

Analyse der asymptotischen Stabilität nichtlinearer Systeme mit Hilfe des Satzes von Ehlich und Zeller

Vom Fachbereich für Elektrotechnik, Informationstechnik, Medientechnik
der Bergischen Universität Wuppertal
genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

von
Kamil Fatih Dilaver
aus Istanbul

Tag der mündlichen Prüfung:	24.10.2008
Referent:	Prof. Dr.-Ing. Bernd Tibken
Koreferent:	Prof. Dr.-Ing. Anton Kummert

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20090947

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20090947>]

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung und Konzept	3
2	Mathematische Grundlagen	5
2.1	Satz von Ehlich und Zeller	5
2.2	Gürtels Ungleichungen	7
2.3	Beispiele	10
3	Robuste positive Definitheit von Polynomen mit unsicheren Parametern	15
3.1	Einleitung	15
3.2	Numerische Berechnungsmethode	16
3.3	Untersuchung von Polynomen mit einem unsicheren Parameter	19
3.4	Untersuchung von Polynomen mit zwei unsicheren Parametern	27
3.5	Untersuchung von Polynomen mit mehreren unsicheren Parametern	32
3.6	Bestimmung des Parameterbereiches Ω als Hyperkubus	34
4	Asymptotische Stabilität nichtlinearer Systeme	47
4.1	Definition der Stabilität	47
4.2	Asymptotische Stabilität nach dem Satz von Ljapunow	50
4.3	Einzugsbereich und gesicherter Einzugsbereich	53
5	Berechnung gesicherter Einzugsbereiche für polynomiale Systeme	57
5.1	Einleitung	57
5.2	Numerische Berechnungsmethode eines gesicherten Einzugsbereiches	60
5.3	Gesicherter Einzugsbereich für polynomiale Systeme in einer speziellen Form	83
6	Zusammenfassung und Ausblick	94
	Literaturverzeichnis	95

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Stabilitätsanalyse eines Systems, besonders die asymptotische Stabilität, ist der Kernpunkt in der Regelungstechnik und der Regelungstheorie. Man findet Stabilitätsuntersuchungen bereits bei Aristoteles und Archimedes [31].

Das Hauptziel der Regelungstechnik ist es, dass der Ausgang des geregelten Systems ohne Regelabweichung einem gegebenen Führungssignal folgt. Mathematisch ausgedrückt, soll

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = 0 \quad (1.1)$$

gelten, wobei $y(t) \in \mathbb{R}$ die Ausgangsgröße des geregelten Systems, und $w(t) \in \mathbb{R}$ das Führungssignal für das zu regelnde System darstellt. Damit der Grenzwert von (1.1) sichergestellt ist, muss als erste und wichtigste Voraussetzung die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises erfüllt sein. Für den Fall, dass das Führungssignal $w(t) = 0$ ist, kann ein geschlossener Regelkreis als ein autonomes System betrachtet werden. Deswegen wird in dieser Arbeit die asymptotische Stabilität autonomer Systeme untersucht.

Der Grund, dass in dieser Arbeit nichtlineare Systeme betrachtet werden, liegt darin, dass fast alle physikalischen Systeme nichtlinear sind. Mit anderen Worten kann das Verhalten eines physikalischen Systems am besten mit einem nichtlinearen Modell beschrieben werden. Falls das physikalische System in einer kleinen Umgebung des Arbeitspunktes betrachtet wird, kann das Systemverhalten mit einem linearen Modell dargestellt werden. Bei linearen Modellen oder Systemen ist es immer möglich, eine explizite Lösung zu berechnen, dies ist für nichtlineare Modelle nicht immer möglich. Ferner wurden unterschiedliche Methoden für lineare Systeme entwickelt, um die Stabilität zu analysieren [13, 34, 35]. Für nichtlineare Systeme ist die Anzahl der Methoden, mit denen die Stabilität einer Ruhelage untersucht werden kann, viel geringer als für lineare Systeme. Deshalb ist die Stabilitätsanalyse eines linearen Systems viel einfacher als die eines nichtlinearen Systems. Auf der anderen Seite sind lineare Modelle meistens mangelhaft und ungenau [57]. Unter den für nichtlineare Systeme entwickelten Methoden ist die Bekannteste und am häufigsten Angewandte der Satz von Ljapunow, der auch in dieser Arbeit verwendet wird [28, 31, 42, 57].

Im Allgemeinen kann das Verhalten eines zeitinvarianten nichtlinearen Systems im Zustandsraum mit den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= g_1(x, u) \\
\dot{x}_2 &= g_2(x, u) \\
&\vdots \quad \vdots \\
\dot{x}_n &= g_n(x, u)
\end{aligned}
, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (1.2)$$

dargestellt werden. In (1.2) heißt der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Zustandsvektor des Systems, der aus den Zustandsgrößen von $x_1(t)$ bis $x_n(t)$ besteht. Die Zustandsgrößen repräsentieren die zum Zeitpunkt t gespeicherte Informationen. Sie spielen daher eine große Rolle für die Stabilität des Systems. Die Elemente des Vektors

$$u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

sind die auf das System einwirkenden Eingangsgrößen. \dot{x}_i in (1.2), $i = 1, \dots, n$, bezeichnet die zeitliche Ableitung des i -ten Zustandes. Die Differentialgleichungen (1.2) können auch als

$$\dot{x} = g(x, u) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (1.5)$$

dargestellt werden, wobei x eine Trajektorie im n -dimensionalen Raum beschreibt. Weil in dieser Arbeit autonome Systeme betrachtet werden, wird angenommen, dass keine Eingänge auf das System einwirken, d. h. $u = 0$ ist. Anders ausgedrückt, haben die zu untersuchenden Systeme

$$\dot{x} = g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

als Zustandsraumdarstellung im n -dimensionalen Raum.

Die zweite Annahme in dieser Arbeit ist, dass polynomiale Systeme betrachtet werden. Dank des Approximationssatzes von Weierstraß kann jede stetige Funktion auf einem Kompaktum beliebig genau mit Polynomen approximiert werden [5]. Damit gilt

$$g(x) \approx f(x) \quad , \quad (1.7)$$

so dass die Zustandsraumbeschreibung

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad . \quad (1.8)$$

das Systemverhalten (1.6) sehr gut approximiert, dabei sind die Elemente des Vektors

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad , \quad f(x) \in \mathbb{R}^n \quad (1.9)$$

Polynome in $x \in \mathbb{R}^n$.

Polynomiale Modelle treten in den verschiedenen Bereichen der Wissenschaft auch ohne Approximation auf. Unter diesen befinden sich zum Beispiel das Lotka-Volterra-Modell, das in der Biologie, der Soziologie und der Ökologie verwendet wird [58], das Modell zur Ausbreitung der Krankheit *Malaria* [1] und das Hénon-Heiles-Modell, welches die Bewegung eines Sterns im gemittelten Gravitationsfeld einer Galaxie beschreibt. [23].

1.2 Zielsetzung und Konzept

In dieser Arbeit werden polynomiale autonome Systeme betrachtet, die wenigstens eine asymptotisch stabile Ruhelage im Ursprung des Zustandsraumes haben, weiterhin werden mittels des Satzes von Ehlich und Zeller und der Stabilitätstheorie von Ljapunow numerische Berechnungsmethoden entwickelt, die die asymptotisch stabile Ruhelage im Ursprung analysieren.

Die entwickelten Algorithmen basieren auf dem Satz von Ehlich und Zeller [11]. Dieser Satz liefert eine Ungleichung für die Norm eines Polynoms mit einer Veränderlichen in einem abgeschlossenen Intervall. Gärtel hat gezeigt [17], dass die von Ehlich und Zeller bewiesene Ungleichung für Polynome mit mehreren Variablen gilt, und weitere Ungleichungen nachgewiesen, mit deren Hilfe in einem kompakten Bereich die positive Definitheit eines Polynoms festgestellt werden kann. Deswegen werden der Satz von Ehlich und Zeller und die von Gärtel nachgewiesenen Ungleichungen in *Kapitel 2* ausführlich erläutert.

Die asymptotisch stabile Ruhelage im Ursprung kann nur dann global asymptotisch stabil sein, falls sie die einzige Ruhelage des Systems ist. Die Untersuchung auf die global asymptotische Stabilität des Ursprungs im Zustandsraum kann für polynomiale autonome Systeme mit Hilfe der Stabilitätstheorie von Ljapunow in die Untersuchung der positiven Definitheit eines Polynoms umgesetzt werden.

Systemparameter spielen eine große Rolle für die asymptotische Stabilität eines Systems. Ihre Werte können sowohl nicht genau geschätzt werden als auch sich mit der Zeit ändern. Es ist daher in der Regelungstechnik wichtig zu wissen, wie robust die asymptotische Stabilität einer Ruhelage gegenüber Parameterunsicherheiten ist.

In *Kapitel 3* wird die global positive Definitheit von Polynomen getestet. Nach den Stabilitätssätzen von Ljapunow kann mit Hilfe der global positiven Definitheit eines Polynoms die global asymptotische Stabilität der Ruhelage im Ursprung festgestellt werden. Es wird angenommen, dass die betrachteten Polynome linear abhängig von unbekanntem Parametern sind. Mit Hilfe eines numerischen Algorithmus werden die Parameterwerte bestimmt, für die das betrachtete Polynom global positiv definit ist. Die gefundenen Parameterwerte bilden ein konvexes abgeschlossenes Gebiet im r -dimensionalen Raum, wobei r die Anzahl der unbekanntem Parameter bezeichnet. Mittels eines weiteren Algorithmus wird ein Parametergebiet als möglichst großen Hyperkubus berechnet, so dass für die Parameterwerte im Hyperkubus die global positive Definitheit des untersuchten Polynoms sichergestellt wird. Verschiedene Beispiele veranschaulichen die vorgestellten Berechnungsmethoden.

Ljapunow ging bei seiner Stabilitätstheorie von der Annahme aus, dass eine explizite Lösung der Differentialgleichungen des nichtlinearen Systems nicht bekannt ist. Sein Grundgedanke basiert auf der physikalischen Interpretation der Systemenergie. Eine Ruhelage eines physikalischen Systems ist stabil oder asymptotisch stabil, wenn die Energie

des Systems in der Nähe der Ruhelage ständig abnimmt. Sofern bewiesen werden kann, dass die Systemenergie um die Ruhelage stetig abnimmt, ist sogleich der Nachweis geführt, dass das nichtlineare System um die Ruhelage stabil sein muss. Mit diesem Verfahren müssen die Differentialgleichungen des Systems nicht explizit gelöst werden [42, 57]. Die Ljapunowschen Sätze sind eine Verallgemeinerung dieser Überlegung.

Um jede asymptotisch stabile Ruhelage existiert immer ein Einzugsbereich. Die Gesamtheit aller Punkte des Zustandsraumes, die Anfangsbedingungen der die Zustandsdifferentialgleichungen des Systems erfüllenden Trajektorien sind, bilden den Einzugsbereich der Ruhelage im Ursprung unter der Voraussetzung, dass alle Trajektorien mit der Zeit in den Ursprung laufen [12, 28].

Für nichtlineare Systeme ist es im Grundsatz unmöglich, den gesamten Einzugsbereich zu bestimmen, wenn keine explizite Lösung vorhanden ist. Aber durch die Stabilitätstheorie von Ljapunow kann ein gesicherter Einzugsbereich bestimmt werden, der eine Teilmenge des gesamten Einzugsbereiches ist.

In *Kapitel 4* werden die Sätze von Ljapunow und die Begriffe *Einzugsbereich* und *gesicherter Einzugsbereich* ausführlich erläutert.

Mit einer geeigneten Ljapunow-Funktion kann immer ein gesicherter Einzugsbereich bestimmt werden, wenn die untersuchte Ruhelage asymptotisch stabil ist. Die Frage, wie ein möglichst großer gesicherter Einzugsbereich mit einer angegebenen geeigneten Ljapunow-Funktion berechnet wird, wird in *Kapitel 5* behandelt. Das in diesem Kapitel vorgestellte numerische Verfahren ermöglicht es, für eine angegebene geeignete Ljapunow-Funktion den möglichst großen gesicherten Einzugsbereich zu finden. Diese Methode für die Bestimmung des möglichst großen gesicherten Einzugsbereiches wird durch verschiedene Beispiele veranschaulicht.

Das letzte Kapitel, *Kapitel 6*, beinhaltet eine Zusammenfassung und einen Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

2.1 Satz von Ehlich und Zeller

Die numerischen Algorithmen, die im Kapitel 3 und im Kapitel 5 vorgestellt werden, basieren auf dem Satz von Ehlich und Zeller [11]. Dieser wird in diesem Abschnitt ausführlich erläutert. Der Satz gilt sowohl für trigonometrische, als auch für algebraische Polynome.

Ein trigonometrisches Polynom m -ter Ordnung ist gegeben durch

$$p(\theta) = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^k a_{ki} \sin^i \theta \cos^{k-i} \theta = \sum_{k=0}^m (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (2.1)$$

wobei $\theta \in [0, 2\pi]$ den Winkel, sowie a_{ki} , a_k und $b_k \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten des Polynoms darstellen.

$p_1(\theta)$ gehöre zu der Menge $P_{\theta_1}^m$ von trigonometrischen Polynomen m -ten Grades, und $P_{\theta_1}^m$ beschreibe die Menge aller trigonometrischen Polynome mit einer Variable, die an den Gitterpunkten

$$\vartheta_i = \alpha + \frac{\pi}{N} i, \quad i = 1, \dots, 2N \quad (2.2)$$

die Ungleichungen

$$|p_1(\vartheta_i)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 2N \quad (2.3)$$

erfüllen. Hierbei ist $\alpha \in [0, 2\pi]$ eine Konstante, ϑ_i ein Gitterpunkt und $2N$ die Anzahl der Gitterpunkte. Nach dem Satz von Ehlich und Zeller [11] ist die Ungleichung

$$\|p_1(\theta)\|^{J_\theta} = \max_{\theta \in J_\theta} |p_1(\theta)| \leq C \left(\frac{m}{N}\right) \quad (2.4)$$

unter der Bedingung $N > m$ immer erfüllt. In (2.4) stellen J_θ das Intervall $[0, 2\pi]$, $\|p_1(\theta)\|^{J_\theta}$ die Maximumnorm im Intervall J_θ , und $C \left(\frac{m}{N}\right)$ die Konstante

$$C \left(\frac{m}{N}\right) = \left[\cos \left(\frac{\pi m}{2N} \right) \right]^{-1} \quad (2.5)$$

dar. Die Voraussetzung (2.3) soll im Folgenden abgeschwächt werden. Ein Polynom m -ter Ordnung (2.1) sei gegeben. Die Gitterpunkte (2.2) bilden die Menge

$$\theta(N_\theta, J_\theta) = \{ \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{2N} \}, \quad (2.6)$$

die eine Teilmenge des Intervalls J_θ ist.

Die Maximumnorm des Polynoms $p(\theta)$ in der Menge $\theta(N_\theta, J_\theta)$ ist durch

$$\|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = \max_{\vartheta_i \in \theta(N_\theta, J_\theta)} |p(\vartheta_i)|, \quad i = 1, \dots, 2N \quad (2.7)$$

gegeben. Da die Gitterpunkte bekannt sind, ist die Maximumnorm an den Gitterpunkten bekannt und konstant. Das bedeutet, dass das Polynom

$$p_1(\theta) = \frac{p(\theta)}{\|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)}} \quad (2.8)$$

zu der Menge $P_{\theta_1}^m$ gehören muss. Anders ausgedrückt $p_1(\theta)$ erfüllt an den Gitterpunkten die Ungleichungen (2.3). Nach dem Satz von Ehlich und Zeller [11] gilt dann für $p_1(\theta)$ die Ungleichung (2.4). Daraus ergibt sich

$$\|p(\theta)\|^{J_\theta} \leq C \left(\frac{m}{N}\right) \|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)}, \quad (2.9)$$

wobei

$$\|p(\theta)\|^{J_\theta} = \max_{\theta \in J_\theta} |p(\theta)| \quad (2.10)$$

die Maximumnorm des Polynoms $p(\theta)$ im Intervall $J_\theta = [0, 2\pi]$ darstellt.

Ein algebraisches Polynom m -ter Ordnung kann im Allgemeinen in der Darstellung

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

beschrieben werden, wobei a_i den i -ten Koeffizienten des Polynoms bezeichnet.

$p_1(\tilde{x})$ gehöre zu der Menge P_1^m von algebraischen Polynomen m -ten Grades, und P_1^m beschreibe die Menge aller algebraischen Polynome mit einer Variable, die an den Gitterpunkten

$$\tilde{x}_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

im Intervall $J_e = [-1, 1]$ unter der Bedingung $N > m$ die Ungleichungen

$$|p_1(\tilde{x}_i)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

erfüllen. Die Gitterpunkte (2.12) bilden die Menge

$$\tilde{x}(N, J_e) = \{ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N \}, \quad (2.14)$$

die eine Teilmenge des Intervalls J_e ist.

Die Elemente der Menge (2.14) heißen Tschebyscheff-Punkte, da sie die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms N -ten Grades sind [5]. Ein Tschebyscheff-Polynom m -ten Grades wird durch

$$T_m(x) = \cos(m(\arccos x)) \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (2.15)$$

definiert und ist allgemein für beliebige x durch

$$T_m(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^m \right] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

gegeben. Alle Nullstellen eines Tschebyscheff-Polynoms befinden sich im Intervall J_e und alle Tschebyscheff-Polynome gehören zu der Menge P_1^m , $m \in \mathbb{N}$ [5]. Denn sie erfüllen die Ungleichung

$$|T_m(x)| \leq 1, \quad x \in J_e, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Tschebyscheff-Punkte liefern optimal verteilte Stützpunkte zu der Approximation gewisser Funktionen im Intervall J_e . Dies ist der Grund, warum sie als Gitterpunkte verwendet werden. Sie sind nicht äquidistant im Intervall J_e , sondern treten vermehrt an den Enden des Intervalls auf [43].

Unter der Voraussetzung (2.13) gilt die Ungleichung

$$\|p_1(\tilde{x})\|^{J_e} = \max_{\tilde{x} \in J_e} |p_1(\tilde{x})| \leq C \left(\frac{m}{N} \right). \quad (2.18)$$

Falls (2.13) nicht erfüllt ist, gilt die modifizierte Ungleichung

$$\|p(\tilde{x})\|^{J_e} \leq C \left(\frac{m}{N} \right) \|p(\tilde{x})\|^{x(N, J_e)}. \quad (2.19)$$

Betrachtet man nun ein beliebiges algebraisches Polynom m -ten Grades (2.11) auf dem Intervall

$$J = [a, b], \quad b > a, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

so ist die Menge der Tschebyscheff-Punkte durch

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left(\frac{(2i-1)\pi}{2N} \right) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.21)$$

gegeben. Mit der Abkürzung

$$x(N, J) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (2.22)$$

gilt die Ungleichung

$$\|p(x)\|^J \leq C \left(\frac{m}{N} \right) \|p(x)\|^{x(N, J)}. \quad (2.23)$$

2.2 Gürtels Ungleichungen

Gürtel hat bewiesen [17], dass die Ungleichung (2.23) auch für Polynome mit mehreren Variablen gilt. $p(x)$ sei ein algebraisches Polynom mit n Variablen. Das für die Veränderliche x_i betrachtete Intervall sei

$$J_i = [a_i, b_i], \quad b_i > a_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

Daraus folgt, dass das Polynom $p(x)$ im Gebiet

$$\hat{J} = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n \quad (2.25)$$

betrachtet wird. Das Gebiet \hat{J} stellt einen Hyperquader im n -dimensionalen Raum dar. Die Maximumnorm des Polynoms im Hyperquader \hat{J} wird durch

$$\begin{aligned} \|p(x)\|^{\hat{J}} &= \max_{x_1 \in J_1} \left[\max_{x_2 \in J_2} \left[\dots \left[\max_{x_n \in J_n} |p(x_1, x_2, \dots, x_n)| \right] \dots \right] \right] \\ &= \max_{x \in \hat{J}} |p(x)| \end{aligned} \quad (2.26)$$

definiert. Im Folgenden ist m_i der Grad des Polynoms $p(x)$ in Bezug auf die Variable x_i , und N_i ist die Anzahl der Tschebyscheff-Punkte im Intervall J_i . Darüber hinaus werden die positiven ganzen Zahlen $N_i, i = 1, \dots, n$, so gewählt, dass sie die Voraussetzungen

$$N_i > m_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

erfüllen. Unter diesen Annahmen werden die Tschebyscheff-Punkte für die Variable x_i im Intervall J_i durch

$$x_{i,j} = \frac{a_i + b_i}{2} + \frac{b_i - a_i}{2} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2N_i}\right), \quad j = 1, \dots, N_i \quad (2.28)$$

berechnet. Dann definiert die Menge

$$x_i(N_i, J_i) = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,N_i}\} \quad (2.29)$$

die Menge der Tschebyscheff-Punkte im Intervall J_i und die Menge

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = x_1(N_1, J_1) \times x_2(N_2, J_2) \times \dots \times x_n(N_n, J_n) \quad (2.30)$$

beschreibt die Menge der Tschebyscheff-Punkte im Gebiet \hat{J} , wobei

$$\hat{N} = \prod_{i=1}^n N_i \quad (2.31)$$

die gesamte Anzahl der Tschebyscheff-Punkte im Gebiet \hat{J} darstellt.

Gärtel hat die Ungleichung

$$\|p(x)\|^{\hat{J}} \leq K \|p(x)\|^{x(\hat{N}, \hat{J})} \quad (2.32)$$

mit der Konstante

$$K = \prod_{i=1}^n C\left(\frac{m_i}{N_i}\right) \quad (2.33)$$

bewiesen.

Analog gilt für ein trigonometrisches Polynom mit n Variablen im Gebiet

$$\hat{J}_\theta = [0, 2\pi]^n \quad (2.34)$$

eine entsprechende Ungleichung, die im Folgenden bewiesen wird. Wir bezeichnen mit m_i den Grad des Polynoms $p(\theta)$ in Bezug auf die Variable θ_i und mit $2N_{\theta_i}$ die Anzahl der Gitterpunkte für θ_i . Darüber hinaus werden die positiven ganzen Zahlen N_{θ_i} so gewählt, dass sie die Voraussetzungen

$$N_{\theta_i} > m_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

erfüllen. Unter diesen Annahmen werden die Gitterpunkte für die Variable θ_i im Intervall $[0, 2\pi]$ durch

$$\vartheta_{i,j} = \frac{(j-1)}{N_{\theta_i}} \pi, \quad j = 1, \dots, 2N_{\theta_i} \quad (2.36)$$

berechnet. Durch (2.36) wird die Menge

$$\theta_i(N_{\theta_i}, J_{\theta_i}) = \{\vartheta_{i,1}, \vartheta_{i,2}, \dots, \vartheta_{i,2N_{\theta_i}}\} \quad (2.37)$$

im Intervall J_{θ_i} definiert und die Menge

$$\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta) = \theta_1(N_{\theta_1}, J_{\theta_1}) \times \theta_2(N_{\theta_2}, J_{\theta_2}) \times \cdots \times \theta_n(N_{\theta_n}, J_{\theta_n}) \quad (2.38)$$

beschreibt die Menge der Gitterpunkte im Hyperquader \hat{J}_θ . Dabei ist

$$\hat{N}_\theta = 2^n \prod_{i=1}^n N_{\theta_i} \quad (2.39)$$

die gesamte Anzahl der Gitterpunkte im Hyperquader \hat{J}_θ .

Analog zu algebraischen Polynomen gilt die Ungleichung

$$\|p(\theta)\|^{\hat{J}_\theta} \leq K_\theta \|p(\theta)\|^{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)} \quad (2.40)$$

mit der Konstanten

$$K_\theta = \prod_{i=1}^n C\left(\frac{m_i}{N_{\theta_i}}\right) . \quad (2.41)$$

Aus den bisherigen Ungleichungen für die Maximumnorm hat Gärtel die folgenden Ungleichungen

$$p_{min}^{\hat{J}} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K+1) p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} \quad (2.42)$$

und

$$p_{max}^{\hat{J}} \leq \frac{1}{2} \left\{ (K+1) p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} , \quad (2.43)$$

für Minimum und Maximum hergeleitet [17]. In (2.42) und (2.43) stellt K die Konstante in (2.33), $p_{min}^{\hat{J}}$ den minimalen Wert und $p_{max}^{\hat{J}}$ den maximalen Wert des algebraischen Polynoms $p(x)$ im in (2.25) angegebenen Hyperquader \hat{J} dar. $p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})}$ beschreibt den minimalen Wert und $p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})}$ den maximalen Wert bei den in (2.28) definierten Tschebyscheff-Punkten.

Analog zu den Ungleichungen (2.42) und (2.43) für algebraische Polynome gelten die Ungleichungen

$$p_{min}^{\hat{J}_\theta} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K_\theta+1) p_{min}^{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)} - (K_\theta-1) p_{max}^{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)} \right\} \quad (2.44)$$

und

$$p_{max}^{\hat{J}_\theta} \leq \frac{1}{2} \left\{ (K_\theta+1) p_{max}^{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)} - (K_\theta-1) p_{min}^{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)} \right\} , \quad (2.45)$$

für trigonometrische Polynome. Dabei ist K_θ die Konstante in (2.41), $p_{min}^{\hat{J}_\theta}$ der minimale Wert und $p_{max}^{\hat{J}_\theta}$ der maximale Wert des trigonometrischen Polynoms $p(\theta)$ im in (2.34) angegebenen Hyperquader \hat{J}_θ . $p_{min}^{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)}$ beschreibt den minimalen und $p_{max}^{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)}$ den maximalen Wert in der in (2.38) definierten Menge der Gitterpunkte.

2.3 Beispiele

Die in den vorherigen Abschnitten behandelten mathematischen Theorien werden in diesem Unterkapitel durch drei Beispiele verdeutlicht.

Beispiel 2.1

In diesem Beispiel wird das trigonometrische Polynom fünften Grades

$$p(\theta) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos \theta + \frac{\cos(3\theta)}{9} + \frac{\cos(5\theta)}{25} \right) \quad (2.46)$$

im Intervall $J_\theta = [0, 2\pi]$ betrachtet. Es werden $2N_\theta = 16$ Gitterpunkte verwendet, die durch die Formel

$$\vartheta_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2N_\theta}, \quad i = 1, \dots, 2N_\theta \quad (2.47)$$

berechnet werden, wobei $N_\theta = 8$ ist. Die aus den Gitterpunkten (2.47) gebildete Menge ist

$$\theta(8, J_\theta) = \left\{ \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{19\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{23\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}, \frac{27\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}, \frac{31\pi}{16} \right\}. \quad (2.48)$$

Für die Gitterpunkte in (2.48) werden die Werte

$$\|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = 2,966, \quad p_{\min}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = 0,176 \quad \text{und} \quad p_{\max}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = 2,966 \quad (2.49)$$

berechnet. Der Wert der Konstante $C\left(\frac{m}{N_\theta}\right)$, die die Ungleichung

$$\|p(\theta)\|^{J_\theta} \leq C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) \|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)} \quad (2.50)$$

sicherstellt, ist

$$C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi m}{2N_\theta}\right) \right]^{-1} = \left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right) \right]^{-1} = 1,8. \quad (2.51)$$

Mittels der Ungleichungen (2.44) und (2.45) wurden für das Polynom (2.46) eine untere und eine obere Schranke gefunden, so dass die Ungleichungen

$$p_{\text{unten}}^{J_\theta} \leq p(\theta) \leq p_{\text{oben}}^{J_\theta}, \quad \theta \in J_\theta \quad (2.52)$$

erfüllt werden, wobei

$$p_{\text{unten}}^{J_\theta} = \frac{1}{2} \left\{ \left(C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) + 1 \right) p_{\min}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} - \left(C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) - 1 \right) p_{\max}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} \right\} = -0,94 \quad (2.53)$$

und

$$p_{\text{oben}}^{J_\theta} = \frac{1}{2} \left\{ \left(C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) + 1 \right) p_{\max}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} - \left(C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) - 1 \right) p_{\min}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} \right\} = 4,08 \quad (2.54)$$

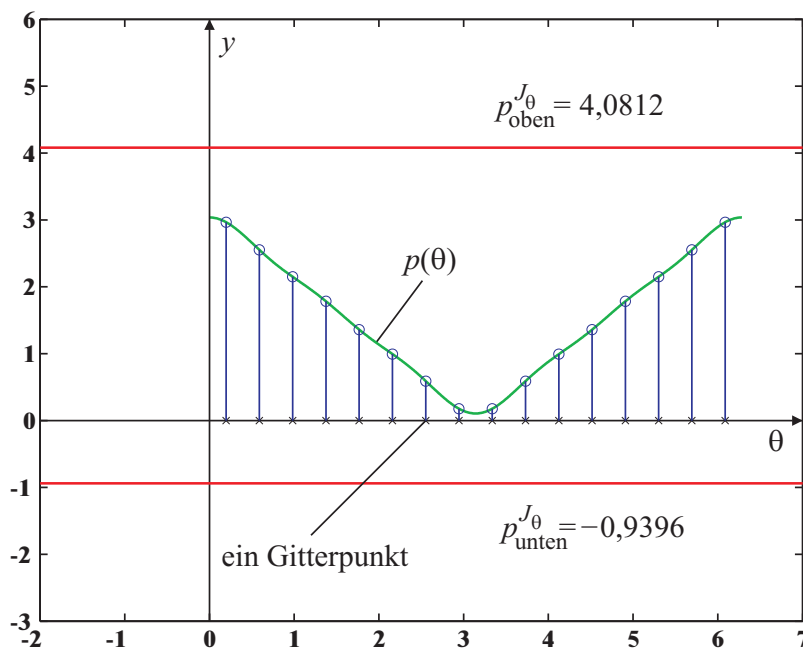


Abbildung 2.1: Die untere und die obere Schranke für 16 Gitterpunkte und für Beispiel 2.1.

sind. In der Abbildung 2.1 sind die obere Schranke $p_{\text{oben}}^{J_\theta}$, die untere Schranke $p_{\text{unten}}^{J_\theta}$ und das Polynom $p(\theta)$ im Intervall J_θ grafisch dargestellt.

Beispiel 2.2

Das algebraische Polynom dritten Grades

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \quad (2.55)$$

wird im Intervall $J = [-4, 3]$ betrachtet. Die Tschebyscheff-Punkte im Intervall J werden durch die Formel

$$x_i = \frac{-4 + 3}{2} + \frac{3 - (-4)}{2} \cos\left(\frac{(2i - 1)\pi}{2N}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.56)$$

definiert, wobei N die Anzahl der Tschebyscheff-Punkte darstellt. Die aus neun Tschebyscheff-Punkten bestehende Menge ist

$$x(9, J) = \{ 2,95, 2,53, 1,75, 0,7, -0,5, -1,7, -2,75, -3,53, -3,95 \}. \quad (2.57)$$

Für die Tschebyscheff-Punkte in (2.57) werden die Werte

$$\|p(x)\|^{x(9, J)} = 19,77, \quad p_{\min}^{x(9, J)} = -19,77 \quad \text{und} \quad p_{\max}^{x(9, J)} = 12,58 \quad (2.58)$$

berechnet. Die Konstante $C\left(\frac{m}{N}\right)$, die die Ungleichung

$$\|p(x)\|^J \leq C\left(\frac{m}{N}\right) \|p(x)\|^{x(N, J)} \quad (2.59)$$

sicherstellt, ist

$$C\left(\frac{m}{N}\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) \right]^{-1} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (2.60)$$

Mit Hilfe der Ungleichungen (2.42) und (2.43) werden die untere Schranke

$$p_{\text{unten}}^J = \frac{1}{2} \left\{ \left(C \left(\frac{m}{N} \right) + 1 \right) p_{\min}^{x(N,J)} - \left(C \left(\frac{m}{N} \right) - 1 \right) p_{\max}^{x(N,J)} \right\} = -22,27 \quad (2.61)$$

und die obere Schranke

$$p_{\text{oben}}^J = \frac{1}{2} \left\{ \left(C \left(\frac{m}{N} \right) + 1 \right) p_{\max}^{x(N,J)} - \left(C \left(\frac{m}{N} \right) - 1 \right) p_{\min}^{x(N,J)} \right\} = 15,08 \quad (2.62)$$

für das in (2.55) angegebene Polynom $p(x)$ im Intervall J bestimmt, so dass

$$p(x) \in [p_{\text{unten}}^J, p_{\text{oben}}^J] \quad \forall x \in J = [-4, 3] \quad (2.63)$$

gilt.

Die Abbildung 2.2 zeigt die obere Schranke p_{oben}^J , die untere Schranke p_{unten}^J und das Polynom $p(x)$ im Intervall J .

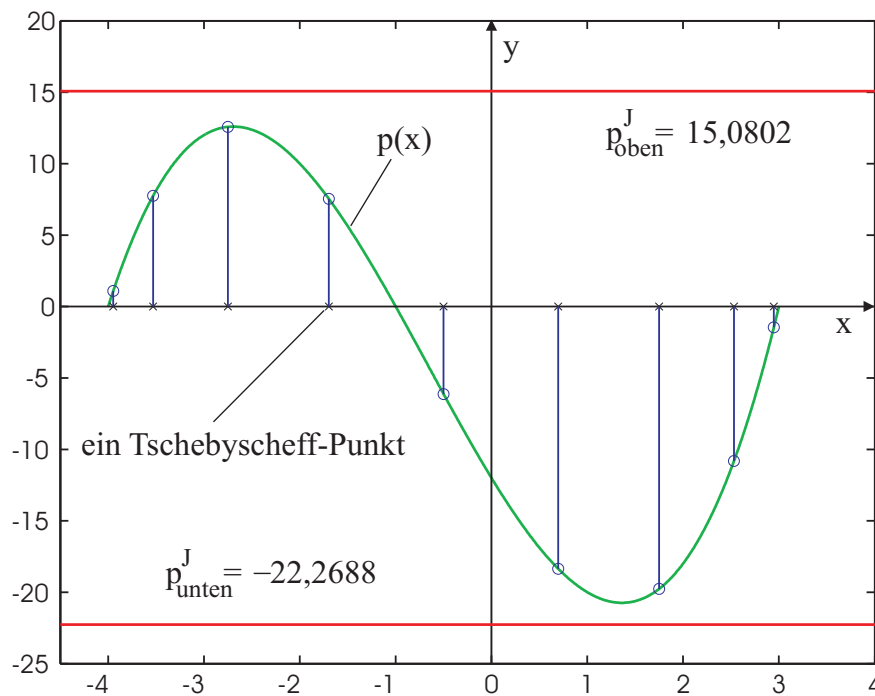


Abbildung 2.2: Die untere und die obere Schranke für 9 Tschebyscheff-Punkte und für Beispiel 2.2.

Beispiel 2.3

In diesem Beispiel wird das algebraische Polynom mit zwei Variablen

$$p(x) = 1 + x_1 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.64)$$

im Rechteck

$$\hat{J} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [-2, 1] \times [-3, 2] \quad (2.65)$$

betrachtet. Der Grad des Polynoms in Bezug auf die Variable x_1 ist $m_1 = 1$ und der Grad in Bezug auf die Variable x_2 ist $m_2 = 2$.

Aus drei Tschebyscheff-Punkten je Variable, die durch die Formel (2.28) bestimmt werden, geht die Menge

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1,67 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,8 \\ -2,67 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1,67 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2,67 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,8 \\ 1,67 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,8 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,8 \\ -2,67 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.66)$$

hervor, wobei

$$\hat{N} = \prod_{i=1}^2 N_i = N_1 N_2 = 9 \quad (2.67)$$

die gesamte Anzahl der Tschebyscheff-Punkte ist. Die Tschebyscheff-Punkte und das Rechteck \hat{J} sind in der Abbildung 2.3 grafisch dargestellt.

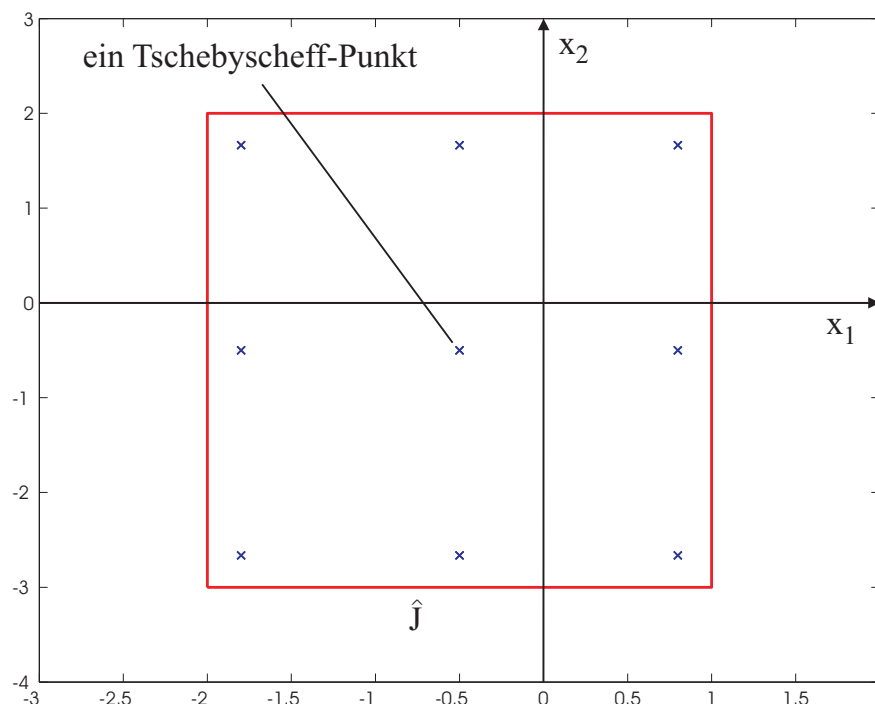


Abbildung 2.3: Die Tschebyscheff-Punkte und das Rechteck \hat{J} für Beispiel 2.3.

In der Menge (2.66) besitzt das in (2.64) definierte Polynom die Werte

$$\|p(x)\|^{x(\hat{N}, \hat{J})} = 8,9 \quad , \quad p_{\min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} = -0,55 \quad \text{und} \quad p_{\max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} = 8,9 . \quad (2.68)$$

Die Konstante K , die die Ungleichung

$$\|p(x)\|^{\hat{J}} \leq K \|p(x)\|^{x(\hat{N}, \hat{J})} \quad (2.69)$$

sicherstellt, ist

$$K = \prod_{i=1}^2 C \left(\frac{m_i}{N_i} \right) = 2,31 . \quad (2.70)$$

Der Wertebereich des Polynoms in (2.64) liegt im Intervall $[p_{\text{unten}}^{\hat{J}}, p_{\text{oben}}^{\hat{J}}]$ für alle x -Werte in der in (2.65) angegebenen Menge \hat{J} , wobei

$$p_{\text{unten}}^{\hat{J}} = \frac{1}{2} \left\{ (K+1) p_{\min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{\max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} = -6,74 \quad (2.71)$$

und

$$p_{\text{oben}}^{\hat{J}} = \frac{1}{2} \left\{ (K+1) p_{\max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{\min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} = 15,09 \quad (2.72)$$

sind. In der Abbildung 2.4 sind die obere Schranke $p_{\text{oben}}^{\hat{J}}$, die untere Schranke $p_{\text{unten}}^{\hat{J}}$ und das Polynom $p(x)$ im Bereich \hat{J} grafisch dargestellt.

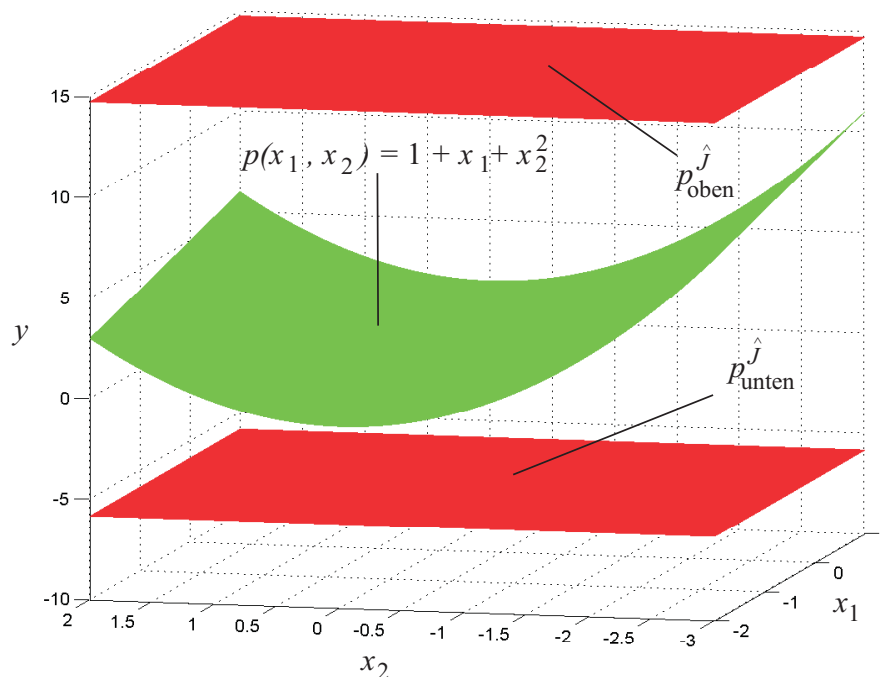


Abbildung 2.4: Die untere und die obere Schranke für 9 Tschebyscheff-Punkte und für Beispiel 2.3.

Kapitel 3

Robuste positive Definitheit von Polynomen mit unsicheren Parametern

3.1 Einleitung

Für die Untersuchung der global asymptotischen Stabilität eines nichtlinearen Systems nach der Stabilitätstheorie von Ljapunow ist es von großer Bedeutung, die robuste positive Definitheit von Funktionen zu untersuchen. Da die Systemparameter eine entscheidende Rolle bei der Stabilität spielen, muss die Frage gestellt werden, wie robust das Systemverhalten ihnen gegenüber ist. In dieser Doktorarbeit wird angenommen, dass die Systeme, die untersucht werden, durch algebraische Polynome beschrieben werden. In diesem Fall wird die Untersuchung der Stabilität nach der Stabilitätstheorie von Ljapunow auf die Untersuchung der positiven Definitheit eines Polynoms reduziert [2, 4, 16, 20, 38, 48, 50, 55, 61]. Das Ziel dieses Kapitels ist es, die globale positive Definitheit von Polynomen zu untersuchen. Im Allgemeinen kann ein beliebiges algebraisches Polynom $p(x)$ in der Form

$$p(x) = \sum_{i=1}^s p_{\alpha_i} x^{\alpha_i}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

dargestellt werden, wobei

$$x^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ij}} \quad (3.2)$$

das i -te Monom des Polynoms $p(x)$, p_{α_i} der Koeffizient des i -ten Monoms und s die Anzahl der Monome im Polynom sind. Der Grad des i -ten Monoms wird als

$$|\alpha_i| = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \quad (3.3)$$

definiert, wobei α_{ij} entweder eine positive ganze Zahl oder Null ist. Der Grad des Polynoms $p(x)$ wird durch

$$\deg p(x) = \max |\alpha_i|, \quad i = 1, \dots, s \quad (3.4)$$

bestimmt.

Eine weitere Annahme ist, dass das Polynom $p(x)$ linear abhängig von unbekanntem Parametern ist. Man kann dann die Gleichung (3.1) umformen und das Polynom $p(x)$ als

$$p(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^r k_i p_i(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

darstellen, wobei die unbekanntem Parameter durch die Koeffizienten k_i gegeben sind. Ziel ist es, den geeigneten Bereich im Parameterraum zu bestimmen, so dass für die Parameterwerte in diesem Bereich das Polynom $p(x)$ global positiv definit ist. Dieser Bereich wird definiert als

$$\Omega = \{ k \in \mathbb{R}^r \mid p(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \} , \quad (3.6)$$

wobei der Vektor k die unbekanntem Parameter im Polynom $p(x)$ darstellt. Hier beschreibt der Bereich Ω eine konvexe Menge. Denn das Polynom $p(x)$ ist linear abhängig von unbekanntem Parametern. Je größer der Ω -Bereich ist, desto robuster ist das Polynom $p(x)$ gegen Parameterunsicherheiten.

Die wichtige Frage ist nun, wie man die Menge Ω , sofern sie existiert, bestimmt. Zur Antwort auf diese Frage wurden verschiedene Algorithmen entwickelt [3, 4, 10, 19, 45, 49, 52, 54]. In diesem Kapitel werden nun zwei neue numerische Berechnungsmethoden vorgestellt, mit deren Hilfe der ganze Ω -Bereich und ein Teil dieses Ω -Bereiches ermittelt werden. Mittels des Satzes von Ehlich und Zeller, der im Kapitel 2 beschrieben wurde, kann man die positive Definitheit von Polynomen in einem kompakten Gebiet \hat{J} untersuchen. Um das Ziel zu erreichen, wird die Ungleichung

$$p_{min}^{\hat{J}} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K+1) p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} \quad (3.7)$$

verwendet, die von Gärtel bewiesen wurde [17]. Hier ist K eine konstante Zahl, die größer als eins ist und nach der Formel (2.33) berechnet wird, $p_{min}^{\hat{J}}$ der minimale Wert des Polynoms $p(x)$ im Gebiet \hat{J} , $p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})}$ der minimale Wert und $p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})}$ der maximale Wert des Polynoms $p(x)$ an den Tschebyscheff-Punkten in \hat{J} . Im folgenden Unterkapitel wird die numerische Berechnungsmethode für die Bestimmung des ganzen Ω -Bereiches vorgestellt.

3.2 Numerische Berechnungsmethode

Die Ungleichung (3.7) ist anwendbar, wenn die positive Definitheit eines Polynoms in einem abgeschlossenen und beschränkten Gebiet \hat{J} untersucht werden soll. Ist in einem bestimmten Gebiet \hat{J} die Ungleichung

$$(K+1) p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} > 0 \quad (3.8)$$

erfüllt, bedeutet das, dass der minimale Wert des Polynoms $p(x)$ in \hat{J} größer als Null ist, bzw. das Polynom $p(x)$ im abgeschlossenen und beschränkten Gebiet \hat{J} positiv ist. Da allerdings die global positive Definitheit untersucht werden soll und \mathbb{R}^n nicht kompakt ist, ist die Ungleichung (3.8) in dieser Form hier nicht anwendbar. Um dieses Problem zu lösen, wird das sogenannte homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$ nach

$$\tilde{p}(x_0, \dots, x_n) = x_0^{\deg p(x)} p\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \quad (3.9)$$

dem Polynom $p(x)$ zugeordnet. Dann gilt die Äquivalenz

$$\tilde{p}(x) > 0 \quad \forall x \in (\mathbb{R}^{n+1})_0^+ \quad \iff \quad p(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.10)$$

wobei $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ die Menge

$$(\mathbb{R}^{n+1})_0^+ = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 > 0 \} \quad (3.11)$$

bezeichnet. Anstatt die global positive Definitheit des Originalpolynoms $p(x)$ zu testen, kann nun die positive Definitheit des homogenisierten Polynoms $\tilde{p}(x)$ in der Menge $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ überprüft werden. Ist das Polynom $\tilde{p}(x)$ in $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ positiv, muss das Polynom $p(x)$ global positiv definit sein. Da auch $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ nicht kompakt ist, ist die Ungleichung (3.8) immer noch nicht anwendbar. Aufgrund der Homogenität des Polynoms $\tilde{p}(x)$ hat jedes Monom den Grad, der gleich dem Grad des Polynoms $p(x)$ ist. Es gilt

$$|\tilde{\alpha}_i| = \deg p(x), \quad i = 1, \dots, s, \quad (3.12)$$

wobei $|\tilde{\alpha}_i|$ den Grad des i -ten Monoms im homogenisierten Polynom darstellt. Dann ist die Gleichung

$$\tilde{p}(\lambda x) = \lambda^{\deg p(x)} \tilde{p}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (3.13)$$

für jede beliebige Zahl λ gültig. Wenn λ eine positive Zahl ist, gilt die Äquivalenz

$$\tilde{p}(x) > 0 \quad \forall x \in (\mathbb{R}^{n+1})_0^+ \quad \iff \quad \lambda^{\deg p(x)} \tilde{p}(x) > 0 \quad \forall x \in (\mathbb{R}^{n+1})_0^+. \quad (3.14)$$

Wird λ als

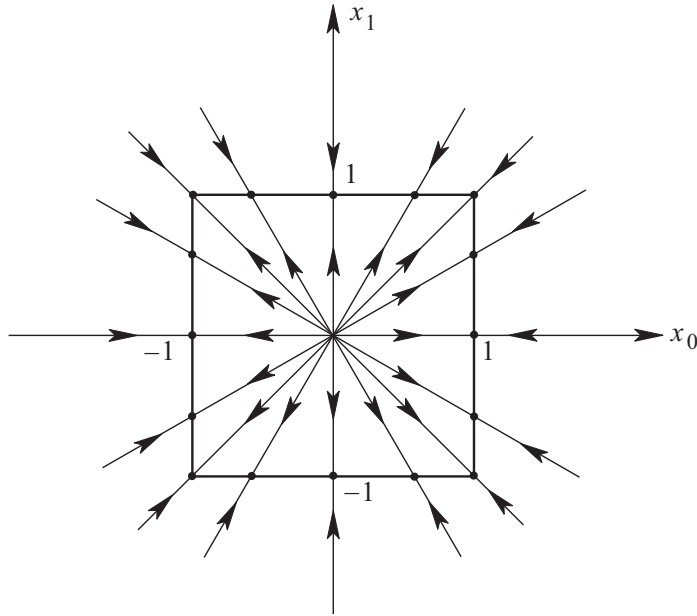
$$\lambda = \left(\max_{i=0, \dots, n} |x_i| \right)^{-1} \quad (3.15)$$

gewählt, liegt (λx) auf dem Rand eines Hyperkubus, dessen Definition durch

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 0, \dots, n \} \quad (3.16)$$

gegeben ist.

In Abbildung 3.1 ist der Hyperkubus H im zweidimensionalen Raum dargestellt, der dem Einheitsquadrat entspricht. Da der Rand von H nun aus kompakten Teilmengen besteht, kann die Ungleichung (3.8) angewendet werden. Wenn das Polynom $\tilde{p}(x)$ am Rand des Hyperkubus H positiv ist, ist es nach der Äquivalenz (3.14) im $(n+1)$ -dimensionalen Raum global positiv. Falls die Werte des homogenisierten Polynoms $\tilde{p}(x)$ an den Rändern des Hyperkubus, bei denen die Variable x_0 positiv ist, größer als Null sind, ist es in der Menge $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ positiv definit. Daraus folgt auch, dass das Polynom $p(x)$ der Äquivalenz (3.10) zufolge im n -dimensionalen Raum global positiv definit ist. Durch die Transformation wird die Untersuchung der global positiven Definitheit eines Polynoms mit n Variablen darauf reduziert, die positive Definitheit eines Polynoms mit $(n+1)$ Variablen an den bestimmten Rändern des Hyperkubus H zu testen. Unter der Voraussetzung $x_0 > 0$ bestehen die Ränder aus bestimmten Anzahlen von Hyperquadern. Die Mengen

Abbildung 3.1: Hyperkubus H im zweidimensionalen Raum.

$$H_0 = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1, -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n \},$$

$$H_j^\mp = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_j = \mp 1, 0 < x_0 \leq 1, -1 \leq x_i \leq 1, i \neq j, \\ i = 1, \dots, n \}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

beschreiben die Hyperquader im $(n+1)$ -dimensionalen Raum, die die Ränder des Hyperkubus H sind und verwendet werden, um die global positive Definitheit des Originalpolynoms $p(x)$ zu untersuchen. Die Abbildung 3.2 zeigt die Hyperquader im zweidimensionalen Raum, die in diesem Fall drei Seiten eines Rechtecks darstellen.

Jeder Rand in (3.17) beschreibt ein kompaktes abgeschlossenes Gebiet \hat{J} , d. h. im Folgenden wird

$$\hat{J} \in \{ H_0, H_1^+, H_1^-, \dots, H_n^+, H_n^- \} \quad (3.18)$$

gelten.

Die gesamte Anzahl der kompakten abgeschlossenen Gebiete, in denen die positive Definitheit des homogenisierten Polynoms $\tilde{p}(x)$ getestet werden muss, ist $(2n+1)$. Die Ungleichung (3.8) ist anwendbar, sofern das Originalpolynom $p(x)$ keinen unsicheren Parameter enthält. In diesem Fall definiert man nach der Homogenisierung die Tschebyscheff-Punkte in jedem Gebiet in der Menge (3.18) und berechnet den maximalen und minimalen Wert des homogenisierten Polynoms $\tilde{p}(x)$ für jedes Gebiet. Wenn die Ungleichung (3.8) in allen Gebieten gilt, ist dadurch die global positive Definitheit des Polynoms $p(x)$ bewiesen. In der Annahme ist aber das Originalpolynom $p(x)$ linear abhängig von unsicheren Parametern und wird nach (3.5) dargestellt. Die Ungleichung (3.8) allein reicht nicht aus, um den Parameterbereich Ω zu berechnen. Denn es ist unmöglich, den maximalen und den minimalen Wert eines Polynoms mit unsicheren Parametern zu bestimmen. Deshalb müssen zusätzliche Ungleichungen gefunden werden, mit deren Hilfe der Ω -Bereich im Parameterraum bestimmt werden kann. Unter der Bedingung, dass die Ungleichung (3.8) in einem

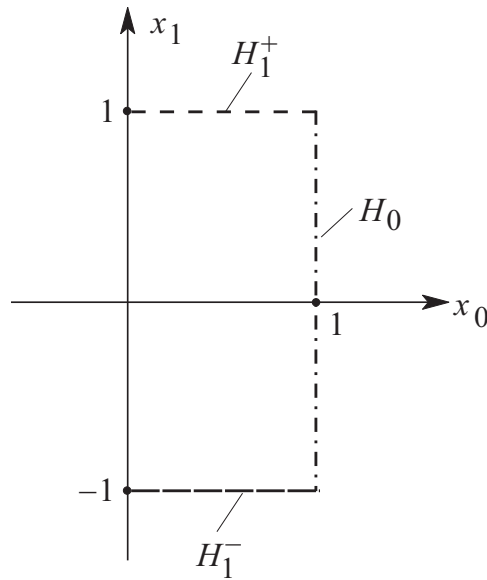


Abbildung 3.2: Hyperquader im zweidimensionalen Raum.

kompakten abgeschlossenen Gebiet \hat{J} gilt, müssen die Ungleichungen

$$(K + 1) \tilde{p}(x_i) - (K - 1) \tilde{p}(x_j) > 0, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N} \quad (3.19)$$

mit

$$\tilde{p}_{\min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \leq \tilde{p}(x_i) \leq \tilde{p}_{\max}^{x(\hat{N}, \hat{J})}, \quad i = 1, \dots, j, \dots, \hat{N} \quad (3.20)$$

in demselben Gebiet gelten, wobei $x_i, x_j \in x(\hat{N}, \hat{J})$ zwei Tschebyscheff-Punkte in \hat{J} sind. Es existieren \hat{N}^2 Ungleichungen der Form (3.19). Da die Anzahl der Gebiete, die in der Menge (3.18) liegen und überprüft werden müssen, $(2n + 1)$ ist, müssen also $(2n + 1)\hat{N}^2$ Ungleichungen der Form (3.19) überprüft werden, um die konvexe Menge Ω im Parameterraum zu ermitteln, für deren Elemente das Originalpolynom $p(x)$ global positiv definit ist.

3.3 Untersuchung von Polynomen mit einem unsicheren Parameter

Ein beliebiges Polynom $p(x)$ mit n -Variablen, das einen unbekanntem Parameter beinhaltet und von ihm linear abhängig ist, kann in der Form

$$p(x) = p_0(x) + k_1 p_1(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.21)$$

dargestellt werden. Im Folgenden wird die im vorangegangenen Unterkapitel dargestellte allgemeine Berechnungsmethode auf dieses Beispiel angewendet. Dazu werden die bisher allgemein durgeführten Überlegungen für den Fall eines Parameters erläutert.

Der Bereich Ω , in dem das Polynom $p(x)$ global positiv ist, wird als

$$\Omega = \{ k_1 \in \mathbb{R} \mid p(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \} \quad (3.22)$$

definiert. Das homogenisierte Polynom wird über die Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x_0, \dots, x_n) &= x_0^{\deg p(x)} p_0\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) + k_1 x_0^{\deg p(x)} p_1\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\ &= \tilde{p}_0(x_0, \dots, x_n) + k_1 \tilde{p}_1(x_0, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.23)$$

berechnet. Wenn λ nach (3.15) gewählt wird, nimmt die Variable x_0 unter der Voraussetzung $x_0 > 0$ die Werte in der Menge

$$J_0 = \{ x_0 \in \mathbb{R} \mid 0 < x_0 \leq 1 \} \quad (3.24)$$

an und die Variable x_i , $i = 1, \dots, n$, die Werte in der Menge

$$J_i = \{ x_i \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x_i \leq 1 \}. \quad (3.25)$$

Die Hyperquader, die durch die Mengen in (3.17) definiert sind, können auch durch die folgenden kartesischen Produkte

$$\begin{aligned} H_0 &= \{1\} \times J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n, \\ H_i^\mp &= J_0 \times \dots \times J_{i-1} \times \{\mp 1\} \times J_{i+1} \times \dots \times J_n, \\ & i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.26)$$

repräsentiert werden.

Wird für jede Variable x_i , $i = 0, \dots, n$, die gleiche Anzahl von Tschebyscheff-Punkten N verwendet, so ist die gesamte Anzahl der Tschebyscheff-Punkte in \hat{J} durch

$$\hat{N} = N^n \quad (3.27)$$

gegeben.

Da k_1 der einzige unbekannt Parameter in $p(x)$ ist, wird der Bereich Ω ein Intervall auf der reellen Achse sein, sofern Ω existiert. Zur Ermittlung von Ω können die Ungleichungen (3.19) genutzt werden. Durch die folgenden Umformungen

$$\begin{aligned} 0 &< (K+1) \tilde{p}(x_i) - (K-1) \tilde{p}(x_j) \\ 0 &< (K+1) [\tilde{p}_0(x_i) + k_1 \tilde{p}_1(x_i)] - (K-1) [\tilde{p}_0(x_j) + k_1 \tilde{p}_1(x_j)] \\ 0 &< \underbrace{[(K+1) \tilde{p}_0(x_i) - (K-1) \tilde{p}_0(x_j)]}_{a_0^{i,j}} + k_1 \underbrace{[(K+1) \tilde{p}_1(x_i) - (K-1) \tilde{p}_1(x_j)]}_{a_1^{i,j}} \\ 0 &< a_0^{i,j} + a_1^{i,j} k_1, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N} \end{aligned} \quad (3.28)$$

werden \hat{N}^2 lineare Ungleichungen in einem Hyperquader \hat{J} für k_1 abgeleitet.

Da $(2n+1)$ Hyperquader untersucht werden müssen, existieren insgesamt $(2n+1)\hat{N}^2$ Ungleichungen der Form (3.28). Je nach Vorzeichen von $a_1^{i,j}$ ist die Lösungsmenge einer Ungleichung entweder durch

$$\Omega_j^{i,j} = \left\{ k_1 \in \mathbb{R} \mid k_1 > -\frac{a_0^{i,j}}{a_1^{i,j}} \right\} \quad (3.29)$$

oder durch

$$\Omega_j^{i,j} = \left\{ k_1 \in \mathbb{R} \mid k_1 < -\frac{a_0^{i,j}}{a_1^{i,j}} \right\} \quad (3.30)$$

gegeben.

Die Ungleichungen (3.28) sind hinreichende Bedingungen für die global positive Definitheit des Polynoms $p(x)$. Daher ist die Lösungsmenge der durch (3.28) definierten Ungleichungen eine innere Approximation der gesuchten Menge Ω . Diese innere Approximation wird durch die Schnittmenge

$$\Omega_{in} = \bigcap_j \bigcap_{i,j} \Omega_j^{i,j} \quad (3.31)$$

gegeben, die in Ω enthalten ist.

Der Äquivalenz (3.10) zufolge muss das homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$ in $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ positiv sein, damit das Originalpolynom $p(x)$ global positiv definit ist. Alle Hyperquader in (3.17) sind Teilmengen von $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$. Alle Tschebyscheff-Punkte, die in den Hyperquadern (3.17) liegen, gehören daher auch zur Menge $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$. Das heißt, die Ungleichungen

$$0 < \tilde{p}(x_i) = \tilde{p}_0(x_i) + \tilde{p}_1(x_i) k_1, \quad i = 1, \dots, \hat{N} \quad (3.32)$$

müssen in einem Hyperquader $\hat{J} \subset (\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ gelten, wobei x_i einen Tschebyscheff-Punkt in \hat{J} bezeichnet. Da $(2n+1)$ Hyperquader untersucht werden müssen, existieren insgesamt $(2n+1)\hat{N}$ Ungleichungen der Form (3.32), welche notwendige Bedingungen für die global positive Definitheit des Polynoms $p(x)$ darstellen.

Die Ungleichungen (3.32) können aus den Ungleichungen (3.19) für $x_i = x_j$ hergeleitet werden, indem die folgenden Umformungen

$$\begin{aligned} 0 &< (K+1) \tilde{p}(x_i) - (K-1) \tilde{p}(x_i) \\ 0 &< 2 \tilde{p}(x_i) && \implies \\ 0 &< \tilde{p}(x_i) \\ 0 &< \tilde{p}_0(x_i) + \tilde{p}_1(x_i) k_1, \quad i = 1, \dots, \hat{N} \end{aligned} \quad (3.33)$$

durchgeführt werden.

Je nach Vorzeichen von $\tilde{p}_1(x_i)$ ist die Lösungsmenge einer Ungleichung entweder durch

$$\Omega_j^i = \left\{ k_1 \in \mathbb{R} \mid k_1 > -\frac{\tilde{p}_0(x_i)}{\tilde{p}_1(x_i)} \right\} \quad (3.34)$$

oder durch

$$\Omega_j^i = \left\{ k_1 \in \mathbb{R} \mid k_1 < -\frac{\tilde{p}_0(x_i)}{\tilde{p}_1(x_i)} \right\}. \quad (3.35)$$

gegeben.

Die Ungleichungen (3.32) sind notwendige Bedingungen für die global positive Definitheit des Polynoms $p(x)$. Da $(2n+1)$ Hyperquader untersucht werden müssen, existieren insgesamt $(2n+1)\hat{N}$ Ungleichungen der Form (3.32). Daher ist die Lösungsmenge der durch (3.32) definierten Ungleichungen eine äußere Approximation der gesuchten Menge Ω . Diese äußere Approximation wird durch die Schnittmenge

$$\Omega_{out} = \bigcap_j \bigcap_i \Omega_j^i \quad (3.36)$$

gebildet, welche eine Obermenge von Ω ist.

Aufgrund der Überlegung vor der Gleichung (3.31) und der Gleichung (3.36) ist die folgende Beziehung

$$\Omega_{in} \subseteq \Omega \subseteq \Omega_{out} \quad (3.37)$$

gültig.

In den folgenden Beispielen werden die Resultate illustriert.

Beispiel 3.1

Das Polynom, das auf seine global positive Definitheit getestet wird, sei durch die Gleichung

$$p(x) = x_1^2 + k_1 x_1 + 1 \quad (3.38)$$

gegeben [49]. Wie aus Gleichung (3.38) ersichtlich, hat das Polynom $p(x)$ eine Variable und einen unbekannt Parameter, und der Grad des Polynoms ist $m = 2$. Das homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$ wird durch die Formel (3.9) bestimmt. Es ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x_0, x_1) &= x_0^2 \left[\left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2 + k_1 \frac{x_1}{x_0} + 1 \right] \\ \tilde{p}(x) &= x_0^2 + k_1 x_0 x_1 + x_1^2 \\ &= \underbrace{(x_0^2 + x_1^2)}_{\tilde{p}_0(x)} + \underbrace{x_0 x_1}_{\tilde{p}_1(x)} k_1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Wenn der λ -Wert gemäß in (3.15) gewählt wird, nimmt die Variable x_0 , unter der Voraussetzung $x_0 > 0$, Werte im Intervall

$$J_0 = \{ x_0 \in \mathbb{R} \mid 0 < x_0 \leq 1 \} \quad (3.40)$$

und die Variable x_1 Werte im Intervall

$$J_1 = \{ x_1 \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x_1 \leq 1 \} \quad (3.41)$$

an.

Die Hyperquader sind durch

$$\begin{aligned} H_0 &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 = 1, \quad -1 \leq x_1 \leq 1 \}, \\ H_1^+ &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1, \quad 0 < x_0 \leq 1 \}, \\ H_1^- &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -1, \quad 0 < x_0 \leq 1 \} \end{aligned} \quad (3.42)$$

gegeben und in Abbildung 3.2 dargestellt.

Jede Seite beschreibt ein kompaktes abgeschlossenes Intervall \hat{J}

$$\hat{J} \in \{ H_0, H_1^+, H_1^- \}, \quad (3.43)$$

in dem die positive Definitheit des Polynoms (3.39) untersucht werden muss.

Wenn für jede Variable $N = 4 > m$ Tschebyscheff-Punkte benutzt werden, gibt es $\hat{N} = 4$

Tschebyscheff-Punkte in jedem Intervall \hat{J} , die zur Menge $x(\hat{N}, \hat{J}) \subset \hat{J}$ gehören. Man bestimmt die Tschebyscheff-Punkte gemäß Gleichung (2.21) und den K-Wert gemäß Gleichung (2.33). Für $\hat{J} = H_0$ ist die Menge der Tschebyscheff-Punkte

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0,9239 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0,3827 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3827 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -0,9239 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.44)$$

für $\hat{J} = H_1^+$

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0,9619 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,6913 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3087 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0381 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.45)$$

und für $\hat{J} = H_1^-$

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0,9619 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,6913 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3087 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0381 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.46)$$

Mittels $(2n + 1)\hat{N} = 12$ Ungleichungen der Form (3.32) kann eine äußere Approximation Ω_{out} zur Menge Ω erstellt werden und mittels $(2n + 1)\hat{N}^2 = 48$ Ungleichungen der Form (3.28) eine innere Approximation Ω_{in} .

Daraus resultiert bei $12 + 48 = 60$ gelösten Ungleichungen der Parameterbereich

$$\underbrace{[-1,4186, 1,4186]}_{\Omega_{in}} \subseteq \Omega \subseteq \underbrace{[-2,0015, 2,0015]}_{\Omega_{out}}. \quad (3.47)$$

Es ist mit Hilfe dieser numerischen Methode gesichert, dass das Polynom $p(x)$ (3.38) für die Werte des Parameters k_1 im Intervall Ω_{in} global positiv definit ist.

Mit $N = 8$ Tschebyscheff-Punkten pro Variable ergeben sich $\hat{N} = 8$ Tschebyscheff-Punkte in einem Intervall \hat{J} . Daraus folgen $(2n + 1)\hat{N} = 24$ Ungleichungen zur äußeren Approximation und $(2n + 1)\hat{N}^2 = 192$ Ungleichungen zur inneren Approximation. In diesem Fall liegt der gesuchte Parameterbereich Ω zwischen den numerisch berechneten folgenden Intervallen

$$\underbrace{[-1,8481, 1,8481]}_{\Omega_{in}} \subseteq \Omega \subseteq \underbrace{[-2,0001, 2,0001]}_{\Omega_{out}}. \quad (3.48)$$

Die Abbildung 3.3 zeigt die äußere Approximation Ω_{out} und die innere Approximation Ω_{in} zum Bereich Ω nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable. Es ist aus der Abbildung ersichtlich, dass mit zunehmender Anzahl der Tschebyscheff-Punkte die Approximation deutlich besser wird. Mit Hilfe dieser numerischen Berechnungsmethode kann festgestellt werden, dass für die k_1 -Werte im Intervall $(-2, 2)$ das Polynom in (3.38) global positiv definit ist.

Beispiel 3.2

Das Polynom, das auf seine global positive Definitheit untersucht wird, sei durch die Gleichung

$$p(x) = x_1^2 + k_1 x_1 x_2 + 4 x_2^2 \quad (3.49)$$

gegeben. Wie aus Gleichung (3.49) ersichtlich, hat das Polynom $p(x)$ zwei Variablen und einen unbekannt Parameter, und der Grad des Polynoms ist $m = 2$. Da das Polynom

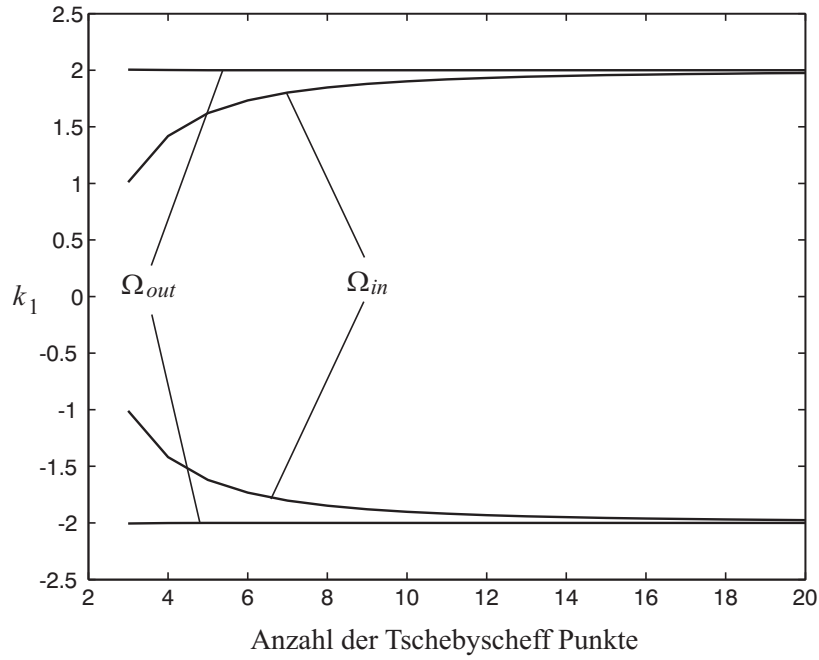


Abbildung 3.3: Die innere und die äußere Approximation zum Parameterbereich Ω für Beispiel 3.1.

$p(x)$ selbst ein homogenes Polynom ist, entfällt das Homogenisieren, so dass sich

$$\tilde{p}(x) = p(x) = \underbrace{x_1^2 + 4x_2^2}_{p_0(x)} + \underbrace{x_1 x_2}_{p_1(x)} k_1 \quad (3.50)$$

ergibt.

Wenn der λ -Wert gemäß in (3.15) gewählt wird, nimmt die Variable x_1 Werte im Intervall

$$J_1 = \{ x_1 \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x_1 \leq 1 \} , \quad (3.51)$$

und die Variable x_2 Werte im Intervall

$$J_2 = \{ x_2 \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x_2 \leq 1 \} \quad (3.52)$$

an.

Mit Hilfe der λ -Werte reduziert sich der ganze \mathbb{R}^2 -Raum auf die vier Seiten des Einheitsquadrats, die mit den Mengen

$$\begin{aligned} H_1^+ &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1 , \quad -1 \leq x_2 \leq 1 \} , \\ H_1^- &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -1 , \quad -1 \leq x_2 \leq 1 \} , \\ H_2^+ &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 1 , \quad -1 \leq x_1 \leq 1 \} , \\ H_2^- &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -1 , \quad -1 \leq x_1 \leq 1 \} \end{aligned} \quad (3.53)$$

beschrieben werden. Diese vier Seiten (3.53) sind in der Abbildung (3.4) dargestellt. Jede Seite in (3.53) beschreibt ein kompaktes abgeschlossenes Intervall

$$\hat{J} \in \{ H_1^+ , H_1^- , H_2^+ , H_2^- \} , \quad (3.54)$$

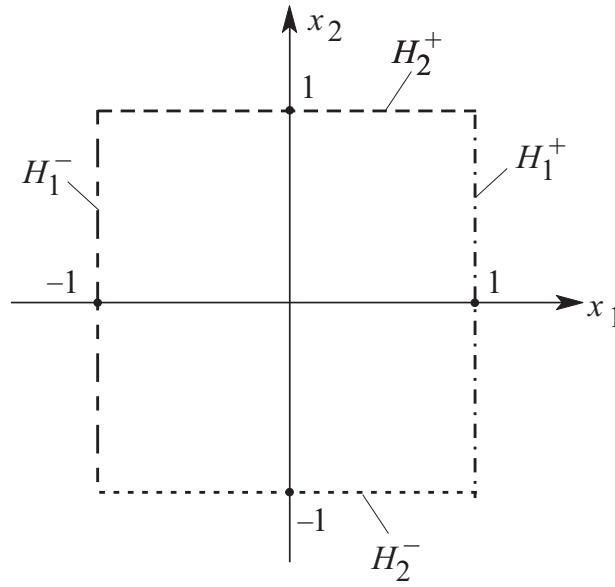


Abbildung 3.4: Hyperquader im zweidimensionalen Raum für ein homogenes Polynom wie im Beispiel 3.2.

in dem die global positive Definitheit des Polynoms (3.49) untersucht werden muss.

Wenn für jede Variable $N = 4$ Tschebyscheff-Punkte benutzt werden, gibt es $\hat{N} = 4$ Tschebyscheff-Punkte in jedem Intervall \hat{J} , die zur Menge $x(\hat{N}, \hat{J}) \subset \hat{J}$ gehören. Man bestimmt die Tschebyscheff-Punkte mit der Gleichung (2.21) und den K-Wert gemäß der Gleichung (2.33). Für $\hat{J} = H_1^+$ ist die Menge der Tschebyscheff-Punkte

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0,9239 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0,3827 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3827 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -0,9239 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.55)$$

für $\hat{J} = H_1^-$

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0,9239 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0,3827 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -0,3827 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -0,9239 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.56)$$

für $\hat{J} = H_2^+$

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0,9239 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3837 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,3827 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,9239 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.57)$$

und für $\hat{J} = H_2^-$

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0,9239 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3837 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,3827 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,9239 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.58)$$

Mittels $2n\hat{N} = 16$ Ungleichungen der Form (3.32) kann eine äußere Approximation Ω_{out} zum Intervall Ω erstellt werden und mittels $2n\hat{N}^2 = 64$ Ungleichungen der Form (3.28) eine innere Approximation Ω_{in} .

Daraus resultiert bei $16 + 64 = 80$ gelösten Ungleichungen das folgende Ergebnis für das gesuchte Intervall Ω

$$\underbrace{[-1,3915, 1,3915]}_{\Omega_{in}} \subseteq \Omega \subseteq \underbrace{[-4,1439, 4,1439]}_{\Omega_{out}}. \quad (3.59)$$

Mit $N = 16$ Tschebyscheff-Punkten pro Variable hat man $\hat{N} = 16$ Tschebyscheff-Punkte in jedem Intervall \hat{J} . Es gibt $2n\hat{N} = 64$ Ungleichungen zur äußeren Approximation und $2n\hat{N}^2 = 1024$ Ungleichungen zur inneren Approximation. In diesem Fall liegt der gesuchte Parameterbereich Ω zwischen den Intervallen

$$\underbrace{[-3,8259, 3,8259]}_{\Omega_{in}} \subseteq \Omega \subseteq \underbrace{[-4,0069, 4,0069]}_{\Omega_{out}}. \quad (3.60)$$

Da das Intervall Ω_{in} aus den hinreichenden Bedingungen resultiert, gilt die Implikation

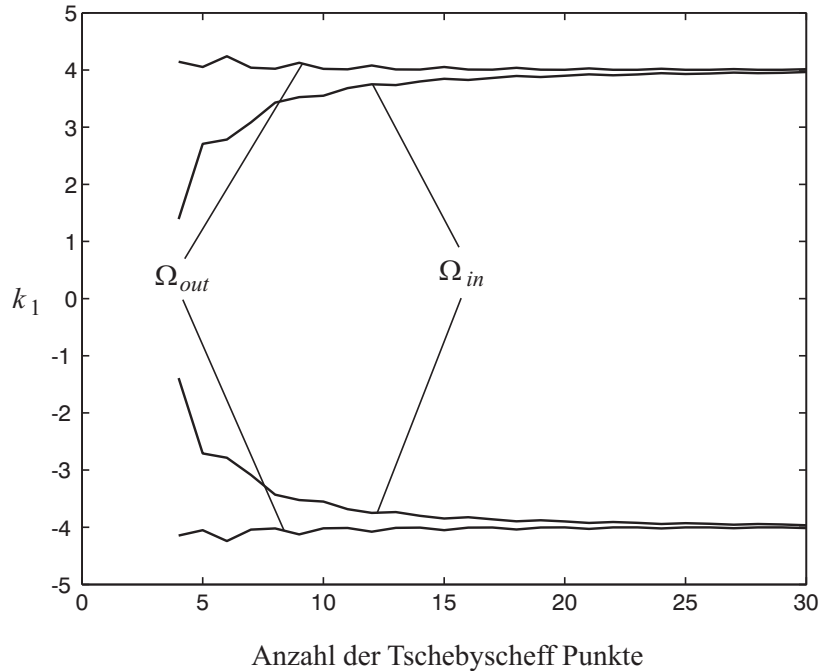


Abbildung 3.5: Die innere und die äußere Approximation zum Parameterbereich Ω für Beispiel 3.2.

$$k_1 \in \Omega_{in} \quad \implies \quad p(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.61)$$

Die Abbildung 3.5 zeigt die äußere Approximation Ω_{out} und die innere Approximation Ω_{in} zum Intervall Ω nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable. Es ist aus der Abbildung ersichtlich, dass mit zunehmender Anzahl der Tschebyscheff-Punkte die Approximation deutlich besser wird. Mit Hilfe dieser numerischen Berechnungsmethode kann festgestellt werden, dass für die k_1 -Werte im Intervall $(-4, 4)$ das Polynom in (3.49) global positiv definit ist.

3.4 Untersuchung von Polynomen mit zwei unsicheren Parametern

Wenn ein beliebiges Polynom $p(x)$ mit n -Variablen, das linear abhängig von Systemparametern ist, zwei unbekannte Parameter besitzt, kann es in der Form

$$p(x) = p_0(x) + k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.62)$$

dargestellt werden.

Der Parameterbereich Ω , in dem das Polynom $p(x)$ global positiv definit ist, wird als

$$\Omega = \{ k \in \mathbb{R}^2 \mid p(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \} \quad (3.63)$$

definiert. Das homogenisierte Polynom wird über die Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) = & \underbrace{x_0^{\deg p(x)} p_0\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}_{\tilde{p}_0(x)} + k_1 \underbrace{x_0^{\deg p(x)} p_1\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}_{\tilde{p}_1(x)} + \\ & \underbrace{k_2 x_0^{\deg p(x)} p_2\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}_{\tilde{p}_2(x)} \end{aligned} \quad (3.64)$$

berechnet. Wenn λ nach der Gleichung (3.15) gewählt wird, nimmt die Variable x_0 unter der Voraussetzung $x_0 > 0$ die Werte in der Menge

$$J_0 = \{ x_0 \in \mathbb{R} \mid 0 < x_0 \leq 1 \} \quad (3.65)$$

an und die Variable x_i , $i = 1, \dots, n$, die Werte in der Menge

$$J_i = \{ x_i \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x_i \leq 1 \} . \quad (3.66)$$

Da zwei unbekannte Parameter existieren, beschreibt die konvexe Menge Ω , sofern sie nicht leer ist, ein Gebiet in der zweidimensionalen Ebene. Zur Ermittlung von Ω werden die Ungleichungen (3.19) genutzt. Deren Umformung führt zu der folgenden Kette von Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 < & (K+1) \tilde{p}(x_i) - (K-1) \tilde{p}(x_j) \quad x_i, x_j \in x(\hat{N}, \hat{J}) \\ 0 < & (K+1) [\tilde{p}_0(x_i) + k_1 \tilde{p}_1(x_i) + k_2 \tilde{p}_2(x_i)] - \\ & (K-1) [\tilde{p}_0(x_j) + k_1 \tilde{p}_1(x_j) + k_2 \tilde{p}_2(x_j)] \\ 0 < & \underbrace{[(K+1) \tilde{p}_0(x_i) - (K-1) \tilde{p}_0(x_j)]}_{a_0^{i,j}} + k_1 \underbrace{[(K+1) \tilde{p}_1(x_i) - (K-1) \tilde{p}_1(x_j)]}_{a_1^{i,j}} \\ & + k_2 \underbrace{[(K+1) \tilde{p}_2(x_i) - (K-1) \tilde{p}_2(x_j)]}_{a_2^{i,j}} \\ 0 < & a_0^{i,j} + a_1^{i,j} k_1 + a_2^{i,j} k_2 \quad i, j = 1, \dots, \hat{N} . \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dabei sind die Koeffizienten $a_0^{i,j}$, $a_1^{i,j}$ und $a_2^{i,j}$ konstant und bekannt.

Da $(2n + 1)$ Hyperquader untersucht werden müssen, existieren insgesamt $(2n + 1)\hat{N}^2$ Ungleichungen der Form (3.67). Die Lösungsmenge einer Ungleichung in (3.67) ist entweder

$$\Omega_j^{i,j} = \left\{ k \in \mathbb{R}^2 \mid k_2 > \frac{-a_1^{i,j}}{a_2^{i,j}} k_1 + \frac{-a_0^{i,j}}{a_2^{i,j}} \right\} \quad (3.68)$$

oder

$$\Omega_j^{i,j} = \left\{ k \in \mathbb{R}^2 \mid k_2 < \frac{-a_1^{i,j}}{a_2^{i,j}} k_1 + \frac{-a_0^{i,j}}{a_2^{i,j}} \right\} \quad (3.69)$$

je nach Vorzeichen von $a_2^{i,j}$.

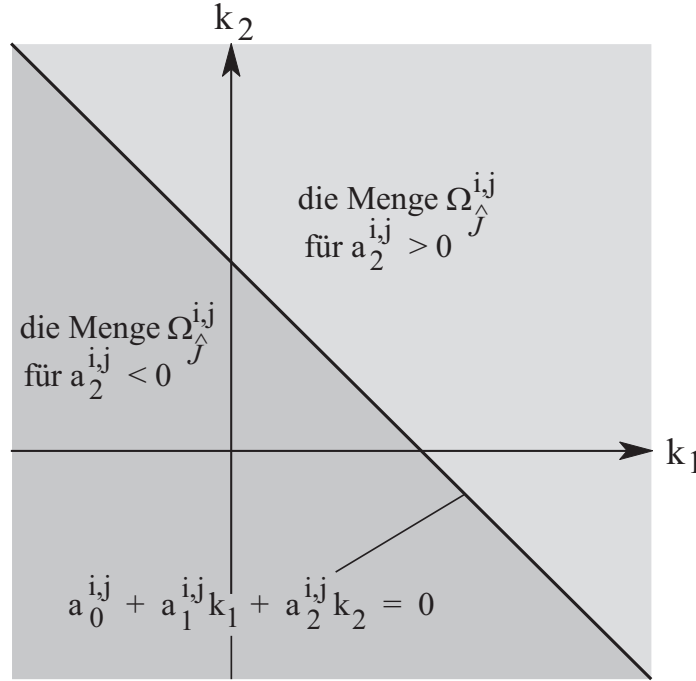


Abbildung 3.6: Menge $\Omega_j^{i,j}$ nach dem Vorzeichen des Koeffizienten $a_2^{i,j}$.

Abbildung (3.6) zeigt die grafische Darstellung der Menge $\Omega_j^{i,j}$ für unterschiedliches Vorzeichen des Koeffizienten $a_2^{i,j}$. Die Wertepaare (k_1, k_2) , die in allen Hyperquadern in (3.18) die Ungleichungen (3.67) erfüllen, bilden das konvexe Gebiet Ω_{in} , das eine innere Approximation zur Menge Ω ist. Das Gebiet Ω_{in} wird durch die Schnittmenge

$$\Omega_{in} = \bigcap_j \bigcap_{i,j} \Omega_j^{i,j} \quad (3.70)$$

gegeben, die in Ω enthalten ist.

Der Äquivalenz (3.10) zufolge muss das homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$ an allen Tschebyscheff-Punkten in jedem Hyperquader in (3.18) positiv sein, damit das Originalpolynom $p(x)$ global positiv definit sein kann. Deshalb stellen die Ungleichungen

$$0 < \tilde{p}_0(x_i) + \tilde{p}_1(x_i) k_1 + \tilde{p}_2(x_i) k_2 \quad i = 1, \dots, (2n + 1)\hat{N} \quad (3.71)$$

die notwendigen Bedingungen für die global positive Definitheit des Polynoms $p(x)$ in (3.62) dar. Die Lösungsmenge einer Ungleichung in (3.71) ist abhängig von dem Vorzeichen

von $\tilde{p}_2(x_i)$ entweder

$$\Omega_j^i = \left\{ k \in \mathbb{R}^2 \mid k_2 > \frac{-\tilde{p}_1(x_i)}{\tilde{p}_2(x_i)} k_1 + \frac{-\tilde{p}_0(x_i)}{\tilde{p}_2(x_i)} \right\} \quad (3.72)$$

oder

$$\Omega_j^i = \left\{ k \in \mathbb{R}^2 \mid k_2 < \frac{-\tilde{p}_1(x_i)}{\tilde{p}_2(x_i)} k_1 + \frac{-\tilde{p}_0(x_i)}{\tilde{p}_2(x_i)} \right\}. \quad (3.73)$$

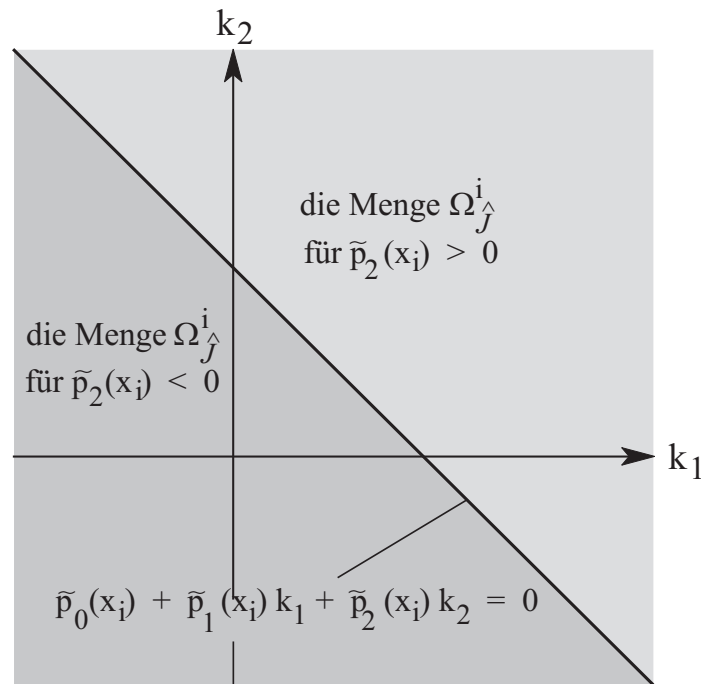


Abbildung 3.7: Menge Ω_j^i nach dem Vorzeichen des Koeffizienten $\tilde{p}_2(x_i)$.

Die grafische Darstellung der Menge Ω_j^i ist in Abhängigkeit des Vorzeichens des Koeffizienten $\tilde{p}_2(x_i)$ in der Abbildung 3.7 dargestellt.

Die Wertepaare (k_1, k_2) , die die Ungleichungen (3.71) erfüllen, bilden das Gebiet Ω_{out} , welches durch die Schnittmenge

$$\Omega_{out} = \bigcap_j \bigcap_i \Omega_j^i \quad (3.74)$$

gegeben ist. Für das gesuchte Gebiet gilt daher

$$\Omega_{in} \subseteq \Omega \subseteq \Omega_{out}. \quad (3.75)$$

Beispiel 3.3

Ein Polynom, das auf seine global positive Definitheit untersucht wird, sei durch die Gleichung

$$p(x) = x_1^4 + k_2 x_1^3 + k_1 x_1 + 1 \quad (3.76)$$

angegeben [49, 52, 54]. Wie aus (3.76) ersichtlich, besitzt das Polynom $p(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ zwei unbekannte Parameter k_1 und k_2 . Der Grad des Polynoms ist $m = 4$. Das homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$ wird durch die Formel (3.9) berechnet. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x_0, x_1) &= x_0^4 \left[\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^4 + k_2 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^3 + k_1 \left(\frac{x_1}{x_0}\right) + 1 \right] \\ \tilde{p}(x) &= x_0^4 + k_1 x_0^3 x_1 + k_2 x_0 x_1^3 + x_1^4 \quad (3.77) \\ &= \underbrace{(x_0^4 + x_1^4)}_{\tilde{p}_0(x)} + \underbrace{x_0^3 x_1}_{\tilde{p}_1(x)} k_1 + \underbrace{x_0 x_1^3}_{\tilde{p}_2(x)} k_2. \end{aligned}$$

Wenn der λ -Wert wie in (3.15) gewählt wird, nimmt die Variable x_0 , unter der Voraussetzung $x_0 > 0$, Werte im Intervall (3.40), und die Variable x_1 Werte im Intervall (3.41) an. Mit Hilfe der λ -Werte wird der ganze $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ -Raum auf die drei Seiten eines Rechtecks reduziert, die in (3.42) beschrieben und in der Abbildung 3.2 dargestellt sind.

Mit $N = 6$ Tschebyscheff-Punkten pro Variable, die nach der Gleichung (2.21) berechnet werden, befinden sich $\hat{N} = 6$ Tschebyscheff-Punkte in einem Intervall \hat{J} , und insgesamt ergeben sich $(2n + 1)\hat{N} = 18$ Tschebyscheff-Punkte.

Es existieren nun $(2n + 1)\hat{N} = 18$ Ungleichungen in der Form (3.71), um eine äußere Approximation Ω_{out} zur Menge Ω zu bestimmen, und $(2n + 1)\hat{N}^2 = 108$ Ungleichungen in der Form (3.67), um eine innere Approximation Ω_{in} festzustellen.

Wenn insgesamt $18 + 108 = 126$ Ungleichungen gelöst werden, ergeben sich die konvex abgeschlossenen Gebiete Ω_{in} und Ω_{out} , wie in Abbildung 3.8 ersichtlich.

Falls $N = 16$ Tschebyscheff-Punkte pro Variable verwendet werden, ergeben sich $(2n + 1)\hat{N} = 48$ Ungleichungen für die äußere Approximation Ω_{out} und $(2n + 1)\hat{N}^2 = 768$ Ungleichungen für die innere Approximation Ω_{in} . Die Gebiete Ω_{in} und Ω_{out} sind in der Abbildung 3.9 dargestellt.

Beispiel 3.4

Ein Polynom, das auf seine global positive Definitheit untersucht wird, sei durch die Gleichung

$$p(x) = x_1^4 + x_2^4 + k_1 x_1 x_2 + k_2 x_2^3 + 1 \quad (3.78)$$

angegeben [52]. Das Polynom $p(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^2$ besitzt zwei unbekannte Parameter k_1 und k_2 . Der Grad des Polynoms ist $m = 4$. Das homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$ wird mit Hilfe der Formel (3.9) bestimmt. Dann ergibt sich

$$\tilde{p}(x_0, x_1, x_2) = x_0^4 \left[\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^4 + k_1 \left(\frac{x_1}{x_0}\right) \left(\frac{x_2}{x_0}\right) + k_2 \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^3 + 1 \right]$$

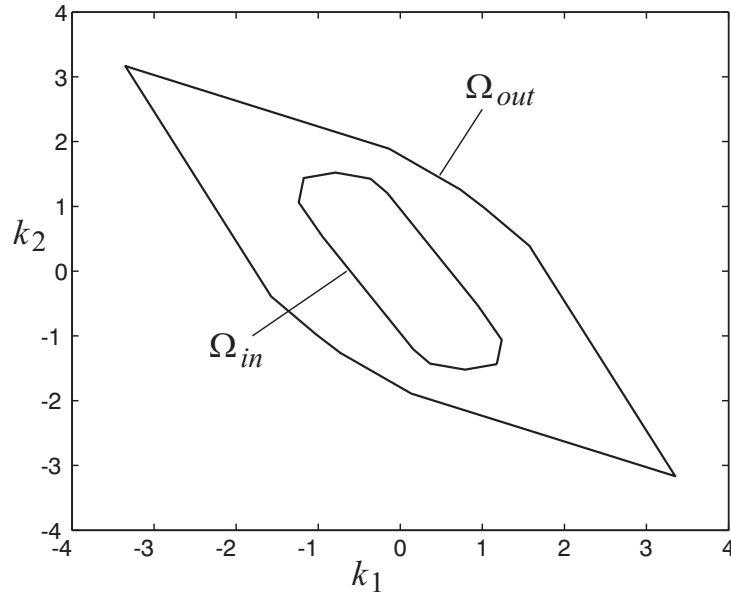


Abbildung 3.8: Innere Approximation Ω_{in} und äußere Approximation Ω_{out} zum Parameterbereich Ω mit 6 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.3.

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= x_1^4 + x_2^4 + k_1 x_0^2 x_1 x_2 + k_2 x_0 x_2^3 + x_0^4 & (3.79) \\ &= \underbrace{(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4)}_{\tilde{p}_0(x)} + \underbrace{x_0^2 x_1 x_2}_{\tilde{p}_1(x)} k_1 + \underbrace{x_0 x_2^3}_{\tilde{p}_2(x)} k_2 . \end{aligned}$$

Wenn für λ ein Wert gemäß (3.15) ausgewählt wird, nimmt die Variable x_0 , unter der Voraussetzung $x_0 > 0$, Werte im Intervall (3.40), die Variable x_1 Werte im Intervall (3.41), und die Variable x_2 Werte im Intervall

$$J_2 = \{ x_2 \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x_2 \leq 1 \} \quad (3.80)$$

an.

Mit Hilfe der λ -Werte wird der ganze $(\mathbb{R}^{n+1})_0^+$ -Raum (3.11) auf die fünf Flächen eines Quaders reduziert, die mit den folgenden Mengen beschrieben werden.

$$\begin{aligned} H_0 &= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_0 = 1, -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1 \}, \\ H_1^+ &= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, 0 < x_0 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1 \}, \\ H_1^- &= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -1, 0 < x_0 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1 \}, \\ H_2^+ &= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 1, 0 < x_0 \leq 1, -1 \leq x_1 \leq 1 \}, \\ H_2^- &= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = -1, 0 < x_0 \leq 1, -1 \leq x_1 \leq 1 \} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Jedes Rechteck in (3.81) stellt ein kompaktes abgeschlossenes Intervall \hat{J} dar, das auf die global positive Definitheit des Polynoms (3.78) untersucht werden muss.

$$\hat{J} \in \{ H_0, H_1^+, H_1^-, H_2^+, H_2^- \} \quad (3.82)$$

Mit $N = 16$ Tschebyscheff-Punkten pro Variable, die nach der Gleichung (2.28) berechnet

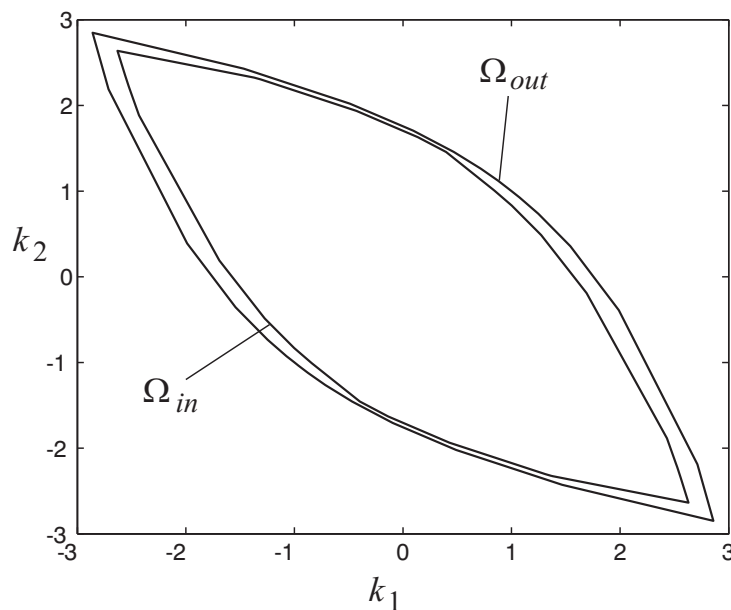


Abbildung 3.9: Innere Approximation Ω_{in} und äußere Approximation Ω_{out} zum Parameterbereich Ω mit 16 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.3.

werden, befinden sich $\hat{N} = N^n = 256$ Tschebyscheff-Punkte in einem Intervall \hat{J} , und insgesamt $(2n + 1)\hat{N} = 1280$ Tschebyscheff-Punkte.

Es gibt $(2n + 1)\hat{N} = 1280$ Ungleichungen in der Form (3.71), um eine äußere Approximation Ω_{out} für die Menge Ω zu berechnen, und $(2n + 1)\hat{N}^2 = 327680$ Ungleichungen der Form (3.67), um eine innere Approximation Ω_{in} zu bestimmen.

Wenn insgesamt $1280 + 327680 = 328960$ Ungleichungen gelöst werden, entstehen die konvex abgeschlossenen Gebiete Ω_{in} und Ω_{out} , dargestellt in Abbildung 3.10.

Falls $N = 24$ Tschebyscheff-Punkte pro Variable verwendet werden, befinden sich $\hat{N} = N^n = 576$ Tschebyscheff-Punkte in dem Intervall \hat{J} . In diesem Fall ist die Anzahl der Ungleichungen für die äußere Approximation Ω_{out} $(2n + 1)\hat{N} = 2880$, und für die innere Approximation Ω_{in} $(2n + 1)\hat{N}^2 = 1658880$. Die Abbildung 3.11 zeigt die konvexen und abgeschlossenen Gebiete Ω_{in} und Ω_{out} für 24 Tschebyscheff-Punkte pro Variable.

3.5 Untersuchung von Polynomen mit mehreren unsicheren Parametern

Im Allgemeinen kann ein beliebiges Polynom $p(x)$ mit n Variablen und r unbekanntem Parametern, das linear abhängig von den unbekanntem Parametern ist, als

$$p(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^r k_i p_i(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.83)$$

dargestellt werden.

Wenn der Grad des Polynoms $p(x)$ gleich m ist, wird das homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$

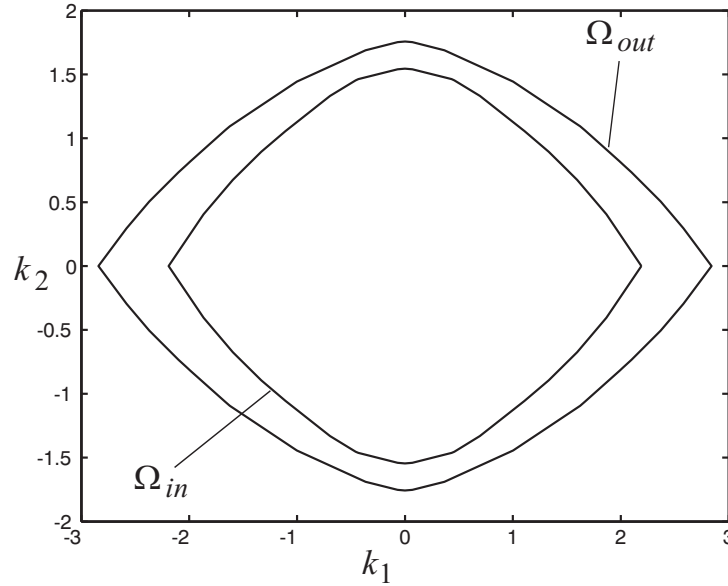


Abbildung 3.10: Innere Approximation Ω_{in} und äußere Approximation Ω_{out} zum Parameterbereich Ω mit 16 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.4.

durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= x_0^m p_0 \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) + x_0^m \sum_{i=1}^r k_i p_i \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \\ &= \tilde{p}_0(x) + \sum_{i=1}^r k_i \tilde{p}_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.84)$$

beschrieben. Die Ungleichungen (3.19), die die hinreichenden Bedingungen für den Parameterraum Ω darstellen, können gemäß (3.85) umgeformt werden.

$$\begin{aligned} 0 &< (K+1) \tilde{p}(x_i) - (K-1) \tilde{p}(x_j), \quad x_i, x_j \in x(\hat{N}, \hat{J}) \\ 0 &< (K+1) \left[\tilde{p}_0(x_i) + \sum_{s=1}^r k_s \tilde{p}_s(x_i) \right] - (K-1) \left[\tilde{p}_0(x_j) + \sum_{s=1}^r k_s \tilde{p}_s(x_j) \right] \\ 0 &< \underbrace{[(K+1) \tilde{p}_0(x_i) - (K-1) \tilde{p}_0(x_j)]}_{a_0^{i,j}} + \sum_{s=1}^r k_s \underbrace{[(K+1) \tilde{p}_s(x_i) - (K-1) \tilde{p}_s(x_j)]}_{a_s^{i,j}} \\ 0 &< a_0^{i,j} + a_1^{i,j} k_1 + \dots + a_r^{i,j} k_r, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Die Ungleichungen (3.85) werden mittels der Tschebyscheff-Punkte in einem Hyperquader \hat{J} (3.18) hergeleitet. Die gesamte Anzahl der Hyperquader, die untersucht werden müssen, ist $(2n+1)$. Hieraus folgt die Anzahl der Ungleichungen im Ungleichungssystem (3.85) gemäß $(2n+1)\hat{N}^2$. Existiert für das Ungleichungssystem (3.85) eine Lösung, so beschreibt die Lösungsmenge das konvex abgeschlossene Gebiet Ω_{in} im r -dimensionalen Raum. Die notwendigen Bedingungen sind die Ungleichungen

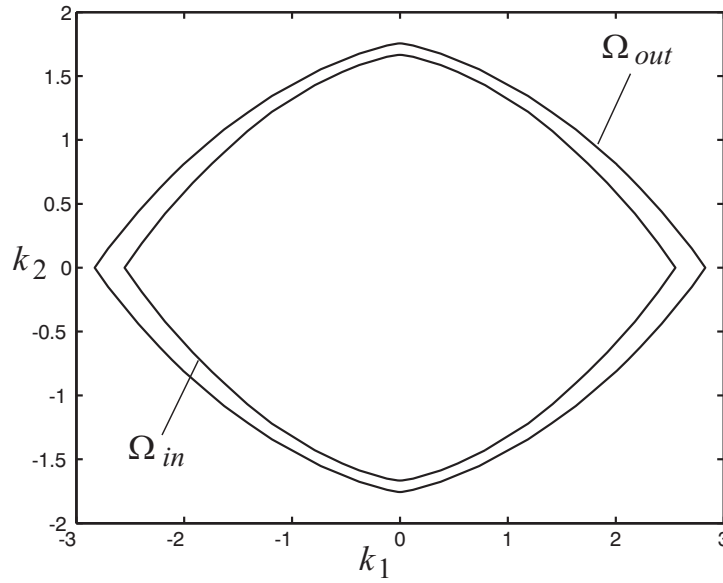


Abbildung 3.11: Innere Approximation Ω_{in} und äußere Approximation Ω_{out} zum Parameterbereich Ω mit 24 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.4.

$$0 < \tilde{p}_0(x_i) + k_1 \tilde{p}_1(x_i) + \dots + k_r \tilde{p}_r(x_i), \quad i = 1, \dots, (2n+1) \hat{N}, \quad (3.86)$$

wobei x_i den i -ten Tschebyscheff-Punkt bezeichnet. Durch die Lösung der Ungleichungen (3.86) wird das konvex abgeschlossene Gebiet Ω_{out} im r -dimensionalen Raum bestimmt. Das gesuchte Gebiet Ω befindet sich gemäß

$$\Omega_{in} \subseteq \Omega \subseteq \Omega_{out} \quad (3.87)$$

zwischen den beiden Gebieten Ω_{in} und Ω_{out} . Zu bemerken ist, dass die Anzahl der Ungleichungen unabhängig von der Dimension der Parameter ist. Zur Zeit ist nicht bekannt, wie sich die Dimension des Parameterraumes auf die Güte der Approximation auswirkt.

3.6 Bestimmung des Parameterbereiches Ω als Hyperkubus

Die in den vorherigen Abschnitten präsentierte numerische Methode ermöglicht es, den gesamten Parameterbereich Ω zu bestimmen. Allerdings ist der Parameterbereich nur bis zu einem dreidimensionalen Problem visualisierbar. Die geometrische Darstellung ist ab der vierten Dimension nicht mehr realisierbar. Da die Polynome, die berücksichtigt werden, linear abhängig von den Parametern sind, stellt der Bereich Ω eine konvexe Menge im Parameterraum dar. Diese Eigenschaft kann ausgenutzt werden, um den größten Hyperkubus in Ω zu bestimmen. Mit der Menge

$$\Omega^\varepsilon = \{ k \in \mathbb{R}^r \mid -\varepsilon \leq k_i \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r \} \quad (3.88)$$

kann der Hyperkubus definiert werden, wobei $k \in \mathbb{R}^r$ der Vektor der unbekannt Parameter ist.

In der Abbildung 3.12 ist ein Hyperkubus Ω^ε im zweidimensionalen Raum dargestellt. Die Menge Ω^ε (3.88) ist eine Teilmenge von Ω , woraus die Implikation

$$k \in \Omega^\varepsilon \quad \implies \quad p(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.89)$$

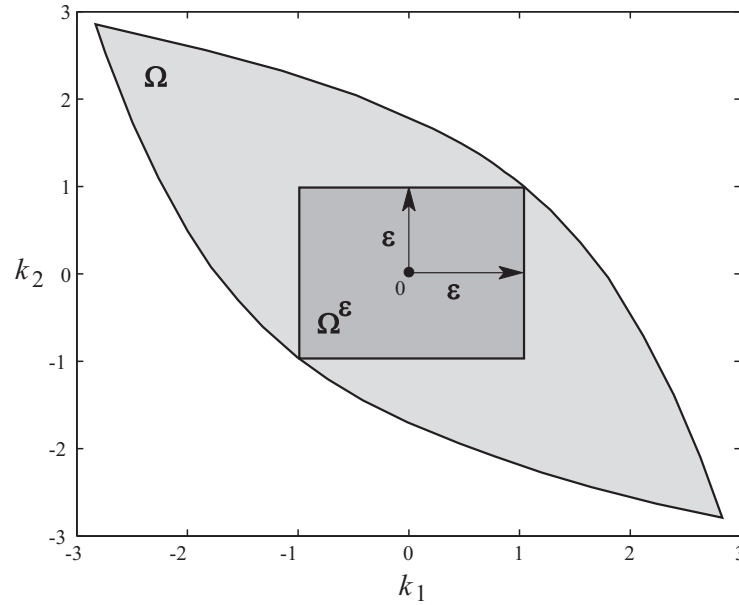


Abbildung 3.12: Ein Beispiel für den Hyperkubus Ω^ε auf der zweidimensionalen Ebene.

folgt.

Bei physikalischen Systemen sind die nominalen Werte der Systemparameter grundsätzlich bekannt. Wenn die global asymptotische Stabilität eines polynominalen Systems mit Hilfe der Stabilitätssätze von Ljapunow untersucht wird, muss die global positive Definitheit eines Polynoms der Form

$$\begin{aligned}
 p(x) &= p_{0n}(x) + \sum_{i=1}^r (k_{in} + k_i) p_i(x) , & x \in \mathbb{R}^n \\
 &= \underbrace{\left(p_{0n}(x) + \sum_{i=1}^r k_{in} p_i(x) \right)}_{p_0(x)} + \sum_{i=1}^r k_i p_i(x) \\
 &= p_0(x) + \sum_{i=1}^r k_i p_i(x)
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

nachgewiesen werden. Hier beschreibt k_{in} den nominalen Wert des i -ten Parameters, und k_i bezeichnet mit $i = 1, \dots, r$ die Parameterstörung. Zum Beispiel kann mit Hilfe des Hyperkubus festgestellt werden, wie robust das Systemverhalten gegenüber den Parameterunsicherheiten ist.

In diesem Unterkapitel werden die Ungleichungen (3.85) und (3.86) verwendet, die die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die global positive Definitheit des Polynoms $p(x)$ (3.90) angeben. Die Ungleichungen (3.85) und (3.86) sind von der Form

$$a_r k_r + a_{r-1} k_{r-1} + \dots + a_1 k_1 + a_0 > 0 , \tag{3.91}$$

wobei die Koeffizienten a_i mit $i = 0, \dots, r$ bekannt und konstant sind. Die Koeffizienten in (3.91) sind Funktionen von Tschebyscheff-Punkten in den Hyperquadranten $H_0, H_1^+, H_1^-, \dots, H_n^+$ und H_n^- .

Wenn eine Ecke eines Hyperkubus bekannt ist, kann er bestimmt werden. Um eine Ecke eines Hyperkubus zu bestimmen, werden Strahlen verwendet, deren Ausgangspunkt der Ursprung des Parameterraumes ist. Diese Halbgeraden verlaufen durch die Ecken des Hyperkubus, wobei die Anzahl der Strahlen gleich der Anzahl der Ecken des Hyperkubus ist. Damit werden im r -dimensionalen Raum 2^r Strahlen zur Bestimmung der Ecken verwandt. Wenn ein Punkt $k \in \mathbb{R}^r$ sich auf einem Strahl befindet, muss die Eigenschaft

$$|k_1| = |k_2| = \dots = |k_r|, \quad (3.92)$$

erfüllt sein, wobei der Vektor k gemäß

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

definiert ist.

Um alle 2^r Strahlen definieren zu können, kann die Funktion

$$f(b_1, b_2) = b_2 \operatorname{div} b_1 \quad (3.94)$$

benutzt werden. In der Funktion(3.94) stellt b_1 eine positive ganze Zahl, und b_2 eine natürliche Zahl dar. Die Zahl b_2 kann nach der Zahl b_1 mit der Gleichung

$$b_2 = c_1 b_1 + c_0 \quad (3.95)$$

beschrieben werden, wobei c_0 und c_1 zwei natürliche Zahlen sind. Das Ergebnis der Funktion (3.94) ist die natürliche Zahl c_1 .

$$f(b_1, b_2) = b_2 \operatorname{div} b_1 = c_1 \quad (3.96)$$

Der Vektor $k^i \in \mathbb{R}^r$ sei ein beliebiger Punkt auf dem i -ten Strahl. Der Punkt k^i wird durch die Funktion (3.94) gemäß

$$k^i = \Delta k^i \begin{pmatrix} (-1)^{(i-1)} \\ (-1)^{[(i-1) \operatorname{div} 2]} \\ \vdots \\ (-1)^{[(i-1) \operatorname{div} 2^{r-2}]} \\ (-1)^{[(i-1) \operatorname{div} 2^{r-1}]} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 2^r, \quad (3.97)$$

definiert, wobei Δk^i eine positive reelle Zahl ist. Die Ungleichung (3.91) stelle die j -te Ungleichung entweder in den notwendigen Bedingungen oder in den hinreichenden Bedingungen dar. Wenn der größte Hyperkubus Ω_j^ε im Parameterraum untersucht wird, so dass für $k \in \Omega_j^\varepsilon$ die Ungleichung (3.91) erfüllt ist, wird die Ungleichung (3.91) mit Hilfe des

Vektors (3.97) umgeformt. Hierdurch folgen die Ungleichungen

$$\left(\sum_{j=2}^r a_j (-1)^{[(i-1) \operatorname{div} 2^{j-1}]} \right) \Delta k^i + a_1 (-1)^{i-1} \Delta k^i + a_0 > 0, \quad (3.98)$$

$$i = 1, \dots, 2^r.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichungen (3.98) ist der Hyperkubus

$$\Omega_j^\varepsilon = \{ k \in \mathbb{R}^r \mid -\varepsilon_j \leq k_i \leq \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, r \}, \quad (3.99)$$

wobei ε_j eine positive reelle Zahl bezeichnet. Da es $(2n+1)\hat{N}^2$ Ungleichungen für die hinreichenden Bedingungen gibt, wird die innere Approximation Ω_{in}^ε für den Hyperkubus Ω^ε durch die Schnittmenge

$$\Omega_{in}^\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{(2n+1)\hat{N}^2} \Omega_j^\varepsilon = \{ k \in \mathbb{R}^r \mid -\varepsilon_{min} \leq k_i \leq \varepsilon_{min}, \quad i = 1, \dots, r \} \quad (3.100)$$

bestimmt. In (3.100) ist ε_{min} eine positive reelle Zahl, die durch die Formel

$$\varepsilon_{min} = \min(\varepsilon_j), \quad j = 1, \dots, (2n+1)\hat{N}^2 \quad (3.101)$$

berechnet wird. Da die Anzahl der notwendigen Bedingungen $(2n+1)\hat{N}$ ist, ist eine äußere Approximation Ω_{out}^ε zum Hyperkubus Ω^ε durch

$$\Omega_{out}^\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{(2n+1)\hat{N}} \Omega_j^\varepsilon = \{ k \in \mathbb{R}^r \mid -\varepsilon_{max} \leq k_i \leq \varepsilon_{max}, \quad i = 1, \dots, r \} \quad (3.102)$$

gegeben, wobei die positive reelle Zahl ε_{max} durch

$$\varepsilon_{max} = \max(\varepsilon_j), \quad j = 1, \dots, (2n+1)\hat{N} \quad (3.103)$$

bestimmt wird. Die positive reelle Zahl ε in (3.88) liegt im Intervall zwischen den Zahlen ε_{min} und ε_{max} .

$$\varepsilon_{min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{max} \quad (3.104)$$

Hieraus folgt, dass der gesuchte Hyperkubus Ω^ε zwischen den Hyperkuben Ω_{in}^ε und Ω_{out}^ε gemäß

$$\Omega_{in}^\varepsilon \subseteq \Omega^\varepsilon \subseteq \Omega_{out}^\varepsilon \quad (3.105)$$

liegt.

Beispiel 3.5

In diesem Beispiel wird das gleiche Polynom wie im Beispiel 3.4 untersucht, das durch die Gleichung

$$p(x) = x_1^4 + k_2 x_1^3 + k_1 x_1 + 1 \quad (3.106)$$

gegeben ist. Das homogenisierte Polynom $\tilde{p}(x)$, das durch die Formel (3.9) bestimmt wird, ist

$$\tilde{p}(x) = \underbrace{(x_0^4 + x_1^4)}_{\tilde{p}_0(x)} + \underbrace{x_0^3 x_1}_{\tilde{p}_1(x)} k_1 + \underbrace{x_0 x_1^3}_{\tilde{p}_2(x)} k_2. \quad (3.107)$$

Ziel ist es, den Parameterbereich

$$\Omega^\varepsilon = \{ k \in \mathbb{R}^2 \mid -\varepsilon \leq k_i \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2 \} \quad (3.108)$$

zu bestimmen, der das größte Quadrat in Ω (3.6) darstellt. Dazu werden drei Seiten eines Rechtecks als Hyperquader verwendet, die in (3.42) beschrieben und in der Abbildung 3.2 gezeigt sind. Die folgenden $2^r = 2^2 = 4$ Strahlen

$$\begin{aligned} k^1 &= \Delta k^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & k^2 &= \Delta k^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ k^3 &= \Delta k^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & k^4 &= \Delta k^4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

werden durch die Formel (3.97) berechnet. In (3.109) sind die Koeffizienten Δk^i , $i = 1, \dots, 4$, skalar und positiv.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind der Form

$$a_2 k_2 + a_1 k_1 + a_0 > 0, \quad (3.110)$$

wobei die Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2 konstant und bekannt sind. Mit Hilfe der Strahlen (3.109) werden aus (3.110) vier verschiedene Ungleichungen gemäß

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \Delta k^1 + a_0 &> 0 \\ (a_2 - a_1) \Delta k^2 + a_0 &> 0 \\ (a_1 - a_2) \Delta k^3 + a_0 &> 0 \\ -(a_1 + a_2) \Delta k^4 + a_0 &> 0 \end{aligned} \quad (3.111)$$

erzeugt.

Hieraus folgt, dass $2^r(2n+1)\hat{N}^2 = 12\hat{N}^2$ Ungleichungen existieren, die ein Ungleichungssystem beschreiben. Die Lösung dieses Ungleichungssystems bestimmt eine innere Approximation Ω_{in}^ε zu dem Parameterbereich Ω^ε . Weiterhin existieren $2^r(2n+1)\hat{N} = 12\hat{N}$ Ungleichungen, die eine äußere Approximation Ω_{out}^ε zur Menge Ω^ε bestimmen.

Mit 6 Tschebyscheff-Punkten pro Variable gibt es $12\hat{N}^2 = 12 \times 6^2 = 432$ Ungleichungen zur inneren Approximation Ω_{in}^ε und $12\hat{N} = 12 \times 6 = 72$ Ungleichungen zur äußeren Approximation Ω_{out}^ε . Die Lösung der insgesamt $432 + 72 = 504$ Ungleichungen liefert die Quadrate in der Abbildung 3.13 und das Intervall

$$0,3722 \leq \varepsilon \leq 1,0004 \quad (3.112)$$

für den ε -Wert.

Falls 16 Tschebyscheff-Punkte pro Variable verwendet werden, existieren $12\hat{N}^2 = 12 \times$

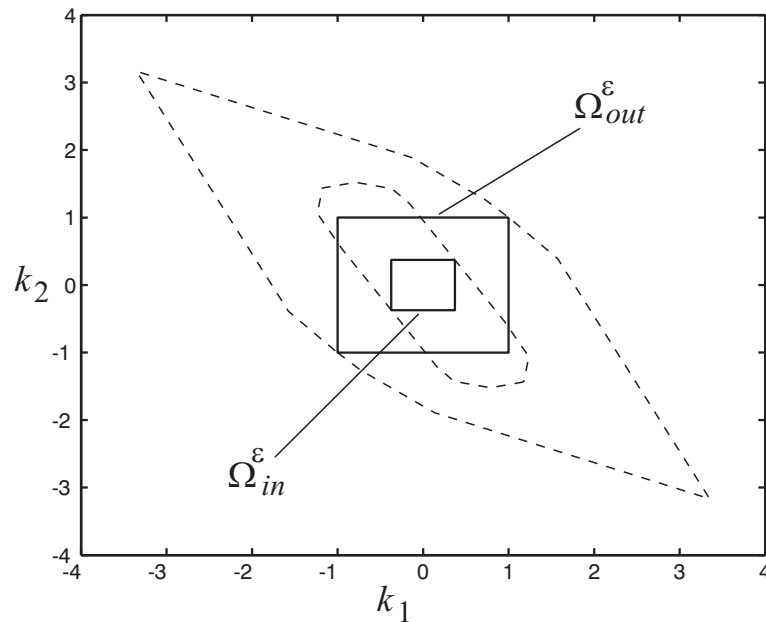


Abbildung 3.13: Innere Approximation Ω_{in}^ε und äußere Approximation Ω_{out}^ε zum Parameterbereich Ω^ε mit 6 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.5.

$16^2 = 3072$ Ungleichungen zur inneren Approximation Ω_{in}^ε und $12\hat{N} = 12 \times 16 = 192$ Ungleichungen zur äußeren Approximation Ω_{out}^ε . Die Lösungsmengen der Ungleichungen sind die in der Abbildung 3.14 dargestellten Quadrate. In diesem Fall liegt der ε -Wert im Intervall $[0,9208, 1]$.

Die Abbildung 3.15 zeigt die Verläufe von ε_{min} und ε_{max} nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable im Bereich bis 50. In dieser Abbildung ist der maximale ε_{min} -Wert 0,9921 und der minimale ε_{max} -Wert 1. Der ε -Wert liegt entsprechend im Intervall

$$0,9921 \leq \varepsilon \leq 1 . \quad (3.113)$$

Beispiel 3.6

In diesem Beispiel wird das größte Quadrat

$$\Omega^\varepsilon = \{ k \in \mathbb{R}^2 \mid -\varepsilon \leq k_i \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2 \} \quad (3.114)$$

im Parameterraum für das Polynom

$$p(x) = x_1^4 + x_2^4 + k_1 x_1 x_2 + k_2 x_2^3 + 1 \quad (3.115)$$

untersucht, so dass

$$k \in \Omega^\varepsilon \quad \implies \quad p(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (3.116)$$

gilt.

Das Polynom (3.115) ist das gleiche Polynom wie im Beispiel 3.5. Anstatt die global

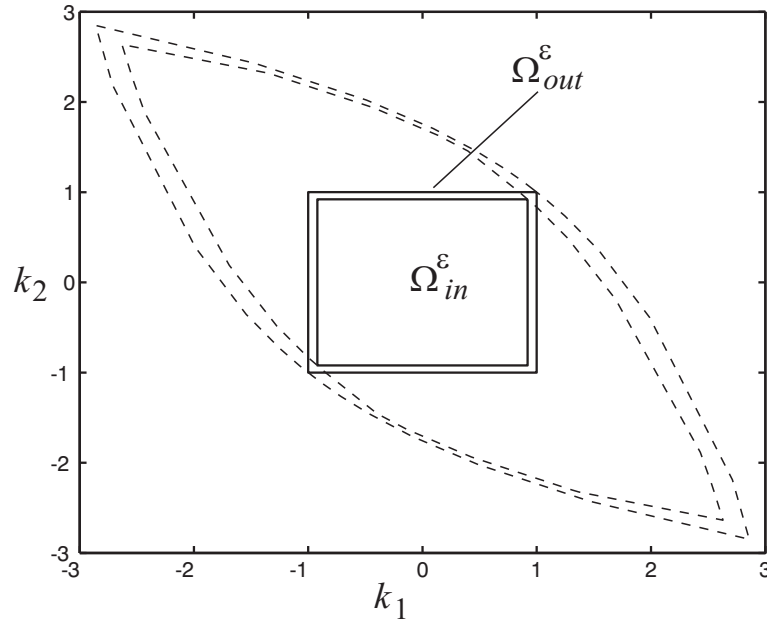


Abbildung 3.14: Innere Approximation Ω_{in}^ε und äußere Approximation Ω_{out}^ε zum Parameterbereich Ω^ε mit 16 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.5.

positive Definitheit des Originalpolynoms zu untersuchen, wird das homogenisierte Polynom

$$\tilde{p}(x) = \underbrace{(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4)}_{\tilde{p}_0(x)} + \underbrace{x_0^2 x_1 x_2}_{\tilde{p}_1(x)} k_1 + \underbrace{x_0 x_2^3}_{\tilde{p}_2(x)} k_2, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (3.117)$$

auf die positive Definitheit an den fünf Seitenflächen eines Quaders überprüft, die in (3.81) beschrieben sind. Es werden die Strahlen

$$k^1 = \Delta k^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k^2 = \Delta k^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

$$k^3 = \Delta k^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k^4 = \Delta k^4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wie im Beispiel 3.5 verwendet, da das Polynom (3.115) wie das Polynom (3.106) zwei unbekannte Parameter hat.

Die Ungleichungen der notwendigen und hinreichenden Bedingungen haben die Form

$$a_2 k_2 + a_1 k_1 + a_0 > 0, \quad (3.119)$$

wobei die Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2 Funktionen der Tschebyscheff-Punkte in den fünf Rechtecken (3.81) und deshalb bekannt und konstant sind. Mittels der Strahlen (3.118) werden von jeder Ungleichung die vier verschiedenen Ungleichungen

$$(a_1 + a_2) \Delta k^1 + a_0 > 0$$

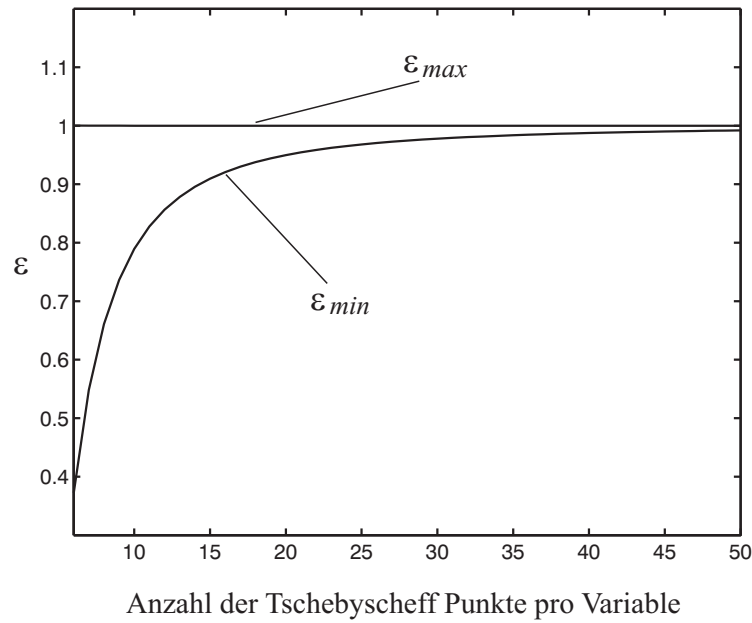


Abbildung 3.15: Untere Grenze ε_{min} und obere Grenze ε_{max} für den ε -Wert nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable für Beispiel 3.5.

$$(a_2 - a_1) \Delta k^2 + a_0 > 0 \quad (3.120)$$

$$(a_1 - a_2) \Delta k^3 + a_0 > 0$$

$$-(a_1 + a_2) \Delta k^4 + a_0 > 0$$

erzeugt.

In diesem Fall existieren $2^r(2n+1)\hat{N}^2 = 20\hat{N}^2$ Ungleichungen, die ein Ungleichungssystem beschreiben. Die Lösung dieses Ungleichungssystems bestimmt eine innere Approximation Ω_{in}^ε zu dem Parameterbereich Ω^ε . Weiterhin existieren $2^r(2n+1)\hat{N} = 20\hat{N}$ Ungleichungen, die eine äußere Approximation Ω_{out}^ε zur Menge Ω^ε liefern.

Für $N = 16$ Tschebyscheff-Punkte pro Variable gibt es in jedem Rechteck \hat{J} gemäß (3.81) $\hat{N} = N^n = 16 \times 16 = 256$ Tschebyscheff-Punkte. Da 5 Rechtecke \hat{J} gemäß (3.82) existieren, ist die gesamte Anzahl der Tschebyscheff-Punkte $5 \times 256 = 1280$.

Die Anzahl der Ungleichungen zur inneren Approximation Ω_{in}^ε ist $20\hat{N}^2 = 1310720$, und die zur äußeren Approximation Ω_{out}^ε ist $20\hat{N} = 5120$. Wenn insgesamt $1310720 + 5120 = 1315840$ Ungleichungen gelöst werden, werden die Quadrate in der Abbildung 3.16 als Lösungsmengen bestimmt und das Intervall

$$1,0766 \leq \varepsilon \leq 1,2848 \quad (3.121)$$

wird für den ε -Wert festgestellt.

Wenn $N = 24$ Tschebyscheff-Punkte pro Variable verwendet werden, gibt es $\hat{N} = N^n = 24 \times 24 = 576$ Tschebyscheff-Punkte in jedem Intervall \hat{J} gemäß (3.81). Da 5 Rechtecke \hat{J} gemäß (3.82) existieren, ist die gesamte Anzahl der Tschebyscheff-Punkte $5 \times 576 = 2880$.

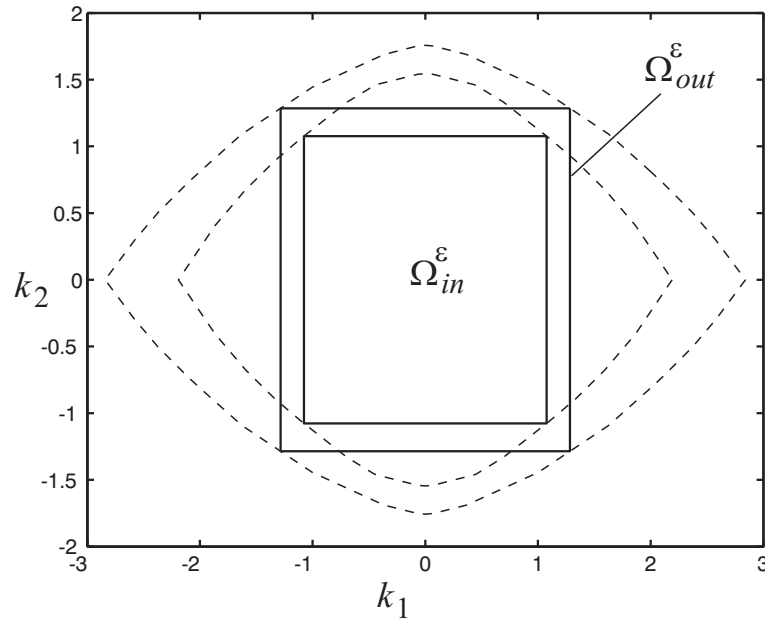


Abbildung 3.16: Innere Approximation Ω_{in}^ε und äußere Approximation Ω_{out}^ε zum Parameterbereich Ω^ε mit 16 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.6.

Es existieren $20\hat{N}^2 = 20 \times 576^2 = 6635520$ Ungleichungen zur inneren Approximation Ω_{in}^ε und $20\hat{N} = 20 \times 576 = 11520$ Ungleichungen zur äußeren Approximation Ω_{out}^ε . Die Lösungsmengen der Ungleichungen sind die in der Abbildung 3.17 dargestellten Quadrate. In diesem Fall liegt der ε -Wert im Intervall $[1,2073, 1,2865]$.

Die Abbildung 3.18 zeigt die Verläufe von ε_{min} und ε_{max} nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable im Bereich bis 46. In dieser Abbildung ist der maximale ε_{min} -Wert 1,2646 und der minimale ε_{max} -Wert 1,2846. Der ε -Wert liegt entsprechend im Intervall

$$1,2646 \leq \varepsilon \leq 1,2846 . \quad (3.122)$$

Beispiel 3.7

In diesem Beispiel, das aus [3] stammt, wird der größte Hyperkubus

$$\Omega^\varepsilon = \{ \delta k \in \mathbb{R}^4 \mid -\varepsilon \leq \delta k_i \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, 4 \} \quad (3.123)$$

im Parameterraum für das Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= (k_{1n} + \delta k_1)x_1^4 - (k_{2n} + \delta k_2)x_1^3 + (k_{3n} + \delta k_3)x_1^2 + (k_{4n} + \delta k_4) \\ &= (1 + \delta k_1)x_1^4 - (2 + \delta k_2)x_1^3 + (1 + \delta k_3)x_1^2 + (5 + \delta k_4) \end{aligned} \quad (3.124)$$

untersucht, so dass

$$\delta k \in \Omega^\varepsilon \quad \implies \quad p(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.125)$$

gilt. In (3.124) stellt k_{in} $i = 1, \dots, 4$, den nominalen Wert des entsprechenden Parameters dar, und δk_i , $i = 1, \dots, 4$, bezeichnet die Parameterunsicherheit im i -ten Parameter. Die

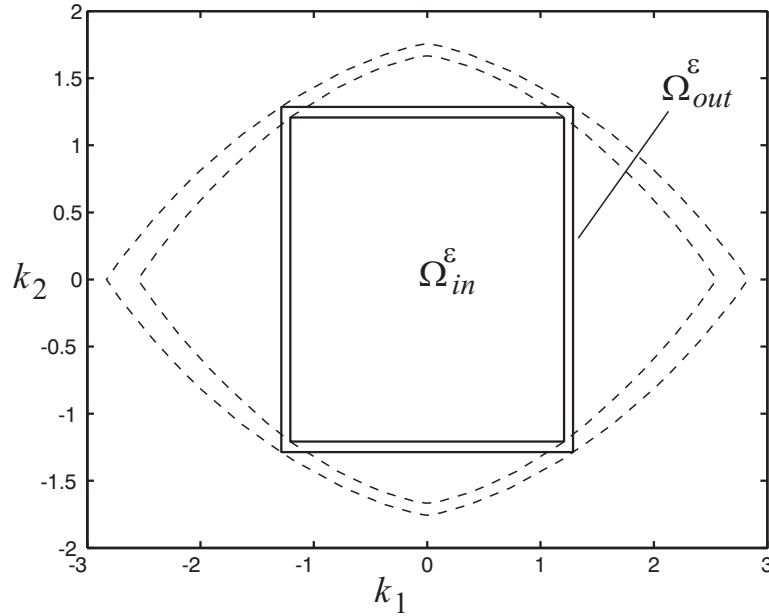


Abbildung 3.17: Innere Approximation Ω_{in}^ε und äußere Approximation Ω_{out}^ε zum Parameterbereich Ω^ε mit 24 Tschebyscheff-Punkten pro Variable für Beispiel 3.6.

nominalen Werte der Parameter sind wie folgt angegeben.

$$k_{1n} = 1 \quad , \quad k_{2n} = 2 \quad , \quad k_{3n} = 1 \quad , \quad k_{4n} = 5 \quad (3.126)$$

Anstatt die global positive Definitheit des Originalpolynoms (3.124) zu untersuchen, wird das homogenisierte Polynom

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= (1 + \delta k_1)x_1^4 - (2 + \delta k_2)x_0x_1^3 + (1 + \delta k_3)x_0^2x_1^2 + (5 + \delta k_4)x_0^4 \quad (3.127) \\ &= \underbrace{(x_1^4 - 2x_0x_1^3 + x_0^2x_1^2 + 5x_0^4)}_{\tilde{p}_0(x)} + \underbrace{x_1^4}_{\tilde{p}_1(x)} \delta k_1 + \underbrace{(-x_0x_1^3)}_{\tilde{p}_2(x)} \delta k_2 \\ &\quad + \underbrace{x_0^2x_1^2}_{\tilde{p}_3(x)} \delta k_3 + \underbrace{x_0^4}_{\tilde{p}_4(x)} \delta k_4 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

auf die positive Definitheit an den drei Seiten eines Rechtecks überprüft, die in (3.42) beschrieben und in der Abbildung 3.2 dargestellt sind. Im folgenden werden die $2^r = 2^4 = 16$ Strahlen

$$\begin{aligned} \delta k^1 &= \Delta k^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , & \delta k^2 &= \Delta k^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , & \delta k^3 &= \Delta k^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \delta k^4 &= \Delta k^4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , & \delta k^5 &= \Delta k^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , & \delta k^6 &= \Delta k^6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

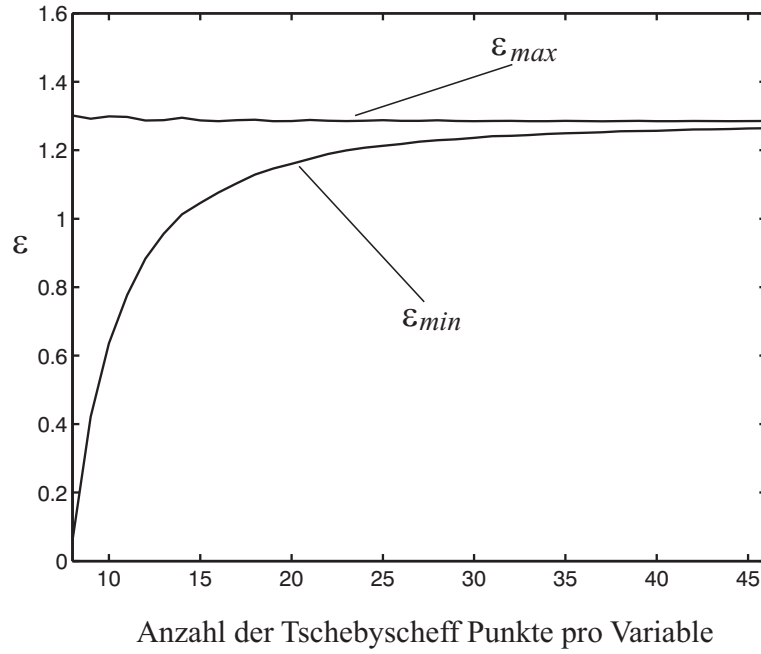


Abbildung 3.18: Untere Grenze ε_{min} und obere Grenze ε_{max} für den ε -Wert nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable für Beispiel 3.6.

$$\delta k^7 = \Delta k^7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta k^8 = \Delta k^8 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta k^9 = \Delta k^9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

$$\delta k^{10} = \Delta k^{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \delta k^{11} = \Delta k^{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \delta k^{12} = \Delta k^{12} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\delta k^{13} = \Delta k^{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \delta k^{14} = \Delta k^{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \delta k^{15} = \Delta k^{15} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\delta k^{16} = \Delta k^{16} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

verwendet, die mittels der Formel (3.97) berechnet werden, um die Menge (3.123) zu bestimmen. In (3.128) sind die skalaren Koeffizienten Δk^i , $i = 1, \dots, 16$, positiv.

Die Ungleichungen der notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind der Form

$$a_4 \delta k_4 + a_3 \delta k_3 + a_2 \delta k_2 + a_1 \delta k_1 + a_0 > 0, \quad (3.129)$$

wobei die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 und a_4 Funktionen von Tschebyscheff-Punkten und deshalb bekannt und konstant sind. Mit Hilfe der Strahlen (3.128) werden von jeder Ungleichung die sechszehn Ungleichungen

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \Delta k^1 + a_0 &> 0 \\ (-a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \Delta k^2 + a_0 &> 0 \\ (a_1 - a_2 + a_3 + a_4) \Delta k^3 + a_0 &> 0 \\ (-a_1 - a_2 + a_3 + a_4) \Delta k^4 + a_0 &> 0 \\ (a_1 + a_2 - a_3 + a_4) \Delta k^5 + a_0 &> 0 \\ (-a_1 + a_2 - a_3 + a_4) \Delta k^6 + a_0 &> 0 \\ (a_1 - a_2 - a_3 + a_4) \Delta k^7 + a_0 &> 0 \\ (-a_1 - a_2 - a_3 + a_4) \Delta k^8 + a_0 &> 0 \\ (a_1 + a_2 + a_3 - a_4) \Delta k^9 + a_0 &> 0 \\ (-a_1 + a_2 + a_3 - a_4) \Delta k^{10} + a_0 &> 0 \\ (a_1 - a_2 + a_3 - a_4) \Delta k^{11} + a_0 &> 0 \\ (-a_1 - a_2 + a_3 - a_4) \Delta k^{12} + a_0 &> 0 \\ (a_1 + a_2 - a_3 - a_4) \Delta k^{13} + a_0 &> 0 \\ (-a_1 + a_2 - a_3 - a_4) \Delta k^{14} + a_0 &> 0 \\ (a_1 - a_2 - a_3 - a_4) \Delta k^{15} + a_0 &> 0 \\ (-a_1 - a_2 - a_3 - a_4) \Delta k^{16} + a_0 &> 0 \end{aligned} \quad (3.130)$$

gebildet.

Es existieren $2^r(2n+1)\hat{N}^2 = 48\hat{N}^2$ Ungleichungen, die ein Ungleichungssystem beschreiben. Die Lösung dieses Ungleichungssystems bestimmt eine innere Approximation Ω_{in}^ε zum Hyperkubus Ω^ε . Durch die anderen existierenden $2^r(2n+1)\hat{N} = 48\hat{N}$ Ungleichungen werden eine äußere Approximation Ω_{out}^ε zur Menge Ω^ε berechnet.

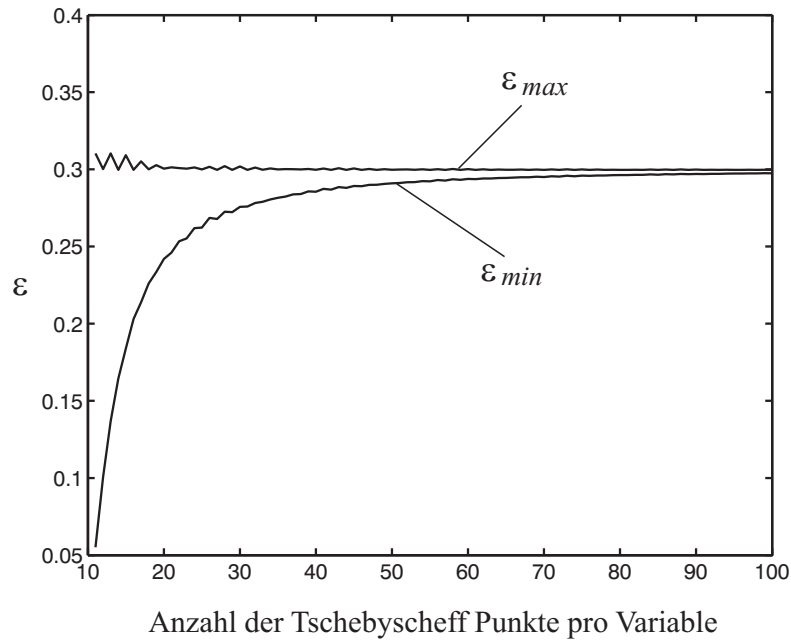


Abbildung 3.19: Untere Grenze ε_{min} und obere Grenze ε_{max} für den ε -Wert nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable für Beispiel 3.7.

Wenn $N = 100$ Tschebyscheff-Punkte pro Variable verwendet werden, gibt es $\hat{N} = N = 100$ Tschebyscheff-Punkte in jedem Intervall \hat{J} gemäß (3.42). Hieraus folgt insgesamt $3 \times 100 = 300$ Tschebyscheff-Punkte. In diesem Fall existieren $48\hat{N}^2 = 48 \times 100^2 = 480000$ Ungleichungen, mit deren Hilfe eine innere Approximation Ω_{in}^ε zu dem Parameterbereich Ω^ε bestimmt wird. Die Lösungsmenge der $48\hat{N} = 48 \times 100 = 4800$ Ungleichungen, die notwendigen Bedingungen darstellen, liefert eine äußere Approximation Ω_{out}^ε zur Menge Ω^ε .

Die Abbildung 3.19 zeigt die Verläufe von ε_{min} und ε_{max} nach der Anzahl der Tschebyscheff-Punkte pro Variable im Bereich bis 100. In dieser Abbildung ist der maximale ε_{min} -Wert 0,2975 und der minimale ε_{max} -Wert 0,2996. Entsprechend liegt der ε -Wert im Intervall

$$0,2975 \leq \varepsilon \leq 0,2996 \quad . \quad (3.131)$$

Kapitel 4

Asymptotische Stabilität nichtlinearer Systeme

4.1 Definition der Stabilität

Die Stabilität eines technischen dynamischen Systems ist eine absolut notwendige Eigenschaft und hat daher in der Regelungstechnik Vorrang vor allen anderen Zielen. Für lineare Systeme wurden viele Methoden entwickelt, um die Stabilität eines Systems zu testen. Die Untersuchung der Stabilität nichtlinearer Systeme ist hingegen schwieriger, da viel weniger Kriterien als bei linearen Systemen zur Überprüfung der Stabilität zur Verfügung stehen.

Es gibt drei mögliche Stabilitätslagen eines Systems. Entweder ist das System um eine Ruhelage asymptotisch stabil, stabil (grenzstabil) oder instabil. Der Begriff der Stabilität eines Systems bezeichnet im eigentlichen Sinne die Stabilität einer Ruhelage in dem entsprechenden System. In diesem Kapitel wird die Stabilität einer Ruhelage in autonomen Systemen studiert. Das dynamische Verhalten eines autonomen Systems wird im Allgemeinen durch die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x) \ , \quad x(0) = x^o \quad (4.1)$$

beschrieben, mit x aus \mathbb{R}^n den Zustandsvektor des Systems und x^o dessen Anfangszustand. Die Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

repräsentiert eine lineare oder nichtlineare Funktion des Zustandsvektors. Falls $f(x)$ eine lineare Funktion ist, wird das System als ein lineares System bezeichnet, wenn $f(x)$ eine nichtlineare Funktion ist, wird es ein nichtlineares System genannt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $x = 0$ eine Ruhelage des autonomen Systems ist, d. h. es gilt

$$f(0) = 0 \ . \quad (4.3)$$

Zur Vereinfachung werden die folgenden Annahmen getroffen. Zunächst erfolgt die Definition des sphärischen Bereiches

$$\Omega_r = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r \} \ . \quad (4.4)$$

Wir nehmen an, dass die Lösung von (4.1) existiert und eindeutig ist. Im Folgenden werden die Definitionen für *Stabilität*, *asymptotische Stabilität* und *Instabilität* angegeben.

Stabilität : Man nennt die Ruhelage im Ursprung des Systems stabil, wenn zu jedem $R > 0$ ein $r > 0$ existiert, so dass für jeden Anfangszustand $x^o \in \Omega_r$ die zu x^o gehörende Trajektorie $x(t)$ für alle Zeiten im sphärischen Bereich Ω_R bleibt.

Asymptotische Stabilität : Die Ruhelage $x = 0$ ist asymptotisch stabil, wenn das System um die Ruhelage stabil ist und zusätzlich jede Trajektorie $x(t)$, die genügend Nahe bei der Ruhelage beginnt, mit zunehmender Zeit in den Ursprung einläuft.

Ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil und laufen alle Trajektorien in die Ruhelage ein, wird die Ruhelage $x = 0$ als *global asymptotisch stabile* Ruhelage bezeichnet.

Instabilität : Das System ist um die Ruhelage instabil, wenn es für alle $r > 0$ im sphärischen Bereich Ω_r immer einen Anfangszustand x^o gibt, so dass seine Trajektorie $x(t)$ mit zunehmender Zeit für jedes $R > 0$ den abgeschlossenen Bereich Ω_R verläßt [42].

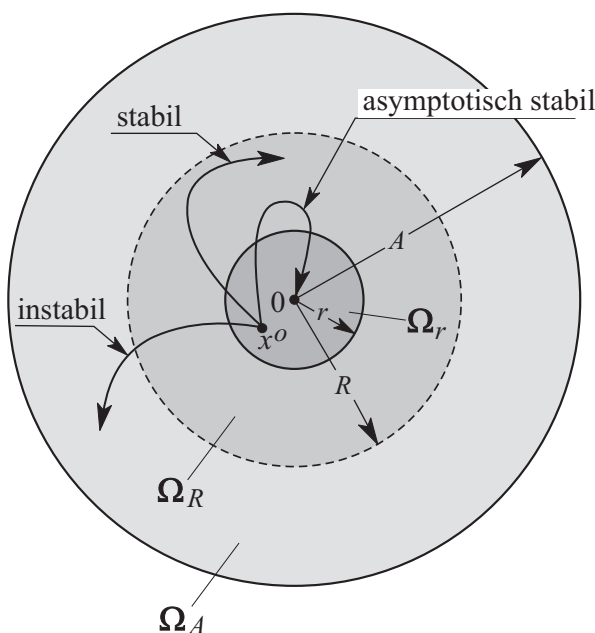


Abbildung 4.1: Mögliche Stabilitätslagen eines autonomen Systems um die Ruhelage $x = 0$.

Die Stabilitätsdefinitionen sind für den zweidimensionalen Raum in der Abbildung 4.1 grafisch dargestellt [42].

Für ein lineares autonomes System mit bekannten Parametern können die Zustandsgleichungen über

$$\dot{x}(t) = A x(t) , \quad x(0) = x^o \quad (4.5)$$

beschrieben werden. Hier ist die Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

eine $(n \times n)$ Matrix, die aus zeitinvarianten Elementen besteht. Die skalare lineare Funktion $f_i(x)$ ist dann gleich

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j(t) , \quad i = 1, \dots, n . \quad (4.7)$$

Der Punkt $x = 0$ ist immer eine Ruhelage des linearen Systems. Wenn die Systemmatrix A eine reguläre Matrix ist, ist $x = 0$ die einzige Ruhelage des Systems.

Die Differentialgleichungen (4.5) haben einen einzigen Lösungsvektor $x(t)$ mit der Anfangsbedingung x^o . Der Vektor $x(t)$ wird mit

$$x(t) = e^{At} x^o \quad (4.8)$$

angegeben und beschreibt eine Trajektorie im Zustandsraum. Hier wird die $(n \times n)$ Matrix e^{At} als die Fundamentalmatrix des linearen Systems bezeichnet [5, 35]. Es gibt verschiedene Methoden, die Fundamentalmatrix zu berechnen [34, 35]. Sie ist nicht nur eine Funktion der Zeit sondern auch abhängig von den Eigenwerten der Systemmatrix A .

Man kann über die Eigenwerte der Systemmatrix A bestimmen, ob ein lineares System asymptotisch stabil oder instabil ist. Dabei ist es nicht nötig, die Fundamentalmatrix e^{At} zu berechnen. Wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix A einen negativen Realteil besitzen, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| = 0 . \quad (4.9)$$

Daraus folgt, dass das lineare System mit der Systemmatrix A asymptotisch stabil ist. Gibt es mindestens einen Eigenwert, der einen positiven Realteil hat, geht die Norm der Fundamentalmatrix e^{At} mit zunehmender Zeit exponentiell gegen unendlich.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

In diesem Fall ist das lineare System mit der Systemmatrix A instabil [34, 35, 57]. Bei nichtlinearen Systemen kann die Stabilitätslage einer Ruhelage durch Linearisierung bestimmt werden. Zur Untersuchung der asymptotischen Stabilität des Ursprungs im Zustandsraum wird das Modell des nichtlinearen Systems um den Ursprung linearisiert. Das linearisierte Modell wird beschrieben durch eine Zustandsraumdarstellung nach (4.5) mit der Systemmatrix

$$A = \left. \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|_{x=0} , \quad (4.11)$$

wobei

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Jacobi-Matrix oder *Jacobische Funktionalmatrix* genannt wird [13]. Falls das um den Ursprung linearisierte Modell asymptotisch stabil ist, ist die Ruhelage im Ursprung asymptotisch stabil [28, 35].

4.2 Asymptotische Stabilität nach dem Satz von Ljapunow

Die Stabilität nichtlinearer dynamischer Systeme ist wesentlich komplizierter zu untersuchen als die Stabilität linearer Systeme. Eines der wenigen Stabilitätskriterien zur Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme ist die asymptotische Stabilitätsanalyse nach dem Satz von Ljapunow.

A. M. Ljapunow ging bei seiner *direkten Methode* von der Annahme aus, dass eine explizite Lösung der Differentialgleichungen des nichtlinearen Systems nicht bekannt ist. Sein Grundgedanke basiert auf der physikalischen Interpretation der Systemenergie. Eine Ruhelage eines physikalischen Systems ist stabil oder asymptotisch stabil, wenn die Energie des Systems in der Nähe der Ruhelage ständig abnimmt. Sofern bewiesen werden kann, dass die Systemenergie um die Ruhelage stetig abnimmt, ist sogleich der Nachweis geführt, dass das nichtlineare System um die Ruhelage stabil sein muss. Mit diesem Verfahren müssen die Differentialgleichungen des Systems nicht explizit gelöst werden [42, 57].

Die Ljapunowschen Sätze sind eine Verallgemeinerung dieser Überlegung. Eine skalare positiv definite Funktion $V(x)$ wird dafür mit den folgenden Eigenschaften definiert.

- $V(x)$ und ihre ersten partiellen Ableitungen sind in einem geschlossenen Bereich Ω um den Ursprung stetig.
- Die Funktion $V(x)$ hat nur eine einzige Nullstelle in Ω . Diese Nullstelle soll sich bei $x = 0$ befinden. Mit anderen Worten ist $V(0) = 0$.
- Außerhalb des Ursprungs, aber immer in Ω , ist $V(x)$ positiv. Sie verschwindet nur im Ursprung. Der Ursprung ist ein isoliertes Minimum von $V(x)$.
- Längs der Trajektorie $x(t)$ gilt die Eigenschaft

$$\dot{V}(x) = (\nabla V)^T \dot{x}(t) = (\nabla V)^T f(x) \leq 0 \quad \forall x(t) \in \Omega, \quad (4.13)$$

wobei $\dot{V}(x)$ die zeitliche Ableitung und (∇V) den Gradienten der Funktion $V(x)$ darstellt.

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Die Funktion $V(x)$, die die oben angegebenen Voraussetzungen erfüllt, wird eine *Ljapunow-Funktion* genannt [42]. Ljapunow-Funktionen stellen eine Erweiterung des Energiebegriffs dar. Die zentrale Idee des Satzes von Ljapunow besteht darin, die Stabilität der Ruhelage $x = 0$ mit Hilfe der Eigenschaften einer Ljapunow-Funktion $V(x)$ festzustellen. Die Abbildung 4.2 zeigt eine mögliche Ljapunow-Funktion und ihre Höhenlinien für ein nichtlineares System mit zwei Zuständen.

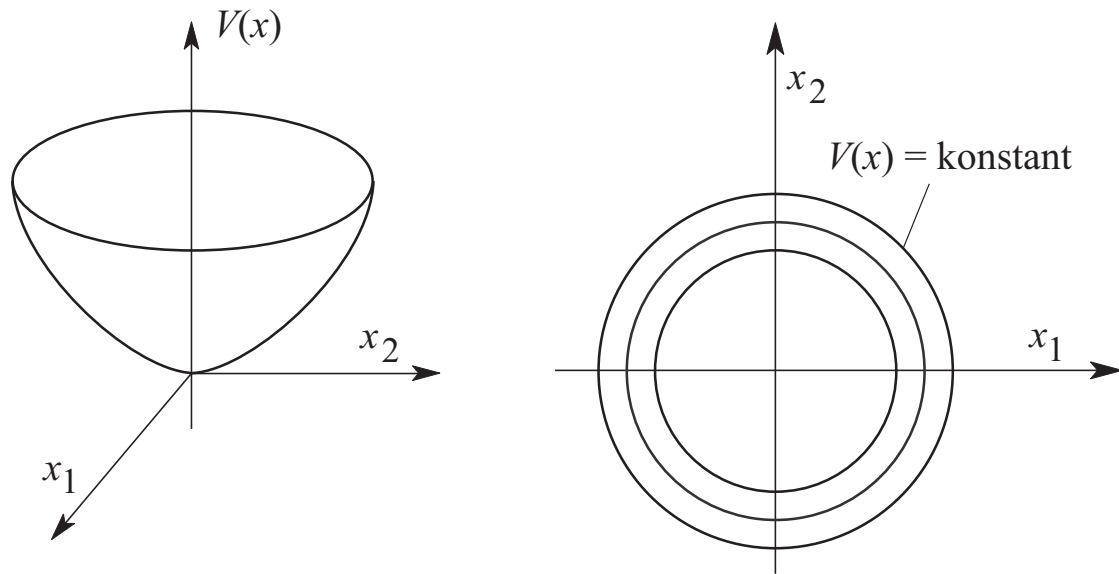


Abbildung 4.2: Eine mögliche Ljapunow-Funktion mit zwei Variablen und ihre Höhenlinien.

Stabilität im Kleinen

Wenn für ein nichtlineares System die folgenden Bedingungen erfüllt werden, liegt *die Stabilität im Kleinen* vor.

- Falls für das gegebene System mit der Zustandsraumbeschreibung (4.1) eine positiv definite Ljapunow-Funktion $V(x)$ gefunden werden kann, die in einem beliebigen geschlossenen Bereich Ω in der Umgebung der Ruhelage $x = 0$ definiert ist, und falls die Funktion $\dot{V}(x)$ negativ semidefinit ist, ist die Ruhelage $x = 0$ stabil.
- Falls $\dot{V}(x)$ in Ω negativ definit ist, dann liegt asymptotische Stabilität vor.

Praktische Stabilität und Stabilität im Großen

Wenn der Bereich Ω definiert und bekannt ist, wird die Stabilität im Kleinen als *praktische Stabilität* bezeichnet. Falls das Stabilitätskriterium von Ljapunow für den gesamten Zustandsraum gültig ist, liegt *die Stabilität im Großen* vor. Die praktische Stabilität wird durch folgende mathematischen Eigenschaften charakterisiert.

- $V(x)$ ist positiv definit im definierten geschlossenen Bereich Ω_C .
- Die ersten partiellen Ableitungen von $V(x)$ sind stetig in Ω_C .
- Die Oberfläche $V(x) = C$, wobei C konstant ist, bildet den Rand von Ω_C . Dann wird der Bereich Ω_C definiert mit

$$\Omega_C = \{ x \mid V(x) \leq C \}, \quad C > 0. \quad (4.15)$$

- Der Vektor ∇V verschwindet nirgends im Bereich Ω_C mit Ausnahme von $x = 0$.
- $\dot{V}(x)$ ist im Bereich Ω_C negativ definit.

Wenn die oben genannten Voraussetzungen erfüllt sind, dann ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil. Das heißt, jede Trajektorie $x(t)$ läuft in den Ursprung ein, die in Ω_C beginnt und auch dort verläuft.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_C \quad (4.16)$$

Falls diese Bedingungen im gesamten Zustandsraum erfüllt sind und

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty \quad (4.17)$$

gilt, ist die Ruhelage $x = 0$ global asymptotisch stabil, bzw. es liegt *asymptotische Stabilität im Ganzen* vor.

Wie im Abschnitt 4.1 bereits erwähnt, gilt für lineare Systeme asymptotische Stabilität im Ganzen, falls die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil ist. Ferner kann bei linearen Systemen auch mit Hilfe des Satzes von Ljapunow die asymptotische Stabilität sichergestellt werden. Dafür wird die quadratische skalare Funktion

$$V(x) = x^T Q x \quad (4.18)$$

als Ljapunow-Funktion angesetzt, wobei die Matrix Q symmetrisch und positiv definit ist. Unter dieser Bedingung gilt

$$V(x) = x^T Q x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} . \quad (4.19)$$

Weiterhin gilt die radiale Unbeschränktheit der Funktion $V(x)$.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} x^T Q x \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

Die zeitliche Ableitung von (4.18) ist

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{d}{dt}(x^T Q x) \\ &= \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} \\ &= (A x)^T Q x + x^T Q (A x) \\ &= x^T A^T Q x + x^T Q A x \\ &= x^T (A^T Q + Q A) x . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wenn die in Klammern stehende Matrix negativ definit ist, gilt

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T Q + Q A) x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} . \quad (4.22)$$

Daraus folgt, dass die Funktion $V(x)$ in (4.18) eine Ljapunow-Funktion ist, und dass das lineare System mit der Systemmatrix A nach den Stabilitätssätzen von Ljapunow asymptotisch stabil ist [12, 22, 28, 57].

4.3 Einzugsbereich und gesicherter Einzugsbereich

Falls die Ruhelage im Ursprung eines nichtlinearen Systems asymptotisch stabil ist, existiert ein Einzugsbereich Ω_E um den Ursprung herum. Die Gesamtheit aller Punkte des Zustandsraumes, die Anfangszustände der Trajektorien $x(t)$ sind, die die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (4.23)$$

erfüllen, bilden den Einzugsbereich Ω_E der Ruhelage im Ursprung unter der Voraussetzung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 . \quad (4.24)$$

Der gesamte Einzugsbereich Ω_E kann mit der Menge

$$\Omega_E = \{ x^o \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \} , \quad x(t) \in \Omega_E \quad (4.25)$$

definiert werden, wobei der Vektor x^o die Anfangsbedingung der Trajektorie $x(t)$ ist [12, 28].

Für nichtlineare Systeme ist es fast unmöglich, den gesamten Einzugsbereich mit Hilfe des Satzes von Ljapunow zu bestimmen, weil es keine Regel gibt, die optimale Ljapunow-Funktion zu berechnen, obwohl einige Methoden vorhanden sind, die eine geeignete positiv definite Funktion $V(x)$ finden können.

Der geschlossene Bereich (4.15), in dem jede Trajektorie $x(t)$ des Systems für $t \rightarrow \infty$ gegen die Ruhelage $x = 0$ konvergiert, ist eine Untermenge des Einzugsbereiches Ω_E .

$$\Omega_C \subseteq \Omega_E \quad (4.26)$$

Ω_C , in dem die Bedingungen für die *praktische Stabilität* erfüllt sind, wird als *ein gesicherter Einzugsbereich* der Ruhelage $x = 0$ bezeichnet [12, 28]. Je größer der Bereich Ω_E , bzw. der Bereich Ω_C ist, desto robuster ist die Stabilität des Systems um die Ruhelage $x = 0$. In der Abbildung 4.3 ist ein gesicherter Einzugsbereich Ω_C in der zweidimensionalen Ebene dargestellt. In einem Einzugsbereich bilden die Vektoren ∇V und $\dot{x}(t)$ einen stumpfen Winkel, wie in Abbildung 4.3 gezeichnet.

Der größte Nachteil der Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme nach dem Satz von Ljapunow besteht darin, dass der Satz für das zu beschreibende System nur eine hinreichende Stabilitätsbedingung angibt. Außerdem erfasst der gesicherte Einzugsbereich Ω_C , der durch eine Ljapunow-Funktion $V(x)$ gefunden wurde, nur einen Teil des tatsächlichen Stabilitätsgebiets Ω_E . Wenn keine Ljapunow-Funktion gefunden werden kann, die die Eigenschaften des Satzes von Ljapunow erfüllt, bedeutet dies nicht, dass das System instabil in $x = 0$ wäre. Aber es gibt keine Regel, die Ljapunow-Funktion herauszufinden, die den größten gesicherten Einzugsbereich sicherstellt [42]. Es gibt in der Literatur eine Reihe von Publikationen, deren Ziel es ist, eine optimal geeignete Ljapunow-Funktion zu generieren, um einen möglichst großen gesicherten Einzugsbereich zu schätzen [6, 8, 9, 15, 21, 27, 29, 33, 37, 56, 60, 62]. Im Folgenden wird für ein einfaches Beispiel die Anwendung der Sätze von Ljapunow demonstriert.

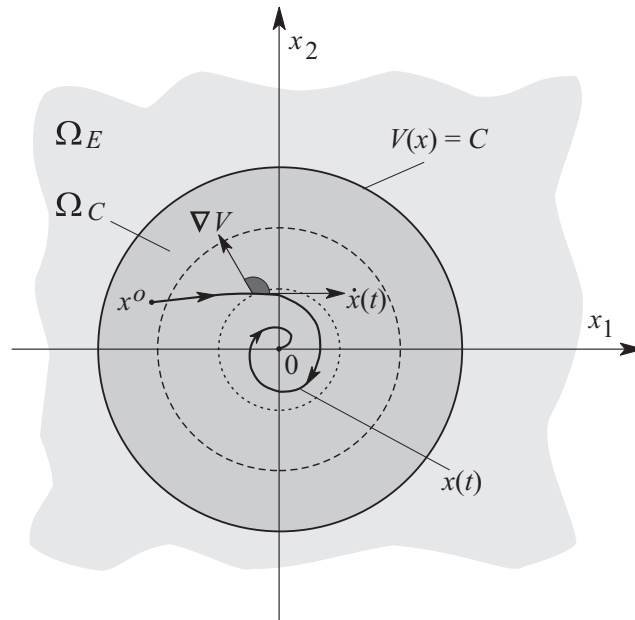


Abbildung 4.3: Gesicherter Einzugsbereich Ω_C eines nichtlinearen Systems mit zwei Zuständen.

Beispiel 4.1

Es sei folgendes polynomiale autonome System gegeben [48].

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 x_2\end{aligned}\quad (4.27)$$

Das System hat eine einzige Ruhelage, und diese Ruhelage liegt im Ursprung. Die Stabilität der Ruhelage kann mit Hilfe der Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\quad (4.28)$$

getestet werden, wobei

$$f_1(x) = -x_1\quad (4.29)$$

und

$$f_2(x) = -x_2 + x_1^2 x_2\quad (4.30)$$

sind. Wenn das System um den Ursprung linearisiert wird, bekommt man ein lineares Modell (vgl. (4.5)) mit der Systemmatrix

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\quad (4.31)$$

Die Fundamentalmatrix für das linearisierte Modell wird bestimmt durch

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.\quad (4.32)$$

Da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| = 0\quad (4.33)$$

ist, ist das linearisierte Modell, bzw. die Ruhelage im Ursprung asymptotisch stabil. Die asymptotische Stabilität der Ruhelage $x = 0$ kann weiterhin durch den Satz von Ljapunow sichergestellt werden. Dafür wird das linearisierte Modell verwendet. Das quadratische Polynom

$$\begin{aligned} V(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T Q x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

sei als Ljapunow-Funktion angesetzt. Die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

ist symmetrisch und positiv definit, und die Funktion $V(x)$ ist radial unbeschränkt. Da die Matrix

$$\begin{aligned} A^T Q + Q A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

negativ definit ist, wird die quadratische und positiv definite Funktion $V(x)$ als eine geeignete Ljapunow-Funktion bezeichnet, und die Ruhelage im Ursprung ist asymptotisch stabil.

Um eine asymptotisch stabile Ruhelage eines nichtlinearen Systems existiert immer ein Einzugsbereich Ω_E . Für dieses nichtlineare System ist also ein Einzugsbereich um die Ruhelage $x = 0$ vorhanden. Es ist aber in meisten Fällen schwierig, den gesamten Einzugsbereich Ω_E zu berechnen. Dafür kann man einen gesicherten Einzugsbereich Ω_C mit Hilfe des Satzes von Ljapunow berechnen, wobei das Gebiet Ω_C in diesem Beispiel durch die Menge

$$\Omega_C = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C \}, \quad C > 0 \quad (4.37)$$

definiert ist.

Quadratische und positiv definite Polynome erfüllen direkt alle Bedingungen in der asymptotischen Stabilitätsanalyse von Ljapunow bis auf die Bedingung, dass im geschlossenen Gebiet Ω_C die zeitliche Ableitung des Polynoms negativ semidefinit ist. Deswegen muss überprüft werden, ob für das als Ljapunow-Funktion angesetzte Polynom $V(x)$ diese Bedingung erfüllt ist. Wenn sichergestellt ist, dass $V(x)$ eine geeignete Ljapunow-Funktion ist, kann durch diese Bedingung eine Konstante C bestimmt werden. Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion ist

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (\nabla V)^T \dot{x}(t) = (\nabla V)^T f(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1^2x_2^2 \\
&= \underbrace{-2x_1^2}_{\leq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} \underbrace{(x_1^2 - 1)}_{\leq 0} \leq 0 .
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Falls

$$-1 \leq x_1 \leq 1 \tag{4.39}$$

gilt, ist sichergestellt, dass die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion (4.34) negativ semidefinit ist.

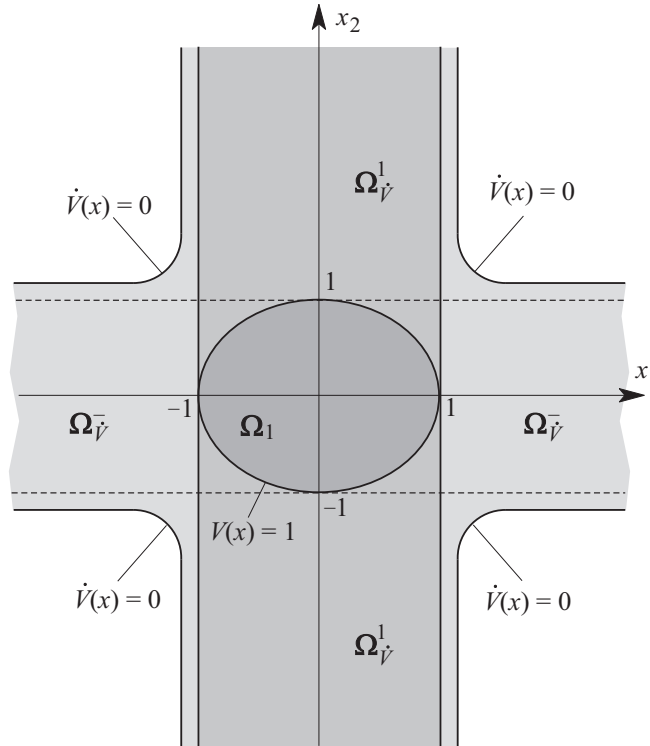


Abbildung 4.4: Das gesicherte Einzugsbereich Ω_1 für das System (4.27) im Beispiel 4.1.

Die Bedingung (4.39) beschreibt das Gebiet

$$\Omega_V^1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 1 \} , \tag{4.40}$$

in dem $\dot{V}(x)$ negativ definit ist. Das Gebiet (4.40) ist eine Teilmenge des Gebietes

$$\Omega_V^- = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(x) \leq 0 \} . \tag{4.41}$$

Nach dem Satz von Ljapunow muss ein gesicherter Einzugsbereich eine Teilmenge des Gebietes Ω_V^- sein. Wenn die Menge Ω_C als eine Teilmenge des Gebietes Ω_V^1 ausgewählt wird, dann ist sie ein gesicherter Einzugsbereich für das System (4.27).

$$\Omega_C \subseteq \Omega_V^1 \subseteq \Omega_V^- \tag{4.42}$$

Für $C = 1$ ist das Gebiet

$$\Omega_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \} \tag{4.43}$$

eine Teilmenge des Gebietes Ω_V^1 und beschreibt deshalb einen gesicherten Einzugsbereich. In der Abbildung 4.4 werden die Gebiete Ω_V^- , Ω_V^1 und Ω_1 grafisch dargestellt.

Kapitel 5

Berechnung gesicherter Einzugsbereiche für polynomiale Systeme

5.1 Einleitung

Wie im Kapitel 4 erwähnt wurde, ist es in der Regelungstechnik notwendig, die Stabilität der Ruhelage eines dynamischen Systems zu untersuchen. Falls die Ruhelage asymptotisch stabil ist, kommt als nächste Untersuchung die Bestimmung eines gesicherten Einzugsbereiches Ω_C in Frage. In dieser Einleitung werden die wesentlichen Begriffe nochmals wiederholt.

Im Folgenden werden nichtlineare autonome Systeme untersucht, die durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \ , \quad x(0) = x^o \quad (5.1)$$

beschrieben werden. Hier stellt der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ den Zustandsvektor des Systems, der Vektor $x^o \in \mathbb{R}^n$ den Anfangszustand und die Funktion $f(x) \in \mathbb{R}^n$ den Vektor der rechten Seiten, dessen Komponenten Polynome mit n Variablen sind, dar. Das System (5.1) soll die folgenden zwei Voraussetzungen erfüllen.

- Es soll $f(0) = 0$ sein, das heißt, der Zustandsvektor $x = 0$ ist eine Ruhelage des Systems.
- Die Matrix

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad (5.2)$$

ist eine Hurwitz-Matrix. Das bedeutet, die Eigenwerte der Matrix A sollen in der offenen linken Halbebene liegen. Daraus folgt, dass die Ruhelage im Ursprung asymptotisch stabil ist.

Die erste Voraussetzung ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu erfüllen. Wenn das System keine Ruhelage im Ursprung hat, kann eine beliebige Ruhelage durch eine Koordinatentransformation auf den Punkt $x = 0$ gezogen werden [57]. x^* sei die Ruhelage des Systems

$$\dot{\tilde{x}} = g(\tilde{x}) \ , \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^o \ , \quad (5.3)$$

für die die Stabilität, bzw. ein gesicherter Einzugsbereich untersucht wird. Durch die Transformation

$$x = \tilde{x} - x^* \quad (5.4)$$

wird ein transformiertes nichtlineares System der Form (5.1) erzeugt, dessen Ruhelage $x = 0$ ist. Hier sind $\dot{x} = \dot{\tilde{x}}$, $f(x) = g(x + x^*)$ und $x^o = \tilde{x}^o - x^*$. Die Transformation verändert die Stabilität des Systems nicht. Wenn die Ruhelage x^* asymptotisch stabil ist, ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil, und die Form des Einzugsbereiches $\tilde{\Omega}_E$ um x^* bleibt nach der Transformation unverändert.

Die zweite Voraussetzung garantiert, dass das linearisierte Modell des Systems um die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil ist, dass ein Einzugsbereich Ω_E um diese Ruhelage existiert. Die Abbildung 5.1 zeigt in einer zweidimensionalen Darstellung die Transformation der Ruhelage x^* in die Ruhelage $x = 0$.

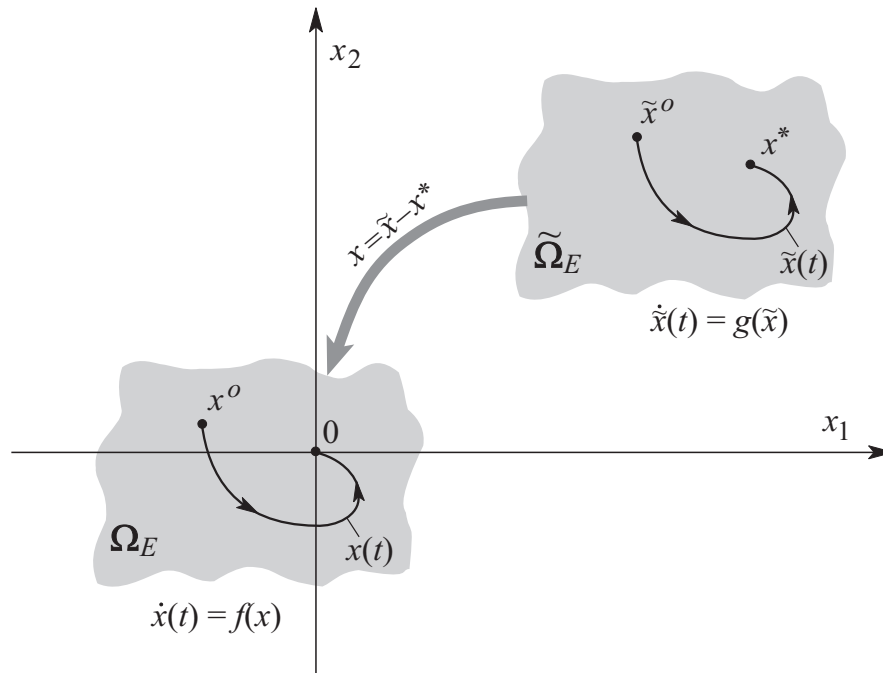


Abbildung 5.1: Transformation der Ruhelage $x^* \in \mathbb{R}^2$ in den Ursprung.

In diesem Kapitel wird die quadratische Ljapunow-Funktion

$$V(x) = x^T Q x \quad (5.5)$$

verwendet, um einen gesicherten Einzugsbereich Ω_C zu berechnen. Hierbei ist die Matrix Q symmetrisch und positiv definit.

Es wird angenommen, dass die Funktion $V(x)$ eine geeignete Ljapunow-Funktion ist. Dann kann mit Hilfe des Satzes von Ljapunow bewiesen werden, dass das um den Ursprung linearisierte Modell asymptotisch stabil ist. Daraus folgt die Annahme, dass die symmetrische Matrix

$$P = A^T Q + Q A \quad (5.6)$$

negativ definit ist [12, 22, 28, 57], wobei die Matrix A die Systemmatrix (5.2) des linearisierten Modells ist. Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion für das linearisierte Modell ist dementsprechend

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A^T Q + Q A) x \\ &= x^T P x < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ein gesicherter Einzugsbereich wird durch

$$\Omega_C = \{ x \mid V(x) \leq C \}, \quad C > 0 \quad (5.8)$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante C definiert.

Das geschlossene Gebiet Ω_C ist ein gesicherter Einzugsbereich des Systems nach dem Satz von Ljapunow, wenn die Ungleichung

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} \\ &= f(x)^T Q x + x^T Q f(x) < 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

für jedes $x \in \Omega_C$ außer $x = 0$ gilt [12, 28]. Die Abbildung 5.2 zeigt einen gesicherten Einzugsbereich Ω_C in der zweidimensionalen Ebene, der eine Untermenge des gesamten Einzugsbereiches Ω_E ist.

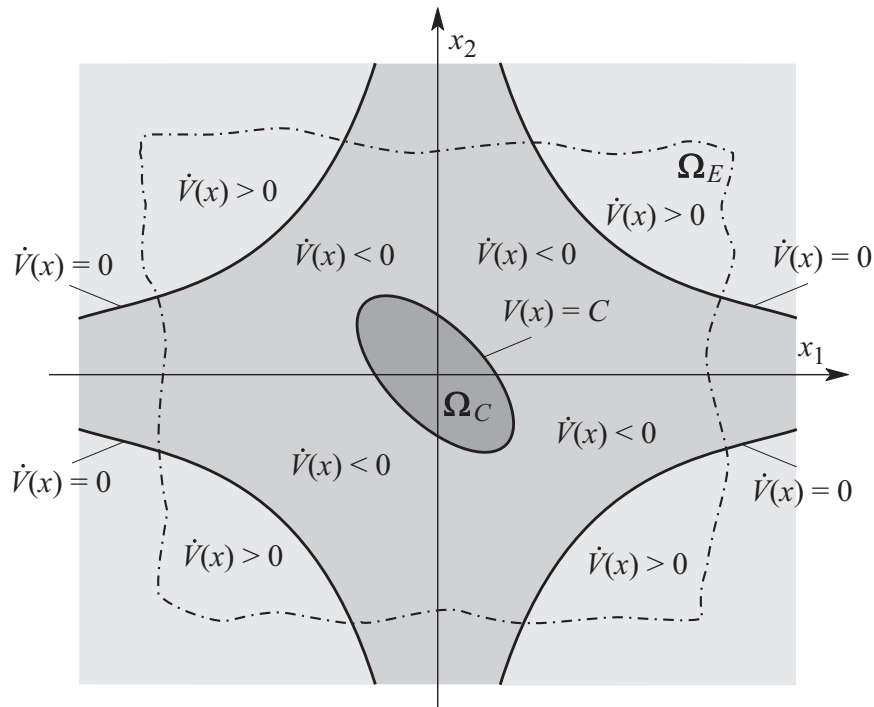


Abbildung 5.2: Ein gesicherter Einzugsbereich Ω_C in der zweidimensionalen Ebene.

Das Ziel dieses Kapitels ist für eine ausgewählte Ljapunow-Funktion den Wert von C zu maximieren, so dass das durch C definierte geschlossene Gebiet Ω_C ein gesicherter Einzugsbereich bleibt. Je größer der Wert von C ist, desto größer ist die Fläche, bzw. das Volumen des Einzugsbereiches Ω_C . Es gibt verschiedene Publikationen, in denen Methoden benutzt wurden, dieses Ziel zu erreichen [7, 14, 18, 20, 24, 26, 30, 36, 40, 44, 47, 48, 50, 53, 55, 59]. In der Abbildung 5.3 sieht man ein Beispiel für den größtmöglichen gesicherten Einzugsbereich Ω_C eines Systems mit zwei Zuständen. Für den Fall, dass die Ungleichung (5.9) für den gesamten Zustandsraum gilt, ist die Ruhelage global asymptotisch stabil, und der Einzugsbereich der gesamte \mathbb{R}^n .

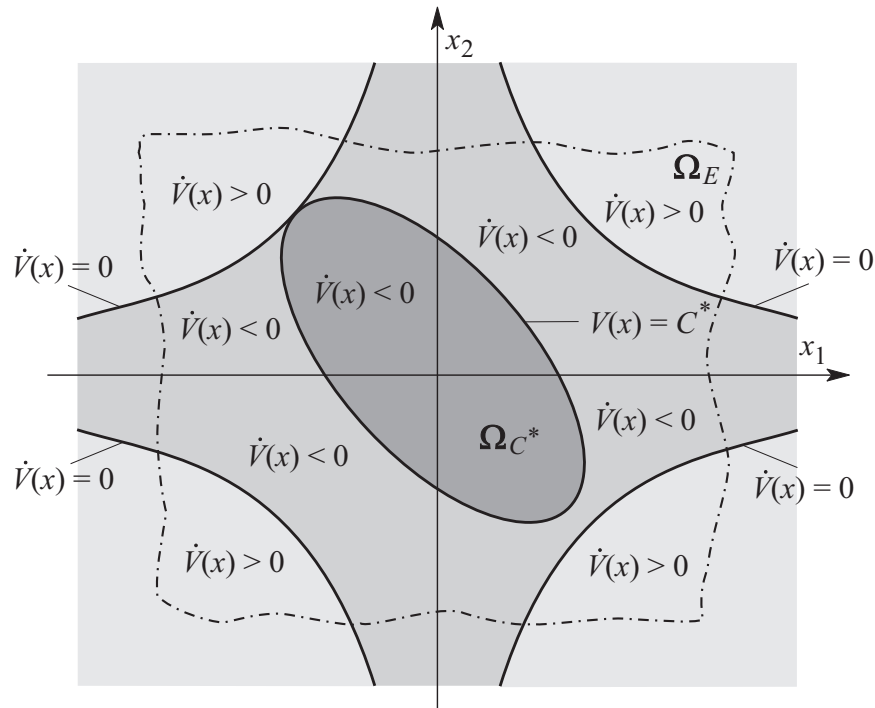


Abbildung 5.3: Größtmöglicher gesicherter Einzugsbereich Ω_{C^*} in der zweidimensionalen Ebene.

5.2 Numerische Berechnungsmethode eines gesicherten Einzugsbereiches

In diesem Unterkapitel wird der maximale Wert C^* von C für eine geeignete quadratische Ljapunow-Funktion untersucht [50]. Der geschlossene Bereich Ω_{C^*} soll ein gesicherter Einzugsbereich des Systems sein. Das heißt, dass jeder Zustandsvektor x in Ω_{C^*} die Ungleichung (5.9) erfüllt.

Die Gleichung

$$V(x) = x^T Q x = C, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.10)$$

mit konstantem C beschreibt ein Ellipsoid, im Spezialfall ein Sphäroid im n -dimensionalen Raum, dessen Volumen zu der Höhenlinie C proportional ist. Je größer die Zahl C ist, desto größer ist das Volumen des Ellipsoids, das den geschlossenen Bereich Ω_C darstellt. Durch das nächste Beispiel wird der oben genannte Satz in der zweidimensionalen Ebene veranschaulicht.

Beispiel 5.1

Ein quadratisches positiv definites Polynom

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}}_Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Q = Q^T > 0 \quad (5.11)$$

$$= q_1 x_1^2 + 2 q_2 x_1 x_2 + q_3 x_2^2$$

sei eine geeignete Ljapunow-Funktion für ein autonomes System, das eine Ruhelage im Ursprung besitzt. Die Funktion

$$V(x) = q_1 x_1^2 + 2 q_2 x_1 x_2 + q_3 x_2^2 = C \quad (5.12)$$

beschreibt eine Ellipse wie in Abbildung 5.4 dargestellt, wobei C konstant ist.

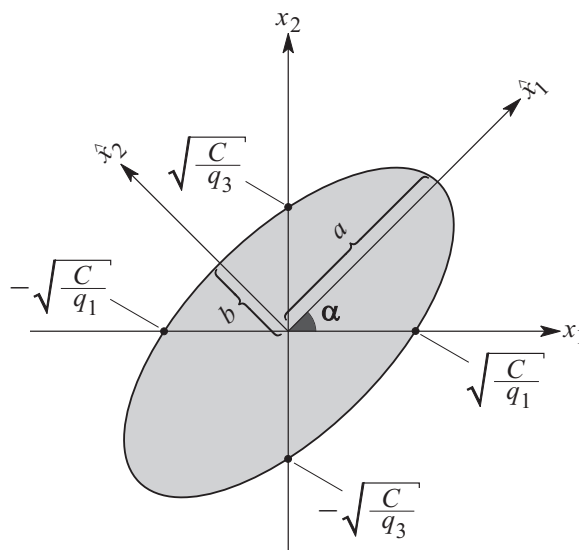


Abbildung 5.4: Ellipse, beschrieben durch die Funktion $V(x) = C$ für Beispiel 5.1.

Die Beschreibungsfunktion der Ellipse nach dem Koordinatensystem (\hat{x}_1, \hat{x}_2) wird durch die Gleichung

$$\frac{\hat{x}_1^2}{a^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{b^2} = 1 \quad (5.13)$$

angegeben [32], wobei a und b positive Zahlen sind und der Flächeninhalt S durch die Formel

$$S = \pi a b \quad (5.14)$$

berechnet wird [5]. Die Darstellung (5.13) wird mit Hilfe der Koordinatentransformation [5]

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

ermittelt.

Die Rücktransformation ist entsprechend [32]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Wenn die Variable x_1 durch den Term $(\cos \alpha \hat{x}_1 - \sin \alpha \hat{x}_2)$ und die Variable x_2 durch den Term $(\sin \alpha \hat{x}_1 + \cos \alpha \hat{x}_2)$ in der Gleichung (5.12) ersetzt werden, wird die Darstellung in Abhängigkeit von den Variablen \hat{x}_1 und \hat{x}_2 gemäß

$$\begin{aligned} V(\hat{x}) = & \underbrace{(q_1 \cos^2 \alpha + q_3 \sin^2 \alpha + q_2 \sin 2\alpha)}_{k_1} \hat{x}_1^2 + \\ & \underbrace{(q_1 \sin^2 \alpha + q_3 \cos^2 \alpha - q_2 \sin 2\alpha)}_{k_2} \hat{x}_2^2 + \\ & \underbrace{(q_3 \sin 2\alpha - q_1 \sin 2\alpha + 2 q_2 \cos 2\alpha)}_{=0} \hat{x}_1 \hat{x}_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

errechnet.

Der Koeffizient des dritten Terms in (5.17) muss gleich null sein, um die Ellipsenbeschreibung (5.13) zu erfüllen. Der Winkel α wird also mittels der Gleichung

$$(q_3 - q_1) \sin 2\alpha + 2 q_2 \cos 2\alpha = 0 \quad (5.18)$$

gefunden. Man errechnet

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 q_2}{q_1 - q_3} \right). \quad (5.19)$$

Wenn α wie in der Gleichung (5.19) ausgewählt wird, dann ist

$$V(\hat{x}) = k_1 \hat{x}_1^2 + k_2 \hat{x}_2^2 = C. \quad (5.20)$$

Daraus folgt

$$\frac{k_1}{C} \hat{x}_1^2 + \frac{k_2}{C} \hat{x}_2^2 = \frac{\hat{x}_1^2}{a^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{b^2} = 1 \quad (5.21)$$

mit

$$a = \sqrt{\frac{C}{k_1}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{C}{k_2}}. \quad (5.22)$$

Der Flächeninhalt der Ellipse wird hiermit bestimmt zu

$$S = \pi a b = \frac{\pi C}{\sqrt{k_1 k_2}}, \quad (5.23)$$

wobei die Zahlen k_1 und k_2 konstant sind. Aus der Gleichung (5.23) ist ersichtlich, dass der Flächeninhalt S proportional zu C ist.

Die symmetrische positiv definite $(n \times n)$ Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ q_{1,2} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1,n} & q_{2,n} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

kann mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung [25, 43, 46] in der Form

$$Q = L^T L \quad (5.25)$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & l_{1,3} & \cdots & l_{1,n} \\ 0 & l_{2,2} & l_{2,3} & \cdots & l_{2,n} \\ 0 & 0 & l_{3,3} & \cdots & l_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

dargestellt werden.

Die Elemente der Matrix L können mit den folgenden Gleichungen ermittelt werden [43, 46].

$$\begin{aligned} l_{1,1} &= \sqrt{q_{1,1}}, & l_{1,j} &= \frac{q_{1,j}}{l_{1,1}}, & j &= 2, \dots, n \\ l_{i,i} &= \sqrt{\left(q_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{k,i}^2 \right)}, & i &= 2, \dots, n \\ l_{i,j} &= \frac{1}{l_{i,i}} \left(q_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{k,i} l_{k,j} \right), & i &= 2, \dots, n-1, & j &= i+1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.27)$$

Das System (5.1) wird nun mit Hilfe der Zustandstransformation

$$\hat{x} = L x \quad (5.28)$$

transformiert, wobei \hat{x} der neue Zustandsvektor ist. Dessen Zustandsraumdarstellung wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}) = L f(L^{-1} \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^o = L x^o \quad (5.29)$$

gegeben. Das neue System (5.29) besitzt genauso wie das ursprüngliche System eine Ruhelage im Ursprung.

Die durch (5.5) gegebene Ljapunow-Funktion $V(x)$ wird wie folgt transformiert.

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T Q x = x^T L^T L x \\ &= \hat{x}^T \hat{x} = \hat{V}(\hat{x}), \end{aligned} \quad (5.30)$$

sie stellt also nun die einfachste quadratische Form dar. Mit der Höhenlinie zum Wert C beschreibt die Funktion $V(x)$ ein Ellipsoid, und die Funktion $\hat{V}(\hat{x})$ eine Kugel im n -dimensionalen Raum. Wenn der Bereich

$$\hat{\Omega}_C = \{ \hat{x} \mid \hat{V}(\hat{x}) \leq C \}, \quad C > 0 \quad (5.31)$$

ein Einzugsbereich des Systems

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^o \quad (5.32)$$

ist, muss der Bereich (5.8) ein Einzugsbereich des Systems (5.1) sein. Diese Behauptung wird im folgenden erläutert.

$\hat{\Omega}_C$ sei ein gesicherter Einzugsbereich für das System (5.32). Das heißt, jede Zustandstrajektorie $\hat{x}(t)$, die im sphärischen Bereich $\hat{\Omega}_C$ beginnt, bleibt für immer in $\hat{\Omega}_C$, und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = 0 \quad \forall \hat{x}(t) \in \hat{\Omega}_C . \quad (5.33)$$

Die Transformationsmatrix L ist eine lineare und bijektive Abbildung zwischen den Bereichen Ω_C und $\hat{\Omega}_C$. Hieraus folgt die Äquivalenz

$$\hat{x}(t) \in \hat{\Omega}_C \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = L^{-1} \hat{x}(t) \in \Omega_C , \quad t \in [0, \infty) . \quad (5.34)$$

Wenn die Gleichungen (5.33) und (5.34) verwendet werden, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = 0 & \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} L x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_C \\ L \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 & \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_C . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Da die Eigenschaft

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_C \quad (5.36)$$

für jede Zustandstrajektorie $x(t)$ im ellipsoidischen Bereich Ω_C gilt, ist Ω_C ein gesicherter Einzugsbereich für das System

$$\dot{x} = f(x) , \quad x(0) = x^o . \quad (5.37)$$

In der Abbildung 5.5 ist die Relation zwischen den gesicherten Einzugsbereichen Ω_C und $\hat{\Omega}_C$ in der zweidimensionalen Ebene grafisch dargestellt.

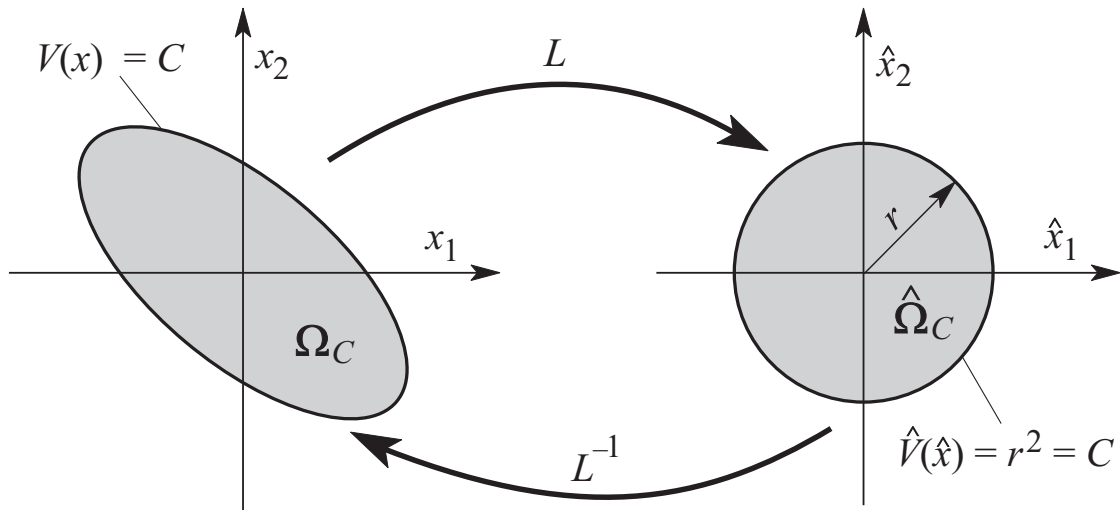


Abbildung 5.5: Relation zwischen Ω_C und $\hat{\Omega}_C$ in der zweidimensionalen Ebene.

Die asymptotische Stabilität des Systems (5.32) kann daher nach der Stabilitätstheorie von Ljapunow mit der Ljapunow-Funktion

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{x} \quad (5.38)$$

untersucht werden. Die jetzige Aufgabe ist es, den Volumeninhalt des Sphäroids $\hat{\Omega}_C$ zu maximieren, bzw. die Zahl C^* zu bestimmen. Dadurch wird der Volumeninhalt des Ellipsoids Ω_C maximiert. Die Ljapunow-Funktion (5.38) erfüllt direkt zwei von drei Voraussetzungen. Die erste ist, die Stetigkeit der Funktion $\hat{V}(\hat{x})$ und des Gradienten von $\hat{V}(\hat{x})$. Die zweite Voraussetzung ist, die positive Definitheit von $\hat{V}(\hat{x})$. Die dritte und wichtigste Bedingung ist, dass die zeitliche Ableitung von $\hat{V}(\hat{x})$ im Einzugsbereich negativ definit sein muss. Durch diese dritte Eigenschaft kann ein gesicherter Einzugsbereich $\hat{\Omega}_C$, bzw. der größte gesicherte Einzugsbereich $\hat{\Omega}_{C^*}$ mit der Ljapunow-Funktion (5.38) berechnet werden.

Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion (5.38)

$$\dot{\hat{V}}(\hat{x}) = 2 \hat{x}^T \dot{\hat{x}} = 2 \hat{x}^T \hat{f}(\hat{x}) \quad (5.39)$$

muss im Einzugsbereich negativ definit sein. Das bedeutet, dass das Polynom

$$p(\hat{x}) = -\dot{\hat{V}}(\hat{x}) \quad (5.40)$$

positiv definit in $\hat{\Omega}_C$ sein muss. Es wird angenommen, dass das Polynom $p(\hat{x})$ ein Polynom k -ter Ordnung ist. Im nächsten Schritt, vor der Anwendung des Theorems von Ehlich und Zeller [11], gehen wir von den kartesischen Koordinaten in die Kugelkoordinaten über. Diese Transformation ist durch

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ \hat{x}_2 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\ \hat{x}_3 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ \hat{x}_i &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-i} \sin \theta_{n-i+1} \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= r \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (5.41)$$

gegeben. In den Gleichungen (5.41) stellt r den Radius und die θ_i , $i = 1, \dots, (n-1)$, die Winkel dar. In diesem Fall lautet die Ljapunow-Funktion (5.38) in Kugelkoordinaten

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{V}(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = r^2 \quad (5.42)$$

Im Hinblick auf eine kompakte Schreibweise werden die Abkürzungen $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})^T$ und $y = (r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})^T$ eingeführt. Die Funktion (5.40) besitzt in Kugelkoordinaten die Darstellung

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= p(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = p(r, \theta) = p(y) \\ &= a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_2 r^2 \end{aligned} \quad (5.43)$$

wobei die Koeffizienten a_i , $i = 2, \dots, k$, Funktionen der Winkel $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ sind. Im nächsten Schritt wird überprüft, ob die Funktion

$$p(r, \theta) = a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_2 r^2 \quad (5.44)$$

in einem sphärischen Bereich mit Radius r positiv definit ist. Um dieses Ziel zu erreichen, wird das Theorem von Ehlich und Zeller verwendet [11]. Gärtel [17] hat bewiesen, indem sie das Theorem von Ehlich und Zeller angewandt hat, dass die Ungleichung

$$p_{min}^{\hat{J}} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K+1) p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} \quad (5.45)$$

für jede polynomiale Funktion p in einem abgeschlossenen kompakten Bereich \hat{J} gilt. $x(\hat{N}, \hat{J})$ ist die Menge, die aus den Tschebyscheff-Punkten im Bereich \hat{J} besteht. $p_{min}^{\hat{J}}$ ist der Mindestwert der Funktion p im Bereich \hat{J} . $p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})}$ und $p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})}$ sind der Mindest- und der Höchstwert der Funktion p für die Tschebyscheff-Punkte. K ist eine konstante Zahl, die mittels der Formel (2.33) berechnet wird. Wenn die rechte Seite der Ungleichung (5.45) größer als null ist, oder anders ausgedrückt, die Ungleichung

$$(K+1) p_{min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} > 0 \quad (5.46)$$

gilt, kann geschlossen werden, dass der Mindestwert der Funktion p im Intervall \hat{J} positiv ist, bzw. die Funktion p im Bereich \hat{J} positiv definit ist. Es kann mit der Ungleichung

$$(K+1) p_{min}^{y(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{max}^{y(\hat{N}, \hat{J})} > 0 \quad (5.47)$$

getestet werden, ob die Funktion $p(r, \theta)$ (5.44) in einem Sphäroid mit Radius r positiv definit ist, wobei $y(\hat{N}, \hat{J})$ die Menge der Tschebyscheff-Punkte im Sphäroid mit Radius r ist. Die Ungleichung (5.47) ist eine hinreichende Bedingung für die positive Definitheit der Funktion $p(r, \theta)$ in einem sphärischen Bereich mit Radius r . Die Funktion $p(r, \theta)$ besitzt $(n-1)$ Winkelvariablen und den Radius r . Der Wertebereich des Winkels θ_1 liegt zwischen 0 und 2π , für die anderen Winkelvariablen zwischen 0 und π . Die Tschebyscheff-Punkte der Variable r befinden sich im Intervall $[0, r]$.

Die gesamte Anzahl \hat{N} der Tschebyscheff-Punkte bestimmt man durch die Formel

$$\hat{N} = \prod_{i=1}^n N_i, \quad (5.48)$$

wobei N_i die Anzahl der Tschebyscheff-Punkte für die i -te Variable bezeichnet. \hat{J} stellt den sphärischen Bereich mit Radius r dar. Wenn die Ungleichung (5.47) erfüllt ist, müssen auch die Ungleichungen

$$(K+1) p(y_i) - (K-1) p(y_j) > 0, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N} \quad (5.49)$$

mit

$$p_{min}^{y(\hat{N}, \hat{J})} \leq p(y_i) \leq p_{max}^{y(\hat{N}, \hat{J})}, \quad i = 1, \dots, j, \dots, \hat{N} \quad (5.50)$$

gelten. Hier sind y_i, y_j zwei Tschebyscheff-Punkte in der Menge $y(\hat{N}, \hat{J})$. Es ist offensichtlich, dass die Anzahl der Ungleichungen in (5.49) gleich \hat{N}^2 ist.

Mit Hilfe der Ungleichung (5.47) kann getestet werden, ob die Funktion $p(r, \theta)$ im Sphäroid mit einem bekannten Radius r positiv definit ist. Dieser Satz kann mathematisch mit der Implikation

$$(K+1) p_{min}^{y(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1) p_{max}^{y(\hat{N}, \hat{J})} > 0 \implies p(r, \theta) = p(\hat{x}) > 0 \quad \forall \hat{x} \in \hat{J} \quad (5.51)$$

interpretiert werden. Es bleibt weiterhin das Ziel, die maximale Höhenlinie C^* , bzw. den maximalen Radius r^* zu bestimmen. Deshalb ist die Ungleichung (5.47) unzureichend. Das kompakte und abgeschlossene Intervall für die Winkel ist

$$\hat{J}_\theta = J_{\theta_1} \times J_{\theta_2} \times \cdots \times J_{\theta_{n-1}} = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi]. \quad (5.52)$$

Das Intervall für den Radius r ist noch zu bestimmen. Deswegen wird angenommen, dass der Radius r ein unbekannter Parameter ist. Allerdings kann durch die Lösungsmenge der \hat{N}^2 Ungleichungen in (5.49) ein beschränktes Intervall für den Radius r angegeben werden. Im sphärischen Bereich \hat{J} mit dem Radius r aus dem Intervall ist die Funktion $p(r, \theta)$ positiv definit. Die obere Grenze des Intervalls ist eine Approximation zu den maximalen Radius r^* . Je größer die Anzahl der Gitterpunkte ist, desto näher approximiert die obere Grenze des Intervalls zu den maximalen Radius r^* . Die Zahl $(r^*)^2$ gibt die maximale Höhenlinie C^* an.

Weil der Radius r als ein unbekannter Parameter angenommen ist, hat die Funktion $p(r, \theta)$ nun $(n-1)$ Variablen, die die Winkel θ_i repräsentieren. Das Intervall \hat{J}_θ für die Winkel ist bekannt. Es können daher die Gitterpunkte für die Winkel berechnet werden. In diesem Fall ändert sich die gesamte Anzahl der Gitterpunkte und wird durch die Formel

$$\hat{N}_\theta = \prod_{i=1}^{n-1} N_{\theta_i} \quad (5.53)$$

bestimmt. Die Funktion $p(r, \theta)$ wird nun an den Gitterpunkten ϑ_i wie folgt

$$\begin{aligned} p(r, \vartheta_i) &= a_k^i r^k + a_{k-1}^i r^{k-1} + \cdots + a_2^i r^2 \\ &= r^2 (a_k^i r^{k-2} + a_{k-1}^i r^{k-3} + \cdots + a_2^i) \\ \vartheta_i &\in \theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta), \quad i = 1, \dots, \hat{N}_\theta \end{aligned} \quad (5.54)$$

berechnet. In der Gleichung (5.54) stellt $\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)$ die Menge der Gitterpunkte dar. Da die Koeffizienten a_k^i Funktionen des Winkelvektors $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind, und alle Gitterpunkte $\vartheta_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ bekannt sind, ist jeder Koeffizient a_t^i , für $t = 2, \dots, k$, bekannt und konstant. Die Funktion $p(r, \vartheta_i)$ geht in ein Polynom k -ter Ordnung mit dem Radius r als einzige Variable über.

Die Ungleichungen (5.49) können wie folgt formuliert werden.

$$\begin{aligned} (K+1)p(y_i) - (K-1)p(y_j) &= (K+1)p(r, \vartheta_i) - (K-1)p(r, \vartheta_j) \\ &= (K+1)(a_k^i r^k + a_{k-1}^i r^{k-1} + \cdots + a_2^i r^2) - \\ &\quad (K-1)(a_k^j r^k + a_{k-1}^j r^{k-1} + \cdots + a_2^j r^2) \\ &= [(K+1)a_k^i - (K-1)a_k^j] r^k + \\ &\quad [(K+1)a_{k-1}^i - (K-1)a_{k-1}^j] r^{k-1} + \\ &\quad \cdots + [(K+1)a_2^i - (K-1)a_2^j] r^2 \\ &= a_k^{i,j} r^k + a_{k-1}^{i,j} r^{k-1} + \cdots + a_2^{i,j} r^2 \\ &= r^2 (a_k^{i,j} r^{k-2} + a_{k-1}^{i,j} r^{k-3} + \cdots + a_2^{i,j}) > 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Da der Fall $r = 0$ ausgeschlossen ist, gelten die folgenden \hat{N}_θ^2 Ungleichungen.

$$a_k^{i,j} r^{k-2} + a_{k-1}^{i,j} r^{k-3} + \dots + a_2^{i,j} > 0, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N}_\theta \quad (5.56)$$

In (5.56) sind die Koeffizienten

$$a_t^{i,j} = (K + 1) a_t^i - (K - 1) a_t^j, \quad (5.57)$$

$$t = 2, \dots, k, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N}_\theta$$

konstant. Bevor durch die Ungleichungen (5.56) das Intervall für den Radius r bestimmt wird, womit die Funktion $p(r, \theta)$ im Sphäroid mit dem Radius r positiv definit ist, muss untersucht werden, in welchem Intervall des Radius r die Funktion $p(r, \theta)$ an allen \hat{N}_θ Gitterpunkten positive Werte hat. Anschließend werden die Ungleichungen

$$a_k^i r^{k-2} + a_{k-1}^i r^{k-3} + \dots + a_2^i > 0, \quad i = 1, \dots, \hat{N}_\theta \quad (5.58)$$

gelöst, um sicherzustellen, dass es eine Lösung für den gesicherten Einzugsbereich geben kann. Die folgende Äquivalenz

$$p(r, \vartheta_i) > 0 \iff a_k^i r^{k-2} + a_{k-1}^i r^{k-3} + \dots + a_2^i > 0 \quad (5.59)$$

gilt für alle $r \in [0, r^*] \setminus \{0\}$. Falls die Lösungsmenge der Ungleichungen (5.58) leer ist, ist das Polynom (5.5) keine geeignete Ljapunow-Funktion für das System (5.1). Deshalb stellen die Ungleichungen (5.58) die notwendigen Bedingungen dar. Die Ungleichungen (5.58) können auch durch die Ungleichungen (5.56) erzeugt werden. In diesem Fall ist $i = j$, bzw. $\vartheta_i = \vartheta_j$. Dann gelten die Ungleichungen

$$(K + 1) p(r, \vartheta_i) - (K - 1) p(r, \vartheta_i) = 2 p(r, \vartheta_i) > 0 \quad (5.60)$$

$$\implies p(r, \vartheta_i) > 0, \quad i = 1, \dots, \hat{N}_\theta.$$

Mit den notwendigen Bedingungen (5.58) findet man eine äußere Approximation zu dem maximalen Radius r^* mit Hilfe der Lösungsmenge der Ungleichungen (5.58). Durch die Lösung jeder Ungleichung wird ein Intervall bestimmt. Für die i -te Ungleichung in (5.58) sei das Lösungsintervall

$$R_{oben}^i = [0, r_{oben}^i], \quad (5.61)$$

dabei wird r_{oben}^i als die kleinste positive reelle Nullstelle des auf der linken Seite stehenden Polynoms bestimmt.

Dann ist das Intervall, das alle \hat{N}_θ Ungleichungen erfüllt, die Schnittmenge

$$R_{oben}^* = \bigcap_{i=1}^{\hat{N}_\theta} R_{oben}^i = [0, r_{oben}^*]. \quad (5.62)$$

In (5.62) stellt r_{oben}^* eine obere Schranke für den maximalen Radius r^* dar, für den die Funktion $p(r, \theta)$ im Sphäroid mit Radius r^* positiv definit ist. Das heißt, dass

$$r^* \leq r_{oben}^* \quad (5.63)$$

gilt. Da die Implikation

$$(K+1)p(r, \vartheta_i) - (K-1)p(r, \vartheta_j) = a_k^{i,j} r^k + \dots + a_2^{i,j} r^2 > 0$$

$$i, j = 1, \dots, \hat{N}_\theta \quad (5.64)$$

$$\implies p(r, \theta) = p(\hat{x}) > 0 \quad \forall \hat{x} \in \hat{J}$$

gilt, stellen die Ungleichungen (5.56) die hinreichenden Bedingungen dar. Durch die Lösungen der \hat{N}_θ^2 Ungleichungen wird eine untere Schranke für den maximalen Radius r^* gefunden.

Für die i -te Ungleichung in (5.56) sei das Lösungsintervall

$$R_{unten}^i = [0, r_{unten}^i]. \quad (5.65)$$

Dann ist das Intervall, das alle \hat{N}_θ^2 Ungleichungen erfüllt, die Schnittmenge

$$R_{unten}^* = \bigcap_{i=1}^{\hat{N}_\theta^2} R_{unten}^i = [0, r_{unten}^*] \quad (5.66)$$

In (5.66) stellt r_{unten}^* eine innere Approximation zu dem maximalen Radius r^* dar, für den die Funktion $p(r, \theta)$ im Sphäroid mit Radius r^* positiv definit ist. Das heißt, dass

$$r_{unten}^* \leq r^* \quad (5.67)$$

gilt.

Wenn (5.63) und (5.67) zusammengefasst werden, wird das Intervall

$$r_{unten}^* \leq r^* \leq r_{oben}^* \quad (5.68)$$

für den maximalen Radius r^* zurückgegeben. Da die maximale Höhenlinie C^* gleich $(r^*)^2$ ist, gilt

$$C_{unten}^* \leq C^* \leq C_{oben}^* \quad (5.69)$$

mit

$$C_{unten}^* = (r_{unten}^*)^2 \quad \text{und} \quad C_{oben}^* = (r_{oben}^*)^2. \quad (5.70)$$

In Abhängigkeit von den Gitterpunkten beschreibt die Menge

$$\Omega_{C_{unten}^*} = \{x \mid V(x) \leq C_{unten}^*\}, \quad C_{unten}^* > 0 \quad (5.71)$$

mit Hilfe der Ljapunow-Funktion (5.5) den größten gesicherten Einzugsbereich um die Ruhelage $x = 0$ für das System (5.1). Für den Fall der globalen asymptotischen Stabilität tritt mit zunehmender Anzahl der Tschebyscheff-Punkte für die in (5.64) definierten Polynome der Fall ein, dass keine reelle Nullstelle existiert. Für die in (5.58) auftretenden Polynome ist dies bereits von Anfang an der Fall.

Beispiel 5.2

Das folgende Beispiel behandelt dasselbe autonome System [48, 50] wie im Beispiel 4.1. Das System wird durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 x_2\end{aligned}\quad (5.72)$$

beschrieben. Die ausgewählte geeignete Ljapunow-Funktion ist

$$\begin{aligned}V(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T Q x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.73)$$

Zuerst wird die symmetrische positiv definite Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (5.74)$$

mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung (5.25) in eine obere und untere Dreiecksmatrix zerlegt. Die Elemente der oberen Dreiecksmatrix L werden durch die Formeln in (5.27) bestimmt. Nach der Berechnung wird die obere Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (5.75)$$

gefunden. Im zweiten Schritt verwendet man die Zustandstransformation

$$\hat{x} = L x.\quad (5.76)$$

Da die Matrix L die Einheitsmatrix ist, ist der neue Zustandsvektor \hat{x} mit dem Zustandsvektor x des Systems (5.72) identisch. Es wird festgestellt, dass sich nach der Transformation weder die Zustandsraumdarstellung (5.72) noch die Ljapunow-Funktion (5.73) ändern. Aus diesem Grund ist der Zustandsvektor x weiter zu verwenden.

Nach der Stabilitätstheorie von Ljapunow muss die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion (5.73)

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2 x^T \dot{x} = 2 x^T f(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2 x_1 & 2 x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \\ &= -2 x_1^2 - 2 x_2^2 + 2 x_1^2 x_2^2\end{aligned}\quad (5.77)$$

in einem gesicherten Einzugsbereich Ω_C negativ definit sein. Mit anderen Worten muss das Polynom

$$p(x) = -\dot{V}(x) = 2 x_1^2 + 2 x_2^2 - 2 x_1^2 x_2^2\quad (5.78)$$

in demselben Einzugsbereich Ω_C positiv definit sein.

Um den größten gesicherten Einzugsbereich Ω_{C^*} für die angegebene Ljapunow-Funktion (5.73) numerisch zu berechnen, wird mit

$$x_1 = r \cos \theta_1 \quad x_2 = r \sin \theta_1 \quad (5.79)$$

eine Transformation in Polarkoordinaten durchgeführt und das Theorem von Ehlich und Zeller [11, 17] angewendet.

Das Polynom $p(x)$ lautet in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} p(r, \theta_1) &= 2 r^2 \cos^2 \theta_1 + 2 r^2 \sin^2 \theta_1 - 2 r^4 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \\ &= -2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 r^4 + 2 r^2 \\ &= r^2 (-2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 r^2 + 2) . \end{aligned} \quad (5.80)$$

Im Polynom $p(r, \theta_1)$ wird der Winkel θ_1 als Variable und der Radius r als unbekannter Parameter betrachtet.

Die Elemente $\vartheta_{1,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, der Menge der Gitterpunkte $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$ befinden sich im Intervall

$$J_{\theta_1} = [0 , 2\pi] . \quad (5.81)$$

Die Werte des Polynoms $p(r, \theta_1)$ müssen an den Gitterpunkten positiv sein, damit ein gesicherter Einzugsbereich um die Ruhelage $x = 0$ existieren kann. Deshalb ergeben die Ungleichungen

$$a_4^i r^2 + a_2^i > 0 , \quad i = 1 , \dots , N_{\theta_1} \quad (5.82)$$

die notwendigen Bedingungen, wobei

$$a_4^i = -2 \cos^2(\vartheta_{1,i}) \sin^2(\vartheta_{1,i}) \quad \text{und} \quad a_2^i = 2 \quad (5.83)$$

sind.

Für 200 Gitterpunkte wird mit der oben beschriebenen Methode das Intervall

$$[r_{\text{unten}}^* , r_{\text{oben}}^*] = [1,9991 , 2,0001] \quad (5.84)$$

berechnet, in dem der maximale Radius r^* liegt. Da die Gleichung

$$C^* = (r^*)^2 \quad (5.85)$$

gilt, wird das Intervall

$$[C_{\text{unten}}^* , C_{\text{oben}}^*] = [3,9963 , 4,0002] \quad (5.86)$$

für C^* gefunden. Infolgedessen garantiert das abgeschlossene Gebiet

$$\Omega_{C_{\text{unten}}^*} = \{ x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{\text{unten}}^* = 3,9963 \} \quad (5.87)$$

mit Hilfe der 200 Gitterpunkte den größten gesicherten Einzugsbereich des Systems (5.72) für die angegebene Ljapunow-Funktion (5.73).

In der Abbildung 5.6 sind die untere und die obere Schranke für den maximalen Radius

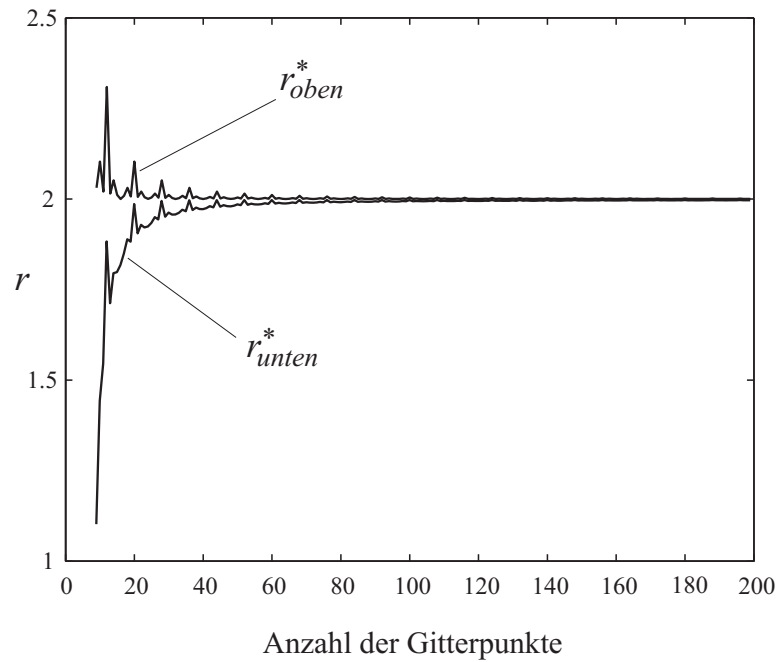


Abbildung 5.6: Die obere und die untere Schranke für den Radius r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte für Beispiel 5.2.

r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte grafisch dargestellt. Die Abbildung 5.7 zeigt den gesicherten Einzugsbereich

$$\Omega_{C_{unten}^*} = \{ x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{unten}^* = 3,8616 \}, \quad (5.88)$$

der mit Hilfe von 30 Gitterpunkten berechnet wurde.

Beispiel 5.3

In diesem Beispiel [8, 36, 47, 50] wird ein gesicherter Einzugsbereich für das autonome System mit der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \quad (5.89)$$

untersucht. Als Ljapunow-Funktion wird das quadratische Polynom

$$\begin{aligned} V(x) &= 0,33 x_1^2 + 0,498 x_1 x_2 + 0,376 x_2^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,33 & 0,249 \\ 0,249 & 0,376 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x^T Q x \end{aligned} \quad (5.90)$$

angesetzt. Die Matrix L der Cholesky-Zerlegung wird zu

$$L = \begin{pmatrix} 0,5745 & 0,4335 \\ 0 & 0,4337 \end{pmatrix}, \quad (5.91)$$

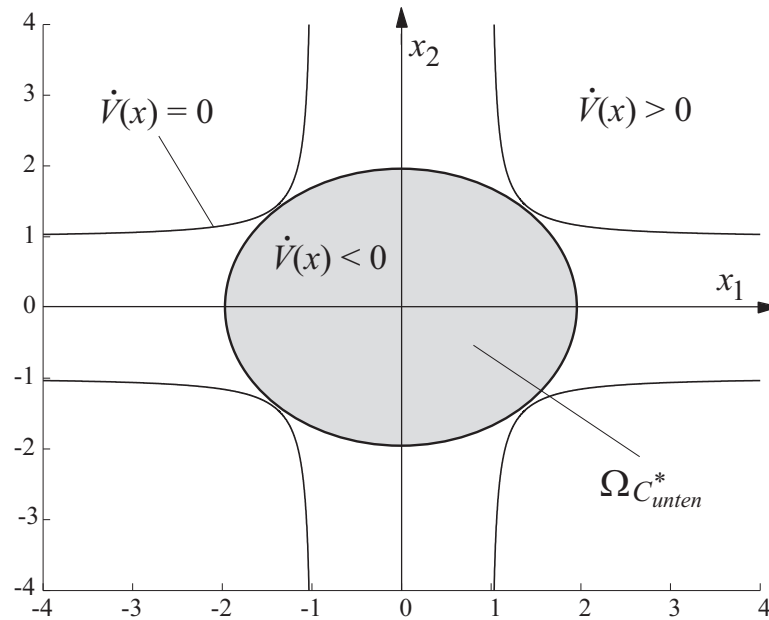


Abbildung 5.7: Der größte gesicherte Einzugsbereich für 30 Gitterpunkte und für Beispiel 5.2.

berechnet.

Die Zustandstransformation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5745 & 0,4335 \\ 0 & 0,4337 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

ergibt das transformierte nichtlineare System mit der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1 + 8,027 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 16,0465 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 8,0196 \hat{x}_2^3 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Wie aus Gleichung (5.30) hervorgeht, ist die Ljapunow-Funktion für das neue System durch

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{x} = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 \quad (5.94)$$

gegeben.

Nach der Stabilitätstheorie von Ljapunow muss die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion (5.94)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(\hat{x}) &= 2 \hat{x}^T \dot{\hat{x}} = 2 \hat{x}^T \hat{f}(\hat{x}) \quad (5.95) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \hat{x}_1 & 2 \hat{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{x}_1 - 16,0465 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 8,027 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 + 8,0196 \hat{x}_2^3 \\ -\hat{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \left(-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 - 16,0465 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 + 8,027 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 + 8,0196 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3 \right) \end{aligned}$$

in einem gesicherten Einzugsbereich $\hat{\Omega}_C$ negativ definit sein. Das bedeutet, dass das Polynom

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= -\dot{V}(\hat{x}) \\ &= 2 (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 16,0465 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 - 8,027 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 - 8,0196 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3) \end{aligned} \quad (5.96)$$

in demselben Einzugsbereich $\hat{\Omega}_C$ positiv definit sein wird. Mit den Gleichungen

$$x_1 = r \cos \theta_1 \quad x_2 = r \sin \theta_1 \quad (5.97)$$

wird der Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten vollzogen. Nach der Koordinatentransformation stellt das trigonometrische Polynom

$$\begin{aligned} p(r, \theta_1) &= 2 (16,0465 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 - 8,027 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad 8,0196 \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1) r^4 + 2 r^2 \\ &= \sin 2\theta_1 (8,0233 \sin 2\theta_1 - 8,027 \cos^2 \theta_1 - 8,0196 \sin^2 \theta_1) r^4 + 2 r^2 \\ &= r^2 [\sin 2\theta_1 (8,0233 \sin 2\theta_1 - 8,027 \cos^2 \theta_1 - 8,0196 \sin^2 \theta_1) r^2 + 2] \end{aligned} \quad (5.98)$$

das Polynom $p(\hat{x})$ in Polarkoordinaten dar. Da der Radius r als ein unbekannter Parameter betrachtet wird, hat das trigonometrische Polynom $p(r, \theta_1)$ vierten Grades eine einzige Veränderliche, nämlich den Winkel θ_1 .

Durch Bildung der Menge der Gitterpunkte $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$ im Intervall

$$J_{\theta_1} = [0, 2\pi] \quad (5.99)$$

wird der größte gesicherte Einzugsbereich Ω_{C^*} für die angegebene Ljapunow-Funktion (5.90) gefunden. Die Werte des Polynoms $p(r, \theta_1)$ müssen an den Gitterpunkten positiv sein, damit ein gesicherter Einzugsbereich um die Ruhelage $x = 0$ existieren kann. Deshalb geben die Ungleichungen

$$a_4^i r^2 + a_2^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.100)$$

die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines gesicherten Einzugsbereiches, wobei

$$a_4^i = \sin 2(\vartheta_{1,i}) (8,0233 \sin 2(\vartheta_{1,i}) - 8,027 \cos^2(\vartheta_{1,i}) - 8,0196 \sin^2(\vartheta_{1,i})) \quad (5.101)$$

und

$$a_2^i = 2 \quad (5.102)$$

sind.

Für 189 Gitterpunkte wurde das Intervall

$$[r_{\text{unten}}^*, r_{\text{oben}}^*] = [0,9933, 0,9983] \quad (5.103)$$

berechnet, in dem sich der maximale Radius r^* befindet. Für C^* ergibt sich das Intervall

$$[C_{\text{unten}}^*, C_{\text{oben}}^*] = [0,9866, 0,9966]. \quad (5.104)$$

Infolgedessen garantiert das abgeschlossene Gebiet

$$\Omega_{C_{\text{unten}}^*} = \{ x \mid V(x) = 0,33 x_1^2 + 0,498 x_1 x_2 + 0,376 x_2^2 \leq 0,9866 \} \quad (5.105)$$

mit Hilfe der 189 Gitterpunkte den größten gesicherten Einzugsbereich des Systems (5.89) für die angegebene Ljapunow-Funktion (5.90).

Die Abbildung 5.8 zeigt die untere und die obere Schranke für den maximalen Radius r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte. In der Abbildung 5.9 sind der gesicherte Einzugsbereich

$$\Omega_{C_{unten}^*} = \{ x \mid V(x) = 0,33 x_1^2 + 0,498 x_1 x_2 + 0,376 x_2^2 \leq 0,8303 \} \quad (5.106)$$

und das Gebiet

$$\Omega_{C_{oben}^*} = \{ x \mid V(x) = 0,33 x_1^2 + 0,498 x_1 x_2 + 0,376 x_2^2 \leq 1,0278 \}, \quad (5.107)$$

die für 40 Gitterpunkte berechnet wurden, dargestellt.

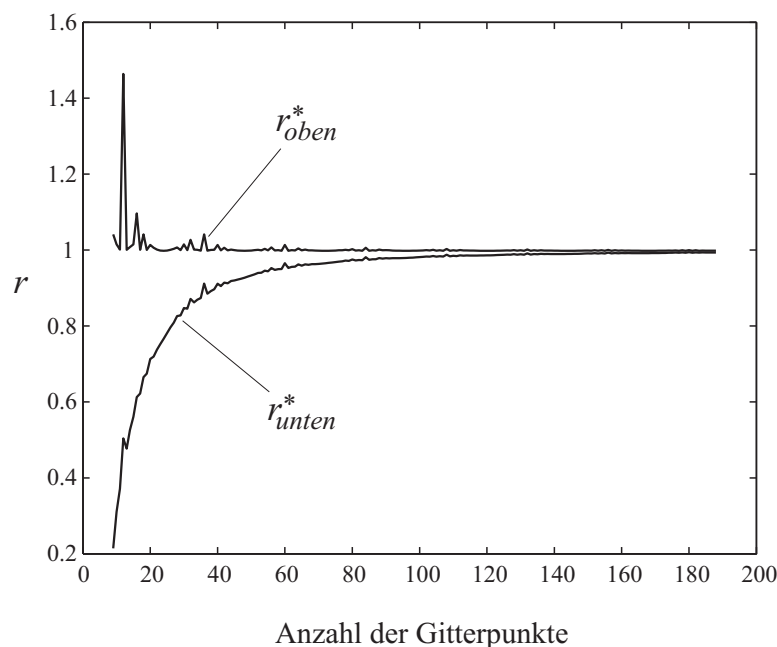


Abbildung 5.8: Die obere und die untere Schranke des Radius r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte für Beispiel 5.3.

Beispiel 5.4

Das autonome System, das in diesem Beispiel [20, 48, 53] behandelt wird, wird durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 \end{aligned} \quad (5.108)$$

beschrieben. Die ausgewählte geeignete Ljapunow-Funktion ist

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^T Q x \quad (5.109)$$

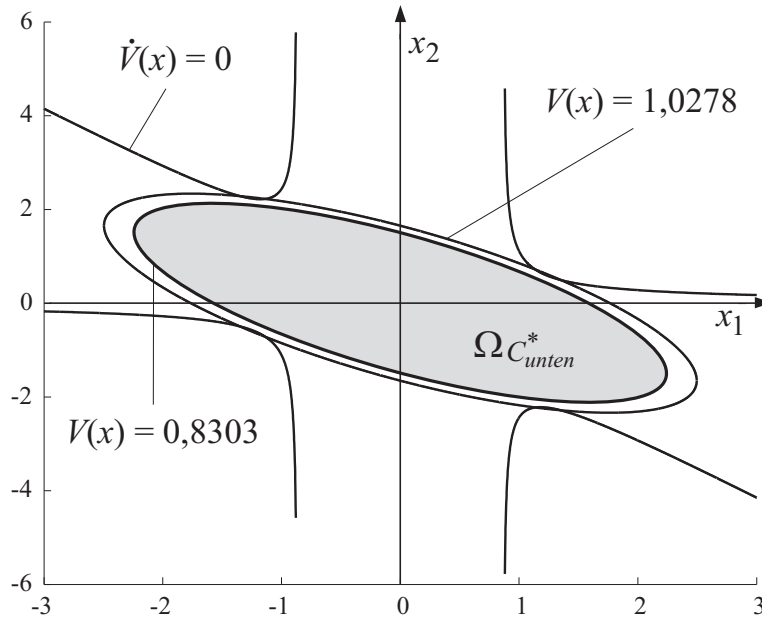


Abbildung 5.9: Der größte gesicherte Einzugsbereich $\Omega_{C_{unten}}^*$ und das Gebiet $\Omega_{C_{oben}}^*$ für 40 Gitterpunkte und für Beispiel 5.3.

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion (5.109) ist durch

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2 x^T \dot{x} = 2 x^T f(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2 x_1 & 2 x_2 & 2 x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 x_3^2 \\ -x_2 + x_1 x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \\ &= -2 x_1^2 - 2 x_2^2 - 2 x_3^2 + 2 x_1 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3^2 \end{aligned} \quad (5.110)$$

gegeben und muss in einem gesicherten Einzugsbereich Ω_C negativ definit sein. Das Polynom

$$p(x) = -\dot{V}(x) = 2 x_1^2 + 2 x_2^2 + 2 x_3^2 - 2 x_1 x_2^2 - 2 x_1 x_2 x_3^2 \quad (5.111)$$

muss folglich in demselben Einzugsbereich Ω_C positiv definit sein.

Die Umsetzung in Polarkoordinaten erfolgt durch die Transformation

$$x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad x_3 = r \sin \theta_1. \quad (5.112)$$

Das trigonometrische Polynom

$$p(r, \theta) = 2 r^2 - 2 r^3 \cos^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos \theta_2 -$$

$$\begin{aligned}
& 2 r^4 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
&= a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 \\
&= r^2 (a_4 r^2 + a_3 r + a_2)
\end{aligned} \tag{5.113}$$

stellt das Polynom $p(x)$ in Polarkoordinaten dar, wobei θ der Vektor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{5.114}$$

und

$$\begin{aligned}
a_4 &= -2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
a_3 &= -2 \cos^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos \theta_2 \\
a_2 &= 2
\end{aligned} \tag{5.115}$$

die Koeffizienten sind. Da der Radius r als ein unbekannter Parameter betrachtet wird, beinhaltet das Polynom $p(r, \theta)$ zwei Variablen, den Winkel θ_1 und den Winkel θ_2 .

Die Elemente ϑ_i , $i = 1, \dots, \hat{N}_\theta$, der Menge der Gitterpunkte $\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)$ befinden sich im Intervall

$$\hat{J}_\theta = [0, 2\pi] \times [0, \pi]. \tag{5.116}$$

Die Anzahl der Gitterpunkte \hat{N}_θ im Intervall \hat{J}_θ wird durch die Formel

$$\hat{N}_\theta = N_{\theta_1} N_{\theta_2} \tag{5.117}$$

berechnet, wobei N_{θ_1} die Anzahl der Gitterpunkte für den Winkel θ_1 und N_{θ_2} die Anzahl der Gitterpunkte für den Winkel θ_2 ist.

Die Werte des Polynoms $p(r, \theta)$ müssen an den Gitterpunkten positiv sein, damit ein gesicherter Einzugsbereich um die Ruhelage $x = 0$ existieren kann. Deshalb stellen die Ungleichungen

$$a_4^i r^2 + a_3^i r + a_2^i > 0, \quad i = 1, \dots, \hat{N}_\theta \tag{5.118}$$

die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines gesicherten Einzugsbereiches dar. Die Lösung der \hat{N}_θ Ungleichungen ergibt eine obere Schranke r_{oben}^* für den maximalen Radius r^* . Da die Ungleichungen (5.56) die hinreichenden Bedingungen für die positive Definitheit eines trigonometrischen Polynoms in einem Sphäroid mit Radius r sind, wird mit Hilfe der Lösungsmenge der folgenden \hat{N}_θ^2 Ungleichungen eine untere Schranke r_{unten}^* für den maximalen Radius r^* ermittelt. Die hinreichenden Bedingungen für das System (5.108) sind

$$a_4^{i,j} r^2 + a_3^{i,j} r + a_2^{i,j} > 0, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N}_\theta, \tag{5.119}$$

wobei die Koeffizienten

$$a_t^{i,j} = (K+1) a_t^i - (K-1) a_t^j, \quad t = 2, 3, 4 \tag{5.120}$$

sind. Der maximale Radius r^* gehört zum Intervall

$$r^* \in [r_{unten}^*, r_{oben}^*]. \tag{5.121}$$

Für 2904 Gitterpunkte ergibt sich das Intervall

$$[r_{unten}^* , r_{oben}^*] = [2,1916 , 2,2216] , \quad (5.122)$$

in dem sich der maximale Radius r^* befindet. Da die Gleichung

$$C^* = (r^*)^2 \quad (5.123)$$

gilt, beschreibt

$$[C_{unten}^* , C_{oben}^*] = [4,8031 , 4,9355] \quad (5.124)$$

das Intervall für C^* . Infolgedessen garantiert das abgeschlossene Gebiet

$$\Omega_{C_{unten}^*} = \{ x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq C_{unten}^* = 4,8031 \} \quad (5.125)$$

den größten gesicherten Einzugsbereich des Systems (5.108) für die angegebene Ljapunow-Funktion (5.109).

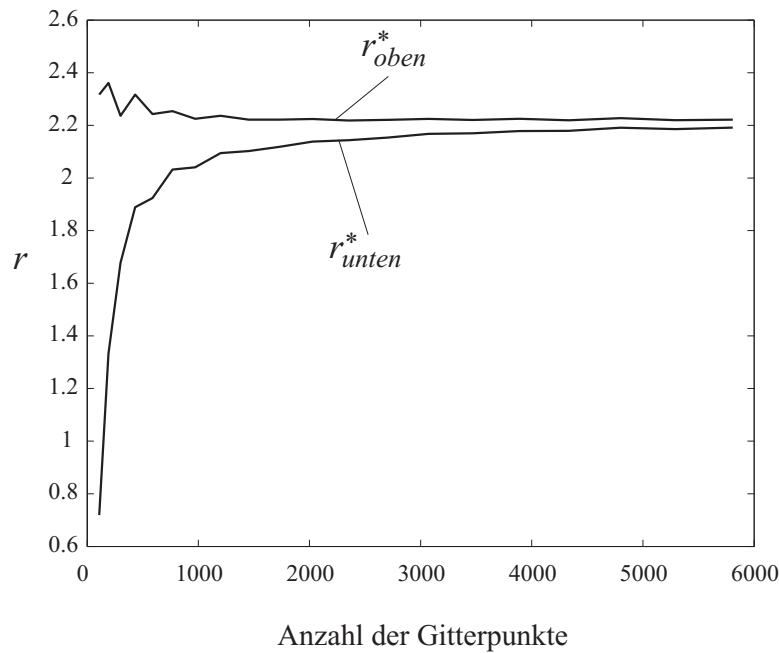


Abbildung 5.10: Die obere und die untere Schranke für den Radius r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte für Beispiel 5.4.

Die Abbildung 5.10 zeigt die untere und die obere Schranke für den maximalen Radius r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte. In der Abbildung 5.11 ist der gesicherte Einzugsbereich

$$\Omega_{C_{unten}^*} = \{ x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq C_{unten}^* = 4,5732 \} , \quad (5.126)$$

der mit Hilfe von 1014 Gitterpunkten festgestellt wurde, dargestellt.

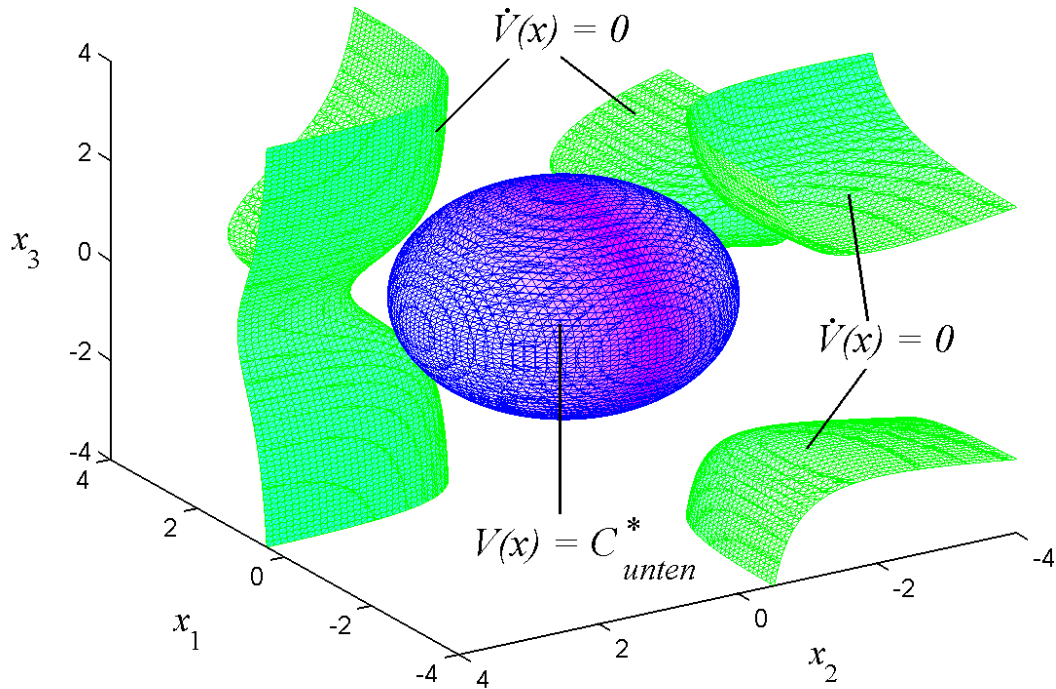


Abbildung 5.11: Der größte gesicherte Einzugsbereich $\Omega_{C_{\text{unten}}^*}$ für 1014 Gitterpunkte und für Beispiel 5.4.

Beispiel 5.5

Für das Beispiel [8, 9, 47] wird ein gesicherter Einzugsbereich für das autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_3 \\ \dot{x}_3 &= a x_1 + x_2 + a x_1^2 x_2 - x_3\end{aligned}\tag{5.127}$$

untersucht, wobei die Konstante a den Wert $-0,915$ hat. Als geeignete Ljapunow-Funktion wird das quadratische Polynom

$$\begin{aligned}V(x) &= 16,74 x_1^2 + 35,34 x_2^2 + 18,19 x_3^2 - 34,38 x_1 x_2 + \\ &\quad 1,1 x_1 x_3 - 35,38 x_2 x_3 \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 16,74 & -17,19 & 0,55 \\ -17,19 & 35,34 & -17,69 \\ 0,55 & -17,69 & 18,19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x^T Q x\end{aligned}\tag{5.128}$$

angesetzt. Nachdem die symmetrische positiv definite Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 16,74 & -17,19 & 0,55 \\ -17,19 & 35,34 & -17,69 \\ 0,55 & -17,69 & 18,19 \end{pmatrix} \quad (5.129)$$

mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung (5.25) zerlegt wurde, ergibt sich die obere Dreiecksmatrix L nach (5.27) zu

$$L = \begin{pmatrix} 4,0915 & -4,2014 & 0,1344 \\ 0 & 4,2057 & -4,0719 \\ 0 & 0 & 1,2615 \end{pmatrix}. \quad (5.130)$$

Durch die Zustandstransformation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,0915 & -4,2014 & 0,1344 \\ 0 & 4,2057 & -4,0719 \\ 0 & 0 & 1,2615 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (5.131)$$

wird ein neues nichtlineares System mit der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -0,0301\hat{x}_1 - 0,9709\hat{x}_2 + 0,0932\hat{x}_3 + 0,0529\hat{x}_1^2\hat{x}_2 - \\ & 0,0017\hat{x}_2^3 - 0,0521\hat{x}_2\hat{x}_3^2 - 0,0035\hat{x}_1\hat{x}_2^2 - 0,0222\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 - \\ & 0,0165\hat{x}_2^2\hat{x}_3 - 0,0056\hat{x}_1^2\hat{x}_3 - 0,0548\hat{x}_3^3 - 0,0352\hat{x}_1\hat{x}_3^2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= 0,9106\hat{x}_1 - 0,0585\hat{x}_2 - 0,3918\hat{x}_3 - 0,0017\hat{x}_1^2\hat{x}_2 + \\ & 0,0528\hat{x}_2^3 + 1,5785\hat{x}_2\hat{x}_3^2 + 0,1057\hat{x}_1\hat{x}_2^2 + 0,6713\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 + \\ & 0,5001\hat{x}_2^2\hat{x}_3 + 0,1708\hat{x}_1^2\hat{x}_3 + 1,6605\hat{x}_3^3 + 1,0651\hat{x}_1\hat{x}_3^2 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -0,2821\hat{x}_1 + 0,0181\hat{x}_2 - 0,9115\hat{x}_3 - 0,0164\hat{x}_1^2\hat{x}_2 - \\ & 0,0164\hat{x}_2^3 - 0,4891\hat{x}_2\hat{x}_3^2 - 0,0328\hat{x}_1\hat{x}_2^2 - 0,2080\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 - \\ & 0,1549\hat{x}_2^2\hat{x}_3 - 0,0529\hat{x}_1^2\hat{x}_3 - 0,5145\hat{x}_3^3 - 0,3300\hat{x}_1\hat{x}_3^2. \end{aligned} \quad (5.132)$$

generiert.

Die Ljapunow-Funktion für das neue autonome System ist gemäß Gl. (5.30) durch

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{x} = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2. \quad (5.133)$$

gegeben.

Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion (5.133) lautet

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(\hat{x}) &= 2 \hat{x}^T \dot{\hat{x}} = 2 \hat{x}^T \hat{f}(\hat{x}) \\ &= -0,0601\hat{x}_1^2 - 0,1170\hat{x}_2^2 - 1,8229\hat{x}_3^2 - 0,1206\hat{x}_1\hat{x}_2 - 0,3778\hat{x}_1\hat{x}_3 \\ & - 0,7475\hat{x}_2\hat{x}_3 - 0,0035\hat{x}_1^3\hat{x}_2 + 0,2080\hat{x}_1\hat{x}_2^3 + 1,6101\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3^2 + \\ & 0,0989\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2 + 0,2645\hat{x}_1^2\hat{x}_2\hat{x}_3 + 1,2440\hat{x}_1\hat{x}_2^2\hat{x}_3 - 0,0113\hat{x}_1^3\hat{x}_3 - \\ & 0,7696\hat{x}_1\hat{x}_3^3 - 0,1762\hat{x}_1^2\hat{x}_3^2 + 0,1056\hat{x}_2^4 + 2,8471\hat{x}_2^2\hat{x}_3^2 + \\ & 0,9675\hat{x}_2^3\hat{x}_3 + 2,3429\hat{x}_2\hat{x}_3^3 - 1,0289\hat{x}_3^4 \end{aligned} \quad (5.134)$$

sie muss in einem gesicherten Einzugsbereich $\hat{\Omega}_C$ negativ definit sein. Das bedeutet, dass das Polynom

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= -\dot{V}(\hat{x}) \\ &= 0,0601\hat{x}_1^2 + 0,1170\hat{x}_2^2 + 1,8229\hat{x}_3^2 + 0,1206\hat{x}_1\hat{x}_2 + 0,3778\hat{x}_1\hat{x}_3 \\ &\quad + 0,7475\hat{x}_2\hat{x}_3 + 0,0035\hat{x}_1^3\hat{x}_2 - 0,2080\hat{x}_1\hat{x}_2^3 - 1,6101\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3^2 - \\ &\quad 0,0989\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2 - 0,2645\hat{x}_1^2\hat{x}_2\hat{x}_3 - 1,2440\hat{x}_1\hat{x}_2^2\hat{x}_3 + 0,0113\hat{x}_1^3\hat{x}_3 + \\ &\quad 0,7696\hat{x}_1\hat{x}_3^3 + 0,1762\hat{x}_1^2\hat{x}_3^2 - 0,1056\hat{x}_2^4 - 2,8471\hat{x}_2^2\hat{x}_3^2 - \\ &\quad 0,9675\hat{x}_2^3\hat{x}_3 - 2,3429\hat{x}_2\hat{x}_3^3 + 1,0289\hat{x}_3^4 \end{aligned} \quad (5.135)$$

in demselben Einzugsbereich $\hat{\Omega}_C$ positiv definit sein muss.

Durch die Ersetzungen

$$\hat{x}_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad \hat{x}_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad \hat{x}_3 = r \sin \theta_1 \quad (5.136)$$

wird die Transformation in Kugelkoordinaten ermittelt. Das trigonometrische Polynom

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= a_4 r^4 + a_2 r^2 \\ &= r^2 (a_4 r^2 + a_2) \end{aligned} \quad (5.137)$$

stellt das Polynom $p(\hat{x})$ in Kugelkoordinaten dar, wobei θ der Vektor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (5.138)$$

ist, und die Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} a_4 &= 0,0035 \cos^4 \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2 - 0,2080 \cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin^3 \theta_2 - \\ &\quad 1,6101 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 - 0,0989 \cos^4 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_2 - \\ &\quad 0,2645 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 - 1,2440 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_2 + \\ &\quad 0,0113 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_2 + 0,7696 \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &\quad 0,1762 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 - 0,1056 \cos^4 \theta_1 \sin^4 \theta_2 - \\ &\quad 2,8471 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 - 0,9675 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \sin^3 \theta_2 - \\ &\quad 2,3429 \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 \sin \theta_2 + 1,0289 \sin^4 \theta_1 \end{aligned} \quad (5.139)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,0601 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + 0,1170 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + 1,8229 \sin^2 \theta_1 + \\ &\quad 0,1206 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + 0,3778 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &\quad 0,7475 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

gegeben sind. Da der Radius r als ein unbekannter Parameter betrachtet wird, hat das Polynom $p(r, \theta)$ zwei Veränderlichen, den Winkel θ_1 und den Winkel θ_2 .

Für 10952 Gitterpunkte wird das Intervall für den maximalen Radius r^* zu

$$[r_{unten}^* , r_{oben}^*] = [0,8452 , 0,8523] \quad (5.140)$$

berechnet und für C^* errechnet man das Intervall

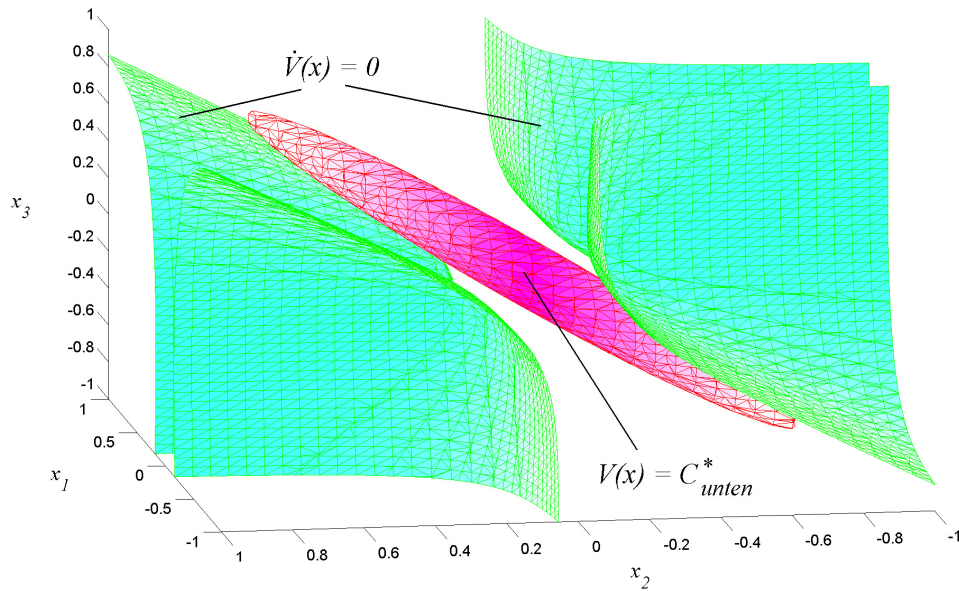


Abbildung 5.12: Der größte gesicherte Einzugsbereich $\Omega_{C_{unten}^*}$ für 7200 Gitterpunkte und für Beispiel 5.5.

$$[C_{unten}^*, C_{oben}^*] = [0,7144, 0,7264]. \quad (5.141)$$

Infolgedessen garantiert das abgeschlossene Gebiet

$$\Omega_{C_{unten}^*} = \{x \mid V(x) \leq C_{unten}^* = 0,7144\} \quad (5.142)$$

mit Hilfe von 10952 Gitterpunkte den größten gesicherten Einzugsbereich des Systems (5.127) für die angegebene Ljapunow-Funktion (5.128).

Die Abbildung 5.12 zeigt den gesicherten Einzugsbereich

$$\Omega_{C_{unten}^*} = \{x \mid V(x) \leq C_{unten}^* = 0,7086\}, \quad (5.143)$$

der mit Hilfe der 7200 Gitterpunkte festgestellt wurde. In der Abbildung 5.13 ist der gesicherte Einzugsbereich (5.143) von oben dargestellt.

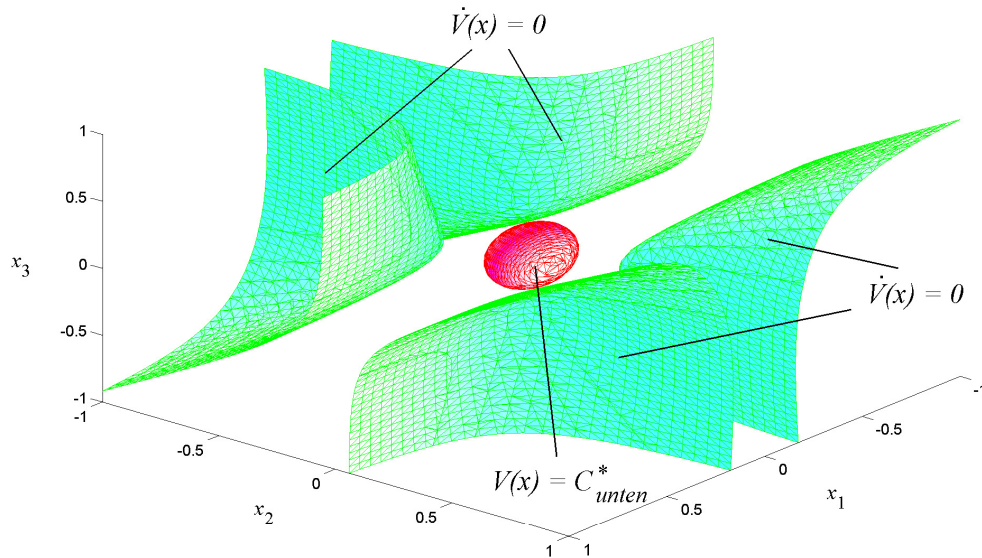


Abbildung 5.13: Das Aussehen des gesicherten Einzugsbereiches $\Omega_{C_{\text{unten}}^*}$ von oben für Beispiel 5.5.

5.3 Gesicherter Einzugsbereich für polynomiale Systeme in einer speziellen Form

In diesem Unterkapitel wird ein gesicherter Einzugsbereich für polynomiale Systeme, die durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_2 f_2(x_1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_n f_n(x_1) \end{aligned}, \quad x(0) = x^o \quad (5.144)$$

beschrieben werden, untersucht. Der Vektor

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 f_1(x_1) \\ x_2 f_2(x_1) \\ \vdots \\ x_n f_n(x_1) \end{pmatrix} \quad (5.145)$$

besteht aus Polynomen, deren Variablen die Zustände des Systems sind. Im Vektor $f(x)$ beschreibt $f_i(x_1)$ mit $i = 1, \dots, n$ ein beliebiges Polynom, dessen einzige Variable der Zustand x_1 ist.

Die Voraussetzungen, die im Unterkapitel 5.1 erwähnt sind, gelten auch in diesem Unterkapitel. Die Voraussetzungen sind, dass der Zustandsvektor $x = 0$ eine Ruhelage des Systems ist, und dass das um den Ursprung $x = 0$ linearisierte Modell asymptotisch stabil ist.

Ein System mit der Zustandsraumdarstellung (5.144) erfüllt direkt die erste Bedingung,

so dass der Ursprung $x = 0$ eine Ruhelage ist. Dieses gilt, da der Vektor $f(0)$ immer ein Nullvektor ist und die Äquivalenz

$$x = 0 \text{ ist eine Ruhelage} \iff f(0) = 0 \quad (5.146)$$

erfüllt ist. Damit das System (5.144) der zweiten Bedingung genügt, muss die Systemmatrix

$$A = \left. \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|_{x=0} = \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n(0) \end{pmatrix} \quad (5.147)$$

des um den Ursprung linearisierten Modells eine Hurwitz-Matrix sein. Das bedeutet, dass die Eigenwerte der Matrix A in der offenen linken Halbebene liegen. Da die Matrix A eine Diagonalmatrix ist, sind die Elemente auf der Diagonalen $f_i(0)$, $i = 1, \dots, n$, gleichzeitig die Eigenwerte der Systemmatrix A . Deswegen lautet die zweite Bedingung

$$f_i(0) < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.148)$$

Für diesen Fall gilt die Äquivalenz

$$\text{Ursprung ist asymptotisch stabil} \iff f_i(0) < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.149)$$

Das Ziel dieses Unterkapitels ist es, einen gesicherten Einzugsbereich um die asymptotisch stabile Ruhelage $x = 0$ des Systems (5.144) zu berechnen. Dazu wird die parametrisierte quadratische Ljapunow-Funktion

$$\begin{aligned} V(x) &= x_1^2 + \frac{1}{k_2^2} x_2^2 + \cdots + \frac{1}{k_n^2} x_n^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x^T Q x \end{aligned} \quad (5.150)$$

verwendet, wobei die Parameter k_i , $i = 2, \dots, n$, ungleich null sind. Dadurch ist garantiert, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n^2} \end{pmatrix} \quad (5.151)$$

positiv definit ist.

Die Ljapunow-Funktion (5.150) ist unabhängig von den Werten der Parameter k_i immer eine geeignete Ljapunow-Funktion für das System (5.144). Ein quadratisches positiv definites Polynom wie (5.150) wird als eine geeignete Ljapunow-Funktion bezeichnet, wenn es die Ungleichung

$$A^T Q + Q A < 0 \quad (5.152)$$

sicherstellt, wobei die Matrix A die Systemmatrix des um die Ruhelage $x = 0$ linearisierten Modells eines Systems ist [12, 22, 28, 57]. Nach dem Einsetzen der Systemmatrix A (5.147)

und der Matrix Q (5.151) in die Ungleichung (5.152) wird überprüft, ob die Matrizen A und Q diese Ungleichung erfüllen. Die Matrix

$$\begin{aligned}
 A^T Q + Q A &= A Q + Q A = 2 A Q \\
 &= 2 \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n^2} \end{pmatrix} \\
 &= 2 \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(0) \frac{1}{k_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n(0) \frac{1}{k_n^2} \end{pmatrix} \quad (5.153)
 \end{aligned}$$

ist eine negativ definite Matrix, da die Ungleichungen

$$f_1(0) < 0 \quad \text{und} \quad f_i(0) \frac{1}{k_i^2} < 0, \quad i = 2, \dots, n \quad (5.154)$$

gelten. Hieraus folgt, dass ein quadratisches Polynom der Form (5.150) immer eine geeignete Ljapunow-Funktion für ein autonomes System mit der Zustandsraumdarstellung (5.144) darstellt.

Da das Polynom (5.150) eine geeignete Ljapunow-Funktion für das System (5.144) ist, existiert immer eine positive Zahl C , so dass das mit der C definierte geschlossene Gebiet

$$\Omega_C = \{ x \mid V(x) = x_1^2 + \frac{1}{k_2^2} x_2^2 + \cdots + \frac{1}{k_n^2} x_n^2 \leq C \}, \quad C > 0 \quad (5.155)$$

ein gesicherter Einzugsbereich des Systems (5.144) ist. Mit anderen Worten muss nach dem Satz von Ljapunow die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} \\
 &= f(x)^T Q x + x^T Q f(x) \\
 &= 2 x^T Q f(x) < 0
 \end{aligned} \quad (5.156)$$

für jedes $x \in \Omega_C$ außer $x = 0$ gelten [12, 28]. In der Abbildung 5.14 ist ein gesicherter Einzugsbereich Ω_{C^*} in der zweidimensionalen Ebene für eine geeignete Ljapunow-Funktion der Form (5.150) grafisch dargestellt.

Das Volumen des geschlossenen Gebietes Ω_C (5.155) ist nicht nur proportional zu C , sondern auch zu den Parametern in der Ljapunow-Funktion (5.150). Es folgt, wie im Unterkapitel 5.2, die Maximierung der Höhenlinie C . Zuerst wird die symmetrische positiv definite Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n^2} \end{pmatrix} \quad (5.157)$$

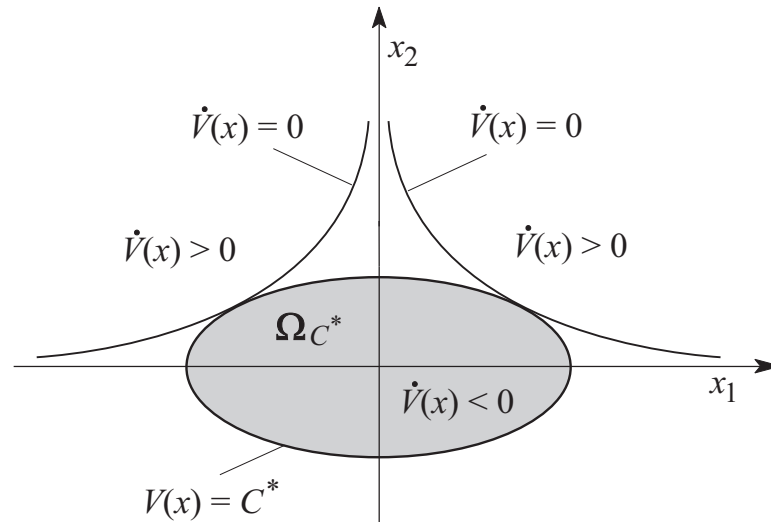


Abbildung 5.14: Gesicherter Einzugsbereich in der zweidimensionalen Ebene für eine geeignete Lyapunow-Funktion der Form (5.150).

mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung (5.25) in eine obere und untere Dreiecksmatrix zerlegt. Daraus resultiert die obere Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n} \end{pmatrix}, \quad (5.158)$$

die ebenso eine Diagonalmatrix ist. Im zweiten Schritt werden durch die Zustandstransformation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (5.159)$$

die unbestimmten Parameter in der Lyapunow-Funktion (5.150) eliminiert (vgl. Gl. (5.30)). Die Lyapunow-Funktion mit dem neuen Zustandsvektor \hat{x} lautet

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{x}. \quad (5.160)$$

Die Zustandstransformation (5.159) kann auch als

$$\hat{x}_i = \frac{1}{k_i} x_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.161)$$

dargestellt werden, wobei der Parameter k_1 den Wert 1 hat. Daraus folgt

$$x_i = k_i \hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.162)$$

$$\dot{x}_i = k_i \dot{\hat{x}}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Werden diese Gleichungen in die Zustandsraumdarstellung (5.144) eingesetzt, ergibt sich die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_1 f_1(\hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_2 f_2(\hat{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= \hat{x}_n f_n(\hat{x}_1) ,\end{aligned}\tag{5.163}$$

die mit der Zustandsraumdarstellung (5.144) identisch ist. Daher kann anstatt des Zustandsvektors \hat{x} der Zustandsvektor x verwendet werden. Es resultiert das gleiche System (5.144) mit der Ljapunow-Funktion

$$\hat{V}(x) = x^T x .\tag{5.164}$$

Mit Hilfe der numerischen Berechnungsmethode, die im Unterkapitel 5.2 dargelegt wurde, kann die maximale Höhenlinie C^* bestimmt werden. Infolgedessen beschreibt das geschlossene Gebiet

$$\Omega_{C^*} = \left\{ x \mid V(x) = x_1^2 + \frac{1}{k_2^2} x_2^2 + \cdots + \frac{1}{k_n^2} x_n^2 \leq C^* \right\} , \quad C^* > 0\tag{5.165}$$

für einen bekannten Parametervektor

$$k = \begin{pmatrix} k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} , \quad k \in \mathbb{R}^{n-1}\tag{5.166}$$

einen gesicherten Einzugsbereich des Systems (5.144) um die Ruhelage $x = 0$.

Die Vereinigungsmenge der gesicherten Einzugsbereiche bildet ebenfalls einen gesicherten Einzugsbereich.

Das Volumen des gesicherten Einzugsbereiches Ω_{C^*} ist proportional zu den Parametern k_i . Wenn alle Parameter gegen unendlich gehen, wird auch die Menge

$$\begin{aligned}\Omega_{C^*}^\infty &= \{ x \mid x_1^2 \leq C^* = (r^*)^2 \} \\ &= \{ x \mid -r^* \leq x_1 \leq r^* \}\end{aligned}\tag{5.167}$$

zum gesicherten Einzugsbereich.

Beispiel 5.6

In diesem Beispiel wird das System durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 = x_1 f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 x_2 = x_2 (x_1^2 - 1) = x_2 f_2(x_1)\end{aligned}\tag{5.168}$$

beschrieben, wobei

$$f_1(x_1) = -1 \quad \text{und} \quad f_2(x_1) = x_1^2 - 1\tag{5.169}$$

sind. Der Ursprung $x = 0$ ist eine asymptotisch stabile Ruhelage, da die Systemmatrix des um den Ursprung linearisierten Modells

$$A = \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 \\ 0 & f_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.170)$$

eine Hurwitz-Matrix ist. Infolgedessen kann das folgende quadratische positiv definite Polynom mit dem Parameter k_2

$$\begin{aligned} V(x) &= x_1^2 + \frac{1}{k_2^2} x_2^2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x^T Q x \end{aligned} \quad (5.171)$$

als geeignete Ljapunow-Funktion für das autonome System (5.168) ausgewählt werden.

Die symmetrische positiv definite Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} \end{pmatrix} \quad (5.172)$$

kann mittels der Cholesky-Zerlegung in die Diagonalmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} \end{pmatrix} \quad (5.173)$$

zerlegt werden, die zugleich die Transformationsmatrix ist. Nach der Zustandstransformation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.174)$$

ergibt sich das gleiche autonome System (5.168) mit der neuen geeigneten Ljapunow-Funktion

$$\hat{V}(x) = x^T x = x_1^2 + x_2^2. \quad (5.175)$$

Für 200 Gitterpunkte errechnet man

$$\begin{aligned} r_{\text{unten}}^* &= 1,9991, \\ C_{\text{unten}}^* &= (r_{\text{unten}}^*)^2 = 3,9963. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Das abgeschlossene Gebiet

$$\Omega_{C_{\text{unten}}^*} = \{ x \mid V(x) = x_1^2 + \frac{1}{k_2^2} x_2^2 \leq C_{\text{unten}}^* = 3,9963 \} \quad (5.177)$$

beschreibt in Abhängigkeit des Parameters k_2 einen gesicherten Einzugsbereich des Systems (5.168). In Abbildung 5.15 sind drei gesicherte Einzugsbereiche der Ruhelage $x = 0$ für die unterschiedlichen Werte des Parameters k_2 grafisch dargestellt.

Der größte Einzugsbereich der Ruhelage $x = 0$ für die angegebene Ljapunow-Funktion (5.171) wird erreicht, wenn der Parameter k_2 gegen unendlich läuft. Die Menge

$$\begin{aligned} \Omega_{C_{\text{unten}}^*}^\infty &= \{ x \mid x_1^2 \leq C_{\text{unten}}^* = (r_{\text{unten}}^*)^2 = 3,9963 \} \\ &= \{ x \mid -r_{\text{unten}}^* = -1,9991 \leq x_1 \leq r_{\text{unten}}^* = 1,9991 \} \end{aligned} \quad (5.178)$$

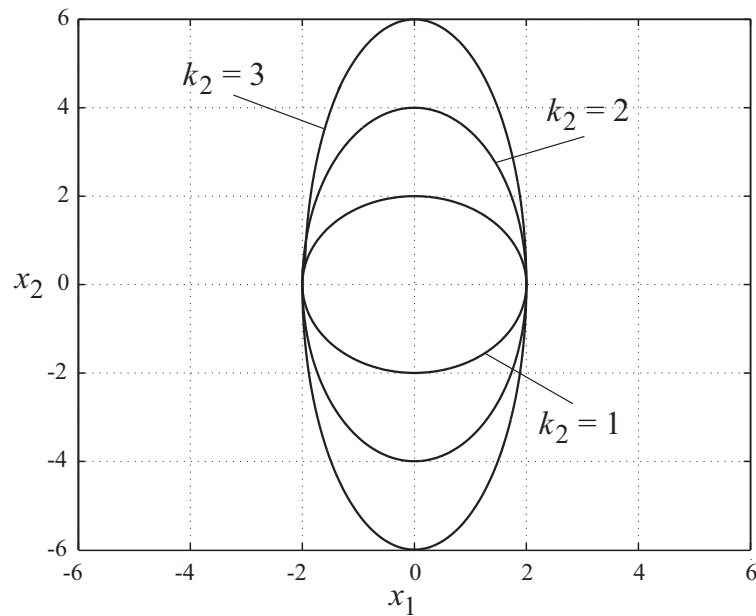


Abbildung 5.15: Gesicherte Einzugsbereiche für die unterschiedlichen Werte von k_2 für Beispiel 5.6.

beschreibt den größten gesicherten Einzugsbereich des Ursprungs, der in der Abbildung 5.16 grafisch dargestellt ist.

Beispiel 5.7

Das autonome System, das in diesem Beispiel behandelt wird, wird durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 = x_1 f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1 x_2 = x_2 f_2(x_1) \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_1^2 x_3 = x_3 f_3(x_1)\end{aligned}\quad (5.179)$$

beschrieben, wobei

$$f_1(x_1) = -1, \quad f_2(x_1) = x_1 - 2 \quad \text{und} \quad f_3(x_1) = x_1^2 - 3 \quad (5.180)$$

sind. Da die Systemmatrix des um den Ursprung linearisierten Modells

$$A = \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (5.181)$$

eine Hurwitz-Matrix ist, ist der Ursprung $x = 0$ eine asymptotisch stabile Ruhelage des Systems (5.179). Daraus folgt, dass das quadratische positiv definite Polynom

$$\begin{aligned}V(x) &= x_1^2 + \frac{1}{k_2^2} x_2^2 + \frac{1}{k_3^2} x_3^2 \\ &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.182)$$

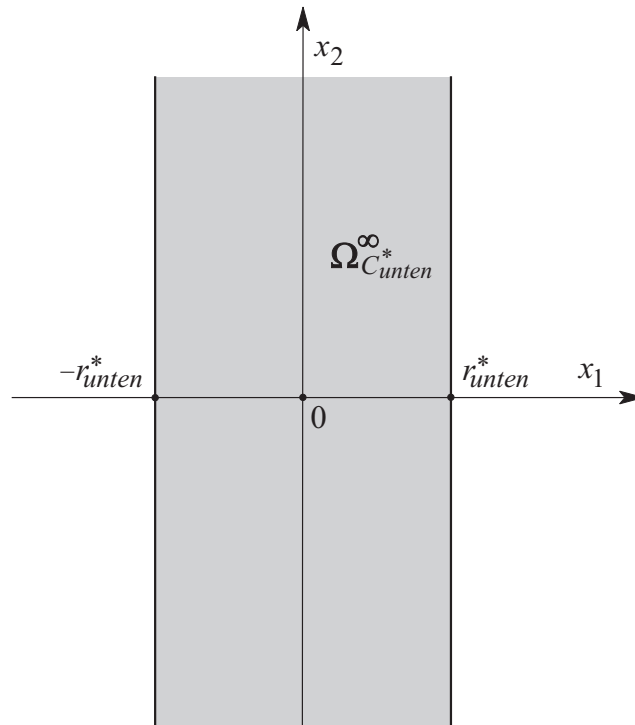


Abbildung 5.16: Der größte gesicherte Einzugsbereich des Ursprungs für die Ljapunow-Funktion (5.171) im Beispiel 5.6.

$$= x^T Q x$$

als geeignete Ljapunow-Funktion angesetzt werden kann. Nachdem die symmetrische positiv definite Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^2} \end{pmatrix} \quad (5.183)$$

mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung (5.25) zerlegt wird, wird die Diagonalmatrix L zu

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} \end{pmatrix} \quad (5.184)$$

bestimmt, die ebenso die Transformationsmatrix darstellt. Die Zustandstransformation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (5.185)$$

hat das gleiche autonome System (5.179) mit der neuen geeigneten Ljapunow-Funktion

$$\hat{V}(x) = x^T x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (5.186)$$

zur Folge. Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion (5.186)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 2 x^T \dot{x} = 2 x^T f(x) \\
&= (2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3) \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 + x_1x_2 \\ -3x_3 + x_1^2x_3 \end{pmatrix} \\
&= -2x_1^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2^2 + 2x_1^2x_3^2
\end{aligned} \tag{5.187}$$

ist in einem gesicherten Einzugsbereich Ω_C negativ definit. Das bedeutet, dass das Polynom

$$p(x) = -\dot{V}(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 \tag{5.188}$$

in demselben Einzugsbereich Ω_C positiv definit ist.

Durch die Ersetzungen

$$x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad x_3 = r \sin \theta_1 \tag{5.189}$$

wird die Transformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten ermittelt. Nach der Koordinatentransformation stellt das trigonometrische Polynom

$$\begin{aligned}
p(r, \theta) &= (-\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1) r^4 + (-\cos^3 \theta_1 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_2) r^3 \\
&\quad (\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + 3 \sin^2 \theta_1) r^2 \\
&= a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 \\
&= r^2 (a_4 r^2 + a_3 r + a_2)
\end{aligned} \tag{5.190}$$

das Polynom $p(x)$ in Kugelkoordinaten dar, wobei θ der Vektor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{5.191}$$

ist, und die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 \\
a_3 &= -\cos^3 \theta_1 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_2 \\
a_2 &= \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + 3 \sin^2 \theta_1
\end{aligned} \tag{5.192}$$

sind. Da der Radius r als ein unbekannter Parameter betrachtet wird, hat das Polynom $p(r, \theta)$ zwei Veränderliche, nämlich die Winkel θ_1 und θ_2 .

Die Abbildung 5.17 zeigt die untere und die obere Schranke für den maximalen Radius r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte.

Für 5400 Gitterpunkte wurden

$$r_{\text{unten}}^* = 2,7212 \tag{5.193}$$

$$C_{\text{unten}}^* = (r_{\text{unten}}^*)^2 = 7,4049$$

berechnet.

Hierauf basierend beschreibt das abgeschlossene Gebiet

$$\Omega_{C_{\text{unten}}^*} = \left\{ x \mid V(x) = x_1^2 + \frac{1}{k_2} x_2^2 + \frac{1}{k_3} x_3^2 \leq C_{\text{unten}}^* = 7,4049 \right\} \quad (5.194)$$

in Abhängigkeit von den Parametern k_2 und k_3 einen gesicherten Einzugsbereich des Systems (5.179). In Abbildung 5.18 sind zwei gesicherte Einzugsbereiche der Ruhelage $x = 0$ für die unterschiedlichen Werte der Parameter k_2 und k_3 grafisch dargestellt.

Der größte Einzugsbereich der Ruhelage $x = 0$ für die geeignete Ljapunow-Funktion (5.182) wird erreicht, wenn die Parameter k_2 und k_3 gegen unendlich laufen. Die Menge

$$\begin{aligned} \Omega_{C_{\text{unten}}^*}^\infty &= \left\{ x \mid x_1^2 \leq C_{\text{unten}}^* = (r_{\text{unten}}^*)^2 = 7,4049 \right\} \quad (5.195) \\ &= \left\{ x \mid -r_{\text{unten}}^* = -2,7212 \leq x_1 \leq r_{\text{unten}}^* = 2,7212 \right\} \end{aligned}$$

beschreibt den größten gesicherten Einzugsbereich des Ursprungs.

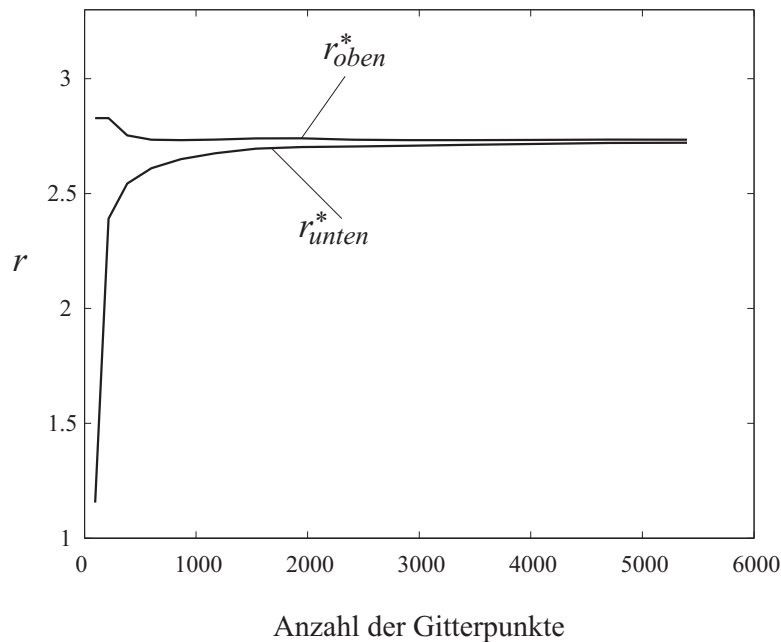


Abbildung 5.17: Die obere und die untere Schranke für den Radius r^* in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte für Beispiel 5.7.

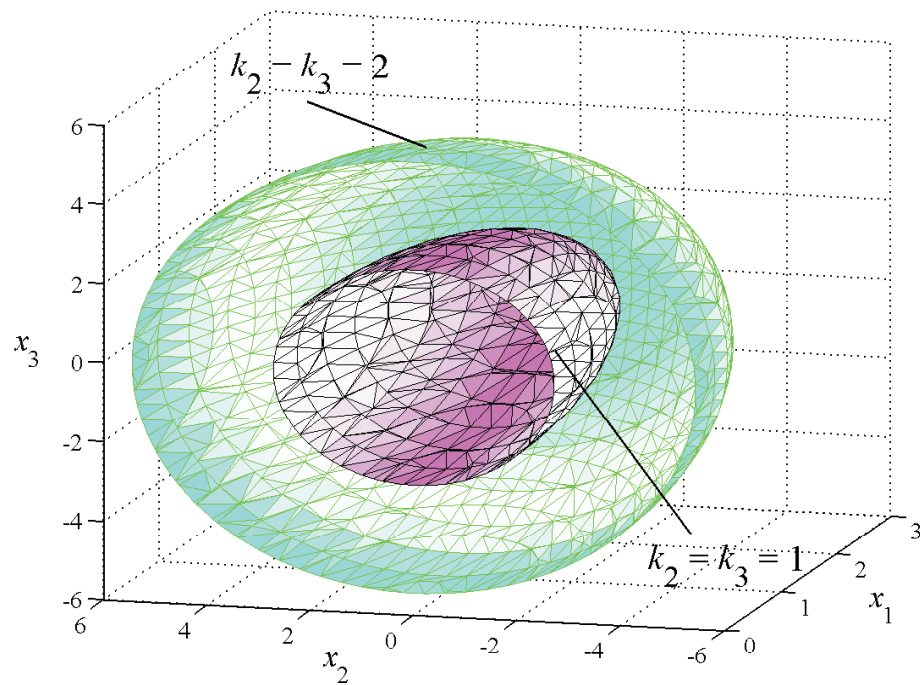


Abbildung 5.18: Zwei gesicherte Einzugsbereiche für die unterschiedlichen Parameterwerte im Beispiel 5.7.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In der Regelungstechnik hat die asymptotische Stabilität eines zu regelnden Systems Priorität und muss deshalb sichergestellt werden. Wenn das Führungssignal (Sollwert) im geregelten System null ist, kann das geregelte System als ein autonomes System betrachtet werden. In dieser Doktorarbeit wurde, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die asymptotische Stabilität der Ruhelage im Ursprung für polynomiale autonome Systeme analysiert.

Um die asymptotische Stabilität des Ursprungs zu untersuchen, wurden das Theorem von Ehlich und Zeller und die Stabilitätssätze von Ljapunow verwendet. Damit wurden neuartige numerische Berechnungsmethoden entwickelt. Der Satz von Ehlich und Zeller (*Kapitel 2*) führt dazu, die positive Definitheit eines Polynoms in einem kompakten abgeschlossenen Intervall festzustellen. Mittels der Ljapunow'schen Stabilitätssätze (*Kapitel 4*) wird die asymptotische Stabilitätsanalyse der Ruhelage im Ursprung in die positive Definitheit eines Polynoms umgesetzt.

Falls das durch eine geeignete quadratische Ljapunow-Funktion erzeugte Polynom außerhalb des Ursprungs strikt positiv und für den Ursprung null ist, ist die Ruhelage im Ursprung global asymptotisch stabil. Deswegen wurde in *Kapitel 3* die globale positive Definitheit von Polynomen mit linear eingehenden unbekanntem Parametern untersucht. Für diese Robustheitsanalyse waren ebenfalls zwei numerische Berechnungsmethoden entwickelt.

In *Kapitel 5* wurde angenommen, dass die Ruhelage im Ursprung asymptotisch stabil ist. Um jede asymptotisch stabile Ruhelage existiert ein Einzugsbereich (*Kapitel 4*). Es ist für nichtlineare Systeme normalerweise nicht einfach, den gesamten Einzugsbereich um die Ruhelage zu bestimmen. Aber das Theorem von Ljapunow ermöglicht es, einen gesicherten Einzugsbereich zu schätzen. In *Kapitel 5* wurden zwei Algorithmen vorgestellt, um für eine geeignete quadratische Ljapunow-Funktion einen möglichst großen gesicherten Einzugsbereich zu berechnen.

In der Forschungsarbeit wurden quadratische Ljapunow-Funktionen verwendet. Aber die vorgestellten Methoden können für Ljapunow-Funktionen höheren Grades erweitert werden, um einen größeren gesicherten Einzugsbereich zu schätzen. In der Dissertation wurden nur polynomiale nichtlineare Systeme betrachtet. Die präsentierten Algorithmen können trotzdem für generelle nichtlineare autonome Systeme verallgemeinert werden. Diese Fragen werden als nächstes Ziel behandelt.

Literaturverzeichnis

- [1] Aneke, S. J. , „Mathematical modelling of drug resistant malaria parasites and vector populations“, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 25, No. 4, S. 335–346, 2002.
- [2] Bose, N. K. , „Test for Lyapunov stability by rational operations“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 20, S. 700–702, 1975.
- [3] Bose, N. K.; Guiver, J. P. , „Multivariate polynomial positivity invariance under coefficient perturbation“, *IEEE Trans. on Acoust. Speech Signal Process.*, Vol. 28, No. 6, S. 660–665, 1980.
- [4] Bose, N. K.; Modarressi, A. R. , „General procedure for multivariable polynomial positivity test with control applications“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 65, S. 696–701, 1976.
- [5] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H. , *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, 2001.
- [6] Chesi, G.; Tesi, A.; Vicino, A. , „Computing optimal quadratic Lyapunov functions for polynomial nonlinear systems via LMI’s“, *15th IFAC Triennial World Congress*, Barcelona, Spanien, 2002.
- [7] Chesi, G.; Tesi, A.; Vicino, A.; Genesio, R. , „An LMI approach to constrained optimization with homogeneous forms“, *Systems and Control Letters*, Vol. 42, No. 1, S. 11–19, 2001.
- [8] Chiang, H. D.; Thorp, J. S. , „Stability regions of nonlinear dynamical systems: A constructive methodology“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 12, S. 1229–1241, 1989.
- [9] Davison, E. J.; Kurak, E. M. , „A computational method for determining quadratic Lyapunov functions for nonlinear systems“, *Automatica*, Vol. 7, S. 627–636, 1971.
- [10] Djaferis, T. E. , „Simple robust tests for polynomials with real parameter uncertainty“, *International Journal of Control*, Vol. 53, No. 4, S. 907–927, 1991.
- [11] Ehlich, H.; Zeller, K. , „Schwankung von Polynomen zwischen Gitterpunkten“, *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 86, S. 41–44, 1964.
- [12] Föllinger, O. , *Nichtlineare Regelung I*, Oldenbourg Verlag, 1993.
- [13] Föllinger, O. , *Regelungstechnik*, Hüthig Verlag, 1994.
- [14] Forsman, K. , *Constructive Commutative Algebra in Nonlinear Control Theory*, Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations, No. 261, 1991.

- [15] Frehse, N. K.; Frick, K. , „The estimation of a robust domain of attraction using Gershgorin theorem“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, S. 295–303, 1998.
- [16] Gahinet, P.; Apkarian, P.; Chilali, M. , „Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, S. 436–442, 1996.
- [17] Gärtel, U. , *Fehlerabschätzungen für vektorwertige Randwertaufgaben zweiter Ordnung, insbesondere für Probleme aus der chemischen Reaktions-Diffusions-Theorie*, Dissertation, GMD–Studien, No. 124, 1987.
- [18] Genesio, R.; Tartaglia, M.; Vicino, A. , „On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, No. 8, S. 747–755, 1985.
- [19] Hachicho, O. , *Stability Analysis of Polynomial Dynamical Systems with Semidefinite Optimization*, Dissertation, Der Andere Verlag, 2001.
- [20] Hachicho, O.; Tibken, B. , „Estimating domains of attraction of a class of nonlinear dynamical systems with LMI methods based on the theory of moments“, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, S. 3150–3155, 2002.
- [21] Haddad, W. M.; Kapila, V.; Chellaboina, V. S. , „Guaranteed domains of attraction for multivariable Luré systems via open Lyapunov surfaces“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 7, S. 935–949, 1997.
- [22] Hahn, W. , *Stability of Motion*, Springer Verlag, 1967.
- [23] Hénon, M.; Heiles, C. , „The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments“, *The Astronomical Journal*, Vol. 69, No. 1, S. 73–79, 1964.
- [24] Hewit, J. R.; Storey, C. , „Comparison of numerical methods in stability analysis“, *International Journal of Control*, Vol. 10, No. 6, S. 687–701, 1969.
- [25] Horn, R. A.; Johnson, C. R. , *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1999.
- [26] Ingwerson, D. R. , „A modified Lyapunov method for nonlinear stability analysis“, *IRE Transactions on Automatic Control*, Vol. 6, No. 2, S. 199–210, 1961.
- [27] Johansen, T. A. , „Computation of Lyapunov functions for smooth nonlinear systems using convex optimization“, *Automatica*, Vol. 36, S. 1617–1626, 2000.
- [28] Khalil, H. K. , *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.
- [29] Kirin, N. E.; Nelepin, R. A.; Baidaev, V. N. , „Construction of the attraction region by Zubov’s method“, *Differential Equations*, Vol. 17, S. 871–880, 1982.
- [30] Koditschek, D. E.; Narendra, K. S. , „The stability of second-order quadratic differential equations“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 27, No. 4, S. 783–798, 1982.
- [31] Leipholz, H. , *Stability Theory*, John Wiley & Sons, 1987.
- [32] Leupold, W.; Georgi, H.; Carl, J. , *Lehr- und Übungsbuch Mathematik III*, Fachbuchverlag, 1991.

- [33] Levin, A. , „An analytical method of estimating the domain of attraction for polynomial differential equations“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, S. 2471–2475, 1994.
- [34] Ludyk, G. , *Theoretische Regelungstechnik 1*, Springer Verlag, 1995.
- [35] Lunze, J. , *Regelungstechnik 1*, Springer Verlag, 1996.
- [36] Michel, A. N.; Sarabudla, N. R.; Miller, R. K. , „Stability analysis of complex dynamical systems - Some computational methods“, *Circuits, Systems, Signal Processing*, Vol. 1, No. 2, S. 171–202, 1982.
- [37] Moon, Y. H.; Choi, B. K.; Roh, T. H. , „Estimating the domain of attraction for power systems via a group of damping-reflected energy functions“, *Automatica*, Vol. 36, S. 419–425, 2000.
- [38] Parrilo, P. A. , „On a decomposition of multivariable forms via LMI methods“, *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, USA, S. 322–326, 2000.
- [39] Riesz, M. , „Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome“, *Marcel Riesz : Collected Papers, herausgegeben von L. Gårding und L. Hörmander*, S. 130–144, Springer-Verlag, 1988.
- [40] Rodden, J. J. , „Numerical applications of Lyapunov stability theory“, *Preprints JACC*, Sitzung IX, Artikel 2, S. 261–268, Stanford, USA, 1964.
- [41] Romanchuk, B. G. , „Computing regions of attraction with polytopes: Planar case“, *Automatica*, Vol. 32, No. 12, S. 1727–1732, 1996.
- [42] Salle, J. L.; Lefschetz, S. , *Die Stabilitätstheorie von Ljapunow: Die direkte Methode mit Anwendungen*, Bibliographisches Institut - Mannheim, 1967.
- [43] Schwarz, H. R. , *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner Verlag, 1997.
- [44] Shield, D. N.; Storey, C. , „The behaviour of optimal Lyapunov functions“, *International Journal of Control*, Vol. 21, No. 4, S. 561–573, 1975.
- [45] Šiljak, D. D.; Šiljak, M. D. , „Nonnegativity of uncertain polynomials“, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 4, S. 135–163, 1998.
- [46] Stoer, J. , *Numerische Mathematik 1*, Springer-Verlag, 1994.
- [47] Tesi, A.; Villoresi, F.; Genesio, R. , „On the stability domain estimation via a quadratic Lyapunov function: Convexity and optimality properties for polynomial systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 11, S. 1650–1657, 1996.
- [48] Tibken, B. , „Estimation of the domain of attraction for polynomial systems via LMI’s“, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australien, S. 3860–3864, 2000.
- [49] Tibken, B.; Dilaver, K. F. , „Robust positivity of polynomials with uncertain parameters“, *International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET’01*, Linz, Österreich, 2001.
- [50] Tibken, B.; Dilaver, K. F. , „Computation of subsets of the domain of attraction for polynomial systems“, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, S. 2651–2656, 2002.

- [51] Tibken, B.; Dilaver, K. F. , „New numerical method for the polynomial positivity invariance under coefficient perturbation“, *European Control Conference ECC'03*, Cambridge, England, 2003.
- [52] Tibken, B.; Dilaver, K. F.; Hachicho, O. , „New numerical algorithms for the investigation of robust positivity of polynomials with uncertain parameters“, *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol. 17, No. 1–3, S. 107–120, 2003.
- [53] Tibken, B.; Hachicho, O. , „Estimation of the domain of attraction for polynomial systems using multidimensional grids“, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australien, S. 3870–3874, 2000.
- [54] Tibken, B.; Hachicho, O. , „Test for robust positivity of polynomials with uncertain coefficients using LMI's“, *International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET'01*, Linz, Österreich, 2001.
- [55] Tibken, B.; Hofer, E. P.; Demir, C. , „Guaranteed regions of attraction for dynamical polynomial systems“, *Dynamics and Control, herausgegeben von G. Leitmann, F. Udvardia und A. V. Kryazhinskii*, S. 119–128, Gordon and Breach Publishers, 1999.
- [56] Vannelli, A.; Vidyasagar, M. , „Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems“, *Automatica*, Vol. 21, No. 1, S. 69–80, 1985.
- [57] Vidyasagar, M. , *Nonlinear Systems Analysis*, SIAM, 2002.
- [58] Volterra, V. , „Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together“, *Animal Ecology, herausgegeben von R. N. Chapman*, S. 409–448, McGraw–Hill, 1926.
- [59] Weissenberger, S. , „Stability-boundary approximations for relay-control systems via a steepest-ascent construction of Lyapunov functions“, *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, S. 419–428, 1966.
- [60] Wirth, F. , „Applications of Zubov's method to perturbed systems“, *Methoden und Anwendungen der Automatisierungstechnik, herausgegeben von B. Lohmann und A. Gräser*, S. 14–23, Shaker Verlag, 2003.
- [61] Wu, Q. H.; Mansour, M. , „Robust stability of family of polynomials with 1-norm-bounded parameter uncertainties“, *Stability Theory, herausgegeben von R. Jeltsch und M. Mansour*, S. 163–171, Birkhäuser Verlag, 1995.
- [62] Zubov, V. I. , „Questions of the theory of Lyapunov's second method: Construction of the general solution in the region of asymptotical stability“, *Prikl. Mat. Meh.*, Vol. 19, S. 179–210, 1955.