

**Zur Erfassung hygrothermischer Einflüsse auf
das nichtlineare Trag- und Schädigungsverhalten
von Stahlbetonflächentragwerken**

Dissertation

zur

**Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)**

der

**Abteilung Bauingenieurwesen
im Fachbereich D an der
Bergischen Universität Wuppertal**

von

Ralf Wörmann

aus Dülmen

2004

Veröffentlicht als Heft 2 in der Schriftenreihe des
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau
Fachbereich D, Abteilung Bauingenieurwesen
Bergische Universität Wuppertal

Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Bergische Universität Wuppertal

Organisation und Verwaltung

Dipl.-Ing. W. Hammer
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Bergische Universität Wuppertal
Pauluskirchstraße 7
42285 Wuppertal
Telefon: (0202) 439-4209

© **Dr.-Ing. Ralf Wörmann**
Sturhanweg 5a
44388 Dortmund

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Kurzfassung

Während ihrer Nutzungsdauer werden Stahlbetontragwerke neben den mechanischen Belastungen auch durch weitere umgebungs- und betriebsbedingte Einwirkungen beansprucht. Die Schadensdiagnostik an bestehenden Konstruktionen zeigt, dass Schädigungen häufig durch ein Zusammenwirken der dynamischen Einwirkungen aus Wind und Verkehr mit den hygrysch und thermisch induzierten Zwang- und Eigenbeanspruchungen verursacht werden.

Zur numerischen Simulation derartiger Schädigungsprozesse in Stahlbetonflächentragwerken wird eine gekoppelte thermo-hygro-mechanische Materialformulierung entwickelt und unter Verwendung der Finite-Element-Methode umgesetzt. Als Ausgangspunkt dient dabei eine zeitinvariante Stahlbetonmodellierung, welche die wesentlichen Phänomene der physikalischen Nichtlinearitäten erfasst. Als Analysekonzept wird eine zeitvariante Multi-Level-Iterations-Strategie verwendet. Zur Beschreibung der zeitlich und örtlich veränderlichen Feuchte- und Temperaturverteilung im Beton werden gekoppelte Bilanzgleichungen formuliert. Um die in Flächentragwerken überwiegend in Dickenrichtung verlaufenden Ausgleichsvorgänge abzubilden, wird daraus ein Berechnungsverfahren abgeleitet und in ein neu entwickeltes, auch eigenständig lauffähiges Programmmodul implementiert. Die resultierenden Zustandsgrößen dienen als Grundlage zur Bestimmung der thermisch und hygrysch induzierten Verzerrungen und resultierenden Beanspruchungen des Tragwerks. Unter der Annahme einer additiven Zerlegung der Gesamtverzerrungen werden diese in der Simulationstechnik auf der Materialpunktebene erfasst. Eine derartige Vorgehensweise ermöglicht, neben den Zwangbeanspruchungen auch die ebenfalls auftretenden Eigenspannungen in der Modellierung zu berücksichtigen. Die Einbindung der Materialformulierung erfolgt in ein vierknotiges, isoparametrisches und schubweiches Schalenelement, welches auf einer mittelflächenorientierten, rotationsvariablen behafteten Schalentheorie basiert.

Die Modellvorstellungen werden anhand von aussagekräftigen Berechnungsbeispielen verifiziert. Durch die Anwendung des Simulationskonzeptes zur Untersuchung der thermo-hygro-mechanischen Schädigungsentwicklung einer Kühlturmschale und der thermomechanischen Schädigungsentwicklung eines Spannbetonturms einer Windenergieanlage wird ein möglicher Anwendungsbereich aufgezeigt. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass die lastunabhängigen Einwirkungen nicht nur die Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit derartiger Tragwerke beeinträchtigen, sondern auch Auswirkungen auf die Tragfähigkeit haben können. Dabei liefern globale Schädigungsindikatoren einen zusätzlichen Eindruck über den Verlauf schädigungsbedingter Steifigkeitsdegradationen.

Derartige Schädigungsanalysen können dazu genutzt werden, Stahlbetontragwerke bereits in der Planungsphase schädigungsresistenter und damit dauerhafter auszulegen. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, sie auch zur Beurteilung der Effektivität von geplanten Sanierungsmaßnahmen bereits geschädigter Tragwerke einzusetzen und deren Restlebensdauer wirklichkeitsnah zu prognostizieren.

Abstract

Reinforced concrete structures are subjected to environmental and operational loads in addition to mechanical loads during their service life. Investigations of damages on existing structures often conclude that in addition to dynamic loads from wind and traffic also moisture and thermal induced stresses have initiated the damages.

For the numerical simulation of such damaging processes in reinforced concrete shell structures, a coupled thermo-hygro-mechanical material formulation is developed and implemented in a finite-element-system. The basis is a time-invariant model for reinforced concrete subjected to short-term loads, including the essential physical non-linear features. A time-variant multi-level-iteration-strategy is applied as an analysis concept. Coupled balance equations are formulated to determine the temperature and moisture distribution, which vary over time and location in the concrete. A calculation method is developed as a stand-alone program module, to simulate the balance processes in shell structures, which mostly occur in thickness direction. The resulting state variables are being used to determine the thermal and moisture induced strains and resulting stresses on the material point level, under the assumption of the decomposition of the total strains. This allows to consider the existing eigenstresses in addition to the constraint effects in the modeling of such a procedure. The integration of the material formulation takes place in a four-noded, isoparametric, REISSNER-MINDLIN-type finite shell element, based on a middle-surface orientated shell theory with rotational variables.

The model components are verified by means of significant calculation examples. A possible field of application is shown, first by the investigation of the damage evolution in a cooling tower shell caused by thermo-hygro-mechanical loads, second by the damage evolution in a prestressed concrete tower of a wind turbine caused by thermo-mechanical loads. The results demonstrate, that the load-independent stresses do considerably reduce the serviceability and durability of such structures, but also may reduce their load bearing capacity. The damage-induced stiffness degradation becomes transparent by global indicators.

The model may be used in the design stage to predict damages on reinforced structures and thus compensate the impact in order to ensure a long life. Furthermore it can be applied to analyse the efficiency of maintenance work of already damaged structures and to predict the remaining service life.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehr- und Forschungsgebiet für Statik und Dynamik der Tragwerke der Bergischen Universität Wuppertal und wurde vom dortigen Fachbereich für Bauingenieurwesen, Maschinenbau und Sicherheitstechnik als Dissertation anerkannt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. R. Harte für die wissenschaftliche Betreuung und die Anregung zu dieser Arbeit. Die durch ihn geprägte angenehme Arbeitsatmosphäre, seine ständige Diskussionsbereitschaft sowie fördernde Unterstützung trug maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Ebenfalls gilt mein herzlicher Dank Herrn Professor Dr.-Ing. L. Lohaus für das entgegengebrachte Interesse an der Arbeit und die Übernahme des zweiten Berichtes.

Weiterhin bedanke ich mich herzlich bei Herrn em. Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c.mult. K.-H. Laermann für die zahlreichen motivierenden Gespräche, die wertvollen Ratschläge und die Übernahme des dritten Berichtes.

Herrn Professor Dr.-Ing. W. Zahlten danke ich sehr für die Hilfestellungen bei programmtechnischen Problemen und die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Darüber hinaus gilt mein Dank allen Kollegen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehr- und Forschungsgebietes, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit hilfreich zur Seite gestanden haben, hervorheben möchte ich insbesondere Herrn Dr.-Ing. M. Andres, Frau B. Lepine, Herrn cand.-ing. T. Mannsfeld und Frau Dipl.-Ing. K. Stopp.

Schließlich gilt mein besonderer Dank meiner Freundin Claudia und meiner Familie, die mir in allen Phasen meiner Arbeit stets motivierend und verständnisvoll zur Seite standen.

Wuppertal, im Juni 2004

Ralf Wörmann

Tag der Einreichung: 02. März 2004

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Mai 2004

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. R. Harte
Prof. Dr.-Ing. L. Lohaus
em. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c.mult. K.-H. Laermann

Vorsitzender der Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. W. Zahlten

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Einführung in die Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung der Arbeit	2
1.3 Gliederung	3
2 Phänomenologie des Stahlbetons	5
2.1 Einführung	5
2.2 Beton	6
2.2.1 Allgemeines	6
2.2.2 Zusammensetzung und Entstehung	7
2.2.3 Porosität und Porengrößenverteilung	8
2.2.4 Mechanisches Kurzzeitverhalten	10
2.2.5 Thermisches Verhalten	14
2.2.6 Hygrisches Verhalten	17
2.2.7 Schwinden und Quellen	22
2.2.8 Kriechen und Relaxation	26
2.3 Betonstahl	28
2.3.1 Mechanisches Verhalten	28
2.3.2 Thermisches und hygrisches Verhalten	30
2.4 Verbund und Tension-Stiffening	30
3 Modellierung des Stahlbetons	33
3.1 Zeitinvariante Modellierung des Betons	33
3.1.1 Konzept von DARWIN & PECKNOLD	34
3.1.2 Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen	36

3.1.3	Biaxiale Versagensflächen	39
3.1.4	Rissverhalten	41
3.1.5	Tension-Stiffening-Effekt und Rissbreitenbestimmung	42
3.2	Hygrothermische Modellierung des Betons	46
3.2.1	Einführung	46
3.2.2	Bilanzgleichungen	47
3.2.3	Rand- und Anfangsbedingungen	53
3.2.4	Modellierung der Stoffkennwerte	56
3.3	Zeitvariante Modellierung des Betons	63
3.3.1	Allgemeines	64
3.3.2	Thermische Verzerrungen	64
3.3.3	Schwinden und Quellen	65
3.3.4	Kriechen	68
3.4	Betonstahlmodellierung	73
4	Kontinuumsmechanische und schalentheoretische Grundlagen	75
4.1	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	75
4.1.1	Kinematik	76
4.1.2	Äußere Lasten und Spannungen	81
4.1.3	Bilanzgleichungen	83
4.1.4	Materialgesetze und Randbedingungen	86
4.1.5	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	87
4.2	Grundgleichungen der Schalentheorie	89
4.2.1	Übersicht	89
4.2.2	Geometrie und Kinematik	91
4.2.3	Verzerrungsmaße und Schnittgrößen	95
4.2.4	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	97
4.2.5	Linearisierung	98
4.2.6	Berücksichtigung von lastunabhängigen Einwirkungen	99
5	Finite-Element-Modellierung	101
5.1	Grundlagen	101
5.2	Schalenelementformulierung	102
5.2.1	Isoparametrisches Konzept	102
5.2.2	Assumed-Natural-Strain Konzept	105

5.2.3	Multi-layered Konzept	105
5.3	Numerische Umsetzung des hygrothermischen Modells	107
5.3.1	Das Anfangsrandwertproblem	108
5.3.2	Übergang zur schwachen Formulierung	109
5.3.3	Konsistente Linearisierung	111
5.3.4	Raum-Zeit-Diskretisierung	111
5.3.5	Die eingesetzten Gleichungslöser	117
5.3.6	Konvergenzsicherung	122
5.3.7	Adaptive Schrittenweitensteuerung	123
5.3.8	Implementierung in das FE-System	124
5.4	Nichtlineare Strukturanalyse	128
5.4.1	Normative Vorgaben	128
5.4.2	Verwendete Vorgehensweise	129
5.4.3	Zeitabhängige Multi-Level-Iterations-Strategie	131
5.4.4	Pfadverfolgungsalgorithmen	135
5.4.5	Aspekte der numerischen Umsetzung der zeitvarianten Modellierung	137
5.5	Nichtlineare Schädigungsanalyse	142
5.5.1	Problembeschreibung	142
5.5.2	Grundgleichungen der Schädigungsanalyse	143
5.5.3	Definition globaler Schädigungsindikatoren	144
6	Numerische Verifikation der Modelle	147
6.1	Zeitinvariante mechanische Formulierung	147
6.1.1	Stahlbetoneinfeldträger unter Einzellast	148
6.1.2	Punktgestützte Stahlbetonplatte unter Einzellast	149
6.1.3	Naviergelagerte Stahlbetonplatte unter Flächenlast	151
6.1.4	Bewertung	152
6.2	Hygrothermische Formulierung	152
6.2.1	Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung	153
6.2.2	Betonquerschnitt unter hygrischer Einwirkung	156
6.2.3	Einseitige Austrocknung eines Betonquerschnitts	159
6.2.4	Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung .	160
6.2.5	Schwind- und Quellversuche an Betonzylindern	164
6.2.6	Bewertung	168

6.3	Zeitvariante Formulierung	168
6.3.1	Langzeitbeanspruchter Stahlbetonbalken unter Flächenlast	169
6.3.2	Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast	173
6.3.3	Betonkragstruktur unter Feuchtegradient	177
6.3.4	Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung	180
6.3.5	Bewertung	184
7	Numerische Anwendungen	187
7.1	Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms	187
7.1.1	Entwurfsproblematik	187
7.1.2	Vorgaben nach der VGB-Richtlinie	188
7.1.3	Modellierung	190
7.1.4	Untersuchte Einwirkungskombinationen	194
7.1.5	Ergebnisdarstellung	196
7.1.6	Bewertung	209
7.2	Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen einer Windenergieanlage	211
7.2.1	Entwurfsproblematik bei Windenergieanlagen	211
7.2.2	Einwirkungen nach der DIBT-Richtlinie	212
7.2.3	Dimensionierung und lineare Untersuchung	214
7.2.4	Untersuchung des progressiven Schädigungsverhaltens	217
8	Zusammenfassung und Ausblick	223
8.1	Zusammenfassung	223
8.2	Ausblick	225
A	Modellparameter	227
B	Vorhersageverfahren	229
B.1	Schwinden nach DIN 1045-1	229
B.2	Kriechen nach DIN 1045-1	231
C	Kinematische Beziehungen der Schale	235
	Literaturverzeichnis	237
	Normen und Richtlinien	253

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

$\ \dots\ $	Norm
(\dots)	Zeitableitung, Rate
$(\dots)^{<>}, (\dots)^{()}$	physikalische und symmetrische Komponenten
d, ∂	Differential und partielle Ableitung
\det	Determinante
div, grad	Divergenz- und Gradientenbildung
D	Richtungs- oder GATEAUX-Ableitung
L	Linearisierungsoperator
\min, \max	Minimum und Maximum
δ, Δ	Variation und Inkrement

Tensoralgebra

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{A} \mathbf{b}$	einfache Überschiebung zwischen Tensor und Vektor
$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	einfache Überschiebung zweier Tensoren
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	doppelte Überschiebung zweier Tensoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	dyadisches Produkt zweier Tensoren
$\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^{-1}$	transponierter und inverser Tensor
$\mathbf{A}_{,i}$	partielle Ableitung eines Tensors nach den Koordinaten θ^i
\mathbf{I}	Einheitstensor

Kontinuumsmechanik

$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_T$	Körper im Referenz- und Momentanzustand
\mathbf{C}, \mathbf{b}	rechter und linker CAUCHY-GREEN-Tensor
\mathbf{e}_i	Basisvektoren eines orthonormierten Ortskoordinatensystems
\mathbb{E}^3	EUKLID'scher Vektorraum
\mathbf{F}	materieller Deformationsgradient
G, g	Determinante des materiellen und räumlichen Metrikensors
\mathbf{G}, \mathbf{g}	materieller und räumlicher Metrikensor
G_{ij}, g_{ij}	kovariante Metrikoeffizienten des materiellen und räumlichen Metrikensors

$\mathbf{G}_i, \mathbf{g}_i$	kovariante Basisvektoren der materiellen und räumlichen Metrik
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
J	JACOBI-Determinante
m_0, m	Masse eines Körpers in der Referenz- und Momentankonfiguration
\mathbf{N}, \mathbf{n}	Normaleneinheitsvektor in der Referenz- und Momentankonfiguration
\mathcal{P}	Punkt des EUKLID'schen Raums
\mathbf{P}, \mathbf{S}	1. und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
\mathbf{T}, \mathbf{t}	Pseudo-Spannungs- und Spannungsvektor
\mathbf{u}, \mathbf{v}	Verschiebungs- und Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{U}, \mathbf{v}	Rechts- und Links-Streck-Tensor
dV, dv	materielles und räumliches Volumenelement
$\delta^*W_{int}, \delta^*W_{ext}$	innere und äußere virtuelle Arbeit
X^i, x^i	Ortskoordinaten der Referenz- und Momentankonfiguration
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektor der Referenz- und Momentankonfiguration
Γ_0, Γ_T	Rand eines Körpers im Referenz- und Momentanzustand
θ^i	krummlinige (Teilchen-) Koordinaten
ϱ_0, ϱ	Dichte eines Körpers in der Referenz- und Momentankonfiguration
σ	CAUCHY'scher Spannungsvektor
φ	Deformation

Schalentheorie

$(\dots)^h, (\dots)_e$	approximierte und elementweise Größe
dA, da	materielles und räumliches Flächenelement der Schalenmittelfläche
A	Metrikdeterminante
$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_T$	Referenzfläche im Referenz- und Momentanzustand
$\mathbf{A}_i, \mathbf{a}_i$	kovariante Basisvektoren der unverformten und verformten Schalenmittelfläche
$A_{\alpha\beta}, A^{\alpha\beta}$	ko- und kontravariante Metrikoeffizienten der Schalenmittelfläche
$B_{\alpha\beta}, B^{\beta}_{\alpha}$	ko- und gemischtvariante Komponenten des Krümmungstensors
$\mathbf{c}, \boldsymbol{\omega}$	Flächenmomentenvektor und Rotationsvektor
\mathbf{D}, \mathbf{d}	Direktor der unverformten und verformten Schalenmittelfläche mit Einheitslänge
$\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{S}}$	materieller 2D Verzerrungstensor und materielle 2D Schnittgrößen
$\Delta h_N, \Delta h_M$	konstante und lineare Feuchtedifferenz
H	Höhe des Schalenkontinuums
$H^{\alpha\beta\rho\lambda}$	zweidimensionaler elastischer Werkstofftensor
$M^{\alpha\beta}$	Momententensor
$N^{\alpha\beta}, \tilde{N}^{\alpha\beta}$	Normalkraft- und Pseudo-Normalkrafttensor
$\mathbf{n}^{<\alpha>}, \mathbf{m}^{<\alpha>}$	Schnittgrößenvektoren
$Q^\alpha, \tilde{Q}^{\alpha\beta}$	Querkraft- und Pseudo-Querkrafttensor
$\Delta T_N, \Delta T_M$	konstante und lineare Temperaturdifferenz
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektor der unverformten und verformten Schale
$\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)}$	Ortsvektor der unverformten und verformten Schalenmittelfläche
$\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}$	Direktor der unverformten und verformten Schalenmittelfläche

\mathbf{Z}, \mathbf{z}	materieller und räumlicher Schalenshifter
$\alpha_{\alpha\beta}, \beta_{\alpha\beta}$	1. und 2. Verzerrungstensor
γ_{α}	Schubverzerrungstensor
θ^{α}	krummlinige Koordinaten der Schalenmittelfläche
θ^3	Dickenkoordinate des Schalenkontinuums
λ, χ	Dickenfaktoren
ξ^i	normierte Koordinaten
$\Psi_{\alpha}, \psi_{\alpha}$	EULER-Winkel der unverformten und verformten Konfiguration

Hygrothermik

$(\dots)_{en}, (\dots)_{sur}$	Umgebungs- und Oberflächengröße
$(\dots)_{tr}, (\dots)_{sat}$	Größe im trockenen und wassergesättigten Zustand
$(\dots)_0$	initiale Größe
c_c	spezifische Wärmekapazität des Betons
c_h	hygrische Kapazität
D_D	Wasserdampfdiffusionskoeffizient
D_h	hygrischer Diffusionskoeffizient
D_w	Kapillartransportkoeffizient
d_{eq}	äquivalenter Porendurchmesser
h	relative Feuchte
m	Hydratationsgrad
p, p_{sat}	Wasserdampfpartial- und Wasserdampfsättigungsdruck
p_k	Kapillardruck
p_{k1}, p_{k2}	Approximationsfaktoren
p_v, p_l	Gas- und Flüssigkeitsdruck
P	Luftdruck
q_{nh}	normal zur Oberfläche transportierte Feuchtemenge
q_{nt}	normal zur Oberfläche transportierte Wärmeenergie
\mathbf{q}_h	Feuchtestromdichte
\mathbf{q}_t	Wärmestromdichte
$\mathbf{q}_v, \mathbf{q}_l$	Dampfdiffusions- und Flüssigkeitsstromdichte
Q_h	Feuchtequellen bzw. -senken
Q_t	Wärmequellen bzw. -senken
r_k	Kapillarradius
R_v	spezielle Gaskonstante von Wasserdampf
S_h	Sättigungsgrad
T	absolute Temperatur in Kelvin
w	Wassergehalt
w_{sat}	freie Wassersättigung
$\alpha_{\dot{u}}^h$	Feuchteübergangskoeffizient
$\alpha_{\dot{u}}^t$	Wärmeübergangskoeffizient
δ_L	Diffusionskoeffizient der Luft
δ_p	Wasserdampfpermeabilität
ε	Emissivität

ϑ	Temperatur
λ_h	hygrische Leitfähigkeit
λ_t	thermische Leitfähigkeit
μ	materialspezifische Diffusionswiderstandszahl
ρ_c	Trockenrohichte des Betons
ρ_w	Dichte des Wassers
σ	STEFAN/BOLTZMANN-Konstante
τ_w	wirksames Betonalter
ϕ	Porosität
ψ	spezifische Wärmeenergie
ω	Oberflächenspannung des Wassers

Betonmodellierung

C_{ijkl}	Werkstofftensor
E_{cm}	mittlerer Elastizitätsmodul
E_{c0}, E_{cS}	Ursprungselastizitätsmodul und Sekantenelastizitätsmodul
E_i	Elastizitätsmodul in i-Richtung
f_c	Betondruckfestigkeit
f_{ck}, f_{cm}	charakteristischer Wert und Mittelwert der Zylinderdruckfestigkeit
f_{cR}	rechnerischer Mittelwert der Zylinderdruckfestigkeit des Betons bei nicht-linearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung nach DIN 1045-1 (2001)
f_{ct}	zentrische Betonzugfestigkeit
g_{cl}	volumenspezifische Zerstauchungsenergie in der lokalisierten Zone
g_{cl}^*	volumenspezifische Zerstauchungsenergie für einen bestimmten Integrationspunkt
G	Schubmodul
G_{cl}	lokalisierte Zerstauchungsenergie
h_{cl}	Breite der lokalisierten Zone beim Druckversagen des Betons
J, C	Kriechfunktion und -maß
l_{eq}	äquivalente Länge
t_s, t_0	Betalter bei Schwind- und Belastungsbeginn
α_{sh}, α_{sw}	hygrische Ausdehnungskoeffizienten
α_t	thermischer Ausdehnungskoeffizient
γ_R	Teilsicherheitsbeiwert für den Systemwiderstand bei nichtlinearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung nach DIN 1045-1 (2001)
γ_{12}	Schubverzerrung
ε_{cu}	Betonbruchdehnung
ε_{c1}	Betondehnung bei Erreichen der maximalen Druckspannung
ε_{c1u}	Betondehnung bei Versagen nach DIN 1045-1 (2001)
ε_{ic}	äquivalente einaxiale Dehnung zur maximalen Druckspannung in i-Richtung
ε_{iu}	äquivalente einaxiale Dehnung in i-Richtung
$\varepsilon_c^{el}, \varepsilon_c^{pl}$	elastische und plastische Verzerrung des Betons
$\varepsilon_c^{cr}, \varepsilon_c^{ges}$	Kriech- und Gesamtverzerrung des Beton

$\varepsilon_c^I, \varepsilon_c^z$	instantane und zeitabhängige Verzerrung des Betons
$\varepsilon_c^{sh}, \varepsilon_c^{th}$	hygrische und thermische Verzerrung des Betons
$\varepsilon_c^0, \varepsilon_c^\sigma$	lastunabhängige und lastabhängige Verzerrung des Betons
$\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$	Dehnungs- und Spannungstensor
ν	Querdehnzahl
σ_i	Betonspannung in i-Richtung
σ_{ic}	maximale Druckspannung in i-Richtung
τ_{12}	Schubspannung

Stahlmodellierung

A_s, a_s	Querschnittsfläche der Bewehrung
E_s, E_h	Elastizitäts- und Verfestigungsmodul des Stahls
f_t, f_y	Zugfestigkeit und Streckgrenze des Stahls
ε_{su}	rechnerische Bruchdehnung des Stahls

Verbundmodellierung

$A_{c,eff}$	effektive Betonquerschnittsfläche
c_0, n	Vorfaktor und Exponent des Verbundgesetzes
l_t	Einleitungslänge
s	Schlupf (Relativverschiebung) zwischen Beton und Betonstahl
T_{um}	Verbundkraft
U_s	Umfang des Bewehrungsstahls
w, s_r	Rissbreite und -abstand
$\varepsilon_s^{\text{II}}$	Stahldehnung im Riss
$\varepsilon_{sm}, \sigma_{sm}$	mittlere Stahldehnung und -spannung
$\varepsilon_{sr}, \sigma_{sr}$	Stahldehnung und -spannung im Rissquerschnitt
ρ_{riss}	auf den Rissbereich bezogener Bewehrungsgrad
σ_c, σ_s	Beton- und Stahlspannung
τ_b, τ_f	Verbund- und Verbundreibungsspannung
τ_{max}	maximale Verbundspannung

Finite-Element-Formulierung

\square	Einheitsquadrat
A^e	Fläche des finiten Elements
\mathbf{A}, \mathbf{D}	reguläre Koeffizienten- und Diagonalmatrix
\mathbf{b}, \mathbf{x}	Vektor der rechten Seite und gesuchter Lösungsvektor
\mathbf{B}, \mathbf{G}	Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix und deren 1. Variation
$\mathbf{C}, \mathbf{M}, \mathbf{K}$	Dämpfungs-, Massen- und Steifigkeitsmatrix
$e_{\delta t}$	vektorieller globaler Verfahrensfehler
$\mathbf{f}_{int}, \mathbf{f}_{ext}$	Vektor der inneren Kräfte und der äußeren Knotenkraftgrößen
\mathbf{f}^z	äquivalente Langzeitknotenkräfte und -momente
\mathbf{F}^z	globale äquivalente Langzeitknotenkräfte und -momente

GLF, LFC, SLF	Gesamtlastfall, Lastfallkombination und Systemlastfall
$\mathbf{k}_G, \mathbf{k}_U$	Anfangsspannungs- und Verformungsmatrix
$\mathbf{k}_T, \mathbf{K}_T$	tangentiale Element- und Gesamtsteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_u	globale Anfangsverformungsmatrix
n_c, n_s	Anzahl der Beton- und Stahlschichten
n_e, n_{int}	Anzahl der Elemente und der Integrationspunkte je Element
n_{ht}	Anzahl der hygrothermischen Schichten
$\mathbf{n}^{\alpha\beta,z}, \mathbf{m}^{\alpha\beta,z}$	äquivalente Langzeitnormalkräfte und -momente
N_k	Formfunktion eines Knotens
$\mathbf{N}_\alpha, \mathbf{T}_\alpha$	Vektor der Ansatzfunktionen im Raum und in der Zeit
PF	Potenzfaktor
\mathbf{P}	Lastvektor
S	Schrittlängenfaktor
$\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}}, \ddot{\mathbf{V}}$	Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor
\mathbf{Z}	Vektor der Zustandsgrößen
$\epsilon_{act}, \epsilon_{tol}$	aktueller Verfahrensfehler und Toleranzgrenze
Λ	Eigenwert
$\sigma^{ij,z}$	äquivalente Langzeitspannung
Ω, Γ	Gebiet und Rand

Schädigungsmodellierung

d	den Deteriorationsprozess des Tragwerks beschreibenden Parametersatz
d, D	lokaler und globaler Schädigungsindex
D_i	eigenfrequenzbasierte Schädigungsindikatoren
D_{VEB}	energiebasierter Schädigungsindikator
$D_{\Delta V}$	verformungsbasierter Schädigungsindikator
f_i, ω_i	i-te Eigen- und Eigenkreisfrequenz
$\bar{\mathbf{W}}$	virtuelle Arbeitsmatrix
Φ_i	Vektor der i-ten Eigenschwingung
$\bar{\omega}$	fiktive Eigenfrequenz

Numerische Analysen

f_{p1}, f_{pn}	Rotor- und Blattdurchgangsfrequenz
G, H	Eigengewicht und hygrische Einwirkungen
k_s	Bettungsmodul
T^{OP}, T^S, T^W	Betriebstemperatur, Temperatur bei Sommer- und Winter-Stillstand
W	Windlast
w_e	Außendruckverteilung des Windes
φ	dynamischer Überhöhungsfaktor

Hier nicht aufgeführte Größen sind im Text erläutert.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Einführung in die Problemstellung

Zur wirklichkeitsnahen Untersuchung von Stahlbetonbauteilen werden in der Forschung schon seit längerer Zeit inelastische Analyseverfahren eingesetzt. Mit dem europäischen EC 2 (1992) und der deutschen DIN 1045-1 (2001) sind diese Verfahren auch erstmalig in die Berechnungspraxis des Stahl- und Spannbetonbaus eingeführt worden. Damit sind in Deutschland neben den linear-elastischen Berechnungsverfahren auch Verfahren nach der Plastizitätstheorie und nichtlineare Verfahren für die Schnittgrößenermittlung sowohl im Grenzzustand der Tragfähigkeit als auch im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit zugelassen. Damit gewinnen diese Verfahren auch in der Baupraxis zunehmend an Bedeutung.

Charakteristisch für den Verbundwerkstoff Stahlbeton ist sein ausgeprägt nichtlineares Verhalten. Durch die Zugrissbildung des Betons und das Fließen des Bewehrungsstahls entziehen sich höher beanspruchte Bereiche eines Tragwerks der Lastabtragung, woraus ein Umlagerungsprozess der inneren Spannungszustände auf weniger beanspruchte Bereiche resultiert. Gerade bei Flächentragwerken, die hochgradig statisch unbestimmte Strukturen darstellen und die über vielfältige Lastabtragungsmöglichkeiten verfügen, tritt dieses Verhalten sehr ausgeprägt in Erscheinung.

Neben der wirklichkeitsnäheren Abbildung der Verformungs- und Spannungszustände eines Tragwerks besitzt der Einsatz nichtlinearer Verfahren weitere Vorteile. Die zu einem bestimmten Belastungsniveau gehörende Steifigkeitsverteilung ist durch die inkrementelle Laststeigerung genauer bestimmbar, wodurch die vorliegenden Zwangbeanspruchungen realistischer erfasst werden können. Daneben wird die in der üblichen Bemessung vorhandene Inkonsistenz zwischen der linearen Schnittgrößenermittlung und der nichtlinearen Querschnittsbemessung überwunden. Schließlich kann das Lastabtragungs- und Verformungsverhalten für alle Laststufen abgebildet werden. Die tatsächlich vorhandene Traglast kann somit deutlich über derjenigen liegen, die nach einer linear-elastischen Schnittgrößenanalyse mit anschließender Bemessung für das Tragwerk zu Grunde gelegt wird. Durch den Einsatz nichtlinearer Nachweisstrategien scheinen gerade bei hohen Nutzlasten in bestimmten Fällen signifikante Einsparungen der Bewehrungsmengen möglich.

Die Betrachtung eines neu zu konzipierenden Tragwerks darf jedoch nicht nur unter dem Gesichtspunkt der aufzunehmenden Traglast erfolgen. Die in den letzten Jahrzehnten in erheblichem Maße anfallenden Sanierungsmaßnahmen haben zu einem allmählichen Umdenkprozess geführt. Neben dem Nachweis einer ausreichenden Sicherheit gegen das Systemversagen hat der Aspekt der Dauerhaftigkeit und der Lebensdauer zunehmend an Bedeutung gewonnen. Zu den Hauptgründen für eine eingeschränkte Lebensdauer eines Stahlbetontragwerks gehören zweifellos die Risse im Betongefüge. Dass nicht immer allein die mechanischen Einwirkungen für die auftretenden Schäden an Bauwerken verantwortlich gemacht werden können, hat die Schadensdiagnostik an bereits bestehenden Gebäuden gezeigt, denn allzu oft sind dabei thermische oder hygrische Zwangbeanspruchungen als ursächlich für den Schädigungsprozess erkannt worden. Bei einer Vielzahl von Bauwerken treten diese Einflüsse in einer nicht zu vernachlässigenden Größe auf. Somit liegt für die skizzierte Problematik ein breites Anwendungsgebiet vor. Beispiele hierfür sind Wasserbehälter, -kanäle, -becken, Kühlturmschalen mit Nasskühlung [Krätzig & Gruber 1993; Bolvin & Chauvel 1993], Fahrbahndecken [Sodeikat 2002; Müller, Hörenbaum & Maliha 2002], Betonbrücken [Eickschen & Siebel 1998], Fernsehtürme [Andrä, Saul & Schiff 1998], Weisse Wannen [Fechner 2003], Heißwasser-Langzeitspeicher [Jooß 2001], Tunnelinnenschalen [Grasberger 2002] und Windenergieanlagen [Harte & Wörmann 2002]. Hygrothermische Einwirkungen, die für sich alleine betrachtet gegebenenfalls unkritisch sind, können im Zusammenwirken mit dynamischen Einwirkungen aus Verkehr und Wind bei Tragstrukturen zu einer Beeinträchtigung der Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit bis hin zum Verlust der Tragfähigkeit führen. Denn die mit der Rissbildung und Schädigung einhergehende Steifigkeitsreduzierung des Tragwerks führt zu niedrigeren Eigenfrequenzen, wodurch sich hochabgestimmte Systeme automatisch in Bereiche stärkerer Energieabsorption adaptieren und sich damit einem akkumuliert progressiven Schädigungsprozess unterwerfen müssen.

Zur Lösung derartiger Problemstellungen haben sich in den letzten Jahren numerische Näherungsverfahren etabliert. Vor allem die Finite-Element-Methode (FEM) ist im modernen Ingenieurwesen weit verbreitet. Im Vergleich zu den anderen möglichen Verfahren zeichnet sie sich im besonderen Maße durch ihre Flexibilität bei der Strukturmodellierung aus. Aufgrund der ständig steigenden Rechnerleistung ist es möglich, mit ihr immer komplexere Problemstellungen zu lösen.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den Einfluss hygrischer und thermischer Einwirkungen, die sowohl betrieblicher als auch atmosphärischer Natur sein können, auf das Trag- und Verformungsverhalten von flächenartigen Stahlbetonbauwerken zu erfassen. Dabei stehen vor allem turmartige Schalenbauwerke im Vordergrund des Interesses. Die Abhängigkeit der möglichen progressiven Schädigungsprozesse von den zuvor genannten Einflüssen soll beschrieben werden.

Hierfür erforderlich sind physikalisch und geometrisch nichtlineare Stahlbetonschalenelemente, welche die Eigenschaften der Komponenten Beton und Stahl sowie deren Verbund-

wirkung wirklichkeitsnah abbilden können. Darüber hinaus ist die Einbindung der hygri-schen und thermischen Effekte in ein geschlossenes Simulationskonzept notwendig. Diese instationären Einwirkungen, die sich durch unterschiedliche Wechselwirkungen gegenseitig beeinflussen, führen in Flächentragwerken zu nichtlinearen Gradienten in Dickenrichtung. Deshalb erscheint es angebracht, dieses vorwiegend eindimensionale Verhalten in Quer-schnittsrichtung durch eine geeignete Modellierung zu erfassen. Somit ist die Entwick-lung eines effizienten hygrothermischen Modells und dessen Implementierung notwendig. Zur Einbindung in den Simulationsprozess müssen die auf Querschnittsebene gewonne-nen Erkenntnisse mit den geschichteten Schalenelementen auf der Layerebene gekoppelt werden. Damit wird eine wirklichkeitsnahe numerische Simulation unter Berücksichti-gung der nichtlinearen Dehnungsverteilungen aus den witterungsabhängigen Einwirkun-gen ermöglicht. Zusätzlich soll durch die Einbindung normativer Regelungen bezüglich des Schwindens und Kriechens von Beton die Möglichkeit geschaffen werden, normenkonforme Traglastanalysen unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Verhaltens durchführen zu können.

Im Anschluss daran sind die erarbeiteten Lösungskonzepte mit aussagekräftigen Beispielen zu verifizieren. Durch Traglast- und Schädigungsanalysen an großen Schalenbauwerken soll die Leistungsfähigkeit demonstriert werden.

Als Plattform für die in dieser Arbeit vorgestellten Entwicklungen dient das Programm-system FEMAS 2000 [Beem, Könke, Montag & Zahlten 1996; Harte, Andres & Wörmann 2003].

1.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit ist in acht Kapitel gegliedert, deren Inhalt im Folgenden zusam-mengefasst wird:

- In *Kapitel 2* wird zunächst ein Einblick in das Verhalten des Verbundwerkstoffs Stahlbeton gegeben. Insbesondere wird verstärkt auf das für den weiteren Verlauf der Arbeit maßgebende Verhalten von Beton unter hygri-schen und thermischen Einwirkungen eingegangen.
- Das *3. Kapitel* ist in vier Abschnitte unterteilt. Zunächst erfolgt die Darstellung der zeitunabhängigen Materialformulierung des Betons. Danach wird das hygrothermi-sche Modell vorgestellt und die dafür notwendigen Materialparameter besprochen. Die Formulierungen der zeitabhängigen Anteile bildet den nächsten Abschnitt. Im Letzten ist die verwendete Materialmodellierung des Betonstahls aufgeführt.
- Nach der Beschreibung der grundlegenden kontinuumsmechanischen Zusammen-hänge zu Beginn des *4. Kapitels* wird die auf der REISSNER-MINDLIN-Theorie ba-sierende Schalentheorie vorgestellt. Die bisher übliche Einbindung der lastunabhän-gigen Einwirkungen im Rahmen der Schalentheorie wird zusätzlich aufgeführt.
- Das *Kapitel 5* gliedert sich im Wesentlichen in vier Abschnitte. Zunächst wird eine für geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnungen geeignete Schalenele-mentformulierung dargelegt. Danach erfolgt die Beschreibung der numerischen Um-

setzung des gekoppelten hygrothermischen Modells und der Implementierungsvarianten in das eingesetzte Programmsystem. Die Einbindung des hygrothermischen Modells und der daraus resultierenden instationären Verzerrungsanteile in eine zeitabhängige Multi-Level-Iterations-Strategie zur Berechnung von Last-Verformungspfaden wird im dritten Abschnitt dargestellt. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden Konzepte zur numerischen Simulation von Tragwerksschädigungen auf der Makroebene mittels nichtlinearer Finite-Element-Analysen behandelt.

- Im *6. Kapitel* wird die Leistungsfähigkeit der implementierten Modelle untersucht. Durch numerische Simulationen experimenteller Versuche werden die einzelnen Modellkomponenten verifiziert. Diese erstrecken sich sowohl auf die zeitinvariante und zeitvariante Stahlbetonmodellierung als auch auf die gesonderte Betrachtung der hygrothermischen Betonmodellierung.
- Die Untersuchung von zwei real existierenden Bauwerken in *Kapitel 7* soll die jetzt vorhandenen Möglichkeiten zur Simulation von Stahlbetonflächentragwerken demonstrieren. Mittels nichtlinearer Traglast- und Schädigungsanalysen wird zum einen die Schale eines Naturzugkühlturms und zum anderen die Turmkonstruktion einer Windenergieanlage analysiert. Dabei stehen vor allem die aus den hygrischen oder thermischen Einwirkungen resultierenden Effekte im Vordergrund des Interesses.
- In *Kapitel 8* erfolgt die Zusammenfassung der wesentlichen Aspekte dieser Arbeit. Desweiteren wird ein Ausblick auf mögliche weiterführende Forschungsarbeiten gegeben.

Kapitel 2

Phänomenologie des Stahlbetons

In diesem Kapitel wird das Verhalten des Verbundwerkstoffs Stahlbeton und seiner Einzelkomponenten behandelt. Beginnend mit der Beschreibung der Zusammensetzung und der Porenstruktur des Betons, wird anschließend deren mechanisches Kurzzeitverhalten in den unterschiedlichen Belastungsbereichen betrachtet. Besonderes Augenmerk gilt danach dem Verhalten des Betons unter hygrischen und thermischen Einflüssen. Dabei erfolgt zuerst die Beschreibung der möglichen Transport- und Speichermechanismen, bevor deren Auswirkungen auf das Verformungs- und Spannungsverhalten aufgezeigt werden. Im Anschluss daran wird der Bewehrungsstahl betrachtet, der im Vergleich zum Beton ein weniger komplexes Materialverhalten aufweist. Am Ende des Kapitels wird auf das Zusammenwirken der beiden Komponenten im Verbundwerkstoff Stahlbeton eingegangen. Das Kapitel dient als Grundlage für die spätere numerische Modellbildung des Stahlbetons.

2.1 Einführung

Stahlbeton ist ein Verbundwerkstoff, der aus den Komponenten Beton und Bewehrungsstahl hergestellt wird. Durch deren Zusammenfügen können die jeweiligen spezifischen Eigenschaften ideal genutzt werden. Wegen der Vielfalt seiner Einsatzmöglichkeiten und Anwendungsgebiete wird der Stahlbeton in der Ingenieurpraxis häufig eingesetzt. Er eignet sich für massive Staumauern und Tunnel ebenso wie für Hochhäuser, weitgespannte Brücken und schlanke Türme oder architektonisch höchst anspruchsvolle Schalenkonstruktionen. Zu seinen günstigen Eigenschaften zählen beliebige Formbarkeit, hohe Tragfähigkeit, Beständigkeit und Wirtschaftlichkeit.

Die Untersuchung des Stahlbetonverhaltens kann auf unterschiedlichen Ebenen erfolgen. Bei deren Definition hat sich die Unterteilung in Mikro-, Meso- und Makroebene durchgesetzt, die erstmals von van Mier (1984) benutzt worden ist. Während die Betrachtung der

Struktur und der Eigenschaften des Zementsteins der Mikroebene und das Zusammenwirken zwischen Zuschlag und Zementstein im Beton der Mesoebene zugeordnet werden können, ist die Makroebene durch die Erfassung der Heterogenitäten der Komponenten Beton und Stahl im integralen Sinne gekennzeichnet. Auf dieser Ebene erfolgt im Allgemeinen die Untersuchung des Trag- und Schädigungsverhaltens von Stahlbetonstrukturen. Mittels des als Homogenisierung bezeichneten Vorgangs werden die Komponenten des Stahlbetons durch homogene Ersatzmaterialien substituiert, die ein äquivalentes Verhalten aufweisen. Die dafür notwendigen makroskopischen Beschreibungsgrößen sind jedoch abhängig von den Phänomenen auf allen Betrachtungsebenen, wie im Folgenden gezeigt wird.

2.2 Beton

2.2.1 Allgemeines

Der Beton ist durch ein komplexes Spannungs- und Verformungsverhalten charakterisiert, welches sich aufgrund unterschiedlicher Beanspruchungen ergeben kann. Im Allgemeinen wird zwischen lastabhängigen und lastunabhängigen Ursachen unterschieden. Zu den lastunabhängigen zählen Einwirkungen aus hygrischen und thermischen Belastungen. Sie führen aber nur dann zu Spannungen, wenn die „freien“ Verformungen behindert werden. Infolge mechanischer Beanspruchungen treten lastabhängige Verformungen und Spannungen auf. Sie werden nach zeitunabhängigen und zeitabhängigen Spannungen differenziert, da sich nur ein gewisser Anteil sofort und der restliche erst mit der Zeit einstellt. Die prinzipiellen Wechselwirkungen im Beton können anhand eines nach zwei Seiten austrocknenden Betonquerschnitts dargestellt werden (Bild 2.1).

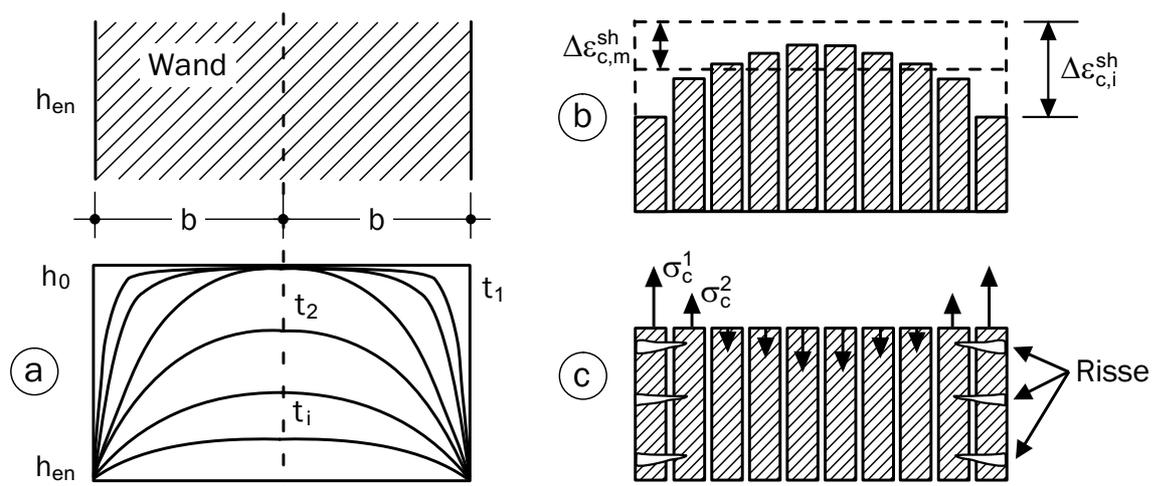


Bild 2.1: Illustration (a) der Feuchteverteilung h , (b) der Schwinddehnungen ε_c^{sh} und (c) der Eigenspannungen σ_c eines nach zwei Seiten austrocknenden Betonquerschnitts nach Klopfer (1974) und Bažant (1988).

Der Beton, der nach der Herstellung einen relativ hohen Feuchtegehalt besitzt, trocknet bei normalen Umgebungsbedingungen über seine Oberflächen aus. Dieser Prozess setzt sich langsam in das Innere fort, woraus der zeitliche Verlauf der in Bild 2.1a dargestellten Feuchteverteilung resultiert. Diese führt zu ungleichmäßigen Schwindverformungen über den Querschnitt, da die größere relative Feuchtedifferenz in den außen liegenden Querschnittsteilen ein erhöhtes Schwinden zur Folge hat (Bild 2.1b). Die Behinderung der Querschnittsverwölbung ruft zusätzliche Verformungsanteile hervor, die sich aus elastischen und zeitabhängigen Anteilen zusammensetzen. Die zur Kompatibilität des Querschnitts erforderlichen Verformungsanteile verursachen Spannungen. Dabei treten am Querschnittsrand Zug- und im Kern Druckspannungen auf (Bild 2.1c). Die aus nichtlinearen Gradienten resultierenden Spannungen, die innerhalb eines Querschnitts im Gleichgewicht stehen, werden Eigenspannungen genannt. Zusätzliche Spannungen im Querschnitt, die bei globalen Verformungsbehinderungen von lastunabhängigen Anteilen auftreten, werden als Zwangspannungen bezeichnet. Das hier dargestellte Verhalten gilt in analoger Weise auch für thermische Einwirkungen.

2.2.2 Zusammensetzung und Entstehung

Beton ist ein heterogener, anisotroper und künstlicher Baustoff, der aus einem Konglomerat von Zement, Zuschlagstoff und Wasser hergestellt wird. Der Zuschlag ist mit ca. 70 % des Volumens der Hauptbestandteil des Betons und setzt sich aus einem Gemenge von gebrochenen oder ungebrochenen Körnern aus natürlichen oder künstlichen mineralischen Stoffen zusammen. Durch eine als Hydratation bezeichnete chemische Reaktion zwischen Zementkorn und Wasser erstarrt und erhärtet der Zement. Dabei geht der anfangs plastische Zementleim mit fortschreitender Zeit in den erhärteten Zementstein über. Aus den Klinkerphasen des Zements entsteht in einem exothermen Prozess das so genannte Zementgel, welches aus feinsten, submikroskopischen, kolloidalen Reaktionsprodukten besteht. Das sind die Calciumsilicathydrate (CSH-Phasen), die aufgrund ihrer großen spezifischen Oberfläche für die Festigkeitsentwicklung des Zements verantwortlich sind, und das Calciumhydroxid, welches die hohe Alkalität des Porenwassers bewirkt. Zur vollständigen Hydratation des Zements ist ein Wasserzementwert von $w/z \approx 0.40$ erforderlich, wobei ca. 25 % des Wassers chemisch gebunden wird (Hydratwasser) und sich ca. 15 % durch Adsorptionskräfte physikalisch an das Zementgel anlagern. Auch nach einem definierten Trocknungsversuch bei 105°C bleibt das Hydratwasser im Zementstein enthalten. Daher wird es auch als nicht verdampfbares Wasser bezeichnet und der Feststoffmatrix zugeordnet. Um die Herstellung des Betons zu erleichtern oder bestimmte Eigenschaften zu verbessern, können neben den Grundbestandteilen Zusatzmittel oder Zusatzstoffe beigegeben werden. Durch die Zugabe von leistungsfähigen Fließmitteln, die Verwendung von Silicastaub und den Einsatz von Zementen hoher Festigkeitsklassen können beispielsweise Betone höherer Festigkeit hergestellt werden, obwohl sie mit w/z -Werten von 0.25-0.35 erzeugt werden und somit eine vollständige Hydratation nicht möglich ist. Die unhydratierten Zementklinker verbleiben als hochfester Zuschlag im Beton. Detaillierte Informationen zur Zusammensetzung des Betons und zum Hydratationsprozess können in Wesche (1993), Grübl, Weigler & Karl (2001) und Reinhardt (2002) nachgelesen werden.

2.2.3 Porosität und Porengrößenverteilung

Porosität und Porengrößenverteilung sind von entscheidender Bedeutung für die makroskopischen Eigenschaften des Betons, wie die Druckfestigkeit, der Frostwiderstand oder die Durchlässigkeit. Die Haupteinflussfaktoren für die Porosität des Zementsteins sind der w/z -Wert und der Hydratationsgrad, die wiederum von der Zusammensetzung, Herstellung, Nachbehandlung und vom Alter des Betons abhängig sind. Die im Beton vorhandenen Poren erstrecken sich über einen Bereich von acht Zehnerpotenzen und lassen sich durch ihre Größe und Entstehung wie folgt unterscheiden: Verdichtungsporen (Rüttelporen), Luftporen, Kapillarporen und Gelporen. Die Größenordnung der unterschiedlichen Porenarten sind dem Bild 2.2 zu entnehmen¹. Zusätzlich sind dort die Dimensionen der im Beton enthaltenen Feststoffe und die möglichen Untersuchungsmethoden aufgeführt.

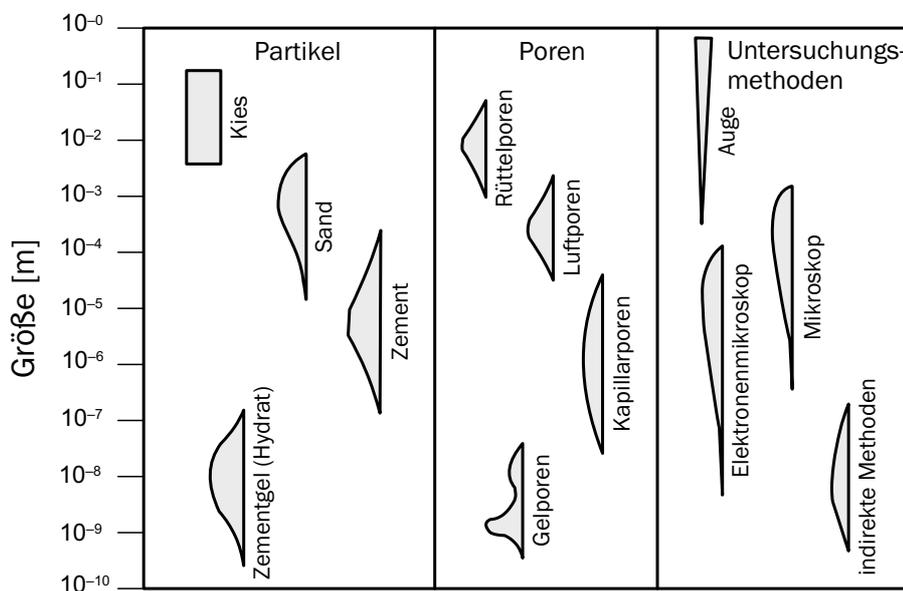


Bild 2.2: Größenvergleich von Partikeln und Poren in Beton und geeignete Untersuchungsmethoden nach Setzer (1977).

Die im Millimeterbereich liegenden Verdichtungsporen sind trotz guter Zusammensetzung und sorgfältiger Verdichtung im Beton nicht vermeidbar. Bei guter Verdichtung liegt ihr Volumengehalt bei 1,5 %. Durch die Zugabe eines Luftporenmittels während des Mischvorgangs werden meist kugelförmige, geschlossene Luftporen (Porendurchmesser $< 0,3$ mm) erzeugt, die zur Erhöhung der Frost- und Frosttausalzbeständigkeit beitragen. Sowohl die Verdichtungsporen als auch die Luftporen vermindern die Druckfestigkeit des Betons. Bei den Kapillarporen handelt es sich um längliche, untereinander verbundene Poren, die für die Wasserdurchlässigkeit des Betons entscheidend sind. Sie beinhalten das überschüssige ungebundene Wasser, welches sich nicht oder noch nicht am Hydrationsprozess beteiligt. Die Kapillarporosität nimmt mit zunehmendem Hydratationsgrad und mit

¹Es sei angemerkt, dass in der Literatur keine einheitliche Auffassung über die Grenzen der Größenbereiche besteht.

kleiner werdendem w/z -Wert ab. Drei Zehnerpotenzen kleiner als die Kapillarporen sind die Gelporen des Zementsteins, die vornehmlich mit dem physikalisch im Zementgel gebundenen Wasser gefüllt sind und etwa 25 % des Gelvolumens einnehmen. Den Gelporen werden üblicherweise auch die Kontraktionsporen zugerechnet, die durch die Volumenkontraktion des chemisch gebundenen Wassers entstehen. Die Gelporosität ist somit vom w/z -Wert weitgehend unabhängig und wird vor allem durch den Hydratationsgrad gesteuert. Gel- und Kapillarpwasser stellen zusammen das verdampfbare Wasser dar, welches bei den bereits erwähnten Trocknungsbedingungen aus dem Zementstein ausgetrieben werden kann. In Bild 2.3 sind die Volumenanteile der Hydratationsprodukte nach Czernin (1977) dargestellt. Gut zu erkennen ist die Zunahme des Kapillarporenanteils mit steigendem w/z -Wert und der etwa konstante Gelporenanteil. Im Vergleich zum Zementstein ist die Porosität des Zuschlags eine zu vernachlässigende Größe. Die erhöhte Porosität in der Kontaktzone zwischen dem Zementstein und den Zuschlagpartikeln bewirkt eine im Vergleich zum Zementstein erhöhte Durchlässigkeit des Betons.

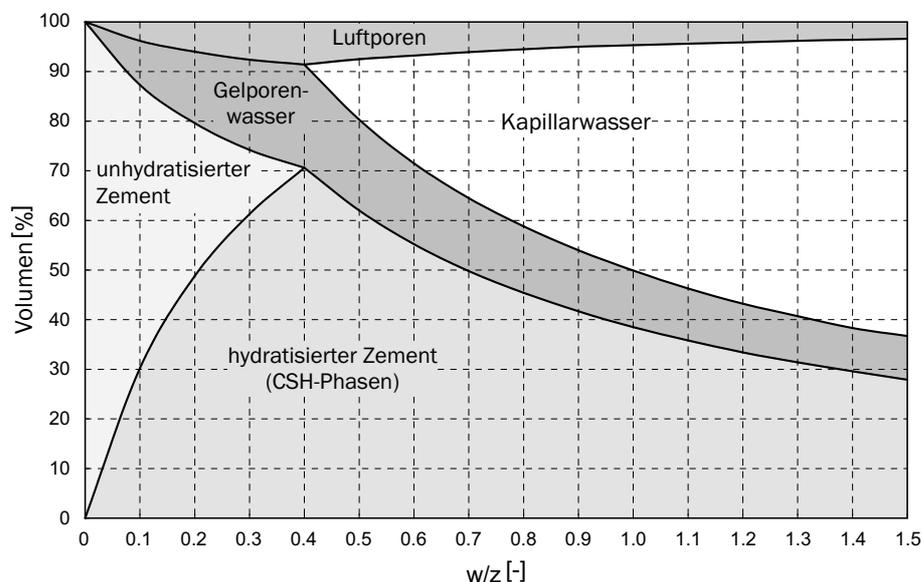


Bild 2.3: Volumenanteile im Zementstein in Abhängigkeit vom w/z -Wert bei vollständiger Hydratation nach Czernin (1977).

Die beschriebenen Porenarten bilden zusammen das Porensystem des Betons. Für die Betrachtung hygri-scher Phänomene, vgl. Abschnitt 2.2.6, ist eine davon abweichende Charakterisierung nützlich. Danach werden geschlossene (isolierte) und offene Poren unterschieden. Die geschlossenen Poren sind nicht füllbar und beteiligen sich somit nicht an hygri-schen Transport- und Speicherprozessen. Bei den offenen Poren ist eine weitere Unterscheidung hinsichtlich der Durchströmbarkeit zu treffen. Während nicht durchströmbare Poren für eindringende Stoffe eine Sackgasse darstellen, lassen durchströmbare Poren eine ungestörte Ausbreitung eindringender Stoffe zu, da sie ein mehr oder weniger zusammenhängendes Porengefüge bilden. Folglich kann in den nicht durchströmbaren Poren nur Feuchtigkeit gespeichert werden, wohingegen die durchströmbaren Poren zusätzlich als Transportraum dienen.

2.2.4 Mechanisches Kurzzeitverhalten

2.2.4.1 Einaxiale Druckbeanspruchung

Monotone Belastung. Bereits im unbelasteten Ausgangszustand entstehen im Beton Mikrorisse im Zementstein, die als Matrixrisse bezeichnet werden. In der Kontaktzone zwischen Zementstein und Zuschlägen sind so genannte Verbundrisse vorhanden. Diese werden insbesondere durch das Schwinden, vgl. Abschnitt 2.2.7, und das Abfließen der Hydratationswärme während der Erhärtungsphase verursacht. Der Zementstein und die Mörtelmatrix weisen für normalfeste Betone² unterschiedliche Steifigkeiten auf. Die Last wird vornehmlich über das Korngerüst der Zuschläge abgetragen. Die hieraus resultierende Kraftumlenkung führt zu Zugkräften im Betonkörper quer und schräg zur Krafrichtung. Als Folge ergeben sich bei Druckbeanspruchung ein örtlich veränderlicher dreiaxialer Spannungszustand und eine ausgeprägt nichtlineare Arbeitslinie.

Der Spannungs-Dehnungs-Verlauf ist mit seinen Ursachen für einen normalfesten und einen hochfesten Beton in Bild 2.4 dargestellt. Bis zu Druckspannungen von ca. 40 %

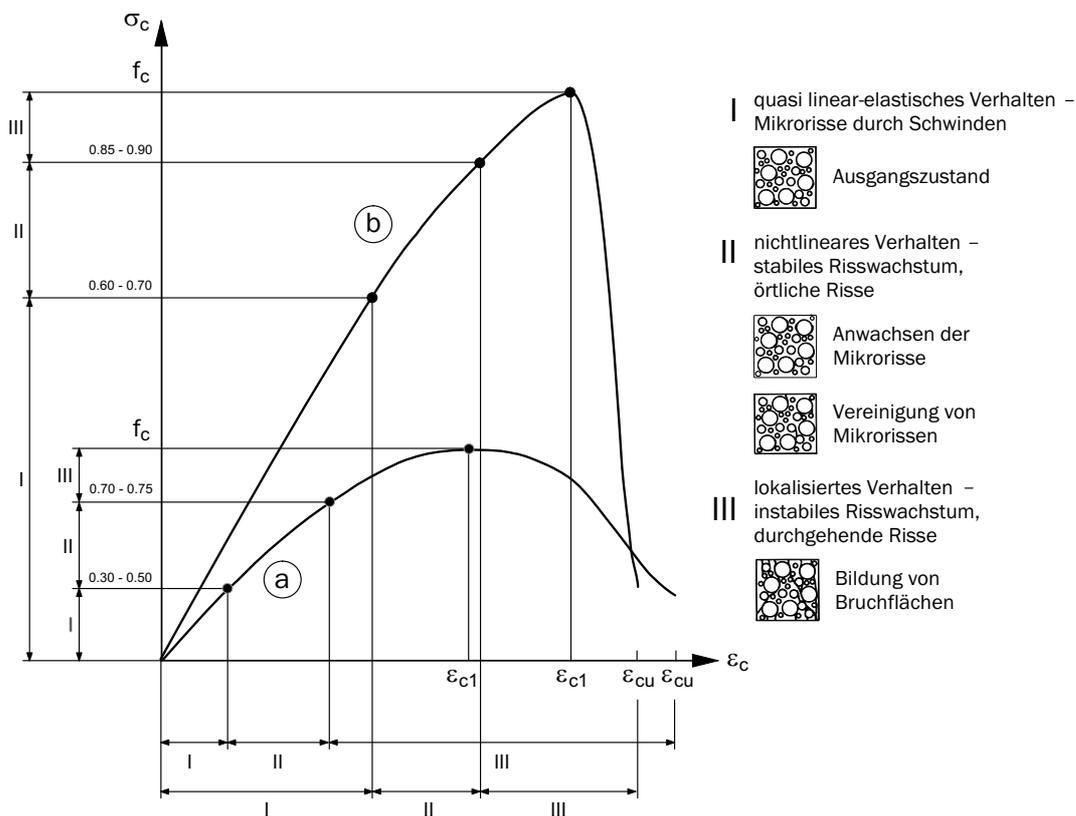


Bild 2.4: Illustration des Betonverhaltens unter einaxialer Druckbeanspruchung für (a) einen normalfesten und (b) einen hochfesten Beton.

²In der neuen DIN 1045-1 (2001) wird zwischen normalfestem und hochfestem Beton nicht mehr unterschieden. Um die unterschiedlichen Verhaltensmuster zu verdeutlichen, werden die Begrifflichkeiten dennoch verwendet.

der Betondruckfestigkeit verhält sich der normalfeste Beton trotz der vorhandenen Mikrorisse linear-elastisch. Die geringe Gefügeflockung infolge der bereits vorhandenen Verbundrisse wird durch ein schwach plastisches Verhalten kompensiert. Mit steigender Beanspruchung, im so genannten Vorbruchbereich, wachsen die Mikrorisse und vereinigen sich zu Makrorissen mit dem Ergebnis eines Steifigkeitsabfalls und einer fortschreitenden Krümmung der Arbeitslinie. Der Bereich der maximal aufnehmbaren Druckspannung ist durch ein instabiles Risswachstum charakterisiert. Im anschließenden Nachbruchbereich bilden sich Trennflächen (vornehmlich parallel zur Belastungsrichtung), die zu einer Abminderung der Tragfähigkeit bei gleichzeitig steigender Verformung und schließlich zum vollständigen Bruch führen. Dieser entfestigende Effekt wird als „Strain-Softening“ bezeichnet. Dabei bilden sich die Trennflächen jedoch nicht gleichverteilt über das gesamte Volumen sondern in eng begrenzten Zonen der Betonkörper. Daraus resultiert eine Schadenslokalisierung im Nachbruchbereich, die erstmals von van Mier (1984) experimentell nachgewiesen wurde. Bei der Auswertung einaxialer Druckversuche an Probekörpern unterschiedlicher Höhe konnte er beobachten, dass die Spannungs-Verschiebungs-Linien im Nachbruchbereich kaum voneinander abwichen, wohingegen der Verlauf des abfallenden Astes der Spannungs-Dehnungs-Linien maßgeblich von der jeweiligen Probenhöhe beeinflusst wurde (Bild 2.5). Dieses Phänomen, der so genannte „Size-Effekt“, ist mit der Lokalisierung der Verformungen in der Bruchprozesszone erklärbar. Weitere Versuche, die diese Ergebnisse bestätigen, sind unter anderem von Jansen & Shah (1997) durchgeführt worden.

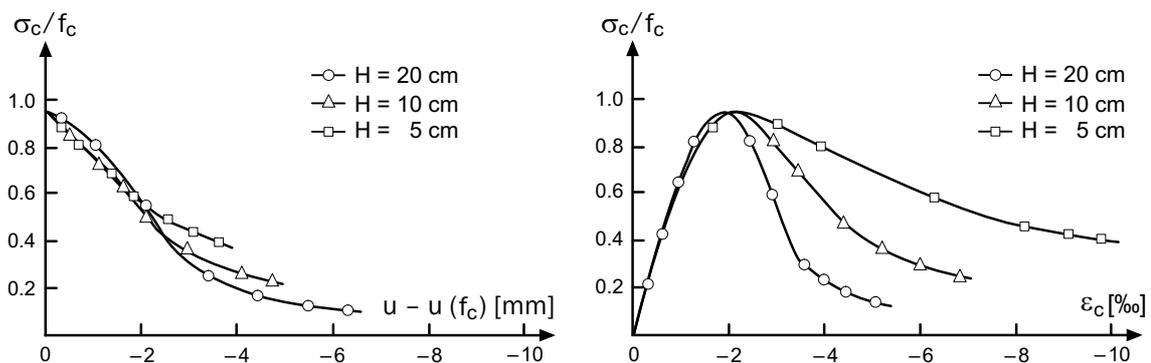


Bild 2.5: Spannungs-Verschiebungs-Linien im Nachbruchbereich und Spannungs-Dehnungs-Linien unter einaxialem Druck, gemessen an Betonprismen mit einem Querschnitt von $100 \times 100\text{ mm}^2$ und unterschiedlichen Höhen nach van Mier (1984).

Vergleicht man das Verhalten normalfester Betone mit dem von Betonen höherer Festigkeiten, so lässt sich zweierlei feststellen. Zum einen steigt mit zunehmender Festigkeit der linear-elastische Bereich überproportional an (Bild 2.4). Dies ist mit der für hochfeste Betone charakteristischen höheren Festigkeit der Mörtelmatrix und des höheren Haftverbunds erklärbar, wodurch die frühe Mikrorissbildung reduziert wird. Zum anderen kann im Nachbruchbereich für höhere Druckfestigkeiten ein steilerer Abfall der Arbeitslinie beobachtet werden, teilweise sogar ein „Snap-Back“-Verhalten. Das zunehmend sprödere Verhalten kann ebenfalls mit der höheren Festigkeit der Mörtelmatrix begründet werden.

Die Risse, die bei normalfesten Betonen nur im Bereich der Mörtelmatrix und der Kontaktzone zu finden sind, verlaufen dann auch durch die Zuschlagkörner und führen zu einer Reduzierung der Prozesszonenbreite.

Zyklische Belastung. Experimentelle Untersuchungen der Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei zyklisch belasteten Proben sind beispielsweise von Spooner & Dougill (1975) und Bahn & Hsu (1998) durchgeführt worden. Im Wesentlichen sind dabei die beiden folgenden Merkmale festgestellt worden: Zum einen führen die Lastwechsel aufgrund der Schädigung zu einer Verringerung der Steifigkeit. Zum anderen entspricht die Umhüllende der Spannungs-Dehnungs-Kurve in etwa der monotonen Arbeitslinie und ist somit unabhängig vom Belastungsmuster.

2.2.4.2 Einaxiale Zugbeanspruchung

Monotone Belastung. Das nichtlineare Verhalten von Beton unter einaxialer Zugbeanspruchung wird vor allem durch die Grenzschicht der Mörtelmatrix und des Zuschlages bestimmt. In diesem Bereich ist die Verbundfestigkeit zwischen den beiden Phasen kleiner als die jeweilige Zugfestigkeit, und die oben erläuterten Mikrorisse sind schon vor Belastungsbeginn vorhanden. Die Spannungs-Verschiebungs-Linie ist bis etwa 80 – 90 % linear (Bild 2.6). Kurz vor dem Versagen durch das Reißen des Betons führen die vorhandenen

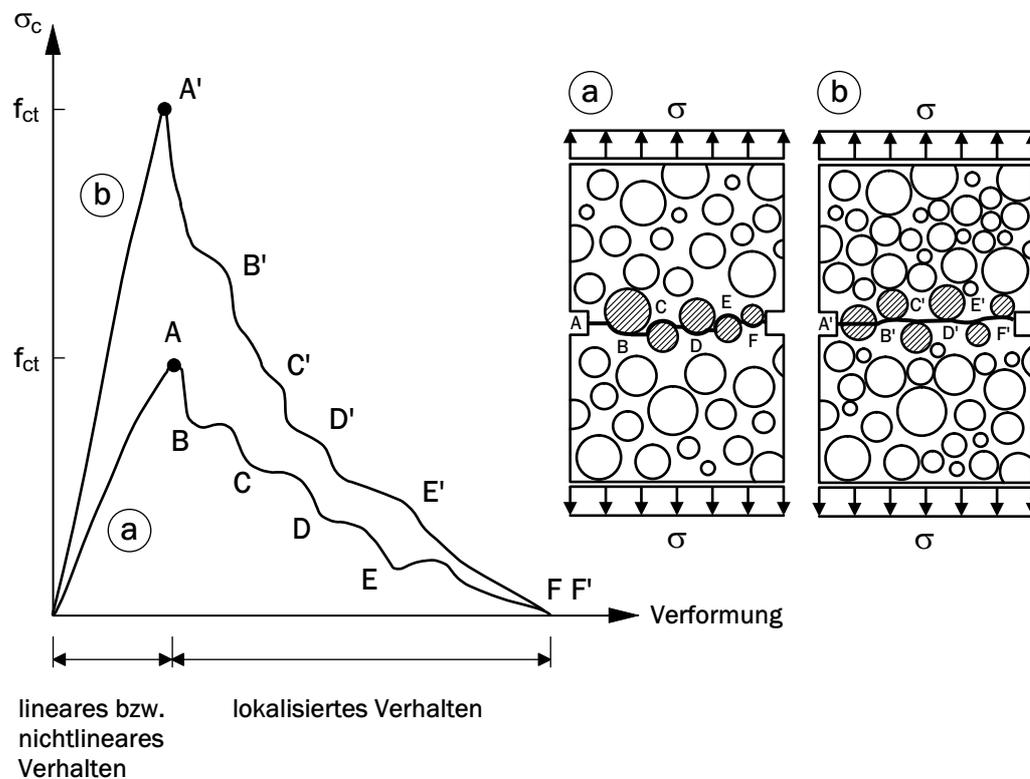


Bild 2.6: Illustration des Betonverhaltens unter einaxialem Zugverhalten für (a) einen normalfesten und (b) einen hochfesten Beton.

Mikrorisse zu einem nichtlinearen Verhalten. Der Nachbruchbereich bei einem weggesteuerten Zugversuch ist wiederum durch das Softening-Verhalten und die stark lokalisierte Prozesszone gekennzeichnet. Das bedeutet aber, dass auch bei Zugbeanspruchung nur die Spannungs-Verschiebungs-Beziehung, nicht aber die Spannungs-Dehnungs-Beziehung unabhängig von der Probenhöhe ist, wie Versuchsergebnisse von van Mier (1984) bestätigen. Der in Bild 2.6 dargestellte Verlauf der Verformungen im Nachbruchbereich resultiert aus der Verzahnung der Zuschlagkörner und der Reibungskräfte zwischen den beiden Rissufer.

Zyklische Belastung. Das Verhalten unter zyklischer Belastung weist die gleichen Effekte wie im Druckbereich auf. Auch hier tritt bei höheren Lastzyklen eine Steifigkeitsreduktion auf, und die Umhüllende der Versuche unter zyklischer Belastung entspricht der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei monotoner Belastung. Zusätzlich kann beobachtet werden, dass bei Eintritt in den Druckbereich die Steifigkeit schlagartig auf die ursprüngliche Größe zunimmt, da der Beton weiterhin Druckspannungen übertragen kann, sobald die Rissflächen geschlossen sind. Ergebnisse von Versuchen, die dieses Verhalten widerspiegeln, sind unter anderem in Yankelevsky & Reinhardt (1989) und Reinhardt, Cornelissen & Hordijk (1986) zu finden.

2.2.4.3 Mehraxiale Beanspruchung

Unter mehraxialer Beanspruchung ist gegenüber der einaxialen eine deutliche Veränderung des Verformungsverhaltens zu beobachten. Wie oben bereits beschrieben, treten in einaxialen Druckversuchen noch vor Erreichen der maximal erreichbaren Druckspannungen Querkzugspannungen auf, die ein Anwachsen der Mikrorisse zur Folge haben. Treten zusätzliche Druck- oder Zugbeanspruchungen oder eine kombinierte Beanspruchung in senkrechten Schnitten zur betrachteten Beanspruchungsrichtung auf, so wird die Bildung der Mikrorisse vermindert (Druck) oder verstärkt (Zug).

Die Versagenskurven, die neben den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zur Beschreibung des mehraxialen Verhaltens benötigt werden, verbinden alle möglichen Spannungszustände, die der Beton unter mehraxialen Beanspruchungszuständen gerade noch aufnehmen kann. Das bedeutet, dass alle zulässigen Spannungszustände innerhalb dieser begrenzenden Linie liegen müssen. Die Versagensflächen werden im Hauptspannungsraum dargestellt und liefern das Spannungsmaximum für die zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Kurven. Sie sind durch die Wiedergabe der einaxialen Festigkeiten auf den Achsenabschnitten charakterisiert und stets symmetrisch. Die wohl bekanntesten biaxialen Versuche sind die von Kupfer, die erstmals in Kupfer, Hilsdorf & Rüscher (1969) veröffentlicht worden sind und deren vollständige Versuchsbeschreibung in Kupfer (1973) zu finden ist (Bild 2.7 (links)). Vergleichbare Versuchsergebnisse erzielten unter anderem Liu, Nilson & Slate (1972) und Nelissen (1972). Die durchgeführten Versuchsreihen in den zitierten Literaturstellen umfassen Betonfestigkeiten bis ca. 60 N/mm^2 .

Für höherfeste Betone ist das mehraxiale Verhalten in jüngerer Zeit beispielsweise von Rogge & Zilch (2002) und Curbach, Hampel, Scheerer & Speck (2002) untersucht worden. Dabei konnten für die untersuchten Betonklassen im Druck-Druck-Bereich keine prin-

zipten Unterschiede in den Bruchformen festgestellt werden (Bild 2.7 (rechts)). Die Versuche zeigen jedoch mit steigender Betonfestigkeitsklasse eine prozentuale Abnahme der Umschlingungsfestigkeit und eine Verlagerung des maximalen Festigkeitszuwachses in Richtung kleinerer Spannungsverhältnisse. Das charakteristische entkoppelte Verhalten im Zug-Zug-Bereich tritt auch für höherfeste Betone auf.

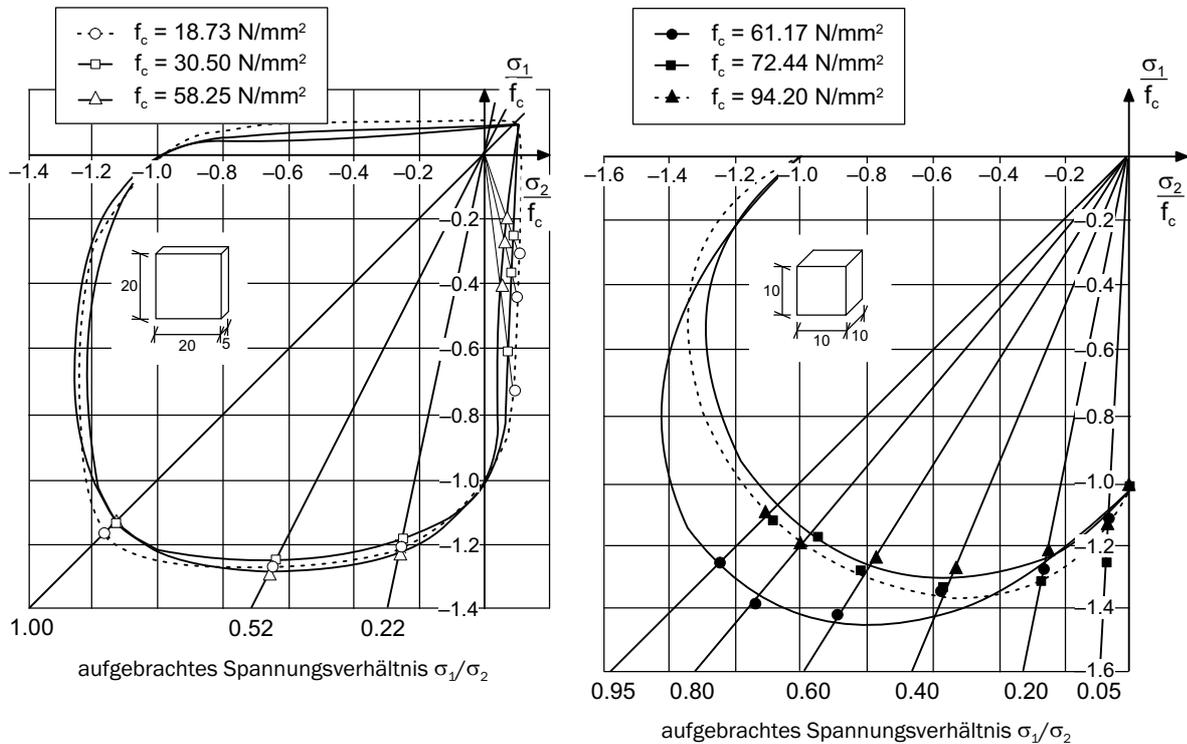


Bild 2.7: Betonverhalten unter biaxialer Beanspruchung nach Kupfer (1973) (links) und Curbach, Hampel, Scheerer & Speck (2002) (rechts).

2.2.5 Thermisches Verhalten

2.2.5.1 Wärmetransport und -speicherung

Die gesamte Energie eines Körpers setzt sich aus seiner inneren und seiner kinetischen Energie zusammen, vgl. Abschnitt 4.1.3. Unter der inneren Energie können die Bewegungs- und die Lageenergie aller Teilchen verstanden werden. Letztere resultiert aus den Anziehungs- oder Abstoßungskräften der Teilchen. Die Bewegungsenergie kann bei Gasen oder Flüssigkeiten als die Energie interpretiert werden, die in den Bewegungsformen der Moleküle (Translation, Rotation und innere Schwingung) gespeichert ist. Bei Festkörpern entspricht dies der Schwingung aller Atome um eine feste Ruhelage. Als Maß für die mittlere, in den Teilchen enthaltene Bewegungsenergie kann die Temperatur aufgefasst werden. Berühren sich zwei Körper mit unterschiedlicher Temperatur, kommt es zu einem Wärmetransport vom Körper höherer Temperatur zum Körper niedrigerer Temperatur. Dabei wird die innere Energie des einen Körpers reduziert und als Wärme auf den anderen

übertragen. Zu beachten ist, dass die Wärme nur während eines solchen Austauschprozesses auftritt und somit keine Zustandsgröße³ oder Systemeigenschaft darstellt. Daher wird in diesem Zusammenhang häufig von einer Energieform gesprochen. Zur genaueren Einbindung des Begriffs der Wärme in den Kontext der Thermodynamik sei hier auf die Bücher von Meyer & Schiffner (1980), Hutter (1995) und Stephan & Mayinger (1997) verwiesen.

Wärmeübertragung kann in allen Stoffen beobachtet werden. Dabei ist es egal, ob es sich um feste Körper oder Fluide⁴ handelt. Unterschiede treten jedoch bei der Abhängigkeit von der treibenden Temperaturdifferenz und der Schnelligkeit des irreversibel ablaufenden Prozesses auf. Der Wärmetransport ist danach in Wärmeleitung, Konvektion und Wärmestrahlung differenzierbar, deren Merkmale nachstehend aufgeführt sind:

Wärmeleitung. Als Wärmeleitung wird der an Materie gebundene Energietransport infolge einer Temperaturgradienten bezeichnet, wobei der Wärmeaustausch über Molekülstöße und nicht durch die makroskopische Bewegung der Materie stattfindet. Die Wärmeübertragung findet innerhalb fester Körper oder zwischen einander berührenden, relativ zueinander unbewegten, festen Körpern ausschließlich über Wärmeleitung statt. In Fluiden liefert die Wärmeleitung nur einen geringen Beitrag zum gesamten Wärmetransport.

Konvektion. Unter Konvektion wird der Wärmetransport durch eine makroskopische Teilchenbewegung verstanden, der nur bei Strömungsvorgängen fluider Stoffe möglich ist. Dieser Vorgang wird stets von einem Energietransport durch Wärmeleitung begleitet. Der konvektive Wärmeübergang zwischen einem bewegten Fluid und einer festen Wand beinhaltet beide Mechanismen, wobei die Übertragung vornehmlich über Konvektion erfolgt. Dabei wird zwischen der natürlichen oder freien und der erzwungenen Konvektion unterschieden. Bei der freien Konvektion findet die Strömung aufgrund örtlicher Dichteunterschiede infolge der Temperaturverteilung statt. Bei erzwungener Konvektion wird die Strömung durch äußere Einwirkungen (z.B. Wind) hervorgerufen oder verstärkt.

Wärmestrahlung. Bei der Wärmestrahlung handelt es sich um einen Energietransport durch elektromagnetische Wellen. Treffen diese auf einen Körper, wird die Strahlung absorbiert, reflektiert oder hindurch gelassen. Diese Art der Übertragung ist nicht an Materie gebunden und somit auch im Vakuum möglich. Sowohl feste Körper als auch Fluide können Energie in Form von Strahlung aufnehmen. Grundsätzlich wird zwischen langwelliger und kurzwelliger Strahlung unterschieden. Während das Auftreten der kurzwelligen Strahlung unmittelbar mit der Sonnenstrahlung zusammenhängt, ist die langwellige Strahlung immer vorhanden. Die kurzwellige Strahlung umfasst die Globalstrahlung sowie deren Reflektion. Bei der Globalstrahlung wird zwischen direkter und diffuser Sonnenstrahlung unterschieden. In dem Begriff der langwelligen Strahlung sind die Anteile atmosphärische Gegenstrahlung, Reflektion der atmosphärischen Gegenstrahlung und Abstrahlung der terrestrischen Umgebung zusammengefasst.

Für eine ausführlichere Beschreibung der Wärmeübertragungsmechanismen und deren

³Als Zustandsgrößen bezeichnet man Größen, die einen bestimmten Wert haben und damit den Zustand eines Systems charakterisieren. Mit Ausnahme der Wärme und der Arbeit trifft dies auf alle physikalischen Größen zu, so beispielsweise auch auf die Temperatur.

⁴Der Überbegriff Fluid wird für die Erscheinungsformen Gas und Flüssigkeit verwendet.

jeweiligen Anteile wird hier stellvertretend für weitere auf Baehr & Stephan (1994) und Hennecke (2000) verwiesen.

Das thermische Verhalten innerhalb des Betons wird durch die zuvor beschriebenen Mechanismen in kombinierter Form beeinflusst. Eine Separation der einzelnen Anteile ist schwierig, jedoch für eine phänomenologische Erfassung des Wärmetransports auch nicht erforderlich. Hierbei wird das Zusammenwirken der unterschiedlichen Mechanismen mittels des Kennwerts Wärmeleitfähigkeit erfasst. Die Wärmeleitfähigkeit der einzelnen Komponenten und deren Anteile bestimmen diejenige des Endproduktes. In „trockenem“ Beton wird die Wärmeenergie über reine Leitung der Matrix und über Strahlung im Porenraum transportiert. Die Wärmeleitfähigkeit von ruhender Luft ist mit $\lambda_t = 0.02 \text{ W/mK}$ sehr klein. Je poröser ein Beton ist, desto kleiner wird folglich seine Wärmeleitfähigkeit sein. Mit zunehmendem Porenanteil nimmt auch die Rohdichte des Betons ab, weil die Luftdichte gering ist und die Dichte der porenfreien, festen Bestandteile verhältnismäßig wenig schwankt. Dies hat dazu geführt, dass die Rohdichte als Bestimmungswert für die Wärmeleitfähigkeit in DIN EN 12524 (2000) Eingang gefunden hat. Anzumerken bleibt, dass die Wärmeleitfähigkeit unterschiedlicher Betone trotz gleicher Rohdichte bei voneinander abweichender Zusammensetzung differieren kann. Der Feuchtegehalt und das Temperaturniveau selbst sind weitere Größen, welche die Wärmeleitfähigkeit des Betons beeinflussen. Das durch Sorption oder Kapillarkräfte gebundene Wasser, vgl. Abschnitt 2.2.6, führt zu einer erhöhten Wärmeleitung des feuchten Materials, da das im Porenraum vorhandene Wasser eine wesentlich höhere Temperaturleitfähigkeit als die Porenluft besitzt (ruhendes Wasser: $\lambda_t = 0.59 \text{ W/mK}$). Bei höheren Feuchtegehalten ist eine zusätzliche Beeinflussung durch Diffusionsvorgänge unter der Wirkung der Temperaturgradienten möglich. Je höher die Temperatur im Beton ist, desto größer ist auch dessen Wärmeleitfähigkeit. Der Einfluss ist jedoch geringer als der des Feuchtegehalts. Experimentell kann die Wärmeleitfähigkeit mit Hilfe von Plattenversuchen bestimmt werden, die in den Normen DIN 52612-1 (1979), DIN 52612-2 (1984) und DIN 52616 (1977) geregelt sind.

Bei instationären Prozessen kommt es neben dem Wärmetransport zu einer Wärmespeicherung im Stoff. Ein Maß für die Speicherung ist die spezifische Wärmekapazität c . Sie gibt an, wie viel Wärmeenergie 1 kg eines Stoffes aufnehmen oder abgeben muss, damit sich seine Temperatur um 1°C ändert.

In Bereichen extrem niedriger und hoher Temperaturen kann sich das Verhalten des Betons merklich ändern. Diese Bereiche, die hier ausgeklammert werden, sind beispielsweise in den Arbeiten von Guo (2001) und Thienel (1998) behandelt.

2.2.5.2 Verformungsverhalten

Bekanntermaßen dehnen sich nahezu alle Baustoffe mit zunehmender Temperatur aus. Die Änderung der Länge, das Dehnmaß Δl , hängt von der Dehnlänge l , dem Temperaturunterschied ΔT und dem materialabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_t ab:

$$\Delta l = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta T. \quad (2.1)$$

Der Wärmeausdehnungskoeffizient bzw. die Wärmedehnzahl des Betons α_t wird im Wesentlichen beeinflusst durch den Wärmeausdehnungskoeffizienten des Zementsteins $\alpha_{t,z}$,

den Wärmeausdehnungskoeffizienten des Zuschlags $\alpha_{t,g}$ und den Gehalt an Zementstein und Zuschlag V_z bzw. V_g . Der Wärmeausdehnungskoeffizient des Zementsteins setzt sich additiv aus einem wahren und einem scheinbaren Anteil zusammen. Aus kinetischen Molekularbewegungen resultiert die wahre Wärmedehnung, aus Umverteilungen von Gel- und Kapillarwasser bei Temperaturänderungen die scheinbare Wärmedehnung. Werte für $\alpha_{t,z}$ stellen sich vor allem in Abhängigkeit vom Feuchtegehalt zwischen $8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ und $23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ein. Der Wärmeausdehnungskoeffizient des Zuschlags $\alpha_{t,g}$ variiert in Abhängigkeit von der Zuschlagart zwischen $4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ und $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Dettling (1962) und Ziegeldorf, Kleiser & Hilsdorf (1979) geben Näherungsformeln zur Bestimmung der resultierenden Wärmedehnzahl α_t des Betons an. Damit ergeben sich Werte zwischen $5.5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ und $14 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, wobei der kleinste Wert für wassergesättigten, zementarmen Beton mit dichtem Kalksteinzuschlag und der größte Wert für lufttrockenen, zementreichen Beton mit Quarzit als Zuschlag erreicht wird.

Eine Behinderung der Wärmedehnung, beispielsweise durch eine unbestimmte Lagerung des Systems oder durch ungleichmäßige Temperaturverteilungen über den Querschnitt, führt zu Spannungen, vgl. Abschnitt 2.2.1.

2.2.6 Hygrisches Verhalten

Poröse Körper wie der Beton sind neben den mechanischen und thermischen Einwirkungen auch hygrischen Einflüssen ausgesetzt, die herstellungsbedingter, betrieblicher oder atmosphärischer Natur sein können. Hygrische Ungleichgewichte innerhalb eines Körpers oder zwischen dem Körper und seiner Umgebung führen zu Ausgleichsvorgängen. Diese Prozesse finden in der Hohlraumstruktur der porösen Stoffe statt, in denen das dampfförmige und flüssige Wasser auch gebunden werden kann. Die instationären Vorgänge sind somit charakterisiert durch ein Zusammenspiel von Transport und Speicherung. Nachfolgend werden ihre wesentlichen Merkmale aufgeführt.

2.2.6.1 Feuchtetransport

Der Transport von Feuchtigkeit wird durch eine Vielzahl von Faktoren beeinflusst, wobei die drei wesentlichen das treibende Potential, die Porenstruktur und der Aggregatzustand des Wassers sind. Sie bestimmen, in welcher Form die Feuchtebewegung stattfindet. Eine Feuchtebewegung zwischen zwei Punkten ist nur aufgrund einer Potentialdifferenz zwischen diesen möglich. Das Wasser wird in flüssiger oder gasförmiger Phase transportiert, in einigen Fällen auch auf molekularer Ebene. Bei Temperaturen unterhalb des Gefrierpunktes kann es in den Poren zur Eisbildung kommen, wodurch der Feuchtetransport behindert oder auch gestoppt werden kann. In Abhängigkeit von den Einflussfaktoren werden unterschiedliche Transportmechanismen wirksam. Ein bestimmtes Potential (z.B. die Konzentration) kann bei unterschiedlichen Porengrößen verschiedene Transportmechanismen hervorrufen (Bild 2.8). Die KNUDSEN-Zahl K_n , die folgendermaßen definiert ist:

$$K_n = \frac{\bar{\lambda}}{d_{eq}}, \quad (2.2)$$

ermöglicht eine Einteilung der verschiedenen Transportmechanismen. Mit der mittleren freien Weglänge $\bar{\lambda}$ wird der Weg beschrieben, den ein Molekül zurücklegt, bis es auf ein gleichartiges trifft. Sie ist druck- und temperaturabhängig und beträgt für Wassermoleküle in gasförmiger Phase bei 25 °C etwa 800 Å⁵. Der äquivalente Porendurchmesser d_{eq} des Materials kann größer, kleiner oder ungefähr gleich der mittleren freien Weglänge sein. Je nach Verhältnis von $\bar{\lambda}$ und d_{eq} kann der Feuchtetransport einem der drei KNUDSEN-Bereiche zugeordnet werden. Dabei ist zu beachten, dass diese Zuordnung nicht immer eindeutig möglich ist (Bild 2.8). Die definierten Bereiche unterscheiden sich durch die Art des Impulsaustausches. Während im Kontinuumsbereich ($K_n \ll 1$) der Impulsaustausch zwischen den Molekülen transportbestimmend ist, kommt es im Molekularbereich ($K_n \gg 1$) häufiger zu Molekülstößen mit der Porenwand. In diesem Zusammenhang bezeichnen die Begriffe Flüssigkeit und Gas ein Kontinuum, dessen Berandung keinen Einfluss auf die Beweglichkeit oder den Impulsaustausch der Fluidmoleküle besitzt [Fehlhaber & Reinhardt 1991]. Eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Mechanismen ist unter anderem in Klopfer (1974), Kießl (1983), Fehlhaber & Reinhardt (1991) und Oberbeck (1995) zu finden.

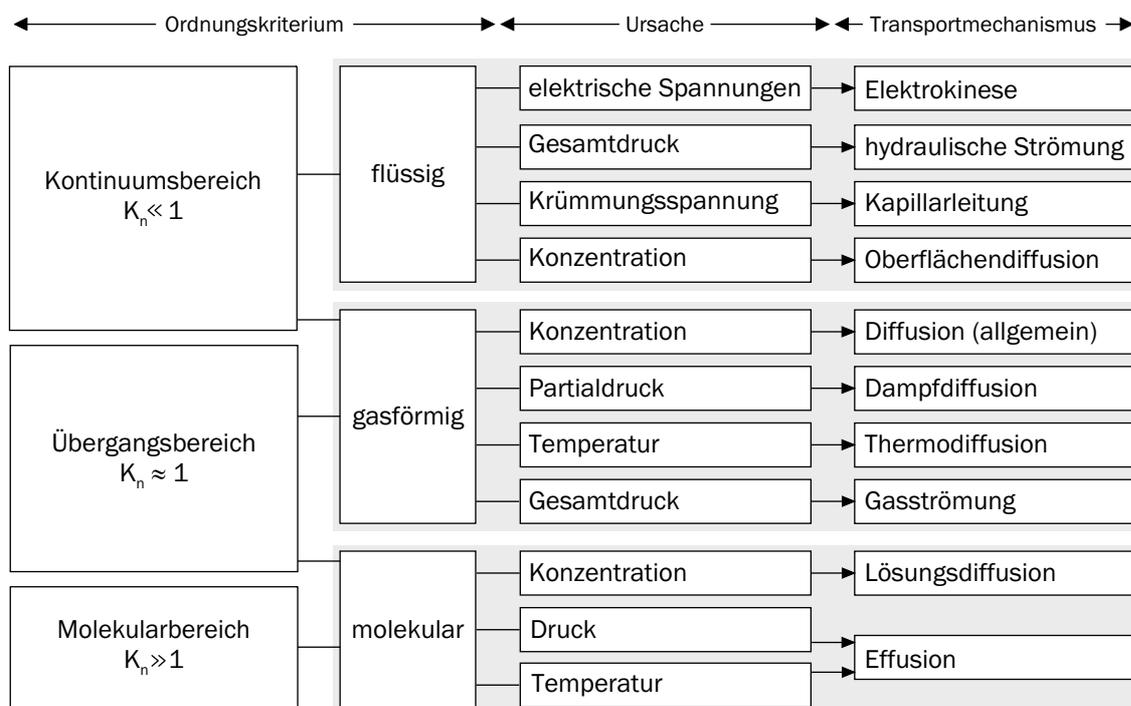


Bild 2.8: Schematische Übersicht über die Transportphänomene in porösen Medien nach Kießl (1983).

Aufgrund der vorhandenen Porengrößenverteilung in einem porösen Stoff treten die Mechanismen gleichzeitig auf und beeinflussen sich aufgrund ihrer Überlagerung gegenseitig. Betrachtet man die verschiedenen Transportmechanismen bezüglich ihrer Bedeutung für den Feuchtetransport in Betonbauteilen, müssen Mechanismen wie die Lösungsdiffusion

⁵Ein ÅNGSTRÖM = 1 Å = 0.1 nm.

oder die Elektrokinese häufig nicht berücksichtigt werden, da sie nur in Einzelfällen eine Rolle spielen. Fehlhaber & Reinhardt (1991) haben die unterschiedlichen Transportarten zu zwei empirisch gleich beschreibbaren Phänomenen zusammengefasst. In Abhängigkeit vom Aggregatzustand des Wassers definieren sie einen Gasanteil, bestehend aus Wasserdampfdiffusion und Effusion, und einen Flüssigkeitsanteil, bestehend aus Kapillarleitung und Oberflächendiffusion.

2.2.6.2 Feuchtespeicherung

Die hygrischen Wechselwirkungen sind neben dem Transport durch Speichervorgänge begleitet. Die Art und Weise, in der die Feuchtespeicherung erfolgt, wird durch die Intensität der Feuchtebelastung bestimmt. Die unterschiedlichen Mechanismen der Speicherung werden den folgenden drei Bereichen zugeordnet:

- hygroskopischer Bereich oder Sorptionsfeuchtebereich,
- überhygroskopischer Bereich oder Kapillarwasserbereich,
- Übersättigungsbereich.

Im hygroskopischen Bereich, der bis zu einer relativen Feuchte von 95 % definiert ist, kann das Speichervermögen mittels der Sorptionsisotherme beschrieben werden. Die Sorptionsisotherme beschreibt den Zusammenhang zwischen der äußeren relativen Feuchte und dem zugehörigen Wassergehalt des Materials. Ihr Verlauf kann nach DIN EN ISO 12571 (2000) bestimmt werden und ist davon abhängig, ob sich das Gleichgewicht durch Wasseraufnahme (Adsorption) oder -abgabe (Desorption) einstellt. Die zu beobachtende Hysterese wird mit dem so genannten Flaschenhalseffekt begründet [Martinola 2001] und kann nach Künzel (1994) häufig vernachlässigt werden. Unter normalen Umgebungstemperaturen ist nach Kiefl (1983) auch der thermische Einfluss auf die Sorptionsisotherme vernachlässigbar. Charakteristisch für poröse Stoffe ist der S-förmige Verlauf der Sorptionsisotherme [Klopfer 1974], der durch zwei unterschiedliche Mechanismen hervorgerufen wird. Der erste wirksame Mechanismus ist die Sorption, d.h. die Anlagerung von Wassermolekülen an den inneren Oberflächen der porösen Stoffe, die mit der BET-Theorie nach Brunauer, Emmett & Teller (1938) beschreibbar ist. Ursache hierfür sind VAN-DER-WAALS-Kräfte zwischen der Feststoffoberfläche (Adsorbens) und den Wassermolekülen (Adsorptiv). Bis zu einer relativen Feuchte von ca. 15 % bildet sich eine monomolekulare Schicht aus. Oberhalb von 15 % entstehen multimolekulare Schichten (Bild 2.9). Die maximale Gesamtschichtdicke ist bei einer relativen Feuchte von ca. 50 % erreicht. Oberhalb dieser Grenze ist eine wesentliche Zunahme der Stofffeuchte durch Adsorptionskräfte nicht mehr möglich, da die Bindungsenergie durch die VAN-DER-WAALS-Kräfte begrenzt ist. Bei kapillarporösen Stoffen wird ein zweiter Mechanismus wirksam, die so genannte Kapillarkondensation. Sie beruht auf dem Zusammenwirken von Adhäsionskräften zwischen den festen Oberflächen und den Wassermolekülen und Kohäsionskräften zwischen den Wassermolekülen. Hierbei bilden sich konkav gekrümmte Wasseroberflächen aus, die zu einer Dampfdruckerniedrigung oberhalb der Menisken und damit zu einer Wasserdampfkondensation führen [Krus 1995].

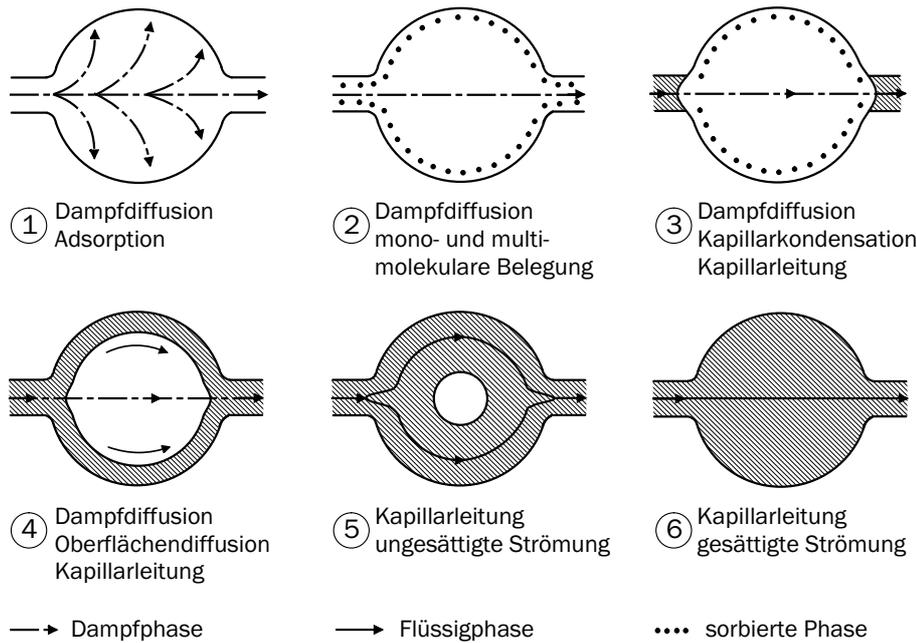


Bild 2.9: Schematische Darstellung der Stadien der Feuchtespeicherung nach Klopfer (1974).

Unter Verwendung der KELVIN-Gleichung

$$h = \exp \left[-\frac{p_k}{\varrho_w R_v T} \right] \quad (2.3)$$

und der LAPLACE-Gleichung

$$p_k = \frac{2\omega \cos \delta}{r_k} \quad (2.4)$$

kann der Zusammenhang zwischen der relativen Feuchte h und dem gemittelten Kapillarradius r_k der Grenzfläche zwischen Gas- und Flüssigphase angegeben werden:

$$h = \exp \left[-\frac{2\omega \cos \delta}{r_k \varrho_w R_v T} \right]. \quad (2.5)$$

Die nach KELVIN-THOMPSON bezeichnete thermodynamische Gleichgewichtsbedingung zeigt an, welche größeren Porenbereiche mit zunehmendem Feuchtegehalt durch den Vorgang der Kapillarkondensation gefüllt werden. In den Gleichungen (2.3)-(2.5) ist p_k der Kapillardruck, ϱ_w die Dichte des Wassers, R_v die spezielle Gaskonstante von Wasserdampf, T die absolute Temperatur, ω die Oberflächenspannung des Wassers und δ der Randwinkel. Der Kapillardruck p_k ergibt sich als Differenz zwischen dem Gasdruck p_v und dem Flüssigkeitsdruck p_l :

$$p_k = p_v - p_l. \quad (2.6)$$

Dass die Kapillarkondensation den im Vergleich zur Adsorption durch Adsorptionskräfte leistungsfähigeren Speichermechanismus darstellt, wird durch den stärkeren Anstieg der

Sorptionsisotherme oberhalb einer relativen Feuchte von 50 % angezeigt (Bild 2.10). Mit Adsorption werden zumeist beide Vorgänge - Kapillarkondensation und Adsorption durch Adsorptionskräfte - bezeichnet.

An den hygroskopischen Bereich schließt sich bei kapillaraktiven Stoffen der überhygroskopische Feuchtebereich an, dessen Wassergehalt bis zur freien Wassersättigung w_{sat} reicht. Er ist charakterisiert durch die Aufnahme von ungebundenem Kapillarwasser in den Kapillarporen. Der steile Anstieg der Sorptionsisotherme in diesem Bereich hat zur Folge, dass sich ihre experimentelle Bestimmung als äußerst schwierig erweist, da eine eindeutige Zuordnung des Wassergehalts zur relativen Luftfeuchte nicht mehr möglich ist. Mittels Saugspannungsmessungen und unter der Annahme eines Zylinderkapillarenmodells kann der Zusammenhang zwischen Wassergehalt und Kapillardruck bzw. äquivalentem Kapillarporenradius experimentell bestimmt werden [Krus 1995]. Dabei wird das Wasser solange durch kapillare Saugkräfte aufgenommen, bis sich ein Gleichgewichtszustand mit dem kapillaren Unterdruck ausbildet. Die entstehende Kapillardruck- bzw. Saugspannungskurve kann mit Hilfe der KELVIN-Gleichung (2.3) in Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte angegeben werden. Damit entsteht eine im gesamten Feuchtebereich gültige Feuchtespeicherfunktion, die sich aus der Sorptionsisotherme des hygroskopischen Bereichs und der Saugspannungskurve des überhygroskopischen Bereichs zusammensetzt (Bild 2.10).

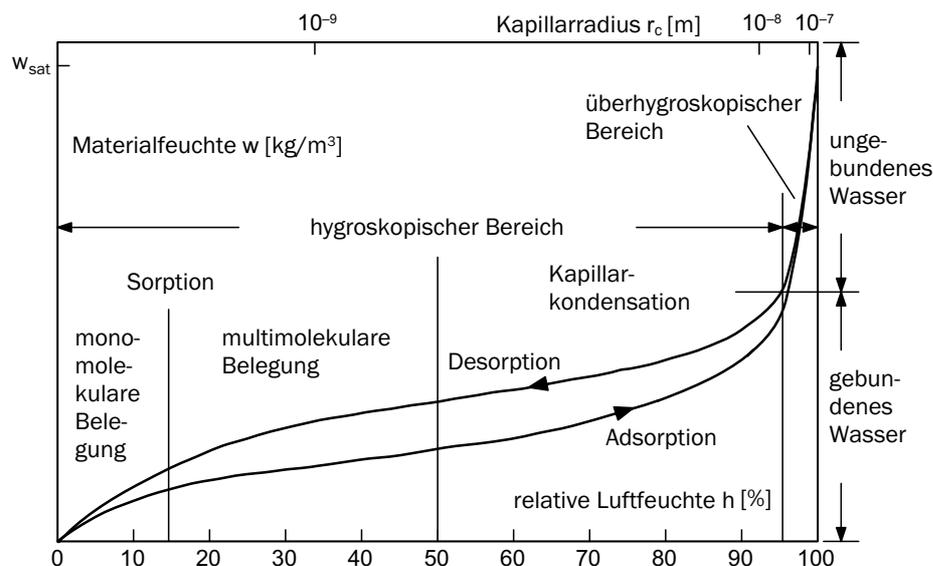


Bild 2.10: Exemplarische Feuchtespeicherfunktion von Beton nach Kiefl (1983).

Der Übersättigungsbereich, gekennzeichnet durch ein Überschreiten der freien Sättigung bis hin zur maximalen Wassersättigung, ist für poröse Stoffe im Allgemeinen von untergeordneter Bedeutung [Künzel 1994; Krus 1995]. Jedoch hat dieser Bereich einen entscheidenden Einfluss auf das Verhalten des Betons, wenn er durch Frost-Tau-Wechsel beansprucht wird. Der Sättigungsgrad liegt bei diesem Prozess weit über dem, der sich allein durch freies Saugen unter isothermen Bedingungen ergibt. Erreicht der Wassergehalt die kritische Wassersättigung, dann führt die mit der Phasenumwandlung Wasser-Eis verbundene Volumenvergrößerung zu einer inneren Gefügeschädigung der Zementsteinmatrix [Lohaus & Petersen 2002; Lohaus & Petersen 2003].

2.2.7 Schwinden und Quellen

Physikalische und chemische Vorgänge im Gefüge des Betons führen zu einer signifikanten Änderung des Trag- und Verformungsverhaltens von Betonkonstruktionen gegenüber dem Kurzzeitverhalten. Die zeitabhängige Volumenverringerung eines unbelasteten Betons wird mit Schwinden, die Volumenvergrößerung mit Quellen bezeichnet.

2.2.7.1 Schwindkomponenten

Bezüglich der Volumenänderung des Betons infolge Schwindens unterscheidet man zwischen vier Anteilen, die je nach Alter und Lagerungsbedingungen in unterschiedlicher Intensität auftreten können [Grube 1991; Müller & Kvitsel 2002].

Kapillarschwinden. Bei diesem im Frischbeton stattfindenden Prozess verdunstet Wasser über die Oberfläche des Betons. Die Austrocknung aktiviert Kapillarkräfte im anfangs noch plastisch verformbaren Beton, die zu einer dichteren Lagerung der Feststoffpartikel und somit zu einer Volumenverminderung des Frischbetons führen. Man bezeichnet diesen Vorgang als Kapillarschwinden, Frühschwinden oder plastisches Schwinden. Dabei handelt es sich um einen rein physikalischen, reversiblen Vorgang. Erstarrt der Beton, resultieren aus der fortschreitenden Austrocknung zunehmende Kapillarzugspannungen in der Zementmatrix. Überschreiten diese die Haftspannung der Feststoffpartikel, so entstehen Oberflächenrisse. Die Kapillarwirkung, und damit der Mechanismus des Kapillarschwindens, baut sich stark ab, sobald die Poren nicht mehr vollständig mit Wasser gefüllt sind. Eng gekoppelt an das Kapillarschwinden ist der Vorgang des Blutens. Hierbei tritt aufgrund von Dichteunterschieden eine Sedimentation der Feststoffe ein, die das Ansammeln des Wassers auf der Betonoberseite bewirkt. Begünstigt wird der Vorgang des Blutens durch einen geringen Mehlkorngelalt und einen hohen w/z -Wert. Das abgeforderte Wasser verdunstet oder wird vom Beton aufgesaugt. Erst danach kann es zur Kapillarwirkung in den Poren des Zementsteins kommen. Bluten und Kapillarschwinden können durch geeignete Mischgutzusammensetzung und eine ordnungsgemäße Nachbehandlung fast vollständig vermieden werden.

Karbonatisierungsschwinden. Die Reaktion der Hydratationsprodukte des Zementsteins mit dem aus der Luft aufgenommenen Kohlendioxid unter Freisetzung des Wassers und der damit verbundenen Volumenverminderung wird Karbonatisierungsschwinden genannt. Die daraus resultierenden Schwindverformungen in der Betonrandzone führen zu Eigenspannungen, welche wiederum ein Netz von feinen unregelmäßigen Rissen hervorbringen können. Der Anteil an den Gesamtverformungen ist unter normalen Umweltbedingungen relativ klein, da der Prozess nur in einem kleinen Teil des Gesamtquerschnitts abläuft.

Trocknungsschwinden. Als Trocknungsschwinden wird die Volumenkontraktion des erhärteten Betons, insbesondere des Zementsteins, durch Wasserabgabe an die trockenere Umgebung bezeichnet. Bei normalfestem Beton ist diese Komponente entscheidend. Daher werden die verantwortlichen Mechanismen und das in Versuchen zu beobachtende Verhalten im folgenden Abschnitt 2.2.7.2 näher betrachtet.

Schrumpfen. Die chemische Reaktion zwischen Anmachwasser und Zement während der Hydratation führt zu einer Volumenkontraktion des Leims. Die Erklärung für diesen Prozess, der auch als chemisches Schwinden⁶ bezeichnet wird, liefern Powers & Brownyard (1948). Sie stellen fest, dass das freie Wasser eine geringere Dichte als das Hydratwasser aufweist. Das Volumen der Hydrate einschließlich des physikalisch gebundenen Wassers kann bis zu 8 V.-% geringer sein als das Volumen der Ausgangsstoffe [Czernin 1977]. Nur zu Beginn, solange der Beton eine plastische Verformbarkeit besitzt, führt das chemische Schwinden zu äußeren Formänderungen, die aber vergleichsweise klein sind. Bei zunehmendem Verformungswiderstand führt der chemische Prozess zu einer Porenbildung im Gefüge, vgl. Abschnitt 2.2.3. Bei normalfesten Betonen ist das chemische Schwinden von untergeordneter Bedeutung, da bei den hier vorliegenden w/z -Werten die durch den Hydratationsprozess entstandenen Schrumpfporen aus den Kapillarporen Wasser nachsaugen können. Dagegen ist bei Betonen mit niedrigen w/z -Werten von weniger als 0.40 mit einer nennenswerten äußeren Volumenänderung zu rechnen. Das geringe Wasserangebot führt in den Schrumpfporen zu einer Selbst austrocknung des Porenraums. Der Vorgang wird als autogenes Schwinden bezeichnet und ist bei hochfesten Betonen von entscheidender Bedeutung, da die daraus resultierenden Dehnungen einen Großteil des Gesamtschwindmaßes ausmachen [König & Grimm 1996; Schrage 1996; Alonso 2002]. Dabei wird die Volumenänderung durch die sich aufbauenden kapillaren Randspannungen in den ausgetrockneten Poren bewirkt. Infolge der starken Interaktion des chemischen und autogenen Schwindens ist eine getrennte Betrachtung der Anteile sehr schwer. Beide Prozesse werden unter dem Begriff Schrumpfen zusammengefasst. Bei normalen, austrocknenden Lagerungsbedingungen wird das gesamte Schwinden, d.h. das Trocknungsschwinden und das autogene Schwinden, gemessen, während bei hygri sch konservierender Lagerung nur der Teil des autogenen Schwindens erfasst wird. Das Schrumpfen ist weitgehend unabhängig von den Umgebungsbedingungen und verläuft deshalb gleichmäßiger über den Querschnitt als das Trocknungsschwinden.

2.2.7.2 Physikalische Mechanismen

Für die Beschreibung der physikalischen Ursachen des Trocknungsschwindens sind in der Vergangenheit verschiedene Modellvorstellungen entwickelt worden [Powers & Brownyard 1948; Powers 1965; Feldman 1968; Feldman & Sereda 1968; Wittmann 1977; Setzer 1991]. Aufbauend auf der Auswertung experimenteller Untersuchungen der zu Grunde liegenden Mechanismen schlägt Wittmann (1977) zur Erklärung der Verformungen von Beton infolge Schwindens und Quellens das „Münchener Modell“ vor. Danach liegen im trockenen Zustand die Teilchen des Zementgelgerüsts infolge der Oberflächenspannung in komprimierter Form vor (Bild 2.11 (links)). Die Adsorption von Wasser mit zunehmender Feuchte führt zu einer Reduzierung der Oberflächenenergie (Bild 2.12 (links)). Infolgedessen dehnt sich der Beton aus und beginnt zu quellen (Bild 2.11 (mitte)). Parallel dazu verursachen die adsorbierten Wasserfilme eine Minderung der zwischen den Gelteilchen wirkenden VAN DER WAALS-Kräfte, das heißt, die sekundären Bindungskräfte werden geschwächt. Diese

⁶Die Terminologie für das Schrumpfen ist in der Literatur nicht einheitlich. Das chemische Schwinden wird auch als chemisches Schrumpfen bezeichnet [Grübl, Weigler & Karl 2001].

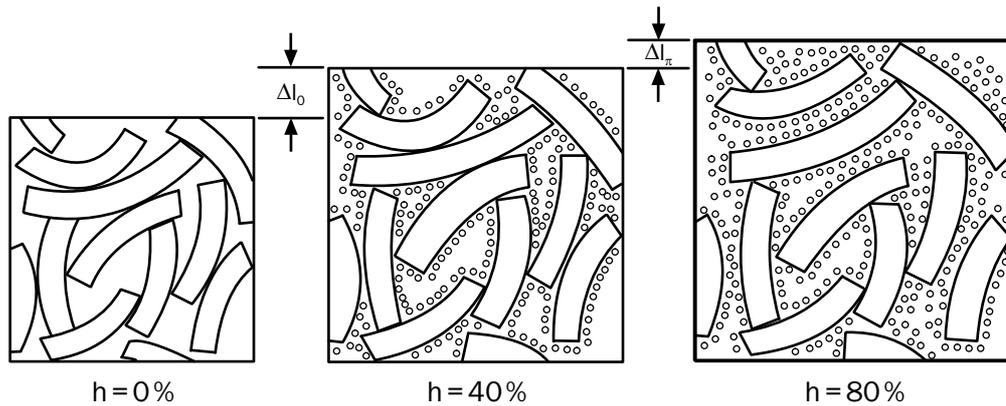


Bild 2.11: Schematische Darstellung des trockenen Zementgels (links), des maßstäblich expandierten Zementgels im unteren Bereich des Feuchtigkeitsgehaltes (mitte) und der trennenden Wirkung des Spaltdrucks an einigen Kontaktstellen (rechts) nach Wittmann (1977).

Mechanismen sind im unteren Luftfeuchtebereich ($h < 40\%$) maßgebend. Mit darüber hinaus zunehmender Feuchte setzt der Mechanismus der Kapillarkondensation ein. Dieser ruft selbst keine hygri-schen Längenänderung hervor, jedoch baut sich durch die Behinderung der freien Wasseranlagerung bei eng beieinanderliegenden Oberflächen ein Spaltdruck auf. Dieser Spaltdruck wirkt entgegen den mit zunehmender Feuchte abnehmenden sekundären Bindungskräften. Gelteilchen, die nicht durch primäre chemische Bindungen aneinanderhaften, werden getrennt. Zwischen den Oberflächen der Gelteilchen lagert sich eine mobile Wasserschicht ein (Bild 2.11 (rechts)). Die Folge ist eine erhöhte Zunahme der Verformung. Bild 2.12 (rechts) zeigt Versuchsergebnisse, die von Wittmann (1977) bezüglich der zuvor geschilderten Mechanismen ausgewertet worden sind.

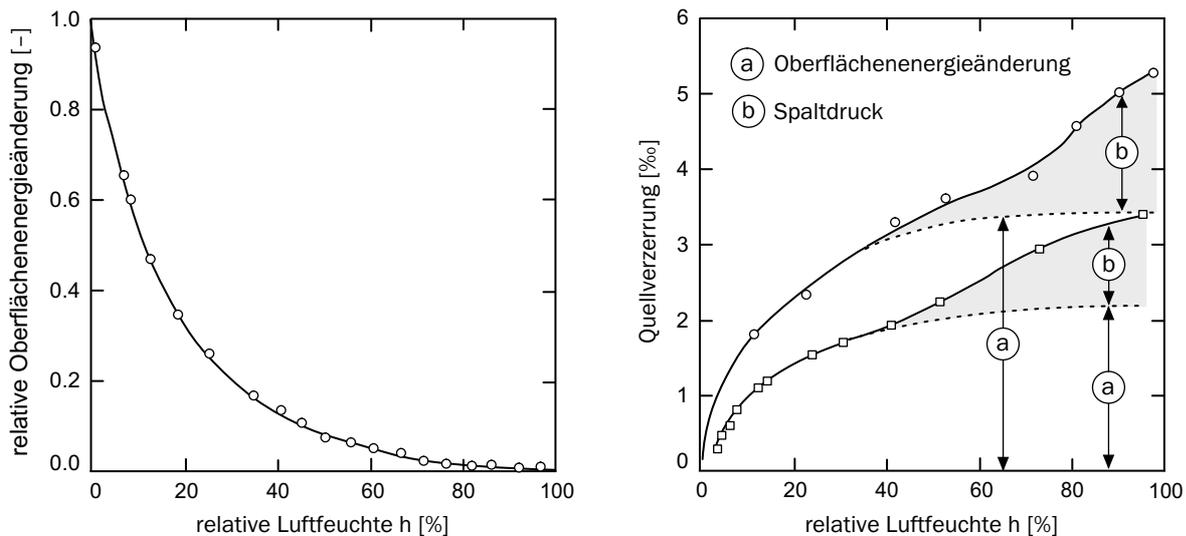


Bild 2.12: Relative Änderung der Oberflächenenergie (links) und der hygrischen Dehnung (rechts) als Funktion der relativen Luftfeuchte nach Wittmann (1977).

Die auftretenden Wechselwirkungen zwischen Feststoffmatrix und Wasser werden von Powers (1965) anhand einer keilförmigen Spalte erklärt (Bild 2.13).

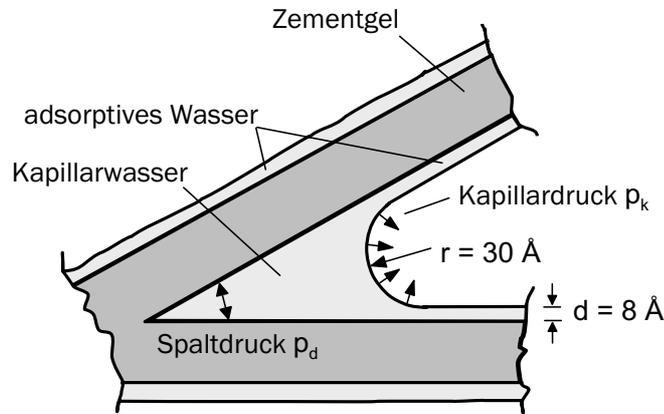


Bild 2.13: Beschreibung der mikroskopischen Wechselwirkung im Zementgel anhand einer keilförmigen Spalte mit einem Wasserfilm der Dicke d und einem Meniskus mit dem Radius r nach Powers (1965).

2.2.7.3 Versuchsbeobachtungen

Das Schwinden des Betons wird im Wesentlichen durch das Schwinden des Zementsteins verursacht, da der Zuschlag im Allgemeinen nicht aktiv schwindet. Versuchsergebnisse an Zementstein und Beton bestätigten dieses Verhalten [Baroghel-Bouny, Mainguy, Lassabatère & Coussy 1999]. Die Behinderung durch den nicht schwindenden Zuschlag bewirkt eine Verringerung des zum Zementsteinanteil proportionalen Schwindmaßes. Umso steifer der Zuschlag ist, d.h. um so höher der Elastizitätsmodul des Zuschlags ist, desto größer ist dessen aussteifende Wirkung.

Bei der Trocknung einer wassergesättigten Probe entweicht zunächst das freie Wasser aus den Kapillarporen. Die damit verbundenen Längenänderungen sind jedoch gering. Entscheidend für die auftretenden Schwindverkürzungen ist das Entweichen des physikalisch gebundenen Wassers aus den Gelporen. Dabei wird das Schwinden nicht durch den Wasserverlust selbst, sondern durch die damit verbundene Änderung des im Beton verbleibenden Wassers bewirkt.

Die Abhängigkeit des Verhaltens von der Kapillarporsität verdeutlicht Bild 2.14 (links). In seinen Untersuchungen an trocknenden Zementsteinproben steuerte Powers (1959) den Kapillarporenanteil durch die Zugabe unterschiedlicher Silicagehalte. Für den Fall, dass nahezu keine Kapillarporen vorhanden sind, kann ein sofortiges lineares Verhalten zwischen Wasserverlust und Schwindverkürzungen beobachtet werden. Bei zunehmendem Anteil der Kapillarporen ist anfänglich eine erhöhte Massenabnahme zu verzeichnen, da zunächst die wenig schwindwirksamen Kapillarporen entleert werden. Danach verlaufen die Kurven nahezu parallel.

Der Einfluss des Feuchtebereichs auf die hygrischen Verformungen ist von Verbeck & Helmuth (1968) an dünnen Zementsteinproben untersucht worden. Das aus Hilsdorf (1969) entnommene Bild 2.14 (rechts) zeigt einen bilinearen Zusammenhang zwischen dem Wasserverlust und den daraus resultierenden Schwindverkürzungen. Im Bereich hoher Luftfeuchten ist vorwiegend der abnehmende Spaltdruck für die Verformungen verantwortlich. Sinkt die relative Feuchte unter 30 %, führt eine Änderung der Oberflächenenergie zu einem schnelleren Anstieg der Kurve. Die Versuchsergebnisse stehen somit im Einklang mit dem zuvor beschriebenen „Münchner Modell“. Die Schwindvorgänge des Zementsteins treten im normalen Betonbau im Bereich oberhalb von 40 % relativer Luftfeuchte auf. Damit resultieren bei den meisten Betonkonstruktionen die Schwindverformungen aus der Änderung des Spaltdrucks zwischen den Hydratationsprodukten.

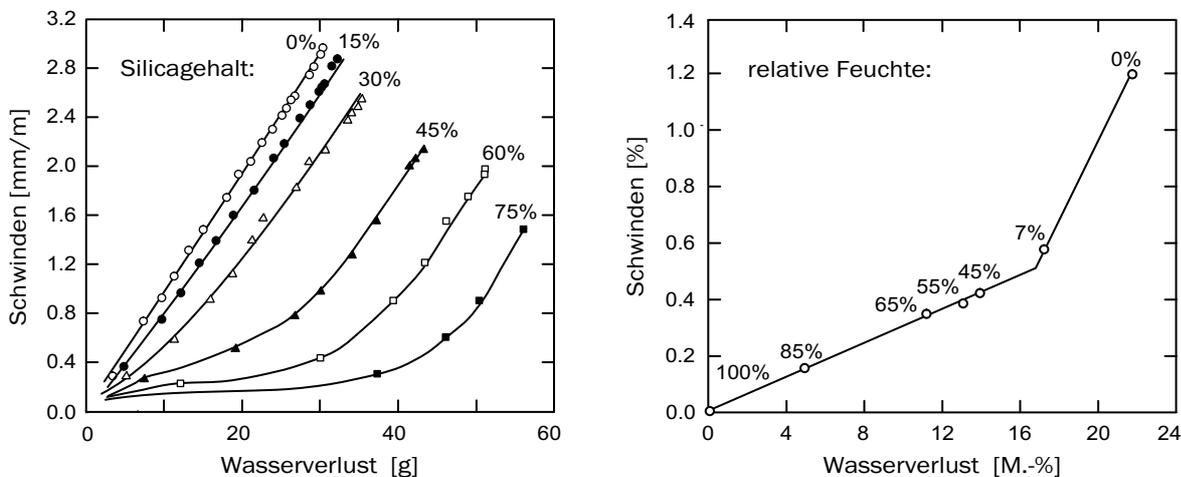


Bild 2.14: Beziehung zwischen dem Wasserverlust und dem Schwinden von Zementstein mit unterschiedlichem Silicagehalt nach Powers (1959) (links) und einer Zementsteinprobe nach Verbeck & Helmuth (1968) (rechts).

Hinsichtlich der Auswertung und Diskussion über weitere Versuchsergebnisse sei auf Fleischer (1992) verwiesen, der den Einfluss unterschiedlicher Zementarten auf das hygrische Formänderungsverhalten untersucht. Danach führen hohe Alkalikonzentrationen der Porenlösung sowie spezifische Oberflächen des Zementsteins zu einer Erhöhung der hygri-schen Verformungen.

2.2.8 Kriechen und Relaxation

Unter Kriechen versteht man die zeitabhängige Verformungszunahme des Betons infolge einer konstanten Lasteinwirkung. Eine Abnahme der Betonspannungen bei eingepprägter Verformung, die auf den gleichen physikalischen Vorgängen beruht, wird mit Relaxation bezeichnet. Bild 2.15 zeigt das prinzipielle Verformungsverhalten eines Betonkörpers, der ab dem Zeitpunkt t_s austrocknet, zum Zeitpunkt t_0 mit einer konstanten Spannung σ belastet wird und zum Zeitpunkt t_e entlastet wird. Die Gesamtkriechverformung setzt sich aus einem reversiblen Anteil, der verzögert elastischen Verformung, und aus einem irreversiblen Anteil, dem Fließen, zusammen.

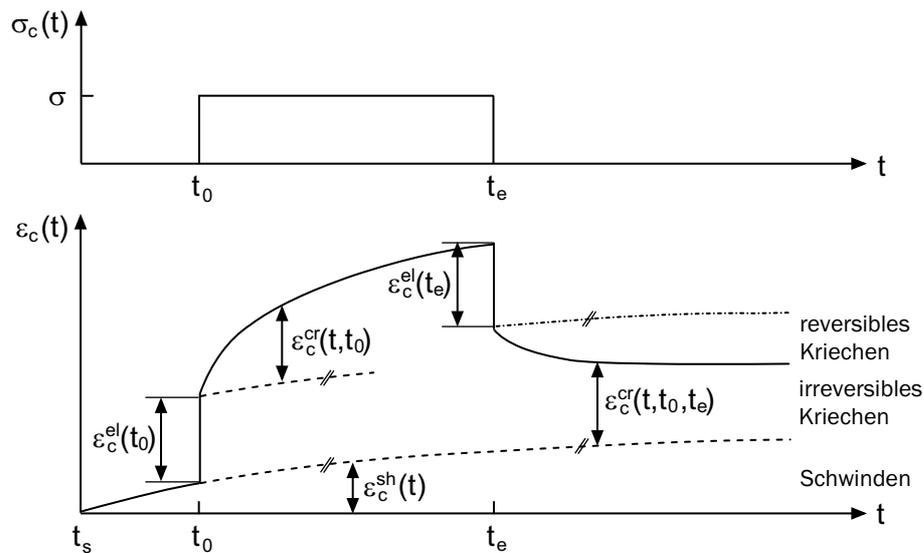


Bild 2.15: Verformungskomponenten des Betons [Rottler 1998].

Das Kriechen wird nahezu vollständig durch die Viskosität des Zementsteins verursacht, da die Zuschläge im Allgemeinen nicht kriechen. Es beruht somit auf ähnlichen mikrophysikalischen Ursachen wie das Schwinden. In der Vergangenheit sind hierzu unterschiedliche Modellvorstellungen entwickelt worden, jedoch existiert noch keine allgemein gültige Kriechtheorie mit der alle auftretenden Phänomene des Langzeitverhaltens widerspruchsfrei erklärt werden können [Wittmann 1974; Lanig 1988]. Als gesichert gilt, dass das Kriechen durch Platzwechsellvorgänge im physikalisch gebundenen Wasser des Zementsteins und den damit verbundenen Gleit- und Verdichtungsvorgängen der Gelpartikel ausgelöst wird.

Im Bereich der Gebrauchsspannungen ergibt sich ein annähernd proportionaler Zusammenhang zwischen den Kriechverformungen und den kriecherzeugenden Spannungen (lineares Kriechen). Unter höheren Spannungen kommt es durch die zunehmende Mikrorissbildung in der Kontaktzone zwischen Zementstein und Zuschlag zu einem nichtlinearen, überproportionalen Anstieg der Dehnungen (nichtlineares Kriechen). Die in Bild 2.16 dargestellten Bereiche des primären (I), sekundären (II) und tertiären (III) Kriechens sind durch eine abnehmende, konstante und zunehmende Kriechgeschwindigkeit charakterisiert. Ihr Auftreten ist abhängig von den im Beton vorhandenen Spannungen.

Eine weitere Aufteilung des Kriechens in Grund- und Trocknungskriechen resultiert aus der Beobachtung, dass die Kriechverformung eines vor Wasserverlust geschützten Betons kleiner ist als diejenige, die bei gleichzeitiger Austrocknung des Betons auftritt. Mit Grundkriechen wird dabei der Anteil bezeichnet, der sich in einem belasteten Betonkörper unter versiegelter Lagerung einstellt. Dieser fällt umso größer aus, je höher der Wassergehalt ist. Mit Trocknungskriechen wird die zusätzliche Verformungszunahme bezeichnet. Dabei handelt es sich um die Differenz zwischen der Verformung eines austrocknenden, belasteten Betons gegenüber der theoretischen Summe der Verformungen, die sich bei einem unbelasteten Beton infolge Schwindens und bei einem vor Austrocknung geschützten Beton infolge Grundkriechens ergibt [Wittmann 1982]. Dieser nach PICKETT benannte

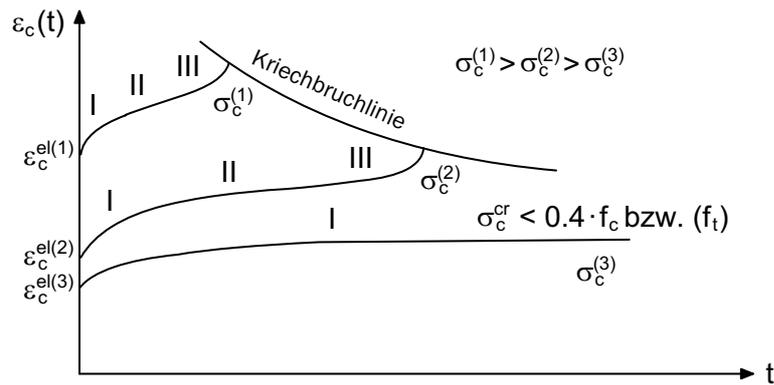


Bild 2.16: Kriechverhalten des Betons zu unterschiedlichen Belastungsniveaus [Martinola 2001].

Effekt resultiert aus einer Wechselwirkung zwischen Schwinden und Kriechen. In diesem Zusammenhang werden auch die Begriffe des trocknungsinduzierten Kriechens oder des spannungsinduzierten Schwindens verwendet.

Die Ausführungen machen deutlich, dass neben der Belastungsintensität vor allem das Zementsteinvolumen, der Wassergehalt bei Belastungsbeginn und der mögliche Wasserverlust während der Belastung die entscheidenden Einflussgrößen sind. Eine Erhöhung der Temperatur begünstigt die im Beton ablaufenden Prozesse und führt zu einer Vergrößerung der Kriechverformung. Aufgrund der höheren Steifigkeit und der geringeren Porosität weisen hochfeste Betone geringere Kriechverformungen auf als normalfeste Betone. Dabei verringert sich die Größe des Trocknungskriechens stärker, als die des Grundkriechens [Müller 1996].

Neuere Versuchsergebnisse zum Kriechen des Betons sind in Nechvatal, Stöckl & Kupfer (1994) und Rottler (1998) zu finden.

2.3 Betonstahl

2.3.1 Mechanisches Verhalten

Der Bewehrungsstahl wird in Stahlbetonkonstruktionen üblicherweise in Form von Bewehrungsstäben oder -matten eingelegt, wobei der einzelne Stab überwiegend einaxial auf Zug oder Druck beansprucht wird. In Bild 2.17 sind die in Versuchen zu beobachtenden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von naturharten bzw. kaltverformten Bewehrungsstählen dargestellt. Beide Kennlinien zeigen ein linear-elastisches Verhalten bis zum Erreichen der Streckgrenze f_y ⁷. Unterschiede ergeben sich in der Art und Ausbildung des Fließplateaus. Bei warmgewalzten Betonstählen zeigt sich eine ausgeprägte Streckgrenze

⁷Die Symbole sind in Anlehnung an DIN 1045-1 (2001) und abweichend von DIN 10080-1 (1999) gewählt worden.

f_y , an die sich ein Verfestigungsbereich bis zur Zugfestigkeit f_t anschließt. Bei kaltverformten Betonstählen hingegen ergibt sich eine annähernd kontinuierliche σ - ε -Beziehung mit einer geringeren Verfestigung. Bei beiden Formen ist bis zum Erreichen der Zugfestigkeit die Dehnung gleichmäßig über die Probenlänge verteilt. Nach Überschreiten der maximalen Zugfestigkeit bei der Gleichmaßdehnung ε_g schnürt sich der Stahl an seiner schwächsten Stelle unter örtlich größerer Dehnung ein. Die Werte für die Bruchdehnung variieren zwischen $\delta_{10} = 1\%$ (stark kaltverformter Stahl) und $\delta_{10} > 10\%$ (naturharter Stahl). In DIN 1045-1 (2001) wird der Betonstahl hinsichtlich der Duktilität in die zwei Klassen normalduktil (A) und hochduktil (B) unterteilt. Dabei können alle warmgewalzten Stähle, somit auch Bewehrungsstabstahl, der Duktilitätsklasse (B) zugeordnet werden [Schwarzkopf 2001]. Der Betonstahl verhält sich im Gegensatz zum Beton im Druck- und Zugbereich annähernd gleich.

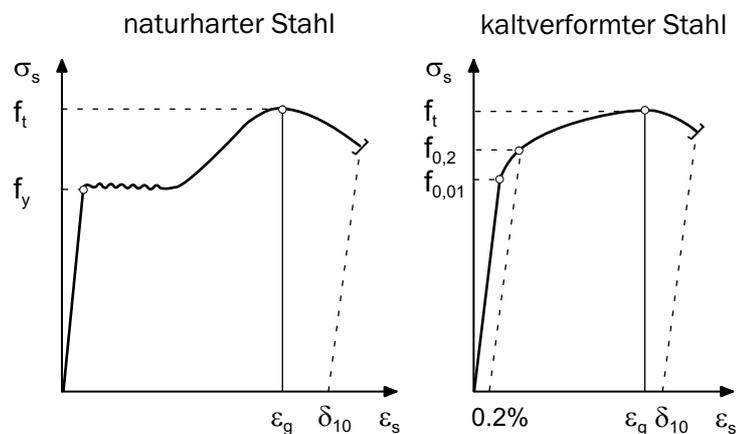


Bild 2.17: Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für einen naturharten Betonstahl (links) und einen kaltverformten Betonstahl (rechts) [Eibl & Ivanyi 1976].

Das Materialverhalten des Betonstahls kann daher mit den folgenden Kennwerten beschrieben werden:

- Streckgrenze f_y ,
- Zugfestigkeit f_t ,
- Verhältnis f_t/f_y ,
- Elastizitätsmodul E_s ,
- Bruchdehnung δ_{10} .

Die üblichen Betonstahlsorten weisen im Allgemeinen einen Elastizitätsmodul zwischen 195000 MPa und 210000 MPa auf.

Wird der Bewehrungsstahl zyklisch belastet, tritt der nach seinem Entdecker benannte BAUSCHINGER-Effekt auf. Er sagt aus, dass eine vorangegangene Zug- bzw. Druckbeanspruchung eine Verringerung der Fließgrenze bei späterer Druck- bzw. Zugbeanspruchung zur Folge hat. Ursache hierfür sind mikroskopische Eigenspannungen.

2.3.2 Thermisches und hygri-sches Verhalten

Der annähernd gleich große Wärmeausdehnungskoeffizient von Betonstahl und Beton wirkt sich sehr positiv auf das Zusammenwirken im Verbundbaustoff aus. Somit haben Wärmeeinwirkungen kein oder nur ein geringfügig unterschiedliches Verformungsverhalten zur Folge. Dieses würde andernfalls aufgrund der Verbundwirkungen zwischen den Komponenten zu Eigenspannungen im Querschnitt führen.

Der Einfluss der Bewehrung auf die Wärmetransport und -speichervorgänge in Stahlbetonstrukturen ist gering. Wegen der hohen Dichte des Stahls mit 7800 kg/m^3 und des nicht vorhandenen oder nur sehr geringen Luftraums ist die Wärmeleitfähigkeit von Stahl im Vergleich zum Beton sehr hoch. In DIN EN 12524 (2000) wird die Wärmeleitfähigkeit mit einem Wert von $\lambda_t = 50 \text{ W/mK}$ angegeben. Darüber hinaus liegen die üblichen Bewehrungsgrade, insbesondere bei Flächentragwerken, bei unter 3%. Im Gebrauchstemperaturbereich kann der Einfluss somit in guter Näherung vernachlässigt werden.

Metallische Werkstoffe, und damit auch der Betonstahl, nehmen im Gegensatz zu porösen Baustoffen nahezu keine Feuchte auf. Dementsprechend wird in DIN EN 12524 (2000) für die dort aufgeführten Metalle die Wasserdampfdiffusionswiderstandszahl μ einheitlich mit ∞ vorgegeben. Daher kann auch bei der Betrachtung des hygri-schen Transport- und Speicherverhaltens in den Stahlbetonstrukturen der Einfluss des Betonstahls unberücksichtigt bleiben.

2.4 Verbund und Tension-Stiffening

Für Stahlbetonbauteile ist neben dem Verhalten der Komponenten Beton und Stahl auch deren Zusammenwirken von entscheidender Bedeutung. Die Verbundwirkung, d.h. die Kraftübertragung zwischen den beiden Komponenten, bildet die Voraussetzung für die gemeinsame Tragwirkung in Stahlbetonkonstruktionen. Nur so ist es möglich, dass sich der Betonstahl an der Abtragung der auf der Betonoberfläche angreifenden Lasten beteiligt. Faktoren, welche die Verbundwirkung beeinflussen, sind die Oberflächenprofilierung der Betonstähle, ausgedrückt durch die bezogene Rippenfläche, der Stahldurchmesser, der Bewehrungsgrad und die Betonfestigkeiten. Die Kraftübertragung erfolgt durch die Haftung infolge physikalisch-chemischer Bindung (Adhäsion), durch die Reibung infolge der Oberflächenrauigkeit und durch den Scherverbund [Rehm 1961]. Dabei ist der wirksamste Verbundmechanismus bei den heute gebräuchlichen gerippten Betonstählen der Scherverbund, bei dem die Verbundkraft durch die mechanischen Verzahnungen infolge der Stahlrippen auf Betonkonsolen übertragen wird. Ein Versagen des Verbunds kann durch Abscheren dieser Betonkonsolen oder durch ein Überschreiten der Spannungen im Zugring erfolgen.

Im ungerissenen Zustand kann man annähernd von einem starren Verbund ausgehen. Überschreitet die Spannung die Zugfestigkeit des Betons, kommt es zur Rissbildung und damit zu einer Relativverschiebung zwischen Beton und Stahl, die als Schlupf bezeichnet wird. Die vom Stahl im Rissquerschnitt übernommenen Zugkräfte werden über die sich

in Rissnähe ausbildenden Verbundspannungen wieder in den Beton eingeleitet. Dies geschieht innerhalb der Einleitungslänge l_t . Bei weiterer Laststeigerung entstehen solange neue Risse, bis die Rissabstände keinen ungestörten Verbund mehr zulassen und die Zugspannungen im Beton die Zugfestigkeiten nicht mehr erreichen. An dieser Stelle ist der Übergang von der Phase der Erstrissbildung in den Zustand des abgeschlossenen Rissbilds. Der prinzipielle Verlauf der Spannungen zwischen den Rissen ist in Bild 2.18 dargestellt.

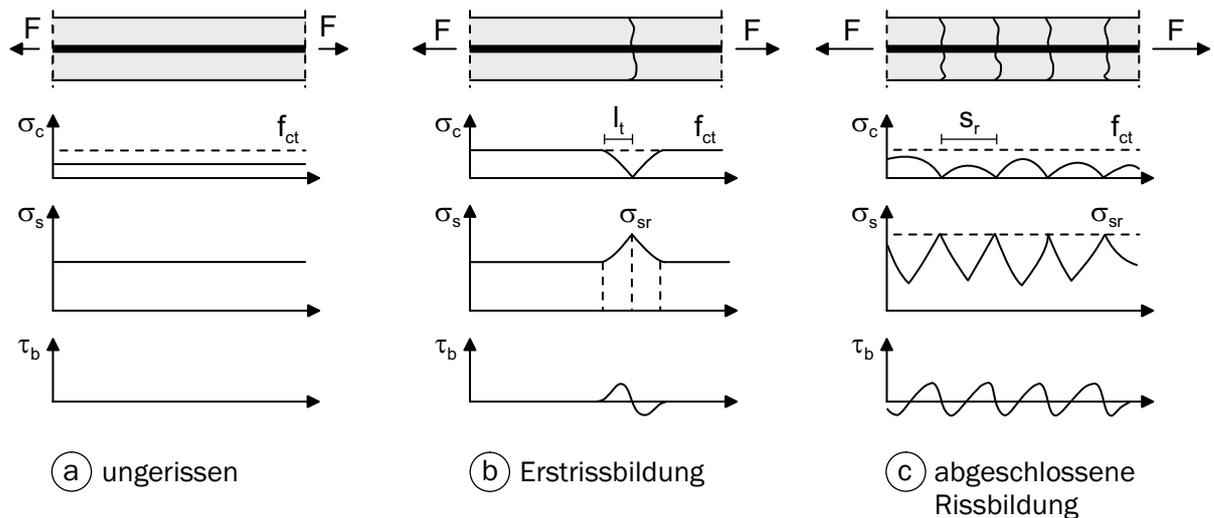


Bild 2.18: Illustration der Rissbildungsphasen mit den zugehörigen Spannungsverläufen.

Der Beton beteiligt sich somit auch nach der Rissbildung an der Lastabtragung, und die mittlere Stahldehnung ε_{sm} ist kleiner als die Stahldehnung im Riss ε_s^{II} . Die daraus resultierende Dehnungsdifferenz $\Delta\varepsilon_s$ würde in einer gedachten Struktur, in der die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen unberücksichtigt bleibt, nicht auftreten. Diese versteifende Wirkung wird mit dem Begriff Tension-Stiffening umschrieben. Der Einfluss dieses Effektes wird in Bild 2.19 veranschaulicht.

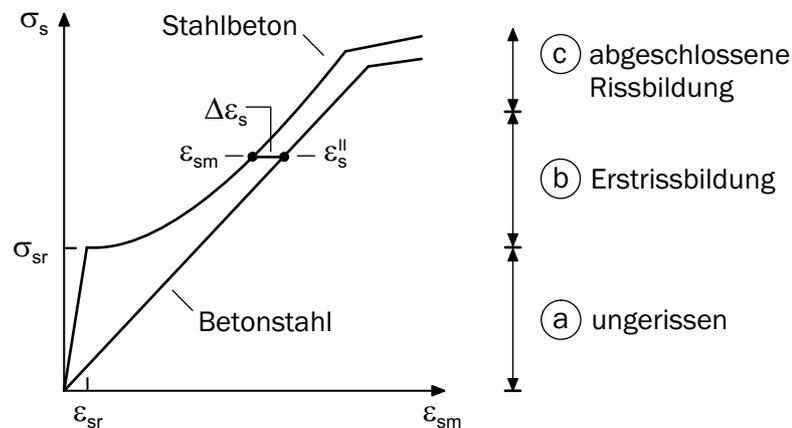


Bild 2.19: Illustration des Tension-Stiffening-Effektes.

Durch das Aufstellen von Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen an einem differentiellen Element kann der Zusammenhang zwischen den Verbundspannungen τ_b , dem Schlupf s und den Spannungen und Verschiebungen der Komponenten Beton und Stahl angegeben werden. Die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung, die in der Regel an Auszieh- bzw. Dehnkörpern bestimmt wird, charakterisiert das Verbundverhalten und wird oft als Verbundgesetz bezeichnet. Dieser Zusammenhang stellt jedoch kein Stoffgesetz im eigentlichen Sinne dar, sondern lediglich ein Ersatzmodell, mit dem die komplexen Vorgänge rechnerisch erfasst werden können. Unterschiedliche Vorschläge für die τ_b - s -Beziehung sind in der Literatur zu finden, beispielsweise im MC 90 (1993), in Kreller (1990) oder in Tue (1993). Wird dabei die in Versuchen festzustellende Abhängigkeit der Beziehung von der Rissentfernung vernachlässigt, spricht man von einem ortsunabhängigen Verbundgesetz, wird dieser Effekt berücksichtigt, von einem ortsabhängigen oder lokalen Verbundgesetz.

Kapitel 3

Modellierung des Stahlbetons

Zu Beginn des Kapitels werden die Charakteristiken der verwendeten zeitinvarianten Betonmodellierung erläutert. Dazu zählen eine hypoelastische orthotrope Materialformulierung, die einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, die biaxialen Versagenskriterien, ein rotierendes Rissmodell und ein auf der Mesoebene einzuordnendes Verbundmodell. Danach erfolgt die eingehende Darstellung der hygrothermischen Modellierung von Beton. Zur Beschreibung der Transport- und Speichervorgänge wird ein gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem aufgestellt. Die möglichen Rand- und Anfangsbedingungen werden besprochen und die mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten der einfließenden hygrothermischen Materialparameter aufgezeigt. Die für die Erfassung des Langzeitverhaltens notwendigen Erweiterungen in der Betonmodellierung werden im Anschluss daran vorgestellt. Die Formulierung basiert auf der additiven Zerlegung der Verzerrungsanteile. Die mathematische Behandlung der einzelnen Anteile, die zum Teil auf der Grundlage der hygrothermischen Potentialgrößen bestimmt werden, wird angegeben. Das verwendete Stoffgesetz für den Bewehrungsstahl wird am Ende des Kapitels kurz erläutert.

3.1 Zeitinvariante Modellierung des Betons

In den beiden letzten Jahrzehnten sind zahlreiche für Kurzzeitbelastung geltende Betonmodelle entwickelt worden. Sie basieren auf unterschiedlichen Modellvorstellungen, vgl. z.B. Zahlten (1990), Hofstetter & Mang (1995) und Pölling (2000). Im Rahmen der nichtlinearen Elastizitätstheorie kann die Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens nach Chen & Han (1988) in die drei folgenden Gruppen gegliedert werden:

- CAUCHY-Elastizität,
- hyperelastische Werkstoffmodelle,
- hypoelastische Werkstoffmodelle.

Während die beiden Erstgenannten auf einer totalen Formulierung der konstitutiven Beziehungen basieren, wird ein hypoelastisches Modell differentiell bzw. inkrementell formuliert. Aus der Annahme der Linearität zwischen den Spannungs- und Dehnungsinkrementen folgt unter Verwendung des Werkstofftensors C^{ijkl} der Zusammenhang

$$d\sigma^{ij} = C^{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl}. \quad (3.1)$$

Die inkrementelle Formulierung erlaubt die Erfassung der Belastungsgeschichte und die Abbildung zyklischen Materialverhaltens. Anzumerken ist, dass die Modelle die Gesetze der Thermodynamik unter bestimmten Be- und Entlastungszyklen verletzen können, da ihnen die Betrachtung der Potentialfunktion fehlt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein hypoelastisches Betonmodell verwendet, dessen Ursprünge auf Darwin & Pecknold (1977a) zurückgehen. Die wiederholte Anwendung einer derartigen Betonmodellierung, beispielsweise in Elenas (1990), Stempniewski (1990), Noh (2002) und Andres (2004), und die Aufnahme des Modells in den MC 90 (1993) zeigen, dass mit diesem Modell Stahlbetonstrukturen nachweislich wirklichkeitsnah simuliert werden können. In Krätzig, Meskouris & Noh (2003) wird darauf hingewiesen, dass gerade der empirische Charakter des Modells dessen Attraktivität für theoretische, normative und experimentelle Erweiterungen steigert. Die guten Integrationsmöglichkeiten werden beispielsweise genutzt, um das veränderte Verhalten von hochfestem Beton durch entsprechende Formulierungen zu erfassen.

3.1.1 Konzept von DARWIN & PECKNOLD

An dieser Stelle sollen die wesentlichen Merkmale der in Darwin & Pecknold (1977a) und Darwin & Pecknold (1977b) vorgeschlagenen Vorgehensweise kurz dargestellt werden. Ausgangspunkt der Betrachtung ist die Annahme eines inkrementell linear-orthotropen Materialverhaltens. Mit den spannungsabhängigen Materialkonstanten E_i und ν_i kann die inkrementelle Stoffgleichung im ebenen Spannungszustand für orthogonal zueinander stehende Richtungen 1 und 2 mit

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1\nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 \\ \nu_1 E_2 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

angegeben werden. Mit der äquivalenten Querdehnzahl $\nu = \sqrt{\nu_1\nu_2}$, der aus einer Energiebetrachtung folgenden Beziehung $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$ und der Einführung eines Schubterms folgt aus (3.2) die konstitutive Beziehung

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2)G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Für den Schubmodul G wird weiterhin gefordert, dass er richtungsunabhängig ist. Transformiert man (3.3) mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

so erhält man die Werkstoffmatrix $\bar{\mathbf{C}}$ in Richtung der konvektiven Koordinaten

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (3.5)$$

und kann durch Gleichsetzen von $\bar{\mathbf{C}}$ mit \mathbf{C} aus (3.3) die invariante Schubsteifigkeit bestimmen:

$$(1 - \nu^2) G = \frac{1}{4} \left(E_1 + E_2 - 2\nu \sqrt{E_1 E_2} \right). \quad (3.6)$$

Die grundlegende Idee von Darwin & Pecknold (1977b) ist, den zweiaxialen Spannungszustand durch zwei entkoppelte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen in Hauptspannungsrichtung abzubilden. Durch die dort eingeführten äquivalenten einaxialen Dehnungen kann (3.3) in folgende Form überführt werden:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Der Zusammenhang zwischen den äquivalenten Verzerrungsinkrementen und den Verzerrungsinkrementen in Hauptrichtung ergibt sich durch Gleichsetzen von (3.3) mit (3.7):

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{1}{1 - \nu^2} (d\varepsilon_1 + \nu \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} d\varepsilon_2), \quad d\varepsilon_{2u} = \frac{1}{1 - \nu^2} (d\varepsilon_2 + \nu \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} d\varepsilon_1). \quad (3.8)$$

Die inkrementellen äquivalenten Verzerrungen können jedoch auch aus (3.7) zu

$$d\varepsilon_{iu} = \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad (3.9)$$

bestimmt werden. Die gesamten äquivalenten Verzerrungen folgen aus der Aufsummierung

$$\varepsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i} \approx \sum_{NLast} \frac{\Delta\sigma}{E_i}, \quad (3.10)$$

wobei der Index $i = 1, 2$ für die Hauptspannungsrichtungen und $NLast$ für die Anzahl der Lastinkremente steht. Bei den äquivalenten einaxialen Dehnungen handelt es sich um fiktive Größen, deren Addition nicht in festen Richtungen erfolgt, sondern in den sich kontinuierlich ändernden Hauptspannungsrichtungen. Nach Noh (2002) wird dadurch der Einfluss der vorherigen Belastungsvorgänge im Vergleich zur aktuellen Beanspruchung überschätzt. Durch die Einführung bestimmter Sektoren kann die Abbildung des Materialverhaltens verbessert werden. Wird ein Sektor durch das Drehen der Hauptspannungsrichtung verlassen, werden die Informationen des jetzt aktuellen Sektors verwendet.

Durch die Einführung der einaxialen äquivalenten Dehnungen wird die Möglichkeit geschaffen, das mechanische Verhalten mittels einaxialer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zu beschreiben. Im nächsten Abschnitt werden die hier eingesetzten Beziehungen dargestellt.

3.1.2 Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Monotone Belastung. Das in Abschnitt (2.2.4) beschriebene Verhalten eines Betons unter einaxialer Beanspruchung muss in eine mathematische Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen einfließen. In der Literatur sind für den Druckbereich unterschiedliche analytische Formulierungen einaxialer Spannungs-Dehnungs-Kurven vorhanden, die sich durch ihren Verlauf und ihren Gültigkeitsbereich unterscheiden. Der ansteigende Ast kann analog zu Darwin & Pecknold (1977a) mit der Gleichung von Saenz (1964) abgebildet werden:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_{iu} E_{c0}}{1 + \left(\frac{E_{c0}}{E_{cS}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2}. \quad (3.11)$$

Dabei ist ε_{iu} die aktuelle äquivalente einaxiale Dehnung, E_{c0} der Tangentenelastizitätsmodul im Ursprung, E_{cS} der Sekantenelastizitätsmodul zur maximalen Druckspannung σ_{ic} und ε_{ic} die zu σ_{ic} gehörende äquivalente einaxiale Dehnung. Die maximale Druckbeanspruchung σ_{ic} ist eine vom Hauptspannungsverhältnis abhängige Funktion, vgl. Abschnitt 3.1.3. Für die Beschreibung des Entfestigungsbereichs verwenden Darwin & Pecknold (1977a) eine abfallende Gerade, die vom Punkt $(\varepsilon_{ic}, \sigma_{ic})$ bis zum Punkt des angenommenen Druckbruchs $(4\varepsilon_{c1}, 0.2\sigma_{ic})$ verläuft. Mit ε_{c1} ist hier die im einaxialen Versuch messbare und zur maximal aufnehmbaren Spannung gehörende Scheitelstauchung gemeint.

In den aktuellen Bemessungsnormen MC 90 (1993), EC 2 (1992) und DIN 1045-1 (2001) ist für die Beschreibung des Druckbereichs die Funktion

$$\sigma_c = -\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} f_c \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (3.12)$$

aufgenommen worden, die auf die Arbeit von Grasser (1968) zurückgeht. Nach MC 90 (1993) wird der Faktor k , der die Völligkeit der Funktion beschreibt, mit dem Tangentenmodul im Ursprung bestimmt:

$$k = -E_{c0} \frac{f_c}{\varepsilon_{c1}} \quad \text{mit} \quad E_{c0} = 21500 (f_c/10)^{1/3}. \quad (3.13)$$

Die Scheitelstauchung ε_{c1} ist konstant mit -2.2‰ anzusetzen. Die Anwendung von (3.12) wird bis zu einem Spannungsverhältnis von $|\sigma_c|/f_{cm} \geq 0.5$ im Entfestigungsbereich erlaubt. Für das Verhalten bei weiterer Zunahme der Dehnungen wird eine weitere Funktion bereitgestellt. Vereinfachend gibt der MC 90 (1993) eine Gerade zur Beschreibung des gesamten abfallenden Astes vor:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = -\frac{0.8}{n-1} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} + \frac{n-0.2}{n-1}. \quad (3.14)$$

In EC 2 (1992) und DIN 1045-1 (2001) wird der mittlere Elastizitätsmodul E_{cm} als Sekantenmodul zu $|\sigma_c| \approx 0.4f_{cm}$ definiert. Zur Bestimmung des Parameters k wird der Sekantenmodul um 10% erhöht, womit er in etwa dem Ursprungstangentenmodul entspricht:

$$k = -1.1E_{cm} \frac{f_c}{\varepsilon_{c1}} \quad \text{mit} \quad E_{cm} = 9500 (f_c)^{1/3}. \quad (3.15)$$

Beide Normen geben keine zusätzliche Funktion zur Beschreibung des Entfestigungsbereichs an, sondern erlauben die Anwendung bis zu einer zulässigen Dehnung ε_{c1u} . Unterschiede ergeben sich bei der Definition von ε_{c1} und ε_{c1u} . Während nach EC 2 (1992), dessen Anwendungsbereich auf normalfesten Beton beschränkt ist, die Scheitelstauchung ε_{c1} unabhängig von der Festigkeit angenommen wird, wird in DIN 1045-1 (2001) ein Anwachsen von ε_{c1} mit zunehmender Betonfestigkeit berücksichtigt, was im Einklang mit neueren Versuchsergebnissen steht [Held & König 1992]. Für ε_{c1u} gibt der EC 2 (1992) veränderliche Werte von -3.6‰ (C12/15) bis -2.8‰ (C50/60) vor, während in DIN 1045-1 (2001) für diese Betonklassen ε_{c1u} konstant auf -3.5‰ gesetzt wird und erst für höherfeste Betone ein Abfall auf bis zu -3.0‰ vorgegeben wird.

In das Berechnungsmodell werden die unterschiedlichen Formulierungen eingebunden. Neben den Annahmen von Darwin & Pecknold (1977b) wird der Ansatz nach MC 90 (1993) mit einer abfallenden Gerade für den Entfestigungsbereich berücksichtigt. Die Formulierung aus der DIN 1045-1 (2001) wird dahingehend erweitert, dass für den Bereich $|\varepsilon_c| > |\varepsilon_{cu}|$ eine zusätzliche abfallende Gerade definiert wird, die in Anlehnung an MC 90 (1993) bis zu den dort definierten Grenzdehnungen reicht. Nähere Erläuterungen diesbezüglich sind in Andres (2004) enthalten. In Bild 3.1 sind die resultierenden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die unterschiedlichen Festigkeitsklassen dargestellt. Der zugehörige Verlauf des Tangentenelastizitätsmoduls wird in Bild 3.2 gezeigt.

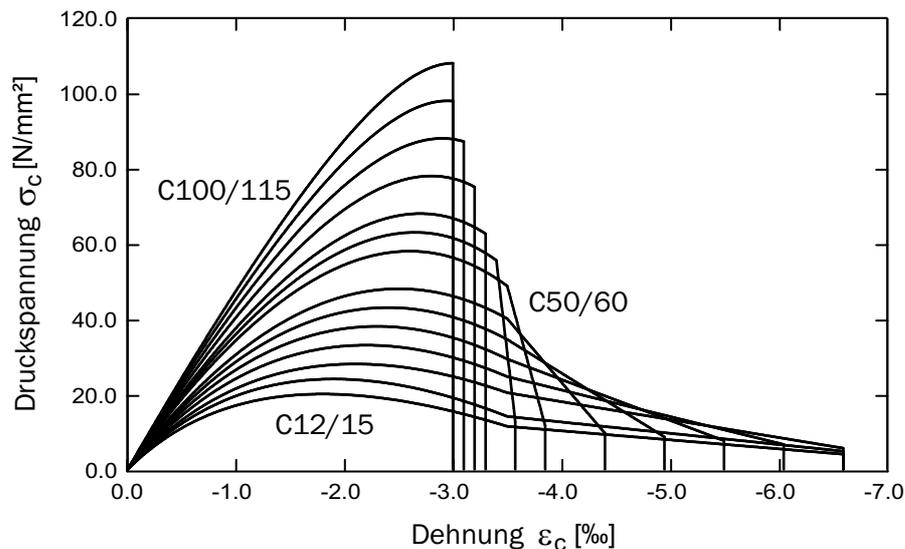


Bild 3.1: Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Betone nach DIN 1045-1 (2001) mit Erweiterung in Anlehnung an MC 90 (1993).

Aufgrund der in Abschnitt 2.2.4.1 erläuterten Schadenslokalisierung und des damit verbundenen „Size-Effektes“ können sich bei numerischen Berechnungen mittels der Finite-Element-Methode netzabhängige Lösungen ergeben. Die Netzunabhängigkeit der Ergebnisse kann durch eine Modifikation der Spannungs-Dehnungs-Kurven im Nachbruchbereich gewährleistet werden. In die Modellierung sind die von Andres (2004) vorgeschlagenen, auf dem Bruchenergiekonzept basierenden Änderungen integriert worden, die im Folgenden kurz skizziert werden.

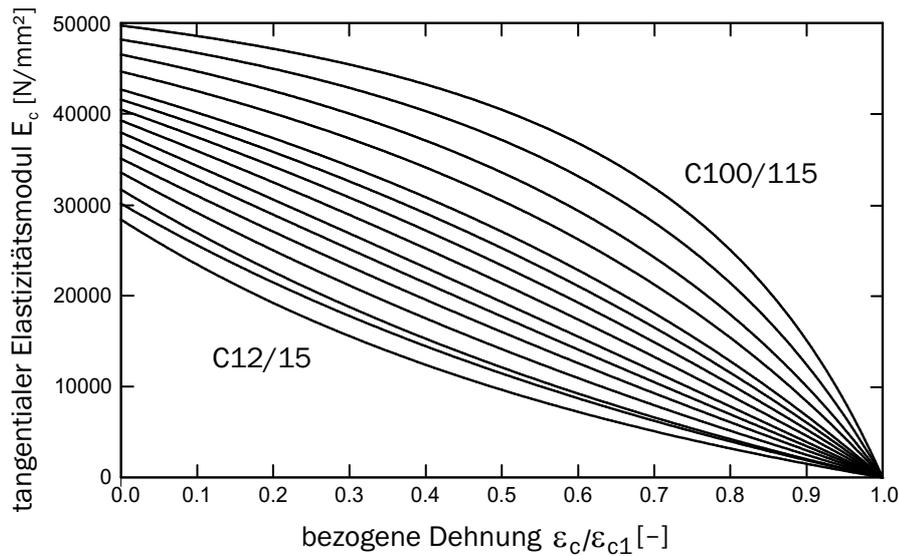


Bild 3.2: Verlauf des tangentialen Elastizitätsmoduls für Betone nach DIN 1045-1 (2001).

Danach werden die Größe der Bruchdehnung und damit der Verlauf der abfallenden Gerade im Nachbruchbereich für die zuvor beschriebenen Spannungs-Dehnungs-Formulierungen in Abhängigkeit von der volumenspezifischen Zerstauchungsenergie g_{cl}^* verändert. Dabei entspricht g_{cl}^* dem Flächenintegral unterhalb des Entfestigungsbereichs der an einem Integrationspunkt anzusetzenden Spannungs-Dehnungs-Linie. Diese Größe ist aus der lokalisierten Zerstauchungsenergie G_{cl} und der äquivalenten Länge l_{eq} bestimmbar:

$$g_{cl}^* = \frac{G_{cl}}{l_{eq}} = \frac{h_{cl} g_{cl}}{l_{eq}}. \quad (3.16)$$

Bei der lokalisierten Zerstauchungsenergie G_{cl} handelt es sich um eine netzunabhängige und materialspezifische Größe, die experimentell bestimmt werden muss. Ohne experimentelle Ergebnisse kann G_{cl} jedoch mit der volumenspezifischen Energie g_{cl} , die dem Flächenintegral unterhalb des Entfestigungsbereichs der noch nicht modifizierten Kurve entspricht, und der Prozesszonbreite h_{cl} relativ genau abgeschätzt werden. Die äquivalente Länge l_{eq} kann unter der Bedingung, dass annähernd quadratische Elemente eingesetzt werden, durch eine Kopplung an die Elementgröße und die Integrationspunktanzahl bestimmt werden. Für flächenhafte Elemente gilt dann:

$$l_{eq} = \sqrt{A^e/n_{int}}. \quad (3.17)$$

Eine zusätzliche Anpassung wird in Andres (2004) für die Berechnung mit dem Traglastkonzept nach DIN 1045-1 (2001) vorgeschlagen, vgl. Abschnitt 5.4.1. Durch den in der Norm vorgeschriebenen Ansatz für die Spannungs-Dehnungs-Linie ändert sich das Flächenintegral unterhalb der Kurve. Damit jedoch die gleiche Größe der Zerstauchungsenergie in die Berechnung einfließt, wird auch hierfür eine Änderung der Spannungs-Dehnungs-Kurve im Entfestigungsbereich angedacht.

Die Modellierung des Zugbereichs erfolgt bis zur Zugfestigkeit, wie allgemein üblich, durch eine Gerade. Informationen zu dem daran anschließenden Verhalten werden in den Abschnitten 3.1.4 und 3.1.5 gegeben.

Zyklische Belastung. Nicht nur für rein zyklische Beanspruchungen, sondern auch für Entlastungsvorgänge bei Belastungsänderungen ist die wirklichkeitsnahe Modellierung des zyklischen Spannungs-Dehnungs-Verhaltens von entscheidender Bedeutung. Basierend auf Versuchsergebnissen aus der Literatur geben Darwin & Pecknold (1977b) Beziehungen zur Erfassung der unter zyklischer Beanspruchung auftretenden Effekte an. Diese sind Degradation der Festigkeit und Steifigkeit, Plastifizierung und Energiedissipation. Auf die Wiedergabe der formelmäßigen Zusammenhänge wird hier verzichtet. Lediglich die daraus resultierenden Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Linien in Hauptspannungsrichtung werden in Bild 3.3 wiedergegeben.

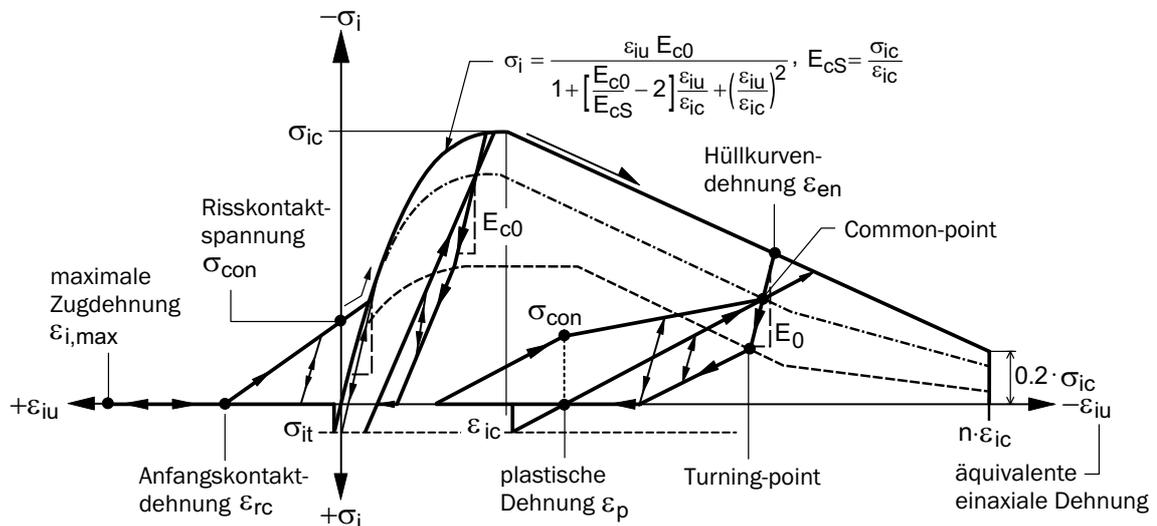


Bild 3.3: Modellierung des zyklischen Verhaltens in Hauptspannungsrichtung nach Darwin & Pecknold (1977b) und der Lokalkontaktformulierung bei sich wieder schließenden Rissen nach Su & Zhu (1994).

3.1.3 Biaxiale Versagensflächen

Für das biaxiale Versagenskriterium von normalfestem Beton werden in dieser Arbeit die analytischen Beziehungen von Kupfer & Gerstle (1973) verwendet, die auf den in Abschnitt 2.2.4.3 zitierten Versuchsergebnissen basieren und schon mehrfach erfolgreich zur Beschreibung der biaxialen Bruchflächen eingesetzt worden sind (Bild 3.4). Die Ausdrücke gelten dabei unabhängig von der jeweiligen Betonfestigkeit. Die im Hinblick auf die Untersuchung von hochfestem Beton in jüngerer Zeit durchgeführten Versuche ergaben jedoch eine derartige Abhängigkeit. Curbach, Hampel, Speck & Scheerer (2000) geben für die von ihnen experimentell untersuchten Versagenszustände an Betonen unterschiedlicher Betonklassen jeweils Näherungsformeln in Form einer Ellipse und eines Polynoms 3. Grades an.

Dabei wird als Bezugsgröße f'_c eingeführt ($f'_c = 0.9 \cdot f_{cm}$). In das vorliegende Modell ist für hochfeste Betone von Andres (2004) die elliptische Gleichung für das an einem Probekörper der Festigkeit C70/85 bestimmte Versagenkriterium eingebunden worden (Bild 3.4). Aus ihren Ergebnissen leiten Curbach, Hampel, Scheerer & Speck (2002) ein allgemeingültiges, von der Betonfestigkeit abhängiges Versagenkriterium für den biaxialen Fall ab. Problematisch an der vorgeschlagenen Beziehung ist, dass sich für den Fall des einaxialen Spannungszustands nicht exakt die einaxialen Festigkeiten ergeben. Die gegebenen Beziehungen sind nach Meinung des Verfassers dahingehend zu verbessern.

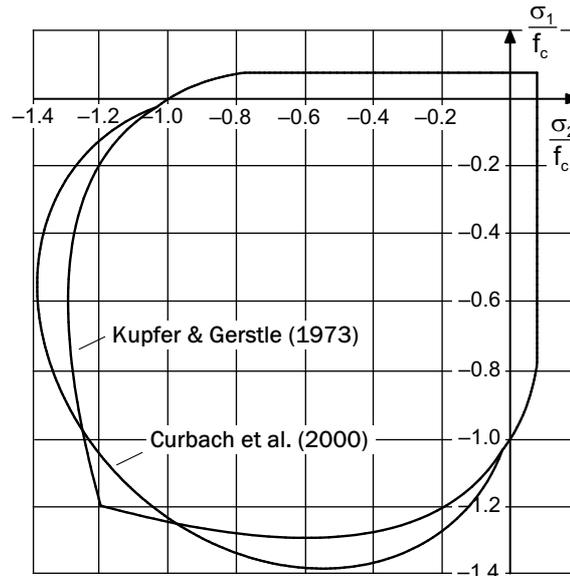


Bild 3.4: Biaxiale Versagensfläche nach Kupfer & Gerstle (1973) und Curbach, Hampel, Speck & Scheerer (2000).

Für den Zug-Druck- und den Zug-Zug-Bereich wird auch für hochfesten Beton auf die bereits für normalfesten Beton bekannten Gleichungen zurückgegriffen. Im Rahmen dieser Arbeit werden somit folgende Ausdrücke für die Beschreibung der Versagensfläche verwendet:

- Druck-Druck-Bereich (\leq C50/60):

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c}, \quad \sigma_{2c} = \frac{1 + 3.65 \alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c, \quad (3.18)$$

- Druck-Druck-Bereich (\geq C55/67):

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c}, \quad \frac{\left(\frac{\sigma_{1c}}{f'_c} + \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} - 1.310\right)^2}{0.769} + \frac{\left(\frac{\sigma_{1c}}{f'_c} - \frac{\sigma_{2c}}{f'_c}\right)^2}{1.143} = 1.0, \quad (3.19)$$

- Zug-Druck-Bereich:

$$\sigma_{1t} = f_{ct}, \quad \sigma_{2c} = \frac{1 + 3.28 \alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c, \quad (3.20)$$

- Zug-Zug-Bereich:

$$\sigma_{1t} = \sigma_{2t} = f_{ct}. \quad (3.21)$$

Zur Festlegung der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für das verwendete Konzept müssen zusätzlich aus den Druckfestigkeiten σ_{ic} die zugehörigen äquivalenten einaxialen Dehnungen ε_{ic} bestimmt werden, vgl. Gleichung 3.11. Dafür werden die Beziehungen aus Darwin & Pecknold (1977a) übernommen, die in Abhängigkeit von der Druckfestigkeit eine Fallunterscheidung zur Ermittlung von ε_{ic} vorgeben. Damit wird ε_{ic} entweder mit

$$\varepsilon_{ic} = \varepsilon_{c1} \left\{ \frac{\sigma_{ic}}{f_c} R - (R - 1) \right\} \quad \text{mit } R \approx 3 \quad \text{für } |\sigma_{ic}| \geq |f_c| \quad (3.22)$$

oder mit

$$\varepsilon_{ic} = \varepsilon_{c1} \left\{ -1.6 \left(\frac{\sigma_{ic}}{f_c} \right)^3 + 2.25 \left(\frac{\sigma_{ic}}{f_c} \right)^2 + 0.35 \left(\frac{\sigma_{ic}}{f_c} \right) \right\} \quad \text{für } |\sigma_{ic}| < |f_c| \quad (3.23)$$

bestimmt, wobei ε_{c1} wiederum die Scheitelstauchung aus dem einaxialen Versuch darstellt.

An dieser Stelle sei noch die in der Modellierung enthaltene Formulierung für die Querdehnzahl ν aufgeführt. Nach Darwin & Pecknold (1977a) wird die Querdehnzahl im Druck-Druck- und Zug-Zug-Bereich als konstant angenommen ($\nu = \nu_0$). Im Bereich der Gebrauchsspannungen liegt die Querdehnzahl ν_0 für Beton zwischen 0.15 und 0.20. Der überproportionale Anstieg der Querdehnung bei hohen Spannungszuständen wird im einaxialen Druck- und im Zug-Druck-Bereich mittels der Gleichung

$$\nu = \nu_0 + 0.6 \left(\frac{\sigma_2}{f_c} \right)^4 + 0.4 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1t}} \right)^4 \leq 0.99 \quad \text{für } |\varepsilon_{iu}| \leq |\varepsilon_{ic}| \quad (3.24)$$

approximiert. Durch die Annahme einer verschwindenden Querdehnzahl ($\nu = 0$) im Entfestigungsbereich wird in diesem Bereich ein entkoppeltes Verformungsverhalten suggeriert.

3.1.4 Rissverhalten

Zur Beschreibung der Rissbildung im Beton werden im Rahmen der Finite-Element-Methode im Allgemeinen die Konzepte der diskreten oder der verschmierten Risse angewendet.

Die diskrete Rissmodellierung ist durch die Abbildung eines Risses als geometrische Diskontinuität gekennzeichnet. Der wesentliche Vorteil dieser Variante ist die Möglichkeit, die auftretenden Rissbreiten und den Vorgang der fortschreitenden Rissbildung lokal genauer zu erfassen. Als nachteilig ist die Notwendigkeit der ständigen Netzanpassung zu sehen. Sie erfordert in der Regel den Einsatz adaptiver Verfahren, womit gleichzeitig die Anforderung an die Rechenkapazitäten erheblich ansteigen. Ein weiteres Problem ist die

häufig auftretende Netzabhängigkeit der Rissverläufe und der damit verbundene Verlust der Objektivität der Lösung.

Bei den verschmierten Rissmodellen wird auf die Anpassung des Elementnetzes verzichtet. In der Elementformulierung werden die Risse „verschmiert“ über den Bereich eines Integrationspunktes erfasst. Für Flächentragwerke werden unterschiedliche Varianten der „smeared-crack“ Modelle in der Literatur vorgestellt Hofstetter & Mang (1995). Sie lassen sich in „fixed-orthogonal-crack“, „fixed-nonorthogonal-crack“ und „rotating-crack“ Modelle unterteilen. Dabei haben sich gerade die rotierenden Rissmodelle als brauchbar für die Beschreibung des Betons unter Zug erwiesen.

In dieser Arbeit wird auf ein derartiges Modell zurückgegriffen [Noh 2002]. Dabei wird die Zugrissbildung mit dem Kriterium von Rankine gesteuert. Überschreitet die Zugspannung in der am stärksten beanspruchten Hauptspannungsrichtung die Zugfestigkeit des Betons, öffnet sich senkrecht zu dieser Richtung ein erster Riss. Da das Entfestigungsverhalten des Betons im Zugbereich an dieser Stelle unberücksichtigt bleibt und auf indirektem Wege in der Tension-Stiffening-Formulierung auf der Stahlseite beachtet wird, vgl. Abschnitt 3.1.5, werden die entsprechenden Anteile im Werkstofftensor der gerissenen Schicht gestrichen. Daneben wird auch die Querkontraktion für die weitere Berechnung zu Null gesetzt. Aufgrund der Verzahnungen zwischen den Rissufern ist eine Restschubfestigkeit weiterhin vorhanden, die entsprechend der Beziehung (3.6) angesetzt wird. An den Stellen, an denen ein Riss geöffnet ist, kann sich senkrecht dazu ein zweiter Riss ausbilden. Bedingt durch die Lastgeschichte oder durch Umlagerungsvorgänge innerhalb des Tragwerks können Richtungsänderungen oder Schließungsprozesse der Risse folgen. Die Änderungen der Rissrichtungen werden im Modell mit den jeweiligen Hauptdehnungsrichtungen gesteuert. Beim Schließen der Risse kommt es infolge der Verzahnung der Rissufer schon zu einer Kraftübertragung, bevor eine Stauchung an diesem Punkt vorliegt. Dieses Verhalten wird in der Modellierung mittels einer Lokalkontaktformulierung erfasst, vgl. Bild 3.3. Erneut auftretende Zugspannungen werden an Stellen, an denen sich im Vorfeld Risse geöffnet und wieder geschlossen haben, nicht mehr aufgenommen und führen zu einer sofortigen Rissöffnung.

Während Aussagen über die vorliegenden Rissrichtungen und Risstiefen in den Bereichen der Integrationspunkte innerhalb eines verschmierten Risskonzepts möglich sind, kann man mit diesem Konzept nicht unmittelbar Aussagen über die Rissbreiten und Rissabstände treffen. Deren Größe ist jedoch mittels der im folgenden Abschnitt beschriebenen Verfahren recht gut berechenbar.

3.1.5 Tension-Stiffening-Effekt und Rissbreitenbestimmung

Die Art der Modellierung des Tension-Stiffening-Effekts richtet sich nach der zu analysierenden Problemstellung [Mehlhorn, Dinges, Keuser & Kolmar 1989]. Soll nicht die lokale Betrachtung im Vordergrund stehen, sondern das globale Tragverhalten von Stahlbetonstrukturen, kann der Einfluss durch eine Modifizierung entweder der Beton- oder der Stahlkennlinie erfolgen. Den im Folgenden angesprochenen Verfahren ist gemein, dass das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen indirekt im verschmierten Risskonzept durch den Ansatz mittlerer Dehnungen auf der Stahlseite Eingang in die Berechnung findet.

Die Modellierung des Tension-Stiffening-Effekts ist in unterschiedlichen Genauigkeitsstufen möglich. In der Vergangenheit häufig verwendete Modelle sind jene nach Gilbert & Warner (1978) und Noakowski (1988). Im Folgenden werden zwei weitere Modelle angesprochen, die in jüngerer Zeit in das verwendete Programmsystem integriert worden sind. Sie wurden für die in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Analysen eingesetzt.

3.1.5.1 Modell nach KÖNIG & TUE

Im Hinblick auf die Untersuchung von Strukturen aus hochfesten Betonen ist von Andres (2004) das Modell von Tue (1993) implementiert worden, der in seiner Formulierung die unterschiedlichen Rissbildungsphasen berücksichtigt. Zur Bestimmung der Verbundkraft zwischen Betonstahl und Beton gibt er die folgenden Gleichungen vor:

$$T_{um} = \begin{cases} \frac{F}{1 + \alpha_e \varrho} & \text{Einzelrisszustand,} \\ A_{c,eff} f_{ct,fl} r \left[r \frac{k_1 - 0.33(3r - r^2)}{k_1 - 0.67} \right]^{n_s} & \text{abgeschlossenes Rissbild.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Mit Hilfe der Verbundkraft bestimmt er weiterhin die Dehnungsdifferenz $\Delta\varepsilon_s$ und die mittlere Stahldehnung ε_{sm} zu:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^{II} - \Delta\varepsilon_s = \varepsilon_s^{II} - \alpha \frac{T_{um}}{A_s E_s}. \quad (3.26)$$

Mit diesen Größen kann der Steifigkeitszuwachs in der Stahlkennlinie folgendermaßen erfasst werden:

$$\Delta E_s = \frac{\Delta\varepsilon_s}{\varepsilon_{sm}} E_s. \quad (3.27)$$

Zur Berechnung der vorhandenen Rissbreiten wird der in König & Tue (1992) angegebene Formalismus verwendet. Die dafür erforderliche mittlere Verbundspannung τ_{sm} kann mit Hilfe der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung bestimmt werden, die in Form einer Exponentialfunktion angegeben ist:

$$\tau(s) = c_0 f_{cm} s^n. \quad (3.28)$$

Während in König & Tue (1992) oder Tue (1993) die Werte für c_0 und n noch konstant vorgegeben werden, sind in König, Tue & Zink (2001) aufgrund durchgeführter Untersuchungen von Bergner (1997) hierfür variable Werte in Abhängigkeit von den Betonfestigkeitsklassen zu finden.

3.1.5.2 Modell nach NOH

Ein detailliertes Verfahren zur Modellierung der Verbundwirkung wird von Noh (2002) angegeben, dessen wesentliche Merkmale im Folgenden kurz beschrieben werden. Die mittleren Stahldehnungen ε_{sm} und die Rissbreiten werden durch eine numerische Integration

innerhalb eines iterativen Algorithmus bestimmt (Bild 3.5). Das angewandte Rechenkonzept basiert auf der „Step-by-Step“-Integration von Eligehausen, Popov & Bertero (1983). Die Iteration wird dabei so lange durchgeführt, bis der Schlupf dem angenommenen Verlauf entspricht. Als Eingangsgrößen dienen die Stahlspannungen im Riss sowie der Rissabstand. Für die Bestimmung der Stahlspannungen ist der bezogene Bewehrungsgrad ρ_{riss} erforderlich, für den eine auf Meiswinkel & Rahm (1999) basierende Annahme getroffen worden ist.

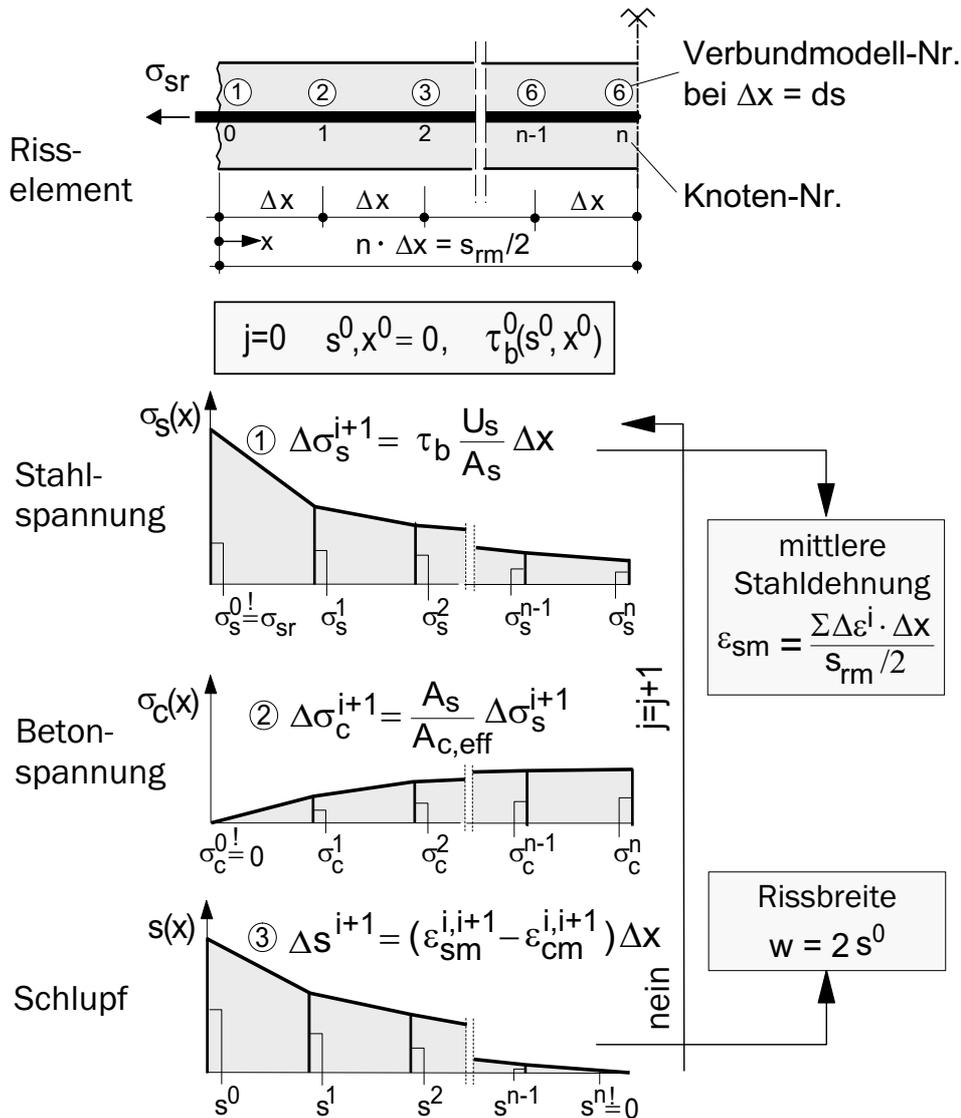


Bild 3.5: Rechenschema der schrittweisen Integration nach Noh (2002).

Innerhalb der Berechnung ist die Verbundspannung aus dem gewählten Verbundgesetz zu ermitteln. Prinzipiell ist die Einbindung aller in der Literatur vorgeschlagenen Verbundgesetze möglich. In jüngster Vergangenheit wird als Verbundgesetz häufiger das Modell von Kreller (1990) eingesetzt [Noh 2002; Petersen 2003]. Diese ortsabhängige Modell besitzt seine Gültigkeit sowohl für den quasi verbundfreien rissnahen Bereich als auch für

großen Schlupf. Der prinzipielle Verlauf der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung wird in Kreller (1990) und im MC 90 (1993) identisch angegeben und lautet:

$$\begin{aligned}
 \tau_b(s) &= \tau_{max} \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha & 0 &\leq s \leq s_1, \\
 \tau_b(s) &= \tau_{max} & s_1 &< s \leq s_2, \\
 \tau_b(s) &= \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right) & s_2 &< s \leq s_3, \\
 \tau_b(s) &= \tau_f & s_3 &< s.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Abweichend vom MC 90 (1993) definiert Kreller (1990) die Schlupfbereiche in Abhängigkeit von der Rissentfernung, vgl. Bild 3.6. Zur Beschreibung des Verbunds unter zyklischer Beanspruchung wird von Noh (2002) das Verbundmodell aus Tue (1993) verwendet und an die ortsabhängigen monotonen Hüllkurven aus Bild 3.6 angepasst.

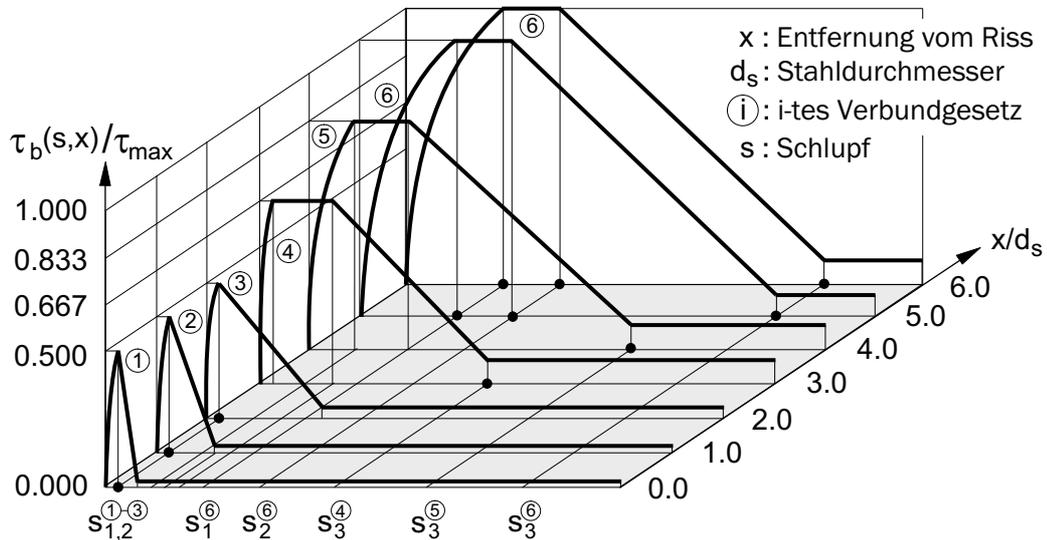


Bild 3.6: Ortsabhängiges Verbundmodell mit zugehörigen Parametern nach Kreller (1990).

Zur Beschreibung der modifizierten Stahlkennlinie, dargestellt in Bild 3.7, werden von Noh (2002) fünf Stützstellen im Belastungsbereich und vier Stützstellen für den Entlastungsast gewählt. Diese werden als bekannt vorausgesetzt oder sind im Vorfeld zu ermitteln. Dabei geht er von einer normalverteilten Zugfestigkeit aus, wobei die 5 %-Fraktile und die 95 %-Fraktile den Bereich der Erstrissbildung begrenzen.

Die Auswertung des Modells von Noh (2002) erfolgt auf der Mesoskala. Damit besitzt es die positive Eigenschaft, dass die Verwendung eines netzabhängigen Materialgesetzes für die Betonmodellierung im Zugbereich vermieden werden kann. Eine in Analogie zum Druckbereich auf dem Bruchenergiekonzept basierende Formulierung für den Zugbereich ist somit nicht notwendig.

Mit dem Modell kann der Versteifungseffekt relativ genau erfasst werden. Es besitzt gegenüber den anderen erwähnten Verfahren den Vorteil der besseren Konvergenz. Darüber-

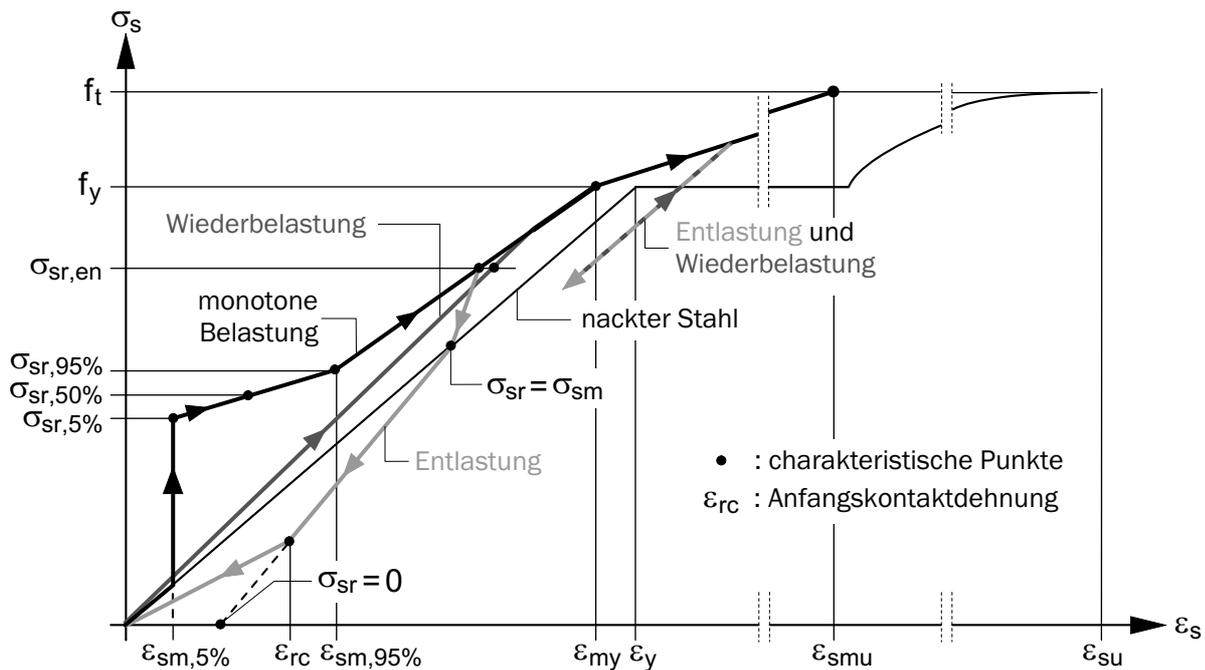


Bild 3.7: Modifizierte Stahlkennlinie nach Noh (2002).

hinaus tritt bei diesem Modell in Verbindung mit dem Einsatz eines Bogenlängenverfahrens kein Lastabfall nach der Rissinitiierung auf, wie er bei der Verwendung der anderen Modelle bereits beobachtet werden konnte. Dieses Verhalten ist jedoch abhängig vom Tragwerkstyp und der Belastung und kann daher nicht verallgemeinert werden [Andres 2004].

3.2 Hygrothermische Modellierung des Betons

Die Bereitstellung eines Rechenmodells, mit dem die hygrothermische Situation in Betonstrukturen wirklichkeitsnah bestimmt werden kann, ist Ziel dieses Abschnitts. Für die Berechnung flächenhafter Betontragwerke wird eine eindimensionale Formulierung in Querschnittsrichtung eingebunden. Eine Erweiterung des hygrothermischen Modells zur Behandlung mehrdimensionaler Problemstellungen ist ohne weiteres möglich. Daher erfolgt hier die Darstellung dimensionsunabhängig.

3.2.1 Einführung

Im Beton werden je nach hygrothermischer Situation die in Abschnitt 2.2.6 beschriebenen Transport- und Speichermechanismen wirksam. Die Berücksichtigung sämtlicher Vorgänge in der Modellierung ist derzeit noch nicht realisierbar, da die Quantifizierung der jeweiligen Einflüsse der einzelnen Mechanismen auf das globale Verhalten im Kompositmaterial Beton nicht möglich ist. Unentbehrlich für den weiteren Erkenntnisgewinn

sind Arbeiten auf der Mesoebene, wie sie beispielsweise von Sadouki & Wittmann (2001) durchgeführt werden. Für die Berechnung größerer Stahlbetonstrukturen ist diese Ebene trotz der bereits hohen Rechenkapazitäten ungeeignet. Daher bedient man sich hier einer makroskopischen Betrachtungsweise, mit der die wesentlichen Phänomene erfasst werden können. Genaue Aussagen über einzelne Prozesse auf lokaler Ebene lassen sich damit zwar nicht treffen, jedoch kann die Gesamtheit aller Transportprozesse zutreffend prognostiziert werden.

Für den Wärme- und Feuchtehaushalt eines porösen Stoffes gilt der Erhaltungssatz, welcher mit jeweils einer Bilanzgleichung formuliert werden kann. Die Bilanzgleichung setzt die Änderung einer Größe (Wärme oder Feuchte) mit ihrer Zufuhr in Beziehung. Bei der Aufstellung der Bilanzgleichungen ist die Wahl geeigneter Potentiale von Bedeutung, da hiervon die numerische Stabilität der Berechnung und die Definition einfacher und physikalisch plausibler Transportkoeffizienten abhängig ist.

3.2.2 Bilanzgleichungen

Im Folgenden werden zunächst die Bilanzgleichungen für die Wärme und die Feuchte separat dargestellt, bevor die gegenseitigen Kopplungseffekte betrachtet werden.

3.2.2.1 Wärmebilanz

Die Grundlagen zur Berechnung des thermischen Verhaltens in Strukturen sind schon seit längerer Zeit bekannt und unter anderem den Lehrbüchern von Krischer & Kast (1978) oder Baehr & Stephan (1994) zu entnehmen. Danach kann der Wärmehaushalt eines Stoffes mittels einer Energiebilanz beschrieben werden. Die Bilanzgleichung wird in Form einer Differentialgleichung angegeben und beschreibt die zeitliche Änderung der spezifischen Wärmeenergie Ψ , auch Enthalpie genannt:

$$\dot{\Psi} = -\operatorname{div} \mathbf{q}_t + Q_t. \quad (3.30)$$

Dabei dient Q_t zur Erfassung der Wärmeenergie, die durch Umwandlung anderer Energieformen je Volumen- und Zeiteinheit am jeweiligen Ort entsteht. Mit diesem Anteil kann beispielsweise die freigesetzte Hydratationswärme während der Abbindephase berücksichtigt werden. Für die numerische Untersuchung von jungem Beton ist die Berücksichtigung dieses Terms unerlässlich [Tacke 2002].

Die Wärmestromdichte \mathbf{q}_t beschreibt die Wärmeenergie Q , die je Zeit- und Flächeneinheit durch eine Querschnittsfläche fließt:

$$\mathbf{q}_t = \frac{Q}{A t} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.31)$$

Ihre Divergenz $\operatorname{div} \mathbf{q}_t$ stellt ein Maß für den Wärmezustrom oder -abfluss eines differentiellen Elements dar. Zwischen der Wärmestromdichte und dem Gradientenfeld der

Temperatur grad ϑ besteht nach FOURIER eine Proportionalität, die wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{q}_t = -\boldsymbol{\lambda}_t \cdot \text{grad } \vartheta. \quad (3.32)$$

Die darin enthaltene Wärmeleitfähigkeitsmatrix $\boldsymbol{\lambda}_t$ kann unter Annahme der Isotropie aus der Multiplikation der Einheitsmatrix \mathbf{I} mit der skalaren Wärmeleitfähigkeit λ_t bestimmt werden¹. Die mathematische Darstellung von λ_t erfolgt in Abschnitt 3.2.4. Das negative Vorzeichen in (3.32) besagt, dass der Wärmestrom entgegen der Temperaturgradienten verläuft, d.h. von wärmeren zu kühleren Bereichen. Die Wärmeenergie fließt somit unter der Voraussetzung der Isotropie in Richtung des stärksten Temperaturabfalls. Die Fließrichtung wird durch die Orientierung des Vektors und die Intensität des Wärmeenergie-Transports durch den Betrag des Vektors, also die Länge, angegeben.

Der Zusammenhang zwischen der Enthalpie eines trockenen Baustoffs und der Temperatur ϑ kann mit der spezifischen Wärmekapazität c_c des Feststoffgerüsts formuliert werden:

$$\Psi = \rho_c c_c \vartheta. \quad (3.33)$$

Durch Einsetzen der Wärmestromdichte (3.32) und der Enthalpie (3.33) in die Bilanzgleichung (3.30) folgt die Differentialgleichung des Wärmehaushalts in einem trockenen Baustoff zu

$$\rho_c c_c \dot{\vartheta} = \text{div}[\boldsymbol{\lambda}_t \cdot \text{grad } \vartheta] + Q_t. \quad (3.34)$$

3.2.2.2 Feuchtebilanz

Die Feuchtebilanzgleichung fordert die Massenerhaltung oder Kontinuität der Feuchte. Danach ist die zeitliche Änderung des Feuchtegehalts w in einem definierten Volumen gleich der Divergenz des Feuchteflusses q_h . Somit gilt

$$\dot{w} = -\text{div } \mathbf{q}_h, \quad (3.35)$$

wobei an dieser Stelle noch keine Feuchtequellen oder -senken berücksichtigt werden. Für die Beschreibung der Feuchtetransportvorgänge in porösen Medien werden in der Literatur unterschiedliche Formulierungen aufgezeigt. Anders als beim Wärmetransport, bei dem einheitlich die Temperatur als treibendes Potential verwendet wird, werden für den Feuchtetransport unterschiedliche Potentiale angesetzt.

Wird der Wassergehalt w als treibendes Potential für den gesamten Feuchtetransport zu Grunde gelegt, kann dieser mit dem konzentrationsabhängigen Transportkoeffizienten $D_h(w)$ ausgedrückt werden:

$$\mathbf{q}_h = -\mathbf{D}_h \cdot \text{grad } w. \quad (3.36)$$

¹Auf die Darstellung dieses Zusammenhangs zwischen der Matrix und der zugehörigen skalaren Größe wird bei den weiteren in diesem Abschnitt eingeführten Beschreibungsfunktionen verzichtet.

Die Kombination von (3.35) und (3.36) führt zu der Feuchtebilanzgleichung in Abhängigkeit vom Wassergehalt:

$$\dot{w} = \operatorname{div}[\mathbf{D}_h \cdot \operatorname{grad} w]. \quad (3.37)$$

Eine derartige Formulierung wird unter anderem von Bilinski & Kordecki (1994), Ulm, Rossi, Schaller & Chauvel (1999) und Benboudjema, Heinfing, Meftah, Sellier & Torrenti (2001) benutzt.

Eine genauere Beschreibung ist mit Hilfe der Aufspaltung des Wassergehalts w in einen verdunstungsfähigen Wassergehalt in den Poren w_e und einen nicht verdunstungsfähigen Wasseranteil w_n zu erreichen. Mit dem Anteil w_n kann beispielsweise das im Hydratationsprozess gebundene Wasser beschrieben werden. So kann mit

$$w = w_e + w_n. \quad (3.38)$$

die Gleichung (3.37) in der Form

$$\dot{w}_e = \operatorname{div}[\mathbf{D}_h \cdot \operatorname{grad} w_e] - \dot{w}_n \quad (3.39)$$

angegeben werden. Hierbei wird der Feuchte-transport nur durch die Gradienten von w_e ausgelöst [Bažant & Najjar 1972]. Aufgrund der Diskontinuität des materialabhängigen Wassergehalts ist die Berechnung mehrschichtiger Bauteile unter Verwendung des Wassergehalts als primäre unbekanntes Potentialgröße ungeeignet. Weitere Nachteile des Wassergehalts als Potentialgröße sind beispielsweise in Künzel (1994) dargestellt.

Eine alternative Potentialgröße stellt die relative Feuchte h dar, mit der die Beziehung (3.36) neu angegeben werden kann:

$$\mathbf{q}_h = -\boldsymbol{\lambda}_h \cdot \operatorname{grad} h. \quad (3.40)$$

Der Parameter $\lambda_h(h)$ beschreibt die hygri-sche Leitfähigkeit bzw. Permeabilität. Um die Feuchtebilanzgleichung (3.37) mit der relativen Feuchte als treibendes Potential zu formulieren, wird die in Anlehnung an die Wärmekapazität auch als hygri-sche Kapazität bezeichnete Größe c_h eingeführt. Sie beschreibt für den isothermischen Fall die Tangente an die Sorptionsisotherme bzw. Feuchtespeicherfunktion $w(h)$:

$$c_h = \left. \frac{\partial w}{\partial h} \right|_T. \quad (3.41)$$

Durch Einsetzen von (3.40) und (3.41) in (3.35) erhält man die Feuchtebilanzgleichung in Abhängigkeit von der relativen Feuchte:

$$c_h \dot{h} = \operatorname{div}[\boldsymbol{\lambda}_h \cdot \operatorname{grad} h]. \quad (3.42)$$

Wenn die Neigung der Sorptionsisotherme als konstant angenommen wird, wie beispielsweise in Alvarado (1994), kann (3.42) für diesen Fall zu

$$\dot{h} = \operatorname{div}[\mathbf{D}_h \cdot \operatorname{grad} h] \quad (3.43)$$

umgeschrieben werden, wobei mit $D_h(h) = c_h \lambda_h$ die Diffusivität bezeichnet wird. D_h ist hier die gleiche Größe wie in (3.36), jedoch mit dem Unterschied, dass D_h in (3.43) in Abhängigkeit von der relativen Feuchte zu definieren ist. Vorschläge für die Definition der funktionalen Feuchteabhängigkeit des hygri-schen Diffusionskoeffizienten sind unter anderem von Bažant & Najjar (1972), Hedenblad (1997) und Roncero (2000) gemacht worden. Die in Alvarado (1994), van Zijl (1999) und Martinola (2001) verwendeten Modelle basieren auf der Beschreibung des Feuchtehaushalts nach Gleichung (3.43). Eine Differenzierung bei der Änderung der inneren relativen Feuchte durch Feuchtediffusion \dot{h}_d und durch die Selbstaustrocknung des Betons \dot{h}_a kann mit

$$\dot{h} = \dot{h}_d + \dot{h}_a \quad (3.44)$$

in die Berechnung mit einbezogen werden [Kim & Lee 1998]. Damit folgt aus (3.43) der Ausdruck

$$\dot{h} = \operatorname{div}[\mathbf{D}_h \cdot \operatorname{grad} h] + \dot{h}_a. \quad (3.45)$$

Neben dem Wassergehalt w und der relativen Feuchte h kann der Feuchtetransport auch mit dem Kapillardruck p_k als treibende Kraft formuliert werden, wie beispielsweise in Bednar (2000) oder Grasberger (2002) geschehen. Anstelle der Feuchtespeicherfunktion ist dann eine Kapillardruck-Sättigungskurve aufzustellen.

Nach Meinung des Verfassers ist die Verwendung der relativen Feuchte vorteilhaft, wenn neben den hygri-schen Zustandsgrößen auch die Dehnungszustände berechnet werden sollen. Aber auch für rein hygri-sche Berechnungen ist die Definition der Übergangsrandbedingungen mit der relativen Feuchte einfacher möglich.

In den bisher dargestellten Formulierungen des Feuchtehaushalts ist das Dampf- und Flüssigkeitstransportverhalten im integralen Sinne durch eine makroskopische Größe wiedergegeben. In der bauphysikalischen Forschung sind Arbeiten entstanden, bei denen diese Transportanteile getrennt berücksichtigt werden. Beispiele hierfür sind in Grunewald (1997) und Bednar (2000) zu finden. Auch bei der im Folgenden dargestellten Formulierung, die sich im Wesentlichen an den Arbeiten von Kiefl (1983), Künzel (1994), Oberbeck (1995) und Steffens (2000) orientiert, wird diese Trennung vorgenommen. Die Mechanismen der Dampfdiffusion und der Effusion können so in Form eines Dampftransportanteils und die Mechanismen der Kapillarleitung und der Oberflächendiffusion in Form eines Flüssigkeitstransportanteils erfasst werden. Vorteil dieser phasengetrenten Modellierung ist, dass die möglichen entgegengesetzten Transportrichtungen der Dampfdiffusion und des Flüssigkeitstransports hiermit korrekt erfasst werden können [Künzel, Holm & Sedlbauer 2002]. Eine analoge Aufspaltung der Speicheranteile wird beispielsweise in von Smuda & von Wolfersdorf (1990) und Oberbeck (1995) vorgenommen. Auch im Rahmen dieser Arbeit wird die getrennte Erfassung der Speicheranteile bei der Implementierung unterschiedlicher Modellvarianten berücksichtigt. Vergleichsrechnungen haben jedoch gezeigt, dass diese Anteile nur einen sehr geringen Einfluss auf die Berechnungsergebnisse haben [Mannsfeld 2003]. Daher werden hier die zugehörigen Beziehungen nicht dargestellt und es wird lediglich auf die zitierten Literaturstellen verwiesen.

Für die Feuchtebilanz wird somit folgende Formulierung angesetzt:

$$\dot{w} = -\operatorname{div} \mathbf{q}_v - \operatorname{div} \mathbf{q}_l + Q_h. \quad (3.46)$$

Mit der Größe Q_h können dabei Feuchtequellen oder -senken innerhalb der Struktur berücksichtigt werden.

Der Dampftransport in porösen Stoffen kann mit Hilfe des 1. FICKSchen Gesetzes beschrieben werden, womit eine Proportionalität zwischen der Massenstromdichte und der Gradienten der Wasserdampfkonzentration c unterstellt wird:

$$\mathbf{q}_v = -\frac{D_D}{\mu} \cdot \operatorname{grad} c. \quad (3.47)$$

Der Wasserdampfdiffusionskoeffizient D_D und die materialspezifische Diffusionswiderstandszahl μ werden in Abschnitt 3.2.4 näher erläutert. Unter Beachtung der idealen Gasgleichung

$$c = \frac{p}{R_v T} \quad (3.48)$$

kann (3.47) statt mit der Wasserdampfkonzentration c mit dem Wasserdampfpartialdruck p ausgedrückt werden:

$$\mathbf{q}_v = -\frac{D_D}{\mu R_v T} \cdot \operatorname{grad} p = -\frac{\delta_L}{\mu} \cdot \operatorname{grad} p = -\delta_p \cdot \operatorname{grad} p. \quad (3.49)$$

Dabei ist R_v die spezielle Gaskonstante für Wasserdampf, T die absolute Temperatur in Kelvin, δ_L der Diffusionsleitkoeffizient der Luft und δ_p die Wasserdampfpermeabilität.

Für den Flüssigkeitstransport entwickelte Künzel (1994) aus dem DARCY-Gesetz für laminare Strömung in wassergesättigten porösen Stoffen eine Formulierung entsprechend der Gleichung (3.40). Holm (2001) greift die Formulierung von Kießl (1983) wieder auf, die den Transport mit dem Wassergehalt als treibendes Potential abbildet:

$$\mathbf{q}_l = -\mathbf{D}_w \cdot \operatorname{grad} w. \quad (3.50)$$

Die mathematische Darstellung des Transportkoeffizienten D_w erfolgt in Abschnitt 3.2.4. Mittels der hygrischen Kapazität c_h aus (3.41) können der Feuchte transport in (3.50) und die Rate der Materialfeuchte in (3.46) in Abhängigkeit von der relativen Feuchte h angegeben werden. Die Beziehungen lauten

$$\mathbf{q}_l = -\mathbf{D}_w c_h \cdot \operatorname{grad} h \quad (3.51)$$

bzw.

$$\dot{w} = c_h \dot{h}. \quad (3.52)$$

Durch Einsetzen von (3.49), (3.51) und (3.52) unter Beachtung von (3.56) in (3.46) ergibt sich die Feuchtebilanz mit der relativen Feuchte als Potentialgröße zu

$$c_h \dot{h} = \operatorname{div}[\delta_p p_{sat} \cdot \operatorname{grad} h] + \operatorname{div}[\mathbf{D}_w c_h \cdot \operatorname{grad} h] + Q_h. \quad (3.53)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die gewählte Modellbeschreibung auf einer einseitigen Kopplung der hygrothermischen Analyse des Betons und der Spannungs-Verformungs-Analyse des Stahlbetons basiert. Mögliche Rückkopplungseffekte, wie der Einfluss der Rissbildung auf das Austrocknungsverhalten, bleiben in dieser Arbeit unberücksichtigt. Über diese hygro-mechanische Wechselwirkung existieren in der Literatur widersprüchliche Aussagen. Während beispielsweise Bažant, Şener & Kim (1987) durch vergleichende Untersuchungen an gerissenen und ungerissenen Betonbalken zu einer theoretischen Erhöhung der Diffusivität in Rissrichtung gelangten, folgert unter anderem Wittmann (1995) aus den Ergebnissen eigener Versuche, dass der Trocknungsvorgang entkoppelt betrachtet werden kann.

3.2.2.3 Kopplung der Bilanzen

In den beiden vorangegangenen Abschnitten 3.2.2.1 und 3.2.2.2 sind die Bilanzgleichungen für den Wärme- bzw. Feuchtehaushalt separat dargestellt. Zwischen diesen Bilanzgleichungen bestehen jedoch unterschiedliche Wechselwirkungen. Materialparameter, wie die Wärmeleitfähigkeit λ_t oder der hygrische Transportkoeffizient D_w , sind sowohl temperatur- als auch feuchteabhängig. Diese physikalischen Gegebenheiten sind dementsprechend zu formulieren.

Die Enthalpie eines Stoffes steigt durch das im Porenraum enthaltene Wasser. Daher muss zur Enthalpie des trockenen Stoffes die des Wassers addiert werden. Eine mögliche Eisbildung wird hier jedoch ausgeschlossen. Der in (3.49) verwendete temperatur- und feuchteabhängige Wasserdampfpartialdruck errechnet sich aus der relativen Feuchte und dem temperaturabhängigen Wasserdampf-sättigungsdruck p_{sat} zu

$$p = h p_{sat}. \quad (3.54)$$

Die thermische Abhängigkeit des Wasserdampf-sättigungsdrucks p_{sat} wird nach Kiefl (1983) wie folgt angenommen:

$$p_{sat} = 610.78 \exp \left[\frac{a\vartheta}{b + \vartheta} \right] \quad (3.55)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= 22.44 & b &= 272.44^\circ\text{C} & \text{für } \vartheta < 0^\circ\text{C}, \\ a &= 17.08 & b &= 234.18^\circ\text{C} & \text{für } \vartheta \geq 0^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Damit gilt für die Gradienten des Wasserdampfpartialdrucks

$$\text{grad } p = p_{sat} \text{ grad } h + \frac{\partial p_{sat}}{\partial \vartheta} h \text{ grad } \vartheta. \quad (3.56)$$

Somit liegt ein thermisch und ein hygrisch bedingter Feuchtetransportanteil vor. Es existieren weitere Interaktionen, die durch Kopplungsterme erfasst werden. In porösen Medien treten neben der reinen Wärmeleitung auch die an ein Medium gebundenen Enthalpieströme auf, wobei die durch Wasserdampfdiffusion verursachten Wärmeenergietransporte

von größerer Bedeutung sind als die des bewegten flüssigen Wassers [Künzel, Holm & Sedlbauer 2002]. Die durch Verdampfungs- und Kondensationsprozesse transportierte Wärme wird durch die Multiplikation des Dampftransportanteils aus (3.49) mit der Verdampfungsenthalpie r in der Wärmebilanz erfasst. Während Künzel (1994) diesen Anteil als Wärmequelle oder -senke interpretiert, betrachtet ihn Oberbeck (1995) als zusätzlichen Wärmestrom. Auch hier wird dieser Anteil formelmäßig als zusätzlicher Wärmestrom eingebunden. Es ist jedoch anzumerken, dass dies numerisch keinen Unterschied macht.

Aus den Bilanzgleichungen (3.34) und (3.53) resultiert unter Berücksichtigung der zuvor erwähnten Wechselwirkungen ein gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem. Für den Wärmehaushalt feuchter und für den Feuchtehaushalt thermisch beanspruchter poröser Baustoffe ergeben sich die vollständigen Bilanzgleichungen

$$c_t^t \dot{\vartheta} + c_h^h \dot{h} = \operatorname{div} [\boldsymbol{\lambda}_t^t \cdot \operatorname{grad} \vartheta] + \operatorname{div} [\boldsymbol{\lambda}_t^h \cdot \operatorname{grad} h] + Q_t \quad \text{bzw.} \quad (3.57)$$

$$c_h^t \dot{\vartheta} + c_h^h \dot{h} = \operatorname{div} [\boldsymbol{\lambda}_h^t \cdot \operatorname{grad} \vartheta] + \operatorname{div} [\boldsymbol{\lambda}_h^h \cdot \operatorname{grad} h] + Q_h \quad (3.58)$$

mit den Koeffizienten

$$c_t^t = \varrho_c c_c + w c_w, \quad (3.59) \quad c_h^t = 0, \quad (3.63)$$

$$c_t^h = 0, \quad (3.60) \quad c_h^h = c_h, \quad (3.64)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t^t = \boldsymbol{\lambda}_t + r \boldsymbol{\delta}_p \frac{\partial p_{sat}}{\partial \vartheta} h, \quad (3.61) \quad \boldsymbol{\lambda}_h^t = \boldsymbol{\delta}_p \frac{\partial p_{sat}}{\partial \vartheta} h, \quad (3.65)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t^h = r \boldsymbol{\delta}_p p_{sat}, \quad (3.62) \quad \boldsymbol{\lambda}_h^h = \boldsymbol{\delta}_p p_{sat} + \mathbf{D}_w c_h. \quad (3.66)$$

Die Anteile in den Speichertermen, die unter Einbeziehung der im Wasserdampf gespeicherten Wärmeenergie und der Aufspaltung der Speicheranteile des Feuchtehaushalts in einen Gas- und Flüssigkeitsanteil resultieren [Steffens 2000], sind zwar implementiert worden, werden aber wegen ihrer untergeordneten Bedeutung hier nicht dargestellt. Eigene Vergleichsuntersuchungen mit und ohne Berücksichtigung dieser Anteile ergaben nur sehr geringe Abweichungen. Unter Vernachlässigung dieser Anteile beinhalten die Bilanzen (3.57) und (3.58) keine Komponenten c_t^h und c_h^t . Sie werden jedoch weiterhin zum Zwecke einer allgemein gültigen Formulierung der numerischen Umsetzung aufgeführt, vgl. Abschnitt 5.3.

3.2.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Die gekoppelten Differentialgleichungen des Wärme- und Feuchtehaushalts für sich alleine liefern noch keine vollständige physikalische Beschreibung der Wärme- und Feuchte-transportvorgänge. Deutlich wird dies durch die Tatsache, dass jede räumlich und zeitlich konstante Verteilung der Temperatur und der relativen Feuchte eine Lösung des Differentialgleichungssystems darstellt. Erst durch zusätzlich festzulegende Rand- und Anfangsbedingungen wird die Berechnung nicht trivialer Lösungen des Anfangsrandwertproblems möglich. Neben der Untersuchung der Mechanismen innerhalb eines Bauteils ist somit die Frage zu klären, wie das Bauteil Feuchtigkeit und Wärme aus seiner Umgebung aufnimmt

oder abgibt. Hierbei sind die einwirkenden thermischen und hygrischen Umwelteinflüsse maßgebend, die als entsprechend formulierte Randbedingungen in die Berechnung einfließen müssen.

Die Wärme- und Feuchteübertragung an den Bauteilgrenzen lässt sich in drei verschiedene Arten von Randbedingungen unterteilen, die schematisch in Bild 3.8 dargestellt sind.

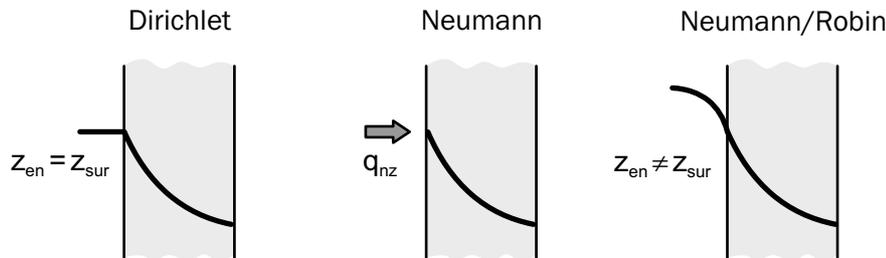


Bild 3.8: Arten von Randbedingungen.

DIRICHLET'sche Randbedingungen (1. Art). Diese Art der Randbedingungen tritt für den Wärme- und Feuchte-transport nur bei Erd- oder Wasserberührung des betrachteten Bauteils auf. Die Randbedingungen sind charakterisiert durch die Vorgabe der Zustandsgrößen selbst. Die Verhältnisse an der Oberfläche (Index *sur*) werden mit denen der Umgebung (Index *en*) gleichgesetzt. Damit gilt für die Temperatur bzw. relative Feuchte:

$$\vartheta_{sur} = \vartheta_{en} \quad \text{bzw.} \quad h_{sur} = h_{en}. \quad (3.67)$$

Die Annahmen (3.67) stellen das größte physikalische Modell für den Übergang dar.

NEUMANN'sche Randbedingungen (2. Art). Die Randbedingungen 2. Art sind durch die Vorgabe konstanter Wärme- oder Massenströme gekennzeichnet. Durch den Sonderfall, dass die Ströme zu Null gesetzt werden, können Symmetriebedingungen sowie adiabate bzw. wasser- oder dampfdichte Verhältnisse an den Bauteilgrenzen erfasst werden. Auch die Einbindung der kurzwelligen Sonnenstrahlung in den Wärmehaushalt eines Bauteils und die Aufnahme von Regenwasser bei nicht vollständig benetzten Oberflächen können als Randbedingungen 2. Art in die Berechnung eingebunden werden [Künzel 1994].

NEUMANN/ROBIN'sche Randbedingungen (3. Art). Diese treten in der Praxis beim Wärme- oder Feuchte-austausch zwischen Bauteil und Umgebung am häufigsten auf. Charakterisiert sind sie dadurch, dass die Umgebungsverhältnisse über eine Grenzschicht auf das Bauteil einwirken und für die Modellierung ein Übergangswiderstand eingeführt werden muss. Der als Wärmeübergang bezeichnete Wärmeenergieaustausch zwischen einem ruhenden Körper und einem bewegten Medium entsteht durch das Zusammenwirken von Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung.

Der Wärmeaustausch durch Konvektion kann mittels des Abkühlgesetzes von NEWTON formuliert werden. Der Ausdruck für die normal zur Oberfläche strömende Wärmemenge infolge Konvektion q_{nt}^{Kon} lautet:

$$q_{nt}^{Kon} = \alpha_{\ddot{u}}^t (\vartheta_{en} - \vartheta_{sur}). \quad (3.68)$$

Dabei ist $\alpha_{\ddot{u}}^t$ der Wärmeübergangskoeffizient, der von Temperatur, Oberflächenbeschaffenheit des Körpers, umgebendem Medium und seiner Strömungsgeschwindigkeit abhängt. Zu beachten ist die Vorzeichendefinition und damit der positive oder negative Eingang einer äußeren Wärmezufuhr in die Wärmebilanz. Für Werte des Wärmeübergangskoeffizienten verweist DIN V 4108-4 (2002) auf DIN EN ISO 6946 (2003). Im Allgemeinen werden für diese konstante Werte angesetzt.

Neben der Konvektion erfolgt der Wärmeaustausch auch durch Strahlung. Die normal zur Oberfläche transportierte Wärmeenergie infolge langwelliger Strahlung q_{nt}^{Str} wird mit dem Strahlungsgesetz nach STEFAN/BOLTZMANN wie folgt beschrieben:

$$q_{nt}^{Str} = \sigma \varepsilon (\vartheta_{en}^4 - \vartheta_{sur}^4). \quad (3.69)$$

Die Emissivität ε beschreibt das Verhältnis der Strahlungszahl eines realen Körpers zu derjenigen eines ideal schwarzen Körpers. Letztere wird durch die STEFAN/BOLTZMANN-Konstante $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2\text{K}^4$ beschrieben.

Künzel (1994), wie auch einige andere Autoren, vernachlässigen die Nichtlinearität der Strahlungsrandbedingungen und berücksichtigen die Anteile aus Konvektion und Strahlung in einem einzigen Ansatz der Form

$$q_{nt} = \alpha_{\ddot{u}}^g \cdot (\vartheta_{en} - \vartheta_{sur}) \quad \text{mit} \quad \alpha_{\ddot{u}}^g = \alpha_{\ddot{u}}^t + \alpha_{\ddot{u}}^s. \quad (3.70)$$

Dabei ist $\alpha_{\ddot{u}}^g$ der Gesamtwärmeübergangskoeffizient, der sich additiv aus dem konvektionsbedingten Anteil $\alpha_{\ddot{u}}^t$ und dem strahlungsbedingten Anteil $\alpha_{\ddot{u}}^s$ zusammensetzt. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Konvektions- und Strahlungsrandbedingungen mit (3.68) und (3.69) separat erfasst.

Wie schon beim Wärmeaustausch aufgezeigt, kann analog zum Abkühlungsgesetz von NEWTON der normal zur Oberfläche stattfindende Feuchteübergang ausgedrückt werden. Künzel (1994) koppelt die Feuchterandbedingungen an die des Wärmehaushalts, indem er den Übergangskoeffizienten des Wasserdampfpartialdrucks $\alpha_{\ddot{u}}^d$ in Abhängigkeit vom konvektiven Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_{\ddot{u}}^t$ definiert:

$$q_{nh} = \alpha_{\ddot{u}}^d \cdot (p_{en} - p_{sur}) \quad \text{mit} \quad \alpha_{\ddot{u}}^d = 7 \cdot 10^{-9} \cdot \alpha_{\ddot{u}}^t. \quad (3.71)$$

Eine andere Beschreibung des Feuchteübergangs ist Oberbeck (1995) zu entnehmen. Er beschreibt den Feuchteübergang in Abhängigkeit von der ausgetauschten Feuchtemenge:

$$q_{nh} = \hat{\alpha}_{\ddot{u}}^h (w_{v,en} - w_{v,sur}), \quad (3.72)$$

wobei w_v der Gehalt gasförmigen Wasser ist. Für die Angabe in Abhängigkeit von der relativen Feuchte folgt aus (3.72) die Beziehung

$$q_{nh} = \alpha_{\ddot{u}}^h (\hat{h}_{en} - h_{sur}) \quad \text{mit} \quad \alpha_{\ddot{u}}^h = \hat{\alpha}_{\ddot{u}}^h \frac{p_{sat}}{R_v T} \quad \text{und} \quad \hat{h}_{en} = \frac{T}{T_{en}} \frac{p_{sat,en}}{p_{sat}} h_{en}. \quad (3.73)$$

Somit sind bei dieser Formulierung die Randbedingungen zustandsgrößenabhängig definiert.

Viele Autoren, beispielsweise Alvaredo (1994), geben für die rechnerische Beschreibung des Feuchteübergangs direkt den Ausdruck in Abhängigkeit von der relativen Feuchte an:

$$q_{nh} = \alpha_u^h (h_{en} - h_{sur}). \quad (3.74)$$

Die Formulierungen (3.73) und (3.74) werden in der Modellierung alternativ berücksichtigt. Vergleichsrechnungen haben jedoch gezeigt, dass hierdurch keine nennenswerten Unterschiede auftreten.

Für eine detaillierte Abbildung thermischer Randbedingungen im Rahmen der Modellierung kann hier beispielsweise auf Fouad (1998) oder Hennecke (2000) verwiesen werden. Weitere Information zu den hygrischen Übergängen sind den Arbeiten von Künzel (1994) oder Holm (2001) zu entnehmen.

Um die Ausgangszustände im mathematischen Modell erfassen zu können, müssen neben den Randbedingungen auch Anfangsbedingungen definiert werden.

3.2.4 Modellierung der Stoffkennwerte

Nachdem die Bilanzgleichungen und die Rand- und Anfangsbedingungen des hygrothermischen Modells dargestellt sind, folgt in diesem Abschnitt die Beschreibung der in den Modellen verwendeten Materialparameter.

3.2.4.1 Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit λ_t ist abhängig von den Zuschlagsstoffen, der Temperatur und dem Feuchtegehalt des Betons, vgl. Abschnitt 2.2.5. Die mit steigender Temperatur zunehmende Wärmeleitfähigkeit erfassen von Smuda & von Wolfersdorf (1990) durch den folgenden linearen Ausdruck:

$$\lambda_t(\vartheta) = \lambda_{t,tr} (3.51 \cdot 10^{-3} \vartheta + 0.93). \quad (3.75)$$

In Bild 3.9 ist diese Formulierung grafisch dargestellt, wobei die Wärmeleitfähigkeit für trockenen Beton $\lambda_{t,tr}$ mit $1.85 \text{ W}/(\text{mK})$ angenommen wird [Oberbeck 1995].

Die in der Literatur existierenden Ansätze für die Beschreibung der höheren Temperaturleitfähigkeit des Porenwassers im Vergleich zur Porenluft gehen übereinstimmend von einer linearen Abhängigkeit vom Feuchtegehalt aus. Beispiele hierfür sind die Ansätze von

- Kießl (1983)

$$\lambda_t(w) = \lambda_{t,tr} + \frac{w}{w_{sat}} (\lambda_{t,sat} - \lambda_{t,tr}), \quad (3.76)$$

- Künzel (1994)

$$\lambda_t(w) = \lambda_{t,tr} \left(1 + b \frac{w}{\varrho_c} \right), \quad (3.77)$$

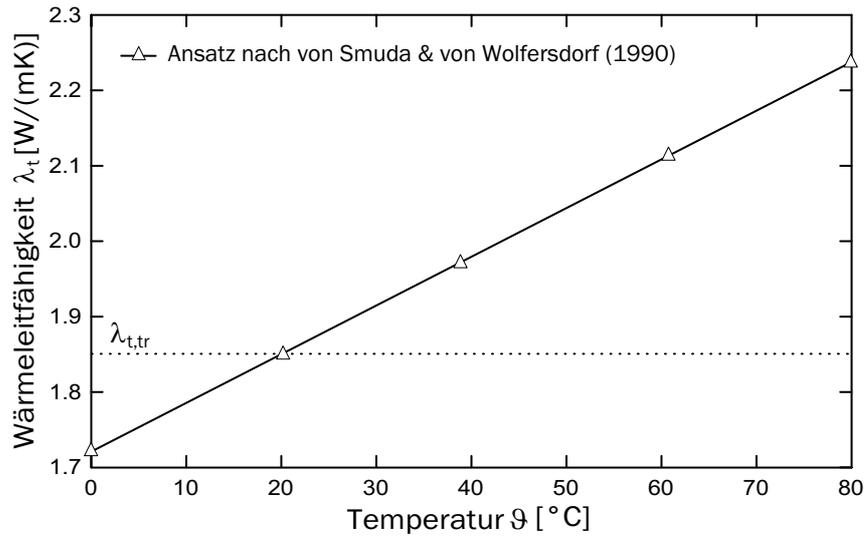


Bild 3.9: Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit λ_t von der Temperatur ϑ .

- Lewis & Schrefler (1998)

$$\lambda_t(w) = \lambda_{t,tr} \left(1 + 4 \frac{\phi w \varrho_w}{(1 - \phi) w_{sat} \varrho_c} \right). \quad (3.78)$$

Die aufgeführten Ansätze (3.76)-(3.78) für die feuchteabhängige Wärmeleitfähigkeit sind in Bild 3.10 vergleichend dargestellt. Zur Erfassung der Steigerung mit zunehmendem Feuchtegehalt ist bei der Verwendung des Ansatzes von Kießl (1983) der Wert der Wärmeleitfähigkeit des wassergesättigten Materials $\lambda_{t,sat}$ und bei Künzel (1994) der Wärmeleitfähigkeitszuschlag b zu bestimmen.

Durch die Kombination von (3.75) und (3.76) definiert Oberbeck (1995) eine feuchte- und temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda_t(\vartheta, w) = (3.51 \cdot 10^{-3} \vartheta + 0.93) \left(\lambda_{t,tr} + \frac{w}{w_{sat}} (\lambda_{t,sat} - \lambda_{t,tr}) \right). \quad (3.79)$$

Er verwendet für den Wärmeleitkoeffizienten des wassergesättigten Betons $\lambda_{t,sat}$ bei 20 °C den Wert 2.70 W/(mK).

Die voneinander abweichenden Werte für das thermische Leitvermögen unterschiedlicher Betone bei gleichem Sättigungsgrad $S_h = w/w_{sat}$ sind durch den Einfluss des Porenraums erklärbar. Die Zunahme der Porosität hat ein größeres Wasseraufnahmevermögen und somit eine Erhöhung der Wärmeleitfähigkeit zur Folge. Deshalb verwenden Lewis & Schrefler (1998) in (3.78) die Porosität als Maß für die Beschreibung der Feuchteabhängigkeit. Diese Art der Beschreibung kombiniert Grasberger (2002) mit dem temperaturabhängigen Ausdruck (3.75). Daraus resultiert die folgende Formulierung für die Wärmeleitfähigkeit:

$$\lambda_t(\vartheta, w) = \lambda_{t,tr} (3.51 \cdot 10^{-3} \vartheta + 0.93) \left(1 + 4 \frac{\phi w \varrho_w}{(1 - \phi) w_{sat} \varrho_c} \right). \quad (3.80)$$

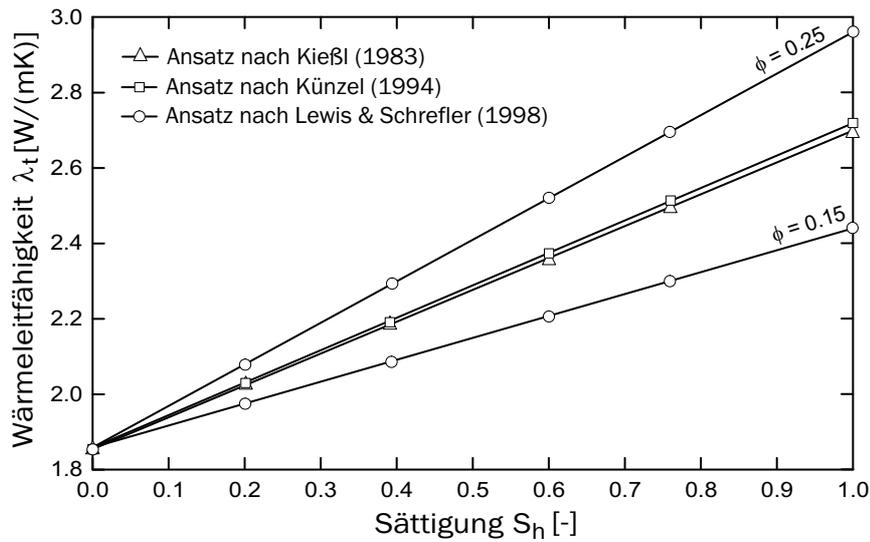


Bild 3.10: Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit λ_t von der Sättigung S_h .

3.2.4.2 Wasserdampfpermeabilität

Die durch ein Potentialgefälle ausgelösten Wasserdampfbewegungen im Bauteil werden in (3.47) mit der Wasserdampfpermeabilität δ_p als Transportkoeffizient beschrieben. Die Wasserdampfpermeabilität ihrerseits lässt sich mit dem Wasserdampfdiffusionskoeffizienten D_D und der materialspezifischen Diffusionswiderstandszahl μ angeben.

Zur Beschreibung des Wasserdampfdiffusionskoeffizienten D_D wird in DIN EN ISO 12572 (2001) die von SCHIRMER vorgeschlagene empirische Funktion angegeben. Sie lautet:

$$D_D = 0.083 \cdot \frac{P_0}{P} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.81}. \quad (3.81)$$

Nach Kießl (1983) kann der Gesamtdruckeinfluss in (3.81) vernachlässigt werden ($P \cong P_0$). Somit ist der Wasserdampfdiffusionskoeffizient nur noch temperaturabhängig.

Mit der Diffusionswiderstandszahl μ werden die Porosität des Materials und der durch Umwege verlängerte Diffusionsweg in einem porösen Stoff gegenüber dem in Luft berücksichtigt. In Kießl (1983) wird anstelle von μ jeweils ein Strukturfaktor für den thermisch und hygriisch bedingten Wasserdampftransport definiert. Beide Faktoren sind von der Porenstruktur, der Temperatur und der Feuchte des Materials abhängig. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Strukturfaktoren befindet sich im Anhang A.

Künzel (1994) und Krus (1995) nehmen dagegen für den Feuchtetransport infolge Wasserdampfdiffusion eine konstante Diffusionswiderstandszahl an. Die mit zunehmendem Feuchtegehalt erhöhte Wasserdampfdurchlässigkeit, die in Versuchen beobachtet werden kann, wird von ihnen durch den überlagerten Vorgang der Oberflächendiffusion erklärt und dementsprechend im Flüssigkeitstransportanteil berücksichtigt.

3.2.4.3 Kapillartransportkoeffizient

Der Transport flüssigen Wassers wird in (3.51) mit dem Kapillartransportkoeffizienten D_w definiert. Kießl (1983) bildet die Feuchteabhängigkeit des Kapillarkoeffizienten durch eine Exponentialfunktion ab, die eine Gerade im halblogarithmischen Maßstab darstellt (Bild 3.11):

$$D_w(w) = D_{w,tr} \exp \left[\frac{w}{w_{sat}} \ln \frac{D_{w,sat}}{D_{w,tr}} \right]. \quad (3.82)$$

Dabei ist $D_{w,tr}$ der Kapillartransportkoeffizient des trockenen Materials und $D_{w,sat}$ derjenige bei freier Wassersättigung. Der Flüssigkeitstransport kann durch Feuchteprofilmessungen bei Saug- und Austrocknungsversuchen experimentell ermittelt werden. Die Messergebnisse liefern durch Vergleichsrechnungen die benötigten Flüssigkeitstransportkoeffizienten [Krus 1995].

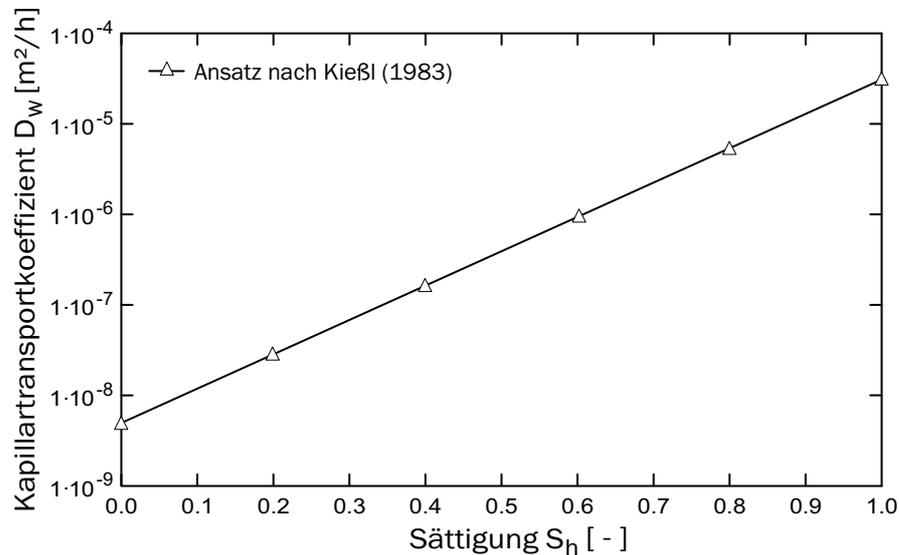


Bild 3.11: Abhängigkeit des Kapillartransportkoeffizienten D_w von der Sättigung S_h .

Ein vereinfachtes Verfahren zur Bestimmung der auf (3.82) basierenden Beschreibung des Flüssigkeitstransports wird in Holm (2001) erläutert. Er stellt durch Versuchsauswertungen an unterschiedlichen Materialien fest, dass die Werte für $D_{w,tr}$ nur wenig voneinander abweichen und schlägt einen fiktiven Wert vor. Desweiteren zeigt er eine Möglichkeit auf, mit der man den Wert $D_{w,sat}$ aus dem Wasseraufnahmekoeffizienten A , der freien Wassersättigung w_{sat} und dem Bezugsfeuchtegehalt w_{80} bestimmen kann.

Für den Anstieg der Feuchtetransportgeschwindigkeit mit zunehmender Temperatur geben Bažant & Najjar (1972) eine entsprechende Formulierung an. Bezogen auf eine Referenztemperatur von 20°C ($T_{20} = 293.15\text{ K}$) lautet der Ausdruck für D_w damit folgendermaßen:

$$D_w(\vartheta) = D_{w,tr} \frac{T_0 + \vartheta}{T_{20}} \exp \left[U \left(\frac{1}{T_{20}} - \frac{1}{T_0 + \vartheta} \right) \right]. \quad (3.83)$$

Dabei ist U der Quotient aus der Aktivierungsenergie Q und der universellen Gaskonstante R . Der Wert für U beträgt 4680 K.

Die Formulierung von Kießl (1983) für den Einfluss der Temperatur auf den Flüssigkeitstransport basiert auf der Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung ω und der Viskosität η des Wassers. Oberbeck (1995) nähert diesen Ausdruck durch einen linearen Term an. Danach ergibt sich:

$$D_w(\vartheta) = D_{w,tr} \left(\frac{\vartheta}{40} + 0.5 \right). \quad (3.84)$$

Der Einfluss der Temperatur auf den Kapillartransportkoeffizienten D_w ist in Bild 3.12 für die oben genannten Ansätze dargestellt. Deutlich erkennbar ist der größere Einfluss der Temperatur bei der Formulierung von Bažant & Najjar (1972).

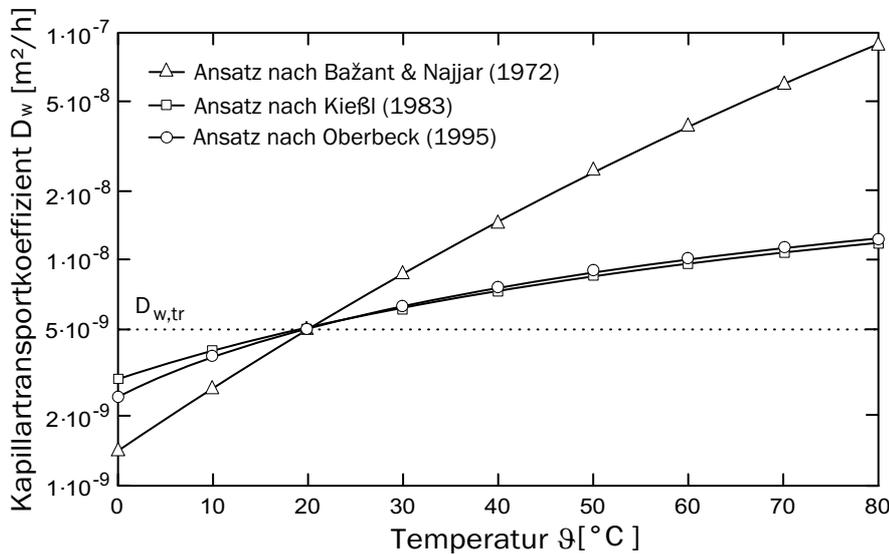


Bild 3.12: Abhängigkeit des Kapillartransportkoeffizienten D_w von der Temperatur ϑ .

Aus den Kombinationen von (3.82) mit (3.83) bzw. (3.82) mit (3.84) resultieren die alternativ angesetzten temperatur- und feuchteabhängigen Kapillartransportkoeffizienten:

$$D_w(w, \vartheta) = D_{w,tr} \exp \left[\frac{w}{w_{sat}} \ln \frac{D_{w,sat}}{D_{w,tr}} \right] \frac{T_0 + \vartheta}{T_{20}} \exp \left[U \left(\frac{1}{T_{20}} - \frac{1}{T_0 + \vartheta} \right) \right] \quad (3.85)$$

bzw.

$$D_w(w, \vartheta) = D_{w,tr} \exp \left[\frac{w}{w_{sat}} \ln \frac{D_{w,sat}}{D_{w,tr}} \right] \left(\frac{\vartheta}{40} + 0.5 \right). \quad (3.86)$$

3.2.4.4 Feuchtespeicherfunktion

Aufbauend auf den Erkenntnissen über die verschiedenen Feuchtespeichermechanismen sind in der Literatur verschiedene Ansätze für die Feuchtespeicherfunktion entwickelt

worden. Unterschiede ergeben sich durch den Aufwand, der bei der Bestimmung der Näherungsfunktion für das Feuchtespeichervermögen betrieben werden muss.

Während einige Autoren für den gesamten Feuchtebereich nur eine einzige Funktion benutzen, orientieren sich andere an den tatsächlich auftretenden Speichermechanismen und nähern das Speichervermögen bereichsweise durch mehrere Funktionen an. Um die eingeführten Freiwerte der Feuchtespeicherfunktion zu ermitteln, ist in Abhängigkeit vom gewählten Ansatz eine bestimmte Anzahl an Messwerten erforderlich, die für Porenfeuchten bis 90 – 95 % aus gravimetrischen Sorptionsmessungen und im Bereich darüber aus Saugspannungsmessungen bestimmt werden können. Die Messwerte werden in der Regel bei einer Referenztemperatur von 20 °C bestimmt, da der Einfluss der Temperatur für viele Untersuchungen vernachlässigbar ist.

Im Folgenden werden einige Ansätze für die Bestimmung der Feuchtespeicherfunktion aus der Literatur aufgezeigt.

Die von Klopfer (1974) aus der BET-Theorie nach Brunauer, Emmett & Teller (1938) entwickelte Feuchtespeicherfunktion gilt für den gesamten Feuchtebereich und lautet:

$$w(h) = w_m \frac{1}{1 - h}. \quad (3.87)$$

Dabei beschreibt w_m die Menge an Wasser, die zur Ausbildung einer monomolekularen Schicht nötig ist. Neben der möglichen Ungenauigkeit aufgrund nur eines Approximationsparameters ist die größte Schwäche dieser Formulierung, dass der rechnerische Ausgleichswassergehalt für hohe relative Feuchten gegen ∞ strebt.

Der von Künzel (1994) dahingehend verbesserte Ansatz sieht wie folgt aus:

$$w(h) = w_{sat} \frac{(b - 1) h}{b - h}. \quad (3.88)$$

Neben der freien Sättigung w_{sat} ist der Approximationsfaktor b durch Einsetzen des Ausgleichswassergehalts bei 80 % relativer Feuchte zu bestimmen. Dieser Wert ist als Bezugsfeuchte nach DIN EN 12524 (2000) bekannt. Somit ist der experimentelle und rechnerische Aufwand begrenzt. Da der Verlauf der Näherungsfunktion lediglich durch zwei Messwerte geeicht wird, sind jedoch Abweichungen zwischen gemessener und nach Gleichung (3.88) angenäherter Funktion möglich, vgl. Bild 3.13.

In Holm (2001) wird daher die folgende Feuchtespeicherfunktion vorgeschlagen:

$$w(p_k) = \frac{w_{sat}}{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k1}}\right)^{p_{k2}}}. \quad (3.89)$$

Die beiden Approximationsfaktoren p_{k1} und p_{k2} folgen aus der Anpassung an experimentell ermittelte Ausgleichswassergehalte. Holm (2001) selbst schlägt dafür die Werte bei 80 % und 95 % relativer Feuchte vor. Die mit dem Kapillardruck p_k definierte Funktion (3.89) kann mit Hilfe der KELVIN-Formel (2.3) in Abhängigkeit von der relativen Feuchte angegeben werden.

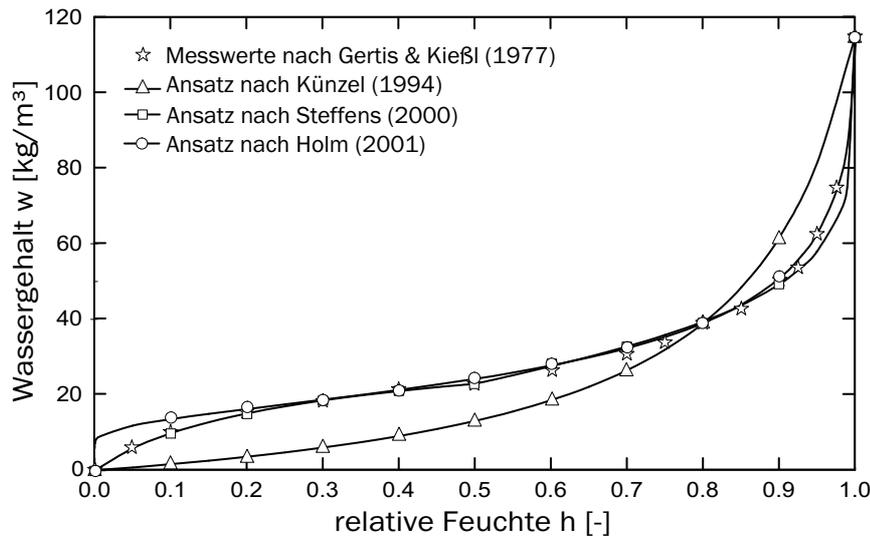


Bild 3.13: Numerische Beschreibung der Feuchtespeicherfunktion von Beton.

Zur Beschreibung der Feuchtespeicherfunktion führt Oberbeck (1995) eine Näherungsfunktion aus HERMITE-Ansätzen dritter Ordnung ein, die über die Fehlerquadratmethode an Messwerte angepasst wird. Der Nachteil dieser Methode ist die große Anzahl der zu bestimmenden Ausgleichsfeuchten und der hohe numerische Aufwand.

Steffens (2000) unterteilt den gesamten Feuchtebereich anhand der auftretenden Speichermechanismen in Intervalle und ordnet jedem eine Näherungsfunktion zu. Damit erreicht er eine sehr hohe Anpassung der Feuchtespeicherfunktion an die Realität, nimmt dafür jedoch einen erhöhten Arbeitsaufwand in Kauf, da mehr Freiwerte vorhanden sind, deren Bestimmung eine größere Menge an Messwerten erfordert. Die bereichsweise definierte Funktion lautet:

$$w(h) = \begin{cases} \varrho_w \frac{w_m c h(1 + 2 h)}{1 + c h + c h^2} & \text{für } h \leq 0.5, \\ \varrho_w \left(a \ln \left[\frac{-4 \omega}{\varrho_w R_v T \ln h} \right]^n + b \right) & \text{für } 0.5 < h < 1.0, \\ w_{sat} & \text{für } h = 1.0. \end{cases} \quad (3.90)$$

Dabei ist w_m wie in (3.87) der Wassergehalt bei monomolekularer Belegung der inneren Oberfläche, c ein Wechselwirkungsparameter, ω die Oberflächenspannung des Wassers und a und b weitere Freiwerte. Für deren Bestimmung verwendet Steffens (2000) den LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus. Daher werden neben der freien Wassersättigung mindestens drei Ausgleichswassergehalte benötigt, die experimentell bestimmt werden müssen. Die Qualität der Anpassung steigt mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Messwerte.

Als Grundlage der Formulierung der Feuchtespeicherfunktion dienen Oberbeck (1995) und Steffens (2000) aus Gertis & Kiefl (1977) entnommene Daten. In Bild 3.13 ist die Anpassung an die gemessenen Werte mit den Gleichungen (3.88)-(3.90) dargestellt. Man erkennt

die schlechtere Annäherung mit der Funktion von Künzel (1994). Die beiden anderen Anpassungsfunktionen sind von annähernd gleicher Qualität, lediglich im Bereich unterhalb von 20 % relativer Feuchte treten bei der Näherung von Holm (2001) größere Abweichungen auf. Da dieser Bereich für baupraktische Aufgabenstellungen eher uninteressant ist und der experimentelle und numerische Aufwand bei der von Holm (2001) vorgeschlagenen Funktion wesentlich geringer ist als bei der von Steffens (2000), wird diese Formulierung im weiteren Verlauf überwiegend eingesetzt. Die Näherung der Feuchtespeicherfunktion nach Steffens (2000) wird zu Vergleichszwecken ebenfalls verwendet.

Die Ansätze (3.88)-(3.90) zur rechnerischen Beschreibung der Feuchtespeicherfunktion benötigen einheitlich den Wert der freien Wassersättigung w_{sat} . Die experimentelle Bestimmung der freien Wassersättigung gelingt an einer unter Wasser gelagerten Betonprobe. Für die in Abschnitt 6.2 nachgerechneten Versuche lag dieser Wert jedoch teilweise nicht vor. Näherungsweise wird in diesen Fällen auf einfache Formeln zurückgegriffen, die in Ulm, Rossi, Schaller & Chauvel (1999) angegeben sind. Danach kann der Zusammenhang zwischen der freien Wassersättigung w_{sat} und dem verdunstungsfähigen Wassergehalt w_e näherungsweise mit

$$w_{sat} \approx w_e \cdot \left[1.5 - \frac{w}{z} \right] \geq w_e \quad (3.91)$$

bestimmt werden. Für den verdunstungsfähigen Wassergehalt geben sie eine Formulierung in Abhängigkeit vom Zementgehalt und vom Wasserzementwert vor:

$$w_e = z \cdot \left(\frac{w}{z} - k \cdot m_\infty \right). \quad (3.92)$$

Dabei ist k die so genannte BOGUE-Konstante, die den Hydratations-Wasserbedarf des Zements beschreibt und deren Wertebereich mit $k \in [0.19; 0.23]$ angegeben wird. Der Parameter m_∞ stellt den maximal möglichen Hydratationsgrad des Zements dar. Für einen kürzeren Untersuchungszeitraum sind die in Ulm, Rossi, Schaller & Chauvel (1999) aufgeführten Werte zu hoch. In der Literatur sind verschiedene Ansätze zu finden, mit denen die zeitliche Entwicklung des Hydratationsgrades m beschrieben werden kann. Eine in mehreren Arbeiten, beispielsweise in Gutsch (2000), verwendete Formulierung geht auf Jonasson (1984) zurück. Der in Abhängigkeit vom wirksamen Betonalter τ_w definierte Ansatz lautet:

$$m = \exp \left(-b \cdot \ln \left(1 + \frac{\tau_w}{\tau_k} \right)^{-a} \right). \quad (3.93)$$

Die Größen a , b und τ_k sind experimentell zu bestimmende Modellparameter, mit denen der Ansatz an gemessene Verläufe angepasst werden kann. Jonasson (1984) selbst gibt die Werte $\tau_k = 20.237$, $b = 1.0$ und $a = 1.114$ vor.

3.3 Zeitvariante Modellierung des Betons

In diesem Abschnitt wird die Erweiterung der in Abschnitt 3.1 beschriebenen zeitunabhängigen Materialmodellierung im Hinblick auf die Erfassung zeitabhängiger Phänomene des Betons vorgestellt.

3.3.1 Allgemeines

Die Modellierung der auftretenden Gesamtverzerrungen im Beton $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{ges}$ erfolgt auf der Basis einer separaten Behandlung der einzelnen Verzerrungsanteile. Die folgende additive Zerlegung kann hierfür angegeben werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^{ges} = \boldsymbol{\varepsilon}_c^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{sh} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{th}. \quad (3.94)$$

Die durch kurzzeitig einwirkende Spannungen ausgelösten elastischen und plastischen Verzerrungen werden zu den instantanen Verzerrungen (Kurzzeitverzerrungen) zusammengefasst:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^I = \boldsymbol{\varepsilon}_c^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{pl}. \quad (3.95)$$

Gemeinsam mit den Kriechverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr}$ bilden diese die lastabhängigen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_c^\sigma$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^\sigma = \boldsymbol{\varepsilon}_c^I + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr} = \boldsymbol{\varepsilon}_c^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr}. \quad (3.96)$$

Die Verzerrungsanteile infolge thermischer und hygrischer Einwirkungen ergeben die lastunabhängigen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_c^0$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_c^{sh} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{th}. \quad (3.97)$$

Diese stellen zusammen mit den Kriechverzerrungen die zeitabhängigen Verzerrungsanteile $\boldsymbol{\varepsilon}_c^z$ dar:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^z = \boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{sh} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{th}. \quad (3.98)$$

Die Darstellung der Modellierung der instantanen Verzerrungsanteile erfolgte bereits in Abschnitt 3.1. Im Folgenden wird die Modellierung der übrigen Anteile erläutert.

3.3.2 Thermische Verzerrungen

Zwängungsfreie Temperatureinwirkungen führen zu einer reinen Volumendehnung (Dilatation) des Betons. Gestaltändernde (deviatorische) Verzerrungsanteile treten infolge thermischer Einwirkungen nicht auf. Somit kann die thermisch induzierte Volumenveränderung des Betons wie folgt beschrieben werden:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{th} = \bar{\mathbf{I}} \alpha_t \dot{\vartheta} \quad (3.99)$$

mit

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{th} = [\dot{\varepsilon}_{c11}^{th}, \dot{\varepsilon}_{c22}^{th}, \dot{\varepsilon}_{c33}^{th}, 0, 0, 0]^T \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{I}} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T. \quad (3.100)$$

In dieser Ratenformulierung ist $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{th}$ der Vektor der thermischen Verzerrungsrate, α_t der Wärmeausdehnungskoeffizient und $\dot{\vartheta}$ die zeitliche Änderung der Temperatur. Der entsprechende Zusammenhang gilt auch in inkrementeller Form:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_c^{th} = \bar{\mathbf{I}} \alpha_t \Delta \vartheta. \quad (3.101)$$

Als Eingangsgröße für die Gleichungen (3.99) bzw. (3.101) dient die zeitliche Entwicklung der Temperatur im jeweiligen Materialpunkt. Diese kann mit der in Abschnitt 3.2 beschriebenen hygrothermischen Modellierung bestimmt werden. Die alternative Erfassung einer über die Querschnittsdicke linearen, stationären Temperaturverteilung kann in analoger Weise erfolgen.

Die numerischen Analysen in dieser Arbeit werden mit dem Ansatz eines konstanten Wärmeausdehnungskoeffizienten α_t durchgeführt. Dies stellt eine häufig getroffene Annahme dar, die mit hinreichender Genauigkeit gilt. Für den Wärmeausdehnungskoeffizienten wird, wenn nicht anders angegeben, der in DIN 1045-1 (2001) vorgegebene Wert von $\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6}$ angesetzt.

3.3.3 Schwinden und Quellen

Für die mathematische Beschreibung des hygrisch induzierten Verformungsverhaltens in Betonbauteilen sind zwei grundsätzlich unterschiedliche Modellierungsarten möglich:

- querschnittsbasierte Modellierung,
- materialpunkt-basierte Modellierung.

Im Folgenden wird auf beide Varianten näher eingegangen.

3.3.3.1 Querschnittsbasierte Formulierung

Viele in der Literatur vorgeschlagene Ansätze zur Beschreibung des Schwind- und Quellverhaltens von Beton liefern eine Abschätzung der über den Bauteilquerschnitt gemittelten Verformungen. Die vor allem in Verbindung mit dem Trocknungsschwinden auftretenden Verformungsgradienten über den Querschnitt werden hierbei vereinfachend vernachlässigt. Beispiele für die Art des Ansatzes sind die in den nationalen und internationalen Normen angegebenen Vorhersageverfahren, beispielsweise ACI 209 (1982), DIN 4227 (1988), EC 2 (1992), MC 90 (1993), DAFSTB-RICHTLINIE (1995), DIN 1045-1 (2001). Auch die Modelle von Bažant & Baweja (1995) und Miyazawa & Tazawa (2001) sind in diese Kategorie einzuordnen.

Die Anwendung der angegebenen Verfahren zur Bestimmung der hygrisch induzierten Verformungen führt teilweise zu stark differierenden Ergebnissen. Verursacht wird dies durch Unterschiede in der Definition der Zeitverlaufsfunktion und der Eingangsparameter. In die Berechnung der Verformung nach DIN 4227 (1988), auf die in DIN 1045 (1988) verwiesen wird, gehen nur die Parameter wirksame Bauteildicke, Umgebungsbedingungen und angenommener Beginn des Schwindens ein. Damit ist lediglich eine grobe Abschätzung der Verformung möglich, und es zeigte sich, dass diese das Schwinden im Allgemeinen unterschätzt [Reinhardt 2002]. Eine Neubearbeitung unter Abschätzung des Schwindens mit analytischen Funktionen und der zusätzlichen Berücksichtigung von Betondruckfestigkeit und Zementart führte zu einer verbesserten Vorhersage. Sie fand sowohl im EC 2 (1992) als auch im MC 90 (1993) Berücksichtigung. Der erweiterte Geltungsbereich

der DIN 1045-1 (2001) im Hinblick auf hochfesten Beton und Leichtbeton macht die erneute Überarbeitung dieser Ansätze erforderlich [Müller & Kvitsel 2002]. Über zahlreiche Versuche zum Schwindverhalten, besonders mit hochfesten Betonen, sind die zur Beschreibung notwendigen Koeffizienten ermittelt und validiert worden [Müller, Küttner & Kvitsel 1999; Persson 2001]. Die neuen Regelungen der Norm bezüglich des Schwindens sind im Anhang B.1 in einer kompakten Schreibweise dargestellt. Für eine vergleichende Untersuchung der vom Verfasser numerisch umgesetzten normativen Vorhersageverfahren sei auf die Diplomarbeit von Müller (2002) verwiesen. Die Einbindung der ebenfalls erwähnten und weiterer Modelle ist ohne weiteres möglich.

In Müller & Kvitsel (2001) wird ein mittlerer Vorhersagefehler von 22 % für die Schwindansätze nach DIN 1045-1 (2001) angegeben. Der Wert basiert auf der Auswertung von 168 Versuchen. Eine weitere Verbesserung der Vorhersagegenauigkeit wäre nach Meinung der Autoren nur dann möglich, wenn anstelle des Ersatzparameters Betondruckfestigkeit die maßgebenden betontechnologischen Parameter benutzt werden, die die Zusammensetzung des Betons und die daraus resultierenden Einflüsse besser beschreiben. In erster Linie sind hier Parameter wie der Wasserzementwert sowie die Art und Volumenanteile von Zuschlägen und Zusatzstoffen zu nennen. Für die Einbindung solcher verbesserter Vorhersageverfahren in die Normung besteht jedoch weiterhin die Problematik, dass auch der in der Praxis tätige Ingenieur diese Parameter für den jeweils verwendeten Beton kennen muss. Gerade im Hinblick auf die aktuelle Entwicklung neuer Betonsorten, wie selbstverdichtende Betone, Leichtbetone und ultrahochfeste Betone, ist eine solche Entwicklung jedoch notwendig.

3.3.3.2 Materialpunktbasierte Formulierung

Durch die zuvor skizzierte Formulierungsvariante werden die tatsächlich im Betonquerschnitt auftretenden Feuchtegradienten vernachlässigt. Für eine Erfassung der damit verbundenen Eigenspannungen und Verkrümmungen in den zu untersuchenden Bauteilen, ist eine solche Modellierung unzureichend.

Unter Einbindung einer hygrothermischen Modellierung ist es möglich, das lokale Verzerungsverhalten aus dem Schwinden und Quellen des Betons mathematisch zu erfassen. Experimentelle Beobachtungen haben gezeigt, dass das hygrische Verformungsverhalten analog zum thermischen Fall durch das Produkt aus einem Koeffizienten und der Änderung einer Zustandsgröße beschrieben werden kann. Als Zustandsgröße wird in der Literatur entweder die relative Feuchte h oder der Wassergehalt w verwendet. Die hygrischen Verzerrungen ϵ_c^{sh} werden dementsprechend durch folgende Beziehungen im eindimensionalen Fall ausgedrückt:

$$\dot{\epsilon}_c^{sh} = \alpha_{sh} \dot{h} \quad (3.102)$$

bzw.

$$\dot{\epsilon}_c^{sh} = \alpha_{sw} \dot{w} \quad (3.103)$$

Zur Unterscheidung des jeweiligen Ansatzes werden die hygrischen Ausdehnungskoeffizienten mit $\alpha_{sh} [-]$ oder $\alpha_{sw} [\text{m}^3/\text{kg}]$ bezeichnet. Die beiden Ansätze liefern nur für den

Fall einer linearen Feuchtespeicherfunktion äquivalente Ergebnisse. In Alvaredo (1994), van Zijl (1999), Martinola (2001) und Tacke (2002) wird eine Formulierung entsprechend Gleichung (3.102) benutzt, während Benboudjema, Heinfing, Meftah, Sellier & Torrenti (2001) und Rahm (2002) eine Formulierung nach Gleichung (3.103) verwenden. Kranz (1999) und Müller, Hörenbaum & Maliha (2002) setzen zur hygrischen Modellierung das von Kiefl (1983) eingeführte Feuchtepotential ein. Mittels der hygrischen Kapazität (3.41) beschreiben sie die Änderung der hygrischen Verzerrungen in Abhängigkeit vom Feuchtepotential.

In den zuvor zitierten Literaturstellen wird mit Ausnahme von Kranz (1999), Martinola (2001) und Müller, Hörenbaum & Maliha (2002) von einem von der jeweiligen Zustandsgröße unabhängigen Ausdehnungskoeffizienten ausgegangen. Eine Feuchteabhängigkeit des hygrischen Ausdehnungskoeffizienten $\alpha_{sh}(h)$ bestimmt Martinola (2001) als Ableitung einer ebenfalls feuchteabhängigen Schwindmaßkurve. Die zu Grunde gelegte Kurve ermittelt der Autor durch eine funktionale Annäherung an Schwindmaße, die er experimentell an trocknenden, zylindrischen Proben unter unterschiedlichen relativen Umgebungsfeuchten bestimmt. Verläufe für den hygrischen Ausdehnungskoeffizienten in Abhängigkeit vom Feuchtepotential nach Kiefl (1983) werden in Müller, Hörenbaum & Maliha (2002) angegeben. Sie basieren ebenfalls auf hygrischen Verformungsfunktionen, welche die Autoren für unterschiedliche Betonfestigkeiten aus den Vorgaben des MC 90 (1993) ableiten. Für eine zutreffende Beschreibung des feuchteabhängigen Ausdehnungskoeffizienten sind nach Meinung von van Zijl (1999) weitere experimentelle Untersuchungen erforderlich. In den durchgeführten Berechnungen wird zunächst ein jeweils konstanter Wert für den hygrischen Ausdehnungskoeffizienten angesetzt. Es sei aber angemerkt, dass die Erweiterung des Modells um einen zustandsgrößenabhängigen Ausdehnungskoeffizienten in der numerischen Umsetzung keinerlei Schwierigkeiten bereitet.

In Abschnitt 2.2.7 wurde bereits darauf hingewiesen, dass das Schwinden vor allem durch den Verlust des physikalisch gebundenen Wassers ausgelöst wird. Der Verlust des freien Wassers im überhygroskopischen Bereich bewirkt dagegen nur geringe Schwindverformungen. Aufgrund des Anstiegs der Feuchtespeicherfunktion in diesem Bereich (Bild 2.10) ändert sich die relative Feuchte im Vergleich zum Wassergehalt nur geringfügig. Für eine zutreffende Prognose des hygrischen Verformungsverhaltens unter der Annahme eines konstanten Ausdehnungskoeffizienten ist demzufolge die Verwendung von Gleichung (3.102) der von Gleichung (3.103) vorzuziehen. Hier besteht jedoch noch weiterer Forschungsbedarf, gerade im Hinblick auf die quantitative Erfassung des Quellverhaltens von Beton bei Wasserkontakt, vgl. Abschnitt 6.2.5.

Die Gleichungen (3.102) und (3.103) sind beide implementiert worden, womit numerische Vergleichsrechnungen ermöglicht werden. Zur Berechnung mit Gleichung (3.103) wird die Umrechnung der als Potentialgröße verwendeten relativen Feuchte mittels der hygrischen Kapazität notwendig:

$$\dot{\varepsilon}_c^{sh} = \alpha_{sw} \frac{\partial w}{\partial h} \dot{h} = \alpha_{sw} c_h \dot{h}. \quad (3.104)$$

Sowohl die querschnittsbasierte als auch die materialpunktbasierte Modellierungsvariante werden innerhalb der Arbeit weiter verfolgt. Mit ersterer wird im Zusammenhang mit der

im Folgenden dargestellten Kriechmodellierung die Möglichkeit geschaffen, weitestgehend normenkonforme Trag- und Schädigungsanalysen an Stahlbetonkonstruktionen unter Einbindung der zeitabhängigen Einflüsse durchzuführen.

3.3.4 Kriechen

Beton unter Druckbeanspruchung kann im Spannungsbereich unterhalb von $\sim 50\%$ der Druckfestigkeit (Bereich der Gebrauchsspannungen) als linear viskoelastisches Material angesehen werden [Bažant 1988]. Im ungerissenen Zugbereich ist die Annahme der Linearität zwischen Kriechverformung und kriecherzeugender Spannung ebenfalls zulässig [Kordina, Schubert & Troitzsch 2000]. Daher wird der weiteren Betrachtung die lineare Viskoelastizitätstheorie zu Grunde gelegt. Für mögliche Erweiterungen bezüglich des nichtlinearen Kriechens sei lediglich auf die Literatur verwiesen, z.B. Bažant & Prasanna (1989), Rottler (1998), Diener (1998).

3.3.4.1 Viskoelastizitätstheorie

Unter der Gültigkeit der linearen Kriechtheorie kann für den einaxialen Fall die spannungsabhängige Verzerrung im Beton zum Zeitpunkt t mit

$$\varepsilon_c^\sigma(t) = J(t, t_0) \sigma_c(t_0) \quad (3.105)$$

angegeben werden. Die Kriech- oder Nachgiebigkeitsfunktion $J(t, t_0)$ stellt demzufolge die lastabhängige Verzerrung infolge einer zum Zeitpunkt t_0 aufgetragenen Einheitsspannung $\sigma_c(t_0) = 1$ dar. Sie kann in eine elastische Nachgiebigkeit $1/E_c(t_0)$ und ein Kriechmaß $C(t, t_0)$ aufgespalten werden:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0). \quad (3.106)$$

Zur einfacheren Definition von Stoffgesetzen wird häufig anstelle der Kriechfunktion die dimensionslose Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ verwendet. Sie ist definiert als das Verhältnis zwischen der unter Dauerlast auftretenden Kriechverzerrung und der elastischen Verzerrung:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_c^{cr}(t, t_0)}{\varepsilon_c^{el}(t_0)}. \quad (3.107)$$

Für die Kriechfunktion ergibt sich somit folgende Darstellung:

$$J(t, t_0) = \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)}. \quad (3.108)$$

Die zu Grunde gelegte Annahme einer konstanten Spannung tritt in realen Stahlbetonstrukturen praktisch nie auf. Selbst bei konstanter äußerer Belastung treten sowohl in der Betonstruktur durch Feuchte- und Temperaturänderungen als auch zwischen den Komponenten Beton und Stahl Spannungsumlagerungen auf.

Mit Hilfe des von BOLTZMANN eingeführten Superpositionsprinzips lassen sich spannungsabhängige Verzerrungen infolge einer sprunghaft veränderlichen Spannungsgeschichte als Summe der Einzelverzerrungen ausdrücken:

$$\varepsilon_c^\sigma(t_k) = J(t_k, t_0) \sigma_c(t_0) + \sum_{i=1}^k J(t_k, t_i) \Delta\sigma_c(t_i). \quad (3.109)$$

Für eine stetige Belastungsänderung kann der Summenausdruck in eine Integralgleichung vom VOLTERRA'schen Typ überführt werden:

$$\varepsilon_c^\sigma(t) = \int_0^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.110)$$

Bei vorgegebener Verzerrungsgeschichte kann das viskoelastische Verhalten gleichwertig als Relaxationsproblem betrachtet werden:

$$\sigma_c(t) = \int_0^t R(t, \tau) \frac{\partial \varepsilon_c^\sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.111)$$

Dabei bezeichnet $R(t, t_0)$ die Relaxationsfunktion, die den zeitlichen Verlauf der Spannung infolge einer zum Zeitpunkt t_0 aufgezwungenen Einheitsverzerrung beschreibt. Die Gleichungen (3.110) und (3.111) beschreiben den Beton in integraler Form als alternden, viskoelastischen Werkstoff.

Numerische Analysen können auf der Basis der integralen Darstellung mittels inkrementell-iterativer Verfahren durchgeführt werden. Dazu muss der zu untersuchende Zeitraum in eine geeignete Anzahl von Zeitinkrementen unterteilt werden und der Verzerrungs- bzw. Spannungsverlauf durch eine Summe diskreter Sprünge approximiert werden. Diese Vorgehensweise ist prinzipiell möglich, hat jedoch den Nachteil, dass sämtliche Verzerrungs- und Spannungsinkremente ab dem Zeitpunkt der Erstbelastung zum Zwecke der späteren Summation gespeichert werden müssen. Bei der Berechnung großer Strukturen, die hier im Vordergrund des Interesses stehen, folgt daraus nicht nur ein enormer Speicherbedarf, sondern aufgrund der zu wiederholenden Summationen auch eine nicht unwesentlich erhöhte Rechenzeit.

Die Berechnung kann dahingehend vereinfacht werden, dass die Kerne $J(t, t_0)$ und $R(t, t_0)$ der Integrale durch die Summe von Produkten aus entkoppelten Funktionen von t und t_0 ersetzt werden. Entsprechende Formulierungen für die Kriech- und Relaxationsfunktion sind mit einer Summe von Exponentialfunktionen möglich (DIRICHLET-Reihe):

$$J(t, t_0) \approx \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{C_\mu(t_0)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_\mu}\right) \right], \quad (3.112)$$

$$R(t, t_0) \approx \sum_{\mu=1}^n E_\mu(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_\mu}\right). \quad (3.113)$$

Dabei sind $C_\mu(t_0)$ bzw. $E_\mu(t_0)$ vom Belastungsalter abhängige Funktionen, die als innere Variablen den Zustand des Materials beschreiben. Die Konstanten τ_μ werden als Retardations- bzw. Relaxationszeiten bezeichnet. Nähere Erläuterungen hierzu sind in der Literatur zu finden, unter anderem in Bažant (1988).

Durch diese Vorgehensweise wird die integrale Beziehung des Spannungs-Verzerrungs-Zeitverhaltens in eine differentielle Form überführt. Die allgemeinste Form der daraus resultierenden Differentialgleichung lautet

$$\sum_{i=0}^m k_i \frac{d^i \sigma_c}{dt^i} = \sum_{j=0}^n l_j \frac{d^j \varepsilon_c}{dt^j}. \quad (3.114)$$

Dabei stellen k_i und l_j die konstanten oder zeitvariablen Koeffizienten dar. Die im Einzelfall vorliegende Differentialgleichung kann mit Hilfe rheologischer Modelle gedeutet werden oder lässt sich auch in anschaulicher Weise aus ihnen herleiten, vgl. Tacke (2002). Diese Modelle basieren auf den rheologischen Grundelementen HOOKE'sche Feder, NEWTON'scher Dämpfer und ST. VENANT'scher Körper (Bild 3.14). Durch die Kombination der Grundelemente können beliebig komplexe Modelle aufgestellt werden, beispielsweise wird durch die Serien- bzw. Parallelschaltung von Feder und Dämpfer das MAXWELL- bzw. KELVIN-Modell gebildet. Weitere Informationen zu den rheologischen Modellen sind beispielsweise in Gross, Hauger, Schnell & Wriggers (1995) enthalten.

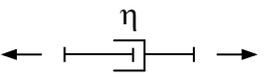
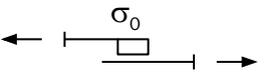
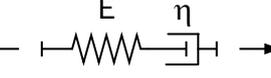
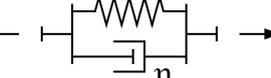
		Modell	Grundgleichung
Grundelemente	Hooke'sche Feder		$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}$
	Newton'scher Dämpfer		$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$
	St. Venant'scher Körper		$\varepsilon = 0$ für $ \sigma < \sigma_F$ $\varepsilon = f(\sigma)$ für $ \sigma \geq \sigma_F$
Grundmodelle	Maxwell - Element		$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$
	Kelvin - Element		$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} + \eta \dot{\varepsilon}$

Bild 3.14: Rheologische Grundelemente und -modelle mit mathematischer Beschreibung.

3.3.4.2 Vorhersageverfahren

Im Hinblick auf die Formulierung von Vorhersageverfahren für das Kriechen des Betons haben sich im Wesentlichen zwei Grundansätze durchgesetzt. Während beim Summationsansatz

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_v(t, t_0) + [\varphi_f(t) - \varphi_f(t_0)] \quad (3.115)$$

eine getrennte Erfassung der Kriechverformungen aus Fließen φ_f und verzögerter elastischer Verformung φ_v erfolgt, ist der Produktansatz

$$\varphi(t, t_0) = k_1(t_0) \cdot \dots \cdot k_i \dots \cdot k_n(t - t_0) \quad (3.116)$$

durch die multiplikative Verknüpfung der Einflüsse des Belastungsalters und der Belastungsdauer gekennzeichnet. Vor- und Nachteile der jeweiligen Ansätze sind beispielsweise in Reinhardt (2002) erläutert. Die überwiegende Anzahl der in der Literatur vorhandenen Vorhersageverfahren basiert auf einem dieser Grundansätze. Während in DIN 4227 (1988) der Summationsansatz aus (3.115) verwendet wird, werden in den neueren Normenwerken, wie EC 2 (1992) und DIN 1045-1 (2001), Produktansätze eingesetzt. Dabei basiert das Kriechmodell der DIN 1045-1 (2001) weitestgehend auf demjenigen des MC 90 (1993), zur Erfassung hochfester Betone sind jedoch weitere Korrekturfaktoren hinzugefügt worden. Eine kompakte Darstellung der Regelungen nach DIN 1045-1 (2001) befindet sich im Anhang B.2.

Die in MC 90 (1993), EC 2 (1992) und DIN 1045-1 (2001) angegebenen Kriechzahlen entsprechen nicht der Definition in Gleichung (3.107). Während dort die Kriechzahl auf die elastische Verzerrung zu Belastungsbeginn bezogen ist, wird in den Normen die zu Grunde gelegte elastische Verzerrung mit dem Elastizitätsmodul des Betons im Alter von 28 Tagen ermittelt:

$$\varphi_{28}(t, t_0) = \frac{\varepsilon_c^{cr}}{\varepsilon_c^{el_{28}}}. \quad (3.117)$$

Die Definition der Kriechfunktion aus (3.108) ändert sich entsprechend zu

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{28}}. \quad (3.118)$$

Zur Verdeutlichung der Unterschiede wird der zusätzliche Index benutzt. Somit beinhalten die Kriechzahlen φ_{28} implizit eine zeitliche Entwicklung der Steifigkeit. Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke in (3.108) und (3.117) lässt sich der Zusammenhang zwischen $\varphi(t, t_0)$ und $\varphi_{28}(t, t_0)$ bestimmen. Bei Annahme eines zeitlich konstanten Elastizitätsmoduls des Betons ergeben sich keine Unterschiede.

3.3.4.3 Verwendete Modellierung

Die gewählte Modellierung geht, wie bereits erwähnt, von einem linearen Zusammenhang zwischen Kriechverformung und kriecherzeugender Verzerrung aus. Nichtlineares Kriechen

bleibt somit unberücksichtigt. Bei Gebrauchstauglichkeits- und Tragfähigkeitsanalysen an Stahlbetonflächentragwerken ist der zusätzliche nichtlineare Einfluss des Kriechens nach Meinung des Verfassers in vielen Fällen von untergeordneter Bedeutung.

Für die Größe der Querdehnzahl des Betons bei viskosem Verhalten nehmen zahlreiche Autoren ein affines Verhalten von den Kriechverzerrungen zu den kriecherzeugenden Verzerrungen an [Bažant 1988; Hofstetter & Mang 1995; Strippel 1996; Neubauer 2000; Tacke 2002]. Auch in dieser Arbeit wird die Formulierung der Querdehnzahl für das viskose Verhalten aus der zeitinvarianten Modellierung übernommen, vgl. Abschnitt 3.1.3.

In den zuvor zitierten Veröffentlichungen wird für die mehraxiale Erweiterung einheitlich von einer Isotropie des Kriechens ausgegangen. Unter dieser Annahme können die überwiegend aus den Erkenntnissen an einaxialen Versuchen bestimmten Vorhersageverfahren auf den mehraxialen Zustand einfach übertragen werden.

Im Druckbereich des Betons werden die mehraxialen spannungsabhängigen Verzerrungen auf der Grundlage der folgenden Gleichung bestimmt [Neubauer 2000]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^\sigma = \boldsymbol{\varepsilon}_c^I + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr} = \boldsymbol{\varepsilon}_c^I + \varphi \boldsymbol{\varepsilon}_c^{cr} = (1 + \varphi) \boldsymbol{\varepsilon}_c^I. \quad (3.119)$$

Dabei handelt es sich um einen Relaxationsansatz, der dem rheologischen Modell einer MAXWELL-Kette entspricht. Während sich die elastischen Verformungen unmittelbar bei Belastung in der Feder einstellen, bauen sich die Kriechverformungen entsprechend der Viskosität $\eta(t)$ des Dämpfers, und damit entsprechend des verwendeten Kriechgesetzes, zeitabhängig auf, vgl. Bild 3.14. Bei Entlastung bilden sich die elastischen Verzerrungen in der Feder zurück, während die Kriechverzerrungen erhalten bleiben. Ein Rückgang der elastisch verzögerten Verformung, vgl. Bild 2.15, ist aufgrund der nicht vorhandenen Trennung im Modell nicht möglich. Für zyklische Untersuchungen ist diese Modellierung daher ungeeignet.

Im ungerissenen Zugbereich ($\sigma_c \leq f_{ct}$) des Betons wird von einem dem Druckbereich entsprechenden Kriechverhalten ausgegangen. Diese bei der Modellierung des Kriechens übliche Annahme wird durch Versuchsergebnisse von Kordina, Schubert & Troitzsch (2000) bestätigt. Für die in Versuchen teilweise etwas größeren Werte unter Zugbelastung machen sie den Umstand verantwortlich, dass die Zugkräfte allein von der Zementsteinmatrix aufgenommen werden müssen, während sich unter Druckbelastung neben der Zementsteinmatrix auch die Zuschläge durch Umlagerungsvorgänge an der Lastabtragung beteiligen. Im gerissenen Zugbereich wird das Kriechen nicht berücksichtigt. Eine Erfassung des zwischen den Rissen auftretenden Verbundkriechens wäre durch eine Modifikation der Tension-Stiffening-Modellierung möglich [Neubauer 2000].

Bei der verwendeten inkrementell-iterativen Vorgehensweise werden die viskosen Verzerrungszuwächse entsprechend der Gleichung (3.119) auf der Basis der Kriechzahl φ bestimmt. Bei der numerischen Umsetzung der Kriechmodellierung sind die Vorhersageverfahren nach ACI 209 (1982), DIN 4227 (1988), EC 2 (1992) bzw. MC 90 (1993), DIN 1045-1 (2001) und Müller (1986) implementiert worden. Sie können alternativ eingesetzt werden. Für einen Vergleich der Vorhersageverfahren sei auf Müller (2002) verwiesen.

Die Speicherung der gesamten Verzerrungsgeschichte ist bei der gewählten Vorgehensweise nicht erforderlich, da sich die aktuellen viskosen Verzerrungszuwächse im Inkrement durch

die kriecherzeugenden Verzerrungen des jeweils vorherigen Schritts bestimmen lassen. Die Ausgabe der gewünschten Informationen über die zeitliche Entwicklung der einzelnen Verzerrungsanteile erfolgt jedoch in jedem Zeitschritt, vgl. Abschnitt 5.4.5.

Die hier verwendete Modellierung des Kriechens kann als relativ einfach bezeichnet werden. Trotzdem können hiermit die Einflüsse des Kriechens auf das Tragverhalten von Stahlbetonstrukturen mit seinen auftretenden Spannungsumlagerungen zumindest qualitativ gut erfasst werden, wie die durchgeführten Berechnung in Abschnitt 6.3 und Stopp (2003) zeigen. Allerdings sind für die wirklichkeitsnahe Erfassung des Kriechens bei zyklischen Berechnungen zusätzliche Erweiterungen notwendig. Mit Hilfe der bereits durchgeführten Modifikationen des Programmsystems sowohl bezüglich der Adress- und Speicherverwaltung als auch der Ein- und Ausgabe sind derartige Erweiterungen nun jedoch einfacher möglich.

3.4 Betonstahlmodellierung

Die Modellierung des Betonstahls erfolgt unter Verwendung eines einaxialen, elasto-plastischen Werkstoffgesetzes mit kinematischer und isotroper Verfestigung (Bild 3.15). Dabei wird der BAUSCHINGER-Effekt mit dem kinematischen Verfestigungsmodell nach PRAGER erfasst. Mit der Annahme einer einaxialen Formulierung kann das Verhalten des Betonstahls innerhalb der Stahlbetonstruktur ausreichend genau beschrieben werden [Mehlhorn & Kollegger 1995; Hofstetter & Mang 1995]. Als Eingangsgrößen der Berechnung dienen die Fließgrenze f_y , der Elastizitätsmodul E_s , der Verfestigungsmodul E_h , die Bruchdehnung ε_u und die Orientierung der Stäbe gegenüber den konvektiven Koordinaten.

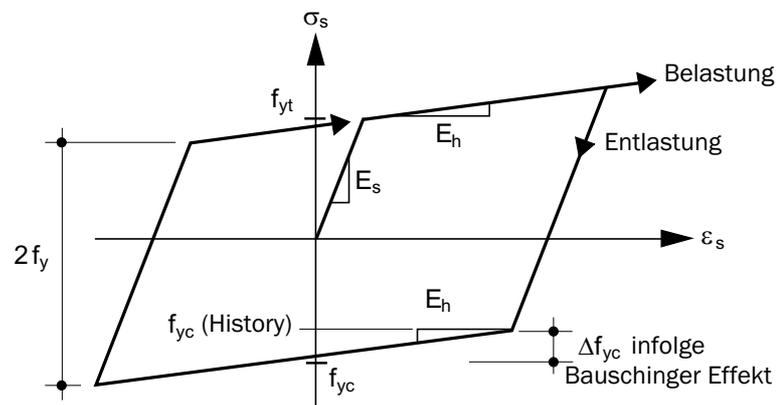


Bild 3.15: Elasto-plastisches Werkstoffgesetz für den Betonstahl.

Der Einsatz verfeinerter Modelle, wie das auf der Grenzflächentheorie basierende Modell von Pölling (2000), haben auf die Berechnungsergebnisse nur einen sehr geringen Einfluss.

Innerhalb des in Abschnitt 5.2.3 beschriebenen Schichtenkonzepts wird eine verschmierte Modellierung der Bewehrung vorgenommen. Dabei wird jede Bewehrungsschar in eine

äquivalente Schichtdicke umgerechnet, für die das einaxiale Stoffgesetz angesetzt wird. Dafür ist im Allgemeinen eine Transformation zwischen der Bewehrungsrichtung und den globalen Koordinaten erforderlich [Zahlten 1990].

Alternative Möglichkeiten der Bewehrungsmodellierung, wie die diskrete oder die eingebettete Modellierung, erweisen sich bei Stahlbetonflächentragwerken als zu aufwändig und werden deshalb nicht weiter verfolgt.

Kapitel 4

Kontinuumsmechanische und schalentheoretische Grundlagen

Das vorliegende Kapitel gliedert sich in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitt werden die grundlegenden kontinuumsmechanischen Zusammenhänge aufgeführt. Zunächst erfolgt die Einführung der kinematischen Beziehungen und der verwendeten Spannungstensoren, danach werden die materialunabhängigen Bilanzgleichungen der Mechanik, die Stoffgleichung und die Randbedingungen behandelt. Schließlich werden das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und dessen Linearisierung angegeben.

Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, wie die verwendete Schalentheorie aus den kontinuumsmechanischen Zusammenhängen unter Beachtung bestimmter kinematischer Annahmen hergeleitet werden kann. Bei der Schalentheorie handelt es sich um eine mittelflächenorientierte, rotationsvariablenbehaftete Theorie finiter Rotationen unter Berücksichtigung konstanter Schubverzerrungen. Mit den zuvor eingeführten Schalengrößen erfolgt die Angabe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und dessen Linearisierung. Den Abschluss des Kapitels bildet die Beschreibung einer zur verwendeten Schalentheorie konformen Erfassung thermischer und hygrischer Einwirkungen.

4.1 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Die Kenntnis der kontinuumsmechanischen Zusammenhänge ist die Voraussetzung für die Beschreibung von Problemstellungen der Strukturmechanik. Daher werden im Folgenden die Grundlagen kurz wiedergegeben. Für ausführlichere Darstellungen wird auf die Literatur verwiesen, z.B. Green & Zerna (1968), Malvern (1969), Betten (1993), Stein & Barthold (1997) oder Bařar & Weichert (2000).

4.1.1 Kinematik

Die Lehre von der Bewegung wird Kinematik genannt. Sie beschränkt sich auf die rein geometrische Beschreibung von Bewegungen mit Hilfe geeigneter Koordinaten, ohne die Masse der Körper und die einwirkenden Kräfte zu berücksichtigen.

Konfiguration, Betrachtungsweise, Deformation. Ein materieller Körper \mathcal{B} besteht aus einer zusammenhängenden Menge materieller Punkte \mathcal{P} . Jedem dieser Punkte \mathcal{P} wird ein Ortsvektor \mathbf{x} im dreidimensionalen EUKLID'schen Raum \mathbb{E}^3 zugeordnet, der durch krummlinige Koordinaten θ^i beschrieben werden kann¹:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^i, t) = x^i(\theta^i, t)\mathbf{e}_i = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3, \quad (4.1)$$

wobei x^i die Komponenten und \mathbf{e}_i die Basisvektoren im orthonormierten kartesischen Koordinatensystem sind (Bild 4.1). Die Gesamtheit aller materiellen Punkte \mathcal{P} des Körpers \mathcal{B} zum Zeitpunkt $t = t_0$ bezeichnet man als Referenzkonfiguration oder materielle Konfiguration \mathcal{B}_0 . Für den Ortsvektor in der Referenzkonfiguration gilt:

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(\theta^i, t_0) = X^i(\theta^i)\mathbf{e}_i = X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3. \quad (4.2)$$

Infolge äußerer Lasten verändert sich die Lage der materiellen Punkte im Raum und damit auch die Konfiguration stetig. Die Abbildung des Körpers zu einem Zeitpunkt $t > t_0$ wird als Momentankonfiguration² \mathcal{B}_T bezeichnet. Für die Oberflächen dieser Konfigurationen werden die Bezeichnungen Γ_0 und Γ_T verwendet. Die Bewegung des Körpers \mathcal{B} kann als eine stetige zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen verstanden werden und ist durch unterschiedliche mathematische Formulierungen beschreibbar. Nach Stein & Barthold (1997) werden vier Arten unterschieden, von denen sich die EULER'sche und die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise durchgesetzt haben. Bei der ersten Variante werden die Ortsvektoren der Referenzkonfiguration \mathbf{X} und die Zeit t als unabhängige Variablen verwendet. Somit wird jeder Körperpunkt bei der Berechnung durch ein bestimmtes Koordinatentripel dargestellt, während sich die Koordinaten, bezogen auf ein raumfestes Koordinatensystem, ständig ändern. Zusätzlich wird in jedem materiellen Punkt ein lokales, nicht notwendigerweise kartesisches Koordinatensystem definiert, das der Bewegung des materiellen Punktes längs seiner Bahn folgt. Der LAGRANGE'schen Betrachtungsweise zugeordnet ist die stetige und bijektive Abbildung der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration, die durch die Funktion φ , auch Deformation genannt, beschrieben wird:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (4.3)$$

Die EULER'sche Beschreibung beruht dagegen auf der Beobachtung materieller Punkte der aktuellen Konfiguration mit dem wesentlichen Merkmal, dass die Kenntnis über den zu

¹Der allgemeinen Konvention entsprechend durchlaufen griechische Indizes die Ziffern 1,2 und lateinische Indizes die Ziffern 1,2,3. Es gilt die EINSTEIN'sche Summationskonvention.

²Im Folgenden bezeichnen Großbuchstaben im Allgemeinen die Referenz- und Kleinbuchstaben die Momentankonfiguration.

betrachtenden Ausschnitt bzw. das Kontrollvolumen vorausgesetzt wird. Bei Verwendung eines raumfesten Koordinatensystems wird der materielle Fluss durch ein stationäres Kontrollvolumen betrachtet. Mit dem Ortsvektor \mathbf{x} und der Zeit t als unabhängige Variablen kann die Abbildung der Momentankonfiguration auf die Referenzkonfiguration

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t_0) \quad (4.4)$$

angegeben werden. Die EULER'sche Betrachtungsweise wird vorwiegend in der Fluidmechanik eingesetzt, während in der Strukturmechanik fast ausschließlich die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise zur Anwendung kommt. Werden dabei die Zustandsgrößen auf den Ausgangszustand bezogen, spricht man von der totalen LAGRANGE'schen Formulierung. Hingegen ist die mitgehende LAGRANGE'sche Formulierung durch die Definition des letzten errechneten Gleichgewichtszustandes (Grundzustand) als Bezugspunkt charakterisiert. Die Ortsvektoren der Referenzkonfiguration \mathbf{X} werden auch als LAGRANGE'sche oder materielle Koordinaten bezeichnet, die Ortsvektoren der Momentankonfiguration \mathbf{x} als EULER'sche oder räumliche Koordinaten. Die Verschiebung \mathbf{u} ergibt sich als Differenz der beiden Koordinaten:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \varphi(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (4.5)$$

und der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} als Rate der Verschiebung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (4.6)$$

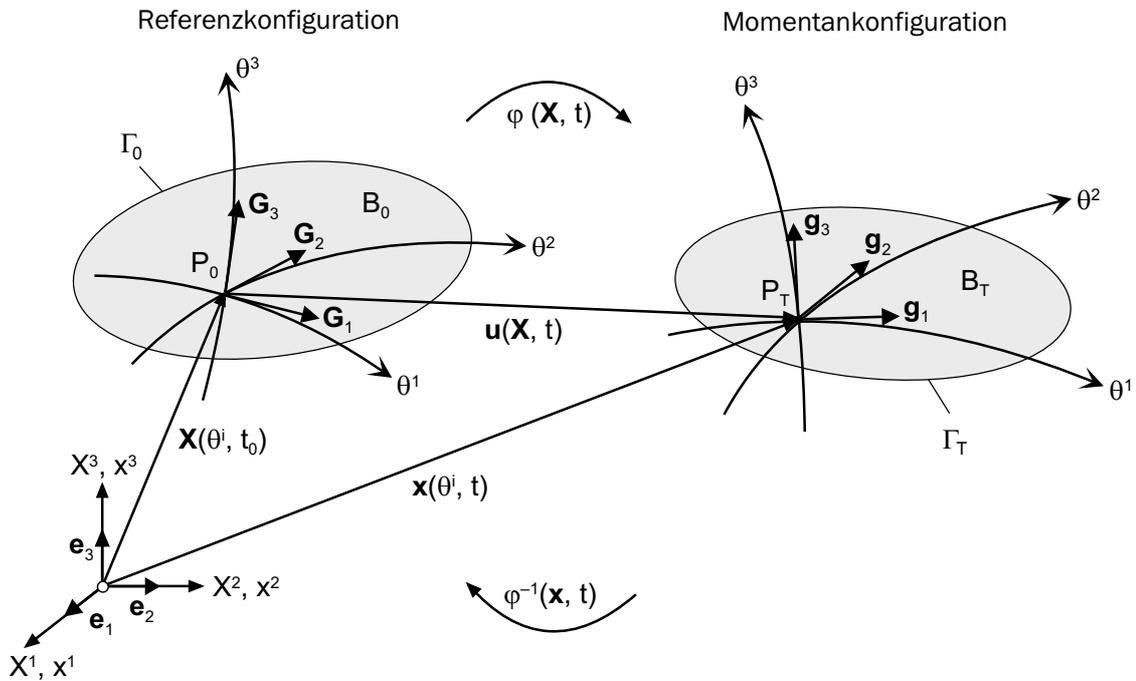


Bild 4.1: Deformation eines dreidimensionalen Körpers bei Verwendung krummliniger, konvektiver Koordinaten.

Basisvektoren und Metrik. Zur Beschreibung der Lage eines Punktes im dreidimensionalen EUKLID'schen Raum \mathbb{E}^3 und zur Definition von Verzerrungsmaßen werden körperfeste, konvektive Koordinaten θ^i eingeführt. Für jeden Punkt der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration lassen sich die kovarianten Basisvektoren als Tangentenvektoren bezüglich der Koordinatenlinien θ^i angeben (Bild 4.1):

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} = \mathbf{X}_{,i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{x}_{,i}. \quad (4.7)$$

Durch die Vorschrift

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (4.8)$$

werden die zu den kovarianten Basisvektoren dualen kontravarianten Basisvektoren

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.9)$$

eingeführt. Die so genannten Metrikkoeffizienten werden mittels des Skalarproduktes der jeweiligen ko- oder kontravarianten Basisvektoren gebildet:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j & \text{bzw.} & & g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \\ G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j & & & g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Damit erhält man den Metriktensor der Referenzkonfiguration \mathbf{G} und den der Momentankonfiguration \mathbf{g} , die beide mit dem Einheitstensor 2. Stufe \mathbf{I} identisch sind:

$$\mathbf{I} = \mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{g}. \quad (4.11)$$

Weiterhin sind auch die Determinanten

$$\det \mathbf{G} = \det[G_{ij}] = G \quad \text{bzw.} \quad \det \mathbf{g} = \det[g_{ij}] = g \quad (4.12)$$

und die differentiellen Volumenelemente

$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 & dv &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 \\ &= (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 & \text{bzw.} & & = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \sqrt{G} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 & & & = \sqrt{g} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

der Referenz- und Momentankonfiguration definiert.

Der materielle Deformationsgradient. Infolge einer kontinuierlichen Bewegung geht ein Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 in ein Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration \mathcal{B}_T über (Bild 4.2). Die Abbildung wird durch den materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F} beschrieben:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \text{Grad} \mathbf{x} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (4.14)$$

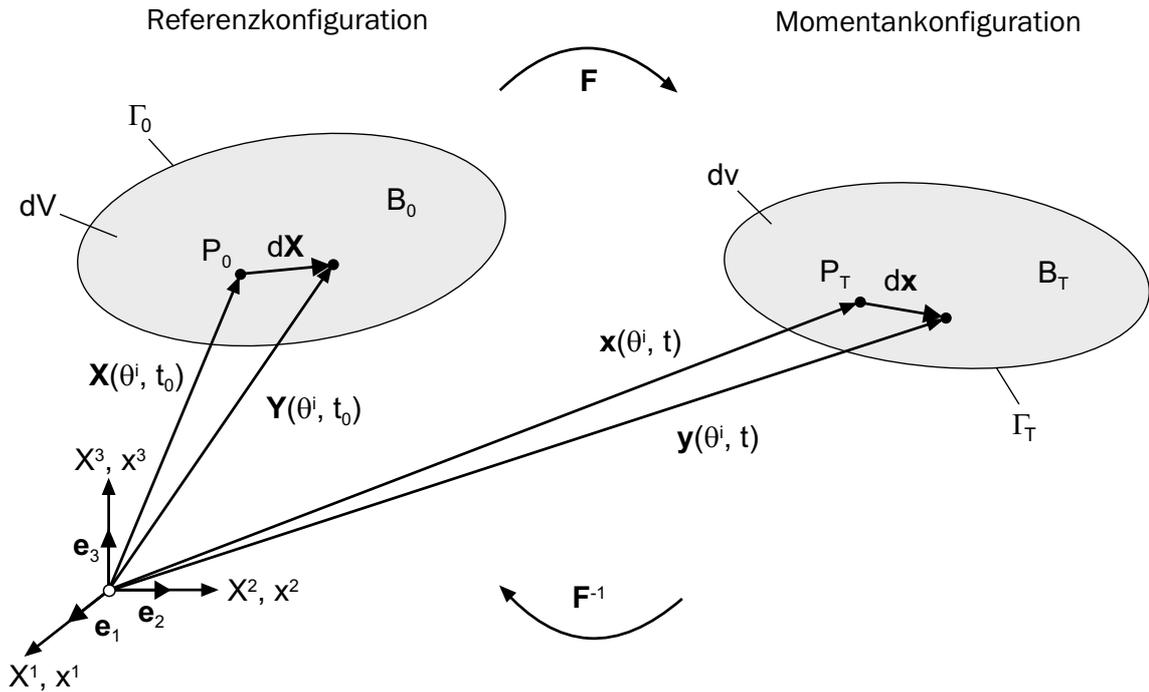


Bild 4.2: Deformation eines Linienelementes.

Der Deformationsgradient kann auch durch den Einheitstensor 2. Stufe \mathbf{I} und den Verschiebungsgradienten \mathbf{H} ausgedrückt werden:

$$d\mathbf{F} = \frac{\partial(\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \text{grad} \mathbf{u} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \quad (4.15)$$

Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den materiellen Punkten ist erst dann gewährleistet, wenn auch die Umkehrabbildung durch den inversen Tensor \mathbf{F}^{-1} möglich ist. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium hierfür ist, dass die JACOBI-Determinante J des Deformationsgradienten ungleich Null ist. Weiterhin muss

$$J := \det \mathbf{F} > 0 \quad (4.16)$$

gelten, da sonst physikalisch nicht zulässige Durchdringungen während des Deformationsprozesses möglich wären. Mittels J lassen sich die Abbildungen von Flächenelementen und Volumina von der Ausgangslage \mathcal{B}_0 in die aktuelle Lage \mathcal{B}_T angeben:

$$da = J\mathbf{F}^{-1} dA \quad \text{bzw.} \quad dv = JdV. \quad (4.17)$$

Der Deformationsgradient ist ein so genannter Zweifeldtensor, der durch die Basisvektoren der unterschiedlichen Konfigurationen beschreibbar ist. Folgende Darstellungen gelten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i, \quad (4.18)$$

wobei zu beachten ist, dass der Deformationsgradient im Allgemeinen nicht symmetrisch ist ($\mathbf{F} \neq \mathbf{F}^T$). Damit können die Basisvektoren \mathbf{G}^i in die Basisvektoren \mathbf{g}^i überführt werden und umgekehrt:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F}\mathbf{G}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{g}_i. \quad (4.19)$$

Diese Operationen werden auch als push-forward- oder pull-back-Operationen bezeichnet.

GREEN-LAGRANGE'scher Verzerrungstensor. Die Gleichung (4.14) zeigt, dass der materielle Deformationsgradient die Bewegung des Linienelements vollständig erfasst. Er beinhaltet damit sowohl die eigentliche Deformation als auch die Starrkörpertranslationen und Starrkörperrotationen. Wegen der enthaltenen Starrkörperrotationen und der daraus resultierenden fehlenden Objektivität ist der Deformationsgradient \mathbf{F} als Verzerrungsmaß nicht geeignet. Da der Deformationsgradient nach Gleichung (4.16) regulär ist, kann er multiplikativ in einen positiv definiten, symmetrischen Tensor \mathbf{U} bzw. \mathbf{v} und in einen orthogonalen Tensor \mathbf{R} zerlegt werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}. \quad (4.20)$$

Den orthogonalen Tensor \mathbf{R} nennt man Dreh- oder Rotationstensor. Er beschreibt die reine Starrkörperrotation. Die Tensoren \mathbf{U} bzw. \mathbf{v} charakterisieren die reine Streckung bei der Deformation und werden als materieller Rechts-Streck-Tensor und räumlicher Links-Streck-Tensor bezeichnet. Als quadratische Form der Strecktensoren aus Gleichung (4.20) werden der materielle Rechts-CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (4.21)$$

und der räumliche Links-CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{b} = \mathbf{v}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{G}^i)(\mathbf{G}^j \otimes \mathbf{g}_j) = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (4.22)$$

eingeführt. Mittels Gleichung (4.14) können die Tensoren als die Beziehung zwischen den Quadraten der Linienelemente

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x} \quad (4.23)$$

interpretiert werden. Aus der Differenz der Quadrate der Linienelemente (4.23) kann der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor \mathbf{E} , häufig auch als GREEN'scher Verzerrungstensor bezeichnet, definiert werden:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{G}) d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor³

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) \quad (4.25)$$

kann auch durch die kovarianten Komponenten bezüglich eines konvektiven Koordinatensystems ausgedrückt werden:

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (4.26)$$

³Für den Verzerrungstensor wird in diesem Kapitel die Variable E anstelle von ε verwendet, womit die in der Kontinuumsmechanik häufig benutzte Bezeichnung übernommen wird.

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.21) und (4.11) in (4.25) folgt für die Komponenten E_{ij} , dass sie sich als halbe Differenz der kovarianten Metrikkoeffizienten der Momentan- und der Referenzkonfiguration ergeben:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}). \quad (4.27)$$

Im Gegensatz zu \mathbf{F} ist \mathbf{E} symmetrisch. Weiterhin kann gezeigt werden, dass \mathbf{E} richtungsunabhängig und invariant gegenüber Starrkörperbewegungen ist.

4.1.2 Äußere Lasten und Spannungen

Während in der Kinematik die Beschreibung der Bewegungen behandelt wird, ohne auf deren Ursache einzugehen, befasst sich die Kinetik mit den Kräften und Momenten, die zu der Bewegung führen.

Äußere Lasten. Durch äußere Krafteinwirkungen auf Körper entsteht im Inneren ein Beanspruchungszustand, als dessen Maß in der Kontinuumsmechanik die Spannungen dienen. Sie können durch Volumenkräfte \mathbf{p}_v , wie durch Gravitation verursachte Massenkräfte, als auch durch Oberflächenkräfte \mathbf{p}_a hervorgerufen werden. Die aus ihnen resultierende äußere Kraft kann in Bezug auf die Momentan- und Referenzkonfiguration folgendermaßen berechnet werden:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_a = \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \mathbf{f} \, dv + \int_{\Gamma_T} \bar{\mathbf{t}} \, da = \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \mathbf{f}_0 \, dV + \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{T}} \, dA, \quad (4.28)$$

wobei ϱ die Dichte, \mathbf{f} die massenbezogene Volumenkraft und $\bar{\mathbf{t}}$ den Oberflächendruck charakterisiert. Der Vektor $\bar{\mathbf{T}}$ wird auch als Pseudo-Oberflächendruck bezeichnet.

Spannungen. Die Festlegung des inneren Spannungszustandes erfolgt mittels des EULER'schen Schnittprinzips. Durch eine gedankliche Schnittführung wird der Körper \mathcal{B} getrennt. Bezeichnet man mit $\Delta \mathbf{p}_t$ die auf das Flächenelement Δa wirkende Schnittkraft in einem Punkt \mathbf{x} mit dem zugehörigen Normalenvektor \mathbf{n} , ergibt sich der Spannungsvektor \mathbf{t} aus der Grenzwertbetrachtung

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_t}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{p}_t}{da}. \quad (4.29)$$

Aufgrund des CAUCHY-Theorems ergibt sich eine lineare Abbildung zwischen dem Spannungsvektor \mathbf{t} und dem CAUCHY'schen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}. \quad (4.30)$$

Der symmetrische CAUCHY'sche Spannungstensor⁴ $\boldsymbol{\sigma}$ wird auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet, da seine beiden Indizes auf die deformierte Lage bezogen sind:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (4.31)$$

⁴Die Gültigkeit von $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ ergibt sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz (Abschnitt 4.1.3).

Der erste Index i der Komponenten des Spannungstensors σ_{ij} beschreibt die Richtung, in der die Kraft wirkt. Der zweite Index j bezeichnet die Normale des Flächenstücks auf das die Kraft wirkt⁵ [Stein & Barthold 1997].

Mit der zu Gleichung (4.30) analogen Beziehung für die Referenzkonfiguration wird der Normalenvektor des undeformierten Zustands \mathbf{N} auf den Pseudo-Spannungsvektor \mathbf{T} abgebildet:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N}. \quad (4.32)$$

Der damit eingeführte 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{P} lässt sich direkt aus dem CAUCHY'schen Tensor $\boldsymbol{\sigma}$ herleiten [Başar & Weichert 2000]:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j = P^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (4.33)$$

Dieser aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes unsymmetrische Tensor ist bedingt durch die fehlende Objektivität für die Modellierung nicht geeignet. Die notwendige Symmetrisierung gelingt mittels einer vollständigen Transformation auf die Referenzkonfiguration:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \sigma^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (4.34)$$

Der symmetrische 2. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor \mathbf{S} ist zum GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor \mathbf{E} energetisch konjugiert und kann damit als ein geeignetes Spannungsmaß für die Formulierung der Schalengleichungen in der LAGRANGE'schen Betrachtungsweise angesehen werden. Wie man anhand der Gleichung (4.34) erkennen kann, wird \mathbf{S} mit der Basis der Referenzkonfiguration angegeben. Da sich die Komponenten jedoch weiterhin auf die Basis der Momentankonfiguration beziehen, vgl. (4.31), sind die Spannungen nicht physikalisch interpretierbar. Unter der Annahme kleiner Verzerrungen können die Komponenten des CAUCHY'schen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und des 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors \mathbf{S} gleichgesetzt werden:

$$S^{ij} = J \sigma^{ij} = \sqrt{\frac{g}{G}} \sigma^{ij} \approx \sigma^{ij}. \quad (4.35)$$

Bei zueinander orthogonalen Basisvektoren können die physikalisch interpretierbaren Größen des CAUCHY'schen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ unter Berücksichtigung von Gleichung (4.35) folgendermaßen bestimmt werden:

$$\sigma^{<ij>} = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g^{jj}}} \sigma^{ij} = \frac{1}{J} \sqrt{\frac{g_{ii}}{g^{jj}}} S^{ij} \approx \sqrt{\frac{g_{ii}}{g^{jj}}} S^{ij}. \quad (4.36)$$

Mittels der hier definierten Spannungen werden im nächsten Abschnitt die statischen Gleichgewichtsbedingungen aus den Erhaltungssätzen der Kontinuumsmechanik hergeleitet.

⁵In der Ingenieurpraxis wird üblicherweise die vertauschte Definition der Indizes verwendet.

4.1.3 Bilanzgleichungen

Allgemeine Form der Bilanzgleichungen. Bilanzgleichungen beschreiben allgemein gültige Prinzipien bzw. Naturgesetze, unabhängig von den stofflichen Eigenschaften der Körper. Sie werden als Axiome bezeichnet, da sie sich nicht aus anderen physikalischen Gesetzen herleiten lassen. Für den Körper \mathcal{B} erfolgt zunächst eine globale Aussage in integraler Form. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit der zu bilanzierenden Größen können daraus lokale Formulierungen in Form von Differentialgleichungen abgeleitet werden, die für einen beliebigen Teilkörper gelten müssen. Die Bilanzgleichungen erhalten den Charakter von Erhaltungssätzen, wenn die Bilanzgrößen in dem zu bilanzierenden Prozess unverändert erhalten bleiben.

Man unterscheidet zwischen extensiven und intensiven Größen. Extensive Größen, wie die Energie, die Entropie oder das Volumen, sind im Gegensatz zu den intensiven Größen, z.B. Druck, Geschwindigkeit, Spannung und Temperatur, von der Masse oder Teilchenzahl des Systems abhängig. In den Bilanzgleichungen wird die Zunahme extensiver Größen der Summe aus dem Zufluss dieser Größe über die Bereichsgrenzen und der Produktion im Inneren des Bereichs gegenübergestellt.

Bilanz der Masse. Das Postulat von der Erhaltung der Masse sagt aus, dass sich die Masse m eines Körpers \mathcal{B} während eines Deformationsprozesses nicht ändert:

$$m = \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \, dV = \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \, dv = \text{konst.} \quad (4.37)$$

Folglich ist die Masse m eine Erhaltungsgröße. Aus (4.37) lässt sich unter Verwendung von (4.17) die 1. lokale Form der Massenerhaltung in Bezug auf den materiellen Körper \mathcal{B}_T angeben:

$$\dot{\varrho}_0 = J \dot{\varrho}. \quad (4.38)$$

Unter Verwendung von (4.38), (4.6) und der zeitlichen Ableitung der JACOBI-Determinante J (4.16)

$$\dot{J} = \text{div} \dot{\mathbf{x}} J \quad (4.39)$$

lässt sich aus

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \, dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \, dv = 0 \quad (4.40)$$

die als 2. lokale Form der Massenerhaltung oder Kontinuitätsgleichung bezeichnete Gleichung

$$\dot{\varrho} + \varrho \, \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.41)$$

herleiten.

Bilanz des Impulses. Der Impulserhaltungssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses \mathbf{i} eines Körpers gleich der Resultierenden der an dem Körper angreifenden Kräfte \mathbf{p} ist:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = \mathbf{p}. \quad (4.42)$$

Führt man für den Impuls

$$\mathbf{i} = \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \mathbf{v} \, dv \quad (4.43)$$

ein, der hier die Erhaltungsgröße darstellt, und berücksichtigt für den Vektor \mathbf{p} die Beziehung (4.28), so kann der Impulssatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \mathbf{f} \, dv + \int_{\Gamma_T} \bar{\mathbf{t}} \, da \quad (4.44)$$

in seiner integralen Form angegeben werden. Wird auf der linken Seite von (4.44) die Gleichung (4.38) berücksichtigt und die rechte Seite durch die materielle Beschreibung aus (4.28) ersetzt, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \mathbf{f}_0 \, dV + \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{T}} \, dA. \quad (4.45)$$

Bei Vertauschung der Differentiation mit der Integration auf der linken Seite von (4.45) muss die partielle Differentiation durch die materielle Zeitableitung ersetzt werden. Wird in (4.45) der letzte Integrand mit

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N} \quad \text{auf} \quad \Gamma_0 \quad (4.46)$$

ersetzt und wird auf das Oberflächenintegral der GAUSS'sche Integralsatz angewendet, kann die Gleichung folgendermaßen angegeben werden:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \dot{\mathbf{v}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \mathbf{f}_0 \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \text{Div} \mathbf{P} \, dV. \quad (4.47)$$

Die Beziehung muss sowohl für den ganzen Körper als auch für einen lokalen Punkt des Körpers gelten, woraus die Bewegungsgleichung folgt:

$$\text{Div} \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{f}_0 = \varrho_0 \dot{\mathbf{v}}. \quad (4.48)$$

Unter Vernachlässigung des Beschleunigungsterms beschreibt (4.48) die statischen Gleichgewichtsbedingungen in materieller Darstellung:

$$\text{Div} \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{f}_0 = 0. \quad (4.49)$$

Für die als 1. CAUCHY'sche Bewegungsgleichung bezeichnete räumliche Darstellung der Gleichungen (4.48) und (4.49) gilt:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{f} = \varrho \dot{\mathbf{v}} \quad \text{bzw.} \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{f} = 0. \quad (4.50)$$

Bilanz des Drehimpulses. Der Drehimpulserhaltungssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses \mathbf{l} eines Körpers gleich der Resultierenden der an dem Körper angreifenden Momente \mathbf{m} ist:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l} = \mathbf{m}. \quad (4.51)$$

Die Erhaltungsgröße Drehimpuls, auch Drall genannt, eines mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Körpers bezüglich eines beliebigen Punktes p ist definiert als

$$\mathbf{l} = \int_{\mathcal{B}_T} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \varrho \mathbf{v} \, dv. \quad (4.52)$$

Die integrale Form des Drehimpulserhaltungssatzes kann in räumlicher

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_T} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}_T} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \varrho \mathbf{f} \, dv + \int_{\Gamma_T} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \bar{\mathbf{t}} \, da \quad (4.53)$$

oder in materieller Darstellung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \varrho_0 \mathbf{f}_0 \, dV + \int_{\Gamma_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \bar{\mathbf{T}} \, dA \quad (4.54)$$

angegeben werden. Aus (4.53) lässt sich mittels der Kontinuitätsgleichung (4.41), des CAUCHY-Theorems (4.30), der Bewegungsgleichung (4.48) und des Integralsatzes von GAUSS die Symmetrie des CAUCHY'schen Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (4.55)$$

zeigen [Altenbach & Altenbach 1994; Başar & Weichert 2000].

Bilanz der kinetischen Energie. Der Bilanzsatz der kinetischen Energie besagt, dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie K eines mechanischen Systems der Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräfte P_{ext} , vermindert um die innere Spannleistung P_{int} , entspricht. Ausgangspunkt seiner Herleitung ist die lokale Form der Impulsbilanzgleichung (4.50). Durch Multiplikation mit dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} , Integration über den Körper \mathcal{B} und einige Umformungen folgt:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv}_K = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_T} \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\Gamma_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, da}_{P_{ext}} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}_T} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \mathbf{v} \, dv}_{P_{int}}. \quad (4.56)$$

Für quasi-statische Vorgänge $\mathbf{v} \approx 0$ folgt daraus der Arbeitssatz der Mechanik:

$$P_{ext} = P_{int}. \quad (4.57)$$

Bilanz der Energieerhaltung. Der Energieerhaltungssatz besagt, dass die Summe aus der zeitlichen Änderung der Gesamtenergie E gleich der Summe der Leistung der äußeren

Lasten P_{ext} und der äußeren thermischen Leistung Q ist. Die Gesamtenergie setzt sich additiv aus der kinetischen Energie K und der inneren Energie U zusammen. Mit u als innerer Energiedichte, r als Wärmezufuhr über das Volumen eines Körpers \mathcal{B}_T und \mathbf{q} als Wärmezufuhr über die Oberfläche eines Körpers Γ_T können für die innere Energie

$$U = \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \cdot u \, dv \quad (4.58)$$

und die äußere thermische Leistung

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{B}_T} \varrho \cdot r \, dv - \int_{\Gamma_T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (4.59)$$

angegeben werden. Das negative Vorzeichen in (4.59) ist erforderlich, da der nach außen gerichtete Normalenvektor \mathbf{n} entgegen der nach innen positiv angenommenen Wärmezufuhr weist. Mit (4.58), (4.59) und den Größen K und P_{ext} aus (4.56) lautet der Energieerhaltungssatz wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{B}_T} \varrho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) \, dv}_{K+U} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_T} \varrho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r) \, dv + \int_{\Gamma_T} (\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da}_{P_{ext}+Q}. \quad (4.60)$$

Aus dem Zusammenführen der Gleichungen (4.56) und (4.60) resultiert der Bilanzsatz der inneren Energie, der auch als 1. Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet wird:

$$\dot{U} = P_{int} + Q. \quad (4.61)$$

4.1.4 Materialgesetze und Randbedingungen

Materialgesetze. Neben der Kinematik (Verknüpfung der inneren und äußeren Weggrößen) und dem Gleichgewicht (Verknüpfung der inneren und äußeren Kraftgrößen) wird die funktionale Kopplung der beiden Beziehungen benötigt. Die konstitutiven Gleichungen, auch als Materialgesetz oder Stoffgesetz bezeichnet, beschreiben die Relation zwischen den auftretenden Verzerrungen und den daraus resultierenden Spannungen. Die in der Arbeit verwendete Materialformulierung wurde bereits in Kapitel 3 erläutert. In der Literatur sind eine Vielzahl weiterer Materialformulierungen vorhanden. Sie unterscheiden sich beispielsweise durch die kinematischen Vorgaben, die zu untersuchenden Werkstoffe und das betrachtete Belastungsniveau. Bei linear-elastischen Materialmodellen, stellvertretend sei hier das ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materialmodell genannt, existiert ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor \mathbf{S} und dem GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor \mathbf{E} . Unter Verwendung des Materialtensors 4. Stufe \mathbb{C} gilt

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \quad (4.62)$$

Bei inelastischen Materialformulierungen gilt ganz allgemein:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}). \quad (4.63)$$

Randbedingungen. Die vollständige Beschreibung des Strukturproblems macht die Angabe von Randbedingungen erforderlich. Dazu zählen die geometrischen Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial_u \mathcal{B}_0 \quad (4.64)$$

und die statischen Randbedingungen

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf} \quad \partial_\sigma \mathcal{B}_0. \quad (4.65)$$

Für die Randbedingungen muss gelten, dass sich die jeweiligen Berandungen $\partial_u \mathcal{B}_0$ und $\partial_\sigma \mathcal{B}_0$ nicht überlappen:

$$\Gamma_0 = \Gamma_{u0} \cup \Gamma_{\sigma0} \quad \text{und} \quad \Gamma_{u0} \cap \Gamma_{\sigma0} = \emptyset. \quad (4.66)$$

4.1.5 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Die strukturmechanische Problemstellung wird durch die Differentialgleichungen (4.25), (4.48) und (4.63) sowie die Randbedingungen (4.64) und (4.65) beschrieben. Das gekoppelte Differentialgleichungssystem kann im Allgemeinen analytisch nicht gelöst werden. Zur Auffindung einer approximativen Lösung werden Diskretisierungsmethoden eingesetzt, die auf Variationsprinzipien basieren. Die bekannten Prinzipien unterscheiden sich zum einen durch die Anzahl unabhängiger Variablen, zum anderen dadurch, dass sie entweder auf Arbeits- oder Energieprinzipien fußen [Krätzig & Başar 1997]. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen eingesetzt, welches im Folgenden erläutert wird.

Herleitung. Die lokale Impulsbilanz (4.49) bildet zusammen mit den geometrischen und statischen Randbedingungen die so genannte starke Form des Gleichgewichts. Im Gegensatz zur starken Formulierung, die eine punktuell exakte Lösung fordert, liefert die schwache Formulierung, hier das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, lediglich eine Lösung im integralen Sinne. Durch die Multiplikation mit den virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ und die anschließende Integration kann die lokale Impulsbilanz (4.49) in die schwache Form überführt werden:

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div} \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{f}_0) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0. \quad (4.67)$$

Die virtuellen Verschiebungen⁶ sind beliebig, müssen aber die geometrischen Randbedingungen erfüllen:

$$\delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_u, \quad (4.68)$$

womit sie als kinematisch zulässig bezeichnet werden [Mang & Hofstetter 2000]. Mittels der Gleichung

$$(\text{Div} \mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{u} = \text{Div}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u}) - \mathbf{P} : \text{Grad} \delta \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \text{Grad} \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{F}, \quad (4.69)$$

⁶Im Sinne der Variationsrechnung stellt $\delta \mathbf{u}$ eine Variation von $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ bzw. $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ dar.

der Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dA = \int_{\mathcal{B}_0} \text{Div} \mathbf{P} dV \quad (4.70)$$

und unter Berücksichtigung der Spannungsrandbedingungen auf dem Rand Γ_σ kann aus (4.67) die virtuelle Arbeit⁷ bestimmt werden:

$$\delta^* W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dV - \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0. \quad (4.71)$$

Der erste Term kann auch durch die energetisch konjugierten Größen des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors \mathbf{E} und des 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors \mathbf{S} ausgedrückt werden. Somit gilt:

$$\delta^* W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV}_{\delta^* W_{int}} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} dA}_{\delta^* W_{ext}} = 0, \quad (4.72)$$

wobei der erste Term die innere virtuelle Arbeit $\delta^* W_{int}$ und die Summe der beiden anderen Terme die äußere virtuelle Arbeit $\delta^* W_{ext}$ beschreibt. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen kann folgerichtig auch so interpretiert werden: Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der Arbeit verschwindet, die von den äußeren Lasten und den inneren Spannungen entlang einer beliebigen, infinitesimal großen, kinematisch zulässigen (virtuellen) Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ verrichtet wird.

Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Aufgrund der nicht-linearen Zusammenhänge in Gleichung (4.72) können im Allgemeinen nur inkrementell-iterative Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen eingesetzt werden. Diese Verfahren erfordern jedoch die Linearisierung des Variationsprinzips. Durch die Taylorreihenentwicklung einer reellwertigen, stetig differenzierbaren Funktion $G(\mathbf{u})$ an der aktuellen bekannten Stelle $\bar{\mathbf{u}}$ erhält man unter Vernachlässigung des Restglieds⁸ $R(\Delta \mathbf{u})$ die linearisierte Form der Funktion:

$$G(\mathbf{u}) := G(\bar{\mathbf{u}}) + DG(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \Delta \mathbf{u} + R(\Delta \mathbf{u}). \quad (4.73)$$

Dabei ist $G(\bar{\mathbf{u}})$ der Funktionswert an der Stelle $\bar{\mathbf{u}}$ und $DG(\bar{\mathbf{u}})$ die Richtungs- oder GATEAUX-Ableitung in Richtung von $\Delta \mathbf{u}$ mit

$$DG(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{G(\bar{\mathbf{u}} + \alpha \Delta \mathbf{u}) - G(\bar{\mathbf{u}})}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} [G(\bar{\mathbf{u}} + \alpha \Delta \mathbf{u})]_{\alpha=0}. \quad (4.74)$$

⁷Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist im Sinne der Variationsrechnung keine vollständige Extremalbedingung von Funktionalen und somit keine vollständige Variation. Deswegen wird das üblicherweise verwendete Symbol δ hier durch δ^* ersetzt. Siehe hierzu Krätzig & Başar (1997).

⁸Die Vernachlässigung ist zulässig, da das Restglied schneller gegen 0 konvergiert, als die ersten Reihenglieder.

Da sich die weiteren Ausführungen auf verformungsunabhängige Lasten beschränken, sind nur die inneren virtuellen Arbeiten δ^*W_{int} von den Verschiebungen \mathbf{u} abhängig. Daraus folgt mit

$$D\delta^*W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} = \Delta\delta^*W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} (\Delta\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{S} : \Delta\mathbf{E}) dV \quad (4.75)$$

das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (4.72) in linearisierter Form zu

$$\begin{aligned} L\delta^*W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) &= \delta^*W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \Delta\delta^*W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV - \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \mathbf{f}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta\mathbf{u} dA \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}_0} (\Delta\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta\delta\mathbf{E}) dV = 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

4.2 Grundgleichungen der Schalentheorie

Aus den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik wird nachfolgend eine mittelflächenorientierte Schalentheorie hergeleitet. Die dargestellte Schalentheorie ist von Montag (1997) in ein finites Schalenelement umgesetzt worden. Auf die numerische Realisierung wird im nächsten Kapitel näher eingegangen. Zu Beginn dieses Abschnitts wird ein kurzer Überblick über die Schalenelemententwicklung und die zu Grunde liegenden Schalentheorien gegeben.

4.2.1 Übersicht

Flächentragwerke sind dadurch gekennzeichnet, dass eine ihrer räumlichen Ausdehnungen wesentlich geringer ist als die beiden anderen. Sind Flächentragwerke gekrümmt, spricht man von Schalen. Die Errichtung der ersten Schalenbauwerke liegt schon über zwei Jahrtausende zurück, aber erst seit dem 19. Jahrhundert wird versucht, das Tragverhalten solcher Konstruktionen mit mathematisch orientierten Theorien zu beschreiben. Die Grundidee der klassischen Schalentheorien ist die Beschreibung des dreidimensionalen Körpers ausgehend von einer Referenzfläche⁹. Unter Einsatz der Normalenhypothese, die bereits Kirchhoff (1850) für die Herleitung der ersten korrekten Plattentheorie verwendete, lieferte Love (1888) als einer der Ersten einen schalentheoretischen Ansatz. Durch den Einsatz der Normalenhypothese wird das dreidimensionale Kontinuum durch eine flächenhafte Kinematik abgebildet. In der KIRCHHOFF-LOVE-Theorie erweist sich neben

⁹Als Referenzfläche wird üblicherweise die Schalenmittelfläche als geometrische Mitte zwischen der unteren und oberen Laibung definiert. Diese Bezugsfläche muss aber nicht notwendigerweise mit der Mittelfläche zusammenfallen. Die Implementierung des in Kapitel 5 beschriebenen Elementes ist so durchgeführt worden, dass Referenz- und Mittelfläche voneinander abweichen können, womit die Möglichkeit einer exzentrischen Lagerung oder Kopplung gegeben ist. Des Weiteren kann das Element genutzt werden, um beispielsweise einen Plattenbalken annähernd zu simulieren [Ducke, Eckstein, Meiser & Montag 2000]. Die Möglichkeit der Exzentrizität wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter behandelt.

den Widersprüchen bei der Definition der Randbedingungen die Vernachlässigung der transversalen Schubverzerrungen als nachteilig. Die daraus resultierende Beschränkung auf die Berechnung dünner Strukturen ist durch die Einführung der Schubverzerrungstheorie beseitigt worden. Die von Reissner (1945) und Mindlin (1951) für Platten entwickelte Theorie, die für Schalen von Green & Zerna (1968) erweitert wurde, erlaubt die Berücksichtigung konstanter Schubverzerrungen und die unabhängige Beschreibung der Verschiebungen und Verdrehungen. Bei postulierter Dehnungsfreiheit in Dickenrichtung sind für die Kinematik der REISSNER-MINDLIN-Theorie fünf Variablen erforderlich. Neben den drei Verschiebungen der Mittelfläche sind das zwei Parameter zur Beschreibung der Verschiebung oder Rotation des Direktors. Dabei wird der Vektor zwischen einem beliebigen Punkt im Schalenraum \mathcal{P} und dem zugehörigen Punkt der Referenzfläche $\mathcal{P}^{(0)}$ als Direktor bezeichnet. Beschreibt man den Ortsvektor \mathcal{P} durch einen Vektorpolynomansatz hinsichtlich der Dickenkoordinate θ^3

$$\mathbf{x}(\theta^i) = \sum_{n=0,1}^m (\theta^3)^n \mathbf{x}^{(n)}(\theta^\alpha) = \mathbf{x}^{(0)}(\theta^\alpha) + (\theta^3)^1 \mathbf{x}^{(1)}(\theta^\alpha) + (\theta^3)^2 \mathbf{x}^{(2)}(\theta^\alpha) + \dots, \quad (4.77)$$

mit $(\theta^3)^n$ als n -tes Polynom von θ^3 und $\mathbf{x}^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots, m$ als eine endliche Anzahl von Direktoren, so kann die REISSNER-MINDLIN-Theorie als ein Sonderfall für den Abbruch nach dem linear veränderlichen Anteil in θ^3 interpretiert werden. Für den Fall $m \rightarrow \infty$ strebt die Lösung gegen die Lösung der dreidimensionalen Theorie [Naghdi 1972; Krätzig 1971].

Auf der Grundlage der Gleichung (4.77) sind durch die Definition unterschiedlicher Abbruchbedingungen weitere Schalenformulierungen hergeleitet worden. Diese können als Mittelflächen-Multidirektor-Schalentheorien bezeichnet werden. Dabei erfolgt die Beschreibung der Direktoren ohne oder mit Verwendung von Rotationsvariablen (Tabelle 4.1). Numerisch umgesetzt wurden diese Theorien z.B. von Menzel (1996), Bischoff (1999) und Eckstein (1999).

Parameter	mit Rotationsvariablen	ohne Rotationsvariablen
5	$\mathbf{x}^{(0)} + \theta^3 \mathbf{d}$	
6	$\mathbf{x}^{(0)} + \theta^3 \lambda \mathbf{d}$	$\mathbf{x}^{(0)} + \theta^3 \mathbf{x}^{(1)}$
7	$\mathbf{x}^{(0)} + (\theta^3 \lambda + (\theta^3)^2 \chi) \mathbf{d}$	$\mathbf{x}^{(0)} + (\theta^3 + (\theta^3)^2 \chi) \mathbf{x}^{(1)}$
9	$\mathbf{x}^{(0)} + \theta^3 \lambda \mathbf{d} + (\theta^3)^2 \mathbf{y}$	$\mathbf{x}^{(0)} + \theta^3 \mathbf{x}^{(1)} + (\theta^3)^2 \mathbf{x}^{(2)}$

Tabelle 4.1: Parametrisierung der Mittelflächen-Multidirektor-Schalentheorien.

Sämtliche bisher beschriebene flächenartige Theorien sind aus der Kontinuumsmechanik unter expliziter Darstellung einer ausgezeichneten Koordinate, der Dickenkoordinate θ^3 , hergeleitet worden. Eine derartige Vorgehensweise wird als Degeneration bezeichnet.

Eine andere Vorgehensweise zur Herleitung flächenartiger Theorien wird in den Arbeiten von Ericksen & Truesdell (1958) und Green & Zerna (1968) verwendet. Ausgangspunkt ist

nicht das dreidimensionale Kontinuum, sondern eine steife, massenbehaftete Fläche, die so genannte COSSERAT-Fläche. Mit den flächenhaft eingeführten Schnittgrößen können die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Im Gegensatz zu den aus der Kontinuumsmechanik hergeleiteten Theorien, die vereinfachende Annahmen für die Kinematik treffen, wird hier die Kinematik exakt formuliert. Die vereinfachende Annahme tritt in diesem Fall schon vorher durch das Postulat der COSSERAT-Fläche auf. Auf dieser Grundlage entwickelte Harte (1982) unter Berücksichtigung der KIRCHHOFF-LOVE-Hypothese die Elementfamilie NACS¹⁰. Durch den Einsatz von bis zu quintischen Ansatzfunktionen können hiermit sehr gute Ergebnisse mit einer geringen Elementanzahl erreicht werden. Da die Referenzkonfiguration exakt, die Momentankonfiguration aber approximativ beschrieben wird, können jedoch Starrkörperbewegungen nicht verzerrungsfrei wiedergegeben werden. Die Definition der Grundgleichungen bezüglich des konvektiven Koordinatensystems macht die Bestimmung differentialgeometrischer Größen, wie der Christoffelsymbole oder der kovarianten Ableitungen, erforderlich.

4.2.2 Geometrie und Kinematik

In diesem Teilabschnitt werden die kinematischen Annahmen der verwendeten mittelflächenorientierten Schalentheorie dargestellt. Dabei erfolgt die Beschreibung der Geometrie ausgehend von einer Referenzfläche \mathcal{A} , die in der (unverformten, spannungslosen) Ausgangskonfiguration durch den Ortsvektor $\mathbf{X}^{(0)}(\theta^i)$ und in der verformten Konfiguration durch den Ortsvektor $\mathbf{x}^{(0)}(\theta^i)$ in Abhängigkeit von den konvektiven Koordinaten θ^i festgelegt wird. Durch die Wahl eines linearen Ansatzes in Richtung der konvektiven Koordinate θ^3 in den jeweiligen Konfigurationen ist ein beliebiger Punkt \mathcal{P} des Schalenraums durch die Ortsvektoren

$$\mathbf{X}(\theta^i) = \mathbf{X}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{X}^{(1)}(\theta^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}(\theta^i) = \mathbf{x}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{x}^{(1)}(\theta^\alpha) \quad (4.78)$$

erreichbar (Bild 4.3). Infolge der getroffenen Annahme der Inextensibilität, d.h. der Unausdehnbarkeit in Dickenrichtung, können die Direktoren $\mathbf{X}^{(1)}$ bzw. $\mathbf{x}^{(1)}$ durch die Normaleneinheitsvektoren \mathbf{D} bzw. \mathbf{d} ersetzt werden, die die Eigenschaft

$$\|\mathbf{D}\| = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \|\mathbf{d}\| = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1 \quad (4.79)$$

besitzen. Aus den Beziehungen (4.78) folgt damit

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\theta^i) &= \mathbf{X}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{D}(\theta^\alpha) = X^{(0)i}(\theta^\alpha) \mathbf{e}_i + D^i(\theta^\alpha) \mathbf{e}_i \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{x}(\theta^i) &= \mathbf{x}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{d}(\theta^\alpha) = x^{(0)i}(\theta^\alpha) \mathbf{e}_i + d^i(\theta^\alpha) \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Die Komponenten werden im dreidimensionalen EUKLID'schen Raum \mathbb{E}^3 bezüglich der orthonormierten Vektorbasis \mathbf{e}_i angegeben. Die Werte für θ^3 variieren zwischen der unteren und oberen Schalenlaibung mit $-H/2 \leq \theta^3 \leq H/2$, wobei $H(\theta^\alpha)$ die Höhe des Schalenkontinuums angibt. Die Schalengrößen, wie beispielsweise die Spannungen, werden bezüglich des lokalen, im Allgemeinen krummlinigen Koordinatensystems angegeben.

¹⁰NACS steht dabei für **n**onlinear **a**rbitrarily **c**urved **s**hell **e**lements.

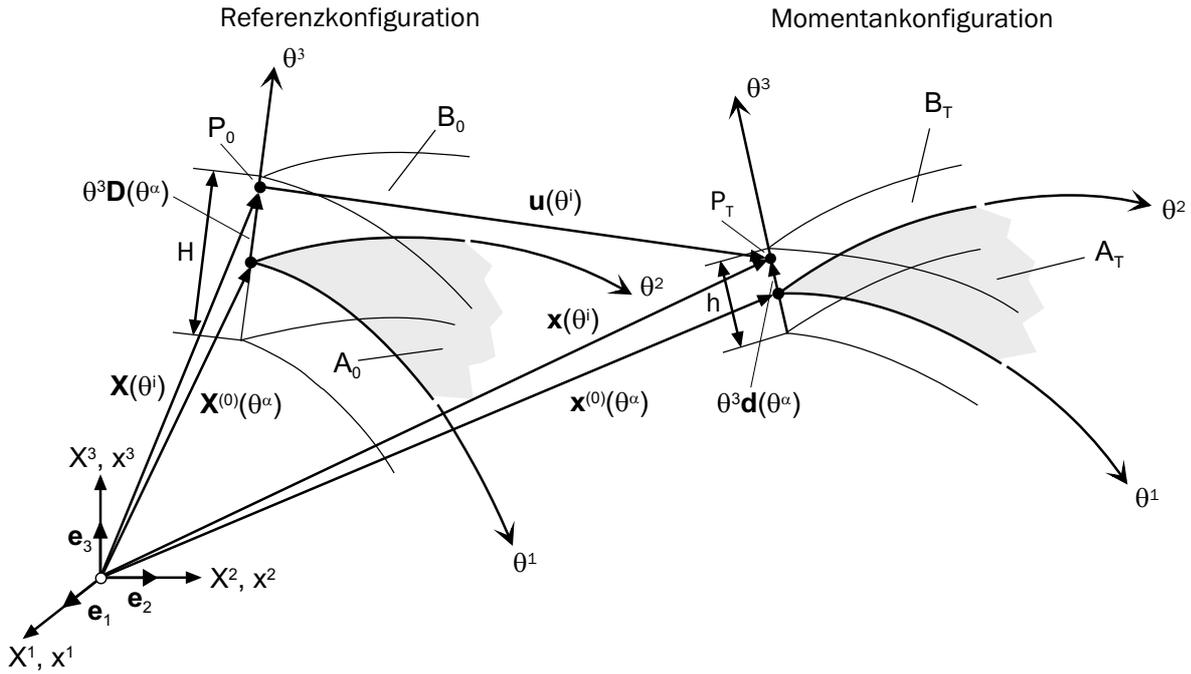


Bild 4.3: Kinematik des Schalenkontinuums.

Tangential an die zugehörigen Koordinatenlinien θ^i werden die kovarianten Basisvektoren des Schalenraums \mathbf{G}_i bzw. \mathbf{g}_i definiert (Bild 4.4), die sich durch die Ableitung der Ortsvektoren (4.80) ergeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} + \theta^3 \mathbf{D}_{,\alpha} & \text{bzw.} & \quad \mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} + \theta^3 \mathbf{d}_{,\alpha} \\ \mathbf{G}_3 &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^3} = \mathbf{D} & & \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^3} = \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^i und \mathbf{g}^i und die Metrikkoeffizienten können mittels der Gleichungen (4.8) und (4.10) bestimmt werden.

Die zu einem Punkt $\mathcal{P}^{(0)}$ der Schalenmittelflächen gehörenden kovarianten Basisvektoren werden mit \mathbf{A}_i bzw. \mathbf{a}_i bezeichnet. Für den undeformierten Zustand \mathcal{B}_0 und deformierten Zustand \mathcal{B}_T gilt somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{X}^{(0)}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} & \text{bzw.} & \quad \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}^{(0)}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \\ \mathbf{A}_3 &= \frac{\partial \mathbf{X}^{(0)}}{\partial \theta^3} = \mathbf{D} & & \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}^{(0)}}{\partial \theta^3} = \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Für den Direktor der Referenzkonfiguration \mathbf{D} wird gefordert, dass er senkrecht auf der Mittelfläche steht. Daraus folgt die alternative Berechnungsmöglichkeit für den Basis-

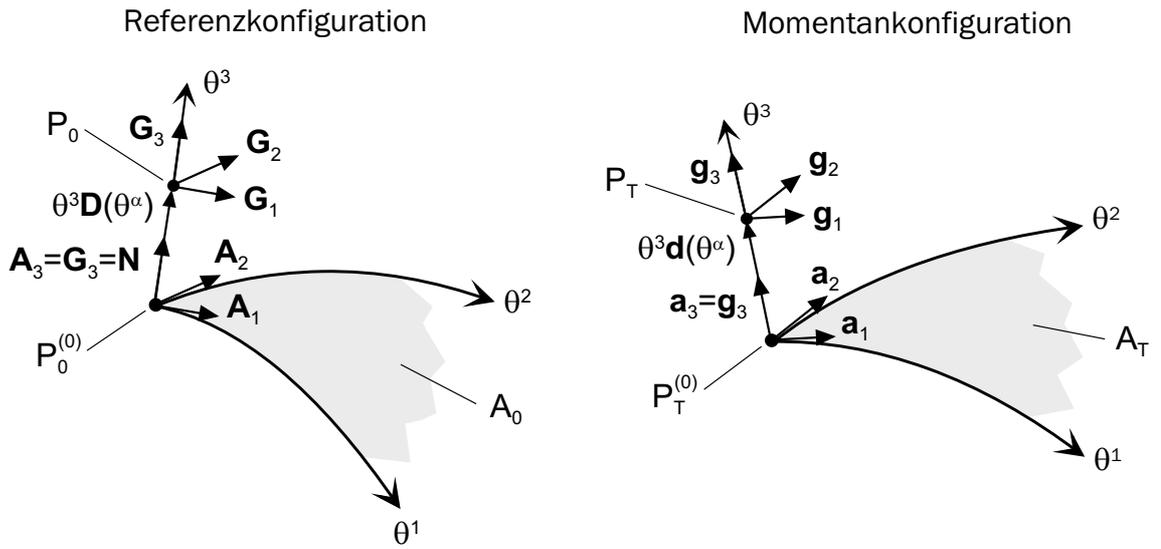


Bild 4.4: Basisvektoren des Schalenkontinuums.

vektor \mathbf{A}_3 ¹¹:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2. \quad (4.83)$$

Im Rahmen der verwendeten REISSNER-MINDLIN-Kinematik kann die Forderung für den Direktor \mathbf{d} der Momentankonfiguration fallen gelassen werden. Bei Beachtung von Gleichung (4.79) können die Direktoren \mathbf{D} bzw. \mathbf{d} durch zwei unabhängige EULER-Winkel Ψ_α bzw. ψ_α beschrieben werden:

$$\mathbf{D} = D^i(\Psi_\alpha) \mathbf{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{d} = d^i(\psi_\alpha) \mathbf{e}_i, \quad (4.84)$$

deren Verwendung auf einen Vorschlag von Ramm (1976) zurückgeht (Bild 4.5). Die Komponenten der Normaleneinheitsvektoren ergeben sich zu:

$$D^i = \begin{bmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \Psi_1 \cos \Psi_2 \\ \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \\ \cos \Psi_1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad d^i = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \psi_1 \cos \psi_2 \\ \sin \psi_1 \sin \psi_2 \\ \cos \psi_1 \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

Mittels des so genannten Schalenshifters \mathbf{Z} bzw. \mathbf{z} , für den gilt:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{Z}^T = \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{Z}^{-T} = \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad (4.86)$$

bzw.

$$\mathbf{z} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{z}^T = \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{z}^{-1} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{z}^{-T} = \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (4.87)$$

¹¹In der numerischen Umsetzung sind beide Alternativen berücksichtigt. Bei Vorgabe analytischer Ausgangsgeometrien wird der Direktor über die EULER-Winkel bestimmt. Werden für die Definition des Elementes beliebige Knoten vorgegeben, wird der Direktor der Ausgangsgeometrie mit Gleichung (4.83) bestimmt.

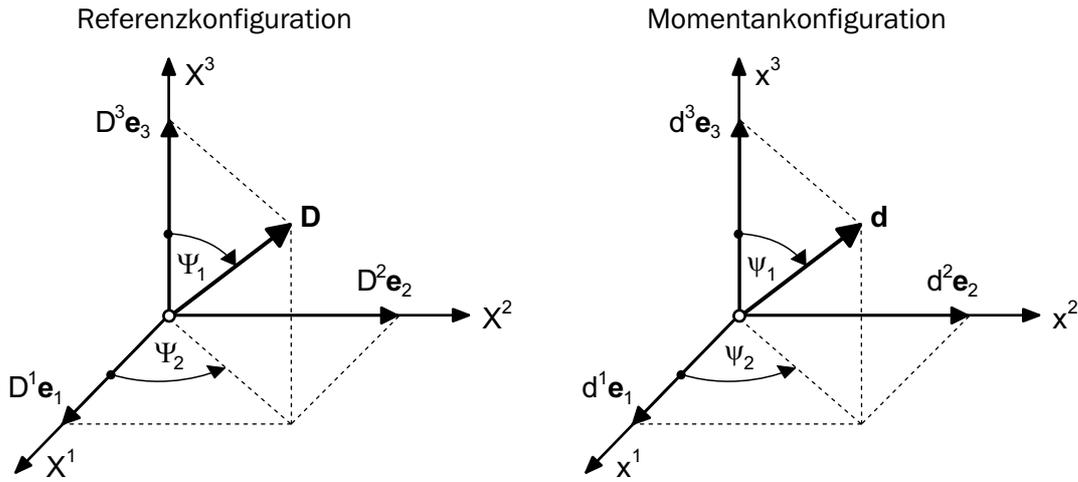


Bild 4.5: Beschreibung des Schalendirektors nach Ramm (1976).

kann der Zusammenhang zwischen den Basisvektoren der Schalenmittelfläche und des Schalenraums angegeben werden:

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{Z} \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{A}^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{z} \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{z}^{-T} \mathbf{a}^i. \quad (4.88)$$

Weitere Größen, die für die numerische Umsetzung benötigt werden, sind die ko- und kontravarianten Metrikoeffizienten der Schalenmittelfläche

$$A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad \text{und} \quad A^{\alpha\beta} = \mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}^\beta, \quad (4.89)$$

die ko- und gemischtvarianten Komponenten des Krümmungstensors

$$B_{\alpha\beta} = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} \quad \text{und} \quad B_\alpha^\beta = B_{\alpha\rho} A^{\rho\beta} \quad (4.90)$$

und das differentielle Flächenelement

$$dA = \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2. \quad (4.91)$$

Für die Metrikdeterminante A kann allgemein die Beziehung

$$A = \det \mathbf{A} = \det [A_{ij}] = ((d\mathbf{A}_1 \times d\mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{A}_3)^2 \quad (4.92)$$

angegeben werden, die sich unter Annahme des senkrecht zur Mittelfläche stehenden Direktors \mathbf{D} zu

$$A = \det [A_{\alpha\beta}] = A_{11} A_{22} - (A_{12})^2 \quad (4.93)$$

vereinfacht. Die Verschiebungen des Schalenraums

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{X}^{(0)}) + \theta^3 (\mathbf{d} - \mathbf{D}) \quad (4.94)$$

und der Referenzfläche ($\theta_3 = 0$)

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{X}^{(0)} \quad (4.95)$$

folgen aus der Beziehung (4.5) unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.78).

4.2.3 Verzerrungsmaße und Schnittgrößen

GREEN-LAGRANGE'scher Verzerrungstensor. Der in Abschnitt 4.1.1 eingeführte GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (4.96)$$

kann unter Verwendung des materiellen Shifters \mathbf{Z} auf die Basis der Schalenmittelfläche transformiert werden:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}^{-T} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-T} \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{G}}) \mathbf{Z}^{-1} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{E}} = E_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j. \quad (4.97)$$

Nach Einsetzen der Metrikkoeffizienten (C.1-C.2) kann $\hat{\mathbf{E}}$ in einen konstanten, linearen und quadratischen Anteil bezüglich der Dickenrichtung unterteilt werden:

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}^{(0)} + \hat{\mathbf{E}}^{(1)} + \hat{\mathbf{E}}^{(2)} \quad \text{mit} \quad E_{ij} = E_{ij}^{(0)} + \theta^3 E_{ij}^{(1)} + (\theta^3)^2 E_{ij}^{(2)}. \quad (4.98)$$

Die aus dem kinematischen Ansatz resultierenden Komponenten des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors $\hat{\mathbf{E}}$ sind im Anhang (C.3)-(C.5) aufgeführt. Bei Vernachlässigung der quadratischen Anteile der Tangentialverzerrungen, der linearen Anteile der Schubverzerrungen und unter Berücksichtigung von (4.79) und der Orthogonalitätsanforderung an \mathbf{D} resultieren daraus die Komponenten

$$E_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{\alpha\beta} + \theta^3 \beta_{\alpha\beta} & \frac{1}{2} \gamma_\alpha \\ \hline \frac{1}{2} \gamma_\alpha & 0 \end{array} \right] \quad (4.99)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= E_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right), \\ \beta_{\alpha\beta} &= E_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right), \\ \gamma_\alpha &= 2E_{\alpha 3}^{(0)} = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Dabei sind $\alpha_{\alpha\beta}$ die Dehnverzerrungen, $\beta_{\alpha\beta}$ die Biegeverzerrungen und γ_α die Schubverzerrungen, womit die für die Schalentheorie übliche Bezeichnungsweise übernommen wird [Başar & Krätzig 1985; Montag 1997].

Schnittgrößendefinition. Für die im folgenden Teilabschnitt dargestellte Variationsformulierung werden neben den Verzerrungsmaßen energiekonjugierte Spannungsgrößen benötigt. Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor \mathbf{S} aus (4.34) kann analog zu Beziehung (4.97) auf die Schalenmittelfläche transformiert werden:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}^{-T} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{Z}^{-1} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{S}} = S^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j. \quad (4.101)$$

Für die Formulierung der Komponenten bezüglich der Schalenmittelfläche wird der Zusammenhang zwischen dem differentiellen Volumenelement dV (4.13) und dem differentiellen Flächenelement dA (4.91) benötigt:

$$dV = \sqrt{\frac{G}{A}} d\theta^3 dA = \det \mathbf{Z} d\theta^3 dA. \quad (4.102)$$

Der Wurzelausdruck entspricht der Determinante des Schalenshifters \mathbf{Z} aus (4.86). Dieser ergibt sich zu Eins, wenn der Direktor der Referenzkonfiguration \mathbf{D} zu den Basisvektoren \mathbf{A}_α senkrecht steht. Durch eine Vorabintegration der Spannungen in Dickenrichtung können nun die Komponenten der Spannungsergebnierenden bezüglich der Schalenmittelfläche bestimmt werden:

$$S_{(n)}^{ij} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} (\theta^3)^n S^{ij} d\theta^3 \quad \text{mit } n = 0, 1, 2. \quad (4.103)$$

Hiermit lassen sich die Komponenten des Pseudo-Normalkrafttensors $\tilde{N}^{(\alpha\beta)}$, des Momententensors $M^{(\alpha\beta)}$ und des Pseudo-Querkrafttensors $\tilde{Q}^{(\alpha)}$ angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{(\alpha\beta)} &= S_{(0)}^{\alpha\beta} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} S^{\alpha\beta} d\theta^3, \\ M^{(\alpha\beta)} &= S_{(1)}^{\alpha\beta} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} S^{\alpha\beta} \theta^3 d\theta^3, \\ \tilde{Q}^\alpha &= S_{(0)}^{\alpha 3} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} S^{\alpha 3} d\theta^3, \end{aligned} \quad (4.104)$$

womit nur die zu (4.100) arbeitskonformen Größen berücksichtigt werden. Es handelt sich hierbei um physikalisch nicht interpretierbare Größen. Durch die runden Klammern bei der Indizierung wird die Symmetrie der Tensoren angezeigt. Die Herleitung physikalisch interpretierbarer Schnittgrößen gelingt durch die Einführung der Schnittgrößenvektoren $\mathbf{n}^{<\alpha>}$ und $\mathbf{m}^{<\alpha>}$. Ferner werden die nichtphysikalischen Vektorgrößen \mathbf{n}^α durch

$$\mathbf{n}^\alpha = \mathbf{n}^{<\alpha>} \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \quad (4.105)$$

definiert, die bezüglich der Basisvektoren der Momentankonfiguration wie folgt zerlegt werden:

$$\mathbf{n}^\alpha = \sqrt{\frac{A}{a}} (N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + Q_\alpha \mathbf{a}_3). \quad (4.106)$$

Dabei resultiert der Vorfaktor durch den Bezug der Komponenten auf die unverformte Fläche. Für den Zusammenhang zwischen den Komponenten aus (4.104) und (4.106) gilt

$$N^{\alpha\beta} = \tilde{N}^{(\alpha\beta)} - M^{(\alpha\gamma)} \beta_\gamma^\beta \quad \text{und} \quad Q^\alpha = \tilde{Q}^\alpha. \quad (4.107)$$

Für die Herleitung sei beispielsweise auf Bařar & Krätzig (1985) oder Menzel (1996) verwiesen. Damit können die Komponenten der physikalischen Schnittgrößenvektoren $\mathbf{n}^{<\alpha>}$ und $\mathbf{m}^{<\alpha>}$ bestimmt werden, welche die für die Bemessung eines Tragwerks erforderlichen Größen darstellen:

$$\begin{aligned} N^{<\alpha\beta>} &= \sqrt{\frac{A}{a}} \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{\alpha\alpha}}} N^{\alpha\beta}, \\ M^{<\alpha\beta>} &= \sqrt{\frac{A}{a}} \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{\alpha\alpha}}} M^{\alpha\beta}, \\ Q^{<\alpha>} &= \sqrt{\frac{A}{a}} \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} Q^\alpha. \end{aligned} \quad (4.108)$$

4.2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Die innere virtuelle Arbeit $\delta^* W_{int}$ aus (4.72) kann für die verwendete Schalentheorie durch Größen beschrieben werden, deren Komponenten sich auf die beiden Basen der unverformten Schalenmittelfläche beziehen:

$$\delta^* W_{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \hat{\mathbf{S}} : \delta\hat{\mathbf{E}} \, dV. \quad (4.109)$$

Durch das Einsetzen der Spannungsergebnisse aus (4.104) und der zugehörigen Variationen der Verzerrungsgrößen aus (4.100) resultiert die folgende Form:

$$\delta^* W_{int} = \int_{\mathcal{B}_0} \left(\tilde{N}^{(\alpha\beta)} \delta\alpha_{(\alpha\beta)} + M^{(\alpha\beta)} \delta\beta_{(\alpha\beta)} + Q^\alpha \delta\alpha_{\alpha 3} \right) dV. \quad (4.110)$$

Mit dem Materialtensor (4.62) bezüglich der Schalenmittelfläche

$$\hat{\mathbb{C}} = C^{ijkl} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{A}_l \quad (4.111)$$

und der kinematischen Beziehung (4.99) können die Komponenten der Spannungsergebnisse durch

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{(\alpha\beta)} &= \overset{0}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} \alpha_{(\rho\lambda)} + \overset{1}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} \beta_{(\rho\lambda)} + \overset{0}{D}^{\alpha\beta\rho 3} \gamma_{\rho 3}, \\ M^{(\alpha\beta)} &= \overset{1}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} \alpha_{(\rho\lambda)} + \overset{2}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} \beta_{(\rho\lambda)} + \overset{1}{D}^{\alpha\beta\rho 3} \gamma_{\rho 3}, \\ \tilde{Q}^\alpha &= \overset{0}{D}^{\alpha 3\rho\lambda} \alpha_{(\rho\lambda)} + \overset{1}{D}^{\alpha 3\rho\lambda} \beta_{(\rho\lambda)} + \overset{0}{D}^{\alpha 3\rho 3} \gamma_{\rho 3} \end{aligned} \quad (4.112)$$

bestimmt werden. Dabei ist

$$\overset{m}{D}^{ijkl} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} C^{ijkl} (\theta^3)^m \, d\theta^3, \quad m = 0, 1, 2. \quad (4.113)$$

Für die äußere virtuelle Arbeit δ^*W_{ext} werden Last- und Momentenvektoren auf der Mittelfläche und der Berandung berücksichtigt [Montag 1997]:

$$\begin{aligned}\delta^*W_{ext} &= \int_{\mathcal{A}_t} (\mathbf{p} \delta \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{c} \delta \boldsymbol{\omega}) da + \int_{\mathcal{C}_t} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{m} \delta \boldsymbol{\omega}) ds \\ &= \int_{\mathcal{A}_0} p^i \delta x^{(0)i} dA + \int_{\mathcal{C}_0} \left(n^i \delta x^{(0)i} + \frac{1}{1+w^3} m^i \delta \omega_i \right) dS.\end{aligned}\quad (4.114)$$

Die Gleichungen (4.110) und (4.114) bilden zusammen die schwache Form des Gleichgewichts der Schale, deren notwendige Linearisierung im nächsten Abschnitt behandelt wird.

4.2.5 Linearisierung

Nur der innere Anteil der virtuellen Arbeiten ist von der Linearisierung betroffen, da - wie bereits im Abschnitt 4.1.5 erwähnt - nur von konservativen Lasten ausgegangen wird. Durch Einsetzen der schalentheoretischen Größen aus (4.110) in die linearisierte Form des Kontinuums (4.76) geht der innere Anteil der linearisierten Form der Schale hervor:

$$\begin{aligned}L\delta^*W_{int} &= \int_{\mathcal{A}_0} \left(\tilde{N}^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + M^{(\alpha\beta)} \delta \beta_{(\alpha\beta)} + \tilde{Q}^\alpha \delta \gamma_\alpha \right) dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}_0} \left(\Delta \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + \Delta M^{(\alpha\beta)} \delta \beta_{(\alpha\beta)} + \Delta \tilde{Q}^\alpha \delta \gamma_\alpha \right) dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}_0} \left(\tilde{N}^{(\alpha\beta)} \Delta \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + M^{(\alpha\beta)} \Delta \delta \beta_{(\alpha\beta)} + \tilde{Q}^\alpha \Delta \delta \gamma_\alpha \right) dA.\end{aligned}\quad (4.115)$$

Die hierin verwendeten Verzerrungsgrößen sind in (C.6)-(C.9) aufgeführt. Die Bestimmung der inkrementellen Änderung der Spannungen $\Delta \hat{\mathbf{S}}$ gelingt mittels des tangentialen Werkstoffensors $\hat{\mathbf{C}}_T$ und der inkrementellen Änderungen der Verzerrungen $\Delta \hat{\mathbf{E}}$:

$$\Delta \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{C}}_T : \Delta \hat{\mathbf{E}}.\quad (4.116)$$

Damit geht die Gleichung (4.112) für die inkrementelle Änderung der Spannungsergebnisse in die nachstehende Form über:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{N}^{(\alpha\beta)} &= D_T^{0\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \alpha_{(\rho\lambda)} + D_T^{1\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \beta_{(\rho\lambda)} + D_T^{0\alpha\beta\rho 3} \Delta \gamma_{\rho 3}, \\ \Delta M^{(\alpha\beta)} &= D_T^{1\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \alpha_{(\rho\lambda)} + D_T^{2\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \beta_{(\rho\lambda)} + D_T^{1\alpha\beta\rho 3} \Delta \gamma_{\rho 3}, \\ \Delta \tilde{Q}^\alpha &= D_T^{0\alpha 3\rho\lambda} \Delta \alpha_{(\rho\lambda)} + D_T^{1\alpha 3\rho\lambda} \Delta \beta_{(\rho\lambda)} + D_T^{0\alpha 3\rho 3} \Delta \gamma_{\rho 3}.\end{aligned}\quad (4.117)$$

Dabei gilt der Zusammenhang (4.113) entsprechend. Zu beachten ist weiterhin, dass die zur Bestimmung der Spannungsergebnisse in Gleichung (4.104) benötigten Spannungskomponenten $S^{\alpha i}$ nur für linear-elastisches Materialverhalten direkt aus den Verzerrungen bestimmt werden können. Für inelastisches Materialverhalten ist eine Integration der

inkrementellen Werkstoffbeziehung längs des Verzerrungspfades erforderlich. Die Spannungskomponenten folgen dann aus einer Summierung der inkrementell bestimmten Spannungen.

Schließlich sei an dieser Stelle noch auf eine andere Art der Beschreibung der Linearisierung hingewiesen. In Arbeiten anderer Autoren, wie beispielsweise in Harte (1982), Zahlten (1990), Montag (1997) oder Brüggemann (2002), wird die Linearisierung durch eine Inkrementierung mit der Einführung unterschiedlicher Zustände (Ausgangszustand, Grundzustand und Nachbarzustand) erklärt.

4.2.6 Berücksichtigung von lastunabhängigen Einwirkungen

Die Beanspruchung aufgrund thermischer Einwirkungen wird bei der Berechnung von Flächentragwerken üblicherweise durch konstante und lineare Temperaturanteile über die Tragwerksdicke (ΔT_N bzw. ΔT_M) erfasst [Başar & Krätzig 1985; Zahlten 1990]. Eine derartige Einbindung ist konform zur verwendeten Schalentheorie vom REISSNER-MINDLIN-Typ, vgl. Gleichung (4.99). Die infolge der instationären Wärmeausbreitungsprozesse nichtlinearen Gradienten über die Tragwerksdicke und die damit verbundenen Eigenspannungen bleiben bei einer solchen Formulierung unberücksichtigt. Aufgrund des sich bei Wärmeeinwirkungen relativ schnell einstellenden stationären Zustandes wird eine derartige Vorgehensweise aber dennoch in vielen Fällen als ausreichende Näherung angesehen.

Aus den thermischen Einwirkungen resultieren lediglich dilatatorische Verzerrungsanteile, während deviatorische Anteile nicht auftreten. Somit ergeben sich in der tensoriellen Schalentheorie die thermischen Verzerrungen zu:

$$E_{(\alpha\beta)}^{th} = \alpha_{(\alpha\beta)}^{th} + \theta^3 \beta_{(\alpha\beta)}^{th}. \quad (4.118)$$

Dabei sind $\alpha_{(\alpha\beta)}^{th}$ bzw. $\beta_{(\alpha\beta)}^{th}$ die thermischen Dehnungen bzw. Verkrümmungen:

$$\alpha_{(\alpha\beta)}^{th} = \alpha_t \Delta T_N A_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \beta_{(\alpha\beta)}^{th} = \alpha_t \frac{\Delta T_M}{H} A_{\alpha\beta}. \quad (4.119)$$

In analoger Weise können die aus den Feuchteverteilungen resultierenden Schwind- bzw. Quelldehnungen in die schalentheoretische Formulierung eingebunden werden [Harte & Wörmann 2002]. Hierbei kann die relative Feuchtedifferenz Δh_N bzw. Δh_M als das verursachende Potential und der hygrische Ausdehnungskoeffizient α_{sh} als Proportionalitätsfaktor verwendet werden. Damit folgt aus (4.118) für den hygrischen Fall

$$E_{(\alpha\beta)}^{sh} = \alpha_{(\alpha\beta)}^{sh} + \theta^3 \beta_{(\alpha\beta)}^{sh} \quad (4.120)$$

und entsprechend

$$\alpha_{(\alpha\beta)}^{sh} = \alpha_{sh} \Delta h_N A_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \beta_{(\alpha\beta)}^{sh} = \alpha_{sh} \frac{\Delta h_M}{H} A_{\alpha\beta}. \quad (4.121)$$

Unter Einschluss thermischer und hygrischer Einwirkungen resultieren aus den konstitutiven Beziehungen (4.112) die modifizierten Komponenten des Pseudo-Normalkrafttensors

$\tilde{N}^{(\alpha\beta)}$ und des Biegemomententensors $M^{(\alpha\beta)}$ zu

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{(\alpha\beta)} &= \overset{0}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\alpha_{(\rho\lambda)} - \alpha_{(\rho\lambda)}^{th} - \alpha_{(\rho\lambda)}^{sh}) \\
&\quad + \overset{1}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\beta_{(\rho\lambda)} - \beta_{(\rho\lambda)}^{th} - \beta_{(\rho\lambda)}^{sh}) \\
&\quad + \overset{0}{D}^{\alpha\beta\rho 3} \gamma_{\rho 3}, \\
M^{(\alpha\beta)} &= \overset{1}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\alpha_{(\rho\lambda)} - \alpha_{(\rho\lambda)}^{th} - \alpha_{(\rho\lambda)}^{sh}) \\
&\quad + \overset{2}{D}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\beta_{(\rho\lambda)} - \beta_{(\rho\lambda)}^{th} - \beta_{(\rho\lambda)}^{sh}) \\
&\quad + \overset{1}{D}^{\alpha\beta\rho 3} \gamma_{\rho 3}.
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Für den Fall linear-elastischen Materialverhaltens ergeben sich aus (4.122) die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^{(\alpha\beta)} &= D \cdot [H^{\alpha\beta\rho\lambda} \alpha_{\rho\lambda} - (1 + \nu)(\alpha_{(\alpha\beta)}^t + \alpha_{(\alpha\beta)}^{sh})], \\
M^{(\alpha\beta)} &= B \cdot [H^{\alpha\beta\rho\lambda} \beta_{\rho\lambda} - (1 + \nu)(\beta_{(\alpha\beta)}^t + \beta_{(\alpha\beta)}^{sh})].
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Dabei ist D die Dehnsteifigkeit, B die Biegesteifigkeit und $H^{\alpha\beta\rho\lambda}$ der Elastizitätstensor [Başar & Krätzig 2000]. Letzterer enthält ausschließlich Informationen der Metrik und der Querdehnzahl:

$$H^{\alpha\beta\rho\lambda} = \frac{1 - \nu}{2} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + \frac{2\nu}{1 - \nu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} \right). \tag{4.124}$$

Da der Feuchtehaushalt im Vergleich zum Wärmehaushalt aber erst nach einem viel längeren Zeitraum einen stationären Zustand erreichen kann, wird die mit (4.120) eingeführte Näherung für die hygrische Beanspruchungssituation vom Verfasser als nicht zufriedenstellend eingestuft. Daher wird in dieser Arbeit eine Formulierung vorgestellt, mit der auch nichtlineare Anteile der hygrisch und thermisch induzierten Dehnungen sowie die daraus entstehenden Eigenspannungen innerhalb eines finiten Schalenelementes erfasst werden können.

Kapitel 5

Finite-Element-Modellierung

In diesem Kapitel erfolgt die Beschreibung der numerischen Umsetzung der in den vorangegangenen Kapiteln angegebenen Modellvorstellungen in das eingesetzte Finite-Element-Programmsystem. Zunächst wird auf das verwendete Schalenelement mit seinen wesentlichen Merkmalen eingegangen. Danach wird die numerische Umsetzung des gekoppelten hygrothermischen Modells beschrieben. Die Einbindung der daraus resultierenden instationären Verzerrungsanteile in eine zeitabhängige Multi-Level-Iterations-Strategie zur Berechnung von Verformungspfaden wird im Anschluss erläutert. Die gewählte Vorgehensweise bei der Durchführung von Strukturanalysen für Stahlbetonflächentragwerke wird dargestellt und mit den normativen Vorgaben verglichen. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden zur integralen Beurteilung struktureller Schädigungen von Tragwerken auf der Makroebene definierte Schädigungsindikatoren behandelt.

5.1 Grundlagen

Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen können Diskretisierungsmethoden eingesetzt werden. Die wohl am häufigsten verwendete Diskretisierungsmethode im Bereich der Ingenieurwissenschaften stellt die Methode der finiten Elemente dar. Hierbei erfolgt eine Unterteilung des zu untersuchenden Kontinuums in endliche, sich nicht überlappende Bereiche, so genannte finite Elemente:

$$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}_e^h \quad \text{mit} \quad \mathcal{B}_i^h \cap \mathcal{B}_j^h = \emptyset. \quad (5.1)$$

Der Index $(\dots)^h$ kennzeichnet die Näherungslösung der Finite-Element-Methode, n_e die Anzahl der Elemente. Innerhalb der Elemente werden auf der Basis diskreter Freiwerte an den Elementknoten Formfunktionen in Polynomform definiert, durch die die unabhängigen Felder des Variationsproblems approximiert werden. Für einen umfassenden Überblick

über die Finite-Element-Methode wird auf die Bücher von Bathe (1996), Hughes (2000) und Zienkiewicz & Taylor (2000) verwiesen.

5.2 Schalenelementformulierung

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Merkmale des Schalenelementes geschildert. Dazu zählen die Anwendung des isoparametrischen Konzeptes, der Assumed Natural Strain Methode und einer internen Mehrschichtenkinematik.

5.2.1 Isoparametrisches Konzept

Bei der verwendeten isoparametrischen Elementformulierung wird zusätzlich zur approximativen Beschreibung der Momentankonfiguration die exakte Abbildungsvorschrift der Referenzkonfiguration durch eine Approximative ersetzt. Anstelle der konvektiven Koordinaten θ_α werden die normierten Koordinaten ξ_α zur Geometriebeschreibung der Schale benutzt. Mit den normierten Koordinaten, für die das Symbol eines Einheitsquadrats

$$\square := (\xi^1, \xi^2) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (5.2)$$

eingeführt wird, werden die bilinearen Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} N_1(\xi^\alpha) &= (1 - \xi^1)(1 - \xi^2), & N_3(\xi^\alpha) &= \xi^1 \xi^2, \\ N_2(\xi^\alpha) &= \xi^1(1 - \xi^2), & N_4(\xi^\alpha) &= (1 - \xi^1)\xi^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

gebildet, die aus der Produktbildung eindimensionaler Ansatzfunktionen resultieren und die folgende Eigenschaft besitzen:

$$N_k(\xi^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{im Knoten } k, \\ 0 & \text{für alle Knoten } k \neq l. \end{cases} \quad (5.4)$$

Die Formfunktionen unterliegen bei verschiebungsformulierten finiten Elementen gewissen weiteren Restriktionen, die für das isoparametrische Elementkonzept vollständig erfüllt werden [Krätzig & Bařar 1997]. Charakteristisch für die isoparametrische Elementformulierung ist die Interpolation der Geometrie und der Verformung durch die gleichen Ansatzfunktionen N_k . Mit diesen kann der Ortsvektor der Schalenmittelfläche in beiden Konfigurationen $\mathbf{X}_e^{(0)}(\theta^\alpha)$ bzw. $\mathbf{x}_e^{(0)}(\theta^\alpha)$ von den Elementknoten $\mathbf{X}_e^{(0)k}$ bzw. $\mathbf{x}_e^{(0)k}$ in das Gebiet approximiert werden:

$$\mathbf{X}_e^{(0)h}(\xi^\alpha) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi^\alpha) \mathbf{X}_e^{(0)k} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_e^{(0)h}(\xi^\alpha) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi^\alpha) \mathbf{x}_e^{(0)k}. \quad (5.5)$$

Bei der Rotationsbeschreibung werden nicht die Komponenten des Direktors, sondern die EULER-Winkel selbst mittels der Formfunktionen interpoliert [Bařar 1987]:

$$\Psi_{\alpha e}^h(\xi^\alpha) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi^\alpha) \Psi_{\alpha e}^k \quad \text{bzw.} \quad \psi_{\alpha e}^h(\xi^\alpha) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi^\alpha) \psi_{\alpha e}^k. \quad (5.6)$$

Damit erfüllen die Komponenten des Direktors

$$\mathbf{D}_e^h(\xi^\alpha) = \begin{bmatrix} \sin \Psi_{1e}^h \cos \Psi_{2e}^h \\ \sin \Psi_{1e}^h \sin \Psi_{2e}^h \\ \cos \Psi_{1e}^h \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{d}_e^h(\xi^\alpha) = \begin{bmatrix} \sin \psi_{1e}^h \cos \psi_{2e}^h \\ \sin \psi_{1e}^h \sin \psi_{2e}^h \\ \cos \psi_{1e}^h \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

im gesamten Element die Bedingung (4.79). Für den Element-Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_e(\theta^\alpha)$ folgt aus (4.94) die approximative Beziehung

$$\mathbf{u}_e^h(\xi^\alpha) = \left(\mathbf{x}_e^{(0)h}(\xi^\alpha) - \mathbf{X}_e^{(0)h}(\xi^\alpha) \right) + \theta^3 \left(\mathbf{d}_e^h(\xi^\alpha) - \mathbf{D}_e^h(\xi^\alpha) \right) \quad (5.8)$$

in Abhängigkeit von den Elementgrößen, die sich mit (5.5)-(5.7) durch die Knotengrößen ausdrücken lassen. Weiterhin werden auch die Interpolationen der Variationen und Inkremente der Geometrie- und Verschiebungsgrößen benötigt. Nur exemplarisch werden hier die Variation und das Inkrement des Ortsvektors der Schalenmittelfläche $\mathbf{x}_e^{(0)k}$ angegeben:

$$\delta \mathbf{x}_e^{(0)h}(\xi^\alpha) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi^\alpha) \delta \mathbf{x}_e^{(0)k} \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{x}_e^{(0)h}(\xi^\alpha) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi^\alpha) \Delta \mathbf{x}_e^{(0)k}. \quad (5.9)$$

Die übrigen benötigten Größen ergeben sich entsprechend.

Mit dem Ziel, die diskretisierte Form von Gleichung (4.115) zu erhalten, müssen zunächst die Variationen und Inkremente der zuvor diskretisierten Größen in die kinematischen Beziehungen im Anhang C eingesetzt werden. Das Auflösen der resultierenden Gleichungen nach den unbekanntenen Knotenvariablen erlaubt die folgenden Darstellungen für den Zusammenhang zwischen den variierten und inkrementierten Verzerrungen und für die Knotenverschiebungen:

$$\delta \mathbf{E}_e^h = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e^k, \quad (5.10)$$

$$\Delta \mathbf{E}_e^h = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_e^k, \quad (5.11)$$

$$\Delta \delta \mathbf{E}_e^h = (\Delta \mathbf{u}_e^h)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e^k. \quad (5.12)$$

Dabei ist \mathbf{B} die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix und \mathbf{G} deren 1. Variation. Auf die explizite Angabe der beiden Matrizen wird hier verzichtet. Lediglich der Vektor mit den Inkrementen der Knotenvariablen wird an dieser Stelle aufgeführt:

$$\Delta \mathbf{u}_e^k = \left(\Delta \mathbf{x}_1^{(0)i} \quad \Delta \psi_{\alpha 1} \quad \Delta \mathbf{x}_2^{(0)i} \quad \Delta \psi_{\alpha 2} \quad \Delta \mathbf{x}_3^{(0)i} \quad \Delta \psi_{\alpha 3} \quad \Delta \mathbf{x}_4^{(0)i} \quad \Delta \psi_{\alpha 4} \right)^T. \quad (5.13)$$

Werden jetzt die diskretisierten Verzerrungen in die inkrementellen Änderungen der Spannungsresultierenden (4.116) bzw. (4.117) eingesetzt und die daraus folgende diskretisierte Form und die diskretisierten Verzerrungen in Gleichung (4.115) eingefügt, so erhält man schließlich den inneren Anteil der diskretisierten linearisierten Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen für ein Element e , wobei der Übersicht halber auf die Indizierung

mit $(\dots)^h$ und $(\dots)_e$ verzichtet wird:

$$\begin{aligned} L\delta^*W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) &= \int_{\square} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{S}} \delta\mathbf{u}^k \sqrt{A} \, d\square \\ &+ \int_{\square} (\Delta\mathbf{u}^k)^T \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} \delta\mathbf{u}^k \sqrt{A} \, d\square \\ &+ \int_{\square} (\Delta\mathbf{u}^k)^T \mathbf{G} \hat{\mathbf{S}} \delta\mathbf{u}^k \sqrt{A} \, d\square. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Da (5.14) für beliebige virtuelle Knotenverschiebungen $\delta\mathbf{u}^k$ erfüllt sein muss, entsteht daraus die bekannte tangentielle Elementsteifigkeitsbeziehung

$$\mathbf{k}_T \cdot \Delta\mathbf{u}_e^k = \lambda \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}. \quad (5.15)$$

Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_T setzt sich additiv aus der Verformungsmatrix \mathbf{k}_U und der Anfangsverformungsmatrix \mathbf{k}_G zusammen:

$$\mathbf{k}_U = \int_{\square} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} \sqrt{A} \, d\square \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_G = \int_{\square} \mathbf{G} \hat{\mathbf{S}} \sqrt{A} \, d\square. \quad (5.16)$$

Mit \mathbf{f}_{int} wird der so genannte Vektor der inneren Kräfte eingeführt:

$$\mathbf{f}_{int} = \int_{\square} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{S}} \sqrt{A} \, d\square. \quad (5.17)$$

Ferner stellt der Vorfaktor λ den inkrementell zu steigernden Lastfaktor in (5.15) und \mathbf{f}_{ext} den Vektor der äußeren Knotenlasten dar, der aus der Diskretisierung von (4.114) hervorgeht.

Die auftretenden Gebietsintegrale werden numerisch mit dem GAUSS'schen Quadraturverfahren gelöst, das bei p Stützstellen ein Polynom bis zur Ordnung $(2p - 1)$ exakt integriert. Anstelle der Integration wird die Funktion an bestimmten Stützstellen ausgewertet und mit entsprechenden Wichtungsfaktoren α_i multipliziert. Über die Lage der hier vorliegenden 2x2 Stützstellen (Integrationspunkte) im Element bzw. die Größe der Wichtungsfaktoren wird beispielsweise auf Krätzig & Bařar (1997) verwiesen.

Nachdem die Beziehungen auf Elementebene vorliegen, kann unter Beachtung der Randbedingungen und durch die Assemblierung der Elementbeiträge

$$\mathbf{K}_T = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}_{T,e}, \quad \mathbf{F}_{ext} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{ext,e}, \quad \mathbf{F}_{int} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{int,e} \quad (5.18)$$

die Gesamtsteifigkeitsbeziehung

$$\mathbf{K}_T \cdot \Delta\mathbf{u}^k = \lambda \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} \quad (5.19)$$

angegeben werden, die mittels inkrementell-iterativer Verfahren gelöst wird.

5.2.2 Assumed-Natural-Strain Konzept

Bei verschiebungsbasierten finiten Elementen mit niedrigen Ansatzfunktionen kann ein zu steifes Elementverhalten aufgrund von Approximationsdefiziten auftreten. Für diesen Effekt wird im Allgemeinen der Begriff Locking verwendet. Das Shear-Locking ist charakterisiert durch eine irrtümliche Überschätzung der Schubenergie. Zur Vermeidung dieses Phänomens wird hier die Assumed-Natural-Strain Methode eingesetzt, die auf einen Vorschlag von Dvorkin & Bathe (1984) zurückgeht. Hierbei erfolgt die Auswertung der konstanten Schubverzerrungsanteile γ_α in den Kollokationspunkten, die bei einem 4-knotigen Element in den Mittelpunkten der Elementkanten liegen (Bild 5.1).

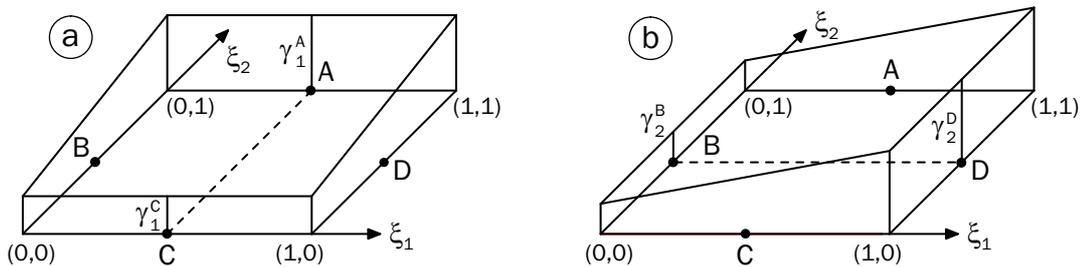


Bild 5.1: Verlauf der Ansatzfunktion der Schubverzerrungen für die Assumed-Natural-Strain Methode: (a) γ_1 , (b) γ_2 .

In den mit den Buchstaben A–D gekennzeichneten Punkten werden gerade keine Energieanteile berechnet, die zu einer Versteifung führen. Die Schubverzerrungen des Elementes können dann durch eine lineare bzw. konstante Interpolation in der Wirkungsrichtung der jeweiligen Schubverzerrung bzw. senkrecht dazu bestimmt werden:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^2 \gamma_1^A + (1 - \xi^2) \gamma_1^C \\ \xi^1 \gamma_2^D + (1 - \xi^1) \gamma_2^B \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Weitere Locking-Effekte, wie das Membran-, Dicken-, Volumen- oder Krümmungs-Locking, werden beispielsweise in den Arbeiten von Bischoff (1999), Eckstein (1999) und Jun (2002) beschrieben und mögliche Gegenmaßnahmen aufgezeigt.

5.2.3 Multi-layered Konzept

Zur wirklichkeitsnahen Untersuchung von Stahlbetonstrukturen ist die Berücksichtigung des physikalisch nichtlinearen Verhaltens unerlässlich. Die Realisierung im Rahmen einer Schalentheorie kann auf der Ebene der Schnittgrößen oder des Materialpunktes erfolgen. Für den erstgenannten Fall ist die direkte Formulierung der Materialgesetze in den resultierenden Größen der Schale erforderlich [Simo & Kennedy 1992]. Eine detaillierte Beurteilung der Spannungssituation in Schalendickenrichtung oder der Rissbildung ist jedoch hiermit nicht möglich.

Durch eine zusätzliche Diskretisierung in Dickenrichtung kann das Werkstoffverhalten auf der Materialpunktebene in die Berechnung einfließen. Dabei wird die Schale an einem Integrationspunkt gedanklich in eine endliche Anzahl von Schichten („Layer“) unterteilt. Die Komponenten Beton und Bewehrungsstahl werden, wie in Bild 5.2 dargestellt, durch separate Schichten erfasst. Bei den Stahlschichten handelt es sich um unidirektionale Schichten, mit denen der Bewehrungsquerschnitt der Einzelstäbe gleichmäßig über die Fläche verteilt wird. Aus der Addition der einzelnen Schichtgrößen resultieren die Querschnittsgrößen. Die Integration des Werkstoffensors (4.113) wird folglich durch eine Summation ersetzt:

$$D_T^{ijkl} = \sum_{n=1}^{n_{lay}} C_{T,n}^{ijkl} (\theta^3)^m \Delta\theta^3, \quad m = 0, 1, 2. \quad (5.21)$$

Die mit den Begriffen multi-layered Konzept [Noh 2002] oder interne Mehrschichtenkinematik [Jun 2002] verknüpfte Vorgehensweise ist bereits in mehreren Arbeiten erfolgreich eingesetzt worden [Zahlten 1990; Montag 1997; Pölling 2000; Noh 2002] und wird auch hier verwendet. Die Einbindung der Dickendiskretisierung in ein ganzheitliches Simulationskonzept wird in Abschnitt 5.4.3 veranschaulicht.

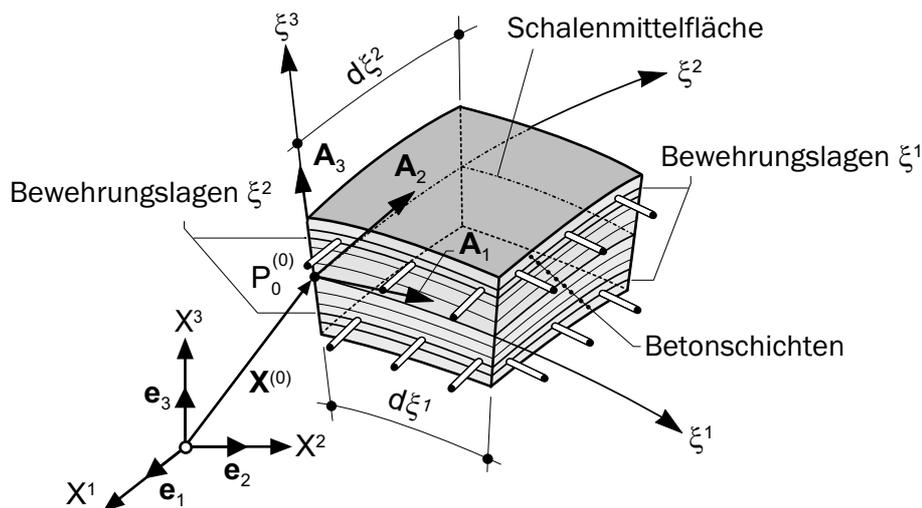


Bild 5.2: Dickendiskretisierung mit Beton- und Stahlschichten beim Schalenelement ASE4.

Die Unterteilung der Schale in mehrere Subelemente stellt eine weitere Möglichkeit dar, das nichtlineare Materialverhalten auf der Ebene des Materialpunktes einzubinden. Bei der externen Mehrschichtenkinematik [Jun 2002] wird die Kinematik dahingehend modifiziert, dass die Anwendung des Verschiebungsansatzes schichtenweise erfolgt. Für jede weitere Schicht werden daher zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt. Diese Vorgehensweise, die z.B. in den Arbeiten von Başar, Ding & Schultz (1993), Schultz (1996) oder Eckstein (1999) verwendet wird, ist vor allem dann vorteilhaft, wenn Materialien mit einem großen Verzerrungsvermögen untersucht werden sollen. Bei Beton können hiermit jedoch keine wesentlichen Verbesserungen der Ergebnisse erzielt werden.

In komprimierter Form werden die wesentlichen Eigenschaften des Schalenelementes in Bild 5.3 dargestellt.

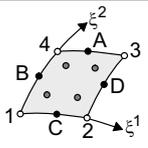
	Isoparametrisches, mittelflächenorientiertes "Assumed-Strain" Element finiter Rotationen
	ASE4
theoretische Grundlage	REISSNER-MINDLIN-Theorie $\mathbf{x}(\theta^i) = \mathbf{x}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{d}(\theta^\alpha)$
Freiheitsgrade	$\Delta \mathbf{x}^{(0)i}$, $\Delta \psi_\alpha$ (4 x 5)
Rotation	rotationsvariablenbehaftete Direktordefinition mit EULER-Winkel und Inextensibilitätsbedingung $\ \mathbf{d}\ =1$
Formfunktion	bilineare Polynome
Integrationspunkte	2 x 2
Interpolation von γ_α	Assumed-Natural-Strain Methode $\gamma_1 = \xi^2 \gamma_1^A + (1 - \xi^2) \gamma_1^C$ $\gamma_2 = \xi^1 \gamma_2^D + (1 - \xi^1) \gamma_2^B$
Dicken-diskretisierung	multi-layered Konzept

Bild 5.3: Finite Elementformulierung des schubweichen Schalenelementes ASE4.

5.3 Numerische Umsetzung des hygrothermischen Modells

Die Modellgleichungen der hygri-schen und thermischen Transport- und Speicherphänomene in porösen Medien sind in Abschnitt 3.2 bereitgestellt worden. Sie bilden ein gekoppeltes, nichtlineares, partielles Differentialgleichungssystem. Durch das gleichzeitige Auftreten der räumlichen Koordinate \mathbf{X} und der zeitlichen Koordinate t wird angezeigt, dass es sich dabei um ein Anfangsrandwertproblem handelt. Eine analytische Lösung ist aufgrund der inhärenten Nichtlinearität der Koeffizienten und der Randbedingungen nur unter stark vereinfachenden Annahmen möglich. Für die erforderliche numerische Umsetzung sind unterschiedliche Vorgehensweisen möglich:

- Bei der vertikalen Linienmethode, kurz Linienmethode, werden die Differentialgleichungen zuerst durch eine Semidiskretisierung bezüglich der Ortsvariablen in ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt. Durch eine anschließende Zeitintegration kann das entstandene Anfangswertproblem (AWP) gelöst werden.
- Bei der horizontalen Linienmethode, auch ROTHE-Methode genannt, erhält man durch die zuerst durchgeführte zeitliche Diskretisierung eine Folge von elliptischen Randwertproblemen (RWP).
- Bei der simultanen Diskretisierung in Raum und Zeit werden die Zustandsgrößen durch einen Produktansatz aus Funktionen der räumlichen und zeitlichen Koordinaten approximiert. Dabei erfolgt die zeitliche Diskretisierung alternativ mit kontinuierlichen oder diskontinuierlichen Ansätzen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Raum-Zeit-Element mit zeitlich kontinuierlichen Verläufen eingesetzt.

Nach einer Zusammenstellung der zu untersuchenden Modellgleichungen wird das Differentialgleichungssystem in die schwache Form überführt (Abschnitte 5.3.1-5.3.2). Im folgenden Abschnitt wird es durch eine konsistente Linearisierung in die linearisierte schwache Form gebracht. In Abschnitt 5.3.4 erfolgen die räumliche und zeitliche Diskretisierung, die Spezifikation der zuvor eingeführten Wichtungsfunktionen und die Angabe des resultierenden algebraischen Gleichungssystems. Die Abschnitte 5.3.5-5.3.7 behandeln die neu eingebundenen Gleichungslöser, die in diesem Fall realisierte Konvergenzsicherung und die Möglichkeit der adaptiven Schrittweitensteuerung. Abschließend erfolgt die Erläuterung der Implementierung in das verwendete FE-Programmsystem (Abschnitt 5.3.8).

5.3.1 Das Anfangsrandwertproblem

Für eine übersichtliche Darstellung der numerischen Umsetzung wird für das Differentialgleichungssystem und die zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen an dieser Stelle eine kompakte Schreibweise eingeführt. Als unabhängige Zustandsgrößen treten die Temperatur ϑ und die relative Feuchte h auf, die im Folgenden durch die Variable z_α beschrieben werden ($z_t \equiv \vartheta$, $z_h \equiv h$). Weiterhin werden die Indizes α , β und γ verwendet, die für die Buchstaben t und h stehen. Die Differentialgleichungen (3.57) und (3.58) werden hier in der Form

$$B_\alpha = b_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{l}_\alpha \quad \text{in} \quad \Omega \times [t_0, T] \quad (5.22)$$

mit

$$b_\alpha = \sum_\beta c_\alpha^\beta \dot{z}_\beta - Q_\alpha \quad \text{und} \quad \mathbf{l}_\alpha = \sum_\beta \lambda_\alpha^\beta \operatorname{grad} z_\beta \quad (5.23)$$

angegeben. Zur Beschreibung des hygrothermischen Zustands eines Körpers werden neben den Differentialgleichungen Rand- und Anfangsbedingungen benötigt. Die zu Beginn des Betrachtungszeitraums $t = t_0$ an jedem Ort \mathbf{X} herrschenden Verhältnisse werden mittels der Anfangsbedingungen

$$A_\alpha = z_{\alpha 0} - z_\alpha = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times [t_0] \quad (5.24)$$

berücksichtigt. Die Ankopplung des Körpers an seine Umgebung gelingt mit der Vorgabe von Randbedingungen. Für die Zustandsgrößen werden die DIRICHLET-Randbedingungen

$$R_\alpha^z = \bar{z}_\alpha - z_\alpha = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_\alpha \times [t_0, T] \quad (5.25)$$

benutzt. Die NEUMANN- und NEUMANN/ROBIN-Randbedingungen werden mit

$$R_\alpha^q = \mathbf{l}_\alpha \cdot \mathbf{n} - v_\alpha = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_{q_\alpha} \times [t_0, T] \quad (5.26)$$

erfasst, wobei

$$v_\alpha = q_{n\alpha} + \alpha_{\ddot{u}}^\alpha (z_{\alpha, en} - z_\alpha) + \underline{\sigma \varepsilon (\vartheta_{en}^4 - \vartheta^4)} \quad (5.27)$$

ist. Die Strahlungsrandbedingungen gelten nur für den Temperaturhaushalt. Sie nehmen damit bei der Beschreibung der Umsetzung eine Sonderstellung ein, da die beiden Haushalte ansonsten den gleichen formalen Aufbau aufweisen. Die zugehörigen Terme werden, wie dies bereits in (5.27) geschehen ist, im Folgenden durch eine Unterstreichung hervorgehoben. Für die Randbedingungen, die in Bild 5.4 dargestellt sind, muss die Vereinigung der Teilmenge den Gesamtrand Γ ergeben:

$$\Gamma = \Gamma_\alpha \cup \Gamma_{q_\alpha} \quad \text{und} \quad \Gamma_\alpha \cap \Gamma_{q_\alpha} = \emptyset. \quad (5.28)$$

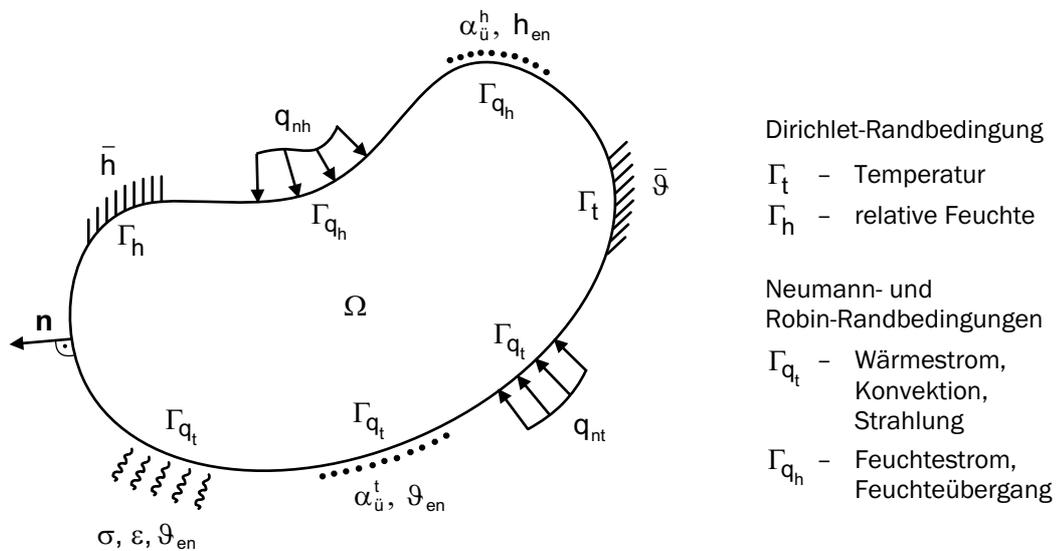


Bild 5.4: Randbedingungen des Anfangsrandwertproblems thermischer und hygrischer Prozesse.

5.3.2 Übergang zur schwachen Formulierung

Für die Finite-Element-Formulierung des Anfangsrandwertproblems ist der Übergang von der differentiellen zu einer äquivalenten integralen Formulierung erforderlich. In der Strukturmechanik erfolgt die Herleitung der integralen Darstellung im Allgemeinen durch die Formulierung eines Variationsproblems, vgl. Abschnitt 4.1.5. Eine alternative Möglichkeit zur Erlangung einer Integralaussage ist die Anwendung der Methode der gewichteten Residuen.

Aus der Approximation einer Differentialgleichung vom Typ $G(\mathbf{z}) = 0$ resultiert eine Differenz zwischen der Näherungslösung¹ \mathbf{z}^h und der exakten Lösung \mathbf{z} , das so genannte Residuum $R = G(\mathbf{z}^h)$. Durch die Multiplikation des Residuums mit einer noch zu wählenden Wichtungsfunktion Ψ wird erreicht, dass der gewichtete Mittelwert des Residuums

¹Der Index h wird hier für die Näherungslösung verwendet und steht nicht stellvertretend für die relative Feuchte h.

verschwindet. Aus der Anwendung der Methode der gewichteten Residuen auf die Differentialgleichung und die nicht wesentlichen Randbedingungen folgt

$$\int_{\Omega} \Psi_{\alpha} B_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma_{q\alpha}} \Psi_{\alpha} R_{\alpha}^q d\Gamma_{q\alpha} = 0 \quad (5.29)$$

oder unter Berücksichtigung von (5.22) und (5.27)

$$\int_{\Omega} \Psi_{\alpha} (b_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{l}_{\alpha}) d\Omega + \int_{\Gamma_{q\alpha}} \Psi_{\alpha} (\mathbf{l}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} - v_{\alpha}) d\Gamma_{q\alpha} = 0. \quad (5.30)$$

Die wesentlichen Randbedingungen sind in (5.29) vernachlässigt worden. Dies ist möglich, wenn an die Wichtungsfunktionen Ψ_{α} die Forderung gestellt wird, dass sie auf Γ_{α} verschwinden:

$$\Psi_{\alpha} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{\alpha} \times [t_0, T]. \quad (5.31)$$

Damit müssen die Ansätze die DIRICHLET'schen Randbedingungen exakt erfüllen. Das Gebietsintegral in (5.30) kann mit dem Divergenztheorem für den Vektor \mathbf{l}_{α}

$$\operatorname{div} [\Psi_{\alpha} \mathbf{l}_{\alpha}] = \Psi_{\alpha} \operatorname{div} \mathbf{l}_{\alpha} + [\operatorname{grad} \Psi_{\alpha}] \cdot \mathbf{l}_{\alpha} \quad (5.32)$$

und dem GAUSS'schen Integralsatz

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} [\Psi_{\alpha} \mathbf{l}_{\alpha}] d\Omega = \int_{\Gamma} \Psi_{\alpha} \mathbf{l}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.33)$$

zu

$$\int_{\Omega} (\Psi_{\alpha} b_{\alpha} + \operatorname{grad} \Psi_{\alpha} \cdot \mathbf{l}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\Gamma} \Psi_{\alpha} \mathbf{l}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.34)$$

umgeformt werden. Man erhält die gesuchte schwache Formulierung des Anfangsrandwertproblems, indem man (5.34) in (5.30) einsetzt und (5.31) beachtet. Damit verbleiben im Randintegral lediglich die in v_{α} zusammengefassten Anteile. Die schwache Formulierung lautet:

$$\int_{\Omega} (\Psi_{\alpha} b_{\alpha} + \operatorname{grad} \Psi_{\alpha} \cdot \mathbf{l}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\Gamma_{q\alpha}} \Psi_{\alpha} v_{\alpha} d\Gamma_{q\alpha} = 0. \quad (5.35)$$

Diese äquivalente Integralform ist durch eine um Eins reduzierte Ordnung des Differentialoperators gekennzeichnet, die aus der Übertragung einer Ableitungsordnung auf die Wichtungsfunktion resultiert. Damit wird die Forderung der Differenzierbarkeit der Ansatzfunktionen für z_{α} abgemindert. Mit (5.23) und (5.27) resultiert aus (5.35):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Psi_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha}^{\beta} \dot{z}_{\beta} d\Omega - \int_{\Omega} \Psi_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \Psi_{\alpha} \cdot \sum_{\beta} \boldsymbol{\lambda}_{\alpha}^{\beta} \operatorname{grad} z_{\beta} d\Omega - \int_{\Gamma_{q\alpha}} \Psi_{\alpha} q_{n\alpha} d\Gamma_{q\alpha} \\ & - \int_{\Gamma_{q\alpha}} \Psi_{\alpha} \alpha_{ii}^{\alpha} (z_{\alpha, en} - z_{\alpha}) d\Gamma_{q\alpha} - \int_{\Gamma_{qt}} \Psi_{\alpha} \sigma \varepsilon (\vartheta_{en}^4 - \vartheta^4) d\Gamma_{qt} = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.3.3 Konsistente Linearisierung

Aufgrund der auftretenden Nichtlinearitäten ist die schwache Form (5.36) konsistent zu linearisieren. Die Linearisierung der strukturmechanischen Problemstellung ist bereits in den Abschnitten 4.1.5 und 4.2.5 erläutert worden. Sie führt auf eine Gleichung der Form

$$DG(\hat{z}_\alpha) \cdot \Delta z_\alpha = -G(\hat{z}_\alpha). \quad (5.37)$$

Für die linke Seite von (5.37) erhält man durch die Linearisierung den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Psi_\alpha \left(\sum_{\beta} \left(\sum_{\gamma} \frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial z_\gamma} \dot{z}_\beta \Delta z_\gamma + \left(c_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta z_\beta \right) \right) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \Psi_\alpha \sum_{\beta} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial z_\beta} \Delta z_\beta d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \text{grad} \Psi_\alpha \cdot \left(\sum_{\beta} \left(\sum_{\gamma} \frac{\partial \lambda_\alpha^\beta}{\partial z_\gamma} \text{grad} z_\beta \Delta z_\gamma + (\lambda_\alpha^\beta \text{grad}) \Delta z_\beta \right) \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{q_\alpha}} \Psi_\alpha \sum_{\beta} \frac{\partial q_{n\alpha}}{\partial z_\beta} \Delta z_\beta d\Gamma_{q_\alpha} \\ & - \int_{\Gamma_{q_\alpha}} \Psi_\alpha \left(\sum_{\beta} \left(\frac{\partial \alpha_{ii}^\alpha}{\partial z_\beta} (z_{\alpha, en} - z_\alpha) \Delta z_\beta + \alpha_{ii}^\alpha \frac{\partial z_{\alpha, en}}{\partial z_\beta} \Delta z_\beta \right) - \alpha_{ii}^\alpha \Delta z_\alpha \right) d\Gamma_{q_\alpha} \\ & - \int_{\Gamma_{q_t}} \Psi_t \left(\sum_{\beta} \left(\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial z_\beta} (\vartheta_{en}^4 - \vartheta^4) \Delta z_\beta + 4 \sigma \varepsilon \vartheta_{en}^3 \frac{\partial \vartheta_{en}}{\partial z_\beta} \Delta z_\beta \right) + 4 \sigma \varepsilon \vartheta^3 \Delta \vartheta \right) d\Gamma_{q_t}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Auf der rechten Seite von (5.37) kann (5.36) eingesetzt werden. Die nun enthaltene linearisierte schwache Form des Anfangsrandwertproblems dient als Ausgangspunkt für die im Folgenden beschriebene Diskretisierung des Problems.

5.3.4 Raum-Zeit-Diskretisierung

Zur Lösung parabolischer Anfangs-Randwert-Probleme beruhen die meisten FE-Methoden auf einer räumlichen Semidiskretisierung mit anschließender Zeitdiskretisierung durch Differenzenquotienten. Bei der simultanen Raum-Zeit-Diskretisierung wird auch für den Zeitbereich ein FE-Ansatz verwendet. Dabei unterscheiden sich die vorhandenen Verfahren dadurch, ob die Ansätze in der Zeit kontinuierlich oder diskontinuierlich sind.

Die diskontinuierlichen Ansätze, man spricht in diesem Zusammenhang auch von Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahren, sind dadurch gekennzeichnet, dass sie Unstetigkeiten an den Elementgrenzen zulassen. Eine dementsprechende Diskretisierung kann mittels eines Produktansatzes der Form

$$z_\alpha(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{X}) \mathbf{M}_\alpha(t) \mathbf{z}_{\alpha, e} \quad (5.39)$$

beschrieben werden. Dabei sind $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{X})$ die räumlichen Ansatzfunktionen und $\mathbf{M}_\alpha(t)$ die zeitlichen Ansatzfunktionen im Element. Der Elementvektor $\mathbf{z}_{\alpha, e}$ in (5.39) beinhaltet

die Feldvariablen für zwei aufeinander folgende Zeitknoten (Bild 5.5). Nachteil der diskontinuierlichen Zeitdiskretisierung sind die erhöhte Anzahl an Unbekannten, die daraus resultierenden größeren Gleichungssysteme und der damit erhöhte Rechenaufwand.

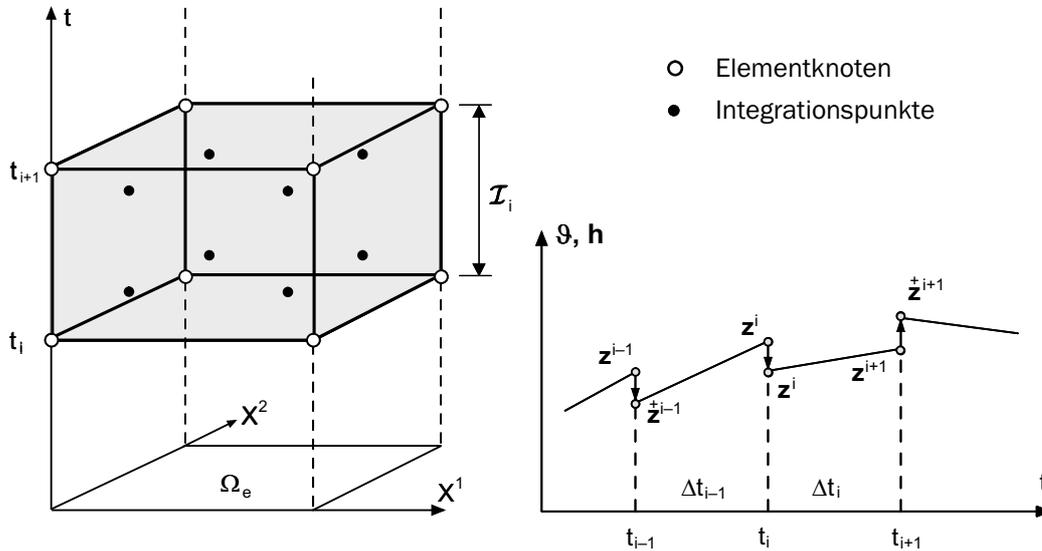


Bild 5.5: Raum-Zeit-Diskretisierung mit diskontinuierlichen, linearen Zeitansätzen.

Deshalb wird in dieser Arbeit ein zeitkontinuierlicher Ansatz eingesetzt. Dabei werden in der Zeit lineare Ansatzfunktionen eingeführt und die zeitliche Integration in Form einer Punktkollokation an der Stelle τ ausgeführt (Bild 5.6).

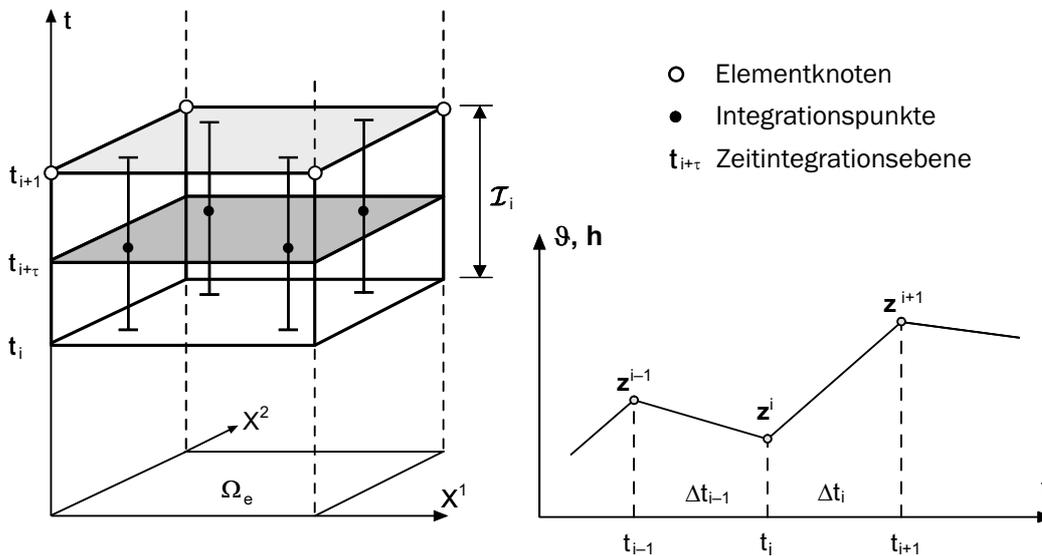


Bild 5.6: Raum-Zeit-Diskretisierung mit kontinuierlichen, linearen Zeitansätzen unter Verwendung einer punktkollokativen Zeitintegration.

Der verwendete Produktansatz lautet somit:

$$z_\alpha(\mathbf{X}, t) = N_\alpha(\mathbf{X}) z_{\alpha,e}(t). \tag{5.40}$$

Im Vektor $\mathbf{z}_{\alpha,e}(t)$ sind in dieser Darstellung die Feldvariablen an den räumlichen Elementknoten zu einem diskreten Zeitpunkt zusammengefasst. Die numerische Lösung im Raum-Zeit-Gebiet erfolgt durch sukzessive Auswertung der diskreten Zeitpunkte. Im Folgenden werden die Raum- und Zeitkoordinate zuerst getrennt voneinander betrachtet und danach entsprechend (5.40) zusammengeführt.

Zeitliche Diskretisierung. Für die Zeitintegration eines Differentialgleichungssystem 1. Ordnung wird der zu berechnende Zeitbereich $\mathcal{I} = [t_0, T]$ in eine Anzahl von Teilintervallen $\mathcal{I}_i = [t_i, t_{i+1}]$ unterteilt. Der Abstand der diskreten Zeitpunkte

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T \quad (5.41)$$

wird mit den Zeitinkrementen

$$\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i \quad (5.42)$$

beschrieben, die dabei nicht notwendig konstant sind. Numerische Methoden zur Bestimmung der Zustandsgrößenänderung im Zeitinkrement können der Literatur entnommen werden. Dabei kann zwischen Ein- oder Mehrschrittverfahren und expliziten oder impliziten Verfahren unterschieden werden. Während bei Einschrittverfahren die Lösung zum Zeitpunkt t_{i+1} allein aus dem zuletzt ermittelten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt t_i ermittelt wird, werden bei Mehrschrittverfahren in der Zeit weiter zurückliegende Lösungen zusätzlich verwendet. Als explizit bezeichnet man eine Zeitdiskretisierung bei der die Werte der Variablen zum neuen Zeitpunkt t_{i+1} nur von den Werten zum alten Zeitpunkt t_i abhängen. Demgegenüber benötigen implizite Verfahren auch Werte im Zeitinkrement Δt_{i+1} selbst. Eine beliebige Kombination der Verfahren ist möglich:

$$\begin{aligned} \text{Explizite Einschrittverfahren} &\Rightarrow \phi(t_{i+1}) = f(\phi(t_i)), \\ \text{Implizite Einschrittverfahren} &\Rightarrow \phi(t_{i+1}) = f(\phi(t_{i+1}), \phi(t_i)), \\ \text{Explizite Mehrschrittverfahren} &\Rightarrow \phi(t_{i+1}) = f(\phi(t_i), \phi(t_{i-1}), \phi(t_{i-2}), \dots), \\ \text{Implizite Mehrschrittverfahren} &\Rightarrow \phi(t_{i+1}) = f(\phi(t_{i+1}), \phi(t_i), \phi(t_{i-1}), \dots). \end{aligned}$$

Die zeitliche Entwicklung der Zustandsgrößen z_α kann innerhalb der FE-Formulierung durch bereichsweise Näherungsansätze, wie die LAGRANGE'schen Interpolationspolynome, beschrieben werden. Da maximal erste Ableitungen bezüglich der Zeit in (5.38) auftreten, sind lineare Ansatzfunktionen im Zeitbereich ausreichend (Bild 5.7). Daraus resultiert für die Zustandsgrößen an einem Punkt θ im Zeitinkrement

$$z_\alpha^{i+\theta}(\theta) = T^i(\theta) z_\alpha^i + T^{i+1}(\theta) z_\alpha^{i+1} = (1 - \theta) z_\alpha^i + \theta z_\alpha^{i+1} = z_\alpha^i + \theta \Delta z_\alpha^{i+1} \quad (5.43)$$

und für ihre Raten

$$\dot{z}_\alpha^{i+\theta}(\theta) = \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \Delta z_\alpha^{i+1}. \quad (5.44)$$

Somit lässt sich die elementvektorielle Darstellung angeben mit

$$\mathbf{z}_{\alpha,e}^{i+\theta}(\theta) = \mathbf{z}_{\alpha,e}^i + \theta \Delta \mathbf{z}_{\alpha,e}^{i+1} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{z}}_{\alpha,e}^{i+\theta}(\theta) = \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \Delta \mathbf{z}_{\alpha,e}^{i+1}. \quad (5.45)$$

Die Vorgehensweise entspricht dem bekannten θ -Schema, das zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen häufig eingesetzt wird. Der Ausdruck generalisierte Trapezregel ist hierfür ebenfalls geläufig.

Der Parameter θ bestimmt dabei die Art der Integration und kann Werte zwischen $\theta = 0$ (entspricht einer expliziten Integration) und $\theta = 1$ (entspricht einer voll impliziten Integration) annehmen. In Tabelle 5.1 sind die sich daraus ergebenden bekannten Spezialfälle mit ihren wesentlichen Eigenschaften aufgelistet. Das θ -Schema besitzt in der Zeit eine

θ	Numerisches Verfahren	Stabilität	Genauigkeit
0	EULER-Vorwärts	-	$\mathcal{O}(h)$
$\frac{1}{2}$	CRANK-NICOLSON	A-stabil	$\mathcal{O}(h^2)$
1	EULER-Rückwärts	L-stabil	$\mathcal{O}(h)$

Tabelle 5.1: Stabilität und Genauigkeit von Spezialfällen des Einschritt- θ -Verfahrens.

Genauigkeit erster Ordnung. Nur für den Fall $\theta = \frac{1}{2}$ ist es von zweiter Ordnung genau. Weiterhin ist das Verfahren unbedingt stabil für $\theta \geq \frac{1}{2}$ [Wood 1990]. Die erreichte Genauigkeit hängt jedoch auch von der gewählten Schrittweite ab. Erfahrungsgemäß kann das CRANK-NICOLSON-Verfahren zu Oszillationen führen [Alvaredo 1994; Wood 1990], besonders im Zusammenhang mit scharfen Gradienten aufgrund von abrupten Anfangs- oder Randbedingungen. Dieses Verhalten kann durch eine kleinere Schrittweite oder durch eine entsprechende Schrittweitensteuerung unterbunden werden. Im Zusammenhang mit dem voll impliziten EULER-Rückwärts-Verfahren wird von einem oszillierenden Verhalten in der Literatur nicht berichtet. Diese Erkenntnisse decken sich mit den Erfahrungen des Verfassers, die er bei Testrechnungen mit den implementierten Modellen gemacht hat, vgl. Abschnitt 6.2.1.

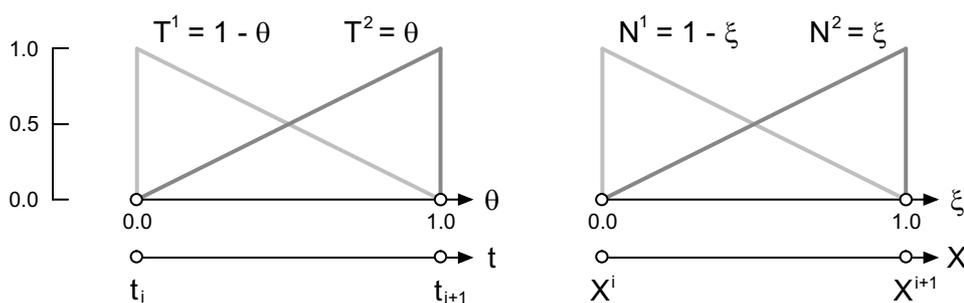


Bild 5.7: Lineare Ansatzfunktionen für die Zeit- und Raumdiskretisierung.

Räumliche Diskretisierung. Die Diskretisierung des räumlichen Gebietes Ω erfolgt mit einem 2-knotigen Stabelement unter Verwendung der in Bild 5.7 dargestellten linearen Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}(\xi) = [N^1(\xi) \quad N^2(\xi)] = [1 - \xi \quad \xi]. \quad (5.46)$$

In Gleichung (5.38) werden Ansätze für die äußeren Zustandsgrößen, deren Gradienten und die jeweiligen Variationen benötigt. Unter Beachtung von (5.45) erhält man

$$\begin{aligned} z_{\alpha,e}^h(\xi, \theta) &= \mathbf{N}_\alpha(\xi) \mathbf{z}_{\alpha,e}^{i+\theta}(\theta), & \text{grad } z_{\alpha,e}^h(\xi, \theta) &= \mathbf{B}_\alpha(\xi) \mathbf{z}_{\alpha,e}^{i+\theta}(\theta), \\ \delta z_{\alpha,e}^h(\xi, \theta) &= \mathbf{N}_\alpha(\xi) \delta \mathbf{z}_{\alpha,e}^{i+\theta}(\theta), & \text{grad } \delta z_{\alpha,e}^h(\xi, \theta) &= \mathbf{B}_\alpha(\xi) \delta \mathbf{z}_{\alpha,e}^{i+\theta}(\theta). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Da die Zustandsgrößen Temperatur und relative Feuchte mit den gleichen Ansatzfunktionen beschrieben werden, kann für \mathbf{N}_α einheitlich \mathbf{N} verwendet werden. Analog kann auch für die Matrizen \mathbf{B}_α , die die zugehörigen B-Operatoren zu den jeweiligen Ansatzfunktionen beinhalten, einheitlich \mathbf{B} geschrieben werden.

Wahl der Wichtungsfunktion. Bei der Berechnung einer Näherungslösung für ein Anfangsrandwertproblem treten sowohl räumliche als auch zeitliche Fehler auf. Durch eine Wichtung in Raum und Zeit kann der Fehler verteilt werden. Je nach Wahl der Wichtungsfunktionen wird die Genauigkeit und Stabilität der Lösung beeinflusst. Zu den bekanntesten Wichtungskonzepten gehören

- das BUBNOV-GALERKIN-Verfahren,
- das PETROV-GALERKIN-Verfahren,
- die Bereichskollokation und
- die Punktkollokation.

Prinzip des BUBNOV-GALERKIN-Verfahrens, häufig auch nur GALERKIN-Verfahren genannt, ist, die Näherungsansätze für die Zustandsgrößen auch als Gewichtsfunktion anzusetzen. Werden die Wichtungsfunktionen als virtuelle Größen gedeutet, ergibt sich eine Äquivalenz zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Beim PETROV-GALERKIN-Verfahren verwendet man eine beliebige, aber plausible Gewichtsfunktion. Bei der Bereichskollokation wird nur der residuale Fehler in einem vorgegebenen Gebiet betrachtet. Einen Sonderfall der Bereichskollokation bildet die Punktkollokation, wobei nur ein einzelner Punkt berücksichtigt wird.

Mathematisch kann die Punktkollokation durch die DIRAC-Funktion δ beschrieben werden, für die folgender Zusammenhang gilt:

$$\theta_w := \delta|\theta - \tau| = \begin{cases} 0 & \text{für } \theta \neq \tau, \\ \infty & \text{für } \theta = \tau. \end{cases} \quad (5.48)$$

Durch die Multiplikation einer Funktion f mit der DIRAC-Funktion δ ergibt sich eine punktuelle Auswertung des Zeitintegrals an der Stelle τ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \delta|\theta - \tau| d\theta = f(\tau). \quad (5.49)$$

Durch die Kombination einer räumlichen Wichtung entsprechend dem Verfahren von BUBNOV/GALERKIN mit einer Punktkollokation für die zeitliche Diskretisierung können die Wichtungsfunktionen Ψ_α durch

$$\Psi_\alpha = \delta z_\alpha = \mathbf{N} \theta_w \delta \Delta \mathbf{z}_\alpha^{i+1} \quad (5.50)$$

ersetzt werden. Identische Gleichungen können durch die Kopplung einer räumlichen Finite-Element-Diskretisierung mit einem Finite-Differenzenverfahren für die zeitliche Diskretisierung ermittelt werden. Die Berücksichtigung der Raum-Zeit-Ansätze (5.47) und der Wichtungsfunktionen (5.50) in der linearisierten Form des Anfangsrandwertproblems (5.37) mit (5.36) und (5.38) führt auf das im Folgenden dargestellte algebraische Gleichungssystem.

Diskretisierte, linearisierte Form des Anfangsrandwertproblems. Durch die Diskretisierung von (5.38) entstehen die nachstehend aufgeführten Elementmatrizen. Dabei folgen die Matrizen

$$\text{Speicherung : } \mathbf{W}_{\alpha,\beta}^{\gamma} = \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \left[\frac{\partial c_{\alpha}^{\gamma}}{\partial z_{\beta}} \right]^{i+\tau} \mathbf{N} \Delta z_{\gamma,e}^{i+1} \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{W}_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T [c_{\alpha}^{\beta}]^{i+\tau} \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (5.52)$$

$$\text{Quellen : } \mathbf{Q}_{\alpha,\beta} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \left[\frac{\partial \mathbf{Q}_{\alpha}}{\partial z_{\beta}} \right]^{i+\tau} \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (5.53)$$

$$\text{Leitung : } \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{\gamma} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \left[\frac{\partial \lambda_{\alpha}^{\gamma}}{\partial z_{\beta}} \mathbf{B} z_{\gamma,e} \right]^{i+\tau} \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (5.54)$$

$$\mathbf{L}_{\alpha}^{\beta} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T [\lambda_{\alpha}^{\beta}]^{i+\tau} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (5.55)$$

aus der Integration über das Elementgebiet und werden zu der Matrix $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\Omega}$ zusammengefasst:

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\Omega} = \sum_{\gamma} \mathbf{W}_{\alpha,\beta}^{\gamma} + \mathbf{W}_{\alpha}^{\beta} - \mathbf{Q}_{\alpha,\beta} + \sum_{\gamma} \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{\gamma} + \mathbf{L}_{\alpha}^{\beta}. \quad (5.56)$$

Die aus der Integration über den Rand stammenden Matrizen

$$\text{Randströme : } \mathbf{R}_{\alpha,\beta} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[\frac{\partial \mathbf{q}_{n\alpha}}{\partial z_{\beta}} \right]^{i+\tau} \mathbf{N} d\Gamma_e, \quad (5.57)$$

$$\text{Konvektion : } \mathbf{K}_{\alpha,\beta} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[\frac{\partial \alpha_{\ddot{u}}^{\alpha}}{\partial z_{\beta}} (z_{\alpha, en} - \mathbf{N} z_{\alpha,e}) + \alpha_{\ddot{u}}^{\alpha} \frac{\partial z_{en}}{\partial z_{\beta}} \right]^{i+\tau} \mathbf{N}_t d\Gamma_e, \quad (5.58)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [\alpha_{\ddot{u}}^{\alpha}]^{i+\tau} \mathbf{N} d\Gamma_e, \quad (5.59)$$

$$\text{Strahlung : } \mathbf{S}_{t,\beta} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[\sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial z_{\beta}} (\vartheta_{en}^4 - \mathbf{N} \vartheta_e^4) + 4\sigma \varepsilon \vartheta_{en}^3 \frac{\partial \vartheta_{en}}{\partial z_{\beta}} \right]^{i+\tau} \mathbf{N}_t d\Gamma_e, \quad (5.60)$$

$$\mathbf{S}_t = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [4\sigma \varepsilon (\mathbf{N} \vartheta_e)^3]^{i+\tau} \mathbf{N} d\Gamma_e \quad (5.61)$$

sollen ebenfalls durch eine Matrix erfasst werden. Dabei ist zu beachten, dass die Strahlungsrandbedingungen, wie bereits erwähnt, nur für den Temperaturhaushalt gelten und

dass ein Teil der Matrizen für die Kopplungsglieder nicht existiert. Mittels einer Fallunterscheidung kann $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^\Gamma$ angegeben werden:

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^\Gamma = \begin{cases} -\mathbf{R}_{\alpha,\beta} - \mathbf{K}_{\alpha,\beta} - \mathbf{K}_\alpha - \underline{\mathbf{S}}_{t,\beta} - \underline{\mathbf{S}}_t & \text{für } \alpha = \beta, \\ -\mathbf{R}_{\alpha,\beta} - \mathbf{K}_{\alpha,\beta} - \underline{\mathbf{S}}_{t,\beta} & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (5.62)$$

Aus der Diskretisierung der rechten Seite aus (5.37), die in (5.36) aufgeführt ist, folgen die Elementvektoren

$$\text{Quellen : } \quad \mathbf{q}_\alpha = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T [\mathbf{Q}_\alpha]^{i+\tau} d\Omega_e, \quad (5.63)$$

$$\text{Randströme : } \mathbf{r}_\alpha = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [q_{n\alpha}]^{i+\tau} d\Gamma_e, \quad (5.64)$$

$$\text{Konvektion : } \mathbf{k}_\alpha = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [\alpha_{ii}^\alpha (z_{\alpha,en} - z_\alpha)]^{i+\tau} d\Gamma_e, \quad (5.65)$$

$$\text{Strahlung : } \mathbf{s}_\alpha = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [\sigma \varepsilon (\vartheta_{en}^4 - \vartheta^4)]^{i+\tau} d\Gamma_e. \quad (5.66)$$

Für die rechte Seite wird mit (5.52), (5.55) und (5.63)-(5.66) der Ausdruck

$$\mathbf{F}_\alpha = -\sum_\beta \mathbf{W}_\alpha^\beta \Delta z_{\beta,e}^{i+1} - \sum_\beta \mathbf{L}_\alpha^\beta z_{\beta,e}^{i+\tau} + \mathbf{q}_\alpha + \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{k}_\alpha + \underline{\mathbf{s}}_\alpha \quad (5.67)$$

eingeführt. Schließlich kann unter Verwendung von (5.56), (5.62) und (5.67) die matrizielle, linearisierte und diskrete Form der Bilanzgleichungen angegeben werden, mit der die iterativen Zuwächse der Zustandsgrößen an den Elementknoten im Zeitschritt bestimmt werden können:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt}^\Omega + \mathbf{K}_{tt}^\Gamma & \mathbf{K}_{th}^\Omega + \mathbf{K}_{th}^\Gamma \\ \mathbf{K}_{ht}^\Omega + \mathbf{K}_{ht}^\Gamma & \mathbf{K}_{hh}^\Omega + \mathbf{K}_{hh}^\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vartheta_e^{i+1} \\ \Delta \mathbf{h}_e^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t \\ \mathbf{F}_h \end{bmatrix}. \quad (5.68)$$

Die notwendige Assemblierung des algebraischen Gleichungssystems (5.68) auf die Systemebene wird mit der bereits in Abschnitt 5.2.1 beschriebenen Vorgehensweise vollzogen.

5.3.5 Die eingesetzten Gleichungslöser

Die iterative Berechnung der hygrothermischen Zustandsgrößen erfolgt mit dem Verfahren von NEWTON-RAPHSON, vgl. Abschnitt 5.4.4. Durch den Einsatz dieses inkrementell-iterativen Verfahrens kann die Problemstellung auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems der Form

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.69)$$

zurückgeführt werden. Dabei ist \mathbf{A} die reguläre Koeffizientenmatrix, \mathbf{b} der Vektor der rechten Seite und \mathbf{x} der gesuchte Lösungsvektor. Prinzipiell kann (5.69) durch die Bildung der Inversen von \mathbf{A} gelöst werden. In der Praxis wird die rechenzeitintensive und genauigkeitsanfällige Inversion jedoch vermieden. Die numerische Anwendung der CRAMER'schen

Regel ist ebenso ungeeignet. Anstelle dessen werden direkte oder iterative Verfahren eingesetzt.

Der Vorteil der direkten Verfahren, die auf einer Faktorisierung der Systemmatrizen basieren, liegt in der Exaktheit der Lösungen nach einer endlichen Anzahl arithmetischer Operationen.

Bei den iterativen Verfahren wird von einer Anfangslösung ausgegangen, die dann schrittweise verbessert wird. Sie beruhen auf der iterativen Fixpunktbestimmung von Gleichungssystemen bzw. der Minimierung quadratischer Funktionen. In Abhängigkeit von der Problemstellung kann die Lösung von Gleichungssystemen mit diesen Verfahren eine sehr große Anzahl arithmetischer Operationen erforderlich machen.

In FEMAS 2000 ist ein auf der CHOLESKY-Zerlegung basierender Gleichungslöser von Bathe & Wilson (1976) eingebunden [Beem, Könke, Montag & Zahlten 1996]. Dieser direkte Gleichungslöser kann nur bei symmetrischen, positiv definiten Matrizen angewendet werden, wie im Folgenden noch näher erläutert wird. Aus der Diskretisierung der hygromischen Problemstellung resultiert jedoch eine unsymmetrische Koeffizientenmatrix. Somit kann der bereits implementierte Gleichungslöser hierfür nicht verwendet werden, womit zur Lösungsfindung auf andere Gleichungslöser zurückgegriffen werden muss. In der Literatur ist eine Vielzahl von Lösungsverfahren dargestellt. Unterscheidungsmerkmale der existierenden Gleichungslöser sind:

- Anwendungsbereich,
- Anzahl der arithmetischen Operationen,
- Ausnutzung der Struktur,
- Benutzerfreundlichkeit,
- direktes oder iteratives Verfahren,
- Robustheit,
- Effizienz,
- Speicherstrategien.

Um eine möglichst effiziente Umsetzung zu realisieren, sind vergleichend verschiedene Lösungsalgorithmen implementiert worden. Im Folgenden werden der bereits vorhandene und die neu eingebundenen Gleichungslöser vorgestellt. Es handelt sich dabei ausschließlich um direkte Lösungsverfahren.

GAUSS-Algorithmus. Die wohl bekannteste Methode, ein Gleichungssystem der Form (5.69) numerisch zu lösen, ist der auf dem Eliminationsprinzip basierende GAUSS-Algorithmus. Ausgenutzt wird dabei, dass Linearkombinationen von Gleichungen die Lösung des Systems nicht beeinflussen. Daher werden geeignete Linearkombinationen zur systematischen Elimination der Unbekannten benutzt. Das System wird zunächst durch elementare Umformungen in ein gestaffeltes System überführt, danach wird der gesuchte Lösungsvektor durch Rücksubstitution rekursiv bestimmt. Falls die Diagonalelemente von \mathbf{A} nicht alle ungleich Null sind, ist dabei eine Pivotisierung erforderlich.

Der im Rahmen dieser Arbeit eingebaute GAUSS-Algorithmus ist Engeln-Müllges & Reutter (1996) entnommen worden. Die Übergabe der Koeffizientenmatrix an der Schnittstelle zum implementierten Programmbaustein erfolgt dabei in matrizieller Form. Eine mögliche Pivotisierung ist bei der vorliegenden Problemstellung nicht notwendig.

LR-Zerlegung. Die LR-Zerlegung basiert auf dem zuvor beschriebenen Verfahren. Der Vektor \mathbf{b} der rechten Seite bleibt bei dieser Methode zunächst jedoch unberücksichtigt. Die vorgegebene Matrix \mathbf{A} wird in eine untere Dreiecksmatrix \mathbf{L} mit Einsen auf den Hauptdiagonalelementen und eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{R} zerlegt:

$$\mathbf{A} := \mathbf{L}\mathbf{R}. \quad (5.70)$$

Führt man einen Hilfsvektor $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ ein, so kann das Gleichungssystem nach folgendem Rechenschema gelöst werden:

- Bestimmen von \mathbf{L} und \mathbf{R} aus \mathbf{A} .
- Lösen von \mathbf{y} durch Vorwärtseinsetzen in $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$.
- Lösen von \mathbf{x} durch Rückwärtseinsetzen in $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Die LR-Zerlegung ist prinzipiell für beliebige Gleichungssysteme mit nichtsingulären Matrizen anwendbar. Vorteil des Verfahrens gegenüber dem nach GAUSS benannten ist, dass die Lösungen für beliebig viele rechte Seiten \mathbf{b} bestimmt werden können, ohne den rechen- und zeitaufwendigen Schritt der Dreieckszerlegung zu wiederholen.

In das Programmsystem ist der auf der LR-Zerlegung basierende Algorithmus aus Engeln-Müllges & Reutter (1996) implementiert worden. Die Koeffizientenmatrix wird wiederum in matrizieller Form an die Lösungsroutinen übergeben.

CHOLESKY-Zerlegung. In vielen Fällen resultieren aus den ingenieurmäßigen Problemstellungen symmetrische und positiv definite Koeffizientenmatrizen, für die auch der Begriff SPD-Matrizen verwendet wird. Ein Gleichungssystem dieser Art kann mit Hilfe des effizienteren CHOLESKY-Verfahrens gelöst werden, wobei die Koeffizientenmatrix in

$$\mathbf{A} := \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^T \quad (5.71)$$

zerlegt wird. Unter der Verwendung der Diagonalmatrix \mathbf{D} kann eine modifizierte Zerlegung angegeben werden:

$$\mathbf{A} := \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T. \quad (5.72)$$

Letztere hat den Vorteil, dass auch indefinite Matrizen damit gelöst werden können und sich die Bestimmung der Determinanten der Matrix \mathbf{A} , falls benötigt, hiermit einfacher gestaltet.

Wie bereits erwähnt, ist ein solcher Gleichungslöser in FEMAS 2000 integriert. Für eine effizientere Berechnung wird die in diesem Fall symmetrische Koeffizientenmatrix \mathbf{A} nicht in matrizieller, sondern in vektorieller Form an die Lösungsroutinen übergeben. In diesen Vektor werden die Koeffizienten aus dem oberen Dreieck von \mathbf{A} unter Verwendung der Skylinetechnik spaltenweise abgelegt (Bild 5.8). Ein weiterer Vektor mit der notwendigen Zeilen- und Spaltenadressierung muss ebenfalls den Lösungsroutinen zugeführt werden. Damit wird die häufig vorliegende Form der Matrixbesetzung ausgenutzt. Optional kann ferner eine im Programmsystem eingebundene Bandweitenoptimierung benutzt werden, vgl. Hanskötter (1994).

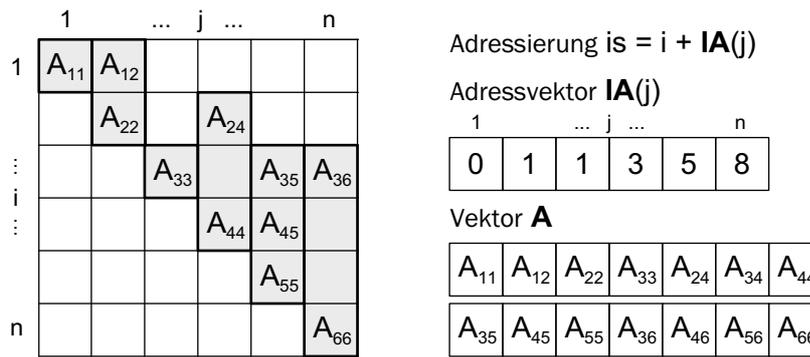


Bild 5.8: Speicherung einer symmetrischen Koeffizientenmatrix mittels Skylinetechnik.

Gleichungslöser für Bandmatrizen. Beim Lösen von Gleichungssystemen ist es grundsätzlich empfehlenswert, die Struktur der vorliegenden Systemmatrix zu beachten und dementsprechend auszunutzen. In der Finiten-Element-Methode entstehen häufig Matrizen mit einer Bandstruktur (banded matrices). Man spricht von einer Bandmatrix, wenn die Elemente der Matrix außerhalb eines Bandes längs der Hauptdiagonalen verschwinden.

Durch die Kopplung des hygrothermischen Modells mit der strukturmechanischen Modellierung an den Integrationspunkten des Schalenelementes ist eine große Anzahl von Gleichungssystemen mit einer definierten Bandbreite zu lösen. Daher bietet sich in diesem Falle die Anwendung eines solchen Löser an.

Die Lösung eines Gleichungssystems mit der Form einer Bandmatrix erfolgt ebenfalls über eine Dreieckszerlegung, wobei die entstehenden Dreiecksmatrizen wiederum bandförmig sind, wodurch sich der Rechenaufwand bedeutend verringert. Ein weiterer Vorteil liegt in der Speicherplatzbelegung, da die vorhandene Matrix \mathbf{A} in einer gepackten Form \mathbf{A}^* abgespeichert werden kann. So entsteht aus einer $(n \times n)$ Matrix mit der Bandbreite m eine $(m \times n)$ Matrix (Bild 5.9).

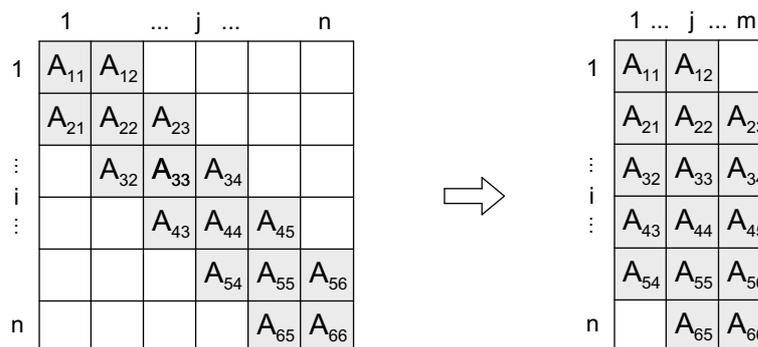


Bild 5.9: Speicherung einer Bandmatrix in gepackter Form.

Nähere Informationen zum integrierten Algorithmus für Bandmatrizen sind in Engeln-Müllges & Reutter (1996) zu finden. Die Übergabe der Koeffizientenmatrix in den Lösungsalgorithmus erfolgt in der in Bild 5.9 dargestellten gepackten Form.

UMFPACK. Neben den bisher dargestellten Gleichungslösern ist das Programmpaket UMFPACK in FEMAS 2000 integriert worden. Konzipiert wurde UMFPACK vor allem für dünnbesetzte Matrizen (sparse matrices), die dadurch charakterisiert sind, dass sie eine große Anzahl von leeren Matrizenelementen aufweisen. Für die Berechnung und Speicherung ist es in solchen Fällen günstiger, nur die Nichtnullelemente der Matrix abzuspeichern. Diese müssen an die UMFPACK-Routinen in der so genannten Koordinatenform übergeben werden. Dabei werden neben den vektoriell abgespeicherten Matrixkomponenten A_{ij} zwei zusätzliche Vektoren benötigt, die die entsprechenden Zeilen- und Spaltenindizes enthalten (Bild 5.10).

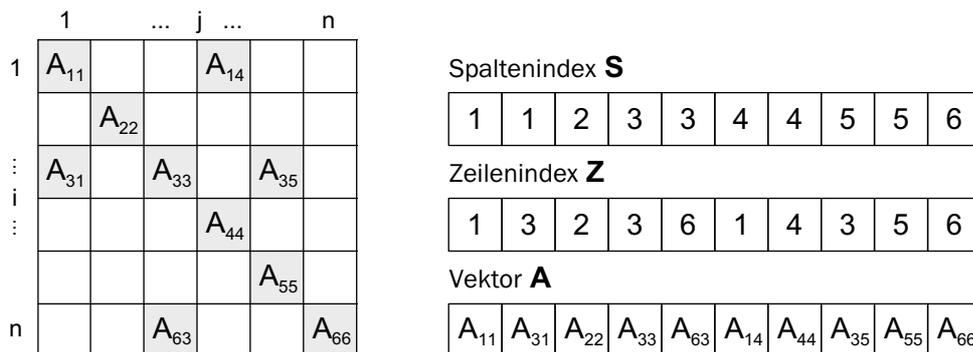


Bild 5.10: Speicherung einer dünnbesetzten Matrix in Koordinatenform.

Lineare Gleichungssysteme mit unsymmetrischen und indefiniten Koeffizientenmatrizen können mit diesem direkten Löser unter Verwendung von Multifront-Algorithmus bearbeitet oder gelöst werden. Die Multifrontal-Methode ist von Duff & Reid (1983) entwickelt worden. Die grundlegende Idee der Methode besteht darin, die Faktorisierung einer dünn besetzten Matrix auf die teilweise Faktorisierung mehrerer kleinerer, voll besetzter Matrizen zurückzuführen. Durch eine solche Vorgehensweise wird die Datenlokalität des Faktorisierungsalgorithmus signifikant erhöht. Bei der Berechnung mit UMFPACK sind die Schritte der Initialisierung, der Faktorisierung und der eigentlichen Lösung notwendig. Eine Beschreibung der verwendeten Algorithmen befindet sich in Davis & Duff (1995).

Fazit. Nachdem die vier neu implementierten Lösungsalgorithmen vorgestellt und erläutert worden sind, stellt sich nun die Frage, welcher Algorithmus der leistungsstärkste ist. Diese Frage kann pauschal nicht beantwortet werden, da die Antwort von der Größe und Belegung der Koeffizientenmatrix bei den zu untersuchenden Problemstellungen abhängt. Zum einen verändert sich mit der Größe das Verhältnis der Nichtnullelemente zu den Nullelementen in der Matrix, zum anderen das Verhältnis der erforderlichen Zeit für die Datenaufbereitung zur tatsächlichen Berechnungszeit. Generell kann gesagt werden: Je größer das zu lösende Gleichungssystem ist, desto effizienter ist der Einsatz von UMFPACK zu bewerten. Bei den vorliegenden Elementanzahlen und Bandbreiten ($m = 6$ für die hygrothermischen Berechnungen und $m = 3$ für die rein hygrischen oder thermischen Berechnungen) kann der Bandgleichungslöser jedoch ebenfalls als äußerst effizient eingestuft werden.

Während die hygrothermische Berechnung nun wahlweise mit den vorgestellten Gleichungslösern erfolgen kann, wird für die strukturmechanischen Berechnungen der bereits vorhandene Gleichungslöser weiterhin eingesetzt.

5.3.6 Konvergenzsicherung

Innerhalb eines inkrementell-iterativen Verfahrens müssen Konvergenz- bzw. Abbruchkriterien für die Iterationsschleifen definiert werden. Als Abbruchbedingungen werden in der Strukturmechanik üblicherweise Energienormen, Normen der Residuen oder Verschiebungsnormen herangezogen. Dabei ist die Verwendung von relativen Maßen der von absoluten vorzuziehen, da beim Einsatz von absoluten Konvergenzmaßen die Definition der Genauigkeitsschranke problematisch ist. Die strukturmechanischen Berechnungen in FEMAS 2000 können wahlweise mit Verschiebungs- und Energienormen durchgeführt werden [Beem, Könke, Montag & Zahlten 1996]. Als relative Verschiebungsnorm wird dabei

$$\epsilon_v^{(i)} = \frac{\|\Delta \mathbf{V}_{(l)}^{(i)}\|}{\|\mathbf{V}_{(l-1)}\|} < \epsilon_{tol} \quad (5.73)$$

benutzt, wobei $\|\dots\|$ für die EUKLID'sche ($=L_2$ -) Norm der vektoriellen Größe steht. Der Verschiebungszuwachs der i -ten Iteration im l -ten Lastschritt $\Delta \mathbf{V}_{(l)}^{(i)}$ wird somit bezogen auf die Verschiebungen des letzten ausiterierten Zustandes $\mathbf{V}_{(l-1)}$ und mit einer vom Benutzer vorzugebenden Toleranzgrenze ϵ_{tol} verglichen. In der Literatur wird abweichend von (5.73) die Norm der Änderung des Verschiebungszustands innerhalb des aktuellen Lastschritts $\|\mathbf{V}_{(l)}^{(i)} - \mathbf{V}_{(l-1)}\|$ alternativ verwendet.

Aufgrund der Normgenerierung können auch bei relativen Konvergenzmaßen Fehler in der Gleichgewichtsbetrachtung auftreten. Enthält der betrachtete Lösungsvektor Freiheitsgrade unterschiedlicher Ordnungen, wird der Einfluss der Einträge der kleineren Ordnung mit Bestimmung der Norm verschmiert. Somit ist deren Einfluss unterrepräsentiert und es kann der Fall eintreten, dass Konvergenz angezeigt wird, obwohl sie in Wirklichkeit bereichsweise noch nicht erreicht wird.

Durch die Aufspaltung des mit unterschiedlichen Feldvariablen besetzten Lösungsvektors in Vektoren mit jeweils nur einer Feldvariablen können solchen Konvergenzungenauigkeiten minimiert oder ausgeschaltet werden. Bei der Implementierung des hygrothermischen Modells sind dementsprechende Ansätze zur Konvergenzsicherung eingebunden worden:

$$\epsilon_{\vartheta}^{(i)} = \frac{\|\Delta \vartheta_{(l)}^{(i)}\|}{\|\vartheta_{(l-1)}\|} < \epsilon_{tol} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_h^{(i)} = \frac{\|\Delta \mathbf{h}_{(l)}^{(i)}\|}{\|\mathbf{h}_{(l-1)}\|} < \epsilon_{tol}, \quad (5.74)$$

bzw.

$$\epsilon_{\vartheta}^{(i)} = \frac{\|\Delta \vartheta_{(l)}^{(i)}\|}{\|\vartheta_{(l)}^{(i)} - \vartheta_{(l-1)}\|} < \epsilon_{tol} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_h^{(i)} = \frac{\|\Delta \mathbf{h}_{(l)}^{(i)}\|}{\|\mathbf{h}_{(l)}^{(i)} - \mathbf{h}_{(l-1)}\|} < \epsilon_{tol}. \quad (5.75)$$

Die beiden Konvergenzkriterien können wahlweise eingesetzt werden. Ein konvergenter Zustand wird dann signalisiert, wenn beide Bedingungen in (5.74) oder (5.75) erfüllt sind.

5.3.7 Adaptive Schrittenweitensteuerung

Für eine effiziente Umsetzung des Zeitschrittverfahrens ist es unerlässlich, sich Gedanken über die optimale Schrittweite Δt zu machen. Im Allgemeinen ist es nicht sinnvoll, das zu untersuchende Zeitintervall mit äquidistanten Schritten zu durchlaufen, sondern die Schrittweite an das lokale Verhalten der Lösung anzupassen. Während in Bereichen glatter Lösungen die Schrittweite verhältnismäßig groß sein darf, muss sie in Bereichen starker Änderungen dementsprechend klein gewählt werden.

Mit einem a-posteriori Fehlerschätzer ist eine automatische Schrittweitensteuerung möglich. Die Abschätzung beruht dabei zumeist auf den Ergebnissen einer unabhängig von der ersten Berechnung durchgeführten Kontrollrechnung. Prinzipiell existieren folgende Möglichkeiten:

- Vergleich der Berechnung eines Zeitschritts mit zwei Verfahren unterschiedlicher Fehlerordnungen q_g und \bar{q}_g oder
- Vergleich der Berechnung eines Zeitschritts mit demselben Verfahren, jedoch mit einer von der ersten Berechnung abweichenden Schrittweite.

Durch die Bewertung der erhaltenen Ergebnisse kann dann eine voraussichtlich günstigere Schrittweite für den nächsten Zeitschritt abgeleitet werden. Der Literatur sind für beide Varianten eine Vielzahl entsprechender Verfahren zu entnehmen [Hairer, Nørsett & Wanner 1993; Hairer & Wanner 1996].

In dieser Arbeit wird eine Vorgehensweise gewählt, die der zweiten Variante entspricht. Die Berechnung des Verfahrensfehlers erfolgt nach einer in Engeln-Müllges & Reutter (1996) vorgeschlagenen Möglichkeit. Danach wird der globale Verfahrensfehler aus der Differenz der exakten Lösung $\tilde{z}_\alpha(\mathbf{X})$ und der Näherungslösung $z_{\alpha,\Delta t}(\mathbf{X})$ bestimmt:

$$\mathbf{e}_{\Delta t} := \tilde{z}_\alpha(\mathbf{X}) - z_{\alpha,\Delta t}(\mathbf{X}). \quad (5.76)$$

Bei der numerischen Berechnung wird der Verfahrensfehler näherungsweise aus den Lösungen $z_{\alpha,\Delta t}(\mathbf{X})$ bzw. $z_{\alpha,\Delta t^*}(\mathbf{X})$ für die Schrittweite Δt bzw. Δt^* ermittelt:

$$\mathbf{e}_{\Delta t}^* = \frac{z_{\alpha,\Delta t}(\mathbf{X}) - z_{\alpha,\Delta t^*}(\mathbf{X})}{(\Delta t/\Delta t^*)^{q_g} - 1} \approx \mathbf{e}_{\Delta t}. \quad (5.77)$$

Für die jeweiligen Kontrollrechnungen wird vom Verfasser die doppelte Schrittweite verwendet ($\Delta t = \Delta t^*$). Somit ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{e}_{\Delta t}^* = \frac{z_{\alpha,\Delta t}(\mathbf{X}) - z_{\alpha,2\Delta t}(\mathbf{X})}{2^{q_g} - 1}. \quad (5.78)$$

Der aktuelle Fehler ϵ_{act} wird aus der Norm des Verfahrensfehlers bestimmt:

$$\epsilon_{act} = \|\mathbf{e}_{\Delta t}^*\|. \quad (5.79)$$

Die Entscheidung, ob der durchgeführte Schritt akzeptiert wird oder nicht, erfolgt durch den Vergleich des aktuellen Fehlers ϵ_{act} mit einer vorzugebenden Toleranzgenauigkeitsschranke ϵ_{tol} , welche im Normalfall in einer Größenordnung zwischen 10^{-3} – 10^{-4} angesetzt

wird [Wall 1999]. Wird die Fehlerschranke nicht eingehalten, muss der Rechenschritt mit einer reduzierten Schrittweite wiederholt werden:

$$\epsilon_{act} \geq \epsilon_{tol} \Rightarrow \Delta t = \min(S_{min}; S) \cdot \Delta t. \quad (5.80)$$

Ist der aktuelle Fehler kleiner als die vorgegebene Toleranz, wird die Lösung akzeptiert und für den nächsten Zeitschritt eine vergrößerte Schrittweite angesetzt:

$$\epsilon_{act} < \epsilon_{tol} \Rightarrow \Delta t = \max(S_{max}; S) \cdot \Delta t. \quad (5.81)$$

Der dabei verwendete Schlittlängenfaktor S bestimmt sich aus

$$S = \delta_S \cdot \left(\frac{\epsilon_{tol}}{\epsilon_{act}} \right)^{\frac{1}{q_g+1}}. \quad (5.82)$$

Für den Faktor δ_S sind in der Literatur unterschiedliche Angaben zu finden. Nach Engeln-Müllges & Reutter (1996) ist ein Wert zwischen 0.8 und 0.9 anzusetzen. Die Werte für die minimale Reduzierung bzw. Vergrößerung der Schrittweite S_{min} bzw. S_{max} sind je nach Problemstellung wählbar. Die besten Ergebnisse wurden mit Werten für $S_{min} = 0.5$ und $S_{max} = 1.5$ erzielt.

Der in (5.77) berechnete Verfahrensfehler kann des Weiteren dazu benutzt werden, aus den unterschiedlichen Näherungslösungen einen verbesserten Näherungswert anzugeben:

$$\mathbf{z}_\alpha^*(\mathbf{X}) = \mathbf{z}_\alpha(\mathbf{X}) + \mathbf{e}_{\Delta t}^* = \frac{(\Delta t / \Delta t^*)^{q_g} \mathbf{z}_{\alpha, \Delta t}(\mathbf{X}) - \mathbf{z}_{\alpha, \Delta t^*}(\mathbf{X})}{(\Delta t / \Delta t^*)^{q_g} - 1}. \quad (5.83)$$

Daraus folgt für den Fall der doppelten Schrittweite:

$$\mathbf{z}_\alpha^*(\mathbf{X}) = \frac{2^{q_g} \mathbf{z}_{\alpha, \Delta t}(\mathbf{X}) - \mathbf{z}_{\alpha, 2\Delta t}(\mathbf{X})}{2^{q_g} - 1}. \quad (5.84)$$

Wall (1999) weist darauf hin, dass die Verwendung der veränderten Näherungslösung, obwohl sie eine um Eins erhöhte Ordnung besitzt, aufgrund der Stabilitätseigenschaften nicht ganz unproblematisch ist. Er schlägt vor, die verbesserten Ergebnisse für die Auswertung zu benutzen, jedoch die Berechnung ohne diese durchzuführen.

Im Zuge der numerischen Umsetzung der Schrittweitensteuerung sind beide Berechnungsvarianten, d.h. mit und ohne Verbesserung, integriert worden. Bei der Berechnung der in den Kapiteln 6 und 7 dargestellten Beispiele ist letztere Variante verwendet worden.

5.3.8 Implementierung in das FE-System

Die numerischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit werden mit dem Programmsystem FEMAS 2000 durchgeführt. Die ursprüngliche Fassung dieses numerischen Simulationsprogramms entstand Anfang der achtziger Jahre an der Ruhr-Universität Bochum. In den letzten 20 Jahren ist das Programmsystem kontinuierlich weiterentwickelt worden und wird mittlerweile an verschiedenen Universitäten eingesetzt und im Rahmen von

Forschungsarbeiten ergänzt. Aus einer Fülle von Arbeiten, die auf dem Programmsystem basieren, seien an dieser Stelle die Arbeiten neueren Datums von Eckstein (1999), Pölling (2000), Noh (2002), Jun (2002), Brüggemann (2002) und Andres (2004) erwähnt.

Aus der hygrothermischen Betonmodellierung resultiert ein instationäres, nichtlineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Zur Lösung derartiger Problemstellungen ist das Programmsystem vom Verfasser um den Mechanikbaustein FIELD-3 erweitert worden. Für die Berechnungsdurchführung sind darüber hinaus entsprechende hygri-sche, thermische oder hygrothermische Elemente zu definieren. Mittels einfacher eindimensionaler Elemente ist die Funktionsfähigkeit des hinzugefügten Moduls und die seiner möglichen Vereinfachungen (FIELD-1, FIELD-2) überprüft worden, vgl. Tabelle 5.3.

Für die angestrebte Kopplung zwischen hygrothermischer und mechanischer Modellierung auf der Querschnittsebene innerhalb der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Schalenelementformulierung ist diese Vorgehensweise nicht zielführend. Daher ist der Programmbaustein HYG THERM entwickelt worden, der zur Lösung eindimensionaler, hygrothermischer Problemstellungen eingesetzt werden kann und auch entkoppelt vom verwendeten Programmsystem lauffähig ist. In diesen sind die in Tabelle 5.2 aufgeführten Modellvarianten integriert worden, die sich durch die Art der Formulierung der Materialparameter unterscheiden.

Modellbezeichnung	Wärmeleitfähigkeit	Feuchte-speicherfunktion	Dampftransport	Flüssigkeits-transport
Therm	Gl. (3.80)	-	-	-
Hyg-1	-	Gl. (3.89)	Gl. (3.49)	Gl. (3.86)
Hyg-2	-	Gl. (3.89)	Gl. (3.49)	Gl. (3.85)
HygTherm-1	Gl. (3.79)	Gl. (3.89)	Gl. (3.49)	Gl. (3.86)
HygTherm-2	Gl. (3.79)	Gl. (3.90)	Gln. (A.6),(A.12)	Gl. (3.86)
HygTherm-3	Gl. (3.80)	Gl. (3.89)	Gl. (3.49)	Gl. (3.85)
HygTherm-4	Gl. (3.80)	Gl. (3.89)	Gl. (3.49)	Gl. (3.86)
HygTherm-5	Gl. (3.79)	Gl. (3.90)	Gl. (3.49)	Gl. (3.86)

Tabelle 5.2: Implementierte Modellvarianten im Programmbaustein HYG THERM.

Durch die Kopplung von HYG THERM mit dem verwendeten Schalenelement auf der Ebene seiner Integrationspunkte kann die hygrothermische Situation im Querschnitt im jeweiligen Zeitschritt innerhalb der kombinierten Simulation erfasst werden. Der erforderliche Datentransfer zwischen den Programmteilen erfolgt über eine hinzugefügte Schnittstelle. Die Vorgabe der Eingangsdaten für die hygrothermische Berechnung wird über das jeweilige Schalenelement gesteuert. Für die Vorgabe von analytisch beschreibbaren Randbedingungen werden die ursprünglich für dynamische Problemstellungen in das Programmsystem integrierten Last-Zeit-Funktionen benutzt. In dem hier vorliegenden Fall können damit Einwirkungen in Form einer zeitlich veränderlichen Umgebungstemperatur oder relativen Umgebungfeuchte vorgegeben werden. In Bild 5.11 sind mögliche Einwirkungs-Zeit-Funktionen dargestellt.

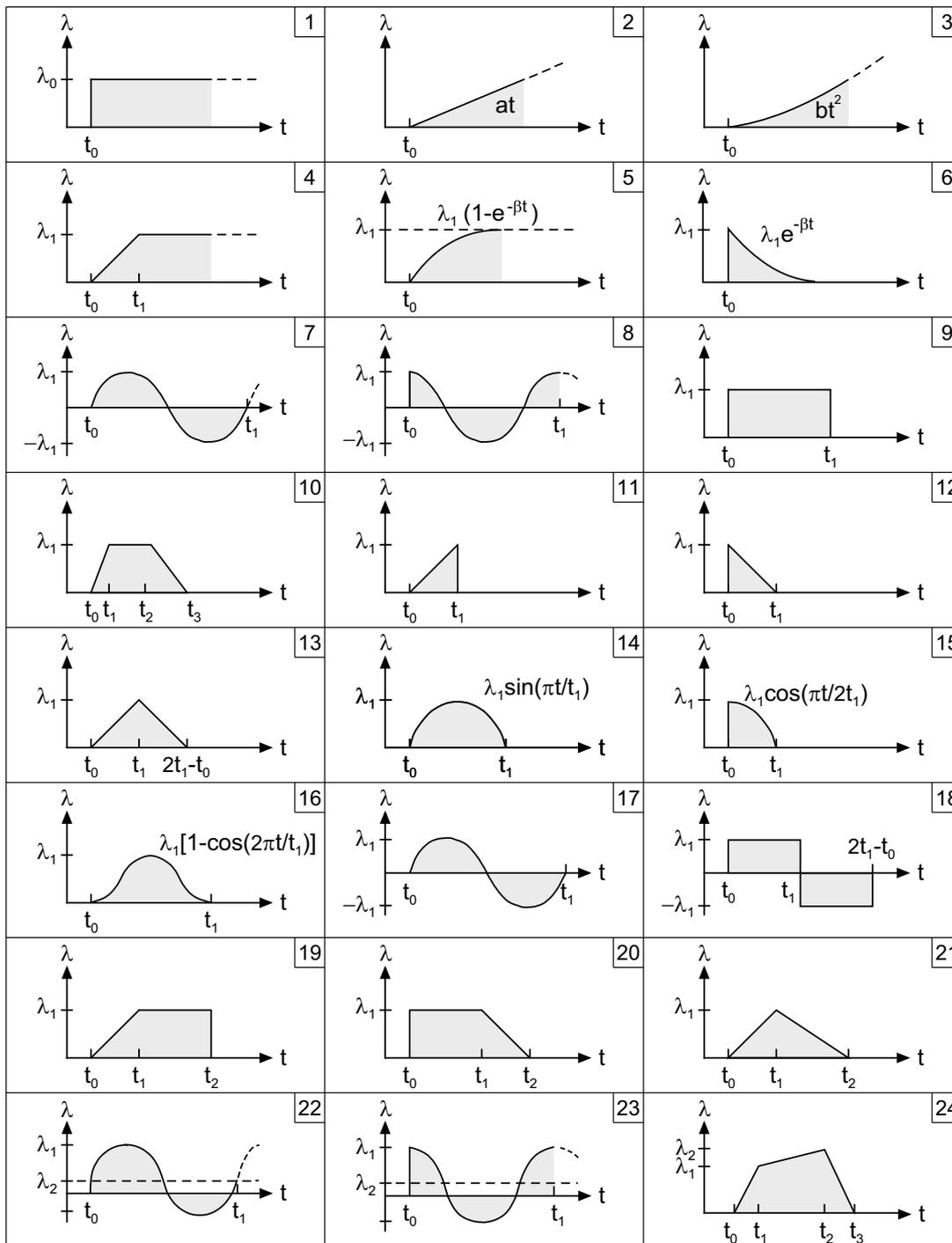


Bild 5.11: Einwirkungs-Zeit-Funktionen für die Vorgabe thermischer oder hygrischer Umgebungsbedingungen.

Einen Überblick über die in Andres (2004) und der vorliegenden Arbeit durchgeführten Erweiterungen und Ergänzungen zeigt die Tabelle 5.3. Detaillierte Informationen zu den Berechnungsbausteinen sind Beem, Könke, Montag & Zahlten (1996) und Harte, Andres & Wörmann (2003) zu entnehmen.

Problembeschreibung	Systemgleichungen	Module
lineare Statik	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-1
Theorie 2. Ordnung	$\{\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V})\} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-2
nichtlineare Statik ^{*,**}	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-3
nichtlineare Statik mit begleitender Eigenwertanalyse für Stabilitätsprobleme ^{**}	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$ $\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot (\mathbf{K}_u(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V}))\} \cdot \Phi = \mathbf{0}$	STA-4
nichtlineare Statik mit Last-Zeit-Funktion	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(t)$	STA-5
nichtlineare Statik mit begleitender Eigenfrequenzberechnung [*]	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$ $\{\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}\} \cdot \Phi = \mathbf{0}$	STA-6
nichtlineare Statik mit linearem und nicht-linearem Materialgesetz ^{**}	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-7
klassische Stabilität	$\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V})\} \cdot \Phi = \mathbf{0}$	STB-1
lineare Statik mit Anwendung des Stabilitätskriteriums von MÜNGER ^{**}	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STB-2
lineare Stabilitätsanalyse mit geschädigter Struktur ^{**}	$\{\mathbf{K}_e(d) + \Lambda \cdot \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V}, d)\} \cdot \Psi = \mathbf{0}$	STB-3
Eigenfrequenzberechnung	$\{\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}\} \cdot \Phi = \mathbf{0}$	DYN-0
lineare Dynamik	$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(t)$	DYN-2
nichtlineare Dynamik	$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(t)$	DYN-3
lineare, stationäre Feldprobleme [*]	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{P}$	FIELD-1
lineare, instationäre Feldprobleme [*]	$\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{P}(t)$	FIELD-2
nichtlineare, instationäre Feldprobleme [*]	$\mathbf{C}(\mathbf{Z}) \cdot \dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{P}(\mathbf{Z}, t)$	FIELD-3
nichtlineare, instationäre Feldprobleme [*]	$\mathbf{C}(\mathbf{Z}) \cdot \dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{P}(\mathbf{Z}, t)$	HYGTHERM

Tabelle 5.3: Erstellung bzw. Erweiterung der Programmmodule von FEMAS 2000 innerhalb dieser Arbeit (...) ^{*} und nach Andres (2004) (...) ^{**}.

5.4 Nichtlineare Strukturanalyse

Nichtlineare Verfahren werden in der Forschung schon seit längerer Zeit zur Untersuchung von Stahlbetonstrukturen eingesetzt. Unter Berücksichtigung der auftretenden Nichtlinearitäten des Stahlbetons, wie der Rissbildung, des Betondruckbruchverhaltens und des Plastifizierens der Bewehrung, können damit die Schnittgrößenverteilungen und Verformungszustände in Tragwerken für unterschiedliche Belastungsniveaus wirklichkeitsnah ermittelt werden. Die Ergebnisse derartiger Berechnungen sind jedoch direkt abhängig von den in sie einfließenden strukturmechanischen und sicherheitstheoretischen Modellen.

5.4.1 Normative Vorgaben

In der alten Normengeneration ist der Einsatz nichtlinearer Verfahren zur Dimensionierung der Tragwerke weitestgehend nicht zugelassen. Die derzeit noch übergangsweise bis Ende 2004 gültige DIN 1045 (1988) sieht im Allgemeinen die Schnittgrößenermittlung mit einem linearen Stoffgesetz und den Mittelwerte der Materialfestigkeiten vor. Die anschließende Querschnittsbemessung basiert auf einer globalen Sicherheitsbetrachtung, entsprechend dem, der Norm zugrundeliegenden, deterministischen Sicherheitskonzept. Sie erfolgt unter Verwendung eines nichtlinearen Stoffgesetzes und der sicherheitsbehafteten fraktilen Materialgrößen. Dabei ist der globale Sicherheitsfaktor γ in Abhängigkeit von der Bruchdehnungsebene und der Art der Einwirkungen anzusetzen. Das Versagen der Gesamtkonstruktion wird bei dieser Vorgehensweise bereits angenommen, sobald der höchstbelastete Querschnitt den Bruchzustand erreicht. Systemreserven des Tragwerks werden hiermit nicht ausgenutzt. Ein weiterer Nachteil ist die inhärente Inkonsistenz sowohl der zugrundeliegenden Stoffgesetze als auch die der angesetzten Materialfestigkeiten.

Die neue Normengeneration basiert auf dem semi-probabilistischen Sicherheitskonzept. Die Einwirkungen S und die Tragwiderstände R werden mit partiellen Sicherheitsfaktoren belegt, womit ein gleichmäßigeres Sicherheitsniveau angestrebt wird. Die erforderlichen Nachweise in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit gelten dann als erfüllt, wenn der Bemessungswert der maßgebenden Einwirkungskombination kleiner ist als der Bemessungswert des Tragwiderstands ($S_d < R_d$). Die Bemessungswerte ergeben sich aus der Multiplikation ihrer charakteristischen Werte mit den entsprechenden Teilsicherheitsbeiwerten. Im Falle der veränderlichen Einwirkungen sind zusätzlich Kombinationsbeiwerte definiert. Sowohl EC 2 (1992) als auch DIN 1045-1 (2001) erlauben unter anderem den Einsatz nichtlinearer Verfahren. Sie unterscheiden sich jedoch durch die jeweiligen Vorgaben.

Nach EC 2 (1992) sind neben linear-elastischen nun auch nichtlineare Verfahren zur Schnittgrößenermittlung in beiden Grenzzuständen zugelassen. Für die Materialfestigkeiten sind dabei die Mittelwerte anzusetzen. Die bereits angesprochene Inkonsistenz wird hierdurch noch nicht aufgehoben. Durch dieses Vorgehen werden jedoch zum einen die Zwangseinwirkungen mit realistischen Steifigkeiten erfasst und zum anderen die möglichen Umlagerungsvorgänge in Stahlbetonstrukturen, besonders in den hochgradig statisch unbestimmten Flächentragwerken, besser ausgenutzt. Dies kann zu einer wirtschaftlicheren Bemessung gegenüber den bisherigen normativen Ansätzen führen.

Die Regelungen der DIN 1045-1 (2001) gehen noch einen Schritt weiter und gestatten den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit über den Nachweis einer ausreichenden Grenztraglast. Derartige Traglastkonzepte basieren auf der Untersuchung des Gesamtsystems. Bei einer realitätsnahen Abbildung der Festigkeiten über die Mittelwerte der Materialeigenschaften ergibt sich allerdings eine Abhängigkeit des Sicherheitsniveaus von der Versagensart. Das in DIN 1045-1 (2001) aufgenommene Traglastkonzept versucht dies zu vermeiden und gibt einen einheitlichen „gemittelten“ Sicherheitsfaktor von $\gamma_R = 1.3$ vor. Die jeweiligen Unterschiede in den Materialunsicherheiten ($\gamma_c = 1.50, \gamma_s = 1.15$) werden auf die zugehörigen Festigkeiten übertragen [König, Tue & Ahner 1997; König & Ahner 2000]. Die anzusetzenden Rechenfestigkeiten lauten

$$\begin{aligned}
 f_{yR} &= 1.1 \cdot f_{yk} \\
 f_{tR} &= 1.05 \cdot f_{yR} && \text{für normalduktilen Stahl} \\
 f_{tR} &= 1.08 \cdot f_{yR} && \text{für hochduktilen Stahl} \\
 f_{cR} &= 0.85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} && \text{für Beton bis C50/60} \\
 f_{cR} &= 0.85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} / \gamma'_c && \text{für Beton ab C55/67.}
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

Durch die modifizierten Festigkeiten und den einheitlichen Sicherheitsfaktor γ_R bleiben die Größen der Materialteilsicherheitsbeiwerte „prinzipiell“ erhalten:

$$\frac{0.85 \cdot \alpha \cdot f_{ck}}{1.3} = \frac{\alpha \cdot f_{ck}}{1.529} \approx \frac{\alpha \cdot f_{ck}}{1.50} \quad \text{und} \quad \frac{1.1 \cdot f_{yk}}{1.3} = \frac{f_{yk}}{1.182} \approx \frac{f_{yk}}{1.15}. \tag{5.86}$$

Da der Nachweis auf Systemebene geführt wird, ist die Tragfähigkeit über das Erreichen von Bruchdehnungen und nicht über Festigkeiten definiert. Nach DIN 1045-1 (2001), 8.5.1 (6) gilt der Grenzzustand der Tragfähigkeit als erreicht, wenn in einem beliebigen Querschnitt des Tragwerks die kritische Stahldehnung, die kritische Betondehnung oder der kritische Zustand des indifferenten Gleichgewichts erreicht ist.

5.4.2 Verwendete Vorgehensweise

Das in DIN 1045-1 (2001) aufgenommenen Verfahren geht zweifelsohne in die richtige Richtung, die bereits veröffentlichten kritischen Auseinandersetzungen mit den normativen Vorgaben zeigen aber auch, dass es noch keine endgültige Lösung sein kann [Quast 2000; Six 2003]. Im folgenden werden einige Kritikpunkte aufgezeigt und die innerhalb dieser Arbeit verwendete Vorgehensweise vorgestellt.

Eine wirklichkeitsnahe Beschreibung der Baustoffeigenschaften kann nach Meinung des Verfassers nur durch die Verwendung realer Mittelwerte der Materialgrößen erfolgen. Bei den rechnerischen Mittelwerte in (5.85) handelt es sich jedoch um modifizierte Fraktilwerte. Dies begründet sich in dem verwendeten Sicherheitskonzept mit Teilsicherheitsbeiwerten, das definitionsgemäß auf die Verwendung von Fraktilwerten ausgerichtet ist. Mit diesen wird allerdings das Bauteilverhalten der schwächsten Stelle beschrieben, was für die bis dato auf eine Querschnittsbemessung ausgelegten Nachweiskonzepte zutreffend war, für die Nachweise auf Systemebene aber nicht gelten kann. Somit wird das reale Bauteilverhalten zu ungünstig abgebildet. Die Aufspaltung der Sicherheitsbeiwerte

in Material- und Modellunsicherheiten versucht diesem Umstand zwar Rechnung zu tragen, der konstante Faktor für die Modellunsicherheit γ_R führt jedoch dazu, dass neben den Materialfestigkeiten auch die Steifigkeiten reduziert werden.

Unter anderem von Six (2003) wird bemängelt, dass zugunsten des Sicherheitskonzeptes ein Eingriff in die mechanische Modellbildung vorgenommen wird. Dieses Problem tritt nicht auf, wenn ein dehnungsabhängiger Sicherheitsbeiwert verwendet wird, wie es die Modellansätze von Eibl (1992) vorsehen. Six (2003) hat diese in seiner Arbeit aufgegriffen und formuliert einen Beiwert in Abhängigkeit der Versagensarten spröde bis duktil, der ebenfalls an dem bisherigen Sicherheitsniveau mit Hilfe probabilistischer Verfahren kalibriert wurde.

Kritisch zu beurteilen ist auch die γ -fache Steigerung der gesamten Lastfallkombination, wie es die Regelungen der Norm vorsehen. Bei Tragwerken, wo sich alle Einwirkungen ungünstig auswirken, ist einer derartiger Ansatz zutreffend. Beeinflusst hingegen das Eigengewicht die zum späteren Versagen führenden Tragwerksteile positiv, wie es bei turmartigen Schalenbauwerken häufig der Fall ist, führt die Erhöhung des Eigengewichtsanteils zu einer auf der unsicheren Seite liegenden Dimensionierung des Tragwerks. Deshalb ist es in solchen Fällen sinnvoll, das Eigengewicht aus der Kombination bei der Laststeigerung herauszunehmen. In beiden Fällen ist ein Sicherheitsniveau von $\gamma_R = 1.3$ bei der Traglaststeigerung der Kombination zu erreichen.

Alle warmgewalzten Stähle, somit auch Bewehrungsstabstahl, werden in die Duktilitätsklasse (B) eingeteilt. Für diese wird die maximale Stahldehnung zu $\varepsilon_{su} = 5.0\%$ normativ festgelegt. Für die nichtlinearen Analysen soll die kritische Stahldehnung jedoch unabhängig von der Duktilitätsklasse zu $\varepsilon_{su} = 2.5\%$ angenommen werden. Hieraus resultiert eine konservative Abschätzung der Traglast.

Für die in Kapitel 7 durchgeführten Berechnungen werden abweichend von den Gleichungen (5.85) die Mittelwerte der Materialeigenschaften angesetzt:

$$\begin{aligned}
 f_{yR} &= f_{ym} = f_{yk} \\
 f_{tR} &= 1.05 \cdot f_{yR} && \text{für normalduktilen Stahl} \\
 f_{tR} &= 1.08 \cdot f_{yR} && \text{für hochduktilen Stahl} \\
 f_{cR} &= f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [N/mm}^2\text{]} && \text{für Beton bis C50/60} \\
 f_{cR} &= f_{cm}/\gamma'_c = (f_{ck} + 8)/\gamma'_c \text{ [N/mm}^2\text{]} && \text{für Beton ab C55/67.}
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

Der Ansatz der mittleren Betonfestigkeit f_{cm} entspricht der Vorgabe aus DIN 1045-1 (2001), 9.1.5 (1), die dort jedoch lediglich für die Verformungsberechnung, nicht aber für die Schnittgrößenermittlung zugelassen wird. Hinsichtlich der Festlegung einer mittleren Stahlfestigkeit des Betonstahls sind in der Norm keine Angabe gemacht worden. Der als Mittelwert verwendete Fraktilwert der Stahlfestigkeit f_{yk} ist als solcher gebräuchlich. Der Ansatz eines einheitliche Tragwiderstands mit $\gamma_R = 1.3$ ist hier nicht mehr sinnvoll. Diese Art der Nachweisführung erfordert die Definition von versagensabhängigen Tragwiderständen [Quast 2000; Constantinescu 2000; Eibl 2000; Six 2003]. Für eine sinnvolle Festlegung solcher Sicherheiten sind umfangreiche Zuverlässigkeitsanalysen an unterschiedlichen Tragstrukturen durchzuführen [Six 2003]. In Abhängigkeit der zu erwartenden Versagens-

art werden hier die Materialunsicherheiten 1.15 bzw. 1.50 als zu erreichende Grenzwerte der Tragwiderstände festgelegt.

In der numerischen Analyse sind die einzelnen Einwirkungen, multipliziert mit den zugehörigen Teisicherheits- und Kombinationsbeiwerten, nacheinander auf das System aufzubringen. Die letzte Einwirkung wird dann solange gesteigert, bis das Tragwerk versagt. Über den Abstand des resultierenden Sicherheitsniveaus zum Grenzwert des maßgebenden Tragwiderstands ist eine Beurteilung der Tragfähigkeitsreserven möglich.

Die hier behandelten instationären Prozesse sind in geeigneter Weise in eine derartige Lastfolge zu integrieren. Durch die in Abschnitt 5.4.5 beschriebenen Möglichkeiten ist sowohl die inkrementelle Steigerung in einem eigens definierten Lastfall als auch die gemeinsame Steigerung mit weiteren Lastfällen durchzuführen. Somit können sinnvolle Lastfolgen für die zu untersuchende Problemstellung definiert werden, mit denen das Tragverhalten im Allgemeinen und der Einfluss der hygri-schen und thermischen Einwirkungen im besonderen untersucht werden können.

5.4.3 Zeitabhängige Multi-Level-Iterations-Strategie

Für die Berechnung physikalisch und geometrisch nichtlinearer Last-Verformungs-Pfade unter Einsatz des in Abschnitt 5.2.3 beschriebenen Schichtenkonzepts wird von Krätzig (1997) der Begriff Multi-Level-Simulations-Strategie verwendet. Dieses Konzept, welches beispielsweise in den Arbeiten von Montag (1997), Pölling (2000) und Noh (2002) für zeitunabhängige Strukturuntersuchungen eingesetzt worden ist, wird an dieser Stelle für zeitabhängige Prozesse erweitert. Im Folgenden wird der neu entwickelte Algorithmus vorgestellt. Bei der Analyse wird zwischen Zeit- und Lastschritten unterschieden. In letzteren wird eine definierte Lastfallkombination aus den stationär angenommenen Einwirkungen (wie z.B. Eigengewicht, Verkehrslasten, Windbeanspruchung, stationäre Temperatureinwirkungen) gesteigert. Innerhalb eines Zeitschritts kann die Struktur mit den Auswirkungen der instationären Prozesse des Schwindens, des Kriechens oder einer zeitabhängigen Temperatureinwirkung beansprucht werden. Auch die gleichzeitige Steigerung der Last und Zeit in der numerischen Berechnung ist möglich. Nähere Informationen hierzu sind in Abschnitt 5.4.5.2 zu finden. Unabhängig davon, ob es sich um einen Lastschritt, Zeitschritt oder einen kombinierten Last-Zeit-Schritt handelt, wird im Folgenden einheitlich die Abkürzung LZS verwendet. Die Vorgehensweise innerhalb der zeitabhängigen Multi-Level-Simulation wird getrennt für einen Steigerungs- und einen Iterationsschritt beschrieben. In den Bildern 5.12 und 5.13 sind die jeweiligen Abläufe dargestellt. In den weiteren Ausführungen steht der Index (l) für den betrachteten LZS und der Index (i) für den Iterationsschritt.

Ausgangspunkt des (l)-ten Steigerungsschrittes sind die zuvor bestimmten globalen Verschiebungen $\mathbf{V}_{(l-1)}$, die über die Inzidenztransformation in die lokalen Verschiebungen $\mathbf{v}_{(l-1)}$ auf Elementebene überführt werden. Unter Beachtung der vorliegenden Kinematik und Ansatzfunktionen lassen sich daraus die Gesamtverzerrungen in den GAUSSpunkten $\gamma_{ij(l-1)}$ berechnen, aus denen, entsprechend dem verwendeten Schichtenkonzept, die Gesamtverzerrungen in jeder Schicht $\varepsilon_{ij(l-1)}$ resultieren. Als Eingangsgrößen für das verwendete Materialgesetz werden nur die instantanen Verzerrungen $\varepsilon_{ij(l-1)}^I$ benötigt. Sie können

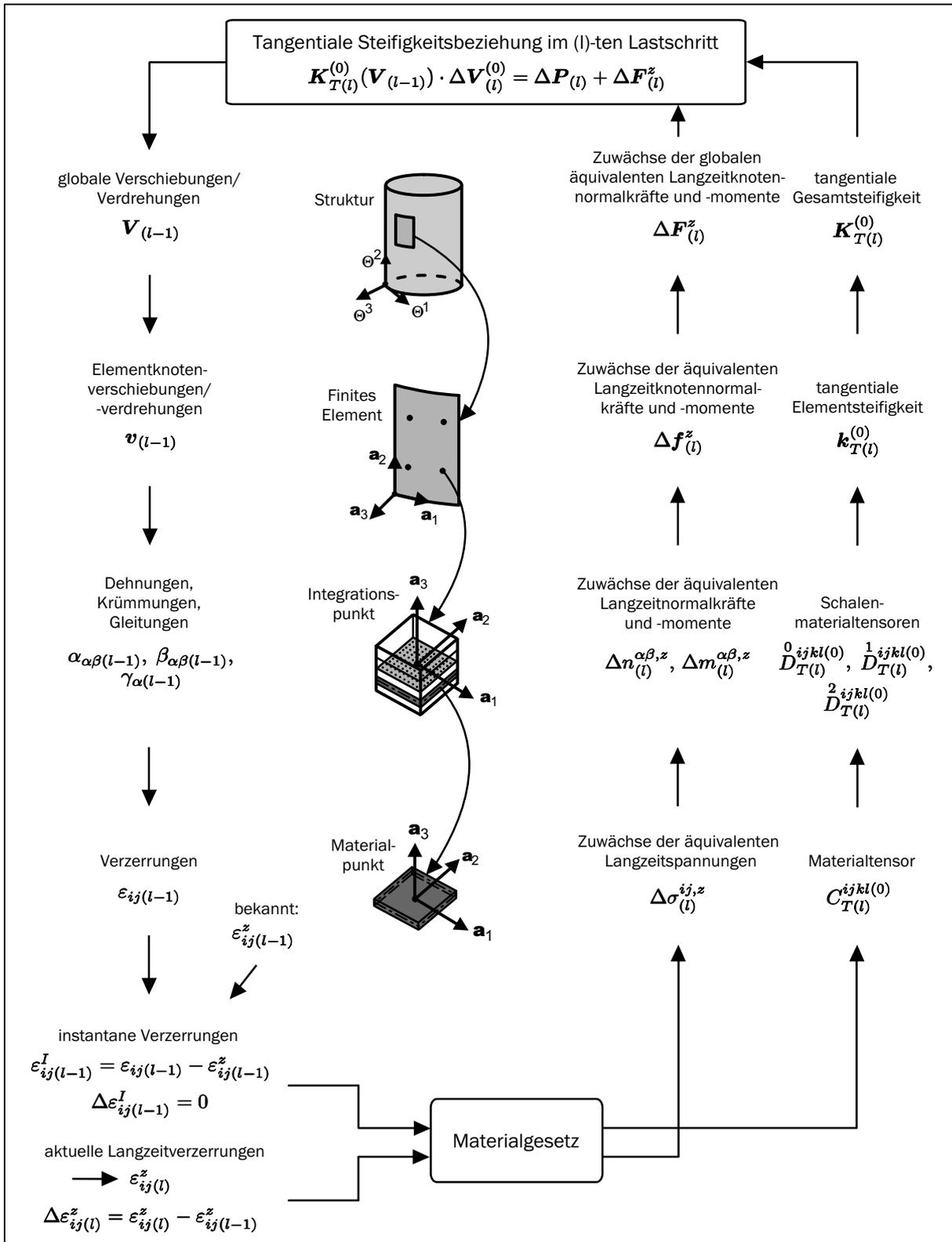


Bild 5.12: Ablauf der zeitabhängigen Multi-Level-Simulation im Last-Zeit-Schritt.

durch die Subtraktion der aus dem letzten LZS bekannten zeitabhängigen Verzerrungen $\varepsilon_{ij}^z(l-1)$ von den Gesamtverzerrungen $\varepsilon_{ij}(l-1)$ ermittelt werden:

$$\varepsilon_{ij}^I(l-1) = \varepsilon_{ij}(l-1) - \varepsilon_{ij}^z(l-1). \quad (5.88)$$

Auf der Materialpunktebene fließen jetzt die aktuellen zeitabhängigen Verzerrungen $\varepsilon_{ij}^z(l)$ in die Berechnung mit ein, deren Ermittlung in Abschnitt 5.4.5 beschrieben wird. Für die entsprechenden Zuwächse gilt:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^z(l) = \varepsilon_{ij}^z(l) - \varepsilon_{ij}^z(l-1). \quad (5.89)$$

Aus dem Materialgesetz resultiert der tangentielle Materialsteifigkeitstensor $C_{T(l)}^{ijkl(0)}$, der durch Integration über die Schalendicke entsprechend Gleichung (5.21) in die Schalenmaterialtensoren $\overset{m}{D}^{ijkl}$ mit $m = 0, 1, 2$ und weiter in die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}_{T(l)}^0$ und schließlich in die tangentielle Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{T(l)}^0$ überführt wird. Aus den zeitabhängigen Verzerrungszuwächsen in den einzelnen Schichten $\Delta\varepsilon_{ij}^z(l)$ werden, falls sie vorhanden sind, die äquivalenten Langzeitspannungszuwächse $\Delta\sigma_{(l)}^{ij,z}$ durch die Multiplikation mit den in den Schichten aktuell vorliegenden Elastizitätsmodulen berechnet.

Damit unterscheidet sich die Erfassung der thermischen Einwirkungen im numerischen Simulationsmodell von der in früheren Arbeiten, z.B. Zahlten (1990) und Noh (2002). In diesen Arbeiten sind die äquivalenten Lastanteile, die der insgesamt aufzubringenden Temperatureinwirkung entsprechen, mit denen im Ausgangszustand vorliegenden Steifigkeiten berechnet worden. Die Berücksichtigung im jeweiligen Lastschritt erfolgt dann mit einem dem Lastinkrement entsprechenden Anteil, der sich durch die Multiplikation des Steigerungsfaktors mit der äquivalenten Gesamtlast ergibt. Durch die Änderung der Steifigkeiten im betrachteten Belastungsprozess kommt es somit zu Abweichungen zwischen den Steifigkeiten, die der Bestimmung der äquivalenten Lastanteile zu Grunde liegt und den aktuell vorhandenen Steifigkeiten.

Nach der Integration in die äquivalenten Langzeitschnittgrößen folgen daraus auf Element- und Strukturebene die Vektoren $\Delta\mathbf{f}_{(l)}^z$ bzw. $\Delta\mathbf{F}_{(l)}^z$. In der jetzt durchzuführenden Steigerung

$$\mathbf{K}_{T(l)}^0(\mathbf{V}_{(l-1)}) \cdot \Delta\mathbf{V}_{(l)}^{(0)} = \Delta\mathbf{P}_{(l)} + \Delta\mathbf{F}_{(l)}^z \quad (5.90)$$

wird entweder im Lastschritt ein zusätzliches Lastinkrement $\Delta\mathbf{P}_{(l)} = \mathbf{P}_{(l)} - \mathbf{P}_{(l-1)}$ oder im Zeitschritt die mit den zeitabhängigen Dehnungsinkrementen $\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^z(l)$ korrespondierenden Ungleichgewichtskräfte $\Delta\mathbf{F}_{(l)}^z$ aufgebracht. Damit ergeben sich die aktuellen, noch nicht ausiterierten Verschiebungen zu

$$\mathbf{V}_{(l)}^{(0)} = \mathbf{V}_{(l-1)} + \Delta\mathbf{V}_{(l)}^{(0)}. \quad (5.91)$$

In den anschließenden Iterationsschritten werden aus den globalen Verschiebungen $\mathbf{V}_{(l)}^{(i-1)}$, wie zuvor beschrieben, die Verzerrungen in der einzelnen Schicht am Integrationspunkt $\varepsilon_{ij}^{(i-1)}$ ermittelt. Dabei folgt für die 1. Iteration ($i = 1$) die Verschiebung $\mathbf{V}_{(l)}^{(0)}$ aus Gleichung

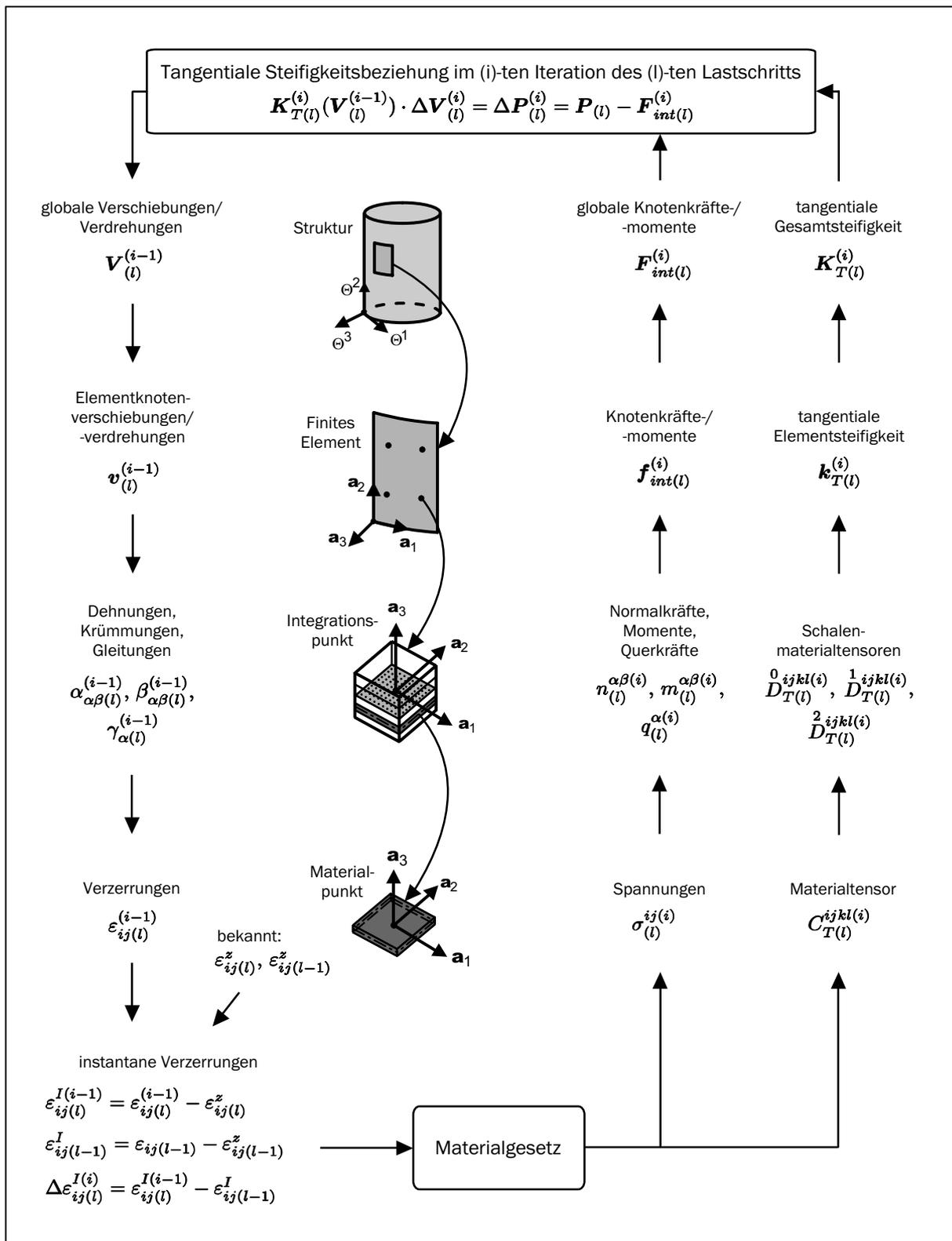


Bild 5.13: Ablauf der zeitabhängigen Multi-Level-Simulation im Iterationsschritt.

(5.91). Durch das Aufbringen der Ungleichgewichte im LZS sind in den Gesamtverzerrungen $\varepsilon_{ij}^{(i-1)}$ die zeitabhängigen Verzerrungen $\varepsilon_{ij}^z(l)$ enthalten. Es werden auf der Layerebene die spannungserzeugenden Verzerrungen des aktuellen Iterationsschritts $\varepsilon_{ij}^{I(i-1)}$:

$$\varepsilon_{ij}^{I(i-1)} = \varepsilon_{ij}^{(i-1)} - \varepsilon_{ij}^z(l), \quad (5.92)$$

die des letzten ausiterierten Zeitschritts $\varepsilon_{ij}^I(l-1)$:

$$\varepsilon_{ij}^I(l-1) = \varepsilon_{ij}^{(l-1)} - \varepsilon_{ij}^z(l-1) \quad (5.93)$$

und die dazwischen liegenden Verzerrungszuwächse $\Delta\varepsilon_{ij}^{I(i)}$:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{I(i)} = \varepsilon_{ij}^{I(i-1)} - \varepsilon_{ij}^I(l) \quad (5.94)$$

bestimmt. Der Aufbau der tangentialen Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{T(l)}^{(i)}$ erfolgt in Analogie zum LZS. Aus den Spannungen in den einzelnen Schichten $\sigma_{(l)}^{ij(i)}$ resultieren die Schnittkräfte auf Querschnittsebene im Integrationspunkt, womit sich weiter der Elementvektor $\mathbf{f}_{int(l)}^{(i)}$ und der Gesamtvektor der inneren Kräfte $\mathbf{F}_{int(l)}^{(i)}$ bestimmen lassen. Ein Ungleichgewicht zwischen dem Lastvektor und dem Vektor der inneren Kräfte führt zu einer weiteren Iteration. Die zeitabhängigen Größen sind in der Iteration nicht explizit zu berücksichtigen, da sie jeweils im Zeitschritt durch entsprechende Verschiebungen bzw. Spannungen in die Strukturberechnung mit einfließen. Damit folgt die Steifigkeitsbeziehung für den Iterationsschritt zu:

$$\mathbf{K}_{T(l)}^{(i)}(\mathbf{V}_{(l)}^{(i-1)}) \cdot \Delta\mathbf{V}_{(l)}^{(i)} = \Delta\mathbf{P}_{(l)}^{(i)} = \mathbf{P}_{(l)} - \mathbf{F}_{int(l)}^{(i)}(\mathbf{V}_{(l)}^{(i-1)}). \quad (5.95)$$

Mit den inkrementellen Verschiebungszuwächsen können die Gesamtverschiebungen aktualisiert werden:

$$\mathbf{V}_{(l)}^{(i)} = \mathbf{V}_{(l)}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{V}_{(l)}^{(i)}. \quad (5.96)$$

5.4.4 Pfadverfolgungsalgorithmen

Die bekannten Pfadverfolgungsalgorithmen, die auf einer TAYLOR-Reihenentwicklung basieren, können den NEWTON-RAPHSON-Verfahren, den Bogenlängenverfahren oder den Quasi-NEWTON-Verfahren zugeordnet werden.

Das wohl am häufigsten eingesetzte Verfahren ist das von NEWTON-RAPHSON, welches in einer reinen oder modifizierten Form angewendet werden kann und dessen schematische Darstellung in der hier gewählten Notation in Bild 5.14 erfolgt.

Zu den Bogenlängenverfahren, die den Vorteil haben, dass sie auch abfallende Pfade überbrücken können, gehört unter anderem das RIKS-WEMPNER-WESSELS-Verfahren (Bild 5.15).

Die bekannteste Methode der Quasi-NEWTON-Verfahren, die einen Kompromiss zwischen dem modifizierten und dem reinen NEWTON-RAPHSON-Verfahren darstellen, ist

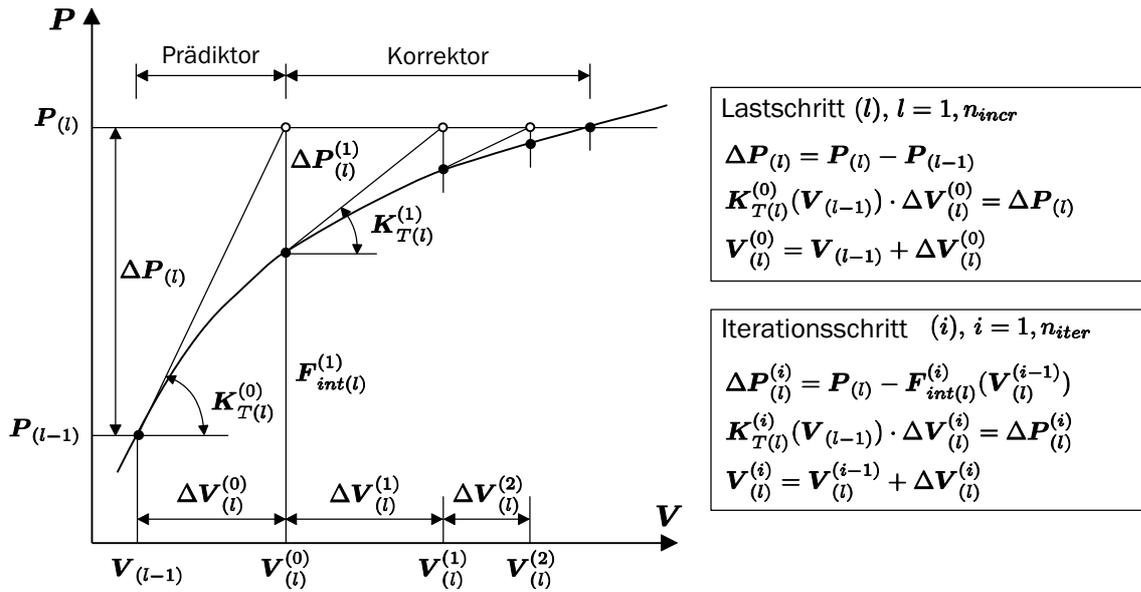


Bild 5.14: NEWTON-RAPHSON-Verfahren.

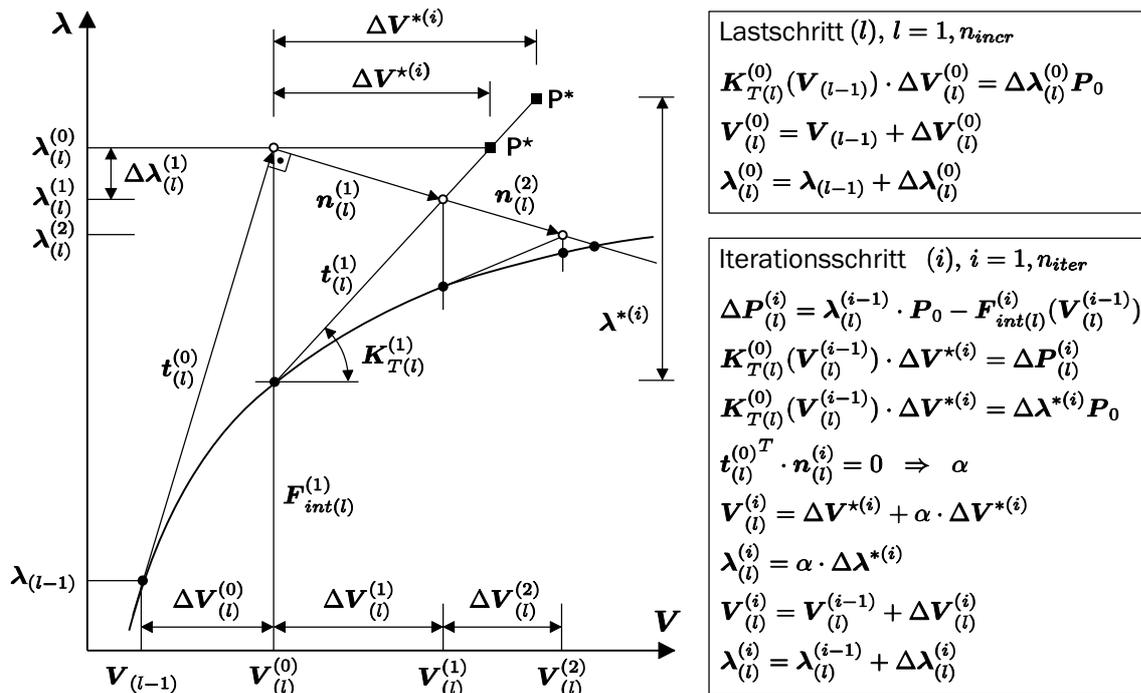


Bild 5.15: RIKS-WEMPNER-WESSELS-Verfahren.

die BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNO-Methode, kurz BFGS-Methode. Sie wird häufig für Optimierungsaufgaben eingesetzt. Für eine detaillierte Beschreibung der Pfadverfolgungsalgorithmen sei auf die Literatur verwiesen, z.B. Crisfield (1991).

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Verfahren von NEWTON-RAPHSON und RIKS-WEMPNER-WESSELS eingesetzt, die bereits im Programmsystem FEMAS 2000 implementiert sind.

5.4.5 Aspekte der numerischen Umsetzung der zeitvarianten Modellierung

In diesem Abschnitt wird auf einzelne Aspekte der durchgeführten Erweiterungen bezüglich der zeitinvarianten Betonmodellierung im verwendeten Programmsystem näher eingegangen. Die sich daraus ergebenden Möglichkeiten, die neu definierten Eingabeblocke, die teilweise Modifizierung der bestehenden Eingabeblocke und die Veränderungen im Programmsystem sind in Harte, Andres & Wörmann (2003) dokumentiert.

5.4.5.1 Definition beliebiger Last-Zeit-Folgen

Die Durchführung von nichtlinearen Traglast- oder Schädigungsanalysen erfordert zunächst die Definition von geeigneten Systemlastfällen (SLF), welche die zu erwartenden Einwirkungen in einer idealisierten Form wiedergeben. Diese Systemlastfälle können zu beliebigen Lastfallkombinationen (LFC) zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \text{LFC}_i &= \lambda_k^i \cdot \text{SLF}_k + \lambda_l^i \cdot \text{SLF}_l + \lambda_m^i \cdot \text{SLF}_m + \dots \\ \text{LFC}_j &= \lambda_k^j \cdot \text{SLF}_k + \lambda_l^j \cdot \text{SLF}_l + \lambda_m^j \cdot \text{SLF}_m + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.97)$$

Der zu untersuchende Gesamtlastfall (GLF) des Systems kann in aufeinanderfolgenden Berechnungsläufen mit den zuvor definierten Lastfallkombinationen sukzessive aufgebracht werden:

$$\text{GLF} = \lambda_i \cdot \text{LFC}_i + \lambda_j \cdot \text{LFC}_j + \dots \quad (5.98)$$

In einem speziellen Berechnungslauf wird jeweils ein Lastfaktor, beispielsweise λ_i , inkrementell gesteigert, während die anderen ihren zuletzt erreichten Wert beibehalten. Für die Steigerung ist die Vorgabe des Anfangslastfaktors λ_{iA} , des Lastinkrements $\Delta\lambda_i$ und des Endlastfaktors λ_{iE} notwendig. Bisher wurde dabei ausschließlich mit einem konstanten Laststeigerungsfaktor $\Delta\lambda_i$ gearbeitet [Beem, Könke, Montag & Zahlten 1996].

Innerhalb eines Zeitschritts erfolgt die Einbindung der zeitvarianten Prozesse in die nichtlinearen Analysen, wobei der Steigerungsfaktor in diesem Fall für die Steigerung der Zeit verwendet wird. Eine Inkrementierung mit konstanten Zeitschritten ist jedoch nicht immer sinnvoll. Die hygrischen Austrocknungsvorgänge und die Schwind- und Kriechprozesse im Beton laufen nicht gleichmäßig ab. Gerade zu Beginn treten größere Veränderungen auf. Orientiert man sich bei der Inkrementierung an den jeweiligen zu simulierenden Prozessen, ist eine numerisch günstigere Inkrementierung der Verzerrungsraten möglich, was den positiven Effekt der besseren Gleichgewichtssiteration mit sich bringt. Deshalb wurde die Möglichkeit geschaffen, neben einer linearen auch eine exponentielle Inkrementierung durchzuführen. Die entsprechende Inkrementierung für einen Lastschritt sieht wie folgt aus:

$$\lambda_i = \lambda_{iA} + \hat{\lambda}_i^{\text{PF}}. \quad (5.99)$$

Dabei ist $\hat{\lambda}_i$ der bis zur aktuellen Steigerung aufsummierte Steigerungsfaktor, der ohne Berücksichtigung der Potenzfunktion bestimmt wird. Durch die Art der Inkrementierung ergeben sich in Abhängigkeit des Potenzfaktors (PF) die folgenden Steigerungsmöglichkeiten:

$$\text{PF} \begin{cases} < 1 & \text{degressive Steigerung,} \\ = 1 & \text{lineare Steigerung,} \\ > 1 & \text{progressive Steigerung.} \end{cases} \quad (5.100)$$

Innerhalb eines Zeitschritts resultiert daraus die Zeitsteuerung

$$t_i = t_{iA} + \hat{\lambda}_i^{\text{PF}} \cdot (t_{iE} - t_{iA}). \quad (5.101)$$

Die Eingabe der Anfangszeit t_{iA} und der Endzeit t_{iE} erfolgt bei der Definition der jeweiligen Zeitlastfälle.

Neben einem reinen Lastschritt $\Delta \mathbf{P}_{(t)}$ oder einem reinen Zeitschritt $\Delta \mathbf{F}_{(t)}^z$ kann auch, wie bereits in Abschnitt 5.4.3 erwähnt, ein kombinierter Last-Zeit-Schritt durchgeführt werden. Für die simultane Steigerung der Last und Zeit wurde die Möglichkeit geschaffen, dass die eine Steigerung mit einer linearen Inkrementierung und die andere Steigerung gleichzeitig mit einer exponentiellen Inkrementierung vollzogen werden kann.

Anzumerken bleibt, dass in Verbindung mit einem Potenzfaktor ungleich Eins der Endsteigerungsfaktor λ_{iE} gleich Eins gewählt werden sollte, da sonst die Berechnung nicht bis zum gewünschten Niveau durchgeführt wird. Das stellt jedoch auch für die Laststeigerung keine prinzipielle Einschränkung dar, da die Höhe der Laststeigerung bei der Definition der Lastfallkombinationen berücksichtigt werden kann.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass nun eine beliebige Anzahl von Lastschritten, Zeitschritten oder Last-Zeit-Schritten nacheinander auf ein System aufgebracht werden kann.

5.4.5.2 Einbindung der zeitvarianten Verzerrungsanteile

Berechnung der lastunabhängigen Verzerrungen. Die Kopplung der hygrothermischen und mechanischen Stahlbetonmodellierung erfolgt auf der Materialpunktebene des bereits erläuterten Simulationskonzeptes. Innerhalb eines Last-Zeit-Schritts fließen auf dieser Ebene die lastunabhängigen Verzerrungen, die sich aus der Summe der thermischen und hygri-schen Anteile zusammensetzen, in die Simulation mit ein, vgl. Bild 5.12. Als Basis zu deren Bestimmung dienen die hygrothermischen Zustandsgrößen ϑ und h bzw. w , die auf Integrationspunktebene mit der in Abschnitt 5.3 dargestellten Vorgehensweise bestimmt werden. Diese in den Knoten der hygrothermischen Berechnungsschichten bestimmten Größen müssen für die weitere Berechnung in die Höhenlagen der Beton- und Stahlschichten transformiert werden. Die Umrechnung wird aufgrund der vorhandenen Möglichkeiten einer beliebigen Höhenlage der Bewehrung, einer in den unterschiedlichen Berechnungssequenzen abweichenden Schichtanzahl und einer nicht gleichmäßigen Schichtdickenverteilung für die hygrothermische Zustandsgrößenberechnung notwendig.

Ausgehend von den n_{ht} hygrothermischen Berechnungsschichten werden die Zustandsgrößen an den diskreten Knoten der n_c Betonschichten und n_s Stahlschichten berechnet.

Bild 5.16 zeigt exemplarisch eine derartige Transformation. Die Umrechnung zum jeweils aktuell betrachteten Knoten der Beton- oder Stahlschicht erfolgt unter Verwendung einer quadratischen Funktion mit den drei nächstgelegenen Werten aus der hygrothermischen Dickendiskretisierung.

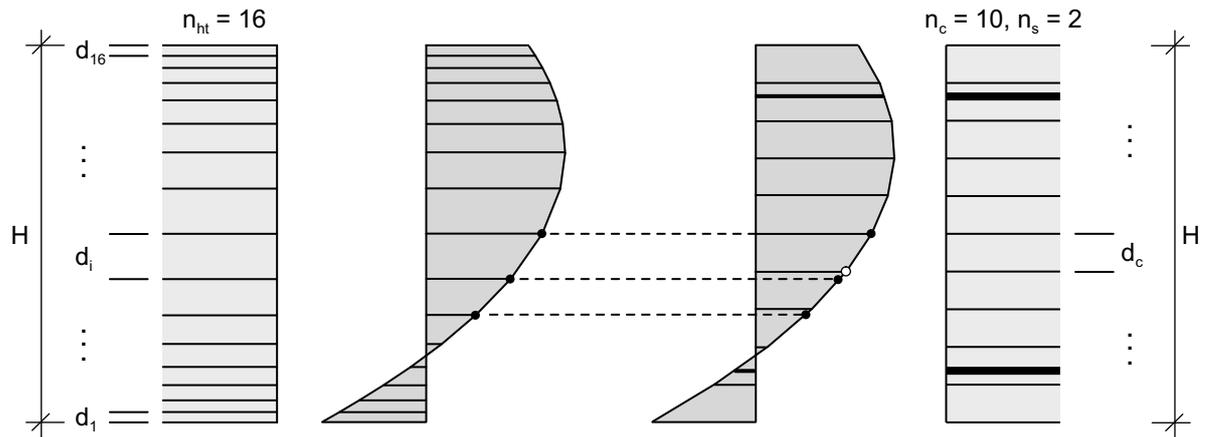


Bild 5.16: Numerische Transformation der hygrothermischen Zustandsgrößen aus den zu Grunde liegenden Berechnungsschichten in die Beton- und Stahlschichten

Liegen die hygrothermischen Zustandsgrößen in den Beton- und Stahlschichten vor, so lassen sich damit die lastunabhängigen Verzerrungen entsprechend der in Abschnitt 3.3.3 eingeführten Formulierungen bestimmen. Dabei kann für die hygrischen Verzerrungen alternativ die relative Feuchte h oder der Wassergehalt w eingesetzt werden. Entsprechend der verwendeten Schalentheorie bleiben Verzerrungen in Dickenrichtung unberücksichtigt. Die Zuwächse der reinen Volumendilatationen infolge thermischer und hygriischer Einwirkungen im aktuellen Zeitschritt werden in der Stahlbetonschalenmodellierung mit

$$\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^0(t_{i-1}, t_i) = \begin{cases} \Delta\varepsilon^0 A_{\alpha\beta} & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.102)$$

erfasst. Mittels der aus dem vorherigen Zeitschritt bekannten lastunabhängigen Verzerrungen $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(t_{i-1})$ können somit die aktuellen Verzerrungsanteile $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(t_i)$ ermittelt werden:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0(t_i) = \varepsilon_{\alpha\beta}^0(t_{i-1}) + \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^0(t_{i-1}, t_i). \quad (5.103)$$

Für die numerische Berechnung der lastunabhängigen Verzerrungsanteile aus den hygrothermischen Zustandsgrößen sind in dieser Arbeit verschiedene Alternativen implementiert worden. Zum einen werden die über die Schalendicke nichtlinear verlaufenden lastunabhängigen Verzerrungen in den Materialpunkten entsprechend der nichtlinearen Verteilungen erfasst. Zum anderen werden die lastunabhängigen Verzerrungen über die Schalendicke linearisiert, woraus eine über den Querschnitt lineare Verteilung resultiert. Die lineare Ausgleichsgerade wird unter Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Dabei erfolgt die Quadratur numerisch in Form der Trapezregel mit den

diskreten Werten der lastunabhängigen Verzerrungen, die auf der Höhe der Schichtknoten vorliegen. Wird das Querschnittsintervall auf die Dickenkoordinate θ^3 bezogen, so ergeben sich für den vorliegenden Fall der äquidistanten Stützstellen die beiden Parameter der NEWTON-COTES-Formel zu

$$\Delta\alpha_c^0 = \frac{\Delta\varepsilon_{c,1}^0 \cdot \frac{d}{2} + \sum_{n=2}^{N_c} \Delta\varepsilon_{c,n}^0 \cdot d + \Delta\varepsilon_{c,(N_c+1)}^0 \cdot \frac{d}{2}}{\sum_{n=1}^{N_c} d} \quad (5.104)$$

und

$$\Delta\beta_c^0 = \frac{\Delta\varepsilon_{c,1}^0 \cdot \frac{d}{2} \cdot \theta_1^3 + \sum_{n=2}^{N_c} \Delta\varepsilon_{c,n}^0 \cdot d \cdot \theta_n^3 + \Delta\varepsilon_{c,(N_c+1)}^0 \cdot \frac{d}{2} \cdot \theta_{N_c+1}^3}{\frac{d}{2} \cdot (\theta_1^3)^2 + \sum_{n=2}^{N_c} d \cdot (\theta_n^3)^2 + \frac{d}{2} \cdot (\theta_{N_c+1}^3)^2}. \quad (5.105)$$

Dabei ist $\Delta\alpha_c^0$ der Zuwachs der freien Mittendehnung im Zeitraum (t_{i-1}, t_i) und $\Delta\beta_c^0$ derjenige der Krümmung. Mit den beiden Parametern kann der Verzerrungszuwachs in der Höhe θ^3 wie folgt bestimmt werden:

$$\Delta\varepsilon^0 = \Delta\alpha^0 + \theta_n^3 \Delta\beta^0. \quad (5.106)$$

Bild 5.17 zeigt exemplarisch die Unterschiede für die beiden numerischen Berechnungsvarianten. Während bei der ersten Variante aus der Verzerrungsverteilung ein Eigenspannungszustand resultiert, entspricht die zweite Variante prinzipiell der in Abschnitt 4.2.6 skizzierten Vorgehensweise.

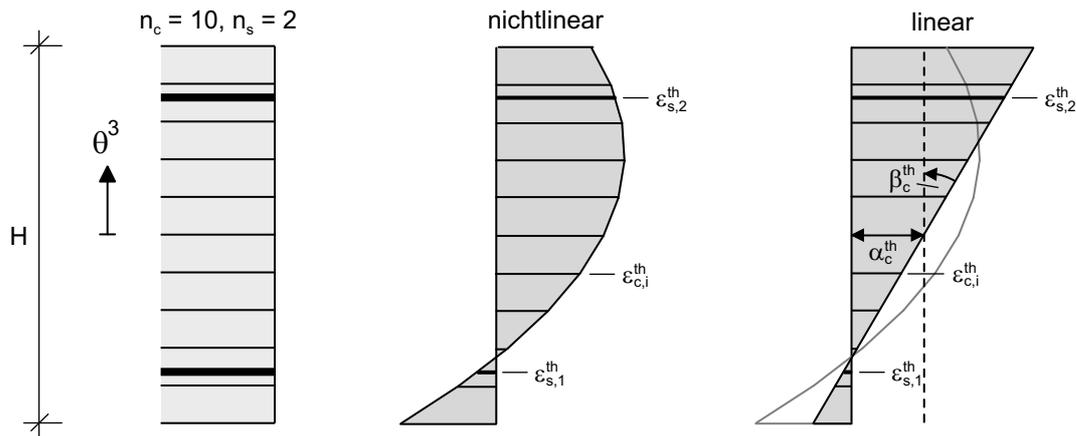


Bild 5.17: Numerische Berechnung lastunabhängiger (hier thermischer) Verzerrungen in Dickenrichtung mit linearer und nichtlinearer Berücksichtigung der Verzerrungsanteile

Durch vergleichende Berechnungen mit beiden Varianten kann der Einfluss der Eigenspannungen oder der Linearisierung auf die numerischen Ergebnisse analysiert werden.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass das Vorgehen bei den thermischen Verzerrungen sowohl für die Beton- als auch für die Stahlschichten gilt, während die hygrischen Verzerrungen entsprechend der getroffenen Annahmen nur in den Betonschichten Beachtung finden.

Auswertungsstufen der hygrothermischen und mechanischen Kopplung. Der numerische Aufwand zur Berechnung der hygrothermischen Situation ist bei der Analyse von größeren Stahlbetonstrukturen als nicht unerheblich zu bewerten. Die Effizienz der numerischen Simulation lässt sich durch eine an der zu untersuchenden Problemstellung angepasste Wahl der Berechnungsebene steigern. Bei der numerische Umsetzung im verwendeten Programmsystem sind daher drei Auswertungsstufen geschaffen worden:

- **Strukturebene.** Bei der Auswertung auf Strukturebene werden die hygrothermischen Zustandsgrößen lediglich an einem Punkt der Struktur innerhalb eines Zeitschritts berechnet. Diese Art der Auswertung ist möglich, wenn die zu untersuchende Struktur eine konstante Dicke und gleichmäßige Randbedingungen aufweist. Jedoch ist hiermit keine Beschränkung auf stationäre Randbedingungen gemeint.
- **Elementebene.** Diese Auswertungsebene ist anzuwenden, wenn in der Diskretisierung die Dicke und Randbedingungen von Element zu Element variieren, im Element jedoch einheitlich vorgegeben werden. Dann ist die Berechnung der hygrothermischen Zustandsgrößen an einem Integrationspunkt stellvertretend für das gesamte Element ausreichend.
- **Integrationspunktebene.** Variieren auch die Vorgaben im Element, wird eine Auswertung an jedem Integrationspunkt notwendig. Dieses Vorgehen wäre auch dann erforderlich, wenn in der hygrothermischen Modellierung der Einfluss der Rissbildung erfasst wird.

Berechnung der Kriechverzerrungen. Die Bestimmung der Kriechverzerrungen erfolgt im Allgemeinen mittels einer inkrementellen Vorgehensweise. Die Zeitintegration wird dann gewöhnlich mit Hilfe der Rechteck- oder Trapezregel durchgeführt. Vorteil der Trapezregel ist die genauere Abbildung der vorliegenden Spannungsgeschichte. Im Vergleich zur Rechteckregel, bei der lediglich die Spannungswerte zu Beginn des Zeitschritts benötigt werden, ist die Näherung mit der Trapezregel aufwendiger, weil die Spannungen zum nächsten Zeitpunkt zunächst unbekannt und erst einmal angenähert werden müssen.

Die Bestimmung der Kriechverzerrungen basiert in dieser Arbeit auf der Rechteckregel. Neubauer (2000) weist darauf hin, dass bei einer ausreichenden Anzahl von Zeitschritten der aus der stufenförmigen Spannungsapproximation resultierende Fehler sehr gering und somit die Ungenauigkeit für praktische Berechnungen belanglos ist.

Die inkrementellen Zuwächse der tensoriellen Kriechverzerrungen im Druck- und ungerissenen Zugbereich des Betons werden zum Zeitpunkt t_i mit

$$\varepsilon_{c,\alpha\beta}^{cr}(t_i) = \varepsilon_{c,\alpha\beta}^{cr}(t_{i-1}) + \Delta \varepsilon_{c,\alpha\beta}^{cr}(t_{i-1}, t_i) = \varepsilon_{c,\alpha\beta}^{cr}(t_{i-1}) + \varphi(t_{i-1}, t_i) \cdot \varepsilon_{c,\alpha\beta}^I(t_{i-1}) \quad (5.107)$$

bestimmt, vgl. Abschnitt 3.3.4. Dabei ist $\varphi(t_{i-1}, t_i)$ die Kriechzahl im Zeitintervall von t_{i-1} bis t_i . Für den gerissenen Zugbereich werden die Kriechverzerrungen zu Null gesetzt:

$$\varepsilon_{c,\alpha\beta}^{cr}(t_i) = 0. \quad (5.108)$$

Numerisch wird dies durch den Vergleich mit der vorhandenen Rissbildung realisiert, vgl. Abschnitt 3.1.4.

Im Betonstahl werden keine entsprechenden Verzerrungszuwächse berechnet. Somit wird ein ungewolltes „Stahlkriechen“ nicht modelliert.

Speicherung und Ausgabe der Verzerrungsanteile. Zur Erfassung des Langzeitverhaltens sind im Programmsystem zusätzliche Felder definiert worden, auf denen die Verzerrungszustände selbst und die notwendigen Verwaltungsinformationen abgelegt werden. Die Ansteuerung der Verzerrungsfelder erfolgt über einfache Adressberechnungen. Dabei ist darauf geachtet worden, dass auch für die durchgeführten Erweiterungen die RESTART-Fähigkeit uneingeschränkt gilt.

Die Ausgabe der Verzerrungsanteile wird über einen neu konzipierten Eingabeblock gesteuert. Ausgegeben werden die physikalischen Größen der im Beton auftretenden Verzerrungen, die sich aus den zugehörigen tensoriellen Größen ergeben [Başar & Krätzig 1985].

5.5 Nichtlineare Schädigungsanalyse

Die Lebensdauer von Stahlbetontragwerken wird durch unterschiedliche Schädigungs-, Alterungs- und Deteriorationsprozesse begrenzt. Somit verbleiben diese Tragwerke nicht im Zustand der „ewigen Jugend“, der jedoch in der Entwurfsmodellierung normenkonform angesetzt wird [Krätzig & Noh 1998]. Ziel von Tragwerksschädigungsanalysen ist es, die möglichen Schädigungsevolutionen in Tragwerken während ihrer Lebensdauer numerisch zu simulieren und die daraus resultierenden Schädigungszustände quantitativ zu beschreiben. Ergebnisse solcher Analysen können für die Bewertung der Restlebensdauer bestehender oder für den Entwurf neuer Ingenieurstrukturen einen bedeutenden Beitrag leisten. Diese Problematik wird im Folgenden näher erläutert.

5.5.1 Problembeschreibung

Stahlbetontragwerke sind während ihrer Nutzungsdauer vielfältigen mechanischen und umweltbedingten Einflüssen ausgesetzt, die eine nachhaltige Schädigung verursachen können. In den ursprünglich schädigungsfreien Strukturen bilden sich lokale Schädigungszonen aus, die im Allgemeinen vorerst keine negativen Auswirkungen auf das globale Tragverhalten haben. Insbesondere in Stahlbetontragwerken, die durch signifikant zeitabhängige Belastungen, wie beispielsweise Windlasten, beansprucht werden, kann jedoch ein kontinuierliches Anwachsen dieser Prozesszonen stattfinden. Die mögliche Folge ist ein progressiver nichtlinearer Schädigungsprozess, der bis zum Verlust der Gebrauchstauglichkeit und sogar bis zum Systemversagen führen kann. Dies gilt für alle Typen von Stahlbetontragwerken, die durch Degradationsphänomene geschädigt werden. Insbesondere bei turmartigen Bauwerken verursachen solche Windbeanspruchungen als dominierende Einwirkungen eine Breitbänderregung mit einem definierten spektralen Maximum. Bei hochabgestimmten Systemen, die dadurch charakterisiert sind, dass die dominanten Eigenfrequenzen

oberhalb des Maximums der Erregerfrequenz liegen, führen die Deteriorationsprozesse zu einem Schiften des Antwortspektrums in Richtung des Erregermaximums und damit zu einer adaptiven Erhöhung des Beanspruchungsniveaus.

Bei der Untersuchung von Deteriorationseffekten an Tragwerken sind in der Vergangenheit häufig zwei vereinfachende Annahmen getroffen worden. Zum einen sind die sich ausbildenden Deteriorationen als lokale Effekte aufgefasst worden, welche die Steifigkeitsverhältnisse und den inneren Spannungszustand des Gesamtsystems nicht beeinflussen. Zum anderen sind die Schadensakkumulationen häufig mit linearen Beziehungen beschrieben worden. Beispiele hierfür sind die klassischen Schädigungsakkumulationshypothesen der Ermüdung und die Risswachstumsgesetze in der Bruchmechanik [Harte, Krätzig, Noh & Petryna 2000]. Bei den hochgradig nichtlinear ablaufenden Prozessen im Stahlbeton werden diese Annahmen verletzt. Deshalb sollten numerische Simulationen von derartigen Schädigungsphänomenen konsequenterweise nichtlinear erfolgen.

Die Betrachtung von Schädigungen und Deteriorationen kann auf unterschiedlichen Skalen oder Maßstäben erfolgen. Definitionen solcher Betrachtungsebenen sind in der Literatur vielfältig vorhanden, unter anderem in Eckstein (1999) oder Könke (2000). Sie unterscheiden zwischen der Mikro-, Meso- und Makroebene. Während sich die Festkörperphysik oder die Werkstoffwissenschaft mit Materialdefekten auf der Mikroebene beschäftigt, wird in der Kontinuums- und Strukturmechanik versucht, auf der Meso- und Makroebene solche Defekte möglichst wirklichkeitsnah zu beschreiben und in die Materialformulierungen mit einzubeziehen. In den letzten Jahren stand vor allem die Erfassung auf der Ebene des Materialpunktes oder auf der Querschnittsebene im Vordergrund [Eckstein 1999; Pölling 2000]. Nur mit einer wirklichkeitsnahen und schädigungsorientierten Stahlbetonmodellierung auf diesen Ebenen wird die Möglichkeit geschaffen, Schädigungsanalysen auf der nächsthöheren Ebene, der Tragwerksebene, durchzuführen. Im nächsten Abschnitt werden die dafür notwendigen Grundgleichungen angegeben.

5.5.2 Grundgleichungen der Schädigungsanalyse

Ausgangspunkt der Betrachtung von Schädigungsprozessen auf Strukturebene ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen unter Berücksichtigung dynamischer Anteile. Für ein beliebig diskretisiertes Tragwerk mit m -Freiheitsgraden kann hieraus das folgende lineare, implizite und matrizielle Differentialgleichungssystem 2. Ordnung angegeben werden:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{G}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V}, \mathbf{d}, t) = \mathbf{P}(t) \quad (5.109)$$

mit

$$\mathbf{V} = \{V_1 V_2 \dots V_m\} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \{P_1 P_2 \dots P_m\}. \quad (5.110)$$

Dabei sind $\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}}, \ddot{\mathbf{V}}$ die äußeren Knotenkinematen in Form von Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Weiterhin ist \mathbf{P} der Vektor der korrespondierenden Knotenkraftgrößen, \mathbf{M} die globale Massenmatrix, \mathbf{G} das nichtlineare Vektorfunktional der inneren Kräfte und \mathbf{d} ein Parametersatz, der den Deteriorationsprozess des Tragwerks

auf der Ebene der äußeren Variablen charakterisiert. Das nichtlineare Vektorfunktional \mathbf{G} beschreibt den inneren Tragwerkszustand, der von viskosen ($\dot{\mathbf{V}}$), elasto-plastischen (\mathbf{V}) und deteriorierenden (\mathbf{d}) Tragwerksprozessen abhängig ist.

Die Anwendung der auf dem Tangentenoperator basierenden inkrementell-iterativen Techniken erfordert die Linearisierung von (5.109). Mit

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \Delta\mathbf{V}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \dot{\bar{\mathbf{V}}} + \Delta\dot{\mathbf{V}}, \quad \ddot{\mathbf{V}} = \ddot{\bar{\mathbf{V}}} + \Delta\ddot{\mathbf{V}}, \quad \mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}} + \Delta\mathbf{P} \quad (5.111)$$

folgt aus (5.109) die so genannte tangentielle Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \Delta\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}_T \cdot \Delta\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_T \cdot \Delta\mathbf{V} = \mathbf{P} - \mathbf{F}_{int} = \mathbf{P} - [\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{V}}} + \mathbf{G}(\dot{\bar{\mathbf{V}}}, \bar{\mathbf{V}}, \mathbf{d}, t)]. \quad (5.112)$$

Dabei sind \mathbf{C}_T und \mathbf{K}_T die tangentielle Dämpfungs- bzw. Steifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{C}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{V}}} \right|_{\dot{\bar{\mathbf{V}}}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}} \right|_{\bar{\mathbf{V}}}. \quad (5.113)$$

Die äußeren Knotenlasten des bekannten Grundzustandes $\bar{\mathbf{P}}$ sind in (5.112) durch den Vektor der inneren Kräfte \mathbf{F}_{int} substituiert worden, welcher der Auswertung der linken Seite von (5.109) für den bekannten Grundzustand entspricht. Zur Untersuchung quasi-statischer Problemstellungen ($\dot{\bar{\mathbf{V}}} = \ddot{\bar{\mathbf{V}}} = \mathbf{0}$) kann (5.112) zur tangentialen Steifigkeitsbeziehung

$$\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{V}}, \mathbf{d}) \cdot \Delta\mathbf{V} = \mathbf{P} - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{V}}, \mathbf{d}) \quad (5.114)$$

vereinfacht werden. Durch die Integration der tangentialen Bewegungsgleichungen (5.112) oder durch die Anwendung der in Abschnitt 5.4.4 beschriebenen inkrementell-iterativen Lösungstechniken auf die tangentielle Steifigkeitsbeziehung (5.114) können die Schädigungsanalysen durchgeführt werden.

5.5.3 Definition globaler Schädigungsindikatoren

Zur quantitativen Beschreibung und Bewertung der Schädigungszustände in Tragwerken sind in letzter Zeit vermehrt so genannte Schädigungsindikatoren definiert worden. Dabei kann grundsätzlich zwischen lokalen und globalen Schädigungsindikatoren unterschieden werden.

Lokale Schädigungsindikatoren dienen im Allgemeinen der Beschreibung des Schädigungszustandes bzw. -grades auf der Querschnittsebene. Lokale Schädigungen werden in der Materialformulierung erfasst, jedoch erfolgt im Rahmen der Arbeit keine explizite Angabe von lokalen Schädigungsindikatoren. Lediglich als Beispiel seien die in Andres (2004) definierten Schädigungsmaße erwähnt. Sie quantifizieren auf der Querschnittsebene die Schädigung des Betondruckbereichs, die Schädigung durch Betonzugrissbildung und die Schädigung durch Stahlplastizieren. Andres (2004) verwendet diese Indikatoren, um mögliche Schädigungszustände in Stahlbetontragwerken auch ohne Berücksichtigung nichtlinearer Materialgesetze bei Stabilitätsuntersuchungen von Schalen aus Hochleistungsbeton

zu erfassen. Unter Verwendung „geschädigter“ Matrizen identifiziert er mittels inkrementell nichtlinearer Analysen und begleitender Eigenwertberechnungen die Indifferenzpunkte und die Nachbeulminima bei stabilitätsgefährdeten Schalentragwerken.

Globale Schädigungsindikatoren, auf die sich die weiteren Ausführungen beschränken werden, dienen zur Abschätzung des Schädigungszustandes auf Tragwerksebene. Die dafür notwendigen Informationen sind in der tangentialen Steifigkeitsmatrix enthalten. Für eine anschauliche Interpretation und Bewertung sind diese matriziellen Informationen jedoch ungeeignet. Eine quantitative Aussage gelingt mit der Einführung des so genannten Tragwerksschädigungsindex D , der durch den Vergleich charakteristischer Werte des aktuellen geschädigten Zustands mit dem (ungeschädigten) Ausgangszustand definiert wird:

$$D = 1 - \frac{\lambda(\mathbf{V}, \mathbf{d})}{\lambda(\mathbf{V}_0, \mathbf{d} = \mathbf{0})} \quad \text{mit} \quad 0 \leq D \leq 1. \quad (5.115)$$

Dabei beschreibt $D = 0$ den schädigungsfreien Zustand und $D = 1$ den Grenzschädigungszustand. Unterschiedliche charakteristische Steifigkeitsgrößen können für λ in der allgemeinen Definition des globalen Schädigungsindikators (5.115) eingesetzt werden. Beispiele hierfür sind

- Eigenwerte von \mathbf{K}_T ,
- Singulärwerte von \mathbf{K}_T ,
- Eigenfrequenzen des Systems,
- fiktiv definierte Eigenfrequenz und
- Determinanten der mit Hilfe der Eigenformen definierten virtuellen Arbeitsmatrizen.

Im Folgenden werden die drei zuletzt erwähnten näher erläutert.

In der Arbeit von Noh (2002) erfolgt die Definition der Schädigungsindikatoren mittels der dämpfungsfreien Eigenfrequenzen f_i bzw. Eigenkreisfrequenzen ω_i . Durch den Bezug auf ihre jeweils schädigungsfreien Pendanten wird ein Satz von m skalaren Schädigungsparametern D_i hergeleitet:

$$D_i = 1 - \frac{\omega_i}{\omega_{i,0}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq D_i \leq 1. \quad (5.116)$$

Die Eigenkreisfrequenzen können durch eine begleitende Eigenschwingungsanalyse während der inkrementell-iterativen Berechnung ermittelt werden. Das zu lösende allgemeine Eigenwertproblem lautet

$$(\mathbf{K}_T - \omega_i^2 \mathbf{M}) \cdot \Phi_i = \mathbf{0}. \quad (5.117)$$

Die dazugehörigen Eigenschwingungen Φ_i stellen kleine elastische Bewegungen um die als fixiert angenommene, geschädigte Verformungskonfiguration \mathbf{V} , $\dot{\mathbf{V}}$, \mathbf{d} dar.

Die grundlegende Idee der von Chen (2001) definierten Schädigungsindikatoren ist, dass der Verschiebungsinkrementvektor $\Delta \mathbf{V}$ als eine fiktive Eigenform betrachtet wird. Bei numerischen Untersuchungen an Stahlbetonrahmentragwerken konnte Chen (2001) beobachten, dass gerade die Eigenform besonders sensitiv auf Schädigungen reagiert, die

dem Verlauf des Verschiebungsinkrements ausgesprochen ähnlich ist. Zur Überprüfung der vorhandenen Korrelation verwendet er die so genannten **MAC**-Werte, die jeweils ein normiertes Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren darstellen:

$$\mathbf{MAC}_{vi} = \left(\frac{\Delta \mathbf{V}^0}{\|\Delta \mathbf{V}^0\|} \cdot \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|} \right)^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \mathbf{MAC}_{vi} \leq 1, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.118)$$

Basierend auf der Definition einer fiktiven Eigenfrequenz $\bar{\omega}_l$ bei der Last \mathbf{P}_l mit

$$\bar{\omega}_l^2 = \frac{\Delta \mathbf{V}^{0T} \cdot \mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{V}^0}{\Delta \mathbf{V}^{0T} \cdot \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{V}^0} \quad (5.119)$$

wird das folgende Schädigungsmaß eingeführt:

$$D_{\Delta V} = 1 - \frac{\bar{\omega}_l}{\bar{\omega}_0}. \quad (5.120)$$

Dabei ist in (5.119) für $\Delta \mathbf{V}$ das Prädiktorverschiebungsinkrement des jeweils aktuellen Lastschritts $\Delta \mathbf{V}_{l+1}^0$ einzusetzen.

In Petryna & Krätzig (2002) wird ein weiterer Schädigungsindikator vorgeschlagen. Diesem liegt eine Energiebetrachtung an den möglichen Eigenschwingformen Φ_i des betrachteten Systems zu Grunde. Die daraus resultierenden Arbeitsanteile der imaginären inneren Einheitskräfte $\bar{\mathbf{F}}_i(\Phi_i) = \Phi_i^T \cdot \mathbf{I}$ an den Verschiebungsfeldern Φ_i werden in den virtuellen Arbeitsmatrizen $\bar{\mathbf{W}}$ und $\bar{\mathbf{W}}^d$ für die Zustände mit und ohne Schädigung abgelegt. Vereinfachend können die Matrizenkomponenten mittels der Skalarprodukte zweier Eigenformen bestimmt werden:

$$\bar{W}_{ij} = \Phi_i^T \cdot \mathbf{I} \cdot \Phi_j = (\Phi_i, \Phi_j) \quad \text{und} \quad \bar{W}_{ij}^d = \Phi_i^T \cdot \mathbf{I} \cdot \Phi_j^d = (\Phi_i, \Phi_j^d). \quad (5.121)$$

Damit entsprechen die virtuellen Arbeitsanteile den Wurzeln der **MAC**-Werte aus den Eigenvektoren Φ_i und Φ_j :

$$\bar{W}_{ij}^2 = \mathbf{MAC}_{ij} = \frac{(\Phi_i, \Phi_j)^2}{(\Phi_i, \Phi_i) \cdot (\Phi_j, \Phi_j)} = \left(\frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|} \cdot \frac{\Phi_j}{\|\Phi_j\|} \right)^2. \quad (5.122)$$

Unter Verwendung der Determinanten der Matrizen wird schließlich der energiebasierte Schädigungsindikator definiert:

$$D_{VEB} = 1 - \frac{\det \bar{\mathbf{W}}^d}{\det \bar{\mathbf{W}}} \approx 1 - \det \bar{\mathbf{W}}^d. \quad (5.123)$$

Die numerische Ermittlung der Schädigungsmaße (5.116), (5.120) und (5.123) ist in die entwickelten Programmbausteine integriert worden. Experimentelle Untersuchungen zu diesem Themenkomplex sind in Ebert (2002) zu finden.

Die Schädigungsindikatoren liefern zusätzlich zu den Last-Verformungs-Kurven einen Eindruck über den Verlauf schädigungsbedingter Steifigkeitsdegradationen. Eine abschließende Aussage darüber, welcher Schädigungsindikator der geeignetste ist oder ob die Wahl des Schädigungsindikators tragwerkstypenabhängig ist, kann zu diesem Zeitpunkt noch nicht getroffen werden. Hierfür sind weitere Untersuchungen an Tragstrukturen notwendig.

Kapitel 6

Numerische Verifikation der Modelle

In diesem Kapitel wird die Leistungsfähigkeit der entwickelten Modellkomponenten numerisch verifiziert. Dies geschieht weitestgehend durch den Vergleich experimenteller Untersuchungsergebnisse mit Berechnungsergebnissen aus den durchgeführten numerischen Simulationen dieser Versuche. Dabei erfolgt jeweils die Verifikation bestimmter Komponenten in getrennter Form. Dies liegt zum einen an der begrenzten Anzahl von experimentellen Versuchsergebnissen, bei denen eine ausreichende Menge an dokumentierten Parametern für die hier entwickelten Modellvorstellungen vorliegt. Zum anderen wird durch eine getrennte Betrachtung sichergestellt, dass die Ergebnisse nicht aus einer Überlagerung mehrerer Einflüsse resultieren.

Dementsprechend gliedert sich das Kapitel in drei Abschnitte. Der erste Abschnitt dient der Überprüfung der zeitinvarianten Stahlbetonmodellierung. Im zweiten Abschnitt wird die hygrothermische Betonmodellierung verifiziert. Den Abschluss des Kapitels bildet die Untersuchung der zeitvarianten Stahlbetonmodellierung. Dabei werden sowohl normative Vorhersageverfahren als auch die auf der hygrothermischen Modellierung basierenden Formulierungen verwendet.

6.1 Zeitinvariante mechanische Formulierung

Zur Verifikation der im Wesentlichen von Noh (2002) implementierten zeitinvarianten Stahlbetonmodellierung werden numerische Analysen von drei Versuchen durchgeführt. Anhand von Vergleichen der Ergebnisse mit experimentell ermittelten Daten und mit numerischen Lösungen anderer Autoren soll die Leistungsfähigkeit der Modellierung gezeigt werden. Die Auswahl der Versuche ermöglicht die Überprüfung des physikalisch und geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens.

Der Einbau des Stahlbetonmodells in das ASE4-Element, die Erweiterungen von Andres (2004) im Hinblick auf den hochfesten Beton und die innerhalb dieser Arbeit durchge-

fürten Änderungen bezüglich der Erfassung der zeitabhängigen Einflüsse machen eine erneute Absicherung erforderlich. Auf eine ausführliche Diskussion der Ergebnisse wird jedoch verzichtet und stattdessen auf die jeweils zitierten Literaturstellen verwiesen.

6.1.1 Stahlbetoneinfeldträger unter Einzellast

Als erstes Beispiel einer Stahlbetonstruktur dient ein Einfeldträger mit mittig angreifender Einzellast, welcher experimentell von Bresler & Scordelis (1963) untersucht wurde. Das zugehörige System mit der eingelegten Bewehrung ist in Bild 6.1 angegeben.

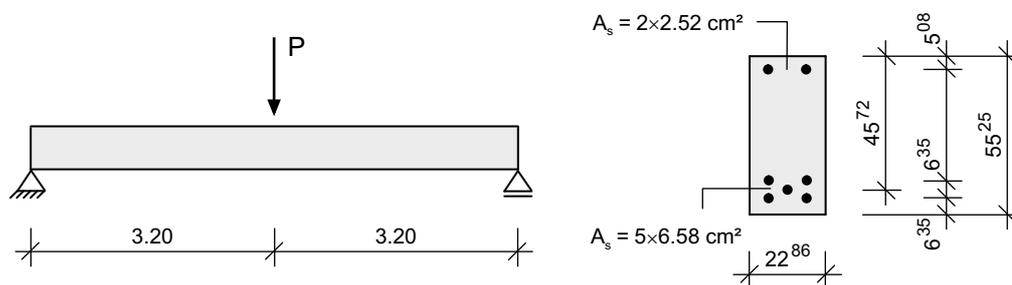


Bild 6.1: Stahlbetoneinfeldträger unter Einzellast: System und Bewehrung nach Bresler & Scordelis (1963).

Die in der numerischen Analyse verwendeten Materialdaten sind in Tabelle 6.1 aufgeführt. Die Diskretisierung des Balkens erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie mit 10 Elementen. Die für den Beton gewählte Schichtenanzahl beträgt ebenfalls 10. Die Bewehrung des Balkens wird mit 4 Stahlschichten abgebildet.

Beton:		Stahl:		
f_c	= 38.75 N/mm ²	f_y	= 345.4 N/mm ²	} obere Lage
E_{c0}	= 31992 N/mm ²	E_s	= 201300 N/mm ²	
ν	= 0.15	f_y	= 552.0 N/mm ²	} untere Lage
f_{ct}	= 4.21 N/mm ²	E_s	= 205500 N/mm ²	
ε_c	= 2.2 ‰	E_h	= $E_s/10^3$	
		ε_s	= 5.0 ‰	

Tabelle 6.1: Stahlbetoneinfeldträger unter Einzellast: Angesetzte Materialparameter.

Anhand der in Bild 6.2 dargestellten Last-Verschiebungs-Kurve ist erkennbar, dass die rechnerisch ermittelte Versagenslast die experimentell bestimmte übersteigt. In Übereinstimmung mit dem Versuch versagt der Balken durch einen Bruch der Betondruckzone im Bereich der Lasteinleitung. Der Verlauf der Last-Verschiebungs-Kurve zeigt ein etwas weiches Verhalten gegenüber dem des Experiments auf. Dieses Verhalten steht im Einklang mit den anderen numerischen Lösungen.

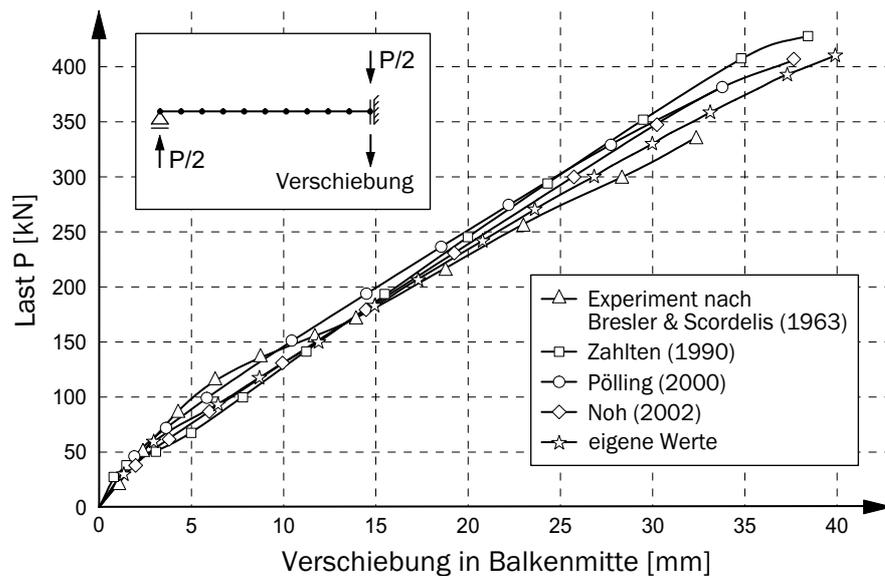


Bild 6.2: Stahlbetoneinfeldträger unter Einzellast: Diskretisierung und Last-Verschiebungs-Kurve.

6.1.2 Punktgestützte Stahlbetonplatte unter Einzellast

Die von McNeice (1967) untersuchte quadratische Platte ist an den Ecken punktuell gestützt und durch eine Einzellast in der Mitte belastet. Hiermit kann das zweiachsiges Stahlbetonverhalten überprüft werden, wobei die Nichtlinearität nahezu ausschließlich auf Zugrissbildung und Fließen der Bewehrung beruht. Die Darstellung des Systems erfolgt in Bild 6.3, die der angesetzten Materialdaten in Tabelle 6.2.

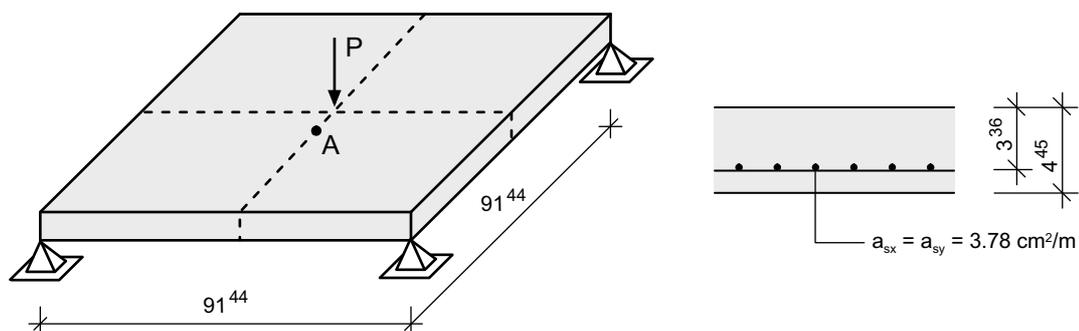


Bild 6.3: Punktgestützte Stahlbetonplatte unter Einzellast: System und Bewehrung nach Jofriet & McNeice (1971).

Die Werte für den jeweiligen Elastizitätsmodul von Stahl und Beton, die Druckfestigkeit sowie die Querkontraktionszahl des Betons sind dem Aufsatz von Jofriet & McNeice (1971) entnommen. Der Ansatz zur Bestimmung der Zugfestigkeit des Betons entstammt DIN 1045-1 (2001). Mit dem daraus ermittelten Wert wird das reale Steifigkeitsverhalten besser beschrieben, als mit den in der Literatur teilweise höher angesetzten Zugfestigkeiten. Für die numerische Abbildung werden 6×6 Elemente und 7 Schichten gewählt.

Beton:		Stahl:	
f_c	= 37.92 N/mm ²	f_y	= 345.4 N/mm ²
E_{c0}	= 28613 N/mm ²	E_s	= 201300 N/mm ²
ν	= 0.15	E_h	= $E_s/10^3$
f_{ct}	= 2.89 N/mm ²	ε_s	= 5.0 ‰
ε_c	= 2.2 ‰		

Tabelle 6.2: Punktgestützte Stahlbetonplatte unter Einzellast: Angesetzte Materialparameter.

In Bild 6.4 ist die Last-Verschiebungs-Kurve angegeben und dem Verlauf des Experiments gegenübergestellt. Die Werte beziehen sich dabei auf den dargestellten Messpunkt A. Im Bereich der ersten auftretenden Risse ist das Tragverhalten zu weich, was durch den Ansatz einer höheren Zugfestigkeit behebbar wäre. Dies würde allerdings zu einer steiferen Systemantwort im Vorbruchbereich führen. Exemplarisch für einen Vergleich mit numerischen Lösungen sind die Ergebnisse von Zahlten (1990), Pölling (2000) und Noh (2002) angegeben. Anzumerken ist, dass die von den Autoren verwendeten Daten differieren, besonders für den Elastizitätsmodul und die Zugfestigkeit.

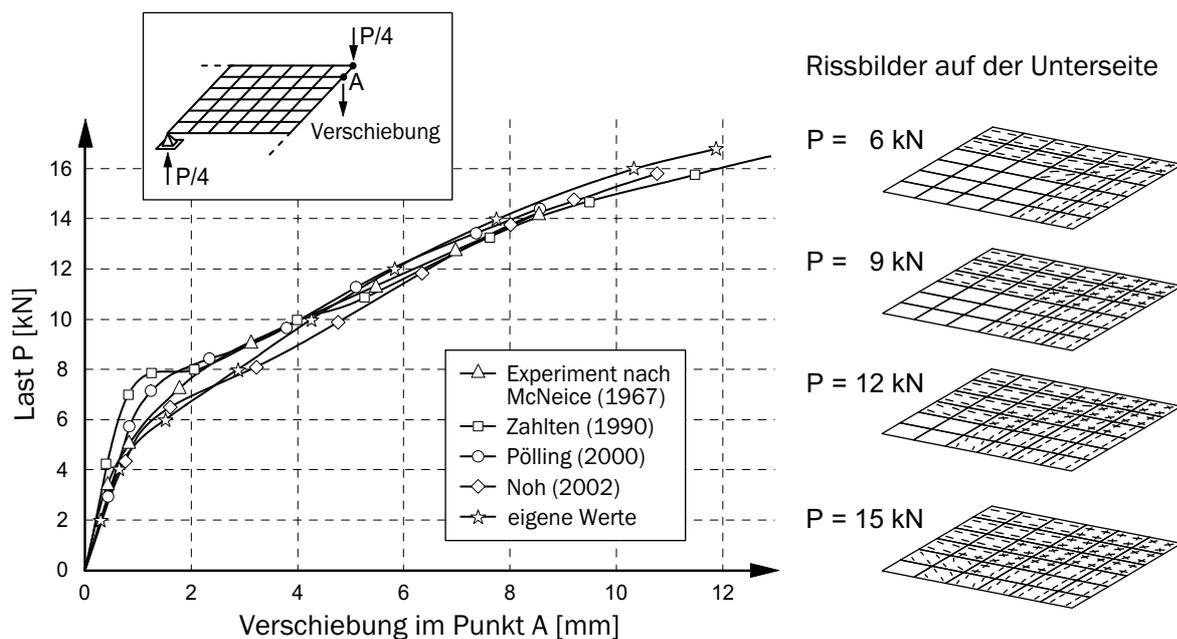


Bild 6.4: Punktgestützte Stahlbetonplatte unter Einzellast: Diskretisierung, Last-Verschiebungs-Kurve und Rissbilder.

Ebenfalls ist die Rissentwicklung auf der Plattenunterseite über den Verlauf der Laststeigerung angegeben. Zu erkennen ist der in Plattenmitte axialsymmetrische Spannungszustand, der zu den Rändern hin in einen einaxialen Tragmechanismus übergeht, was durch die Belastung, die Geometrie und die symmetrisch eingelegte Bewehrung bedingt wird.

6.1.3 Naviergelagerte Stahlbetonplatte unter Flächenlast

Als weiteres Testbeispiel wird eine naviergelagerte und durch eine gleichmäßige Streckenlast beanspruchte Platte numerisch analysiert, welche von Taylor, Maher & Hayes (1966) experimentell untersucht wurde. Da die Mittendurchbiegung der Platte in der Größenordnung der Plattendicke liegt, sind hier auch geometrische Nichtlinearitäten zu beachten. Die geometrischen Abmessungen und die Lage der Bewehrung sind Bild 6.5 zu entnehmen.

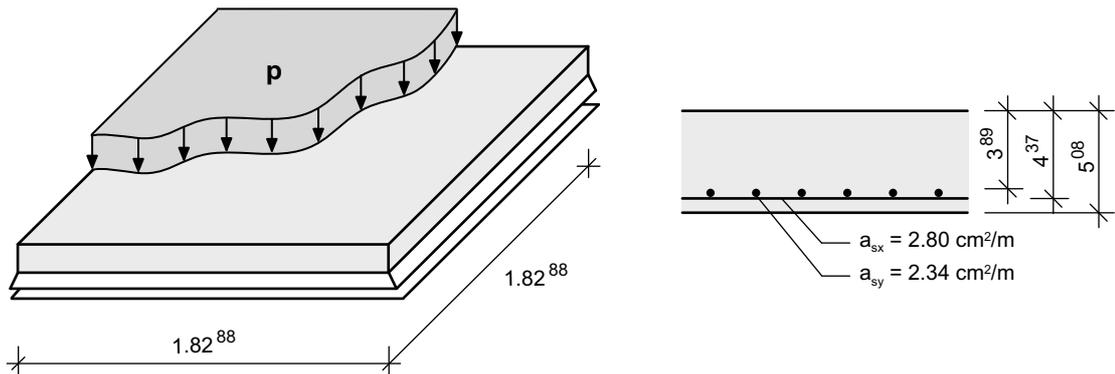


Bild 6.5: Naviergelagerte Stahlbetonplatte unter Flächenlast: System und Bewehrung nach Taylor, Maher & Hayes (1966).

Als Materialparameter sind aus Taylor, Maher & Hayes (1966) lediglich die Betondruckfestigkeit und die Stahlfestigkeit bekannt. Die restlichen Parameter wurden in Anlehnung an Zahlten (1990) gewählt (Tabelle 6.3). Bei Ansetzung größerer oder kleinerer Elastizitätsmodule oder Zugfestigkeiten des Betons kam es zu entsprechend steiferen oder weicheren Systemantworten.

Beton:		Stahl:	
f_c	= 34.50 N/mm ²	f_y	= 375.0 N/mm ²
E_{c0}	= 30890 N/mm ²	E_s	= 206800 N/mm ²
ν	= 0.15	E_h	= $E_s/10^2$
f_{ct}	= 3.60 N/mm ²	ε_s	= 5.0 ‰
ε_c	= 2.2 ‰		

Tabelle 6.3: Naviergelagerte Stahlbetonplatte unter Flächenlast: Angesetzte Materialparameter.

Die Diskretisierung erfolgte auch in diesem Beispiel mit 6×6 Elementen und 7 Schichten. Die Ergebnisse im Vergleich zum Experiment und zu den beispielhaft angeführten Lösungen von Arnesen (1979), Zahlten (1990) und Noh (2002) sind in Bild 6.6 wiedergegeben. Auch hier ist ein geringfügig zu weiches Verhalten zu Beginn der Rissbildung und ein etwas zu steifes Verhalten im Vorbruchbereich zu beobachten.

Bedingt durch die nicht symmetrisch eingelegte Bewehrung ist kein absolut axialsymmetrisches Rissbild zu erwarten. Dies bestätigt sich bei Betrachtung der in Bild 6.6 angegebenen Rissbilder, welche die Verteilung der Risse in den einzelnen Schichten zu dem

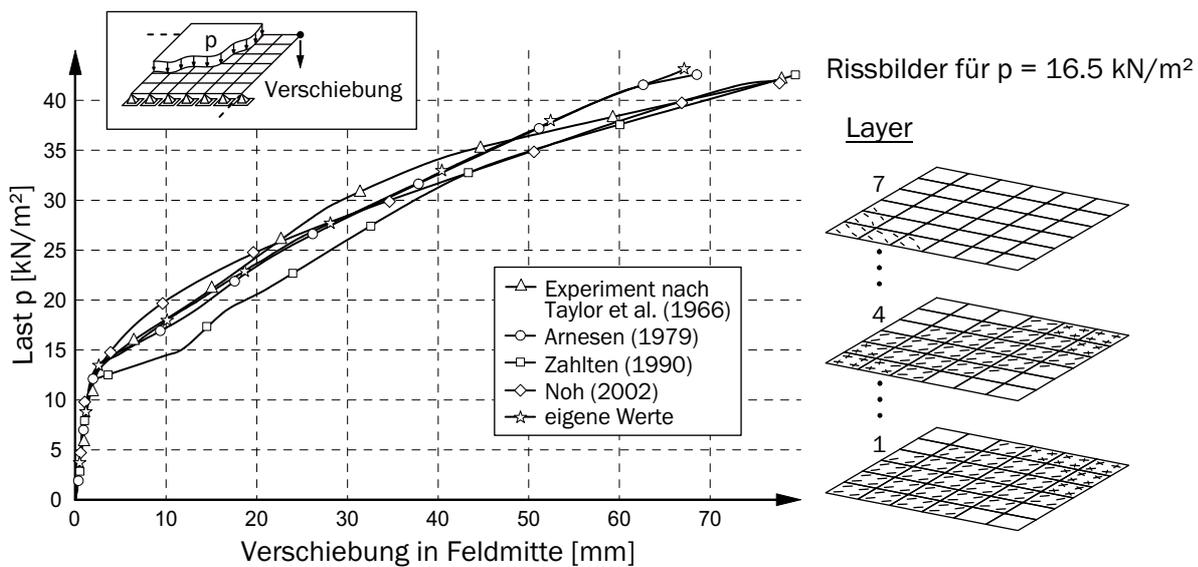


Bild 6.6: Naviergelagerte Stahlbetonplatte unter Flächenlast: Diskretisierung, Last-Verschiebungs-Kurve und Rissbilder.

Lastniveau von 16.5 kN/m^2 widerspiegeln. Die durch die Torsionsmomente in den Plattenecken entstehenden Risse auf der Plattenoberseite sind ebenfalls erkennbar.

6.1.4 Bewertung

Die dargestellten Beispiele zeigen, dass das zeitinvariante Stahlbetonverhalten mit dem vorliegenden Stahlbetonmodell wirklichkeitsnah simuliert werden kann. Sowohl das Steifigkeitsverhalten als auch die Versagenslasten werden in den numerischen Analysen relativ genau wiedergegeben. Die in den Versuchen beobachteten Effekte, die zum Versagen der jeweiligen Struktur führten oder zumindest einen entscheidenden Einfluss darauf hatten, wie das Betondruckversagen, das Stahlfließen der Bewehrung oder der Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten, konnten auch in den jeweiligen numerischen Analysen als Ursachen identifiziert werden. Darüber hinaus konnte die Leistungsfähigkeit durch weitere Testbeispiele bestätigt werden, die vom Verfasser oder von Andres (2004) durchgeführt worden sind.

6.2 Hygrothermische Formulierung

Die nachfolgend aufgeführten Beispiele dienen zur Verifikation des neu entwickelten Programmmoduls HYG THERM, in welches die in Abschnitt 5.3 dargestellten thermischen, hygri-schen und hygrothermischen Modellierungsvarianten implementiert worden sind. Im Laufe der Implementierungsphase sind zahlreiche Testrechnungen durchgeführt worden, von denen im Folgenden nur einige wiedergegeben werden. Die Überprüfung der Leistungsfähigkeit der Modelle erfolgt in den ersten beiden Beispielen durch die Gegenrech-

nung mit dem eindimensionalen hygrothermischen Simulationsprogramm WUFI, welches auf den Grundlagen des von Künzel (1994) beschriebenen Wärme- und Feuchtetransports entwickelt worden ist. In den weiteren Beispielen werden dokumentierte experimentelle Untersuchungsergebnisse zum Vergleich herangezogen.

6.2.1 Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung

Zur Verifikation der thermischen Modellierung wird ein Betonquerschnitt untersucht, welcher einer einseitigen, instationären Temperaturverteilung ausgesetzt wird. Die Geometrie des Querschnitts und die thermischen Umgebungsbedingungen sind in Bild 6.7 angegeben.

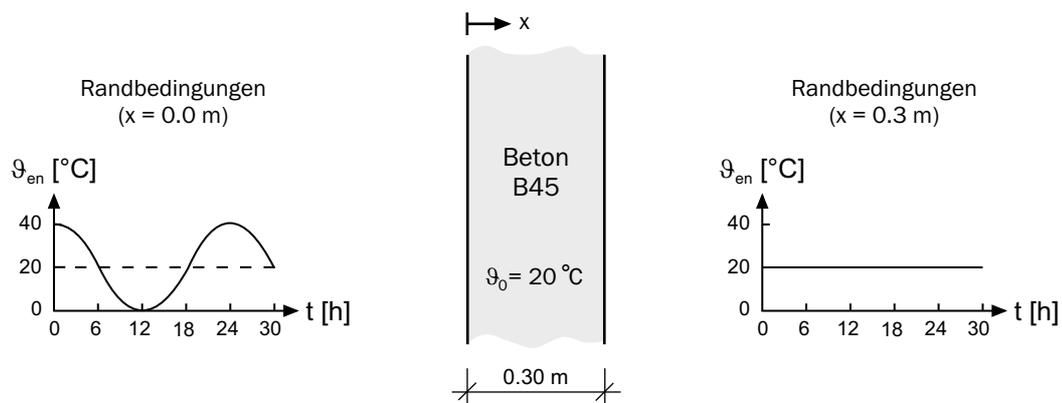


Bild 6.7: Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen des untersuchten Querschnitts.

Auf der einen Seite ($x = 0.0\text{ m}$) wird ein cosinusförmiger Verlauf der Umgebungstemperatur mit einer Periode von 24 h und einer Amplitude von $\Delta\vartheta = 40\text{ }^\circ\text{C}$ vorgegeben. Auf der anderen Seite ($x = 0.3\text{ m}$) wird eine konstante Umgebungstemperatur von $\vartheta_{en} = 20\text{ }^\circ\text{C}$ angesetzt. Die Berücksichtigung der instationären Randbedingung wird mittels der in Abschnitt 5.3.8 beschriebenen Einwirkungs-Zeit-Funktionen realisiert. In den vom Verfasser implementierten thermischen bzw. hygrothermischen Modellen ist eine getrennte Berücksichtigung von Strahlungs- und Konvektionsrandbedingungen möglich, vgl. mit den Abschnitten 3.2.3 und 5.3.4. Da eine Gegenüberstellung der Berechnungsergebnisse mit denen aus einer numerischen Simulation mit WUFI erfolgen soll, bei der die konvektiven und strahlungsbedingten Anteile durch einen Gesamtwiderstand berücksichtigt werden, wird an dieser Stelle auf die getrennte Erfassung der strahlungsbedingten Anteile verzichtet. Der Wärmeübergangskoeffizient α_i^t wird zu $25\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$ angenommen. Die in diesem Beispiel angesetzten Betonparameter stammen aus der in WUFI enthaltenen Materialdatenbank. Die erforderlichen Materialparameter für den gewählten B45 sind in Tabelle 6.4 aufgeführt. Die räumliche Diskretisierung des Betonquerschnitts erfolgt in beiden Programmen mit 30 eindimensionalen Elementen in Dickenrichtung. Für die zeitliche Diskretisierung wird zunächst die in Abschnitt 5.3.7 beschriebene adaptive Schrittweitensteuerung eingesetzt. Die Berechnungen in HYGOTHERM werden mit der Modellvariante Therm durchgeführt, vgl. Tabelle 5.2.

Trockenrohddichte	$\rho_c = 2220 \text{ kg/m}^3$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{t,tr} = 1.6 \text{ W/(m K)}$
Wärmekapazität	$c_c = 0.236 \text{ Wh/(kg K)}$
Porosität	$\phi = 0.18$
freie Wassersättigung	$w_{sat} = 147 \text{ kg/m}^3$
Sättigungsgrad	$S_h = 0.323$

Tabelle 6.4: Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung: Angesetzte Materialparameter.

In Bild 6.8 sind die berechneten Temperaturprofile in Abständen von je 3 Stunden dargestellt. Die verhältnismäßig hohen Wärmeübergangswiderstände im Vergleich zum Gesamtwiderstand sorgen dafür, dass relativ große Differenzen zwischen den extremal vorgegebenen Umgebungstemperaturen ϑ_{en} und den extremal erreichten Oberflächentemperaturen ϑ_s auftreten. Gut zu erkennen ist die zwar zeitversetzte, aber doch relativ schnelle Auswirkung der Temperaturveränderung. Somit ändert sich auch die Oberflächentemperatur auf jener der instationären Einwirkung abgewandten Seite deutlich. Die grau hinterlegte Fläche in Bild 6.8 zeigt den Bereich an, den die gesamten Temperaturprofillinien im Zeitraum von 48 Stunden beschreiben.

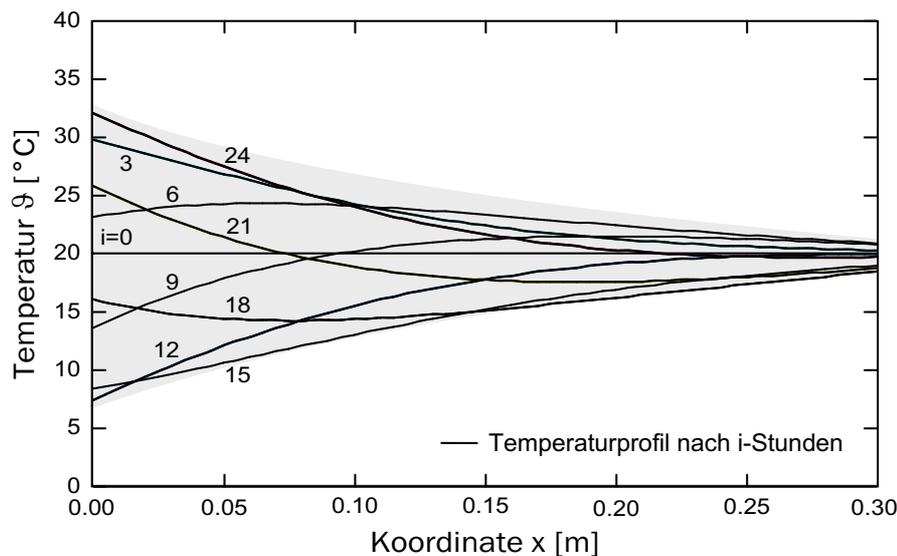


Bild 6.8: Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung: Temperaturprofile infolge einer einseitigen, cosinusförmigen Temperatureinwirkung.

Für einen Vergleich zwischen den Ergebnissen aus HYG THERM und WUFI werden einzelne Punkte des Querschnitts im Hinblick auf ihre Temperaturänderungen während des Betrachtungszeitraums untersucht. Die zeitliche Entwicklung der Temperaturen an vier ausgewählten Vergleichspunkten sind Bild 6.9 zu entnehmen. Die bereits angesprochene zeitliche Verzögerung der Temperaturänderungen wird auch hier durch die Phasenverschiebung der einzelnen Temperaturverläufe deutlich. Darüber hinaus wird in Bild 6.9 die gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus WUFI sichtbar. Die in WUFI nicht

berücksichtigte Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit hat in diesem Beispiel (Oszillation um 20°C) nur einen sehr geringen Einfluss auf die Berechnungsergebnisse.

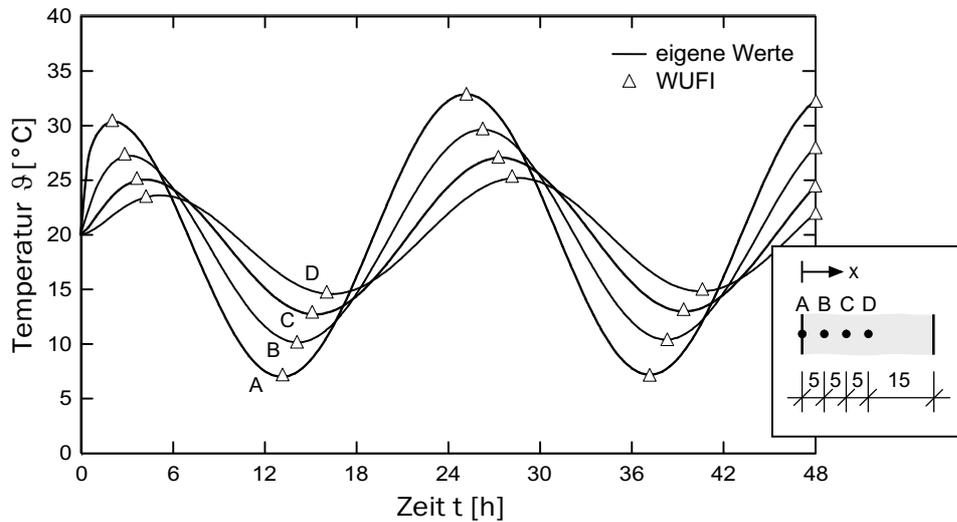


Bild 6.9: Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung: Zeitliche Temperaturentwicklung infolge einer einseitigen, cosinusförmigen Temperatureinwirkung.

Um den Einfluss der Wärmeabhängigkeit vom Feuchtegehalt darzustellen, ist bei der Berechnung zusätzlich der Sättigungsgrad S_h variiert worden. Bild 6.10 zeigt den Temperaturverlauf an zwei ausgewählten Punkten für die Grenzfälle des trockenen und des wassergesättigten Betons. Der höhere Feuchtegehalt bewirkt im Querschnitt eine höhere Wärmeleitfähigkeit und ein gesteigertes Wärmespeichervermögen. Aus der höheren Wärmeleitfähigkeit resultiert eine Reduzierung des Wärmewiderstands des Betonquerschnitts. Folglich sind die auftretenden Temperaturänderungen für diesen Fall geringer.

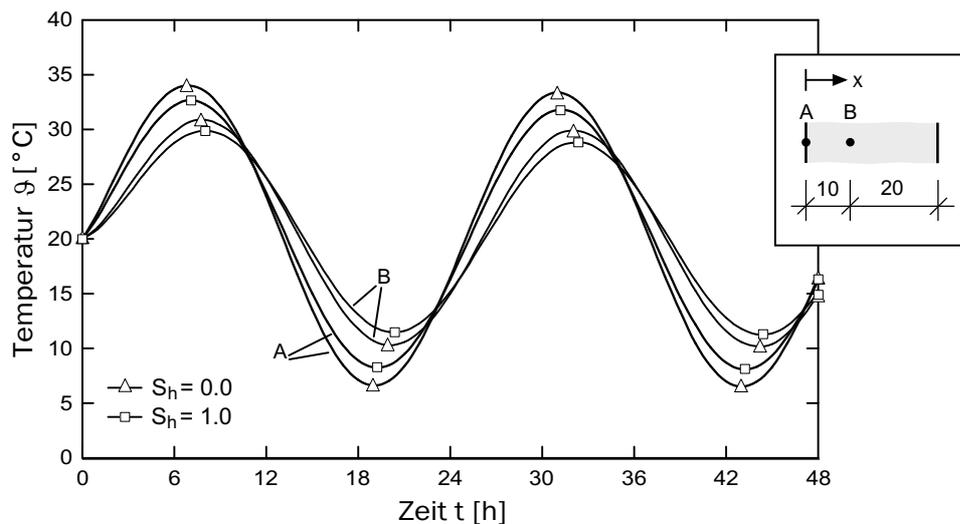


Bild 6.10: Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung: Einfluss des Feuchtesättigungsgrades S_h auf die zeitliche Temperaturentwicklung.

Bei der Berechnung thermischer und hygrischer Problemstellungen können bei bestimmten Einwirkungssituationen numerische Probleme auftreten. Gerade eine sprunghafte Veränderung der Randbedingungen und die daraus resultierenden starken Gradienten in den oberflächennahen Bereichen der Struktur können ein oszillierendes numerisches Antwortverhalten zur Folge haben. Daraufhin ist dieses Beispiel näher untersucht worden. Bild 6.11 zeigt die Temperaturentwicklungen an der Stelle $x = 0.0$ m, die mit einem Zeitintegrationsparameter von $\theta = 0.5$ (CRANK-NICOLSON-Verfahren) und unterschiedlichen konstanten Zeitinkrementen Δt^i numerisch berechnet worden sind. Es ist erkennbar, dass bei zu groß gewählter Zeitschrittweite anfänglich erhebliche Oszillationen auftreten können, die mit der Zeit jedoch abklingen. Die Dämpfung oder Vermeidung solcher Oszillationen ist mit der Wahl einer kleineren Schrittweite, eines anderen Zeitintegrationsparameters oder mit Hilfe der Schrittweitensteuerung möglich (Bild 6.11). Für den Fall $\theta = 1.0$ (explizites EULER-CAUCHY-Verfahren) tritt bei diesem Beispiel kein oszillierendes Anfangsverhalten auf. Durch den Einsatz der Schrittweitensteuerung werden die Zeitschritte automatisch an die Problemstellung angepasst, was gerade zu Beginn der Berechnung, in der noch keine glatten Lösungen auftreten, hilfreich ist.

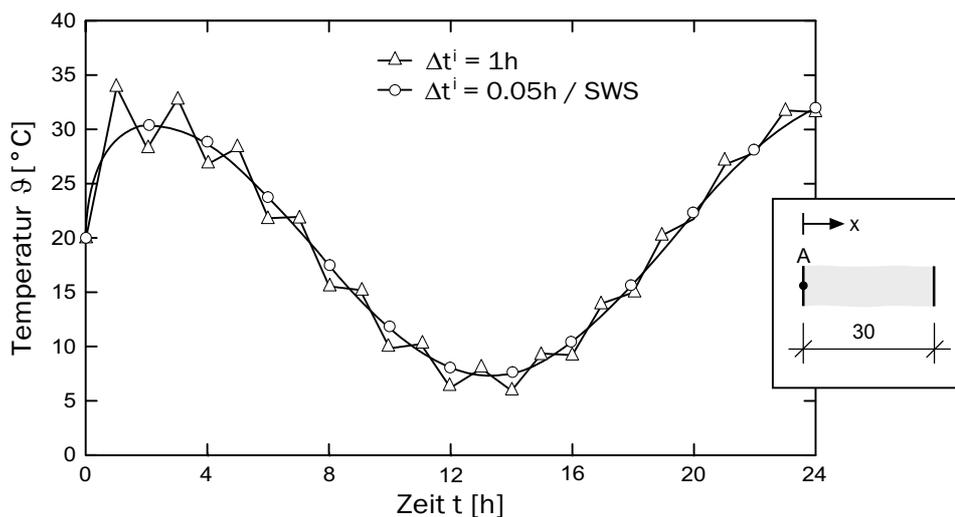


Bild 6.11: Betonquerschnitt unter thermischer Einwirkung: Einfluss der Schrittweite (Δt^i) und der Schrittweitensteuerung (SWS) auf die zeitliche Temperaturentwicklung für $\theta = 0.5$.

6.2.2 Betonquerschnitt unter hygrischer Einwirkung

Der bereits im vorherigen Abschnitt untersuchte Betonquerschnitt wird auch zur Verifikation der hygrischen Modellierung verwendet. Der Querschnitt wird in diesem Fall durch eine einseitige, sinusförmige Feuchteschwankung mit einer Periode von einem Jahr und einer Amplitude von $\Delta h = 0.3$ beansprucht (Bild 6.12). Der Feuchteübergangskoeffizient wird mit $\alpha_u^h = 0.7 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ h})$ angenommen.

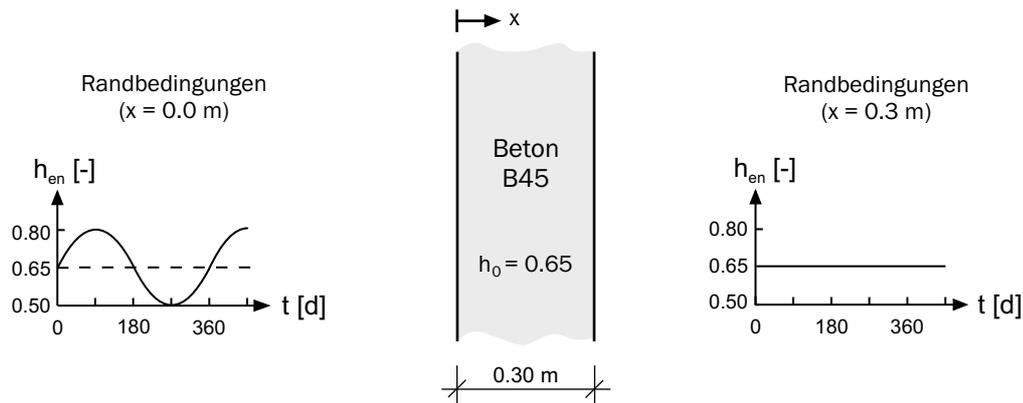


Bild 6.12: Betonquerschnitt unter hygrischen Einwirkungen: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen des untersuchten Querschnitts.

Die numerische Analyse wird wieder mit den Materialdaten des B45 aus der Materialdatenbank von WUFI durchgeführt. Die dort abschnittsweise vorgegebenen Verläufe für die Feuchtespeicherfunktion $w(h)$ und den Kapillartransportkoeffizienten D_w werden entsprechend der im hygrischen Modell Hyg-1 gewählten Formulierungen angenähert. Die vorgegebenen Verläufe und die gewählten Approximationen sind in Bild 6.13 dargestellt.

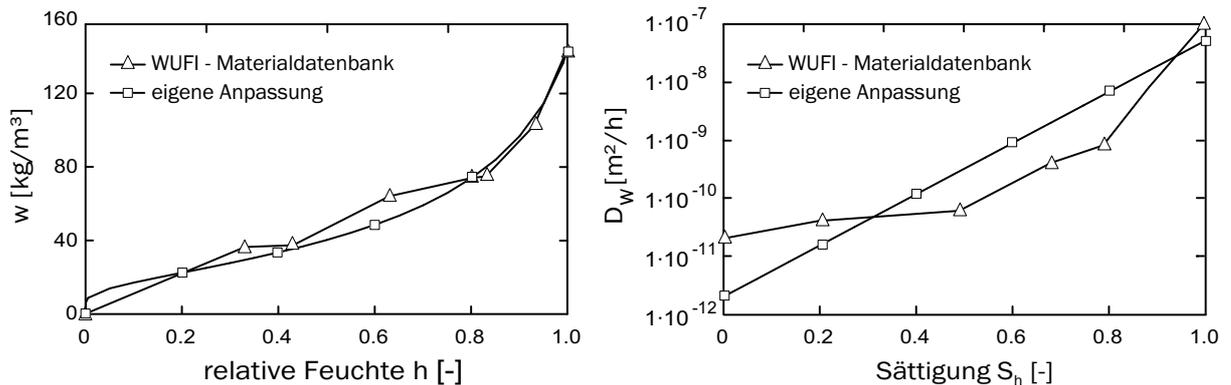


Bild 6.13: Betonquerschnitt unter hygrischer Einwirkung: Angenäherter Verlauf der Feuchtespeicherfunktion $w(h)$ (links) und des Kapillartransportkoeffizienten D_w (rechts) für einen B45.

Zur Bestimmung der Freiwerte der Feuchtespeicherfunktion p_{k1} und p_{k2} werden neben der freien Wassersättigung die Feuchtegehalte w_{80} und w_{95} benutzt. Der exponentielle Verlauf des Kapillartransportkoeffizienten wird durch die Vorgabe von $D_{w,tr}$ und $D_{w,sat}$ festgelegt. Die verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 6.5 zusammengestellt.

Um den neu implementierten hygrischen Baustein in HYG THERM zu testen, sind die Berechnungen in beiden Programmen mit den gewählten Näherungsfunktionen für $w(h)$ und D_w durchgeführt worden. Die Ergebnisse in den Bildern 6.14 und 6.15 zeigen ein zum Temperaturhaushalt analoges Verhalten, mit den Unterschieden, dass der Feuchtetransportprozess viel langsamer stattfindet und dass der Feuchteübergangskoeffizient einen geringeren Einfluss hat.

freie Wassersättigung	$w_{sat} =$	147 kg/m ³
Approximationsfaktoren	$p_{k1} =$	$31.66 \cdot 10^6$ Pa
	$p_{k2} =$	$87.79 \cdot 10^{-2}$
Diffusionswiderstandszahl	$\mu =$	248
Kapillartransportkoeffizient	$D_{w,tr} =$	$2 \cdot 10^{-12}$ m ² /h
	$D_{w,sat} =$	$5 \cdot 10^{-8}$ m ² /h
Temperatur	$\vartheta =$	20 °C

Tabelle 6.5: Betonquerschnitt unter hygrischer Einwirkung: Angesetzte Materialparameter.

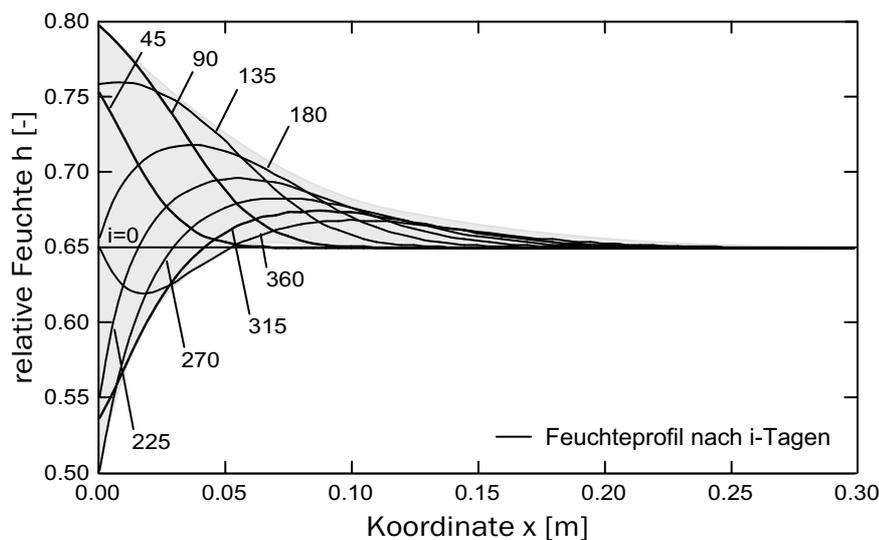


Bild 6.14: Betonquerschnitt unter hygrischer Einwirkung: Feuchteprofile infolge einer einseitigen, sinusförmigen Feuchteeinwirkung.

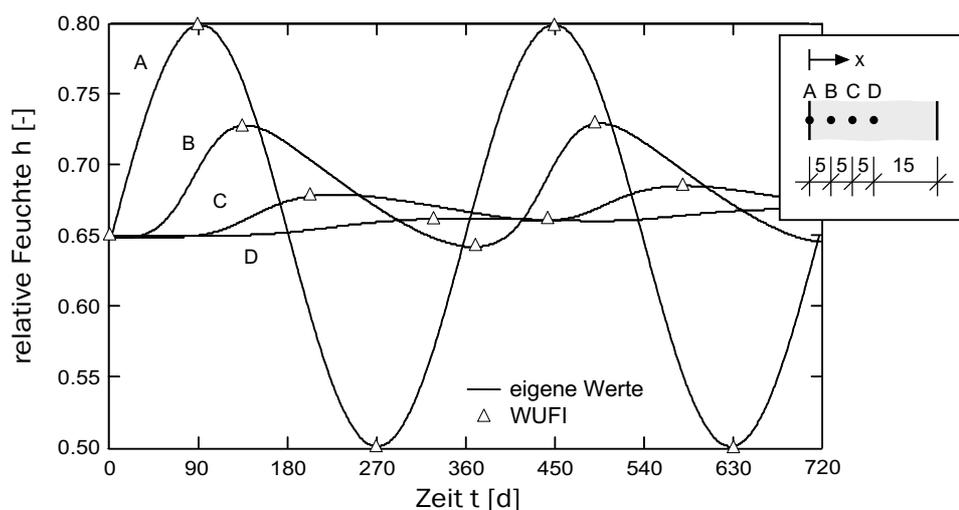


Bild 6.15: Betonquerschnitt unter hygrischer Einwirkung: Zeitliche Entwicklung der relativen Feuchte infolge einer einseitigen, sinusförmigen Feuchteeinwirkung.

Die Ergebnisse unterstreichen die korrekte Implementierung des hygri-schen Berechnungsmoduls. Wird anstelle der Näherungsfunktionen in WUFI mit den abschnittsweise definierten Verläufen gerechnet, resultieren daraus qualitativ die gleichen Verläufe mit geringen quantitativen Unterschieden.

6.2.3 Einseitige Austrocknung eines Betonquerschnitts

In den Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) sind Versuche durchgeführt worden, die sich mit dem Langzeitverhalten des beim Bau von Kraftwerken eingesetzten Betons beschäftigen. Grund für die Untersuchungen waren entstandene Risse von einer nicht zu vernachlässigenden Größe an Stahlbetonkuppeln in Kernkraftwerken. Infolge dieser Beobachtungen sind verschiedene Betonarten vor Ort und in Laborversuchen im Hinblick auf Feuchteeinwirkungen untersucht worden. In Granger (1996) sind Messdaten experimenteller Untersuchungen an einem 0.4 m dicken Betonkörper aufgeführt, dessen Feuchtigkeitsverteilung nach 1209 Tagen bestimmt wurde. Der Körper, der bei 60% relativer Luftfeuchte und bei einer Temperatur von 10°C unter Laborbedingungen lagerte, wurde hygri-sch so versiegelt, dass er nur noch über eine Seite Feuchtigkeit an die Umgebung abgeben konnte.

Aufgrund der vorliegenden Randbedingungen reduziert sich die Problemstellung auf eine eindimensionale Betrachtung. Für die räumliche Diskretisierung mit dem hygri-schen Modell Hyg-1 sind 30 Elemente verwendet worden.

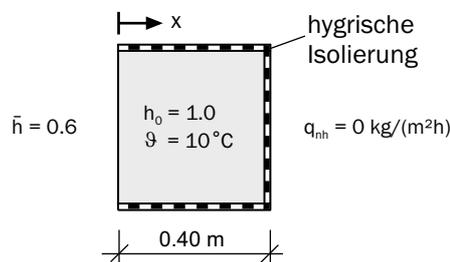


Bild 6.16: Trocknung eines einseitig isolierten Betonquerschnitts: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen des untersuchten Betonkörpers nach Granger (1996).

Die freie Wassersättigung des Betons wird unter Verwendung der Gleichungen (3.92) und (3.91) bestimmt. Vorgegeben sind ein w/z -Wert von 0.557 und ein Zementanteil von 350 kg/m³. Für die Bogue-Konstante wird ein Wert von $k = 0.19$ angenommen, und der Hydratationsgrad wird mit der Formel (3.93) zu $m = 0.85$ abgeschätzt. Die freie Wassersättigung w_{sat} beträgt somit 132.5 kg/m³. Die darüber hinaus verwendeten Parameter für die numerische Analyse sind in Tabelle 6.6 angegeben.

Bild 6.17 zeigt die berechneten Feuchtegradienten nach 1209 Tagen. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten nach Granger (1996) und den ebenfalls numerisch berechneten Ergebnissen nach Rahm (2002) festzustellen. Sowohl die Absolutwerte als auch die Verteilung über den Querschnitt verlaufen nahezu identisch. An der versiegelten Seite findet nur eine sehr geringe Abnahme des Wassergehalts statt, da die Feuchtigkeit lediglich über die freie Seite an die Umgebung abgegeben werden kann.

freie Wassersättigung	$w_{sat} =$	132.5 kg/m ³
Approximationsfaktoren	$p_{k1} =$	40.64 · 10 ⁶ Pa
	$p_{k2} =$	74.52 · 10 ⁻²
Diffusionswiderstandszahl	$\mu =$	150
Kapillartransportkoeffizient	$D_{w,tr} =$	2.8 · 10 ⁻⁹ m ² /h
	$D_{w,sat} =$	2.1 · 10 ⁻⁶ m ² /h
Temperatur	$\vartheta =$	10 °C

Tabelle 6.6: Trocknung eines einseitig isolierten Betonquerschnitts: Angesetzte Materialparameter.

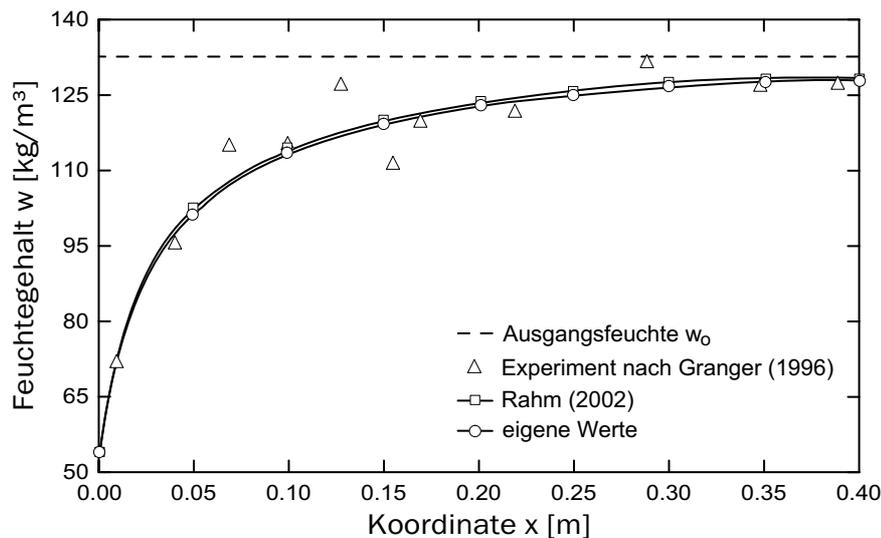


Bild 6.17: Trocknung eines einseitig isolierten Betonquerschnitts: Feuchteverteilung über den Querschnitt nach 1209 Tagen.

6.2.4 Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung

Zur Verifikation der implementierten hygrothermischen Modelle eignen sich die in Hundt (1975) dargestellten Langzeituntersuchungen zur Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Betonbauteilen. Die beschriebenen Experimente erstreckten sich über einen Zeitraum von ca. 3 Jahren und wurden im Rahmen eines Forschungsprogramms für dickwandige Reaktordruckbehälter durchgeführt. In der Literatur liegen nur wenige Ergebnisse von experimentellen Untersuchungen vor, bei denen die gekoppelten thermischen und hygri-schen Prozesse in Betonstrukturen untersucht worden sind. Aus diesem Grund waren die Messdaten aus Hundt (1975) bereits Grundlage für andere Berechnungsmodelle [von Smuda & von Wolfersdorf 1990; Oberbeck 1995; Kranz 1999; Steffens 2000; Grasberger 2002]. Die Versuchsreihe umfasste insgesamt sechs Betonbalken, von denen der Balken Nr. 5 zur numerischen Nachrechnung ausgewählt worden ist.

Die geometrischen Abmessungen und Randbedingungen des Balkens sind Bild 6.18 zu entnehmen. Eine Stirnseite wurde dampfdicht versiegelt und mit Hilfe einer Heizplatte

auf $80\text{ }^\circ\text{C}$ erhitzt, während die zweite Stirnseite frei blieb ($\vartheta_{en} = 20\text{ }^\circ\text{C}$, $h_{en} = 0.45$). Die Längsseiten wurden thermisch und hygri sch isoliert. Somit reduziert sich die Problemstellung auf eine eindimensionale Betrachtung der ablaufenden Wärme- und Feuchteprozesse in Balkenlängsrichtung. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit 100 Elementen. Die zeitliche Diskretisierung wird mittels der Schrittweitensteuerung durchgeführt.

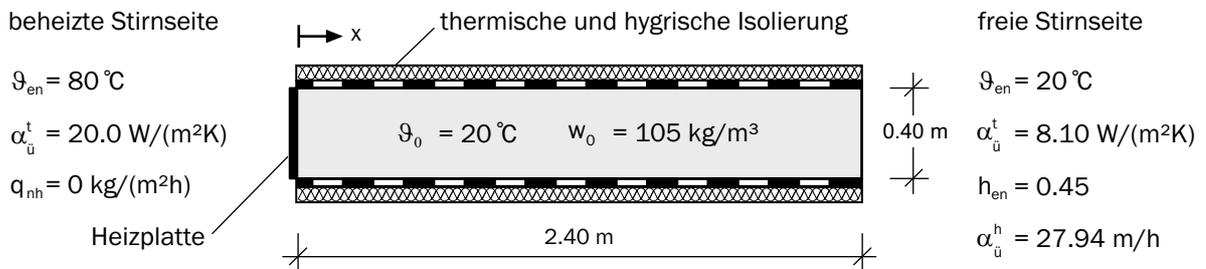


Bild 6.18: Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung: Geometrie und angesetzte Anfangs- und Randbedingungen des Betonbalkens nach Hundt (1977).

Die Berechnungen werden zunächst mit dem Berechnungsmodul HygTherm-2 durchgeführt, dem die Definition des Dampftransports nach Kießl (1983) zu Grunde liegt, vgl. Anhang A. Dieser Ansatz wird auch in den Modellen von Oberbeck (1995) und Kranz (1999) verwendet. Somit können die numerisch erzielten Ergebnisse gut mit deren Ergebnisse verglichen werden. Die Feuchtespeicherfunktion wird innerhalb des Modells mit der Formulierung aus Steffens (2000) beschrieben. Zur Festlegung der Parameter der Feuchtespeicherfunktion werden die in Oberbeck (1995) angegebenen und auf Gertis & Kießl (1977) basierenden Daten zu Grunde gelegt, vgl. Bild 3.13. Die weiteren angesetzten Modellparameter sind in Tabelle 6.7 zusammengefasst [Oberbeck 1995].

freie Wassersättigung	$w_{sat} = 115.00 \text{ kg/m}^3$
Kapillartransportkoeffizient	$D_{w,tr} = 5.0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{h}$
	$D_{w,sat} = 3.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{h}$
Diffusionswiderstandszahl	$\mu = 150.0$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{t,tr} = 1.85 \text{ W}/(\text{m K})$
	$\lambda_{t,sat} = 2.70 \text{ W}/(\text{m K})$
Wärmekapazität	$c_c = 0.286 \text{ Wh}/(\text{kg K})$
Porosität	$\phi = 0.20$

Tabelle 6.7: Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung: Angesetzte Materialparameter.

Die berechneten Temperaturverläufe in Bild 6.19 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messwerten nach Hundt (1975). Erkennbar ist ein annähernd linearer Temperaturverlauf nach 28 Tagen. Es liegt ein konstanter Wärmestrom von der beheizten zur freien Seite vor, der an dieser eine Temperaturerhöhung auf $28\text{ }^\circ\text{C}$ erzeugt hat. Ab diesem Zeitpunkt ist das instationäre Verhalten des Wärmedurchgangs nahezu abgeklungen. Für den Fall einer entkoppelten Temperaturberechnung wäre somit der Gleichgewichtszustand

erreicht. Aufgrund der Kopplung der Temperatur mit dem Feuchtehaushalt treten noch geringe Änderungen des Temperaturverlaufs auf.

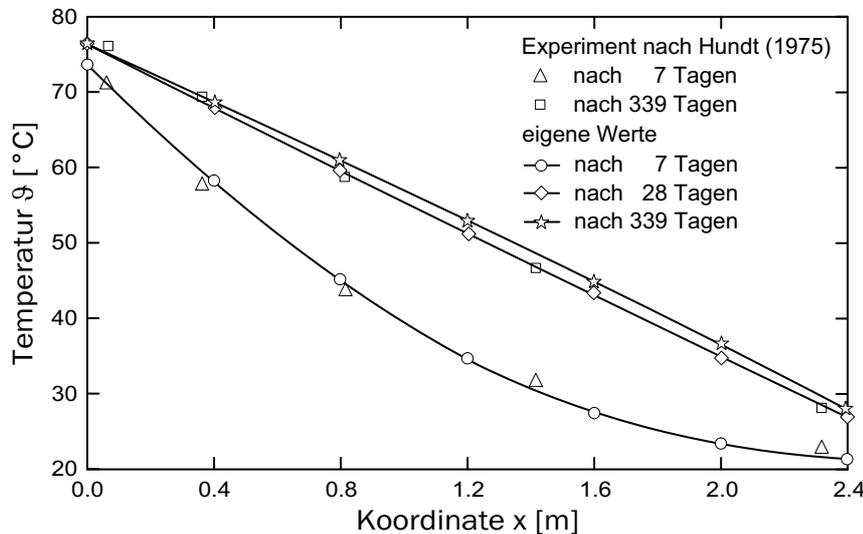


Bild 6.19: Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung: Temperaturverteilung über den Betonbalken.

Die Bilder 6.20 und 6.21 beinhalten die gemessenen und berechneten Feuchtegehaltsprofile über die Balkenlängsachse nach 550 bzw. nach 1029 Tagen. Die niedrige relative Luftfeuchte von $h_{en} = 0.45$ bewirkt an der freien Seite eine Feuchtigkeitsabgabe an die Umgebung. An der dampfdicht versiegelten Seite findet auch ein Austrocknungsprozess statt, obwohl hier kein Feuchteaustausch mit der Umgebung möglich ist. Ursache hierfür ist das Verdampfen des flüssigen Wassers in den stärker erwärmten Bereichen, wodurch ein in das Bauteilinnere gerichtetes Dampfdruckgefälle entsteht. Zum Ausgleich wird Feuchtigkeit in Form von Dampf von der beheizten Seite wegtransportiert, numerisch beschrieben durch den Anteil (3.65) in der Feuchtbilanzgleichung (3.58). Der entstehende Gradient der Materialfeuchte löst einen entgegengesetzten Feuchtestrom aus (3.66), der jedoch aufgrund der großen Temperaturdifferenz nicht dominiert. Während die Austrocknung der freien Seite auch innerhalb einer entkoppelten Berechnung abgebildet werden kann, ist die Erfassung des zweiten Effekts nur im Rahmen einer gekoppelten hygrothermischen Berechnung möglich. Insgesamt ist eine gute Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse mit den experimentell ermittelten Daten nach Hundt (1975) und den Ergebnissen der anderen Autoren zu erkennen, womit die korrekte Implementierung bestätigt werden kann.

Zusätzlich wird der Balken numerisch mit dem Modell HygTherm-1 berechnet, das im Gegensatz zum zuvor verwendeten Modell von einer konstanten Dampfdiffusion im gesamten Feuchtebereich ausgeht. Bild 6.22 zeigt die hiermit berechnete Feuchteverteilung nach 1029 Tagen. Zunächst werden der Berechnung die gleichen Materialparameter zu Grunde gelegt (Tabelle 6.7). Der Dampftransport und somit auch der thermisch bedingte Anteil wird bei gleicher Dampfdiffusionswiderstandszahl durch diese Formulierung schwächer abgebildet, da der erhöhte Transport in Bereichen höherer Porenfeuchte nach Künzel (1994) der

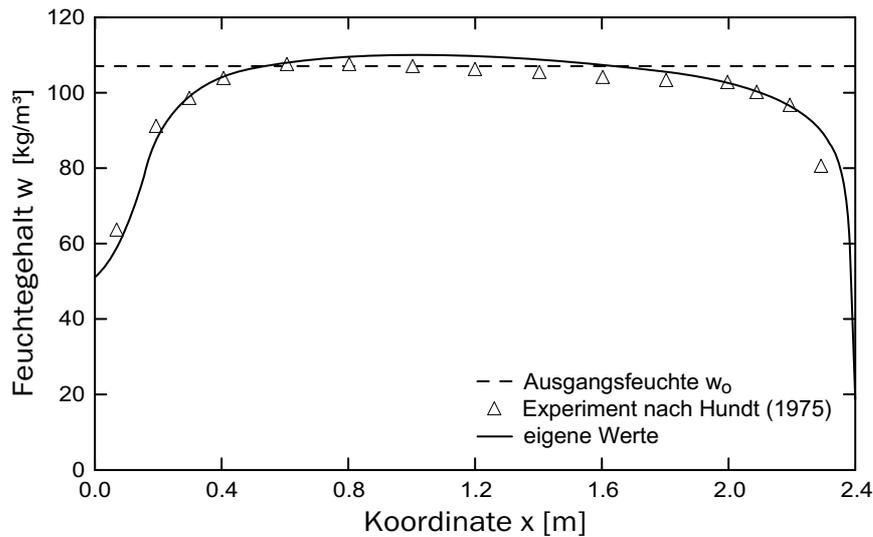


Bild 6.20: Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung: Feuchteverteilung über den Betonbalken nach 550 Tagen (Berechnungsergebnisse mit dem Modell HygTherm-2).

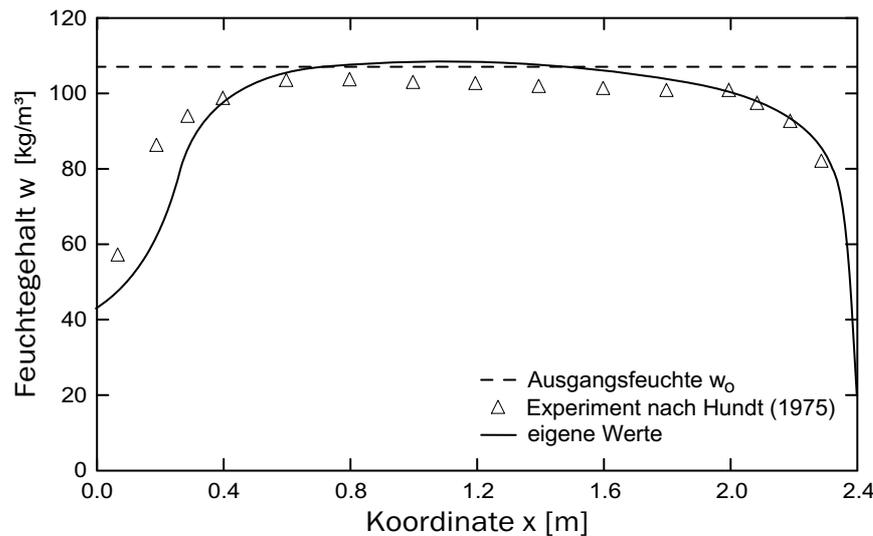


Bild 6.21: Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung: Feuchteverteilung über den Betonbalken nach 1029 Tagen (Berechnungsergebnisse mit dem Modell HygTherm-2).

Oberflächendiffusion und somit dem Flüssigkeitsanteil zugeschrieben werden kann. Folge ist, dass bei gleicher Wahl der Modellparameter der nach innen gerichtete, thermisch bedingte Dampftransport durch den daraus folgenden Flüssigkeitstransport nach außen nahezu kompensiert wird. Eine bessere Anpassung an die Versuchsergebnisse ist folgerichtig mit einem erhöhten Dampftransport (\equiv reduzierte Dampfdiffusionswiderstandszahl μ) oder mit einem reduzierten Flüssigkeitstransport (\equiv erhöhter Kapillartransportkoeffizient D_w) möglich. Ergebnisse mit veränderten Eingangsparametern bestätigten diese Aussage

(Bild 6.22). Eine noch bessere Anpassung wäre prinzipiell möglich, wird hier aber nicht angestrebt.

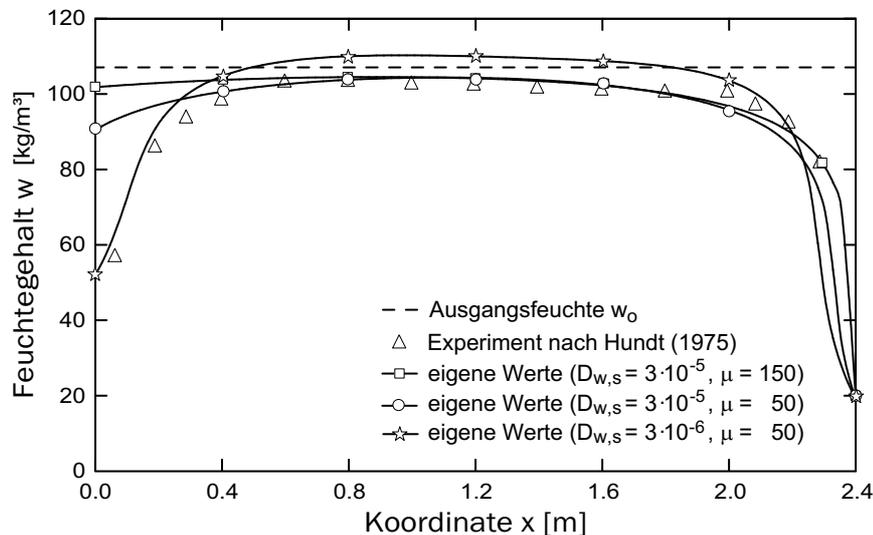


Bild 6.22: Trocknung eines Betonbalkens unter hygrothermischer Einwirkung: Feuchteverteilung über den Betonbalken nach 1029 Tagen (Berechnungsergebnisse mit dem Modell HygTherm-1).

6.2.5 Schwind- und Quellversuche an Betonzylindern

Im Rahmen eines vom Bundesministerium für Verkehr geförderten Forschungsprogramms wurden am Baustoffinstitut der Technischen Universität München experimentelle Untersuchungen mit der Zielsetzung durchgeführt, das in der Praxis auftretende Verformungsverhalten von Betonfahrbahnplatten besser vorhersagen zu können [Springenschmid, Soidekat & Fleischer 1997]. Um den Einfluss nichtlinearer Feuchtegradienten auf die Verformung von Beton zu erfassen, wurden in diesem Zusammenhang Versuche an vier Betonzylindern durchgeführt. Ihre Mantelflächen wurden nach dem Betonieren hygriech abgedichtet, so dass ausschließlich über die Stirnseiten eine Feuchtigkeitsabgabe oder -aufnahme erfolgen konnte. Nachdem die Betonzylinder zwei Tage lang in einem Klima von $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ und $h = 0.98$ lagerten, wurden die Anfangswerte der Messreihen bestimmt und es wurde mit den Versuchsreihen begonnen. Folgende Versuche wurden durchgeführt:

- Zwei Betonzylinder wurden beidseitig dem Laborklima $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ und $h_{en} = 0.65$ ausgesetzt. Somit konnten sie nach beiden Seiten austrocknen (Luft-Luft-Lagerung).
- Zwei Betonzylinder wurden mit ihrer Unterseite auf eine feuchte Unterlage gestellt. Auf dieser Seite konnten die Prüfkörper somit Wasser aufnehmen, während sie an der Oberseite, an der sie dem Laborklima ausgesetzt waren, Feuchte abgaben (Luft-Wasser-Lagerung).

Aufgrund der vorliegenden Randbedingungen ergaben sich in den Versuchen nichtlineare Feuchtegradienten über die Zylinderhöhe. Die in beiden Versuchsreihen bestimmten radialen Verzerrungen sind als jeweilige Mittelwerte in Tabelle 6.9 angegeben. Die Betonzylinder unter beidseitiger Luftlagerung wiesen, wie zu erwarten war, in den Randbereichen größere Verzerrungen als im inneren Drittel auf. Die Betonzylinder unter Luft-Wasser-Lagerung nahmen im unteren Bereich Wasser auf, während sie im oberen Bereich Wasser abgaben. Somit trat im unteren Bereich der Betonzylinder eine Volumenzunahme und im oberen Bereich eine Volumenabnahme auf.

	Ⓐ Luft-Luft-Lagerung	Ⓑ Luft-Wasser-Lagerung
Messstellen	Verzerrungen [‰]	
m ₄	-0.53	-0.39
m ₃	-0.05	-0.05
m ₂	-0.02	0.14
m ₁	-0.35	0.31

Tabelle 6.9: Gemessene radiale Verzerrungen an Betonzylindern unter (a) Luft-Luft-Lagerung und (b) Luft-Wasser-Lagerung nach Springenschmid, Sodeikat & Fleischer (1997).

Die numerischen Analysen erfolgen mit dem hygrischen Modell Hyg-1. In Bild 6.24 sind die berechneten Ergebnisse der nach 120 Tagen bestimmten Verteilungen für die relative Porenfeuchte h , die Wassergehaltsänderungen Δw und die radialen hygrischen Verzerrungen ε_c^{sh} für beide Versuchsreihen dargestellt.

Für den Fall der Luft-Luft-Lagerung resultieren aus der numerischen Berechnung aufgrund der Annahme symmetrischer Randbedingungen und eines homogenen Betonkörpers zwangsläufig auch symmetrische Verzerrungsverteilungen. Die leichte Unsymmetrie der Versuchsergebnisse begründen Springenschmid, Sodeikat & Fleischer (1997) mit der zementsteinreicheren und damit weniger steifen Oberschicht. Um derartige Ergebnisse auch numerisch abzubilden, dürfen die Materialparameter nicht konstant über die Höhe angesetzt werden. Für den zweiten Lagerungszustand ergibt sich für die Wassergehaltsänderung ein annähernd linearer Verlauf, während der Verlauf der relativen Feuchte stark nichtlinear ist. In beiden Fällen ist eine quantitativ gute Übereinstimmung der numerisch erzielten Ergebnisse mit den Versuchsergebnissen zu erkennen.

In der Arbeit von Rahm (2002) sind diese Versuche ebenfalls nachgerechnet worden. Die angegebenen Ergebnisse für die Wassergehaltsänderung Δw und die Verzerrungsverteilung ε_c^{sh} stimmen sehr gut mit den eigenen Berechnungsergebnissen überein. Allerdings ist nach Meinung des Verfassers der Wert der Wasserzunahme bei Luft-Wasser-Lagerung mit dem in der Arbeit verwendeten Modell so nicht berechenbar. Mit dem in Rahm (2002, Gl. 4.10) angegebenen Zusammenhang zwischen dem Wassergehalt und der relativen Feuchte ergeben sich zwangsläufig kleinere Wassergehaltsänderungen zwischen $h = 0.98$ und $h = 1.00$ als die angegebenen.

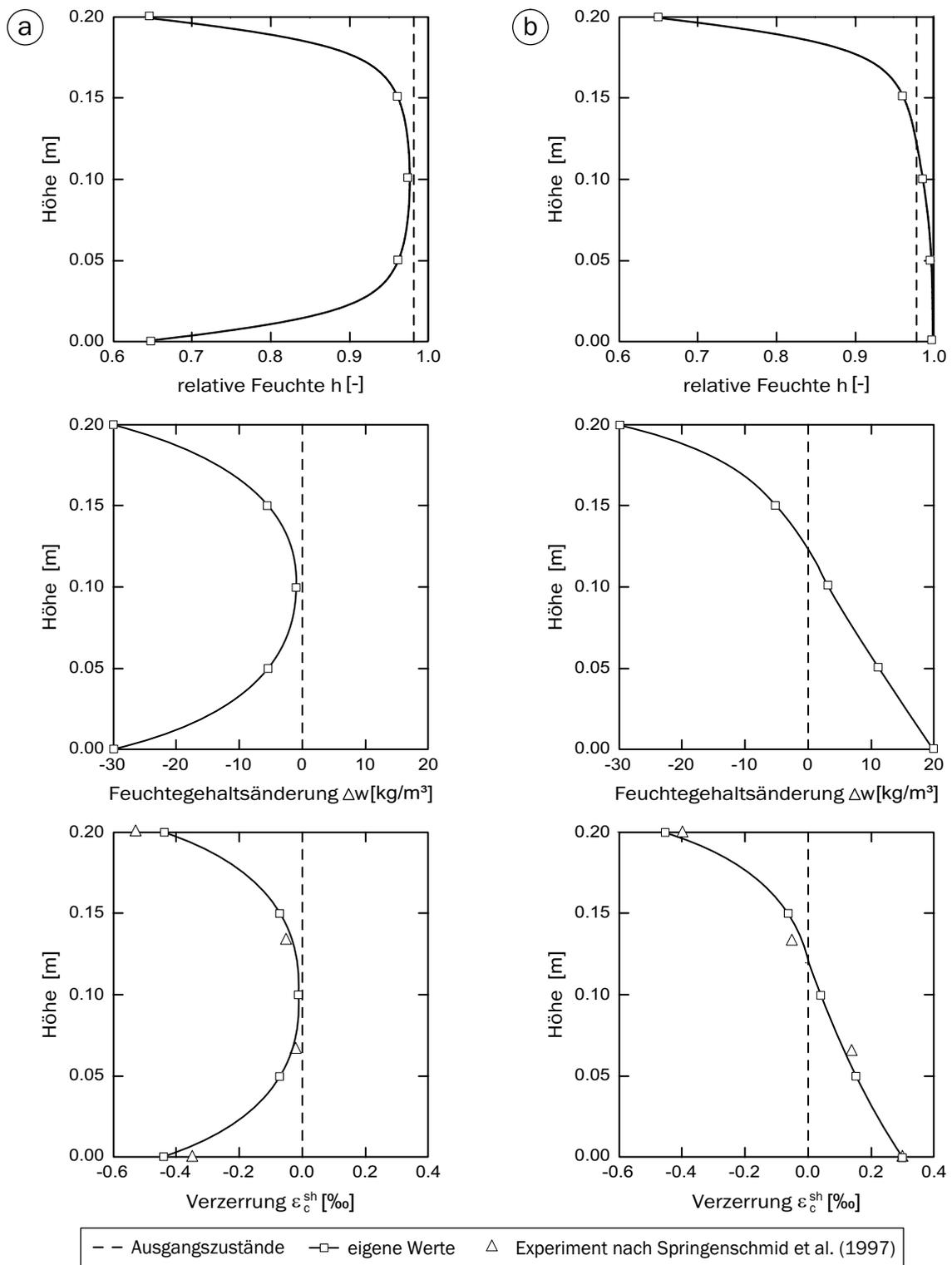


Bild 6.24: Schwind- und Quellversuche an Betonzylindern: Verlauf der relativen Feuchte h , der Wassergehaltsänderung Δw und der Verzerrungsverteilung ε_c^{sh} in Betonzylindern nach 120 Tagen unter (a) Luft-Luft-Lagerung und (b) Luft-Wasser-Lagerung.

Das im Versuch mit Luft-Wasser-Lagerung zu beobachtende Verhalten kann unter Verwendung eines linearen Zusammenhangs zwischen der Änderung der relativen Feuchte und der Verzerrungsänderung entsprechend Gleichung (3.102) nicht abgebildet werden. Obwohl auf der einen Seite die relative Feuchte von 98 % auf 65 % absinkt und auf der anderen Seite von 98 % auf 100 % ansteigt ($\Delta h_{unten}/\Delta h_{oben} = 2\%/33\% \approx 6\%$), ergeben sich auf der Unterseite 80 % der Verzerrungen der Oberseite. Auch mit dem Ansatz eines feuchteabhängigen hygrischen Ausdehnungskoeffizienten in der Größenordnung wie er in Müller, Hörenbaum & Maliha (2002) angegeben wird, sind die im Versuch erzielten Ergebnisse nicht reproduzierbar. Bei Ansatz eines linearen Zusammenhangs zwischen der Änderung des Wassergehalts und der Verzerrungsänderung entsprechend Gleichung (3.104) werden in Übereinstimmung mit den Messdaten bessere Ergebnisse erzielt. Im Falle des Wasserkontakts gelten scheinbar andere Gesetzmäßigkeiten, zu deren Klärung weitere Untersuchungen experimenteller und numerischer Art erforderlich sind.

6.2.6 Bewertung

Die zuvor gezeigten Beispiele bestätigen die korrekte Implementierung der thermischen, hygrischen und hygrothermischen Modelle. Darüber hinaus kann die Funktionalität der unterschiedlichen Zeitintegrationsverfahren, der Eingabemöglichkeit beliebiger Randbedingungen mittels der Einwirkungs-Zeit-Funktionen, der adaptiven Schrittweitensteuerung und der unsymmetrischen Gleichungslöser bestätigt werden.

Bei Problemstellungen, wie bei dem in Beispiel 6.2.4 untersuchten Betonquerschnitt eines Reaktordruckbehälters, haben die Kopplungseffekte einen entscheidenden Einfluss auf die Berechnungsergebnisse. Generell kann jedoch festgehalten werden, dass die Wärme- und Feuchtetransportprozesse aufgrund der im Vergleich zum Feuchtetransportvermögen relativ großen Wärmeleitfähigkeit in unterschiedlichen Zeitskalen ablaufen. Nach Meinung des Verfassers kann für viele baupraktische Problemstellungen der Einfluss kurzzeitig ungleichmäßiger Temperaturverteilungen auf den Feuchtetransport auf der einen Seite und der Einfluss der sich nur langsam ändernden Feuchteverteilung auf die schnellen Temperaturänderungen auf der anderen Seite vernachlässigt werden. In solchen Fällen ist der Einsatz entkoppelter Modelle ausreichend und wesentlich effizienter. Um den getrennten Einsatz zu ermöglichen, sind die thermischen und hygrischen Modelle auch in entkoppelter Form umgesetzt worden.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen zeigen, dass die materialspezifischen Parameter bei der Berechnung hygrischer Verläufe einen größeren Einfluss auf die Ergebnisse ausüben können, als bei rein thermischen Berechnungen. Hier wären weitere systematische experimentelle und numerische Untersuchungen sinnvoll, um die Modelleingangsparameter in Abhängigkeit von bestimmten Betoneigenschaften zu klassifizieren.

6.3 Zeitvariante Formulierung

Nachdem die Leistungsfähigkeit der zeitinvarianten und hygrothermischen Modellierung hier auszugsweise dargestellt worden ist, sollen die nachfolgend aufgeführten Beispiele die

korrekte Implementierung der zur Erfassung des zeitvarianten Stahlbetonverhaltens eingebauten Algorithmen demonstrieren. Bei den beiden ersten Beispielen handelt es sich um Versuchsergebnisse, die der Literatur entnommen worden sind. Die numerische Nachrechnung erfolgt unter Verwendung der normativen Vorhersageverfahren zur Beschreibung des Langzeitverhaltens. In den beiden anderen Beispielen liegen beidseitig des Querschnitts ungleichmäßige hygrische Umgebungsbedingungen vor. Hier erfolgt die numerische Simulation mit dem gekoppelten hygrischen und mechanischen Modell.

6.3.1 Langzeitbeanspruchter Stahlbetonbalken unter Flächenlast

Von Washa & Fluck (1952) sind Ergebnisse einer Versuchsreihe an statisch bestimmten Stahlbetoneinfeldträgern veröffentlicht worden, die von ihnen mit der Zielsetzung durchgeführt wurden, den Einfluss einer Druckbewehrung auf das Kurz- und Langzeitverhalten aufzuzeigen. In der Studie sind Balken mit unterschiedlichen Querschnittsabmessungen und Bewehrungsmengen über einen Zeitraum von 2 1/2 Jahren beobachtet worden. Aufgrund des Vorliegens relativ ausführlicher Daten über das zeitabhängige Materialverhalten wurden sie schon mehrfach zur Überprüfung der zeitabhängigen Modellierung herangezogen [Schaper 1982; Walter 1988; Strippel 1996; Neubauer 2000]. Für die Nachrechnung in dieser Arbeit werden hier erstmals die normativen Ansätze aus DIN 1045-1 (2001) verwendet. Die zitierten Autoren wählten zur numerischen Analyse jeweils Balken der Serie C aus, da sie von ihrem Schlankheitsgrad am ehesten mit einem Flächentragwerk vergleichbar sind (Bild 6.25). Aufgrund der besseren Vergleichsmöglichkeit werden auch hier die sechs Balken dieser Serie numerisch nachgerechnet.

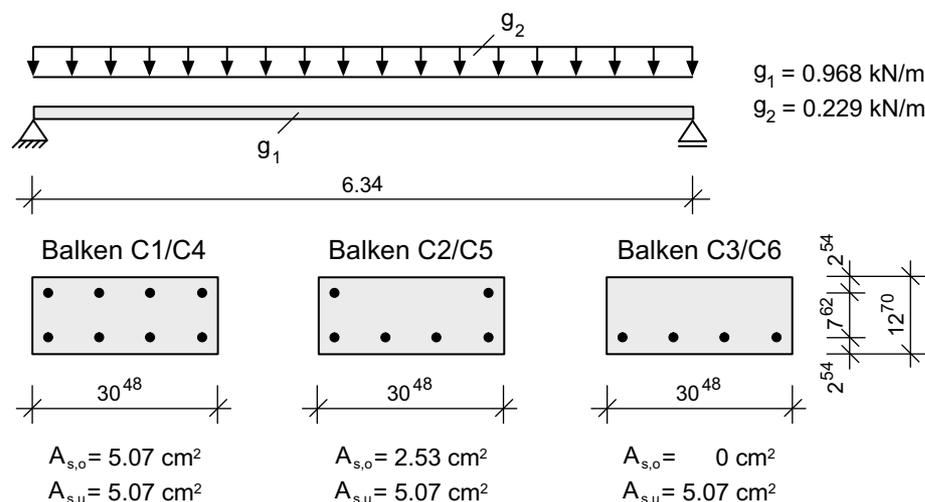


Bild 6.25: Langzeitbeanspruchter Stahlbetonbalken unter Flächenlast: System und Bewehrung der Serie C nach Washa & Fluck (1952).

Die Abmessungen und Bewehrungsgrade der Balken sind in Bild 6.25 angegeben. Die von der Geometrie identischen Balken unterscheiden sich durch die eingelegte Bewehrungsmenge auf der Druckseite. Dabei sind je zwei Balken identisch bewehrt. Zusätzlich zum

Eigengewicht g_1 werden die Balken mit einer Gleichstreckenlast g_2 belastet, womit insgesamt jeweils eine Belastung von 1.197 kN/m aufgebracht wird. Diese führt bei allen Balken dazu, dass weite Bereiche in den gerissenen Zustand übergehen.

Die in Tabelle 6.10 angegebenen Materialparameter sind weitestgehend dem Aufsatz von Washa & Fluck (1952) entnommen worden. Dabei werden für die Druckfestigkeit und den Elastizitätsmodul des Betons die jeweiligen Mittelwerte aus den parallel durchgeführten Zylinderversuchen angesetzt.

Beton:		Stahl:	
f_c	= 22.68 N/mm ²	f_y	= 352.0 N/mm ²
E_{c0}	= 20310 N/mm ²	E_s	= 200000 N/mm ²
ν	= 0.18	E_h	= 1000 N/mm ²
f_{ct}	= 2.50 N/mm ²	ε_s	= 19.5 %
ε_c	= 2.0 ‰		

Tabelle 6.10: Langzeitbeanspruchter Stahlbetonbalken unter Flächenlast: Angesetzte Materialparameter.

Die Träger wurden über einen Zeitraum von 5 Tagen nach dem Betonieren feucht gehalten. Bis zum 14. Tag lagerten die Träger auf der unteren Schalung, womit die Belastung bis zu diesem Tag nicht wirksam wurde. Erst danach wurden sie auf zwei Endauflager gelegt. Für die variierenden Umgebungsbedingungen während des Untersuchungszeitraums ist eine relative Luftfeuchte zwischen 20 % und 80 % und eine Temperatur zwischen 21 °C und 27 °C angegeben.

Um das zeitabhängige Betonverhalten beschreiben zu können, sind im Zuge der Studie Dehnungsmessungen an belasteten und unbelasteten Vergleichsprismen durchgeführt worden. Mit Hilfe der daraus resultierenden Dehnungsverläufe können die Schwind- und Kriechansätze approximiert werden. Mit den gewählten Parametern ergeben sich die in Bild 6.26 dargestellten Verläufe der Schwind- und Kriechfunktion.

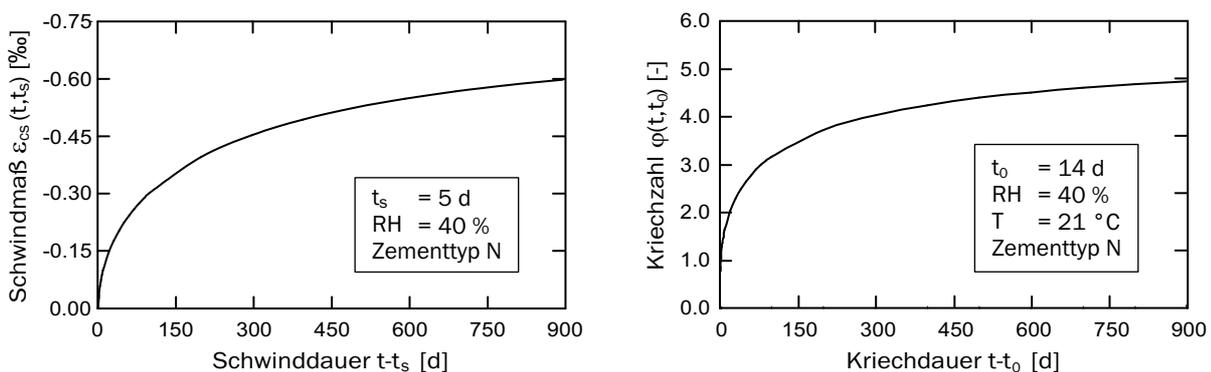


Bild 6.26: Langzeitbeanspruchter Stahlbetonbalken unter Flächenlast: Angesetzte Schwind- und Kriechfunktion nach DIN 1045-1 (2001).

Während der experimentellen Untersuchungen sind Verschiebungs- und Dehnungsmessungen in der Trägermitte durchgeführt worden. Die numerisch bestimmten zeitabhängigen

Verläufe der Mittendurchbiegung sind zusammen mit den Versuchsergebnissen in Bild 6.27 dargestellt. Als Anfangswerte für die Durchbiegung sind bei der Berechnung ohne Schwinden die Kurzzeitdurchbiegungen eingetragen. Bei der Berechnung mit Schwinden und Kriechen sind zusätzlich die Einflüsse des Schwindens vom 5. bis 14. Tag berücksichtigt worden. Wie die Ergebnisse zeigen, stimmen die errechneten Verläufe relativ gut

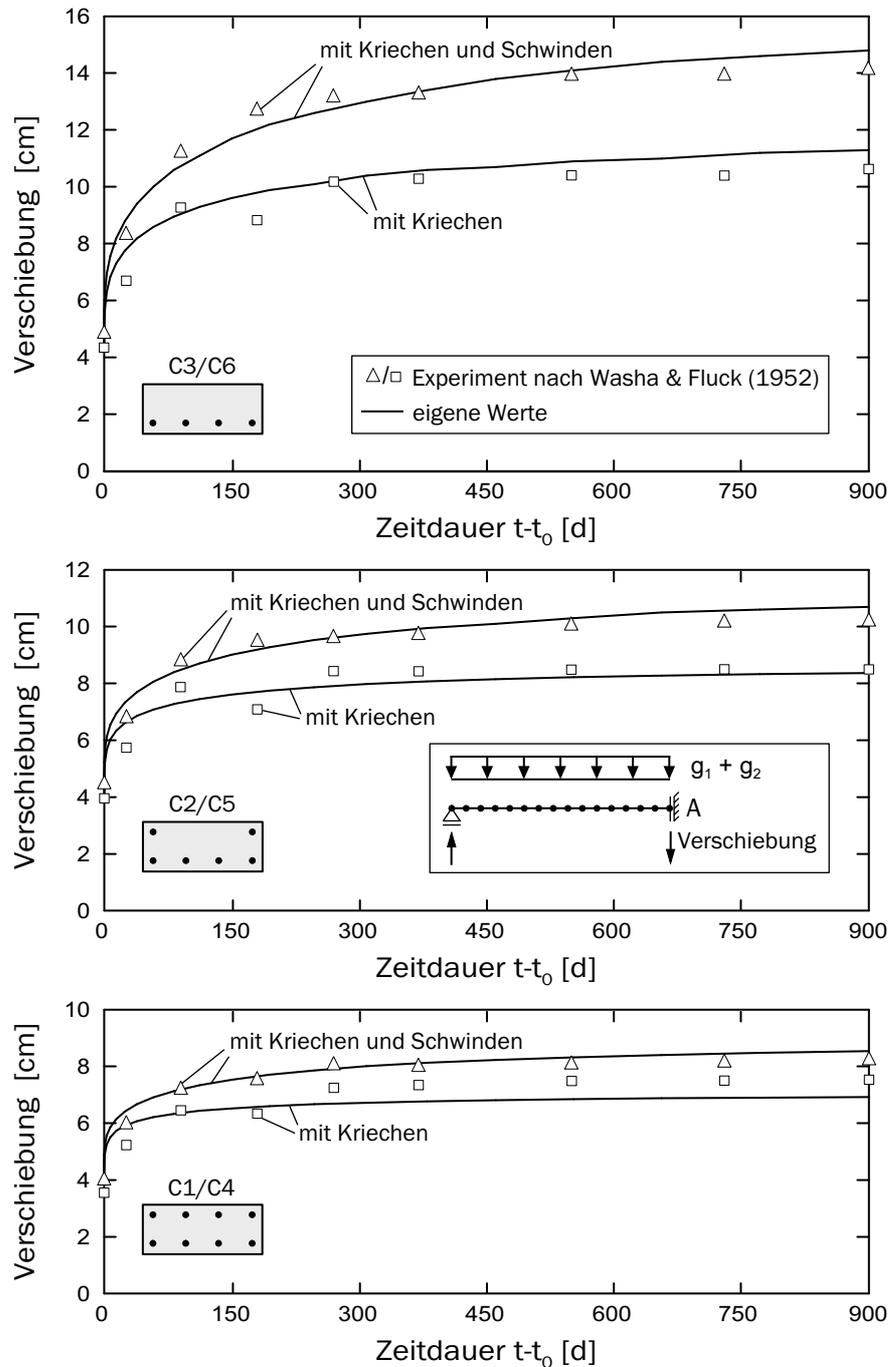


Bild 6.27: Langzeitbeanspruchter Stahlbetonbalken unter Flächenlast: Last-Zeit-Verschiebungs-Kurven im Punkt A für die Balken der Serie C.

mit den experimentell gewonnenen überein. Der deutliche Einfluss der Druckbewehrung auf die Ergebnisse wird auch numerisch gut abgebildet. Auf eine Darstellung der sich aus den anderen numerischen Studien ergebenden Durchbiegungen wird verzichtet. Der Vergleich zeigt, dass die berechneten Werte in derselben Größenordnung liegen, wobei die Ergebnisse der anderen Autoren teilweise stärker abweichen.

In Bild 6.28 sind die rechnerischen Ergebnisse der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Verzerrungsanteile für den oberen Trägerrand in Feldmitte dargestellt. Gut zu erkennen ist die Abhängigkeit der instantanen Verzerrungen vom vorliegenden Bewehrungsgrad.

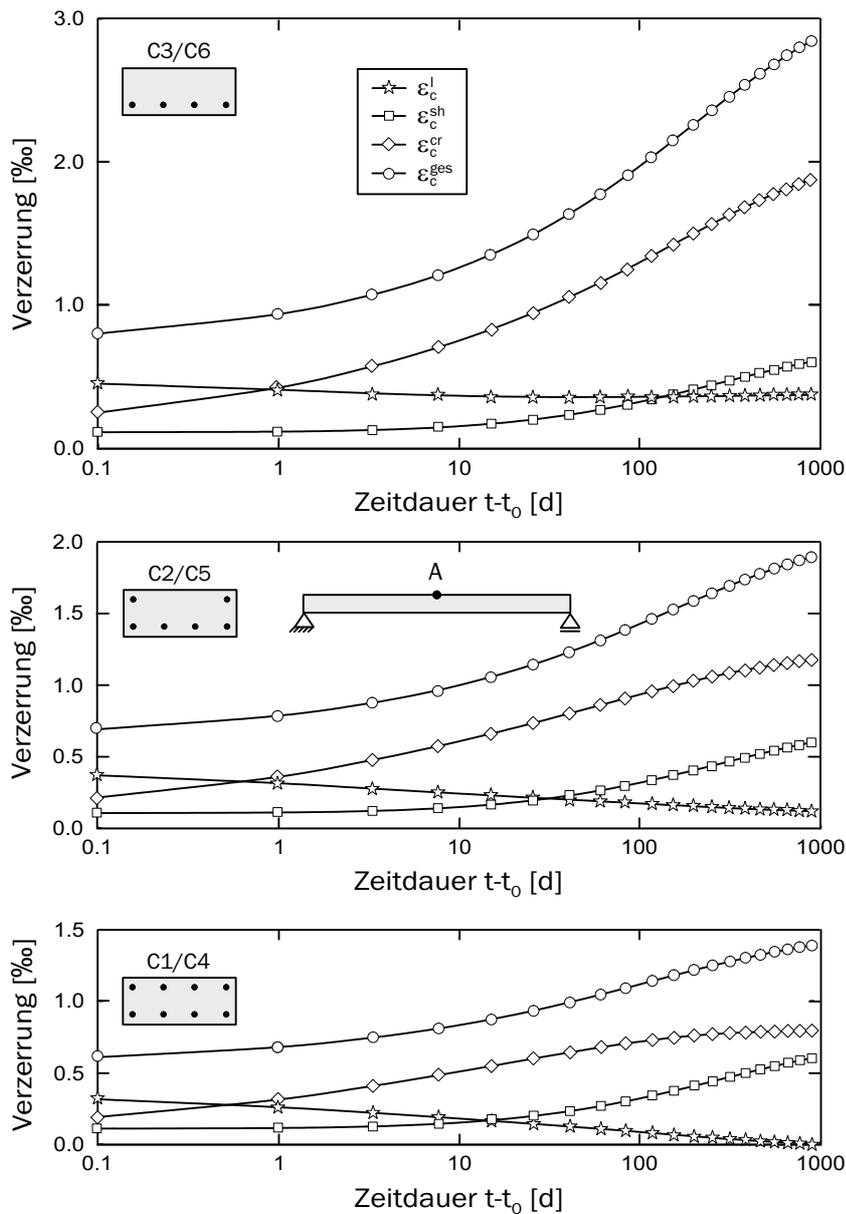


Bild 6.28: Langzeitbeanspruchter Stahlbetonbalken unter Flächenlast: Entwicklung der Verzerrungen im Punkt A für die Balken der Serie C.

Aufgrund größerer Umlagerungsmöglichkeiten bauen sich bei den Balken C1/C4 die Verzerrungsanteile am stärksten ab. Die Gesamtverzerrungen wachsen für alle drei Systeme deutlich an, was im Einklang mit den deutlichen Durchbiegungszunahmen steht. Die Ergebnisse stimmen mit denen von Neubauer (2000) gut überein.

Auch der zugehörige Spannungsabfall im Beton, bedingt durch die Spannungsumlagerungen von Beton auf Stahl, wird vom Modell wiedergegeben. Durch den Einfluss der Kriecheffekte werden beispielsweise in den Balken C3/C6 die Spannungen von 9.8 N/mm^2 nach 14 Tagen auf 5.8 N/mm^2 nach 900 Tagen reduziert. In dieser Größenordnung liegen auch die vergleichbaren Ergebnisse von Walter (1988) und Strippel (1996).

6.3.2 Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast

Zur Überprüfung des Langzeitverhaltens bei zweiaxialer Lastabtragung unter Verwendung der Kriech- und Schwindansätze nach DIN 1045-1 (2001) werden zwei Platten einer Testreihe untersucht, von denen das Verformungsverhalten unter Laborbedingungen über einen Zeitraum von zweieinhalb Jahren dokumentiert ist. Sie sind als RILEM Benchmark No. 5 in Espion (1993) veröffentlicht und beziehen sich auf eine Testreihe, die von Tellenbach & Favre (1985) durchgeführt wurde. Gewählt werden daraus die Platten D1 und D3, welche sich hinsichtlich der Bewehrung und der Lagerung unterscheiden. In der naviergelagerten Platte D1 ist im Unterschied zur punktgestützten Platte D3 eine zusätzliche obere Eckbewehrung eingelegt. Die zugehörigen Systembeschreibungen sind Bild 6.29 und die angesetzten Parameter Tabelle 6.11 zu entnehmen.

Beton:		Stahl:	
f_c	= 30.7 N/mm ² (D1)	f_y	= 500.0 N/mm ²
f_c	= 29.5 N/mm ² (D3)	E_s	= 200000 N/mm ²
E_{c0}	= 33500 N/mm ²	E_h	= 2222 N/mm ²
ν	= 0.2	ε_s	= 5.0 ‰
f_{ct}	= 2.60 N/mm ²		
ε_c	= 2.2 ‰		

Tabelle 6.11: Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast: Angesetzte Materialparameter.

Beide Platten wurden die ersten 7 Tage vor Austrocknung geschützt und danach konstanten Umgebungsbedingungen mit einer relativen Luftfeuchte von 65 % und einer Temperatur von 19 °C ausgesetzt. Die Ausschalung und Lagerung erfolgte am 14. Tag, wodurch ab diesem Zeitpunkt das Eigengewicht wirksam wurde. Eine zusätzliche simulierte Flächenlast ist letztendlich am 21. Tag aufgebracht worden. Unter Annahme eines normalerhärtenden Zementes ergeben sich für diese Bedingungen die in Bild 6.30 dargestellten Verläufe der Schwind- und Kriechfunktion.

In Bild 6.31 sind für beide Platten die numerisch ermittelten Verläufe der Durchbiegungen in Plattenmitte über die Zeit den Messergebnissen nach der Lastaufbringung von g_2 gegenübergestellt. Für die Platte D3 wird zusätzlich das Ergebnis von Neubauer (2000)

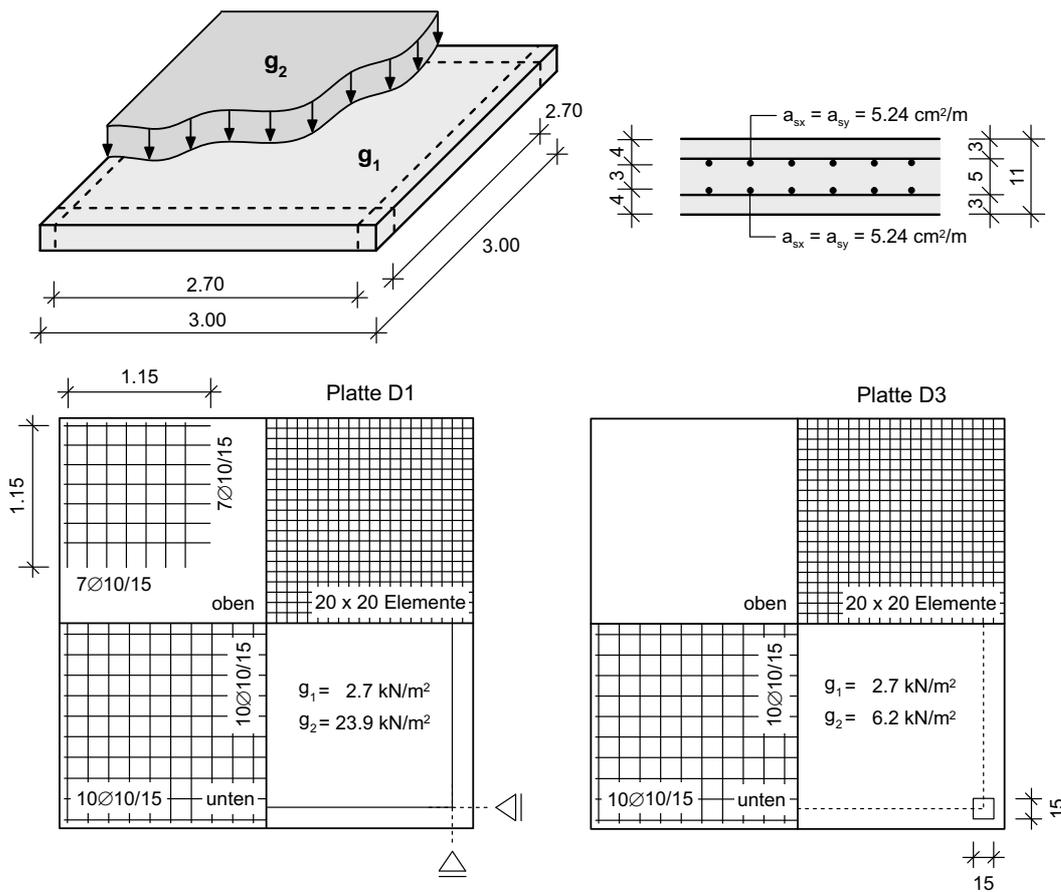


Bild 6.29: Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast: System der naviergelagerten Platte D1 und der punktgestützten Platte D3 aus Espion (1993).

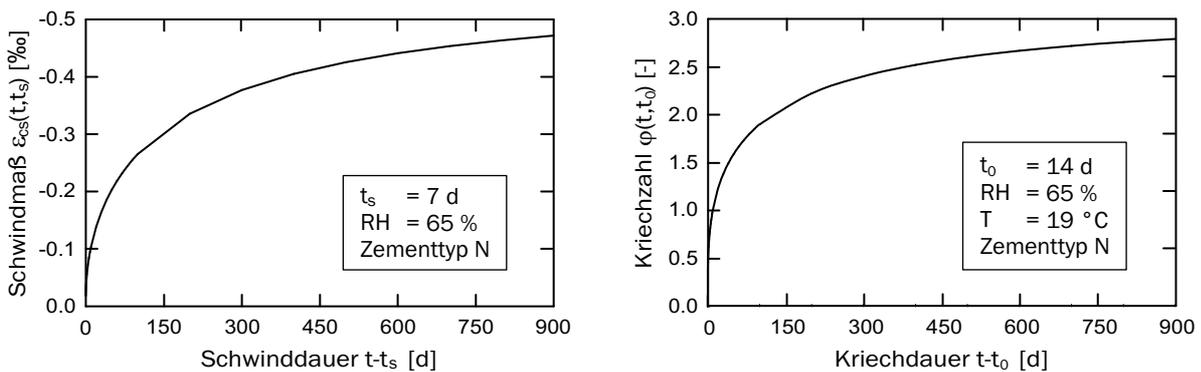


Bild 6.30: Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast: Angesetzte Schwind- und Kriechfunktion nach DIN 1045-1 (2001).

aufgeführt. Die Vorhersage der Verformung nach 900 Tagen ist bei beiden Platten zutreffend. Nur über den zeitlichen Verlauf kommt es zu einer niedrigeren Abbildung der Verformung. Die in DIN 1045-1 (2001) eingegangenen Ansätze sind, wie bereits erläutert, aus zahlreichen Versuchen entstanden und an Mittelwerte angepasst. In Anbetracht der

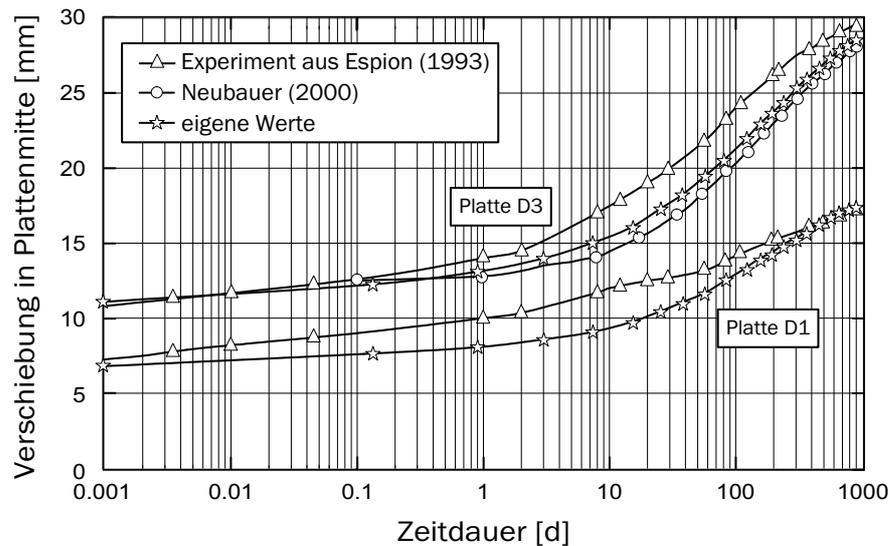


Bild 6.31: Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast: Last-Zeit-Verschiebungs-Kurven der Platten D1 und D3.

mit Variationskoeffizienten behafteten Formulierung ist verständlich, dass eine exakte Abbildung eines beliebigen Versuches mit den normativen Ansätzen nicht möglich ist. Umso mehr ist die relativ genaue Vorhersage der Endverformung hervorzuheben. Mit einer leicht modifizierten Form der Schwind- und der Kriechfunktion wäre eine noch genauere Nachbildung des Versuches möglich. Hinzu kommt der Aspekt, dass in gerissenen Zugbereichen der Kriechanteil nicht mehr berücksichtigt wird. In Wirklichkeit ist zwischen den Rissen aufgrund des Verbundkriechens ein gewisser Kriechanteil möglich, welcher unter Umständen auch einzelne Risse wieder schließen kann. Der Kriechanteil wird somit geringfügig unterschätzt.

Die Berechnung von Neubauer (2000) zeigt ein ähnliches Verhalten, liegt jedoch noch weiter unterhalb der Messkurve. Zu erwähnen ist, dass er die Vorhersageverfahren nach MC 90 (1993) verwendet, welche für die vorgegebenen Eingangsdaten sowohl für das Schwindmaß (hauptsächlich bedingt durch den fehlenden Anteil für das autogene Schwinden) als auch für die Kriechzahlen um nahezu 10 % nach unten abweicht.

Für die Überprüfung der Modellierung wurde eine logarithmische Darstellung gewählt (Bild 6.31), da hierdurch der Anfangsbereich, in welchem die Schwind- und Kriechdehnungen den größten Zuwachs haben, detaillierter abgebildet werden kann. Für eine genauere Betrachtung des Langzeitverhaltens über Jahre ist eine Darstellung mit linearer Skalierung anschaulicher. Diese ist für die Platte D1 in Bild 6.32 und für die Platte D3 in Bild 6.33 angegeben. Die Abweichung der bei der logarithmischen Skalierung zeitlich gesehenen Überbewertung im Anfangszeitraum relativiert sich hierbei. Zusätzlich sind in den Bildern noch die Kurven unter Vernachlässigung zum einen des Schwindens und zum anderen des Kriechens dargestellt, um den Einfluss der beiden Komponenten zu verdeutlichen. Wie aus den Bildern zu entnehmen, ist der Schwindanteil jeweils größer als der Kriechanteil. Bei der Platte D1 liegt ein nahezu additiver Zusammenhang zwischen den Kurven vor, so dass sich der Kriechanteil zu 30 % und der Schwindanteil zu 70 % bestim-

men lässt. Für die Platte D3 weichen die errechneten Ergebnisse unter Berücksichtigung beider Effekte stärker von der additiven Überlagerung ab (9%). Durch die aufgrund der Lagerung in diesem Fall stärker behinderten Schwindverformungen kommt es hier zu stärkeren Wechselwirkungen.

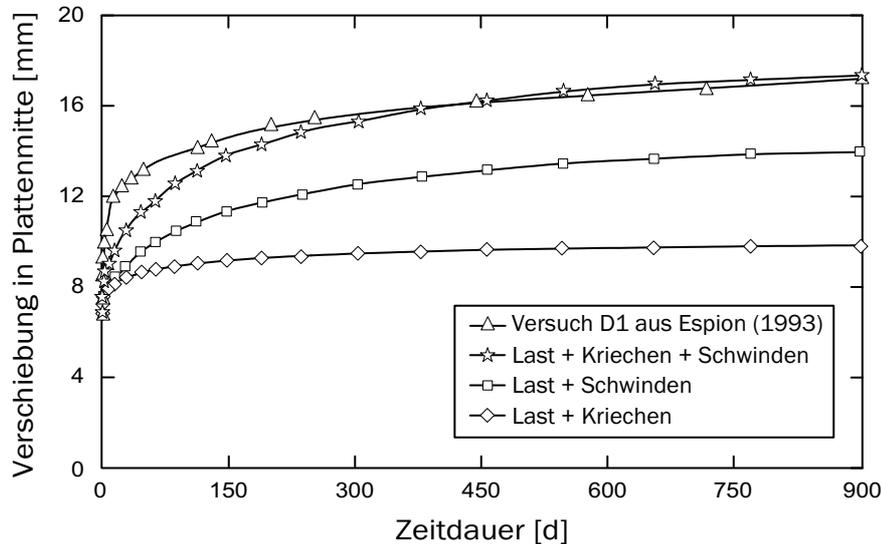


Bild 6.32: Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast: Last-Zeit-Verschiebungs-Kurven der Platte D1.

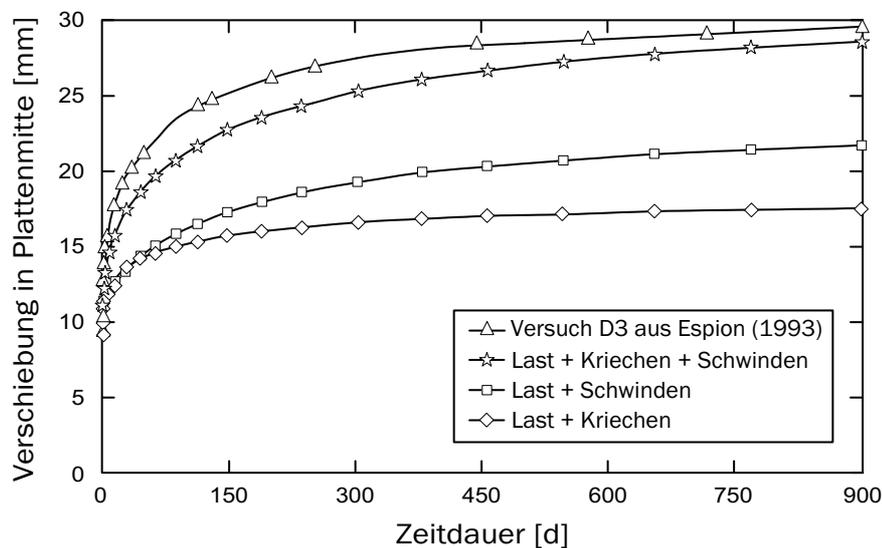


Bild 6.33: Langzeitbeanspruchte Stahlbetonplatten unter Flächenlast: Last-Zeit-Verschiebungs-Kurven der Platte D3.

Für beide Platten beträgt die Vergrößerung der Durchbiegung in Plattenmitte etwa das 2.5fache. Dies zeigt deutlich, wie groß der Einfluss des Langzeitverhaltens ist. Sowohl die Verformungskurven aus den Versuchen als auch die numerisch ermittelten weisen zum

Ende des Untersuchungszeitraums immer noch eine, wenn auch geringe, aber doch stetige, Zunahme der Verformung auf.

6.3.3 Betonkragstruktur unter Feuchtegradient

Um den Einfluss hygrischer Gradienten auf das Verhalten von Betonstrukturen zu analysieren, sind im Baustoffinstitut der Technischen Universität München einseitig eingespannte Betonbalken einer ungleichmäßigen hygrischen Umgebungssituation ausgesetzt worden [Springenschmid & Fleischer 1989; Springenschmid & Fleischer 1993]. Innerhalb der Versuchsserie sind Betone mit unterschiedlichen Betonrezepturen untersucht worden. Bild 6.34 zeigt die schematische Darstellung der Betonkragstruktur, die mit einer freien Länge von 2.50 m und einer Höhe von 20 cm hergestellt worden ist. Der Träger ist auf der Unterseite mit Wasser beaufschlagt worden, während er auf der Oberseite einer konstanten relativen Luftfeuchte von 65 % ausgesetzt worden ist. Die Seitenflächen der Träger sind hygrisch und thermisch isoliert worden, wodurch sich nur ein eindimensionaler Feuchtetransport ausbilden konnte. Die numerische Nachrechnung dient der Verifizierung des gekoppelten hygrischen und mechanischen Modells.

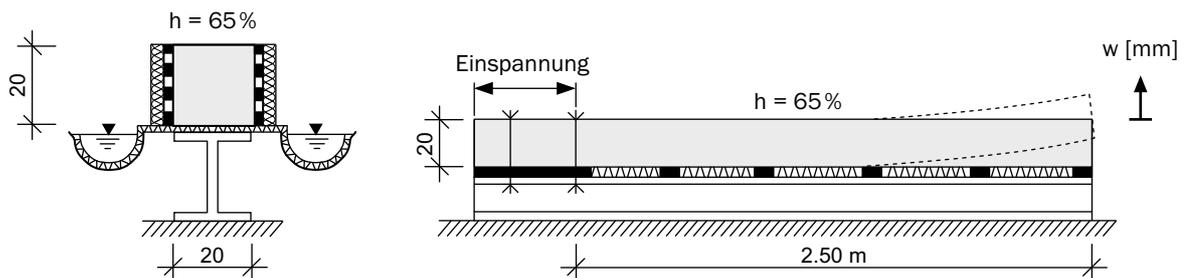


Bild 6.34: Betonkragstruktur unter Feuchtegradient: System nach Springenschmid & Fleischer (1989).

Für die Abbildung der Lagerungssituation wird ein im Programmsystem integriertes Bettungselement verwendet, welches facettenartig in eine beliebige Flächengeometrie eingebettet werden kann. Durch die gleichzeitige Vorgabe einer großen Bettungsziffer und der Bedingung, dass die Bettung keine Zugkräfte aufnehmen kann, wird einerseits eine Durchbiegung nach unten verhindert, andererseits jedoch ein Abheben der Struktur ermöglicht. Die Diskretisierung des Balkens erfolgt mit 10 Elementen. Die Anzahl der Betonschichten ist ebenfalls 10. Zur Bestimmung der hygrischen Situation im Querschnitt werden 15 hygrothermische Schichten mit konstanter Dicke verwendet. Somit wird im Modell die Umrechnung der hygrischen Größen auf die Höhe der Betonschichten notwendig, womit deren korrekte Umsetzung anhand dieses Beispiels bestätigt werden kann. Aufgrund der konstanten Höhe der Struktur und der gleichmäßigen Randbedingungen ist es ausreichend, die hygrischen Zustandsgrößen nur an einem Punkt pro Zeitschritt zu ermitteln. Der gesamte Untersuchungszeitraum wird in 10 Zeitschritte eingeteilt, wobei innerhalb der hygrothermischen Berechnung zusätzlich die Schrittweitensteuerung eingesetzt wird.

Für den Beton wird in Springenschmid & Fleischer (1989) die Betonfestigkeitsklasse B35 vorgegeben. Die Kennwerte werden entsprechend DIN 1045 (1988) angesetzt. Die Wahl der Materialparameter für die hygrische Modellierung orientiert sich an den Werten, die bereits in Beispiel 6.2.4 verwendet worden sind (Tabelle 6.12). Die initiale relative Porenfeuchte wird mit $h_0 = 0.98$ angesetzt. Die Berechnung der freien hygrischen Verzerrungen erfolgt alternativ unter Verwendung der Gleichungen (3.102) und (3.104).

freie Wassersättigung	$w_{sat} = 115.00 \text{ kg/m}^3$
Approximationsfaktoren	$p_{k1} = 95.12 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
	$p_{k2} = 57.71 \cdot 10^{-2}$
Diffusionswiderstandszahl	$\mu = 150$
Kapillartransportkoeffizient	$D_{w,tr} = 3.0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{h}$
	$D_{w,sat} = 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{h}$
Temperatur	$\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
hygrische Ausdehnungskoeffizienten	$\alpha_{sh} = 2.5 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_{sw} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{kg}$

Tabelle 6.12: Betonkragstruktur unter Feuchtegradient: Angesetzte hygrische Materialparameter.

Bei der numerischen Analyse wird vorab das Eigengewicht auf das System aufgebracht. Aufgrund der vorliegenden Lagerung hat dies zunächst keine Auswirkungen. Das Eigengewicht wirkt jedoch bei der im Folgenden aufgetragenen hygrischen Umgebungssituation dem „Aufschüsseln“ der Platte entgegen. Die erhaltenen Ergebnisse sind zusammen mit zwei experimentellen Ergebnissen in Bild 6.35 dargestellt. Während die Wasseraufnahme auf der Unterseite ein Quellen zur Folge hat, führt die Wasserabgabe auf der Oberseite zu einem Schwinden. Die daraus resultierende Verkrümmung bewirkt das Abheben des Trägers am freien Ende. Dieses Verhalten wird für beide Berechnungsvarianten qualitativ

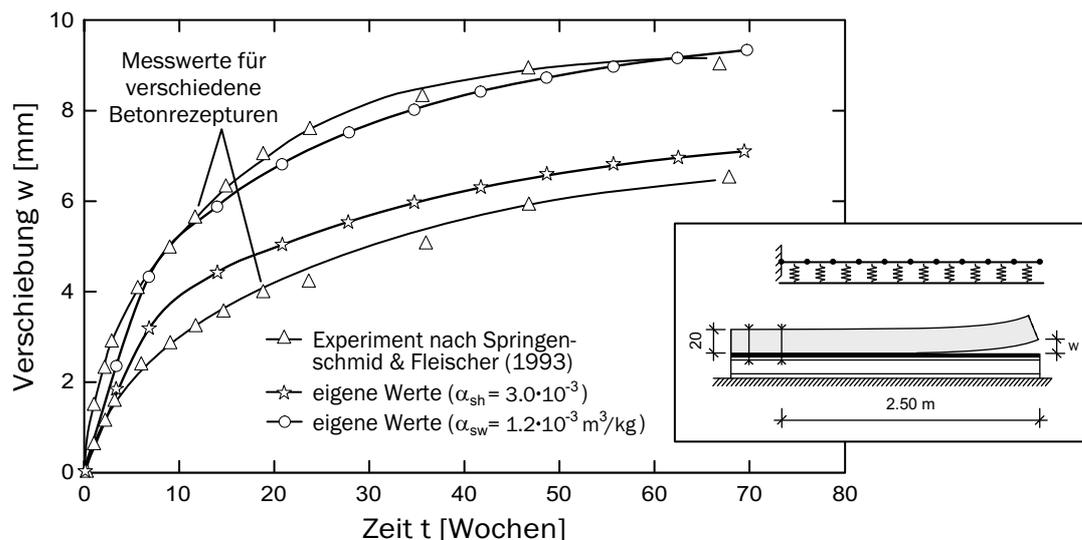


Bild 6.35: Betonkragstruktur unter Feuchtegradient: Vertikales Abheben des freien Endes.

sehr gut wiedergegeben, wobei sich mit Gleichung (3.104) die größeren Verformungen einstellen. Eine Annäherung der beiden numerischen Ergebnisse wäre durch den Ansatz eines anderen Ausdehnungskoeffizienten möglich. Jedoch war es hier nicht Ziel des Verfassers, durch die Anpassung der aus den Literaturstellen nicht bekannten Werte die jeweiligen Kurven genau zu treffen. Die Nachrechnung soll vielmehr zeigen, dass ein derartiges Verhalten mit dem vorgestellten Modell numerisch untersucht werden kann.

Für beide Modellierungsvarianten sind in Bild 6.36 die hygrischen Verzerrungen dargestellt, die sich über die Höhe des Trägers zu unterschiedlichen Zeitpunkten einstellen. Ein Vergleich der Verläufe zeigt den großen Einfluss der Feuchtespeicherfunktion. Da in beiden Fällen ein konstanter Ausdehnungskoeffizient angesetzt worden ist, würden sich unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Wassergehalt und relativer Feuchte qualitativ die gleichen Verläufe ergeben. Der überproportionale Anstieg des Wassergehalts im oberen Feuchtebereich bewirkt, dass sich die mit der Wassergehaltsänderung formulierten hygrischen Verzerrungen schneller ändern. Dieses Verhalten wird numerisch korrekt abgebildet. Trotz der erwähnten Unterschiede zeigen die nichtlinearen Verläufe für beide Varianten doch sehr deutlich, dass der Ansatz konstanter hygrischer Verzerrungen über den Querschnitt gemäß normativer Vorgaben hier unzureichend wäre. Eine Verkrümmung des Balkens könnte dann in der Analyse folgerichtig nicht beobachtet werden. Somit ist es gerade für Konstruktionen mit ungleichmäßigen hygrischen Randbedingungen wichtig, Modelle zu verwenden, die derartige Effekte erfassen können.

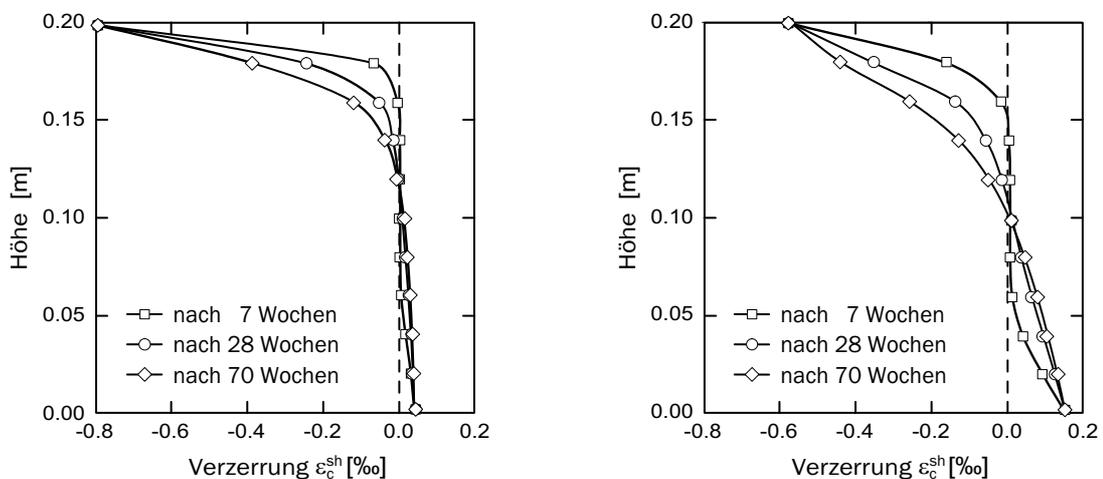


Bild 6.36: Betontragstruktur unter Feuchtegradient: Resultierende Höhenverteilung der hygrischen Verzerrungen ε_c^{sh} unter Verwendung der Gleichungen (3.102) (links) und (3.104) (rechts).

Die quantitative Erfassung der hier dargestellten Aufschüsselungserscheinungen ist Gegenstand aktueller Forschungsaktivitäten [Springenschmid 2000; Müller, Hörenbaum & Maliha 2002]. Die in den letzten Jahren zum Teil aufgetretenen Schäden an Stahlbetonfahrbahndecken können durch dieses Verhalten und den damit verbundenen Folgeursachen erklärt werden.

6.3.4 Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung

Als weiteres Beispiel zur Überprüfung der korrekten Implementierung dient die in Bild 6.37 dargestellte membrangelagerte Kreiszylinderschale. Die Schale wird neben dem Eigengewicht durch eine Wasserfüllung und eine Auflast am oberen Rand der Schale beansprucht. Zusätzlich wird eine dem hydrostatischen Druck entgegen wirkende Vorspannung angesetzt. Dabei soll die wirksame Vorspannkraft nach Abzug aller Verluste gerade den hydrostatischen Druck kompensieren. Somit werden beide Einflüsse in der FE-Berechnung vereinfachend vernachlässigt.

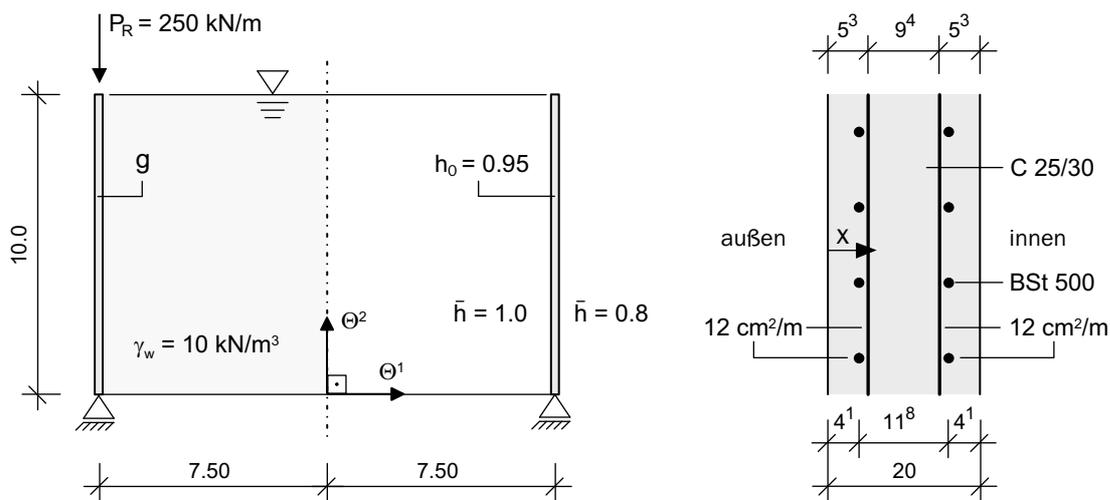


Bild 6.37: Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung: System und Bewehrung.

Die hygrischen Randbedingungen werden auf der Innenseite der Schale mit $\bar{h} = 1.0$ (Wasserfüllung) und auf der Außenseite mit $\bar{h} = 0.8$ (Außenluft) angesetzt. Als initiale relative Porenfeuchte wird $h_0 = 0.95$ gewählt. Die hygrischen Modellierungsparameter werden aus dem vorherigen Beispiel übernommen (Tabelle 6.12). Der auf der Änderung der relativen Porenfeuchte basierende hygrische Ausdehnungskoeffizient α_{sh} wird mit $2.0 \cdot 10^{-3}$ angenommen.

Von der Schale wird lediglich ein 90° -Sektor diskretisiert, was aufgrund der angenommenen Rotationssymmetrie der Einwirkungen ausreichend ist. Die Abbildung des Betons erfolgt mit 10 Schichten, die des Betonstahls mit 4 verschmierten Schichten.

Zunächst werden die Auswirkungen der hygrischen Einwirkungen ungeachtet der übrigen Beanspruchungen untersucht. Innerhalb der numerischen Analysen werden die hygrischen Verzerrungen ε_c^{sh} in der Schale auf zwei Arten ermittelt vgl. Abschnitt 5.4.5.2. Aus den nichtlinearen Verläufen der relativen Porenfeuchte im Schalenquerschnitt resultiert eine ebenfalls nichtlineare Verteilung der hygrischen Verzerrungen. Im ersten Fall, vereinfachend im Folgenden mit H_L gekennzeichnet, werden diese nichtlinearen Anteile entsprechend der Gleichung (5.106) im integralen Sinne linearisiert, womit die zu Eigenstressungen führenden Anteile in der numerischen Analyse unberücksichtigt bleiben. Im zweiten Fall, vereinfachend im Folgenden mit H_{NL} gekennzeichnet, werden die hygrischen Verzerrungen entsprechend der nichtlinearen Verteilungen erfasst.

In Bild 6.38 sind für beide Fälle die hygrischen Verzerrungen ε_c^{sh} über die Schalendicke dargestellt. Diese Verläufe gelten infolge der zu Grunde gelegten Randbedingungen für die gesamte Schale. Betrachtet man die numerisch bestimmten Verzerrungsverteilungen, so kann zunächst festgestellt werden, dass die Berechnung der linearisierten Verzerrungsanteile auf der Materialpunktebene innerhalb der zeitvarianten Multi-Level-Simulation korrekt durchgeführt wird. Durch die Linearisierung werden die Maximalwerte der nicht-linearen Verläufe an den Rändern abgemindert (Bild 6.38 (rechts)). Gleichzeitig führt dies zu einem Zuwachs der Schwindverzerrungen in den inneren Schalenbereichen. In beiden Fällen würden die Gradienten zu einer Verkrümmung des Querschnitts führen. Diese werden durch die aneinander angrenzenden Schalenbereiche in Umfangs- und Höhenrichtung jedoch unterbunden. Die Folge sind instantane Verzerrungsanteile, die sich aufgrund der nahezu nicht vorhandenen Gesamtverzerrungen in weiten Schalenbereichen in entsprechender Größenordnung aufbauen. Durch die Behinderung des Quellens in den inneren Schalenbereichen entstehen dort Druckspannungen, während aus der Schwindbehinderung in den äußeren Schalenbereichen Zugspannungen resultieren. Überschreitet die Zugspannung die angesetzte mittlere Betonzugfestigkeit von $f_{ctm} = 2.6 \text{ N/mm}^2$ kommt es zur Rissbildung.

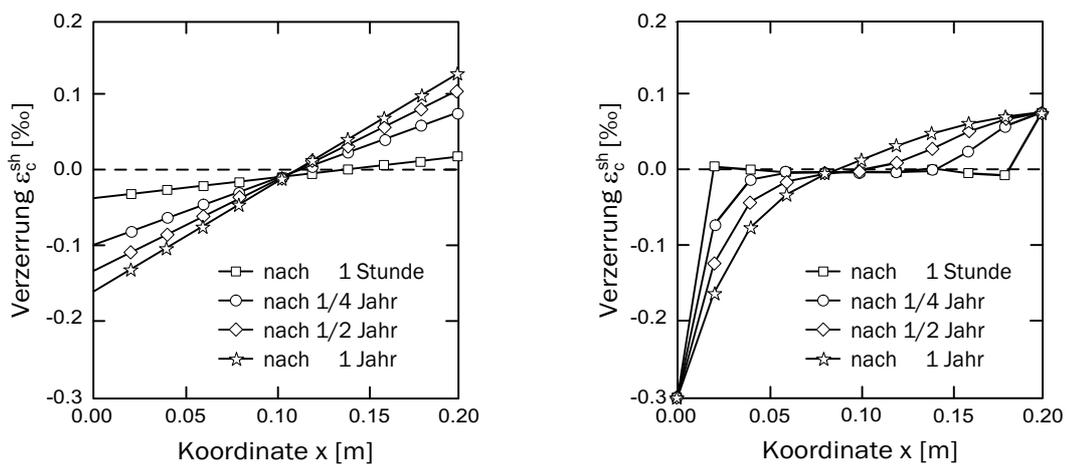


Bild 6.38: Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung: Resultierende Höhenverteilung der hygrischen Verzerrungen ε_c^{sh} über den Querschnitt für H_L (links) und H_{NL} (rechts).

Bild 6.39 zeigt die zeitliche Entwicklung der Rissbildung für beide Berechnungsvarianten. Dabei werden nur die äußeren 6 der insgesamt 11 Auswertungsebenen dargestellt. Zu Beginn der numerischen Berechnung nimmt die relative Porenfeuchte an den Rändern die jeweilige Umgebungsfeuchte an. Die Behinderung der hygrischen Verzerrungen infolge des Feuchtesprungs führt bei H_{NL} zu einer sofortigen oberflächennahen Rissbildung. Eine weitere Rissbildung ist erst dann wieder zu beobachten, wenn durch die allmähliche Abnahme der Porenfeuchte die Zugfestigkeit im äußeren Schalenbereich wieder überschritten wird. Bei H_L beginnt die Rissbildung entsprechend der in Bild 6.38 gezeigten Verzerrungen erst zu einem späteren Zeitpunkt. Jedoch bewirkt die Verlagerung der Verzerrungsanteile in das Schaleninnere eine Zunahme der Risstiefen. Die veränderte Rissbildung in den Randbereichen der Schale resultiert aus den sich ausbildenden Randstörungen.

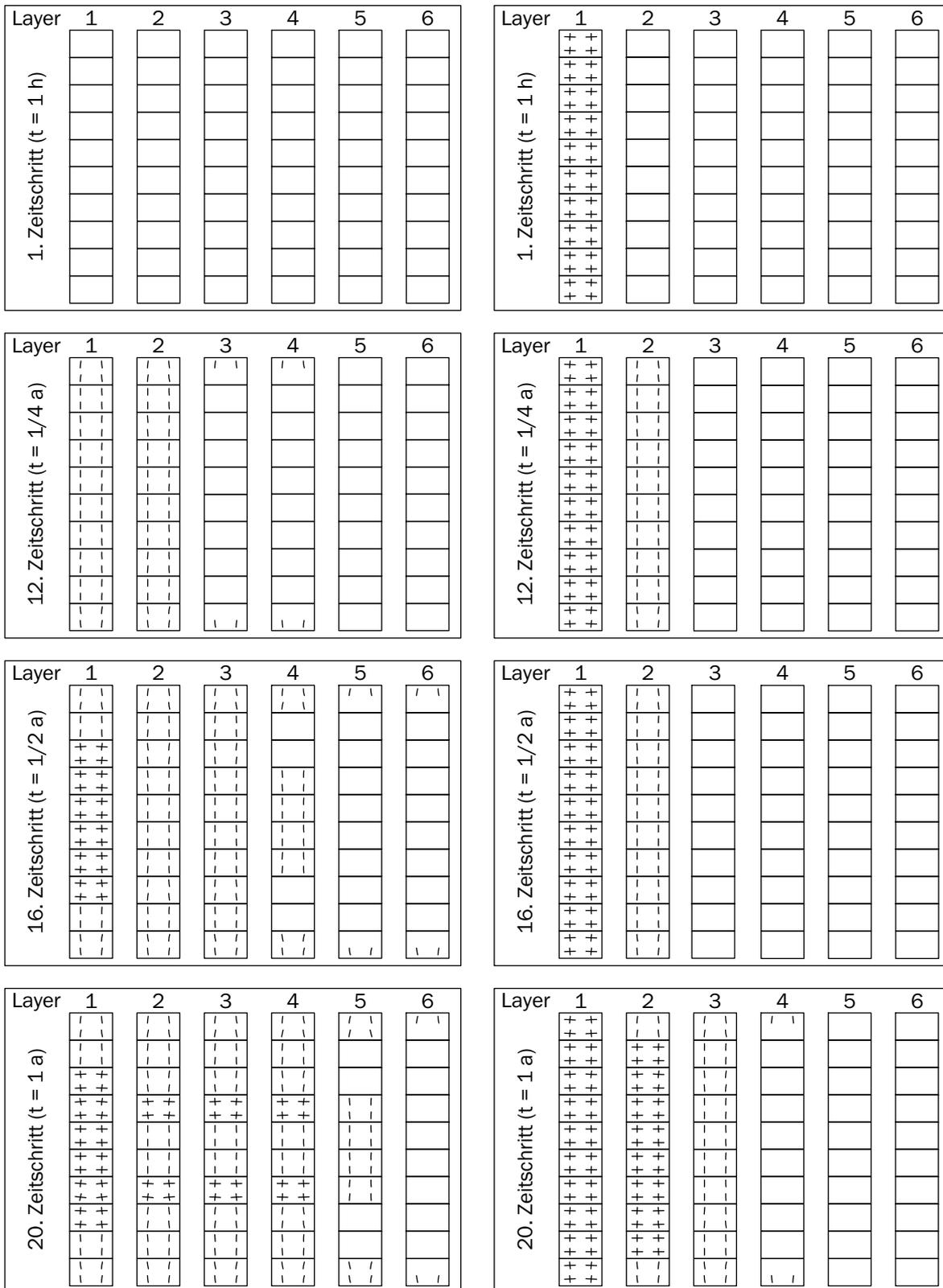


Bild 6.39: Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung: Rissbildung infolge H_L (links) und H_{NL} (rechts).

Die zu den Verzerrungen korrespondierenden Spannungen sind in Bild 6.40 zu sehen. Die tiefer gehende Rissentwicklung bei H_L ist hier zu erkennen. Bereiche, die gerissen sind, weisen aufgrund der verwendeten Tension-Softening-Modellierung keine Spannungen mehr auf. Entsprechend der linearisierten hygrischen Verzerrungen und damit auch der spannungserzeugenden Verzerrungen ist auch die Spannungsverteilung im ungerissenen Bereich des Querschnitts. Die Spannungsgradienten sind dabei stärker als bei H_{NL} .

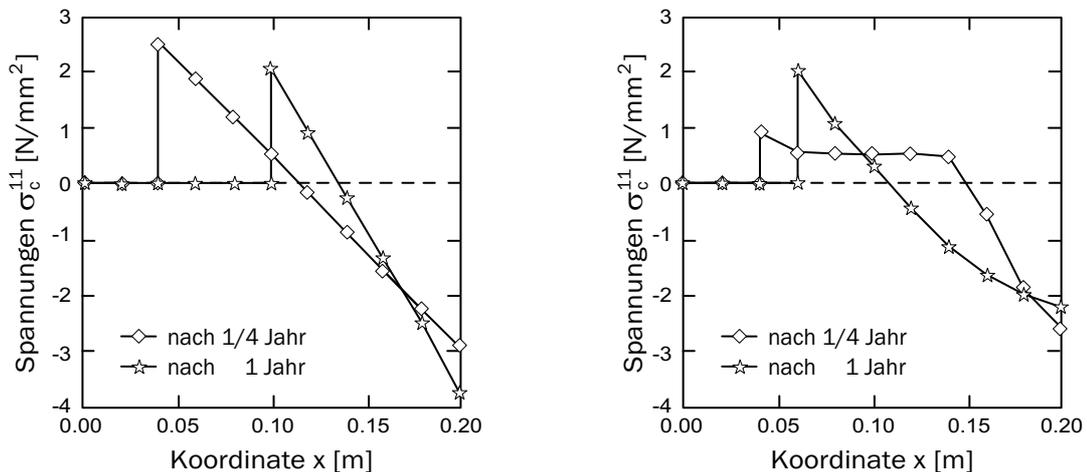


Bild 6.40: Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung: Spannungen σ_c^{11} in mittlere Schalenhöhe infolge H_L (links) und H_{NL} (rechts).

Bei der Betrachtung der Verformungen ist das für Schalen unter einer Temperaturgradienten typische Verhalten zu beobachten, dass sich die Schale an den Rändern nach außen aufbiegt (Bild 6.41). Infolge der hygrischen Gradienten entstehen in der Schale Meridian- und Ringbiegemomente. Letztere bauen sich infolge der Gleichgewichtsbedingungen zu den Rändern hin ab. Randstörungen, insbesondere die Ringkräfte N^{11} , sind die Folge.

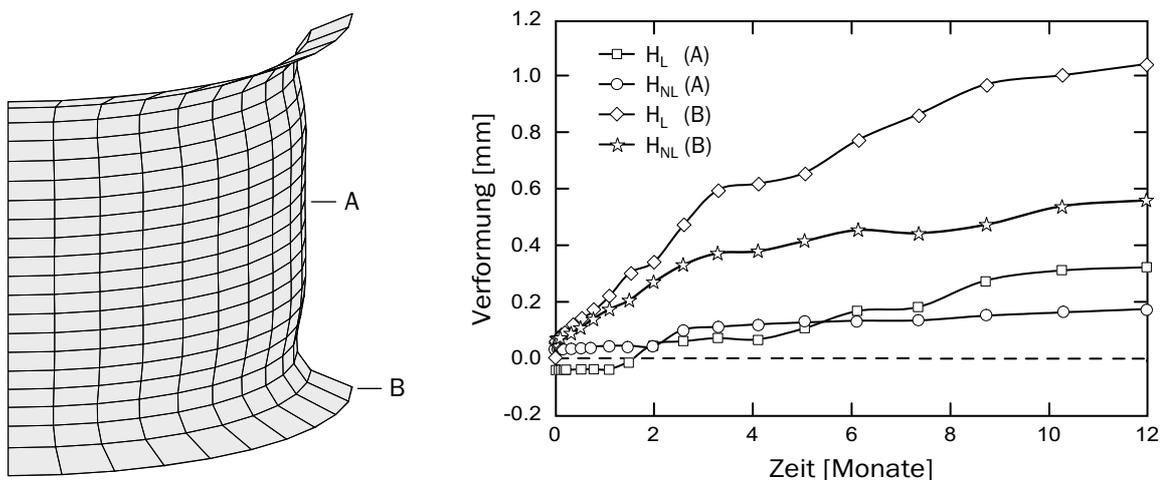


Bild 6.41: Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung: Verformung der Schale infolge H_L und H_{NL} .

Die zeitliche Entwicklung der Verformungen in der Mitte zeigt zunächst bei beiden Varianten ein unterschiedliches Verhalten. Während die sofortige Rissbildung bei H_L eine Verschiebung nach außen bewirkt, verformt sich die Schale im anderen Fall korrespondierend zu den Randstörungen nach innen. Die in Phasen auftretende Rissbildung ist an den abschnittsweise stärkeren Verformungszunahmen gut zu erkennen. Die quantitativ größeren Verformungen an den Rändern bei H_{NL} folgen aus den stärkeren Gradienten in den nicht gerissenen Betonbereichen.

Werden die Berechnungen unter Berücksichtigung der eingangs erwähnten Last G und P_R durchgeführt, dann zeigt die in Bild 6.42 dargestellte Rissentwicklung, dass durch die vertikale Last die Zugspannungen zum Teil überdrückt werden können. Somit treten bei H_{NL} deutlich weniger horizontale Risse auf, während im anderen Fall die Rissbildung weniger abnimmt.

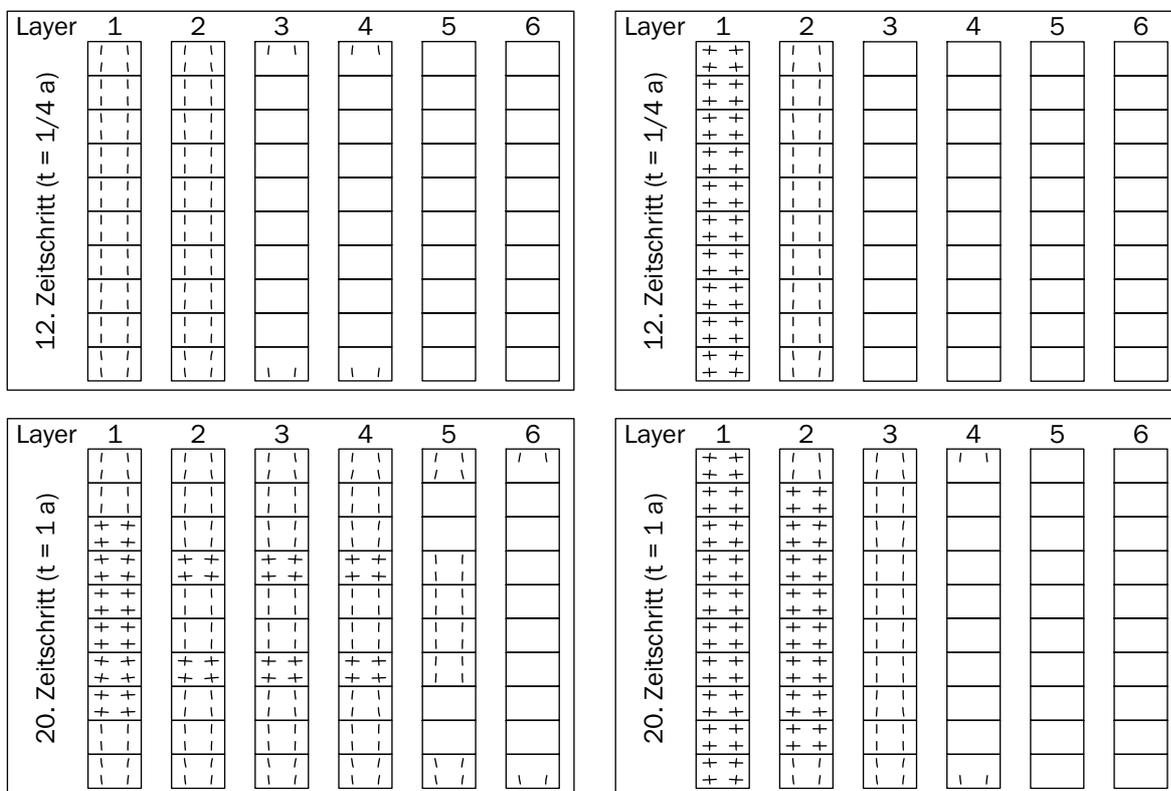


Bild 6.42: Stahlbetonschale unter kombinierter Beanspruchung: Rissbildung infolge $G + P_R + H_L$ (links) und $G + P_R + H_{NL}$ (rechts).

6.3.5 Bewertung

Mit den ersten beiden Beispielen konnte die normative Einbindung der Schwind- und Kriechansätze nach DIN 1045-1 (2001) verifiziert werden. Durch die Erweiterung der normativen Vorhersageverfahren für Beton höherer Festigkeit und die vorliegende, auch für hochfesten Beton erweiterte Materialformulierung ist die Möglichkeit geschaffen worden,

das unterschiedliche Verhalten von Stahlbetonstrukturen aus normal- und hochfesten Betonen vergleichend numerisch zu simulieren. So kann der Einfluss der einzelnen Schwind- und Kriechkomponenten auf die Dauerhaftigkeit analysiert werden. Untersuchungen, die das andersartige Verhalten beim jeweiligen Schwindprozess aufgrund der unterschiedlichen Gewichtung der Schwindanteile veranschaulichen, sind in Wittmann (2001) dargestellt.

Die beiden letzten Beispiele bestätigen, dass die im Zusammenhang mit den hygri-schen Gradienten auftretenden Phänomene in Beton- bzw. Stahlbetonstrukturen mit Hilfe der vorgestellten gekoppelten hygri-schen und mechanischen Materialmodellierung numerisch simuliert werden können.

Die erhöhte Neigung zur inneren Austrocknung bei hochfesten Betonen kann auch unter Verwendung der hier vorgestellten hygrothermischen Modellierung berücksichtigt werden. In die Feuchtebilanzgleichung (3.58) ist eine entsprechende Formulierung für den Quellterm zu integrieren, mit dem das über den Querschnitt konstante Verhalten abgebildet werden kann. Ein entsprechender Vorschlag ist von Martinola (2001) gemacht worden.

In der Planungsphase derartiger Konstruktionen wird der hier aufgezeigte Einfluss von hygri-schen Gradienten häufig nicht genügend berücksichtigt, woraus zwangsläufig ein niedrigeres Sicherheitsniveau resultiert.

Durch die Verwendung iterativer Bewehrungstechniken innerhalb der nichtlinearen Analysekonzepte kann eine dem geforderten Sicherheitsniveau angepasste Bewehrung ermittelt werden [Meiswinkel 1998]. Nichtlineare Analysen zeigen gerade bei Flächentragwerken, die infolge ihrer innerlichen statischen Unbestimmtheit über relativ hohe Tragfähigkeitskapazitäten verfügen, auf Möglichkeiten der Materialeinsparung, beispielsweise in Form einer Bewehrungseinsparung. Dies ist gleichbedeutend mit der Herabsetzung des vorhandenen Sicherheitsniveaus. Durch die Einbindung zeitabhängiger Einflüsse in das Analysekonzept werden diese Reduzierungsmöglichkeiten jedoch teilweise wieder kompensiert. Ein Beispiel, an dem dieses Phänomen gut erklärt werden kann, ist das einer gelenkig gelagerten Platte. Aufgrund der Lagerungsbedingungen bildet sich bei entsprechender Plattengeometrie ein Druck- bzw. Zuggewölbe aus. Somit würden in einer nichtlinearen Analyse ohne Berücksichtigung der zeitvarianten Effekte zusätzliche Tragreserven angezeigt werden. Bei Beachtung der Schwind- und Krieeffekte wird jedoch deutlich, dass die Gewölbewirkung mit der Zeit wieder abnimmt. Eine Reduzierung der Bewehrung aufgrund der zunächst angezeigten Tragreserven würde daher ein Sicherheitsdefizit zur Folge haben.

Kapitel 7

Numerische Anwendungen

Nach der Verifikation der einzelnen Komponenten des entwickelten numerischen Modells werden in diesem Kapitel die neu geschaffenen Untersuchungsmöglichkeiten anhand von zwei realisierten Bauwerken aufgezeigt. Zunächst wird das Verhalten einer Kühlturmschale unter hygrischen, thermischen und mechanischen Einwirkungen untersucht. Danach erfolgt die Analyse des Spannbetonturms einer Windenergieanlage unter thermischer und mechanischer Einwirkung.

7.1 Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms

7.1.1 Entwurfsproblematik

Kühltürme, die zweifelsohne zu den größten aber gleichzeitig auch dünnsten Industriebauwerken unserer Zeit gehören, bilden einen wichtigen Bestandteil im Kraftwerksbau. Innerhalb des Stromerzeugungsprozesses wird das erwärmte Kühlwasser im sekundären Wasserkreislauf einem Kühlturm zugeführt. Die im Inneren eines Naturzugkühlturms aufsteigenden erwärmten Schwaden führen zu einem thermischen und hygrischen Ungleichgewicht zwischen den inneren und äußeren Schalenlaibungen. Somit unterliegen die Stahlbetonschalen von Naturzugkühltürmen über ihre projektierte Lebensdauer neben den umgebungsbedingten auch betriebsbedingten Einwirkungen.

Der Einsturz von drei Kühlturmschalen in Ferrybridge im Jahre 1965 und weitere vereinzelte Einstürze in den beiden darauf folgenden Jahrzehnten verursachten weltweit umfangreiche Inspektionen an bereits bestehenden Kühlturmbauwerken [Krätzig, Eckstein & Harte 1998]. Dabei waren in einigen Kühlturmschalen Rissentwicklungen an den Schalenränder festzustellen, die im oberen Schalenbereich durch eine unzureichende Aussteifung des Schalenrandes und im unteren Schalenbereich vor allem durch Setzungsdifferenzen,

aber auch durch Schwindefeffekte mit den zugehörigen Ringbiegemomenten am Übergang zwischen Schale und Stützung verursacht worden sind. Darüber hinaus konnte bei vielen Schalen eine überwiegend vertikale Rissbildung auf der Schalenaußenseite beobachtet werden. Es fiel auf, dass die Kühlturmschalen in vielen Fällen zunächst ein beanstandungsfreies Tragverhalten aufwiesen und erst nach Jahren diese unerwartete Entwicklung der Meridianrisse beobachtet werden konnte. Bereits durchgeführte Simulationen zeigten, dass die Wirkung des Windes als alleinige Ursache für die Rissentwicklung ausgeschlossen werden kann. Weder Windlastwechsel noch die Annahme eines extremen Sturmereignisses ergaben bei der numerischen Berechnung Risse in der beobachteten Größenordnung und Verteilung. Daher müssen neben den windinduzierten Beanspruchungen weitere Einwirkungen für eine derartige Rissbildung verantwortlich sein.

Mit dem entwickelten Modell können derartige Schädigungsprozesse unter Erfassung der bereits erwähnten thermischen und hygri-schen Einwirkungen numerisch simuliert werden. Somit kann die Frage beantwortet werden, welchen Einfluss diese Einwirkungen auf das Verhalten von Kühlturmschalen haben und welchen Beitrag sie zu den beobachteten Rissbildungsprozessen liefern. Die durchgeführten Analysen ermöglichen Aussagen sowohl bezüglich der Gebrauchstauglichkeit als auch der Tragsicherheit, da mit ihnen neben lokalen Deteriorationen infolge Betonrissbildung, Betonplastizieren oder Stahlfließen auch globale Versagenstraglasten bestimmt werden können.

7.1.2 Vorgaben nach der VGB-Richtlinie

Zur Berücksichtigung von spezifischen Zusatzanforderungen bei der Bemessung von Kühltürmen wird in Ergänzung zu den geltenden Stahlbetonbaunormen von der VGB - Technische Vereinigung der Großkraftwerksbetreiber e.V. - die Bautechnische Richtlinie für Kühltürme - BTR - herausgegeben. In diese fließen die Erfahrungen bei der Herstellung von Kühltürmen ein. Sie enthält Zusatzangaben zu den Einwirkungen, dem Sicherheitskonzept, zur gesamten Tragwerksplanung und zur Bauausführung.

Die Einführung der neuen Normengeneration machte eine Überarbeitung der derzeit gültigen VGB-Richtlinie (1997) notwendig. Ein Entwurf der neuen Richtlinie, der hier als Grundlage dient, liegt mit der VGB-Richtlinie (2003) vor. Im Folgenden werden lediglich die für die durchgeführten Analysen berücksichtigten Regelungen aufgeführt. Auf einen detaillierten Vergleich der inhaltlichen Abweichungen zwischen den Richtlinien wird auf Stopp (2003) verwiesen.

Einwirkungen. Das Eigengewicht des Stahlbetons ist mit einem charakteristischen Wert von 25.0 kN/m^3 gemäß DIN 1055-1 (2002) anzusetzen. Zur Berücksichtigung der meridionalen Windrippen ist die Eigenlast der Kühlturmschale entsprechend zu erhöhen.

Die von außen auf den Turm angreifende Windlast wird als eine statische Ersatzlast abgebildet. Dabei wird die in Höhen- und Umfangsrichtung veränderliche Außendruckverteilung mit

$$w_e(z, \theta) = c_{pe}(\theta) \cdot \varphi \cdot F_I \cdot q_b(z) \quad (7.1)$$

beschrieben. Der Verlauf des Druckbeiwerts $c_{pe}(\theta)$ über den Umfang ist von der Rauigkeit der Betonschale und damit der Ausbildung der Windrippen abhängig, da diese zu einer differierenden Entwicklung der Ablösewirbel führen. Die Resonanzwirkung infolge dynamischer Windlastanteile wird durch eine Erhöhung der statischen Ersatzlast mittels des dynamischen Überhöhungsfaktors φ erfasst. Dieser ist in Abhängigkeit von der Turmgeometrie und der energiereichsten und somit kleinsten Eigenfrequenz zu bestimmen. Mittels des Interferenzfaktors F_I wird die Beanspruchungserhöhung gegenüber einem Solisten infolge weiterer hoher Bauwerke in unmittelbarer Umgebung berücksichtigt. Der Böengeschwindigkeitsstaudruck q_b beschreibt die Verteilung über die Höhe. Die Grundwerte der mittels einer Exponentialfunktion angenäherten Verteilung sind in Abhängigkeit von Standort und Geländerauigkeit anzusetzen. Die zur Bestimmung der einzelnen Faktoren notwendigen Diagramme und Tabellen sind in der VGB-Richtlinie (2003) enthalten.

Zur Abbildung der thermischen Einwirkungen werden in der VGB-Richtlinie (2003) sowohl gleichmäßige Temperaturänderungen T_0 in der Schalenmittelfläche als auch Temperaturdifferenzen ΔT zwischen Schaleninnen- und -außenseite verwendet. Die charakteristischen Werte für die drei definierten Einwirkungszustände lauten:

- Betriebstemperatur T^{OP}

$$T^{\text{OP}} = \begin{cases} T_0^{\text{OP}} & = -15 \text{ K und} \\ \Delta T^{\text{OP}} & = +33 \text{ K (innen wärmer),} \end{cases} \quad (7.2)$$

- Sommer-Stillstand T^{S}

$$T^{\text{S}} = \begin{cases} T_0^{\text{S}} & = +22 \text{ K und} \\ \Delta T_{\text{eff}}^{\text{S}} & = -25 \text{ K (außen wärmer),} \end{cases} \quad (7.3)$$

- Winter-Stillstand T^{W}

$$T^{\text{W}} = T_0^{\text{W}} = -39 \text{ K.} \quad (7.4)$$

Den Ansätzen liegt die Annahme einer Aufstelltemperatur von 15°C zu Grunde. Die Außenlufttemperaturen für Sommer ($+37^\circ\text{C}$) und Winter (-24°C) entstammen DIN 1055-7 (2002). Mit Ausnahme der über den halben Umfang $\cos\theta$ -förmigen wirksamen Temperaturdifferenz $\Delta T_{\text{eff}}^{\text{S}}$ sind alle übrigen Lastfälle rotationssymmetrisch anzusetzen. Die Temperaturdifferenzen beziehen sich im Fall der Betriebstemperatur auf die Differenz der Umgebungstemperatur, im Fall des Sommer-Stillstandes auf die des Schalenquerschnitts. Der Wärmeübergangswiderstand ist mit $R_{si} = R_{se} = 0.04 \text{ (m}^2\text{K)/W}$ anzusetzen. Die Temperaturdifferenz aus Betrieb ergibt sich aus einem als realistisch angenommenen Extremwert von 50 K, abgemindert um den Teilsicherheitsbeiwert von 1.5.

Zur Berücksichtigung von Schwindvorgängen ist in der VGB-Richtlinie (2003) ein neuer Lastfall definiert worden. Dabei werden die Schwindverzerrungen durch eine entsprechende Temperaturänderung der Schalenmittelfläche von -15 K abgebildet.

Sicherheitskonzept. Das Sicherheitskonzept der VGB-Richtlinie (2003) entspricht dem Teilsicherheitskonzept der DIN 1045-1 (2001). Die notwendigen Teilsicherheits- und Kombinationsbeiwerte werden im Allgemeinen entsprechend den Vorgaben in DIN 1055-100

(2001) übernommen. An einigen Stellen werden jedoch davon abweichende Werte vorgegeben.

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit sind die folgenden Lastfallkombinationen nachzuweisen:

$$\gamma_G \cdot G + 1.60 \cdot W + 1.50 \cdot S, \quad (7.5)$$

$$\gamma_G \cdot G + 0.96 \cdot W + \gamma_{Q,T} \cdot T + 1.50 \cdot S. \quad (7.6)$$

Dabei dürfen die Auswirkungen des Lastfalls Schwinden nur ungünstig berücksichtigt werden. In Gleichung (7.5) ist ersichtlich, dass der Teilsicherheitsbeiwert der Windlast abweichend von DIN 1055-100 (2001) zu $\gamma_Q = 1.60$ angenommen wird. Desweiteren wird der Kombinationsbeiwert ψ_0 in (7.5) für die Temperatureinwirkungen zu Null vorgegeben. Zur realistischeren Erfassung der Zwangsschnittgrößen aus Temperatur darf bei linear-elastischer Berechnung $\gamma_{Q,T} = 1.00$ anstelle von $\gamma_{Q,T} = 1.50$ gesetzt werden. Dies entspricht einer Abminderung der Steifigkeit auf $2/3$ des ursprünglichen Wertes. Der Ansatz einer zusätzlichen Abminderung der Zwangsschnittgrößen entsprechend der zu verwendenden Materialsicherheiten

$$\gamma_{T,\text{red}} = 1.0/\min(\gamma_C, \gamma_S) = 1.0/1.15 \approx 0.90 \quad (7.7)$$

ist durch eine nichtlineare Vergleichsrechnung zu verifizieren.

Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit ist der Nachweis der Rissbreitenbeschränkung nach DIN 1045-1 (2001) zu führen. Nachweise zur Verformungs- sowie Spannungsbegrenzung können vernachlässigt werden. Als Lastfallkombinationen sind anzusetzen:

$$G + 0.50 \cdot W + T^{\text{OP}} + S, \quad (7.8)$$

$$G + T^{\text{OP}} + S, \quad (7.9)$$

$$G + 0.50 \cdot T^{\text{S}} + S, \quad (7.10)$$

$$G + 0.50 \cdot T^{\text{W}} + S, \quad (7.11)$$

wobei T^{OP} und S nur als ungünstige Einwirkungen zu berücksichtigen sind. Der vorgegebene Wert für die zulässige Rissbreite der Schale liegt bei $w_k = 0.20$ mm.

Nichtlineare Berechnungsverfahren. In der VGB-Richtlinie (2003) sind für die Ermittlung des Verformungs- und Schnittgrößenzustandes in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit die Mittelwerte der Festigkeits- und Formänderungskennwerte f_{cm} , f_{ctm} , E_{cm} und f_{yk} zu verwenden. Im Grenzzustand der Tragfähigkeit kann der Nachweis alternativ entsprechend dem in Kapitel 5.4.1 erläuterten Bemessungskonzept nach DIN 1045-1 (2001) durch einen rechnerischen Traglastzustand geführt werden.

7.1.3 Modellierung

Der hier untersuchte Kühlturm entspricht in seiner Geometrie dem im März 2000 im rheinischen Braunkohlerevier fertiggestellten Naturzugkühlturm in Niederaußem, der mit einer Höhe von 200 m den derzeit größten Kühlturm der Welt darstellt.

Um den Einfluss hygrischer und thermischer Zwangseinwirkungen besser analysieren zu können, werden die Untersuchungen mit einer rotationssymmetrischen Diskretisierung mit normenmäßig vorgegebenem Beton durchgeführt. Besonderheiten des realisierten Kühlturms, wie die nicht-rotationssymmetrische Gründungssituation, die hochliegende Reingaseinleitung, die Interferenzeinflüsse aus Windbelastung, der erstmalige Einsatz einer Vorspannung im oberen Randglied sowie der Einsatz eines säureresistenten Hochleistungsbetons bleiben an dieser Stelle unberücksichtigt. Über ihre Einflüsse auf das Tragverhalten ist schon mehrfach berichtet worden, beispielsweise in Andres & Wörmann (2000), Harte & Krätzig (2002), Busch, Harte, Krätzig & Montag (2002).

Bild 7.1 zeigt die Abmessungen des Kühlturms, den Wanddickenverlauf und die gewählte Diskretisierung der Schale sowie die Ausbildung des oberen Randglieds. Für alle Bauteile wird ein Beton C30/37 und ein Betonstahl BSt 500 S angenommen.

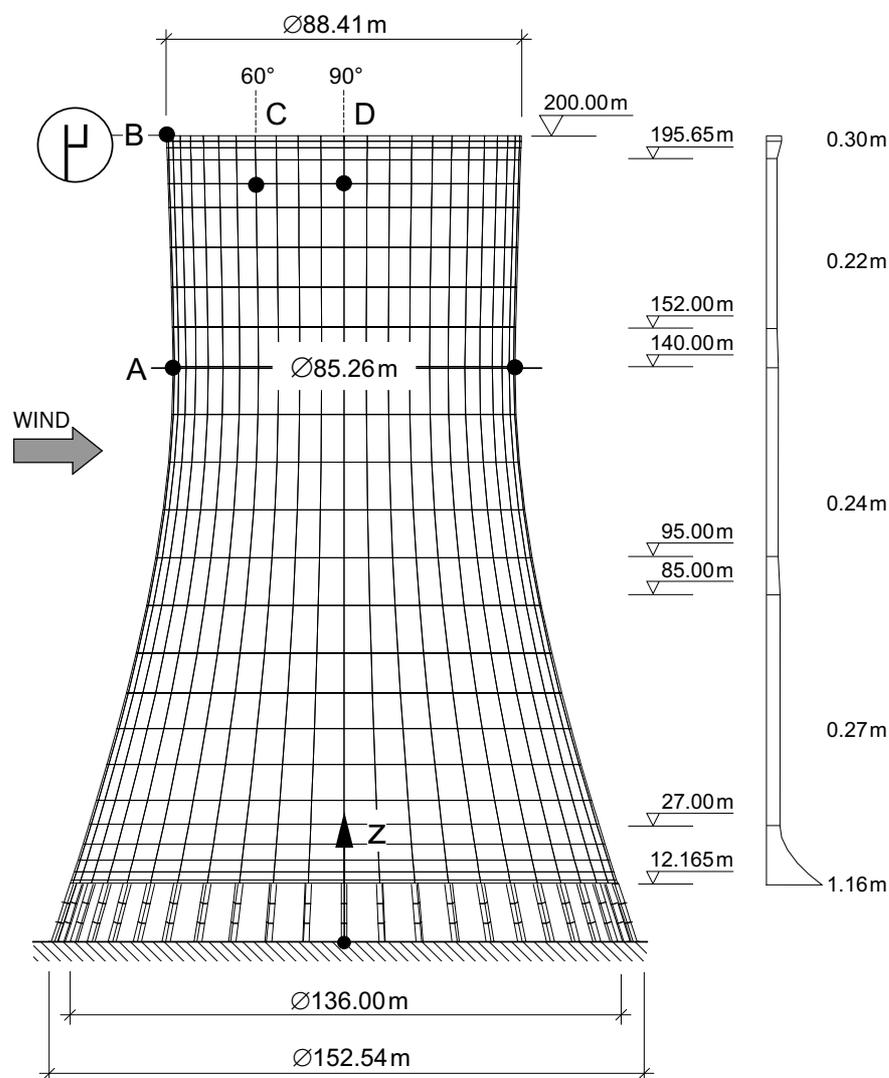


Bild 7.1: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Schalengeometrie und Wanddickenverlauf des Naturzugkühlturms.

Die Schale setzt sich aus zwei rotationssymmetrischen Hyperboloiden zusammen, deren Mittelflächengeometrien durch die allgemeine Hyperbelgleichung

$$r(z) = r_0 + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + (H_T - z)^2} \quad (7.12)$$

beschrieben werden. Die entsprechenden Parameter lauten:

$$\begin{array}{ll} \text{untere Schale : } r_0 = -1.0370 \text{ m,} & \text{obere Schale : } r_0 = 42.3828 \text{ m,} \\ a = 43.7030 \text{ m,} & a = 0.2472 \text{ m,} \\ b = 105.5967 \text{ m,} & b = 7.9419 \text{ m,} \\ H_T = 142.00 \text{ m,} & H_T = 142.00 \text{ m.} \end{array}$$

Die Diskretisierung der Schale erfolgt mit dem in Abschnitt 5.2 beschriebenen Schalenelement ASE4, wobei zur besseren Erfassung der Randstörungen eine zu den Rändern feiner werdende Netzgenerierung gewählt worden ist. Innerhalb der nichtlinearen Analysen wird die Schale durch 10 Betonschichten sowie je 2 orthogonal-uniaxiale Stahlschichten modelliert. Die Schale ist in einer Höhe von 12.165 m auf 48 Radialpfeilern gelagert. Diese haben eine konstante Breite von 1.40 m in Umfangsrichtung und eine linear veränderliche Dicke von 3.10 m an der Gründung bis 1.16 m am Schalenanschluss. Zur Diskretisierung der Meridionalstützen werden räumliche Balkenelemente verwendet. Vergleichsrechnungen in Noh (2002) zeigen, dass die Abbildungsform der Stützen die auftretenden Versagensmechanismen bei diesem Bauwerk nur geringfügig beeinflussen. Daher werden die Stützen auch im Rahmen der nichtlinearen Analysen vereinfachend als linear-elastisch abgebildet. Die Gründung des Bauwerks erfolgt über ein Kreisringfundament mit einer Dicke von 1.80 m und einer Breite von 6.50 m. Das Fundament wird mittels kontinuierlich gebetteter Scheiben-Platten-Elemente modelliert. Für die vertikale Bettung durch den Baugrund wird ein Bettungsmodul von $k_s = 9.0 \text{ MN/m}^3$ angesetzt. Für die horizontale Bettung wird der halbe Wert der vertikalen Bettung berücksichtigt. Da das System und alle angenommenen Einwirkungen mindestens achsensymmetrisch sind, wird nur der halbe Turm diskretisiert.

Für die aufzubringenden Windlasten wird entsprechend des Standorts Niederaußem von der Windzone 2 mit der Geländekategorie II ausgegangen. Aus den auf der Schalenaußenfläche angeordneten Windrippen ergibt sich der Rauigkeitsparameter k/a_R zu 0.005 und somit die Druckverteilungskurve K1.4. Der globale dynamische Überhöhungsfaktor φ wird mit 1.07 angesetzt. Vereinfachend wird von einem Solisten ausgegangen.

Die zu Grunde gelegten Bewehrungsmengen für die durchgeführten nichtlinearen Analysen werden zunächst auf der Basis einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung mit anschließender Querschnittsbemessung bestimmt. Dabei werden neben den Lastfallkombinationen (7.5)-(7.6) und (7.8)-(7.11) die Vorgaben für die Mindestbewehrung gemäß VGB-Richtlinie (2003) beachtet und mittels einer speziellen Extremierungsroutine ungünstigst überlagert. Als Betondeckung c_{nom} wird auf der Schalenaußenseite 4.0 cm und auf der Schaleninnenseite 4.5 cm gewählt, womit die Anforderungen der VGB-Richtlinie (2003) eingehalten werden. Die resultierenden Bewehrungsverläufe für die Ring- und Meridianrichtung sind in Bild 7.2 dargestellt. Zu Vergleichszwecken sind in das Bild die notwendigen Bewehrungsmengen für einen Beton B35 nach DIN 1045 (1988) eingezeichnet, die

sich aus den Vorgaben der VGB-Richtlinie (1997) ergeben. Vergleicht man die erforderlichen Bewehrungsmengen, so kann festgestellt werden, dass die Verläufe qualitativ ähnlich sind. Dies war zu erwarten, da die Regelungen in der neuen Richtlinie entsprechend den Erfahrungen mit der zur Zeit gültigen Richtlinie angepasst worden sind. Ein detaillierter Vergleich für die Gründe der quantitativen Unterschiede befindet sich in Stopp (2003). Für die angenommenen Stabdurchmesser erfolgt eine Staffelung in Höhenrichtung. Im Bereich bis 30 m wird ein Durchmesser von 20 mm, im Bereich zwischen 30 m und 60 m ein Durchmesser von 16 mm und im darüberliegenden Bereich ein Durchmesser von 12 mm angenommen.

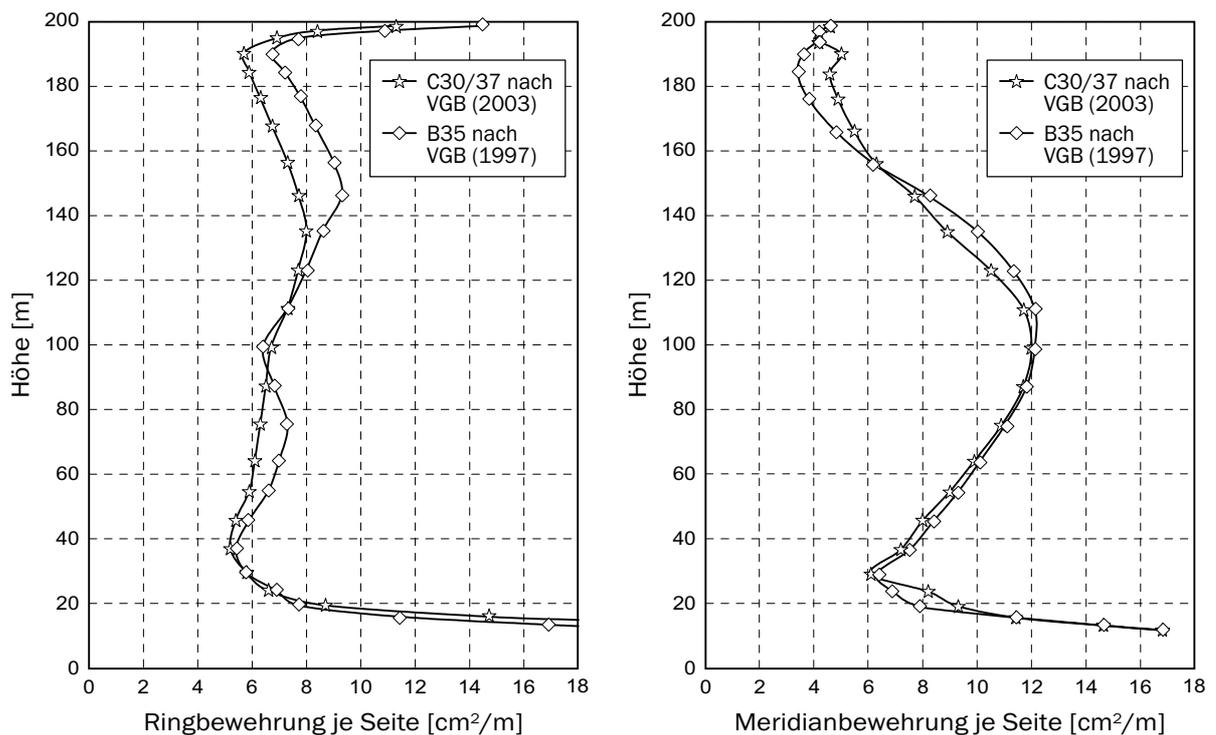


Bild 7.2: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Verläufe der aus der linearen Analyse resultierenden Ringbewehrung (links) und Meridianbewehrung (rechts) für den verwendeten C30/37 und zum Vergleich für einen B35.

Die für den Beton und Stahl angesetzten Materialparameter sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Die Analysen werden zunächst mit den dort angegebenen Mittelwerten der Materialfestigkeiten durchgeführt.

Für die Darstellung der Untersuchungsergebnisse sind stellvertretend für die gesamte Schale vier charakteristische Punkte ausgewählt worden. Dabei handelt es sich um die in Bild 7.1 angegebenen Punkte A (Tailenbereich) und B (Bereich des oberen Randgliedes) im Staupunktmeridian $\theta = 0^\circ$ und die Punkte C ($\theta = 60^\circ$) und D ($\theta = 90^\circ$) unmittelbar unterhalb des oberen Randgliedes.

Beton:		Stahl:	
f_c	= 38.00 N/mm ²	f_y	= 500.0 N/mm ²
E_{cm}	= 31900 N/mm ²	E_s	= 200000 N/mm ²
ν	= 0.20	E_h	= 84200 N/mm ²
f_{ct}	= 2.90 N/mm ²	ε_s	= 5.0 ‰
ε_c	= 2.3 ‰		

Tabelle 7.1: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Angesetzte Materialparameter.

7.1.4 Untersuchte Einwirkungskombinationen

Eine exakte Abbildung der über die Nutzungsdauer einwirkenden Größen ist bei einem derartigen Tragwerk nicht möglich. Daher ist man bestrebt, die auf das System einwirkenden Einflüsse anhand von charakteristischen Einwirkungskombinationen zu erfassen. Im Hinblick auf die Untersuchung von hygri-schen und thermischen Einflüsse auf das Tragverhalten der Kühlturmschale werden die folgenden Lastfallkombinationen betrachtet:

- G + W,
- G + T + W,
- G + H + W,
- G + T + H + W.

Die der Analyse zu Grunde gelegten thermischen und hygri-schen Einwirkungen werden nachfolgend näher erläutert.

Zur Erfassung der Beanspruchung der Schale durch thermische Einwirkungen T wird hier die Temperaturdifferenz aus dem Betriebszustand ΔT^{OP} berücksichtigt und mit dem nach der VGB-Richtlinie (2003) anzusetzenden Teilsicherheitsbeiwert von 1.5 multipliziert. Dies entspricht einer realistischen Größe der im Winterbetrieb vorhandenen Temperaturgradiente. Auf eine mögliche Berechnung der Temperaturverteilung mittels des thermischen Modells *Therm*, vgl. Abschnitt 5.3.8, wird an dieser Stelle verzichtet, da sich bei Vorgabe konstanter Umgebungstemperaturen und bei den vorliegenden Querschnittsdicken innerhalb weniger Stunden ein stationärer Zustand in der Schale einstellt.

Die angesetzten hygri-schen Einwirkungen werden im Lastfall H zusammengefasst. Nach Inbetriebnahme des Kühlturms ist die Innenfläche der Schale aufgrund der Dampfschwaden des zu kühlenden Wassers einem hohen Feuchtigkeitsniveau ausgesetzt. Die relative Feuchte wird für die FE-Berechnung mit $\bar{h} = 0.99$ angesetzt. Dieser Wert entspricht den Annahmen in Ulm, Rossi, Schaller & Chauvel (1999) und Rahm (2002). Die Außenseite der Schale wird durch die üblichen Umgebungsbedingungen beansprucht. Der Jahresverlauf der relativen Umgebungsfeuchte ist in Bild 7.3 exemplarisch für einen Beobachtungspunkt in Essen dargestellt. Die jahreszeitlich bedingten Schwankungen zwischen den Mittelwerten im Sommer (min. 70 ‰) und im Winter (max. 85 ‰) fallen relativ gering aus. Als Jahresmittelwert lässt sich eine relative Umgebungsfeuchte von 78 ‰ berechnen. Aufgrund der nur sehr langsam ablaufenden Feuchtetransportprozesse beeinflussen diese Schwankungen nur einen geringen Teil der Schale. Die folgenden Untersuchungen werden

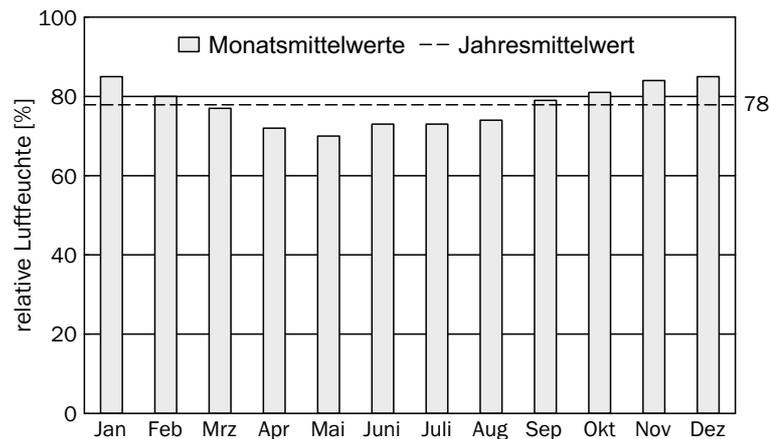


Bild 7.3: Langjähriger Mittelwerte der relativen Luftfeuchte für einen Standort in Essen [Deutscher Wetterdienst 2003]

daher mit einer konstanten Umgebungsfeuchte auf der Schalenaußenseite, zunächst mit $h_{en} = 0.80$, durchgeführt. Als initiale Feuchte h_0 in der Schale wird ein Wert von 0.95 angesetzt, womit die Feuchteabnahme vor Inbetriebnahme des Kühlturms näherungsweise erfasst wird. In Bild 7.4 (links) ist die daraus resultierende Entwicklung der Feuchteverteilung in einem Wandquerschnitt der Schale dargestellt. Die Dicke von 24 cm entspricht dem Mittelwert von weiten Teilen der Schale. Vergleichend ist die Entwicklung unter der Annahme eines modifizierten Ausgangszustandes dargestellt ($h_0 = 0.99$). Zu erkennen ist, dass der Ausgangszustand zwar die zeitliche Entwicklung beeinflusst, der sich einstellende stationäre Endzustand davon jedoch unabhängig ist. Darüber hinaus verdeutlichen die Verläufe, dass die im Querschnitt ablaufenden Ausgleichsvorgänge über Jahre andauern. Daher wird der Kühlturm in der Simulation über einen Zeitraum von 5 Jahren den hygrischen Einwirkungen ausgesetzt.

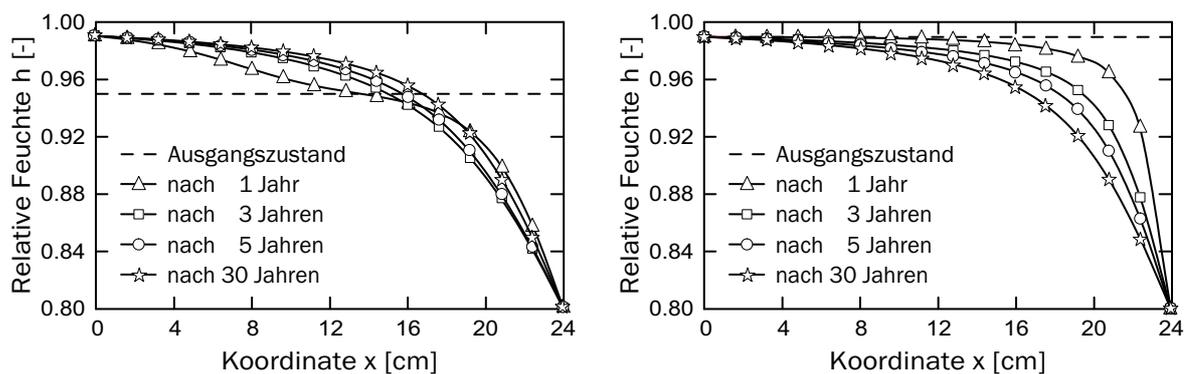


Bild 7.4: Entwicklung der relativen Feuchte h im Kühlturmquerschnitt für unterschiedliche Ausgangszustände

Die Eingangsdaten für die hygrische Modellierung entsprechen denen aus Abschnitt 6.3.3 (Tabelle 6.12). Der hygrische Ausdehnungskoeffizient α_{sh} wird zunächst mit $2.0 \cdot 10^{-3}$ vorgegeben. Die Einbindung der hygrischen Verzerrungsanteile erfolgt alternativ mit li-

neerer bzw. nichtlinearer Verteilung über die Schalendicke, vgl. Abschnitt 5.4.5.2. Die entsprechenden Einwirkungsfälle werden mit H_L bzw. H_{NL} gekennzeichnet.

7.1.5 Ergebnisdarstellung

In den nichtlinearen Analysen werden die einzelnen Einwirkungen entsprechend den zuvor definierten Kombinationen nacheinander inkrementell auf das System aufgebracht. Die quasi-statische Windlast wird abschließend bis zum numerischen Versagen gesteigert. Durch eine derartige Vorgehensweise werden die aus den thermischen und hygrischen Zwangbeanspruchungen resultierenden Einflüsse als eine Initialschädigung in Bezug auf die Hauptbeanspruchung der Kühlturmschale aus Wind aufgefasst. Davon abweichende Einwirkungsszenarien sind auch denkbar und berechenbar [Rahm 2002].

7.1.5.1 Last-Verformungs-Kurven und Rissentwicklung

Ein Vergleich der untersuchten Lastfallkombinationen erfolgt zunächst anhand der resultierenden Last-Verformungs-Pfade und der zugehörigen Rissevolutionen. Die Entwicklung der normal zur Mittelfläche gerichteten Verschiebung an zwei der zuvor definierten Punkte der Schale enthalten die Bilder 7.5 und 7.6. Die Rissentwicklung für verschiedene Stufen der Windlaststeigerung auf Höhe der äußeren Bewehrungslage ist in den Bildern 7.7 und 7.8 dokumentiert. Dabei sind kleinere Rissbreiten numerisch herausgefiltert worden.

Für die Lastfallkombination $G + \lambda \cdot W$ ist bis zu einem Lastniveau von $\lambda \approx 1.3$ ein lineares Verhalten erkennbar. Danach ist eine deutliche Verformungszunahme aufgrund des durch Rissbildung bedingten Steifigkeitsverlustes ersichtlich. Die ersten Risse treten im Bereich des Randglieds auf. Infolge der Meridianzugkräfte im Luv-Bereich entstehen danach horizontale Trennrisse unterhalb der Taille, die sich von dort ausgehend vor allem über die Höhe ausbreiten. Weitere überwiegend vertikal verlaufende Risse kommen ab einem Lastniveau von $\lambda = 1.7$ im oberen Schalenbereich ($\theta \approx 90^\circ$) und infolge von Ringbiegemomenten auf der Schalenaußenseite im Bereich der Taille ($\theta \approx 60^\circ$) hinzu. Im weiteren Verlauf schreitet diese Rissentwicklung fort. Auf der Außenseite der Schale schließen sich die einzelnen Bereiche zusammen und es kommt bereichsweise zu einer Überlappung. Auf der Innenseite bilden sich Biegerisse bei $\theta \approx 120^\circ$. Der Stahl plastiziert ab einem Lastniveau von $\lambda = 1.8$ beginnend in einer Höhe von ca. 30 m im Anströmmeridian. Bei $\lambda = 2.2$ tritt das Versagen durch das Reißen der Meridianbewehrung im Luv auf.

Bei der Simulation der Lastfallkombination $G + T + \lambda \cdot W$ erzeugt bereits die thermische Beanspruchung nahezu auf der gesamten Außenseite der Schale horizontale und vertikale Risse. Lediglich im unteren Schalenbereich wird die horizontale Rissbildung durch die Wirkung des Eigengewichts teilweise verhindert. Die überwiegende Anzahl der Risse, insbesondere die horizontalen Risse, sind jedoch in diesem Stadium kleiner als $w_m = 0.05$ mm (Bild 7.7). Diese Initialschädigung bewirkt bei der anschließenden Steigerung der Windlast einen flacheren Anstieg der Last-Verformungs-Pfade und ein Absinken der Linearitätsgrenze auf $\lambda \approx 1.0$. Auf einem mittleren Windlastniveau ergeben sich somit deutliche Unterschiede in den Verformungskurven. Im versagensnahen Bereich erfolgt

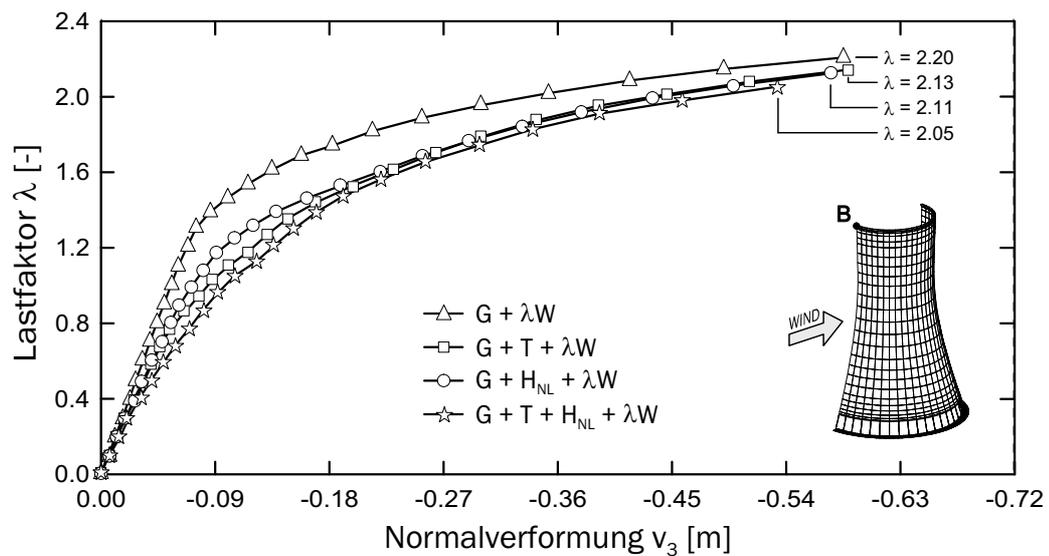


Bild 7.5: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Vergleich der Last-Verformungs-Kurven im Punkt B der Schale.

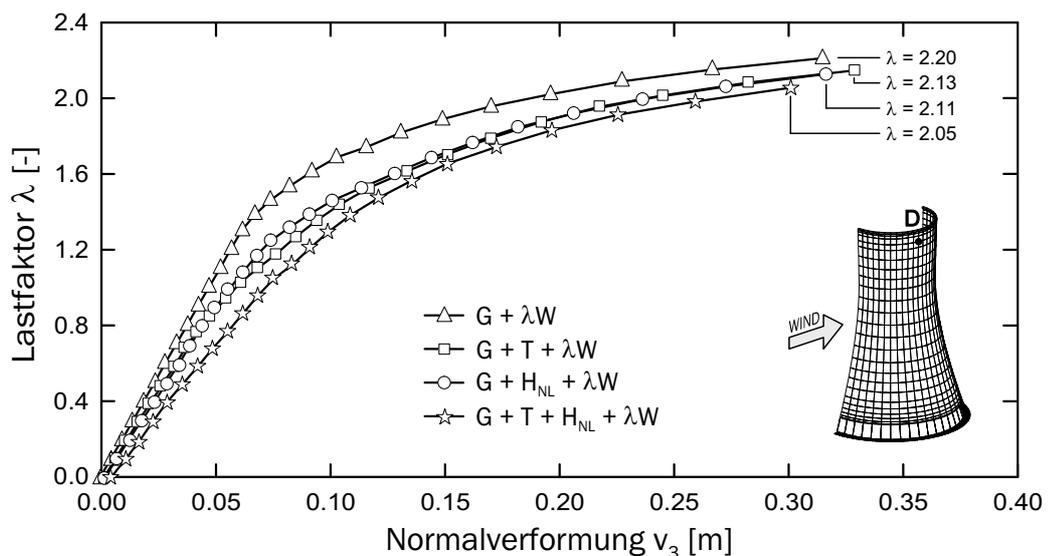


Bild 7.6: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Vergleich der Last-Verformungs-Kurven im Punkt D der Schale.

durch die fortschreitende Rissbildung ein Abbau der Zwangsschnittgrößen und damit eine Annäherung der Kurven. Das Absinken der Traglast auf $\lambda = 2.13$ resultiert jedoch aus der infolge der Rissbildung reduzierten Umlagerungsfähigkeit.

Die Last-Verformungs-Kurve der Einwirkungskombination $G + H_{NL} + \lambda \cdot W$ zeigt ein ähnliches Verhalten. Auf einem Windlastniveau von $\lambda \approx 1.0$ verhält sich der Turm bei hygrischer Vorschädigung durch H_{NL} etwas steifer als im thermischen Fall. Bis zum Versagenszustand nähern sich die Verläufe wieder an. Die Traglast ist mit $\lambda = 2.11$ auf nahezu gleichem Niveau.

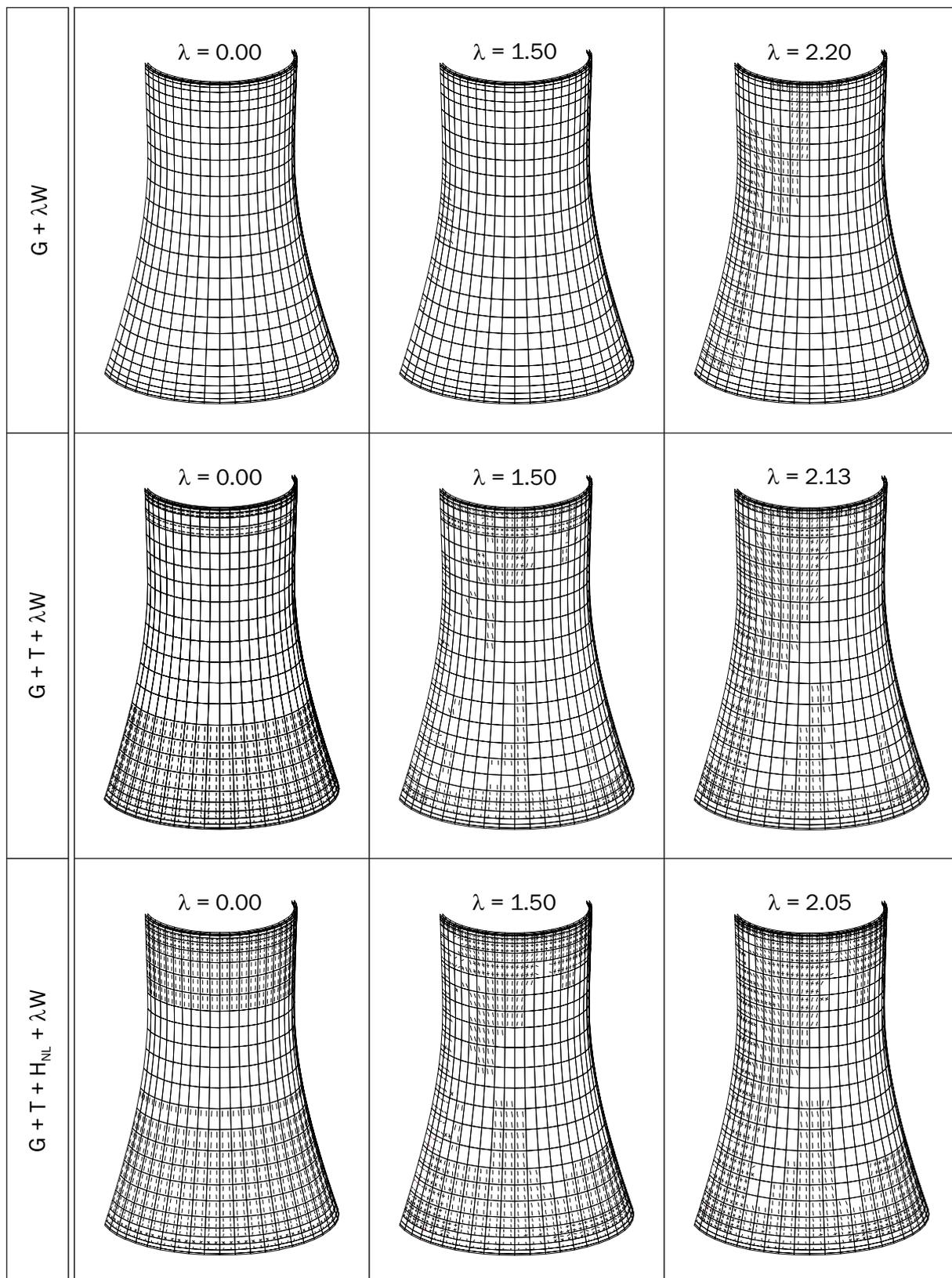


Bild 7.7: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Rissentwicklung auf Höhe der äußeren Bewehrungslage ($w_m > 0.05$ mm).

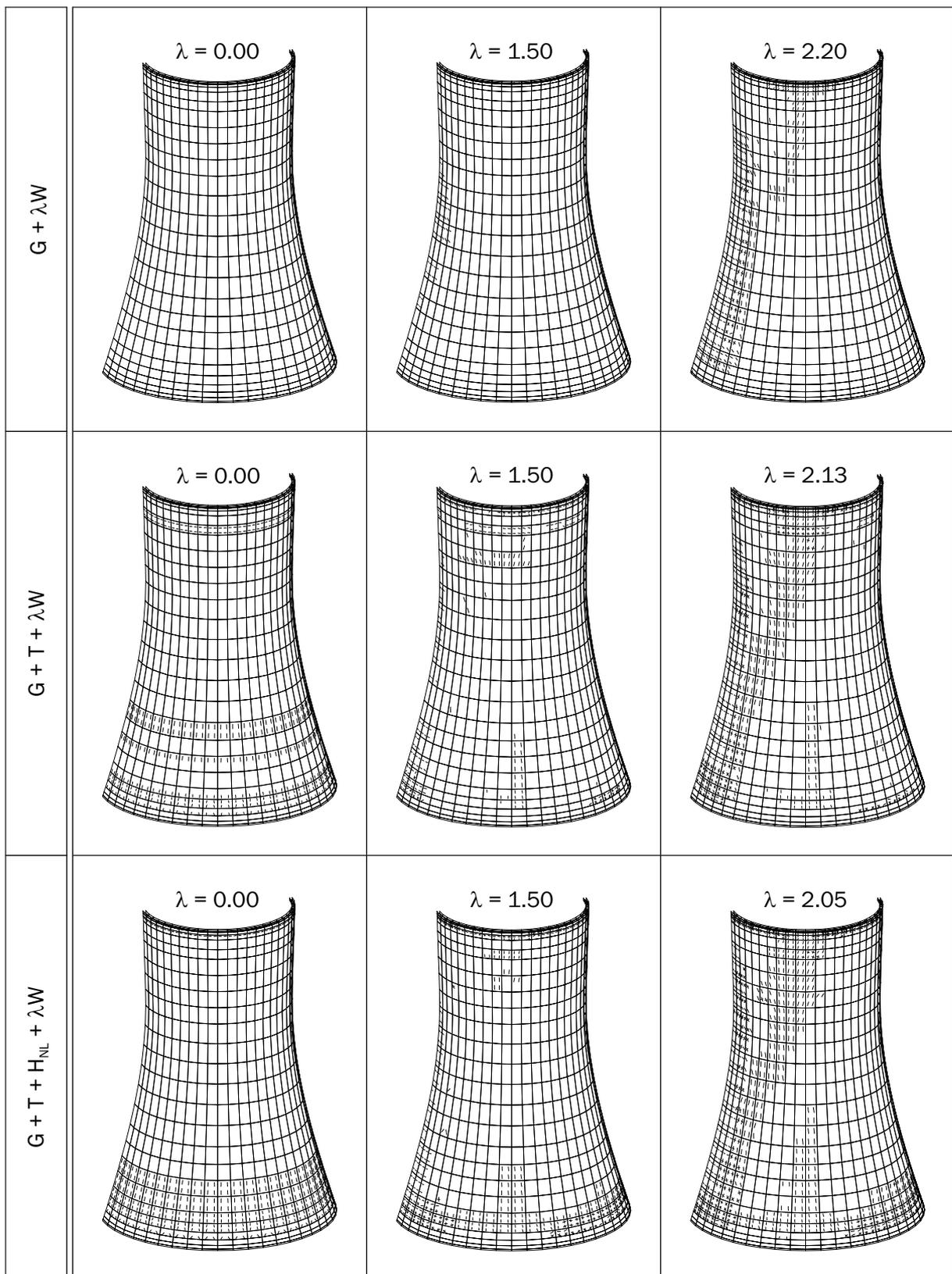


Bild 7.8: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Rissentwicklung auf Höhe der äußeren Bewehrungslage ($w_m > 0.10$ mm).

Eine gleichzeitige Berücksichtigung der beiden vorschädigenden Einflüsse führt zu einer weiteren Steifigkeitsreduktion. Die Folge ist eine Zunahme der Rissanzahl und -breite. Die Berechnung ergab ein weiteres Absinken der Traglast auf $\lambda = 2.05$. Im Vergleich zu den vorherigen Lastfallkombinationen ist gerade auf einem niedrigen Windlastniveau, welches für die Dauerhaftigkeit des Tragwerkes entscheidend ist, eine Ausweitung der gerissenen Zonen feststellbar. Doch bleiben die auftretenden Risse auf diesem Gebrauchslastniveau unter der in der VGB-Richtlinie (2003) vorgegebenen zulässigen Rissbreite von $w_k = 0.2$ mm.

Der Kollaps des Tragwerkes wurde in allen Fällen durch den gleichen Versagensmechanismus verursacht. In Bild 7.9 wird die Verformung der Kühlturmschale für die Einwirkungskombination $G + T + H_{NL} + W$ bei Erreichen des Traglastgrenzzustandes dargestellt. Anhand der Verformungsfigur sind deutlich die Auswirkungen der durch den Wind hervorgerufenen Druck- und Sogbelastungen in Schalenormalenrichtung zu erkennen. Die thermischen und hygrischen Gradienten führen lediglich zu Aufweitungen an den Schalenträndern. Ihre Beiträge sind im Vergleich zu den Verformungen aus Wind jedoch gering und somit in der Darstellung nicht zu erkennen. Auf eine Abbildung der Verformungsfiguren aus den übrigen Einwirkungskombinationen kann daher verzichtet werden.

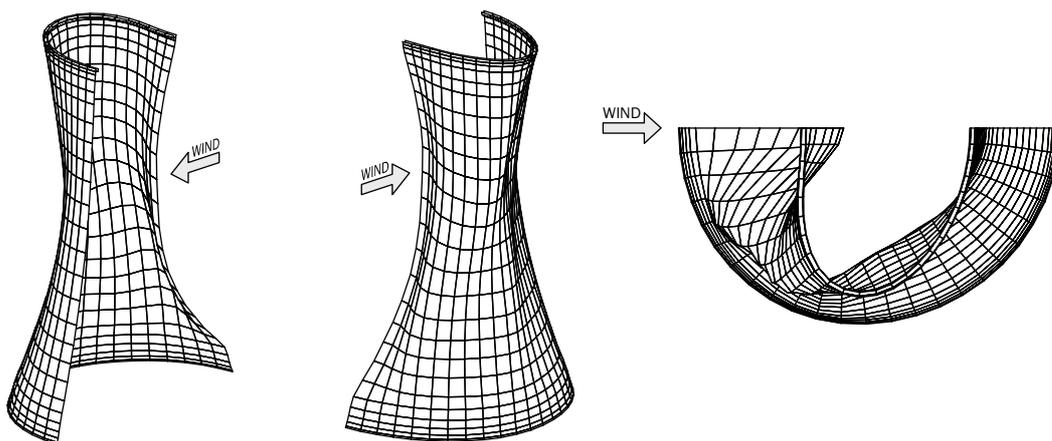


Bild 7.9: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Verformung der Schale unter $G + T + H_{NL} + \lambda_{\text{end}} \cdot W$ (40-fach überhöht).

7.1.5.2 Eigenschwingungsverhalten und Schädigungsindikatoren

Der durch Schädigung hervorgerufene Steifigkeitsverlust der Schale bewirkt gleichzeitig eine Veränderung des dynamischen Verhaltens der Schale. In Bild 7.10 ist der Verlauf der ersten Eigenfrequenz f_1 über die Steigerungsfaktoren der einzelnen Lastfälle aufgetragen. Dabei deuten die gestrichelten Linien an, dass der jeweilige Lastfall in der untersuchten Lastfallkombination unberücksichtigt bleibt. Ein erster Abfall der Eigenfrequenz tritt bereits bei Steigerung des Eigengewichts auf. Gründe für dieses in Bild 7.10 nicht dargestellte Verhalten sind das nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons im Druckbereich und der Einfluss des geometrischen Anteils der tangentialen Steifigkeitsma-

trix. Für eine detaillierte Erläuterung dieses typischen Verhaltens für turmartige Bauwerke sei auf die folgende Untersuchung eines Spannbetonturms einer Windenergieanlage verwiesen (Abschnitt 7.2.4).

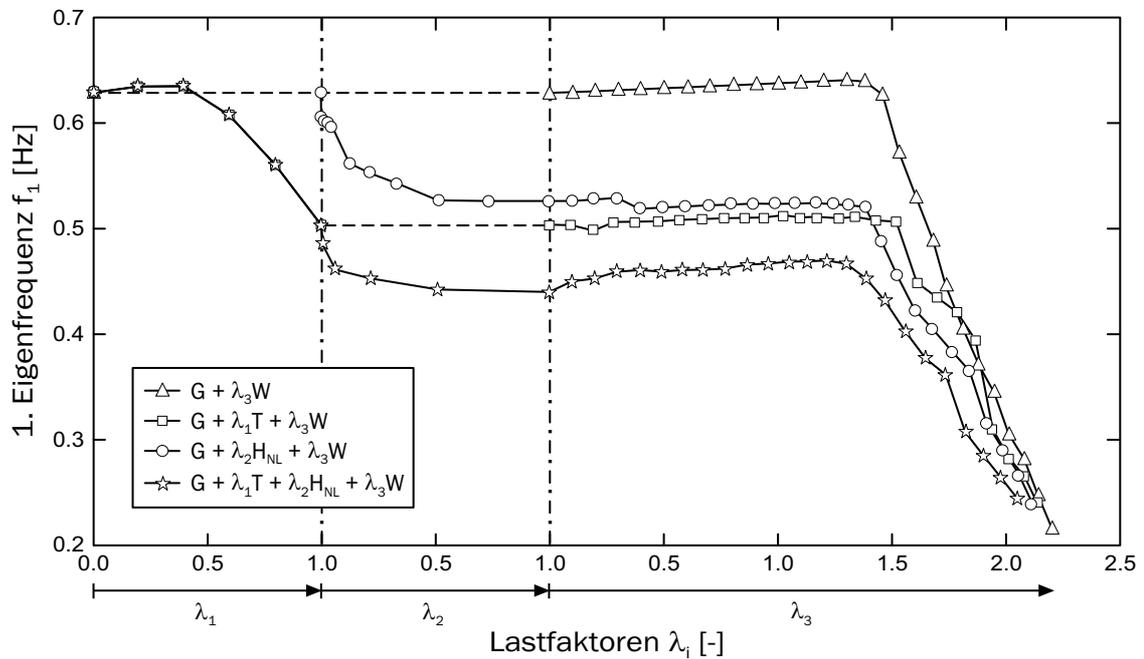


Bild 7.10: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Entwicklung der ersten Eigenfrequenz f_1 .

Die 1. Eigenfrequenz f_1 bleibt für die Lastfallkombination $G + \lambda_3 \cdot W$ bis zu einem Steigerungsfaktor von $\lambda_3 \approx 1,4$ nahezu konstant. Das Einsetzen umfangreicher Rissprozesse und die damit zwangsläufig einhergehende Steifigkeitsreduktion verursacht einen dramatischen Absturz der Frequenz. Dieses steht im Einklang mit dem zuvor gezeigten Last-Verformungs-Verhalten.

Die zusätzliche Berücksichtigung der Temperaturgradienten im Winterbetrieb führt bereits zu einer deutlichen Reduktion der Eigenfrequenz im Bereich der Temperaturaufbringung. Bei anschließender Steigerung des Windes bleibt die Eigenfrequenz zunächst annähernd konstant. Der deutliche Frequenzabfall ist erneut auf einem identischen Windlastniveau zu beobachten. Wird anstelle der Temperatur der Einfluss der Feuchtgradienten berücksichtigt, zeigt sich ein ähnliches Verhalten. Der unterschiedliche Verlauf im Bereich der Temperatur- bzw. Feuchtsteigerung resultiert aus der unterschiedlichen Vorgehensweise bei der Erfassung der thermischen bzw. hygrischen Einwirkungen. Während es sich bei dem thermischen Steigerungsfaktor λ_1 um einen Multiplikationsfaktor für die Einwirkung handelt ($\lambda_1 = 0,5 \rightarrow 0,5 \cdot T$), entspricht der Steigerungsfaktor λ_2 bei der hygrischen Einwirkung einem Zeitfaktor ($\lambda_2 = 0,5 \rightarrow 0,5 \cdot 5$ Jahre). Im Einklang mit der zeitlichen Entwicklung der relativen Feuchte (Bild 7.4) tritt daher die Abnahme der Frequenz relativ zur Länge des Untersuchungszeitraums gesehen schon frühzeitig auf.

Die Erfassung sowohl der thermischen als auch der hygrischen Szenarien in der Analyse führt zu einer weiteren Eigenfrequenzreduktion. Die starke Reduktion im Bereich der

Windlaststeigerung setzt in diesem Fall auf einem etwas geringeren Niveau ein. Dem Bild 7.10 ist zu entnehmen, dass die erste Eigenfrequenz im versagensnahen Bereich für alle vier Lastfallkombinationen auf einem vergleichbar niedrigen Niveau liegt. Jedoch wird auch durch das Eigenfrequenzverhalten der maßgebliche Einfluss der thermischen und hygrischen Einwirkungen auf dem für die Dauerhaftigkeit entscheidenden Niveau bestätigt. Auf Grundlage der 1. Eigenfrequenz kann der Schädigungsindikator D_1 nach Gleichung (5.116) bestimmt werden. In Tabelle 7.2 ist die Entwicklung des Indikators für die untersuchten Lastfallkombinationen an bestimmten Punkten des Laststeigerungsprozesses dargestellt. Dabei wird der Wert der Eigenfrequenz vor Aufbringen des Eigengewichts als Bezugsgröße definiert. Der Indikator stellt in einer sehr anschaulichen Weise die schädigungsbedingte Veränderung des Tragwerksverhaltens dar.

Lastfallkombination	Schädigungsindikator D_1 bei				
	$1.0 \cdot G$	$1.0 \cdot T$	$1.0 \cdot H$	$1.0 \cdot W$	$2.0 \cdot W$
$G + \lambda_3 \cdot W$	0.07	–	–	0.06	0.52
$G + \lambda_1 \cdot T + \lambda_3 \cdot W$	0.07	0.26	–	0.25	0.56
$G + \lambda_2 \cdot H_{NL} + \lambda_3 \cdot W$	0.07	–	0.22	0.23	0.59
$G + \lambda_1 \cdot T + \lambda_2 \cdot H_{NL} + \lambda_3 \cdot W$	0.07	0.26	0.35	0.31	0.67

Tabelle 7.2: Tragfähigkeit- und Schädigungsanalyse eines Naturzugkühlturms: Entwicklung des Schädigungsindikators D_1

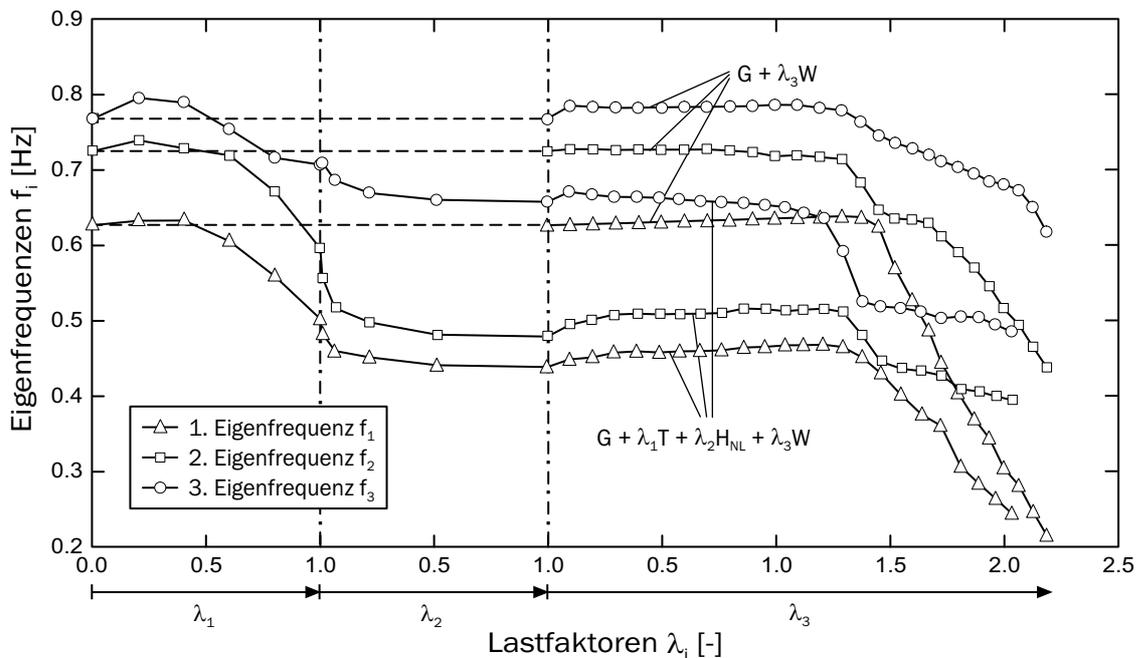


Bild 7.11: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Entwicklung der drei ersten Eigenfrequenzen f_i für $G + W$ und $G + T + H_{NL} + W$.

Die in Bild 7.11 wiedergegebenen Verläufe der ersten drei Eigenfrequenzen zeigen, dass die einwirkungsbedingten Schädigungen auch bei den höheren Eigenfrequenzen zu einer starken Reduktion führen. Sie zeigen tendenziell das gleiche Verhalten. Vergleicht man den jeweiligen Abfall der Eigenfrequenzen mit und ohne Berücksichtigung der lastunabhängigen Beanspruchungen, so ist festzustellen, dass die zweite Eigenfrequenz im Vergleich zu den beiden anderen sensibler auf die thermischen und hygrischen Initialschädigungen reagiert.

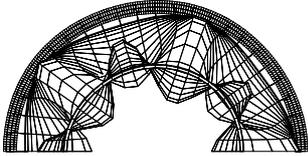
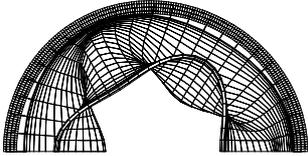
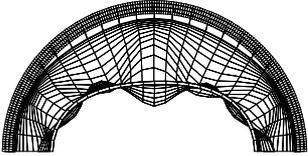
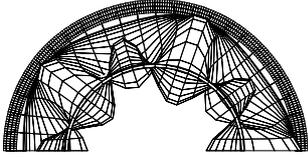
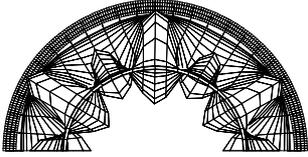
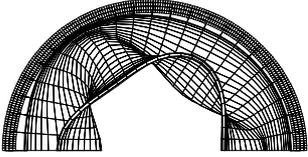
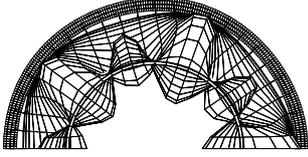
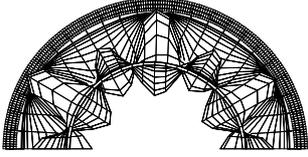
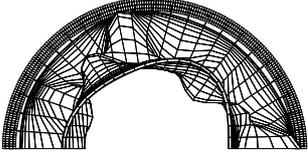
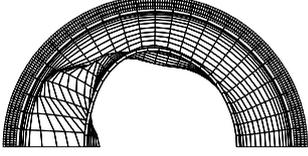
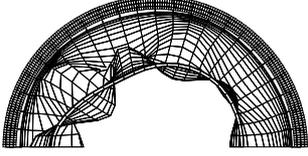
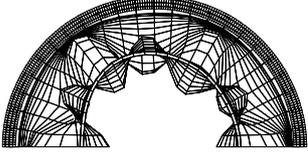
	1. Eigenform	2. Eigenform	3. Eigenform
G	 $f_1 = 0.628$	 $f_2 = 0.726$	 $f_3 = 0.770$
G + T	 $f_1 = 0.503$	 $f_2 = 0.597$	 $f_3 = 0.708$
G + T + H_{NL}	 $f_1 = 0.440$	 $f_2 = 0.480$	 $f_3 = 0.659$
G + T + H_{NL} + $\lambda_{end}W$	 $f_1 = 0.245$	 $f_2 = 0.396$	 $f_3 = 0.486$

Bild 7.12: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Entwicklung der ersten drei Modalformen bei der Einwirkungskombination G + T + H_{NL} + W

Einen zusätzlichen Eindruck über das sich verändernde dynamische Verhalten liefern die zu den Eigenfrequenzen zugehörigen Eigenformen. Bild 7.12 illustriert die Veränderung der ersten drei Eigenformen der Lastfallkombination $G+T+H_{NL}+W$. Auf einem ähnlichen Frequenzniveau stellen sich vergleichbare Schwingungsmuster ein. So entspricht beispielsweise die 2. Eigenform nach dem Aufbringen des Eigengewichts der 3. Eigenform nach der Temperaturbeanspruchung. Auffallend ist auch, dass bei der 1. Schwingungsform das globale fünfwellige Muster in der Neuwertposition in eine lokale Schwingungsform übergeht, die vom Aussehen her der Verformungsfigur in Bild 7.9 entspricht und in der primär der stärker geschädigte Teil der Schale schwingt.

Durch den Schädigungsprozess ändert sich das dynamische Antwortverhalten der Struktur. Die Eigenfrequenzen nähern sich durch den schädigungsbedingten Abfall bei einem solchen hochabgestimmten Tragwerk den energiereicheren Erregerfrequenzen der einwirkenden Windbeanspruchung. Dies führt unweigerlich zu einer erhöhten Energieabsorption des Tragwerks aus dem Windlastprozess und somit zu einer größeren dynamischen Beanspruchung des Systems. Die Zunahme der spektralen Erregung führt zu einer etwa gleichgroßen Zunahme der dynamischen Beanspruchung, abzulesen im VON-KÁRMÁN-Windspektrum [Krätzig & Noh 1998]. Demzufolge müsste der dynamische Überhöhungsfaktor φ in einem iterativen Prozess entsprechend angepasst werden.

7.1.5.3 Variation der hygrischen Parameter

In diesem Abschnitt wird exemplarisch der Einfluss einzelner Eingangsdaten auf das nichtlineare Tragverhalten der Kühlturmschale aufgezeigt. Bei den bisherigen Berechnungen sind die hygrischen Verzerrungen im verwendeten Schichtenkonzept entsprechend der nichtlinearen Verteilung über die Querschnittsdicke erfasst worden. Welche Auswirkungen eine Linearisierung der hygrischen Verzerrungen in der numerischen Analyse auf die Ergebnisse ausübt, soll im Folgenden analysiert werden. Die Berechnungen werden für die Lastfallkombinationen $G + H_L + W$ und $G + H_{NL} + W$ durchgeführt.

Für die zunächst unverändert angesetzten Eingangsparameter zeigt Bild 7.13 die Entwicklung der Verschiebungen als Funktion des Windlastfaktors λ für zwei Punkte im Anströmmeridian, alternativ für die Lastfallkombinationen mit H_L und H_{NL} . Die entsprechenden Kurven unter der Annahme einer relativen Umgebungsfeuchte von 60% auf der Schalenaußenseite sind in Bild 7.14 dargestellt. Eine derartige Annahme wäre für hiesige Verhältnisse als zu extrem zu bezeichnen, für den Bau eines Kühlturms in anderen Klimaregionen kann sie jedoch durchaus zutreffend sein.

Bei einem Vergleich der beiden Bilder fällt auf, dass die unterschiedliche Erfassung der Feuchteeinwirkungen in der numerischen Simulation für den Fall einer niedrigeren Umgebungsfeuchte stärkere Auswirkungen hat. Erklärbar ist dieses Verhalten durch die größeren Unterschiede zwischen den nichtlinearen und den daraus linearisierten Verläufen bei insgesamt größerer Feuchtedifferenz zwischen der inneren und äußeren Schalenlaibung. Die Annahme einer geringeren Umgebungsfeuchte verändert die relative Feuchte und damit die hygrischen Verzerrungen signifikant nur im äußeren Schalenbereich. Bei der Linearisierung führt die erhöhte Gesamtdifferenz der relativen Feuchte auch in weiter innen liegenden Querschnittsbereichen zu einer erhöhten hygrischen Zwangbeanspruchung und

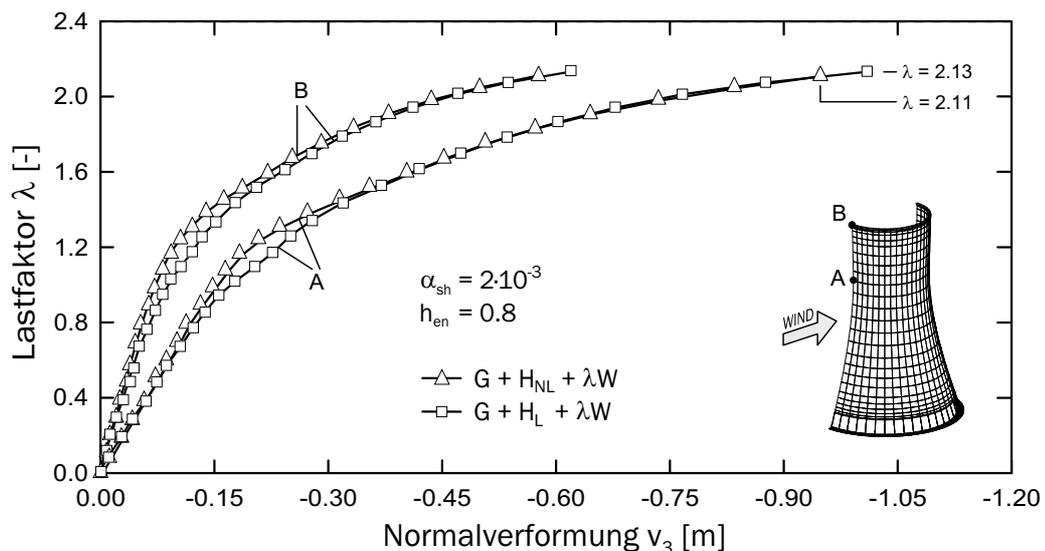


Bild 7.13: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Last-Verformungs-Kurven mit linearer und nichtlinearer Berücksichtigung der hygri-schen Verzerrungsanteile für eine relative Umgebungsfeuchte h_{en} von 0.80 auf der Schalenaußenseite.

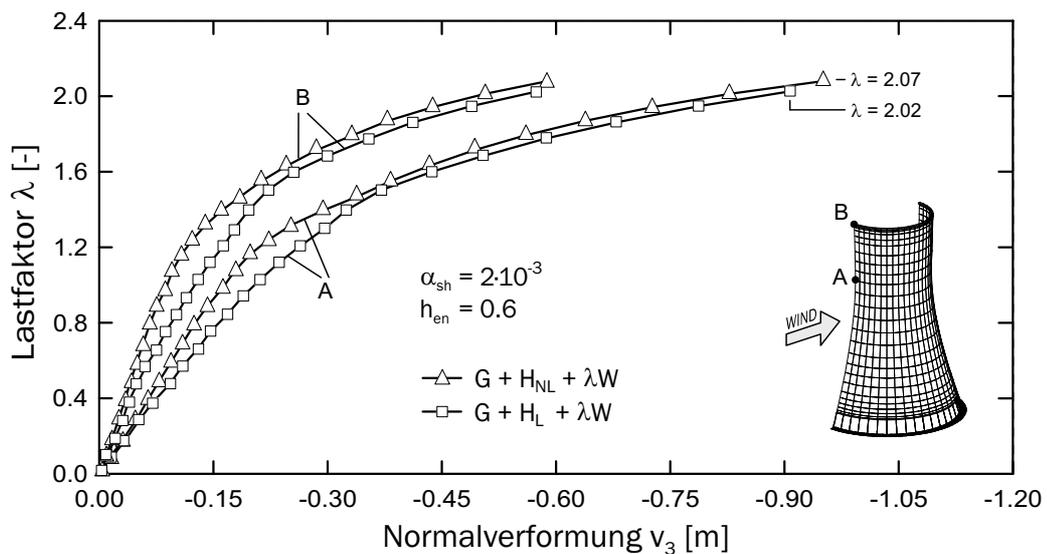


Bild 7.14: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Last-Verformungs-Kurven mit linearer und nichtlinearer Berücksichtigung der hygri-schen Verzerrungsanteile für eine relative Umgebungsfeuchte h_{en} von 0.60 auf der Schalenaußenseite.

damit zu vergrößerten Risstiefen und dem bereits in Abschnitt 6.3.4 erläuterten differierenden Verhalten. Auf höherem Windlastniveau zeigen die Kurven ein ähnliches Verhalten, welches durch die dominante Windbeanspruchung in diesem Bereich gesteuert wird.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die in der Simulation festzustellenden Unterschiede

grundsätzlich auch von den hygrischen Materialparametern abhängig sind. Die nichtlinearen Zusammenhänge im Feuchtehaushalt führen dazu, dass sich auch im stationären Zustand keine lineare Verteilung der relativen Feuchte h über den Querschnitt der Schale einstellt (Bild 7.4). Der Ansatz anderer hygrischer Materialparameter hat eine abweichende Feuchteverteilung zur Folge, und somit können die Unterschiede zwischen den Berechnungsalternativen kleiner oder größer ausfallen. Zur quantitativen Bestimmung der Größenordnung sind weitere Untersuchungen mit modifizierten Eingangsdaten erforderlich.

Eine Gegenüberstellung der Last-Verformungs-Kurven für die unterschiedlichen Randbedingungen im Punkt D der Schale enthält Bild 7.15. Die Unterschiede sind relativ gering. Für den Einwirkungsfall H_L sind sie, wie bereits erläutert, etwas größer.

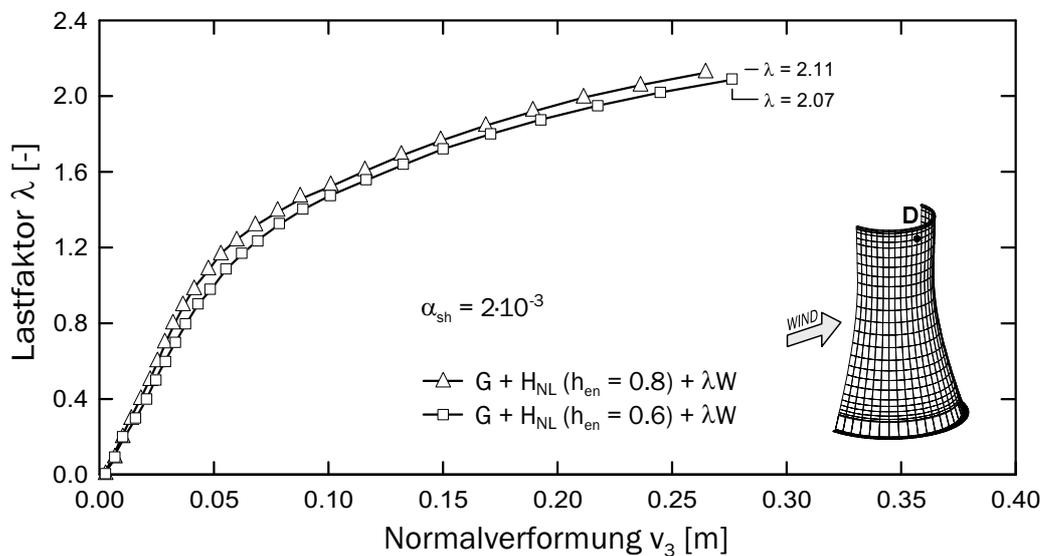


Bild 7.15: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Last-Verformungs-Kurven für unterschiedliche hygrische Randbedingungen auf der Schalenaußenseite.

Im Folgenden wird der Einfluss der Größe des hygrischen Ausdehnungskoeffizienten α_{sh} untersucht. In den unterschiedlichen Simulationen war mit zunehmender Größe des hygrischen Ausdehnungskoeffizienten und somit mit stärker werdender Verzerrungsgradienten eine zunehmende Initialschädigung festzustellen. Die globale Veränderung äußert sich zum einen in einem zunehmend flacheren Anstieg der Last-Verformungs-Pfade bei der folgenden Windlaststeigerung und zum anderen durch eine Abnahme der erreichten Grenztraglast. Exemplarisch zeigt Bild 7.16 das Last-Verformungs-Verhalten für zwei hygrische Ausdehnungskoeffizienten, die im Vergleich zu den zuvor durchgeführten Berechnungen nach oben und unten variiert worden sind. Für die höher angesetzte Feuchtedehnzahl wird ein deutliches Aufweichen der Schale sichtbar. Der Übergang zwischen dem linear und nichtlinearen Bereich der Kurve verläuft annähernd fließend. Die Versagenslast von $\lambda = 2,10$ ist im Vergleich zur Lastfallkombination $G + \lambda \cdot W$ deutlich geringer, wenn man zusätzlich bedenkt, dass die thermischen Einwirkungen hier unberücksichtigt bleiben.

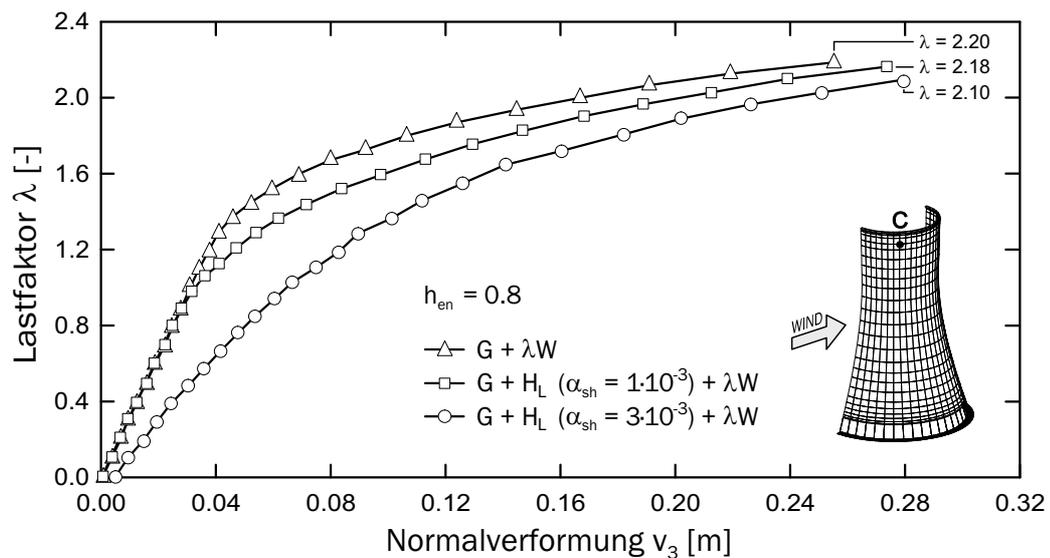


Bild 7.16: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Last-Verformungs-Kurven für unterschiedliche hygrische Ausdehnungskoeffizienten α_{sh} .

7.1.5.4 Variation der Traglastanalysen

Den bisherigen Simulationen lagen einheitlich die Mittelwerte der Materialeigenschaften (MW) entsprechend (5.87) und Tabelle 7.1 zu Grunde. Für den Nachweis einer ausreichenden Traglast unter Verwendung nichtlinearer Verfahren sind nach DIN 1045-1 (2001) und VGB-Richtlinie (2003) die rechnerischen Mittelwerte (RW) entsprechend (5.85) anzusetzen. Damit stellt sich die Frage, welchen Einfluss der modifizierte Ansatz der Materialfestigkeiten auf die zuvor gezeigten Berechnungsergebnisse hat. Zur Beantwortung dieser Frage werden zusätzliche numerische Simulationen auf der Basis der rechnerischen Mittelwerte durchgeführt.

Nach dem γ_R -Konzept der Norm ist die Steigerung der gesamten Lastfallkombination vorgesehen. Somit ist auch das Eigengewicht mit zu steigern, obwohl es sich bei einer Kühlturmschale aufgrund der quasi vorspannenden Wirkung günstig auswirkt. Die bereits in Abschnitt 5.4.2 geäußerte Kritik an dieser Vorgehensweise soll hier durch numerische Simulationsergebnisse belegt werden.

Im Hinblick auf die Untersuchung der beiden zuvor genannten Punkte werden folgende Lastfallkombinationen vergleichend untersucht:

$$\left. \begin{array}{l} G + T + \lambda \cdot W \\ G + T + \lambda \cdot W \\ G + \lambda \cdot (T + W) \\ \lambda \cdot (G + T + W) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mit Mittelwerten (MW) nach Gl. (5.87),} \\ \\ \\ \text{mit Rechenwerten (RW) nach Gl. (5.85).} \end{array} \quad (7.13)$$

Unter Ansatz der rechnerischen Mittelwerte wird die schrittweise Steigerung der Belastung nach unterschiedlichen Vorgehensweisen vollzogen. Bei der ersten Kombination wird das

Eigengewicht G und die Temperatur T als konstant vorausgesetzt und nur der Belastungsteil des Windes inkrementell gesteigert. In einer zweiten Berechnung erfolgt die simultane Steigerung der Temperatureinwirkung mit dem Wind. Schließlich wird die gesamte Lastfallkombination, wie es die Norm vorsieht, mit einem Faktor versehen und inkrementell gesteigert.

Die Ergebnisse der unterschiedlichen Simulationen werden exemplarisch für den Punkt A der Schale in Bild 7.17 dargestellt. Dabei liegt den gezeigten Berechnungsergebnissen einheitlich eine maximale Stahldehnung von 5% zu Grunde. Vergleicht man zunächst die identische Lastfallkombination unter Ansatz der Mittelwerte bzw. Rechenwerte, so ist festzustellen, dass die Verläufe der Kurven annähernd übereinstimmen.

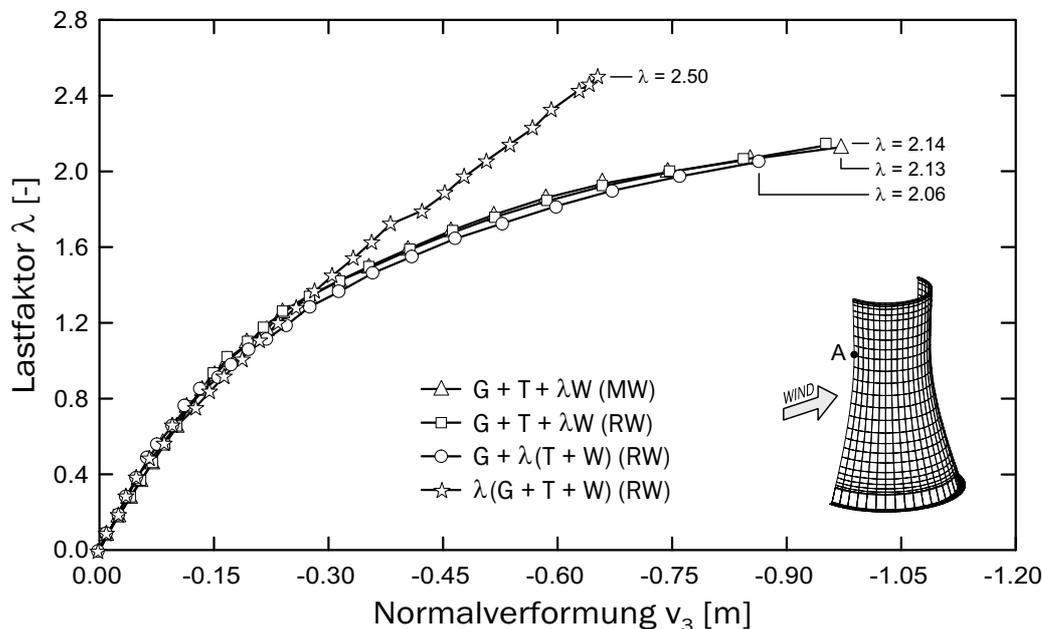


Bild 7.17: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen eines Naturzugkühlturms: Last-Verformungs-Kurven für unterschiedliche Traglastanalysen.

Somit zeigt sich, dass der Ansatz der rechnerisch reduzierten Druckfestigkeit nahezu keinen Einfluss auf das Systemverhalten hat. Dies war auch nicht zu erwarten, da das globale Tragverhalten eines Kühlturms bekanntermaßen vor allem durch die Zugrissbildung des Betons geprägt wird. Unter Ansatz der in DIN 1045-1 (2001) vorgegebenen reduzierten Stahldehnung von 2,5% wird die Systemtraglast auf einem etwas geringeren Niveau erreicht. Im Vergleich zu den beiden erst genannten resultiert aus der Lastfallkombination $G + \lambda \cdot (T + W)$ ein geringfügig weiches Verhalten, bedingt durch den erhöhten Ansatz der Temperaturgradienten. Ein deutlich geändertes Deformationsverhalten wird dagegen für die Lastfallkombination $\lambda \cdot (G + T + W)$ sichtbar. Die größten Verformungen treten nicht mehr im Anströmmeridian auf, sondern es kommt zu einem Einbeulen der Schale im Flankenbereich. Die zugehörige Last-Verformungs-Kurve in Punkt A zeigt ein nahezu lineares Verhalten bis zum Versagen. Es wird ersichtlich, dass das Mitsteigern des günstig wirkenden Eigengewichts zu einer erheblichen Überschätzung der Systemtraglast führt.

7.1.6 Bewertung

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass bei allen durchgeführten Traglastanalysen das in der VGB-Richtlinie (2003) definierte Sicherheitsniveau erreicht worden ist. Somit ist der hier untersuchte Kühlturm, dessen Bewehrung auf der Basis einer linearen Bemessung bestimmt worden ist, im Hinblick auf die Tragfähigkeit als standsicher anzusehen.

Die in den numerischen Simulationen berechneten mittleren Rissbreiten w_m liegen bei der Lastfallkombination $G + H + T + 0.5 \cdot W$ unterhalb von 0.15 mm. Dieses Beanspruchungsniveau entspricht von der Größenordnung den in (7.8)-(7.11) vorgegebenen Lastfallkombinationen. Somit werden die im Hinblick auf die Gebrauchstauglichkeit an das Tragwerk gestellten Anforderungen erfüllt.

Die dargestellten Last-Verformungs-Pfade und Rissentwicklungen für die unterschiedlichen Einwirkungskombinationen verdeutlichen den Einfluss der lastunabhängigen Einwirkungsszenarien auf das Tragverhalten derartiger Strukturen sowohl auf die Gebrauchstauglichkeit als auch auf die Tragfähigkeit. Die in der Vergangenheit häufig geäußerte Meinung, dass die in einem Kühlturm auftretenden Zwangbeanspruchungen die Größe der Traglast kaum beeinflussen, ist nach Meinung des Verfassers nicht zutreffend. Im Zuge der Berechnungen wurde deutlich, dass die Zwangbeanspruchungen, die aus einer Kombination von thermischen und hygrischen Einwirkungen hervorgerufen werden, zu einer nicht zu vernachlässigenden Traglastminderung führen. Durch die in diesem Fall als Initialschädigung aufgefassten Auswirkungen dieser Einflüsse werden mögliche Schnittgrößenumlagerungen in ihrer Größe begrenzt.

Der entscheidende Einfluss der thermischen und hygrischen Beanspruchungen wird durch die durchgeführten Schwingungsanalysen bestätigt. Dabei ist eine signifikante Änderung der dynamischen Eigenschaften gegenüber der Neuwertposition zu beobachten. Die Eigenfrequenzen und somit auch die auf ihnen basierenden globalen Schädigungsindikatoren reagieren sehr sensibel auf die auftretenden Schädigungen im Tragwerk.

Gerade im Hinblick auf die jetzt sowohl nach DIN 1045-1 (2001) als auch nach VGB-Richtlinie (2003) zugelassenen nichtlinearen Nachweisverfahren ist der in Lastfall (7.5) angesetzte Kombinationsbeiwert von $\psi_{0,T} = 0$ problematisch. Wird die Bewehrung auf Basis einer linearen Schnittgrößenermittlung mit anschließender Querschnittsbemessung bestimmt und werden die aktuellen, im Vergleich zu früheren Vorgaben erhöhten Ansprüche an die Mindestbewehrung eingehalten, werden die unberücksichtigten thermischen und auch hygrischen Anteile durch die vorhandenen Reserven abgedeckt. Führen jedoch die mit nichtlinearen Verfahren unter Vernachlässigung der hygrischen und thermischen Einwirkungen berechneten Tragfähigkeitskapazitäten zu einer Reduzierung der Bewehrungsmenge oder der Schalenwanddicken, so resultiert daraus zwangsläufig eine Unterschreitung der angestrebten Zuverlässigkeit und somit ein Sicherheitsdefizit. Als Folge kann ein progressiver Schädigungsprozess initiiert werden.

Eine Beanspruchung der Schale, wie sie durch das beschriebene Schwind- und Quellverhalten auftritt, wird in der VGB-Richtlinie (2003) nicht berücksichtigt. Mit dem in der VGB-Richtlinie (2003) neu aufgenommenen Lastfall Schwinden wird dieses Verhalten nicht adäquat abgebildet, da er als gleichmäßige Temperaturänderung anzunehmen ist

und somit allenfalls einen Einfluss auf die Stützen des Kühlturms ausübt. Der hier untersuchte hygrische Einwirkungsfall könnte für eine Aufnahme in die Richtlinie als lineare Temperaturänderung idealisiert werden. Dies entspricht der von Noh (2002) gewählten Vorgehensweise zur näherungsweise Erfassung der hygrischen Einflüsse. Die Festlegung einer sinnvollen Größenordnung der äquivalenten Temperaturänderung ist durch weitere vergleichende Berechnungen mit den vorliegenden numerischen Modellen möglich. Dabei ist zu beachten, dass die hygrischen Verzerrungen im Gegensatz zu den auch im Stahl auftretenden thermischen Verzerrungen Spannungsumlagerungen zwischen den Komponenten des Stahlbetons bewirken und dass die hygrischen Verzerrungen bei den vorliegenden Randbedingungen im Allgemeinen keine lineare Verteilung ausweisen. Der von Noh (2002) unter Vernachlässigung dieser Aspekte bestimmte äquivalente Wert ΔT_{hygr} von 15 K ist somit noch zu bestätigen.

Vergleichende Simulationen mit variierenden Parametern zeigen die Abhängigkeit der Ergebnisse von bestimmten Eingangsgrößen auf. Wie wichtig die exakte Bestimmung der einzelnen Parameter für zukünftige Untersuchungen ist, lässt sich mit derartigen Berechnungen feststellen.

Die durchgeführten Simulationen zeigen, dass mit dem implementierten numerischen Werkzeug das Schädigungsverhalten von großen Stahlbetonschalenstrukturen unter thermischen, hygrischen und mechanischen Einwirkungsszenarien analysiert werden kann. Somit können die an Kühltürmen häufiger beobachteten ausgeprägten Rissstrukturen simuliert werden, deren Entstehung in vielen Fällen auf die in der Vergangenheit geringeren Anforderungen bezüglich der Mindestschalendicke und der Mindestbewehrungsgrade zurückzuführen ist. Mit derartigen Berechnungen lässt sich die Größenordnung der vorhandenen Restsicherheit abschätzen. Darüberhinaus kann die Wirkung einer geplanten Sanierungsmaßnahme bei einem bereits geschädigten Turm, beispielsweise durch nachträglich aufgebrachte Steifen, untersucht werden. Durch den prognostischen Einsatz der Modelle können mögliche Schwachstellen bereits in der Planungsphase aufgedeckt und beseitigt werden.

Es bleibt anzumerken, dass die Simulationen unter der Annahme einer unbeschichteten Kühlerschale durchgeführt worden sind. In der Vergangenheit sind die inneren Laibungen der Schale häufig beschichtet worden. Der Grund hierfür ist die betonangreifende Wirkung des Oberflächenkondensats, welches sich aus einem Gemisch des kondensierten Wassers und der eingeleiteten gereinigten Rauchgase zusammensetzt. Neuere Entwicklungen in Richtung eines säureresistenten Hochleistungsbetons ermöglichen einen Verzicht auf die kosten- und wartungsintensiven Beschichtungen [Lohaus 1996; Hüttl & Hillemeier 2000]. In die numerischen Berechnungen kann die Beschichtung durch die Modifikation der entsprechenden Randbedingungen einfließen. Somit könnte auch dieser Aspekt mit dem vorgestellten Rechenwerkzeug berücksichtigt und gegebenenfalls vergleichend analysiert werden.

7.2 Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen einer Windenergieanlage

7.2.1 Entwurfsproblematik bei Windenergieanlagen

Windenergieanlagen sind turmartige Bauwerke unter hochzyklischen und hochdynamischen Beanspruchungen. Sie dienen der Stromerzeugung, indem sie einen Teil der Bewegungsenergie der Luft in elektrische Energie umwandeln. Die Anlagen können in die Tragkonstruktion und den maschinentechnischen Teil unterteilt werden, zu dem unter anderem die Rotorblätter, die Nabe, die Welle und der Generator zählen. Für die Erstellung und Bemessung der Tragkonstruktion (Turm und Gründung) ist in Deutschland die zur Zeit gültige „Richtlinie für Windkraftanlagen“ vom Deutschen Institut für Bau-technik anzuwenden [DIBT-RICHTLINIE (1993)]. In den letzten Jahren hat eine rasante Entwicklung der Anlagenkapazitäten stattgefunden, die zu vergrößerten Rotordurchmessern, Generatorengrößen und Turmhöhen führte. Die gestiegenen Anforderungen an die Tragkonstruktionen, der Wissenszuwachs im Bereich der Windenergie und die Einführung der neuen Normengenerationen im Bereich des Massiv-, Stahl- und Grundbaus machten eine Überarbeitung der Richtlinie erforderlich, die zurzeit als Entwurfsfassung vorliegt [DIBT-RICHTLINIE (2003)]. Die Neufassung der Richtlinie orientiert sich an der IEC 61400-1(1999), die auf europäischer Ebene den Bau von Windenergieanlagen regelt.

Während ihrer Lebensdauer werden Windenergieanlagen fast unentwegt dynamisch angeregt, insbesondere durch

- die vom Turbulenzgrad abhängige Böigkeit des Windes,
- die periodische Anregung mit der Rotorfrequenz f_{p1} und
- die periodische Anregung mit der Blattdurchgangsfrequenz f_{pn} .

Damit wird das Eigenfrequenzverhalten, hier insbesondere die 1. Eigenfrequenz f_1 , zum maßgebenden Parameter für den Entwurf der Tragkonstruktion [Schaumann & Seidel 2000]. Je nach Lage der 1. Eigenfrequenz wird zwischen drei Auslegungsbereichen differenziert. Von einer „stiff-stiff“ oder unterkritischen Auslegung spricht man, wenn die 1. Eigenfrequenz des Turms oberhalb der Blattdurchgangsfrequenz liegt. Liegt sie zwischen der Rotorfrequenz und der Blattdurchgangsfrequenz, muss beim Hochfahren der Anlage der Bereich der Blattdurchgangsfrequenz durchfahren werden. Diese Auslegungsvariante wird mit überkritisch oder „soft-stiff“ bezeichnet. Wenn die Eigenfrequenz ebenfalls unterhalb der Rotorfrequenz liegt, müssen beide Resonanzbereiche durchfahren werden (doppelt überkritische oder „soft-soft“-Auslegung). Bereits im Vorgriff werden die drei Auslegungsbereiche für die nachfolgend untersuchte Anlage in Bild 7.18 exemplarisch dargestellt. Zusätzlich ist die 1. Eigenfrequenz des analysierten Turms für den ungeschädigten Zustand mit eingezeichnet. Die Türme werden häufig, wie auch in diesem Fall, mit einer „soft-stiff“-Auslegung konzipiert, da sich die unterkritische Lösung als unwirtschaftlich erwiesen hat. Sie werden im Allgemeinen so entworfen, dass die Eigenfrequenzen einen gewissen Sicherheitsabstand zu den zuvor genannten Anregungen aufweisen.

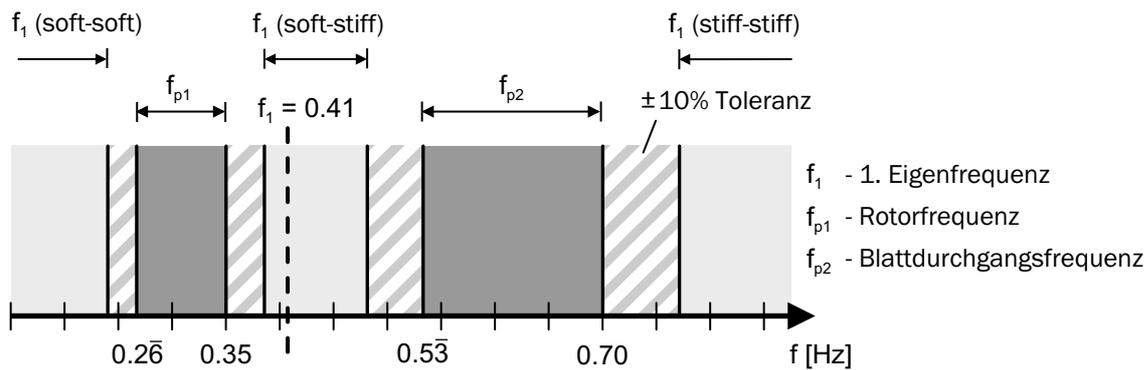


Bild 7.18: Erregerfrequenzbereiche aus dem Betrieb der untersuchten Windenergieanlage und mögliche Auslegungsbereiche.

Bis heute werden die Türme von Windenergieanlagen überwiegend aus Stahl gebaut. Mit den wachsenden Turmhöhen wird es aber immer schwieriger, das Eigenfrequenzverhalten des Turms mit einer wirtschaftlichen Lösung auf die vorliegenden Erregerfrequenzen abzustimmen. Somit gewinnen Betontürme oder Hybridlösungen zunehmend an Bedeutung [Seidel 2002; Bellmer 2003]. Treten bei solchen Türmen jedoch Schädigungen und Rissbildungen auf, kann sich das Eigenfrequenzverhalten der Konstruktion zunehmend ändern und damit auch deren dynamisches Verhalten. Anhand der nachfolgend dargestellten Untersuchungsergebnisse wird gezeigt, wie zusätzlich zu den mechanischen Einwirkungen vorhandene Zwangbeanspruchungen nicht nur die Lebensdauer solcher Konstruktionen erheblich reduzieren, sondern auch die Tragfähigkeit in einem relevanten Umfang negativ beeinflussen können. Da bei Windenergieanlagen im Onshore-Bereich häufig keine nennenswerten Beanspruchungen aus hygri-schen Einwirkungen entstehen, wird hier auf deren Berücksichtigung verzichtet.

7.2.2 Einwirkungen nach der DIBT-Richtlinie

In Abhängigkeit von den möglichen Betriebszuständen definiert die DIBT-RICHTLINIE (2003) Einwirkungskombinationen, die getrennt zu untersuchen sind. Die Nachweisführung für die Gruppen N (Normal und Extrem), A (Anormal), T (Transport und Errichtung) und F (Fatigue, Ermüdung) kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Wenn das dynamische Verhalten des Gesamtsystems aus Gründung, Turm und Maschine und ein turbulentes dreidimensionales Windfeld im Rotorbereich berücksichtigt werden, können die Schnittgrößen in den maßgebenden Querschnitten in einer gesamt-dynamischen Berechnung ermittelt und die Grenzzustände mit $\gamma_F = 1.0$ nachgewiesen werden. Wenn die 1. Eigenfrequenz um mindestens 10 % von der Anregung aus der einfachen Drehfrequenz des Rotors abweicht, dürfen nach der DIBT-RICHTLINIE (2003) die aus aeroelastischen Simulationsrechnungen am Übergang zwischen Maschine und Turm berechneten Beanspruchungen im Sinne eines quasi-statischen Bemessungskonzepts mit Teilsicherheitsbeiwerten alternativ verwendet werden. Mit den 10 % wird ein Bereich definiert, der eine Abweichung bei der Eigenfrequenzbestimmung von 5 % und einen zusätzlichen Sicherheitsabstand von 5 % abdeckt.

Die größten Beanspruchungen der Gesamtkonstruktion resultieren aus den angreifenden Windlasten, die auf den Turm selbst einwirken und die über den Rotor in die Tragkonstruktion eingeleitet werden. Die auf den Turm der Anlage anzusetzende Winddruckverteilung wird in der DIBT-RICHTLINIE (2003) mit

$$w_e(z, \theta) = c_p(\theta) q_i(z) \quad (7.14)$$

vorgegeben. Die Umfangsverteilung $c_p(\theta)$ wird mit dem von der Reynoldszahl abhängigen Druckbeiwert c_{p0} und dem Abminderungsfaktor ψ bestimmt, der die Streckung und Völligkeit des Turms beschreibt:

$$c_p(\theta) = c_{p0}(\theta) \psi. \quad (7.15)$$

Der höhenabhängige Staudruck $q_i(z)$ wird mit

$$q_i(z) = \frac{1}{2} \rho v(z)^2 \quad (7.16)$$

berechnet. Dabei ist ρ die Luftdichte und $v(z)$ die Windgeschwindigkeit in der Höhe z , die mit Hilfe eines exponentiellen Windprofils ermittelt wird:

$$v(z) = v(h_{ref}) \left(\frac{z}{h_{ref}} \right)^\alpha. \quad (7.17)$$

Zur Berechnung der Höhenverteilung der Windgeschwindigkeiten ist eine Windgeschwindigkeit $v(h_{ref})$ in der Referenzhöhe h_{ref} und der Rauigkeitsexponent α vorzugeben.

Die aus dem maschinentechnischen Teil eingeleiteten Windlasten und Funktionskräfte werden für eine quasi-statische Berechnung in Form von resultierenden Einzelkräften und Momenten angegeben, vgl. Bild 7.19. Weiterhin werden in der DIBT-RICHTLINIE (2003) für die oben erwähnten Einwirkungskombinationen unterschiedliche Windszenarien vorgeschrieben, die sich durch die Variation der anzusetzenden Windgeschwindigkeit in (7.17), durch einen möglichen Böengeschwindigkeitszuschlag Δv und durch die Vorgabe unterschiedlicher Rauigkeitsexponenten unterscheiden. Im Rahmen diese Arbeit werden die folgenden Windszenarien im Sinne der Einwirkungskombination N angesetzt:

Normales Windprofilmodell (NWM). Das normale Windprofil beschreibt die Windbeanspruchungen der Anlage, während sie sich im Nennfrequenzbereich in Betrieb befindet. Für die Berechnung der Winddruckverteilung nach Gleichung (7.14) ist für die Windgeschwindigkeit in Nabenhöhe v_{hub} die vom Anlagentyp abhängige Nenngeschwindigkeit v_r oder Abschaltgeschwindigkeit v_{out} anzusetzen. Der Rauigkeitsexponent α wird in IEC 61400-1(1999) mit 0.2 vorgegeben.

Extreme Betriebsböe (EOG). Durch die extreme Betriebsböe sollen die im Betrieb möglichen Böengeschwindigkeiten abgedeckt werden. Hierfür wird v_{hub} aus dem normalen Windprofilmodell mit einem höhenunabhängigen Zuschlag Δv erhöht.

Extremes Windgeschwindigkeitsmodell (EWM). Bei sehr hohen Windgeschwindigkeiten, beispielsweise bei Sturmereignissen, wird die Anlage „aus dem Wind gefahren“. Die Richtlinie definiert für diesen betriebsbereiten Zustand eine standortabhängige Windgeschwindigkeit v_{m50} in 10 m Höhe und den Rauigkeitsexponenten zu 0.16. Bei schwingungsanfälligen Türmen ist die einwirkende Windlast zusätzlich mit einem Böenreaktionsfaktor zu multiplizieren, wodurch die Bögigkeit des Windes erfasst wird.

Nach der DIBT-RICHTLINIE (1993) sind thermische Einflüsse aus einseitiger Sonneneinstrahlung oder aus einer Temperaturgradienten über die Wanddicke nicht gesondert nachzuweisen. Grund hierfür ist, dass bei der Erarbeitung der Richtlinie vorrangig an Stahltürme gedacht worden ist, bei denen der thermische Zwang wegen der geringen Wanddicke von untergeordneter Bedeutung ist. Demgegenüber lösen Temperaturunterschiede, wie im Folgenden gezeigt wird, bei Betontürmen erhebliche Zwangbeanspruchungen aus, die zumindest die Gebrauchstauglichkeit signifikant beeinflussen können. Das hat dazu geführt, dass in die Neufassung der Richtlinie die in DIN 1055-7 (2002) definierten Temperaturlasten übernommen wurden, die im Zuge des Rissbreitennachweises von Stahl- oder Spannbetontürmen zu berücksichtigen sind. Danach ist ein über einen Umfangssektor von 180° cosinusförmig wirkender und über die Wanddicke konstanter Temperaturanteil von $\Delta T_N = 15$ K sowie ein über den Umfang konstant wirkender und über die Wanddicke veränderlicher Temperaturanteil von $\Delta T_M = 15$ K anzusetzen.

Neben den windinduzierten und thermischen Einwirkungen sind auch das Eigengewicht der Windenergieanlage einschließlich des maschinentechnischen Teils und aller Einbauten und eine eventuell vorhandene Vorspannung mit zu berücksichtigen. Zur Erfassung der zuvor beschriebenen Einwirkungen im Rahmen der numerischen Analysen wurde das Programmsystem FEMAS 2000 um die bis dahin noch nicht existierenden Belastungsmodelle erweitert.

7.2.3 Dimensionierung und lineare Untersuchung

Als repräsentatives Beispiel zur Untersuchung des Tragfähigkeits- und Schädigungsverhaltens dient die Anlage AEOLUS II, die im Jahre 1992 im Jade-Windpark Wilhelmshaven errichtet worden ist. Mit einer Nabenhöhe von 92 m, 80 m Rotordurchmesser und 3 MW Nennleistung gehört sie bis heute zu einer der größten Windenergieanlagen. Der vorgespannte Turm setzt sich aus drei unterschiedlichen Schalenformen zusammen. Er steht auf einer Kreisfundamentplatte mit einem Durchmesser von 14.4 m und einer Dicke von 4 m. Diese ist wiederum auf 36 Betonpfählen gegründet, die im vorhandenen weichen Marschboden verankert sind [Knünz 1992; Albers, Klug & Westermann 1995]. Weitere Angaben zu den Abmessungen, den eingesetzten Materialien und den technischen Daten sind Bild 7.19 und Tabelle 7.3 zu entnehmen. Zusätzlich sind in Bild 7.19 die angesetzten Einwirkungen aus dem maschinentechnischen Teil der Anlage dargestellt, deren zahlenmäßige Vorgabe in Übereinstimmung mit dem in der DIBT-RICHTLINIE (2003) definierten Koordinatensystem erfolgt. Für die drei angegebenen Windszenarien werden neben dem

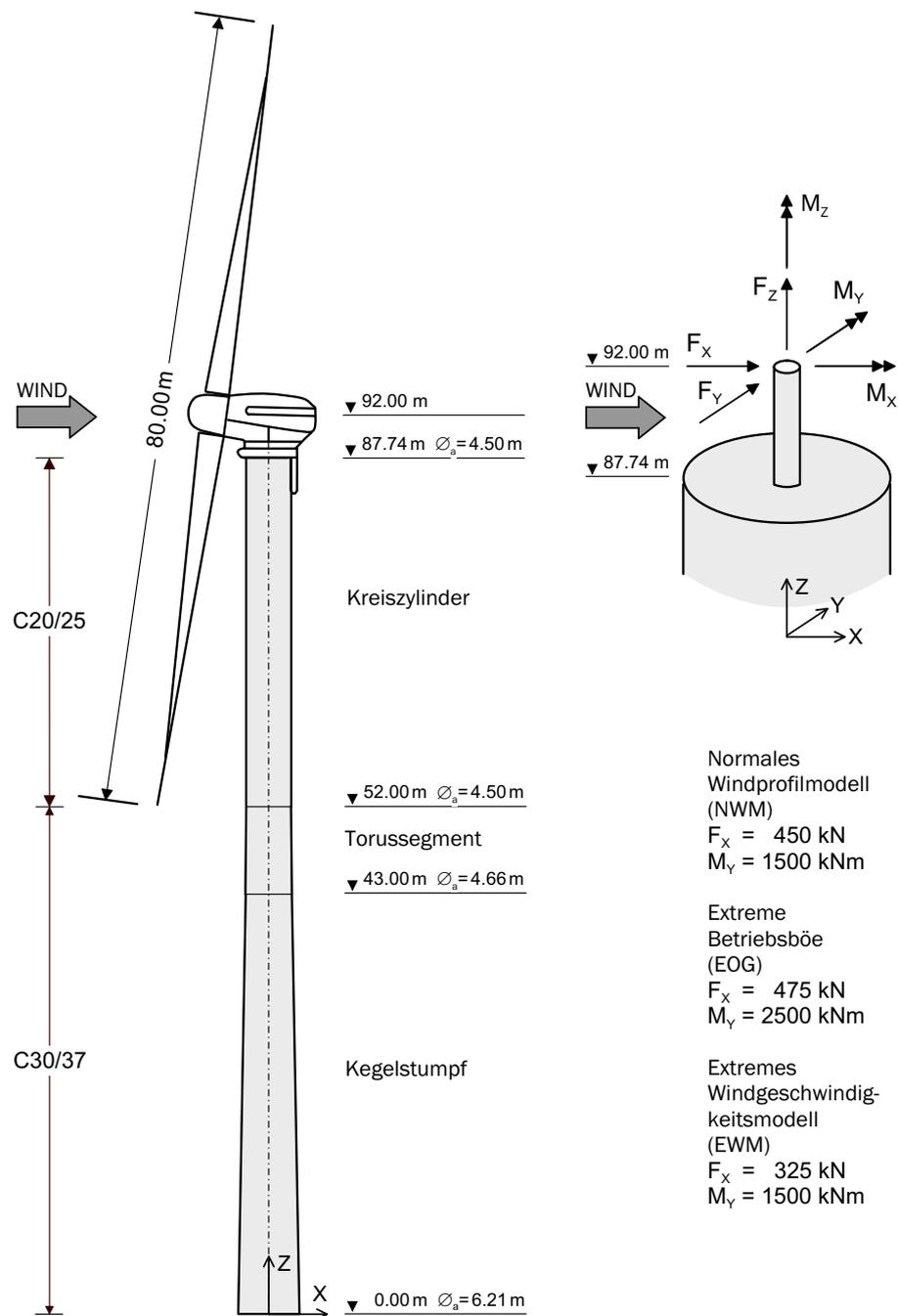


Bild 7.19: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen der AEOLUS II: Abmessungen und angesetzten Rotorlasten.

Eigengewichtsanteil die wesentlichen Größen F_x und M_y angesetzt. Die im Turm eingelegte Bewehrung und die aufbrachte Vorspannung sind in Tabelle 7.4 wiedergegeben.

Die räumliche Diskretisierung der Struktur erfolgt mit dem in Abschnitt 5.2 beschriebenen Schalenelement. Die Umfangsrichtung wird mit 32 und die Höhenrichtung mit 92 Elementen abgebildet. Nur mit einer solchen räumlichen Diskretisierung kann eine

Maschine		Turm	
Nabenhöhe	92 m	Turmhöhe	ca. 88 m
Rotordurchmesser	80 m	Durchmesser	4.50-6.20 m
Anzahl der Blätter	2	Längsbewehrung	s. Bild
Drehzahl	16-21 U/min	- Betondeckung	7 cm
Einschaltgeschwindigkeit v_{in}	6.00 m/s	Ringbewehrung	Ø14, s= 15 cm
Nenngeschwindigkeit v_r	14.15 m/s	- Betondeckung aussen	5 cm
Abschaltgeschwindigkeit v_{out}	25.00 m/s	- Betondeckung innen	4 cm
Nennleistung	3 MW	Vorspannung	s. Bild
Gewicht	150 t	- Verluste aus K+S	12.5 %
		Gewicht	1410 t

Tabelle 7.3: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen der AEOLUS II: Daten der Anlage.

Höhe	Vorspannkraft	äußere Längsbewehrung	innere Längsbewehrung
[m]	[kN]	[-]	[-]
0.00 - 15.00	43016	8 · (18Ø16+3Ø20)	8 · (15Ø16+3Ø20)
15.00 - 24.00	36224		
24.00 - 29.00		29432	8 · (12Ø16+3Ø20)
29.00 - 42.00	20376		8 · (12Ø14+3Ø20)
42.00 - 47.00		13584	8 · (8Ø14+3Ø20)
47.00 - 58.00	8 · (8Ø12+3Ø20)		8 · (6Ø12+3Ø20)
58.00 - 70.00			
70.00 - 77.00			
77.00 - 87.74			

Tabelle 7.4: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen der AEOLUS II: Vorspannkraft und Bewehrungsmengen.

wirklichkeitsnahe Abbildung des Strukturverhaltens unter Einbeziehung der vorhandenen Nichtlinearitäten erreicht werden. Mit der sonst üblichen Diskretisierung mit Balkenelementen ist dies nicht möglich. Die Lagerung der Struktur wird hier mit Federelementen realisiert. Eine detaillierte Berücksichtigung der Boden-Bauwerks-Interaktion wird hier nicht angestrebt. Die Berücksichtigung derartiger Effekte wäre unter Verwendung finiter oder infiniter Bodenelemente möglich, die kürzlich in das Programmsystem FEMAS 2000 integriert worden sind [Mahran 2003; Harte, Andres, Mahran & Wörmann 2004].

Die lineare Analyse des Spannbetonturms liefert als wesentliche Schnittgrößen die Meridiankräfte N^{22} , die in Bild 7.20 in ihrer Höhen- und Umfangsverteilung dargestellt sind [Harte & Wörmann 2002]. Erkennbar ist die abgestufte Anordnung der Meridianspannglieder korrelierend mit den aus Wind resultierenden Meridiankräften. Aus der linearen Temperaturgradienten ΔT_M resultieren die bekannten Meridian- und Ringbiegemomente

$$M^{11} = M^{22} = E \frac{t^2}{12(1-\nu)} \alpha_t \Delta T_M = E \frac{0.45^2}{12(1-0.2)} 10^{-5} \cdot 15 \quad (7.18)$$

$$\Rightarrow \text{C20/25: } E_{cm} = 28.8 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow M^{11} = M^{22} = 91.1 \text{ kNm/m}$$

$$\Rightarrow \text{C30/37: } E_{cm} = 31.9 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow M^{11} = M^{22} = 100.9 \text{ kNm/m}$$

mit Randstörungen, insbesondere Ringkräften N^{11} an Turmkopf und Turmfuß. Unter dem konstanten Temperaturanteil ΔT_N entstehen im warmen Bereich Druckkräfte, im kalten Bereich außerhalb dieses Sektors Meridianzugkräfte N^{22} in einer Größenordnung von etwa 25 % der maximalen Zugkräfte aus Wind, ein insofern nicht zu vernachlässigender Anteil. Aus der Addition der dargestellten Meridiankräfte resultieren bereichsweise Zugkräfte [Wörmann & Harte 2003].

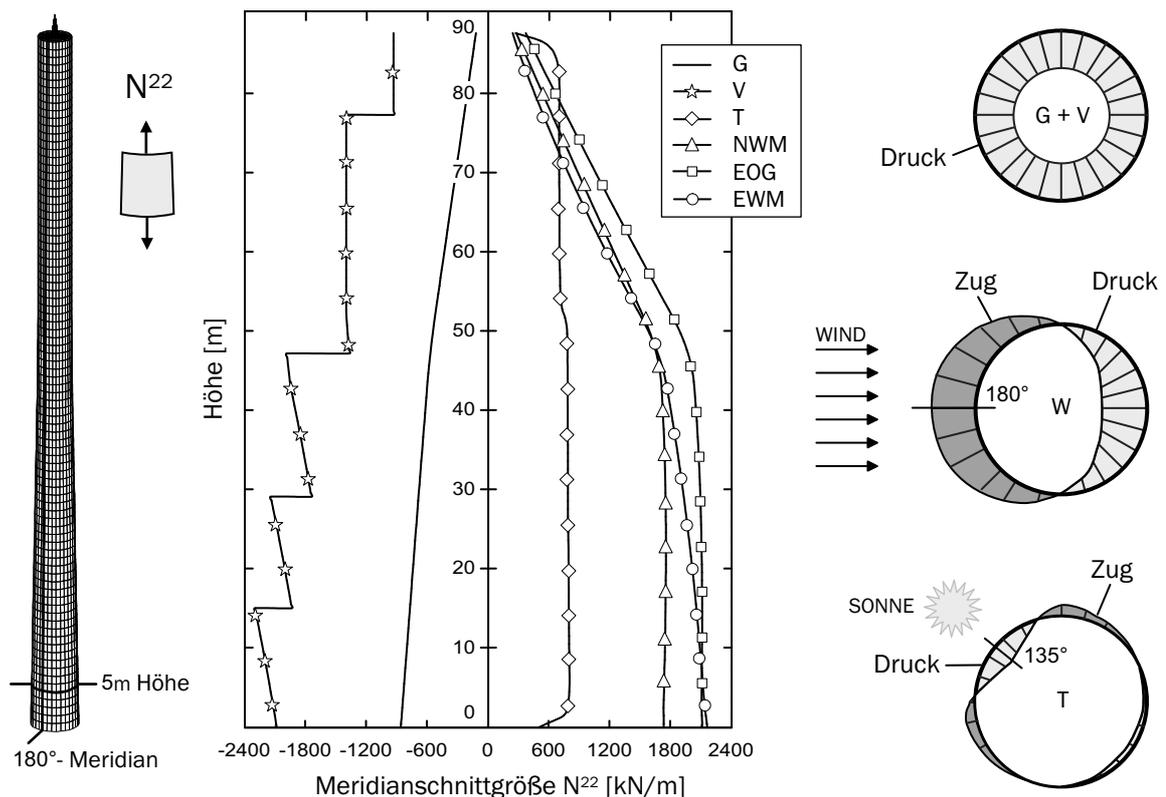


Bild 7.20: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen der AEOLUS II: Meridianschnittgrößen N^{22} in Höhen- und Umfangsverteilung.

Wie bereits erwähnt, bauen sich Zwangbeanspruchungen, hier aus thermischen Einwirkungen, bei Rissbildung ab. Inwieweit sie dennoch die Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit negativ beeinflussen, kann nur durch nichtlineare Analysen festgestellt werden, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden.

7.2.4 Untersuchung des progressiven Schädigungsverhaltens

Die nichtlinearen Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen werden mit der in Abschnitt 5.4.3 erläuterten Multi-Level-Iterations-Strategie und unter Verwendung der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Stahlbetonmodellierung durchgeführt. Die Diskretisierung erfolgt in

jedem Element mit zehn Betonschichten und vier Betonstahlbewehrungsschichten. Die numerischen Analysen werden mit den Mittelwerten der Betonfestigkeiten nach DIN 1045-1 (2001) durchgeführt.

Ausgehend von den bereits definierten Einwirkungen werden die Lastfallkombinationen $\lambda_1 \cdot (G + V) + \lambda_3 \cdot \text{EWM}$ und $\lambda_1 \cdot (G + V) + \lambda_2 \cdot T + \lambda_3 \cdot \text{EWM}$ zur Bestimmung der Grenztraglast numerisch simuliert. Bild 7.21 zeigt für beide Kombinationen das nichtlineare Last-Verformungs-Verhalten in einer Höhe von 70 m im Windanströmmeridian.

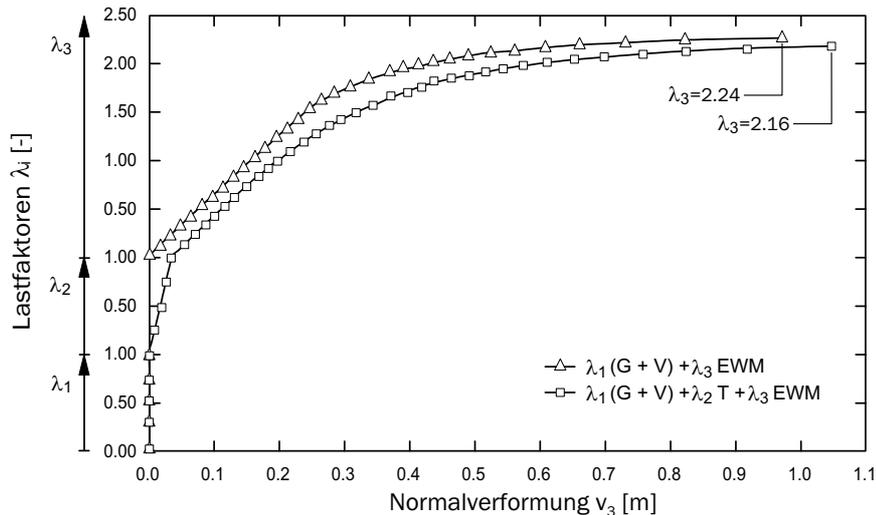


Bild 7.21: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen der AEOLUS II: Last-Verformungs-Verhalten des Spannbetonturms in einer Höhe von 70 m im Windanströmmeridian.

Für die Lastkombination ohne Berücksichtigung der thermischen Einwirkungen wird die Grenztraglast bei einem Windlastfaktor von $\lambda_3 = 2.24$ erreicht. Das Versagen erfolgt durch Überschreiten der Zugfestigkeit der Meridianbewehrung, da sich aus der Windbeanspruchung des Turms mit daraus resultierendem Kragarm-Biegemoment im Ringquerschnitt maximale Zug- bzw. Druckbeanspruchungen in Meridianrichtung ergeben. Wird das Tragwerk vorab durch die vorgenannten Temperaturlastfälle ΔT_N und ΔT_M belastet, führt die aus ΔT_M resultierende Ringbiegung zu einer Überschreitung der Zugfestigkeit des Betons in Ringrichtung. Folglich entstehen vertikale Biegerisse auf der kalten Turmaußenseite. Durch den cosinusförmig verteilten, konstanten Temperaturanteil ΔT_N ergeben sich meridionale Zugspannungen am Übergang zwischen dem warmen und dem kalten Schalenbereich, die im Zusammenwirken mit den Zugbeanspruchungen aus Wind zu frühzeitiger Rissbildung, d.h. zu horizontalen Trennrissen im Betonquerschnitt, führen. Aufgrund der insgesamt reduzierten Biegesteifigkeiten des Schalenquerschnitts sind größere Verformungen die Folge. Die zunehmend verminderte Umlagerungsfähigkeit äußert sich in einer geringeren Tragfähigkeit von $\lambda_3 = 2.16$. Die zugehörigen Rissevolutionen zeigen, dass für die Lastfallkombination ohne Temperaturanteil bei gleichem Windlastniveau eine deutlich ausgeprägtere Rissausbreitung auftritt [Harte & Wörmann 2002]. Dabei werden gerade die vertikalen Risse, die sich im Gegensatz zu den horizontalen Rissen nicht durch Vorspannung schließen lassen, die Tragfähigkeit langfristig herabsetzen.

Die getroffenen Aussagen können durch die zusätzliche Untersuchung des Schwingungs- bzw. Schädigungsverhaltens des Turms untermauert werden. Insbesondere anhand der Evolution der Eigenfrequenzen wird der steifigkeitsmindernde Einfluss der Rissbildung aus Temperaturzwang deutlich. Hierfür wurde numerisch der folgende Lastzyklus gefahren:

- Belastung mit $\lambda_1 \cdot (G + V)$ und $\lambda_1 \in [0, 1.0]$,
- Belastung mit $\lambda_2 \cdot T$ und $\lambda_2 \in [0, 1.0]$,
- Belastung mit $\lambda_3 \cdot \text{EWM}$ und $\lambda_3 \in [0, 1.5]$,
- Entlastung mit $\lambda_4 \cdot \text{EWM}$ und $\lambda_4 \in [0, 1.5]$,
- Belastung mit $\lambda_5 \cdot \text{NWM}$ und $\lambda_5 \in [0, 1.35]$.

Dabei sind die Steigerungsfaktoren der Windlasten entsprechend der in der DIBT-RICHTLINIE (2003) vorgegebenen Sicherheitsfaktoren gewählt worden. Der entsprechende Zyklus ohne die thermischen Einwirkungen wird ebenfalls numerisch analysiert.

Bereits bei der Belastung der Struktur mit $\lambda_1 \cdot (G + V)$ ist ein signifikanter Abfall der Eigenfrequenzen zu beobachten (Bild 7.22). Dieses Verhalten kann mit der Reduktion der Einträge der tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T aus zweierlei Gründen erklärt werden. Ein Teil des Abfalls resultiert aus dem Einfließen der vorhandenen Druckkräfte in die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_σ . Dieses Verhalten wird in der Literatur für druckbeanspruchte Strukturen beschrieben, beispielsweise in Meskouris (1999). Der zusätzliche Abfall hängt mit dem nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons im Druckbereich zusammen. Die in die Berechnung der Steifigkeitsmatrix jeweils aktuell eingehenden Tangentenmodule sind auf einem höheren Spannungsniveau geringer und führen somit zu einer reduzierten Steifigkeit. Die Veränderung der 1. Eigenfrequenz f_1 in Abhängigkeit von den verwendeten Steifigkeitsmatrizen ist in Bild 7.22 dargestellt. Die zusätzlich eingezeichneten vertikalen Linien sind Ergebnisse linearer Vergleichsberechnungen mit den in DIN 1045-1 (2001) definierten Sekantenmodulen E_{cm} und mit den Ursprungsmodulen der Spannungs-Dehnungs-Linien im Betondruckbereich.

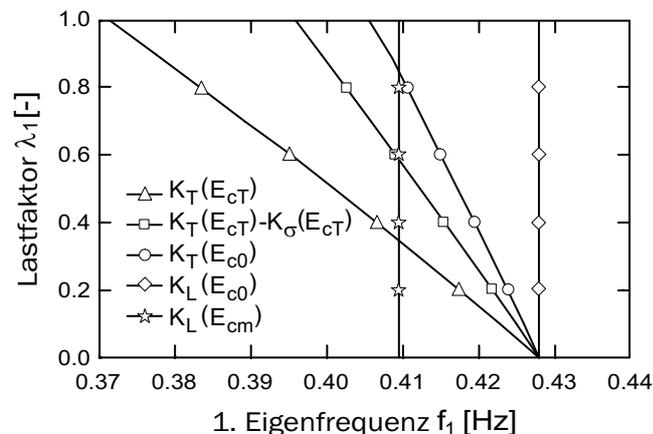


Bild 7.22: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen der AEOLUS II: Veränderung der 1. Eigenfrequenz f_1 bei der Belastung mit $\lambda_1 \cdot (G + V)$.

Das Verhalten der 1. Eigenfrequenz für die weitere Laststeigerung bei den beiden untersuchten Lastzyklen ist in den Bildern 7.23 und 7.24 dargestellt. Im Fall der thermischen Beanspruchung kann ein Steifigkeitsabfall in der Last-Verschiebungs-Kurve beobachtet werden, jedoch ist die 1. Eigenfrequenz zu Beginn und am Ende der Belastung annähernd gleich. Die vorwiegend vertikale Rissbildung infolge der Wärmeeinwirkung hat nur einen geringen Einfluss auf das Schwingungsverhalten der Kragstruktur. Diese wird vor allem durch die Meridianbiegesteifigkeit bestimmt, die sich aufgrund der Vorspannung noch nicht signifikant geändert hat. Die bei Lastwechseln auftretenden Sprünge in den Eigenfrequenzkurven hängen wiederum mit den verwendeten Spannungs-Dehnungs-Linien für den Betondruckbereich zusammen. Teile der Struktur werden an diesen Punkten entlastet. Somit springen die zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Linien in diesen Bereichen auf den Entlastungsast, der mit einem höheren Elastizitätsmodul beschrieben wird. Die Folge ist ein nahezu sprunghafter Anstieg der numerisch ermittelten Gesamtsteifigkeit und damit auch der Eigenfrequenzen. Bei eigenen Vergleichsrechnungen mit einer „reinen“ nichtlinearen Betonformulierung traten diese Sprünge nicht auf. Somit kann die vermutete Ursache als Grund für dieses Verhalten bestätigt werden. In Kombination mit den Windlasten führen die thermischen Einwirkungen bereits auf einem niedrigeren Windlastniveau in verstärktem Maße zu horizontalen Rissen [Harte & Wörmann 2002]. Begleitet wird dieser Vorgang durch ein signifikantes Absinken der Eigenfrequenz. Für den Fall ohne die thermischen Einwirkungen ist bis zum angesetzten Windlaststeigerungsfaktor von 1.5 nur eine geringe Rissbildung festzustellen. Dies wird auch durch den linearen Anstieg der Last-Verformungs-Kurve in diesem Bereich angezeigt (Bild 7.21).

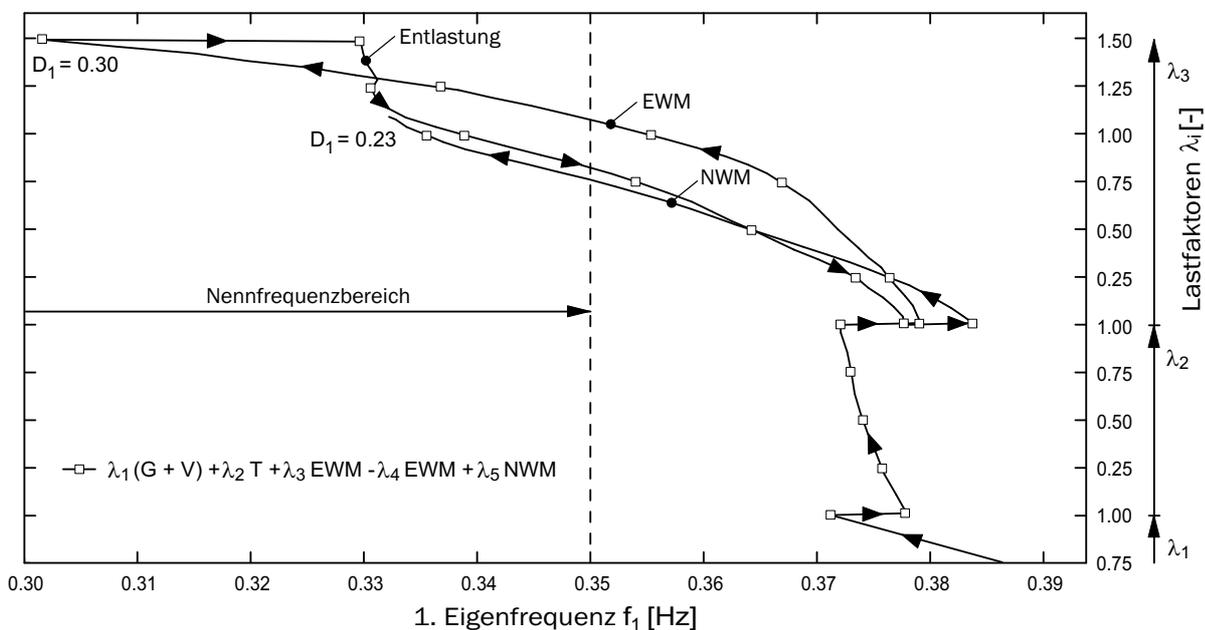


Bild 7.23: Tragfähigkeits- und Schädigungsanalysen der AEOLUS II: Veränderung der 1. Eigenfrequenz f_1 für den Lastzyklus $\lambda_1 \cdot (G + V) + \lambda_2 \cdot T + \lambda_3 \cdot EWM - \lambda_4 \cdot EWM + \lambda_5 \cdot NWM$.

Aggressivität der salzhaltigen Atmosphäre die Dauerhaftigkeit negativ beeinflussen wird, es sei denn, es gelänge, Tiefe und Breite der entstehenden Risse gering zu halten.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung einer gekoppelten hygrothermo-mechanischen Materialmodellierung für Stahlbetonflächentragwerke. Die numerische Umsetzung der vorgestellten Modellierung erfolgt im Finite-Element-Programmsystem FEMAS 2000. Die hierzu durchgeführten Erweiterungen sind in Harte, Andres & Wörmann (2003) dokumentiert. Als Basis für die Implementierung dient ein vorhandenes isoparametrisches Schalenelement, welches durch eine mittelflächenorientierte, rotationsvariablenbehaftete Schalentheorie finiter Rotationen unter Berücksichtigung konstanter Schubverzerrungen gekennzeichnet ist.

Die Grundlage der weitestgehend makroskopischen Betrachtungsweise bildet das zunächst beschriebene Verhalten des Verbundwerkstoffs Stahlbeton. Darauf aufbauend wird eine zeitvariante Stahlbetonmodellierung vorgestellt. Ausgangspunkt ist dabei eine zeitinvariante Formulierung, in der die wesentlichen Phänomene der werkstofflichen Nichtlinearität, wie die Betonzugrissbildung, das Betondruckverhalten, das elasto-plastische Betonstahlverhalten und die Verbundwirkung, wirklichkeitsnah erfasst werden.

Zur Beschreibung der zeitlich und örtlich veränderlichen Feuchte- und Temperaturverteilung im Beton werden zwei gekoppelte Bilanzgleichungen aufgestellt. Die Dampf- und Flüssigkeitstransportanteile werden in getrennter Form erfasst, als Potentialgrößen die Temperatur und die relative Feuchte verwendet. Das resultierende nichtlineare Differentialgleichungssystem mit den zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen wird konsistent linearisiert und in eine Finite-Element-Formulierung überführt. Um die in Flächentragwerken überwiegend in Dickenrichtung verlaufenden Ausgleichsvorgänge abzubilden, wird daraus ein eindimensionales Berechnungsverfahren abgeleitet und in das neu entwickelte, auch eigenständig lauffähige Programmmodul HYG THERM implementiert. Die Integration im Zeitbereich erfolgt mit dem Kollokationsverfahren. Durch Einwirkungs-Zeit-Funktionen können die klimatischen Umgebungsverhältnisse erfasst werden. Die Einbindung unsymmetrischer Gleichungslöser, einer Schrittweitensteuerung und einer an die Problemstellung angepassten Assemblierung der vorliegenden Matrizen und Vektoren gewährleistet die Effizienz des numerischen Modells.

Die zeitvariante Betonmodellierung basiert auf der additiven Zerlegung der Verzerrungsanteile. Aus den instationären Feuchte- und Temperaturverteilungen werden die resultierenden nichtlinearen Verzerrungsverteilungen im jeweiligen Betonquerschnitt ermittelt. Diese werden auf der Materialpunktebene in eine auf dem Schichtenkonzept basierende zeitvariante Multi-Level-Iterations-Strategie eingebunden, die zum Aufbau der notwendigen Matrizen und Vektoren innerhalb der inkrementell-iterativen Lösungstechniken eingesetzt wird. Mit einer derartigen Vorgehensweise ist es im Gegensatz zur Berücksichtigung auf der Integrationspunktebene möglich, die im Querschnitt auftretenden nichtlinearen Verzerrungsanteile in der Modellierung wirklichkeitsnah zu erfassen. Für eine problemangepasste Berechnung sind bei der Implementierung unterschiedliche Ebenen der hygrothermischen und mechanischen Kopplung eingeführt worden. Zusätzlich werden auch normative Regelungen bezüglich des Schwindens und Kriechens umgesetzt. Dabei erfolgt die Modellierung der viskosen Verzerrungsanteile auf der Basis der linearen Viskoelastizitätstheorie. Somit wird die Möglichkeit geschaffen, normenkonforme Simulationen durchzuführen.

Verschiedene, in jüngerer Zeit definierte globale Schädigungsindikatoren sind in das Analysekonzept integriert worden. Sie liefern einen zusätzlichen und sehr anschaulichen Eindruck über den Verlauf schädigungsbedingter Steifigkeitsdegradationen und der damit verbundenen Veränderung des Tragverhaltens.

Die Modellkomponenten werden anhand von Vergleichen zwischen experimentellen Messergebnissen und den eigenen numerischen Nachrechnungen verifiziert. Die aussagekräftigen Beispielrechnungen zeigen zum einen, dass die hygrothermische Situation im Beton mit den Modellen numerisch nachvollzogen werden kann und zum anderen, dass die hygri- und thermisch induzierten Beanspruchungen von Stahlbetonbauteilen mit der vorgestellten Vorgehensweise innerhalb einer nichtlinearen Simulation erfasst werden können.

Abschließend werden zwei große Schalenbauwerke im Hinblick auf den Einfluss der lastunabhängigen Einwirkungen und der daraus resultierenden Zwangspannungen untersucht. Sie demonstrieren die Leistungsfähigkeit des implementierten numerischen Rechenwerkzeugs und verdeutlichen, dass bei der Anwendbarkeit keine Beschränkung auf kleine Strukturen vorliegt. Beide Beispiele zeigen, dass die hygri- oder thermischen Einwirkungen auf Stahlbetontragwerke für sich alleine gesehen häufig als unkritisch beurteilt werden können. In Verbindung mit weiteren mechanischen Beanspruchungen können sie jedoch nichtlineare progressive Schädigungsprozesse auslösen, die sowohl die Tragfähigkeit als auch insbesondere die Dauerhaftigkeit nachhaltig negativ beeinflussen. Somit kann die in der Praxis weit verbreitete Meinung, dass die lastunabhängigen Einwirkungen nahezu keinen Einfluss auf die Tragfähigkeit von Stahlbetontragwerken haben, vom Verfasser nicht geteilt werden. Auch wenn sich die Zwangspannungen durch entsprechende Rissbildung abbauen, führen sie zu einer Veränderung des Tragverhaltens. Die vorhandenen Umlagemöglichkeiten in Stahlbetonflächentragwerken werden durch die zusätzlichen Rissbildungsprozesse herabgesetzt.

Schäden an bestehenden Bauwerken resultieren häufig aus dem Zusammenwirken von mechanischen, thermischen und hygri-chen Beanspruchungen. Prognostische Schädigungsanalysen mit den vorliegenden Modellen können helfen, eventuelle Schwachstellen eines Tragwerksentwurfs bereits in der Planungsphase aufzudecken und diese durch präventive

Maßnahmen zu vermeiden. Bei bereits geschädigten Strukturen können die numerischen Analysen zur Prognose der Restlebensdauer herangezogen werden oder zu einer sinnvollen Auslegung eines Sanierungskonzeptes beitragen.

Gerade im Hinblick auf die normativ geschaffene Grundlage zum Einsatz nichtlinearer Strukturanalysen im Rahmen des Nachweisverfahrens ist es wichtig, die bei einem Tragwerk möglichen Einwirkungsszenarien wirklichkeitsnah abzubilden. Nur wenn dies der Fall ist, können die Verfahren unter dem Gesichtspunkt der Wirtschaftlichkeit, d.h. der Materialeinsparung bei der Bemessung in der Neuwertphase, eingesetzt werden. Andernfalls führt dies zu einer Beeinträchtigung des Funktionserhalts während der gewünschten Lebensdauer des Bauwerks. Die Arbeit zeigt, dass unter diesem Aspekt die Berücksichtigung der thermischen und hygrischen Beanspruchungen in vielen Fällen zwingend erforderlich ist.

8.2 Ausblick

Basierend auf den entwickelten Modellen und den implementierten Algorithmen ergeben sich folgende weitere Ansätze:

- Mit systematischen numerischen Untersuchungen könnte die Sensitivität der hygrothermischen Materialparameter auf die thermischen und hygrischen Einflüsse im Hinblick auf ihre Schädigungsrelevanz bei unterschiedlichen Tragstrukturen quantifiziert werden.
- Für eine Aussage über die quantitativen Unterschiede bezüglich der in der Arbeit alternativ verwendeten Vorgehensweise zur Erfassung der hygrischen Verzerrungen und somit den Einfluss der Eigenspannungen sind weitere numerische Berechnungen erforderlich. Dabei sind abweichend von den hier untersuchten Fällen mit hygrischen Gradienten auch Strukturen mit beidseitigem Austrocknungsverhalten zu analysieren.
- Der Einfluss des zeitabhängigen Verhaltens auf die Entwicklung der in die Modellierung eingebundenen Schädigungsindikatoren ist durch weitere numerische Simulationen zu untersuchen. Die Aussagekraft der Schädigungsindikatoren ist durch weitere Anwendungsfälle und deren vergleichende Auswertung zu erhöhen.
- Die durchgeführten numerischen Nachrechnungen experimenteller Versuchsergebnisse bestätigen, dass das hygrothermische Verhalten von Beton mit den vorliegenden Modellen abgebildet werden kann. Zur genaueren Eingrenzung der erforderlichen Eingangsdaten wären jedoch weitere experimentelle Versuche wünschenswert. Hier wären vor allem systematische Untersuchungen hilfreich, mit denen die Parameter der Transport- und Speicherfunktionen in Abhängigkeit von charakteristischen betontechnologischen Kennwerten bestimmt werden.
- Zur weiteren Absicherung der Modellvorstellungen wären auch Monitoring-Maßnahmen an realen Bauwerken hilfreich.

- Die näherungsweise und somit baupraktische Abbildung hygrischer Gradienten in Stahlbetonstrukturen ist durch eine lineare Approximation möglich. Zur Festlegung eines quantitativen Werts sollten vergleichende Analysen an unterschiedlichen Tragstrukturen durchgeführt werden.
- Eine Erhöhung der Vorhersagegenauigkeit des Kriechens wäre durch die Einbindung einer wirklichkeitsnäheren, nicht auf den normativen Vorgaben basierenden Formulierung möglich.
- Bei hochfestem Beton nimmt im Vergleich zu normalfestem Beton der Einfluss des autogenen Schwindens zu. Zur Erfassung der inneren Austrocknung ist die Erweiterung der vorliegenden materialpunktbasierten, hygrischen Betonmodellierung um einen entsprechenden Quell- bzw. Senkterm denkbar.
- Die vorgestellte Modellierung basiert auf einer einseitigen Kopplung des hygrothermischen und mechanischen Modells. Inwieweit mögliche Rückkopplungseffekte das Schädigungsverhalten signifikant negativ beeinflussen, ist in zukünftigen Untersuchungen zu klären.
- Zur Erweiterung des Anwendungsspektrums der vorliegenden Modelle könnte eine Beschreibung des Stahlbetonverhaltens bei extremeren Temperaturen integriert werden. Mit einer diesbezüglich erweiterten Modellierung könnten Veränderungen des Tragverhaltens durch Schädigungen untersucht werden, die durch Frost- oder Brandbeanspruchungen hervorgerufen werden.

Anhang A

Modellparameter

Strukturfaktoren nach KIESSL. In das implementierte Modell HygTherm-2 ist eine von Kießl (1983) vorgeschlagene Formulierung für den Dampftransport integriert worden, vgl. Tabelle 5.2. Im Folgenden werden die für die numerische Umsetzung verwendeten Zusammenhänge dargestellt. Auf eine ausführliche Beschreibung der einzelnen Eingangsgrößen wird verzichtet.

Kießl (1983) führt Strukturfaktoren ein, mit denen er die Einflüsse der Materialparameter, der vorherrschenden Materialfeuchte und der Temperatur erfasst. Zur Beschreibung der Wasserdampfdiffusion verwendet er die Faktoren FDP und FDT, wobei mit ersterem der hygriisch bedingte und mit letzterem der thermisch bedingten Anteil abgebildet wird. Für beide Faktoren wird von einer Überlagerung eines seriellen und eines parallelen Transports ausgegangen. Der sich damit einstellende Gesamttransport wird mittels einer Verteilungsfunktion gesteuert.

Der Ausdruck für den hygriisch bedingten Dampftransport lautet

$$\varepsilon_{FDP} = a \varepsilon_{FDP,s} + (1 - a) \varepsilon_P. \quad (\text{A.1})$$

Dabei werden die Anteile für den seriellen Transport

$$\varepsilon_{FDP,s} = \psi_c \frac{P}{P - h p_s} \frac{1}{1 - \frac{w}{\varrho_c \psi_c}} f_{R,s} \quad (\text{A.2})$$

und den parallelen Transport

$$\varepsilon_P = \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{w - w_{50}}{w_{kr} - w_{50}} \chi_{w_{50}} \right) (1 - \chi_{w_{kr}}) \quad (\text{A.3})$$

mit

$$\chi_{w_{50}} = \begin{cases} 0 & \text{für } w \leq w_{50} \\ 1 & \text{für } w > w_{50} \end{cases} \quad \text{und} \quad \chi_{w_{kr}} = \begin{cases} 0 & \text{für } w \leq w_{kr} \\ 1 & \text{für } w > w_{kr} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

entsprechend der Funktion

$$a = \begin{cases} 1 - \left(\frac{w_{kr} - w}{w_{kr} - w_{50}} \right)^{n_1} & \text{für } w_{50} \leq w \leq w_{kr} \\ 1 - \left(\frac{w - w_{kr}}{w_s - w_{kr}} \right)^{n_2} & \text{für } w_{kr} < w < w_s \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

verteilt. Unter Verwendung von (A.1) wird (3.49) durch die folgende Formulierung ersetzt:

$$\mathbf{q}_v = -\frac{D_D}{R_v T} \varepsilon_{FDP} \cdot \text{grad } p. \quad (\text{A.6})$$

Somit muss der Ausdruck für die Wasserdampfpermeabilität δ_p in (3.62) und (3.66) entsprechend modifiziert werden.

Die thermisch bedingte Komponente des Diffusionsstroms lautet

$$\varepsilon_{FDT} = a \varepsilon_{FDT,s} + (1 - a) \varepsilon_p. \quad (\text{A.7})$$

Die Beziehungen für den Paralleltransport (A.3) und die Verteilungsfunktion (A.5) gelten hier analog. Für den abweichend formulierten seriellen Anteil gilt

$$\varepsilon_{FDT,s} = \psi_c \frac{P}{P - h p_s} \frac{\text{grad } \vartheta_\psi}{\text{grad } \vartheta} \frac{1}{1 - \frac{w}{\varrho_c \psi_c}} f_{R,s} \quad (\text{A.8})$$

mit

$$\frac{\text{grad } \vartheta_\psi}{\text{grad } \vartheta} = \frac{1}{1 - \xi \frac{w}{\varrho_c \psi_c}}, \quad (\text{A.9})$$

$$\xi = 1 - \frac{\text{grad } \vartheta_w}{\text{grad } \vartheta_\psi} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda_\psi}{\lambda_W} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda_\psi \cong 0.047 \exp(1.752 \cdot 10^{-4} \vartheta^2 + 3.477 \cdot 10^{-2} \vartheta). \quad (\text{A.11})$$

Der thermisch bedingten Feuchtestrom folgt mit (A.7) zu

$$\mathbf{q}_v = -\frac{D_D}{R_v T} \varepsilon_{FDT} \cdot \text{grad } p. \quad (\text{A.12})$$

Somit ändert sich die zugehörige Formulierung der Wasserdampfpermeabilität in (3.61) und (3.65).

Kiefl (1983) setzt für die Exponenten der Verteilungsfunktion $n_1 = 1.5$ und $n_2 = 3.0$, für den Reduzierungsfaktor des seriellen Transport $f_{R,s} = 0.20$ und für die Wärmeleitfähigkeit des Wassers $\lambda_W = 0.6 \text{ W}/(\text{m K})$ bei einer Temperatur von 20°C an.

Anhang B

Vorhersageverfahren

Im Folgenden werden die formelmäßigen Zusammenhänge der Vorhersageverfahren des Schwindens und Kriechens von Beton nach DIN 1045-1 (2001) und DAfStb (2003) dargestellt. In der Norm selbst sind lediglich Diagramme aufgeführt, mit denen die zu erwartenden Endwerte bestimmt werden können. Für die Berechnung der Schwind- und Kriechverformungen zu einem beliebigen Zeitpunkt t wird auf das kürzlich erschienene Heft 525 vom Deutschen Ausschuss für Stahlbeton verwiesen [DAfStb 2003]. Die dort angegebenen Beziehungen bilden die Basis für die in der Norm enthaltenen Diagramme. Die aus Gründen der Einheitenkonformität eingeführten Bezugsgrößen werden bei der hier folgenden Darstellung eingesetzt. Daraus resultiert eine kompaktere Schreibweise. Ausführlichere Beschreibungen der normativen Grundlagen sind in Müller & Kvitsel (2002) und Reinhardt (2002) zu finden.

Nach DIN 1045-1 (2001) gelten die angegebenen Beziehungen unter den folgenden Voraussetzungen:

- feuchte Nachbehandlung nicht länger als 14 Tage,
- übliche klimatische Umgebungsbedingungen mit mittleren relativen Luftfeuchten von 40 % bis 100 %,
- Temperaturen von 10 °C bis 30 °C,
- Belastungsalter $t_0 \geq 1$ Tag und
- Beanspruchungsgrad $\sigma_c/f_{ck}(t_0) \leq 0.45$.

B.1 Schwinden nach DIN 1045-1

Schwinddehnung zu einem beliebigen Zeitpunkt t . Die Schwinddehnungen im Beton $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$ werden als Summe der Anteile Schrumpfen $\varepsilon_{c,as}(t)$ und Trocknungsschwinden $\varepsilon_{c,ds}(t, t_s)$ idealisiert:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{c,as}(t) + \varepsilon_{c,ds}(t, t_s). \quad (\text{B.1})$$

Dabei definieren die Zeitpunkte t und t_s das Betonalter in Tagen zum Beobachtungszeitpunkt bzw. bei Beginn der Austrocknung.

Die beiden Anteile in (B.1) setzen sich jeweils aus einem Grundwert $\varepsilon_{c,as0}(f_{cm})$ bzw. $\varepsilon_{c,ds0}(f_{cm})$ und einer Funktion zur Berücksichtigung der zeitlichen Entwicklung $\beta_{as}(t)$ bzw. $\beta_{ds}(t - t_s)$ zusammen. Für das Trocknungsschwinden wird der Einfluss der relativen Feuchte durch einen zusätzlichen Term β_{RH} berücksichtigt. Daraus ergibt sich:

$$\varepsilon_{c,as}(t) = \varepsilon_{c,as0}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t) \quad (\text{B.2})$$

bzw.

$$\varepsilon_{c,ds}(t, t_s) = \varepsilon_{c,ds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s). \quad (\text{B.3})$$

Die einzelnen Komponenten für das Schrumpfen $\varepsilon_{c,as}(t)$ werden wie folgt bestimmt:

$$\varepsilon_{c,as0}(f_{cm}) = -\alpha_{as} \left[\frac{f_{cm}/10}{6 + f_{cm}/10} \right]^{2.5} \cdot 10^{-6} \quad (\text{B.4})$$

und

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0.2 \cdot t^{0.5}). \quad (\text{B.5})$$

Für den Anteil des Trocknungsschwindens $\varepsilon_{c,ds}(t, t_s)$ gelten die Zusammenhänge:

$$\varepsilon_{c,ds0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm}/10)] \cdot 10^{-6}, \quad (\text{B.6})$$

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1.55 \cdot [1 - (RH/100)^3] & \text{für } 40\% \leq RH < 99\% \cdot \beta_{s1} \\ +0.25 & \text{für } RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

und

$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left[\frac{(t - t_s)}{0.035 \cdot h_1^2 + (t - t_s)} \right]^{0.5}. \quad (\text{B.8})$$

Mit den Beiwerten α_{as} , α_{ds1} und α_{ds2} wird der Einfluss der verwendeten Zementart erfasst. Die anzusetzenden Werte sind in Tabelle B.1 aufgelistet. Durch den Beiwert β_{s1} in (B.7) wird die innere Austrocknung hochfester Betone berücksichtigt. Er bestimmt sich zu:

$$\beta_{s1} = (35/f_{cm})^{0.1} \leq 1.0. \quad (\text{B.9})$$

Die in (B.8) eingehende wirksame Bauteildicke kann mit $h_1 = 2A_c/u$ bestimmt werden. Dabei ist A_c die Betonquerschnittsfläche und u der Umfang des Querschnitts, welcher der Austrocknung ausgesetzt ist. Zu beachten ist, dass in die aufgeführten Gleichungen die wirksame Bauteildicke h_1 in [mm], die mittlere Betondruckfestigkeit f_{cm} in [N/mm²], die relative Umgebungsfeuchte RH in [%] und das betrachtete Betonalter t in [d] eingesetzt werden müssen.

Zementtyp	Schwinden			Kriechen
	α_{as}	α_{ds1}	α_{ds2}	α
SL	800	3	0.13	-1
N,R	700	4	0.12	0
RS	600	6	0.12	1

Tabelle B.1: Beiwerte α_{as} , α_{ds1} , α_{ds2} und α zur Berücksichtigung der Zementart.

Schwinddehnung zum Zeitpunkt $t = \infty$. Die Zeitfunktionsterme (B.5) und (B.8) streben mit zunehmendem Betonalter gegen eins, so dass in den Formeln (B.2) und (B.3) die jeweiligen Endschwindmaße implizit enthalten sind. Das Gesamtendschwindmaß ergibt sich entsprechend als Summe der Schrumpf- und Trocknungsdehnungen für $t = \infty$ zu

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{ca\infty} + \varepsilon_{cds\infty}. \quad (\text{B.10})$$

Für die Auswertung der zuvor aufgeführten Gleichungen zum Zeitpunkt $t = \infty$ sind in DIN 1045-1 (2001) Diagramme enthalten (Bilder 20 und 21 der Norm). Als Eingangsgrößen zur Bestimmung der Schrumpfdehnung fungieren die Beton- und die Zementfestigkeitsklasse. Für die Trocknungsschwinddehnung gehen zusätzlich die Parameter relative Luftfeuchte und wirksame Bauteildicke ein.

B.2 Kriechen nach DIN 1045-1

Kriechverformung. Für die Ermittlung der einachsigen Kriechverformung eines Betonkörpers im Alter t , der im Alter t_0 belastet worden ist, gilt folgender Berechnungsansatz:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \frac{\sigma_c}{E_{c0}}. \quad (\text{B.11})$$

Als Elastizitätsmodul wird hierbei der Tangentenmodul nach 28 Tagen verwendet, vgl. Abschnitt 3.1.2. Dieser Ansatz gilt nur für eine zeitlich konstante kriecherzeugende Betonspannung σ_c .

Kriechzahl zu einem beliebigen Zeitpunkt t . Die Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ eines Betons im Alter von t Tagen, der zum Zeitpunkt t_0 erstmals belastet wurde, wird nach dem folgenden Produktansatz bestimmt:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0). \quad (\text{B.12})$$

Dabei stellt φ_0 den Grundwert der Kriechzahl dar und $\beta_c(t, t_0)$ eine Funktion zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs des Kriechens.

Mittels des Grundwertes

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0), \quad (\text{B.13})$$

in welchem prinzipiell die Aufspaltung in Grund- und Trocknungskriechen enthalten ist, werden die einzelnen Abhängigkeiten der Kriechverformung erfasst. Der Faktor

$$\varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - RH/100}{0.1 \sqrt[3]{h_1}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad (\text{B.14})$$

nimmt mit steigender relativer Luftfeuchte und zunehmender wirksamer Bauteildicke h_1 ab. Dadurch wird berücksichtigt, dass bei hohen relativen Luftfeuchten der Anteil des Trocknungskriechens an der Gesamtverformung immer geringer wird. Bei einer relativen Luftfeuchte von 100 % tritt nur noch das Grundkriechen auf. Weiterhin wird durch diese Beziehung ausgedrückt, dass mit zunehmender Betondruckfestigkeit der Anteil des Trocknungskriechens an der Gesamtverformung abnimmt, was durch die Faktoren

$$\alpha_1 = [35/f_{cm}]^{0.7} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = [35/f_{cm}]^{0.2} \quad (\text{B.15})$$

erfasst wird. Der Einfluss der relativen Luftfeuchte wird mit steigender Betondruckfestigkeit immer geringer. Die Abnahme des Kriechens mit steigender Betondruckfestigkeit wird mittels des Faktors

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16.8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (\text{B.16})$$

abgebildet. Die Festigkeit dient als Hilfsgröße zur indirekten Erfassung des Porenanteils des Zementsteins. Der Einfluss des Betonalters bei Belastungsbeginn wird schließlich durch den Faktor

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_{0,eff}^{0.2}} \quad (\text{B.17})$$

erfasst.

Der zeitliche Verlauf wird durch die hyperbolische Funktion

$$\beta_c(t - t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0.3} \quad (\text{B.18})$$

ausgedrückt, welche für $(t - t_0) \rightarrow \infty$ dem Endwert $\beta_c(t - t_0) = 1.0$ zustrebt. Dabei gilt

$$\beta_H = 1.5 \cdot [1 + (0.012 \cdot RH)^{18}] \cdot h_1 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad (\text{B.19})$$

mit

$$\alpha_3 = [35/f_{cm}]^{0.5}. \quad (\text{B.20})$$

Damit wird abgebildet, dass sich die Kriechverformung umso langsamer entwickelt, je massiger das betrachtete Bauteil ist. Bei hohen relativen Feuchten, bei denen nur das Grundkriechen auftritt, verschwindet der Einfluss der Bauteilabmessung ebenso wie in Gleichung (B.14). Mit steigender Betondruckfestigkeit nimmt dagegen der zu einem bestimmten Zeitpunkt erreichte Wert von $\beta_c(t - t_0)$ zu, da der Anteil des diffusionskontrollierten Trocknungskriechens geringer ist.

Die Verwendung unterschiedlicher Zementsorten, und die damit entstehenden unterschiedlichen Hydratationsgrade zu gegebenen Belastungsaltern, wird durch die Korrektur des Belastungsalters t_0 in Gleichung (B.17) mit

$$t_{0,eff} = t_0 \cdot \left[\frac{9}{2 + t_0^{1.2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0.5 \quad (\text{B.21})$$

berücksichtigt. Dabei ist α ein Beiwert zur Berücksichtigung der Zementart (Tabelle B.1).

In Reinhardt (2002) findet sich zusätzlich der Hinweis, dass bei Lagerungstemperaturen, die vor Belastungsbeginn deutlich von 20 °C abweichen, das tatsächliche Belastungsalter t_0 in B.21 korrigiert werden sollte. Für eine Abschätzung des wirksamen Betonalters t_T wird unter anderem auf einen Ansatz aus MC 90 (1993) verwiesen, der wie folgt angegeben wird:

$$t_T = \sum_{i=1}^n \exp \left[13.65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)} \right] \cdot \Delta t_i. \quad (\text{B.22})$$

Dabei ist $T(\Delta t_i)$ die Betontemperatur in [°C] während des Zeitraums Δt_i in [d].

Kriechzahl zu einem Zeitpunkt $t = \infty$. Die Diagramme zur Bestimmung der Endkriechzahl $\varphi(\infty, t_0)$ sind in den Bildern 18 und 19 der DIN 1045-1 (2001) angegeben. Die Ablesung der Endkriechzahl erfolgt in Abhängigkeit von einer relativen Luftfeuchte von 50 % oder 80 %, der wirksamen Bauteildicke, der Beton- und Zementfestigkeitsklasse als auch des Betonalters bei Belastungsbeginn. Bei relativen Luftfeuchten zwischen 40 % und 100 % darf linear interpoliert werden.

Anhang C

Kinematische Beziehungen der Schale

Die kovarianten Basisvektoren des Schalenraumes werden in Abhängigkeit vom gewählten Verschiebungsansatz in Richtung der Dickenkoordinate θ^3 bestimmt, vgl. (4.81) und (4.78). Für einen quadratischen Ansatz ergeben sich die Metrikkoeffizienten des Schalenraumes entsprechend (4.10) zu

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta = \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} + \theta^3 \left(\mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} + \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right) \\ &\quad + (\theta^3)^2 (\mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}), \\ G_{\alpha 3} &= \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_3 = \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D} + \theta^3 \left(\mathbf{D}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D} \right), \\ G_{33} &= \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{G}_3 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \tag{C.1}$$

und

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \theta^3 \left(\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right) \\ &\quad + (\theta^3)^2 (\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta}), \\ g_{\alpha 3} &= \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} + \theta^3 \left(\mathbf{d}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} \right), \\ g_{33} &= \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

An dieser Stelle werden die vollständigen Komponenten des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors \mathbf{E} unter der Annahme eines quadratischen Ansatzes in Dickenrichtung wiedergegeben:

$$E_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} E_{\alpha\beta} & E_{\alpha 3} \\ \hline E_{3\alpha} & E_{33} \end{array} \right] \tag{C.3}$$

mit

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) = E_{\alpha\beta}^{(0)} + \theta^3 E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\theta^3)^2 E_{\alpha\beta}^{(2)}, \\ E_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha 3} - G_{\alpha 3}) = E_{\alpha 3}^{(0)} + \theta^3 E_{\alpha 3}^{(1)}, \\ E_{3\alpha} &= E_{\alpha 3}, \\ E_{33} &= \frac{1}{2}(g_{33} - G_{33}) = E_{33}^{(0)}, \end{aligned} \tag{C.4}$$

wobei

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right), \\
E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right), \\
E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} \right), \\
E_{\alpha 3}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D} \right), \\
E_{\alpha 3}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} \right), \\
E_{33}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \right).
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Zur Angabe der linearisierten Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen werden in (4.115) die variierten und inkrementellen Verzerrungsgrößen der Schale benötigt. Ausgehend von (4.100) lauten sie wie folgt:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\
\delta\beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{d}_{,\beta} + \delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\
\delta\gamma_{\alpha} &= \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{C.6}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta\delta\alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\Delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta\delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \Delta\delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\
\Delta\delta\beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\Delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta\delta\mathbf{d}_{,\beta} + \Delta\delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta\mathbf{d}_{,\beta} \right. \\
&\quad \left. + \Delta\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta\delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \Delta\delta\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta\mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\
\Delta\delta\gamma_{\alpha} &= \Delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta\delta\mathbf{d} + \Delta\delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} + \delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta\mathbf{d}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Die Variation und das Inkrement der Komponenten des Direktors \mathbf{d} aus (4.85) bestimmen sich zu

$$\begin{aligned}
\delta d^1 &= \cos\psi_1 \cos\psi_2 \delta\psi_1 - \sin\psi_1 \sin\psi_2 \delta\psi_2, \\
\delta d^2 &= \cos\psi_1 \sin\psi_2 \delta\psi_1 + \sin\psi_1 \cos\psi_2 \delta\psi_2, \\
\delta d^3 &= -\sin\psi_1 \delta\psi_1
\end{aligned} \tag{C.8}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta\delta d^1 &= -\sin\psi_1 \cos\psi_2 \delta\psi_1 \Delta\psi_1 - \cos\psi_1 \sin\psi_2 (\delta\psi_1 \Delta\psi_2 + \delta\psi_2 \Delta\psi_1) \\
&\quad - \sin\psi_1 \cos\psi_2 \delta\psi_2 \Delta\psi_2, \\
\Delta\delta d^2 &= -\sin\psi_1 \sin\psi_2 \delta\psi_1 \Delta\psi_1 + \cos\psi_1 \cos\psi_2 (\delta\psi_1 \Delta\psi_2 + \delta\psi_2 \Delta\psi_1) \\
&\quad - \sin\psi_1 \sin\psi_2 \delta\psi_2 \Delta\psi_2, \\
\Delta\delta d^3 &= -\cos\psi_1 \Delta\psi_1 \delta\psi_1.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Literaturverzeichnis

- ALBERS, A., CH. KLUG & H. WESTERMANN (1995). Leistungs- und Betriebsverhalten des Aeolus II. *DEWI-Magazin* 7, 52–56.
- ALONSO, M.T. (2002). Hochfester Beton. In *Beiträge zum 41. Forschungskolloquium des DAfStb*, 41–54. Forschungsinstitut der Zementindustrie, Düsseldorf.
- ALTENBACH, J. & H. ALTENBACH (1994). *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart: Teubner Studienbücher.
- ALVAREDO, A.M. (1994). *Drying shrinkage and crack formation*. Building Materials Reports No. 5, Aedificatio, Freiburg.
- ANDRÄ, H.-P., R. SAUL & J. SCHIFF (1998). Erfahrungen aus 40 Jahren Überwachung des Stuttgarter Fernsehturms, des weltweit ersten Stahlbetonfernsehturms. *Beton- und Stahlbetonbau* 8(93), 209–214.
- ANDRES, M. (2004). *Zum Stabilitätsnachweis von Schalentragerwerken aus Hochleistungsbeton*. Dissertation, Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- ANDRES, M. & R. WÖRMANN (2000). Tragsicherheit und Dauerhaftigkeit von Kühlturmschalen mit säureresistentem Hochleistungsbeton. In W. Wagner (Hrsg.), *Forschungskolloquium Baustatik-Baupraxis in Bad Herrenalb*, Mitteilung 1(2000), Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 4–5.
- ARNESEN, A. (1979). *Analysis of reinforced concrete shells considering material and geometric nonlinearities*. Report Nr. 79-1, Division of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology, The University of Trondheim.
- BAEHR, H.D. & K. STEPHAN (1994). *Wärme- und Stoffübertragung*. Berlin: Springer-Verlag.
- BAHN, B.Y. & C.-T.T. HSU (1998). Stress-strain behavior of concrete under cyclic loading. *ACI Materials Journal* 95(2), 178–193.
- BAROGHEL-BOUNY, V., M. MAINGUY, T. LASSABATÈRE & O. COUSSY (1999). Characterization and identification of equilibrium and transfer moisture properties for ordinary and high-performance cementitious materials. *Cement and Concrete Research* 29, 1225–1238.
- BAŞAR, Y. (1987). A consistent theory of geometrically non-linear shells with an independent rotation vector. *International Journal of Solids and Structures* 23(10), 1401–1415.

- BAŞAR, Y., Y. DING & R. SCHULTZ (1993). Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures* 30(19), 2611–2638.
- BAŞAR, Y. & W.B. KRÄTZIG (1985). *Mechanik der Flächentragwerke*. Braunschweig: Vieweg & Sohn.
- BAŞAR, Y. & W.B. KRÄTZIG (2000). *Theory of Shell Structures*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 258. Düsseldorf: VDI Verlag.
- BAŞAR, Y. & D. WEICHERT (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids - Fundamental mathematical and physical concepts*. Berlin: Springer-Verlag.
- BATHE, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- BATHE, K.-J. & E.L. WILSON (1976). *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- BAŽANT, Z.P. (Hrsg.) (1988). *Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete*. Chichester: Wiley & Sons.
- BAŽANT, Z.P. & S. BAWEJA (1995). Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures - model B3. *Materials and Structures* 28(180), 357–365.
- BAŽANT, Z.P., S. ŞENER & J.-K. KIM (1987). Effect of cracking on drying permeability and diffusivity of concrete. *ACI Materials Journal* 84, 351–357.
- BAŽANT, Z.P. & L.J. NAJJAR (1972). Nonlinear water diffusion in nonsaturated soil. *Matériaux et Constructions* 5(25), 3–20.
- BAŽANT, Z.P. & S. PRASANNAN (1989). Solidification theory for concrete creep. I: Formulation. II: Verification and application. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 115(8), 1691–1725.
- BEDNAR, T. (2000). *Beurteilung des feuchte- und wärmetechnischen Verhaltens von Bauteilen und Gebäuden - Weiterentwicklung der Meß- und Rechenverfahren*. Dissertation, Institut für Baustofflehre, Bauphysik und Brandschutz, Technische Universität Wien.
- BEEK, H., C. KÖNKE, U. MONTAG & W. ZAHLTEN (1996). *FEMAS 2000 - Finite Element Moduls of Arbitrary Structures - User's Manual, Release 3.0*. Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.
- BELLMER, H. (2003, April). Hart am Wind - Stahl oder Beton? - Für Windenergieanlagen passt beides. *Deutsches Ingenieur Blatt* 97, 22–29.
- BENBOUDJEMA, F., G. HEINFLING, F. MEFTAH, A. SELIER & J.M. TORRENTI (2001). On the prediction of delayed strains for concrete subjected to drying and loading simultaneously. In F.-J. Ulm, Z.P. Bažant & F.H. Wittmann (Hrsg.), *Creep, shrinkage and durability mechanics of concrete and other quasi-brittle materials*, 245–250. Oxford: Elsevier.
- BERGNER, H. (1997). *Rißbreitenbeschränkung zwangbeanspruchter Bauteile aus hochfestem Normalbeton*. Heft 482, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.

- BETTEN, J. (1993). *Kontinuumsmechanik. Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- BILINSKI, W. & Z. KORDECKI (1994). Imposed strains, thermal and moisture, in concrete massive structures. In H. Mang, N. Bićanić & R. de Borst (Hrsg.), *Proceedings of the International Conference on Computer Modelling of Concrete Structures (EURO-C 1994)*, 481–489. Swansea: Pineridge Press.
- BISCHOFF, M. (1999). *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Bericht Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- BOLVIN, M. & D. CHAUVEL (1993). A study of the life expectancy of cooling towers. In *Proceedings of the 12th SMIRT Conference*, paper DH06/4. Amsterdam: North-Holland.
- BRESLER, B. & A.C. SCORDELIS (1963). Shear strength of reinforced concrete beams. *ACI Journal* 60(1), 51–72.
- BRÜGGEMANN, M. (2002). *Zur nichtlinearen Zeitbereichssimulation flüssigkeitsgefüllter Tankbauwerke unter Erdbebeneinwirkungen*. Dissertation, Baumechanik und Numerische Methoden, Bergische Universität Wuppertal.
- BRUNAUER, S., P.H. EMMETT & E. TELLER (1938). Adsorption of gases in multimolecular layers. *Journal American Chemical Society* 60(2), 309–319.
- BUSCH, D., R. HARTE, W.B. KRÄTZIG & U. MONTAG (2002). New natural draft cooling tower of 200 m of height. *Engineering Structures* 24(12), 1509–1521.
- CHEN, F. (2001). *Numerische Simulation des nichtlinearen Trag- und Schädigungsverhaltens von Stahlbeton-Stabtragwerken bei monotoner und zyklischer Beanspruchung*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4, Nr. 171. Düsseldorf: VDI Verlag.
- CHEN, W.F. & D.J. HAN (1988). *Plasticity for structural engineers*. New York: Springer-Verlag.
- CONSTANTINESCU, D. (2000). Antwort auf Prof. Quasts Beitrag „Zur Kritik an der Stützenbemessung“. *Beton- und Stahlbetonbau* 95(5), 311–312.
- CRISFIELD, M.A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Volume 1: Essentials. Chichester: Wiley & Sons.
- CURBACH, M., T. HAMPEL, S. SCHEERER & K. SPECK (2002). Hochleistungsbeton unter zwei- und dreiaxialer Beanspruchung. *Beton- und Stahlbetonbau* 97(6), 275–280.
- CURBACH, M., T. HAMPEL, K. SPECK & S. SCHEERER (2000). *Versuchstechnische Ermittlung und mathematische Beschreibung der mehraxialen Festigkeit von Hochleistungsbeton bei zwei- und dreiaxialer Druckbeanspruchung*. Abschlussbericht zum DFG-Forschungsvorhaben CU 37/1-2, Institut für Tragwerke und Baustoffe, Technische Universität Dresden.
- CZERNIN, W. (1977). *Zementchemie für Bauingenieure*. Wiesbaden: Bauverlag.
- DAFSTB (2003). *Erläuterungen zu DIN 1045-1*. Heft 525, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.

- DARWIN, D. & D.A. PECKNOLD (1977a). Analysis of cyclic loading of plane R/C structures. *Computers and Structures* 7, 137–146.
- DARWIN, D. & D.A. PECKNOLD (1977b). Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)* 103(EM2), 229–241.
- DAVIS, T.A. & I.S. DUFF (1995). *A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices*. Tr-95-020, Computer and Information Science and Engineering Department, University of Florida.
- DETTLING, H. (1962). *Die Wärmedehnung des Zementsteins, der Gesteine und der Betone*. Heft 3, Otto-Graf-Institut, Universität Stuttgart.
- DEUTSCHER WETTERDIENST (2003). www.dwd.de/www.wetter.com.
- DIENER, J. (1998). *Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Berechnung langzeitbelasteter Bauteile aus Stahlbeton und Spannbeton unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens und der Rißbildung*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar.
- DUCKE, M., U. ECKSTEIN, F. MEISER & U. MONTAG (2000). Modellierung des Tragverhaltens von Brücken mit gedrunenem Plattenbalkenquerschnitt. *Bautechnik* 77(8), 561–569.
- DUFF, I. S. & J. K. REID (1983). The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear equations. *Transactions on Mathematical Software ACM* 9(3), 302–325.
- DVORKIN, E.N. & K.-J. BATHE (1984). A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations* 1, 77–88.
- EBERT, M. (2002). *Experimentelle und numerische Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung stochastischer Eigenschaften*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar.
- ECKSTEIN, A. (1999). *Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 99-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- EIBL, J. (1992). Nichtlineare Traglastermittlung/Bemessung. *Beton- und Stahlbetonbau* 87(6), 137–139.
- EIBL, J. (2000). Ein Sicherheitsformat für die nichtlineare Traglastbemessung (ULS) nach DIN 1045 neu. In *Sicherheit und Risiko im Bauwesen - Grundlagen und praktische Anwendung*, Bericht Nr. 20, III.1–III.10. Institut für Statik, Technische Universität Darmstadt.
- EIBL, J. & G. IVANYI (1976). *Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton*. Heft 260, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- EICKSCHEN, E. & E. SIEBEL (1998). Einfluß der Ausgangsstoffe und der Betonzusammensetzung auf das Schwinden und Quellen von Straßenbeton. *Beton* 9/10, 580–586/641–646.

- ELENAS, A. (1990). *Ein Beitrag zur physikalisch-nichtlinearen Analyse erdbebenerregter räumlicher Aussteifungssysteme aus Stahlbetonscheiben*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- ELIGEHAUSEN, R., E.P. POPOV & V.V. BERTERO (1983). *Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations*. Report No. UCB/EERC-83/23, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California.
- ENGELN-MÜLLGES, G. & F. REUTTER (1996). *Numerik-Algorithmen - Entscheidungshilfe zur Auswahl und Nutzung* (8. Aufl.). Düsseldorf: VDI Verlag.
- ERICKSEN, J.L. & C. TRUESDELL (1958). Exact theory of stress and strains in rods and shells. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1, 295–323.
- ESPION, B. (1993). Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs. In Z.P. Bažant & I. Carol (Hrsg.), *Creep and Shrinkage of Concrete*, 877–888. London: E & FN SPON.
- FECHNER, O. (2003). Wassertransport durch WU-Beton - Vermeidung von Feuchteschäden. *Beton- und Stahlbetonbau* 1(98), 42–51.
- FEHLHABER, T. & H.-W. REINHARDT (1991). *Betonbau beim Umgang mit wassergefährdenden Stoffen, Teilbericht 2: Transport organischer und anorganischer Flüssigkeiten und Gase in Beton*. Heft 416, S. 21-46, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- FELDMAN, R.F. (1968). Sorption and length-change scanning isotherms of methanol and water on hydrated Portland cement. In *Proceedings of the 5th International Symposium on the Chemistry of Cement*, Volume III, 53–66, Tokyo.
- FELDMAN, R.F. & P.J. SEREDA (1968). A model for hydrated Portland cement paste as deduced from sorption-length change and mechanical properties. *Materials and Structures* 1(6), 509–520.
- FLEISCHER, W. (1992). *Einfluß des Zements auf Schwinden und Quellen von Beton*. Berichte aus dem Baustoffinstitut 1992/1, Technische Universität München.
- FOUAD, N.A. (1998). *Rechnerische Simulation der klimatisch bedingten Temperaturbeanspruchungen von Bauwerken - Anwendung auf Beton-Kastenträgerbrücken und -Sandwichwände*. Stuttgart: Fraunhofer IRB Verlag.
- GERTIS, K. & K. KIESSL (1977). *Nichtisothermer Feuchtetransport in dickwandigen Betonteilen von Reaktordruckbehältern*. Heft 280, S. 5-19, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- GILBERT, R.I. & R.F. WARNER (1978). Tension stiffening in reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division (ASCE)* 104, 1885–1899.
- GRANGER, L. (1996). *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires: Analyse et modélisation*. Thèse de doctorat, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris.

- GRASBERGER, S. (2002). *Gekoppelte hygro-mechanische Materialmodellierung und numerische Simulation langzeitiger Degradation von Betonstrukturen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4, Nr. 186. Düsseldorf: VDI Verlag.
- GRASSER, E. (1968). *Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen*. Dissertation, Technische Universität München.
- GREEN, A.E. & W. ZERNA (1968). *Theoretical Elasticity* (2. Aufl.). Oxford: Clarendon Press.
- GROSS, D., W. HAUGER, W. SCHNELL & P. WRIGGERS (1995). *Technische Mechanik. Band 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methode* (2. Aufl.). Berlin: Springer-Verlag.
- GRUBE, H. (1991). *Ursachen des Schwindens von Beton und Auswirkungen auf Betonbauteile*. Heft 52, Schriftenreihe der Zementindustrie, Beton-Verlag, Düsseldorf.
- GRÜBL, P., H. WEIGLER & S. KARL (2001). *Beton - Arten, Herstellung und Eigenschaften* (2. Aufl.). Berlin: Ernst & Sohn.
- GRUNEWALD, J. (1997). *Diffusiver und konvektiver Stoff- und Energietransport in kapillarporösen Baustoffen*. Heft 3, Dresdener Bauklimatische Hefte, Technische Universität Dresden.
- GUO, W. (2001). *Ein Modell zur wirklichkeitsnahen instationären Berechnung von Stahl- und Spannbetonstrukturen im Tieftemperaturbereich*. Heft 10, Schriftenreihe des Lehr- und Forschungsgebiets Baustofftechnologie und Brandschutz, Bergische Universität Wuppertal.
- GUTSCH, A.W. (2000). *Stoffeigenschaften jungen Betons - Versuche und Modelle*. Heft 495, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- HAIRER, E., S.P. NØRSETT & G. WANNER (1993). *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems* (2. Aufl.). Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 8, Springer-Verlag.
- HAIRER, E. & G. WANNER (1996). *Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential algebraic problems* (2. Aufl.). Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 14, Springer-Verlag.
- HANSKÖTTER, U. (1994). *Strategien zur Minimierung des numerischen Aufwands von Schädigungsanalysen seismisch erregter räumlicher Hochbaukonstruktionen mit gemischten Aussteifungssystemen aus Stahlbeton*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 94-11, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- HARTE, R. (1982). *Doppelt gekrümmte finite Dreieckelemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 82-10, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- HARTE, R., M. ANDRES, E. MAHRAN & R. WÖRMANN (2004). High performance concrete and its consequences on design, stability and durability of cooling tower shells. In

- I. Mungan & U. Wittek (Hrsg.), *Natural Draught Cooling Towers*, 457–468. London: Taylor & Francis Group.
- HARTE, R., M. ANDRES & R. WÖRMANN (2003). *FEMAS 2000 - Benutzerhandbuch zur nichtlinearen Analyse von Stahlbetonflächentragwerken*. Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- HARTE, R. & W.B. KRÄTZIG (2002). Large-scale cooling towers as part of an efficient and cleaner energy generating technology. *Thin-Walled Structures* 40(7-8), 651–664.
- HARTE, R., W.B. KRÄTZIG, S.-Y. NOH & Y.S. PETRYNA (2000). On progressive damage phenomena of structures. *Computational Mechanics* 25, 404–412.
- HARTE, R. & R. WÖRMANN (2002). Zur Modellierung thermischer und hygrischer Beanspruchungen von Stahlbetontragwerken. In D. Dinkler (Hrsg.), *Baustatik-Baupraxis* 8, 365–377. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig.
- HEDENBLAD, G. (1997). The use of mercury intrusion porosimetry or helium porosity to predict the moisture transport properties of hardened cement paste. *Advanced Cement Based Materials* 6(3-4), 123–129.
- HELD, M. & G. KÖNIG (1992). Hochfester Beton bis B 125 - Ein geeigneter Beton für hochbelastete Druckglieder. *Beton- und Stahlbetonbau* 87(2/3), 41–45/74–76.
- HENNECKE, M.R. (2000). *Rechnerische Beurteilung der Temperaturbeanspruchung und der Rissgefahr infolge Eigenspannungen bei jungem Hochleistungsbeton*. Dissertation, Lehrstuhl für Massivbau, Technische Universität München.
- HILSDORF, H.K. (1969). *Austrocknung und Schwinden von Beton*. *Stahlbetonbau - Berichte aus Forschung und Praxis*. Festschrift Rüsck. 17-30. Berlin: Ernst & Sohn.
- HOFSTETTER, G. & H.A. MANG (1995). *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Braunschweig: Vieweg & Sohn.
- HOLM, A.H. (2001). *Ermittlung der Genauigkeit von instationären hygrothermischen Bauteilberechnungen mittels eines stochastischen Konzeptes*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauphysik, Universität Stuttgart.
- HÜTTL, R. & B. HILLEMEIER (2000). Hochleistungsbeton - Beispiel Säureresistenz. *Betonwerk und Fertigteiltechnik* 28(1), 52–60.
- HUGHES, T.J.R. (2000). *The Finite Element Method*. New York: Dover Publications.
- HUNDT, J. (1975). *Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles*. Heft 256, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- HUNDT, J. (1977). *Zur Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton*. Heft 280, S. 21-41, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- HUTTER, K. (1995). *Fluid- und Thermodynamik*. Berlin: Springer-Verlag.
- JANSEN, D.C. & S.P. SHAH (1997). Effect of length on compressive strain softening of concrete. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 123(1), 25–35.
- JOFRIET, J.A. & G.M. MCNEICE (1971). Finite element analysis of reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division (ASCE)* 97(ST3), 785–806.

- JONASSON, J.-E. (1984). *Slipform construction - calculations for assessing protection against early freezing*. Swedisch Cement and Concrete Research Institute, No. 4, Stockholm.
- JOOSS, M. (2001). *Dichtheit von Heißwasser-Langzeitspeichern aus Hochleistungsbeton*. Heft 2001/1, Mitteilungen aus dem Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- JUN, D. (2002). *Adaptive Strategien für nichtlineare Finite-Element-Simulationen von Schalentragerwerken*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4, Nr. 187. Düsseldorf: VDI Verlag.
- KIESSL, K. (1983). *Kapillarer und dampfförmiger Feuchtetransport in mehrschichtigen Bauteilen - Rechnerische Erfassung und bauphysikalische Anwendung*. Dissertation, Universität Essen.
- KIM, J.-K. & C.-S. LEE (1998). Prediction of differential drying shrinkage in concrete. *Cement and Concrete Research* 28(7), 985–994.
- KIRCHHOFF, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 40, 51–58.
- KLOPFER, H. (1974). *Wassertransport durch Diffusion in Feststoffen*. Wiesbaden: Bauverlag.
- KNÜNZ, D. (1992). Aelous II - Entwicklung. In *DEWEK'92*. Wilhelmshaven.
- KÖNIG, G. & C. AHNER (2000). Sicherheits- und Nachweiskonzept der nichtlinearen Berechnungen im Stahl- und Spannbetonbau. In *Darmstädter Statik-Seminar 2000 - Sicherheit und Risiko im Bauwesen*. Darmstadt.
- KÖNIG, G. & R. GRIMM (1996). Hochleistungsbeton. In *Betonkalender 1996*, Volume II, 441–546. Berlin: Ernst & Sohn.
- KÖNIG, G. & N.V. TUE (1992). Überlegungen zum zweckmäßigen Nachweis der Rißbreiten für den Konstruktionsbeton. *Bautechnik* 69(10), 558–564.
- KÖNIG, G., N.V. TUE & C. AHNER (1997). Consistent safety format. In *CEB/FIP Bulletin D'Information No. 239 - Non-linear analysis/Safety evaluation and monitoring*, 1–16.
- KÖNIG, G., N.V. TUE & M. ZINK (2001). *Hochleistungsbeton - Bemessung, Herstellung und Anwendung*. Berlin: Ernst & Sohn.
- KÖNKE, C. (2000). *Schädigungssimulationsverfahren zur Lebensdauerabschätzung von Tragwerken*. Habilitationsschrift, Lehrstuhl für Baustatik und Baudynamik, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen.
- KORDINA, K., L. SCHUBERT & U. TROITZSCH (2000). *Kriechen von Beton unter Zugbeanspruchung*. Heft 498, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- KRÄTZIG, W.B. (1971). *Thermodynamics of deformations and shells*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 71-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.

- KRÄTZIG, W.B. (1997). Multi-level modeling techniques for elasto-plastic structural responses. In D.R.J. Owen, E. Oñate & E. Hinton (Hrsg.), *Computational Plasticity - Fundamentals and Applications*, 457–468. Barcelona: CIMNE.
- KRÄTZIG, W.B. & Y. BAŞAR (1997). *Tragwerke 3 - Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Berlin: Springer-Verlag.
- KRÄTZIG, W.B., U. ECKSTEIN & R. HARTE (1998). Future challenges in the design and construction of natural draught cooling towers. In J. Abel et al. (Hrsg.), *Current and Emerging Technologies of Shell and Spatial Structures*, 37–49. Madrid: IASS.
- KRÄTZIG, W.B. & K. GRUBER (1993). A modern design concept to increase durability and safety of natural draught coolings towers. In G.A.R. Parke & C.M. Howards (Hrsg.), *Space Structures*, Volume 2, 1668–1677. London: Thomas Telford Ltd.
- KRÄTZIG, W.B., K. MESKOURIS & S.-Y. NOH (2003). Nichtlineare Nachweisverfahren zur Schädigungsermittlung von Stahlbetontragwerken. *Beton- und Stahlbetonbau* 98(7/8), 418–427/500–504.
- KRÄTZIG, W.B. & S.Y. NOH (1998). Über nichtlinear-progressive Schädigungsprozesse von Tragwerken. *Bauingenieur* 73(6), 267–273.
- KRANZ, S. (1999). *Lokale Schwind- und Temperaturgradienten in bewehrten, oberflächennahen Zonen von Betonstrukturen*. Heft 35, Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.
- KRELLER, H. (1990). *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangeinwirkung*. Heft 409, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- KRISCHER, O. & W. KAST (1978). *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik* (3. Aufl.). Berlin: Springer-Verlag.
- KRUS, M. (1995). *Feuchtetransport- und Speicherkoeffizienten poröser mineralischer Baustoffe. Theoretische Grundlagen und neue Meßtechniken*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauphysik, Universität Stuttgart.
- KÜNZEL, H.M. (1994). *Verfahren zur ein- und zweidimensionalen Berechnung des gekoppelten Wärme- und Feuchtetransports in Bauteilen mit einfachen Kennwerten*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauphysik, Universität Stuttgart.
- KÜNZEL, H.M., A. HOLM & K. SEDLBAUER (2002). Wärme- und Feuchteschutz. In *Betonkalender 2002*, Volume II, 181–240. Berlin: Ernst & Sohn.
- KUPFER, H.B. (1973). *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Heft 229, S. 1–105, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- KUPFER, H.B. & K.H. GERSTLE (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)* 99(EM4), 853–866.
- KUPFER, H.B., H.K. HILSDORF & H. RÜSCH (1969). Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal* 66(8), 656–666.

- LANIG, N. (1988). *Langzeitverhalten von Beton bei mehrachsiger Beanspruchung*. Dissertation, Lehrstuhl für Massivbau, Technische Universität München.
- LEWIS, R.W. & B.A. SCHREFLER (1998). *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. Chichester: Wiley & Sons.
- LIU, T.C.Y, A.H. NILSON & F.O. SLATE (1972). Stress-strain response and fracture of concrete in uniaxial and biaxial compression. *ACI Journal* 69(5), 291–295.
- LOHAUS, L. (1996). High-performance concrete - An alternative to coatings ? In U. Wittek & W.B. Krätzig (Hrsg.), *Proceedings of the 4th International Symposium on Natural Draught Cooling Towers*, 207–213. Rotterdam: Balkema.
- LOHAUS, L. & L. PETERSEN (2002). Einfluss der Frostschädigung auf Betoneigenschaften. *Beton* 12, 588–593.
- LOHAUS, L. & L. PETERSEN (2003). Verbundschädigung im Stahlbetonbau durch Frostbeanspruchung. In P. Mark (Hrsg.), *Entwicklung im Beton- und Faserbetonbau sowie in verwandten Gebieten, Festschrift Bernd Schnüttgen*, 27–36. Lehrstuhl für Stahl- und Spannbetonbau, Ruhr-Universität Bochum.
- LOVE, A.E.H. (1888). On the small vibrations and deformations of thin elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society London* 179, 491–546.
- MAHRAN, E. (2003). FE-IFE-Modellierung zur Simulation der Boden-Bauwerks-Flüssigkeit-Interaktion unter dynamischer Anregung. In *Beiträge zum Tag der Forschung des Fachbereichs Bauingenieurwesen*. Bergische Universität Wuppertal.
- MALVERN, L.E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood-Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- MANG, H.A. & G. HOFSTETTER (2000). *Festigkeitslehre*. Wien: Springer-Verlag.
- MANNFELD, TH. (2003). *Wirklichkeitsnahe Simulation hygrischer und thermischer Dehnungsverteilungen in Stahlbetonquerschnitten*. Diplomarbeit, Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- MARTINOLA, G. (2001). *Rissbildung und Ablösung zementgebundener Beschichtungen auf Beton*. Building Materials Reports No. 12, Aedificatio, Freiburg.
- MCNEICE, G.M. (1967). *Elastic-plastic bending of plates and slabs by the finite element method*. Ph. D. Thesis, University of London.
- MEHLHORN, G., D. DINGES, M. KEUSER & W. KOLMAR (1989). Nichtlineare FE-Modellierung zur Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen. In E. Stein (Hrsg.), *Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau*, 343–376. Berlin: Springer-Verlag.
- MEHLHORN, G. & J. KOLLEGER (1995). Anwendung der Finite Elemente Methode im Stahlbetonbau. In G. Mehlhorn (Hrsg.), *Rechnerorientierte Baumechanik*, Der Ingenieurbau, 293–429. Berlin: Ernst & Sohn.
- MEISWINKEL, R. (1998). *Entwurf von Stahlbeton-Flächentragwerken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Strukturanalysen*. Bericht Nr. 1/1998, Fachgebiet Baustatik, Universität Kaiserslautern.

- MEISWINKEL, R. & H. RAHM (1999). Modelling tension stiffening in RC structures regarding nonlinear design analyses. In W. Wunderlich (Hrsg.), *Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Proceedings of European Conference on Computational Mechanics (ECCM'99). München.
- MENZEL, W. (1996). *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalenstrukturen unter endlichen Rotationen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 96-4, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- MESKOURIS, K. (1999). *Baudynamik - Modelle, Methoden, Praxisbeispiele*. Berlin: Ernst & Sohn.
- MEYER, G. & E. SCHIFFNER (1980). *Technische Thermodynamik*. Leipzig: VEB Fachbuchverlag.
- MINDLIN, R.D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 18, 31–38.
- MIYAZAWA, S. & E. TAZAWA (2001). Prediction model for shrinkage of concrete including autogeneous shrinkage. In F.-J. Ulm, Z.P. Bažant, & F.H. Wittmann (Hrsg.), *Creep, shrinkage and durability mechanics of concrete and other quasi-brittle materials*, 735–740. Oxford: Elsevier.
- MONTAG, U. (1997). *Konzepte zur Effizienzsteigerung numerischer Simulationsalgorithmen für elastoplastische Deformationsprozesse*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 97-6, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- MÜLLER, H.S. (1986). *Zur Vorhersage des Kriechens von Konstruktionsbeton*. Dissertation, Universität Karlsruhe.
- MÜLLER, H.S. (1996). Kennwerte des Kriechens von hochfestem Beton. In H.K. Hilsdorf (Hrsg.), *Festschrift Prof. Dr.-Ing. J. Eibl*, 231–244. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.
- MÜLLER, H.S., W. HÖRENBAUM & R. MALIHA (2002). *Numerische Untersuchung zur Rissbildung in Fahrbahndecken aus Beton*. Abschlussbericht zum Forschungsprojekt FE 08.123 R 93 L, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.
- MÜLLER, H.S., C.H. KÜTTNER & V. KVITSEL (1999). Creep and shrinkage of normal and high-performance concrete - concept for a unified code-type approach. In *Special Issue of RFGL - ACI Workshop*. Paris.
- MÜLLER, H.S. & V. KVITSEL (2001). Neue Konzepte für das Kriechen und Schwinden zementgebundener Baustoffe. In C.-A. Graubner, S. Schäfer & M. Schnellenbach-Held (Hrsg.), *23. Darmstädter Massivbau-Seminar - Neuzeitliche Werkstoffkonzepte für innovative Bauwerke - Visionen und Wirklichkeit*. Technische Universität Darmstadt.
- MÜLLER, H.S. & V. KVITSEL (2002). Kriechen und Schwinden von Beton - Grundlagen der neuen DIN 1045 und Ansätze für die Praxis. *Beton- und Stahlbetonbau* 97(1), 8–19.
- MÜLLER, Y. (2002). *Betrachtung des zeitabhängigen Verhaltens von Stahlbeton*. Diplomarbeit, Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.

- NAGHDI, P.M. (1972). The theory of shells and plates. In S. Flügge (Hrsg.), *Handbuch der Physik*, Volume VI, 425–640. Berlin: Springer-Verlag.
- NECHVATAL, D., S. STÖCKL & H. KUPFER (1994). *Kriechen, Rückkriechen und Dauerstandsfestigkeit von Beton bei unterschiedlichen Feuchtegehalt und Verwendung von Portlandzement bzw. Portlandkalksteinzement*. Heft 442, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- NELISSEN, L.J.M. (1972). Biaxial testing of normal concrete. *Heron* 18(1), 1–90.
- NEUBAUER, R. (2000). *Auswirkungen des zeitabhängigen Betonverhaltens bei der nicht-linearen Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken*. Bericht Nr. 2/2000, Fachgebiet Baustatik, Universität Kaiserslautern.
- NOAKOWSKI, P. (1988). *Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangbeanspruchung und Rissbreite*. Heft 394, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- NOH, S.-Y. (2002). *Beitrag zur Erklärung der Schädigungsmechanismen von Naturzugkühltürmen*. Dissertation, Lehrstuhl für Baustatik und Baudynamik, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen.
- OBERBECK, N. (1995). *Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff-Transport in Beton, Theorie und Berechnung*. Bericht Nr. 95-79, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig.
- PERSSON, B. (2001). Validation of Fédération International de Béton, FIB, 2000 model for shrinkage in normal and high-performance concrete, HPC. In F.-J. Ulm, Z.P. Bazant & F.H. Wittmann (Hrsg.), *Creep, shrinkage and durability mechanics of concrete and other quasi-brittle materials*, 741–746. Oxford: Elsevier.
- PETERSEN, L. (2003). *Einfluss baustofflicher Schädigungsprozesse auf das Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen*. Berichte aus dem Institut für Baustoffe, Heft 3, Universität Hannover.
- PETRYNA, Y.S. & W.B. KRÄTZIG (2002). On sensitivity of structural damage measures to stochastic uncertainties. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer & J. Eberhardsteiner (Hrsg.), *Proceedings of the 5th World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. Vienna, Austria.
- PÖLLING, R. (2000). *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Dissertation, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.
- POWERS, T.C. (1959). Causes and control of volume change. *Journal of the PCA Research and Development Laboratories* 1, 29–39.
- POWERS, T.C. (1965). Mechanisms of shrinkage and reversible creep of hardened cement paste. In A.E. Brooks & K. Newmann (Hrsg.), *The Structure of Concrete and its behaviour under load*, 319–344, London, Cement and Concrete Association.
- POWERS, T.C. & T.L. BROWNYARD (1948). *Studies of the physical properties of hardened Portland cement paste*. Bulletin 22, Research Laboratories of the Portland Cement Association, Chicago.

- QUAST, U. (2000). Zur Kritik an der Stützenbemessung. *Beton- und Stahlbetonbau* 95(5), 305–311.
- RAHM, H. (2002). *Modellierung und Berechnung von Alterungsprozessen bei Stahlbeton-Flächentragwerken*. Bericht Nr. 1/2002, Fachgebiet Baustatik, Universität Kaiserslautern.
- RAMM, E. (1976). *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*. Habilitationsschrift, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- REHM, G. (1961). *Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton*. Heft 138, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- REINHARDT, H.-W. (2002). Beton. In *Betonkalender 2002*, Volume II, 1–152. Berlin: Ernst & Sohn.
- REINHARDT, H.-W., H.A.W. CORNELISSEN & D.A. HORDIJK (1986). Tensile tests and failure analysis of concrete. *Journal of Structural Engineering (ASCE)* 112(11), 2462–2477.
- REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 12, 69–77.
- ROGGE, A. & K. ZILCH (2002). Behaviour of high strength concrete under multiaxial stress states. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Utilization of High Strength/High Performance Concrete*, Volume 2, 1325–1339. Leipzig.
- RONCERO, J. (2000). *Effect of superplasticizers on the behavior of concrete in the fresh and hardened states: Implications for High Performance Concrete*. Phd thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona.
- ROTTLER, S. (1998). *Kriechen von Beton unter veränderlicher Spannung*. Dissertation, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.
- SADOUKI, H. & F.H. WITTMANN (2001). Shrinkage and microcracking in the composite structure of normal and high strength concrete. In F.-J. Ulm, Z.P. Bažant & F.H. Wittmann (Hrsg.), *Creep, shrinkage and durability mechanics of concrete and other quasi-brittle materials*. Oxford: Elsevier.
- SAENZ, L. P. (1964). Discussion of „Equation for the stress-strain curve of concrete“ by Desayi and Krishnan. *ACI Journal* 61(9), 1229–1235.
- SCHAPER, G. (1982). *Berechnung des zeitabhängigen Verhaltens von Stahlbetonplatten unter Last- und Zwangbeanspruchung im ungerissenen und gerissenen Zustand*. Heft 338, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- SCHAUMANN, P. & M. SEIDEL (2000). Eigenschwingverhalten von Windenergieanlagen - Berechnung und Messungen. In *DEWEK 2000*, Auch in: Erneuerbare Energien 7/2000, 35–38. Wilhelmshaven.
- SCHRAGE, I. (1996). Versuche über das Kriechen und Schwinden hochfesten Betons. *Beton- und Stahlbetonbau* 91(2/3), 30–34/68–71.
- SCHULTZ, R. (1996). *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichten-Schalenelementen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 96-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.

- SCHWARZKOPF, M. (2001). BSt 500 MA das neue Mattenprogramm im Einklang mit DIN 1045-1: 2001-07. *Bauingenieur* 76(12), 557–562.
- SEIDEL, M. (2002). Auslegung von Hybridtürmen für Windenergieanlagen. *Beton- und Stahlbetonbau* 97(11), 564–575.
- SETZER, M.J. (1977). *Einfluss des Wassergehaltes auf die Eigenschaften des erhärteten Betons*. Heft 280, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- SETZER, M.J. (1991). Interaction of water with hardened cement paste. *Ceramic Transactions* 16, 415–439.
- SIMO, J.C. & J.G. KENNEDY (1992). On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V: Nonlinear plasticity: Formulation and integration algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 96, 133–171.
- SIX, M. (2003). *Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau*. Heft 534, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- SODEIKAT, CH. (2002). Beanspruchung von Betonfahrbahnen mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften von Ober- und Unterbeton durch Feuchte- und Temperaturänderungen. *Beton- und Stahlbetonbau* 97(1), 20–35.
- SPOONER, D.C. & J.W. DOUGILL (1975). A quantitative assessment of damage sustained in concrete during compressive loading. *Magazine of Concrete Research* 27(92), 151–160.
- SPRINGENSCHMID, R. (2000). Baustoff-Forschung und Ingenieurpraxis im Wandel der Zeit. *Bauingenieur* 75, 613–620.
- SPRINGENSCHMID, R. & W. FLEISCHER (1989). Feuchtegradient im Beton. *Zement und Beton* 34(1), 33–35.
- SPRINGENSCHMID, R. & W. FLEISCHER (1993). Über das Schwinden von Beton, Schwindmessungen und Schwindrisse. *Beton- und Stahlbetonbau* 88(11/12), 297–301/329–332.
- SPRINGENSCHMID, R., CH. SODEIKAT & W. FLEISCHER (1997). *Untersuchung von Beton mit Recycling-Zuschlag für einschichtige Betonfahrbahnen*. Heft 750, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Bonn.
- STEFFENS, A. (2000). *Modellierung von Karbonatisierung und Chloridbildung zur numerischen Analyse der Korrosionsgefährdung der Betonbewehrung*. Bericht Nr. 2000-90, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig.
- STEIN, E. & F.J. BARTHOLD (1997). *Elastizitätstheorie*. Vorlesungsskriptum, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- STEMPNIEWSKI, L. (1990). *Flüssigkeitsgefüllte Stahlbetonbehälter unter Erdbebeneinwirkung*. Heft 9, Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.
- STEPHAN, K. & F. MAYINGER (1997). *Thermodynamik* (15. Aufl.), Volume 1: Einstoffsysteme. Berlin: Springer-Verlag.

- STOPP, K. (2003). *Schädigungs- und Traglastanalysen von Stahlbetonflächentragwerken unter Berücksichtigung zeitabhängiger Einflüsse*. Diplomarbeit, Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- STRIPPEL, R. (1996). *Zur Berücksichtigung des Einflusses des Kriechens und Schwindens des Betons auf das Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken*. Dissertation, Universität Kassel.
- SU, X. & B. ZHU (1994). Algorithm for hysteresis analysis of prestressed-concrete frames. *Journal of Structural Engineering (ASCE)* 120(6), 1732–1744.
- TACKE, R. (2002). *Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons - Modellierung und numerische Analyse*. Bericht Nr. 2002-94, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig.
- TAYLOR, R., D.R.H. MAHER & B. HAYES (1966). Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs. *Magazine of Concrete Research* 18(55), 85–94.
- TELLENBACH, A. & R. FAVRE (1985). Long-term deflections of cracked reinforced concrete slabs. *Ingénieurs et Architectes Suisses* 12.
- THIENEL, K.-C. (1998). *Festigkeit und Verformung von Beton bei hoher Temperatur und biaxialer Beanspruchung - Versuche und Modellbildung*. Heft 104, Schriftenreihe des Instituts für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Technische Universität Braunschweig.
- TUE, N.V. (1993). *Zur Spannungsumlagerung im Spannbeton bei der Rissbildung unter statischer und wiederholter Belastung*. Heft 435, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- ULM, F.-J., P. ROSSI, I. SCHALLER & D. CHAUVEL (1999). Durability scaling of cracking in HPC structures subject to hygromechanical gradients. *Journal of Structural Engineering (ASCE)* 125(6), 693–702.
- VAN MIER, J.G.M. (1984). *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*. Dissertation, Delft University of Technology.
- VAN ZIJL, G.P.A.G. (1999). *Computational modelling of masonry creep and shrinkage*. Dissertation, Technische Universität Delft.
- VERBECK, G.J. & R.A. HELMUTH (1968). Structures and physical properties of cement paste. In *Proceedings of the 5th International Symposium on the Chemistry of Cement*, Volume 3, 1–36. Cement Association of Japan, Tokyo.
- VON SMUDA, J. & J. VON WOLFERSDORF (1990). *Ein Beitrag zur Behandlung thermischer und thermisch-hygrischer Probleme im Maschinenbau und im Bauwesen mittels der Finite-Elemente-Methode*. Dissertation, Technische Universität Dresden.
- WALL, W.A. (1999). *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Bericht Nr. 31, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- WALTER, H. (1988). *Finite Elemente Berechnungen von Flächentragwerken aus Stahl- und Spannbeton unter Berücksichtigung von Langzeitverformungen und Zustand II*. Dissertation, Technische Universität Wien.

- WASHA, G.W. & P.G. FLUCK (1952). Effect of compressive reinforcement on the plastic flow of reinforced concrete beams. *ACI Journal* 24(2), 89–108.
- WESCHE, K. (1993). *Baustoffe für tragende Bauteile*, Volume 2: Beton, Mauerwerk. Wiesbaden: Bauverlag.
- WITTMANN, F.H. (1974). *Die Bestimmung physikalischer Eigenschaften des Zementsteins*. Heft 232, S. 1-63, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- WITTMANN, F.H. (1977). *Grundlagen eines Modells zur Beschreibung charakteristischer Eigenschaften des Betons*. Heft 290, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- WITTMANN, F.H. (1982). Creep and shrinkage mechanisms. In Z.P. Bažant & F.H. Wittmann (Hrsg.), *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, 129–161. Wiley & Sons.
- WITTMANN, F.H. (1995). Influence of drying induced damage on the hygral diffusion coefficient. In F.H. Wittmann (Hrsg.), *2nd International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures (FraMCoS2)*, Volume II, 1519–1524. Zürich, Switzerland.
- WITTMANN, F.H. (2001). Investigations of mechanisms and application of mechanics may lead to increased durability. In *Neuzeitliche Werkstoffkonzepte für innovative Bauwerke - Visionen und Wirklichkeit*, 23. Darmstädter Massivbau-Seminar, I.1–I.12.
- WOOD, W.L. (1990). *Practical time-stepping schemes*. Oxford: Clarendon Press.
- WÖRMANN, R. & R. HARTE (2003). Structural degradation of wind-turbine towers under combined wind and thermic action. In K.-J. Bathe (Hrsg.), *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*, Volume 2, 1576–1581. Amsterdam: Elsevier.
- YANKELEVSKY, D.Z. & H.W. REINHARDT (1989). Uniaxial behavior of concrete in cyclic tension. *Journal of Structural Engineering (ASCE)* 115(1), 166–182.
- ZAHLTEN, W. (1990). *Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 90-2, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- ZIEGELDORF, S., K. KLEISER & H.K. HILSDORF (1979). *Vorherbestimmung und Kontrolle des thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Beton*. Heft 305, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- ZIENKIEWICZ, O.C. & R.L. TAYLOR (2000). *Finite Element Method* (5. Aufl.), Volume 1-3. London: Butterworth Heinemann.

Normen und Richtlinien

- ACI 209 (1982). Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures. Report No. ACI 209 R-82. American Concrete Institute, Detroit.
- CEB-FIP Model Code 1990 (1993). CEB Bulletin d'Information No. 213/214. Thomas Telford, London.
- DAFSTB-Richtlinie (1995, August). DAfStb-Richtlinie für hochfesten Beton. Ergänzung zu DIN 1045/07.88 für die Festigkeitsklassen B65 bis B115. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIBT-RICHTLINIE (1993, Juni). Richtlinie für Windkraftanlagen - Einwirkungen und Standsicherheitsnachweise für Turm und Gründung. Reihe B, Heft 8, Deutsches Institut für Bautechnik, Berlin.
- DIBT-RICHTLINIE (2003, Mai). Richtlinie für Windkraftanlagen - Einwirkungen und Standsicherheitsnachweise für Turm und Gründung. Entwurfsfassung, Deutsches Institut für Bautechnik, Berlin.
- DIN 1045 (1988, Juli). Beton- und Stahlbetonbau, Bemessung und Ausführung. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 1045-1 (2001, Juli). Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 1055-1 (2002, Juni). Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 1: Wichten und Flächenlasten von Baustoffen, Bauteilen und Lagerstoffen. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 1055-4 (2001, März). Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 4: Windlasten. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 1055-7 (2002, November). Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 7: Temperatureinwirkungen. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 1055-100 (2001, März). Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 4227 (1988, Juli). Spannbeton. Teil 1: Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter und voller Vorspannung. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 10080-1 (1999, Oktober). Schweißgeeigneter Betonstahl. Teil 1: Allgemeine Anforderungen. Entwurf. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 52612-1 (1979, September). Wärmeschutztechnische Prüfungen - Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mit dem Plattengerät. Teil 1: Durchführung und Auswertung. Beuth-Verlag, Berlin.

- DIN 52612-2 (1984, Juni). Wärmeschutztechnische Prüfungen - Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mit dem Plattengerät. Teil 2: Weiterbehandlung der Meßwerte für die Anwendung im Bauwesen. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 52616 (1977, November). Wärmeschutztechnische Prüfungen - Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mit dem Wärmestrommeßplatten-Gerät. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 12524 (2000, Juli). Baustoffe und -produkte - Wärme- und feuchteschutztechnische Eigenschaften - Tabellierte Bemessungswerte. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 6946 (2003, Oktober). Bauteile - Wärmedurchlasswiderstand und Wärmedurchgangskoeffizient - Berechnungsverfahren. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN ISO 12571 (2000, April). Wärme- und feuchtetechnisches Verhalten von Baustoffen und Bauprodukten - Bestimmung der hygroskopischen Sorptionseigenschaften. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN ISO 12572 (2001, September). Wärme- und feuchtetechnisches Verhalten von Baustoffen und Bauprodukten - Bestimmung der Wasserdampfdurchlässigkeit. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN V 4108-4 (2002, Februar). Wärmeschutz und Energie-Einsparung in Gebäuden. Teil 4: Wärme- und feuchteschutztechnische Bemessungswerte. Vornorm. Beuth-Verlag, Berlin.
- Eurocode 2 (1992). Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau. Beuth-Verlag, Berlin.
- IEC 61400-1 (1999, Februar). Wind turbine generator systems - Part 1: Safety requirements.
- VGB-Richtlinie (1997). BTR - Bautechnik bei Kühltürmen - VGB-Richtlinie für den bautechnischen Entwurf, die Berechnung, die Konstruktion und die Ausführung von Kühltürmen. VGB-Kraftwerkstechnik, Essen.
- VGB-Richtlinie (2003, Juli). BTR - Bautechnik bei Kühltürmen - VGB-Richtlinie für den bautechnischen Entwurf, die Berechnung, die Konstruktion und die Ausführung von Kühltürmen. Entwurfsfassung. VGB-Kraftwerkstechnik, Essen.