantieren, daß die Anwendung des Ergebnisses auf eine Naturgegebenheit absolut sicher ist.“*

A. N. Whitehead

Zur Illustration der Verwendung des vorgestellten diskreten Modells wird nun ein (räumlich) zweidimensionales Beispiel betrachtet, indem die Feldgrößen als unabhängig von der dritten Raumkoordinate des Bezugssystems und damit als konstant in dieser Richtung vorausgesetzt werden. Desweiteren wird ausgenutzt, daß elektromagnetische Felder bei Verwendung eines zylindrischen räumlichen Koordinatensystems und der Voraussetzung der Homogenität und Isotropie bezüglich des Ruhesystems, also von Materialkonstanten im klassischen Sinne, in zwei unabhängige Teilfelder zerlegbar sind: Das transversale elektrische Feld (TE) und das transversale magnetische Feld (TM). Beide Teilfelder, aus denen sich das Gesamtfeld gemäß dem Superpositionsprinzip (welches besagt, daß die Summe zweier oder mehrerer Lösungen wiederum eine Lösung der Differentialgleichung ist) additiv zusammensetzt, zeichnen sich dabei durch das Verschwinden jeweils einer Hälfte der elektromagnetischen Feldkomponenten aus. Als weitere Vereinfachung werden Ladungs- und Stromdichte, also die Komponenten der 1-Form  $J$  für die folgende Modellierung als verschwindend vorausgesetzt.

Zur Anwendung des diskreten Modells auf ein (raum-zeitlich) dreidimensionales Beispiel transversaler magnetischer (TM-)Wellen werden zunächst die diskreten Maxwell'schen Gleichungen an die vereinfachte Situation angepaßt. Anschließend werden die konkrete Simplizialzerlegung sowie die auf den einzelnen Simplizes zu erfüllenden Gleichungen entwickelt, wobei sich letztere aus den an die Simplizialzerlegung angepaßten inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen, den entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen, sowie aus homogenen Gleichungen auf Simplizes weiterer Simplizialzerlegungen, die gemeinsame Seiten mit den für die Modellierung zugrundeliegenden Simplizes haben, zusammensetzen. Auf diesem Weg erhält man das zu lösende lineare Gleichungssystem, das schließlich verwendet wird, um in einem konkreten Beispiel das Fortschreiten einer anfänglich initialisierten Wellenfront zu berechnen.<sup>50</sup>

### IV.2.1 Das transversale magnetische Feld

Bei der Zerlegung des elektromagnetischen Feldes in zwei unabhängige Teilfelder erhält man das transversale elektrische Feld mit der Eigenschaft

$$H_1 = H_2 = 0, \quad E_3 = 0$$

und das transversale magnetische Feld mit der Eigenschaft

$$H_3 = 0, \quad E_1 = E_2 = 0,$$

deren letzteres im folgenden betrachtet wird. Neben der Homogenität und Isotropie des Materials bezüglich des Ruhesystems wird dabei vorausgesetzt, daß keine Abhängigkeit von der dritten Raumkomponente besteht, so daß für die Modellierung eine Teilmenge eines dreidimensionalen Schnittes durch den Ereignisraum verwendet wird, der von den ersten beiden

<sup>50</sup> Eine entsprechende Modellierung eines zweidimensionalen Beispiels für transversale magnetische Wellen, in dem das Fortschreiten einer anfänglich initialisierten Wellenfront simuliert wird, findet sich in [37].

räumlichen Basisvektoren  $e_1, e_2$  und dem zeitlichen Basisvektor  $e_4$  der gewählten zulässigen Basis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathcal{V}$  aufgespannt wird. Dieser Schnitt wird in dreidimensionale Simplex zerlegt, die jeweils als Randsimplizes vierdimensionaler Simplex betrachtet werden. Ladungs- und Stromdichte werden im folgenden als verschwindend vorausgesetzt:

$$J_1 = J_2 = J_3 = 0, \quad \varrho = 0.$$

Es sei nun  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  eine zulässige Basis von  $\mathcal{V}$  und  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$  die zugehörige duale Basis,  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  sei ein dreidimensionaler Unterpunktraum mit dem zugehörigen Verschiebungsvektorraum  $\mathcal{U} = \text{span}\{e_1, e_2, e_4\}$ , es gelte also

$$\mathcal{N} = P + \text{span}\{e_1, e_2, e_4\} \quad \forall P \in \mathcal{N}.$$

Weiter sei eine Teilmenge

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_K \subset \mathcal{N}$$

mit einer Simplicialzerlegung in dreidimensionale Simplex  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_K$  gegeben, so daß die Schnittmenge zweier Simplex  $\mathcal{L}_i$  und  $\mathcal{L}_j$  für  $i \neq j$  stets entweder leer oder ein höchstens zweidimensionales gemeinsames Untersimplex ist.

Diese dreidimensionalen Simplex

$$\mathcal{L}_j = \langle P_0^j, P_1^j, P_2^j, P_3^j \rangle, \quad j \in \{1, \dots, K\}$$

lassen sich nun als Seiten vierdimensionaler Simplex betrachten. Dazu sei ein orientiertes (dreidimensionales) Simplex

$$\mathcal{K} := \langle (P_0, P_1, P_2, P_3) \rangle,$$

eine Basis  $(v_1, \dots, v_4)$  von  $\mathcal{V}$  mit

$$v_1 = P_0 \vec{P}_1, \quad v_2 = P_0 \vec{P}_2, \quad v_3 = P_0 \vec{P}_3$$

und ein Basiswechsel

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ e_i &\longmapsto v_i, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

gegeben.

Dann erhält man unter den obigen Voraussetzungen durch Streichen der Terme mit  $H_3, E_1, E_2$  (sowie  $B_3, D_1, D_2$ ) die folgenden vereinfachten Gleichungen für die orientierte Seite  $\mathcal{K}$ :

- Die *diskrete inhomogene Maxwellsche Gleichung für transversale magnetische Felder*:

$$\begin{aligned} 0 = & - (D_3(P_1) - D_3(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_2(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_2)) \\ & + (D_3(P_2) - D_3(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_2(v_1)) \\ & - (D_3(P_3) - D_3(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_2(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_2(v_1)) \\ & + (H_1(P_1) - H_1(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_4(v_2)) \\ & - (H_1(P_2) - H_1(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_4(v_1)) \\ & + (H_1(P_3) - H_1(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_4(v_1)) \\ & + (H_2(P_1) - H_2(P_0))(\Psi_2(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_4(v_2)) \\ & - (H_2(P_2) - H_2(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_4(v_1)) \\ & + (H_2(P_3) - H_2(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_2(v_2)\Psi_4(v_1)). \end{aligned} \quad (\text{DITM})$$

- Die *diskrete homogene Maxwell'sche Gleichung für transversale magnetische Felder*:

$$\begin{aligned}
0 = & (B_1(P_1) - B_1(P_0))(\Psi_2(v_2)\Psi_3(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_2)) \\
& - (B_1(P_2) - B_1(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_3) - \Psi_2(v_3)\Psi_3(v_1)) \\
& + (B_1(P_3) - B_1(P_0))(\Psi_2(v_1)\Psi_3(v_2) - \Psi_2(v_2)\Psi_3(v_1)) \\
& - (B_2(P_1) - B_2(P_0))(\Psi_1(v_2)\Psi_3(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_2)) \\
& + (B_2(P_2) - B_2(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_3(v_3) - \Psi_1(v_3)\Psi_3(v_1)) \\
& - (B_2(P_3) - B_2(P_0))(\Psi_1(v_1)\Psi_3(v_2) - \Psi_1(v_2)\Psi_3(v_1)) \\
& + (E_3(P_1) - E_3(P_0))(\Psi_3(v_2)\Psi_4(v_3) - \Psi_3(v_3)\Psi_4(v_2)) \\
& - (E_3(P_2) - E_3(P_0))(\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_3) - \Psi_3(v_3)\Psi_4(v_1)) \\
& + (E_3(P_3) - E_3(P_0))(\Psi_3(v_1)\Psi_4(v_2) - \Psi_3(v_2)\Psi_4(v_1)) .
\end{aligned} \tag{DHTM}$$

### Bemerkung

- Diese diskreten Maxwell'schen Gleichungen für transversale magnetische Felder setzen nicht voraus, daß das orientierte Simplex  $\mathcal{K}$  in einem durch die Basisvektoren  $e_1, e_2, e_4$  aufgespannten affinen Unterraum des Ereignisraums liegt. Sie entstehen allein durch Streichen der als verschwindend vorausgesetzten Feldkomponenten. Folglich müssen die Gleichungen (bei Berücksichtigung der dem Modell zugrundeliegenden Annahmen) auf jedem orientierten dreidimensionalen Simplex ihre Gültigkeit haben, unabhängig davon, wie dieses Simplex liegt.
- Da in diesem Beispiel ein von den Vektoren  $e_1, e_2, e_4$  aufgespannter und damit von  $e_3$  unabhängiger dreidimensionaler Schnitt durch den Ereignisraum betrachtet wird, ist die homogene Gleichung (DHTM) offenbar stets erfüllt, denn es gilt bei den vorausgesetzten Eigenschaften der Feldkomponenten:

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} F_{ij} de_i^* \wedge de_j^* \\
&= B_1 de_2^* \wedge de_3^* - B_2 de_1^* \wedge de_3^* + E_3 de_3^* \wedge de_4^* ,
\end{aligned}$$

und da in jedem der Summanden  $de_3^*$  auftritt, folgt:

$$\int_{\partial\mathcal{K}} F = 0 \quad \forall \mathcal{K} = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle \subset \mathcal{N} = P_0 + \text{span}\{e_1, e_2, e_4\} .$$

Zur Einbeziehung der homogenen Gleichung ist es daher erforderlich, weitere dreidimensionale Schnitte durch den Ereignisraum zu betrachten, bei denen auch die dritte räumliche Richtung Berücksichtigung findet, soweit man dadurch Bedingungen an die Feldkomponenten innerhalb der für die Modellierung betrachteten Teilmenge erhält.

- Mit  $\Psi(v) = \sum_{i=1}^4 \Psi_i(v) v_i$  gilt:

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^4 \Psi_i\left(\sum_{j=1}^4 \alpha_j e_j\right) v_i ,$$

folglich ist  $\Psi_i(v_j)$  die  $i$ -te Komponente von  $v_j$  bezüglich  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ .

## IV.2.2 Die Simplicialzerlegung einer Quaderzerlegung

Zur Einbeziehung aller für die Problemstellung relevanten raum-zeitlichen Komponenten ist es erforderlich, verschiedene dreidimensionale Schnitte durch die Minkowski-Raum-Zeit zu betrachten. Dabei wird das Problem nur für die folgende erste Teilmenge gelöst, wogegen die weiteren Schnitte durch den Ereignisraum nur der Berücksichtigung der dritten Raumkomponente dienen. Bei konsequent vierdimensionaler Modellierung sind diese zusätzlichen Betrachtungen nicht erforderlich, sie treten hier nur durch die Anwendung des vierdimensionalen diskreten Modells auf ein dreidimensionales Problem zutage.

### IV.2.2.1 Die $e_1$ - $e_2$ - $e_4$ -Ebene

Es wird nun eine „rechteckige“ dreidimensionale Teilmenge

$$\mathcal{L} = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4 \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, 4\} \subset \mathcal{N}$$

mit reellen Intervallen  $[a_i, b_i]$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i < b_i$  für  $i = 1, 2, 4$  betrachtet.

Diese Intervalle seien in Teilintervalle aufgeteilt:

$$[a_i, b_i] = [x_0^i, x_{m_i}^i] = [x_0^i, x_1^i] \cup [x_1^i, x_2^i] \cup \dots \cup [x_{m_i-1}^i, x_{m_i}^i]$$

mit  $0 < m_i \in \mathbb{N}$  und  $a_i = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{m_i}^i = b_i$  für  $i = 1, 2, 4$ .

Es seien Indexmengen  $I_i := \{0, 1, \dots, m_i\}$ ,  $\tilde{I}_i := \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$  für  $i = 1, 2, 4$  und Multiindexmengen

$$I := \{\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_4) \mid \iota_i \in I_i, i = 1, 2, 4\} = I_1 \times I_2 \times I_4,$$

$$\tilde{I} := \{\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) \mid \kappa_i \in \tilde{I}_i, i = 1, 2, 4\} = \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2 \times \tilde{I}_4$$

definiert. Dann erhält man für  $\mathcal{L}$  eine Zerlegung

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\kappa \in \tilde{I}} Q^\kappa$$

in  $(m_1 \cdot m_2 \cdot m_4)$  Quader

$$Q^\kappa := \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4 \mid x_i \in [x_{\kappa_i}^i, x_{\kappa_i+1}^i], i = 1, 2, 4\}$$

$$\forall \kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) \in \tilde{I}.$$

Die auftretenden Intervalldurchmesser dieser Quader seien mit

$$\delta_i^\kappa := \begin{cases} x_{\kappa_i+1}^i - x_{\kappa_i}^i, & i = 1, 2, 4, \\ 1, & i = 3 \end{cases}$$

in einer Diagonalmatrix

$$\delta^\kappa := \begin{pmatrix} \delta_1^\kappa & & & \mathbf{0} \\ & \delta_2^\kappa & & \\ & & \delta_3^\kappa & \\ \mathbf{0} & & & \delta_4^\kappa \end{pmatrix} \quad \forall \kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) \in \tilde{I}$$

zusammengefaßt. Bezeichnet man weiter mit

$$x_\iota := x_{\iota_1}^1 e_1 + x_{\iota_2}^2 e_2 + x_{\iota_4}^4 e_4 \quad \forall \iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_4) \in I$$

die auftretenden Gitterpunkte dieser Quaderzerlegung und zur Vereinfachung die Eckpunkte eines Quaders  $Q^\kappa$  für alle  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) \in \tilde{I}$  entsprechend der eindeutigen Dualdarstellung der Zahlen

$$\{0, \dots, 7\} \ni i = 4b_3 + 2b_2 + b_1 = (b_3 b_2 b_1)_2, \quad b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\},$$

mit

$$\begin{aligned} q_0^\kappa &:= x_{(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4)}, \\ q_1^\kappa &:= x_{(\kappa_1+1, \kappa_2, \kappa_4)}, \\ q_2^\kappa &:= x_{(\kappa_1, \kappa_2+1, \kappa_4)}, \\ q_3^\kappa &:= x_{(\kappa_1+1, \kappa_2+1, \kappa_4)}, \\ q_4^\kappa &:= x_{(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4+1)}, \\ q_5^\kappa &:= x_{(\kappa_1+1, \kappa_2, \kappa_4+1)}, \\ q_6^\kappa &:= x_{(\kappa_1, \kappa_2+1, \kappa_4+1)}, \\ q_7^\kappa &:= x_{(\kappa_1+1, \kappa_2+1, \kappa_4+1)}, \end{aligned}$$

so gilt offenbar

$$Q^\kappa = \text{conv}\{q_0^\kappa, \dots, q_7^\kappa\} \quad \forall \kappa \in \tilde{I}.$$

Um eine zulässige Simplizialzerlegung dieser Quaderzerlegung zu erhalten, wird jeder Quader in fünf dreidimensionale Simplexe zerlegt, wobei es erforderlich ist, eine von zwei punktspiegelbildlichen Simplizialzerlegungen in Abhängigkeit des Indextripels des Quaders gemäß einem dreidimensionalen Schachbrettmuster zu wählen (s. Abb. 1).

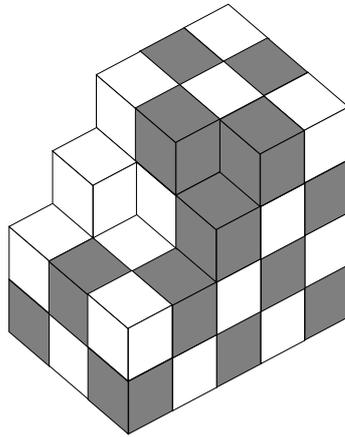


Abbildung 1: Quaderzerlegung

Für ein Indextripel  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) \in \tilde{I}$  richtet sich dabei die zu wählende Simplizialzerlegung

$$Q^\kappa = S_1^\kappa \cup S_2^\kappa \cup S_3^\kappa \cup S_4^\kappa \cup S_5^\kappa$$

eines Quaders  $Q^\kappa$  danach, ob  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4$  gerade oder ungerade ist. Diese beiden Simplizialzerlegungen (A) und (B) werden im folgenden angegeben. Dabei ist für jedes Simplex  $S_i^\kappa$ ,  $i = 1, \dots, 5$  der erste Eckpunkt als Ursprung ausgezeichnet. Zusätzlich wird jeweils die zur Transformation  $\Psi_i^\kappa$  der lokalen Basis gehörige Transformationsmatrix  $\psi_i^\kappa$  bezüglich der Basis  $(e_1, \dots, e_4)$  angegeben, wobei der dritte räumliche Basisvektor in der Weise vorzeichenbehaftet an letzter Stelle ergänzt ist, daß die Basis positiv orientiert ist

und Simplexes mit gleichem Index  $i \in \{1, \dots, 5\}$  beider Zerlegungen punktspiegelbildlich zueinander stehen. Weiterhin wird für jedes dreidimensionale Simplex die entsprechende, sich durch Einsetzen in (DITM) ergebende diskrete inhomogene Maxwell'sche Gleichung angeführt. Durch Einsetzen in (DHTM) läßt sich dabei ebenfalls leicht überprüfen, daß die homogene Gleichung stets erfüllt ist.

Für ein Simplex  $S_i^\kappa = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , mit der zur Transformation  $\Psi_i^\kappa$  gehörigen Transformationsmatrix  $\psi_i^\kappa$  gilt also im folgenden:

$$\Psi_i^\kappa(e_j) = \begin{cases} P_j - P_0, & j = 1, 2, 3, \\ -e_3, & j = 4 \text{ und } \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 \text{ gerade,} \\ e_3, & j = 4 \text{ und } \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

mit  $\det \psi_i^\kappa > 0$ , womit die Basis

$$(\Psi_i^\kappa(e_1), \Psi_i^\kappa(e_2), \Psi_i^\kappa(e_3), \Psi_i^\kappa(e_4)) = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0, \pm e_3)$$

stets positiv orientiert ist.

(A) Für gerades  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4$  zerlegt man  $Q^\kappa$  in folgende Simplexes (s. Abb. 2):

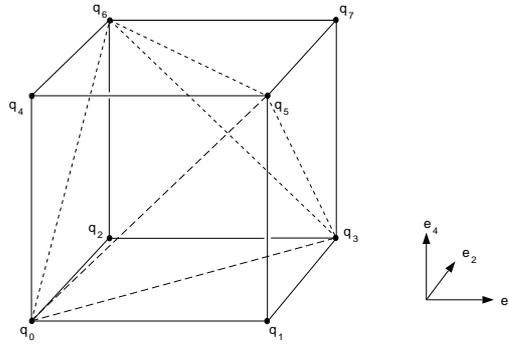


Abbildung 2: Simplicialzerlegung eines Quaders (A)

(A 1.1)

$$S_1^\kappa := \langle q_1^\kappa, q_0^\kappa, q_5^\kappa, q_3^\kappa \rangle, \quad \psi_1^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(P_2) - D_3(P_0)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(P_3) - H_1(P_0)) + \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(P_1) - H_2(P_0)) \\ &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_5^\kappa) - D_3(q_1^\kappa)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_3^\kappa) - H_1(q_1^\kappa)) + \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_0^\kappa) - H_2(q_1^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 1.2)

$$S_2^\kappa := \langle q_4^\kappa, q_6^\kappa, q_5^\kappa, q_0^\kappa \rangle, \quad \psi_2^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(P_3) - D_3(P_0)) \\ &\quad - \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(P_1) - H_1(P_0)) + \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(P_2) - H_2(P_0)) \\ &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_0^\kappa) - D_3(q_4^\kappa)) \\ &\quad - \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_6^\kappa) - H_1(q_4^\kappa)) + \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_5^\kappa) - H_2(q_4^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 1.3)

$$S_3^\kappa := \langle q_2^\kappa, q_3^\kappa, q_6^\kappa, q_0^\kappa \rangle, \quad \psi_3^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(P_2) - D_3(P_0)) \\ &\quad - \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(P_3) - H_1(P_0)) - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(P_1) - H_2(P_0)) \\ &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_6^\kappa) - D_3(q_2^\kappa)) \\ &\quad - \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_0^\kappa) - H_1(q_2^\kappa)) - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_3^\kappa) - H_2(q_2^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 1.4)

$$S_4^\kappa := \langle q_7^\kappa, q_3^\kappa, q_5^\kappa, q_6^\kappa \rangle, \quad \psi_4^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(P_1) - D_3(P_0)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(P_2) - H_1(P_0)) - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(P_3) - H_2(P_0)) \\ &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_3^\kappa) - D_3(q_7^\kappa)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_5^\kappa) - H_1(q_7^\kappa)) - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_6^\kappa) - H_2(q_7^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 1.5)

$$S_5^\kappa := \langle q_5^\kappa, q_0^\kappa, q_6^\kappa, q_3^\kappa \rangle, \quad \psi_5^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(P_1) - D_3(P_2) + D_3(P_3) - D_3(P_0)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(P_1) - H_1(P_2) + H_1(P_3) - H_1(P_0)) \\ &\quad - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(P_1) - H_2(P_2) + H_2(P_3) - H_2(P_0)) \\ &= \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_0^\kappa) - D_3(q_6^\kappa) + D_3(q_3^\kappa) - D_3(q_5^\kappa)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_0^\kappa) - H_1(q_6^\kappa) + H_1(q_3^\kappa) - H_1(q_5^\kappa)) \\ &\quad - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_0^\kappa) - H_2(q_6^\kappa) + H_2(q_3^\kappa) - H_2(q_5^\kappa)). \end{aligned}$$

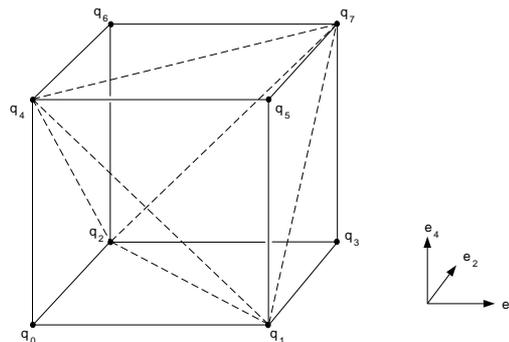
(B) Für ungerades  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4$  wählt man folgende Simplexes (s. Abb. 3):

Abbildung 3: Simplicialzerlegung eines Quaders (B)

(B 1.1)

$$S_1^\kappa := \langle q_6^\kappa, q_7^\kappa, q_2^\kappa, q_4^\kappa \rangle, \quad \psi_1^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$0 = \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_2^\kappa) - D_3(q_6^\kappa)) \\ + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_4^\kappa) - H_1(q_6^\kappa)) + \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_7^\kappa) - H_2(q_6^\kappa)),$$

(B 1.2)

$$S_2^\kappa := \langle q_3^\kappa, q_1^\kappa, q_2^\kappa, q_7^\kappa \rangle, \quad \psi_2^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$0 = \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_7^\kappa) - D_3(q_3^\kappa)) \\ - \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_1^\kappa) - H_1(q_3^\kappa)) + \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_2^\kappa) - H_2(q_3^\kappa)),$$

(B 1.3)

$$S_3^\kappa := \langle q_5^\kappa, q_4^\kappa, q_1^\kappa, q_7^\kappa \rangle, \quad \psi_3^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$0 = \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_1^\kappa) - D_3(q_5^\kappa)) \\ - \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_7^\kappa) - H_1(q_5^\kappa)) - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_4^\kappa) - H_2(q_5^\kappa)),$$

(B 1.4)

$$S_4^\kappa := \langle q_0^\kappa, q_4^\kappa, q_2^\kappa, q_1^\kappa \rangle, \quad \psi_4^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$0 = \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_4^\kappa) - D_3(q_0^\kappa)) \\ + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_2^\kappa) - H_1(q_0^\kappa)) - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_1^\kappa) - H_2(q_0^\kappa)),$$

(B 1.5)

$$S_5^\kappa := \langle q_2^\kappa, q_7^\kappa, q_1^\kappa, q_4^\kappa \rangle, \quad \psi_5^\kappa := \delta^\kappa \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$0 = \delta_1^\kappa \delta_2^\kappa \cdot (D_3(q_7^\kappa) - D_3(q_1^\kappa) + D_3(q_4^\kappa) - D_3(q_2^\kappa)) \\ + \delta_1^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_1(q_7^\kappa) - H_1(q_1^\kappa) + H_1(q_4^\kappa) - H_1(q_2^\kappa)) \\ - \delta_2^\kappa \delta_4^\kappa \cdot (H_2(q_7^\kappa) - H_2(q_1^\kappa) + H_2(q_4^\kappa) - H_2(q_2^\kappa)).$$

Diese aus der diskreten inhomogenen Maxwell'schen Gleichung (DITM) folgenden Zusammenhänge entsprechen in [37] der Gleichung

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

Aufgrund der durch Vernachlässigung der dritten räumlichen Richtung auf der betrachteten Teilmenge stets erfüllten homogenen Maxwell'schen Gleichung (DHTM) erhält man nur einen Teil der zur Problemlösung erforderlichen Bedingungen. Es fehlen speziell die Abhängigkeiten der Ableitungen der Komponenten  $B_1$  und  $B_2$  in zeitlicher Richtung von den Ableitungen der Komponente  $E_3$  in Richtung von  $e_2$  und  $e_1$ .

### IV.2.2.2 Die $e_1$ - $e_3$ - $e_4$ -Ebene

Betrachtet man im obigen Modell anstelle des Unterpunktraums  $\mathcal{N}$  einen dreidimensionalen Unterpunktraum  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$  mit zugehörigem Verschiebungsvektorraum  $\mathcal{U}' = \text{span}\{e_1, e_3, e_4\}$  und eine dreidimensionale Teilmenge

$$\mathcal{L}' = \{x_1 e_1 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 3, 4\} \subset \mathcal{N}'$$

mit einer zur obigen analogen Simplizialzerlegung, so ist keine der beiden diskreten Maxwell'schen Gleichungen a priori erfüllt.

Es ist dabei für ein Simplex  $S_i^\kappa = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$  die Transformation  $\Psi_i^\kappa$  durch

$$\Psi_i^\kappa(e_j) = \begin{cases} P_j - P_0, & j = 1, 2, 3, \\ e_2, & j = 4 \text{ und } \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 \text{ gerade,} \\ -e_2, & j = 4 \text{ und } \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so festgelegt, daß die Basis

$$(\Psi_i^\kappa(e_1), \Psi_i^\kappa(e_2), \Psi_i^\kappa(e_3), \Psi_i^\kappa(e_4)) = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0, \pm e_2)$$

positiv orientiert ist.

Man erhält folgende Gleichungen für die Zerlegung eines Quaders  $Q^\kappa$ ,  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_3, \kappa_4)$  des Typs (A) für gerades und des Typs (B) für ungerades  $\kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4$  :

(A 2.1)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_3^\kappa) - H_1(q_1^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_5^\kappa) - B_2(q_1^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_0^\kappa) - E_3(q_1^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 2.2)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_6^\kappa) - H_1(q_4^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_0^\kappa) - B_2(q_4^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_5^\kappa) - E_3(q_4^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 2.3)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_0^\kappa) - H_1(q_2^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_6^\kappa) - B_2(q_2^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_3^\kappa) - E_3(q_2^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 2.4)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_5^\kappa) - H_1(q_7^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_3^\kappa) - B_2(q_7^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_6^\kappa) - E_3(q_7^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 2.5)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_0^\kappa) - H_1(q_6^\kappa) - H_1(q_3^\kappa) + H_1(q_5^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_0^\kappa) - B_2(q_6^\kappa) + B_2(q_3^\kappa) - B_2(q_5^\kappa)) \\ &\quad - \delta_4^\kappa (E_3(q_0^\kappa) + E_3(q_6^\kappa) - E_3(q_3^\kappa) - E_3(q_5^\kappa)). \end{aligned}$$

(B 2.1)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_4^\kappa) - H_1(q_6^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_2^\kappa) - B_2(q_6^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_7^\kappa) - E_3(q_6^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 2.2)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_1^\kappa) - H_1(q_3^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_7^\kappa) - B_2(q_3^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_2^\kappa) - E_3(q_3^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 2.3)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_7^\kappa) - H_1(q_5^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_1^\kappa) - B_2(q_5^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_4^\kappa) - E_3(q_5^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 2.4)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_2^\kappa) - H_1(q_0^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_4^\kappa) - B_2(q_0^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_1^\kappa) - E_3(q_0^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 2.5)

$$\begin{aligned} 0 &= H_1(q_7^\kappa) - H_1(q_1^\kappa) - H_1(q_4^\kappa) + H_1(q_2^\kappa), \\ 0 &= \delta_1^\kappa (B_2(q_7^\kappa) - B_2(q_1^\kappa) + B_2(q_4^\kappa) - B_2(q_2^\kappa)) \\ &\quad - \delta_4^\kappa (E_3(q_7^\kappa) + E_3(q_1^\kappa) - E_3(q_4^\kappa) - E_3(q_2^\kappa)). \end{aligned}$$

Das Problem zerfällt damit in zwei entkoppelte Teilprobleme:

- Die inhomogene Maxwellsche Gleichung erfordert, daß  $H_1$  in Richtung von  $e_3$  konstant sein muß, was bei der Betrachtung von zu  $e_3$  transversalen magnetischen Feldern erwartungsgemäß ist.
- Die homogene Gleichung erfordert die Abhängigkeit der Änderung von  $B_2$  in zeitlicher Richtung  $e_4$  und der Änderung von  $E_3$  in Richtung von  $e_1$ , man hat es also mit einem Problem in einer von  $e_1$  und  $e_4$  aufgespannten affinen Ebene zu tun. Dieser Zusammenhang entspricht in [37] der Gleichung:

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Bei der Betrachtung einer für transversale magnetische Felder durch Vernachlässigung der zweiten räumlichen Richtung nur teilweise interessanten Teilmenge erhält man also Gleichungen, die, da die Abhängigkeiten in Richtung des Basisvektors  $e_2$  fehlen, auch nur einen Teil der die Felder determinierenden Informationen berücksichtigen. Dabei trägt die homogene Maxwellsche Gleichung (DHTM) eine der fehlenden Abhängigkeiten bei, wogegen die inhomogene Gleichung nur triviale Information liefert.

### IV.2.2.3 Die $e_2$ - $e_3$ - $e_4$ -Ebene

Nun wird eine Teilmenge

$$\mathcal{L}'' = \{x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 2, 3, 4\} \subset \mathcal{N}''$$

eines Unterpunktraums  $\mathcal{N}'' \subset \mathcal{M}$  mit zugehörigen Vektorraum  $\mathcal{U}'' = \text{span}\{e_2, e_3, e_4\}$  und eine zu den obigen analoge Simplicialzerlegung betrachtet.

Für ein Simplex  $S_i^\kappa = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$  ist die Transformation  $\Psi_i^\kappa$  wiederum durch

$$\Psi_i^\kappa(e_j) = \begin{cases} P_j - P_0, & j = 1, 2, 3, \\ -e_1, & j = 4 \text{ und } \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 \text{ gerade,} \\ e_1, & j = 4 \text{ und } \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so festgelegt, daß die Basis

$$(\Psi_i^\kappa(e_1), \Psi_i^\kappa(e_2), \Psi_i^\kappa(e_3), \Psi_i^\kappa(e_4)) = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0, \pm e_1)$$

positiv orientiert ist.

Man erhält folgende Gleichungen für die Zerlegung eines Quaders  $Q^\kappa$ ,  $\kappa = (\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$  des Typs (A) für gerades und des Typs (B) für ungerades  $\kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$  :

(A 3.1)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_3^\kappa) - H_2(q_1^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_5^\kappa) - B_1(q_1^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_0^\kappa) - E_3(q_1^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 3.2)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_6^\kappa) - H_2(q_4^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_0^\kappa) - B_1(q_4^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_5^\kappa) - E_3(q_4^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 3.3)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_0^\kappa) - H_2(q_2^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_6^\kappa) - B_1(q_2^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_3^\kappa) - E_3(q_2^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 3.4)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_5^\kappa) - H_2(q_7^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_3^\kappa) - B_1(q_7^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_6^\kappa) - E_3(q_7^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 3.5)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_0^\kappa) - H_2(q_6^\kappa) - H_2(q_3^\kappa) + H_2(q_5^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_0^\kappa) - B_1(q_6^\kappa) + B_1(q_3^\kappa) - B_1(q_5^\kappa)) \\ &\quad + \delta_4^\kappa (E_3(q_0^\kappa) + E_3(q_6^\kappa) - E_3(q_3^\kappa) - E_3(q_5^\kappa)). \end{aligned}$$

(B 3.1)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_4^\kappa) - H_2(q_6^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_2^\kappa) - B_1(q_6^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_7^\kappa) - E_3(q_6^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 3.2)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_1^\kappa) - H_2(q_3^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_7^\kappa) - B_1(q_3^\kappa)) - \delta_4^\kappa (E_3(q_2^\kappa) - E_3(q_3^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 3.3)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_7^\kappa) - H_2(q_5^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_1^\kappa) - B_1(q_5^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_4^\kappa) - E_3(q_5^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 3.4)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_2^\kappa) - H_2(q_0^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_4^\kappa) - B_1(q_0^\kappa)) + \delta_4^\kappa (E_3(q_1^\kappa) - E_3(q_0^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 3.5)

$$\begin{aligned} 0 &= H_2(q_7^\kappa) - H_2(q_1^\kappa) - H_2(q_4^\kappa) + H_2(q_2^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_7^\kappa) - B_1(q_1^\kappa) + B_1(q_4^\kappa) - B_1(q_2^\kappa)) \\ &\quad + \delta_4^\kappa (E_3(q_7^\kappa) + E_3(q_1^\kappa) - E_3(q_4^\kappa) - E_3(q_2^\kappa)). \end{aligned}$$

Auch dieses Problem zerfällt in zwei entkoppelte Teilprobleme:

- Die inhomogene Maxwellsche Gleichungen erfordert, daß  $H_2$  in Richtung von  $e_3$  konstant sein muß.
- Die homogene Gleichung erfordert die Abhängigkeit der Änderung von  $B_1$  in zeitlicher Richtung und der Änderung von  $E_3$  in Richtung von  $e_2$  was in [37] der Gleichung

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = - \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

entspricht.

#### IV.2.2.4 Die $e_1$ - $e_2$ - $e_3$ -Ebene

Schließlich wird nun ein rein räumlicher Schnitt

$$\mathcal{L}''' = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, 3\} \subset \mathcal{N}'''$$

für einen Unterpunktraum  $\mathcal{N}''' \subset \mathcal{M}$  mit Vektorraum  $\mathcal{U}''' = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$  mit einer entsprechenden Simplicialzerlegung betrachtet.

Die Transformation  $\Psi_i^\kappa$  ist für ein Simplex  $S_i^\kappa = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$  wieder durch

$$\Psi_i^\kappa(e_j) = \begin{cases} P_j - P_0, & j = 1, 2, 3, \\ e_4, & j = 4 \text{ und } \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \text{ gerade,} \\ e_4, & j = 4 \text{ und } \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so festgelegt, so daß die Basis

$$(\Psi_i^\kappa(e_1), \Psi_i^\kappa(e_2), \Psi_i^\kappa(e_3), \Psi_i^\kappa(e_4)) = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0, \pm e_4)$$

positiv orientiert ist.

Man erhält für die Zerlegung von  $Q^\kappa$ ,  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  des Typs (A) für gerades und des Typs (B) für ungerades  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$  :

(A 4.1)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_5^\kappa) - D_3(q_1^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_0^\kappa) - B_1(q_1^\kappa)) - \delta_1^\kappa (B_2(q_3^\kappa) - B_2(q_1^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 4.2)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_0^\kappa) - D_3(q_4^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_5^\kappa) - B_1(q_4^\kappa)) + \delta_1^\kappa (B_2(q_6^\kappa) - B_2(q_4^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 4.3)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_6^\kappa) - D_3(q_2^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_3^\kappa) - B_1(q_2^\kappa)) - \delta_1^\kappa (B_2(q_0^\kappa) - B_2(q_2^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 4.4)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_3^\kappa) - D_3(q_7^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_6^\kappa) - B_1(q_7^\kappa)) + \delta_1^\kappa (B_2(q_5^\kappa) - B_2(q_7^\kappa)), \end{aligned}$$

(A 4.5)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_0^\kappa) - D_3(q_6^\kappa) + D_3(q_3^\kappa) - D_3(q_5^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_0^\kappa) + B_1(q_6^\kappa) - B_1(q_3^\kappa) - B_1(q_5^\kappa)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa (B_2(q_0^\kappa) - B_2(q_6^\kappa) - B_2(q_3^\kappa) + B_2(q_5^\kappa)). \end{aligned}$$

(B 4.1)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_2^\kappa) - D_3(q_6^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_7^\kappa) - B_1(q_6^\kappa)) - \delta_1^\kappa (B_2(q_4^\kappa) - B_2(q_6^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 4.2)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_7^\kappa) - D_3(q_3^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_2^\kappa) - B_1(q_3^\kappa)) + \delta_1^\kappa (B_2(q_1^\kappa) - B_2(q_3^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 4.3)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_1^\kappa) - D_3(q_5^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_4^\kappa) - B_1(q_5^\kappa)) - \delta_1^\kappa (B_2(q_7^\kappa) - B_2(q_5^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 4.4)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_4^\kappa) - D_3(q_0^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_1^\kappa) - B_1(q_0^\kappa)) + \delta_1^\kappa (B_2(q_2^\kappa) - B_2(q_0^\kappa)), \end{aligned}$$

(B 4.5)

$$\begin{aligned} 0 &= D_3(q_7^\kappa) - D_3(q_1^\kappa) + D_3(q_4^\kappa) - D_3(q_2^\kappa), \\ 0 &= \delta_2^\kappa (B_1(q_7^\kappa) + B_1(q_1^\kappa) - B_1(q_4^\kappa) - B_1(q_2^\kappa)) \\ &\quad + \delta_1^\kappa (B_2(q_7^\kappa) - B_2(q_1^\kappa) - B_2(q_4^\kappa) + B_2(q_2^\kappa)). \end{aligned}$$





für die Bedingungen

$$H_1(q_1^\kappa) = \alpha, \quad H_2(q_1^\kappa) = \beta, \quad D_3(q_3^\kappa) = \gamma.$$

Es zeigt sich hier insbesondere, daß man ein klassisches (explizites) Zeititerationsverfahren dadurch erhält, daß man die unbekanntes Feldkomponenten einer räumlichen Ebene aus den als Anfangsbedingungen verwandten Komponenten benachbarter zeitlich früherer räumlicher Ebenen der Quaderzerlegung ermittelt.

**Bemerkung** (Verträglichkeitsbedingungen)

Die Gültigkeit der diskreten Maxwell'schen Gleichungen in dieser speziellen Diskretisierung hat einige besondere Abhängigkeiten der Feldgrößen in benachbarten Simplexes zweier aneinander grenzender Quader mit einer gemeinsamen Seitenfläche zur Folge.

Sei dazu  $Q^\kappa = \text{conv}\{q_0^\kappa, \dots, q_7^\kappa\}$  für  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4)$  ein Quader vom Typ A.

Für  $\kappa_1 < m_1 - 1$  und  $\lambda := (\kappa_1 + 1, \kappa_2, \kappa_4)$  ist dann  $Q^\lambda = \text{conv}\{q_0^\lambda, \dots, q_7^\lambda\}$  ein Quader vom Typ B.

Durch die Gleichungen (A 1.1) auf  $Q^\kappa$  und (B 1.4) auf  $Q^\lambda$  erhält man

$$0 = \frac{D_3(q_5^\kappa) - D_3(q_1^\kappa)}{\delta_4^\kappa} + \frac{H_1(q_3^\kappa) - H_1(q_1^\kappa)}{\delta_2^\kappa} + \frac{H_2(q_0^\kappa) - H_2(q_1^\kappa)}{\delta_1^\kappa}$$

sowie

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D_3(q_4^\lambda) - D_3(q_0^\lambda)}{\delta_4^\lambda} + \frac{H_1(q_2^\lambda) - H_1(q_0^\lambda)}{\delta_2^\lambda} - \frac{H_2(q_1^\lambda) - H_2(q_0^\lambda)}{\delta_1^\lambda} \\ &= \frac{D_3(q_5^\kappa) - D_3(q_1^\kappa)}{\delta_4^\kappa} + \frac{H_1(q_3^\kappa) - H_1(q_1^\kappa)}{\delta_2^\kappa} - \frac{H_2(q_1^\lambda) - H_2(q_0^\lambda)}{\delta_1^\lambda} \end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{H_2(q_1^\kappa) - H_2(q_0^\kappa)}{\delta_1^\kappa} = \frac{H_2(q_1^\lambda) - H_2(q_0^\lambda)}{\delta_1^\lambda} = \frac{H_2(q_1^\lambda) - H_2(q_1^\kappa)}{\delta_1^\lambda}.$$

Durch die Gleichungen (A 2.1) auf  $Q^\kappa$  und (B 2.4) auf  $Q^\lambda$  erhält man desweiteren

$$\frac{D_3(q_1^\kappa) - D_3(q_0^\kappa)}{\delta_1^\kappa} = \frac{D_3(q_1^\lambda) - D_3(q_0^\lambda)}{\delta_1^\lambda} = \frac{D_3(q_1^\lambda) - D_3(q_1^\kappa)}{\delta_1^\lambda},$$

und aus (A 4.1) und (B 4.4) folgt

$$\frac{H_1(q_1^\kappa) - H_1(q_0^\kappa)}{\delta_1^\kappa} = \frac{H_1(q_1^\lambda) - H_1(q_0^\lambda)}{\delta_1^\lambda} = \frac{H_1(q_1^\lambda) - H_1(q_1^\kappa)}{\delta_1^\lambda}.$$

Entlang der Strecke  $(q_0^\kappa, q_1^\kappa = q_0^\lambda, q_1^\lambda)$  sind die Felder  $H_1$ ,  $H_2$  und  $D_3$  also affin linear.

Analog erhält man etwa aus (A 1.4) auf  $Q^\kappa$  und (B 1.1) auf  $Q^\lambda$  die affine Linearität des Feldes  $H_2$  entlang der Strecke  $(q_6^\kappa, q_7^\kappa = q_6^\lambda, q_7^\lambda)$ .

Durch Betrachtung entsprechender Gleichungen auf aneinandergrenzenden Quadern  $Q^\kappa$  vom Typ (A) und  $Q^\lambda$  vom Typ (B) erhält man zusammenfassend die affine Linearität aller Felder, also der Felder  $H_1$ ,  $H_2$  und  $D_3$  entlang folgender Strecken:

1) in Richtung des Basisvektors  $e_1$  :

- für  $\kappa_1 > 0$  und  $\lambda := (\kappa_1 - 1, \kappa_2, \kappa_4)$  entlang  $(q_4^\lambda, q_4^\kappa, q_5^\kappa)$  und  $(q_2^\lambda, q_2^\kappa, q_3^\kappa)$ ,
- für  $\kappa_1 < m_1 - 1$  und  $\lambda := (\kappa_1 + 1, \kappa_2, \kappa_4)$  entlang  $(q_0^\kappa, q_1^\kappa, q_1^\lambda)$  und  $(q_6^\kappa, q_7^\kappa, q_7^\lambda)$ ,

2) in Richtung des Basisvektors  $e_2$  :

- für  $\kappa_2 > 0$  und  $\lambda := (\kappa_1, \kappa_2 - 1, \kappa_4)$  entlang  $(q_1^\lambda, q_1^\kappa, q_3^\kappa)$  und  $(q_4^\lambda, q_4^\kappa, q_6^\kappa)$ ,
- für  $\kappa_2 < m_2 - 1$  und  $\lambda := (\kappa_1, \kappa_2 + 1, \kappa_4)$  entlang  $(q_0^\kappa, q_2^\kappa, q_2^\lambda)$  und  $(q_5^\kappa, q_7^\kappa, q_7^\lambda)$ ,

3) in Richtung des Basisvektors  $e_4$  :

- für  $\kappa_4 > 0$  und  $\lambda := (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4 - 1)$  entlang  $(q_1^\lambda, q_1^\kappa, q_5^\kappa)$  und  $(q_2^\lambda, q_2^\kappa, q_6^\kappa)$ ,
- für  $\kappa_4 < m_4 - 1$  und  $\lambda := (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4 + 1)$  entlang  $(q_0^\kappa, q_4^\kappa, q_4^\lambda)$  und  $(q_3^\kappa, q_7^\kappa, q_7^\lambda)$ .

Durch diese Folgerungen aus den diskreten Maxwell'schen Gleichungen auf benachbarten Simplexes erhält man ebenfalls Einschränkungen an Anfangs- und Randbedingungen. Dies sind notwendige Verträglichkeitsbedingungen für die Lösbarkeit des Gleichungssystems.

## IV.2.4 Die Implementation

Für das Beispielprogramm `TM.p` zur Berechnung transversaler magnetischer (TM-)Wellen wurde die Programmiersprache Pascal-XSC verwendet.<sup>51</sup> Die Programmläufe wurden auf einer SUN-Workstation ausgeführt.

Das Programm verwendet an besonderen Spracherweiterungen insbesondere dynamische Felder, damit verbunden das Operatorkonzept und das optimale (exakte) Skalarprodukt. Sämtliche Berechnungen wurden mit der Standardrundung zur nächsten Gleitkommazahl durchgeführt; Intervallarithmetik oder gerichtete Rundungen zur Einschließung wurden nicht verwendet. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems wurde keine Rücksicht auf die Laufzeit des Programms oder Effizienz der verwendeten Algorithmen genommen. Die berechneten Beispiele sind daher recht klein gehalten.

Der Programmablauf im Überblick:

- 1) Bestimmung der Komponenten der Matrix des linearen Gleichungssystems (TMMain):
  - Anfangsbedingungen
  - Randbedingungen
  - Inhomogene Maxwell'sche Gleichungen
  - Homogene Maxwell'sche Gleichungen
  - Gegebenenfalls zusätzliche Modellierungsbedingungen
- 2) Im Falle der Lösung als lineares Ausgleichsproblem (AGP=1) Berechnung der 1. Gauß'schen Transformation
- 3) Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)
  - Überführung in obere Dreiecksgestalt (durch Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotwahl)
  - Bestimmung der Lösung durch Rückwärtsrekursion (RR)
  - Ergebnisausgabe

Die Ergebnisse wurden mit MATHEMATICA 3.0 durch die Funktion `ListPlot3D` graphisch dargestellt.

<sup>51</sup> Der Quelltext des Programms findet sich im Anhang.

## IV.2.5 Numerische Ergebnisse

Als erstes Beispiel für transversale magnetische Felder wurde das zeitliche Verhalten eines konstanten Feldes berechnet. Die Randbedingungen wurden dabei so gewählt, daß sie mit einem zeitlich unveränderlichen konstanten elektromagnetischen Feld verträglich sind.

Erwartungsgemäß läßt sich ein solches Problem exakt lösen. Bei der Simulation bleiben alle drei Felder mit fortschreitender Zeit konstant.

Als weiteres Beispiel wurde das Fortschreiten einer anfänglich initialisierten Welle berechnet. Dazu wurde ein  $(14 \times 14 \times 6)$ -Gitter verwendet, was der Simulation über 5 Zeitschritte auf einem räumlichen Gitter mit  $14 \times 14$  Punkten entspricht. Als Intervalldurchmesser wurden im Einklang mit dem klassischen Stabilitätskriterium  $\delta_1 = \delta_2 = 1$  und  $\delta_4 = 0.5$  verwendet. Desweiteren wurden folgende (klassischen) Anfangs- und Randbedingungen gesetzt:

- *Anfangsbedingungen:* Für alle

$$\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_4) \in \{0, \dots, 13\} \times \{0, \dots, 13\} \times \{0\},$$

also zur Startzeit ( $\iota_4 = 0$ ) :

$$\begin{aligned} H_1(x_\iota) &= 0 \\ H_2(x_\iota) &= \begin{cases} -3 & \text{falls } \iota_1 = 3, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ D_3(x_\iota) &= \begin{cases} 3 & \text{falls } \iota_1 = 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

- *Randbedingungen:* Für alle

$$\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_4) \in \{0, \dots, 13\} \times \{0\} \times \{1, \dots, 5\}$$

sowie für alle

$$\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_4) \in \{0, \dots, 13\} \times \{13\} \times \{1, \dots, 5\},$$

also am vorderen Rand ( $\iota_2 = 0$ ) und am hinteren Rand ( $\iota_2 = 13$ ) :

$$H_1(x_\iota) = 0$$

Auf diesem Weg erhält man ein Problem mit:

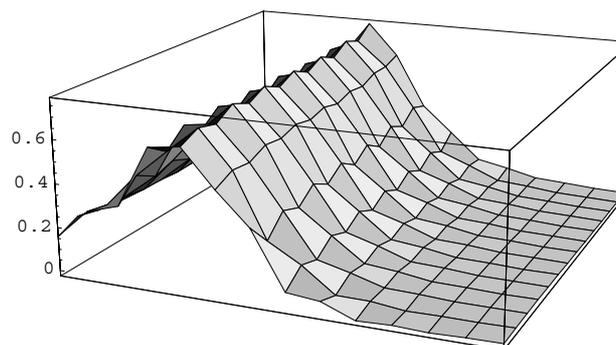
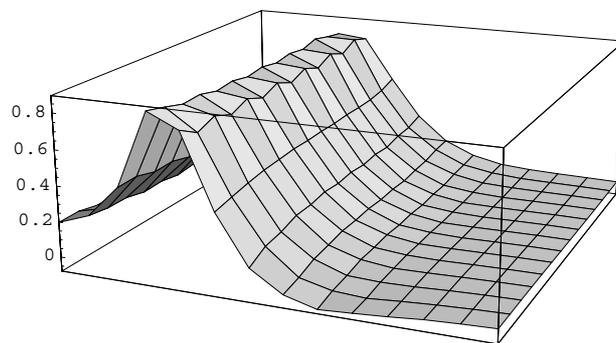
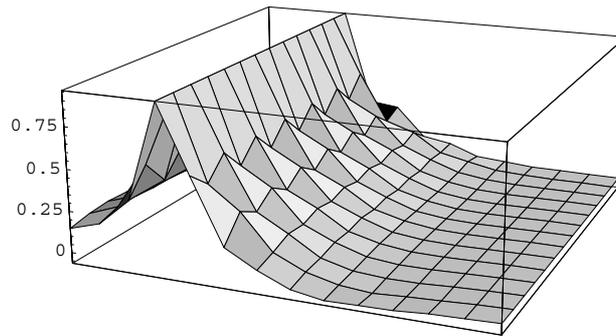
- 845 Quadern
- 1176 Gitterpunkten
- 588 Anfangsbedingungen
- 140 Randbedingungen
- 4225 diskreten inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen
- 10140 diskreten homogenen Maxwell'schen Gleichungen

Dies entspricht einem linearen Gleichungssystem mit 15093 Gleichungen (Zeilen) und 3528 Variablen (Spalten).

Dieses System wurde als Ausgleichsproblem behandelt, womit also ein  $(3528 \times 3528)$ -System zu lösen war.

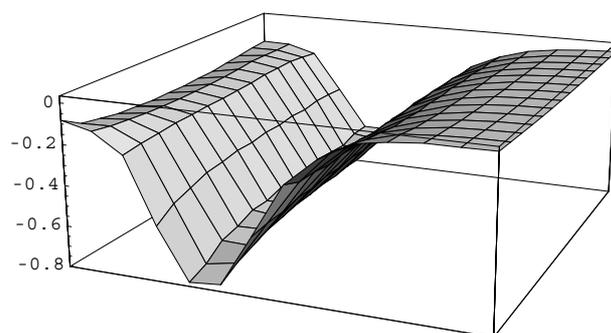
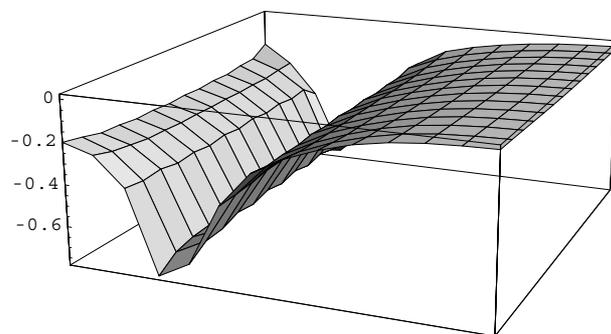
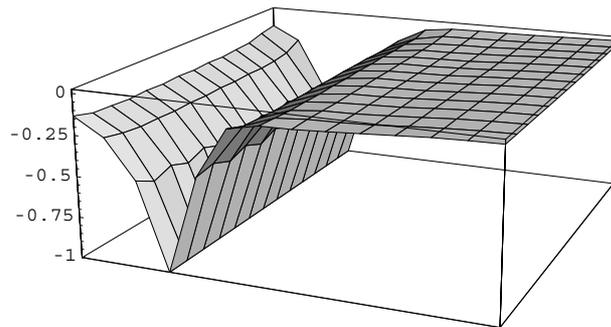
### IV.2.5.1 Das $D_3$ -Feld

Die folgenden drei Graphen zeigen räumliche Schnitte durch den Ereignisraum für  $t_4 = 0, 2, 5$ . Bei der gewählten Zeitschrittweite  $\delta_4 = 0.5$  entspricht dies den Zeitpunkten  $t = 0$ ,  $t = 1$  und  $t = 2.5$ . Die anfänglich bei  $t_1 = 3$  initialisierte Welle wird durch die Ausgleichsrechnung an zulässige Anfangsbedingungen angeglichen. Diese Welle bewegt sich dann (nach rechts) in Richtung des ersten Basisvektors  $e_1$  und hat zum Zeitpunkt  $t = 2.5$  ihren höchste Ausschlag etwa bei  $t_1 = 4$ .



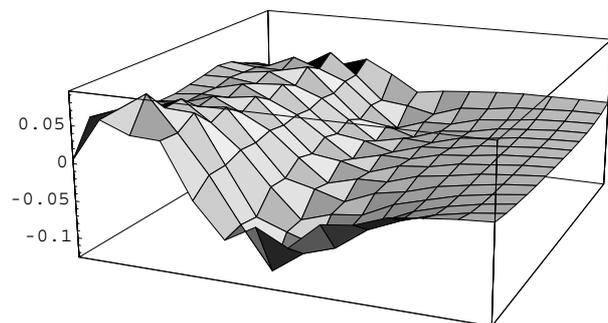
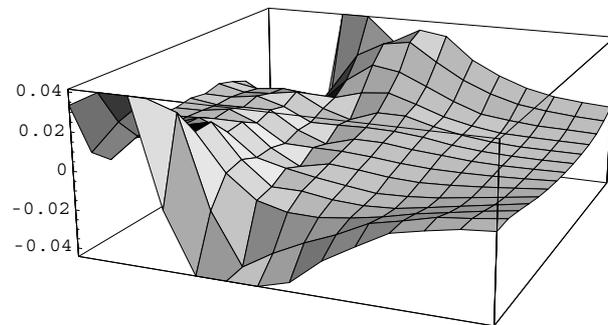
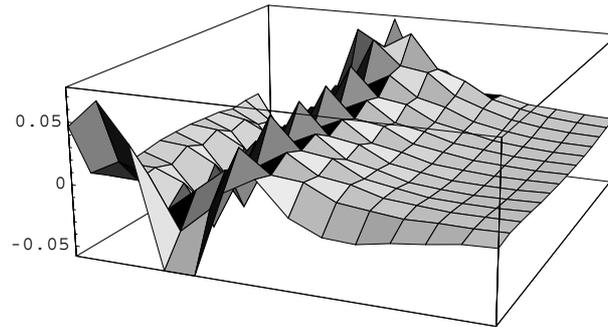
### IV.2.5.2 Das $H_2$ -Feld

Auch diese Graphen zeigen räumliche Schnitte durch den Ereignisraum für die Zeitpunkte  $t = 0$ ,  $t = 1$  und  $t = 2.5$ . Die bei  $t_1 = 3$  durch ein Wellental initialisierte und an zulässige Anfangsbedingungen angeglichenen Welle bewegt sich dann nach rechts in Richtung von  $e_1$  und hat zum Zeitpunkt  $t = 2.5$  ihren Ausschlag zwischen  $t_1 = 4$  und  $t_1 = 5$ .



### IV.2.5.3 Das $H_1$ -Feld

Die räumlichen Schnitte für die Zeitpunkte  $t = 0$ ,  $t = 1$  und  $t = 2.5$  zeigen für das zur Anfangszeit in allen räumlichen Punkten als verschwindend vorausgesetzte Feld die zu erwartenden geringen Ausschläge.



## IV.3 Ausblick

Es zeigt sich, daß der gewählte Ansatz geeignet ist, numerische Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen im Rahmen eines diskreten Modells elektromagnetischer Felder zu ermitteln. Das vorgestellte Beispiel kann dabei aber allenfalls die Anwendbarkeit nachweisen sowie einen Einblick in die Vorgehensweise zur Modellierung konkreter Situationen geben. Eine Reihe von Fragen bleibt noch unbeantwortet und bietet Raum für weitergehende Forschung:

- Offen ist, ob die Vorschaltung eines Anpassungsschrittes, in dem fehlerbehaftete oder durch Interpolation gewonnene Anfangs- und Randbedingungen mit dem diskreten Modell verträglich gemacht werden, zur eindeutigen Lösbarkeit des Systems führen kann. Dabei ist sicher nicht zu erwarten, daß für beliebige modellierte Beispiele exakte (diskrete) Lösungen existierten.
- Ist es erforderlich, das Gleichungssystem näherungsweise zu lösen, also etwa wie im zweiten betrachteten Beispiel durch Behandlung als Ausgleichsproblem, so scheint eine Gewichtung der einzelnen problemdeterminierenden Bedingungen naheliegend. Auf diesem Weg könnte man die Erfüllung der diskreten Maxwell'schen Gleichungen stärker gewichten, Anfang- und Randbedingungen entsprechend schwächer.
- Es stellt sich die Frage, inwieweit sich die Effizienz der Lösungsstrategie durch Ausnutzung modellspezifischer Eigenschaften wie der Dünnbesetztheit der in dem zu lösenden linearen Gleichungssystem auftretenden Matrix steigern läßt. Dabei ist auch zu berücksichtigen, ob und wie sich diese Eigenschaften bei Lösung des Systems als Ausgleichsproblem auf die erste Gauß'sche Transformation vererben.
- Diese Frage nach der Ausnutzung der Dünnbesetztheit ist sehr eng mit der Parallelisierbarkeit einer angemessenen Lösungsmethode verknüpft. Dabei hat die Numerierung der Eckpunkte einen entscheidenden Einfluß auf diesen Aspekt.
- Bei der Wahl von (zum Beispiel absorbierenden) Randbedingungen, die nicht zu einem linearen Gleichungssystem führen, ist es erforderlich, andere der Problemstellung angepaßte Lösungsstrategien zu wählen. Eine umfassende Untersuchung ist hierzu erforderlich. Es kann in diesem Zusammenhang sinnvoll sein, lineare und nichtlineare Bedingungen getrennt zu behandeln.
- Es ist noch zu klären, in welcher Weise sich die Diskretisierung der betrachteten Teilmenge der Minkowski-Raum-Zeit auf die Stabilität (im Sinne sich zeitlich verändernder Felder) auswirkt. Die durch Übertragung des klassischen Stabilitätskriteriums auf die vierdimensionale Situation gewonnene Einschränkung ist dabei aus numerischen Gründen sicherlich nicht ausreichend. Eine allgemeinere Bedingung zur Vermeidung sehr unterschiedlicher Größenordnungen der auftretenden Werte, die gegebenenfalls das klassische Kriterium als Spezialfall enthält<sup>52</sup>, scheint hier angemessener.

Die vielen Freiheiten, die das entwickelte Verfahren im Hinblick auf die Diskretisierung durch eine Simplicialzerlegung, Numerierung der Eckpunkte, Auswahl und Platzierung der Randbedingungen sowie die Lösungsstrategie für das entstehende Gleichungssystem bietet, legt eine umfassende Untersuchung dieser Zusammenhänge nahe und schafft damit viel Raum für weitere Forschung. Es ist zu erwarten, daß ebendiese Freiheiten eine Anwendbarkeit der vorgestellten Methode auf weit mehr konkrete Situationen zulassen, als dies durch herkömmliche Ansätze möglich ist, sowie, bei geschickter Modellierung unter Berücksichtigung einer angemessenen Lösungsstrategie für das entstehende Gleichungssystem, zu weit effizienteren Verfahren der Problemlösung führen.

<sup>52</sup> Etwa eine Bedingung an die Simplexes der Art „nicht zu spitz“.

Basierend auf den hier gewonnenen Erkenntnissen besteht die Möglichkeit, in einem weiteren Schritt den bewußt allgemein gehaltenen diskreten Kalkül auch auf andere Probleme der Natur- und Ingenieurwissenschaften anzuwenden, soweit sich diese in Differentialformennotation darstellen lassen.

Eine konsequente Modellierung naturwissenschaftlicher Zusammenhänge, bei der künstliche Trennungen verschiedener Dimensionen vermieden und zeitgemäße Formulierungen verwendet werden, erscheint im Blick auf aktuelle Entwicklungen in den Naturwissenschaften mehr als angemessen.

# A Quellcodes

## Struktur des Programms TM.p

program TM;

- Funktion TestAb :  
Überführung der (erweiterten) Matrix in obere Dreiecksgestalt mit Überprüfung auf maximalen Rang. Test auf Lösbarkeit bei Überbestimmtheit.
- Prozedur RR :  
Rückwärtsrekursion zur Berechnung der Lösung.
- Prozedur GS\_Ausgabe :  
Ausgabe der erweiterten Matrix.
- Prozedur Ergebnis\_Ausgabe :  
Ausgabe der Lösung.
- Prozedur Hoehenlinienbild :  
Ausgabe der Lösung als Zeitschicht-Höhenlinienbilder.
- Prozedur Mathematica\_Ausgabe :  
Ausgabe der Lösung für MATHEMATICA in eine Datei.
- Prozedur LGS :  
Lösung des linearen Gleichungssystems via TestAB und RR.  
Anschließend Ausgabe der Ergebnisse (Ergebnis\_Ausgabe, Hoehenlinienbild, Mathematica\_Ausgabe).
- Prozedur TMMain :  
Definition des Gleichungssystems und Lösung durch LGS.

## Globale Variablen

- test (0 oder 1):  
1 für die Ausgabe von Zwischenschritten.
- AGP (0 oder 1):  
1 für Lösung als Ausgleichsproblem.
- dimx1, dimx2, dimx4 (integer):  
Anzahl der Knoten ( [0..dimx1, 0..dimx2, 0..dimx4] ).
- eps (real):  
Schranke für den Lösbarkeitstest.
- delta1, delta2, delta4 (real):  
Intervalldurchmesser der Quader.



```

{ *      * (0,1,D4)      ....                               *      * }
{ *      * [3*(D4*(D2+2)*(D1+1)+(D1+1))+1,..+2,..+3]      *      * }
{ *      *                                                     *      * }
{ *      * (0,2,D4)      ....                               *      * }
{ *      * [3*(D4*(D2+2)*(D1+1)+2*(D1+1))+1,..+2,..+3]    *      * }
{ *      *                                                     *      * }
{ *      * .                                                     *      * }
{ *      * .                                                     *      * }
{ *      * .                                                     *      * }
{ *      *                                                     *      * }
{ *      *                                                     .... (D1,D2,D4) *      * }
{ *      * [3*((D4+1)*(D2+1)*(D1+1)-1))+1,..+2,..+3] *      * }
{ *      * *****                                                     *      * }
{ *      *                                                     *      * }
{ *      *                                                     *      * }
{ ***** }

```

```
program TM ( input, output );
```

```
use mv_ari; { Matrix/Vektor Arithmetik }
```

```
const
```

```

test   = 0; { 1: Ausgabe von Zwischenschritten }
AGP    = 1; { 1: Loesung als Ausgleichsproblem }
dimx1  = 13;
dimx2  = 13;
dimx4  = 5; { Knoten ( 0..dimx1, 0..dimx2, 0..dimx4 ) }
eps    = 1E-10; { Schranke fuer Loesbarkeitstest }
delta1 = 1;
delta2 = 1;
delta4 = 0.5;

```

```
type gvector = dynamic array[*] of integer;
```

```
{-----}
```

```

function TestAb(var A      : rmatrix;
                var b      : rvector;
                 m, n      : integer;
                 var index : gvector) : integer;

```

```

{ Ueberfuehrung der (erweiterten) (mx(n+1))-Matrix A | b in      }
{ obere Dreiecksgestalt mit Ueberpruefung auf maximalen Rang.    }
{   -> TestAB = j > 0 falls Pivot = 0 in Spalte j                }
{ Test auf Loesbarkeit von A x = b bei Ueberbestimmtheit.        }
{   -> TestAB = j < 0 falls Nullzeile j mit rechter Seite <> 0   }
{   -> TestAB = 0 sonst (alles OK)                                }

```

```

{ Weitere Uebergabeparameter:                                     }
{ index : Zeilenindizes zur Vermeidung von Zeilenvertauschungen }

```

```

var i, j, k, imax, ipivot      : integer;
    max, betrag, pivot, faktor : real;
    err                        : integer;

```

```
begin
```

```

err := 0;
j := 1;

```

```
writeln('Ueberfuehrung in obere Dreiecksgestalt...');
```

```
while j <= n do
```

```

begin

  { Pivotsuche in Spalte j }

  max := 0.0;
  for i := j to m do
  begin
    betrag := abs(A[index[i],j]);
    if betrag > max then
    begin
      max := betrag;
      imax := i
    end;
  end;

  if test = 1 then { Fortschrittsanzeige fuer Testzwecke }
  begin
    write(['',(n-j+1):6,' ']);
    writeln(j:5,index[j]:5,' | ',imax:5,index[imax]:5,' | ',max)
  end;
  if max < eps then { irregulaerer Fall }
  begin
    err := j;
    j := n + 1 { Schleifenende erzwingen }
  end
  else { regulaerer Fall }
  begin
    ipivot := index[imax];
    if imax <> j then
    begin
      { Vertauschung der Inhalte von index[imax] und index[j] }
      index[imax] := index[j];
      index[j] := ipivot;
    end;

    pivot := A[ipivot,j]; { abs(pivot) = max > 0.0 }

    for k := j+1 to m do
    begin
      { Alle Zeilen unterhalb von j bearbeiten }
      faktor := A[index[k],j] / pivot;
      A[index[k],j] := 0;
      for i := j+1 to n do
        A[index[k],i] := A[index[k],i] - faktor * A[ipivot,i];
      b[index[k]]:=b[index[k]] - faktor * b[ipivot];
    end;
    j := j+1
  end
end; { while }

if err = 0 then
begin
  if A[index[n],n] < eps then
    err := n { kein maximaler Rang }
  else
    if m > n then
    begin
      writeln;
      writeln('Ueberbestimmtheitstest...');
      for j := n+1 to m do
        if (abs(b[index[j]])>eps) and (err=0) then
          err := -j; { Nullzeile mit rechter Seite <> 0 }
    end;
end;

TestAB:=err;

```

```
end; { TestAb }
```

```
{-----}
```

```
procedure RR(var A      : rmatrix;
             var b      : rvector;
             var x      : rvector;
             m, n      : integer;
             var index  : gvector);
```

```
{ Rueckwaertsrekursion zur Loesung von A x = b }
{ mit (mxn)-Matrix A unter Beruecksichtigung der }
{ Zeilenindizes (index)                       }
```

```
var i, j : integer;
```

```
begin
```

```
  x[n] := b[index[n]]/A[index[n],n];
  for j := n-1 downto 1 do
    x[j] := #( b[index[j]] -
              for i := j+1 to n sum(A[index[j],i]*x[i])) / A[index[j],j];
```

```
end; { RR }
```

```
{-----}
```

```
procedure GS_Ausgabe(var A  : rmatrix;
                    var b  : rvector;
                    m,n : integer);
```

```
{ Ausgabe der erweiterten (mx(n+1))-Matrix A | b }
```

```
var i, j : integer;
```

```
begin
```

```
  writeln('Gleichungssystem:'); writeln;
  for i := 1 to m do
    begin
      for j:=1 to n do write(trunc(A[i,j]):2);
      write(' | ',trunc(b[i]):2);
      writeln;
    end;
  writeln
```

```
end; { GS_Ausgabe }
```

```
{-----}
```

```
procedure Ergebnis_Ausgabe(var x : rvector;
                          n : integer);
```

```
{ Ausgabe der Loesung x }
```

```
var i, j, k : integer;
```

```
begin
```

```

writeln; writeln('Berechnete Loesung : '); writeln;
for j := 1 to ( n div (dimx4+1) ) do
  begin
    for i :=0 to dimx4 do
      begin
        k := 3*i*(dimx1+1)*(dimx2+1)+j;
        write('x[' ,k:4,'] = ',x[k]:20,' ');
      end;
    writeln
  end
end; { Ergebnis_Ausgabe }

{-----}

procedure Hoehenlinienbild(var x : rvector;
                           n : integer);

{ Ausgabe der Loesung x als Zeitschicht-Hoehenlinienbilder }

var x1, x2, x4, Feld, q : integer;

begin

  writeln;
  writeln('Feldkomponenten H1, H2, D3 :'); writeln;
  for x4 := 0 to dimx4 do
    begin
      writeln('[x4 = ',x4,']');
      for x2 := 0 to dimx2 do
        begin
          for Feld := 1 to 3 do
            begin
              for x1 := 0 to dimx1 do
                begin
                  q := 3*(x1+x2*(dimx1+1)+x4*(dimx1+1)*(dimx2+1));
                  q := q + Feld; { Feld: 1:H1 2:H2 3:D3 }
                  write(round(x[q]) mod 10)
                end;
                write(' ')
              end;
              writeln
            end;
          writeln; writeln
        end
      end
    end; { Hoehenlinienbild }

{-----}

procedure Mathematica_Ausgabe(var x : rvector;
                              n : integer);

{ Ausgabe der Loesung x zur Verwendung mit }
{ ListPlot3D[array] in MATHEMATICA }

var x1, x2, x4, Feld, q : integer;
    mfile : text;
    mfilename : string;

```

```

begin

  mfilename := 'Erg_' + image(dimx1+1) + 'x' + image(dimx2+1) + 'x'
              + image(dimx4+1);

  rewrite(mfile,mfilename);

  for Feld := 1 to 3 do
  begin
    case Feld of
      1: writeln(mfile,'Feld: H1');
      2: writeln(mfile,'Feld: H2');
      3: writeln(mfile,'Feld: D3');
    end;
    writeln(mfile);
    for x4 := 0 to dimx4 do
    begin
      writeln(mfile,'[x4 = ',x4,']');
      writeln(mfile);
      write(mfile,' { ');
      for x2 := 0 to dimx2 do
      begin
        write(mfile,' { ');
        for x1 := 0 to dimx1 do
        begin
          q := 3*(x1+x2*(dimx1+1)+x4*(dimx1+1)*(dimx2+1));
          q := q + Feld; { Feld: 1:H1 2:H2 3:D3 }
          write(mfile,x[q]);
          if x1 < dimx1 then write(mfile,' , ');
        end;
        write(mfile,' } ');
        if x2 < dimx2 then write(mfile,' , ');
      end;
      writeln(mfile,' } '); writeln(mfile);
    end;
    writeln(mfile);
  end

end; { Mathematica_Ausgabe }

{-----}

procedure LGS(var A      : rmatrix;
              var b      : rvector;
              var x      : rvector;
              m, n : integer);

{ Loesung des Gleichungssystems A x = b mit mxn-Matrix A }
{ 1. Ueberfuehrung in obere Dreiecksgestalt (TestAb) }
{ 2. Bestimmung der Loesung durch Rueckwaertsrekursion (RR) }

var index      : gvector[1..m];
    i, err     : integer;
    x1, x2, x4 : integer;

begin

  for i := 1 to m do index[i] := i; { Indizes fuer Zeilen }

  err := TestAb(A,b,m,n,index);

  if err = 0 then { kein Fehler }
  begin
    RR(A,b,x,m,n,index);
  end;
end;

```

```

    Ergebnis_Ausgabe(x,n);
    Hoehenlinienbild(x,n);
    Mathematica_Ausgabe(x,n);
end
else
begin
    writeln;
    if err > 0 then { A hat keinen maximalen Rang }
        begin
            writeln('Rang der Matrix nicht maximal! ');
            write(' Spalte:',err);
            i:= (err-1) div 3;
            write(' (Variable: ');
            case ((err-1) mod 3) of
                0: write('H1');
                1: write('H2');
                2: write('D3');
            end;
            x4 := i div ((dimx1+1)*(dimx2+1));
            i:= i mod ((dimx1+1)*(dimx2+1));
            x2 := i div (dimx1+1);
            x1:= i mod (dimx1+1);
            writeln((' ',x1,', ',x2,', ',x4,','))
        end
    else { keine Nullzeilen }
        begin
            writeln('Ueberbestimmtes Gleichungssystem nicht loesbar!');
            writeln(' Zeile ',-err,',': b[' ,index[-err],'] = ',b[index[-err]]);
        end;
    writeln;
end
end;{main}

```

```
{-----}
```

```
procedure TMMain ( gl,va: integer );
```

```

{ Definition des Gleichungssystems (gl Gleichungen, va Variablen) }
{ - Anfangsbedingungen, Randbedingungen, Maxwellsche Gleichungen }
{ Loesung des Gleichungssystems (LGS) }

```

```
var
```

```

A                : rmatrix[1..gl,1..va];
AtA              : rmatrix[1..va,1..va];
b                : rvector[1..gl];
Atb              : rvector[1..va];
x                : rvector[1..va];
x1, x2, x4, glnr, glnr2 : integer;
i, j, k          : integer;
q0, q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7 : integer; { Ecken eines Quaders }
d1, d2, d4, d14, d12, d24 : real;
pi               : real;

```

```
begin
```

```
{ Bestimmung der Komponenten der Matrix }
```

```

glnr := 0; { Gleichungsnummer }
glnr2 := 0; { alte Gleichungsnummer }
pi := arctan(0.5)*4;

d1 := delta1;

```

```

d2 := delta2;
d4 := delta4;

d14 := d1 * d4;
d24 := d2 * d4;
d12 := d1 * d2; { ...zur Abkuerzung }

A := null(A);
b := null(b);
x := null(x);

writeln('Bestimmung der Matrixkomponenten...'); writeln;

{ Anfangsbedingungen }

write(' Anfangsbedingungen      : ');

for x4 := 0 to 0 do
  for x2 := 0 to dimx2 do
    for x1 := 0 to dimx1 do
      begin
        q0 := 3 * ( x1 + x2 * (dimx1+1) + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
        A[glnr+1,q0+1]:=1; b[glnr+1]:=0; { H1(x1,x2,0) }
        A[glnr+2,q0+2]:=1; b[glnr+2]:=0; { H2(x1,x2,0) }
        A[glnr+3,q0+3]:=1; b[glnr+3]:=0; { D3(x1,x2,0) }
        if (x1=3) then
          begin
            b[glnr+2]:=-3; { H2(x1,x2,0) }
            b[glnr+3]:=3; { D3(x1,x2,0) }
          end;
        glnr:=glnr+3
      end;

writeln((glnr - glnr2):5);
glnr2 := glnr;

{ Randbedingungen }

write(' Randbedingungen      : ');

for x4 := 1 to dimx4 do
begin
  for x2 := 0 to dimx2 do
    begin
      { linker Rand }
      q0 := 3 * ( x2 * (dimx1+1) + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
      { A[glnr+1,q0+1]:=1; b[glnr+1]:=0; { H1(0,x2,x4) } }
      { A[glnr+1,q0+3]:=1; b[glnr+1]:=5; { D3(0,x2,x4) } }
      { A[glnr+1,q0+2]:=1; b[glnr+1]:=0; { H2(0,x2,x4) } }
      glnr:=glnr+0;
      { rechter Rand }
      q0 := 3 * ( dimx1 + x2 * (dimx1+1) + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
      { A[glnr+1,q0+1]:=1; b[glnr+1]:=0; { H1(dimx1,x2,x4) } }
      { A[glnr+1,q0+3]:=1; b[glnr+1]:=0; { D3(dimx1,x2,x4) } }
      { A[glnr+1,q0+2]:=1; b[glnr+1]:=0; { H2(dimx1,x2,x4) } }
      glnr:=glnr+0;
    end;

  for x1 := 0 to dimx1 do
    begin
      { vorderer Rand }
      q0 := 3 * ( x1 + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
      A[glnr+1,q0+1]:=1; b[glnr+1]:=0; { H1(x1,0,x4) }
      { A[glnr+1,q0+2]:=1; b[glnr+2]:=0; { H2(x1,0,x4) } }
      { A[glnr+2,q0+3]:=1; b[glnr+2]:=0; { D3(x1,0,x4) } }
      glnr:=glnr+1;
      { hinterer Rand }
    end;
  end;
end;

```

```

    q0 := 3 * ( x1 + dimx2 * (dimx1+1) + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
    A[glnr+1,q0+1]:=1; b[glnr+1]:=0; { H1(x1,dimx2,x4) }
    { A[glnr+1,q0+2]:=1; b[glnr+2]:=0; { H2(x1,dimx2,x4) }
    { A[glnr+2,q0+3]:=1; b[glnr+2]:=0; { D3(x1,dimx2,x4) }
    glnr:=glnr+1;
  end;
end; { x4 }

writeln((glnr - glnr2):5);
glnr2 := glnr;

{ inhomogene Maxwell'sche Gleichungen }

write(' Maxwell'sche Gleichungen : ');

for x4 := 0 to dimx4-1 do
  for x2 := 0 to dimx2-1 do
    for x1 := 0 to dimx1-1 do
      begin

        { Indizes der Knoten (jeweils H1 (+1), H2 (+2), D3 (+3)) }
        q0 := 3 * (x1 + x2 * (dimx1+1) + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
        q1 := q0 + 3;
        q2 := q0 + 3 * (dimx1+1);
        q3 := q2 + 3;
        q4 := q0 + 3 * (dimx1+1) * (dimx2+1);
        q5 := q4 + 3;
        q6 := q4 + 3 * (dimx1+1);
        q7 := q6 + 3;

        if (x1+x2+x4) mod 2 = 0 then
          begin { Typ A }

            { A 1.1 - 1.5 }

            A[glnr+1,q0+2]:= d24;
            A[glnr+1,q1+1]:=-d14; A[glnr+1,q1+2]:=-d24; A[glnr+1,q1+3]:=-d12;
            A[glnr+1,q3+1]:= d14;
            A[glnr+1,q5+3]:= d12;

            A[glnr+2,q0+3]:= d12;
            A[glnr+2,q4+1]:= d14; A[glnr+2,q4+2]:=-d24; A[glnr+2,q4+3]:=-d12;
            A[glnr+2,q5+2]:= d24;
            A[glnr+2,q6+1]:=-d14;

            A[glnr+3,q0+1]:=-d14;
            A[glnr+3,q2+1]:= d14; A[glnr+3,q2+2]:= d24; A[glnr+3,q2+3]:=-d12;
            A[glnr+3,q3+2]:=-d24;
            A[glnr+3,q6+3]:= d12;

            A[glnr+4,q3+3]:= d12;
            A[glnr+4,q5+1]:= d14;
            A[glnr+4,q6+2]:=-d24;
            A[glnr+4,q7+1]:=-d14; A[glnr+4,q7+2]:= d24; A[glnr+4,q7+3]:=-d12;

            A[glnr+5,q0+1]:= d14; A[glnr+5,q0+2]:=-d24; A[glnr+5,q0+3]:= d12;
            A[glnr+5,q3+1]:= d14; A[glnr+5,q3+2]:=-d24; A[glnr+5,q3+3]:= d12;
            A[glnr+5,q5+1]:=-d14; A[glnr+5,q5+2]:= d24; A[glnr+5,q5+3]:=-d12;
            A[glnr+5,q6+1]:=-d14; A[glnr+5,q6+2]:= d24; A[glnr+5,q6+3]:=-d12;

            glnr:=glnr+5;

          end
        else
          begin { Typ B }

            { B 1.1 - 1.5 }

```

```

A[glnr+1,q7+2]:= d24;
A[glnr+1,q6+1]:=-d14; A[glnr+1,q6+2]:=-d24; A[glnr+1,q6+3]:=-d12;
A[glnr+1,q4+1]:= d14;
A[glnr+1,q2+3]:= d12;

A[glnr+2,q7+3]:= d12;
A[glnr+2,q3+1]:= d14; A[glnr+2,q3+2]:=-d24; A[glnr+2,q3+3]:=-d12;
A[glnr+2,q2+2]:= d24;
A[glnr+2,q1+1]:=-d14;

A[glnr+3,q7+1]:=-d14;
A[glnr+3,q5+1]:= d14; A[glnr+3,q5+2]:= d24; A[glnr+3,q5+3]:=-d12;
A[glnr+3,q4+2]:=-d24;
A[glnr+3,q1+3]:= d12;

A[glnr+4,q4+3]:= d12;
A[glnr+4,q2+1]:= d14;
A[glnr+4,q1+2]:=-d24;
A[glnr+4,q0+1]:=-d14; A[glnr+4,q0+2]:= d24; A[glnr+4,q0+3]:=-d12;

A[glnr+5,q7+1]:= d14; A[glnr+5,q7+2]:=-d24; A[glnr+5,q7+3]:= d12;
A[glnr+5,q4+1]:= d14; A[glnr+5,q4+2]:=-d24; A[glnr+5,q4+3]:= d12;
A[glnr+5,q2+1]:=-d14; A[glnr+5,q2+2]:= d24; A[glnr+5,q2+3]:=-d12;
A[glnr+5,q1+1]:=-d14; A[glnr+5,q1+2]:= d24; A[glnr+5,q1+3]:=-d12;

glnr:=glnr+5;

end;
end;

writeln((glnr - glnr2):5, ' (DITM)');
glnr2 := glnr;

{ homogene Maxwellsche Gleichungen }

write(' ');

for x4 := 0 to dimx4-1 do
  for x2 := 0 to dimx2-1 do
    for x1 := 0 to dimx1-1 do
      begin

        { Indizes der Knoten (jeweils H1 (+1), H2 (+2), D3 (+3)) }
        q0 := 3 * (x1 + x2 * (dimx1+1) + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
        q1 := q0 + 3;
        q2 := q0 + 3 * (dimx1+1);
        q3 := q2 + 3;
        q4 := q0 + 3 * (dimx1+1) * (dimx2+1);
        q5 := q4 + 3;
        q6 := q4 + 3 * (dimx1+1);
        q7 := q6 + 3;

        if (x1+x2+x4) mod 2 = 0 then
          begin { Typ A }

            { A 2.1 - 2.4 }

            A[glnr+1,q0+3]:= d4; A[glnr+1,q1+3]:=-d4;
            A[glnr+1,q5+2]:= d1; A[glnr+1,q1+2]:=-d1;

            A[glnr+2,q5+3]:= d4; A[glnr+2,q4+3]:=-d4;
            A[glnr+2,q0+2]:= d1; A[glnr+2,q4+2]:=-d1;

            A[glnr+3,q2+3]:= d4; A[glnr+3,q3+3]:=-d4;
            A[glnr+3,q6+2]:= d1; A[glnr+3,q2+2]:=-d1;

```

```

A[glnr+4,q7+3]:= d4; A[glnr+4,q6+3]:=-d4;
A[glnr+4,q3+2]:= d1; A[glnr+4,q7+2]:=-d1;

glnr:=glnr+4;

{ A 3.1 - 3.4 }

A[glnr+1,q2+3]:= d4; A[glnr+1,q0+3]:=-d4;
A[glnr+1,q6+1]:= d2; A[glnr+1,q2+1]:=-d2;

A[glnr+2,q4+3]:= d4; A[glnr+2,q6+3]:=-d4;
A[glnr+2,q0+1]:= d2; A[glnr+2,q4+1]:=-d2;

A[glnr+3,q3+3]:= d4; A[glnr+3,q1+3]:=-d4;
A[glnr+3,q5+1]:= d2; A[glnr+3,q1+1]:=-d2;

A[glnr+4,q5+3]:= d4; A[glnr+4,q7+3]:=-d4;
A[glnr+4,q3+1]:= d2; A[glnr+4,q7+1]:=-d2;

glnr:=glnr+4;

{ A 4.1 - 4.4 }

A[glnr+1,q0+1]:= d2; A[glnr+1,q1+1]:=-d2;
A[glnr+1,q1+2]:= d1; A[glnr+1,q3+2]:=-d1;

A[glnr+2,q5+1]:= d2; A[glnr+2,q4+1]:=-d2;
A[glnr+2,q6+2]:= d1; A[glnr+2,q4+2]:=-d1;

A[glnr+3,q3+1]:= d2; A[glnr+3,q2+1]:=-d2;
A[glnr+3,q2+2]:= d1; A[glnr+3,q0+2]:=-d1;

A[glnr+4,q6+1]:= d2; A[glnr+4,q7+1]:=-d2;
A[glnr+4,q5+2]:= d1; A[glnr+4,q7+2]:=-d1;

glnr:=glnr+4;

end
else
begin { Typ B }

{ B 2.1 - 2.4 }

A[glnr+1,q7+3]:= d4; A[glnr+1,q6+3]:=-d4;
A[glnr+1,q2+2]:= d1; A[glnr+1,q6+2]:=-d1;

A[glnr+2,q2+3]:= d4; A[glnr+2,q3+3]:=-d4;
A[glnr+2,q7+2]:= d1; A[glnr+2,q3+2]:=-d1;

A[glnr+3,q5+3]:= d4; A[glnr+3,q4+3]:=-d4;
A[glnr+3,q1+2]:= d1; A[glnr+3,q5+2]:=-d1;

A[glnr+4,q0+3]:= d4; A[glnr+4,q1+3]:=-d4;
A[glnr+4,q4+2]:= d1; A[glnr+4,q0+2]:=-d1;

glnr:=glnr+4;

{ B 3.1 - 3.4 }

A[glnr+1,q5+3]:= d4; A[glnr+1,q7+3]:=-d4;
A[glnr+1,q1+1]:= d2; A[glnr+1,q5+1]:=-d2;

A[glnr+2,q3+3]:= d4; A[glnr+2,q1+3]:=-d4;
A[glnr+2,q7+1]:= d2; A[glnr+2,q3+1]:=-d2;

A[glnr+3,q4+3]:= d4; A[glnr+3,q6+3]:=-d4;
A[glnr+3,q2+1]:= d2; A[glnr+3,q6+1]:=-d2;

```

```

A[glnr+4,q2+3]:= d4; A[glnr+4,q0+3]:=-d4;
A[glnr+4,q4+1]:= d2; A[glnr+4,q0+1]:=-d2;

glnr:=glnr+4;

{ B 4.1 - 4.4 }

A[glnr+1,q7+1]:= d2; A[glnr+1,q6+1]:=-d2;
A[glnr+1,q6+2]:= d1; A[glnr+1,q4+2]:=-d1;

A[glnr+2,q2+1]:= d2; A[glnr+2,q3+1]:=-d2;
A[glnr+2,q1+2]:= d1; A[glnr+2,q3+2]:=-d1;

A[glnr+3,q4+1]:= d2; A[glnr+3,q5+1]:=-d2;
A[glnr+3,q5+2]:= d1; A[glnr+3,q7+2]:=-d1;

A[glnr+4,q1+1]:= d2; A[glnr+4,q0+1]:=-d2;
A[glnr+4,q2+2]:= d1; A[glnr+4,q0+2]:=-d1;

glnr:=glnr+4;

end;
end;

writeln((glnr - glnr2):5, ' (DHTM)');
glnr2 := glnr;

{ Zusatzbedingungen (Hindernis) }

write(' Zusatzbedingungen      : ');

for x4 := 0 to dimx4 do
  for x2 := 3 to 4 do
    for x1 := 5 to 6 do
      begin
        q0 := 3 * ( x1 + x2 * (dimx1+1) + x4 * (dimx1+1) * (dimx2+1));
        { A[glnr+1,q0+1]:=1; b[glnr+1]:=0; { H1(x1,x2,0) }
        { A[glnr+2,q0+2]:=1; b[glnr+2]:=0; { H2(x1,x2,0) }
        { A[glnr+3,q0+3]:=1; b[glnr+3]:=0; { D3(x1,x2,0) }
        glnr:=glnr+0
      end;
    end;
  end;
end;

writeln((glnr - glnr2):5);
glnr2 := glnr;

writeln;

if glnr = gl then
begin
  writeln('      Gleichungen (Zeilen): ',gl:5);
  writeln('      Variablen (Spalten) : ',va:5);
  writeln;
  if (test = 1) and (va < 38) then GS_Ausgabe(A,b,gl,va);
  if AGP=1 then
  begin
    writeln('      Ausgleichsproblem      : ',va:5,' x ',va);
    writeln;
    {1. Gausssche Transformation}
    AtA := transp(A) * A;
    Atb := transp(A) * b;
    LGS(AtA,Atb,x,va,va)
  end
  else
    LGS(A,b,x,gl,va);
end
else

```

```

begin
  writeln('Fehler!');
  writeln('va:  ',va);
  writeln('gl:  ',gl);
  writeln('glnr: ',glnr)
end;

end; { TMMain }

{-----}

{ Hauptprogramm }

var gl ,va : integer;

begin

  writeln;
  writeln('*** Simulation transversaler magnetischer Wellen ***');
  writeln;
  writeln('Gittergroesse: ',dimx1+1,' x ',dimx2+1,' x ',dimx4+1);
  writeln;

  { Anzahl Gleichungen }
  gl := 0;
  gl := gl + (dimx1+1) * (dimx2+1) * 3; { AB }
  gl := gl + 0 * (dimx2+1) * dimx4 ; { RB links/rechts }
  gl := gl + 2 * (dimx1+1) * dimx4 ; { RB vorne/hinten }
  gl := gl + dimx1 * dimx2 * dimx4 * 5 ; { (DITM) }
  gl := gl + dimx1 * dimx2 * dimx4 * 12 ; { (DHTM) }
  { gl := gl + 2 * 2 * (dimx4+1) * 3 ; { Zusatz }

  { Anzahl Variablen }
  va := (dimx1+1) * (dimx2+1) * (dimx4+1) * 3;

  TMMain(gl,va)

end.

```

# Literatur

- [1] R. Ahrem. *Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen auf rotationssymmetrischen Gittern*. Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1997.
- [2] P. Alexandroff / H. Hopf. *Topologie*. Erster Band. Springer, 1974.
- [3] S. Brehmer, H. Haar. *Differentialformen und Vektoranalysis*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973.
- [4] H.-J. Buhl. *Stückweise quadratische  $C^1$ -Interpolation und ihr Einsatz bei der Galerkin-diskretisierung im Raume  $H^2(\Omega)$* . Dissertation, BUGH Wuppertal, 1987.
- [5] H. Cartan. *Differential Calculus*. Hermann, 1971.
- [6] H. Cartan. *Differentialformen*. BI-Wissenschaftsverlag, 1974.
- [7] A. Einstein. *Relativitätstheorie*. Vieweg, 1963.
- [8] G. Fischer. *Analytische Geometrie*. Vieweg, 1992.
- [9] O. Forster. *Analysis*. Band 3: Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$  mit Anwendungen. Vieweg, 1984.
- [10] O. Forster. *Analysis*. Band 2: Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ . Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg, 1984.
- [11] W. Franz. *Topologie I*. Walter de Gruyter, 1973.
- [12] W. Franz. *Topologie II*. Walter de Gruyter, 1974.
- [13] H. Grauert / I. Lieb. *Differential- und Integralrechnung III*. Springer, 1977.
- [14] W. H. Greub. *Linear Algebra*. Springer, 1967.
- [15] G. Heindl. *Spline-Funktionen mehrerer Veränderlicher. I*. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1970.
- [16] G. Heindl. *Diskrete Vektoranalysis*. Seminarvortrag im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft Diskrete Modelle, FB Mathematik – BUGH Wuppertal, 1992/93.
- [17] G. Heindl. *Elemente einer Vektoranalysis für stückweise polynomiale Vektorfelder*. Vortrag im Rahmen des Workshops über Perspektiven der Angewandten Informatik, 7. bis 8. Juli 2000 in Witten-Bommerholz, Institut für Angewandte Informatik – BUGH Wuppertal, 2000.
- [18] H. Holmann / H. Rummler. *Alternierende Differentialformen*. BI-Wissenschaftsverlag, 1972.
- [19] R. S. Ingarden / A. Jamiolkowski. *Classical Electrodynamics*. Elsevier, 1985.
- [20] S. Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer, 1993.
- [21] R. Lenk. *Theorie elektromagnetischer Felder*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976.
- [22] L. H. Loomis / S. Sternberg. *Advanced Calculus*. Addison-Wesley, 1968.
- [23] K. Meetz / W. L. Engl. *Elektromagnetische Felder*. Springer, 1980.
- [24] C. W. Misner / K. S. Thorne / J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [25] G. Mur. *Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations*. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol. EMC-23, No. 4, 1981.
- [26] G. L. Naber. *The Geometry of Minkowski Spacetime (Applied mathematical sciences ; 92)*. Springer, 1992.
- [27] F. und R. Nevanlinna. *Absolute Analysis*. Springer, 1973.

- 
- [28] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry – With Applications to Relativity*. Academic Press, Inc., 1983.
- [29] E. Ossa. *Analysis III*. Vorlesung im FB Mathematik – BUGH Wuppertal, 1985/86.
- [30] R. Sexl, H. K. Schmidt. *Raum–Zeit–Relativität*. Vieweg, 1979.
- [31] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Company, 1974.
- [32] W. Thirring. *Lehrbuch der Mathematischen Physik*. Band 1: Klassische Dynamische Systeme. Springer, 1988.
- [33] W. Thirring. *Lehrbuch der Mathematischen Physik*. Band 2: Klassische Feldtheorie. Springer, 1988.
- [34] T. Weiland. *On the Numerical Solution of Maxwell's Equations and Applications in the Field of Accelerator Physics*. Particle Accelerators, Vol. 15, 1984.
- [35] T. Weiland. *Die Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen*. Phys. Bl., Vol. 42, No. 7, 1986.
- [36] T. Weiland, et. al. *Maxwell's Grid Equations*. Frequenz, Vol. 44, No. 1, 1990.
- [37] Kane S. Yee. *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equation in Isotropic Media*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-14, No. 3, 1966.

# Index

- Ableitung . . . . . 34  
 höhere Ableitung . . . . . 35  
 affin lineare Abbildung  
 in einen reellen Vektorraum . . . . . 25  
 zwischen affinen Punkträumen . . . . . 20  
 affin orthogonale Transformation . . . . . 25  
 affin polynomiale Abbildung . . . . . 27  
 affin polynomiale  $r$ -Form . . . . . 56  
 äußere Ableitung . . . . . 59  
 zurückgeholt . . . . . 59  
 affine Hülle . . . . . 16  
 affine Koordinaten . . . . . 18  
 baryzentrische Koordinaten . . . . . 18  
 Koordinatensystem . . . . . 18  
 Koordinatentransformation . . . . . 19  
 Ursprung . . . . . 18  
 affine  $r$ -Form . . . . . 56  
 äußere Ableitung . . . . . 60  
 Basis . . . . . 58  
 exakt . . . . . 64  
 geschlossen . . . . . 64  
 Koableitung . . . . . 69  
 simplizial . . . . . 90  
 simplizial polynomial . . . . . 90  
 stückweise konstant . . . . . 94  
 alternierender Anteil . . . . . 38  
 äußeres Produkt . . . . . 37  
 affin polynomialer  $1$ -Formen . . . . . 58  
 affiner  $1$ -Formen . . . . . 58  
 affiner Formen . . . . . 59  
 alternierender Multilinearformen . . . . . 39  
 Dimension . . . . . 16  
 Diskretisierung  
 der elektromagnetischen Felder . . . . . 140  
 der Minkowski-Raum-Zeit . . . . . 145  
 Divergenz . . . . . 69  
 Dualitätsabbildung . . . . . 53  
 Durchflutungsgesetz . . . . . 122  
 Ereignisse . . . . . 109  
 Feld . . . . . 121  
 elektrische Erregung . . . . . 121  
 elektrisches Feld . . . . . 121  
 Ladungsdichte . . . . . 121  
 magnetische Erregung . . . . . 121  
 magnetisches Feld . . . . . 121  
 Stromdichte . . . . . 121  
 transversales elektrisches Feld . . . . . 148  
 transversales magnetisches Feld . . . . . 148  
 Geschwindigkeitsadditionsformel . . . . . 119  
 Gradient . . . . . 70  
 Hodge-Operator . . . . . 68  
 Induktionsgesetz . . . . . 122  
 inneres Produkt . . . . . 2  
 affiner  $r$ -Formen . . . . . 68  
 zweier Multilinearformen . . . . . 45  
 Integral . . . . . 75, 76  
 einer  $n$ -Form . . . . . 75, 76, 79  
 einer  $r$ -Form . . . . . 80, 81  
 Invarianz der Materialgleichungen . . . . . 130  
 Invarianz des Vakuums . . . . . 130  
 kanonische affine  $n$ -Form . . . . . 67  
 kanonische  $n$ -Form . . . . . 50  
 Kantenzug . . . . . 89  
 elementare Deformation . . . . . 89  
 geschlossen . . . . . 89  
 Konduktivität . . . . . 122  
 Kontinuitätsgleichung . . . . . 125  
 konvex . . . . . 14  
 konvexe Hülle . . . . . 14  
 Ladungserhaltung . . . . . 125, 132  
 Licht-Weltlinie . . . . . 110  
 Lichtkegel . . . . . 110  
 Vergangenheitslichtkegel . . . . . 113  
 Zukunftslichtkegel . . . . . 113  
 Lichtstrahl . . . . . 110  
 Lorentzgruppe . . . . . 114, 118  
 allgemein homogen . . . . . 114  
 inhomogen . . . . . 118  
 Poincaré-Gruppe . . . . . 118

- Lorentzmatrix . . . . . 115, 118  
   allgemein . . . . . 115  
   eigentlich . . . . . 117  
   kausalitätserhaltend . . . . . 116  
   nicht kausalitätserhaltend . . . . . 116  
   orthochron . . . . . 116  
 Lorentzmatrizengruppe . . . . . 115  
 Lorentzprodukt . . . . . 109  
 Lorentztransformation . . . . . 114, 118  
   allgemein homogen . . . . . 114  
   eigentlich . . . . . 117  
   kausalitätserhaltend . . . . . 116  
   nicht kausalitätserhaltend . . . . . 116  
   orthochron . . . . . 116  
 Materialeigenschaften . . . . . 126, 142  
   affin linear . . . . . 127  
   heterogen . . . . . 127  
   homogen . . . . . 127  
   isotrop . . . . . 129  
   linear . . . . . 127  
 Materialgleichungen . . . . . 122, 127, 142  
 Materialkonstante . . . . . 129  
 maximaldimensional . . . . . 17  
 Maxwell'sche Gleichungen . . . . . 122  
   diskret . . . . . 131, 132  
   homogen . . . . . 122, 123  
   inhomogen . . . . . 122, 123  
   komponentenweise . . . . . 134, 137, 140  
 Minkowski-Raum . . . . . 17  
 Minkowski-Raum-Zeit . . . . . 108  
 Multilinearform . . . . . 36  
   alternierend . . . . . 36  
   Basis . . . . . 37, 39  
   Grad . . . . . 36  
 O-Lemma . . . . . 13  
 Orientierung . . . . . 49  
   affin linear unabhängiger Punkte . . . . . 51  
   eines Punktraumes . . . . . 51  
   eines Simplex . . . . . 51  
   eines Vektorraumes . . . . . 49  
   orientierungserhaltend . . . . . 51  
   orientierungsumkehrend . . . . . 51  
   Standard-Orientierung . . . . . 50  
   orthogonal . . . . . 2  
     selbstorthogonal . . . . . 2, 109  
   Untervektorraum . . . . . 2  
 orthogonale Transformation . . . . . 8  
   assozierte Matrix . . . . . 10  
 Orthonormalbasis . . . . . 4  
   Einheitsvektor . . . . . 4  
   Sortierung . . . . . 8  
   Standard-Orthonormalbasis . . . . . 112  
   zulässige Basis . . . . . 116  
 Orthonormierungsverfahren . . . . . 4  
 Permeabilität . . . . . 122  
   des Vakuums . . . . . 143  
 Permittivität . . . . . 122  
   des Vakuums . . . . . 143  
 Poincarésches Lemma . . . . . 65  
   auf Simplexpolyedern . . . . . 100, 103  
 Polarisierungslemma . . . . . 3  
 Polyeder . . . . . 88  
   Simplexpolyeder . . . . . 88  
 Polynom . . . . . 27, 30  
   homogen . . . . . 29  
 Pseudoskalarprodukt . . . . . 2  
   alternierender Multilinearformen . . . . . 44  
   assozierte quadratische Form . . . . . 3  
   Index . . . . . 7  
   Pseudometrik . . . . . 17  
   Pseudonorm . . . . . 3  
   Xi-Basis . . . . . 4  
 Punkte . . . . . 11  
   affin linear unabhängig . . . . . 13  
   affine Linearkombination . . . . . 14  
   Verschiebungsvektoren . . . . . 11  
 Punktraum . . . . . 11  
   euklidisch . . . . . 17  
   pseudoeuklidisch . . . . . 17  
   Unterpunktraum . . . . . 16  
 Quellenfreiheit . . . . . 122  
 Randbedingungen . . . . . 143  
   absorbierend . . . . . 144  
   Anfangsbedingungen . . . . . 143  
   klassisch . . . . . 143  
 Raumdrehung . . . . . 118  
 Rotation . . . . . 70

Schub . . . . .	118	Simplizialzerlegung . . . . .	88
Simplex . . . . .	15	Stabilitätsbedingungen . . . . .	146
Eckpunkt . . . . .	15	Stammform . . . . .	64
Kante . . . . .	15	simplizial . . . . .	94, 101
nach außen orientierter Rand . . . . .	82	Stetigkeit . . . . .	12
orientiert . . . . .	15	Stokesscher Integralsatz . . . . .	85
orientierte Seite . . . . .	82	Tangentialstetigkeit . . . . .	93
Orientierung . . . . .	15	Tensorprodukt . . . . .	37
Seite . . . . .	15	alternierender Multilinearformen . . . . .	39
Untersimplex . . . . .	15	topologischer Vektorraum . . . . .	12
Simplexpolyeder . . . . .	88	Trägheitssatz von Sylvester . . . . .	7
einfach zusammenhängend . . . . .	89	Verschiebungsvektoren . . . . .	11
sternförmig . . . . .	103	isotrop . . . . .	109
vierdimensional . . . . .	140	lichtartig . . . . .	109
zusammenhängend . . . . .	89	raumartig . . . . .	111
simplicial polynomiale r-Form . . . . .	90	vergangenheitsorientiert . . . . .	112, 113
simpliciale r-Form . . . . .	90	zeitartig . . . . .	111
Stammform . . . . .	94, 101	zukunftsorientiert . . . . .	112, 113
tangentialstetig . . . . .	93	Verträglichkeitsbedingungen . . . . .	163
Simplizialkomplex . . . . .	88	Volumenform . . . . .	51
geometrische Realisierung . . . . .	88	Zeitkegel . . . . .	112
Grundsimplex . . . . .	88	Vergangenheitszeitkegel . . . . .	112
homogen . . . . .	88	Zukunftszeitkegel . . . . .	112
Körper . . . . .	88	Zylinderkonstruktionen . . . . .	145