

**Der Spannungs- und Verformungszustand  
von vorgespannten Betonträgern  
unter Berücksichtigung nichtlinearen Werkstoffverhaltens**

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
des Fachbereichs D, Abteilung Bauingenieurwesen  
der Bergischen Universität Wuppertal

von  
Djoko Sulistyono  
aus  
Yogyakarta, Indonesien

2004

Bergische Universität Wuppertal  
Fachbereich D, Abteilung Bauingenieurwesen  
Pauluskirchstraße 7  
42285 Wuppertal

Dissertation eingereicht am : 22. September 2003  
Tag der mündlichen Prüfung : 04. Februar 2004

Gutachter : em. Univ.-Prof. Dr.-Ing. B. Kotulla  
apl. Prof. Dr.-Ing. G. Bertrand  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. M. Held

Vorsitzender der Prüfungskommission : Univ.-Prof. Dr.-Ing. A. Schlenkhoff

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meines Studienaufenthalts in der Bundesrepublik Deutschland als DAAD-Stipendiat und als Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Industrielles Bauen / Massivbau bzw. Massivbau und Tragkonstruktionen im Fachbereich Bauingenieurwesen der Bergischen Universität Wuppertal.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen sehr herzlich bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn em. Univ.-Prof. Dr.-Ing. B. Kotulla für die Betreuung, Anregungen, Ratschläge sowie die Übernahme des Referats.

In gleicher Weise danke ich Herrn apl. Prof. Dr.-Ing. G. Bertrand und Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. M. Held für die Anregungen, die Diskussionsbereitschaft, die Unterstützung und die Übernahme der Koreferate.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Zahlten – Vorsitzender des Promotionsausschusses – und Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. A. Schlenkhoff sowie Herrn Dr.-Ing. T. Schlurmann – Vorsitzender bzw. Mitglied der Prüfungskommission – danke ich für die zügige Abwicklung des Promotionsverfahrens.

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen Kollegen, früheren und heutigen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern im Fachgebiet Massivbau und Tragkonstruktionen: Herrn Dr.-Ing. P.-U. Schaefer, Herrn Dipl.-Ing. G. Kaiser, Frau Dipl.-Ing. J. König und Herrn Dipl.-Ing. F. Wieschemeyer für die Hilfsbereitschaft, Lesekorrektur sowie die kritische Durchsicht meiner Arbeit.

Herzlicher Dank gebührt ebenso dem DAAD und der Bergischen Universität Wuppertal für die gewährte Unterstützung.

Ganz besonders herzlich danke ich meiner Frau Etik-Mufida Sulistyو und meinem Sohn Fauzan-C.A. Sulistyو für ihre Geduld, Verständnis und Unterstützung.

Wuppertal, den 10. Februar 2004  
Djoko Sulistyو

---

<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	v
<b>Abkürzungsverzeichnis</b> .....	x
<b>1 Einleitung</b> .....	1
1.1 Vorbemerkung .....	1
1.2 Ziel der Arbeit .....	4
<b>2 Stand der Technik</b> .....	7
2.1 Allgemeines .....	7
2.2 Zwangmomente infolge Vorspannung .....	8
2.2.1 Behandlung der Zwangmomente infolge Vorspannung bei der Bemessung .....	8
2.2.2 Bekannte Untersuchungen zu Zwangmomenten infolge Vorspannung .....	11
2.3 Momentenumlagerungen .....	19
2.3.1 Allgemeine Hinweise .....	19
2.3.2 Bekannte Untersuchungen zur Momentenumlagerung .....	22
2.4 Erfassung von Zwangmomenten infolge Vorspannung und Berücksichtigung von Momentenumlagerungen in Normenwerken .....	35
2.4.1 Allgemeine Hinweise .....	35
2.4.2 DIN 4227 Teil 1 (1988) und Teil 2 (1984) .....	37
2.4.3 CEB-FIP Model Code 1990 .....	38
2.4.4 DIN V ENV 1992 Teil 1-1 (Eurocode 2 Teil 1-1) .....	40
2.4.5 ACI 318 - 99 .....	44

---

2.4.6	DIN 1045-1 (2001) .....	46
2.5	Zusammenfassung .....	49
<b>3</b>	<b>Numerisches Modell</b> .....	<b>52</b>
3.1	Allgemeines .....	52
3.2	Nichtlineare Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen .....	53
3.2.1	Verschiebung eines Punktes .....	53
3.2.2	Dehnung der Stabachse .....	55
3.2.3	Neigung der Biegelinie .....	57
3.2.4	Krümmung der verformten Stabachse .....	57
3.2.5	Dehnung einer beliebigen Stabfaser .....	58
3.2.6	Anwendung bei Stahlbeton- und Spannbetonträgern .....	59
3.3	Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix .....	60
3.3.1	Allgemeine Hinweise .....	60
3.3.2	Beschreibung des Balkenelementes .....	61
3.3.3	Verschiebungsansätze des Balkenelementes .....	64
3.3.4	Dehnung einer beliebigen Elementfaser .....	66
3.3.5	Herleitung der Steifigkeitsmatrix nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit .....	67
3.3.6	Auswertung der Elementsteifigkeitsmatrix .....	70
3.4	Knotenlastvektor infolge Streckenlasten .....	72
3.5	Reduzierung der Knotenfreiheitsgrade des Elementes durch statische Kondensation .....	73
<b>4</b>	<b>Verwendete Werkstoffgesetze</b> .....	<b>76</b>
4.1	Allgemeines .....	76
4.2	Beton .....	76

---

4.2.1	Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bei Druckbeanspruchung . . .	76
4.2.2	Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bei Zugbeanspruchung . . . .	81
4.2.3	Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen auf Zug . . . . .	84
4.3	Betonstahl . . . . .	85
4.4	Spannstahl . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Teilverluste der Vorspannkraft</b> . . . . .	<b>91</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	91
5.2	Zeitunabhängige Vorspannkraftverluste . . . . .	94
5.2.1	Vorspannkraftverluste infolge Reibung zwischen Spannstahl und Hüllrohr . . . . .	94
5.2.2	Verankerungsschlupf . . . . .	97
5.2.3	Elastische Verformungen . . . . .	98
5.3	Zeitabhängige Vorspannkraftverluste . . . . .	102
5.3.1	Schwinden des Betons . . . . .	105
5.3.2	Kriechen des Betons . . . . .	107
5.3.3	Relaxation des Spannstahls . . . . .	108
5.4	Berechnungsmethoden der Teilverluste der Vorspannkraft . . . .	111
5.4.1	Globale Abschätzung der Teilverluste der Vorspannkraft . . . .	111
5.4.2	Bestimmung der Vorspannkraftverluste durch die Berechnung der Anteile einzelner Komponenten . . . . .	112
5.4.3	Bestimmung der Vorspannkraftverluste durch die Berechnung von Zeitintervallen . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Berechnungsprogramm</b> . . . . .	<b>114</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	114
6.2	Ablauf des Programms . . . . .	115

---

6.3	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme .....	120
6.3.1	Allgemeine Hinweise .....	120
6.3.2	Inkrementelles Verfahren .....	121
6.3.3	Iteratives Verfahren .....	123
6.3.4	Inkrementell-Iteratives Verfahren .....	127
6.4	Konvergenzkriterien .....	128
<b>7</b>	<b>Nachrechnung experimenteller Untersuchungen / Anwendungsbeispiele .....</b>	<b>131</b>
7.1	Nachrechnung experimenteller Untersuchungen .....	131
7.1.1	Allgemeines .....	131
7.1.2	Versuchsträger von Lin .....	131
7.1.3	Versuchsträger von Priestley und Park .....	136
7.1.4	Versuchsträger von Taerwe et al. ....	139
7.1.5	Zusammenfassung .....	143
7.2	Anwendungsbeispiele .....	143
7.2.1	Allgemeines .....	143
7.2.2	Einfeldträger .....	144
7.2.3	Symmetrischer Zweifeld-Durchlaufträger .....	147
7.2.4	Unsymmetrischer Zweifeld-Durchlaufträger .....	153
7.2.5	Zusammenfassung .....	157
<b>8</b>	<b>Numerische Untersuchungen .....</b>	<b>158</b>
8.1	Übersicht der untersuchten Systeme .....	158
8.2	Auswertung der Ergebnisse für die einzelnen Systeme .....	161
8.2.1	Allgemeines .....	161
8.2.2	Die Systeme der Serie A .....	164

---

8.2.3	Die Systeme der Serie B .....	173
8.3	Zusammenfassung und Folgerungen aus den Untersuchungen ..	181
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b> .....	<b>184</b>

<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>186</b>
-----------------------------------	------------

**Anhang A:** Vergleich der Ergebnisse der ausgewählten experimentellen Versuche und numerischen Untersuchungen mit denen aus den Nachrechnungen.

**Anhang B:** Versuchsdaten der Träger für die numerischen Untersuchungen.

**Anhang C:** Ergebnisse der numerischen Untersuchungen.



## Abkürzungsverzeichnis

### Lateinische Buchstaben

A	Fläche (allgemein)
$A_a$	Arbeit der äußeren Kräfte
$A_c$	Querschnittsfläche des Betons
$A_{cr}$	Fläche der Wirkungszone des Tension-Stiffening-Effect
$A_{gt}$	charakteristische Gleichmaßdehnung des Betonstahls (DIN 10080)
$A_i$	Arbeit der inneren Kräfte
$A_p$	Querschnittsfläche des Spannstahls
$A_s$	Querschnittsfläche des Betonstahls
b	Breite
d	statische Nutzhöhe eines Querschnitts; Durchmesser
$d_1$	Abstand des Schwerpunktes der Zugbewehrung vom gezogenen Rand
$d_{max}$	Durchmesser des Größtkornes des Betonzuschlags
$d_p$	Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Spannglieder und dem Schwerpunkt des Betonquerschnitts
$d_s$	Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Zugbewehrung und dem Schwerpunkt des Betonquerschnitts
$E_{c1}$	Sekantenmodul des Betons von $\sigma_c = 0$ bis $\sigma_c = f_{cm}$
$E_{ci}$	Tangentenmodul des Betons bei $\sigma_c = 0$
$E_{cm}$	Elastizitätsmodul des Betons (Mittelwert des Sekantenmoduls bei $\sigma_c = 0,4 \cdot f_{ck}$ )
$E_p$	Elastizitätsmodul des Spannstahls
$E_s$	Elastizitätsmodul des Betonstahls
e	Exzentrizität (allgemein)

---

$e_p$	Exzentrizität der Spannglieder vom Schwerpunkt des Betonquerschnitts
$f_{ck}$	charakteristische Druckfestigkeit des Betons
$f_{cm}$	Mittelwert der Druckfestigkeit des Betons
$f_{ctk}$	charakteristische zentrische Zugfestigkeit des Betons
$f_{ctm}$	Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit des Betons
$f_{pk}$	charakteristische Zugfestigkeit des Spannstahls
$f_{p0,1k}$	charakteristische Spannstahlspannung an der 0,1%-Dehngrenze
$f_{tk}$	charakteristische Zugfestigkeit des Betonstahls
$f_{tm}$	Mittelwert der Zugfestigkeit des Betonstahls
$f_{yk}$	charakteristische Streckgrenze des Betonstahls
$f_{ym}$	Mittelwert der Streckgrenze des Betonstahls
$G$	ständige Einwirkung; Schubmodul
$G_F$	Bruchenergie
$G_{F0}$	Grundwert der Bruchenergie
$g$	gleichmäßig verteilte Last aus ständigen Einwirkungen
$h$	Gesamthöhe eines Querschnitts
$h_o = 2A_c/u$	wirksame Bauteildicke (bei Kriechen und Schwinden)
$I_c$	Trägheitsmoment des Betonquerschnitts
$\underline{K}_e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$\underline{K}_s$	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$k$	ungewollter Umlenkwinkel der Spannglieder
$L$	Länge, Spannweite
$l$	Länge (allgemein)
$\Delta l_{sl}$	Schlupflänge des Keilschlupfs beim Vorspannen der Spannglieder
$M$	Biegemoment (allgemein)
$M_g$	Biegemoment infolge ständiger Einwirkungen

$M_p$	Biegemoment infolge Vorspannung
$M_{p,dir}$	statisch bestimmter Anteil des Biegemomentes infolge Vorspannung
$M_{p,ind}$	statisch unbestimmter Anteil des Biegemomentes infolge Vorspannung
$M_q$	Biegemoment infolge veränderlicher Einwirkungen
$N$	Anzahl der Spannglieder
$\underline{N}$	Formfunktionsmatrix
$n$	Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Stahl und Beton
$P_d, P_k$	Bemessungswert bzw. charakteristischer Wert der Vorspannkraft
$P_{m,0}$	Mittelwert der Vorspannkraft an der Stelle $x$ im Zeitpunkt $t = 0$
$P_{m,t}$	Mittelwert der Vorspannkraft an der Stelle $x$ zum beliebigen Zeitpunkt $t$
$P_0$	Vorspannkraft am Spannende ( $x = 0$ ) unmittelbar nach dem Vorspannen
$P_x$	Vorspannkraft an einer Stelle mit Abstand $x$ zur Spannpresse
$\Delta P_{\mu}(x)$	Vorspannkraftverluste infolge Reibung zwischen Spannstahl und Hüllrohr
$\Delta P_{ES}$	Vorspannkraftverluste infolge elastischer Verformungen des Bauteils
$\Delta P_{ir}$	Vorspannkraftverluste infolge kurzzeitiger Relaxation im Zeitraum zwischen Vorspannen der Spannglieder und Übertragung der Vorspannkraft auf den Beton
$\Delta P_{sl}$	Vorspannkraftverluste infolge Keilschlupf
$\Delta P_t(t)$	zeitabhängige Vorspannkraftverluste infolge Schwinden und Kriechen des Beton sowie Relaxation des Spannstahls
$Q$	veränderliche Einwirkungen
$\underline{Q}$	Lastvektor der veränderlichen Einwirkung
$q$	Streckenlast

R	Krümmungsradius
$\underline{R}$	Lastvektor
$R_e$	charakteristische Streckgrenze des Betonstahls (DIN 10080)
RH	relative Luftfeuchtigkeit
$R_m$	charakteristische Zugfestigkeit des Betonstahls (DIN 10080)
$r_t, r_{100}, r_{1000}$	Relaxationswert des Spannstahls nach t, 100 bzw. 1000 Stunden.
$\underline{r}$	Verschiebungsvektor der Knotenpunkte
$r_{inf}, r_{sup}$	Beiwerte zur Bestimmung des unteren bzw. oberen charakteristischen Wertes der Vorspannung $P_k$
$T(\Delta t_i)$	Temperatur in °C während des Zeitraums $\Delta t_i$ in Tagen
$t, t_o, t_s$	Betonalter des Betons zum betrachteten Zeitpunkt, zum Belastungsbeginn bzw. zum Beginn des Schwindens
$t_{0,T}$	wirksames Belastungsalter
u	äußerer Umfang eines Querschnitts mit der Fläche A
$u_o, v_o$	horizontale bzw. vertikale Verschiebung eines Punktes der Stabachse
$u_i, v_i, \theta_i$	Verschiebungen bzw. Verdrehung eines Knotenpunktes i
$\underline{u}, \underline{v}, \underline{\theta}$	Verschiebungsvektoren der Knotenpunkte
V	Volumen (allgemein)
w	Rissöffnung
$w_1$	Rissöffnung bei Betonzugspannung $\sigma_c = 0,15 f_{ctm}$
$w_c$	maximale Rissöffnung
x	Abstand der Nulllinie vom gedrückten Querschnittsrand; Länge des Spanngliedsegments vom Spannanker bis zur betrachteten Stelle
x,y,z	Achsrichtungen eines rechtwinkligen, rechtsdrehenden Koordinatensystems
$x_{sl}$	Einflusslänge des Keilschlupfs

$y$	Abstand einer Faser vom Schwerpunkt des Querschnitts
$z_{cp}$	Abstand der Spannglieder vom Schwerpunkt des Betonquerschnitts

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der verwendeten Zementart auf die Kriechzahl des Betons
$\alpha_F$	Beiwert zur Berücksichtigung der maximalen Zuschlaggröße $d_{max}$
$\beta$	Verdrehungswinkel des Querschnitts infolge des Biegemoments
$\beta_1$	Beiwert zur Berücksichtigung der Betonfestigkeit
$\beta_c$	Beiwert zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs des Kriechens
$\beta(f_{cm})$	Beiwerte zur Berücksichtigung des Einflusses der Betonfestigkeit $f_{cm}$ auf die Grundkriechzahl
$\beta_{RH}$	Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der relativen Luftfeuchtigkeit RH auf das Endschwindmaß
$\beta_{sc}$	Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der Zementart auf das Schwinden
$\beta_s$	Beiwert zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs des Schwindens
$\beta(t_0)$	Beiwerte zur Berücksichtigung des Einflusses des Betonalters bei Belastungsbeginn $t_0$ auf die Grundkriechzahl
$\beta_t$	Beiwert zur Berücksichtigung der zeitlichen Belastungsart bei Bestimmung der Stahldehnung
$\gamma$	Schubverzerrung; Summe der gewollten und ungewollten Umlenkwinkel
$\gamma_p$	Teilsicherheitsbeiwert für Einwirkung infolge Vorspannung
$\gamma_s$	Teilsicherheitsbeiwert für Betonstahl und Spannstahl
$\delta$	Verhältnis des umgelagerten Moments zum Ausgangsmoment vor der Umlagerung; Beiwert zur Berücksichtigung der Streckgrenze

---

	und der Duktilität bei Bestimmung der Stahldehnung
$\epsilon$	Dehnung (allgemein)
$\epsilon_c$	Betonstauchung
$\epsilon_{c1}$	Betonstauchung bei höchster Druckbeanspruchung
$\epsilon_{cp,ES}$	Betondehnung in Höhe des Spannglieds infolge elastischer Verformung
$\epsilon_{cso}$	Grundschwindmaß
$\epsilon_{cs}(t, t_0)$	Schwinden des Betons im betrachteten Zeitraum $(t, t_0)$
$\epsilon_{ct1}$	Betondehnung bei $\sigma_c = 0,9 \cdot f_{ctm}$
$\epsilon_{ctu}$	Betondehnung bei höchster Zugbeanspruchung
$\epsilon_{cu}$	Bruchstauchung des Betons (bei einer Spannung $\sigma_c = 0,5 \cdot f_{cm}$ )
$\epsilon_D$	Konvergenztoleranz für die Verschiebungen
$\epsilon_E$	Konvergenztoleranz für die Energie
$\epsilon_F$	Konvergenztoleranz für die unbalancierten Kräfte
$\epsilon_p$	Spannstahldehnung
$\Delta\epsilon_{p,ES}$	Dehnungsänderung des Spannstahls infolge elastischer Verformung
$\epsilon_{pu,k}$	charakteristische Gleichmaßdehnung des Spannstahls
$\epsilon_s$	Stahldehnung (allgemein)
$\epsilon_s(f_{cm})$	Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der mittleren Betondruckfestigkeit ( $f_{cm}$ , in $N/mm^2$ ) im Alter von 28 Tagen
$\epsilon_{s,m}$	mittlere Stahldehnung
$\epsilon_{sr1}$	Stahldehnung im ungerissenen Zustand unter Rissschnittgrößen bei Erreichen von Betonzugfestigkeit $f_{ctm}$
$\epsilon_{sr2}$	Stahldehnung im Riss unter Rissschnittgrößen
$\epsilon_{su}$	Stahldehnung bei höchster Zugbeanspruchung
$\epsilon_{sy}$	Stahldehnung bei Fließgrenze
$\epsilon_{uk}$	charakteristische Gleichmaßdehnung des Betonstahls

$\theta$	Verdrehungswinkel des Stabquerschnitts; planmäßiger Umlenkwinkel des Spannglieds
$\theta'$ oder $\kappa$	Krümmung der verformten Stabachse
$\mu$	Reibungsbeiwert zwischen Spannglied und Hüllrohr
$\mu'$	Reibungsbeiwert zwischen Spannglied und Hüllrohr beim Nachlassen oder beim Keilschlupf
$\sigma$	Spannung (allgemein)
$\sigma_{0,\max}$	maximal zulässige Spannstahlspannung beim Spannvorgang
$\sigma_c$	Betonspannung (allgemein)
$\sigma_{c,g}$	Betonspannung infolge ständiger Einwirkung
$\sigma_{c,po}$	Betonspannung in Höhe der Spannglieder infolge Vorspannung $P_{m,o}$
$\sigma_{cp,ES}$	Betonspannung in Höhe des Spannglieds infolge elastischer Verformung
$\sigma_{cp,G}$	Betonspannung in Höhe des Spannglieds infolge Eigengewicht
$\sigma_{cp,Pm,o}$	Betonspannung in Höhe des Spannglieds infolge Vorspannkraft nach der Vorspannkraftübertragung
$\sigma_{cp,Pi+Gi}$	Betonspannung in Höhe des Spannstahls infolge Vorspannkraft $P_i$ und Anteil des Eigengewichts $G_i$
$\sigma_{p, Po+G}$	Spannung der Spannglieder infolge Vorspannung und ständiger Einwirkung
$\Delta\sigma_{p,c+s+r}$	Spannungsänderung in den Spanngliedern infolge Schwinden, Kriechen und Relaxation an der Stelle $x$ zum Zeitpunkt $t$
$\Delta\sigma_{p,r}$	Spannungsänderung in den Spanngliedern infolge Relaxation
$\sigma_s$	Stahlspannung (allgemein)
$\sigma_{sr1}$	Stahlspannung beim ersten Betonriss
$\sigma_{srn}$	Stahlspannung beim letzten Betonriss
$\sigma_{ym}$	Mittelwert der Streckgrenze des Betonstahls

---

$\phi$	Formfunktion für horizontale Verschiebungen
$\psi$	Formfunktion für vertikale Verschiebungen
$\omega$	mechanische Bewehrungsverhältnisse der Zugbewehrung
$\omega'$	mechanische Bewehrungsverhältnisse der Druckbewehrung
$\omega_p$	mechanische Bewehrungsverhältnisse des Spannstahls
$\varphi_0$	Grundkriechzahl
$\varphi(t, t_0)$	Kriechzahl für den betrachteten Zeitraum $(t, t_0)$
$\varphi_{RH}$	Beiwerte zur Berücksichtigung des Einflusses der relativen Luftfeuchtigkeit RH auf die Grundkriechzahl



# **1 Einleitung**

## **1.1 Vorbemerkung**

In Stahlbeton- und Spannbetonkonstruktionen werden häufig statisch unbestimmt gelagerte Tragglieder eingesetzt, wodurch gegenüber statisch bestimmten Systemen die Sicherheitsreserven gegen Versagen gesteigert, die Verformungen reduziert und die Herstellungskosten verringert werden können.

Der Durchlaufträger bietet als wichtiges Tragglied gegenüber dem statisch bestimmt gelagerten Träger mehrere Vorteile. Unter gleicher Belastungsgröße und -anordnung treten bei Durchlaufträgern im Gegensatz zu Einfeldträgern kleinere Momente und Durchbiegungen im Feldbereich auf. Sie benötigen geringere Querschnitte, so dass eine Verminderung der Herstellungskosten zu erreichen ist. Bei Spannbetondurchlaufträgern können Kosten gespart werden, wenn die Spannstäbe in einem einmaligen Spannvorgang vorgespannt werden können. Weitere Vorteile sind bei Durchlaufträgern durch die Möglichkeit einer Momentenumlagerung gegeben, welche die Tragfähigkeit des gesamten Tragwerkes erhöhen können.

Die Anwendung von Spannbetondurchlaufträgern bringt jedoch auch Nachteile. In einem solchen Tragwerk setzt sich die Spanngliedführung normalerweise aus mehreren parabolischen Segmenten zusammen, welche während des Anspannens große Vorspannkraftverluste infolge Reibung hervorrufen. Weitere Nachteile hängen bei der Anwendung von Spannbetondurchlaufträgern mit der aufwendigeren Berechnung zur Beschreibung ihres wirklichkeitsnahen Tragverhaltens

zusammen. Zwei Faktoren, die die Berechnung und Bemessung erschweren, sind Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung und Momentenumlagerungen infolge nichtlinearen Werkstoffverhaltens. Beide Einflussfaktoren müssen in der Berechnung und der Bemessung von Spannbetondurchlaufträgern entsprechend berücksichtigt werden. Um das wirklichkeitsnahe Beanspruchungsverhalten des Tragwerkes zu ermitteln, ohne einen teuren und aufwendigen Laborversuch durchführen zu müssen, ist die Berechnung der Schnittgrößen unter Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten als praxistgerechter Lösungsweg zu sehen.

Die Materialkomponenten der Betontragwerke – Beton, Betonstahl und Spannstahl – weisen nichtlineares Materialverhalten auf. Außerdem unterscheiden sich die Spannungs-Dehnungsbeziehungen des Betons bei Druck- und Zugbeanspruchung. Infolge geringer Zugfestigkeit kann frühzeitig die Rissbildung im Beton einsetzen, welche örtlich zu Steifigkeitsminderungen und bei statisch unbestimmten Systemen infolge der Veränderung der Steifigkeitsverhältnisse zu Schnittgrößenumlagerungen im gesamten Tragwerk führt. Durch die Rissbildung ist ein diskontinuierliches Tragverhalten zu verzeichnen. Diese Erscheinungen verlangen bei der Nachweisführung zur Tragfähigkeit und bei der Ermittlung des wirklichkeitsnahen Verhaltens von Betontragwerken eine nicht-lineare Analyse.

Im Hinblick auf die Vorteile der Berücksichtigung von Schnittgrößenumlagerungen sind hervorzuheben: die Vermeidung von Bewehrungsanhäufungen, eine Entlastung der hochbeanspruchten Druckzone, eine gleichmäßige Ausnutzung und damit gleichmäßige Sicherheit des Tragwerkes. Es ist von Vorteil, den Schnittgrößenzustand unter Annahme wirklichkeitsnaher Werkstoffeigenschaften

zu berücksichtigen. Neue Sicherheitskonzepte, wie z.B. im Eurocode 2 [1] und DIN 1045-1 [3] eingeführt, lassen ausdrücklich die Bemessung aufgrund nichtlinearer Berechnungen zu.

Bei statisch unbestimmten Spannbetontragwerken ruft die Vorspannung üblicherweise Zwangsschnittgrößen hervor. Es wird allgemein angenommen, dass die Zwangsschnittgrößen in der Berechnung nach der linearen Elastizitätstheorie berücksichtigt werden müssen, dagegen aber bei der Plastizitätstheorie vernachlässigt werden können [17, 19, 21, 27]. Eine einfache Trennung der Schnittgrößenanteile infolge äußerer Lasten und Vorspannung ist bei linear-elastischem Materialverhalten wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips möglich. Die eindeutige Zuordnung ist hingegen für nichtlineares Materialverhalten nicht ohne weiteres durchführbar. Bei experimentellen Untersuchungen kann diese Unterteilung gleichfalls kaum erfasst werden.

Im Zustand I ergeben sich in statisch unbestimmt gelagerten Trägern in Abhängigkeit von der Spanngliedführung zum Teil erhebliche Zwangsschnittgrößen. Im Grenzzustand der Tragfähigkeit geht der Träger in den gerissenen und bereichsweise plastifizierten Zustand über. Deshalb stellt sich im Hinblick auf den rechnerischen Biegebruchsicherheitsnachweis die Frage, ob sich mit den damit verbundenen Steifigkeitsänderungen neben dem statisch bestimmten Momentenanteil aus Vorspannung auch die Zwangsmomente infolge Vorspannung verändern. Es stellt sich die Frage, ob sie gegenüber dem Zustand I in ungünstig wirkender Weise zu- oder abnehmen.

Zahlreiche experimentelle und numerische Untersuchungen wurden bereits zum Thema Momentenumlagerung sowohl bei Stahlbeton- als auch bei Spannbeton-

tragwerken durchgeführt. Es ist bisher der Einfluss unterschiedlicher Parameter auf die Momentenumlagerung untersucht worden. Demgegenüber befinden sich in der Literatur nur wenige Ergebnisdarstellungen von Untersuchungen über die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung im nichtlinearen Bereich. Die analytischen Untersuchungen werden meistens aufgrund der Plastizitätstheorie durchgeführt, wobei die Momentenentwicklung im nichtlinearen Bereich nur unvollständig erfasst wird. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind teilweise widersprüchlich hinsichtlich der Entwicklung des Zwangsmoments im nichtlinearen Bereich. Es besteht außerdem weiterer Klärungsbedarf über die gegenseitige Beeinflussung von Zwangsmomenten und Momentenumlagerung.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für Spannbetondurchlaufträger die Entwicklung der Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung bis zum Grenzzustand der Tragfähigkeit wirklichkeitsnah zu erfassen. Ebenso soll die gegenseitige Wirkung zwischen Zwangsmomenten und Momentenumlagerungen ermittelt werden.

Eine wirklichkeitsnahe Berechnung des Tragverhaltens setzt die Beachtung sowohl der geometrischen als auch der physikalischen Nichtlinearitäten voraus.

Dazu wird die Berechnung unter Berücksichtigung von:

- großen Formänderungen,
- wirklichkeitsnahem nichtlinearen Werkstoffverhalten,
- Rissbildungen in der Form eines verschmierten Modells

durchgeführt.

Ausgehend von der nichtlinearen Stabstatik wird ein geometrisch und physikalisch nicht-lineares Berechnungsmodell in der Form einer auf Verschiebungsgrößen basierenden Finite-Element-Berechnung entwickelt. Die Querschnittsabbildung erfolgt mit Hilfe des bekannten Fasermodells. Weil bei vorhandenen Längskräften und aufgrund der Materialnichtlinearität die neutrale Faser und die Schwerachse beim Balkenquerschnitt nicht zusammenfallen, wird dieser Sachverhalt bei der Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix berücksichtigt. Der Einfluss der nicht konstant verlaufenden Längskräfte auf den nichtlinearen Anteil der Steifigkeitsmatrix wird ebenfalls berücksichtigt. Das nichtlineare Gleichungssystem wird mit einem inkrementell-iterativen Verfahren gelöst.

Die effektiven Vorspannkkräfte werden unter Berücksichtigung der sowohl zeitunabhängigen als auch zeitabhängigen Spannkraftverluste ermittelt. Die Vorspannung wird als äußere Beanspruchung betrachtet, welche sich durch Umlenk- und Ankerkräfte abbilden lässt. Änderungen der Spanngliedkräfte infolge der Tragwerksverformung und der damit verbundene Einfluss auf den Knotenlastvektor werden für jede Iteration innerhalb einer Laststufe berechnet. Für jede Laststufe wird bei Erreichen des Gleichgewichtszustands die in diesem Zustand ermittelte Systemsteifigkeitsmatrix gespeichert. Anschließend werden die Schnittgrößen infolge der effektiven Vorspannung einschließlich des statisch unbestimmten Momentenanteils ermittelt. Hiernach wird die Berechnung mit der nächsten Laststufe fortgesetzt.

Die Überprüfung des erstellten Programms erfolgt durch den Vergleich der numerisch ermittelten Werte mit den Ergebnissen aus Versuchen u.a. von *Lin* [36], *Taerwe et al.* [41] und *Priestley and Park* [43]. Bei guter Übereinstimmung der Verformungscharakteristik kann davon ausgegangen werden, dass die

Herleitung auch für allgemeine Fälle angewendet werden darf.

Damit eröffnet das Berechnungsprogramm die Möglichkeit, unabhängig von aufwendigen Serienversuchen, systematische Untersuchungen über die Entwicklung des Zwangmoments infolge Vorspannung und Momentenumlagerungen bei Spannbetondurchlaufträgern mit vertretbarem Aufwand wirklichkeitsnah durchzuführen und den Einfluss der maßgebenden Parameter zu beschreiben. Dabei ist besonders die gegenseitige Beeinflussung des Zwangmoments infolge Vorspannung und der Momentenumlagerung von Interesse.

## **2 Stand der Technik**

### **2.1 Allgemeines**

Das Verhalten eines Spannbetondurchlaufträgers mit nichtkonkordanter Spann- gliedführung wird von Zwangmomenten infolge Vorspannung und von möglichen Momentenumlagerungen beeinflusst. Beide Einflussfaktoren müssen zur Be- schreibung des wirklichkeitsnahen Verhaltens solcher Tragwerke berücksichtigt werden.

Für Spannbetondurchlaufträger im Zustand I ist es allgemein zulässig, die Zwangmomente infolge Vorspannung durch eine Berechnung nach der linearen Elastizitätstheorie zu ermitteln. Über die Existenz und die Bedeutung der Zwangmomente gibt es dagegen im Zustand II unterschiedliche Auffassungen. Im Abschnitt 2.2 dieses Kapitels werden die wichtigsten Untersuchungen über die Zwangmomente infolge Vorspannung wiedergegeben. Die Momenten- umlagerungen bei Spannbetondurchlaufträgern erhalten seit den fünfziger Jahren in der Forschung große Beachtung. Es wurden zahlreiche experimentelle Untersuchungen zu diesem Thema durchgeführt. Die bedeutendsten Untersu- chungen werden in Abschnitt 2.3 erläutert.

Mit der schnellen Verbreitung von Computern in Forschung und Praxis des Bauwesens wurden Computerprogramme zur nichtlinearen Berechnung der Stahlbeton- bzw. Spannbetontragwerke entwickelt. Einige rechnerische Unter- suchungen werden in Abschnitt 2.3 wiedergegeben.

Den Normenwerken verschiedener Länder liegen unterschiedliche zulässige Grenzwerte für die Momentenumlagerung zugrunde. Ebenso werden unterschiedliche Beschränkungen bei der Behandlung der statisch unbestimmten Wirkung der Vorspannung eingeführt. Die Vorschriften werden im Hinblick auf Zwangsmomente infolge Vorspannung und auf Momentenumlagerungen in Abschnitt 2.4 behandelt.

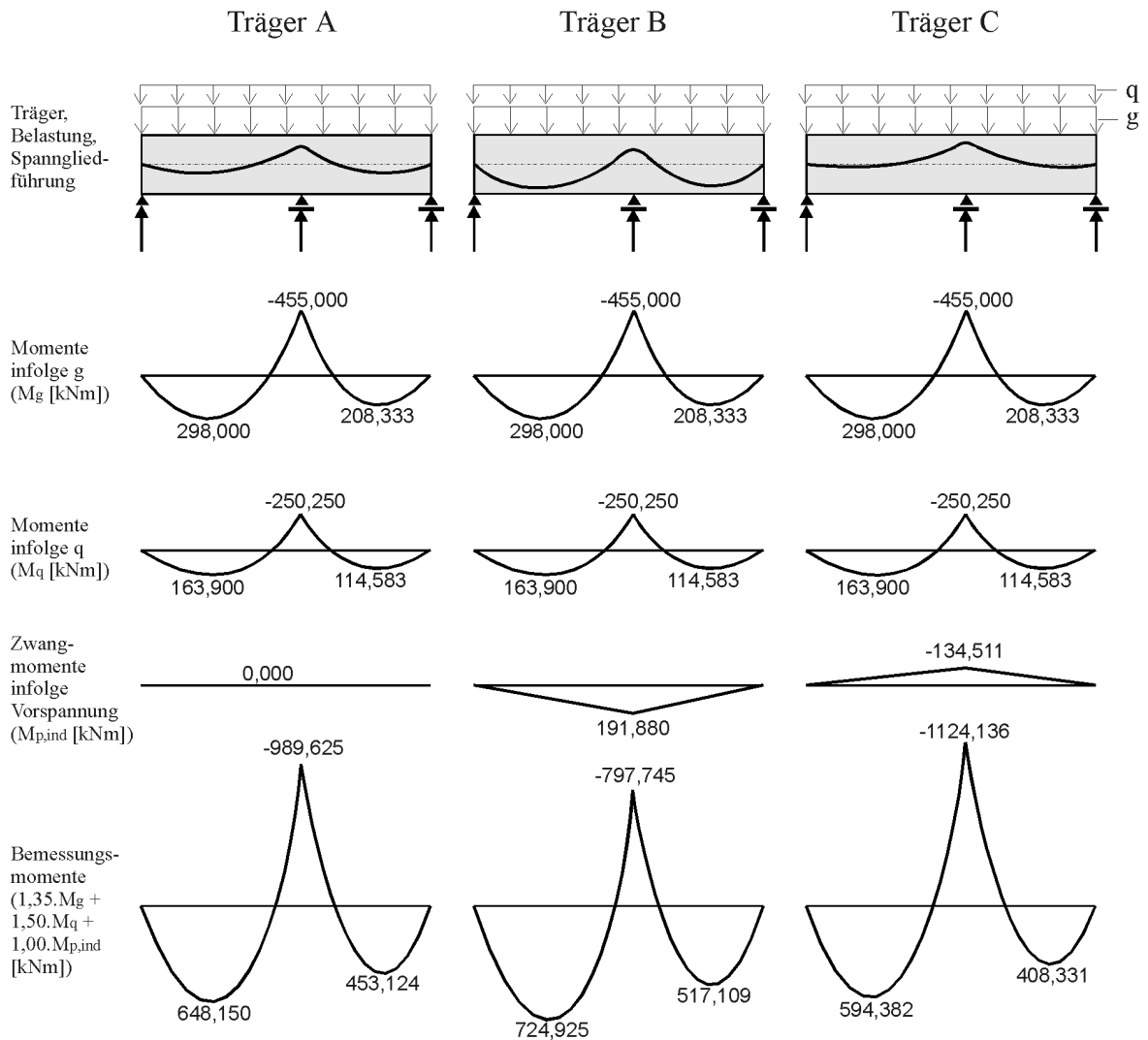
## **2.2 Zwangsmomente infolge Vorspannung**

### **2.2.1 Behandlung der Zwangsmomente infolge Vorspannung bei der Bemessung**

Zwangsmomente treten beim Vorspannen von Spannbetondurchlaufträgern auf, welche keine konkordante Spanngliedführung haben. Größe und Richtung dieser Momente hängen von der Vorspannkraft und der Lage des Spanngliedes ab. Die Zwangsmomente sind nicht immer vernachlässigbar klein. Im Vergleich zu Bemessungsmomenten infolge äußerer Last können sie groß sein und günstig oder ungünstig wirken.

Bild 2.1 zeigt das Beispiel von drei zweifeldrigen Spannbetondurchlaufträgern unter gleichmäßig verteilter äußerer Last. Der Unterschied liegt nur in der Spanngliedführung. Träger A wird mit einer konkordanten Spanngliedführung versehen. Infolgedessen tritt hier kein Zwangsmoment auf. Die Zwangsmomente sind beim Träger B positiv und beim Träger C negativ. Die Berechnung nach linearer Elastizitätstheorie wird mit dem Programm PCBEC2 [16] durchgeführt.





**Bild 2.1** Berücksichtigung des Zwangmoments infolge Vorspannung beim Bemessungsmoment

Es ist bekannt, dass die Zwangmomente bei der Berechnung nach linearer Elastizitätstheorie in den Bemessungsmomenten berücksichtigt werden sollen. Wenn keine Momentenumlagerungen in den o.g. Träger angenommen werden, ist das Bemessungsmoment eines Querschnittes eine Addition der Anteile infolge Zwängung ( $M_{p,ind}$ ) und äußeren Lasten ( $M_g$  und  $M_q$ ) unter Berücksichtigung der entsprechenden Sicherheitsfaktoren. Beim Träger A ergeben sich die Bemessungsmomente als Summe der mit Sicherheitsfaktoren multiplizierten Momente

infolge äußerer Lasten. Ein Einfluss von Zwangmomenten infolge Vorspannung ist hier nicht vorhanden. Für den Träger B und den Träger C wird das Bemessungsmoment des Querschnittes demgegenüber vom Zwangmoment beeinflusst.

Bei Berücksichtigung des Zwangmoments ist für den Träger B das Bemessungsmoment für den Querschnittsbereich des Mittellagers kleiner. Demgegenüber vergrößert sich beim Träger C das Bemessungsmoment infolge des Zwangmoments, so dass eine größere Tragfähigkeit für den maßgebenden Querschnitt gefordert werden muss. Bei Durchlaufträgern sind die im Bereich der inneren Lager befindlichen Querschnitte meistens die bemessungsrelevanten Stellen. Der Träger B stellt sich also als ein günstiger Entwurf dar, da das negative Bemessungsmoment im Querschnittsbereich des Mittellagers kleiner ist. Außerdem ermöglichen kleinere Unterschiede zwischen Spitzenmomenten im Feld und am Mittelaufleger eine Ausnutzung der Balkenhöhe durch maximale Spanngliedlage. Diese Vorteile können durch die Berücksichtigung eines günstig wirkenden Zwangmoments erzielt werden, welches durch eine zweckmäßig angeordnete Spanngliedführung hervorgerufen wird.

Bei der Berechnung nach der linearen Elastizitätstheorie kann das Zwangmoment mittels Superpositionsgesetz berechnet werden. Die Anwendung dieses Prinzips setzt aber voraus, dass keine Momentenumlagerung im Träger erfolgt. Bei der Berechnung nach dem auf der Plastizitätstheorie basierenden Traglastverfahren, bei dem eine vollständige Momentenumlagerung angenommen wird, hat das Zwangmoment keinen Einfluss auf das Bemessungsergebnis [17, 19, 21, 27, 34]. Wenn bei nichtlinearem Verhalten des Tragwerkes nur eine teilweise Momentenumlagerung zu verzeichnen ist, liegen unterschiedliche Auffassungen über die Existenz und die Bedeutung der Zwangmomente vor [22,23,24,31,32].

### 2.2.2 Bekannte Untersuchungen zu Zwangmomenten infolge Vorspannung

Das Tragverhalten von Spannbetondurchlaufträgern wird seit den fünfziger Jahren intensiv untersucht. In diesem Abschnitt wird über die wichtigsten experimentellen und numerischen bzw. analytischen Untersuchungen berichtet.

*Lin und Thornton* [17] haben den Einfluss des Zwangmoments infolge Vorspannung auf die Traglast der Spannbetondurchlaufträger sowohl nach der linearen Elastizitätstheorie als auch nach der Plastizitätstheorie analytisch untersucht. Sie zeigen auf, dass die Vernachlässigung des Zwangmoments bei der Ermittlung des Bemessungsmoments im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach der linearen Elastizitätstheorie in bestimmten Situationen zu auf der unsicheren Seite liegenden Bemessungsmomenten führen kann. Es wird auch beschrieben, dass das Zwangmoment nicht mehr auftritt, wenn vollständige Momentenumlagerung zu verzeichnen ist, und der Träger infolge der Fließgelenkbildung zum statisch bestimmten Systemen übergeht. *Mattock* hat diese Aussage in seiner Anmerkung [18] bekräftigt. Zur Behandlung des Zwangmoments infolge Vorspannung bei der Bestimmung der maximal von Spannbetondurchlaufträgern aufnehmbaren Last haben sie folgendes vorgeschlagen: Wenn die Berechnung auf der linearen Elastizitätstheorie basiert, muss das Zwangmoment berücksichtigt werden. Berechnet man demgegenüber nach der Plastizitätstheorie, bei der eine vollständige Momentenumlagerung angenommen wird, darf das Zwangmoment entweder berücksichtigt oder vernachlässigt werden, weil die maximal aufnehmbare Last von ihm unbeeinflusst bleibt. Ist die Momentenumlagerung nur teilweise zu verzeichnen, liegt die maximal aufnehmbare Last zwischen dem ersten und dem zweiten Fall. Abschließend schlugen sie für Spannbetondurchlaufträger ein Näherungsverfahren zur Ermittlung der Traglast vor. Es berücksichtigt

das Zwangsmoment infolge Vorspannung, das im Grenzzustand der Tragfähigkeit zunimmt. Das vorgeschlagene Verfahren basiert auf der ‘Load Balancing Method’, indem keine Momentenumlagerung stattfindet.

Das Verhalten von zweifeldrigen Spannbetonträgern haben *Mattock et al.* [19] experimentell untersucht. Die Träger hatten Plattenbalkenquerschnitte und nichtkonkordante Spanngliedführungen. In diesem Aufsatz wird bestätigt, dass die Zwangsmomente beim Übergang in statisch bestimmte Systeme infolge Fließgelenkbildung nicht mehr auftreten.

Bei statisch unbestimmt gelagerten Tragwerken werden Zwangskräfte infolge Vorspannung sowie Zwangskräfte aus anderen Ursachen (z.B. durch Schwinden und Kriechen des Betons, durch Temperaturunterschied) nach Meinung *Leonhardts* [20] durch den Übergang von Zustand I nach Zustand II in Teilbereichen des Tragwerkes teilweise abgebaut. In [21] wird allerdings erläutert, dass sich Zwangsmomente infolge Vorspannung anders verhalten als z.B. Zwangsmomente infolge Stützensenkungen oder Temperaturunterschied. Die Zwangsmomente infolge Vorspannung sind unabhängig von einer gleichmäßigen Veränderung der Steifigkeit. Es wird in [21] ebenfalls beschrieben, dass beim Übergang zur Grenzlast auch in voll vorgespannten Trägern Risse entstehen. Die Biegesteifigkeit wird im gerissenen Bereich stark vermindert, da die Zuggurte aus Spannstahl weniger steif sind als im Stahlbeton ( $A_p \ll A_s$ ). Dieses muss, auch wenn die Gurtzugkräfte zunehmen, zu einer Veränderung, meistens einer Abnahme, der Zwangsmomente infolge Vorspannung führen.

In [22] haben *Levi et al.* die Ergebnisse einer numerischen Untersuchung veröffentlicht. Das entwickelte Berechnungsmodell berücksichtigt sowohl

geometrische als auch physikalische Nichtlinearitäten und basiert auf einer Längskräfte-Biegemoment-Krümmungsbeziehung. Aus den Ergebnissen der Untersuchungen haben sie die Schlussfolgerung gezogen, dass die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung vom Gebrauchszustand bis zum Traglastzustand keine signifikanten Änderungen erfahren.

Den Einfluss von Zwangsmomenten infolge Vorspannung und Momentenumlagerungen auf die Traglast von vorgespannten Stahlbetondurchlaufträgern haben *Cohn und Frostig* [23] untersucht. Die Entwicklung der Zwangsmomente infolge Vorspannung wird unter dem Einfluss einer gesteigerten äußeren Beanspruchung mit einem Näherungsverfahren ermittelt. Die *direkte Analyse* bestimmt aufeinanderfolgende Lasten  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , welche das erste, zweite, ... letzte Gelenk (d.h. maximale Last) hervorrufen. Das zweite Verfahren, die *historische Analyse*, ermittelt das Tragverhalten der Träger bei inkrementell gesteigerten Lasten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lasten  $q_i$  und  $q_{i+1}$ . Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass die Traglast u.a. von der Größe der Zwangsmomente infolge Vorspannung abhängig ist. Daher können die Zwangsmomente bei der Nachweisführung von Querschnitten im rechnerischen Bruchzustand nicht vernachlässigt werden. Bis zum plastischen Versagen des Tragwerkes bleiben die Zwangsmomente bei konstanter Vorspannkraft für verschiedene Laststufen unverändert.

Basierend auf dem Superpositionsprinzip hat *Cauvin* [24] ein Berechnungsmodell entwickelt, um die Wirkung der Vorspannung im nichtlinearen Bereich zu untersuchen. Die Einflüsse der Vorspannkraft werden als Vorverformungen berücksichtigt. Bei inkrementell gesteigerten äußeren Lasten wird der Träger zweimal analysiert. Die erste Berechnung ermittelt die aktuellen Einflüsse der

Vorspannung durch die Modifizierung der Spanngliedkräfte mit einem vom Steifigkeitsverhältnis abhängigen Faktor. Der weitere Berechnungsschritt wird zur Ermittlung der Schnittgrößen infolge äußerer Last durchgeführt. Die gesuchten Schnittgrößen ergeben sich aus der Addition der Ergebnisse beider Berechnungen. Als Folge der Berücksichtigung der Vorspannung in Form einer Vorverformung zeigt Cauvin auf, dass sich die Vorspanneffekte einschließlich der Zwangsmomente reduzieren, wenn die Systemsteifigkeit der Träger infolge von Rissbildungen und nichtlinearem Materialverhalten abnimmt.

Im Gegensatz zu den Aussagen in [23] zeigt *Huber* [26], dass die Bruchlasten vom Zwangsmoment unabhängig sind. Außerdem zeigt er in [27] auch, dass Zwangsschnittgrößen beim Erreichen des plastischen Verhaltens des Tragwerkes zu Null werden und die Spannstäbe in diesem Zustand wie normale Betonstäbe wirken.

*Zimmermann* [28] hat ein Berechnungsprogramm entwickelt, welches auf der Anwendung der Momenten-Krümmungs-Beziehung der Querschnitte basiert. Hauptziele der numerischen Forschung waren die Entwicklung eines Verfahrens zur Bestimmung des Spannkraftzuwachses und die Untersuchung des Tragverhaltens von Stabtragwerken mit Vorspannung ohne Verbund. Die Untersuchungen der ohne Verbund vorgespannten Zweifeldträger zeigen folgende Ergebnisse: Bei den Trägern mit rechteckigem Querschnitt und mit niedriger Vorspannkraft gehen die Zwangsmomente mit dem Plastifizieren praktisch auf Null zurück, so dass nur noch statisch bestimmte Anteile der Vorspannung wirksam sind. Bei den Trägern mit höherer Vorspannkraft werden die Zwangsmomente nicht in dem Maße verringert. Dies hängt damit zusammen, dass bei hoher Vorspannkraft die Rotationsfähigkeit des Trägers über der Stütze nicht mehr

ausreicht, um auch im Feld das Plastifizieren zu gewährleisten. Man erkennt bei Zweifeldträgern mit Plattenbalkenquerschnitt, dass mit steigender Belastung und mit Beginn der Plastifizierung das Zwangsmoment infolge Vorspannung sogar noch ansteigt.

In der Veröffentlichung von *Wyche et al.* [29] wird gezeigt, dass die Bestimmung von Momentenumlagerungen für Spannbetondurchlaufträger nach ACI 318-89 nicht zutreffend ist, da nur die Momente aus äußeren Lasten umgelagert werden sollen. Bei der linearen Berechnung mit anschließender Momentenumlagerung unterscheidet sich die Behandlung des Zwangsmoments im ACI 318-89 von anderen Normenwerken. Während die meisten Normenwerke eine Umlagerung des gesamten Moments zulassen, welches aus der Addition der mit entsprechenden Sicherheitsbeiwerten multiplizierten Momente infolge Belastung und infolge Vorspannung ermittelt wird, lässt das ACI 318-89 nur die Umlagerung des mit entsprechenden Sicherheitsbeiwerten multiplizierten Moments infolge äußerer Belastung zu, bevor der statisch unbestimmte Momentenanteil infolge Vorspannung zu diesem addiert wird. Dieser Sachverhalt wird in der Ausgabe ACI 318-95 korrigiert [30].

Um eine Näherungsformel zur Bestimmung des Bemessungsmoments im Grenzzustand der Tragfähigkeit unter Berücksichtigung des vorhandenen Zwangsmoments infolge Vorspannung zu entwickeln, hat *Scholz* [31] eine analytische Untersuchung durchgeführt. Die vorgeschlagene Formulierung beinhaltet einen Zusammenhang zwischen der erforderlichen bzw. vorhandenen Duktilität, dem Biegemoment nach linear-elastischer bzw. plastischer Berechnung und dem Zwangsmoment infolge Vorspannung. Es wird angenommen, dass die Biegemomente nach linear-elastischer Berechnung einschließlich der statisch

unbestimmten Anteile infolge Vorspannung beim Übergang des Trägers in ein Mechanismusversagen linear abnehmen. Dies wird mit dem Steifigkeitsabfall des Trägers infolge Fließgelenkbildung begründet.

Den Einfluss einer Rissbildung auf den statisch unbestimmten Momentenanteil aus Vorspannung haben *König und Maurer* [32] experimentell untersucht. Die Versuchsergebnisse von zwei vorgespannten Zweifeldträgern zeigen, dass die Zwangsmomente infolge Vorspannung durch die Rissbildung beeinflusst werden. Sie werden durch die Rissbildung im Beton aber nicht proportional zum Steifigkeitsabfall abgebaut, sondern wachsen mit zunehmender Rissbildung anfangs sogar noch an. Das Verhalten unterscheidet sich deshalb von dem üblicher Zwangsschnittgrößen infolge geometrischer Verformungen, z.B. infolge Stützensenkung. Für praktische Anwendungen kann der statisch unbestimmte Momentenanteil aus Vorspannung durch den Rechenwert nach Zustand I angenähert werden.

Ein Argument, dass die statisch unbestimmten Schnittgrößen infolge Vorspannung bei Trägern mit konstanter Steifigkeit steifigkeitsunabhängig angenommen werden können und sie sich daher unter Laststeigerung und Rissbildung nicht verändern, ist nach *Wölfel* [34] nicht richtig. Die Zwangsmomente infolge Vorspannung sollen sich unter Steifigkeitsänderung beim Übergang vom Zustand I nach Zustand II ändern. Bei statisch unbestimmt gelagerten Bauteilen hängen die Schnittgrößen aus Vorspannung sowohl vom Absolutwert der Querschnittssteifigkeit als auch von deren Verhältnis im Feld- und Stützbereich ab, während die Schnittgrößen aus Lasten nur vom Verhältnis der Steifigkeiten abhängig sind. Zwangsmomente infolge Vorspannung über den Zwischenstützen haben normalerweise positives Vorzeichen und wirken daher günstig, da sie das



Gesamtmoment dort verringern. Dies bedeutet, dass die bisherige Nichtberücksichtigung des Steifigkeitseinflusses das Stützmoment unter- und das Feldmoment überschätzt. Zur Berechnung der Schnittgrößen aus Vorspannung wird folgendes vorgeschlagen:

- Im Gebrauchszustand sollten sie mit den Steifigkeiten des Zustands I ermittelt werden, sofern ein relativ hoher Vorspanngrad gewählt wird. Die Steifigkeitswerte zwischen Zustand I und Zustand II sollten abgeschätzt und angewendet werden, wenn die Tragwerke mit niedrigem Vorspanngrad vorgespannt werden. In der Berechnung ist die Vorspannkraft mit dem unteren charakteristischen Wert, also mit  $r_{\text{inf}} = 0,9$  anzusetzen.
- Im Grenzzustand der Tragfähigkeit erscheint das auf der Plastizitätstheorie basierende Traglastverfahren als das einfachste und zuverlässigste Berechnungsverfahren zur Schnittgrößenermittlung, sofern das Tragwerk eine ausreichende Duktilität besitzt. In diesem Fall verliert die Ermittlung der Schnittgrößen aus Vorspannung seine Bedeutung. Wenn die Voraussetzung für das Traglastverfahren nicht gegeben ist, sollten die Schnittgrößen unter gleichen Annahmen wie für den Gebrauchszustand, jedoch mit entsprechend verminderter Steifigkeit ermittelt werden. Hier ist die Vorspannkraft mit ihren charakteristischen Werten, also mit  $r_{\text{inf}} = 0,9$  bzw.  $r_{\text{sup}} = 1,1$  zu berücksichtigen.

Die dargestellte Literaturübersicht über das Zwangmoment zeigt sehr unterschiedliche Meinungen über die Existenz und die Bedeutung dieses Schnittgrößenanteils bei nichtlinearem Verhalten des Tragwerkes auf. Während nach *Lin und Thornton* [17] das Zwangmoment infolge Vorspannung im Bruchzustand zunimmt, verringert es sich nach *Leonhardt* [20 , 21], *Cauvin* [24] und *Scholz* [31]. Nach *Levi et al.* [22], *Cohn und Frostig* [23] bzw. *König und Maurer* [32]

bleibt es relativ unverändert. Gehen die Träger in statisch bestimmte Systeme über, tritt dieses Zwangsmoment nach *Lin und Thornton* [17], *Mattock et al.* [19], *Walther* [21, Kapitel 24] und *Huber* [27] nicht mehr auf. Zusammengefasst stellt Tabelle 2.1 diesen Sachverhalt im Überblick dar.

**Tabelle 2.1:** Zwangsmomente infolge Vorspannung ( $M_{p,ind}$ )

Nr.	Autor	Literatur-Nr.	Jahr	E/A/N * <sup>1)</sup>	$M_{p,ind}$ un- verändert	$M_{p,ind}$ nimmt zu	$M_{p,ind}$ nimmt ab	$M_{p,ind}$ tritt nicht mehr auf * <sup>2)</sup>
1	Mattock et al.	19	1971	-				X
2	Lin-Thornton	17	1972	A		X		X
3	Leonhardt	20,21	1973	-			X	
4	Levi et al.	22	1983	N	X			
5	Cohn - Frostig	23	1983	A	X			
6	Cauvin	24	1983	N			X	
7	Huber	27	1986	A				X
8	Zimmermann	28	1988	N		X * <sup>3)</sup>	X * <sup>4)</sup>	
9	Scholz	31	1993	A			X	
10	König/Maurer	32	1993	E	X			

\*<sup>1)</sup> E = experimentell, A = analytisch, N = numerisch

\*<sup>2)</sup> bei Übergang zum statisch bestimmten System

\*<sup>3)</sup> Plattenbalkenquerschnitt

\*<sup>4)</sup> Rechteckquerschnitt

## 2.3 Momentenumlagerungen

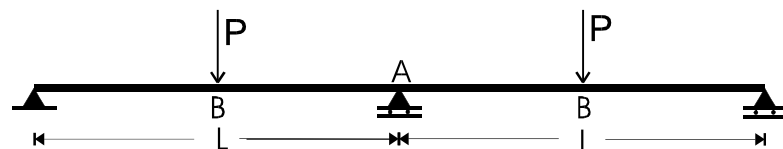
### 2.3.1 Allgemeine Hinweise

Die Abweichung der tatsächlich auftretenden Momente von den theoretisch nach der linearen Elastizitätstheorie berechneten Momenten wird als Momentenumlagerung bezeichnet [33, 51]. *Tichy und Rakosnik* [52] beschreiben die Umlagerung der Kräfte und Momente als einen Vorgang, bei dem sich die Biegemomente bzw. andere statische Größen infolge Plastifizierung der Werkstoffe in den am stärksten beanspruchten Bereichen an diejenigen Stellen des Tragwerkes verlagern, an denen sich Plastifizierungen entweder überhaupt noch nicht oder in einem noch geringeren Umfange befinden. Zur Bestimmung der Momentenumlagerung, die sich vor Bruchversagen eines Tragwerkes eingestellt hat, wird deshalb eine Analyse benötigt, die ein möglichst wirklichkeitsnahes Tragwerkverhalten darstellt.

Versagt rechnerisch ein Durchlaufträger mit plastischem Gelenkmechanismus, bei dem die Anzahl der Fließgelenke gleich oder größer als der statische Unbestimmtheitsgrad plus eins ist, bezeichnet man die vorhandene Momentenumlagerung als vollständige Momentenumlagerung. Die Versagenslast kann nur erreicht werden, wenn die plastifizierenden Querschnitte eine genügende Rotationsfähigkeit besitzen. Mit Hilfe der plastizitätsorientierten Analyse kann die Versagenslast ermittelt werden. Hat ein plastifizierender Querschnitt keine ausreichende Rotationsfähigkeit zum Erreichen des plastischen Versagensmechanismus, versagt der Träger unter einer Last, die unterhalb der plastischen Versagenslast liegt. In diesem Fall tritt keine vollständige, sondern nur eine teilweise Momentenumlagerung auf. Seine Versagenslast wird vom Grad der

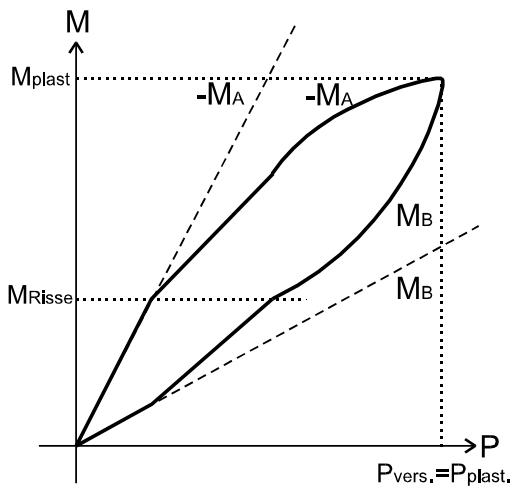
Momentenumlagerung beeinflusst und kann mit Hilfe einer Analyse ermittelt werden, die das reale Tragverhalten des Bauteils berücksichtigt.

Um das Konzept der Momentenumlagerung zu verdeutlichen, zeigt Abbildung 2.2 einen zweifeldrigen Durchlaufträger und Diagramme der Momenten-Belastungsbeziehung für die kritischen Querschnitte, die als potentielle Stellen zur Bildung der plastischen Gelenke bezeichnet werden. Der Träger ist symmetrisch, hat eine gleichmäßige plastische Momentenkapazität  $M_{\text{plast}}$  und wird mit jeweils einer Einzellast  $P$  in den Feldmitten belastet (s. Bild 2.2.(a)).

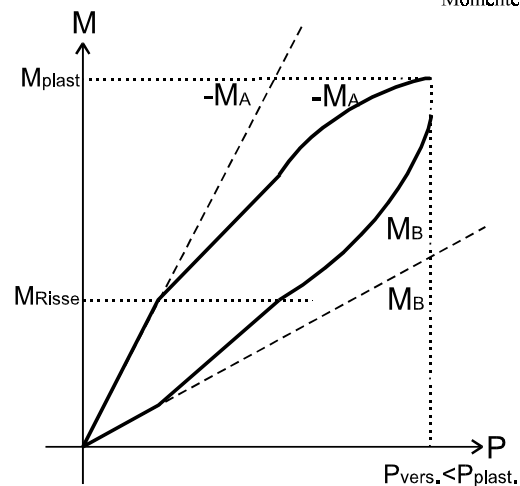


**Bild 2.2.(a)** Durchlaufträger und Belastung

----- Momentenverlauf nach der linearen Elastizitätstheorie  
 ————— Wirklichkeitsnaher Momentenverlauf



**Bild 2.2.(b)** Vollständige Momentenumlagerung



**Bild 2.2.(c)** Teilweise Momentenumlagerung

Dieser Träger besitzt drei potentielle Plastifizierungsstellen: Eine im Bereich des Mittelauflegers (Punkt A) und zwei unter den Einzellasten in Feldmitte (Punkt B). Bild 2.2.(b) zeigt die Momenten-Belastungsbeziehung für vollständige

Momentenumlagerung, wobei beide Punkte A und B ihre Momentenkapazität erreichen. Im Bild 2.2.(c) wird das Diagramm für teilweise Momentenumlagerung dargestellt. Hier erreicht der Querschnitt A das Moment  $M_{\text{plast}}$ . Demgegenüber erreicht der Querschnitt B dieses wegen mangelnder Rotationsfähigkeit nicht.

Um die Momentenumlagerung in einem beliebigen Belastungszustand zu ermitteln, muss eine Schnittgrößenberechnung unter Berücksichtigung nicht-linearen Tragwerkverhaltens eingesetzt werden. Für die Praxis empfehlen die neuen Betonnormen (z.B.: [1], [3], [4]) allerdings zur Schnittgrößenermittlung eines Spannbetontragwerkes u.a. eine Berechnung nach der linearen Elastizitätstheorie mit anschließender begrenzter Momentenumlagerung. Eine weitere Beschreibung der Erfassung von Momentenumlagerungen in Normenwerken wird im Abschnitt 2.4 gegeben.

Wie schon erwähnt, hängt der Grad der Momentenumlagerung vom Rotationsvermögen der plastifizierenden Querschnitte ab. Die Rotationsfähigkeit ist weiterhin von vielen Einflussparametern abhängig. Tabelle 2.2 enthält die Rotationsfähigkeit beeinflussenden Parameter nach *Graubner* [35], die hier für Spannbetonträger ergänzt werden. Viele der Parameter sind unabhängig voneinander. Daher ist es unmöglich, eine Bestimmung der Rotationsfähigkeit nur unter Berücksichtigung von ein oder zwei Parametern durchzuführen. Die Einflüsse der Parameter wurden in den früheren Untersuchungen erforscht, und in diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der wesentlichen Untersuchungen wiedergegeben.

**Tabelle 2.2:** Einflussgrößen auf die Rotationsfähigkeit [35]

<b>Einflussart</b>	<b>Parameter</b>
Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Betonzusammensetzung und Betonfestigkeit</li> <li>- Stahlsorte und Stahlfestigkeit</li> <li>- Verbund zwischen Beton und Stahl</li> </ul>
Querschnitt	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Querschnittsgeometrie</li> <li>- Querschnittsabmessungen</li> <li>- Längsbewehrungsprozentsatz</li> <li>- Druckbewehrungsanteil</li> <li>- Stababstand, Stabdurchmesser, Betondeckung</li> <li>- Bügelabstand, Bügeldurchmesser</li> <li>- Normalkraftbeanspruchung</li> <li>- Zeiteinflüsse, Dauerbeanspruchung</li> </ul>
System	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Systemabmessungen, Trägerschlankheit</li> <li>- Schubschlankheit, Versatzmaß</li> <li>- Lastart, Lastanordnung</li> <li>- Breite der Lastübertragungsbereiche</li> <li>- Verhältnis Verkehrslast/Gesamtlast</li> <li>- Belastungsgeschwindigkeit</li> </ul>
Vorspannung	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Zwangmomente infolge Vorspannung</li> <li>- Grad der Vorspannung</li> <li>- Art der Vorspannung (mit/ohne Verbund)</li> </ul>
Modellbildung	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Versagenskriterien, Sicherheitskonzept</li> <li>- Iterationsverfahren, Berechnungsmodell</li> </ul>

### 2.3.2 Bekannte Untersuchungen zur Momentenumlagerung

Seit den fünfziger Jahren werden Untersuchungen zur Momentenumlagerung in Spannbetondurchlaufträgern durchgeführt. Meistens werden die Einflüsse verschiedener Parameter auf die Momentenumlagerung untersucht, sowie das Tragwerkverhalten der Träger unter Biegebeanspruchung bei Vernachlässigung der Schubeinflüsse oder auch die Frage nach dem Grad der erzielten Momentenumlagerung.

Außerdem versuchte man auch die auf der Plastizitätstheorie basierenden Berechnungsmethoden bei Stahlbeton- und Spannbetontragwerken anzuwenden, um das nichtlineare Tragverhalten zu ergründen. Von der Momenten-Krümmungsbeziehung der kritischen Querschnitte ausgehend wurden vereinfachte Berechnungsmethoden für Durchlaufträger aus Stahlbeton und Spannbeton entwickelt. In der letzten Zeit verwenden viele Forscher mit Hilfe der leistungsstark gewordenen Computertechnologie die Finite-Elemente-Berechnungsmethode, um das wirklichkeitsnahe Verhalten des Betontragwerks zu untersuchen. In diesem Abschnitt werden aus der Literatur bekannte Untersuchungen zur Momentenumlagerung in Spannbetondurchlaufträgern vorgestellt.

### **2.3.2.1 Experimentelle Untersuchungen zur Momentenumlagerung**

Der Laborversuch von *Lin* [36] gehört zu den frühesten experimentellen Untersuchungen an Spannbetondurchlaufträgern. Hauptziel der Versuche war, die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie zur Berechnung von Spannbetondurchlaufträgern zu untersuchen und die Genauigkeit der Berechnung nach der linearen Elastizitätstheorie bis zur Rissbildung zu überprüfen. Unter statischer Belastung wurden zwei symmetrische zweifeldrige Spannbetonträger getestet. Beide Balken hatten konkordante Spanngliedführungen. Somit traten keine Zwangmomente infolge Vorspannung auf. Während der Balken A nur Spannstahl enthielt, wurde im Balken B neben dem Spannstahl auch Betonstahl eingesetzt. Dabei wurde festgestellt, dass sich die Träger bis zu einem der Gebrauchslast entsprechenden Belastungszustand linear elastisch verhielten. Unter den Belastungszuständen zwischen der Gebrauchslast und der Risslast wichen die Durchbiegungen von den nach linearer Elastizitätstheorie berechneten Werten geringfügig ab. Dieser

Sachverhalt wurde mit der nichtlinearen Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons begründet. Bei höheren Lasten wurden die Abweichungen immer größer. Wegen des zugelegten Betonstahls bog sich der Träger B weniger durch als Balken A und konnte die rechnerische plastische Versagenslast erreichen, während Balken A nur 94% seiner theoretischen Versagenslast erreichte. Eine vollständige Momentenumlagerung trat beim Träger B auf, demgegenüber nur eine teilweise Momentenumlagerung beim Träger A. Weil es in den Trägern keine Zwangsmomente infolge Vorspannung gab, konnte der Einfluss der Zwangsmomente auf die Momentenumlagerung nicht untersucht werden.

Ein Laborversuch mit 4 symmetrischen Zweifeld-Spannbetonträgern und einem symmetrischen dreifeldrigen Spannbetonträger mit Kragarmen an beiden Enden wurde vom *Guyon* [37] durchgeführt. Alle Balken hatten einen Rechteckquerschnitt und wurden mit nicht konkordanter Spanngliedführung vorgespannt. Die zweifeldrigen Balken wurden durch gleiche Einzellasten in den Feldmitten bis zum Bruch belastet, während der dreifeldrige Balken durch eine Einzellast mittig in jedem Innenfeld und je einer Einzellast am Ende der Kragarme beansprucht wurde. Es wurde beobachtet, dass alle Träger die volle Momentenumlagerungen erreichen konnten. Aufgrund der Ergebnisse bekräftigte *Guyon* die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie für Spannbetondurchlaufträger und schlug eine Berechnungsmethode zur Ermittlung der Bruchlast vor, die auf den Kompatibilitätsbedingungen basiert.

Drei symmetrische dreifeldrige Spannbetonträger wurden von *Macchi* [38] untersucht. Die Träger wurden mit zwei in kleinem Abstand nebeneinander und in der Mitte des Mittelfeldes angreifenden Einzellasten bis zum Bruch belastet. Die Träger besaßen eine rechteckige Querschnittsform und neben dem Spann-



stahl auch zusätzliche Betonstahlbewehrung. Die Endfelder aller Träger hatten die gleichen Spannweiten. Ziel der Untersuchung war es, den Grad der Momentenumlagerung nach der Rissbildung bis zum Bruch des Trägers zu bestimmen bzw. die Gültigkeit der Plastizitätstheorie für Spannbetondurchlaufträger zu überprüfen. Die Versuchsergebnisse zeigten, dass die Versagenslasten für alle Balken die nach der Plastizitätstheorie berechneten Traglasten nicht erreichten, und nur teilweise Momentenumlagerungen auftraten. Geringfügige Momentenumlagerungen wurden vor der Rissbildung beobachtet. Die Anwendung der Plastizitätstheorie im Spannbeton stellt daher nach Meinung Macchis eine Näherungsmethode dar, wobei in vielen Fällen die Tragfähigkeit des Tragwerkes überschätzt wird.

Versuchsergebnisse von 21 symmetrischen zweifeldrigen Spannbetonträgern wurden von *Mallick* in [39] veröffentlicht. Es handelte sich um einen Plattenbalken und drei Balken mit umgekehrter Plattenbalkenquerschnittsform, während alle anderen eine rechteckige Querschnittsform besaßen. Die Träger wurden mit zwei Einzellasten beansprucht, die mit gleichen Abständen vom Zwischenaufleger entfernt angeordnet waren. In 15 Balken konnte eine vollständige Momentenumlagerung beobachtet werden, während bei drei Balken nur eine teilweise Momentenumlagerung erfolgte und drei andere ohne Bildung eines plastischen Gelenks versagten. Es wurde bestätigt, dass zusätzliche Betonstahlbewehrung in den kritischen Stellen die Rotationsfähigkeit des Querschnitts vergrößert und somit dem Erreichen der vollständigen Momentenumlagerung dienlich ist. Allerdings traten große Risse in den plastifizierten Bereichen auf, und *Mallick* machte darauf aufmerksam, dass bei der Bemessung von Spannbetonträgern unter Berücksichtigung der Momentenumlagerung ein Grenzwert zur Momentenumlagerung eingesetzt werden muss, damit die Verformungen des Trägers unter

Gebrauchslast nicht zu groß werden. Im Aufsatz von *Mallick und Sastry* [40] wird auch berichtet, dass bei 27 dreifeldrigen und 12 zweifeldrigen getesteten Spannbetonträgern meistens vollständige Momentenumlagerung erreicht werden konnte.

In [19] werden die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen von *Mattock et al.* dargestellt. Bei diesen Laborversuchen wurden über drei Auflager durchlaufende Spannbetonplattenbalken mit jeweils vier in jedem Feld angeordneten Einzellasten bis zum Versagen beansprucht. Alle drei Träger hatten nicht konkordante Spanngliedführungen; ein Träger (CB1) wurde mit nachträglichem Verbund, die anderen (CU1 und CU2) wurden ohne Verbund vorgespannt. Die Träger CU1 und CU2 hatten einen bedeutenden Anteil zusätzlicher Betonstahlbewehrung. Der mit Verbund vorgespanntene Träger verhielt sich unter den gleichmäßig gesteigerten Lasten überwiegend linear-elastisch. Nur in der letzten inkrementellen Laststufe wich er plötzlich vom linear-elastischen Verhalten ab. Demgegenüber entfernte sich das Verhalten der Träger CU1 und CU2 von den nach der linear-elastischen Theorie berechneten Werten schon unter relativ kleinen Lasten. Die aus den Versuchergebnissen abgeleiteten Stützmomente erreichten bei Träger CB1 70,6%, bei Träger CU1 56,2% und bei Träger CU2 69,1% der nach der Elastizitätstheorie unter gleichem Belastungszustand berechneten Werten. Die zusätzliche Betonstahlbewehrung in den Trägern CU1 und CU2 trug zum besseren Verformungs- bzw. Rissverhalten bei.

*Moucessian und Campbell* [42] haben zwei dreifeldrige Spannbetondurchlaufträger untersucht. Ähnlich wie die Balken von *Macchi* [38] hatten beide Träger eine rechteckige Querschnittsform mit beachtlichem Anteil an Betonstahlbewehrung. Sie wurden mit nicht konkordantem Spanngliedverlauf vorgespannt und

mit einer Einzellast in der Mitte des Mittelfelds quasi-statisch belastet. Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus Macchis Versuch [38] zeigen die Untersuchungsergebnisse eine vollständige Momentenumlagerung in beiden Trägern. Dies kann auf die vorhandene Schubbewehrung zurückgeführt werden, die den Beton umschließt und damit seine Bruchdehnung erhöht.

Eine umfangreiche Untersuchung zum Tragverhalten von Spannbetondurchlaufträgern wurde von *Taerwe et al.* [41] durchgeführt. Unter den Bedingungen von gleicher Systemgeometrie und Belastung umfassten die Versuche volle oder teilweise Vorspannung, Anwendung von Normal- bis Hochleistungsbeton und Vorspannung mit oder ohne Verbund. Der Serienversuch bestand aus sechs zweifeldrigen Trägern mit gleichen Spannweiten von 9,60 m (s. Tabelle 2.3), wobei der Balken CB1-N5B als Referenzbalken angesehen wurde. Die Betonträger wurden nach der Erhärtung des Betons im Alter von 14 Tagen vorgespannt und im Alter von 28 Tagen untersucht. Die Belastungen waren quasi-statisch in Form von vier Einzellasten für jedes Feld angeordnet (s. Bild 2.3).

Der Querschnitt des Balkens CB5-N5BT hatte am unteren Rand eine kleinere Flanschbreite als die anderen und näherte sich einem Plattenbalkenquerschnitt. Mit dieser Form waren die Zwangmomente infolge Vorspannung bei gleicher Spanngliedführung wie im Referenzbalken CB1-N5B größer und der Querschnitt hatte eine um 25% kleinere Druckzone im Mittelstützbereich. Unter diesen Bedingungen wurde die Rotationsfähigkeit des Querschnitts über dem Mittelauflager verringert und damit eine kleinere Momentenumlagerung erzielt.

Tabelle 2.3: Untersuchte Spannbetonträger von Taerwe et al. [41]

Bezeichnung	Querschnittsform	Anzahl der Stahllitzen	mit oder ohne Verbund	Betonfestigkeitsklasse	volle o. teilw. Vorspannung
CB1-N5B	I	5	m.V	Normal	volle Vorsp.
CB2-N3B	I	3	m.V	Normal	teilw. Vorsp.
CB3-N5U	I	5	o.V	Normal	volle Vorsp.
CB4-M7B	I	7	m.V	Medium	volle Vorsp.
CB5-N5BT	T	5	m.V	Normal	volle Vorsp.
CB6-H9B	I	9	m.V	Hochleistung	volle Vorsp.

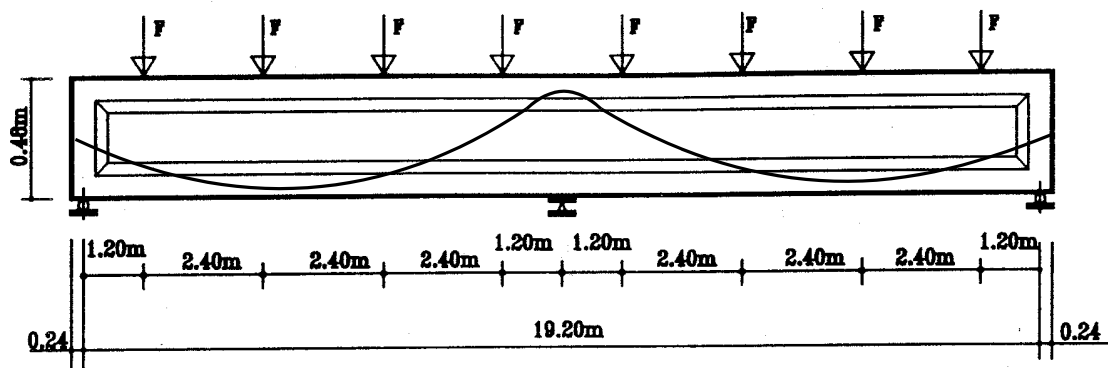


Bild 2.3 Balkengeometrie und -belastungen [41]

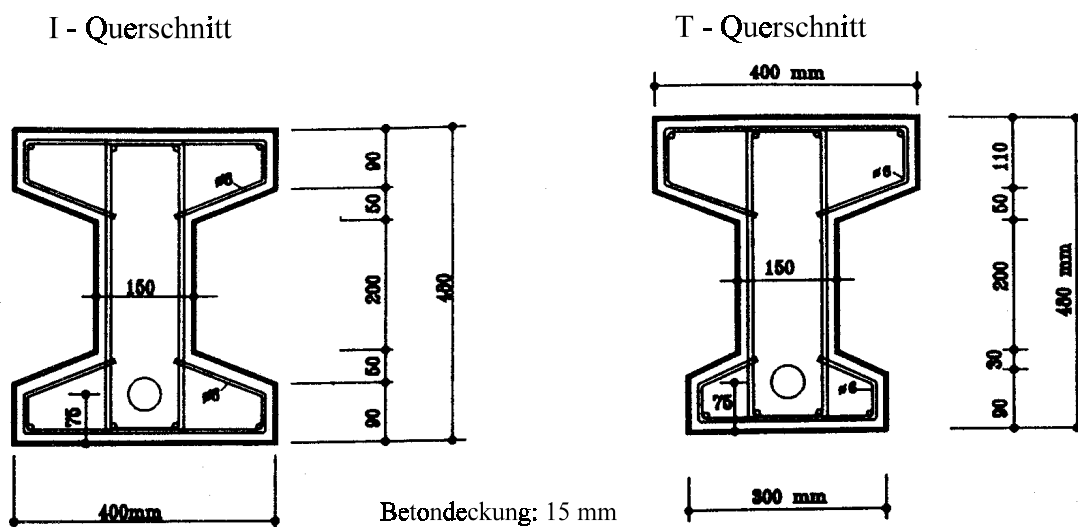


Bild 2.4 Balkenquerschnittsform [41]

Es wurde beobachtet, dass der teilweise vorgespannte Träger CB2-N3B eine um fast 50% kleinere Risslast als der Referenzbalken hatte. Infolge der größerer Vorspannkkräfte und der höheren Zugfestigkeiten des Betons bei den Trägern CB4-M7B und CB6-H9B waren die Risslasten größer. Während alle anderen Träger mit einem allmählich fortschreitenden Betonbruch im unterem Rand des Mittelauflegers nach der Rissbildung versagten, trat ein plötzlicher Schubbruch beim ohne Verbund vorgespannten Träger CB3-N5U unter maximaler Last auf.

Unter Annahme einer vollständigen Momentenumlagerung wurden die rechnerisch maximal aufnehmbaren Lasten ermittelt. Die im Versuch auf den Träger CB1-N5B, CB2-N3B und CB4-M7B aufgebrachten Lasten erreichten bzw. überschritten diese Werte geringfügig. Aufgrund dieser Erkenntnisse zogen die Autoren die Schlussfolgerung, dass in den Balken vollständige Momentenumlagerungen auftraten. Die maximalen Lasten in den Trägern CB3-N5U, CB5-N5BT und CB6-H9B erreichten, wie erwartet, kleinere Werte als die rechnerischen Lasten, und zwar in den Größenordnungen von 96%, 97,6% und 93,4%.

### **2.3.2.2 Analytische und numerische Untersuchungen zur Momentenumlagerung**

Ein Berechnungsverfahren zur Untersuchung der Momentenumlagerung in Spannbetonträgern wurde von *Priestley und Park* [43] basierend auf der Momenten-Krümmungs-Beziehung entwickelt. Diese Beziehung wird für eine bestimmte Segmentlänge des Balkens mit konstant angenommenem Moment ermittelt. Unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen wird der Krümmungsmittelwert des betrachteten Segments berechnet.

Mit Ergebnissen aus den experimentellen Versuchen wurden die Berechnungsergebnisse nach dem vorgeschlagenen Verfahren verglichen. Dabei wurde eine gute Übereinstimmung für die Werte der Durchbiegungen und Biegemomente festgestellt.

Wie im Abschnitt 2.2.2 schon erwähnt, untersuchte *Zimmermann* [28] mit Hilfe eines auf der Momenten-Krümmungsbeziehung basierenden Berechnungsverfahrens das Tragverhalten von Stabtragwerken mit Vorspannung ohne Verbund. Die grafischen Darstellungen der Last-Momenten-Beziehung der untersuchten Spannbetondurchlaufträger zeigten eine deutliche Momentenumlagerung nach der Rissbildung in den Feld- und Mittelstützenbereichen. Bei dem Träger mit rechteckiger Querschnittsform waren die Momente aus Vorspannung unter steigenden äußeren Beanspruchungen relativ unverändert. Demgegenüber nahmen sie bei dem Träger mit dem Plattenbalkenquerschnitt unter steigender Belastung zu. Dieses wurde mit einer anderen Steifigkeitsverteilung als bei den Trägern mit rechteckigem Querschnitt und mit dem größeren Spannabstand von der Stabachse im Feldbereich begründet.

Mit einem nichtlinearen Finite-Elemente-Programm hat *Qian* [44] die Bestimmung für Momentenumlagerungen im Eurocode 2 Teil 1-1 [1] überprüft. Nach Eurocode 2 Teil 1-1 Abschnitt 2.5.3.4 dürfen die maximalen Biegemomente bei der Schnittgrößenberechnung nach der linearen Elastizitätstheorie mit anschließender beschränkter Momentenumlagerung für bestimmte Tragglieder ohne die Überprüfung der Rotationsfähigkeit des kritischen Querschnitts abgemindert werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\delta \geq 0,44 + 1,25 x/d \quad \text{für Betonfestigkeitsklassen bis zu C35/45,}$$

$$\delta \geq 0,56 + 1,25 x/d \quad \text{für Betonfestigkeitsklassen größer als C35/45,}$$

$\delta \geq 0,70$  für hochduktilen Stahl,

$\delta \geq 0,85$  für normalduktilen Stahl,

wobei  $\delta$  Verhältnis des umgelagerten Moments zum Moment vor der Umlagerung ist.

Mit dem Programm wurde die erforderliche plastische Rotation für die verschiedenen Betonfestigkeitsklassen unter vorgegebenem Grad der Momentenumlagerung ermittelt. Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass die oben genannten Bestimmungen von Eurocode 2 gegenüber der Kompatibilitätskontrolle nach der entwickelten Methode auf der unsicheren Seite liegen. Aufgrund dieser Erkenntnisse werden folgende Gleichungen vorgeschlagen:

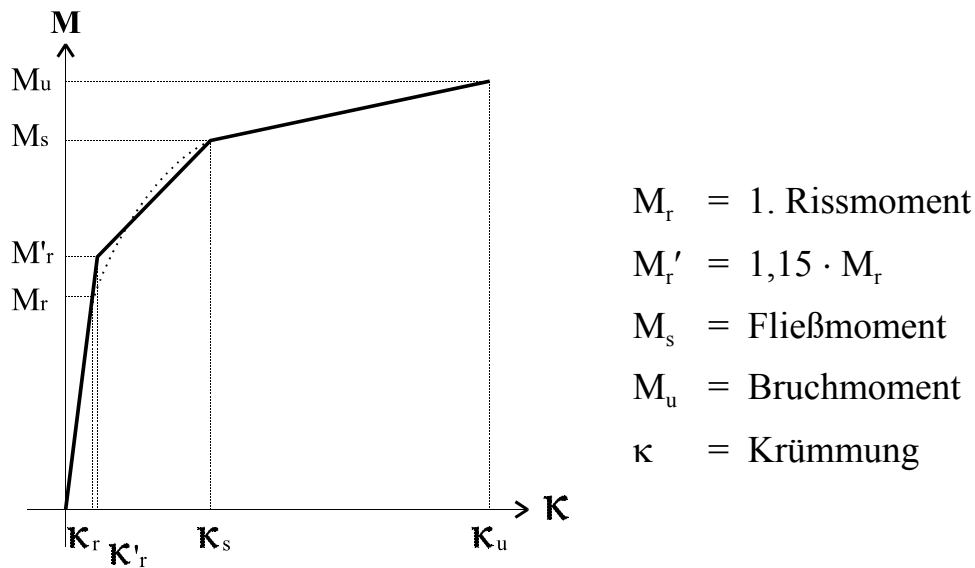
für Betonfestigkeitsklassen  $\leq C35/45$ :  $\delta \geq 0,41 + 1,96 x/d$  mit  $x/d \leq 0,30$ ,

für Betonfestigkeitsklassen  $> C35/45$ :  $\delta \geq 0,53 + 1,96 x/d$  mit  $x/d \leq 0,24$ ,

für alle Fälle darf  $\delta$  nicht kleiner als 0,85 sein.

Mit den empfohlenen Formeln wird die Abminderung des maximalen Moments jedoch auf 15% begrenzt.

Um die Momentenumlagerung in Spannbetontragwerken numerisch zu untersuchen, benutzte *Mo* [45] eine vereinfachte Momenten-Krümmungs-Beziehung des kritischen Querschnitts. Die verwendete Momenten-Krümmungs-Beziehung ist trilinear. Die erste Gerade verbindet den Ursprungspunkt und das um 15% erhöhte Rissmoment ( $M_r$ ). Dieser zweite Punkt bildet zusammen mit dem Fließmoment ( $M_s$ ) und der dazugehörigen Krümmung die zweite Gerade. Die letzte Gerade wird durch das Fließ- und das Bruchmoment ( $M_u$ ) mit jeweils dazugehöriger Krümmung bestimmt (s. Bild 2.5). Mit der vorgeschlagenen Gleichung zur Überprüfung der Verträglichkeitsbedingungen im Spannbeton sowie der trilinearen Momenten-Krümmungs-Beziehung wurde die Entwicklung der Momente in den kritischen Querschnitten ermittelt. Ein Vergleich zwischen den Ergebnissen aus den experimentellen Untersuchungen von *Lin* [36] und denen aus dem vorgeschlagenen Berechnungsverfahren zeigte gute Übereinstimmung.



**Bild 2.5** Trilineare Momenten-Krümmungs-Beziehung nach [45]

Ähnliche trilineare Momenten-Krümmungs-Beziehungen wurden auch von *König et al.* [46] angewendet, um die vorhandene plastische Rotationsfähigkeit kritischer Querschnitte eines Spannbetontragwerkes zu ermitteln. Mit der vorgeschlagenen Berechnungsmethode wurden die Einflüsse der Bruchdehnung des Betons, der Schlankheitsverhältnisse des Trägers und des Vorspanngrades auf plastische Rotationsfähigkeit untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass eine größere Bruchdehnung des Betons sowie größere Schlankheitsverhältnisse des Trägers eine höhere plastische Rotation erzeugen. Demgegenüber ist die plastische Rotation bei höherem Vorspanngrad kleiner. Es wurde festgestellt, dass die Duktilität bzw. größere Verformbarkeit eines Querschnitts nicht immer eine höhere Momentenumlagerung liefert, da hierfür ebenfalls noch andere Voraussetzungen erfüllt werden müssen.



Tabelle 2.4.a: Experimentelle Untersuchungen zur Momentenumlagerung in Spannbetonträgern

Nr.	Autor	Lit.-Nr	Jahr	Vorspanntart	Querschnittsform	Anzahl	Schematische Darstellung	Momentenumlagerung
1	Lin	36	1955	konkordant; mit nachtr. Verbund A=nur Spannstahl B=auch Betonstahl	Rechteck	A=1 B=1		A-teilweise B-vollständige
2	Guyon	37	1955	nicht konkordant mit nachträglichem Verbund zusätzl. Betonstahlbewehrung	Rechteck	4 1		vollständige
3	Macchi	38	1957	nicht konkordant mit nachträglichem Verbund zusätzl. Betonstahlbewehrung	Rechteck	3		teilweise
4	Mallick	39	1962	konkordant mit nachträglichem Verbund zusätzl. Betonstahlbewehrung	Plattenbalken Umg.Plattenbalken Rechteck	1 3 17		meist vollständige
5	Mattock et al.	19	1971	nicht konkordant CB1=mit nachtr. Verbund CU1,CU2=ohne Verbund + zus. Betonstahlbewehrung	Plattenbalken	3		vollständige
6	Moucessian Campbell	42	1988	nicht konkordant mit nachträglichem Verbund zusätzl. Betonstahlbewehrung	Rechteck	2		vollständige
7	Taerwe et al.	41	1995	Volle u. teilweise Vorspannung; mit u. ohne Verbund	I-Balken Plattenbalken	5 1		CB1,2,4=vollst. CB3,5,6=teilw.

**Tabelle 2.4.b:** Numerische Untersuchungen zur Momentenumlagerung in Spannbetonträgern

Nr.	Autor	Lit.-Nr	Jahr	verwendete Ansätze	Untersuchungsergebnisse
1	Priestley & Park	43	1972	Momenten-Krümmungsbeziehungen. Nichtlineare Werkstoffverhalten. Berücksichtigung der Zugversteifung (TSE)	Volle und teilweise Momentenumlagerungen werden beobachtet.
2	Zimmermann	28	1988	Momenten-Krümmungsbeziehungen. Nichtlineare Werkstoffverhalten. Vorspannung ohne Verbund	Momentenumlagerungen nach der Rissbildung werden beobachtet.
3	Qian	44	1992	Nicht lineares FEM-Programm (FEMAS)	Überprüfung der Regelungen in EC2 Teil1 für die Momentenumlagerung ohne Nachweis der Rotationsfähigkeit des Querschnitts.
4	Mo	45	1993	Vereinfachte Momenten-Krümmungsbeziehungen (Trilinear).	Teilweise Momentenumlagerungen werden festgestellt.
5	König et al.	46	1993	Vereinfachte Momenten-Krümmungsbeziehungen (Trilinear).	Größere Verformbarkeit eines Querschnitts liefert nicht immer eine höhere Momentenumlagerung.

## **2.4 Erfassung von Zwangmomenten infolge Vorspannung und Berücksichtigung von Momentenumlagerungen in Normenwerken**

### **2.4.1 Allgemeine Hinweise**

Entsprechend dem Fortschritt in der Forschung im Bereich des nichtlinearen Tragverhaltens von Betonkonstruktionen wurden die Vorschriften zur Behandlung der Zwangmomente infolge Vorspannung und der Einfluss der Momentenumlagerungen in den Normenwerken auf den neuesten Stand der Technik gebracht. Die Erfassung des Sachverhalts erfolgt aber auf unterschiedliche Weise. Während bei neueren Normenwerken [1, 3, 4, 9] die Annahme von Momentenumlagerungen bei Spannbetondurchlaufträgern zugelassen ist, verzichten ältere Normengenerationen [5, 12] darauf.

In den Normenwerken sind sowohl die maximalen Werte zur Begrenzung der zulässigen Momentenumlagerung als auch die angegebenen Parameter, die die Größe der Umlagerung bestimmen, unterschiedlich. Dieser Sachverhalt wird in Tabelle 2.5 aufgelistet. Aufgrund der in den Normenwerken angegebenen Parameter, die die Momentenumlagerung bestimmen, und der unterschiedlichen Sicherheitskonzepte ist ein direkter Vergleich der Vorschriften zur Momentenumlagerung nicht möglich.

Wie im Abschnitt 2.2 gezeigt, sind die Zwangmomente infolge Vorspannung gleich Null, wenn die Träger infolge Fließgelenkbildung in statisch bestimmte Systeme übergehen (d.h., daß hier vollständige Momentenumlagerung stattfindet). Die Vorschriften für die Momentenumlagerung in den Normenwerken empfehlen

bisher allerdings keine Änderung der Werte der Zwangmomente, d.h. die vollständige Größe der Zwangmomente aus der auf linearer Elastizitätstheorie basierenden Berechnung soll angesetzt werden, obwohl eine begrenzte Momentenumlagerung zugelassen wird. Unterschiedliche Sicherheitsbeiwerte für Schnittgrößen aus Vorspannung, z.B.  $\gamma_p = 0,9$  für günstige und  $\gamma_p = 1,2$  für ungünstige Wirkung nach Eurocode 2 Teil 1 [1], beruhen nicht auf der Änderung der Schnittgrößen aus Vorspannung infolge Steifigkeitsänderung des Tragwerks, sondern dienen dazu, die Unsicherheiten in der Abschätzung der Vordehnung abzudecken [34].

**Tabelle 2.5:** Vorschriften zur Momentenumlagerung in den Normenwerken

Nr.	Normenwerk	Land	Ausgabe	Lit.-Nr.	Momentenumlagerung bestimmende Parameter	zulässige Momentenumlagerung
1	DIN 4227 Teil 1	Deutschland	1988	5	-	-
2	DIN 4227 Teil 2	Deutschland	1988	6	-	15%
3	DIN 1045 - 1	Deutschland	2001	3	$x/d, f_t/f_y, f_c, \epsilon_{su}$	$\leq 30\%$
4	Eurocode 2 T1-1	Europa	1992	1	$x/d, f_t/f_y, f_c, \epsilon_{su}$	$\leq 30\%$
	EC 2 T1-1 (2 <sup>nd</sup> Draf)	Europa	2001		$x/d, f_t/f_y, \epsilon_{cu}, \epsilon_{su}$	$\leq 30\%$
5	CEB MC 1990	-	1990	9	$x/d, f_t/f_y, f_c, \epsilon_{su}$	$\leq 25\%$
6	ACI 318-99	USA	1999	4	$\omega, \omega', \omega_p, d_s, d_p, f_c$	$\leq 20\%$
7	AASHTO	USA	1983	12	-	-

Hinweise:  $x/d$  = Verhältnis der Höhe der Druckzone im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach der Um-  
lagerung zu der Nutzhöhe des Querschnitts ( $\equiv$  Bezogene Druckzonenhöhe)  
 $f_t/f_y$  = Verhältnis der Zugfestigkeit zu der Streckgrenze des Betonstahls  
 $f_c$  = Druckfestigkeit des Betons  
 $\omega = A_s/bd \cdot f_y/f_c$   $\epsilon_{su}$  = Stahldéhnung bei höchster Zugbeanspruchung  
 $\omega' = A_s'/bd \cdot f_y/f_c$   $\epsilon_{cu}$  = Bruchstauchung des Betons  
 $\omega_p = A_p/bd_p \cdot f_p/f_c$   
 $d_s$  = Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Bewehrung und dem Druckrand  
 $d_p$  = Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Spanngliedes und dem Druckrand

Außerdem gibt es bei der Formulierung der Momentenumlagerung auch keine Bedingungen zur direkten Berücksichtigung des Gebrauchszustandes. Eine zu hoch angenommene Momentenumlagerung verletzt gegebenenfalls die Bedingungen des Gebrauchszustandes (z.B.: Spannungs-, Rissbreiten- und Verformungsbegrenzungen). Deshalb sollten die Vorschriften verfeinert werden, wobei die Bedingungen des Gebrauchszustandes bei der Formulierung der Momentenumlagerung berücksichtigt und die eingesetzten Werte des Zwangmoments im Grenzzustand der Tragfähigkeit unter Beachtung des Grades der Momentenumlagerung berechnet werden müssen.

#### **2.4.2 DIN 4227 Teil 1 [5] und DIN 4227 Teil 2 [6]**

Die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung sind bei voll bzw. beschränkt vorgespannten Tragwerken nach DIN 4227 Teil 1 [5] mit dem Beiwert  $\gamma_p = 1,0$  im Bruchzustand zu berücksichtigen. Für teilweise Vorspannung nach DIN 4227 Teil 2 [6] beträgt der Beiwert  $\gamma_p = 1,0$  für günstige und  $\gamma_p = 1,5$  für ungünstige Wirkung der Zwangsschnittgrößen.

Die Momentenumlagerungen sind in DIN 4227 Teil 1 [5] nicht ausdrücklich geregelt. Nach Abschnitt 11.1.(4) dieser Norm dürfen die Schnittgrößen im rechnerischen Bruchzustand aber auch unter Berücksichtigung der Steifigkeitsverhältnisse im Zustand II ermittelt werden. Zur Ermittlung der Schnittgrößen bei teilweise vorgespannten Stahlbetontragwerken nach DIN 4227 Teil 2 Abschnitt 7.2 gelten die Verfahren nach DIN 1045 [8] Abschnitt 15, die auf der Elastizitätstheorie beruhen. Bei Durchlaufträgern, die die vorgeschriebenen

Voraussetzungen erfüllen (üblicher Hochbau, Stützweite bis 12 m und gleichbleibende Betonquerschnitte), dürfen nach DIN 1045 [8] die Stützmomente infolge von Lasten bis zu 15% ihrer Höchstwerte vermindert oder vergrößert werden, wobei die Gleichgewichtsbedingungen bei der Bestimmung der zugehörigen Feldmomente eingehalten werden müssen. Bei der Ermittlung der Bemessungsmomente für teilweise Vorspannung im Bruchzustand unter Berücksichtigung der Momentenumlagerung werden die Zwangmomente also nicht mit umgelagert.

### **2.4.3 CEB-FIP Model Code 1990 [9]**

Der CEB-FIP Model Code ist eine moderne und fortschrittliche Mustervorschrift, die den neuesten Stand der Forschung enthält. Sie beeinflusst nachhaltig in unterschiedlichem Grad die Stahlbeton- und Spannbetonnormen vieler Länder [47]. In der letzten Ausgabe 1990 dieser Vorschrift [9] werden folgende vier Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Schnittgrößen eines Betontragwerkes vorgestellt:

- nichtlineare Berechnungsmethode,
- lineare Berechnungsmethode,
- lineare Berechnungsmethode mit beschränkten Umlagerungen,
- plastische Berechnungsmethode.

Bei der Berechnung nach dem nichtlinearen Verfahren wird das physikalische Werkstoffverhalten realistischer dargestellt und entspricht den Annahmen zur Bemessung der Querschnitte. Nach CEB-FIP MC90 [9] soll dieses Verfahren als Referenz für andere weniger genaue Berechnungsverfahren dienen.

In den Berechnungen sowie Nachweisführungen des Grenzzustandes der Tragfähigkeit soll die statisch unbestimmte Wirkung aus Vorspannung nach CEB-FIP MC90 [9] mit unterschiedlichen Sicherheitsbeiwerten berücksichtigt werden. Für günstige Wirkungen, d.h. die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung haben ein den Schnittgrößen aus äußeren Lasten entgegengesetztes Vorzeichen, beträgt der Beiwert  $\gamma_p = 1,0$ . Demgegenüber ist  $\gamma_p = 1,1$  für ungünstige Wirkung vorgeschrieben. Während der Beiwert  $\gamma_p = 1,0$  bezogen auf den unteren charakteristischen Wert der Vorspannkraft  $P_{k,inf}$  eingeführt werden soll, bezieht sich die Anwendung des Beiwerte  $\gamma_p = 1,1$  auf den oberen charakteristischen Wert der Vorspannkraft  $P_{k,sup}$ .

Setzt man für ein Tragwerk, in dem hochduktiler Stähle verwendet werden, die lineare Berechnungsmethode mit anschließenden Umlagerungen ein, dürfen die maximalen Momente aus dem linearen Berechnungsverfahren abgemindert werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Momente in anderen Querschnitten gleichzeitig erhöht werden müssen, um die statischen Gleichgewichtsbedingungen einzuhalten. Für gerade Balken in der horizontalen Lage soll der Abminderungsfaktor ( $\delta$ ) die Bedingungen nach Tabelle 2.6 erfüllen. In der Tabelle ist  $x/d$  die relative Höhe der neutralen Linie des kritischen Querschnitts. Nach dieser Mustervorschrift wird also die Abminderung der höchsten Momente bei der Momentenumlagerung in den Durchlaufträgern auf maximal 25% begrenzt.

**Tabelle 2.6:** Abminderungsfaktor  $\delta$  nach CEB-FIP MC90 [9]

Stahlsorten	Betonfestigkeit bzw. Tragwerksart	Abminderungsfaktor ( $\delta$ )
Hochduktiler Betonstahl Spannstahl bei Vorspannung mit Verbund	C12 bis C35	$\delta \geq 0,44 + 1,25 \cdot x/d$
Hochduktiler Betonstahl Spannstahl bei Vorspannung mit Verbund	C40 bis C60	$\delta \geq 0,56 + 1,25 \cdot x/d$
Hochduktiler Betonstahl Spannstahl bei Vorspannung mit Verbund	Durchlaufträger Unverschiebliche Rahmen	$0,75 \leq \delta \leq 1,00$
Hochduktiler Betonstahl Spannstahl bei Vorspannung mit Verbund	Verschiebliche Rahmen	$0,90 \leq \delta \leq 1,00$
Spannstahl bei Vorspannung ohne Verbund	C12 bis C60	$\delta \geq 0,75 + 1,25 \cdot x/d$ $0,90 \leq \delta \leq 1,00$

#### 2.4.4 DIN V ENV 1992 Teil 1-1 (Eurocode 2 Teil 1-1) [1]

Viele Bestimmungen des CEB Model Codes 1990 [9] werden im Eurocode 2 Teil 1 [1] übernommen. Wie auch im CEB MC90 [9] vorgeschrieben, dürfen folgende Berechnungsmethoden nach Eurocode 2 Teil 1 [1], je nach untersuchtem Grenzzustand und Art des Bauteils, für die Schnittgrößenermittlung verwendet werden:

- (1) Lineares Berechnungsverfahren, das auf der Elastizitätstheorie basiert.
- (2) Lineares Berechnungsverfahren mit anschließender begrenzter Momentenumlagerung.
- (3) Nichtlineare Berechnungsverfahren.
- (4) Verfahren nach der Plastizitätstheorie.

Die Berechnungsmethoden (2) bis (4) sind grundsätzlich gleichwertig, wobei das nichtlineare Werkstoffverhalten von Stahlbeton und Spannbeton konsequent



berücksichtigt wird. Sie unterscheiden sich in erster Linie im Ausnutzungsgrad des Umlagerungsvermögens des Tragwerkes.

Die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung werden nach EC2 Teil 1 [1] in Grenzzuständen der Tragfähigkeit mit dem Sicherheitsbeiwert  $\gamma_p = 0,9$  für günstige oder  $\gamma_p = 1,2$  für ungünstige Fälle berücksichtigt. Nach der Anwendungsrichtlinie [2] bzw. den Bemessungshilfsmitteln [13] zu EC2 Teil 1 ist bei günstiger bzw. ungünstiger Wirkung auch die Vereinfachung  $\gamma_p = 1,0$  zulässig. Diese Vereinfachung gilt sowohl für die Schnittgrößenermittlung im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach dem linearen Berechnungsverfahren, wobei die Vorspannkraft als Bemessungswert  $P_d$  anzusetzen ist, als auch für die Querschnittsbemessungen, bei denen folgende Bedingungen eingehalten sind:

- Im Grenzzustand der Tragfähigkeit dürfen nicht mehr als 25% des gesamten Spannstahlquerschnitts in der Druckzone liegen.
- Die Spannung im Spannstahl, der der gezogenen Querschnittsseite am nächsten liegt, überschreitet  $(f_{p0,1k} / \gamma_s)$ .

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, sollte für alle Spannglieder im betrachteten Querschnitt der Wert  $\gamma_p = 0,9$  verwendet werden.

Im Hinblick auf die Berücksichtigung der statisch unbestimmten Wirkung der Vorspannung bei der Querschnittsbemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit schreibt EC2 folgende Regelungen vor:

- Wenn die Schnittgrößen auf der Grundlage der Plastizitätstheorie ermittelt werden, wobei eine hinreichende Duktilität vorausgesetzt wird, dürfen nach EC2 Teil 1 Anhang 2 Abschnitt A2.5.2 die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung vernachlässigt werden.
- Werden die Schnittgrößen nach einem der Verfahren (1) bis (3) ermittelt,

sind die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung zu berücksichtigen. Weil diese Wirkungen empfindlich gegenüber der Streuung der Vorspannkraft sind [47], sollten sie mit ihrem charakteristischen Wert  $P_k$  und dem Beiwert  $\gamma_p = 1,0$  eingesetzt werden [1, 13, 34].

Durch die oben aufgelisteten Berechnungsverfahren (2) bis (4) ist eine größere Schnittgrößenumlagerung im Grenzzustand der Tragfähigkeit in Abhängigkeit der Rotationsfähigkeit des Tragwerkes sowie der notwendigen Duktilität zulässig als bei anderen Normenwerken. Nach Berechnungsverfahren (2) werden die extremalen Stützmomente mit einem Beiwert  $\delta$  abgemindert. Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen müssen die Feldmomente gleichzeitig entsprechend erhöht werden. Die für die Umlagerung erforderliche Rotationsfähigkeit ist allerdings zu überprüfen. Auf einen Nachweis der Rotationsfähigkeit im maßgebenden Querschnitt darf bei folgenden Traggliedern verzichtet werden, wenn sie die Bedingungen der Tabelle 2.7 erfüllen:

- Durchlaufträger mit einem Verhältnis der Spannweiten von benachbarten Feldern größer als 0,5 und kleiner als 2,
- Riegel von unverschieblichen, nicht vorgespannten Rahmen und Bauteilen, die vorwiegend auf Biegung beansprucht werden.

**Tabelle 2.7:** Abminderungsfaktor  $\delta$  nach Eurocode 2 Teil 1 [1]

Betonfestigkeitsklasse bzw. Stahlsorte	$\delta$
C12/15 bis C35/45 C40/50 bis C50/60	$\delta \geq 0,44 + 1,25 \cdot x/d$ $\delta \geq 0,56 + 1,25 \cdot x/d$
Hochduktiler Stahl Normalduktiler Stahl	$\delta \geq 0,70$ $\delta \geq 0,85$

In Tabelle 2.7 ist  $x/d$  das Verhältnis zwischen Höhe der Druckzone im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach der Umlagerung und der Nutzhöhe des Querschnitts. Zur Berechnung von  $\delta$  ist also eine Iteration erforderlich. Spannglieder mit sofortigem Verbund werden als normalduktiler und Spannglieder mit nachträglichem Verbund als hochduktiler Stahl angenommen. Die Momente, bei denen eine Umlagerung angenommen wird, sind bei einer linearen Berechnung mit anschließender Umlagerung unter Berücksichtigung des statisch unbestimmten Anteils der Vorspannung zu ermitteln.

Während DIN 1045 [8] eine Momentenumlagerung von Stütz- zum Feldbereich sowie vom Feld- zum Stützbereich zulässt, enthält Eurocode 2 Teil 1 [1] dazu keine Angaben. Die Abminderungsfaktoren  $\delta$  in der Tabelle 2.7 werden unter Annahme einer Abminderung des Stützmoments hergeleitet [48]. Deshalb reichen diese nach *Litzner* [47] nicht aus, um die Rotationsfähigkeit im Fall einer Umlagerung von den Feldern auf die Stützquerschnitte zu beurteilen. Nach *Grasser et al.* [49] sind sie hingegen für alle kritischen Querschnitte anwendbar, also in der Regel sowohl für die Stützmomente als auch für die maximalen Feldmomente.

Im Eurocode 2 Teil 1-1 2<sup>nd</sup> Draft (Ausgabe Januar 2001) werden die Regelungen dieser Sachverhalte geringfügig geändert (s. Tabelle 2.8).

**Tabelle 2.8:** Änderungen nach Eurocode 2 Teil 1-1 2<sup>nd</sup> Draft (Ausgabe Januar 2001)

	EC2 Teil 1-1 (1992)	EC2 Teil 1-1 2 <sup>nd</sup> Draft (2001)
Sicherheitsbeiwerte zur Berücksichtigung der statisch unbestimmten Wirkung aus Vorspannung im Grenzzustand der Tragfähigkeit: - für günstige Wirkung - für ungünstige Wirkung	$\gamma_p = 0,9$ $\gamma_p = 1,2$	$\gamma_p = 1,0$ $\gamma_p = 1,3$
Behandlung der statisch unbestimmten Wirkung aus Vorspannung bei der Querschnittsbemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit bei Schnittgrößenermittlung nach:  - dem linear elastischen Verfahren  - der Plastizitätstheorie  - dem nichtlinearen Verfahren	berücksichtigt  darf vernachlässigt  berücksichtigt	berücksichtigt  als zusätzliche plastische Rotation berücksichtigt  als zusätzliche plastische Rotation berücksichtigt
Abminderungsfaktor $\delta$ bei Momentenumlagerung ohne rechnerischer Nachweis der Rotationsfähigkeit  - für Beton C12/15 bis C35/45 - für Beton C40/50 bis C50/60  - für hochduktilen Stahl - für normalduktilen Stahl	$\delta \geq 0,44 + 1,25 \cdot x/d$ $\delta \geq 0,56 + 1,25 \cdot x/d$  $\delta \geq 0,70$ $\delta \geq 0,85$	Für alle Betonfestigkeit (bis C90/105) gilt: $\delta \geq 0,4 + \left( 0,6 + \frac{0,0014}{\varepsilon_{cu}} \right) \cdot \frac{x}{d}$  $\delta \geq 0,70$ $\delta \geq 0,80$

#### 2.4.5 ACI 318-99 [4]

ACI 318-99 [4] enthält unterschiedliche Bestimmungen für die Momentenumlagerung bei Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. Unter gleichen Bedin-

gungen ist der Umlagerungsgrad des Spannbetontragwerks kleiner als der des Stahlbetontragwerks. Die Stützmente aus linear elastischer Schnittgrößenberechnung dürfen für Spannbetontragwerke nach ACI 318-99 [4] mit folgendem Umlagerungsfaktor vergrößert oder verkleinert werden (Gl. 2.1):

$$\delta = \left( 1 - \frac{\omega_p + \frac{d}{d_p} (\omega - \omega')}{0,36 \cdot \beta_1} \right) \cdot 20\% \quad (2.1)$$

In dieser Gleichung sind  $\omega_p$ ,  $\omega$  und  $\omega'$  die mechanischen Bewehrungsverhältnisse von Spannstahl, Betonstahl im Zugbereich bzw. Betonstahl im Druckbereich.  $d_p$  und  $d_s$  stellen die Abstände des Spannstahls bzw. Betonstahls zum Druckrand dar. Die Betonfestigkeit wird durch den Beiwert  $\beta_1$  berücksichtigt. Die Momentenumlagerung darf durchgeführt werden, wenn der Wert von  $\omega_p$  bzw.  $(\omega_p + d/d_p \cdot (\omega - \omega'))$  bzw.  $(\omega_{pw} + d/d_p \cdot (\omega_w - \omega_w'))$  für den betrachteten Querschnitt nicht größer ist als  $0,24 \beta_1$ .

Nach ACI 318-1989 sowie den vorherigen Ausgaben sind die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung mit dem Sicherheitsbeiwert  $\gamma_p = 1,0$  im Bruchzustand zu berücksichtigen. Zur Ermittlung der Bemessungsmomente wird dieser Schnittgrößenanteil zu den Momenten infolge der äußeren Lasten addiert. Die Momente infolge der äußeren Beanspruchungen müssen vorher mit den entsprechenden Sicherheitsbeiwerten multipliziert und dürfen anschließend mit oben genanntem Faktor umgelagert werden. In dieser Bestimmung der Momentenumlagerung werden die Zwangsschnittgrößen infolge Vorspannung offenbar nicht mit umgelagert. Wie im Abschnitt 2.2.2 schon erwähnt, zeigen *Wyche et al.* in [29], dass diese Regelung unlogisch ist. Durch ihre analytische Studie wird

nachgewiesen, dass nach dem ACI 318-1989 der Momentenumlagerungsgrad eines Querschnittes von seinen Zwangsmomenten infolge Vorspannung abhängig ist. Unterschiedliche Werte der Zwangsmomente liefern unterschiedliche Momentenumlagerungen, obwohl die Querschnittsgeometrie und das Werkstoffverhalten gleich bleiben. Ab der Ausgabe ACI 318-1995 wird die Regelung zu diesem Sachverhalt verbessert, indem die Momentenumlagerung auf die Summe der Biegemomente aus den äußeren Beanspruchungen und den unbestimmten Wirkungen der Vorspannung vorgenommen wird.

#### **2.4.6 DIN 1045-1 [3]**

DIN 1045-1 [3] lässt die im CEB MC 90 [9] und im Eurocode 2 Teil 1 [1] zur Schnittgrößenermittlung benannten Verfahren auch zu. Außerdem umfasst diese neue Normengeneration die Anwendung von unbewehrtem Beton, Stahlbeton und Spannbeton sowohl mit Leichtbeton als auch mit Normalbeton bis zur Festigkeitsklasse C 100/115.

Im Gegensatz zu beiden Normen ([1] und [9]) , in denen die Mittelwerte der Materialeigenschaften beim nichtlinearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung und die Bemessungswerte bei der anschließenden Querschnittsbemessung verwendet werden, geht man in DIN 1045-1 [3] vom rechnerischen Mittelwert ( $f_R$ ) der Baustoffeigenschaften sowohl für die Schnittgrößenermittlung als auch für die anschließende Querschnittsbemessung aus. Hiernach werden die Stahlfestigkeiten rechnerisch erhöht und die Betonfestigkeiten rechnerisch reduziert (s. Tabelle 2.9).

**Tabelle 2.9:** Rechnerische Mittelwerte der Baustoffeigenschaften nach DIN 1045-1 [3]

Baustoffeigenschaften	rechnerischer Mittelwert
Streckgrenze des Betonstahls	$f_{yR} = 1,1 \cdot f_{yk}$
Zugfestigkeit des hochduktilen Betonstahls	$f_{tR} = 1,08 \cdot f_{yR}$
Zugfestigkeit des normalduktilen Betonstahls	$f_{tR} = 1,05 \cdot f_{yR}$
Streckgrenze (0,1 %-Dehngrenze) des Spannstahls	$f_{p0,1R} = 1,1 \cdot f_{p0,1k}$
Zugfestigkeit des Spannstahls	$f_{pR} = 1,1 \cdot f_{pk}$
Druckfestigkeit des Betons (von C12/15 bis C50/60)	$f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck}$
Druckfestigkeit des Betons (von C55/67 bis C100/115)	$f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} / \gamma'_c$

Der Bemessungswert des Tragwiderstands  $R_d$  wird ebenso mit diesen rechnerischen Mittelwerten der Baustoffeigenschaften ermittelt:

$$R_d = \frac{1}{\gamma_R} \cdot R(f_{cR}; f_{yR}; f_{tR}; f_{p0,1R}; f_{pR})$$

Dabei ist  $\gamma_R$  der Teilsicherheitsbeiwert für den Systemwiderstand:

$\gamma_R = 1,3$  für ständige und vorübergehende Bemessungssituationen und

$\gamma_R = 1,1$  für außergewöhnliche Bemessungssituationen.

Die Einwirkungen infolge Vorspannung werden nach DIN 1045-1 [3] mit dem Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_p = 1,0$  sowohl für günstige als auch für ungünstige Situationen berücksichtigt. Dieser Wert ist identisch mit dem Wert aus der Richtlinie zur Anwendung von Eurocode 2 [2].

Bei dem elastisch-linearen Berechnungsverfahren mit anschließender begrenzter Momentenumlagerung werden die plastischen Verformungsfähigkeiten von Betonbauteilen bei der Schnittgrößenermittlung in gewissen Grenzen berücksich-

tigt. Das Verfahren darf aber nur für die Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit verwendet werden. Zur Sicherstellung der für die Momentenumlagerung erforderlichen Rotationsfähigkeit der Querschnitte ist

- entweder ein rechnerischer Nachweis der Rotationsfähigkeit durchzuführen
- oder für bestimmte Tragwerksarten eine Begrenzung der bezogenen Druckzonenhöhe  $x/d$  im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach Tabelle 2.10 einzuhalten.

**Tabelle 2.10:** Abminderungsfaktor  $\delta$  nach DIN 1045-1 [3]

Stahlsorten	Betonfestigkeitsklassen	
	bis C50/60	ab C55/67 und Leichtbeton
Hochduktiler Betonstahl und Spannstahl bei Vorspannung mit nachträglichem bzw. ohne Verbund	$\delta \geq 0,64 + 0,8 (x_d/d)$ $\delta \geq 0,70$	$\delta \geq 0,72 + 0,8 (x_d/d)$ $\delta \geq 0,80$
Normalduktiler Betonstahl und Spannstahl bei Vorspannung mit sofortigem Verbund	$\delta \geq 0,64 + 0,8 (x_d/d)$ $\delta \geq 0,85$	$\delta = 1,0$ (keine Momentenumlagerung zugelassen)

Die Begrenzung der  $x_d/d$  - Werte in der Tabelle 2.9 gilt nur für folgende Tragwerksarten:

- Durchlaufträger mit einem Stützweitenverhältnis benachbarter Felder  
 $0,5 < l_{\text{eff},1} / l_{\text{eff},2} < 2,0$ ,
- Riegel von unverschieblichen Rahmen,
- sonstige vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile.

Im Allgemeinen darf keine Umlagerung bei verschieblichen Rahmen und bei unbewehrten Betonkonstruktionen vorgenommen werden. Die zulässige Momentenumlagerung für die Eckknoten unverschieblicher Rahmen ist auf  $\delta = 0,90$  begrenzt.



## 2.5 Zusammenfassung

Die Überprüfung der Literatur zum Stand der Technik dieser Thematik zeigt unterschiedliche Meinungen. Die bekannten Untersuchungen zur Entwicklung der Zwangsmomente infolge Vorspannung liefern unterschiedliche Ergebnisse. Bei Steigerung der äußeren Beanspruchungen über die Gebrauchslast hinaus bis zur rechnerischen Bruchlast nehmen die Zwangsmomente ab oder zu, oder sie bleiben unverändert. Wenn die statisch unbestimmt gelagerten Spannbetontragwerke infolge Plastifizierung in statisch bestimmte Systeme übergehen, treten keine Zwangsmomente mehr auf.

Eine unterschiedliche Behandlung der statisch unbestimmten Wirkung aus Vorspannung zeigen auch die zur Zeit gültigen Normenwerke. Dieser Schnittgrößenanteil wird in den meisten Normen mit einem Sicherheitsfaktor  $\gamma_p = 1,0$  im Grenzzustand der Tragfähigkeit berücksichtigt (s. Tabelle 2.11).

Die neue Normengeneration [1, 3, 4] lässt eine Momentenumlagerung für Spannbetontragwerke zu, wobei die Zwangsmomente infolge Vorspannung mit umgelagert werden. Sie berücksichtigen hiermit den Einfluss des nichtlinearen Tragwerkverhaltens auf die Zwangsmomente infolge Vorspannung. Unterschiedliche Sicherheitsbeiwerte für die Vorspannkraft  $\gamma_p$  sind jedoch keine Sicherheitsfaktoren für die Veränderung der Zwangsmomente, sondern dienen zum Abdecken der Ungenauigkeiten bei der Abschätzung der Vordehnung bzw. der Anfangswerte der Vorspannkraft.

**Tabelle 2.11:** Vergleich der Sicherheitsbeiwerte  $\gamma_p$  zur Berücksichtigung der statisch unbestimmten Wirkung aus Vorspannung im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Normen	Ausgabe	Sicherheitsbeiwerte $\gamma_p$ für	
		günstige Wirkung	ungünstige Wirkung
DIN 4227 Teil 1	1988	1,0	1,0
CEB MC 90	1990	1,0 *)	1,1 **)
EC 2 Teil 1-1	1992	0,9	1,2
NAD zu EC2	1992	1,0	1,0
ACI 318	1999	1,0	1,0
EC 2 Teil 1 2 <sup>nd</sup> Draft	2001	1,0	1,3
DIN 1045-1	2001	1,0	1,0

\*) bezogen auf  $P_{k,inf}$

\*\*\*) bezogen auf  $P_{k,sup}$

Ebenso unterschiedlich sind die Ergebnisse aus den Untersuchungen zur Momentenumlagerung. Die erreichte Momentenumlagerung ist entweder vollständig, teilweise oder sogar Null. Vollständige Momentenumlagerungen wurden in mehreren Versuchen beobachtet, wobei die Bedingungen zum Erreichen einer vollständigen Momentenumlagerung in diesen Laborversuchen meistens günstiger als in der Praxis waren. Die Versuchsanordnungen haben normalerweise kleinere Spannweiten-Querschnittshöhen-Verhältnisse als die in der Praxis gebräuchlichen Verhältnisse von mehr als 20. Außerdem hatten die Träger meistens eine rechteckige Querschnittsform und wurden mit konzentrierten Lasten beansprucht. Nach *Morrice & Lewis* [50] ist die Wahrscheinlichkeit gering, dass eine vollständige Momentenumlagerung bei praxisüblich verwendeten Spannbetonträgern mit Plattenbalkenquerschnitten und mit gleichmäßig verteilten Lasten erreicht werden kann. Durch nichtlineare analytische sowie numerische Untersuchungen können die Beschränkungen der Laborversuche, wie z. B. die von der Praxis abweichenden Merkmale, überwunden werden.

Ebenfalls unterschiedlich ist die Berücksichtigung der Momentenumlagerung in den Normenwerken. Während beim EC2 Teil 1-1 [1], bei der DIN 1045-1 [3] und beim ACI 318-99 [4] die Momentenumlagerung für Spannbetontragwerke zugelassen ist, enthält die ältere Normengeneration wie z. B. die DIN 4227 Teil 1 [5] und der AASHTO [12] keine Bestimmungen für die Momentenumlagerung. Der Grad der Momentenumlagerung kann nach den gültigen Vorschriften an einem kritischen Querschnitt bestimmt werden. Der Umlagerungsgrad ist allerdings in jeder Norm von unterschiedlichen Parametern abhängig.

Weitere experimentelle sowie nichtlineare analytische bzw. numerische Untersuchungen sind daher für Spannbetondurchlaufträger notwendig, um mögliche Veränderungen der Zwangmomente infolge Vorspannung im Grenzzustand der Tragfähigkeit und die Momentenumlagerung besser erfassen zu können.

## 3 Numerisches Modell

### 3.1 Allgemeines

Die Untersuchung des nichtlinearen Tragverhaltens von Spannbetonträgern ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit, wobei die Entwicklung des Zwangmoments infolge Vorspannung und der Momentenumlagerung im nichtlinearen Bereich als Schwerpunkte betrachtet werden. Um das Verhalten eines schlanken Spannbetonträgers wirklichkeitsnah ermitteln zu können, müssen sowohl physikalisch als auch geometrisch nichtlineare Einflüsse berücksichtigt werden.

Unter Berücksichtigung der nichtlinearen Spannungs-Dehnungsbeziehungen der verwendeten Werkstoffe, des Aufreißens des Querschnittes sowie des zeitabhängigen Werkstoffverhaltens (Schwinden und Kriechen des Betons, Relaxation des Spannstahles) werden die physikalisch nichtlinearen Einflüsse erfasst. In dieser Arbeit wird der nichtlineare Einfluss infolge Rissbildung in der Form eines verschmierten Modells berücksichtigt. Das Modell wird durch eine Modifizierung der Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betonstahles im Computerprogramm implementiert. Der Einfluss des zeitabhängigen Werkstoffverhaltens auf die Vorspannkräfte wird nach den Vorschriften des CEB MC90 [9] ermittelt.

Unter dem Begriff der geometrischen Nichtlinearität ist eine Berücksichtigung der Auswirkungen von Nichtlinearitäten auf die Verträglichkeitsbedingungen zu verstehen. Diese Bedingungen verknüpfen die Verzerrungen mit den Verschiebungen eines Tragwerkes. Bei der Berechnung nach der Theorie 1. Ordnung wird die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen im unverformten Anfangszustand ermittelt. Die verwendeten Verträglichkeitsbedingungen bleiben

bei der Ermittlung der Steifigkeitsmatrix linear. Ebenso werden bei der Berechnung nach der Theorie 2. Ordnung die linearen Verträglichkeitsbeziehungen verwendet. Im Gegensatz zur Theorie 1. Ordnung wird hier die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen im verformten Zustand durchgeführt. Bei der Berechnung unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten kann die Ermittlung der Zustandsgrößen entweder auf den unverformten Anfangszustand oder auf den verformten letzten Zustand bezogen werden. Bei dem ersten Fall spricht man von der totalen Lagrangeschen Formulierung, und der zweite Fall wird als umgeformte Lagrangesche Formulierung bezeichnet.

## 3.2 Nichtlineare Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen

### 3.2.1 Verschiebung eines Punktes

Bei ebenen Problemen hat jeder Punkt eines Stabkontinuums zwei Freiheitsgrade, und zwar die Verschiebungen  $u(x,y)$  und  $v(x,y)$ . Das dreidimensionale Stabkontinuum wird üblicherweise in der Stabtheorie durch eine mit Querschnitten belegte Stabachse ersetzt. Die Stabquerschnitte sind im unbelasteten Anfangszustand eben und stehen senkrecht zur unverformten Stabachse. Die Verschiebungen der Punkte eines Querschnittes sollen zunächst durch die Verschiebungsgrößen des zugehörigen Punktes der Stabachse ausgedrückt werden. Hierzu wird die erste Bernoulli-Hypothese verwendet, die besagt, dass die Querschnitte auch nach der Verformung des Stabes eben sind (Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte). Damit ergibt sich für die Verdrehung des Stabquerschnitts zunächst (s. Bild 3.1):

$$\theta(x,y) = \theta(x) \tag{3.1}$$

Hier sind die Verformungen infolge Biegung und Schub zusammengefasst, also:

$$\theta(x) = \beta(x) + \gamma(x) \quad (3.2)$$

wobei:  $\beta(x)$  die Verdrehung des Querschnitts infolge des Biegemoments ist, und

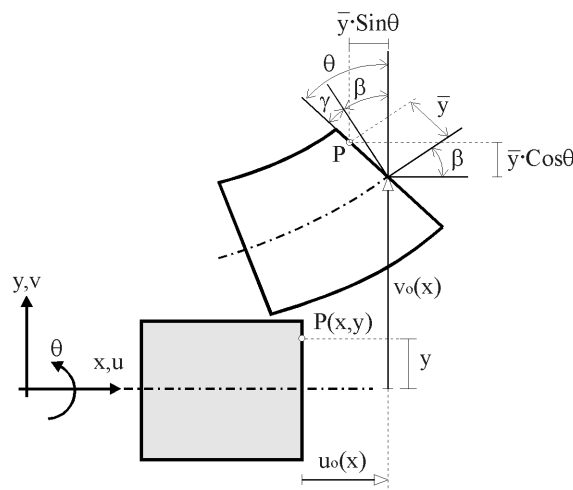
$\gamma(x)$  die über den Querschnitt konstant angenommene Schubverzerrung.

Außerdem wird angenommen, dass die Querschnittsform bei der Verformung unverändert bleibt, damit  $y = \bar{y}$ .

Für die Verschiebungen eines Punktes  $P(x,y)$  gilt:

$$\text{in x-Richtung: } u_{P(x,y)} = u_0(x) - y \cdot \sin \theta(x) \quad (3.3)$$

$$\text{in y-Richtung: } v_{P(x,y)} = v_0(x) - y + y \cdot \cos \theta(x) = v_0(x) + y \cdot [\cos \theta(x) - 1] \quad (3.4)$$



**Bild 3.1** Verschiebung eines Punktes

Nach der zweiten Bernoulli-Hypothese liegen die Querschnitte auch nach der Verformung senkrecht zur verformten Stabachse (Normalenhypothese). Diese Hypothese beruht auf der Vernachlässigung der Schubverzerrungen ( $\gamma$ ), deren Einfluss auf die Durchbiegung schlanker Balken, zu denen in der Regel auch die Spannbetonträger zählen, erfahrungsgemäß klein und daher vernachlässigbar ist [53, 54, 55]. Hieraus ergibt sich:

$$\theta(x) = \beta(x) \quad (3.5)$$

Dies ist keine Identität, sondern resultiert aus der Vernachlässigung der Schubverzerrungen.

Wenn die Verdrehung  $\theta(x)$  nicht zu groß angenommen wird, so dass  $\sin \theta(x) \approx \theta(x)$  und  $\cos \theta(x) \approx 1$  sind, dann ergibt sich:

$$u_{P(x,y)} = u_0(x) - y \cdot \theta(x) \quad (3.6)$$

$$v_{P(x,y)} = v_0(x) \quad (3.7)$$

Im nächsten Abschnitt werden genaue Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen nach *Rothert und Gensichen* [56] dargestellt.

### 3.2.2 Dehnung der Stabachse

Ein Element  $dx$  der Stabachse hat nach der Verformung die Länge  $d\bar{x}$ . Die Dehnung der Stabachse beträgt:

$$\varepsilon = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} - 1 \quad (3.8)$$

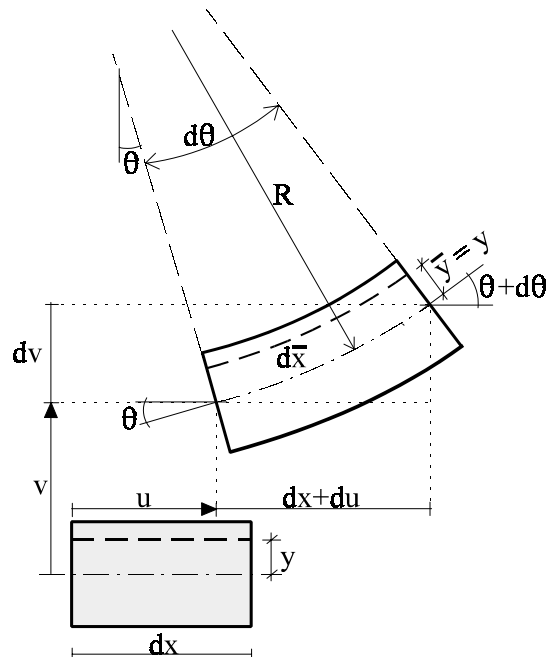
Für sehr kleine  $dx$  entnimmt man aus dem Bild 3.2 die geometrische Beziehung:

$$(d\bar{x})^2 = (dx + du)^2 + (dv)^2 \quad (3.9)$$

Diese Gleichung wird mit  $(dx)^{-2}$  multipliziert:

$$\left(\frac{d\bar{x}}{dx}\right)^2 = \left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad (3.10)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} \quad (3.11)$$



**Bild 3.2** Verformungen eines Balkenelements

Gleichung (3.11) wird in (3.8) eingesetzt. Dann erhält man die gesuchte Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung der Stabachse:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1 \quad (3.12)$$

Eine Reihenentwicklung anstelle des Wurzelgliedes führt zu:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dv}{dx}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \dots\right) - 1 \quad (3.13)$$

oder:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dv}{dx}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \dots \quad (3.14)$$



Durch eine Einschränkung bei der Annahme der Verdrehungen darf folgender Näherungswert für die Dehnung der Stabachse angewendet werden [57]:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3.15)$$

Für die im konstruktiven Bauingenieurwesen vorkommenden nichtlinearen Probleme liefert dieser Näherungswert hinreichend genaue Ergebnisse [57].

### 3.2.3 Neigung der Biegelinie ( $\theta$ )

Aus Bild 3.2 ergibt sich für die Neigung der Biegelinie:

$$\tan \theta = \frac{dv}{dx + du} = \frac{dv / dx}{(dx + du) / dx} = \frac{dv / dx}{1 + du / dx} \quad (3.16)$$

$$\theta = \arctan \frac{dv / dx}{1 + du / dx} \quad (3.17)$$

oder mit einer Reihenentwicklung für  $\arctan$ :

$$\theta = \frac{dv / dx}{1 + du / dx} - \frac{1}{3} \left( \frac{dv / dx}{1 + du / dx} \right)^3 + \dots \quad (3.18)$$

Für kleine Verdrehungen gilt die Näherung  $\theta \approx \tan \theta$ . Also:  $\theta \approx \frac{dv / dx}{1 + du / dx}$ .

### 3.2.4 Krümmung der verformten Stabachse ( $\theta'$ )

Die Krümmung ist die erste Ableitung der Neigung der Stabachse nach  $x$ , also:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\left(\arctan \frac{dv/dx}{1+du/dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}\left(1+\frac{du}{dx}\right) - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx}}{\left(1+\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} \quad (3.19)$$

### 3.2.5 Dehnung einer beliebigen Stabfaser

Eine beliebige Stabfaser der Länge  $dx$  im Abstand  $\bar{y}$  von der Stabachse hat nach der Verformung die Länge  $(R - \bar{y}) \cdot d\theta$ . Die Dehnung der Faser ist dann:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(R - \bar{y})d\theta - dx}{dx} = (R - \bar{y}) \frac{d\theta}{dx} - 1 \quad (3.20)$$

Dies bedeutet für die Dehnung der Stabachse:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{\bar{y}=0} = R \frac{d\theta}{dx} - 1 \quad (3.21)$$

und damit für die Dehnung einer beliebigen Faser:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \bar{y} \frac{d\theta}{dx} \quad (3.22)$$

mit  $\varepsilon$  aus Gleichung (3.12) und  $d\theta/dx$  aus Gleichung (3.19).

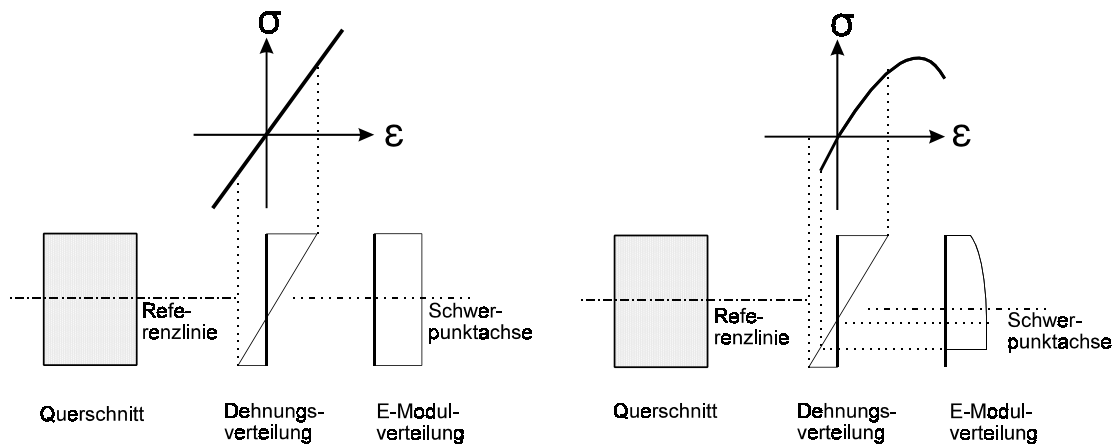
Nach [58, 59, 60] darf man mit Hilfe des Näherungswertes für die Dehnung der Stabachse nach Gl.(3.15) folgende Näherung für die Dehnung einer beliebigen Faser anwenden:

$$\varepsilon(x, y) = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - \bar{y} \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.23).$$

Hierbei wird angenommen, dass die Verzerrungen sehr klein gegenüber Eins bleiben sollen. Diese Annahme wird von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken auch im Versagenszustand erfüllt [70].

### 3.2.6 Anwendung bei Stahlbeton- und Spannbetonträgern

In der Elastizitätstheorie wird auch bei geometrisch nichtlinearen Betrachtungen als Bezugsachse normalerweise die Schwerpunktsachse des Stabes gewählt. Hier dient die Schwerpunktsachse als Referenzlinie für die Berechnung. Für Werkstoffe mit nichtlinearem Verhalten wie Stahlbeton und Spannbeton ist dagegen die allein mit der Stabgeometrie festgelegte Schwerpunktschwerachse nicht mehr gegeben; vielmehr stellt sich eine geometrie- und belastungsabhängige Verschiebung der Schwerpunktschwerachse ein [71], welche aus der Verteilung des E-Moduls über die Querschnittshöhe ermittelt werden kann (s. Bild 3.3). Da die Lage der Querschnittsschwerpunkte in Stablängsrichtung belastungsabhängig ist, ist sie für eine Theorie gerader Stabelemente als Referenzlinie ungeeignet. Es wird daher eine beliebige gerade Referenzlinie als Bezugachse gewählt. Wichtig ist hier die Annahme, dass die Beschreibung des Elementverformungsverhaltens (Bernoulli-Hypothese) von der Wahl der beliebigen, geraden Bezugsachse unbeeinflusst ist. Die Steifigkeitsmatrix wird bezogen auf die Referenzlinie ermittelt. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich schlanke, gerade Spannbetonträger behandelt, die sich in einer Ebene befinden, wobei alle Versagensarten außer dem Biegeversagen durch geeignete Maßnahmen ausgeschlossen sind.



(a) Lineares Werkstoffverhalten

(b) Nichtlineares Werkstoffverhalten

**Bild 3.3** Verschiebung der Schwerpunktschwerachse.

### 3.3 Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix

#### 3.3.1 Allgemeine Hinweise

Es werden nur prismatische Balkenelemente betrachtet, die über die ganze Länge axial symmetrisch sind. Unter diesen Voraussetzungen und den Annahmen aus Abschnitt 3.2 existiert wiederum ein axialer Spannungszustand. Der vollkommene Verbund zwischen Beton und Stahl wird angenommen, so dass die Verschiebungsansätze für jedes Element stetig sind. Es wird die totale Lagrangesche Formulierung zur Beschreibung der Bewegungen bzw. der Verformungen angewendet. Bei dieser Formulierung werden alle Größen auf die unverformte Ausgangslage bezogen. Die x- und y-Achse bilden ein lokales kartesisches Koordinatensystem (s. Bild 3.4).

In dieser Arbeit wird ein Schichtelementmodell angewendet. Jedes Balkenelement wird in mehrere Beton- und Stahlschichten unterteilt. Anhand der Spannungs-Dehnungsbeziehung der verwendeten Werkstoffe werden die Spannungen der Fasern aus dem Dehnungszustand hergeleitet. Ebenso wird der Elastizitätsmodul der Fasern für die Berechnung der Elementsteifigkeit ermittelt. Die Anwendung des Modells zur Untersuchung von Betontragwerken ist z.B. in den Arbeiten von *Pecknold/Schnobrich* [61], *Van Gruenen* [62], *Chan* [63] und *Kristjansson* [64] für Stahlbetonschalen, -scheiben bzw. -platten, und von *Kang* [65], *Eibl/Rezepies* [66], *Spanke* [67], *Hufendiek* [68] für Spannbeton- und Stahlbetonträger erfolgreich angewendet worden.

Bei der Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix wird ein Spannglied als eine 'Stahlschicht' betrachtet, die mit dem Abstand  $e$  parallel zur x-Achse des lokalen Koordinatensystems liegt. Hierbei ist  $e$  der Mittelwert der Exzentrizitäten des Spanngliedes in dem betrachteten Element (s. Bild 3.4). Entsprechend der Annahme im Abschnitt 3.2.1, dass die Querschnittsform bei der Verformung unverändert bleibt, sind die Exzentrizitäten des Spanngliedes  $e$  für alle Bewegungszustände des Elementes konstant.

### 3.3.2 Beschreibung des Balkenelementes

Im Gegensatz zu den im Bereich der linearen Elastizitätstheorie abgeleiteten Balkenelementen mit sechs Freiheitsgraden [z.B. in 59] muss hier wegen der zugrunde liegenden physikalischen Nichtlinearität ein Balkenelement mit höherer Anzahl an Freiheitsgraden eingeführt werden. Nach *Weiler* [69] können die tatsächlichen Verläufe der Verzerrungen in den Stabtragwerken aus Stahlbeton

bzw. Spannbeton durch vollständige quadratische Polynome angenähert werden. In seiner Arbeit wird deshalb ein Balkenelement mit 3 Knotenpunkten und 9 Freiheitsgraden vorgeschlagen. Beide Endknotenpunkte haben jeweils 3 Freiheitsgrade: horizontale Verschiebungen, vertikale Verschiebungen und Verdrehungen. Der Mittelknotenpunkt hat ebenfalls 3 Freiheitsgrade: horizontale Verschiebungen, vertikale Verschiebungen und eine erste Ableitung der horizontalen Verschiebung. Die horizontalen Verschiebungen werden hier mit einem Polynom 3. Grades und die vertikalen Verschiebungen mit einem Polynom 4. Grades beschrieben. Während die Ermittlung der Schnittgrößen unter Berücksichtigung der Verformungen durchgeführt wird, erfolgt die Berechnung der Steifigkeitsmatrix nach linearen Verträglichkeitsbeziehungen.

*Timm* [70] entwickelte ein Balkenelement mit 3 Knotenpunkten und 8 Freiheitsgraden, nämlich 3 horizontale und 3 vertikale Verschiebungen in allen Knotenpunkten und 2 Verdrehungen in den Endknotenpunkten. Während die horizontalen Verschiebungen hier durch einen quadratischen Ansatz ausgedrückt werden, wird ein Polynom 4. Grades zum Ausdruck der vertikalen Verschiebungen verwendet. Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix wird unter Berücksichtigung des nichtlinearen Anteils der Verträglichkeitsbeziehungen durchgeführt.

Balkenelemente für Spannbeton- bzw. Stahlbetontragwerke mit linearem Ansatz für Längsverschiebungen wie in [59] sind z.B. in den Arbeiten von *Kang* [65] und *Backes* [72] zu finden. Die Verwendung dieser Ansätze führt nach Meinung von *Weiler* [69] zu Unstetigkeiten im Verlauf der Verzerrungen und Schnittgrößen an den Elementgrenzen. Das Erzielen guter Ergebnisse erfordert eine sehr feine Elemententeilung. Um die Unstetigkeiten von Schnittgrößen zu vermindern, schlug *Backes* [72] eine Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der

Schnittgrößen durch numerische Integration über die Elementlänge vor. Die oben angesprochenen Unstetigkeiten des Dehnungsverlaufes an den Elementgrenzen sind dagegen weiterhin vorhanden, weil diese von der numerischen Integration nicht berührt werden. Nach *Vismann* [73] können Unstetigkeiten vermieden werden, in dem die Verzerrungen  $\varepsilon(x,0)$  und  $\kappa(x)$  der Stabachse durch Polynome gleichen Grades beschrieben werden. Die Anwendung der Polynome, die in [69] und [73] verwendet werden, ist nur möglich, wenn ausschließlich der lineare Anteil der Verträglichkeitsbeziehungen berücksichtigt wird (Theorie 2.Ordnung).

In dieser Arbeit wird ein Balkenelement mit 3 Knotenpunkten und 9 Freiheitsgraden verwendet. Jeder Knotenpunkt hat gleiche Freiheitsgrade: eine horizontale Verschiebung, eine vertikale Verschiebung und eine Verdrehung (s. Bild 3.4). Dies hat erhebliche programmorganisatorische Vorteile [74]. Die gewonnene 9x9-Elementsteifigkeitsmatrix wird anschließend mit statischer Kondensation in eine 6x6-Matrix überführt, um die Bandmatrix des Gesamtsystems klein zu halten. Die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der Schnittgrößen erfolgt durch numerische Integration über die Elementlänge.

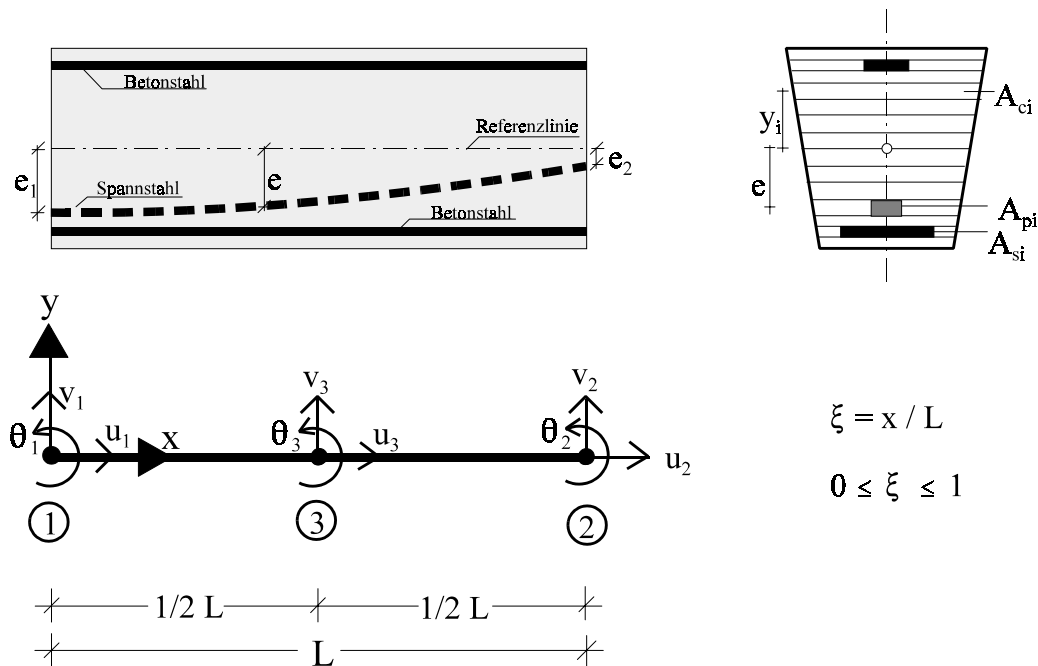


Bild 3.4 Balkenelement

### 3.3.3 Verschiebungsansätze des Balkenelementes

Verschiebungsvektoren der Knotenpunkte sind:

$$\text{in x-Richtung:} \quad \underline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T \quad (3.24)$$

$$\text{in y-Richtung:} \quad \underline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}^T \quad (3.25)$$

$$\text{Verdrehungen:} \quad \underline{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T \quad (3.26)$$

$$\text{Für das Element ergibt sich damit: } \underline{r} = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3\}^T \quad (3.27)$$

Die horizontale Verschiebung eines beliebigen Punktes beim eindimensionalen Balkenelement hängt nur von den horizontalen Verschiebungen der Knotenpunkte ab. Als Verschiebungsansatz wird daher das Lagrangesche Polynom ausgewählt :



$$\underline{u}(x) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_i^n(x) \cdot u_i \quad (3.28)$$

Die Werte von  $\mathbf{L}_i^n(x)$  können z.B. [75] entnommen werden. Für das hier verwendete 3-Knoten Balkenelement ist  $n=3$ . Nach der analytischen Ermittlung und der Einführung von  $\xi = x/L$  erhält man:

$$\underline{u}(x) = (1 - 3\xi + 2\xi^2) \cdot u_1 + (2\xi^2 - \xi) \cdot u_2 + 4(\xi - \xi^2) \cdot u_3 \quad (3.29)$$

oder:

$$\underline{u}(x) = \phi \cdot \underline{r} \quad (3.30)$$

$$\text{mit: } \phi = \{(1 - 3\xi + 2\xi^2), 0, 0, (2\xi^2 - \xi), 0, 0, 4(\xi - \xi^2), 0, 0\} \quad (3.31)$$

Für die Ansatzfunktion der vertikalen Verschiebungen  $\underline{v}(x)$  muss sichergestellt werden, dass die ersten Ableitungen von  $\underline{v}(x)$  stetig und damit die Verschiebungen und Verdrehungen in den Elementgrenzen verträglich sind. Die entsprechende Formfunktion ist das Hermitesche Polynom [75]:

$$\underline{v}(x) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H1}_i(x) \cdot v_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{H2}_i(x) \cdot v_i' \quad (3.32)$$

wobei:

$$\mathbf{H1}_i(x) = \left( 1 - 2 \frac{d(\mathbf{L}_i^n(x))}{dx} \Big|_{x=x_i} \cdot (x - x_i) \right) \cdot (\mathbf{L}_i^n(x))^2 \quad (3.33)$$

$$\mathbf{H2}_i(x) = (x - x_i) \cdot (\mathbf{L}_i^n(x))^2 \quad (3.34)$$

Die analytische Auswertung der Gl. (3.32) ergibt:

$$\begin{aligned} \underline{v}(x) = & (24\xi^5 - 68\xi^4 + 66\xi^3 - 23\xi^2 + 1) \cdot v_1 + L(4\xi^5 - 12\xi^4 + 13\xi^3 - 6\xi^2 + \xi) \cdot \theta_1 + \\ & (-24\xi^5 + 52\xi^4 - 34\xi^3 + 7\xi^2) \cdot v_2 + L(4\xi^5 - 8\xi^4 + 5\xi^3 - \xi^2) \cdot \theta_2 + \\ & (16\xi^4 - 32\xi^3 + 16\xi^2) \cdot v_3 + L(16\xi^5 - 40\xi^4 + 32\xi^3 - 8\xi^2) \cdot \theta_3 \end{aligned} \quad (3.35)$$

oder:

$$\underline{v}(x) = \underline{\psi} \cdot \underline{r} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \underline{\psi} = \{ & 0, (24 \xi^5 - 68 \xi^4 + 66 \xi^3 - 23 \xi^2 + 1), L(4 \xi^5 - 12 \xi^4 + 13 \xi^3 - 6 \xi^2 + \xi), \\ & 0, (-24 \xi^5 + 52 \xi^4 - 34 \xi^3 + 7 \xi^2), L(4 \xi^5 - 8 \xi^4 + 5 \xi^3 - \xi^2), \\ & 0, (16 \xi^4 - 32 \xi^3 + 16 \xi^2), L(16 \xi^5 - 40 \xi^4 + 32 \xi^3 - 8 \xi^2) \} \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.3.4 Dehnung einer beliebigen Elementfaser

Die Verschiebungen eines Punktes der Elementachse sind

$$\text{in x-Richtung: } u_0(x) = \underline{\phi} \cdot \underline{r} \quad (3.38)$$

$$\text{in y-Richtung: } v_0(x) = \underline{\psi} \cdot \underline{r}. \quad (3.39)$$

Der Verlauf der Verschiebungen der Elementachse kann so durch die Knotenverschiebungen ausgedrückt werden:

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\phi} \\ \underline{\psi} \end{Bmatrix} \cdot \underline{r} = \underline{N} \cdot \underline{r}, \quad (3.40)$$

wobei  $\underline{N} = \begin{Bmatrix} \underline{\phi} \\ \underline{\psi} \end{Bmatrix}$  die Formfunktionsmatrix ist.

In Bild 3.5 ist der Verlauf der Formfunktionen dargestellt.

Aus Gleichung (3.23) ergibt sich die Dehnung einer beliebigen Faser des Balkenelementes zu:

$$\varepsilon(x,y) = \frac{du_0(x)}{dx} - y \frac{d^2 v_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0(x)}{dx} \right)^2 \quad (3.41)$$

oder:

$$\varepsilon(x,y) = \underline{\phi}_{,x} \cdot \underline{r} - y \cdot \underline{\psi}_{,xx} \cdot \underline{r} + \frac{1}{2} \cdot \underline{r}^T \cdot \underline{\psi}_{,x}^T \cdot \underline{\psi}_{,x} \cdot \underline{r} \quad (3.42)$$

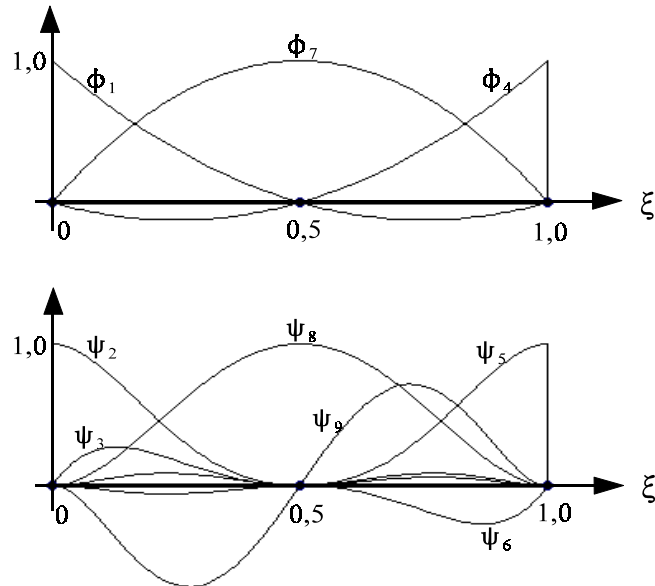


Bild 3.5 Darstellung des Verlaufs von Formfunktionen

oder:

$$\varepsilon(x,y) = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \cdot \underline{\mathbf{r}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{r}} \quad (3.43)$$

mit:

$$\underline{\mathbf{B}} = [ \phi_{,x} \quad -y \cdot \psi_{,xx} ] \quad (3.44)$$

$$\underline{\mathbf{C}} = \psi_{,x} \quad (3.45)$$

### 3.3.5 Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit

In einer nichtlinearen Berechnung wird die Elementsteifigkeitsmatrix in Abhängigkeit von den Belastungszuständen an den jeweils aktuellen Stand der Elementlage bzw. des Werkstoffverhaltens angepasst. Die Steifigkeitsmatrix eines Elements wird in diesem Abschnitt nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit

hergeleitet.

Die virtuelle Arbeit der Knotenpunktkräfte  $\underline{R}^J$  ist:

$$\delta A_a = \delta \underline{r}^T \cdot \underline{R}^J \quad (3.46)$$

Die zugehörige virtuelle Arbeit der inneren Kräfte lautet:

$$\delta A_i = \int_V \delta \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (3.47)$$

Da die virtuelle Arbeit der am Element wirkenden äußeren und inneren Kräfte gleich sein muss:

$$\delta A_a = \delta A_i \quad (3.48)$$

folgt hieraus:

$$\delta \underline{r}^T \cdot \underline{R}^J = \int_V \delta \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (3.49)$$

Gleichung (3.43) wird in Gleichung (3.49) eingesetzt. Dann ergibt sich:

$$\delta \underline{r}^T \cdot \underline{R}^J = \int_V \delta \left( \underline{B} \cdot \underline{r} + \frac{1}{2} \cdot \underline{r}^T \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{r} \right)^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (3.50)$$

oder:

$$\delta \underline{r}^T \cdot \underline{R}^J = \int_V \delta \underline{r}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV + \frac{1}{2} \int_V \delta \underline{r}^T \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{r} \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (3.51)$$

Die Gleichung (3.51) gilt für alle beliebigen Variationen der Knotenverschiebungen  $\delta \underline{r}$ . Folglich kann man schreiben:

$$\underline{R}^J = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV + \frac{1}{2} \int_V \underline{C}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{r} \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (3.52)$$

Mit der allgemeinen Spannungs-Dehnungs-Beziehung  $\underline{\sigma} = E \cdot \underline{\epsilon}$ , worin  $\underline{\epsilon}$  die Dehnung nach der Gleichung (3.43) und  $E$  der Elastizitätsmodul des Materials ist, ergibt sich der Zusammenhang zwischen inkrementellen Knotenpunktkräften  $d\underline{R}^J$  und inkrementellen Verschiebungen  $d\underline{r}$  zu:

$$\begin{aligned}
d\underline{\mathbf{R}}^J = & \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot dV \cdot d\underline{\mathbf{r}} + \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{r}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot dV \cdot d\underline{\mathbf{r}} + \\
& \int_V \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot dV \cdot d\underline{\mathbf{r}} + \int_V \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{r}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot dV \cdot d\underline{\mathbf{r}}
\end{aligned} \quad (3.53)$$

oder:

$$\begin{aligned}
d\underline{\mathbf{R}}^J = & \left( \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot dV + \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{r}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot dV + \right. \\
& \left. \int_V \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot dV + \int_V \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{r}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot dV \right) \cdot d\underline{\mathbf{r}}
\end{aligned} \quad (3.54)$$

oder:

$$d\underline{\mathbf{R}}^J = \underline{\mathbf{K}}_e \cdot d\underline{\mathbf{r}} \quad (3.55)$$

mit:

$$\underline{\mathbf{K}}_e = \underline{\mathbf{K}}_{e1} + \underline{\mathbf{K}}_{e2}(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{K}}_{e3}(\mathbf{r}^2) \quad (3.56)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{e1} = \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot dV \quad (3.57)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{e2}(\mathbf{r}) = \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{r}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot dV + \int_V \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot dV \quad (3.58)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{e3}(\mathbf{r}^2) = \int_V \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{r}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot dV \quad (3.59)$$

$\underline{\mathbf{K}}_e$  ist die Elementsteifigkeitsmatrix, die sowohl die materiellen als auch die geometrischen Nichtlinearitäten berücksichtigt. Die inkrementelle Knotenpunktkraft  $d\underline{\mathbf{R}}^J$  umfasst den inkrementellen Knotenlastvektor infolge von Einzellasten in den Knotenpunkten  $d\underline{\mathbf{P}}$  und infolge von äquivalenten Knotenkräften  $d\underline{\mathbf{Q}}$  aus den Streckenlasten am Element.

### 3.3.6 Auswertung der Elementsteifigkeitsmatrix

Die Integration in den Gleichungen (3.57), (3.58) und (3.59) zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_e$  erfolgt numerisch nach dem Gauß-Verfahren. Eine analytische Auswertung z.B. von  $\underline{K}_{e1}$  (Gl.3.57) ergibt die im Bild (3.6) dargestellte 9x9-Matrix.  $E_A$ ,  $E_S$  und  $E_I$  in der Gleichung (3.60) sind die Koeffizienten, die vom Elastizitätsmodul  $E$  abhängen (s. Gl. (3.61)-(3.63)). Wenn die Elastizitätsmoduln der Fasern in beiden Richtungen des lokalen Koordinatensystems nach den Dehnungszuständen variieren (also  $f(x,y)$ ), müssen sie in  $x$  und  $y$  Richtung integriert werden. Es wird hier angenommen, dass der aus dem Mittelwert der Dehnung ( $\epsilon$ ) ermittelte  $E$ -Wert den Mittelwert von  $E$  für die ganze Länge der Schicht darstellt. Also wird die Integration von  $E$  nur für Schichten in  $y$ -Richtung des Elements durchgeführt. Der Mittelwert von  $\epsilon$  für jede Schicht wird nach dem Gauß-Integrationsverfahren ermittelt.

Die Koeffizienten  $E_A$ ,  $E_S$  und  $E_I$  werden durch die Integration über den Querschnitt berechnet:

$$E_A = \int_A E \cdot dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} \cdot A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} \cdot A_{si} \quad (3.61)$$

$$E_S = -\int_A E \cdot y \cdot dA = -\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} \cdot y_{ci} \cdot A_{ci} - \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \quad (3.62)$$

$$E_I = \int_A E \cdot y^2 \cdot dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} \cdot y_{ci}^2 \cdot A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} \cdot y_{si}^c \cdot A_{si} \quad (3.63)$$

$E_s$  und  $E_c$  sind die Elastizitätsmoduln des Betonstahls und des Betons, deren Werte von den Dehnungen der Schicht abhängen und aus den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der Werkstoffe ermittelt werden.

(3.60)

**Bild 3.6** Matrix  $\underline{K}_{el}$

$$\underline{K}_{el} =$$

$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{q}_3$	
$\frac{7}{3} \frac{E_A}{L}$	$4 \frac{E_S}{L^2}$	$3 \frac{E_S}{L}$	$\frac{1}{3} \frac{E_A}{L}$	$-4 \frac{E_S}{L^2}$	$\frac{E_S}{L}$	$-\frac{8}{3} \frac{E_A}{L}$	$0$	$0$	$\mathbf{u}_1$
$4 \frac{E_S}{L^2}$	$\frac{5092}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$\frac{1138}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$4 \frac{E_S}{L^2}$	$-\frac{1508}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$\frac{242}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$-8 \frac{E_S}{L^2}$	$-\frac{3584}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$\frac{1920}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\mathbf{v}_1$
$3 \frac{E_S}{L}$	$\frac{1138}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{332}{35} \frac{E_I}{L}$	$\frac{E_S}{L}$	$-\frac{242}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{38}{35} \frac{E_I}{L}$	$-4 \frac{E_S}{L}$	$-\frac{896}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{320}{35} \frac{E_I}{L}$	$\mathbf{q}_1$
$\frac{1}{3} \frac{E_A}{L}$	$4 \frac{E_S}{L^2}$	$\frac{E_S}{L}$	$\frac{7}{3} \frac{E_A}{L}$	$-4 \frac{E_S}{L^2}$	$3 \frac{E_S}{L}$	$-\frac{8}{3} \frac{E_A}{L}$	$0$	$0$	$\mathbf{u}_2$
$-4 \frac{E_S}{L^2}$	$-\frac{1508}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$-\frac{242}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$-4 \frac{E_S}{L^2}$	$\frac{5092}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$-\frac{1138}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$8 \frac{E_S}{L^2}$	$-\frac{3584}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$-\frac{1920}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\mathbf{v}_2$
$\frac{E_S}{L}$	$\frac{242}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{38}{35} \frac{E_I}{L}$	$3 \frac{E_S}{L}$	$-\frac{1138}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{332}{35} \frac{E_I}{L}$	$-4 \frac{E_S}{L}$	$\frac{896}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{320}{35} \frac{E_I}{L}$	$\mathbf{q}_2$
$-\frac{8}{3} \frac{E_A}{L}$	$-8 \frac{E_S}{L^2}$	$-4 \frac{E_S}{L}$	$-\frac{8}{3} \frac{E_A}{L}$	$8 \frac{E_S}{L^2}$	$-4 \frac{E_S}{L}$	$\frac{16}{3} \frac{E_A}{L}$	$0$	$0$	$\mathbf{u}_3$
$0$	$-\frac{3584}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$-\frac{896}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$0$	$-\frac{3584}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$\frac{896}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$0$	$\frac{7168}{35} \frac{E_I}{L^3}$	$0$	$\mathbf{v}_3$
$0$	$\frac{1920}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{320}{35} \frac{E_I}{L}$	$0$	$-\frac{1920}{35} \frac{E_I}{L^2}$	$\frac{320}{35} \frac{E_I}{L}$	$0$	$\frac{1280}{35} \frac{E_I}{L}$	$\frac{1280}{35} \frac{E_I}{L}$	$\mathbf{q}_3$

### 3.4 Knotenlastvektor infolge Streckenlast

Die Komponenten der Lastvektoren von Streckenlasten im Element können unter Anwendung der gleichen, bei der Ermittlung der Steifigkeitsmatrix verwendeten Formfunktionen berechnet werden. Die Ergebnisse bezeichnet man als konsistente Lastvektoren. Alternativ können diese auch mit der ‘lumped method’ ermittelt werden, wobei die tatsächliche Verteilung der Streckenlast durch einen knotenorientierten Wert ersetzt wird. Die Konsistenz-Methode liefert genauere Verschiebungen und Spannungen, obwohl die Elementverteilung gröber ist [58]. Unter Annahme einer linear veränderlichen Elementbelastung (s. Bild 3.7) und mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit ergibt sich folgender Elementlastvektor:

$$\underline{Q} = \int_0^L \underline{N}^T \cdot \underline{q} \cdot dx \quad (3.64)$$

mit:  $\underline{Q} = \{Q_{1x}, Q_{1y}, Q_{1\theta}, Q_{2x}, Q_{2y}, Q_{2\theta}, Q_{3x}, Q_{3y}, Q_{3\theta}\}^T$  und  $\underline{N} = \begin{Bmatrix} \underline{\varphi} \\ \underline{\psi} \end{Bmatrix}$

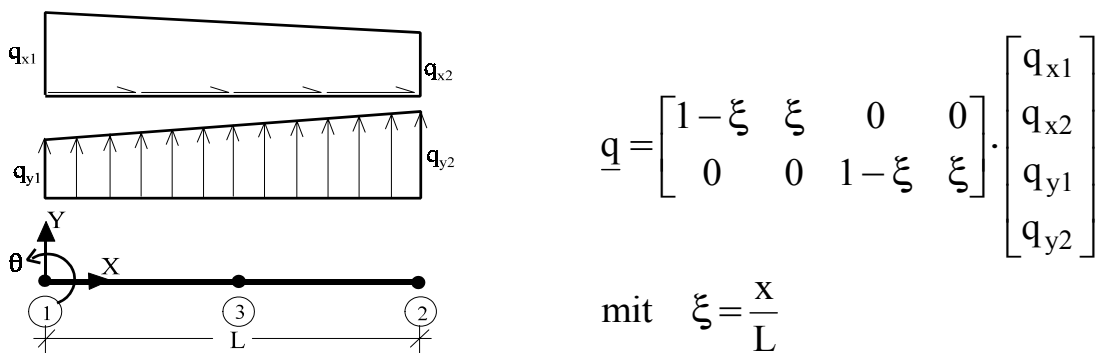


Bild 3.7 Streckenlast im Element



Die analytische Berechnung des Integrals in der Gl. (3.64) führt zu folgendem Ergebnis:

$$\underline{Q} = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 79 & 5L & 0 & 19 & -2L & 0 & 112 & -8L \\ 0 & 19 & 2L & 0 & 79 & -5L & 0 & 112 & 8L \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{y1} \\ q_{y2} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

### 3.5 Reduzierung der Knotenfreiheitsgrade des Elements durch statische Kondensation

Um höheren Berechnungsaufwand und größeren Speicherbedarf zu vermeiden, ist es zweckmäßig, schon bei der Ermittlung der Steifigkeitsmatrix auf der Elementebene die Verformungsfreiheitsgrade des Elements so weit wie möglich zu reduzieren. Dies kann durch Eliminierung der Verschiebungskomponenten innerer Knoten geschehen. Das Verfahren bezeichnet man als statische Kondensation. Bei dem hier verwendeten Element sind die Knotenverschiebungen des Stabmittelknotens  $u_3$ ,  $v_3$  und  $\theta_3$  zu eliminieren.

In der Elementebene gilt das Gleichgewicht:

$$\underline{K}_e \cdot \underline{r}_e = \underline{R}_e \quad (3.66)$$

wobei:  $\underline{K}_e$  = Elementsteifigkeitsmatrix nach Gl.(3.56),

$\underline{r}_e$  = Verschiebungsvektor der Elementknoten nach Gl.(3.27),

$\underline{R}_e$  = Elementlastvektor infolge Belastung im Element sind.

Die Matrix  $\underline{r}_e$  in der Gl.(3.66) lässt sich in die Untermatrizen  $\{\underline{r}_b, \underline{r}_a\}^T$  unterteilen, wobei  $\underline{r}_b$  die Verschiebungskomponenten beinhaltet, die beibehalten werden sollen, und  $\underline{r}_a$  die Verschiebungskomponenten enthält, die eliminiert werden sollen, so dass die Gl.(3.66) in folgender Form umgeschrieben werden kann:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{bb} & \underline{K}_{ba} \\ \underline{K}_{ab} & \underline{K}_{aa} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{r}_b \\ \underline{r}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{R}_b \\ \underline{R}_a \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

Aus der unteren Zeile der Gl. (3.67) ergibt sich:

$$\underline{K}_{ab} \cdot \underline{r}_b + \underline{K}_{aa} \cdot \underline{r}_a = \underline{R}_a \quad (3.68)$$

Hieraus ergibt sich für  $\underline{r}_a$ :

$$\underline{r}_a = \underline{K}_{aa}^{-1} \cdot (\underline{R}_a - \underline{K}_{ab} \cdot \underline{r}_b) \quad (3.69)$$

Nach Einsetzen der Gl. (3.69) in die folgende Gleichung:

$$\underline{K}_{bb} \cdot \underline{r}_b + \underline{K}_{ba} \cdot \underline{r}_a = \underline{R}_b \quad (3.70)$$

erhält man:

$$(\underline{K}_{bb} - \underline{K}_{ba} \cdot \underline{K}_{aa}^{-1} \cdot \underline{K}_{ab}) \cdot \underline{r}_b = \underline{R}_b - \underline{K}_{ba} \cdot \underline{K}_{aa}^{-1} \cdot \underline{R}_a \quad (3.71)$$

oder:

$$\underline{K}_{en} \cdot \underline{r}_{en} = \underline{R}_{en} \quad (3.72)$$

mit:  $\underline{K}_{en} = \underline{K}_{bb} - \underline{K}_{ba} \cdot \underline{K}_{aa}^{-1} \cdot \underline{K}_{ab}$

$$\underline{r}_{en} = \underline{r}_b$$

$$\underline{R}_{en} = \underline{R}_b - \underline{K}_{ba} \cdot \underline{K}_{aa}^{-1} \cdot \underline{R}_a$$

$\underline{K}_{en}$  ist die neue Elementsteifigkeitsmatrix mit den kondensierten Freiheitsgraden. Diese Matrix wird bei der Bildung der Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems verwendet.  $\underline{r}_{en}$  ist der neue Verschiebungsvektor mit den Verschiebungskomponenten, die beibehalten werden sollen, und  $\underline{R}_{en}$  ist der neue Elementlastvektor.

Nach der Lösung des Gleichungssystems ergeben sich nur die Knotenverschiebungen, die beibehalten werden. Mit der Gl. (3.69) hat man eine Möglichkeit, die Werte der Knotenverschiebungen der inneren Knoten zu ermitteln. Dieser Schritt wird als Rekondensation (*recovery*) bezeichnet. Weil die Invertierung der Matrix  $\underline{K}_{aa}^{-1}$  aufwendig und für Computerberechnungen ungeeignet ist, wird die Eliminierung der Freiheitsgrade nach dem Gauss-Eliminationsverfahren durchgeführt.

## **4 Verwendete Werkstoffgesetze**

### **4.1 Allgemeines**

Zur Ermittlung der Steifigkeit sowie des Spannungszustandes der Elemente werden die Eigenschaften der verwendeten Werkstoffe benötigt. In Form von Spannungs-Dehnungs-Beziehungen werden diese für den computerorientierten Berechnungsablauf aufbereitet. Entsprechend dem entwickelten numerischen Modell (s. Kapitel 3) werden hier einachsiale nichtlinear-elastische Werkstoffgesetze angewendet.

Beim Nachrechnen der experimentellen Untersuchungen zwecks Überprüfung des entwickelten numerischen Modells werden, soweit möglich, Materialannahmen verwendet, die den in den Laborversuchen verwendeten Werkstoffen entsprechen. Falls die nötigen Parameter nicht dokumentiert sind, werden die im folgenden beschriebenen Materialgesetze berücksichtigt.

### **4.2 Beton**

#### **4.2.1 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bei Druckbeanspruchung**

Die Materialeigenschaften des Betons unterliegen großen Streuungen. Versuche zeigen, dass die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Beton zwar qualitativ bekannt sind, die Werte der Druckfestigkeit, der Zugfestigkeit und der Bruchdehnung jedoch stark variieren. Sie werden von vielen Faktoren beeinflusst:

Ausgangsstoffe, Betonzusammensetzungen, Erhärtungsbedingungen, Prüfmethoden und Alter zur Zeit der Prüfung.

Eine der wichtigsten Charakteristiken des Werkstoffs Beton ist seine Arbeitslinie. Unter einachsiger Druckbeanspruchung verhält sich der Beton bis zu etwa 40% – beim hochfesten Beton sogar bis ca. 80% – seiner Druckfestigkeit nahezu linear elastisch [76]. Wegen der geringen Verbundfestigkeit zwischen Zementstein und Zuschlag beginnen ab hier die bereits vor der Belastung vorhandenen Mikrorisse in den Kontaktzonen zwischen Zementstein und groben Zuschlägen anzuwachsen. Deshalb ist bei höheren Druckbeanspruchungen die Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen ausgeprägter. Die Krümmung der Kurve wächst in diesem Bereich mit steigender Dehnung bis zu etwa 90% der Druckfestigkeit überproportional an und nimmt darüber hinaus bis zum Erreichen der Druckfestigkeit noch weiter zu. In Abhängigkeit von der Betongüte zeigt sich eine unterschiedliche Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons im Vor- als auch im Nachbruchbereich. Der Festigkeitsanstieg und -abfall sind bei höherer Betonfestigkeit steiler.

Es liegen viele numerische Näherungen der einachsigen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Betons unter Druckbeanspruchung vor, z.B. von: *Saenz* [77], *Dilger* [78], *Popovics* [79], *Grzeschkowitz* [80], *DIN 1045-1* [3], *Eurocode 2* [1] und *CEB-FIP Model Code 1990* [9]. In dieser Arbeit werden die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Betons nach CEB-FIP MC90 [9] verwendet. Diese Spannungs-Dehnungs-Beziehungen stimmen gut mit den zahlreichen Versuchsergebnissen überein [76].

Im CEB-FIP MC90 [9] wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons unter einachsiger Druckbeanspruchung mit folgenden Gleichungen angegeben:

$$\sigma_c = -\frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \cdot f_{cm} \quad \text{für } \varepsilon_{cu} < \varepsilon_c \leq 0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = -f_{cm} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon_{cu}/\varepsilon_{c1}} \xi - \frac{2}{(\varepsilon_{cu}/\varepsilon_{c1})^2} \right) \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + \left( \frac{4}{\varepsilon_{cu}/\varepsilon_{c1}} - \xi \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right]^{-1} \quad \text{für } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad (4.2)$$

Darin bedeuten:

$\sigma_c$  = Druckspannung [MPa oder N/mm<sup>2</sup>]

$\varepsilon_c$  = Stauchung

$f_{cm}$  = Mittelwert der Betondruckfestigkeit;

$f_{cm} = f_{ck} + 8$  [MPa oder N/mm<sup>2</sup>]

$f_{ck}$  = charakteristische Betondruckfestigkeit

[Mpa oder N/mm<sup>2</sup>, positiv eingesetzt]

$E_{ci}$  = Initiale Tangentensteifigkeit;  $E_{ci} = 2,15 \cdot 10^4 \cdot (f_{cm}/10)^{1/3}$

$E_{c1}$  = Sekantenmodul für  $-f_{cm} \leq \sigma_c \leq 0$ ;  $E_{c1} = -f_{cm}/\varepsilon_{c1}$

$\varepsilon_{c1}$  = Stauchung bei höchster Druckbeanspruchung;  $\varepsilon_{c1} = -2,2 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_{cu}$  = Dehnung im abfallenden Ast bei einer Spannung  $\sigma_c = -0,5 \cdot f_{cm}$

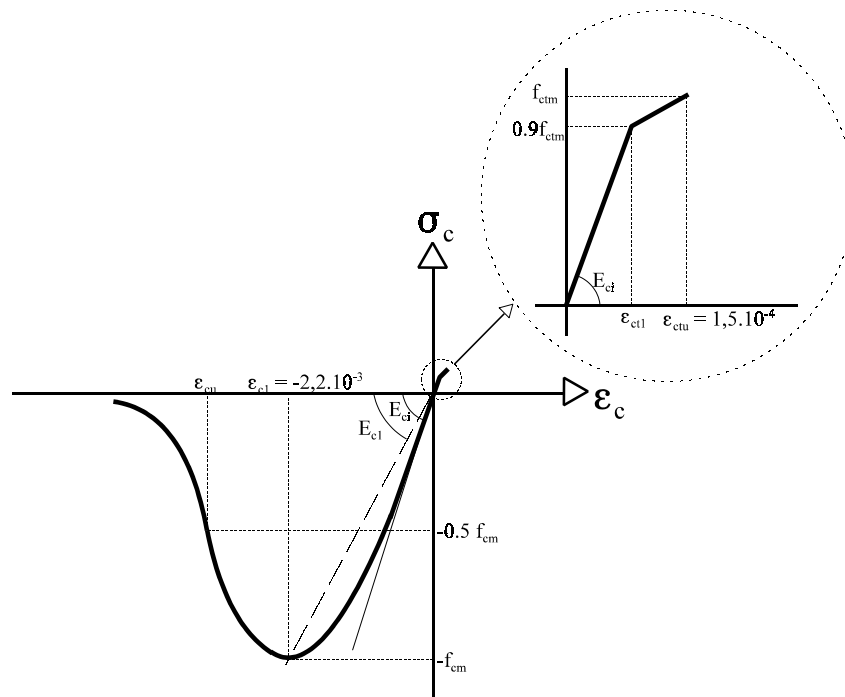
$$\varepsilon_{cu} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2}} \right] \cdot \varepsilon_{c1} \quad (4.3)$$

$$\xi = \frac{4 \left[ \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right]}{\left[ \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 1 \right]^2} \quad (4.4)$$

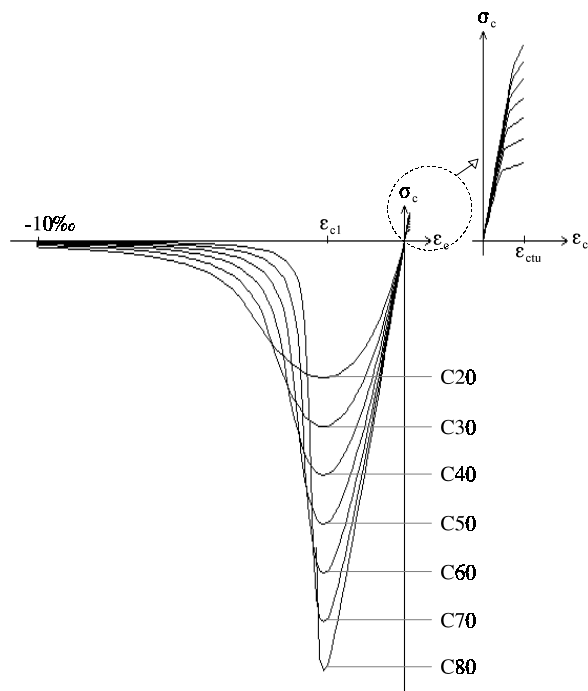
Nach dieser Vorschrift kann die Bruchdehnung von ca. -2,2‰ als von der Betonfestigkeitsklasse weitgehend unabhängig angenommen werden, obwohl Versuche einen leichten Anstieg der Bruchdehnung mit steigender Betongüte aufzeigen [81, 82, 83]. Die Dehnung wird auf minimal -10‰ begrenzt, wobei die zugehörige Spannung nahezu Null ist. Die Eigenschaften des Betons nach CEB-FIP MC90 [9] werden in der Tabelle 4.1 wiedergegeben. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Beton unter Druckbeanspruchung sind im Bild 4.1 qualitativ dargestellt.

**Tabelle 4.1:** Eigenschaften des Betons nach CEB-FIP Model Code 1990 [9]

<b>Betonfestigkeitsklasse</b>	<b>C12</b>	<b>C20</b>	<b>C30</b>	<b>C40</b>	<b>C50</b>	<b>C60</b>	<b>C70</b>	<b>C80</b>
$f_{ck}$ (MPa)	12	20	30	40	50	60	70	80
$f_{cm}$ (MPa)	20	28	38	48	58	68	78	88
$f_{ctm}$ (MPa)	1,6	2,2	2,9	3,5	4,1	4,6	5,1	5,6
$E_{ci}$ ( $10^3$ MPa)	27	30,5	33,5	36,5	38,5	41	42,5	44,5
$\varepsilon_{cu}$ ( $10^{-3}$ )	-5,0	-4,2	-3,7	-3,3	-3,0	-2,8	-2,6	-2,4



**Bild 4.1** Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons nach CEB-FIP MC90 [9]

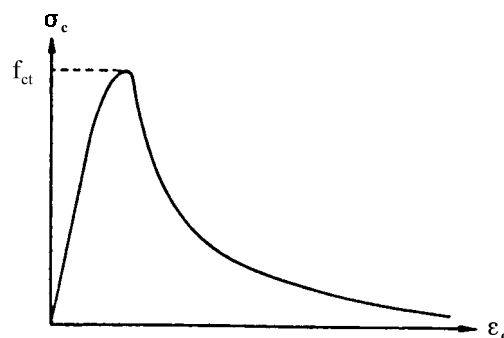


**Bild 4.2** Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons für unterschiedliche Betonfestigkeitsklassen nach CEB-FIP MC90 [9]



### 4.2.2 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bei Zugbeanspruchung

Unter Zugbeanspruchung bis zu etwa 70% der Zugfestigkeit folgen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Betons näherungsweise dem Hookeschen Gesetz [76]. Bei höheren Zugspannungen weichen die Beziehungen vom linearen Verhalten ab. Aber erst bei Spannungen größer als 90% der Betonzugfestigkeit ist diese Abweichung deutlich. Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Betons unter Zugbeanspruchung werden z.B. in den Arbeiten von *Curbach* [84] (s. Bild 4.3) und *Massicote et al* [91] angegeben. Nach Erreichen der Zugfestigkeit des Betons  $f_{ct}$  folgt eine Abnahme der Spannungen  $\sigma_c$  bei gleichzeitigem starkem Anwachsen der Dehnungen  $\varepsilon_c$ .



**Bild 4.3** Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons unter einachsiger Zugbeanspruchung nach [84]

Die Dehnungen konzentrieren sich nach dem Erreichen der Betonzugfestigkeit auf einem schmalen Bereich, der als Process- oder Fracture-Zone bezeichnet wird. Daher treten die wesentlichen Verformungen bzw. Rissöffnungen nur innerhalb dieser Zone auf. Demgegenüber setzen Entlastungen in den angrenzenden Bereichen ein und die Dehnungen dieser Bereiche nehmen mit sinkender Zug-

spannung wieder ab. Die Beschreibung des Betonverhaltens unter Zugbeanspruchung muss daher zwischen gerissenen und ungerissenen Zonen unterscheiden. Während für den gerissenen Bereich infolge der oben genannten Dehnungskonzentration eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung anzuwenden ist, kann für den im ungerissenen Bereich unter Zugbeanspruchung stehenden Beton eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung angewendet werden.

Ähnlich dem Betonverhalten unter Druckbeanspruchung findet man zur Zeit auch viele mathematische Näherungen zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bzw. Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen von Beton unter einachsiger Zugbeanspruchung, z.B.: *Curbach* [84], *Petersson* [85], *Duda* [86], *CEB-FIP Model Code 1990* [9]. Nach *CEB-FIP MC 90* [9] gilt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung mit folgenden Gleichungen für die ungerissenen Bereiche (s. auch Bild 4.1 und 4.2):

$$\sigma_c = E_{ci} \cdot \varepsilon_c \quad \text{für } 0 \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{ct1} \quad (4.5)$$

$$\sigma_c = f_{ctm} - \left( \frac{\varepsilon_{ctu} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{ctu} - \varepsilon_{ct1}} \right) \cdot (0,1 \cdot f_{ctm}) \quad \text{für } \varepsilon_{ct1} \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{ctu} \quad (4.6)$$

wobei:

$f_{ctm}$  = mittlere Betonzugfestigkeit (in MPa oder N/mm<sup>2</sup>, s. Tabelle 4.1)

$$f_{ctm} = 1,4 \cdot (f_{ck}/10)^{2/3} \quad (4.7)$$

$\varepsilon_{ct1}$  = Betondehnung bei  $\sigma_c = 0,9 \cdot f_{ctm}$

$\varepsilon_{ctu}$  = Zugbruchdehnung = 0,15 ‰

Für die gerissenen Bereiche wird die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung nach CEB-FIP MC90 [9] mit folgenden Gleichungen angewendet (s. Bild 4.4):

$$\sigma_c = \left(1 - 0,85 \cdot \frac{w}{w_1}\right) \cdot f_{ctm} \quad \text{für } 0,15f_{ctm} \leq \sigma_c \leq f_{ctm} \quad (4.8)$$

$$\sigma_c = \left(\frac{w_c - w}{w_c - w_1}\right) \cdot (0,15 \cdot f_{ctm}) \quad \text{für } 0 \leq \sigma_c \leq 0,15f_{ctm} \quad (4.9)$$

wobei:

$$w_1 = 2 G_F / f_{ctm} - 0,15 w_c \quad (4.10)$$

$$w_c = \alpha_F \cdot G_F / f_{ctm} \quad (4.11)$$

Darin bedeuten:

$w$  = Rissöffnung [mm]

$w_1$  = Rissöffnung [mm] bei Zugspannung  $\sigma_c = 0,15 f_{ctm}$

$w_c$  = maximale Rissöffnung [mm]

$G_F$  = Bruchenergie [N/mm];  $G_F = G_{F0} \cdot (f_{cm}/10)^{0,7}$  (4.12)

$G_{F0}$  = Grundwert der Bruchenergie [N/mm],

der von der maximalen Zuschlaggröße  $d_{max}$  abhängt (s. Tabelle 4.2)

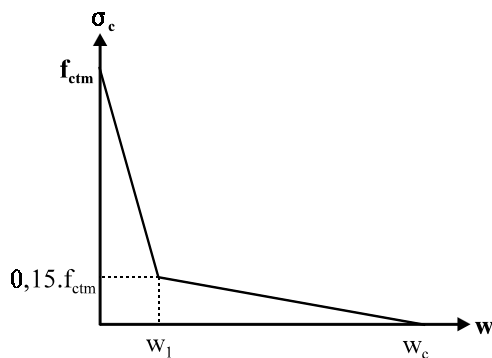
$\alpha_F$  = Beiwert zur Berücksichtigung der maximalen Zuschlaggröße  $d_{max}$

(s. Tabelle 4.2)

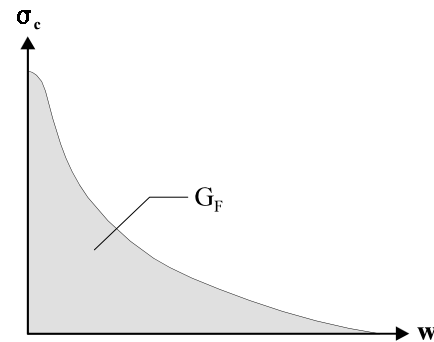
Die Fläche unter der Spannungs-Rissöffnungs-Kurve wird als Bruchenergie  $G_F$  bezeichnet (s. Bild 4.5). Sie stellt einen Kennwert des Betons unter Zugbeanspruchung dar [84, 85, 87]. Die Gültigkeit der hier wiedergegebenen Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen nach CEB-FIP MC90 [9] wird in [88] aufgezeigt.

**Tabelle 4.2:** Grundwert der Bruchenergie  $G_{F0}$  und  $\alpha_F$ -Beiwerte nach CEB-FIP MC90 [9]

$d_{max}$ [mm]	8	16	32
$G_{F0}$ [N/mm]	0,025	0,030	0,058
$\alpha_F$	8	7	5



**Bild 4.4** Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung nach CEB-FIP MC90 [9]



**Bild 4.5** Bruchenergie  $G_F$

### 4.2.3 Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen

Nach Erreichen der Zugfestigkeit des Betons treten Risse auch in bewehrtem Beton auf. Die Zugkräfte werden an diesen Rissstellen vom Bewehrungsstahl übernommen. Zwischen den Rissen nimmt die Spannung des Stahls allerdings ab. Über Verbundwirkung werden Teile der Zugkräfte wieder in den Beton zurück übertragen. Unter bestimmten Zugspannungen ist die Dehnung des Stahles deshalb wesentlich kleiner als bei einem nicht von Beton umgebenen gezogenen Stahl. Diese Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bei der Übertragung der Zugkräfte wird als “Tension Stiffening Effect” bezeichnet.

In der Analyse von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, bei der die Bewehrung und der Beton direkt gekoppelt sind, kann die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen in den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der Werkstoffe berücksichtigt werden. Die Erfassung der Mitwirkung erfolgt entweder durch Modifikation der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons unter Zugbean-

spruchung (z.B. nach: [89, 90, 91 und 92]) oder durch Modifikation der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Stahls unter Zugbeanspruchung (z.B. nach: [1, 9, 89, 91, 92, 93, 94 und 95]). In dieser Arbeit wird die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Tension Stiffening Effect) durch Modifikation des Materialgesetzes des Betonstahles nach *CEB-FIP MC90* [9] berücksichtigt und im Abschnitt 4.3 näher erläutert.

### 4.3 Betonstahl

Anders als beim Beton weist das Verhalten einer bestimmten Stahlsorte nur geringe Streuungen auf. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Betonstahls lassen sich daher zuverlässiger als für Beton angeben. Zur Anwendung liegen numerische Formulierungen dieser Beziehungen vor, z.B. von *Dilger* [78], *DIN 1045-1* [3], *Eurocode 2* [1], *CEB-FIP MC90* [9]. Betonstahlorten und ihre Eigenschaften werden in den Normen festgelegt, z.B.: *DIN 488* [14] und *DIN EN 10080* [10] (Vorgesehen als Ersatz für *DIN 488*). In *DIN EN 10080* [10] wird zwischen zwei Duktilitätsklassen des Betonstahls unterschieden: Betonstahl mit normaler Duktilität (Bezeichnung B500N) und Betonstahl mit hoher Duktilität (Bezeichnung B500H). Ein Betonstahl hat eine normale Duktilität nach *DIN EN 10080* [10], wenn:

$$\varepsilon_{uk} \geq 2,5\% \text{ und } (f_{tk}/f_{yk}) \geq 1,05$$

und hat eine hohe Duktilität, wenn:

$$\varepsilon_{uk} \geq 5,0\% \text{ und } (f_{tk}/f_{yk}) \geq 1,08$$

(s. auch Tabelle 4.3).

Wie beim Beton werden in dieser Arbeit die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Betonstahls nach CEB-FIP Model Code 1990 [9] angewendet. Zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird die Beziehung entsprechend modifiziert. Nach [15] kann der Mittelwert der Streckgrenze  $f_{ym} = f_{yk}$  rechnerisch eingesetzt werden. Die modifizierte Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird im Bild 4.6 dargestellt.

**Tabelle 4.3:** Eigenschaften der Betonstahlsorten B500H (hohe Duktilität) und B500N (normale Duktilität) nach DIN E EN 10080 [10], EC2 [1] und DIN 1045-1 [3]

		DIN E EN 10080	EC2 T1 (1992)	DIN 1045-1
<b>Bezeichnung:</b>				
Streckgrenze		$R_e$	$f_{yk}$	$f_{yk}$
Zugfestigkeit		$R_m$	$f_{tk}$	$f_{tk}$
Elastizitätsmodul		$E_s$	$E_s$	$E_s$
Gleichmaßdehnung		$A_{gt}$	$\epsilon_{yk}$	$\epsilon_{yk}$
<b>charakteristische Werte:</b>				
Streckgrenze [N/mm <sup>2</sup> ]	normalduktiler Stahl	500	500	500
	hochduktiler Stahl	500	500	500
Zugfestigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]	normalduktiler Stahl	515 bzw. 525	515 bzw. 525	$\geq 525$
	hochduktiler Stahl	540	540	$\geq 540$
Elastizitätsmodul [N/mm <sup>2</sup> ]	normalduktiler Stahl	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
	hochduktiler Stahl	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
Gleichmaßdehnung [%]	normalduktiler Stahl	2 bzw. 2,5	2 bzw. 2,5	2,5
	hochduktiler Stahl	5	5	5
Verhältnis $f_{tk}/f_{yk}$	normalduktiler Stahl	1,03 bzw. 1,05	1,03 bzw. 1,05	$\geq 1,05$
	hochduktiler Stahl	1,08	1,08	$\geq 1,08$

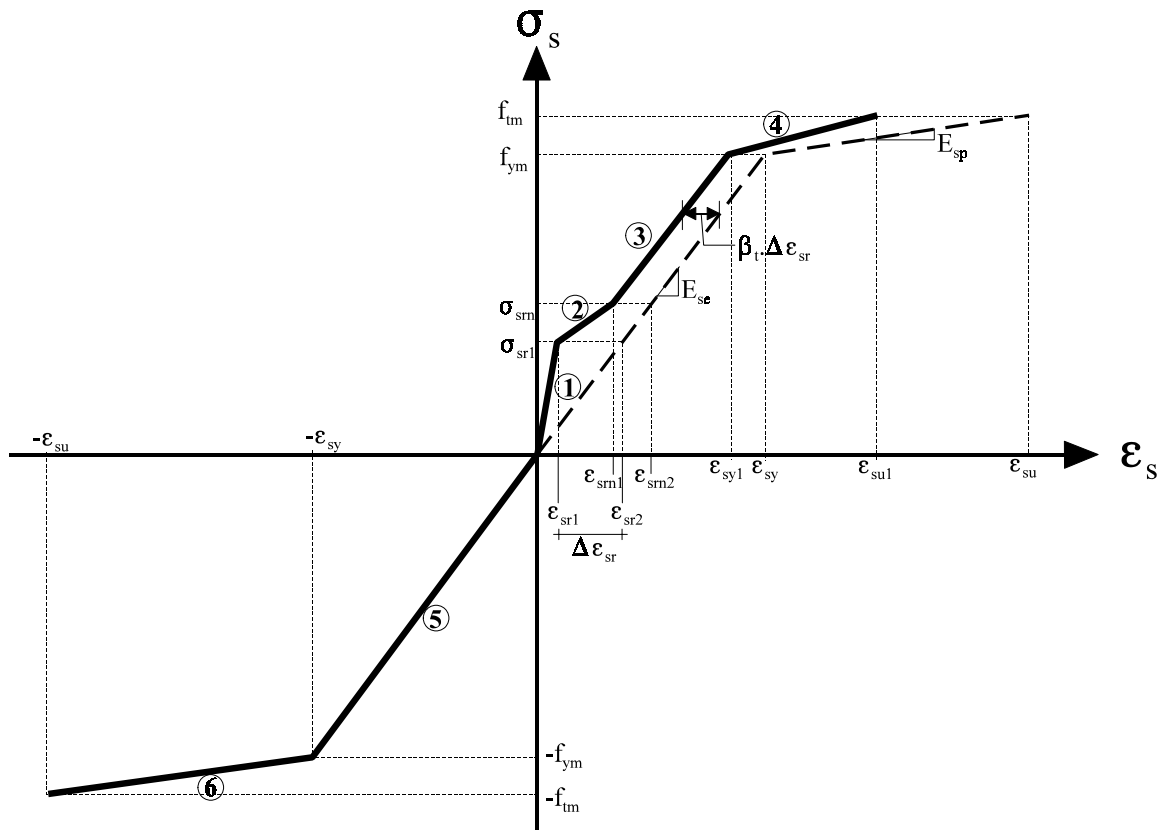


Bild 4.6 Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betonstahls

Bereich (1): **ungerissener Zustand I** ( $0 < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sr1}$ )

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s = \varepsilon_c$$

$\varepsilon_{sr1}$  = Stahldéhnung im ungerissenen Querschnitt unter der RisschnittgröÙe bei Erreichen von Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}$

$\varepsilon_{sr2}$  = Stahldéhnung im gerissenen Querschnitt unter der RisschnittgröÙe

$$\Delta\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}$$

$$\sigma_{sr1} = E_{se} \cdot \varepsilon_{sr2}$$

$$E_{s1} = \sigma_{sr1} / \varepsilon_{sr1}$$

Bereich (2): **Rissbildung** ( $\varepsilon_{sr1} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{srn1}$ )

$$\sigma_{srn} = 1,3 \cdot \sigma_{sr1}$$

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{s2} - \frac{\beta_t \cdot (\sigma_s - \sigma_{sr1}) + (\sigma_{srn} - \sigma_s)}{\sigma_{srn} - \sigma_{sr1}} \cdot \Delta \varepsilon_{sr}$$

Bei  $\sigma_s = \sigma_{srn}$  sind  $\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{srn1}$  und  $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{srn2} = \sigma_{srn} / E_{se}$

$$\varepsilon_{srn1} = \varepsilon_{srn2} - \beta_t \cdot \Delta \varepsilon_{sr}$$

$$E_{s2} = (\sigma_{srn} - \sigma_{sr1}) / (\varepsilon_{srn1} - \varepsilon_{sr1}) = (0,3 \cdot \sigma_{sr1}) / (\varepsilon_{srn1} - \varepsilon_{sr1})$$

Bereich (3): **Stabilisierte Risse** ( $\varepsilon_{srn1} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy1}$ )

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \cdot \Delta \varepsilon_{sr}$$

Bei  $\sigma_s = \sigma_{ym}$  sind  $\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{sy1} = \varepsilon_{sy} - \beta_t \cdot \Delta \varepsilon_{sr}$  und  $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{sy}$

$$E_{s3} = \frac{f_{ym} - \sigma_{srn}}{(\varepsilon_{sy} - \beta_t \cdot \Delta \varepsilon_{sr}) - \varepsilon_{srn1}} = \frac{f_{ym} - \sigma_{srn}}{\varepsilon_{sy1} - \varepsilon_{srn1}}$$

Bereich (4): **Fließen** ( $\varepsilon_{sy1} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su1}$ )

$$\varepsilon_{s,m} = (\varepsilon_{sy} - \beta_t \cdot \Delta \varepsilon_{sr}) + \delta(1 - \sigma_{sr1}/f_{ym}) \cdot (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{sy})$$

Bei  $\sigma_s = \sigma_{tm}$  sind  $\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{su1}$  und  $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{su}$

$$\varepsilon_{su1} = (\varepsilon_{sy} - \beta_t \cdot \Delta \varepsilon_{sr}) + \delta(1 - \sigma_{sr1}/f_{ym}) \cdot (\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy})$$

$$E_{s4} = \frac{f_{tm} - f_{ym}}{\varepsilon_{su1} - \varepsilon_{sy1}}$$

Bereich (5): **Elastischer Druckbereich** ( $-\varepsilon_{sy} < \varepsilon_s \leq 0$ )

$$E_{s5} = E_{se} = f_{ym} / \varepsilon_{sy}$$

Bereich (6): **Plastischer Druckbereich** ( $-\varepsilon_{su} < \varepsilon_s \leq -\varepsilon_{sy}$ )

$$E_{s6} = E_{sp} = (f_{tm} - f_{ym}) / (\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy})$$



Die Betonstähle sind in den meisten Stahlbetonbauteilen nicht gleichmäßig im Querschnitt verteilt. Daher ist der durch den Verbund zwischen Beton und Stahl bewirkte Tension-Stiffening-Effect nur in einem bestimmten Bereich der Zugzone wirksam. Zur Erfassung der Wirkungszone  $A_{cr}$  wurden Vorschläge gemacht, die in zwei Gruppen unterteilt werden können:

- Die Fläche der Wirkungszone  $A_{cr}$  bezieht sich auf den Stabdurchmesser des Betonstahls, z.B. nach: *Massicote et al* [91], *Balakrishnan and Murray* [96] und *Henning* [97].
- Die Fläche der Wirkungszone  $A_{cr}$  bezieht sich auf den Abstand ( $d_1$ ) zwischen dem Schwerpunkt der Bewehrung und dem nächsten gezogenen Rand des Querschnitts, z.B. nach: *DIN 1045-1* [3], *Eurocode 2* [1], *CEB-FIP MC90* [9] und *Schießl* [98].

In dieser Arbeit wird der Ansatz vom Eurocode 2 [1] bzw. CEB-FIP MC90 [9] angewendet, wobei die Höhe der Wirkungszone mit  $2,5 \cdot d_1$  und kleiner als  $(h-x)/3$  festgelegt wird.

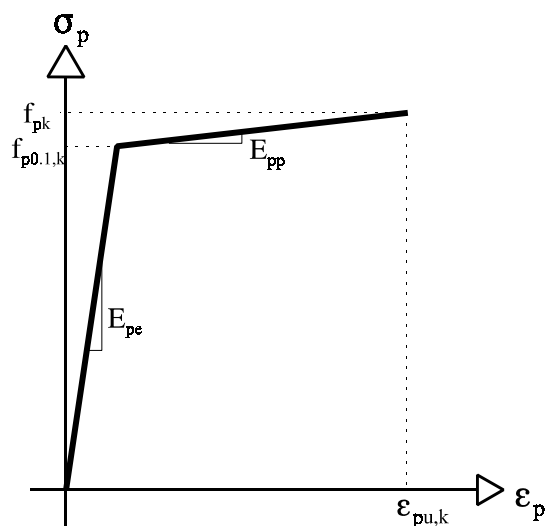
#### 4.4 Spannstahl

Bisher sind die in der Praxis verwendeten Spannstähle noch nicht durch eine endgültige Vorschrift genormt. Spannstahlhersteller benötigen Zulassungen für ihre Produkte, damit ihre Spannstähle in der Praxis benutzt werden dürfen. Eine Vornorm für Spannstahl entsprechend dem Eurocode 2 ist *DIN EN 10138* [11]. Die Stahlsorten werden in dieser Vornorm durch die charakteristischen Werte der 0,1%-Dehngrenze  $f_{p0.1,k}$ , der Zugfestigkeit  $f_{pk}$  und der Gleichmaßdehnung  $\varepsilon_{pu,k}$  beschrieben und es wird zwischen Drähten, Litzen und Stäben unterschieden.

Eigenschaften des Spannstahls nach *DIN EN 10138* [11] werden als Beispiel für siebendrähtige Litzen in der Tabelle 4.4 angegeben.

**Tabelle 4.4:** Eigenschaften der Spannstahlarten nach *DIN EN 10138* [11] für siebendrähtige Litzen

Durchmesser d [mm]	Querschnittsfläche $A_p$ [mm <sup>2</sup> ]	Charakteristische Zugfestigkeit $f_{pk}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Charakteristische 0,1%-Dehngrenze $f_{p0.1,k}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Gleichmaß- dehnung $\epsilon_{pu,k}$ [%]
9,0	50	1850	1600	3,5
11,0	75	1850	1600	3,5
12,5	93	1850	1600	3,5
13,0	100	1850	1600	3,5
15,2	140	1750	1505	3,5
16,0	150	1750	1505	3,5
18,0	200	1750	1505	3,5



**Bild 4.7** Verwendete Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Spannstahls

## 5 Teilverluste der Vorspannkraft

### 5.1 Allgemeines

Für die Nachweisführung und Berechnung eines Spannbetontragwerks hat die Ermittlung der ortsabhängigen und zeitabhängigen Einflüsse der Vorspannwirkung eine besondere Bedeutung. Es ist bekannt, dass sich die Vorspannkraft in Spanngliedern infolge rheologischer Einflüsse zeitabhängig und infolge von Reibungseinflüssen ortsabhängig vermindern. In den numerischen Untersuchungen der Spannbetontragwerke (z.B.: [28, 69, 99]) bleibt diese Verminderung unberücksichtigt. Es wird für die gesamte Länge des Spanngliedes eine konstante Vorspannkraft angenommen. In der vorliegenden Arbeit werden demgegenüber die effektiven Vorspannkraft für die einzelnen Balkenelemente zeitabhängig bis zum Zeitpunkt der Aufbringung der äußeren Lasten berechnet.

Die Größe der Verminderung der Vorspannwirkung kann in zeitunabhängige und zeitabhängige Verluste unterteilt werden. Die zeitunabhängigen Verluste bestehen aus Vorspannkraftverlusten infolge Reibung zwischen Spannstahl und Hüllrohr ( $\Delta P_{\mu}(x)$ ), Verankerungsschlupf ( $\Delta P_{sl}$ ) und elastischer Verformung des Bauteils bei der Vorspannkraftübertragung ( $\Delta P_{ES}$ ). Zu den zeitabhängigen Verlusten ( $\Delta P_t(t)$ ) zählen die Vorspannkraftverluste infolge Relaxation des Spannstahls sowie infolge Kriechen und Schwinden des Betons.

Die für die Schnittgrößenermittlung maßgebende Vorspannkraft (charakteristischer Wert  $P_k$  oder Bemessungswert  $P_d$ ) wird z.B. nach Eurocode 2 [1] als Funktion des Mittelwertes der Vorspannkraft  $P_{m,t}$  angegeben.  $P_{m,t}$  ist für den

Zeitpunkt  $t$  an einer Stelle  $x$  längs des Bauteils festgelegt:

- (a) Für vorgespannte Bauteile mit sofortigem Verbund:

$$P_{m,t} = P_{m,o} - \Delta P_t(t) \quad (5.1)$$

$$\text{mit: } P_{m,o} = P_o [-\Delta P_\mu(x)] - \Delta P_{ES} - \Delta P_{ir} \quad (5.2)$$

Hier ist  $\Delta P_\mu(x)$  in den Umlenkstellen des Spanngliedes zu berücksichtigen. Durch  $\Delta P_{ir}$  wird der eventuelle kurzzeitige Relaxationsverlust im Zeitintervall zwischen dem Vorspannen der Spannglieder und der Übertragung der Vorspannkraft auf den Beton berücksichtigt.

- (b) Für vorgespannte Bauteile mit nachträglichem Verbund:

$$P_{m,t} = P_{m,o} - \Delta P_t(t) \quad (5.3)$$

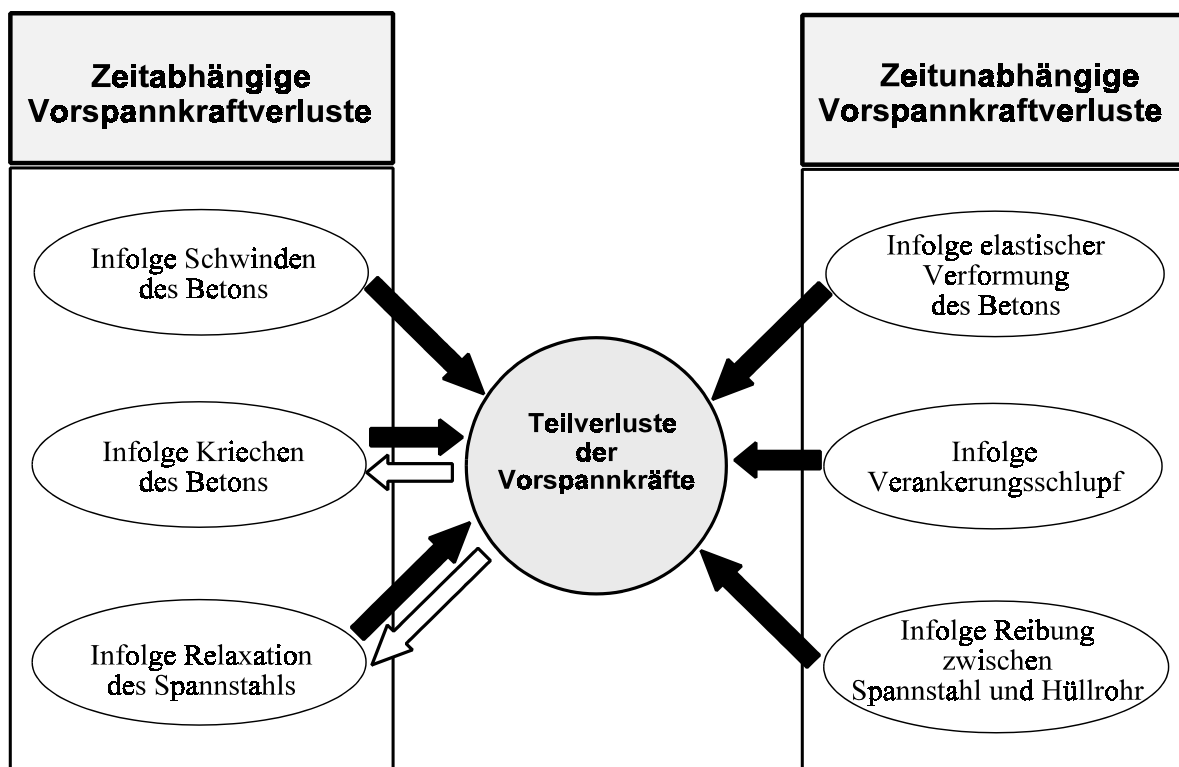
$$\text{mit: } P_{m,o} = P_o - \Delta P_\mu(x) - \Delta P_{ES} - \Delta P_{sl} \quad (5.4)$$

Hierin ist  $P_o$  die Vorspannkraft am Spannanker des Spanngliedes unmittelbar nach dem Vorspannen.  $P_o$  darf den Wert  $A_p \cdot \sigma_{o,max}$  nicht überschreiten, wobei  $A_p$  die Querschnittsfläche des Spanngliedes und  $\sigma_{o,max}$  die maximal zulässige Spannstahlspannung beim Spannvorgang ist. Nach EC2 [1], DIN 1045-1 [3] bzw. CEB-FIP MC90 [9] ist  $\sigma_{o,max}$  auf  $0,80 \cdot f_{pk}$  oder  $0,90 \cdot f_{p0,1k}$  zu beschränken, wobei der kleinere Wert maßgebend ist. Wenn eine unerwartet hohe Reibung auftritt, darf die Spannstahlspannung noch auf  $0,95 \cdot f_{p0,1k}$  erhöht werden. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  dürfen die Stahlspannungen  $\sigma_{pm,o} = P_{m,o}/A_p$  den kleineren Wert von  $0,75 \cdot f_{pk}$  oder  $0,85 \cdot f_{p0,1k}$  nicht überschreiten. Dabei ist  $t = 0$ :

- (a) bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund der Zeitpunkt unmittelbar nach dem Absetzen der Spannpresse beim Vorspannen des letzten Spanngliedes,  
 (b) bei Vorspannung mit sofortigem Verbund der Zeitpunkt unmittelbar nach der Übertragung der Vorspannkraft.

Die oben angegebenen zulässigen Spannstahlspannungen sind im Vergleich zu DIN 4227 Teil 1 [5] bzw. Teil 6 [7] höher.

Die Anteile aus Schwinden und Kriechen des Betons und aus Relaxation des Stahls an den zeitabhängigen Vorspannkraftverlusten können nicht einzeln betrachtet werden. Sie werden vom gesamten Verlust beeinflusst, der ebenfalls unter anderem aus diesen zeitabhängigen Vorspannkraftverlusten zu bestimmen ist. Im Bild 5.1 wird die Wirkung und gegenseitige Beeinflussung der die Vorspannkraftverluste bestimmenden Komponenten aufgezeigt. Der Verlauf der Vorspannkraft längs eines Spanngliedes zum Zeitpunkt  $t$  unter Berücksichtigung der Vorspannkraftverluste wird im Bild 5.2 qualitativ dargestellt. Diese Komponenten werden in den weiteren Abschnitten dieses Kapitels detaillierter analysiert.



**Bild 5.1** Die Komponenten der Teilverluste der Vorspannkraft sowie ihre Wirkung und gegenseitige Beeinflussung

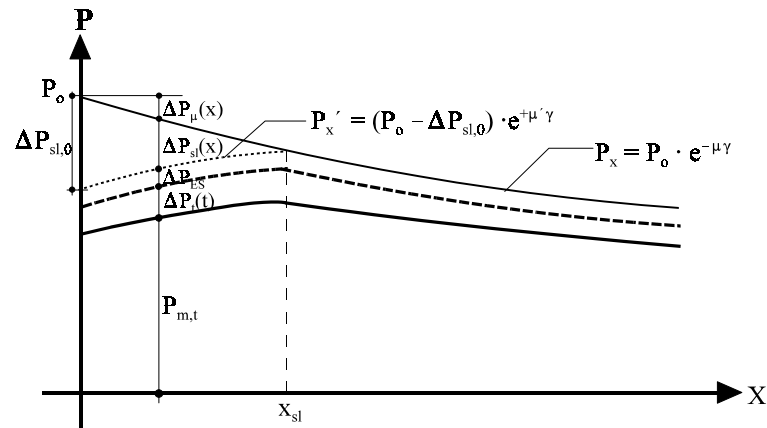


Bild 5.2 Qualitativer Verlauf der Vorspannkraft zum Zeitpunkt  $t$

## 5.2 Zeitunabhängige Vorspannkraftverluste

### 5.2.1 Vorspannkraftverluste infolge Reibung zwischen Spannstahl und Hüllrohr

Zur Bestimmung der Vorspannkraft an einer Stelle mit dem Abstand  $x$  zur Spannpresse unter Berücksichtigung der Reibung zwischen Spannstahl und Hüllrohr wird im allgemeinen die bekannte, aus der Euler'schen Seilreibungsdifferentialgleichung von Cooley entwickelte Formel:

$$P_x = P_0 \cdot e^{-\mu(\theta+k \cdot x)} \quad (5.5)$$

verwendet [100, 101]. In dieser Gleichung bedeuten:

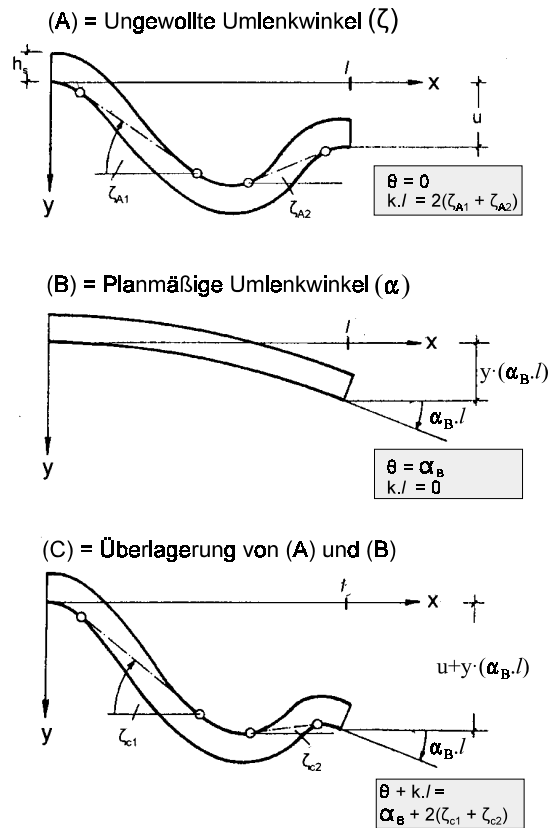
- $\mu$  = Reibungsbeiwert zwischen Spannglied und Hüllrohr
- $\theta$  = Summe der absoluten Werte der planmäßigen Umlenkwinkel über die Länge  $x$
- $k$  = ungewollter Umlenkwinkel pro Längeneinheit
- $x$  = Länge des Spanngliedes vom Spannanker bis zur betrachteten Stelle.

Diese Gleichung hat auch in den Vorschriften, z.B.: EC2 [1], DIN 1045-1 [3] und CEB-FIP MC90 [9], Eingang gefunden. Eine ähnliche, leichtmodifizierte Form wird im ACI 318-99 [4] verwendet.

Es ist zu beachten, dass bei der Ableitung der Cooley'schen Reibungsgleichung ein konstanter Reibungswert  $\mu$  längs des betrachteten Spanngliedabschnitts vorausgesetzt wird. Um die Gültigkeit der Annahme eines über die Spanngliedlänge gleichbleibenden Reibungswertes zu überprüfen, wurden Untersuchungen durchgeführt, z.B. von: *Leonhardt und Mönnig* [102], *Völter* [103], *Wittfoth* [104] und *Cordes et al.* [105]. Ein konstanter Reibungsbeiwert  $\mu$  liefert nur dann ausreichend genaue Ergebnisse, wenn die Spannglieder aus vergüteten Rundstählen, aus langen leichtgekrümmten gerippten Stählen und aus Litzen bestehen. Für glatte kaltgezogene Drähte ist nach *Walter et al.* [106] ebenfalls die Annahme eines konstanten Reibungsbeiwertes gerechtfertigt.

In der Gleichung (5.5) wird die Summe der planmäßigen Umlenkwinkel  $\theta$  vor der Multiplikation mit dem Reibungsbeiwert  $\mu$  um den Anteil der ungewollten Umlenkwinkel für die betrachtete Spanngliedlänge ( $k \cdot x$ ) ergänzt. Der Beiwert  $k$  wird durch Versuche an geraden Spanngliedern ermittelt. Er wird dann auch in planmäßig gekrümmten Abschnitten des Spanngliedes in gesamter rechnerischer Größe angesetzt. Nach [106] und [107] dürfen die Umlenkwinkel  $\theta$  und  $k \cdot x$  nicht durch einfache algebraische Addition überlagert werden. Dieses Vorgehen wäre wegen der bestehenden geometrischen Zusammenhänge und wegen des komplexen Zusammenwirkens zwischen gewollten und ungewollten Umlenkwindeln fehlerhaft. So wird auch in [108] bestätigt, dass die planmäßigen Umlenkwinkel die ungewollten Umlenkwinkel beeinflussen können, weil bei

stark gekrümmten Spanngliedern die Möglichkeit des Durchhängens zwischen Abstützungen vermindert wird. Bild 5.3 zeigt die Überlagerung der Umlenkwinkel nach [105]. Hier wird dargestellt, dass die gezeigte Überlagerung von  $\theta$  und  $k \cdot x$  einen anderen Wert liefern kann als sich durch einfache Addition ergäbe.



**Bild 5.3** Überlagerung von ungewollten und planmäßigen Umlenk winkeln nach [105]

Aus diesen Überlegungen heraus werden in [106] und [107] zur Ermittlung des Überlagerungswertes ( $\gamma_i$ ) folgende Regeln empfohlen:

$$\gamma_i = k \cdot x, \text{ wenn im betrachteten Abschnitt } \theta \leq k \cdot x \text{ ist, bzw.} \quad (5.6)$$

$$\gamma_i = \theta, \text{ wenn im betrachteten Abschnitt } \theta > k \cdot x \text{ ist.} \quad (5.7)$$

Die Vorspannkraft an einer Stelle mit Abstand  $x$  zur Spannprese beträgt somit:

$$P_x = P_0 \cdot e^{-\mu \cdot \sum \gamma_i} \quad (5.8)$$



### 5.2.2 Verankerungsschlupf

Beim Vorspannen eines Bauteils mit nachträglichem Verbund sind Vorspannkraftverluste durch Keilschlupf am Ende des Spannvorgangs bei vielen Spannverfahren unvermeidbar. Die Schlupflänge ( $\Delta l_{sl}$ ) muss dem Zulassungsbescheid des verwendeten Spannverfahrens entnommen werden. Durch den Keilschlupf werden die gespannten Spannglieder in den Anker hineingezogen und damit der Spannweg vermindert. Das führt zu Vorspannkraftverlusten. Infolge Reibung zwischen den Spanngliedern und Hüllrohren wirkt sich der Keilschlupf aber nur auf einen bestimmten Spanngliedabschnitt ( $x_{sl}$ ) vom Spannende aus. Mit folgenden Gleichungen können die Vorspannkraftverluste infolge Keilschlupf  $\Delta P_{sl}$  und ihre Einflusslänge  $x_{sl}$  ermittelt werden. Hierbei wird der E-Modul des Spannstahls bis zu den zugelassenen Spannungen beim Vorspannen als konstant angenommen (s. auch Bild 5.4):

$$\Delta l_{sl} = \frac{1}{E_p \cdot A_p} \int_{x=0}^{x=x_{sl}} \Delta P_{sl}(x) \cdot dx \quad (5.9)$$

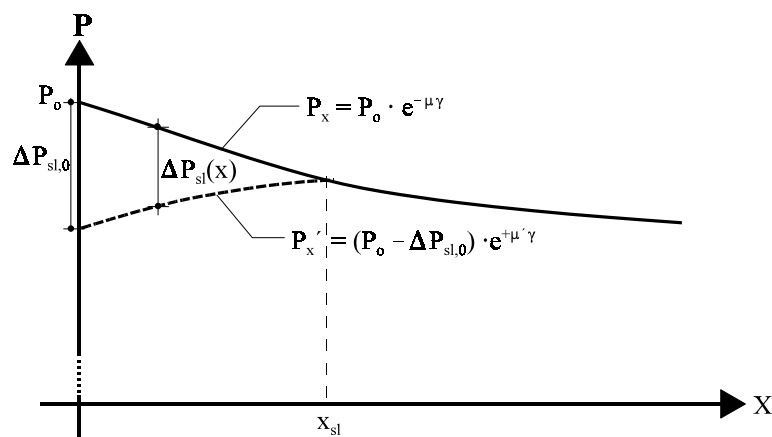


Bild 5.4 Vorspannkraftverluste infolge Keilschlupf

In der Gleichung (5.9) bedeuten:

$$\Delta P_{sl}(x) = P_x - P_x' \quad (5.10)$$

$$\text{mit } P_x = P_0 \cdot e^{-\mu \cdot \gamma} \quad \text{und} \quad P_x' = (P_0 - \Delta P_{sl,0}) \cdot e^{+\mu' \cdot \gamma} \quad (5.11) \text{ und } (5.12)$$

An der Stelle  $x = x_{sl}$  ist  $P_x = P_x'$  und daher:

$$\Delta P_{sl,0} = P_0 \cdot \left(1 - e^{-(\mu + \mu') \cdot \gamma}\right) \quad (5.13)$$

Hier entspricht  $\mu'$  dem Reibungsbeiwert zwischen Spannstahl und Hüllrohr beim Keilschlupf. Näherungsweise können die Werte von  $\mu'$  und  $\mu$  gleich angenommen werden [20, 109]. Dieser Ansatz wird in der vorliegenden Arbeit verwendet.

Um die Werte  $\Delta P_{sl,0}$  und  $x_{sl}$  zu finden, müssen die Gleichungen iterativ gelöst werden. Durch Einsetzen des Anfangswertes von  $x_{sl}$  kann  $\gamma$  mit der Gl.(5.6) bzw. (5.7) bestimmt werden, anschließend lässt sich  $\Delta P_{sl,0}$  mit Gl.(5.13) ermitteln. Mit Hilfe der Gleichungen (5.10 bis 5.12) ist der Verlauf von  $\Delta P_{sl}(x)$  für  $x=0$  bis zu  $x=x_{sl}$  bekannt. Die zugehörige Schlupflänge kann mit Gl.(5.9) bestimmt werden. Der Berechnungsvorgang wird mit einem verbesserten Wert von  $x_{sl}$  solange wiederholt, bis sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem errechneten und dem durch die Zulassung festgelegten Wert der Schlupflänge ergibt.

### 5.2.3 Elastische Verformungen

Zu dem Zeitpunkt der Übertragung der Vorspannkraft auf den erhärteten Beton kann von einem linear elastischen Verhalten des Bauteils ausgegangen werden. Infolge elastischer Verformungen des Betons verkürzen sich die mit Verbund im Beton befindlichen bzw. an ihren Enden im Beton verankerten, bereits

vorgespannten Spannglieder; es treten also Vorspannkraftverluste in den Spanngliedern auf. Bei der Vorspannung mit sofortigem Verbund erfolgen die Verluste während der Übertragung der Vorspannkraft durch die bereits vorgespannten Spannglieder auf den erhärteten Beton. Demgegenüber treten die Verluste bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund nur auf, wenn in diesem Konstruktionsabschnitt mehrere Spannglieder vorhanden sind und diese nicht gleichzeitig sondern nacheinander vorgespannt werden. In diesem Fall erfahren die zuvor gespannten und im Beton verankerten Spannglieder Vorspannkraftverluste beim Vorspannen der folgenden Spannglieder. Bei der Berechnung der Vorspannkraftverluste infolge der elastischen Verformungen des Betons muss der zum Zeitpunkt der Vorspannkraftübertragung vorhandene E-Modul des Betons verwendet werden. Außerdem sollten die Einflüsse der vorhandenen schlaffen Bewehrung und die eventuell gegebenen Behinderungen bezüglich der Bauteilverformungen berücksichtigt werden.

**(1) Elastische Verformungen bei Vorspannung mit sofortigem Verbund**

Unter Annahme eines starren Verbundes zwischen Beton und Spannstahl kann die Dehnungsänderung des Spannstahles  $\Delta\varepsilon_{p,ES}$  und die Dehnung des Betons  $\varepsilon_{cp,ES}$  infolge elastischer Verformungen in gleicher Größe angenommen werden:

$$\Delta\varepsilon_{p,ES} = -\varepsilon_{cp,ES} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\sigma_{p,ES} = -n \cdot \sigma_{cp,ES} \quad (5.14)$$

mit:

$$n = E_p/E_c$$

$$\sigma_{cp,ES} = \sigma_{cp,Pm,o} + \sigma_{cp,G} \quad (5.15)$$

Somit beträgt der Vorspannkraftverlust infolge elastischer Verformungen:

$$\Delta P_{ES} = A_p \cdot \Delta\sigma_{p,ES} = A_p \cdot E_p \cdot \Delta\varepsilon_{p,ES} \quad (5.16)$$

In den Gleichungen (5.14) bis (5.16) bedeuten:

$\Delta\sigma_{p,ES}$  = Spannungsänderung des Spannstahles infolge elastischer Verformung

$\sigma_{cp,ES}$  = Spannung des Betons in Höhe des Spanngliedes infolge elastischer Verformung

$\sigma_{cp,P_{m,0}}$  = Spannung des Betons in Höhe des Spanngliedes infolge Vorspannkraft nach der Übertragung der Vorspannkraft

$\sigma_{cp,G}$  = Spannung des Betons in Höhe des Spanngliedes infolge Eigengewicht des Bauteils.

Da die Spannung des Betons  $\sigma_{cp,ES}$  unter anderem von der wirksamen Vorspannkraft am Ende der Übertragungszeit ( $P_{m,0}$ ) abhängt, die selbst wiederum von  $\Delta P_{ES}$  beeinflusst wird (s. Gl. 5.2), werden die Vorspannkraftverluste  $\Delta P_{ES}$  durch einen iterativen computergerechten Algorithmus ermittelt. Als Anfangswert von  $P_{m,0}$  darf  $P_{m,0} = 0,9 \cdot P_0$  angenommen werden [109, 110].

Durch direkte Ermittlung der Spannungsänderung des Spannstahls nach folgender Gleichung (5.17) kann der Vorspannkraftverlust  $\Delta P_{ES}$  in statisch bestimmten Systemen ohne Iteration berechnet werden [112]:

$$\Delta\sigma_{p,SE} = \frac{(P_0 - \Delta P_{ir}) \left(1 + \left(\frac{e_p}{r}\right)^2\right) - A_c \cdot \sigma_{cp,G}}{\frac{A_c}{n} + A_p \left(1 + \left(\frac{e_p}{r}\right)^2\right)} \quad (5.17)$$

mit:  $e_p$  = Exzentrizität des Spanngliedes an der betrachteten Stelle

$$r = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} \equiv \text{Trägheitsradius}$$

$I_c$  = Trägheitsmoment des Betonquerschnitts

$A_c$  = Querschnittsfläche des Betons

**(2) Elastische Verformungen bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund**

Vorspannkraftverluste infolge elastischer Verformungen treten in einem bereits vorgespannten und im Beton verankerten Spannglied bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund auf, wenn weitere Spannglieder mit gleichem Richtungsverlauf in diesem Bauteil vorgespannt werden. Dabei erfährt das erste vorgespannte Spannglied den größten Vorspannkraftverlust und demzufolge das zuletzt vorgespannte keinen. Daher ist es zweckmäßig, die Berechnung der Vorspannkraftverluste beginnend mit dem zuletzt vorgespannten Spannglied durchzuführen. In diesem Zustand besteht noch kein Verbund zwischen den Spanngliedern und dem umgebenden Beton. Daher muss die Berechnung der Vorspannkraftverluste bezüglich der Verformungen bauteilbezogen durchgeführt werden. Die Vorspannkraftverluste im Spannglied  $j$  infolge der elastischen Verformungen bedingt durch Vorspannen der Spannglieder  $j+1$  bis  $N$  beträgt:

$$\Delta P_{SEj} = - \frac{A_{pj} \cdot E_{pj}}{L \cdot E_c} \sum_{i=j+1}^N \int_{x=0}^L \sigma_{cp, Pi+Gi} dx \quad (5.18)$$

mit:

$N$  = Anzahl der nacheinander vorzuspannenden Spannglieder

- $\sigma_{cp, P_i + G_i}$  = Spannung des Betons in der Höhe des Spannstahls  $j$  infolge Vorspannkraft  $P_i$  und Anteil des Eigengewichts  $G_i$
- $P_i$  = Vorspannkraft im Spannglied  $i$  nach Abzug der Verluste infolge elastischer Verformungen durch Vorspannen der Spannglieder  $i+1$  bis  $N$
- $G_i$  = Anteil des Eigengewichts, das durch Vorspannen des Spanngliedes  $i$  aktiviert wird.

Der Eigengewichtsanteil  $G_i$ , der durch Vorspannen des Spanngliedes  $i$  aktiviert und zur Ermittlung der Betonspannung  $\sigma_{cp, P_i + G_i}$  benötigt wird, ist schwer zu bestimmen. Nach [111] liefert jedoch eine Berechnung mit voller Größe von  $G$  für jedes Spannglied ausreichende Ergebnisse.

### 5.3 Zeitabhängige Vorspannkraftverluste

Zeitabhängige Vorspannkraftverluste in den Spanngliedern eines Spannbetontragwerks werden durch allmähliche Verkürzung des Betons infolge Kriechen und Schwinden des Betons und durch schrittweise Verringerung der Spannstahlspannungen infolge Relaxation des Spannstahles bedingt. Das Schwinden erfolgt während und nach der Erhärtungsphase des Betons. Für die weiteren Untersuchungen sind nur die Anteile nach Übertragung der Vorspannkraft zu berücksichtigen. Die Schwinddehnung nähert sich einem Endwert in unendlicher Zeit. Der Vorspannkraftverlust infolge Schwinden des Betons kann längs des Trägers konstant angenommen werden. Das Schwinden des Betons wird von vielen Faktoren beeinflusst, u.a. von den Ausgangsstoffen und der Zusammensetzung

des Betons, den Erhärtungs- und Umweltbedingungen, der Querschnittsform und den Querschnittsabmessungen, dem Bewehrungsgehalt und der Bewehrungsanordnung.

Das viskoelastische Verformungsverhalten des Betons ist lastabhängig. Den Vorgang, bei dem mit der Zeit zunehmende Dehnungen unter Einwirkung einer konstanten Beanspruchung eintreten, bezeichnet man als Kriechen. Ähnlich wie beim Schwinden des Betons erreicht die Kriechdehnung, jedoch bei konstanter Beanspruchung, näherungsweise einen Endwert in unendlicher Zeit. Neben den Einflussfaktoren, die beim Schwindvorgang zu verzeichnen sind, kommen noch das Betonalter bzw. die Festigkeit des Betons beim Belastungsanfang und die Größe der Beanspruchung hinzu. Für Vorspannung mit Verbund sind die Vorspannkraftverluste infolge Kriechen des Betons in Abhängigkeit der Betonspannungen längs des Bauteils von unterschiedlicher Größe. Bei Vorspannung ohne Verbund sind diese überwiegend gleichmäßig.

Vorspannkraftverluste infolge Relaxation treten im Lauf der Zeit in den Spanngliedern auf, die unter beinahe gleichbleibender Länge vorgespannt werden. Die Relaxation wird von der Stahlsorte, der Umgebungstemperatur und von der Anfangsspannung des Stahls beeinflusst.

Eine genaue Berechnung der einzelnen Komponenten der zeitabhängigen Vorspannkraftverluste ist aufwendig, da eine gegenseitige Beeinflussung der Einzelkomponenten gegeben ist. Die Relaxation des Spannstahls wird normalerweise im Versuch unter gleichbleibender Dehnung bestimmt. Diese Randbedingung wird durch die Volumenänderung des Betons, welche durch Schwinden und Kriechen hervorgerufen wird, nicht eingehalten. Das Kriechen des Betons, welches unter bekannter konstanter Beanspruchung ermittelt werden soll, tritt

in vorgespannten Bauteilen aber bei Vorspannkraften auf, die sich allmählich durch Relaxation, Schwinden und Kriechen vermindern. Außerdem wird die Berechnung durch Unsicherheiten in der Erfassung der Einflüsse der Belastungsgeschichte und der Umgebungsbedingungen im betrachteten Zeitraum erschwert.

Unter Berücksichtigung der oben erwähnten gegenseitigen Beeinflussung wird in diesem Abschnitt der Arbeit ein im *Eurocode 2* [1], im *DIN 1045-1* [3] und im *CEB-FIP MC90* [9] vorgegebenes Modell verwendet. Die Spannungsänderung in den Spanngliedern infolge Schwinden, Kriechen und Relaxation an der Stelle  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  wird mit folgender Gleichung ermittelt:

$$\Delta\sigma_{p,c+s+r} = \frac{\varepsilon_{cs}(t,t_0) \cdot E_p + n \cdot \varphi(t,t_0) [\sigma_{c,g} + \sigma_{c,p0}] + \Delta\sigma_{p,r}}{1 + n \cdot (A_p/A_c) \cdot [1 + (A_c/I_c) \cdot (z_{cp})^2] \cdot [1 + 0,8 \cdot \varphi(t,t_0)]} \quad (5.19)$$

Der zeitabhängige Vorspannkraftverlust ergibt sich somit zu:

$$\Delta P_i(t) = A_p \cdot \Delta\sigma_{p,c+s+r} \quad (5.20)$$

Hierin bedeuten:

$\varepsilon_{cs}(t,t_0)$  = Schwinden des Betons im betrachteten Zeitraum  $(t,t_0)$

$\varphi(t,t_0)$  = Kriechzahl für den betrachteten Zeitraum  $(t,t_0)$

$\Delta\sigma_{p,r}$  = Spannungsänderung in den Spanngliedern infolge Relaxation

$\sigma_{c,g}$  = Betonspannung in Höhe der Spannglieder infolge ständiger Einwirkungen

$\sigma_{c,p0}$  = Betonspannung in Höhe der Spannglieder infolge Vorspannung  $P_{m,0}$

$z_{cp}$  = Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Betonquerschnitts und dem der Spannglieder



### 5.3.1 Schwinden des Betons

Zur Berechnung des Schwindens des Betons  $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$  [Gl.(5.19)] wird im Eurocode 2 Anhang 1 [1] bzw. CEB-FIP MC 90 [9] ein Fließansatz empfohlen, der aus dem Produkt des Grundswindmaßes  $\varepsilon_{cso}$  mit dem Beiwert  $\beta_s$ , welcher den zeitlichen Verlauf des Schwindens beschreibt, gebildet wird:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cso} \cdot [\beta_s(t, t_s) - \beta_s(t_0, t_s)] \quad (5.21)$$

wobei:

$$\varepsilon_{cso} = \varepsilon_s(f_{cm}) \cdot \beta_{RH} \quad (5.22)$$

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = [160 + \beta_{sc} \cdot (90 - f_{cm})] \cdot 10^{-6} \quad (5.23)$$

$$\beta_s(t, t_s) = \{(t - t_s) / (0,035 h_o^2 + t - t_s)\}^{0,5} \quad (5.24)$$

$$\beta_s(t_0, t_s) = \{(t_0 - t_s) / (0,035 h_o^2 + t_0 - t_s)\}^{0,5} \quad (5.25)$$

In den Gleichungen (5.21) bis (5.25) bedeuten:

$t_s$  = Betonalter zu Beginn des Schwindens (in Tagen), s. Bild 5.5.

$t_0$  = Betonalter zu Beginn des betrachteten Zeitraums (in Tagen), d.h. bei der Übertragung der Vorspannkraft (Belastungsbeginn)

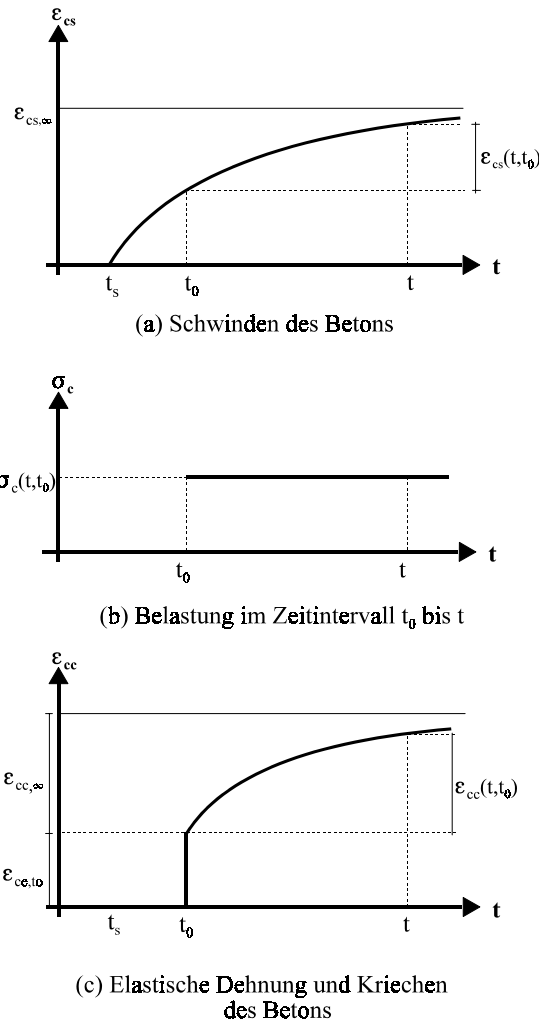
$t$  = Betonalter zum betrachteten Zeitpunkt (in Tagen)

$$h_o = 2 A_c / u \quad (5.26)$$

ist die wirksame Bauteildicke (in mm), wobei  $A_c$  die Querschnittsfläche und  $u$  den der Luft ausgesetzten Querschnittsumfang bezeichnet.

$\varepsilon_s(f_{cm})$  = Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der mittleren Betondruckfestigkeit ( $f_{cm}$  in N/mm<sup>2</sup>) im Alter von 28 Tagen.

Die Einflüsse der verwendeten Zementart werden mit dem Beiwert  $\beta_{sc}$  berücksichtigt. Für Zement-Typ S (langsam erhärtend) ist  $\beta_{sc}=4$ , für Typ N oder R



**Bild 5.5** Schwinden und Kriechen des Betons

(normal oder schnell erhärtend)  $\beta_{sc}=5$  und für Typ RS (hochfest, schnell erhärtend)  $\beta_{sc}=8$ . Mit dem Beiwert  $\beta_{RH}$  werden Einflüsse der relativen Luftfeuchtigkeit RH in folgender Weise berücksichtigt:

$$\beta_{RH} = - 1,55 (1 - (RH/100)^3) \quad \text{für } 40\% \leq RH < 99\% \quad (\text{Luftlagerung}) \quad (5.27)$$

$$\beta_{RH} = + 0,25 \quad \text{für } RH \geq 99\% \quad (\text{Wasserlagerung}) \quad (5.28)$$

Das Berechnungsverfahren für das Schwinden des Betons nach DIN 1045-1 [3] entspricht dem oben beschriebenen Ansatz nach EC2 Teil 1-1 Anhang 1 [1].

### 5.3.2 Kriechen des Betons

Die Kriechzahl  $\varphi(t, t_0)$  in der Gl.(5.19) kann aus einem Produktansatz von Grundkriechzahl  $\varphi_0$  und Beiwert  $\beta_c$ , der den zeitlichen Verlauf des Kriechens beschreibt, nach Eurocode 2 [1] bzw. CEB-FIP MC 90 [9] ermittelt werden (s. Gl. 5.29). Sie soll in Verbindung mit dem Tangentenmodul des Betons  $E_{ci}$  verwendet werden.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (5.29)$$

wobei:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (5.30)$$

$$\varphi_{RH} = 1 + (1 - RH/100) / (0,1 \cdot (h_0)^{1/3}) \quad (5.31)$$

$$\beta(f_{cm}) = 16,8 / \sqrt{f_{cm}} \quad (5.32)$$

$$\beta(t_0) = 1 / (0,1 + t_0^{0,2}) \quad (5.33)$$

$$\beta_c(t, t_0) = [(t - t_0) / (\beta_H + t - t_0)]^{0,3} \quad (5.34)$$

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 \cdot RH)^{18}] h_0 + 250 \leq 1500 \quad (5.35)$$

Hierin sind:

$\varphi_{RH}$ ,  $\beta(f_{cm})$ ,  $\beta(t_0)$  = Beiwerte zur Berücksichtigung des Einflusses der relativen Luftfeuchtigkeit RH, der Betonfestigkeit  $f_{cm}$  bzw. des Betonalters bei Belastungsbeginn  $t_0$  auf die Grundkriechzahl

RH = relative Luftfeuchtigkeit der Umgebung (in %)

$h_0$  = wirksame Bauteildicke des Bauteils (in mm)

Um die Einflüsse der Betonfestigkeit auf die Bestimmung von  $\varphi_{RH}$  (Gl.5.31) und  $\beta_H$  (Gl.5.35) zu berücksichtigen, werden diese Gleichungen in den neuen Normen (z.B.: DIN 1045-1 [3] und EC2 T1 2<sup>nd</sup> Draft Jan.2001) durch die Beiwerte  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  modifiziert:

$$\varphi_{RH} = [1 + (1 - RH/100) / (0,1 \cdot (h_0)^{1/3}) \cdot \alpha_1] \cdot \alpha_2$$

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 \cdot RH)^{18}] h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3$$

$$\text{mit: } \alpha_1 = (35/f_{cm})^{0,7}$$

$$\alpha_2 = (35/f_{cm})^{0,2}$$

$$\alpha_3 = (35/f_{cm})^{0,5}$$

Durch eine Korrektur des Belastungsalters  $t_0$  in den Gleichungen (5.33) und (5.34) nach Gleichung (5.36) wird der Einfluss der verwendeten Zementart, der durch Beiwert  $\alpha$  dargestellt wird, auf die Kriechzahl des Betons berücksichtigt:

$$t_0 = t_{0,T} \cdot \left( 9 / \left[ 2 + (t_{0,T})^{1,2} \right] + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \quad (5.36)$$

Der Beiwert  $\alpha$  beträgt:

-1 für Zement-Typ S (langsam erhärtend),

0 für Zement-Typ N oder R (normal oder schnell erhärtend) bzw.

+1 für Zement-Typ RS (hochfest, schnell erhärtend).

In Gleichung (5.36) ist  $t_{0,T}$  das wirksame Belastungsalter. Dieses muss nach Gleichung (5.37) korrigiert werden, wenn die Lagerungstemperatur im Bereich 0 °C bis 80 °C liegt und von der Standardtemperatur 20 °C deutlich abweicht:

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot e^{(13,651 - 4000/(273 + T(\Delta t_i)))} \quad (5.37)$$

Hierin bedeutet  $T(\Delta t_i)$  die Temperatur in °C während des Zeitraums  $\Delta t_i$  in Tagen.

### 5.3.3 Relaxation des Spannstahls

Der in der Gl.(5.19) eingesetzte Betrag der Vorspannkraftverluste infolge Relaxation des Spannstahls  $\Delta\sigma_{pr}$  soll auf der Grundlage der Relaxationseigen-

schaften ermittelt werden, welche in den bauaufsichtlichen Zulassungsbescheiden angegeben sind. Für eine Anfangsspannung des Spannstahls, die 70% der Bruchspannung entspricht, werden die maximalen Relaxationswerte bei 1000 Stunden auch in der DIN EN 10138 [11] angegeben. Stehen genauere Angaben nicht zur Verfügung, kann die Abschätzung der Relaxationswerte in Abhängigkeit der Anfangsspannung und Stahlart mit Hilfe einer Relaxationskurve nach Eurocode 2 [1] bzw. CEB-FIP MC 90 [9] (s. Bild 5.6) durchgeführt werden. Die Kurve gilt ebenfalls für eine 1000 Stunden-Prüfdauer. Während die Endwerte der Relaxation als das Dreifache der aus dieser Kurve ermittelten Werte angenommen werden dürfen [1], gibt Tabelle 5.1 Hinweise für die Relaxationswerte zwischen  $t = 1$  Stunde und  $t = 1000$  Stunden. Zur Abschätzung der Relaxationswerte bis zum Zeitpunkt  $t = 30$  Jahre darf folgende Formel nach CEB-FIP MC 90 [9] verwendet werden:

$$r_t = r_{1000} \cdot (t / 1000)^k \tag{5.38}$$

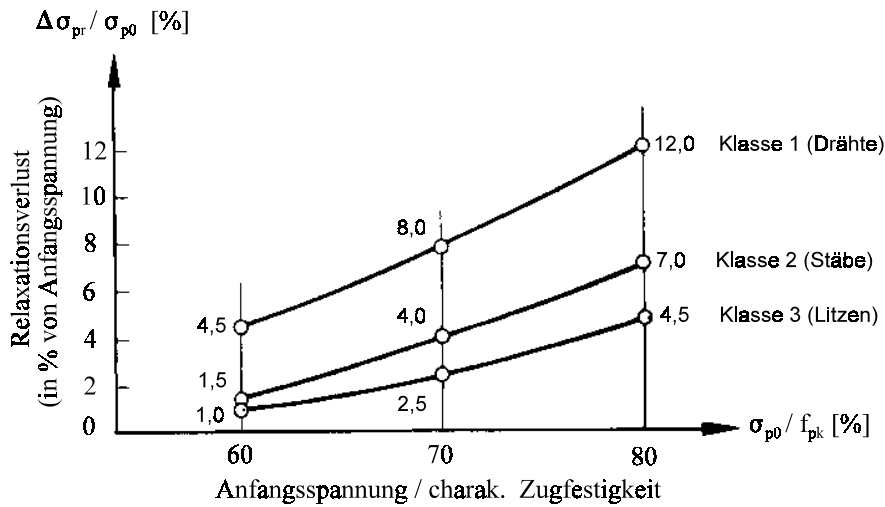
mit:  $k = \log (r_{1000}/r_{100})$  (5.39)

wobei:  $r_t, r_{100}, r_{1000}$  = Relaxationswert nach  $t, 100$  bzw.  $1000$  Stunden.

Nach DIN 1045-1[3] sind die Relaxationswerte einen Gegenstand des bauaufsichtlichen Zulassungsbescheids des Spannstahls und können dort entnommen werden.

**Tabelle 5.1:** Relaxationwerte zwischen  $t = 1$  Stunde und  $t = 1000$  Stunden (bezogen auf  $r_{1000}$ )

Zeit $t$ (in Stunden)	1	5	20	100	100	500	1000
$r_t / r_{1000}$	0,15	0,25	0,35	0,55	0,65	0,85	1,00



**Bild 5.6** Relaxationsverluste nach 1000 Stunden in Abhängigkeit der Anfangsspannung  $\sigma_{p0}$  [1]

Bei Anwendung der Gl. (5.19), die die gegenseitige Wirkung der Komponenten der zeitabhängigen Vorspannkraftverluste berücksichtigt, wird die Berechnung des Relaxationsverlustes unter Berücksichtigung der reduzierten Anfangsspannung des Spannstahls nach folgender Gleichung durchgeführt:

$$\sigma_{p0} = \sigma_{p, p0+G} - 0,3 \cdot \Delta\sigma_{p, c+s+r} \quad (5.40)$$

wobei  $\sigma_{p, p0+G}$  die Spannung der Spannglieder infolge Vorspannung und ständiger Einwirkung ist.

Da Gl. (5.40) den Wert  $\Delta\sigma_{p, c+s+r}$  enthält, muss die Gl. (5.19) iterativ gelöst werden, um den endgültigen Wert von  $\Delta\sigma_{p, c+s+r}$  zu erhalten. Für übliche Hochbauten darf  $\sigma_{p0} = 0,85 \sigma_{p, p0+G}$  angenommen werden, so dass das iterative Vorgehen entfällt. Für diese Vereinfachung schreibt DIN 1045-1[3]  $\sigma_{p0} = 0,95 \sigma_{p, p0+G}$  vor.

## **5.4 Berechnungsmethoden der Teilverluste von Vorspannkraften**

Die Abschätzung der Vorspannkraftverluste kann in mehreren Genauigkeitsstufen erfolgen. Unter Berücksichtigung der Bedeutung bzw. des Einflusses der Vorspannkraftverluste auf das Tragverhalten eines Spannbetontragwerkes kann die Bestimmung der Vorspannkraftverluste in drei Varianten unterteilt werden:

- Globale Abschätzung der Vorspannkraftverluste,
- Bestimmung der Vorspannkraftverluste durch die Berechnung des Anteils einzelner Komponenten,
- Bestimmung der Vorspannkraftverluste durch die Berechnung in Zeitintervallen.

Ungenauere Berechnungsergebnisse der Vorspannkraftverluste haben nur geringen Einfluss auf das Tragverhalten von Spannbetontragwerken im Grenzzustand der Tragfähigkeit. Demgegenüber beeinflussen sie relativ stark die Gebrauchstauglichkeit eines Tragwerkes, z.B. die Durchbiegung, die Rissbreiten und die Risslast.

### **5.4.1 Globale Abschätzung der Teilverluste von Vorspannkraften**

Für die Praxis kann im Hinblick auf die verwendeten Querschnittsformen bzw. -abmessungen, die Werkstoffe, die Vorspanngrade, die Ausführungsmethoden und die Umweltbedingungen eine pauschale Abschätzung der Vorspannkraftverluste vorgenommen werden. Diese beinhaltet die Vorspannkraftverluste aus elastischen Verformungen, Schwinden und Kriechen des Betons sowie Relaxation des Spannstahls. Die Verluste infolge Reibung zwischen Spannstahl und Hüllrohr müssen in Abhängigkeit des verwendeten Spannverfahrens separat berechnet und

dem pauschalen Wert zugeschlagen werden. Als Beispiel wird in Tabelle 5.2 die Empfehlung vom Post-Tensioning Institute (PTI) [112] zur pauschalen Abschätzung der Vorspannkraftverluste bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund wiedergegeben. Diese sind allerdings nur für Vorberechnungen geeignet.

**Tabelle 5.2:** Pauschale Abschätzung der Vorspannkraftverluste nach PTI [112]

Art des Spannstahls	Vorspannkraftverluste (in N/mm <sup>2</sup> )	
	Platten	Balken
Litzen	207	241
Drähte	207	241
Stäbe	138	172
Litzen mit niedriger Relaxation	103	138

#### 5.4.2 Bestimmung der Vorspannkraftverluste durch die Berechnung der Anteile einzelner Komponenten

Weichen die Bauteileigenschaften stark von den üblichen ab oder ist eine genauere Abschätzung der Vorspannkraftverluste erforderlich, kann die Berechnung der Verluste durch Ermittlung der Anteile der einzelnen Komponenten erfolgen. Der Gesamtverlust ist dann die Summe aller dieser Beiträge. Das Vorgehen zur Berechnung der einzelnen Komponenten der Vorspannkraftverluste wurde bereits in den Abschnitten 5.2 und 5.3 dieses Kapitels beschrieben.



### 5.4.3 Bestimmung der Vorspannkraftverluste durch die Berechnung in Zeitintervallen

Die Genauigkeit der Berechnungsergebnisse von Vorspannkraftverlusten kann durch Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung einzelner Komponenten für kleinere Zeitintervalle erhöht werden. Bei dieser Methode wird der betrachtete Zeitraum in Zeitintervalle unterteilt. Die in jedem Zeitintervall wirksame Vorspannkraft wird vom Ende des vorherigen Zeitintervalls übernommen. In Abhängigkeit der erwarteten Genauigkeit kann die Anzahl der Zeitintervalle unter Berücksichtigung möglicher signifikanter Änderungen der Last- bzw. Umgebungsbedingungen beliebig bestimmt werden. PCI [113] empfiehlt als Mindestanzahl vier Zeitintervalle (s. Tabelle 5.3).

**Tabelle 5.3:** Mindestzeitintervalle nach PCI [113]

Zeitintervall	Vorspannung mit sofortigem Verbund		Vorspannung mit nachträglichem Verbund	
	Ab	Bis zu	Ab	Bis zu
1	$t_0$ = Vorspannen des Spannstahls	$t_1$ = Übertragung der Vorspannkraft auf den Beton	$t_0$ = Ende der Erhärtungsbehandlung des Betons	$t_1$ = Vorspannen des Spannstahls
2	$t_1$	$t_2$ = 30 Tagen oder bis zur Aufbringung der zusätzlichen ständigen Lasten	$t_1$	$t_2$ = 30 Tagen oder bis zur Aufbringung der zusätzlichen ständigen Lasten
3	$t_2$	$t_3$ = 1 Jahr	$t_2$	$t_3$ = 1 Jahr
4	$t_3$	$t_4$ = Ende der Lebensdauer des Bauteils	$t_3$	$t_4$ = Ende der Lebensdauer des Bauteils

## 6 Berechnungsprogramm

### 6.1 Allgemeines

Unter Berücksichtigung der bislang diskutierten Aspekte der wirklichkeitsnahen Analyse von Spannbetonsträgern wurde ein Berechnungsprogramm entwickelt. Es setzt sich aus Programmbausteinen zusammen, welche die behandelten Themenbereiche im Gesamtzusammenhang erfassen:

1. Modellbildung des untersuchten Systems,
2. Berechnung der effektiven Vorspannkkräfte unter Berücksichtigung der zeitabhängigen und zeitunabhängigen Vorspannkraftverluste,
3. Berechnung der Verformungs- und Spannungszustände des Tragwerks unter Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten,
4. Berechnung der Schnittgrößen infolge äußerer Einwirkungen sowie der statisch bestimmten und unbestimmten Schnittgrößenanteile infolge Vorspannung.

Zur Modellbildung eines zu untersuchenden Systems werden die geometrischen Daten, die Materialeigenschaften und die Randbedingungen durch eine Eingabeprozedur interaktiv eingegeben. Neben den Eigenschaften der verwendeten Spannstähle und den geometrischen Daten des Spanngliedverlaufs werden Angaben über das Betonalter bei der Vorspannung und bei der Belastung oder beim Untersuchungszeitpunkt sowie über die Lage des Bauteils benötigt.

Die effektiven Vorspannkkräfte werden in den Endknotenpunkten der Elemente ermittelt. Dies erfolgt durch die Berechnung des Anteils einzelner Komponenten der Vorspannkraftverluste, die im Kapitel 5 beschrieben werden. Da die Ermittlung der zeitabhängigen Vorspannkraftverluste durch Iteration geschieht, werden

die hier benötigten Schnittgrößen infolge des Eigengewichts, der ständigen Last und der Vorspannung im ersten Ansatz durch eine linear elastische Berechnung ermittelt.

Unter Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten, welche in den Kapiteln 3 und 4 erläutert werden, wird die Berechnung der Verformungs- und Spannungszustände des Tragwerks durchgeführt. Um höheren Berechnungsaufwand und größeren Speicherbedarf zu vermeiden, wird die Ordnung der Elementsteifigkeitsmatrix durch Reduzierung der Verformungsfreiheitsgrade des Elements mit Hilfe der statischen Kondensation verkleinert.

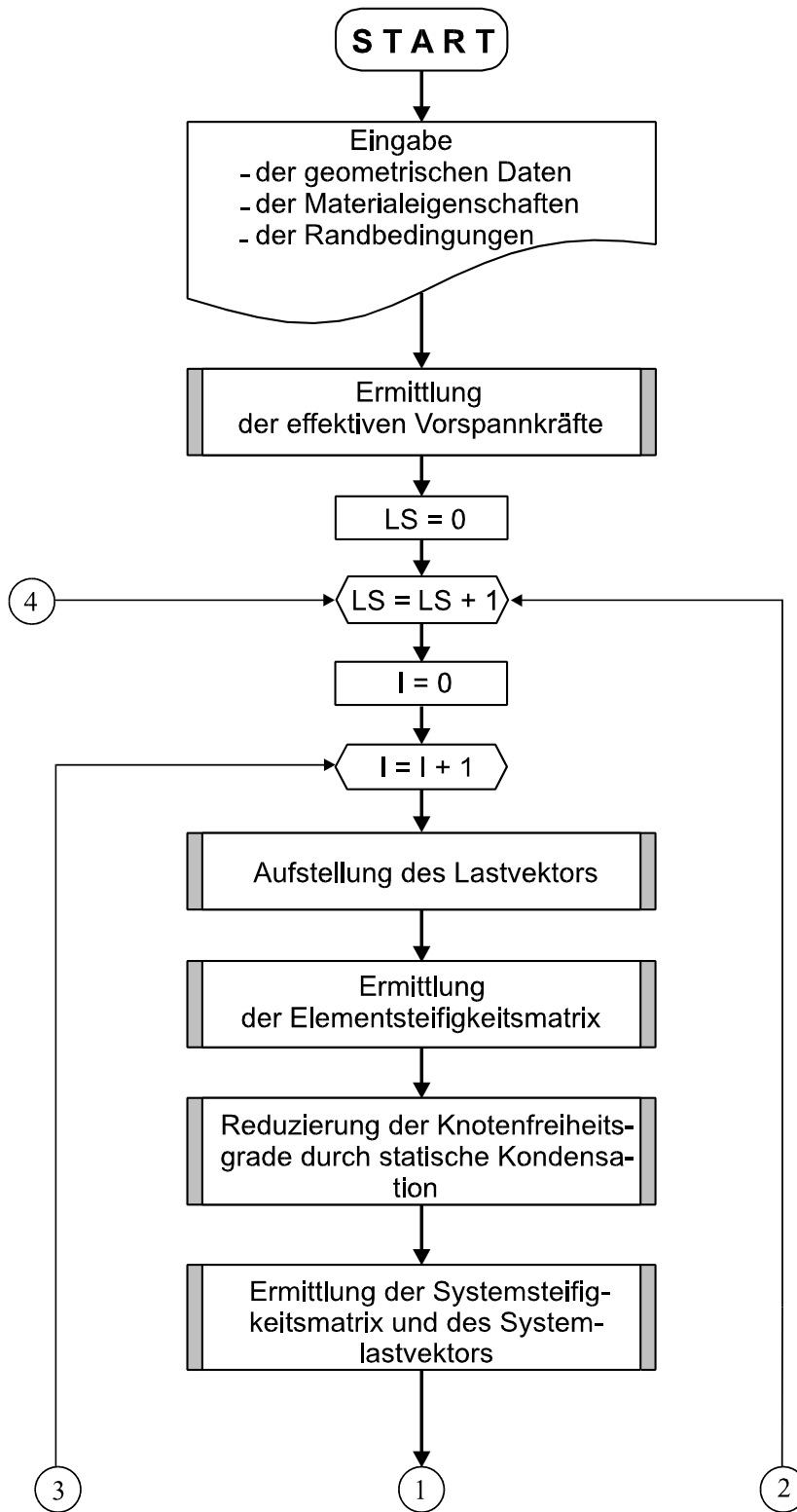
Das erstellte Gleichungssystem ist nur iterativ lösbar. Der Berechnungsablauf wird lastgesteuert durch die inkrementell iterative Methode nach Newton-Raphson durchgeführt. Dies ermöglicht die Analyse von Tragwerken bis zum Erreichen des rechnerischen Bruchzustands. Am Ende jeder Laststufe werden die Schnittgrößen infolge Vorspannung unter Berücksichtigung der Steifigkeitsverteilung in diesem Zustand ermittelt. Die Lösungsmethode der nichtlinearen Gleichungssysteme und die zur Steuerung der Iteration benötigten Konvergenz- bzw. Abbruchkriterien werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

## **6.2 Ablauf des Programms**

Der schematische Programmablauf wird im Bild 6.1 dargestellt. In der Eingabeprozedur werden alle zur Beschreibung des zu bearbeitenden Problems benötigten Daten eingegeben. Das zu untersuchende System wird in Elemente unterteilt. In Bereichen, in denen große Änderungen der Zustandsgrößen erwartet werden, wie

z.B. unter Einzellasten oder über dem Mittelaufleger beim Durchlaufträger, kann das Elementraster verdichtet werden. In diesen Bereichen kann auch die Anzahl der Elementschichten vergrößert werden. Demgegenüber kann eine gröbere Einteilung in Trägerabschnitten, in denen nur geringe Änderungen der Zustandsgrößen erwartet werden, gewählt werden.

Die Berechnung der effektiven Vorspannkkräfte wird unter Berücksichtigung der zeitabhängigen und zeitunabhängigen Vorspannkraftverluste durchgeführt. Für die Vorspannung mit sofortigem Verbund setzt sich der zeitunabhängige Vorspannkraftverlust aus der elastischen Verformung des Bauteils bei der Vorspannkraftübertragung und aus der eventuellen Reibung in den Umlenkstellen und kurzzeitigen Relaxationsverlusten zusammen. Bei der Vorspannung mit nachträglichem Verbund werden neben den Vorspannkraftverlusten infolge Reibung zwischen Spannglied und Hüllrohr auch die elastischen Verformungen und der vom verwendeten Spannverfahren abhängige Keilschlupf als zeitunabhängige Vorspannkraftverluste ermittelt. Die zeitabhängigen Vorspannkraftverluste infolge Kriechen und Schwinden des Betons und infolge Relaxation des Spannstahls werden hier für den Zeitraum vom Vorspannen bis zum Zeitpunkt der Belastung bzw. der Untersuchung berechnet.



**Bild 6.1 (a)** Programmablauf

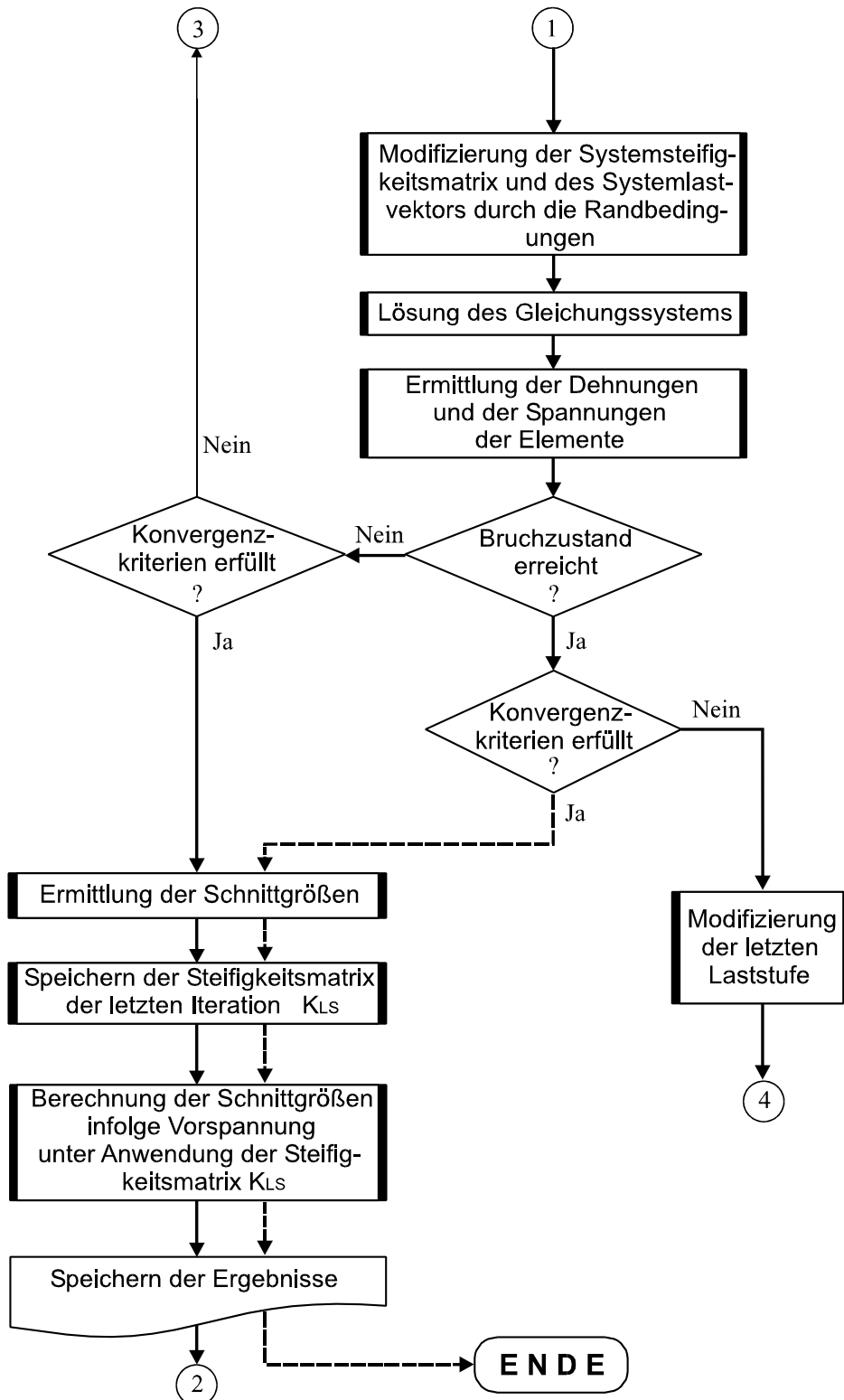


Bild 6.1 (b) Programmablauf (Fortsetzung)

Die Analyse des Tragwerks bis hin zum rechnerischen Bruchzustand erfolgt durch eine inkrementell iterative Berechnungsmethode. Für jede inkrementell aufgebrachte Laststufe werden iterative Berechnungen durchgeführt, bis ein Gleichgewicht zwischen äußeren Lasten und inneren Kräften oder bis ein Toleranzwert erreicht wird. Hier wird die iterative Berechnung nach der Standard-Newton-Raphson-Methode eingesetzt. Für jede Iteration werden Elementsteifigkeitsmatrix bzw. Systemsteifigkeitsmatrix erstellt und das entstandene Gleichungssystem gelöst. Aus den ermittelten Verschiebungen werden die Dehnungen der Elementschichten mit Hilfe des Gauß-Integration-Verfahrens numerisch berechnet. Mit den bekannten Spannungs-Dehnungsbeziehungen der verwendeten Werkstoffe können die Spannungen anschließend ermittelt werden. Die Schnittgrößen werden durch die Integration der Spannungen in den Querschnitten der Elemente berechnet.

Wenn das Gleichgewicht bzw. das Konvergenzkriterium in einer Laststufe erfüllt ist, wird die Systemsteifigkeitsmatrix der letzten Iteration gespeichert. Mit der gespeicherten Steifigkeitsverteilung in diesem Zustand werden die Schnittgrößen infolge der effektiven Vorspannkraft ermittelt. Die Vorspannkraft wird als Umlenkkräfte, Reibungskräfte und Ankerkräfte eingesetzt. Diese werden an die Tragwerkeigenschaften dieses Zustands angepaßt. Wie im Kapitel 3 schon erwähnt, verschiebt sich die Lage der Schwerachse der Elemente in Abhängigkeit des Belastungszustandes infolge der Rissbildung und des nichtlinearen Verhaltens der Werkstoffe. Die Schwerachse schiebt sich dabei je nach Rissbildung im Feldbereich nach oben oder im Stützbereich nach unten. Dies führt zu einer Änderung der Knotenkräfte aus der Vorspannwirkung. Aus dieser Berechnung erhält man zunächst die gesamten Schnittgrößen aus Vorspannwirkung  $S_p$ . Aus denen lässt sich der statisch unbestimmte Anteil  $S_{p,ind}$  ermitteln:

$$S_{p,ind} = S_p - S_{p,dir} \quad (6.1)$$

dabei bedeutet  $S_{p,dir}$  den statisch bestimmten Anteil der Vorspannwirkung:

$$S_{p,dir} = P \cdot e \quad (6.2)$$

Die Analyse des zu bearbeitenden Problems wird solange fortgesetzt, bis der rechnerische Bruchzustand des Tragwerks erreicht wird. Nach dem Erreichen der Fließgrenze der Bewehrung kann die Größe der weiteren Laststufen reduziert werden, um das Tragverhalten in diesem Bereich besser zu erfassen. Um die rechnerische Bruchlast genauer zu ermitteln, wird die letzte Laststufe, in der der Bruchzustand erreicht wird, solange modifiziert, bis der Gleichgewichtszustand erreicht bzw. die Konvergenzkriterien erfüllt werden.

## 6.3 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

### 6.3.1 Allgemeine Hinweise

Nach der Erstellung der Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_s$  aus den Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{K}_e$  (Gl. 3.56) erhält man eine Beziehung zwischen den Verformungen und den Beanspruchungen in der Form:

$$\underline{R} = \underline{K}_s \cdot \underline{r} \quad (6.3)$$

mit:  $\underline{R}$  = Systemlastvektor

$\underline{K}_s$  = Systemsteifigkeitsmatrix

$\underline{r}$  = Systemverschiebungsvektor.

Durch die vorgegebenen äußeren Beanspruchungen ist der Lastvektor  $\underline{R}$  bekannt. Die Gleichung (6.3) wird dann nach dem Verschiebungsvektor  $\underline{r}$  gelöst. Infolge der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten



in der Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_e$  ist die Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_s$  von den gesuchten Verschiebungen  $\underline{r}$  abhängig. Die Lösung der nichtlinearen Gleichung (6.3) kann daher nicht direkt, sondern nur in iterativer Form erfolgen.

Die im Ingenieurwesen zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme am häufigsten verwendeten Verfahren können in die folgenden drei Gruppen unterteilt werden:

- inkrementelle Verfahren,
- iterative Verfahren,
- kombinierte Verfahren.

Die Berechnung nach diesen Verfahren werden normalerweise durch Last- oder Verschiebungssteuerung durchgeführt. Für Tragwerke mit sehr ausgeprägten geometrischen Nichtlinearitäten verwendet man auch Lösungsmethoden, die gleichzeitig durch Last- und Verschiebungssteuerung koordiniert werden, um die Durchschlagprobleme in den kritischen Punkten bei Anwendung der reinen Last- oder Verschiebungssteuerung zu überwinden. Da das in dieser Arbeit behandelte Thema von den geometrischen Nichtlinearitäten nur wenig beeinflusst wird, werden diese Lösungsverfahren nicht weiter besprochen. Zu Einzelheiten der sogenannten Kurvenverfolgungs- oder Bogenlängen-Methoden bzw. ihren Modifikationen wird auf die Literatur verwiesen [z.B.: 114, 115, 116].

### 6.3.2 Inkrementelles Verfahren

Bei diesem Berechnungsverfahren wird die gesamte Last in kleinen Schritten – den Inkrementen – aufgebracht. Die Grundvariante dieser Klasse, das Euler-

Verfahren, ist in Bild 6.2 dargestellt. Das Verfahren wird ohne Gleichgewichtskorrektur in jeder Laststufe verwendet. Die Tangentensteifigkeit wird durch Linearisierung der kinematischen Gleichungen hergeleitet und spiegelt die Materialeigenschaften und die Gleichgewichtsbedingungen am Anfang einer Laststufe wieder [117]. Deshalb weicht die Kurve mit zunehmenden Laststufen von der richtigen Lösungskurve ab, was zu einer Überschätzung der maximal aufnehmbaren Last führt. Die Abweichung kann durch verfeinerte Lastinkremente zwar abgemindert werden, der Berechnungsaufwand wird aber größer. Zur Verbesserung dieses Verfahrens wurden viele Vorschläge gemacht, z.B.: das modifizierte Euler-Verfahren und das Runge-Kutta-Verfahren.

Bei einer Variante dieser Gruppe wird versucht, die Abweichung zu verringern, in dem die Ungleichgewichtskräfte jeder Laststufe ermittelt und zur nächsten Laststufe hinzuaddiert werden (s. Bild 6.3). Dieses Bild zeigt, dass die Abweichungen der ermittelten Punkte von der exakten Lösungskurve kleiner sind als beim reinen Euler-Verfahren. Der methodische Fehler des rein inkrementellen Vorgehens wird durch diese Variante jedoch nicht vollständig behoben. Außerdem weist *Ramm* [119] darauf hin, dass sich dieses Lösungsverfahren in bestimmten Fällen nicht konvergent verhält.

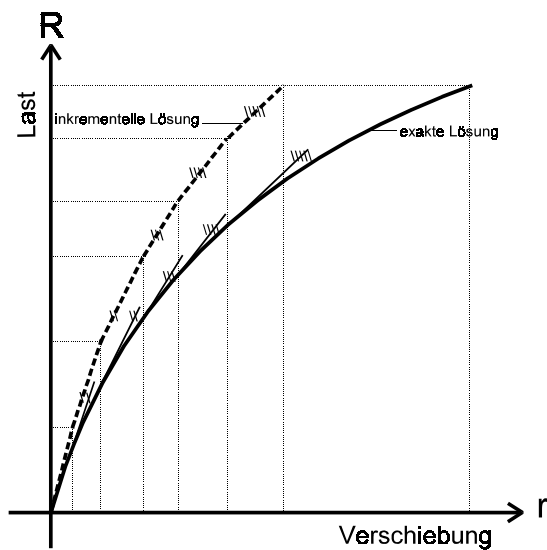


Bild 6.2 Euler-Verfahren

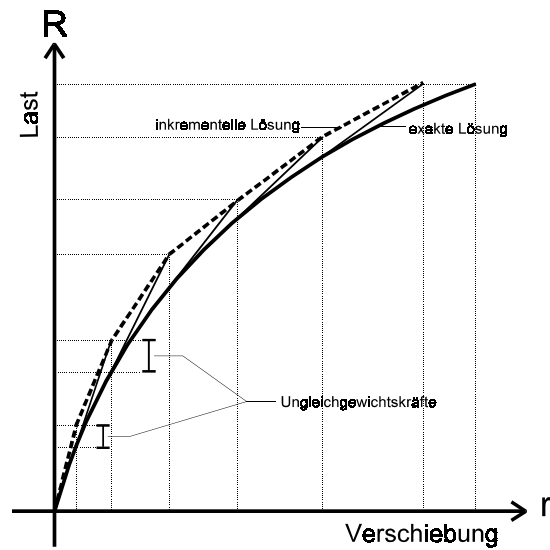


Bild 6.3 Inkrementelles Verfahren mit Gleichgewichtskorrektur

### 6.3.3 Iteratives Verfahren

Im Gegensatz zum inkrementellen Verfahren wird hier die gesamte Last auf einmal aufgebracht. Es gibt viele Varianten zu diesem Verfahren. Die Berechnungsmethoden unterscheiden sich dadurch, dass bei den Iterationen jeweils unterschiedliche Steifigkeitsmatrizen verwendet werden. Bild 6.4 zeigt ein iteratives Berechnungsverfahren, welches im Schrifttum unter dem Namen "Newton-Raphson-Verfahren" bekannt ist. Dabei muss die Tangentensteifigkeitsmatrix in jeder Iteration an den jeweiligen Verformungszustand neu angepaßt werden. Der Iterationsprozeß wird soweit fortgesetzt, bis die Ungleichgewichtskraft  $\Delta R_i$  oder die inkrementelle Verschiebung  $\Delta r_i$  hinreichend klein ist. Das Verfahren konvergiert sehr schnell. Diesem Vorteil steht der größere Aufwand in der Erstellung und Invertierung bzw. Zerlegung der Tangentensteifigkeitsmatrix bei jeder Iteration gegenüber.

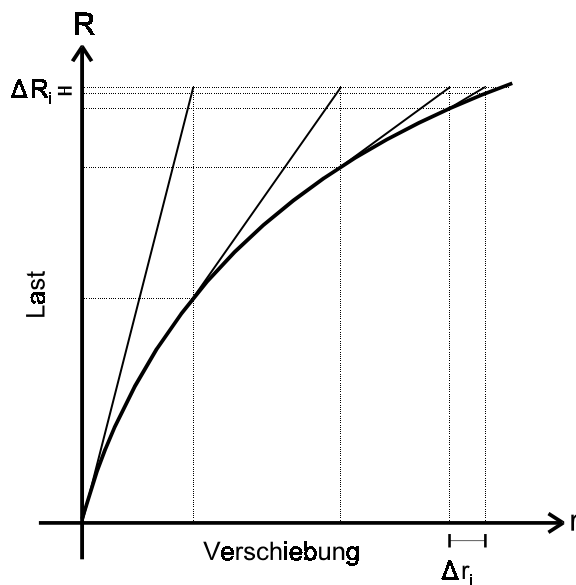


Bild 6.4 Newton-Raphson-Verfahren

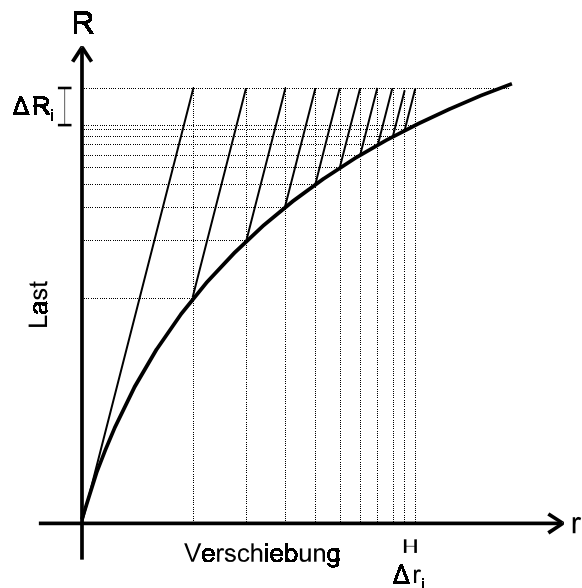


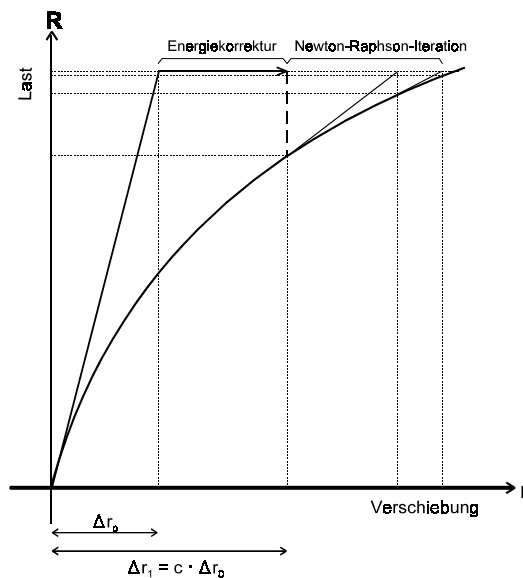
Bild 6.5 Modifiziertes-Newton-Raphson-Verfahren

Um den Berechnungsaufwand des Newton-Raphson-Verfahrens zu reduzieren, verwendet man ein modifiziertes Verfahren, bei dem die Steifigkeitsmatrix nur in der ersten Iteration gebildet und zerlegt wird. In den weiteren Iterationen wird dann die gleiche Steifigkeitsmatrix benutzt. Diese Vorgehensweise wird als modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren bezeichnet (s. Bild 6.5). Das Verfahren konvergiert langsamer. Die Vereinfachung durch die einmalige Berechnung und Zerlegung der Steifigkeitsmatrix ist nach *Weiler* [69] wegen des materialbedingten nichtlinearen Systemverhaltens der Betontragwerke ungeeignet.

Es gibt noch viele Varianten des Newton-Raphson-Verfahrens, die in einigen Fällen ein besseres Konvergenzverhalten haben als das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren. Diese Varianten werden normalerweise in kombinierten Inkrementell-Iterativen-Methoden verwendet [117]. Eine Berechnungsmethode zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme wurde von *Szillard* [120] entwickelt. Die Methode, die als Energieausgleichsverfahren bezeichnet wird, ist eigentlich nicht zur Gruppe der iterativen Verfahren zu zählen. Ihre Anwendung

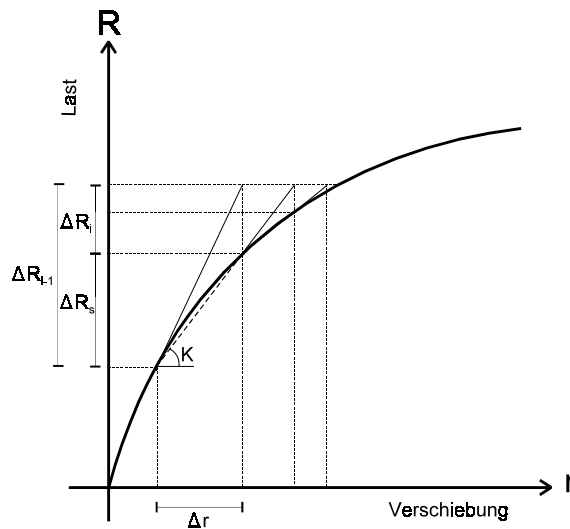
ist aber mit der Standard- oder der Modifizierten-Newton-Raphson-Methode eng verbunden. In dieser Berechnungsmethode wird die aus der ersten Iteration ermittelte Verschiebung  $\Delta r_0$  mit einem Affinitätsfaktor  $c$  multipliziert, um eine Verbesserung des Verschiebungsvektors zu erhalten (s. Bild 6.6):

$$\Delta r_1 = c \cdot \Delta r_0 \quad (6.4)$$



**Bild 6.6** Energieausgleichsverfahren nach Szilard [120]

Der Affinitätsfaktor  $c$  wird durch Einsetzen der Gleichung (6.4) in den Arbeitssatz  $A_a = A_i$  ermittelt.  $A_a$  ist die Arbeit der äußeren Kräfte, und  $A_i$  ist die zugehörige Formänderungsarbeit, die neben dem linearen auch einen nichtlinearen Anteil enthält. Die entstandene Gleichung ist ein Polynom höherer Ordnung, dessen kleinste positive Nullstelle der gesuchte Affinitätsfaktor ist. Die noch verbleibende Ungleichgewichtskraft wird dann mit dem Standard- bzw. dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren beseitigt. Weil die vorher durchgeführte Energiekorrektur den exakten Gleichgewichtszustand in einem Schritt schon weitgehend annähert, wird die Anzahl der Iterationen im allgemeinen drastisch reduziert [57, 120].

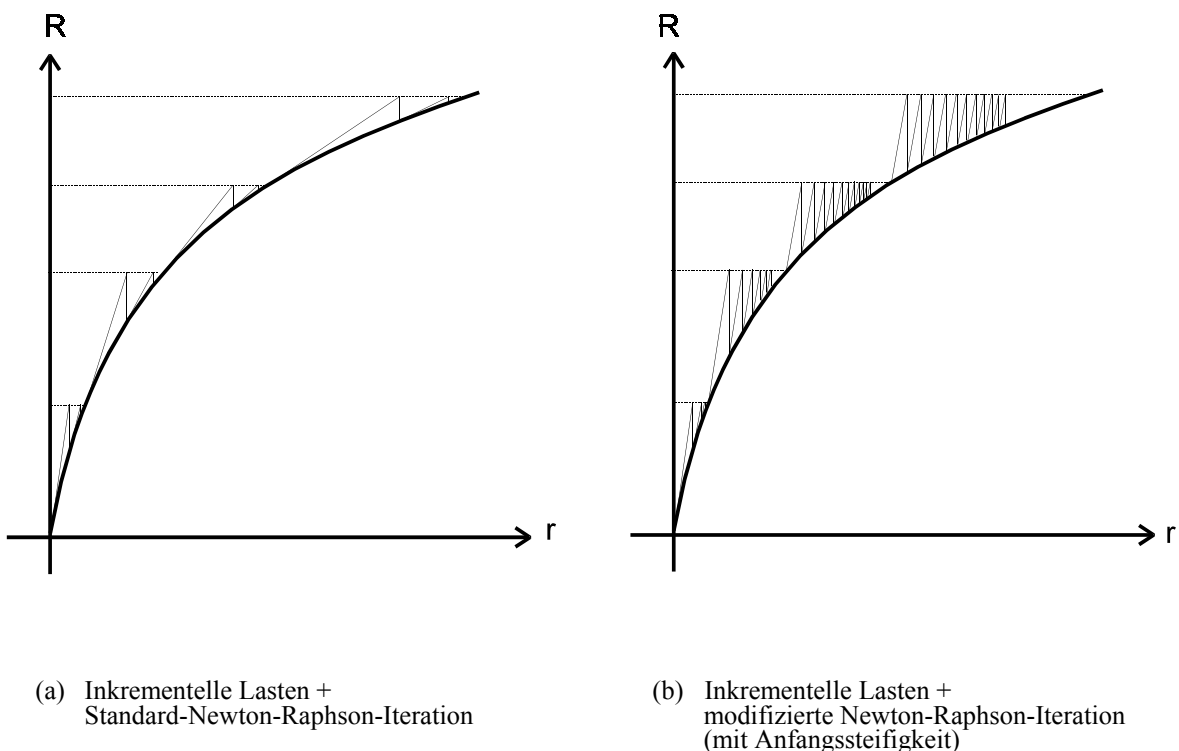


**Bild 6.7** Quasi-Newton-Verfahren

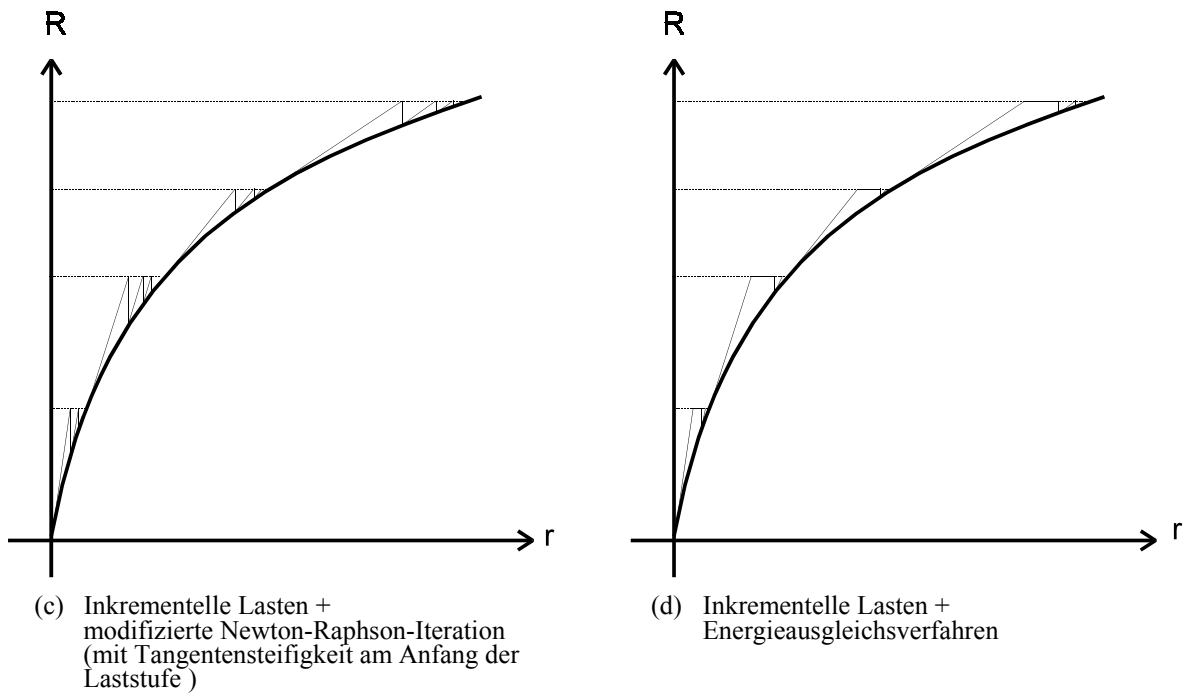
Eine sogenannte Sekanten- oder Quasi-Newton-Methode wurde als Alternative zur Newton-Raphson-Methode entwickelt [121]. In dieser Methode wird die Sekantensteifigkeit anstatt der Tangentensteifigkeit im Iterationsprozeß verwendet. Für eindimensionale Probleme ist die Bildung einer solchen Matrix eindeutig (s. Bild 6.7). Die Aktualisierung der Systemsteifigkeitsmatrix durch die Sekanten näherung wird auf das letzte berechnete Verformungsinkrement ( $\Delta r$ ) und auf den Unterschied ( $\Delta R_s$ ) zwischen der dazugehörigen und der in der vorherigen Iteration entstandenen Ungleichgewichtskraft bezogen. Die aktualisierte Matrix muss die Bedingungen der Quasi-Newton-Gleichung  $K \cdot \Delta r = \Delta R_s$  erfüllen. Diese Methode stellt einen Kompromiß in der Anwendung der Systemsteifigkeitsmatrix zwischen dem Standard- und dem Modifizierten-Newton-Raphson-Verfahren dar [122]. Für Anwendungen in der Finite-Elemente-Methode ist das BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)-Verfahren die effektivste Variante der Quasi-Newton-Methode [122]. Weitere Einzelheiten zum BFGS-Verfahren können z.B. [123 und 124] entnommen werden.

### 6.3.4 Inkrementell-Iteratives Verfahren

Die beiden vorher geschilderten Lösungsverfahren werden meistens in der kombinierten Form des inkrementell-iterativen Verfahrens verwendet. Die äußeren Lasten werden inkrementell aufgebracht. Innerhalb jedes Lastinkrements wird eine Iterationsberechnung durchgeführt, bis die Ungleichgewichtskraft kleiner ist als der vorgegebene Toleranzwert. Die letzte Ungleichgewichtskraft kann dann im nächsten Lastinkrement berücksichtigt werden. Aus der Vielfalt der inkrementellen und der iterativen Verfahren ergeben sich viele Kombinationsmöglichkeiten. Einige Kombinationen werden in Bild 6.8 dargestellt.



**Bild 6.8** Kombinierte Verfahren



**Bild 6.8** Kombinierte Verfahren (Fortsetzung)

## 6.4 Konvergenzkriterien

Die Kriterien zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens müssen bei der Verwendung von Iterationsmethoden zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems festgelegt werden. Nach jedem Iterationsschritt wird für das erzielte Ergebnis überprüft, ob ein Toleranzwert erreicht wird oder noch weitere Iterationen notwendig sind. Im allgemein werden drei Kriterien beschrieben, die auf der Betrachtung folgender Größen basieren:

1. Verschiebungszuwachs,
2. Ungleichgewichtskräfte,
3. Zuwachs der inneren Energie.



Beim Kriterium 1 wird der Verschiebungszuwachs in jeder Iteration ( $\Delta \underline{r}_i$ ) mit der wirklichen Verschiebung ( $\underline{r}$ ) verglichen:

$$\frac{\|\Delta \underline{r}_i\|_2}{\|\underline{r}\|_2} \leq \varepsilon_D \quad (6.5)$$

wobei  $\varepsilon_D$  eine Konvergenztoleranz für die Verschiebung bezeichnet.

Da der Vektor  $\underline{r}$  noch nicht bekannt ist, darf in vielen Fällen der zuletzt berechnete Wert von  $\underline{r}_i$  als Näherungswert verwendet werden [122].

Beim Kriterium 2 werden die Ungleichgewichtskräfte  $\Delta \underline{R}_i$  mit den äußeren Lasten  $\underline{R}$  verglichen, und die iterative Berechnung wird beendet, wenn:

$$\frac{\|\Delta \underline{R}_i\|_2}{\|\underline{R}\|_2} \leq \varepsilon_F \quad (6.6)$$

Hierbei ist  $\varepsilon_F$  eine vorgegebene Toleranz für die unbalancierten Kräfte.

Die Kriterien 1 und 2 haben jeweils bestimmte Schwachstellen. Beim auf den Verschiebungsgrößen basierenden Kriterium kann die tatsächliche Lösung noch weit von dem Wert entfernt sein, der aus der Anwendung des Konvergenzkriteriums nach Gl.(6.5) mit dem Näherungswert von  $\underline{r}$  resultiert. Dies kann in manchen Problemen auftreten, wie z.B. bei Anwendung der modifizierten Newton-Raphson-Methode in einer elastisch-plastischen Analyse bei der Einwirkung von Lasten [122]. Demgegenüber hat die Verschiebung beim Kriterium 2 keinen direkten Einfluss auf die Beendigung des Iterationsprozesses: Bei einer elastisch-plastischen Analyse mit sehr flacher Dehnungs-Verfestigung z.B. kann die unbalancierte Kraft schon einen sehr kleinen Zuwachs erreichen und das Kriterium erfüllen, während der tatsächliche Verschiebungszuwachs noch einen großen Wert hat. Daher sollten die Konvergenzkriterien (6.5) und (6.6) mit

sehr kleinen Werten von  $\varepsilon_D$  bzw.  $\varepsilon_F$  angewendet werden. Außerdem müssen die Variablen in den Gleichungen entsprechend den gemessenen Zustandsgrößen angepaßt werden.

Das dritte Kriterium kann sinnvoller sein, da die Verschiebungen und die Kräfte in das Kriterium einbezogen werden. Bei diesem Konvergenzkriterium wird der Zuwachs der inneren Energie in jeder Iteration ( $\Delta \underline{r}_i \cdot \Delta \underline{R}_i$ ) mit dem Anfangszuwachs der inneren Energie ( $\Delta \underline{r}_1 \cdot \Delta \underline{R}_1$ ) verglichen:

$$\frac{\Delta \underline{r}_i \cdot \Delta \underline{R}_i}{\Delta \underline{r}_1 \cdot \Delta \underline{R}_1} \leq \varepsilon_E \quad (6.7)$$

wobei  $\varepsilon_E$  eine vorgegebene Energietoleranz ist. Die Anwendung dieses Konvergenzkriteriums wird in der Praxis bevorzugt und auch in dieser Arbeit angewendet.

## **7 Nachrechnung experimenteller Untersuchungen / Anwendungsbeispiele**

### **7.1 Nachrechnung experimenteller Untersuchungen**

#### **7.1.1 Allgemeines**

Das in dieser Arbeit behandelte Problem ist sehr komplex. Unter Berücksichtigung der Nichtlinearitäten der geometrischen Beziehungen sowie des Werkstoffverhaltens ist die Genauigkeit der Ergebnisse des entwickelten Berechnungsmodells analytisch kaum überprüfbar. Die Überprüfung der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit erfolgt daher durch Nachrechnungen vorhandener experimenteller Versuche. Mit den Ergebnissen aus der Nachrechnung von Versuchen soll gezeigt werden, dass das entwickelte Berechnungsmodell für den Verbundwerkstoff Stahlbeton bzw. Spannbeton, die Ansätze zur Berücksichtigung der zeitabhängigen und zeitunabhängigen Vorspannkraftverluste auf die Vorspannwirkung sowie die verwendeten inkrementellen Iterationsverfahren zur Beschreibung des wirklichkeitsnahen Tragverhaltens mit ausreichender Genauigkeit und Zuverlässigkeit geeignet sind. Aus diesem Grund wurden zahlreiche Versuche nachgerechnet (s. Anhang A). Die Wesentlichen werden in diesem Abschnitt dargestellt.

#### **7.1.2 Versuchsträger von Lin [36]**

##### **(1) Geometrische Daten**

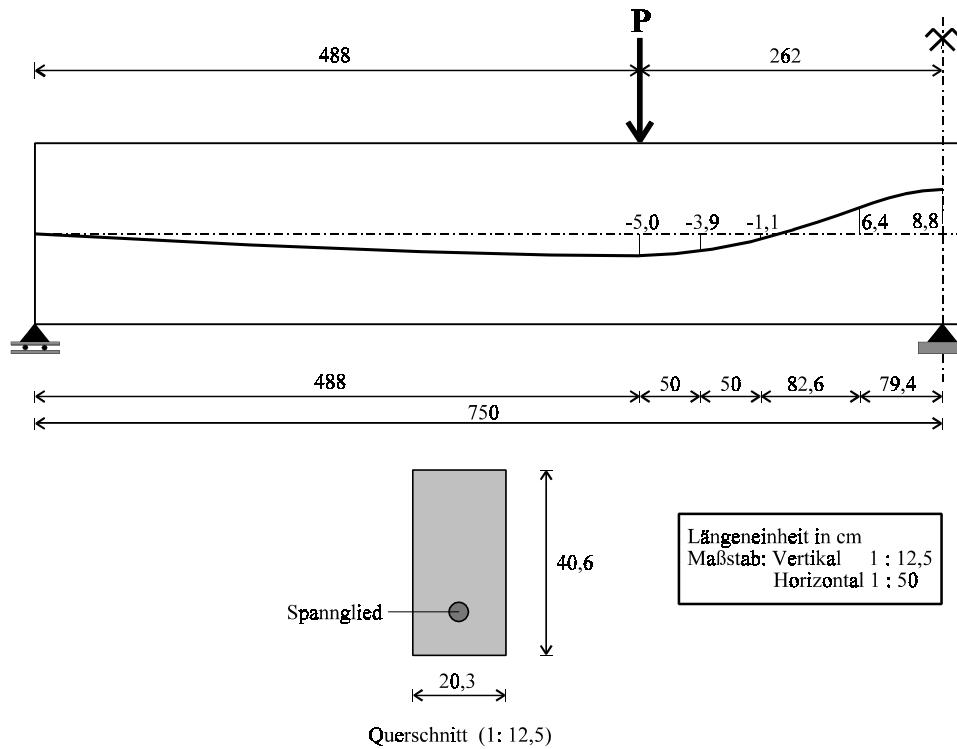
Der Versuchsträger war ein symmetrischer Spannbetondurchlaufträger auf drei

Auflagern. Die Spannweite beider Felder betrug jeweils 7,50 Meter. Während beide Endauflager horizontal verschieblich waren, wurde das Mittelaufleger gegen horizontale Verschiebung festgehalten. Der Träger hatte eine rechteckige Querschnittsform mit 20,3 cm Breite und 40,6 cm Höhe. Der Spanngliedverlauf wurde so gewählt, dass keine Auflagerkräfte bzw. Zwangmomente infolge Vorspannung auftraten. Der Träger hatte also eine konkordante Spanngliedführung. Im Betonalter von 14 Tagen wurde der Träger von beiden Enden vorgespannt und das Hüllrohr anschließend verpresst. Der Träger wurde so bemessen, dass keine Biegerisse unter Vorspannwirkung und Eigengewicht sowie unter Gebrauchslast auftraten. Also handelte es sich um einen Träger mit voller Vorspannung. Zusätzliche schlaffe Bewehrung war nicht vorhanden. Bild 7.1 skizziert den Versuchsträger.

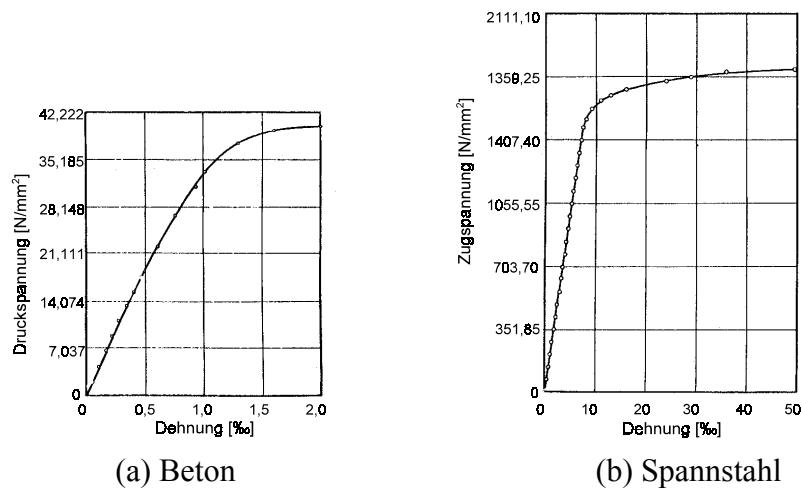
## (2) Werkstoffe

Der verwendete Beton hatte Mittelwerte der Zylinder-Druckfestigkeit von 37 N/mm<sup>2</sup> und der Biegezugfestigkeit von 6,5 N/mm<sup>2</sup>. Die charakteristische Druckfestigkeit war damit auf etwa 30 N/mm<sup>2</sup> festgelegt. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons wird im Bild 7.2 (a) dargestellt. Im Versuchsträger wurde ein 32-drähtiges Spannglied verwendet. Die Drähte besaßen einen Durchmesser von 5 mm und eine charakteristische Zugfestigkeit von  $f_{pu,k} = 1800$  N/mm<sup>2</sup>. Die Streckgrenze bei der 0,2 %-Dehngrenze  $f_{p0,2k}$  betrug 1604 N/mm<sup>2</sup>. Der Elastizitätsmodul des Spannstahls war 204000 N/mm<sup>2</sup>. Bild 7.2 (b) zeigt die Spannungs-Dehnungsbeziehung des verwendeten Spannstahls. Die höchste Spannung des Spannstahls beim Vorspannen wurde mit 999 N/mm<sup>2</sup> begrenzt. Um die Vorspannkraftverluste infolge Reibung und Keilschlupf auszugleichen, wurde das Spannglied bis zu 6 % über diesen Wert vorgespannt. Die Vorspannkraft an den Spannpressen wurde damit auf 665 kN festgelegt. Der Reibungsbei-

wert zwischen dem Spannglied und dem Hüllrohr war  $\mu = 0,3$  und der ungewollte Umlenkwinkel wurde mit  $k = 0,1 \text{ }^\circ/\text{m}$  abgeschätzt. Der Keilschlupf bei den Verankerungen war  $\Delta l_{sl} = 2,5 \text{ mm}$ .



**Bild 7.1** Versuchsträger von Lin [36]



**Bild 7.2** Spannungs-Dehnungsbeziehung der Werkstoffe [36]

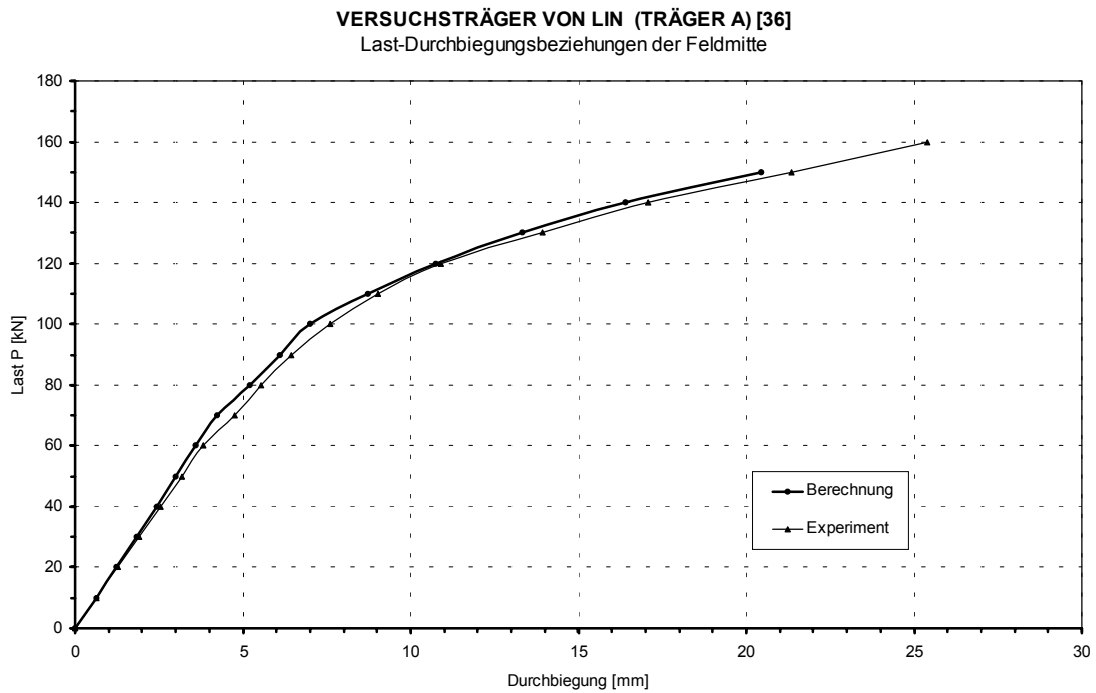
### **(3) Versuchsdurchführung**

Der Träger wurde mit zwei konzentrierten Lasten statisch beansprucht, die in Abständen von 262 cm vom Mittelaufleger symmetrisch angeordnet waren (s. Bild 7.1). In den ersten Schritten wurde der Träger mit 5 Laststufen mit jeweils 10 kN belastet. Am Ende der 5. Laststufe erreichten die äußeren Lasten folglich 50 kN, was der rechnerischen Gebrauchslast entsprach. Für weitere 5 Laststufen betrug das Lastinkrement 5 kN. Am Ende der 10. Laststufe erwartete man Risse über dem Mittelaufleger. Das Lastinkrement für weitere Laststufen bis zum Bruch des Trägers wurde um die Hälfte verkleinert, um das Tragverhalten nach der Plastifizierung besser zu erfassen. Für jede Laststufe wurden folgende Daten gemessen:

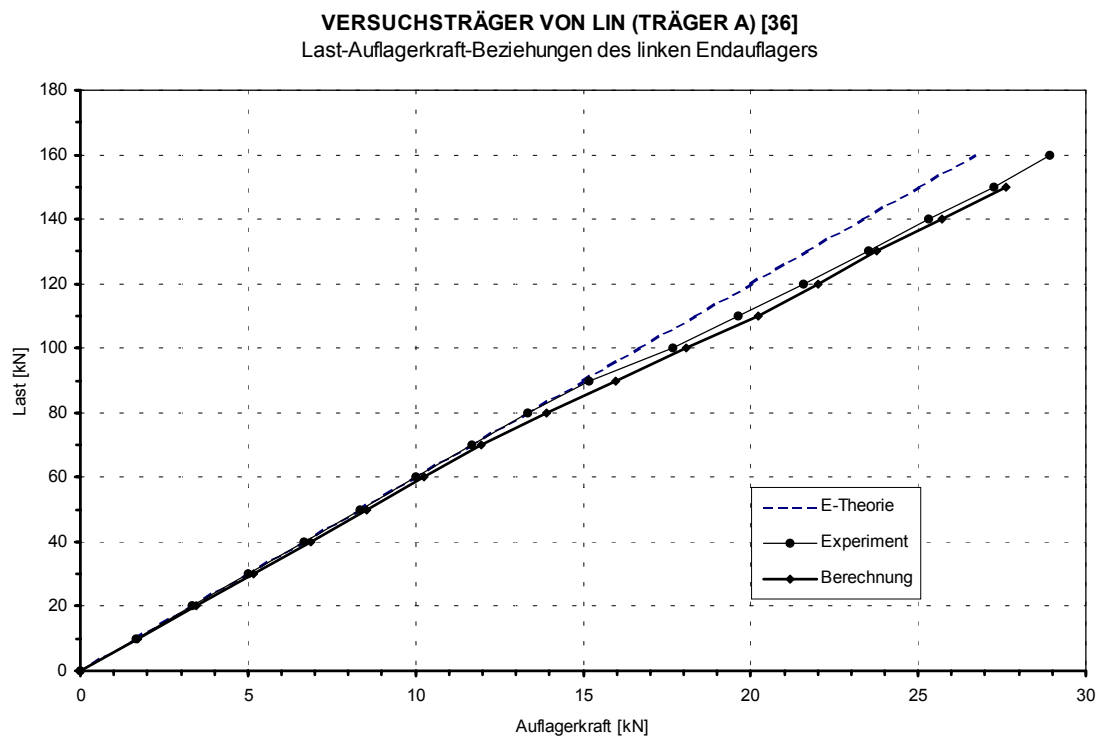
- Auflagerkräfte an den beiden Endauflagern,
- Durchbiegung an mehreren Punkten in den Feldern,
- Randdehnungen in den Zugzonen über dem Mittelaufleger und in den Feldmitten.

### **(4) Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung**

In den Bildern 7.3 und 7.4 werden die Versuchsergebnisse für Durchbiegung und Auflagerkräfte dargestellt und mit den Ergebnissen aus der Nachrechnung verglichen. Im Bild 7.4 sind die Auflagerkräfte aus der Berechnung nach der linearen Elastizitätstheorie eingetragen. Nach der Rissbildung im Querschnitt über dem Mittelaufleger sind die Abweichungen zwischen den Werten aus dem Experiment und der Berechnung bemerkbar. Diese Gegenüberstellungen zeigen aber eine ausreichende Übereinstimmung zwischen berechneten und aus dem Versuch gewonnenen Werten.



**Bild 7.3** Last-Durchbiegungsbeziehungen

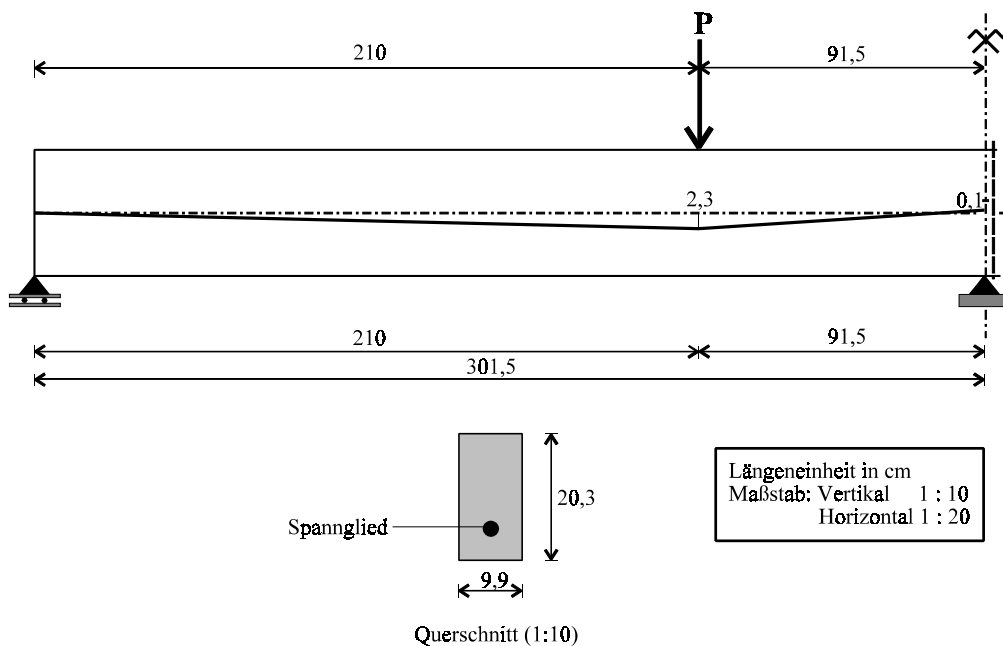


**Bild 7.4** Last-Auflagerkraftbeziehungen

### 7.1.3 Versuchsträger von Priestley und Park [43]

#### (1) Geometrische Daten

Ähnlich wie der Träger von Lin [36] war auch der Versuchsträger von Priestley und Park [43] ein symmetrischer Spannbetondurchlaufträger auf drei Auflagern mit einer rechteckigen Querschnittsform. Die Spannweiten betragen jeweils 301,5 cm. Die Abmessungen des Querschnitts waren 9,9 cm in der Breite und 20,3 cm in der Höhe. Die Auflageranordnung war genauso wie bei den Versuchsträgern von Lin [36]. Die Endauflager waren horizontal verschieblich und das Mittelaufleger war horizontal unverschieblich. Es wurde ein linearer Spanngliedverlauf mit Umlenkstellen unter den konzentrierten Lasten und am Mittelaufleger gewählt (s. Bild 3.13). Das Spannglied bestand aus zwei Drähten mit 7 mm Durchmesser.



**Bild 7.5** Versuchsträger von Priestley und Park [43]



## (2) Werkstoffe

Im Versuchsträger wurde Spannstahl mit einer charakteristischen Zugfestigkeit von  $1700 \text{ N/mm}^2$  verwendet. Der Beton hatte eine durchschnittliche Zylinderdruckfestigkeit von  $43 \text{ N/mm}^2$ , wobei die charakteristische Druckfestigkeit  $35 \text{ N/mm}^2$  war. Der Mittelwert der Biegezugfestigkeit des Beton wurde mit  $4,86 \text{ N/mm}^2$  angegeben.

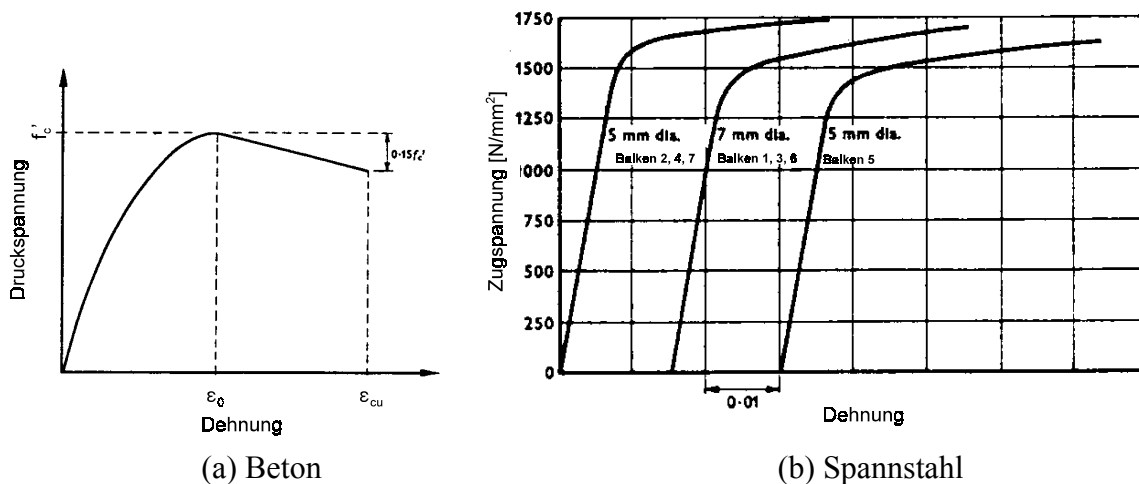


Bild 7.6 Spannungs-Dehnungsbeziehung der Werkstoffe [43]

## (3) Versuchsdurchführung

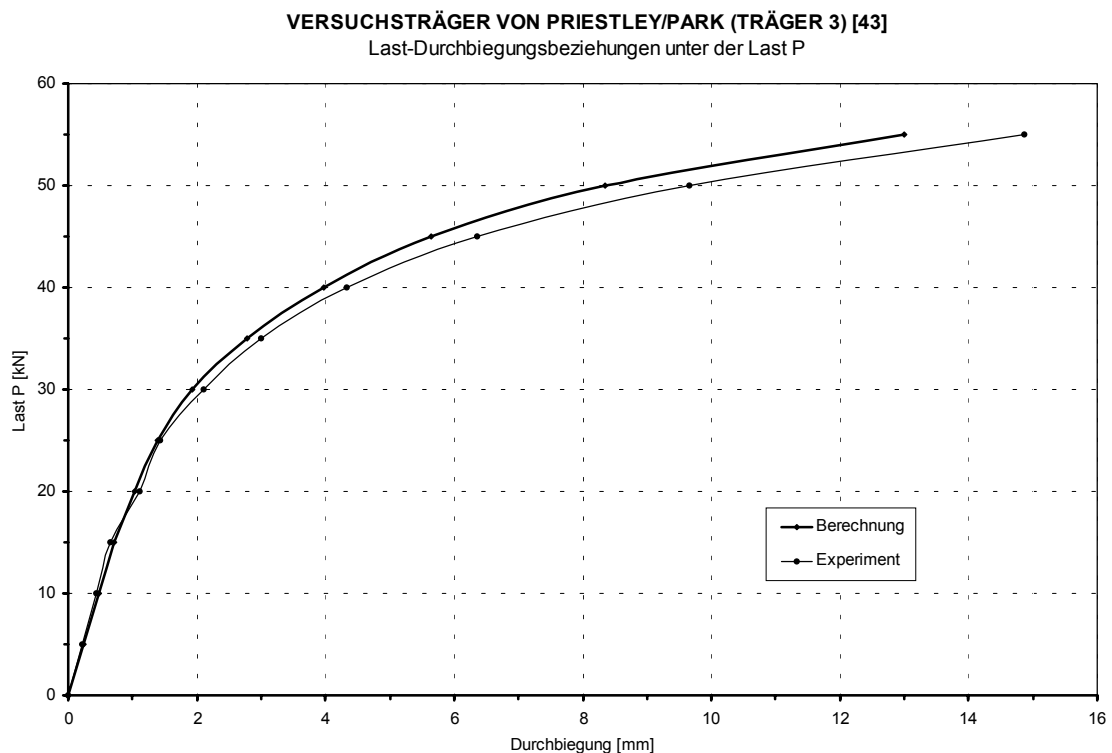
Als Versuchslast wurden zwei konzentrierte Lasten aufgebracht, die im Abstand von  $91,5 \text{ cm}$  vom Mittelaufleger angeordnet waren. Der Träger wurde unter mehreren Laststufen mit einem Lastinkrement von  $5 \text{ kN}$  statisch beansprucht. In jeder Laststufe wurden folgende Daten gemessen:

- Auflagerkräfte an den beiden Endauflagern,
- Durchbiegungen an mehreren Stellen in jedem Feld,
- Dehnungen in den Querschnitten unter den Lasten und über dem Mittelaufleger.

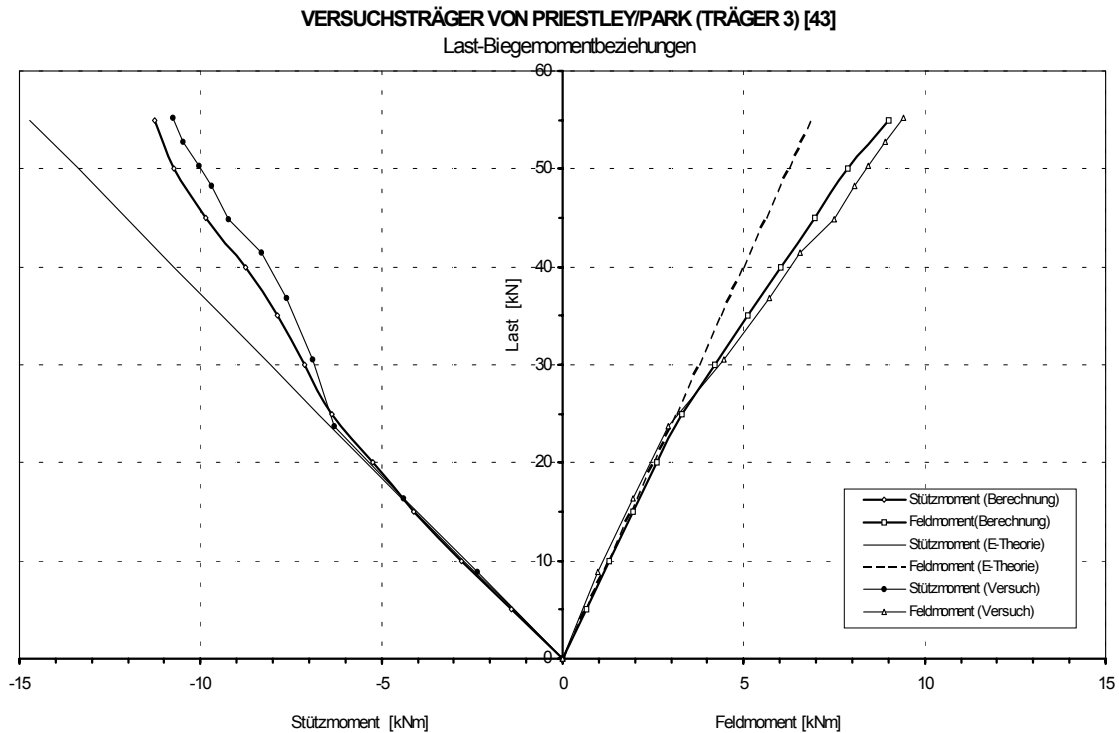
Die Biegemomente wurden aus den gemessenen Daten berechnet und als Last-Biegemomente-Beziehungen dargestellt.

#### (4) Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung

In den Bildern 7.7 und 7.8 werden die Versuchsergebnisse für Durchbiegung und Biegemomente dargestellt und mit den Ergebnissen aus den Nachrechnungen verglichen. Das Bild 7.8 zeigt die Last-Biegemoment-Beziehung für die Querschnitte über dem Mittelaufleger und unter der Last P. Die Biegemomente aus der Berechnung nach der linearen Elastizitätstheorie sind eingetragen. Es wurde beobachtet, dass eine Umlagerung der Schnittgrößen vom Querschnitt über dem Mittelaufleger zum Feldbereich hin stattgefunden hat. Es trat keine volle Umlagerung auf.



**Bild 7.7** Last-Durchbiegungsbeziehungen für die Stelle unter der Last P



**Bild 7.8** Last-Biegemomentbeziehungen für das Stützmoment und das Feldmoment (unter der Last P)

### 7.1.4 Versuchsträger von Taerwe et al. [41]

#### (1) Geometrische Daten

Der von Taerwe et al. [41] getestete Spannbeton-Durchlaufträger hatte zwei je 9,60 m lange Felder. Die Anordnung der Auflager war symmetrisch, wobei das Mittelauger horizontal unverschieblich war und die beiden Endauflager horizontal verschieblich waren. Der Träger hatte eine I-Querschnittsform mit 40 cm Breite, 48 cm Höhe und 15 cm Stegbreite. Das Spannglied bestand aus 5 siebendrähtigen Litzen und verlief in drei parabolischen Kurven (s. Bild 7.9). Über beiden Endauflagern lag der Schwerpunkt des Spannglieds im geometrischen Schwerpunkt des Querschnitts, während in den Feldern und über dem

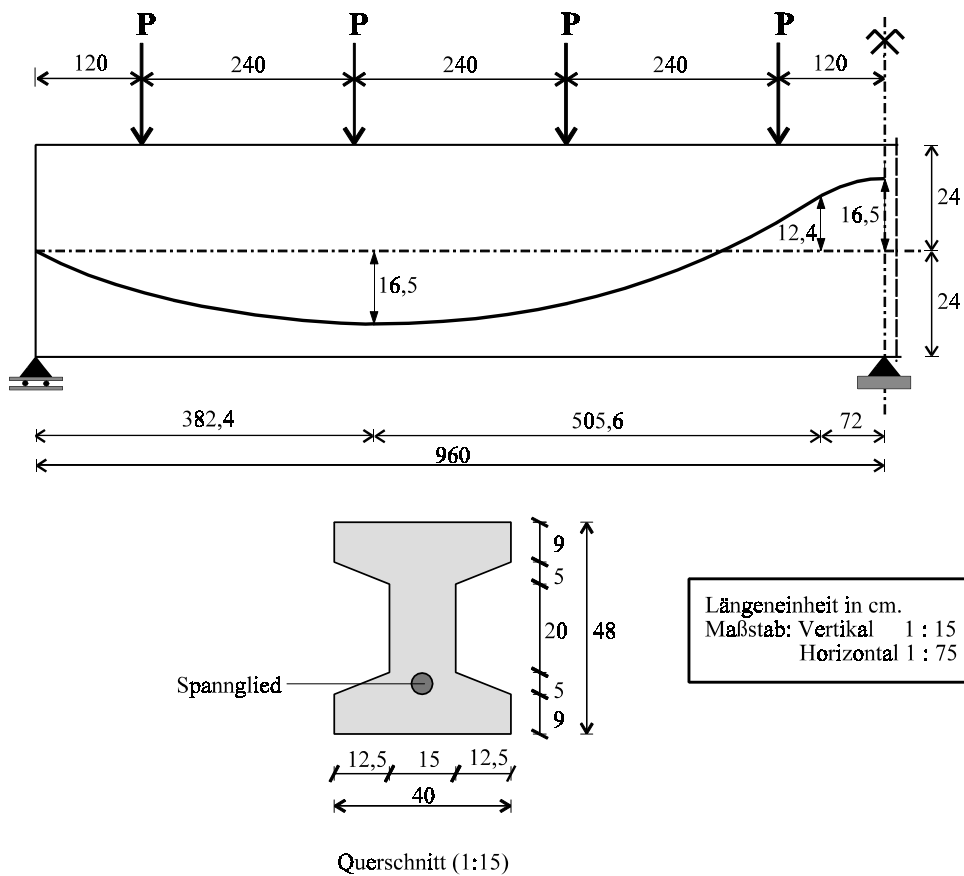
Mittelaufleger die Exzentrizität des Spannglieds maximale Werte (16,5 cm) erreichte. Nach dem Vorspannen wurde das Hüllrohr mit Zementmörtel verpresst.

## **(2) Werkstoffe**

Der im Versuch verwendete Beton hatte eine durchschnittliche Zylinder-Druckfestigkeit von  $f_{cm} = 37,5 \text{ N/mm}^2$  und eine Biegezugfestigkeit von  $f_{tm} = 4,06 \text{ N/mm}^2$ . Die Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons stimmte mit der in CEB MC 90 gegebenen Beziehung gut überein. Als Spannglied wurden 5 sieben-dräftige Litzen mit einer charakteristischen Zugfestigkeit von  $f_{ptk} = 1860 \text{ N/mm}^2$  verwendet. Der Mittelwert der Zugfestigkeit war  $f_{ptm} = 1970 \text{ N/mm}^2$  und die Streckgrenze bei 0,1 %-Dehngrenze  $f_{p0,1k}$  betrug  $1810 \text{ N/mm}^2$ . Der Nenndurchmesser einer Litze war 15,2 mm und die Querschnittsfläche  $139 \text{ mm}^2$ . Beim Vorspannen wurde das Spannglied bis zu 75 % seiner charakteristischen Zugfestigkeit gespannt. Vier Stahlstäbe von 8 mm Durchmesser, jeweils zwei am oberen und unteren Rand, wurden als zusätzliche schlaffe Bewehrung eingesetzt. Der Mittelwert der Fließgrenze des Betonstahls betrug  $f_{ym} = 572 \text{ N/mm}^2$ .

## **(3) Versuchsdurchführung**

Der Versuchsträger wurde am 14. Tag nach dem Betonieren von beiden Enden des Spannglieds aus vorgespannt. Das Hüllrohr wurde anschließend mit Zementmörtel verpresst. Der Versuch wurde bei einem Betonalter von 28 Tagen durchgeführt. Um eine gleichmäßig verteilte äußere Last zu simulieren, wurde der Träger mit acht konzentrierten Lasten statisch beansprucht, die in Abständen von 2,4 m symmetrisch zum Mittelaufleger angeordnet waren. Mit steigenden äußeren Lasten wurde der Versuchsträger bis zum Versagen beansprucht.



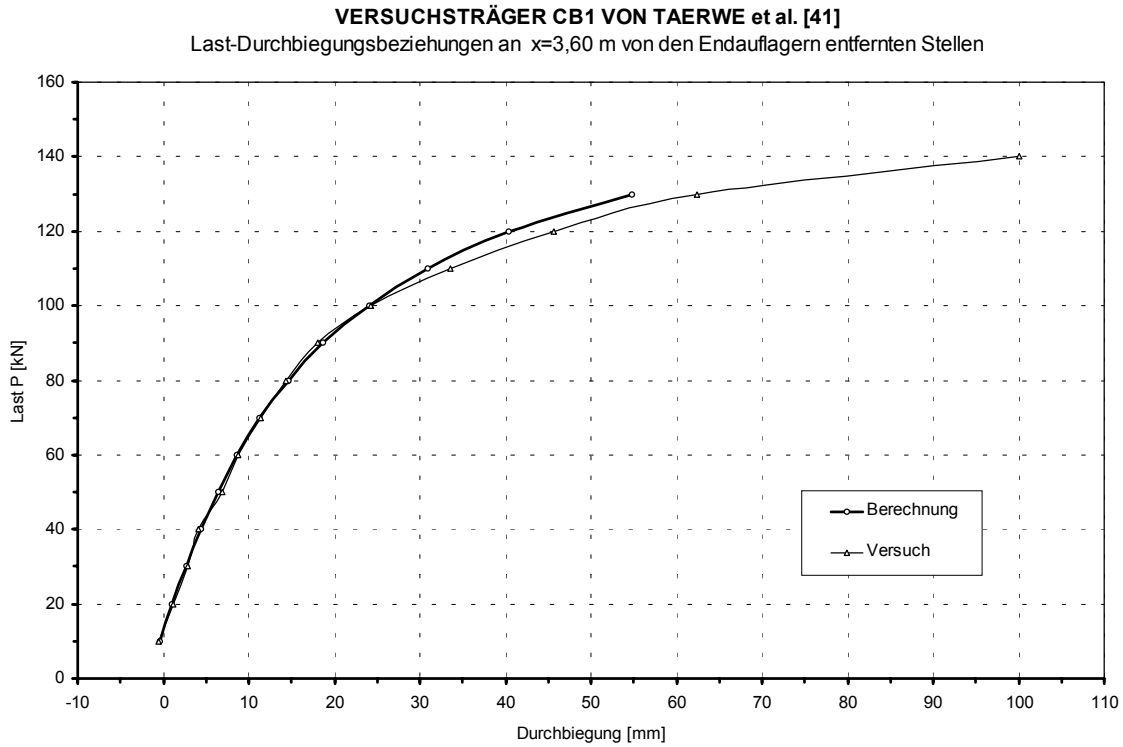
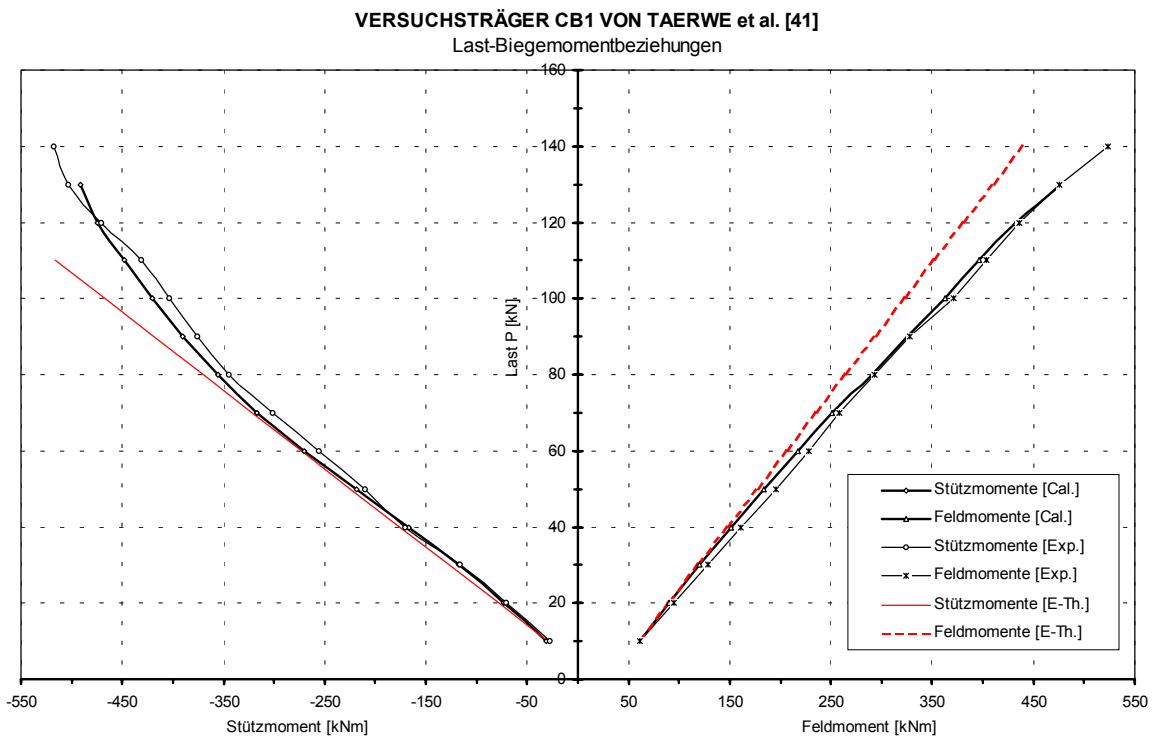
**Bild 7.9** Versuchsträger von Taerwe et al. [41]

Die folgenden Daten wurden beobachtet und gemessen:

- Durchbiegung an den 3,6 m von beiden Endauflagern entfernten Stellen,
- Auflagerkräfte,
- Randdehnungen im Mittelauflegerbereich.

#### (4) *Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung*

Die Versuchsergebnisse der Durchbiegung werden mit den Ergebnissen aus der Nachrechnung verglichen und im Bild 7.10 grafisch dargestellt. Bild 7.11 zeigt die Gegenüberstellung für die Biegemomente. Beide zeigen die gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

Bild 7.10 Last-Durchbiegungsbeziehungen (bei  $x=3,6$  m)Bild 7.11 Last-Biegemomentbeziehungen für die Stützmomente und die Feldmomente (bei  $x=3,6$  m)

### **7.1.5 Zusammenfassung**

Die Gegenüberstellungen der Diagramme für die Last-Durchbiegungs-Beziehungen sowie für die Last-Biegemoment-Beziehungen zeigen sehr gute Übereinstimmung vor allem im Bereich der niedrigen Lasten, wobei die Werkstoffverhalten nahezu linear elastisch sind. Über diesem Lastbereich weichen die Ergebnisse der experimentellen Versuche von denen der Berechnungen geringfügig ab. Diese Abweichungen sind auf die breiteren Streuungen der Eigenschaften der im Versuch verwendeten Werkstoffe unter höheren Lasten zurückzuführen.

Die in diesem Abschnitt dargestellten Gegenüberstellungen vermitteln einen guten Einblick über die erreichte Annäherung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodells. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das wirklichkeitsnahe Tragverhalten von Spannbetonträgern durch das hergeleitete Berechnungsmodell sehr gut beschrieben wird.

## **7.2 Anwendungsbeispiele**

### **7.2.1 Allgemeines**

Durch Beispiele in diesem Abschnitt soll die Anwendungsmöglichkeit des in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodells zur wirklichkeitsnahen Untersuchung von Spannbetonträgern gezeigt werden.

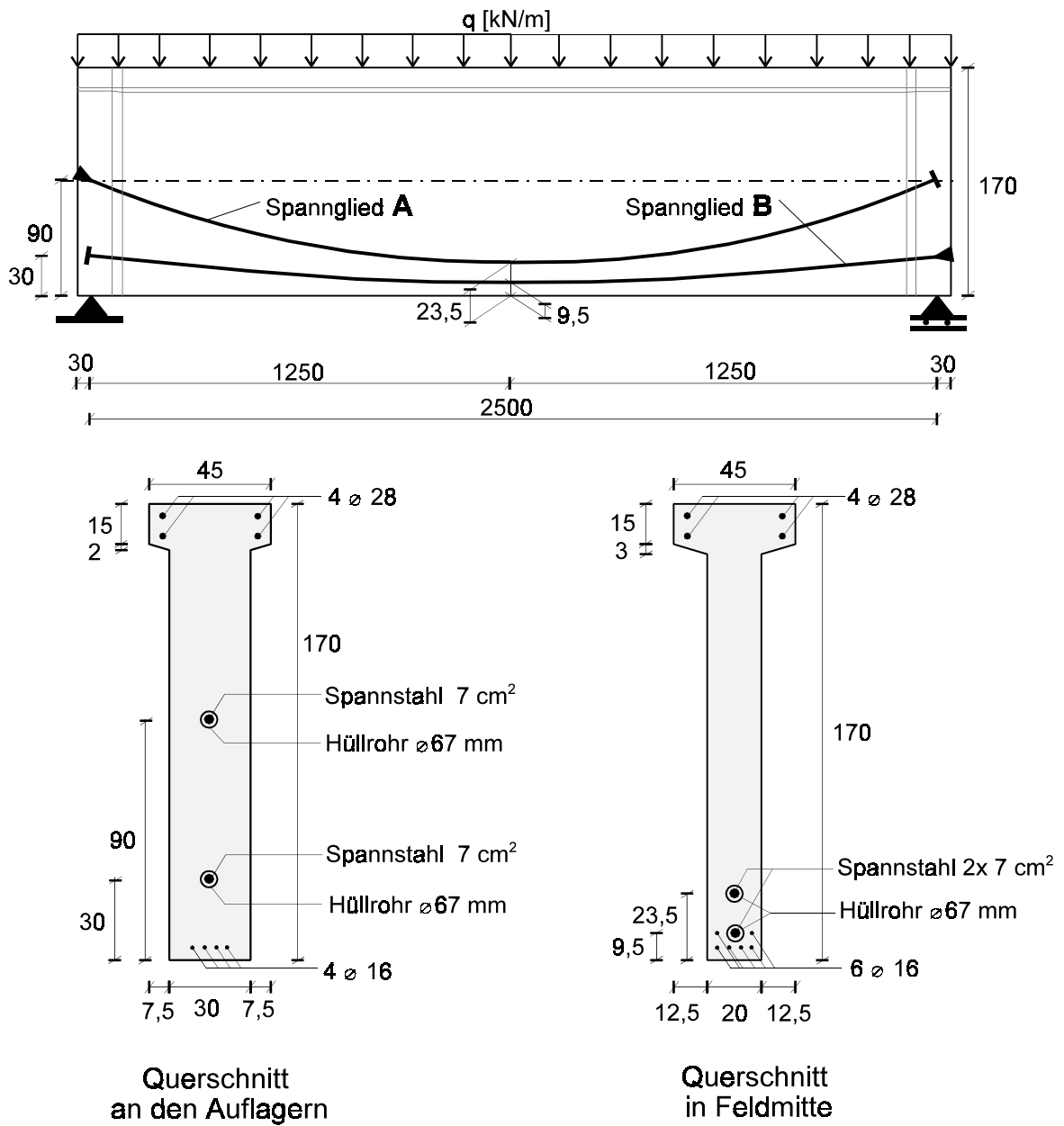
## 7.2.2 Einfeldträger

Die wesentliche Daten des Trägers werden in der Tabelle 7.1 und im Bild 7.12 gegeben.

**Tabelle 7.1:** Wesentliche Daten des Trägers

<b>Statisches System:</b>	Einfeldträger; statisch bestimmtes System; Spannweite 25 m; Plattenbalken mit kleinen Flanschen
<b>Werkstoffe:</b>	
Beton:	C35/45
Betonstahl:	BSt 500 S(B)
Spannstahl:	Siebendrähtige Litzen, $\varnothing = 15,3$ mm $f_{pk} = 1770$ N/mm <sup>2</sup> $f_{p0,1k} = 1570$ N/mm <sup>2</sup> $E_p = 195$ kN/mm <sup>2</sup>
Hüllrohr:	Stahlblech, $\varnothing = 67$ mm
<b>Vorspannverfahren:</b>	
Vorspannart:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund
Spannglied:	2 Spannglieder je 5 Litzen ( $A_p = 7$ cm <sup>2</sup> ; $A_{p,tot} = 14$ cm <sup>2</sup> )
Spanngliedführung:	quadratische Parabel
Reibungsbeiwert:	$\mu = 0,19$
ungewollter Umlenkwinkel:	$k = 0,3$ °/m
Keilschlupflänge:	$\Delta l_{sl} = 6$ mm
Vorspannkraft:	$P_0 = 0,75 \cdot A_{p,tot} \cdot f_{pk} = 918,75$ kN Spannglied A wird von links und Spannglied B wird von rechts vorgespannt.
Zeitpunkt des Vorspannens und Vepressens der Hüllrohre:	21 Tage nach dem Betonieren
Zeitpunkt der Untersuchung:	28 Tage nach dem Betonieren
Umgebung:	Trocken

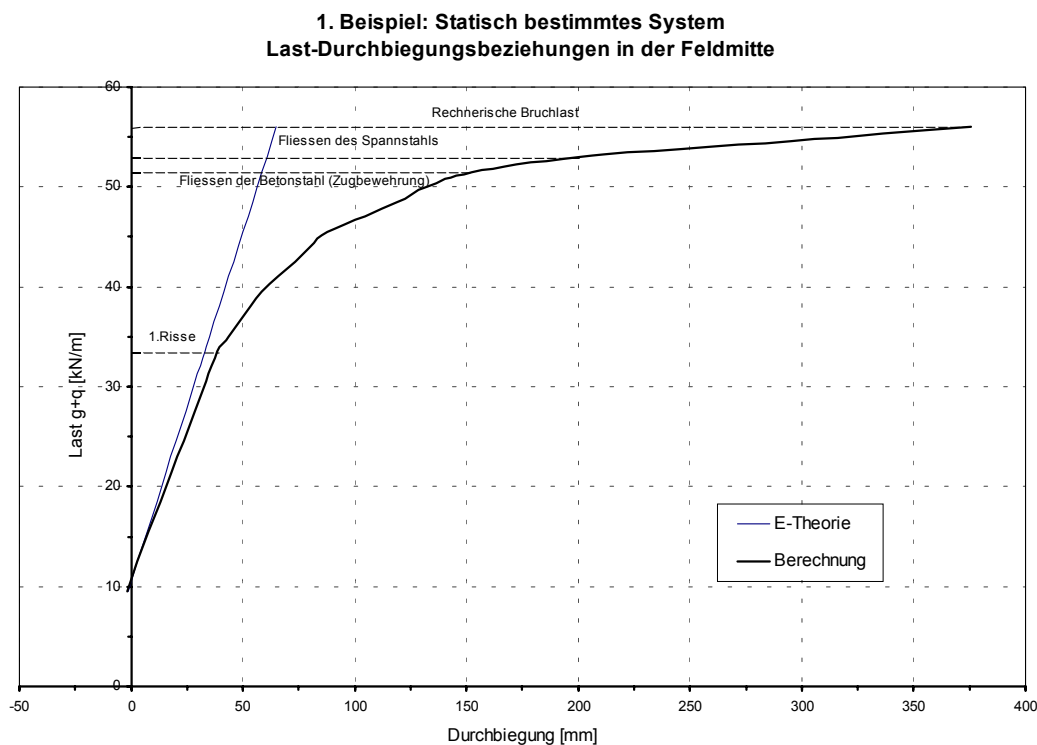




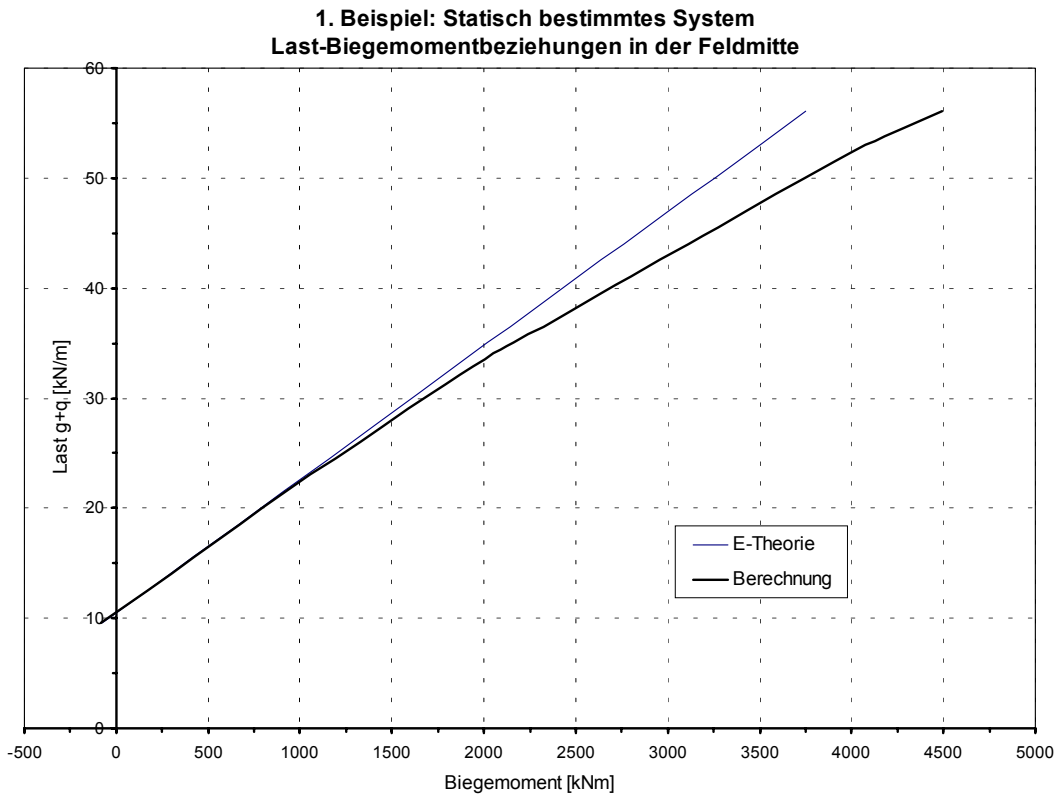
**Bild 7.12** 1. Beispiel: Einfeldträger

Der Träger wird nach EC2 T1 für einen Bemessungswert der Einwirkungen von 46,24 kN/m (inkl. Eigengewicht) bemessen. Bei äußerer Last von 33,5 kN/m tritt der erste Riss im Querschnitt in Feldmitte auf und das Last-Verformungsverhalten des Trägers weicht dann vom linearen Verhalten ab (s. Bild 7.13). Der Fließbeginn der Betonstahl-Zugbewehrung im Querschnitt in der Feldmitte wird bei

einer äußeren Last von 51,5 kN/m erreicht und für den Spannstahl B sowie A bei 52 kN/m bzw. bei 53 kN/m beobachtet. Das System wird infolge dieser Steifigkeitsabnahme weicher mit rasch zunehmender Verformung. Die Systemtraglast ist erreicht infolge eines Betondruckversagens im Querschnitt in der Feldmitte. Die Bruchlast liegt etwa 21% über dem Bemessungslastniveau. Im Bruchzustand beträgt die maximale Betonstauchung 3,5 ‰, die Betonstahldehnung 34,25 ‰ und die Spannstahldehnung 35,67 ‰ (Spannstahl A) bzw. 38,96 ‰ (Spannstahl B). Ergänzend zeigt Bild 7.14 hierzu die Last-Biegemomentbeziehung für die Feldmitte.



**Bild 7.13** 1. Beispiel - Einfeldträger: Last-Durchbiegungsbeziehungen in der Feldmitte



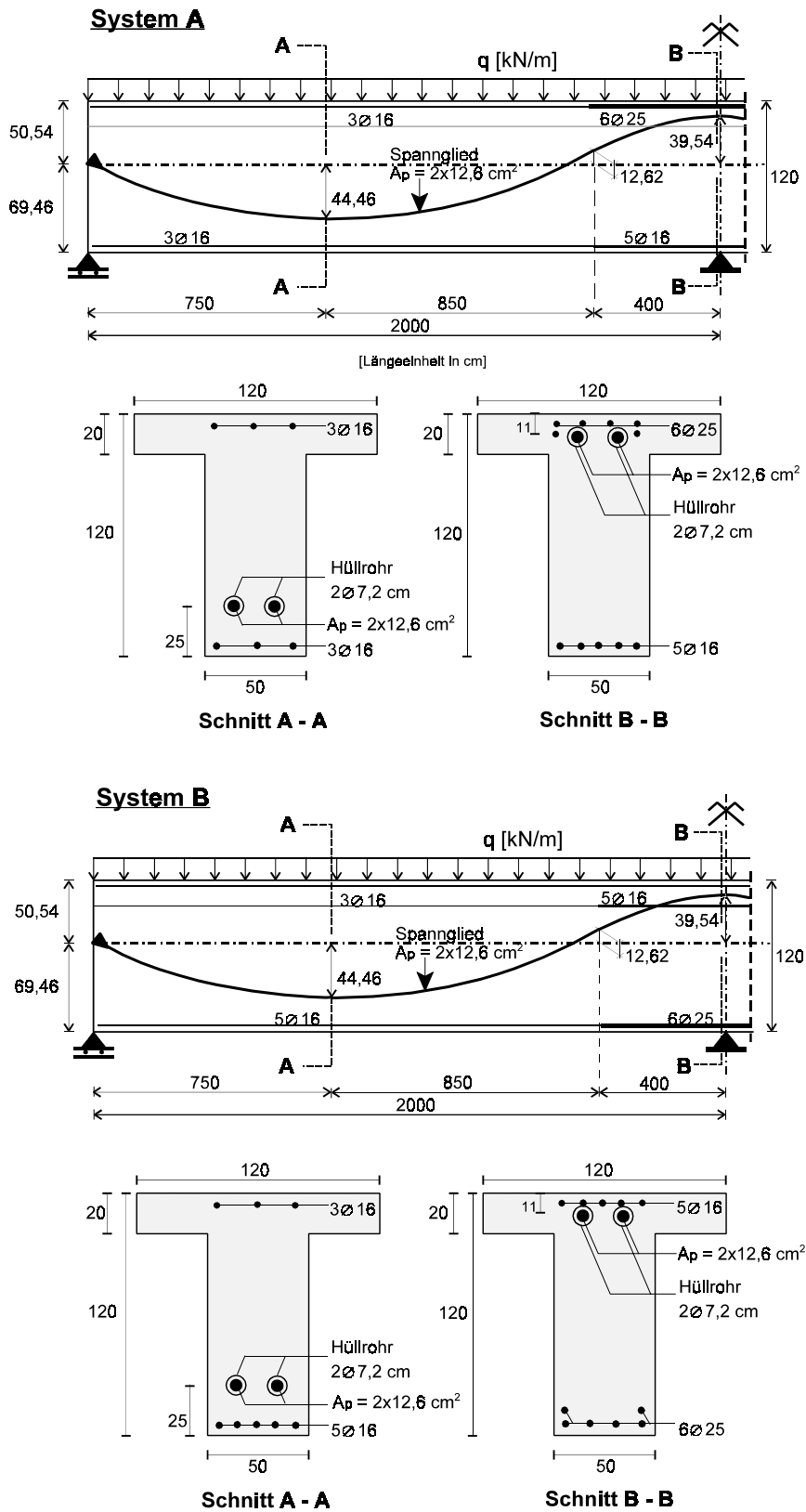
**Bild 7.14** 1. Beispiel - Einfeldträger: Last-Biegemomentbeziehungen in der Feldmitte

### 7.2.3 Symmetrischer Zweifeld-Durchlaufträger

Dieses Beispiel behandelt zwei zweifeldrige Spannbetondurchlaufträger. Während die maßgebenden Querschnitte des Systems A mit Schnittgrößen aus einer linear-elastischen Berechnung ohne Momentenumlagerung bemessen werden, sind die maßgebenden Querschnitte des Systems B für Schnittgrößen mit 11 % Momentenumlagerung des Biegemoments im Zwischenaufleger ausgelegt. Die wesentlichen Daten des Trägers werden in der Tabelle 7.2 und im Bild 7.15 gegeben.

**Tabelle 7.2:** Wesentliche Daten des Trägers

<b>Statisches System:</b>	Zweifeld-Durchlaufträger; symmetrisches statisch unbestimmtes System; Spannweite 2 x 20 m; Symmetrischer Plattenbalken-Querschnitt; System A: ohne Momentenumlagerung System B: mit 11% Momentenumlagerung
<b>Werkstoffe:</b>	
Beton:	C40/50
Betonstahl:	BSt 500 S(B)
Spannstahl:	Siebendrähtige Litzen, $\varnothing = 15,3$ mm $f_{pk} = 1770$ N/mm <sup>2</sup> $f_{p0,1k} = 1570$ N/mm <sup>2</sup> $E_p = 195$ kN/mm <sup>2</sup>
Hüllrohr:	Stahlblech, $\varnothing = 72$ mm
<b>Vorspannverfahren:</b>	
Vorspannart:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund
Spannglied:	Zwei Spannglieder aus 9 Litzen ( $A_p = 2 \times 12,6$ cm <sup>2</sup> )
Spanngliedführung:	quadratische Parabel
Reibungsbeiwert:	$\mu = 0,21$
ungewollter Umlenkwinkel:	$k = 0,3$ °/m
Keilschlupflänge:	$\Delta l_{sl} = 6$ mm
Vorspannkraft:	$P_0 = 3500$ kN Von beiden Spanngliedenden vorgespannt
Zeitpunkt des Vorspannens und Verpressens der Hüllrohre:	28 Tage nach dem Betonieren
Zeitpunkt der Untersuchung:	50 Tage nach dem Betonieren
Umgebung:	Trocken



**Bild 7.15** 2. Beispiel: Symmetrischer Zweifeld-Durchlaufträger

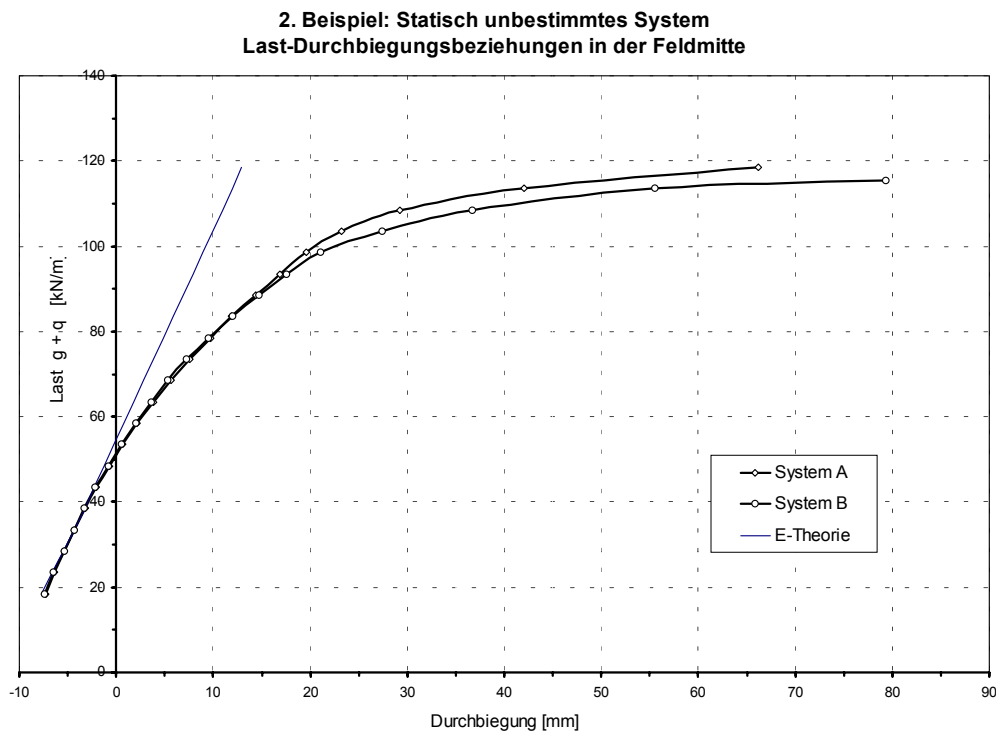
Bis zur 1. Rissbildung im Querschnitt über dem Zwischenauflager haben die beiden Träger (A und B) identische Tragverhalten. Die Risslast der Querschnitte ist infolge der unterschiedlichen Bewehrungsgehalte beim Träger A (64 kN/m) geringfügig anders als beim Träger B (62,2 kN/m). Diese überwiegend linear elastischen Verhalten sind unter größeren Lasten nicht mehr gegeben. Daher weichen die Durchbiegungen und die Schnittgrößen von den nach Elastizitätstheorie ermittelten Werten weiter ab.

Die Spannstahl- und Betonstahlbewehrung im Querschnitt über dem Zwischenauflager beim Träger B erreicht ihre Fließgrenze unter niedrigeren Lasten als beim Träger A, da der Bewehrungsgrad beim Träger B infolge vorgenommener Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung kleiner ist. Nach dem Fließen der Bewehrungen bis zum Erreichen der rechnerischen Bruchlasten zeigen beide Träger noch stärkere nichtlineare Tragverhalten auf. Die beiden Träger versagen durch Betondruckbruch im Querschnitt über den Zwischenauflagern unter fast gleichen maximalen Belastungen (118 kN/m beim Träger A und 115 kN/m beim Träger B). Diese Lasten sind ca. 30 % (Träger A) bzw. 27 % (Träger B) über den Bemessungswerten der Einwirkungen. Unter diesen rechnerischen Bruchlasten erreichen die Querschnitte im Mittelfeld sowohl beim Träger A als auch beim Träger B nicht ihre maximale Beanspruchbarkeit. Während die Spannstähle im Mittelfeldquerschnitt beim Träger B die Fließgrenze überschreiten, erreichen sie diese beim Träger A nicht.

Obwohl die Querschnitte über dem Zwischenauflager den plastischen Zustand erreichen, bleibt die statische Unbestimmtheit der Träger erhalten. Die statisch unbestimmten Momenteanteile infolge Vorspannung nehmen jedoch nach der Rissbildung gegenüber den Werten aus der Berechnung nach der Elastizitäts-

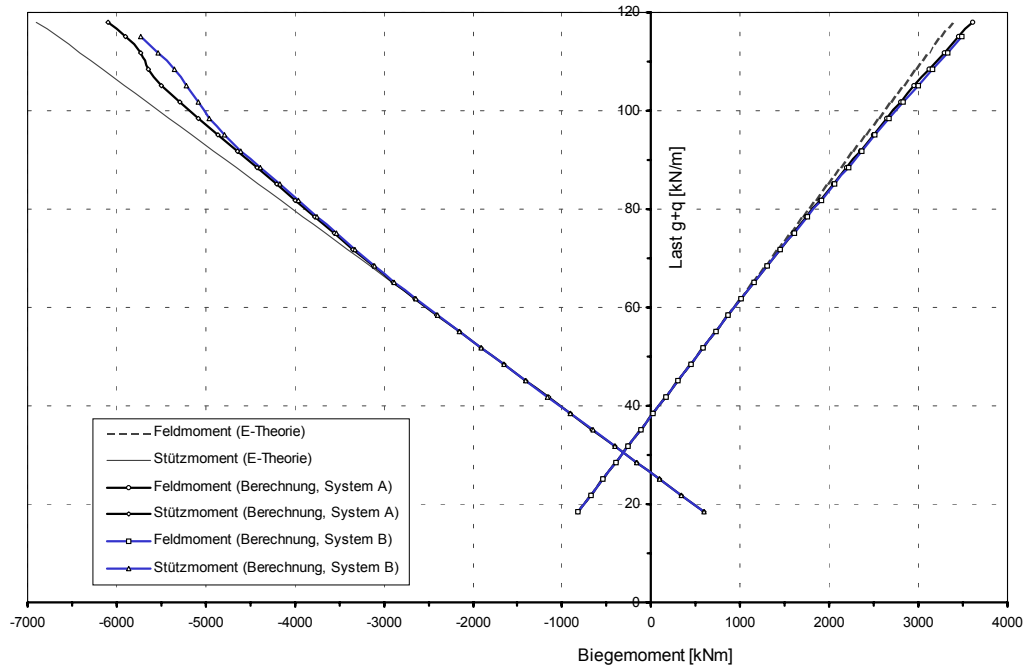
theorie ab. Diese Abweichungen sind nach dem Fließen der Bewehrungen deutlicher und beim Träger B stärker als beim Träger A. Unter der rechnerischen Bruchlast beträgt das statisch unbestimmte Biegemoment infolge Vorspannung im Querschnitt auf dem Mittelaufleger ca. 94 % (Träger A) bzw. 88 % (Träger B) der Werte aus der linear elastischen Berechnung.

Die Durchbiegungen im Mittelfeld, die Biegemomente im Mittelfeld und über dem Zwischenlager sowie die Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente aus der Vorspannwirkung in Abhängigkeit der äußeren Lasten werden in den Bildern 7.16, 7.17 und 7.18 dargestellt.



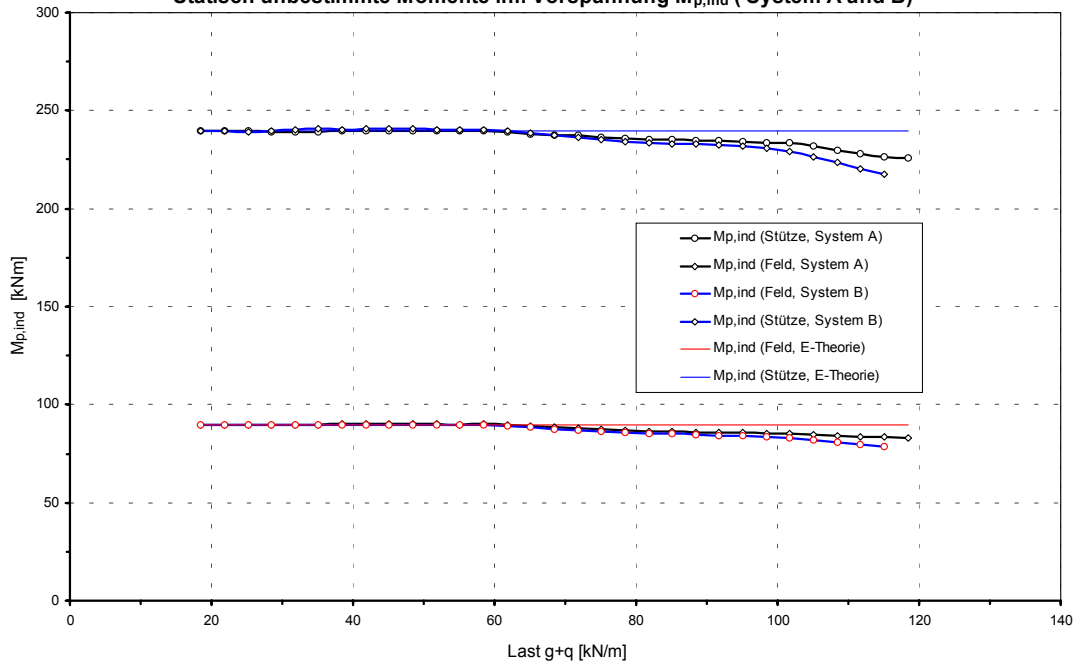
**Bild 7.16** 2. Beispiel - Zweifeld-Durchlaufträger:  
Last-Durchbiegungsbeziehungen der Feldmitte für Träger A und Träger B

**2. Beispiel: Statisch unbestimmtes System  
Last-Biegemomentbeziehungen (System A und B)**



**Bild 7.17** 2. Beispiel - Zweifeld-Durchlaufträger:  
Last-Biegemomentbeziehungen für Träger A und Träger B

**2. Beispiel: Statisch unbestimmtes System  
Statisch unbestimmte Momente inf. Vorspannung  $M_{p,ind}$  (System A und B)**



**Bild 7.18** 2. Beispiel - Zweifeld-Durchlaufträger:  
Statisch unbestimmtes Biegemoment infolge Vorspannung für Träger A und Träger B

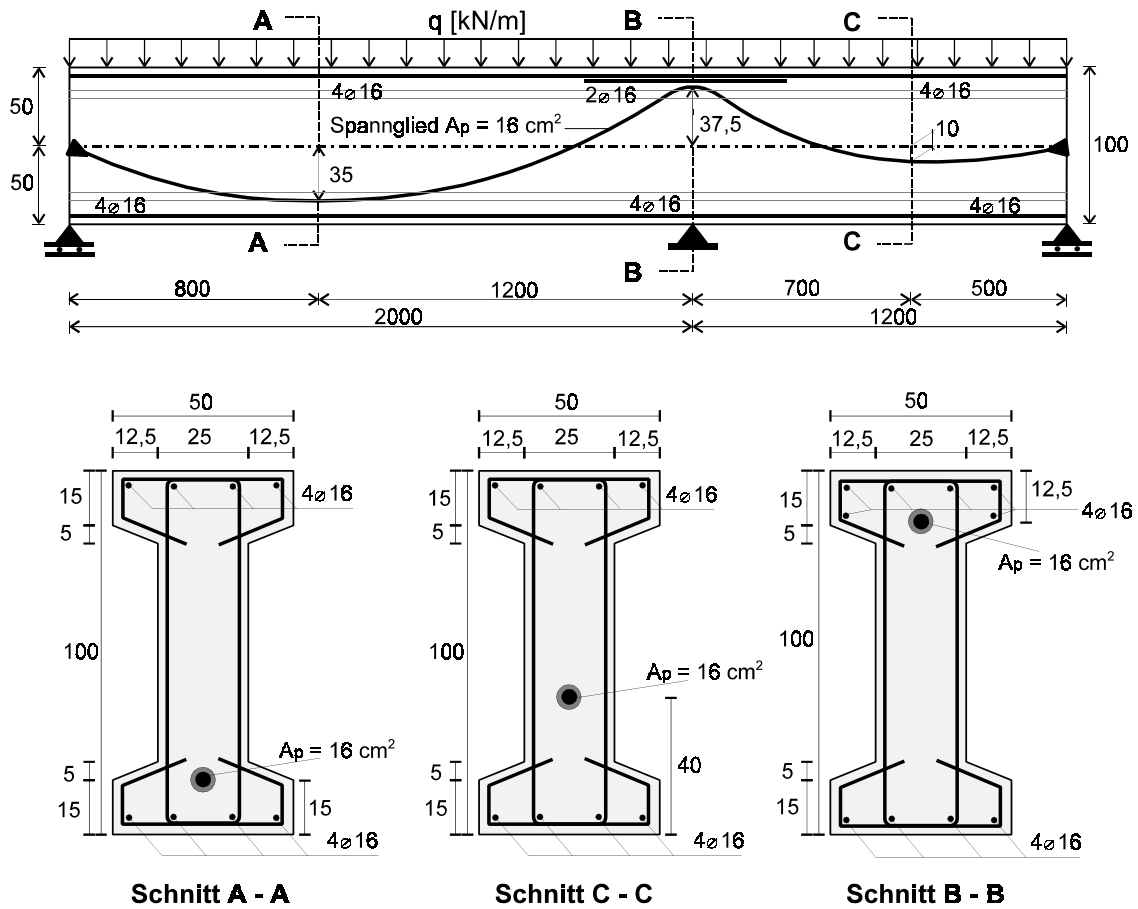


### 7.2.4 Unsymmetrischer Zweifeld-Durchlaufträger

Ein unsymmetrischer Durchlaufträger mit zwei Feldern ist zu untersuchen. Der Träger hat eine symmetrische Querschnittsform für die ganze Trägerlänge. Die Querschnitte des Trägers werden mit Schnittgrößen aus der Berechnung nach der Elastizitätstheorie ohne Momentenumlagerung bemessen. Weitere Hinweise sind der Tabelle 7.3 und dem Bild 7.19 zu entnehmen.

**Tabelle 7.3:** Wesentliche Daten des Trägers

<b>Statisches System:</b>	Zweifeld-Durchlaufträger; unsymmetrisches statisch unbestimmtes System; Spannweite 20 m (links) und 12 m (rechts); Symmetrischer I-Querschnitt.
<b>Werkstoffe:</b>	
Beton:	C45/55
Betonstahl:	BSt 500 S(B)
Spannstahl:	Spannstahldraht $\varnothing = 5$ mm $f_{pk} = 1770$ N/mm <sup>2</sup> $f_{p0,1k} = 1570$ N/mm <sup>2</sup> $E_p = 200$ kN/mm <sup>2</sup>
Hüllrohr:	Stahlblech, $\varnothing = 82$ mm
<b>Vorspannverfahren:</b>	
Vorspannart:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund
Spannglied:	Ein Spannglied mit 80 Drähten ( $A_p = 16$ cm <sup>2</sup> )
Spanngliedführung:	quadratische Parabel
Reibungsbeiwert:	$\mu = 0,20$
ungewollter Umlenkwinkel:	$k = 0,3$ °/m
Keilschlupflänge:	$\Delta l_{sl} = 2$ mm
Vorspannkraft:	$P_0 = 2100$ kN Von beiden Spanngliedenden vorgespannt.
Zeitpunkt des Vorspannens und Verpressens der Hüllrohre:	28 Tage nach dem Betonieren
Zeitpunkt der Untersuchung:	35 Tage nach dem Betonieren
Umgebung:	Trocken



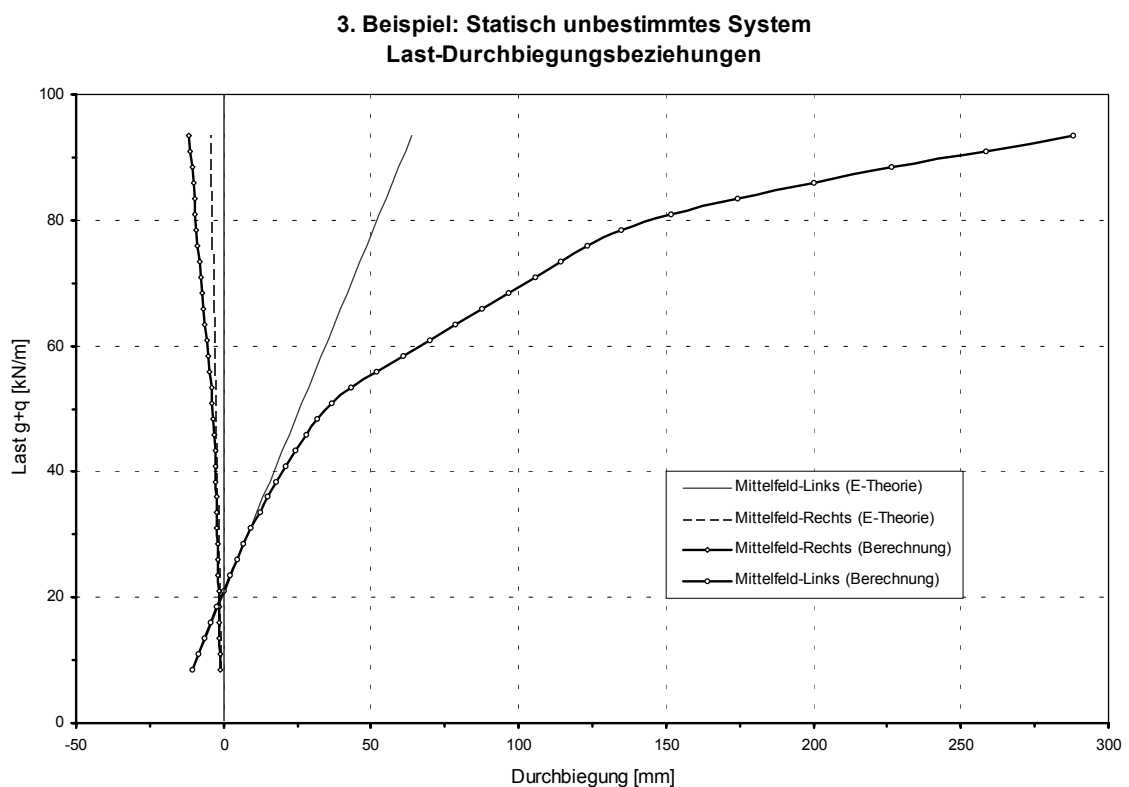
**Bild 7.19** 3. Beispiel: Unsymmetrischer Zweifeld-Durchlaufträger

Vor der Rissbildung verhält sich der Träger nahezu linear-elastisch. Da die Querschnitte im Mittelfeld und über dem Mittelauger fast gleiche Eigenschaften haben, erreichen diese kaum unterschiedliche Rissmomente ( $M_{\text{Riss,Feld-L}} = 1225 \text{ kNm}$  erreicht unter der äußeren Last  $55,9 \text{ kN/m}$ ;  $M_{\text{Riss,Aufl}} = 1158 \text{ kNm}$  erreicht unter der äußeren Last  $53,4 \text{ kN/m}$ ).

Die Schnittgrößenumlagerung von den Querschnitten über dem Zwischenlager zu den Querschnitten im linken Mittelfeld bzw. in umgekehrter Richtung findet nur wenig statt, weil die Querschnitte in beiden Bereichen unter fast gleichen Lastniveau in den gerissenen Zustand und dann in den plastischen Zustand gelangen.

Die rechnerische Bruchlast von 92,3 kN/m wird beim Betondruckbruchversagen im Querschnitt im linken Mittelfeld erreicht. Während die Querschnitte über dem Zwischenauflager den plastischen Zustand erreichen, befinden sich die Querschnitte im rechten Mittelfeld noch im ungerissenen Zustand.

Die statisch unbestimmten Biegemomentanteile aus Vorspannwirkung entwickeln sich bis zur Rissbildung nahezu linear. Obwohl diese im Querschnitt über dem Zwischenlager geringfügig zunehmen, vermindern sie sich unter der Lasten oberhalb der Risslasten wieder. Nach dem Erreichen der plastischen Zustände in den Querschnitten im linken Mittelfeld und über dem Zwischenlager nehmen die Momente noch stärker weiter ab.



**Bild 7.20** 3. Beispiel - Zweifeld-Durchlaufträger:  
Last-Durchbiegungsbeziehungen der linken und rechten Feldmitte

3. Beispiel: Statisch unbestimmtes System  
Last-Biegemomentbeziehungen

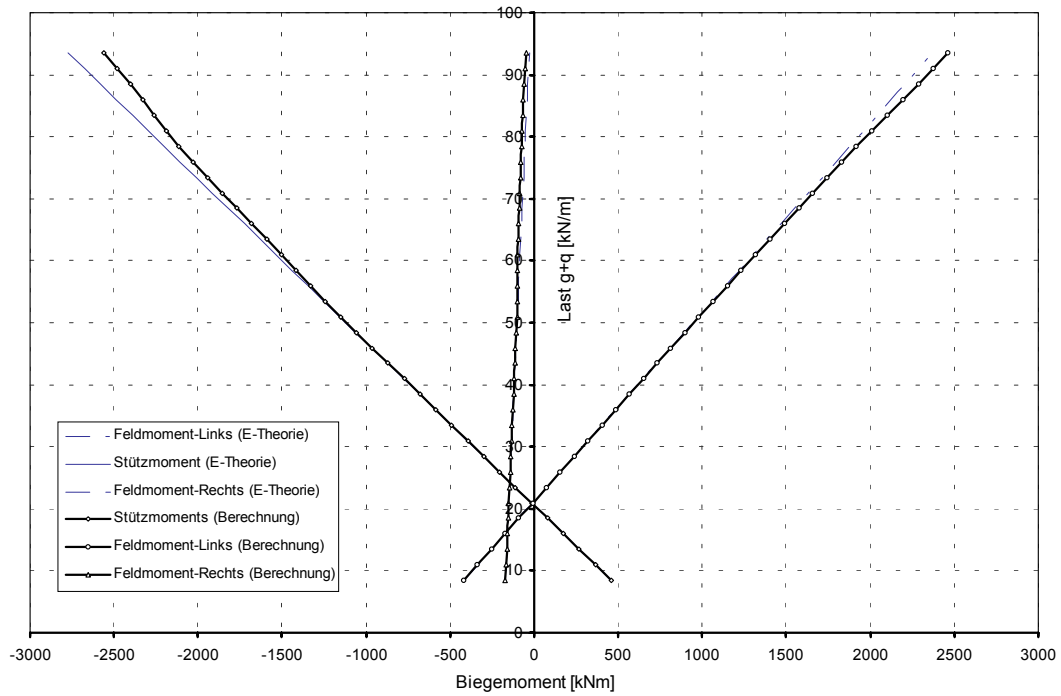


Bild 7.21 3. Beispiel - Zweifeld-Durchlaufträger: Last-Biegemomentbeziehungen

3. Beispiel: Statisch unbestimmtes System  
Statisch unbestimmte Momente inf. Vorspannung  $M_{p,ind}$

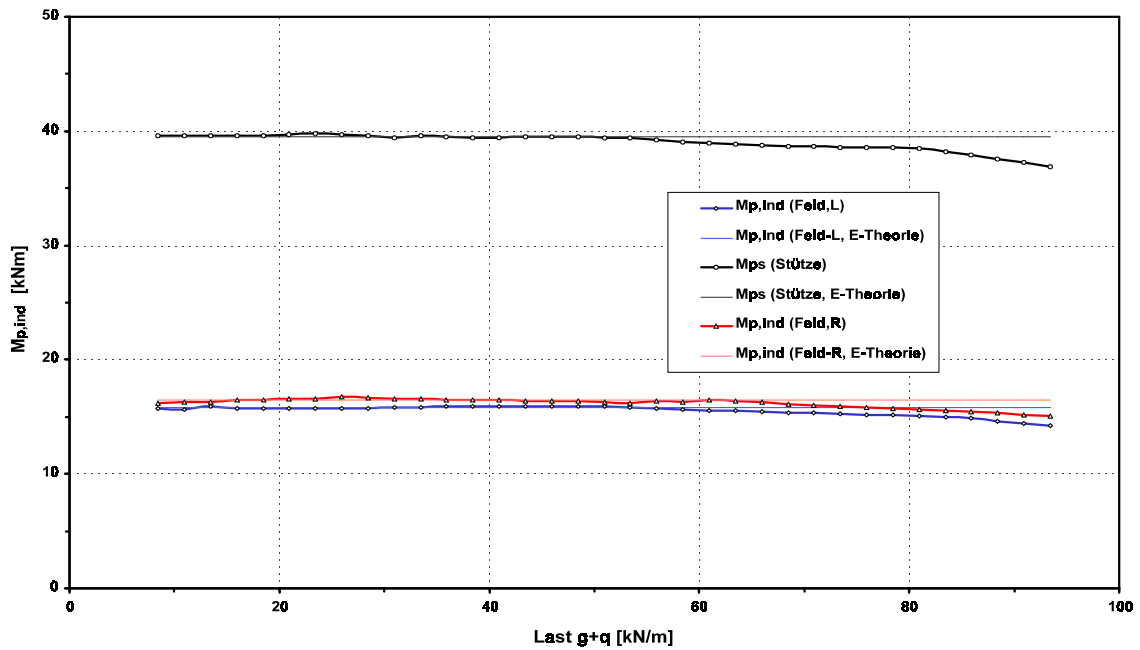


Bild 7.22 3. Beispiel - Zweifeld-Durchlaufträger:  
Statisch unbestimmte Biegemoment infolge Vorspannung

### **7.2.5 Zusammenfassung**

Mit den Beispielen wird gezeigt, dass das entwickelte Berechnungsmodell sich eignet, um die Momentenumlagerung sowie die Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung bei Spannbetondurchlaufträgern bis zum rechnerischen Bruchzustand zu untersuchen. Im folgenden Kapitel wird das Modell für Parameteruntersuchungen angewandt und die Ergebnisse werden beschrieben und diskutiert.

## 8 Numerische Untersuchungen

### 8.1 Übersicht der untersuchten Systeme

Die Untersuchungen werden überwiegend an einfach statisch unbestimmten symmetrischen Zweifeldträgern durchgeführt. Die Träger werden mit einer parabolischen Spanngliedführung vorgespannt und mit einer Gleichlast aus Eigengewicht sowie Verkehrslast belastet. Es wird angenommen, dass das Eigengewicht bei der Einbringung der Vorspannung voll wirksam wird. Die Verkehrslast wird danach inkrementell aufgebracht, bis der rechnerische Bruchzustand erreicht ist. Die untersuchten Träger werden mit den Bemessungswerten der Einwirkungen bemessen, die nach linear-elastischer Schnittgrößenberechnung mit oder ohne anschließender Momentenumlagerung ermittelt werden.

An den Trägern der Serie A werden Untersuchungen von Einflüssen der vorgenommenen Momentenumlagerung bei der Bemessung ( $\Delta M_{uml}$ ) auf die Entwicklung des statisch unbestimmten Biegemomentanteils infolge Vorspannung ( $M_{p,ind}$ ) durchgeführt. Hier werden das Eigengewicht und das Moment  $M_{p,ind}$  konstant gehalten. Diese sind durch gleiche Spannweite, Spanngliedführung und Vorspannkraft realisiert. Die Momentenumlagerung bei der Bemessung wird von 0 % bis zur für den Träger maximal zugelassenen Umlagerung variiert. Ein eigener Rotationsnachweis ist in diesen Fällen nicht notwendig, da der Grenzwert der bezogenen Druckzonenhöhe  $x_d/d$  stets eingehalten wird. Es wird hier für Rechteck-, Plattenbalken- und I-Querschnitte untersucht. Zur Beobachtung der Einflüsse der Betonfestigkeit werden unterschiedliche Betongüten für den I-Querschnitt verwendet.

Bei den Trägern der Serie B werden die Einflüsse des vorhandenen statisch unbestimmten Biegemomentanteils infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  auf die sich einstellende Momentenumlagerung untersucht. Bei konstant gehaltenem Eigengewicht, Spannweite und Vorspannkraft wird die Spanngliedführung variiert, so dass sich unterschiedliche statisch unbestimmte Biegemomentanteile infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  ergeben. Es wird für das Moment  $M_{p,ind} = 0$  (konkordante Spanngliedführung) bis zum für jeden Träger maximal möglichen Moment  $M_{p,ind}$  untersucht. Ähnlich wie bei der Serie A werden hier Untersuchungen für verschiedene Querschnittsformen und Betonfestigkeiten durchgeführt.

Sowohl bei der Serie A als auch bei der Serie B wird die tatsächliche Entwicklung des Moments  $M_{p,ind}$  und die sich einstellende Momentenumlagerung  $\Delta M_{uml}$  bis zum rechnerischen Bruchzustand beobachtet.

In der Tabelle 8.1 werden die verschiedenen Systeme der Serie A und B dargestellt. Die genauere Beschreibung und Darstellung der untersuchten Systeme befinden sich im Anhang B.

Tabelle 8.1 Kurzbeschreibung der untersuchten Systeme

Serie A						
Serie	Querschnitt	Beton	vorgenommene Momentenumlagerung			
A-1	Rechteck	C 35/45	A-1-1	A-1-2	A-1-3	A-1-4
			0 %	10 %	20 %	25 % (max)
A-2	I-Querschnitt	C 35/45	A-2-1	A-2-2	A-2-3	A-2-4
			0 %	10 %	20 %	27,5 % (max)
A-3	Plattenbalken	C 35/45	A-3-1	A-3-2	A-3-3	-
			0 %	10 %	12 % (max)	-
A-4	I-Querschnitt	C 25/35	A-4-1	A-4-2	-	-
			0 %	5,3 % (max)	-	-
A-5	I-Querschnitt	C 50/60	A-5-1	A-5-2	A-5-3	A-5-4
			0 %	10 %	20 %	30 % (max)
Serie B						
Serie	Querschnitt	Beton	vorh. stat. unbest. Anteil inf. Vorspannung ( $M_{p,ind}$ )			
B-1	Rechteck	C 35/45	B-1-1	B-1-2	B-1-3	B-1-4
			Null	Klein	Mittel	Groß
B-2	I-Querschnitt	C 35/45	B-2-1	B-2-2	B-2-3	B-2-4
			Null	Klein	Mittel	Groß
B-3	Plattenbalken	C 35/45	B-3-1	B-3-2	B-3-3	B-3-4
			Null	Klein	Mittel	Groß
B-4	I-Querschnitt	C 25/35	B-4-1	B-4-2	B-4-3	B-4-4
			Null	Klein	Mittel	Groß
B-5	I-Querschnitt	C 50/60	B-5-1	B-5-2	B-5-3	B-5-4
			Null	Klein	Mittel	Groß



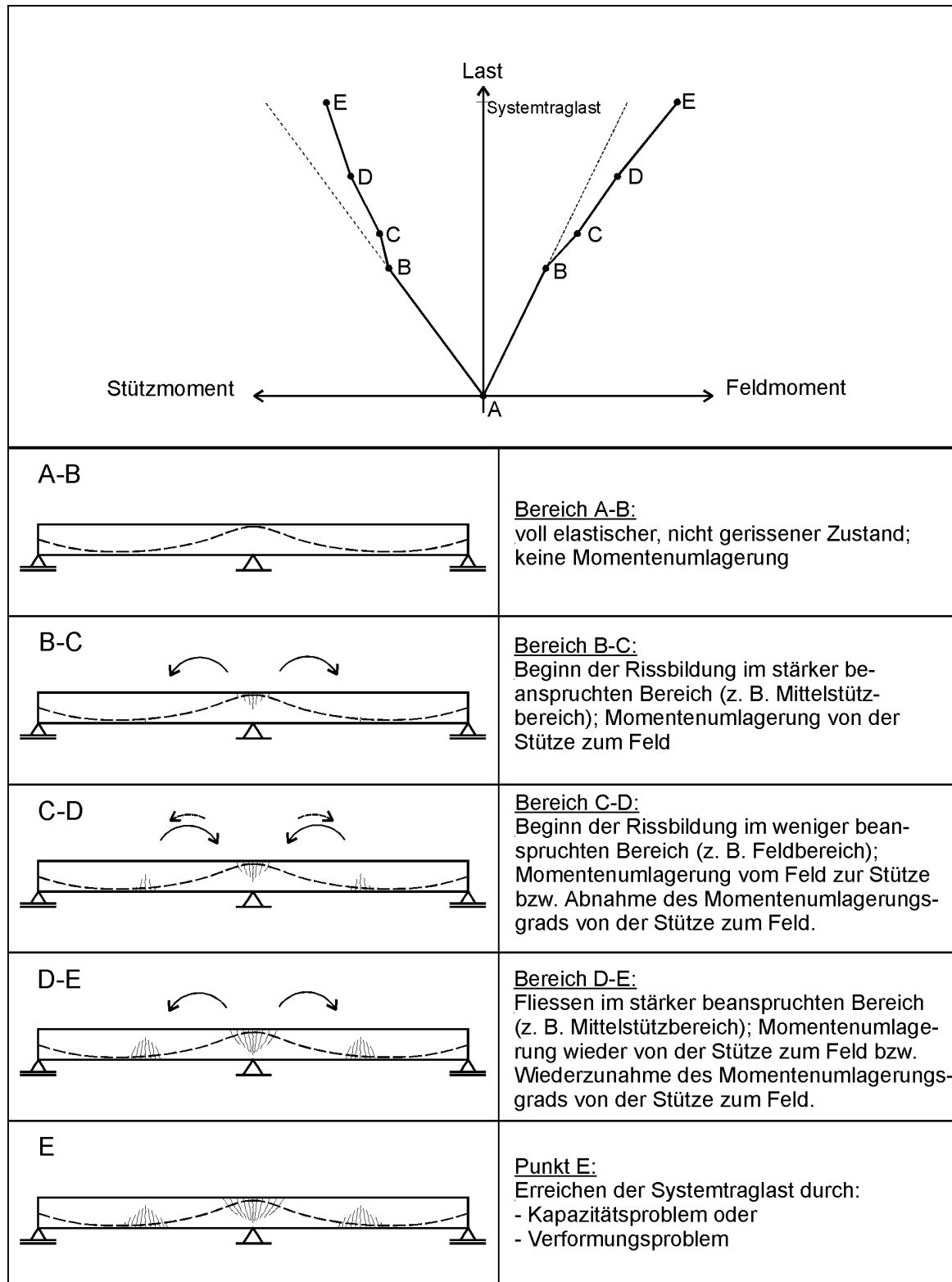
## 8.2 Auswertung der Ergebnisse für die einzelnen Systeme

### 8.2.1 Allgemeines

Bei Spannbeton-Durchlaufträgern werden in der Regel die Stützmomente durch die entgegengewirkenden Momente aus Vorspannung und vor allem durch den statisch unbestimmten Momentanteil abgemindert. Dies führt bereits schon im Gebrauchzustand zu einer gleichmäßigeren Beanspruchung der Träger; eine Eigenschaft, die durch die Ausnutzung der Schnittgrößenumlagerung im Grenzzustand der Tragfähigkeit angestrebt wird. Im Vergleich zum Stahlbetonträger erreicht ein Spannbetondurchlaufträger damit einen geringeren Umlagerungsgrad. Bei Spannbetonträgern mit großem Vorspanngrad (nach alter Bezeichnung: beschränkte bzw. volle Vorspannung) ist der Umlagerungsgrad durch die vorhandene große Vorspannkraft auch kleiner, da die Querschnitte nur eine kleine Rotationsfähigkeit besitzen und die Betondruckzone die Bruchdehnung zuerst erreicht, bevor der Beton- und Spannstahl im Zugbereich seine plastischen Eigenschaften ausnutzen kann.

Die hier verwendete Bezeichnung ‘Momentenumlagerung’ stellt keine Schnittgrößenumlagerung im mechanischen Sinne dar. Diese beschreibt lediglich eine Abweichung der tatsächlichen von der nach der Elastizitätstheorie ermittelten Schnittgrößenverteilung.

Im Bild 8.1 wird ein typischer Verlauf der Momentenumlagerung bei Spannbetondurchlaufträgern qualitativ gezeigt. Der Träger befindet sich zunächst im ungerissenen Zustand (Bereich A-B). Im Vergleich zum Stahlbetonträger ist



**Bild 8.1** Typischer Verlauf der Momentenumlagerung bei Spannbetondurchlaufträgern

dieser Zustand länger und das Rissmoment setzt erst bei höherer Last ein. Die Schnittgrößenentwicklung stimmt mit der nach der Elastizitätstheorie ermittelten überein und es findet keine Schnittgrößenumlagerung statt. Infolge des statisch unbestimmten Momentenanteils aus Vorspannung  $M_{p,ind}$  liegt eine gleichmässige Momentenverteilung im Gebrauchszustand vor.

Mit ansteigender Belastung beginnt die Rissbildung im stärker beanspruchten Bereich, i. d. R. im Mittelstützbereich. Bei weiterer Laststeigerung ergibt sich ein Steifigkeitsabfall im Stützbereich und das Stützmoment steigt langsamer als nach der Elastizitätstheorie. Dagegen nimmt das Feldmoment schneller zu (Bereich B-C). Es findet eine ‘Momentenumlagerung’ vom Stütz- in den Feldbereich statt. Bei Spannbetonträgern ist dieser Vorgang aber weniger ausgeprägt, da die gleichmässige Beanspruchung zwischen dem Stütz- und dem Feldbereich zu fast gleichzeitigem Erreichen des Rissmomentes in den beiden Bereichen führt.

Mit der Rissbildung im Feldbereich (Bereich C-D) bei weiterer Belastung nähert sich das Steifigkeitsverhältnis zwischen Stütz- und Feldbereich ihrem ursprünglichen Wert. Der Momentenumlagerungsgrad vom Stütz- in den Feldbereich nimmt ab bzw. es findet eine Momentenumlagerung vom Feld- in den Stützbereich statt.

Abhängig von der Bewehrungszulage und -verteilung findet das Fließen der Bewehrung bei weiterer Laststeigerung (Bereich D-E) zuerst im stärker beanspruchten Bereich (i. d. R. im Stützbereich) statt. Es ergibt sich erneut eine relative Steifigkeitsabnahme im Stützbereich und dadurch nimmt der Momentenumlagerungsgrad vom Stütz- in den Feldbereich wieder zu. Der erreichte

Umlagerungsgrad beim Spannbetondurchlaufträger ist durch die Einflüsse vom  $M_{p,ind}$  und von der Normalkraft aus der Vorspannung zum Vergleich mit dem Stahlbetonträger kleiner.

Nach dem Erreichen der Systemtraglast (Punkt E) ist eine weitere Laststeigerung nicht mehr möglich. Das Versagen des Trägers wird entweder durch die Bildung einer kinematischen Kette (Kapazitätsproblem; Erreichen des Fließmoments im Feldbereich bei ausreichender Verformungsfähigkeit des Stützbereichs) oder durch das Erreichen der Verformungsgrenze des Stützbereichs vor der Ausnutzung der Tragkapazität des Feldbereichs (Verformungsproblem) verursacht.

Die Ergebnisse der untersuchten Systeme werden in diesem Abschnitt diskutiert und auszugweise dargestellt bzw. verglichen. Die vollständigen Ergebnisse der Untersuchungen werden grafisch im Anhang C wiedergegeben.

### **8.2.2 Die Systeme der Serie A**

Die Balken der Serie A sind symmetrische Zweifeldträger mit rechteckigen I- und Plattenbalken-Querschnittsformen. Die Träger werden mit einer symmetrischen parabelförmigen Spannliedführung vorgespannt und mit einer Gleichlast aus Eigengewicht und Verkehrslast belastet. Die zusätzliche erforderliche Betonstahlbewehrung wird dem Momentverlauf aus der linear elastischen Schnittgrößenberechnung (ohne oder mit anschließender Momentenumlagerung) entsprechend ermittelt und angeordnet. Der maximale für diese Systeme zugelassene Momentenumlagerungsgrad beträgt zwischen 5,3 % beim Träger A-4-2 bis 30 % beim Träger A-5-4 (s. Tabelle 8.1 bzw. Anhang B).

Als Beispiel werden die Berechnungsergebnisse für die Biegemomente, die Momentenumlagerung und die statisch unbestimmte Biegemomentanteile infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  vom Träger A-1-4 im Bild 8.2 grafisch dargestellt. Die vollständigen Ergebnisse für alle Systeme werden im Anhang C wiedergegeben.

Im Bild 8.3 sind die Einflüsse der vorgenommenen Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung auf die Entwicklung des statisch unbestimmten Biegemomentenanteils infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  zu sehen. Nach der Rissbildung im Stützbereich weicht der Verlauf des Moments  $M_{p,ind}$  von dem nach der Elastizitätstheorie ab. Das Moment  $M_{p,ind}$  nimmt bei weiterer Belastung bis zum rechnerischen Bruchzustand weiter ab. Nach dem Fließen der Bewehrung im Stützbereich ist die Abnahme stärker. Ohne vorgenommene Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung beträgt die Abnahme des statisch unbestimmten Momentenanteils infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  bei den Trägern A-1 (Rechteckquerschnitt, Beton C35/45) 8,5 % im Stütz- und 6,9 % im Feldbereich, während bei maximal vorgenommener Momentenumlagerung von 25 % die Momentenabnahme 14,4 % bzw. 9,6 % erreicht.

Das Bild 8.4 zeigt die Verläufe der Biegemomente im Stütz- und Feldbereich von den Trägern A-1. Die tatsächlich auftretende Momentenumlagerung ist hier nicht besonders groß, obwohl die Bemessungsmomente bei der Querschnittsbemessung im Stützbereich bewusst abgemindert werden. Ohne die vorgenommene Momentenabminderung bei der Bemessung beträgt die tatsächliche Momentenumlagerung nur ca. 7 % im Stütz- und fast 4 % im Feldbereich, während bei der maximal möglichen Momentenabminderung von 25 % die tatsächlich auftretende Momentenumlagerung 13 % bzw. 6,5 % erreicht wird.

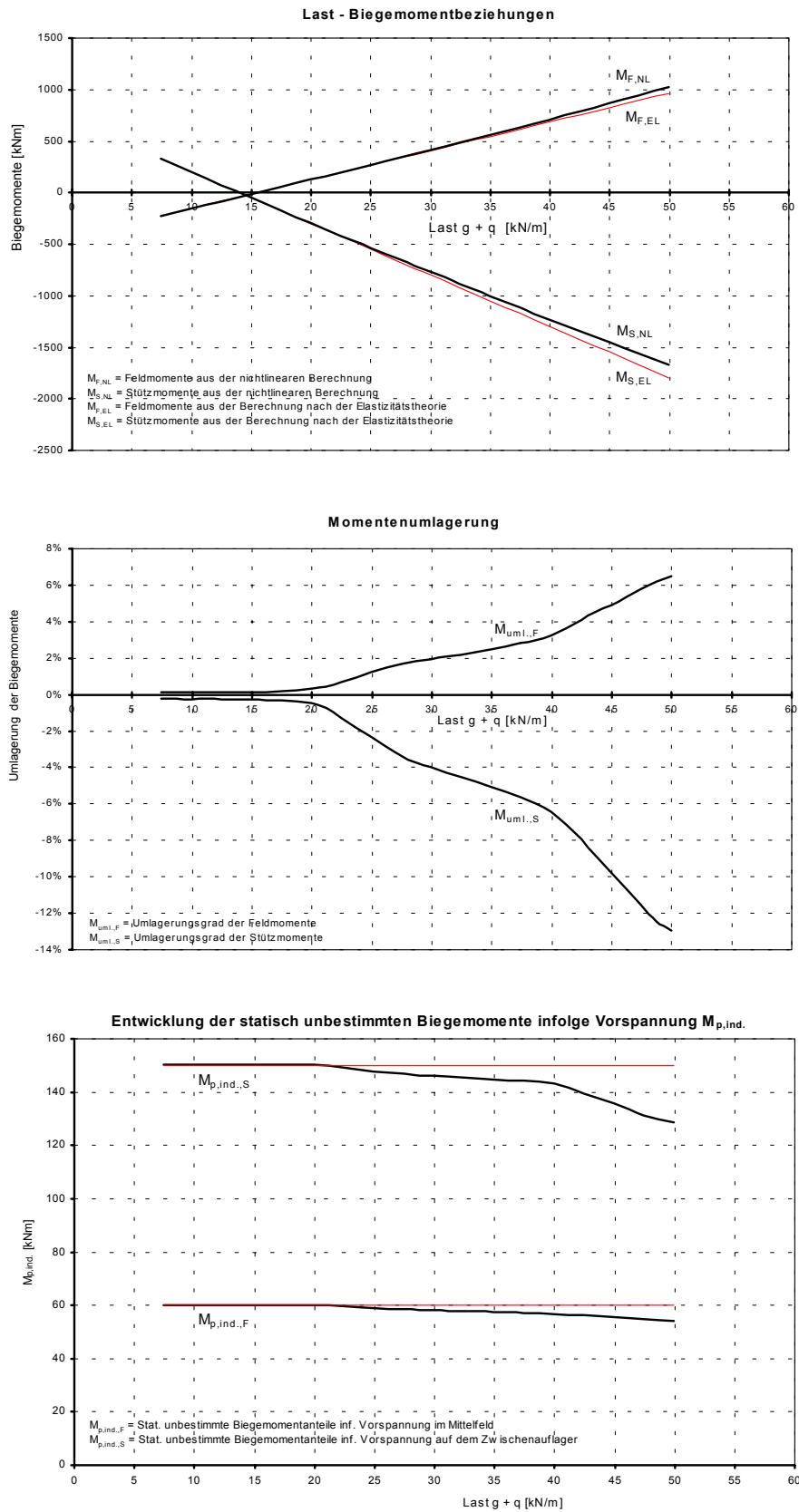
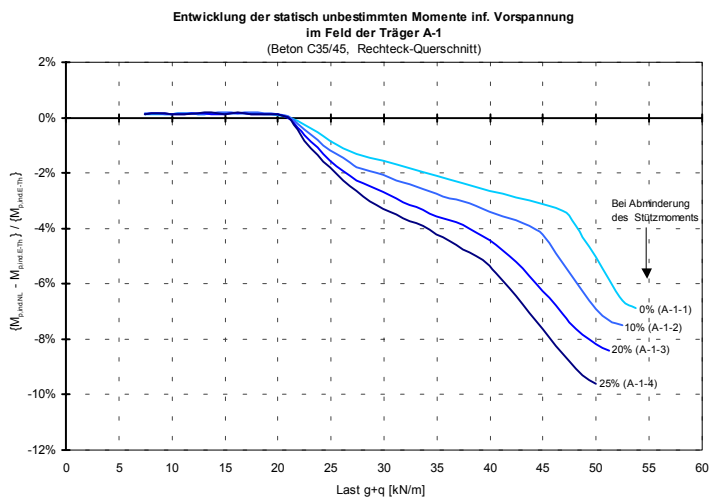
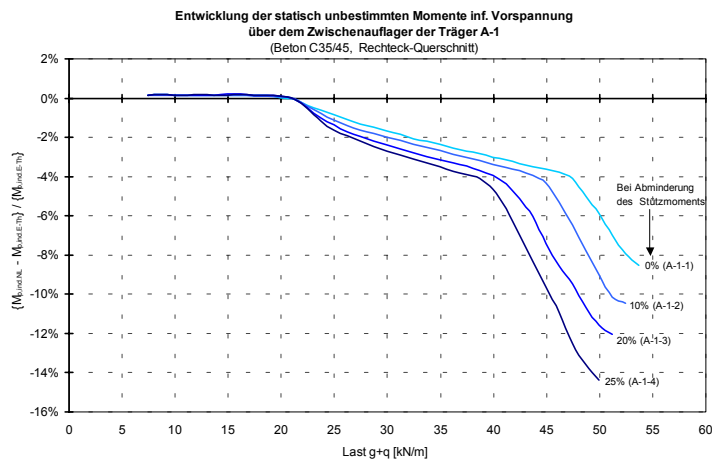
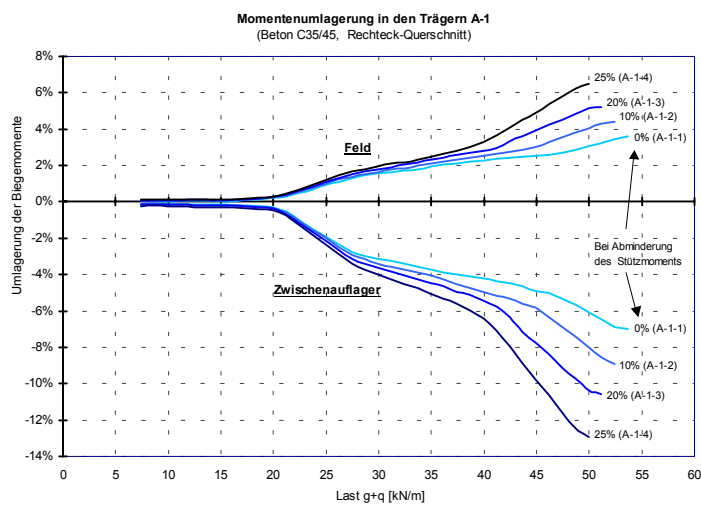


Bild 8.2 Berechnungsergebnisse der Träger A-1-4



**Bild 8.3** Verlauf der bez. Momente  $M_{p,ind}$  im Stütz- und Feldbereich der Träger A-1

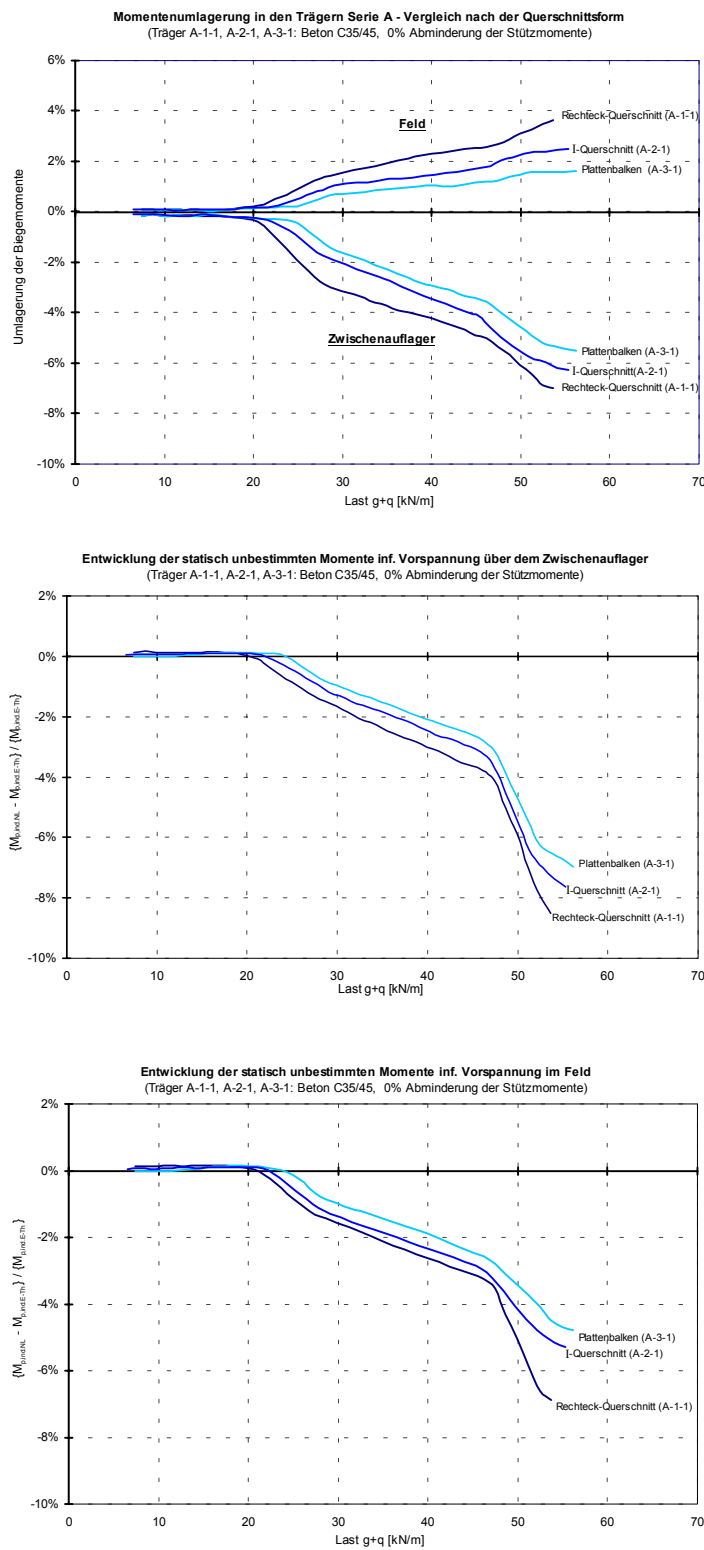


**Bild 8.4** Momentenumlagerung im Stütz- und Feldbereich der Träger A-1

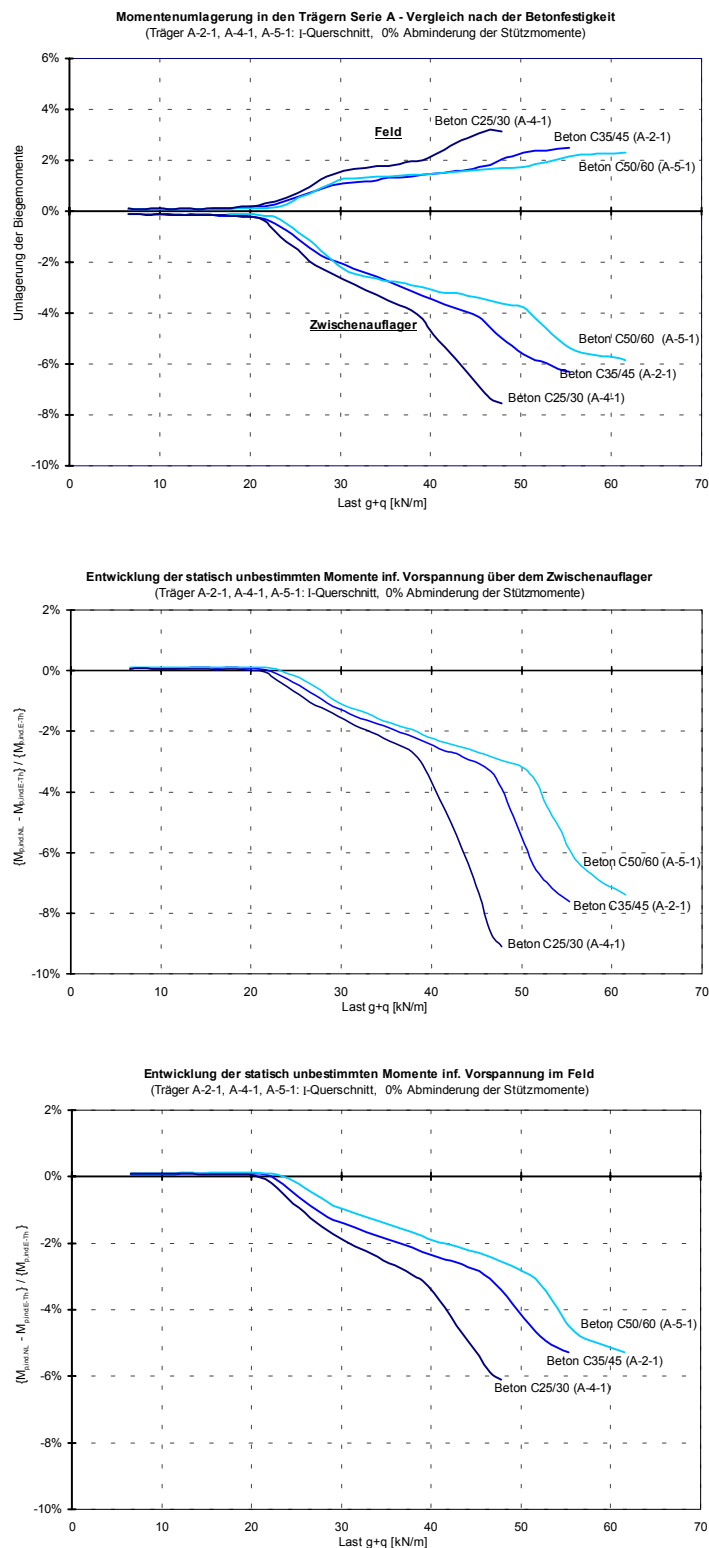
Die Verläufe der Momente  $M_{p,ind}$  und der Momentenumlagerung  $\Delta M_{uml}$  bei den Trägern A-2 bis A-5 sind ähnlich wie bei den oben dargestellten Trägern A-1 (s. Anhang C). Bei den Trägern A-3 (Platenbalkenquerschnitt) bleibt der ungerissene Zustand durch die vergleichsweise größere Zugzone im Stützbereich länger als bei den anderen Querschnittsformen bestehen. Ebenso ist dieser Zustand bei den Trägern mit höherer Betonfestigkeit (z. B. Träger A-5, I-Balken mit Beton C 50/60) auch zu beobachten.

Das Bild 8.5 zeigt den Vergleich für den Biegemomentenverlauf und die Entwicklung des Moments  $M_{p,ind}$  bis zum rechnerischen Bruchzustand bei der Verwendung von unterschiedlichen Querschnittsformen. Durch die größere Zugzone im Stützbereich erreicht der Plattenbalken (Träger Serie A-3) die ersten Risse bei der Belastung von 23,7 kN/m, während der Beginn der Rissbildung für die Träger mit Rechteck- (Träger Serie A-1) und I-Querschnitte (Träger Serie A-2) schon bei niedrigeren Werte auftritt (21,2 kN/m bzw. 22,8 kN/m). Es ist zu beobachten, dass bei dem Plattenbalken sowohl die tatsächlich auftretende Momentenumlagerung als auch die Abnahme des Moments  $M_{p,ind}$  kleiner ist als bei den Trägern mit dem Rechteck- und I-Querschnitt. Dies ist durch die kleinere Rotationsfähigkeit der Plattenbalkenquerschnitte im Grenzzustand der Tragfähigkeit zurückzuführen. Als Beispiel – wie im Bild 8.5 gezeigt – erreicht der Plattenbalken im rechnerischen Bruchzustand die Momentenumlagerung von 5,5 % und die Abnahme des Moments  $M_{p,ind}$  von 7,0 %, während diese Werte für den Träger mit dem Rechteckquerschnitt 7,0 % bzw. 8,5 % und mit dem I-Querschnitt 6,3 % und 7,4 % betragen. Die erreichten rechnerischen Bruchlasten haben aber für alle Träger keinen großen Unterschied.





**Bild 8.5** Momentenumlagerung und Verlauf der Momente  $M_{p,ind}$  im Stütz- und Feldbereich der Träger Serie A für verschiedene Querschnittsformen



**Bild 8.6** Momentenumlagerung und Verlauf der Momente  $M_{p,ind}$  im Stütz- und Feldbereich der Träger Serie A für verschiedene Betonfestigkeiten

Bei der Verwendung von verschiedenen Betonfestigkeiten ist zu beobachten (s. Bild 8.6), dass die auftretende Momentenumlagerung und die Entwicklung des statisch unbestimmten Biegemomentanteils infolge Vorspannung von der Betonfestigkeit beeinflusst werden. Wie im Kapitel 4 gezeigt, haben niedrigere Betongüten zwar eine kleinere Druck- und Zugfestigkeit, aber grössere Dehnfähigkeit. Dagegen verhalten die Betone mit höherer Festigkeit sich spröder und haben weniger Dehnfähigkeit unter Druckbeanspruchung. Die unterschiedliche Betonzugfestigkeit zeigt keinen grossen Einfluss auf das Erreichen der Risslast (21,6 kN/m beim Beton C 25/30; 22,2 kN/m beim Beton C 35/45; 22,8 kN/m beim Beton C 50/60). Die verwendete Betonfestigkeit zeigt aber ihre Auswirkungen in der Momentenumlagerung sowie in der Entwicklung des Moments  $M_{p,ind}$ . Während beim Träger A-4-1 (Beton C25/30) die tatsächliche Momentenumlagerung die Werte von 7,5 % und die Abnahme des Moments  $M_{p,ind}$  von 9,1% erreichen, betragen diese Werte für den Träger A-5-1 (Beton C50/60) nur 5,8% bzw. 7,4%. Entsprechend seiner Festigkeit erreicht der Träger mit höherer Betongüte aber eine größere Bruchlast. Die rechnerische Bruchlast des Trägers A-5-1 (Beton C50/60) beträgt 61,6 kN/m, die des Trägers A-4-1 (Beton C25/30) beträgt nur 47,8 kN/m.

Es ist in den Untersuchungen der Träger Serie A zu beobachten, dass die größere vorgenommene Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung nur geringen Einfluss auf die tatsächlich sich einstellende Momentenumlagerung hat. Eine Abminderung des Bemessungsmoments im Stützbereich und ein großes Verformungsvermögen des Querschnitts sind nicht mit einer großen realisierbaren Momentenumlagerung gleichzusetzen. Da Spannbetontragwerke i. d. R. nur eine begrenzte Verformungsfähigkeit besitzen, ist eine Bildung von kinematischen

Ketten durch volle Plastifizierung der Feld- und Stützbereiche nur unter bestimmten Bedingungen möglich. Für Spannbetondurchlaufträger ist dadurch eine Umwandlung von einem statisch unbestimmten in ein statisch bestimmtes System im rechnerischen Bruchzustand i. d. R. nicht möglich. Im Grenzzustand der Tragfähigkeit ist der statisch unbestimmte Biegemomentanteil infolge Vorspannung ( $M_{p,ind}$ ) trotz abgeminderter Werte noch vorhanden, unabhängig, ob bei der Bemessung eine Momentenumlagerung vorgenommen wird oder nicht.

Es ist auch zu beachten, dass eine zu groß vorgenommene Momentenumlagerung bei der Bemessung von Spannbetontragwerken erhebliche Einflüsse im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit bewirkt. Eine Abminderung des Stützmoments bei der Bemessung führt zu einer anderen Bewehrungsmenge und -verteilung. Eine geringere Druckbewehrung bedeutet eine kleinere äquivalente Fläche, um die Druckkraft in der Druckzone aufzunehmen. Dies könnte eine größere Druckspannung im Beton zufolge haben, die ein stärkeres Kriechen des Betons hervorruft und dadurch größere Spannkraftverluste verursacht. Andererseits wirkt sich eine geringere Zugbewehrung nachteilig auf das Rissverhalten des Tragwerks im Gebrauchzustand aus. In Spannbetontragwerken sind die Rissbreiten wegen der Korrosionsgefahr des Spannstahls stärker beschränkt als bei Stahlbetontragwerken.

### 8.2.3 Die Systeme der Serie B

Ähnlich wie bei den Trägern der Serie A haben die Träger der Serie B einen symmetrischen parabelförmigen Spanngliedverlauf. Die Träger sind symmetrische Zweifelddurchlaufträger mit Rechteck-, I- und Plattenbalken-Querschnitten und durch eine Gleichlast aus Eigengewicht sowie Verkehrslast belastet. Die Spanngliedführung wird für jeden Träger variiert, so dass ein statisch unbestimmter Momentanteil infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  von Null bis zum für den Träger maximal möglichen Wert ( $M_{p,ind \max}$ ) auftritt. Für  $M_{p,ind} = 0$  wird eine zentrische Spanngliedführung gewählt. In den Kategorien kleine und mittlere Werte des Moments  $M_{p,ind}$  werden Spanngliedführungen ausgewählt, die das Moment  $M_{p,ind}$  zwischen 5 – 10 % bzw. 50 – 60 % der  $M_{p,ind \max}$  ergeben.

Stellvertretend werden die Berechnungsergebnisse für die Träger B-1-1 (mit  $M_{p,ind} = 0$ ) und B-1-4 (mit  $M_{p,ind \max}$ ) im Bild 8.7 und 8.8 grafisch dargestellt. Die vollständige Darstellung der Berechnungsergebnisse für alle Träger der Serie B ist im Anhang C wiedergegeben.

Die Träger der Systeme B-1 sind symmetrische Zweifeldträger mit Rechteckquerschnitt und der Betonfestigkeit C35/45. Bei dem Träger mit der zentrischen Spanngliedführung (B-1-1) reicht die festgelegte Vorspannkraft nicht aus, um einen überdrückten Querschnitt zu erzeugen. Selbst unter dem Eigengewicht wird die Zugfestigkeit im Stützbereich leicht überschritten; dort beginnt dann die Rissbildung. Dadurch weicht die Schnittgrößenverteilung von der nach der Elastizitätstheorie schon in diesem Zustand ab.

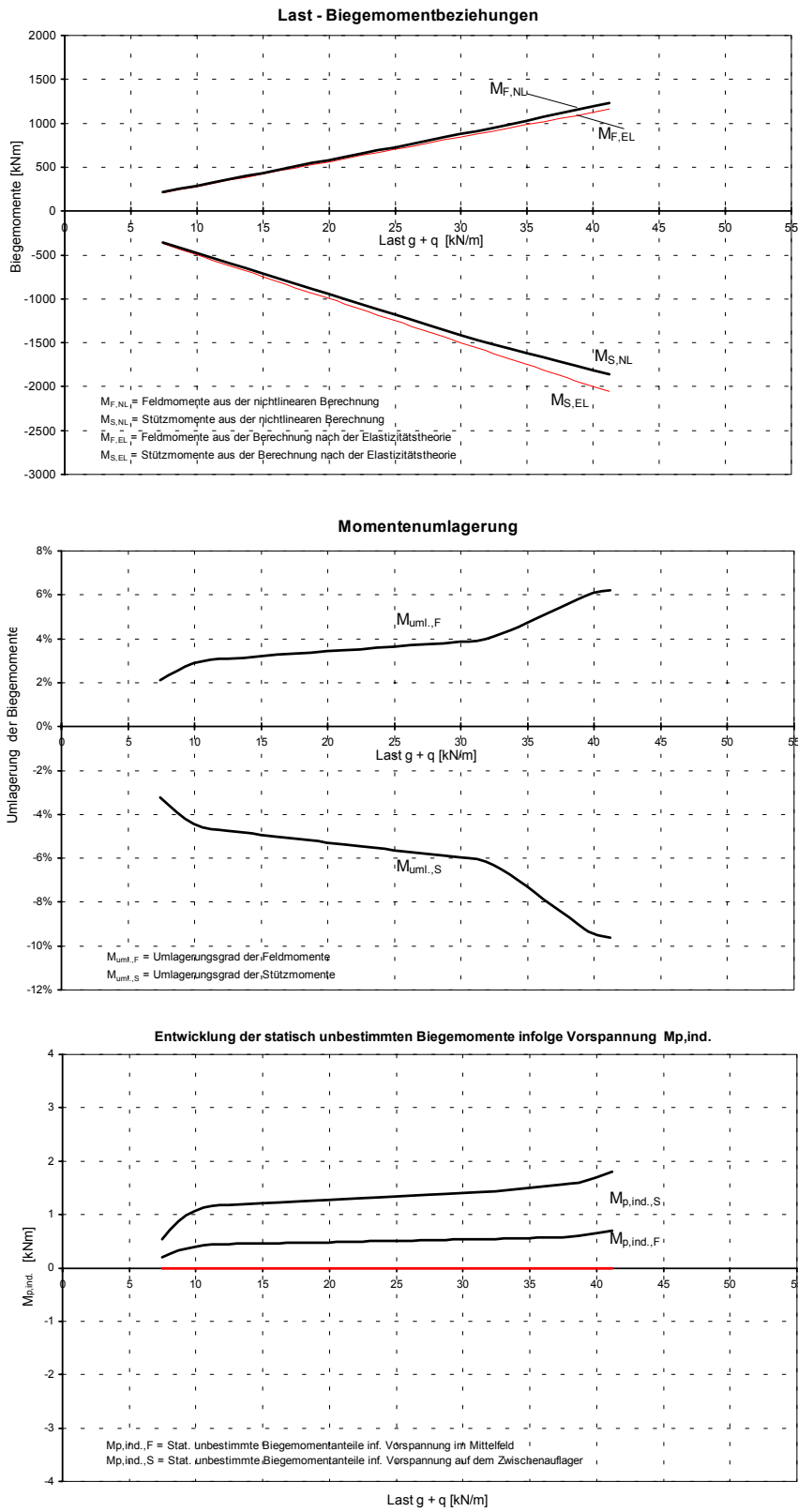
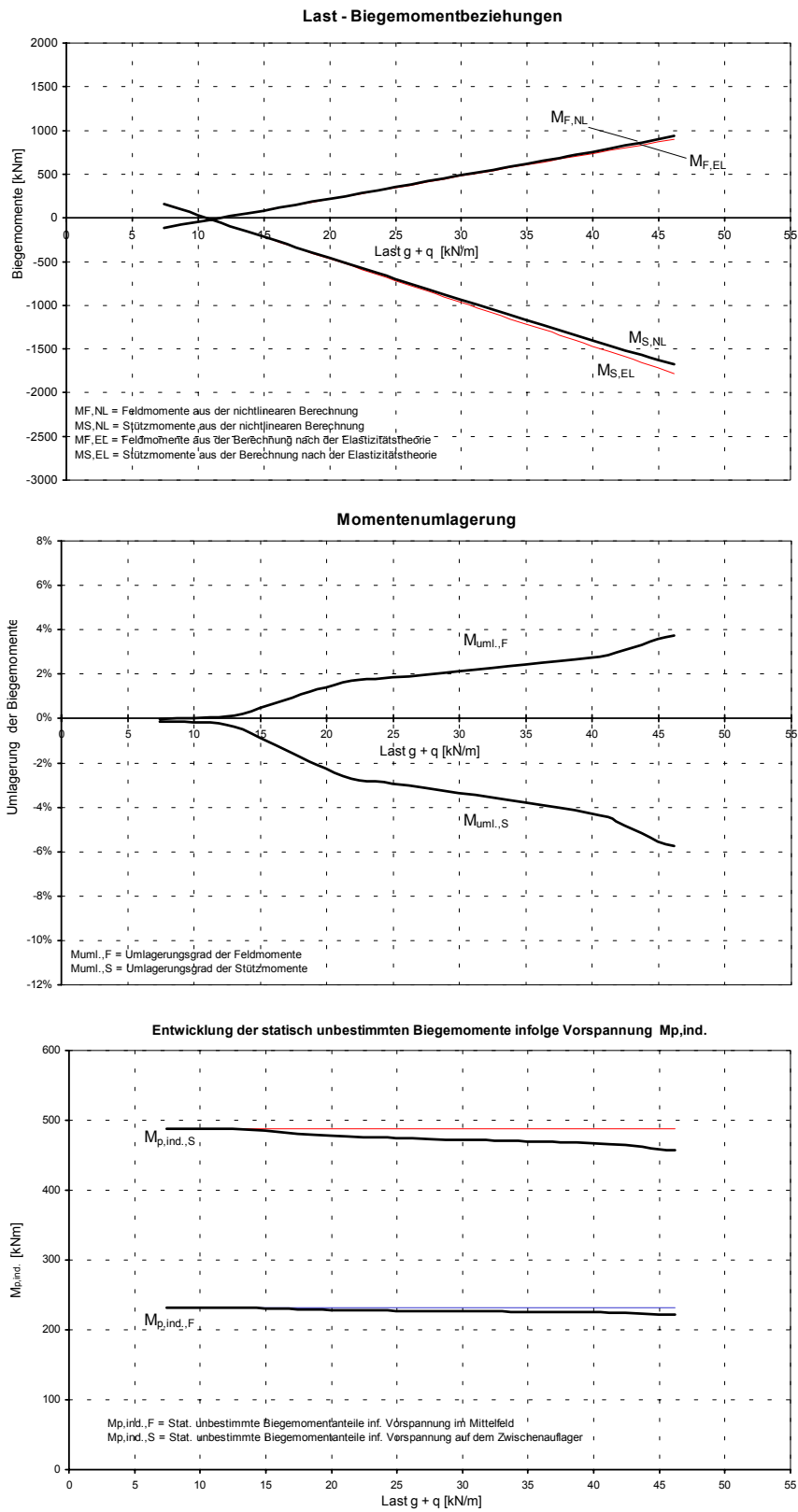


Bild 8.7 Berechnungsergebnisse der Träger B-1-1

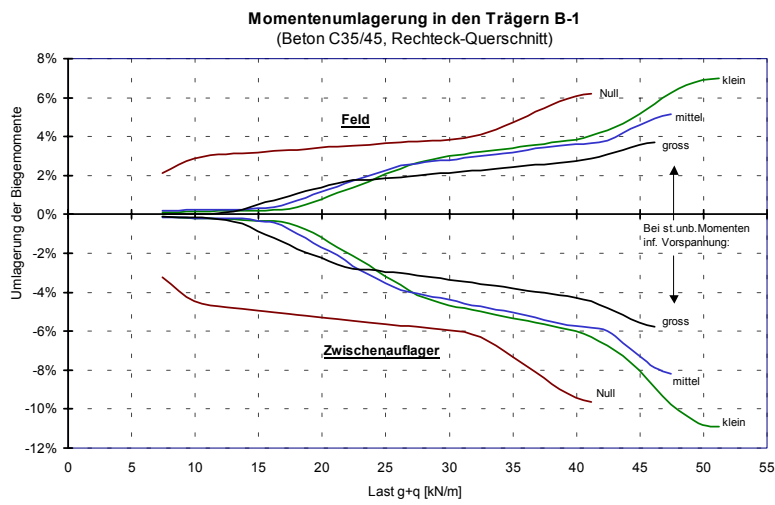


**Bild 8.8** Berechnungsergebnisse der Träger B-1-4

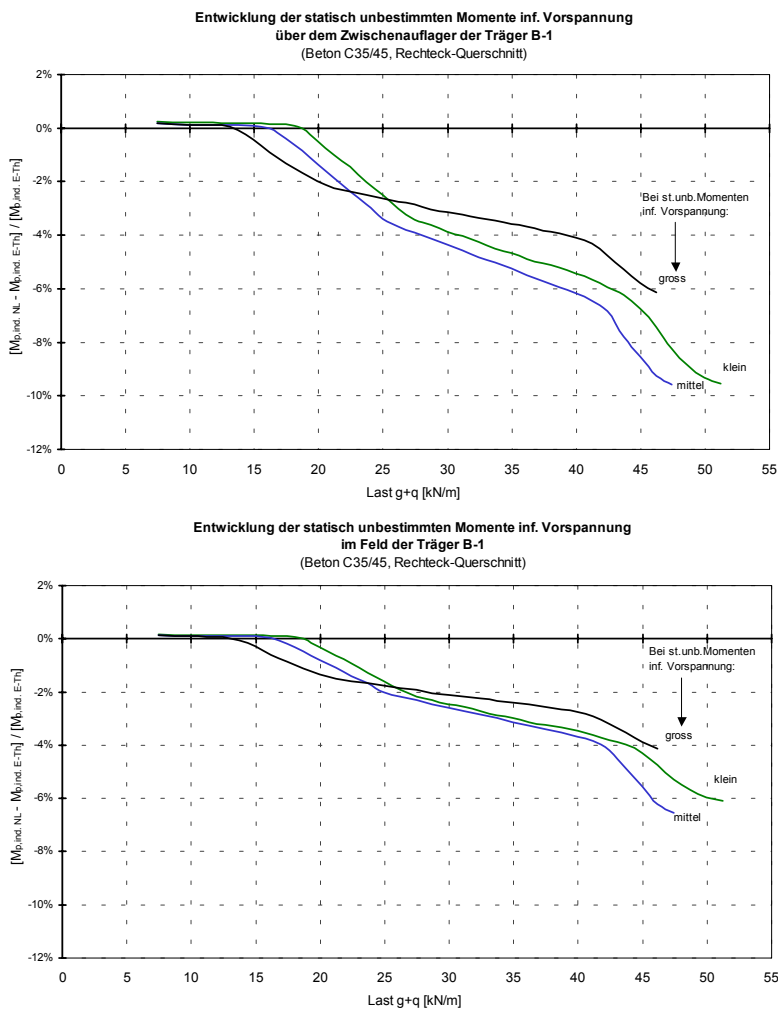
Obwohl im Träger B-1-1 theoretisch kein statisch unbestimmter Momentanteil infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  auftreten kann, sind kleine Werte von  $M_{p,ind}$  im Verlauf der Lastgeschichte zu beobachten. Diese sind auf durch die Rissbildung hervorgerufene Verschiebungen der Querschnittsschwerpunkte und Änderungen der Steifigkeitsverhältnisse zwischen der verschiedenen Bereichen im Träger zurückzuführen. Beim Träger B-1-1 wird das Fließen der Bewehrung zuerst im Stützbereich erreicht, wo dort das Moment schneller zunimmt als im Feldbereich. Im Vergleich mit anderen Trägern kann der Träger durch eine relativ große erforderliche Bewehrungszulage eine bemerkbare Momentenumlagerung erreichen (s. Bild 8.9).

Bei anderen Trägern mit  $M_{p,ind} \neq 0$  vom System B-1 bleiben die Querschnitte sowohl im Feld- als auch Stützbereich zunächst in ungerissenem Zustand. Es ist erkennbar, dass der Momentenumlagerungsgrad bei den Trägern mit größerem Moment  $M_{p,ind}$  kleiner ist als bei den Trägern mit kleinerem Moment  $M_{p,ind}$  (s. Bild 8.9). Durch das große  $M_{p,ind}$  wird die Verteilung der Beanspruchung in Spannbetondurchlaufträgern sogar schon im Lastniveau des Gebrauchszustands gleichmäßiger. Dadurch werden die Rissmomente bzw. Fließen der Bewehrung im Stütz- und Feldbereich auf fast gleicher Laststufe erreicht. Der Umlagerungsgrad im Stützbereich beim Träger B-1-2 (kleines  $M_{p,ind}$ ) beträgt 10,9 %, während beim Träger B-1-3 (mittleres  $M_{p,ind}$ ) der Wert 8,2 % und beim Träger B-1-4 (großes  $M_{p,ind}$ ) nur der Wert 5,8 % erreicht wird. Wie schon in den Trägern der Serie A zu sehen ist, nehmen die statisch unbestimmten Momentenanteile infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  hier in den Trägern der Serie B mit steigender Belastung ab (s. Bild 8.10). Die Abnahme ist, wie auch von den Trägern der Serie A schon bekannt, vom tatsächlichen Momentenumlagerungsgrad abhängig.





**Bild 8.9** Momentenumlagerung im Stütz- und Feldbereich der Träger B-1

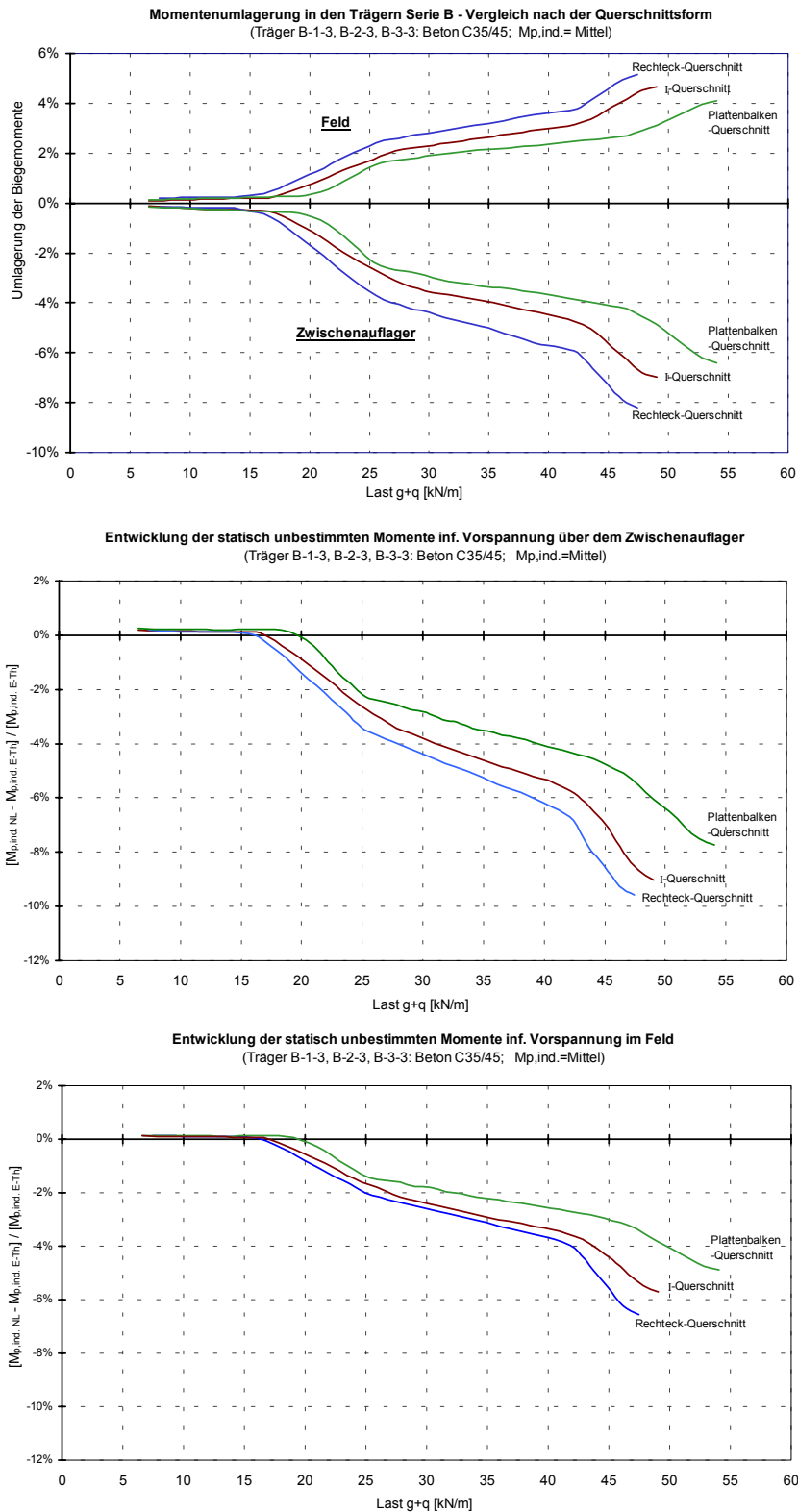


**Bild 8.10** Verlauf der Momente  $M_{p,ind}$  im Stütz- und Feldbereich der Träger B-1

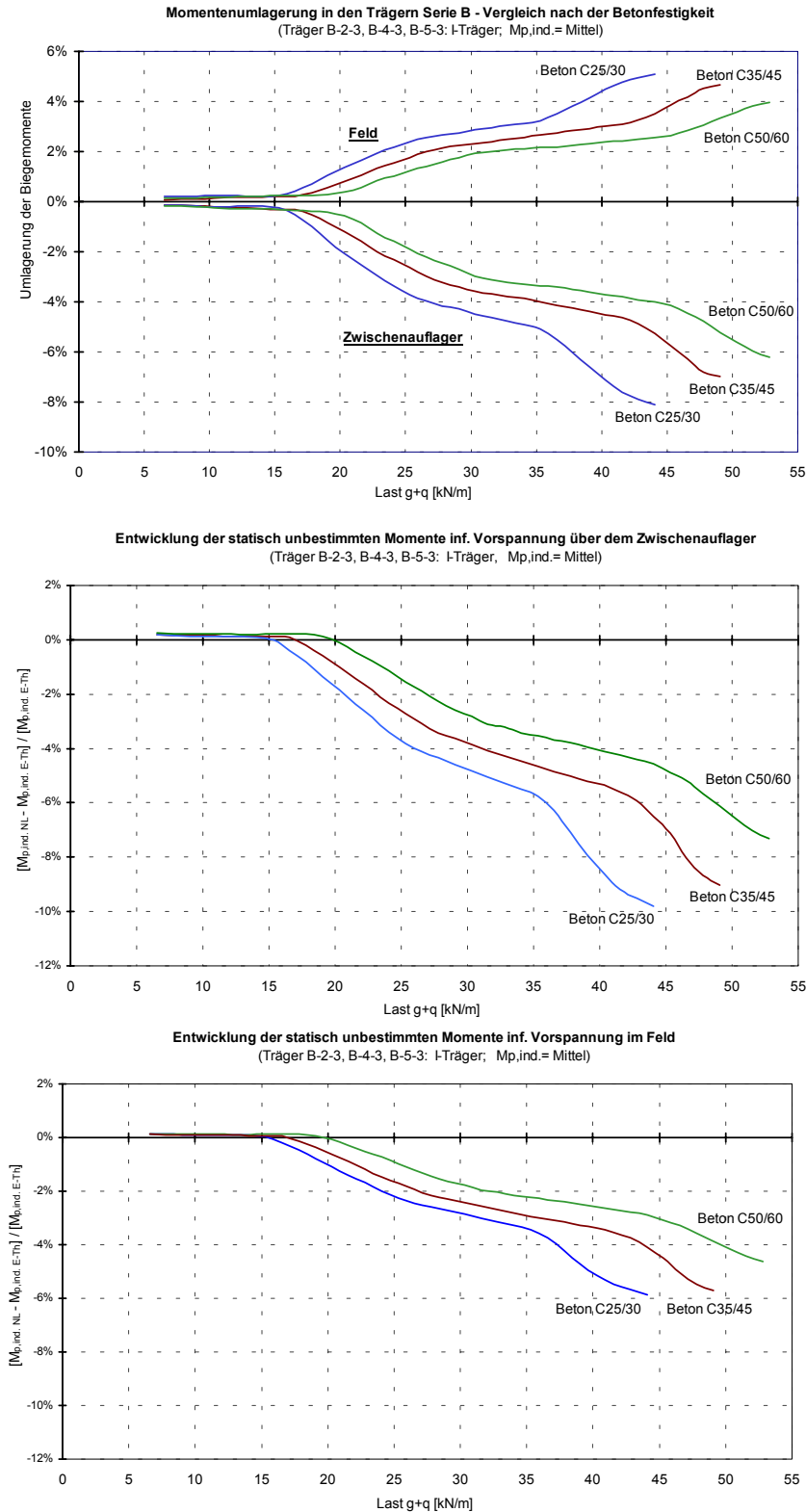
Das Verhalten der Träger in den Systemen B-2 bis B-4 ist vergleichsweise ähnlich wie beim System B-1. Ausnahmen sind nur beim Träger B-3-1 (Plattenbalken-Querschnitt, Beton C 35/45) und beim Träger B-5-1 (I-Querschnitt, Beton C50/60). Hier ist durch die größere bzw. stärkere Zugzone im Stützbereich die Betonzugfestigkeit unter dem Eigengewicht nicht überschritten und daher bleiben die Querschnitte noch im ungerissenen Zustand.

In den grafischen Darstellungen der Berechnungsergebnisse ist auch gezeigt, dass die Risslasten für die verschiedenen Momente  $M_{p,ind}$  (d. h. verschiedene Spann-gliedlage) bei einem System (z. B. System B-1, s. Bild 8.10) unterschiedlich sind. Die Lage der Spann-glieder beeinflussen die Spannungsverteilung im Querschnitt unter Gebrauchslastniveau. Dadurch beginnt die Rissbildung in unterschiedlichen Laststufen.

Um die Einflüsse der Anwendung verschiedener Querschnittsformen zu untersuchen, werden Träger mit der Betonfestigkeitsklasse C35/45 für Rechteck-(System B-1), I- (System B-2) und Plattenbalken-Querschnitt (System B-3) berechnet. Ein Vergleich der Ergebnisse für die Träger mit mittlerem Moment  $M_{p,ind}$  zeigt das Bild 8.11. Anschließend wird der Ergebnisvergleich für die unterschiedlichen Betonfestigkeitsklassen bei den Trägern mit dem I-Querschnitt (Systeme B-2, B-4 und B-5) im Bild 8.12 dargestellt. Die Verläufe der Diagramme sind im Allgemeinen denen der Träger der Serie A sehr ähnlich. Es wird nochmal bestätigt, dass sich durch die größere Zugzone (System B-3, Plattenbalken-Querschnitt) bzw. die stärkere Zugzone (System B-5, Beton C50/60) die Träger länger in ungerissenem Zustand befinden. Dagegen ist die wirkliche Momentenumlagerung und die Abnahme des Moments  $M_{p,ind}$  in diesen Trägern kleiner, wie es bei den Trägern der Serie A auch schon zu erkennen ist.



**Bild 8.11** Momentenumlagerung und Verlauf der Momente  $M_{p,ind}$  im Stütz- und Feldbereich der Träger Serie B für verschiedene Querschnittsformen



**Bild 8.12** Momentenumlagerung und Verlauf der Momente  $M_{p,ind}$  im Stütz- und Feldbereich der Träger Serie B für verschiedene Betonfestigkeiten

### 8.3 Zusammenfassung und Folgerungen aus den Untersuchungen

Im Allgemeinen ist bei den Trägern der Serie A zu beobachten, dass die Abnahme des statisch unbestimmten Biegemomentenanteils infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  im rechnerischen Bruchzustand größer ist, je größer die vorgenommene Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung ist. Dieser Abnahmegrad ist in der Größenordnung von oder leicht größer als die sich tatsächlich einstellende Momentenumlagerung. Selbst die sich tatsächlich einstellende Momentenumlagerungsgrade in den Spannbetonträgern weichen von den Werten ab, die in der Querschnittsbemessung als Umlagerungsgrade festgelegt werden. In den Normen wird das Moment  $M_{p,ind}$  bei der Querschnittsbemessung aufgrund der Auswirkungen aus der linearen Schnittgrößenberechnung mit anschließender Momentenumlagerung auch so groß mitumgelagert, wie die Biegemomente aus anderen Einwirkungen.

Im ungerissenen Zustand sind keine nennenswerten Abweichungen des Moments  $M_{p,ind}$  von den nach der Elastizitätstheorie berechneten Werten zu erkennen. Es ist zu beobachten, dass das Moment  $M_{p,ind}$  nach der Rissbildung bis zum rechnerischen Versagen der Träger abnimmt.

Obwohl das Fließen der Bewehrung im Stütz- und Feldbereich stattfindet, bleibt das Moment  $M_{p,ind}$  – allerdings mit abgeminderten Werten – vorhanden. Dies zeigt, dass der Träger durch die Plastifizierung der stärker beanspruchten Bereiche nicht vollständig in ein statisch bestimmtes System übergeht. Die statisch unbestimmten Eigenschaften des Trägers bleiben bis zu einem bestimmten Grad noch erhalten.

Die Darstellung der Untersuchungsergebnisse der Träger der Serie B hat gezeigt, dass die sich tatsächlich einstellende Momentenumlagerung in den Spannbetondurchlaufträgern von dem festgelegten statisch unbestimmten Momentanteil infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  – d. h. von Spanngliedführung – beeinflusst wird. Es ist zu erkennen, dass ein größerer statisch unbestimmter Momentanteil infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  bei Spannbetondurchlaufträgern eine Momentenumlagerung ‘behindern’ kann. Diese ist aber in den Spannbetondurchlaufträgern auch nicht immer nötig, da – wie im vorherigen Abschnitt erwähnt – die Wirkung des statisch unbestimmten Momentanteils infolge Vorspannung zu einem Ausgleich der Beanspruchungen zwischen Stütz- und Feldbereich schon seit dem Gebrauchszustand führt, wie er im Fall von Stahlbetonträgern durch die Momentenumlagerung nach dem Fließen der Bewehrung erst im rechnerischen Bruchzustand auftritt.

Bei der Bemessung von Spannbetontragwerken nach heutigen Normen wird die Vorspannkraft für die Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit zur Berücksichtigung ihrer Streuungen mit ihren unteren ( $P_{k,inf}$ ) oder oberen ( $P_{k,sup}$ ) charakteristischen Werten eingesetzt. Dagegen werden die Streuungen der Vorspannkraft im Grenzzustand der Tragfähigkeit unter Verwendung von  $\gamma_p = 1,0$  im allgemeinen vernachlässigt. Nur in wenigen Normen, wie z. B. CEB MC 90 [9], EC2 Teil 1-1 [1] und EC2 Teil 1 2<sup>nd</sup> Draft 2001, werden diese Streuungen durch die Anwendung der unterschiedlichen  $\gamma_p$ -Werte für günstige und ungünstige Wirkung berücksichtigt. Diese sind jedoch keine Sicherheitsfaktoren für die Veränderung der statisch unbestimmten Momentenanteile infolge Vorspannung, sondern dienen zum Abdecken der Ungenauigkeiten bei der Abschätzung der Vordehnung bzw. der Anfangswerte der Vorspannkraft.

Obwohl eine Abnahme des statisch unbestimmten Momentenanteils infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  nach den Untersuchungen in diesem Abschnitt stattfinden kann, ist diese relativ gering. Um die Bemessung von Spannbetondurchlaufträgern nicht noch komplizierter zu gestalten, ist eine Vernachlässigung der Veränderung des Moments  $M_{p,ind}$  für die praktische Anwendung bei der Bemessung mit Auswirkungen aus der linear elastischen Schnittgrößenberechnung, wie es bisher in den Normen üblich ist, noch annehmbar. Bei Bemessung mit größerer Genauigkeit sollte die Abnahme des statisch unbestimmten Biegemomentanteils infolge Vorspannung  $M_{p,ind}$  in Abhängigkeit von der sich einstellenden Momentenumlagerung berücksichtigt werden.

## 9 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die Entwicklung der statisch unbestimmten Momentenanteile infolge Vorspannung in den Spannbetondurchlaufträgern bis zum rechnerischen Bruchzustand wirklichkeitsnah zu untersuchen. Die gegenseitige Beeinflussung zwischen den statisch unbestimmten Momentenanteilen infolge Vorspannung und den Momentenumlagerungen konnten dargestellt werden.

Zu diesem Zweck wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Berechnungsmodell entwickelt, das auf der Grundlage der Finite-Element-Methode basiert. Hier wurde die Anwendung eines Balkenelements mit 3 Knotenpunkten und 9 Freiheitsgraden vorgestellt, wobei jeder Knotenpunkt gleiche Freiheitsgrade hat: eine horizontale Verschiebung, eine vertikale Verschiebung und eine Verdrehung. Die gewonnene 9x9-Elementsteifigkeitsmatrix wurde anschließend mit statischer Kondensation in eine 6x6-Matrix überführt, um die Bandmatrix des Gesamtsystems klein zu halten. Die Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix und der Schnittgrößen erfolgte durch numerische Integration, das nichtlineare Gleichungssystem wurde mit einem inkrementell-iterativen Verfahren gelöst. Die Querschnittsabbildung erfolgte mit Hilfe des Schichtenmodells.

Um das wirklichkeitsnahe Tragverhalten zu erfassen, wurden die nichtlinearen Werkstoffgesetze nach CEB MC 90 [9] bzw. DIN 1045-1 [3] verwendet. Die Erfassung des Einflusses der Rissbildung bzw. der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen erfolgte in der Form eines verschmierten Modells durch die Modifikation der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Stahls unter Zugbeanspru-



chung. Die effektiven Vorspannkkräfte wurden unter Berücksichtigung der sowohl zeitunabhängigen als auch zeitabhängigen Spannkraftverluste mit den Ansätzen nach CEB MC 90 [9] bzw. DIN 1045-1 [3] ermittelt. Die Vorspannung wurde als äußere Beanspruchung, durch Umlenk- und Ankerkräfte abgebildet, betrachtet.

Nach der erfolgreichen Überprüfung des entwickelten Berechnungsmodells durch die Nachrechnungen zahlreicher experimentellen Untersuchungen wurden eigene numerische Untersuchungen durchgeführt. Die Untersuchungsergebnisse zeigten, dass die statisch unbestimmten Momentenanteile infolge Vorspannung in Abhängigkeit von der in der Bemessung vorgenommenen Momentenumlagerung bis zum rechnerischen Bruchzustand abnahmen. Trotz der Plastifizierungen der stärker beanspruchten Bereiche gingen die statisch unbestimmten Systeme nicht völlig in statisch bestimmte Systeme über. Dabei blieben – allerdings mit abgeminderten Werten – statisch unbestimmte Momentenanteile infolge Vorspannung bestehen. Ebenfalls wurde gezeigt, dass die sich tatsächlich einstellende Momentenumlagerung in den Spannbetondurchlaufträgern vom festgelegten statisch unbestimmten Momentenanteil infolge Vorspannung – d. h. von der gewählten Spanngliedführung – beeinflusst wurden.

## Literaturverzeichnis

- [1] *Deutsches Institut für Normung e.V.:* DIN V ENV 1992 Teil 1-1, Eurocode 2 Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1 Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau (Vornorm, Deutsche Fassung 1991). Berlin: Beuth Verlag, 1992.
- [2] *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton:* Richtlinien zur Anwendung Europäischer Normen im Betonbau: Richtlinie zur Anwendung von DIN V ENV 206 und Richtlinie zur Anwendung von Eurocode 2. Berlin: Beuth Verlag, 1993.
- [3] *Deutsches Institut für Normung e.V.:* DIN 1045-1 - Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion. Berlin: Beuth Verlag, 2001.
- [4] *American Concrete Institute:* Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary (ACI 318-99 and ACI 318R-99). Detroit: ACI, 1999.
- [5] *Deutsches Institut für Normung e.V.:* DIN 4227 Teil 1 - Spannbeton: Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter oder voller Vorspannung. Berlin: Beuth Verlag, 1988.
- [6] *Deutsches Institut für Normung e.V.:* DIN 4227 Teil 2 - Spannbeton: Bauteile mit teilweiser Vorspannung (Vornorm). Berlin: Beuth Verlag, 1984.
- [7] *Deutsches Institut für Normung e.V.:* DIN 4227 Teil 6 - Spannbeton: Bauteile mit Vorspannung ohne Verbund (Vornorm). Berlin: Beuth Verlag, 1982.

- [8] *Deutsches Institut für Normung e.V.*: DIN 1045 - Beton und Stahlbeton: Bemessung und Ausführung. Berlin: Beuth Verlag, 1988.
- [9] *Comite Euro-International du Beton* : CEB-FIP Model Code 1990. London: Thomas Telford, 1993.
- [10] *Deutsches Institut für Normung e.V.*: DIN E EN 10080 -Betonbewehrungsstahl: Schweißgeeigneter gerippter Betonstahl B 500 (Deutsche Fassung 1991). Berlin: Beuth Verlag, 1992.
- [11] *Deutsches Institut für Normung e.V.*: DIN EN 10138 - Spannstähle (Deutsche Fassung 1991). Berlin: Beuth Verlag, 1992.
- [12] *American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO)* : Standard Specifications for Highway Bridges, 13<sup>th</sup> Edition. Washington, D.C. : AASHTO, 1983.
- [13] *Kordina, K. u.a.*: Bemessungshilfsmittel zu Eurocode 2 Teil 1; Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 425, Berlin: Beuth Verlag 1992.
- [14] *Deutsches Institut für Normung e.V.*: DIN 488 Betonstahl. Teil 1 bis 7. Berlin: Beuth Verlag, 1984 & 1986.
- [15] *Wittek, U.*: Nichtlineare Berechnungsmethoden im Stahlbetonbau nach EC2. Der Prüferingenieur, No.8, April 1996, S.10-29.
- [16] *Sulistyo, D.*: PCBEC2 - Programm zur Berechnung und zur Nachweisführung vorgespannter Stahlbetonträger mit nachträglichem Verbund nach DIN V ENV 1992 Teil 1-1 (Eurocode 2 Teil 1). Lehr- und Forschungsgebiet Industrielles Bauen/ Massivbau – Univ.-Prof. Dr.-Ing. B. Kotulla, BUGH Wuppertal, 1994 (unveröffentlicht).

- [17] *Lin, T.Y. and Thornton, K.:* Secondary Moment and Moment Redistribution in Continuous Prestressed Concrete Beams. Journal of the PCI, Vol.17, No.1, Jan.-Feb. 1972, pp.8-20.
- [18] *Mattock, A.H.:* Reader's Comment - Secondary Moment and Moment Redistribution in Continuous Prestressed Concrete Beams, by T.Y.Lin and K. Thornton. Journal of the PCI, Vol.17, No.4, Jul.-Aug. 1972, pp. 86-88.
- [19] *Mattock, A.H., Yamazaki, J., Kattula, B.T.:* Comparative Study of Prestressed Concrete Beams, with and without Bond. ACI Structural Journal, Vol.68, No.2, Feb. 1971, pp.116-125.
- [20] *Leonhardt, F.:* Spannbeton für die Praxis. Berlin u.a.: Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1973.
- [21] *Leonhardt, F.:* Vorlesungen über Massivbau, Fünfter Teil: Spannbeton. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [22] *Levi, F., Mancini, G., Munari, D.:* Hyperstatic Effect of Prestressing Between Serviceability and Ultimate Limit States. International Symposium on Nonlinearity and Continuity of Prestressed Concrete, University of Waterloo, Ontario, 1983.
- [23] *Cohn, M.Z. und Frostig, Y.:* Inelastic Behaviour Continuous Prestressed Concrete Beams. Journal of the Structural Division ASCE, Vol.109, Oct.1983, pp.2292-2309.
- [24] *Cauvin, A.:* Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Continuous Beams and Frames. International Symposium on Nonlinearity and Continuity of Prestressed Concrete, University of Waterloo, Ontario, 1983.

- [25] *Warner, R.F. and Yeo, M.F.:* Ductility Requirements for Partially Prestressed Concrete. Proceedings of the NATO-ARW on Partial Prestressing - From Theory to Practice, Paris, 1984. Dordrecht: Martinus Nijhoff Pub., 1986.
- [26] *Huber, A.:* Zur Frage der Zwangsschnittkräfte aus Vorspannung und deren Einfluss auf die Sicherheit der Tragwerke. Beton- und Stahlbetonbau 78 (1983), H.3, S.69-73.
- [27] *Huber, A.:* Effect of Hyperstatic Prestressing Moments and the Carrying Capacity of Continuous Beams. ACI Structural Journal, Vol.83, No.4, July-August 1986, pp.561-566.
- [28] *Zimmermann, J.:* Biegetragverhalten und Bemessung von Trägern mit Vorspannung ohne Verbund. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 391, Berlin: Beuth Verlag, 1988.
- [29] *Wyche, P.J., Uren, G.J., Reynolds, G.C.:* Interaction between Prestress Secondary Moments, Moment Redistribution, and Ductility - A Treatise on the Australian Concrete Codes. ACI Structural Journal, Vol.89, No.1, Jan.-Feb.1992, pp.57-70.
- [30] *Mattock, A.H.:* Discussion on Interaction between Prestress Secondary Moments, Moment Redistribution, and Ductility - A Treatise on the Australian Concrete Codes. ACI Structural Journal, Vol.89, No.6, Nov.-Dec.1992, pp.741-742.
- [31] *Scholz, H.:* Contribution to Redistribution of Moments in Continuous Reinforced Concrete Beams. ACI Structural Journal, Vol.90, No.2, March-April 1993, pp.150-155.
- [32] *König, G., Maurer, R.:* Versuche zum Einfluß einer Rißbildung auf den

- statisch unbestimmten Momentenanteil aus Vorspannung. Beton- und Stahlbetonbau 88 (1993), H.12, S.338-342.
- [33] *Cohn, M.Z.*: Continuity in Prestressed Concrete. Proceedings of the NATO-ARW on Partial Prestressing - From Theory to Practice, Paris, 1984. Dordrecht: Martinus Nijhoff Pub., 1986.
- [34] *Wölfel, E.*: Die Behandlung der Vorspannung mit Teilsicherheitsbeiwerten. Beton- und Stahlbetonbau 85 (1990), H.8, S.199-205 und H.9, S.238-241.
- [35] *Graubner, C.A.*: Schnittgrößenermittlung in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze; Baustoffbedingte Abweichungen von elastizitätstheoretischen und plastizitätstheoretischen Lösungen. Dissertation an der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München, 1989.
- [36] *Lin, T.Y.*: Strength of Continuous Prestressed Concrete Beams under Static and Repeated Loads. Journal of the American Concrete Institute, Vol.26, No.10, June 1955, pp.1037-1059.
- [37] *Guyon, Y.*: The Strength of Statically Indeterminate Prestressed Concrete Structures. Symposium on the Strength of Concrete Structures, Session C, Paper No.2, London, 1955, pp.305-376
- [38] *Macchi, G.*: Moment Redistribution Beyond Elastic Limit and at Failure in Prestressed Concrete Beams. Journal of the PCI, Vol.2, No.2, Jun. 1957, pp.8-26.
- [39] *Mallick, S.K.*: Redistribution of Moments in two Span Prestressed Concrete Beams. Magazine of Concrete Research, Vol.14, No.42, Nov.1962, pp.171-183.

- [40] *Mallick, S.K. and Sastry, M.K.L.N.*: Redistribution of Moments in Prestressed Concrete Continuous Beams. Magazine of Concrete Research, Vol.18, No.57, Nov.1966, pp.207-220.
- [41] *Taerwe, L., Thomas, P., De Pauw, P.*: Experimental Study of the Non-linear Behaviour of Continuous Posttensioned Concrete Beams. CEB Bulletin d'Information No.229: New Developments in Non-linear Analysis Methods, August 1995, pp.75-94.
- [42] *Moucessian, A. and Campbell, T.I.*: Prediction of the Load Capacity of two-span Continuous Prestressed Concrete Beams. Journal of the PCI, Vol.33, No.2, March/April. 1988, pp.130-151.
- [43] *Priestley, M.J.N. and Park, R.*: Moment Redistribution in Continuous Prestressed Concrete Beams. Magazine of Concrete Research, Vol.24, No.80, Sep.1972, pp.157-166.
- [44] *Qian, L.*: Linear Analysis with Limited Redistribution. Darmstadt Concrete: Annual Journal on Concrete and Concrete Structures, Vol.7, 1992, pp.129-140.
- [45] *Mo, Y.L.*: Zur Ermittlung der Momentenumlagerung in Spannbetontragwerken. Beton- und Stahlbetonbau 88 (1993), H.10, S.262-266.
- [46] *König, G., Tue, N., Pommerening D., Qian, L.*: Ductility and Moment Redistribution in Prestressed Concrete Structures. Darmstadt Concrete: Annual Journal on Concrete and Concrete Structures, Vol.8, 1993, pp.201-214.
- [47] *Litzner, H.-U.*: Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2 - Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227. Beton Kalender 1996 Teil I, S.567-776. Berlin: Ernst & Sohn, 1996.

- [48] *Macchi, G.*: Ductility condition for simplified design without check of compatibility. CEB - Bulletin d'Information No.105, February 1976, pp.115-142.
- [49] *Grasser, E., Kupfer, H., Pratsch, G., Feix, J.*: Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen nach EC2 für Biegung, Längskraft, Querkraft und Torsion. Beton Kalender 1996 Teil I, S.341-498. Berlin: Ernst & Sohn, 1996.
- [50] *Morice, P.B. and Lewis, H.E.*: Prestressed Concrete Beams and Frames. Journal of the Structural Division ASCE, Vol.82, Sep.1956, pp.1-29.
- [51] *Campbell, T.I., Moucessian, A., Bhatia, S.*: Nonlinear Behaviour of Continuous Prestressed Concrete Beams. Proceedings of the NATO-ARW on Partial Prestressing - From Theory to Practice, Paris, 1984. Dordrecht: Martinus Nijhoff Pub., 1986.
- [52] *Tichy, M. and Rakosnik, J.*: Kräfteumlagerung in Stahlbetontragwerken. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1973.
- [53] *Somes, N.F.*: Moment Rotation Characteristic of Prestressed Concrete Members Stage 1: Rectangular Sections. Technical Report TRA/398, Cement and Concrete Association, 1966.
- [54] *Bathia, S.*: Continuous Prestressed Concrete Beams in the Inelastic Range. Dissertation by Department of Civil Engineering, Queen's University of Kingston, Canada, 1984.
- [55] *Kodur, V.K.R.*: Redistribution of moment and influence of secondary moment in continuous prestressed concrete beams. Dissertation by Queen's University of Kingston, Canada, 1992.



- [56] *Rothert, H., Gensichen, V.:* Nichtlineare Stabstatik, Baustatische Methoden, Grundlagen und Anwendungen. Berlin: Springer Verlag, 1987.
- [57] *Szilard, R. et al.:* 1. Zwischenbericht zum Forschungsvorhaben: Ein Energieausgleichverfahren zur Lösung von geometrisch nichtlinearen Stabwerksproblemen in der Ebene. Dortmund, August 1984.
- [58] *Cook, R.D.:* Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Second Edition. New York: John Wiley & Sons, 1981.
- [59] *Przemieniecki, J.S.:* Theory of Matrix Structural Analysis. New York: McGraw-Hill, Inc., 1968.
- [60] *Szilard, R.:* Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik - Band 1: Stabwerke. Berlin: Ernst & Sohn Verlag, 1982.
- [61] *Hand, F.R., Pecknold, D.A., Schnobrich, W.C.:* A Layered Finite Element Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells. Civil Engineering Studies, Structural Research Series No.389. University of Illinois, Urbana, 1972.
- [62] *Van Gruenen, J. and Scordelis, A.C.:* Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Slabs. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.109, No.7, 1983, pp.1742-1760.
- [63] *Chan, E.C.:* Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Shell with Edge Beams. Dissertation by University of California, Berkeley, 1982.
- [64] *Kristjansson, R.:* Physikalisch und geometrisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten mit Hilfe Finiter Elemente. Dissertation, TH Darmstadt, 1977.

- [65] *Kang, Y.J. and Scordelis, A.C.:* Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Frames. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No.2, 1980, S.445-463.
- [66] *Eibl, J. und Retzepis, I.:* Nichtlineare Berechnungen der Schnittkraftumlagerungen und Zwangsbeanspruchungen von Stahlbetontragwerken. Beton und Stahlbetonbau, Vol. 90, Heft 1, 1995, S.1-5 und Vol.90, Heft 2, 1995, S.33-37.
- [67] *Spanke, H.:* Die Momentenentwicklung und die mögliche Momentenumlagerung in Stahlbeton-Tragwerken. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4, Nr.79, Düsseldorf: VDI-Verlag, 1987.
- [68] *Hufendiek, H.-W.:* Ein einheitlicher Algorithmus zur Berechnung geometrisch und physikalisch nicht linearer ebener Stabtragwerke aus Stahl, Stahlbeton und Verbundwerkstoffen. Institut für Konstruktion-Ingenieurbaubau RUB, Mitteilung Nr. 84-6, 1984.
- [69] *Weiler, G.:* Beitrag zur Berechnung ebener Stabwerke aus Stahlbeton und Spannbeton mit nichtlinearem Tragverhalten. Dissertation, RWTH Aachen, 1989.
- [70] *Timm, R.:* Ein geometrisch und physikalisch nichtlineares Rechenmodell zur optimalen Biegebemessung ebener Stahlbetonrahmen. Dissertation, TU Braunschweig, 1982.
- [71] *Blaauwendraad, J.:* Realistic Analysis of Reinforced Concrete Framed Structures. Heron, Vol.18, No.4, 1972, pp.3-31.
- [72] *Backes, W.:* Ein Beitrag zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen Berechnung von Stabtragwerken unter besonderer Berücksichtigung räumlicher Stabilitätsprobleme des Massivbaues. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1994.

- [73] *Vismann, U.*: Zuverlässigkeitstheoretische Verifikation von Bemessungskriterien im Stahlbetonbau. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau der TU München, No.4/95, München, 1995.
- [74] *Knothe, K., Wessels, H.*: Finite Elemente, 2.Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1992.
- [75] *Cheung, Y.K. and Yeo, M.F.* : A Practical Introduction to Finite Element Analysis. Melbourne: Pitman Publishing Ltd., 1979
- [76] *Hilsdorf, H.K.*: Beton. Beton Kalender 1996 Teil I, Berlin: Ernst & Sohn, 1996, S.1-147.
- [77] *Saenz, L.P.*: Equation for Stress-Strain of Concrete. ACI Journal, Vol.61, 1964, pp.1227-1239.
- [78] *Dilger, W.*: Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluss auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 179, Berlin: W.Ernst & Sohn, 1966.
- [79] *Popovics, S.*: Numerical Approach to the Complete Stress-Strain of Concrete. Cement and Concrete Research. Vol. 3, 1973, pp.583-599.
- [80] *Grzeschkowitz, R.*: Zum Trag- und Verformungsverhalten schlanker Stahlbetonstützen unter besonderer Berücksichtigung der schiefen Biegung. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1988.
- [81] *Wischers, E.*: Aufnahme und Auswirkungen von Druckbeanspruchungen auf Beton. Betontechnische Berichte Nr.19 (1978), Düsseldorf : Beton-Verlag, 1979.

- [82] *König, G. und Grimm, R.*: Hochleistungsbeton. Beton Kalender 1996 Teil II, Berlin: Ernst & Sohn, 1996, S.441-546.
- [83] *Carrasquillo, R..L., Nilson, A.H. and Slate,F.O.*: Properties of High Strength Concrete Subject to Short Term Loads. Journal of ACI, Vol.78, No.3, May-June 1981, pp.171-178
- [84] *Curbach,M.* : Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1987.
- [85] *Petersson,P.-E.*: Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials. Report TVBM-1006, Lund, Sweden, 1981.
- [86] *Duda, H.*: Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 419, Berlin: Beuth Verlag, 1991.
- [87] *Brameshuber,W.* : Bruchmechanische Eigenschaften von jungem Beton. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1988.
- [88] *Hilsdorf, H.K. und Brameshuber, W.*: Code-Type Formulation of Fracture Mechanics Concepts for Concrete. International Journal of Fracture, Vol.51, Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [89] *Kollegger,J.* : Ein Materialmodell für die Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken. Dissertation, Universität GH Kassel, 1988.
- [90] *Gupta, A.K. and Maestrini, S.R.*: Tension-Stiffness Model for Reinforced Concrete Bars. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.116, No.3, 1990, pp.769-790.

- [91] *Massicote, B.; Elwi, A.E.; MacGregor, J.G.*: Tension-Stiffening Model for Planar Reinforced Concrete Members. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.116, No.11, 1990, pp.3039-3058.
- [92] *Lin, H.* : Nichtlineare bruchmechanische Untersuchungen an Beton und Stahlbeton. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 67, Universität GH Essen, 1996.
- [93] *Rostásy, F.S.; Koch, R. und Leonhardt, F.*: Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden aus Stahlleichtbeton. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 267, Berlin: W.Ernst & Sohn, 1976.
- [94] *Schober, H.* : Ein Modell zur Berechnung des Verbundes und der Risse im Stahl- und Spannbeton. Dissertation, Universität Stuttgart, 1984.
- [95] *Kreller, H.*: Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last- und Zwangeinwirkung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 409, Berlin: Beuth Verlag, 1990.
- [96] *Balakrishnan, S. and Murray, D.W.*: Concrete Constitutive Model for NLFE Analysis of Structures. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.114, No.7, 1988, pp.1449-1466.
- [97] *Henning, W.* : Zwangsrisssbildung und Bewehrung von Stahlbetonwänden auf steifen Unterbauten. Dissertation, TH Braunschweig, 1987.
- [98] *Schießl, P.*: Grundlagen der Neuregelung zur Beschränkung der Rißbreite. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 400, Berlin: Beuth Verlag, 1994.
- [99] *Steidle, P.*: Teilweise vorgespannte Stahlbeton-Stabtragwerke unter Last- und Zwangsbeanspruchungen. Dissertation, Universität Stuttgart, 1988.

- [100] *Cooley, E.H.*: Friction in post-tensioned prestressing systems. Research Report I. Cement and Concrete Association, London, 1953.
- [101] *Cooley, E.H.*: Estimation of friction in prestressed concrete. Cement and Concrete Association, London, 1954.
- [102] *Leonhardt, F. und Mönnig, E.*: Reibung von Vorspanngliedern für Spannbeton. Beton und Stahlbetonbau. Vol.47, Heft 2, 1952, S.42-45.
- [103] *Völter, O.*: Die Reibung im Spannbeton. Beton und Stahlbetonbau. Vol.49, Heft 6, 1954, S.138-142 und Heft 7, S.156-165.
- [104] *Wittfoht, H.*: Reibungsversuche mit Vorspannbündeln PZ an Probekörpern mit starker Krümmung. Bautechnik. Vol.35, Heft 8, 1955, S.267-272.
- [105] *Cordes, H., Schütt, K., Trost, H.*: Großmodellversuche zur Spanngliedreibung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 325, Berlin: Ernst & Sohn, 1981.
- [106] *Walter, R., Utescher, G., Schreck, D.*: Vorausbestimmung der Spannkraftverluste infolge Dehnungsbehinderung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 282, Berlin: Ernst & Sohn, 1977.
- [107] *Zerna, W. und Stangenberg, F.*: Spannbetonträger, Theorie und Berechnungsgrundlagen. Berlin u.a.: Springer Verlag, 1987.
- [108] *Kotulla, B.*: Vorlesungsschrift Spannbeton. Fachbereich Bauingenieurwesen, Bergische Universität GH Wuppertal.
- [109] *Bieger, K.W.; Lierse, J.; Roth, J.*: Stahlbeton- und Spannbetontragwerke: Berechnung, Bemessung und Konstruktion. Berlin u.a.: Springer-Verlag, 1993.

- [110] *Nawy, E.G.*: Prestressed Concrete 2<sup>nd</sup> Ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [111] *Nilson, A.H.*: Design of Prestressed Concrete Structures. Toronto: John Wiley & Sons, 1987.
- [112] *Post-Tensioning Institut* : Post-Tensioning Manual 5<sup>th</sup> ed. Phoenix: PTI, 1990.
- [113] *PCI Committee on Prestress Losses*: Recommendations for Estimating Prestress Losses. Journal of the PCI, Vol.20, No.4, July/August 1975, pp.43-75.
- [114] *Ramm, E.*: Strategies for Tracing the Nonlinear Response near Limit Points. In: Proceedings of the Europe-U.S. Workshop on the Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (Editors: Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K.-J.). Berlin: Springer Verlag, 1981, pp.63-89.
- [115] *Crisfield, M.A.*: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials. Chichester, England: John Wiley & Sons, 1991.
- [116] *Kmiecik, M., Pfau, H., Wiebeck, E., Wizmur, M.*: Nichtlineare Berechnung ebener Flächentragwerke. Berlin; München: Verlag für Bauwesen, 1993.
- [117] *de Borst, R., Meyer, C.*: Numerische Probleme bei nichtlinearem Tragwerksverhalten. In: Der Bauingenieur; Rechnerorientierte Baumechanik (Hrsg.: Mehlhorn, G.). Berlin: Ernst & Sohn, 1996.
- [118] *Shoup, T.E.*: Numerical Methods for the Personal Computer. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1983.
- [119] *Ramm, E.*: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.

- Bericht Nr. 76-2 aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1976.
- [120] *Szilard, R.:* Energy Balancing Method for Large Displacement Analysis of Structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 34, 1982, pp.801-818.
- [121] *Dennis, J.E., Jr.:* A Brief Survey of Convergence Results for Quasi-Newton Methods. *SIAM-AMS Proceedings*, Vol.9, 1976, pp.185-200.
- [122] *Bathe, K.-J.:* *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1996.
- [123] *Matthies, H. and Strang, G.:* The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.14, 1979, pp.1613-1626.
- [124] *Bathe, K.-J. and Cimento, A.P.:* Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, 1980, pp.59-85.
- [125] *Priestley, M.J.N., Park, R. And Lu, F.P.S.:* Moment-Curvature Relationships for Prestressed Concrete in Constant Moment Zones. *Magazine of Concrete Research*, Vol.23, No.75/76, Jun.-Sep.1971, pp.69-78.



## **Anhang A**

Vergleich der Ergebnisse der ausgewählten experimentellen Versuchen und numerischen Untersuchungen mit denen aus den Nachrechnungen.

### **A.1 Experimentelle Versuche**

- A.1.1 Lin, 1955 [36]
- A.1.2 Mallick, 1962 [39]
- A.1.3 Mallick und Sastry, 1966 [40]
- A.1.4 Priestley et al., 1971 [125]
- A.1.5 Priestley und Park, 1972 [43]
- A.1.6 Mattock et al., 1972 [19]
- A.1.7 Taerwe et al., 1995 [41]

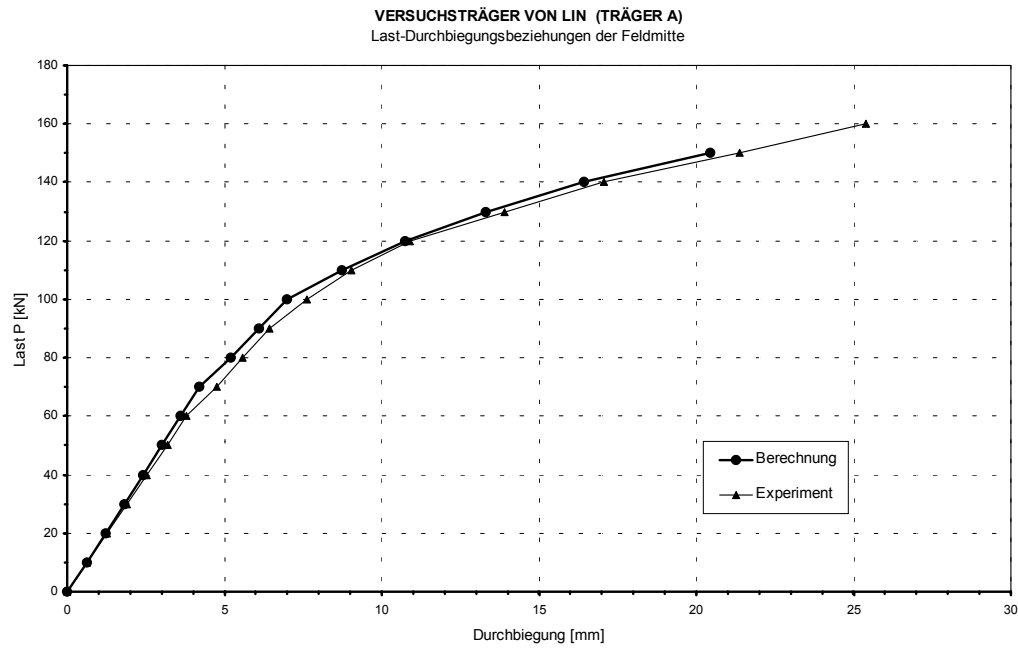
### **A.2 Numerische Untersuchungen**

- A.2.1 Priestley et al., 1971 [125]
- A.2.2 Levi et al., 1983 [22]
- A.2.3 Moucessian und Campbell, 1988 [42]

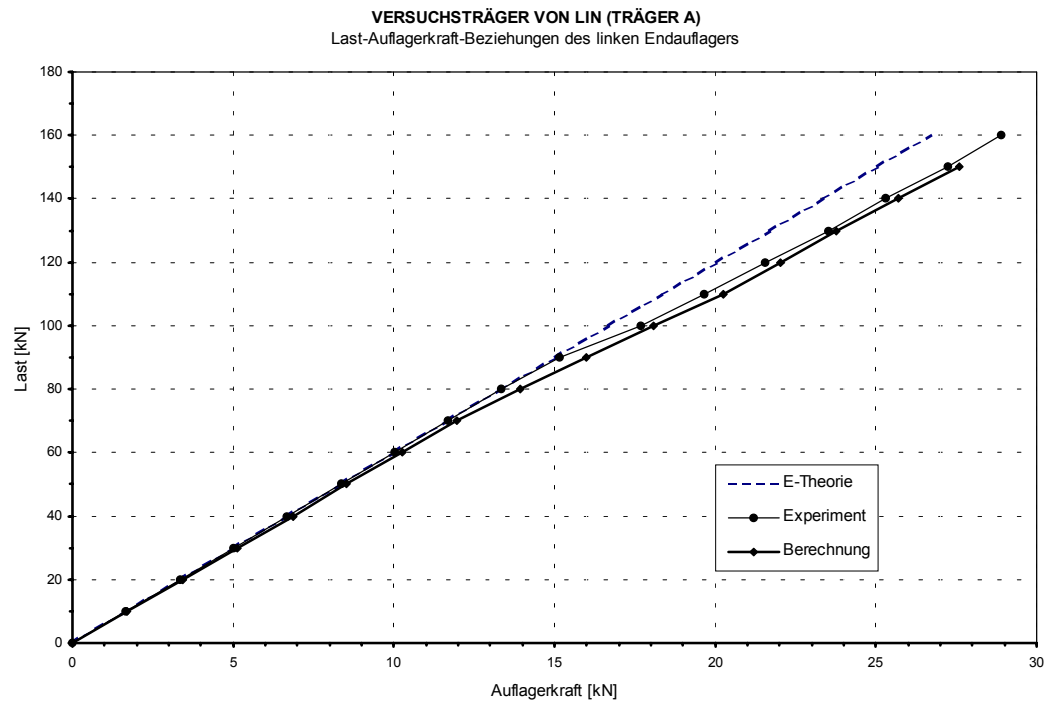
### A.1.1 Lin, 1955 [36] - Träger A

1. Wesentliche Versuchsdaten			
<p style="text-align: center;">Längeneinheit in cm</p>			
Beton:	$f_{cm} = 37 \text{ N/mm}^2$ $E_{cm} = 31740 \text{ N/mm}^2$	$f_{ctm} = 6,5 \text{ N/mm}^2$	
Spannstahl:	32 $\varnothing 5 \text{ mm}$ $f_{p,k} = 1800 \text{ N/mm}^2$ $E_p = 204000 \text{ N/mm}^2$	$A_p = 6,28 \text{ cm}^2$ $f_{p0,2,k} = 1604 \text{ N/mm}^2$	
Spannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Konkordante Spanngliedführung. Vorspannkraft: $P_o = 665 \text{ kN}$ (inkl. 6% Überspannung). Vorspannen von beiden Enden des Trägers. Zeitpunkt des Vorspannens: $t_o = 14 \text{ Tage}$ Reibungsbeiwerte: $\mu = 0,3$ Ungewollter Umlenkwinkel: $k = 0,1^\circ/\text{m}$ Keilschlupf: $\Delta l_{sl} = 2,5 \text{ mm}$		
Versuchsdurchführung:	28 Tage nach dem Betonieren.		
Bemerkungen:	Keine Betonstahlbewehrung. Bügelbewehrung in den Einleitungsbereichen der Vorspannkkräfte.		
2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung			
Ergebnisse	Versuch	Berechnung	Abweichung
Risslast bei 1. Biegerisse [kN]:			
Mittelaufleger	67,2	70	+ 4,17 %
Feldmitte	109,9	100	-9,01 %
Bruchlast [kN]	158	150	-5,06 %

Last-Durchbiegungsbeziehungen der Feldmitte:

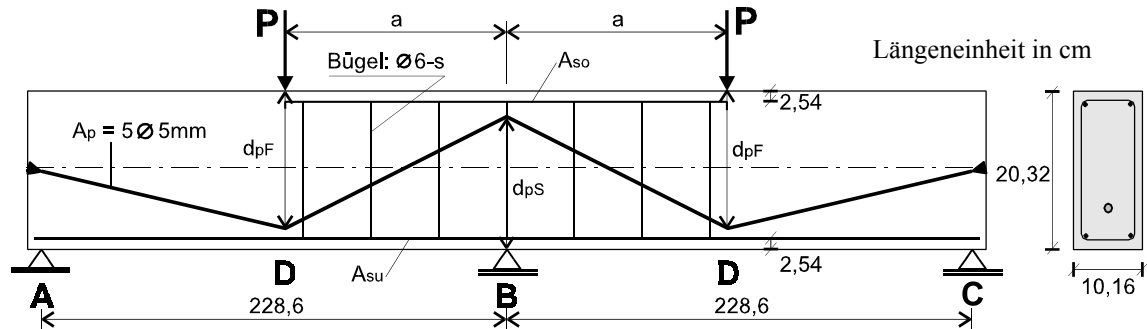


Last-Auflagerkraftbeziehungen des linken Endauflagers:



### A.1.2 Mallick, 1962 [ 39] - Rechteckquerschnitt

#### 1. Wesentliche Versuchsdaten



Träger	a [cm]	$f_{cu}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$d_{pF}$ [cm]	$d_{pS}$ [cm]	$A_{su}$	$A_{so}$	s [cm]
P4	61,7	38,8	12,3	14,3	---	2 dia. 6	15
P8	61,7	38,7	11,7	13,7	2 dia. 6	2 dia. 6	15
P12	61,7	28,4	9,7	9,1	---	---	10
P14	61,7	30,0	12,7	15,9	---	---	---
P2	84,6	30,0	14,6	15,9	---	---	---
P7	84,6	34,3	11,9	13,0	2 dia. 6	2 dia. 6	---
P9	84,6	28,2	13,5	16,0	---	2 dia. 10	---
P10	84,6	23,5	13,2	15,0	2 dia. 13	---	---
P1	114,3	29,7	14,6	15,2	---	---	---
P5	144,0	31,4	14,9	14,6	---	2 dia. 6	---
P6	166,9	31,8	14,9	13,5	---	---	---

Beton:

s. Tabelle ( $f_{cu}$ )  
Größtkorn = 18 mm.

Betonstahl:

 $f_y = 317 \text{ N/mm}^2$   
 $E_s = 211000 \text{ N/mm}^2$ 

Spannstahl:

 $f_{pu} = 1558 \text{ N/mm}^2$   $E_s = 207000 \text{ N/mm}^2$   
5 Ø 5 mm  $A_p = 0,98 \text{ cm}^2$ 

Spannverfahren:

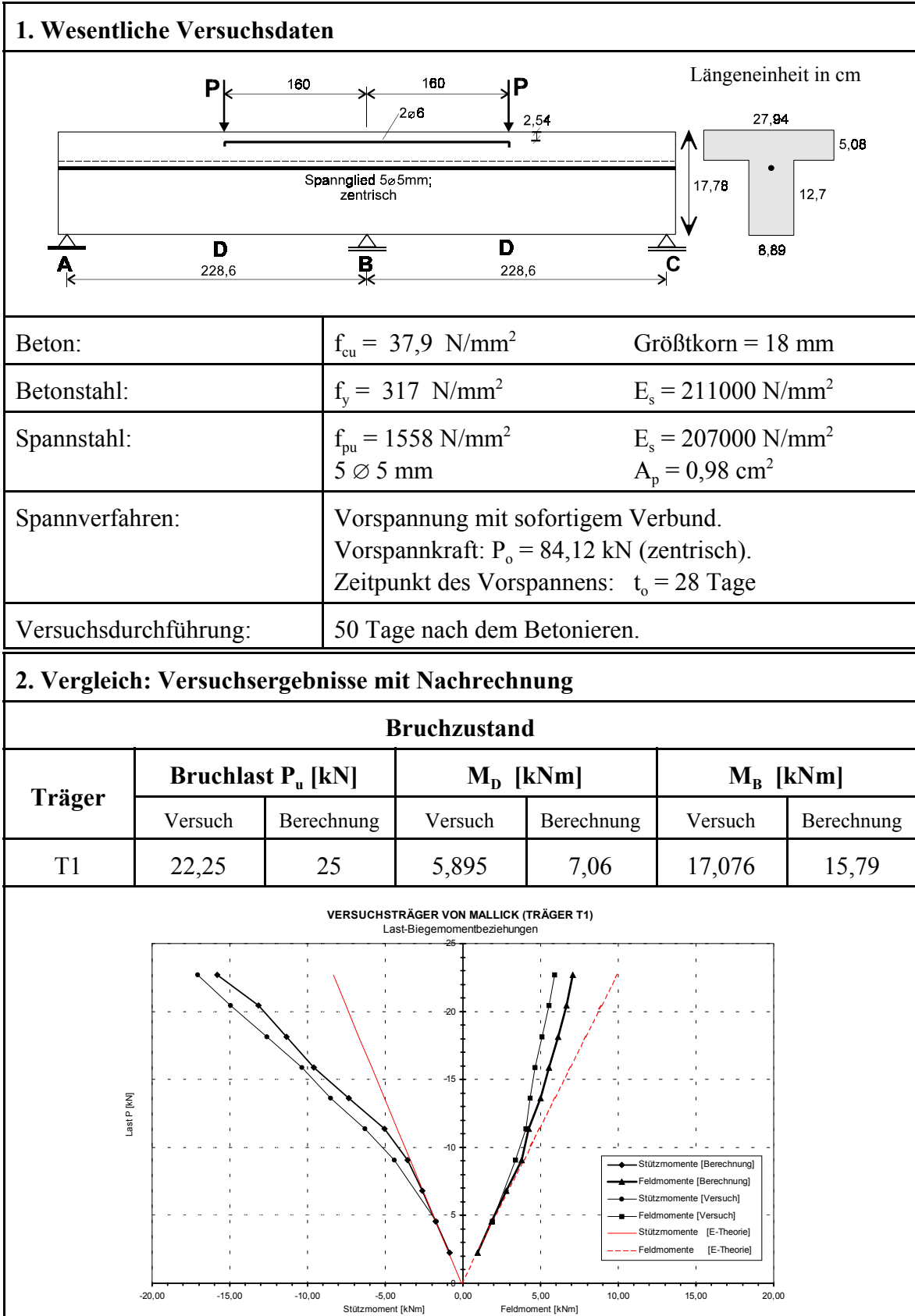
Vorspannung mit sofortigem Verbund.  
Vorspannkraft:  $P_o = 84,12 \text{ kN}$ .  
Zeitpunkt des Vorspannens:  $t_o = 28 \text{ Tage}$ 

Versuchsdurchführung:

50 Tage nach dem Betonieren.

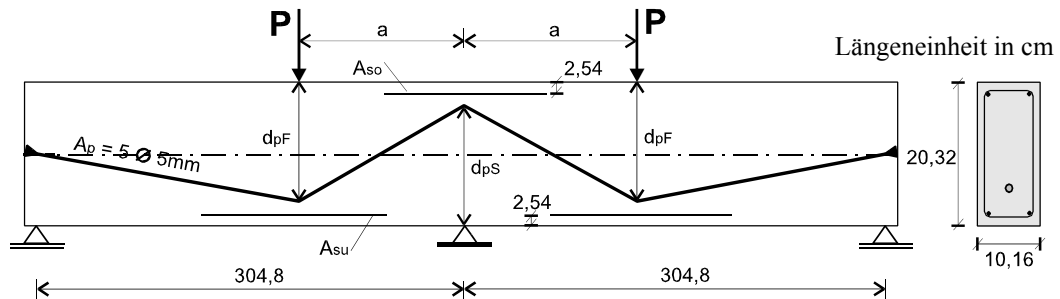
<b>2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung</b>									
<b>Bruchzustand</b>									
<b>Träger</b>	<b>Bruchlast <math>P_u</math> [kN]</b>			<b><math>M_D</math> [kNm]</b>			<b><math>M_B</math> [kNm]</b>		
	Versuch	Berechnung	Abweichung [%]	Versuch	Berechnung	Abweichung [%]	Versuch	Berechnung	Abweichung [%]
P1	45,40	47,50	+ 4,6	17,118	15,88	- 7,2	18,321	20,46	+ 11,7
P2	54,48	60,00	+ 10,1	16,606	16,22	- 2,3	19,899	22,32	+ 12,2
P4	54,48	50,00	- 8,2	12,274	14,27	+ 16,2	16,868	18,74	+ 11,1
P5	44,72	40,00	- 10,6	17,325	19,04	+ 9,9	18,238	20,45	+ 12,1
P6	46,31	45,00	- 2,8	17,339	15,93	- 8,1	13,547	11,69	- 13,7
P7	52,89	50,00	- 5,5	16,606	18,11	+ 9,1	18,640	21,20	+ 13,7
P9	54,03	55,00	+ 1,8	13,838	11,83	- 14,5	23,995	25,28	+ 5,3
P12	35,41	40,00	+ 12,9	9,258	8,53	- 7,8	9,105	8,21	- 9,8
P14	74,91	75,00	+ 0,1	17,989	17,16	- 4,6	21,532	19,98	- 7,2

### A.1.2 Mallick, 1962 [39] - Plattenbalkenquerschnitt



### A.1.3 Mallick und Sastry, 1966 [40] - 2 Feld-Träger

#### 1. Wesentliche Versuchsdaten



Träger	a [cm]	$f_{cu}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$d_{pF}$ [cm]	$d_{pS}$ [cm]	$A_{su}$	$A_{so}$
2G-1	121,9	37,04	8,89	10,67	---	---
2G-2	106,7	41,02	12,70	14,48	2 $\varnothing$ 9,5	---
2G-3	106,7	42,86	9,78	11,43	---	---
2G-4	99,1	37,04	10,16	12,57	---	---
2G-5	91,4	42,24	9,40	11,43	---	---

Beton: s. Tabelle ( $f_{cu}$ ) Größtkorn = 18 mm.

Betonstahl:  $f_y = 317$  N/mm<sup>2</sup>  $E_s = 211000$  N/mm<sup>2</sup>

Spannstahl:  $f_{pu} = 1558$  N/mm<sup>2</sup>  $E_s = 207000$  N/mm<sup>2</sup>  
5  $\varnothing$  5 mm  $A_p = 0,98$  cm<sup>2</sup>

Spannverfahren: Vorspannung mit sofortigem Verbund.  
Vorspannkraft:  $P_o = 84,12$  kN.

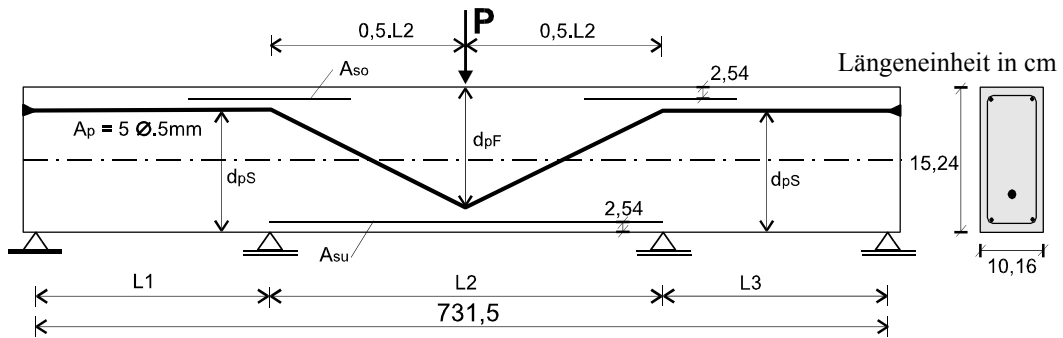
#### 2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung

Bruchzustand (Bruchlast und Biegemomente)

Träger	Bruchlast $P_u$ [kN]			$M_{\text{unter der Last } P}$ [kNm]			$M_{\text{Mittelaufleger}}$ [kNm]		
	Versuch	Berechnung	Abweichung [%]	Versuch	Berechnung	Abweichung [%]	Versuch	Berechnung	Abweichung [%]
2G-1	22,47	25,00	+ 11,3	9,37	11,92	+ 27,2	12,45	15,42	+ 23,9
2G-2	46,99	45,00	- 4,2	21,03	24,19	+ 15,0	18,96	21,00	+ 10,6
2G-3	30,19	35,00	+ 15,9	11,82	13,40	+ 13,4	14,67	15,26	+ 4,0
2G-4	37,91	40,00	+ 5,5	13,22	12,87	- 2,6	18,40	19,07	+ 3,6
2G-5	32,23	30,00	- 6,9	11,06	12,76	+ 15,4	14,47	15,97	+ 10,4

### A.1.3 Mallick und Sastry, 1966 [40] - 3 Feld-Träger

#### 1. Wesentliche Versuchsdaten



Träger	$f_{cu}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$d_{pF}$ [cm]	$d_{pS}$ [cm]	$A_{su}$	$A_{so}$	L1 [cm]	L2 [cm]
3A-1	39,79	10,92	10,92	---	---	274,32	182,88
3A-2	24,49	6,35	8,89	---	---	274,32	182,88
3A-3	45,92	12,19	12,19	2 dia. 9,5	---	274,32	182,88
3A-4	24,49	7,62	7,62	---	---	274,32	182,88
3B-2	33,67	7,62	7,62	---	---	259,08	213,36
3B-3	29,39	10,16	10,16	2 dia. 9,5	---	259,08	213,36
3B-4	24,49	7,87	7,87	---	---	259,08	213,36

Beton:	s. Tabelle ( $f_{cu}$ )	Größtkorn = 18 mm
Betonstahl:	$f_y = 317$ N/mm <sup>2</sup>	$E_s = 211000$ N/mm <sup>2</sup>
Spannstahl:	$f_{pu} = 1558$ N/mm <sup>2</sup> 5 Ø 5 mm	$E_s = 207000$ N/mm <sup>2</sup> $A_p = 0,98$ cm <sup>2</sup>
Spannverfahren:	Vorspannung mit sofortigem Verbund, $P_o = 84,12$ kN.	

#### 2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung

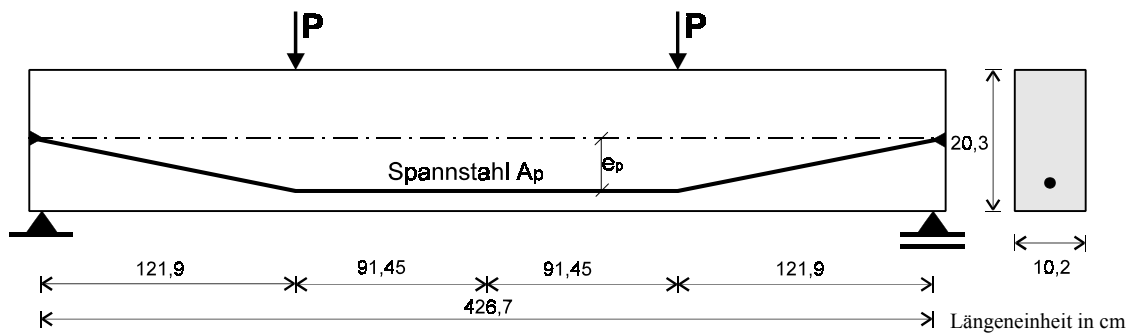
##### Bruchzustand (Bruchlast und Biegemomente)

Träger	Bruchlast $P_u$ [kN]			$M_{\text{unter der Last } P}$ [kNm]			$M_{\text{innere Auflager}}$ [kNm]		
	Versuch	Berechnung	Abweichung	Versuch	Berechnung	Abweichung	Versuch	Berechnung	Abweichung
3A-1	59,93	60	+ 0,1 %	14,45	13,82	- 4,4 %	13,28	13,00	- 2,1 %
3A-2	25,65	24	- 6,4 %	5,40	6,07	+ 12,4 %	7,08	7,87	+ 11,2 %
3A-3	84,22	84	- 0,3 %	22,93	25,00	+ 9,0 %	15,66	13,73	- 12,3 %
3A-4	15,89	17,5	+ 10,1 %	6,48	5,63	- 13,1 %	6,09	7,02	+ 15,3 %
3B-2	26,01	27,5	+ 5,7 %	7,65	8,24	+ 7,7 %	6,61	7,57	+ 14,5 %
3B-3	45,85	50	+ 9,1 %	14,46	15,22	+ 5,3 %	10,24	12,74	+ 24,4 %
3B-4	21,25	22,5	+ 5,9 %	8,47	8,11	- 4,3 %	7,98	9,62	+ 20,6 %



## A.1.4 Priestley et al., 1971 [125]

## 1. Wesentliche Versuchsdaten



Träger	Spannstahl	$A_p$ [mm <sup>2</sup> ]	Spannkraft [kN]	$e_p$ [cm]	$f_{cu}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_t$ [N/mm <sup>2</sup> ]
1	2 $\varnothing$ 7	77,2	64,153	0	52,8	4,31
2	4 $\varnothing$ 5	81,1	63,745	0	54,9	3,58
3	2 $\varnothing$ 7	77,2	50,566	41	52,3	3,64
4	4 $\varnothing$ 5	81,1	50,201	42	48,7	4,26
5	4 $\varnothing$ 7	154,3	127,606	0	52,4	4,15
6	4 $\varnothing$ 5	81,1	76,234	0	54,9	4,65

Beton:

s. Tabelle ( $f_{cu}$ ,  $f_t$ )  
Größtkorn = 10 mm

Spannstahl:

s. Tabelle (Anzahl,  $\varnothing$ ,  $A_p$ ,  $P_o$ )  
 $E_p = 200000$  N/mm<sup>2</sup>  
 $f_{p,k} = 1750$  N/mm<sup>2</sup> (bei  $\varnothing$  5 mm)  
 $f_{p,k} = 1700$  N/mm<sup>2</sup> (bei  $\varnothing$  7 mm)

Vorspannverfahren:

Vorspannung mit nachträglichem Verbund.

Bemerkungen:

Vorspannen: 7 Tage nach dem Betonieren.  
Untersuchung: 28 Tage nach dem Betonieren.

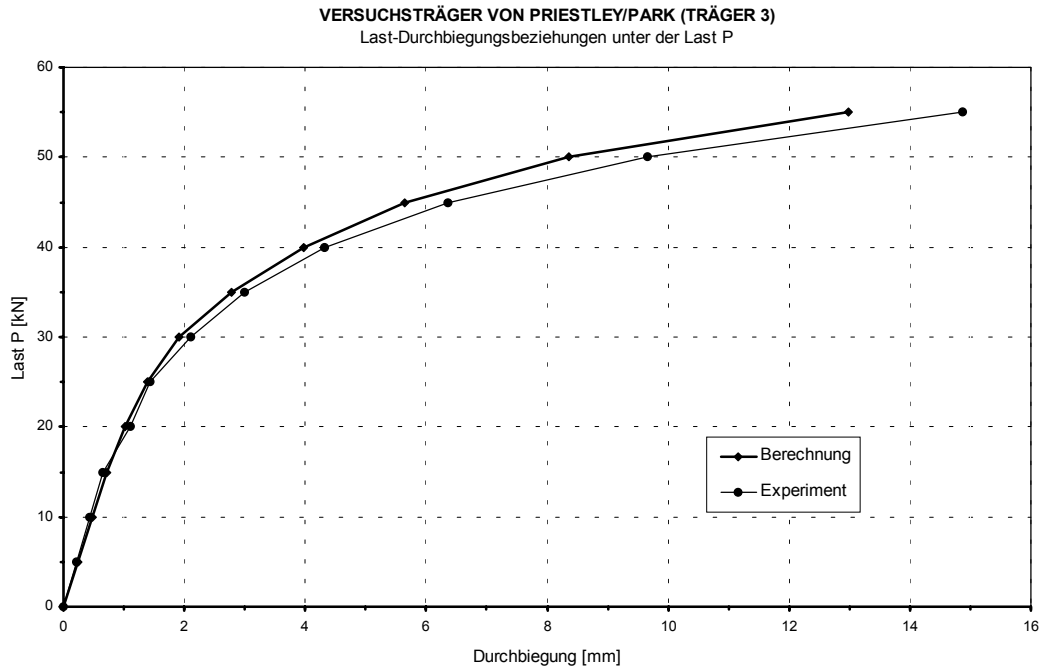
## 2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung

Träger	Biegemomente in der Feldmitte im Bruchzustand [kNm]		
	Versuch	Berechnung	Abweichung
1	10,50	11,649	+ 10,94 %
2	11,57	11,226	- 2,97 %
3	13,67	15,858	+ 16,01 %
4	17,52	16,911	- 3,48 %
5	14,25	16,327	+ 14,58 %
6	11,61	10,024	- 13,66 %

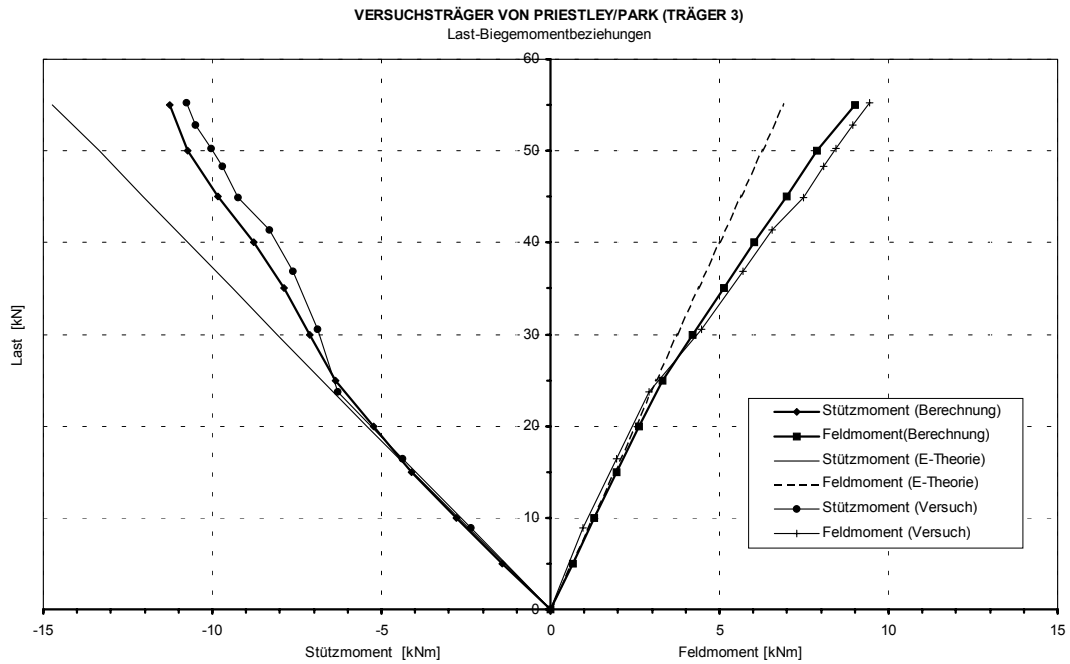
### A.1.5 Priestley und Park, 1972 [43]

1. Wesentliche Versuchsdaten			
<p style="text-align: center;">Längeneinheit in cm</p>			
Beton:	$f_{cm} = 43 \text{ N/mm}^2$ $E_{cm} = 33280 \text{ N/mm}^2$	$f_{ctm} = 4,86 \text{ N/mm}^2$	
Betonstahl:	$f_{tk} = 398 \text{ N/mm}^2$ $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$	$f_{yk} = 380 \text{ N/mm}^2$	
Spannstahl:	2 $\varnothing 7 \text{ mm}$ $f_{p,k} = 1700 \text{ N/mm}^2$ $E_p = 200000 \text{ N/mm}^2$	$A_p = 0,77 \text{ cm}^2$ $f_{p0,1,k} = 1550 \text{ N/mm}^2$	
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit sofortigem Verbund. Lineare Spanngliedführung. Umlenkstelle unter den Lasten und auf dem Mittelaufleger. Vorspannkraft: $P_{m,0} = 68,8 \text{ kN}$		
Bemerkungen:	Längsbewehrung: 4 $\varnothing 6,35 \text{ mm}$ Bügelbewehrung: $\varnothing 6,35 \text{ mm} - 10,2 \text{ cm}$		
2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung			
Ergebnisse	Versuch	Berechnung	Abweichung
Bruchlast [kN]	55,4	55	- 0,72 %
Risslast bei 1. Biegerisse [kN]:			
Mittelaufleger	10,76	11,27	- 4,74 %
Feldmitte	9,43	9,02	- 4,35 %

Last-Durchbiegungsbeziehungen unter der Last P:



Last-Biegemomentbeziehungen:



### A.1.6 Mattock et al., 1972 [19] - Balken RB1

1. Wesentliche Versuchsdaten			
Beton:	$f_{cm} = 28,15$ N/mm <sup>2</sup>	$E_{cm} = 28900$ N/mm <sup>2</sup>	
	$f_{ck} = 20$ N/mm <sup>2</sup>		
Betonstahl:	$f_{tk} = 404$ N/mm <sup>2</sup>	$f_{yk} = 385$ N/mm <sup>2</sup>	
	$E_s = 210000$ N/mm <sup>2</sup>		
Spannstahl:	2 $\varnothing$ 12,7 mm	$A_p = 1,97$ cm <sup>2</sup>	
	$f_{pk} = 1970$ N/mm <sup>2</sup>	$E_p = 195000$ N/mm <sup>2</sup>	
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Hüllrohr: $\varnothing$ 19 mm. Vorspannkraft: $P_{m,o} = 272$ kN		
Bemerkungen:	Längsbewehrung: 4 $\varnothing$ 8 mm Bügelbewehrung: $\varnothing$ 8 mm - 17,8 cm		
2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung			
Ergebnisse	Versuch	Berechnung	Abweichung
Bruchlast [kN]	44,50	45,00	+ 1,12 %
Biegemoment der Feldmitte im Bruchzustand [kNm]	95,40	91,76	- 3,82 %
<p style="text-align: center;"><b>VERSUCHSTRÄGER RB1 VON MATTOCK et al.</b> Last-Durchbiegungsbeziehungen der Feldmitte</p>			

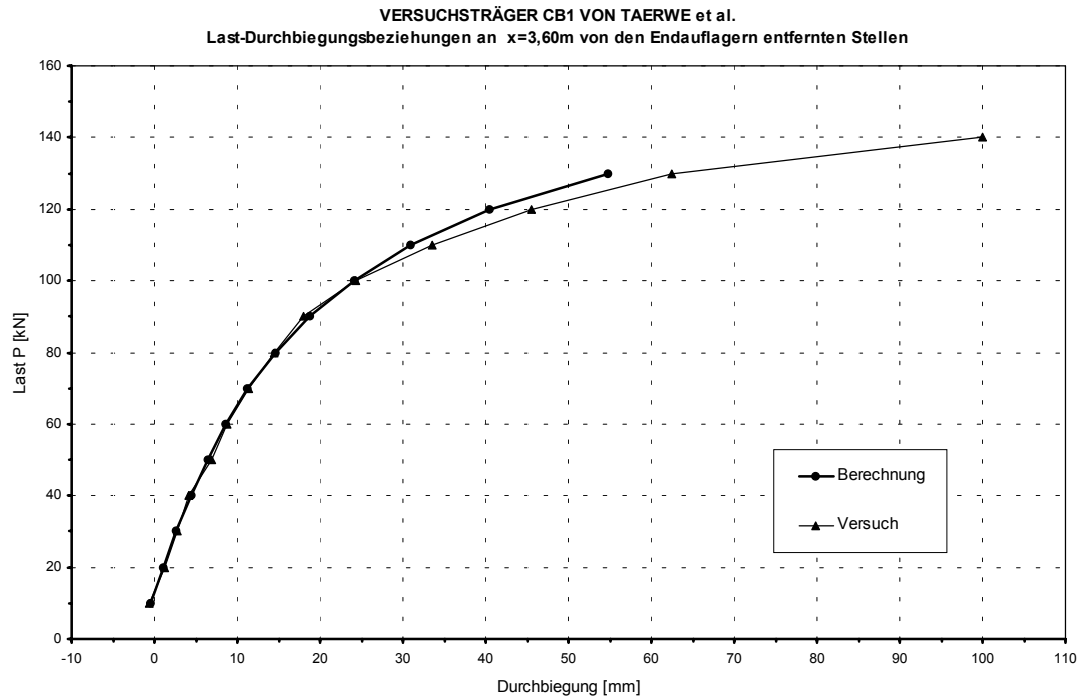
### A.1.6 Mattock et al., 1972 [19] - Balken CB1

1. Wesentliche Versuchsdaten			
<p style="text-align: center;">Längeneinheit in cm</p>			
Beton:	$f_{cm} = 28,15$ N/mm <sup>2</sup> $f_{ck} = 20$ N/mm <sup>2</sup>	$E_{cm} = 28900$ N/mm <sup>2</sup>	
Betonstahl:	$f_{tk} = 404$ N/mm <sup>2</sup> $E_s = 210000$ N/mm <sup>2</sup>	$f_{yk} = 385$ N/mm <sup>2</sup>	
Spannstahl:	2 $\varnothing$ 12,7 mm $f_{p,k} = 1970$ N/mm <sup>2</sup>	$A_p = 1,97$ cm <sup>2</sup> $E_p = 195000$ N/mm <sup>2</sup>	
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Hüllrohr: $\varnothing$ 19 mm. Vorspannkraft: $P_{m,o} = 270$ kN		
Bemerkungen:	Längsbewehrung: 4 $\varnothing$ 8 mm Bügelbewehrung: $\varnothing$ 8 mm - 17,8 cm		
2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung			
Ergebnisse	Versuch	Berechnung	Abweichung
Bruchlast [kN]	121,3	120	-1,08 %
Biegemoment in der Feldmitte [kNm]: - infolge Eigengewicht und Vorspannung - im Bruchzustand	+ 32,52 + 93,64	+ 20,84 + 95,15	-35,91 % + 1,61 %
Biegemoment auf der Mittelaufleger [kNm]: - infolge Eigengewicht und Vorspannung - im Bruchzustand	- 12,34 - 92,71	- 7,66 - 91,98	-37,90 % - 0,79 %

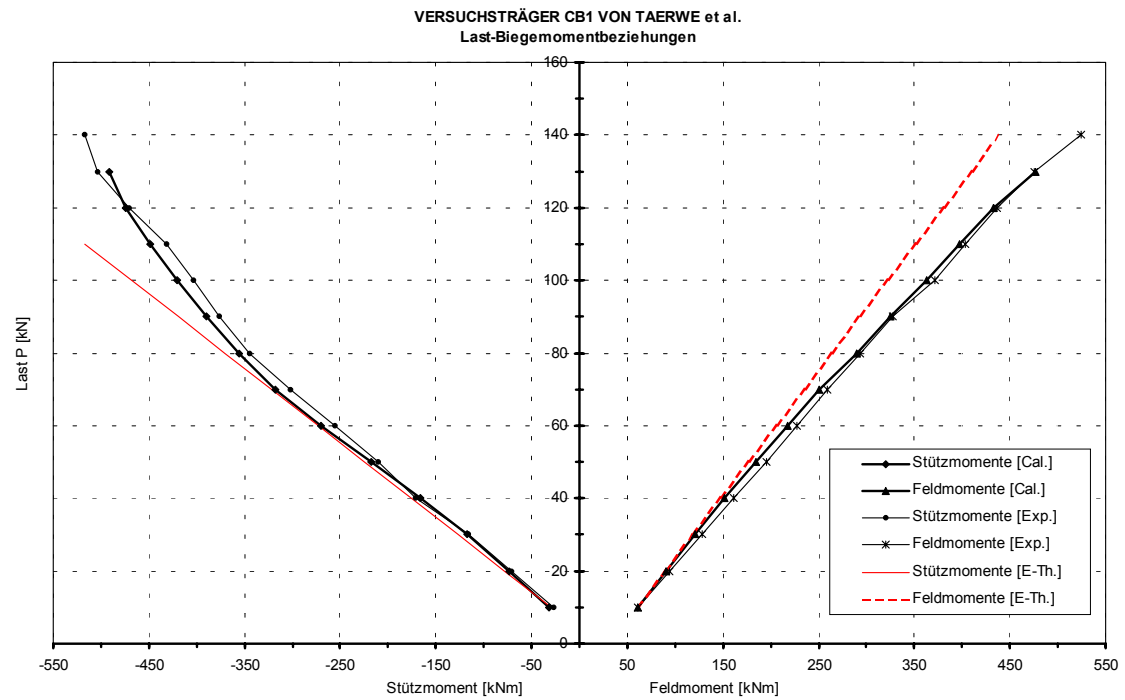
**A.1.7 Taerwe et al., 1995 [41] - Balken CB1**

1. Wesentliche Versuchsdaten			
<p style="text-align: center;">Längeneinheit in cm</p>			
Beton:	$f_{cm} = 37,5 \text{ N/mm}^2$ $E_{cm} = 30300 \text{ N/mm}^2$	$f_{ctm} = 4,06 \text{ N/mm}^2$	
Betonstahl:	$f_{ym} = 572 \text{ N/mm}^2$	$E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$	
Spannstahl:	5 $\varnothing 15,2 \text{ mm}$ $f_{p,k} = 1860 \text{ N/mm}^2$ $E_p = 195000 \text{ N/mm}^2$	$A_p = 6,95 \text{ cm}^2$ $f_{p0,1,k} = 1810 \text{ N/mm}^2$	
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Vorspannkraft: $P_{m,o} = 970 \text{ kN}$ Vorspannen von beiden Enden des Trägers. Zeitpunkt: - des Vorspannens: $t_o = 14$ Tage nach dem Betonieren. - der Untersuchung: $t = 28$ Tage nach dem Betonieren.		
Bemerkungen:	Längsbewehrung: 4 $\varnothing 8 \text{ mm}$ Bügelbewehrung: $\varnothing 8 - 20$ (Steg); $\varnothing 8 - 20$ (Flansch)		
2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung			
Ergebnisse	Versuch	Berechnung	Abweichung
Risslast bei 1. Biegerisse [kN]:			
Mittelaufleger	61,6	70	+13,64 %
Feldmitte	91,6	90	- 1,75 %
Bruchlast [kN]	142,6	130	- 8,84 %

Last-Durchbiegungsbeziehungen (Stelle  $x = 3,6$  m):



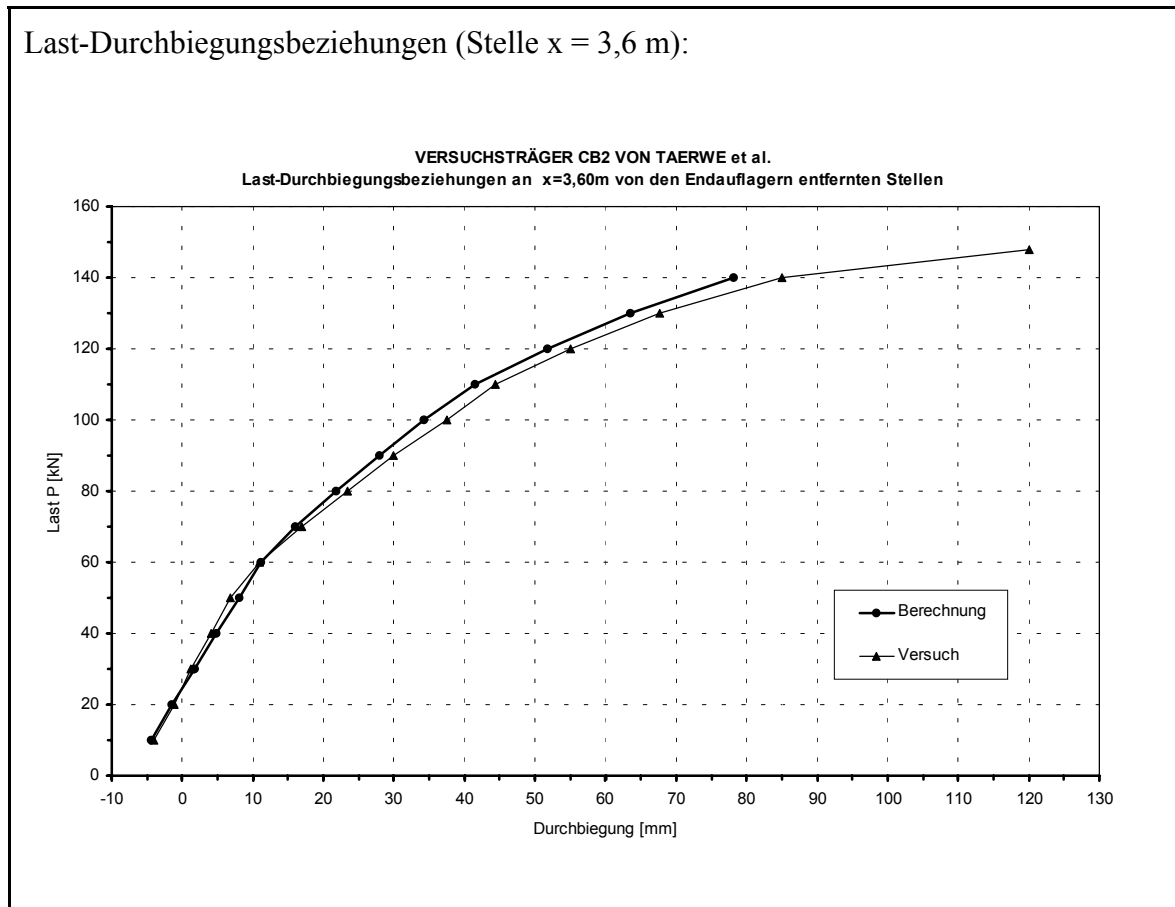
Last-Biegemomentbeziehungen:



**A.1.7 Taerwe et al., 1995 [41] - Balken CB2**

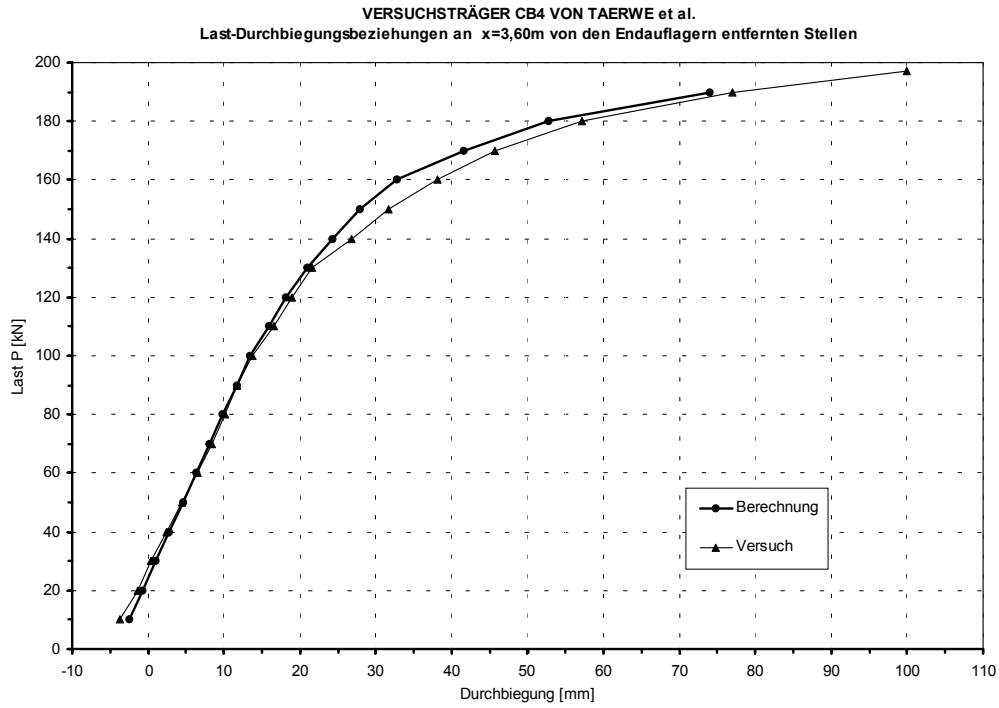
1. Wesentliche Versuchsdaten			
<p style="text-align: center;">Längeneinheit in cm</p>			
Beton:	$f_{cm} = 37,5 \text{ N/mm}^2$ $E_{cm} = 30300 \text{ N/mm}^2$	$f_{ctm} = 4,06 \text{ N/mm}^2$	
Betonstahl:	$f_{ym} = 572 \text{ N/mm}^2$	$E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$	
Spannstahl:	3 $\varnothing 15,2 \text{ mm}$ $f_{p,k} = 1860 \text{ N/mm}^2$ $E_p = 195000 \text{ N/mm}^2$	$A_p = 4,17 \text{ cm}^2$ $f_{p0.1,k} = 1810 \text{ N/mm}^2$	
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Teilweise Vorspannung. Vorspannkraft: $P_{m,0} = 582 \text{ kN}$ Vorspannen von beiden Enden des Trägers. Zeitpunkt: - des Vorspannens: $t_0 = 14$ Tage nach dem Betonieren. - der Untersuchung: $t = 28$ Tage nach dem Betonieren.		
Bemerkungen:	Längsbewehrung: 4 $\varnothing 18 \text{ mm}$ Bügelbewehrung: $\varnothing 8-20$ (Feld); $\varnothing 10-20$ (2 m um d. Mittelaufleger)		
2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung			
Ergebnisse	Versuch	Berechnung	Abweichung
Risslast bei 1. Biegerisse [kN]:			
Mittelaufleger	34,6	30	- 13,3 %
Feldmitte	57,6	60	+ 5,9 %
Bruchlast [kN]	147,7	140	- 5,2 %



Last-Durchbiegungsbeziehungen (Stelle  $x = 3,6$  m):

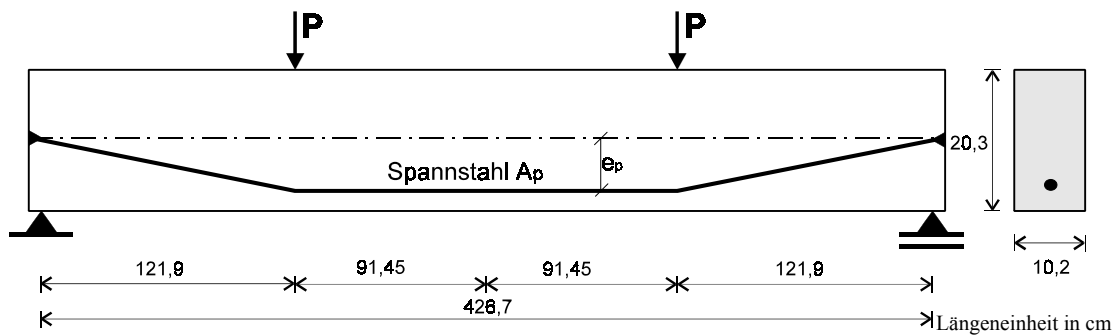
## A.1.7 Taerwe et al., 1995 [41] - Balken CB4

1. Wesentliche Versuchsdaten			
Längeneinheit in cm			
Beton:	$f_{cm} = 67,2 \text{ N/mm}^2$ $E_{cm} = 32800 \text{ N/mm}^2$	$f_{ctm} = 4,22 \text{ N/mm}^2$	
Betonstahl:	$f_{ym} = 572 \text{ N/mm}^2$	$E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$	
Spannstahl:	7 $\varnothing 15,2 \text{ mm}$ $f_{p,k} = 1860 \text{ N/mm}^2$ $E_p = 195000 \text{ N/mm}^2$	$A_p = 9,73 \text{ cm}^2$ $f_{p0.1,k} = 1810 \text{ N/mm}^2$	
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Vorspannkraft: $P_{m,o} = 1358 \text{ kN}$ Vorspannen von beiden Enden des Trägers. Zeitpunkt: - des Vorspannens: $t_o = 14$ Tage nach dem Betonieren. - der Untersuchung: $t = 28$ Tage nach dem Betonieren.		
Bemerkungen:	Längsbewehrung: 4 $\varnothing 8 \text{ mm}$ Bügelbewehrung: $\varnothing 8-20$ (Feld) und $\varnothing 10-20$ (2,4 m um der Mittelaufleger)		
2. Vergleich: Versuchsergebnisse mit Nachrechnung			
Ergebnisse	Versuch	Berechnung	Abweichung
Risslast bei 1. Biegerisse [kN]:			
Mittelaufleger	97,6	100	+ 3,48 %
Feldmitte	121,6	120	-1,32 %
Bruchlast [kN]	197,8	190	-3,94 %

Last-Durchbiegungsbeziehungen (Stelle  $x = 3,6$  m):

## A.2.1 Priestley et al., 1971 [125]

## 1. Wesentliche Daten der untersuchten Träger



Träger	Spannstahl	$A_p$ [mm <sup>2</sup> ]	Spannkraft [kN]	$e_p$ [cm]	$f_{cu}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_t$ [N/mm <sup>2</sup> ]
1	2 $\varnothing$ 7	77,2	64,153	0	52,8	4,31
2	4 $\varnothing$ 5	81,1	63,745	0	54,9	3,58
3	2 $\varnothing$ 7	77,2	50,566	41	52,3	3,64
4	4 $\varnothing$ 5	81,1	50,201	42	48,7	4,26
5	4 $\varnothing$ 7	154,3	127,606	0	52,4	4,15
6	4 $\varnothing$ 5	81,1	76,234	0	54,9	4,65

Beton:

s. Tabelle ( $f_{cu}$ ,  $f_t$ )

Spannstahl:

s. Tabelle (Anzahl,  $\varnothing$ ,  $A_p$ ,  $P_o$ )

$$E_p = 200000 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{p,k} = 1750 \text{ N/mm}^2 \text{ (bei } \varnothing 5 \text{ mm)}$$

$$f_{p,k} = 1700 \text{ N/mm}^2 \text{ (bei } \varnothing 7 \text{ mm)}$$

Vorspannverfahren:

Vorspannung mit nachträglichem Verbund.

Untersuchungsmethode:

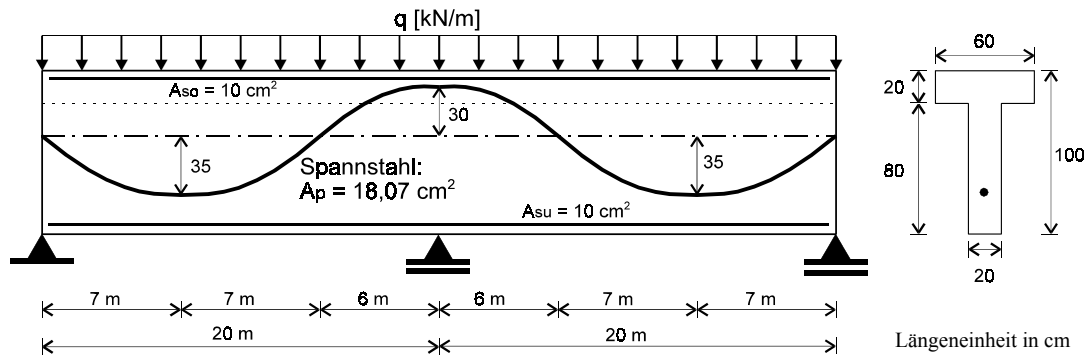
Numerisch mit Hilfe der Momenten-Krümmungsbeziehungen der Querschnitte; Berücksichtigung der nichtlinearen Werkstoffigenschaften.

## 2. Vergleich der Berechnungsergebnisse

Träger	Biegemomente im Bruchzustand [kNm]		
	Priestley et al.	Nachrechnung	Abweichung
1	10,16	11,649	+ 14,6 %
2	11,32	11,226	- 0,8 %
3	15,19	15,858	+ 4,4 %
4	16,81	16,911	+ 0,6 %
5	15,68	16,327	+ 4,1 %
6	11,31	10,024	- 11,4 %

## A.2.2 Levi et al., 1983 [22]

## 1. Wesentliche Daten des untersuchten Trägers

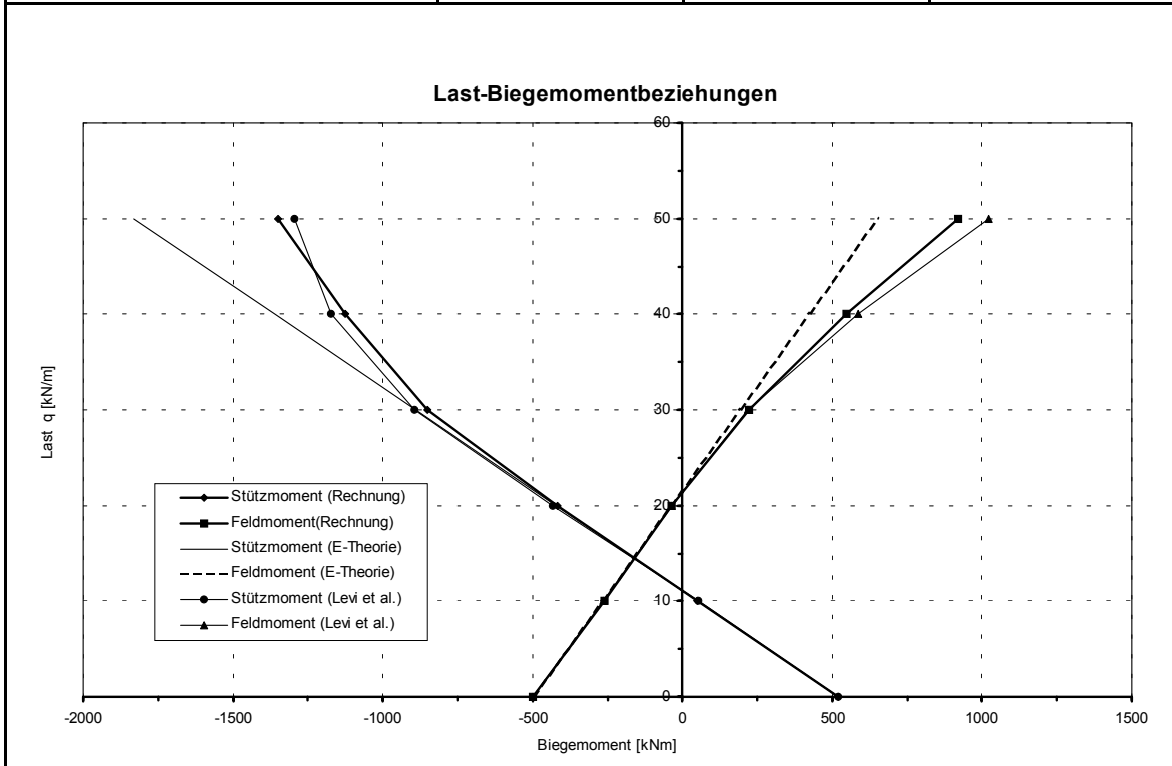


Beton:	$f_{cm} = 40 \text{ N/mm}^2$	$E_{cm} = 32490 \text{ N/mm}^2$
Betonstahl:	$f_{tk} = 400 \text{ N/mm}^2$ $f_{ym} = 400 \text{ N/mm}^2$	$E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$
Spannstahl:	$f_{p,k} = 1750 \text{ N/mm}^2$ $f_{p0.1,k} = 1570 \text{ N/mm}^2$	$E_p = 200000 \text{ N/mm}^2$
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Vorspannkraft: $P_{m,o} = 1900 \text{ kN}$	
Bemerkungen:	Längsbewehrung: $A_{so} = A_{su} = 10 \text{ cm}^2$	
Untersuchungsmethode:	Numerisch mit Hilfe der Finite-Element-Methode; Berücksichtigung der nichtlinearen Werkstoffeigenschaften.	

## 2. Vergleich der Berechnungsergebnisse

Ergebnisse	Levi et al.	Nachrechnung	Abweichung
Biegemoment auf der Mittelaufleger [kNm]:			
- infolge Vorspannung ( $P_{m,o}$ )	+ 520,00	+ 518,6	- 0,27 %
- infolge $P_{m,o} + q_1$ (= 10 kN/m)	+ 53,30	+ 51,3	- 3,81 %
- infolge $P_{m,o} + q_2$ (= 20 kN/m)	- 432,00	- 415,7	- 3,77 %
- infolge $P_{m,o} + q_3$ (= 30 kN/m)	- 893,30	- 850,9	- 4,75 %
- infolge $P_{m,o} + q_4$ (= 40 kN/m)	- 1173,00	- 1127,1	- 3,91 %
- infolge $P_{m,o} + q_5$ (= 50 kN/m)	- 1293,00	- 1350,5	+ 4,45 %

Biegemoment in der Feldmitte [kNm]:			
- infolge Vorspannung ( $P_{mo}$ )	- 500,00	- 498,2	- 0,36 %
- infolge $P_{mo} + q_1$ (= 10 kN/m)	- 264,30	- 260,7	- 1,25 %
- infolge $P_{mo} + q_2$ (= 20 kN/m)	- 37,50	- 36,9	- 1,60 %
- infolge $P_{mo} + q_3$ (= 30 kN/m)	+ 220,30	+ 223,4	+ 1,55 %
- infolge $P_{mo} + q_4$ (= 40 kN/m)	+ 586,67	+ 546,2	- 6,90 %
- infolge $P_{mo} + q_5$ (= 50 kN/m)	- 1020,00	+ 918,1	- 9,99 %








### A.2.3 Moucessian und Campbell, 1988 [42]

1. Wesentliche Daten der untersuchten Träger					
<p>Längeneinheit in cm</p>					
Beton:	$f_{cm} = 40$	N/mm <sup>2</sup>	$E_{cm} = 32500$	N/mm <sup>2</sup>	
Betonstahl:	$f_{ym} = 310$	N/mm <sup>2</sup>	$E_s = 210000$	N/mm <sup>2</sup>	
Spannstahl:	1 Ø 13 mm (Litzen)		$E_p = 195000$	N/mm <sup>2</sup>	
	$f_{p,k} = 1866$	N/mm <sup>2</sup>	$f_{p0.1,k} = 1670$	N/mm <sup>2</sup>	
Vorspannverfahren:	Vorspannung mit nachträglichem Verbund. Vorspannkraft: $P_{m,o} = 110$ kN				
Längsbewehrung und Spanngliedlage:	Träger	$A_{su}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{so}$ [cm <sup>2</sup> ]	$e_L$ [cm]	$e_s$ [cm]
	A1	16,32	17,78	9,5	0
	A9	7,15	17,78	9,5	0
	B1	1,73	8,58	9,5	9,5
	B3	12,60	16,31	9,5	9,5
	C1	16,92	17,78	0	0
	C5	7,57	17,78	0	0
Untersuchungsmethode:	Numerisch mit Hilfe der Finite-Element-Methode; Berücksichtigung der nichtlinearen Werkstoffverhalten.				
2. Vergleich der Berechnungsergebnisse					
Bruchlast [kN]	Moucessian/ Campbell	Nachrechnung	Abweichung		
Träger A1	197,09	202,5	+ 2,75 %		
Träger A9	179,70	170	- 5,40 %		
Träger B1	140,46	135	- 3,89 %		
Träger B3	196,20	195	- 0,61 %		
Träger C1	180,59	190	+ 5,20 %		
Träger C5	162,76	155	- 4,77 %		



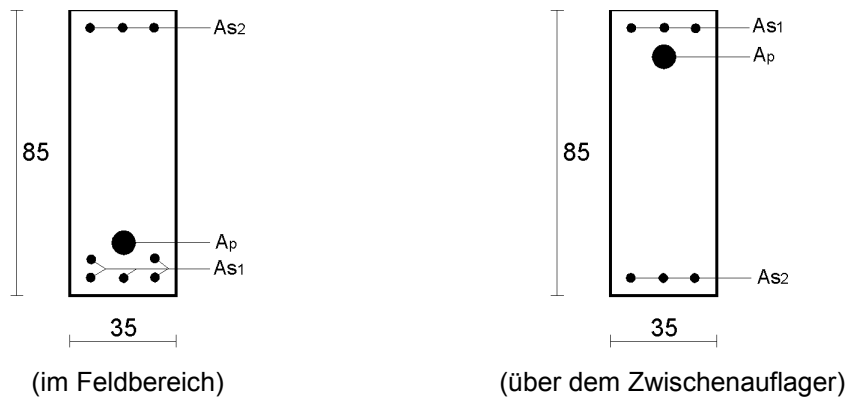


## Versuchsdaten der Träger der Serie A: Querschnittsformen, Spannstahl und Betonstahlbewehrung

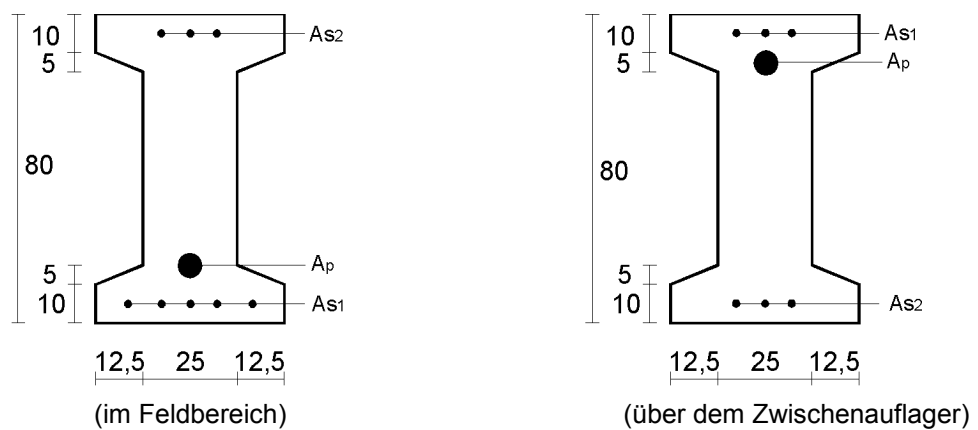
Serie	System	Querschnitt, Betonfestigkeit	Position	Spannglied		Bewehrungsgehalt (Bemessung nach EC2-1(92) mit Schnittgrößen aus linear-elastische Berechnung)							
				A <sub>p</sub> [cm <sup>2</sup> ]	y <sub>p</sub> [m]	0%-Momentenumlagerung		10%-Momentenumlagerung		20%-Momentenumlagerung		max.Momentenumlagerung	
						A <sub>s1</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s2</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s1</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s2</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s1</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s2</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s1</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s2</sub> [cm <sup>2</sup> ]
A	A-1	 RE C 35/45	Feld	15,4	-0,25	0,50	3,39	2,26	5,65	4,52	8,04	25% Momentenumlagerung 6,03   8,04	
			Zw.aufg.	15,4	0,275	19,03	24,55	11,90	22,80	4,02	24,81	25% Momentenumlagerung 0,50   26,60	
	A-2	 I C 35/45	Feld	15,4	-0,25	1,01	4,52	3,14	4,52	4,52	8,04	27,5% Momentenumlagerung 8,04   8,04	
			Zw.aufg.	15,4	0,275	19,64	29,46	11,83	29,46	6,28	21,98	27,5% Momentenumlagerung 0,503   22,11	
	A-3	 T C 35/45	Feld	15,4	-0,25	2,26	2,26	2,26	2,26	12% Momentenumlagerung 2,26   2,26		Rotationsfähigkeit nicht ausreichend	
			Zw.aufg.	15,4	0,275	8,39	24,55	1,75	24,55	12% Momentenumlagerung 0,57   24,55			
	A-4	 I C 25/30	Feld	15,4	-0,25	0,57	17,21	5,3% Momentenumlagerung 0,57   17,21		Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit maßgebend			
			Zw.aufg.	15,4	0,275	3,63	20,36	5,3% Momentenumlagerung 0,57   19,64					
	A-5	 I C50/60	Feld	15,4	-0,25	1,62	1,57	4,32	4,34	7,8	4,02	30% Momentenumlagerung 10,44   6,97	
			Zw.aufg.	15,4	0,275	27,25	21,36	18,45	23,25	10,78	23,25	30% Momentenumlagerung 3,14   30,31	

## 1.4 Querschnitte

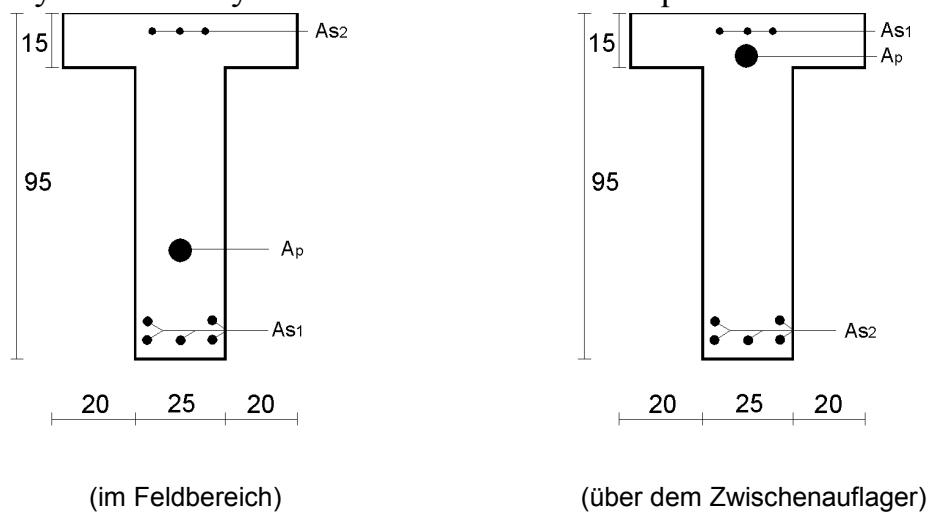
## 1.4.1 System A-1: Rechteckquerschnitt



## 1.4.2 System A-2, A-4, A-5: Symmetrischer I-Querschnitt

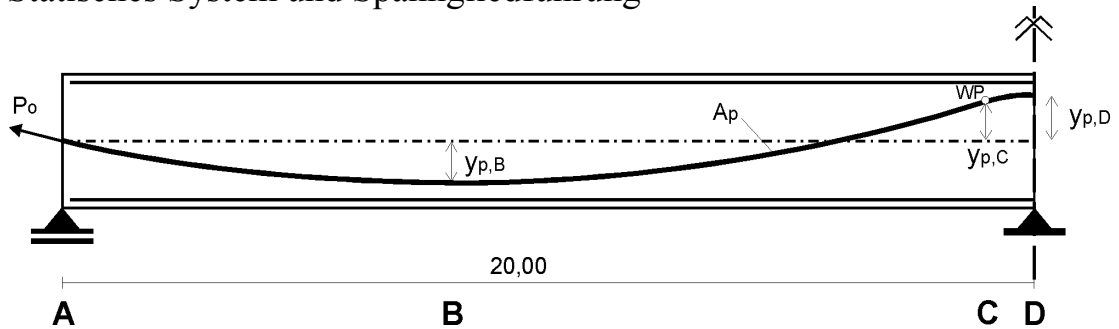


## 1.4.3 System A-3: Symmetrischer Plattenbalkenquerschnitt



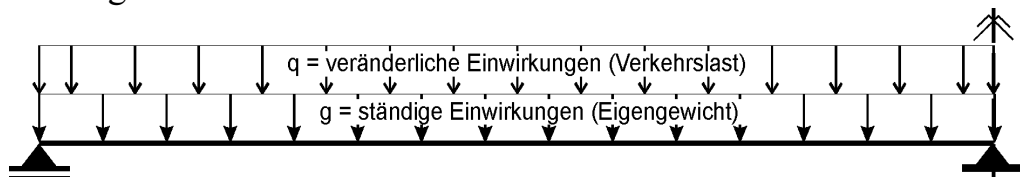
## 2 Versuchsträger Serie B

### 2.1 Statisches System und Spanngliedführung



Die Spannweite ist konstant für alle Träger der Serie B. Die Spanngliedführung wird variiert, so dass unterschiedliche statisch unbestimmte Vorspannwirkungen auf den Träger entstehen.

### 2.2 Belastung


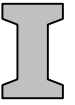
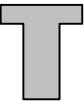
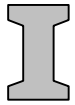
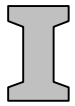


Neben der ständigen Einwirkungen ( $g$ ) aus Eigengewicht werden die Träger mit einer gleichmäßig verteilten veränderlichen Last ( $q$ ) beansprucht. Die Belastung  $q$  wird bis zum rechnerischen Bruchzustand inkrementell aufsteigend aufgebracht.

### 2.3 Bewehrung

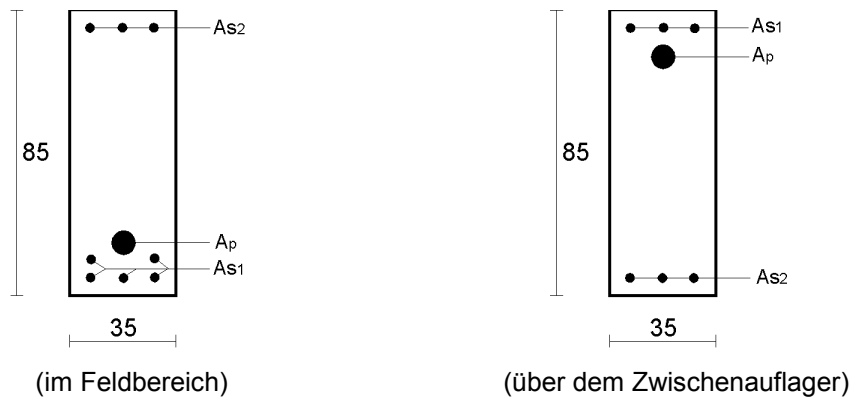
Zusätzliche erforderliche Betonstahlbewehrung wird dem Momentverlauf aus der linear elastischen Schnittgrößenberechnung entsprechend ermittelt und angeordnet (s. folgende Tabelle).

## Versuchsdaten der Träger der Serie B: Querschnittsformen, Spanngliedlage und Betonstahlbewehrung

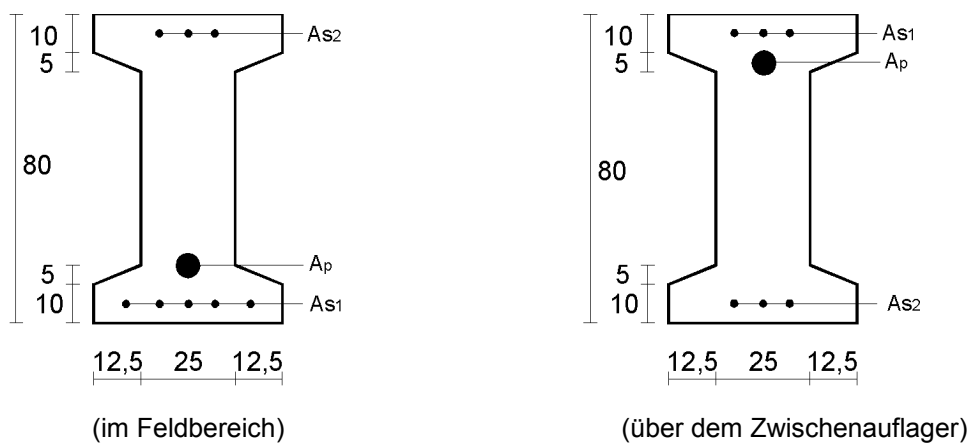
Serie	System	Querschnitt, Betonfestigkeit	Spanngliedlage, Mp,ind., Bewehrung		Statisch unbestimmte Biegemomente infolge Vorspannung (Mp,ind.)							
					Null (Zentrisch)		Klein		Mittel		Groß	
					Feld	Zw.aufg.	Feld	Zw.aufg.	Feld	Zw.aufg.	Feld	Zw.aufg.
B	B-1	 <b>RE</b> C 35/45	yp	[m]	0	0	-0,225	0,275	-0,25	0,168	-0,275	0,029
			Mp,ind.	[kNm]	0	0	12,308	16,097	117,8	268,9	227,791	473,293
			As1	[cm2]	12,56	36,38	1,01	15,233	1,01	15,515	1,01	19,03
			As2	[cm2]	15,7	41,29	4,52	25,053	4,52	25,335	4,52	28,85
	B-2	 <b>I</b> C 35/45	yp	[m]	0	0	-0,225	0,275	-0,25	0,168	-0,275	0,029
			Mp,ind.	[kNm]	0	0	12,308	16,097	117,8	268,9	227,791	473,293
			As1	[cm2]	13,063	41,29	1,01	16,74	1,01	17,21	1,01	22,78
			As2	[cm2]	15,7	39,28	4,52	24,55	4,52	26,6	4,52	27,69
	B-3	 <b>T</b> C 35/45	yp	[m]	0	0	-0,225	0,175	-0,25	0,168	-0,275	0,029
			Mp,ind.	[kNm]	0	0	36,475	78,354	117,8	168,9	227,792	473,293
			As1	[cm2]	29,46	50,07	4,52	21,65	3,39	15,233	2,355	21,65
			As2	[cm2]	23,44	71,56	1,57	42,42	1,57	36,38	2,355	42,42
	B-4	 <b>I</b> C 25/30	yp	[m]	0	0	-0,225	0,275	-0,25	0,168	-0,275	0,029
			Mp,ind.	[kNm]	0	0	12,308	16,097	117,8	268,9	227,791	473,293
			As1	[cm2]	13,69	41,29	1,01	16,3	1,01	15,233	1,01	21,9
			As2	[cm2]	25,12	54,795	18,53	35,94	18,53	36,38	18,53	39,28
	B-5	 <b>I</b> C 50/60	yp	[m]	0	0	-0,225	0,275	-0,25	0,168	-0,275	0,029
			Mp,ind.	[kNm]	0	0	12,308	16,097	117,8	268,9	227,791	473,293
			As1	[cm2]	11,933	40,85	1,01	17,21	1,01	16,33	1,01	20,633
			As2	[cm2]	3,14	24,55	1,01	9,42	1,01	15,2	1,01	19,503

## 2.4 Querschnitte

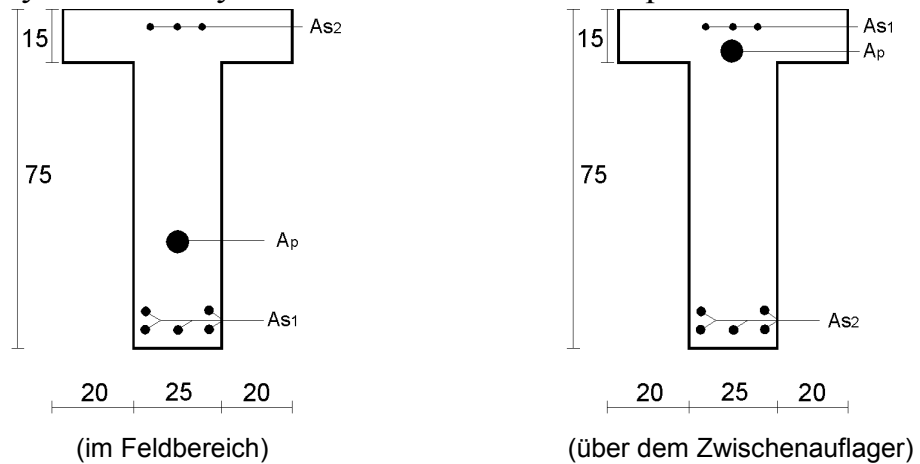
### 2.4.1 System B-1: Rechteckquerschnitt



### 2.4.2 System B-2, B-4, B-5: Symmetrischer I-Querschnitt



### 2.4.3 System B-3: Symmetrischer Plattenbalkenquerschnitt



## Anhang C

Grafische Darstellung der Untersuchungsergebnisse:

### 1. Last-Biegemomentbeziehungen

Entwicklung der Biegemomente im Feld und auf dem Zwischenaufleger aus der nichtlinearen Berechnung werden graphisch dargestellt und mit den Werten nach der linearen Elastizitätstheorie gegenübergestellt.

$M_{F,EL}$  ;  $M_{S,EL}$  = Biegemomente im Feld bzw. auf dem Zwischenaufleger aus der Berechnung nach E-Theorie.

$M_{F,NL}$  ;  $M_{S,NL}$  = Biegemomente im Feld bzw. auf dem Zwischenaufleger aus der nichtlinearen FEM-Berechnung.

### 2. Umlagerung der Biegemomente im Mittelfeld und auf dem Zwischenauflager:

Umlagerung der Biegemomente [in %] =

$$\text{Biegemomente} \frac{\text{(aus der nichtlinearen Berechnung – nach E-Theorie)}}{\text{(nach E-Theorie)}}$$

$M_{uml.,F}$  = Umlagerung der Biegemomente im Mittelfeld.

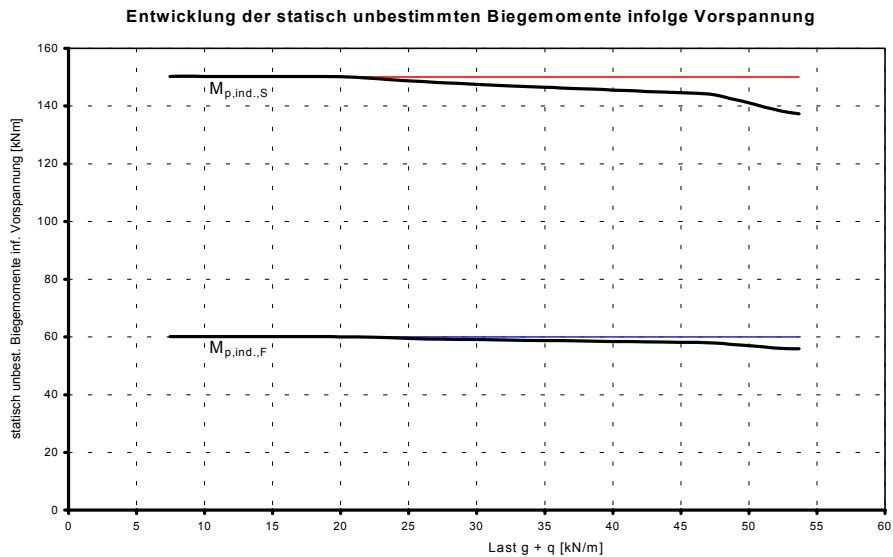
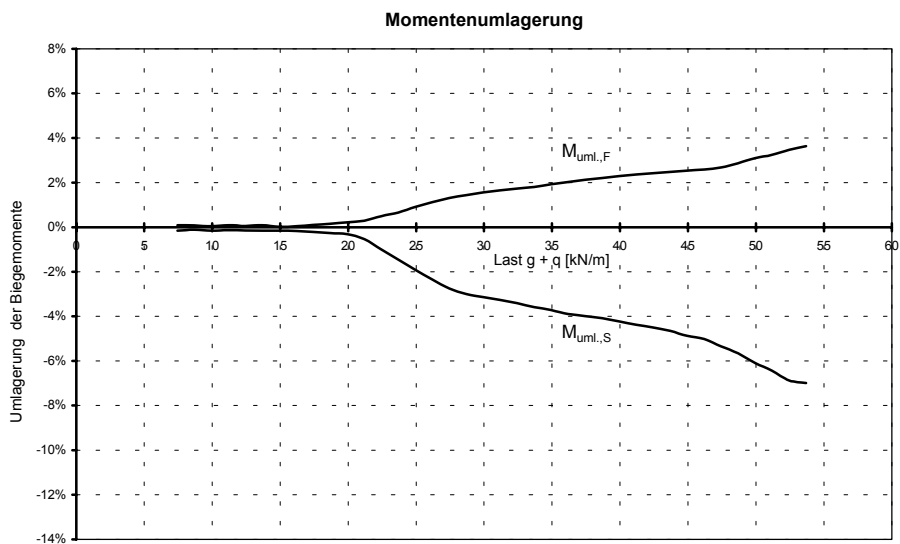
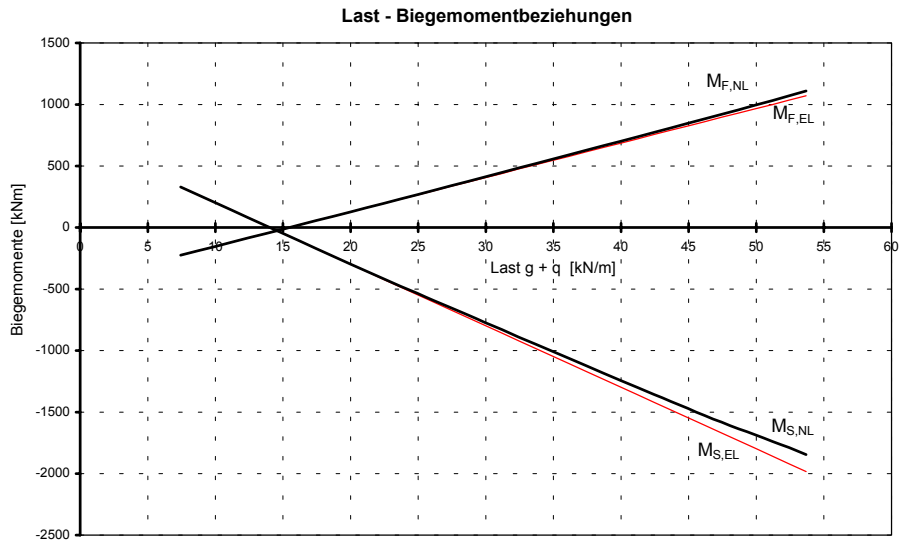
$M_{uml.,S}$  = Umlagerung der Biegemomente auf dem Zwischenaufleger.

### 3. Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung.

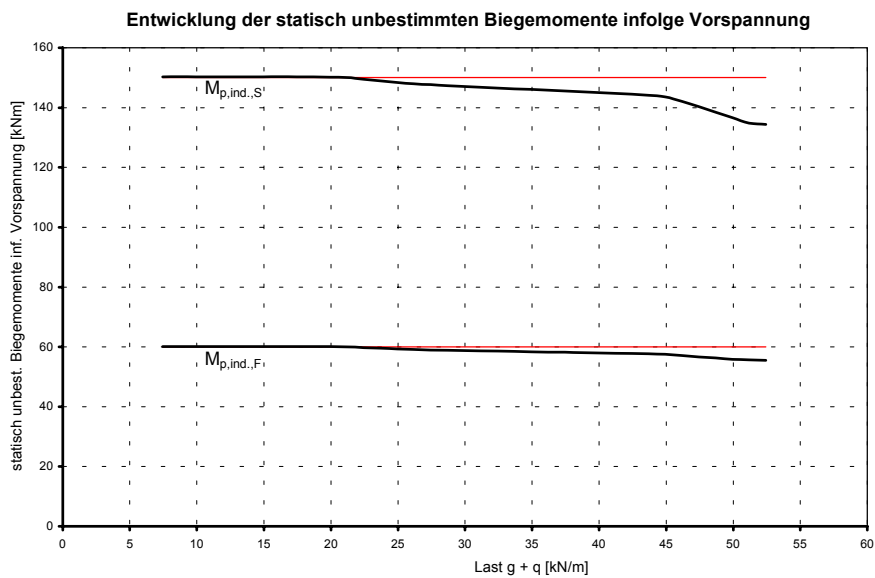
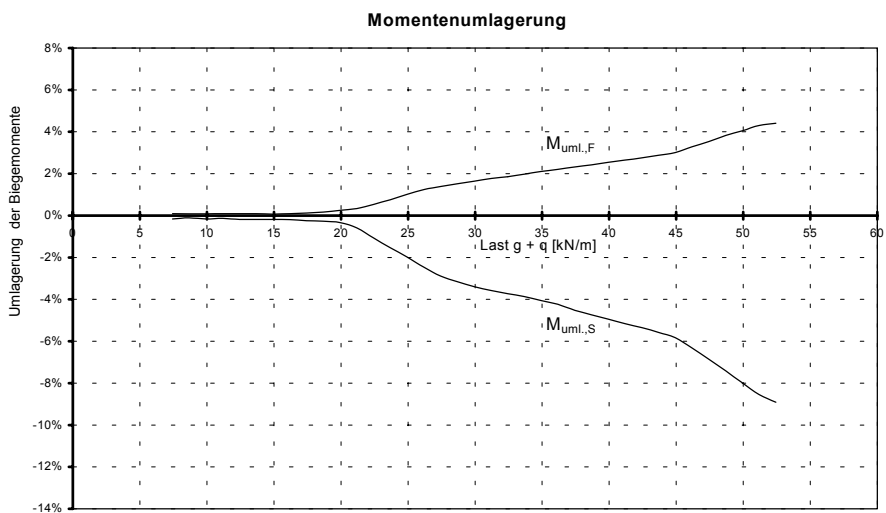
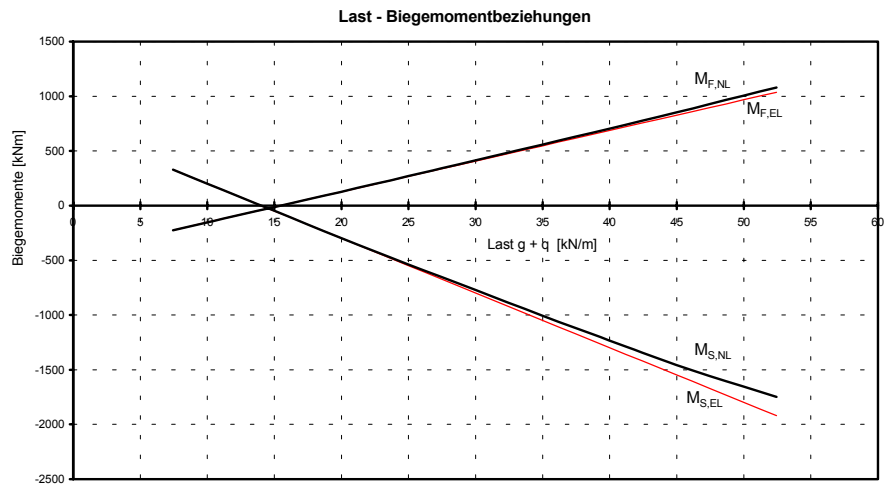
$M_{p,ind.,F}$  = statisch unbestimmte Biegemomente infolge Vorspannung im Mittelfeld.

$M_{p,ind.,S}$  = statisch unbestimmte Biegemomente infolge Vorspannung auf dem Zwischenaufleger.

System A-1-1 (0% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)

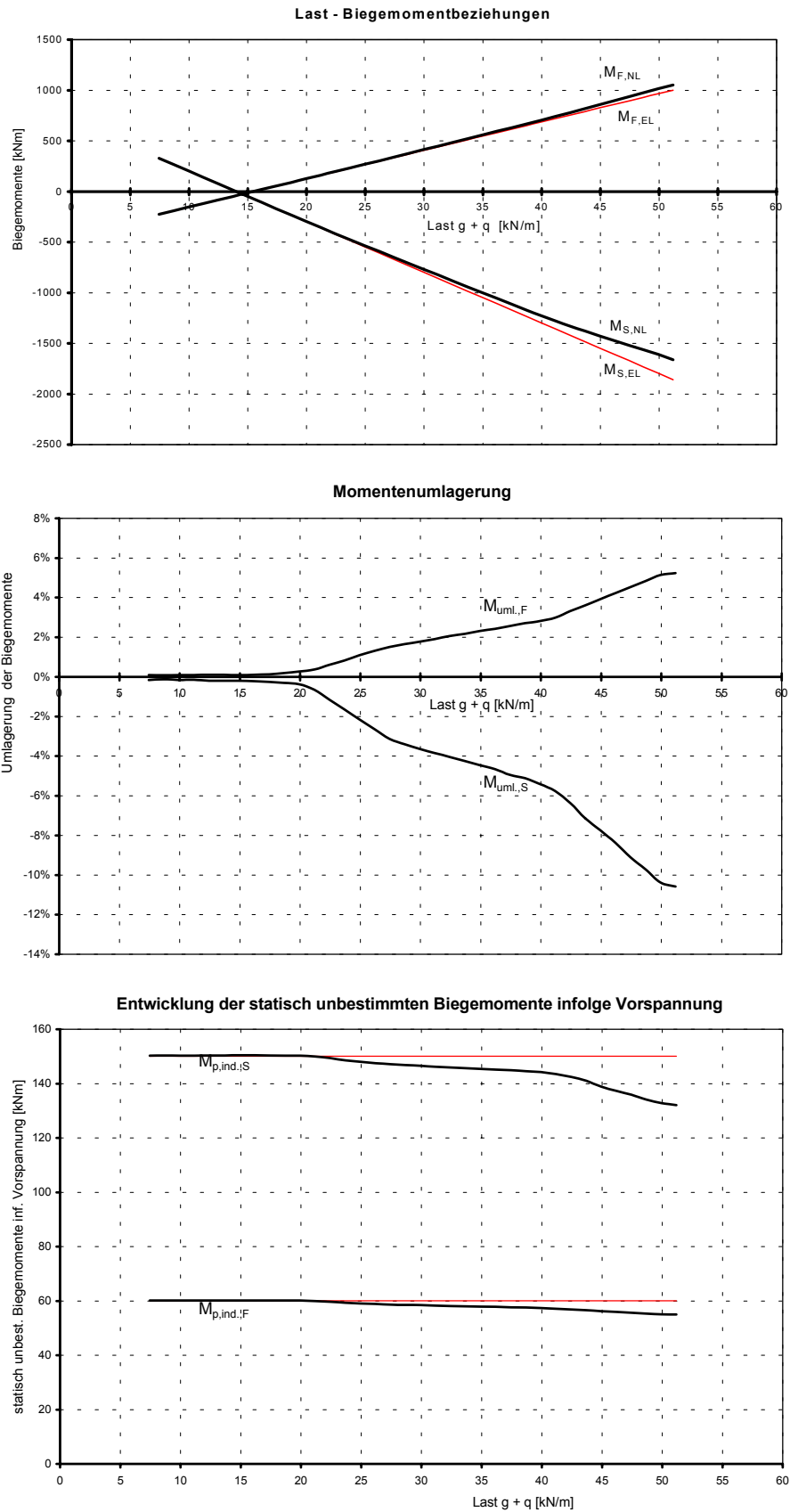


System A-1-2 (10% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)

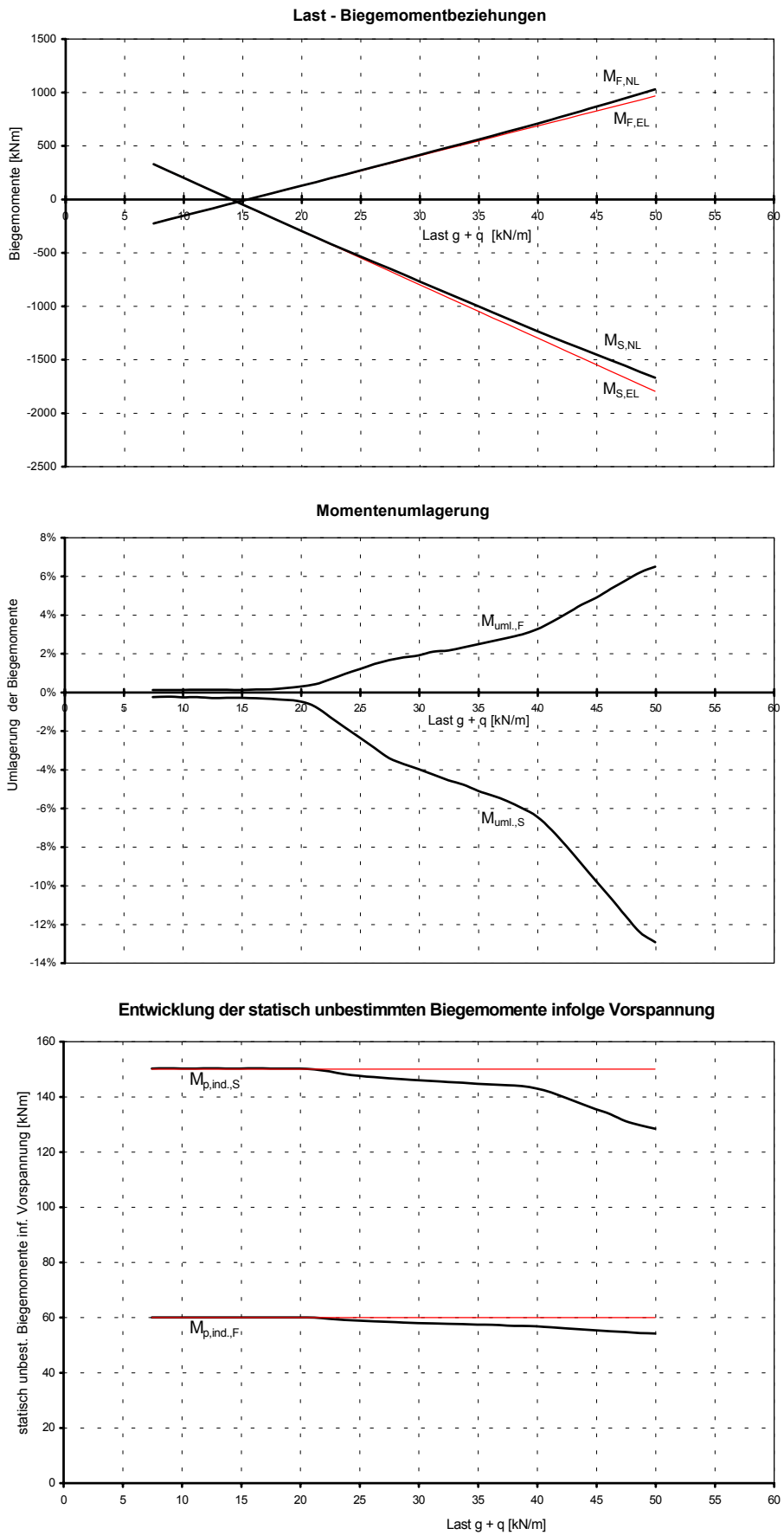




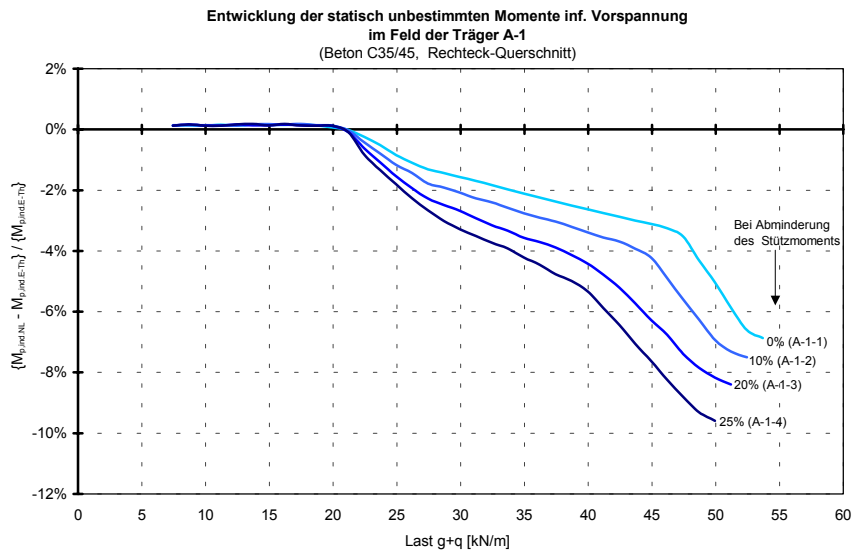
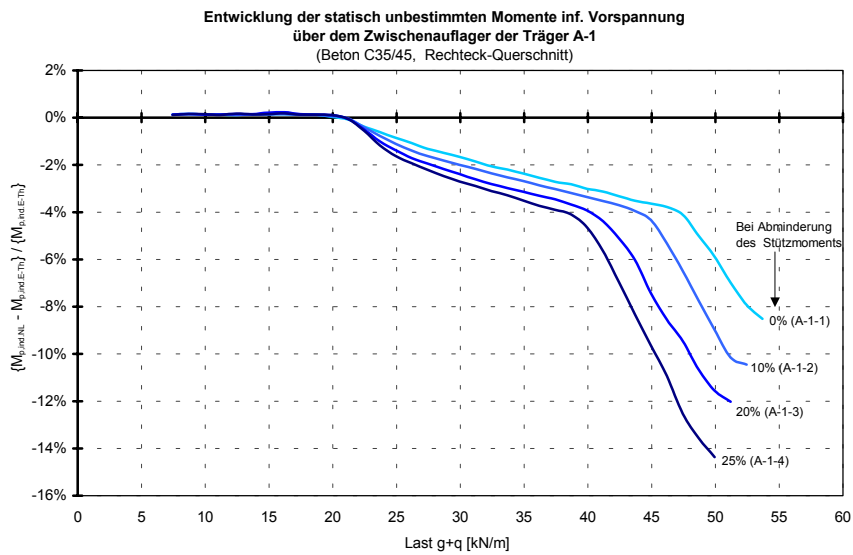
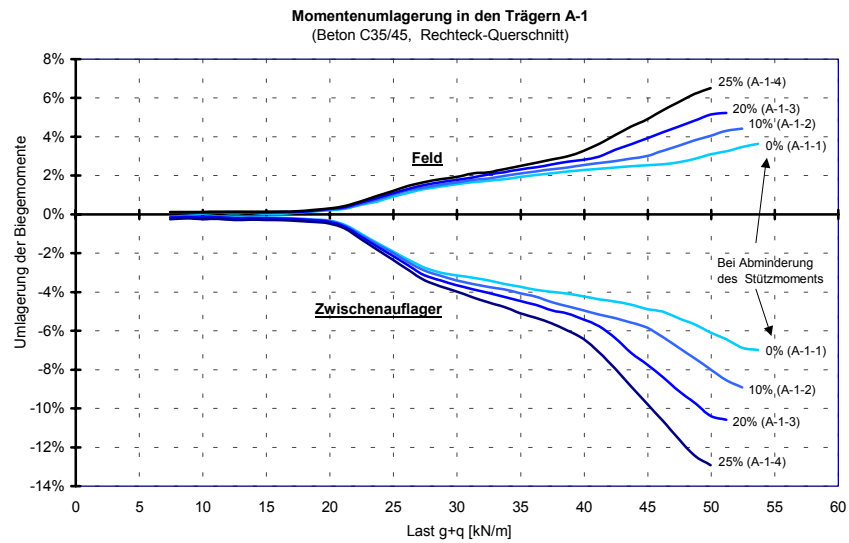
## System A-1-3 (20% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



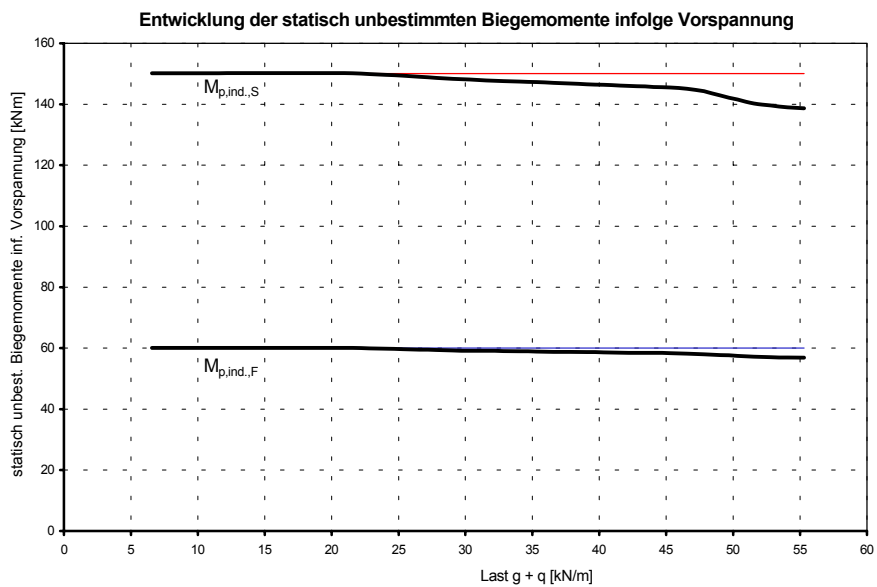
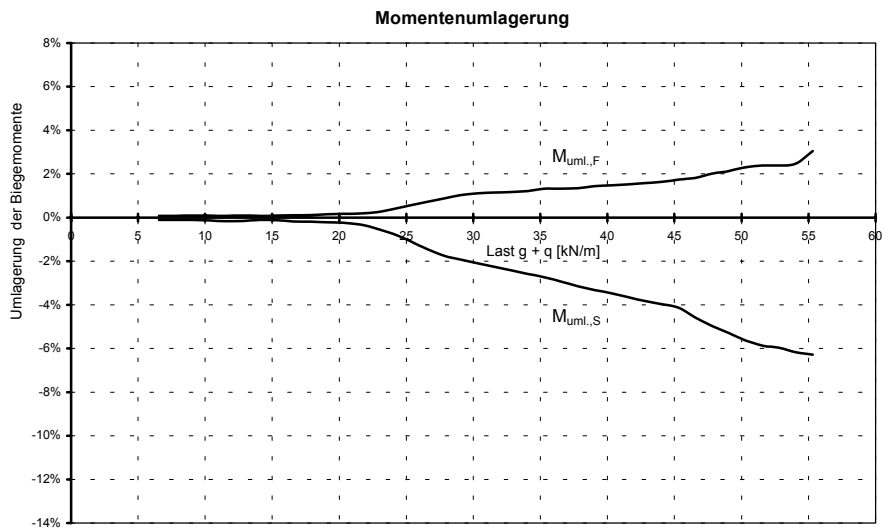
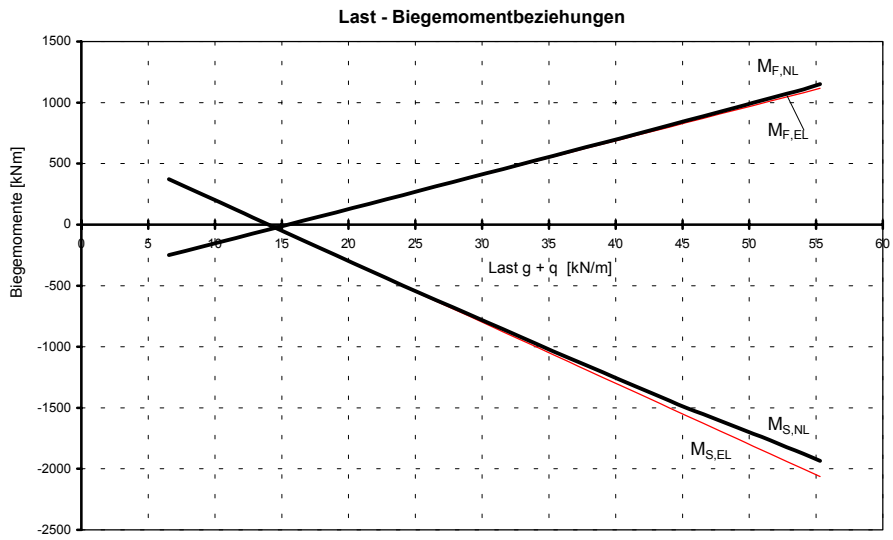
System A-1-4 (25% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



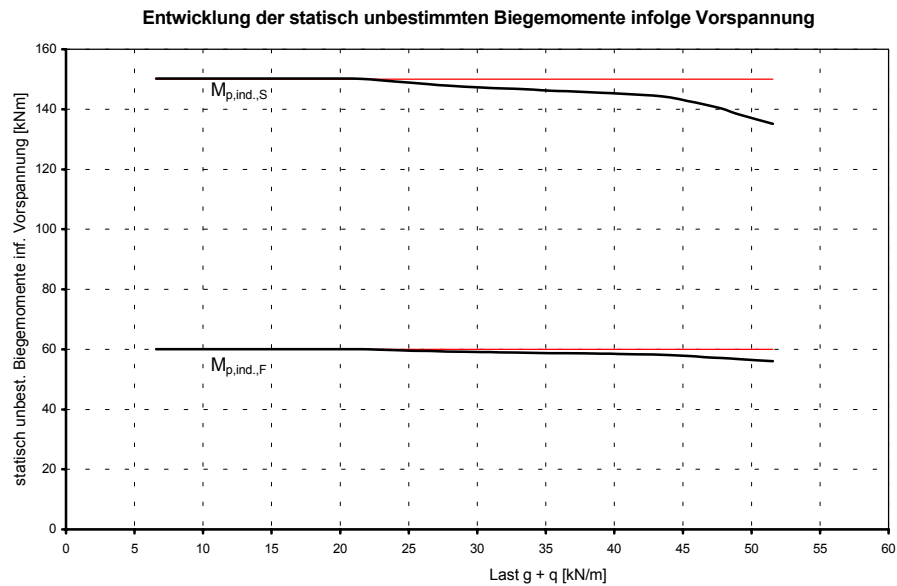
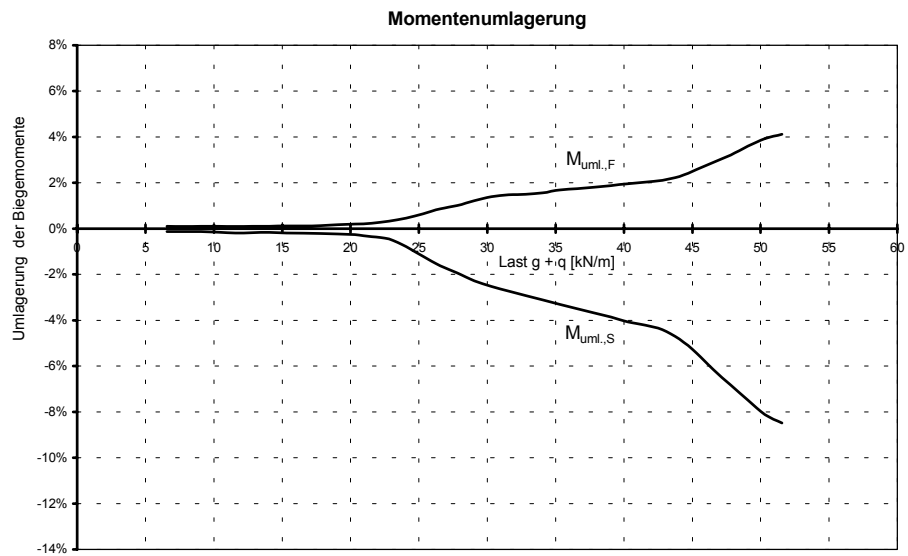
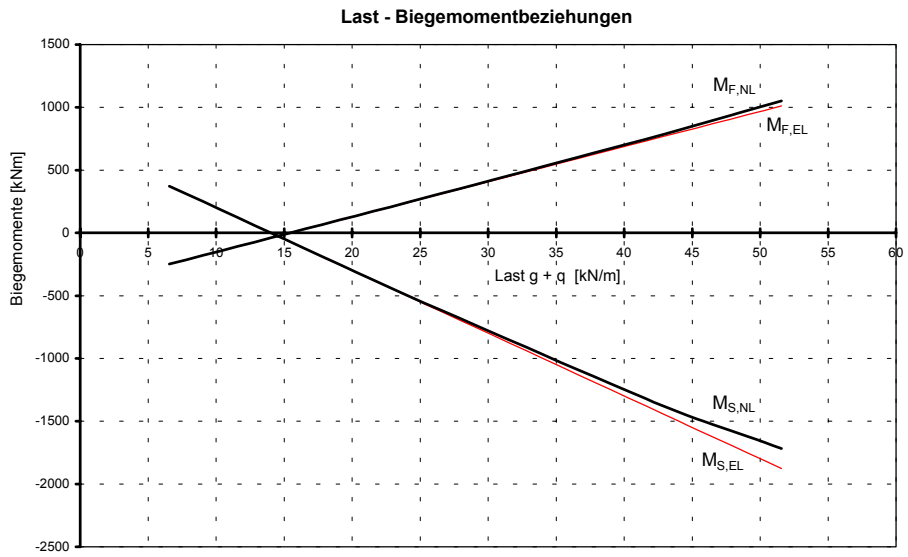
### Systeme A-1-1 bis A-1-4 (Zusammenfassung)



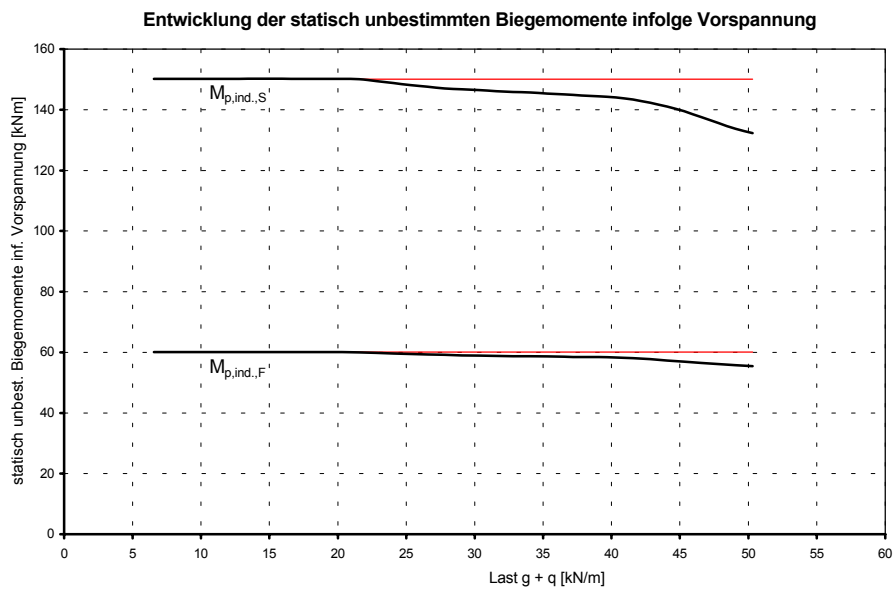
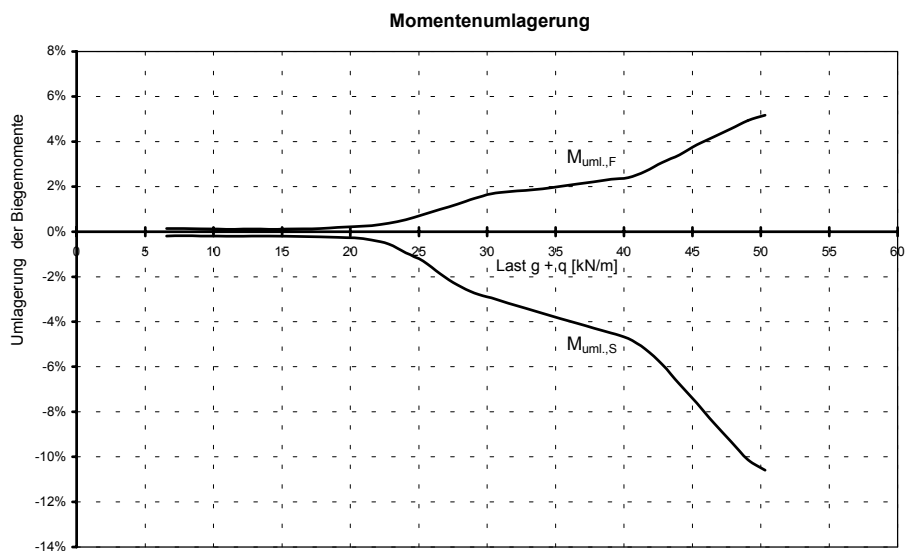
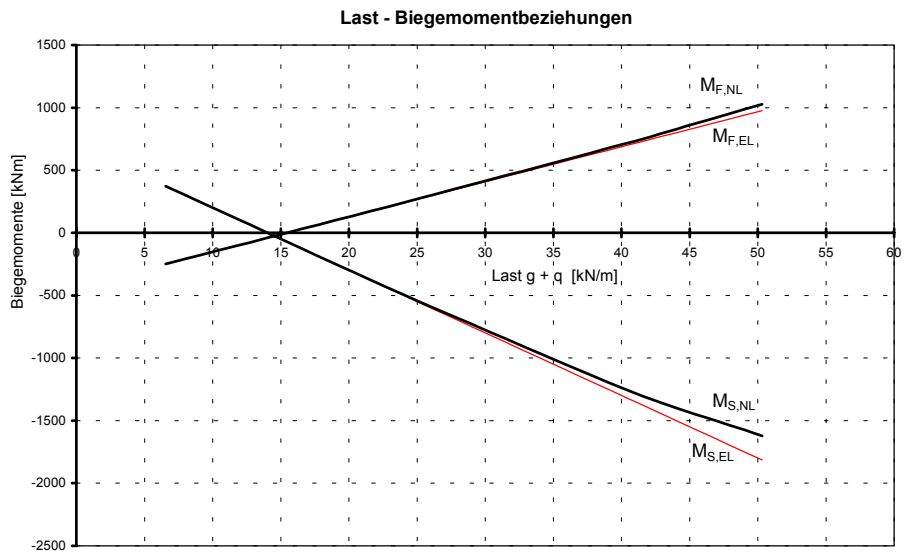
System A-2-1 (0% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



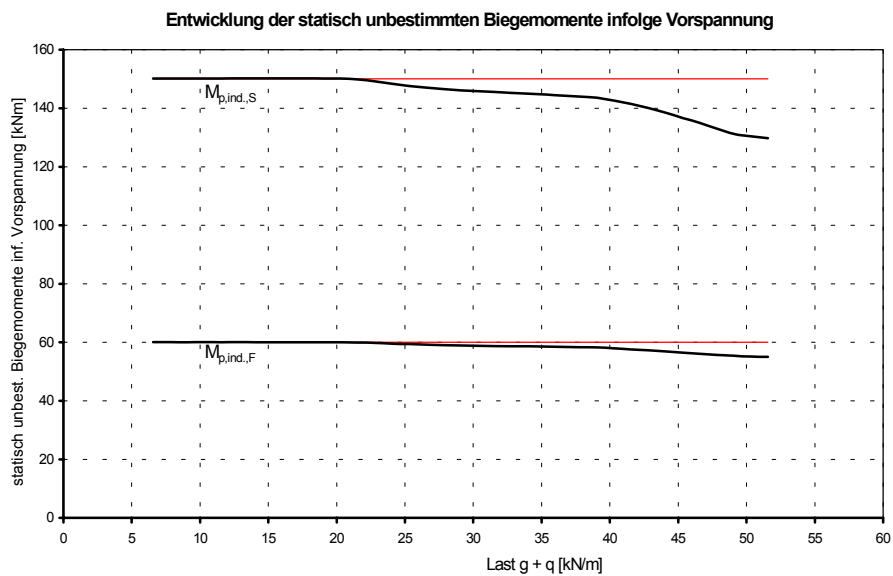
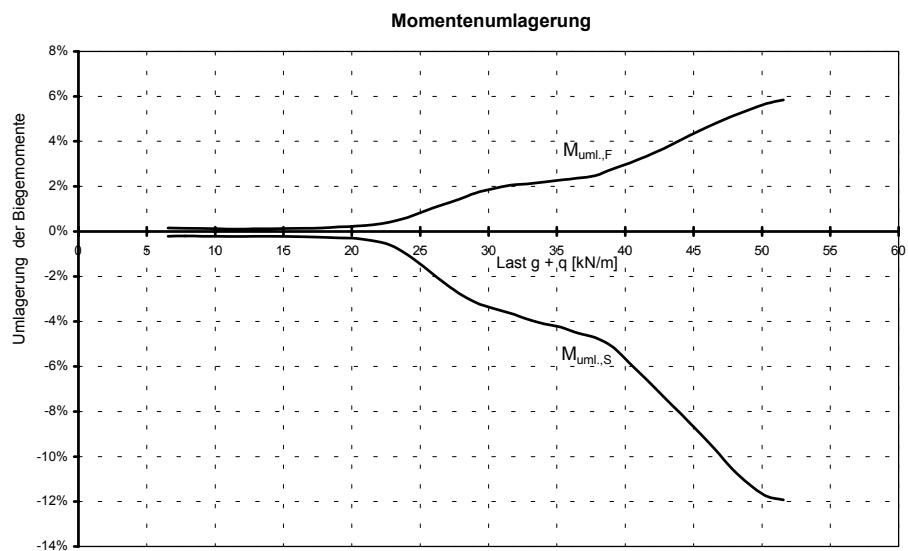
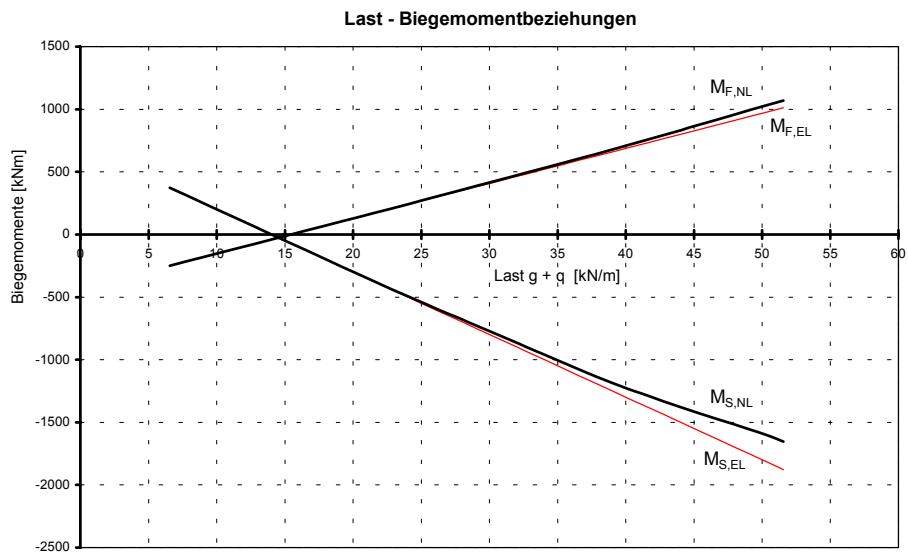
System A-2-2 (10% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



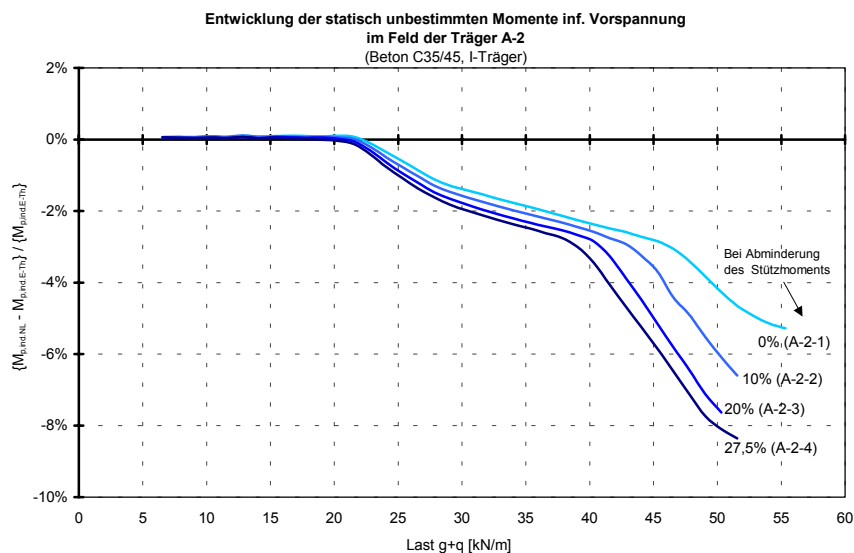
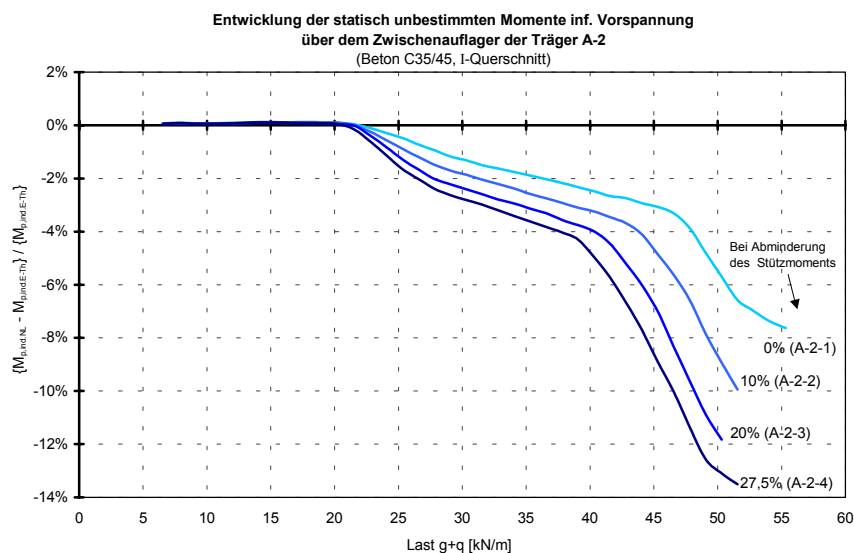
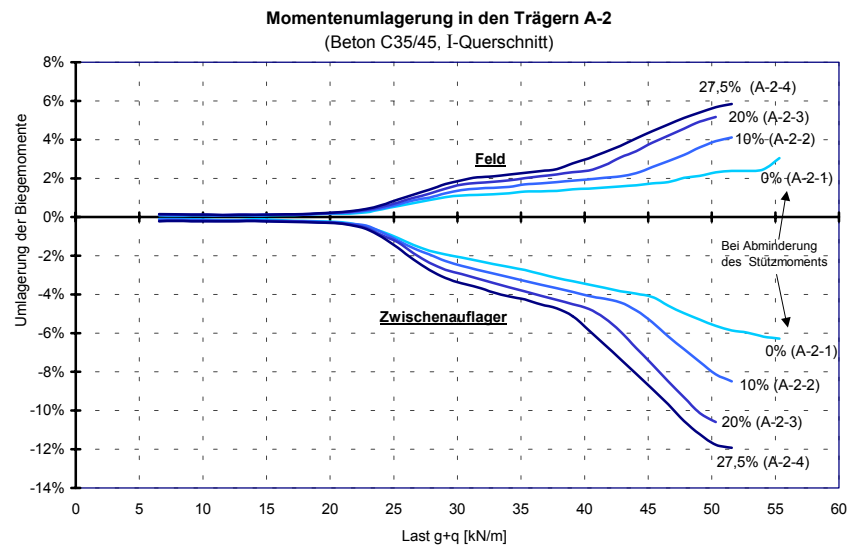
System A-2-3 (20% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



System A-2-4 (27,5% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)

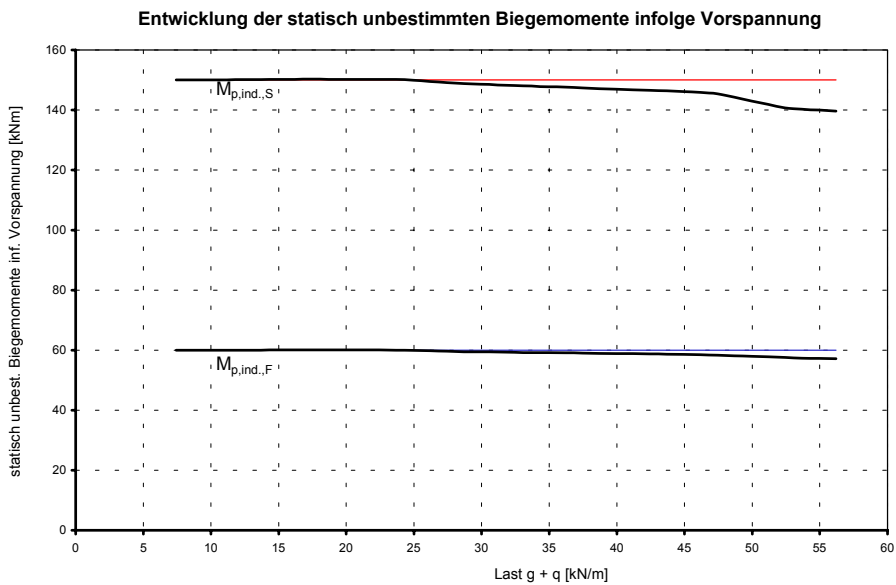
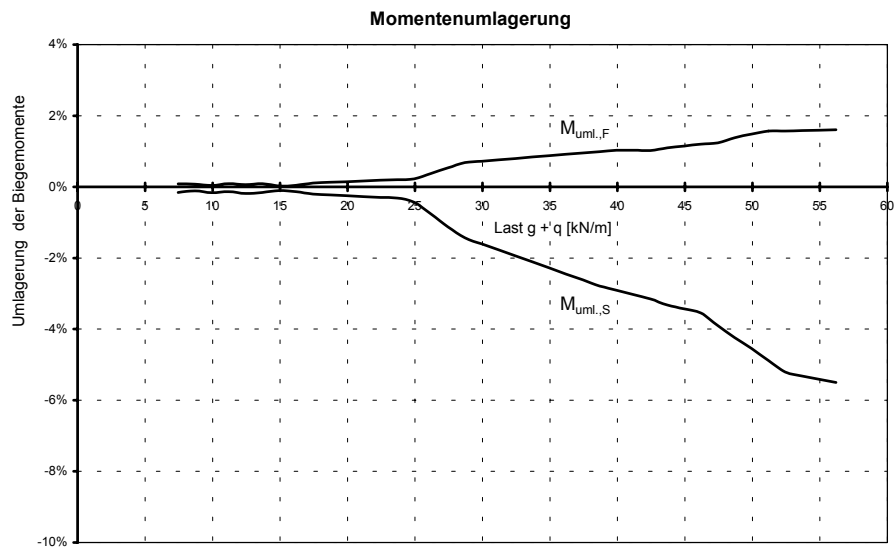
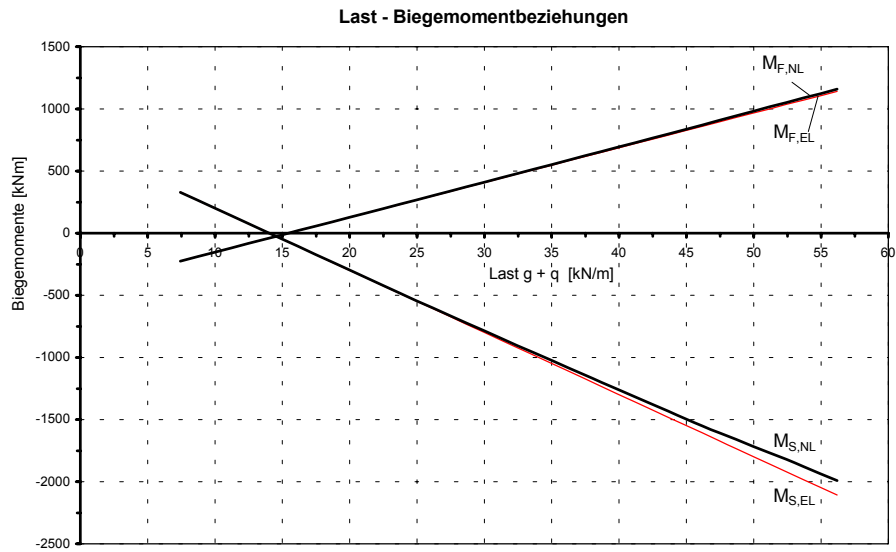


### Systeme A-2-1 bis A-2-4 (Zusammenfassung)



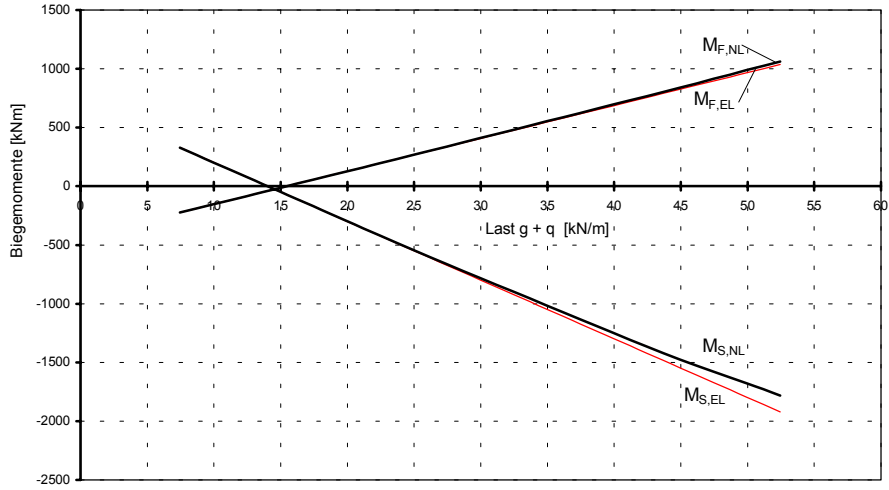


### System A-3-1 (0% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)

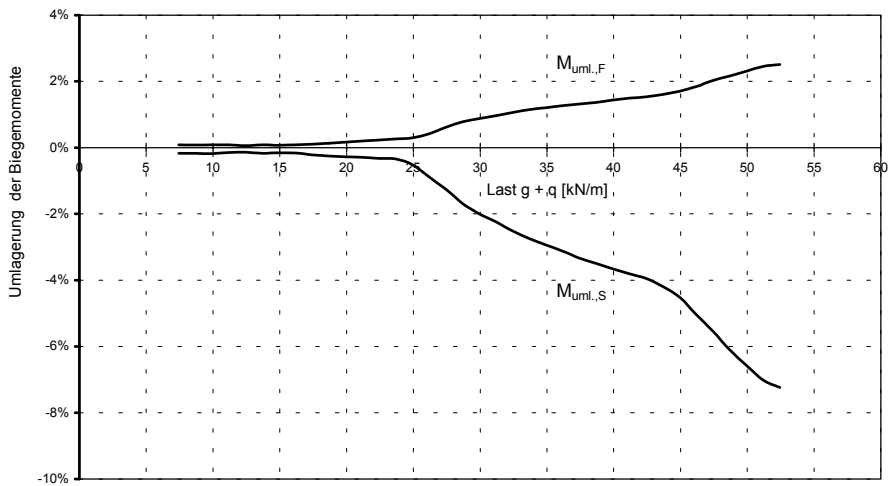


System A-3-2 (10% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)

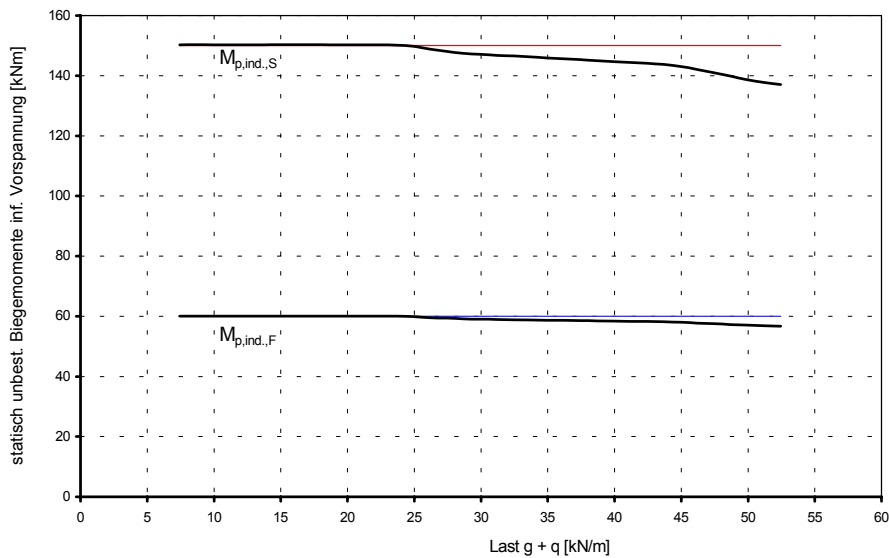
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

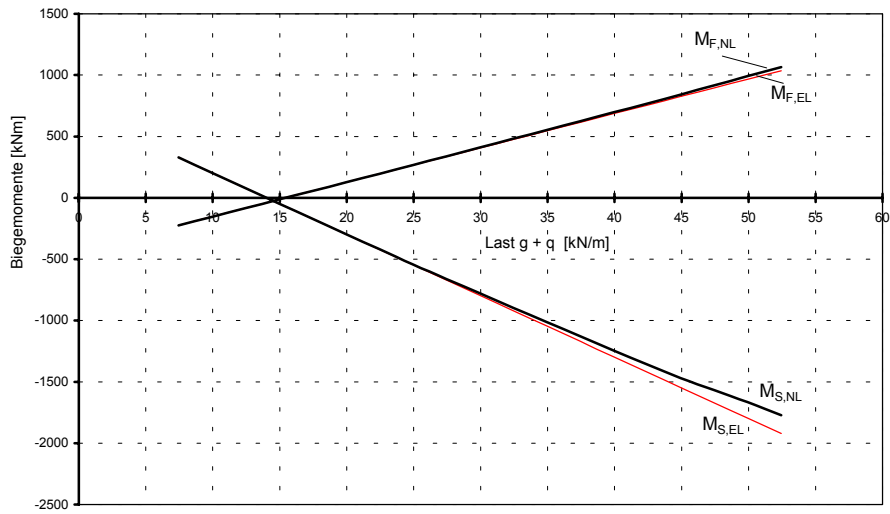


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

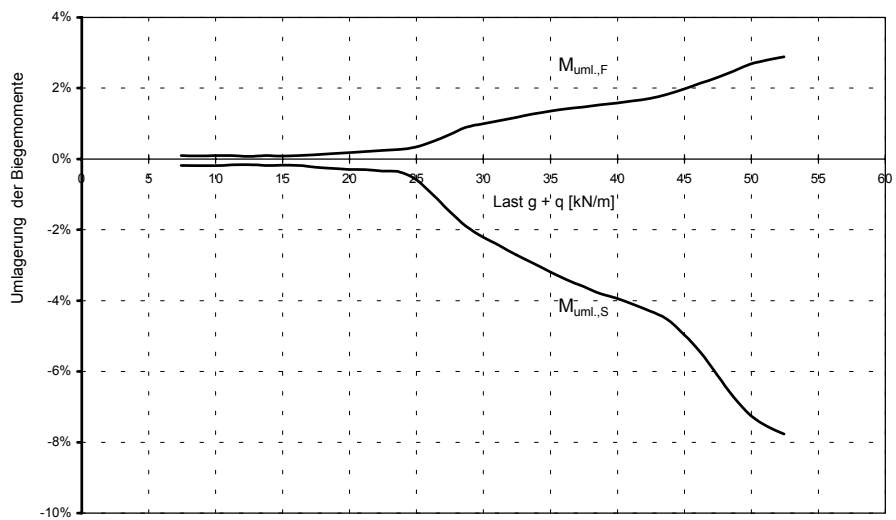


System A-3-3 (12% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)

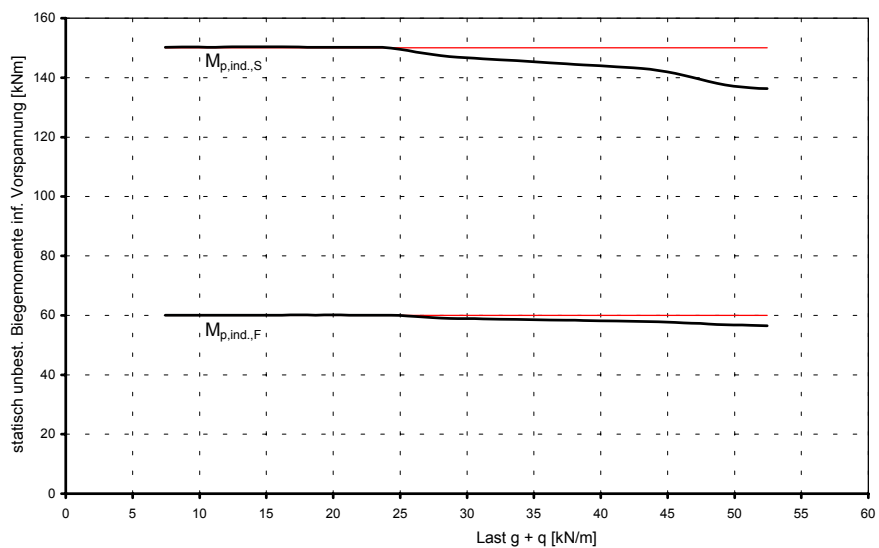
Last - Biegemomentbeziehungen



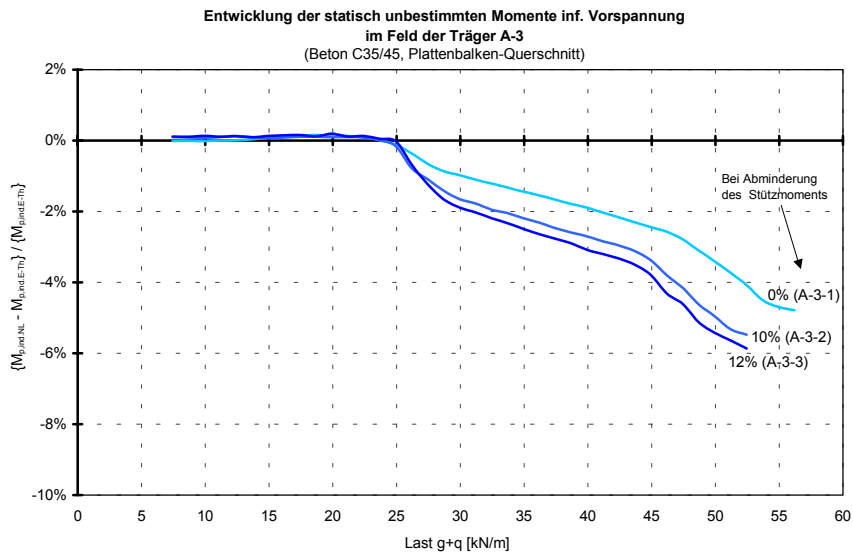
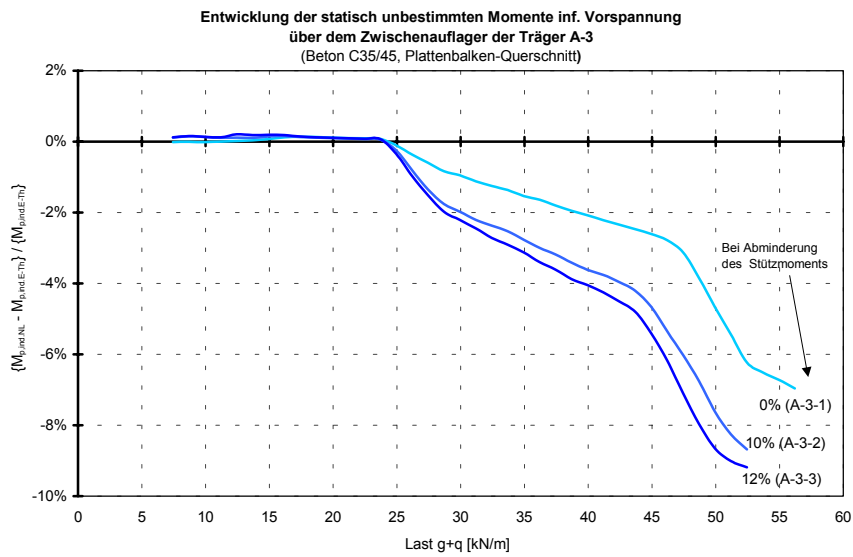
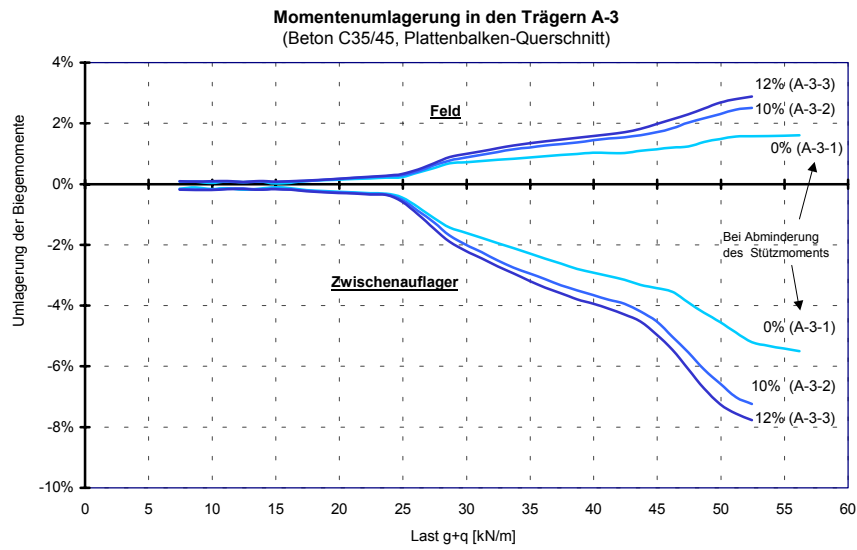
Momentenumlagerung



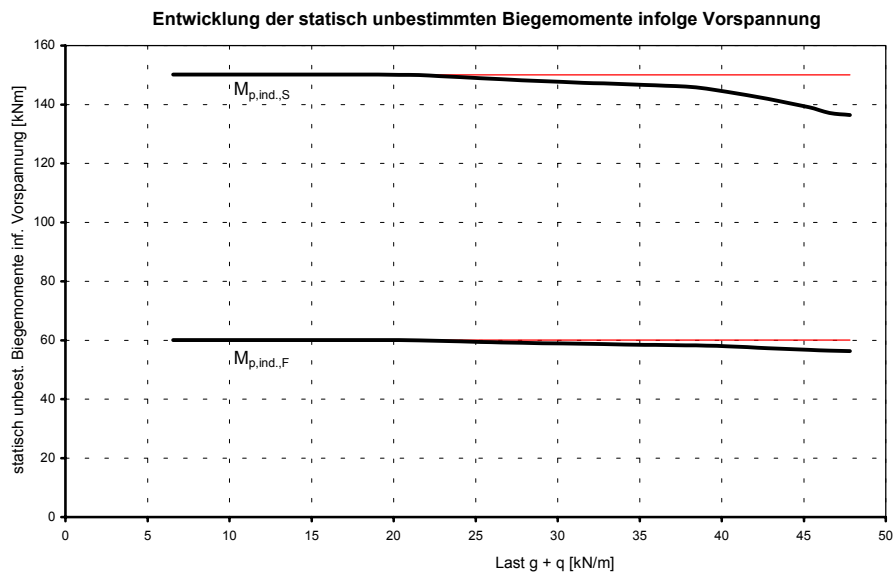
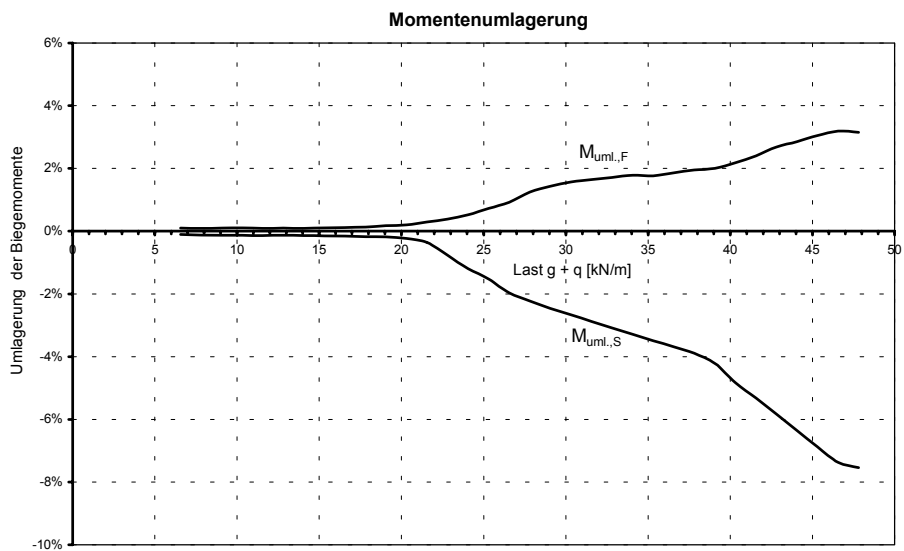
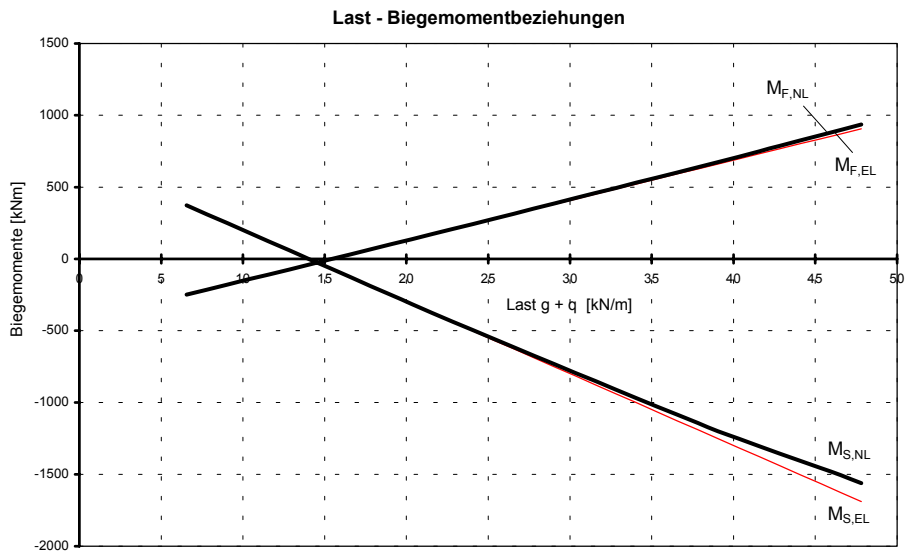
Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung



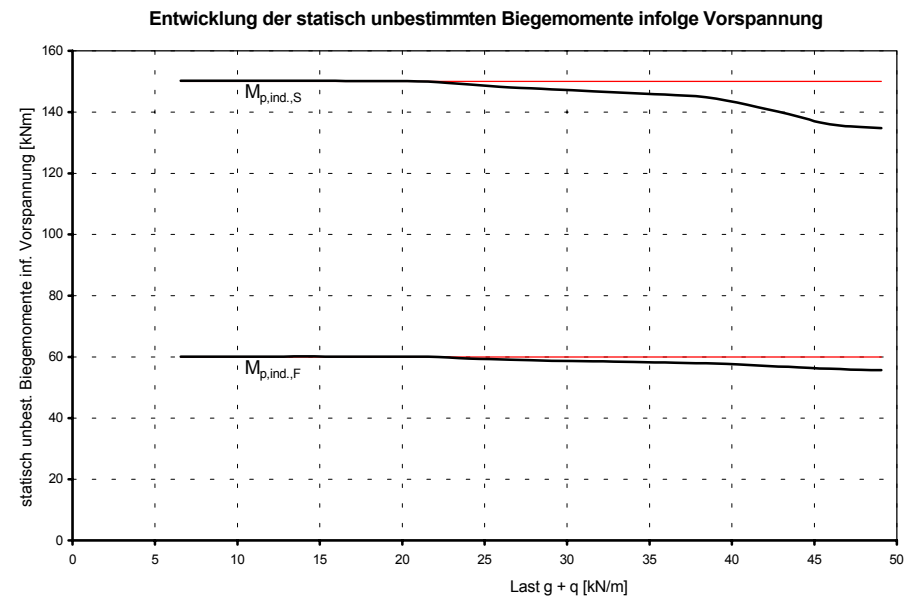
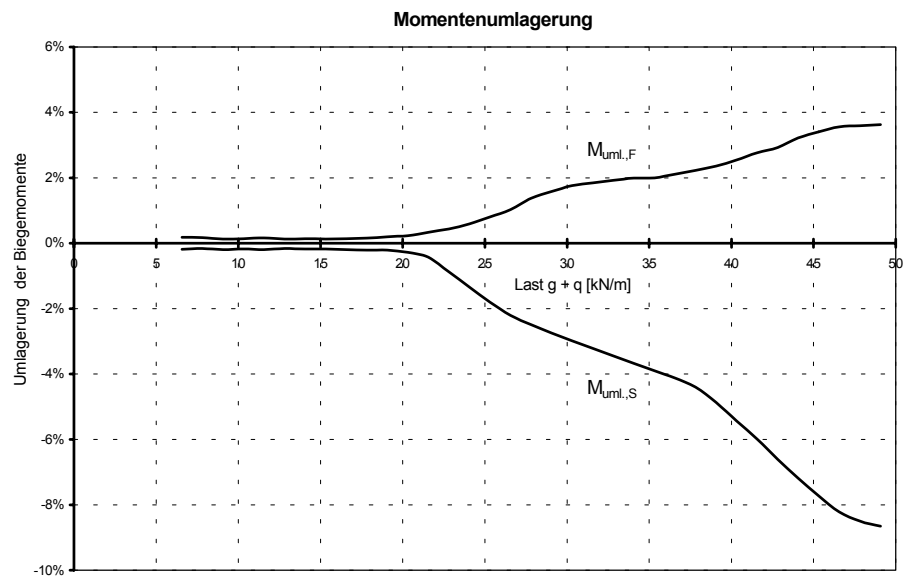
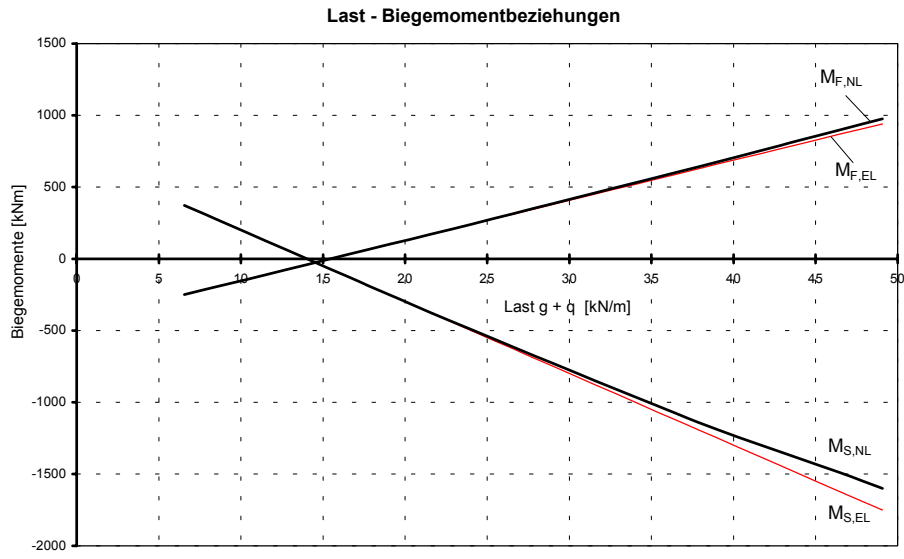
### Systeme A-3-1 bis A-3-3 (Zusammenfassung)



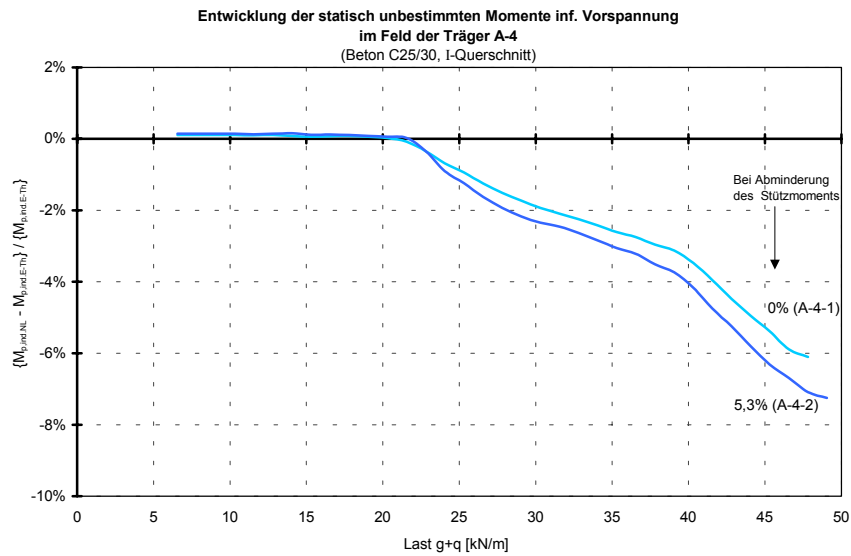
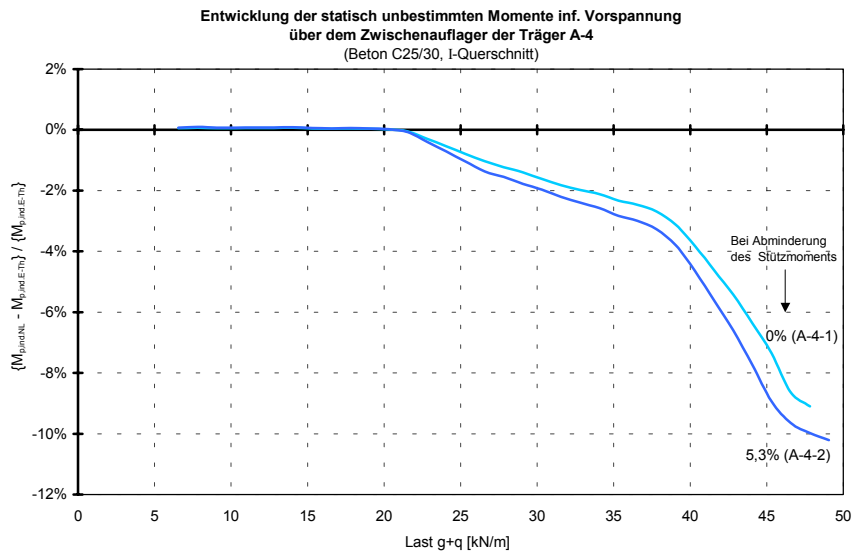
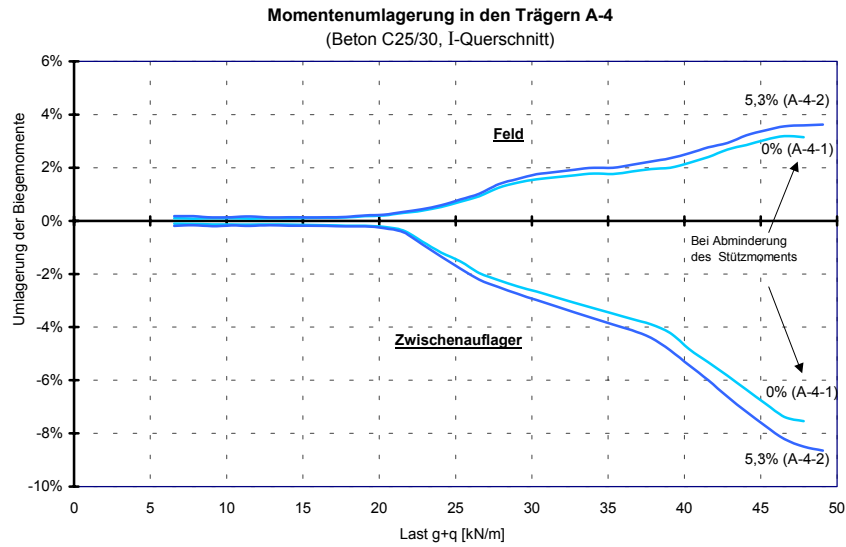
System A-4-1 (0% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



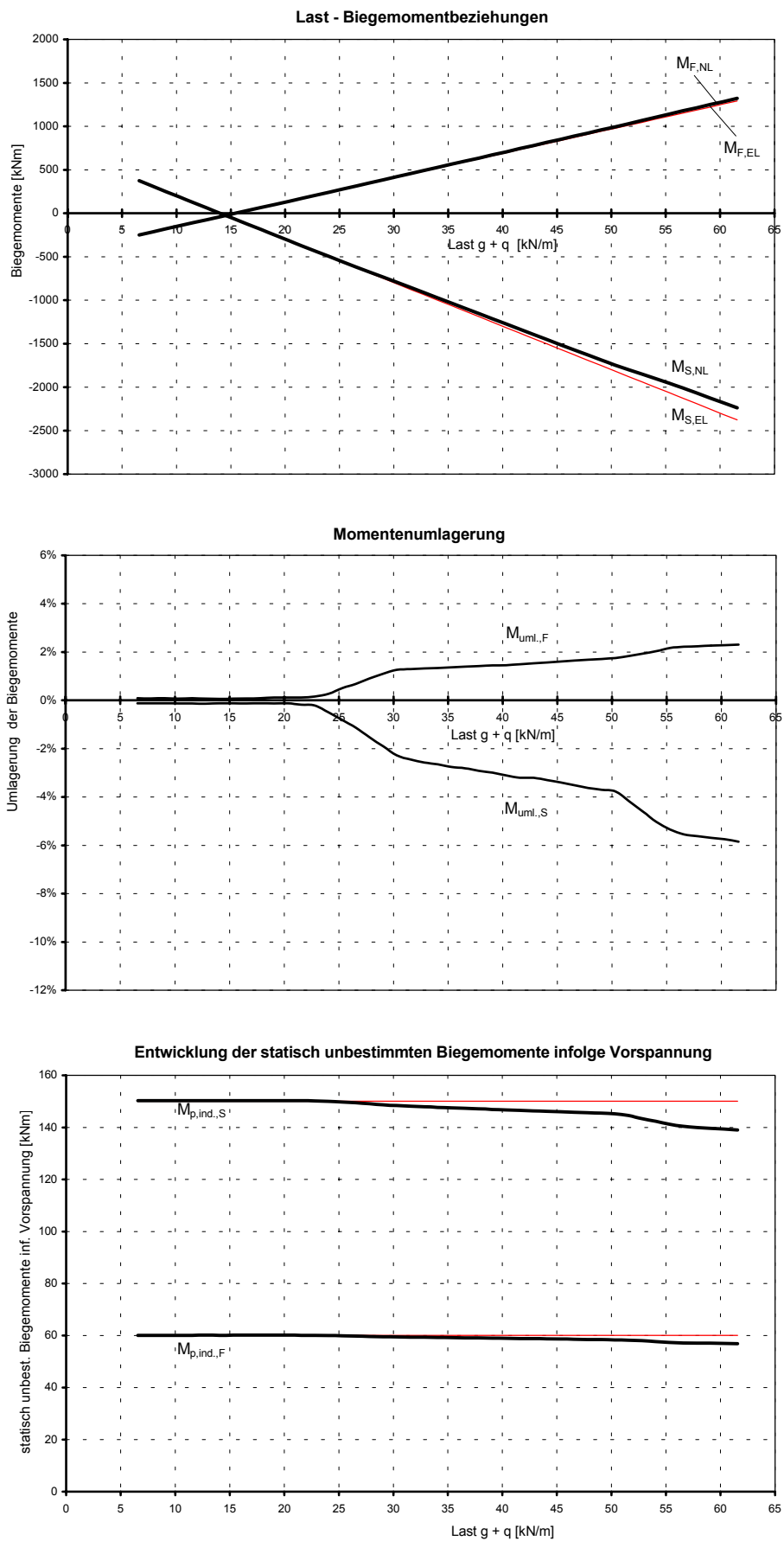
System A-4-2 (5,3% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



### Systeme A-4-1 bis A-4-2 (Zusammenfassung)

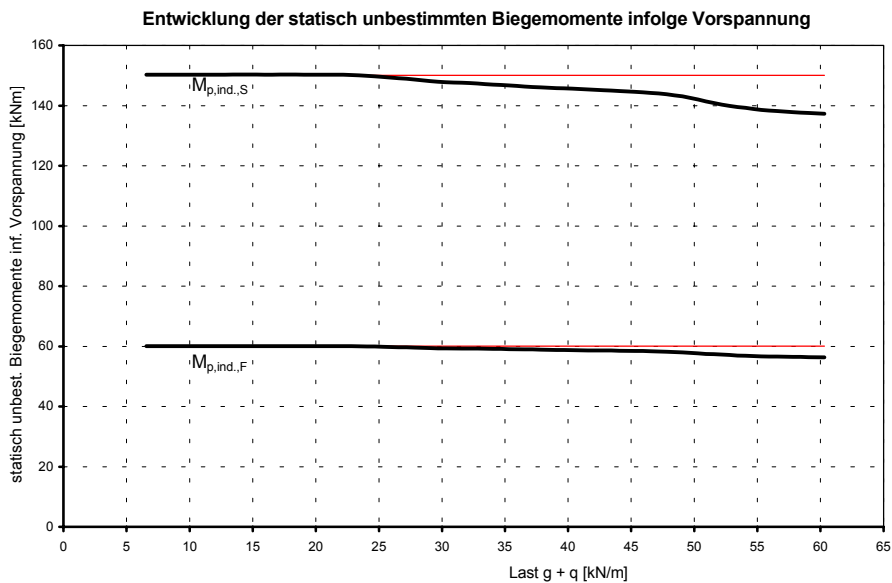
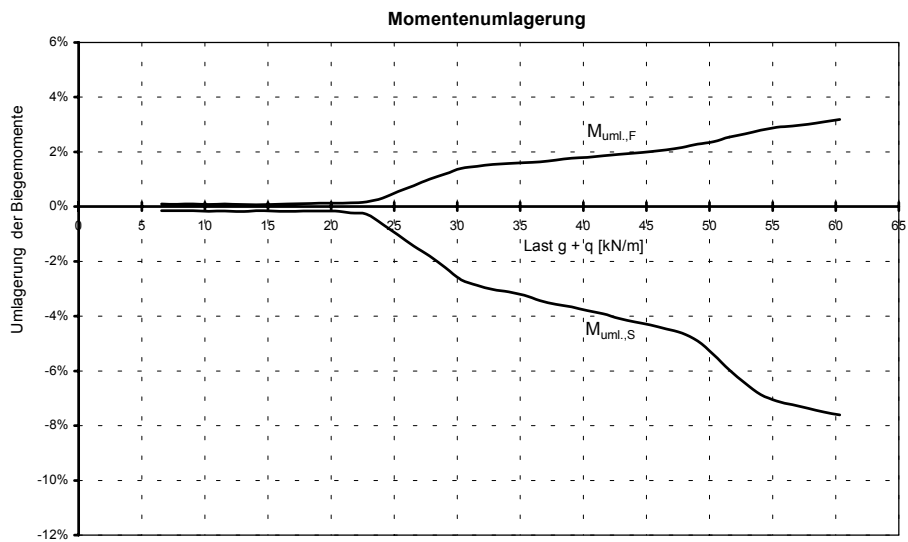
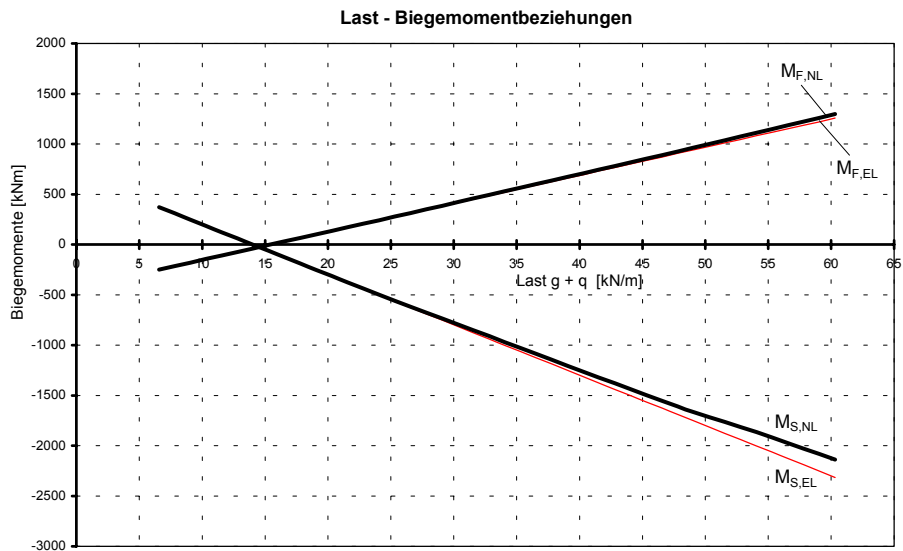


System A-5-1 (0% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)

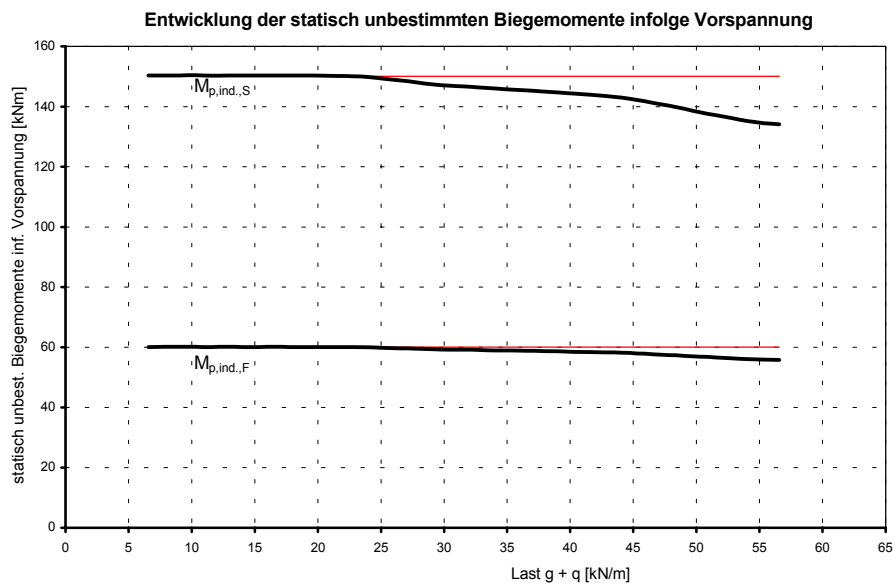
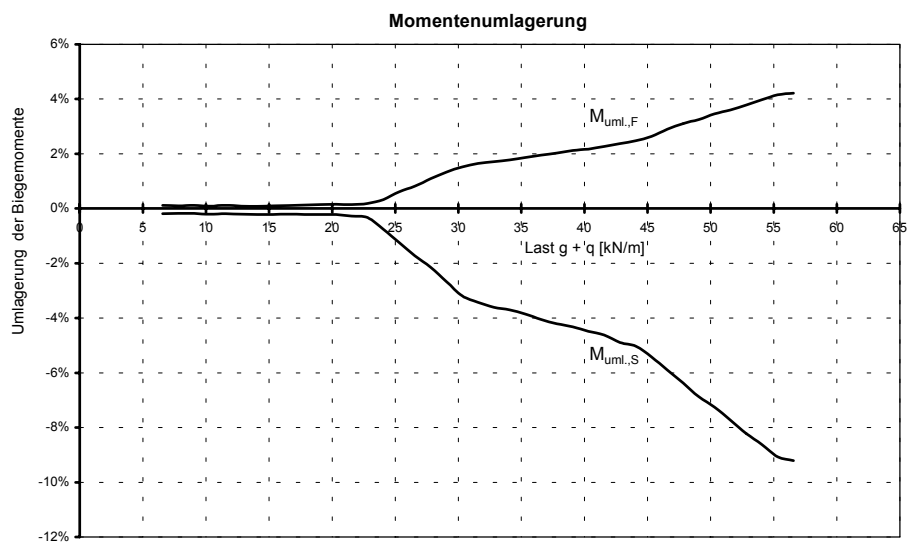
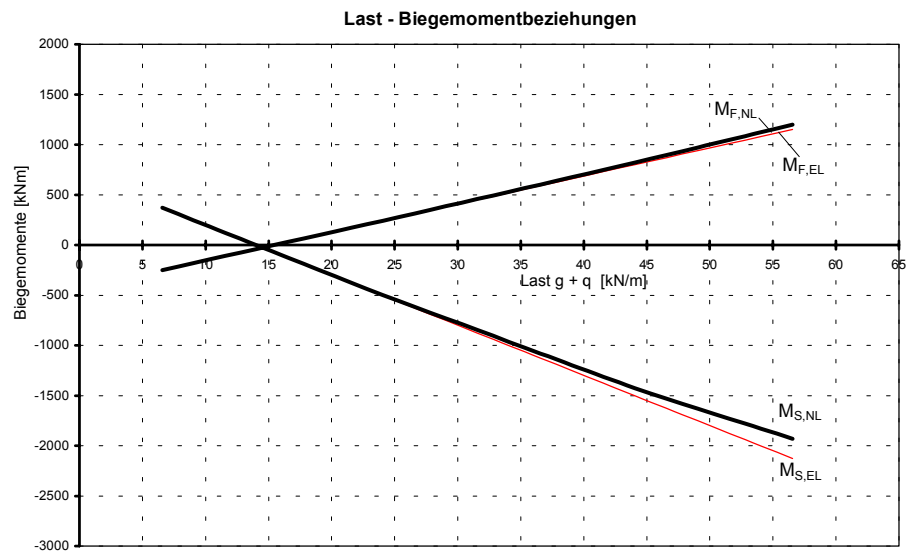




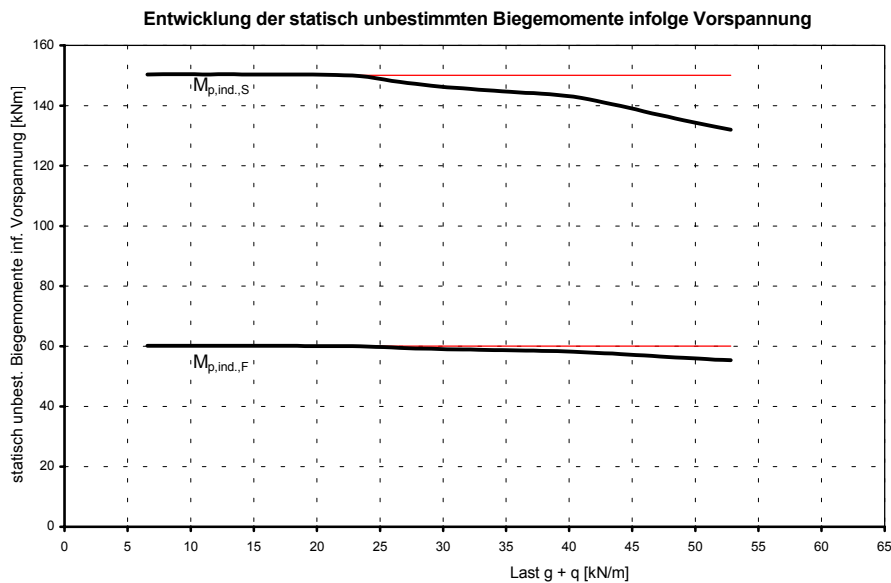
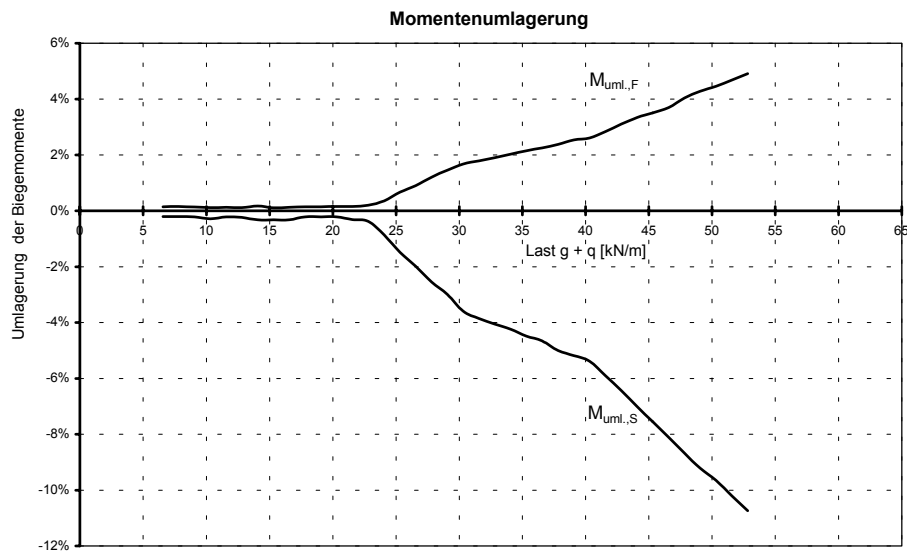
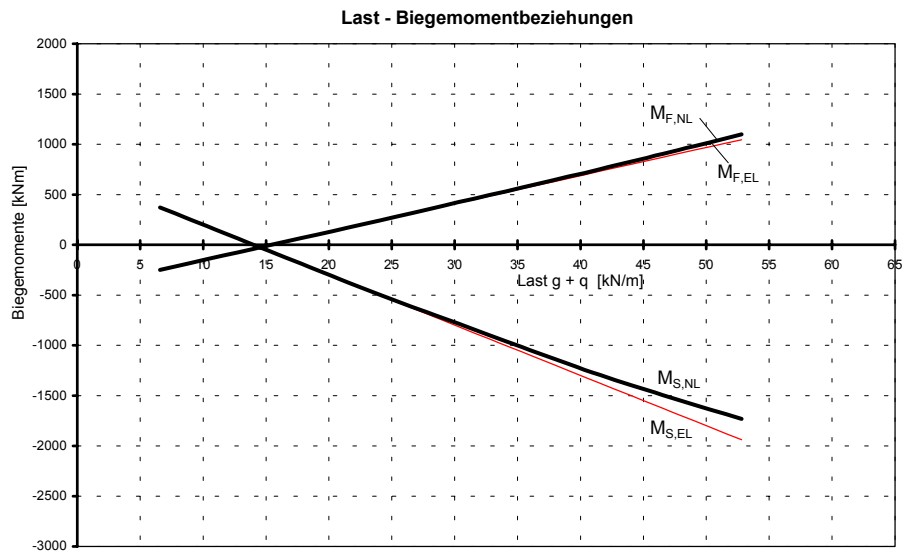
### System A-5-2 (10% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



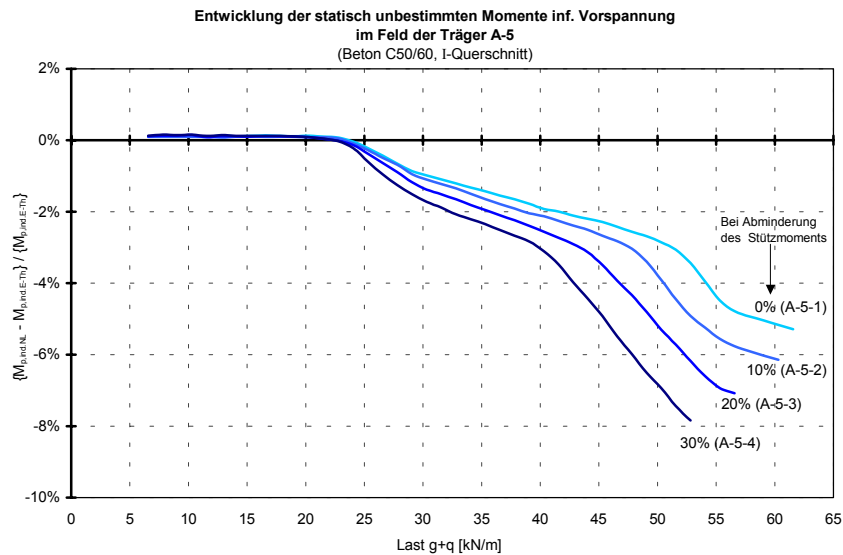
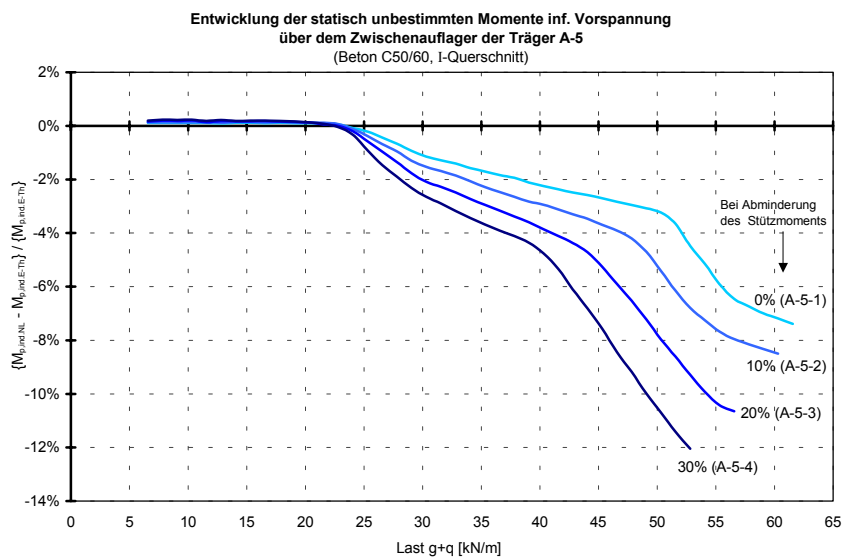
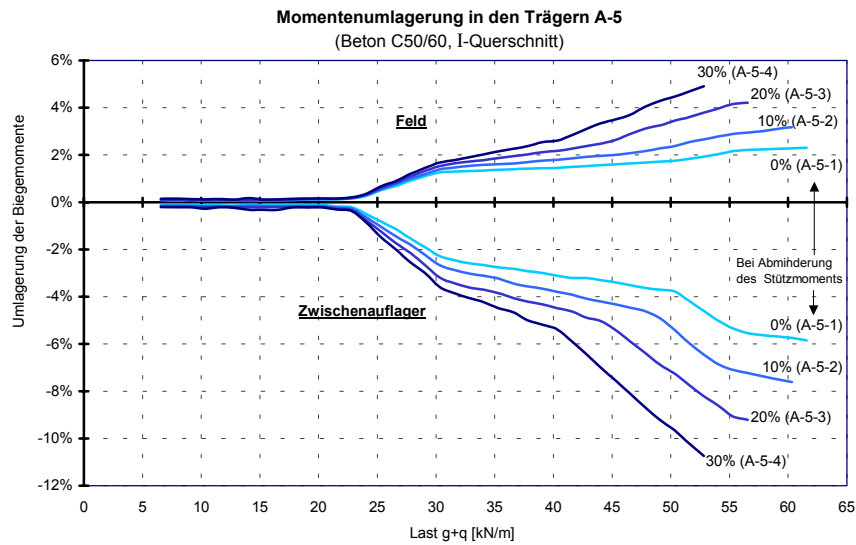
System A-5-3 (20% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



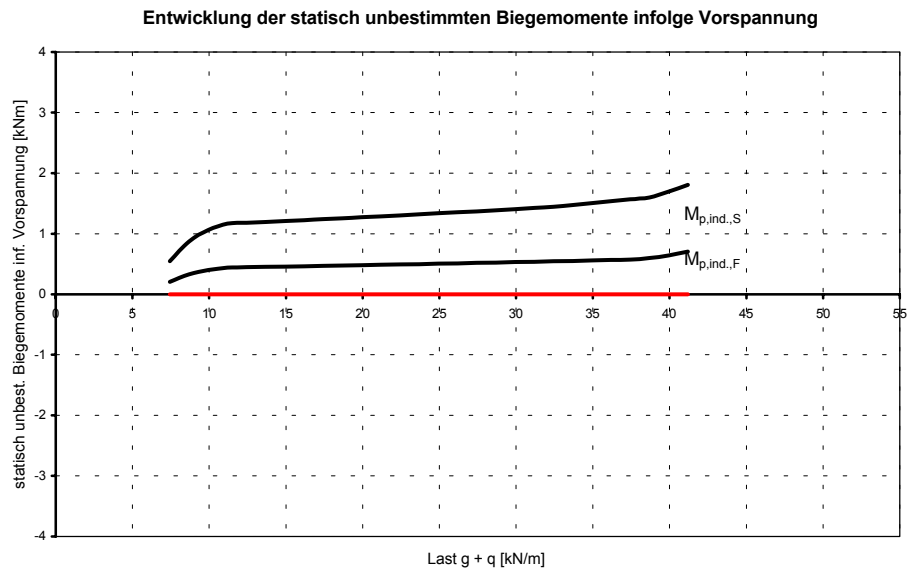
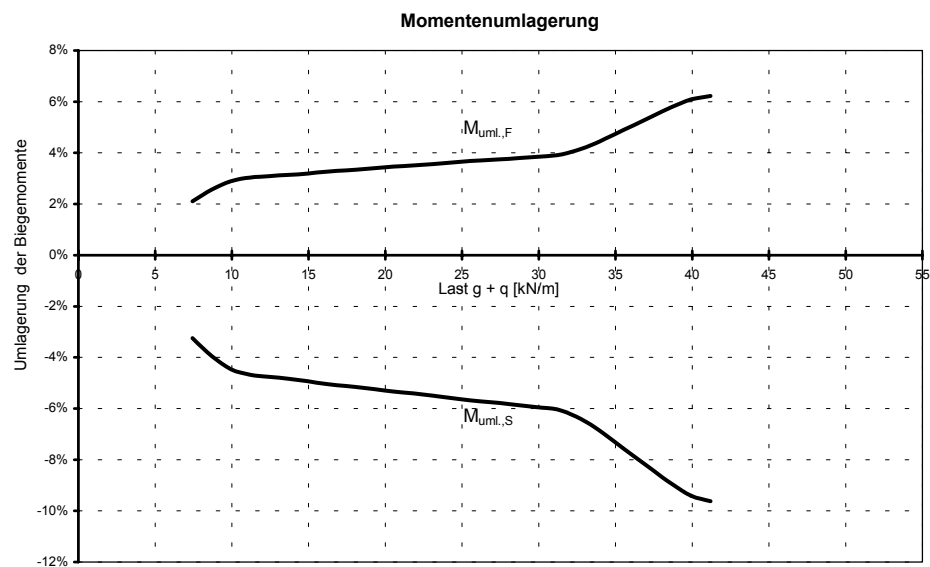
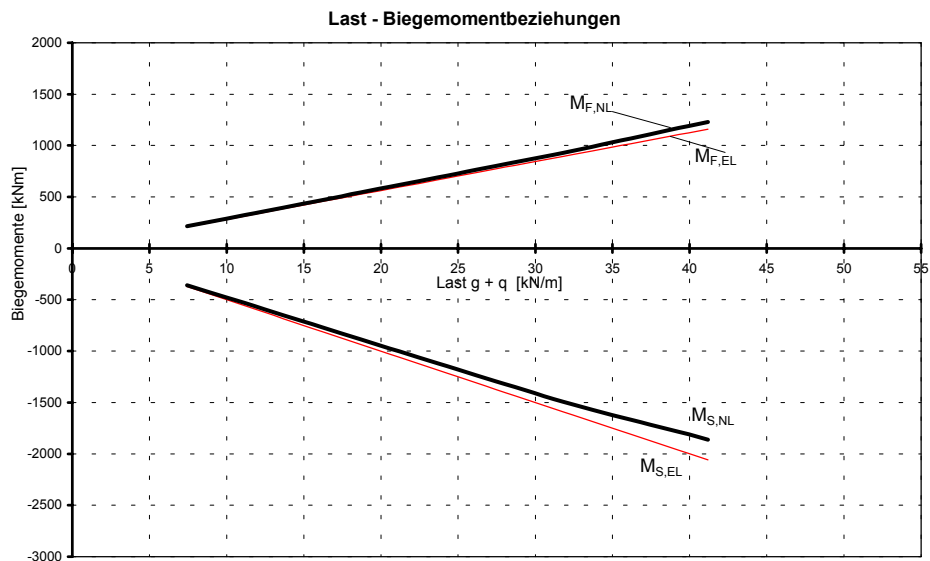
System A-5-4 (30% Momentenumlagerung bei der Querschnittsbemessung)



### Systeme A-5-1 bis A-5-4 (Zusammenfassung)

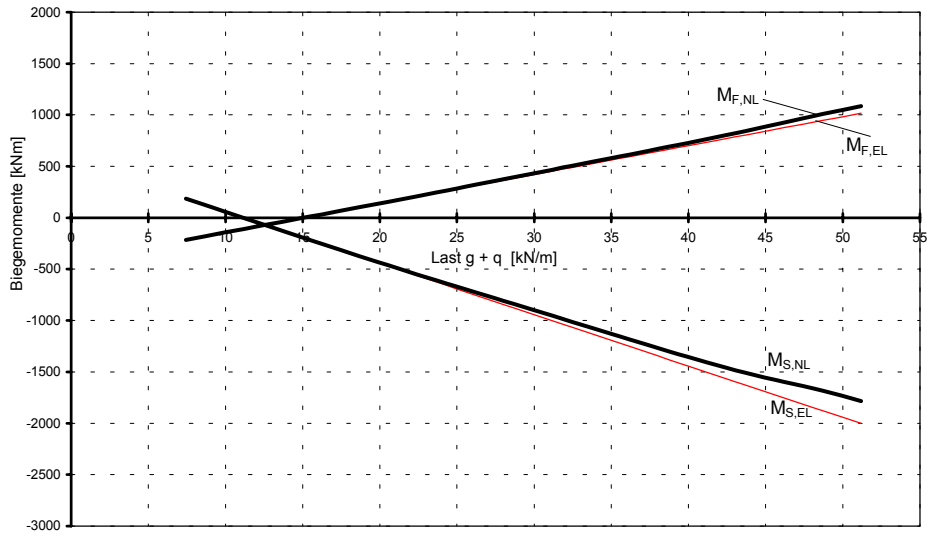


### System B-1-1 ( $M_{p,ind.} = 0$ , zentrische Vorspannung)

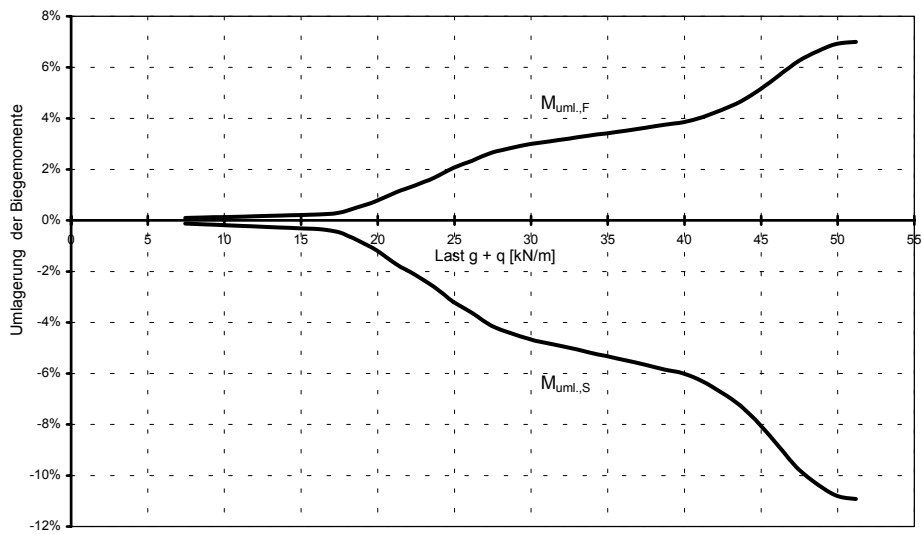


System B-1-2 (kleine stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

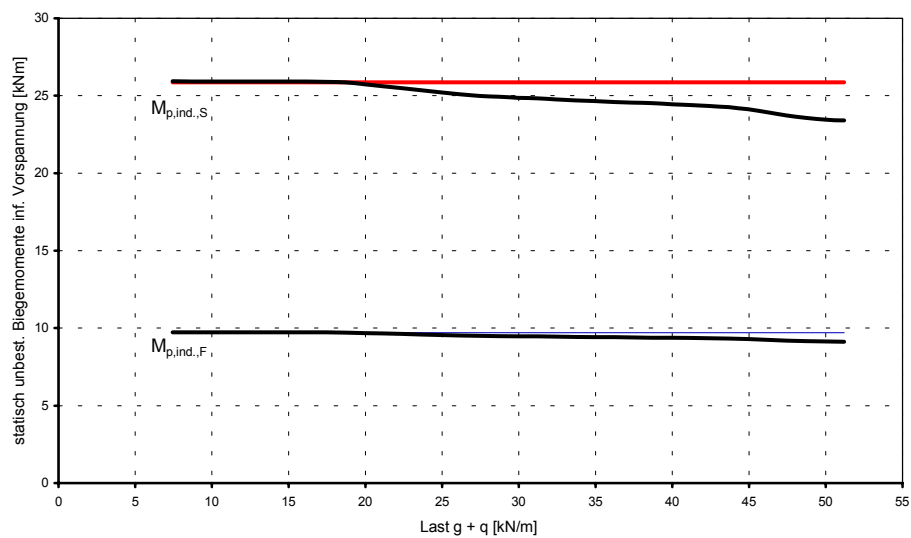
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

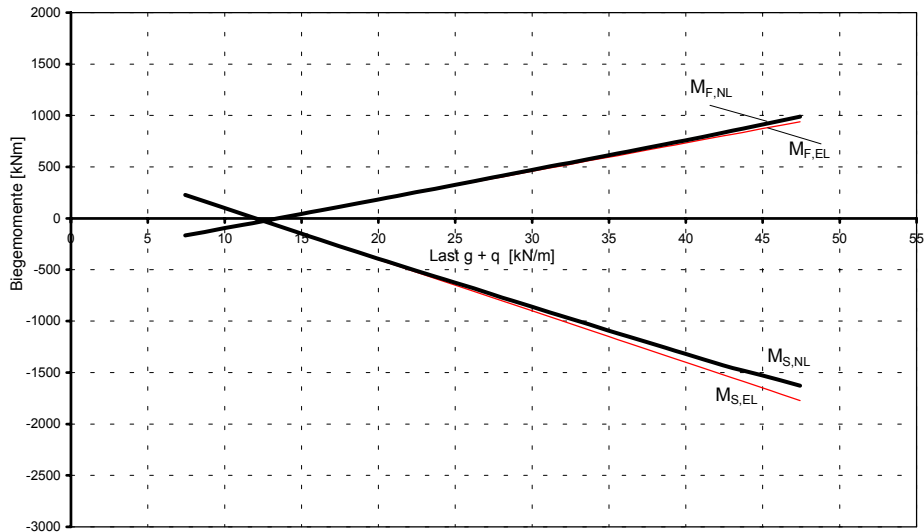


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

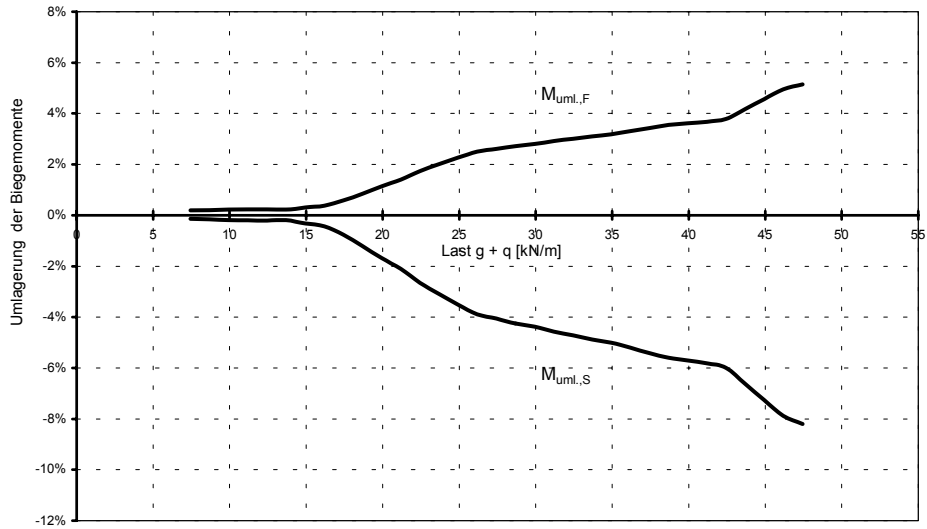


System B-1-3 (mittlere stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

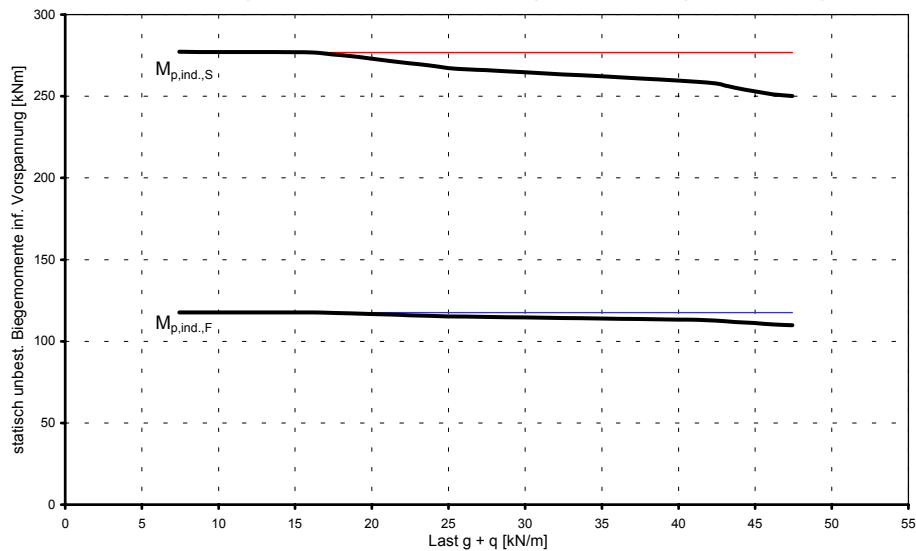
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

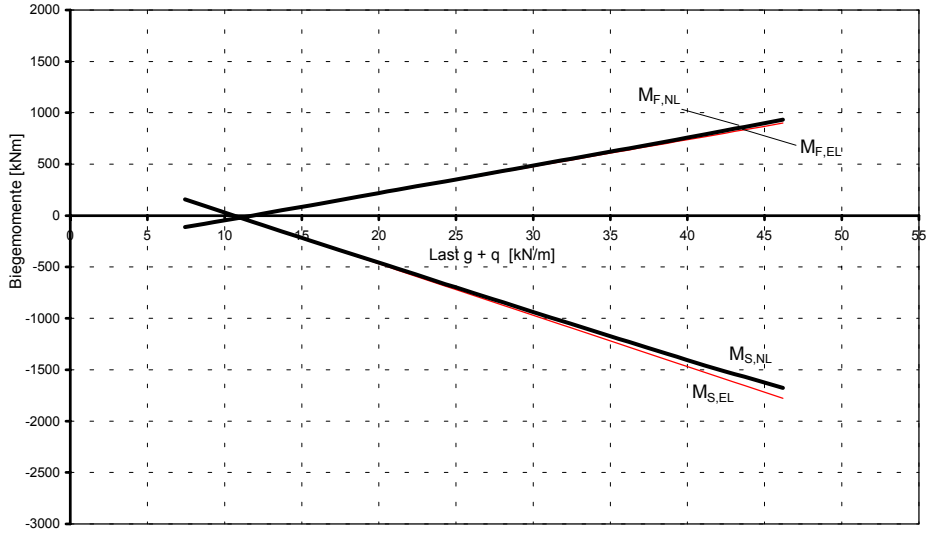


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

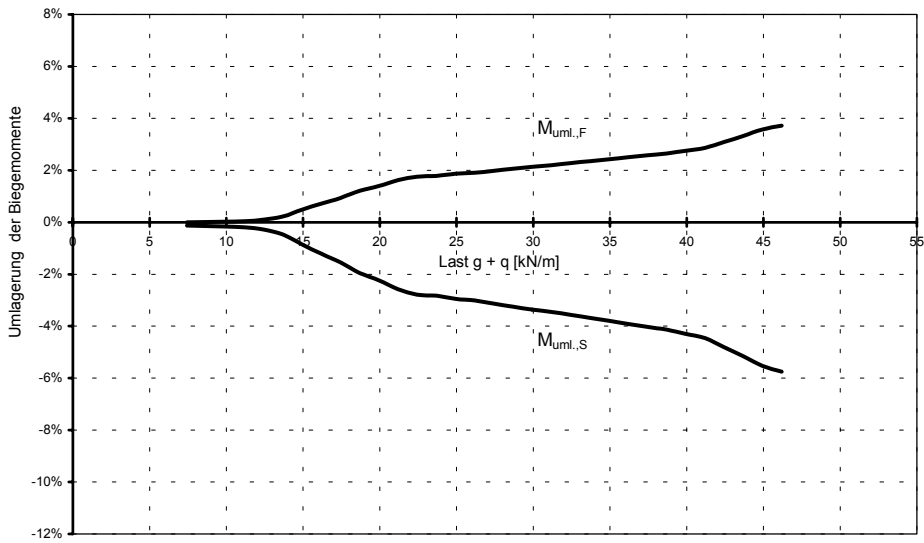


System B-1-4 (große stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

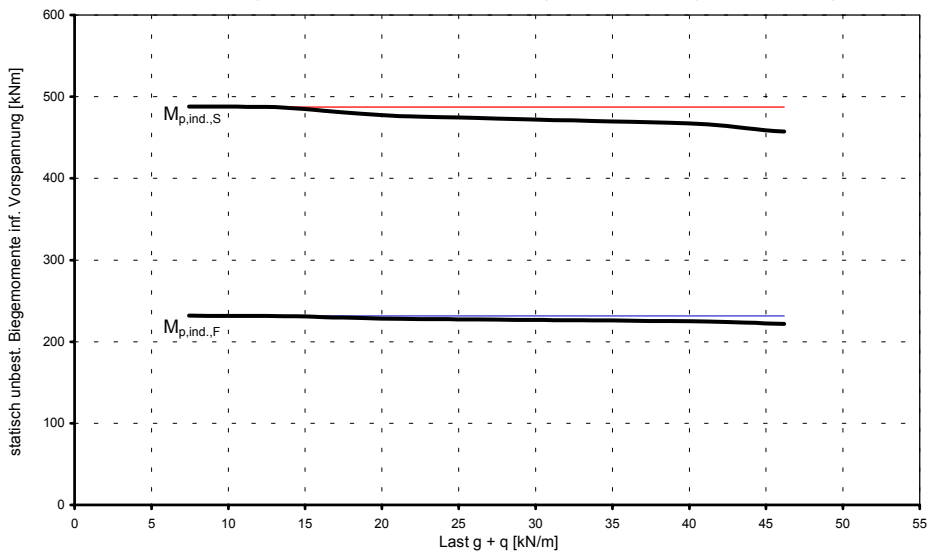
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

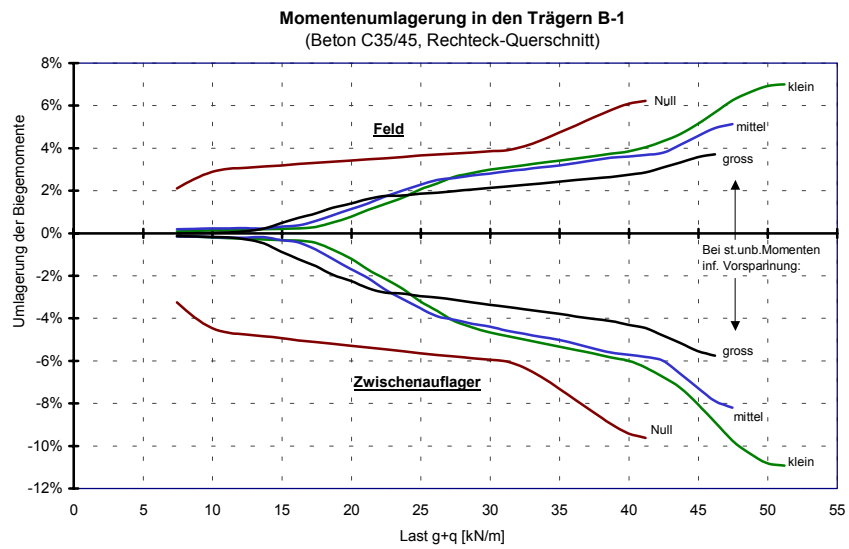


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

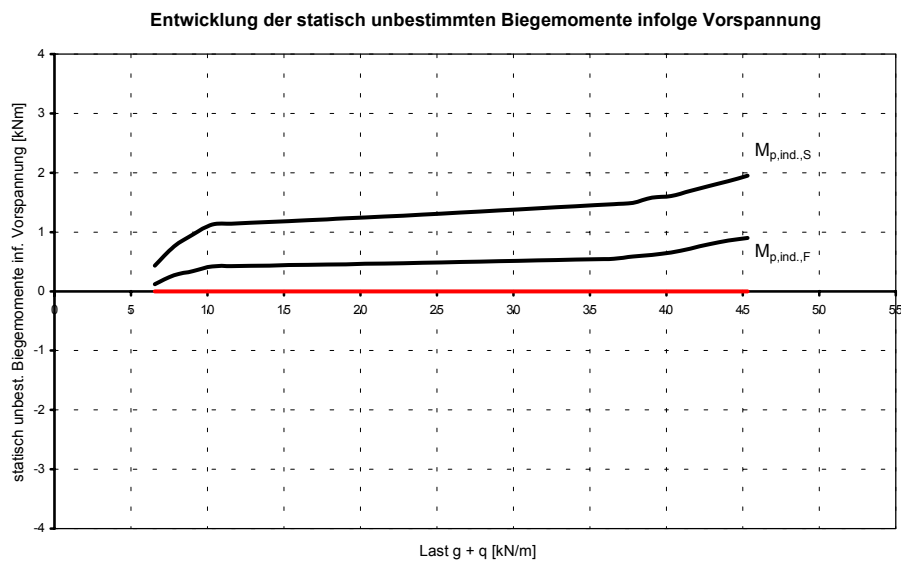
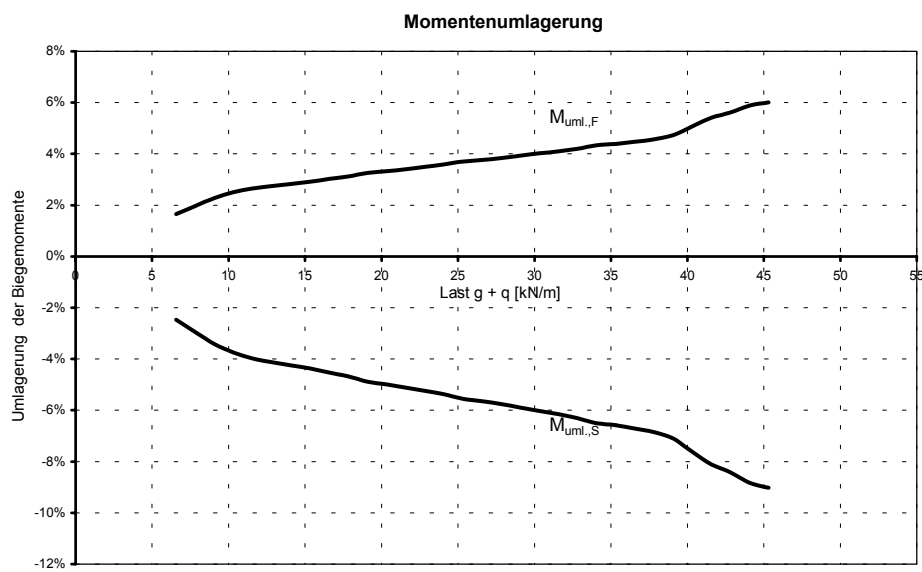
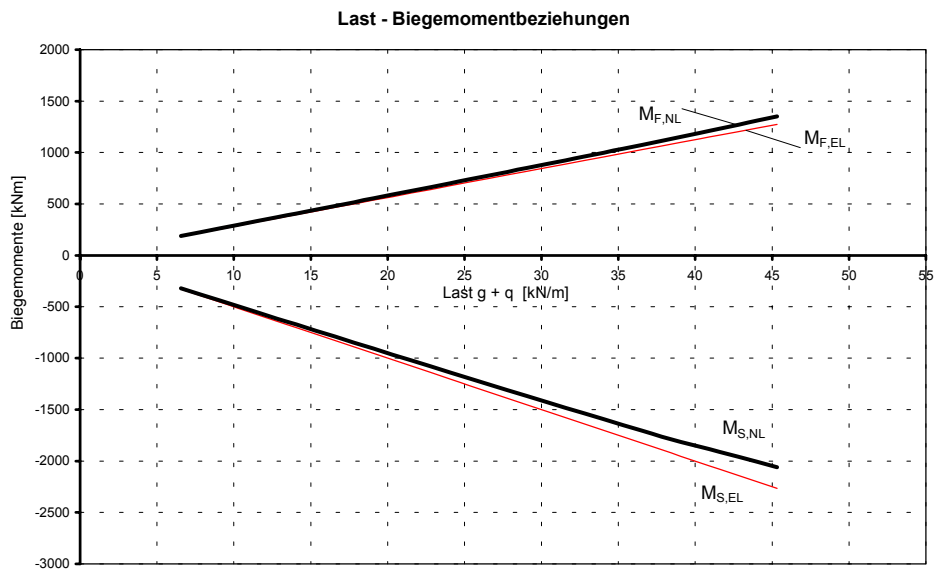




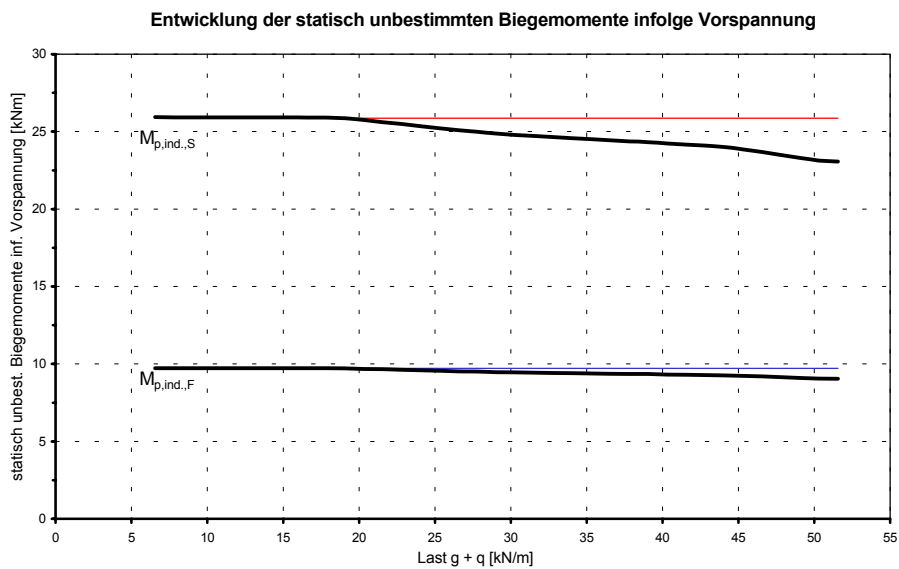
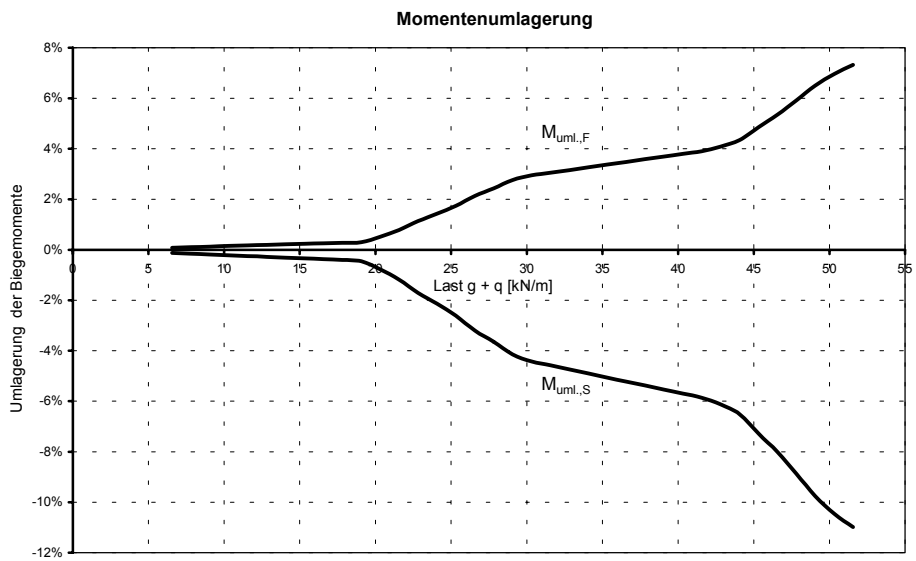
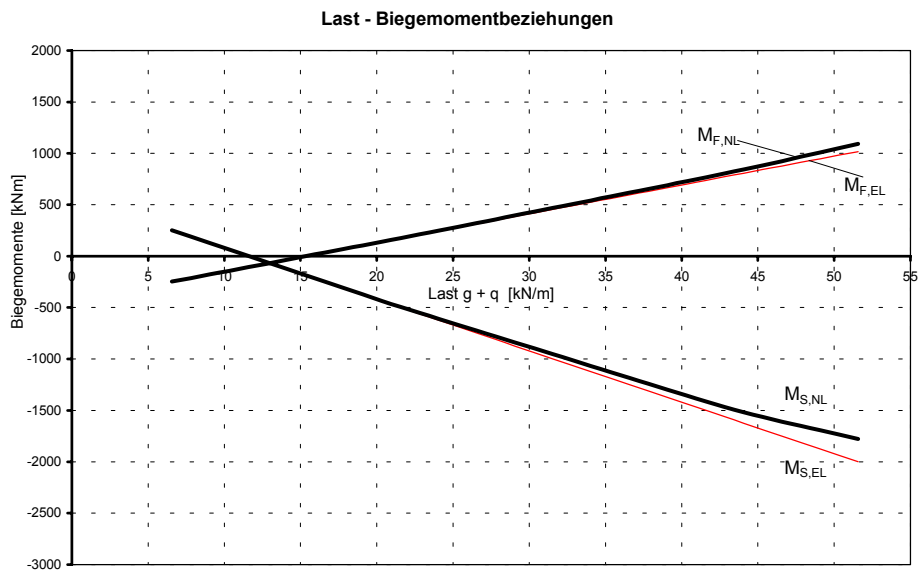
### Systeme B-1-1 bis B-1-4 (Zusammenfassung)



System B-2-1 ( $M_{p,ind.} = 0$ , zentrische Vorspannung)

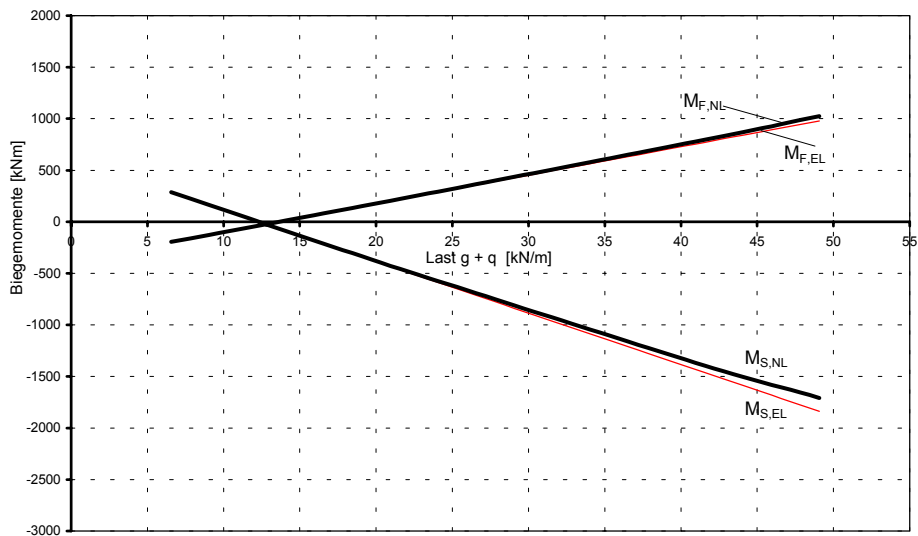


System B-2-2 (kleine stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

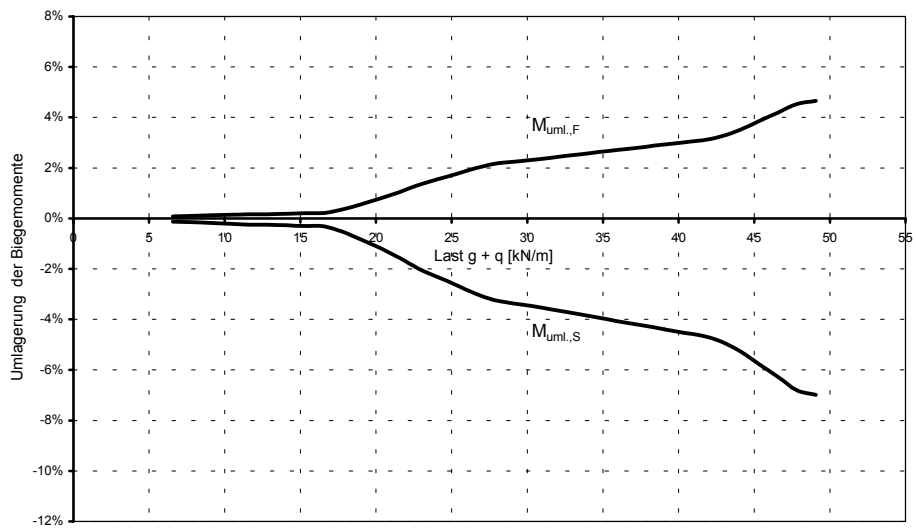


System B-2-3 (mittlere stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

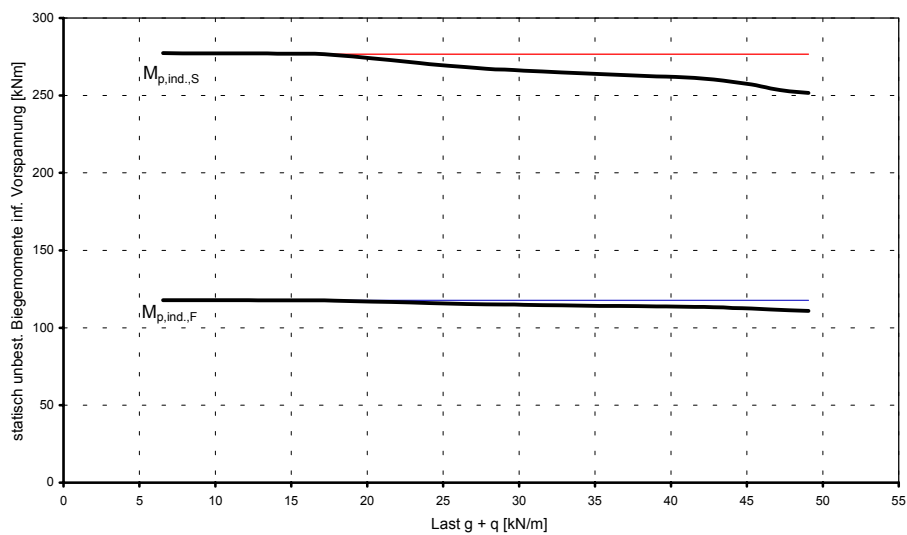
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

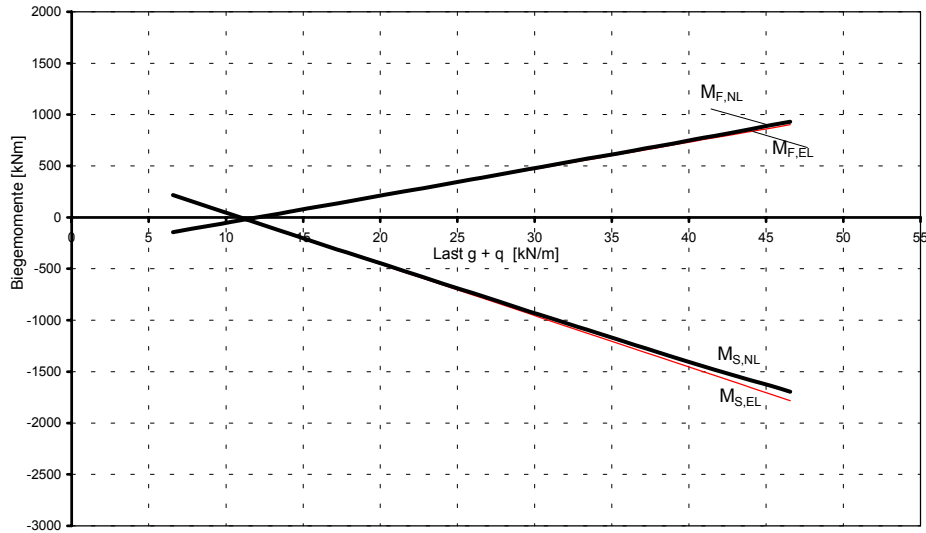


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

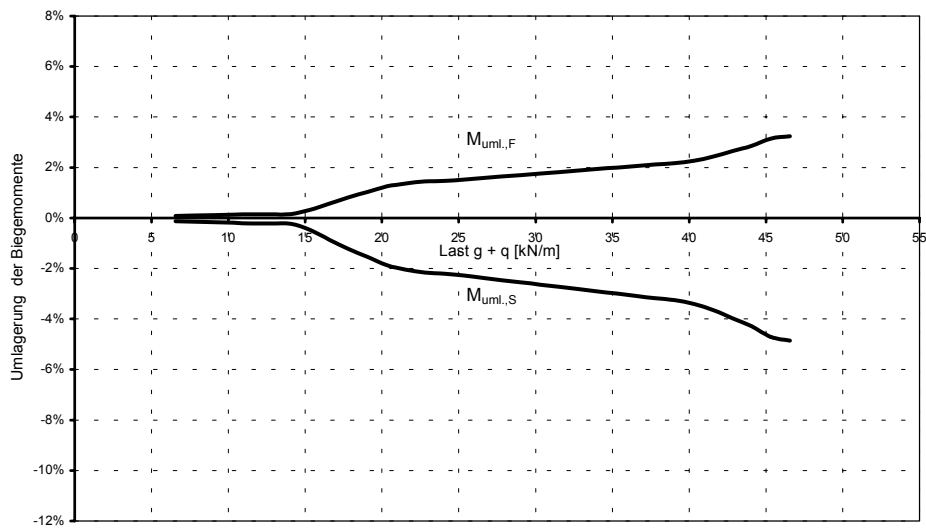


System B-2-4 (große stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

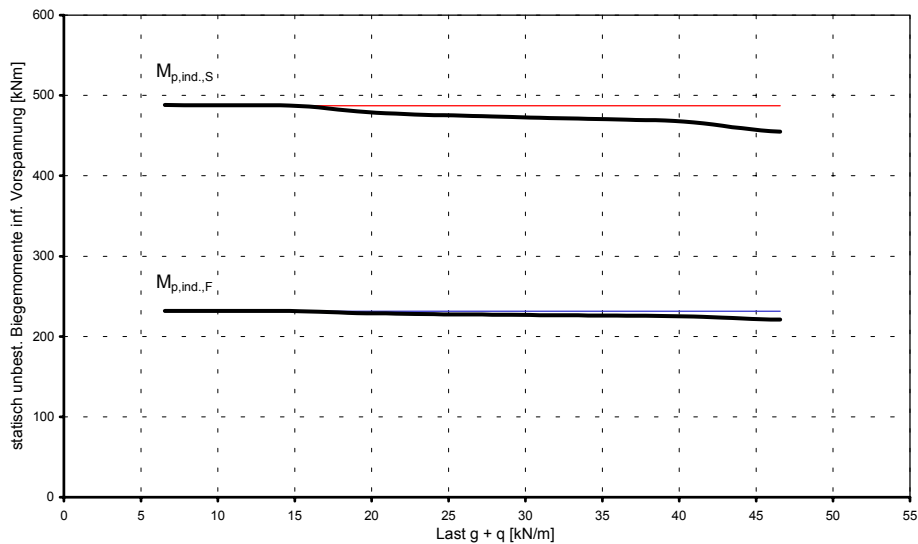
Last - Biegemomentbeziehungen



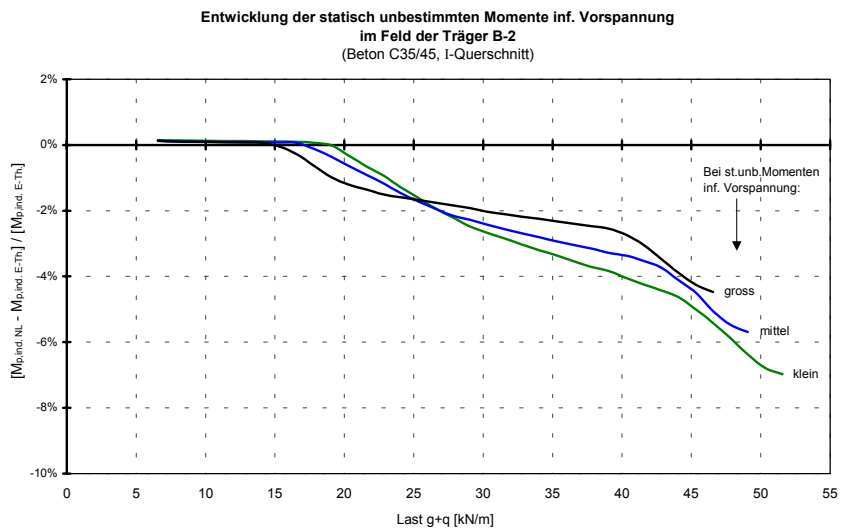
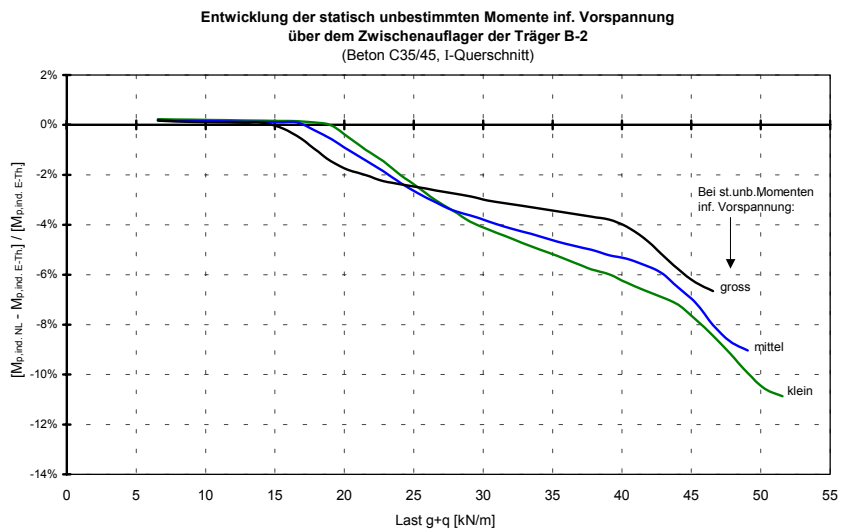
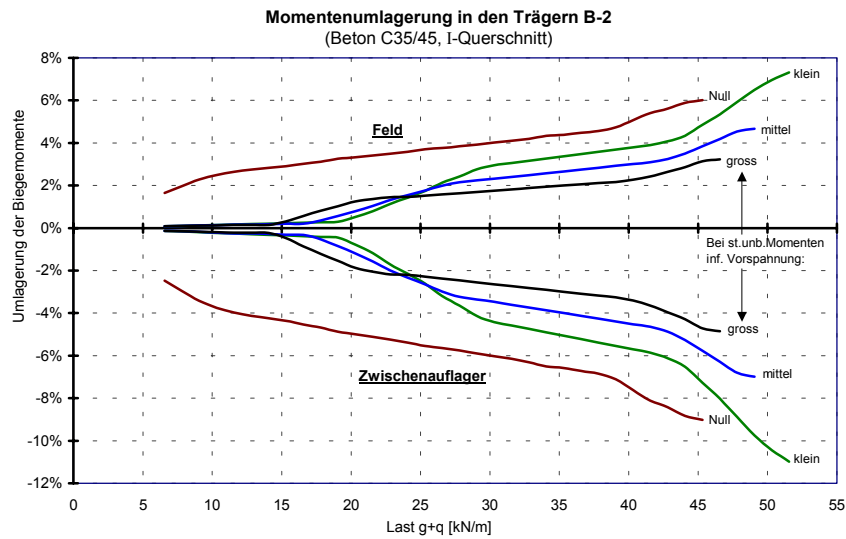
Momentenumlagerung



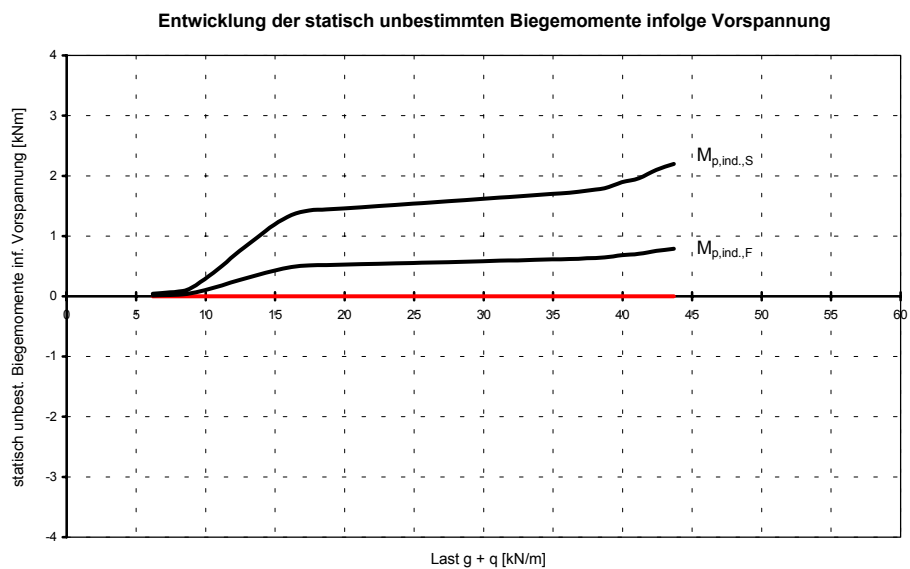
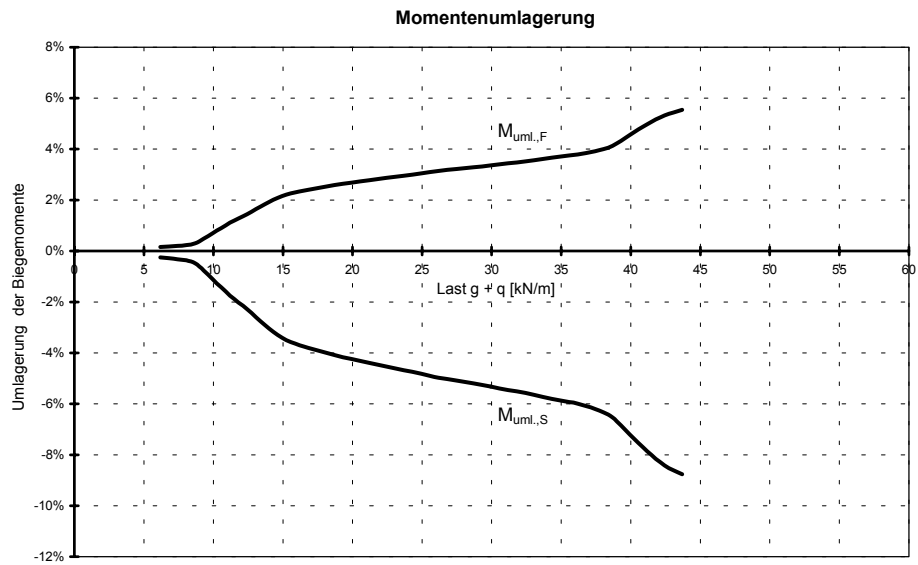
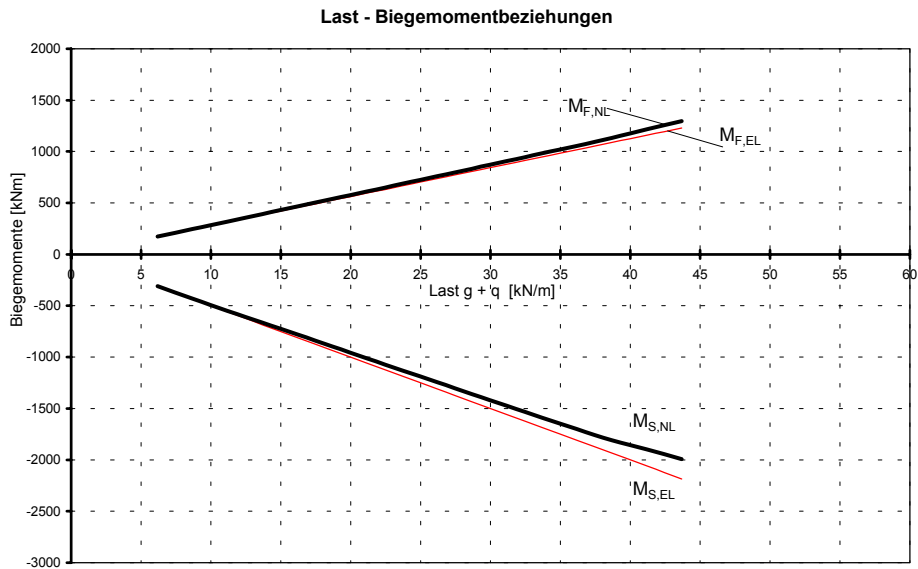
Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung



### Systeme B-2-1 bis B-2-4 (Zusammenfassung)

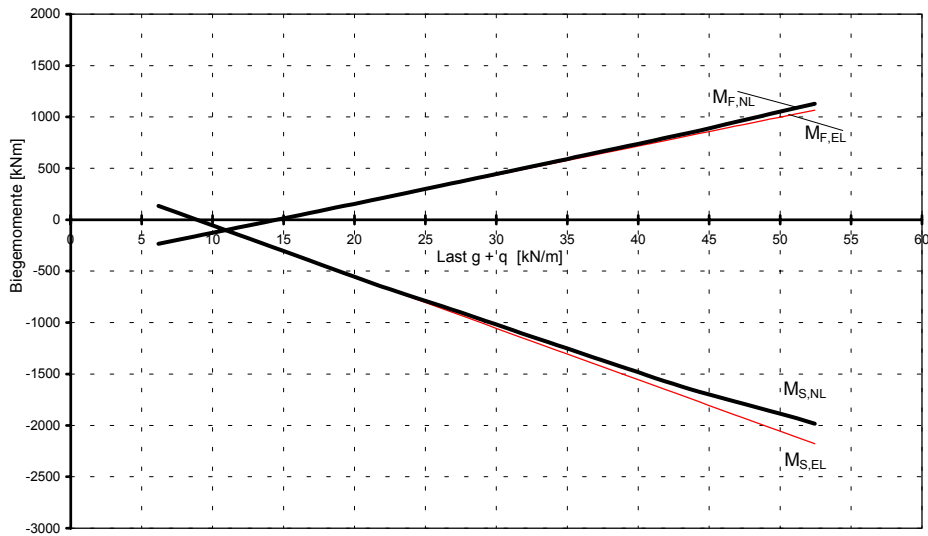


### System B-3-1 ( $M_{p,ind.} = 0$ , zentrische Vorspannung)

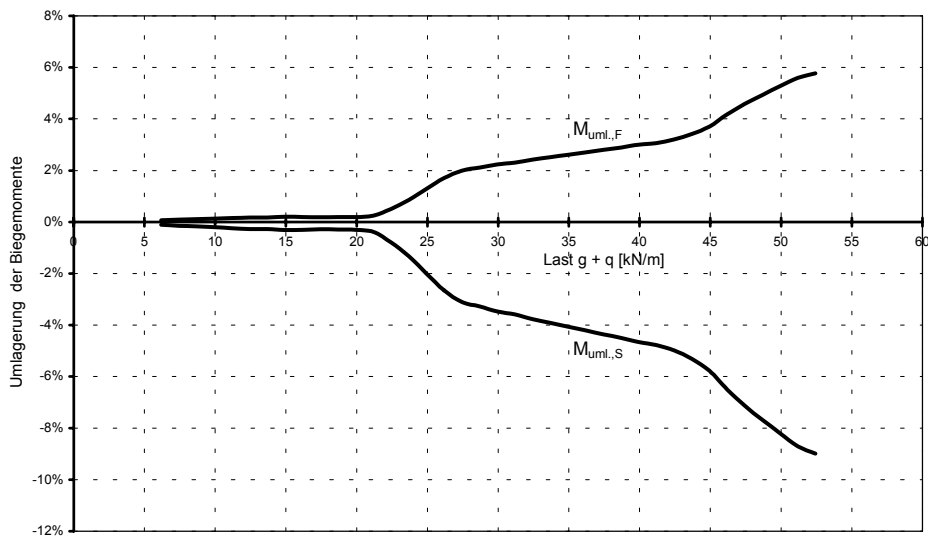


System B-3-2 (kleine stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

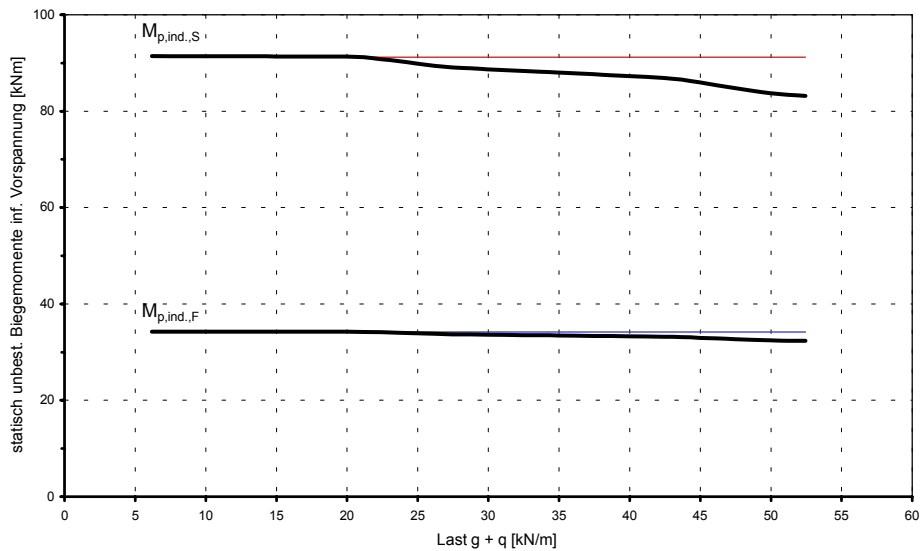
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung



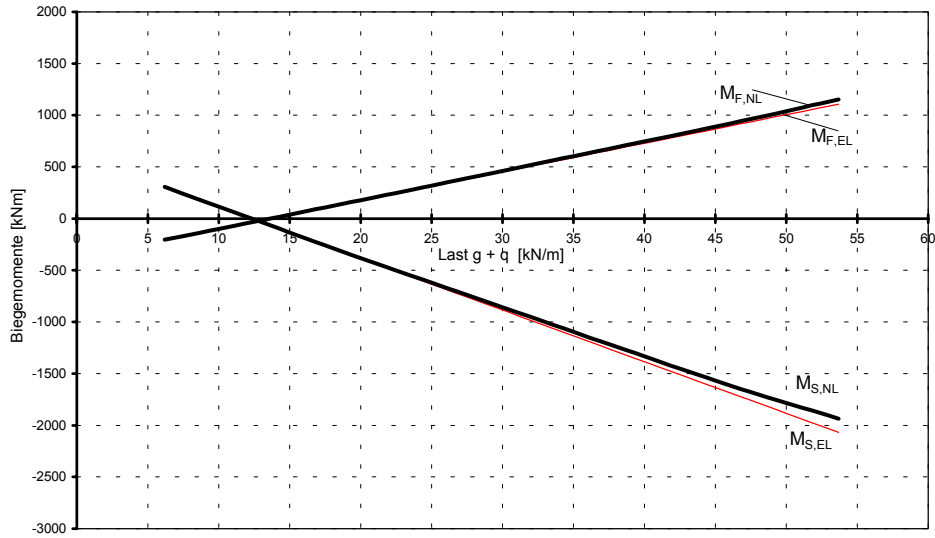
Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung



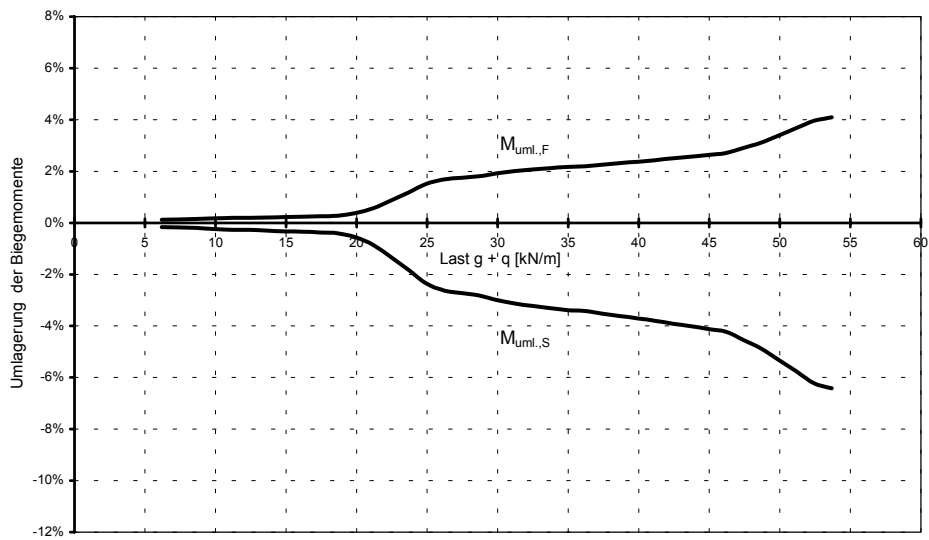


System B-3-3 (mittlere stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

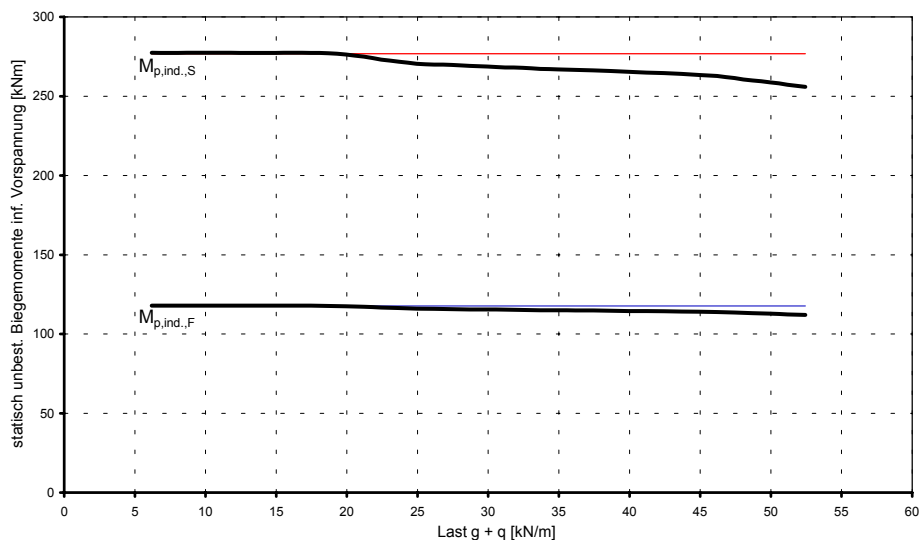
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

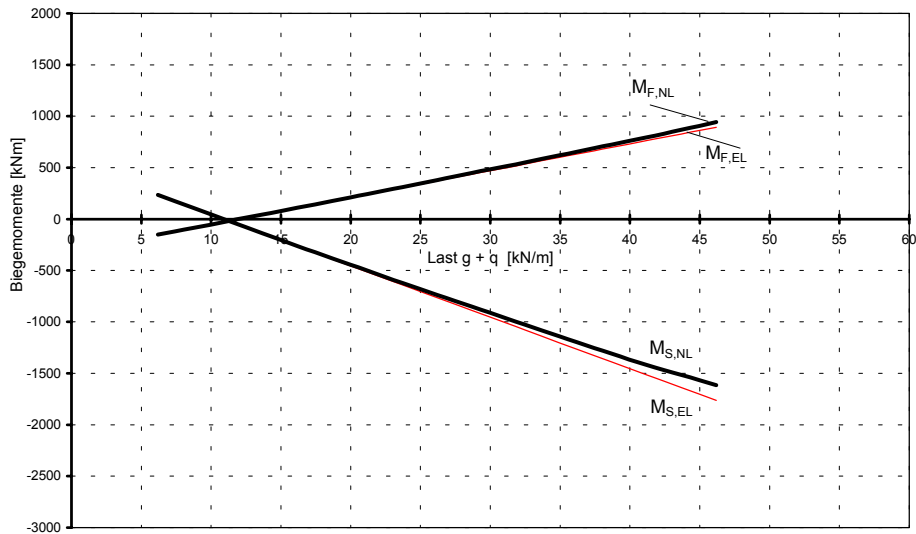


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

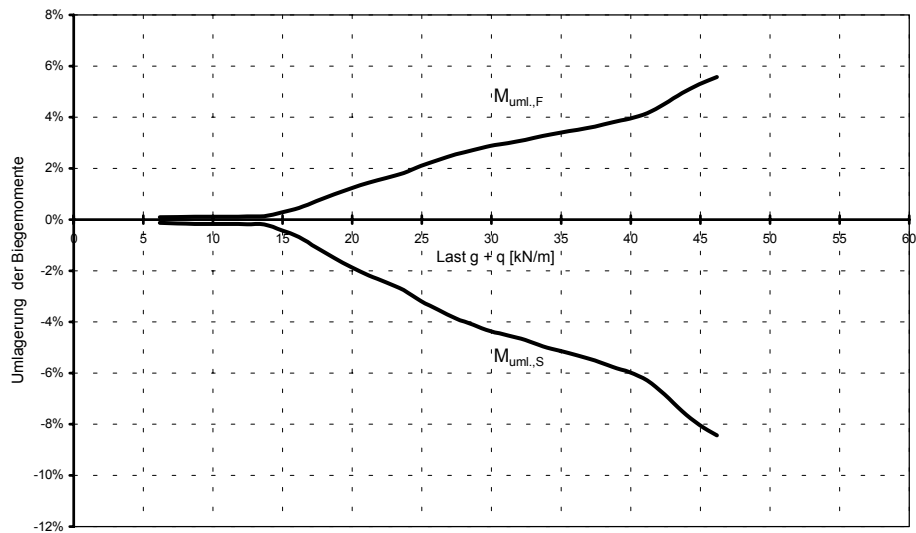


System B-3-4 (große stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

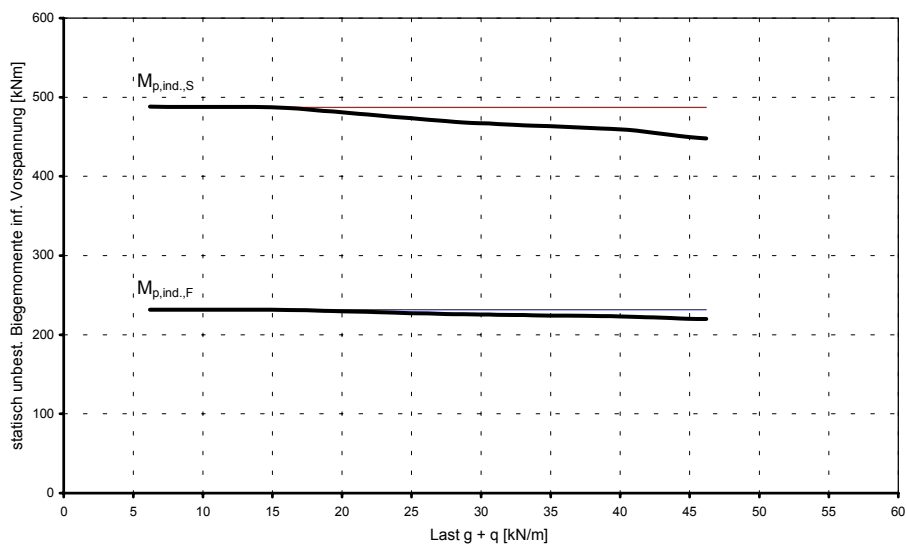
Last - Biegemomentbeziehungen



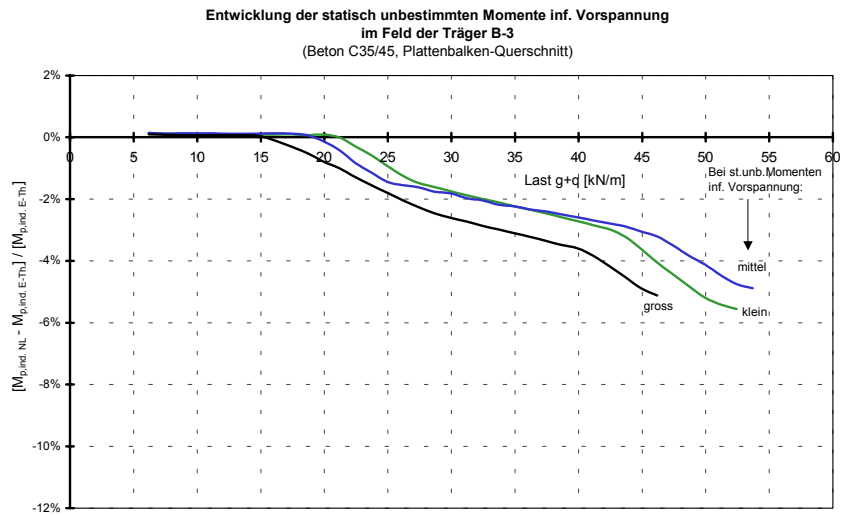
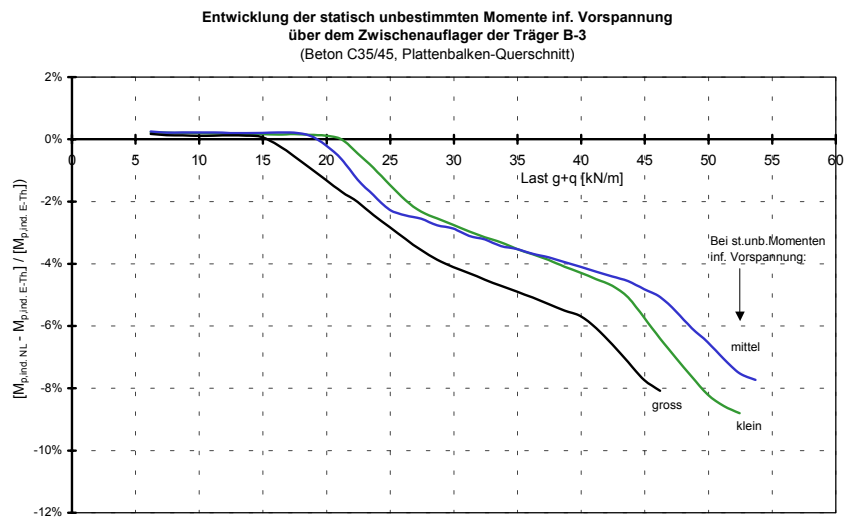
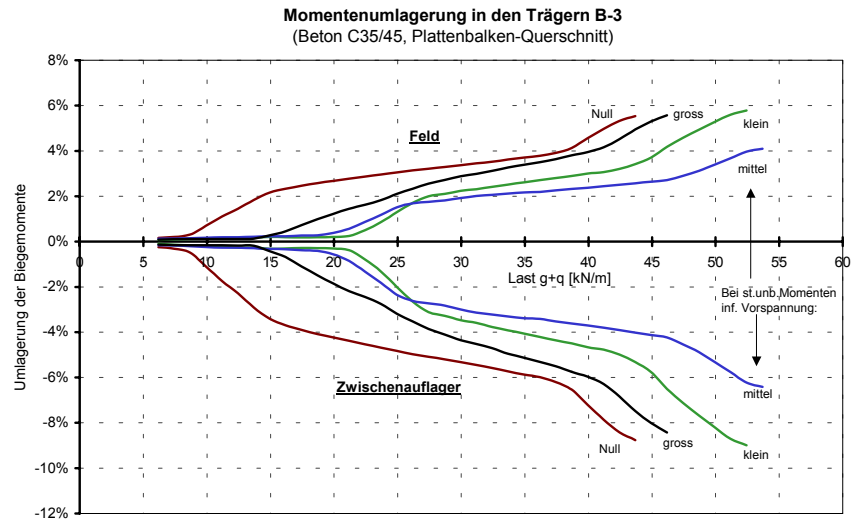
Momentenumlagerung



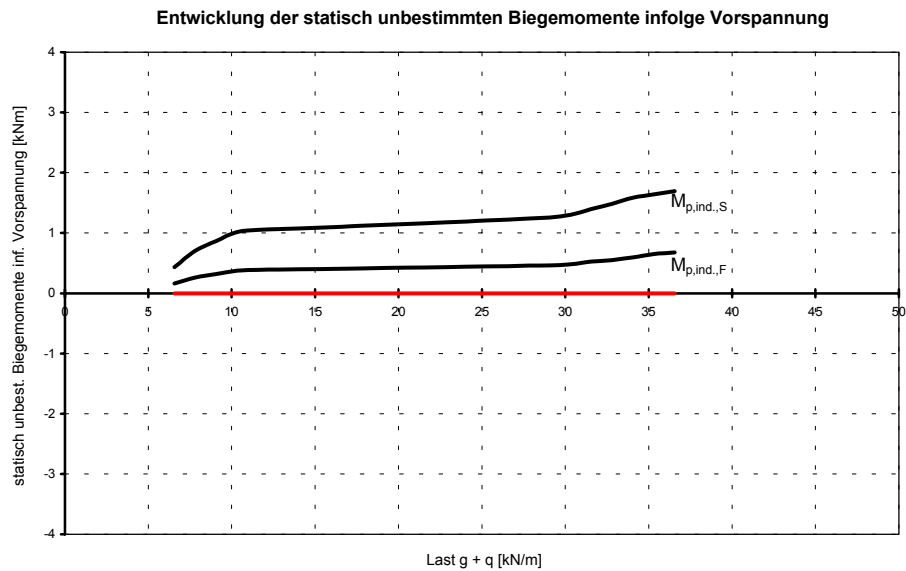
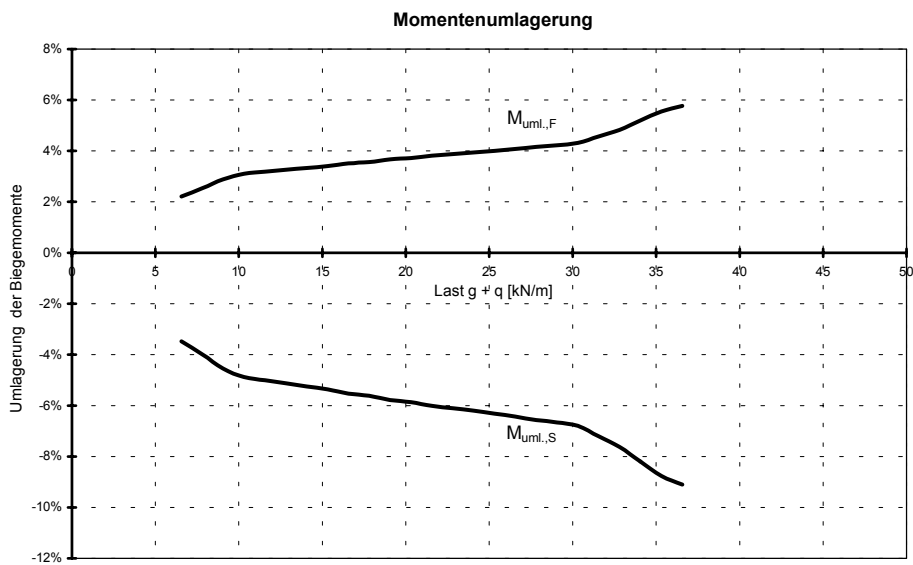
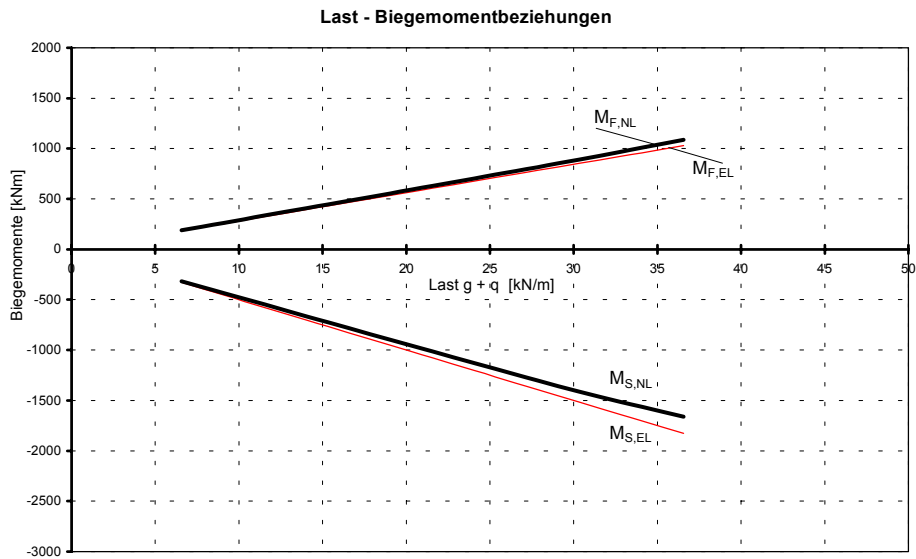
Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung



### Systeme B-3-1 bis B-3-4 (Zusammenfassung)

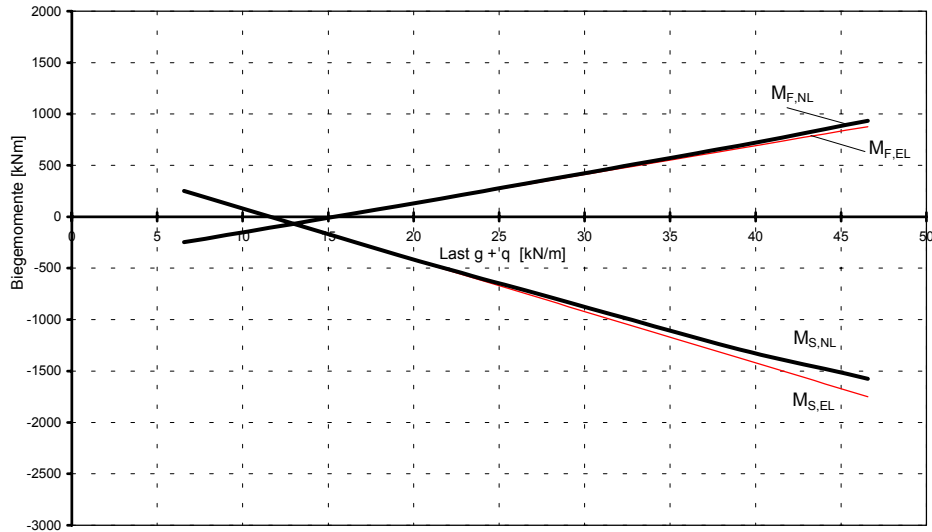


System B-4-1 ( $M_{p,ind.} = 0$ , zentrische Vorspannung)

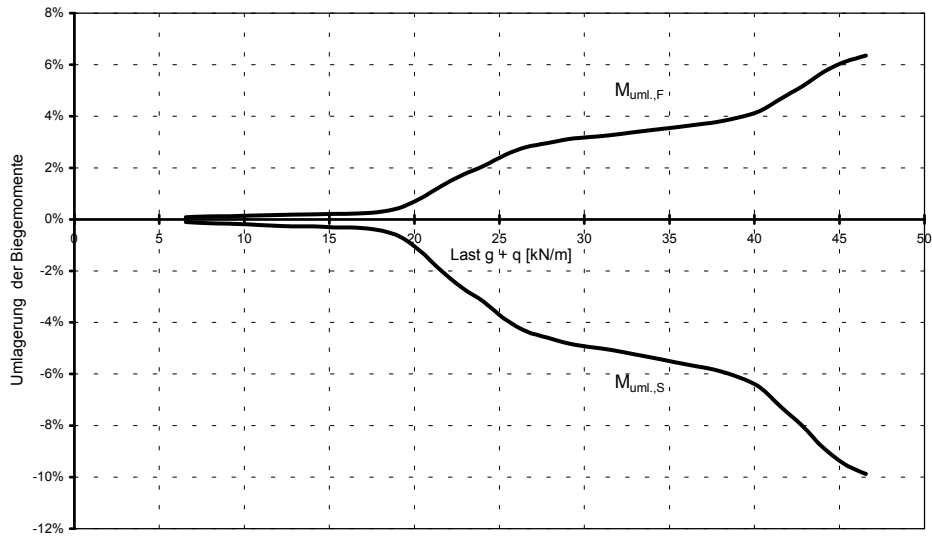


System B-4-2 (kleine stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

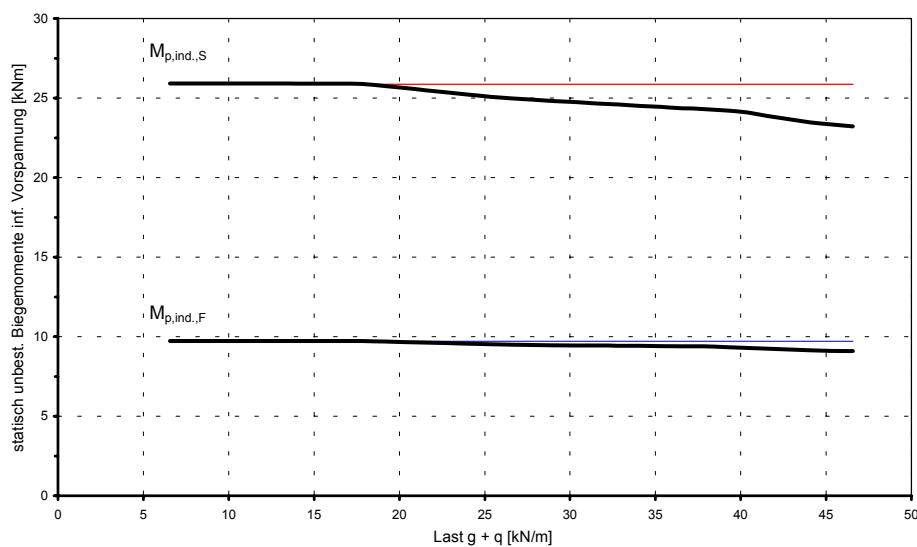
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

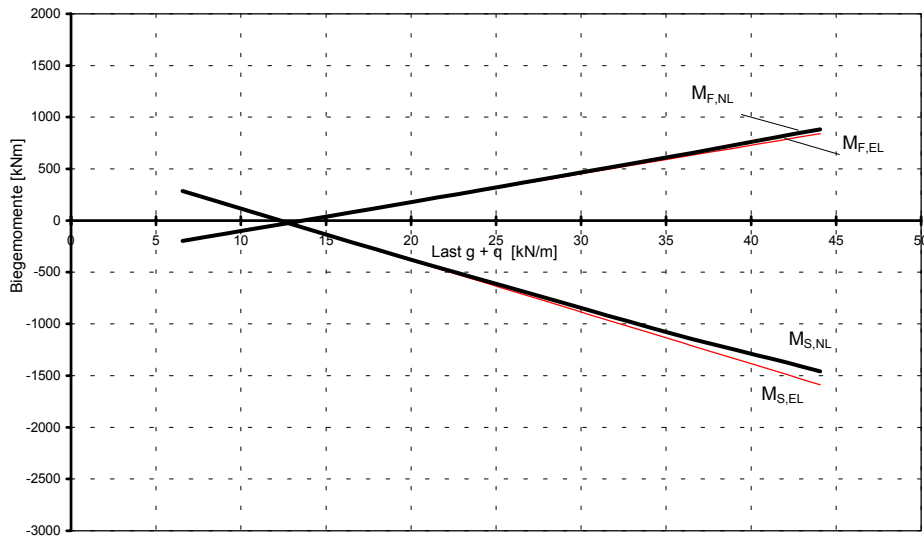


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

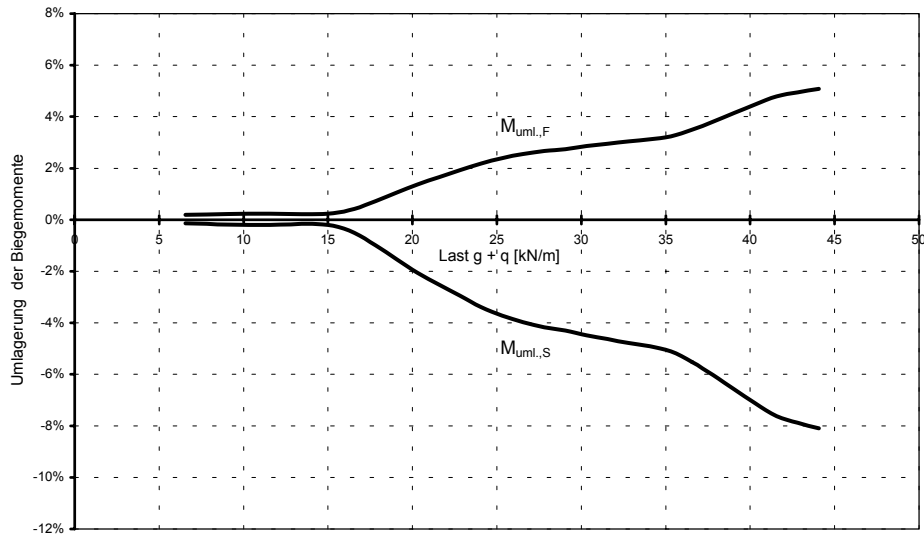


System B-4-3 (mittlere stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

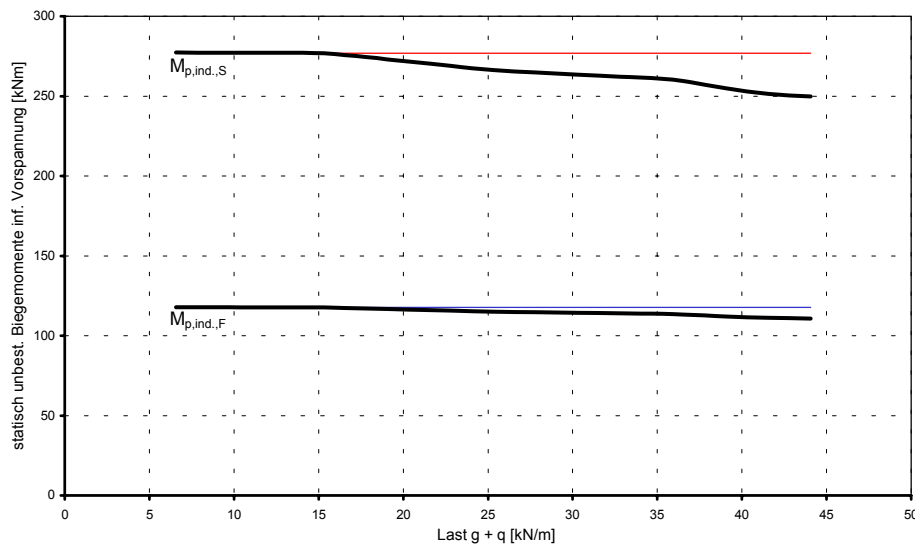
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

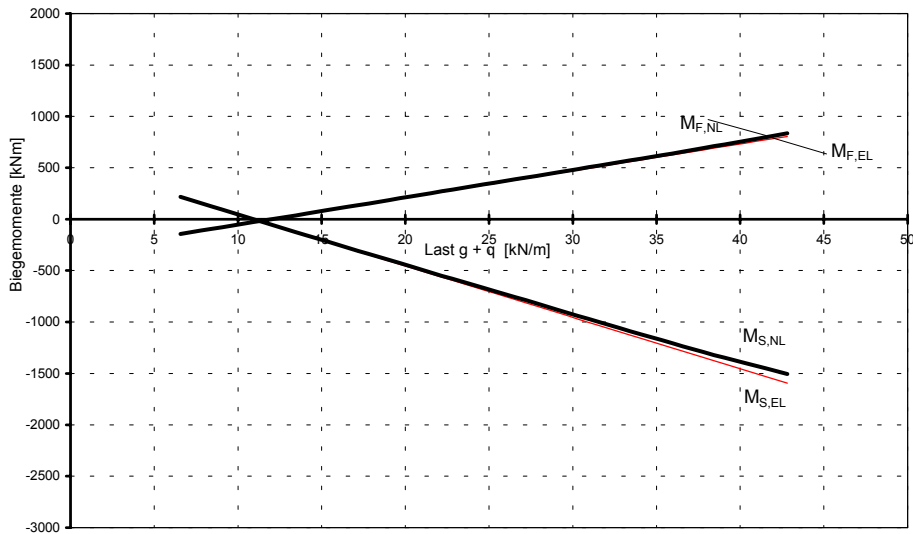


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

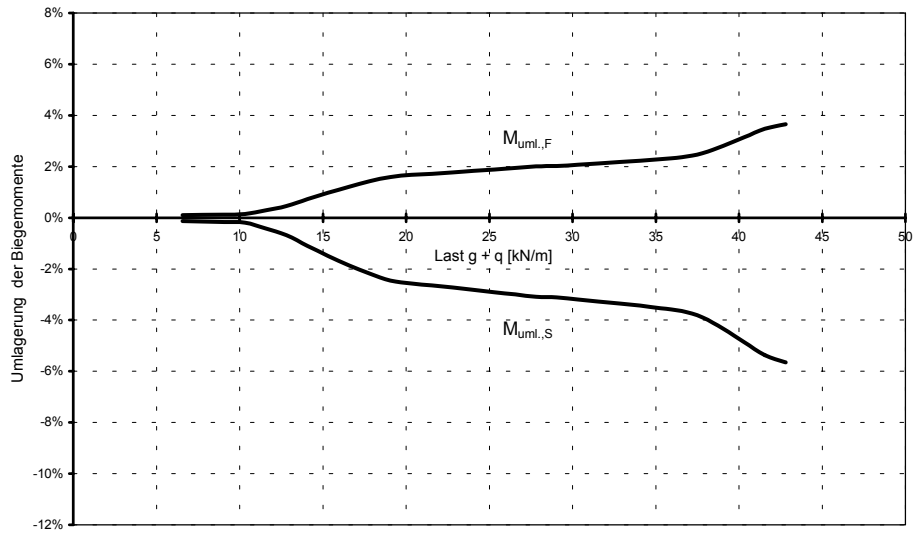


System B-4-4 (große stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$  )

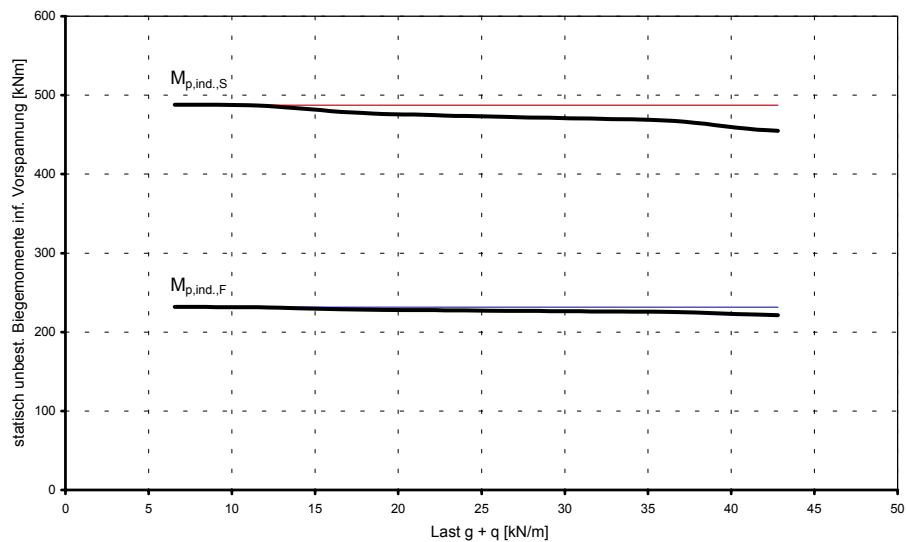
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

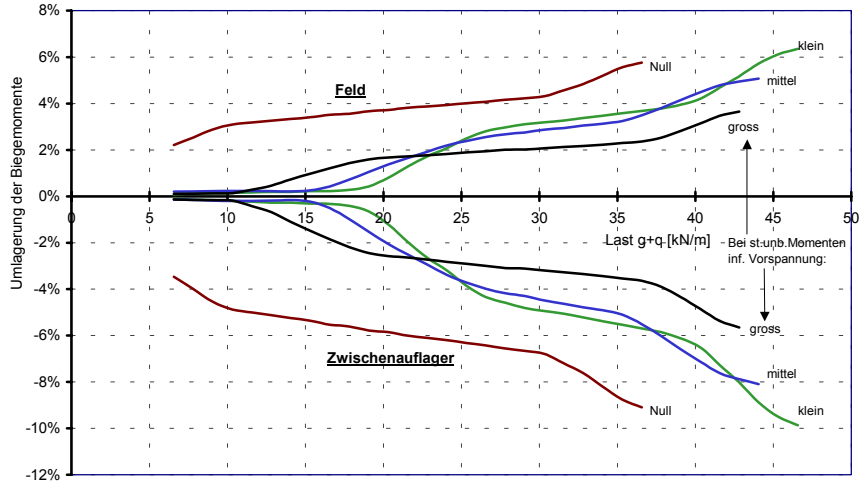


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

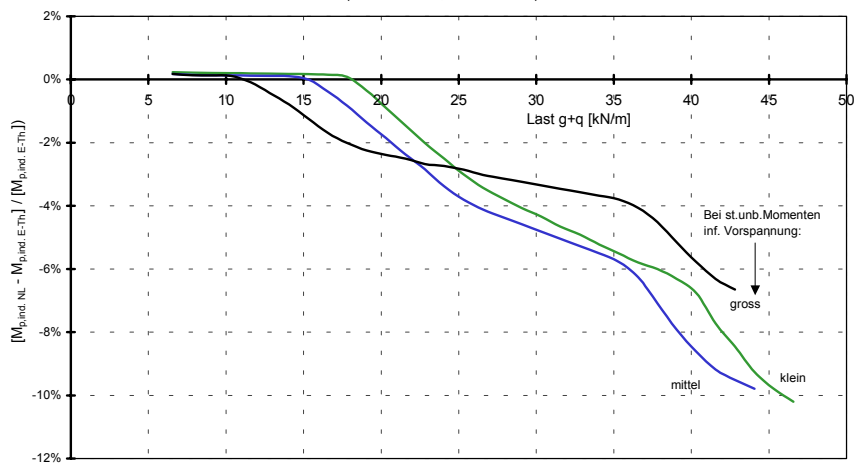


### Systeme B-4-1 bis B-4-4 (Zusammenfassung)

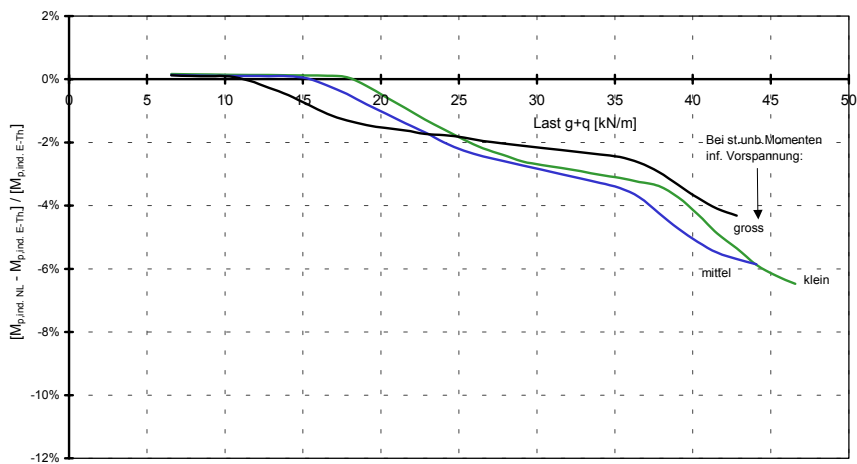
**Momentenumlagerung in den Träger B-4**  
(Beton C25/30, I-Querschnitt)



**Entwicklung der statisch unbestimmten Momente inf. Vorspannung über dem Zwischenaufleger der Träger B-4**  
(Beton C25/30, I-Querschnitt)



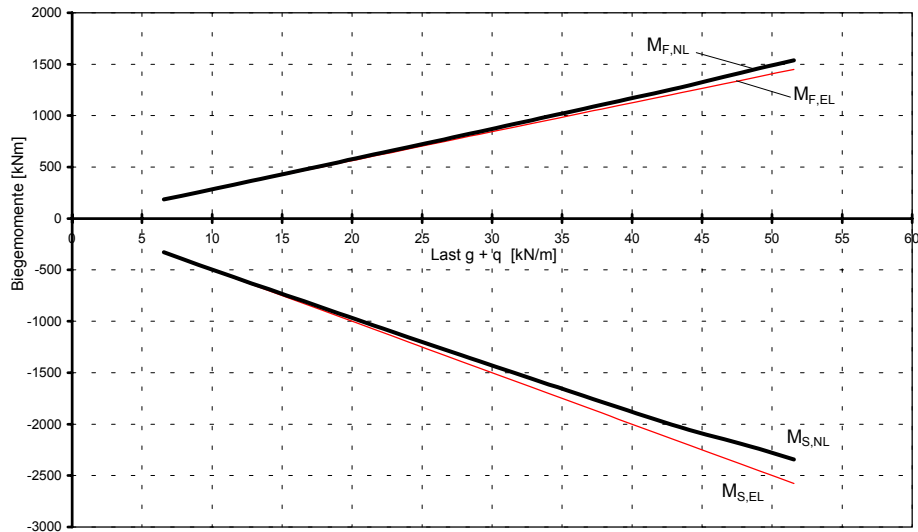
**Entwicklung der statisch unbestimmten Momente inf. Vorspannung im Feld der Träger B-4**  
(Beton C25/30, I-Querschnitt)



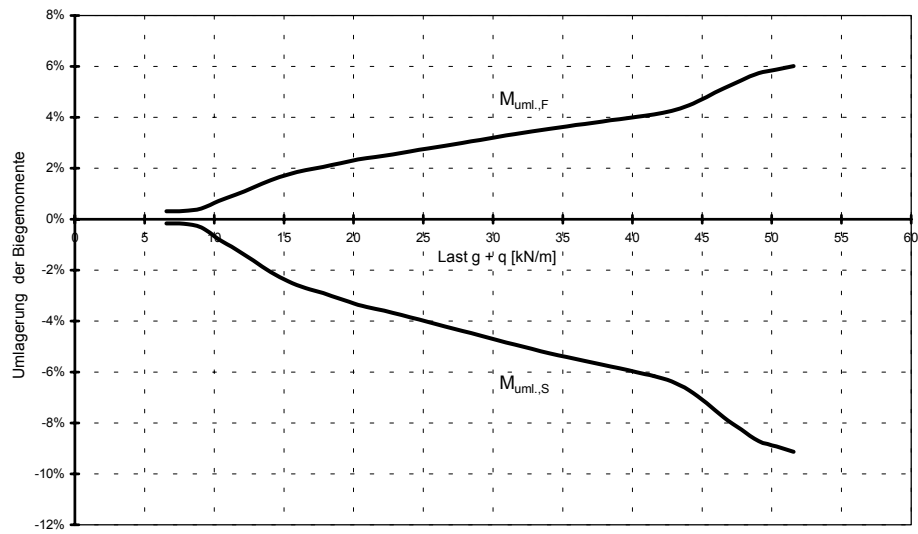


### System B-5-1 ( $M_{p,ind.} = 0$ , zentrische Vorspannung)

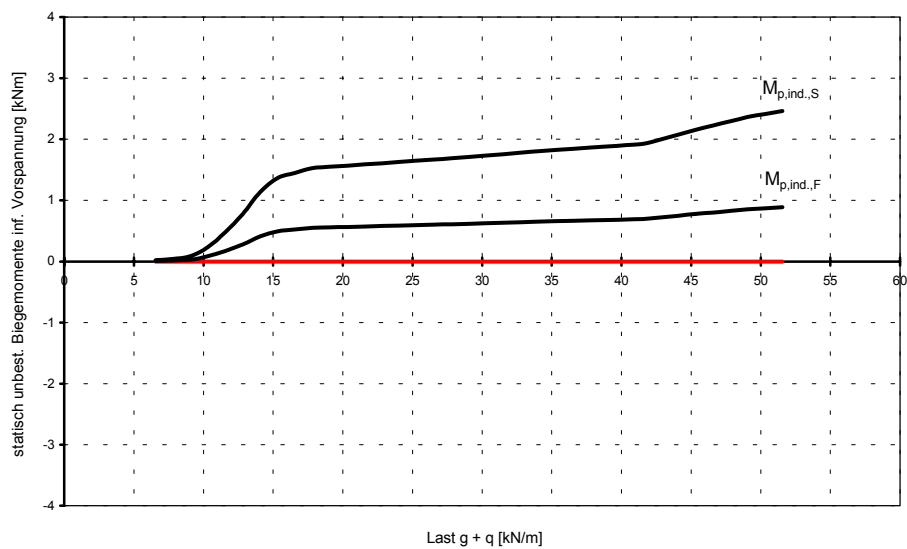
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

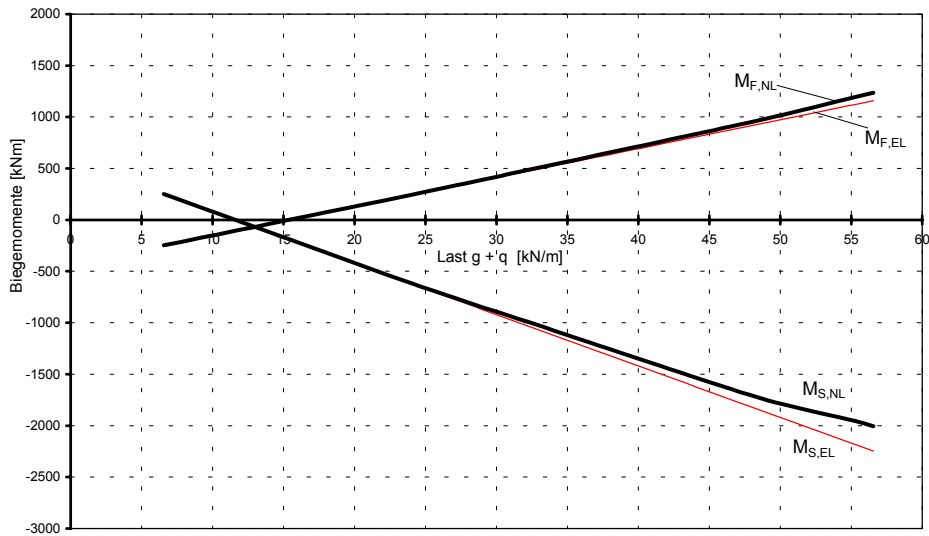


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

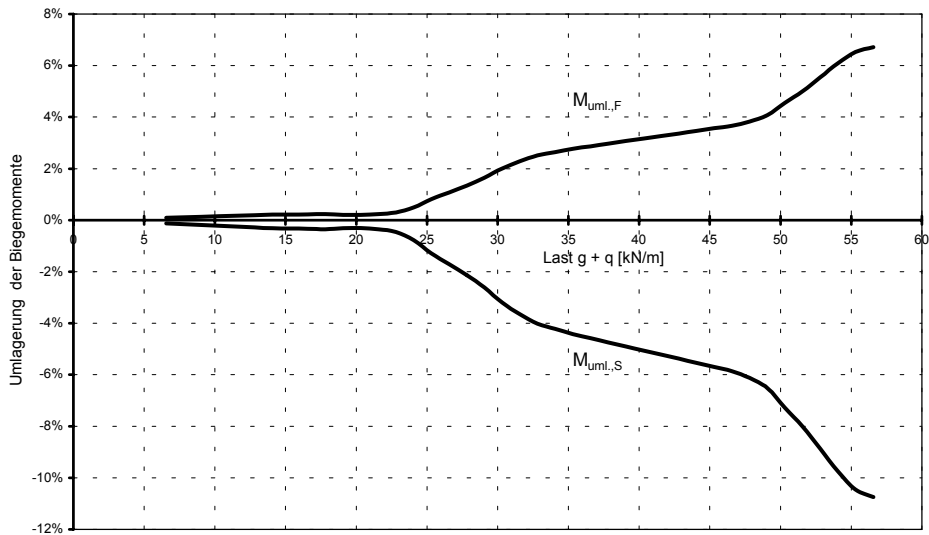


System B-5-2 (kleine stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

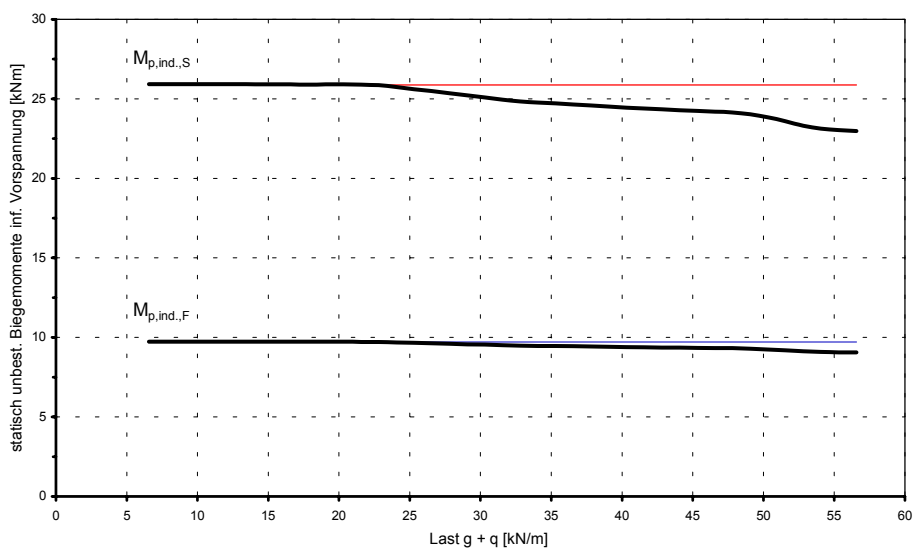
Last - Biegemomentbeziehungen



Momentenumlagerung

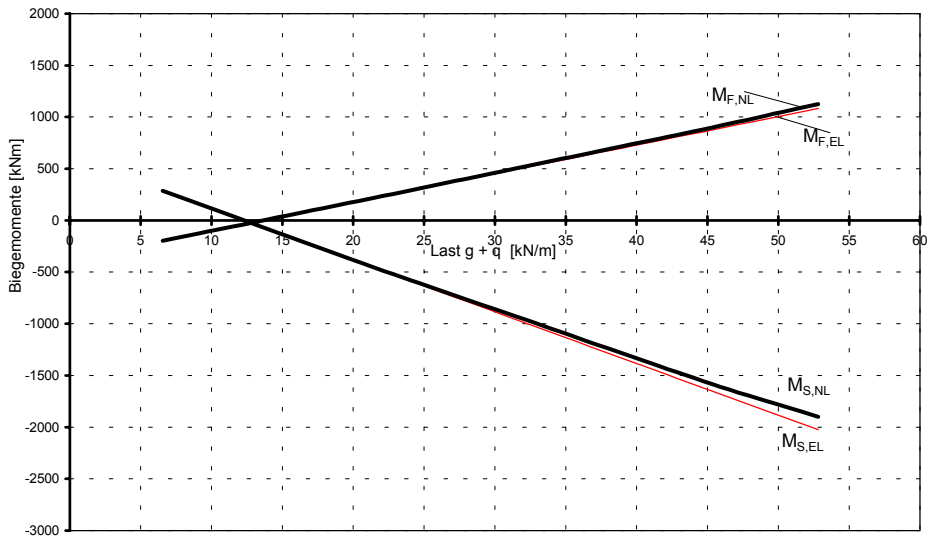


Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung

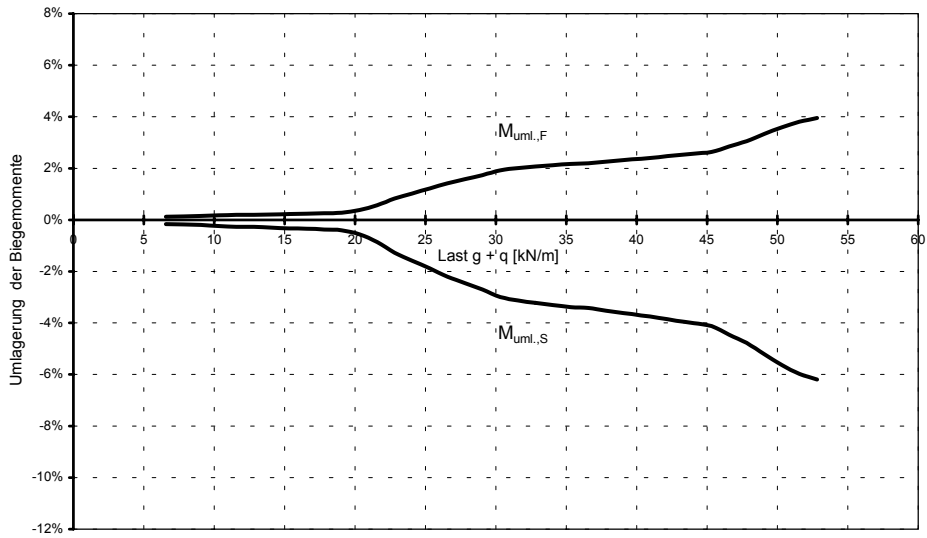


System B-5-3 (mittlere stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$ )

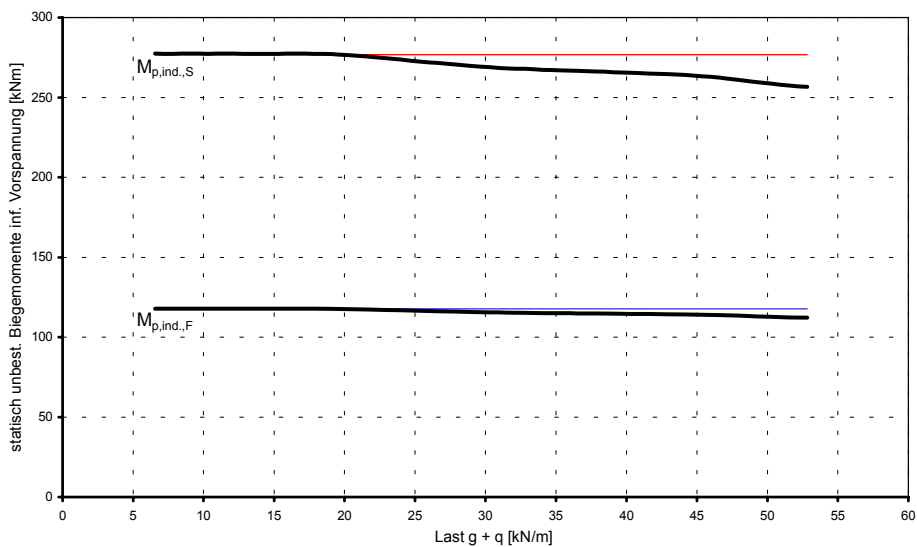
Last - Biegemomentbeziehungen



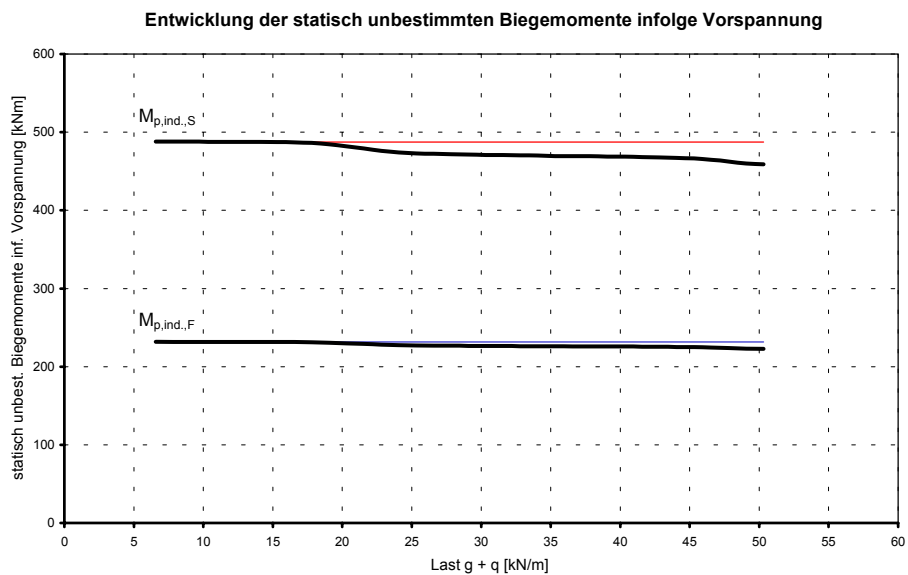
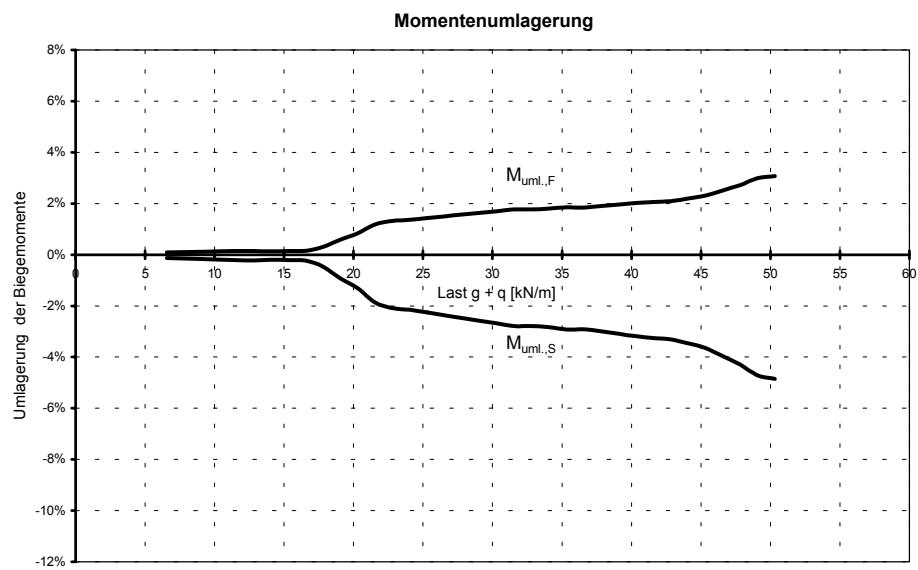
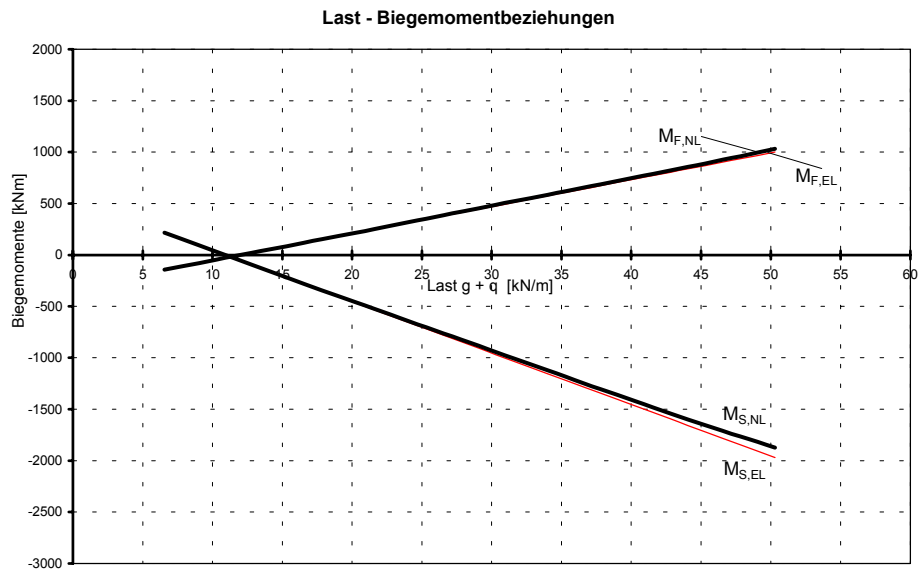
Momentenumlagerung



Entwicklung der statisch unbestimmten Biegemomente infolge Vorspannung



System B-5-4 (große stat. unbest. Momente inf. Vorspannung,  $M_{p,ind.}$  )



### Systeme B-5-1 bis B-5-4 (Zusammenfassung)

