

Beitrag zur Modellierung stochastischer Prozesse in der Sicherheits- und Zuverlässigkeitstechnik mittels Monte-Carlo-Simulation unter Berücksichtigung dynamischer Systemänderungen

Vom Fachbereich D der Abteilung Sicherheitstechnik der

Bergischen Universität Wuppertal

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Diplom-Ingenieur Jan Hauschild

aus Johannesburg/Republik Südafrika

Gutachter:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. A. Meyna

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. P. C. Müller

Tag der mündlichen Prüfung:

10.07.2007

D468

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20070741

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20070741>]

Meiner Familie
und
Astrid gewidmet

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Sicherheitstheorie und Verkehrstechnik an der Bergischen Universität Wuppertal.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. A. Meyna für die Ermöglichung, Förderung und Betreuung dieser Arbeit.

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. P. C. Müller, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirtsch.-Ing. B. H. Müller und Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Yuan danke ich für die Erstellung des zweiten Gutachtens und ihre Mitwirkung im Promotionsausschuss.

Meinen Kolleginnen und Kollegen danke ich für die gute Zusammenarbeit und die Unterstützung, insbesondere vor der Abgabe der Dissertation und der Vorbereitung auf die mündliche Prüfung.

Herrn Dr.-Ing. M. Wolterreck danke ich dafür, dass er mich für das Thema Monte-Carlo-Simulation im Rahmen einer gemeinsamen Veröffentlichung begeistert hat.

Ein großer Dank gilt meiner Familie und meiner Freundin Astrid für die Unterstützung und Rücksichtnahme während meiner Dissertationszeit.

Kurzfassung

Moderne elektronische Systeme im Kraftfahrzeug sind durch einen hohen Grad an Komplexität und Vernetzung von Informationen und Funktionen gekennzeichnet. Im Sinne einer realitätsnahen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse gilt es, diese Systeme unter realen Feldbedingungen (zeitabhängiges Ausfallverhalten, physikalische Einflussgrößen wie Temperatur u.a.) zu prüfen und zu bewerten.

Unter Verwendung der Monte-Carlo-Simulation (MCS) wird gezeigt, wie sich solche Systeme, mit dem Ziel einer realitätsnahen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse, als stochastische Prozesse modellieren und untersuchen lassen.

Im Rahmen sicherheits- und zuverlässigkeitstechnischer Untersuchungen können seltene Ereignisse mit Hilfe spezieller Verfahren zur Ergebnisschätzung und zur Varianzreduktion (gewichtete MCS) bewertet werden. Mit der Anwendung solcher Verfahren wird ein Beitrag zur Weiterentwicklung und Optimierung von bestehenden Simulationsalgorithmen geleistet.

Anhand der Untersuchung eines 2-Kanal-Rechnersystems wird gezeigt, wie sich der Einfluss der Temperatur auf die Lebensdauer des Systems abbilden und untersuchen lässt. Zu diesem Zweck wird die Systemtransporttheorie erstmalig um ein Schadensakkumulationsmodell erweitert.

Mit der Auswertung eigens generierter Daten werden die Modellparameter und das Ausfallverhalten des untersuchten 2-Kanal-Rechnersystems prognostiziert. Ziel des neuen temperaturabhängigen Prognosemodells ist es, zukünftig auf Basis von Entwicklungs- und Felddaten, Modellparameter zu erheben, mit denen sich realitätsnahe Untersuchungen durchführen lassen.

Abstract

Modern electronic systems in motor vehicles are characterised by a high degree of complexity linking together plenty of information and functions. This type of system regarding safety and reliability analyses in reality, needs to be tested and investigated under realistic field conditions, for example time-dependent failure behaviour and physical parameters (temperature etc.).

It is being demonstrated by the use of Monte-Carlo-Simulation (MCS), how such a system can be modelled and investigated as stochastic processes aimed at analysing safety and reliability realistically.

In order to study the systems which have typically rare events, special techniques for estimating the mean and reducing the variance should be applied. In the scope of this study, application of such techniques makes a major contribution to the development of MCS algorithms.

It is being shown by 2-channel-control system studying, how the effect of temperature on system's lifetime can be modelled and investigated. Furthermore, the system transport theory has been extended to cumulative damage model for these purposes.

The model parameters and failure behaviour of 2-channel-control system are predicted by analysing generated data. The goal of the new temperature-dependent prognosis model is to specify the model parameters from test- and field data in the future. Ultimately, these realistic model parameters are needed to perform realistic investigations.

Résumé

Les systèmes électroniques modernes utilisés dans une automobile sont caractérisés par leur complexité et un réseau de fonctions et d'échange d'informations important. Dans le souci d'effectuer une analyse de sûreté de fonctionnement (fiabilité, sécurité) réaliste, il est nécessaire de tester et d'évaluer ce type de systèmes en tenant compte des conditions réelles d'utilisation telles les taux de défaillance variables, les paramètres physiques comme la température, etc...

Nous présentons comment modéliser et analyser de tels systèmes en les assimilant à des processus stochastiques et en utilisant la simulation de Monte-Carlo, ceci dans le but d'effectuer une étude de fiabilité ou de sécurité la plus réaliste possible.

Les événements rares relatifs à une étude de sûreté de fonctionnement peuvent être évalués grâce à l'utilisation de certains estimateurs statistiques et de méthodes de réduction de la variance. Ainsi, une contribution au développement et à l'amélioration des algorithmes est apportée.

La représentation et l'analyse de l'influence de la température sur la durée de vie d'un tel système sont illustrés à l'aide de l'étude d'un système constitué de deux microprocesseurs redondants. Par ailleurs, une approche innovante consiste à l'application du processus d'accumulation des dommages à la théorie des transports des systèmes.

L'évaluation de données simulées a permis d'estimer les paramètres du modèle du système composé de deux microprocesseurs redondants et d'en déduire le comportement de sa sûreté. Le nouveau modèle de prévision prenant en compte l'influence de la température a pour but d'estimer des paramètres, lesquels traduisent le plus fidèlement possible un comportement en situation réelle. Ils permettent ainsi une étude réaliste du système électronique. La base de l'information pourra être des données de tests ou des retours d'informations sur des utilisations en conditions réelles.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Monte-Carlo-Simulation (MCS)	5
2.1	Systemtransporttheorie.....	7
2.1.1	Systemtransporttheorie ohne Berücksichtigung des Alters.....	7
2.1.2	Systemtransporttheorie mit Berücksichtigung des Alters	9
2.1.3	Systemtransporttheorie unter Berücksichtigung physikalischer Größen	10
2.1.4	Systemtransporttheorie unter Berücksichtigung der Schadensakkumulation	12
2.2	Generierung von Zufallszahlen.....	13
2.2.1	Methoden zur Generierung einer Gleichverteilung.....	13
2.2.2	Methoden zur Generierung allgemeiner Verteilungen	14
2.3	Ungewichtete MCS	15
2.3.1	Generierung eines Zustandsüberganges	16
2.3.2	Last-Event-Schätzer.....	16
2.3.3	Free-Flight-Schätzer	17
2.4	Gewichtete MCS	18
2.4.1	Generierung eines Zustandsüberganges	19
2.4.2	Last-Event-Schätzer.....	20
2.4.3	Free-Flight-Schätzer	20
3	MCS zur Modellierung Markovscher Prozesse.....	22
3.1	Beschreibung des Markovschen Zustandsmodells	22
3.2	Analytische Lösung.....	23
3.3	Ungewichtete MCS	24
3.3.1	Last-Event-Schätzer.....	24
3.3.2	Free-Flight-Schätzer	25

3.4	Gewichtete MCS	26
3.4.1	Last-Event-Schätzer.....	27
3.4.2	Free-Flight-Schätzer	27
3.5	Ergebnisdarstellung.....	28
3.6	Zusammenfassung der Ergebnisse	34
4	MCS zur Modellierung mehrparametrischer stochastischer Prozesse	35
4.1	Beschreibung des Zeit- und Temperatureinflusses	35
4.2	Analytische Lösung.....	36
4.3	Ungewichtete MCS	37
4.3.1	Temperaturermittlung.....	37
4.3.2	Ermittlung der Ausfallzeit	38
4.3.3	Last-Event-Schätzer.....	38
4.4	Gewichtete MCS	38
4.4.1	Ermittlung der Ausfallzeit	39
4.4.2	Last-Event-Schätzer.....	39
4.5	Ergebnisdarstellung.....	39
4.5.1	Temperaturabhängigkeit.....	39
4.5.2	Ausfallverhalten.....	42
4.6	Zusammenfassung der Ergebnisse	44
5	MCS zur Modellierung Nicht-Markovscher Prozesse	45
5.1	Beschreibung des Nicht-Markovschen Zustandsmodells und der Abhängigkeiten	45
5.2	Analytische Lösung.....	46
5.3	Ungewichtete MCS	48
5.3.1	Last-Event-Schätzer.....	48
5.3.2	Free-Flight-Schätzer	49

5.4	Gewichtete MCS	49
5.4.1	Last-Event-Schätzer	50
5.4.2	Free-Flight-Schätzer	51
5.5	Ergebnisdarstellung	52
5.6	Zusammenfassung der Ergebnisse	56
6	Gesamtbewertung der Ergebnisse	57
7	Analyse eines 2-Kanal-Rechnersystems unter besonderer Berücksichtigung dynamischer Systemänderungen	58
7.1	Beschreibung des 2-Kanal-Rechnersystems	58
7.2	Simulationsalgorithmen	63
7.3	Ergebnisdarstellung	65
7.3.1	Bewertung der Temperaturbereiche A und B	65
7.3.2	Bewertung des Temperaturbereiches C	74
7.4	Zusammenfassung der Ergebnisse	77
8	Zusammenfassung und Ausblick	78
9	Literaturverzeichnis	81
	Anhang	85
A.1	Abkürzungen	85
A.2	Symbolverzeichnis	86
A.3	Grundlagen	90
A.3.1	Stichprobenfunktionen	90
A.3.2	Theoretische Zuverlässigkeitskenngrößen nicht reparierbarer Systeme	91
A.3.3	Theoretische Sicherheitskenngrößen nicht reparierbarer Systeme	93
A.3.4	Empirische Kenngrößen	94
A.3.5	Ausgewählte Verteilungsfunktionen	96
A.3.6	Angewandte Belastungsmodelle	98
A.3.7	Schadensakkumulation	100

1 Einleitung

Der zunehmende Einsatz elektronischer Systeme im Kraftfahrzeug folgt u.a. aus den stetig wachsenden Anforderungen von Seiten des Gesetzgebers und des Kunden hinsichtlich Sicherheit, Zuverlässigkeit, Umweltschutz und Komfort. So wird geschätzt, dass der Elektronikanteil an den sicherheitsrelevanten Systemen von derzeit 27 % auf 35% im Jahre 2010 ansteigen wird [Flö04].

Mit der zunehmenden Komplexität und Vernetzung der Systeme ist mit einem Anstieg von Systemausfällen zu rechnen, die zu einer Gefährdung der Verkehrsteilnehmer führen können. Die Systemsicherheit und -zuverlässigkeit stellen somit Anforderungen dar, die es frühzeitig zu berücksichtigen gilt.

Mit den zuvor genannten wachsenden Anforderungen steigen aber auch die Ansprüche an die Entwicklung und Durchführung zeitgemäßer Methoden zur Sicherheits- und Zuverlässigkeitsplanung und -analyse.

Die gängigsten Verfahren zur Sicherheits- und Zuverlässigkeitsplanung und -analyse sind heutzutage die Fehler-Möglichkeiten- und Einfluss-Analyse (FMEA), die Fehlerbaumanalyse (FBA), das Petri-Netz u.a. sowie die Markovsche Modellbildung, die auf Basis stochastischer Prozesse erfolgt.

Der Vorteil der stochastischen Prozesse gegenüber Verfahren wie der FMEA und der FBA liegt darin, dass Abhängigkeiten innerhalb des betrachteten Systems besser abgebildet werden können. Die Art des stochastischen Prozesses ist dabei über die definitionsspezifischen und anwendungsspezifischen Kriterien [Kne89] gegeben. Es sind insbesondere die Markovsche Eigenschaft (Zeitinvarianz [Cox70]), die Markovsche Zustandsbedingung und die Markovsche Zeitbedingung [Mey82] zu beachten.

Eine der wesentlichen Anforderungen besteht in der Entwurfsphase darin, die Systeme hinsichtlich Sicherheit und Zuverlässigkeit optimal zu planen und gegenüber äußeren Einflüssen robust auszulegen. Es ist demnach erforderlich die Systeme unter Berücksichtigung realer Bedingungen zu entwerfen und zu prüfen. Als reale Bedingungen sind stochastische Abhängigkeiten (zustandsabhängige Systemdegradation u.a.), systematische Systemänderungen (Früh- und Verschleißausfälle u.a.) sowie dynamische Systemänderungen (physikalische Einflussgrößen u.a.), zu berücksichtigen. Des Weiteren sind die wechselseitigen Einflüsse (z.B. Ausfallverhalten und Temperatur), die zwischen systematischen und dynamischen Systemgrößen bestehen, zu beachten.

Die in der Automobilindustrie gängigen Verfahren wie die FMEA, die FBA und die Markov-Analyse sind nur bedingt in der Lage, reale Bedingungen im Rahmen der Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse adäquat zu berücksichtigen. Die Analysen sind hierbei in der Regel statischer Natur. Die wesentlichen Parameter einer Analyse, wie die Ausfallraten der betrachteten Systemkomponenten, werden dabei als konstant betrachtet. Systematische Ausfälle wie Früh- oder Verschleißausfälle lassen sich unter Verwendung der oben genannten Verfahren nicht abbilden.

Auf Basis von Nicht-Markov-Prozessen [Kne89] lassen sich stochastische Abhängigkeiten dagegen ohne Einschränkungen beschreiben sowie alle systematischen und dynamischen Systemänderungen realitätsnah modellieren. Die Anforderung besteht in der Lösung dieser Prozesse, da aus der Vielfalt und Dynamik der Einflussgrößen Gleichungssysteme folgen, die selten geschlossen lösbar sind.

Eine Möglichkeit zur Modellierung und Lösung von solch komplexen Fragestellungen ist mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation (MCS) gegeben. Die MCS hat sich speziell im Bereich der Kerntechnik zur Probabilistischen Sicherheitsanalyse (PSA) [Smi92b], [Mar94], [Wol01] aber auch in viel versprechenden Ansätzen im Bereich der Automobilindustrie [Wol04], [Hau05], [Hau06] und des Maschinenbaus [Fri01a], [Fri01b] bewährt.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Sicherheit und Zuverlässigkeit eines Systems realitätsnah zu modellieren und zu analysieren. Es werden reale Bedingungen wie stochastische Abhängigkeiten, systematische und dynamische Systemänderungen (z.B. Temperatureinfluss) im Rahmen einer realitätsnahen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse berücksichtigt. Die sicherheits- und zuverlässigkeitstechnische Modellierung und Analyse der Systeme mit den gegebenen Abhängigkeiten und Systemänderungen erfolgt unter Verwendung der MCS.

Bei der Anwendung der MCS ist es insbesondere erforderlich, seltene Ereignisse, wie sie bei der Untersuchung von Systemen mit hohen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsforderungen üblich sind, zu beachten. Diesbezüglich werden spezielle Verfahren zur Ergebnisschätzung und zur Varianzreduktion (gewichtete MCS) untersucht und in die Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen integriert. Ziel ist es, einen Beitrag zur Weiterentwicklung und Optimierung von bestehenden Simulationsalgorithmen zu leisten.

Eine wesentliche Einflussgröße, die im Rahmen der Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen betrachtet wird, ist die Temperatur. Die Modellierung des Temperatureinflus-

ses erfolgt im Rahmen dieser Arbeit unter Verwendung des Arrhenius-Modells. Zur zusätzlichen Berücksichtigung von akkumulativen Temperaturschädigungen wird die bekannte Systemtransporttheorie um ein Schadensakkumulationsmodell erweitert.

Die relevanten Systemgrößen (Arrhenius-Modellparameter sowie Ausfallverhalten) lassen sich z.B. aus Daten, wie Prüf- oder Felddaten, ermitteln. Mit einem neuen temperaturabhängigen Prognosemodell wird gezeigt, wie sich die Arrhenius-Modellparameter und das Ausfallverhalten des untersuchten Systems aus den gegebenen Daten bestimmen lassen.

Der praktische Nutzen der vorliegenden Arbeit, insbesondere im Bereich der Forschung und Entwicklung, besteht in der Ermittlung von Sicherheits- und Zuverlässigkeitskenngrößen unter Berücksichtigung der relevanten Einflussgrößen. Somit lassen sich Systeme zum Zeitpunkt der Entwurfsphase z.B. bezüglich ihres Einbau- und Einsatzortes realitätsnah untersuchen und bewerten. Notwendige Modifizierungen zur Erhöhung der Robustheit gegenüber relevanten Einflussgrößen und die damit verbundenen Verbesserungen der Systemsicherheit und -zuverlässigkeit können somit frühzeitig geplant und durchgeführt werden.

Oftmals können viele der benötigten Modellparameter (Temperatureinfluss, Ausfallverhalten u.a.) aus den Felddaten (Garantiedaten, Fehlerspeicherdaten u.a.) ermittelt werden. Die so gewonnenen Ergebnisse lassen sich u.a. für den Entwurf neuer Systeme nutzen. Zusätzlich können die Prüfungen im Rahmen der Erprobung unter Berücksichtigung der tatsächlich anliegenden Belastungen im Feld gestaltet werden. Das Produkt wird somit realitätsnah entworfen, bewertet und geprüft. Die Güte des Entwurfs und der Prüfung können dann im späteren Verlauf des Produktlebenszyklus anhand der gegebenen Felddaten validiert und verifiziert werden.

Die Grundlagen und die wesentliche Theorie der MCS sind Bestandteil von Kapitel 2. Die MCS wird anhand der Systemtransporttheorie, die erstmalig um ein Schadensakkumulationsmodell erweitert wird, dargestellt. Zusätzlich werden spezielle Verfahren zur Ergebnisschätzung und zur Bewertung seltener Ereignisse (gewichtete MCS) erläutert.

Mit den Untersuchungen in Kapitel 3 wird gezeigt, dass mit Hilfe der MCS und unter Anwendung varianzreduzierender Verfahren (gewichtete MCS) hochzuverlässige

Systeme modelliert und analysiert werden können. Gegenstand der Untersuchungen ist ein einfaches aber hochzuverlässiges Markov-Modell, bestehend aus vier Zuständen.

In Kapitel 4 wird ein System untersucht, dessen Ausfallverhalten zeit- und temperaturabhängig ist. Es wird gezeigt, dass es auf Grundlage der MCS möglich ist, solche mehrparametrischen stochastischen Prozesse zu modellieren und zu analysieren. Zu diesem Zweck werden die Einflüsse der Zeit und der Temperatur auf das Ausfallverhalten eines Systems mit zwei Zuständen betrachtet.

Da sich reale Systeme selten statisch oder systematisch verhalten, ist es erforderlich, dynamische Systemänderungen (Systemwiederherstellung und -erneuerung u.a.) zu betrachten. Gegenstand der Untersuchungen in Kapitel 5 ist deshalb ein Nicht-Markov-Modell mit 3 Zuständen und einem Regenerationspunkt. Es wird gezeigt, dass die MCS ein Verfahren ist, mit dem Zeitabhängigkeiten, Semi-Markov-, regenerative- und nicht-regenerative Eigenschaften [Kne89] berücksichtigt werden können.

In Kapitel 6 erfolgt eine Gesamtbewertung der Ergebnisse aus Kapitel 3 bis Kapitel 5.

Basierend auf den Grundlagen (Kapitel 2) und den Untersuchungen aus Kapitel 3 bis Kapitel 5 erfolgt in Kapitel 7 die Analyse eines 2-Kanal-Rechnersystems unter realen Bedingungen, d.h. unter Berücksichtigung von stochastischen Abhängigkeiten sowie systematischen und dynamischen Systemänderungen. Die Temperatur wird hierbei als wesentliche Einflussgröße (dynamische Systemänderung) in die Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen integriert. In einem weiteren Schritt wird gezeigt, wie sich die relevanten Systemgrößen (Arrhenius-Modellparameter sowie Ausfallverhalten) mit Hilfe eines neuen temperaturabhängigen Prognosemodells ermitteln lassen.

Mit der Zusammenfassung und dem Ausblick (Kapitel 8) werden die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit reflektiert und weitere Einsatzmöglichkeiten und Entwicklungen vorgestellt.

Der Anhang enthält ein Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole sowie weitere Grundlagen zum Verständnis sicherheits- und zuverlässigkeitstechnischer Sachverhalte, die in Kapitel 2 bis Kapitel 8 nicht explizit erklärt werden.

Alle Analysen und Ergebnisse dieser Arbeit wurden unter Verwendung der mathematischen Entwicklungssoftware MathematicaTM 5.0.1 mit einer Maschinengenauigkeit von $\varepsilon = 2,22045E-16$ erstellt. Als Rechnersystem diente ein 64 Bit Rechner mit einem AMD 3700+ Prozessor.

2 Monte-Carlo-Simulation (MCS)

Unter Anwendung der MCS lassen sich sehr komplexe mathematische Fragestellungen lösen. Dabei kann das zu untersuchende System gleichzeitig Elemente mit stetiger sowie diskreter Wirkung enthalten, es kann dem Einfluss vielfältiger Faktoren komplizierter Natur unterworfen und durch überaus umfangreiche Wechselbeziehungen beschrieben sein [VDI99].

Insbesondere bei Fragestellungen mit stochastischem Inhalt bietet die MCS Lösungsansätze, die die Berechnung des Problems im Gegensatz zu analytischen Ansätzen wesentlich vereinfachen [Erm75].

Die Entwicklung der MCS lässt sich bis ins 18. Jahrhundert zurückverfolgen. Der französische Naturforscher Buffon (1777) ermittelte unter Anwendung eines experimentellen Versuchs die Wahrscheinlichkeit, mit der eine auf den Boden geworfene Nadel gleichzeitig zwei Holzplanken berührt. Unter Kenntnis des Versuchs von Buffon zeigte Laplace (1886) zudem, dass sich auf Basis der experimentellen Ergebnisse ein Schätzer für π ermitteln lässt.

Eine weitere Nutzung erfolgte durch W.S. Gosset, der mit Hilfe der MCS (1908) die entwickelte Theorie seiner Student t-Verteilung experimentell untermauerte.

Die neuzeitliche Anwendung der MCS wurde um 1945 zur Simulation statistischer Experimente im Rahmen des Manhattan Project im Wesentlichen durch Fermi, von Neumann und Ulam entwickelt.

Seitdem wurde die MCS neben der Neutronenphysik in weiteren Wissenschaftszweigen wie beispielsweise Bedienungstheorie, Spieltheorie und mathematische Ökonomie verwendet [Erm75].

Heutzutage gilt die MCS als einzig realisierbare Methode zur Berechnung und Bewertung komplexer mehrdimensionaler Problemstellungen.

Im Rahmen von Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen hat sich die MCS insbesondere bei der Auswertung großer komplexer Fehlerbäume bewährt [Kam72], [Kam76]. Darüber hinaus können mittels MCS komplexe Sachverhalte, wie Abhängigkeiten von Zuständen und Zustandswechseln, beliebige Verteilungsfunktionen und Zeitabhängigkeiten, flexible Wartungs- und Reparaturstrategien und physikalische Einflussgrößen (z.B. Temperatur) berücksichtigt werden.

Die stetige Fortentwicklung der Computertechnik lässt zudem die Anwendbarkeit der MCS, besonders bei der Analyse komplexer und hochzuverlässiger Systeme, stetig wachsen. Die Anwendbarkeit der MCS wird letztendlich durch die Leistungsfähigkeit des Rechnersystems begrenzt.

Anhand der MCS lassen sich u.a. Integrale der Form

$$\int_a^b g(x) \cdot f(x) dx \quad (2.1)$$

berechnen [Lux91].

Entspricht X einer Zufallsgröße mit der Verteilungsdichte $f(x)$, dann ist auch $g(X)$ eine Zufallsgröße und es lässt sich der Erwartungswert

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad (2.2)$$

bestimmen.

Die grundlegende numerische Aufgabe besteht darin, den Erwartungswert $E(g(X))$ der Zufallsgröße $g(X)$ zu schätzen. Aus einer Stichprobe mit den Stichprobenwerten $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ berechnet sich das arithmetische Mittel, als Näherung zum Erwartungswert $E(g(X))$, zu

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g(x_i). \quad (2.3)$$

Im Rahmen der Systemanalyse gilt es, die Zustandswahrscheinlichkeiten $P_k(t)$ der Form

$$P_k(t) = \int_0^t \psi_k(t') \cdot R_k(t | t') dt' \quad (2.4)$$

zu ermitteln ($R(t | t_G, t') = R(t | t')$ für $t_G = 0$, siehe Gleichung (A.3.18)). Liegt ein absorbierender Zustand k vor, so reduziert sich Gleichung (2.4) zu

$$P_k(t) = \int_0^t \psi_k(t') dt'. \quad (2.5)$$

Die Größe $\psi(t)$ heißt Ereignisdichte und lässt sich insbesondere in enger Analogie zur Boltzmannschen Transportgleichung (physikalische Partikel-Transporttheorie) auf Basis von System-Transportgleichungen darstellen [Lew84], [Dev97], [Dub98], [Mar98].

2.1 Systemtransporttheorie

Mit Hilfe der Systemtransporttheorie, die auf der Partikel-Transporttheorie basiert, lässt sich die zeitliche Entwicklung eines Systems mit den jeweiligen definierten Zuständen modellieren [Lux91], [Dub98]. Die Transportgleichungen beschreiben dabei anhand von Ereignisdichten den Transfer zwischen den Zuständen innerhalb des Zustandsraumes.

Der Modellierung sind dabei, unter Berücksichtigung der Art des stochastischen Prozesses, keine Grenzen gesetzt. Markov-, Semi-Markov- aber auch Nicht-Markov-Prozesse lassen sich mit der Systemtransporttheorie darstellen.

Im Folgenden werden die Ansätze der Systemtransporttheorie mit und ohne Berücksichtigung des Alters, ein Ansatz zur Berücksichtigung physikalischer Größen sowie ein neuer Ansatz zur Berücksichtigung der Schadensakkumulation vorgestellt.

2.1.1 Systemtransporttheorie ohne Berücksichtigung des Alters

Die Ereignisdichte $\psi_k(t)$ entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass der Zustand k zum Zeitpunkt t eingenommen wird.

Wird $\psi_k(t)$ als Summe von Ereignissen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Transitionen betrachtet, so ist die Ereignisdichte durch den Grenzwert

$$\psi_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_k^n(t) \quad (2.6)$$

gegeben. $\psi_k^n(t)$, mit dem Zählindex n , entspricht der Ereignisdichte, dass der Zustand k zum Zeitpunkt t nach genau n Transitionen erreicht wird.

Die Größe $\psi_{k_n}^n(t_n)$ mit

$$\psi_{k_n}^n(t_n) = \sum_{k_{n-1} \neq k_n} \int_0^{t_n} \psi_{k_{n-1}}^{n-1}(t_{n-1}) \cdot R_{k_{n-1}}(t_n | t_{n-1}) \cdot \lambda_{k_{n-1} k_n}(t_n) dt_{n-1} \quad (2.7)$$

entspricht dann der Ereignisdichte, dass der Zustand k_n zum Zeitpunkt t_n nach genau n Transitionen erreicht wird.

Die Anfangsbedingung $\psi_k^0(0)$, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand k befindet, lässt sich mit der Dirac-Deltafunktion $\delta(t)$ [Meyb91] berücksichtigen [Lew84]. Die Anfangsbedingung ist dann gegeben durch

$$\psi_k^0(0) = P_k(0) \cdot \delta(t). \quad (2.8)$$

Der eigentliche Transport, d.h. der Zeitpunkt und die Art der nächsten Systemzustandsänderung, wird mit der Zeitgleichung (engl. Free-Flight-Kernel, FFK) und der Ereignisgleichung (engl. Collision-Kernel, CK) beschrieben. Die Transportgleichung setzt sich zusammen zu

$$K(k', t' \rightarrow k, t) = T(k', t' \rightarrow t) \cdot C(t, k' \rightarrow k). \quad (2.9)$$

Der FFK $T(k', t' \rightarrow t)$ entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass der nächste Zustand zum Zeitpunkt t eingenommen wird unter der Bedingung, dass der gegenwärtige Zustand k' zum Zeitpunkt t' eingenommen wurde:

$$T(k', t' \rightarrow t) = f_{k'}(t | t') = \lambda_{k'}(t) \cdot R_{k'}(t | t') \quad \text{mit} \quad (2.10)$$

$$\lambda_{k'}(t) = \sum_{k \neq k'} \lambda_{k'k}(t) \quad \text{und} \quad (2.11)$$

$$R_{k'}(t | t') = \prod_{k \neq k'} R_{k'k}(t | t'). \quad (2.12)$$

Das folgende Ereignis bzw. der Zustand, der zum Zeitpunkt t infolge des Zustandsüberganges $k' \rightarrow k$ eingenommen wird, lässt sich anhand des CK ermitteln. Der CK $C(t, k' \rightarrow k)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zustandsübergang in den Zustand k erfolgt unter der Bedingung, dass dieses Ereignis aus einem Zustandsübergang aus dem Zustand k' zum Zeitpunkt t resultiert:

$$C(t, k' \rightarrow k) = \gamma_{k'k}(t) = \frac{\lambda_{k'k}(t)}{\lambda_{k'}(t)}. \quad (2.13)$$

Die Ereignisdichte $\psi_k(t)$ ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \psi_k(t) &= P_k(0) \cdot \delta(t) + \sum_{k' \neq k} \int_0^t \psi_{k'}(t') \cdot K(k', t' \rightarrow k, t) dt' \\ &= P_k(0) \cdot \delta(t) + \sum_{k' \neq k} \int_0^t \psi_{k'}(t') \cdot q_{k'k}(t | t') dt'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Größe $q_{k'k}(t | t')$ entspricht der partiellen bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte

$$q_{k'k}(t | t') = f_{k'}(t | t') \cdot \gamma_{k'k}(t) = \lambda_{k'k}(t) \cdot R_{k'}(t | t'). \quad (2.15)$$

Wird das System auf Basis von Transportgleichungen modelliert, so können unter Verwendung der MCS die Integrale der Form

$$P_k(t) = \int_0^t \psi_k(t') \cdot R_k(t | t') dt', \quad (2.16)$$

$$F(t) = \sum_{k \in F'} \int_0^t \psi_k(t') dt' \quad \text{und} \quad (2.17)$$

$$G(t) = \sum_{k \in G'} \int_0^t \psi_k(t') dt' \quad (2.18)$$

mit den in Kapitel 2.3 und Kapitel 2.4 beschriebenen Verfahren geschätzt werden.

Dabei entspricht

F' : der Gruppe der ausgefallenen absorbierenden Zustände und

G' : der Gruppe der gefährlichen absorbierenden Zustände.

2.1.2 Systemtransporttheorie mit Berücksichtigung des Alters

Spielt zusätzlich das Alter (gegeben über den Geburtspunkt t_G) einer Komponente, des Systems oder des Prozesses eine Rolle, so muss das Alter $t - t_G$ zum Zeitpunkt t im Rahmen der Systemtransporttheorie berücksichtigt werden [Dub00]. Die Ereignisdichte $\psi_k(t, t_G)$ entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass der Zustand k zum Zeitpunkt t mit dem Alter $t - t_G$ eingenommen wird.

Der FFK $T(k', t'_G, t' \rightarrow t)$ entspricht dann der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass der nächste Zustand zum Zeitpunkt t eingenommen wird unter der Bedingung, dass der gegenwärtige Zustand k' zum Zeitpunkt t' mit dem Alter $t' - t'_G$ eingenommen wurde:

$$T(k', t'_G, t' \rightarrow t) = f_{k'}(t | t'_G, t') = \lambda_{k'}(t - t'_G) \cdot R_{k'}(t | t'_G, t'). \quad (2.19)$$

Das folgende Ereignis bzw. der Zustand, der zum Zeitpunkt t mit dem Alter $t - t'_G$ infolge des Zustandsüberganges $k' \rightarrow k$ eingenommen wird, lässt sich anhand des CK ermitteln. Der CK $C(t - t'_G, k' \rightarrow k)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zustandsübergang in den Zustand k erfolgt unter der Bedingung, dass dieses Ereignis aus einem Zustandsübergang aus dem Zustand k' zum Zeitpunkt t mit dem Alter $t - t'_G$ resultiert:

$$C(t - t'_G, k' \rightarrow k) = \gamma_{k'k}(t - t'_G). \quad (2.20)$$

Nun muss zusätzlich berücksichtigt werden, dass auch der Geburtspunkt t_G eine Änderung im Laufe des Systemtransportes erfahren kann (Reparatur, Wartung, Schädigung u.a.).

Die entsprechende Transfergleichung $U(k', k, t', t, t'_G \rightarrow t_G)$ des Geburtspunktes (engl. Birth point Transfer Function, BTF) ist definiert als Wahrscheinlichkeitsdichte, dass der Geburtspunkt gleich t_G sein wird unter der Bedingung, dass ein Zustandsübergang

von Zustand k' in den Zustand k zum Zeitpunkt t erfolgt und der Geburtspunkt bei Eintritt in den Zustand k' zum Zeitpunkt t' gleich t'_G war.

Im Falle einer vollständigen Reparatur (engl. Good As New, GAN) lautet die BTF

$$U(k', k, t', t, t'_G \rightarrow t_G) = \delta(t_G - t). \quad (2.21)$$

Eine Instandsetzung ohne Systemverbesserung (engl. Bad As Old, BAO), d.h. $t - t_G = t' - t'_G$, lässt sich über

$$U(k', k, t', t, t'_G \rightarrow t_G) = \delta(t_G - t'_G - t + t') \quad (2.22)$$

modellieren.

Die Ereignisdichte $\psi_k(t, t_G)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \psi_k(t, t_G) = & P_k(0, 0) \cdot \delta(t) \cdot \delta(t_G) + \sum_{k' \neq k} \int_0^t \int_0^t U(k', k, t', t, t'_G \rightarrow t_G) \\ & \cdot \psi_{k'}(t', t'_G) \cdot q_{k'k}(t | t'_G, t') dt'_G dt'. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Wird das System auf Basis von Transportgleichungen modelliert, so können unter Verwendung der MCS die Integrale der Form

$$P_k(t) = \int_0^t \int_0^t \psi_k(t', t'_G) \cdot R_k(t | t'_G, t') dt'_G dt', \quad (2.24)$$

$$F(t) = \sum_{k \in F} \int_0^t \int_0^t \psi_k(t', t'_G) dt'_G dt' \text{ und} \quad (2.25)$$

$$G(t) = \sum_{k \in G} \int_0^t \int_0^t \psi_k(t', t'_G) dt'_G dt' \quad (2.26)$$

mit den in Kapitel 2.3 und Kapitel 2.4 beschriebenen Verfahren geschätzt werden.

2.1.3 Systemtransporttheorie unter Berücksichtigung physikalischer Größen

Zusätzlich lassen sich im Rahmen der Systemtransporttheorie physikalische Größen berücksichtigen. Dies ist sowohl für deterministische [Smi92a] als auch für stochastische Größen [Bec02] möglich.

Die Ereignisdichte $\psi_k(x, t)$ entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass der Zustand k zum Zeitpunkt t mit der physikalischen Größe x eingenommen wird.

Der Verlauf der physikalischen Größe X innerhalb des Zustandes k' sei über die Funktion $g_{k'}(t-t', u)$ gegeben. Der Zustand k' wurde zum Zeitpunkt t' mit u eingenommen.

Zusätzlich wird der Einfluss einer stochastischen Größe Z definiert. Der funktionelle Zusammenhang zwischen X und Z ist bei einem Zustandsübergang von Zustand k' nach Zustand k über die Funktion

$$x = y_{k'k}(x', z) \quad (2.27)$$

gegeben. Die stochastische Einflussgröße Z , bei einem Zustandsübergang von Zustand k' nach Zustand k , ist über die Wahrscheinlichkeitsdichte $a_{k'k}(z)$ gegeben.

Unter Berücksichtigung deterministischer und stochastischer Änderungen berechnet sich die Ereignisdichte $\psi_k(x, t)$ zu

$$\begin{aligned} \psi_k(x, t) = P_k(x, 0) \cdot \delta(t) + \sum_{k' \neq k} \int_{(z)} \int_0^t \int_{(x')} \int \delta(x - y_{k'k}(x', z)) \cdot a_{k'k}(z) \\ \cdot \delta(x' - g_{k'}(t-t', u)) \cdot \psi_{k'}(u, t') \cdot q_{k'k}(t | u, t') du dx' dt' dz. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ist kein stochastischer Einfluss gegeben, so vereinfacht sich Gleichung (2.28) zu

$$\begin{aligned} \psi_k(x, t) = P_k(x, 0) \cdot \delta(t) + \sum_{k' \neq k} \int_0^t \int_{(u)} \delta(x - g_{k'}(t-t', u)) \cdot \psi_{k'}(u, t') \\ \cdot q_{k'k}(t | u, t') du dt'. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ist keine dynamische Änderung der physikalischen Größe gegeben, so vereinfacht sich Gleichung (2.28) zu

$$\begin{aligned} \psi_k(x, t) = P_k(x, 0) \cdot \delta(t) + \sum_{k' \neq k} \int_{(z)} \int_0^t \int_{(x')} \delta(x - y_{k'k}(x', z)) \cdot a_{k'k}(z) \\ \cdot \psi_{k'}(x', t') \cdot q_{k'k}(t | x', t') dx' dt' dz. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ist X lediglich von der stochastischen Größe Z abhängig, mit

$$x = y_{k'k}(x', z) = z, \quad (2.31)$$

so vereinfacht sich Gleichung (2.28) zu

$$\psi_k(x, t) = P_k(x, 0) \cdot \delta(t) + \sum_{k' \neq k} \int_0^t \int_{(x')} a_{k'k}(x) \cdot \psi_{k'}(x', t') \cdot q_{k'k}(t | x', t') dx' dt'. \quad (2.32)$$

Wird das System auf Basis von Transportgleichungen modelliert, so können unter Verwendung der MCS die Integrale der Form

$$P_k(t) = \int_0^t \int_{0(x')} \psi_k(x', t') \cdot R_k(t | x', t') dx' dt', \quad (2.33)$$

$$F(t) = \sum_{k \in F} \int_0^t \int_{0(x')} \psi_k(x', t') dx' dt' \text{ und} \quad (2.34)$$

$$G(t) = \sum_{k \in G} \int_0^t \int_{0(x')} \psi_k(x', t') dx' dt' \quad (2.35)$$

mit den in Kapitel 2.3 und Kapitel 2.4 beschriebenen Verfahren geschätzt werden.

2.1.4 Systemtransporttheorie unter Berücksichtigung der Schadensakkumulation

Wird im Rahmen der Systemtransporttheorie das Ausfallverhalten in Abhängigkeit von physikalischen Größen modelliert, so ist es erforderlich, insbesondere bei zeitabhängigem Ausfallverhalten, den Effekt der Schadensakkumulation zu berücksichtigen. Der Effekt der Schadensakkumulation wird im Folgenden am Beispiel eines stochastischen Temperatureinflusses, gemäß Gleichung (2.32), beschrieben. Der Einfluss der Temperatur auf das Ausfallverhalten lässt sich über das Arrhenius-Modell modellieren (Anhang A.3.6). Die Modellierung der Schadensakkumulation erfolgt nach Nelson [Nel90] (Anhang A.3.7).

Die Schadensakkumulation lässt sich in Form des Alters der Komponente darstellen. Jede zusätzliche Schädigung hat demnach einen äquivalenten Einfluss auf das Alter. In Analogie zu Kapitel 2.1.2 lässt sich dieser Einfluss unter Verwendung der BTF modellieren. Der äquivalente Geburtspunkt t_G , bei einer anliegenden Temperatur x , wird mit der Beziehung

$$t - t_G = (t - t'_G) \cdot B(x, x') \quad (2.36)$$

und der BTF

$$U(k', k, x', x, t', t, t'_G \rightarrow t_G) = \delta(t_G - t + (t - t'_G) \cdot B(x, x')) \quad (2.37)$$

bestimmt. Unter Berücksichtigung eines stochastischen Temperatureinflusses, gemäß Gleichung (2.32), und der Schadensakkumulation folgt für die Ereignisdichte

$$\begin{aligned} \psi_k(x, t, t_G) &= P_k(x, 0, 0) \cdot \delta(t) \cdot \delta(t_G) \\ &+ \sum_{k' \neq k} \int_0^t \int_{0(x')} \int_{0(x')} \delta(t_G - t + (t - t'_G) \cdot B(x, x')) \\ &\cdot a_{k'k}(x) \cdot \psi_{k'}(x', t', t'_G) \cdot q_{k'k}(t | x', t'_G, t') dx' t'_G dt'. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Wird das System auf Basis von Transportgleichungen modelliert, so können unter Verwendung der MCS die Integrale der Form

$$P_k(t) = \int_{t'_G 0(x')}^t \int_{t'_G 0(x')}^t \int_{t'_G 0(x')}^t \psi_k(x', t', t'_G) \cdot R_k(t | x', t'_G, t') dx' dt'_G dt', \quad (2.39)$$

$$F(t) = \sum_{k \in F} \int_{t'_G 0(x')}^t \int_{t'_G 0(x')}^t \int_{t'_G 0(x')}^t \psi_k(x', t', t'_G) dx' dt'_G dt' \quad \text{und} \quad (2.40)$$

$$G(t) = \sum_{k \in G} \int_{t'_G 0(x')}^t \int_{t'_G 0(x')}^t \int_{t'_G 0(x')}^t \psi_k(x', t', t'_G) dx' dt'_G dt' \quad (2.41)$$

mit den in Kapitel 2.3 und Kapitel 2.4 beschriebenen Verfahren geschätzt werden.

2.2 Generierung von Zufallszahlen

Die MCS basiert auf der Generierung geeigneter Zufallszahlen. Da die generierten Zahlenfolgen mit entsprechenden Algorithmen erzeugt werden, tritt eine Zahlenfolge praktisch pseudozufällig auf. Eine Zahlenfolge heißt pseudozufällig, wenn sie zwar durch einen Algorithmus erzeugt wird, aber bei einer statistischen Untersuchung kein signifikanter Widerspruch zur Hypothese eines echten zufälligen Verhaltens festgestellt werden kann [Fri01a].

2.2.1 Methoden zur Generierung einer Gleichverteilung

Die Generierung von Zufallszahlen basiert im Allgemeinen auf der Verwendung von Zufallszahlen, die im Intervall $[0, 1)$ $GL(0, 1)$ -verteilt sind. Diese $GL(0, 1)$ -verteilten Zufallszahlen werden ihrerseits mit Hilfe deterministischer Algorithmen erzeugt. Eine einfache Methode ist unter Verwendung von linearen Kongruenzgeneratoren mit

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod m \quad \text{und} \quad 0 \leq x_i < m \quad (2.42)$$

gegeben [Gen98].

Ist $c = 0$, so wird von einem multiplikativen Kongruenzgenerator gesprochen. Die erzeugte $GL(0, 1)$ -verteilte Zufallszahl ξ lautet

$$\xi = \frac{x_i}{m}. \quad (2.43)$$

2.2.2 Methoden zur Generierung allgemeiner Verteilungen

Eine einfache Methode zur Generierung von beliebig verteilten Zufallszahlen ist über die Inversionsmethode gegeben. Zunächst wird mittels eines Zufallszahlengenerators eine $GL(0, 1)$ -verteilte Zufallszahl ξ generiert. Die generierte Zufallszahl ξ wird nun mit einer beliebigen Verteilungsfunktion $F(t)$ gleichgesetzt:

$$\xi = F(t) . \quad (2.44)$$

Mit der inversen Funktion

$$t^* = F^{-1}(\xi) \quad (2.45)$$

lässt sich schließlich eine beliebig verteilte Zufallszahl t^* generieren. Die Vorgehensweise ist in Bild 2.1 dargestellt.

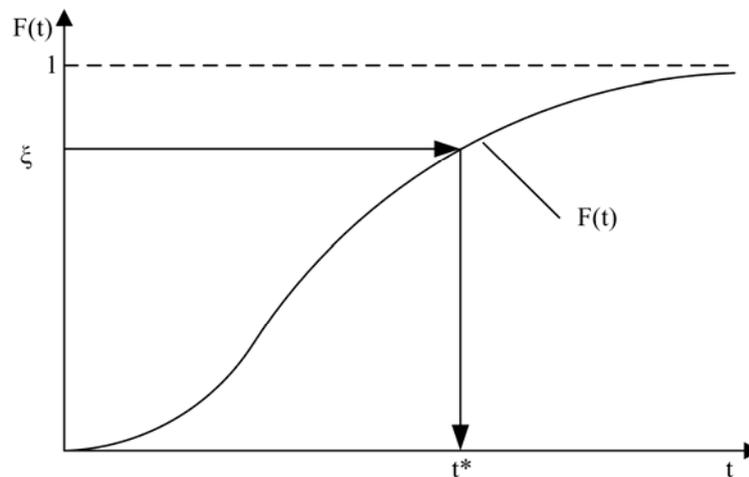


Bild 2.1: Ermittlung von t^* aus einer beliebigen Verteilung $F(t)$

Die Inversionsmethode kann zusätzlich zur Ermittlung diskreter Zufallsgrößen benutzt werden. Eine diskrete Zufallsgröße j^* lässt sich unter Lösung der Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{j^*-1} p_j \leq \xi < \sum_{j=1}^{j^*} p_j = P_{j^*-1} \leq \xi < P_{j^*} \quad (2.46)$$

bestimmen. Die Ermittlung diskreter Zufallsgrößen ist in Bild 2.2 dargestellt.

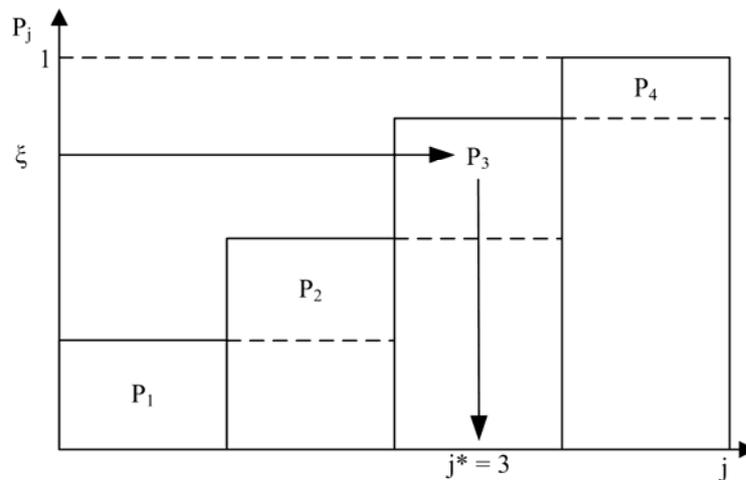


Bild 2.2: Ermittlung einer diskreten Zufallszahl

Weitere Verfahren zur Generierung allgemeiner Verteilungen sind die Verwerfungsmethode [VDI99] sowie allgemeine numerische Verfahren, wie z.B. das Newtonsche Iterationsverfahren, mit denen sich t^* (siehe Gleichung (2.45)) ermitteln lässt [Fri01a].

Multivariate Zufallsgrößen können auf Basis multivariater Verteilungsdichten der Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(x_i | x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (2.47)$$

generiert werden. Die multivariaten Zufallsgrößen lassen sich dann sukzessive erzeugen [Gen98], [Mar02]. Zunächst wird X_n entsprechend

$$X_n \sim f(x_n) \text{ generiert und anschließend } X_{n-1} \text{ gemäß} \quad (2.48)$$

$$X_{n-1} \sim f(x_{n-1} | x_n) \text{ bis zu} \quad (2.49)$$

$$X_1 \sim f(x_1 | x_2, \dots, x_{n-1}, x_n). \quad (2.50)$$

2.3 Ungewichtete MCS

Im Rahmen der Sicherheits- und Zuverlässigkeitstheorie sind insbesondere die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in fehlerhaften absorbierenden Zuständen von Interesse.

Erfolgt die Schätzung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit ohne Anwendung varianz- oder zeitreduzierender Verfahren [Hau07], so wird die Vorgehensweise ungewichtete MCS genannt.

Gemäß der in Kapitel 2.1 beschriebenen Systemtransporttheorie lässt sich ein Zustandsübergang mit der Transportgleichung (Gleichung (2.9))

$$K(k', t' \rightarrow k, t) = T(k', t' \rightarrow t) \cdot C(t, k' \rightarrow k)$$

beschreiben.

2.3.1 Generierung eines Zustandsüberganges

Der Zustandsübergang teilt sich in den FFK (Zeitpunkt des Zustandsüberganges, Gleichung (2.10))

$$T(k', t' \rightarrow t) = f_{k'}(t | t') = \lambda_{k'}(t) \cdot R_{k'}(t | t')$$

und den CK (Ziel des Zustandsüberganges, Gleichung (2.13))

$$C(t, k' \rightarrow k) = \gamma_{k'k}(t) = \frac{\lambda_{k'k}(t)}{\lambda_{k'}(t)}$$

auf. Wurde der Zustand k' zum Zeitpunkt t' eingenommen, so lässt sich ein Zustandsübergang aus dem Zustand k' zum Zeitpunkt t mit der Bedingung $T > t'$ erzeugen. Der Zeitpunkt t des Zustandsüberganges berechnet sich mit

$$\xi = P_{k'}(T \leq t | T > t') = F_{k'}(t | t') \quad (2.51)$$

unter Anwendung der Inversionsmethode (Kapitel 2.2.2) zu

$$t = F_{k'}^{-1}(\xi). \quad (2.52)$$

Der Zielzustand k , der zum Zeitpunkt $t > t'$ aus dem Zustand k' heraus eingenommen wird, ergibt sich unter Anwendung der Inversionsmethode (Kapitel 2.2.2) zu

$$\sum_{j \neq k'}^{k-1} \gamma_{k'j}(t) \leq \xi < \sum_{j \neq k'}^k \gamma_{k'j}(t). \quad (2.53)$$

Nachdem der absorbierende Zustand k zum Zeitpunkt $t > t'$ eingenommen wurde, lässt sich die Zustandswahrscheinlichkeit mit unterschiedlichen Verfahren ermitteln. Im Folgenden werden der Last-Event-Schätzer (LES) und der Free-Flight-Schätzer (FFS) [Mar98], [Hau06] vorgestellt.

2.3.2 Last-Event-Schätzer

Bei der Schätzung über den LES wird die Häufigkeit eines Ereignisses (z.B. Eintritt in den absorbierenden Zustand k bis zum Zeitpunkt t) gewertet. Der Schätzer berechnet sich zu

$$\hat{P}_k(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_k^{(i)}(t) \quad \text{mit} \quad (2.54)$$

$$P_k^{(i)}(t) \in \{0, 1\}. \quad (2.55)$$

Die Varianz ergibt sich anschließend zu

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (P_k^{(i)}(t) - \hat{P}_k(t))^2. \quad (2.56)$$

2.3.3 Free-Flight-Schätzer

Sind zwei Zustände k' und k über einen Zustandsübergang $k' \rightarrow k$ miteinander verbunden, so lässt sich die Zustandsübergangswahrscheinlichkeit $P_{k'k}(t)$ anhand der partiellen Übergangsdichte $q_{k'k}(t)$ berechnen. Unter Berücksichtigung, dass der Zustand k' zum Zeitpunkt t' eingenommen wurde, berechnet sich die Zustandsübergangswahrscheinlichkeit in den absorbierenden Zustand k zu

$$P_{k'k}(T \leq t | T > t') = P_{k'k}(t | t') = \int_{t'}^t q_{k'k}(\tau | t') d\tau. \quad (2.57)$$

Innerhalb des i -ten Laufes kann der Zustand k' m -mal eingenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{k'k}^{(i)}(t)$ berechnet sich dann zu

$$P_{k'k}^{(i)}(t) = \sum_m P_{k'k}^{(i)}(t | t_m). \quad (2.58)$$

Werden alle möglichen Zustandsübergänge $k' \rightarrow k$ betrachtet, so berechnet sich die Zustandswahrscheinlichkeit $P_k(t)$ im i -ten Lauf zu

$$P_k^{(i)}(t) = \sum_{k' \neq k} P_{k'k}^{(i)}(t). \quad (2.59)$$

$P_k(t)$ kann danach über

$$\hat{P}_k(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_k^{(i)}(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k' \neq k} P_{k'k}^{(i)}(t) \quad (2.60)$$

geschätzt werden.

Die Varianz berechnet sich anschließend zu

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (P_k^{(i)}(t) - \hat{P}_k(t))^2. \quad (2.61)$$

2.4 Gewichtete MCS

Ein wesentlicher Nachteil der MCS ist die langsame Konvergenz [Fri01a], gegeben durch die Problematik seltener Ereignisse sowie einen nicht unwesentlichen Aufwand zur Generierung der Zufallszahlen aufgrund komplexer und häufig bedingter Verteilungsfunktionen. Konvergenz und Generierung von Zufallszahlen lassen sich mit einer geeigneten Modifikation der Verteilungsdichte verbessern und vereinfachen. Vor dem Hintergrund der Systemtransporttheorie gilt es zur Reduktion der Varianz und damit der besseren Konvergenz des Verfahrens die Häufigkeit seltener Ereignisse zu erhöhen. Diesbezüglich ist es notwendig, die Anzahl von Ereignissen innerhalb der Betriebsdauer t_B mit dem gewünschten Zielzustand zu steigern. Die Modifizierung der Ereignisdichten wird durch eine geeignete Gewichtung der Transportfunktion (gewichtete MCS) berücksichtigt.

Wird $\tilde{\psi}_k(t)$ als Summe von modifizierten Ereignissen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Zustandsübergängen betrachtet, so entspricht die modifizierte Ereignisdichte dem Grenzwert

$$\tilde{\psi}_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_k^n(t). \quad (2.62)$$

Die Ereignisdichte $\psi_{k_n}^n(t_n)$ ist dann gegeben durch

$$\psi_{k_n}^n(t_n) = \sum_{k_{n-1} \neq k_n} \int_0^{t_n} w_{k_n}^n(t_n) \cdot \tilde{\psi}_{k_{n-1}}^{n-1}(t_{n-1}) \cdot \tilde{K}(k_{n-1}, t_{n-1} \rightarrow k_n, t_n) dt_{n-1}. \quad (2.63)$$

Der Gewichtungsfaktor $w_{k_n}^n(t_n)$ entspricht der kumulierten Gewichtung zum Zeitpunkt t_n , des n -ten Zustandsüberganges $k_{n-1} \rightarrow k_n$:

$$w_{k_n}^n(t_n) = w_{k_{n-1}}^{n-1}(t_{n-1}) \cdot \frac{K(k_{n-1}, t_{n-1} \rightarrow k_n, t_n)}{\tilde{K}(k_{n-1}, t_{n-1} \rightarrow k_n, t_n)} \quad \text{mit} \quad (2.64)$$

$$w_{k_0}^0(0) = 1. \quad (2.65)$$

Die modifizierte Transportgleichung (Modifizierung des FFK und/oder des CK) lautet

$$\tilde{K}(k', t' \rightarrow k, t) = \tilde{T}(k', t' \rightarrow t) \cdot \tilde{C}(t, k' \rightarrow k) = \tilde{f}_{k'}(t | t') \cdot \tilde{\gamma}_{k'k}(t). \quad (2.66)$$

Auf Grundlage der modifizierten Ereignisdichte $\tilde{\psi}_k(t)$ entspricht die Ereignisdichte $\psi_k(t)$ dem Grenzwert

$$\psi_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_k^n(t) \cdot \tilde{\psi}_k^n(t). \quad (2.67)$$

2.4.1 Generierung eines Zustandsüberganges

Im Folgenden werden die Verfahren, bei denen Zustandsübergänge zeitlich forciert (engl. Forced Transition Method, FTM) und hinsichtlich des Zielzustandes begünstigt werden (engl. Transition Biasing Method, TBM), vorgestellt [Lew84], [Lab96].

Forced Transition Method

Wurde der Zustand k' zum Zeitpunkt t' eingenommen, so lässt sich ein Zustandsübergang aus dem Zustand k' zum Zeitpunkt t mit der Bedingung $t' < T \leq t_B$ erzeugen. Der Zeitpunkt t des Zustandsüberganges berechnet sich mit

$$\xi = P_{k'}(T \leq t \mid t' < T \leq t_B) = F_{k'}(t \mid t', t_B) \quad \text{und} \quad (2.68)$$

$$F_{k'}(t \mid t', t_B) = \frac{F_{k'}(t \mid t')}{F_{k'}(t_B \mid t')} \quad (2.69)$$

unter Anwendung der Inversionsmethode (Kapitel 2.2.2) zu

$$t = F_{k'}^{-1}(\xi). \quad (2.70)$$

Der modifizierte FFK $\tilde{T}(k', t' \rightarrow t)$ entspricht somit

$$\tilde{T}(k', t' \rightarrow t) = f_{k'}(t \mid t', t_B) = \frac{f_{k'}(t \mid t')}{F_{k'}(t_B \mid t')}. \quad (2.71)$$

Transition Biasing Method

Der Zielzustand, der zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$ aus dem Zustand k' heraus eingenommen wird, kann nun mit der TBM bezüglich des Eintrittes von Zustand k begünstigt werden. Der modifizierte CK $\tilde{C}(t, k' \rightarrow k)$ lautet

$$\tilde{C}(t, k' \rightarrow k) = \tilde{\gamma}_{k'k}(t) = \frac{\tilde{\lambda}_{k'k}(t)}{\tilde{\lambda}_{k'}(t)}. \quad (2.72)$$

Der Zielzustand k ergibt sich unter Anwendung der Inversionsmethode (Kapitel 2.2.2) zu

$$\sum_{j \neq k'}^{k-1} \tilde{\gamma}_{k'j}(t) \leq \xi < \sum_{j \neq k'}^k \tilde{\gamma}_{k'j}(t) \quad \text{mit} \quad (2.73)$$

$$\tilde{\gamma}_{k'k}(t) > \gamma_{k'k}(t). \quad (2.74)$$

Das Verfahren ist einfach durchzuführen, wenn der CK $\tilde{C}(t, k' \rightarrow k)$ einer zeitunabhängigen konstanten Wahrscheinlichkeit entspricht, bei der alle Zustandsübergangsraten $\text{EXP}(\lambda)$ -verteilt sind. Es sollte darauf geachtet werden, dass der modifizierte CK so

gewählt wird, dass eine hinreichend große Anzahl von Ereignissen eintritt. Empfehlungen dazu sind in [Lew95] und [Hau07] gegeben.

Gewichtung des generierten Zustandsüberganges

Das generierte Ereignis (Eintritt in den absorbierenden Zustand k zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$) wird nun gemäß der FTM und der TBM gewichtet, mit

$$w_k^n(t) = w_{k'}^{n-1}(t') \cdot \frac{K(k', t' \rightarrow k, t)}{\tilde{K}(k', t' \rightarrow k, t)} = w_{k'}^{n-1}(t') \cdot F_{k'}(t_B | t') \cdot \frac{\gamma_{k'k}(t)}{\tilde{\gamma}_{k'k}(t)} = u_{k'k}. \quad (2.75)$$

Nachdem der absorbierende Zustand k zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$ eingenommen wurde, lässt sich die Zustandswahrscheinlichkeit mit unterschiedlichen Verfahren ermitteln. Im Folgenden werden der LES und der FFS [Mar98], [Hau06] vorgestellt.

2.4.2 Last-Event-Schätzer

Im Falle gewichteter Stichproben berechnet sich der Mittelwert der n Gewichtungen zu

$$\hat{P}_{k'k}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_{k'k}^{(i)}. \quad (2.76)$$

Werden alle möglichen Zustandsübergänge $k' \rightarrow k$ betrachtet, so kann die Zustandswahrscheinlichkeit $P_k(t_B)$ über

$$\hat{P}_k(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_k^{(i)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k' \neq k} u_{k'k}^{(i)} \quad (2.77)$$

geschätzt werden.

Die Varianz ergibt sich anschließend zu

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (u_k^{(i)} - \hat{P}_k(t_B))^2. \quad (2.78)$$

2.4.3 Free-Flight-Schätzer

Unter Berücksichtigung, dass der Zustand k' zum Zeitpunkt t' mit der Gewichtung $w_{k'}^{n-1}(t') = u_{k'}(t')$ eingenommen wurde, berechnet sich die Zustandsübergangswahrscheinlichkeit $P_{k'k}^*(t_B | t')$ unter Verwendung des FFS zu

$$P_{k'k}^*(t_B | t') = P_{k'k}(t_B | t') \cdot u_{k'}(t') = \int_{t'}^{t_B} q_{k'k}(\tau | t') d\tau \cdot u_{k'}(t'). \quad (2.79)$$

Innerhalb des i -ten Laufes kann der Zustand k' m -mal eingenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{k'k}^{(i)}(t_B)$ berechnet sich dann zu

$$P_{k'k}^{(i)}(t_B) = \sum_m P_{k'k}^{*(i)}(t_B | t_m) = \sum_m P_{k'k}^{(i)}(t_B | t_m) \cdot u_{k'}^{(i)}(t_m). \quad (2.80)$$

Der Schätzer für $P_{k'k}(t_B)$ ergibt sich anschließend zu

$$\hat{P}_{k'k}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_{k'k}^{(i)}(t_B). \quad (2.81)$$

Werden alle möglichen Zustandsübergänge $k' \rightarrow k$ betrachtet, so berechnet sich die Zustandswahrscheinlichkeit $P_k(t_B)$ im i -ten Lauf zu

$$P_k^{(i)}(t_B) = \sum_{k' \neq k} P_{k'k}^{(i)}(t_B). \quad (2.82)$$

$P_k(t_B)$ kann danach über

$$\hat{P}_k(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_k^{(i)}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k' \neq k} P_{k'k}^{(i)}(t_B) \quad (2.83)$$

geschätzt werden.

Die Varianz berechnet sich anschließend zu

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (P_k^{(i)}(t_B) - \hat{P}_k(t_B))^2. \quad (2.84)$$

3 MCS zur Modellierung Markovscher Prozesse

Im Folgenden wird untersucht, inwieweit die MCS geeignet ist, Markovsche Prozesse zu modellieren und zu analysieren. Zusätzlich gilt es, insbesondere Markovsche Prozesse, die sehr kleine Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten enthalten, zu betrachten. Gegenstand der folgenden Untersuchung ist ein Markov-Modell mit vier Zuständen. Zur Verifikation der verwendeten MCS wird eine analytische Lösung verschiedenen Verfahren der MCS (ungewichtet - gewichtet, LES - FFS) gegenübergestellt.

3.1 Beschreibung des Markovschen Zustandsmodells

Das zu untersuchende Markovsche Zustandsmodell besteht aus vier Zuständen und ist in Bild 3.1 dargestellt.

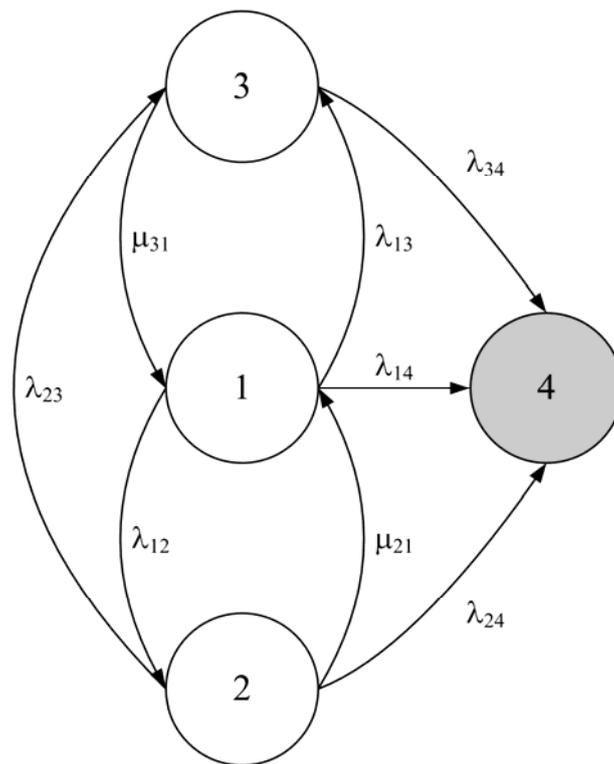


Bild 3.1: Markovsches Zustandsmodell mit vier Zuständen

Zustand 1 ist der intakte Zustand, die Zustände 2 und 3 entsprechen degradierten Systemzuständen. Je nach eingenommenem Systemzustand 1 bis 3 besteht die Möglichkeit, in den absorbierenden Fehlerzustand 4 zu gelangen.

Mit der Wahl $\text{EXP}(\lambda)$ -verteilter Zustandsübergänge lässt sich das System auf Basis eines homogenen Markov-Prozesses darstellen und untersuchen.

Einige Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten des Systems sind zudem sehr klein, so dass die Anwendung der in Kapitel 2.4 vorgestellten gewichteten MCS notwendig wird. Nachdem die Analyse zunächst ungewichtet erfolgt (Kapitel 2.3), werden in einem weiteren Schritt die FTM und die TBM zur Varianzreduktion angewendet. In beiden Fällen erfolgt die Analyse mit Hilfe des LES und des FFS. Die zu Bild 3.1 zugehörigen Parameter der Zustandsübergänge können der Tabelle 3.1 entnommen werden.

Tabelle 3.1: *Verwendete Parameter der Zustandsübergänge*

Zustandsübergänge	Parameter $\text{EXP}(\lambda)$ [h^{-1}]
λ_{12}	1,6E-05
λ_{13}	6E-07
λ_{14}	8,3E-08
μ_{21}	3
λ_{23}	3E-07
λ_{24}	8,383E-06
μ_{31}	3
λ_{34}	8,383E-06

3.2 Analytische Lösung

Das Markovsche Zustandsmodell (Bild 3.1) lässt sich anhand der folgenden Zustandsdifferentialgleichungen (siehe [Mey03]) beschreiben:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) \cdot P_1(t) + \mu_{21} \cdot P_2(t) + \mu_{31} \cdot P_3(t), \quad (3.1)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\mu_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}) \cdot P_2(t) + \lambda_{12} \cdot P_1(t), \quad (3.2)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -(\mu_{31} + \lambda_{34}) \cdot P_3(t) + \lambda_{13} \cdot P_1(t) + \lambda_{23} \cdot P_2(t) \text{ und} \quad (3.3)$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_{14} \cdot P_1(t) + \lambda_{24} \cdot P_2(t) + \lambda_{34} \cdot P_3(t). \quad (3.4)$$

Werden die Größenordnungen der Parameter aus Tabelle 3.1 berücksichtigt, so lässt sich aus dem gegebenen Differentialgleichungssystem eine approximative analytische Lösung für die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t) = P_4(t)$, basierend auf den Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $P_{14}(t)$, $P_{24}(t)$ und $P_{34}(t)$, herleiten:

$$P_{14}(t) = \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}} \cdot (1 - \exp(-(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) \cdot t)), \quad (3.5)$$

$$P_{24}(t) = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{24}}{\mu_{21} \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14})} \cdot (1 - \exp(-(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) \cdot t)) - \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{24}}{\mu_{21}^2} \cdot (1 - \exp(-\mu_{21} \cdot t)), \quad (3.6)$$

$$P_{34}(t) = \frac{\lambda_{13} \cdot \lambda_{34}}{\mu_{31} \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14})} \cdot (1 - \exp(-(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) \cdot t)) - \frac{\lambda_{13} \cdot \lambda_{34}}{\mu_{31}^2} \cdot (1 - \exp(-\mu_{31} \cdot t)) \text{ und} \quad (3.7)$$

$$F(t) = P_{14}(t) + P_{24}(t) + P_{34}(t). \quad (3.8)$$

3.3 Ungewichtete MCS

Das System wird zunächst herkömmlich, d.h. unter Verwendung der ungewichteten MCS mit dem LES und dem FFS, untersucht.

Der Systemtransport (Kapitel 2.1) erfolgt auf Basis generierter Zufallszeiten und Zustandsänderungen. Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der Betriebsdauer t_B in den absorbierenden Zustand 4 (Bild 3.1) zu gelangen, kann mit dem LES und dem FFS (Kapitel 2.3) ermittelt werden.

3.3.1 Last-Event-Schätzer

Bei der Schätzung über den LES wird bei n erfolgten Simulationsläufen die in der Betriebsdauer t_B beobachtete Anzahl von bestimmten Ereignissen (z.B. Zustandsübergang $2 \rightarrow 4$) gewertet. Im Falle der ungewichteten MCS berechnen sich die Schätzer für $P_{24}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ zu

$$\hat{P}_{24}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_{24}^{(i)}(t_B) \text{ und} \quad (3.9)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{14}^{(i)}(t_B) + P_{24}^{(i)}(t_B) + P_{34}^{(i)}(t_B)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F^{(i)}(t_B) \text{ mit} \quad (3.10)$$

$$P_{14}^{(i)}(t_B), P_{24}^{(i)}(t_B), P_{34}^{(i)}(t_B) \text{ und } F^{(i)}(t_B) \in \{0, 1\}. \quad (3.11)$$

Mit den unter Gleichung (3.5) bis Gleichung (3.8) gegebenen Lösungen berechnen sich die Varianzen gemäß Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{24}^{(i)}(t_B) - P_{24}(t_B))^2 \text{ und} \quad (3.12)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (F^{(i)}(t_B) - F(t_B))^2. \quad (3.13)$$

3.3.2 Free-Flight-Schätzer

Wird beispielsweise der Zustand 2 erreicht, so ist es möglich, die Auftretenswahrscheinlichkeit des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 4$ zu ermitteln. Unter Berücksichtigung, dass der Zustand 2 zum Zeitpunkt t' eingenommen wurde, ergibt sich diese Wahrscheinlichkeit zu

$$P_{24}(t_B | t') = \int_{t'}^{t_B} \lambda_{24} \cdot \exp(-\lambda_2 \cdot (\tau - t')) d\tau. \quad (3.14)$$

Innerhalb des i -ten Laufes kann der Zustand 2 m -mal eingenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{24}^{(i)}(t_B)$ berechnet sich dann zu

$$P_{24}^{(i)}(t_B) = \sum_m P_{24}^{(i)}(t_B | t_m). \quad (3.15)$$

Die Schätzer für $P_{24}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ lauten

$$\hat{P}_{24}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_{24}^{(i)}(t_B) \text{ und} \quad (3.16)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{14}^{(i)}(t_B) + P_{24}^{(i)}(t_B) + P_{34}^{(i)}(t_B)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F^{(i)}(t_B). \quad (3.17)$$

Die zugehörigen Varianzen ergeben sich nach Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{24}^{(i)}(t_B) - P_{24}(t_B))^2 \text{ und} \quad (3.18)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (F^{(i)}(t_B) - F(t_B))^2. \quad (3.19)$$

3.4 Gewichtete MCS

In einem weiteren Schritt erfolgt die Analyse unter Verwendung der gewichteten MCS, d.h. der varianzreduzierenden Verfahren FTM und TBM, sowie der jeweiligen Schätzverfahren LES und FFS. Das Vorgehen wird im Folgenden anhand des Zustandes 2 beispielhaft beschrieben. Das System sei zum Zeitpunkt t' der Betrachtung im Zustand 1 (intakter Zustand).

Mit den Parametern der Zustandsübergänge (Tabelle 3.1) wird ersichtlich, dass ein Zustandsübergang in den Zustand 2 ein seltenes Ereignis und ein weiterer Zustandsübergang in den Zustand 4 sehr unwahrscheinlich ist. Für den Fall, dass insbesondere der Zustandsübergang $2 \rightarrow 4$ Gegenstand der Untersuchung ist, muss der Zustandsübergang in den Zustand 2 zunächst zeitlich forciert und anschließend bezüglich des Eintrittes von Zustand 2 begünstigt werden. Dasselbe Verfahren wird auf den Eintritt des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 4$ innerhalb der Betriebsdauer t_B angewendet. Dies ist mit einer Kombination der FTM und der TBM möglich (Kapitel 2.4).

Der Zeitpunkt t eines Zustandsüberganges, der vor dem Erreichen der Betriebsdauer t_B eintritt, wird über

$$\xi = P_1(T \leq t | t' < T \leq t_B) = F_1(t | t', t_B) \text{ und} \quad (3.20)$$

$$F_1(t | t', t_B) = \frac{F_1(t | t')}{F_1(t_B | t')} = \frac{1 - \exp(-\lambda_1 \cdot (t - t'))}{1 - \exp(-\lambda_1 \cdot (t_B - t'))} \quad (3.21)$$

berechnet zu

$$t = \frac{-\ln(1 - \xi \cdot (1 - \exp(-\lambda_1 \cdot (t_B - t'))))}{\lambda_1} + t'. \quad (3.22)$$

Der Zustand, der zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$ eingenommen wird, kann nun mit der TBM bezüglich des Eintrittes von Zustand 2 begünstigt werden:

$$\sum_{j \neq 1}^{k-1} \tilde{\gamma}_{1j}(t) \leq \xi < \sum_{j \neq 1}^k \tilde{\gamma}_{1j}(t) \text{ mit} \quad (3.23)$$

$$\tilde{\gamma}_{12}(t) = 0,99, \tilde{\gamma}_{13}(t) = 0,01 \text{ und } \tilde{\gamma}_{14}(t) = 0.$$

Das erzeugte Ereignis (Eintritt in den Zustand 2 zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$) wird anschließend gemäß der FTM und der TBM gewichtet:

$$w_2^n(t) = w_1^{n-1}(t') \cdot F_1(t_B | t') \cdot \frac{\gamma_{12}(t)}{\tilde{\gamma}_{12}(t)} = u_{12}(t). \quad (3.24)$$

Nach Einnahme des Zustandes 2 zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$ lässt sich die Auftretenswahrscheinlichkeit des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 4$ mit dem LES und dem FFS bestimmen.

3.4.1 Last-Event-Schätzer

Zunächst wird der Zustandsübergang $2 \rightarrow 4$ analog obiger Vorgehensweise ermittelt. Nachdem der absorbierende Zustand 4 zum Zeitpunkt $t \leq t_B$ eingenommen wurde, lässt sich die Auftretenswahrscheinlichkeit des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 4$ mit dem LES bestimmen. Im Falle gewichteter Stichproben wird der Mittelwert der n Gewichtungen berechnet. Die Schätzer für $P_{24}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ lauten

$$\hat{P}_{24}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_{24}^{(i)} \quad \text{und} \quad (3.25)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (u_{14}^{(i)} + u_{24}^{(i)} + u_{34}^{(i)}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_4^{(i)}. \quad (3.26)$$

Die zugehörigen Varianzen berechnen sich nach Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (u_{24}^{(i)} - P_{24}(t_B))^2 \quad \text{und} \quad (3.27)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (u_4^{(i)} - F(t_B))^2. \quad (3.28)$$

3.4.2 Free-Flight-Schätzer

Unter Berücksichtigung, dass der Zustand 2 zum Zeitpunkt t' mit der Gewichtung $w_2^{n-1}(t') = u_2(t')$ eingenommen wurde, berechnet sich die Zustandsübergangswahrscheinlichkeit $P_{24}^*(t_B | t')$ zu

$$P_{24}^*(t_B | t') = P_{24}(t_B | t') \cdot u_2(t') = \int_{t'}^{t_B} q_{24}(\tau | t') d\tau \cdot u_2(t'). \quad (3.29)$$

Innerhalb des i -ten Laufes kann der Zustand 2 m -mal eingenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{24}^{(i)}(t_B)$ ergibt sich dann zu

$$P_{24}^{(i)}(t_B) = \sum_m P_{24}^{*(i)}(t_B | t_m) = \sum_m P_{24}^{(i)}(t_B | t_m) \cdot u_2^{(i)}(t_m). \quad (3.30)$$

Die Schätzer für $P_{24}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ lauten somit

$$\hat{P}_{24}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_{24}^{(i)}(t_B) \quad \text{und} \quad (3.31)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{14}^{(i)}(t_B) + P_{24}^{(i)}(t_B) + P_{34}^{(i)}(t_B)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F^{(i)}(t_B). \quad (3.32)$$

Die zugehörigen Varianzen ergeben sich nach Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{24}^{(i)}(t_B) - P_{24}(t_B))^2 \quad \text{und} \quad (3.33)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (F^{(i)}(t_B) - F(t_B))^2. \quad (3.34)$$

3.5 Ergebnisdarstellung

Die Analyse des Systems erfolgt für eine Betriebsdauer von $t_B = 300$ Stunden (z.B. mittlere PKW-Betriebsdauer innerhalb einen Jahres). Das System sei zu Beginn der Betrachtung im Zustand 1 ($P_1(0) = 1$). Die Ergebnisse der Systemanalyse (analytisch, ungewichtete und gewichtete MCS mit LES und FFS) sind in Tabelle 3.2 bis Tabelle 3.6 aufgeführt.

Tabelle 3.2: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, analytische Lösung

Zustandsübergänge	analytische Lösung
$P_{14}(t_B)$	2,484E-05
$P_{24}(t_B)$	1,336E-08
$P_{34}(t_B)$	5,012E-10
$F(t_B)$	2,485E-05

Tabelle 3.3: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, ungewichtete MCS - LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{14}(t_B)$	1,0E+06	-----	3,000E-05	3,000E-05
$P_{24}(t_B)$	1,0E+06	-----	-----	-----
$P_{34}(t_B)$	1,0E+06	-----	-----	-----
$F(t_B)$	1,0E+06	18,97	3,000E-05	3,000E-05

Tabelle 3.4: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, ungewichtete MCS - FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{14}(t_B)$	1,0E+06	-----	2,490E-05	1,043E-12
$P_{24}(t_B)$	1,0E+06	-----	1,370E-08	3,824E-14
$P_{34}(t_B)$	1,0E+06	-----	5,555E-10	1,551E-15
$F(t_B)$	1,0E+06	180,61	2,491E-05	1,434E-12

Tabelle 3.5: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, gewichtete MCS - LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{14}(t_B)$	1,0E+04	-----	2,489E-05	4,428E-12
$P_{24}(t_B)$	1,0E+04	-----	1,339E-08	3,246E-18
$P_{34}(t_B)$	1,0E+04	-----	5,015E-10	5,070E-21
$F(t_B)$	1,0E+04	5,53	2,490E-05	4,428E-12

Tabelle 3.6: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, gewichtete MCS - FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{14}(t_B)$	1,0E+04	-----	2,490E-05	5,619E-15
$P_{24}(t_B)$	1,0E+04	-----	1,341E-08	1,696E-18
$P_{34}(t_B)$	1,0E+04	-----	5,028E-10	1,473E-21
$F(t_B)$	1,0E+04	120,98	2,491E-05	5,620E-15

Der analytische und simulierte Verlauf (ungewichtete MCS) der Ausfallwahrscheinlichkeit ist in Bild 3.2 bis Bild 3.3 dargestellt.

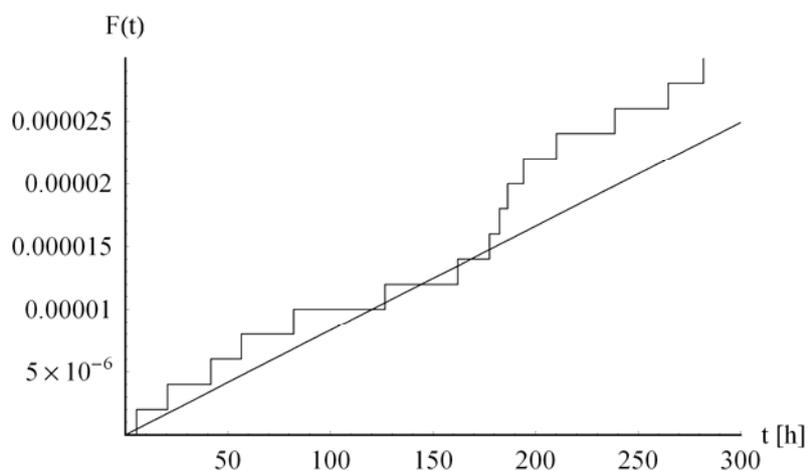


Bild 3.2: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, ungewichtete MCS - LES

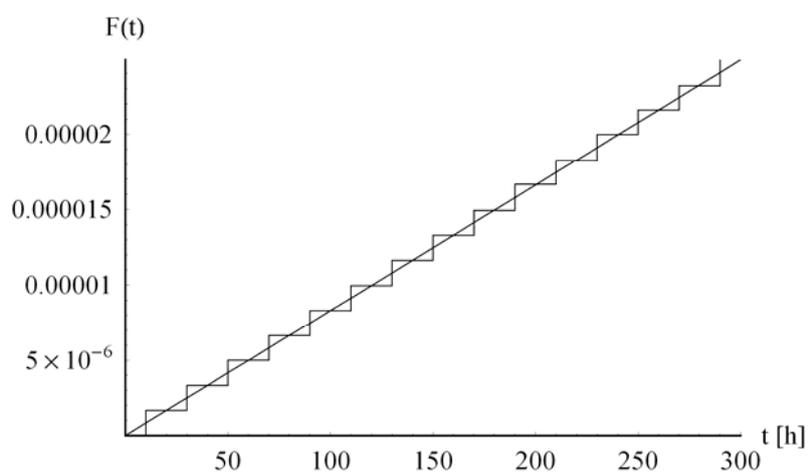


Bild 3.3: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, ungewichtete MCS - FFS

In Bild 3.4 bis Bild 3.11 sind der analytische und simulierte Verlauf (gewichtete MCS) der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten sowie der Ausfallwahrscheinlichkeit dargestellt.

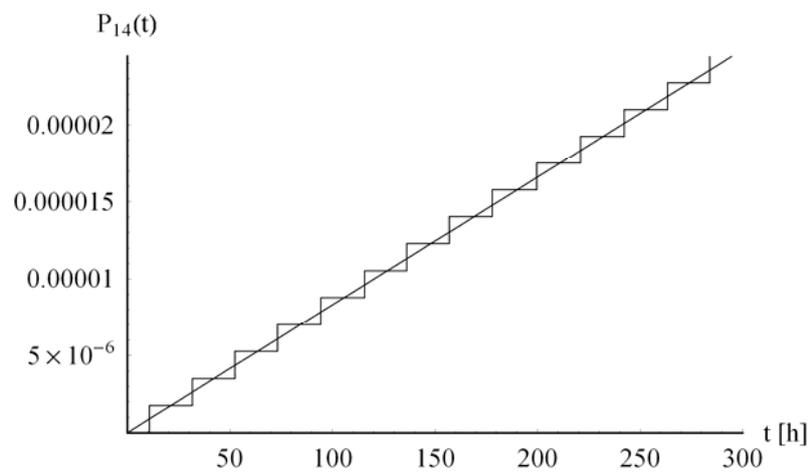


Bild 3.4: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{14}(t)$, gewichtete MCS – LES

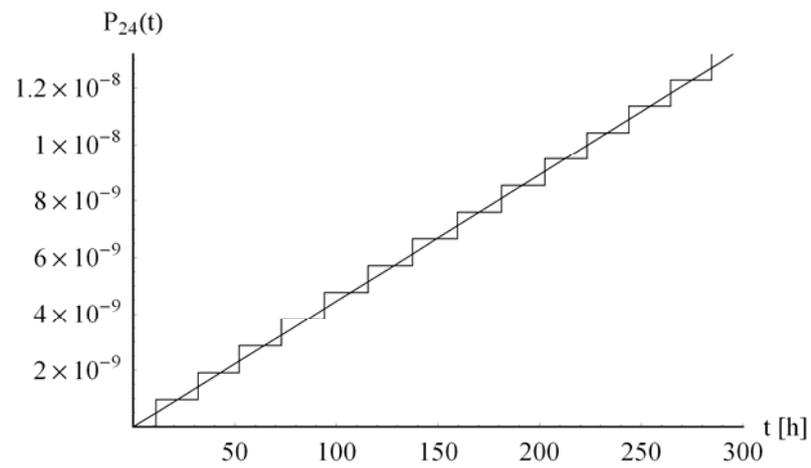


Bild 3.5: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{24}(t)$, gewichtete MCS - LES

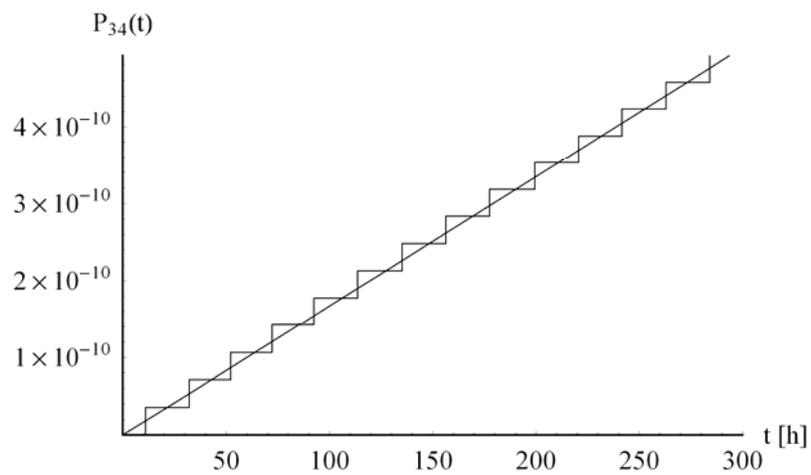


Bild 3.6: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{34}(t)$, gewichtete MCS - LES

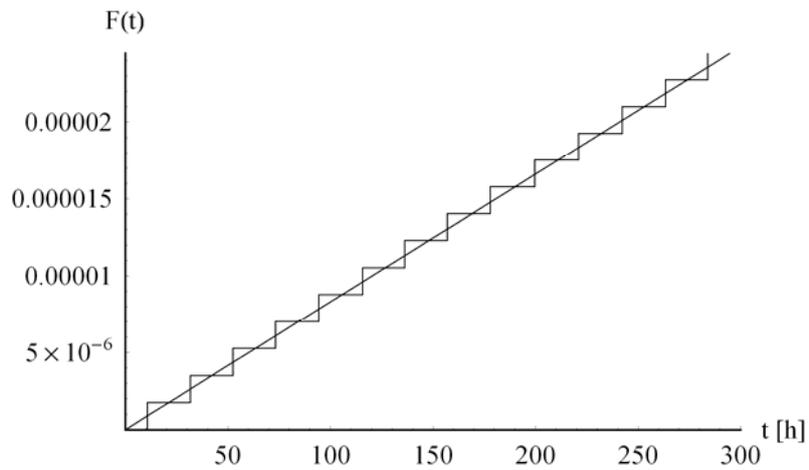


Bild 3.7: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, gewichtete MCS - LES

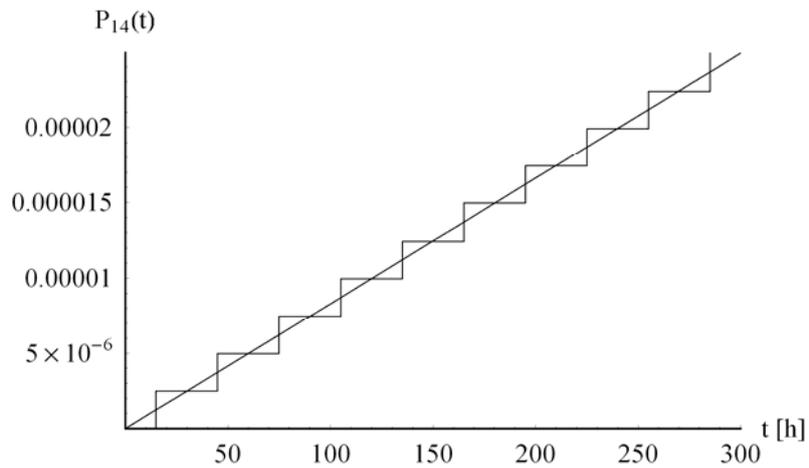


Bild 3.8: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{14}(t)$, gewichtete MCS - FFS

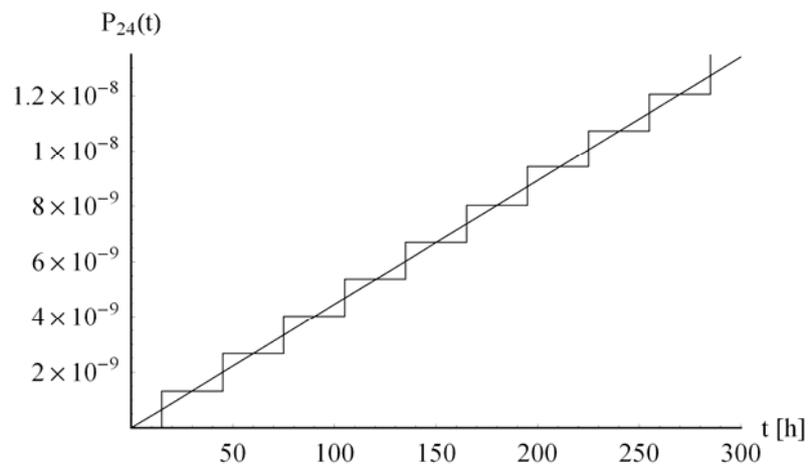


Bild 3.9: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{24}(t)$, gewichtete MCS - FFS

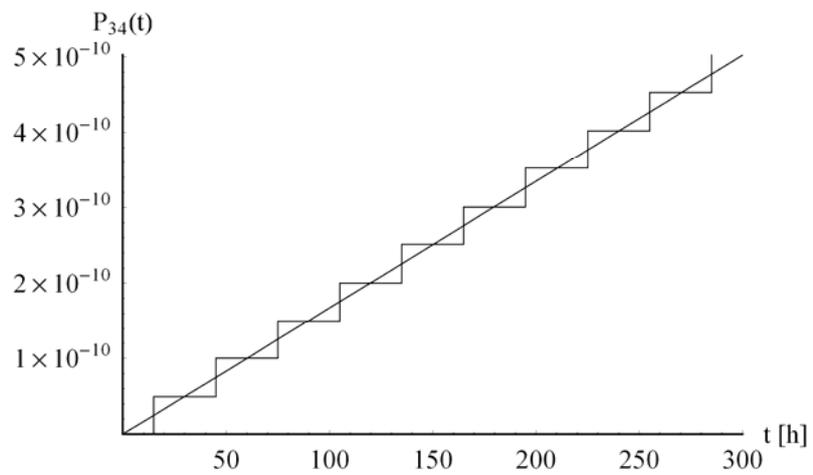


Bild 3.10: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{34}(t)$, gewichtete MCS - FFS

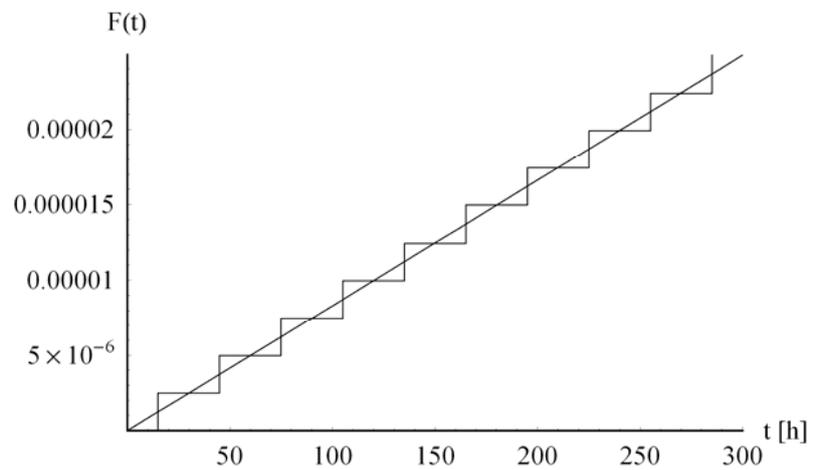


Bild 3.11: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, gewichtete MCS - FFS

3.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Ergebnisse (Tabelle 3.2 bis Tabelle 3.6, Bild 3.2 bis Bild 3.11) zeigen, dass die MCS geeignet ist, hochzuverlässige Markovsche Prozesse zu modellieren und zu analysieren. Jedoch sind die Möglichkeiten der ungewichteten MCS begrenzt. Anhand von Tabelle 3.3 und Bild 3.2 sind die Nachteile der ungewichteten MCS unter Verwendung des LES zu erkennen. So konnten für die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $P_{24}(t_B)$ und $P_{34}(t_B)$ (Mehrfachfehler) keine Ergebnisse generiert und der Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ nur schlecht wiedergegeben werden. Lediglich die ungewichtete MCS unter Verwendung des FFS erzielte insbesondere für die Bewertung von Einzelfehlern (häufig Common Cause Failure, CCF) zufrieden stellende Ergebnisse (siehe Tabelle 3.4 und Bild 3.3).

Sehr gute Ergebnisse, speziell bei der Bewertung von Mehrfachfehlern, wurden unter Verwendung der gewichteten MCS, d.h. der Nutzung von varianzreduzierenden Verfahren wie der FTM und der TBM, erreicht. Im direkten Vergleich zu den ungewichteten Verfahren ist die Minimierung der Varianzen (LES: Tabelle 3.3 und Tabelle 3.5, FFS: Tabelle 3.4 und Tabelle 3.6) deutlich zu erkennen. Die Verläufe der einzelnen Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $P_{14}(t_B)$, $P_{24}(t_B)$ und $P_{34}(t_B)$ sowie der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ konnten mit den beiden Schätzverfahren LES und FFS sehr gut wiedergegeben werden (Bild 3.4 bis Bild 3.11).

Werden die Varianzen der unterschiedlichen Schätzverfahren (gewichtete MCS, Tabelle 3.5 und Tabelle 3.6) näher betrachtet, so ist zu erkennen, dass diese unter Verwendung des FFS kleiner ausfallen als unter Verwendung des LES. Entgegenesetzt fällt auf, dass die Simulationsdauer unter Verwendung des FFS steigt. Unter Berücksichtigung der Varianz und der Simulationsdauer zeigt es sich, dass der LES besonders effizient zur Bewertung von Mehrfachfehlern und der FFS besonders effizient zur Bewertung von Einzelfehlern ist.

4 MCS zur Modellierung mehrparametrischer stochastischer Prozesse

In diesem Kapitel wird die Anwendbarkeit der MCS zur Modellierung und Analyse mehrparametrischer stochastischer Prozesse untersucht. Zu diesem Zweck werden die Einflüsse der Zeit und der Temperatur auf das Ausfallverhalten eines Systems mit zwei Zuständen betrachtet.

4.1 Beschreibung des Zeit- und Temperatureinflusses

Das zu untersuchende System besteht aus den beiden Zuständen „System intakt“ und „System ausgefallen“. Der Zustandsübergang zwischen den Zuständen ist $W(\alpha, \beta)$ -verteilt. Die Parameter der Weibull-Verteilung sind in Tabelle 4.1 angegeben.

Tabelle 4.1: *Verwendete Weibull-Parameter*

Verteilung	Parameter [h]
$W(\alpha, \beta)$	$\alpha_0 = 5E-07$ $\beta = 1,5$

Zudem ist das Ausfallverhalten von der anliegenden Temperatur θ abhängig. Das gegebene $W(\alpha, \beta)$ -verteilte Ausfallverhalten ist für eine Temperatur $\theta_0 = 323$ Kelvin (50°C) ermittelt worden. In Tabelle 4.2 sind die Parameter der verwendeten Temperaturverteilung aufgeführt.

Tabelle 4.2: *Verwendete Parameter der Temperaturverteilung (0 Kelvin = $-273,15^\circ\text{C}$)*

Beschreibung	Verteilung	Parameter [Kelvin]
Temperaturverteilung	$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu = 298$ $\sigma = 10$

Das temperaturabhängige Zwei-Zustandsmodell mit den Zuständen 1 „System intakt“ und 2 „System ausgefallen“ ist in Bild 4.1 dargestellt.

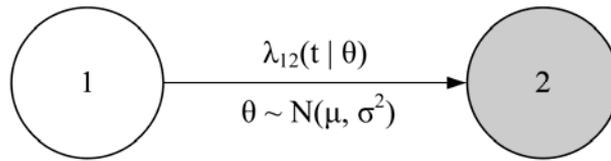


Bild 4.1: Zwei-Zustandsmodell, Temperatur ist $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt

Der Einfluss der Temperatur lässt sich über das Arrhenius-Modell modellieren (Anhang A.3.6). Ausgehend von der Temperatur θ_0 ergibt sich bei einer eingennommenen Temperatur θ die Ausfallrate $\lambda_{12}(t | \theta)$ zu

$$\lambda_{12}(t | \theta) = \alpha_0 \cdot B(\theta_0, \theta)^\beta \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} = \alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1}. \quad (4.1)$$

Die Aktivierungsenergie (Anhang A.3.6) sei mit

$$E_a = 0,7 \text{ eV}$$

bekannt.

4.2 Analytische Lösung

Es sind

$$f(\theta, t) = g(\theta) \cdot f(t | \theta) \quad (4.2)$$

die bivariate Dichtefunktion und

$$P(\Theta \leq \theta, T \leq t) = F(\theta, t) = \int_0^t \int_0^\theta g(\vartheta) \cdot f(\tau | \vartheta) d\vartheta d\tau \quad (4.3)$$

die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Randverteilung

$$P(\Theta \leq \infty, T \leq t) = F(t) \quad (4.4)$$

lautet

$$F(t) = \int_0^t \int_0^\infty g(\theta) \cdot f(\tau | \theta) d\theta d\tau \quad (4.5)$$

mit der Dichtefunktion

$$f(t) = \int_0^\infty g(\theta) \cdot f(t | \theta) d\theta. \quad (4.6)$$

Die Temperatur [Kelvin] lässt sich über die bedingte Normalverteilung $P(\Theta \leq \theta \mid \Theta > 0)$ (Anhang A.3.5) modellieren, mit

$$g(\theta \mid \Theta > 0) = \frac{1}{a \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall \theta \in \mathfrak{R} \text{ mit } \theta \geq 0 \quad (4.7)$$

und

$$a = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\theta. \quad (4.8)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass mit den gegebenen Parametern der Normalverteilung und dem Integral

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\theta \approx 0 \quad (4.9)$$

die bedingte Verteilungsdichte $g(\theta \mid \Theta > 0)$ praktisch mit der Verteilungsdichte $g(\theta)$ übereinstimmt, so dass

$$g(\theta \mid \Theta > 0) \approx g(\theta) \quad (4.10)$$

gilt. Für die bedingte Dichtefunktion $f(t \mid \theta)$ ergibt sich (Anhang A.3.6)

$$f(t \mid \theta) = \alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta)^\beta \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} \cdot \exp(-\alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta)^\beta \cdot t^\beta). \quad (4.11)$$

4.3 Ungewichtete MCS

Die Simulation des Systems erfolgt in zwei Schritten. Nach Kapitel 2.2.2 lassen sich die Zufallszahlen einer bivariaten Verteilung mit der Verteilungsdichte $f(\theta, t)$ sukzessiv erzeugen. Zunächst wird die Temperatur gemäß

$$\Theta \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ generiert.} \quad (4.12)$$

Anschließend lässt sich die Ausfallzeit zu

$$T \sim F(t \mid \theta) \quad (4.13)$$

bestimmen.

4.3.1 Temperaturermittlung

Eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsgröße lässt sich mit unterschiedlichen Verfahren ermitteln. Eine gängige Methode, mit der sich die Gleichung

$$\xi = G(\theta \mid \Theta > 0) \quad (4.14)$$

nach θ auflösen lässt, ist z.B. die Verwerfungsmethode [Gen98], [VDI99].

4.3.2 Ermittlung der Ausfallzeit

Die Ausfallzeit wird anschließend mittels Inversionsmethode über

$$\xi = F(t | \theta) \text{ zu} \quad (4.15)$$

$$t = \left(\frac{-\ln(1-\xi)}{\alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta)^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (4.16)$$

bestimmt.

4.3.3 Last-Event-Schätzer

Die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B) = P_{12}(t_B)$ erfolgt unter Anwendung des LES. Somit wird bei n erfolgten Simulationsläufen die in der Betriebsdauer t_B beobachtete Anzahl der Ereignisse (Zustandsübergang $1 \rightarrow 2$) gewertet. Im Falle der ungewichteten MCS berechnet sich der Schätzer zu

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F^{(i)}(t_B) \text{ mit} \quad (4.17)$$

$$F^{(i)}(t_B) \in \{0, 1\}. \quad (4.18)$$

Mit der unter Gleichung (4.5) ermittelten Lösung berechnet sich die Varianz gemäß Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (F^{(i)}(t_B) - F(t_B))^2. \quad (4.19)$$

4.4 Gewichtete MCS

Um die Effizienz der Simulation zu steigern gilt es, die Anzahl von Ereignissen innerhalb der Betriebsdauer t_B zu erhöhen (Kapitel 2.4).

Zunächst wird die Temperatur entsprechend

$$\Theta \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ und} \quad (4.20)$$

anschließend die Ausfallzeit gemäß

$$T \sim P(T \leq t | \theta, T \leq t_B) = F(t | \theta, t_B) \quad (4.21)$$

generiert.

4.4.1 Ermittlung der Ausfallzeit

Die Ausfallzeit wird unter Verwendung der Inversionsmethode über

$$\xi = F(t | \theta, t_B) = \frac{F(t | \theta)}{F(t_B | \theta)} \text{ zu} \quad (4.22)$$

$$t = \left(\frac{-\ln(1 - \xi \cdot (1 - \exp(-\alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta)^\beta \cdot t_B^\beta)))}{\alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta)^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (4.23)$$

bestimmt.

Das erzeugte Ereignis (Eintritt in den Zustand 2 zum Zeitpunkt $0 < t \leq t_B$) wird nun gemäß der FTM gewichtet:

$$w_2^1(t) = F(t_B | \theta) = u_{12}. \quad (4.24)$$

4.4.2 Last-Event-Schätzer

Nachdem der absorbierende Zustand 2 zum Zeitpunkt $0 < t \leq t_B$ eingenommen wurde, lässt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B) = P_{12}(t_B)$ mit dem LES bestimmen. Im Falle gewichteter Stichproben berechnet sich der Mittelwert der n Gewichtungen zu

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_{12}^{(i)}. \quad (4.25)$$

Die zugehörige Varianz berechnet sich nach Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (u_{12}^{(i)} - F(t_B))^2. \quad (4.26)$$

4.5 Ergebnisdarstellung

4.5.1 Temperaturabhängigkeit

Zunächst erfolgt eine Untersuchung des Temperatureinflusses unter Beachtung des verwendeten Arrhenius-Modells. In Bild 4.2 ist der Verlauf des Beschleunigungsfaktors in Abhängigkeit von der Temperatur θ dargestellt. Es zeigt sich, dass der Beschleunigungsfaktor mit steigender Temperatur ansteigt. Für den Fall $\theta \leq \theta_o$ ist der Beschleunigungsfaktor $0 < B(\theta_o, \theta) \leq 1$ (siehe Gleichung (A.3.51)).

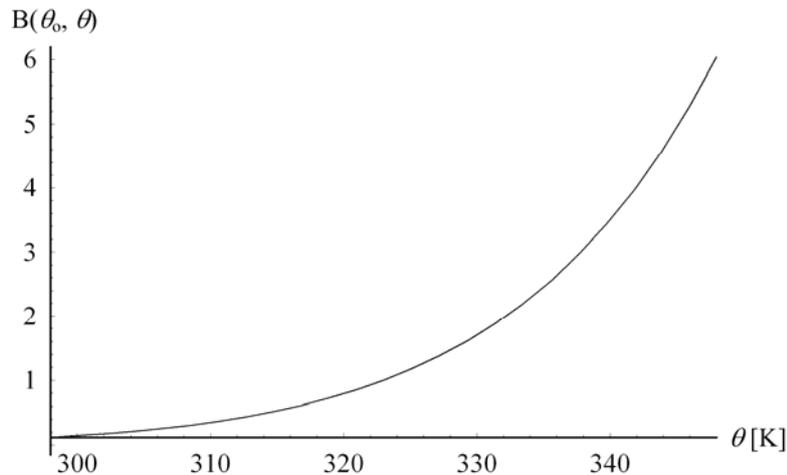


Bild 4.2: Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von der Temperatur θ

In Bild 4.3 ist der Einfluss des Beschleunigungsfaktors in Abhängigkeit von der Temperatur θ und dem Weibull-Parameter β dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Beschleunigungsfaktor $B(\theta_0, \theta)^\beta$ mit zunehmender Temperatur θ oder zunehmendem Weibull-Parameter β ansteigt.

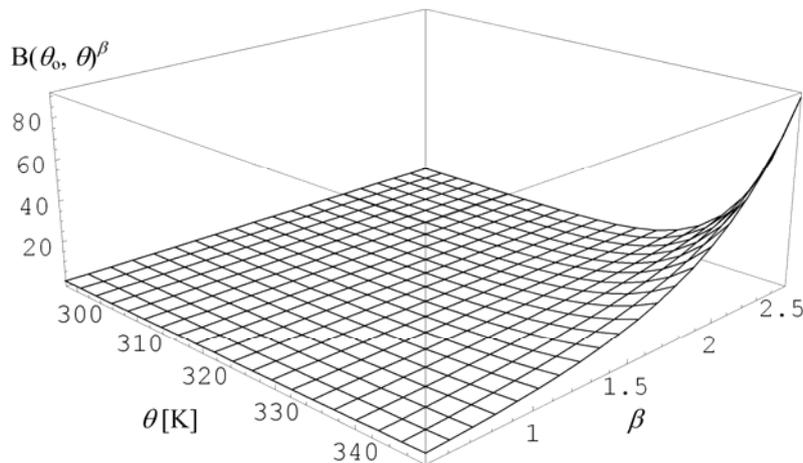


Bild 4.3: Beschleunigungsfaktor in Abhängigkeit von der Temperatur θ und dem Weibull-Parameter β

Der Verlauf des Weibull-Parameters

$$\alpha = \alpha_0 \cdot B(\theta_0, \theta)^\beta \quad (4.27)$$

in Abhängigkeit von der Temperatur θ und dem Weibull-Parameter β ist in Bild 4.4 dargestellt. Da der Weibull-Parameter α von dem Beschleunigungsfaktor $B(\theta_0, \theta)^\beta$ (Gleichung (4.27)) abhängt, sind die in Bild 4.3 und Bild 4.4 dargestellten Verläufe qualitativ gesehen identisch.

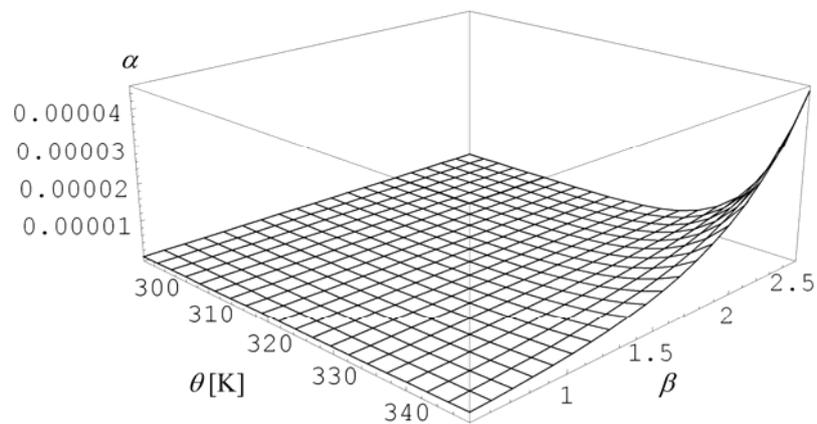


Bild 4.4: Weibull-Parameter α in Abhängigkeit von der Temperatur θ und dem Weibull-Parameter β

In Bild 4.5 und Bild 4.6 sind die Dichte- und Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(\theta, t)$ und $F(\theta, t)$ in Abhängigkeit der Zeit t und der Temperatur θ dargestellt. Anhand der Dichtefunktion $f(\theta, t)$ lässt sich der $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Temperatureinfluss erkennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(\theta, t)$ steigt mit steigender Temperatur θ zunehmend an.

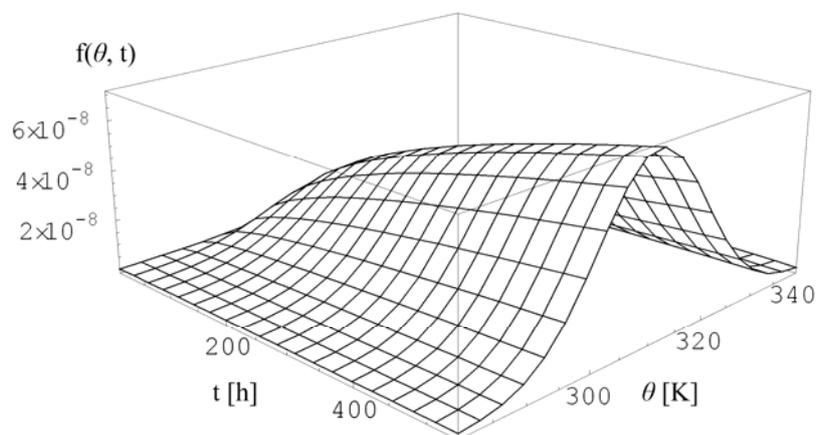


Bild 4.5: Dichtefunktion $f(\theta, t)$

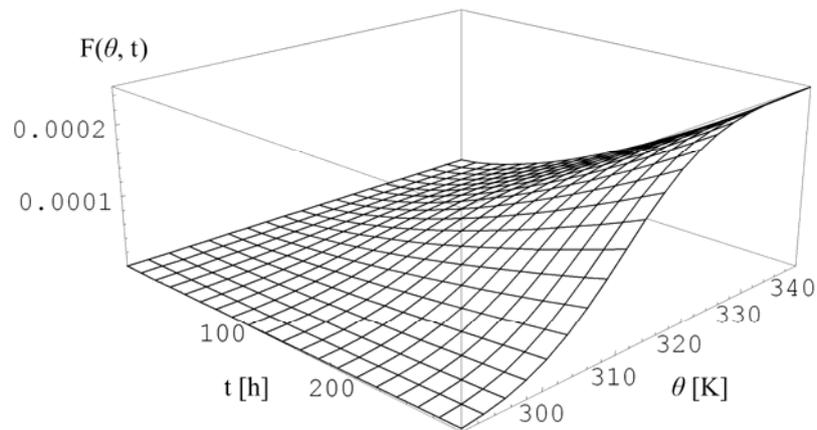


Bild 4.6: Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(\theta, t)$

4.5.2 Ausfallverhalten

Die Analyse des Systems erfolgt für eine Betriebsdauer von $t_B = 300$ Stunden. Das System sei zu Beginn der Betrachtung im Zustand 1 ($P_1(0) = 1$). Die Ergebnisse der Systemanalyse, d.h. die jeweils ermittelte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t) = P_{12}(t)$, (analytisch, ungewichtete und gewichtete MCS mit LES) sind in der Tabelle 4.3 aufgeführt.

Tabelle 4.3: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$

Methode	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
analytisch	-----	-----	2,521E-04	-----
ungewichtet - LES	1,0E+06	26,14	2,280E-04	2,279E-04
FTM - LES	1,0E+06	138,42	2,519E-04	2,191E-07

Bild 4.7 zeigt den analytischen und simulierten Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ unter Verwendung der ungewichteten MCS und des LES.

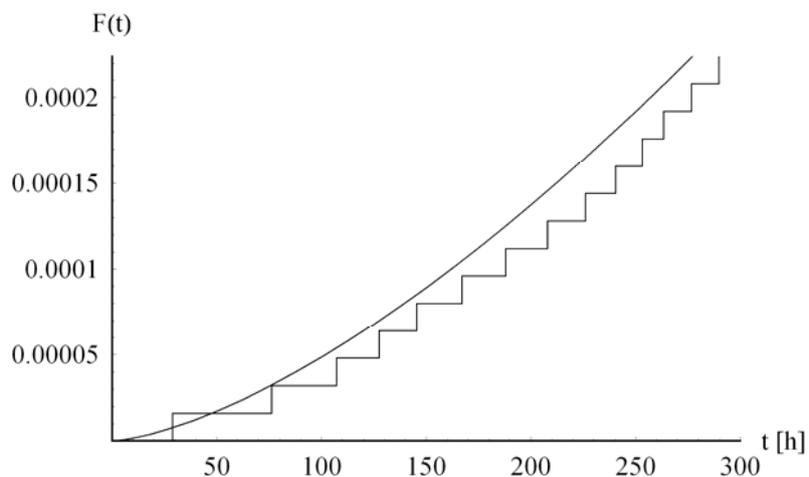


Bild 4.7: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, ungewichtete MCS - LES

Bild 4.8 zeigt den analytischen und simulierten Verlauf der Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(t)$ unter Verwendung der FTM und des LES.

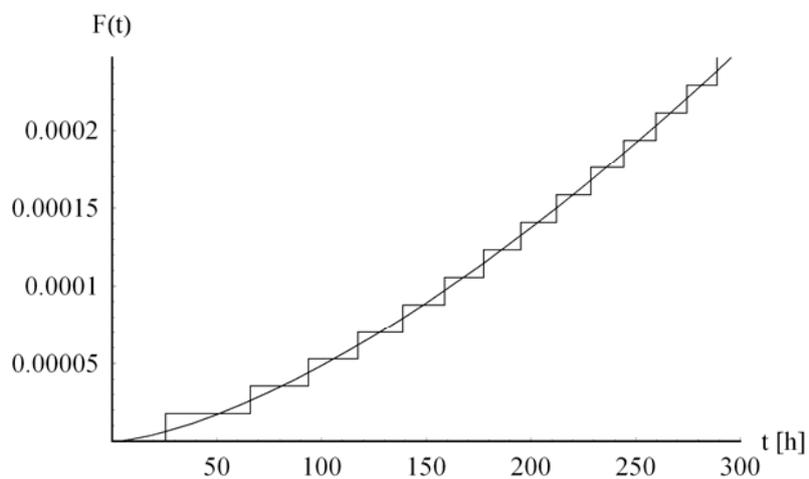


Bild 4.8: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, gewichtete MCS - LES

4.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Ergebnisse (Tabelle 4.3, Bild 4.7 bis Bild 4.8) zeigen, dass die MCS geeignet ist, mehrparametrische stochastische Prozesse zu modellieren und zu analysieren. Betrachtet wurden die Einflüsse der Zeit und der Temperatur auf das Ausfallverhalten eines Systems mit zwei Zuständen.

Anhand der temperaturabhängigen Funktionsverläufe (Bild 4.2 bis Bild 4.6) ist der Einfluss der Temperatur auf das Ausfallverhalten des Systems deutlich zu erkennen. Wie zu erwarten steigt das Ausfallverhalten mit zunehmender Temperatur an (siehe Bild 4.6).

Aufgrund der schlechten Konvergenz der ungewichteten MCS bei der Bewertung seltener Ereignisse konnte der Verlauf von $F(t)$ (Bild 4.7) unter Verwendung des LES lediglich tendenziell wiedergegeben werden.

Werden die Analysen auf Basis der gewichteten MCS (LES) durchgeführt, so stimmen die Ergebnisse sehr gut mit den analytischen Lösungen überein. Zusätzlich ist, bei Betrachtung der Varianzen (Tabelle 4.3), der Effekt der Varianzreduktion der gewichteten MCS gegenüber der ungewichteten MCS deutlich zu erkennen.

5 MCS zur Modellierung Nicht-Markovscher Prozesse

Im Folgenden wird ein Nicht-Markov-System mit drei Zuständen und einem Regenerationspunkt untersucht. Es wird geprüft, inwieweit die MCS ein geeignetes Verfahren ist, mit dem Zeitabhängigkeiten, Semi-Markov- [Fah81], [Bir97] regenerative und nicht-regenerative Eigenschaften [Kne89] berücksichtigt werden können. Zusätzlich sind die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten des Systems sehr klein, so dass die in Kapitel 2.4 beschriebenen varianzreduzierenden Verfahren angewendet werden.

5.1 Beschreibung des Nicht-Markovschen Zustandsmodells und der Abhängigkeiten

Das System besteht aus drei Zuständen. Zustand 1 ist der intakte Zustand und Zustand 2 ist ein degradiertes Systemzustand. Je nach eingenommenem Systemzustand 1 oder 2 besteht die Möglichkeit, in den absorbierenden Fehlerzustand 3 zu gelangen. Das zugehörige Zustandsmodell ist in Bild 5.1 dargestellt.

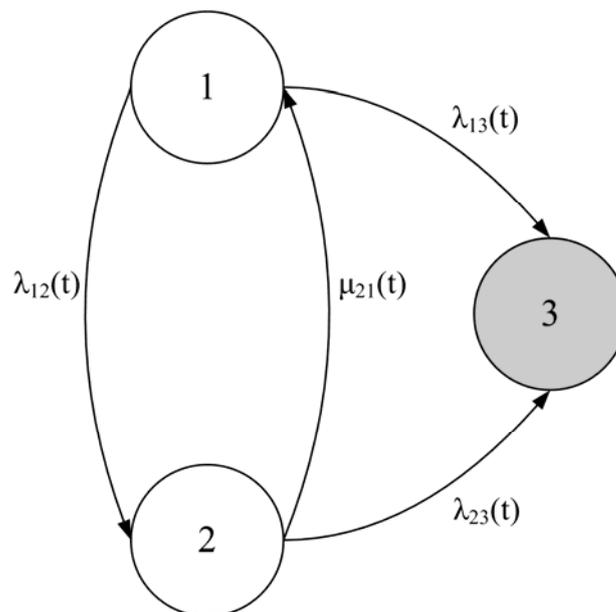


Bild 5.1: Nicht-Markov-System mit drei Zuständen und einem Regenerationspunkt

Die Reparatur ist $W(\alpha, \beta)$ -verteilt und beginnt mit Eintritt in den Zustand 2 zum Zeitpunkt t_{GR} . Die Reparaturdauer lässt sich somit mit der Semi-Markov-Eigenschaft charakterisieren. Nach der erfolgten Reparatur (Eintritt in den Zustand 1 zum Zeitpunkt t_{GL}) ist das System so gut wie neu (GAN). Der Zustand 1 entspricht somit bzgl. des Systemalters einem Regenerationszustand.

Nachdem die Analyse zunächst ungewichtet erfolgt, werden in einem weiteren Schritt die FTM und TBM zur Varianzreduktion angewendet. In beiden Fällen erfolgt die Analyse mit Hilfe des LES und des FFS.

Die Parameter der Zustandsübergänge mit den gegebenen Abhängigkeiten des in Bild 5.1 dargestellten Modells werden in Tabelle 5.1 beschrieben.

Tabelle 5.1: *Verwendete Parameter der Zustandsübergänge mit gegebenen Abhängigkeiten*

Zustandsübergänge	Beschreibung	Verteilung	Parameter [h]	Abhängigkeit
$\lambda_{12}(t)$	Fehler	$W(\alpha, \beta)$	$\alpha = 9,9E-06$ $\beta = 0,5$	t', t'_{GL} mit $t'_{GL} = t'$
$\lambda_{13}(t)$	Fehler	$W(\alpha, \beta)$	$\alpha = 5E-08$ $\beta = 0,5$	t', t'_{GL} mit $t'_{GL} = t'$
$\mu_{21}(t)$	Reparatur	$W(\alpha, \beta)$	$\alpha = 2$ $\beta = 0,7$	t', t'_{GR} mit $t'_{GR} = t'$
$\lambda_{23}(t)$	Fehler	$W(\alpha, \beta)$	$\alpha = 5E-06$ $\beta = 0,5$	t', t'_{GL} mit $t'_{GL} \neq t'$

5.2 Analytische Lösung

Da das System als Nicht-Markov-Modell nun nicht mehr über Differentialgleichungen geschlossen lösbar ist, wird eine approximative analytische Lösung ermittelt.

Aufgrund der Tatsache, dass die Zustandsübergangs- bzw. Fehlerwahrscheinlichkeit relativ klein ist mit

$$P_{12}^1(t_B) = \int_0^{t_B} \psi_2^1(\tau) d\tau = \int_0^{t_B} q_{12}(\tau) d\tau = \int_0^{t_B} \lambda_{12}(\tau) \cdot R_1(\tau) d\tau = 1,715E-04 \quad (5.1)$$

wird das Ausfallverhalten maßgeblich über den Zustandsübergang $1 \rightarrow 3$ beeinflusst.

Es lässt sich somit eine approximative Lösung basierend auf Transportgleichungen (Kapitel 2.1) [Dub00] ermitteln mit

$$P_1(0) = 1 \text{ und} \quad (5.2)$$

$$\psi_1^0(0) = P_1(0) \cdot \delta(t) = \delta(t). \quad (5.3)$$

Die Ermittlung der Zustandswahrscheinlichkeit $P_3(t_B)$, basierend auf einem bis vier Zustandsübergängen, ist in den folgenden Gleichungen dargestellt.

Die Transportgleichung für einen Fehler nach genau einem Zustandsübergang ist gegeben durch

$$\psi_3^1(t) = \int_0^t \psi_1^0(t') \cdot q_{13}(t | t') dt' = q_{13}(t) \quad \text{mit} \quad (5.4)$$

$$q_{13}(t) = \lambda_{13}(t) \cdot R_{12}(t) \cdot R_{13}(t). \quad (5.5)$$

Die Transportgleichung für einen Fehler nach genau zwei Zustandsübergängen entspricht

$$\psi_3^2(t) = \int_0^t \psi_2^1(t') \cdot q_{23}(t | t') dt' = \int_0^t q_{12}(t') \cdot q_{23}(t | t') dt' \quad \text{mit} \quad (5.6)$$

$$q_{12}(t') = \lambda_{12}(t') \cdot R_{12}(t') \cdot R_{13}(t') \quad \text{und} \quad (5.7)$$

$$q_{23}(t | t') = \lambda_{23}(t) \cdot R_{21}(t - t') \cdot \frac{R_{23}(t)}{R_{23}(t')}. \quad (5.8)$$

Die Transportgleichung für einen Fehler nach genau drei Zustandsübergängen lautet

$$\psi_3^3(t) = \int_0^t \psi_1^2(t') \cdot q_{13}(t | t') dt' = \int_0^t \int_0^{t'} q_{12}(t'') \cdot q_{21}(t' | t'') \cdot q_{13}(t | t') dt'' dt' \quad \text{mit} \quad (5.9)$$

$$q_{21}(t' | t'') = \mu_{21}(t' - t'') \cdot R_{21}(t' - t'') \cdot \frac{R_{23}(t')}{R_{23}(t'')} \quad \text{und} \quad (5.10)$$

$$q_{13}(t | t') = \lambda_{13}(t - t') \cdot R_{12}(t - t') \cdot R_{13}(t - t'). \quad (5.11)$$

Die Transportgleichung für einen Fehler nach genau vier Zustandsübergängen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi_3^4(t) &= \int_0^t \psi_2^3(t') \cdot q_{23}(t | t') dt' \\ &= \int_0^t \int_0^{t'} \int_0^{t''} q_{12}(t''') \cdot q_{21}(t'' | t''') \cdot q_{12}(t' | t'') \cdot q_{23}(t | t'', t') dt''' dt'' dt' \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$q_{23}(t | t'', t') = \lambda_{23}(t - t'') \cdot R_{21}(t - t') \cdot \frac{R_{23}(t - t'')}{R_{23}(t' - t'')}. \quad (5.13)$$

Die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $P_{13}(t)$ und $P_{23}(t)$ berechnen sich in Näherung zu

$$P_{13}(t) \approx \int_0^t (\psi_3^1(\tau) + \psi_3^3(\tau)) d\tau \text{ und} \quad (5.14)$$

$$P_{23}(t) \approx \int_0^t (\psi_3^2(\tau) + \psi_3^4(\tau)) d\tau. \quad (5.15)$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t) = P_3(t)$ gilt anschließend

$$F(t) = P_{13}(t) + P_{23}(t). \quad (5.16)$$

5.3 Ungewichtete MCS

Das System wird zunächst herkömmlich, d.h. unter Verwendung der ungewichteten MCS mit dem LES und dem FFS untersucht.

Der Systemtransport (Kapitel 2.1) erfolgt auf Basis generierter Zufallszeiten und Zustandsänderungen. Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der Betriebsdauer t_B in den absorbierenden Zustand 3 zu gelangen, kann mit dem LES und dem FFS (Kapitel 2.3) ermittelt werden.

5.3.1 Last-Event-Schätzer

Bei der Schätzung über den LES wird bei n erfolgten Simulationsläufen die in der Betriebsdauer t_B beobachtete Anzahl von Ereignissen (z.B. Zustandsübergang $2 \rightarrow 3$) gewertet. Im Falle der ungewichteten MCS berechnen sich die Schätzer für $P_{23}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ zu

$$\hat{P}_{23}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_{23}^{(i)}(t_B) \text{ und} \quad (5.17)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{13}^{(i)}(t_B) + P_{23}^{(i)}(t_B)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F^{(i)}(t_B) \text{ mit} \quad (5.18)$$

$$P_{13}^{(i)}(t_B), P_{23}^{(i)}(t_B) \text{ und } F^{(i)}(t_B) \in \{0, 1\}. \quad (5.19)$$

Mit den ermittelten Lösungen (Gleichung (5.14) bis Gleichung (5.16)) berechnen sich die Varianzen gemäß Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{23}^{(i)}(t_B) - P_{23}(t_B))^2 \text{ und} \quad (5.20)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (F^{(i)}(t_B) - F(t_B))^2. \quad (5.21)$$

5.3.2 Free-Flight-Schätzer

Wird z.B. der Zustand 2 erreicht, so ist es möglich, die Auftretenswahrscheinlichkeit des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 3$ zu berechnen. Unter Berücksichtigung, dass der Zustand 2 zum Zeitpunkt t' mit dem Alter $t' - t'_{GL}$ eingenommen wurde, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit zu

$$P_{23}(t_B | t'_{GL}, t') = \int_{t'}^{t_B} q_{23}(\tau | t'_{GL}, t') d\tau = \int_{t'}^{t_B} \lambda_{23}(\tau - t'_{GL}) \cdot R_2(\tau | t'_{GL}, t') d\tau \quad \text{mit} \quad (5.22)$$

$$R_2(\tau | t'_{GL}, t') = R_{21}(\tau - t') \cdot \frac{R_{23}(\tau - t'_{GL})}{R_{23}(t' - t'_{GL})}. \quad (5.23)$$

Innerhalb des i -ten Laufes kann der Zustand 2 m -mal eingenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{23}^{(i)}(t_B)$ berechnet sich dann zu

$$P_{23}^{(i)}(t_B) = \sum_m P_{23}^{(i)}(t_B | t_{GL}^{(m)}, t_m). \quad (5.24)$$

Die Schätzer von $P_{23}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ entsprechen

$$\hat{P}_{23}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_{23}^{(i)}(t_B) \quad \text{und} \quad (5.25)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{13}^{(i)}(t_B) + P_{23}^{(i)}(t_B)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F^{(i)}(t_B). \quad (5.26)$$

Die zugehörigen Varianzen lauten nach Gleichung (A.3.2)

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{23}^{(i)}(t_B) - P_{23}(t_B))^2 \quad \text{und} \quad (5.27)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (F^{(i)}(t_B) - F(t_B))^2. \quad (5.28)$$

5.4 Gewichtete MCS

In einem weiteren Schritt erfolgt die Analyse unter Verwendung der gewichteten MCS, d.h. der varianzreduzierenden Verfahren FTM und TBM sowie der jeweiligen Schätzverfahren LES und FFS. Das Vorgehen wird nachfolgend anhand des Zustandes 2 beispielhaft beschrieben. Das System sei zum Zeitpunkt t' im Zustand 1.

Mit den Parametern der Zustandsübergänge (Tabelle 5.1) wird ersichtlich, dass ein Zustandsübergang in den Zustand 2 ein seltenes Ereignis und ein weiterer Zustandsübergang in den Zustand 3 sehr unwahrscheinlich ist. Für den Fall, dass insbesondere

der Zustandsübergang $2 \rightarrow 3$ Gegenstand der Untersuchung ist, muss der Zustandsübergang in den Zustand 2 zunächst zeitlich forciert und hinsichtlich des Eintrittes von Zustand 2 begünstigt werden. Dasselbe Verfahren wird anschließend auf den Eintritt des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 3$ innerhalb der Betriebsdauer t_B angewendet. Dies ist mit einer Kombination der FTM und der TBM möglich (Kapitel 2.4).

Der Zeitpunkt t eines Zustandsüberganges, der vor dem Erreichen der Betriebsdauer t_B eintritt, wird über

$$\xi = P_1(T \leq t - t' | T \leq t_B - t') = F_1(t | t', t_B) = \frac{F_1(t - t')}{F_1(t_B - t')} \quad (5.29)$$

ermittelt.

Der Zustand, der zum Zeitpunkt t mit dem Alter $t - t'$ eingenommen wird, kann nun mit der TBM bezüglich des Eintrittes von Zustand 2 begünstigt werden:

$$\sum_{j \neq 1}^{k-1} \tilde{\gamma}_{1j}(t - t') \leq \xi < \sum_{j \neq 1}^k \tilde{\gamma}_{1j}(t - t') \quad \text{mit} \quad (5.30)$$

$$\tilde{\gamma}_{12}(t - t') = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_{13}(t - t') = 0.$$

Das erzeugte Ereignis (Eintritt in den Zustand 2 zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$) wird anschließend gemäß der FTM und der TBM gewichtet:

$$w_2^n(t) = w_1^{n-1}(t') \cdot F_1(t_B - t') \cdot \frac{\gamma_{12}(t - t')}{\tilde{\gamma}_{12}(t - t')} = u_{12}(t). \quad (5.31)$$

Nach Einnahme des Zustandes 2 zum Zeitpunkt $t' < t \leq t_B$ mit dem Alter $t - t'$, lässt sich die Auftretenswahrscheinlichkeit des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 3$ mit dem LES und dem FFS schätzen.

5.4.1 Last-Event-Schätzer

Zunächst wird der Zustandsübergang $2 \rightarrow 3$ analog obiger Vorgehensweise ermittelt. Nachdem der absorbierende Zustand 3 zum Zeitpunkt $t \leq t_B$ eingenommen wurde, wird die Auftretenswahrscheinlichkeit des Zustandsüberganges $2 \rightarrow 3$ mit dem LES ermittelt. Im Falle gewichteter Stichproben wird der Mittelwert der n Gewichtungen berechnet. Die Schätzer für $P_{23}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ lauten

$$\hat{P}_{23}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_{23}^{(i)} \quad \text{und} \quad (5.32)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (u_{13}^{(i)} + u_{23}^{(i)}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_3^{(i)}. \quad (5.33)$$

Die zugehörigen Varianzen berechnen sich nach Gleichung (A.3.2) zu

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (u_{23}^{(i)} - P_{23}(t_B))^2 \quad \text{und} \quad (5.34)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (u_3^{(i)} - F(t_B))^2. \quad (5.35)$$

5.4.2 Free-Flight-Schätzer

Unter Berücksichtigung, dass der Zustand 2 zum Zeitpunkt t' mit dem Alter $t' - t'_{GL}$ und der Gewichtung $w_2^{n-1}(t') = u_2(t')$ eingenommen wurde, berechnet sich die Zustandsübergangswahrscheinlichkeit $P_{23}^*(t_B | t'_{GL}, t')$ zu

$$P_{23}^*(t_B | t'_{GL}, t') = P_{23}(t_B | t'_{GL}, t') \cdot u_2(t') = \int_{t'}^{t_B} q_{23}(\tau | t'_{GL}, t') d\tau \cdot u_2(t'). \quad (5.36)$$

Innerhalb des i -ten Laufes kann der Zustand 2 m -mal eingenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{23}^{(i)}(t_B)$ berechnet sich dann zu

$$P_{23}^{(i)}(t_B) = \sum_m P_{23}^{*(i)}(t_B | t_{GL}^{(m)}, t_m) = \sum_m P_{23}^{(i)}(t_B | t_{GL}^{(m)}, t_m) \cdot u_2^{(i)}(t_m). \quad (5.37)$$

Die Schätzer von $P_{23}(t_B)$ bzw. $F(t_B)$ lauten

$$\hat{P}_{23}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_{23}^{(i)}(t_B) \quad \text{und} \quad (5.38)$$

$$\hat{F}(t_B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{13}^{(i)}(t_B) + P_{23}^{(i)}(t_B)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F^{(i)}(t_B). \quad (5.39)$$

Die zugehörigen Varianzen lauten nach Gleichung (A.3.2)

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (P_{23}^{(i)}(t_B) - P_{23}(t_B))^2 \quad \text{und} \quad (5.40)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (F^{(i)}(t_B) - F(t_B))^2. \quad (5.41)$$

5.5 Ergebnisdarstellung

Die Analyse des Systems erfolgt für eine Betriebsdauer von $t_B = 300$ Stunden. Das System sei zu Beginn der Betrachtung im Zustand 1 ($P_1(0) = 1$). Die Ergebnisse der Systemanalyse (analytisch, ungewichtete und gewichtete MCS mit LES und FFS) sind in Tabelle 5.2 bis Tabelle 5.6 aufgeführt.

Tabelle 5.2: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, approximativ - analytische Lösung

Zustandsübergänge	analytisch
$P_{13}(t_B)$	8,661E-07
$P_{23}(t_B)$	4,730E-11
$F(t_B)$	8,661E-07

Tabelle 5.3: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, ungewichtete MCS – LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{13}(t_B)$	1,0E+05	-----	-----	-----
$P_{23}(t_B)$	1,0E+05	-----	-----	-----
$F(t_B)$	1,0E+05	94,67	-----	-----

Tabelle 5.4: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, ungewichtete MCS – FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{13}(t_B)$	1,0E+05	-----	8,661E-07	1,039E-16
$P_{23}(t_B)$	1,0E+05	-----	5,527E-11	2,743E-17
$F(t_B)$	1,0E+05	251,28	8,662E-07	2,195E-16

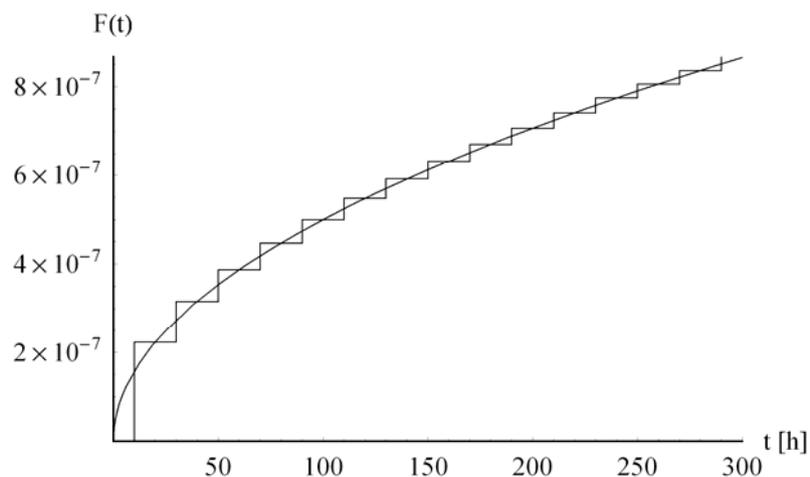
Tabelle 5.5: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, gewichtete MCS – LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{13}(t_B)$	1,0E+04	-----	8,650E-07	8,249E-15
$P_{23}(t_B)$	1,0E+04	-----	4,785E-11	4,980E-21
$F(t_B)$	1,0E+04	10,63	8,650E-07	8,248E-15

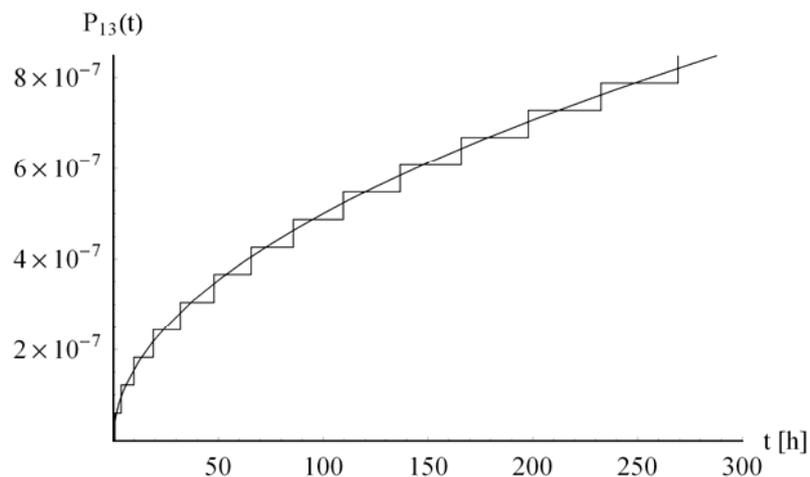
Tabelle 5.6: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, gewichtete MCS – FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{13}(t_B)$	1,0E+04	-----	8,661E-07	1,119E-21
$P_{23}(t_B)$	1,0E+04	-----	4,727E-11	4,251E-21
$F(t_B)$	1,0E+04	548,44	8,661E-07	5,421E-21

Das Bild 5.2 stellt den analytischen und simulierten Verlauf (ungewichtete MCS) der Ausfallwahrscheinlichkeit dar.

Bild 5.2: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, ungewichtete MCS - FFS

In Bild 5.3 bis Bild 5.8 sind der analytische und der simulierte Verlauf (gewichtete MCS) der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten sowie der Ausfallwahrscheinlichkeit dargestellt.

Bild 5.3: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{13}(t)$, gewichtete MCS - LES

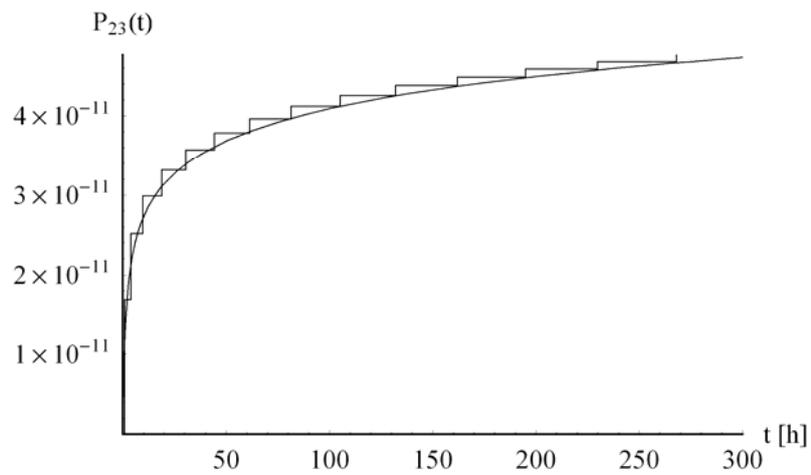


Bild 5.4: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{23}(t)$, gewichtete MCS - LES

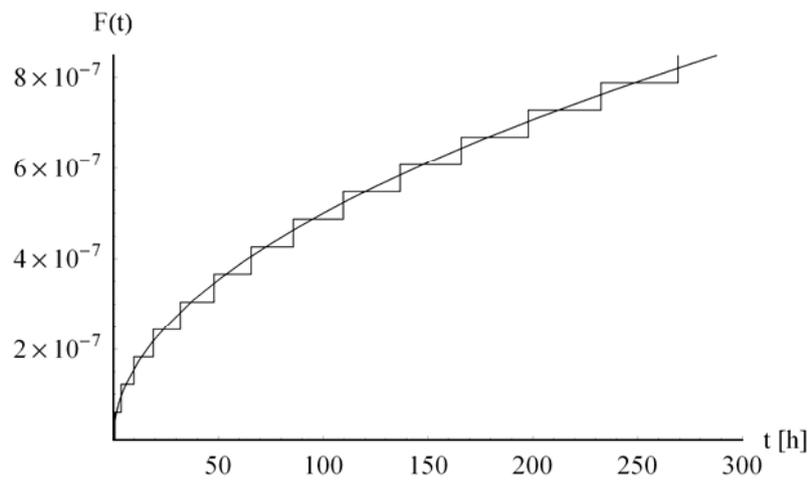


Bild 5.5: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, gewichtete MCS - LES

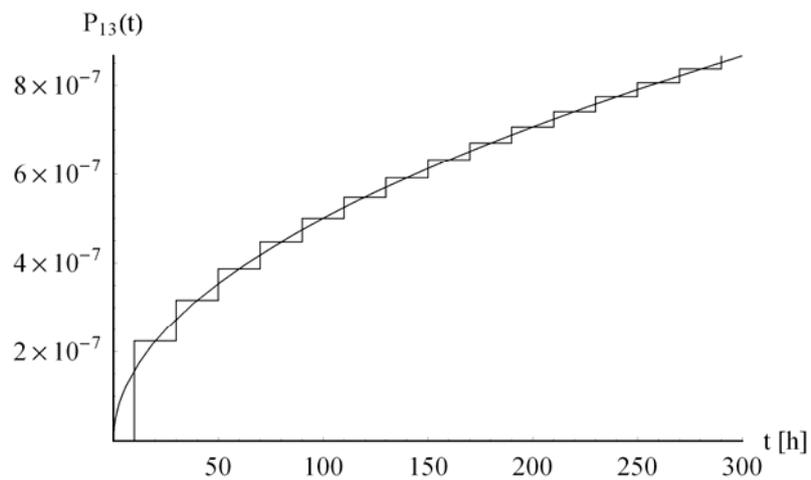


Bild 5.6: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{13}(t)$, gewichtete MCS - FFS

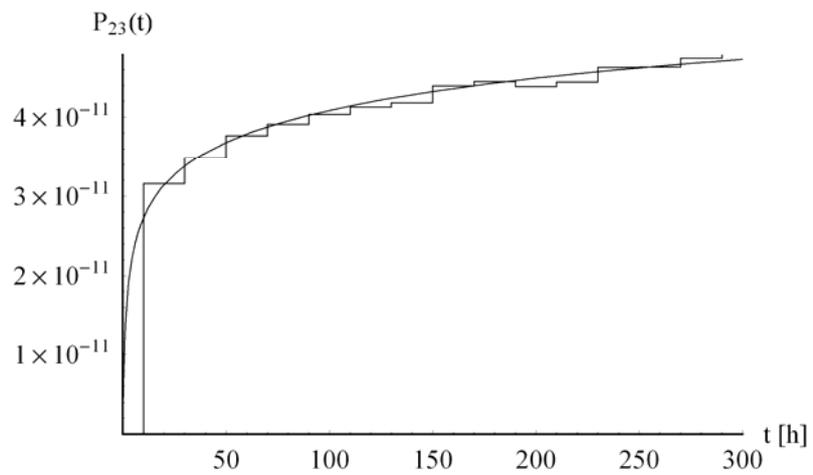


Bild 5.7: Analytische und simulierte Wahrscheinlichkeit $P_{23}(t)$, gewichtete MCS - FFS

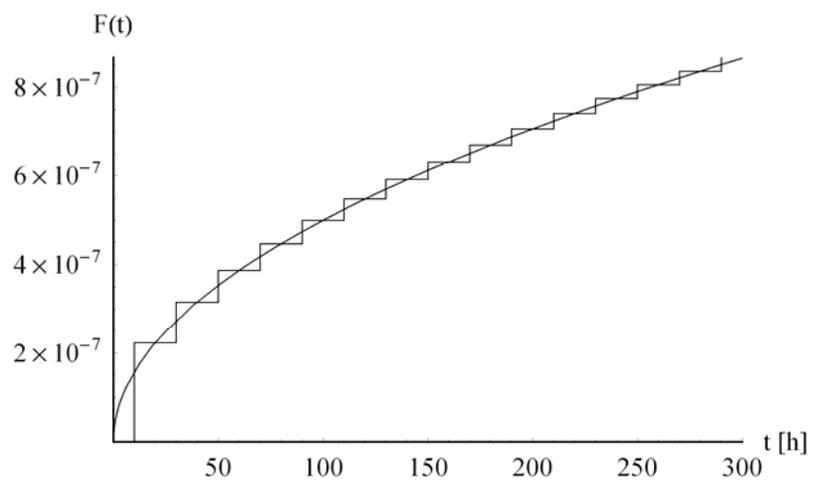


Bild 5.8: Analytische und simulierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, gewichtete MCS - FFS

5.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Ergebnisse (Tabelle 5.2 bis Tabelle 5.6, Bild 5.2 bis Bild 5.8) zeigen, dass die MCS geeignet ist, Systeme mit Zeitabhängigkeiten, Semi-Markov-, regenerativen und nicht-regenerativen Eigenschaften zu modellieren und zu analysieren. Zusätzlich ist zu erkennen, dass Verfahren der Varianzreduktion (gewichtete MCS) auch bei komplexen Fragestellungen angewendet werden können.

Unter Berücksichtigung von Tabelle 5.3 zeigt es sich, dass unter Verwendung der ungewichteten MCS (LES) keine brauchbaren Ergebnisse generiert werden konnten. Lediglich die ungewichtete MCS, unter Verwendung des FFS, erzielte für die Bewertung von Einzelfehlern zufrieden stellende Ergebnisse (siehe Tabelle 5.4 und Bild 5.2).

Zur Bewertung von Mehrfachfehlern bedarf es der Verwendung der gewichteten MCS, d.h. der Nutzung von varianzreduzierenden Verfahren wie der FTM und der TBM. Werden diese Verfahren angewandt, so stimmen die Ergebnisse sehr gut mit den analytischen Lösungen überein (siehe Tabelle 5.5 bis Tabelle 5.6 und Bild 5.3 bis Bild 5.8). Im Vergleich zu den ungewichteten Verfahren ist die Minimierung der Varianzen (LES: Tabelle 5.3 und Tabelle 5.5, FFS: Tabelle 5.4 und Tabelle 5.6) deutlich zu erkennen.

Unter Berücksichtigung der Varianzen (gewichtete MCS, Tabelle 5.5 und Tabelle 5.6) fällt auf, dass die Varianzen unter Verwendung des FFS allgemein kleiner sind als unter Verwendung des LES. Gleichzeitig ist ein Anstieg der Simulationsdauer unter Verwendung des FFS zu erkennen. Es zeigt sich, dass der LES besonders effizient zur Bewertung von Mehrfachfehlern und der FFS besonders effizient zur Bewertung von Einzelfehlern ist.

6 Gesamtbewertung der Ergebnisse

Anhand der Untersuchungen in Kapitel 3 wurde gezeigt, dass die MCS unter Verwendung varianzreduzierender Verfahren geeignet ist, hochzuverlässige Markov-Prozesse zu modellieren und zu analysieren.

Die Modellierung und Analyse mehrparametrischer stochastischer Prozesse (Kapitel 4) wurde am Beispiel eines Systems mit zwei Zuständen unter Berücksichtigung des Temperatureinflusses durchgeführt. Die MCS ist demnach geeignet, stochastische Prozesse der Zuverlässigkeitstheorie, die durch mehrere Zufallsgrößen gekennzeichnet sind, zu modellieren und zu analysieren. Zusätzlich wurden varianzreduzierende Verfahren erfolgreich integriert.

Aufgrund der Untersuchungen zur Modellierung Nicht-Markovscher Prozesse (Kapitel 5) wurde gezeigt, dass unter Verwendung der MCS komplexe Einflüsse wie Zeitabhängigkeiten, Semi-Markov-, regenerative und nicht-regenerative Eigenschaften berücksichtigt und zusätzlich Zustandsübergänge mit sehr kleinen Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten modelliert werden können.

Unter Beachtung der Varianz und der Simulationsdauer konnte gezeigt werden, dass der LES in Kombination mit der gewichteten MCS besonders effizient zur Bewertung von Mehrfachfehlern ist. Der FFS lässt sich in Kombination mit der ungewichteten als auch mit der gewichteten MCS besonders effizient zur Bewertung von Einzelfehlern verwenden. Diese Beobachtung konnte aufgrund weiterer Untersuchungen bestätigt werden [Hau06].

Aus den Untersuchungen und den erzielten Ergebnissen der Kapitel 3 bis Kapitel 5 lässt sich folgern, dass die MCS dazu geeignet ist, hochzuverlässige mehrparametrische Systeme mit unterschiedlichsten stochastischen Eigenschaften zu modellieren und zu analysieren. Die in den Grundlagen (Kapitel 2, Anhang A.3.6 und Anhang A.3.7) dargestellten und in Kapitel 3 bis Kapitel 5 angewendeten und verifizierten Verfahren werden im Folgenden auf eine Systemanalyse unter realen Bedingungen übertragen.

7 Analyse eines 2-Kanal-Rechnersystems unter besonderer Berücksichtigung dynamischer Systemänderungen

Die folgenden Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen erfolgen unter Berücksichtigung von realen Bedingungen wie stochastischen Abhängigkeiten sowie systematischen und dynamischen Systemänderungen. Gegenstand der Untersuchungen ist ein 2-Kanal-Rechnersystem. Jeder Kanal übernimmt die Funktionen der Signalaufbereitung, -konditionierung und -prüfung, die Ausgabe des generierten Signals erfolgt über einen der beiden Kanäle.

Eine wesentliche Einflussgröße auf das Ausfallverhalten elektronischer Systeme ist die Temperatur [NEC98]. Diese ist abhängig von dem gewählten Einbauort, der Einbaulage und dem Einsatzort des Systems. Der Temperatureinfluss führt dabei in der Regel zu einer wachsenden Schädigung, d.h. einer dynamischen Systemänderung und Schadensakkumulation (Kapitel 2.1.4 und Anhang A.3.7). Im Folgenden werden die Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen unter besonderer Berücksichtigung unterschiedlicher Temperaturbelastungen durchgeführt.

Basierend auf den Ergebnissen der durchgeführten Systemsimulationen wird anschließend ein temperaturabhängiges Prognosemodell entwickelt, mit dem die Sicherheit und Zuverlässigkeit für eine geänderte Temperaturbelastung prognostiziert werden.

7.1 Beschreibung des 2-Kanal-Rechnersystems

Das in Bild 7.1 dargestellte 2v2-System besteht aus zwei parallelen Kanälen mit je einem Mikrocontroller (μC).

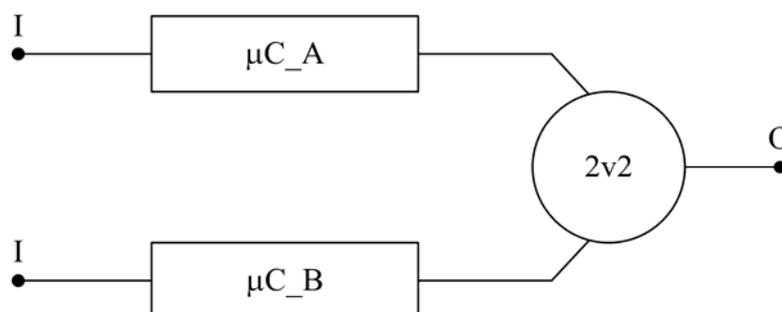


Bild 7.1: Blockschaltbild eines 2v2-Systems mit zwei Mikrocontrollern

Jeder μC erfasst die eingehenden Signale und generiert ein entsprechendes Ausgangssignal. Die Funktion des 2v2-Ausgangsvergleichers ist auf beiden Mikrocontrollern umgesetzt, die Prüfung des Ausgangssignals erfolgt somit kreuzweise. Systeme dieser Art werden insbesondere bei sicherheitskritischen Anwendungen, wie dem Antiblockiersystem (ABS), dem Elektronischen Stabilitätsprogramm (ESP) oder modernen Lenksystemen wie der Aktivlenkung (AFS) [Eck02], eingesetzt. Die Funktionalität des Systems ist im Funktions- und Signalflussplan (Bild 7.2) dargestellt.

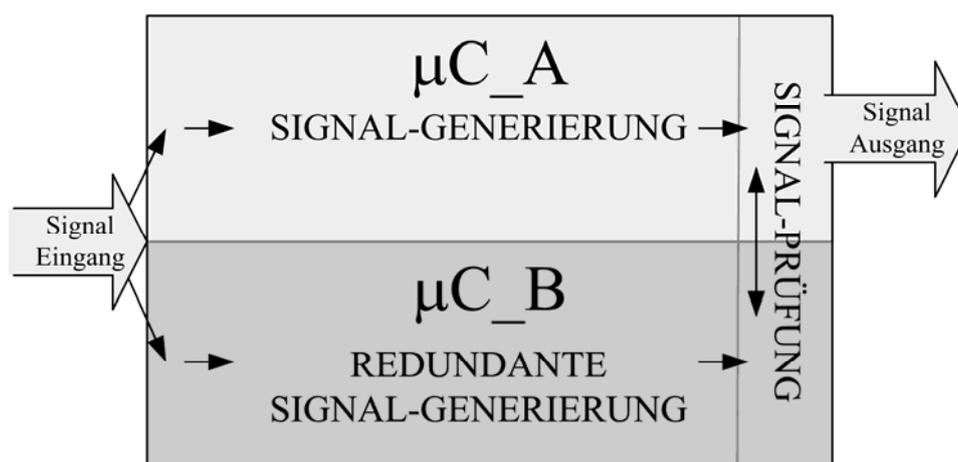


Bild 7.2: Funktions- und Signalflussplan des 2v2-Systems

Das Systemverhalten lässt sich mit Systemzuständen und Zustandsübergängen in Form eines Zustandsmodells darstellen. Bild 7.3 zeigt ein vereinfachtes Zustandsmodell.

Die Simulation des Systems wird in einen Fahrtzyklus eingebettet, der im Wesentlichen aus den Zuständen Zündung „AN“ und Zündung „AUS“ besteht. Während das Fahrzeug in Betrieb ist, können infolge temporärer oder permanenter Fehler unterschiedliche Fehlerzustände eingenommen werden. Tritt ein temporärer Fehler auf, so wechselt das System in den degradierten Systemzustand „Temporärer Fehler“. Ein solcher Fehler kann durch einen Neustart des Systems behoben werden. Infolge des Neustarts erfolgt keine Systemerneuerung, das System ist demnach bei der Wiederherstellung so gut oder schlecht wie zuvor (BAO). Im Falle eines permanenten Fehlers wechselt das System in den Systemzustand „Permanenter Fehler“ und ein Austausch der Hardware „Reparatur“ wird notwendig. Nach erfolgter Reparatur ist das System vollständig erneuert (GAN). Ein gefährlicher Systemzustand „Gefährlicher Fehler“ wird erreicht, wenn ein fehlerhaftes Signal ausgegeben wird. Dies ist infolge eines Fehlers aufgrund gemeinsamer Ursache (CCF) oder einer Fehlerkette möglich. Ist das System nicht in Betrieb (Zustand „AUS“), so altert das System nicht.

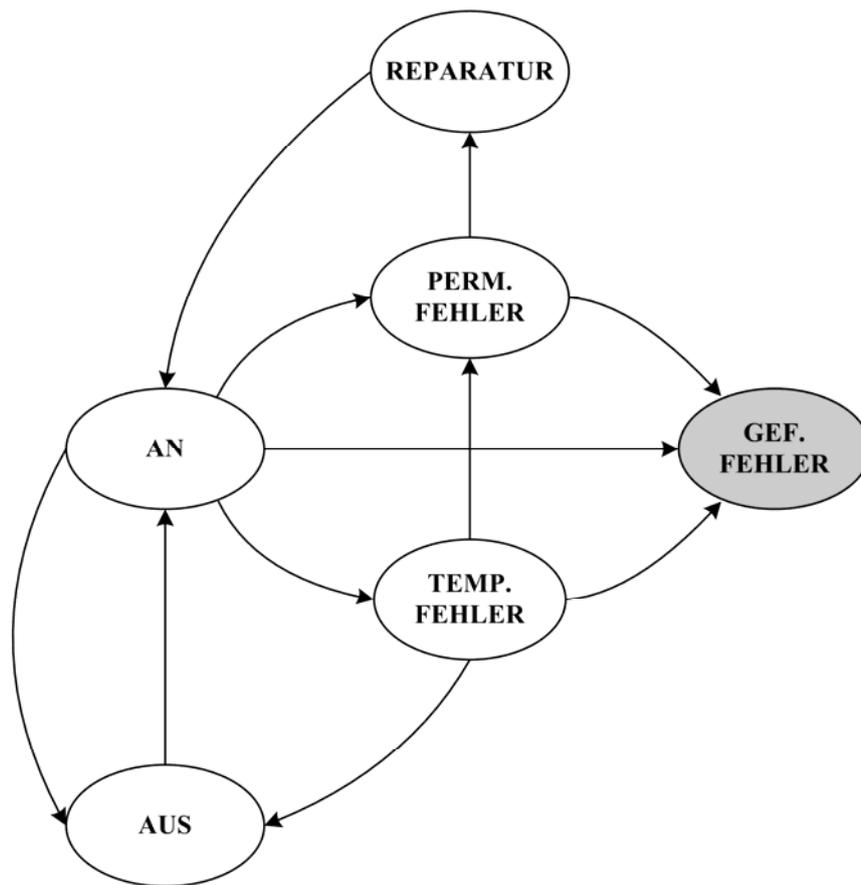


Bild 7.3: Vereinfachtes Zustandsmodell des 2v2-Systems

Eine detaillierte Systemdarstellung kann über die Definition eines Zustandsvektors \underline{z}_i erfolgen. Der Zustandsvektor beschreibt die einzelnen Situations- und Komponenten-zustände und fasst diese zu einem Systemzustand z_i (siehe Tabelle 7.1) zusammen. Der Zustandsvektor \underline{z}_i ist gegeben durch

$$\underline{z}_i = \{ZF_i, ZA_i, ZB_i\}. \quad (7.1)$$

Der Fahrtzustand ZF kann die Zustände 0 „Aus“ oder 1 „An“ annehmen. Jeder μC -Zustand $\{ZA, ZB\}$ kann die Zustände 0 „intakt“, 1 „temporärer Fehler“ oder 2 „permanenter Fehler“ annehmen. Alle definierten Systemzustände und Zustandsübergänge können der Tabelle 7.1 entnommen werden. Jede i -te Zeile enthält darin die Zustände, von denen aus der Zustand i erreichbar ist. Die letzte Spalte entspricht der Summe aller Zustandseingänge ($\sum E$). Zustände, die vom Zustand k aus erreicht werden können, sind in jeder k -ten Spalte eingetragen. Die Summe aller Zustandsausgänge ($\sum A$) kann der letzten Zeile entnommen werden.

Im Rahmen der Sicherheitsbewertung werden im Folgenden die Zustände untersucht, von denen eine Gefährdung ausgeht. Dies ist bei den Zuständen der Fall, die einen

Fehler beider Mikrocontroller beschreiben: $\{8, 9, 11, 12\}$. Die Zustände 8, 9, 11 und 12 sind demnach bei der Sicherheitsbewertung als absorbierend zu betrachten (Summe der Zustandsausgänge ist gleich null, siehe Tabelle 7.1).

Tabelle 7.1: Zustandsmatrix mit summierten Eingängen und Ausgängen je Zustand

	z_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
z_i	z_i	0 0 0	0 0 2	0 2 0	1 0 0	1 0 1	1 0 2	1 1 0	1 1 1	1 1 2	1 2 0	1 2 1	1 2 2	$\Sigma E.$
1	0 0 0	---			1	1		1						3
2	0 0 2		---				1							1
3	0 2 0			---							1			1
4	1 0 0	1	1	1	---									3
5	1 0 1				1	---								1
6	1 0 2				1	1	---							2
7	1 1 0				1			---						1
8	1 1 1				1	1		1	---					3
9	1 1 2						1	1		---				2
10	1 2 0				1			1			---			2
11	1 2 1					1					1	---		2
12	1 2 2				1	1	1	1			1		---	5
	$\Sigma A.$	1	1	1	7	5	3	5	0	0	3	0	0	

Eine Vereinfachung der in Tabelle 7.1 gegebenen Zustandsmatrix ist unter Verwendung von Äquivalenzklassen [Kos79], [Bei97] oder Transportgleichungen [Dub00] möglich. Das in Bild 7.3 dargestellte Zustandsdiagramm stellt ein reduziertes und vereinfachtes Modell mit 6 Zuständen dar.

Zusätzlich zu den Sicherheitsbetrachtungen werden Zuverlässigkeitsbewertungen durchgeführt. Hierbei werden die Zustände betrachtet, die zu einem dauerhaften, d.h. permanenten Fehler führen: $\{6, 9, 10, 11, 12\}$. Es ist zu beachten, dass die Zustände 6 und 10 (permanenter Fehler eines Mikrocontrollers), im Gegensatz zu Tabelle 7.1, bei einer durchgeführten Zuverlässigkeitsbewertung absorbierende Zustände darstellen.

Die verwendeten Größen, d.h. die Parameter, die das Ausfall- und Reparaturverhalten, die Standzeit und die Fahrtdauer kennzeichnen, wurden auf Basis von Erfahrungswerten bzw. praxisnahen Schätzungen bestimmt. Die verwendeten Parameter, die die Zustandsübergänge der Zustandsmatrix (Tabelle 7.1) beschreiben, sind in Tabelle 7.2 angegeben.

Anhand der Parameter der Zustandsübergänge (Tabelle 7.2) wird deutlich, dass unterschiedliche Arten von Systemabhängigkeiten berücksichtigt werden. Fehler sind im

betrachteten System temperaturabhängig, zusätzlich spielt das Alter, gekennzeichnet durch den Zeitpunkt der Systemerneuerung t_{GL} , eine Rolle. Die Restdauer einer Fahrt ist zudem abhängig vom Zeitpunkt t_{GF} , zu dem ein Fahrtzyklus gestartet wurde (Beginn einer Fahrt).

Tabelle 7.2: *Verwendete Parameter der Zustandsübergänge mit gegebenen Abhängigkeiten*

Zustandsübergänge	Beschreibung	Verteilung	Parameter [h]	Abhängigkeit
$\lambda_{4-5}(t), \lambda_{4-7}(t), \lambda_{4-8}(t),$ $\lambda_{5-8}(t), \lambda_{6-9}(t), \lambda_{7-8}(t),$ $\lambda_{10-11}(t)$	Temporärer Fehler	$W(\alpha, \beta)$	$\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ $\beta = 1,5$	θ, t'_{GL}, t'
$\lambda_{4-6}(t), \lambda_{4-10}(t), \lambda_{4-12}(t),$ $\lambda_{5-6}(t), \lambda_{5-11}(t), \lambda_{5-12}(t),$ $\lambda_{6-12}(t), \lambda_{7-9}(t), \lambda_{7-10}(t),$ $\lambda_{7-12}(t), \lambda_{10-12}(t)$	Permanenter Fehler	$W(\alpha, \beta)$	$\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ $\beta = 0,5$	θ, t'_{GL}, t'
τ_{1-4}	Standzeit	$EXP(\lambda)$	$\lambda = 0,144$	-----
$\tau_{4-1}(t), \tau_{5-1}(t), \tau_{6-2}(t),$ $\tau_{7-1}(t), \tau_{10-3}(t)$	Fahrtdauer	$W(\alpha, \beta)$	$\alpha = 2$ $\beta = 0,7$	t'_{GF}, t'
$\mu_{2-4}(t), \mu_{3-4}(t)$	Reparatur	$LN(\mu, \sigma^2)$	$\mu = 3$ $\sigma = 0,7$	t'_{GR}, t'

Im Rahmen der Analyse werden zusätzlich Fehler gemeinsamer Ursache (CCF) betrachtet. So können die Zustände $\{1, 1, 1\}$ und $\{1, 2, 2\}$ durch einen CCF (Zustandsübergänge $4 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 12, 5 \rightarrow 12, 7 \rightarrow 12$) eingenommen werden.

Eine Empfehlung zur Bewertung von CCF ist in der IEC 61508 [IEC01] gegeben. Da es sich bei dem betrachteten System (Bild 7.1) gemäß der IEC 61508 um ein zweikanaliges System mit gegenseitiger Überwachung (siehe Bild 7.2) und hoher Wiederholungsrate handelt, wird der Parameter des Beta-Faktor Modells $b = 0,01$ gesetzt. Für eine $W(\alpha, \beta)$ -verteilte Ausfallrate folgt

$$\alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} = b \cdot \alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} + (1-b) \cdot \alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1}. \quad (7.2)$$

Die folgenden Untersuchungen werden für drei Temperaturbereiche durchgeführt, die je nach Einbauort, -lage und Einsatzort durchaus üblich für die Automobilindustrie sind (z.B. Motorraum, Anbau an Karosserie). Nachdem zunächst die Temperaturbereiche A und B näher untersucht werden, wird anschließend aus den erzielten Ergebnissen ein temperaturabhängiges Prognosemodell entwickelt, mit dem die Sicherheit und Zuverlässigkeit unter Berücksichtigung eines geänderten Temperaturbereiches C prognostiziert werden. Die durchgeführte Prognose wird anschließend mit einer weiteren Simulation verifiziert.

Die jeweiligen Temperaturbereiche seien im Folgenden $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Die Parameter der Temperaturbereiche sind in Tabelle 7.3 angegeben.

Tabelle 7.3: *Verwendete Parameter der Temperaturbereiche (0 Kelvin = -273,15 °C)*

Beschreibung	Verteilung	Parameter [Kelvin]
Temperaturbereich A	$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu = 298$ $\sigma = 10$
Temperaturbereich B	$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu = 323$ $\sigma = 10$
Temperaturbereich C	$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu = 348$ $\sigma = 10$

Es wird angenommen, dass das $W(\alpha, \beta)$ -verteilte Ausfallverhalten (temporärer und permanenter Fehler - siehe Tabelle 7.2) repräsentativ für eine mittlere Temperatur

$$\theta_0 = 323 \text{ Kelvin}$$

ist.

Der Einfluss der Temperatur wird im Folgenden mit dem Arrhenius-Modell (Anhang A.3.6) modelliert. Die Aktivierungsenergie sei mit

$$E_a = 0,7 \text{ eV}$$

für den temporären und den permanenten Fehler (Tabelle 7.2) bekannt.

7.2 Simulationsalgorithmen

Da einige Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten des zu untersuchenden Systems sehr klein sind, erfolgt die Systemanalyse unter Anwendung der in Kapitel 2.4 beschriebenen gewichteten MCS. Mit den gegebenen Temperatureinflüssen sind zusätzliche Schadensakkumulationseffekte (Anhang A.3.7) zu berücksichtigen.

Mit dem einfach zu handhabenden LES (Kapitel 2.4) werden in einem ersten Schritt alle möglichen Fehlerpfade aus den Zuständen 4 bis 10 bewertet. Der verwendete Teilalgorithmus ist für den Zustand 4 ($\{1, 0, 0\}$ bzw. „AN“) in Bild 7.4 dargestellt.

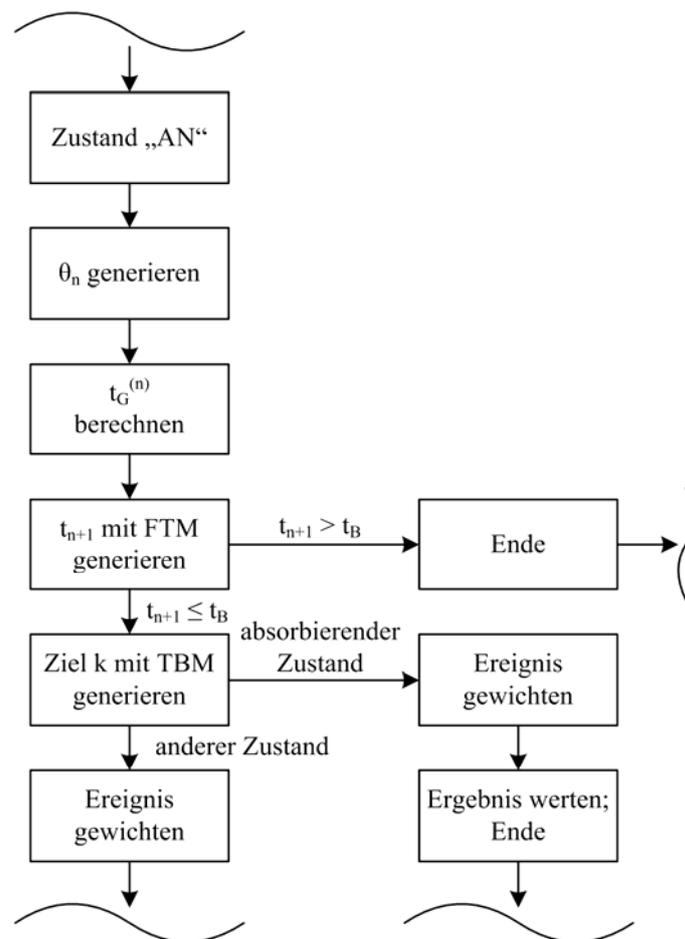


Bild 7.4: Teilalgorithmus LES

Der FFS (Kapitel 2.4) eignet sich besonders zur Bewertung von Einzelfehlern (häufig CCF). Zustandsübergänge (insbesondere Einzelfehler), die sich im ersten Schritt der Analyse (LES) als relevant (wahrscheinlich) erwiesen haben, werden unter Verwendung des FFS genauer untersucht. Der verwendete Teilalgorithmus ist für den Zustand 4 ($\{1, 0, 0\}$ bzw. „AN“) in Bild 7.5 dargestellt.

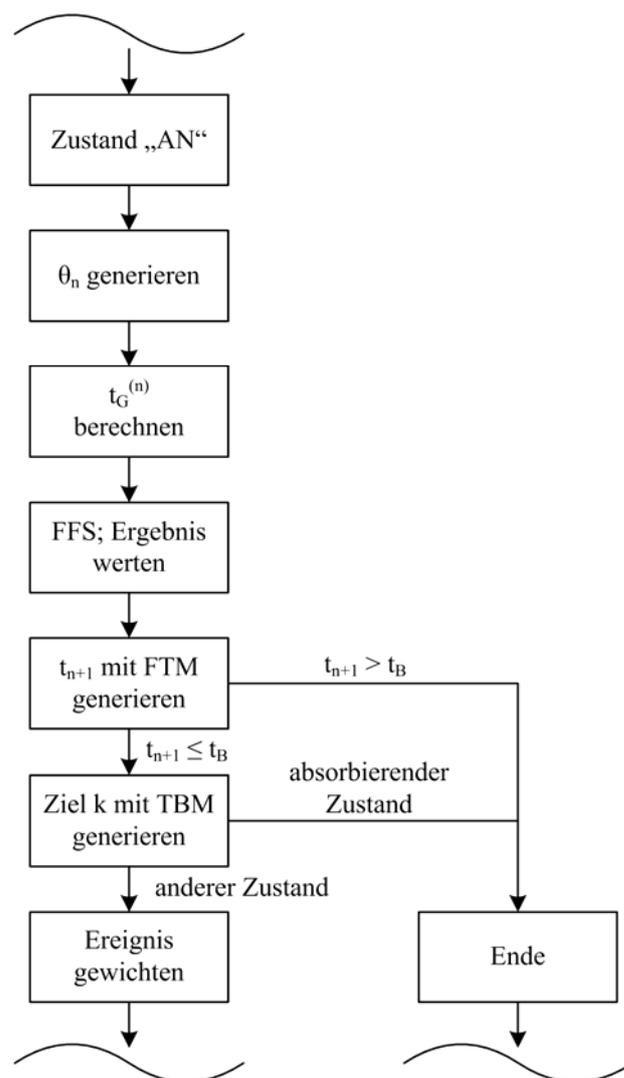


Bild 7.5: Teilalgorithmus FFS

7.3 Ergebnisdarstellung

7.3.1 Bewertung der Temperaturbereiche A und B

Die Analyse des Systems erfolgt für eine Betriebsdauer von einem Jahr (8760 h). Das System sei zu Beginn der Betrachtung im Zustand 1 ($P_1(0) = 1$). Die Ergebnisse der Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen, d.h. die ermittelten Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten und die daraus berechneten Gefährdungs- und Ausfallwahrscheinlichkeiten, unter Berücksichtigung der Temperaturbereiche A und B (erster Schritt - LES), sind in Tabelle 7.4 bis Tabelle 7.7 aufgeführt.

Tabelle 7.4: Gefährdungswahrscheinlichkeit $G(t_B)$, Temperatur θ_A , LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-8}(t_B)$	100	-----	4,263E-06	5,832E-11
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	4,942E-07	8,787E-13
$P_{5-8}(t_B)$	100	-----	3,323E-10	1,177E-18
$P_{5-11}(t_B)$	100	-----	5,335E-11	3,891E-20
$P_{5-12}(t_B)$	100	-----	6,803E-13	6,891E-24
$P_{6-9}(t_B)$	100	-----	7,121E-11	2,935E-20
$P_{6-12}(t_B)$	100	-----	5,296E-12	1,591E-22
$P_{7-8}(t_B)$	100	-----	4,638E-10	2,526E-18
$P_{7-9}(t_B)$	100	-----	4,033E-11	1,601E-20
$P_{7-12}(t_B)$	100	-----	5,635E-13	4,745E-24
$P_{10-11}(t_B)$	100	-----	4,549E-11	1,963E-20
$P_{10-12}(t_B)$	100	-----	7,213E-12	1,341E-21
$G(t_B)$	100	467,422	4,758E-06	3,093E-10

Tabelle 7.5: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, Temperatur θ_A , LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-6}(t_B)$	100	-----	3,284E-05	4,170E-09
$P_{4-10}(t_B)$	100	-----	4,777E-05	6,645E-09
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	5,262E-07	8,221E-13
$P_{5-6}(t_B)$	100	-----	4,443E-11	2,600E-20
$P_{5-11}(t_B)$	100	-----	6,728E-11	4,208E-20
$P_{5-12}(t_B)$	100	-----	5,143E-13	6,280E-24
$P_{7-9}(t_B)$	100	-----	4,271E-11	2,447E-20
$P_{7-10}(t_B)$	100	-----	3,033E-11	1,088E-20
$P_{7-12}(t_B)$	100	-----	3,873E-13	1,201E-24
$F(t_B)$	100	343,264	8,114E-05	6,072E-08

Tabelle 7.6: Gefährdungswahrscheinlichkeit $G(t_B)$, Temperatur θ_B , LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-8}(t_B)$	100	-----	1,126E-04	6,438E-08
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	1,047E-06	2,354E-12
$P_{5-8}(t_B)$	100	-----	3,192E-07	1,117E-12
$P_{5-11}(t_B)$	100	-----	1,617E-09	1,724E-17
$P_{5-12}(t_B)$	100	-----	2,574E-11	5,809E-21
$P_{6-9}(t_B)$	100	-----	1,766E-09	3,291E-17
$P_{6-12}(t_B)$	100	-----	2,784E-11	3,760E-21
$P_{7-8}(t_B)$	100	-----	8,385E-08	2,666E-14
$P_{7-9}(t_B)$	100	-----	2,579E-09	4,234E-17
$P_{7-12}(t_B)$	100	-----	2,091E-11	3,422E-21
$P_{10-11}(t_B)$	100	-----	2,301E-09	4,808E-17
$P_{10-12}(t_B)$	100	-----	9,860E-11	1,874E-19
$G(t_B)$	100	471,344	1,141E-04	1,859E-07

Tabelle 7.7: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, Temperatur θ_B , LES

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-6}(t_B)$	100	-----	1,025E-04	2,797E-08
$P_{4-10}(t_B)$	100	-----	1,389E-04	3,852E-08
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	8,504E-07	1,953E-12
$P_{5-6}(t_B)$	100	-----	2,437E-09	5,283E-17
$P_{5-11}(t_B)$	100	-----	2,040E-09	3,941E-17
$P_{5-12}(t_B)$	100	-----	1,906E-11	1,748E-21
$P_{7-9}(t_B)$	100	-----	1,433E-09	1,173E-17
$P_{7-10}(t_B)$	100	-----	2,454E-09	4,601E-17
$P_{7-12}(t_B)$	100	-----	2,300E-11	7,028E-21
$F(t_B)$	100	341,124	2,423E-04	5,545E-07

Es ist deutlich zu erkennen, dass nicht alle Zustandsübergänge einen relevanten Einfluss auf die Gefährdungs- bzw. die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems haben. Zusätzlich ist bei einer Erhöhung der Temperatur von θ_A auf θ_B eine Erhöhung der Gefährdungs- bzw. der Ausfallwahrscheinlichkeit zu beobachten. Im Folgenden werden zur Bewertung der Sicherheit die Zustandsübergänge $\{4 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 12\}$ und zur Bewertung der Zuverlässigkeit die Zustandsübergänge $\{4 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 10, 4 \rightarrow 12\}$ untersucht. Da es sich um Einzelfehler handelt, erfolgen die Untersuchungen unter Verwendung des FFS.

Die ermittelten Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten und die daraus berechneten Gefährdungs- und Ausfallwahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung der Temperaturbereiche A und B (zweiter Schritt - FFS) sind in Tabelle 7.8 bis Tabelle 7.11 angegeben.

Tabelle 7.8: Gefährdungswahrscheinlichkeit $G(t_B)$, Temperatur θ_A , FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-8}(t_B)$	100	-----	4,451E-06	1,310E-11
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	4,820E-07	4,392E-14
$G(t_B)$	100	420,062	4,933E-06	1,460E-11

Tabelle 7.9: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, Temperatur θ_A , FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-6}(t_B)$	100	-----	5,007E-05	4,780E-10
$P_{4-10}(t_B)$	100	-----	5,007E-05	4,780E-10
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	5,057E-07	4,877E-14
$F(t_B)$	100	599,141	1,006E-04	1,931E-09

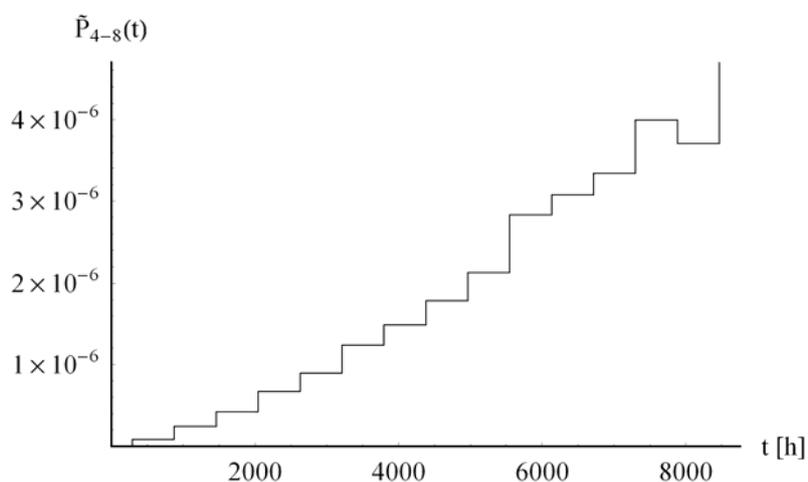
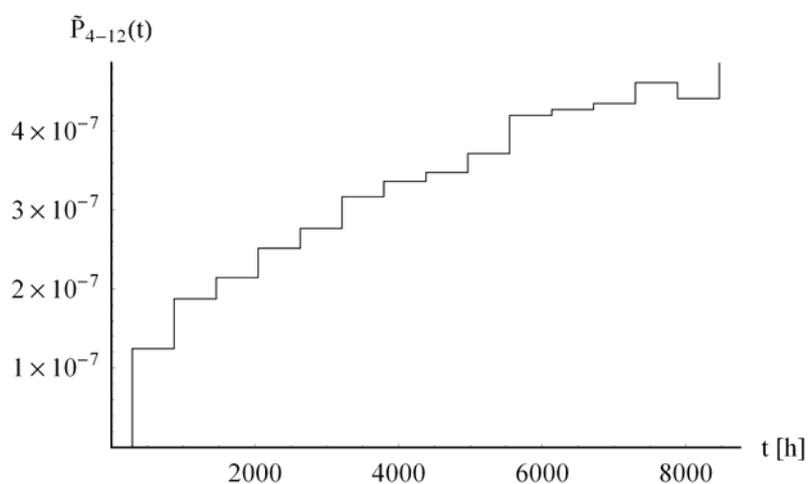
Tabelle 7.10: Gefährdungswahrscheinlichkeit $G(t_B)$, Temperatur θ_B , FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-8}(t_B)$	100	-----	9,371E-05	5,160E-09
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	1,321E-06	3,234E-13
$G(t_B)$	100	419,985	9,503E-05	5,239E-09

Tabelle 7.11: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B)$, Temperatur θ_B , FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$P_{4-6}(t_B)$	100	-----	1,311E-04	3,212E-09
$P_{4-10}(t_B)$	100	-----	1,311E-04	3,212E-09
$P_{4-12}(t_B)$	100	-----	1,324E-06	3,278E-13
$F(t_B)$	100	602,062	2,635E-04	1,298E-08

In Bild 7.6 bis Bild 7.11 sind die Ergebnisse der Sicherheitsanalyse, d.h. die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten und die daraus ermittelte Gefährdungswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der Temperaturbereiche A und B dargestellt.

Bild 7.6: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-8}(t)$, Temperatur θ_A , FFSBild 7.7: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-12}(t)$, Temperatur θ_A , FFS

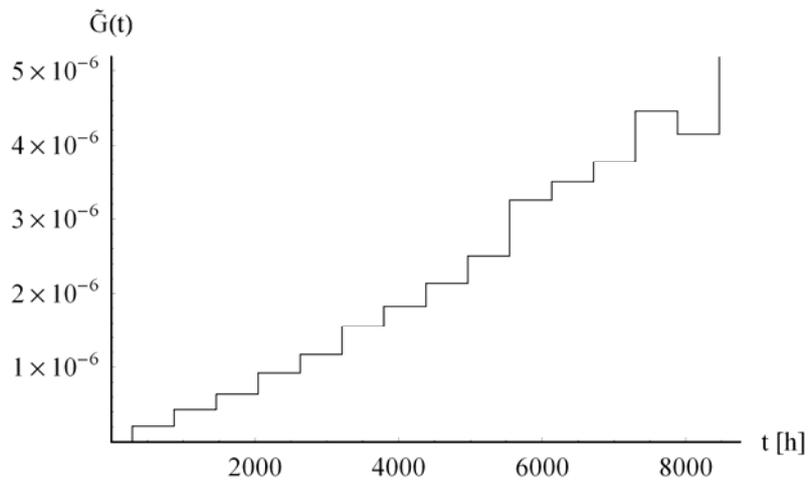


Bild 7.8: Gefährdungswahrscheinlichkeit $\tilde{G}(t)$, Temperatur θ_A , FFS

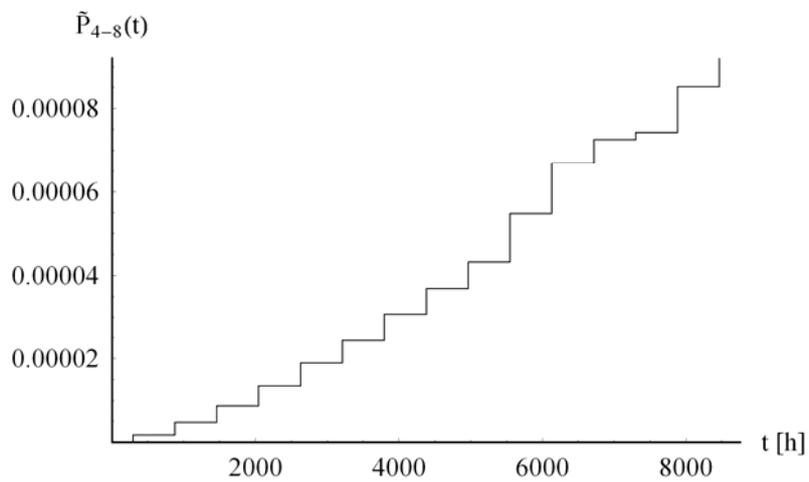


Bild 7.9: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-8}(t)$, Temperatur θ_B , FFS

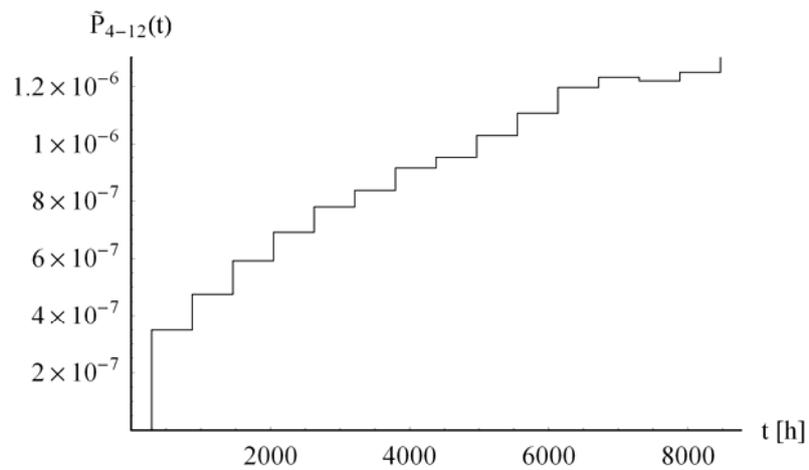


Bild 7.10: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-12}(t)$, Temperatur θ_B , FFS

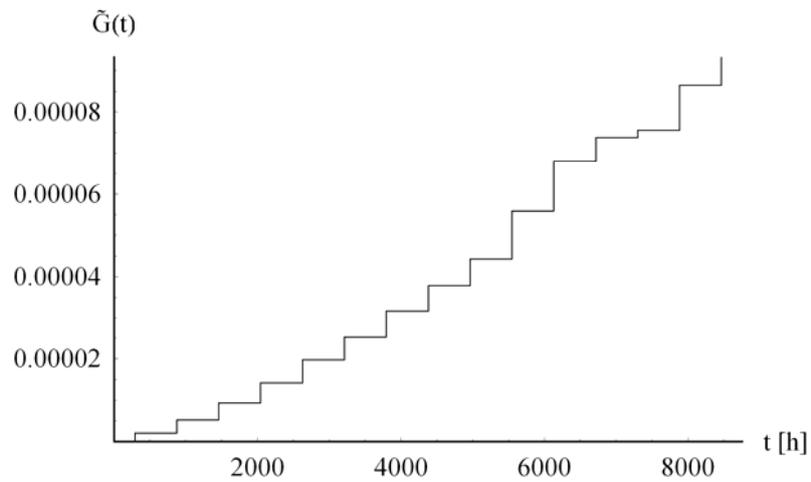


Bild 7.11: Gefährdungswahrscheinlichkeit $\tilde{G}(t)$, Temperatur θ_B , FFS

In Bild 7.12 bis Bild 7.19 sind die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse, d.h. die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten und die daraus ermittelte Ausfallwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der Temperaturbereiche A und B dargestellt.

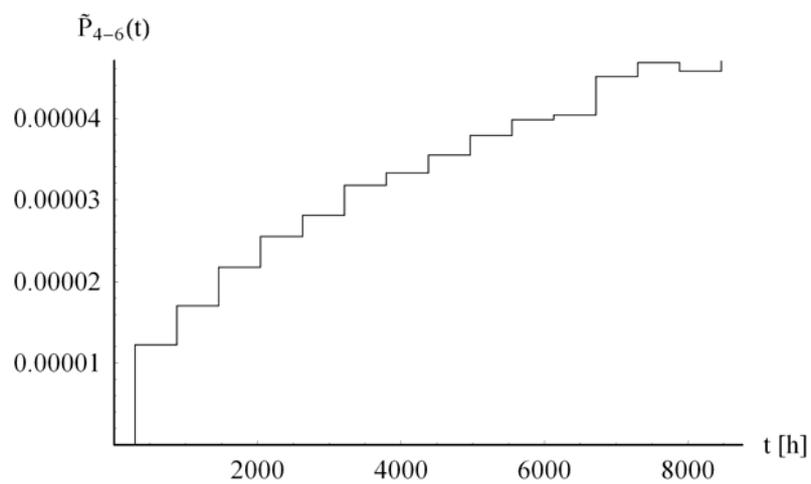


Bild 7.12: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-6}(t)$, Temperatur θ_A , FFS

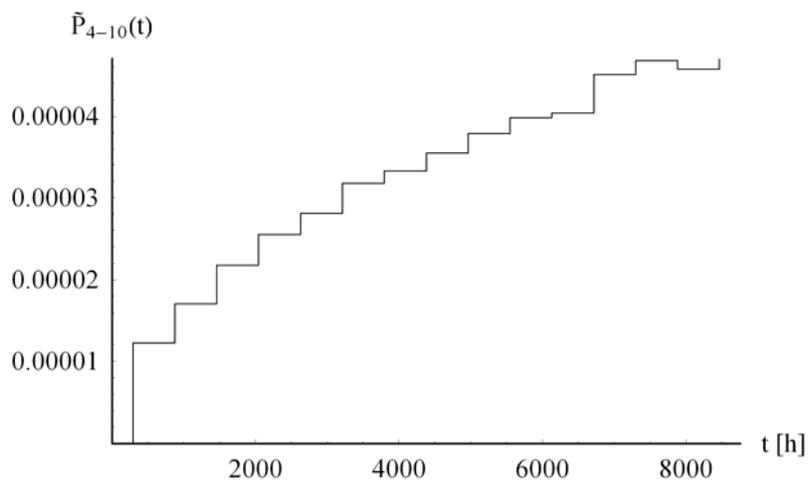


Bild 7.13: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-10}(t)$, Temperatur θ_A , FFS

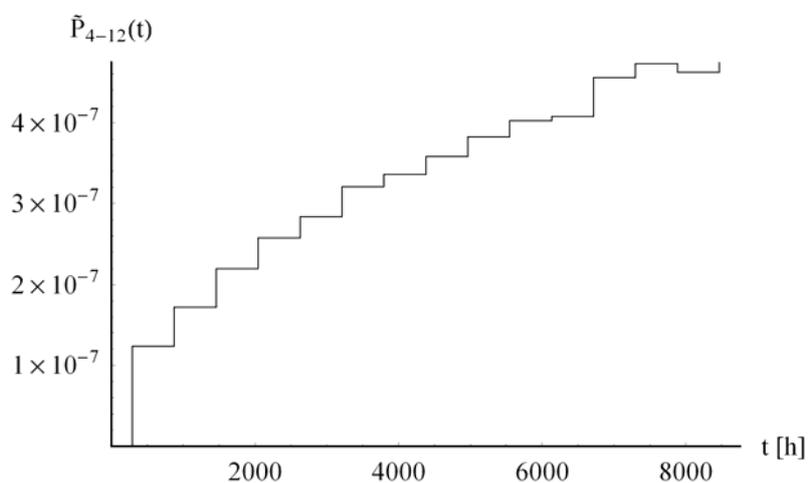


Bild 7.14: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-12}(t)$, Temperatur θ_A , FFS

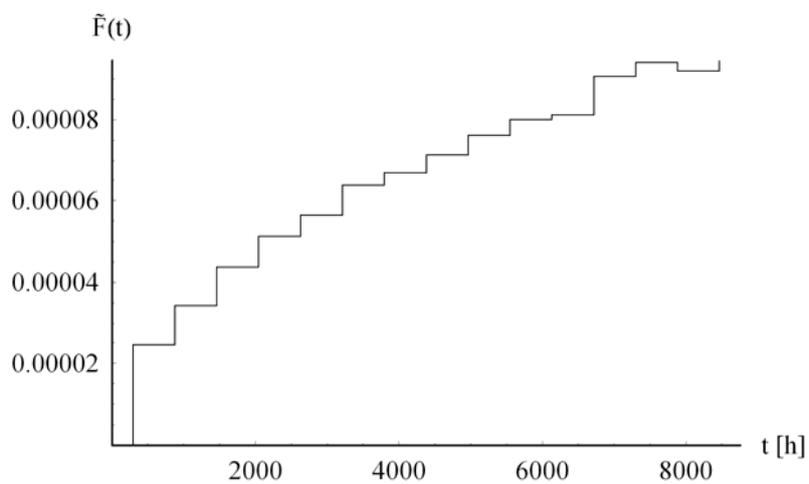


Bild 7.15: Ausfallwahrscheinlichkeit $\tilde{F}(t)$, Temperatur θ_A , FFS

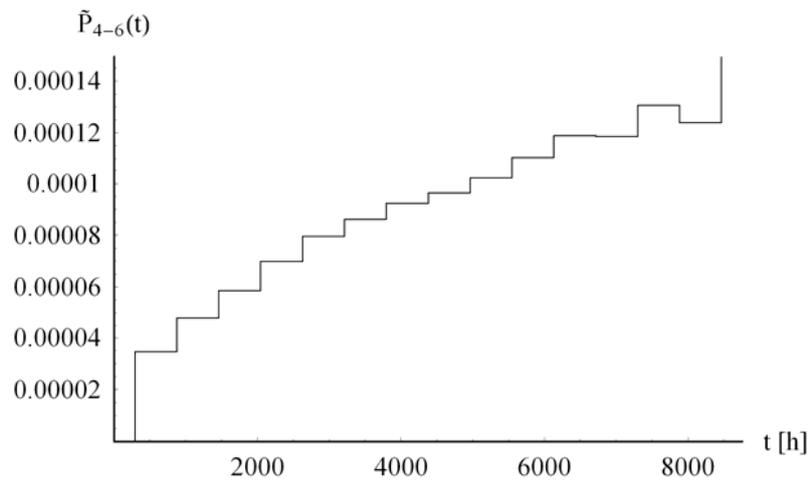


Bild 7.16: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-6}(t)$, Temperatur θ_B , FFS

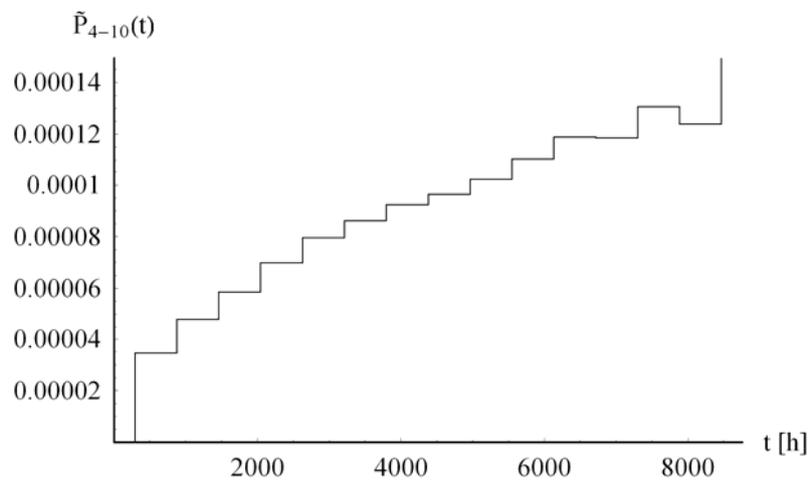


Bild 7.17: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-10}(t)$, Temperatur θ_B , FFS

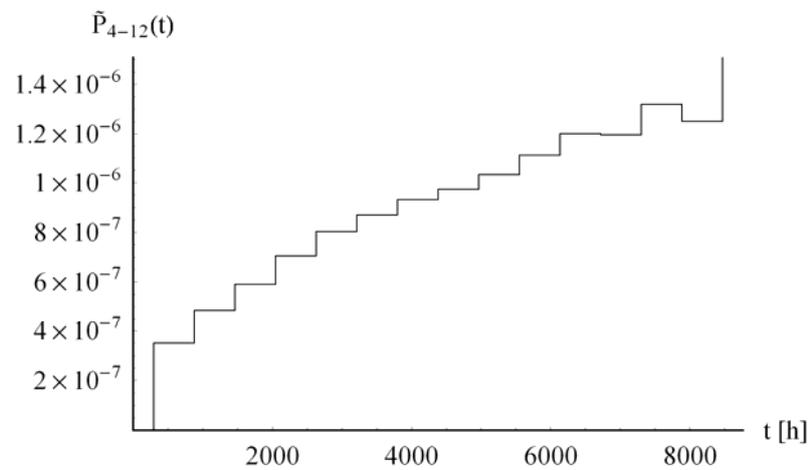


Bild 7.18: Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}_{4-12}(t)$, Temperatur θ_B , FFS

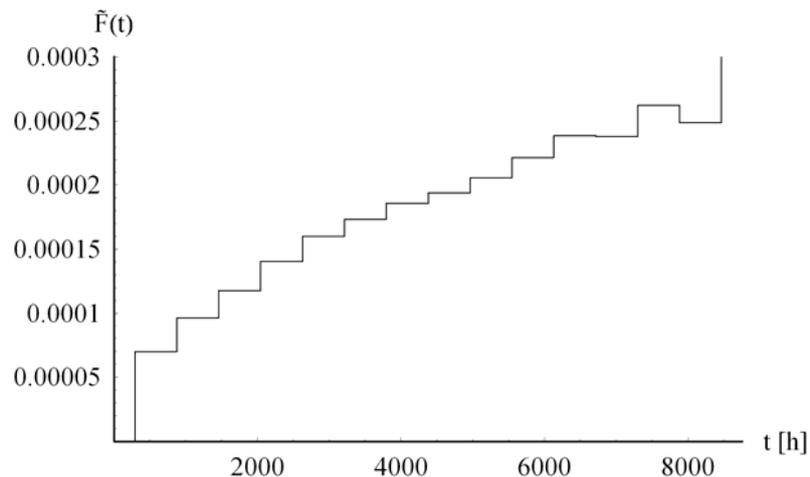


Bild 7.19: Ausfallwahrscheinlichkeit $\tilde{F}(t)$, Temperatur θ_B , FFS

Anhand von Tabelle 7.4 bis Tabelle 7.11 und Bild 7.6 bis Bild 7.19 ist zu erkennen, dass eine Erhöhung der Temperatur einen erwartungsgemäßen Anstieg der jeweiligen temperaturabhängigen Gefährdungs- bzw. Ausfallwahrscheinlichkeit zur Folge hat.

7.3.2 Bewertung des Temperaturbereiches C

Ausgehend von den temperaturabhängigen Analysen A und B (insbesondere der generierten Daten aus Kapitel 7.3.1) wird im Folgenden ein temperaturabhängiges Prognosemodell entwickelt. Unter Anwendung des Prognosemodells werden die Gefährdungs- und Ausfallwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung eines geänderten Temperaturbereiches C prognostiziert. Zu diesem Zweck werden die unbekanntenen Modellparameter α_o , β und Ea der Gefährdungswahrscheinlichkeit

$$G(t | \theta_n) = 1 - \exp \left(-\alpha_o \cdot \exp \left(\frac{Ea}{k} \cdot \left(\frac{1}{\theta_o} - \frac{1}{\theta_n} \right) \right)^\beta \cdot t^\beta \right) \quad (7.3)$$

auf Basis der bekannten Methode der kleinsten Quadrate geschätzt [Har98]. Es ergibt sich folgender Ansatz:

$$SSE = \sum_{i=1}^n \left(\tilde{G}(t_i | \theta_i) - 1 + \exp \left(-\alpha_o \cdot \exp \left(\frac{Ea}{k} \cdot \left(\frac{1}{\theta_o} - \frac{1}{\theta_i} \right) \right)^\beta \cdot t_i^\beta \right) \right)^2 \rightarrow \text{Min.} \quad (7.4)$$

Die Schätzung der Parameter ergibt

$$\alpha_o = 2,617E-10 \text{ h}^{-\beta},$$

$$\beta = 1,411 \text{ und}$$

$$Ea = 0,688 \text{ eV.}$$

Mit

$$\alpha_C = \alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta_C)^\beta = 3,206E-09 \text{ h}^{-\beta} \quad (7.5)$$

berechnet sich die prognostizierte Gefährdungswahrscheinlichkeit $G(t | \theta_C)$ zu

$$G(t | \theta_C) = 1 - \exp(-\alpha_C \cdot t^\beta). \quad (7.6)$$

Die Schätzung der Modellparameter der Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt in gleicher Vorgehensweise

$$\alpha_o = 2,397E-06 \text{ h}^{-\beta},$$

$$\beta = 0,523 \text{ und}$$

$$Ea = 0,657 \text{ eV.}$$

Mit

$$\alpha_C = \alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta_C)^\beta = 5,819E-06 \text{ h}^{-\beta} \quad (7.7)$$

berechnet sich die prognostizierte Ausfallwahrscheinlichkeit zu

$$F(t | \theta_C) = 1 - \exp(-\alpha_C \cdot t^\beta). \quad (7.8)$$

Zwecks Verifikation der Prognose wird nun unter Berücksichtigung des Temperaturbereiches C eine weitere Simulation durchgeführt. Die Tabelle 7.12 zeigt die Ergebnisse der Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse.

Tabelle 7.12: Gefährdungs- $G(t_B | \theta_C)$ und Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_B | \theta_C)$, FFS

Zustandsübergänge	Läufe	Zeit [s]	Mittelwert	Varianz
$G(t_B \theta_C)$	100	431,688	1,300E-03	6,465E-07
$F(t_B \theta_C)$	100	604,562	6,313E-04	5,369E-08

Die simulierten und prognostizierten Verläufe der Gefährdungs- und der Ausfallwahrscheinlichkeit sind in Bild 7.20 bis Bild 7.21 dargestellt.

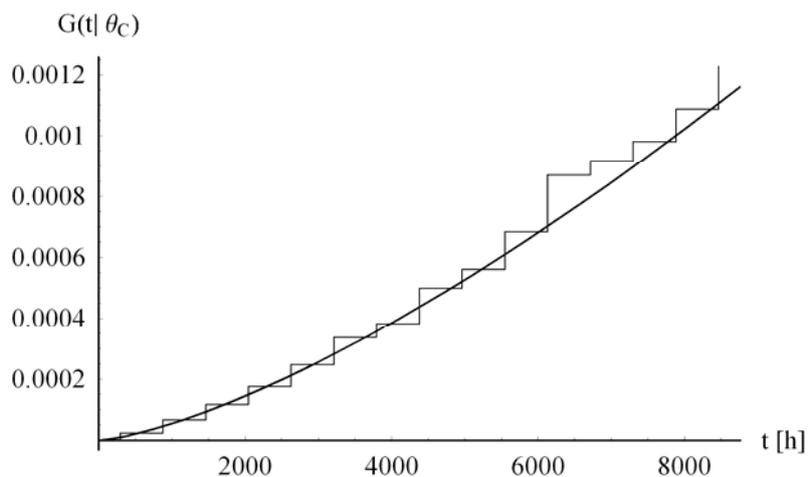


Bild 7.20: Simulierte und prognostizierte Gefährdungswahrscheinlichkeit $G(t | \theta_C)$, FFS

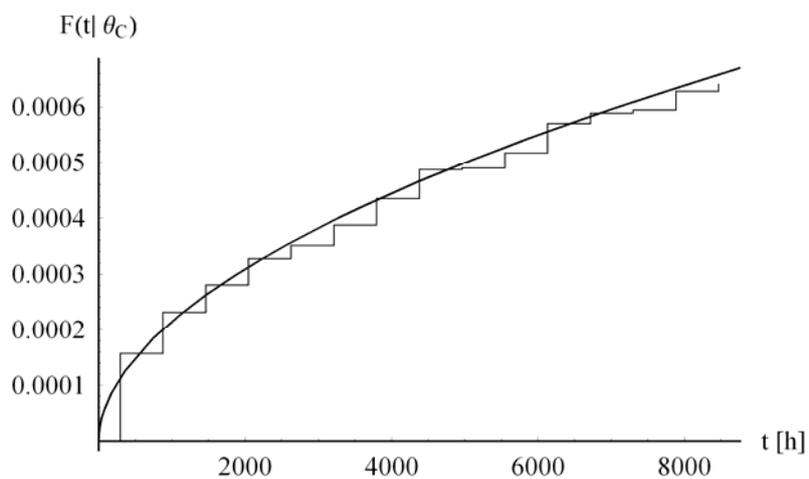


Bild 7.21: Simulierte und prognostizierte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t | \theta_C)$, FFS

7.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Das gegebene System wurde unter Verwendung der MCS und der teils sehr kleinen Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten sowie unter Beachtung realer Bedingungen wie stochastische Abhängigkeiten, systematische und dynamische Systemänderungen erfolgreich bewertet.

Zunächst erfolgten die Analysen unter Nutzung des einfach zu handhabenden LES. Es zeigte sich, dass nur einzelne Zustandsübergänge einen relevanten Einfluss auf die Gefährdungs- bzw. die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems haben (Tabelle 7.4 bis Tabelle 7.7). Im Anschluss wurden die Gefährdungs- und die Ausfallwahrscheinlichkeit auf Grundlage der relevanten Zustandsübergänge unter Verwendung des FFS untersucht (Tabelle 7.8 bis Tabelle 7.11 und Bild 7.6 bis Bild 7.19). Anhand aller Ergebnisse (Tabelle 7.4 bis Tabelle 7.12 und Bild 7.6 bis Bild 7.21) ist der Einfluss der Temperatur auf die Sicherheit und Zuverlässigkeit des betrachteten Systems zu erkennen. Es zeigt sich, dass die Erhöhung der Temperatur eine deutliche Steigerung der Gefährdungs- und der Ausfallwahrscheinlichkeit zur Folge hat.

Mit der gegebenen Fragestellung „Wie verhält sich das System bezüglich der Sicherheit und Zuverlässigkeit unter Berücksichtigung eines geänderten Temperaturbereiches?“ konnte auf Basis der generierten Daten (Temperaturbereich A und B, FFS) ein temperaturabhängiges Prognosemodell entwickelt werden. Diesbezüglich wurden die Modellparameter wie Aktivierungsenergie sowie die Parameter der Weibull-Verteilung geschätzt. Auf Grundlage des erstellten Prognosemodells wurden die Gefährdungs- sowie die Ausfallwahrscheinlichkeit für einen geänderten Temperaturbereich C prognostiziert. Mit den anschließend durchgeführten Simulationen konnten die prognostizierten Modelle der Gefährdungs- und der Ausfallwahrscheinlichkeit bestätigt werden.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Moderne elektronische Systeme im Kraftfahrzeug sind gekennzeichnet durch einen hohen Grad an Komplexität und Vernetzung von Informationen und Funktionen. Zusätzlich gilt es, neue Systeme kostengünstig und in immer kürzeren Intervallen zu entwickeln sowie den sicherheits- und zuverlässigkeitstechnischen Anforderungen von Seiten des Gesetzgebers und des Kunden gerecht zu werden. Dementsprechend ist es notwendig, die entwickelten Systeme frühzeitig unter sicherheits- und zuverlässigkeitstechnischen Aspekten zu planen und gegenüber äußeren Einflüssen robust auszuliegen.

Im Sinne einer modernen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsplanung und -analyse sollten insbesondere reale Bedingungen, wie stochastische Abhängigkeiten (zustandsabhängige Systemdegradation u.a.), systematische Systemänderungen (Früh- und Verschleißausfälle u.a.) sowie dynamische Systemänderungen (physikalische Einflussgrößen u.a.), erfasst, untersucht und integriert werden.

Die gängigen Verfahren wie FMEA, FBA und Markov-Analyse sind nur bedingt in der Lage, die oben genannten realen Bedingungen adäquat zu berücksichtigen.

Modelle, die auf stochastischen Prozessen wie dem Nicht-Markovschen Prozess basieren, sind zwar in der Lage reale Bedingungen abzubilden, jedoch sind die Gleichungssysteme des Prozesses aufgrund der Vielfalt und Dynamik der Einflussgrößen selten geschlossen lösbar.

Ein Ansatz zur Modellierung und Lösung von stochastischen Prozessen mit entsprechend komplexen Inhalten ist über die MCS gegeben. Unter Anwendung der MCS lassen sich reale Bedingungen abbilden und in die Untersuchungen integrieren. Mit der Anwendung im Bereich der Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse sind aufgrund der hohen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsforderungen spezielle Verfahren zur Varianzreduktion (gewichtete MCS) zu berücksichtigen.

In Kapitel 2 wurden die Grundlagen und die wesentliche Theorie der MCS erläutert. Die MCS wurde anhand der Systemtransporttheorie dargestellt. Mit dem Ziel, den Einfluss der Temperatur auf die Systemsicherheit und -zuverlässigkeit abzubilden, wurde die Systemtransporttheorie erstmalig um ein Schadensakkumulationsmodell erweitert. Zusätzlich wurden spezielle Verfahren zur Ergebnisschätzung und zur Bewertung seltener Ereignisse (gewichtete MCS) erläutert.

Die Anwendbarkeit der MCS zur Analyse eines Systems unter Berücksichtigung dynamischer Systemänderungen wurde mit Hilfe einzelner Teiluntersuchungen schrittweise verifiziert. In Kapitel 3 erfolgte die Analyse eines hochzuverlässigen Markov-Modells. Grundlage der Untersuchungen in Kapitel 4 war ein mehrparametrisches System, dessen Ausfallverhalten zeit- und temperaturabhängig ist. In Kapitel 5 wurde ein System untersucht, welches zu den Nicht-Markov-Prozessen mit Regenerationspunkten zählt. Es wurden insbesondere Zeitabhängigkeiten, Semi-Markov-, regenerative- und nicht regenerative Eigenschaften berücksichtigt. Die Systeme (Kapitel 3 bis Kapitel 5) waren so gewählt, dass eine Vergleichslösung (analytisch, approximativ) zur MCS ermittelt werden konnte. Es zeigte sich in allen Untersuchungen, dass die MCS geeignet ist, hochzuverlässige, mehrparametrische Systeme mit unterschiedlichsten stochastischen Eigenschaften zu modellieren und zu analysieren. Zudem wurden Verfahren zur Ergebnisschätzung und zur Varianzreduktion (gewichtete MCS) untersucht und somit ein Beitrag zur Weiterentwicklung und Optimierung von bestehenden Simulationsalgorithmen geleistet.

Basierend auf den Grundlagen (Kapitel 2 und Anhang A.3) und den Ergebnissen aus Kapitel 3 bis Kapitel 5 erfolgte in Kapitel 7 die Analyse eines 2-Kanal-Rechnersystems unter besonderer Berücksichtigung dynamischer Systemänderungen. Die Temperatur wurde als wesentliche dynamische Einflussgröße im Rahmen der Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen betrachtet. Hierbei wurden Temperaturbereiche untersucht, die je nach Einbauort, -lage und Einsatzort üblich für die Automobilindustrie sind (z.B. Motorraum, Anbau an Karosserie). Des Weiteren wurden reale Bedingungen wie stochastische Abhängigkeiten (Zeitpunkt der Instandsetzung, Beginn einer Fahrt) und systematische Systemänderungen wie Zeitabhängigkeiten (Ausfallverhalten, Fahrdauer, Reparaturdauer) berücksichtigt. Insgesamt konnte gezeigt werden, dass sich reale Bedingungen in eine realitätsnahe Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse unter Anwendung der MCS einbinden lassen.

Die MCS entspricht somit nicht nur einer Alternative zu den bestehenden Methoden wie FMEA, FBA oder Markov-Analyse, sondern ist vielmehr als einzig praktikables Verfahren zur realitätsnahen Systemmodellierung und -analyse, insbesondere zur virtuellen Erprobung, zu betrachten. Es sei jedoch angemerkt, dass der Simulationsalgorithmus zunächst in einer entsprechenden Entwicklungsumgebung generiert werden muss. Die Programmierung, insbesondere der Verfahren zur Ergebnisschätzung und Varianzreduktion, setzt eine gewisse Erfahrung im Umgang mit der MCS voraus. Der höhere Aufwand, im Gegensatz zu Methoden wie FMEA, FBA oder Markov-Analyse,

ist im Sinne einer realitätsnahen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse zu rechtfertigen.

Basierend auf den untersuchten Temperaturbereichen wurde ein neues temperaturabhängiges Prognosemodell entwickelt. Unter Anwendung dieses Modells konnten der Temperatureinfluss (Aktivierungsenergie des Arrhenius-Modells) sowie das Ausfallverhalten des Systems mittels einer Weibull-Verteilung geschätzt und zur Sicherheits- und Zuverlässigkeitsprognose unter geänderten Temperaturbedingungen (Einbauort, -lage, Einsatzort u.a.) verwendet werden. Das Verfahren zeigt, wie sich, z.B. mit Hilfe von Felddaten, Aussagen über das zukünftige Ausfallverhalten mit den gegebenen Einflüssen ermitteln lassen. Diese Erkenntnisse sind wiederum notwendig, um neue Entwicklungen realitätsnah zu entwerfen, zu bewerten und zu prüfen. Maßnahmen zur Erhöhung der Robustheit und die damit verbundenen Verbesserungen der Systemicherheit und Zuverlässigkeit können somit rechtzeitig geplant werden.

Da Verfahren wie die MCS von den Daten abhängig sind, die das Systemmodell und die Zustandsübergänge beschreiben, ist es erforderlich, diese Daten im Vorhinein unter Berücksichtigung der Datenqualität und -quantität zu generieren. Daten wie Ausfallverhalten und Lastkollektive sind somit anhand von Felddaten (Garantiedaten, Fehlerpeicher, Testfahrten u.a.) zu erheben. Sind diese Rahmenbedingungen gegeben, so lassen sich die in dieser Arbeit beschriebenen und angewendeten Verfahren weiterentwickeln und in der Praxis im Sinne einer zeitgemäßen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse nutzen.

Ein weiteres Ziel sollte es sein, die einfache Anwendbarkeit der MCS zu erhalten. Zu diesem Zweck sind einfach zu handhabende Verfahren zur Generierung von seltenen Ereignissen und komplexen Zustandsübergängen zu entwickeln. Die Systemmodellierung und die Programmierung der notwendigen Algorithmen könnten z.B. unter Verwendung von Petri-Netzen [Cha01], [Poz06] erfolgen.

Zusätzlich ist es möglich die MCS mit Methoden wie der Bayes-Statistik [Klo05], der Fuzzy-Logik [Sic05], den genetischen Algorithmen [Mar00] oder den Neuronalen Netzen [Ric98] zu kombinieren. Es ließen sich so die Unschärfe von Eingangsgrößen berücksichtigen sowie Einflüsse beschreiben, deren mathematisch physikalischer Hintergrund nur unzureichend bekannt ist.

9 Literaturverzeichnis

- [Bec02] Becker, G.; Camarinopoulos, L.; Kabranis, D.: Dynamic Reliability under Random Shocks. *Reliability Engineering and System Safety* 77 (2002), S. 239-251.
- [Bei97] Beichelt, F.: *Stochastische Prozesse für Ingenieure*. Stuttgart: B.G. Teubner 1997.
- [Bir97] Birolini, A.: *Zuverlässigkeit von Geräten und Systemen*. Berlin: Springer-Verlag 1997, 4. Auflage.
- [Cha01] Chabot, J.L.; Dutuit, Y.; Rauzy, A.: A Petri Net Approach to Dynamic Reliability. Torino, Proceedings of ESREL 2001.
- [Cox70] Cox, D.: *Renewal Theory*. London: Methuen & Co. LTD. 1970.
- [Dev97] Devooght, J.: Dynamic Reliability. *Advances in Nuclear Science and Technology* 25 (1997), S. 215-279.
- [Dub98] Dubi, A.: Analytic Approach & Monte Carlo Methods for Realistic Systems Analysis. *Mathematics and Computers in Simulation* 47 (1998), S. 243-269.
- [Dub00] Dubi, A.: *Monte Carlo Applications in Systems Engineering*. New York: John Wiley & Sons 2000.
- [Eck02] Eckrich, M.; Pischinger, M.; Krenn, M.; Bartz, M.; Munnix, P.: Aktivlenkung - Anforderungen an Sicherheitstechnik und Entwicklungsprozess. 11. Aachener Kolloquium 2002, Fahrzeug- und Motorentechnik, S. 1169-1184.
- [Erm75] Ermakow, S.M.: *Die Monte-Carlo-Methode und verwandte Fragen*. München: R. Oldenbourg Verlag 1975.
- [Fah81] Fahrmeir, L.; Kaufmann, H.; Ost, F.: *Stochastische Prozesse. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen*. München: Carl Hanser Verlag 1981.
- [Flö04] Flörecke, K.D.: Milliarden für mehr Sicherheit. *Automobilwoche* 24 (2004), S. 14.
- [Fri01a] Fritz, A.: *Berechnung und Monte-Carlo Simulation der Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit technischer Systeme*. Universität Stuttgart Dissertation, zugleich Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 2001, Nr. 94.

- [Fri01b] Fritz, A.; Bertsche, B.: Algorithms for the Monte-Carlo Simulation of the Reliability & Availability of Mechanical Systems. Torino, Proceedings of ESREL 2001.
- [Gen98] Gentle, J.E.: Random Number Generation and Monte Carlo Methods. New York: Springer-Verlag 1998.
- [Har98] Hartung, J.: Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. München: R. Oldenbourg Verlag 1998, 11. Auflage.
- [Hau05] Hauschild, J.; Meyna, A.: Monte Carlo Simulation for Automotive Applications under Real Conditions. Gdynia-Sopot-Gdańsk, Proceedings of ESREL 2005, S. 815-820.
- [Hau06] Hauschild, J.; Meyna, A.: Monte Carlo Techniques for Modelling & Analysing the Reliability and Safety of Modern Automotive Applications. Estoril, Proceedings of ESREL 2006, S. 695-702.
- [Hau07] Hauschild, J.; Meyna, A.: Die gewichtete Monte-Carlo-Simulation und ihre Anwendung im Bereich der Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalyse. Düsseldorf: VDI-Verlag 2007, Tagungsband TTZ 2007, Artikel angenommen.
- [IEC01] DIN-,VDE-Norm: Funktionale Sicherheit sicherheitsbezogener elektrischer/ elektronischer/ programmierbarer elektronischer Systeme. EN 61508, 2001.
- [Kam72] Kamarinopoulos, L.: Direkte und gewichtete Simulationsmethoden zur Zuverlässigkeitsuntersuchung technischer Systeme. Universität Berlin Dissertation 1972.
- [Kam76] Kamarinopoulos, L.: Ein Verfahren zur Berücksichtigung des Einflusses von Unsicherheiten der Komponentendaten auf die Zuverlässigkeitsmerkmale des Gesamtsystems. Berlin: Institut für Kerntechnik 1976.
- [Klo05] Kloos, M.: Uncertainty analysis for the predicted proportion of fuel rods failed during a hypothetical loss of coolant accident. Gdynia-Sopot-Gdańsk, Proceedings of ESREL 2005, S. 1065-1071.
- [Kne89] Knepper, R.: Die Anwendung der Semi-Markoff- und verwandten Prozesse als sicherheits- und zuverlässigkeitstechnisches Analyseverfahren zur quantitativen Bewertung technischer Systeme. Universität Wuppertal Dissertation, zugleich Düsseldorf: VDI-Verlag 1989, Reihe 8, Nr. 198.

- [Köc83] Köchel, P.: Zuverlässigkeit technischer Systeme. Thun: Verlag Harri Deutsch 1983.
- [Kos79] Koslow, B.A.; Uschakow, I.A.: Handbuch zur Berechnung der Zuverlässigkeit für Ingenieure. München: Carl Hanser Verlag 1979.
- [Lab96] Labeau, P.E.: A Monte Carlo Estimation of the Marginal Distributions in a Problem of Probabilistic Dynamics. *Reliability Engineering and System Safety* 52 (1996), S. 65-75.
- [Lew84] Lewis, E.E.; Böhm, F.: Monte Carlo Simulation of Markov Unreliability Models. *Nuclear Engineering and Design* 77 (1984), S. 49-62.
- [Lew95] Lewis, E.E.: Monte Carlo Reliability Estimation. *Proceedings International Conference on Mathematics and Computation* 1 (1995), S. 94-102.
- [Lux91] Lux, I.; Koblinger, L.: Monte Carlo Particle Transport Methods: Neutron and Photon Calculations. Boca Raton: CRC Press 1991.
- [Mar94] Marseguerra, M.; Zio, E.: Approaching Dynamic Reliability by Monte Carlo Simulation. Berlin: Springer-Verlag 1994, NATO ASI Series, S. 44-58.
- [Mar98] Marseguerra, M.; Zio, E.; Devooght, J.; Labeau, P.E.: A concept paper on dynamic reliability via Monte Carlo simulation. *Mathematics and Computers in Simulation* 47 (1998), S. 371-382.
- [Mar00] Marseguerra, M.; Zio, E.: Finding Optimal Repair and Maintenance Strategies by a Combined Genetic Algorithm - Monte Carlo Approach. Edinburgh, *Proceedings of ESREL 2000*, S. 261-267.
- [Mar02] Marseguerra, M.; Zio, E.: Basics of the Monte Carlo Method with Application to System Reliability. Hagen: LiLoLe-Verlag GmbH 2002.
- [Mey82] Meyna, A.: Einführung in die Sicherheitstheorie. Sicherheitstechnische Analyseverfahren. München: Carl Hanser Verlag 1982.
- [Mey03] Meyna, A.; Pauli, B.: Taschenbuch der Zuverlässigkeits- und Sicherheitstechnik. München: Carl Hanser Verlag 2003.
- [Meyb91] Meyberg, K.; Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 2. Berlin: Springer-Verlag 1991.
- [NEC98] NEC Corporation: Review of Quality and Reliability Handbook. Japan: NEC 1998, 1st edition.

- [Nel90] Nelson, W.: Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses. New York: John Wiley & Sons 1990.
- [Poz06] Pozsgai, P.: Realitätsnahe Modellierung und Analyse der operativen Zuverlässigkeitskennwerte technischer Systeme. Universität Stuttgart Dissertation, zugleich Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 2006, Nr. 118.
- [Ric98] Ricotti, M.E.; Zio, E.: Neural Network Approach to Sensitivity and Uncertainty Analysis. Reliability Engineering and System Safety 64 (1999), S. 59-71.
- [Sic05] Sickert, J.U.: Fuzzy-Zufallsfunktionen und ihre Anwendung bei der Tragwerksanalyse und Sicherheitsbeurteilung. Universität Dresden Dissertation 2005.
- [Smi92a] Smidts, C.; Devooght, J.: Probabilistic Reactor Dynamics – I: The Theory of Continuous Event Trees. Nuclear Science and Engineering 111 (1992), S. 229-240.
- [Smi92b] Smidts, C.; Devooght, J.: Probabilistic Reactor Dynamics – II: A Monte Carlo Study of a fast Reactor Transient. Nuclear Science and Engineering 111 (1992), S. 241-256.
- [Stö83] Störmer, H.: Mathematische Theorie der Zuverlässigkeit. München: R. Oldenbourg Verlag 1983.
- [VDA00] Verband Deutscher Automobilindustrie (VDA): Zuverlässigkeitssicherung bei Automobilherstellern und Lieferanten. In Reihe Qualitätsmanagement in der Automobilindustrie 2000, Band 3, Teil 2.
- [VDI99] VDI 4008, Blatt 6: Monte-Carlo-Simulation. Düsseldorf: Verein Deutscher Ingenieure 1999.
- [Wol01] Wolterreck, M.: Dynamische Zuverlässigkeitsanalyse mit anlagenspezifischen Störfallsimulatoren. Universität München Dissertation, zugleich Düsseldorf: VDI-Verlag 2001, Reihe 20, Nr. 332.
- [Wol04] Wolterreck, M.; Hauschild, J.; Meyna, A.: Dynamic Reliability Analysis for Automotive Applications. Berlin, Proceedings of ESREL 2004, S. 185-197.

Anhang

A.1 Abkürzungen

ABS	Antiblockiersystem
AFS	Aktivlenkung (engl. Active Front Steering)
BAO	Bad As Old
BTF	Birth point Transfer Function
CCF	Common Cause Failure
CK	Collision-Kernel
ESP	Elektronisches Stabilitätsprogramm
FBA	Fehlerbaumanalyse
FFK	Free-Flight-Kernel
FFS	Free-Flight-Schätzer
FMEA	Fehler-Möglichkeiten- und Einfluss-Analyse
FTM	Forced Transition Method
GAN	Good As New
LES	Last-Event-Schätzer
MCS	Monte-Carlo-Simulation
mod	Modulo
MTBF	Mean Time Between Failure
PSA	Probabilistische Sicherheitsanalyse
SSE	Summe der Abweichungsquadrate (engl. sum of squared error)
TBM	Transition Biasing Method
μ C	Mikrocontroller

A.2 Symbolverzeichnis

\forall	Für alle...gilt...
\in	...ist Element von...
\mathfrak{R}	Menge der reellen Zahlen
\approx	...ist ungefähr gleich zu...
exp	Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis
ln	Natürlicher Logarithmus
ξ	GL(0, 1)-verteilte Zufallszahl
$F^{-1}(\xi)$	Umkehrfunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(\sim)$
X	Zufallsvariable
x	Realisierung der Zufallsvariablen X
T	Zufallsvariable der Lebensdauer
t	Realisierung der Zufallsvariablen T (Lebensdauer)
t_G	Geburtspunkt, Zeitpunkt der Inbetriebnahme
t_{GR}	Zeitpunkt zu dem eine Reparatur begonnen wird
t_{GL}	Regenerationspunkt, Zeitpunkt der Systemerneuerung
t_{GF}	Zeitpunkt zu dem ein Fahrtzyklus begonnen wird
t'	Gegenwärtiger Betrachtungszeitpunkt
t_B	Betriebsdauer
Θ	Zufallsgröße der Temperatur (in Kelvin)
θ	Realisierung der Zufallsvariablen Θ (Temperatur)
F'	Gruppe der ausgefallenen absorbierenden Zustände
G'	Gruppe der gefährlichen absorbierenden Zustände

\bar{x}	Empirischer Mittelwert
s^2	Empirische Varianz
$\tilde{P}_k(t)$	Empirische Zustandswahrscheinlichkeit des Zustandes k
$\tilde{F}(t)$	Empirische Ausfallwahrscheinlichkeit
$\tilde{G}(t)$	Empirische Gefährdungswahrscheinlichkeit
$f(x)$	Verteilungsdichte
$F(x)$	Verteilungsfunktion
$E(X)$	Erwartungswert von X
$\sigma^2(X)$	Varianz von X
$\text{Cov}(X, Y)$	Kovarianz
$\hat{P}_k(t)$	Schätzer der Zustandswahrscheinlichkeit des Zustandes k
$P_k(t)$	Zustandswahrscheinlichkeit des Zustandes k
$F(t)$	Ausfallwahrscheinlichkeit
$R(t)$	Überlebenswahrscheinlichkeit
$f(t)$	Ausfalldichte
$\lambda(t)$	Ausfallrate
$\mu(t)$	Reparaturrate
$E(T)$	Mittlere Lebensdauer
$F(t \sim)$	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit
$R(t \sim)$	Bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit
$f(t \sim)$	Bedingte Ausfalldichte
$\lambda(t \sim)$	Bedingte Ausfallrate
$G(t)$	Gefährdungswahrscheinlichkeit
$S(t)$	Sicherheitswahrscheinlichkeit
$g(t)$	Gefährdungsdichte
$\rho(t)$	Gefährdungsrate

$GL(a, b)$	Gleichverteilung mit den Parametern a und b
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit den Parametern μ und σ
$LN(\mu, \sigma^2)$	Logarithmische Normalverteilung mit den Parametern μ und σ
$EXP(\lambda)$	Exponentialverteilung mit dem Parameter λ
$W(\alpha, \beta)$	Weibull-Verteilung mit den Parametern α und β
$\delta(t)$	Dirac-Deltafunktion
$\lambda_{k'k}(\sim)$	Zustandsübergangsrate von Zustand k' nach Zustand k
$\lambda_{k'}(\sim)$	Kumulierte Zustandsübergangsrate von Zustand k'
$\gamma_{k'k}(\sim)$	Wahrscheinlichkeit eines Zustandsüberganges in den Zustand k unter der Bedingung, dass dieser aus dem Zustand k' erfolgt
$q_{k'k}(\sim)$	Partielle Wahrscheinlichkeitsdichte eines Zustandsüberganges von Zustand k' nach Zustand k
$\psi_k(\sim)$	Ereignisdichte des Zustandes k
$\psi_k^n(\sim)$	Ereignisdichte des Zustandes k nach n Zustandsübergängen
$K(\sim)$	Transportgleichung
$T(\sim)$	Free-Flight-Kernel
$C(\sim)$	Collision-Kernel
$\tilde{\psi}_k(\sim)$	Modifizierte Ereignisdichte des Zustandes k
$\tilde{K}(\sim)$	Modifizierte Transportgleichung
$\tilde{T}(\sim)$	Modifizierter Free-Flight-Kernel
$\tilde{C}(\sim)$	Modifizierter Collision-Kernel
$\tilde{f}(\sim)$	Modifizierte Ausfalldichte
$\tilde{\lambda}_{k'k}(\sim)$	Modifizierte Zustandsübergangsrate von Zustand k' nach Zustand k
$\tilde{\lambda}_{k'}(\sim)$	Modifizierte kumulierte Zustandsübergangsrate von Zustand k'
$\tilde{\gamma}_{k'k}(\sim)$	Modifizierte Wahrscheinlichkeit eines Zustandsüberganges in den Zustand k unter der Bedingung, dass dieser aus dem Zustand k' erfolgt

$w_{k_n}^n(t_n)$	Kumulierte Gewichtung zum Zeitpunkt t_n des n-ten Zustandsüberganges
u_k	Gewichtung nach Eintritt in den Zustand k
E_a	Aktivierungsenergie (eV)
k	Boltzmannkonstante u.a.
$B(\sim)$	Beschleunigungsfaktor
$f(\theta, t)$	Bivariate Dichtefunktion
$F(\theta, t)$	Bivariate Wahrscheinlichkeitsfunktion
θ_o	mittlere Temperatur
α_o	Bei der Temperatur θ_o ermittelter Weibull-Parameter α_o
η_o	Bei der Temperatur θ_o ermittelte charakteristische Lebensdauer η_o
\underline{t}	Original-Zeitbereich
$\underline{t}^{(n)}$	Auf θ_n normierter Äquivalenz-Zeitbereich
$t_G^{(n)}$	Auf θ_n normierter Zeitpunkt der Inbetriebnahme

A.3 Grundlagen

Im Folgenden werden die für diese Arbeit relevanten Grundlagen der Statistik, Zuverlässigkeitstheorie und der angewandten Methoden erläutert. Sie orientieren sich im Wesentlichen an Standardwerken wie [Stö83], [Bir97], [Har98], [Mey03] u.a.

A.3.1 Stichprobenfunktionen

Aus einer gegebenen Stichprobe mit den Stichprobenwerten $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ lassen sich wichtige Stichprobenkenngrößen bilden.

Empirischer Mittelwert

Der empirische Mittelwert \bar{x} , auch arithmetischer Mittelwert genannt, berechnet sich zu

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \approx \mu. \quad (\text{A.3.1})$$

Empirische Varianz

Ist der Erwartungswert μ der Grundgesamtheit bekannt, so lautet die empirische Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \approx \sigma^2. \quad (\text{A.3.2})$$

Ist der Erwartungswert μ der Grundgesamtheit unbekannt, so ist die empirische Varianz gegeben durch

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx \sigma^2. \quad (\text{A.3.3})$$

Erwartungswert der Summe

Sind X_1 und X_2 beliebige Zufallsgrößen, so entspricht der Erwartungswert der Summe

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2). \quad (\text{A.3.4})$$

Varianz der Summe

Die Varianz der Summe lautet

$$\sigma^2(X_1 + X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2). \quad (\text{A.3.5})$$

Sind X_1 und X_2 unkorrelierte und insbesondere unabhängige Zufallsgrößen, so entspricht die Varianz der Summe der Gleichung

$$\sigma^2(X_1 + X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2). \quad (\text{A.3.6})$$

A.3.2 Theoretische Zuverlässigkeitskenngrößen nicht reparierbarer Systeme

Einem Ereignis, wie z.B. dem Ausfall einer Komponente, können reelle endliche Zahlenwerte zugeordnet werden. Diese Zahlenwerte, z.B. die Lebensdauer der Komponente bis zu ihrem Ausfall, bilden dann eine Zufallsgröße.

Die Zeitspanne zwischen dem Betriebsbeginn und dem Ausfall technischer Komponenten und Systeme wird als Lebensdauer mit der Zufallsvariablen T bezeichnet.

Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist definiert als

$$F(t) = P(T \leq t) \quad (\text{A.3.7})$$

mit den Eigenschaften

$$F(t) = P(T \leq t) = 0 \quad \forall \quad t \leq 0 \quad \text{und} \quad (\text{A.3.8})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(T \leq t) = 1. \quad (\text{A.3.9})$$

Überlebenswahrscheinlichkeit

Die komplementäre Größe der Ausfallwahrscheinlichkeit heißt Überlebenswahrscheinlichkeit und ist gegeben durch

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t). \quad (\text{A.3.10})$$

Ausfalldichte

Die Wahrscheinlichkeitsdichte wird bei Lebensdauerbetrachtungen als Ausfalldichte benannt und entspricht

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (\text{A.3.11})$$

mit den Eigenschaften

$$f(t) = 0 \quad \forall \quad t < 0, \quad (\text{A.3.12})$$

$$f(t) \geq 0 \quad \forall \quad t \geq 0 \quad \text{und} \quad (\text{A.3.13})$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1. \quad (\text{A.3.14})$$

Ausfallrate

Eine weitere wichtige Kenngröße ist die Ausfallrate $\lambda(t)$. Mit dem Produkt $\lambda(t) \cdot \Delta t$ wird, bei hinreichend kleinem Δt , die bedingte Wahrscheinlichkeit ermittelt, dass eine Komponente im Intervall $(t, t + \Delta t)$ ausfallen wird, unter der Bedingung, dass sie bis zum Zeitpunkt t überlebt hat. Die Ausfallrate lässt sich damit als ein Maß für die Anfälligkeit einer Komponente, in Abhängigkeit von dem erreichten Alter t , interpretieren [Köc83] und lautet

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{d \ln R(t)}{dt}. \quad (\text{A.3.15})$$

Mittlere Lebensdauer

Der zur Verteilungsfunktion $F(t)$ zugehörige Erwartungswert $E(T)$ gibt die mittlere Lebensdauer an. Der Erwartungswert der zufälligen Lebensdauer T ist gegeben durch

$$E(T) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (\text{A.3.16})$$

Der Zusammenhang der Kenngrößen ist in Tabelle A.1 dargestellt.

Tabelle A.1: Zusammenhang zwischen den Zuverlässigkeitskenngrößen nicht reparierbarer Systeme [Mey03]

	Ausfall- wahrscheinlichkeit $F(t)$	Überlebens- wahrscheinlichkeit $R(t)$	Ausfalldichte $f(t)$	Ausfallrate $\lambda(t)$
$F(t)$	-----	$1 - R(t)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right)$
$R(t)$	$1 - F(t)$	-----	$\int_t^{\infty} f(\tau) d\tau$	$\exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right)$
$f(t)$	$\frac{dF(t)}{dt}$	$-\frac{dR(t)}{dt}$	-----	$\lambda(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right)$
$\lambda(t)$	$\frac{1}{1 - F(t)} \cdot \frac{dF(t)}{dt}$	$-\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$	$\frac{f(t)}{\int_t^{\infty} f(\tau) d\tau}$	-----

Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit

Wurde eine Komponente zum Zeitpunkt t_G in Betrieb genommen und ist zum gegenwärtigen Betrachtungszeitpunkt $t' \geq t_G$ noch intakt, so ist die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit gegeben durch

$$P(T \leq t - t_G \mid T > t' - t_G) = F(t \mid t_G, t') = \frac{F(t - t_G) - F(t' - t_G)}{1 - F(t' - t_G)}. \quad (\text{A.3.17})$$

Bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit

Das Komplementärereignis, d.h. die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit entspricht

$$P(T > t - t_G \mid T > t' - t_G) = R(t \mid t_G, t') = \frac{R(t - t_G)}{R(t' - t_G)}. \quad (\text{A.3.18})$$

Bedingte Ausfalldichte

Mit der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet sich die bedingte Ausfalldichte zu

$$f(t \mid t_G, t') = \frac{dF(t \mid t_G, t')}{dt} = \frac{f(t - t_G)}{1 - F(t' - t_G)}. \quad (\text{A.3.19})$$

Bedingte Ausfallrate

Mit der bedingten Überlebenswahrscheinlichkeit und der bedingten Ausfalldichte berechnet sich die bedingte Ausfallrate zu

$$\lambda(t \mid t_G, t') = \frac{f(t \mid t_G, t')}{R(t \mid t_G, t')} = \frac{f(t - t_G)}{R(t - t_G)} = \lambda(t - t_G). \quad (\text{A.3.20})$$

A.3.3 Theoretische Sicherheitskenngrößen nicht reparierbarer Systeme

Sicherheitskenngrößen lassen sich in Analogie zu den Zuverlässigkeitskenngrößen definieren, betrachtet werden dabei alle sicherheitsrelevanten Ereignisse, die eine Gefährdung bewirken [Mey82].

Die Tabelle A.2 gibt eine Gegenüberstellung der sicherheits- und zuverlässigkeitstechnischen Kenngrößen.

Tabelle A.2: Sicherheits- und Zuverlässigkeitskenngrößen nicht reparierbarer Systeme

Sicherheit		Zuverlässigkeit	
Kenngröße	Formelzeichen	Kenngröße	Formelzeichen
Gefährdungswahrscheinlichkeit	$G(t)$	Ausfallwahrscheinlichkeit	$F(t)$
Sicherheitswahrscheinlichkeit	$S(t)$	Überlebenswahrscheinlichkeit	$R(t)$
Gefährdungsdichte	$g(t)$	Ausfalldichte	$f(t)$
Gefährdungsrate	$\rho(t)$	Ausfallrate	$\lambda(t)$

Entsprechend dem Zusammenhang der Zuverlässigkeitskenngrößen (Tabelle A.1) lässt sich der Zusammenhang der Sicherheitskenngrößen darstellen (Tabelle A.3).

Tabelle A.3: Zusammenhang zwischen den Sicherheitskenngrößen nicht reparierbarer Systeme [Mey82]

	Gefährdungswahrscheinlichkeit $G(t)$	Sicherheitswahrscheinlichkeit $S(t)$	Gefährdungsdichte $g(t)$	Gefährdungsrate $\rho(t)$
$G(t)$	-----	$1 - S(t)$	$\int_0^t g(\tau) d\tau$	$1 - \exp\left(-\int_0^t \rho(\tau) d\tau\right)$
$S(t)$	$1 - G(t)$	-----	$\int_t^\infty g(\tau) d\tau$	$\exp\left(-\int_0^t \rho(\tau) d\tau\right)$
$g(t)$	$\frac{dG(t)}{dt}$	$-\frac{dS(t)}{dt}$	-----	$\rho(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t \rho(\tau) d\tau\right)$
$\rho(t)$	$\frac{1}{1-G(t)} \cdot \frac{dG(t)}{dt}$	$-\frac{1}{S(t)} \cdot \frac{dS(t)}{dt}$	$\frac{g(t)}{\int_t^\infty g(\tau) d\tau}$	-----

Die bedingten Sicherheitskenngrößen lassen sich analog zu den bedingten Zuverlässigkeitskenngrößen (Gleichung (A.3.17) bis Gleichung (A.3.20)) ermitteln.

A.3.4 Empirische Kenngrößen

Auf Basis erhobener Daten lassen sich empirische Kenngrößen bestimmen. Die Vorgehensweise wird anhand der empirischen Zuverlässigkeitskenngrößen vorgestellt und ist auf den Bereich der Sicherheitstheorie übertragbar.

Kennzeichnet n_o eine hinreichend große Anzahl gleicher Einheiten einer Grundgesamtheit und $n_a(t)$ die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t beobachteten Ausfälle, so berechnet sich die Anzahl der betriebsbereiten Einheiten $n_b(t)$ zu

$$n_b(t) = n_o - n_a(t). \quad (\text{A.3.21})$$

Empirische Ausfallwahrscheinlichkeit

Die empirische Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht

$$\tilde{F}(t) = \frac{n_a(t)}{n_o}. \quad (\text{A.3.22})$$

Empirische Überlebenswahrscheinlichkeit

Die komplementäre Größe heißt empirische Überlebenswahrscheinlichkeit und berechnet sich über

$$\tilde{R}(t) = \frac{n_b(t)}{n_o}. \quad (\text{A.3.23})$$

Empirische Ausfalldichte

Aus der empirischen Ausfallwahrscheinlichkeit folgt die empirische Ausfalldichte. Liegt t im i -ten Zeitintervall der Länge Δt_i , so kann die empirische Ausfalldichte als die Anzahl der im Zeitintervall Δt_i beobachteten Ausfälle $\Delta n_{a,i}$, bezogen auf die Gesamtanzahl n_o , interpretiert werden und entspricht

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{n_o} \cdot \frac{\Delta n_{a,i}}{\Delta t_i}. \quad (\text{A.3.24})$$

Empirische Ausfallrate

Liegt t im i -ten Zeitintervall der Länge Δt_i , so kann die empirische Ausfallrate als die Anzahl der im Zeitintervall Δt_i ausgefallenen Einheiten $\Delta n_{a,i}$, bezogen auf die Menge der am Ende des Zeitintervalls noch betriebsbereiten Einheiten $n_b(t)$, interpretiert werden und lautet

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{1}{n_b(t)} \cdot \frac{\Delta n_{a,i}}{\Delta t_i}. \quad (\text{A.3.25})$$

Empirischer Erwartungswert

Der empirische Erwartungswert, die mittlere Lebensdauer, berechnet sich mit den gegebenen Realisierungen $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ nach Gleichung (A.3.1) zu

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i. \quad (\text{A.3.26})$$

A.3.5 Ausgewählte Verteilungsfunktionen

Im Folgenden werden die für diese Arbeit relevanten Verteilungsfunktionen vorgestellt. Es handelt sich hierbei sowohl um statistische als auch um spezielle Lebensdauer-Verteilungen.

Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable heißt gleichverteilt, mit den Parametern $a < b$, kurz $GL(a, b)$ -verteilt, wenn sie die Verteilungsdichte

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall \quad x \in \mathfrak{R} \text{ mit } a \leq x \leq b \quad (\text{A.3.27})$$

besitzt. Die Gleichverteilung findet insbesondere bei der Generierung von Zufallszahlen ihre Anwendung.

Für die bedingte Gleichverteilung mit $P(X \leq x \mid X > c)$ folgt die Verteilungsdichte

$$f(x \mid x > c) = \frac{1}{b-c} \quad \forall \quad x \in \mathfrak{R} \text{ mit } c \leq x \leq b. \quad (\text{A.3.28})$$

Normalverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X ist normalverteilt, kurz $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, wenn ihre Verteilungsdichte $f(x)$ der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall \quad x \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.3.29})$$

entspricht. Eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsgröße wird standard-normalverteilt genannt, mit dem Mittelwert $\mu = 0$ und der Varianz $\sigma^2 = 1$. Die Verteilungsdichte ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (\text{A.3.30})$$

Für die bedingte Normalverteilung mit $P(X \leq x \mid X > c)$ lautet die Verteilungsdichte

$$f(x \mid x > c) = \frac{1}{a \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall \quad x \in \mathfrak{R} \text{ mit } x \geq c \quad (\text{A.3.31})$$

und

$$a = \int_c^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (\text{A.3.32})$$

Aufgrund ihrer Definition ist die Normalverteilung an und für sich nicht zur Beschreibung der Lebensdauer geeignet, da die Zufallsvariable auch Werte $x < 0$ annehmen kann. Die Normalverteilung lässt sich aber dennoch anwenden, wenn die Verteilungsdichte mit $c = 0$ einseitig auf das Intervall $[0, \infty)$ gestutzt wird [Har98]. Für den Fall, dass die Standardabweichung sehr viel kleiner als der Mittelwert ist, somit $\sigma \ll \mu$, ist das Integral

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \approx 0 \quad (\text{A.3.33})$$

vernachlässigbar und die übliche Verteilungsdichte der Normalverteilung kann verwendet werden.

Logarithmische Normalverteilung

Folgen die logarithmierten Zufallsvariablen einer Normalverteilung, so ist die Zufallsgröße X logarithmisch-normalverteilt, mit $\mu \in \mathfrak{R}$ und $\sigma > 0$, kurz $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

Die Zufallsgröße kann dann keine negativen Werte annehmen, so dass die Normierung für Lebensdauerverteilungen mit

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0 \quad (\text{A.3.34})$$

gegeben ist. Die Verteilungsdichte lautet

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall \quad x > 0. \quad (\text{A.3.35})$$

Da die Verteilungsdichte der Logarithmischen Normalverteilung mit wachsendem x schnell ansteigt und nach Erreichen des Maximums wieder abnimmt, können mit der Logarithmischen Normalverteilung Betriebsdauern, Fahrleistungsdauern, Instandsetzungszeiten, zeitraffende Prüfungen etc. gut beschrieben werden [Mey03].

Für die bedingte Logarithmische Normalverteilung mit $P(X \leq x \mid X > c)$ folgt die Verteilungsdichte

$$f(x \mid x > c) = \frac{1}{a \cdot \sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall \quad x \geq c \text{ mit } x > 0 \quad (\text{A.3.36})$$

und

$$a = \int_c^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (\text{A.3.37})$$

Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable heißt exponentialverteilt, kurz EXP(λ)-verteilt, mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn sie die Verteilungsdichte

$$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) \quad \forall \quad x \geq 0 \quad (\text{A.3.38})$$

besitzt.

Da die Ausfallrate der Exponentialverteilung konstant verläuft, d.h. das Ausfallverhalten stochastisch ist, wird die Exponentialverteilung aufgrund der damit verbundenen Unabhängigkeit vom Alter der betrachteten Komponente auch als „gedächtnislos“ bezeichnet. Sie ist damit zur Beschreibung der Lebensdauer realer Komponenten nur bedingt anwendbar.

Für die bedingte Exponentialverteilung mit $P(X \leq x | X > c)$ folgt die Verteilungsdichte

$$f(x | x > c) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot (x - c)) \quad \forall \quad x \geq c. \quad (\text{A.3.39})$$

Weibull-Verteilung

Die Verteilungsdichte einer Weibull-Verteilung $W(\alpha, \beta)$ mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ ist mit

$$f(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot \exp(-\alpha \cdot x^{\beta}) \quad \forall \quad x > 0 \quad (\text{A.3.40})$$

gegeben. Durch eine geeignete Wahl des Parameters β lassen sich alle Bereiche der bekannten Badewannenkurve darstellen [Mey03]. Die Weibull-Verteilung eignet sich demnach sehr gut zur Beschreibung von Lebensdauern mit Frühausfall- ($\beta < 1$) und Spätausfallverhalten ($\beta > 1$). Mit $\beta = 1$ geht die Weibull-Verteilung in die Exponentialverteilung über.

Für die bedingte Weibull-Verteilung mit $P(X \leq x | X > c)$ folgt die Verteilungsdichte

$$f(x | x > c) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot \exp(-\alpha \cdot (x^{\beta} - c^{\beta})) \quad \forall \quad x \geq c \text{ mit } x > 0. \quad (\text{A.3.41})$$

A.3.6 Angewandte Belastungsmodelle

Mit dem Arrhenius-Modell lassen sich Fehlermechanismen wie Korrosion, Ionenkontamination und Elektromigration abbilden. Ursache der Fehler ist dabei überwiegend der Temperatureinfluss [NEC98]. Die Temperaturabhängigkeit der Reaktionsge-

schwindigkeit v lässt sich mit der Arrhenius-Gleichung beschreiben [VDA00]. Es gilt die Beziehung

$$v = v_0 \cdot \exp\left(-\frac{Ea}{k \cdot \theta}\right) \quad (\text{A.3.42})$$

mit:

v_0 : Proportionalitätskonstante (bauteil- und fehlerspezifisch)

Ea : Aktivierungsenergie (bauteil- und fehlerspezifisch) (in eV)

k : Boltzmannkonstante ($k = 8,617 \cdot 10^{-5}$ eV/Kelvin)

θ : absolute Temperatur (in Kelvin).

Wird das Arrhenius-Modell in den Bereich der Zuverlässigkeits- und Sicherheitstheorie übertragen, so kann eine messbare Lebensdauergröße (MTBF, η , etc.) mit der Beziehung

$$L(\theta) = C \cdot \exp\left(\frac{Ea}{k \cdot \theta}\right) \quad (\text{A.3.43})$$

beschrieben werden [Nel90] mit:

$L(\theta)$: messbare Lebensdauergröße

C : Modellparameter (bauteil- und fehlerspezifisch).

Das Ausfallverhalten einer $W(\alpha, \beta)$ -verteilten Komponente sei auf Basis von Erprobungs- oder Felderfahrungen bei einer anliegenden Temperatur θ_0 bekannt. Die Parameter η_0 und α_0 berechnen sich mit Gleichung (A.3.43) zu

$$\eta_0 = L(\theta_0) = C \cdot \exp\left(\frac{Ea}{k \cdot \theta_0}\right) \text{ und} \quad (\text{A.3.44})$$

$$\alpha_0 = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^\beta = \left(\frac{1}{C} \cdot \exp\left(-\frac{Ea}{k \cdot \theta_0}\right)\right)^\beta. \quad (\text{A.3.45})$$

Wird bei einer anliegenden Temperatur θ_0 die Zeit $t_0^{(0)}$ beobachtet, so lässt sich diese Zeit in eine äquivalente Zeit $t_0^{(1)}$ bei anliegender Belastung θ_1 umrechnen. Mit

$$F(t_0^{(0)} | \theta_0) = F(t_0^{(1)} | \theta_1) \text{ gilt} \quad (\text{A.3.46})$$

$$t_0^{(1)} = t_0^{(0)} \cdot \exp\left(\frac{Ea}{k} \cdot \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\right). \quad (\text{A.3.47})$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit entsprechend einer Weibull-Verteilung ergibt sich dann zu

$$F(t_o^{(1)} | \theta_1) = 1 - \exp(-\alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta_1)^\beta \cdot t_o^{(1)\beta}). \quad (\text{A.3.48})$$

Mit der gegebenen Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet sich die Ausfalldichte zu

$$f(t_o^{(1)} | \theta_1) = \alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta_1)^\beta \cdot \beta \cdot t_o^{(1)\beta-1} \cdot \exp(-\alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta_1)^\beta \cdot t_o^{(1)\beta}). \quad (\text{A.3.49})$$

Die zugehörige Ausfallrate lautet

$$\lambda(t_o^{(1)} | \theta_1) = \alpha_o \cdot B(\theta_o, \theta_1)^\beta \cdot \beta \cdot t_o^{(1)\beta-1} = \alpha_1 \cdot \beta \cdot t_o^{(1)\beta-1}. \quad (\text{A.3.50})$$

Dabei entspricht $t_o^{(1)}$ der auf θ_1 normierten Zeitdauer $t_o^{(0)}$ und $B(\theta_o, \theta_1)$ dem Beschleunigungsfaktor, für den gilt:

$$B(\theta_o, \theta_1) = \exp\left(\frac{Ea}{k} \cdot \left(\frac{1}{\theta_o} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right). \quad (\text{A.3.51})$$

A.3.7 Schadensakkumulation

Wird ein Bauteil infolge einer erhöhten Temperatur zusätzlich belastet, so hat diese Belastung einen Einfluss auf das zukünftige Ausfallverhalten. Es ist demnach erforderlich, die akkumulierte Schädigung auf Basis aller erfahrenen Belastungen zu bestimmen. Im Folgenden wird ein Schadensakkumulationsmodell nach Nelson [Nel90] vorgestellt. Wesentliche Modellannahmen sind:

- Das Ausfallverhalten hängt von der gegenwärtigen akkumulierten Schädigung ab.
- Die akkumulierte Schädigung hängt von den Expositionszeiten ab und ist unabhängig von der Reihenfolge der einzelnen Belastungen.

Gegeben seien die beobachteten {Zeit, Temperatur}-Paare $\{\{t_o, \theta_o\}, \{t_1, \theta_1\}, \dots, \{t_i, \theta_i\}, \dots, \{t_n, \theta_n\}\}$. Die akkumulierte Schädigung, gegeben durch die Lebensdauer zum Zeitpunkt $t_n^{(n)}$, bei anliegender Temperaturbelastung θ_n , berechnet sich dann auf Basis der Beobachtungen zu

$$t_n^{(n)} = t_n^{(n-1)} \cdot B(\theta_n, \theta_{n-1}) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot B(\theta_n, \theta_{i-1}) \text{ für den Fall } t_o = 0. \quad (\text{A.3.52})$$

Es erfolgt somit eine Transformation aus einem Original-Zeitbereich \underline{t} in einen, auf θ_n normierten, Äquivalenz-Zeitbereich $\underline{t}^{(n)}$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_n^{(n)} | \theta_n)$ berechnet sich dann entsprechend der Gleichung (A.3.48).