

**Zur Erhöhung der Durchstanztragfähigkeit  
von Flachdecken  
mit Stahlverbundsystemen**

**Dissertation**

zur

Erlangung des Grades  
Doktor Ingenieur (Dr.-Ing.)

der

Abteilung Bauingenieurwesen  
im Fachbereich D an der  
Bergischen Universität Wuppertal

von

Wolfgang Piel

aus Essen

2004

Veröffentlicht als Heft 3 in der Schriftenreihe des  
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau  
Fachbereich D, Abteilung Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Herausgeber**

Der Geschäftsführende Direktor  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal

### **Fachgebiet**

Stahlbau und Verbundkonstruktionen  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard Hanswille  
Fachbereich D, Abteilung Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Organisation und Verwaltung**

Dipl.-Ing. W. Hammer  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal  
Pauluskirchstraße 7  
42285 Wuppertal  
Telefon: (0202) 439-4209

© **Dr.-Ing. Wolfgang Piel**  
Mühlenweg 51  
45289 Essen

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

meinem Vater  
und  
meiner Mutter  
gewidmet



---

## Zusammenfassung

Mit den Erkenntnissen der „Stuttgarter Schubversuche“ wurde der Begriff der „verminderten Schubdeckung“ eingeführt. Das klassische Fachwerk mit  $45^\circ$  geneigten Druckdiagonalen wurde additiv um flache geneigte Druckstreben erweitert, um die zahlreichen günstig wirkenden Nebenspannungen – beobachtet in Versuchen mit Ein- und Zweifeldträgern – numerisch vorstellbar berücksichtigen zu können. Das in dieser Arbeit daran angelehnte Vorgehen, den Durchstanzwiderstand durch Überlagerung eines radial ausgerichteten Netzfachwerks mit einem Strebensystem zu beurteilen, ist eine Form der genannten Erweiterung der Mörsch'schen Fachwerkanalogie. Die Komponenten des Strebensystems werden auf der Basis einer dehnungsbegrenzten Betrachtung der überwiegend tangential orientierten Biegedruckspannungen bestimmt. Es wird gezeigt, dass diese Annahmen auf Stahlbetonplatten übertragen eine zuverlässige Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens ermöglichen. Durch Kombination mit einem kraftschlüssig mit der Betonplatte verbundenen Stahlprofil lässt sich eine Sonderlösung für „Durchstanzkreuze“ in Verbundbauweise entwickeln.

Es handelt sich dabei um eine im Auflagerbereich der Platte integrierte Schwertkonstruktion aus Stahl, mit der der kritische Rundschnitt für den Tragsicherheitsnachweis gegen Durchstanzen durch Ausnutzung einer planmäßigen Verbundwirkung deutlich vergrößert wird. Die Verbundwirkung wird durch eine Kombination von Kopfbolzendübeln und stahlbaumäßigen Verbundmitteln erreicht. Die resultierende Umlagerung der Querkraftbeanspruchung auf das Stahlprofil bewirkt eine deutliche Traglaststeigerung und gleichzeitig eine Erhöhung der Duktilität.

Aufbauend auf Versuchen und Versuchsnachrechnungen mit der Finiten Element Methode wird ein vereinfachtes Ingenieurmodell zur Beurteilung des Tragverhaltens für Durchstanzkreuze in Verbundbauweise entwickelt. Bei den Versuchsnachrechnungen wurde das Programm ANSYS eingesetzt. Das darin zur Verfügung stehende Betonmodell musste zunächst bezüglich der Steifigkeit des verwendeten Bruchkriteriums verändert und bezüglich des inneren Zerstörungsprozesses am Integrationspunkt erweitert werden. Im Rahmen dieser physikalischen Modifizierung der Elementeneigenschaften wurde zusätzlich eine geeignete Konvergenzhilfe zur Steuerung physikalischer Veränderungen an den Integrationspunkten hinzugeschaltet.

Grundlage für das neue Ingenieurmodell bilden die von Kinnunen und Nylander sowie von Andrä entwickelten Modelle, die um die Traganteile des Steifenkreuzes unter Beachtung einer verträglichen Formänderung zwischen Stahlbetonplatte und Stahlkreuz erweitert werden. Für die Stahlbetonplatte wird an Stelle von empirischen Vorgaben aus Versuchsergebnissen die Lösung über eine tangential dehnungsbegrenzte Biegedruckzone angegeben. Das Ingenieurmodell erlaubt eine zuverlässige Vorhersage der Tragfähigkeit und ist zudem zur Beurteilung des Rotationsverhaltens geeignet.

## Summary

Based on the results of the "Stuttgart shear tests" the idea of "reduced shear covering" has been introduced. Less inclined compression members have been added to standard lattice structure comprising  $45^\circ$  compression diagonals to allow numerical consideration of plenty of favourable acting secondary stresses, observed during tests with single and double span girders. The method of this paper to judge the punching shear failure resistance by combination of a radial aligned net lattice structure with a system of diagonal compression members is a kind of the mentioned extension of the lattice work analogy by Mörsch. The components of a system of

---

diagonals radiating to the top of the concrete plate are evaluated by a limited tangential ductility of the mainly tangentially orientated bending compressive stresses. It will be demonstrated that these assumptions applied to reinforced concrete plates make it possible to describe reliable structural and deformation behaviour. By combination of a structural steel section connected with a horizontal end plate a special solution for a composite shear head construction can be developed.

This composite shear head consists of two crossed steel girders integrated in the support area of the concrete slab extending considerably the critical section for punching shear resistance. The composite action is obtained by a combination of headed studs and special structural steel plates. The resulting redistribution of the shear force from the concrete to the steel causes a significant increase for the ultimate limit load and the ductility and rotation capacity.

Based on test results and studies with the Finite Element Method a simplified design model to describe the structural behaviour for this new type of composite shear head system is developed. For the detailed Finite Element studies the program ANSYS was used. The available concrete model had to be changed to take into account the continuity of the three dimensional failure criterion for concrete and supplementary an inner damage process at the integration points of the 8-node solid element was installed. In the context of this physical modifications of the element qualities a suitable convergence algorithm was switched at the integration points to control all changes for the new defined material characteristics.

The presented design model based on two different models for flat concrete slabs without shear reinforcement published by Kinnunen and Nylander as well as by Andrä, is extended to take into account the redistribution of forces from concrete to the shear head system and considers the compatibility condition for the deformations between the concrete slab and the steel member. In order to avoid empirical assumptions the solution for the flat concrete slab is defined over limited strains in the concrete compression zone in tangential direction. The simplified model allows a reliable prediction for the design resistance and is also suitable for the determinations of the rotation behaviour.

---

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2000 bis 2003 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Stahlbau und Verbundkonstruktionen der Bergischen Universität Wuppertal. Sie wurde von der dortigen Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Professor Dr.-Ing. G. Hanswille möchte ich für die Förderung an seinem Lehrstuhl sowie für die Übernahme des Referates danken. Ebenfalls gilt mein herzlicher Dank Herrn Professor Dr.-Ing. J. Hegger und Herrn Professor Dr.-Ing. R. Harte für die Mühe, die sie sich mit der Übernahme der Koreferate gemacht haben. Herrn Professor Dr.-Ing. W. Zahlten danke ich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Weiterhin danke ich allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben – insbesondere Herrn Peter Kohnke Ph.D. für die zahlreichen Anregungen bei der Anwendung und Weiterentwicklung des Programms ANSYS, der stahl + verbundbau GmbH für die finanzielle Förderung der Versuche sowie Frau Ingeborg Görge für Ihre tatkräftige Unterstützung bei der redaktionellen Bearbeitung.

Essen, im August 2004

Wolfgang Piel

Tag der Einreichung: 12. Februar 2003

Tag der mündlichen Prüfung: 20. April 2004

Gutachter: Professor Dr.-Ing. G. Hanswille, Bergische Universität Wuppertal  
Professor Dr.-Ing. J. Hegger, RWTH Aachen  
Professor Dr.-Ing. R. Harte, Bergische Universität Wuppertal

Vorsitzender der Prüfungskommission: Professor Dr.-Ing. W. Zahlten

---



---

## Inhaltsverzeichnis

	<b>Seite:</b>
1. Einleitung	<b>1</b>
1.1 Aufgabenstellung	<b>2</b>
1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	<b>2</b>
2. Bisherige Forschungsarbeiten und Erkenntnisse	<b>5</b>
2.1 Zum Tragverhalten aus statischer Sicht	<b>5</b>
2.2 Zum Tragverhalten, abgeleitet aus Versuchsbeobachtungen	<b>10</b>
2.3 Modellentwicklungen zur Bemessung unter Berücksichtigung der besonderen Materialeigenschaften des Betons	<b>14</b>
2.3.1 Theoretisches Modell von Kinnunen und Nylander	<b>15</b>
2.3.2 Theoretisches Modell von André	<b>20</b>
2.4 Zusammenfassung	<b>25</b>
3. Materialmodelle und Annahmen der physikalisch nichtlinearen Berechnung	<b>26</b>
3.1 Grundlagen der Elastizitätstheorie – Repetitorium	<b>26</b>
3.1.1 Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen (Vereinfachungen des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes)	<b>27</b>
3.1.2 Eigenschaften des Spannungstensors (Der allgemeine räumliche Spannungszustand)	<b>32</b>
3.2 Das Betonmodell in ANSYS	<b>37</b>
3.2.1 Festigkeits- bzw. Versagenskriterium	<b>38</b>
3.2.2 Materialhauptachsen als neutrales Bezugsachsensystem (Berücksichtigung der Werkstoffanisotropie)	<b>60</b>
3.2.3 Nachbruchverhalten nach Überschreiten der Zugfestigkeit	<b>68</b>
3.2.4 Erweiterung des Betonmodells hinsichtlich des Schubtragverhaltens	<b>73</b>
3.2.5 Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens unter Druckbeanspruchung	<b>80</b>
3.2.5.1 Experimentelle Beobachtungen und Ergebnisse	<b>80</b>
3.2.5.2 Nichtlineares, inelastisches Verhalten	<b>90</b>
3.2.5.3 Kriechverhalten	<b>96</b>
3.2.6 Berechnungsbeispiel	<b>105</b>
3.3 Nichtlineares, plastisches Materialverhalten für zähe Metalle	<b>109</b>
3.3.1 Experimentelle Ergebnisse	<b>109</b>
3.3.2 Fließ- bzw. Versagensbedingung und Fließregel	<b>112</b>
3.3.3 Verfestigungsmodell	<b>116</b>
3.3.4 Formänderung infolge plastischer Dehnungen	<b>118</b>
3.3.5 Numerische Anwendung und Integrationsverfahren	<b>120</b>
3.4 Nachgiebige Verdübelung mit diskreten Einzelbindungselementen	<b>123</b>

	<b>Seite:</b>
4. Zur Methode der finiten Elemente	<b>126</b>
4.1 Randwertproblem	<b>126</b>
4.2 Linearisierung der schwachen Formulierung	<b>129</b>
4.3 Formulierung der Gleichgewichtsbedingung	<b>131</b>
4.4 Ortdiskretisierung	<b>136</b>
4.4.1 Isoparametrische Formulierung	<b>138</b>
4.4.2 Numerische Integration und Integrationsbereich	<b>140</b>
4.4.3 Inkompatible Ansatzfunktionen	<b>141</b>
4.5 Eingesetzte Lösungstechnik – Lösungsstrategie	<b>146</b>
4.5.1 Vollständiges Newton-Raphson Verfahren	<b>148</b>
4.5.2 Konvergenzkriterium	<b>151</b>
4.5.3 Die Methode „Adaptive Descent“	<b>152</b>
5. Nachrechnungen von Durchstanzversuchen mit der FE-Methode	<b>158</b>
5.1 Überblick über ausgewählte, diskrete Systemeigenschaften	<b>158</b>
5.2 Fremdversuche	<b>161</b>
5.2.1 Versuch aus Stockholm – Versuchsbezeichnung: „ <b>IB15a</b> “	<b>164</b>
5.2.2 Versuch aus Aachen – Versuchsbezeichnung: „ <b>P1</b> “	<b>168</b>
5.3 Eigene Versuchsdurchführungen	<b>172</b>
5.3.1 Versuch „ <b>W1</b> “ – mit Stahlkreuz (Querschnitt: $s_a / h_a \equiv 40 / 200$ mm)	<b>175</b>
5.3.2 Versuch „ <b>W2</b> “ – mit Stahlkreuz (Querschnitt: $s_a / h_a \equiv 40 / 200$ mm) Betonplatte mit zusätzlichen Versorgungsdurchbrüchen	<b>179</b>
5.3.3 Versuch „ <b>W3</b> “ – mit Stahlkreuz (Querschnitt: $s_a / h_a \equiv 15 / 160$ mm)	<b>183</b>
5.3.4 Versuch „ <b>W4</b> “ – mit Stahlkreuz (Querschnitt: $s_a / h_a \equiv 15 / 160$ mm) Schubsicherung mit Hilfe vertikaler Schubbewehrung	<b>186</b>
5.4 Ergänzende Untersuchungen	<b>188</b>
5.4.1 Deckenausschnitte mit äußerem Rundschnitt	<b>192</b>
5.4.2 Flachdeckenteilsysteme	<b>203</b>
5.5 Zusammenfassung und Bewertung	<b>211</b>
5.5.1 Systemverhalten und besondere Eigenschaften	<b>211</b>
5.5.2 Ingenieurmäßige Anwendung der Ergebnisse	<b>215</b>
6. Mechanisches Modell zur Beurteilung der Durchstanzsicherheit	<b>218</b>
6.1 Modell zur Beurteilung des räumlichen Tragmechanismus für Stahlbetonplatten ohne Schubbewehrung – <b>1. Teil</b>	<b>218</b>
6.1.1 Geometrische Definitionen für ein Sektorelement	<b>219</b>
6.1.2 Verschiebungen und Verdrehungen eines Elementtringes	<b>220</b>

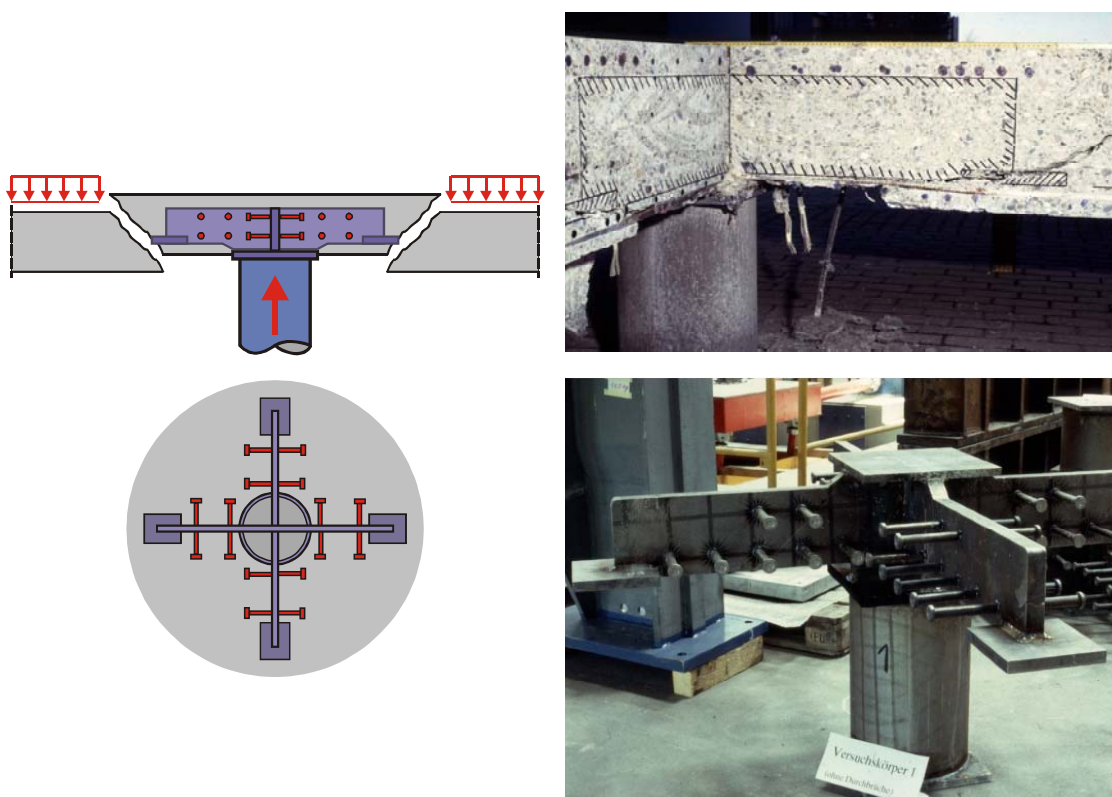
---

	<b>Seite:</b>
6.1.3 Annahme einer dehnungsbegrenzten Verteilung der tangential gerichteten Biegedruckspannungen	<b>221</b>
6.1.4 Resultierende tangentielle Spannungen	<b>223</b>
6.1.5 Verteilung der inneren Kräfte im Strebensystem	<b>228</b>
6.1.5.1 Gleichgewicht am Obergurtnoten	<b>229</b>
6.1.5.2 Mitwirken der Zugkegelschalen	<b>231</b>
6.1.5.3 Resultierende Vertikalkräfte und Horizontalkräfte	<b>232</b>
6.1.6 Auflagerpressung und Gleichgewichtsbedingung	<b>238</b>
6.2 Durchstanzsicherung unter Anwendung eines schubfest angeschlossenen Stahlkreuzes – <b>2. Teil</b>	<b>240</b>
6.2.1 Charakteristische Steifigkeit einer Betonplatte zum Zeitpunkt des Bruches	<b>240</b>
6.2.2 Das Verbundsystem und zugehörige Konstruktionselemente	<b>242</b>
6.2.2.1 Verträgliche Formänderung für vertikale Verschiebungen	<b>244</b>
6.2.2.2 Schubnachgiebigkeit des Schwertes	<b>246</b>
6.2.2.3 Anteilige Querkraft im Schwert am Stützenanschnitt	<b>248</b>
6.2.2.4 Querkrafttragfähigkeit des Rechteckquerschnitts	<b>252</b>
6.2.3 Auflagerpressung und Gleichgewichtsbedingung	<b>255</b>
7. Zusammenfassung	<b>259</b>
8. Ausblick	<b>260</b>
Bezeichnungen:	<b>263</b>
Literaturverzeichnis:	<b>270</b>



## 1. Einleitung

Wirtschaftliche Überlegungen fordern eine hindernisfreie, schalungstechnisch einfach und schnell herzustellende Unterseite von Flachdecken. Dies ermöglicht eine ungestörte Führung von Installationsleitungen und eine zuverlässige Verkürzung der Bauzeiten. Bei weit gespannten, hochbelasteten Deckensystemen bestimmt in der Regel der Durchstanzwiderstand die Deckenstärke, da mit konventioneller Schubbewehrung der Tragwiderstand einer Decken-Stützenverbindung nur geringfügig gesteigert werden kann. Für die Biegebemessung der Platte oder für den Nachweis zur Beschränkung der Durchbiegung sind dann oftmals unwirtschaftlich hohe Bewehrungsgrade oder unnötig große Deckendicken die Folge. Im Rahmen einer praxisorientierten Weiterentwicklung wird eine Sonderlösung in „Stahl und Verbund“ zur Erhöhung der Schubtragfähigkeit im Stützenbereich von Flachdecken erarbeitet.



**Bild 1.1:** Sonderlösung zur Erhöhung der Schubtragfähigkeit in „Stahl und Verbund“

Bis heute wird der örtliche Versagensmechanismus auf der Basis von Versuchsdurchführungen und Beobachtungen unterschiedlich beschrieben und bewertet. Es stellt sich immer wieder heraus, dass auf der Grundlage von oft nur wenigen Versuchen keine zuverlässigen und zutreffenden Aussagen gemacht werden können. In der Literatur wird nicht selten darüber berichtet, dass geplante Versuchsprogramme wegen Störungen und Unzulänglichkeiten verschiedener Arten umgestaltet werden müssen [56, 72]. Die gestellten Fragen bleiben von der durchgeführten Versuchsreihe entweder unbeantwortet, oder es ergeben sich nach Versuchsdurchführung neue Verständnisfragen aufgrund fehlenden Wissens. Hinzu kommt, dass unvermeidbare Streuungen der Festigkeitseigenschaften des Betons die klare Zuordnung der versagenshemmenden Wirkung und somit die eindeutige Ermittlung der tatsächlichen Versagensursache erschweren.

### 1.1 Aufgabenstellung

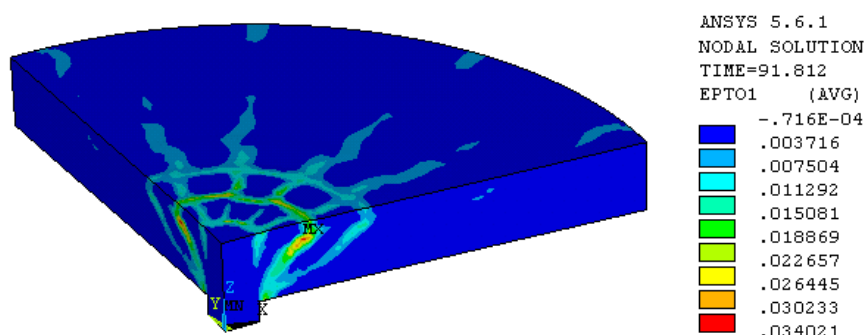
Bei der Durchführung von vier Versuchen für die genannte Sonderlösung in „Stahl und Verbund“ ergaben sich trotz stark unterschiedlich dimensionierter Stahlbauteile nahezu gleiche Tragfähigkeitswiderstände. Unterschiedliche Bruchbilder erschwerten das Ableiten für einen gemeinsamen und einheitlich wirksamen Tragmechanismus. Eine FE-Berechnung soll Einblick in den inneren Zerstörungsprozess des Verbundsystems liefern. Aus den prinzipiellen Übereinstimmungen der FEM Rechenergebnisse und den Versuchsbeobachtungen wird ein Berechnungsmodell entwickelt, das eine praktische Anwendung ermöglicht. Das neu entwickelte Modell stützt sich dabei auf die heute uneingeschränkt anerkannten Erkenntnisse der Wissenschaftler Kinnunen und Nylander [ 66 ] und auf die von André vorgeschlagene mathematische Beschreibung zum örtlichen Versagensmechanismus im Auflagerbereich einer Flachdecke [ 8 ]. Die Durchstanzlast wird jedoch nicht mehr über fiktive Betondruckspannungen oder über Verformungskenngrößen, die aus Versuchsauswertungen stammen, rechnerisch vorherbestimmt. Der neue Lösungsvorschlag wird in erster Linie durch radial und tangential formulierte Kräftegleichgewichtsbedingungen und über die vom verwendeten Werkstoff abhängigen Festigkeitseigenschaften geprägt. Das Modell weist damit keine empirischen und experimentellen Vorgaben zum Verformungsverhalten mehr auf. Nur der rotationssymmetrische Versagenszustand wird untersucht.

### 1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

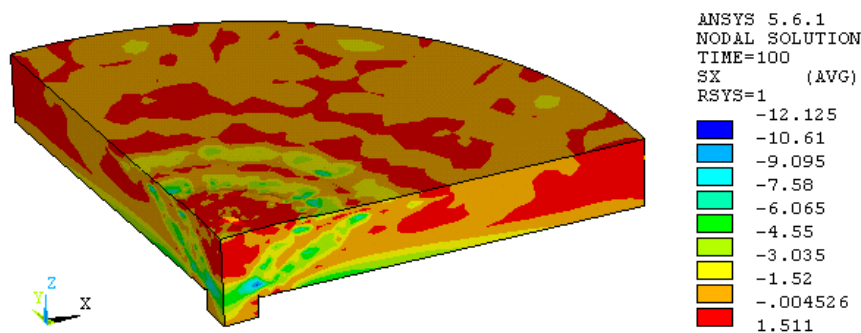
Die Problematik zur Vorherbestimmung des Tragwiderstandes des Verbundsystems ist eng mit der Frage nach einem gemeinsamen gegenseitig abhängigen Verformungsverhalten zwischen Stahlbauteil und Stahlbetonplatte verbunden. Das Verformungsverhalten der Stahlbetonplatte wird im Zustand II geprägt durch die Rissentwicklung. Um das Zusammenwirken im Verbundsystem ausreichend zuverlässig und sicher zu formulieren, erscheint es daher angebracht, zunächst die Voraussetzungen zur Berechnung des sich tatsächlich einstellenden Steifigkeitsverhaltens einer reinen Stahlbetonplatte zum Zeitpunkt des Bruches zu erfüllen. Ist das Steifigkeitsverhalten des Tragelementes „Stahlbetonplatte“ bekannt, kann darauf aufbauend seine Fähigkeit, sich innerhalb eines Verbundsystems einem maximal möglichen Belastungsniveau bis zum Zeitpunkt des Bruches durch Umlagerung der inneren Kräfte auf das Stahlprofil anzunähern, untersucht werden. Aus diesem Grund wird das im Kapitel 6 hergeleitete Berechnungsmodell unterteilt in zwei Teilgebiete. Der erste Teil (Kapitel 6.1) konzentriert sich auf die Widerstandsfähigkeit einer schlaff bewehrten Platte ohne zusätzliche Maßnahmen zur Erhöhung des Durchstanzwiderstands. Im daran anschließenden zweiten Teil (Kapitel 6.2) wird das im ersten Teil entwickelte Modell benutzt, um ein geschlossenes und einheitliches Konzept zur Erhöhung der Schubtragfähigkeit im Stützenbereich von Flachdecken – ohne Einschränkungen für die praktische Anwendung – zu entwickeln.

In der Aufgabenstellung wurde erwähnt, dass das Modell eine Weiterentwicklung bereits bekannter Lösungsvorschläge darstellt. Die Ergebnisse der FE-Berechnung – mit dem Programm ANSYS – insbesondere die stellvertretend für Kapitel 5 im Bild 1.2 und Bild 1.3 gezeigten FEM-Rechenergebnisse zeigen die für den Verfasser maßgebenden Kriterien zur Anwendung der von Kinnunen, Nylander und André getroffenen Annahmen:

Die Hauptzugdehnungen „ $\varepsilon_{c,H1}$ “ im Bild 1.2, die unabhängig von einem globalen Koordinatensystem betrachtet werden müssen, lassen den inneren Zerstörungsprozess infolge der Rissbildung erkennen. Diese Beobachtungen beschreiben Kinnunen und Nylander in [66, 67] und führten zu ihrem rechnerischen Ansatz, nämlich einer Gleichgewichtsbetrachtung an einem herausgelösten Sektorelement – dargestellt im Bild 2.11 (Seite 15). Im Bild 1.3 werden mit Hilfe der FE-Berechnung schräg verlaufende Druckdiagonalen zwischen dem unteren Stützenanschnitt und der oben liegenden Ringbewehrung sichtbar. Diese Spannungsverteilung, abhängig von den kurz vor Eintritt des Bruches vorherrschenden inneren Steifigkeitsverhältnissen im inneren Gefüge der Stahlbetonplatte, beschreibt André mit einem Stabwerkmodell, in dem er die im Bild 1.3 sichtbaren Druckstreben als Strebensystem mit einem zunächst ungerissenen Grundsystem, einem Netzfachwerk mit 45° geneigten Druck- und Zuggurten entsprechend Bild 2.13 (Seite 21), überlagert.



**Bild 1.2:** Dehnungen „ $\varepsilon_{c,H1}$ “ infolge der Hauptzugspannungen „ $\sigma_{H1}$ “ (Versuch: IB15a)



**Bild 1.3:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ (Versuch: IB15a)

Die genannten Modelle, dokumentiert in den Originalarbeiten [ 8 ] und [66], bilden die Grundlage zur Entwicklung des eigenen Berechnungsvorschlages – Kapitel 6, Teil 2 – für das neue Verbundsystem.

Die allgemein verwendeten Grundlagen über die Theorie der Flächentragwerke und ihre Anwendung auf Stahlbetonflachdecken werden im Kapitel 2 vorgestellt. Diese Grundlagen ermöglichen, das im Kapitel 6 weiter behandelte Problem so allgemeingültig zu formulieren, dass eine Übertragbarkeit auf Verbundsysteme ermöglicht wird. Sie waren hilfreich bei der Definition geeigneter Systemdiskretisierungen im Kapitel 5, da das grundsätzliche Tragverhalten erläutert wird. Im Kapitel 2 werden jedoch nicht alle bekannten Berechnungsmodelle und Nachweiskonzepte vorgestellt. Hierzu wird auf die Literatur verwiesen, z.B. [31, 44, 74, 110, 124].

Ziel der Nachrechnung mit der Methode der Finiten Elemente war, die in den Versuchen beobachteten unterschiedlichen und mehrdimensionalen Versagensmechanismen sowie die Strukturveränderungen der Betonplatte über eine numerische Berechnungsmethode nachträglich zu verifizieren. Grundlage für diese inzwischen in zahlreichen Forschungsbereichen eingebundene Lösungsmethode bildet die Elastizitätstheorie. Ohne ein ausreichendes Verständnis für diese Theorie hätte das hier vorliegende Problem nicht gelöst und beurteilt werden können. Die im Kapitel 3 und 4 dargestellten theoretischen Überlegungen bilden die Grundlage, wie Erkenntnisse aus Versuchsbeobachtungen mit Kleinversuchen in geeignete mathematische Stoffgleichungen überführt werden können. Zum Verständnis der allgemeinen Zusammenhänge für das vereinfachte Berechnungsmodell, ausführlich beschrieben im Kapitel 6, genügen die mechanischen Überlegungen aus Kapitel 2.

Im Kapitel 3 werden die angewendeten Formulierungen der Stoffgleichungen für Stahl und Beton beschrieben. Mit dem bisher erreichten und aus der Sicht der Werkstoffkunde als zuverlässig zu bezeichnenden Stand der Erkenntnisse wird versucht, einen Zusammenhang zwischen den allgemeinen Definitionen der Strukturmechanik und dem physikalisch „messbaren“ Verhalten der Werkstoffe herzustellen. Charakteristisch wichtige Eigenschaften des Werkstoffes Beton werden aufgezeigt. Im Kapitel 3 wird kritisch hinterfragt und damit abgewogen, welche physikalischen Eigenschaften des Betons innerhalb eines allgemeingültigen und vollständigen Lösungsprozesses – im Rahmen einer Kontinuummmechanischen Betrachtung – berücksichtigt werden müssen. Das einleitende Kapitel 3.1 befasst sich ausschließlich mit den Grundlagen der Elastizitätstheorie. Es soll eine systematische Vorbereitung der daran anschließenden komplexen mechanischen und stofflichen Zusammenhänge gewährleisten.

Im Kapitel 4 wird gezeigt, dass die Methode der Finiten Elemente ein effektives Näherungsverfahren zur numerischen Lösung zahlreicher Probleme liefert. Voraussetzung für die korrekte Anwendung ist jedoch die richtige Einschätzung des zu untersuchenden Systems. Abhängig von dieser Einschätzung erfolgt die mehr oder weniger gute Elemententeilung, woraus sich ein kontinuierlicher Körper entwickelt, mit dem das gestellte Problem dann untersucht werden kann. Im Kapitel 4 wird darauf eingegangen, dass die anzunehmenden Näherungen ausschließlich physikalischer Art sind. Gerade deshalb ist es besonders wichtig,

- dass das reale System in einer geeigneten Form durch ein diskretes System – bestehend aus endlichen Elementen – richtig idealisiert wird; und
- dass ein geeignetes Materialverhalten (vorgestellt im Kapitel 3) zur Vorgabe eines wirklichkeitsnahen Verformungsverhaltens dieser Elemente eingeführt wird.

Es wird deutlich gemacht, dass für die anschließende mathematische Behandlung dann keine weiteren Näherungen mehr erforderlich sind. In diesem Punkt ruhen aber auch die Gefahren dieser strengen analytischen Vorgehensweise. Kennzeichnend für eine von der Belastungsgeschichte pfadabhängige und physikalisch nichtlineare Finite-Elemente-Formulierung ist, dass die berechneten Verformungen ausnahmslos einem oberen Grenzwert entsprechen. Auf diese Besonderheiten und auf die gewählte Lösungsstrategie für die im Kapitel 5 gezeigten Ergebnisse wird im Detail im Kapitel 4 genauer eingegangen.



## 2. Bisherige Forschungsarbeiten und Erkenntnisse

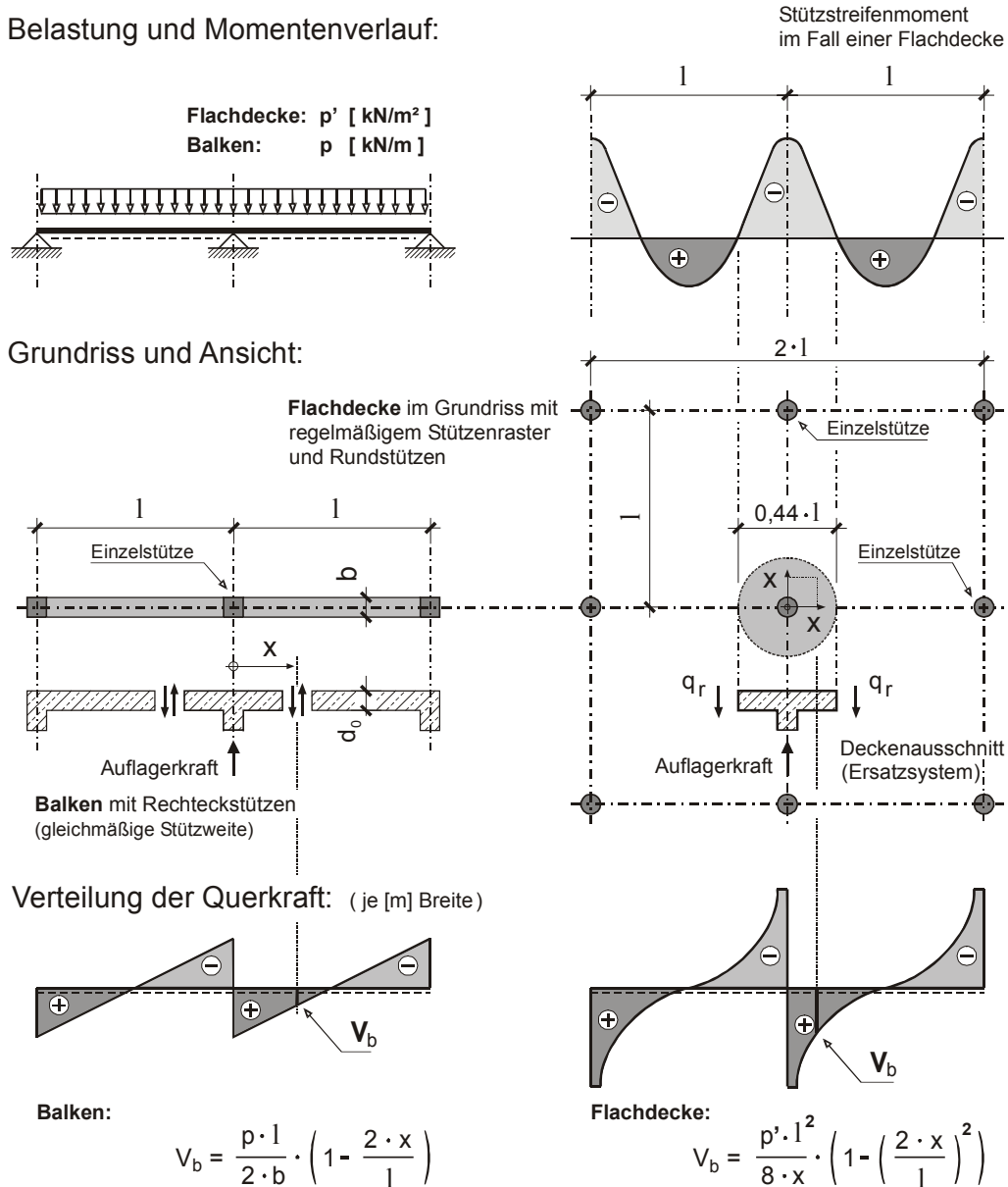
Die systematische Erforschung des Tragverhaltens von Flachdecken begann Anfang des vergangenen Jahrhunderts. Maillart wird in [57] als der erste Ingenieur genannt, der die Vorteile der einfach zu verlegenden Zweibahnenbewehrung erkannte. Er führte bereits 1908 Großversuche zur Erforschung des Tragverhaltens orthogonal bewehrter Platten durch und entwickelte Berechnungsverfahren unter Beachtung von Rand- und Innenstützen. Seine Erkenntnisse über das Biegeverhalten von trägerlosen Stahlbetonplatten stellte er in [83] vor. Über die zum damaligen Zeitpunkt überwiegend bevorzugte ringförmige Bewehrung – Vorschläge kamen u.a. von Smulski und Turner – wird in [11] berichtet. Diese frühen amerikanischen Versuche an Pilzdecken, dem Vorläufer der heute eingesetzten Flachdecke, sahen vor allem Ringbewehrung mit z.T. radial angeordneten Stäben zur Verankerung der inneren Bewehrungsringe vor. Alle zunächst durchgeführten Versuche galten überwiegend der Momentenverteilung und sollten die Wirksamkeit der unterschiedlichen Vorstellungen und Vorschläge zur Bewehrungsführung untermauern. Die Versagensform des Durchstanzens infolge Querkraftversagen im Bereich der Decken-Stützenverbindungen wurde bis etwa 1955 kaum untersucht [11].

Die ersten umfangreichen und systematisch aufbereiteten Untersuchungen zur Klärung des Durchstanzwiderstandes, dem Querkraftversagen im Bereich der Lasteinleitung zwischen Deckenplatte und Stützenkopf, wurden in den sechziger Jahren von Kinnunen und Nylander [66] [67] für ihre anschließenden theoretischen Untersuchungen durchgeführt. „Sie klärten das Durchstanzversagen ab“ [11], indem sie sowohl ringbewehrte Deckenausschnitte als auch Kombinationen von ring- und radialverlegten Betonstäben sowie orthogonale Bewehrungsführungen in ihrem Versuchsprogramm berücksichtigten.

### 2.1 Zum Tragverhalten aus statischer Sicht

Werden dünne, ebene Flächentragwerke betrachtet, deren Mittelfläche durch äußere Belastungen eine Krümmung erhalten, wird vorausgesetzt, dass die Normalen auf der zunächst unbelasteten Plattenmittelfläche auch nach der Belastung gerade bleiben (Normalenhypothese in Analogie zur Bernoulli–Euler–Balkentheorie). Liegt die Voraussetzung vor, dass die Durchbiegungen der Plattenmittelfläche gering gegenüber ihrer Dicke ist, so dürfen nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie die in der Mittelfläche auftretenden Verdrehungen und Dehnungen vernachlässigt werden. Bei der Berechnung darf angenommen werden, dass die Elemente der Plattenmittelfläche unverzerrt bleiben. Numerisch resultiert daraus ein zweiachsiger Spannungszustand, bei dem die parallel zur Plattenmittelfläche verlaufenden Spannungen eine linear veränderliche Verteilung mit Vorzeichenwechsel in der Plattenmitte aufweisen. Dieses Geradebleiben der Flächennormalen wird durch den plötzlichen Steifigkeitssprung im Übergangsbereich zwischen Stütze und Platte verändert. Durch die Behinderung der Querdehnung werden an diesem Übergang aus der Sicht der klassischen Plattentheorie Schubspannungen hervorgerufen, die im Fall der strengen Erfüllung aller Randbedingungen theoretisch unendlich groß werden und eine Singularität sowohl für die Einflussfelder der Momente (radial: „ $m_r$ “ und tangential: „ $m_\phi$ “) als auch für das Einflussfeld der Querkraft zur Folge haben [46]. Ausgehend von dem Verständnis dieser strengen, klassischen Theorien lassen sich durch die Formulierung geeigneter Randbedingungen vereinfachte, mechanische bzw. mathematische Modelle ableiten.

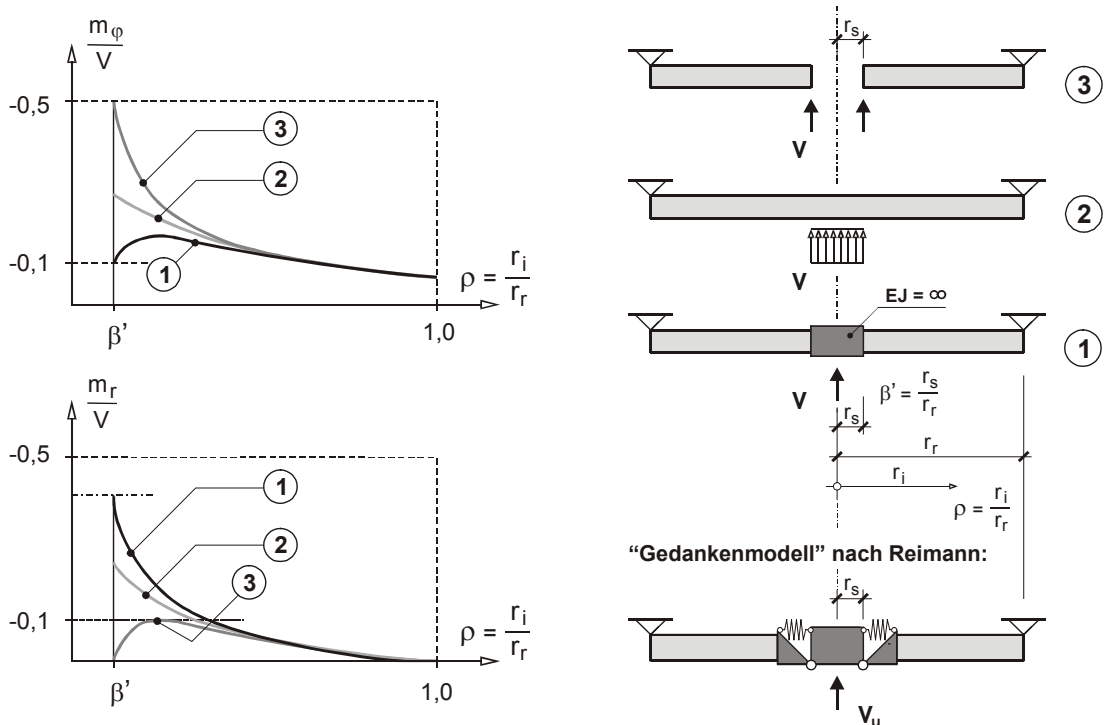
Nadai gelang es [dokumentiert in: „Elastische Platten“; Berlin 1925], für eine regelmäßige, punktförmig unterstützte Platte unter gleichmäßiger Belastung aller Felder mit Hilfe Fourier'scher Reihen eine Näherungslösung aufzustellen, die für baupraktische Anforderungen ausreichend genaue Ergebnisse liefert [11] [56]. Er kommt zu dem Ergebnis, dass die durchlaufende Platte in der Umgebung ihrer Unterstützung übereinstimmende Spannungsergebnisse aufweist, wie eine am Plattenrand gelagerte Kreisringplatte, die durch eine mittig angreifende Einzelkraft belastet wird. In der Literatur werden die Angaben von Nadai für die Abmessungen der Kreisring-Ersatzplatte ( $L' \approx 0,44 \cdot L$ ) ausnahmslos verwendet, um Versuchsprogramme an entsprechend gewählten Deckenausschnitten (Bild 2.1) durchzuführen.



**Bild 2.1:** Ersatzsystem zur Untersuchung des Durchstanzwiderstands, [75] und [96] (mit der näherungsweise zugehörigen Verteilung der Schnittgrößen für „M“ und „V“)

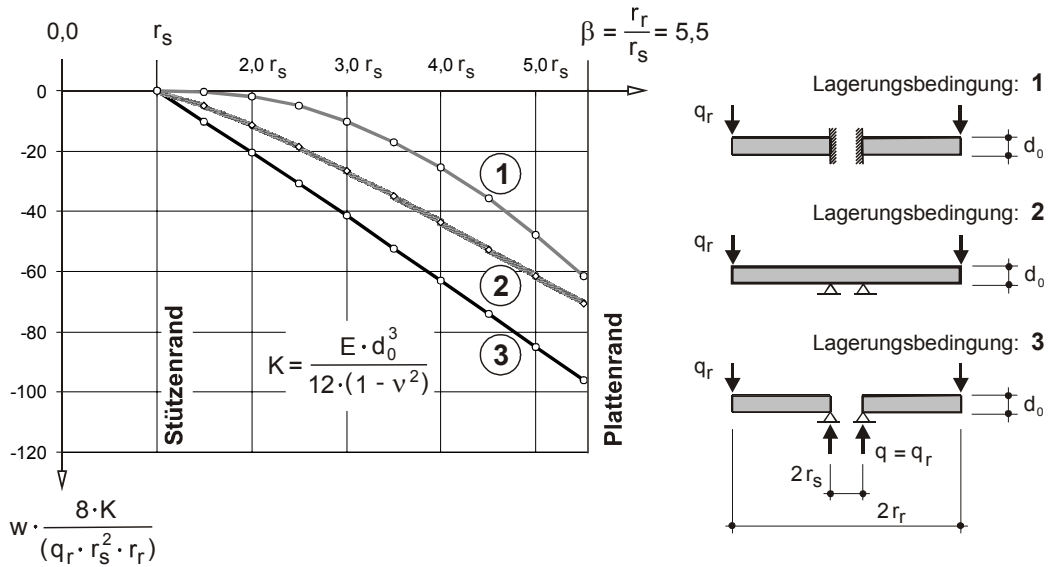
Auf die Besonderheiten des inelastischen Materialverhaltens des Werkstoffes Beton, das in hohem Maß auch durch die Rissbildung geprägt wird und in jedem Fall bei der Anwendung statisch orientierter Lösungstechniken für Betontragwerke beachtet werden muss, gehen Andrä, Baur und Stiglat in [11] ein. Zuvor machte Reimann 1963 auf den Einfluss unterschiedlicher

Lagerungsbedingungen auf den Verlauf der Schnittgrößen bei Kreisringplatten aufmerksam. Bild 2.2 zeigt mögliche Grenzbetrachtungen für Systemveränderungen infolge der zu erwartenden Rissentwicklung bis zum Erreichen der Tragfähigkeit für die Biegemomente in tangentialer und radialer Richtung [96]. Die Grafik zeigt darüber hinaus ein Gedankenmodell, das Reimann seinen Untersuchungen zugrunde gelegt hat. Aufbauend auf diese Betrachtungsweise stellen Andrä, Baur und Stiglat, 1984 in [11] fest, dass eine kreislinienförmige Lagerung der von Nadai vorgeschlagenen Ersatzplatte den Verlauf der Schnittgrößen im Bereich der Stütze am zutreffendsten wiedergibt. Sie deuten an, dass mit zunehmender Belastung und der damit verbundenen Rissentwicklung eine Umlagerung von einer zunächst gleichmäßigen radialen und tangentialen Momentenverteilung – entsprechend der Lagerungsform „2“ im Bild 2.2 – eine Umlagerung zu einer überwiegend tangential orientierten Momentenverteilung stattfindet.



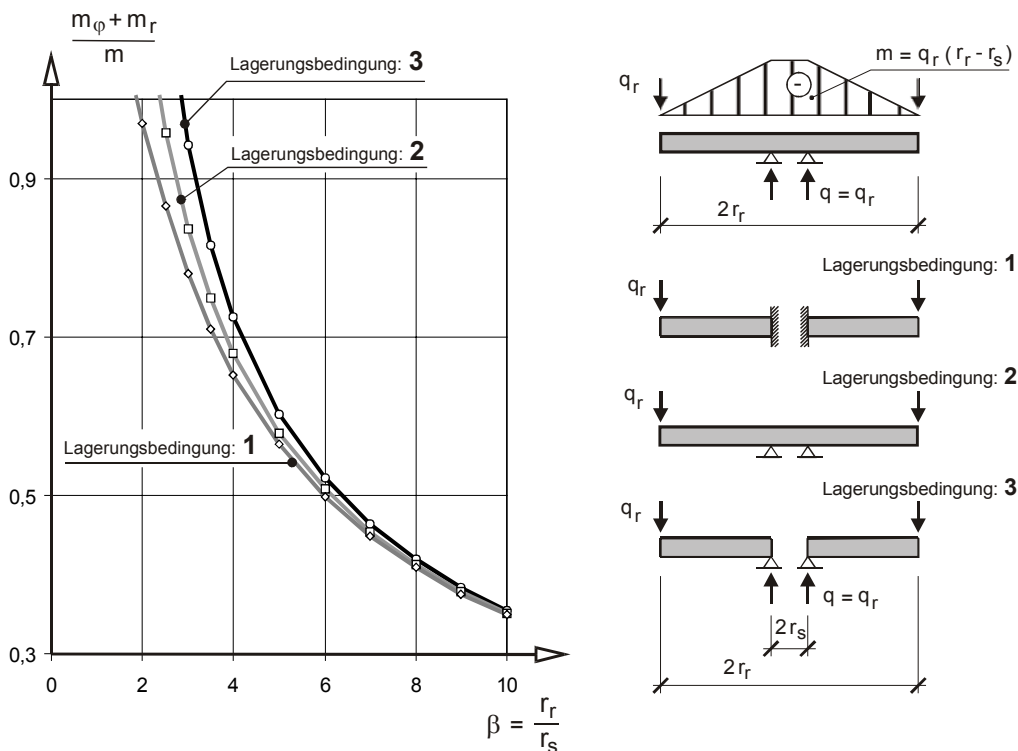
**Bild 2.2:** Biegemomente isotroper Kreisringplatten – Vollplatte und eingespannte Platte, [96]

Diese zunächst theoretisch mögliche Momentenumlagerung beim Übergang vom Zustand I zum Zustand II gründet sich auf Überlegungen, die Andrä mit Hilfe eines Vergleichs des Formänderungsverhaltens für drei unterschiedlich gelagerte Kreisplatten anstellte [8]. Bild 2.3 zeigt die Biegelinien von drei Kreisplatten unter gleicher Randbelastung „ $q_{C/2}$ “ jedoch mit unterschiedlichen Lagerungsbedingungen. Für die gelenkige Lochrandlagerung, Lagerungsfall „3“, stellt sich vom Auflagerand bis zum Plattenende eine geradlinig verlaufende Biegelinie ein. Kinnunen und Nylander haben dieses geradlinige Verhalten in allen ihren Versuchen – unabhängig von der eingebauten Bewehrung – beobachtet und mit gemessenen Verformungsdarstellungen in [66] dokumentiert. Aus diesem Sachverhalt geht Andrä in der Zusammenfassung in [8] davon aus, dass die Ersatzplatte „nach der Rissbildung zunehmend das Tragverhalten der lochrandgestützten Platte mit krümmungsloser Plattenbiegung annimmt“ (Zitat aus [11]).



**Bild 2.3:** Biegelinien von Kreisplatten mit verschiedenen Lagerungsbedingungen, [ 8 ]

Andrä zeigt durch einen Vergleich der Biegemomente (aus [84]), dass die Summen aus den Radial- und Tangentialmomenten der drei unterschiedlich gelagerten Platten näherungsweise gleich groß sind. Es besteht, erkennbar im Bild 2.5, nur ein Unterschied im Verhältnis zwischen Radial- und zugehörigem wirksamen Tangentialmoment und umgekehrt. Die Summe der Momente für die drei verschiedenen Lagerungsbedingungen entsprechend Bild 2.4 zeigt lediglich in Stütznähe ein geringfügig voneinander abweichendes „Momentenvolumen“.



**Bild 2.4:** Summe der Biegemomente ( $m_r$  und  $m_\varphi$ ) am Auflagerrand von Kreisplatten, bezogen auf das Kragmoment eines Balkens mit gleicher Querkraft am Auflagerrand, [ 8 ]

VOLLEINSPANNUNG – Lagerungsbedingung „1“ (aus [84]):

$$\frac{m_{r(1)}}{m} = \frac{1}{2 \cdot (\beta - 1)} \cdot (1 - 2 \cdot c_1) \quad (2.1)$$

$$\frac{m_{\varphi(1)}}{m} = \frac{1}{2 \cdot (\beta - 1)} \cdot \nu \cdot (1 - 2 \cdot c_1) \quad (2.2)$$

mit:

$$m_{r(1)} = q_r \cdot r_r \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot (1 - 2 \cdot c_1), \quad m_{\varphi(1)} = \nu \cdot m_{r(1)}$$

$$c_1 = -[1 + (1 + \nu) \cdot \ln \beta] \cdot \frac{\beta^2}{c_2}$$

$$c_2 = -1 + \nu - (1 + \nu) \cdot \beta^2$$

GELENKIGE LAGERUNG – Lagerungsbedingung „2“ (aus [84]):

$$\frac{m_{r(2)}}{m} = \frac{m_{\varphi(2)}}{m} = \frac{1}{4 \cdot \beta^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)} \cdot c \quad (2.3)$$

mit:

$$m_{r(2)} = -q_r \cdot r_r \cdot \frac{1}{4 \cdot \beta^2} \cdot c, \quad m_{\varphi(2)} \equiv m_{r(2)}$$

$$c = (1 - \nu) \cdot \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \beta \cdot \ln \beta$$

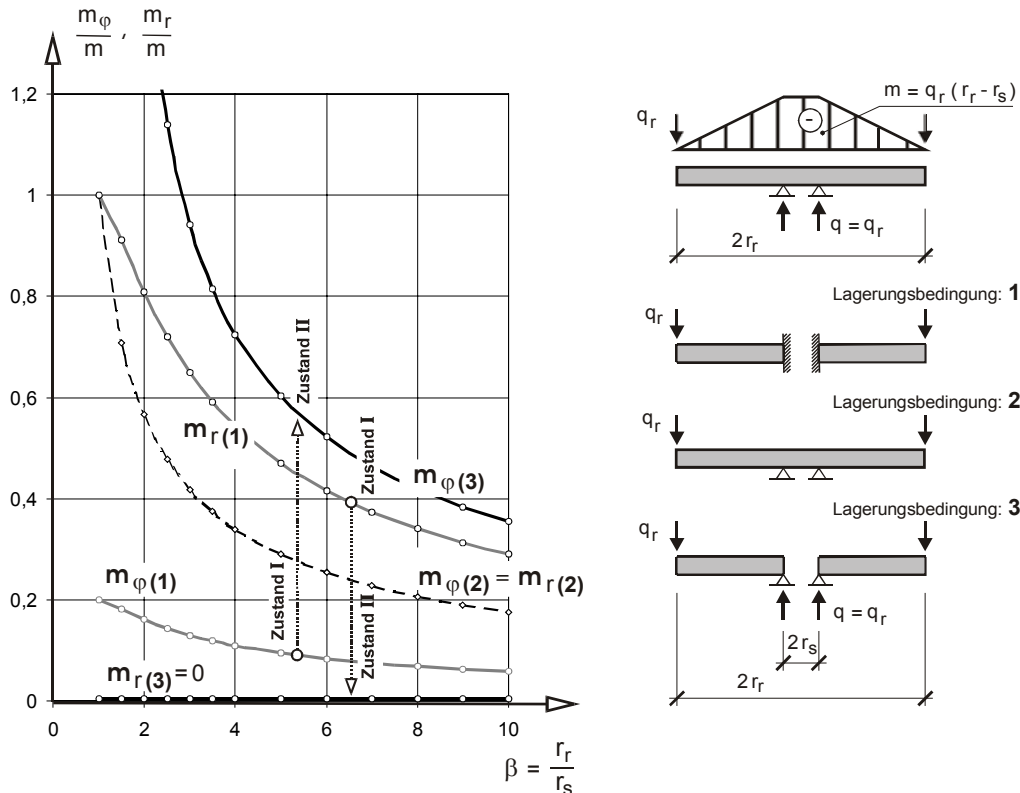
LOCHRANDLAGERUNG – Lagerungsbedingung „3“ (aus [84]):

$$\frac{m_{\varphi(3)}}{m} = \frac{1}{2 \cdot (\beta - 1)} \cdot (1 + \nu) \cdot \left(2 \cdot c - \frac{1 - \nu}{1 + \nu}\right) \quad (2.4)$$

mit:

$$m_{r(3)} = 0, \quad m_{\varphi(3)} = q_r \cdot r_r \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot (1 + \nu) \cdot \left(2 \cdot c - \frac{1 - \nu}{1 + \nu}\right)$$

$$c = -\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \cdot \ln \beta$$



**Bild 2.5:** Biegemomente ( $m_r$  und  $m_\varphi$ ) am Auflagerrand für unterschiedliche Lagerungsbedingungen, [ 8 ]

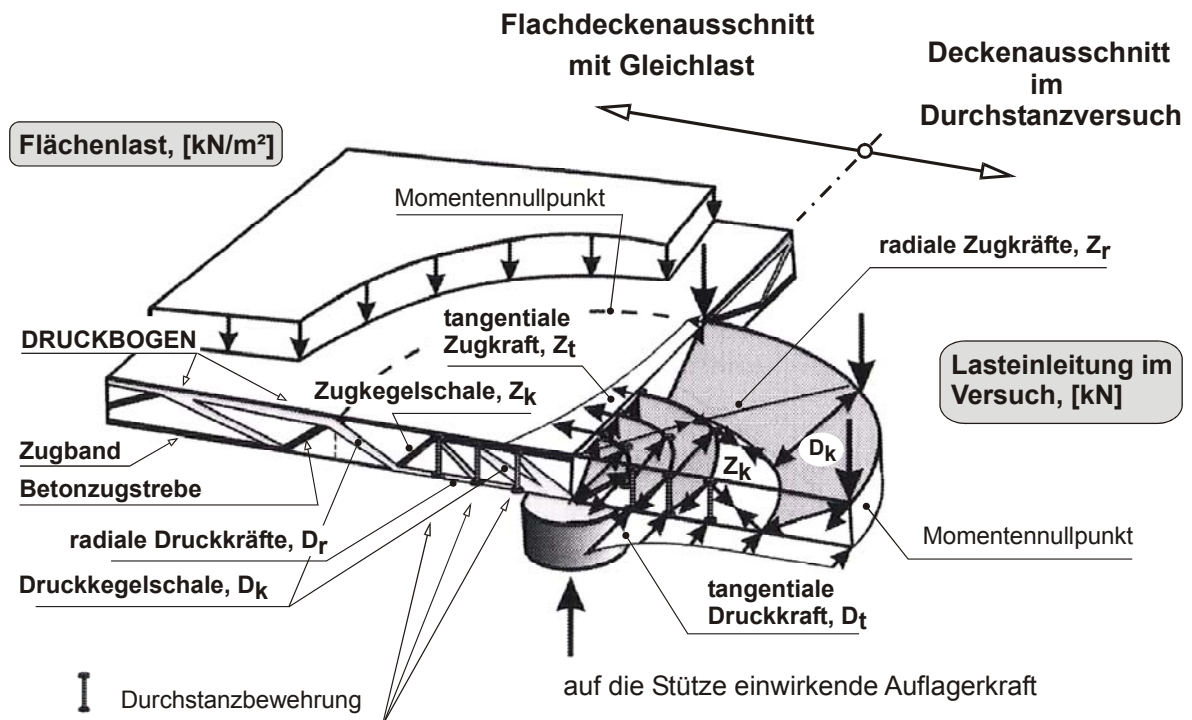
Im Lagerungsfall „3“ ist das Radialmoment  $m_{r(3)}$  Null und es stellt sich das von allen drei Lagerungsformen größte Tangentialmoment  $m_{\varphi(3)}$  ein – Bild 2.5. Wird dieser Grenzfall auf die Spannungsverteilung einer Stahlbetonplatte in Stützennähe angewendet, führt die ausschließlich tangential wirksame Momentenverteilung zu einer um die Stütze ringförmig verlaufenden Biegedruckzone.

Dieser zunächst theoretisch angenommene Sachverhalt wird im Kapitel 5 mit einer FE-Berechnung nachgewiesen und bestätigt. Er wird im Kapitel 6 bei der Entwicklung eines Bemessungsmodells für das Verbundsystem angewendet, um das Formänderungsverhalten der Stahlbetonplatte im Zusammenwirken mit dem schubfest eingebundenen Stahlkreis über eine allgemeingültige Elastizitätsgleichung zuverlässig zu beschreiben.

## 2.2 Zum Tragverhalten abgeleitet aus Versuchsbeobachtungen

In Stahlbetonbauteilen ist mit fortgeschrittener Rissentwicklung im Zustand II die Form der Lastabtragung durch das Ausbilden von Druckbögen und Zugbändern gekennzeichnet [79]. Das Tragverhalten im Durchstanzbereich von Innenstützen wird in Anlehnung an dieses Fachwerkmodell entsprechend der klassischen Fachwerkanalogie nach Morsch heute einheitlich und unbestritten über räumliche Druck- und Zugkegelschalen, die rotationssymmetrisch vom Stützenauflagerrand schirmförmig in die Flachdecke ausstrahlen, dargestellt. In [39] und [57] ist dieses Tragmodell in einer vergleichenden Grafik zwischen einem Flachdeckenteilsystem und den für

Durchstanzversuche i.d.R. eingesetzten Deckenausschnitten anschaulich dargestellt und hinreichend erläutert.



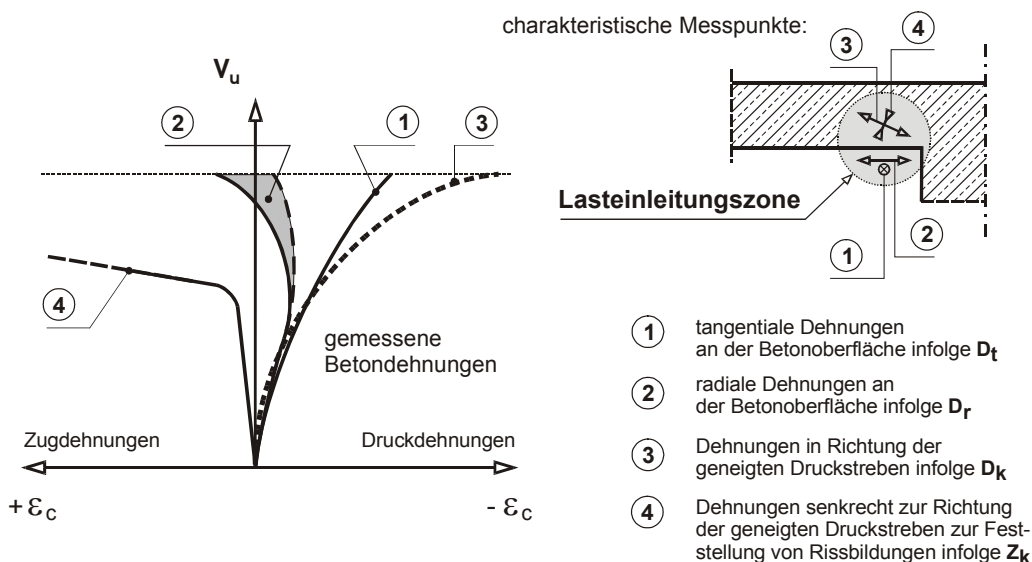
**Bild 2.6:** Fachwerkmodell zum Tragverhalten im Durchstanzbereich einer Innenstütze, aus [39], [57]

Auf die grundsätzlichen Unterschiede einer punktförmig gestützten Platte entsprechend Bild 2.6 gegenüber den Fachwerkmodellen für Stahlbetonbalken oder linienförmig gelagerten Platten machen Andrä, Baur und Stiglat in [11] aufmerksam. Ihre Form der Interpretation des räumlichen Versagensmechanismus wird den nachfolgenden Abschnitten vorangestellt, um die grundsätzlichen Zusammenhänge beim Durchstanzen, das zum schlagartigen Verlust der Tragfähigkeit eines ganzen Deckensystems führen kann, zu beschreiben.

Bei durchlaufenden Stahlbetonbalken durchdringen die Druckgurte den aufgelagerten Bereich entsprechend Bild 2.8. Diese günstige Eigenschaft wird mit einer wirksam werdenden Klemmkraft „ $H$ “ verglichen, aus der sich über einen Reibungsmechanismus die in die Stütze einzuleitende Vertikalkomponente „ $R_v = \mu \cdot H$ “ angeben lässt [11]. Die Vertikalkomponente entspricht der aufnehmbaren Stützenlast und ist im wesentlichen abhängig vom Scherwiderstand der gedrückten Balkenschnittfläche. Wie später bei der Beschreibung der werkstoffbedingten Besonderheiten für Beton gezeigt wird, hat die vorhandene und wirksame Druckspannung einen entscheidenden Einfluss auf eine damit zugleich verbundene Zunahme der Schubtragfähigkeit.

Überträgt man diese Betrachtungsweise auf nahezu punktförmig oder ringförmig gelagerte Flachdecken, muss notwendigerweise eine andere Form der Auslegung über den Tragmechanismus angewendet werden. Wird formal in analoger Weise zu den Ausführungen im vorangegangenen Abschnitt von einer vorwiegend tangential orientierten Momentenverteilung ausgegangen, können sich konsequenterweise entsprechend Bild 2.9 überwiegend nur tangentielle Druckringe entwickeln. Durch die vollkommene, einseitige Behinderung der Querdehnung wird im Gegensatz zum Balken über die führende tangentielle Beanspruchung im Stützenbereich ein

zweiachsiger Spannungszustand hervorgerufen. Aus dem Einfluss der Querdehnungsbehinderung müsste für Beton entsprechend den Grundlagen der Festigkeitslehre etwa das 0,2-fache der Tangentialspannung als zusätzliche, radial aktiv werdende Kontaktpressung resultieren. Versuchsbeobachtungen, in denen oft eine Abnahme der radial gerichteten Druckdehnungen an der Plattenunterseite erkennbar wurde, zeigen jedoch auf, dass eine versagenshemmende Wirkung des Anpressdruckes auf die Widerstandsfähigkeit sich offensichtlich durch die gegenseitige Beeinflussung – Stauchung in radialer Richtung und Ausdehnung in tangentialer Richtung – beim inhomogenen Werkstoff Beton nicht voll ausbilden kann. Auf diese Zusammenhänge wird im Kapitel 3 näher eingegangen. Kordina und Nölting heben hervor, dass „im engeren Bereich um die Stütze von Flachdecken“ uneingeschränkt ein rotationssymmetrisches Rissbild beim Erreichen der Tragfähigkeit erkennbar wird [74]. Die von ihnen beschriebenen Rissbilder werden nahezu ohne Einschränkungen bei kreisförmigen Flachdeckenausschnitten, bei rechteckigen Fundamenten wie auch bei vollständigen Plattensystemen gleichermaßen beobachtet. Die erkennbaren Versagensformen und das z.T. identische Dehnungsverhalten bei Versuchsdurchführungen unterliegen damit alle einer charakteristischen Gesetzmäßigkeit, aus der für Platten eine deutlich geringere und reduzierte „reibungsschlüssige“ Kontaktpressung (Klemmdruck) gegenüber Balkentragwerken abgeleitet bzw. erwartet werden kann.

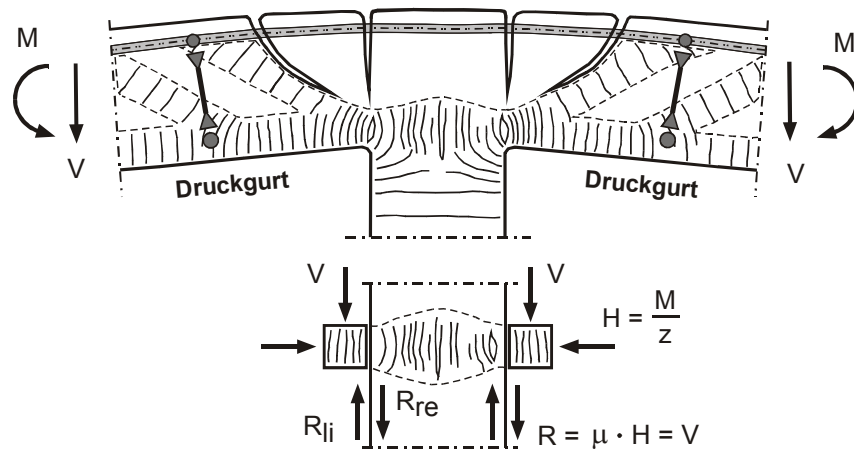


**Bild 2.7:** Beispielhafter Verlauf gemessener Last-Dehnungs-Kurven, aus [74]

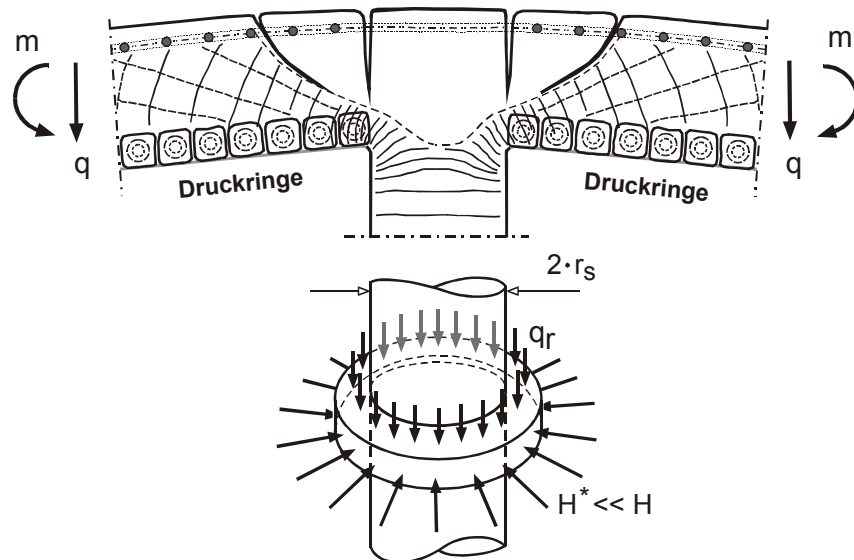
Aus den vorangegangenen Erläuterungen zum grundsätzlichen Mechanismus darf zunächst geschlossen werden, dass die geringe Werkstoffzähigkeit des Betons einen Trennriss, dargestellt im Bild 2.10b, zumindest nicht mit aufgebogenen Bewehrungsstäben verhindern kann. Die Darstellung zeigt nach Erreichen des Tragvermögens einer Stützen-Plattenverbindung das Durchrutschen des Plattenteils mit der bewusst hervorgehobenen Translation zwischen Platte und dem verbleibenden Stützenstumpf. Nach den Ausführungen in [11] darf eine aufgebogene Bewehrung lediglich als „Absturzsicherung“ betrachtet werden. Der Vorteil beim Stahlbetonbalken mit aufgebogenen Bewehrungsstäben entsteht durch die Funktion der Fachwerk-Zugdiagonalen als „Bindeglied“ zwischen Zug- und Druckgurt über den im Bild 2.10a gezeigten Keilriss hinweg. Bei zunehmender Belastung und vor allem mit zunehmender Rotation ermöglicht die Dehnfähigkeit des Betonstahls einen stabilen Gleichgewichtszustand auch unmittelbar am Stützenanschnitt. Der Verlust der Tragfähigkeit wird beim Balken erst eingeleitet, wenn beim



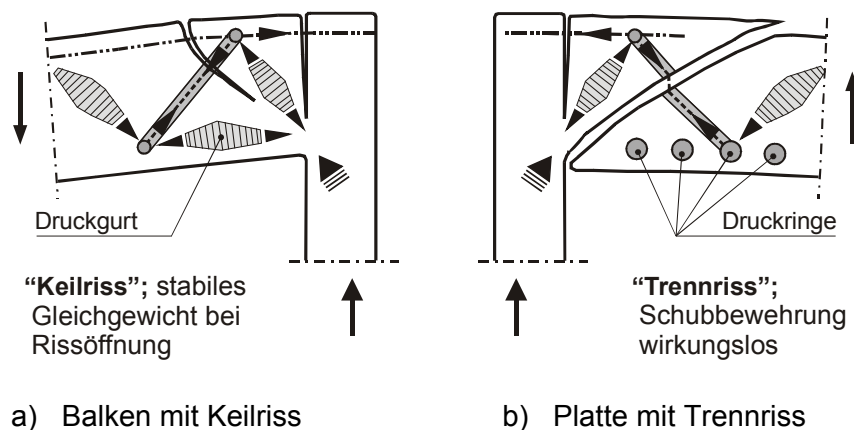
Erreichen der Druckfestigkeit die Druckstrebe aufgespalten oder der Gleitwiderstand bzw. die Schubfestigkeit der Biegedruckzone überschritten wird.



**Bild 2.8:** Durchdringung des Druckgurtes am Auflagerrand eines Durchlaufträgers, [11]



**Bild 2.9:** Druckringe am Auflager einer Flachdecke auf einer Innenstütze, [11]



**Bild 2.10:** Verhalten von Balken und Platten mit geneigter Schubbewehrung, [11]

### 2.3 Modellentwicklungen zur Bemessung unter Berücksichtigung der besonderen Materialeigenschaften des Betons

Zahlreiche versuchstechnische Untersuchungen und theoretische Näherungsberechnungen über die Lastabtragung und den Tragmechanismus sind bis heute erschienen. Eine umfangreiche Zusammenstellung mit Erläuterungen über die unterschiedlichen Theorien und Berechnungsverfahren zum Tragverhalten punktförmig gestützter Platten stellt Georgopoulos 1987 seiner eigenen Arbeit voran, [44] und [45]. Er beschreibt in [44] ausführlich die Modellentwicklungen von:

- Modell von Kinnunen und Nylander – 1960 [66], [67]
- Theorie von Moe – 1961
- Theorie von Reimann – 1963 [96]
- Verfahren von Herzog – 1971
- Starrkörpermodell von Marti und Thürlimann – 1977
- Theorie von Nielsen, Jensen und Bach – 1979
- Verfahren von Andrä – 1982 [ 8 ]
- Verfahren von Nölting – 1984

Eine tabellarische Übersicht mit weiteren oben nicht aufgeführten Methoden geben Kordina und Nölting mit anschließender Bewertung an [74]. Die Verfahren in Regelwerken (DIN 1045, CEB Model Code, CP 110 und ACI 318-1983) werden in ihrer durchgeführten statistischen Auswertung zwischen gemessenen und rechnerischen Bruchlasten erfasst und in einer positiv kritischen Form hinsichtlich der Streubreiten der erzielten Ergebnisse charakterisiert. Georgopoulos weist darauf hin, dass eine Vielzahl der Verfahren an Regressionsanalysen aus entsprechenden Versuchsergebnissen entwickelt und angepasst sind. Damit ergeben sich zunächst gute Übereinstimmungen zwischen den rechnerischen und experimentellen Ergebnissen, da die verwendeten Formelkonstanten oftmals aus den zum Vergleich herangezogenen Versuchen abgeleitet wurden. Neue und umfangreiche Vergleichsberechnungen ([110] [124]) sowie Gegenüberstellungen in [74] zeigen auf, dass bei vergleichender Betrachtung der verschiedenen Verfahren – bei gleichen geometrischen Voraussetzungen und für identische Festigkeitskennwerte – große Streuungen der berechneten Traglasten bzw. der zulässigen Stützenlasten auftreten.

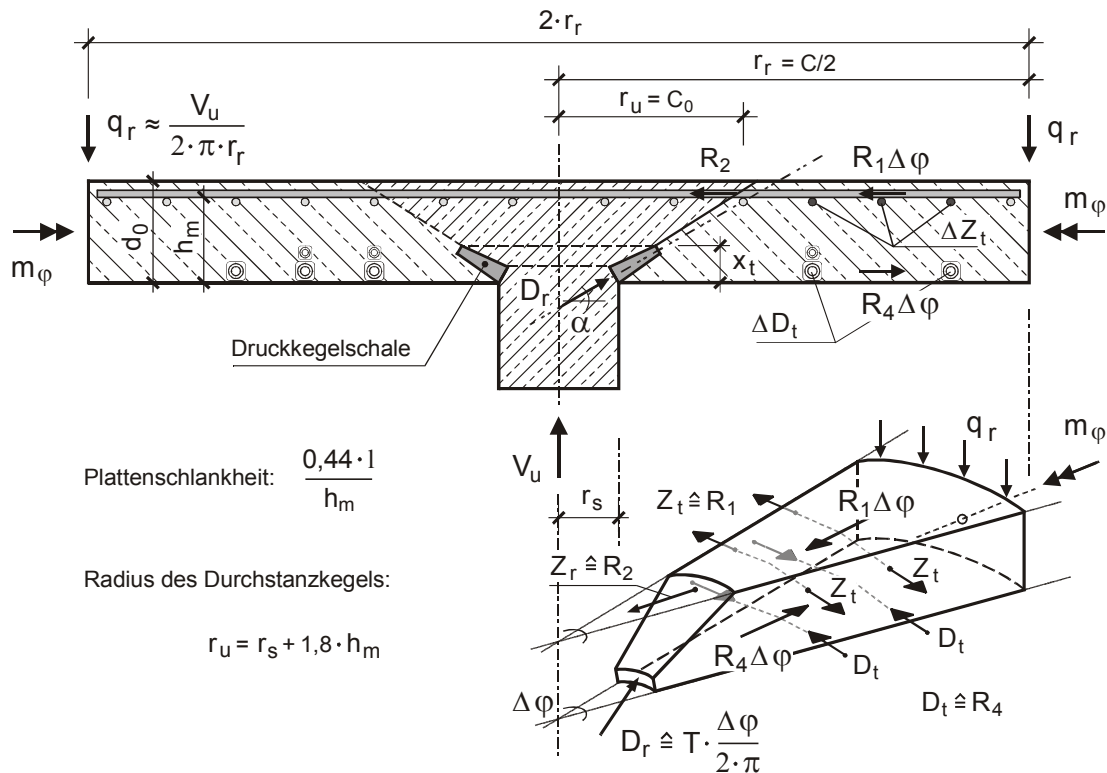
Neuere Forschungsberichte versuchen über die Bruchzähigkeit des Werkstoffes Beton den Versagensmechanismus beim Durchstanzen zu beschreiben, [50] [86]. Nach Ansicht des Verfassers wird mit einem solchen Ansatz der Versuch unternommen, die ohnehin sehr geringe und zudem noch schlecht einzuschätzende Spannungsverteilung an den Rissspitzen (bzw. den Spannungsspitzen in der Risswurzel) der zahlreichen Einzelrisse innerhalb des porösen Betongefüges das Versagen eines ganzen Bauteils zu beschreiben. Ergebnisse bruchmechanischer Untersuchungen für das beim Durchstanzen sehr komplexe Systemverhalten anzuwenden, erscheinen dem Verfasser daher problematisch und können – beim derzeitigen Stand der Kenntnis – nicht zu einer allgemeingültigen und zuverlässigen Berechnungsmethode führen. Der für das Durchstanzen verantwortliche Versagensmechanismus kann ausschließlich über eine globale Systembetrachtung beschrieben werden. Mit den beiden nachfolgend genauer vorgestellten Modellen von Kinnunen und Nylander [66] und von Andrä [8] ist dies möglich. Es wird ge-

zeigt, dass bereits diese Modelle eine Vielzahl unterschiedlicher Versagensursachen beinhalten und wesentliche, charakteristische Festigkeitseigenschaften des Betons berücksichtigen.

**2.3.1 Theoretisches Modell von Kinnunen und Nylander, [66] [67]**

Die grundlegenden Annahmen entwickelten Kinnunen und Nylander aus dem beobachteten Bruchverhalten umfangreicher, eigener Versuchsdurchführungen an kreisrund begrenzten Deckenausschnitten mit unterschiedlichen Bewehrungsnetzen. In ihren Versuchsbeobachtungen konnten sie über die Entwicklung der Rissbildung den Schubriss, der beim Erreichen der maximalen Traglast den Durchstanzkegel begrenzt, bereits unter einer deutlich geringeren Last beobachten. Dieser Risszustand wurde von ihnen als „Basis-System“ für ihre Modellentwicklung verwendet [66]. Entsprechend den Versuchsbeobachtungen und dem gemessenen, bis zum Bruch nahezu linear verlaufenden Zuwachs der Verformungen war es für sie naheliegend, bei ihrer theoretischen Modellentwicklung ein herausgeschnittenes Plattenteilstück als starren, unverformten Körper zu betrachten. Dieses Plattenteilstück, im Bild 2.11 als Sektorelement dargestellt, wird begrenzt durch den geneigten, kreisförmig um die Stütze verlaufenden Schubriss und davon fächerförmig ausstrahlende, radiale Risse bis zum Plattenrand. Die gerissene Kreisplatte, die nunmehr aus einzelnen, zusammengefügtten Sektorelementen besteht, lagert auf einer um den Stützenrand auskragenden und konisch verlaufenden Druckkegelschale.

Der vorweggenommene Hinweis auf die im Kapitel 5 im Bild 5.7 (a+b) und Bild 5.8 dargestellten Ergebnisse der Nachrechnung eines ihrer Versuche (mit der Bezeichnung: „IB15a“, siehe Seite 164) zeigt, dass über eine kontinuumsmechanische Betrachtung derartige Versuchsbeobachtungen numerisch nachvollziehbar sind.



**Bild 2.11:** Mechanisches Modell (mit Sektorelement) kurz vor Eintritt des Bruches, [66] [80]

Aus radial gemessenen Dehnungen an der Plattenunterseite – im Bereich des Stützenumfangs – stellten sie mit zunehmender Belastung bei den meisten ihrer Versuche eine Abnahme der Druckdehnungen fest. Sie berichten auch von z.T. positiven Dehnungen kurz vor dem Versagen. Daraus schlossen sie, dass ein mechanisches Modell nicht auf der Grundlage ebener Verzerrungszustände – zumindest im Bereich des Schubrisses – entwickelt werden durfte. Weiterhin erkannten sie, unterstützt durch die verschiedenen Versuchsbeobachtungen, dass fünf Versagenskriterien den Durchstanzwiderstand einer Stahlbetonplatte maßgeblich beeinflussen:

- Versagen der Verankerung der Bewehrung oder Versagen des Verbundes zwischen Betonstahl und Beton
- Schubversagen in der horizontalen Ebene unmittelbar unter der oberen Lage eines zweilagigen, orthogonalen Bewehrungsnetzes
- Versagen der Druckkegelschale
- Druckversagen des Betons in der tangentialen, d.h. längs der den Stützenrand umlaufenden Richtung im Abstand von:

$$r_u = r_s + y$$

- Versagen beim Erreichen der Streckgrenze in der oberen Bewehrungslage

Die vier zuletzt genannten Versagensursachen werden von Kinnunen und Nylander bei der Entwicklung ihres theoretischen Modells rechnerisch berücksichtigt. Über das Kräftegleichgewicht „ $\sum V = 0$ “, resultierend aus der äußeren Belastung „ $V = q_{C/2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{C/2}$ “, definieren sie einen ersten Wert des Durchstanzwiderstands „ $V_{u,I}$ “. Dieser Widerstand ist von der geneigten Kraft „ $T$ “ innerhalb der Kegelschale, durch die alle vertikalen Kräfte „ $V = T \cdot \sin(\alpha)$ “ in die Stütze eingeleitet werden, und von der Betondruckfestigkeit abhängig. Geometrische Beziehungen zwischen der oberen und der unteren Höhe einer Ringfläche der Kegelschale, „ $z_1$ “ und „ $z_2$ “ entsprechend Bild 2.12, unter der Annahme einer konstanten Druckspannung am oberen und unteren Ende der Schale liefert nach einigen Rechenschritten mit:

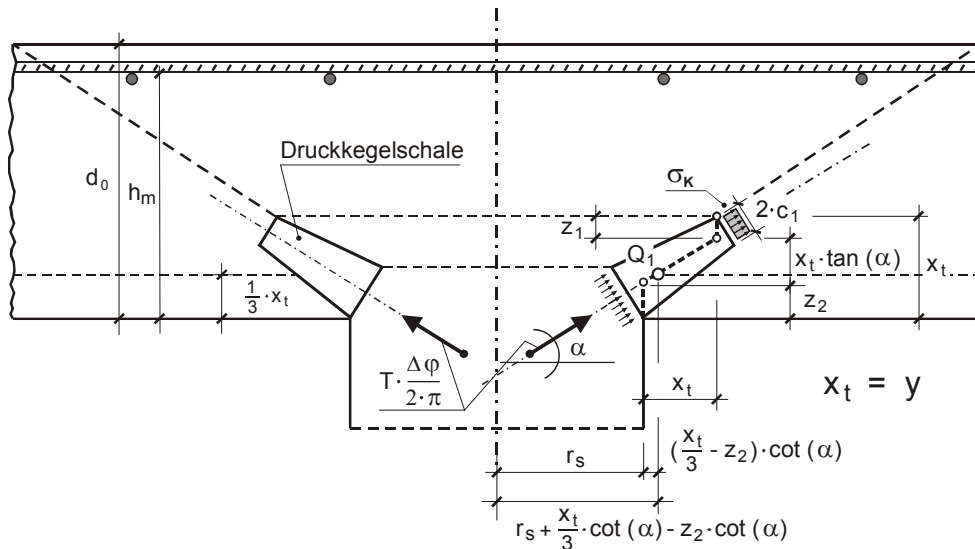
$$T = 2 \cdot \pi \cdot (r_s + y) \cdot 2 \cdot c_1 \cdot \sigma_K \quad (2.5)$$

die erste Bestimmungsgleichung dieses Durchstanzwiderstands zu:

$$V_{u,I} = T \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot x_t \cdot \frac{1 + \frac{x_t}{r_s}}{1 + \frac{x_t}{2 \cdot r_s}} \cdot \sigma_K \cdot f(\alpha) \quad (2.6)$$

Über den geometrischen Ansatz machen sie die veränderliche Dicke der konisch zulaufenden Kegelschale damit abhängig von der tangential gerichteten Biegedruckhöhe „ $x_t$ “ und dem Stützendurchmesser „ $B = 2 \cdot r_s$ “. Je größer der Stützenquerschnitt ausfällt, umso geringer wird die Zunahme bzw. Steigung der konischen Schale im unteren Anschlußbereich längs dem Stützenumfang. Für den Zusammenhang zwischen der tangentialen Biegespannung „ $\sigma_{c,t}$ “ an der Stelle „ $r_s + y$ “ und der sich auf die obere Kreisfläche der Kegelschale mit der Breite „ $2 \cdot c_1$ “ absetzenden Spannung „ $\sigma_K$ “ wählen sie einen Proportionalitätsfaktor in Höhe von:

$$\frac{\sigma_K}{\sigma_{c,t,(r_s+y)}} = 2,35 \quad (2.7)$$



**Bild 2.12:** Druckkegelschale längs dem Stützenumfang, [66]

Resultierend aus der Verdrehung „ $\psi$ “ der äußeren Plattenteile berechnen Kinnunen und Nylander die tangentialen Dehnungen „ $\varepsilon_{s,t}$ “ in Höhe der Bewehrungslage. Entsprechend der Stahldehnung ergibt sich aus der Rotation die negative, tangentiale Betondehnung „ $\varepsilon_{c,t}$ “. Als Rotationszentrum wird die Höhe der Null-Linie angenommen, d.h. die neutrale Plattenmittelebene wird Bezugsebene. Daraus ergibt sich für

die negativen Betondehnungen:

$$\varepsilon_{c,t} = \frac{1}{r} \cdot \psi \cdot x_t \quad (2.8)$$

und für die positiven Stahldehnungen:

$$\varepsilon_{s,t} = \frac{1}{r} \cdot h_m \cdot \psi \cdot \left( 1 - \frac{x_t}{h_m} \right) \quad (2.9)$$

Diese Zusammenhänge sind im Bild 6.2 (Kapitel 6, Seite 221) dargestellt. Sie werden im Modell von Andrä berücksichtigt (in Glg. 2.18 und 2.19), sowie bei der Weiterentwicklung für das neue Verbundsystem. Erreicht die obere Bewehrung die Streckgrenze, kann unter Beachtung der zugehörigen Materialkonstanten und dem Einsetzen in die Gleichung 2.9 der zugehörige Grenzzradius „ $r_u$ “ zum elastischen Bereich angegeben werden zu:

$$r_u = \frac{E_s}{f_{s,R}} \cdot h_m \cdot \psi \cdot \left( 1 - \frac{x_t}{h_m} \right) \quad (2.10)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen der Verformungen des äußeren Plattenteils und Integration der den Dehnungen zugeordneten Spannungen über den gesamten Bereich vom Schubriss bis hin zum äußeren Plattenrand, liefern die in den Radialrissen der Sekorelemente, d.h. in Umfangsrichtung der Stütze wirkenden Zug- und Druckkräfte „ $R_1$ “ und „ $R_4$ “. Mit der Überlegung, dass die Schubspannungen in der Ebene direkt unterhalb der oberen Bewehrungslage mit den radialen Komponenten der Bewehrungskräfte ein Gleichgewicht bilden müssen – da die Kraft innerhalb des Schubrisses nahezu rotationssymmetrisch verteilt ist, gilt zugleich die Voraussetzung

eines rotationssymmetrischen Spannungszustandes „ $\sigma_t = \sigma_r$ “ –, kann auch die unmittelbar im Schubriss freigeschnittene radial gerichtete Kraft „ $R_2$ “ angegeben werden. Es wird dann angenommen, dass alle auf ein Sektorelement einwirkenden Kräfte bekannt sind und ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Rotation „ $\psi$ “, der Biegedruckhöhe „ $x_t$ “ und den davon abhängigen Kraftkomponenten „ $R_1$ “, „ $R_2$ “ und „ $R_4$ “ hergestellt ist. Eine explizite Berechnung dieser zuvor genannten Kräfte „ $R_1 \cdot \Delta\varphi$ “, „ $R_2$ “, und „ $R_4 \cdot \Delta\varphi$ “ ist allerdings wegen ihrer gegenseitigen Beeinflussung nicht möglich.

Mit dem Momentengleichgewicht im Schnittpunkt des radial wirksamen Horizontalschubes in der oberen Bewehrungslage infolge tangentialer Biegezugspannungen und der äußeren, vertikalen Ringlast „ $q_{C/2}$ “ können Kinnunen und Nylander eine Bestimmungsgleichung für den Neigungswinkel „ $\alpha$ “ der Druckkraft „ $T$ “ in der Kegelschale angeben:

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{R_4}{V} = K_y - \cot(\alpha) \quad (2.11)$$

Unter Beachtung des Proportionalitätsfaktors (Gleichung 2.7) ergibt sich daraus eine vom Neigungswinkel „ $\alpha$ “ und der Höhe der Biegedruckzone „ $x_t$ “ abhängige Beziehung:

$$\left( K_y \cdot \tan(\alpha) - 1 \right) \cdot \frac{1 - \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot 2,35} \cdot \left( 1 + \frac{x_t}{2 \cdot r_s} \right) \cdot \ln \left( \frac{\frac{C}{2 \cdot h_m}}{\frac{r_s}{h_m} + \frac{x_t}{h_m}} \right) \quad (2.12)$$

in den Gleichungen 2.11 und 2.12 enthalten, ist die Vereinfachung für:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (C - 2 \cdot r_s)}{h_m - \frac{x_t}{3}} = K_y$$

Zur Erleichterung der Anwendung ihres Verfahrens sind in der Originalarbeit Diagramme zur Festlegung des Neigungswinkels „ $\alpha$ “, abhängig vom Verhältnis zwischen Stützendurchmesser und Plattenhöhe sowie der Plattenschlankheit, entwickelt. Der maximale Wert für „ $f(\alpha)$ “, Gleichung 2.6, wird mit „0,207“ angegeben. Das entspricht einem Winkel von maximal 22,5°.

Zur Berechnung der Kräfte „ $R_1$ “ und „ $R_2$ “ in der oberen Bewehrung entsprechend Bild 2.11 nutzen sie eine dritte Gleichgewichtsbedingung, die Momentengleichung im Schnittpunkt zwischen der Kraft „ $T$ “ innerhalb der Druckkegelschale und dem radialen Horizontalschub „ $R_3$ “ infolge der Biegedruckkräfte unterhalb der neutralen Plattenmittenebene („ $Q_1$ “ im Bild 2.12):

$$R_1 \cdot \Delta\varphi + R_2 = V \cdot \frac{\Delta\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot K_y \quad (2.13)$$

Über die verformungsabhängigen tangentialen Biegebeanspruchungen und ihre zugehörigen radial wirkenden Kraftkomponenten können Kinnunen und Nylander schließlich mit Hilfe der zwei zuvor angegebenen Momentengleichgewichtsbeziehungen den Durchstanzwiderstand „ $V_{u,II}$ “ abhängig von der Rotation „ $\psi$ “ der Sektorelemente angeben. Sie ergibt sich für den Fall, dass in der Bewehrung die Streckgrenze erreicht wird, zu ( $C/2 \geq r_{el,gr} \geq C_0$ ):

$$V_{u,II} = 1,1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \beta_s \cdot h_m^2 \cdot \frac{r_{el,gr}}{(C/2) - r_s} \cdot \left[ 1 + \ln \left( \frac{(C/2)}{r_{el,gr}} \right) \right] \cdot \left( 1 - \frac{x_t}{h_m \cdot 3} \right) \quad (2.14)$$

Bleibt die obere Bewehrung innerhalb der Sektorenelemente im elastischen Formänderungsbe-  
reich ( $r_{el,gr} < C_0$ ), gilt:

$$V_{u,II} = 1,1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \beta_s \cdot h_m^2 \cdot \frac{r_{el,gr}}{(C/2) - r_s} \cdot \left[ 1 + \ln \left( \frac{(C/2)}{r_s + 1,8 \cdot h_m} \right) \right] \cdot \left( 1 - \frac{x_t}{h_m \cdot 3} \right) \quad (2.15)$$

Der Abstand vom Stützenumfang bis zum Schnittpunkt zwischen Schubbruchkegel und der oberen Bewehrungslage wächst entsprechend den in [66] dokumentierten Beobachtungen bei Platten mit Ringbewehrung (in der Originalarbeit mit Typ B bezeichnet) und bei Platten mit einer Kombination aus Ringbewehrung und radial angeordneten Zulagen (als Typ C bezeichnet) zunehmend, abhängig vom Gehalt der eingelegten Biegebewehrung. Bei Anwendung einer Netzbewehrung (Typ A) konnten Kinnunen und Nylander dagegen einen vom Bewehrungsgehalt nahezu unabhängigen Schubkegel beobachten. Dies führte zu der vereinfachten Festlegung des Schubrisses mit einem konstant bleibenden Abstand „ $r_u = C_0 = r_s + 1,8 \cdot h_m$ “, der in den zuvor angegebenen Beziehungen entsprechend Berücksichtigung fand (entspricht einem Neigungswinkel von ca.  $30^\circ$ ). Dieser Wert hat mit „ $\beta_r = 33,7^\circ$ “ Eingang in die nationalen Bemessungsvorschriften gefunden (entspricht einem Abstand von  $1,5 \cdot h_m$ ).

Die Funktionen für „ $V_{u,II}$ “ sind geprägt von der Annahme, dass sich die radial gerichteten Kraftkomponenten proportional zum Rotationswinkel „ $\psi$ “ einstellen werden. Die benötigten Verformungswerte entnehmen Kinnunen und Nylander allein aus ihren Versuchsbeobachtungen mit ringbewehrten Betonplatten. Damit wird die Rotation „ $\psi$ “ der Stahlbetonplatte bzw. der Platten-sektoren, Bild 2.11, eine Formelkonstante, die aus Versuchsergebnissen entwickelt wurde. Letztlich wird sie damit eine empirische Größe, abhängig von den geometrischen Abmessungen der Versuche und den entsprechend zugehörigen Baustoffkennwerten sowie den versuchs-technischen Voraussetzungen bei der Durchführung. Entsprechend ihren Versuchsbeobachtungen unterscheiden Kinnunen und Nylander abhängig vom Stützendurchmesser zwei Bereiche:

für den ersten Bereich gilt:

$$0 < \frac{2 \cdot r_s}{h_m} \leq 2 \quad : \quad \varepsilon_{c,t} = \frac{\psi}{1 + \frac{r_s}{x_t}} = 0,0035 \cdot \left( 1 - 0,22 \cdot \frac{2 \cdot r_s}{h_m} \right) \quad (2.16)$$

und für den zweiten Bereich:

$$2 \leq \frac{2 \cdot r_s}{h_m} \quad : \quad \varepsilon_{c,t} = \frac{\psi}{1 + \frac{r_s}{x_t}} = 0,0019 \quad (2.17)$$

Der in den Gleichungen 2.14 und 2.15 angegebene Vorfaktor von „1,1“ soll der geringfügig um 10 % größeren Tragfähigkeit einer netzbewehrten Stahlbetonplatte gegenüber der ringbewehrten Platte ausreichend Rechnung tragen, so wie es den Versuchsbeobachtungen entnommen werden konnte. Kinnunen macht hierzu in [67] weitere Angaben und führt den positiven Einfluss eines orthogonalen Bewehrungsnetzes auf den Durchstanzwiderstand im wesentlichen auf ein nicht mehr reines, rotationssymmetrisches System zurück. Die Auflösung nach dem gesuchten

Durchstanzwiderstand erfolgt auf iterativem Weg durch Gleichsetzen der Durchstanzlasten „ $V_{u,I}$ “ und „ $V_{u,II}$ “. Durch die Variation des Neigungswinkels „ $\alpha$ “ und der unbekanntes Biegedruckhöhe „ $x_t$ “ kann über die Forderung „ $V_{u,I} = V_{u,II}$ “ der unbekanntes Durchstanzwiderstand „ $V_u$ “ berechnet werden. Wegen der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen „ $x_t$ “ und „ $\psi$ “ – in den Gleichungen 2.16 und 2.17 – gründet sich das iterative Verfahren jedoch konkret auf eine starre Festlegung der Verformungseigenschaften bzw. des Rotationsverhaltens, gewonnen aus Versuchsbeobachtungen.

Bei der Entwicklung ihres Modells mussten Kinnunen und Nylander keinen Gebrauch von der Annahme „bezogener“ Bruchschubspannungen, d.h. Rechenwerte „ $\tau_c$ “ für den Werkstoff Beton, machen. Das Versagen des Systems bzw. der Durchstanzwiderstand wird damit über das Erreichen der Streckgrenze oder durch die Druckfestigkeit des Betons sowie der äußeren Belastung „ $q_{C/2}$ “ am Plattenrand „ $C/2$ “ und die zugehörigen Biegemomente am Stützenrand „ $r_s$ “ bestimmt. Kordina berichtet in [74], dass dieses Verfahren starke Beachtung in der Fachwelt fand, besonders in den CEB–Kommissionen. Leonhardt weist in [80] darauf hin, dass in den Ausdrücken für die Durchstanzlast „ $V_u$ “ keine Schubspannungen „ $\tau_c$ “ vorkommen, „was grundsätzlich richtig ist“. Es ist bis heute unbestritten, dass dieses Modell derart zuverlässige Ergebnisse liefert, dass es u.a. als Grundlage für vereinfachte Nachweismethoden, wie sie z.B. in den Regelwerken [DIN 1045(7.88), Schwedische Norm] angegeben sind, herangezogen wurde [124].

### 2.3.2 Theoretisches Modell von Andrä, [ 8 ]

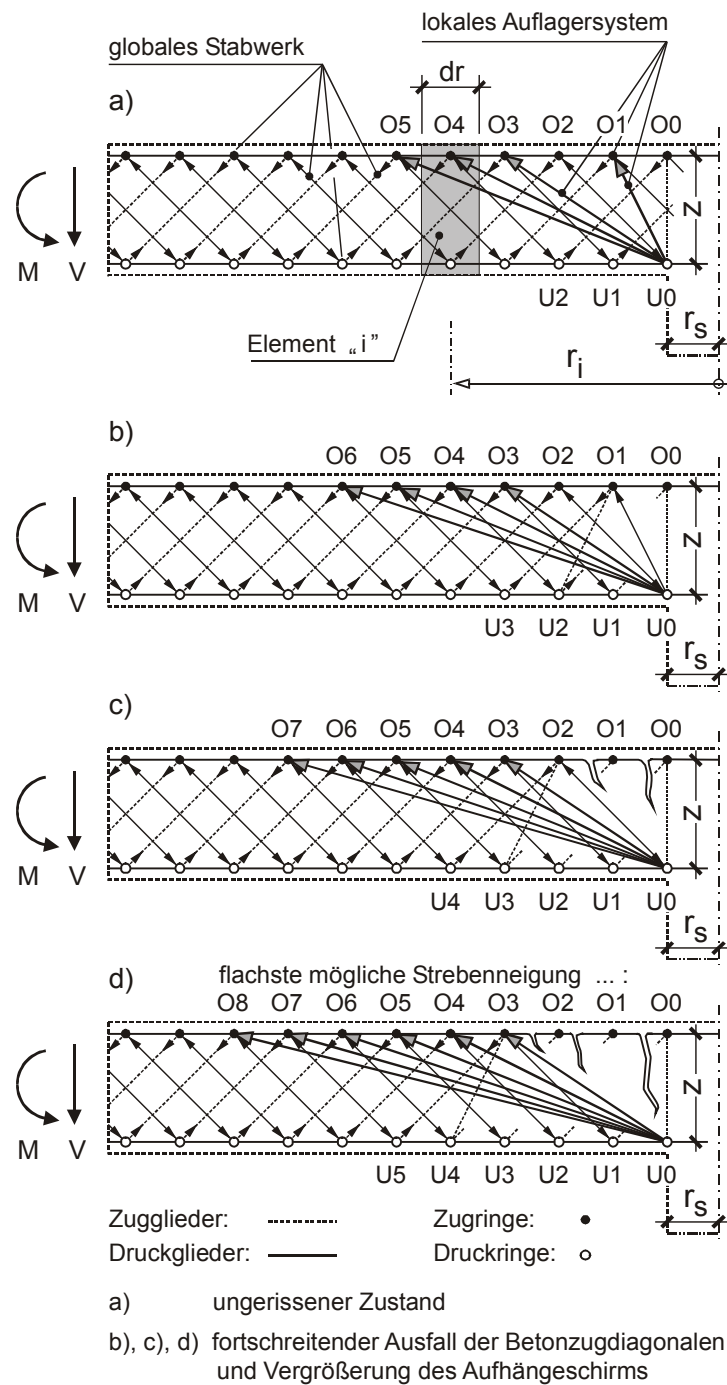
Entsprechend den „Rissbeobachtungen“ an der Plattenoberfläche – erkennbar in dem Ergebnis der FE–Berechnung (Bild 5.8 – Seite 164) – trennen Kinnunen und Nylander die Platte in Sektorenstücke auf und leiten den Durchstanzwiderstand an einem Sektorelement für den rotationssymmetrischen Fall über Gleichgewichtsbetrachtungen ab (zuvor beschrieben). Andrä kritisiert in seiner Arbeit [ 8 ] zu Recht, dass der Kraftverlauf innerhalb der Sektorenelemente nicht verfolgt wird bzw. keine Beachtung in dem Modell von Kinnunen und Nylander findet.

Um den inneren Zerstörungsprozess definieren zu können, wählt Andrä deshalb zur Beschreibung des Versagensmechanismus eine Überlagerung von zwei Fachwerksystemen:

- Netzfachwerk mit 45° geneigten Druck- und Zugkegelschalen, einem hochgradig statisch unbestimmten System – im Bild 2.13 mit „globales Stabwerk“ bezeichnet – (Grundsystem)
- Strebensystem bestehend aus Druckkegelschalen mit veränderlicher Neigung – im Bild 2.13 mit „lokales Auflagersystem“ bezeichnet

Die Voraussetzung einer krümmungslosen Verdrehung übernimmt er analog zu den getroffenen Annahmen von Kinnunen und Nylander. Sein Modell beschränkt sich aber nicht mehr nur auf die äußeren, auf ein freigeschnittenes Sektorelement einwirkenden Kraftgrößen. Um den Versagensmechanismus abhängig von inneren Zerstörungsvorgängen im stütznahen Bereich beschreiben zu können, unterteilt Andrä die im Bild 2.13 dargestellten Längsschnitte in zahlreiche Kreisringe mit der Breite „ $dr$ “ und dem Abstand „ $r_i$ “ von der Stützenachse – Bild 2.13a.





**Bild 2.13:** Stabwerkmodell einer Flachdecke im Stützenbereich nach André, [ 9 ]

André betrachtet zunächst ein einzelnes Element „i“ entsprechend Bild 2.13a bzw. Bild 2.14 in tangentialer Richtung. Für die in den Zustand II übergegangene, gerissene Stahlbetonplatte berechnet er mit den aus den Gleichungen 2.8 und 2.9 bekannten Dehnungen die zugehörigen Spannungen im Element:

$$\sigma_{unten, i} = \varepsilon_{c,t} \cdot E_c = \frac{1}{r_i} \cdot \psi \cdot x_t \cdot E_c \quad (2.18)$$

$$\sigma_{oben, i} = \varepsilon_{s,t} \cdot E_s = \frac{1}{r_i} \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot E_s \quad (2.19)$$

Mit den zugehörigen Flächen abhängig von der Breite des betrachteten Kreisringes „dr“ kann damit für den Stahlquerschnitt „ $A_s = \rho \cdot h_m \cdot dr = a_s \cdot dr$ “ die Ringzugkraft „ $Z_i$ “ und analog für den Betonquerschnitt „ $A_c \approx x_t \cdot dr$ “ die zugehörige ringförmige Druckkraft „ $D_i$ “ berechnet werden:

$$Z_i = \rho \cdot h_m \cdot dr \cdot E_s \cdot \psi \cdot \frac{h_m - x_t}{r_i} \quad (2.20)$$

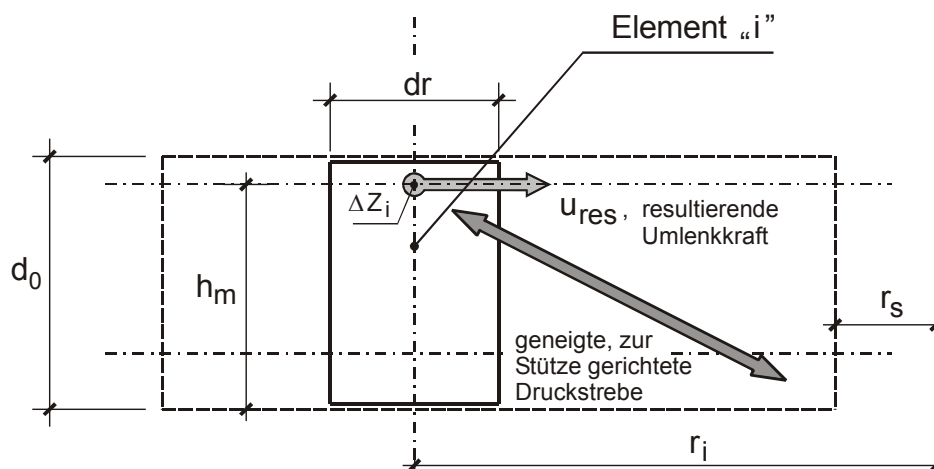
$$D_i = \frac{1}{2} \cdot dr \cdot \frac{E_s}{n_0} \cdot \psi \cdot \frac{x_t^2}{r_i} \quad (2.21)$$

Die Forderung, dass die Ringzugkräfte und die zugehörigen ringförmigen Druckkräfte innerhalb eines Ringelements kein Gleichgewicht bilden, d.h. „ $Z_i \neq D_i$ “, führt zu verbleibenden tangentialen Zugkräften „ $\Delta Z_i$ “, die zum Erhalt des Gleichgewichts über radiale Umlenkkräfte „ $u_{res}$ “, aus denen sich die schrägen Druckstreben – entsprechend Bild 2.14 – entwickeln, zur Stütze hin übertragen werden müssen.

$$\Delta Z_i = Z_i - D_i \quad (2.22)$$

$$u_{res} = \frac{1}{r_i} \cdot \Delta Z_i \quad (2.23)$$

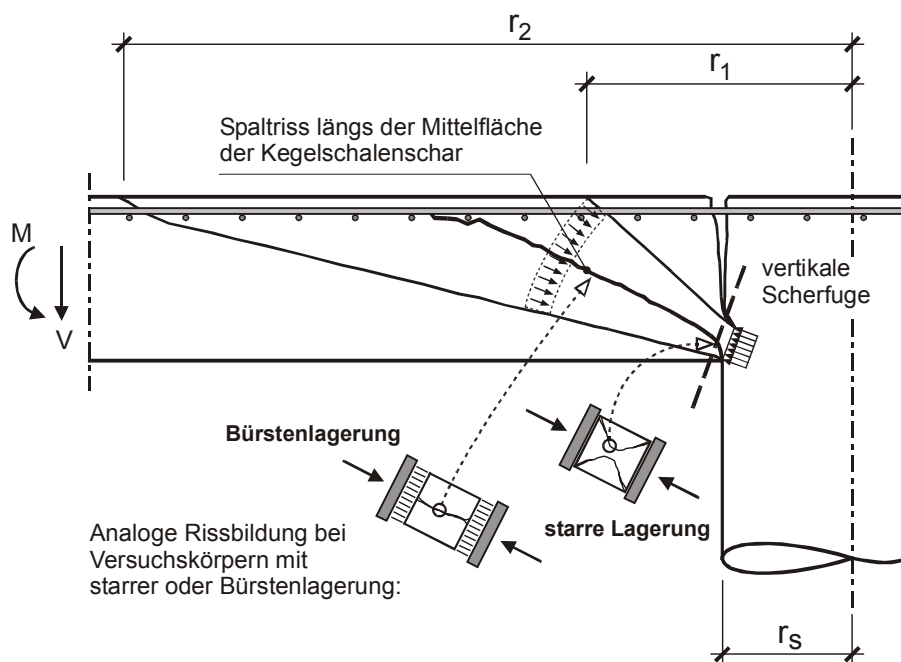
Aus der Umlenkkraft „ $u_{res}$ “ bilden sich die Druckdiagonalen des Strebensystems, das mit dem Grundsystem überlagert wird. Die Überlagerung beider Systeme und die Entwicklung der inneren Beanspruchungszustände mit zunehmender Belastung und der damit verbundenen Rissentwicklung bzw. der sich verändernden Steifigkeitsverhältnisse zeigen die Systemfolgen im Bild 2.13 (a bis d).



**Bild 2.14:** Resultierende, zum Auflager hin geneigte Druckstrebe, infolge des tangentialen Ungleichgewichts „ $\Delta Z_i$ “, [ 8 ]

Um wie Kinnunen und Nylander keine bezogenen Bruchschubspannungen anwenden zu müssen, geht Andrä davon aus, dass das Strebensystem im Kraffteinleitungsbereich allein die Übertragung der vertikalen Lasten aus der Kreisringplatte in die Stütze gewährleistet. Über die Versuchsinterpretation an zwei Modellen aus Mikrobeton und den Schlußfolgerungen aus Ergebnissen eigener FE-Berechnungen gibt Andrä zwei seiner Meinung nach wesentliche Versagensformen an, die den Durchstanzwiderstand einer „schlanken“ Stahlbetonplatte maßgeblich beeinflussen. Unter der Bezeichnung „Durchstanzart“ werden diese Versagensformen von ihm in [ 9 ] wie folgt zusammengefasst:

- Das Plattenaufleger versagt, wenn die Einmündungszone unterhalb der Risswurzel eines Spaltrisses abscher.
- Der Durchstanzwiderstand ist erreicht, wenn die Kegelschalen beim Überschreiten der Druckfestigkeit „längs ihrer Erzeugenden“ mit oder ohne Behinderung der Querdehnung aufgespaltet werden – Bild 2.15.



Einflussbereich des Systems der Druckkegelschalen, aus [ 8 ]:

- $r_1$  : im stütznahen Bereich Überschreitung der Betonzugfestigkeit (Zone, die bei der Lastabtragung nicht mitwirken kann)
- $r_2$  : flachste mögliche Neigung einer Druckkegelschale

**Bild 2.15:** Interpretation der Versagensformen beim Erreichen der Druckfestigkeit, [ 8 ]

Bild 2.9 zeigt somit die logische Schlussfolgerung der bereits im Kapitel 2.1 vorausgesetzten, aus theoretischen Überlegungen unterstellten, vorherrschenden tangentialen Biegebeanspruchungen. In der Einmündungszone der Kegelschalen (im Bild 2.15 mit „vertikale Scherfuge“ gekennzeichnet) bilden sich überwiegend ringförmig um die Stütze verlaufende Druckringe aus, so dass nur geringe radial auf die Stütze zulaufende Biegedruckkräfte die benötigte Klemmkraft gewährleisten.

Entgegen den Annahmen von Kinnunen und Nylander betrachtet Andrä nicht a priori die gesamte Kreisplatte mit dem Gesamtdurchmesser „C“. Statt dessen definiert Andrä einen Einflussbereich, in seiner Arbeit mit „r<sub>2</sub>“ bezeichnet, für den eine Überlagerung des rotationssymmetrischen Strebensystems mit dem Netzfachwerk sinnvoll erscheint – Bild 2.15. Unterstützt durch eine physikalisch nichtlineare und rotationssymmetrische FE-Berechnung – mit dem Hinweis, dass „es bei der Bestimmung des Radius nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, da der Lastanteil der flachsten Druckstreben an der Gesamtlast sehr gering ist“ – legt er diesen Einflussbereich über die sich flachste auszubildende Druckstrebe mit „r<sub>2</sub> = r<sub>s</sub> + 5 · z“ fest. Dies entspricht einer Neigung der flachsten Drucktrajektorie aus der FE-Berechnung von „tan α = 0,2“, d.h. einem Winkel von ca. 11°. Für die numerische Betrachtung geht er analog zu den Schweden Kinnunen und Nylander von einer ringförmig angeordneten Bewehrung aus.

Nachdem zunächst die Biegedruckhöhe „x<sub>t</sub>“ geschätzt wird, benutzt Andrä einen einfachen Zusammenhang zwischen der Rotation „ψ“ und der geschätzten Höhe „x<sub>t</sub>“ der Betondruckzone. Er bezieht sich dabei auf Versuchsbeobachtungen von Siviero, der für balkenartige Stahlbetontragwerke die plastische Rotationsfähigkeit untersuchte und für unterschiedliche Verhältnisse zwischen Betondruckzone „x“ und Nutzhöhe „h<sub>m</sub>“ (d.h.: „k<sub>x</sub> = x / h<sub>m</sub>“) eine Abhängigkeit zum Rotationswinkel „ψ“ angibt. Diese Ergebnisse wurden u.a. auch in [91] übernommen. Mit dem Hinweis, dass bei der Rotation einer Kreisplatte die Querdehnung im Unterschied zum Balkentragwerk behindert ist und die Breite der Druckzone bei Kreisplatten veränderlich ist, demnach auch ein steiferes Verformungsverhalten bei der Kreisplatte zu erwarten ist, schlägt Andrä für ringförmig angeordnete Bewehrung einen einfachen von „k<sub>x</sub>“ abhängigen Zusammenhang zur Rotation „ψ“ der Platte vor:

$$\psi = 0,0030 \cdot \left( \frac{1}{k_x} \right) \quad (2.24)$$

Da die Anordnung einer Netzbewehrung zu einer günstigeren Verteilung der Rissbreiten führt und sich dadurch im Stützbereich große Einzelrisse auf mehrere Risse verteilen können – eine Lokalisierung der Rissbildung entsprechend der Darstellung im Bild 5.9a auf Seite 165 wird sich bei netzbewehrten Platten nicht einstellen –, unterscheidet Andrä zwischen netzbewehrten und ringbewehrten Stahlbetonplatten. Mit einer dadurch konstruktiv bedingten, größeren Grenzdehnung des Betons geht er im Fall einer netzbewehrten Stahlbetonplatte auch von einer größeren Rotationsfähigkeit „ψ“ aus:

$$\psi = 0,0035 \cdot \left( \frac{1}{k_x} \right) \quad (2.25)$$

Wie zuvor Kinnunen und Nylander mit den Annahmen zur Dehnungsverteilung der tangentialen Druckstauchungen (angegeben in den Gleichungen 2.16 und 2.17), muss auch Andrä somit bei

der Lösung des Problems auf vergleichbare Versuchsbeobachtungen und Versuchsergebnisse zurückgreifen.

Zur Bestätigung des von André vorgeschlagenen Tragmechanismus erfolgt an dieser Stelle (wie bereits zuvor untermauernd zur Modellvorstellung von Kinnunen und Nylander im Kapitel 2.2 auf das gerissene FE-Netz im Bild 5.8 hingewiesen wurde) ein Hinweis auf die Spannungsverteilungen im Bild 5.12a und Bild 5.13a (Kapitel 5, Seite 167). Die radial ausgerichteten, horizontal wirksamen Spannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, am deutlichsten im Bild 5.13a zu erkennen, bestätigen, wie bereits zuvor das Ausbilden der Sektorenelemente, dass der von André definierte Tragmechanismus ebenfalls über eine kontinuumsmechanische Betrachtung (des gleichen Problems) bestätigt werden kann. Nicht unbedingt die Neigung, aber der Vergleich der Spannungsbeträge gemeinsam betrachtet mit dem Spannungsverlauf der Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “ zwischen den beiden Darstellungen (Bild 5.12b und Bild 5.13b, Seite 167) bestätigt die sich verändernden Steifigkeitsverhältnisse des inneren Gefüges im auflagernahen Bereich ähnlich dem im Bild 2.13 (c, d) gezeigten Strebensystem.

## 2.4 Zusammenfassung

Wegen der guten Übereinstimmung werden im Kapitel 6.1 der Ansatz von André und die entwickelten Grundlagen von Kinnunen und Nylander miteinander verknüpft. Der Ansatz von André soll den inneren Zerstörungszustand mit seinen zahlreichen Nebeneinflüssen (z.B. infolge der Kornverzahnung und der Zugfestigkeit) innerhalb des Plattenquerschnittes erfassen. Eine weiter ins Detail gehende Beschreibung dieses Ansatzes erfolgt deshalb erst im Kapitel 6.1. In diesem Abschnitt wird das Verfahren zunächst weiterentwickelt, um es im Kapitel 6.2 zuverlässig auf das Modell der Verbundlösung anwenden zu können.

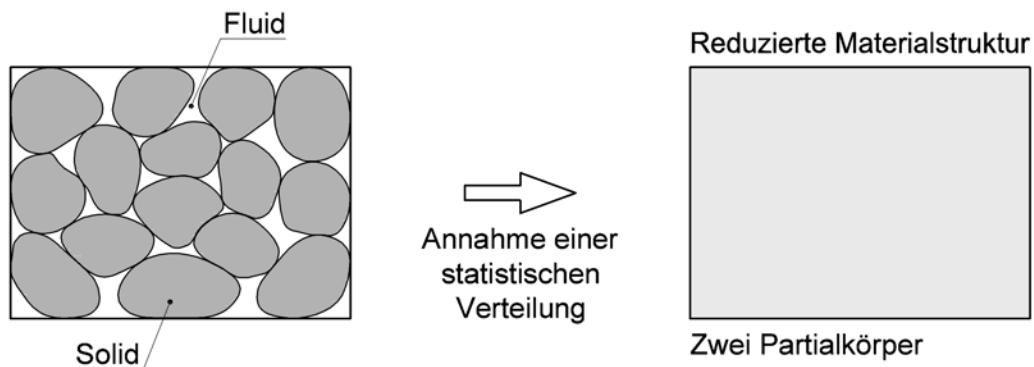
Der Verfasser vergleicht den von André gewählten Ansatz mit der „erweiterten Fachwerkanalogie“, mit der man die aus den Ergebnissen der Stuttgarter Schubversuche gewonnenen Erkenntnisse zunächst auf Balkentragwerke anwenden konnte. Die Mörsch‘ sche Fachwerkanalogie wurde dahingehend ergänzt, dass entsprechend den Beobachtungen in den Versuchen geneigte Obergurte und Druckstreben mit Neigungen flacher als  $45^\circ$  „für die Vorstellung des Tragverhaltens“ herangezogen wurden. Dabei geht man davon aus, dass die inneren „Steifigkeitsverhältnisse“ bei der erweiterten Fachwerkanalogie über die Neigung der zuvor genannten Druckglieder bestimmt werden [79]. Mechanische Besonderheiten des spröden Werkstoffes Beton können mit Hilfe dieser „Vorstellung“ und durch die rechnerisch besonders beachtete, geringe Zugfestigkeit des Betons numerisch erfasst werden. Auf weitere mechanische Zusammenhänge und die Umsetzung wird im Kapitel 6 bei der eigenen Modellentwicklung ausführlich eingegangen.

### 3. Materialmodelle und Annahmen der physikalisch nichtlinearen Berechnung

#### 3.1 Grundlagen der Elastizitätstheorie

Da die Kontinuumsmechanik eine phänomenologisch begründete Theorie ist, gehört es nicht zu ihrer Aufgabe, Materialeigenschaften der Kontinua durch die atomistische Struktur der Materie zu erklären. Derartige Überlegungen sind Gegenstand der Festkörperphysik oder der kinematischen Theorien über Gase, Dämpfe und Flüssigkeiten. Die Berechtigung für die Einführung des Kontinuums findet sich in der Erfahrung – in der Wirklichkeit gibt es kein Kontinuum.

Bei der kontinuumsmechanischen Beschreibung wird davon ausgegangen, dass sich der Gesamtkörper aus einer Vielzahl unvermischbarer Konstituierender zusammensetzt. Die Konstituierenden sollen dabei über einen Kontrollraum – das Volumen – statistisch gleichmäßig verteilt sein. Dies setzt voraus, dass der betrachtete Kontrollraum, der über ein Festkörperskelett gebildet wird, hinreichend groß ist, Nachbarschaften erhalten bleiben und kein Bereich des Kontinuums in das Volumen Null oder Unendlich verformt werden kann. Mit anderen Worten, die angewandte Ingenieurmechanik vernachlässigt die reale diskrete Struktur der Materie. Die Lösung erfolgt nicht auf einem physikalisch mikrostrukturellen Modellniveau sondern – entsprechend der Darstellung im Bild 3.1 – unter einer makroskopischen Betrachtung, bei der weder die genaue Porenstruktur noch die exakte Lage der einzelnen Konstituierenden von Interesse ist.



**Bild 3.1:** Reduziertes Strukturmodell = ingenieurmäßige Modellvorstellung

Der strukturberechnende Ingenieur sucht über die experimentelle Identifikation einer verhältnismäßig einfachen und vor allem nachprüfaren Aufgabe ein Materialmodell, dessen Materialteilchen das jeweilige Materialvolumen im makroskopischen oder phänomenologischen Sinn stetig ausfüllt. Diese Bestimmung geeigneter Werkstoffkennwerte ist von größter Bedeutung, da die gewählten Versuchsdurchführungen immer eine experimentelle Nachprüfbarkeit zulassen müssen. Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie werden anschließend auf der Basis der aus Versuchen gewonnenen Werkstoffkennlinien in geeigneter Form aufbereitet, so dass die Koeffizienten der Steifigkeits- bzw. Elastizitätsmatrix des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes durch die experimentell gewonnenen und materialtypischen Kennwerte eines realen Werkstoffes ersetzt werden können. Mit einer so aufbereiteten Elastizitätsmatrix lässt sich ein vorgegebener Verzerrungszustand in den dazugehörigen Spannungszustand transformieren. Die allgemeinen Beschreibungen des Werkstoffes erfolgen dann über mathematische Formulierungen – in der Regel über die Tensoralgebra als Hilfsmittel.

### 3.1.1 Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen (Vereinfachungen des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes)

In der einfachsten Form lautet das Hooke'sche Gesetz für den einachsigen Zug- oder Druckversuch und für den Scherversuch:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{und:} \quad \tau = G \cdot \gamma \quad \text{bzw.} \quad G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (3.1)$$

wobei für den Proportionalitätsfaktor „ $E$ “ die Bezeichnung Elastizitätsmodul oder Young's modulus (nach T. Young, 1807) und für „ $G$ “ die Bezeichnung Schub- oder Gleitmodul gebräuchlich ist. Hooke erkannte durch einfache Versuche mit Drähten diesen linearen Zusammenhang zwischen Belastung und Verlängerung, den er 1676 als Gesetz „ut tensio sic vis“ bekannt gab. Die Abhängigkeiten zwischen Schubspannungen und Schiebungen wurden experimentell von B. De Saint - Vénant (1797-1886) für kleine Winkel bestätigt. In der Kontinuumsmechanik werden diese Zusammenhänge als Konstitutivgleichungen bezeichnet, da sie zur grundlegenden Feststellung des Zusammenhangs zwischen Spannungs- und Verzerrungsgrößen dienen. Diese experimentell gefundenen phänomenologischen Gesetze lassen sich physikalisch mittels einer thermodynamischen Betrachtung begründen [27] [48].

Die Bewertungen der Spannungszustände bei mehrachsigen Beanspruchungen lassen sich nach dem Vorgehen von Cauchy verallgemeinern, indem man einen linearen Zusammenhang zwischen den einzelnen Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors entsprechend Gleichung 3.1 – hier unter Berücksichtigung einer formalen Umbenennung für den Proportionalitätsfaktor („ $E \equiv C$ “) – annimmt:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

Da „ $\sigma_{ij}$ “ und „ $\varepsilon_{kl}$ “ Tensoren 2. Stufe sind (wird im Kapitel 3.1.2 näher begründet) und die Dehnungen mit „ $C_{ijkl}$ “ dem Spannungstensor zugeordnet werden, folgt: „ $C_{ijkl}$ “ ist ein Tensor 4. Stufe. Es handelt sich dabei um neun Gleichungen mit neun unabhängigen Koeffizienten was bedeutet, dass 81 Konstanten für einen Tensor 4. Stufe benötigt werden. Da für den Spannungstensor und den Verzerrungstensor „a priori“ Symmetrie vorausgesetzt wird ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  und  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ ) [26], folgen auch für die Koordinaten des Verzerrungstensors nachstehende Symmetriebeziehungen:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk} \quad (3.3)$$

Damit verbleiben für den konstitutiven Tensor „ $C_{ijkl}$ “ „nur noch“ 36 unabhängige Komponenten. Gleichung 3.2 in Matrizenform dargestellt lautet dann:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Wird die Existenz einer Verzerrungsenergiegedichtefunktion mit Hilfe thermodynamischer Betrachtungen [49] als Funktion der Spannungen vorausgesetzt, lässt sich eine weitere Symmetriebedingung angeben. Als Verzerrungsenergiegedichte bezeichnet man die bei der Verformung pro Volumeneinheit geleistete Arbeit:

$$dW = \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot d\varepsilon_{ij} \quad (3.5)$$

bzw.:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} C_{ijkl} \cdot \tilde{\varepsilon}_{kl} \cdot d\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.6)$$

Daraus erhält man die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sigma_{kl} = C_{klij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (3.7)$$

bzw. durch nochmaliges Ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = C_{ijkl} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = C_{klij} \quad (3.8)$$

Da die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar ist und mathematisch die partiellen Ableitungen keinen Einfluss auf das Ergebnis nehmen dürfen, folgt daraus unmittelbar eine weitere Symmetriebedingung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.9)$$

Es verbleiben 21 unabhängige und von Null verschiedene Komponenten für den Elastizitätstensor. Dieser Fall liegt für die größtmögliche Anisotropie (auch Aelotropie genannt) für elastisches Material vor [48]:

**Anisotropie:** (es werden 21 experimentell zu bestimmende Materialparameter benötigt)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ & sym. & & C_{1313} & C_{1323} & \\ & & & & C_{2323} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

**Zur Anisotropie:** Anisotrope Materialien sind kristallin aufgebaut und besitzen deutliche Richtungsabhängigkeiten. Gleichung 3.10 verbindet das makroskopische Materialverhalten mit der inneren Materialstruktur: Schubverzerrungen rufen Normalspannungen und Längsdehnungen rufen Schubspannungen hervor – Hauptachsenrichtungen des Spannungstensors und des Verzerrungstensors fallen im allgemeinen nicht zusammen.



Mit dem quadratischen Charakter der Gleichung 3.9 wird die Verzerrungsenergiedichte eine ein-eindeutige Funktion der Verzerrungen. Man bezeichnet sie auch als elastisches Potential. Da für „ $\varepsilon_{ij} = 0$ “ die Verzerrungsenergiedichte verschwindet und bei jeder Verformung für „ $\varepsilon_{ij} \neq 0$ “ positive Arbeit geleistet werden muss – d.h. es gilt immer „ $W \geq 0$ “ – handelt es sich um eine positiv definite Größe, die nur eine Minimalstelle besitzen kann. Dieser Zusammenhang wird im Kapitel 4.2 aufgegriffen, um die Eindeutigkeit linearelastischer Probleme nachzuweisen (darauf beruhen die Sätze vom Minimum der Potentiellen Energie und der Ergänzungsenergie). Die Verzerrungsenergiedichte wurde erstmals 1839 von G. Green bei Betrachtungen über die mechanische Lichttheorie eingeführt. Die Annahme ihrer Existenz steht in Übereinstimmung mit der Annahme eines reversiblen isothermen oder adiabatischen Vorganges bei Verformungen und kennzeichnet damit das elastische Materialverhalten (1. Hauptsatz der Thermodynamik, mitunter als Green-Elastizität bezeichnet).

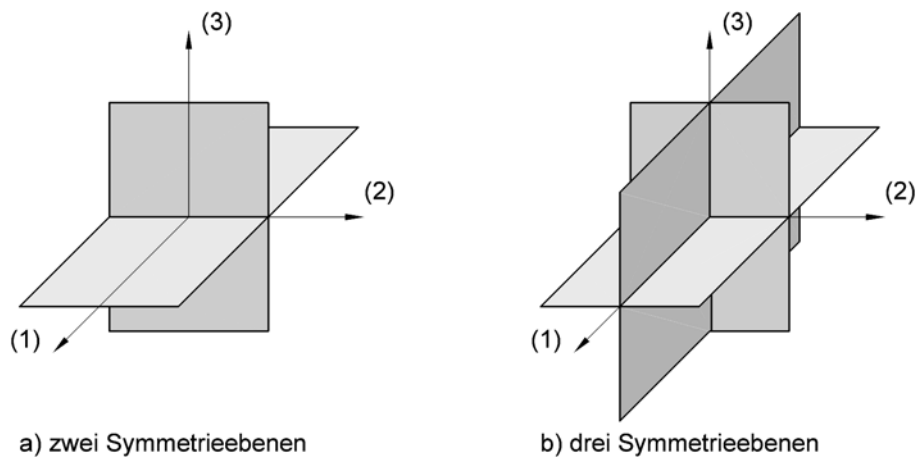
Die experimentelle Ermittlung von 21 unterschiedlichen elastischen Werkstoffkennwerten ist eine praktisch kaum durchführbare Aufgabe. Um den experimentellen Aufwand zur Bestimmung dieser Werkstoffkonstanten in vertretbaren und realisierbaren Grenzen zu halten – das gilt nicht nur aus praktischer Sicht – werden weitere Überlegungen erforderlich. Im allgemeinen weisen Werkstoffe mikrostrukturelle Materialsymmetrien auf, d.h. sie besitzen ein richtungsabhängiges Beanspruchungsverhalten, so dass ihr Deformationsverhalten symmetrisch zu bestimmten Ebenen ist. Bei geeigneter Wahl eines Bezugskordinatensystems lassen sich diese Symmetrieeigenschaften – dies gilt insbesondere für Metalle – berücksichtigen. Bild 3.2 zeigt exemplarisch die Symmetrieebenen für orthotropes Materialverhalten. Zur Abschätzung der Auswirkungen der Materialsymmetrien werden nachfolgend die für Ingenieuraufgaben interessanten Werkstoffklassen aufgezählt. Es werden nur die wesentlichen dreidimensionalen Elastizitätsgesetze abhängig von ihren Ingenieurkonstanten mit unterschiedlichen Materialsymmetrien angegeben. Einzelheiten hinsichtlich der Transformationsformeln können [48] entnommen werden. Die zuvor in Gleichung 3.2 gewählte tensorielle Indizierung wird unter Beachtung der Symmetrien in eine Vektor-Matrix-Formulierung überführt.

**Monotropie:** (eine Symmetrieebene existiert – es genügen 13 unabhängige elastische Kennwerte)

$$[C_{ij}]_{Monotropie} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sym. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

**Orthotropie:** (drei Symmetrieebenen existieren – es genügen 9 unabhängige elastische Kennwerte)

$$[C_{ij}]_{Orthotropie} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$



**Bild 3.2:** Orthotropes Materialverhalten – drei Symmetrieebenen

Zur Orthotropie: Zwei sich durchdringende, aufeinander rechtwinklig stehende Symmetrieebenen entsprechend der Darstellung in Bild 3.2a haben unmittelbar auch die Symmetrie in der dritten Ebene – entsprechend Bild 3.2b – zur Folge. Typisch für orthogonal anisotropes Verhalten ist, dass die Orientierung der Fasern den Koordinatenachsen entsprechen. Daraus resultiert eine wesentliche Vereinfachung von der Monotropie- zur Orthotropiematrix, da keine Verknüpfungen mehr zwischen den Normalspannungs- und den Schubspannungskomponenten bestehen. Im Deformationszustand erzeugen Normalspannungen ausschließlich Dehnungen und Schubspannungen ausschließlich Verzerrungen (vgl. mit dem Hinweis zum anisotropen Material). Es verbleiben nur die Bindungen für die Normalspannungen und somit ausschließlich eine Kopplung zwischen den Dehnungen  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$ . Auf diesen Zusammenhang wird bei der Beschreibung des Betonmodells im Kapitel 3.2 gesondert eingegangen.

**Transversale Isotropie:** (drei Symmetrieebenen, wobei für eine Schnittebene zusätzlich isotropes Material angenommen wird, d.h., keine Richtungsabhängigkeiten existieren – es genügen 5 elastische Kennwerte)

$$\left[ C_{ij} \right]_{\substack{\text{transversale} \\ \text{Isotropie}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

**Isotropie:** (höchste Symmetriestufe, d.h. jede Schnittebene ist Symmetrieebene und jede Achse ist Symmetrieachse – es genügen 2 unabhängige elastische Kennwerte)

$$\left[ C_{ij} \right]_{\text{Isotropie}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Zur Isotropie: Für ein elastisch isotropes Material besteht keinerlei Richtungsabhängigkeit der elastischen Eigenschaften. Dies ist auch dann der Fall, wenn das Material aus einer Vielzahl wahllos angeordneter anisotroper Kristalle besteht. Infolge der (statistischen) Verteilung über viele, beliebig orientierte Kristalle resultiert ein makroskopisch quasi-isotropes Verhalten. Erfahrungen zeigen, dass Metalle in vielkristallinem Zustand – auch durch Umformungsprozesse – nur schwach anisotrop werden. Diese Annahme, unter Aufhebung der Richtungsunabhängigkeit, liegt auch dem Betonmodell zugrunde, worauf im Kapitel 3.2 eingegangen wird.

Im Fall isotropen Materialverhaltens ist der Elastizitätstensor  $C_{ijkl}$  ein isotroper Tensor, der in jedem Koordinatensystem das gleiche Komponentenschema besitzt. Somit lässt er sich mit nur zwei unabhängigen Kennwerten vollständig beschreiben. Hierfür wurden die Lamé'schen Elastizitätskonstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , mit der Dimension Kraft/Fläche, eingeführt:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad (3.15)$$

und:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.16)$$

Ein isotroper Tensor 2. Stufe ist der Kronecker - Tensor „ $\delta_{ij}$ “ (Identitätstensor). Jeder Skalar („ $\lambda$ “ und „ $\mu$ “) kann als Tensor nullter Stufe betrachtet werden. Aus dem tensoriellen Produkt zweier zweistufiger Tensoren folgt ein Tensor 4. Stufe [20]. Somit können

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}$$

als Linearkombinationen für den einfachsten Fall eines isotropen Tensors 4. Stufe geschrieben werden und man erhält:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.17)$$

Mit Gleichung 3.2 und Gleichung 3.17 folgt:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} \quad (3.18)$$

Damit ergibt sich:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (3.19)$$

bzw. vollständig ausgeschrieben:

$$\sigma_{11} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2 \mu \varepsilon_{11} \quad \dots \text{ usw.}$$

$$\sigma_{12} = 2 \mu \varepsilon_{12} \equiv \mu \gamma_{12} \quad \dots \text{ usw.}$$

Der Elastizitätstensor (Gleichung 3.17) in Matrix-Form abhängig von den Lamé'schen Konstanten lautet:

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Aus der gezeigten, allgemeinen Entwicklung der Gleichung 3.19 ist unmittelbar erkennbar (in analoger Betrachtung auch zu den Hinweisen zum anisotropen und orthotropen Verhalten), dass in den Hauptrichtungen der Spannungen nur Druck oder Zug wirkt (d.h. gleiches Längs- und Querdehnverhalten sowie gleiches Schubverzerrungsverhalten) und dass keine Winkeländerungen zwischen den Hauptachsen auftreten können. Es besteht Äquivalenz zwischen einer reinen Schubbeanspruchung in den drei Ebenen und einer betragsgleichen Zug - Druck Beanspruchung, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem unter einem Winkel von 45° wirkt (vgl. hierzu die Kopplung:  $C_{44} = C_{55} = C_{66} = (C_{11} - C_{12}) / 2$  in Gleichung 3.14). In [26] wird durch Umformung der Gleichung 3.19 nach den Verzerrungen nachgewiesen, dass die Hauptachsen der Spannungen bei Isotropie mit den Hauptachsen der Verzerrungen übereinstimmen, d.h. Spannungstensor und Verzerrungstensor sind koaxial. Auch auf diese Zusammenhänge wird bei der Beschreibung des Betonmodells im Kapitel 3.2 genauer eingegangen.

### 3.1.2 Eigenschaften des Spannungstensors

(Der allgemeine räumliche Spannungszustand)

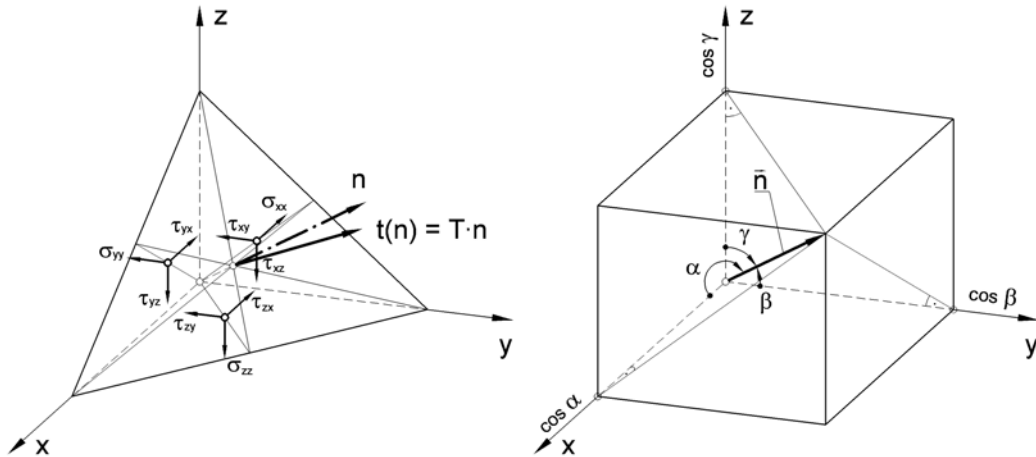
Der Spannungszustand an einer beliebigen Stelle „P“ innerhalb eines Bauteiles ist entsprechend Bild 3.5a durch drei zueinander senkrechte Schnitte vollständig festgelegt. Auf den drei positiven Schnittufern des Elementarwürfels – Bild 3.5a – lauten die Spannungsvektoren:

$$t^x(\mathbf{e}_x) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad t^y(\mathbf{e}_y) = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad t^z(\mathbf{e}_z) = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Die neun Spannungskomponenten „ $\sigma^{ji}$ “ stellen gemeinsam eine physikalische Größe dar, die als Cauchy'scher Spannungstensor bezeichnet wird. Sie lassen sich in Matrixschreibweise zu einem Tensor 2. Stufe zusammenfassen:

$$T^T = [t^x, t^y, t^z] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Sie beschreiben das Kräftegleichgewicht für den Punkt „P“ an den Flächen eines infinitesimalen Tetraeders, der entsteht, wenn der Elementarwürfel durch eine willkürliche Ebene mit dem zugehörigen Normaleneinheitsvektor „n“ geschnitten wird – Bild 3.3. Die Richtungen der beiden Vektoren „t“ und „n“ sind im allgemeinen entsprechend der Darstellung nicht parallel.



**Bild 3.3:** Spannungen am Tetraeder

Über die Projektion des geschnittenen Flächenelementes „ $\Delta A$ “ auf die übrigen Tetraederteilflächen „ $\Delta A_i$ “ lässt sich mit dem Normaleneinheitsvektor „n“ der Zusammenhang „ $t(n)$ “, d.h. die Abhängigkeit der Spannungen zu der Schnittrichtung, angeben. Auf die durch den Normaleneinheitsvektor gekennzeichnete schräge Schnittfläche „ $\Delta A$ “ wirkt die Spannung „t“:

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} ; \quad t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

wobei die Komponenten von „n“, dem sogenannten Richtungskosinus „ $n_i = \cos(n, e_i)$ “, der Normierungsbedingung „ $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ “ entsprechen müssen. Die restlichen Tetraederflächen folgen aus der richtungsabhängigen Projektion von „ $\Delta A$ “ auf:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_x &= \Delta A \cdot \cos \alpha = \Delta A \cdot n_x \\ \Delta A_y &= \Delta A \cdot \cos \beta = \Delta A \cdot n_y \\ \Delta A_z &= \Delta A \cdot \cos \gamma = \Delta A \cdot n_z \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta A_i = \Delta A \cdot n_i \quad (3.24)$$

Das „Kräftegleichgewicht“ für den Tetraeder liefert:

$$\sum P = 0 \Rightarrow t \cdot \Delta A - t^x \cdot \Delta A_x - t^y \cdot \Delta A_y - t^z \cdot \Delta A_z = 0 \quad (3.25)$$

$$\text{oder: } t \cdot \Delta A - t^i \cdot \Delta A_i = 0 \rightarrow t = t^i \cdot n_i \quad (3.26)$$

Werden die Koordinaten des Spannungstensors „ $\sigma^{ji}$ “ einheitlich mit den Komponenten des Spannungsvektors „ $t^i$ “ ausgedrückt, folgt die fundamentale Formel von Cauchy in Komponentenschreibweise:

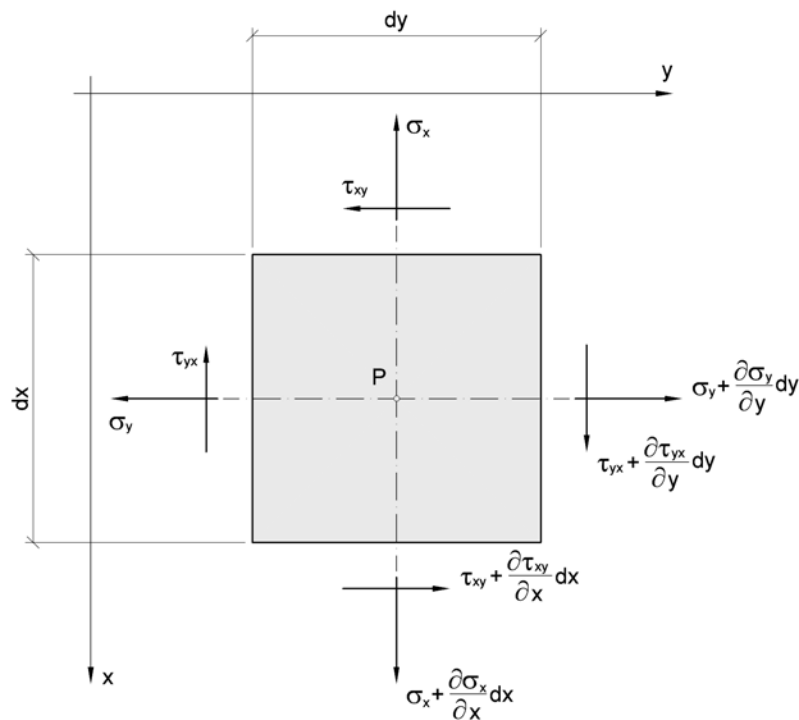
$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad (3.27)$$

In Matrixschreibweise kann Gleichung 3.27 in Kurzschrift formuliert werden, die dann unabhängig vom Koordinatensystem gilt [64]:

$$t(n) = T \cdot n \quad (3.28)$$

Das „**Momentengleichgewicht**“ durch den Schwerpunkt „ $P$ “ des Elementarwürfels nach Bild 3.5a als Drehpunkt – beispielsweise für eine zur z-Achse parallele Achse – liefert entsprechend der Darstellung im Bild 3.4:

$$\begin{aligned} \sum M_P = 0 \Rightarrow & \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} \\ & - \tau_{xy} \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$



**Bild 3.4:** Beanspruchung eines Elementarwürfels in der x-y – Ebene

Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung folgt:

$$\tau_{yx} - \tau_{xy} = 0$$

bzw.: 
$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (3.30a)$$

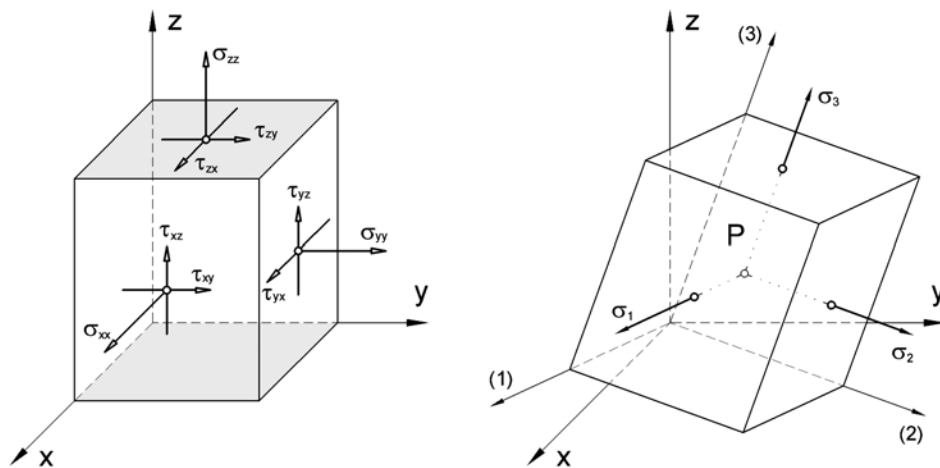
Analog ergibt sich aus dem Gleichgewicht um die Achsen „x“ und „y“:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (3.30b)$$

In Gleichung 3.28 ordnet „ $T$ “ dem Richtungsvektor „ $n$ “ den Spannungsvektor „ $t$ “ zu. Diese homogene, lineare Transformation zwischen zwei Vektoren kennzeichnet einen Tensor 2. Stufe. Nach den Gleichungen 3.30 (a+b) sind in zueinander senkrechten Schnitten die Beträge der Schubspannungen gleich groß – der Drehsinn der Schubspannungen am Flächenelement aber entgegengesetzt (Satz von den zugeordneten Schubspannungen). Damit ist der räumliche Spannungszustand durch drei Normalspannungen und drei Schubspannungen für drei zueinander senkrechte Schnitte vollständig beschrieben, d.h. der Spannungstensor ist symmetrisch, und es gilt:

$$T = T^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Man kann nun den Elementarwürfel gemäß Bild 3.5b jederzeit so drehen, dass die Schubspannungen auf den Flächen verschwinden und nur Normalspannungen „ $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ “ übrigbleiben. Somit ist ein Spannungszustand im Punkt „ $P$ “ auch durch die Hauptspannungen „ $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ “ vollständig bestimmt.



a) Vollständige Beschreibung über drei Normalspannungs- und sechs Schubspannungskomponenten

b) Vollständige Beschreibung über drei Hauptspannungskomponenten, hervorgegangen durch Drehung in die Hauptspannungs-Richtungen

**Bild 3.5:** Allgemeiner räumlicher Spannungszustand

Gesucht werden Hauptrichtungen, die dadurch gekennzeichnet sind, dass der Hauptspannungsvektor „ $t_H$ “ und der Normalenvektor „ $n_i$ “ kollinear sind. Mit dem skalaren Vielfachen „ $\sigma_H$ “ des gesuchten Hauptspannungsvektors „ $t_H$ “ lässt sich dies ausdrücken durch:

$$t_H \equiv \sigma_H \cdot n_i \quad (3.32)$$

Eingesetzt in die Gleichung 3.27:

$$\sigma_H \cdot n_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad (3.33)$$

führt dies zu einem homogenen, linearen Gleichungssystem, dessen nichttriviale Lösungen die gesuchten Eigenvektoren sind. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_H \cdot \delta_{ij}) \cdot n_j = 0 \quad (3.34a)$$

und in Matrixschreibweise, unabhängig vom Koordinatensystem, ergibt sich:

$$(T - \sigma_H \cdot D) \cdot n_H = 0 \quad (3.34b)$$

Die skalaren Größen „ $\sigma_H$ “ und die Richtungsvektoren „ $n_H$ “ sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix „ $T$ “. Die Berechnung der Eigenwerte folgt aus der Bedingung, dass für das homogene lineare Gleichungssystem die Koeffizientendeterminante verschwinden muss:

$$\det ( T - \sigma_H \cdot D ) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_H & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_H & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_H \end{vmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

Die Entwicklung der Determinante mit Hilfe der Cramer’schen Regel führt zu einer Gleichung dritten Grades, dem charakteristischen Polynom:

$$\sigma_H^3 - I_1 \cdot \sigma_H^2 + I_2 \cdot \sigma_H - I_3 = 0 \quad (3.36)$$

deren Wurzeln die Hauptspannungen „ $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$ “ liefern und invariant gegen Koordinatentransformationen sind. Sie können der Größe nach geordnet werden, so dass gilt „ $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ “. Darüber hinaus liefert die charakteristische Gleichung des Spannungstensors die Hauptinvarianten „ $I_1, I_2$  und  $I_3$ “, mit denen im Kapitel 3.2 die Versagensfläche geometrisch im Spannungsraum beschrieben werden soll:

Summe der einreihigen Hauptabschnittsdeterminanten von „ $T$ “:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{Spur} ( T )$$

Summe der zweireihigen Hauptabschnittsdeterminanten von „ $T$ “:

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix}$$

Summe der dreireihigen Hauptabschnittsdeterminanten von „ $T$ “:

$$I_3 = \det ( T ) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Über die Produktdarstellung der Gleichung 3.36 lassen sich die Hauptinvarianten vereinfacht, abhängig von den Hauptspannungen ( $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$ ), angeben:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.37a)$$



$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 \quad (3.37b)$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \quad (3.37c)$$

Die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen „ $n_H$ “ ergeben sich durch Einsetzen der Eigenwerte „ $\sigma_H$ “ in die Eigenwertaufgabe Gleichung 3.34. Die drei Hauptspannungsrichtungen bilden stets ein orthogonales Hauptachsensystem. Es lässt sich nachweisen, dass mit den drei Wurzeln von Gleichung 3.36 zugleich die größte und die kleinste Spannung definiert ist, die in allen nur denkbaren Schnitten des betrachteten Punktes auftreten können [64]. Bezogen auf das Hauptspannungssystem besitzt die Spannungsmatrix Diagonalgestalt, d.h. die Diagonalelemente sind mit den Hauptspannungen identisch, während alle Nebendiagonalen Null werden:

$$T_H = \text{diag} \{ \sigma_H \} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Eine Überprüfung der Hauptspannungen kann mit Hilfe der ersten Hauptinvarianten erfolgen, da in einem orthogonalen Hauptachsensystem die Bedingung:

$$\text{Spur}(T) = \text{Spur}(T_H) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.39)$$

erfüllt werden muss. Auf diesen Zusammenhang wird bei der geometrischen Bestimmung der Versagensfläche im Spannungsraum Bezug genommen.

### 3.2 Das Betonmodell in ANSYS

Jedes Materialgesetz muss in ihrer mathematischen Form unabhängig von einem starren Bezugssystem sein. Durch eine geeignete Wahl einer Materialgleichung und Einsetzen dieser Gleichung in eine allgemeine Energiebilanz entsteht ein mathematisches Modell, mit dem dann qualitative und quantitative Folgerungen hinsichtlich eines vorgegebenen Systems gezogen werden können. Die Energiebilanz wird geprägt durch die ersten beiden Hauptsätze der Thermodynamik, die besagen, dass die Summe der materiellen Zeitableitungen der inneren und der kinetischen Energie gleich dem Zuwachs der mechanischen Arbeit und der Wärme ist. Der Grad der Übereinstimmung zu einem experimentell beobachteten realen System hängt dann im wesentlichen davon ab, ob die individuellen Systemeigenschaften der Konstruktion von der Theorie, also dem angewendeten mathematischen Modell, hinreichend genau genug abgebildet werden können.

Das setzt einerseits voraus, dass ein mathematisch formuliertes Stoffgesetz genügend speziell ist und mit möglichst wenigen aber ausreichend zuverlässigen Materialkennwerten die Stoffeigenschaften beschreiben kann. Andererseits muss die eingesetzte Theorie, die das Materialverhalten beherrschen soll, allgemein und umfassend genug sein, um alle maßgebenden Effekte unabhängig von den konstruktiven Randbedingungen einer realen Ingenieuraufgabe wiedergeben zu können.

Die aufgezählten Forderungen scheinen zunächst von gegensätzlicher Natur zu sein. Es wird nachfolgend gezeigt, dass durch die Bereitstellung einer systematisch aufbereiteten Methode

bzw. mit einem systematisch aufbereiteten Modell (constitutive model) die Formulierung einer allgemein gültigen und praktisch uneingeschränkt anwendbaren Theorie zur Beschreibung des Werkstoffes Beton möglich ist. Die allgemeinen Aussagen im Kapitel 3.1 liefern die notwendigen Bedingungen und Voraussetzungen, damit das vorgestellte Betonmodell physikalisch konsistent und die resultierenden Stoffgleichungen mit den Prinzipien der Kontinuumsmechanik verträglich sind:

### **Voraussetzungen:**

- Makroskopische Homogenität – Annahme einer ausreichenden Gleichmäßigkeit des geschlossenen Betongefüges (Konglomerat mit gleichmäßig verschmierter Gefügedichte), so dass im ungerissenen und gering belasteten Zustand isotropes Material mit richtungsunabhängigem E-Modul vorausgesetzt werden kann.
- Äquivalenz zwischen einer Schubbeanspruchung und einer betragsgleichen (unter einem Winkel von  $45^\circ$  wirkenden) Zug - Druck - Beanspruchung innerhalb eines rechtwinkligen und neutralen Bezugsachsensystems.
- Spannungstensor und Verzerrungstensor sind coaxial (haben in einem neutralen Bezugsachsensystem – vom Element unabhängig – eine gemeinsame Achse).

Mit dem Berechnungsbeispiel im Kapitel 3.2.6 (Seiten 105 bis 108) soll abschließend ein erster Eindruck vermittelt werden, dass mit nur wenigen, sehr allgemeinen und als abgesichert geltenden Eingangsparametern eine vollständige Beschreibung des sehr unterschiedlichen Bruchverhaltens des Werkstoffes Beton möglich ist. Das Modell kann aus einer anfänglich isotropen Struktur des Kontinuums ein Materialverhalten anisotroper Art vollständig beschreiben.

### **3.2.1 Festigkeits- bzw. Versagenskriterium**

Die Frage nach einer „eindeutig definierten Anstrengbarkeit“, vor allem unter mehraxialer Beanspruchung des Werkstoffes Beton, ist für die praktische Anwendung von besonderer Bedeutung. Zur Zeit kommen unterschiedliche Bewertungskonzepte zum Einsatz. Zu den Konzepten zählen im wesentlichen die phänomenologisch begründeten, klassischen Festigkeits- und Versagenskriterien, die Methode der Bruchmechanik, und die sogenannten schädigungsmechanischen Analysen [62].

In der Regel erfahren reale Bauteile mehraxiale räumliche Beanspruchungen. Somit kann der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen ausschließlich durch tensorielle Größen richtig eingeschätzt werden. Im Rahmen der Festigkeitslehre versucht man nun, einachsige ermittelte Festigkeitskennwerte, gewonnen aus Grundversuchen der Werkstoffprüfung, in Beziehung zum mehrachsigen Spannungszustand ( $\sigma_1$ -,  $\sigma_2$ - und  $\sigma_3$ -abhängig) zu bringen. Bei den klassischen Hypothesen wird aus einer zuvor definierten kritischen Beanspruchung eine entsprechende Vergleichsspannung eingeführt, die statt des realen dreidimensionalen Spannungszustands einen aus der Überlagerung reiner einachsiger Spannungszustände resultierenden gleichwertigen Vergleichszustand hervorbringen soll. Mit Hilfe der Fließ- und Bruchhypothesen postuliert man eine bestimmte Vorstellung über die Ursache eines Bruches. So

kann das Eintreten des Fließens in der größten auftretenden Normal- oder Schubspannung oder in einer Kombination der beiden Spannungen gesucht werden. Auch kann der Bruch über die größte auftretende Dehnung oder Schiebung durch einen kritischen Betrag der Formänderungsarbeit definiert werden. Die bekanntesten Hypothesen in der Festigkeitslehre sind:

- Hypothese vom Maximum der größten Normalspannung (Rancine, Lamé)
- Hypothese vom Maximum der größten Schubspannung (Coulomb, Saint-Venant, Guest, Tresca)
- Hypothese vom Maximum der Gestaltänderungsenergie (Hencky, v. Mises, Huber)
- Hypothese des elastischen Grenzzustandes (Mohr)
- Hypothese der größten Dehnung oder Gleitung (Bach)
- Hypothese der größten Formänderungsarbeit (Beltrami)

Die Hypothese der größten Dehnung oder Gleitung sowie die Hypothese der größten Formänderung ist von der Erfahrung nicht bestätigt worden [109]. Auf der Basis der für den Werkstoff Beton zur Zeit bekannten und vor allem zuverlässig verfügbaren experimentellen Untersuchungen kann nach Ansicht des Verfassers für den praktischen Einsatz bei der Lösung einer realen Ingenieuraufgabe nur ein duales Kriterium angewendet werden. Dass die Ursachen von Versagenszuständen in der Mehrzahl Spannungen sind, ist unwidersprochen – auch die Erkenntnis, dass Beton unter Druckbeanspruchung ein zähes Formänderungsverhalten und bei einachsigen Zugversuchen ein sehr sprödes Werkstoffverhalten besitzt. Damit kann in Anlehnung an bekannte klassische Hypothesen nur eine Kombination aus der größten aufnehmbaren Zugnormalspannung (einem Rancine - Kriterium) und der Gleithypothese (v. Mises oder Coulomb) in Frage kommen.

Beschränkt man sich in diesem Abschnitt zunächst nur auf das Verhältnis der Hauptspannungen „ $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ “ zueinander – d.h. auf den Spannungstensor – bedeutet dies mathematisch, dass aus den genannten Koordinaten des Spannungstensors eine skalarwertige Funktion entsprechend der Form:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{3.40}$$

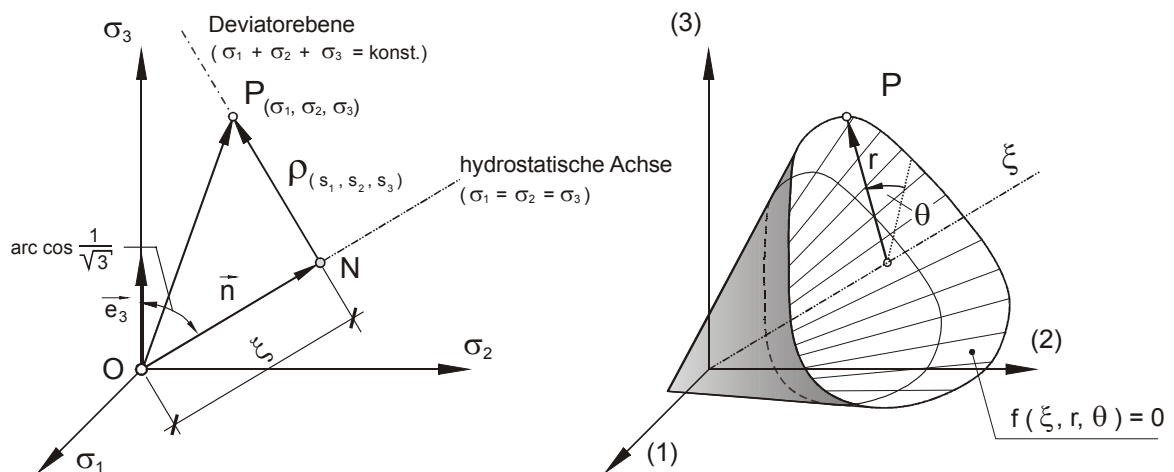
zu bilden ist. In den nachfolgenden Abschnitten werden dann in Anlehnung an die Hypothese des elastischen Grenzzustandes, die in der Festigkeitslehre zu den Grundlagen gehört und eine Kombination der Normal- und der Schubspannungshypothese ist (man denke an die Mohrschen Kreise), für den Werkstoff Beton im wesentlichen nur drei Ergänzungen erforderlich:

- Berücksichtigung der Werkstoffanisotropie – Kapitel 3.2.2,
- unter Berücksichtigung der zuvor genannten schädigungsmechanischen Analysen das Einbeziehen eines realen Nachbruchverhaltens nach Überschreitung der Zug- und Druckfestigkeit – Kapitel 3.2.3 (nur für den Zugbereich), und
- Erfassen der nichtlinearen und inelastischen Deformationsanteile bei Druckbeanspruchungen – Kapitel 3.2.5

Makroskopische Homogenität vorausgesetzt ermöglicht es, die Formulierung eines phänomenologisch begründeten Versagenskriteriums auf eine geometrische Aufgabenstellung zu reduzieren. Gesucht wird eine Grenz- bzw. Bruchfläche im Hauptspannungsraum, abhängig von einer Anzahl freier Parameter, die anhand von Versuchsergebnissen zu bestimmen sind. Die geometrische Deutung dieser Bruchfläche, dargestellt in Bild 3.6b, kennzeichnet dann alle ertragbaren bzw. zulässigen Spannungszustände. Jeder räumliche Spannungszustand eines materiellen Punktes „ $P_n$ “, für den gelten soll:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{t_{(P_n)}}{\Delta A} = T = \bar{T} \quad (3.41)$$

kann über die Kenntnis der ihm eindeutig zugeordneten Hauptspannungen als Spannungsbildpunkt „ $P$ “ im Hauptspannungsraum dargestellt werden (Bild 3.6). Punkte, die innerhalb der Fläche liegen, entsprechen versagensfreien Zuständen – ein Spannungszustand, der zu einem Punkt auf die Fläche führt (Bild 3.6b), wird als Versagenszustand interpretiert.



a) Geometrische Interpretation durch Einführung der Reuß Variablen (Haigh-Westergaard stress space)

b) Geometrisch vollständige Beschreibung der ertragbaren Spannungszustände im Hauptspannungsraum –  $F(\xi, \rho, \theta) = 0$

**Bild 3.6:** Geometrische Darstellung des Grenzspannungszustandes – Bruchfläche im Hauptspannungsraum

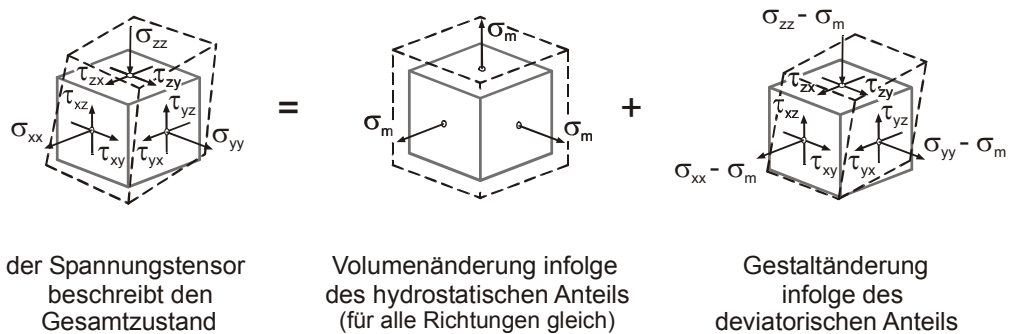
Mit den im Bild 3.6 verwendeten Bezeichnungen kann die geometrische Darstellung eines Spannungspunktes „ $P$ “ als Bildpunkt im Spannungsraum angegeben werden. Der Parameter „ $\xi$ “ beschreibt den Abstand „ $\overline{ON}$ “ auf der hydrostatischen Achse vom Ursprung (vom Spannungs-Null-Punkt), während „ $\rho$ “ den Abstand „ $\overline{NP}$ “ zwischen der hydrostatischen Achse und dem Spannungsbildpunkt „ $P$ “ in der senkrecht zur hydrostatischen Achse liegenden Deviatoriebene angibt – siehe auch Bild 3.8a. Mit dem Winkel „ $\theta$ “ kann die Lage des Spannungsbildpunktes abschließend eindeutig im Raum festgelegt werden. Alle räumlichen Spannungszustände, welche die Funktion 3.40 erfüllen, ergeben im Hauptspannungsraum die in Bild 3.6b qualitativ dargestellte Fläche.

Die Beschreibung eines beliebigen Spannungspunktes in einem materiellen Punkt „ $P$ “ eines Kontinuums erfolgte im Kapitel 3.1.2 für den Spannungstensor „ $\sigma^{ji}$ “ mit Hilfe seiner Hauptinva-

rianten „ $I_{1\sigma}$ ,  $I_{2\sigma}$  und  $I_{3\sigma}$ “. Um aus den Koordinaten des Spannungstensors „ $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ “ eine skalarwertige Funktion bilden zu können, bedarf es zur Erfassung der im Bild 3.6 gezeigten Richtungsabhängigkeiten für „ $\rho$ “ abhängig von „ $\theta$ “ (mit Bezug auf die hydrostatische Achse „ $\xi$ “) einer Aufteilung seines Gesamtspannungszustandes. Dieser kann additiv in einen hydrostatischen (Strecke „ $\overline{ON}$ “), oft auch als kugelsymmetrisch bezeichneten Anteil „ $\sigma_m \cdot \delta_{ij}$ “ und einem davon abweichenden deviatorischen Anteil „ $s_{ij}$ “, der Strecke „ $\overline{NP}$ “, mit Berücksichtigung der Richtungsabhängigkeit „ $\theta$ “, zerlegt werden:

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \cdot \delta_{ij} + s_{ij} \tag{3.42}$$

Der hydrostatische Anteil „ $\sigma_m$ “ kennzeichnet eine nach allen Richtungen gleich große Beanspruchung ähnlich dem Überdruck innerhalb eines mit Gas gefüllten Luftballons. Dieser Vergleich soll erkennen lassen, dass es sich dabei um eine reine volumetrische Formänderungsarbeit handeln muss. Der deviatorische Anteil „ $s_{ij}$ “ repräsentiert dann eine Beanspruchung unter Volumenkonstanz, d.h. er beschreibt ausschließlich die Gestaltänderungsarbeit, hervorgerufen durch reine Schubspannungsbeanspruchungen (Bild 3.7).



der Spannungstensor beschreibt den Gesamtzustand

Volumenänderung infolge des hydrostatischen Anteils (für alle Richtungen gleich)

Gestaltänderung infolge des deviatorischen Anteils

... in tensorieller Darstellung:

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \cdot \delta_{ij} + s_{ij}$$

... in vektorieller Darstellung:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

**Bild 3.7:** Zerlegung des Spannungstensors in einen kugelsymmetrischen bzw. hydrostatischen Anteil und in einen deviatorischen Anteil, [64]

Die relative Volumenänderung „ $e$ “ des eingeführten Elementarwürfels (Bild 3.5) kann bei allseitigem Druck ( $\Delta p = -\sigma$ ) allgemein über die spezifische Volumenänderung angegeben werden:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = -\frac{3}{E} \cdot \Delta p \cdot (1 - 2\mu) = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot I_{1\sigma}$$

Damit ist die Volumenänderung proportional der ersten Hauptinvarianten „ $I_{1\sigma}$ “ des Spannungstensors „ $\sigma^{ji}$ “. Der restliche Anteil, der den volumendehnungsfreien Beanspruchungszustand kennzeichnet, muss der Anteil des Spannungstensors sein, bei dem die erste Hauptinva-

riante identisch Null wird. Die Komponenten des hydrostatischen Spannungstensors „ $\sigma_m \cdot \delta_{ij}$ “ ergeben sich somit aus dem arithmetischen Mittel der aus Kapitel 3.1.2 bekannten Normalspannungen:

$$\sigma_m = \Delta p = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \cdot I_{1\sigma} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{ Spur}(T) \quad (3.43)$$

In Matrixschreibweise zusammengefasst ergibt sich für „ $\sigma_m \cdot \delta_{ij}$ “:

$$\sigma_m \cdot \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Aus Gleichung 3.43 wird unmittelbar ersichtlich, dass der Kugeltensor „ $\sigma_m \cdot \delta_{ij}$ “ für alle möglichen Richtungen der Hauptachsen immer gleiche Werte annehmen muss. Der hydrostatische Anteil beschreibt somit einen Punkt auf der „ $\xi$ “-Achse und ist richtungsunabhängig. Der Spannungsdeviator ist nach dem zuvor Beschriebenen definiert als der Anteil, der die Abweichungen von den bekannten mittleren Spannungen „ $\sigma_m$ “ beschreibt. Mit Gleichung 3.42 ergibt sich damit der Spannungsdeviator zu:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \cdot \delta_{ij} \quad (3.45a)$$

In analoger Weise zum Kapitel 3.1.2 kann der Tensor des Spannungsdeviators in Matrixschreibweise angegeben werden:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.45b)$$

Der Abzug eines in allen Richtungen konstanten Normalspannungszustandes darf und kann die Richtungsabhängigkeiten (mit Bezug auf den Winkel „ $\theta$ “) und damit die Lage seines Bildpunktes im Spannungsraum nicht verändern. Die Hauptrichtungen müssen deshalb in den Anteilen des Spannungsdeviators genau so enthalten sein, wie in dem Gesamtanteil des Spannungstensors „ $\sigma^{ij}$ “. Damit kann der Spannungsdeviator „ $s_{ij}$ “ auch vereinfacht mit den Hauptspannungskomponenten durch die Matrix:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

angegeben werden. Mit Gleichung 3.39 und Gleichung 3.43 gilt dann:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Zur Beschreibung des Spannungsdeviators im Hauptspannungsraum lässt sich in analoger Weise zum Kapitel 3.1.2 ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Eigenwerte formulieren. Die charakteristische Gleichung:

$$\det (s_{ij} - s_H \cdot \delta_{ij}) = 0 \quad (3.48)$$

führt analog zu Gleichung 3.36 auf die kubische Form:

$$s_H^3 - J_{1s} \cdot s_H^2 + J_{2s} \cdot s_H - J_{3s} = 0 \quad (3.49)$$

worin die Koeffizienten „ $J_{1s}$ “, „ $J_{2s}$ “ und „ $J_{3s}$ “ als die Invarianten des Spannungsdeviators bezeichnet werden. Mit ihrer Hilfe lässt sich ein Tensor 2. Stufe mit insgesamt sechs unabhängigen Komponenten innerhalb eines dreidimensionalen Spannungsraumes vollständig beschreiben. Mit der zweiten Invariante des Spannungsdeviators „ $J_{2s}$ “ existiert die Abhängigkeit zur hydrostatischen Achse. Zur Darstellung der schiefsymmetrischen, um die hydrostatische Achse rotierenden Abstände wird mit der dritten Invariante „ $J_{3s}$ “ ein weiterer Zusammenhang zu dem Ursprung bzw. den Richtungskordinaten des Spannungsraumes bereitgestellt. Da die Spur des Spannungsdeviators nach Abzug des hydrostatischen Anteiles nur Schubspannungskomponenten enthalten kann, wird die erste Invariante „ $J_{1s}$ “ des Spannungsdeviators identisch Null. Die zweite und dritte Invariante lassen sich nach einigem Umformen abhängig von den Hauptinvarianten [26] angeben zu:

$$J_{1s} = 0$$

$$J_{2s} = -\frac{1}{3} ( I_{1\sigma}^2 - 3 \cdot I_{2\sigma} )$$

$$J_{3s} = \frac{1}{27} ( 2 \cdot I_{1\sigma}^3 - 9 \cdot I_{1\sigma} \cdot I_{2\sigma} + 27 \cdot I_{3\sigma} )$$

Mit den Invarianten des Spannungsdeviators „ $s_{ij}$ “ und der Aufteilung in den hydrostatischen d.h. richtungsunabhängigen Anteil und den deviatorischen richtungsabhängigen Anteil kann für Gleichung 3.40 eine für die geometrische Interpretation vorteilhaftere Darstellung angegeben werden:

$$\xi = \overline{ON} = \sqrt{3} \cdot \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot I_{1\sigma} \quad (3.50a)$$

$$r = \overline{NP} = \sqrt{3} \cdot \tau_{oct} = \sqrt{2 \cdot J_{2s}} \quad (3.50b)$$

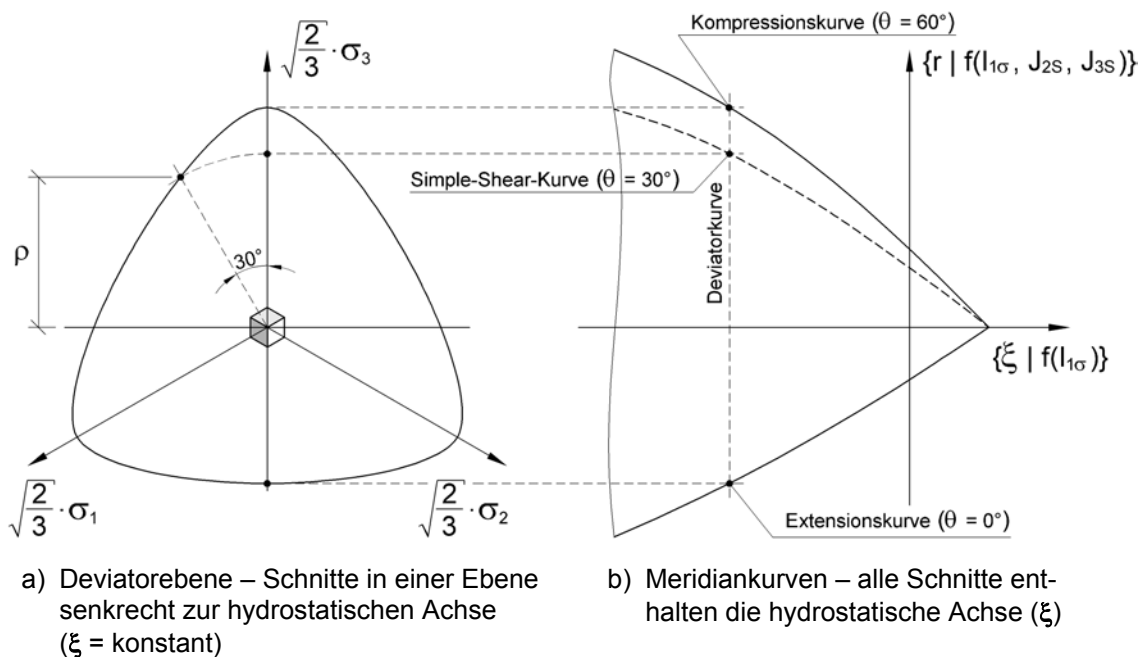
$$\cos 3\theta = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_{3s}}{(J_{2s})^{3/2}} \quad (3.50c)$$

Die äquivalente Form zu Gleichung 3.40 lautet dann mit den Gleichungen 3.50 (a bis c):

$$f(\sigma_{ij}) = f(\xi, r, \theta) = 0 \quad (3.51)$$

Die Literatur liefert heute zahlreiche Vorschläge zur Beschreibung geometrischer Flächen im Hauptspannungsraum [26], die die Summe aller für den Werkstoff Beton ertragbaren Spannungsbildpunkte mit Hilfe der zuvor genannten Funktionsform erfassen sollen. ANSYS berück-

sichtigt das von Willam und Warnke [120] entwickelte „Fünf-Parameter-Modell“. Dieses mathematisch formulierte Modell zeichnet sich dadurch aus, dass eine ungewöhnlich gute und zugleich vielseitige Anpassung über nur wenige und zugleich einfach zu ermittelnde Materialparameter möglich ist. Die Konstruktion des Modells und die daraus resultierende Eingabe seiner Materialparameter ist dem Vorgehen bei der geometrischen Interpretation von Versuchsergebnissen sehr ähnlich. Sie erfolgt durch gezielte ebene Schnittflächen durch die im Hauptspannungsraum definierte Bruchfläche. Zum einen sind es Schnitte, welche die hydrostatische Achse enthalten, wobei drei Kurven von besonderem Interesse sind, nämlich die Extensionskurve („ $\theta = 0^\circ$ “), die Kompressionskurve („ $\theta = 60^\circ$ “), sowie die Simple-Shear-Kurve („ $\theta = 30^\circ$ “ – siehe Bild 3.8. Zum anderen sind es Schnitte, die in einer Ebene „ $\xi$ “=konstant senkrecht zur hydrostatischen Achse – als Deviatorebene bezeichnet – liegen.



**Bild 3.8:** Schnittkurven der Bruchfläche

Die trichterförmig skizzierte Bruchfläche der räumlichen Abbildung 3.6b kündigt prinzipiell eine starke Abhängigkeit der Festigkeitseigenschaften des Betons von der Größe der hydrostatischen Druckkomponenten an. Gemäß der Darstellung wächst mit zunehmender hydrostatischer Druckspannungsbeanspruchung im Druckoktanten auch die ertragbare Gestaltänderungsarbeit. Dadurch entstehen charakteristische Kurven, die zur Erfassung und Beurteilung der Versuchsergebnisse herangezogen werden können. Die Schnittführungen, welche die hydrostatische Achse enthalten, erzeugen im Druckoktanten die drei genannten, nachfolgend genauer definierten Meridiankurven:

- Die Kompressionskurve (Druckmeridian) stellt Spannungszustände dar, bei denen die mittlere und die größte Hauptspannung gleich sind:

$$\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1$$

- Die Extensionskurve (Zugmeridian) stellt Spannungszustände dar, in denen die mittlere und die kleinste Hauptspannung gleich sind:

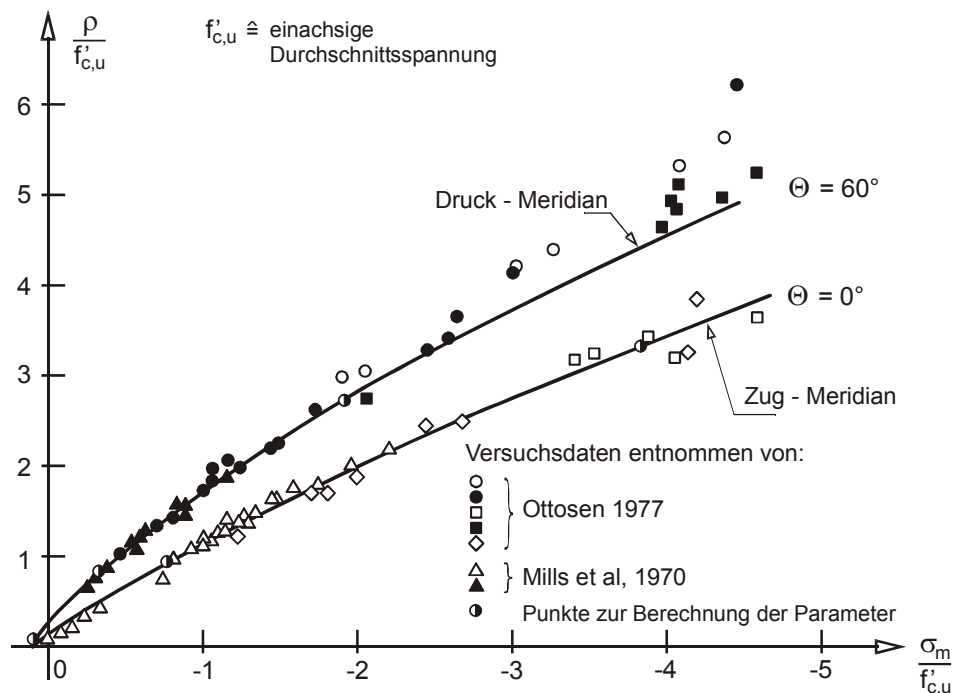
$$\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$$



- Die Simple-Shear-Kurve (Schubmeridian) stellt Spannungszustände dar, in denen die mittlere von der kleinsten und größten Hauptspannung abhängt. Dieser Spannungszustand wirkt in einer Fläche, die den Winkel zwischen den Richtungen der größten und kleinsten Hauptspannung halbiert, d.h. bildet eine Ebene, in der die Extremalwerte der Schubspannungen, die sogenannten Hauptschubspannungen wirken:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \equiv \tau_{max}$$

Die Meridiankurven im Bild 3.8b zeigen anschaulich, dass für die Festigkeitseigenschaften des Betons die deutliche Abhängigkeit der Druckfestigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand – insbesondere für Werte „ $\sigma_m \geq -\sqrt{3} \cdot f_c$ “ – kennzeichnend ist. Die daraus resultierende und im Vergleich zur Gestaltänderungshypothese (sie stellt im Hauptachsensystem die Mantelfläche eines Kreiszylinders dar; Fließzylinder nach von Mises, 1913) deutliche Minderung der Schubtragfähigkeit unter mehrachsigen Druckspannungen wird in der Deviatorenebene (Bild 3.8a) erkennbar. Die Mehrheit aller vorliegenden experimentellen Untersuchungen zeigt diese für Beton typischen Verläufe dieser drei charakteristischen Linien (z.B.: Zug- und Druckmeridian im Bild 3.9).



**Bild 3.9:** Zug- und Druckmeridian für mehraxiale Betondruckspannungen überwiegend im Druckoktanten, [26]

Zur einleitenden Beschreibung eines dreidimensionalen Versagensmechanismus für Beton entwickelten Willam und Warnke in Anlehnung an die Gleichung 3.50 (a bis c) ein mathematisches Modell, abhängig von den Spannungskomponenten „ $\sigma_a$ “ und „ $\tau_a$ “ sowie dem Richtungswinkel „ $\theta$ “ [120]. Die allgemeine Form unter Berücksichtigung einer Normierung auf die einachsige Druckfestigkeit „ $f_{c,u}$ “ lautet:

$$f(\sigma_{ij}) = f(\sigma_a, \tau_a, \theta) = \frac{1}{r(\sigma_a, \theta)} \cdot \frac{\tau_a}{f_{c,u}} - 1 \quad (3.52)$$

In Gleichung 3.52 sind die Spannungen „ $\sigma_a$ “ und „ $\tau_a$ “ definiert als Mittelwerte der Normal- und Schubspannungen. Wird ein infinitesimal kleines Volumenelement betrachtet, so gilt für jeden Punkt der Oberfläche (vgl. hierzu auch Gleichung 3.41), dass der Spannungsvektor auf der tangentialen Ebene dieser Oberfläche Schubspannungskomponenten „ $\tau_s$ “ und Normalspannungskomponenten „ $\sigma_s$ “ enthält. Der Mittelwert der Normalspannungskomponenten „ $\sigma_s$ “ über die Oberfläche „ $S$ “ ist definiert zu:

$$\sigma_a = \lim_{S \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S} \int_S \sigma_s dS \right) \quad (3.53a)$$

Die Auflösung liefert die Formulierung in den Hauptspannungskomponenten:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.53b)$$

Die Schubspannung „ $\tau_s$ “ auf der sphärischen Oberfläche basiert auf Spannungen, die durch alle beliebigen und möglichen Ebenen eines Punktes der sphärischen Fläche laufen. Da die Richtung der Schubspannung keine Bedeutung auf den physikalischen Versagensmechanismus hat, wird der Durchschnittswert im Sinne einer Varianzformulierung angegeben [26]:

$$\tau_a = \lim_{S \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S} \int_S \tau_s^2 dS \right)^{1/2} \quad (3.54a)$$

Ausführen der angezeigten Operation führt zu:

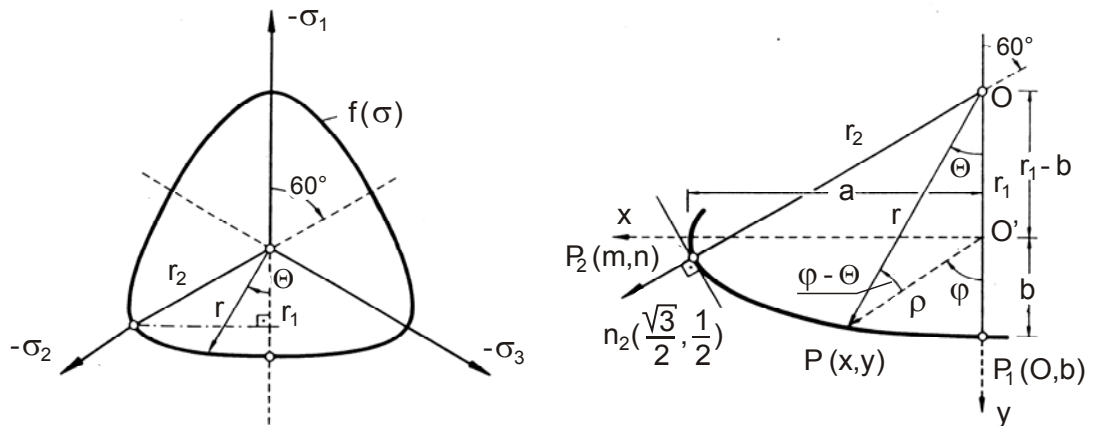
$$\tau_a = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (3.54b)$$

Die Definition einer elliptischen Spur „ $\overline{P_1 P_2}$ “ in der Deviatorebene (Bild 3.10) dient bei dem mathematischen Modell als Basis bzw. Leitlinie für eine in Richtung der negativen hydrostatischen Druckspannung schiefssymmetrischen kegelförmigen Bruchfläche, bei der die „ $\xi$ “-Achse (nachfolgend mit Äquisektrix bezeichnet) zugleich als eine von „ $\theta$ “ abhängige Drehachse verwendet wird. Die nichtlineare Variation der hydrostatischen Spannungsanteile zur Beschreibung der gekrümmten Meridiankurven in Richtung der negativen hydrostatischen Druckkomponenten erfolgt über zwei quadratische, von den hydrostatischen Spannungskomponenten abhängige Funktionen – nämlich den Positionsvektoren „ $r_1$ “ und „ $r_2$ “:

$$\text{auf dem Zugmeridian } (\theta = 0^\circ) \quad : \quad r_1(\sigma_a) = a_0 + \frac{\sigma_a}{f_{c,u}} \cdot a_1 + \frac{\sigma_a^2}{f_{c,u}^2} \cdot a_2 \quad (3.55a)$$

$$\text{auf dem Druckmeridian } (\theta = 60^\circ) \quad : \quad r_2(\sigma_a) = b_0 + \frac{\sigma_a}{f_{c,u}} \cdot b_1 + \frac{\sigma_a^2}{f_{c,u}^2} \cdot b_2 \quad (3.55b)$$

Über die geometrische Abhängigkeit der halben Ellipsenachsen von den Positionsvektoren „ $r_1$ “ und „ $r_2$ “ in dem interessanten Bereich für „ $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ “ lässt sich damit eine elliptische Oberfläche zwischen den Punkten „ $P_1$ “ und „ $P_2$ “ konstruieren bzw. numerisch beschreiben (Bild 3.10).



**Bild 3.10:** Geometrische Beziehungen und Spur der Ellipse in der Deviatorebene, [120]

Die halben Achsen „ $a$ “ und „ $b$ “ der Ellipse, formuliert in den Positionsvektoren „ $r_1$ “ (für den Zugmeridian) und „ $r_2$ “ (für den Druckmeridian), ergeben sich zu:

$$a^2 = \frac{r_2 \cdot (r_1 - 2 \cdot r_2)^2}{5 \cdot r_2 - 4 \cdot r_1}$$

$$b = \frac{2 \cdot r_2^2 - 5 \cdot r_1 \cdot r_2 + 2 \cdot r_1^2}{4 \cdot r_1 - 5 \cdot r_2}$$

Die Transformation der zuvor gewählten kartesischen Beschreibung der Ellipse in der Deviatorebene in Polarkoordinaten, verbunden mit einer Erweiterung mit Bezug auf die hydrostatische Achse (Translation von Punkt „ $O'$ “ auf Punkt „ $O$ “ dargestellt in Bild 3.10), liefert die geforderte allgemeingültige Abhängigkeit für die Entwicklung der ellipsenförmigen Bruchoberfläche ausgedrückt in den Polarkoordinaten „ $r$ “ und „ $\theta$ “, definiert als Mittelwerte der Normal- und Schubspannungen:

$$r(\sigma_a, \theta) = \frac{2 \cdot r_2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cos \theta + r_2 \cdot (2 \cdot r_1 - r_2) \cdot \left[ 4 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \theta + 5 \cdot r_1^2 - 4 \cdot r_1 \cdot r_2 \right]^{\frac{1}{2}}}{4 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \theta + (r_2 - 2 \cdot r_1)^2} \quad (3.56)$$

mit dem Richtungskosinus:

$$\cos \theta = \frac{-2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{2} \cdot \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.57)$$

Eine weiter im Detail angegebene Herleitung zur Konstruktion der elliptischen Spur in der Deviatorebene ist in der Originalarbeit angegeben [120]. Zur Beschreibung der Versagensfläche – entsprechend Gleichung 3.51 für „ $f(\sigma_a, \tau_a, \theta) = 0$ “ – muss die nachfolgende Beziehung abhängig von den Mittelwerten der Normal- und Schubspannungen „ $\sigma_a$ “ und „ $\tau_a$ “ erfüllt sein:

$$\frac{\tau_a}{f_{cu}} = r(\sigma_a, \theta) \quad (3.58)$$

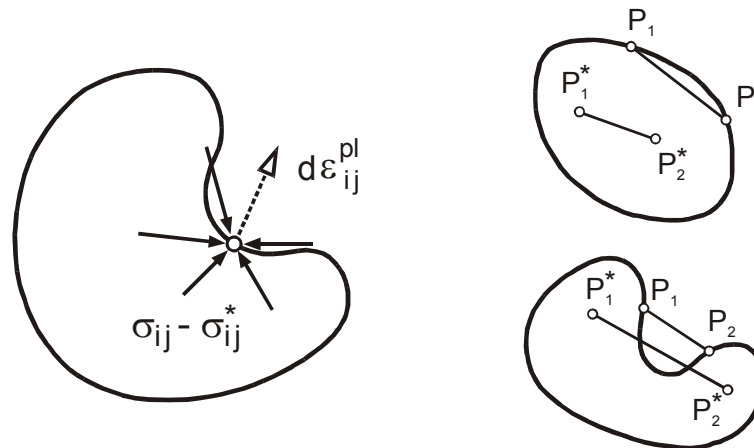
Gleichung 3.56 in Kombination mit einem im Zugbereich definierten „cut-off“ Kriterium (einem modifizierten Rancine - Kriterium auf das im Kapitel 3.2.3 eingegangen wird) liefert die duale Grundformulierung, die eine geschlossene Anpassung an vorhandene Versuchsergebnisse auch in Bereiche mit großen nicht zwängungsfreien Druckspannungszuständen innerhalb des Druckoktanten ermöglicht. Über die bereits erwähnte vorteilhafte Trennung der hydrostatischen und der deviatorischen Spannungskomponenten des Spannungstensors konnte die mathematische Beschreibung zum einen über die auf der Äquisektrix liegenden Normalspannungskomponenten „ $\sigma_a = \sigma_m = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ “ und der zur Äquisektrix normal (senkrecht) stehenden Deviatorebene erfolgen. Die Spur der Deviatorebene wird über die Polarkoordinaten entsprechend Bild 3.10 beschrieben und enthält durch Einsetzen der quadratischen Gleichungen 3.55 (a+b) in die Basisfunktion – Gleichung 3.56 – die Einflüsse aus beiden Meridiankurven (Zug- und Druckmeridian). Die geschlossene Identifikation der gesamten Bruchfläche über drei Grundgleichungen (zwei quadratische Funktionen für die charakteristischen Meridiankurven und die Ellipsenfunktion zur Gewährleistung eines stetigen und kontinuierlichen Übergangs zwischen den beiden Meridiankurven) liefert die notwendigen Voraussetzungen, die für eine praktische Anwendung der mathematischen Formulierung erfüllt sein müssen:

- Konvexität und Gleichmäßigkeit mit der Forderung einer monoton gekrümmten, fortlaufenden Oberfläche ohne Wendepunkte.
- Einfache Identifikation der Modell-Parameter, so dass eine aus wenigen Standardtests der Werkstoffprüfung geschlossene Anpassung an die zur Verfügung stehenden Versuchsergebnisse – innerhalb eines zu erwarteten Betriebsbereiches – möglich ist. Auf den Begriff bzw. auf die Formulierung „zu erwartender Betriebsbereich“ wird im Kapitel 3.2.3 mit Hinweisen und Vergleichen auf bekannte Versuchsberichte und die geeignete Wahl der Parameter für das Bruchkriterium genauer eingegangen.

Konvexität ist Voraussetzung zur Gewährleistung eines stabilen Materialverhaltens entsprechend dem Postulat von Drucker, wenn das Normalitätsprinzip die Richtungen der nichtlinearen (der inelastischen) Verformungen bestimmt. Nach [18] kann die Konvexität geometrisch folgendermaßen interpretiert werden: Ein Körper und somit seine Oberfläche ist konvex, wenn es zu je zwei Punkten auch deren Verbindungsgeraden ganz enthält. Auch für Randpunkte muss diese Definition gültig sein. Andernfalls ist er konkav (siehe Bild 3.11). Die Konvexitätsbedingung liefert stabiles Verhalten und beinhaltet positive Dissipation der nicht linearen Arbeit während eines Belastungszykluses entsprechend den Forderungen der Thermodynamik (Übergang einer umwandelbaren Energieform). Für die elliptische Fläche sind gleichmäßige und konvexe Übergänge garantiert – dies ergibt sich aus der geometrischen Abhängigkeit zwischen „ $r_1$ “ und „ $r_2$ “ entsprechend Bild 3.10, d.h. sie hat eine stetige Krümmung ohne Wendepunkte für alle möglichen Richtungsvektoren „ $r_i$ “ – , wenn nachfolgende Bedingung erfüllt wird:

$$\frac{1}{2} \cdot r_2 \leq r \leq r_1 \quad (3.59)$$

Die Bedingung 3.59 liefert die Voraussetzung, dass die Spur der Deviatorebene (die durch die Vektoren „ $r_1$ “ und „ $r_2$ “ in den Punkten „ $P_1$ “ und „ $P_2$ “ gekennzeichnet wird) tangential zu den Achsen des Hauptspannungsraumes verläuft. Dies ist, anfängliches isotropes Verhalten vorausgesetzt, für den Nachweis auf Konvexität der Sektionskurve für den Bereich „ $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ “ in der Deviatorebene ausreichend. Die Funktion lässt im genannten Bereich nur positive Krümmungen zu. Die Forderung nach Konvexität ist damit erfüllt.



**Bild 3.11:** Zur Definition konvexer Körper im neundimensionalen Spannungsraum, aus [18], [26] und [109]

Die genannte Gleichmäßigkeit ist aus zwei Gründen von Bedeutung: Aus der Sicht einer numerischen, computerunterstützten Berechnung ist eine geschlossene, für den gesamten zu betrachteten Spannungsraum ( $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ ) gültige mathematische Formulierung einfacher abzufragen und damit zuverlässiger. Aus theoretischer Sicht dient die Bruchfläche als Definition für den Übergang in den nicht linearen schädigungswirksamen Deformationsbereich und muss entsprechend den Normalitätsprinzipien ein gleichmäßiges Gefälle mit einer fortlaufenden kontinuierlichen Oberfläche für diese Übergänge – die letztlich eine Störung des Kontinuums darstellen (Kapitel 3.2.3) – aufweisen. Auch der natürliche reale Mechanismus des Betonverhaltens, gleichmäßige Gefügedichte vorausgesetzt, unterstützt eine gleichmäßige und allmähliche Änderung der inneren Steifigkeitsverteilungen (abhängig von den inneren Spannungszuständen und inneren Widerständen) unter kleinen Belastungsintervallen oder unter kleinen Schwankungen der äußeren Belastungen.

Nach der vorangestellten formalen Definition stellt sich die Aufgabe, aus experimentell gefundenen Bruchbedingungen des zu untersuchenden Materials Beton die zunächst unbekannt Parameter der Gleichungen 3.55a und 3.55b zu bestimmen. Die zur Beschreibung der Veränderlichkeit der Meridiankurven erforderlichen Daten sind im Bild 3.12 angegeben. Für die folgende Betrachtung ist es ausreichend, die unbekannt Koeffizienten aus fünf Grundversuchen bzw. fünf für Beton charakteristischen Festigkeitskennwerten festzustellen und anzupassen. Drei Grundversuche, die dem Zugmeridian zugeordnet sind, liefern die notwendigen Beziehungen zur Festlegung der unbekannt Parameter in Gleichung 3.55a. Die Versuche zur Ermittlung der einachsigen Zugfestigkeit „ $f_t$ “ ( $\sigma_1 = f_t$ ), der zweiachsigen Druckfestigkeit „ $f_{cb}$ “ ( $\sigma_1 = \sigma_2 = f_{cb}$ ) und einem zusätzlichen dreiaxialen Beanspruchungszustand „ $f_{c1}$ “ ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m + f_{c1}$ ) sind Grundlage für das nachstehend angegebene Gleichungssystem mit den gesuchten Koeffizienten „ $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$ “:

- $(\sigma_1 = f_t \text{ und } \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$ :

$$\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \frac{f_t}{f_c} = a_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{f_t}{f_c} \cdot a_1 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{f_t}{f_c}\right)^2 \cdot a_2$$

- $(\sigma_1 = \sigma_2 = f_{cb} \text{ und } \sigma_3 = 0)$ :

$$\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \frac{f_{cb}}{f_c} = a_0 + \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{f_{cb}}{f_c}\right) \cdot a_1 + \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{f_{cb}}{f_c}\right)^2 \cdot a_2$$

- $(\sigma_1 = \sigma_2 = (\sigma_m + f_{c1}) \text{ und } \sigma_3 = \sigma_m)$ :

$$\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \frac{f_{c1}}{f_c} = a_0 + \left(-\frac{\sigma_m}{f_c} - \frac{2}{3} \cdot \frac{f_{c1}}{f_c}\right) \cdot a_1 + \left(-\frac{\sigma_m}{f_c} - \frac{2}{3} \cdot \frac{f_{c1}}{f_c}\right)^2 \cdot a_2$$

Mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der beiden Meridiankurven (Zug- und Druckmeridian) im Zugoktanten (Bild 3.12) folgt aus der Bedingung „ $r_2(\bar{\xi}_0) = r_1(\bar{\xi}_0) = 0$ “ mit den zuvor berechneten Koeffizienten „ $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$ “ eine zusätzliche Bindung zur Festlegung des charakteristischen Verlaufes der Kompressionskurve:

$$(r_2(\alpha \cdot \bar{\xi}_0) = r_1(\alpha \cdot \bar{\xi}_0) = 0):$$

$$0 = a_0 + \bar{\xi}_0 \cdot a_1 + \bar{\xi}_0^2 \cdot a_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\xi}_0 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}}{2 \cdot a_2}$$

Die zur Festlegung der Krümmung des Druckmeridians in Gleichung 3.55b noch fehlenden Koeffizienten „ $b_0$ ,  $b_1$  und  $b_2$ “ lassen sich dann über die einachsige Druckfestigkeit „ $f_c$ “ ( $\sigma_3 = f_c$ ) und einen zweiten dreiaxialen Beanspruchungszustand „ $f_{c2}$ “ ( $\sigma_3 = \sigma_m + f_{c2}$ ) ebenfalls über ein Gleichungssystem angeben:

- $(r_2(\alpha \cdot \bar{\xi}_0) = r_1(\alpha \cdot \bar{\xi}_0) = 0)$ :

$$0 = b_0 + \bar{\xi}_0 \cdot b_1 + (\bar{\xi}_0)^2 \cdot b_2$$

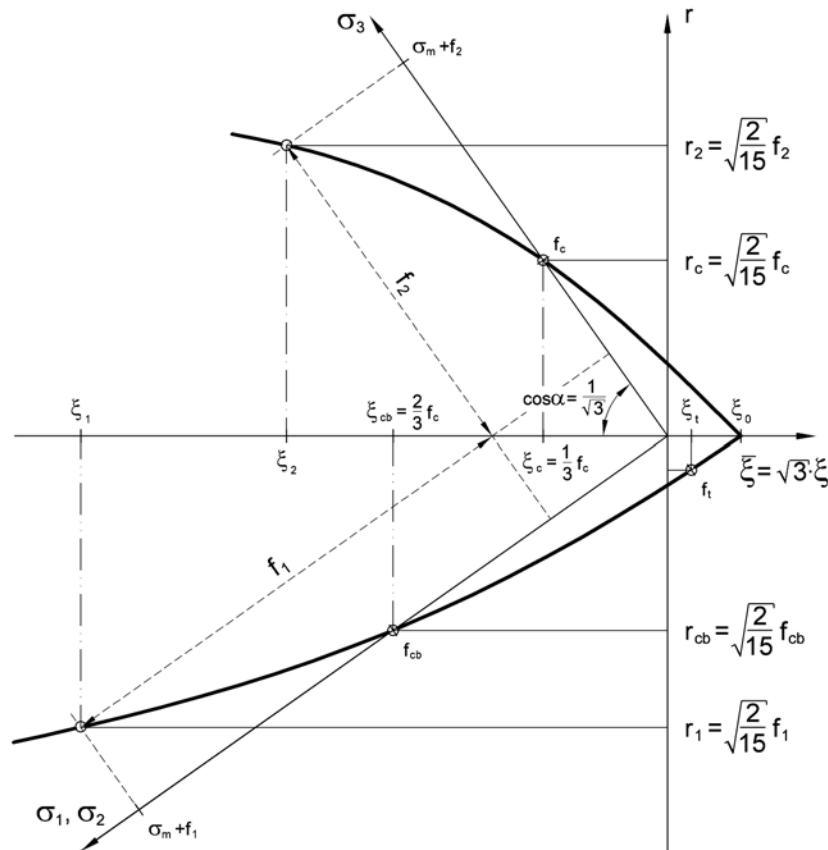
- $(\sigma_3 = f_c \text{ und } \sigma_1 = \sigma_2 = 0)$ :

$$\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \frac{f_c}{f_c} = b_0 + \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{f_c}{f_c}\right) \cdot b_1 + \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{f_c}{f_c}\right)^2 \cdot b_2$$

- $(\sigma_3 = (\sigma_m + f_{c2}) \text{ mit } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m)$ :

$$\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \frac{f_{c2}}{f_c} = b_0 + \left(-\frac{\sigma_m}{f_c} - \frac{1}{3} \cdot \frac{f_{c2}}{f_c}\right) \cdot b_1 + \left(-\frac{\sigma_m}{f_c} - \frac{1}{3} \cdot \frac{f_{c2}}{f_c}\right)^2 \cdot b_2$$

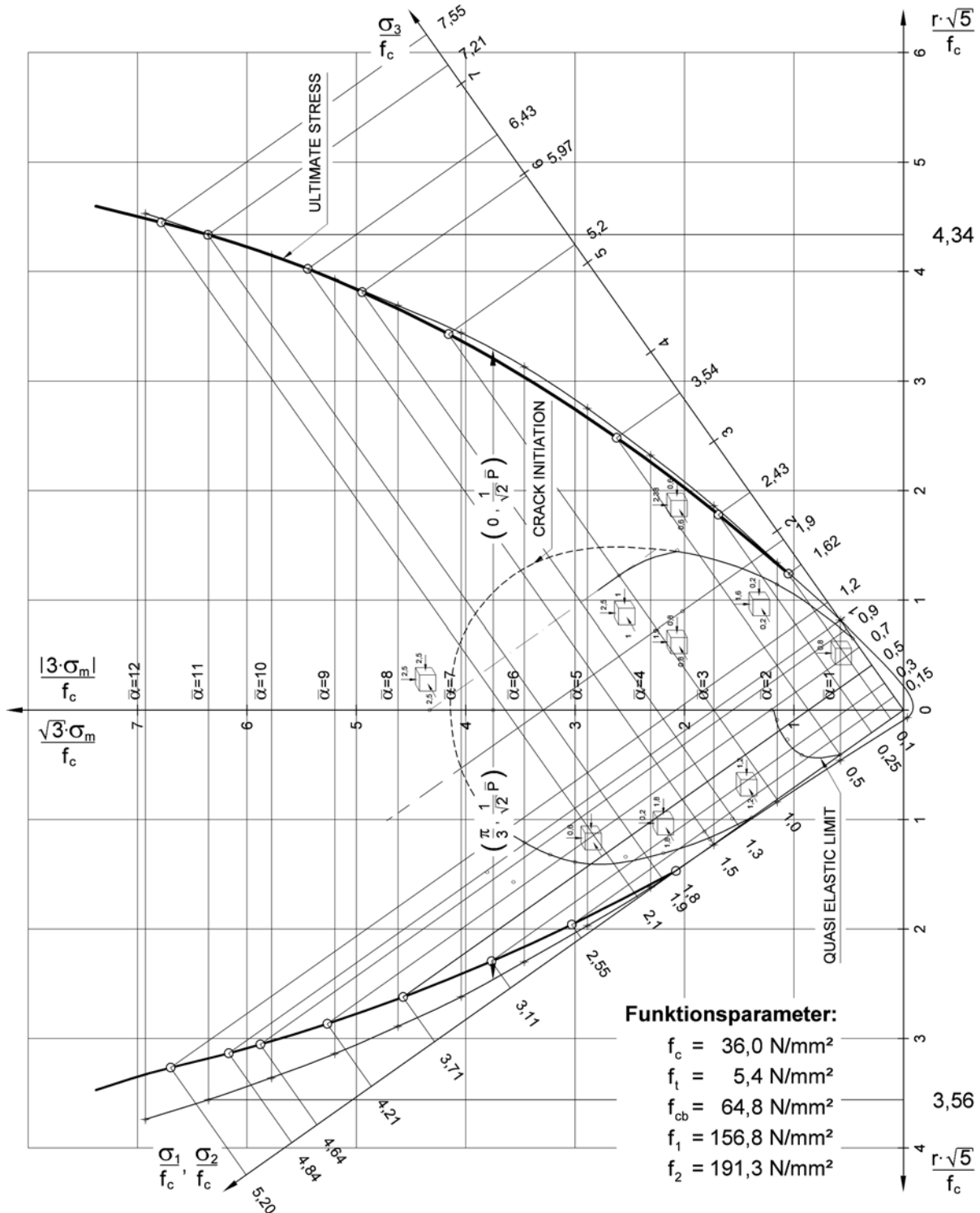
Damit ist die geschlossene Versagensfläche über fünf Festigkeitskennwerte, nämlich der einachsigen Zugfestigkeit „ $f_t$ “, der ein- und zweiachsigen Druckfestigkeit („ $f_c$ “ und „ $f_{cb}$ “) sowie aus zwei Dreiaxialversuchen unter einem identischen, für beide Versuche gleichen hydrostatischen Spannungszustand „ $\sigma_m$ “ (aus dem nur die maßgebenden Anteile für die Gestaltänderungsarbeit benötigt werden:  $f_{c1} = \sigma_{min / (Test1)} - \sigma_m$  und  $f_{c2} = \sigma_{min / (Test2)} - \sigma_m$ ), eindeutig definiert.



**Bild 3.12:** Darstellung der Eingabeparameter zur Anpassung an Versuchsergebnisse

Die Koeffizienten „ $a_0, a_1, a_2$ “ und „ $b_0, b_1, b_2$ “ sind beliebige, nur von Versuchsergebnissen abhängige konstante Parameter. Sie können somit an bekannte Versuchsdaten ohne größeren Fehler angeglichen werden, d.h. es wird zumindest nicht erwartet, dass Abweichungen aus baupraktischer Sicht von Bedeutung sind. Eine Gegenüberstellung des mathematischen Modells mit Versuchsergebnissen, berichtet in [78], wird im Bild 3.13 gezeigt.

Die Wahl der Eingabeparameter für den Vergleich im Bild 3.13 wurde aus [120] übernommen. Der Anteil der hydrostatischen Spannung ( $\sigma_m = 1,9 \cdot f_c$ ) wurde so gewählt, dass eine geschlossene Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen auf der Kompressionskurve erzielt werden konnte. Auch die resultierende sehr kontinuierliche Anpassung an die Extensionskurve im Bild 3.13 zeigt, dass das vorgeschlagene mathematische Modell, dessen Leitlinien für die gesamte Polfigur (entsprechend Bild 3.10) aus drei Ellipsen zusammengesetzt ist, im gesamten geprüften Bereich eine stetige Anpassung ermöglicht. Die Benennung der Festigkeitsklassen erfolgt in der Regel nach der Mindestfestigkeit einer Serie, die aus verschiedenen Mischerfüllungen stammen. In [94] werden für den Variationskoeffizient einer Stichprobe im Rahmen einer Eignungsprüfung je nach Sorgfalt der Herstellung mögliche Verhältnisse der Abweichungen zum Festigkeitsmittelwert zwischen 5 und 15 % angegeben. Unter Berücksichtigung der genannten Abweichungen und der Tatsache, dass bei der Betonfestigkeit die resultierenden Streuungen von zahlreichen Einflussgrößen (z.B. Mischungsverhältnis, Kornzusammensetzung, Wassermenge, Verdichtung usw.) in einem Zusammenhang zur Normfestigkeit des Betons stehen, erscheinen die im Bild 3.13 erkennbaren Abweichungen als nahezu bedeutungslos.

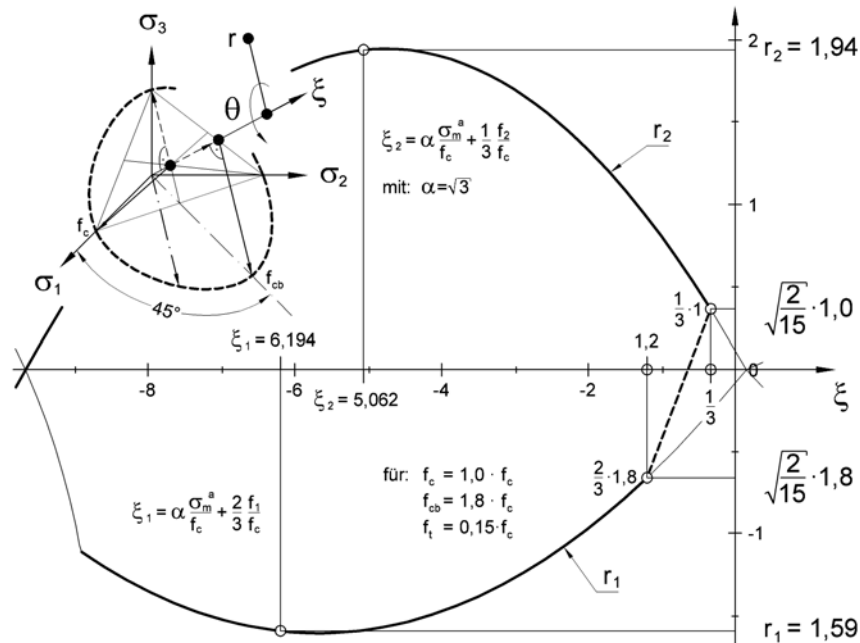


**Bild 3.13:** Verlauf der Bruchfläche in der hydrostatischen Ebene nach Versuchen von Launay & Cachon mit Gegenüberstellung der Funktion von Willam und Warnke, aus [78] (für die Eingabeparameter:  $f_{cb}=1,8 \cdot f_c$ ,  $f_t=0,15 \cdot f_c$ ,  $\sigma_m=1,9 \cdot f_c$ ,  $r_1=1,59 \cdot (5)^{\frac{1}{2}} \cdot f_c$ ,  $r_2=1,94 \cdot (5)^{\frac{1}{2}} \cdot f_c$ )

Die im Druckoktanten geschlossene Formulierung der Funktion, im Bild 3.14 in Polarkoordinaten dargestellt, zeigt lediglich einen nicht stetigen und ungleichförmigen Verlauf der Extensionskurve, jedoch nach Überschreitung der zuvor genannten, in [120] angegebenen Einschränkung für „ $r_2 \leq 1/2r_1$ “. Dieser Bereich liegt deutlich außerhalb der von Launay und Cachon [78] untersuchten Spannungsverhältnisse, der vermutlich auch für außerordentlich wenige Konstruktio-



nen von Bedeutung und Interesse sein wird. Fraglich wäre hier auch die Prüffähigkeit unter derart großen hydrostatischen Druckspannungen.



**Bild 3.14:** Darstellung der Funktion  $f(\xi, r, \theta) = 0$  in der hydrostatischen Ebene innerhalb des Druckoktanten – Meridiankurven für  $r_2$  (Kompressions-) und  $r_1$  (Extensionskurve) (für die Eingabeparameter:  $f_{cb}=1,8 \cdot f_c$ ;  $f_t=0,15 \cdot f_c$ ;  $\sigma_m=1,9 \cdot f_c$ ;  $r_1=1,59 \cdot (5)^{1/2} \cdot f_c$ ;  $r_2=1,94 \cdot (5)^{1/2} \cdot f_c$ )

Die Frage nach einer geeigneten Einstellung des Bruchkriteriums für das jeweils zu untersuchende System hat nach Ansicht des Verfassers eine weitaus größere Bedeutung und ist, wie nachfolgend beschrieben, weitaus problematischer. Die von Launay und Cachon dokumentierten Gefügezerstörungen im Druckoktanten unter mehraxialen und dadurch weiterhin „ideal“ gestützten Druckspannungszuständen (im Bild 3.13 durch die Angabe „crack initiation“ gekennzeichnet) kündigen generell an, dass eine verallgemeinerte und für alle denkbaren Konstruktionsarten bzw. Ausführungsformen geltende Einstellung des Bruchkriteriums nicht zulässig sein kann. Konstruktiv muss ein zu untersuchendes Bauteil oder System derart große mehraxiale Spannungszustände – mit der Erkenntnis der gezeigten Gefügezerstörungen im Druckoktanten – auch zulassen. Mit anderen Worten, die konstruktive Durchbildung muss im Fall einer inneren Gefügezerstörung einen stützenden Einfluss auf den gedrückten Betonquerschnitt bereitstellen, wie man es z.B. bei betongefüllten Verbundstützen, bei denen der Beton vollständig und ausreichend umschnürt wird, erwarten kann.

Ein Vergleich von zwei versuchstechnisch vollkommen verschieden durchgeführten Festigkeitsprüfungen unter mehraxialen Beanspruchungszuständen ist bei der Einschätzung einer geeigneten Einstellung des Bruchkriteriums hilfreich. Zur Bestimmung der Bruchfestigkeit unter dreiaxialen Spannungszuständen verwendeten Launay und Cachon quadratische Betonwürfel mit einer Kantenlänge von 70 mm. Zur Vermeidung von belastungssteigernden Reibungswiderständen benutzten sie einen Block, bestehend aus vier Aluminium-Scheiben (jeweils 4/10 mm stark), wobei alle Flächen dieser Scheiben mit Talk behandelt waren. Um Einwände vorwegzunehmen, wird darauf hingewiesen, dass diese Form der Lasteintragung durchaus geeigneter ist als die von Föppl gewählte Form, der lediglich eine „Schmierschicht“ zwischen Probenkörper

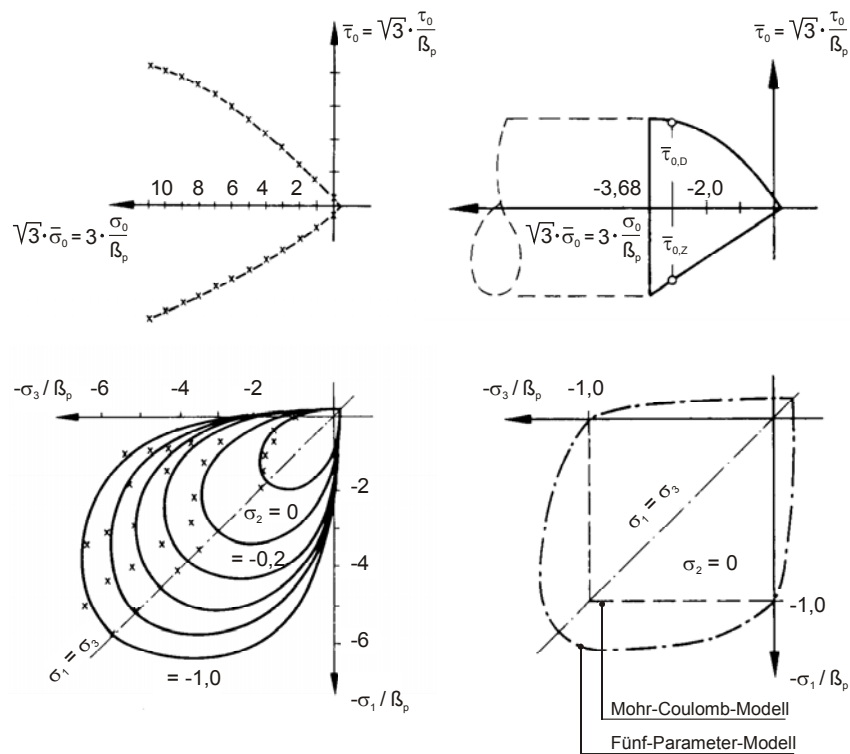
und Lasteintragung vorsah (Kupfer berichtet in [72], dass die von Föppl gewählte Versuchsanordnung zu ungleichförmigen Lasteintragungen und damit zu einer Festigkeitsminderung führte). Zur Bestimmung der Gefügezerstörung, im Bild 3.13 unter der Bezeichnung „crack initiation“ eingetragen, benutzten Launay und Cachon Ultraschallimpuls-Messungen, die zuvor bereits von Rüschi [65] angewendet wurden. Zusätzlich überprüften Launay und Cachon ihre Messergebnisse mit einer Methode, die bei Gesteinsproben Anwendung findet. Sie dokumentieren das Ergebnis beider voneinander verschiedenen Messmethoden mit nahezu deckungsgleichen Kurvenverläufen für die eingetretene Gefügerissbildung in [78].

Kupfer wählte dagegen eine grundsätzlich verschiedene Probekörperform, bestehend aus quadratischen Betonscheiben mit den Abmessungen 200/200/50 mm. Nach den Erkenntnissen von den zuvor von Hilsdorf durchgeführten Versuchen wurden von Kupfer Stahldrahtbürsten mit einer Borstenfläche von 0,3 x 0,5 mm eingesetzt, um die Behinderung der Querdehnung an den belasteten Rändern der Betonproben und das Mitwirken von massiven Belastungsplatten weitgehend auszuschalten. Dem sehr umfassenden Versuchsbericht von Kupfer [72], der auch wertvolle Beobachtungen und Erfahrungen über die Versuchsdurchführung mitteilt, ist zu entnehmen, dass auch diese Form der nahezu zwanglosen Krafterleitung nicht unbedingt zu an jeder Stelle des Probekörpers absolut gleichen Spannungs- und Verformungszuständen führt. Nach Ansicht des Verfassers werden Versuchsanordnung und Durchführung die Versuchsergebnisse immer mehr oder weniger beeinflussen.

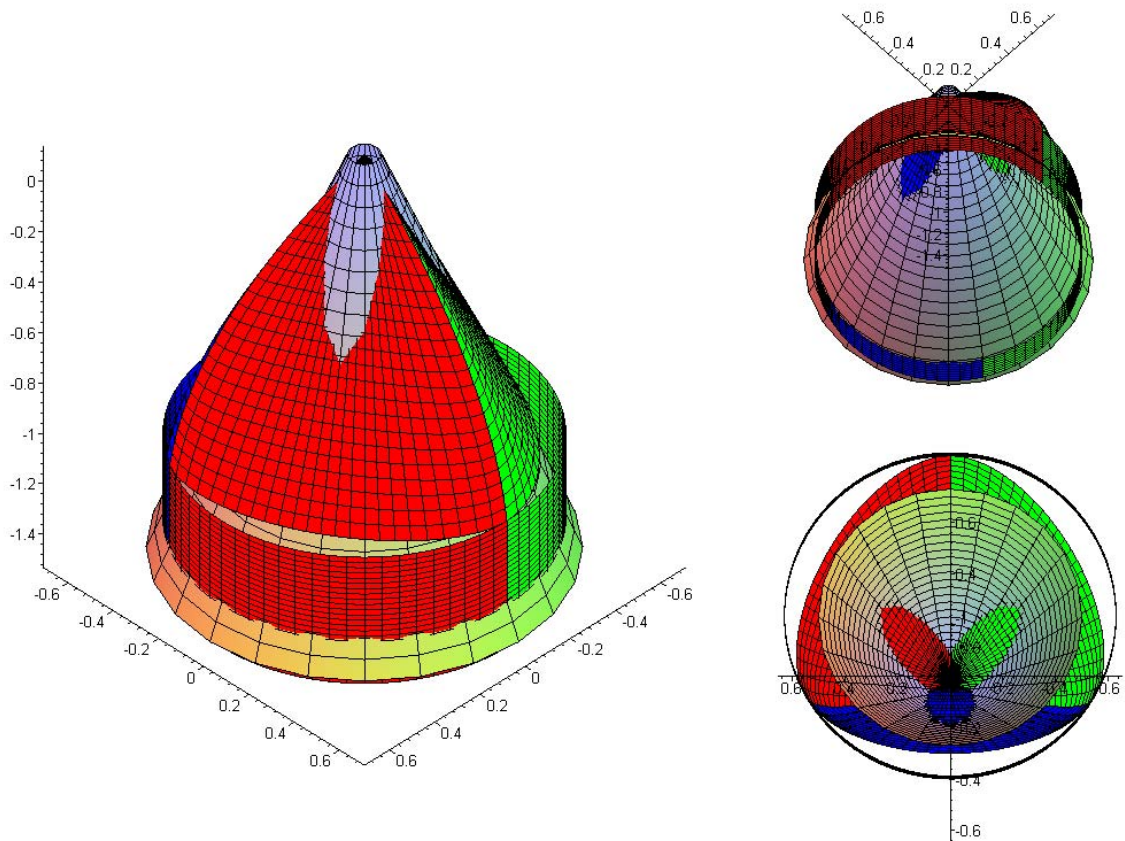
Eibl und Iványi haben in [65] die gute Anpassungsfähigkeit des Fünf-Parameter-Modells sowohl an die dreiaxialen Versuche von Launay und Cachon als auch an die überwiegend zweiaxial beanspruchten Versuche von Kupfer dokumentiert, Bild 3.15. Mit dieser Gegenüberstellung weisen Eibl und Iványi insbesondere mit Bezug auf die Versuche von Kupfer darauf hin, dass sich bei den seitlich nicht gestützten Betonscheiben oberhalb eines hydrostatischen Beanspruchungszustands von ca. „ $\sigma_m = 1,0 \cdot f_c$ “ die dreidimensionale Bruchfläche als konstanter Zylinder darstellen lässt. Diese an den parabelförmigen Zug- und Druckmeridian anschließende konstante und rotationssymmetrische Hüllkurve lässt sich unmittelbar mit den von Launay und Cachon angegebenen Gefügezerstörungen im Druckoktanten vergleichen. Es wird vorweggenommen, dass die dem Betonelement zugewiesene Voreinstellung sich exakt mit diesen experimentell ermittelten Daten vergleichen lässt. Bild 3.16 zeigt diese Voreinstellung des Bruchkriteriums kombiniert mit einer Fließbedingung vom Drucker-Prager-Typ.

Die numerische Auswertung zur Darstellung und Kontrolle der Funktionen im Bild 3.16 sowie die Darstellungen im Bild 3.14 und 3.19 erfolgten mit dem Programm MAPLE V, Release 5.1.

Im Bild 3.17 wird die dem Betonelement zugewiesene Voreinstellung direkt mit den Versuchsergebnissen von Launay und Cachon verglichen. Es ist nachvollziehbar und verständlich, dass bei der von Launay und Cachon gewählten Versuchsanordnung auch nach Beginn der inneren Zerstörung die Festigkeit weiter zunehmen konnte, da die gewählte Belastungsart über allseitig angeordnete Lasteintragungsplatten – mit den zuvor erwähnten Blöcken aus Aluminiumscheiben – einen stabilisierenden Einfluss auf den Versagensmechanismus nehmen musste. Durch die allseitig gestützten Probewürfel konnte die Gestaltänderung bzw. die Gleitbeanspruchung, und damit die kritischen Schubspannungen ( $\tau_{max} < \tau_{krit} (\sigma_2 \approx 0)$ ) bzw. Schiebungen ( $\gamma_{max} < \gamma_{krit} (\sigma_2 \approx 0)$ ) sich nur abhängig von dem aufgebrachten „Belastungstensor“ (aus der Versuchseinrichtung und infolge Laststeuerung eindeutig definiert) einstellen.



**Bild 3.15:** Anpassungsfähigkeit des numerischen Modells an Versuchsergebnisse, aus [65]



**Bild 3.16:** Voreinstellung des Bruchkriteriums in Kombination mit einer Fließbedingung  
 Vom Verfasser gewählte Funktion für die Fließbedingung:  $f(I_{1\sigma}, J_{2s}) = 0,213 \cdot I_{1\sigma} + \sqrt{J_{2s}} - 5,422$   
 Parameter des Bruchkriteriums:  $f_{cb}=1,2 \cdot f_c$ ;  $f_t=0,10 \cdot f_c$ ;  $\sigma_m=1,0 \cdot f_c$ ;  $r_1=0,53 \cdot (5)^{1/2} \cdot f_c$ ;  $r_2=0,63 \cdot (5)^{1/2} \cdot f_c$

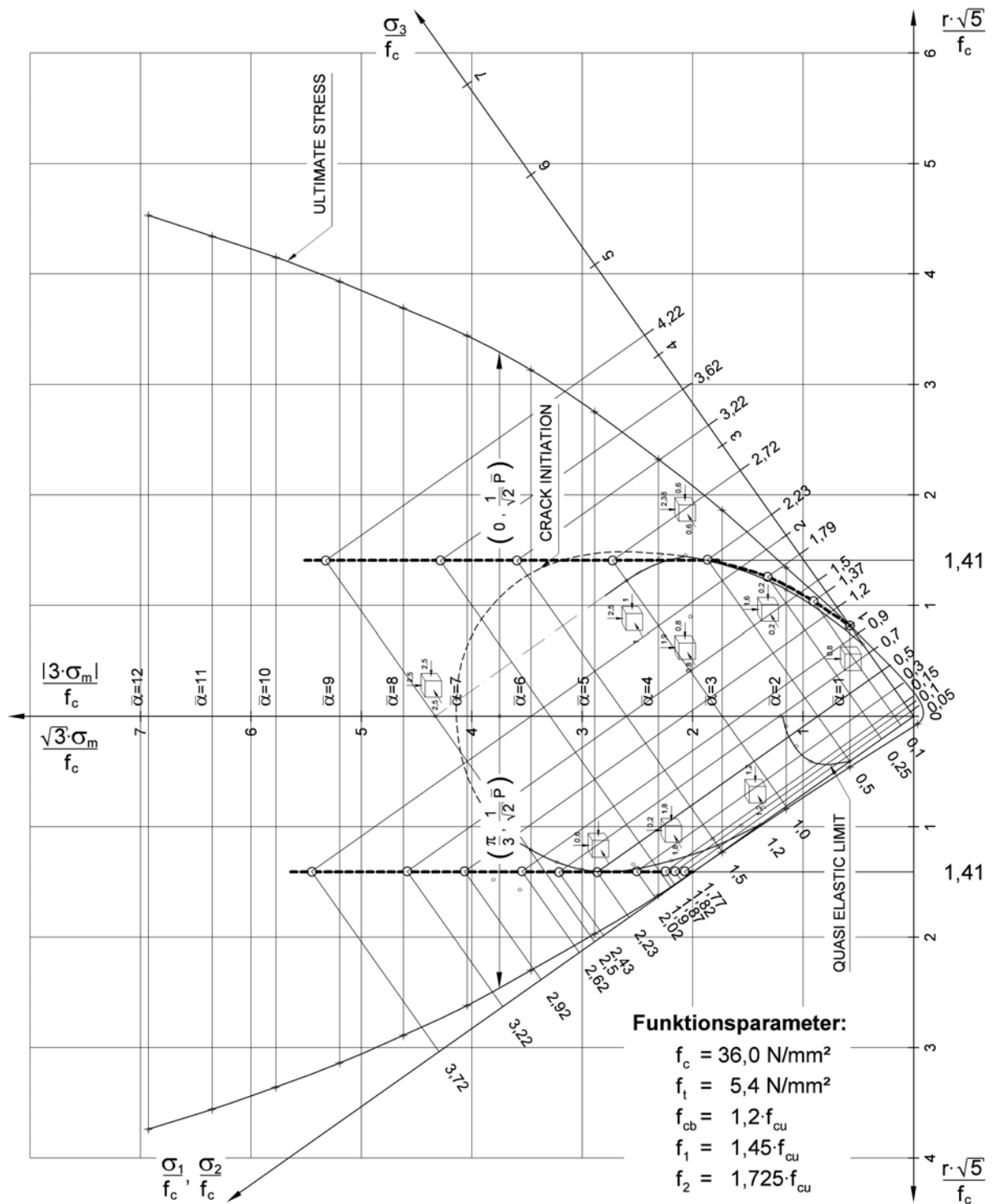


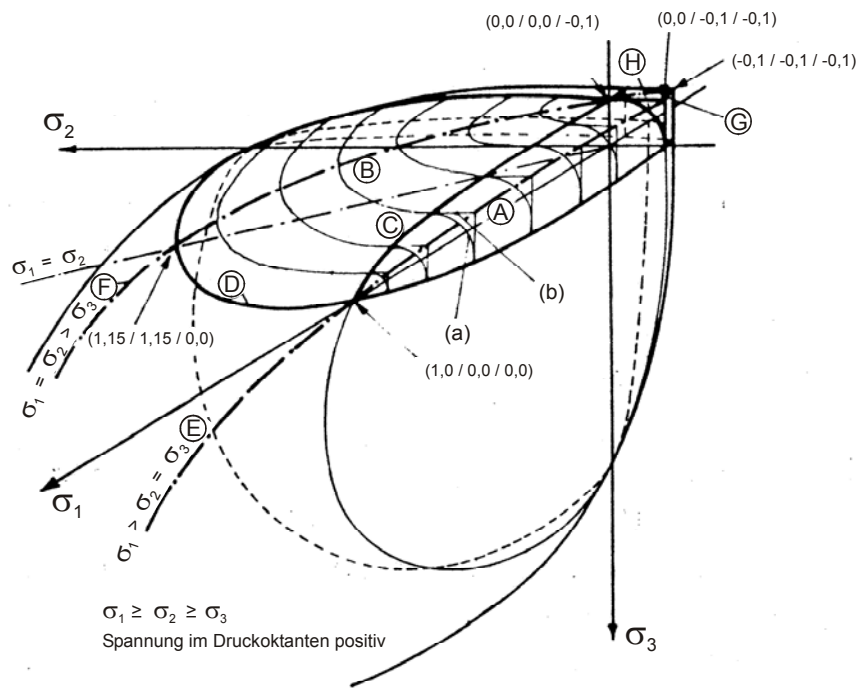
Bild 3.17: Vergleich mit experimentellen Ergebnissen und vorgeschlagene Annäherung für die Versagensfläche im Bruchfestigkeitsbereich, [78]

Bei den Versuchen von Kupfer handelte es sich dagegen überwiegend um ein- oder zweiachsige Beanspruchungszustände. Der von Kupfer gewählte Versuchsaufbau (und evtl. auch die Lasteinleitung über die Bürste) erlaubte es, dass sich ein nahezu natürlicher Bruchmechanismus nach Erreichen der kritischen Gleitbeanspruchung im Druckoktanten einstellte und damit einen Versagenszustand widerspiegelt, der den meisten Anforderungen auch an mehraxial beanspruchten Konstruktionen gerecht wird. Dies gilt zumindest für die in dieser Arbeit zu untersuchenden Auflagerbereiche von Flachdecken, in denen ein überwiegend zweiachsialer Beanspruchungszustand erwartet werden kann. Dennoch ist die gute Übereinstimmung – die sich letztlich auch aus absolut verschiedenen Versuchsbedingungen und Zielsetzungen ergab – bemerkenswert und bestätigt damit besonders deutlich eine aus praktischer Sicht gewünschte Eindeutigkeit und Zuverlässigkeit der Prüfergebnisse. Nach Ansicht des Verfassers ist es den zuvor genannten Wissenschaftlern Kupfer sowie Launay und Cachon gelungen, den Einfluss aus der Versuchseinrichtung und -anordnung bis zu einem machbaren Minimum aus den Versuchsergebnissen auszuschalten.

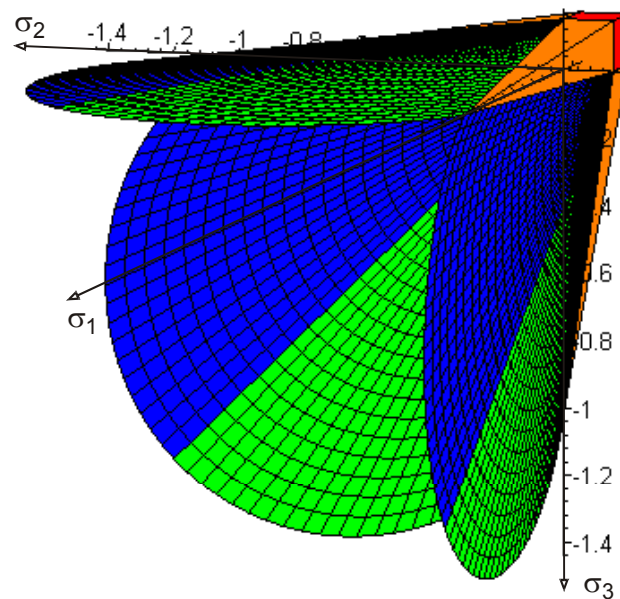
Cedolin et al. stellen in [24] zahlreiche Versuchsergebnisse anderer Autoren gegenüber. Nahezu alle darin aufgezeigten Versuchsdaten führen zu identischen Ergebnissen und zeigen, dass das grundsätzliche materielle Verhalten von der Festigkeitsklasse des verwendeten Zements (wie auch dem w/z-Wert) nahezu unabhängig ist. Sie weisen auf die besondere Bedeutung der Beton-Zugfestigkeit hin und konstruieren auf der Grundlage der Ergebnisse von Kupfer sowie Launay und Cachon die im Bild 3.18 dargestellte Versagensfläche für Zugbeanspruchungen außerhalb des Druckoktanten. Bild 3.19 zeigt die Übernahme dieser Versagensfläche im Hauptspannungsraum, so wie das Betonelement die ertragbaren bzw. größten Zugspannungen als Versagensmechanismus verwendet. Der im Bild 3.19 dargestellte Bereich der numerisch möglichen Rissentwicklung wird im nachfolgenden Kapitel 3.2.2 – „Materialhauptachsen“ zu einer wichtigen Voraussetzung und bildet die Grundlage für ein allgemeingültiges rheologisches Stoffgesetz.

Die in diesem Abschnitt einleitend genannten Festigkeitshypothesen gehen alle von einem bestimmten Versagensmechanismus aus, dessen maßgebende Beanspruchbarkeit über eine Vergleichsspannung oder durch einen einzigen Werkstoffkennwert (gewonnen aus einem einachsigen Zug- oder Druckversuch) beschrieben wird. Bild 3.19 (analog 3.18 aus Versuchsergebnissen konstruiert) stellt Grenz- und Versagensflächen eines spröden Werkstoffes dar, die bei Erreichen einer kritischen Normalspannung in den Versagenszustand übergehen. Dieses spröde Verhalten führt zu der Normalspannungshypothese, bei der die größte Zugnormalspannung „ $\sigma_{max} = \sigma_1$ “ für die Beanspruchung maßgebend wird (Bild 3.20a).

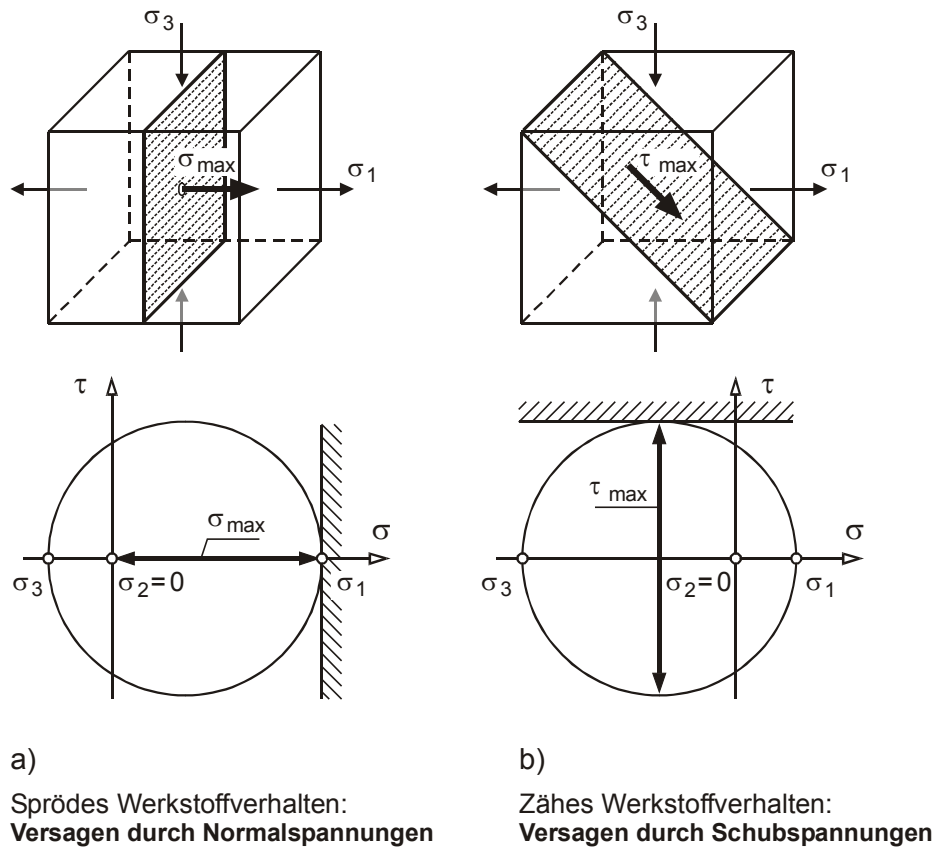
Unter negativen hydrostatischen Spannungszuständen (etwa bei: „ $\sigma_m = \sigma_{min} / \sqrt{3}$ “) zeigt Beton ein ganz anderes Festigkeitsverhalten und könnte in die Gruppe zäher Werkstoffe, deren kritische Schubspannung bzw. Gleitbeanspruchung das Versagen einleitet, eingeordnet werden. Damit kann in diesem Bereich das werkstoffmechanische Verhalten unmittelbar einer Schubspannungshypothese zugeordnet werden. Bei der Schubspannungshypothese (sie lässt die mittlere Hauptspannung „ $\sigma_2$ “ unberücksichtigt) oder der unabhängigen Gestaltänderungsenergiehypothese wird der Versagensmechanismus durch die größte aufnehmbare Schubbeanspruchung „ $\tau_{max}$ “ bestimmt (Bild 3.20b).



**Bild 3.18:** Konstruierte Bruchfläche für Zugspannungen nach den Versuchsergebnissen von Kupfer und Launay et al., aus [24]



**Bild 3.19:** Darstellung des Bruchkriteriums außerhalb des Druckoktanten – hier Voreinstellung Parameter des Bruchkriteriums:  $f_{cb}=1,2 \cdot f_c$ ;  $f_t=0,10 \cdot f_c$ ;  $\sigma_m=1,0 \cdot f_c$ ;  $r_1=0,53 \cdot (5)^{1/2} \cdot f_c$ ;  $r_2=0,63 \cdot (5)^{1/2} \cdot f_c$

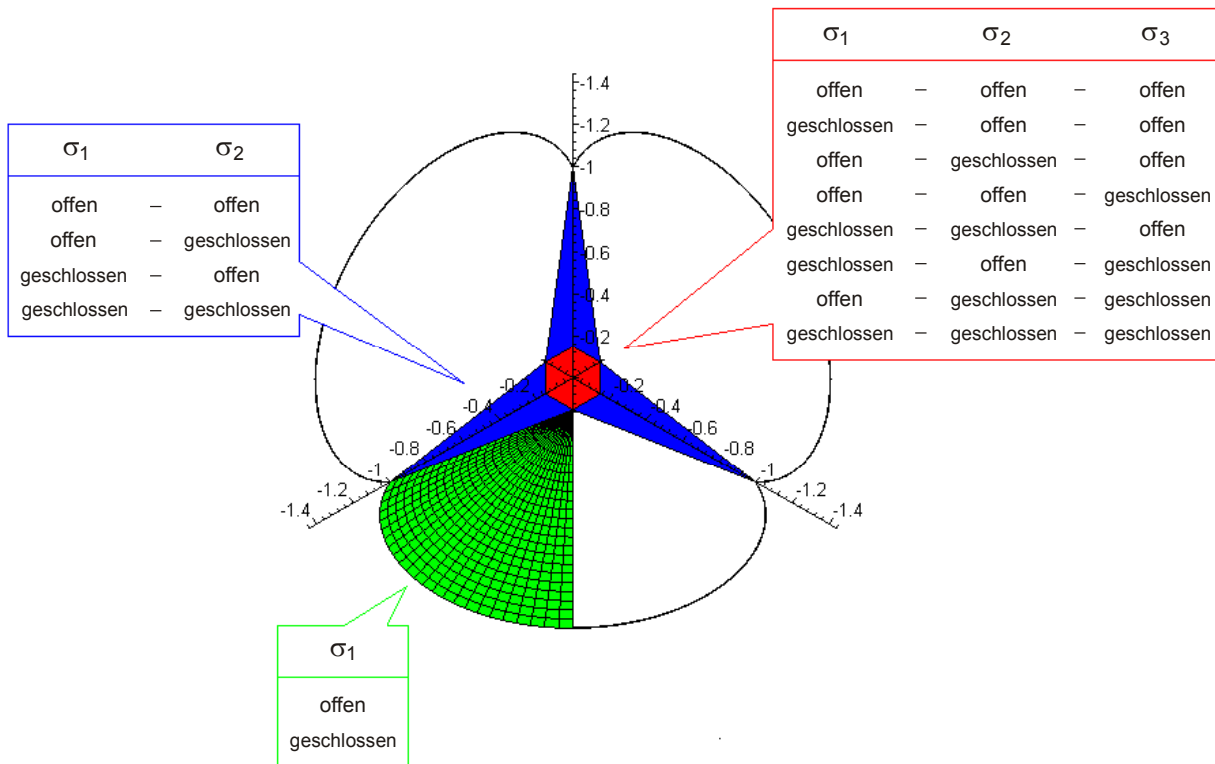


**Bild 3.20:** Bruchbedingungen nach der Normalhypothese und nach einer Gleithypothese

Das in den Bildern 3.17 und 3.18 über Grenzflächen definierbare charakteristische, materielle Verhalten des Werkstoffes Beton zeigt anschaulich, dass beide zuvor genannten Versagensmechanismen zur Absicherung und Interpretation für das werkstoffmechanische Verhalten benötigt werden. Im nachfolgenden Abschnitt wird gezeigt, wie die Absicherung nach beiden Versagensmechanismen, quasi für einen Werkstoff im mittleren Zähigkeitsbereich erfolgt. Es wird gezeigt, wie das zuvor postulierte „duale“ Kriterium auf den Werkstoff Beton angewendet wird. In dem nachfolgenden Kapitel 3.2.2 wie auch in den Kapiteln 3.2.3 und 3.2.4 wird zunächst ausschließlich auf die Bruchgrenzflächen als ein wesentliches Merkmal der sehr komplexen Gefügezerstörungsprozesse eingegangen. Im Kapitel 3.2.5 wird dann abschließend überwiegend über im Druckbereich durchgeführte Versuchsergebnisse berichtet, um das rheologische Verhalten des Betons ausreichend zu beschreiben und um damit die darauf folgenden theoretischen Annahmen für Druckbeanspruchungen zu begründen.

**3.2.2 Materialhauptachsen als neutrales Bezugsachsensystem**  
(Berücksichtigung der Werkstoffanisotropie)

Aus der Sicht der Materialwissenschaft weisen zunächst alle Werkstoffe Inhomogenitäten auf. Dass im Rahmen einer allgemeingültigen dreidimensionalen Spannungsberechnung eine geschlossene Lösung nur für Sonderfälle möglich ist, wurde bereits angedeutet. Nicht nur die Anwendung komplexer numerischer Lösungsmethoden ist mit einem erheblichen Aufwand verbunden, es mangelt auch an den zuverlässig experimentell bereitgestellten Ingenieurkonstanten. Mit den im Kapitel 3.1.1 (Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen) und im Kapitel 3.1.2 (Eigenschaften des Spannungstensors) vorgestellten Grundlagen und daraus abgeleiteten Voraussetzungen kann jedoch für den zunächst ungeschädigten Werkstoff Beton ein makroskopisch homogenes bzw. im makroskopischen Sinn ein quasihomogenes Verhalten angenommen werden. Damit werden zunächst alle Inhomogenitäten des Konglomerates Beton vernachlässigt. Als Folge dieser Vereinfachung bzw. Homogenisierung müssen die anisotropen Eigenschaften über die Elastizitätsmatrix bzw. Elementsteifigkeitsmatrix innerhalb des Integrationsbereiches des finiten Elementes erfasst werden. Die Berücksichtigung der Anisotropie erfolgt über Ersatzeigenschaften, die in jedem Integrationspunkt eines finiten Elementes – abhängig von der Belastungsgeschichte und der numerisch ermittelten Be- und Entlastungsprozesse – ausschließlich mit Bezug auf das lokale Elementkoordinatensystem, als neutrales Bezugsachsensystem, angepasst werden. In Anlehnung an die technische Mechanik wird dabei die Inhomogenität mikrostruktureller Art vernachlässigt.



**Bild 3.21:** Räumliche Bruchfläche außerhalb des Druckoktanten zur Darstellung der rechnerisch angenommenen Grenzflächen im Hauptspannungsraum – abhängig von „ $\bar{f}_t$ “

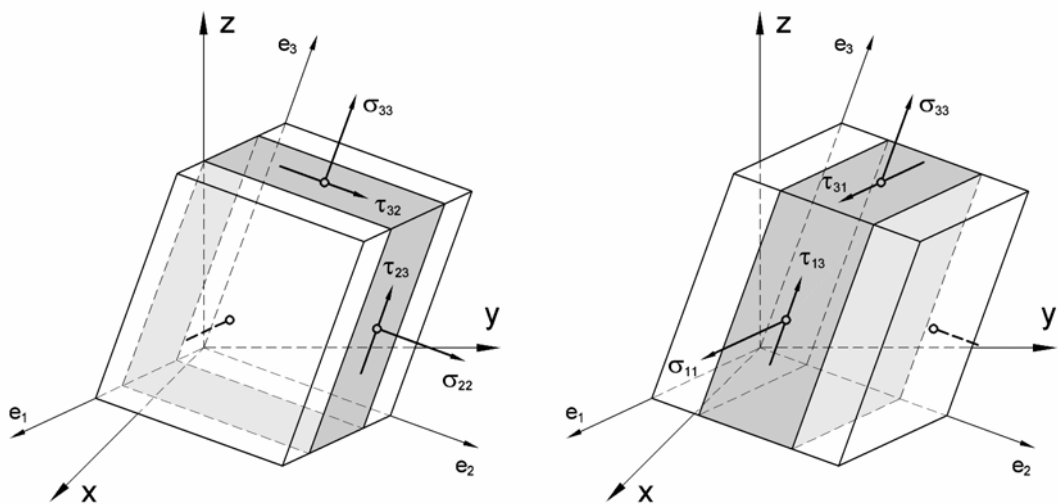
Mit der mathematischen Formulierung des Bruchkriteriums von Willam und Warnke kann eine allgemeingültige und durch Standardversuche abgesicherte Formulierung für alle betroffenen Strukturbereiche des überwiegend spröden Werkstoffes Beton angegeben werden. Im Verlauf



einer numerischen mehraxialen Berechnung wird für jeden beliebigen allgemeinen Spannungszustand über die Transformation des Spannungstensors in seine Hauptspannungskomponenten eine Aussage ermöglicht, in welchem Wertebereich des Spannungsraumes sich der Integrationsbereich des finiten Elementes befindet. Der für die Rissentwicklung mögliche und numerisch zu erfassende Bereich wurde – aus Versuchen ermittelt – mit Bild 3.18 angegeben.

Bei Überschreitung der durch das Versagenskriterium vorgegebenen ertragbaren Hauptzugspannungen erfolgt über die Identifizierung der Rissebene, d.h. über die Festlegung der Rissrichtung, ein Wechsel (oder Trennung) von der zunächst angenommenen orthotropen oder isotropen Elementsteifigkeitsmatrix (entsprechend den Gleichungen 3.12 oder 3.14) zu voneinander unabhängigen Untermatrizen.

Werden in entsprechender Weise zum Bild 3.2b zur Berücksichtigung der Anisotropie die Hauptspannungsrichtungen als Symmetrieebenen definiert, lassen sich reduzierte Elementsteifigkeiten bezogen auf diese Ebenen angeben. Durch Eliminieren der miteinander gekoppelten und abhängigen Dehnungen „ $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$ “ (vgl. hierzu den Hinweis zur Orthotropie im Kapitel 3.1.1) kann eine Aufspaltung in voneinander unabhängige Untermatrizen erfolgen. Grundlage hierfür ist die näherungsweise Annahme, dass im Fall der Rissbildung zwischen den Rissen der Einfluss eines ebenen Spannungszustandes zwischen zahlreichen und als verschmiert angenommenen Rissebenen wirksam bleibt. Diese Annahme ist verbunden mit einer deutlichen Reduzierung des inneren Widerstandes bzw. der inneren Steifigkeitsverhältnisse mit Bezug auf ein nur vom Element abhängiges neutrales Bezugsachsensystem. Neutrales Bezugsachsensystem bedeutet, dass keine Bindungen zur Elementgruppierung bzw. zum Gesamtsystem bestehen (wird ausführlicher im Kapitel 4 behandelt). Beschränkt man sich im Fall eines einzigen Risses – eines Erstrisses – auf die Reduzierung von dem zunächst allgemeingültigen isotropen Fall auf eine zweidimensionale ebene Betrachtung, zeigt Bild 3.22 zwei mögliche und voneinander verschiedene Voraussetzungen für einen ebenen Spannungszustand.



**Bild 3.22:** Annahme eines ebenen Spannungszustandes für den (verschmiert angenommenen) Erstrisszustand mit möglichen Symmetrieebenen

Die für die zwei dargestellten Symmetrieebenen möglichen ebenen Spannungszustände sind jeweils parallel zur Rissebene des Erstrisses bzw. zwischen den als verschmiert angenommenen Rissebenen wirksam. Das Erreichen bzw. Überschreiten der vorgegebenen Zugfestigkeit „ $\bar{f}_t$ “ kennzeichnet und bestimmt die Rissbildung. „ $\bar{f}_t$ “ steht stellvertretend für alle im Bild 3.21 dargestellten Grenzflächen im Hauptspannungsraum. Im Fall einer Rissentwicklung in nur eine Richtung ( $\sigma_1 \geq \bar{f}_t > \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) kann über die Einführung einer ideellen Einzelschicht (bzw. Schichten) zwischen den verschmiert angenommenen Rissen eine veränderte reduzierte Elementsteifigkeitsmatrix angegeben werden. Die bekannte Grundgleichung für den allgemeinen Fall – für orthotropes Material entsprechend Gleichung 3.12 – lautet mit dem verallgemeinerten Hooke’schen Gesetz:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Die darin vorhandenen abhängigen und gekoppelten Bindungen für den räumlichen Spannungszustand (vgl. Hinweis im Kapitel 3.1.1) sind:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11} \cdot \varepsilon_{11} + C_{12} \cdot \varepsilon_{22} + C_{13} \cdot \varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} &= C_{12} \cdot \varepsilon_{11} + C_{22} \cdot \varepsilon_{22} + C_{23} \cdot \varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= C_{13} \cdot \varepsilon_{11} + C_{23} \cdot \varepsilon_{22} + C_{33} \cdot \varepsilon_{33} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Über die Identifikation der Hauptnormalspannungen sind auch die zugehörigen Richtungen der Flächennormalen bekannt. Betrachtet man wieder ein würfelförmig herausgeschnittenes Körperelement von infinitesimaler Größe im Inneren eines durch Kräfte beanspruchten Bauteils lassen sich mit Bezug auf die Flächennormalen die im Bild 3.22 angegebenen Ebenen als neue Symmetrieebenen vereinbaren. Für den Fall „ $\sigma_1 \geq \bar{f}_t$ “ wird die ( $e_2$ - $e_3$ )-Ebene als Symmetrieebene vorausgesetzt. Bild 3.22 lässt erkennen, dass nur die in der jeweils betrachteten Ebene wirkenden Spannungen „ $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  und  $\tau_{23}$ “ auftreten können. Die dritte Normalspannung „ $\sigma_1$ “ und die beiden verbleibenden Schubspannungen „ $\tau_{12}$  und  $\tau_{31}$ “ werden zunächst Null. Die Längsdehnung „ $\varepsilon_{11}$ “ bleibt beim näherungsweise angenommenen ebenen Spannungszustand eine abhängige Größe, die eliminiert werden muss. Aus der Forderung einer zunächst spannungsfreien Rissebene:

$$C_{11} \cdot \varepsilon_{11} + C_{12} \cdot \varepsilon_{22} + C_{13} \cdot \varepsilon_{33} = 0 \quad (3.62)$$

folgt:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{C_{11}} \cdot [ C_{12} \cdot \varepsilon_{22} + C_{13} \cdot \varepsilon_{33} ] \quad (3.63)$$

Durch Einsetzen der Gleichung 3.63 in die verbleibenden Spannungs-Dehnungsbeziehungen der Gleichungen 3.61 entstehen die reduzierten Steifigkeiten „ $\bar{C}$ “. In allgemeiner Form lässt sich die Lösung für die ( $e_2$ - $e_3$ )-Ebene angeben zu:

$$\bar{C}_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{1i} \cdot C_{1j}}{C_{11}} \quad \text{mit } i, j = 2, 3, 5 \quad (3.64)$$

Abhängig von den Hauptspannungsrichtungen kann die Anwesenheit eines Risses (einer Rissbildung) in einem Integrationspunkt durch die Änderung der Strukturgleichung und Einführung neuer charakteristischer Materialsymmetrien dargestellt werden. Die neue Wirkungslinie der veränderten Materialstruktur wird damit deutlich durch die Rissrichtung bzw. Rissoberfläche bestimmt. Die Elastizitätsmatrix für die  $(e_2-e_3)$ -Ebene ist mit der Gleichung 3.64 zweckmäßig in Matrixform darstellbar:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} & C_{23} - \frac{C_{12} \cdot C_{13}}{C_{11}} & 0 \\ & C_{33} - \frac{C_{13}^2}{C_{11}} & 0 \\ \text{sym.} & & C_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

In der vorliegenden Arbeit interessieren vor allem Spannungszustände im Inneren der Betonplatte in der Nähe des Lasteinleitungsbereiches und die Umlagerungsfähigkeit auf die Stahlkonstruktion. Somit soll das Systemverhalten eines Bauteiles untersucht werden und weniger die Schädigung lokaler Kraftereinleitungsbereiche. Deshalb wird die Möglichkeit zur Annahme eines zunächst im ungerissenen Zustand orthotropen Materialverhaltens nach Gleichung 3.12 nicht genutzt. Das Einsetzen der für den isotropen Fall verbleibenden und für alle Richtungen gleich angenommenen Ingenieurkonstanten „ $E$ “ und „ $\nu$ “ liefert:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu \cdot E}{1-\nu^2} & 0 \\ & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \text{sym.} & & \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

Durch Einführung zusätzlicher Materialkonstanten ( $R_{TSE}$  und  $\beta_t$ ) zur kontinuierlichen Beschreibung der im gerissenen Beton stattfindenden Entfestigungsprozesse kann die gesamte am Integrationspunkt verwaltete Steifigkeitsmatrix für einen nur in eine Richtung gerissenen Integrationsbereich angegeben werden zu:

$$\left[ \bar{C}_{ij} \right]_{Riss,t} = \begin{bmatrix} R_{TSE} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu \cdot E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \beta_t \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} & 0 \\ & & & & & \beta_t \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Darin beschreibt „ $R_{TSE}$ “ nach Erreichen der Zugfestigkeit eine nichtlineare Zugspannungs-Rissöffnungs-Beziehung senkrecht zur Rissebene. Infolge der statischen Kondensation ist sie in der Matrix (Gleichung 3.67) eine nur von „ $\varepsilon_{11}$ “ abhängige Funktion. Für die verbleibende im Bild 3.22 dargestellte ( $e_1$ - $e_3$ )-Ebene oder die nicht gezeigte ( $e_1$ - $e_2$ )-Ebene kann in analoger Betrachtung vorgegangen werden. Ein Unterschied besteht ausschließlich in der am Integrationspunkt abzuspeichernden Richtung der Symmetrieebene, die zugleich Rissebene ist. Die in der vorliegenden Arbeit angenommenen Eigenschaften für den Materialparameter „ $R_{TSE}$ “ werden im nachfolgenden Kapitel 3.2.3 angegeben.

Im Fall eines weiteren, sukzessiv fortschreitenden Rissprozesses (dies bedeutet das Entstehen weiterer Rissebenen – insgesamt kann ein Integrationspunkt drei Rissebenen numerisch erfassen) werden über die Extremwerte der Spannungen des näherungsweise angenommenen zweiachsigen Spannungszustandes – Bild 3.23 – die Hauptspannungen wieder mit den Invarianten berechnet. Wegen „ $\sigma_{33} = 0$ “ folgt:

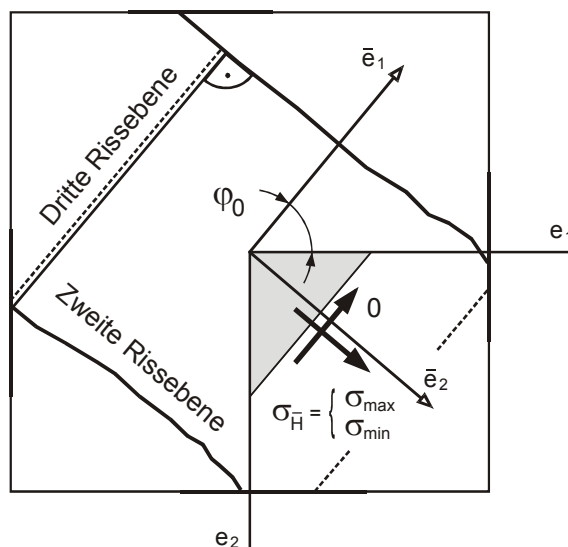
$$\begin{aligned} \bar{I}_{1\sigma} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ \bar{I}_{2\sigma} &= \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \tau_{12}^2 \\ \bar{I}_{3\sigma} &= 0 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Die quadratische Gleichung:

$$\sigma_{\bar{H}}^2 - \bar{I}_{1\sigma} \cdot \sigma_{\bar{H}} + \bar{I}_{2\sigma} = 0 \tag{3.69}$$

liefert die gesuchten Hauptspannungen:

$$\sigma_{\bar{H}} = \begin{Bmatrix} \sigma_{max} \\ \sigma_{min} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \cdot \tau_{12}^2} \tag{3.70}$$



**Bild 3.23:** Der ebene Spannungszustand – Spannungstransformation

Welche der beiden Spannungen den größten Betrag hat, hängt von dem Vorzeichen ab. Auch sie können wieder der Größe nach geordnet werden. Erreicht bzw. überschreitet der größte Betrag der beiden Spannungen die zulässige Zugfestigkeit „ $\sigma_{max} \geq \bar{f}_t$ “ kann über das gedrehte

neutrale Basissystem, in dem die Schubspannungen zu Null und die Normalspannungen extremal werden:

$$\frac{d\tau_{1,2'}}{d\varphi_0} = 0 \quad \rightarrow \quad \tan 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot \tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (3.71)$$

die Richtung der zweiten Rissebene des Integrationsbereiches angegeben werden. Auch beim zweiachsigen Spannungszustand stehen die Hauptrichtungen wie beim allgemeinen dreiaxialen Spannungszustand orthogonal zueinander. Die Richtung der verbleibenden noch möglichen dritten Rissebene ist damit unwiderruflich vorgegeben bzw. bekannt (Bild 3.23).

Die Transformation auf das Basissystem der Elementkoordinaten der aus der Rissbildung hervorgegangenen modifizierten Elastizitätsmatrix zur Simulation des geschädigten Betongefüges hat die Form:

$$\bar{C}_e = [T_{tr,e}]^T \cdot [\bar{C}] \cdot [T_{tr,e}] \quad (3.72)$$

Das gedrehte neue Basissystem der modifizierten Elastizitätsmatrizen ist hervorgegangen aus den Richtungsvektoren der berechneten Eigenwerte „ $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ “. Damit sind für alle möglichen Risszustände die erforderlichen Transformationskoeffizienten („ $a_{ij}$ “, 3x3 Matrix mit drei Richtungsvektoren) zur Belegung der Transformationsmatrix („ $T_{tr,e}$ “, 6x6 Matrix) bekannt. Dies sind die zu den Eigenwerten (*Gleichung 3.18 oder Gleichung 3.70*) gehörenden Hauptrichtungsvektoren. Es existieren immer drei Richtungsvektoren, unabhängig ob das weitgehend diskontinuierliche mechanische Verhalten über eine einfach, zweifach oder dreifach gerissene Elementstruktur abgebildet werden muss. Die entsprechenden Grundlagen zur Aufbereitung der von Schnobrich eingeführten Transformationsmatrix  $[T_{tr,e}]$  sind in [104] genauer dargelegt. Da die modifizierten Elementsteifigkeitsmatrizen  $[\bar{C}]$  symmetrisch sind und bei der in Gleichung 3.72 angegebenen kongruenten Transformation die Symmetrie erhalten bleibt, ist auch die Systemsteifigkeitsmatrix der Elementgruppierung mit den modifizierten Elementsteifigkeitsmatrizen stets symmetrisch.

Die bei den aufeinanderfolgenden Gleichgewichtsiterationen auftretenden Wechselwirkungen zwischen Spannungen und Verzerrungen (*hervorgerufen durch eine ständige Modifizierung der Elementmatrizen während der Iterationen*) infolge der modifizierten Steifigkeitsverhältnisse zwischen den einzelnen Elementen bestimmen das mechanisch idealisierte anisotrope Verhalten. Es werden keine Iterationen als zusätzliche innere Schleife zur Anpassung neuer Steifigkeiten an vorhandene Beanspruchungszustände implementiert bzw. ergänzt. Alle Variablen einer Elementgruppierung werden während eines Iterationsprozesses gleichrangig behandelt bzw. berechnet. Dies führt zu einem extrem nichtlinearen Gleichungssystem. Die angewendete Methode zur Lösung des Gleichungssystems wird im Kapitel 4.5.3 angegeben. Ausgangspunkt ist somit ein auf die Rissebenen bezogenes Werkstoffmodell mit veränderten lastabhängigen Steifigkeitsverhältnissen. Dadurch kann sich ein allgemein anisotropes Elementgefüge innerhalb einer Gruppierung entwickeln. (Elementgruppierung im Sinne eines in eine endliche Anzahl von Elementen eingeteiltes Kontinuum). Die Rissebenen liefern ein zunächst neutrales Bezugsachsensystem mit den erforderlichen notwendigen Richtungsabhängigkeiten. Dies ist eine typische Eigenschaft heterogener Strukturen mit anisotropem Materialverhalten (materielle Richtungsabhängigkeiten sind kennzeichnend für anisotropes Materialverhalten – Kapitel 3.1.1). Darüber hinaus können über den strukturierten Aufbau der modifizierten Elementsteifigkeitsmatrizen die zähen druckabhängigen und die spröden zugabhängigen Eigenschaften des Werkstoffes Beton

mechanisch eindeutig voneinander getrennt werden. Auf diese Zusammenhänge wird in dem Kapitel 3.2.3 (Nachbruchverhalten nach Überschreiten der Zugfestigkeit) und im Kapitel 3.2.5 (Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens unter Druckbeanspruchungen) näher eingegangen.

Als Folge äußerer Be- bzw. Entlastungsprozesse während einer laufenden Gleichgewichtsiteration verändert sich der resultierende Spannungszustand innerhalb eines Integrationsbereiches. Das Bruchkriterium dient dabei als Maß der Beanspruchbarkeit und zur Berücksichtigung bzw. Steuerung des Einflusses der infolge Rissbildung neu entstandenen Materialsymmetrien. Wie zuvor beschrieben, resultieren aus der Schädigung, d.h. der Rissbildung neue geringere innere Steifigkeitsverhältnisse.

Die gleichen Be- und Entlastungsprozesse können auch eine Zunahme der inneren Steifigkeitsverhältnisse bewirken. Ein lokal verursachtes diskontinuierliches Verformungsverhalten kann an einer anderen benachbarten Stelle zum Schließen eines Risses führen. Im Bild 3.21 sind im Fall der Rissbildung alle numerisch vom Betonelement erfüllbaren Risszustände angegeben. Die dargestellten Bezüge zu den Oktanten (im Druckoktant wird numerisch keine Rissbildung ermöglicht) sollen anschaulich aufzeigen, welche Beanspruchungszustände ein Element während der geschichtlichen, vergangenen Be- und Entlastungsprozesse erfahren bzw. erleiden musste. Die Bestimmung des Riss-Status, d.h. die Annahme eines geöffneten oder eines geschlossenen Risses, erfolgt über die Berechnung des jeweiligen Dehnungsbetrages bzw. dem Dehnungsverhältnis mit Bezug auf das gedrehte Basissystem der bekannten Rissebenen. Über die Drehung der auf den Ausgangszustand bezogenen (*Trail*-) Verzerrungen „ $\bar{\varepsilon}_e$ “ (Lagrange'sche Betrachtungsweise) in die Hauptachsen der neuen Materialsymmetrien der Rissebenen:

$$\{ \varepsilon_{tr} \} = [ T_{tr,e} ] \cdot \{ \bar{\varepsilon}_e \} \quad (3.73)$$

berechnen sich drei Komponenten der Normaldehnungen „ $\varepsilon_{tr,1}$ ,  $\varepsilon_{tr,2}$  und  $\varepsilon_{tr,3}$ “. Neben der Dehnung senkrecht zur Rissebene liefert die Transformation zusätzlich die aus der Formänderung verursachten Querdehnungsanteile. Diese Dehnungen parallel zur jeweils betrachteten Rissebene müssen abhängig von Ursache und Wirkung behandelt werden. Daraus resultieren abhängig von einem räumlichen oder zwei- oder einachsigen Verzerrungszustand nachfolgende Dehnungsverhältnisse mit Bezug auf die vorhandenen, am Integrationspunkt existierenden Spannungs- und Risszustände:

$$0 \geq \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{tr,1} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_{tr,2} + \varepsilon_{tr,3}) \\ \varepsilon_{tr,1} + \nu \cdot \varepsilon_{tr,2} \\ \varepsilon_{tr,1} + \nu \cdot \varepsilon_{tr,3} \\ \varepsilon_{tr,1} \end{array} \right. \quad (3.74)$$

Wird mit den Beziehungen der Gleichung 3.74 eine Dehnung – auch unter Berücksichtigung der zugeordneten, zueinander senkrechten Dehnungen – kleiner als Null berechnet, gilt die be-

trachtete Rissebene als geschlossen. Dies führt zu einer Änderung der Elementsteifigkeitsmatrix und damit auch zur Änderung der Elementsteifigkeitsverhältnisse bzw. -verteilungen im gesamten zu untersuchenden System. Im anderen Fall, d.h. bleibt die berechnete Dehnung senkrecht zum Riss positiv oder identisch Null, erfolgt keine Veränderung der Steifigkeitsannahmen. Die Definition der Materialebenen – der Rissebenen – erfolgt ausschließlich über das Bruchkriterium. Über die Dehnungsverteilung kann bei allen nachlaufenden Gleichgewichtsiterationen eine Entscheidung über den Status der Rissebene erfolgen. Der Status kann sich von einer Iteration zur nächsten ändern.

Über den eingeführten Schubübertragungskoeffizienten „ $\beta_t$ “ (Gleichung 3.67) kann eine verbleibende effektive Scherung der Betonstreifen zwischen den Rissebenen, ähnlich einem linearen Gleitwiderstand, definiert werden. Der Index „ $t$ “ steht für die Voraussetzung eines geöffneten Risses. Entsprechend können während der Gleichgewichtsiterationen örtliche Be- und Entlastungsprozesse zum Schließen des Risses führen. Damit wird zugleich die Übertragung erhöhter Drucknormalspannungskomponenten während der laufenden Iteration über die Integrationspunkte mit einem geschlossenen Riss-Status ermöglicht. Dies entspricht einer überwiegend in der Nähe von Druckbereichen auftretenden örtlichen Zunahme der Steifigkeitsverhältnisse. Der Schubübertragungskoeffizient eines geschlossenen Risses ist nachfolgend mit dem Index „ $c$ “ gekennzeichnet. Auf die physikalische Bedeutung und Wirksamkeit für den offenen und den geschlossenen Riss-Status wird im Kapitel 3.2.4 eingegangen. Im Fall eines geschlossenen Risses kann die resultierende Steifigkeitsmatrix nach Gleichung 3.67 ersetzt werden durch:

$$\left[ \bar{C}_{ij} \right]_{Riss,c} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \beta_c \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & & & \beta_c \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Da die Annahme isotropen Materialverhaltens zur Untersuchung des Systemverhaltens ausreichend ist, entspricht die mit Gleichung 3.75 angegebene Elastizitätsmatrix dem im Kapitel 3.1.1 mit Gleichung 3.20 angegebenen Elastizitätstensor. Eine Ausnahme bildet der eingeführte Schubübertragungskoeffizient „ $\beta_t$ “ zur Simulation der Schädigung, d.h. durch Einbeziehung eines verminderten effektiven Schubmoduls infolge eines vorhandenen aber geschlossenen Risses.

Das Versagen des Materials Beton innerhalb eines Integrationsbereiches durch Erreichen der vorgegebenen Druckfestigkeit ist mit einem vollständigen Festigkeitsverlust verbunden. Dabei ist es ohne Bedeutung, ob der Bruch unter der Voraussetzung einaxialer Druckfestigkeit für „ $\sigma_3 \leq f_c$ “ (es existieren zwei offene Rissebenen) oder zweiaxialer Druckfestigkeit (entspricht Bild 3.22 – es existiert nur eine offene Rissebene) oder für den Fall einer dreiaxialen Druckbeanspruchung eintritt (die numerische Abfrage für Druckversagen erfolgt in insgesamt sieben Oktanten – eine Ausnahme bildet der Zugoktant). Diese konservative Annahme führt dazu,

dass alle Komponenten der elastischen Steifigkeitsmatrix mit dem Faktor „ $10^{-6}$ “ multipliziert und nahezu auf Null gesetzt werden. Dieses numerische Vorgehen bei der Verwaltung der Steifigkeitsmatrizen bedeutet zugleich, dass benachbarte Elemente ihre nach wie vor unter realistischer Betrachtung nicht ganz zwangungsfreie Lagerung (seitliche Stützung) verlieren. Dies liefert ohne Zweifel eine Unterschätzung der rechnerisch angenommenen Steifigkeiten innerhalb der Bereiche die eine mehraxiale Druckbeanspruchung erfahren. Insgesamt werden in dem Betonelement über das Bruchkriterium von Willam und Warnke sechzehn verschiedene Steifigkeitsmatrizen verwaltet.

### 3.2.3 Nachbruchverhalten nach Überschreiten der Zugfestigkeit

Mit den von Heilmann, Hilsdorf und Finsterwalder [59] von 1963 bis 1965 durchgeführten Versuchen zur Bestimmung der „Zerreißfähigkeit“ des Betons konnte als Ergebnis das Zugversagen eindeutig als sprödes Versagen eingestuft werden. Zur numerischen Erklärung und um ein besseres Verständnis zwischen zentrischen Zug- und exzentrischen Biegezugversuchen zu gewinnen, wurde von ihnen zunächst der überwiegend bei exzentrischen Lasten beobachtete „abfallende Ast“ der Spannungs-Dehnungs-Linie als eine Plastizierung des Betons unter Zugbeanspruchungen angenommen. In ihrer Einleitung weisen sie jedoch deutlich darauf hin [59], dass die Gültigkeit dieser Methode sehr zweifelhaft ist. Sie bekräftigen dies, indem sie selbst diese Methode in Frage stellen, obwohl sie mit diesem Vorgehen eine gute Übereinstimmung zwischen den rechnerischen und den gemessenen Biegezugfestigkeiten erzielen konnten. Bei der abschließenden Deutung ihrer Versuchsergebnisse betonen sie, „dass Beton unter Zugbeanspruchungen als spröde angesehen werden muss“. Sie zeigen mit den Auswertungen und Beschreibungen ihrer experimentellen Untersuchungen, vergleiche Bild 3.24, „dass der ‚abfallende Ast‘ des  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramms bei einer Zugbelastung nur dadurch entsteht, dass die gemessenen Dehnungen auch die Breite eines Risses einschließen und die Spannungen nicht auf den verminderten Rissquerschnitt bezogen werden“. Schwieriger war für sie die Erklärung einer deutlichen Zunahme der Biegezugfestigkeit gegenüber der zentrischen Zugfestigkeit. In ihren Versuchen konnten sie für die Biegezugfestigkeit eine Erhöhung bis zum 1,65-fachen der zentrischen Zugfestigkeit beobachten. Bei Zugversuchen mit neutralen Randdehnungen – die Dehnung eines Randes wurde zu „Null ‰“ gehalten – stellten sie immer noch eine Erhöhung um das 1,2-fache fest.

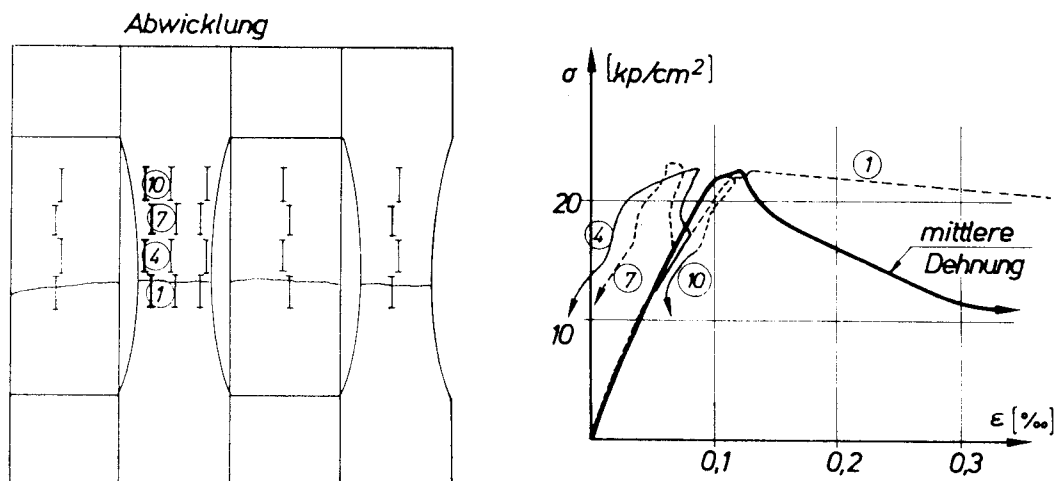


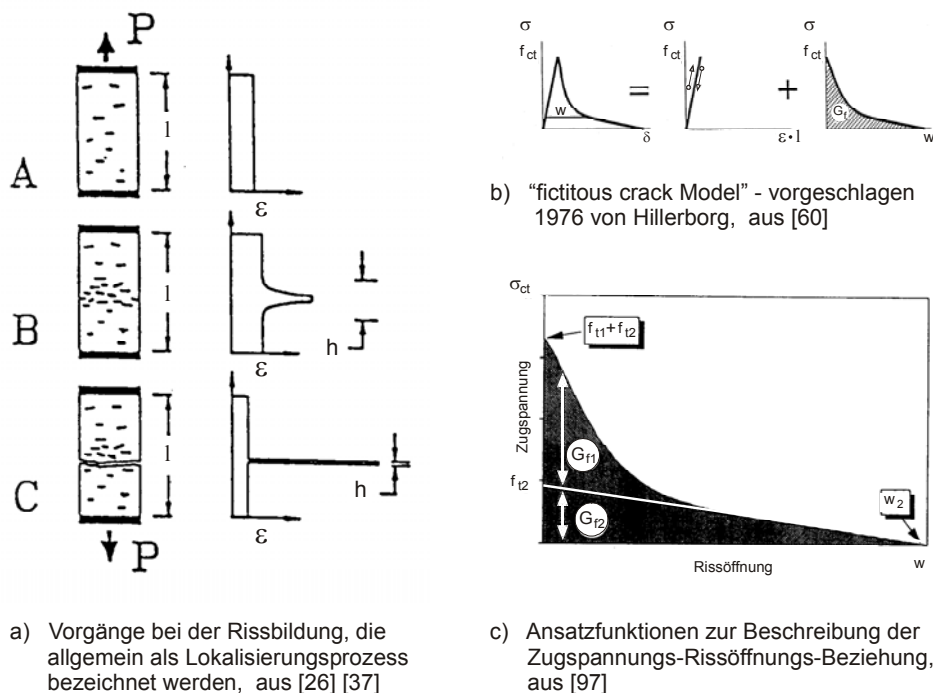
Bild 3.24: Anordnung der Messstellen und zugehörige „ $\sigma$  -  $\varepsilon$ “ - Linien, aus [59]



Seit dem Vorschlag von Heilmann [58], der auf der Grundlage von Versuchsergebnissen aus normalfesten Betonen eine Proportionalität zwischen der einaxialen, zentrischen Zugfestigkeit und der Betondruckfestigkeit ( $f_t \approx x \cdot \beta_W^{2/3}$ ) einführte, wurden zahlreiche Forschungsarbeiten zum Studium des Betonverhaltens unter Zugbeanspruchungen durchgeführt. König trifft in [71] die Feststellung, dass auf der Grundlage der Ergebnisse der wissenschaftlichen Arbeiten u.a. aus [37] und [60] „das Zugtragverhalten als bekannt bezeichnet werden kann“. Der Kenntnisstand über das Zugtragverhalten kann nach seinen Ausführungen wie folgt zusammengefasst werden:

- Nur die aus zentrischen Zugversuchen gewonnene einaxiale Zugfestigkeit kann als echte Materialeigenschaft angesehen werden.
- Die Zugfestigkeit ist gegenüber der Druckfestigkeit gering, und sie streut um den Mittelwert wesentlich stärker.
- Mit zunehmender Betondruckfestigkeit wächst die Betonzugfestigkeit aufgrund einer zunehmenden Sprödigkeit nur unterproportional.
- Die Abnahme der Zugfestigkeit unter Dauerlasten bis zu 40% deutet darauf hin, dass auch unter Zugbeanspruchungen mit einem Kriecheinfluss zu rechnen ist.

Diese von König in [71] genannten Eigenschaften liegen als Annahme auch der vorliegenden Arbeit zugrunde. Auf die besondere Bedeutung der Zugfestigkeit auch auf die Druckfestigkeitseigenschaften wird im Kapitel 3.2.5 (Werkstoffverhalten unter Druckspannungen, mit Hinweisen über z. Z. vorliegende Erkenntnisse und über stattfindende Zerstörungsvorgänge) erneut eingegangen. In diesem Abschnitt wird von der in [37] berichteten Modellvorstellung über das Zugtragverhalten ausgegangen. Danach lässt sich das einaxiale Last-Verformungsverhalten weder in ein elastisches noch in ein plastisches Spannungsmodell einstufen. Duda definiert das Verhalten über drei Stadien der Mikrorissbildungen und bezeichnet es als kohäsives Rissmodell, im Bild 3.25a dargestellt.



**Bild 3.25:** Modellvorstellungen zum Zugtragverhalten und numerische, einaxiale Ansätze

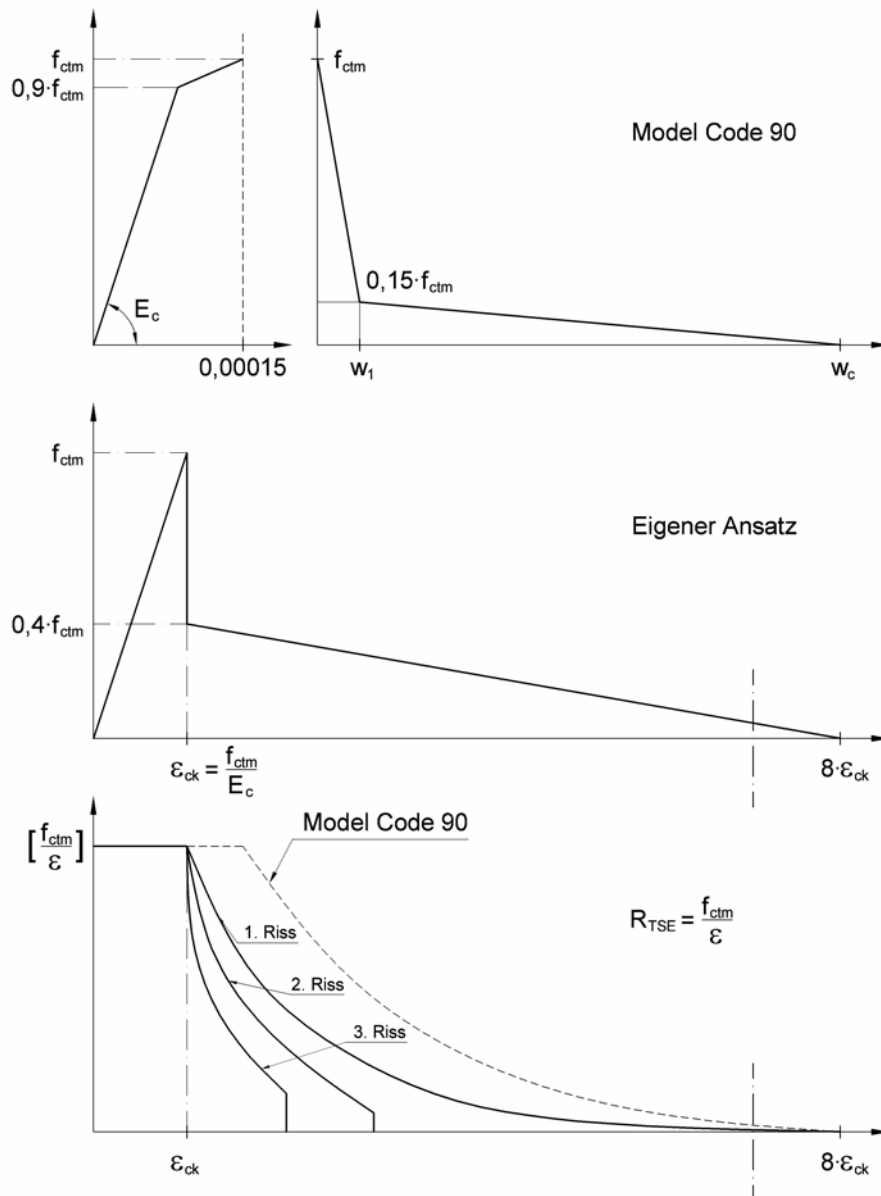
Abhängig vom Volumen des verformungsgesteuerten Probekörpers öffnen sich zunächst, wie schon von Hilsdorf et al. beobachtet, vereinzelte Mikrorisse. Noch bevor die im Betonquerschnitt maximal aufnehmbare Zugbeanspruchung erreicht wird, folgt über eine Prozesszone mit der Höhe „h“ eine Zunahme der Dehnungen (durch eine Anhäufung oder Lokalisierung der Mikrorisse), in der sich nach Überschreiten der Maximallast ein diskreter, äußerlich erkennbarer Riss entwickelt. Im Verlauf der Zugverformungen bzw. Dehnungen reduziert sich die Höhe „h“ dieser Prozesszone zunehmend, wobei der gesamte Bereich außerhalb dieser Zone elastisch und nahezu vollständig zurückfedert. Diese Modellvorstellung entspricht den in [59] dokumentierten Beobachtungen von Heilmann, Hilsdorf und Finsterwalder. Damit folgt der Betonquerschnitt bzw. das Volumen außerhalb der Prozess- bzw. Risszone einer abklingenden linear elastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Dieses Materialverhalten lässt sich mit dem von Hillerborg 1976 vorgeschlagenen „fictitious-crack“ Modell beschreiben – siehe Bild 3.25b. Dieses Modell reduziert das einaxiale Zugtragverhalten auf ein linear-elastisches Materialverhalten außerhalb des Rissbereiches und auf eine nichtlineare Zugspannungs-Rissöffnungs-Beziehung im Bereich der Risszone, um die allmähliche Verdichtung der Mikrorisse zum diskreten Riss zu simulieren. Es vernachlässigt den allmählichen Übergang der Risszone mit der Höhe „h“ zum diskreten Riss. Mit diesem Modell kann unmittelbar nach Erreichen der Zugfestigkeit – entsprechend der Darstellung im Bild 3.26 – mit einer Rissbildung gearbeitet werden, die einer definierten nichtlinear elastischen Zugspannungs-Rissöffnungs-Beziehung gehorcht.

Zur Beschreibung dieser Rissöffnung werden in der Literatur lineare, bilineare, multilineare und Exponentialfunktionen vorgeschlagen. Eine Zusammenstellung findet sich z.B. in [37]. Alle diese Vorschläge lassen sich über die materialabhängigen Größen der Zugfestigkeit „ $f_{ct}$ “, dem Elastizitätsmodul „ $E$ “ und der Bruchenergie „ $G_f$ “ unabhängig von der Probengröße und Prüfmethode beschreiben. Die Fläche unterhalb der Rissöffnungs-Beziehung (z.B. Bild 3.25c) stellt entsprechend den Arbeitssätzen der Elastizitätstheorie die Arbeit der Spannung „ $\sigma$ “ bei einer geleisteten Verformung „ $w$ “ bzw. Dehnung „ $\varepsilon$ “ dar.

Aufbauend auf einen Vorschlag von König und Duda, die zur Beschreibung eine aufwendige Exponentialfunktion wählten, wird die Vorstellung übernommen, dass die rechnerische Betonzugfestigkeit sich aus der Summe von zwei Anteilen, nämlich „ $f_{t1}$ “ und „ $f_{t2}$ “, zusammensetzt – Bild 3.25c. Der erste Energieanteil ist in der FE-Formulierung eindeutig mit dem Bruchkriterium über die zulässige Zugfestigkeit und dem Elastizitätsmodul definiert. Bei dem zweiten Anteil wird, in Anlehnung an die Auswertungen von König und Duda postuliert, dass die Tragfähigkeit der Rissbrücken, hervorgerufen durch den Auszieh Widerstand zwischen Zementsteinmatrix und Zuschlagskorn, noch ca. 40 % der ursprünglichen Zugfestigkeit entspricht. Mit dieser Annahme werden alle im Kapitel 5 vorgestellten Versuchsnachrechnungen durchgeführt.

Der Verlauf der Rissöffnungs-Beziehung wird analog zum Bild 3.25c als Gerade abgebildet, wobei angenommen wird, dass bei einer Dehnung von „ $8 \cdot \varepsilon_{ck}$ “, der 8-fachen Rissdehnung „ $\varepsilon_{ck} = f_{ct} / E$ “, keine Zugspannungen mehr über die „verschmierte“ Rissebene übertragen werden können. Entsprechend wird nach Überschreiten dieses Grenzwertes die Rissebene als spannungsfrei betrachtet. Die Annahme entspricht den in [97] dokumentierten Beobachtungen, bei denen sich z. T. größere Werte einstellten. Bei der in dieser Arbeit erforderlichen allgemeingültigen dreidimensionalen Betrachtung wird im Fall einer zwei- oder dreifach vorhandenen Rissebene innerhalb des Kontrollvolumens mit Bezug auf die Kenntnisse über das einaxiale Rissverhalten die Rissöffnungs-Beziehung reduziert. Die Reduzierung lässt sich über die Forderung ableiten, dass die aus einaxialen Versuchen entnommene innere Energie des

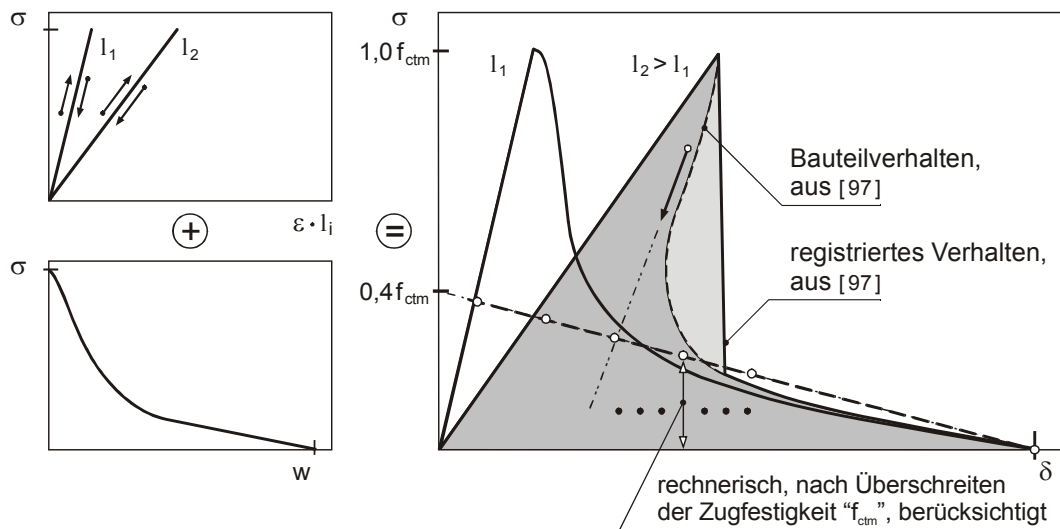
Erst- bzw. Einzelrisses, die das Nachbruchverhalten steuern soll, der Summe einer zwei- oder dreifach gerissenen Volumenstruktur entspricht. Abhängig von dieser Forderung verringert sich bei einem mehrfach gerissenen Volumenelement die Rissöffnungs-Beziehung. Bild 3.26 zeigt die Gegenüberstellung der eigenen Annahme (für den ein-, zwei- und dreifach gerissenen Zustand) mit dem Vorschlag aus [23] für den einaxialen Fall. Um dieses vorgeschlagene Verhalten numerisch erfassen zu können, wurde dem Betonelement eine weitere Geschichtsvariable hinzugefügt, so dass nach dem Verzehren der vorgegebenen elastischen Energie bzw. nach erfolgter Umlagerung die jeweiligen Rissebenen für den weiteren zeit- bzw. lastabhängigen Berechnungsverlauf ausnahmslos als spannungsfrei betrachtet werden können.



**Bild 3.26:** Rissöffnungs-Beziehungen für den ein-, zwei- und dreifach gerissenen Zustand

Remmel berichtet in [97] über „instabile“ Versuchsverläufe und ein reißverschlussartiges Aufreißen der Probekörper infolge von Exzentrizitäten und über z. T. nicht gleichmäßige Rissbildungen über den gesamten Probenquerschnitt – auch bei zentrischen Zugversuchen! Auch Hilsdorf et al. berichten über ähnliche Entlastungsvorgänge und von willkürlichen Spannungs-

Dehnungs-Linien, bei denen ein plötzlicher Rückgang bzw. ein „Zurückschnappen“ der Dehnungen zu beobachten war [59]. Insbesondere bei größeren Messlängen „ $l_2 > l_1$ “, trat dieser Effekt des elastischen Zurückfederns oft und deutlich hervor – Bild 3.27. Dieser plötzliche Spannungsabfall nach dem Erreichen der maximalen Zugbeanspruchung darf nach Ansicht des Verfassers durchaus als ein natürliches Verhalten des Werkstoffes Beton interpretiert werden. Daher findet dieses in Versuchen beobachtete Verhalten im Kapitel 4.5.3 beim Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems eine besondere Beachtung. Im Fall von Konvergenzschwierigkeiten wird, ähnlich den Versuchsbeobachtungen, die frei werdende Energie infolge des Zurückfederns als eine lokale und real mögliche überbeanspruchte Zone auf Zug betrachtet. Eine plötzliche Entlastung bzw. Spannungsrelaxation der Rissebene wird wie die im Bild 3.27 mit der Bezeichnung „Bauteilverhalten“ dargestellte Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei der Berechnung im ersten Iterationsschritt einer neu aktivierten Gleichgewichtsiteration bzw. einem neu aktivierten Lösungsprozess zugelassen. In allen nachfolgenden Gleichgewichtsiterationen, bei denen die Spannungsverhältnisse (bzw. Newton-Raphson-Restoring-Forces) innerhalb der kritischen Wirkungszonen wieder Berücksichtigung finden, muss nachlaufend eine Gleichgewichtslage gefunden werden, die einen zulässigen Gesamtdehnungszustand auch im Bereich ausgeprägter Risszonen liefert. Die neue Gleichgewichtsiteration wird über die Methode „Adaptive Descent“ ausgelöst. Diese Methode beobachtet das Verhalten der Ungleichgewichtskräfte und kann abhängig von definierten Kriterien auf den Lösungsprozess einen positiven Einfluss nehmen. Sie wird ausführlich im Kapitel 4.5.3 vorgestellt.



**Bild 3.27:** Einfluss der Messlänge – resp. einer Volumeneinheit – auf das numerisch instabile Verhalten unter einaxialer Zugbeanspruchung, [97]

Wie zuvor begründet, wird die Zugspannungs-Rissöffnungs-Beziehung als ein elastisches, zurückfederndes Materialverhalten angenommen. Entsprechend sind die daraus resultierenden Dehnungen nur in den elastischen Dehnungskomponenten der Berechnungsausgabe enthalten. Der Parameter „ $R_{TSE}$ “ zur Bezeichnung der Steifigkeiten senkrecht zur Rissebene ist im Bild 3.26 und im Steifigkeitstensor (Gleichung 3.67) identisch bezeichnet.

Die vorgestellte Strategie der Spannungumlagerung bei der Entfestigung soll im Wesentlichen die Dehnungen der gerissenen Zonen unter Beachtung des Gleichgewichtes begrenzen. Demzufolge ergibt sich zugleich eine befriedigende Dehnungsgeschichte abhängig vom zeitlichen Verlauf der Belastungen. Dies ist die notwendige Bedingung, um die im nachfolgenden Abschnitt vorgestellte „Schubtragfähigkeit der offenen Risse“, die wiederum abhängig von den

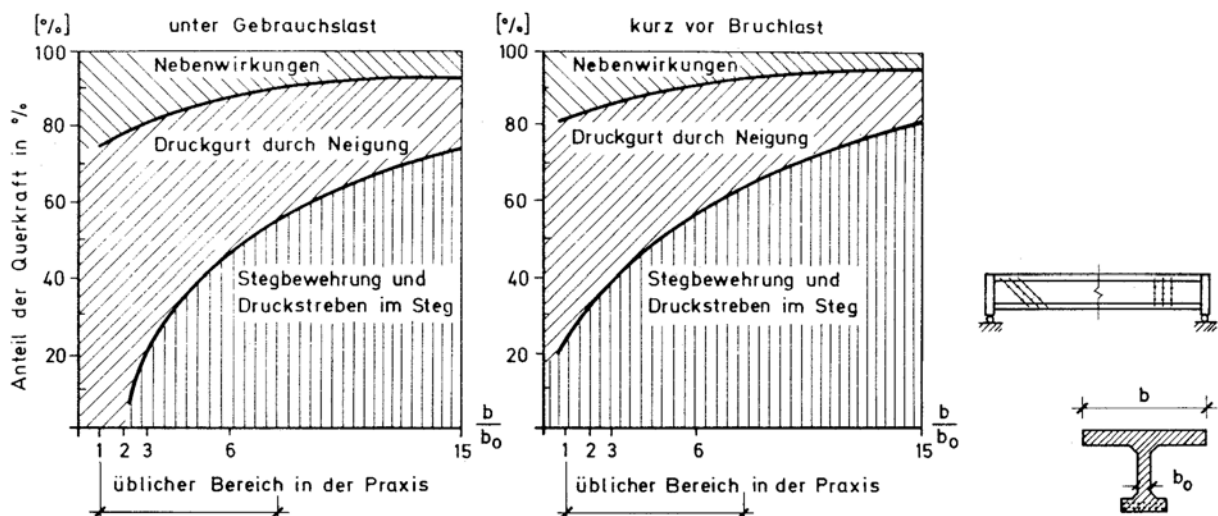
Rissdehnungen ist, zuverlässig anwenden zu können. Über diesen gemeinsamen Ansatz kann der aus Versuchen bekannten Fähigkeit des Betons zur Spannungumlagerung numerisch ausreichend Rechnung getragen werden.

### 3.2.4 Erweiterung des Betonmodells hinsichtlich des Schubtragverhaltens

Die auf die Mikrorissbildung zurückzuführenden Zerstörungsvorgänge im Betongefüge beeinflussen die Druckfestigkeitseigenschaften des Betons. Deshalb wird mit Bezug auf experimentelle Beobachtungen bei Druckversuchen und deren Auswertungen bzw. Beurteilungen im nachfolgenden Kapitel 3.2.5 „Werkstoffverhalten unter Druckbeanspruchungen“ auf die zuvor behandelte „einaxiale Mikrorissbildung“ noch einmal eingegangen. Auch in diesem Abschnitt wird zunächst, losgelöst von allen anderen charakteristischen Zusammenhängen, die Frage nach einer „physikalisch“ wirksamen Schubfestigkeit eines gerissenen Betonelements auf das nichtlineare Antwortverhalten einer numerischen Berechnung erörtert.

In einer eindrucksvollen Klarheit schreibt Leonhardt bei der Vermittlung des Grundlagenwissens über Stahlbeton in seinem Kapitel ‚Festigkeiten des erhärtenden Betons‘ [79] über die „Schub-, Scher- und Torsionsfestigkeiten“: „... gibt es beim spröden Beton als Werkstoffkennwerte nicht. In Wirklichkeit entsteht bei Querkraft, Torsion oder Scherkraft ein System von schiefen Zug- und Druckspannungen (Hauptspannungen). Der Bruch tritt durch Überwindung der Zugfestigkeit in der Richtung der Hauptzugspannung ein: unter  $45^\circ$  bei reinem Schub ohne Längskraft (z. B. bei Torsion, Verdrehung), als Zickzacklinie bei Scherbeanspruchung.“ Leonhardt versucht in seinen ‚Vorlesungen‘ immer wieder auf diesen mechanischen Sachverhalt aufmerksam zu machen. In den ‚Wichtigen Vorbemerkungen‘ zum Kapitel ‚Schubverformungen im Zustand II‘ [81] schreibt Leonhardt abschließend: „Im Schrifttum findet man vielfach Ansätze für Schubverformungen im Zustand II mit dem Schubmodul „G“ – diese sind grundsätzlich falsch“.

Um dennoch die numerische Annahme eines veränderlichen Schubtragverhaltens nach Überschreitung der Zugfestigkeit, d. h. über vorhandene Rissebenen hinweg, zu begründen, bietet sich zunächst eine aus den Stuttgarter Schubversuchen entstandene Zusammenfassung über die Aufteilung der Querkraftanteile (Bild 3.28) an.



**Bild 3.28:** Nebenwirkungen nach Aufteilung der Querkraft auf Steg und Gurt, aus [79]

Die Aufteilung zeigt, dass für ein Verhältnis von „ $b/b_0 \leq 1,0$ “ etwa 20% bis 25% der Querkraftaufnahme sogenannten Nebenwirkungen zufallen.

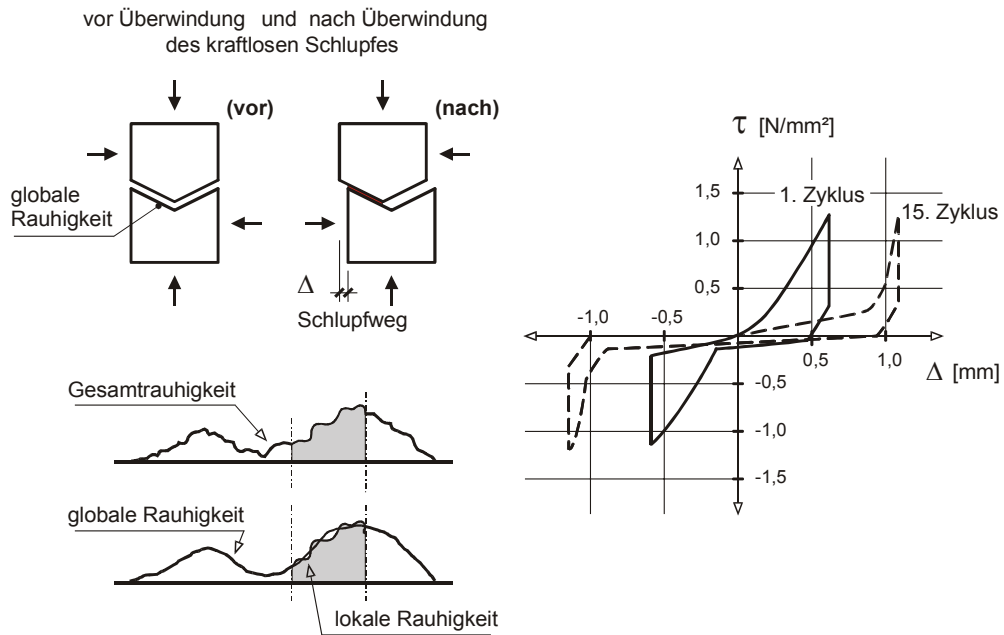
Bei der Benennung der einzelnen Mechanismen trennt Leonhardt diese Nebenwirkungen in drei Anteile:

- biegesteifer Anschluss der Druckstreben an den Druckgurt
- Verzahnung der Schubrissflächen durch grobe Zuschläge (aggregate interlock)
- Dübelwirkung der Zuggurtbewehrung (dowel action)

Nach den Stuttgarter Schubversuchen begann ein intensives Studium zur Untersuchung der Verzahnungswirkung (z. B. Fenwick [41], [42] und Taylor [113]) und zur Klärung der Frage, aus welchen Verhältnissen und mit welcher Zuverlässigkeit sich die zuvor genannten positiven Nebenwirkungen auf die Schubtragfähigkeit tatsächlich zusammensetzen. Versuchsergebnisse bestätigen, dass beim Zusammenwirken der Rissverzahnung und Dübelwirkung eindeutig der Rissverzahnung ein größerer Anteil der Tragfähigkeit zuzuordnen ist [41]. Bei den nachfolgend angegebenen Erkenntnissen anderer Autoren liegt der Schwerpunkt der Betrachtungen somit auf dem Einfluss der Rissverzahnung. Nur die Rissverzahnung kann bei dem in dieser Arbeit verwendeten Materialmodell als ein „Materialparameter“ im übertragenen Sinn – worauf abschließend hingewiesen wird – betrachtet werden.

Die ersten direkten Schubversuche wurden von Fenwick und Paulay [42] durchgeführt. Sie studierten den Einfluss der Rissweite „ $w$ “ für unterschiedliche Betongüten und bestimmten in Scherversuchen die Tragfähigkeit schubbeanspruchter Risse abhängig von der Querverschiebung „ $\Delta$ “. Das Versagen ihrer Versuchskörper erfolgte nicht durch Überschreitung einer Bruchschubspannung im Riss, sondern sie beendeten ihre Versuchsdurchführungen frühzeitig, weil sich sekundäre Biegerisse und Diagonalarisse in den Prüfkörper-Hälften einstellten. Houde und Mirza [63] benutzten ähnliche Versuchseinrichtungen mit identischen Prüfkörpern und kamen auf vergleichbare Ergebnisse. Paulay und Loeber [92] verbesserten die in [42] beschriebenen Versuchseinrichtungen durch eine direktere Lasteintragung und untersuchten damit den Einfluss der Rissbreite, Größe und Form der Zuschlagskörner. Sie zeigten, dass der Einfluss von Zuschlagsgröße und Form auf die Ergebnisse vernachlässigbar klein sind.

Laible [76], der etwa zur gleichen Zeit im Rahmen spezieller Steifigkeitsuntersuchungen für dynamisch beanspruchte Reaktorschutzhüllen die Rissverzahnung untersuchte, teilt die Gesamtrauhigkeit der sich gegenüberliegenden Rissufer in einen globalen Anteil und einen lokalen Anteil auf. Er beobachtet in seinen Versuchen, dass beim ersten aufgebrachten Lastwechsel die Schubspannungs-Verformungs-Linie ein nahezu lineares Verhalten zeigt. Demnach kann der lokalen Rauhhigkeit ein von der Rissbreite stark abhängiger Verzahnungswiderstand zugewiesen werden. Durch die Schädigung der Feilverzahnung stellt sich mit zunehmender Anzahl an Lastwechseln ein nichtlineares Last-Verformungsverhalten ein. Nur in wenigen Fällen beobachtet Laible dabei einen Rückgang der zuvor erreichten maximalen Schubspannungen um 50%. In der Regel ergaben sich auch nach wiederholten Lastwechseln nur Abweichungen bis zu 20% des maximalen Wertes – siehe Bild 3.29.

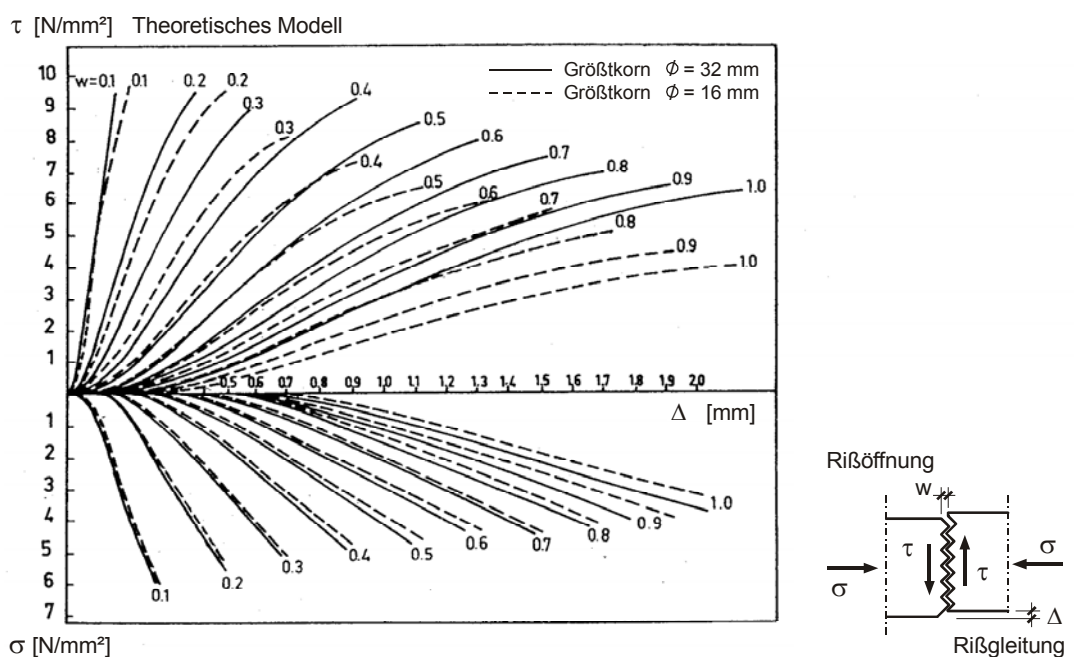


a) Modellvorstellung

b) experimentelles Ergebnis

**Bild 3.29:** Tragverhalten der Prüfkörper unter Wechselbeanspruchungen, [77]

Walraven führt in [115] die wohl umfangreichsten Untersuchungen zum Einfluss der Verzahnungswirkung der Rissufer durch. In seinen Versuchen werden Betonfestigkeit und Betonzusammensetzung berücksichtigt. Die Rissbreite „w“ wird in seinen Versuchen zu Beginn der Belastungen variiert. Walraven entwickelt ein theoretisches Modell, abhängig von den Zusammenhängen zwischen den normal und tangential zum Riss wirkenden Spannungen und den zugehörigen Relativverschiebungen „w“ und „ $\Delta$ “ längs und quer zur Rissebene. Seine Versuchsergebnisse bestätigen, dass die Größe, Form und Verteilung der Zuschlagskörner von geringer Bedeutung für die Verzahnung ist. Bild 3.30 gibt eine Vorstellung von der Wirksamkeit unterschiedlicher Betonzusammensetzungen mit Bezug auf den Größtkorndurchmesser.



**Bild 3.30:** Wirksamkeit der Korngröße auf die Übertragung der Spannungen, aus [115]

Kolmar [70] beschreibt zur Anwendung in einer nichtlinearen FE-Berechnung die Schubsteifigkeit bewehrter Elemente im gerissenen Zustand, abhängig vom Bewehrungsgrad und von der normal zur Rissebene vorhandenen Dehnung. Er kommt zu dem Ergebnis, dass die Verdübelungswirkung der Bewehrung nur einen geringen Beitrag zur Schubübertragung über den Riss liefert und vernachlässigbar ist. Dagegen ist auf der Grundlage seiner Untersuchungen der Bewehrungsgrad von großer Bedeutung, hervorgerufen durch eine damit verbundene Erhöhung der Verhältnisse zwischen Rissweite und den normal zur Rissebene wirksamen Dehnsteifigkeiten. Das Entfernen zweier Rissufer wird mit zunehmendem Bewehrungsgrad behindert.

Ungeachtet der Einleitung zeigen die experimentellen Ergebnisse, dass es durchaus sinnvoll erscheint, dem Materialmodell (constitutive model) einen aus Versuchen ermittelten Parameter zuzuordnen, der einen Einfluss auf die statischen Größen (den Spannungen) und auf die zugehörigen kinematischen Größen (den Verzerrungen) nehmen kann. Um der Idee des Betonelementes (eingebaut in ANSYS) zu folgen und im Interesse einer objektiven und allgemeingültigen Materialgleichung (constitutive equation) wird der Vorschlag von Cedolin und dei Poli [24] übernommen. Im Fall der Rissbildung wird ein reduzierter und von der Rissdehnung abhängiger Schubmodul „ $G_R$ “ eingeführt. Der Vorschlag von Cedolin und dei Poli wird für die in dieser Arbeit angewendete dreidimensionale Formulierung sinngemäß ergänzt.

Die als „konstant“ angesetzten Reduktionsfaktoren für den offenen Riss „ $\beta_t^* = 0,10$ “ und den geschlossenen Riss „ $\beta_c^* = 0,75$ “ sind Bestandteile der Programmeingabe und werden in die nachfolgenden Gleichungen integriert. Die daraus entwickelten dehnungsabhängigen Reduktionsfaktoren sind identisch in den Steifigkeitstensoren, Gleichung 3.67 und Gleichung 3.75, bezeichnet.

- Beton, gerissen in eine Richtung:

$$\beta_{t(12)} = \begin{cases} \frac{G_R}{G_{12}} = 0,25 \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{11}}{0,004} \right) \\ 0,10 ; \text{ wenn } \beta_{t(12)} < \beta_t^* \end{cases}$$

$$\beta_{t(13)} = \beta_{t(12)}$$

- Beton, gerissen in zwei Richtungen:

$$\beta_{t(23)} = \begin{cases} \frac{G_R}{G_{23}} = 0,25 \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{22}}{0,004} \right) \\ 0,10 ; \text{ wenn } \beta_{t(23)} < \beta_t^* \end{cases}$$

$$\beta_{t(13)} = \begin{cases} \frac{G_R}{G_{13}} = 0,25 \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{11}}{0,004} \right) \\ 0,10 ; \text{ wenn } \beta_{t(31)} < \beta_t^* \end{cases}$$

$$\beta_{t(12)} = \begin{cases} 0,5 \cdot \beta_{t(13)} \\ 0,5 \cdot \beta_{t(23)} ; \text{ wenn } G_{23} \leq G_{13} \end{cases}$$



- Beton, gerissen in drei Richtungen:

drei Risse geöffnet:

$$\beta_{t(12)} = \beta_{t(23)} = \beta_{t(13)} = 0,5 \cdot \beta_t^*$$

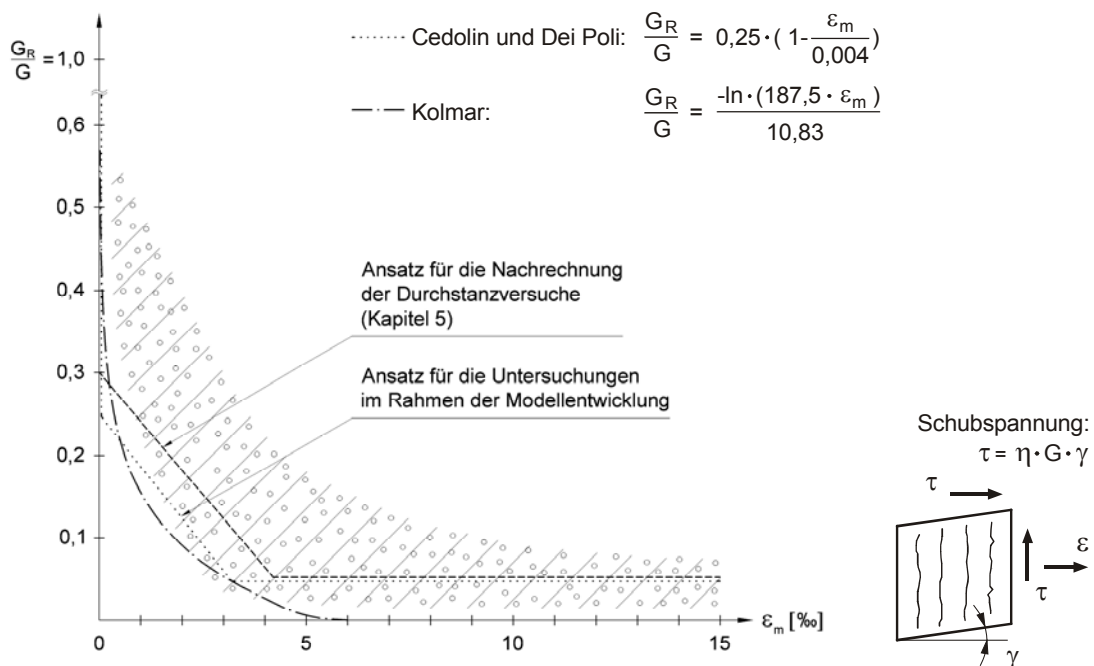
zwei Risse geschlossen, ein Riss geöffnet:

$$\beta_{t(12)} = \begin{cases} \frac{G_R}{G_{12}} = 0,25 \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{11}}{0,004} \right) \\ 0,10 ; \text{ wenn } \beta_{t(12)} < \beta_t^* \end{cases}$$

$$\beta_{c(23)} = \beta_c^*$$

$$\beta_{t(13)} = \beta_{t(12)}$$

Kolmar vergleicht im Rahmen seiner Arbeit unterschiedliche numerische Ansätze mit dem von Walraven entwickelten Rissmodell. Bild 3.31 zeigt das Ergebnis der von ihm aus [70] übernommenen Parameterstudie. Das darin dargestellte Streuband entspricht einer zulässigen Abminderung des Schubmoduls – berechnet mit dem Rissmodell von Walraven. Die Darstellung enthält den Vorschlag von Cedolin und Dei Poli und die von Kolmar entwickelte Funktion für den Sonderfall eines unbewehrten, in einer Richtung gerissenen Betonelementes.

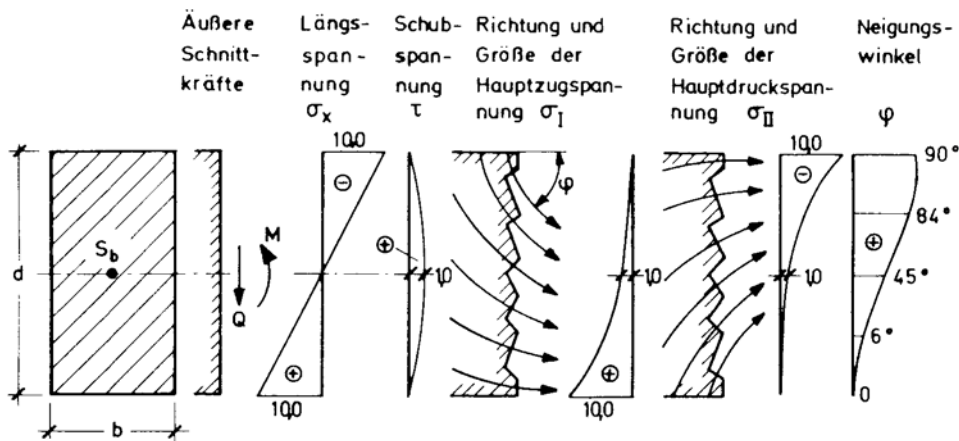


**Bild 3.31:** Gewählte Ansätze und Vergleich mit der Parameterauswertung aus [70]

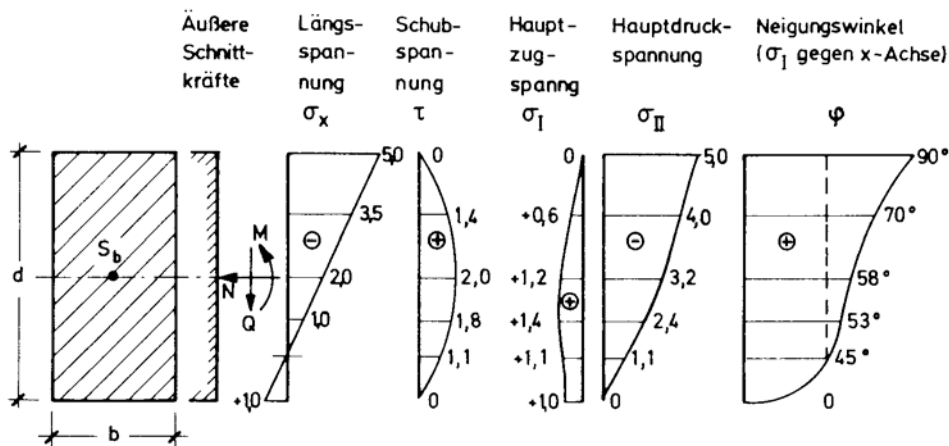
Das Schließen eines Risses ist immer verbunden mit einer Schädigung der „lokalen“ Rauigkeit der Begrenzungsflächen – wie zuvor erörtert. Die Schädigung kann infolge einer vorangegangenen Parallelverschiebung der Ränder [124] oder durch die Behinderung einer spannungsfreien Entfernung, d. h. durch einen zusätzlichen Zwang, verursacht werden. Mit Bezug auf diese Schädigung bzw. auf einen Teilverlust der lokalen Rauigkeit wurde für den geschlossenen

Riss eine 25%tige Reduzierung gegenüber dem ungerissenen Zustand berücksichtigt. Die im Rahmen der Versuchsnachrechnung (Kapitel 5) angenommene Reduzierung des Schubmoduls für offene Risszustände ist im Bild 3.31 mit entsprechender Kennzeichnung angegeben. Für weitergehende Untersuchungen bei der Modellentwicklung (Kapitel 6) wird der Vorschlag von Cedolin und dei Poli als eine untere Grenzbetrachtung des zulässigen Bereiches nach [115] übernommen.

Mit diesem Vorschlag ist es möglich, numerisch im Wesentlichen die Hauptspannungsrichtungen zu beeinflussen, ohne dem Element unzulässig hohe Steifigkeiten zuzuweisen. Um diesen Einfluss auf die Hauptspannungsrichtungen darzustellen, benutzte Leonhardt einen Vergleich zwischen zwei identischen, homogenen Rechteckquerschnitten im ungerissenen Zustand. Zum Verständnis des Kraftflusses stellt er den Verlauf der (in der Ebene) wirkenden Hauptspannung sowie den Neigungswinkel „ $\varphi$ “ (der Hauptzugspannungen) gegen die Balkenlängsachse grafisch dar. Bild 3.32a zeigt die Größe und Richtung der Hauptspannungen infolge einer reinen Biegebeanspruchung mit Querkraft. Bild 3.32b zeigt die Änderungen, wenn der Biegebeanspruchung mit Querkraft eine Längsdruckkraft hinzugefügt wird.



**Bild 3.32a:** Hauptspannungen und ihre Richtungen für einen Rechteckquerschnitt bei reiner Biegung mit positiver Querkraft, aus [79]



**Bild 3.32b:** Hauptspannungen und zugehöriger Neigungswinkel für einen Rechteckquerschnitt unter Biegung mit Längsdruckkraft und positiver Querkraft, aus [79]

Der Vergleich lässt erkennen, dass sich die Verteilungen der Hauptspannungen infolge der Längskraft deutlich ändern und sich die größte Hauptzugspannung vom Rand des Querschnittes ins Innere des Balkensteges zum Schwerpunkt hin verlagert. Eindrucksvoll zeigt Leonhardt mit der Gegenüberstellung, dass die Schubspannungen auf die Größe der Hauptspannungskomponenten nur einen geringen Einfluss nehmen. Im Gegensatz dazu können aber die Hauptspannungsrichtungen deutlich stärker über die Schubspannungen beeinflusst werden.

Die Gegenüberstellung soll die beabsichtigte Wirksamkeit der Änderungen in dieser Arbeit abschließend betonen. Durch die Ergänzung wird vor allem ein Einfluss auf die Hauptspannungsrichtungen und damit unmittelbar auch auf eine sukzessiv fortschreitende Rissbildung ausgeübt. Da die Hauptrichtungen orthogonal zueinander sind, wird zugleich die Richtung der Hauptdruckspannung mechanisch beeinflusst. Letztlich wird über die linear von der Rissdehnung abhängige Schubsteifigkeit eine bessere Anpassung an eine wirklichkeitsnahe und spannungsorientierte Berechnung erzielt. Das Elementverhalten wird dadurch robuster und unempfindlicher mit Bezug auf seine Form und Orientierung innerhalb einer Elementgruppierung. Der grundlegende Gedanke des Elementes und seine Allgemeingültigkeit bleiben damit uneingeschränkt erhalten.

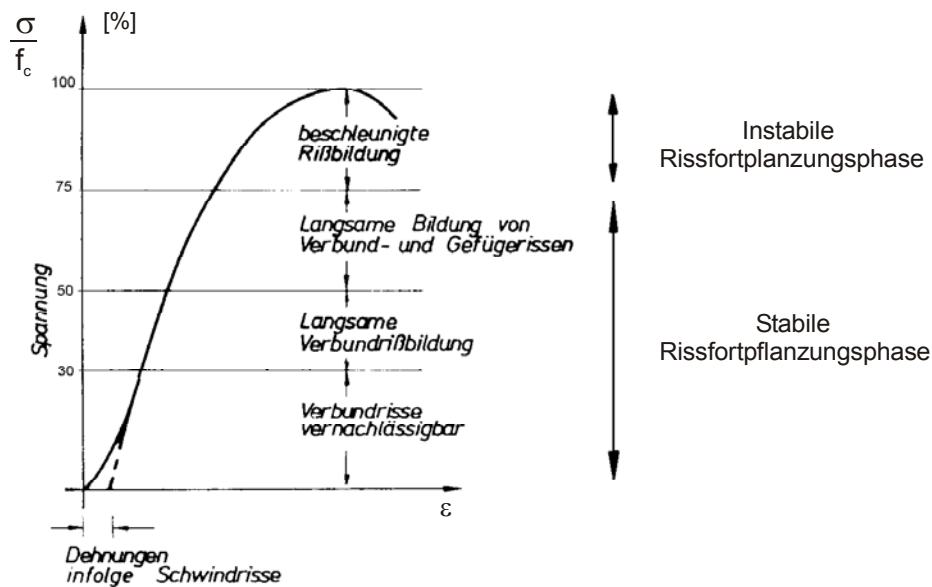
Die mechanische Modellvorstellung zum Nachbruchverhalten im Kapitel 3.2.3 ist mit den Voraussetzungen der Arbeitssätze der Elastizitätstheorie allgemein genug definiert. Auch unter mehraxialen Beanspruchungszuständen kann damit das Formänderungsverhalten unter Zugbeanspruchungen zufriedenstellend wiedergegeben werden. Die Wirksamkeit des vorgestellten Mechanismus zur Berücksichtigung des Nachbruchverhaltens dient vor allem einer Dehnungsbegrenzung in örtlich überbeanspruchten und somit gerissenen Zonen (gerissene Zonen sind ein natürliches und gewünschtes Tragverhalten beim Stahlbeton). Gemeinsam mit der Berücksichtigung der Schubtragfähigkeit sind diese beiden mechanischen Ansätze – gestützt auf Grundlage von Versuchsergebnissen – vor allem ein ingenieurmäßig eingesetztes Werkzeug, um bei numerisch geringen Beanspruchungsgraden die rechnerisch zu bestimmenden Hauptspannungsrichtungen realitätsnah zu beeinflussen. Dadurch wird ein zusätzlicher Einfluss auf die Hauptdruckspannungen, also auf die numerisch zu erfassende mehraxiale Druckfestigkeit, ausgeübt. Der Übergang bzw. Abbau der zunächst dreiaxialen Festigkeit auf eine verbleibende Restfestigkeit bis zur spannungsfreien Rissebene beeinflusst in besonderer Form das gesamte, numerisch zu erfassende Gebrauchslast- und Traglastverhalten einer mit dem Betonelement diskretisierten FE-Struktur.

### 3.2.5 Berücksichtigung des nichtlinearen inelastischen Verhaltens unter Druckbeanspruchung

Vor einer ins Detail gehenden mathematischen Formulierung zu den in dieser Arbeit gewählten numerischen Ansätze sollen zunächst zur Verfügung stehende grundsätzliche Erkenntnisse aus bisher durchgeführten experimentellen Untersuchungen herangezogen werden, um das theoretische Vorgehen hinreichend – zumindest vom Grundsatz her – zu untermauern. Die genannten Erkenntnisse haben zum Teil die Entwicklung unserer nationalen Regelwerke beeinflusst.

#### 3.2.5.1 Experimentelle Beobachtungen und Ergebnisse

Entsprechend seiner guten Eigenschaften zur Aufnahme großer Druckkräfte wird der Werkstoff Beton bevorzugt bei reinen Druckgliedern oder in der Biegedruckzone von Bauteilen eingebaut. Entsprechend seiner Bedeutung wurden zahlreiche Forschungsarbeiten durchgeführt, vor allem um sein Verformungsverhalten unter Druckspannungen zuverlässig bestimmen zu können. Aber bereits die zuverlässige Festlegung geeigneter Material- und Ingenieurkonstanten bei einfachen einachsigen Druckversuchen ist auf Grund der sehr umfassenden inneren Zerstörungs- und Umlagerungsprozesse eine messtechnisch schwer zu realisierende Aufgabe. Daher werden nachfolgend ein paar wenige materialtypische Zusammenhänge des Verhaltens unter Druckbeanspruchungen zusammengestellt, um die Beurteilung der Berechnungsergebnisse zu erleichtern und die gewählten Materialkonstanten bzw. -gesetze ausreichend zu begründen.



**Bild 3.33:** Charakteristische Zustände der Gefügezerstörung, aus [47] [65]

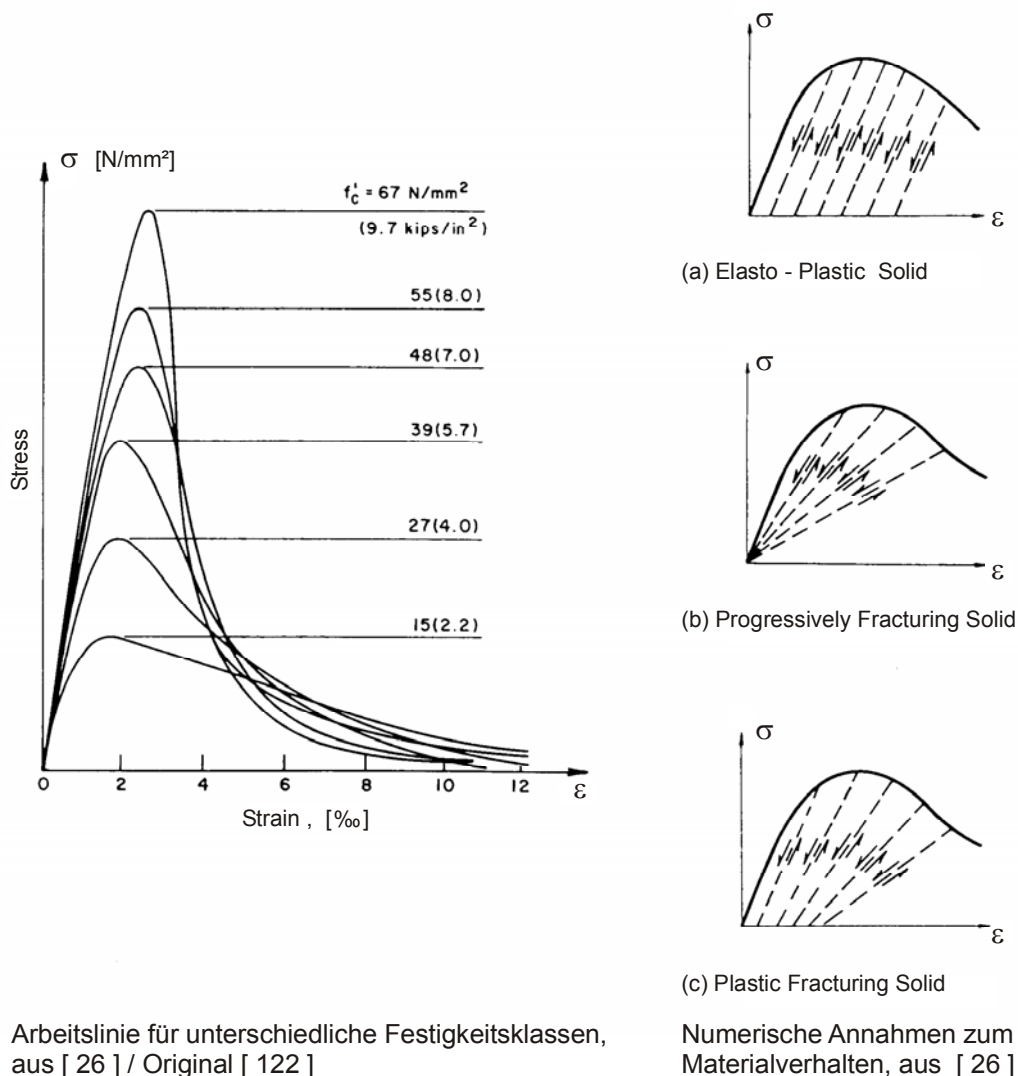
Nach Glücklich [47] lässt sich generell die Existenz von vier Phasen der Verbundrißbildung mit anschließender Gefügezerstörung unterscheiden. Die im Bild 3.33 angegebenen Grenzen gelten allgemein für ein- und mehrachsige Beanspruchungszustände unter Voraussetzung normaler Mischungsverhältnisse. Sie wurden zwischenzeitlich von zahlreichen nachfolgenden Forschungsarbeiten unter unmittelbar angeschlossener mikroskopischer Betrachtung der Rissfortpflanzung bestätigt. Hierauf weisen Eibl und Iványi unter Bezug auf die Forschungsarbeit von Krishmawamy [73] ausdrücklich hin. Gemäß der aus [65] übernommenen Darstellung (Bild 3.33) schädigen geringe Spannungszustände bis ca. 50% der Bruchlast kaum das innere Betongefüge. Dennoch wird bereits bei niedrigen Lasten ein nichtlinearer Verlauf der Span-

nungs-Dehnungs-Linie erkennbar. Offensichtlich treten zumindest bei normalfesten Betonen kleine Setzungen (Verdichtungen) als Folge von vorhandenen Schwindrissen bei niedrigen Druckbeanspruchungen auf. In der dritten Phase erweitert sich die Verbundrissbildung so, dass die zuvor schon genannten Gefügerisse sich in der Zementsteinmatrix bilden können. Diese Gefügerisse verdichten sich in der letzten Phase zu einem durchgängigen Riss-System. In dieser letzten Phase befindet sich der Beton durch eine zunehmende Gefügelockerung in einer instabilen Rissfortschrittsphase.

Dauerstandversuche, wie sie beispielsweise von Diaz und Hilsdorf durchgeführt wurden, zeigen bei Standlasten von ca. 85% bis 95% der Prismenfestigkeit ein deutliches Fortschreiten der Rissbildung an der Oberfläche der Prüfkörper [65]. In der vierten Phase befindet sich der Beton somit in einem Stadium, in dem ohne zusätzliche Belastung d.h. ohne weitere Energiezufuhr in kurzer Zeit der zum Bruch erforderliche Zerstörungszustand herbeigeführt wird. Es ist bekannt, dass bei einer hohen Ausnutzung ein überproportionales Kriechen einsetzt, das nach dem Stand der heutigen Erkenntnisse allgemein auf Gefügezerstörungen zurückgeführt wird. Dies ist eine pauschale und wenig zufriedenstellende Angabe in [65], ohne den Prozess im Einzelnen näher zu beschreiben und zu begründen. Wird vorausgesetzt, dass bei üblichen Druckversuchen zur Bestimmung von Materialkonstanten keine Maßnahmen zur weiteren Sicherung der Probe vorgesehen sind – wie beispielsweise eine konstruktive Umschnürung mit Bewehrung – so führt die bei Diaz und Hilsdorf beobachtete Rissbildung an der Oberfläche unweigerlich zu einer Umlagerung in das Innere infolge der an der Oberfläche erkennbaren Zerstörungsvorgänge nur noch schwach gestützte Querschnittsgefüge. Dann sind nach Ansicht des Verfassers nur geringe zeitabhängige Verformungen im inneren (zunächst noch schwach geschädigten) Querschnittsgefüge erforderlich, um den Zerstörungsprozess ähnlich einem Reißverschlussseffekt mit Zeitverzögerung von außen nach innen voranzutreiben.

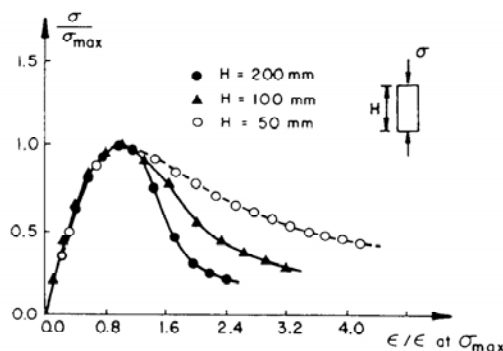
Bei dem Mehrphasen-Verbundbaustoff Beton bestimmen überwiegend die Eigenschaften der porösen Zementsteinmatrix das charakteristische Verhalten. Hierüber besteht Einigkeit hervorgehend aus allen dem Verfasser bekannten Versuchsergebnissen und Berichten. Daraus begründet sich aber nur ein Teil des Materialverhaltens, nämlich der Teil, der eng mit dem inneren Zerstörungsprozess verbunden ist. Mit der Einführung des Steifigkeitstensors als zusätzliche Variable kann dieser Teil wirklichkeitsnah erfasst werden (zur Beschreibung der anisotropen Eigenschaften erstmals von Dougill 1976 als sogenannte „Progressive-Fracturing-Theory“ vorgestellt). Die wesentlichen Merkmale des spröde reagierenden und heterogen zusammengesetzten Baustoffes Beton können mit mechanisch richtig abgestuften und idealisierten Steifigkeitsverhältnissen eindeutig an bekannte und als sicher geltende Versuchsergebnisse angepasst werden. Dennoch beruht das nichtlineare Antwortverhalten nicht nur auf intensiver (Mikro) Rissbildung bzw. Gefügelockerung. Zur Darstellung eines überwiegend aus dem Druck resultierenden nichtlinearen Materialverhaltens eines pseudofesten Körpers, der unbestritten aus einem Festkörperskelett mit flüssigkeits- und/oder gas- bzw. luftgefüllten Poren besteht, sind mit Bezug auf das Festkörperskelett Einflüsse infolge eines elastisch-plastischen Verhaltens und mit Bezug auf die Poren Kriecheffekte zu erwarten (dies gilt zumindest für jungen Beton, der zum Zeitpunkt der Versuchsdurchführung oft nur ein Alter von ca. 28 Tagen besitzt). Damit sind plastische und/oder kriecherzeugende Einflüsse ein weiterer Teil, mit dem die Formänderungsprozesse im Inneren des Betongefüges, maßgebend besonders für den Druckbereich, beschrieben werden können. Bild 3.34 zeigt typische aus einachsigen Versuchen gewonnene Spannungs-Dehnungs-Kurven für Betone mit unterschiedlichen Festigkeitseigenschaften.

Bis deutlich über 50% ihrer Festigkeit zeigen alle Betone einen nahezu linear konstanten Verlauf. Ausschließlich eine im Bild 3.35b dargestellte Spannungs-Dehnungs-Linie hervorgegangen aus einer im Versuch überdurchschnittlich langsam gefahrenen Dehngeschwindigkeit zeigt bei 50% der Festigkeit kein stetiges Verhalten mehr. Erst wenn die im Bild 3.34 eingetragenen Druckspannungen ca. 85% bis 90% ihrer ertragbaren Festigkeiten erreicht haben (somit befindet sich der Prüfkörper innerhalb der vierten Phase der Gefügezerstörung), nehmen die Krümmungen der Spannungs-Dehnungs-Kurven deutlich zu. Zu diesem Zeitpunkt ist die Dehnungsverteilung im Querschnitt des Prüfkörpers nicht mehr kontinuierlich [26]. Der „ansteigende Ast“ der Spannungs-Dehnungs-Kurve wird damit eindeutig durch die in der Phase 3 eingeleitete Gefügerissbildung und insbesondere durch die in Phase 4 fortschreitende Gefügelockerung geprägt. Dieser Sachverhalt ist hilfreich bei der Wahl eines geeigneten Plastizitätsgesetzes. Alle im Bild 3.34 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Kurven zeigen einen stark „abfallenden Ast“ nach Überschreiten der maximal aufnehmbaren Festigkeit. Nach dem heutigen Stand der Erkenntnisse besteht Einigkeit darüber, dass dieser zu beobachtende Einfluss nicht als ein unabhängiger Stoffparameter betrachtet werden darf. Das durch den „abfallenden Ast“ gekennzeichnete „Dehnvermögen“ – häufig in der Literatur auch fälschlicherweise als „Plastiziervermögen“ bezeichnet – reflektiert keine Materialeigenschaft sondern ist die Resonanz (die Antwort) eines systemabhängigen Verformungsverhaltens [26] [65].

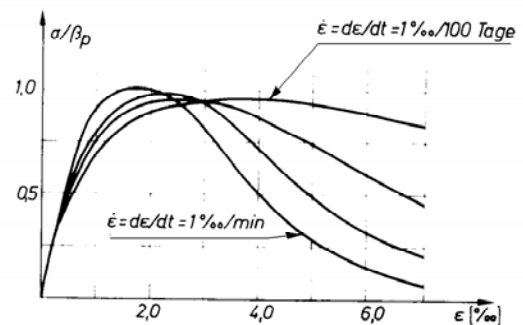


**Bild 3.34:** Einachsige Spannungs-Dehnungslinien für Beton

Viele poröse Materialien wie Beton, Fels und abhängig von der Lagerungsdichte auch Sand zeigen nach Erreichen ihrer maximal aufnehmbaren einaxialen Druckfestigkeit einen ausgeprägten Spannungsabfall bei verformungsgesteuerter Lasteintragung. Bild 3.35a zeigt für Prüfkörper mit unterschiedlichen Prüfkörperhöhen das typische Formänderungsverhalten bei einer einachsig aufgetragenen Druckbeanspruchung. Bis zum Erreichen der maximalen Beanspruchung sind die drei dargestellten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen nahezu identisch. Nach dem Erreichen der maximalen Belastung ergeben sich mit zunehmender Probenhöhe deutliche und z. T. scharf abfallende Last-Verformungs-Zweige. Chen erklärt diese bei Versuchsdurchführungen beobachtete Eigenschaft wie folgt: Da die maximale Beanspruchung („post peak strain“) nur in einem kleinen Bereich sehr lokal innerhalb des Prüfkörperquerschnittes auftritt, ergeben sich zunächst mit Bezug auf die unterschiedlichen Prüfkörperhöhen identische Verformungen für alle Prüfkörper (bis zum Erreichen des „post peak“). Nach dem Überschreiten der maximalen Beanspruchung werden bei der Berechnung der Dehnungen für jeden einzelnen Prüfkörper wiederum verschiedene Höhen verwendet, um sie nunmehr durch nahezu gleichbleibende Verformungswege zu dividieren. Dies führt zu unterschiedlichen Werten für die Dehnungen (nach Erreichen des „post peak“). Die berechneten Dehnungen sind damit keine realen Messergebnisse, die das materielle Verhalten des Gefüges charakterisieren (kein phänomenologisches Verhalten!), sondern durchschnittliche Werte mit Bezug auf die Prüfkörperhöhe, die somit lediglich das Systemverhalten wiedergeben. Seit den Versuchen von van Mier [87] findet dieses Argument eine allgemeine Zustimmung. Der „abfallende Ast“ reflektiert keine materielle Eigenschaft, sondern stellt die Antwort des geprüften bzw. untersuchten Systems dar – auch wenn es sich hierbei „nur“ um unbewehrte Zylinder- oder Würfelproben handelt. Auf diesen Sachverhalt machten Eibl und Iványi bereits 1976 „fragend“ aufmerksam [65].



a) Einfluss der Prüfkörperhöhe, aus [65]



b) Einfluss der Dehngeschwindigkeit, aus [65]

**Bild 3.35:** Einflüsse auf die Form der Arbeitslinie bei einachsigen Druckversuchen

Einaxiale Druckversuche mit unterschiedlichen Dehngeschwindigkeiten zeigen eine deutliche Beeinflussung der resultierenden Arbeitslinie. Bei der Deutung dieser phänomenologischen bzw. materiellen Eigenschaft geht man von einer rein rheologischen Betrachtung aus und führt das unterschiedliche Verhalten im Wesentlichen auf Kriecheinflüsse zurück. Entsprechend der Darstellung im Bild 3.35b erweist sich mit zunehmender Dehngeschwindigkeit der Beton steifer und weniger verformbar.

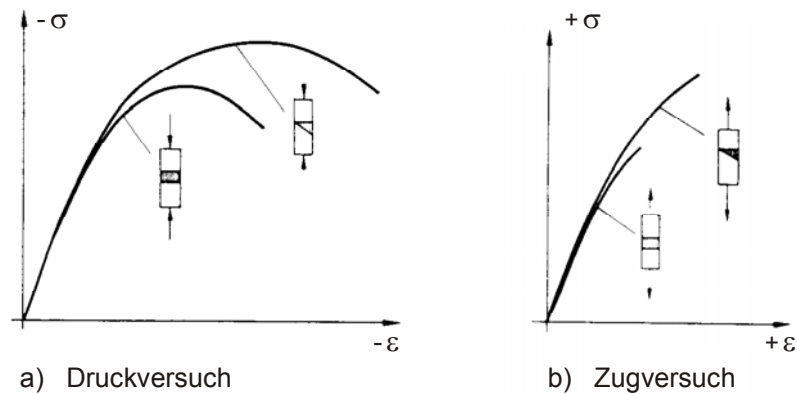
Damit wird ein weiterer Teil der im Betongefüge stattfindenden Umlagerungsprozesse (keine Zerstörungsprozesse) erkennbar, die mit dem Wasserhaushalt zumindest bei jungen Betonen zusammenhängen. Nach den vorangegangenen Erläuterungen, dass der „abfallende Ast“ ein Systemverhalten widerspiegelt, kann dieser Einfluss somit nur für den „ansteigenden Ast“ gelten. Eibl und Iványi weisen darauf hin, dass wassergesättigte Betone niedrigere Druckfestigkeiten aufweisen und deutlich auf Veränderungen der Dehngeschwindigkeit reagieren. Dieses Verhalten führen sie auf den Porenwasserdruck zurück. Die Zunahme der Festigkeit des Betons bei hohen Dehngeschwindigkeiten begründen Newman und Glücklich durch eine Behinderung der in einem Bereich zwischen 40% bis 70% der Druckfestigkeit liegenden Zerstörungsphasen. Die Ursache für eine verringerte Verbundrissbildung wird nicht angegeben. Bruchbilder von Probekörpern, die mit hohen Dehngeschwindigkeiten belastet wurden und nur wenige durchgehende Risse zeigen, scheinen nach Ansicht von Eibl und Ivanyi den zuvor genannten Sachverhalt der „Behinderung der langsamen Zerstörungsphase“ zu bestätigen. Sie untermauern dies, indem sie auf die nur geringen Abweichungen der aus den Versuchen von Newman und Glücklich resultierenden Arbeitslinien zum linearen Verlauf aufmerksam machen [65].

Dem Begriff der „Behinderung der Rissfortpflanzung“ bei hohen Dehngeschwindigkeiten – ohne weitere ins Detail gehende Begründungen – kann der Verfasser zunächst nicht folgen. Eine Klärung dieser Vorgänge wäre wünschenswert. Der Verfasser geht von folgender Voraussetzung aus:

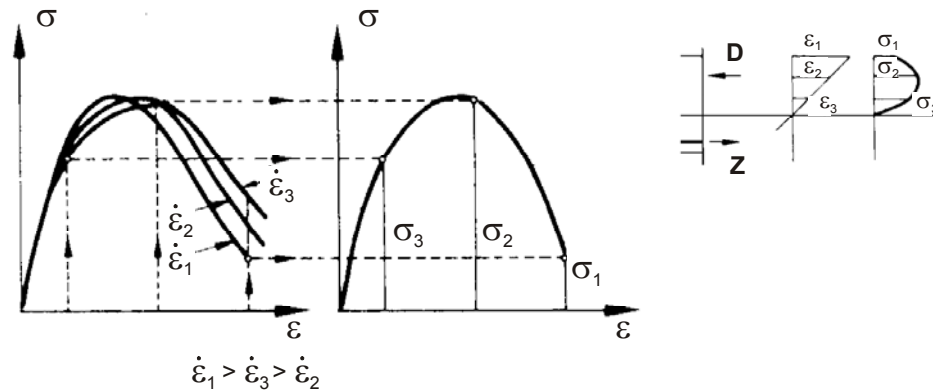
Betrachtet man das Formänderungsverhalten der im Bild 3.34 (auf der linken Seite) einachsigen Belastungsversuche, so ist mit zunehmender Festigkeit zugleich eine rapide Abnahme der einachsigen Restfestigkeiten zu beobachten. Bei großen Dehnungszuständen, quasi im Bereich einer letzten Zerstörungsphase des verbleibenden gebrochenen Betongefüges fallen die Spannungs-Dehnungs-Linien der losen Trümmer wieder zusammen. Diese Phase kann als Verdichtung des verbleibenden Kornhaufens ohne Kohäsion und ohne Restfestigkeit gedeutet werden. Damit und unter Einbeziehung der Hinweise von Chen kommt dem „abfallenden Ast“ keinerlei unmittelbare praktische Bedeutung zu. Beim „ansteigenden Ast“ wachsen zunächst die Deviatorspannungen gleichmäßig (entsprechend Bild 3.34) bis zum Erreichen eines Maximums der Scherfestigkeit an und verringern sich deutlich nach Überschreiten des Höchstwertes. Das Maß der möglichen Zunahme der Deviatorspannungen wird auch beim „ansteigenden Ast“ deutlich vom zu untersuchenden System geprägt sein. Abhängig vom System werden sich mehraxiale Spannungszustände einstellen, aus denen dann die Gefügelockerungen hervorgehen. Mit zunehmender Festigkeit werden sich feinere und ausgeprägtere Zerstörungsvorgänge im Inneren des Gefüges durch Schubrissbildungen einstellen. Beeinflusst durch die Mischungsverhältnisse ist mit zunehmender Festigkeit die Mikrozerstörung gleichmäßiger über den Prüfkörper verteilt und Kriechvorgänge werden deutlich ihren Einfluss verlieren. Da Beton kein ausgeprägtes Plastiziervermögen mit Erinnerung (wie man es bei zähen Metallen vorfindet) besitzt, muss nach abgeschlossenem inneren Zerstörungsvorgang ein deutlicher systemabhängiger Abfall nach Überschreiten des Höchstwertes erfolgen.

Bei zentrisch und exzentrisch beanspruchten Prismen, d.h. bei linearer und linear veränderlicher Dehnungsverteilung über den Versuchsquerschnitt entsprechend der Gegenüberstellungen im Bild 3.36, ist für exzentrische Zug- und für exzentrische Druckversuche ein ausgeprägter Zuwachs der Dehngeschwindigkeit experimentell feststellbar.



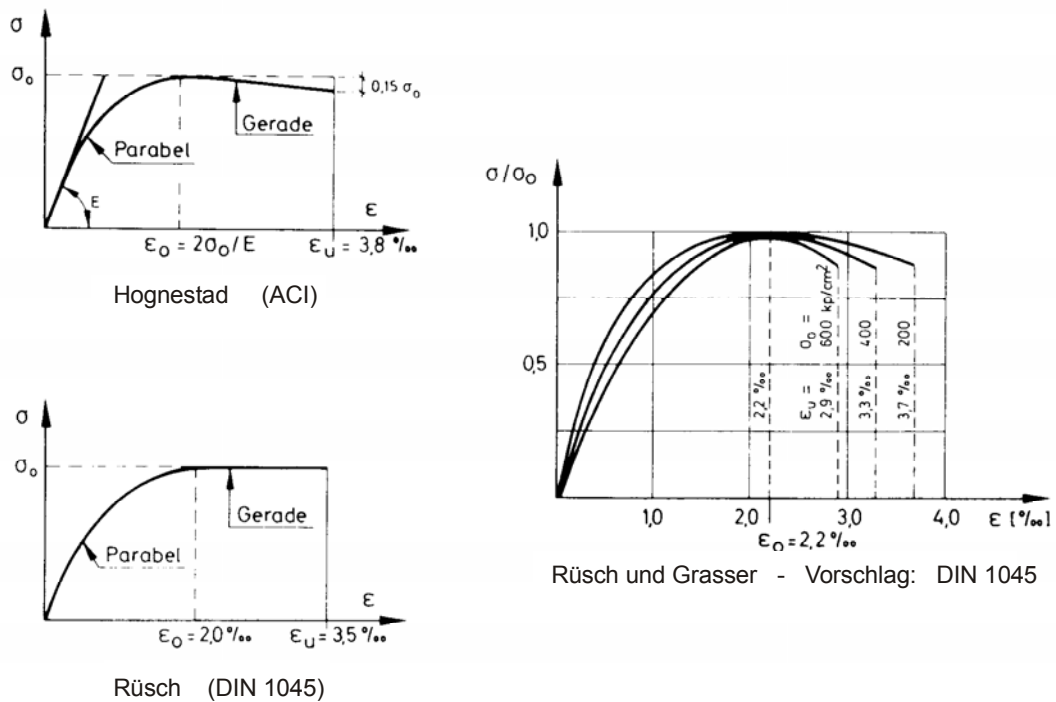


**Bild 3.36:** Zentrisch und exzentrisch beanspruchte Prüfkörper, aus [65]



**Bild 3.37:** Einfluss eines Dehnungsgradienten, aus [65]

Bei exzentrisch belasteten Druckversuchen ist darüber hinaus eine deutliche Zunahme der Dehnfähigkeit erkennbar (Bild 3.36a). Rasch [95] und Rüsç [100] interpretieren diese Erscheinung, die besonders im Fall einer Druckbeanspruchung eine deutlich größere Dehnfähigkeit hervorruft, als Folge unterschiedlicher Dehngeschwindigkeiten der einzelnen über die Querschnittsebene verteilten Fasern. Nach ihren Vorstellungen kann mit Hilfe der im Bild 3.35b dargestellten dehnungsabhängigen Festigkeiten eine Arbeitslinie für lineare Dehnungsverteilungen – wie im Bild 3.37 gezeigt – konstruiert werden. Versuchsdurchführungen mit konstanten Dehngeschwindigkeiten werden von den beiden genannten Wissenschaftlern einer allgemein gültigen Theorie zur Bemessung von Stahlbetontragwerken zugrunde gelegt. Nach dieser Vorstellung werden somit zusätzliche kleine Reibungswiderstände zwischen den einzelnen Fasern – also deviatorische Anteile, die nur für die Gestaltveränderung maßgebend sind (volumenkonstantes Verhalten vorausgesetzt) – geweckt. Diese Reibungswiderstände im Betongefüge, hervorgerufen durch Kriecheinflüsse, steigern zugleich auch die Zähigkeit. Rüsç entwickelt aufbauend auf Untersuchungen von Rasch [95] eine in sich schlüssige Theorie, wonach das Spannungs-Dehnungs-Gesetz der einzelnen Fasern durch die dort herrschenden Dehngeschwindigkeiten bestimmt wird. Dabei setzt Rüsç voraus, dass sich in jedem Belastungsversuch diejenige Dehnung als maximale Randdehnung einstellt, die das größte innere Moment hervorruft (Minimumprinzip). Die für alle Betongüten verwendbare Formulierung – von Rüsç und Grasser allgemeingültig aufbereitet – findet Eingang in das Regelwerk DIN 1045 (Bild 3.38).

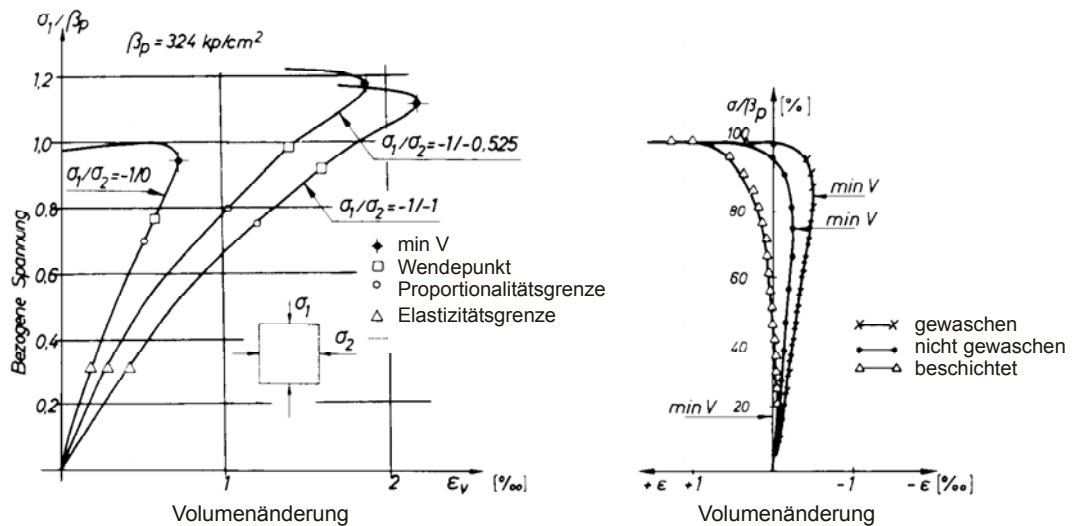


**Bild 3.38:** Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Bemessungsvorschriften, aus [65]

Aus den vorangestellten Ausführungen geht hervor, dass im Betongefüge gerade wegen des heterogenen Aufbaues eine starke ungleichmäßige Spannungs-Dehnungsverteilung herrscht. Der Beginn des Zerstörungsprozesses (innerhalb der 4. Phase nach Bild 3.33) kann sowohl bei hohen aber vor allem auch bei niedrigen Ausnutzungen stattfinden. Hierzu lassen sich sicherlich noch weitere Darstellungsarten entwickeln. Eine abschließend vorgestellte charakteristische Größe, auf die in der Literatur zur Kennzeichnung der sogenannten kritischen Spannung immer wieder Bezug genommen wird, liefert das Minimalvolumen.

Die Volumendehnung, abhängig vom Spannungszustand bei ein- und mehrachsigen Druckversuchen nach [72], ist im Bild 3.39 dargestellt. Zu Beginn der Belastung nimmt das Volumen der Prüfkörper stetig ab, bis zwischen ca. 75% und 90% der maximal aufnehmbaren Druckspannungen erreicht sind. Mit weiter anwachsender Belastung kehrt sich diese Tendenz um, gefolgt von einer deutlichen Zunahme der Volumenänderung. Von Shah und Chandra [107] wurde gezeigt, dass sich bei Druckversuchen ausschließlich mit Zement (nur mit dem Bindemittel selbst, ohne Zuschlagstoffe) keine Dehnungszunahmen einstellen. Zement zeigt eine stetige Volumenabnahme bis zum Bruch. Eine überproportionale Dehnungszunahme entsprechend der Darstellung im Bild 3.39a wird nur bei Betonmischungen (Zement und Zuschlag) beobachtet. Dies deutet darauf hin, dass bei dem Verbundbaustoff Beton (einem Mehrphasen-System) die Zuschlagstoffe hauptsächlich für die Volumendehnung verantwortlich sind. Die Grenzspannung, bei der das Volumen anzuwachsen beginnt, kann als die kritische Spannung, als Übergang in eine instabile Rissfortschrittsphase gedeutet werden (vgl. hierzu Bild 3.33). Da die instabile Rissfortschrittsphase mit einer Gefügelockerung verbunden ist, kann erwartet werden, dass in Bereichen, in denen sich durchgängige Riss-Systeme ausbilden, ein vorzeitiges und vor allem vom System abhängiges frühzeitiges Druckversagen einstellt. Bild 3.39b zeigt die deutli-

che Abhängigkeit der Volumenänderung von den gewählten Zuschlagsstoffen. Beschichtete Zuschläge führen dazu, dass die ersten Phasen der charakteristischen Zerstörungsvorgänge nach Bild 3.33 übersprungen werden und sich schon bei geringen Laststufen durchgängige Riss-Systeme entwickeln. Eine Säuberung des Zuschlages bewirkt das Gegenteil. Dieser Sachverhalt zur Definition einer kritischen Spannung ist hilfreich bei der Beurteilung der Berechnungsergebnisse, z.B. für das im Kapitel 3.2.6 vorgestellte Berechnungsbeispiel.



a) Feststellbare Volumenabnahme infolge Rissbildung im Gefüge, aus [72]

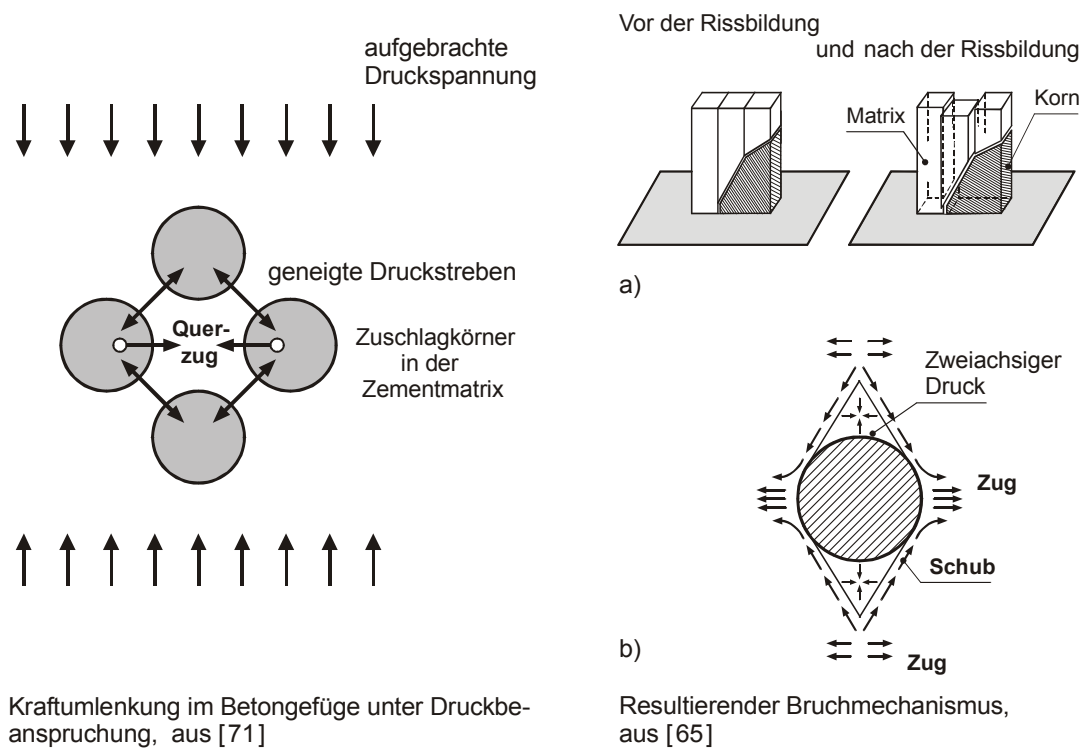
b) Einfluss der Haftfestigkeit, aus [65]

**Bild 3.39:** Volumenänderung – Indikator für Mikrozerstörungen und Gefügeänderungen

Aus allen vorangegangenen Darstellungen über das Verhalten des Betons unter Druckbeanspruchung geht hervor, dass das Verhalten insbesondere auch im Druckbereich sehr eng mit der Zugfestigkeit, der Rissbildung und Rissentwicklung und der Ausweitung derselben quer zur Belastungsrichtung verbunden ist. Die Rissbildung resultiert dabei hauptsächlich aus Kraftumlenkungen im Betongefüge, verursacht durch die heterogene Betonstruktur mit unterschiedlichen Steifigkeitsverhältnissen zwischen Zuschlagstoff und Zementsteinmatrix, siehe Bild 3.40 (linke Seite).

Bild 3.40 (rechte Seite) zeigt einen entsprechenden und anschaulichen Bruchmechanismus, der von Alexander et al., aufbauend auf Überlegungen von Taylor und Broms, vorgestellt wurde [65]. Danach kommt das im Bild 3.40a dargestellte mittlere Prisma der Mörtel-Matrix in eine aktive Gleitphase und verursacht Haft- und Mörtelrisse an den benachbarten Prismen. Nach fortgeschrittenem Riss-Stadium verbleiben Zuschlagskörner mit konischen Mörtelaufsätzen entsprechend Bild 3.40b. Eibl und Iványi untermauern dieses Modell mit fotografischen Darstellungen eigener, aus einachsiger belasteten Zylinderproben entnommenen Bruchkörpern, die genau ein solches Aussehen zeigen. Demnach könnte die messbare Zunahme der Querdehnung bei höherer Druckbeanspruchung in einer seitlichen Ausdehnung, hervorgerufen durch die gegenseitigen Verschiebungen infolge der Rissbildung, begründet sein. Dieses Verhalten kann über die Veränderungen des Steifigkeitstensors (Kapitel 3.2.2) näherungsweise erfasst werden. Deshalb erscheint es dem Verfasser zulässig, die Querdehnzahl konstant mit „ $\nu = 0,2$ “ anzu-

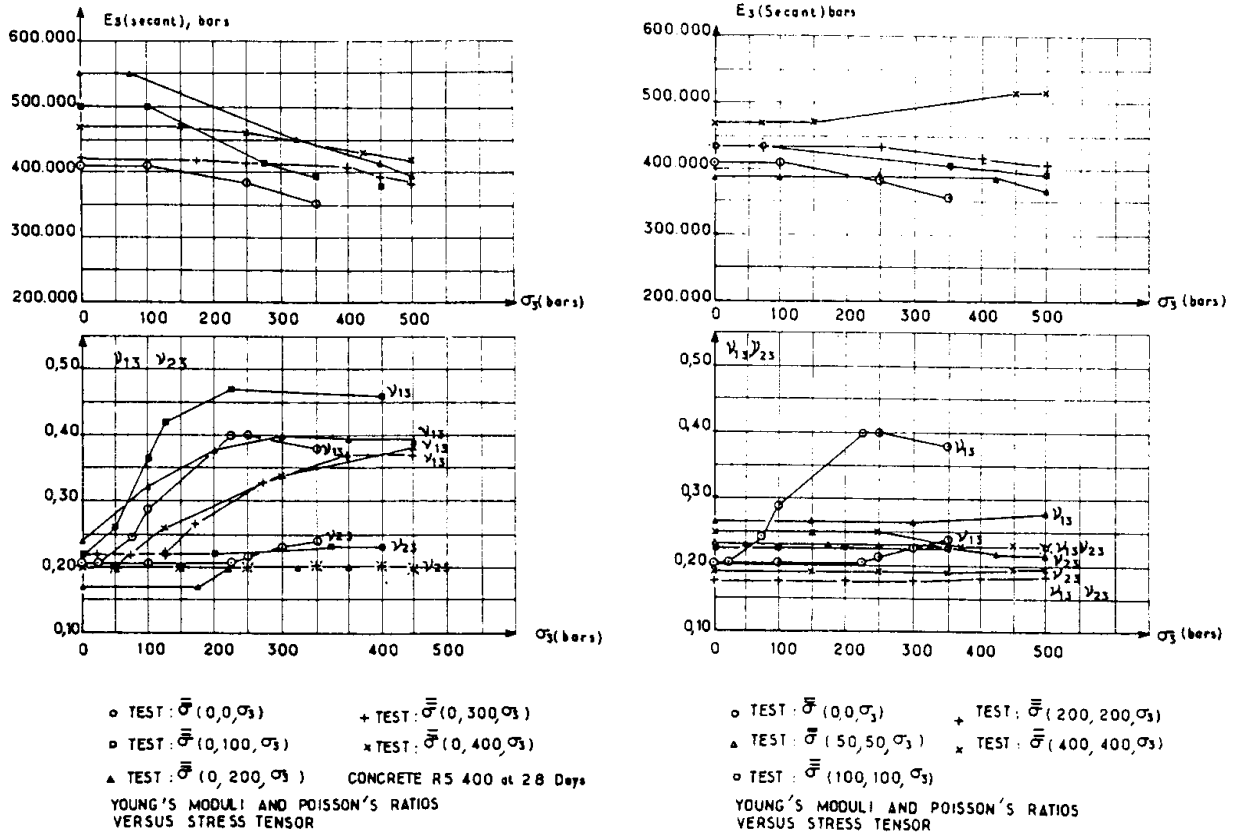
setzen und entsprechend dem Vorschlag der DIN 1045-1 [33] nach Überschreiten der Zugfestigkeit auf „ $\nu = 0$ “ herabzusetzen.



**Bild 3.40:** Ingenieurmäßige Modellvorstellung über den Einfluss der Heterogenität

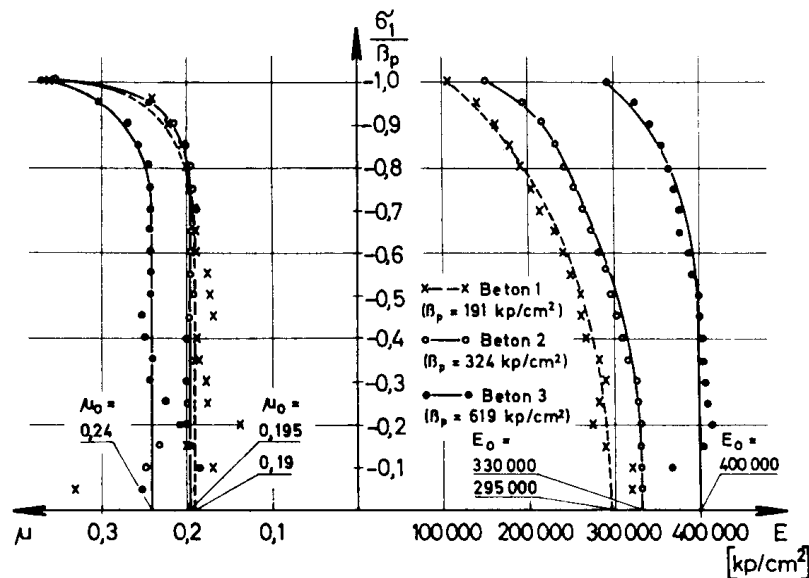
Die zuvor getroffene Annahme einer konstant bleibenden Querdehnung wird durch Versuchsergebnisse von Launay und Cachon und indirekt durch die Angaben von Kupfer bestätigt. Die von Launay und Cachon gewonnenen Ergebnisse hinsichtlich der Querdehnung und dem E-Modul sind im Bild 3.41 wiedergegeben. Der Bereich ihrer Beobachtungen zur Bestimmung des rheologischen Verhaltens erfolgte in einem Belastungsbereich für  $0 \leq \sigma_3 \leq 50 \text{ N/mm}^2$  mit der Bedingung " $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ ". Die Probenkörper bestanden aus Würfeln mit den Abmessungen 140/140/140 mm. Sie fassen vier wichtige Ergebnisse wie folgt zusammen:

- Unter einem Spannungstensor  $\bar{\sigma} = (10, 40, \sigma_3)$  zeigen die Spannungs-Dehnungs-Kurven ein ausgeprägtes lineares Verhalten. Es ergeben sich fast keine Abweichungen des  $E_3$ -Moduls mit zunehmender  $\sigma_3$ -Spannung.
- Der Einfluss einer zweiachsigen und identischen Druckspannung  $\sigma_1 = \sigma_2$  auf die Entwicklung des  $E_3$ -Moduls ist sehr gering (Bild 3.41b).
- Bei richtungsabhängigen inkrementellen Belastungen (step by step Belastungsversuch) bleibt die Querdehnung  $\nu_{23} = \varepsilon_2 / \varepsilon_3$  unverändert, unabhängig davon, wie das Spannungsverhältnis für  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  eingestellt wird (Bild 3.41a und Bild 3.41b).
- Bei zweiachsialer Beanspruchung variiert die Querdehnung  $\nu_{13} = \varepsilon_1 / \varepsilon_3$  mit Bezug auf die unbelastete Richtung unregelmäßig und willkürlich (Bild 3.41a).



a) bei zweiachsigter Belastung:  $\sigma_1 = 0$  [bar]      b) bei dreiachsigter Belastung:  $\sigma_1 = \sigma_2$  [bar]

**Bild 3.41:** Abhängigkeiten des E-Moduls und der Querdehnung „ $\nu$ “ bei unterschiedlichen Spannungstensoren – (Prüfkörper: 140/140/140 mm), aus [78]



**Bild 3.42:** Abhängigkeiten des E-Moduls und der Querdehnung „ $\nu$ “ bei einachsigem Druck (Mittelwerte aus 6 Versuchen, Prüfkörper: Betonscheibe 200/200/50 mm), aus [72]

Kupfer berichtet in [72] über zwei verschiedene Arten von systematischen Störungen, die bei fast allen Versuchen beobachtet wurden, insbesondere auch über Streuungen der Querdehnungen (siehe hierzu Kommentar in [65]). Die Ursache für die Abweichungen vermutete man in einer nicht ausreichenden Ebenheit der Bürstenoberfläche. Durch Nachschleifen der Bürsten-

oberfläche auf wenige Tausendstel-Millimeter erzielte man eine Verbesserung hinsichtlich der gemessenen Mittelwerte. Die festgestellten großen Streuungen zwischen den Versuchen bzw. Serien konnten damit nicht ausgeschaltet werden. Sie wurden auf eine zufällige Unebenheit der Probenoberfläche zurückgeführt. Mit der Verbesserung der Bürstenoberfläche beobachtete man erstmals eine zweite Ungleichförmigkeit. Man erkannte die Tendenz, dass mit zunehmender Last die Verformungen in der Mitte stärker wurden als am Rand. Bei Versuchsdurchführungen mit Gipskörpern und Proben aus gemagertem Zementstein (jeweils Scheiben mit: 200/200/50 mm) traten weder bei gefrästen Schnittflächen noch bei weniger ebenen, nach dem Schneiden nicht weiter behandelten Probekörpern die „Ungleichförmigkeit 2. Art“ auf. Mit Bezug auf diese zusätzlichen Versuchsbeobachtungen konnten abschließend die ungleichförmigen Verformungen mit der Inhomogenität des Betons begründet werden.

Daher scheint es gerechtfertigt zu sein, die im Bild 3.42 dargestellte Zunahme der Querdehnungen als Kennzeichen einer erhöhten Rissentwicklung zu interpretieren (entsprechend dem Modell nach Bild 3.40 (a+b) resultiert aus einer inneren Gefügeveränderung zugleich eine erhöhte Querverformung). Die Querdehnung sollte auch aus diesem Grund, zumindest für das hier zu untersuchende Problem, nicht als ein veränderlicher und belastungsabhängiger Materialparameter angesehen werden.

Auch König [71] bevorzugt diese Interpretation. Er benutzt die im Bild 3.42 dargestellten Auswertungen von Kupfer [72] für den Hinweis auf die stark zunehmende Rissentwicklung ab ca. 80% der Druckfestigkeit. Die aus den Messungen von Kupfer hervorgegangenen Querdehnzahlen sind für ihn eine Bestätigung, dass in diesem Stadium (Phase der instabilen Rissfortpflanzung) die Längen der Mikrorisse schnell anwachsen. Es folgt die Bildung der zuvor genannten durchgehenden Riss-Systeme.

### 3.2.5.2 Nichtlineares, inelastisches Verhalten

Nach der einleitenden Beschreibung der im Wesentlichen aus Versuchsbeobachtungen (und entsprechende Interpretationen) gewonnenen Eindrücke über die Verformungseigenschaften des Betons unter Druckbeanspruchungen bleibt die Frage, welches Materialmodell im Rahmen einer kontinuumsmechanischen Berechnung bevorzugt angewendet werden sollte, so dass das überwiegend aus der Druckbeanspruchung resultierende nichtlineare Spannungs-Dehnungsverhalten realistisch abgebildet werden kann – im Sinne der Elastizitätstheorie und Plastizitätstheorie mit einer hinreichend genau angenommenen Kompression des Volumens des als inkompressibel geltenden Materials Beton. Nach den Erkenntnissen des Verfassers muss dieser Nichtlinearität unterschiedlich Rechnung getragen werden, je nach Zielsetzung und je nach der zu erwartenden Systemantwort. Die Wahl eines geeigneten Materialmodells sollte nicht von einer gewählten Systemdiskretisierung und der daraus resultierenden Volumeneinheit des Einzelelementes abhängig gemacht werden, so wie es in vielen Veröffentlichungen fälschlicherweise vorgeschlagen wird. Die Systemdiskretisierung ist immer abhängig von der zu lösenden Aufgabenstellung. Auf die FE-Methode und Besonderheiten bei der Ortsdiskretisierung wird im Kapitel 4 eingegangen.

Um das zuvor beschriebene, sehr verschiedenartige materielle Verhalten im Druckbereich numerisch zu erfassen, wurden in der Vergangenheit unterschiedliche Lösungsmethoden vorge-

stellt. Grundsätzliche theoretische Sachverhalte zum elastisch-plastischen Formänderungsverhalten mit praktischen, aus Versuchen gewonnenen Erkenntnissen werden von Chen gegenübergestellt [26]. Eine idealisierte Darstellung dieser Gegenüberstellung für drei unterschiedliche Vorgehensweisen ist im Bild 3.34 (a bis c) angegeben. Bei den dargestellten idealisierten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen im Bild 3.34 wird ungeachtet der vorangegangenen Erläuterungen ein dehnungsabhängiges Nachbruchverhalten zur näherungsweise Erfassung des „absteigenden Astes“ als eine materielle Eigenschaft betrachtet.

- Elastisch plastischer Festkörper:  
(*Elasto-Plastic Theory*)

Das obere Spannungs-Dehnungs-Diagramm im Bild 3.34a zeigt die Kombination eines zunächst verfestigenden Materialmodells mit anschließender Relaxation nach Überschreiten der maximalen, über die einaxiale Spannungs-Dehnungs-Kurve definierten Spannung. Eine alternierende Belastung zeigt für Entlastung mit anschließender Be- bzw. Wiederbelastung keine Änderung der plastischen Verformungswege. Die Belastungspfade folgen immer der anfänglichen Tangentialsteifigkeit der Spannungs-Dehnungs-Kurve. Dies ist ein typisch elastisch-plastisches Stoffverhalten (kombiniert mit zunächst verfestigenden und anschließend entlastenden Eigenschaften). Zur Beschreibung des Materials Beton ist die Annahme eines solchen Materialmodells ungeeignet [26]. Die zuvor beschriebenen wesentlichen Eigenschaften, dass beim Beton mit zunehmender Stauchung das Steifigkeitsverhalten durch innere Zerstörungsvorgänge deutlich abnimmt, können mit diesem Modell nicht erfasst werden.

- Schadenstheorie bzw. fortschreitend brechender Festkörper:  
(*Damage Theory / Progressively-Fracturing Theory*)

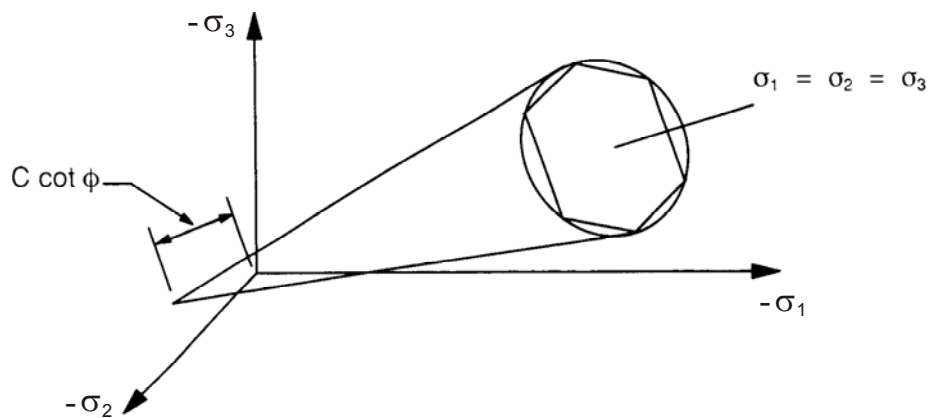
Um die Zerstörungsvorgänge und die daraus resultierenden Steifigkeitsveränderungen zu erfassen, wurde von Dougill (1975, [35]) das im Bild 3.34b dargestellte Materialmodell unter dem Begriff „fracturing theory“ vorgeschlagen. Diese Idee wurde weiterentwickelt und wird in neuerer Zeit als sogenannte Schadenstheorie bezeichnet („damage theory“).

- Plastisch brechender Festkörper:  
(*Plastic-Fracturing Theory*)

Ein Materialmodell, das beide zuvor genannten Eigenschaften beschreiben kann, nämlich die Möglichkeit, plastische Verformungen mit einer von den Dehnungen abhängigen Steifigkeitsänderung zu verwalten, ist abschließend im Bild 3.34c dargestellt. Nach Chen fällt der Werkstoff Beton, insbesondere weil damit auch der „abfallende Ast“ als Materialverhalten definierbar ist, in diese neu entwickelte Kategorie der möglichen Materialmodelle. Mit der Bezeichnung „plastic-fracturing theory“ wurde sie von Bazant und Kim 1979 vorgeschlagen (Hinweis aus [26]). In dieser Theorie werden die plastischen Eigenschaften entsprechend den traditionellen Grundlagen der Plastizitätstheorie über die Fließbedingung, einem Fließgesetz und einem Verfestigungsgesetz festgelegt, während die reduzierten Steifigkeitseinflüsse nach der von Dougill (1975) vorgeschlagenen „fracturing theory“ berücksichtigt werden.

Die zuvor gestellte Frage, wie im Rahmen der Kontinuumsmechanik die deutlich maßgebende und im Gegensatz zu den richtungsabhängigen und nur sehr gering Einfluss nehmenden Zugfestigkeiten, mithin die dominante Nichtlinearität der Druckbeanspruchungen berücksichtigt werden soll, kann jetzt mit den drei vorgestellten Möglichkeiten zur numerischen Abbildung des materiellen Verhaltens und abhängig von der Zielsetzung beantwortet werden. Beide nachfolgend angegebenen theoretischen Annahmen werden in der vorliegenden Arbeit angewendet:

- I) Steht im Mittelpunkt der Untersuchung ein konstruktiv derart ausgebildetes System, dass die mehrachsigen Spannungszustände einen ausreichenden Widerstand entgegenzusetzen können – dies wird überwiegend bei Detailuntersuchungen mit direkter Lasteintragung der Fall sein – so sollte mit einem ideal-plastischen Materialverhalten z.B. vom Drucker-Prager-Typ gearbeitet werden (Bild 3.16). Dann kann die gewählte Berechnung in die Kategorie „plastic-fracturing theory“ nach Bild 3.34c eingestuft werden. Der „abfallende Ast“ wird dabei nicht als Materialparameter erfasst, da das Materialmodell mit einem ideal-plastischen Fließkriterium kombiniert wird.



**Bild 3.43:** Drucker-Prager und Mohr-Coulomb Fließfläche, aus [13]

Das „Drucker-Prager“-Kriterium ist eine Ergänzung des „von Mises“-Kriterium, 1952 für körnige Materialien mit inneren Reibungswiderständen formuliert. Die Darstellung der Fließbedingung im Spannungsraum erfolgt abhängig von den hydrostatischen Spannungskomponenten, um deren Einfluss auf die deviatorischen Spannungsanteile beschreiben zu können. Die Fließbedingung lässt sich in allgemeiner Form angeben, abhängig von den Invarianten „ $I_{1\sigma}$ “ und „ $J_{2s}$ “ des Spannungstensors:

$$f ( I_{1\sigma}, J_{2s} ) = \alpha \cdot I_{1\sigma} + \sqrt{J_{2s}} - k \equiv 0 \tag{3.76}$$

Die Fließbedingung kann sowohl mit einem assoziierten als auch mit einem nicht assoziierten Fließgesetz angewendet werden. Die Fließfläche ändert sich nicht mit fortschreitenden plastischen Verzerrungen, da kein Verfestigungsgesetz zur Modifizierung der Fließbedingung während des plastischen Fließens existiert. Somit wird ein elastisch-ideal-plastisches Materialverhalten ohne Verfestigung berücksichtigt. Die äquivalente Spannung für das „Drucker-Prager“-Kriterium wird berechnet zu:



$$\sigma_e = 3 \cdot \beta \cdot \sigma_m + \left[ \frac{1}{2} \cdot \{ \mathbf{s} \}^T \cdot [M] \cdot \{ \mathbf{s} \} \right]^{1/2} \quad (3.77)$$

darin sind:  $\sigma_m = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

Mittelwert oder Spur des Spannungstensors  
bzw. der hydrostatische Spannungsanteil

$\{ \mathbf{s} \} =$  deviatorische Spannungen / Gleichung 3.105

$\alpha =$  Materialkonstante

$[M] =$  analog zum Kapitel 3.3.4 / Gleichung 3.116

Abhängig von den hydrostatischen Druckspannungskomponenten können die monoton anwachsenden Spannungskomponenten für beliebige Deviatorschnittebenen über die Materialkonstante „ $\alpha$ “ definiert werden:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \phi)} \quad (3.78)$$

Der vom Material abhängige Fließparameter „ $k$ “ bzw. die Fließspannung lautet:

$$k = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \phi)} \quad (3.79)$$

Die Gleichungen 3.78 und 3.79 enthalten die erforderlichen Eingabeparameter für das Programm ANSYS:

$c =$  Kohäsion des Materials

$\phi =$  Winkel der inneren Reibung

In Anlehnung an die Gleichung 3.40 (Gleichung 3.51) zur Beschreibung der Bruchfläche lässt sich mit den beiden Materialkonstanten „ $\alpha$ “ und „ $k$ “ die Fließfläche angeben:

$$F \equiv 0 = 3 \cdot \alpha \cdot \sigma_m + \left[ \frac{1}{2} \cdot \{ \mathbf{s} \}^T \cdot [M] \cdot \{ \mathbf{s} \} \right]^{1/2} - k \quad (3.80)$$

Die Fließoberfläche beschreibt einen kreisförmigen Kegel mit der Äquisektrix als Drehachse. Auf Grund der zuvor gewählten Definition der Gleichungen 3.78 und 3.79 für die Bestimmung der Materialkonstanten entspricht die daraus resultierende Fließoberfläche im Druck-Oktanten der äußeren Flächenumhüllenden der hexagonalen Mohr-Coloumb Fließoberfläche. Die Spitze des Kegels liegt im Zug-Oktanten. Die Kombination ist dargestellt im Bild 3.43. Eine gemeinsame Darstellung der kegelförmigen Fließfläche mit dem Bruchkriterium nach Willam und Warnke wurde zuvor mit Bild 3.16 grafisch angegeben.

Im Fall einer assoziierten Fließregel wird der senkrecht auf der Fließfläche stehende Gradientenvektor berechnet zu:

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} = \beta \cdot [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T + \frac{\{ \mathbf{s} \}}{\left[ \frac{1}{2} \cdot \{ \mathbf{s} \}^T \cdot [ \mathbf{M} ] \cdot \{ \mathbf{s} \} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.81)$$

Die plastischen Vergleichsdehnungen resultieren, abhängig von der Belastungsgeschichte, aus der Addition der über die Zeitschritte berechneten plastischen Dehnungsinkremente:

$$\hat{\varepsilon}_n^{pl} = \hat{\varepsilon}_{n-1}^{pl} + \Delta \hat{\varepsilon}^{pl} \quad (3.82)$$

darin sind:  $\hat{\varepsilon}_n^{pl}$  = äquivalente plastische Dehnung für den Zeitpunkt „n“.

$\hat{\varepsilon}_{n-1}^{pl}$  = äquivalente plastische Dehnung für den vorangegangenen Zeitpunkt „n-1“.

$$\Delta \hat{\varepsilon}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \{ \Delta \varepsilon^{pl} \}^T \cdot [ \mathbf{M} ] \cdot \{ \Delta \varepsilon^{pl} \}} = \lambda$$

mit:  $\lambda$  = plastischer Proportionalitätsfaktor

$$\{ \Delta \varepsilon^{pl} \} = \lambda \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}$$

Die äquivalente Vergleichsspannung:

$$\hat{\sigma}_e^{pl} = \sqrt{3} \cdot (k - 3 \cdot \alpha \cdot \sigma_m) \quad (3.83)$$

ist analog zu der Vergleichsspannung nach „von Mises“ definiert, jedoch mit Rücksicht auf den wirksamen hydrostatischen Spannungszustand. Im Fall einer konvergenten Lösung kann für alle Integrationspunkte mit plastischen Verzerrungsanteilen eine Überprüfung mit der Vergleichsspannung nach „von Mises“ erfolgen.

Eine assoziierte Fließregel liefert für die geneigte Fließfläche des Kegels unter plastischen Verzerrungsincrementen in der Regel zu große Volumenausdehnungen. Bekannte Materialien in der Geotechnik wie z.B. Fels und Sand und auch der Werkstoff Beton zeigen in der Regel nicht dieses Materialverhalten. Die plastischen Anteile der Volumenänderung würden somit deutlich überschätzt. Zur Reduzierung dieser Volumenänderung (für den Fall, dass plastische Verzerrungsinkremente existieren) kann mit einer nicht assoziierten Fließregel gearbeitet werden. Dann wird für die Berechnung des nicht mehr normal zur Fließfläche stehenden Gradientenvektors ein weiterer Eingabeparameter „ $\phi_f$ “ (Dilatationswinkel) benötigt. Über die Bedingung „ $\phi > \phi_f$ “ kann das Maß der plastischen Volumenänderung dem jeweiligen materiellen Verhalten angepasst werden. Wird „ $\phi_f = 0$ “ angenommen, so ergibt sich eine plastische Formänderung unter Volumenkonstanz.

Die Tangentenmatrix oder elastisch-plastische Matrix wird über das Newton-Raphson Iterationsverfahren bestimmt (Simo und Taylor [108]). Daraus resultiert eine konsistente, algorithmische Tangente. Die Anwendung einer nicht assoziierten Fließregel liefert

eine unsymmetrische Tangentenmatrix. Die Proportionalität der plastischen Verzerrungssinkremente zu den Deviatorspannungen geht verloren. Um die Symmetrie zu erhalten, wird für:

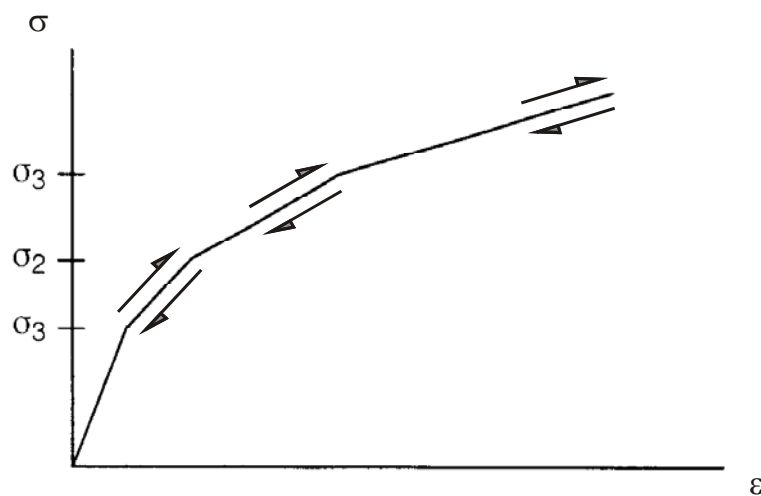
den Gradientenvektor:  $\left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}$  in Abhängigkeit von „ $\phi$ “

und für den Gradientenvektor:  $\left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}$  in Abhängigkeit von „ $\phi_f$ “

die jeweils zugehörigen Matrizen berechnet, um daraus eine geeignete, aus Mittelwerten bestehende Matrix zu bilden.

- II) Ist beispielsweise wie im Fall eines platten- oder schalenförmigen Systems eine vom Ort der Lasteintragung nahezu unabhängige Materialantwort zu erwarten – dies beinhaltet zugleich eine indirekte Lasteintragung und ein Spannungs-Dehnungsverhalten nach Bild 3.35b bzw. Bild 3.38 –, so kann die einfachste Möglichkeit, nämlich das nichtlineare charakteristische Verhalten des Betons in der Übernahme einer einachsigen  $\sigma - \varepsilon$ -Kurve quasi als Leitlinie für ein anfänglich isotropes elastisches Stoffgesetz angewendet werden. So verfahren u.a. Andrä [8], der ebenfalls die örtlichen Beanspruchungen im Auflagerbereich von Flachdecken unter Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens untersuchte, und Connor [90], die außerdem beide die Querdehnung „ $\nu$ “ als konstant angenommen haben. Dieses Vorgehen ist im Bereich der Kategorie „damage theory“ entsprechend Bild 3.34b einzuordnen:

Im Fall eines unveränderten Steifigkeitstensors liefert das multilineare Materialgesetz das im Bild 3.44 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Verhalten. Bei Entlastung und der Voraussetzung unveränderter Steifigkeiten folgt das Material dem gleichen Kurvenverlauf wie bei der Belastung. Die Querdehnung „ $\nu$ “ wird über den gesamten nichtlinearen Bereich als konstant vorausgesetzt. Das Gesetz liefert eine einfache plastische Materialantwort ohne Erinnerung, so dass entsprechend einer konservativen Betrachtung keine elastische Energie verloren geht.



**Bild 3.44:** Spannungs-Dehnungs-Verhalten für nichtlineare Elastizität, aus [13]

Aus den Komponenten des Dehnungs-Vektors  $\{\varepsilon_n\}$  wird ein äquivalentes Gesamtdehnungsmaß berechnet:

$$\varepsilon_e^t = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1 + \nu)} \cdot \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \cdot \varepsilon_{xy}^2 + \frac{3}{2} \cdot \varepsilon_{yz}^2 + \frac{3}{2} \cdot \varepsilon_{xz}^2 \right]^{1/2} \quad (3.84)$$

Für „ $\varepsilon_e^t$ “ kann gemeinsam mit der eingegebenen Spannungs-Dehnungs-Kurve eine zugehörige äquivalente Spannung „ $\sigma_e$ “ berechnet werden. Daraus resultieren die elastischen Komponenten der Dehnungen für den Zeitpunkt „ $n$ “ zu:

$$\{\varepsilon_n^{el}\} = \frac{\sigma_e}{E \cdot \varepsilon_e^t} \cdot \{\varepsilon_n\} \quad (3.85)$$

Daraus folgen die „plastischen“ oder nichtlinearen Dehnungskomponenten:

$$\{\varepsilon_n^{pl}\} = \{\varepsilon_n\} - \{\varepsilon_n^{el}\} \quad (3.86)$$

Zur Vermeidung einer unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix werden nur die symmetrischen Anteile der Tangenten-Steifigkeiten benutzt, und man erhält:

$$[C_{ep}] = \frac{\sigma_e}{E \cdot \varepsilon_e} \cdot [C] \quad (3.87)$$

die resultierende Sekanten-Steifigkeitsmatrix, wie im Bild 3.34b angedeutet.

### 3.2.5.3 Kriechverhalten

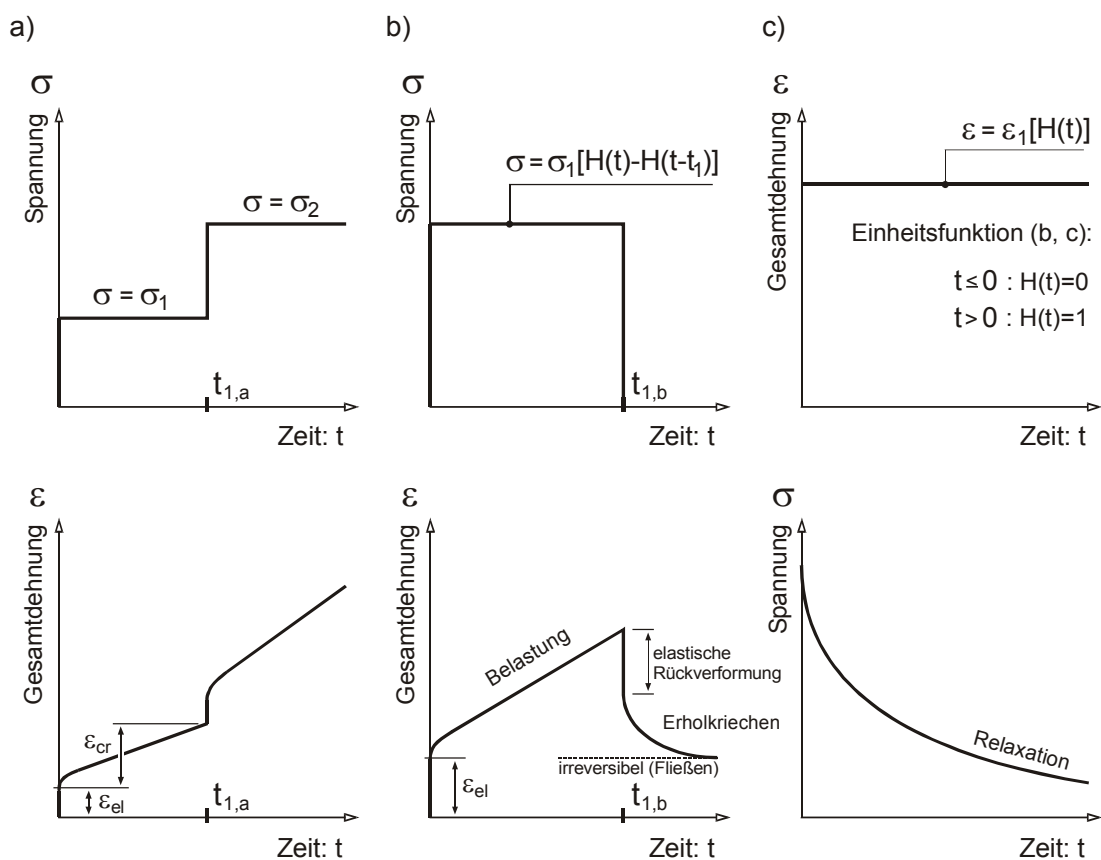
Auf das mechanisch sehr verschiedenartige Last-Verformungsverhalten des Betons unter Druckspannungen wurde mit Hinweisen auf allgemein anerkannte Versuchsbeobachtungen in der Einleitung dieses Kapitels 3.2.5 eingegangen. Auch darauf, dass bei einem Mehrphasen-System unterschiedliche charakteristische Eigenschaften für das Festkörperskelett und für die verbleibende Porenstruktur berücksichtigt werden müssen. Dies gilt zumindest für Versuchsnachrechnungen, die zum Zeitpunkt der Versuchsdurchführung nur einen geringen Reifegrad (i.d.R. ein Alter von 28 Tagen) besitzen.

Die materielle Erscheinung des Kriechens bei dem Werkstoff Beton nimmt Einfluss auf die Spannungsverteilung und damit auch auf die Dehnungen insbesondere bei nicht zwängungsfreien Beanspruchungen. Leonhardt weist darauf hin, dass der verhältnismäßig schnelle Abbau von Spannungsspitzen im Betongefüge als eine besonders günstige Erscheinung des Werkstoffes Beton bezeichnet werden darf [79]. Damit beeinflusst das Kriechen aber auch im besonderen Maß die Rissentwicklung und die Verteilung der inneren Schnittkräfte, die sich entsprechend den inneren Steifigkeitsverhältnissen innerhalb eines Festkörpers verteilen. Kriechen wird somit zu einem materiellen Benehmen, das bereits unter geringen Belastungsgraden die Rissentwicklung und die daraus resultierenden Umlagerungen beeinflusst.

In der Theorie des Kriechens wird die Zustandsgleichung in einer allgemeineren Formulierung angegeben, als aus der Plastizitätstheorie bekannt ist, nämlich mit:

$$f(\varepsilon, \sigma, t, T) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{cr} = F(\sigma, t, T) \quad (3.88)$$

wobei die Funktionsvariable „ $t$ “ die Zeit bezeichnet und die Variable „ $T$ “ Einwirkungen infolge Temperatur beinhaltet. Der Index „ $cr$ “ kennzeichnet die aus Kriecheinflüssen hervorgegangenen Dehnungen. Bild 3.45 zeigt drei Grundkurven, die das für Kriechen typische und von der Zeit abhängige Verhalten darstellen: Kurve „ $a$ “ zeigt Kriechkurven für konstante Spannungen „ $\sigma_1$ “ und „ $\sigma_2$ “, die schrittweise aufgebracht wurden, Kurve „ $b$ “ die Kriechkurve für eine konstante Spannung „ $\sigma_1$ “ und nach Entlastung die zugehörige Erholungskurve. Eine Spannungsrelaxation unter einer konstant bleibenden Dehnung ist mit der Kurve „ $c$ “ schematisch dargestellt.



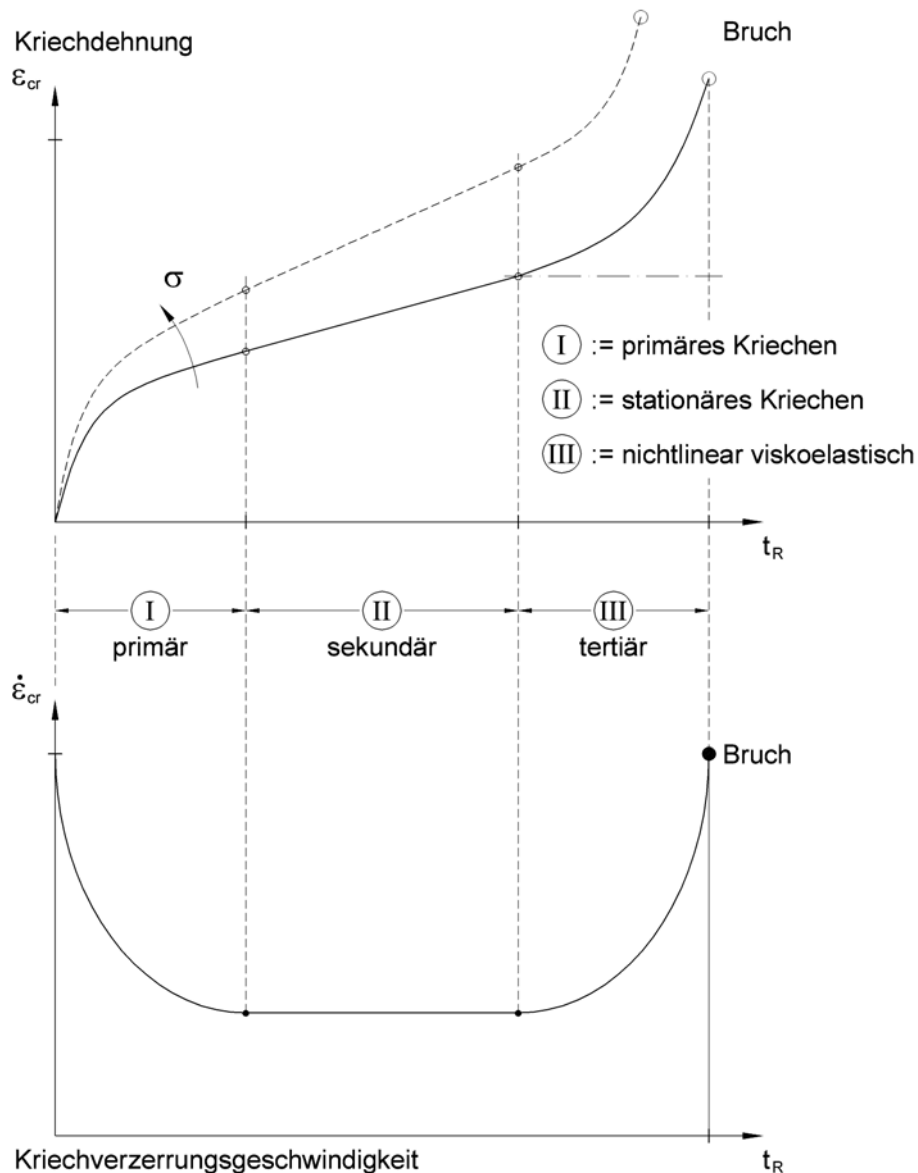
**Bild 3.45:** Typisches transientes Antwortverhalten infolge Kriechen, [109]

Die meisten im ingenieurwissenschaftlichen Bereich interessanten Werkstoffe haben im Normaltemperaturbereich ein zeitunabhängiges und monotones Antwortverhalten infolge äußerer, statischer Belastungen. Somit spielen bei einer experimentellen Bestimmung geeigneter Materialkennwerte Einflüsse infolge einer Belastungsgeschwindigkeit oder die Dauer einer äußeren Standlast keine wesentliche Rolle. Dieser Sachverhalt ändert sich, sobald man den Normaltemperaturbereich verlässt. Bei Metallen tritt bei höheren Temperaturen (oberhalb von 40% ihrer Schmelztemperatur) ein Verhalten ein, dass bei konstant gehaltener Belastung die Dehnungen über die Zeit zunehmen. Man bezeichnet dies als Metallkriechen. Der Grundmechanismus (dislocation creep) wird dabei sehr stark von den Spannungen beeinflusst. Erst wenn das Spannungsniveau relativ niedrig ist,  $\sigma < 0,001 \cdot G$ , verlangsamen sich die Kriechbewegungen bei

Metallen (oder stoppen ganz, [109]). Polymere (Verbindungen aus Riesenmolekülen – einfache Moleküle zu größeren vereinigt) haben dagegen i. a. eine nicht zu vernachlässigende Abhängigkeit von der Belastungsdauer und der Belastungsfrequenz, vor allem aber zeigen sie bereits im Normaltemperaturbereich eine viskose Komponente entsprechend einer Flüssigkeit und eine elastische Komponente entsprechend einem Festkörper. Das resultierende viskoelastische Materialverhalten zeigt damit eine „zeitabhängige“ Dehnung „ $\varepsilon(t)$ “ bei konstanter Spannung „ $\sigma_0$ “ – als Kriechen bezeichnet – und eine „zeitabhängige“ Spannung „ $\sigma(t)$ “ bei konstanter Dehnung „ $\varepsilon_0$ “ – als Relaxation bezeichnet – entsprechend Bild 3.45 a und c. Oft tritt zusätzlich eine Energiedissipation hinzu, wenn sich im Fall einer zyklischen Belastung das Material – als Folge einer Materialdämpfung – erwärmt. Trennt man die elastischen und die viskosen Komponenten, so lässt sich zusammenfassend sagen: Unter der Einwirkung äußerer Lasten werden bei Festkörpern Verformungen erzeugt, bei Fluiden d.h. Flüssigkeiten oder Gasen werden Strömungen verursacht. In beiden Fällen entstehen innere Kräfte entsprechend dem 3. Newton'schen Gesetz – „actio=reactio“. Das unterschiedliche materielle Benehmen dieser Konstituierenden besteht darin, dass Festkörper eine „natürliche“ Gestalt besitzen (haben einen „ausgezeichneten“ Zustand), in die sie nach Entlastung wieder zurückkehren – unter der Voraussetzung, dass die aufgebrachte Belastung nicht zu groß war. Fluide dagegen erinnern sich nicht mehr an ihre Gestalt – i.d.R. aber noch an ihr spezifisches Volumen.

Die wesentlichen Merkmale des zeitabhängigen Materialverhaltens unter Voraussetzung konstanter Spannungen und konstanter Temperatur können an einer typischen Kriechkurve anschaulich dargestellt werden. Bild 3.46 zeigt drei charakteristische, vom Kriechen beeinflusste Verformungsbereiche. Die für gewöhnlich unterschiedlich zu betrachtenden Bereiche werden allgemein als primäres Kriechen, sekundäres Kriechen oder stabiles Kriechverhalten und als tertiäres Kriechen bezeichnet. Der primäre Kriechvorgang ist verbunden mit einer schnellen Abnahme der Kriechverzerrungsgeschwindigkeit und zeigt einen ausgeprägten Zuwachs der Kriechdehnung zu Beginn der Belastung. Beim sekundären Kriechen stellt sich eine nahezu konstante Kriechverzerrungsgeschwindigkeit ein. Die allmähliche Zunahme der Kriechverzerrungsgeschwindigkeit im tertiären Bereich kündigt prinzipiell eine Veränderung der materiellen Struktur an, d.h. sie kündigt eine Strukturveränderung im Sinne einer tatsächlichen, realen materiellen Schädigung an, die dem Bruch infolge Kriechen vorangeht.

Dass dieses Verhalten nicht nur bei Metallen unter hohen Temperaturen sondern auch bei Beton im Normaltemperaturbereich zu beobachten ist, zeigt die Arbeit von Weigler und Rings [118]. Der prinzipielle Verlauf der im Bild 3.46 dargestellten Kriechkurve kann unmittelbar mit den Versuchsergebnissen in [118] verglichen werden. Man muss hinzufügen, dass die gute Übereinstimmung durch Schwellbelastungen bewehrter und unbewehrter Betone mit maximalen Oberspannungen von „ $0,75 \cdot \beta_{c,w}$ “ erzielt wurden. Die deutliche Zunahme der Dehnungen im primären Bereich wird von Weigler und Rings – mit Bezug auch auf andere Literaturstellen – mit der Spannungsumlagerung einer vorhandenen Anfangsschädigung und einem Ausgleich von Fehlstellen im Gefüge begründet. Auch der Verfasser stimmt zu, dass die Zunahme der Dehnungen zu Beginn der Schwellbelastung auf die im Bild 3.33 bereits angedeutete Schwindrissbildung (bei normalen Mischungsverhältnissen) zurückgeführt werden kann. Dies ist jedoch ein natürliches Verhalten (für Festigkeitsklassen bis C50/60; ohne besondere Zusätze, die das Schwindverhalten reduzieren) und sollte somit nicht als Schädigung bezeichnet werden. Der Verfasser vertritt darüber hinaus die Ansicht, dass insbesondere bei niedrigen Belastungsstufen ein weiteres typisches materielles Benehmen hinzukommt:



**Bild 3.46:** Bereiche der Dehnungszunahme und Dehngeschwindigkeit, aus [118]

Bingham und Reiner [16] haben im Jahr 1933 auf der Grundlage eigener Versuche vermutet, dass die Kriechgrenze für Zementmörtel bei einer Belastung von ca.  $0,5 \text{ N/mm}^2$  ( $5 \text{ kg/cm}^2$ ) liegt. Versuche von Ross haben 13 Jahre später eindeutig gezeigt, dass bereits bei einer Dauerlast von  $0,07 \text{ N/mm}^2$  messbare Kriechverformungen auftreten [109]. Der Zementstein, hervorgegangen aus einem Erhärtungsprozess des Zementleims – einem Zement-Wassergemisch, das zusätzlich ein Quantum Luft enthält –, kann nach der Erhärtung Wasser in folgender Form enthalten: Kristallwasser, chemisch gebundenes Wasser, Gelwasser, absorbiertes Wasser, Kapillarwasser, Wasserdampf und freies Wasser in größeren Poren (die Kapillaren sind etwa 100mal größer als die Gelporen [79]). Kristallwasser und chemisch gebundenes Wasser ist nicht verdampfbar, alles übrige Wasser ist verdampfbar und kann für das Kriechen und Schwinden des Betons verantwortlich gemacht werden. Eine Methode, alle Anteile der genannten Gruppen am Gesamtwasser des Betons zu bestimmen, ist dem Verfasser nicht bekannt. Unabhängig davon stimmen jedoch heute sämtliche Forscher darin überein, dass das im Zementstein enthaltene Wasser (normale Mischungsverhältnisse vorausgesetzt) die Hauptursache für das Kriechen des

Betons bildet. Die Gesteine, aus denen die Zuschlagstoffe bestehen, zeigen nur geringe Kriecheigenschaften (Härtebestimmung der Minerale nach der „Mohs’schen“ Härteskala). Sie können im Vergleich zum Kriechen der Zementsteinmatrix im Allgemeinen vernachlässigt werden [65].

Freyssinet beobachtete bereits im Jahre 1911 die Zunahme der Betonstauchungen unter Dauerlast [43]. Von ihm stammt die bekannteste Theorie für das Kriechen und Schwinden. Sie ist allgemein gültig für alle pseudofesten Körper und macht das in den Gelporen enthaltene Wasser für die Kriech- und Schwindverformungen verantwortlich. Der schon zuvor in dieser Arbeit benutzte Begriff „pseudofester Körper“ wurde von Freyssinet eingeführt. Als „pseudofest“ bezeichnet Freyssinet einen Körper, der zwar äußerlich das Aussehen eines festen Körpers hat, innerlich aber von einem Netz feinsten, mit Luft und Wasser gefüllter Kanäle durchzogen ist. Diese Kanäle verleihen dem Körper besondere mechanische Eigenschaften, die zu den Eigenschaften absolut fester und dichter Körper – deren Aufbau ein Kristallgefüge bildet – völlig verschieden sind. Die physikalische Grundlage der Hypothese von Freyssinet sind die aus der Thermodynamik bekannten Beziehungen zwischen den Aggregatzuständen „fest – flüssig – gas- oder dampfförmig“ sowie die Kelvin’sche Relation hinsichtlich des Gleichgewichtes von Flüssigkeit und Dampf. Aus den genannten Grundlagen wird ersichtlich, dass die Hypothese von Freyssinet einen zusätzlichen Wasserverlust eines unter Dauerlast stehenden Betonkörpers benötigt.

In der vorliegenden Arbeit soll der Einfluss auf das materielle Verhalten infolge Kriechen ausschließlich für die im Kapitel 5 vorgestellten Versuchsnachrechnungen (Versuchsdauer: ca. 8 Std.) erfasst werden. Bei den Nachrechnungen handelt es sich nicht um Standlasten, die Freyssinet seinen Untersuchungen zugrunde gelegt hat, sondern die Nachrechnung soll den Kriecheinfluss unter einer ständigen Belastungsänderung (insbesondere bei Belastungsbeginn, Bild 3.33) berücksichtigen, um reale Umlagerungen insbesondere bei geringen Laststufen unterhalb von 60% der Druckfestigkeit, also gerade im Bereich bzw. zum Zeitpunkt der Erstrissbildungen zu erfassen. Die Anwendung der Hypothese von Freyssinet scheint für eine Versuchsdauer von ca. 8 Std. bis zum Erreichen der Durchstanzlast – der Versagenslast – fraglich und ist nicht gerechtfertigt, da ihr ein zusätzlicher Wasserverlust zugrunde liegt.

Die schon früh bekannt gewordenen Versuche mit Belastungsänderungen und Beobachtungen der Kriechverformungen für Be- und Entlastungen stammen von Davis [125]. Davis nahm an, dass insgesamt drei Ursachen von Bedeutung sein könnten:

- Eine Ursache wurde von Davis als „**viskoses Fließen**“ bezeichnet, ähnlich dem Fließen viskoser Körper wie Öl, Asphalt oder feuchter Ton.
- Als zweite Ursache kommt für ihn ein „**kristallines Fließen**“ in Frage, also gegenseitige Bewegungen einer aus Kristallen zusammengesetzten Masse entlang der Kristalloberfläche, wie dies bei Metallen bekannt ist.
- Als Hauptursache vermutet er jedoch den „**Verlust von Wasser**“, das aus dem Zementstein ausgepresst wird (als „seepage“ bezeichnet).

Nach den Voraussetzungen von Davis entsteht bei der Hydratation des Zementes (Chem.: durch Absorption von Wasser verursachte Quellung u. Volumenvergrößerung von Mineralien



und die dadurch hervorgerufene Sprengung der Gesteine!) zunächst eine amorphe, gelatinear-tige Masse. Diese Masse, allgemein als Gel bezeichnet, geht mit zunehmender Alterung in ei-nen mehr oder weniger kristallinen Zustand über. Verformungen dieses Zementgels infolge äu-ßerer Belastungen schienen für Davis schon im Jahre 1937 der Hauptgrund des Kriechens des Betons zu sein – heute ist dies uneingeschränkt anerkannt. Nach Davis und Lynam enthält der Zementstein Wasser in drei Formen, nämlich als chemisch gebundenes Wasser, als kolloidales Wasser in den feinen Poren und Kanälen der Gelmasse (sogenanntes Gelwasser) und das freie Wasser in größeren Poren oder Hohlräumen [126]. Das freie und chemisch gebundene Wasser nimmt keinen besonderen Einfluss auf das Kriechen. Lynam macht in erster Linie das Gelwas-ser für die Verformungen von Beton verantwortlich. Durch das Gelwasser ergeben sich thermi-sche und mechanische Wirkungsgrade, die entweder durch den Feuchtigkeitsgehalt der umge-benden Atmosphäre (Schwinden) oder durch Belastungen (Kriechen) hervorgerufen werden. Mit der Annahme, dass die Bewegungen des Gelwassers überwiegend in den feinen Kapillaren der Gelmasse stattfinden, gerät das Gel bei Belastung unter Druck und das Gelwasser wird aus den Kapillarporen ausgepresst (er weist auf den Effekt eines Schwammes hin). Das Gel ver-formt sich, der Beton kriecht. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Austritt des Gelwassers er-folgt, ist abhängig von der Belastungsintensität, vom Feuchtigkeitsgehalt der umgebenden At-mosphäre und vom Widerstand, den das Wasser auf seinem Weg durch die feinen Kanäle fin-det.

Dieser von Davis und Lynam vermutete Mechanismus muss nicht zu einem Wasserverlust füh-ren, da Beton genügend mit Luft gefüllte Poren enthält, in die das kolloidale (= fein zerteilte) Wasser ausweichen kann. Betrachtet man den im Bild 3.40a dargestellten ideellen Bruchme-chanismus von Alexander und sieht man davon ab, dass eine symbolische aktive Gleitphase infolge von Rissen verschiedener Art gezeigt wird, kann man sich – insbesondere bei kleinen Belastungszuständen – die dargestellte Zementsteinmatrix ebenso gut als einen ungleichförmig verformten Mehrflächner vorstellen (Hinweis darauf wurde bereits erwähnt: Zementstein zeigt in Druckversuchen eine stetige Volumenabnahme bis zum Bruch). Mit diesem Mechanismus las-sen sich (noch) zahlreiche materielle (phänomenologische) Eigenschaften, die bei Versuchen beobachtet wurden, begründen, wie z.B.: Feuchtigkeitsgefälle, Kapillarkwirkungen etc.. Verzö-gerter Wasserdurchfluss bei zu großen Belastungsgeschwindigkeiten führt möglicherweise zu Ansammlungen in Kapillarkanälen des zunächst fein verteilten Wassers, d.h. führt zum Poren-wasserdruck mit sprengender Wirkung. In [65] wird über Prüfkörper berichtet, die mit hoher Ge-schwindigkeit belastet, Bruchbilder mit nur wenigen und durchgehenden Rissen zeigten. Eine Klärung dieser Zusammenhänge ist auch im Zeitalter der hochfesten Betone wünschenswert.

Die bisherigen Ausführungen zu dokumentierten Versuchsbeobachtungen – in Ergänzung zur Einleitung des Kapitels 3.2.5 hier nur auf das Kriechverhalten unter Druckspannungen bezogen – hatten das Ziel, die seit langem bekannten, mehr oder weniger zeitlichen Abhängigkeiten zu-nächst aus der Sicht der Werkstoffkunde zu betrachten. Im Folgenden werden zwei mathemati-sche Gesetze vorgestellt, mit denen man versuchte, den zeitlichen Verlauf des Kriechens zu beschreiben. Straub gab als erster eine Exponentialfunktion folgender Form an [112]:

$$\eta_s = k \cdot \sigma^p \cdot t^q \quad (3.89)$$

darin sind:  $\eta_s$  = spezifisches Kriechmaß zur Zeit „t“  
 $\sigma$  = Dauerlast

„ $k$ “, „ $p$ “ und „ $q$ “ sind Faktoren, die von den Versuchsbedingungen abhängen und „durch Probieren“ zu ermitteln sind.

Die Formel von Straub entstand aufgrund einer Auswertung der frühen amerikanischen Versuche in den 30er Jahren mit verhältnismäßig kurzen Belastungszeiten. Der Faktor „ $\sigma^p$ “ deutet darauf hin, dass Straub nicht von einer Proportionalität zwischen Spannungen und Kriechverformungen überzeugt war. Leonhardt weist in [79] darauf hin, dass diese Proportionalität zwischen Kriechverformung und elastischer Verformung im Bereich der Gebrauchslasten bis etwa „ $\sigma_b = 0,4 \cdot \beta_p$ “ besteht, somit lässt sich die Formel vereinfachen zu:

$$\eta_s = k \cdot \sigma \cdot t^q \quad (3.90)$$

In etwas abgewandelter Form wurde diese Funktion (Gleichung 3.89) auch von Weigler und Rings für ihre Untersuchungen zugrunde gelegt. Beide Funktionen können auf das Norton-Bailey-Gesetz von 1929 zurückgeführt werden. Das Norton-Bailey-Gesetz kann dazu benutzt werden, sowohl den Bereich des „primären“ Kriechens als auch den Bereich des „sekundären“ Kriechens zu beschreiben [109]. Das Gesetz liefert die Kriechverzerrungsgeschwindigkeit in allgemeiner Form:

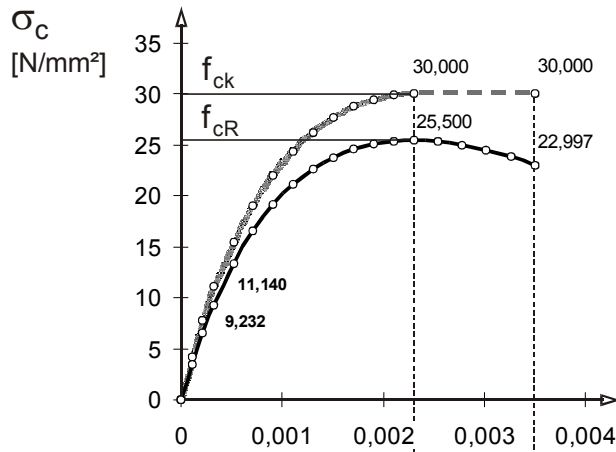
$$\dot{\epsilon}_{cr} = D \cdot \sigma^m \cdot t^n \quad \text{mit:} \quad (m \geq 1, n < 1) \quad (3.91)$$

„ $D$ “, „ $m$ “ und „ $n$ “ stellen Materialkonstanten dar (empirische Konstanten), die in der Regel abhängig von den Versuchsbedingungen sind.

Da keine Messungen zur unmittelbaren Definition eines geeigneten spezifischen Kriechmaßes für die in den Eigenversuchen verwendeten Betonmischungen vorlagen (dies gilt auch für die nachgerechneten Fremdversuche), wurde die Materialkonstante „ $D$ “ mit „ $\eta / E_{cm}$ “ festgelegt. Bei allen im Kapitel 5 vorgestellten Nachrechnungen wird „ $D$ “ mit „ $\eta = 0,8$ “ und dem zum Versuch gehörenden, dem Ergebnis der zeitgleich durchgeführten Werkstoffprüfung entnommenen Elastizitätsmodul „ $E_{cm}$ “ gerechnet.

Bild 3.47 zeigt eine Gegenüberstellung unterschiedlicher Kriechverzerrungsgeschwindigkeiten „ $\dot{\epsilon}_{cr}$ “ für die zuvor auf den einachsigen Fall bezogene Beziehung mit unterschiedlichen Annahmen hinsichtlich der Materialkonstanten. Die Gegenüberstellung beruht zunächst exemplarisch auf charakteristischen Spannungen eines frei gewählten Betons (Festigkeitsklasse C30/37). Die aus der Werkstoffprüfung übernommenen und bei der Nachrechnung verwendeten Festigkeitseigenschaften bzw. Materialkonstanten sind in der Tabelle 5.1 im Kapitel 5 angegeben. Bild 3.47 zeigt zugleich das aus der Bemessungsvorschrift DIN 1045-1 angewendete einachsige Verformungsgesetz (Gleichung 3.92 / Bild 3.38 - rechts). Mit Bezug auf die realen Materialkennwerte der einzelnen Versuche wird die allgemeingültig verwendbare Formulierung der DIN 1045-1 auch den Nachrechnungen zugrunde gelegt. Da der „abfallende Ast“ prinzipiell keine Materialkonstante darstellt (zuvor erwähnt und erläutert), wird er in Kombination mit dem Einfluss aus Kriechen nicht berücksichtigt.

Spannungsdehnungslinie



gewählte Parameter für die Gegenüberstellung:

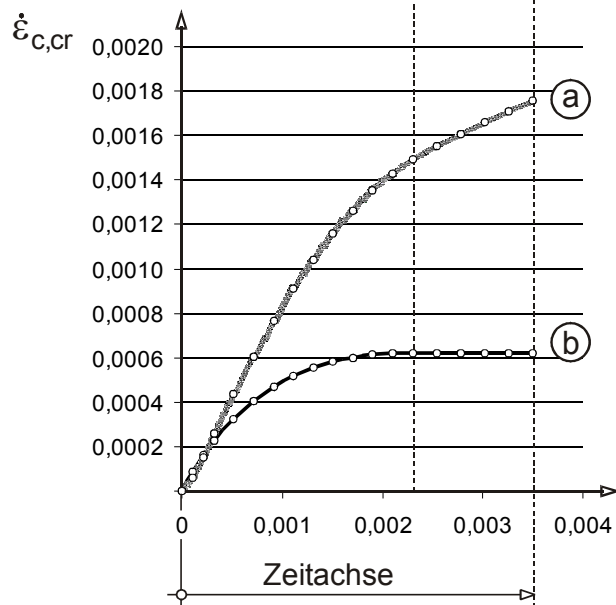
- $f_{ck} = 30$  [N/mm<sup>2</sup>]
- $E_{cm} = 31900$  [N/mm<sup>2</sup>]
- $\chi = 0,8$  [‰]
- $C_2 = 1,0$
- $C_3 = 0,5$

DIN 1045-1 (Juli 2001):

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = - \left( \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta} \right) \quad (3.92)$$

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} ; k = -1,1 \cdot E_{cm} \cdot \frac{\epsilon_{c1}}{f_c}$$

Kriechverzerrungsgeschwindigkeit



$$\dot{\epsilon}_{c,cr} = C_1 \cdot \sigma_c^{C_2} \cdot t^{C_3}$$

$$\dot{\epsilon}_{c,cr} = C_1 \cdot \sigma_c^{C_2}$$

**Bild 3.47:** Gegenüberstellung der Kriechgeschwindigkeit

Im weiteren wird davon ausgegangen, dass die für Metalle gültigen Überlegungen auch auf den Werkstoff Beton anwendbar sind. Dann wird die Kriechkurve im Wesentlichen stark von der Spannung beeinflusst, wobei die Temperatur mit den Ergebnissen aus [118] ausgeschlossen werden kann. Bei der Nachrechnung soll damit insbesondere der Einfluss infolge Kriechen im Bereich der anfänglichen „elastischen“ Verformungen erfasst werden, d.h. nur der „primäre“ Bereich ist bei der Nachrechnung von Interesse und wird mit Gleichung „b“ (angegeben im Bild 3.47) berücksichtigt.

Aus den vorangestellten Gründen wird der Einfluss des Kriechens bei den Versuchsnachrechnungen ausschließlich als ein materielles (von der Zeit nahezu unabhängiges) Formänderungsverhalten des Werkstoffes Beton betrachtet. Dabei wird angenommen, dass das Material unter Druckbeanspruchungen isotrope bzw. quasiisotrope Eigenschaften besitzt. Die Verallgemeinerung des einachsigen Kriechmodells (Gleichung „b“ / Bild 3.47) auf den dreidimensionalen Fall soll nachfolgende Voraussetzungen erfüllen:

- Die mehraxiale Formulierung muss auf das ursprüngliche einaxiale Modell wieder reduziert werden können (Forderung nach der Eindeutigkeit).
- Änderungen der hydrostatischen Spannungskomponenten haben keinen Einfluss auf die Kriechgleichungen.
- Kriechverformungen resultieren in einer Änderung der Gestalt und nicht des Volumens (d.h.: das Material ist inkompressibel).
- Für isotropes Material sind die Hauptrichtungen des Spannungs- und des Verzerrungstensors koaxial.

Mit der Euler-Vorwärts-Methode benutzt das Betonelement ein explizites Integrationsverfahren [14]. Die ausschließlich auf das spezielle Problem des Kriechens angewendete Lösungstechnik, die „Anfangsspannungsmethode“, ist ein modifizierter Algorithmus des vollständigen Newton-Raphson-Verfahrens. Wird bei der Berechnung eine genügend große Anzahl von Zeitschritten gewählt, liefert dieses Verfahren eine ausreichend zuverlässige und effiziente Integrationsgenauigkeit. Über den Vektor der effektiven und modifizierten Gesamtdehnung:

$$\{ \varepsilon'_n \} = \{ \varepsilon_n \} - \{ \varepsilon_n^{pl} \} - \{ \varepsilon_{n-1}^{cr} \} \quad (3.93)$$

wird eine äquivalente Vergleichsdehnung (in Anlehnung an Gleichung 3.84) berechnet:

$$\varepsilon_{e(cr)}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[ (\varepsilon'_x - \varepsilon'_y)^2 + (\varepsilon'_y - \varepsilon'_z)^2 + (\varepsilon'_z - \varepsilon'_x)^2 + \frac{3}{2} \cdot (\gamma'_{xy})^2 + \frac{3}{2} \cdot (\gamma'_{yz})^2 + \frac{3}{2} \cdot (\gamma'_{xz})^2 \right]^{1/2} \quad (3.94)$$

Die tiefgestellte Indizierung in der Gleichung 3.93 bezieht sich auf den jeweils betrachteten Zeitpunkt „n“. Die entsprechend zugehörige äquivalente Spannung ist definiert zu:

$$\sigma_{e(cr)} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{e(cr)}^t \quad (3.95)$$

darin sind:  $G = \text{Schubmodul} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$   
 $E = \text{Elastizitätsmodul}$   
 $\nu = \text{Querdehnzahl}$

Der zugehörige äquivalente Zuwachs der Kriechverzerrungen „ $\Delta\varepsilon^{cr}$ “ wird entsprechend einer skalaren Größe aus dem zuvor angegebenen einachsigen Kriechgesetz (Gleichung „b“ / Bild 3.47) unter Berücksichtigung der äquivalenten Spannung „ $\sigma_{e(cr)}$ “ berechnet. Die daraus resultierende inkrementelle Kriechverzerrung wird anschließend in einen vollständigen Dehnungstensor, nur mit Bezug auf die deviatorischen Anteile, umgewandelt (Annahme: Material ist während des Kriechens inkompressibel). Für den dreidimensionalen Fall ergeben sich daraus die nachfolgend angegebenen Verzerrungskomponenten:

$$\Delta \varepsilon_x^{cr} = \frac{\Delta \varepsilon^{cr}}{\varepsilon_{e(cr)}^t} \cdot \frac{(2 \cdot \varepsilon'_x - \varepsilon'_y - \varepsilon'_z)}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (3.96a)$$

$$\Delta \varepsilon_y^{cr} = \frac{\Delta \varepsilon^{cr}}{\varepsilon_{e(cr)}^t} \cdot \frac{(2 \cdot \varepsilon'_y - \varepsilon'_z - \varepsilon'_x)}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (3.96b)$$

$$\Delta \varepsilon_z^{cr} = -\Delta \varepsilon_x^{cr} - \Delta \varepsilon_y^{cr} \quad (3.96c)$$

$$\Delta \varepsilon_{xy}^{cr} = \frac{\Delta \varepsilon^{cr}}{\varepsilon_{e(cr)}^t} \cdot \frac{3}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma'_{xy} \quad (3.96d)$$

$$\Delta \varepsilon_{yz}^{cr} = \frac{\Delta \varepsilon^{cr}}{\varepsilon_{e(cr)}^t} \cdot \frac{3}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma'_{yz} \quad (3.96e)$$

$$\Delta \varepsilon_{xz}^{cr} = \frac{\Delta \varepsilon^{cr}}{\varepsilon_{e(cr)}^t} \cdot \frac{3}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma'_{xz} \quad (3.96f)$$

Die resultierenden elastischen Dehnungen und die Kriechdehnungen können abschließend berechnet werden zu:

$$\{ \varepsilon_n^{el} \} = \{ \varepsilon'_n \} - \{ \Delta \varepsilon^{cr} \} \quad (3.97)$$

$$\{ \varepsilon_n^{cr} \} = \{ \varepsilon_{n-1}^{cr} \} + \{ \Delta \varepsilon^{cr} \} \quad (3.98)$$

Die Spannungen basieren auf den effektiven, zum Zeitpunkt „ $n$ “ wirksamen Dehnungen. Damit liefert das Verfahren für eine Berechnung mit äußeren Kraftgrößen die korrekten Spannungen. Bei einem expliziten Integrationsverfahren unter Verwendung der Anfangssteifigkeitsmatrix beziehen sich Spannungen und Dehnungen jedoch zunächst immer auf den vorangegangenen Zeit- bzw. Iterationsschritt „ $n-1$ “. Für eine Berechnung mit Weggrößen resultieren daher „maximale“ Spannungskomponenten für die zum Zeitschritt „ $n$ “ zugehörigen Verschiebungen. Die „Anfangsspannungsmethode“, bzw. die Verwendung der Anfangssteifigkeitsmatrix, entspricht einer Linearisierung der materiellen Antwort bezüglich des anfänglichen Zustandes [14] – siehe hierzu Kapitel 4.2.

Für alle weiteren Berechnungen, bei denen nicht unmittelbar auf das hier vorgestellte Kriechverhalten hingewiesen wird und die keine Versuchsnachrechnungen darstellen – dies sind die ergänzenden Untersuchungen für das Ingenieurmodell im Kapitel 5.4 –, gelten die vereinfachten Annahmen, die der DIN 1045-1 [33] zugrunde liegen (Bild 3.38 und Gleichung 3.92). Das bedeutet, dass in diesem Fall die einachsige Spannungs-Dehnungs-Linie aus der DIN 1045-1 übernommen wird, mit dem „abfallenden Ast“ als materielle Konstante. Hinzu kommt, dass dann für den Höchstwert der Beton-Druckspannungen der Rechenwert „ $f_{c,u} = 0,85 \cdot f_{ck}$ “ angenommen wird. Das Bruchkriterium wird in Übereinstimmung mit dem Rechenwert „ $f_{c,u}$ “ reduziert.

### 3.2.6 Berechnungsbeispiel

Das vorgestellte Betonmodell im Finite-Elemente-Programm ANSYS wird nachfolgend angewendet, um exemplarisch den inneren Zerstörungsprozess und den dazugehörigen Span-

nungszustand innerhalb eines Druckversuches numerisch zu beschreiben – Bild 3.48. Entsprechend den bereits erwähnten Versuchen wird eine Betonscheibe mit den Abmessungen 200/200/50 mm betrachtet. Die Elementgröße ist einheitlich mit 10/10/5 mm für die benutzten Volumenelemente gewählt. Daraus ergeben sich für die FE Struktur 14046 Freiheitsgrade. Da es sich bei dem gewählten Beispiel um die Nachrechnung eines „Kleinversuches“ handelt, bei dem auch die lokale Spannungszunahme im Inneren des „Systems“ interessiert, wird im Gegensatz zum Kapitel 5 nicht mit einer aus Versuchen bereits abgeleiteten nichtlinearen Spannungs-Dehnungslinie (entsprechend Bild 3.38 oder 3.47) gearbeitet. Ausschließlich in diesem Beispiel wird ein ideal-elastisches – ideal-plastisches Materialgesetz, entsprechend dem Mohr-Coulomb Kriterium, angewendet. Damit ist ein Betonmodell, vorgestellt im Bild 3.16, vorgegeben.



**Bild 3.48:** Probe eines einachsigen Druckversuches nach der Versuchsdurchführung

Für die Materialkonstanten wird „ $E_c$ “ mit 33500 N/mm<sup>2</sup> und „ $\nu_c$ “ mit 0,2 berücksichtigt. Zur Definition der Festigkeitssteigerung unter mehrachsiger Druckbeanspruchung wird für die Zugfestigkeit „ $f_{ct} = 0,15 \cdot f_c$ “ und für die zweiachsige Druckbeanspruchung „ $f_{bc} = 1,2 \cdot f_c$ “ angenommen. Die genannten Festigkeitskonstanten werden an die zweiachsige Zugfestigkeit „ $f_{bt}$ “ und die zweiachsige Druckfestigkeit „ $f_{bc}$ “ angepasst. Daraus folgt die Funktion für die verwendete Fließfläche:

$$f(I_{1\sigma}, J_{2s}) = 0,213 \cdot I_{1\sigma} + \sqrt{J_{2s}} - 5,422 \quad (3.99)$$

Für den Dilatationswinkel „ $\phi_d$ “ nach Erreichen der Fließfläche wird in Anlehnung an Menetry [86] ein Winkel von 10° angenommen. Mit der Vorgabe der einachsigen Druckfestigkeit von „ $f_c = 36 \text{ N/mm}^2$ “ sind die Koeffizienten für das fünf Parametermodell mit:  $a_0 = 0,0827$ ,  $a_1 = -0,5513$ ,  $a_2 = -0,1337$  für die Extensionskurve „ $r_1$ “ und  $b_0 = 0,1266$ ,  $b_1 = -0,8259$ ,  $b_2 = -0,3314$  für die Kompressionskurve „ $r_2$ “ definiert. Zur Simulation der Querdehnungsbehinderung an der Lasteinleitung werden die in [72] angegebenen Schubspannungen verwendet (für den Bürstentyp II), die sich infolge des Biege widerstandes am Bürstenende, in der Kontakt-

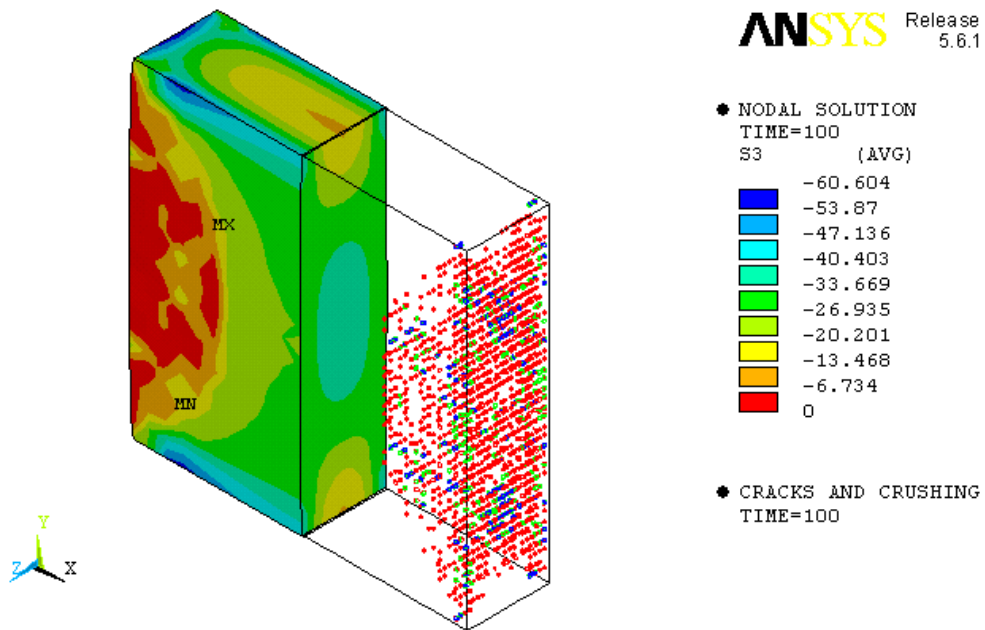
ebene zur Betonprobe parallel und senkrecht zur Lastebene einstellen. Entgegen allen anderen in dieser Arbeit durchgeführten FE-Berechnungen wird das Nachbruchverhalten entsprechend Kapitel 3.2.3 in diesem Beispiel rechnerisch nicht berücksichtigt. Einflüsse aus Kriechverformungen entsprechend Kapitel 3.2.5.3 werden ebenfalls (analog zum Kapitel 5.4) nicht erfasst. Die Belastung wird über Weggrößen gleichmäßig jeweils zur Hälfte auf zwei gegenüberliegenden Flächen bis zum Erreichen der maximalen einachsigen Kraft aufgebracht.

Auf Darstellungen zur resultierenden Spannungs-Dehnungs-Linie sowie auf eine Aufteilung der elastischen und plastischen Dehnungsbereiche wird verzichtet. Bei der Diskussion der Berechnungsergebnisse werden im Kapitel 5 – allerdings mit Bezug auf weitaus größere Systeme – noch zahlreiche Formen zur Beschreibung der Beanspruchungszustände genutzt. An dieser Stelle muss der Nachweis genügen, dass mit dem sehr vielseitig anwendbaren Betonmodell die Gefügezerstörung und der Versagenszustand einschließlich der zugehörigen Spannungsdarstellung anschaulich nachgestellt werden kann. Für diesen Nachweis wird in den Bildern 3.49 und 3.50 die symmetrische Belastung und das symmetrische System genutzt, um die Rechenergebnisse des Systems jeweils zur Hälfte innerhalb einer Grafik vergleichend gegenüberzustellen. Die linke Seite zeigt die Spannungsverhältnisse, während rechts die Gefügezerstörung durch symbolische Kennzeichnungen der gerissenen oder gebrochenen Integrationspunkte erkennbar wird.

Bild 3.49 zeigt die Verteilung der Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “. Eine gleichmäßig verteilte Spannungskonzentration im Mittelpunkt des Querschnittes wird deutlich. Die Strukturschädigung des nachgerechneten Systems lässt den Schiebungsbruch unter Druck erkennen. Die unter  $45^\circ$  verlaufenden Versagensebenen ausgehend vom Rand der Lasteinleitung sind gut erkennbar. Im Bild 3.50 ist die geschädigte Struktur nur für Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind (blaue Ringe), gemeinsam mit dem Druckversagen (rotes Oktaeder) dargestellt. Entgegen Bild 3.49 sind der Erst- und Zweittriss ausgeblendet. Das Bild vermittelt den Eindruck, dass der Bruch vom Druckversagen der Integrationspunkte abhängig ist. Eine Auswertung der vorangegangenen Lastschritte zeigte jedoch, dass dem Druckversagen zunächst immer ein oder mehrere Risszustände vorangegangen sind. Es wurde bereits erwähnt, dass die Druckfestigkeit eines spröden Materials ohne eine charakteristische Zugfestigkeit undenkbar ist. Das Modell ist somit in der Lage, dieses gegenseitig abhängige, physikalische Anstrengungsverhältnis bei der Entwicklung der Gefügezerstörung – nämlich dass die Rissbildung dem Druckversagen vorangeht – wiederzugeben. Es lassen sich die pfadabhängigen Steifigkeitsveränderungen im Inneren des Gefüges darstellen.

Kupfer berichtet in [72] über diesen ungleichen Spannungszustand. Mit der Anordnung der Bürsten zur Lasteinleitung bemühte man sich um eine nahezu zwanglose, und gleichmäßige Lasteintragung. Mess-Stellen am Rand der Prüfkörper und in der Mitte, sowohl horizontal als auch vertikal, zeigten jedoch unerwartet, dass sich bei einachsigen Druckversuchen trotz sehr großen Prüfaufwandes immer noch Unterschiede in den Dehnungen zwischen dem Rand und der Mitte einstellten. Nachschleifen der Bürstenoberfläche ergab eine erneute „Ungleichförmigkeit“. Es wurde immer die Tendenz beobachtet, dass die Probe sich mit zunehmender Last in der Mitte mehr verformt als am Rand. Dieses Verhalten ist erkennbar bzw. führt auf die höhere Spannungskonzentration in der Mitte der FE-Struktur. Die Berechnungsergebnisse können somit diese experimentell beobachteten Eigenschaften bestätigen – vice versa. Der Vergleich zwischen dem realen Versuch im Bild 3.48 mit den Berechnungsergebnissen zeigt bereits anschaulich eine real wirkende Versagensform der FE-Struktur. Es ist möglich, auf der Grundlage

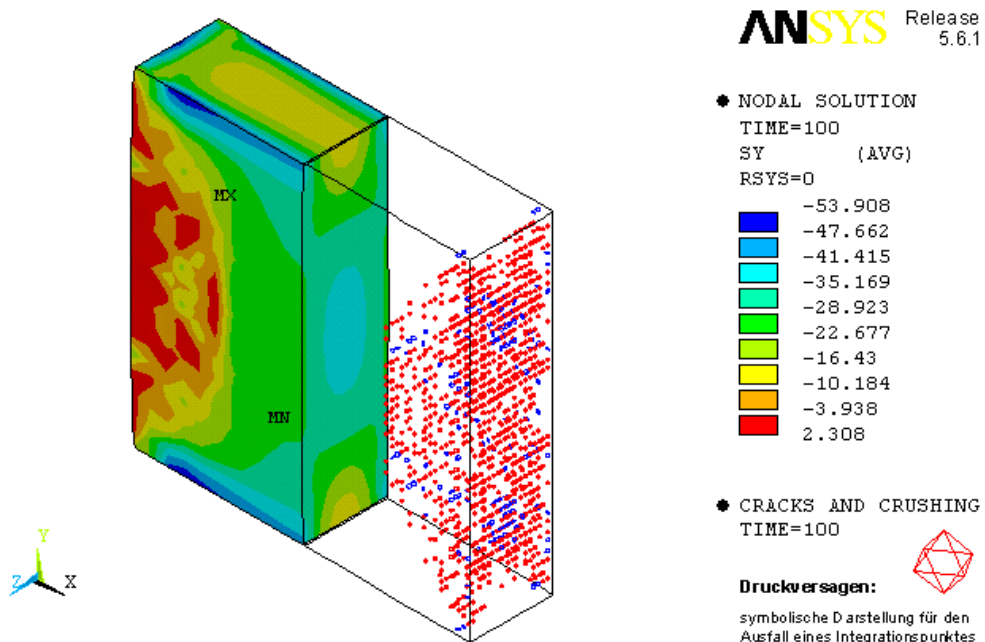
der gezeigten Ergebnisse die in Versuchen beobachteten Eigenschaften und Erkenntnisse wiederzuerkennen. Versuch und numerische Nachstellung bzw. Berechnung lassen sich gleichermaßen interpretieren.



Versuche von Kupfer an Betonscheiben unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung [DAfStb-Heft 229]

**Bild 3.49:** Nachrechnung eines einachsigen Druckversuches – Versuchskörper 20 / 20 / 5 cm

Linke Seite: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “ und rechte Seite: Strukturschädigung [Erstriss und Druckversagen = rot, Zweitriess = grün, in allen drei Richtungen gerissen  $\Rightarrow$  Drittriess = blau]



Versuche von Kupfer an Betonscheiben unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung [DAfStb-Heft 229]

**Bild 3.50:** Nachrechnung eines einachsigen Druckversuches – Versuchskörper 20 / 20 / 5 cm

Linke Seite: Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “ und rechte Seite: Schädigung im Detail [blau  $\Rightarrow$  Integrationspunkte in allen Richtungen gerissen, rot  $\Rightarrow$  Oktaeder kennzeichnet Druckversagen]

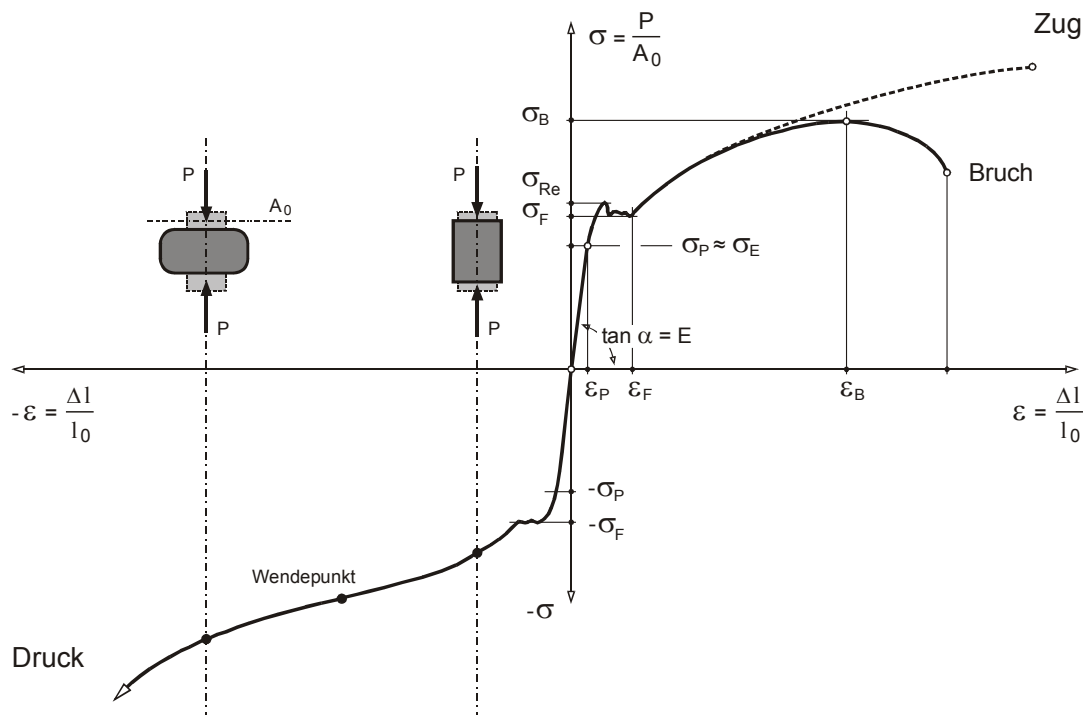


### 3.3 Nichtlineares, plastisches Materialverhalten für zähe Metalle

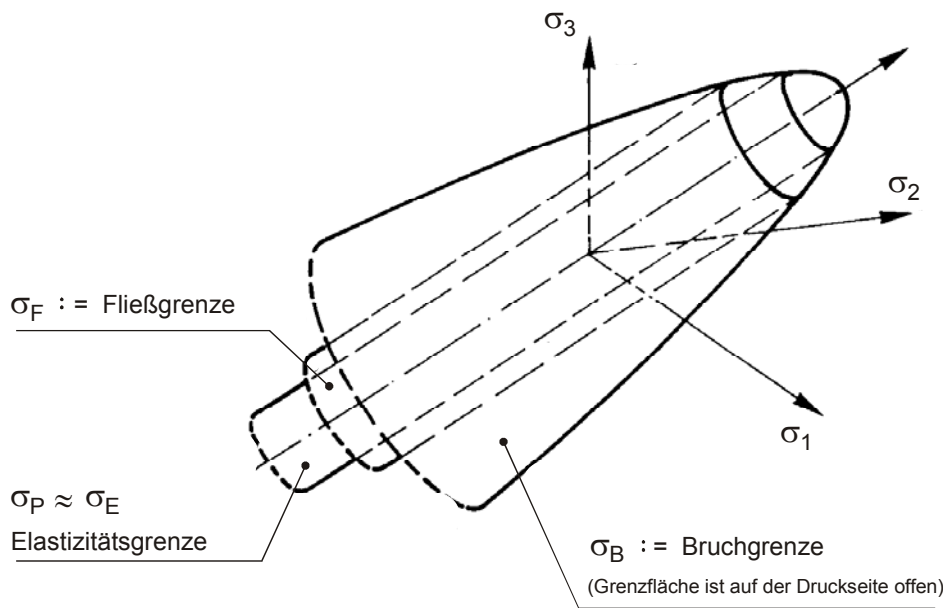
#### 3.3.1 Experimentelle Ergebnisse

Ein vollkommen verschiedenes Verformungsverhalten gegenüber dem spröden Werkstoff Beton weisen zähe und sich verfestigende Materialien auf, zu denen die Werkstoffe Baustahl und Betonstahl zählen. Das Verhalten eines zähen Baustahls (St37 bzw. S235J2G3) ist im Zugversuch schematisch im Bild 3.51 dargestellt. Zum Vergleich des materiellen Verhaltens – hinsichtlich der Druck- und Zugfestigkeit bei Metallen und zur Darstellung des generellen Unterschiedes zwischen zähen und spröden Werkstoffen – ist ergänzend zum Spannungs-Dehnungs-Diagramm für den Zugversuch das Diagramm eines Druckversuches mit eingetragen. Der dargestellte  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurvengzug zeigt zunächst für den Zugbereich eine nahezu stetige Zunahme bis zur Streckgrenze „ $\sigma_{Re}$ “, die den Fließbeginn, eine charakteristische Materialkonstante für zähes Material darstellt. Dies gilt entsprechend für den Druckversuch mit umgekehrten Vorzeichen, wobei das Druckfließen – als Quetschgrenze bezeichnet – i.d.R. aufgrund der Stauchung etwas höher liegend beobachtet werden kann ( $|\sigma_{Re}| < |\sigma_{F,d}|$ ). Die theoretischen elastischen Ingenieurkonstanten „ $E$ “ und „ $\nu$ “ sind für Druck- und Zugbelastung in etwa identisch.

In den bautechnisch zu berücksichtigenden Spannungsbereichen tritt der Druckbruch bei ausgeprägt zähem Material äußerst selten auf. Druckbruch ist aus Gründen eines Stabilitätsversagens, z.B. Knickens wenig relevant, da die Knickspannungen weit unter den aufnehmbaren Bruchspannungen liegen. Zähe Werkstoffe werden somit selten hinsichtlich ihrer Druckfestigkeit „ $\sigma_{dB}$ “ oder ihrer Bruchverformungskennwerte einer Prüfung (nach DIN 50106 – Druckversuche) unterzogen.



**Bild 3.51:** Schematische Darstellung der Druck- und Zugfestigkeit zäher Werkstoffe  
Spannungs-Dehnungs-Diagramm / Druck- und Zugversuch (S235J2G3), z. T. aus [64]



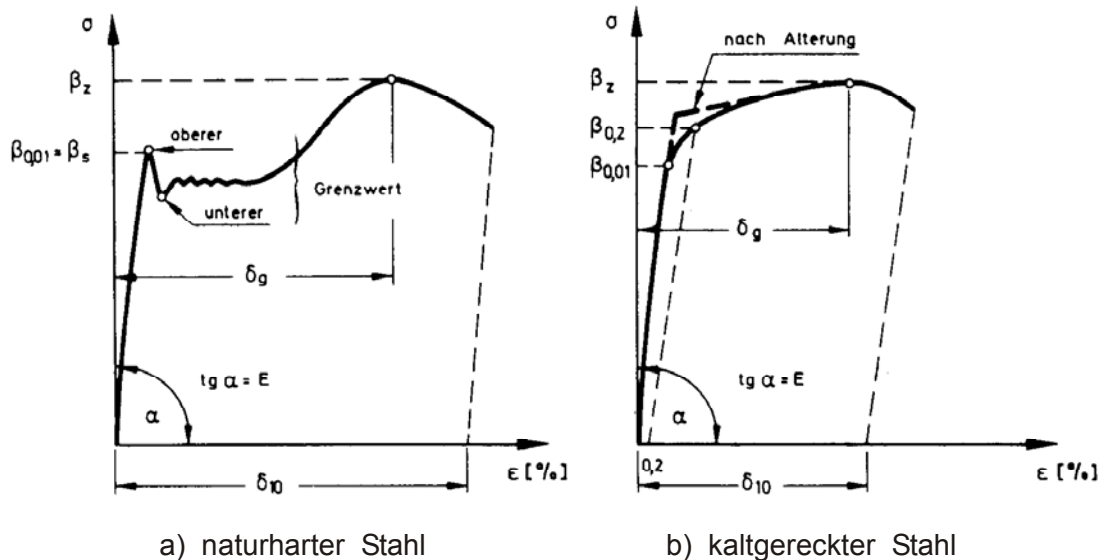
**Bild 3.52:** Schematische Darstellung der Druck- und Zugfestigkeit zäher Werkstoffe  
Räumliche Darstellung der Anstrengungsgrenzen im Spannungsraum, aus [93]

Statische Zugfestigkeitsprüfungen, bei denen die Last mit vorgegebener Geschwindigkeit langsam bis zu einem Höchstwert „ $\sigma_{zB}$ “ und darüber hinaus gesteigert wird, bis sich die Zugprobe dem Bruch unterwirft, liefern eine Reihe von charakteristischen Vorgängen. Drei für die Bestimmung der Festigkeitskennwerte aus bautechnischer Sicht wichtigen Vorgänge sollen für Baustahl und Betonstahl mit Bezug auf die angewendete Theorie kurz genannt werden.

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve (Bild 3.51) zeigt zunächst einen geradlinigen Anstieg und verlässt die Hooke'sche Gerade bei „ $\sigma_P$ “ noch unterhalb der Streckgrenze „ $\sigma_{Re}$ “. Diese Proportionalitätsgrenze „ $\sigma_P$ “, die etwa mit der tatsächlichen Elastizitätsgrenze „ $\sigma_E$ “ zusammenfällt, wird über vereinbarte Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz festgelegt (i.d.R.:  $0,8 \cdot \sigma_F$ ). Nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze werden die bleibenden, plastischen Dehnungen stetig größer bis zum Erreichen der Fließ- bzw. der oberen Streckgrenze „ $\sigma_{Re}$ “. Nach Ausbildung eines kleinen, vom Hersteller garantierten Höhepunktes wird der Zugstab vollkommen bildsam, d.h. er lässt sich ohne weitere Kraftzunahme bzw. ohne zusätzliche Energiezufuhr über ein ausgeprägtes Fließplateau verlängern – Bild 3.51. Das Fließen wird ermöglicht durch Änderungen im kristallinen Gefüge des Stahls und ist v.a. abhängig von seinem Kohlenstoffgehalt. Grundsätzlich können die Festigkeits- und Verformungseigenschaften durch den Kohlenstoffgehalt – evtl. noch Mangangehalt – und durch die Herstellungsart bestimmt werden. Als pauschale Regel gilt: mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt steigt die Festigkeit und der Stahl wird härter aber auch spröder. Aus dem Verlust der Zähigkeit resultiert zugleich eine geringere Verformungsfähigkeit.

Bild 3.53 zeigt idealisierte Spannungs-Dehnungs-Linien für einen naturharten Stahl mit nahezu regelmäßigem Gefüge, der i.d.R. als Konstruktionsstahl verwendet wird und für einen kaltgereckten Stahl, den man häufig für Betonstahl mit gerippter oder profilierter Oberfläche herstellt (Betonstahl wird nahezu mit jeder Werkstoffbeschaffenheit hergestellt – also auch unbehandelt aber auch warmverformt mit den Eigenschaften nach Bild 3.53a). Der Nenndurchmesser (bei

Rippenstahl über das Gewicht des Stabes ermittelt), vor allem aber die Probenlänge sind aus Vergleichsgründen festgelegt, da die Dehnungsgrößen nicht von der Länge unabhängig sind (vgl. hierzu die Ausführungen zum ebenfalls nicht vom System bzw. der Länge unabhängigen Druckfestigkeitsverhalten bei Betonprüfungen – Bild 3.35a).



**Bild 3.53:** Symbolische Spannungs-Dehnungs-Linien einachsiger Zugversuche, aus [65]

Die rechnerische „elastische Grenze“ wird durch einen Spannungswert definiert, der nach Entlastung zu einer bleibenden Dehnung von 0,01% führt. Nach dem Ausfließen eines naturharten Stahls am Ende des Umlagerungsprozesses beginnt die Arbeitslinie wieder zu steigen und der Werkstoff erfährt eine Verfestigung. Die stattfindende Umlagerung im Gefüge während des Fließvorganges eines naturharten Stahls – das Ende des Fließbereichs liegt etwa bei einer Dehnung von 2% – kann durchaus äußerlich beobachtet werden. Ein glänzend polierter Stahl wird plötzlich matt und auf der Oberfläche entsteht ein regelmäßiges System aus Linien, die etwa 45° zur Längs- bzw. Lastachse geneigt sind – es sind die von Lüders entdeckten „Fließfiguren“ (1854). Kaltgereckte Stähle haben im Allgemeinen keine ausgeprägte Streckgrenze sondern zeigen einen gleichförmigen Übergang von der „elastischen Grenze“ in den Fließzustand mit sofortiger Verfestigung. Per Definition wird daher ein Nennwert der Streckgrenze, eine technische Streckgrenze, bei einer Spannung mit 0,2% bleibender Dehnung eingeführt – Bild 3.53.

Nach Überschreiten der maximal aufnehmbaren Zugfestigkeit „ $\sigma_B$ “ bzw. „ $\beta_z$ “, allgemein als Bruchfestigkeit bezeichnet, kommt es zur Einschnürung eines kurzen Bereiches innerhalb der gesamten Probenlänge mit einer beachtlichen Verringerung des ursprünglichen Querschnittes (ebenfalls an lokaler Stelle, ähnlich dem Phänomen bei Druckversuchen von Beton). Die Brucheinschnürung an der Bruchstelle kann 60% der ursprünglichen Querschnittsfläche oder weniger betragen. Die Bruchdehnungen „ $\delta_{10}$ “ (Bild 3.53) können je nach Güte des Stahls 15% bis 25% bezogen auf eine fest definierte Ausgangs- bzw. Beobachtungslänge („ $10 \cdot d_0$ “) erreichen. Die zur maximalen Zugfestigkeit gehörende Dehnung wird als Gleichmaßdehnung „ $\delta_g$ “ und der Unterschied bzw. die Abweichung zwischen Gleichmaßdehnung „ $\delta_g$ “ und Bruchdehnung „ $\delta_{10}$ “ als Einschnürdehnung bezeichnet.

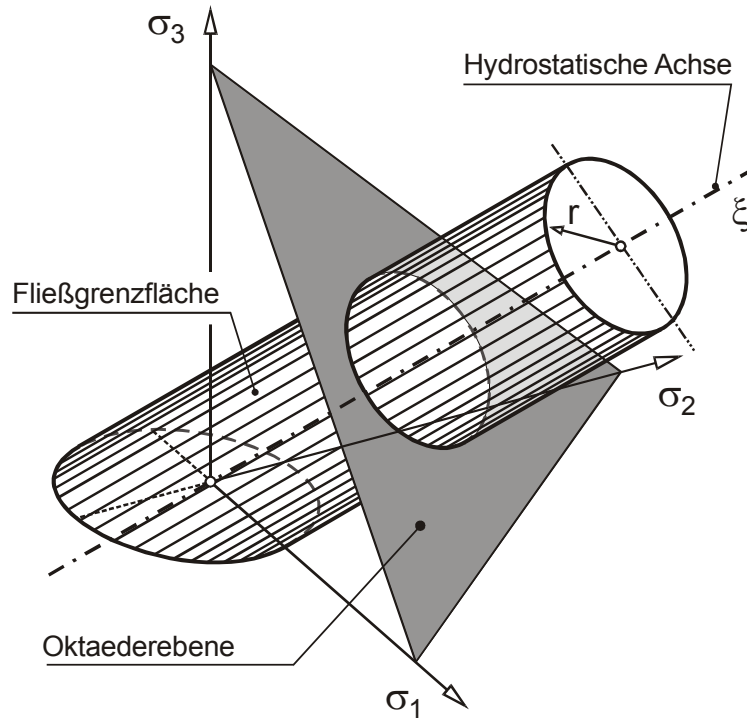
Stahlkonstruktionen werden in der Regel auf einachsigen Zug und Druck sowie auf Schub beansprucht. Die (Grund-)Kennwerte des Werkstoffes Stahl können aus dem zuvor besprochenen einachsigen Zugversuch entnommen werden. Dennoch kann der Werkstoff nicht als ideal homogenes Material bezeichnet werden. Seine einzelnen Kristallkörner sind anisotrop angeordnet. Auch infolge mechanischer Einwirkungen ergeben sich in Walzrichtung eines Baustahls andere Festigkeitseigenschaften als quer dazu (für Betonstabstahl mit eineindeutig zugewiesener Belastungsrichtung wird dies festigkeitssteigernd eingesetzt). Die regellose Lagerung der Kristalle bewirkt jedoch, dass an einem Werkstück keine Richtungen unmittelbar ausgezeichnet sind. Die materiellen Abweichungen sind im Allgemeinen für die Praxis ohne Bedeutung – von Ausnahmen abgesehen, die zumeist die konstruktive Durchbildung betreffen (z.B. Schweißen unter Beachtung des Walzmusters an den Nahtflanken; oder eine örtlich konzentrierte Wärmezufuhr, die eine äußerst inhomogene Wärmebehandlung beinhaltet; usw.). Bild 3.52 zeigt die drei zuvor genannten charakteristischen Kennwerte im bekannten dreidimensionalen Spannungsraum, nämlich die Proportionalitäts- bzw. Elastizitätsgrenze „ $\sigma_P \approx \sigma_E$ “, die Fließgrenze „ $\sigma_{Re}$ “ und das Erreichen der maximalen Zugfestigkeit „ $\sigma_B$ “, auch als Bruchgrenze bezeichnet (zur Darstellung im Spannungsraum vgl. auch die Definition des Bruchkriteriums für Beton in den Bildern 3.16 bis 3.18). Die im Bild 3.52 gezeigten drei Anstrengungsgrenzen für die zuvor am einachsigen Zugversuch besprochenen charakteristischen Festigkeitskennwerte lassen sich als räumliche Grenzflächen in Anlehnung an das zuvor besprochene Bruchkriterium für den Werkstoff Beton darstellen.

Im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurvenzug – Bild 3.51 – zeigt der Werkstoff Stahl nach Durchlaufen des Fließbereiches für beide Beanspruchungszustände „Zug“ und „Druck“ eine Verfestigung. Ein Zerbrechen in einzelne Stücke tritt bei Stahl in der Regel nicht ein. Darüber hinaus haben experimentelle Untersuchungen gezeigt, dass ein Volumenfließen bei Metallen nicht auftritt bzw. klein gegenüber den elastischen Anteilen der Volumenänderung ist. Petersen berichtet über Experimente (von Bridgman aus dem Jahr 1964 [93]), bei denen Metallproben unter hydrostatischen Spannungen bis 500000 bar ( $\cong 5000 \text{ kN/cm}^2$ ) ihre elastischen Eigenschaften unverändert beibehalten haben. Die in der Plastizitätstheorie übliche Trennung zwischen einer rein elastischen Volumenänderung für die hydrostatischen Spannungszustände und der plastischen Verzerungsanteile nur für die deviatorischen Verzerrungs-Spannungs-Zustände ist somit eine sinnvolle und bewährte Annahme für metallische Werkstoffe. Petersen untermauert diesen Sachverhalt indem er auf die im Bild 3.52 eingezeichnete „spitzkuppelförmige Rotationsfläche“ ähnlich einer Kappe verweist. Spannungszustände, die in die Spitze dieser Bruchgrenzfläche fallen – also im Zentrum innerhalb des Elastizitätszylinders liegen – verursachen kein Fließen. Sie führen zu einem verformungslosen Trennbruch, d.h. zu einem Sprödbbruch.

### 3.3.2 Fließ- bzw. Versagensbedingung und Fließregel (Yield Criterion and Flow Rule)

Wird mit Hilfe der vorangestellten Ausführungen (über das materielle Benehmen des Werkstoffes Stahl) weiter unterstellt, dass bei zähem werkstoffmechanischem Verhalten ein Versagen durch Schubbeanspruchungen eintritt, noch bevor sich eine zum Zerreißen führende Dehnbarkeit einstellen kann (von ca. 15% bis 20%), so liefert die „Gestaltänderungsenergiehypothese“ von v. Mises (bzw.: Huber, v. Mises, Hencky) ein überzeugendes und experimentell ausrei-

chend abgesichertes Anstrengungskriterium. Die Gestaltänderungsenergiehypothese leitet sich von der Fließbedingung nach v. Mises (1913) ab und ist eine reine Gleithypothese. Sie berücksichtigt für einen isotropen Körper die mittleren Hauptspannungskomponenten, d.h. den hydrostatischen Spannungszustand. Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, dass in einer Gleitfläche die Normalspannung keinen Einfluss auf den Fließbeginn hat, sondern nur die deviatorischen Spannungskomponenten (d.h. die Schubspannungen). Die v. Mises'sche Fließbedingung ist schematisch im Bild 3.54 dargestellt.



**Bild 3.54:** Fließbedingung nach „v. Mises“ im Hauptspannungsraum, [64]

In allgemeiner Form lässt sich die Fließbedingung, deren Mantelfläche im Hauptspannungsraum einen Kreiszylinder beschreibt, mit der zweiten Invarianten „ $J_{2s}$ “ des Spannungsdeviators angeben:

$$f(J_{2s}) = J_{2s} - k^2 \equiv 0 \quad (3.100)$$

Mit den Komponenten der Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  und Einsetzen in Gleichung 3.100 ergibt sich:

$$\frac{1}{6} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k^2 \quad (3.101)$$

In Gleichung 3.100 ist „ $k^2$ “ die Fließspannung bzw. Materialkonstante für eine reine Schubbeanspruchung (d.h. Fließspannung: „ $\tau_F = k$ “). Gleichung 3.100, dargestellt im Bild 3.54, zeigt anschaulich, dass der Fließzylinder bzw. die Fließgrenzfläche nach v. Mises ausschließlich eine von der zweiten Invarianten der Deviatorebene abhängige Funktion bildet, mit der Äquisektrix als Raumdiagonale bzw. Drehachse. Mit den im Kapitel 3.2.1 angegebenen Vereinfachungen kann der Radius der Mantelfläche des Zylinders durch Einsetzen der Fließspannung „ $\tau_F$ “ in die Gleichung 3.50b (Seite 43) unmittelbar angegeben werden:

$$r = \sqrt{2} \cdot \tau_F \quad (3.102)$$

Für den einachsigen Spannungszustand mit „ $\sigma_1 = \sigma_{Re} = \sigma_V$ “ und „ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ “, der entsprechend Bild 3.53a einem einachsigen Zugversuch gleichgestellt ist, ergibt sich durch Einsetzen der Spannungskomponenten in Gleichung 3.101 die Fließspannung zu:

$$\tau_F = k = \frac{\sigma_V}{\sqrt{3}} \quad \text{bzw.:} \quad \sigma_V = \sqrt{3} \cdot \tau_F \quad (3.103)$$

Der einachsige wie auch der mehrachsige Spannungszustand führen nach der Gestaltänderungsenergiehypothese zu identischen Anstrengungen, wenn sie die gleiche Gestaltänderungsarbeit ergeben, d.h. das Fließen tritt dann ein, wenn der mehrachsige Spannungszustand so beschaffen ist, dass sich „ $\sigma_V = \sigma_{Re}$ “ ergibt. Die Normen und Vorschriften des Stahlbaus machen von dieser Hypothese vielfach Gebrauch.

Somit wird das Einleiten der plastischen Formänderung über die Fließbedingung bestimmt. In allgemeiner Formulierung für den mehrachsigen Spannungszustand wird durch Einsetzen der aktuellen Spannungskomponenten in die Fließfunktion, Gleichung 3.100, eine äquivalente Vergleichsspannung „ $\sigma_e$ “ berechnet. In allgemeiner Form ergibt sich:

$$\sigma_e = f(\{\sigma\}) \quad (3.104)$$

mit:  $(\{\sigma\}) =$  allgemeiner Spannungsvektor  
abhängig von der Fließfunktion

Die Anwendung der Fließbedingung nach v. Mises, Gleichung 3.100, in Matrixschreibweise liefert:

$$\sigma_e = \left[ \frac{3}{2} \cdot \{\mathbf{s}\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{s}\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.105)$$

darin sind:

$\{\mathbf{s}\} =$  Vektor der Deviatorspannungen

$\{\mathbf{s}\} = \{\sigma\} - \sigma_m \cdot [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$

Nimmt die äquivalente Vergleichsspannung den vom Material abhängigen Fließparameter bzw. Fließspannung „ $k \equiv \sigma_k$ “ an, d.h. wird:

$$f(\{\sigma\}) = \sigma_k \quad (3.106)$$

bzw. Einsetzen der Fließbedingung nach v. Mises, Gleichung 3.100, liefert dazu analog:

$$f = \left[ \frac{3}{2} \cdot \{\mathbf{s}\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{s}\} \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_k = 0, \quad (3.107)$$

so ist der Materialzustand plastisch und entsprechend können sich plastische Verzerrungen einstellen. Wird die äquivalente Vergleichsspannung „ $\sigma_e$ “ kleiner berechnet als der Fließparameter „ $\sigma_k$ “, so wird angezeigt, dass das Material seine elastischen Eigenschaften beibehält.

Der berechnete Spannungspunkt liegt innerhalb der Fließfläche des Zylinders, Bild 3.54. Wird „ $\sigma_e$ “ größer als der Fließparameter, kann die äquivalente Vergleichsspannung die Fließfläche niemals verlassen, da in diesem Fall die zugehörigen plastischen Verzerrungsanteile sofort berechnet werden und in Abhängigkeit dieser Anteile die Spannungen auf die Fließfläche, Bild 3.54, wieder reduziert werden.

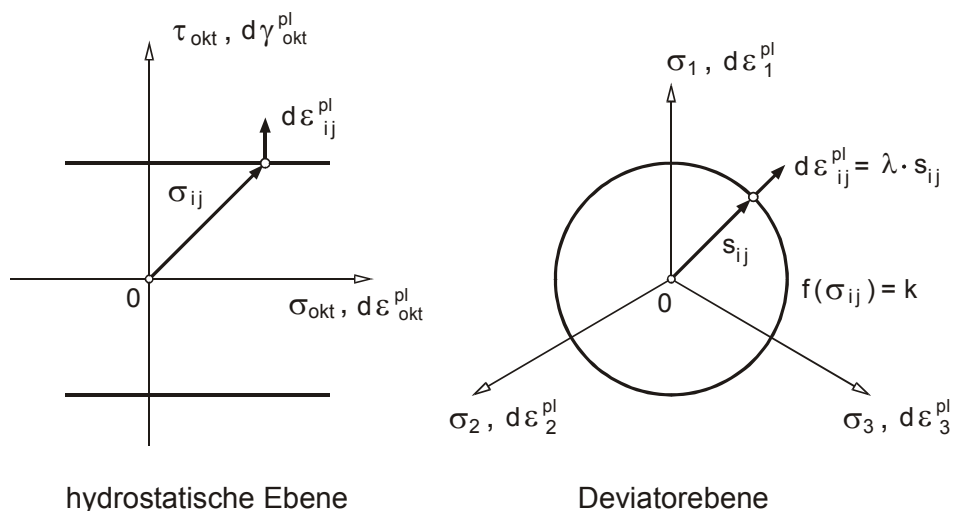
Im Fall des plastischen Fließens bestimmt die Fließregel die Richtung des plastischen Verzerrungszuwachses. Die Fließregel lautet allgemein:

$$\{ d\varepsilon^{pl} \} = \lambda \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.108)$$

darin sind:  $\lambda$  = plastischer Proportionalitätsfaktor (zur Berechnung der Größe des plastischen Dehnungszuwachses)

$g$  = Funktion der Spannungen, wird auch als plastisches Potential bezeichnet (Das Potential bestimmt die Richtung der plastischen Verzerrungskomponenten)

Gleichung 3.108 wird als Normalitätsgesetz bezeichnet. Ist  $g(\sigma_{ij})$  identisch mit der Fließfunktion, d.h.  $g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij})$  wie es normalerweise für metallische Werkstoffe angenommen wird, so wird Gleichung 3.108 als assoziierte Fließregel bezeichnet. Die Richtung der plastischen Verzerrungen stehen dann normal zur Fließoberfläche. Der Zusammenhang bzw. die Verbindung zwischen den plastischen Verzerrungsinkrementen  $d\varepsilon_{ij}^{pl}$  und der Fließfunktion  $f = J_{2s}$  nach v. Mises ist grafisch im Bild 3.55 dargestellt.



**Bild 3.55:** Assoziierte Fließregel mit der Fließfunktion nach v. Mises, aus [26]

Gleichung 3.108 kann vereinfacht in Abhängigkeit der einzelnen Verzerrungszuwächse mit den zugehörigen Spannungskomponenten ausgedrückt werden. Die Fließfunktion nach v. Mises, Gleichung 3.100, liefert das plastische Potential in einfacher und allgemeiner Form zu:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \cdot s_{ij} \quad (3.109)$$

und führt zur Darstellung in Abhängigkeit der getrennten Spannungskomponenten:

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_x^{pl}}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y^{pl}}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z^{pl}}{s_z} = \frac{d\gamma_{yz}^{pl}}{2 \cdot \tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^{pl}}{2 \cdot \tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}^{pl}}{2 \cdot \tau_{xy}} \quad (3.110)$$

Es war Prandtl 1924, der diese Spannungs-Dehnungsbeziehung für den ebenen Dehnungszustand für elastisch – ideal-plastisches Material vorschlug. 1930 wurde dieser Vorschlag von Reuss in die oben angegebene allgemeinere Formulierung, für den dreidimensionalen Fall (Gleichung 3.110) erweitert. Das Stoffgesetz von Prandtl-Reuss beruht somit auf den Annahmen, dass die Verzerrungen additiv in einen elastischen und plastischen Anteil aufgespalten werden können, die plastischen Verzerrungskomponenten proportional zum Spannungsdeviator sind und entsprechend der Zuwachs der plastischen Dehnungen unter Volumenkonstanz erfolgt. Diese Voraussetzungen sind nicht mehr erfüllt, wenn im Fall einer Fließbedingung vom Drucker-Prager-Typ, angewendet im Berechnungsbeispiel Kapitel 3.2.6 und erläutert im Kapitel 3.2.5.2 für die Berechnungskategorie „plastic-fracturing theory“, mit „ $\phi \neq \phi_f$ “ eine nicht assoziierte Fließregel angewendet wird. Die Definitionen in den nachfolgenden Abschnitten werden deshalb für „ $g(\sigma_{ij}) \neq f(\sigma_{ij})$ “ allgemein gültig angegeben.

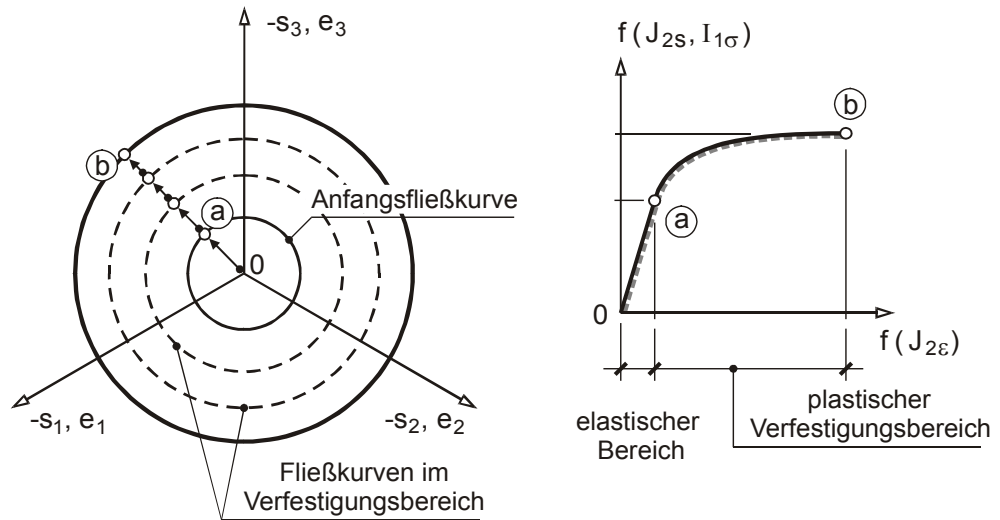
### 3.3.3 Verfestigungsmodell (Hardening Rule)

Bei metallischen Werkstoffen, die sich insbesondere durch ihre im Bild 3.53 dargestellten verfestigenden Eigenschaften auszeichnen, treten plastische Verzerrungsanteile für Spannungszustände auf, welche die Bruchbedingung bzw. Fließgrenze noch nicht erfüllen. Das Verfestigungsgesetz beschreibt in diesem Fall; auf welche Weise die Fließbedingung bzw. Anfangsfließfläche, Gleichung 3.100, während des plastischen Fließens modifiziert werden soll.

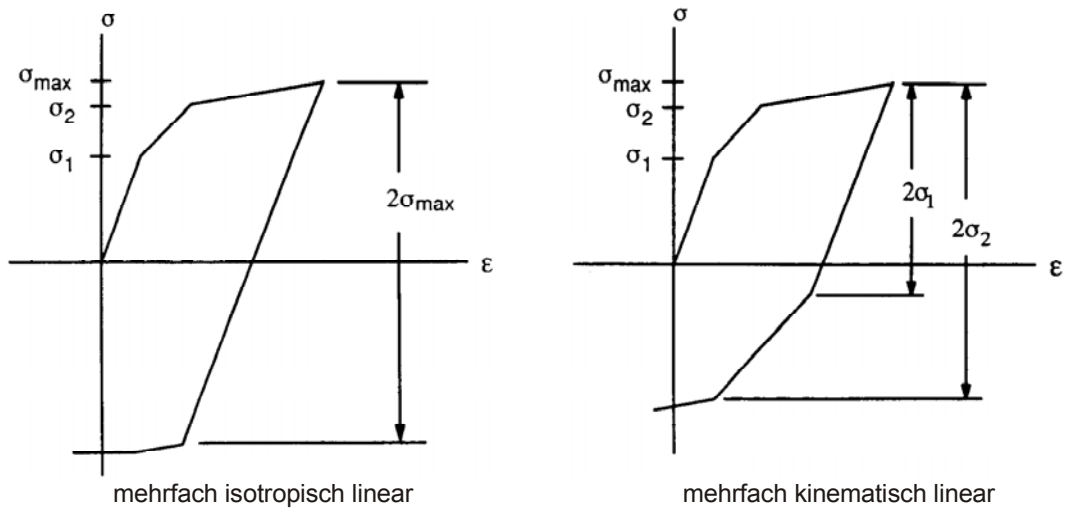
Mit dem isotropen und dem kinematischen Verfestigungsmodell sind im verwendeten Programm ANSYS zwei Modelle verfügbar. Das isotrope Verfestigungsmodell, im Bild 3.56 dargestellt, weitet sich während des plastischen Fließens mit Bezug auf die Raumdiagonale (Äquisektrix) gleichmäßig aus. Bei einer numerischen Wechselbelastung treten dann keine plastischen Verformungsdifferenzen entsprechend der Gegenüberstellung im Bild 3.57 auf (dargestellt für den Sonderfall einer einachsigen Beanspruchung).

Bei der kinematischen Verfestigung bleibt die Größe der Fließfunktion erhalten, eine Aufweitung der Fließfläche wird vermieden. Statt dessen wird mit zunehmenden plastischen Verzerrungen eine translatorische Verschiebung der Fließfläche im Hauptspannungsraum ermöglicht, Bild 3.58. Um die Lage der translatorisch verschobenen Fließfläche im Spannungsraum zu beschreiben, wird zusätzlich zum Fließkriterium, zur Fließregel und zur Verfestigungsfunktion ein Richtungsvektor definiert. Diese interne Variable wird als Translationsvektor oder „Backstress“-Vektor  $\{\alpha\}$  bezeichnet.

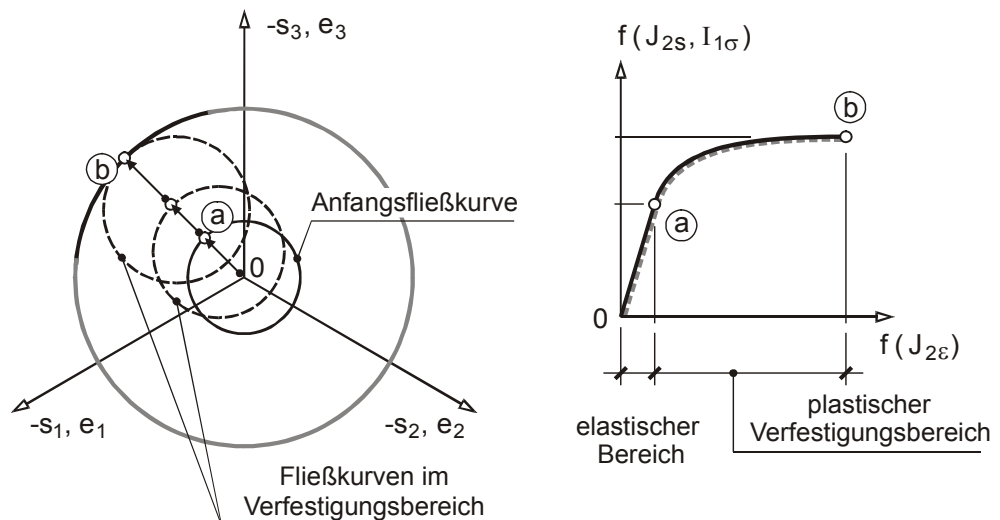




**Bild 3.56:** Plastisches Materialverhalten – das Modell der isotropen Verfestigung



**Bild 3.57:** Änderung der Fließgrenzen für isotrope und kinematische Verfestigung – für den Sonderfall einer einachsigen Beanspruchung, aus [13]



**Bild 3.58:** Plastisches Materialverhalten – das Modell der kinematischen Verfestigung

Im Gegensatz zum isotropen Verfestigungsmodell kann mit dem kinematischen Verfestigungsmodell das Spannungs-Verformungs-Verhalten von Materialien unter zyklischen Spannungsänderungsverläufen numerisch wiedergegeben werden (z.B. zur Berücksichtigung des Bauschinger-Effektes). Das isotrope Verfestigungsverhalten hat den Nachteil, dass diese bekannten Versuchsbeobachtungen in Bezug auf das Materialverhalten nicht ausreichend genug beschrieben werden können.

### 3.3.4 Formänderung infolge plastischer Dehnungen (Plastic Strain Increment)

Nachfolgend wird auf der Grundlage der vorangestellten praktischen und theoretischen Voraussetzungen das numerische Verfahren zur Berechnung einer nichtlinearen, plastischen Materialantwort allgemeingültig beschrieben. Die äquivalente Vergleichsspannung wird zunächst unter Anwendung der elastischen Materialkomponenten berechnet. Damit wird die Spannung auf die elastischen Dehnungen bezogen:

$$\{ \sigma \} = [ C ] \cdot \{ \varepsilon^{el} \} \quad (3.111)$$

darin sind:

$$\begin{aligned} \{ \sigma \} &= \text{Spannungsvektor} \\ &= \left[ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \right]^T \\ [ C ] &= \text{Elastizitätstensor} \\ \{ \varepsilon^{el} \} &= \text{Vektor der elastischen Dehnungen} \\ &= \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \right\}^T \end{aligned}$$

Schubverzerrungen werden dabei nicht als tensorwertige Verzerrungen betrachtet, sondern allgemein als Ingenieurdehnmaß. Im Fall eines bereits eingetretenen nichtlinearen Materialverhaltens werden die in Gleichung 3.111 angegebenen elastischen Dehnungen berechnet zu:

$$\{ \varepsilon^{el} \} = \{ \varepsilon \} - \{ \varepsilon^{pl} \} - \{ \varepsilon^{cr} \} \quad (3.112)$$

darin sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{el} &= \text{elastische Dehnungskomponenten} \\ \varepsilon &= \text{Gesamtdehnungen} \\ \varepsilon^{pl} &= \text{plastische Dehnungskomponenten} \\ \varepsilon^{cr} &= \text{Komponenten der Kriechdehnungen} \end{aligned}$$

Plastische Dehnungen müssen auftreten, wenn der Vergleichswert außerhalb der Fließfläche liegt. Über die daraus resultierenden Dehnungen wird der Spannungszustand soweit reduziert, dass die Bedingungen des Fließkriteriums, Gleichung 3.106, wieder erfüllt sind [14 / Seite 426]. Die Fließbedingung nach Gleichung 3.100 unter Verwendung bzw. nach Integration eines Verfestigungsgesetzes zur Definition der zulässigen Änderung der Fließoberfläche bekommt dann folgende allgemein gültige Gestalt:

$$f(\{\sigma\}, \kappa, \{\alpha\}) = 0 \quad (3.113)$$

darin sind:  $\kappa$  = plastische Arbeit  
 $\{\alpha\}$  = translatorisch verschobene Fließoberfläche

Der Parameter  $\kappa$ , ein Skalar, und der Backstress-Vektor  $\{\alpha\}$  sind im Verfestigungsbereich veränderlich. Sie werden als interne oder Zustandsvariablen bezeichnet und müssen in jedem Integrationspunkt eines finiten Elementes abgespeichert und ständig aktualisiert werden. Die Fließspannung wird zu einer Funktion der plastischen Arbeit pro Volumeneinheit, integriert über die geschichtliche (zeitliche) Belastung:

$$\kappa = \int \{\sigma\}^T \cdot [M] \cdot \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (3.114)$$

Auch die translatorische Verschiebung der Fließfläche ist abhängig von der Belastungsgeschichte:

$$\{\alpha\} = \int \hat{C} \cdot \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (3.115)$$

darin sind:  $\hat{C}$  = Materialparameter  
 $\{\alpha\}$  = „Backstress“ Vektor (liefert den Bezug zum Zentrum der Fließfläche)

Durch Differenzieren der Gleichung 3.113 erhält man die Konsistenzbedingung:

$$dF = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [M] \cdot \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \cdot d\kappa + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\}^T \cdot [M] \cdot \{d\alpha\} = 0 \quad (3.116)$$

mit:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ s y m. & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Die inkrementelle Zerlegung von Gleichung 3.114 liefert den differentiellen Zuwachs:

$$d\kappa = \{\sigma\}^T \cdot [M] \cdot \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (3.117)$$

und entsprechend wird aus Gleichung 3.115:

$$\{d\alpha\} = \hat{C} \cdot \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (3.118)$$

Einsetzen der Gleichungen 3.117 und 3.118 in Gleichung 3.116 ergibt:

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{d\boldsymbol{\sigma}\} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \kappa} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}\} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \right\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}\} = 0 \quad (3.119)$$

Die Spannungsinkremente (d.h. der Zuwachs) lassen sich über die elastische Spannungs-Dehnungsbeziehung berechnen:

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{el}\} \quad (3.120)$$

darin sind:  $[\mathbf{C}] = \text{Elastizitätstensor}$

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{el}\} = \{d\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}\} \quad (3.121)$$

da die Gesamtdehnungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgeteilt werden können. Ersetzen der Gleichung 3.108, aus Kapitel 3.3.2, durch die Gleichungen 3.119 und 3.121 und die Kombination der Gleichungen 3.119, 3.120 und 3.121 liefert den plastischen Proportionalitätsfaktor:

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\mathbf{C}] \cdot \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}}{-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \kappa} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \right\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\mathbf{C}] \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}} \quad (3.122)$$

Die Größe des „augenblicklichen“ plastischen Verzerrungszuwachses wird damit eine Funktion vom gesamten Dehnungszuwachs, des aktuellen Spannungszustandes sowie der gewählten Fließfunktion mit zugehörigem plastischen Potential. Der inkrementelle (augenblickliche) Verzerrungszuwachs (zur Modifikation der Datenverwaltung) kann abschließend mit der Fließregel, Gleichung 3.108 im Kapitel 3.3.2, berechnet werden.

### 3.3.5 Numerische Anwendung und Integrationsverfahren (Implementation)

Die Lösung erfolgt allgemein mit der Euler-Rückwärts-Methode, einem impliziten Integrationsverfahren. Bei diesem Integrationsverfahren ist eine Iteration für die auf das Ende eines jeden inkrementellen Zeitschrittes bezogene Spannung erforderlich. Das Verfahren gewährleistet, dass die jeweils aktuell berechneten Spannungen, Dehnungen und internen Geschichtsvariablen genaue Bildpunkte auf der Fließoberfläche für jeden inkrementellen Zeitschritt darstellen. Um dies zu erreichen, werden zwei Iterationszyklen benötigt:

- Iterationen über alle Elementgleichungen, mit denen die Korrekturen des Vektors der Knotenpunktverschiebungen ermittelt werden (siehe Kapitel 4.5):

$${}^t K \cdot \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}$$

- Während der Gleichgewichtsiteration wird eine zusätzliche numerische Integration zur Berechnung der Spannungen durchgeführt, d.h. mit einer zusätzlichen Iteration im Verlauf der Integration von

$${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)} = {}^t\sigma + \int_{{}^t\varepsilon}^{t+\Delta t\varepsilon^{(i-1)}} \mathbf{C}^{ep} d\varepsilon$$

werden die exakten Spannungen  ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)}$  berechnet [14].

Der Algorithmus, der ein stabiles Gleichgewicht auch für die diskreten Zwischenpunkte innerhalb des Lösungsintervalls sucht, kann schrittweise angegeben werden [13]:

- 1.) Berechnen des Materialparameters „ $\sigma_k$ “ (aus Gleichung 3.106:  $f(\{\sigma\}) = \sigma_k$ ) für den aktuellen Zeitschritt „ $n$ “ (evtl. unter Berücksichtigung der zugehörigen, aktuellen Temperatur).
- 2.) Berechnung der Spannungen für eine anfängliche Versuchs-Dehnung  $\{\varepsilon^{tr}\}$ , bestehend aus der Gesamtdehnung abzüglich der plastischen Dehnungskomponenten vom vorangegangenen Zeitschritt „ $n-1$ “. Dabei werden Einflüsse aus Temperatur oder anderen Effekten vernachlässigt:

$$\{\varepsilon_n^{tr}\} = \{\varepsilon_n\} - \{\varepsilon_{(n-1)}^{pl}\} \quad (3.123)$$

Mit den berechneten anfänglichen Versuchs-Dehnungen können die Spannungen angegeben werden zu:

$$\{\sigma^{tr}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\varepsilon^{tr}\} \quad (3.124)$$

- 3.) Einsetzen dieses Spannungszustandes in Gleichung 3.104 liefert die äquivalente Vergleichsspannung „ $\sigma_e$ “. Liegt „ $\sigma_e$ “ innerhalb der Fließfläche, bzw. ist kleiner als der im 1. Schritt berechnete Materialparameter „ $\sigma_k$ “ so resultiert daraus eine elastische Materialantwort. Es wird kein Zuwachs der plastischen Dehnungsinkremente berechnet.
- 4.) Verlässt die berechnete Vergleichsspannung bzw. der Spannungsbildpunkt die Fließfunktion, d.h. ist die Vergleichsspannung größer als der zur Dehnung gehörende Fließparameter, so wird der plastische Proportionalitätsfaktor „ $\lambda$ “ über eine lokale Newton-Raphson Iteration bestimmt [108].
- 5.) Der aktuelle, inkrementelle Zuwachs der plastischen Verzerrungskomponenten  $\{\Delta\varepsilon^{pl}\}$  wird mit der Fließregel (Gleichung 3.108) durch Verknüpfen des Proportionalitätsfaktors mit den deviatorischen (Gesamt-) Spannungskomponenten berechnet. Mit dem berechneten Zuwachs lassen sich die plastischen Verzerrungskomponenten:

$$\{\varepsilon_n^{pl}\} = \{\varepsilon_{(n-1)}^{pl}\} + \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (3.125)$$

mit:  $\{\varepsilon_n^{pl}\} =$  gegenwärtige plastische Dehnungen

und die entsprechend zugehörigen elastischen Dehnungskomponenten:

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon^{tr}\} - \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (3.126)$$

mit:  $\{ \varepsilon^{el} \}$  = elastische Dehnungen

aktualisieren.

Die neu berechneten elastischen Dehnungskomponenten liefern unmittelbar den augenblicklichen Spannungszustand:

$$\{ \sigma \} = [ C ] \cdot \{ \varepsilon^{el} \} \quad (3.127)$$

mit:  $\{ \sigma \}$  = Spannungen

- 6.) Über die Berechnung des inkrementellen Zuwachses der plastischen Arbeit „ $\Delta \kappa$ “ (Gleichung 3.117) und des Backstress-Vektors  $\{ \Delta \alpha \}$  mit Bezug auf das Zentrum der Fließfläche (Gleichung 3.118) können die neuen internen Geschichtsvariablen unter Berücksichtigung des vorangegangenen Zeitschrittes  $(n-1)$  aktualisiert werden:

$$\kappa_n = \kappa_{(n-1)} + \Delta \kappa \quad (3.128)$$

und:

$$\{ \alpha_n \} = \{ \alpha_{(n-1)} \} + \{ \Delta \alpha \} \quad (3.129)$$

- 7.) Zur Bewertung und Darstellung der Berechnungsergebnisse wird eine äquivalente Vergleichsdehnung „ $\hat{\varepsilon}^{pl}$ “, ein äquivalentes plastisches Verzerrungsinkrement „ $\Delta \hat{\varepsilon}^{pl}$ “ und ein äquivalenter Spannungsparameter „ $\hat{\sigma}_e^{pl}$ “ berechnet. Das äquivalente plastische Dehnungsinkrement ergibt sich zu:

$$\Delta \hat{\varepsilon}^{pl} = \left( \frac{2}{3} \cdot \{ \Delta \varepsilon^{pl} \}^T \cdot [ M ] \cdot \{ \Delta \varepsilon^{pl} \} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.130)$$

Der gesamte, von der Belastungsgeschichte abhängige, äquivalente plastische Dehnungszuwachs lässt sich somit in Abhängigkeit des vorangegangenen Zeitschrittes  $(n-1)$  angeben:

$$\hat{\varepsilon}_n^{pl} = \hat{\varepsilon}_{(n-1)}^{pl} + \Delta \hat{\varepsilon}^{pl} \quad (3.131)$$

darin sind:  $\hat{\varepsilon}_n^{pl}$  = äquivalente plastische Dehnungen des aktuellen Zeitschrittes „ $n$ “

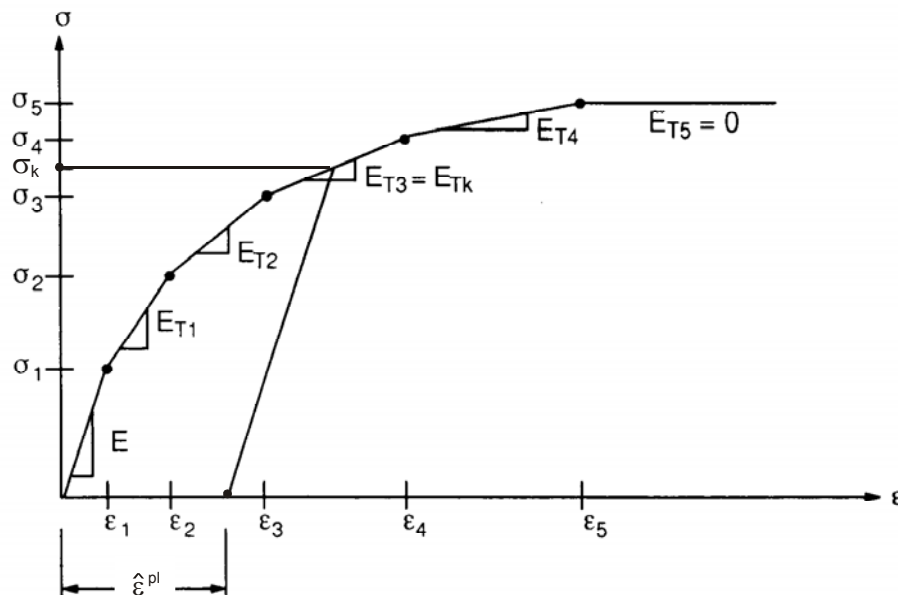
$\hat{\varepsilon}_{(n-1)}^{pl}$  = äquivalente plastische Dehnungen des Zeitschrittes „ $(n-1)$ “

Bei der Verwendung der Fließbedingung nach v. Mises mit isotropem Verfestigungsmodell – entsprechend Gleichung 3.100 – ist zu beachten, dass bei dem Integrationsverfahren mit der Euler Rückwärts-Methode im 4. Schritt ein radialer Rückgabemechanismus nach (Krieg [127]) benutzt wird.

Mit der Durchführung von vier voneinander unterschiedlichen Versuchen mit eingebauten Steifenkreuzen sollte die verbesserte statische Durchstanztragfähigkeit im Auflagerbereich einer Betonflachdecke in Verbundbauweise untersucht werden. Die Belastung der Versuchskörper bestand nicht aus einer ausgeprägt ständig wechselnden und somit als zyklisch zu bezeichnen-

den Belastungsänderung. Wechsel zwischen verschiedenen Beanspruchungszuständen aus Druck- und Zugspannungen in Teilbereichen der Stahlkonstruktion konnten sich somit nicht einstellen. Für die Nachrechnung ist daher das isotrope Verfestigungsmodell eine ausreichende Näherung für das Materialverhalten der eingebauten Stahlkonstruktion. Dieses Modell benutzt die mit Gleichung 3.100 vorgestellte Fließbedingung nach v. Mises mit einer assoziierten Fließregel. Die äquivalente Vergleichsspannung „ $\sigma_e$ “ berechnet sich nach Gleichung 3.105. Das Fließkriterium ergibt sich analog, abhängig von dem Material- bzw. Fließparameter „ $\sigma_k$ “:

$$f = \left[ \frac{3}{2} \cdot \{s\}^T \cdot [M] \cdot \{s\} \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_k = 0 \quad (3.132)$$



**Bild 3.59:** Einachsiges Materialverhalten für das Stoffgesetz „MISO“ mit Festlegung des Material- bzw. Fließparameters „ $\sigma_k$ “, aus [13]

Der Materialparameter „ $\sigma_k$ “ ist bei isotroper Verfestigung ein Maß für die gesamte zu leistende plastische Arbeit. Da sich die Fließfläche bei isotroper Verfestigung stetig und gleichmäßig aufweitet, kann der Fließparameter unmittelbar über den plastischen Gesamt-Verzerrungszustand „ $\hat{\varepsilon}^{pl}$ “ aus Gleichung 3.131 angegeben werden. Für die Definition des Werkstoffverhaltens genügt ein im Bild 3.59 schematisch dargestelltes Spannungs-Dehnungs-Diagramm ähnlich den zuvor besprochenen, aus einachsigen Zugversuchen gewonnenen  $\sigma$  -  $\varepsilon$  - Linien.

### 3.4 Nachgiebige Verdübelung mit diskreten Einzelverbindungselementen

Die Versuchsnachrechnungen für das neue System sollen unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens der Baustoffe Stahl und Beton und unter Einbeziehung des veränderlichen Last-Verformungsverhaltens der verwendeten Verbundmittel in geeigneter Weise durchgeführt werden. Die vollständige Eingliederung des Stahlprofils (d.h. einbetoniert) in die Vollbetonplatte setzt zunächst eine geschlossene Kontaktformulierung für alle Fugenbereiche zwischen den Stahl- und Betonquerschnittsflächen voraus. Wird a priori unterstellt, dass zwischen Beton- und Stahlprofilflächen Reibungseffekte im Zuge anwachsender Beanspruchungen – evtl. geprägt durch begleitende Belastungs- und Entlastungsprozesse – allmählich ihren Einfluss auf

die Tragfähigkeit des Gesamtsystems verlieren (mit Bezug auf örtliche Einflüsse gilt dies natürlich nicht uneingeschränkt) bilden die in den Versuchen eingebauten Kopfbolzendübel die einzige zuverlässige Schubverbindung zwischen den beiden Konstruktionsteilen, bestehend aus dem Stahlprofil und der Betonplatte.

Die Traglast von Kopfbolzendübeln in Vollbetonplatten wurde international mit Push-Out Versuchen experimentell bestimmt. Die daraus gewonnenen Schlupf-Kraft-Beziehungen sind im Prinzip ein Maß der Tragfähigkeit und unter Beachtung besonderer Einschränkungen auch ein Maß der Verformbarkeit. Die aus den Versuchen resultierenden Ergebnisse dürfen jedoch nicht als charakteristische Kennlinie des jeweils verwendeten Kopfbolzens ( $\varnothing 19$  mm oder  $\varnothing 22$  mm) betrachtet werden. Einflüsse hinsichtlich der Anordnung und Anzahl der Dübel, eine zunehmende Betonfestigkeit, das horizontal oder vertikal orientierte Betonieren und die Herstellung der Versuchskörper wie auch die konstruktive Durchbildung des Versuches verfälschen die gemessenen Last-Verschiebungsbeziehungen. Hinsichtlich dieser Abhängigkeiten geben Roik und Hanswille in [99] mit Bezug auf die „Bochumer“ Scherversuche einige Zusammenhänge an. Sie benennen u.a. unterschiedliche Schubbewehrungsgrade, durch die im örtlichen Lasteinleitungsbereich der Dübel die Spaltzugkräfte abgedeckt werden müssen sowie eine unzureichende Verdichtung des Betons im Bereich des Dübelfußes als mögliche Gründe für die Streuungen bei Versuchsergebnissen.

Obwohl in dieser Arbeit nicht das lokale Bruchverhalten, sondern die Verformungseigenschaften für ein zuverlässiges Umlagerungsverhalten innerhalb einer FE-Struktur interessieren, machen die von Roik und Hanswille genannten Hinweise darauf aufmerksam, dass eine Last-Verformungscharakteristik – wie sie Push-Out Versuchen zu entnehmen ist – nicht uneingeschränkt auf nichtlineare Federelemente in Form von Wertepaaren zur Definition eines vergleichenden Polygonzuges angewendet werden kann. Schlupf-Kraft-Beziehungen, aus Push-Out Versuchen entnommen, erfassen das Verformungsverhalten des Dübelschaftes und des umgebenden Betons zusammen in einer Kurve. Die direkte Übernahme wird Dopplungen des Verformungsverhaltens innerhalb der Verbundfuge zur Folge haben.

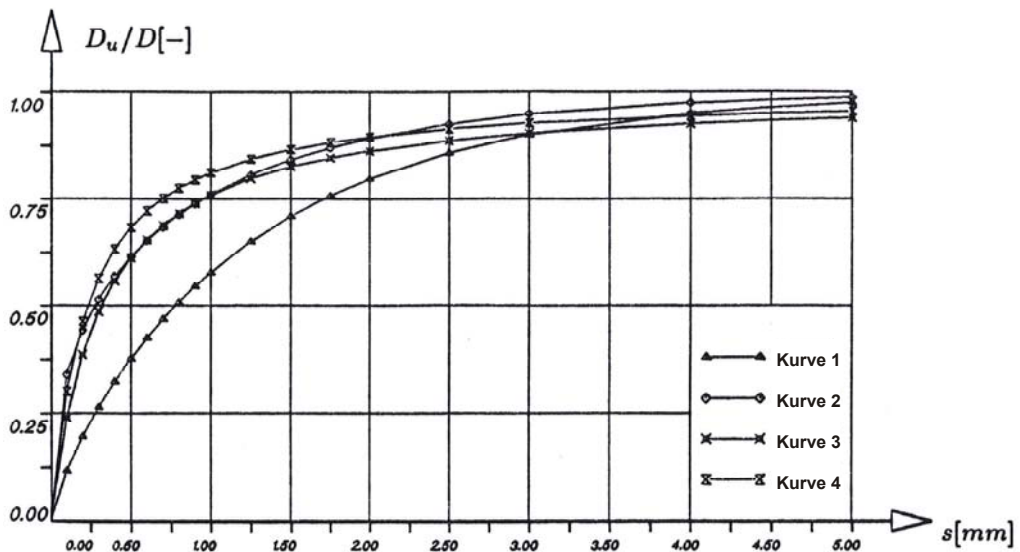
Cunze Oliveira Lanna gibt in [30] eine Gegenüberstellung verschiedener Schlupf-Kraft-Beziehungen für in Vollbetonplatten verankerte Kopfbolzendübel an, mit denen die Ergebnisse entsprechender Push-Out Versuche gut wiedergegeben werden können. Die an Versuchsdaten approximierten Gleichungen sind im Bild 3.60 vergleichend gegenübergestellt. Die darin u.a. dargestellte Exponentialfunktion für „Kurve 2“, auf der Grundlage zahlreicher Versuche von Ollgaard, Slutter und Fisher in [89] vorgeschlagen, zeigt für geringe Dübelkräfte gegenüber den anderen Kurven eine hohe Anfangssteifigkeit. Diese zunächst große Steifigkeit unter niedriger Dübelbeanspruchung kann den mit Beginn der Rissbildung einsetzenden Umlagerungsprozess mit Hinweis auf die vorangestellten kritischen Anmerkungen und mit Bezug auf die Einleitung zu diesem Kapitel auf Seite 26 – nämlich die örtliche Dübelverformung analog zur Formulierung des Betonmodells im Sinne einer statistischen Verteilung zu erfassen – numerisch am zuverlässigsten wiedergeben. Unter Anwendung eines geeigneten, vom Material abhängigen Mittelwertes für den Tragwiderstand „ $R_m$ “ kann der Finite-Elemente-Formulierung damit eine ausreichend zuverlässige, charakteristische Kraft-Verschiebungsbedingung zur Simulation des von der Zunahme der Belastung abhängigen Umlagerungsverhaltens zugewiesen werden.

Die genannte, mittlere Tragfähigkeit des Kopfbolzendübels „ $R_m$ “ richtet sich nach der Versagensart der Verbundfuge. In [106] werden auf der Grundlage einer statistischen Auswertung



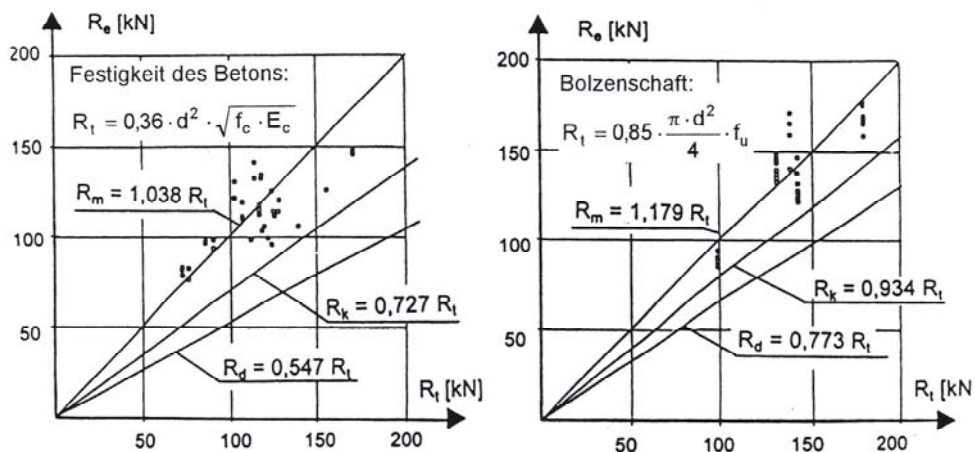
von Versuchsergebnissen Mittelwerte der Tragfähigkeiten abhängig von der Betongüte, vom Elastizitätsmodul des Betons und von der Zugfestigkeit des Bolzenmaterials angegeben. Mit der Zugfestigkeit „ $f_u = 450 \text{ N/mm}^2$ “ für den Bolzenschaft und der einachsigen Druckfestigkeit „ $f_c$ “, kann mit der aus [106] bekannten kritischen Sichtung ausreichend zuverlässig dokumentierter Versuchsdaten eine geeignete Verformungscharakteristik, abhängig von der maßgebenden Versagensart und der daraus resultierenden Traglast „ $D_{u, \text{Bild 3.60}} \equiv R_{e, \text{Bild 3.61}}$ “, angenommen werden.

Kurve 1	Kurve 2	Kurve 3	Kurve 4
$D = D_u (1 - e^{-0.7s})^{0.8}$	$D = D_u (1 - e^{-0.7s})^{0.4}$	$D = D_u \frac{3.15s}{1 + 3.15s}$	$D = D_u \frac{4.30s}{1 + 4.30s}$



**Bild 3.60:** Schlupf-Kraft-Beziehungen für Kopfbolzendübel verankert in Vollbetonplatten, [30]

Im Bild 3.61 sind Mittelwerte, charakteristische Werte und die Bemessungswerte mit Bezug auf Versuchsauswertungen grafisch dargestellt. Die numerischen Beziehungen, abhängig vom Material des Betons oder des Dübels, sind angegeben. Die Übernahme der darin maßgebend werdenden Mittelwerte „ $R_m$ “ ist im Kapitel 5 für die Versuchsnachrechnungen berücksichtigt. Wegen der größeren Anfangssteifigkeit wird Kurve 2 – Bild 3.60 – gegenüber den anderen Kurven bevorzugt.



**Bild 3.61:** Beurteilung von Testergebnissen für Kopfbolzendübel in Vollbetonplatten, aus [106]

## 4. Zur Methode der finiten Elemente

### 4.1 Randwertproblem

Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie werden entweder als Differentialgleichungen oder als Variationsformulierung in integraler Form angegeben. Die Differentialgleichungen folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Würfel, Variationsformulierungen dagegen aus Energiebetrachtungen. Aus der Sicht numerischer Lösungsverfahren haben sich die Variationsformulierungen als vorteilhaft erwiesen. Dies gilt sowohl für die exakten bzw. „analytischen Lösungen“, z.B. mit dem Ritz-Verfahren, als auch für rein „numerische Lösungsmethoden“ mit finiten Elementen.

Bei jedem exakten – exakt im Sinne der Theorie – oder einem Näherungs-Lösungsverfahren der Elastizitätstheorie müssen immer folgende physikalische Bedingungen erfüllt sein:

- Die „**Gleichgewichtsbetrachtungen**“, d.h. die statische Zugehörigkeit zwischen Kräften und Spannungen: Unter der Voraussetzung der Symmetrie des Spannungstensors folgen aus dieser Bedingung drei Gleichungen für die sechs unbekanntes Spannungen „ $\sigma_{ij}$ “.
- Die „**Kompatibilitätsbedingungen**“, d.h. die kinematische Verträglichkeit von Verschiebungen und Verzerrungen: Mit Hilfe der drei Verschiebungen „ $u_i$ “ lassen sich insgesamt sechs Verzerrungszustände definieren. Somit können mit sechs Gleichungen insgesamt neun unbekannte Größen „ $\varepsilon_{ij}$ “ und „ $u_i$ “ einander zugeordnet werden.
- Das „**Stoffgesetz**“, d.h. die Spannungs-Dehnungsbeziehungen des eingesetzten Materials: Aus dem verallgemeinerten Hooke'schen Gesetz und entsprechenden Ingenieurkonstanten (oder mit den zwei Lamékonstanten „ $\mu_{(v,E)}$ “ und „ $\lambda_{(v,E)}$ “ für isotropes Material) folgen weitere sechs Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntes Spannungen „ $\sigma_{ij}$ “, abhängig von den zugeordneten Verzerrungen „ $\varepsilon_{ij}$ “.

Zur Berechnung der insgesamt fünfzehn unbekanntes Größen, das sind die drei Verschiebungen „ $u_i$ “ sowie die sechs Spannungen „ $\sigma_{ij}$ “ mit den zugehörigen Verzerrungen „ $\varepsilon_{ij}$ “, stehen somit genau fünfzehn Grundfunktionen zur Verfügung. Sie haben ihre Gültigkeit für den einfachsten Fall, einem isotropen Materialverhalten, gelten aber auch für den allgemeineren Fall der Anisotropie. Dabei besteht Unabhängigkeit zwischen den Gleichungen für die Materialeigenschaften und den notwendigen Bedingungen für das Gleichgewicht und die Verträglichkeit.

Eine übersichtliche symbolische Darstellung enthält Bild 4.1. Bild 4.1a zeigt einen beliebig geformten, materiellen Körper mit seinem Volumen „ $V$ “ und seiner Oberfläche „ $\Gamma$ “. Der Teil der Oberfläche, auf den Flächenkräfte „ $q$ “ einwirken, ist mit „ $\Gamma_Q$ “ gekennzeichnet, der Bereich mit einwirkenden Verschiebungsgrößen „ $u$ “ mit „ $\Gamma_U$ “. Die aus den Oberflächenkräften und den Randverschiebungen resultierenden Beanspruchungen im Körper müssen die nachfolgenden statischen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen:

$$L^T \sigma + p = 0 \quad \in V \quad \text{statische Gleichgewichtsbedingung} \quad \begin{matrix} 3 \text{ Gleichungen} \\ (4.1a) \end{matrix}$$

$$T^T \sigma = q \quad \in \Gamma_Q \quad \text{Gleichgewicht für Belastung}$$

$$\varepsilon = L u \quad \in V \quad \text{kinematische Verträglichkeit} \quad \begin{matrix} 6 \text{ Gleichungen} \\ (4.1b) \end{matrix}$$

Um die statische Aufgabe für eine allgemeine dreidimensionale Struktur vollständig zu beschreiben, werden die neun Gleichungen durch weitere sechs materialabhängige Beziehungen entsprechend den dreidimensionalen Modellgleichungen aus Kapitel 3 – für Beton unter Berücksichtigung des richtungsabhängigen Last-Verformungsverhaltens infolge Rissbildung und einschließlich Druckversagens – ergänzt:

$$\sigma = C \varepsilon \quad \text{Hooke'sche Gleichung} \quad \begin{matrix} 6 \text{ Gleichungen} \\ (4.1c) \end{matrix}$$

mit den bekannten Vektoren:

$$\sigma^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]$$

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]$$

$$u^T = [u_x, u_y, u_z]$$

der Transformationsmatrix:

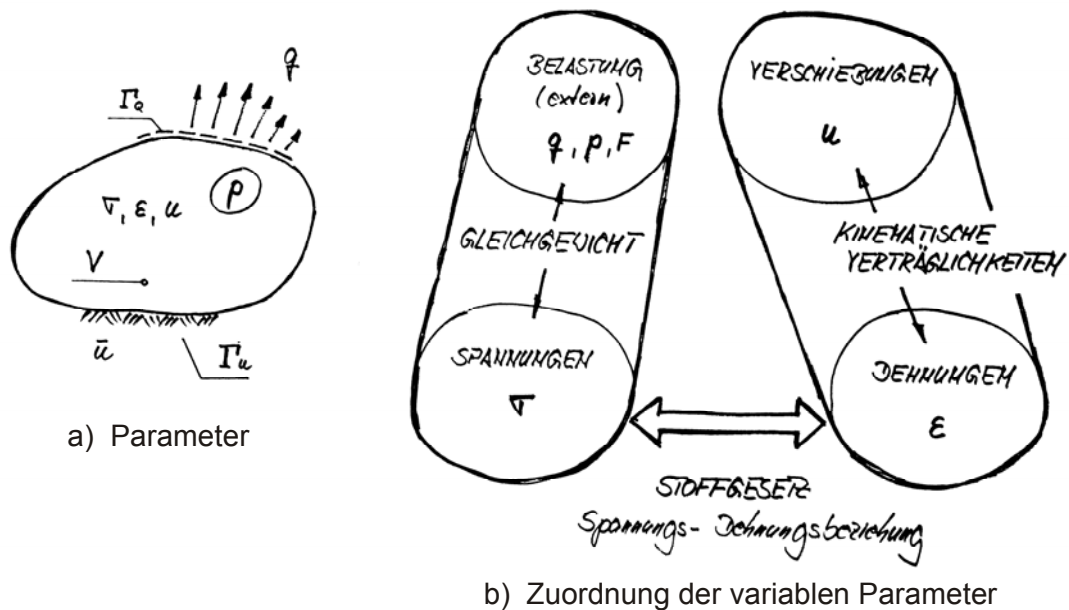
$$T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & n_z & n_y \\ n_z & 0 & n_x \end{bmatrix}$$

und dem linearen Operator bzw. der Differentialmatrix:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Auch für den Idealfall, also für isotropes Material, sind diese dreidimensionalen Gleichungen der Elastizitätstheorie nur für Sonderfälle der Geometrie (Struktur- und Systemgeometrie) und der Belastung analytisch lösbar. Diese Aussage ist zunächst unabhängig davon, ob eine Lösung über eine Ableitung der Differentialgleichung in den Verschiebungen oder den Spannungen gefunden werden soll oder ob eine gemischte Formulierung bevorzugt wird. In der Regel werden numerische Lösungsmethoden eingesetzt.

Eine übersichtliche symbolische Darstellung aller Variablen der dreidimensionalen Gleichungen für eine statische, allgemeine Analyse enthält Bild 4.1b.



**Bild 4.1:** Grundsätze der Mechanik und die Zugehörigkeit der variablen Parameter

Durch Eliminieren der sechs Verzerrungs- und sechs Spannungsgrößen aus den Gleichungen 4.1 (a bis c) ergibt sich, abhängig von einem vorgegebenen Verschiebungsfeld „ $\bar{u}$ “ auf dem Rand der materiellen Struktur, eine allgemeine Darstellung der statischen Aufgabe,

als „**Randwertproblem der Elastostatik**“ bezeichnet:

$$L^T C L u = - p \quad \in V \quad \text{Gleichgewicht für das Volumenelement } V \quad (4.2a)$$

$$u = \bar{u} \quad \in \Gamma_u \quad \text{Verschiebung } \bar{u} \text{ auf der Teiloberfläche } \Gamma_u \quad (4.2b)$$

$$T^T C L u = q \quad \in \Gamma_Q \quad \text{Kräfte } q \text{ auf der Teiloberfläche } \Gamma_Q \quad (4.2c)$$

Für die Bezeichnung “Randwertproblem” ist kennzeichnend, dass die Lösung für einen beliebigen Punkt im Inneren der Struktur von den Werten für jeden Punkt auf dem Rand der Struktur abhängig ist.

## 4.2 Linearisierung der schwachen Formulierung

Die Lösung des vorliegenden speziellen Randwertproblems unter Einbeziehung des elastisch-plastischen Deformationsverhaltens des Materials und unter Berücksichtigung der gesamten Belastungsgeschichte soll im Kapitel 5 nicht über eine Differentialgleichung in der herkömmlichen Weise verallgemeinert werden. Sie wird mit der Methode der finiten Elemente in integraler Form als Energiegleichung – der „schwachen Form der Differentialgleichung“ – angegeben [88].

Beschränkt man sich zunächst auf die Elastizitätstheorie, so vereinigt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen („die linearisierte Darstellung der schwachen Formulierung“, aus [18]) alle Forderungen in sich, die bei der Berechnung eines Problems der Festkörper- und Strukturmechanik erfüllt werden müssen. Es ist ein grundlegendes Axiom der Mechanik, dass sich in allen Fällen als gültig erweist und aus dem sich alle wichtigen Sätze der Mechanik herleiten lassen. Das Prinzip sagt aus: Befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, ist für beliebige, kompatible, virtuelle, auf den Körper einwirkende Verschiebungen „ $\delta u$ “ die gesamte innere virtuelle Arbeit gleich der gesamten äußeren virtuellen Arbeit.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lautet damit:

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (4.3)$$

oder vollständig ausgeschrieben:

$$\int_V \sigma^T \cdot \delta \varepsilon \, dV = \int_V p^T \cdot \delta u \, dV + \int_\Gamma q^T \cdot \delta u + \sum F^T \cdot \delta u \quad (4.4)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines elastischen Körpers und dient der allgemeinen Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen für finite Elemente [14]. Unter den nachfolgenden Voraussetzungen gilt diese Formulierung für ein beliebiges Stoffgesetz, unabhängig davon, ob sich im Zuge der Berechnung elastische oder elastisch-plastische Formänderungen einstellen:

- Es existiert ein Gleichgewichtszustand für die jeweiligen Verschiebungen.
- Die Verschiebungen müssen geometrisch möglich sein, dies bedeutet die Forderung nach der Eindeutigkeit und Stetigkeit.
- Die Verschiebungen müssen zu den Randbedingungen des Körpers verträglich sein.
- Während der virtuellen Verschiebungen werden die Kräfte und Spannungen als konstant, d.h. unabhängig von den Verschiebungen angenommen (Kräfte und Spannungen sind konservative Größen).

Damit kann das Variationszeichen „ $\delta$ “, das die virtuellen Verschiebungen kennzeichnet, als Variationssymbol für ein Funktional im Sinne der Variationsrechnung betrachtet werden. Setzt man das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz, Gleichung 4.1c, als Materialgleichung des elastischen Körpers voraus, folgt:

$$\partial \cdot \left\{ \int_V \varepsilon^T \cdot C \cdot \varepsilon \, dV - \int_V p^T \cdot u \, dV - \int_\Gamma q^T \cdot u \, d\Gamma - \sum F^T \cdot u \right\} = 0 \quad (4.5)$$

Die Gleichung 4.5 zeigt anschaulich, dass für alle zulässigen virtuellen Verschiebungen eines Körpers aus seiner Gleichgewichtslage heraus die Variation des Klammerausdruckes verschwindet, bzw. der Klammerausdruck einen stationären Wert, ein Extremum hat (Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials, [49]).

Wird die elastische Energie:

$$\Pi_i = + \int_V \varepsilon^T \cdot C \cdot \varepsilon \, dV \quad (4.6)$$

als inneres Potential bzw. als „potentielle Energie der inneren Kräfte“ eingeführt, muss nach Gleichung 4.5:

$$\Pi_a = - \int_V p^T \cdot u \, dV - \int_\Gamma q^T \cdot u \, d\Gamma - \sum F^T \cdot u \quad (4.7)$$

das äußere Potential bzw. die „potentielle Energie der äußeren Kräfte“ sein. Entsprechend den Angaben in [49] brauchen die äußeren Einzelkräfte kein Potential im physikalischen Sinn zu sein. Wesentlich ist, dass man formal für die Einzelkräfte:

$$\Pi_a = - F^T \cdot u$$

schreiben kann und, wenn die Verschiebungen variiert werden, daraus:

$$\delta \Pi_a = - F^T \cdot \delta u$$

erhält.

Als elastisches Gesamtpotential bzw. „gesamte potentielle Energie“ wird:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a \quad (4.8)$$

bezeichnet. Damit ergibt sich für Gleichung 4.5:

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_i + \Pi_a) = 0 \quad (4.9)$$

d.h. bei einer virtuellen Verschiebung aus einer Gleichgewichtslage heraus verschwindet die erste Variation des Gesamtpotentials.

Daraus folgt:  $\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \text{hat ein Extremum}$  (4.10)

Analog zu Gleichung 4.4 gilt die Formulierung in Gleichung 4.10 allgemein, also auch für nicht-lineares Materialverhalten. Jedoch ist nur für elastische Körper die Größe „ $\Pi_i$ “ reversibel und stellt eine potentielle Energie dar. Für linear-elastisches Material (Hooke'sches Gesetz) folgt aus Gleichung 4.10 die strenge Formulierung:

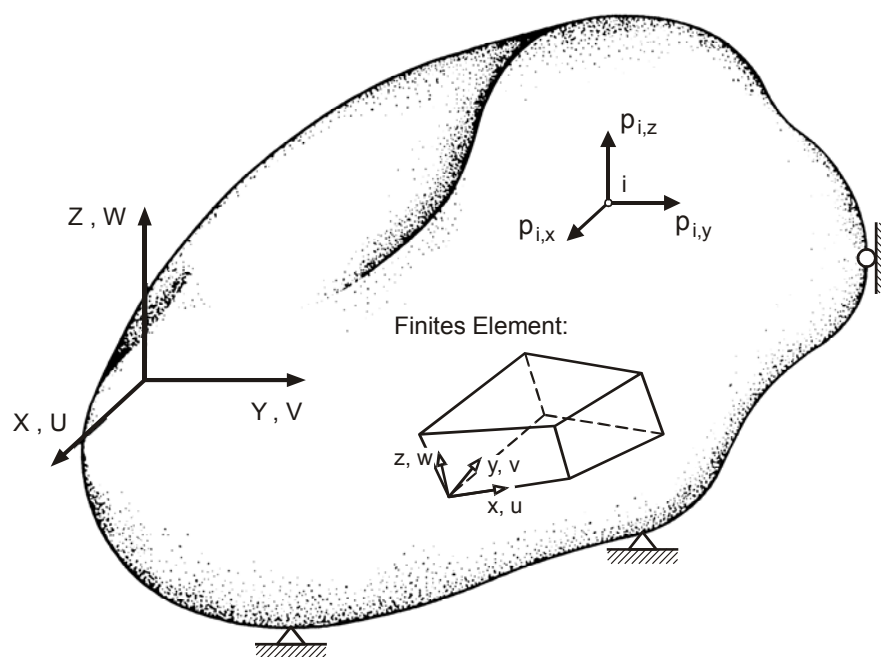
$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \text{ist ein Minimum} \quad (4.11)$$

Das Prinzip lautet: „Unter allen geometrisch verträglichen Verschiebungen liefert diejenige, bei denen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind, für das Gesamtpotential ein Minimum“ und wird als Minimumprinzip oder GREEN-DIRICHLET'sches Prinzip bezeichnet.

Mechanische Systeme, für die ein elastisches Gesamtpotential existiert – das in der Variationsrechnung ein Funktional definiert – werden als konservative Systeme bezeichnet. Im Hinblick auf die Eindeutigkeit der Lösung unter ein und derselben äußeren Belastung existiert somit nur eine stabile Gleichgewichtslage [14]. Mit Bezug auf das zuvor zitierte Minimumprinzip lässt sich durch Umkehr und im Hinblick auf die Eindeutigkeit der Lösung von Elastizitätsproblemen auch sagen: Alle geometrisch verträglichen Verschiebungen, die für ein näherungsweise definiertes Gesamtpotential ein Minimum liefern, erfüllen die Gleichgewichtslage. Dies erfolgt über die Festlegung geeigneter Formfunktionen „ $N$ “. In Analogie zum Ritz-Verfahren sind die Formfunktionen die freien Koeffizienten, nach denen das Gleichungssystem aufgelöst wird. Da das Gesamtpotential als positiv definite „quadratische“ Form nur eine Minimalstelle besitzt, kann sich bei den sogenannten Energiemethoden in Form eines Näherungsverfahrens nur ein zu großer Wert für das Gesamtpotential („die schwache Formulierung“) einstellen. Damit liegt der exakte Wert immer unter dem berechneten Näherungswert. Mit zunehmender Verfeinerung des diskreten Netzes des kontinuierlichen Systems, d.h. durch Erhöhen der freien Koeffizienten bzw. der Formfunktionen, wird man sich zunehmend dem exakten Wert nähern (– es bleibt jedoch immer ein oberer Grenzwert).

### 4.3 Formulierung der Gleichgewichtsbedingung

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wurde zuvor im Kapitel 4.2 in eine direkte Beziehung zum Prinzip der Stationarität des elastischen Gesamtpotentials „ $\Pi$ “, eines kontinuierlichen Systems, gebracht. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen soll nun als effektiver Mechanismus zur Aufstellung von Finite-Elemente-Gleichungen angewendet werden.



**Bild 4.2:** Beliebiger geformter, dreidimensionaler Körper, [14]

Für einen beliebigen, kontinuierlichen, dreidimensionalen Körper entsprechend der Darstellung im Bild 4.2 – symbolischer Ersatz für eine Gruppierung diskreter finiter Elemente – soll das Gesamtpotential:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma \, dV - \int_V u^T b \, dV - \int_{\Gamma} u^T t \, d\Gamma - \sum u^T f \quad (4.12)$$

minimiert werden. Der Körper wird näherungsweise durch eine Vielzahl finiter Elemente diskretisiert. Die Elemente sind dabei entlang der Ränder an den Knotenpunkten miteinander verbunden. Die Verschiebung „ $u$ “ jedes Punktes innerhalb eines Elementes „ $e$ “ wird unter Beachtung eines passend gewählten Koordinatensystems als Funktion der Verschiebungen des finiten Elementes angenähert. Die Annäherung der Verschiebungen enthält der Spaltenvektor „ $\hat{u}$ “. Für ein beliebiges Element „ $e$ “ gilt dann:

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i^e = [N_i, N_j, \dots, N_p] \cdot \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ \dots \\ \dots \\ a_p \end{Bmatrix} = N \cdot a^e \quad (4.13)$$

In Gleichung 4.13 sind die Komponenten von „ $N$ “ Ortfunktionen und beziehen sich auf ein lokales, auf das Element „ $e$ “ bezogenes Koordinatensystem.

Für einen dreidimensionalen Spannungszustand gibt zum Beispiel:

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

die räumlichen Verschiebungen im Inneren des Elementes und:

$$a_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

die entsprechend zugehörigen Verschiebungen des Knotens „ $i$ “ an.

Die Funktionen „ $N_i$ “ sind so zu wählen, dass beim Einsetzen der zugehörigen Knotenkoordinaten der Knoten „ $i$ “ bis „ $p$ “ in der Gleichung 4.13 die zugeordneten Knotenverschiebungen entstehen können. Damit müssen die Bedingungen für die Funktionen „ $N_i(x_i, y_i, z_i) = 1$ “ und für „ $N_i(x_j, y_j, z_j) = 0$ “ bis „ $N_i(x_p, y_p, z_p) = 0$ “ erfüllt werden. Die Matrix „ $I$ “ beschreibt eine Einheits- bzw. Identitätsmatrix. Diese Ansatzfunktionen haben einen maßgebenden Einfluss auf das Berechnungsergebnis und werden im Kapitel 4.4 („Ortsdiskretisierung“) unter der allgemeineren und zutreffenderen Bezeichnung als Formfunktionen gesondert behandelt.



Für die weitere, allgemeinere Anwendung kann der Ausdruck für die Knotenverschiebungen „ $a^e$ “ durch „ $\hat{U}$ “ ersetzt werden. Für Gleichung 4.13 ergibt sich damit die Vereinfachung:

$$u^{(e)}_{(x,y,z)} = N^{(e)}_{(x,y,z)} \cdot \hat{U} \quad (4.14)$$

In Gleichung 4.14 ist „ $N^e$ “ die Verschiebungsinterpolationsmatrix für die Knotenpunkte des Elementes „ $e$ “ mit den zuvor festgelegten, vom Elementtyp abhängigen Formfunktionen. „ $\hat{U}$ “ ist ein Vektor, der die drei globalen Verschiebungskomponenten „ $u_i, v_i$  und  $w_i$ “ aller unbekanntenen Knotenverschiebungen einschließlich der Lagerpunkte der Elementgruppierung enthält.

Die Verzerrungen im Inneren des Elementes sind abhängig von den zugehörigen Knoten des Elementes und können über die Verschiebungsannahme (Gleichung 4.13) für jedes Element „ $e$ “ berechnet werden.

Mit einem linearen Operator, der Differentialmatrix „ $L$ “, kann die Dehnungsmatrix definiert werden. Unter Benutzung der Gleichung 4.13 ergibt sich deshalb für die Dehnungen wiederum ein Näherungsausdruck:

$$\varepsilon \approx \hat{\varepsilon} = [B_i, B_j, \dots, B_p] \cdot a^e = B \cdot a^e \quad (4.15)$$

der nur von den Verschiebungen der Knoten des Elementes „ $e$ “ abhängig ist.

Die sechs Dehnungen des Verzerrungsvektors sind somit definiert über die räumlichen Verschiebungen „ $u$ “ im Inneren eines Elementes:

$$\varepsilon = L \cdot u = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Durch Differenzieren d.h. durch Kombinieren der zuvor genannten Funktionen „ $N_i$ “ unter Anwendung des linearen Operators „ $L$ “ erhält man dann die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix für das jeweils zu betrachtende Element „ $e$ “:

$$B = L \cdot N = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Wird der Ausdruck für die Knotenverschiebungen „ $a^e$ “ durch „ $\hat{U}$ “ ersetzt, können die entsprechenden Elementverzerrungen in allgemeiner Form angegeben werden:

$$\varepsilon^{(e)}_{(x,y,z)} = B^{(e)}_{(x,y,z)} \cdot \hat{U} \tag{4.16}$$

Der Zusammenhang zwischen den Dehnungen eines Elementes „ $e$ “ und den Spannungen lässt sich nunmehr mit den zuvor definierten Materialgesetzen (aus Kapitel 3) herstellen:

$$\sigma = C^{(e)} \cdot \varepsilon + \sigma_0 \equiv C \cdot B \cdot \hat{U} + \sigma_0 \tag{4.17}$$

wobei mit „ $\sigma_0$ “ eine zusätzlich vorhandene und bekannte Anfangsspannung im Element angegeben werden kann. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass mit der Matrix „ $C^{(e)}$ “ ein beliebiges Stoffgesetz dem Element zugeordnet werden kann. Die Matrix kann ein isotropes, aber auch ein anisotropes Materialverhalten beschreiben. Die gewählte Form der vorangestellten Beschreibungen soll erkennen lassen, dass das Stoffverhalten sich zusätzlich von Element zu Element – innerhalb einer Elementgruppierung – ändern kann.

Das Zusammenfassen der Steifigkeitsmatrizen der Elemente zu einer Strukturmatrix der gesamten Gruppierung – dem System – erfolgt unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, in dem die Gleichung 4.5 als Summe von Integralen über das Volumen der Einzelelemente betrachtet bzw. angewendet wird:

$$\begin{aligned} \bar{U}^T \cdot \left[ \sum_e \int_{V^{(e)}} B^{(e)T} \cdot C^{(e)} \cdot B^{(e)} dV^{(e)} \right] \cdot \hat{U} &= \bar{U}^T \cdot \left[ \left\{ \sum_e \int_{V^{(e)}} N^{(e)T} p^{V^{(e)}} dV^{(e)} \right\} \right. \\ &+ \left\{ \sum_e \int_{\Gamma^{(e)}} N^{\Gamma^{(e)T}} q^{\Gamma^{(e)}} d\Gamma^{(e)} \right\} \\ &+ \left. \left\{ \sum_e \int_{V^{(e)}} B^{(e)T} \sigma_0^{(e)} dV^{(e)} \right\} + F \right] \end{aligned} \tag{4.18}$$

Aus der Forderung „ $N_i(x_i, y_i, z_i) = I$ “ – bzw. „ $N_i(x_j, y_j, z_j)$ “ bis „ $N_i(x_p, y_p, z_p) = 0$ “ werden der Reihe nach allen Verschiebungskomponenten automatisch virtuelle Einheitsverschiebungen zugeteilt. Im Kapitel 4.4 wird noch gezeigt, dass deshalb zur Berechnung der Elementsteifigkeiten zweckmäßig örtliche Koordinaten – sogenannte natürliche Koordinaten – für jedes Element verwendet werden. Auf diese Weise wird der Knotenverschiebungsvektor „ $\bar{U} \equiv I$ “ der gesamten Gruppierung unabhängig von den Einzelementen, und er kann wie in der Gleichung 4.18 vor das Summationszeichen gesetzt werden. Das Zusammenfassen der Steifigkeiten zur Gesamtsteifigkeitsmatrix und das Zusammenfügen der Knotenverschiebungen in einer Spaltenmatrix kann (zur Optimierung des Gleichungssystems) mit einer Umnummerierung der Elementknotenpunkte verbunden sein, so dass die Verschiebungen jedes Knotens in der Spaltenmatrix „ $\hat{U}$ “ nur noch einmal vorkommen. Dieses Vorgehen ermöglicht, dass die Verschiebungen und Verzerrungen jedes Elements durch den kompletten Satz der Knotenverschiebungen der gesamten Gruppierung finiter Elemente dargestellt werden können. Werden die Knotenpunktverschiebungen allgemein mit „ $U$ “ bezeichnet, d.h. „ $\hat{U} = U$ “, ergibt sich eine allgemeine Formulierung der Gleichgewichtsbedingung für die gesamte Elementgruppierung:

$$K \cdot U = R \tag{4.19}$$

mit der zugehörigen Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$K = \sum_e \left[ \int_{V^{(e)}} B^{(e)T} \cdot C^{(e)} \cdot B^{(e)} dV^{(e)} \right] = \sum_e K^{(e)} = \int B^T \cdot C \cdot B dV \tag{4.20}$$

Die zugehörigen Anteile des Kraftvektors „ $R$ “ (Glg. 4.19) setzen sich wie folgt zusammen:

$$R = R_V + R_\Gamma + R_0 + R_F \tag{4.21}$$

mit den Volumenkräften:  $R_V = \int_V N^T p dV,$

den Oberflächenkräften:  $R_\Gamma = \int_\Gamma N^T q d\Gamma,$

den Anfangsspannungen:  $R_0 = \int_V B^T \sigma_0 dV,$

und den Einzellasten:  $R_F = F.$

Entsprechend dem klassischen Ritz-Verfahren, bei dem im Unterschied zur Methode der finiten Elemente die Ansatzfunktionen nicht über Teilgebiete mit zugehörigen geometrischen Übergangsbedingungen zu benachbarten Elementgrenzen definiert sind, sondern bei dem die Ansatzfunktionen alle geforderten Bedingungen für das Gesamtpotential – d.h. für die gesamte Gruppierung – erfüllen müssen, erhält man durch Einsetzen der Gleichungen 4.14 und 4.16 unter Beachtung der Elementspannungen nach Gleichung 4.17 den Ausdruck für das Gesamtpotential analog zur vorangestellten Energiegleichung 4.12:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \bar{U}^T \cdot \left[ \int_V B^T C B \, dV \right] \hat{U} - \bar{U}^T \cdot \left[ \int_V N^T b \, dV + \int_\Gamma N^T t \, d\Gamma - \int_V B^T \sigma_0 \, dV - F \right] \quad (4.22)$$

Die Variation des elastischen Gesamtpotentials nach den Verschiebungen bzw. das Nullsetzen aller partiellen Ableitungen nach den Verschiebungen als notwendige Bedingung für ein Extremum:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta U} = 0 \quad (4.23)$$

liefert beim klassischen Ritz-Verfahren für statische Aufgaben wieder die genannte allgemeine Formulierung der Gleichgewichtsbedingung:

$$K \cdot U = R$$

mit den zugehörigen Elementsteifigkeiten:

$$K = \int B^T \cdot C \cdot B \, dV$$

Das gesamte Kontinuum bzw. die Gruppierung beschreibt zunächst einen freien Körper. Damit wäre die Gesamtsteifigkeitsmatrix singulär. Erst durch Vorgabe geeigneter Rand- bzw. Auflagerbedingungen kann die grundlegende Beziehung in Gleichung 4.19 nach den Knotenverschiebungen aufgelöst werden. Mit Kenntnis der Knotenverschiebungen „U“ können anschließend die Elementspannungen und Elementverzerrungen in den Integrationspunkten nach Gleichung 4.17 bestimmt werden. Durch Extrapolation der Spannungen in den Integrationspunkten lassen sich dann die Spannungen in den Knotenpunkten berechnen.

#### 4.4 Ortsdiskretisierung

Abhängig von dem verwendeten finiten Element und der dem Elementtyp eigens zugewiesenen Formfunktion wird man sich der exakten Lösung im Rahmen der mechanischen Idealisierung des Systems mit zunehmender Anzahl der finiten Elemente bzw. zunehmender Verfeinerung des Netzes – dies ist gleichbedeutend mit einer Zunahme der freien Koeffizienten „a<sup>e</sup>“ – „monoton“ oder „nicht monoton“ nähern. Um monotone Konvergenz zu erreichen, müssen die Formfunktionen vollständig und kompatibel zu den Nachbarelementen sein [14]. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, strebt mit zunehmender Verfeinerung, das durch endliche Elemente idealisierte mechanische System gegen die exakte Antwort der mechanischen Lösung.

Die Einführung von isoparametrischen Elementen war eine bedeutende Entwicklung der numerischen Lösung von festen Strukturen. Bei der Ableitung dieser isoparametrischen finiten Kontinuumselemente wird angenommen, dass die Elementkoordinaten in genau der gleichen Form interpoliert werden wie die Elementverschiebungen (Koordinateninterpolation ≡ Elementverschiebungsinterpolation). Die Entwicklung der Elementbeziehungen erfolgt daher bezüglich lokaler elementbezogener Koordinaten, als natürliche Koordinaten (r, s, t) bezeichnet. Der Zusammenhang mit den globalen Koordinaten (x, y, z) wird über eine Transformationsmatrix – einem Standardprozess – realisiert. Dies ermöglicht, dass jedem Koordinatenpunkt im Inneren

bzw. am Rand des Elements eindeutig globale Koordinaten zugeordnet werden können. Die Forderung nach Eindeutigkeit und geometrischer Stetigkeit der Verschiebungen ist damit gewährleistet.

Die Formulierung vollständiger Elemente im Sinne des Prinzips des Minimums der potentiellen Energie ist für Untersuchungen mit numerischen Näherungsmethoden von großer Bedeutung. Dies gilt besonders dann, wenn iterative Lösungsverfahren Anwendung finden, bei denen Konvergenz an den Inkrementen der Lösungsvariablen gemessen wird, die zwar klein aber nicht gleich Null sind. In Analogie zum Ritz-Verfahren sind dies die freien Koeffizienten, nach denen das Gleichungssystem aufgelöst wird. Zahlreiche Versuche wurden anschließend unternommen, um die Grundgenauigkeit dieser sehr leistungsfähigen isoparametrischen Elemente weiter zu verbessern. Um die totale Verformungsenergie innerhalb eines Elementes zu minimieren, wurden den isoparametrischen Elementen zusätzlich nicht kompatible Verschiebungen – auf Elementebene – zugeteilt. Diesen zusätzlichen Verschiebungen der auf das isoparametrische Konzept basierenden Elemente ist kein Knoten zugeordnet. Daher werden sie im nachfolgenden Text als inkompatible Modi bezeichnet.

Ein Element, das nach [14] mit viel Erfolg bei dreidimensionalen und auch bei Schalenproblemen eingesetzt wird, ist das 8-Knoten-Quaderelement. Auch in der vorliegenden Arbeit wird für die Beton- und für die Stahlstruktur dieses Element angewendet. Seine Verschiebungsinterpolationen einschließlich der inkompatiblen Modi lauten:

$$\begin{aligned}
 u &\rightarrow u^e(r, s, t) = \sum_{i=1}^8 N_i(r, s, t) \cdot u_i + \alpha_1(1-r^2) + \alpha_2(1-s^2) + \alpha_3(1-t^2) \\
 v &\rightarrow v^e(r, s, t) = \sum_{i=1}^8 N_i(r, s, t) \cdot v_i + \beta_1(1-r^2) + \beta_2(1-s^2) + \beta_3(1-t^2) \\
 w &\rightarrow w^e(r, s, t) = \sum_{i=1}^8 N_i(r, s, t) \cdot w_i + \gamma_1(1-r^2) + \gamma_2(1-s^2) + \gamma_3(1-t^2)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

mit den linearen stetigen Anteilen:

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 \pm r_0) \cdot (1 \pm s_0) \cdot (1 \pm t_0) \tag{4.25}$$

Die Verschiebungskomponenten „ $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  bis  $\gamma_3$ “, denen keine Knotenpunkte zugeordnet sind, werden durch eine statische Kondensation vor Gruppierung der Elemente wieder herausgezungen.

Nachfolgend wird das Hinzufügen inkompatibler Modi zum isoparametrischen Konzept – zur Erhöhung der Effektivität dieser Elemente – am Beispiel eines zweidimensionalen „ebenen“ 4-Knoten-Rechteckelements entwickelt. Die Übertragung auf ein 8-Knoten-Quaderelement für den räumlichen Fall ist durch Hinzufügen der dritten Koordinatenebene möglich. Bild 4.4 (a+b) gestattet grafisch eine Zuordnung und Vorstellung des „Übergangs“ zum neu gewählten Definitionsraum. Betrachtet wird nachfolgend kein räumlicher Ansatz ( $u, v, w$  / Bild 4.4b), sondern vereinfacht der „ebene“ Fall eines linearen isoparametrischen Scheibenelements ( $u, v$ ) entsprechend der Darstellung im Bild 4.3.

### 4.4.1 Isoparametrische Formulierung

Für den vereinfacht angenommenen „ebenen“ Fall werden bei dem isoparametrischen Konzept die Feldgrößen – das sind die Verschiebungen – und die Geometrie eines Elementes „e“ von der x-y-Ebene auf ein Referenzelement „ $\bar{e}$ “, d.h. auf die natürlichen Koordinaten der s-t-Ebene abgebildet. Geometrie und Verschiebungen werden durch gleiche Ansätze approximiert. Als Ersatz für Gleichung 4.25 lauten diese Ansätze für ein vierknotiges, lineares isoparametrisches Element:

$$\begin{aligned}
 N_1(s,t) &= \frac{1}{4} \cdot (1-s) \cdot (1-t) \\
 N_2(s,t) &= \frac{1}{4} \cdot (1+s) \cdot (1-t) \\
 N_3(s,t) &= \frac{1}{4} \cdot (1+s) \cdot (1+t) \\
 N_4(s,t) &= \frac{1}{4} \cdot (1-s) \cdot (1+t)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

wobei für die natürlichen Koordinaten gilt:

$$-1 \leq s \leq 1$$

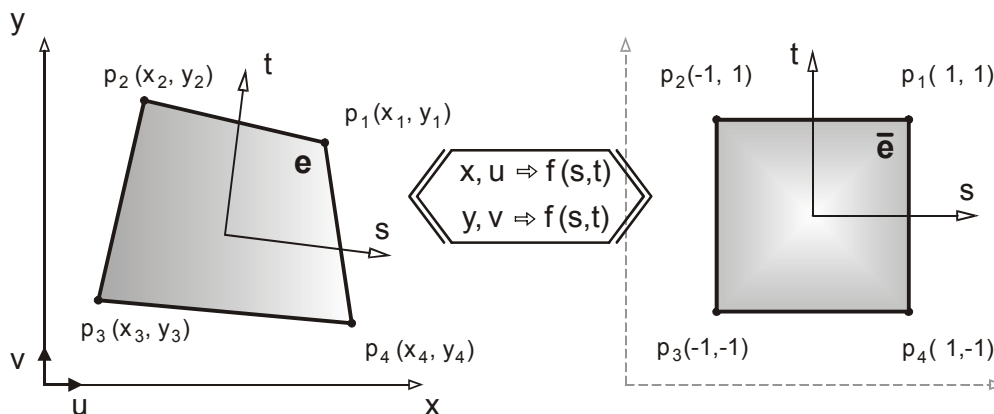
und:

$$-1 \leq t \leq 1$$

Die Approximation der Geometrie (Koordinateninterpolation) innerhalb des Elementes „e“ für den betrachteten ebenen Fall ergibt sich in Analogie zu den linearen Anteilen in der Gleichung 4.24 des Quaderelementes zu:

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow x^e(s,t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s,t) \cdot x_i \\
 y &\rightarrow y^e(s,t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s,t) \cdot y_i
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Darin sind „ $x_i$ “ und „ $y_i$ “ die Knotenkoordinaten des Knotens „i“ am Element „e“ in die jeweiligen Richtungen des globalen Koordinatensystems. Durch diese Approximation mit den zuvor genannten linearen Formfunktionen (Gleichung 4.26) wird ein beliebiges Trapezelement der x-y-Ebene auf ein Quadrat der s-t-Ebene entsprechend Bild 4.3 transformiert.



**Bild 4.3:** Ebenes, linear isoparametrisches Scheibenelement

Zur Sicherstellung der Starrkörperverschiebungen werden bei der isoparametrischen Formulierung die Feldgrößen in der gleichen Weise wie die Koordinateninterpolationen durchgeführt, d.h. es werden analog zu Gleichung 4.27 mit den Ansatzfunktionen aus Gleichung 4.26 die Beziehungen:

$$u \rightarrow u^e(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) \cdot u_i$$

$$v \rightarrow v^e(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) \cdot v_i$$
(4.28)

verwendet. Dabei sind „ $u^e$ “ und „ $v^e$ “ die lokalen Elementverschiebungen in einem beliebigen Punkt, „ $u_i$ “ und „ $v_i$ “ die entsprechenden Verschiebungen im Knoten „ $i$ “ des Elementes. Es wird somit gewährleistet, dass jeder Knotenkoordinate, die zur Beschreibung eines Elementes erforderlich ist, auch eine Knotenverschiebung zugeordnet ist.

Um die Steifigkeitsmatrix berechnen zu können, muss die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix ermittelt werden. Für den ebenen Fall wird:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum N_{i,x} \cdot u_i$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \sum N_{i,y} \cdot v_i$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum N_{i,y} \cdot u_i + \sum N_{i,x} \cdot v_i$$
(4.29)

oder Gleichung (4.29) in Matrixform geschrieben, ergibt:

$$\varepsilon = B^e(s, t) \cdot \hat{U} = \begin{bmatrix} N_{,x} & 0 \\ 0 & N_{,y} \\ N_{,y} & N_{,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_x \\ \hat{U}_y \end{bmatrix}$$
(4.30)

Für den ebenen Fall resultiert aus den drei Verzerrungszuständen für acht mögliche Knotenverschiebungen eine 3x8-Matrix, die Untermatrizen für Gleichung 4.30 sind:

$$N_{,x} = [N_{1,x} \quad N_{2,x} \quad N_{3,x} \quad N_{4,x}] ; \quad N_{,y} = [N_{1,y} \quad N_{2,y} \quad N_{3,y} \quad N_{4,y}]$$
(4.31)

Da die Funktionen „ $N_i$ “ für die Elementverschiebungen in natürlichen Koordinaten (s, t) angegeben sind, müssen die Ableitungen nach „x“ und „y“ mit den Ableitungen nach „s“ und „t“ verknüpft werden. Es werden die Ableitungen in Bezug auf das globale Koordinatensystem benötigt:

$$N_{i,x} = N_{i,s} s_{,x} + N_{i,t} t_{,x} ; \quad N_{i,y} = N_{i,s} s_{,y} + N_{i,t} t_{,y}$$
(4.32)

Zur Berechnung der Ableitungen auf das globale x-y-System wird die Kettenregel in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

mit einer gleichlautenden Beziehung für „ $\partial / \partial y$ “ angewendet. Dann gilt nach der Kettenregel – angegeben allgemein in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} \partial / \partial s \\ \partial / \partial t \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,s} & y_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Durch Inversion ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{,x} & t_{,x} \\ s_{,y} & t_{,y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial / \partial s \\ \partial / \partial t \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

und erhält damit die in Gleichung 4.32 gesuchten Ableitungen:

$$\begin{bmatrix} s_{,x} & t_{,x} \\ s_{,y} & t_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \cdot \begin{bmatrix} y_{,t} & -y_{,s} \\ -x_{,t} & x_{,s} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

mit:  $\det J = x_{,s} y_{,t} - x_{,t} y_{,s}$

Aus Gleichung 4.27 resultiert infolge der Verknüpfungen mit den natürlichen Koordinaten:

$$x_{,s} = \sum N_{i,s} x_i ; \quad x_{,t} = \sum N_{i,t} x_i ; \quad y_{,s} = \sum N_{i,s} y_i ; \quad y_{,t} = \sum N_{i,t} y_i \quad (4.36)$$

Der Jacobische Operator „ $J$ “ verknüpft die Ableitungen nach den natürlichen Koordinaten mit den lokalen Koordinaten, d.h.:

$$\frac{\partial}{\partial s} = J \cdot \frac{\partial}{\partial x} . \text{ Durch Inversion folgt: } \frac{\partial}{\partial x} = J^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial s} ,$$

sofern die Inverse existiert. Die Existenz von „ $J^{-1}$ “ gewährleistet die geforderte Eindeutigkeit zwischen den natürlichen und den lokalen Koordinaten. Mit den Gleichungen 4.35 und 4.36 können für gegebene Werte von „ $s$ “ und „ $t$ “ alle erforderlichen Ableitungen für eine numerische Auswertung der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix (Gleichung 4.30) berechnet werden.

#### 4.4.2 Numerische Integration und Integrationsbereich

Gemäß den Ausführungen im Kapitel 4.4.1 sind alle Elemente der Transformationsmatrix „ $B$ “ Funktionswerte der natürlichen Zahlen „ $s$ “ und „ $t$ “. Die numerische Volumenintegration erfolgt ebenfalls über das in natürlichen Zahlen formulierte Volumenelement „ $dV$ “.

Allgemein für den dreidimensionalen Fall gilt:

$$dV = \det J \cdot dr \cdot ds \cdot dt$$

bzw. für den zuvor bevorzugt vorgestellten „ebenen“ Fall mit einer gegebenen Scheibendicke „ $b^{(e)}$ “:

$$dV = b^{(e)} \cdot \det J \cdot ds \cdot dt$$



Für die allgemeine Berechnung der Elementeigenschaften werden die Matrixintegrale in der Form:

$$\int_{V^{(e)}} [G] dV = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} \cdot G(r_i, s_j, t_k) \quad (4.37)$$

numerisch ausgewertet. Damit erhält man für den gesamten Integrationsbereich eines Elementes, z.B. im Fall einer Steifigkeitsmatrix:

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T \cdot C \cdot B \det J \, dr \, ds \, dt \quad (4.38)$$

Die direkte Anwendung dieser numerischen Integrationsformel, zum Beispiel mit dem Integrationschema der Gauß-Quadratur, deren Integrationsgrenzen ausnahmslos in dem natürlichen Intervall von  $-1$  bis  $+1$  laufen, führt auf die Verbundformel:

$$K = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k \det J \, B^T(r_i, s_j, t_k) \cdot C \cdot B(r_i, s_j, t_k) \quad (4.39)$$

wobei „ $r_i$ ,  $s_j$  und  $t_k$ “ die Stützpunkte bzw. Integrationspunkte und „ $W_i$ ,  $W_j$  und  $W_k$ “ Gewichtungsfaktoren für das natürliche Intervall darstellen. In der vorliegenden Arbeit erfolgte die Integration mit der  $4 \times 4$  Gauß-Quadratur. Stützpunkte und Gewichtungsfaktoren können der Literatur entnommen werden [14].

#### 4.4.3 Inkompatible Ansatzfunktionen

Es wurden viele Versuche unternommen, die Grundgenauigkeit von Elementen zu erhöhen. Durch die Verwendung numerischer Integrationsmethoden werden Anteile der Verzerrungsenergien stets fehlerhaft berücksichtigt, bei Elementen mit linearen Ansätzen und einer reinen Biegebeanspruchung wird z. B. die Schubverzerrungsenergie überschätzt. Eine zusätzliche Mittelpunkt-Integration über das Zentrum des Elementes würde eine Minimierung dieses Fehlers erreichen. Diese Technik führt jedoch auch zu invarianten Steifigkeitsmatrizen mit deutlichen Richtungsabhängigkeiten [14].

Mit einem linearen Ansatz können einfache Spannungsgradienten nicht energietreu dargestellt werden [121]. Bild 4.4c zeigt einen solchen Spannungszustand infolge einer einfachen Biegebeanspruchung. Bild 4.4d zeigt die zugehörigen Verformungen (alternativ Verzerrungen), die sich für eine Beanspruchung in der Ebene wie folgt angeben lassen:

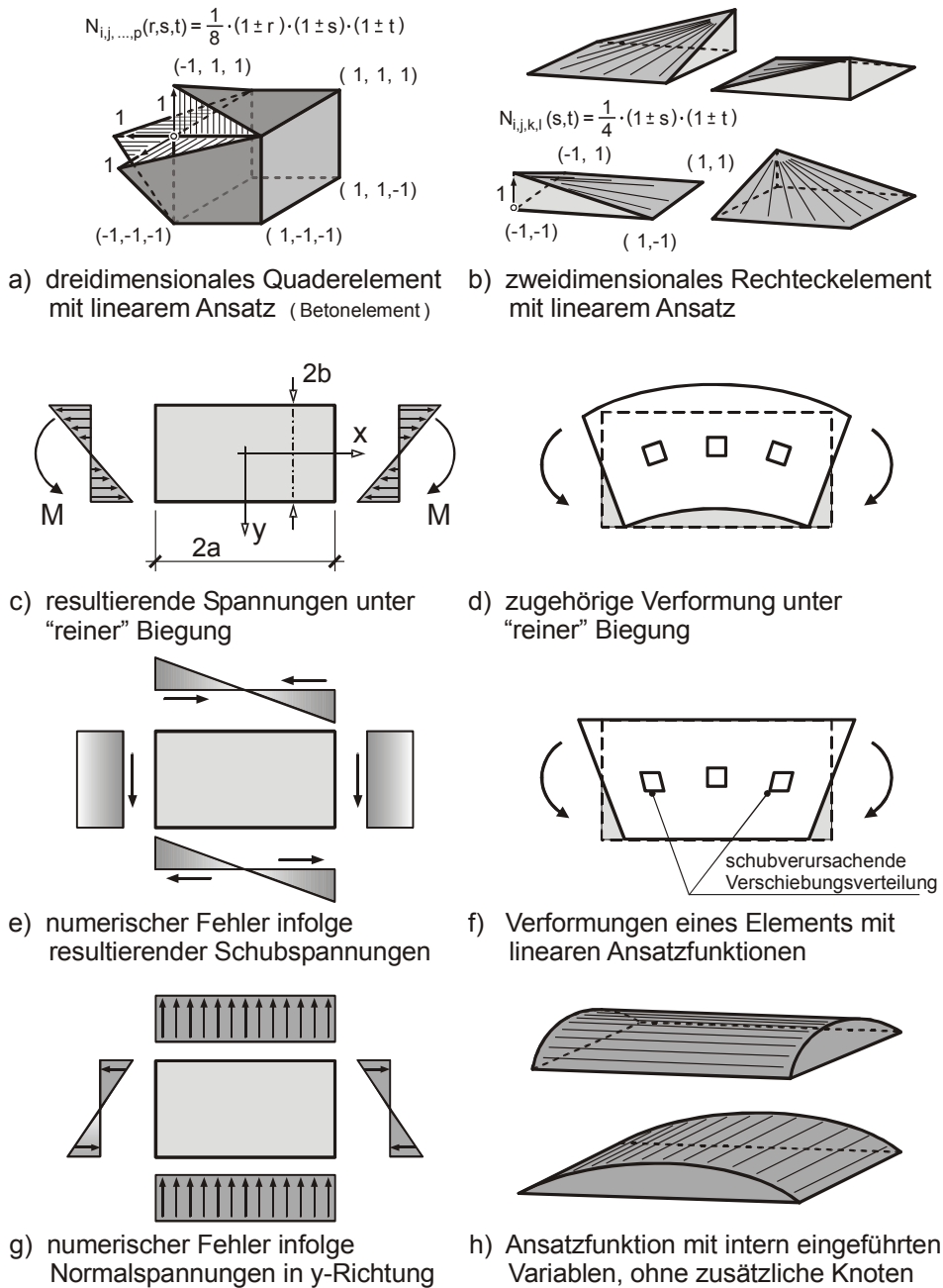
$$u = \alpha_1 \cdot x \cdot y \quad (4.40a)$$

$$v = \frac{1}{2} \alpha_1 (a^2 - x^2) + \alpha_2 (b^2 - y^2) \quad (4.40b)$$

Infolge dieser reinen Biegebeanspruchung dürfen keine Schubverzerrungen bzw. Schubwiderstände auftreten; d.h. es muss gelten:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \quad (4.41)$$

Infolge der linearen Ansatzfunktionen lassen sich nur die Verschiebungen gemäß Bild 4.4f aktivieren und diese entsprechen der Gleichung 4.40a. Da das Element nicht in der Lage ist, die Verformungen nach Bild 4.4d annähernd zu beschreiben, stellt sich ein Fehler in der Größenordnung der Gleichung 4.40b ein.



**Bild 4.4:** Energiebetrachtungen ohne und mit inkompatiblen Ansatzfunktionen, [121] [123]

Durch Erhöhen der inneren Freiheitsgrade bzw. der inneren Variablen auf Elementebene kann dieser Fehler reduziert werden. Die Elementgenauigkeit wird verbessert, indem zusätzlich innere Variablen (Freiwerte für Verschiebungen) hinzugefügt werden. Die hinzugefügten Verschiebungen haben die gleiche quadratische Form wie der bei linearen Ansatzfunktionen auftretende Fehler. Jedoch verletzen sie elementübergreifend die Verträglichkeit. Eine „nicht monotone“ Konvergenz kann mit diesen Elementen nur erzielt werden, wenn es ein Parallelogramm bildet. Um eine allgemeine, von der Geometrie nahezu unabhängige Anwendung dieses Elementes zu ermöglichen, schlugen Taylor et al. in [121] vor, die hinzugefügten inneren Freiheitsgrade „ $a_i$ “

(das sind die nicht konformen Anteile / Modi) vor der weiteren Verknüpfung des Elementes wieder zu löschen. Damit werden nur die konformen Verschiebungsanteile bei der Gruppierung berücksichtigt, die in den Eckknoten wieder einem linearen Verschiebungsfeld gemäß Bild 4.4 (a oder b) entsprechen.

Für die anschließende Entwicklung wird wie im Kapitel 4.4.1 vereinfacht der „ebene“ Fall betrachtet. Der Verschiebungsansatz (in Anlehnung an Gleichung 4.24 für das 8-Knoten-Element) lautet dann:

$$u \rightarrow u^{(e)}(s,t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s,t) \cdot u_i + \alpha_1(1-s^2) + \alpha_2(1-t^2)$$

$$v \rightarrow v^{(e)}(s,t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s,t) \cdot v_i + \beta_1(1-s^2) + \beta_2(1-t^2)$$

Mit einer Umbenennung der nicht konformen Anteile bzw. der hinzugefügten Verschiebungsamplituden / Freiwerte:

$$P_1(s,t) = (1-s^2) ; \quad P_2(s,t) = (1-t^2) \quad (4.42)$$

erhält man die allgemeine Beziehung für das isoparametrische Konzept einschließlich der hinzugefügten Freiheitsgrade:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(s,t) \cdot u_i + \sum_{i=1}^2 P_i(s,t) \cdot a_i \quad (4.43)$$

mit dem linearen, konformen Anteil für die Geometrie:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(s,t) \cdot x_i \quad (4.44)$$

und für die Feldgrößen:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(s,t) \cdot u_i \quad (4.45)$$

Als Basis für die Näherungsberechnung mit der Methode der finiten Elemente soll das Gesamtpotential:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T C \varepsilon dV - \int_V p^T u dV - \int_{\partial\Gamma} \hat{t}^T u d\Gamma = \min$$

wieder minimiert werden. In Anlehnung an diese Gleichung wird zur Beschreibung der Verzerrungsanteile der Verschiebungsansatz mit den zusätzlichen inneren Freiheitsgraden gemäß der Gleichung 4.43 berücksichtigt. Für alle anderen, äußeren Beanspruchungen, z.B. für den Belastungsvektor „p“ oder einen definierten Verschiebungsvektor „t̂“ wird die Gleichung 4.44 benutzt. Der Dehnungstensor ist dann in der bekannten Form durch die Anteile des Verschiebungsvektors definiert, somit können die Verzerrungen in der nachfolgenden Form angegeben werden:

$$\varepsilon = B^{(e)} \cdot u + \bar{B}^{(e)} \cdot a \quad (4.46)$$

„ $u$ “ sind die zu den Eckknoten gehörenden Verschiebungen, während „ $a$ “ zusätzliche innere Freiheitsgrade angeben. Für den ebenen Fall liefert „ $a$ “ vier zusätzliche Freiheitsgrade, im Fall eines räumlichen Elementes neun Freiheitsgrade. Durch Einsetzen der Gleichung 4.43 in die Gleichung 4.46 können für den ebenen Fall die Dehnungen angegeben werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [B_i] \cdot \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^2 [H_i] \cdot \begin{Bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

mit den Teilmatrizen:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 \\ 0 & N_{i,2} \\ N_{i,2} & N_{i,1} \end{bmatrix} \quad (4.48a)$$

und:

$$[H_i] = \begin{bmatrix} P_{i,1} & 0 \\ 0 & P_{i,2} \\ P_{i,2} & P_{i,1} \end{bmatrix} \quad (4.48b)$$

Durch die zusätzlichen vier Verschiebungsamplituden „ $a$ “ resultiert für den ebenen Fall analog zu Gleichung 4.30 eine 3x12 Matrix. Die Ordnung der Steifigkeitsmatrix erhöht sich infolge dieser Verschiebungsanteile innerhalb des Elementes auf eine 12x12 Matrix. Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix für dieses Element unter Berücksichtigung des Lastvektors ergibt:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

wobei „ $u_0$ “ die konformen und „ $a_0$ “ die nicht konformen, elementbezogenen Verschiebungsanteile sind. Die Untermatrizen lauten:

$$[K_{uu}]_{ij} = \int_{V^e} [B_i]^T [C] [B_j] dV \quad (4.50a)$$

$$[K_{ua}]_{ij} = \int_{V^e} [B_i]^T [C] [H_j] dV = [K_{au}]_{ji} \quad (4.50b)$$

$$[K_{aa}]_{ij} = \int_{V^e} [H_i]^T [C] [H_j] dV \quad (4.50c)$$

mit dem zugehörigen Lastvektor:

$$\{F_u\}_i = \int_{V^e} N_i \{p\} dV + \int_{\partial\Gamma^e} N_i \{\hat{t}\} d\Gamma \quad (4.51)$$

Damit ein solches Element den „Patch-Test“ bestehen kann [113] – dies ist die notwendige Bedingung für „nicht monotone“ Konvergenz – müssen die intern hinzugefügten Verschiebungsanteile „ $a_0$ “, immer dann, wenn die linearen Verschiebungskomponenten „ $u_0$ “ eine Starrkörperverschiebung oder einen konstanten Verzerrungszustand beschreiben, auf Null gesetzt werden.

Wird „ $v_0$ “ als zusätzlicher Verschiebungsvektor für die beiden angegebenen Grenzfälle (Starrkörperverformung oder konstanter Verzerrungszustand) definiert, ergibt sich aus der zweiten Zeile der Gleichung 4.49:

$$\{a_0\} = - [K_{aa}]^{-1} [K_{au}] \cdot \{v_0\} \quad (4.52)$$

Um zu erreichen, dass „ $a_0$ “ verschwindet, sobald „ $u_0$ “ Werte annimmt, die zu einem linearen Verschiebungsfeld „ $u_0 \equiv v_0$ “ gehören, muss nachfolgende Bedingung erfüllt sein:

$$[K_{au}] \cdot \{v_0\} = \int_{V^e} [H]^T [C] [B] \cdot \{v_0\} dV = 0 \quad (4.53)$$

In dieser Annahme beschreibt der Term „ $[C] \cdot [B] \cdot \{v_0\}$ “ das entsprechend konstante Spannungsfeld: „ $\{\sigma_{konst.}\}$ “. Folglich reduziert sich die Gleichung 4.53 auf die Forderung:

$$\int_{V^e} [H] dV = 0 \quad (4.54)$$

Werden die Gleichungen 4.26, 4.42, 4.44 und 4.48b in Gleichung 4.54 eingesetzt, ergibt sich für jede Verschiebung „ $P_i$ “:

$$\int_{V^e} [H_1] dV = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -s \cdot x_{2,t} & 0 \\ 0 & s \cdot x_{1,t} \\ s \cdot x_{1,t} & -s \cdot x_{2,t} \end{bmatrix} ds dt = 0 \quad (4.55a)$$

und:

$$\int_{V^e} [H_2] dV = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} t \cdot x_{2,s} & 0 \\ 0 & -t \cdot x_{1,s} \\ -t \cdot x_{1,s} & t \cdot x_{2,s} \end{bmatrix} ds dt = 0 \quad (4.55b)$$

Die Gleichungen 4.55 enthalten entsprechend dem quadratischen Charakter der Gleichung 4.43 Produkte der Form:

$$s \cdot \frac{\partial x}{\partial s}, \quad t \cdot \frac{\partial x}{\partial t}, \quad s \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{usw.}$$

Damit ist nicht immer gewährleistet, dass das Integral über die natürlichen Koordinaten verschwindet. Bei einer isoparametrischen Formulierung zwischen den Koordinaten und den Ansatzfunktionen bleiben die Ausdrücke im Fall eines Parallelogrammelementes aber automatisch konstant, womit die Forderung, dass das Integral über die rechte Seite der Gleichungen 4.55 verschwindet, immer erfüllt werden kann [123]. Das vorgestellte Verfahren dient somit ausnahmslos dem Zweck, im Falle konstanter Verzerrungszustände für die Eckknoten lineare Verschiebungsfelder bereitzustellen. Elemente mit diesen Verschiebungsansätzen besitzen eine deutlich höhere Leistungsfähigkeit gegenüber Elementen mit nur linearen Verschiebungsanteilen. In dem verwendeten FE-Programm ANSYS werden die nichtkonformen Ansätze durch Voreinstellung bevorzugt. Das als „statische Kondensation“ bezeichnete Verfahren wird benutzt, um unter der Forderung, dass die Gesamtdehnungsenergie innerhalb des Elementes ein Minimum bleibt, die inkompatiblen Modi vor der Gruppierung wieder herauszuzwingen. Damit ist die Konvergenz dieser hybriden Elemente gewährleistet. Das Ergebnis der Addition dieser nicht

kompatiblen Modi ist, dass das „mikroskopische“ Gleichgewicht innerhalb eines Elements besser zufriedengestellt werden kann [113].

#### 4.5 Eingesetzte Lösungstechnik – Lösungsstrategie

Bei einem linearen Werkstoffverhalten eines elastischen Körpers führt die Gleichung 4.18 auf die allgemeine Grundgleichung 4.19. Unter Verwendung gegebener Lasteinwirkungen enthält Gleichung 4.19 die gesuchte Verschiebungskonfiguration der gesamten Elementgruppierung für den unbekanntem Gleichgewichtszustand einer linearen Berechnung. Durch die Anwendung von Kontaktelementen und nichtlinearen Materialgleichungen trifft diese Annahme nicht mehr zu. In der vorliegenden Arbeit muss die Lösung über eine numerisch nichtlineare Berechnung gesucht werden. Die erwarteten nichtlinearen Einflüsse können in zwei Gruppen aufgeteilt werden.

Die erste Gruppe wird geprägt durch mögliche Änderungen der Anfangsrandbedingungen im Laufe der Belastung. Mit der Belastungszunahme wird erwartet, dass durch die Anwendung der Kontaktelemente sich die damit gekoppelten Verschiebungsrandbedingungen ändern, d.h. Freiheitsgrade erfahren, bei zunächst unbekanntem Laststufen zusätzliche Einschränkungen oder aber die Freigabe ihrer Bindungen. Mit zunehmender Deformation infolge der Belastung der Gesamtstruktur wird dies zu einer Änderung der geometrisch abhängigen Anfangsrandbedingungen führen. Durch diese pfadabhängige, geometrische Nichtlinearität ändert sich das Anfangsrandwertproblem und Gleichgewichtsbetrachtungen müssen über den gesamten interessierenden Zeitbereich beobachtet werden.

Die zweite Gruppe ergibt sich durch die Einführung des physikalisch nichtlinearen Materialverhaltens der Werkstoffe Stahl und Beton. Aus der Koeffizientenmatrix „ $K$ “ wird eine Funktion über die Zeit und damit aus der im Kapitel 4.3 dargestellten numerischen Formulierung für das Gleichgewicht eine nichtlineare statische Berechnung. Für diese physikalisch nichtlinearen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen wird nachfolgend davon ausgegangen, dass das Material im Wesentlichen kleinen Verzerrungen ausgesetzt wird. Für die erforderlichen Untersuchungen ist es somit ausreichend, diese kleinen Verzerrungen ausgehend von isothermen Bedingungen, in einem körperfesten und lokalen Koordinatensystem zu betrachten. Dabei darf das körperfeste Koordinatensystem durchaus großen Starrkörperverschiebungen und -drehungen ausgesetzt werden.

Für den im Bild 4.2 dargestellten dreidimensionalen Körper lautet für eine pfadabhängige, physikalisch nichtlineare Berechnung die Gleichgewichtsbedingung zum Zeitpunkt „ $t$ “ wie folgt:

$${}^tR - {}^tF = 0 \quad (4.56)$$

„ ${}^tR$ “ ist der Vektor der äußeren Knotenkräfte und enthält alle bekannten auf das System zum Zeitpunkt „ $t$ “ einwirkenden Kräfte. Der Vektor „ ${}^tF$ “ fasst alle Knotenkräfte, die infolge der Elementspannungen zur Zeit „ $t$ “ resultieren – hervorgegangen aus den Elementverzerrungen – zusammen. Die Zeitvariable „ $t$ “ ist in statischen Berechnungen eine ideell eingeführte Variable. Sie soll verschiedene Lastdefinitionen und / oder unterschiedliche Systemkonfigurationen kennzeichnen. Nur in statischen Berechnungen mit physikalischen und zugleich zeitlich abhängigen

Effekten, wie z.B. Kriecheffekte des Materials, wird die Zeitvariable in die Lösung des physikalischen Problems mit einbezogen. Ist die Lösung zum Zeitpunkt „ $t$ “ bekannt, so kann die Lösung zum Zeitpunkt „ $t + \Delta t$ “ mit:

$${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0 \quad (4.57)$$

berechnet werden [14]. Da die Näherungslösung zum Zeitpunkt „ $t$ “ bekannt ist, kann für „ ${}^{t+\Delta t}F$ “ auch „ ${}^{t+\Delta t}F = {}^tF + F$ “ geschrieben werden. „ $F$ “ ist der Zuwachs der inneren Knotenkräfte aus den Elementverschiebungen vom Zeitpunkt „ $t$ “ bis zum Zeitpunkt „ $t + \Delta t$ “. Der Vektor „ $F$ “ wird mit der Tangentensteifigkeitsmatrix „ ${}^tK$ “, die alle geometrischen und materiellen Einflüsse zur Zeit „ $t$ “ berücksichtigt, angenähert:

$${}^tK \cdot U = F \quad (4.58)$$

Der Vektor „ $U$ “ enthält die „inkrementellen“ Knotenpunktverschiebungen der Elementgruppierung. Auf diese Weise ergibt sich für eine statische, physikalisch nichtlineare Berechnung:

$${}^tK \cdot U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad (4.59)$$

Nach „ $U$ “ aufgelöst liefert Gleichung 4.59 die Näherung für die Verschiebungen zur Zeit „ $t + \Delta t$ “:

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + U \quad (4.60)$$

Die Knotenpunktkräfte „ ${}^tF$ “ sind zu den Elementspannungen äquivalent. Beide Vektoren „ ${}^tF$ “ und „ ${}^{t+\Delta t}R$ “ werden mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen berechnet. Die Zeit „ $t$ “ wurde als Variable zur Steuerung der Lastschritte eingeführt.

Nachdem über die vorangestellte inkrementelle Lösungsmethode eine Näherung über die Knotenpunktverschiebungen zur Zeit „ $t + \Delta t$ “ ermittelt ist, können daraus ebenfalls als Näherung die den Knotenpunktverschiebungen zugehörigen Spannungen zum Zeitpunkt „ $t + \Delta t$ “ berechnet werden. Bei ausreichend kleinen Lastinkrementen könnte man mit der Lösung des nächsten Last- bzw. Zeitschrittes fortfahren. Da in der vorliegenden Arbeit die Systemantwort mit Bezug auf die zu wählenden Zeitschritte nicht bekannt ist, wird es notwendig zu iterieren, um eine ausreichend genaue Lösung für Gleichung 4.57 zu gewährleisten. Mit einer iterativen Lösungsstrategie können Fehler, z.B. beim Lösen von Gleichung 4.58 (infolge zu großer Verschiebungen bei einer Berechnung mit Weggrößen) vermieden werden. In der vorliegenden Arbeit wird das Newton-Raphson-Verfahren in Verbindung mit der Konvergenzhilfe „Adaptive Descent“ bevorzugt. Die zuvor eingeführten, zu lösenden Grundgleichungen lassen sich in Abhängigkeit der benötigten „ $i$ “-ten Iterationen durch nachfolgende Beziehungen weiter verallgemeinern:

$$\Delta R^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (4.61a)$$

$${}^tK \cdot \Delta U^{(i)} = \Delta R^{(i-1)} \quad (4.61b)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (4.61c)$$

Die Gleichungen 4.61 (a bis c) liefern die inkrementelle Gleichgewichtsbeziehung für die Newton-Raphson-Lösung:

$${}^tK \cdot \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (4.62)$$

mit der die Korrekturen der unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen ermittelt werden. Es wird über diskrete Zeitintervalle „ $\Delta t$ “ die Last Schritt für Schritt aufgebracht und über die Berechnung der zugehörigen Gleichgewichtslagen das Ende des Lösungspfades – der Bruchzustand – gesucht.

#### 4.5.1 Vollständiges Newton-Raphson-Verfahren

Die vorangestellte allgemeine Formulierung zeigt, dass eine nichtlineare Berechnung mit der Methode der finiten Elemente lediglich auf eine Reihe von aufeinander folgenden linearen Gleichungssystemen führt. Da die Koeffizientenmatrix „ $K$ “ selbst eine Funktion der unbekanntenen Knotenverschiebungen bzw. deren Ableitungen ist, folgt aus Gleichung 4.59 ein nichtlineares Gleichungssystem. Die Newton-Raphson-Methode ist ein iterativer Prozess zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems. Gleichung 4.59 wird nachfolgend umgeschrieben, [13]:

$$\left[ K_i^T \right] \cdot \{ \Delta u_i \} = \{ F^a \} - \{ F_i^{nr} \} \quad (4.63)$$

$$\{ u_{i+1} \} = \{ u_i \} + \{ \Delta u_i \} \quad (4.64)$$

- darin sind:
- $\left[ K_i^T \right]$  = tangentielle Steifigkeitsmatrix  
(Jacobian-Matrix oder Tangentenmatrix)
  - $i$  = Index, zur Bezeichnung der gegenwärtigen Gleichgewichtssiteration
  - $\{ F^a \}$  = Vektor der bekannten, äußeren Knotenpunktkräfte
  - $\{ F_i^{nr} \}$  = Vektor der Knotenpunktkräfte, die zu den Elementspannungen äquivalent sind  
(Newton-Raphson Restoring Forces)

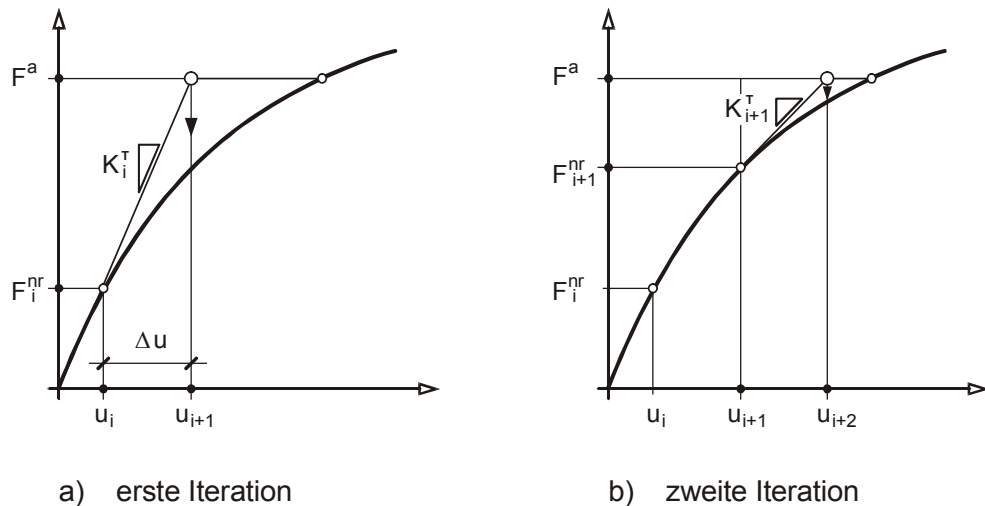
Sowohl die Tangentenmatrix „ $K_i^T$ “ als auch die zu den Elementspannungen äquivalenten Knotenpunktkräfte „ $F_i^{nr}$ “ der Elementgruppierung werden mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen berechnet und hängen beide von den Knotenpunktverschiebungen „ $u_i$ “ ab. Die rechte Seite der Gleichung 4.63 beschreibt den Vektor der Ungleichgewichtskräfte bzw. gibt den Betrag des nicht ausbalancierten Lastvektors an. Für ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad zeigt Bild 4.5a eine Gleichgewichtssiteration „ $i$ “. Man erkennt, dass für eine Gleichgewichtsforderung (für ein konvergierendes Berechnungsergebnis) mehr als eine Iteration benötigt wird. Der erforderliche Algorithmus für eine Finite-Element-Gleichgewichtsforderung mit dem Newton-Raphson Iterationsschema kann wie folgt formuliert werden:

1. Schritt: Annahme einer Anfangsverschiebung „ $u_0$ “. Gewöhnlich entspricht „ $u_0$ “ dem bekannten, konvergierten Gleichgewichtszustand des vorangegangenen Zeitschrittes. Für den ersten Zeitschritt gilt „ $u_0 = 0$ “.



2. Schritt: Berechnen der aktuellen Tangentenmatrix  $[K_i^T]$  mit dem zugehörigen Lastvektor  $\{F_i^{nr}\}$  entsprechend den Elementspannungen für die Verschiebungsconfiguration „ $u_i$ “.
3. Schritt: Berechnen des Verschiebungsinkrements „ $\Delta u_i$ “ mit Gleichung 4.63 für den nicht ausbalancierten Lastvektor. Man erkennt auch hier wieder die Annahme, dass die äußeren Lasten nicht von den Verschiebungen abhängen (vgl. Kapitel 4.3 – konservative Betrachtung).
4. Schritt: Hinzufügen des berechneten Verschiebungsinkrements „ $\Delta u_i$ “ zur bekannten Anfangsverschiebung „ $u_i$ “ (Gleichung 4.64) um eine neue, verbesserte Annäherung „ $u_{i+1}$ “ zu erhalten.
5. Schritt: Die Korrektur des Verschiebungsinkrements „ $\Delta u_i$ “ wird dazu verwendet, die nächste Verschiebungsnäherung zu gewinnen, d.h. Wiederholen der Schritte 2 bis 4, bis sich eine konvergierte Lösung einstellt.

Bild 4.5b zeigt das Ergebnis für den  $(i + 1)^{\text{ten}}$  Iterationsschritt. Die darauf folgenden Iterationen erfolgen in der gleichen Weise, bis am Ende des Iterationsprozesses das Ergebnis eine akzeptierte Gleichgewichtsforderung zu den bekannten äußeren Knotenkräften erfüllt. Mit anderen Worten: der Vektor der „inneren“ Knotenkräfte – korrespondierend zu den Elementspannungen – entspricht dem Vektor der „äußeren“ Knotenkräfte, zumindest innerhalb einer vorgegebenen Toleranz. Keine Zwischenlösung bzw. kein Iterationsschritt beschreibt einen Gleichgewichtszustand.



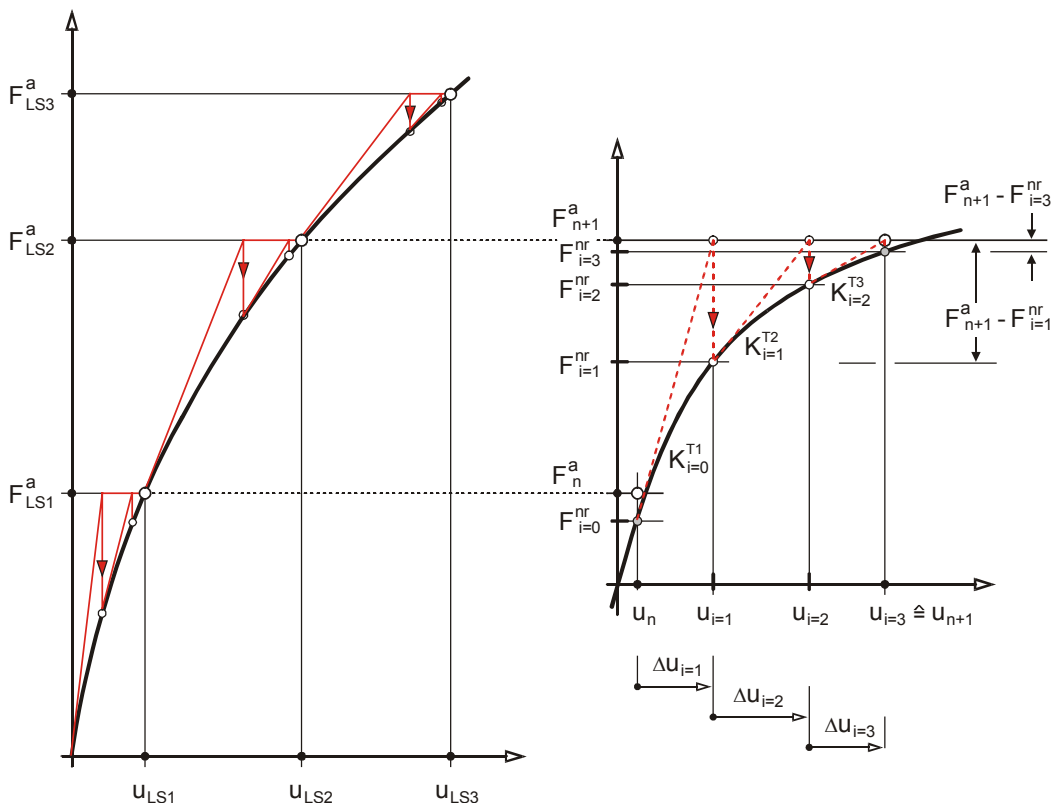
**Bild 4.5:** Newton-Raphson-Verfahren

Enthält ein Randwertproblem pfadabhängige nichtlineare Einflüsse, insbesondere infolge plastischer Faserdehnungen bzw. -verschiebungen, so müssen immer Gleichgewichtsbedingungen über den gesamten interessierenden Zeitbereich aufgestellt und gelöst werden. Dies erfordert ein Verfahren, bei dem Schritt für Schritt die Systemantwort der jeweils aufgebrachten Last berechnet wird. Nur damit kann in wirksamer Form die von der Belastung abhängige Systemantwort gefunden werden, d.h. dem Lastpfad zuverlässig gefolgt werden. Der endgültige Lastvektor  $\{F^a\}$  der äußeren Knotenpunktkräfte wird somit nicht auf einmal, sondern in passend gewählten Lastschritten bzw. über Zeitzuwächse „ $\Delta t$ “ auf das System angewendet und die Sys-

temantwort für die Zeit „ $t + \Delta t$ “ berechnet. Die Formulierung des Newton-Raphson Iterationsverfahrens lautet mit Bezug auf Gleichung 4.62 für jeden Last- bzw. Zeitschritt:

$$[K_{n,i}^T] \cdot \{\Delta u_i\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\} \quad (4.65)$$

- darin sind:
- $[K_{n,i}^T]$  = tangentielle Steifigkeitsmatrix für den Zeitschritt „ $n$ “ und die ( $i$ )te Iteration
  - $\{F_n^a\}$  = Vektor der gesamten, aufsummierten äußeren Knotenpunktkräfte für den Zeitschritt „ $n$ “
  - $\{F_{n,i}^{nr}\}$  = Vektor der Knotenpunktkräfte, die zu den Element-Spannungen äquivalent sind, für den Zeitschritt „ $n$ “ und die ( $i$ )te Iteration (Newton-Raphson Restoring Forces)



- a) Systemlast wird unterteilt in eine begrenzte Anzahl von Zeit- bzw. Lastschritten
- b) Drei Gleichgewichtsiterationen für den Lastschritt ( $n+1$ )

**Bild 4.6:** Newton-Raphson-Verfahren

Die inkrementelle Vorgehensweise mit Zeit- (oder Last-)Schritten der Größe „ $\Delta t$ “ wird so lange fortgesetzt, bis ein geeignetes Konvergenzkriterium erfüllt ist (Kapitel 4.5.2). Bild 4.6a zeigt den Lösungsprozess für ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad über „ $n = 3$ “ Zeitschritte. Das Newton-Raphson-Verfahren garantiert Konvergenz genau dann – **und nur dann** – wenn das Ergebnis für die Verschiebungsconfiguration „ $u_i$ “ jeder Iteration ausreichend nahe der exakten Lösung ist. Bild 4.6b zeigt, wie sich ein einzelner Zeitschritt - der  $(n + 1)^{te}$  Zeitschritt – aus drei Gleichgewichtsiterationen zusammensetzt.

Bei der vollständigen Newton-Raphson-Methode, die in der vorliegenden Arbeit in Kombination mit dem Verfahren Adaptive-Descent angewendet wurde, wird die tangentielle Steifigkeitsmatrix entsprechend den Gleichungen 4.63 bzw. 4.65 für jede Iteration aktualisiert. Der beschriebene Iterationsprozess wird so lange fortgesetzt, bis eine vorgegebene Konvergenztoleranz „ $\varepsilon_R$ “ erreicht wird.

#### 4.5.2 Konvergenzkriterium

Eine von einer iterativen Berechnungsmethode abhängige Lösungsstrategie kann, da das Berechnungsergebnis und die Systemantwort zunächst noch nicht bekannt sind, nur effektiv sein, wenn realistische Kriterien für die Beendigung der Iteration eingeführt werden. Zu weit gefasste Konvergenztoleranzen liefern unsichere und ungenaue Ergebnisse. Wird die Toleranz zu klein gewählt und eine unnötige Genauigkeit gefordert, kann der Rechenaufwand deutlich ansteigen. Ineffektive Divergenzprüfungen können einen Iterationsprozess abbrechen, ohne dass die Antwort des Systems wirklich divergent ist.

Um von den zahlreichen Freiheitsgraden, den unbekanntem Koeffizienten, auf einen Bezugs- wert zu kommen, bedient man sich einer Vektornorm der Form:

$$\|R\|_q = \left( \sum_i |R_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.66)$$

Im eingesetzten FE-Programm können mit „ $q = 1, 2$ “ und „ $\infty$ “ insgesamt drei Normen ausgewählt werden. Für „ $q = \infty$ “ ergibt sich die Maximumnorm. Bei der Maximumnorm werden mit zunehmenden Exponenten die größeren Werte in der Summe dominieren. Im Extremfall, d.h. bei einem Exponenten von „ $\infty$ “, sind die Potenzen aller anderen Komponenten gegenüber der des Maximums vernachlässigbar. Zieht man die „unendliche“ Wurzel aus der Summe entsprechend Gleichung 4.60, bleibt gerade das Maximum übrig – dann gilt für die Maximumnorm:

$$\|R\|_\infty = \max_i |R_i| \quad (4.67)$$

Diese Kräfteform „ $\|R\|$ “, bzw. „Norm des Residuums“, enthält mit Bezug auf das physikalische Problem den Vektor der nicht ausbalancierten Lasten. Diese Differenz zwischen den inneren und äußeren Kräften des zu untersuchenden Gesamtsystems muss mit einer Referenzgröße „ $R_{(ref)}$ “ verglichen werden. Bei einer Kräfteform entspricht diese Referenzgröße i.d.R. der Norm der äußeren Kräfte, d.h. dem Lastvektor  $\{F^a\}$ , so dass:

$$\frac{\|\{R\}\|}{R_{(Ref)}} < \varepsilon_R \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \{R\} &= \{F^a\} - \{F^{nr}\} \\ R_{(ref)} &= \|\{F^a\}\| \end{aligned}$$

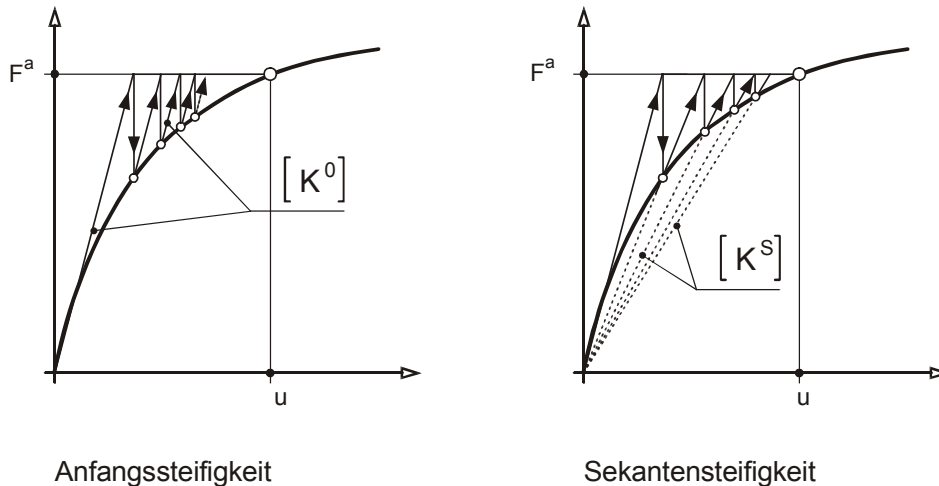
gelten muss. „ $\varepsilon_R$ “ ist die vorzugebende Toleranz, die einen Zusammenhang mit der Genauigkeit der Lösung hat, aber nicht direkt die Genauigkeit angibt! In [21] werden Vorzüge dieses Konvergenzkriteriums mit Bezug auf Berechnungen für ebene Stahlbetonbauteile und Beanspruchungsgrade infolge Rissbildung angegeben.

Die Einteilung des Zeitraumes in inkrementelle Zeitintervalle (Lastschritte) erfolgt durch Vorgabe eines geeigneten Startintervalls und einer maximal zulässigen Intervallgröße. Über das Umschalten der automatischen Zeitschrittsteuerung im Programm ANSYS können insbesondere im Übergangsbereich vom ungerissenen in den gerissenen Zustand geeignete Zeitabstände (Lastschritte) vom Programm selbst festgelegt werden. Ein hervorzuhebendes Merkmal der automatischen Zeitschrittsteuerung ist das Überprüfen der aktuell berechneten plastischen Dehnungsanteile mit einem maximal zulässigen plastischen Dehnungsinkrement (siehe hierzu: [13]). Wird der zulässige Wert überschritten, erfolgt eine Neuberechnung des Lastschrittes verbunden mit einem Zurücksetzen der Zeitschrittgröße.

#### 4.5.3 Die Methode „Adaptive Descent“

Die Auflösung großer Gleichungssysteme benötigt einen beachtlich hohen numerischen Aufwand, insbesondere wenn nichtlineare Werkstoffverhalten mit stark streuenden inneren Zerstörungsvorgängen analysiert werden müssen. Die Einflüsse infolge viskoelastisch-plastischen Druckverhaltens, verbunden mit einem deutlich verringertem Tragvermögen im Druck-Zugbereich bis hin zum totalen Versagen im Zugbereich, erfordern leistungsfähige Lösungsalgorithmen. Nur die Formulierung geeigneter, effizienter und numerisch stabiler Algorithmen kann die Notwendigkeit einer gleichmäßigen inkrementellen Lasterhöhung gewährleisten. Dies ist Voraussetzung für eine wirklichkeitsnahe, reale Umlagerung im Sinne des Minimumprinzips.

Das nichtlineare Verformungsverhalten des Werkstoffes Beton – insbesondere aber die Rissbildung – machte lange Zeit die Festlegung auf ein geeignetes Verfahren und die Auflösung des zugehörigen nichtlinearen Gleichungssystems schwierig. So erfolgte die Behandlung stoffgesetzlich nichtlinearer Probleme einerseits nach der Art der verwendeten Systemsteifigkeiten (Anfangs-, Sekanten- oder Tangentensteifigkeit), andererseits nach der Methode (Anfangsdehnungs- oder Anfangsspannungsmethode), um die nicht ausgeglichenen Knotenkräfte – das Residuum – zu ermitteln [21]. Verfahren mit der Tangenten- oder Sekantensteifigkeit benötigen einen größeren Zeitbedarf durch die Änderung der Steifigkeiten und das Neuauflösen des Gleichungssystems bei nur wenigen Iterationsschritten. Die Methoden der Anfangssteifigkeiten benötigen dagegen eine große Anzahl von Iterationsschritten. Bild 4.7 zeigt eine Gegenüberstellung zwischen den verschiedenen Steifigkeitsmethoden – der Anfangs- und Sekantensteifigkeit – mit Bezug auf die benötigten, symbolisch dargestellten, Gleichgewichtsiterationen. Die Kombination mehrerer Methoden war vielfältig üblich und möglich [65].



**Bild 4.7:** Numerische Werkzeuge für nichtlineare Berechnungen

Mit zunehmender Entwicklung sehr leistungsfähiger Digitalrechenanlagen wird diese Frage nach einem geeigneten Verfahren – nach Ansicht des Verfassers – an Bedeutung verlieren. Der Verfasser bevorzugte daher stets im Bereich seiner wissenschaftlichen Tätigkeiten wie auch in der vorliegenden Arbeit das vollständige Newton-Raphson-Verfahren.

Bei einem numerischen, iterativen Vorgehen innerhalb einer Approximationsmethode sind nach dem ersten Iterationsschritt eines Zeit- bzw. Lastschrittes keinerlei Aussagen über die Verteilung der Feldvariablen zwischen dem Startwert und der gesuchten Gleichgewichtslage des Zeitschrittes möglich. Hinzu kommt, dass der „spröde Charakter“ des im Kapitel 3 definierten Stoffgesetzes für Beton zu Unverträglichkeiten zwischen dem durch Rissbildung entstandenen Verformungszustand und dem durch das Stoffgesetz definierten Spannungszustand (d.h. *deutliche, sprunghafte Minderung*) führen. Ein Algorithmus, der diesen Verlust der positiv definiten Eigenschaft der Diskretisierungsmatrix erkennt oder über den berechneten Anfangswert frühzeitig eine Fehlerkonvergenz abschätzen kann und dadurch selbständig eine Verfeinerung der Zeitschrittgröße definiert, wird deutlich zu einem ökonomischen Berechnungsverfahren beitragen. Eine derart gesteuerte Programmorganisation ermöglicht daher eine weitere Algebraisierung des Randwertproblems.

In Kombination mit der im Kapitel 4.5.2 erwähnten automatischen Zeitschrittsteuerung ist die Methode „Adaptive Descent“ ein solcher sehr leistungsfähiger Algorithmus, der es ermöglicht, systematisch zuvor angenommene Anfangswerte zu variieren. Die Methode besteht wenn sie aktiviert wird, in erster Linie aus einem Prozess, um mit einem eingeführten Descent-Parameter „ $\xi$ “, ausgehend von einem Anfangswert „ $\xi_0$ “, zu irgendeinem kleineren Wert „ $\xi_f$ “ einen zulässigen Abklingvorgang einzuleiten. Als Indikator für den erfolgreichen Einsatz des Parameters wird die Abnahme des Residuums – des Vektors der nicht ausbalancierten Kräfte – verwendet. In der vorliegenden Arbeit wird der eingeführte Parameter „ $\xi$ “ bei der Berechnung der Systemsteifigkeitsmatrix und in besonderer, vom Verfasser eingeführten Form, für die Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix verwendet. Das Flussdiagramm der modifizierten Methode ist im Bild 4.8 angegeben.

Erkennt das Programm Konvergenzschwierigkeiten, u.a. hervorgerufen durch eine erhöhte Rissbildung während der laufenden Gleichgewichtsiterationen gegenüber dem Anfangswert, so

wird auf die numerisch stabilere Sekantensteifigkeit umgeschaltet. Konvergiert die Lösung stetig, kann auf die Tangentensteifigkeit mit dem gewünschten schnelleren Konvergenztempo zurückgekehrt werden. Die beim Newton-Raphson-Verfahren verwendete Systemsteifigkeit ist dann als Summe von zwei Matrizen definiert [13]:

$$\left[ K_i^T \right] = \xi \cdot \left[ K^S \right] + (1 - \xi) \cdot \left[ K^T \right] \quad (4.69)$$

darin sind:

$$\left[ K^S \right] \quad := \text{Sekantensteifigkeitsmatrix}$$

$$\left[ K^T \right] \quad := \text{Tangentensteifigkeitsmatrix}$$

$$\xi \quad := \text{Descent Parameter}$$

Während der Gleichgewichtsiterationen erfolgt vom Programm die nachfolgend beschriebene, automatisierte Anpassung des eingeführten Descent Parameters „ $\xi$ “:

- Beim Starten eines neuen Zeitschrittes wird zunächst die Veränderung der Systemsteifigkeit immer mit dem Verfahren der Tangentialsteifigkeiten formuliert ( $\xi = 0$ ).
- Die Veränderung der Ungleichgewichtskräfte  $\|\{R\}\|_q$  wird über die Gleichgewichtsiteration überwacht und wie nachfolgend aufgeführt kontrolliert:

**Bei Zunahme der Ungleichgewichtskräfte** – dies kündigt eine mögliche Divergenz des Systemverhaltens an:

- ① und gilt für die Belegung des Descent Parameters „ $\xi < 1$ “; so wird die gegenwärtige Lösung entfernt und der Parameter „ $\xi$ “ wird auf „1“ gesetzt. Die Iteration wird mit dem Verfahren der Sekantensteifigkeit wiederholt.
- ② wenn der Descent Parameter „ $\xi$ “ bereits auf „1“ gesetzt wurde, wird die Iteration mit dem stabileren Verfahren, mit der Sekantensteifigkeit, fortgeführt.

**Nehmen die Ungleichgewichtskräfte ab** – damit wird eine stabile und konvergierende Lösung angezeigt:

- ① wenn bereits mit der Sekantensteifigkeit gearbeitet wird, weil „ $\xi = 1$ “ ist und die Ungleichgewichtskräfte nach drei Iterationen in Folge kontinuierlich abgenommen haben – oder nach zwei Iterationen in Folge, wenn der Descent Parameter „ $\xi$ “ wiederholt innerhalb eines Lastschrittes auf „1“ heraufgesetzt wurde – erfolgt eine Reduzierung des Parameters um den Faktor „ $1/4$ “, während die Iteration kontinuierlich fortgeführt wird ( $\xi = 0,25$ ).
- ② gilt bereits für den Descent Parameter „ $\xi < 1$ “, wird während der laufenden Iteration der Parameter gleichmäßig um den Faktor „ $1/4$ “ reduziert. Ist der Wert „ $0,0156$ “ unterschritten, wird wieder mit dem Verfahren der Tangentialsteifigkeiten gearbeitet ( $\xi = 0$ ).

- Wird auf eine negative Hauptdiagonale gestoßen, so zeigt dies eine fehlerhafte Belegung der Steifigkeitsmatrix an:
  - ① Für „ $\xi < 1$ “ wird dann die gegenwärtige Lösung entfernt, der Descent Parameter „ $\xi$ “ auf „1“ heraufgesetzt und die Iteration mit dem Verfahren der Sekantensteifigkeit wiederholt.
  - ② Für „ $\xi = 1$ “ wird der gegenwärtige Zeit- bzw. Lastschritt geteilt (reduziert) unter der Voraussetzung, dass die automatische Zeitschrittsteuerung aktiv ist. Erfolgt eine statische Analyse ohne Zeitschrittsteuerung, wird die Ausführung der Berechnung beendet.

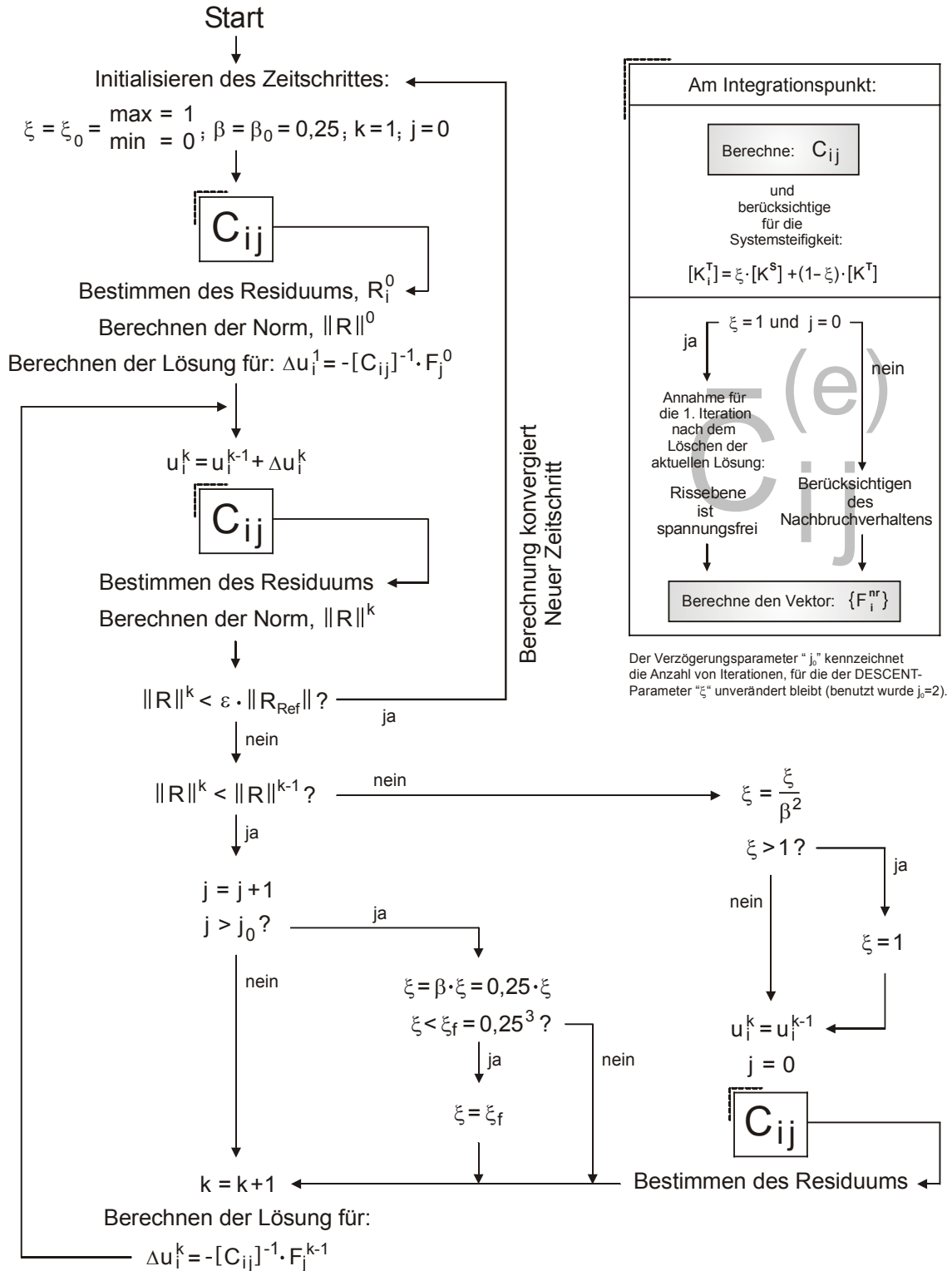
Zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften wurde vom Verfasser eine Modifikation im Fall einer Überschreitung der Zugfestigkeit (besser: Erreichen der Rissgrenzen, Bild 3.21) bzw. bei übermäßig fortschreitender Rissentwicklung vorgenommen.

Wird aufgrund der Zunahme der Ungleichgewichtskräfte die Methode „Adaptive Descent“ hinzugeschaltet, bedeutet dies, wie zuvor beschrieben, eine Wiederholung des vorangegangenen Iterationsprozesses – evtl. verbunden mit einer Reduzierung des aktuellen Zeitschrittes, auf der Basis des vorangegangenen Gleichgewichtszustandes. Bei der ersten nachfolgenden Iteration des neuen Lösungsprozesses wird bei der Berechnung der Elementsteifigkeiten die neue Rissentwicklung berücksichtigt, und das System wird entsprechend weicher. Die frei werdende Energie infolge des Zurückfederns aus dem TSE-Effekt bleibt zunächst unberücksichtigt, d.h. die Rissebenen werden als spannungsfrei angenommen. Damit ist zunächst gewährleistet, dass die Hauptaufgabe einer inelastischen Berechnung erfüllt werden kann, nämlich einen Spannungszustand zu finden, der für die schrittweise steigende Belastung auch die resultierende Dehnungsgeschichte befriedigen kann. Die Gefahr einer Überschätzung der Systemsteifigkeiten, im Bild 4.9a in Anlehnung an die Anfangsteifigkeitsmethode dargestellt, wird zunächst mit Bezug auf die Systemveränderungen infolge Rissbildung ausgeschlossen. Ein Hinzufügen fiktiver, materiell nicht zu begründender Restfestigkeiten wird vermieden.

Die den Elementspannungen äquivalenten Knotenpunktkräfte sind nichtlinear von den Knotenpunktverschiebungen abhängig, weshalb zur Lösung von „ ${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ “ eine iterative Berechnung überhaupt erst erforderlich wird. Die Dehnungen am Integrationspunkt entsprechen wiederum den Knotenpunktverschiebungen. Gerade über die Verteilung dieser Dehnungen kann bei der ersten Iteration keine zuverlässige Betrachtung angestellt werden. Deshalb wird bei der ersten Iteration des neuen Lösungsprozesses die Rissebene zunächst spannungsfrei angenommen. Das bedeutet, dass die Knotenpunktkräfte „ ${}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ “ zunächst nur zu den Elementspannungen der nicht gerissenen „Integrationsebenen“ äquivalent sind. Die Ungleichgewichtskräfte „ ${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ “ werden dann um den Anteil der nicht berücksichtigten Spannungskomponenten aus dem TSE-Einfluss – einem abklingenden Federgesetz – geringfügig überschätzt.

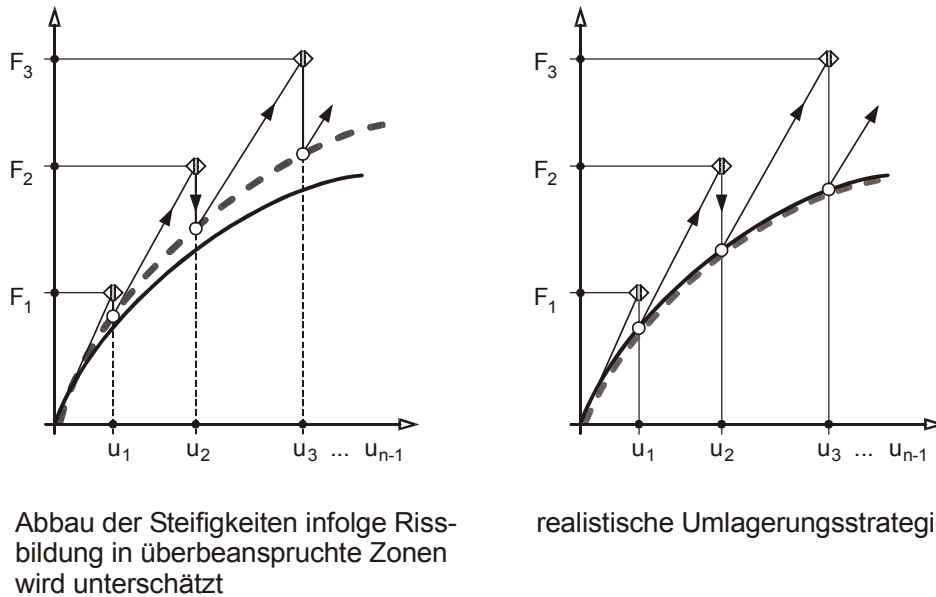
Jeder einzelne, neu entstandene Riss kann als einaxialer Zugversuch aufgefasst werden. Die Anzahl der sich neu bildenden Risse ist abhängig von der gewählten Diskretisierung, damit abhängig von Elementanzahl, -größe und Lagerungsbedingungen. Dann wird die Rissenergie respektive die Riss-Spannung entsprechend der jeweils vorhandenen Rissöffnung – also der aktivierten Federsteifigkeit – eine Funktion der Diskretisierung bzw. der daraus hervorgehenden

wirksamen Steifigkeitsverhältnisse. Dennoch wird die Einflussnahme durch die zuvor beschriebene, automatisierte Berechnungsmethode auf möglicherweise zahlreich aktiv gewordene Feder Gesetze „ $d\sigma/d\varepsilon$ “ (besonders bei Erstrissbildungen im System und dem Übergang in den Zustand II, evtl. verursacht durch ungeeignete Zeit- bzw. Lastschrittgrößen) möglich.



**Bild 4.8:** Flussdiagramm zur Methode „ADAPTIVE DESCENT“ zum Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems





**Bild 4.9:** Schematisch dargestelltes Last-Verformungsverhalten während der Rissbildung

So wie alle versuchstechnischen Maßnahmen darauf abzielen, die bei der Rissbildung frei werdende elastische Energie infolge des Zurückfederns zu reduzieren, wird bei dem eingeführten Verfahren die Reduzierung der Steifigkeiten und somit die Systemveränderung im ersten Iterationsschritt berücksichtigt. Die dabei frei werdende elastische Energie infolge des Zurückfederns wird zunächst gar nicht beachtet. Eine Überschätzung der den Elementspannungen äquivalenten Knotenkräfte „ $t+\Delta t F^{(i=1)}$ “ wird vermieden. Dies Vorgehen ist zulässig, da nach nur einer Iteration, bei der i.d.R. kein verträglicher Gleichgewichtszustand erwartet werden kann (nur bei sehr kleinen Lastschritten), auch über die Dehnungsverteilung und damit über die von der Rissdehnung abhängigen Steifigkeitsverhältnisse innerhalb des Systems (der Elementgruppierung) keine zuverlässige und kontinuierliche – von der Größe des Zeitschrittes unabhängige – Materialantwort erwartet werden kann. Eine Berücksichtigung von allen zu den Elementspannungen äquivalenten Knotenpunktkräften, einschließlich TSE-Einfluss, erfolgt daher erst in der zweiten und allen nachfolgenden Iterationen.

Analog zur Anfangssteifigkeitsmethode kann dieses Vorgehen als „untere Grenz Betrachtung“ bezeichnet werden. Bei dem Vorgehen wird erst ab dem zweiten nachfolgenden Iterationsschritt ein kontinuierlicher Last-Verformungszustand, abhängig von mehr oder weniger zahlreichen elastischen Einzelfedern, die sich möglicherweise gegenseitig beeinflussen, gesucht. Unnötig kleine Reduzierungen der Zeitschritte werden bis auf ein notwendiges Minimum vermieden und das Konvergenzverhalten deutlich beschleunigt. Die Methode kann als eine Verbesserung der Berechnungseffektivität angesehen werden. Durch die vorgenommene Modifizierung wird die physikalisch idealisierte Modellierung des „Nachbruchverhaltens“ numerisch beherrschbar.

Der standardmäßige Einsatz des Verfahrens „Adaptive Descent“ ist in der eingesetzten Programmversion nur mit der gemeinsamen Nutzung der vollständigen Newton-Raphson Iteration verfügbar. Es wird also vorausgesetzt, dass zu jeder Iteration die veränderten Systemsteifigkeiten aktualisiert werden. Praktisch bedeutet dies, dass die Verteilungen und Veränderungen der inneren Systemsteifigkeitsverhältnisse ausreichend oft erfasst werden müssen.

## 5. Nachrechnungen von Durchstanzversuchen mit der FE-Methode

Zur Bestätigung einer rechnerisch möglichen Beschreibung und einer korrekten Vorhersage vorherrschender und charakteristischer Strukturveränderungen, die beim Durchstanzproblem zum Versagen bzw. zum Totalverlust der Funktionsfähigkeit führen, werden zunächst die Ergebnisse von Nachrechnungen für sechs Versuche angegeben. Die zu Beginn der Kapitel 5.2 (nachgerechnete Fremdversuche) und Kapitel 5.3 (eigene Versuchsdurchführungen für das neu entwickelte Verbundsystem) gezeigten Last-Verformungsbeziehungen dienen der Kontrolle, ob das jeweils zu berechnende Problem mit geeigneten Stoffparametern hinreichend genau abgebildet werden kann. Anschließend werden im Kapitel 5.4 acht weitere voneinander verschiedene Systemberechnungen betrachtet, bei denen von gleichen Materialeigenschaften – entsprechend den Angaben der Tabelle 5.1 – ausgegangen wird.

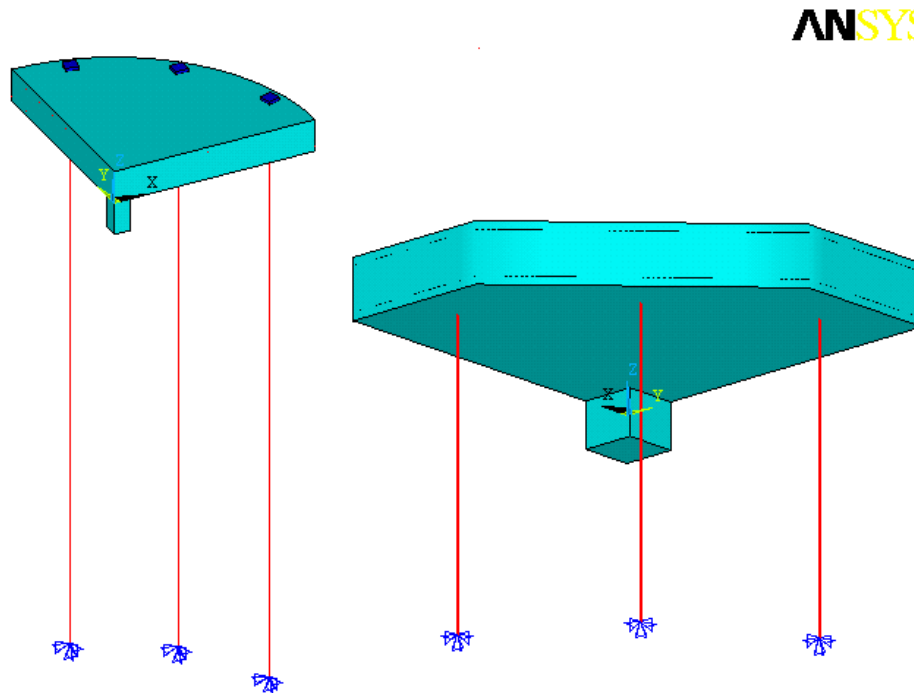
Da das Nachrechnen von Durchstanzversuchen nicht gerade ein Routineproblem darstellt, wurden zunächst Vorberechnungen durchgeführt. Mit Hilfe dieser Vorberechnungen konnte hinsichtlich der Eingangsparameter für das Nachbruchverhalten des Betons auf Zug ein auf alle nachfolgend beschriebenen Berechnungen einheitliches Stoffverhalten mit gleichbleibenden Parametern angewendet werden. Das rechnerisch berücksichtigte Nachbruchverhalten wurde im Bild 3.26 bereits angegeben. Die in die Materialgleichungen des Kapitels 3.2.4 eingearbeiteten Reduktionsfaktoren für den offenen und geschlossenen Riss (shear retention factor: „ $\beta_t^* = 0,1$ “ für den offenen und „ $\beta_c^* = 0,75$ “ für den geschlossenen Riss) sind ebenfalls das Ergebnis vergleichender Vorberechnungen mit unterschiedlichen Systemtypen. Die Berechnungsergebnisse dieser Systeme werden im Kapitel 5.4 beschrieben und interpretiert.

Von den sehr umfangreichen Berechnungsergebnissen können nur repräsentative Beanspruchungs- und Formänderungszustände wiedergegeben werden. Auch zur Einschätzung der Veränderung der inneren Steifigkeitsverhältnisse der Stahlbetonplatte werden nur Auszüge von unterschiedlichen Belastungsstufen miteinander verglichen. Die aus den Ergebnissen der FE-Berechnung gewonnenen Erkenntnisse, die zu einem großen Teil mit Versuchsbeobachtungen von vorangegangenen wissenschaftlichen Arbeiten ([7], [8], [11], [66], [67], [74], [75], [103], [111]) gut übereinstimmen, werden in diesem Kapitel direkt beschrieben und interpretiert. Auf Erkenntnisse aus den FE-Rechenergebnissen, die im besonderen Maße die Entwicklung des Bemessungsmodells beeinflusst haben, wird im Kapitel 6 bei der Herleitung und Entwicklung des Ingenieurmodells gesondert eingegangen.

### 5.1 Überblick über ausgewählte, diskrete Systemeigenschaften

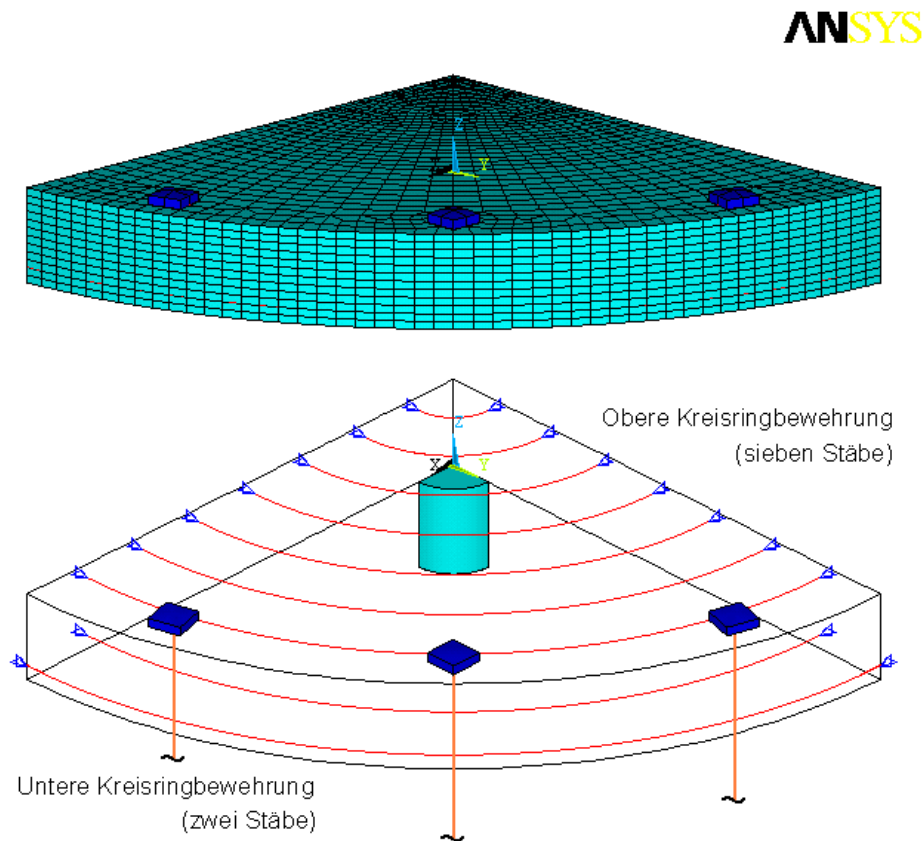
Die Berechnung einer ingenieurwissenschaftlichen Aufgabenstellung mit der FE-Methode beruht in der Regel zunächst nur auf gründlicher Kenntnis der für die Berechnung verfügbaren Ansatzfunktionen und der angewendeten Lösungsstrategien, vorgestellt im Kapitel 4, sowie die zur Lösung der Aufgabe ausgewählten Materialmodelle entsprechend den Ausführungen im Kapitel 3. Das im Allgemeinen noch unbekanntes Systemverhalten bzw. die Systemantwort abhängig von Strukturveränderungen, wiederum beeinflusst von den Belastungsvariablen, wird dabei von dem gewählten Finite-Element-Modell, seinen Randbedingungen und der Anzahl seiner Freiheitsgrade, mehr oder weniger stark beeinflusst. Insbesondere bei nichtlinearen Berechnungen muss daher die Systemdiskretisierung sehr verständnisvoll gewählt werden und dem jeweiligen Problem entsprechend angepasst sein.

Die Bilder 5.1 bis 5.4 zeigen stellvertretend für alle benutzten Systeme, dass die verwendeten FE-Netze auf der Grundlage der tatsächlichen Geometrie der Versuchskörper erfolgte.



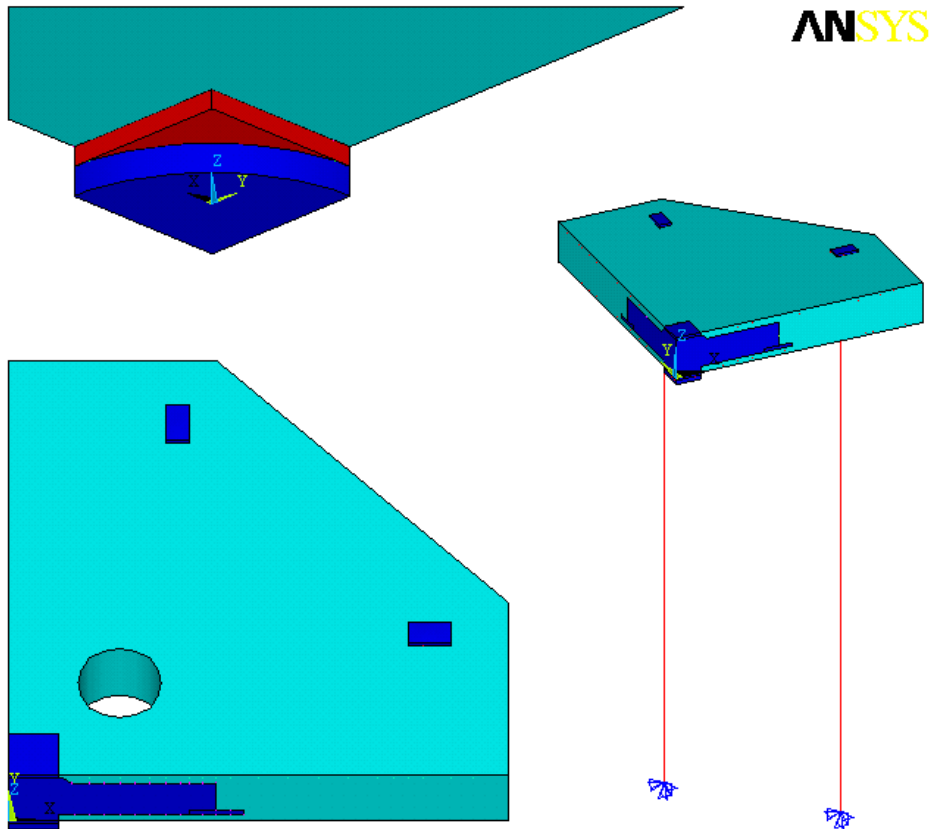
Versuch Stockholm (Bezeichnung: IB15a)      Versuch Aachen (Bezeichnung: P1)

**Bild 5.1:** Systemübersichten der nachgerechneten Fremdversuche, [66] [56]

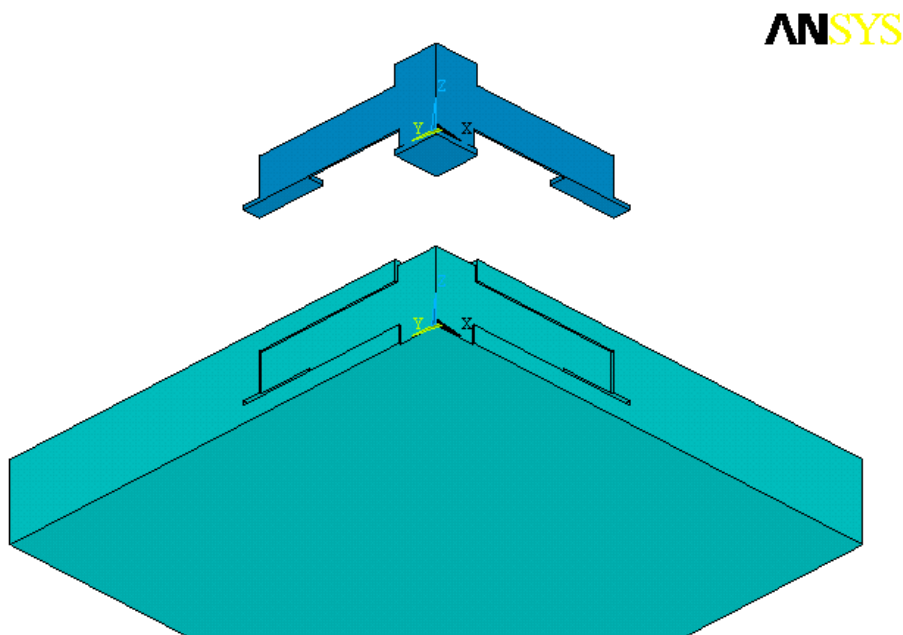


**Bild 5.2:** Versuch Stockholm (IB15a) – Elementeinteilung · Bewehrung · Randbedingungen

Entsprechend Bild 5.2 wurde die Bewehrung mit räumlichen diskreten Stabelementen, mit je drei Freiheitsgraden am Stabanfang und Stabende im direkten Verbund mit den Volumenelementen des Betonkörpers abgebildet.



**Bild 5.3:** Diskrete Eigenschaften der FE-Modelle für die Nachrechnung der Versuche W1 bis W4



**Bild 5.4:** System für Versuch W3 (Länge Stahlschwert:  $2,5 \cdot h = 750 \text{ mm}$ ,  $s_a = 15 \text{ mm}$ )

Das Stahlkreuz im Bild 5.4 ist über Kontaktelemente entsprechend der vorangestellten Abbildung, Bild 5.3, vollständig in die Stahlbetonplatte eingebettet. Der schubfeste Anschluss erfolgt über die im Kapitel 3.4 beschriebenen nichtlinearen Wegfedern. Die ortsabhängigen Lagen dieser Ersatzfedern entsprechen der tatsächlichen Anordnung der Kopfbolzen im Versuch. Eine Beschreibung des eigenen Versuchsprogramms für die Versuche W1 bis W4 – entsprechend den Darstellungen der Bilder 5.3 und 5.4 – ist in [51] angegeben. Die für die Fremdversuche verwendete Geometrie sowie der Bewehrungsgrad und die Festigkeitsannahmen wurden den Originalarbeiten (für Versuch „IB15a“ aus [66] und für Versuch „P1“ aus [56]) entnommen.

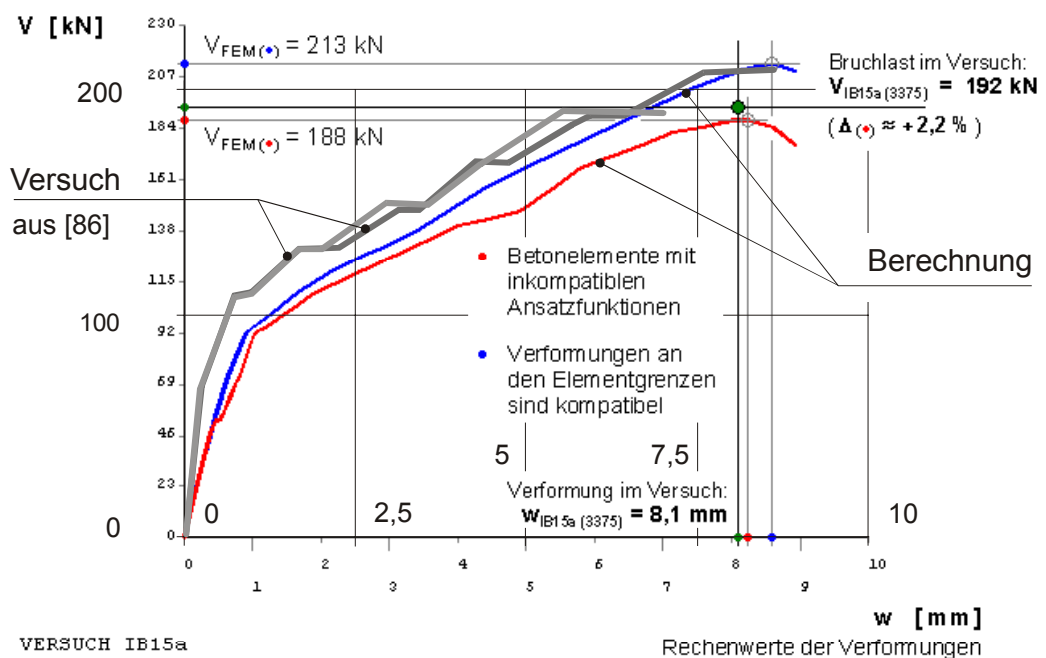
## 5.2 Fremdversuche

Die erste, allen anderen Systemen bewusst vorangestellte Nachrechnung (Ergebnisse sind im Kapitel 5.2.1 angegeben) ist ein von Kinnunen und Nylander 1960 getesteter kreisrunder Deckenausschnitt mit Ringbewehrung ( $\varnothing = 12 \text{ mm}$ ). Der Gesamtdurchmesser beträgt 184 cm mit einer Plattendicke von 15 cm. Der Durchmesser des Stützensockels, in dem die Prüflast eingetragen wurde, hat entsprechend der Plattendicke einen Durchmesser von 15 cm. Das FE-System ist im Bild 5.1 auf der linken Seite dargestellt. Details der FE-Struktur zeigt Bild 5.2. Dieser Deckenausschnitt wurde bereits in zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten numerisch untersucht, so u.a. in [8] und [86]. Entsprechend den Materialangaben in [66] sind in die Nachrechnung folgende Festigkeitskennwerte eingegangen:

$$\begin{aligned} \text{Beton: } f_{c,cyl} &= 28,8 \text{ N/mm}^2 & \text{Betonstahl: } f_{yk} &= 450 \text{ N/mm}^2 \\ f_{ctm} &= 2,8 \text{ N/mm}^2 & E_s &= 210.000 \text{ N/mm}^2 \\ E_{cm} &= 28.900 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Rechnerische Last  
des Plattenausschnitts  
(Last einer Innenstütze)

ANSYS



**Bild 5.5:** Vergleich der Last-Verformungskurven: Versuch / Berechnung, „IB15a / Stockholm“ (Last-Verformungskurven, zur Darstellung der Versuchsergebnisse, wurden [86] entnommen)

Für eine Betonüberdeckung von ca. 18 mm resultiert aus den vorstehenden Angaben ein Bewehrungsgrad von „ $\rho = 0,78\%$ “.

Die Querdehnung für die nicht mehr zwängungsfreie Beanspruchung der Betonelemente wird im Druckbereich mit „ $\nu = 0,2$ “ und für den Zugbereich mit „ $\nu = 0$ “ – entsprechend DIN 1045-1 (Ausgabe: Juli 2001 [33]) – angenommen. Zur Beschreibung des Verlaufs der einachsigen Druckfestigkeit werden mit Gleichung 3.92 ohne „abfallenden Ast“ – entsprechend Bild 3.47 – die Annahmen der DIN 1045-1 berücksichtigt. Diese Annahmen gelten im übrigen für alle in den Kapiteln 5.2 und 5.3 vorgestellten Nachrechnungen.

Auf Besonderheiten der Ortsdiskretisierung wurde im Kapitel 4.4 eingegangen. Es wurde bereits deutlich darauf hingewiesen, dass alle nachstehend angegebenen Berechnungsergebnisse mit dem im Programm voreingestellten „inkompatiblen“ Ansatzfunktionen berechnet werden. Das zugehörige, numerische Antwortverhalten für den Versuch „**IB15a**“ aus Stockholm zeigt die rot eingetragene Last-Verformungskurve im Bild 5.5. Zur Gegenüberstellung ist das Versuchsergebnis in das Diagramm mit eingetragen. Der in blau ergänzend eingetragene Belastungsverlauf unterscheidet sich zur rot dargestellten Verformungskurve lediglich durch das Ausschalten der jeweils lokal am Element – also vor der Elementgruppierung – berücksichtigten inkompatiblen Verschiebungsgrößen. Die Kurve soll lediglich als Ergänzung einen Vergleich zwischen den verschiedenen Ansatzfunktionen angeben und zusätzlich aufzeigen, wie sich über unterschiedliche numerische Ansätze die Ergebnisse einer ingenieurwissenschaftlichen Lösung – aufbereitet über die FE-Methode – beeinflussen lassen.

Vor allem aber zeigt der Vergleich beider Kurven, dass durch eine erneute Berechnung desselben Problems mit einem feineren FE-Netz zumindest für den Übergangsbereich in den gerissenen Zustand – den Zustand **II** – keine besseren Ergebnisse bzw. keine bessere Strukturantwort erwartet werden kann. Damit darf in dieser Arbeit auf zusätzliche, vergleichende Berechnungen und ihrer Darstellungen mit einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden als Nachweis für ein voll geeignetes Finite-Element-Modell verzichtet werden.

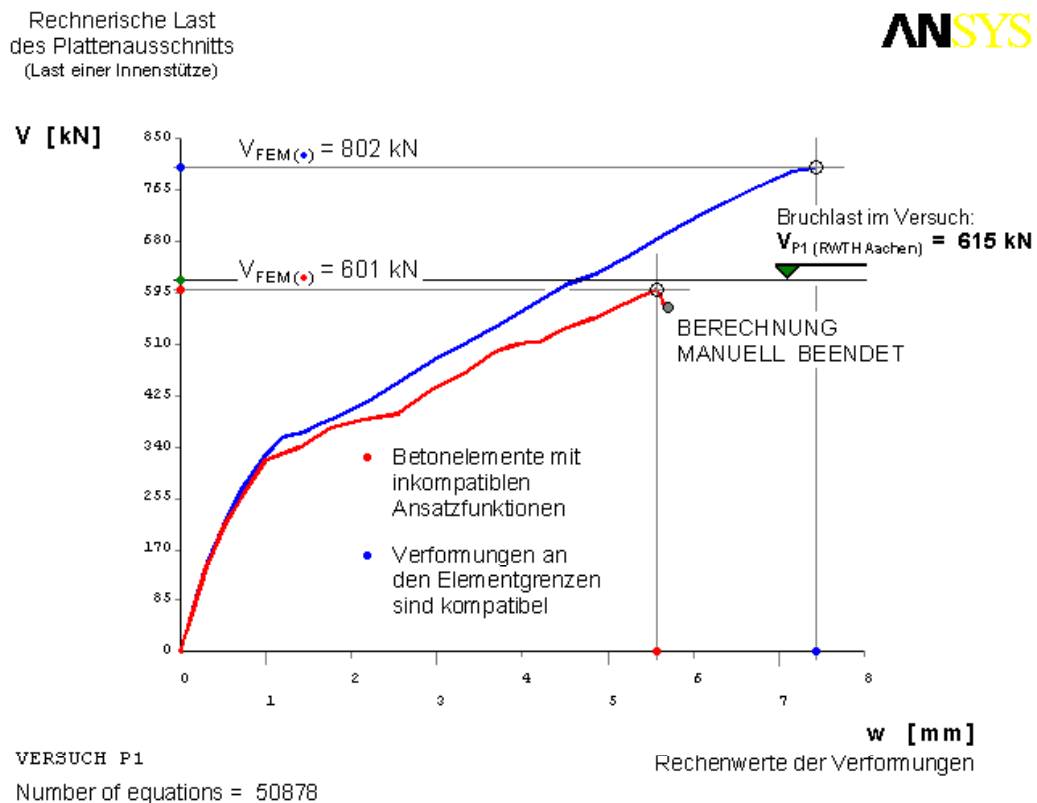
Die zweite Nachrechnung ist einem Versuchsprogramm im Rahmen eines AiF Forschungsvorhabens, bestehend aus insgesamt elf Durchstanzversuchen an Flachdeckenausschnitten, entnommen. Die Versuche wurden im Jahr 1998 an der RWTH Aachen durchgeführt und sind u.a. in [56] dokumentiert. Bei dem betrachteten Versuch mit der Bezeichnung „**P1**“ wurde wie bei dem Versuch „**IB15a**“ keine Schubsicherung in Form von senkrechten Bügeln angeordnet.

Im Gegensatz zum Versuch aus Stockholm muss bei der Nachrechnung eine orthogonal angeordnete Netzbewehrung berücksichtigt werden. Der Bewehrungsgrad für die obere Bewehrungslage resultiert aus Betonstabstahl mit  $\varnothing 14$  mm /  $e = 10$  cm und beträgt „ $\rho = 0,806\%$ “. Der unteren Bewehrungslage wurde durch den Einbau von Betonstahl  $\varnothing 10$  mm /  $e = 17,5$  cm ein Bewehrungsgrad von „ $\rho' = 0,235\%$ “ zugewiesen. Die Betondeckung betrug 2,5 cm, die gesamte Plattenhöhe wurde mit 23 cm festgelegt. Analog zu den durchgeführten eigenen Versuchen – entsprechend den Darstellungen in den Bildern 5.3 und 5.4 – erhielt die Betonplatte ein Achteckprofil und kein Rundprofil, welches von den Schweden Kinnunen und Nylander eindeutig bevorzugt wurde [66]. Die orthogonalen Außenabmessungen ergaben sich zu je 275 cm. Ein weiterer Unterschied zum Versuch aus Schweden ergibt sich aus dem gewählten Rechteckprofil für den Stützenquerschnitt unterhalb der Platte. Dieser Stützenansatz erhielt Kantenlängen

(a=b) von 40 cm. Bild 5.1 zeigt auf der rechten Seite eine Systemübersicht des Versuchs „P1“ aus Aachen.

Entsprechend den Angaben zu den Versuchsparametern (aus [56]) werden für die Nachrechnung die nachfolgenden Festigkeitskennwerte berücksichtigt. Die fehlenden Angaben hinsichtlich der Betonstahlfestigkeit werden mit Hilfe der Vorgaben der DIN 1045-1 ergänzt:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Beton: } f_{c,cyl} = 21,9 \text{ N/mm}^2 & \text{Betonstahl: } f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2 \\
 f_{ctm} = 2,35 \text{ N/mm}^2 & E_s = 200.000 \text{ N/mm}^2 \\
 E_{cm} = 26.400 \text{ N/mm}^2 &
 \end{array}$$



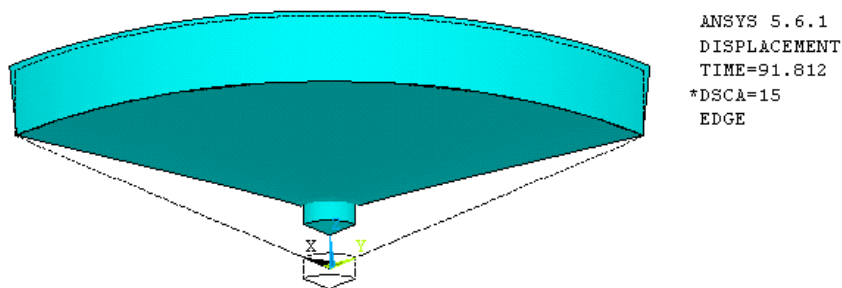
**Bild 5.6:** Rechnerische Last–Verformungskurve und Versuchsergebnis, „P1 / RWTH Aachen“

Die rechnerisch ermittelten Last-Verformungskurven und die berechneten Bruchlasten für beide Fremdversuche zeigen eine gute Übereinstimmung mit den dokumentierten Versuchsergebnissen. Beachtet man die Hinweise im Kapitel 4, dass die FE-Methode immer nur einen oberen Grenzwert der zu lösenden Aufgabe liefert, lässt sich dieses – nach Ansicht des Verfassers – auch für die Berechnung mit den kompatiblen Verformungen an den Elementgrenzen behaupten (blaue Verformungskurven). Dies gilt zunächst uneingeschränkt für die Nachrechnung des Versuchs aus Schweden. Auf die deutlichere Abweichung bei dem Versuch aus Aachen mit einem rechteckigen Stützenprofil wird am Ende dieses Kapitels bei der Bewertung und Zusammenfassung der Berechnungsergebnisse im Kapitel 5.5 gesondert eingegangen. Nachfolgend wird der Nachweis erbracht, dass mit den in den beiden folgenden Abschnitten gezeigten Auszügen der Berechnungsergebnisse zahlreiche Annahmen vorangegangener wissenschaftlicher Arbeiten, die sich bisher überwiegend auf Versuchsbeobachtungen stützten, nunmehr rechnerisch nachvollziehbar sind und numerisch bestätigt werden können. Ein großer Teil der nachfolgenden Darstellungen ist selbsterklärend und bedarf keiner weiter ins Detail gehenden Be-

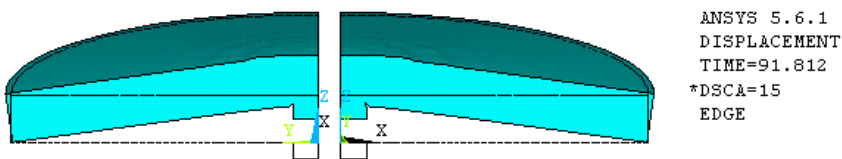
schreibungen. In der Vorbemerkung zu diesem Kapitel wurde bereits erwähnt, dass die Ergebnisse, die die Entwicklung des Berechnungsmodells in besonderer Weise beeinflusst haben, im Kapitel 6 zur Begründung der jeweiligen Ansätze wieder herangezogen werden – quasi als Nachweis und zur Kontrolle der richtigen Vorgehensweise für ein mechanisch eindeutiges Berechnungskonzept.

**5.2.1 Versuch aus Stockholm – Versuchsbezeichnung: „IB15a“**

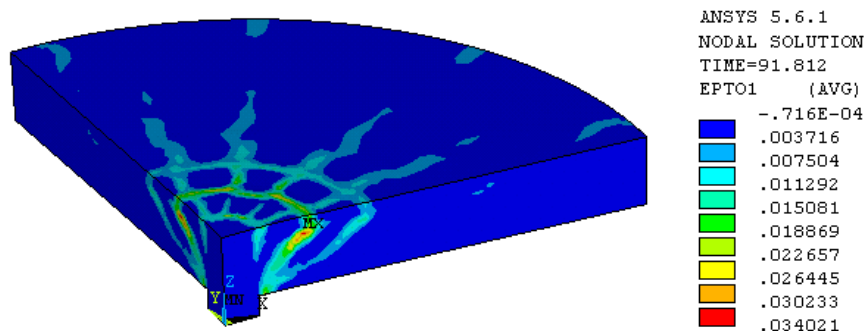
Die bis heute schlüssigsten Bemessungsvorschläge für den Nachweis gegen das Durchstanzproblem lieferten – zumindest nach Ansicht des Verfassers – die Schweden Kinnunen und Nylander [66] sowie Andrä in [ 8 ]. Die von Kinnunen und Nylander vorgeschlagene Formulierung über Gleichgewichtsbedingungen „äußerer“ Kraftkomponenten, wirksam an einem freigeschnittenen Sektorelement, bildeten seitdem die Grundlage für zahlreiche, nachfolgend erschienene Arbeiten zu diesem Problem. Ihr Modell entwickelten sie auf der Basis einer krümmungslosen Verdrehung der Stahlbetonplatte, dargestellt im Bild 5.7 (a+b), sowie der Rissentwicklung u.a. zum Zeitpunkt kurz vor dem Bruchzustand, d.h. nach Abschluss des heute häufig verwendeten Begriffs des „Lokalisierungsprozesses“.



**Bild 5.7a:** Darstellung der verformten und unverformten Struktur (Versuch: IB15a)



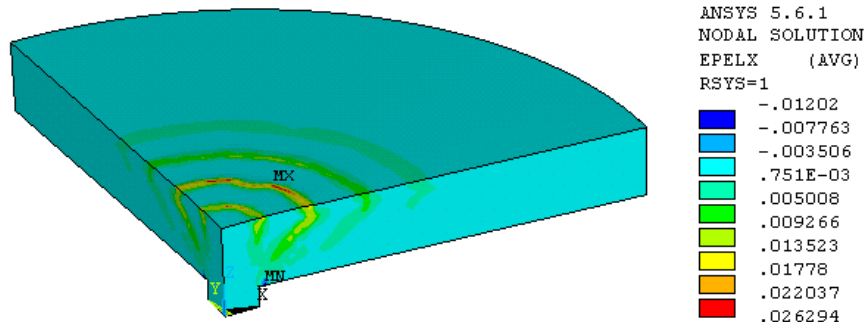
**Bild 5.7b:** Krümmungslose Verdrehung des Plattenausschnitts (Versuch: IB15a)



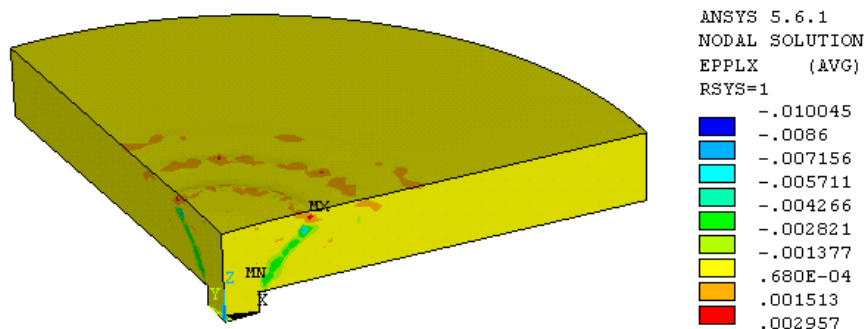
**Bild 5.8:** Dehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ infolge der Hauptzugspannungen „ $\sigma_{H1}$ “ (Versuch: IB15a)



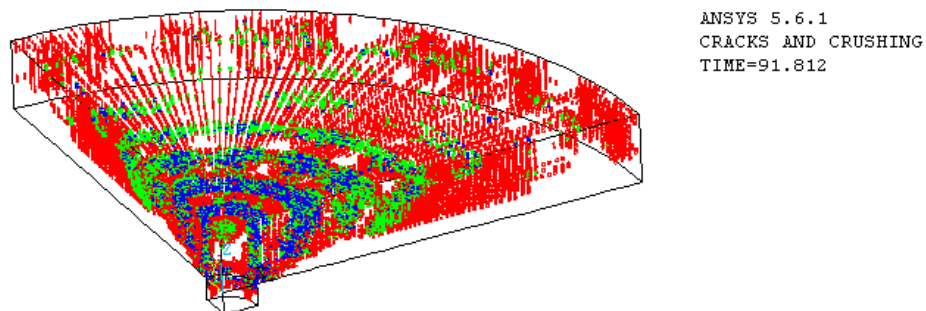
Diese Versuchsbeobachtungen bildeten die Basis ihrer theoretischen Untersuchungen und lassen sich, dies zeigen die numerisch bestimmten Hauptzugdehnungen im Bild 5.8 (die entsprechend den Erläuterungen des Kapitels 3.1.2 von den Koordinatenachsen des Systems unabhängig zu betrachten sind), über eine kontinuumsmechanische Berechnung bestätigen.



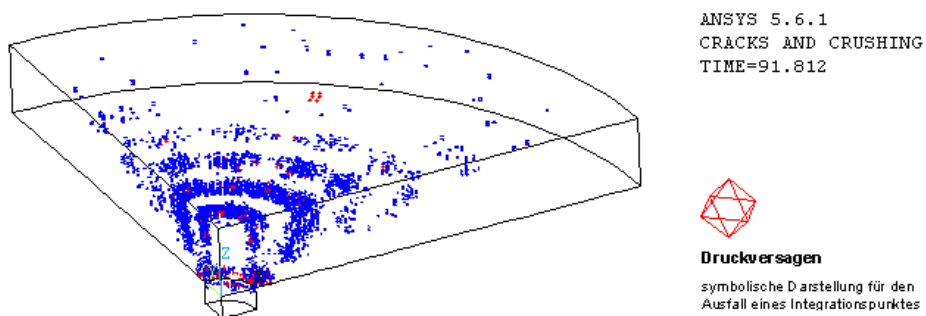
**Bild 5.9a:** Radial gerichtete, elastische Dehnungsanteile „ $\epsilon_{c,el,x}$ “ (Versuch: **IB15a**)



**Bild 5.9b:** Radial gerichtete, plastische Dehnungsanteile „ $\epsilon_{c,pl,x}$ “ (Versuch: **IB15a**)



**Bild 5.10a:** Darstellung der gesamten Strukturschädigung der Platte (Versuch: **IB15a**)  
(Erstriss = rot, Zweitriss = grün, ...in allen drei Richtungen gerissen  $\Rightarrow$  Drittriss = blau)



**Bild 5.10b:** Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind (Versuch: **IB15a**)  
(ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagens durch rotes Oktaeder markiert)

Andrä formulierte ebenfalls über die Annahme einer krümmungslosen Verdrehung des Plattenausschnittes – aber entgegen dem Modell von Kinnunen und Nylander – die Verteilung der „inneren“ Schnittgrößen bzw. Beanspruchungen mit Hilfe von radial verteilten Elementringen mit der Breite „ $dr$ “ in einem Abstand „ $r_i$ “ vom Zentrum einer Innenstütze entfernt. Mit seinen Erläuterungen über das Tragverhalten, ebenfalls unterstützt durch FE-Berechnungen – aber auch mit Hilfe von zwei Modellversuchen mit Mikrobeton –, stellte er eine nahezu vollständige Umlagerungsfähigkeit von der radialen zur tangentialen Richtung entsprechend den Darstellungen der Spannungsverteilung in den Bildern 5.11 (a bis c) in Aussicht.

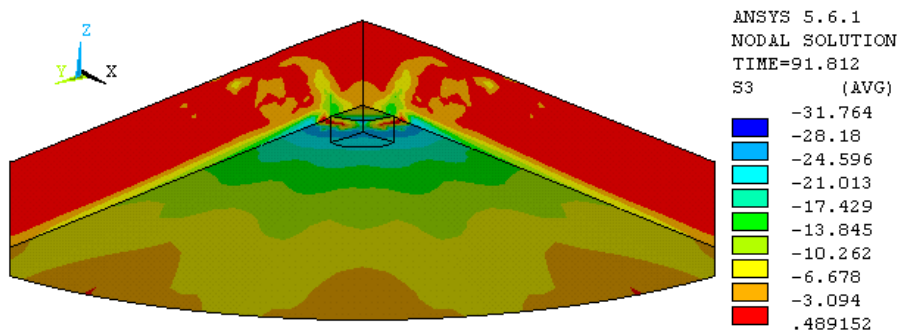


Bild 5.11a: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “ bei  $V_u = 192$  kN, (Versuch: IB15a)

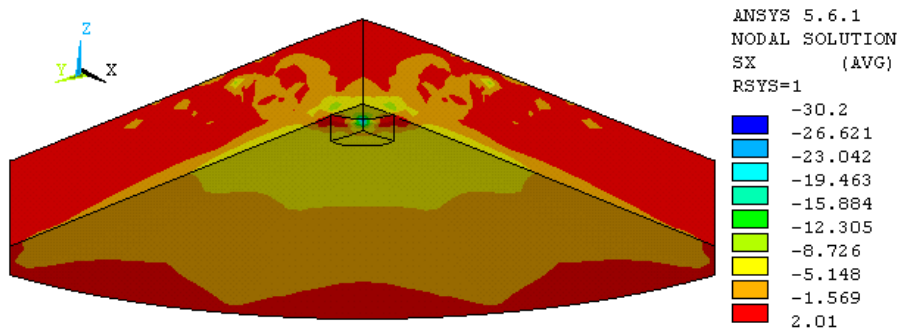


Bild 5.11b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ bei  $V_u = 192$  kN, (Versuch: IB15a)

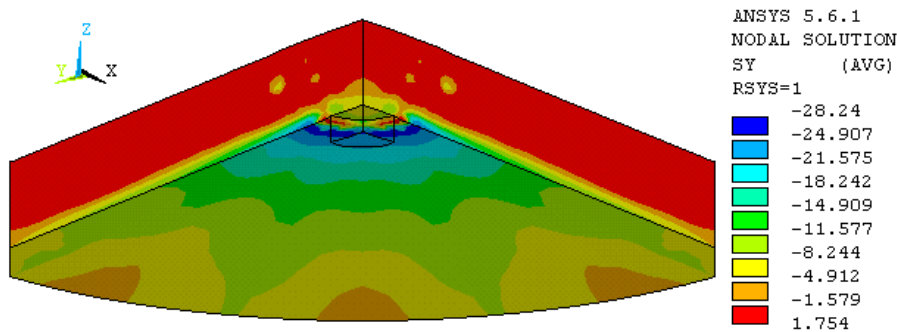


Bild 5.11c: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “ bei  $V_u = 192$  kN, (Versuch: IB15a)

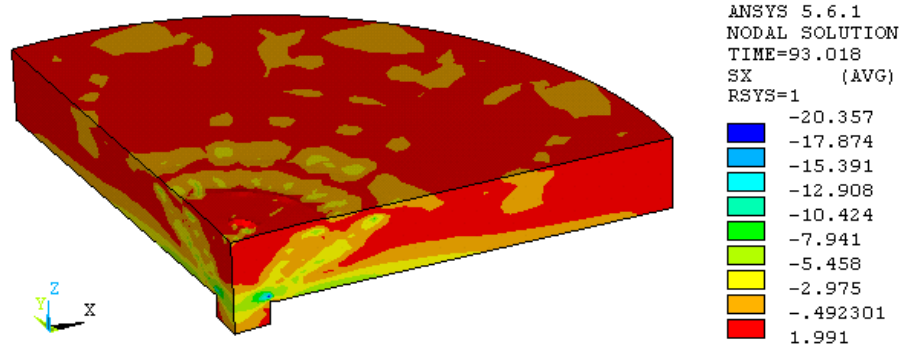


Bild 5.12a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ (Time = 93,018 > Time = 91,812 – IB15a)

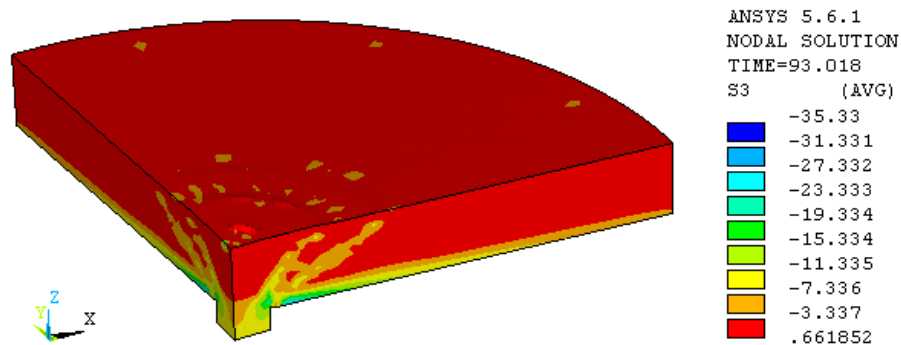


Bild 5.12b: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “ (Time = 93,018 > Time = 91,812 – IB15a)

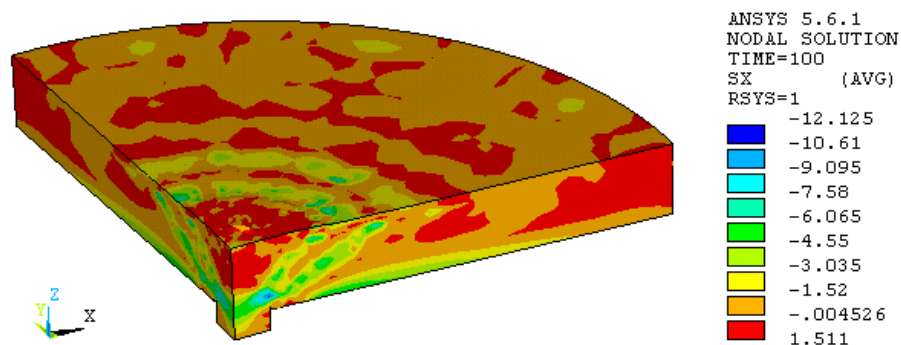


Bild 5.13a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ (Time = 100 > Time = 91,812 – IB15a)

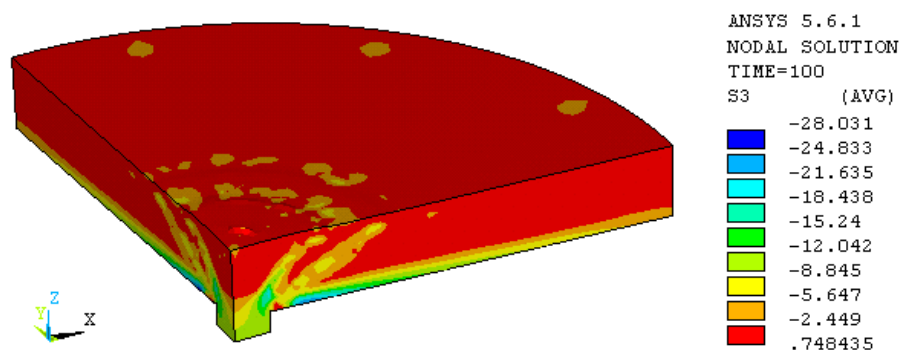
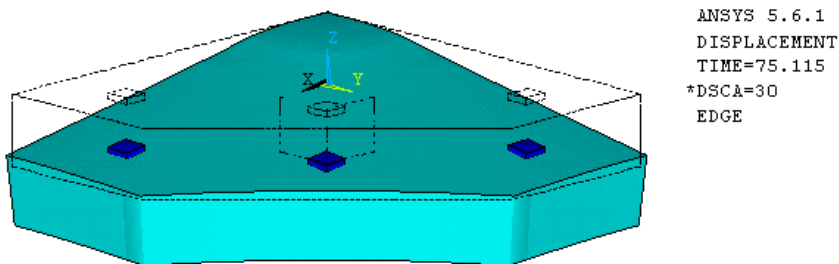


Bild 5.13b: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “ (Time = 100 > Time = 91,812 – IB15a)

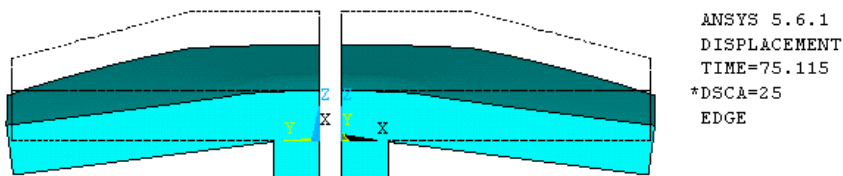
Über eine Differenzbildung aus den tangential im Ring wirksamen Kräften konnte Andrä die Größe und Verteilung der sich radial bildenden Druckkomponenten des Strebensystems – eine zum Erhalt des Gleichgewichtes notwendige Bedingung – angeben. Mit den zuvor gezeigten Berechnungsergebnissen, man betrachte hierzu in ihrer zeitlichen Folge (mit der Zunahme der Zeitschritte  $\Rightarrow$  „TIME“ gekennzeichnet) die Bilder 5.11 (b und a) gemeinsam mit den Bildern 5.12 und 5.13, lässt sich diese mechanische Modellvorstellung sehr anschaulich darstellen und bestätigen. Zum Zeitpunkt des Bruches müssen sich aufgrund der inneren Gefügezerstörungen Druckdiagonalen ausbilden, die sich gegen die obere Ringbewehrung abstützen, weil am Stützenrand an der Unterseite der Platte keine radial gerichteten Druckspannungen mehr übertragen werden können. Im Bild 5.10b wird die Konzentration der Schädigung infolge Druckversagens im Übergangsbereich zwischen Stütze und Unterkante Platte erkennbar.

**5.2.2 Versuch aus Aachen – Versuchsbezeichnung: „P1“**

Die Nachrechnung des Versuchs „P1“ aus Aachen mit rechteckigem Stützenquerschnitt bestätigt bzw. zeigt ebenfalls die krümmungslose Verdrehung der Betonplatte – Bild 5.14b. Die Darstellung der Verformungen im Bild 5.14a zeigt jedoch auch, dass die Wahl eines achteckigen Profils des Versuchskörpers keine kontinuierliche Verformung, wie sie innerhalb eines Deckensystems erwartet werden kann, ermöglicht. Deutlich wird dies, wenn die verformte Struktur im Bild 5.14a mit der Struktur im Bild 5.7a vergleichend betrachtet wird. Auch bei den eigenen Versuchen entschied man sich für eine achteckige Grundrissform der Betonplatte, deshalb wird an dieser Stelle auf die zu Beginn des Kapitels 5.4.1 gezeigte Gegenüberstellung zwischen Bild 5.43 (Nachrechnung für „Versuch W1“) und Bild 5.44a hingewiesen. Bild 5.44a zeigt das Ergebnis der verformten Struktur, das im Rahmen der „ergänzenden Untersuchungen“ mit Materialkonstanten erzielt wurde, die den aus der Materialprüfung für Versuch W1 gewonnenen Festigkeiten gleichen, jedoch unter Beachtung der Forderungen der DIN 1045-1 hinsichtlich der Berücksichtigung von Langzeitwirkungen angepasst wurden.



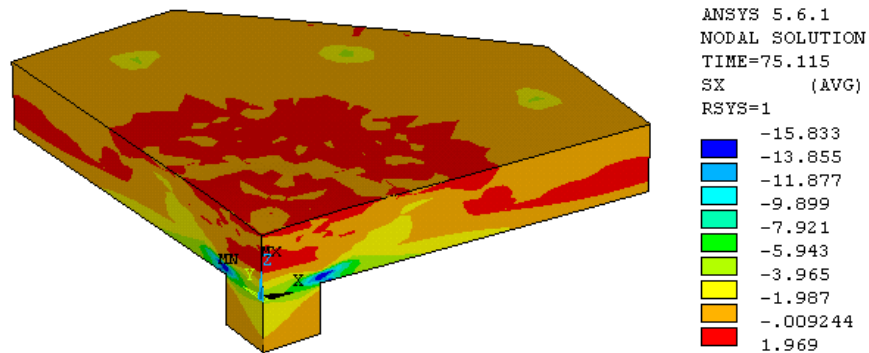
**Bild 5.14a:** Darstellung der verformten und unverformten Struktur (Versuch: P1)



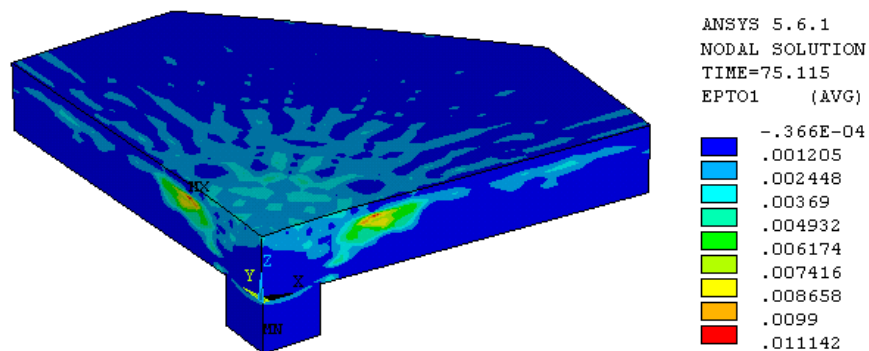
**Bild 5.14b:** Krümmungslose Verdrehung des Plattenausschnitts (Versuch: P1)

Die Nachrechnung des Aachener Versuchs bestätigt ebenfalls die Modellvorstellung der radialen, von der oberen Bewehrungslage schräg auf die Stütze zulaufenden Druckstreben kurz vor

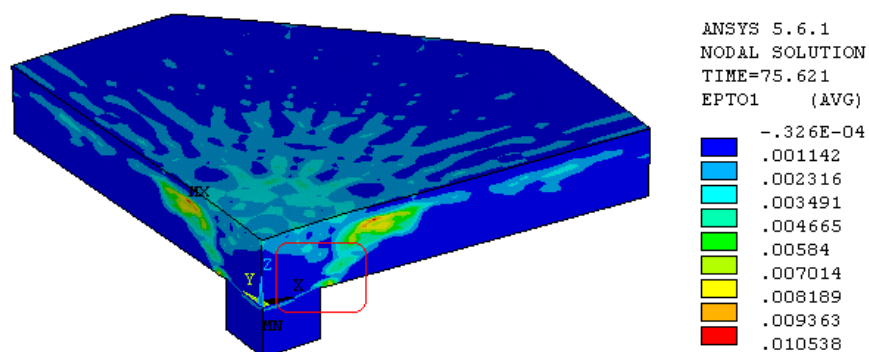
Erreichen des maximalen Durchstanzwiderstands. Die Druckstreben sammeln sich in der unteren Plattenhälfte, dies zeigt Bild 5.15, in einem Bereich noch außerhalb der Stütze ähnlich einer Druckkegelschale (entsprechend Bild 2.12). Jedoch lassen sich durch die konstruktiv bedingte, gegenüber der Ringbewehrung gleichmäßigere Verteilung der orthogonal angeordneten oberen Bewehrungslage keine einzelnen, diskreten Diagonalschübe mehr erkennen. Demgegenüber wird aber mit Hilfe der Hauptzugdehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ die Ursache des Tragfähigkeitsverlustes bei Betonplatten mit Netzbewehrung sichtbar – Bild 5.16:



**Bild 5.15:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 601 \text{ kN}$  – Versuch: P1)



**Bild 5.16a:** Dehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ infolge der Hauptzugspannungen „ $\sigma_{H1}$ “ ( $V_u = 601 \text{ kN}$ )



**Bild 5.16b:** Dehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ infolge der Hauptzugspannungen „ $\sigma_{H1}$ “ ( $V_u > V_{\text{Time}} = 581 \text{ kN}$ )

Entsprechend den Versuchsbeobachtungen und Angaben von Kinnunen und Nylander ([66], im Kapitel 2 erwähnt) wird durch den Verlust des Schubwiderstandes in der horizontalen Ebene, unmittelbar unterhalb der oberen Bewehrungslage der Verlust der Tragfähigkeit eingeleitet. Die Konzentration der horizontalen Schubverzerrungen im Bild 5.17a zeigt die vorhandenen Beanspruchungen deutlich. Bei der Betrachtung der Ergebnisse ist zu beachten, dass die in Polarkoordinaten [rsys=1] dargestellten Verzerrungen der x-z Ebene um die globale z-Achse rotieren.

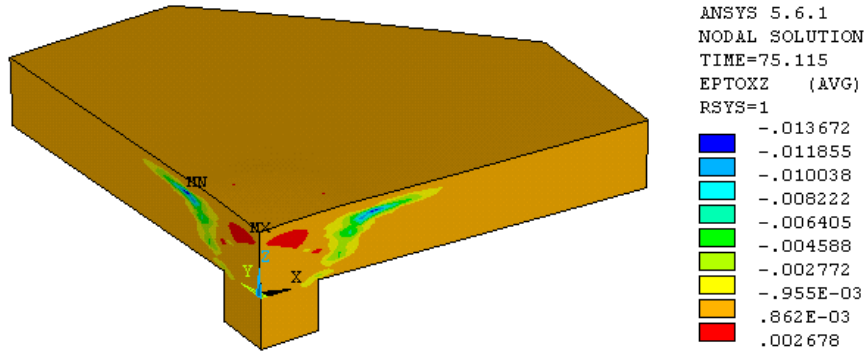


Bild 5.17a: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c, xz}$ “ in der x-z Ebene (Versuch: P1 – Aachen)

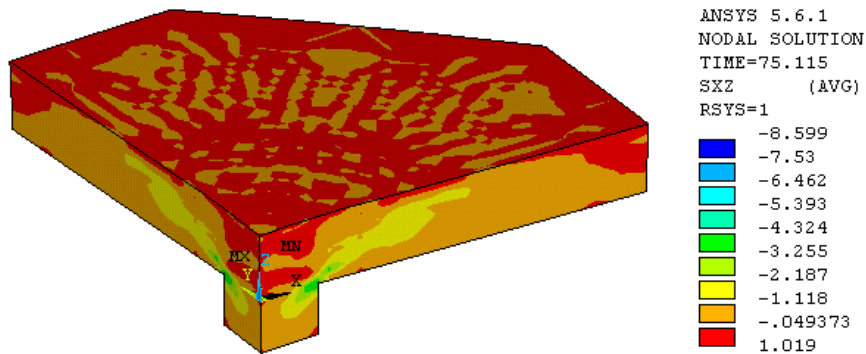


Bild 5.17b: Schubspannungen „ $\sigma_{c, xz}$ “ in der x-z Ebene (Versuch: P1 – Aachen)

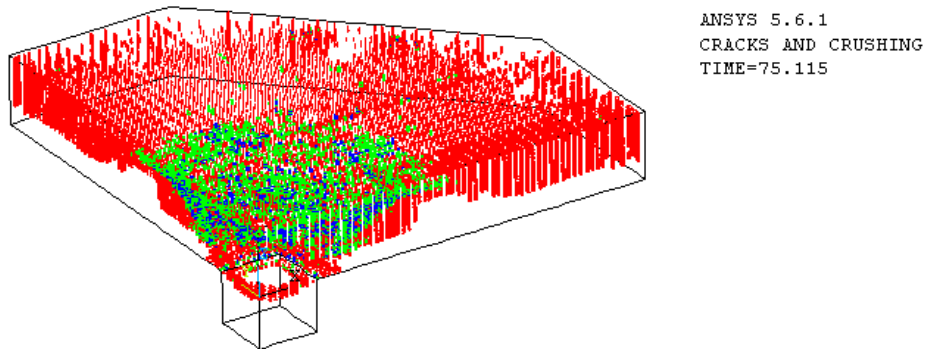


Bild 5.18a: Darstellung der gesamten Strukturschädigung der Platte (Versuch: P1 – Aachen)  
(Erstriss = rot, Zweitritt = grün, ...in allen drei Richtungen gerissen  $\Rightarrow$  Drittriss = blau)

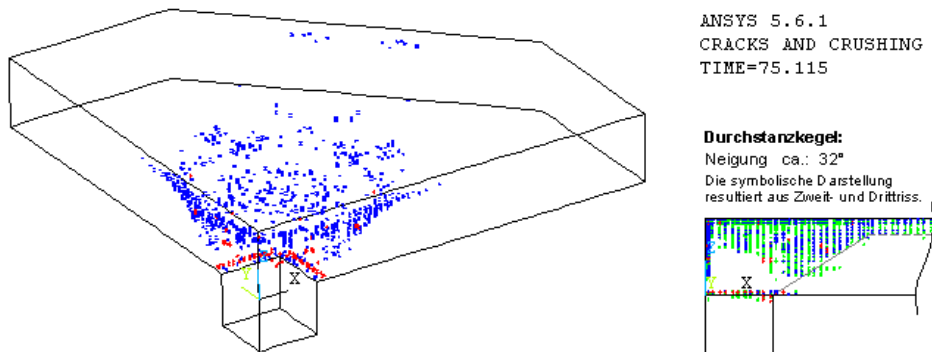


Bild 5.18b: Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind (Versuch: P1 – Aachen)  
(ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagens durch rotes Oktaeder markiert)

Erst nach Überschreiten des maximalen rechnerischen Durchstanzwiderstands durchdringt der Schubriss die radial gerichtete Druckzone. Dies wird durch den Vergleich der zeitlich versetzt angegebenen Hauptzugdehnungen in den Bildern 5.16 (a+b) erkennbar.

Kinnunen und Nylander haben dieses Phänomen des unterschiedlichen Systemverhaltens, dass bei netzbewehrten Platten der horizontale und über die Fläche verteilte Scherwiderstand unmittelbar unter der oberen Bewehrungsebene maßgebend wird, bereits 1960 in ihrer Arbeit dokumentiert [66]. Mit Hilfe charakteristischer Rissmuster an der Plattenoberseite und den beobachteten Schubrissen in ihren Versuchen konnten sie eine grafische Gegenüberstellung für die Größe des sich einstellenden Durchstanzkegels angeben. Die Größe des Durchstanzkegels wurde bei ringbewehrten Platten vom Grad der Bewehrung beeinflusst, dagegen ergaben ihre Versuchsergebnisse, dass sich bei netzbewehrten Platten ein nahezu vom Bewehrungsgrad unabhängiger Kegel einstellte. Sie verwendeten diesen nur von der Plattenhöhe abhängigen Radius des Durchstanzkegels „ $c_0 = r_s + 1,8 \cdot h$ “, der an der Plattenoberfläche erkennbar wird, bei der Formulierung ihres Modells. Die neue Bemessungsvorschrift DIN 1045-1 wie auch ihre Vorgängerin definieren über den daraus resultierenden Winkel ( $\approx \beta_R = 33,7^\circ$ ) ebenfalls den Umfang des sogenannten kritischen Rundschnitts „ $U_{crit}$ “.

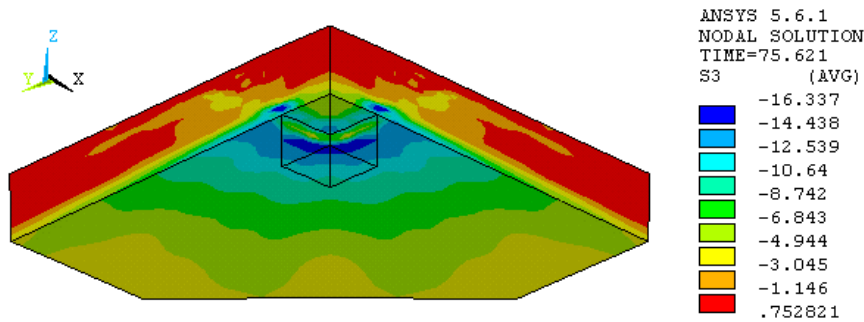


Bild 5.19a: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “, ( $V_{Time} = 581 \text{ kN}$  – Versuch: P1)

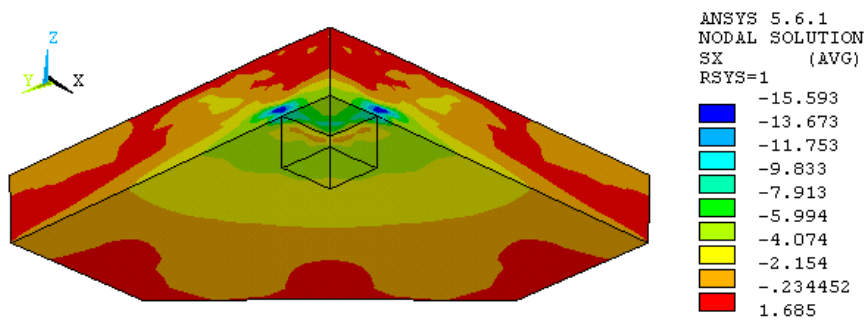


Bild 5.19b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_{Time} = 581 \text{ kN}$  – Versuch: P1)

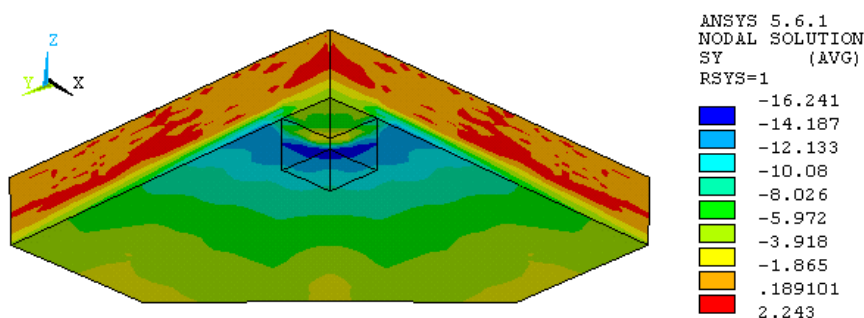


Bild 5.19c: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_{Time} = 581 \text{ kN}$  – Versuch: P1)

### 5.3 Eigene Versuchsdurchführungen

Es werden die Berechnungsergebnisse von vier Durchstanzversuchen mit eingebautem Stahlkreuz angegeben. Die Herstellung, die Vorbereitungen und die Durchführung der Versuche wurden am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau – Bereich Konstruktionsteilprüfung – an der Ruhr Universität Bochum, unter Leitung des Lehrstuhls für Stahlbau der Bergischen Universität Wuppertal und mit Unterstützung der Stahl + Verbundbau GmbH durchgeführt, [51].

Alle Versuche bestanden aus einer achteckigen Betonplatte mit einer Plattendicke von 30 cm. Der Verbund zwischen Betonplatte und einbetoniertem Stahlkreuz erfolgte über Kopfbolzen Ø22 mm mit den Längen 150 mm sowie 100 mm. Die obere und untere Bewehrungslage der vier Versuche bestand aus orthogonal eingebautem Betonstabstahl. Konstruktive Details zur Verteilung der Bewehrung, der Lage des Stahlprofils und die Anordnung der Kopfbolzen sind in [51] angegeben. Der Versuchsaufbau kann ebenfalls aus [51] entnommen werden. Einen Überblick der zugehörigen FE-Modelle wurde im Kapitel 5.1 mit Bild 5.3 und Bild 5.4 angegeben.

Die aus der Festigkeitsuntersuchung [51] bestimmten Eigenschaften des verwendeten Materials, soweit sie in die FE-Berechnung Berücksichtigung fanden, sind in Tabelle 5.1 aus dem Versuchsbericht [51] übernommen worden. Die nicht über eine Materialprüfung vorgenommene Festlegung der Zugfestigkeit erfolgte mit den Regelungen der DIN 1045-1 [33].

Bild 5.20 bis Bild 5.23 enthalten die rechnerisch bestimmten Last-Verformungskurven und die zugehörigen, im Versuch erzielten Bruchlasten.

**Tabelle 5.1:** Bei der Nachrechnung der Versuche W1 bis W4 berücksichtigte Festigkeitskennwerte  
(Kennwerte wurden dem Versuchsbericht Nr. A-04/98 vom 21. März 1998 entnommen, [51])

Versuch:		Nr. W1	Nr. W2	Nr. W3	Nr. W4
<b>Beton:</b>	Betonalter am Tag der Prüfung:	28 Tage	28 Tage	28 Tage	34 Tage
	$f_{cm,cyl} =$	29 N/mm <sup>2</sup>	35 N/mm <sup>2</sup>	32 N/mm <sup>2</sup>	34 N/mm <sup>2</sup>
	$E_{cm} =$	26.400 N/mm <sup>2</sup>	27.250 N/mm <sup>2</sup>	27.550 N/mm <sup>2</sup>	27.650 N/mm <sup>2</sup>
<b>Betonstahl:</b>	$f_{y,k} =$	Betonstahlprobe Ø 16: 592 N/mm <sup>2</sup>		Probe Ø 16:	587 N/mm <sup>2</sup>
				Probe Ø 20:	616 N/mm <sup>2</sup>
	$f_{t,k} =$	Betonstahlprobe Ø 16: 680 N/mm <sup>2</sup>		Probe Ø 16:	671 N/mm <sup>2</sup>
				Probe Ø 20:	689 N/mm <sup>2</sup>
$E_s =$	200.000 N/mm <sup>2</sup>				
<b>Baustahl:</b>	$f_{y,a} =$	338 N/mm <sup>2</sup>	343 N/mm <sup>2</sup>	319 N/mm <sup>2</sup>	315 N/mm <sup>2</sup>
	$f_{u,a} =$	532 N/mm <sup>2</sup>	533 N/mm <sup>2</sup>	458 N/mm <sup>2</sup>	461 N/mm <sup>2</sup>
	$E_a =$	210.000 N/mm <sup>2</sup>			



Rechnerische Last  
des Plattenausschnitts  
(Last einer Innenstütze)

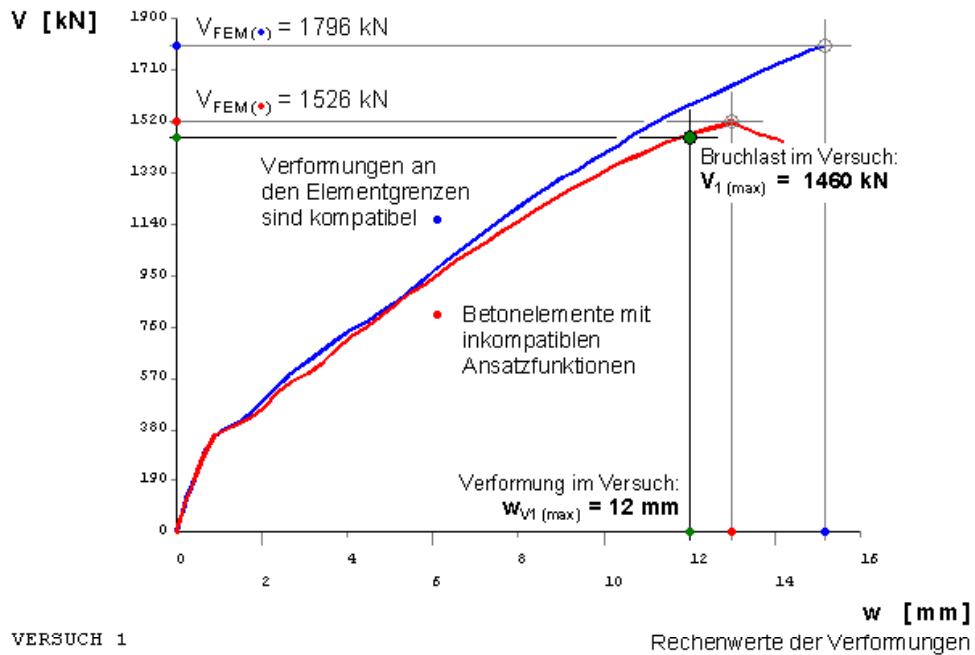


Bild 5.20: Rechnerische Lastverformungskurven und Versuchsergebnis für „Versuch W1“

Rechnerische Last  
des Plattenausschnitts  
(Last einer Innenstütze)

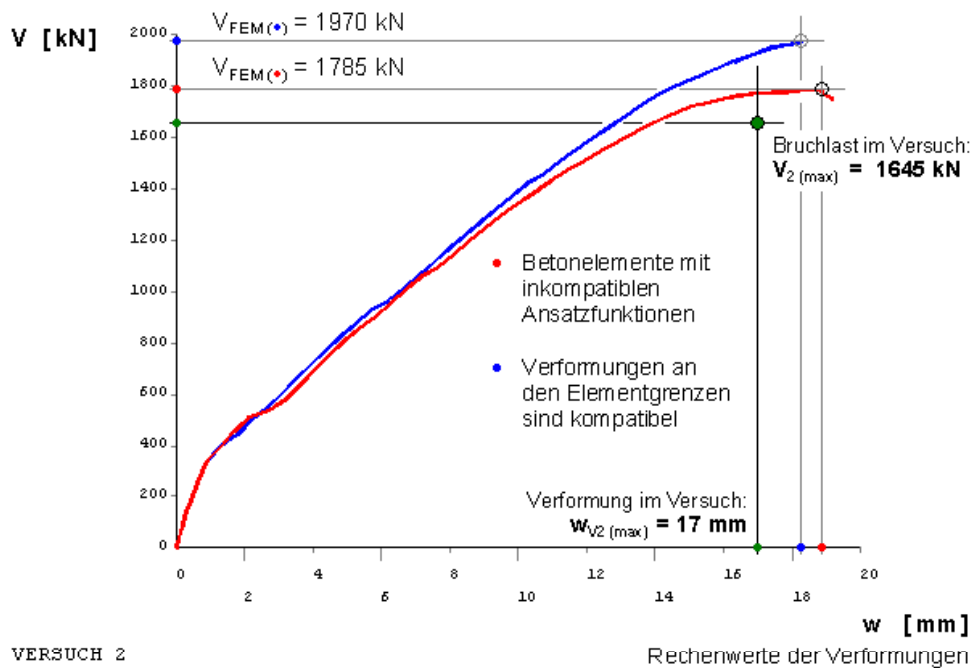


Bild 5.21: Rechnerische Lastverformungskurven und Versuchsergebnis für „Versuch W2“

Rechnerische Last  
des Plattenausschnitts  
(Last einer Innenstütze)

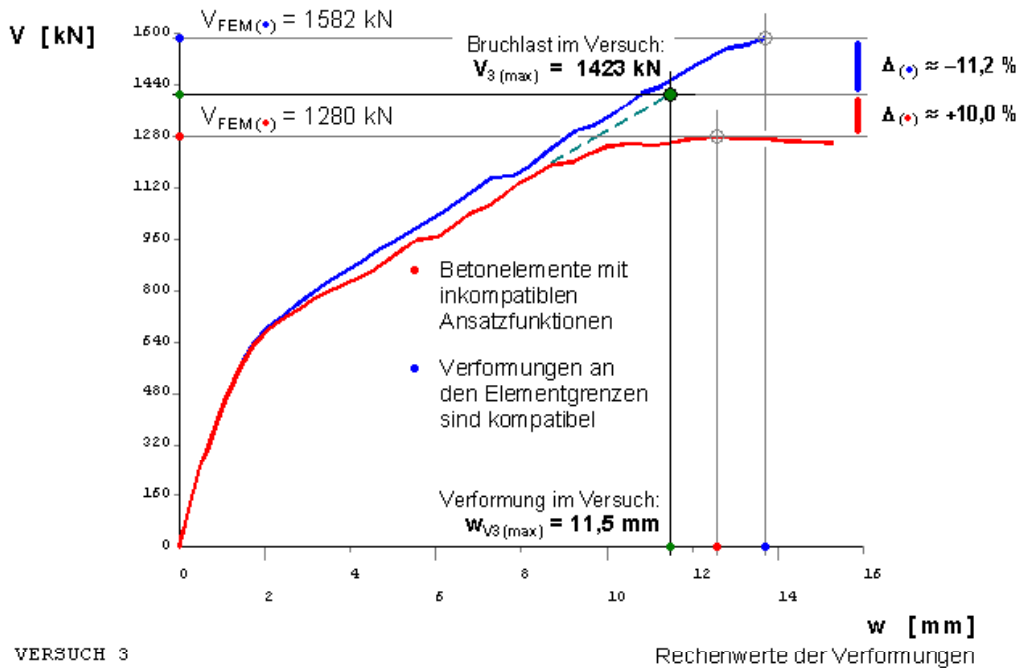


Bild 5.22: Rechnerische Lastverformungskurven und Versuchsergebnis für „Versuch W3“

Rechnerische Last  
des Plattenausschnitts  
(Last einer Innenstütze)

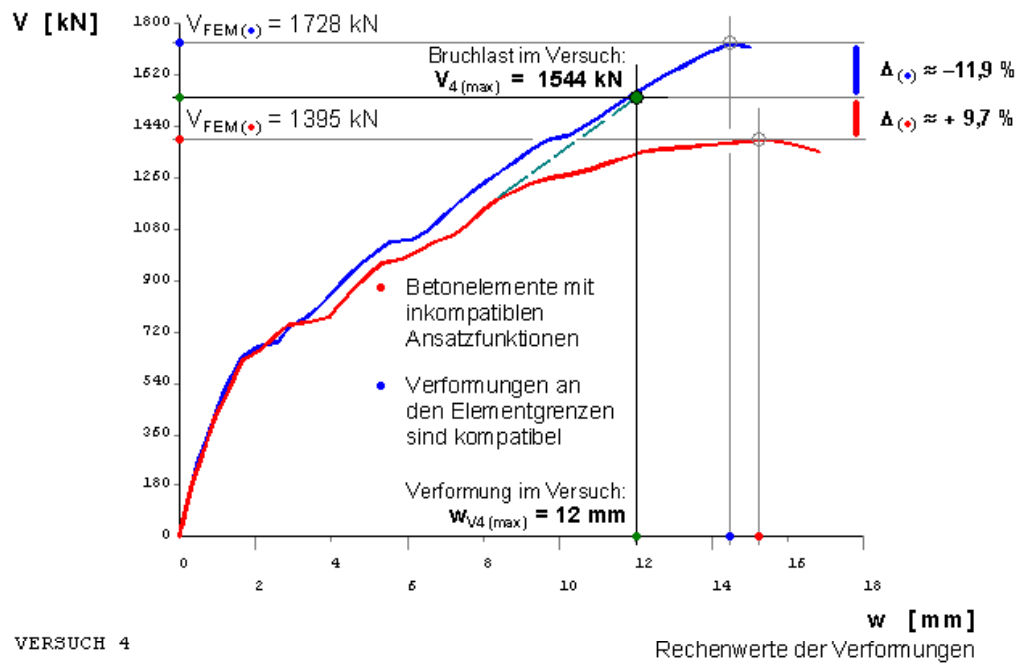


Bild 5.23: Rechnerische Lastverformungskurven und Versuchsergebnis für „Versuch W4“

5.3.1 Versuch „W1“ – mit Stahlkreuz (Querschnitt:  $s_a / h_a \cong 40 / 200 \text{ mm}$ )

In den Bildern 5.24a bis 5.24c sind die Verläufe der Radialspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ und der Tangentialspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “ für die rechnerische Bruchlast „ $V_u$ “ dargestellt. Auffällig sind die auf der Plattenoberseite im Bild 5.24a erkennbaren, radial austretenden  $\sigma_{c,x}$ -Spannungen. Sie konzentrieren sich im Zentrum zwischen den Lasteinleitungspunkten und stützen sich am äußeren Plattenrand ab. Die Tangentialspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “ im Bild 5.24c zeigen am Plattenaußenrand, beeinflusst durch das Verformungsverhalten der achteckigen Grundrißform (Bild 5.43), einen nicht stetigen Verlauf.

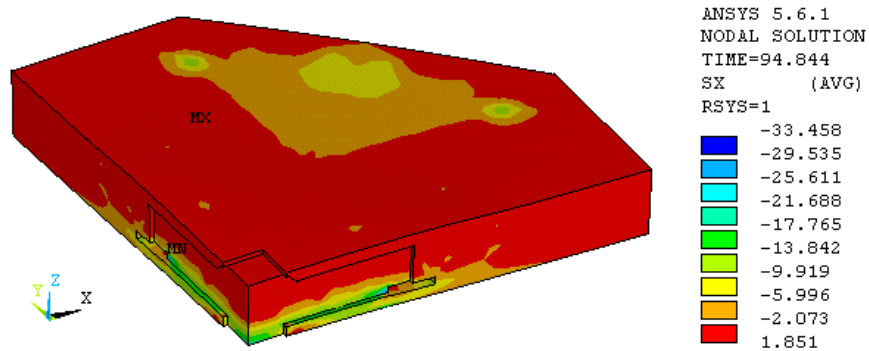


Bild 5.24a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1526 \text{ kN}$  – Versuch: W1)

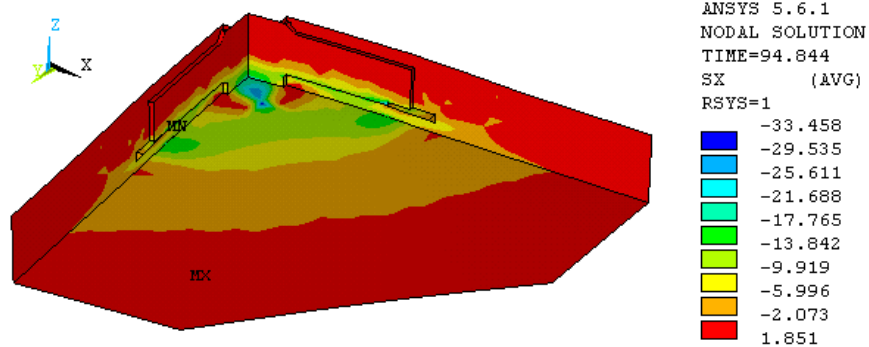


Bild 5.24b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1526 \text{ kN}$  – Versuch: W1)

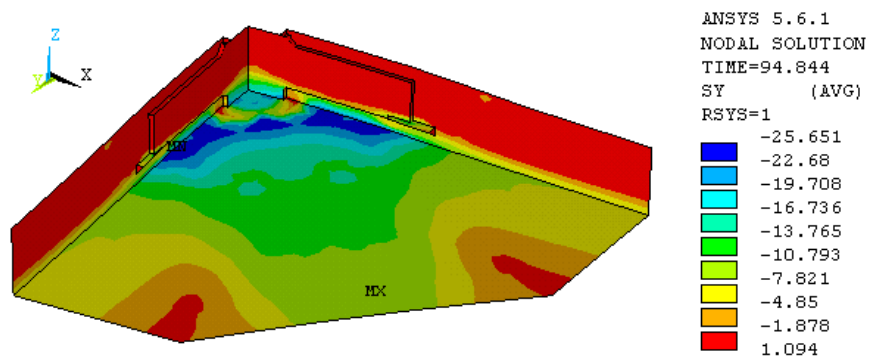


Bild 5.24c: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 1526 \text{ kN}$  – Versuch: W1)

Entsprechend den erkennbaren Hauptzugdehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ zwischen den Lasteinleitungspunkten im Bild 5.25b – bei einer deutlich geringeren Belastungsstufe – folgen damit die Spannungen einer nicht gleichmäßigen, tangentialen Krümmung des Plattenrandes. Der Vergleich der Hauptzugdehnungen zwischen den Darstellungen im Bild 5.26b und Bild 5.29 zeigt, wie die anfänglich noch gleichmäßig verteilten und wirksamen Zugdehnungen mit zunehmender Last deutlich anwachsen und sich schließlich in dem Bereich, der den Durchstanzkegel begrenzt, konzentrieren. Zugbeanspruchungen unterhalb der oberen Bewehrungslage werden sichtbar.

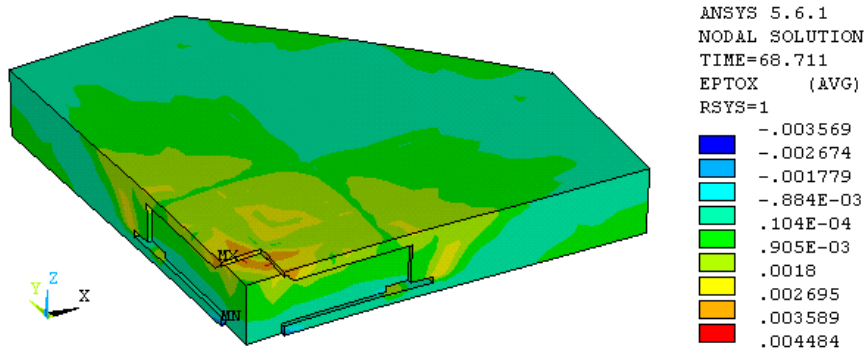


Bild 5.25a: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,x}$ “ in radialer Richtung, ( $t = 68,711$ ,  $V_{Time} = 1245$  kN)

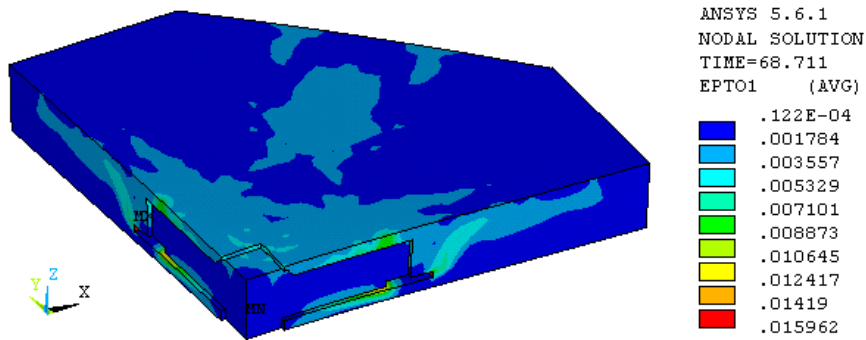


Bild 5.25b: Dehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ infolge der Hauptzugspannungen „ $\sigma_{H1}$ “, ( $t = 68,711$ ,  $V_{Time} = 1245$  kN)

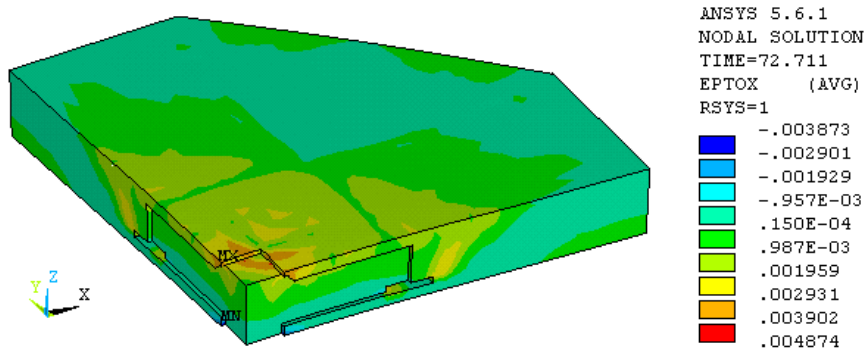


Bild 5.26a: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,x}$ “ in radialer Richtung, ( $t = 72,711$ ,  $V_{Time} = 1299$  kN)

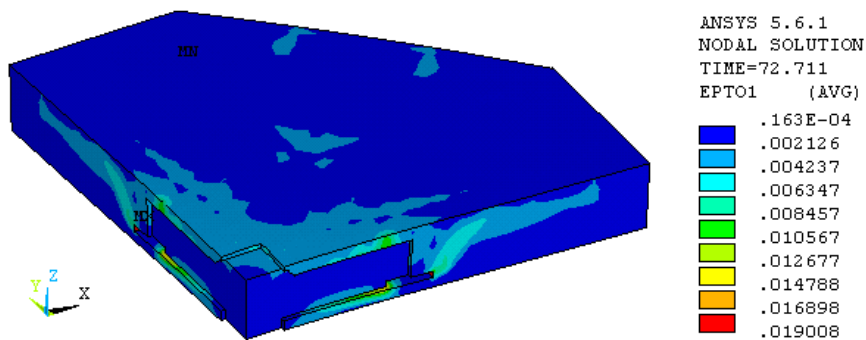


Bild 5.26b: Dehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ infolge der Hauptzugspannungen „ $\sigma_{H1}$ “, ( $t = 72,711$ ,  $V_{Time} = 1299$  kN)

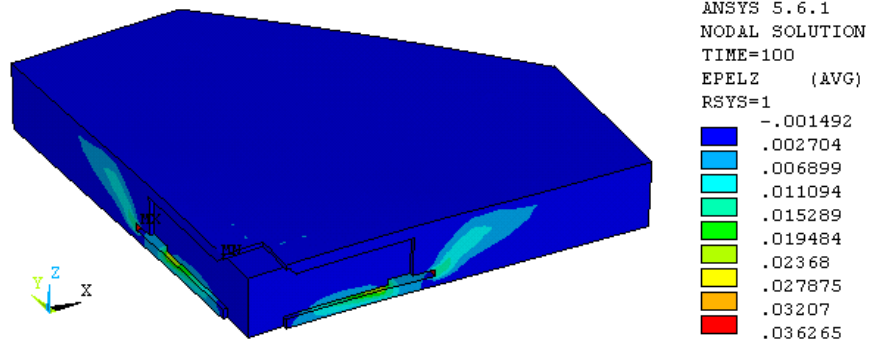


Bild 5.27a: Elastische Dehnungen „ $\epsilon_{c,z}$ “ in vertikaler Richtung ( $t = 100$ ,  $V_{\text{Time}} = 1451$  kN)

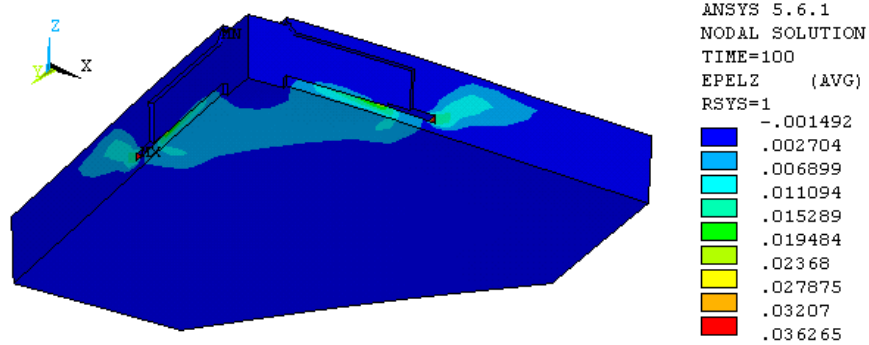


Bild 5.27b: Elastische Dehnungen „ $\epsilon_{c,z}$ “ in vertikaler Richtung ( $t = 100$ ,  $V_{\text{Time}} = 1451$  kN)

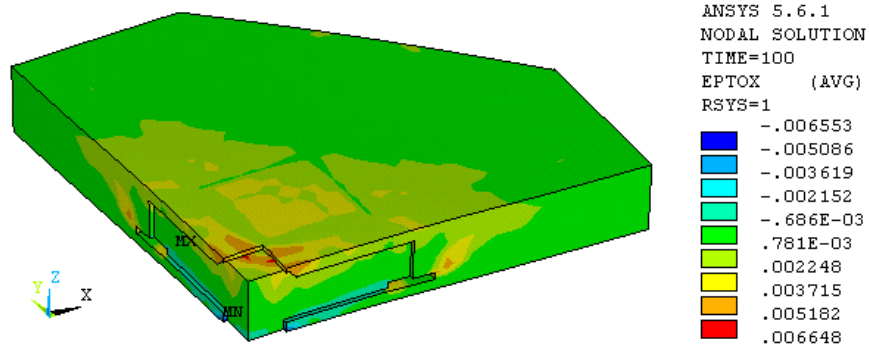


Bild 5.28: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,x}$ “ in radialer Richtung ( $t = 100$ ,  $V_{\text{Time}} = 1451$  kN)

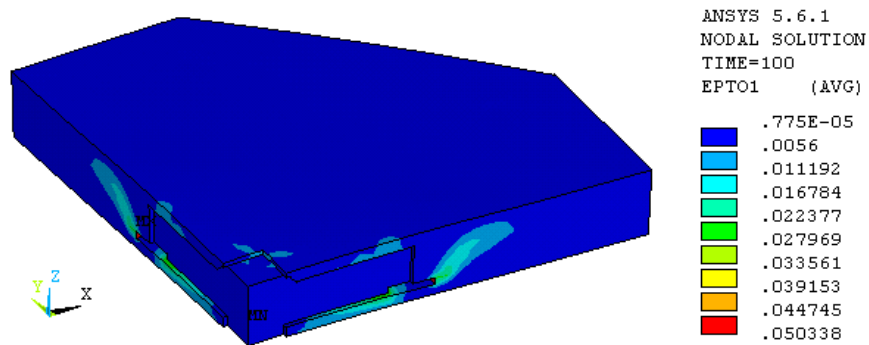


Bild 5.29: Dehnungen „ $\epsilon_{c,H1}$ “ infolge der Hauptzugspannungen „ $\sigma_{H1}$ “, ( $t = 100$ ,  $V_{\text{Time}} = 1451$  kN)

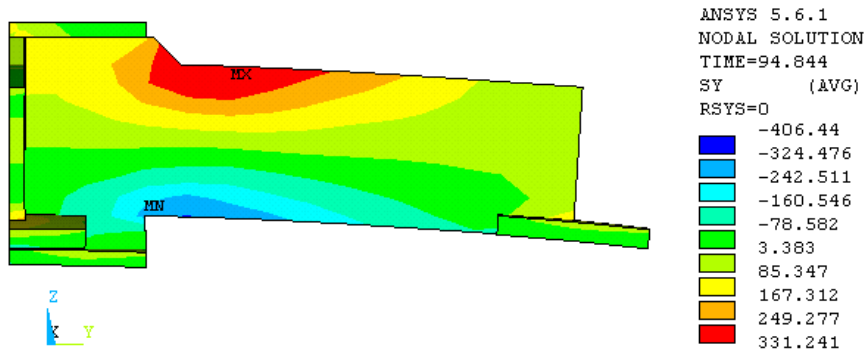


Bild 5.30a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{u, \text{System}} = 1526 \text{ kN}$ )

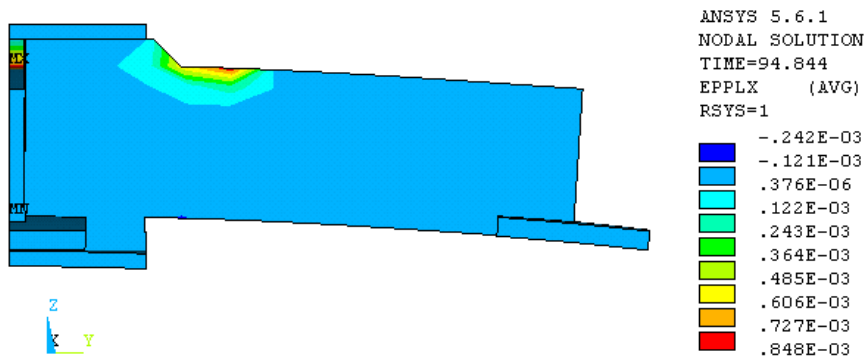


Bild 5.30b: Plastische Dehnungen „ $\epsilon_{a,x}$ “ infolge der Spannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ („ $\epsilon_{a,x, \text{rsys}1} \approx \epsilon_{a,y, \text{rsys}0}$ “)

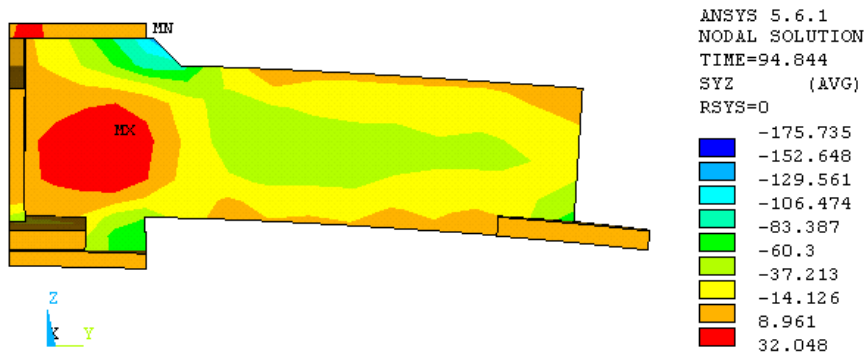


Bild 5.30c: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ in der gezeigten y–z Ebene, ( $V_{u, \text{System}} = 1526 \text{ kN}$ )

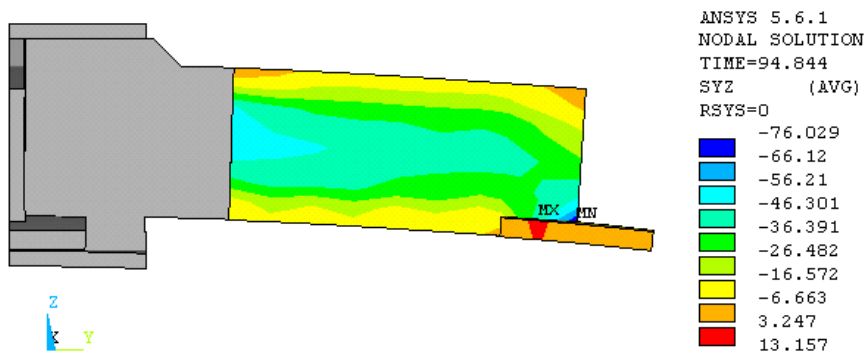
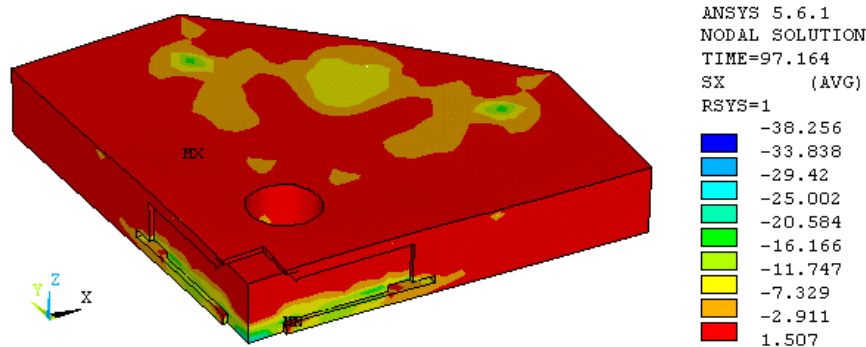


Bild 5.30d: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{u, \text{System}} = 1526 \text{ kN}$ )  
 (Schubspannungen im Bereich des Auflagertellers analog zum vorangestellten Bild 5.30c)

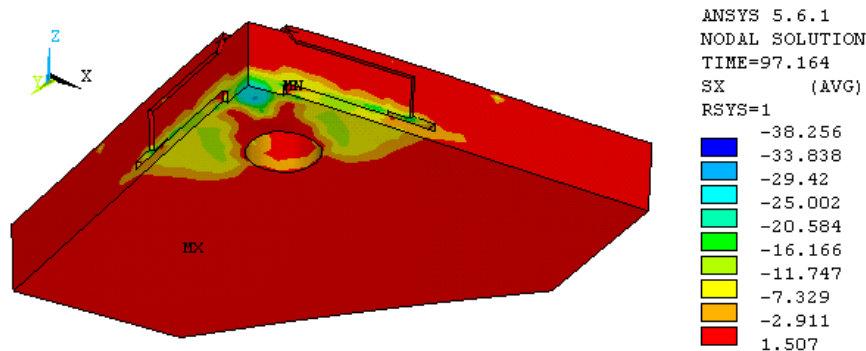
**5.3.2 Versuch „W2“ – mit Stahlkreuz (Querschnitt:  $s_a / h_a \equiv 40 / 200$  mm)**

Im Gegensatz zu Versuch W1 enthält die Betonplatte vier zusätzliche runde Durchbrüche.

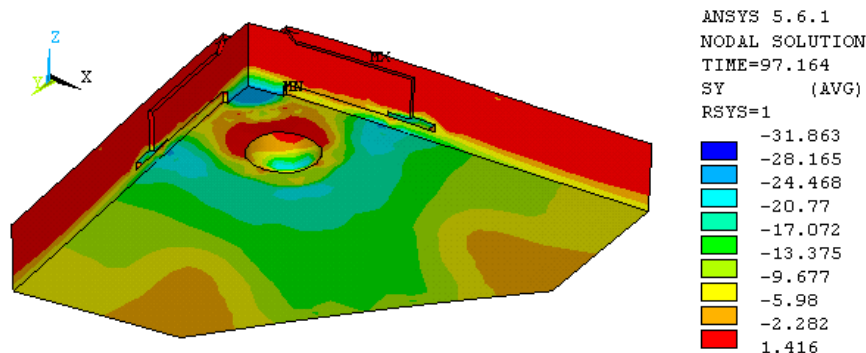
Die Wirkungsweise einer Betonplatte mit Versorgungsdurchbrüchen (hier:  $\varnothing 30$  cm entsprechend der Plattenhöhe) ergibt zunächst eine im Vergleich zur Platte ohne Durchbrüche prinzipiell identische Verteilung der inneren Beanspruchungszustände. Der Vergleich der Last-Verformungskurven zwischen Versuch W1 und Versuch W2 – Bild 5.20 mit Bild 5.21 – zeigt eine nur geringfügige, nahezu nicht vorhandene, geringere Steifigkeit. Die mit 5 mm beachtlich größere Verformung und die damit verbundene Zunahme der Plattenrotation bestätigt die gute Umlagerungsfähigkeit von den Radialspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ zu den Tangentialspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “.



**Bild 5.31a:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1785$  kN – Versuch: W2)



**Bild 5.31b:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1785$  kN – Versuch: W2)



**Bild 5.31c:** Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 1785$  kN – Versuch: W2)

Bild 5.31c zeigt, wie sich infolge des größeren Rotationswinkels gegenüber Versuch W1 zwischen den beiden Auflagertellern am Schwertende ein um den Versorgungsdurchbruch verlaufender Druckring mit örtlicher Begrenzung einstellen kann. Der Einfluss des gewählten achteckigen Plattenprofils auf die Entwicklung der inneren Steifigkeitsverhältnisse und damit auf die Verteilung der inneren Schnittgrößen wird u.a. auch (vgl. Hinweis in Kapitel 5.3.1) durch die zeitlich versetzt angegebenen Dehnungsverteilungen, Bild 5.32b und Bild 5.33b, erkennbar.

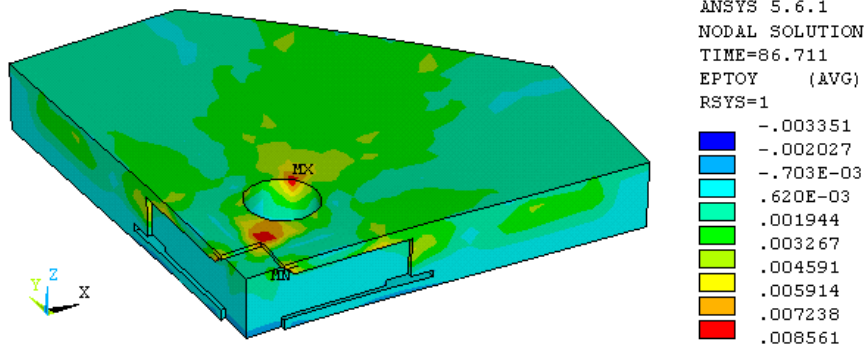


Bild 5.32a: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,y}$ “ in tangentialer Richtung, ( $t = 86,711$ ,  $V_{Time} = 1741$  kN)

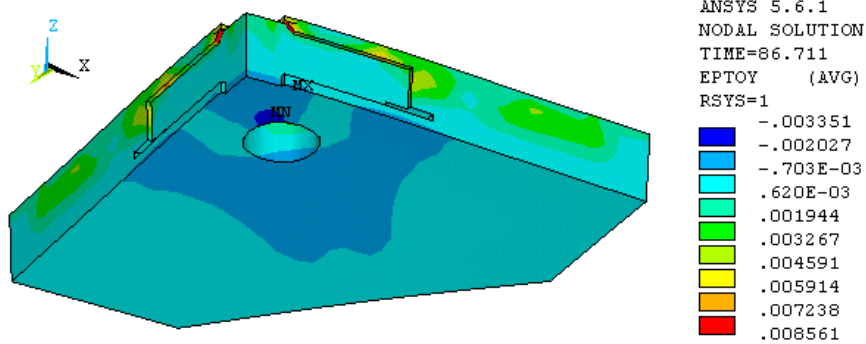


Bild 5.32b: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,y}$ “ in tangentialer Richtung, ( $t = 86,711$ ,  $V_{Time} = 1741$  kN)

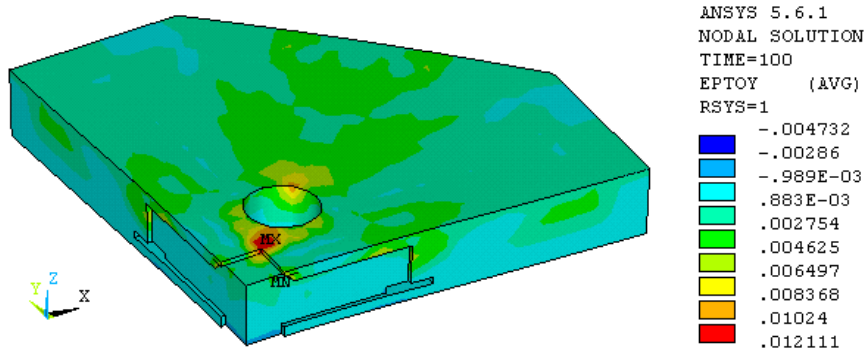


Bild 5.33a: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,y}$ “ in tangentialer Richtung, ( $t = 100$ ,  $V_{Time} = 1738$  kN)

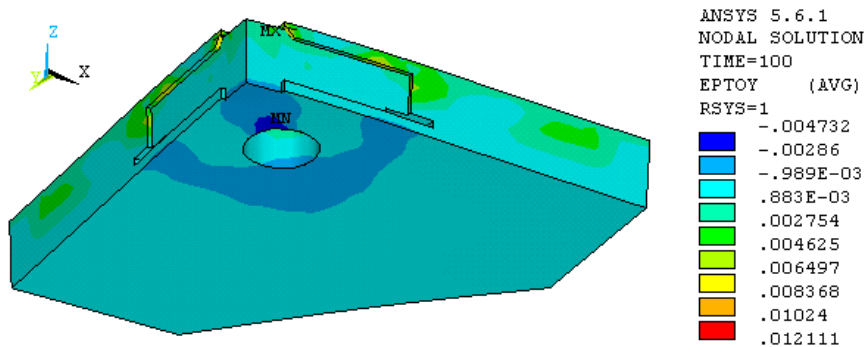
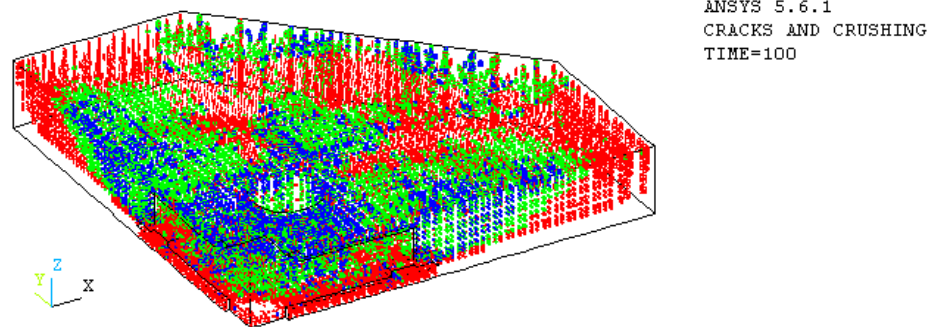


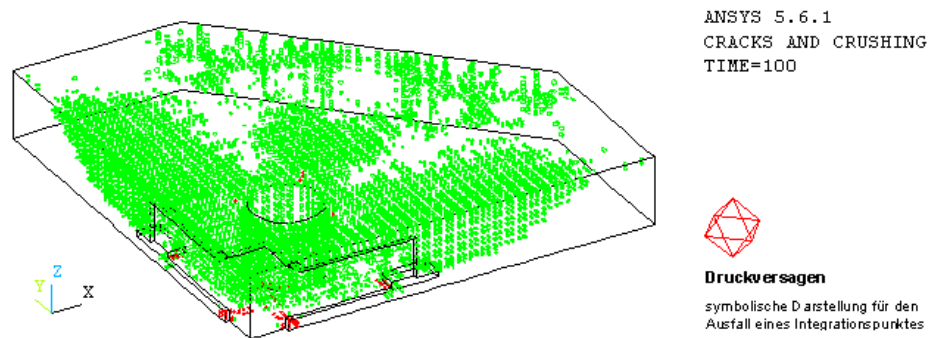
Bild 5.33b: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,y}$ “ in tangentialer Richtung, ( $t = 100$ ,  $V_{Time} = 1738$  kN)



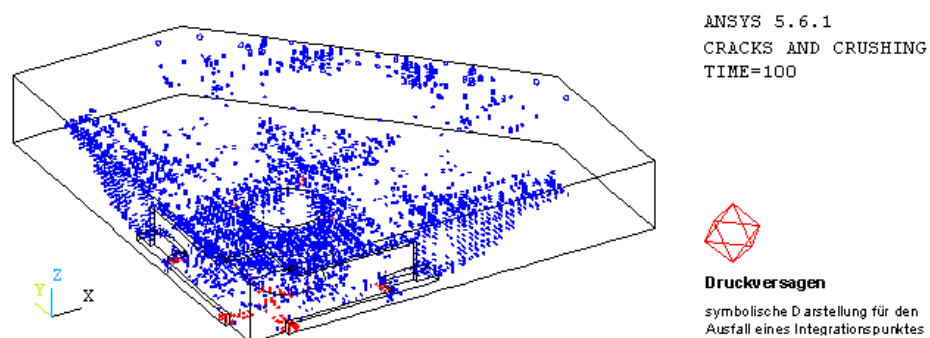
Eine Gegenüberstellung der Schubspannungsverteilung zwischen den Versuchen W1 und W2 (vgl. Bild 5.35d mit Bild 5.30d) zeigt, wie infolge des verhältnismäßig geringeren Wirkungsgrads des Betonquerschnittes im Bereich des Grenzzustandes zur Beteiligung am Querkraftwiderstand die Umlagerungsfähigkeit auf das Stahlkreuz zunimmt. Dies deutet darauf hin, dass Ausparungen von praxisgerechter Größe ohne umfangreiche Zusatzmaßnahmen im Bereich der Durchbrüche bei dem Verbundsystem möglich sind.



**Bild 5.34a:** Darstellung der gesamten Strukturschädigung der Platte (**Versuch: W2**)  
(Erstriss = rot, Zweittriss = grün, ...in allen drei Richtungen gerissen  $\Rightarrow$  Drittriss = blau)



**Bild 5.34b:** Bildung des Zweittrisses, abhängig von der Belastungsgeschichte (**Versuch: W2**)  
(ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagens durch rotes Oktaeder markiert)



**Bild 5.34c:** Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind (**Versuch: W2**)  
(ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagens durch rotes Oktaeder markiert)

Die Wirksamkeit bzw. Einflussnahme durch das „Auswechseln“ der Bewehrung zeigt Bild 5.34c. Wie bei der Rissentwicklung des Versuchs „IB15a“ aus Stockholm (Bild 5.10b) kann ein qualitativer Zusammenhang zwischen der „Verschiebung“ des Betonstabstahls gegenüber dem umgebenden Beton, d.h. das Aktivieren des Reibungswiderstandes zwischen Stahl und Beton durch die resultierende Verteilung des Drittrisses im Bereich der Quersulagen nahe dem Versorgungsdurchbruch an der Plattenoberseite gut erkannt werden.

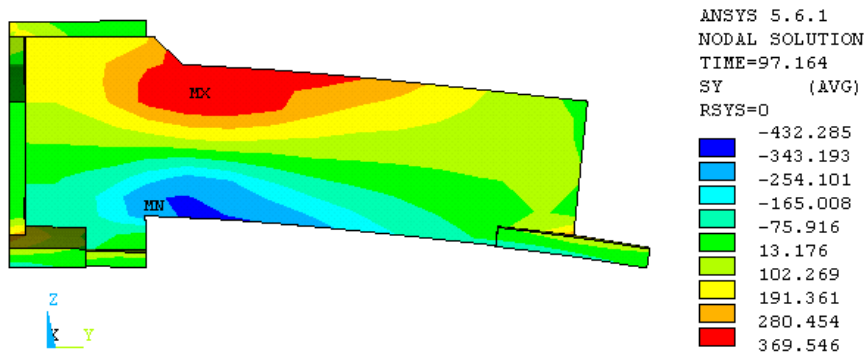


Bild 5.35a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{u, System} = 1785 \text{ kN}$ )

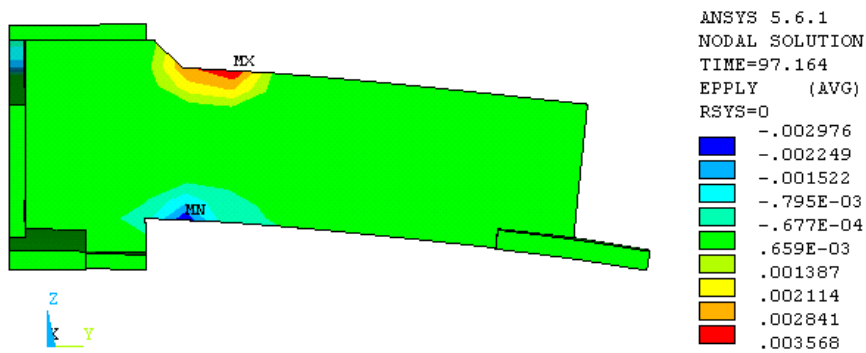


Bild 5.35b: Plastische Dehnungen „ $\epsilon_{a,y}$ “ infolge der Spannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ ( $V_{u, System} = 1785 \text{ kN}$ )

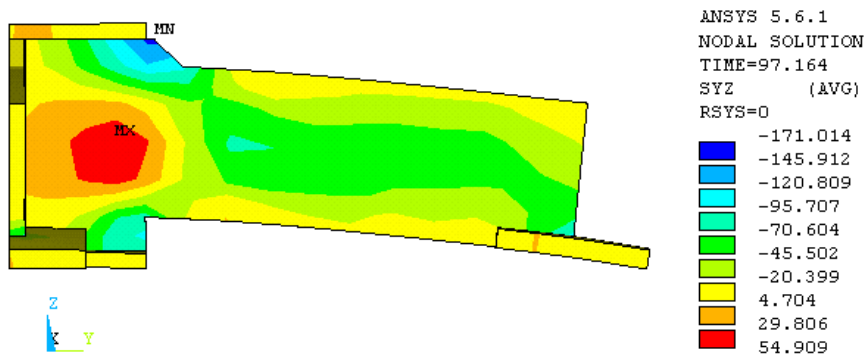


Bild 5.35c: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ in der gezeigten y-z Ebene, ( $V_{u, System} = 1785 \text{ kN}$ )

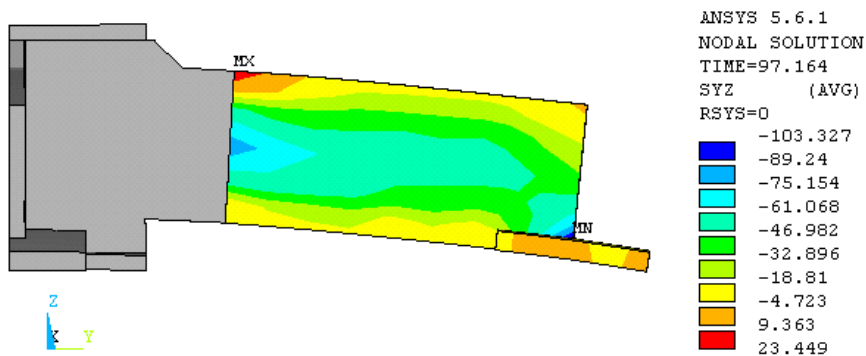


Bild 5.35d: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{u, System} = 1785 \text{ kN}$ )  
 (Schubspannungen im Bereich des Auflagertellers analog zum vorangestellten Bild 5.35c)

### 5.3.3 Versuch „W3“ – mit Stahlkreuz (Querschnitt: $s_a / h_a \cong 15 / 160$ mm)

Das im Versuch W3 eingebaute Stahlkreuz besitzt gegenüber dem Stahlkreuz im Versuch W1 deutlich geringere plastische Grenztragfähigkeiten. Durch den mittigen Einbau des Schwertes mit der Profilhöhe von  $h_a=160$  mm wurde konstruktiv die Lage der unten am Schwert angeordneten Dübelreihe gegenüber dem Versuch W1 deutlich höher liegend gewählt. Damit war zu erwarten, dass ein zuverlässiger Verbund zwischen Stahlprofil und der tiefer liegenden, gedrückten Betonschale nicht in gleichem Maß gewährleistet werden konnte. Die aus den gemessenen Versuchsergebnissen zurückgerechnete Querkraftbeanspruchung unter Berücksichtigung der einwirkenden Normalkraft und des Biegemomentes lieferte für den Versuch W3 eine maximale Grenzquerkraft von 180 kN je Schwert. Für das deutlich stärkere Rechteckprofil im Versuch W1 ergab die Traglastuntersuchung eine Querkraft von 270 kN. Die Ursache für die nur geringen Unterschiede der im Versuch W1 und W2 erzielten Bruchlasten des Gesamtsystems von ca. 2,5 % – siehe Bild 5.20 mit  $V_{1(max)} = 1460$  kN und Bild 5.22 mit  $V_{3(max)} = 1423$  kN – konnte zunächst nicht eindeutig begründet werden. Allein auf die geringfügig größeren Betonfestigkeiten entsprechend Tabelle 5.1 konnten diese beobachteten Versuchswerte nicht zurückgeführt werden.

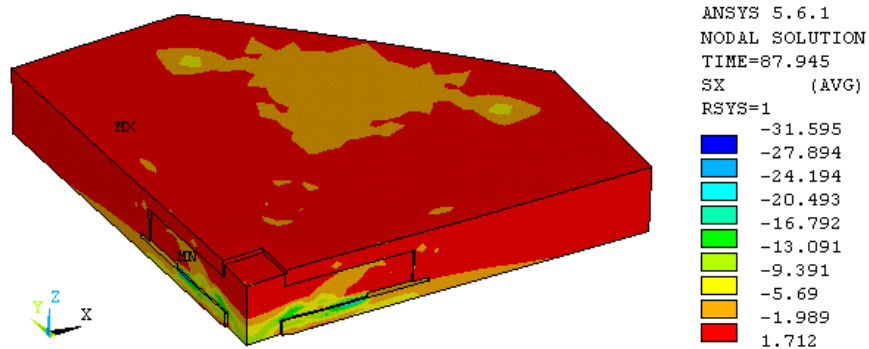


Bild 5.36a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1280$  kN – Versuch: W3)

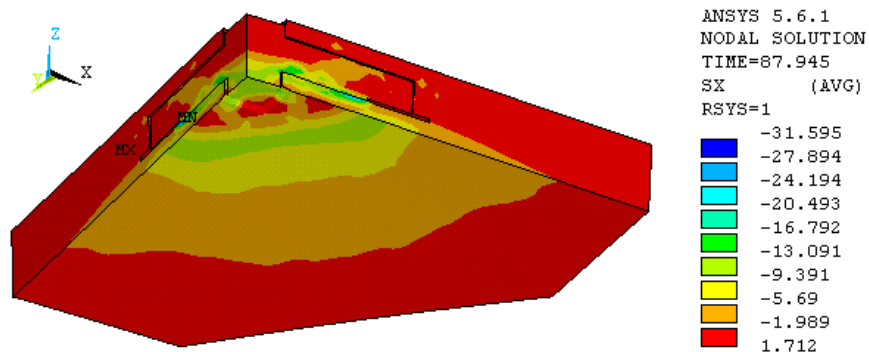


Bild 5.36b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1280$  kN – Versuch: W3)

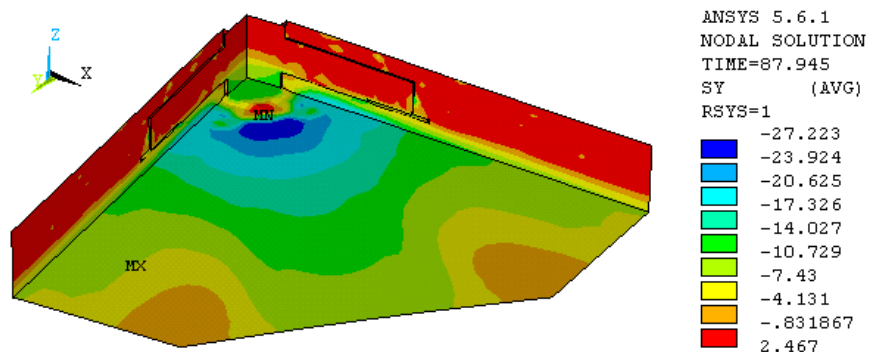
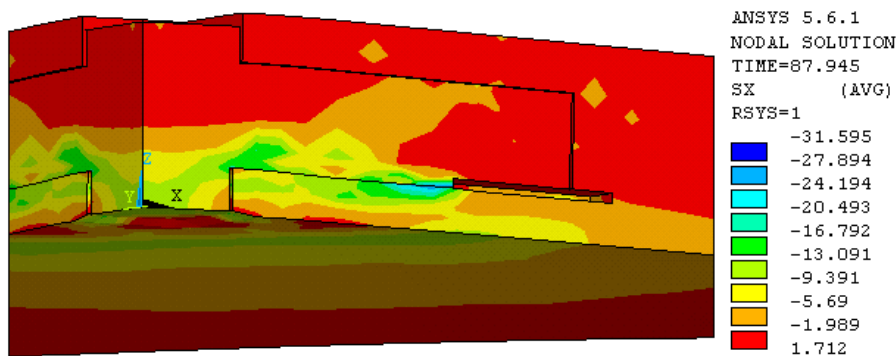


Bild 5.36c: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 1280$  kN – Versuch: W3)

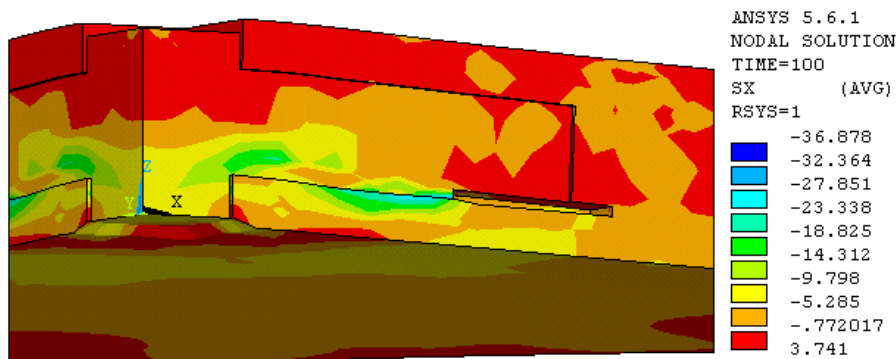
Die FE-Berechnung bestätigte die aus den Messwerten berechneten Einwirkungen auf das Stahlprofil infolge Biegemoment, Querkraft und Normalkraft für den durchplastizierten Zustand.

Die Konzentration der Zugnormalspannungen des Stahlsteges unmittelbar an der Innenkante zum Auflagerteller hin – im Bild 5.38b zu erkennen – zeigt, dass über die Tellerinnenkante eine zur Stütze gerichtete Druckreaktion auf den Beton einwirkt. Dass eine daraus resultierende Querpressung zugleich die tiefer liegenden tangential gerichteten Spannungen beeinflusst, zeigt u.a. Bild 5.36c. Es stellt sich nunmehr entgegen dem Versuch W1 eine zwischen den Schwertern konzentrierte Tangentialspannung „ $\sigma_{c,y}$ “ ein. Diese über das Stahlprofil ausgelöste, einer Umschnürung ähnlichen Beeinflussung der unten liegenden Druckschale, führt zu einer höheren Schubfestigkeit der Betonplatte und erlaubt dem gedrückten Betonquerschnitt eine erhöhte Querkraftaufnahme.

Die Gegenüberstellung der radial gerichteten Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ in den Bildern 5.37a und Bild 5.37b zeigt das aus den nachgerechneten Fremdversuchen bereits bekannte Tragverhalten. Der geneigt auf die Stütze zulaufende Horizontalschub, im Bild 5.37a erkennbar beim Erreichen des größten rechnerischen Durchstanzwiderstands, setzt sich zwischen Stützenrand und der Innenkante der Auflagerteller ab.



**Bild 5.37a:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1280 \text{ kN} - w \approx 12,5 \text{ mm}$ )



**Bild 5.37b:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V = 1260 \text{ kN} - w \gg 12,5 \text{ mm}$ )

Bild 5.37b zeigt analog zu den sich einstellenden, diskreten Druckstreben des Versuchs „IB15a“ aus Stockholm (z.B. Bild 5.13a) eine vergrößerte, höher liegende radial um die Stütze umlaufende Druckzone. Die überhöhten Darstellungen der Bilder 5.37a und 5.37b erfolgten mit einer Skalierung von 1:4 und sind damit nachträglich etwas geringer gewählt, als die vom Programm bereitgestellte Voreinstellung. Bild 5.37b lässt dennoch deutlich das Eindringen der oberen Kopfplatte des Stützenstumpfes in die Platte erkennen – ein Tragverhalten, das sich auf dem Prüffeld bei der Versuchsdurchführung der Versuche W3 und W4 zum Zeitpunkt des Versagens ebenfalls einstellte und die Versuchsdurchführung beendete.

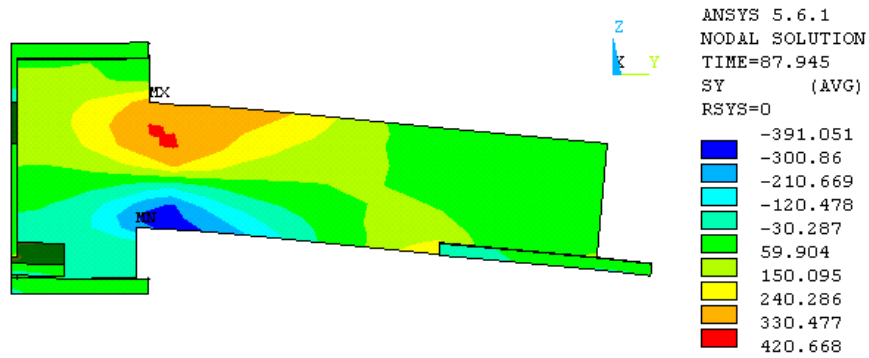


Bild 5.38a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{u, \text{System}} = 1280 \text{ kN}$ )

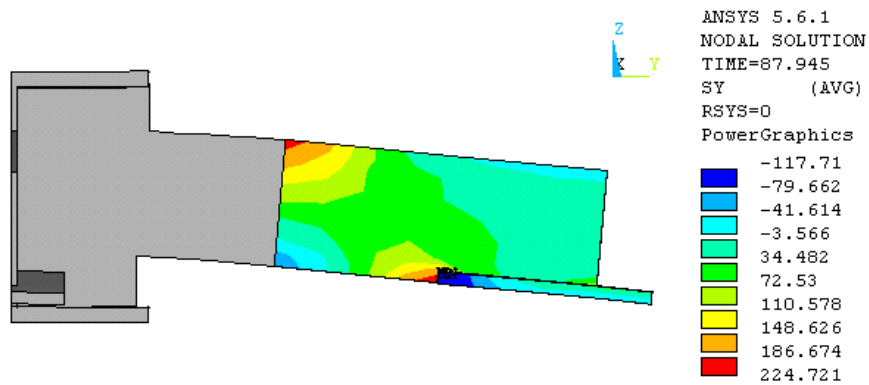


Bild 5.38b: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{u, \text{System}} = 1280 \text{ kN}$ )  
(Normalspannungen im Bereich des Auflagertellers analog zum vorangestellten Bild 5.38a)

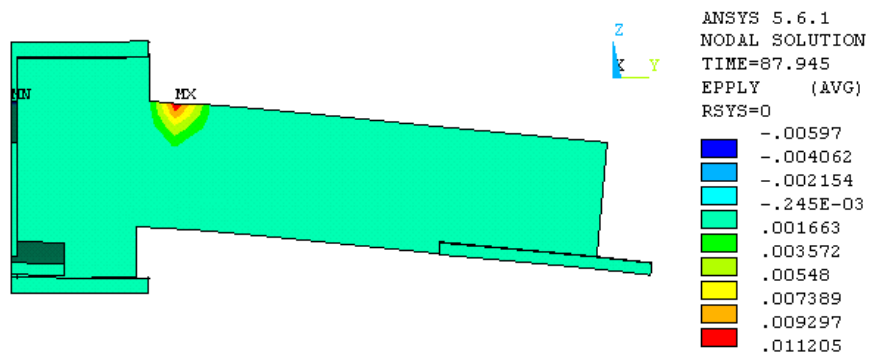


Bild 5.38c: Plastische Dehnungen „ $\epsilon_{a,y}$ “ infolge der Spannungen „ $\sigma_{a,y}$ “, ( $V_{u, \text{System}} = 1280 \text{ kN}$ )

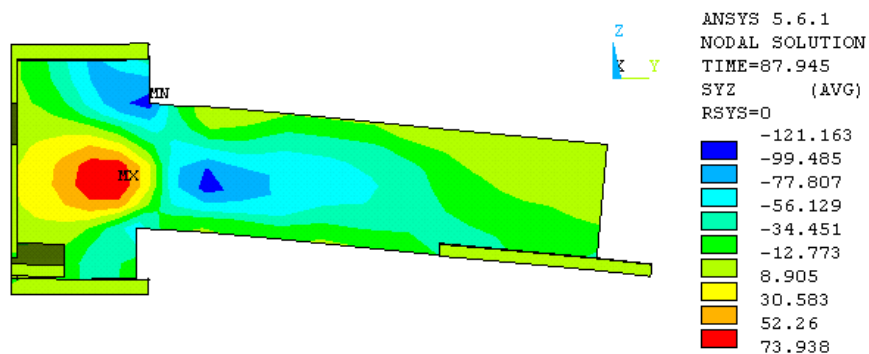
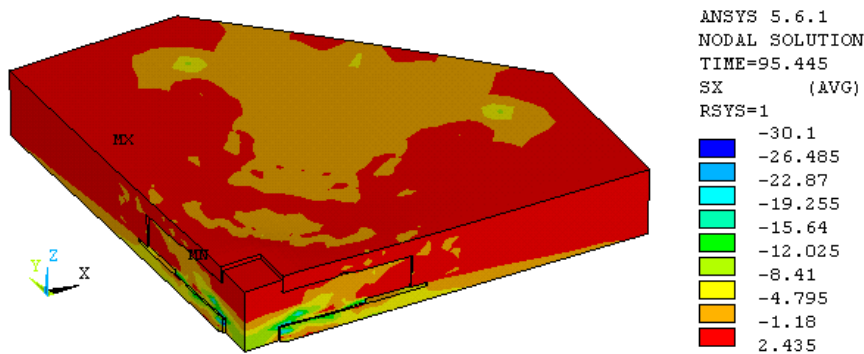


Bild 5.38d: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ in der gezeigten y-z Ebene, ( $V_{u, \text{System}} = 1280 \text{ kN}$ )

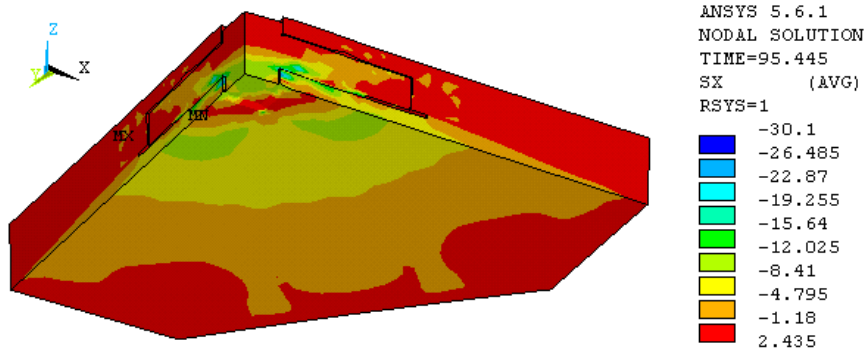
**5.3.4 Versuch „W4“ – mit Stahlkreuz (Querschnitt:  $s_a / h_a \equiv 15 / 160$  mm)**

In die Betonplatte wurde eine zusätzliche Schubsicherung mit senkrechten Bügeln eingebaut

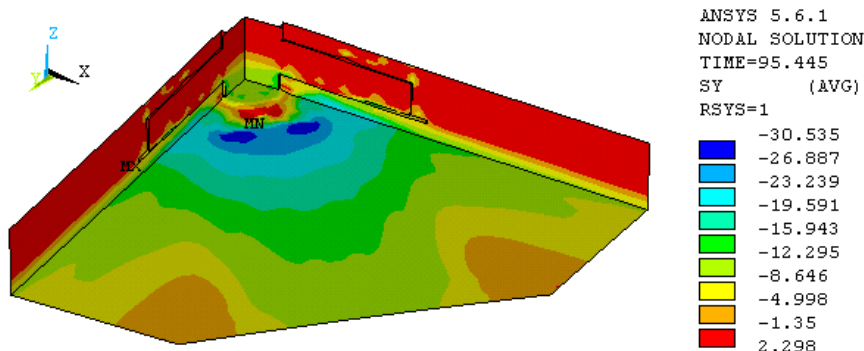
Um den gemeinsamen Einfluss einer Schubbewehrung zusammen mit dem Stahlkreuz auf den Durchstanzwiderstand zu überprüfen, wurden innerhalb der vier Rechteckwinkel des Stahlkreuzes je zwei geschlossene Bügel ( $\varnothing 6$  mm) unter Beachtung einer Umschließung der oberen Zug- und der unteren Druckbewehrung eingebaut. Die Umschließung der beiden horizontalen Bewehrungslagen gewährleistete eine zuverlässige Verankerung und sicherte den gegenseitigen Abstand beider Lagen unter einem nahezu schlupflosen Verformungsverhalten. Der Vergleich der Last-Verformungskurven zeigt die gute Übereinstimmung zur erzielten Erhöhung des Durchstanzwiderstands im Versuch W4 gegenüber Versuch W3 (vgl. Bild 5.23 mit Bild 5.22).



**Bild 5.39a:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1395$  kN – Versuch: W4)



**Bild 5.39b:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1395$  kN – Versuch: W4)



**Bild 5.39c:** Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 1395$  kN – Versuch: W4)

Die vier senkrecht angeordneten Bewehrungsstäbe ( $\varnothing 6$  mm) üben offensichtlich einen sehr direkten Einfluss auf den horizontalen Schubwiderstand parallel zur Plattenmittelfläche aus. Die mit den Bügeln verursachte Behinderung der Mittelflächenverzerrung und die damit verbundene Behinderung der gegenseitigen Verschiebung der oberen und unteren Bewehrungslage lässt sich im Bild 5.39a unmittelbar an der Plattenoberseite erkennen. Entgegen den Radialspannungen

gen „ $\sigma_{c,x}$ “ aus Bild 5.36a des Versuchs W3 (vgl. ergänzend Bild 5.24a für Versuch W1) nimmt die Fläche des sichtbaren Horizontaldrucks im Bild 5.39a deutlich stärker zu. Eine entsprechende Auswirkung auf die Plattenunterseite zeigt sich im Bild 5.39b. Über die örtliche maximale Tangentialspannung „ $\sigma_{c,y}$ “ (Bild 5.39c) ist es möglich, die Lage der beiden äußeren Bügel-schenkel innerhalb der FE-Struktur zu erkennen. Ähnlich der ersten Nachrechnung im Kapitel 5.2.1 für den Stockholmer Versuch „IB15a“ wird der mechanische Ansatz und die Vorstellung des Tragverhaltens über eine Form der „erweiterten Fachwerkanalogie“ bestätigt.

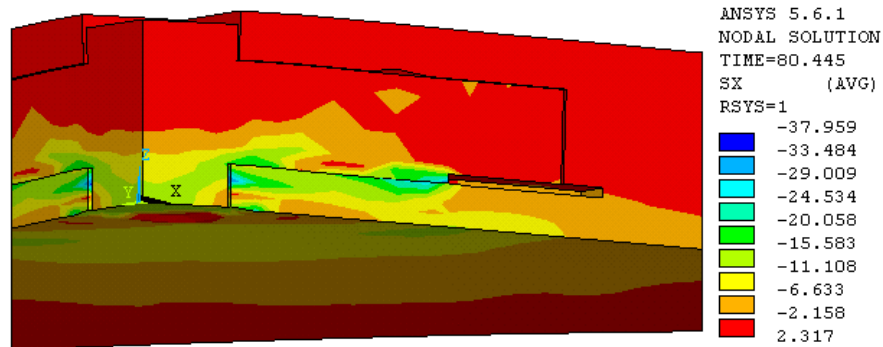


Bild 5.40a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 1325 \text{ kN}$  – Versuch: W4)

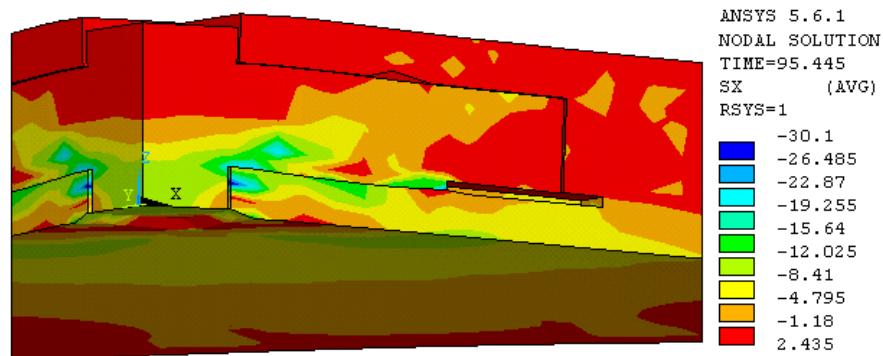


Bild 5.40b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1395 \text{ kN} \Rightarrow$  Bruchlast)

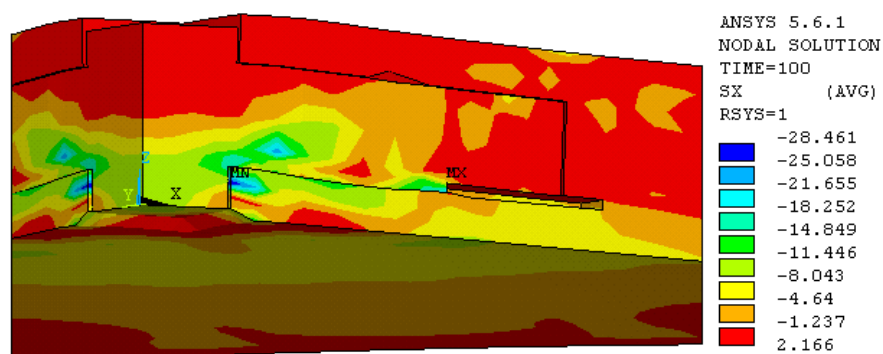


Bild 5.40c: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 1353 \text{ kN}$  – Versuch: W4)

Der Vergleich der radial gerichteten, horizontalen Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “ in den Bildern 5.40 (a bis c) zeigt über die Verteilung der Spannungen nochmal die Veränderungen der inneren, sich in Stütznähe einstellenden Steifigkeitsverhältnisse. Die erkennbaren geeigneten “Druckglieder” entwickeln sich in ähnlicher Art und Weise wie bei den zuvor gezeigten Ergebnissen des Versuchs W3. Die Größe, Verteilung und der Verlauf der Radialspannungen sind gegenüber den Bildern 5.37 (a+b) im Umfangsbereich der Stütze ausgeprägter und deutlicher zu erkennen.

## 5.4 Ergänzende Untersuchungen

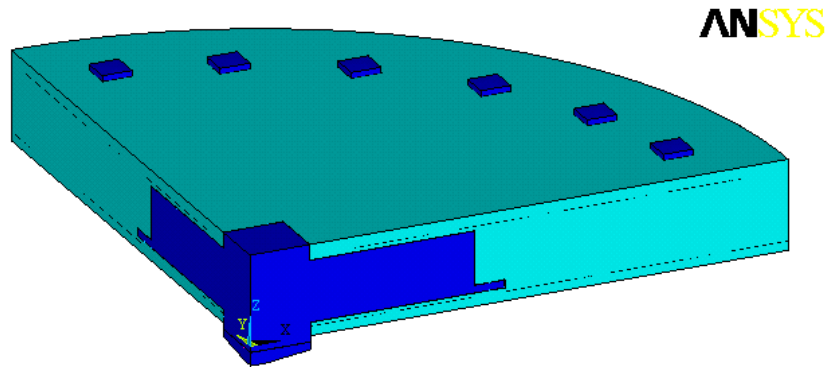
Auf den ungünstigen Einfluss eines achteckigen Profils des Prüfkörpers und das damit verbundene unstetige Verformungsverhalten wurde in den Kapiteln 5.2 und 5.3.1 hingewiesen. Wird aus wirtschaftlichen Gründen zur Vereinfachung der Herstellung eines Versuchskörpers von dem Rundprofil (wie es bereits in [98] vorgeschlagen wurde) abgewichen, wird durch den nicht mehr stetigen Außenrand die innere Strukturschädigung der Betonplatte ungünstig beeinflusst. Dies gilt gleichermaßen für die Untersuchung einer Platte mit oder ohne zusätzliche Maßnahmen zur Sicherung gegen Durchstanzen, wie auch für das in dieser Arbeit zur Erhöhung des Durchstanzwiderstandes neu entwickelte Verbundsystem.

Mit den nachfolgenden Untersuchungen soll im ersten Teil, Kapitel 5.4.1, durch Beachtung eines kontinuierlich verlaufenden, äußeren Rundschnitts bis zum Momentennulldurchgang dem Widerstand, den die Betonplatte im Bereich einer Innenstütze innerhalb eines Deckensystems liefert, wirklichkeitsnäher Rechnung getragen werden (Bilder 5.41a bis 5.41d). In Anlehnung an die zuvor beschriebenen Versuchsdurchführungen und unter Beachtung der Verteilung der Radialmomente in Bezug auf ein rechteckiges Stützenraster wird der Abstand der Lasteinleitung vom Stützenzentrum mit  $C/2 = 1,5$  m festgelegt. Mit der Absicht einer verbesserten Realisierung des Problems wird die Last über insgesamt 24 Lasteinleitungspunkte – bei Betrachtung eines Gesamtsystems – in den Deckenausschnitt aufgebracht. Die Abmessungen und Kennwerte der rechnerisch simulierten Platte sind in der Kopfzeile der Tabelle 5.2 eingetragen. Der mit den Bildern 5.43 und 5.44a mögliche Vergleich der resultierenden Verformungen zum Zeitpunkt des maximal zu erreichenden Durchstanzwiderstands zwischen dem System Versuch W1 und dem nur in Bezug auf den Außenrand und die Lasteintragung veränderten System zeigt bereits eine optisch erkennbare, stabilisierende Einflussnahme, hervorgerufen durch die kontinuierliche Verformung des äußeren Bereiches. Die im Bild 5.44a und Bild 5.44b erkennbare gegenläufige Krümmung des Plattenrandes, außerhalb der Lasteinleitungsplatten, weist darauf hin, dass der gewählte Außenrand Einfluss auf das Berechnungsergebnis nehmen wird. Der Abstand von der Lasteinleitung zur Außenkante entspricht in allen untersuchten Systemen genau der Plattenhöhe von 30 cm. In beiden Bildern 5.43 und 5.44 (a+b) wurden die Verformungen identisch im Verhältnis 1:15 überhöht.

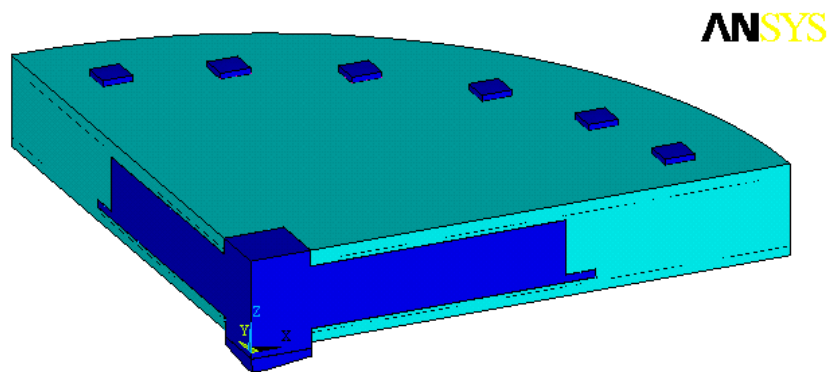
An dieser Stelle sei angemerkt, das Kinnunen und Nylander in ihren Versuchen – nach Ansicht des Verfassers bewusst – einen Randabstand von weniger als der Hälfte der Plattenhöhe wählten. Sie berücksichtigten damit einen derart verminderten Randabstand, bei dem sie sogar einen vorzeitigen Ausfall des gesamten Versuchskörpers infolge Versagens dieser Verankerung noch vor Erreichen der maximalen Durchstanzlast in Kauf nehmen mussten [66].

Seit den experimentellen Untersuchungen an Stahlbeton-Flachdecken von Ladner et al. [75] ist bekannt, dass bei der Betrachtung eines ganzen Deckensystems der Widerstand unter Kurzzeitbelastungen allein aus der Betonplatte deutlich anwächst. Hegger vertritt in [57] die Ansicht, dass dieser Widerstand aufgrund des sich einstellenden Kriechens und durch ungleichmäßige Belastung nicht voll ausgenutzt werden sollte. In [39] wird auf eine kritische Anregung von André hingewiesen, dass „Durchstanzversuche an Deckenausschnitten nicht in der Lage sind, ein Durchstanzen außerhalb der Schubbewehrung abzubilden, da der Durchstanzkegel zu nahe an der Auflagerung der Stütze verlaufe und der Schubwiderstand negativ beeinflusst werde“. Diese von André vertretene Auffassung ist für den Verfasser absolut nachvollziehbar. Deshalb

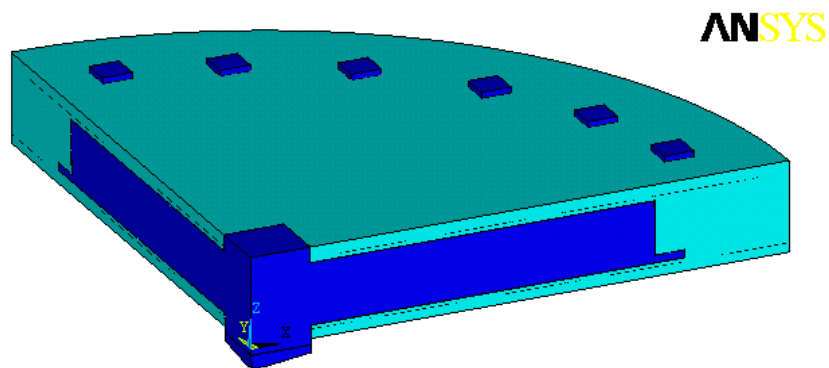




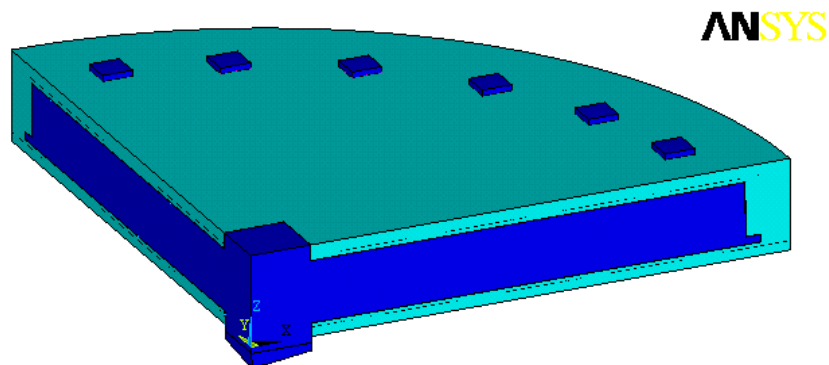
**Bild 5.41a:** System für Deckenausschnitt (Länge Stahlschwert:  $2,5 \cdot d_0 = 75$  cm)



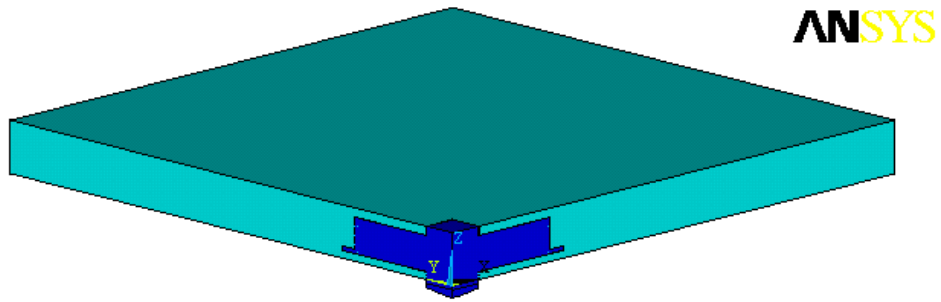
**Bild 5.41b:** System für Deckenausschnitt (Länge Stahlschwert:  $3,5 \cdot d_0 = 105$  cm)



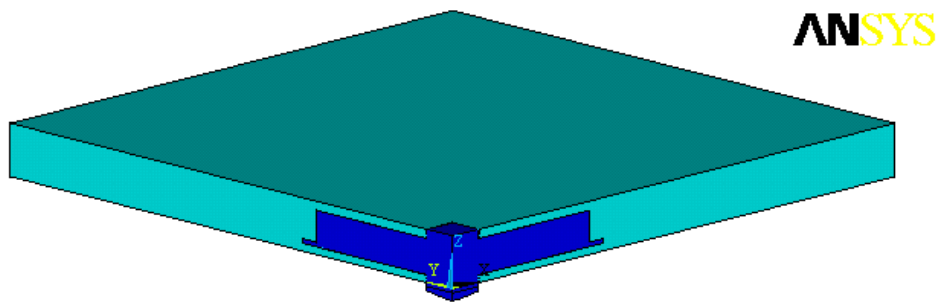
**Bild 5.41c:** System für Deckenausschnitt (Länge Stahlschwert:  $4,5 \cdot d_0 = 135$  cm)



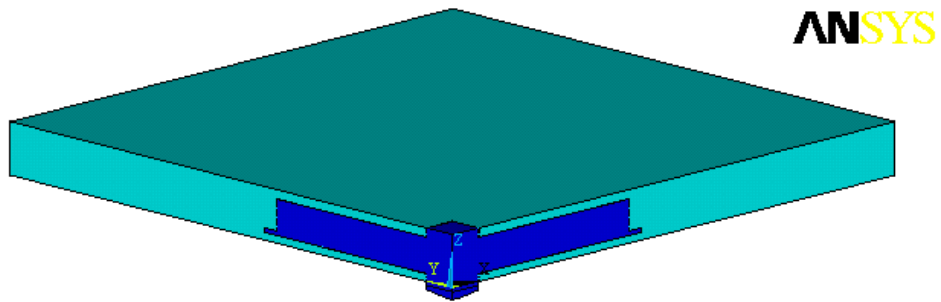
**Bild 5.41d:** System für Deckenausschnitt (Länge Stahlschwert:  $5,5 \cdot d_0 = 165$  cm)



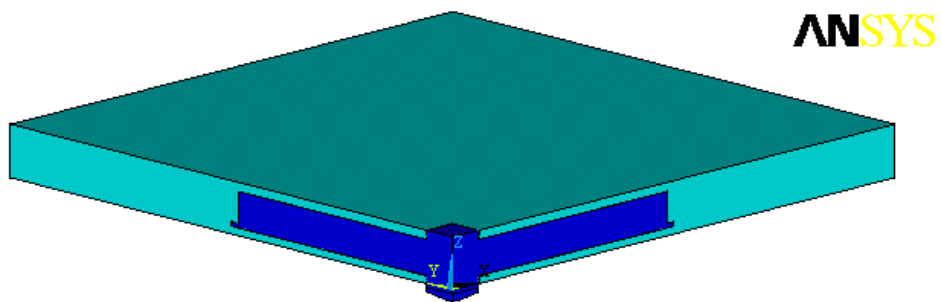
**Bild 5.42a:** Flachdeckenteilsystem (Länge des Stahlschwerts:  $2,5 \cdot d_0 = 75$  cm)



**Bild 5.42b:** Flachdeckenteilsystem (Länge des Stahlschwerts:  $3,5 \cdot d_0 = 105$  cm)



**Bild 5.42c:** Flachdeckenteilsystem (Länge des Stahlschwerts:  $4,5 \cdot d_0 = 135$  cm)



**Bild 5.42d:** Flachdeckenteilsystem (Länge des Stahlschwerts:  $5,5 \cdot d_0 = 165$  cm)

werden in einem zweiten Teil, im Kapitel 5.4.2, zusätzliche Flachdeckenteilsysteme mit dem neuen Verbundsystem untersucht (Bilder 5.42a bis 5.42d). Diese Teilsysteme werden mit identischen Materialannahmen zu den Deckenausschnitten berechnet, wodurch ein direkter Vergleich der Steigerung des numerisch bestimmten Durchstanzwiderstands ermöglicht wird. Das dabei angenommene rechteckige Stützenraster beträgt 6,8 m. Es wird vorweggenommen, dass die erzielten Berechnungsergebnisse gut mit den aus Versuchen bekannten Erhöhungen der Traglasten übereinstimmen. Tabelle 5.2 zeigt die Gegenüberstellung der Durchstanzwiderstände zwischen Deckenausschnitt und Flachdeckenteilsystem und die infolge von Membrankräften mögliche Erhöhung.

**Tabelle 5.2:** Gegenüberstellung der Berechnungsergebnisse mit der FE-Methode

**Rechnerische Bruchlasten für Deckenausschnitte und für Flachdeckenteilsysteme**

Angaben zum System und zum Materialverhalten:					
<b>System:</b>			<b>Material:</b>		
Plattenhöhe:	$d_0$	= 30 cm	Betonfestigkeit:	C35/45	
Statische Nutzhöhe:	$h_m$	= 26,4 cm		$f_c$	= $0,85 \cdot 35 = 29,75 \text{ N/mm}^2$
Stützen (Breiten a/b):	$b_1/b_2$	= 40/40 cm		$E_{cm}$	= 33300 N/mm <sup>2</sup>
Längsbewehrung:	$\rho_L$	= 0,77 %	Betonstabstahl:	BSt 500 S/M	
	$\rho'_L$	= 0,435 %	Baustahl:	S 355 (St52-3)	
			Steghöhe:	200 mm	
			Stegdicke:	40 mm	
	[ Lasteinleitung (... beim Deckenausschnitt): C/2 = 150 cm ]				
Schwertlängen für die betrachteten Systeme:  Entsprechend den Darstellungen in den Bildern 5.41 und 5.42	Deckenausschnitt mit äußerem Rundschnitt:			Flachdeckenteilsystem:	
	Elemente mit inkompatiblen Ansatzfunktionen	Verformungen an den Elementgrenzen sind kompatibel	Zunahme der rechnerischen Durchstanzlast  Abhängig vom Verschiebungsfeld	Elemente mit inkompatiblen Ansatzfunktionen	Zunahme der rechnerischen Durchstanzlast  Abhängig vom gewählten System
[m]	[kN]	[kN]	[%]	[kN]	[%]
2,5 · d <sub>0</sub> = 0,75	1916	2237	16,8	2535	32
3,5 · d <sub>0</sub> = 1,05	1990	2308	16,0	2597	30
4,5 · d <sub>0</sub> = 1,35	2090	2438	16,7	2726	30
5,5 · d <sub>0</sub> = 1,65	2063	2413	17,0	2788	35

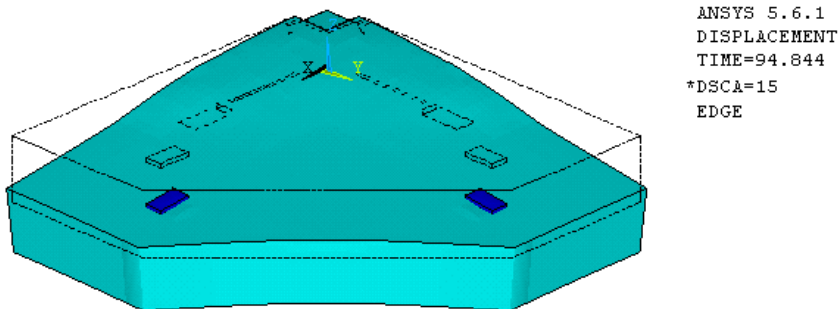
Die Berechnungsergebnisse sind zunächst sicherlich eine gute Überprüfung für die verwendeten rechnerischen Ansätze. Dass die günstig wirkenden Einflüsse bei der Betrachtung eines Flachdeckensystems aber kritisch beurteilt werden müssen und nicht uneingeschränkt in ein Bemessungskonzept mit einbezogen werden sollten [57], darauf wird zum Abschluss dieses Kapitels bei der Bewertung der FE-Berechnungsergebnisse im Kapitel 5.5 eingegangen. Auf ins

Detail gehende Beschreibungen der Ergebnisse wird, wie zuvor erwähnt, in beiden nachfolgenden Kapiteln verzichtet. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse erfolgt im Kapitel 5.5.

### 5.4.1 Deckenausschnitt mit äußerem Rundschnitt

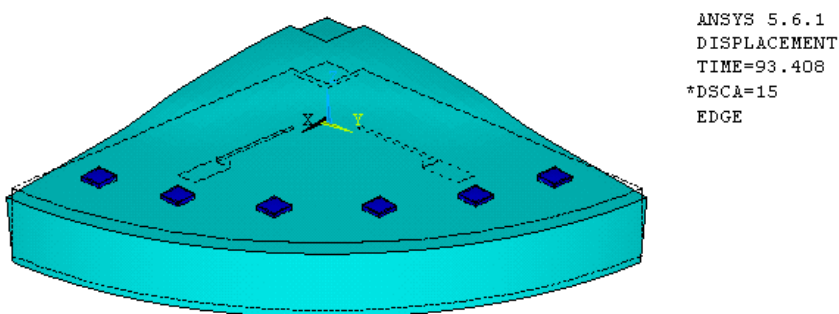
Das erste System von insgesamt vier Systemen mit unterschiedlichen Schwertlängen wurde dem Versuch W1 (Kapitel 5.3.1) nachgebildet. Die Schwertlängen dieser beiden Berechnungen sind somit identisch. Die Festigkeitskennwerte wurden DIN 1045-1 [33] entnommen und zwar in der Art, dass sie mit den aus der Materialprüfung gewonnenen Festigkeiten des Versuchs W1 in etwa vergleichbar sind. Die drei nachfolgenden Systeme unterscheiden sich dann ausschließlich durch eine Verlängerung der Schwertlängen der eingebetteten Stahlkreuze.

Um einen direkten Vergleich der Verformungen zwischen einem achteckigen Außenprofil und einem runden Profil zu ermöglichen, wird die verformte Struktur der Versuchsnachrechnung (entsprechend Kapitel 5.3.1) angegeben:

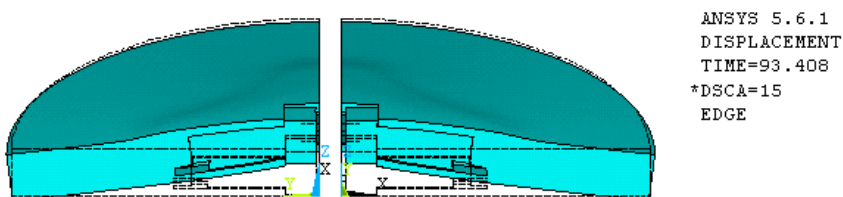


**Bild 5.43:** Darstellung der verformten und unverformten Struktur (**Versuch: W1**)

Für das „System: 2,5·d<sub>0</sub>“ betragen die Schwertlängen des Stahlkreuzes 75 cm (= 2,5 · 30 cm).



**Bild 5.44a:** Darstellung der verformten und unverformten Struktur (**Ausschnitt 2,5d<sub>0</sub>**)



**Bild 5.44b:** Verdrehung des Plattenausschnitts (**Ausschnitt 2,5d<sub>0</sub>** – incl. unverformter Struktur)

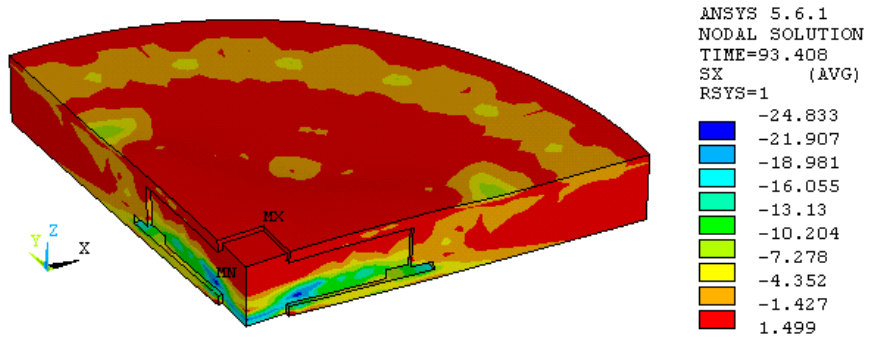


Bild 5.45a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

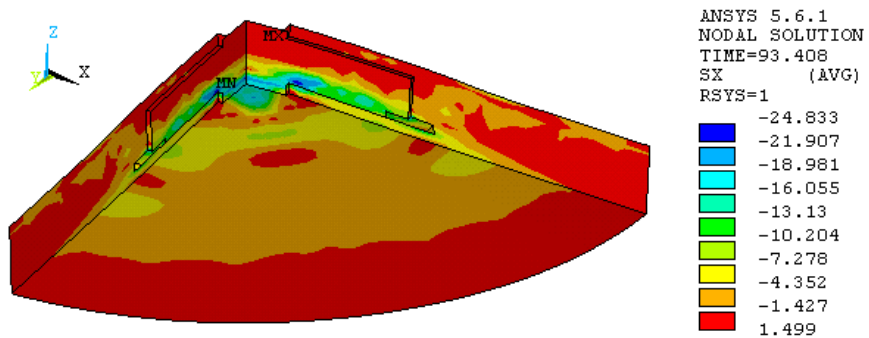


Bild 5.45b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

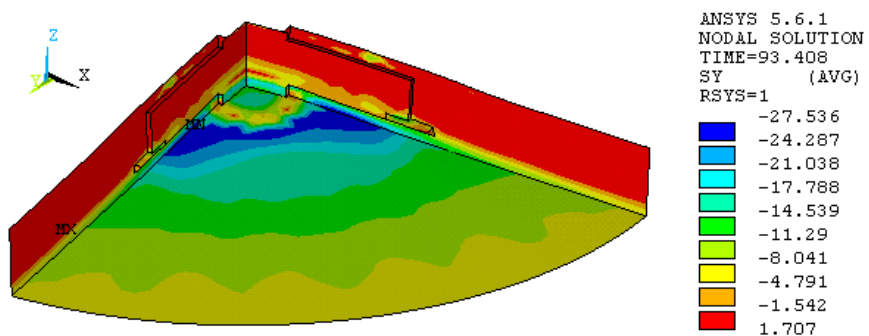


Bild 5.45c: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

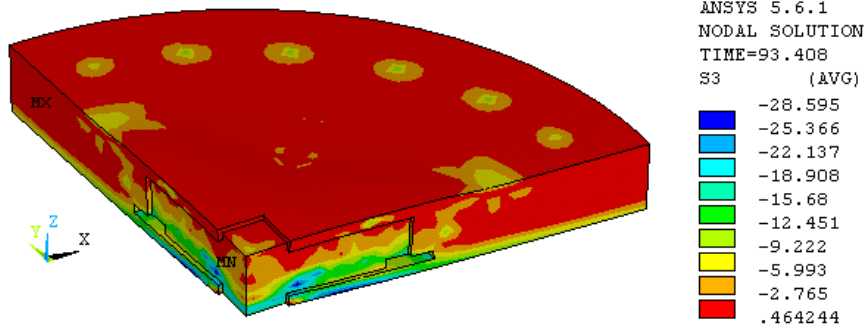


Bild 5.46a: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

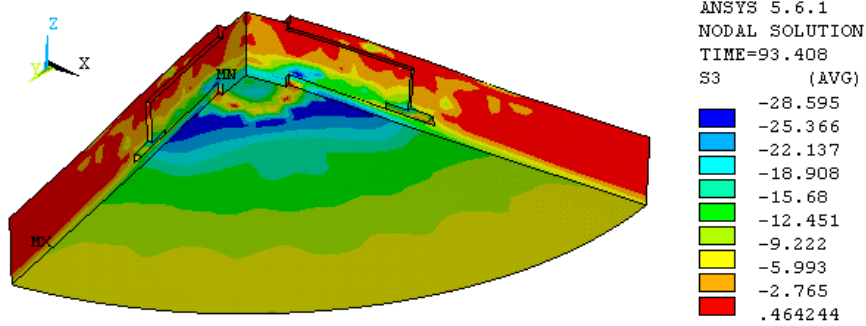


Bild 5.46b: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

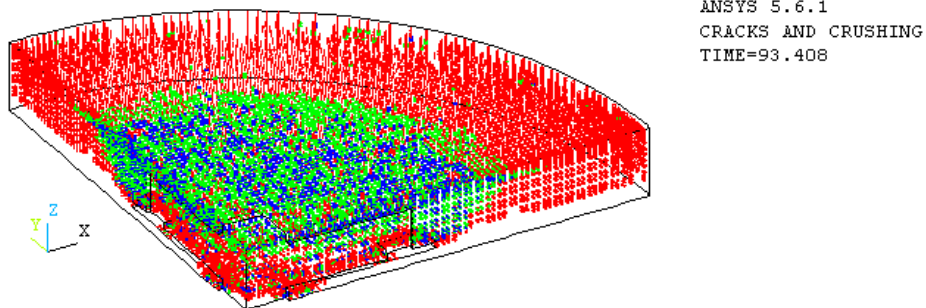


Bild 5.47a: Darstellung der gesamten Strukturschädigung der Platte ( $V_u = 1916 \text{ kN}$ )  
(Erstriss = rot, Zweitriss = grün, ...in allen drei Richtungen gerissen  $\Rightarrow$  Drittriss = blau)

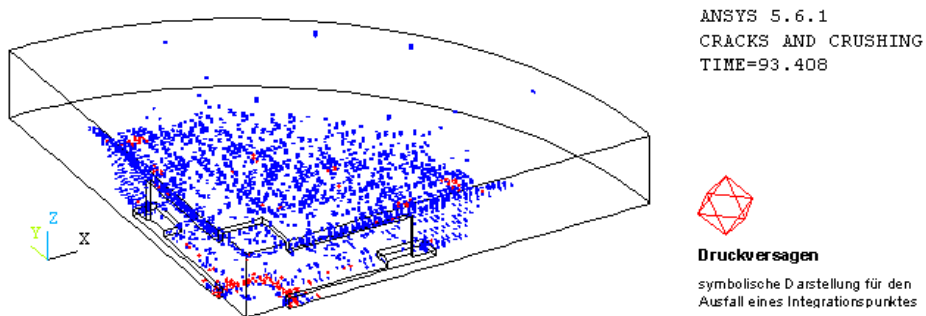


Bild 5.47b: Integrationspunkte die in allen Richtungen gerissen sind ( $V_u = 1916 \text{ kN}$ )  
(ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagens durch **rotes** Oktaeder markiert)

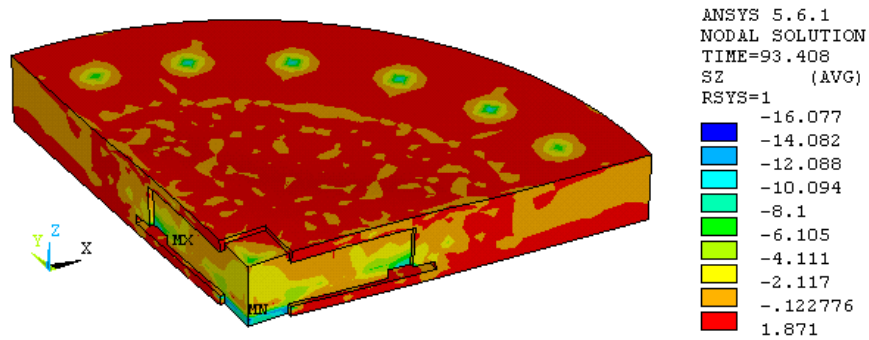


Bild 5.48: Vertikale Spannungskomponenten „ $\sigma_{c,z}$ “, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

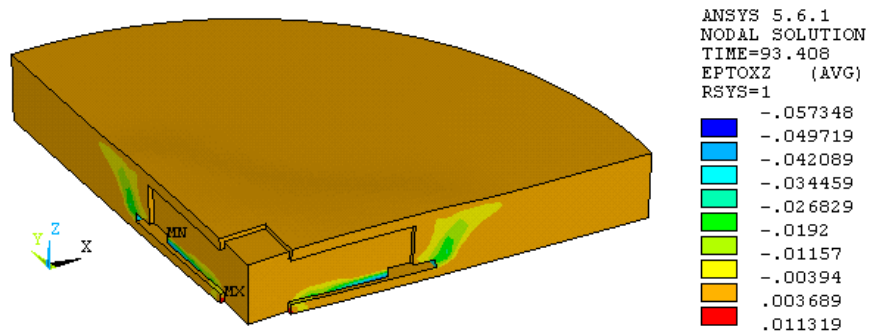


Bild 5.49a: Gesamtdehnungen „ $\epsilon_{c,xz}$ “ in der x-z Ebene ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

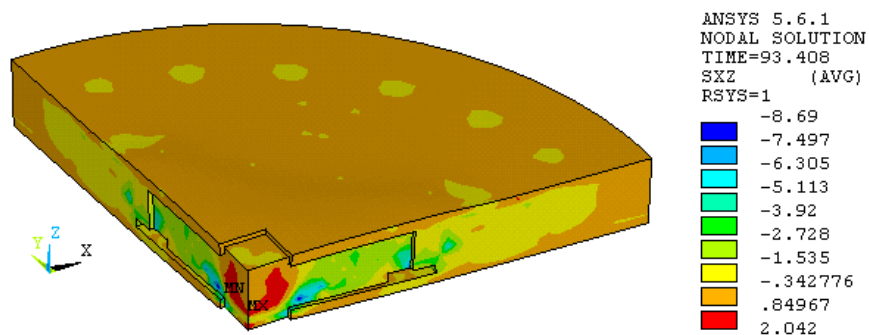


Bild 5.49b: Schubspannungen „ $\sigma_{c,xz}$ “ in der x-z Ebene ( $V_u = 1916 \text{ kN}$  – Ausschnitt  $2,5d_0$ )

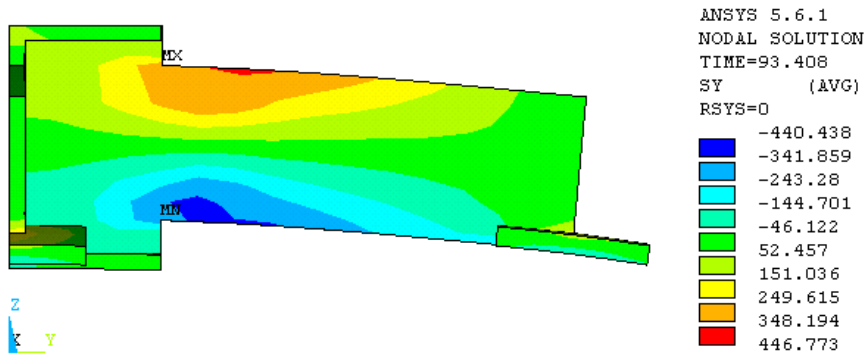


Bild 5.50a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$ )

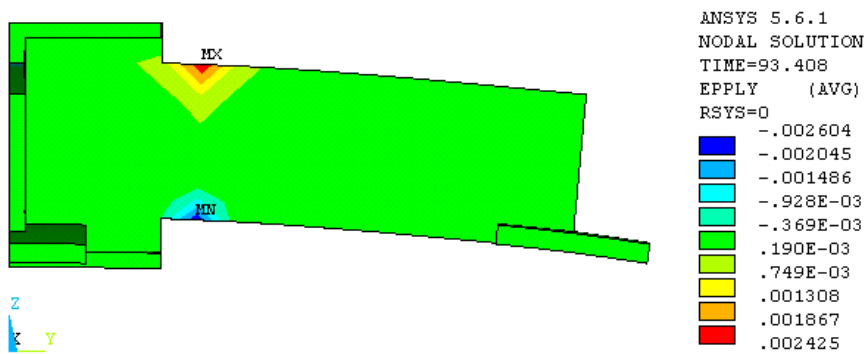


Bild 5.50b: Plastische Dehnungen „ $\epsilon_{a,y}$ “ infolge der Spannungen „ $\sigma_{a,y}$ “, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$ )

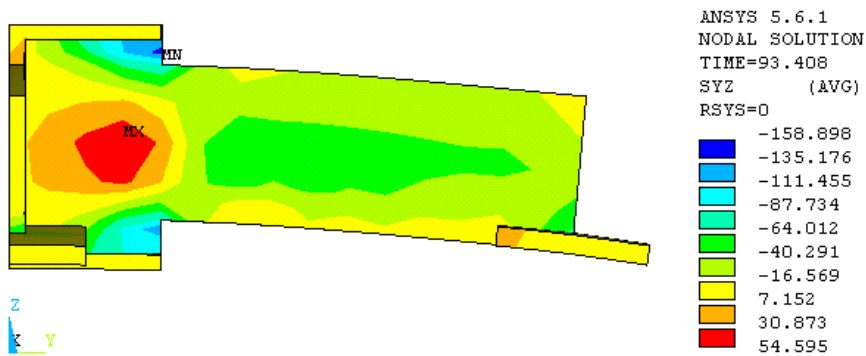


Bild 5.50c: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ in der gezeigten y–z Ebene, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$ )

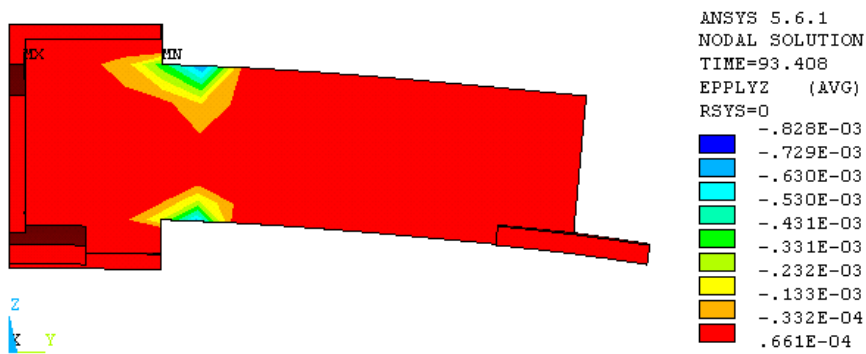


Bild 5.50d: Plastische Dehnungsanteile „ $\epsilon_{a,yz}$ “ in der y–z Ebene, ( $V_u = 1916 \text{ kN}$ )



„System: 3,5·d<sub>0</sub>“ – die Schwertlängen des Stahlkreuzes betragen 105 cm.

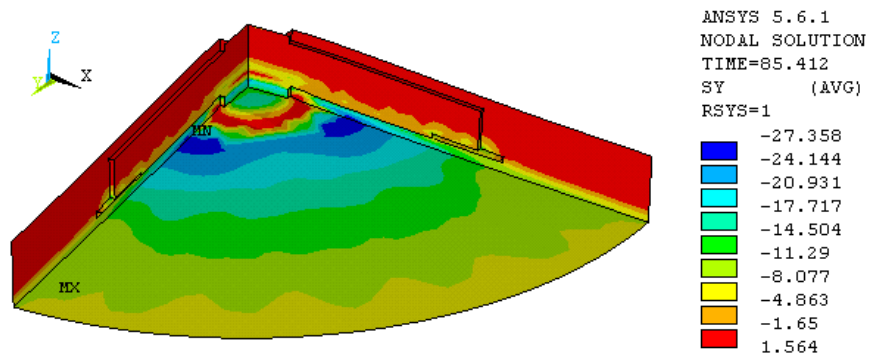


Bild 5.51: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 1990 \text{ kN}$  – Ausschnitt 3,5d<sub>0</sub>)

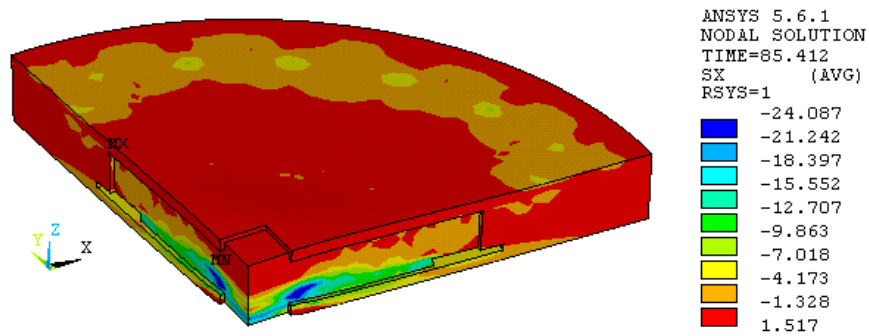


Bild 5.52a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1990 \text{ kN}$  – Ausschnitt 3,5d<sub>0</sub>)

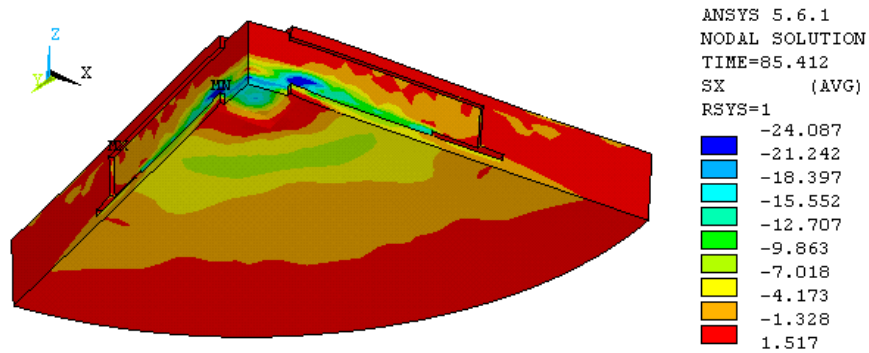


Bild 5.52b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 1990 \text{ kN}$  – Ausschnitt 3,5d<sub>0</sub>)

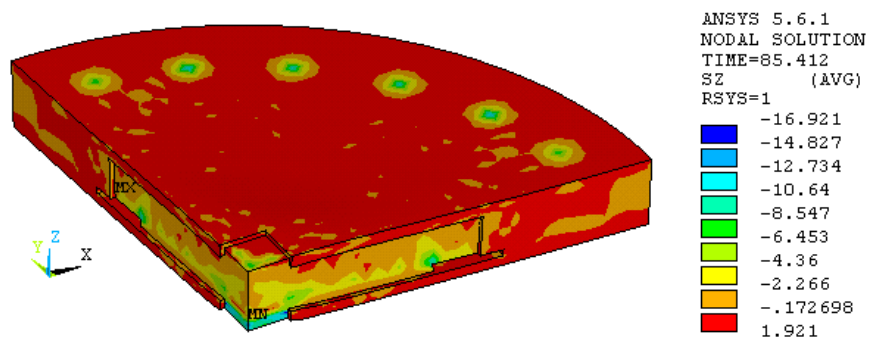
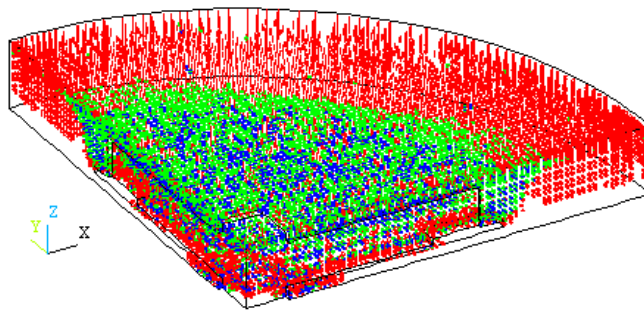
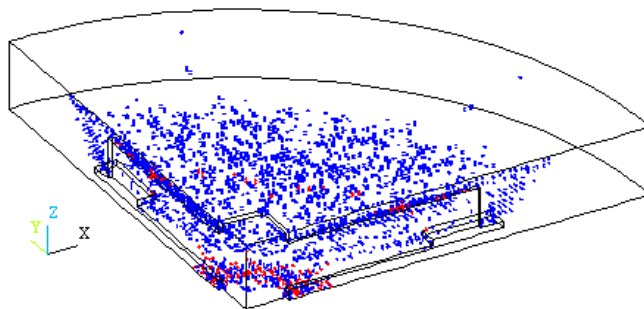


Bild 5.53: Vertikale Spannungskomponenten „ $\sigma_{c,z}$ “, ( $V_u = 1990 \text{ kN}$  – Ausschnitt 3,5d<sub>0</sub>)



ANSYS 5.6.1  
 CRACKS AND CRUSHING  
 TIME=85.412

**Bild 5.54a:** Darstellung der gesamten Strukturschädigung der Platte ( $V_u = 1990 \text{ kN}$ )  
 (Erstriss = rot, Zweittriss = grün, ...in allen drei Richtungen gerissen  $\Rightarrow$  Drittriss = blau)

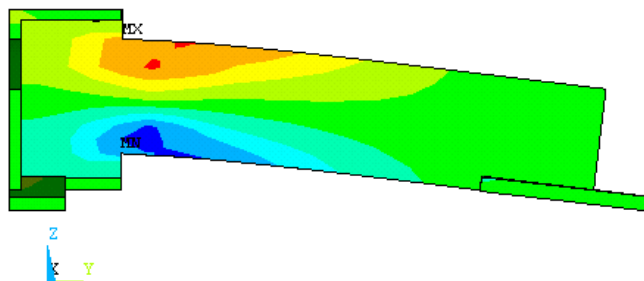


ANSYS 5.6.1  
 CRACKS AND CRUSHING  
 TIME=85.412



**Druckversagen**  
 symbolische Darstellung für den  
 Ausfall eines Integrationspunktes

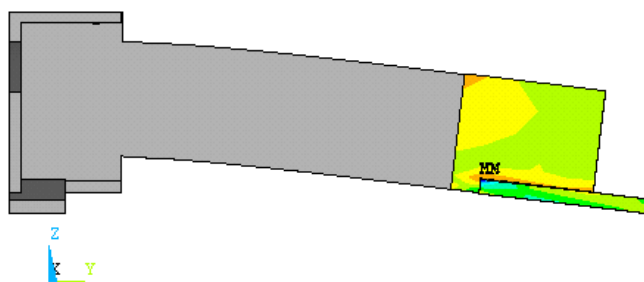
**Bild 5.54b:** Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind ( $V_u = 1990 \text{ kN}$ )  
 (ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagen durch rote Oktaeder markiert)



ANSYS 5.6.1  
 NODAL SOLUTION  
 TIME=85.412  
 SY (AVG)  
 RSYS=0

Blue	-447.907
Dark Blue	-347.109
Light Blue	-246.311
Cyan	-145.513
Green	-44.715
Yellow-Green	56.083
Yellow	156.881
Orange	257.679
Red-Orange	358.477
Red	459.275

**Bild 5.55a:** Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 1990 \text{ kN}$ )

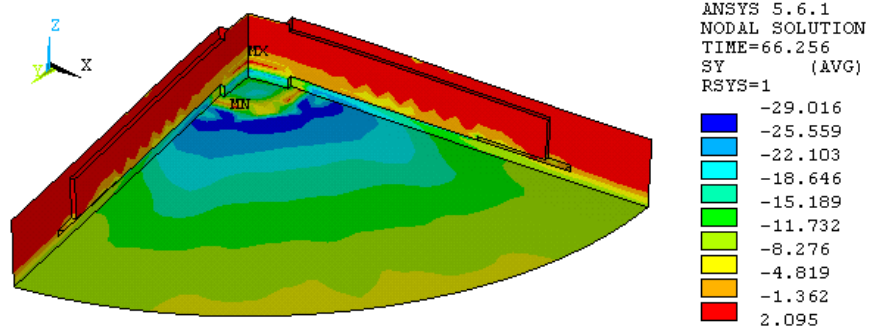


ANSYS 5.6.1  
 NODAL SOLUTION  
 TIME=85.412  
 SY (AVG)  
 RSYS=0

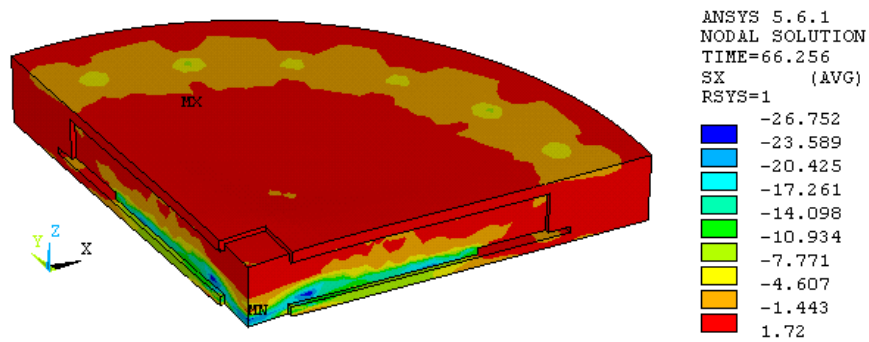
Blue	-79.177
Dark Blue	-64.445
Light Blue	-49.713
Cyan	-34.982
Green	-20.25
Yellow-Green	-5.519
Yellow	9.213
Orange	23.945
Red-Orange	38.676
Red	53.408

**Bild 5.55b:** Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 1990 \text{ kN}$ )  
 (Normalspannungen im Bereich des Auflagertellers analog zum vorangestellten Bild 5.55a)

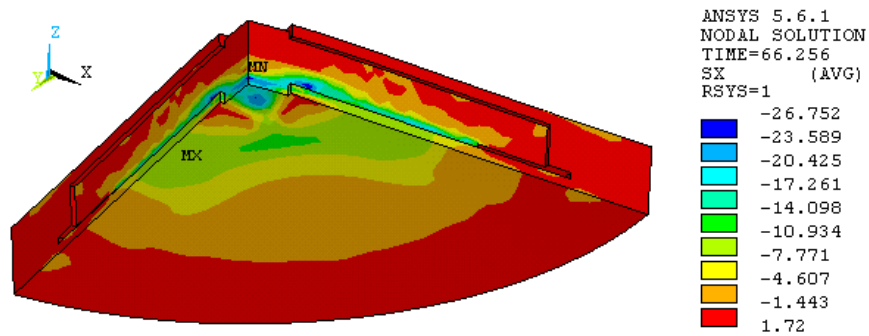
„System: 4,5·d<sub>0</sub>“ – die Schwertlängen des Stahlkreuzes betragen 135 cm.



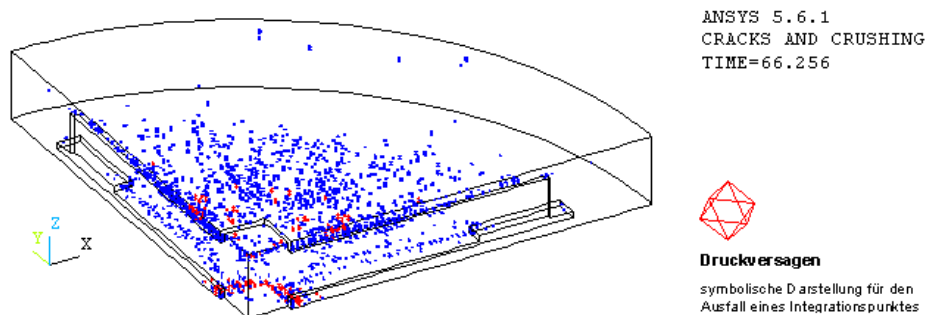
**Bild 5.56:** Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 2090 \text{ kN}$  – Ausschnitt 4,5d<sub>0</sub>)



**Bild 5.57a:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 2090 \text{ kN}$  – Ausschnitt 4,5d<sub>0</sub>)



**Bild 5.57b:** Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 2090 \text{ kN}$  – Ausschnitt 4,5d<sub>0</sub>)



**Bild 5.58:** Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind ( $V_u = 2090 \text{ kN}$ ) (ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagens durch **rotes** Oktaeder markiert)

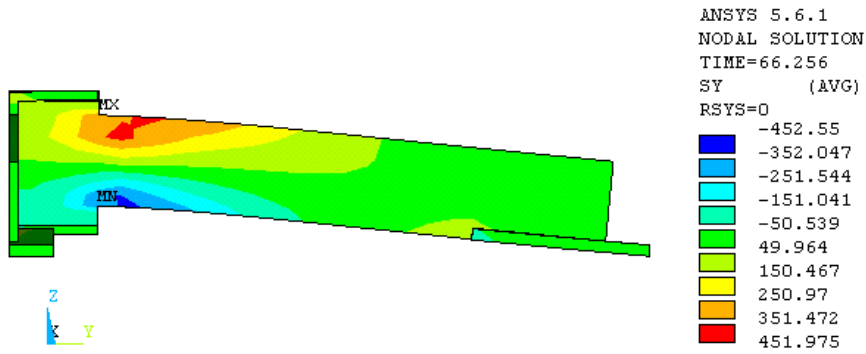


Bild 5.59a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 2090 \text{ kN}$ )

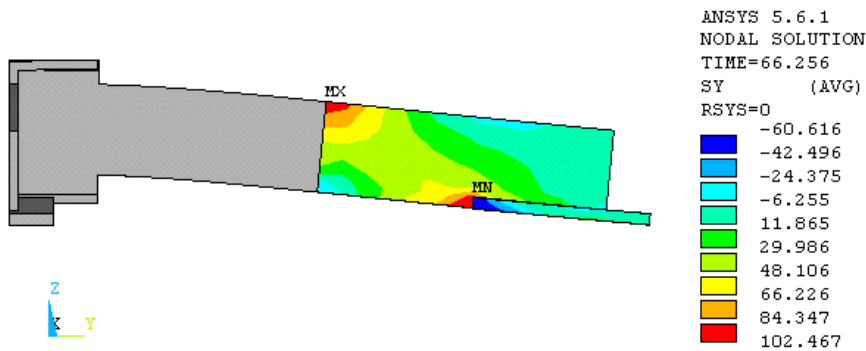


Bild 5.59b: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 2090 \text{ kN}$ )  
(Normalspannungen im Bereich des Auflagertellers analog zum vorangestellten Bild 5.59a)

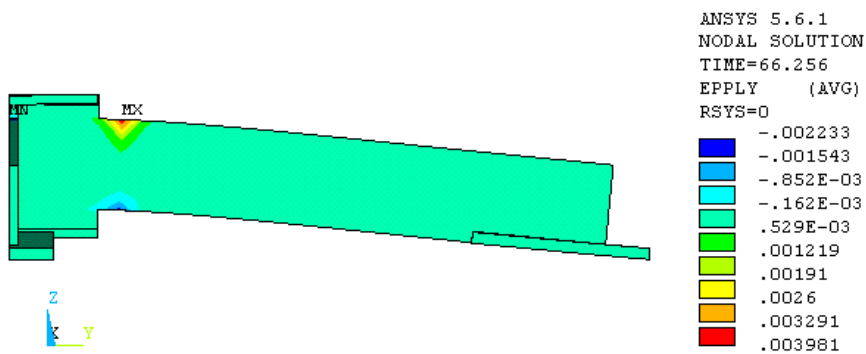


Bild 5.59c: Plastische Dehnungen „ $\epsilon_{a,y}$ “ infolge der Spannungen „ $\sigma_{a,y}$ “, ( $V_u = 2090 \text{ kN}$ )

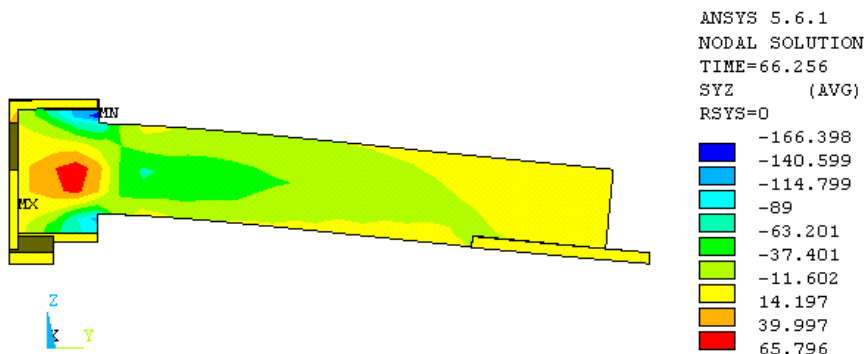


Bild 5.59d: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ in der gezeigten  $y-z$  Ebene, ( $V_u = 2090 \text{ kN}$ )

„System: 5,5·d<sub>0</sub>“ – die Schwertlängen des Stahlkreuzes betragen 165 cm.

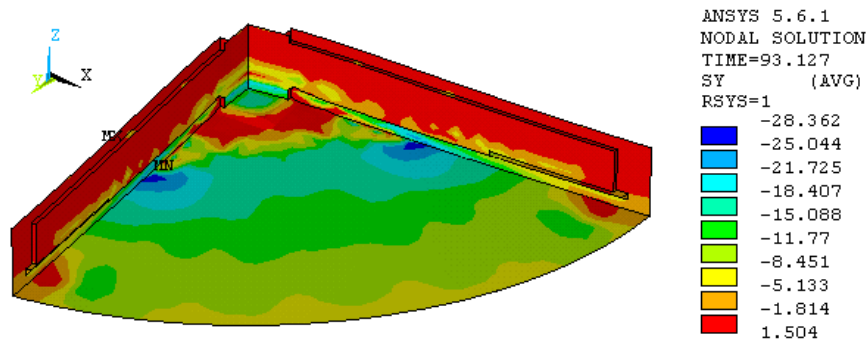


Bild 5.60: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 2063 \text{ kN}$  – Ausschnitt 5,5d<sub>0</sub>)

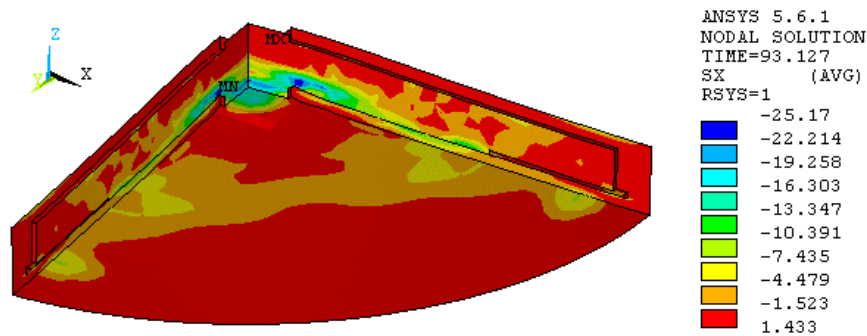


Bild 5.61a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 2063 \text{ kN}$  – Ausschnitt 5,5d<sub>0</sub>)

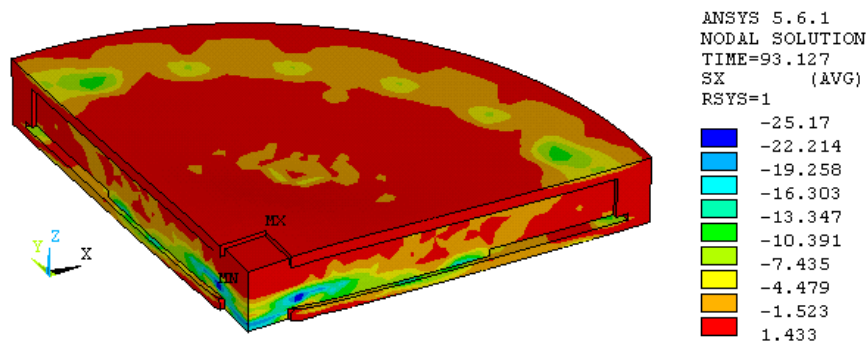


Bild 5.61b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 2063 \text{ kN}$  – Ausschnitt 5,5d<sub>0</sub>)

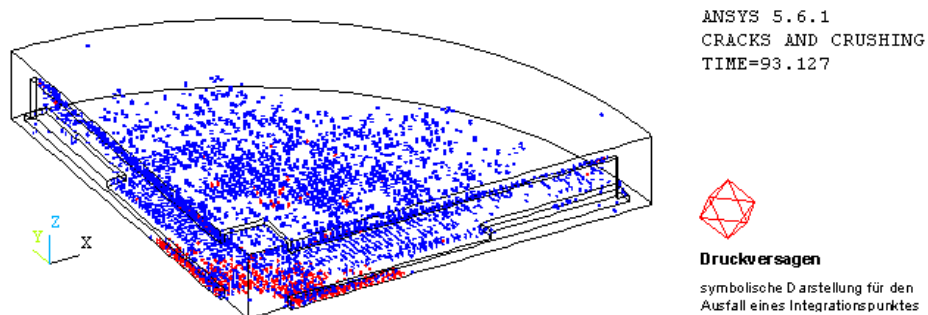


Bild 5.62: Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind ( $V_u = 2063 \text{ kN}$ ) (ausgefallene Integrationspunkte infolge Druckversagens durch rotes Oktaeder markiert)

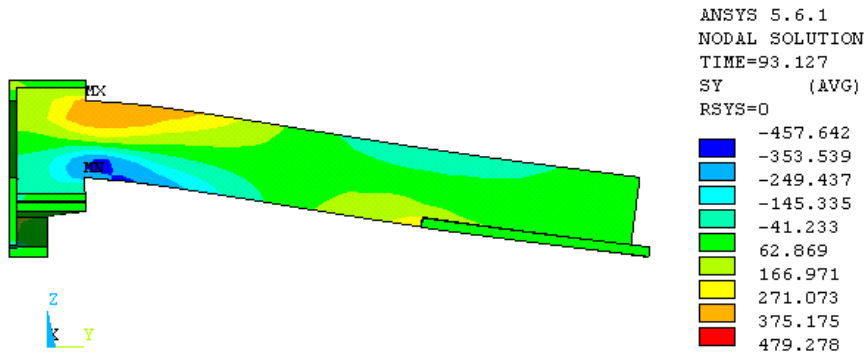


Bild 5.63a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 2063 \text{ kN}$ )

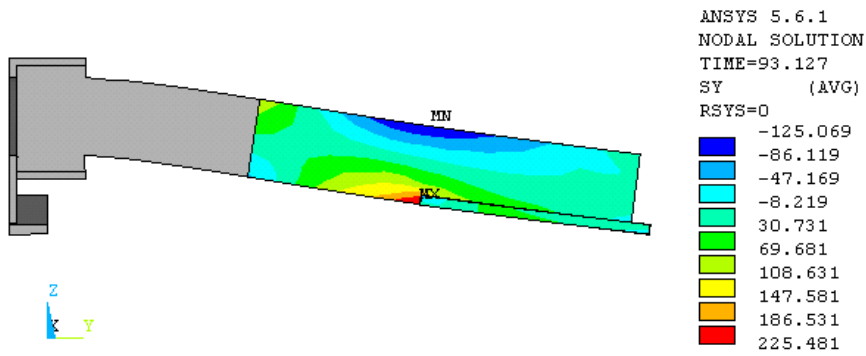


Bild 5.63b: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 2063 \text{ kN}$ )  
(Normalspannungen im Bereich des Auflagertellers analog zum vorangestellten Bild 5.63a)

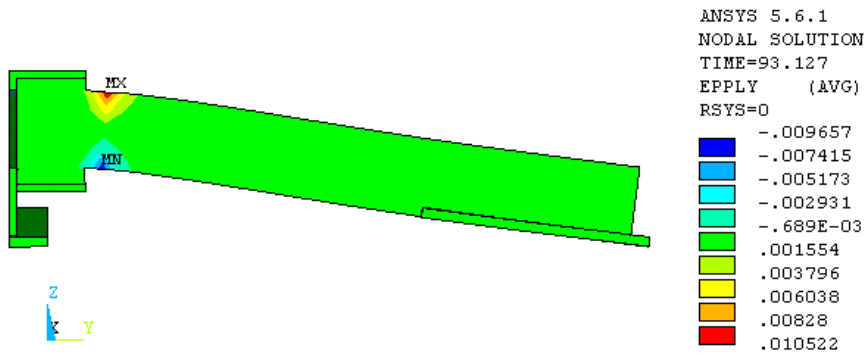


Bild 5.63c: Plastische Dehnungen „ $\epsilon_{a,y}$ “ infolge der Spannungen „ $\sigma_{a,y}$ “, ( $V_u = 2063 \text{ kN}$ )

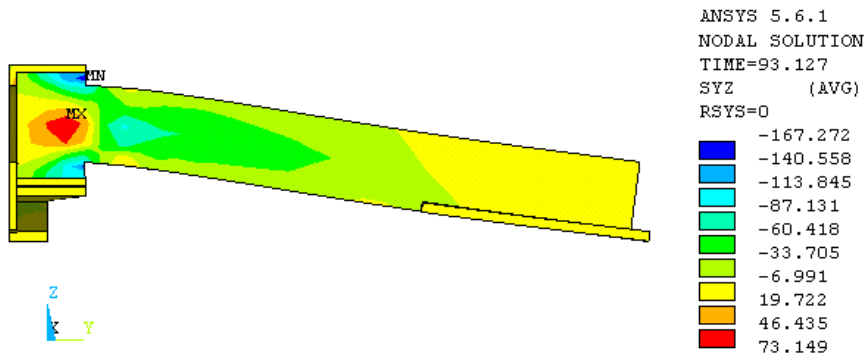


Bild 5.63d: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ in der gezeigten y-z Ebene, ( $V_u = 2063 \text{ kN}$ )

### 5.4.2 Flachdeckenteilsysteme

Die Systeme sind hinsichtlich der Abmessungen und Festigkeitskennwerte mit den Systemen aus Kapitel 5.4.1 direkt vergleichbar. Betrachtet wird nunmehr nachfolgend eine Viertelplatte.

„Schwertlänge  $2,5 \cdot d_0$ “ – Berechnungsergebnisse für  $V_{\text{Time}} = 2490 \text{ kN} < V_u = 2535 \text{ kN} \Rightarrow 1,8\%$ .

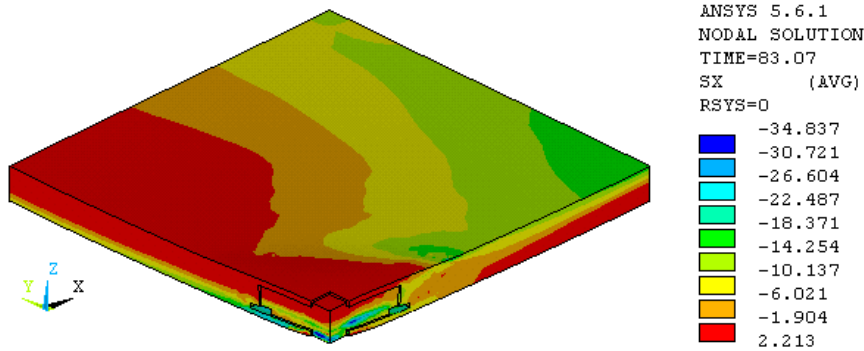


Bild 5.64a: Spannungsverteilung „ $\sigma_{c,x}$ “ in den globalen Systemkoordinaten ( $V_{\text{Time}} = 2490 \text{ kN}$ )

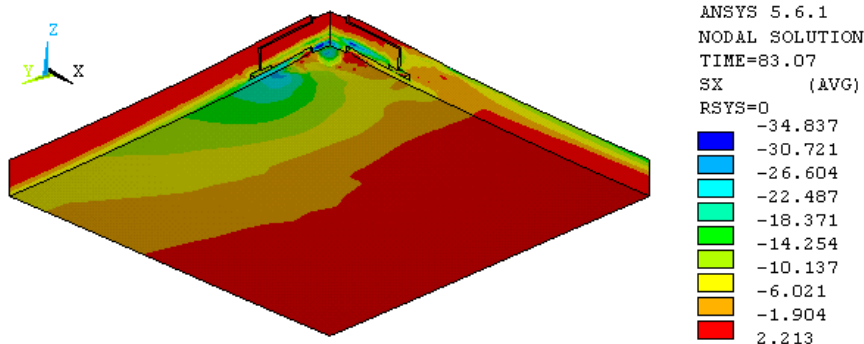


Bild 5.64b: Spannungsverteilung „ $\sigma_{c,x}$ “ in den globalen Systemkoordinaten ( $V_{\text{Time}} = 2490 \text{ kN}$ )

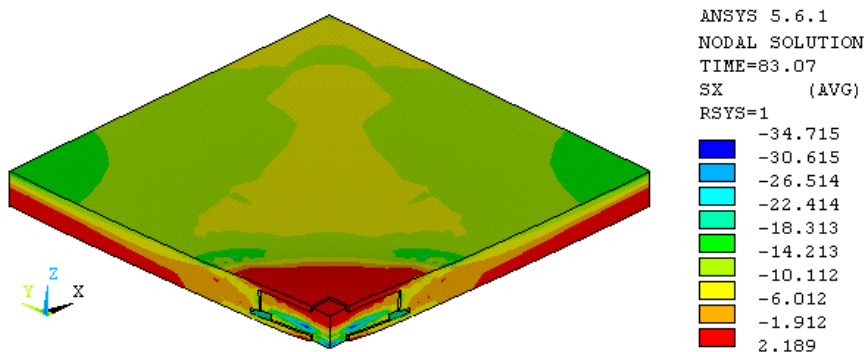


Bild 5.65a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 2490 \text{ kN}$  – Schwertlänge  $2,5 \cdot d_0$ )

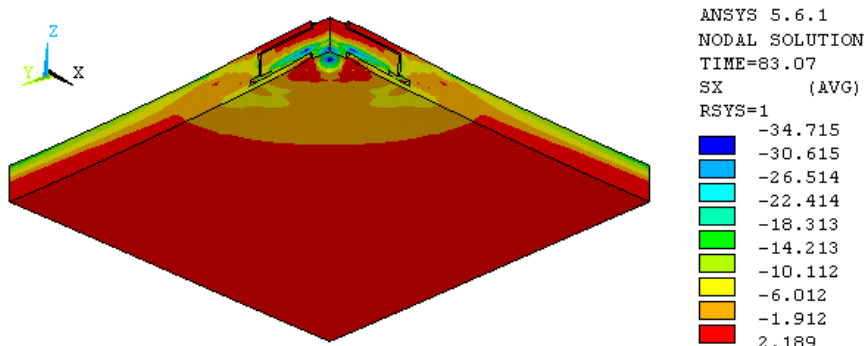


Bild 5.65b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 2490 \text{ kN}$  – Schwertlänge  $2,5 \cdot d_0$ )

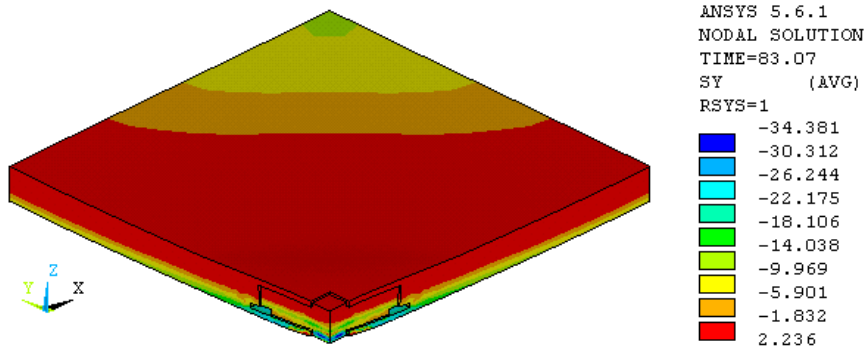


Bild 5.66a: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_{Time} = 2490 \text{ kN} - \text{Länge } 2,5 \cdot d_0$ )

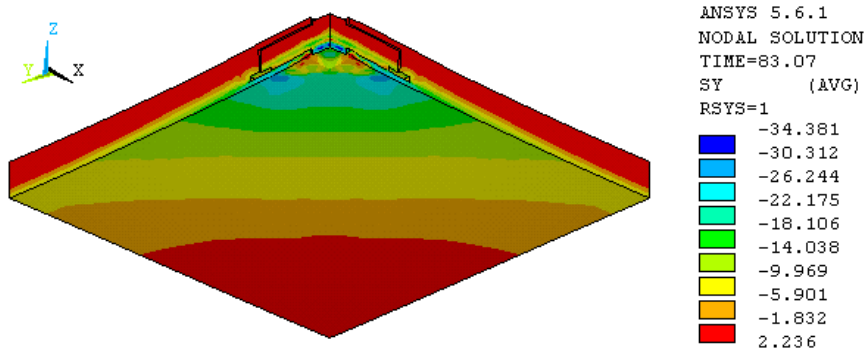


Bild 5.66b: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_{Time} = 2490 \text{ kN} - \text{Länge } 2,5 \cdot d_0$ )

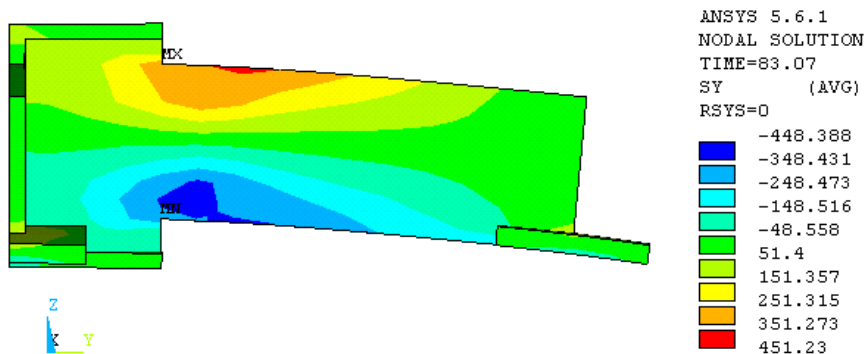


Bild 5.67a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{Time} = 2490 \text{ kN}$ )

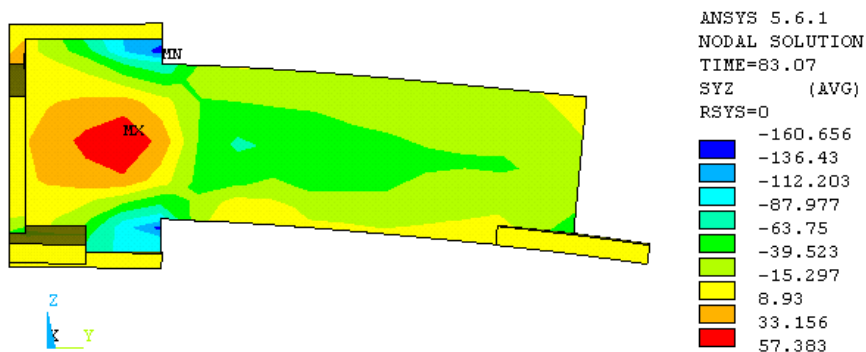


Bild 5.67b: Schubspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ in der gezeigten  $y-z$  Ebene, ( $V_{Time} = 2490 \text{ kN}$ )



„Schwertlänge 3,5·d<sub>0</sub>“ – Berechnungsergebnisse für V<sub>u</sub> = 2597 kN.

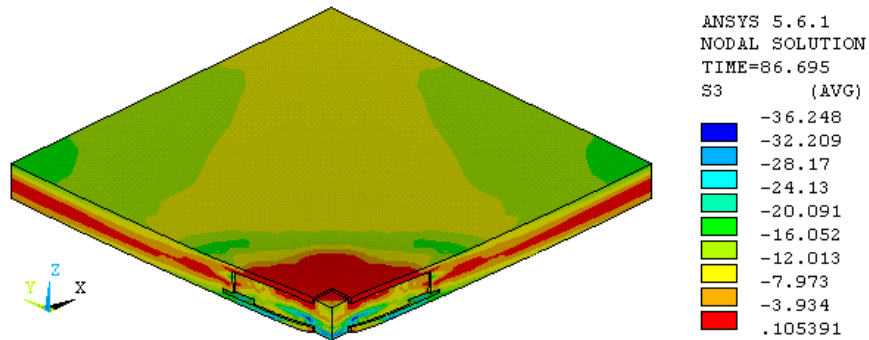


Bild 5.68a: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “, (V<sub>u</sub> = 2597 kN – Schwertlänge 3,5·d<sub>0</sub>)

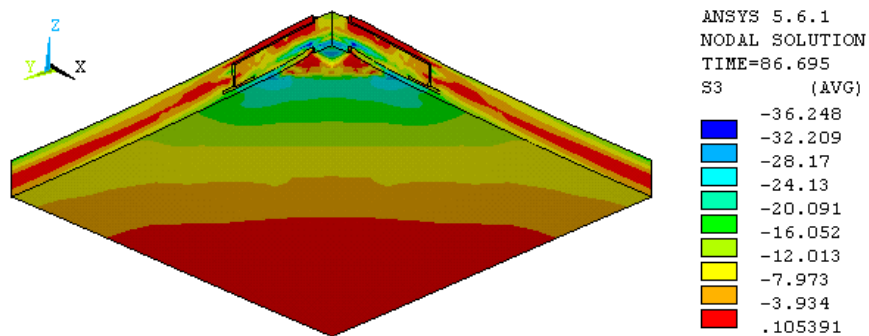


Bild 5.68b: Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “, (V<sub>u</sub> = 2597 kN – Schwertlänge 3,5·d<sub>0</sub>)

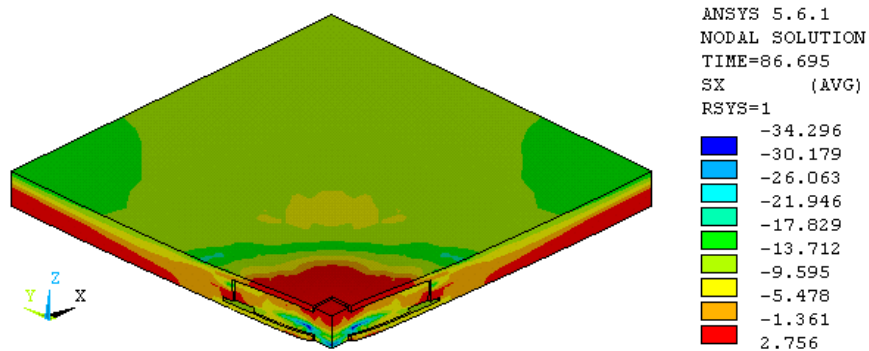


Bild 5.69a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, (V<sub>u</sub> = 2597 kN – Schwertlänge 3,5·d<sub>0</sub>)

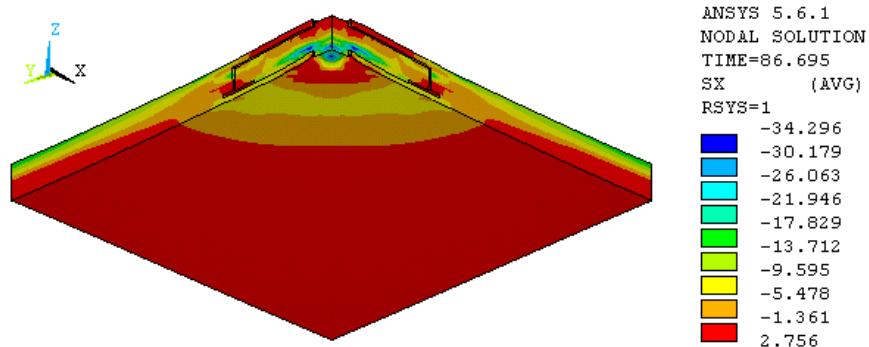


Bild 5.69b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, (V<sub>u</sub> = 2597 kN – Schwertlänge 3,5·d<sub>0</sub>)

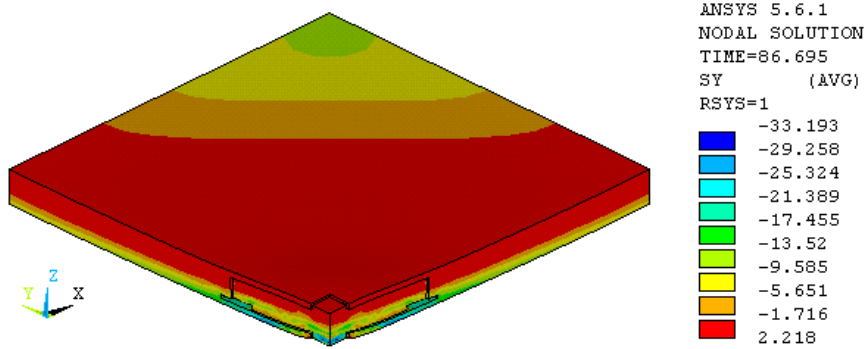


Bild 5.70a: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 2597 \text{ kN} - \text{Länge } 3,5 \cdot d_0$ )

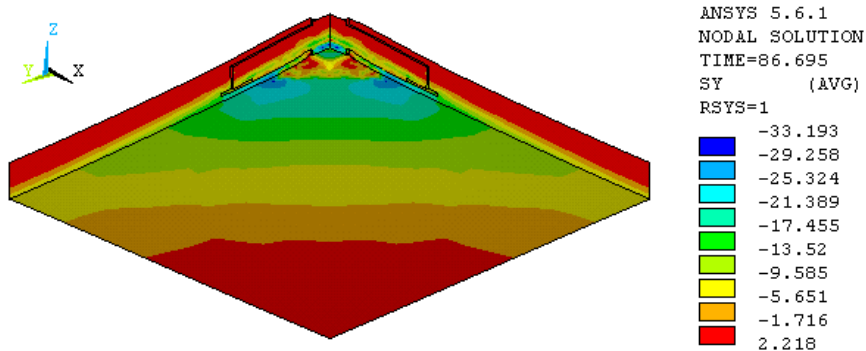


Bild 5.70b: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 2597 \text{ kN} - \text{Länge } 3,5 \cdot d_0$ )

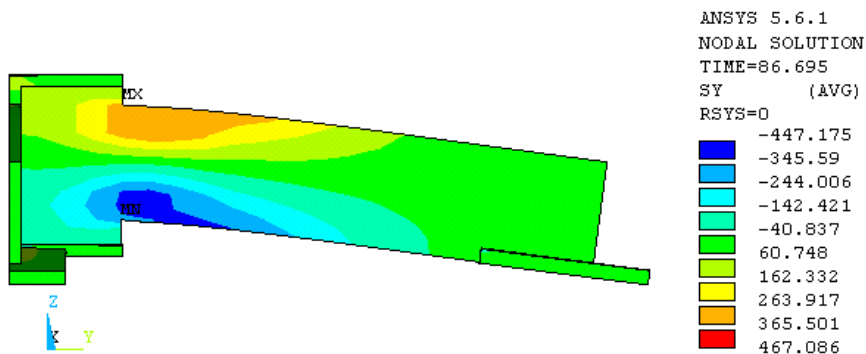


Bild 5.71a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 2597 \text{ kN}$ )

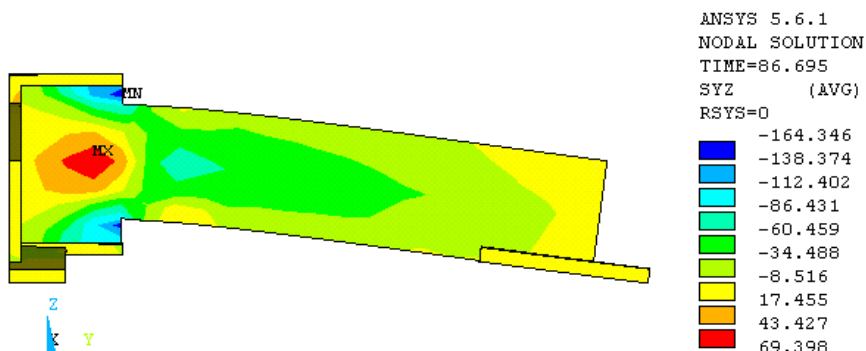


Bild 5.71b: Schubspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ in der gezeigten y-z Ebene, ( $V_u = 2597 \text{ kN}$ )

„Schwertlänge  $4,5 \cdot d_0$ “ – Berechnungsergebnisse für  $V_u = 2726$  kN.

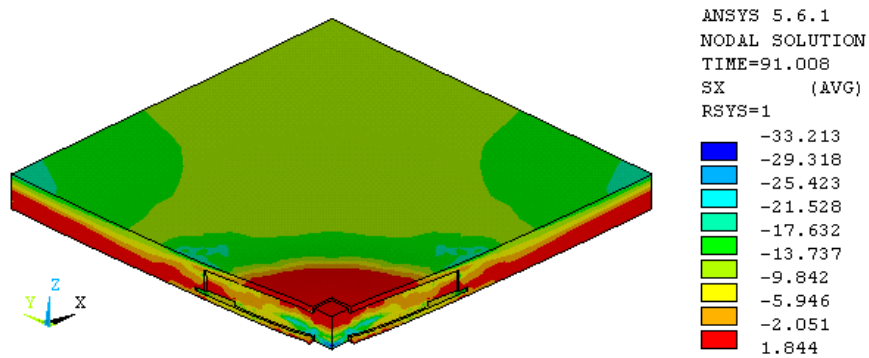


Bild 5.72a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 2726$  kN – Schwertlänge  $4,5 \cdot d_0$ )

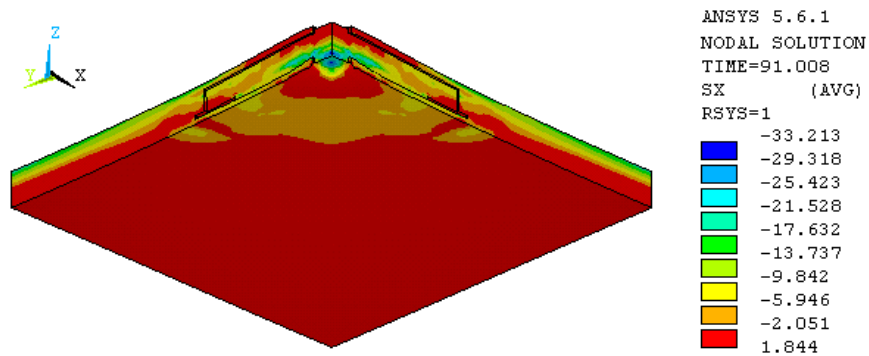


Bild 5.72b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_u = 2726$  kN – Schwertlänge  $4,5 \cdot d_0$ )

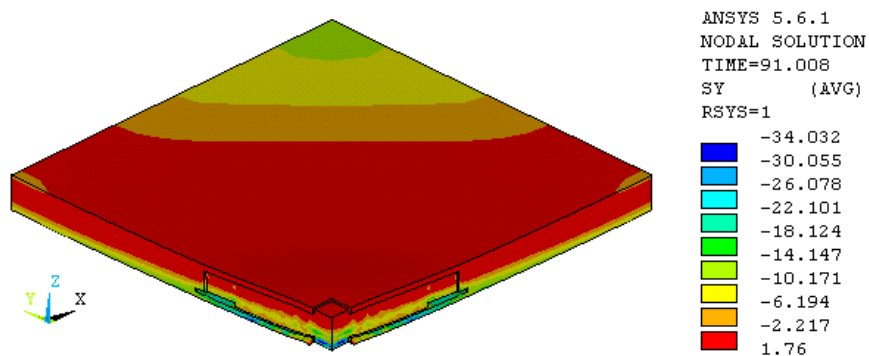


Bild 5.73a: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 2726$  kN – Schwertlänge  $4,5 \cdot d_0$ )

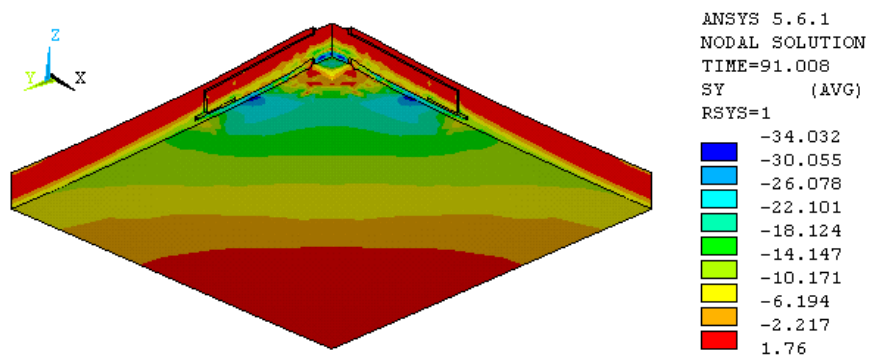


Bild 5.73b: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_u = 2726$  kN – Schwertlänge  $4,5 \cdot d_0$ )

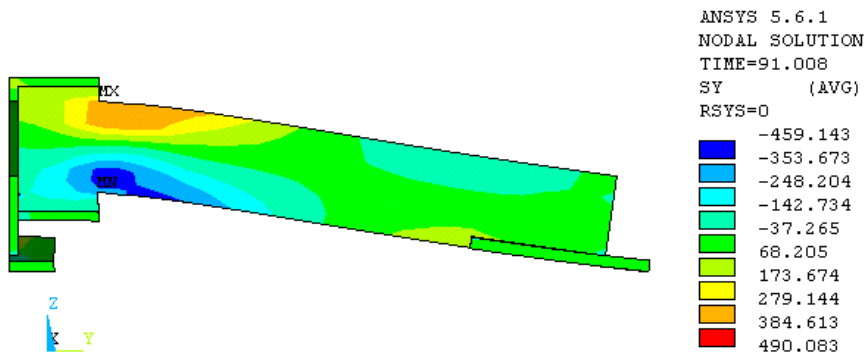


Bild 5.74a: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 2726 \text{ kN}$ )

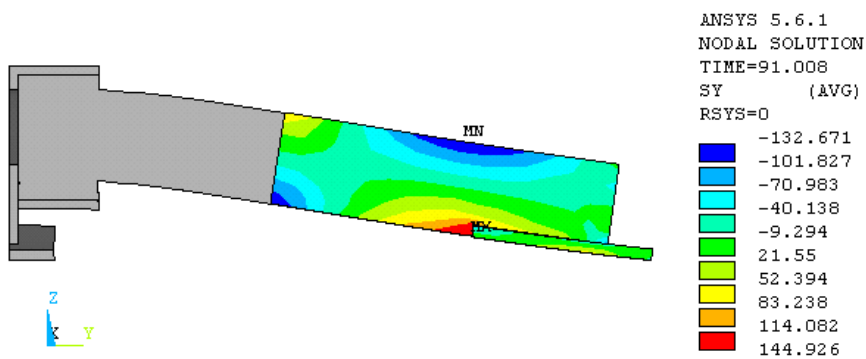


Bild 5.74b: Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_u = 2726 \text{ kN}$ )  
(Normalspannungen im Bereich des Auflagertellers analog zum vorangestellten Bild 5.74a)

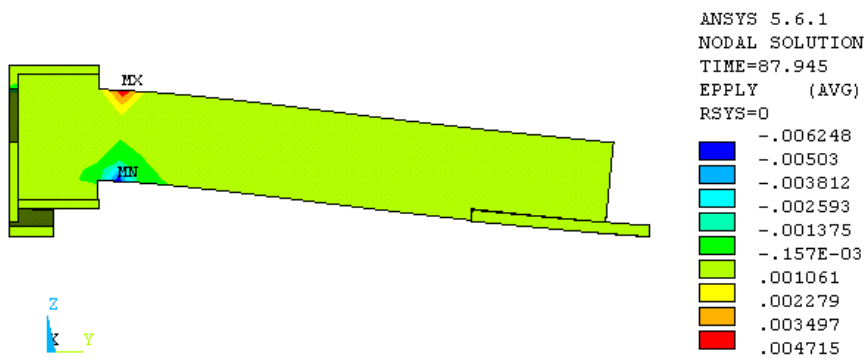


Bild 5.74c: Plastische Dehnungen „ $\epsilon_{a,y}$ “ infolge „ $\sigma_{a,y}$ “ Spannungen, ( $V_{\text{Time}} = 2634 \text{ kN} \Rightarrow 3,5\%$ )

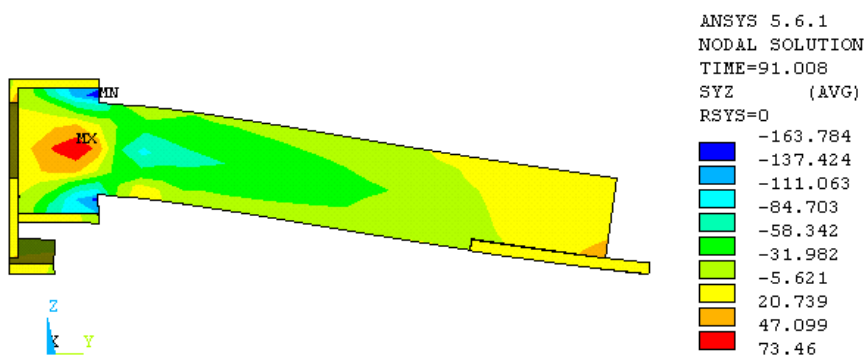


Bild 5.74d: Schubspannungen „ $\sigma_{a,yz}$ “ in der gezeigten y-z Ebene, ( $V_u = 2726 \text{ kN}$ )

„Schwertlänge  $5,5 \cdot d_0$ “ – Berechnungsergebnisse für  $V_{\text{Time}} = 2784 \text{ kN} < V_u = 2788 \text{ kN} \Rightarrow 0,14\%$ .

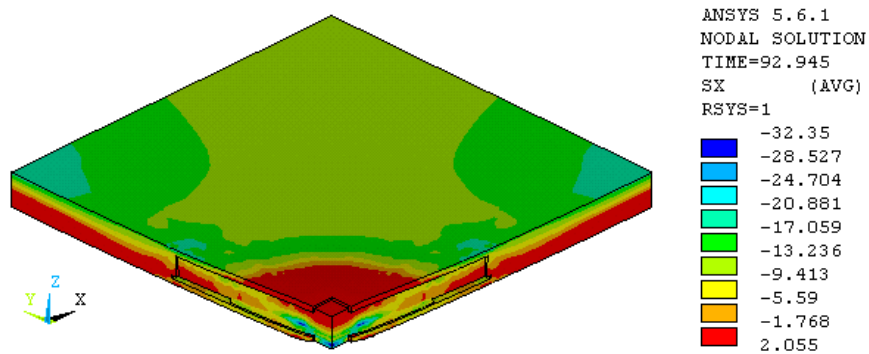


Bild 5.75a: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 2784 \text{ kN}$  – Schwertlänge  $5,5 \cdot d_0$ )

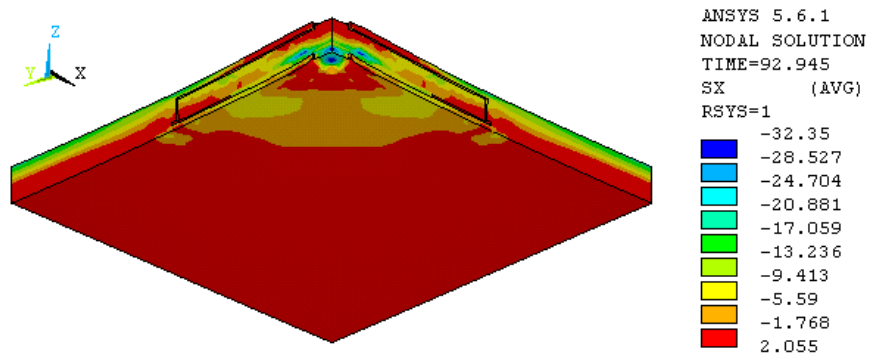


Bild 5.75b: Radial gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,x}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 2784 \text{ kN}$  – Schwertlänge  $5,5 \cdot d_0$ )

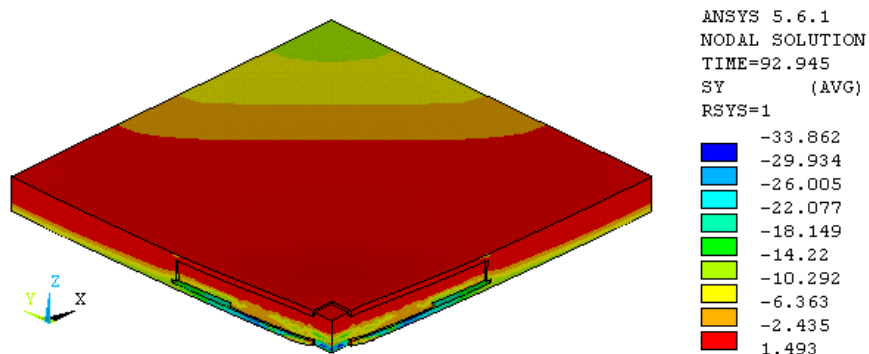


Bild 5.76a: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 2784 \text{ kN}$  – Länge  $5,5 \cdot d_0$ )

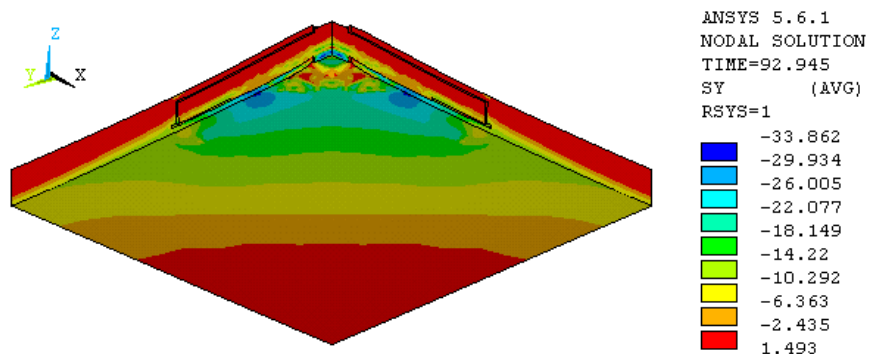
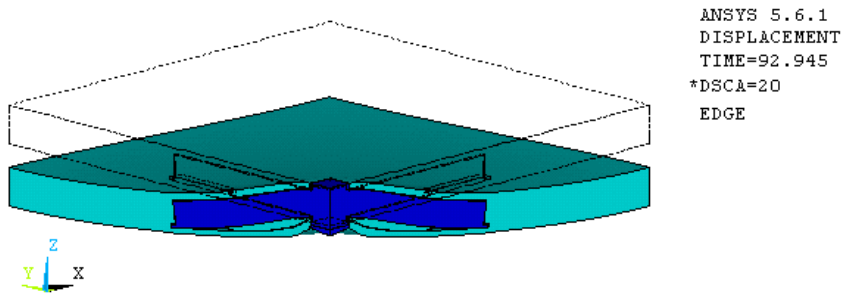
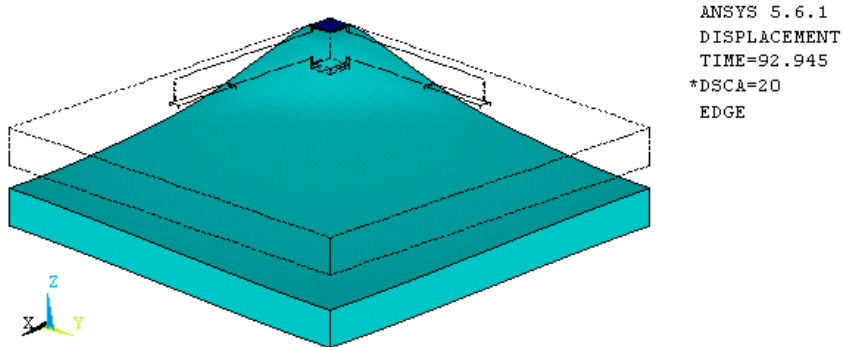


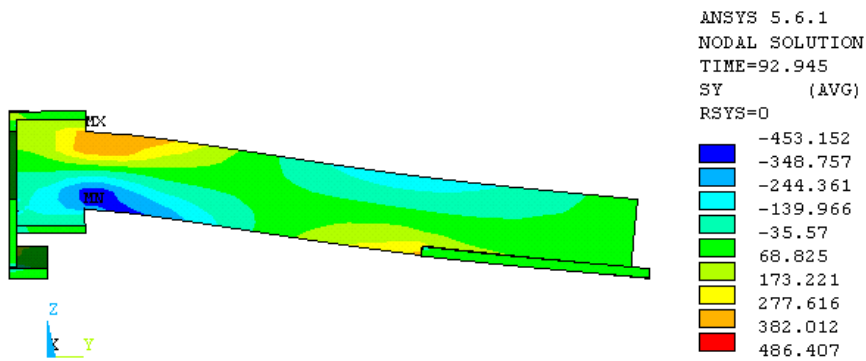
Bild 5.76b: Tangential gerichtete Normalspannungen „ $\sigma_{c,y}$ “, ( $V_{\text{Time}} = 2784 \text{ kN}$  – Länge  $5,5 \cdot d_0$ )



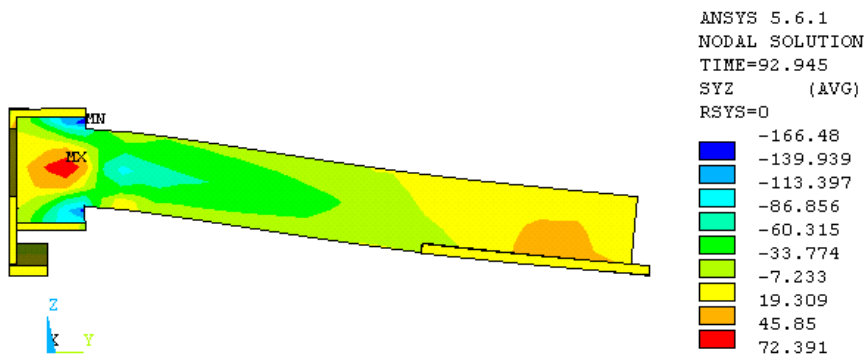
**Bild 5.77a:** Darstellung der verformten und unverformten Struktur (1:20 überhöht)  
Darstellung enthält die Betonplatte gemeinsam mit dem integrierten Stahlkreuz



**Bild 5.77b:** Darstellung der verformten und unverformten Struktur (1:20 überhöht)  
Darstellung enthält die Betonplatte gemeinsam mit dem integrierten Stahlkreuz



**Bild 5.78a:** Normalspannungen „ $\sigma_{a,y}$ “ im Schwert des Stahlprofils, ( $V_{Time} = 2784 \text{ kN} \Rightarrow 0,14\%$ )



**Bild 5.78b:** Schubspannungen „ $\sigma_{a,z}$ “ in der gezeigten y-z Ebene, ( $V_{Time} = 2784 \text{ kN} \Rightarrow 0,14\%$ )

## 5.5 Zusammenfassung und Bewertung

### 5.5.1 Systemverhalten und besondere Eigenschaften

Alle Nachrechnungen mit und ohne zusätzliche Maßnahmen zur Durchstanzsicherung lassen zwei wesentliche Merkmale zum Tragverhalten bzw. zur Tragwirkung einer Stahlbetonplatte erkennen. Vorrangiges Merkmal ist die gegenüber der radial gerichteten Biegedruckspannung deutlich überwiegende tangentielle Druckspannungsverteilung. Dies gilt für den gesamten Plattenbereich der untersuchten Deckenausschnitte auch außerhalb des Kraffteinleitungsbereichs. Dies zeigen u.a. die Ergebnisse in den Bildern 5.11c, 5.19c und 5.45c. Dieses Verhalten gilt, nachdem die Platte in den gerissenen Zustand (Zustand II) eingetreten ist, über den gesamten noch nachfolgenden zeitlichen Verlauf der Belastung. Das Tragverhalten einer Platte unter Gebrauchslasten und kurz vor Erreichen der Bruchlast ist identisch. Die Tragwirkung wird geprägt durch eine nahezu vollständige Umlagerung der zunächst im ungerissenen Zustand radial ausgerichteten Biegespannungen in die tangentielle Richtung.

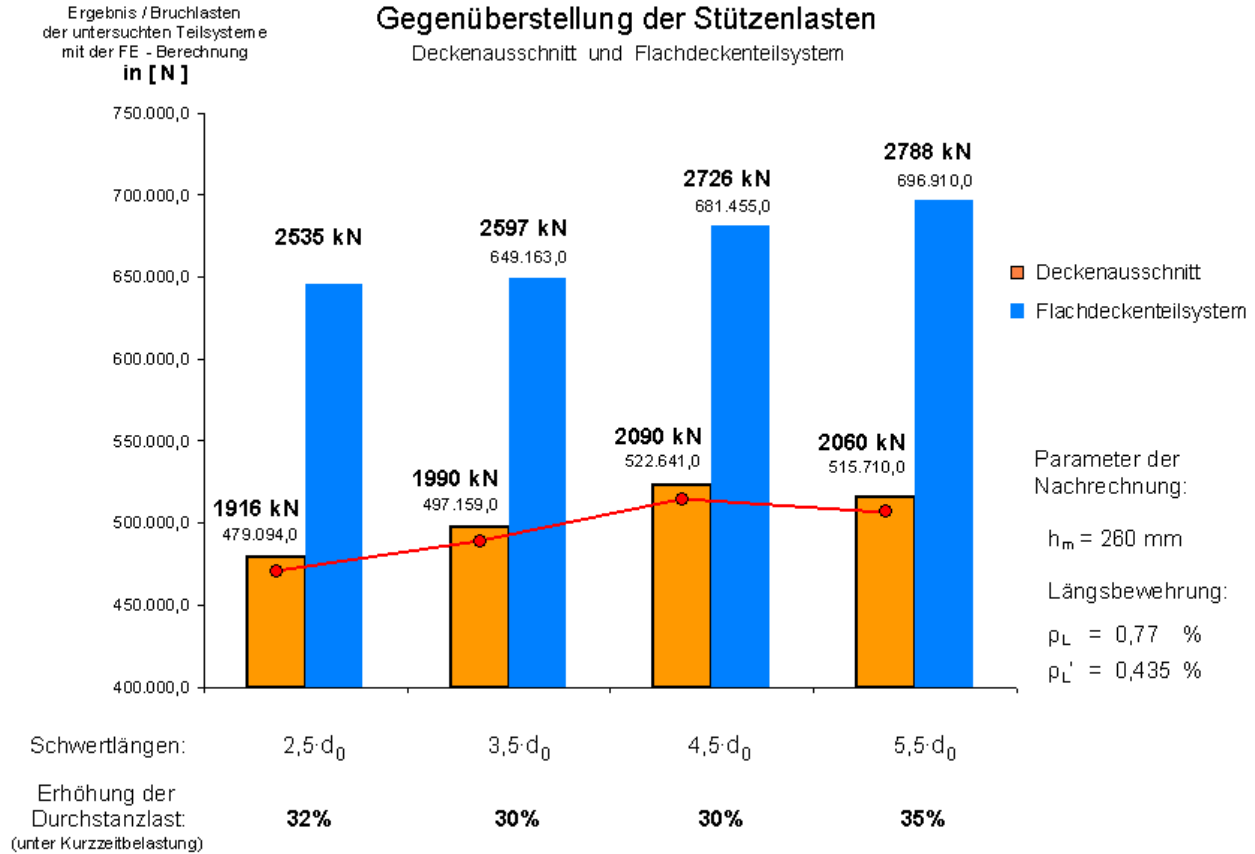
Eine zweite ausgeprägte Erscheinung zeigt sich kurz vor dem Erreichen des maximalen Durchstanzwiderstandes. Unmittelbar vor dem Versagen ändert sich das zuvor genannte Tragverhalten in der Form, dass sich nahe dem Stützenrand innerhalb des gerissenen Plattenbereiches schräge, radial gerichtete Druckspannungen durch Schließen der zuvor offenen Risse bilden. Es entwickeln sich, entsprechend den Berechnungsergebnissen in Bild 5.13a, Bild 5.19b und mit Bezug auf die Lagerteller im Bild 5.45a geneigte Druckstreben zwischen den unten liegenden Kraffteinleitungsbereichen und der oben liegenden Zugbewehrung. Geprägt wird dieses Merkmal durch eine Abnahme der Spannungsintensität bei gleichzeitiger Zunahme der Druckhöhe – siehe hierzu u. a. Bild 5.37a im Vergleich zu Bild 5.37b.

In der Einleitung zum Kapitel 5.4 wurde mit dem Hinweis auf die sich einstellenden Membrankräfte die zu den Versuchen W1 bis W4 zusätzlich durchgeführten Untersuchungen begründet. Betrachtet man vergleichend die Verformungen des Flachdeckensystems im Bild 5.77 (a oder b) mit der Verformung des Deckenausschnitts im Bild 5.7b oder 5.44b, wird der Einfluss, der sich bei Stahlbetonplatten durch die behinderte Mittelflächenverzerrung bzw. durch die horizontal gestützten Plattenränder einstellt, erkennbar und verständlich. Bei den in dieser Arbeit angegebenen Ergebnissen bzw. Erhöhungen – entsprechend Kapitel 5.4.2 eingetragen in Tabelle 5.2 – handelt es sich jedoch um ideale Werte, die zugleich eine obere Grenze der Tragfähigkeit liefern. Die sich in einer Betonplatte tatsächlich einstellenden Druckmembrankräfte werden von dem Maß abhängig sein, wie auch tatsächlich angeschlossene Konstruktionselemente die Verschiebungen des Plattenrandes behindern. Bild 5.79 stellt die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Kapitel 5.4.1 und 5.4.2 grafisch gegenüber.

Auf ähnliche Zusammenhänge infolge einer Verkürzung der schrägen Druckstreben – gerade in Bereichen mit hohen Druckspannungen – hat Andrä in seiner Arbeit hingewiesen. Jedoch geht Andrä in seiner Arbeit von einem verträglichen horizontalen Verschiebungszustand im „Überschneidungsbereich zwischen Platten- und Stützenbeton“ aus, wodurch dann eine Einschnürung der Druckstrebenquerschnitte hervorgerufen werden müsste.

Leonhardt argumentiert in ähnlicher Art und Weise [81]. Obwohl er darauf hinweist, dass die Voraussetzungen eben bleibender Querschnitte bei schubbeanspruchten Tragwerken „durch das Auftreten einer Schubrotation“ keine Gültigkeit mehr besitzt, folgert Leonhardt, dass die

zum Schubbruch führenden Schubrisse die Höhe der Biegedruckzone „ $x_s$ “ und damit zugleich den Widerstand eines schubbeanspruchten Tragwerks weit mehr verkleinern als die Biegerisse. Im Schubbereich wird seiner Meinung nach „ $x_s$ “ wesentlich kleiner als die Höhen „ $x_t$ “ bzw. „ $x_r$ “ der Biegedruckzonen, die aus den Biegemomenten allein berechnet werden.



**Bild 5.79:** Zur Erhöhung der Durchstanzlasten bei Flachdecken gegenüber entsprechenden Deckenausschnitten unter Kurzzeitbelastung und gleichen Materialeigenschaften

Die vorangestellten, eigenen Berechnungsergebnisse bestätigen die Schubrotation, nicht aber die Einschnürung des Druckstrebenquerschnitts oder die durch Schubrisse hervorgerufene Verkleinerung der Biegedruckzone „ $x_s$ “. Aus den Gegenüberstellungen der radial gerichteten Spannungen „ $\sigma_x$ “ und den Hauptdruckspannungen „ $\sigma_{H3}$ “ in den Bildern 5.11 bis 5.12 ist deutlich die bereits erwähnte Zunahme bzw. das Anwachsen der Höhe des radialen Druckbereiches zu erkennen, während zugleich die zugehörigen horizontalen und radial ausgerichteten Druckspannungen abnehmen. Für den ablaufenden Prozess, der zum Verlust des Durchstanzwiderstandes führt, lässt sich dies physikalisch mit den Arbeiten von [41] und [76] erklären. Die Kornverzahnung versteift die zuvor entstandenen Schubrisse, so dass über einen zwar geringer werdenden Anpressdruck jedoch noch über das Anwachsen der Druckzone der Widerstand erhalten bleibt, bis zu dem Moment, bei dem die Rissbreiten (innerhalb der Druckzone) einen kritischen Wert erreichen bzw. die gesamte Druckzone – entsprechend Bild 5.16b – durchdringt. Dieses Phänomen lässt sich bei allen Vergleichsberechnungen beobachten. Gelingt es, einen Zusammenhang zwischen dem Anwachsen der Druckzone und dem Spannungsabfall abhängig von der Höhe des Querschnitts herzustellen, dann wird zugleich auch eine zuverlässige Beschreibung der Maßstabeffekte möglich.



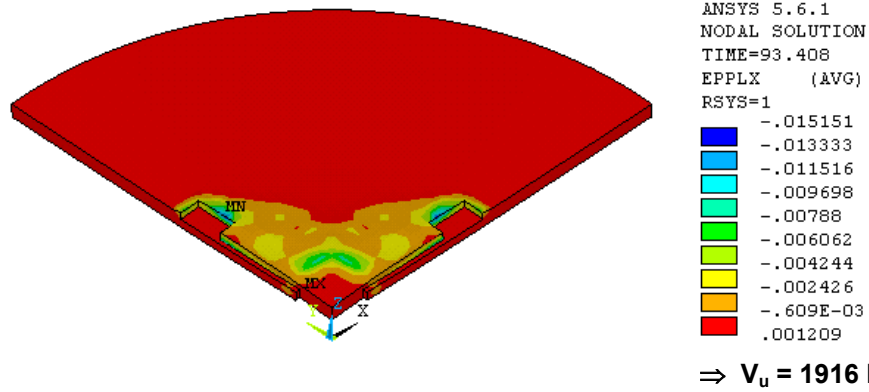


Bild 5.80a: Radial gerichtete, plastische Dehnungen „ $\epsilon_{c, pl, x}$ “ (Schwertlänge:  $2,5 \cdot d_0$ )

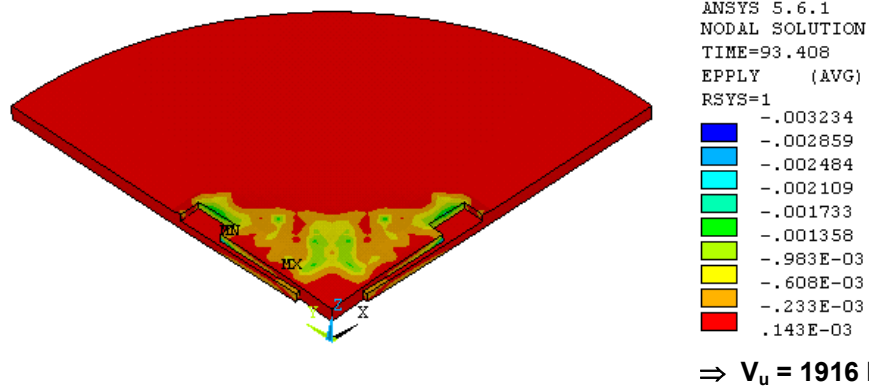


Bild 5.80b: Tangential gerichtete, plastische Dehnungen „ $\epsilon_{c, pl, y}$ “ (Schwertlänge:  $2,5 \cdot d_0$ )

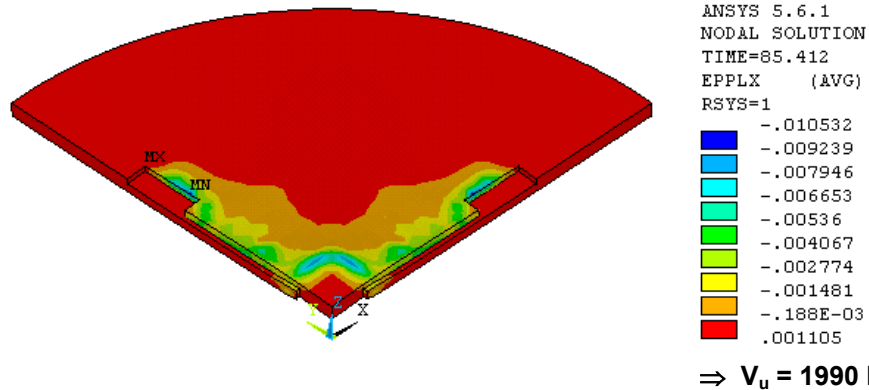


Bild 5.81a: Radial gerichtete, plastische Dehnungen „ $\epsilon_{c, pl, x}$ “ (Schwertlänge:  $3,5 \cdot d_0$ )

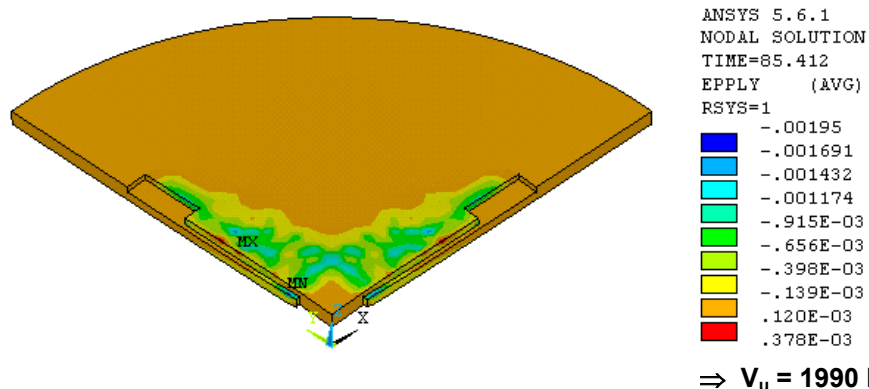


Bild 5.81b: Tangential gerichtete, plastische Dehnungen „ $\epsilon_{c, pl, y}$ “ (Schwertlänge:  $3,5 \cdot d_0$ )

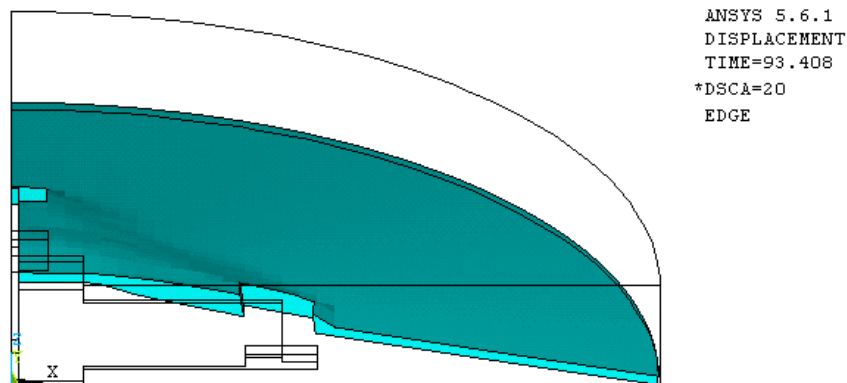
Die Verteilung der Normalspannungen z. B. im Bild 5.56 und in den Bildern 5.57(a+b) zeigen, welchen vorherrschenden Einfluss das in die Betonplatte integrierte Stahlkreuz auf die verschiedenen Beanspruchungskombinationen ausübt. Das charakteristische Umlagerungsverhalten hin zur tangential gerichteten Spannungsverteilung bleibt zunächst erhalten. Bild 5.56 zeigt, dass sich längs dem Stahlschwert ein großflächigerer und völliger Spannungsverlauf der tangentialen Spannungen ausbilden kann. Zugleich entwickelt sich planmäßig im Bereich der unten angeordneten Kopfbolzen eine gleichmäßig verteilte radiale Druckzone.

Bei optimaler Wahl der Schwertlänge bildet sich ein örtlich wirksam werdender Verbundquerschnitt innerhalb der Platte aus. Die horizontalen plastischen Dehnungskomponenten der Bilder 5.81a und 5.81b zeigen diese beiden auf das Tragverhalten positiv und gleichstark zu bewertenden Einflüsse. Der sich einstellende, radial zur Stütze gerichtete Verbundquerschnitt vergrößert die Biegedruckhöhe bis nahezu zur Hälfte der Plattenhöhe. Dadurch kann sich ein zuverlässiger Anpressdruck einstellen. Die völlige, tangentiale Spannungsverteilung erlaubt dem Betonquerschnitt in der Nähe des Auflagers eine weitere Aktivierung für eine erhöhte zusätzliche Querkraftabtragung und ermöglicht es, dass – bei nur geringen vertikalen Beanspruchungen der Kopfbolzen – vom Stahlkreuz zusätzliche vertikale Lasten eingesammelt werden können. Die vertikalen Spannungskomponenten „ $\sigma_z$ “ in den Bildern 5.48 und 5.53 dokumentieren übereinstimmend, dass die daraus resultierenden Betonspannungen mit ca. 15 % der einachsigen Betondruckfestigkeit gering sind.

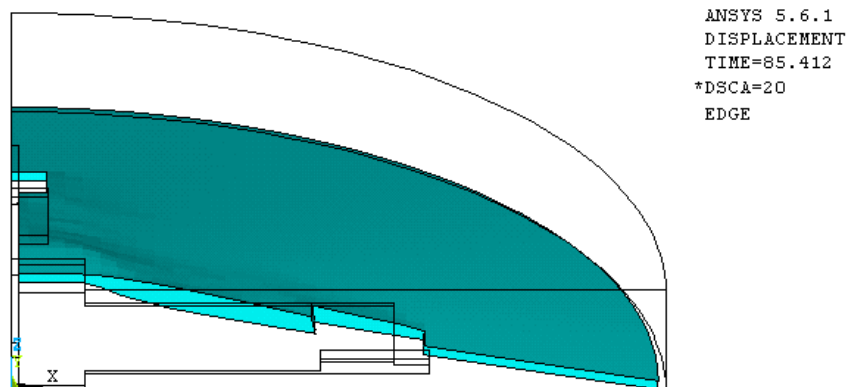
In der jüngeren Vergangenheit befasst sich die Diskussion über die anzusetzende Betondruckfestigkeit beim Nachweis gegen Durchstanzen immer wieder mit dem günstigen Einfluss des mehraxialen Spannungszustands in Stützennähe (z.B.: [57]). Einen Anhaltspunkt für die wirksam werdenden Betondruckspannungen geben die Berechnungsergebnisse der untersuchten Teilsysteme im Kapitel 5.4.2. Diesen Ergebnissen zufolge lassen sich mit dem vorgestellten System tatsächlich Tragfähigkeitssteigerungen bis ca. 20 % gegenüber der einachsigen Druckfestigkeit erreichen.

Die Verformungen der im Bild 5.83 gezeigten horizontalen Betonscheiben bestätigen, dass sich zwischen Auflagerteller und Stütze eine kontinuierliche, gleichmäßige Querdehnung senkrecht zur Plattenebene einstellen kann. Bei optimaler Länge des Stahlprofils darf somit auch davon ausgegangen werden, dass sich eine gleichmäßige Spannungs- und Dehnungsverteilung innerhalb des gesamten Kreuzes erzielen lässt. Diese Formänderung beinhaltet aber auch, dass bei der Beurteilung der Strukturzerstörung die Rissbildung zwischen der Innenkante des Auflagertellers und dem Stützenquerschnitt, z.B. im Bild 5.84b erkennbar, bei der Entwicklung eines Bemessungsmodells (Kapitel 6) beachtet werden muss. Unter Berücksichtigung dieses konstruktiv bedingten Tragverhaltens wird sich somit immer überwiegend ein zweiachsiger Beanspruchungszustand für den Werkstoff Beton einstellen können (vorausgesetzt, das System bleibt in der hier vorgestellten Form konstruktiv unverändert erhalten).

Die genannten, grundsätzlichen Tendenzen des Last- und Verformungsverhaltens des neuen Systems bestätigen alle im Kapitel 5.4.1 dargestellten Berechnungsergebnisse, wobei nur ein begrenzter Umfang der vorliegenden Ergebnisse angegeben werden konnte. Dass sich innerhalb eines Flachdeckenteilsystems zusätzliche Lastabtragungsreserven durch eine behinderte Mittelflächenverzerrung – insbesondere für das hier vorgestellte Verbundsystem – aktivieren lassen, bestätigen die Berechnungsergebnisse im Kapitel 5.4.2 in ähnlicher Weise.



**Bild 5.82:** Verformte Struktur des Betons in der Ebene des Lagertellers (**Schwertlänge:  $2,5 \cdot d_0$** )



**Bild 5.83:** Verformte Struktur des Betons in der Ebene des Lagertellers (**Schwertlänge:  $3,5 \cdot d_0$** )

Abschließend wird auf den sich einstellenden, gleichmäßig verlaufenden Druckrahmen im Bereich des Kreuzes noch vor bzw. über den Lagertellern, siehe z.B. die Bilder 5.68a und 5.72a, hingewiesen. Es muss jedoch ausdrücklich betont werden, dass das im Kapitel 6 entwickelte Bemessungsmodell noch keinen Nutzen aus diesen Tragreserven ziehen wird, da derartige rechnerische Ansätze der Druckmembranwirkung in den zur Zeit gültigen Vorschriften nicht vorgesehen sind. Somit soll im Kapitel 6 dieser Arbeit darauf geachtet werden, dass diese beachtliche Tragreserve nicht in das neu entwickelte Berechnungsmodell „hineingeschuggelt“ wird.

## 5.5.2 Ingenieurmäßige Anwendung der Ergebnisse

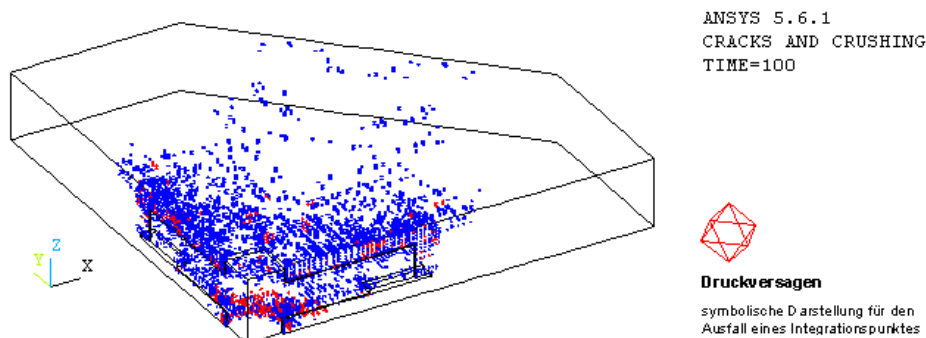
Bei der Behandlung „spezieller“ Rand- und Anfangswertprobleme von Strukturen, die ein viskoselastisch-plastisches Materialverhalten aufweisen, wird es erforderlich, ein wirklichkeitsnahes Deformationsverhalten des Materials in ein geeignetes finites Element zu implementieren bzw. zu ergänzen. Im Fall gerissener Betonelemente ist man an einem Grenzlastverhalten interessiert und sucht in der Regel den Abbau der zunächst dreiaxialen Betondruckfestigkeit mit Hilfe des Nachbruchverhaltens bis hin zu einer Restfestigkeit in überbeanspruchten Zonen. Es ist somit erforderlich, worauf im Kapitel 3 bereits z.T. eingegangen wurde, bezüglich der gesamten Belastungsgeschichte:

- das Einsetzen plastischer Deformationen
- die Ausbreitung der Fließzonen
- die Anfangsfließflächen
- die Änderung der Fließflächen (bzw. das Verfestigungsgesetz)
- die Richtungen der sich einstellenden Risse, usw.

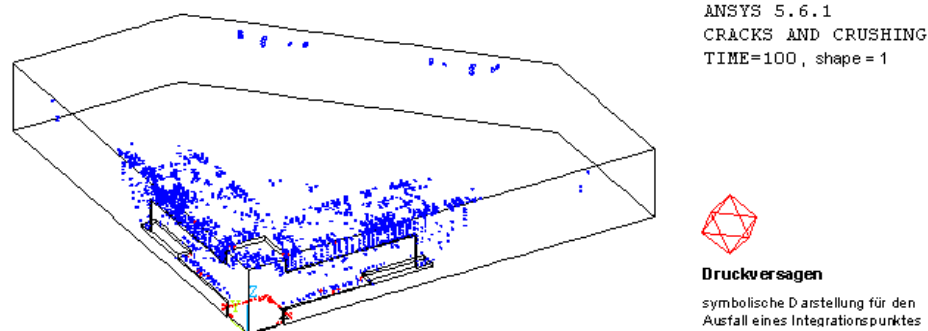
in jedem Integrationspunkt eines finiten Elementes festzuhalten. In Bezug auf die Datenverwaltung des angewendeten Betonelementes wurde vom Verfasser eine Modifikation vorgenommen, so dass neben den plastischen Deformationen auch der Status des Nachbruchverhaltens abgespeichert werden kann. Diese Änderung beeinflusst deutlich – zumindest für die hier untersuchten Systeme – die damit erzielten Spannungsumlagerungen zugunsten eines stetigeren Entfestigungsprozesses. Dass darüber hinaus das Konvergenzverhalten verbessert werden konnte, wurde im Kapitel 4 beschrieben.

Der Vergleich der beiden in den Bildern 5.84a und 5.84b gezeigten Darstellungen zur berechneten geschädigten Betonstruktur für den Versuch W3 unterstreicht zunächst die Anwendung der inkompatiblen Verschiebungsfunktionen.

Sobald ein Spannungspunkt die Bruchfläche entsprechend dem Bild 3.17 und 3.18 berührt, wird dies als Druckversagen interpretiert. Dann wird zur Zeit in der benutzten Programmversion die Steifigkeit (alle Koeffizienten des Steifigkeitstensors) des jeweils betroffenen Integrationspunktes auf den Wert „Null“ (d.h. auf  $10^{-6}$ ) herabgesetzt. Die Freiheitsgrade benachbarter Integrationspunkte bzw. Elemente in diesen infolge Druck überbeanspruchten Zonen verlieren somit die nach Ansicht des Verfassers tatsächlich noch vorhandene Restfestigkeit des „losen Materials“. Würde im verwendeten Betonelement eine zusätzliche Steifigkeitsmatrix die Volumentreue des jeweils ausgefallenen Integrationspunktes gewährleisten, könnte möglicherweise eine weitere Verbesserung der Berechnungsergebnisse auch im unmittelbaren Einzugsbereich des Bruches kurz vor Erreichen der Traglast erzielt werden.



**Bild 5.84a:** Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind – Versuch: W3  
 (ausgefallene Integrationspunkte sind durch ein „rotes“ Oktaeder markiert)  
 SUBSTEP = 45, CUM. ITER.= 93  $V = 314940 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 1260 \text{ kN}$



**Bild 5.84b:** Integrationspunkte, die in allen Richtungen gerissen sind – Versuch: W3  
(ausgefallene Integrationspunkte sind durch ein „rotes“ Oktaeder markiert)  
SUBSTEP = 45, CUM. ITER.= 67  $V = 395590 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 1582 \text{ kN}$

Die Darstellungen der geschädigten Struktur im Bild 5.84 (a und b), gemeinsam betrachtet mit der Gegenüberstellung der Last-Verformungskurven im Bild 5.22, machen deutlich, dass die Annahme des totalen Ausfalls eines Integrationspunktes, bzw. der totale Verlust der Steifigkeiten infolge Druckversagens, eine absolute Grenzbetrachtung darstellt. Sie wird bei geeigneter Wahl aller anderen erforderlichen Variablen – wie z.B. ein geeignetes FE-Modell, korrekte Randbedingungen, ausreichend gestaffelte inkrementelle Belastungsdefinitionen, genügend geringe plastische Dehnungsinkremente während einer Gleichgewichtsiteration etc. – vermutlich immer ein Überschätzen der rechnerisch ermittelten Traglast gegenüber der realen Traglast verhindern. Dennoch wäre nach Ansicht des Verfassers für eine verbesserte Umlagerungsstrategie die Erfassung eines ergänzenden Entfestigungsverhaltens durch den gezielten Abbau nur über volumetrische Dehnungskomponenten unter (*nahezu*) vollständiger Vernachlässigung der deviatorischen Anteile sinnvoll. Hierauf wird im Kapitel 8 noch einmal Bezug genommen. An dieser Stelle wird zunächst lediglich darauf hingewiesen, dass mit Bezug auf die vorstehende Begründung und unter Einbeziehung der Last-Verformungskurven im Bild 5.22 und Bild 5.23 sowie im Vergleich zu den darin eingetragenen Versuchsergebnissen die Bildung eines Mittelwertes zwischen einer Berechnung „mit“ und „ohne“ Ansatz inkompatibler Verschiebungsfunktionen gemäß dem gestellten Problem, das unwidersprochen unter mehraxialen Beanspruchungszuständen reagiert, angemessen und gerechtfertigt ist (siehe Tabelle 6.1).

## 6. Mechanisches Modell zur Beurteilung der Durchstanzsicherheit

Die Entwicklung eines mechanischen Modells wird in zwei Teile aufgegliedert. Im ersten Teil wird, aufbauend auf den wissenschaftlichen Arbeiten von H.-P. Andrä und den Schweden S. Kinnunen und H. Nylander, auf den räumlichen Tragmechanismus einer Stahlbetonplatte ohne Maßnahmen gegen eine Durchstanzsicherung eingegangen. Die aus den eigenen FE-Berechnungen gewonnenen Erkenntnisse und die Gegenüberstellungen zu den im Kapitel 5 vorgestellten Versuchsnachrechnungen werden dazu verwendet, die Modelle weiter zu verallgemeinern mit dem Ziel, eine zuverlässige, von abgeleiteten Parametern aus Versuchsergebnissen unabhängige Theorie zur Berechnung des Durchstanzwiderstands zu entwickeln. Dieses Ziel wird erreicht, indem auf die im Kapitel 2.3 vorgestellten, fest vorgegebenen Annahmen hinsichtlich der Betonranddehnungen an der Plattenunterseite und auf die Einschränkung der Rotationsfähigkeit verzichtet wird.

Andrä benutzte mit den Gleichungen 2.24 und 2.25 eine starre und deterministisch vorgegebene Annahme zur Rotationsfähigkeit. Er führte zur Unterscheidung zwischen Ring- und Netzbewehrung zwei formelmäßig definierte Rotationswinkel ein. Kinnunen und Nylander definierten auf der Grundlage ihrer zahlreichen Versuchsbeobachtungen eine indirekte Vorgabe der Rotation durch die Annahme von Grenzwerten für eine mögliche tangential Druckdehnung. Aufgrund der Tatsache, dass mit einem abnehmenden Verhältnis der Stützenbreite zur Plattenhöhe die ertragbaren Spannungskonzentrationen zunehmen, unterschieden Kinnunen und Nylander die mit den Gleichungen 2.16 und 2.17 angegebenen Bereichsgrenzen. Sie berücksichtigen damit indirekt den Maßstabeffekt (size effect). Das im nachfolgenden Abschnitt weiterentwickelte Modell beruht auf den Erkenntnissen und Beobachtungen bzw. Interpretationen der drei genannten Wissenschaftler. Die eigene Nachrechnung mit der Methode der Finiten Elemente bestätigt viele Hinweise, die in [8] und [66] auch aus experimentellen Beobachtungen gefolgert wurden.

Aufbauend auf dem Modell für die Betonplatte ohne Schubbewehrung erfolgt dann die Berücksichtigung eines über Kopfbolzen schubfest angeschlossenen Stahlkreuzes. Dieses Vorgehen erlaubt eine mechanisch eindeutige Trennung der Belastungsanteile, die vom Kreuz direkt – das heißt am Steganfang vom Lagerteller – aufgenommen werden und der Belastungsanteile, die über die Steglänge indirekt in das Verbundsystem eingetragen werden. Mit diesem Vorgehen ist zugleich eine klare Trennung der Querkraftbeanspruchung des Plattenquerschnittes (Betonquerschnitts) und des Stahlkreuzes unmittelbar an der Stütze möglich.

### 6.1 Modell zur Beurteilung des räumlichen Tragmechanismus für Stahlbetonplatten ohne Schubbewehrung – 1. Teil

Kinnunen und Nylander entwickelten über die längs dem Radius „ $r$ “ wirkende Abtriebskraft „ $\Delta\varphi \cdot R_4$ “ für die Druckzone und für die Abtriebskraft resultierend aus der oberen Bewehrungslage „ $\Delta\varphi \cdot R_1$ “ ein Modell für den Durchstanznachweis durch Gleichgewichtsbetrachtungen an einem Sektorelement – Bild 2.11. Die Ergebnisse und Beobachtungen ihrer Versuche, insbesondere Versuchsbeobachtungen an ringbewehrten Versuchskörpern, führten zu diesem mechanisch anschaulichen und in theoretischen Arbeiten über das Durchstanzverhalten immer wieder angewendeten Modell. Die genannten inneren Abtriebskräfte resultieren dabei aus den tangen-

tial gerichteten Biegedruckkräften „ $D_i$ “ unterhalb der Plattenmittenebene und den ebenfalls tangential gerichteten Zugkräften „ $Z_i$ “ der oberen Bewehrungslage.

Andrä berechnet direkt aus Ungleichgewichtskräften, d.h. aus der Differenz der tangential gerichteten Biegedruckkräfte „ $D_i$ “ und den ebenfalls tangential gerichteten Zugkräften „ $Z_i$ “ der Bewehrung eine längs dem Radius radial wirksam werdende Umlenkraft „ $u_{res}$ “ – Bild 2.14. Mit Hilfe dieser Umlenkraft (einer radial zur Stütze wirksamen Zugkraft) und einer Gleichgewichtsbetrachtung am Obergurtnoten „ $i$ “ eines Kreisringes mit der Einheitsbreite „ $dr$ “ berechnet Andrä die zugehörigen, zur Stütze geneigten Druckschalenkräfte „ $K_i$ “ des im Kapitel 2 vorgestellten Strebensystems, das mit dem Grundsystem – einem Netzfachwerk – überlagert wird. Die Summe der Kegelschalenkräfte „ $K_i$ “, resultierend aus horizontalen und vertikalen Kraftkomponenten an den Obergurtnoten „ $i$ “, müssen mit der zugehörigen am Stützenrand wirkenden Reaktionskraft:

$$\sum_{i=1}^{III} K_i = K_S = \sqrt{V_s^2 + H_s^2} \quad (6.1)$$

im Gleichgewicht stehen. Der vertikale Anteil „ $V_s = 2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot \sum (v_{s,i})$ “ liefert mit Bezug auf den Stützenumfang die zugehörige Querkraft bzw. Durchstanzlast „ $V_{u,c}$ “.

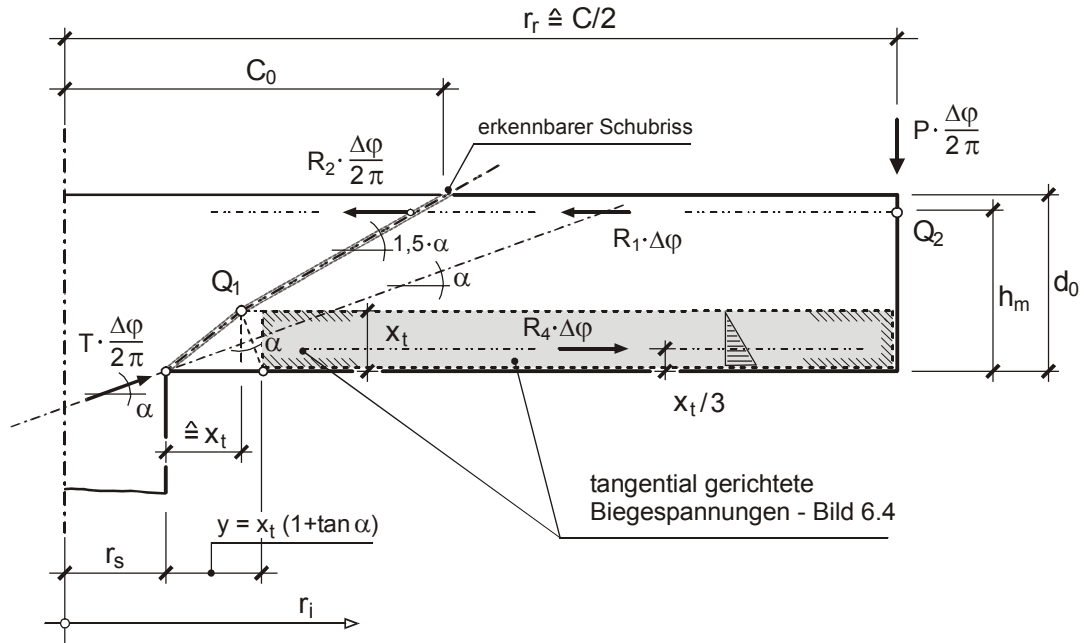
Werden beide Modellvorschläge, die gemeinsam als Grundlage die tangential gerichteten Biegedruckkräfte „ $D_i$ “ und Zugkräfte „ $Z_i$ “ verwenden, durch geeignete Freiwerte zunächst unabhängig voneinander formuliert, kann das Tragfähigkeitsverhalten einer Stahlbetonplatte durch eine geeignete mathematische Verknüpfung iterativ berechnet werden. Die theoretischen Voraussetzungen für Vollständigkeit und Eindeutigkeit zur Lösung des nichtlinearen Problems sind erfüllt, da beide Modelle eine krümmungslose Rotation der Stahlbetonplatte als Basisfunktion verwenden (Kinnunen und Nylander mit den Gleichungen 2.8 und 2.9; Andrä mit den Gleichungen 2.18 und 2.19). Damit existieren zwei Bedingungen für die Berechnung von zunächst zwei unbekanntem und zu variierenden Parametern. Für die gesuchten Freiwerte wird die tangential gerichtete Biegedruckhöhe „ $x_t$ “ und der kritische Neigungswinkel bzw. die zum Zeitpunkt des Versagens vorhandene Rotation „ $\psi$ “ gewählt. Auf diese Zusammenhänge und auf die gewählte Verknüpfung wird nachfolgend genauer eingegangen.

### 6.1.1 Geometrische Definitionen für ein Sektorelement

Die Last der Deckenplatte bzw. des betrachteten Deckenausschnitts und der sich daraus entwickelnde Stützendruck wird ausschließlich vom Plattenteil außerhalb des Schubrisses durch einen zur Stütze hin geneigten und in Richtung zum Plattenrand abgeschnittenen Keils getragen. Die sich einstellende Druckkomponente, die innerhalb dieses Keils mit dem Neigungswinkel „ $\alpha$ “ wirksam ist, wird mit „ $T$ “ bezeichnet. Die Länge des gekürzten Keils entlang der Plattenunterseite in radialer Richtung wird angenommen zu – Bild 6.1:

$$y = x_t \cdot (1 + \tan \alpha) \quad (6.2)$$

Tangential gerichtete Druckspannungen innerhalb dieser Länge „ $y$ “ werden vernachlässigt, [50]. Dies bestätigen die Darstellungen der tangentialen Spannungskomponenten der Versuchsnachrechnungen im Kapitel 5 – zum Beispiel: Bild 5.11c, Bild 5.19c oder Bild 5.24c.



**Bild 6.1:** Geometrische Definitionen und Verteilung der berücksichtigten Kraftkomponenten

### 6.1.2 Verschiebungen und Verdrehungen eines Elementtringes

Bezogen auf den Stützenrand wird längs des Stützenumfanges mit dem Radius „ $r_s$ “ von einer im Bild 6.2 angedeuteten „krümmungslosen“ Verdrehung der Platte ausgegangen. Die Annahme einer linearen Biegelinie entspricht dem Vorgehen von Andrä [ 8 ]. Sie ist ebenfalls identisch mit der Zerlegung einer Kreisplatte oder eines Plattenausschnitts im Auflagerbereich einer Innenstütze in einzelne Sektorstücke, aus denen Kinnunen und Nylander ihr Modell ableiteten [66].

Eigene Berechnungsergebnisse bestätigen diese von Andrä und von Kinnunen und Nylander wohl überwiegend aus den Stockholmer Versuchen gewonnene Vorgehensweise – Beispiele finden sich in den Berechnungsergebnissen der Bilder 5.7 und 5.14 im Kapitel 5.

Die Platte dreht sich um ein Rotationszentrum mit dem Winkel „ $\psi$ “, wobei entsprechend der Verformungsdarstellung im Bild 5.7b die neutrale Drehachse in der Höhe „ $x_t$ “ der tangentialen Biegedruckzone – dem Nulldurchgang der tangentialen Dehnungen – sehr genau angegeben werden kann. Die Höhe „ $x_t$ “ bleibt dabei längs dem Radius „ $r$ “ bis hin zum Plattenrand des Ersatzsystems unverändert (numerisch wird ein Plattenausschnitt im Bereich des Auflagers berücksichtigt – entsprechend Bild 2.1 im Kapitel 2). Die horizontalen Verschiebungen im Zentrum eines Kreisringes mit der Breite „ $dr$ “ auf einer lotrechten Achse durch den Punkt „ $i$ “ sind gemäß Bild 6.2:

$$\Delta r_{i,u} = \psi \cdot x_t \quad (6.3)$$

$$\Delta r_{i,o} = \psi \cdot (h_m - x_t) \quad (6.4)$$

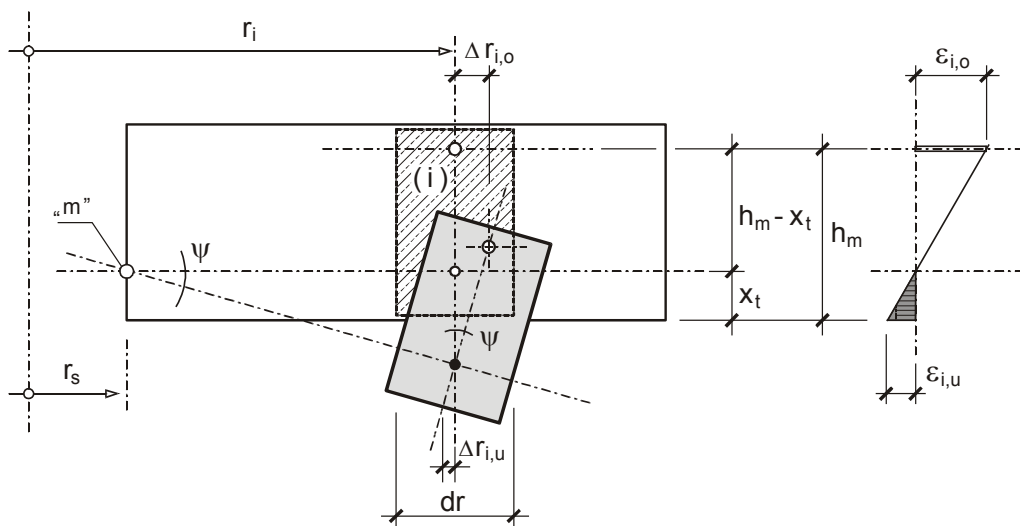
und die zugehörigen tangentialen Dehnungen:



$$\varepsilon_{i,u} = \Delta r_{i,u} \cdot \frac{1}{r_i} = \psi \cdot x_t \cdot \frac{1}{r_i} \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_{i,o} = \Delta r_{i,o} \cdot \frac{1}{r_i} = \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_i} \quad (6.6)$$

Die Dehnungen „ $\varepsilon_{i,u}$ “ und „ $\varepsilon_{i,o}$ “ sind ausschließlich abhängig von der gesuchten Höhe „ $x_t$ “ und dem zunächst unbekanntem Rotationswinkel „ $\psi$ “. Entsprechend den Gleichungen 6.5 und 6.6 sind in radialer Richtung die tangentialen Dehnungen nach einer Funktion „ $1/r$ “ verteilt. Die lotrechte Dehnungsverteilung über die Plattenhöhe „ $h_m$ “ wird als linear angenommen – Bild 6.2. Die Hypothese von Bernoulli für schlanke Bauglieder – ebenbleibender Querschnitt bei Biegeverformungen – behält uneingeschränkt ihre Gültigkeit. Es werden geradlinige Dehnungsdiagramme für den Werkstoff Stahl und für den Beton berücksichtigt. Ein möglicher Schlupf infolge Verbundspannungen, d.h. die frühzeitige Schädigung durch ein Lösen der oberen Bewehrungslage, eine von Kinnunen und Nylander bereits erkannte Versagensform, die einem Systemversagen vorangehen kann (eine von insgesamt fünf möglichen Ursachen – Kapitel 2.3.1), wird damit vernachlässigt bzw. nicht berücksichtigt.



**Bild 6.2:** Rotation eines Kreisringes „i“ mit dem Abstand „ $r_i$ “ vom Stützenzentrum

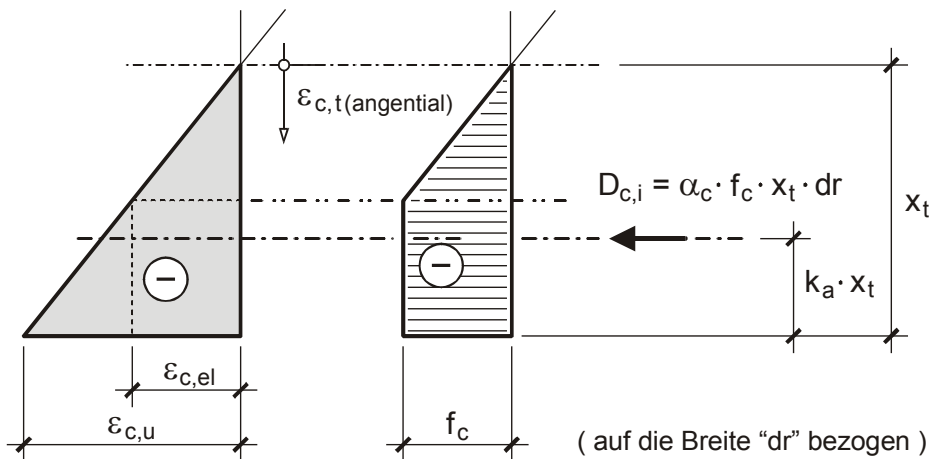
### 6.1.3 Annahme einer dehnungsbegrenzten Verteilung der tangential gerichteten Biegedruckspannungen

Die für den Bruchzustand als maßgebend angenommene Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons im Biegedruckbereich ist im Bild 6.3 dargestellt. Es wird ein einfaches bilineares Rechteckdiagramm berücksichtigt. Da beim Beton nicht von einem zerstörungsfreien plastischen Verformungsverhalten ausgegangen werden darf – Hinweise hierzu wurden im Kapitel 3 angegeben und begründet –, wird zur numerischen Beachtung der Struktur- bzw. Gefügezerstörung des Betongefüges in dem hier vorgestellten Bemessungsmodell eine Begrenzung des max. möglichen Biegedrucks, d.h. die Vorgabe einer tangential gerichteten Bruchdehnung „ $\varepsilon_{c,u}$ “ bzw. „ $\varepsilon_{c,u,t}$ “ beachtet.

Der Übergang von der elastischen zur plastischen Formänderung kann für den Beton über einen einachsigen Beanspruchungszustand wahlweise über einen normativ festgelegten oder aus einem Versuch gewonnenen Baustoffkennwert – nachfolgend allgemein mit „ $f_c$ “ bezeichnet – definiert werden:

$$\varepsilon_{c,el} = \frac{f_c}{E_c} \quad ; \quad \varepsilon_{s,el} = \frac{f_{s,R}}{E_s} \quad (6.7)$$

Für den Werkstoff Stahl gilt die erwähnte Übernahme einer normativ oder versuchstechnisch festgelegten Streckgrenze „ $f_{s,R}$ “ gleichermaßen. Daher ist die elastische Grenzdehnung „ $\varepsilon_{s,el}$ “ für Betonstahl in Gleichung 6.7 mit angeführt. Eine Dehnungsbegrenzung für den Werkstoff Stahl wird in dieser Arbeit jedoch an keiner Stelle berücksichtigt! Der Elastizitätsmodul für Normalbeton wird allgemein mit „ $E_c$ “ und für den Betonstahl mit „ $E_s$ “ bezeichnet.



**Bild 6.3:** Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons – tangential gerichtet

Die Höhe „ $x_t$ “ der tangentialen Druckzone wird abhängig von der linear angenommenen Dehnungsverteilung bestimmt. Im elastischen Zustand des Betons hat der zugehörige Spannungsbereich eine dreieckige Form. Im Fall, dass der Beton den Spannungsbereich, in dem er überwiegend elastisches Verhalten aufweist, verlässt, d.h. die Dehnungen größer als „ $\varepsilon_{c,el}$ “ werden, kann die resultierende Druckkraft „ $D_{c,i}$ “ – Bild 6.3 – angegeben werden zu:

$$D_{c,i} = \alpha_c \cdot f_c \cdot x_t \cdot dr \quad (6.8)$$

Sie ist abhängig von der Breite des Kreisringes „ $i$ “, gekennzeichnet durch die Einheitsbreite „ $dr$ “ längs dem Radius „ $r$ “. Zur Berechnung werden zwei dimensionslose Größen, der Volligkeitsbeiwert:

$$\alpha_c = 1 - \frac{\varepsilon_{c,el}}{2 \cdot \varepsilon_{c,u}} \quad (6.9)$$

und für die Höhenlage der Höhenbeiwert:

$$k_a = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_{c,el} \cdot (3 \cdot \varepsilon_{c,u} - 2 \cdot \varepsilon_{c,el})}{6 \cdot \varepsilon_{c,u} \cdot (2 \cdot \varepsilon_{c,u} - \varepsilon_{c,el})} \quad (6.10)$$

verwendet. Bei dreiecksförmiger Verteilung der Betonspannungen gilt „ $\varepsilon_{c,t} \leq \varepsilon_{c,el,t}$ “, und es ergibt sich der Völligkeitsbeiwert zu: „ $\alpha_c = 1/2$ “. Für den Höhenbeiwert „ $k_a$ “ gilt dann analog „ $k_a = 1/3$ “. Die Betonrandspannung an der Plattenunterkante, berechnet über die Randdehnung, ist somit: „ $\sigma_{c,t} = \varepsilon_{c,t} \cdot E_c$ “.

Diese Annahmen, abweichend zur DIN 1045-1 [33] getroffen, wurden gewählt, um den Einfluss eines E-Moduls erfassen zu können. Die DIN 1045-1 sieht für alle normalfesten Betone eine einheitliche bilineare Spannungs-Dehnungs-Linie mit einer elastischen Dehnungsgrenze, wie bereits erwähnt der Bereich des Betons mit überwiegend linearen Eigenschaften, in Höhe von „ $\varepsilon_{c,el} \equiv \varepsilon_{c3} = -1,35 \text{ ‰}$ “ und für die rechnerische Bruchdehnung „ $\varepsilon_{c,u} \equiv \varepsilon_{c3u} = -3,5 \text{ ‰}$ “ vor. Abweichungen dieser normativ geregelten Vorgabe gegenüber den in dieser Arbeit gewählten Annahmen sind nach Ansicht des Verfassers unbedeutend. Nur mit zunehmend geringer werdenden Betonfestigkeiten stellen sich größere Unterschiede ein. Man bleibt jedoch mit den angewendeten Rechenwerten auf der sicheren Seite (vgl. hierzu auch [95]).

#### 6.1.4 Resultierende tangentielle Spannungen

Über die Verteilung der tangentialen Dehnungen entlang dem Radius „ $r_r = C/2$ “ und die zunächst angenommene Vereinfachung, dass die Betonranddehnungen und die Betonstahldehnungen in der oberen Bewehrungslage ausschließlich innerhalb des elastischen Verformungsbereiches des Materials liegen, können die zugehörigen Spannungen für Beton „ $\sigma_c$ “ und Betonstahl „ $\sigma_s$ “ mit dem Reduktionsfaktor „ $n_0 = E_s / E_c$ “ in allgemeiner Form angegeben werden (Kapitel 2.3.2):

$$\sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_c = \psi \cdot x_t \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{E_s}{n_0} \quad (6.11)$$

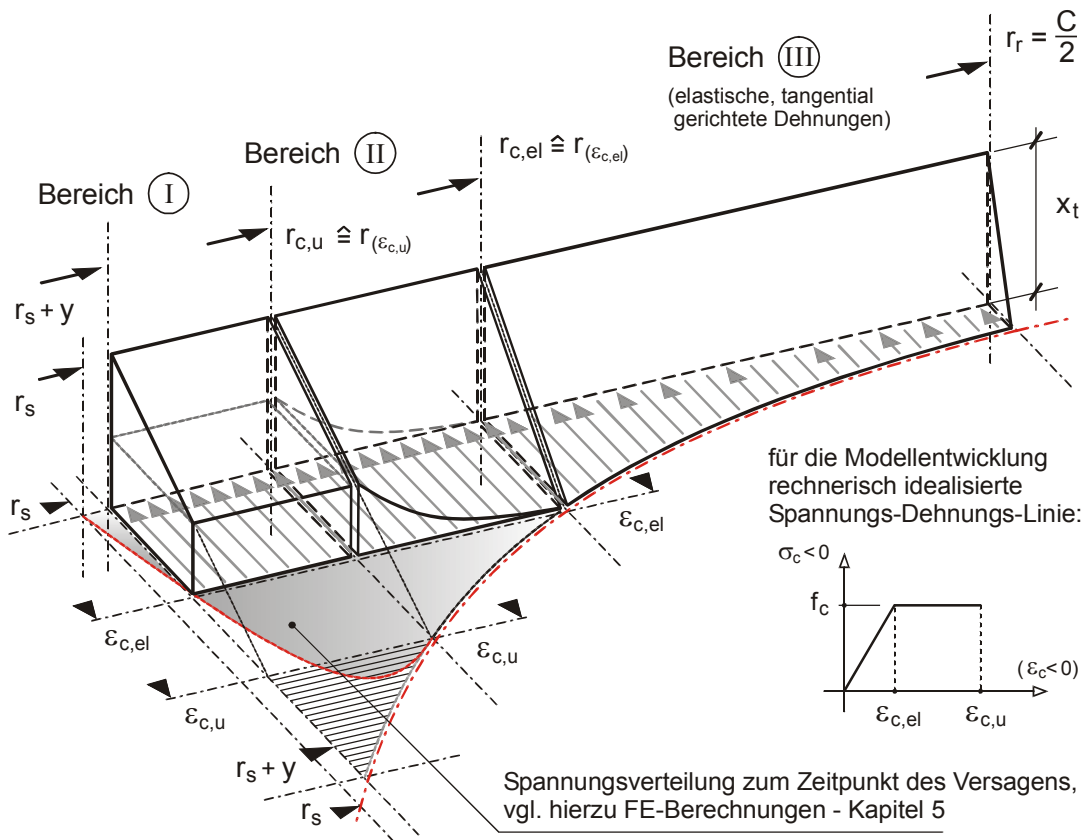
$$\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_i} \cdot E_s \quad (6.12)$$

Um eine mechanisch möglichst genaue Definition der tangentialen Spannungsverteilung längs dem Radius „ $r$ “ für das Bemessungsmodell zu definieren, werden die tangentialen Biegedruckspannungen in drei Bereiche – gekennzeichnet mit den römischen Zahlen „I“, „II“ und „III“ – aufgeteilt. Bild 6.4 zeigt die Übersicht der theoretisch angenommenen Spannungsblöcke abhängig von der an der Plattenunterkante numerisch wirksamen, a priori definierten elastischen Dehnung „ $\varepsilon_{c,el} \equiv \varepsilon_{c,el,t}$ “ und der analog in gleicher Weise im vorhinein definierten Grenzdehnung „ $\varepsilon_{c,u} \equiv \varepsilon_{c,u,t}$ “. Das Ergebnis der FE-Berechnung mit den im Kapitel 5 diskutierten tangentialen Spannungsverhältnissen bzw. -Verteilungen (Bild 5.11c für den Versuch IB15a aus Stockholm und im Bild 5.19c für den Versuch P1 aus Aachen) bestätigen dieses Vorgehen. Die sich gemäß der FE-Berechnung tatsächlich einstellende Spannungsverteilung ist im Bild 6.4 mit angegeben und im Interesse der Übersicht gesondert gekennzeichnet.

Durch die Vorgabe der Bruchdehnung „ $\varepsilon_{c,u} \equiv \varepsilon_{c,u,t}$ “ kann bei dem Bemessungsmodell die physikalische Eigenschaft des Betons berücksichtigt werden, dass beim porösen Werkstoff Beton nicht von einem zerstörungsfreien plastischen Verformungsverhalten ausgegangen werden darf. Hierauf wurde im Kapitel 3 mit zahlreichen Anmerkungen eingegangen. Die Vorgabe einer

Bruchdehnung bewirkt im Bemessungsmodell, dass die stetige Zunahme der Dehnungen auf einen maximal zulässigen und als realistisch angenommenen Wert begrenzt wird. Damit ist die für Beton typische Strukturzerstörung unter Druckbeanspruchung im Berechnungsmodell berücksichtigt.

Auf diesen Sachverhalt wird im nachfolgenden Kapitel 6.2 (bei der Erweiterung des Modells unter Beachtung einer Durchstanzsicherung) noch einmal eingegangen, um nachzuweisen, dass mit dieser differenzierten Betrachtung zugleich eine gute Voraussetzung zur Einschätzung des wirksamen Steifigkeitsverhaltens der Platte möglich wird – resultierend aus einer klaren, eindeutigen Definition der resultierenden Zug- und vor allem aber der Druckringkräfte.



**Bild 6.4:** Biegedruckspannungen über den betrachteten Plattenausschnitt – Radius  $r_r = C / 2$

Unterschieden wird zwischen einem allgemein elastischen Bereich (nachfolgend mit „Bereich III“ gekennzeichnet) und einem Übergangsbereich (mit „Bereich II“ gekennzeichnet), der als elastisch-plastischer Bereich bezeichnet wird. Diese Wahl der Bezeichnung orientiert sich an dem kontinuierlichen Übergang vom rein elastischen zum begrenzten Dehnungszustand der Plattenunterseite, wie es im Bild 6.4 dargestellt ist. Der mit „Bereich I“ kenntlich gemachte dehnungsbegrenzte Spannungszustand soll den Beginn ausgeprägter Zerstörungsvorgänge im Inneren des Betongefüges erfassen. Wie bereits erwähnt und im Bild 6.4 erkennbar, wird die Höhe „ $x_t$ “ der Biegedruckzone über die drei Bereiche bzw. über die gesamte Länge „ $r_r = C / 2$ “ als konstant angenommen.

Nach Überschreiten der elastischen, tangentialen Dehnung „ $\epsilon_{c,el,t}$ “ verlässt der Beton den Bereich, in dem er „überwiegend“ elastisches Verhalten aufweist. Mit Gleichung 6.5 und Einsetzen der elastischen Grenzdehnung kann der zugehörige Grenzzadius:

$$r_{c,el,t} = \psi \cdot x_t \cdot \frac{1}{\varepsilon_{c,el,t}} \quad (6.13)$$

angegeben werden. Analog liefert eine vorgegebene Bruchdehnung „ $\varepsilon_{c,u,t}$ “ den Grenzradius:

$$r_{c,u,t} = \psi \cdot x_t \cdot \frac{1}{\varepsilon_{c,u,t}} \quad (6.14)$$

Für den Dehnungszustand in der oberen Bewehrungslage werden (wie in [ 8 ], [50] und [66]) nur zwei Bereiche unterschieden, nämlich ein elastischer Bereich und nach Überschreiten der Streckgrenze „ $f_{s,R}$ “ des Betonstahls ein ideal-plastischer Bereich. Der Übergang kann wiederum durch Umstellen der Gleichung 6.6 unter Berücksichtigung der Dehnung des Betonstahls an der Streckgrenze „ $\varepsilon_{s,t}$ “ angegeben werden:

$$r_{s,t} = \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{\varepsilon_{s,t}} \quad (6.15)$$

Damit wird für den Werkstoff Stahl, im Gegensatz zum Beton, duktileres Materialverhalten vorausgesetzt.

Mit den Randspannungen „ $\sigma_c$ “ (Gleichung 6.11) unter Beachtung des Völligkeitsbeiwertes „ $\alpha_c = 1/2$ “ können die Ringdruckkräfte für einen Kreisring mit dem Radius „ $r_i$ “ und der Breite „ $dr$ “ (Bild 6.3) innerhalb der elastischen Bereichsgrenzen – d.h. für den Bereich „III“ – angegeben werden zu:

$$\begin{aligned} D_{i,III,t} &= \alpha_c \cdot \psi \cdot x_t \cdot \frac{1}{r_i} \cdot E_c \cdot x_t \cdot dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot \psi \cdot x_t^2 \cdot \frac{1}{r_i} \cdot E_c \cdot dr \\ &= E_s \cdot \left[ \psi \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] \cdot dr \end{aligned} \quad (6.16)$$

Innerhalb des Übergangsbereiches vom elastischen Zustand bis zum Erreichen der zuvor zu definierenden Grenzdehnung „ $\varepsilon_{c,u,t}$ “ erhält man unter Berücksichtigung der veränderlichen Dehnungen – abhängig vom Radius „ $r_i$ “ – mit dem Völligkeitsbeiwert:

$$\alpha_{c,(r)} = 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot r_i}{2 \cdot \psi \cdot x_t}$$

die im Bereich „II“ teilweise plastizierten Ringdruckkräfte:

$$\begin{aligned} D_{i,II,t} &= E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot r_i}{2 \cdot \psi \cdot x_t} \right) \cdot x_t \cdot dr \\ &= E_s \cdot \left[ \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{n_0} \cdot \left( x_t - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot r_i}{2 \cdot \psi} \right) \right] \cdot dr \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die Ringdruckkräfte innerhalb des plastischen bzw. dehnungsbegrenzten Bereichs „I“ lassen sich direkt mit Gleichung 6.8 angeben:

$$\begin{aligned}
 D_{i,I,t} &= E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{2 \cdot \varepsilon_{c,u,t}} \right) \cdot x_t \cdot dr \\
 &= E_s \cdot \left[ \frac{x_t \cdot \varepsilon_{c,el,t}}{n_0} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{2 \cdot \varepsilon_{c,u,t}} \right) \right] \cdot dr
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Die Ringzugkräfte für den gerissenen Zustand können über den Bewehrungsgrad „ $\rho$ “ und der daraus resultierenden, zugehörigen Fläche des Betonstahls „ $A_s = \rho \cdot h_m \cdot dr$ “ entsprechend den Ringdruckkräften über die Betonstahlspannung „ $\sigma_s$ “ angegeben werden. Die Fläche „ $A_s$ “ multipliziert mit Gleichung 6.12 führt zu den Ringzugkräften im elastischen Bereich des Materials:

$$\begin{aligned}
 Z_{i,el,t} &= A_s \cdot \sigma_s \\
 &= E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_i} \cdot dr
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Wird im Bereich des Auflagers bzw. in Stützennähe die Streckgrenze „ $f_{s,R}$ “ des Materials erreicht bzw. überschritten, so folgen mit der Bedingung:

$$f_{s,R} \leq E_s \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_i}$$

die nunmehr von „ $x_t$ “ und „ $\psi$ “ unabhängigen und konstant bleibenden Zugringkräfte innerhalb des ideal plastischen Bereichs:

$$Z_{i,pl,t} = \rho \cdot h_m \cdot f_{s,R} \cdot dr \tag{6.20}$$

Über die Differenz der beiden tangential wirkenden Zugkraft- und Druckkraftkomponenten „ $\Delta Z_i = Z_i - D_i$ “ innerhalb eines Kreisringes mit gleichem Radius „ $r_i$ “ leitet Andrä das im Kapitel 2 vorgestellte Strebensystem ab. Es wurde bereits erwähnt, dass dieser Ansatz im nachfolgenden Kapitel 6.1.5 dazu verwendet wird, eine zweite Gleichgewichtsbedingung zu definieren.

Nachfolgend muss jedoch zunächst noch – über die Annahme, dass „ $\Delta Z_i$ “ auch den Wert Null annehmen kann – auf die Existenz eines oberen Grenzwertes für die Höhe „ $x_t$ “ der Biegedruckzone hingewiesen werden. Bei der gewählten iterativen Berechnungsmethode in dieser Arbeit darf dieser Grenzwert bei der numerischen Auswertung der nachfolgend angegebenen Integrationen niemals überschritten werden.

Die Forderung nach „ $Z_i / D_i \geq 1$ “ und das Einsetzen der Gleichungen 6.16 für „ $D_i$ “ und Gleichung 6.19 für „ $Z_i$ “ liefert die Bedingung für die maximal mögliche Höhe „ $x_t$ “ der tangential gerichteten Biegedruckzone innerhalb des elastischen Formänderungsbereichs für Zug und Druck. Dieser obere Grenzwert innerhalb eines Kreisringes kann mit:

$$x_t \leq {}^a x_{t,max} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\rho \cdot n_0}}} \cdot h_m \tag{6.21}$$

angegeben werden [ 8]. Andrä weist in seiner Arbeit darauf hin, dass die Höhe „ $x_t$ “ im elastischen Bereich entsprechend Gleichung 6.21 ein vom Bewehrungsgrad „ $\rho$ “ und von der Reduktionszahl „ $n_0$ “ abhängiger Parameter ist.

Dehnt man diese Grenzbetrachtung auf die in dieser Arbeit unterschiedlich behandelten Bereiche des Materialverhaltens aus (drei Bereiche für den Werkstoff Beton, zwei Bereiche für den Werkstoff Betonstahl), so muss für den Fall fließender Bewehrung bei überwiegend noch elastischem Formänderungsverhalten des Betons (Beton im Bereich „III“) ein weiterer Grenzwert für „ $x_t$ “ definiert werden zu:

$$x_t \leq {}^b x_{t, \max} = \frac{2 \cdot \rho \cdot f_{s,R}}{\varepsilon_{c,el,t} \cdot E_c} \cdot h_m \quad (6.22)$$

Verlässt die Biegedruckzone den überwiegend elastisch reagierenden Formänderungsbereich (Biegedruckzone im Bereich „II“) während die Betonstahlspannungen jedoch unterhalb der Streckgrenze bleiben, so ergibt sich der Grenzwert zu:

$$x_t \leq {}^c x_{t, \max} = \frac{\rho \cdot E_s \cdot \varepsilon_{c,u,t}}{2 \cdot \alpha_c \cdot f_c} \cdot \left( \sqrt{\frac{4 \cdot \alpha_c \cdot f_c}{\rho \cdot E_s \cdot \varepsilon_{c,u,t}} + 1} - 1 \right) \cdot h_m \quad (6.23)$$

Die Grenzwerte „ ${}^a x_t$ “, „ ${}^b x_t$ “ und „ ${}^c x_t$ “ werden in der vorliegenden Arbeit zur Auswertung der zulässigen bzw. gültigen Integrationsbereiche sowohl bei der Berechnung der Ringzug- bzw. Ringdruckkräfte als auch bei der nachfolgend angegebenen Berechnung des Plattenschubes beachtet. Ein Gleichgewichtszustand unterhalb des Grenzwertes ist möglich. Das Erreichen des Grenzwertes führt numerisch zu einer Verschiebung der Grenzradien, somit zu einer weiteren Umlagerung hin zum freien Rand.

Mit den Gleichungen 6.16, 6.17 und 6.18, integriert über den Radius „ $r$ “ mit den vier Bereichsgrenzen „ $(r_s + y)$ “, „ $r_{c,u}$ “, „ $r_{c,el}$ “ und „ $r_r = C/2$ “ (angegeben im Bild 6.4), kann die gesamte tangential gerichtete Biegedruckkraft unterhalb der neutralen Ebene bzw. über die Höhe „ $x_t$ “ des betrachteten Plattenausschnittes im gerissenen Zustand berechnet werden. Die Integration dieser Gleichungen über die Teilbereiche liefert:

Bereich „III“:

$$\begin{aligned} D_{c,III} &= \int_{r_{c,el}}^{C/2} \frac{1}{2} \cdot \psi \cdot x_t \cdot \frac{1}{r} \cdot E_c \cdot x_t \cdot dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot E_c \cdot \psi \cdot x_t^2 \cdot \ln(r) \Big|_{r_{c,el}}^{C/2} \\ D_{c,III} &= \frac{1}{2} \cdot E_c \cdot \psi \cdot x_t^2 \cdot \ln \left( \frac{C/2}{r_{c,el}} \right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Bereich „II“:

$$\begin{aligned}
 D_{c,II} &= \int_{r_{c,u}}^{r_{c,el}} E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot r}{2 \cdot \psi \cdot x_t} \right) \cdot x_t \cdot dr \\
 &= E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot \left( r \cdot x_t - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot r^2}{4 \cdot \psi} \right) \Bigg|_{r_{c,u}}^{r_{c,el}} \\
 D_{c,II} &= E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot \left[ x_t \cdot (r_{c,el} - r_{c,u}) - \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{4 \cdot \psi} \cdot (r_{c,el}^2 - r_{c,u}^2) \right] \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

Bereich „I“:

$$\begin{aligned}
 D_{c,I} &= \int_{(r_s+y)}^{r_{c,u}} E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{2 \cdot \varepsilon_{c,u,t}} \right) \cdot x_t \cdot dr \\
 &= E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{2 \cdot \varepsilon_{c,u,t}} \right) \cdot x_t \cdot r \Bigg|_{r_{c,u}}^{r_{c,el}} \\
 D_{c,I} &= E_c \cdot \varepsilon_{c,el,t} \cdot x_t \cdot [r_{c,u} - r_s - y] \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{2 \cdot \varepsilon_{c,u,t}} \right) \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

Die gesamte Druckkraft setzt sich dann aus der Summe aller drei Bereiche zusammen:

$$D_c = D_{c,I} + D_{c,II} + D_{c,III} = \sum_{i=I}^{III} [ D_{c,i} ] \quad (6.27)$$

Daraus folgt der Horizontalschub für das Momentengleichgewicht im Punkt „Q<sub>2</sub>“ (siehe Bild 6.1 und Kapitel 6.1.6) begrenzt auf ein Plattenteilstück mit dem Winkel „Δφ“ zu:

$$\Delta\varphi \cdot R_4 = \frac{\Delta\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot D_c \quad (6.28)$$

Für den Fall, dass der Plattenausschnitt versagt, bevor die Grenzdehnung „ε<sub>c,u,t</sub>“ erreicht wird, entfällt Bereich „I“, und es gilt „(r<sub>s</sub> + y)“ = „r<sub>c,u</sub>“. Die oben eingesetzten Bereichsgrenzen ändern sich entsprechend. Es können mit den Gleichungen 6.24, 6.25 und 6.26 drei zulässige und realistische Kombinationen zur Berechnung der Gesamtdruckkräfte in tangentialer Richtung gebildet werden. Ein Versagens- bzw. Bruchzustand ausschließlich im elastischen Bereich „III“ ist möglich.

### 6.1.5 Verteilung der inneren Kräfte im Strebensystem

Andrä geht von der Annahme aus, dass ausschließlich tangentiale und somit ringförmige Gurte mit der Breite „dr“ die Tragfähigkeit sichern. Die Tragfähigkeit einer Stahlbetonplatte wird damit abhängig von der Höhenlage „x<sub>t</sub>“, dem zugehörigen bzw. von „x<sub>t</sub>“ abhängigen Drehpunkt „m“



und einer von der Plattenhöhe abhängigen, ertragbaren Rotation „ $\Psi$ “ – Bild 6.2. Bei dieser Definition muss der sich einstellende innere Hebelarm „ $z$ “ abhängig von der Plattenhöhe bzw. von „ $h_m$ “ Berücksichtigung finden. Eine solche Betrachtungsweise setzt auch voraus, dass die Bedingung „ $x_t \leq x_{t, max}$ “ entsprechend den Gleichungen 6.21 bis 6.23 immer erfüllt wird. Dann verbleibt in der Ebene der oberen Bewehrungslage eine tangentielle Zugkraft „ $\Delta Z_i = Z_i - D_i$ “. Diese Zugkräfte müssen über Druckstreben mit veränderlichen Neigungswinkeln „ $\alpha_i$ “ zur Stütze hin übertragen werden, Bild 2.14 im Kapitel 2.

Mit zunehmendem Abstand „ $r_i$ “ des Kreisringes wird die radial gerichtete Umlenkraft und damit die immer flacher geneigte Druckstrebe ihren Einfluss auf die resultierende Stützenlast „ $V_{u,c}$ “ verlieren. In Analogie zu den tangentialen Dehnungen (Gleichungen 6.5 und 6.6) wird die Umlenkraft nochmals nach einer Funktion „ $1/r$ “ verteilt. Es entsteht mit Bezug auf den Stützenumfang bzw. Radius „ $r_s$ “ durch Rotieren der Druckstreben um die Stütze ein System aus zahlreichen Druckkegelschalen. Auf eine Begrenzung des Einflussbereiches mit Bezug auf den Stützenabstand wird verzichtet. Andrä weist in seiner Arbeit darauf hin, dass „der Lastanteil der flachen Druckstreben an der Gesamtlast gering ist und mit dem Quadrat der Entfernung von der Stütze abnimmt“. Die Betrachtung erfolgt somit wieder über den gesamten Bereich des Ersatzsystems mit dem Radius „ $r_r = C/2$ “. Aus der bereits bekannten Forderung „ $Z_i / D_i > 1$ “ entwickeln sich die Umlenkkräfte zu:

$$u_{res} = (Z_i - D_i) \cdot \frac{1}{r_i} = \Delta Z_i \cdot \frac{1}{r_i} \quad (6.29)$$

Nachfolgend werden über eine Gleichgewichtsbetrachtung am Obergurtnoten „ $i$ “ die den Druckkegelschalen zugeordneten Zugkegelschalen berechnet.

### 6.1.5.1 Gleichgewicht am Obergurtnoten

Bild 6.5 zeigt die Resultierende einer Druckkegelschale „ $k_i$ “ mit ihrer Wirkungslinie bzw. mit dem Neigungswinkel „ $\alpha_i$ “. Entsprechend einem allgemein ebenen Kraftsystem sind rechtwinklig zur Druckschalenkraft „ $k_{s,i}$ “ die Zugschalenkräfte bzw. die daraus resultierenden Zugspannungen „ $p_i$ “ wirksam. Beide Schalenkräfte und die vom Zugring auf den Beton abgegebene Umlenkraft „ $u_{res}$ “ bilden ein geschlossenes Kraffleck, so dass die Kräfte zueinander im Gleichgewicht stehen.

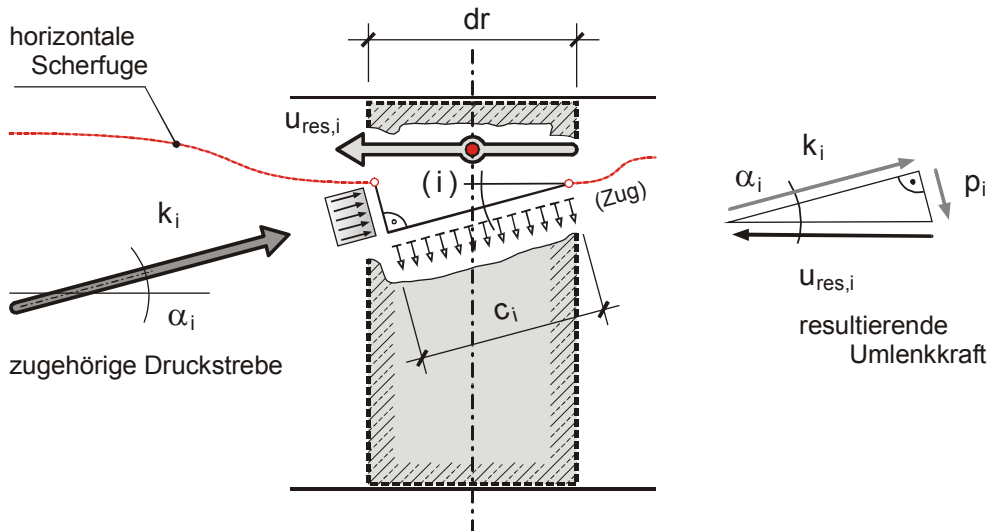
Mit dem Neigungswinkel „ $\alpha_i$ “ der Druckkegelschale ergibt sich die Zugschalenkraft eines Kreisringes „ $i$ “ zu [ 8 ]:

$$p_i = u_{res,i} \cdot \sin (\alpha_i) \quad (6.30)$$

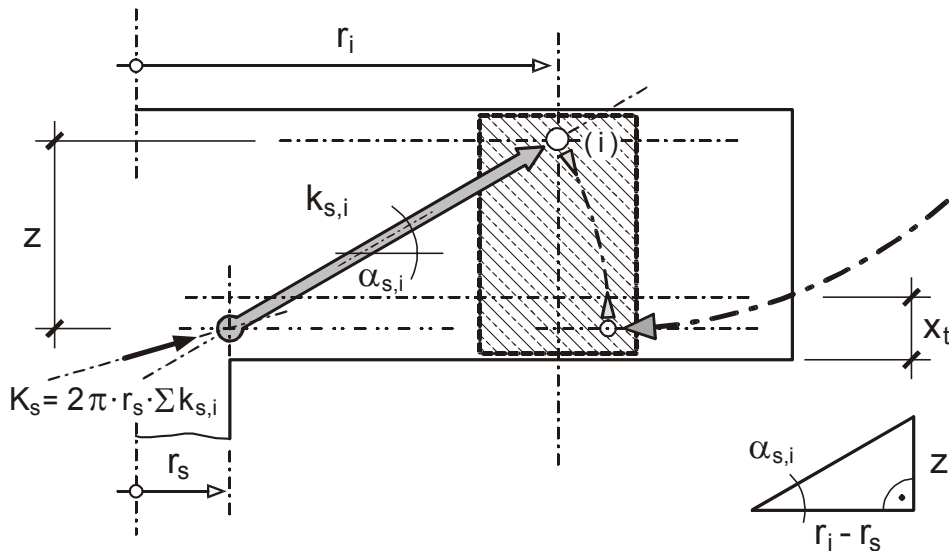
Die Einheitsbreite „ $dr$ “ eines Ringes und der Neigungswinkel „ $\alpha_i$ “ liefert die dem Kreisring zugeordnete Breite der Zugschale:

$$c_i = dr \cdot \cos (\alpha_i) \quad (6.31)$$

und führt unmittelbar zu der resultierenden Betonzugspannung am Obergurtnoten „ $i$ “, dem oberen Ende der Zugschale unterhalb der oberen Bewehrungslage.



**Bild 6.5:** Gleichgewicht am Obergurtnode „i“ eines Kreisringes mit der Breite „dr“



**Bild 6.6:** Geometrische Beziehungen zwischen Kreisringradius „ $r_i$ “, Stützenradius „ $r_s$ “ und Neigungswinkel „ $\alpha_i$ “.

Unter Beachtung der geometrischen Beziehungen zwischen dem Radius des Kreisringes „ $r_i$ “ und dem Neigungswinkel „ $\alpha_i$ “ (Bild 6.6), kann die Betonzugspannung abhängig vom inneren Hebelarm „ $z$ “ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \sigma_{ct,i} &= \frac{p_i}{c_i} = \frac{u_{res,i} \cdot \sin(\alpha_i)}{dr \cdot \cos(\alpha_i)} \\ &= \frac{u_{res,i}}{dr} \cdot \tan(\alpha_i) \\ &\quad \text{mit: } \tan(\alpha_i) = \frac{z}{r_i - r_s} \\ \sigma_{ct,i} &= \frac{u_{res,i}}{dr} \cdot \frac{z}{(r_i - r_s)} \end{aligned} \tag{6.32}$$

### 6.1.5.2 Mitwirken der Zugelschalen

Der Radius „ $r_1$ “, bis zu dem die Zugschalenkräfte wegen Überschreiten der Zugfestigkeit „ $f_{ct} \geq \sigma_{ct,i}$ “ des Betons nicht mitwirken können, lässt sich mit Gleichung 6.32 und Einsetzen der zugehörigen Zug- und Druckringkräfte berechnen (Gleichungen 6.16 bis 6.18 für die Druckkräfte „ $D_{t,i}$ “ sowie die Gleichungen 6.19 und 6.20 für die Zugkräfte „ $Z_{t,i}$ “). In dem Fall lässt sich kein geschlossenes Krafteck bilden und es kann sich kein Gleichgewicht einstellen.

Mit „ $f_{ct} \cdot (r_1 - r_s) = z \cdot \frac{u_{res,i}}{dr}$ “ werden nachfolgend drei Fallunterscheidungen berücksichtigt:

- 1) Der allgemein elastische Fall, d.h. der Beton befindet sich im Bereich „III“:

$$f_{ct} \cdot (r_1 - r_s) = \frac{z}{dr} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_1} \cdot dr - E_s \cdot \psi \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \cdot dr \right\}$$

$${}^a r_1^3 - r_s \cdot {}^a r_1^2 = \frac{z \cdot E_s \cdot \psi}{f_{ct}} \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot (h_m - x_t) - \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] \quad (6.33)$$

- 2) Der Betonstahl verhält sich ideal elastisch. In der Biegedruckzone werden nichtlineare Materialeigenschaften wirksam womit er sich im teilweise plastizierten Bereich „II“ (Bild 6.4) befindet:

$$f_{ct} \cdot (r_1 - r_s) = \frac{z}{dr} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_1} \cdot dr - E_s \cdot \left[ \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{n_0} \cdot \left( x_1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot r_1}{2 \cdot \psi} \right) \right] \cdot dr \right\}$$

$$r_1^2 \cdot (r_1 - r_s) = \frac{z \cdot E_s}{f_{ct}} \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) - \frac{r_1 \cdot \varepsilon_{c,el,t}}{n_0} \cdot \left( x_1 - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot r_1}{2 \cdot \psi} \right) \right]$$

$${}^b r_1^3 - r_s \cdot {}^b r_1^2 + {}^b r_1 \cdot \left[ \frac{z \cdot E_s}{f_{ct}} \cdot \frac{\varepsilon_{c,el,t}}{n_0} \cdot \left( x_t - \frac{\varepsilon_{c,el,t} \cdot {}^b r_1}{2 \cdot \psi} \right) \right] = \frac{z \cdot E_s \cdot \psi}{f_{ct}} \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot (h_m - x_t) \right] \quad (6.34)$$

- 3) Nach Überschreiten der Streckgrenze  $f_{s,R}$  des Betonstahls ohne Berücksichtigung einer Druckringkraft:

$$f_{ct} \cdot (r_1 - r_s) = \frac{z}{dr} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ \rho \cdot h_m \cdot f_{s,R} \cdot dr \right\}$$

$$r_1^2 - r_s \cdot r_1 - \frac{z}{f_{ct}} \cdot \rho \cdot h_m \cdot f_{s,R} = 0$$

$${}^c r_1 = \frac{r_s}{2} + \sqrt{\left( \frac{r_s}{2} \right)^2 + \frac{f_{s,R}}{f_{ct}} \cdot z \cdot \rho \cdot h_m} \quad (6.35)$$

Im Bereich zwischen der lotrechten Stützenachse und dem Radius „ $r_1$ “ – der jeweils kleinere Wert („ ${}^a r_1$ “, „ ${}^b r_1$ “ oder „ ${}^c r_1$ “) wird maßgebend – überschreiten die Zugspannungen die Zugfestigkeit „ $f_{ct}$ “. Die Rissbildung führt zu einer Störung des Gleichgewichtszustandes, wonach die

Beanspruchung der zugehörigen (Ring-)Bewehrung und die zugehörigen Druckschalenkräfte zurückgehen müssen. Das bedeutet, die Druckschalenkräfte „ $k_{s,i}$ “ innerhalb des Radius „ $r_1$ “ nehmen den Wert Null an. Diese mechanische Annahme ist begründet durch die Vorstellung des Zusammenwirkens zweier Fachwerkmodelle (Strebensystem überlagert mit einem Netzfachwerk) und wird in der Originalarbeit [ 8 ] detailliert über einen anschaulichen Trajektorienverlauf beschrieben. Eine Übersicht im Bereich der Kräfteinleitung zeigt Bild 2.13 im Kapitel 2.

### 6.1.5.3 Resultierende Vertikalkräfte und Horizontalkräfte

Die Größe der aus der Zugkraft „ $p_i$ “ resultierenden vertikalen Komponente „ $v_{s,i}$ “ eines beliebigen Kreisringes „ $i$ “, innerhalb des Einflussbereiches zwischen „ $r_1$ “ und „ $r_r = C/2$ “ kann dem im Bild 6.5 mit dargestellten Kräfteck entnommen werden. Entsprechend erhält man:

$$v_{s,i} = p_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (6.36)$$

Einsetzen der Gleichung 6.30 in 6.36 führt wieder zu einer von „ $u_{res,i}$ “ abhängigen inneren Schnittkraft. Die Vertikalkomponenten „ $v_{s,i}$ “, bezogen auf den Stützenumfang einer Stütze mit dem Radius „ $r_s$ “, lauten dann in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned} v_{s,i} &= \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i \\ &= \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha_i) \end{aligned}$$

mit:  $\sin(2\alpha_i) = \frac{2 \cdot z \cdot (r_i - r_s)}{(r_i - r_s)^2 + z^2}$

$$u_{res} = (Z_i - D_i) \cdot \frac{1}{r_i}$$

$$= \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2}$$

$$v_{s,i} = \frac{r_i}{r_s} \cdot (Z_i - D_i) \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} \quad (6.37)$$

Unter Beachtung der angenommenen Verteilung der Biegedruckspannungen nach Bild 6.4 werden in der vorliegenden Arbeit vier zulässige Kombinationen zwischen den tangential gerichteten Zug- und Druckkräften unterschieden. Da die numerische Lösung mit Hilfe einer computerunterstützten, iterativen Berechnung erfolgt (Microsoft® Excel 2000 [9.0.2812]), wird auf die Einführung einer Ersatzfunktion (wie sie André in seiner Arbeit bevorzugte [ 8 ]) verzichtet.

Hat der Beton innerhalb eines Ringes „ $i$ “ seinen bei zugleich fließender Bewehrung überwiegend elastischen Arbeitsbereich verlassen (gilt für Beton im Bereich „ $I$ “ und „ $II$ “), wird angenommen, dass im radialen Druckstrebensystem ausschließlich die Zugkraft der Bewehrung mitwirkt. Physikalisch bedeutet dies, dass die Druckzone nahezu keinen Einfluss mehr auf die radial gerichteten Druckstreben ausüben kann. Es bilden sich diskrete Druckstreben um den

Stützenumfang aus. Die dargestellten Berechnungsergebnisse im Kapitel 5, Bild 5.13 (a+b) bestätigen u.a. diese Annahme.

Die resultierenden Fallunterscheidungen, abhängig von den zugehörigen Bereichsgrenzen, sind grafisch im Bild 6.7 und Bild 6.8 zusammengefasst. Die Form der Darstellung lässt erkennen, dass sich die Grenzen der Integrationsvariablen „ $r_i$ “ verschieben können. Im Interesse eines allgemeinen Charakters wird in den nachfolgenden Integralauswertungen die linksseitige Begrenzung mit „ $r_a$ “ (untere Grenze) und die rechte mit „ $r_b$ “ (obere Grenze) bezeichnet. Es gilt: „ $r_a < r_b$ “.

### 1. Fall: Fließen der Bewehrung

Anwendung im Bereich „I“ und „II“ – Bild 6.4

$$\begin{aligned}
 {}^1V_{s,i,I/II} &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{r_i}{r_s} \cdot (\rho \cdot h_m \cdot f_{s,R}) \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} dr \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{r_s} \cdot (\rho \cdot h_m \cdot f_{s,R}) \cdot \ln \left( \frac{z^2 + r_b^2 - 2 \cdot r_b \cdot r_s + r_s^2}{z^2 + r_a^2 - 2 \cdot r_a \cdot r_s + r_s^2} \right) \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

### 2. Fall: Der Beton hat seinen überwiegend elastisch reagierenden Verformungsbereich verlassen, die Dehnungen des Betonstahls befinden sich jedoch noch im elastischen Bereich unterhalb der Streckgrenze

Anwendung im Bereich „II“ – Bild 6.4

$${}^2V_{s,i,II} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot \left[ E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_i} - E_s \cdot \frac{\varepsilon_{c,el}}{n_0} \cdot \left( x_t - \frac{\varepsilon_{c,el} \cdot r_i}{2 \cdot \psi} \right) \right] \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} dr$$

$$\text{mit: } A = E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t)$$

$$B = E_s \cdot \frac{\varepsilon_{c,el}}{n_0}$$

$$C = \frac{\varepsilon_{c,el}}{2 \cdot \psi}$$

$$= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot \left[ A - B \cdot (x_t \cdot r_i - C \cdot r_i^2) \right] \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} dr$$

$$\begin{aligned}
 {}^2V_{s,i,II} &= \frac{z}{r_s} \cdot B \cdot C \cdot (r_b - r_a) \\
 &+ \frac{z}{z^2 + r_s^2} \cdot \left\{ -A \cdot \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right) \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{z^2 + r_b^2 - 2 \cdot r_b \cdot r_s + r_s^2}{z^2 + r_a^2 - 2 \cdot r_a \cdot r_s + r_s^2} \right) \cdot \left[ B \cdot C \cdot (r_s^2 + z^2) - B \cdot z^2 \cdot \frac{x_t}{r_s} - r_s \cdot x_t \cdot B - A \right] \\
 &+ \left. \left[ \arctan \left( \frac{r_b - r_s}{z} \right) - \arctan \left( \frac{r_a - r_s}{z} \right) \right] \cdot \left[ -z \cdot r_s \cdot B \cdot C + z \cdot \frac{A}{r_s} - z^3 \cdot \frac{B \cdot C}{r_s} \right] \right\} \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

**3. Fall: Die Verformungseigenschaften des Betons sind überwiegend elastisch, der Betonstahl hat die Streckgrenze erreicht bzw. überschritten**  
Anwendung im Bereich „III“ – Bild 6.4

$$\begin{aligned}
 {}^3V_{s,i,III} &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{r_i}{r_s} \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot f_{s,R} - E_s \cdot \psi \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} dr \\
 \text{mit:} \quad A &= \rho \cdot h_m \cdot f_{s,R} \\
 B &= E_s \cdot \psi \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \\
 &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot [A \cdot r_i - B] \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} dr \\
 {}^3V_{s,i,III} &= \frac{z}{z^2 + r_s^2} \cdot \left\{ B \cdot \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{z^2 + r_b^2 - 2 \cdot r_b \cdot r_s + r_s^2}{z^2 + r_a^2 - 2 \cdot r_a \cdot r_s + r_s^2} \right) \cdot \left[ A \cdot \left( \frac{z^2}{r_s} + r_s \right) - B \right] \right. \\
 &\quad \left. - B \cdot \frac{z}{r_s} \cdot \left[ \arctan \left( \frac{r_b - r_s}{z} \right) - \arctan \left( \frac{r_a - r_s}{z} \right) \right] \right\} \quad (6.40)
 \end{aligned}$$

**4. Fall: Die Verformungseigenschaften für Beton und Baustahl sind ideal-elastisch**  
Anwendung im Bereich „III“ – Bild 6.4

$$\begin{aligned}
 {}^4V_{s,i,III} &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{r_i}{r_s} \cdot \left[ E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) - E_s \cdot \psi \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} dr \\
 \text{mit:} \quad A &= E_s \cdot \psi \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot (h_m - x_t) - \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] \\
 &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot [A] \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{z \cdot (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} dr \\
 {}^4V_{s,i,III} &= A \cdot \left\{ \frac{z}{z^2 + r_s^2} \cdot \left[ - \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{z^2 + r_b^2 - 2 \cdot r_b \cdot r_s + r_s^2}{z^2 + r_a^2 - 2 \cdot r_a \cdot r_s + r_s^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{z}{r_s} \cdot \left[ \arctan \left( \frac{r_b - r_s}{z} \right) - \arctan \left( \frac{r_a - r_s}{z} \right) \right] \right\} \quad (6.41)
 \end{aligned}$$

Die Horizontalkomponenten „ $h_{s,i}$ “ beziehen sich unmittelbar auf „ $u_{res,i}$ “ und können für einen beliebigen Obergurtnoten „ $i$ “ unmittelbar mit Bezug auf den Stützenumfang bzw. Radius „ $r_s$ “ angegeben werden [ 8 ]:

$$\begin{aligned} h_{s,i} &= \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res,i} \\ &= \frac{r_i}{r_s} \cdot (Z_i - D_i) \cdot \frac{1}{r_i} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Für die Integrationsvariable „ $r_i$ “ werden wieder die Bereichsgrenzen „ $r_a$ “ und „ $r_b$ “ in allgemeiner Form eingeführt. Die Fallunterscheidungen sind im Bild 6.7 und Bild 6.8 angegeben.

### 1. Fall: Fließen der Bewehrung

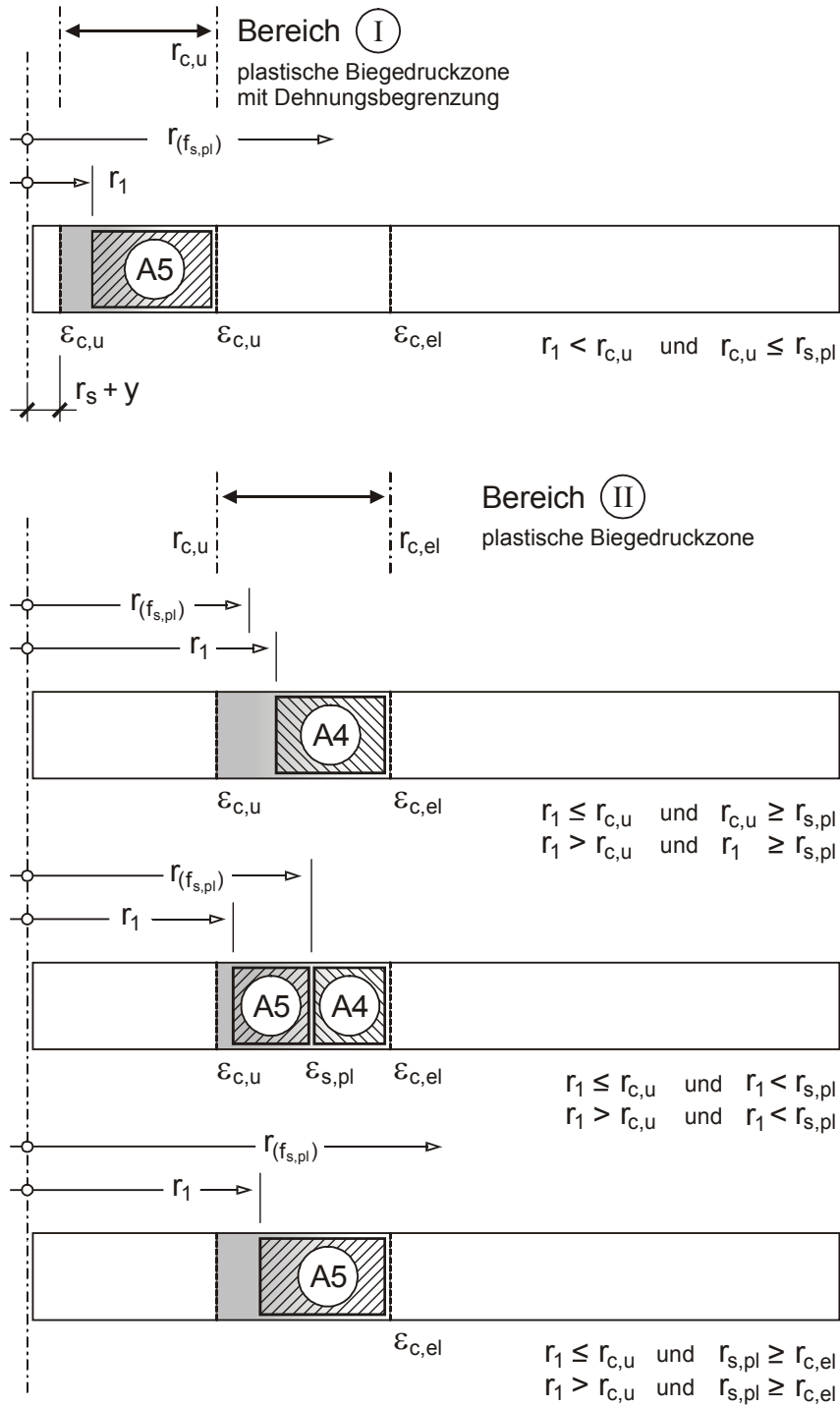
Anwendung im Bereich „I“ und „II“ – Bild 6.4

$$\begin{aligned} {}^1 h_{s,i,I/II} &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot (\rho \cdot h_m \cdot f_{s,R}) \, dr \\ &= \frac{1}{r_s} \cdot (\rho \cdot h_m \cdot f_{s,R}) \cdot [r_b - r_a] \end{aligned} \quad (6.43)$$

### 2. Fall: Der Beton hat seinen überwiegend elastisch reagierenden Verformungsbereich verlassen, die Dehnungen des Betonstahls befinden sich jedoch noch im elastischen Bereich unterhalb der Streckgrenze

Anwendung im Bereich „II“ – Bild 6.4

$$\begin{aligned} {}^2 h_{s,i,II} &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot \left[ E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \cdot \frac{1}{r_i} - E_s \cdot \frac{\varepsilon_{c,el}}{n_0} \cdot \left( x_t - \frac{\varepsilon_{c,el} \cdot r_i}{2 \cdot \psi} \right) \right] \, dr \\ \text{mit:} \quad A &= E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) \\ B &= E_s \cdot \frac{\varepsilon_{c,el}}{n_0} \\ C &= \frac{\varepsilon_{c,el}}{2 \cdot \psi} \\ &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot \left[ A \cdot \frac{1}{r_i} - B \cdot \left( x_t - C \cdot r_i \right) \right] \, dr \\ {}^2 h_{s,i,II} &= \frac{1}{r_s} \cdot \left\{ A \cdot \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right) - B \cdot \left[ x_t \cdot (r_b - r_a) - \frac{1}{2} \cdot C \cdot (r_b^2 - r_a^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.44)$$



**Bild 6.7:** Grenzen für die Integrationsvariable „ $r_i$ “ für die Bereiche „I“ und „II“



**3. Fall: Die Verformungseigenschaften des Betons sind überwiegend elastisch, der Betonstahl hat die Streckgrenze erreicht bzw. überschritten**

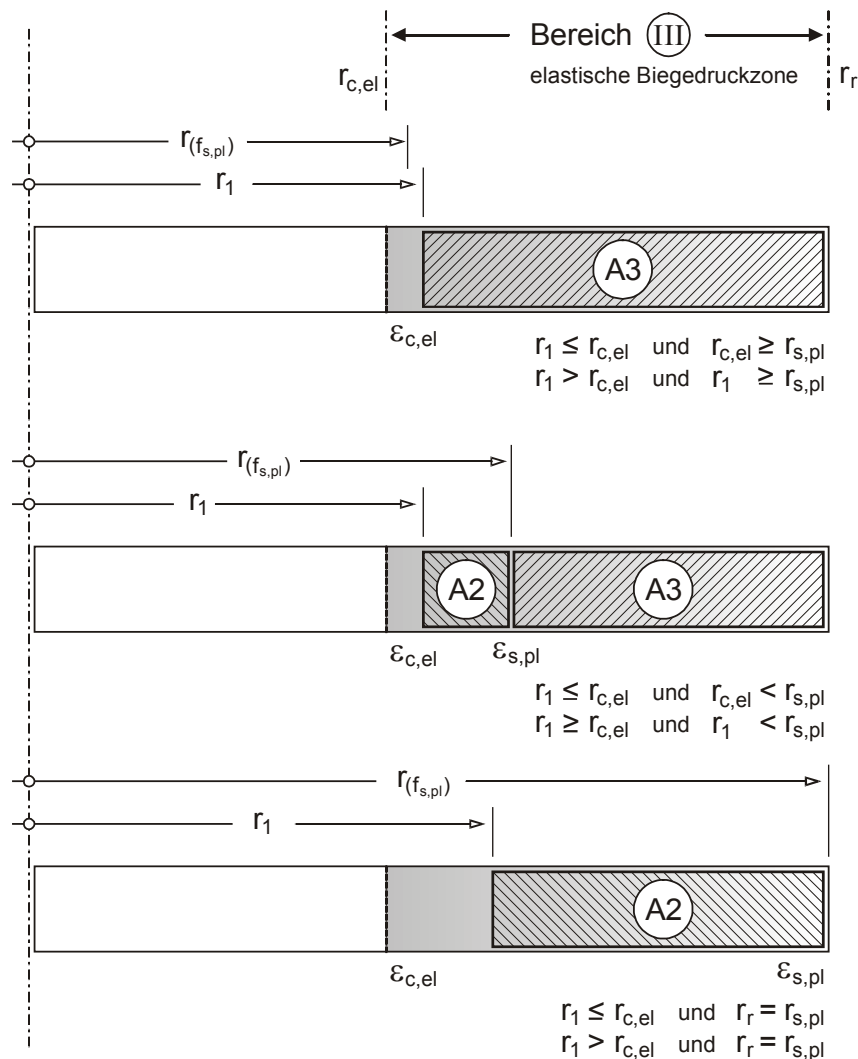
Anwendung im Bereich „III“ – Bild 6.4

$$\begin{aligned}
 {}^3h_{s,i,III} &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot f_{s,R} - E_s \cdot \psi \cdot \frac{1}{r_i} \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] dr \\
 &= \frac{1}{r_s} \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot f_{s,R} \cdot (r_b - r_a) - E_s \cdot \psi \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \cdot \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{6.45}$$

**4. Fall: Die Verformungseigenschaften für Beton und Baustahl sind ideal elastisch**

Anwendung im Bereich „III“ – Bild 6.4

$$\begin{aligned}
 {}^4h_{s,i,III} &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r_s} \cdot \left[ E_s \cdot \rho \cdot h_m \cdot \psi \cdot (h_m - x_t) - E_s \cdot \psi \cdot \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] \cdot \frac{1}{r_i} dr \\
 &= E_s \cdot \psi \cdot \frac{1}{r_s} \cdot \left[ \rho \cdot h_m \cdot (h_m - x_t) - \frac{x_t^2}{2 \cdot n_0} \right] \cdot \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right)
 \end{aligned}
 \tag{6.46}$$



**Bild 6.8:** Grenzen für die Integrationsvariable „ $r_i$ “ für den Bereich „III“

6.1.6 Auflagerpressung und Gleichgewichtsbedingung

Abhängig von den Bereichsgrenzen innerhalb der Radien „ $r_1$ “ und „ $r_r = C / 2$ “ ergibt sich aus der Summe der Vertikalkomponenten „ $v_s = \sum v_{s,i}$ “ und der Summe der Horizontalkomponenten „ $h_s = \sum h_{s,i}$ “ die resultierende, auf den Stützensumfang schräg zulaufende Druckkraft:

$$k_s = \sqrt{v_s^2 + h_s^2} \tag{6.47}$$

Der zugehörige Neigungswinkel entsprechend Bild 6.1, identisch zu Bild 6.9, folgt damit zu:

$$\tan(\alpha_s) = \frac{v_s}{h_s}$$

$$\alpha_s = \arctan\left(\frac{v_s}{h_s}\right)$$

Die mittlere Auflagerpressung, abhängig von der geneigten Höhe der Biegedruckzone „ $x_n$ “, liefert die erste Bedingung zur Berechnung der beiden unbekanntenen Größen „ $x_t$ “ und „ $\psi$ “:

$$x_n = x_t \cdot \cos(\alpha_s)$$

$$\sigma_{c,s} = \frac{k_s}{x_n} = \frac{k_s}{x_t \cdot \cos(\alpha_s)} \tag{6.48}$$

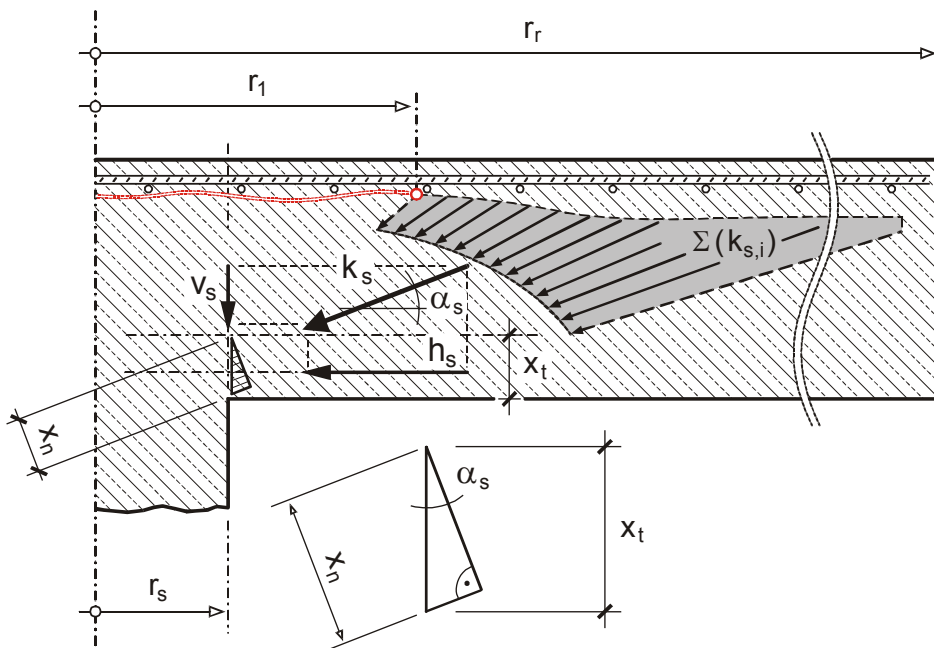


Bild 6.9: Summe der Kegelschalenkräfte „ $k_{s,i}$ “

Die notwendige Voraussetzung zur Berechnung einer Auflagerkraft ist die Wahl einer aufnehmbaren Stützenpressung „ $p_{c,s}$ “. Wie in [8] wird die resultierende Auflagerpressung „ $\sigma_{c,s}$ “ über den Ansatz einer aufnehmbaren Teilflächenbelastung festgelegt. Es soll gelten:

$$\sigma_{c,s} \leq \begin{cases} p_{c,s} = f_c \cdot \sqrt{\frac{r_s + h_m}{r_s}} \leq 3,0 \cdot f_c & \text{für : } h_m < 30 \text{ cm} \\ p_{c,s} = f_c \cdot \sqrt{\frac{r_s + 0,5 \cdot h_m}{r_s}} \leq 3,0 \cdot f_c & \text{für : } h_m \geq 30 \text{ cm} \end{cases}$$

Vergleichsberechnungen haben gezeigt, dass mit dem weiterentwickelten Modell die Teilflächenbelastungen im Wesentlichen von der Plattenhöhe (Maßstabseinfluss) abhängig sind. In Analogie zum Modell nach Andrä, ergänzt durch eine differenziertere Betrachtung der tangentialen Spannungsverteilung in der Biegedruckzone (Aufteilung in die Bereiche „I“ bis „III“) ergibt sich die zugehörige, vertikale Stützenkraft bzw. Durchstanzlast damit zu:

$$V_{c,u} = 2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot \left( \sum_{i=I}^{III} [ v_{s,i} ] \right) \quad (6.49)$$

Der mit Gleichung 6.28 angegebene Horizontalschub liefert mit der Durchstanzlast „ $V_{c,u}$ “ die zweite Bedingung für die gesuchten Größen „ $x_t$ “ und „ $\psi$ “. Mit dem inneren Hebelarm „ $z = (h_m - k_a \cdot x_t)$ “ zwischen den im Kapitel 6.1.4 hergeleiteten Druckresultierenden „ $D_c$ “ und der oberen Bewehrungslage lautet die Gleichgewichtsbedingung für das Momentengleichgewicht im Punkt „ $Q_2$ “ (analog zur Gleichung 6.28 begrenzt auf ein Plattenteilstück mit dem Winkel „ $\Delta\varphi$ “):

$$V_{c,u} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{C}{2} - (r_s + x_t) \right] = \sum_{i=I}^{III} \Delta\varphi \cdot R_{4,i,t} \cdot [ h_m - (k_{a,i} \cdot x_t) ] \quad (6.50)$$

Die Bezeichnungen zur Lage der Kraftresultierenden sowie die Geometrie sind im Bild 6.1 angegeben. Der Index „ $i$ “ und das Summenzeichen auf der rechten Seite der Gleichung 6.50 kennzeichnen, dass auch beim Momentengleichgewicht die veränderlichen statischen Höhen „ $z_i$ “ der drei Bereiche, in Abhängigkeit von den Betonranddehnungen an der Plattenunterseite bzw. der daraus resultierenden Spannungsverteilung berücksichtigt werden.

## 6.2 Durchstanzsicherung unter Anwendung eines schubfest angeschlossenen Stahlkreuzes – 2. Teil

In der vorangestellten Weiterentwicklung durch Kombination der mechanischen Ansätze von Andrä und den Schweden Kinnunen und Nylander wurde im besonderen Maße auf die radial „krümmungslose“ Verformung und auf die Rotation um den Winkel „ $\psi$ “ einer Stahlbetonplatte ohne Schubbewehrung eingegangen (Kapitel 6.1). Die Berechnungsergebnisse aus Kapitel 5 bestätigen u.a. mit der Gegenüberstellung der Verformungen (Bild 5.43 und 5.44), dass die Verbundlösung mit eingebautem Stahlkreuz einem identischen Verformungsverhalten bzw. ähnlichen Tragmechanismus gehorcht. Es darf angenommen werden, dass sich der innere Widerstand des Stahlbetonplattenanteils (für eine Innenstütze Rotationssymmetrie vorausgesetzt) im Sinne des Kapitels 6.1 über die Umlenkkräfte „ $u_{res}$ “ entwickelt und ausbildet.

Nachfolgend gelten somit die Angaben aus Kapitel 6.1 nahezu uneingeschränkt. Bei der Definition des Gleichgewichtszustandes müssen lediglich die hinzugefügten Konstruktionselemente berücksichtigt werden. Da sich durch das Stahlschwert ein nunmehr ausgeprägter radialer Spannungszustand einstellt, wird eine dritte Gleichgewichtsbedingung zur eindeutigen Bestimmung der radial gerichteten Höhe „ $x_r$ “ – der Biegedruckzone des Verbundträgers – erforderlich. Die Definition dieser Höhe „ $x_r$ “ über eine Gleichgewichtsbedingung erfolgt in den Vorbemerkungen zum Kapitel 6.2.2. Dies beinhaltet, dass im Gegensatz zum Kapitel 6.1 eine Lösung über drei zunächst unbekannte Parameter „ $x_t$ “, „ $x_r$ “ und „ $\psi$ “ gesucht wird.

### 6.2.1 Charakteristische Steifigkeit einer Betonplatte zum Zeitpunkt des Bruches

Reimann stellte bereits fest, dass die Steifigkeit einer Stahlbetonplatte von der Größe der tangentialen Dehnungen und somit auch von der Dehnungsverteilung über den Radius „ $r$ “ abhängig ist. Im Kapitel 2 wurde auf die Umlagerungsfähigkeit nach dem Auftreten des tangentialen Bruchrisses um die Stütze herum hingewiesen. Mit der aus Kapitel 6.1, Gleichung 6.27, bekannten und zum Zeitpunkt des Bruchzustandes überwiegend tangential ausgerichteten Druckspannungsverteilung kann für die praktische Anwendung das Steifigkeitsverhalten zuverlässig definiert werden. Mit der Übernahme der Aussagen aus Kapitel 2 gilt zunächst:

$$\Sigma (m_r + m_\varphi) \leq m_{\varphi, \text{Kreisringplatte}} \cong m_{u,t} \quad (6.51)$$

Setzt man das einzeln dargestellte Sektorelement – aus Bild 2.11 – wieder zu einem fächerartigen und geschlossenen Gelenkmechanismus entsprechend der Draufsicht im Bild 6.10 zusammen (FE-Rechenergebnis: Bild 5.8), so kann über die Betrachtung der inneren und äußeren Arbeit das Bruchmoment „ $m_u$ “ mit Bezug auf eine zugehörige, von der Rotation „ $\psi$ “ abhängige Steifigkeit „ $c_\varphi$ “ angegeben werden (mit: „ $m_\varphi \equiv m_t$ “):

$$c_\varphi \cdot \psi = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot (r_r - r_s) \cdot m_{u,t} \cdot \psi}_{\text{tangentiales Biegemoment}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot m_{u,r} \cdot \psi}_{\text{radiales Biegemoment am Stützenrand}}$$

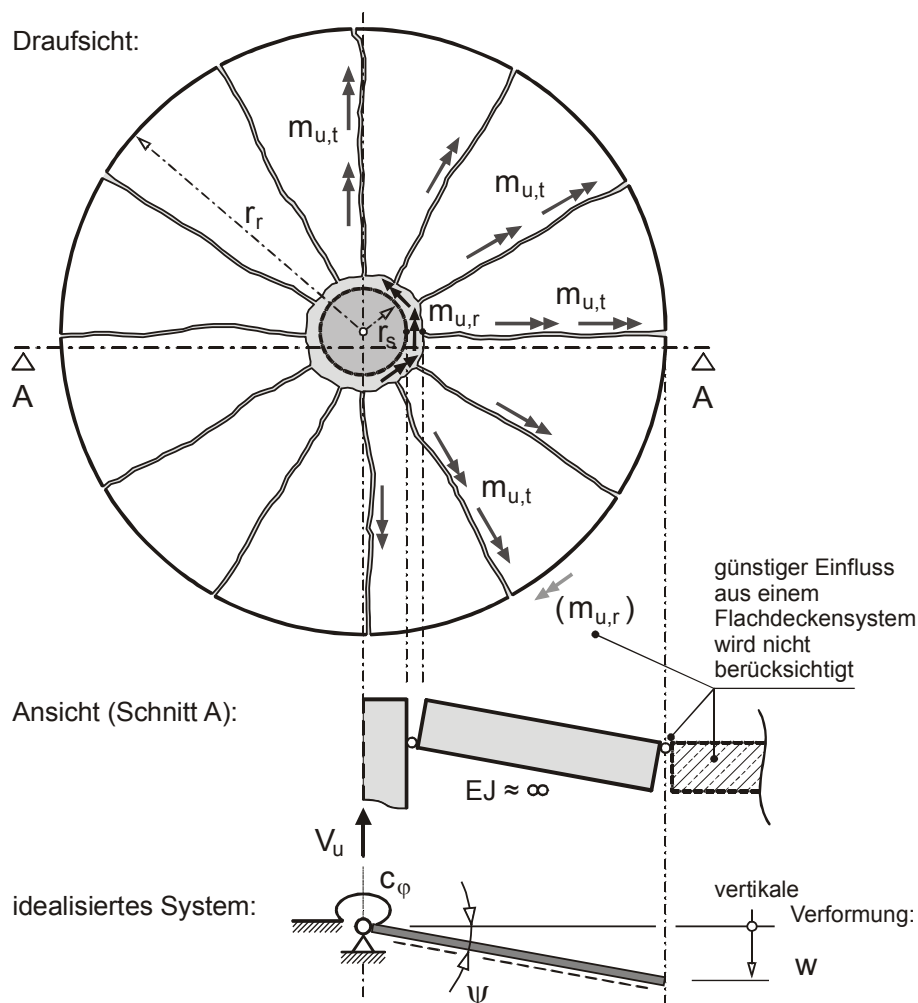
woraus unmittelbar erkennbar wird, dass daraus folgt:

$$c_\varphi = 2 \cdot \pi \cdot r_r \cdot m_{u,t} \quad (6.52)$$

Die Verteilung der überwiegend tangential gerichteten Druckspannungen über den Radius „ $r_r = C / 2$ “ ist mit Gleichung 6.28 bekannt. Auch das Biegebruchmoment „ $M_{u,t}$ “ wurde im Kapitel 6.1 angegeben. Es ist mit Bezug auf die obere Bewehrungslage identisch mit dem angegebene Plattenschub in Gleichung 6.50 – mit Beachtung der Gleichung 6.27. Damit gilt:

$$c_\varphi = \frac{M_{u,t}}{\psi} = \frac{\sum_{i=1}^{III} D_{c,i} \cdot [h_m - (k_{a,i} \cdot x_t)]}{\psi} \quad (6.53)$$

Es ist unwidersprochen, dass die Schubbeanspruchungen bei einem porösen Material im Wesentlichen über die Druckzonen übertragen werden (vgl. hierzu die Darstellung des Spannungsraumes Bild 3.17). Es liegt somit nahe, das Steifigkeitsverhältnis auch ausschließlich abhängig von dem tangential ausgerichteten Biegedruck zu definieren. Mit Bezug auf das nachfolgend angenommene Systemverhalten bzw. Ersatzsystem im Bild 6.10 wird an dieser Stelle auf eine Schlussfolgerung von Andrä in [ 8 ] hingewiesen. Er folgert aus der Gegenüberstellung von drei unterschiedlich gelagerten Platten (Kapitel 2, Bild 2.3), dass für den Fall des Nachweises, dass eine unbegrenzte Momentenumlagerung bei Stahlbetonplatten zwischen radialen und tangentialen Biegemomenten möglich ist: „so würde es genügen, die Summe der Radial- und Tangentialmomente zu bestimmen und entsprechend den aufnehmbaren Biegemomenten in radialer und tangentialer Richtung zu verteilen. Die Summe der Radial- und Tangentialmomente ist dabei ungefähr gleich dem Tangentialmoment einer Kreisringplatte“ – Bild 2.4.



**Bild 6.10:** Zur Berechnung der charakteristischen Steifigkeit einer Stahlbetonplatte Gelenkmechanismus entsprechend der Fließgelenktheorie, [91]

Reimann hat in seiner Arbeit [96] gleichfalls darauf hingewiesen, dass die Berechnung der Steifigkeit „ $K$ “ einer Kreisplatte stark von der Größe der tangentialen Dehnungen abhängig ist. Die zweite Ableitung nach der Verschiebung „ $w$ “ ist ein Maß für die Krümmung in radialer Richtung (aus: [96]: „ $m_t = -K \cdot \{w' / r + \nu \cdot w''\}$ “). Dieser bei Kreisringplatten kleine Wert für „ $w''$ “ muss zusätzlich mit der Querdehnung „ $\nu$ “ multipliziert werden und verliert an Bedeutung. Die Berechnung der Plattensteifigkeit ausschließlich über die tangential gerichteten Biegedruckkräfte „ $D_c$ “ unter der Voraussetzung einer krümmungslosen Rotation um den Winkel „ $\psi$ “ ist auch nach den Erkenntnissen von Reimann berechtigt.

## 6.2.2 Das Verbundsystem und zugehörige Konstruktionselemente

Es wird vorweggenommen, dass die bedingungslose Übernahme der im Kapitel 6.1 definierten Umlenkkräfte „ $u_{res}$ “ für die Verbundlösung zunächst eine konservative Betrachtung ist. Sie soll deshalb ausschließlich für die gesuchte Traglast vorausgesetzt werden. Die FE-Berechnungen zeigen anschaulich, dass das Stahlkreuz zu einer eindeutig radial ausgeprägten Spannungsverteilung, quasi additiv zum darunterliegenden tangential ausgerichteten Spannungszustand führt. Es darf angenommen werden, dass die geneigten Druckstreben infolge „ $u_{res}$ “ unter Gebrauchslasten schon weit vor der Stütze schräg auf diese radialgerichteten Druckgurte, verankert mit dem Stahlkreuz über Kopfbolzen, zulaufen. Damit wird die resultierende innere Beanspruchung der Betonplatte in Stützennähe infolge „ $u_{res}$ “ zumindest unter Gebrauchslasten geringer sein.

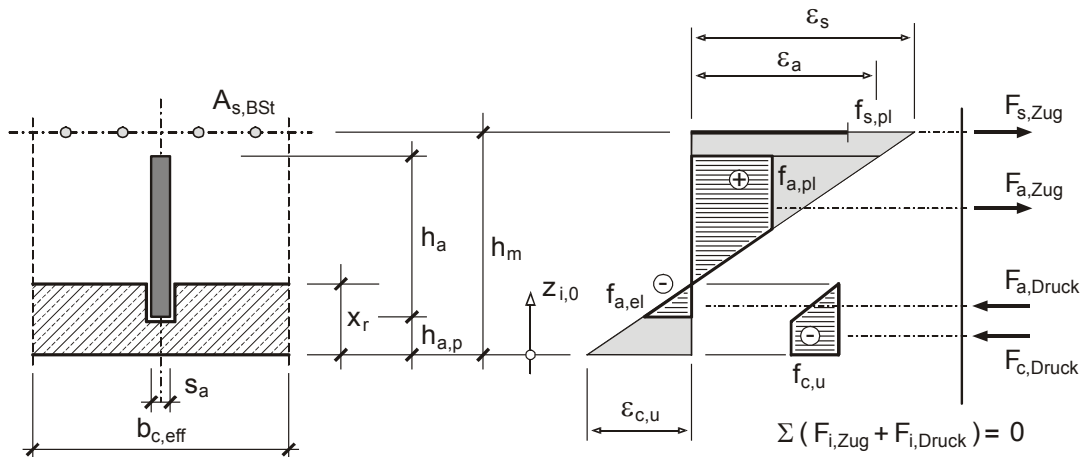
Dass die Annahmen für ein gesuchtes Traglastverhalten jedoch realistisch sind, bestätigen Versuchsbeobachtungen mit eingebauten Schubarmen von Corley und Hawkins ([54], [55]). Kurz vor dem Eintreten des Bruchzustandes konnten sie mit den aus gemessenen Dehnungen zurückgerechneten Schubbeanspruchungen einen über die Schubarmlänge deutlichen Zuwachs der Querkraft im Stahlprofil unmittelbar an der Stütze feststellen. Mit dieser Beobachtung begründen sie eine idealisierte, in zwei Stufen eingeteilte Querkraftbeanspruchung über die Schubarmlänge. Ihre idealisierte Querkraftverteilung beinhaltet eine starke Konzentration in Stützennähe innerhalb eines Abstandes, welcher ihrer Einschätzung nach etwa der Plattenhöhe entspricht. Demnach wird der Verbund zwischen Stahlprofil und Betonquerschnitt bei dem amerikanischen System zum Zeitpunkt des Bruches in hohem Maße geschädigt sein. Unter der maximal möglichen, systemabhängigen Rotation „ $\psi$ “ wird dies dazu führen, dass die geneigten Druckstreben wieder direkt auf die Stütze zulaufen.

Für die zuverlässige Definition des Modells der neu entwickelten Durchstanzsicherung und seines mechanischen Verhaltens zum Zeitpunkt des Bruches müssen zwei Fragen eindeutig beantwortet werden:

- wie groß ist der Lastanteil, den das Stahlkreuz am Ende der Stege über die Auflagerteller direkt aufnehmen kann, und
- wie groß ist die Querkraft im Stahlbauteil am Stützenanschnitt, d.h. wieviel Lastanteile können durch das noch mögliche Zusammenwirken zwischen Stahl- und Betonbauteil für den ungünstigsten Fall vom radial gerichteten Druckgurt über die Schwertlängen der Betonplatte entzogen werden ?

Der zuerst genannte Lastanteil wird im Kapitel 6.2.2.1 über Formänderungsbeziehungen abgeleitet. Beschreibungen zu den maßgebenden Einflüssen auf das Zusammenwirken von Stahl- und Betonquerschnitt sind in den Kapiteln 6.2.2.2 und 6.2.2.3 angegeben. Sie gründen sich auf Erkenntnissen aus der FE-Berechnung, deren Ergebnisse wiederum durch Versuchsbeobachtungen (Eigen- und Fremdversuche) abgesichert und bestätigt sind – Kapitel 5.

Der idealisierte Verbundquerschnitt ist im Bild 6.11 dargestellt. Die gewählte Breite „ $b_{c,eff}$ “ des radial ausgerichteten Druckgurtes bezieht sich auf den vorhandenen Stützendurchmesser oder alternativ auf die Breite einer Rechteckstütze.



**Bild 6.11:** Verbundquerschnitt im Zustand „II“ – in radialer Richtung wirksam

Die Wahl dieser effektiven Breite „ $b_{c,eff}$ “ für das Bemessungsmodell stützt sich auf die im Kapitel 5 diskutierten radialen Dehnungszustände und Hauptspannungsverläufe innerhalb der Ebene der unteren Dübelreihe bzw. des Auflagertellers. Die Bilder 5.80 und 5.81 zeigen, dass sich nahezu unabhängig von der Schwertlänge und zwar insbesondere nahe am Stahlträgersteg, also in der unmittelbaren Einwirkungszone der horizontal angeordneten Kopfbolzen, deutlich lokale Beanspruchungen durch Schubkräfte (hervorgerufen durch die Verbundwirkung der gewählten Idealisierung für die Kopfbolzen) einstellen. Eine Ausnahme könnte lediglich in der Darstellung des Bildes 5.80b gefunden werden. Außerhalb der Breite des Stützenquerschnitts herrscht ein überwiegend gleichmäßiger, zweiachsender Spannungszustand parallel zur Plattenebene.

Die Berechnung der Höhe „ $x_r$ “ des radial gerichteten Druckgurtes erfolgt wie bei der tangential gerichteten Höhe „ $x_t$ “ (Kapitel 6.1) über eine dehnungsbegrenzte Berechnung. Mit der Vorgabe einer radialen Grenzdehnung „ $\epsilon_{c,u,r}$ “ an der Plattenunterseite – in Analogie zu Bild 6.3 – kann mit der Forderung, dass die Summe der horizontalen Belastungsanteile identisch Null ist (Bild 6.11:  $\sum (F_{i,Zug} + F_{i,Druck}) = 0$ ), ein Gleichgewichtszustand eindeutig bestimmt werden. Dies setzt wieder (stillschweigend) die Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese voraus.

Nach Durchführung der eigenen Versuche wurde festgestellt – auch mit Hilfe der FE-Berechnung –, dass die obere Reihe der horizontal angeordneten Kopfbolzen nur sehr geringe Schubkräfte einsammeln konnte. Sie lagen allesamt innerhalb der Zugzone. Die Dübel hätten in die obere Bewehrungslage verankert werden müssen, wie es bei den Dübelleisten gefordert wird. Bei einer Dübelleiste müssen die Dübelköpfe durch die Maschen der oberen Zugbewehrung hindurchgreifen (z.B. [11]), um so das Knotengleichgewicht innerhalb des idealisierten

Fachwerkmodells zu gewährleisten. Will man das Lösen der oberen Bewehrungslage aufgrund der vom Beton nicht mehr aufnehmbaren horizontal bzw. parallel zur Plattenebene wirkenden Schubkräfte verhindern, gilt dieser konstruktive Grundsatz zum „System mit Dübelleiste“ auch für das hier vorgestellte „Verbundsystem“. Da dies bei den Versuchsdurchführungen nicht beachtet wurde, wird für alle in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungen ein Verbundquerschnitt betrachtet, der lediglich aus dem Stahlträgerquerschnitt und dem Betondruckgurt gebildet ist. Aus diesem Grund wurde im Bild 6.11 eine nur schwache Darstellung des längs zum Stahlträger verlaufenden Betonstabstahls (mit der Fläche: „ $A_{s,BSt}$ “) gewählt. Auf weitere Einzelheiten und Schlussfolgerungen wird im Kapitel 7.2 eingegangen.

### 6.2.2.1 Verträgliche Formänderung für vertikale Verschiebungen

Ein in die Stahlbetonplatte eingebundenes Stahlkreuz muss voraussetzungsgemäß die gleiche vertikale Verschiebung erleiden wie die Platte selbst. Um Aufschluss über die gemeinsame Formänderung in dem auch als Lasteinleitungspunkt ausgezeichneten Schwertende zu bekommen, werden zunächst zwei Ersatzsysteme definiert. Die Ersatzsysteme sollen über eine Formänderungsberechnung und die daraus mögliche Zuordnung der Arbeitsbeiträge eine zuverlässige Aussage über die Größe der direkt bzw. unmittelbar am Auflagerteller in den Stahlträgerquerschnitt eingetragenen Querkraft liefern. Dies gilt insbesondere für sehr kurz gewählte Stahlträgerlängen (z.B. für „ $L \approx 2,5h$ “).

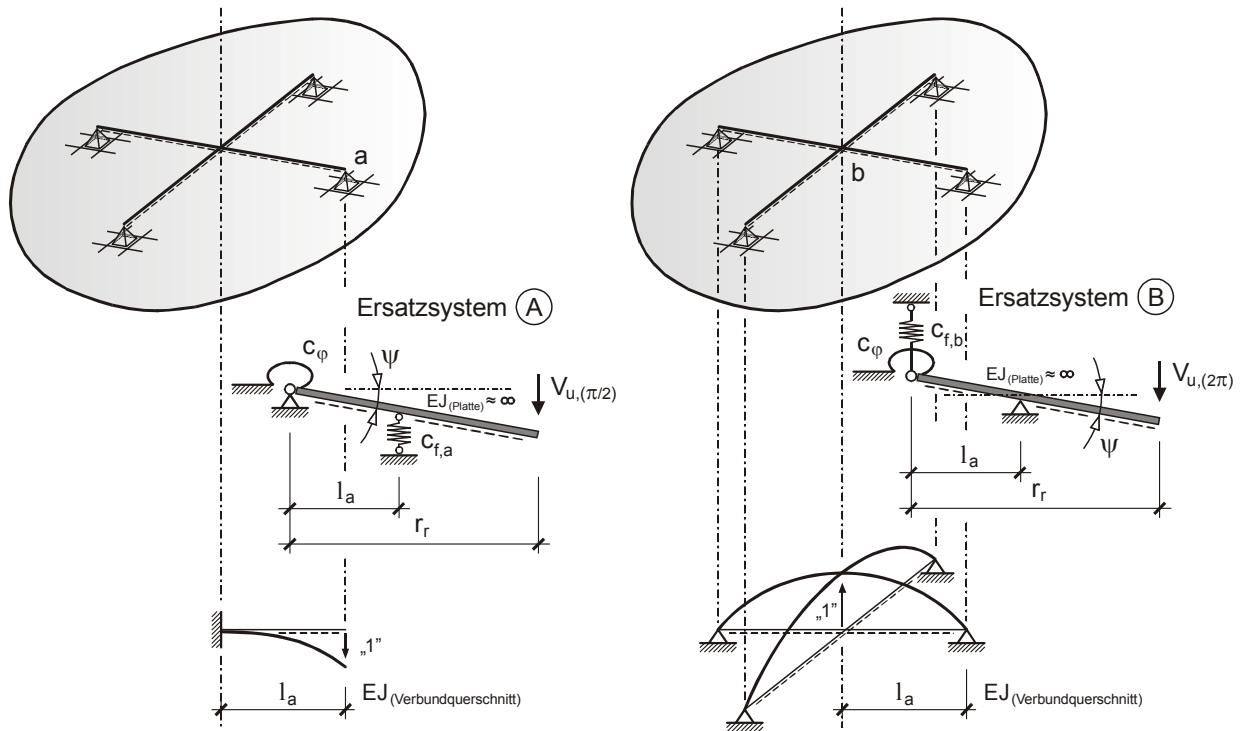
Die zwei gewählten Ersatzsysteme zeigt das Bild 6.12. Eine besondere Eigenschaft dieser Modelle ergibt sich wieder aus der Erkenntnis einer nahezu krümmungslosen Rotation der Platte – auch mit eingebautem Stahlträger. Es wird angenommen, dass das Stahlprofil und die radial gerichteten Druckspannungen nur in einem vernachlässigbar geringen Maße Einfluss auf die vertikalen Verschiebungen ausüben. Die Formänderung des Gesamtsystems wird daher zunächst nur über die Steifigkeit der Stahlbetonplatte definiert. Sie resultiert mit Gleichung 6.53 aus den überwiegend tangential ausgerichteten Spannungszuständen.

Der Arbeitsbetrag des in radialer Richtung wirksamen Verbundquerschnitts lässt sich mit Ersatzsystem A durch die Anordnung einer Wegfeder am Lasteintragungsort bzw. am Schwertende definieren. An der Stelle „a“ soll abhängig vom Widerstand des integrierten Verbundquerschnittes – im Bild 6.12 mit „ $c_{f,a}$ “ bezeichnet – die innerlich statisch unbestimmte Schnittgröße „ $V_{a,X1}$ “ berechnet werden. Mit den Querschnittswerten für den gerissenen Zustand ergibt sich für den im Bild 6.11 gezeigten Verbundquerschnitt die Ersatzsteifigkeit zu:

$$c_{f,a} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{I_a^3}{3 \cdot E_a \cdot I_{i,0}} + \frac{\kappa_a \cdot I_a}{G_a \cdot A_a}} \quad (6.54)$$

Für den Schubkorrekturfaktor „ $\kappa_a$ “ des Stahlträger-Querschnitts enthält die einschlägige Literatur zahlreiche Vorschläge (z.B. in [93]). Vom Verfasser wurde bei den Vergleichsberechnungen entsprechend einem Vorschlag aus [61] einheitlich für „ $\kappa_a$ “ der Wert „1,1“ angewendet. Alle Gegenüberstellungen mit den Ergebnissen der FE-Berechnungen führten mit dieser Annahme zu sehr guten Übereinstimmungen. Die Länge „ $l_a$ “ in Gleichung 6.54 entspricht der Systemlänge (= Steglänge) des Stahlschwertes.





**Bild 6.12:** Modell zur Definition eines verträglichen Verformungszustandes

Entsprechend der Darstellung im Bild 6.12 kann die Gesamtformänderung an der Stelle „a“ durch eine Elastizitätsgleichung beschrieben werden. Es wird darauf hingewiesen, dass die Annahmen bezüglich der Steifigkeiten, dies gilt insbesondere für die Annahme der Plattensteifigkeit „ $c_\varphi$ “ (Gleichung 6.53), sich immer auf den gesuchten Bruchzustand beziehen. Dies wurde ausführlich im Kapitel 6.1 beschrieben.

Die Elastizitätsgleichung für das Ersatzsystem A – Bild 6.12:

$$X_1 \cdot \left( \frac{l_a^2}{c_\varphi} + \frac{1}{c_{f,a}} \right) + \left( \frac{V_u \cdot (r_r) \cdot l_a}{c_\varphi} \right) = 0$$

liefert die gesuchte, am Auflagerteller direkt wirksam werdende, eingeleitete Vertikallast:

$$X_1 \equiv \tilde{V}_{a, X1} = - \frac{V_u \cdot (r_r) \cdot l_a}{l_a^2 + \frac{c_\varphi}{c_{f,a}}} \quad (6.55)$$

Da Gleichung 6.55 mit Bezug auf die gesamte äußere Belastung „ $V_u$ “ des Plattensystems angewendet wurde, ergibt sich die auf das Einzelschwert (Annahme: „ $n = 4$ “) entfallende Vertikallast zu:

$$V_{a, X1} = \frac{1}{n} \cdot \tilde{V}_{a, X1} = \frac{1}{4} \cdot \tilde{V}_{a, X1} \quad (6.56)$$

Abhängig von dieser Vertikallast muss nachfolgend der Querkraftanteil bestimmt werden, der sich aus den vertikal gerichteten Spannungsanteilen innerhalb des Plattensystems einstellen wird (entsprechend dem Ergebnis der FE-Berechnung: u.a. Bild 5.53). Dieser Querkraftanteil

soll nachfolgend als induzierter Lastspannungszustand bezeichnet und verstanden werden. Bei der Gleichgewichtsbetrachtung am Ende dieses Abschnittes im Kapitel 6.2.3 ist die Kenntnis des Betrags dieser eingepprägten Beanspruchung in das Stahlschwert von Bedeutung, da er keinen Einfluss auf das Momentengleichgewicht im Punkt „ $Q_2$ “ ausübt. Durch ein Versatzmoment, hervorgerufen durch die am Außenrand der Kreisringplatte wirkende Belastung resultiert ein Kräftepaar, das über die (vier) Lagerteller und über die Kopfplatte – in Stützenachse – in das Stahlkreuz eingeleitet wird. Das Kräftepaar bewirkt im hier untersuchten rotationssymmetrischen Fall eine über alle Stahlschwerter konstant verteilte Querkraftbeanspruchung. Bild 5.48 zeigt über die vertikalen Spannungen „ $\sigma_{c,z}$ “, wie diese Beanspruchung von der Stahlbetonplatte auf das Stahlprofil abgetragen wird.

Die zweite mit Bezug auf das „Ersatzsystem B“ im Bild 6.12 definierte Elastizitätsgleichung liefert für die statisch Überzählige „ $X_2$ “ mit „ $c_{f,b} = 4 \cdot c_{f,a}$ “:

$$X_2 \cdot \left( \frac{c_{f,b} \cdot l_a^2 + c_\varphi}{c_{f,b} \cdot c_\varphi} \right) + V_u \cdot \frac{r_r - l_a}{l_a} \cdot \left( \frac{c_{f,b} \cdot l_a^2 + c_\varphi}{c_{f,b} \cdot c_\varphi} - \frac{1}{c_{f,b}} \right) = 0$$

Der gesuchte, induzierte Lastspannungszustand „ $X_2 \equiv \tilde{V}_{a,X2}$ “ ist direkt abhängig von der am Auflagerteller tatsächlich wirksamen, einzuleitenden Kraft. Mit Bezug auf „ $\tilde{V}_{a,X1}$ “ erhält man somit unter Berücksichtigung der Gleichung 6.55 nach Umformen:

$$\tilde{V}_{a,X2} = \tilde{V}_{a,X1} \cdot \left( \frac{1}{\frac{r_r - l_a}{c_\varphi} + 1} - 1 \right) \quad (6.57)$$

Auf das einzelne Schwert entfällt damit eine über die Schwertlänge konstant bleibende Querkraft innerhalb des Stahlquerschnitts (entsprechend der Darstellung im Bild 6.18) analog zu Gleichung 6.56 mit dem Betrag (Annahme: „ $n = 4$ “):

$$V_{a,X2} = \frac{1}{n} \cdot \tilde{V}_{a,X2} = \frac{1}{4} \cdot \tilde{V}_{a,X2} \quad (6.58)$$

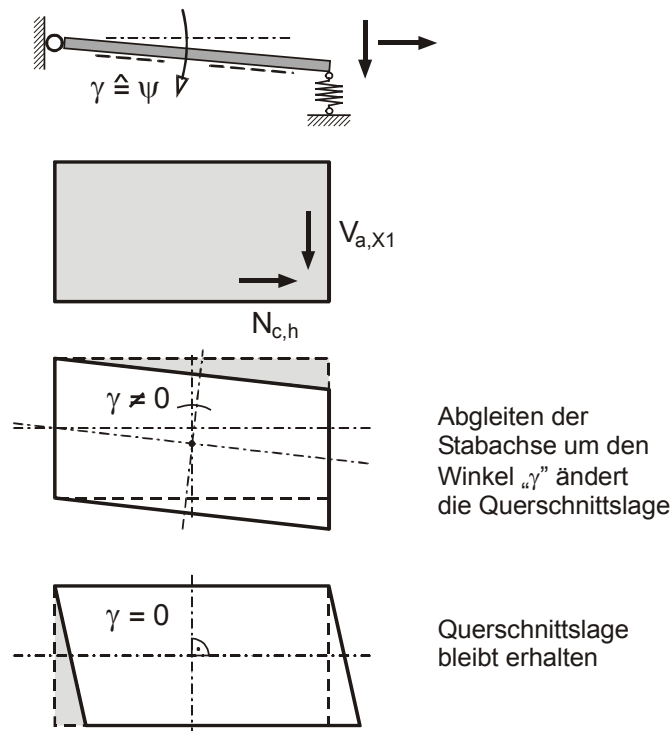
Der Anteil „ $V_{a,X2}$ “ aus dem zweiten Ersatzsystem resultiert mechanisch aus dem Ergebnis von zwei hintereinandergeschalteten Federn. Die geringere Federsteifigkeit (Betonplatte oder Verbundquerschnitt) wird somit immer dazu beitragen, die Größe des eingepprägten Beanspruchungszustandes unmittelbar zu beeinflussen bzw. zu reduzieren. Diese aus der Konstruktion resultierende Querkraft des Stahlprofils befindet sich in einem inneren Gleichgewichtszustand zwischen Auflagerteller und der oberen Kopfplatte im Stützenbereich. Dies muss im Kapitel 6.2.3 bei der Gleichgewichtsbetrachtung am Gesamtsystem entsprechend berücksichtigt werden.

### 6.2.2.2 Schubnachgiebigkeit des Schwertes

Im Kapitel 6.2.2.1 wurde die Schubgleitung des Stahlprofils zur Minderung der Steifigkeit des Verbundquerschnitts beachtet und in Gleichung 6.54 zur Berechnung des vertikalen Widerstandes berücksichtigt. In Bild 6.13 ist diese vertikale Formänderung und der Einfluss auf das Ver-

hältnis der Querschnittslage zur horizontalen Stabachse infolge der einwirkenden Querkraft „ $V_{a,X1}$ “ dargestellt.

Die Schubspannungen sind bei dem gewählten Rechteckprofil des Stahlträgers über die Höhe veränderlich. Daraus resultiert ein über die Höhe veränderlicher Gleitwinkel, demzufolge eine Versetzung bzw. Verwölbung der Querschnittsfläche eintritt. Die Bernoulli-Hypothese verliert ihre Gültigkeit [93]. Mit dem Schubkorrekturfaktor „ $\kappa_s$ “ kann dieser Einfluss der Schubverzerrung, insbesondere ausgeprägt bei gedrungenen Rechteckquerschnitten, für baupraktische Zwecke ausreichend erfasst werden. Die vertikale Änderung der Querschnittsachse infolge Abgleiten der Stabachse um einen Gleitwinkel „ $\gamma$ “ wurde somit berücksichtigt.



**Bild 6.13:** Zur Änderung der Richtungslage der Profilachse des Schwertes

Wie Bild 6.13 zeigt, kann sich jedoch eine zusätzliche Formänderung, insbesondere bei kurz gewählten Längen für das Stahlprofil, infolge der horizontal auf die innere Stirnseite des Auflagertellers einwirkenden Kraft „ $N_{c,h}$ “, einstellen. Wie nachfolgend aufgezeigt wird, bewirkt die Berücksichtigung der horizontalen Schubnachgiebigkeit eine Reduzierung des Anpressdruckes an die genannte Stirnseite des Auflagertellers.

Würde nur der alleinige Einfluss aus der Dehnungsbehinderung des im Beton eingebetteten Stahlprofils berücksichtigt (Beton gilt als „inkompressibel“), so ergäbe sich mit der Exzentrizität „ $e_{N,p}$ “ (Bild 6.16) des Auflagertellers zur Schwerlinie „ $z_{i,0}$ “ des Verbundquerschnitts eine horizontale Verformung:

$$\Delta r_{\text{System},h} = \psi \cdot e_{N,p}$$

Die Größe der daraus nur über die Dehnsteifigkeit des Stahlprofils rechnerisch abgeleiteten Horizontalkraft „ $N_{c,h} = A_{V,v} \cdot E_a \cdot \Delta r_{N,h} / I_s$ “ kann jedoch weder mit den Versuchsergebnissen, noch mit der FE-Berechnung eindeutig bestätigt werden. Aus diesem Grund wird die horizontale

Verschiebung des Auflagertellers um einen Anteil, der aus der horizontalen Schubnachgiebigkeit des Stahlprofils resultiert, reduziert:

$$\Delta r_{Pr\,ofil,h} = \kappa_a \cdot \frac{N_{c,h}}{G_a \cdot A_{V,h}} \cdot h_a$$

Die Überlagerung der gegensätzlichen Verschiebungsanteile „ $\Delta r_{N,h} = \Delta r_{System,h} - \Delta r_{Pr\,ofil,h}$ “ führt dann auf eine abgeminderte Reaktionskraft für die Stirnkanten des Auflagertellers. Mit „ $N_{c,h} = A_{V,v} \cdot E_a \cdot \Delta r_{N,h} / l_s$ “ ergibt sich die Verschiebung, die nunmehr auch den horizontalen Schubverzerrungseinfluss berücksichtigt, zunächst zu:

$$\Delta r_{N,h} = \frac{\psi \cdot e_{N,p}}{1 + \kappa_a \cdot \frac{h_a^2 \cdot 2 \cdot (1 + \nu_a)}{l_s^2}} \quad (6.59)$$

Mit der Verschiebungskomponente „ $\Delta r_{N,h}$ “ kann durch die Wahl einer tatsächlich wirksamen und realistischen Steifigkeit „ $\tilde{c}_F$ “ die auf den Auflagerteller einwirkende horizontale Normalkraft bestimmt werden – mit: „ $N_{c,h} = \tilde{c}_F \cdot \Delta r_{N,h}$ “. Für den Schubkorrekturfaktor wird wieder „ $\kappa_a = 1,1$ “ angenommen. Die Querdehnung für das Stahlprofil wird mit „ $\nu_a = 0,3$ “ berücksichtigt.

Zur Berechnung dieser Ersatzsteifigkeit „ $\tilde{c}_F$ “ lassen sich nach Ansicht des Verfassers vermutlich viele sinnvolle Annahmen treffen. So könnten beispielsweise ganz unterschiedliche Ansätze für den Betonquerschnitt bei kurzen und bei lang gewählten Stahlträgern gefunden werden. Es handelt sich ja, und dies gilt ganz besonders für den auflagernahen Bereich, um einen mehraxialen Spannungszustand, der zudem noch durch die zu berechnende Horizontalkraft örtlich beeinflusst wird. Die einfachste Variante, eine mit hintereinandergeschalteten Federn, wird vom Verfasser bevorzugt. Zur Berechnung dieser Feder wird näherungsweise die Breite der Stütze und die Höhe „ $x_r$ “ der radial ausgerichteten Biegedruckspannungen im Bereich der Kopfbolzen berücksichtigt. Die Höhe „ $x_r$ “ wird um den Faktor „ $2/3$ “ reduziert, um den Dehnungsgradienten näherungsweise erfassen zu können. Wird eine direkte Lastabtragung angenommen, ergibt sich die Länge aus dem Abstand zwischen der Stirnfläche des Tellers bis zur Stützenaußenkante. Diese Annahme würde im realen System eine Erhöhung des Anpressdruckes auf die Stütze bewirken. Dieser Anpressdruck hat dann wiederum einen günstigen Einfluss auf die Schubtragfähigkeit des Betons – im realen System – wie die eigenen Versuchsergebnisse aus dem Versuch 3 im Vergleich zu Versuch 1 gezeigt haben. Die aus diesen Überlegungen erforderlichen Überlagerungen – zumindest im Hinblick auf das Stahlprofil – werden jedoch im hier vorgestellten Bemessungsmodell vernachlässigt.

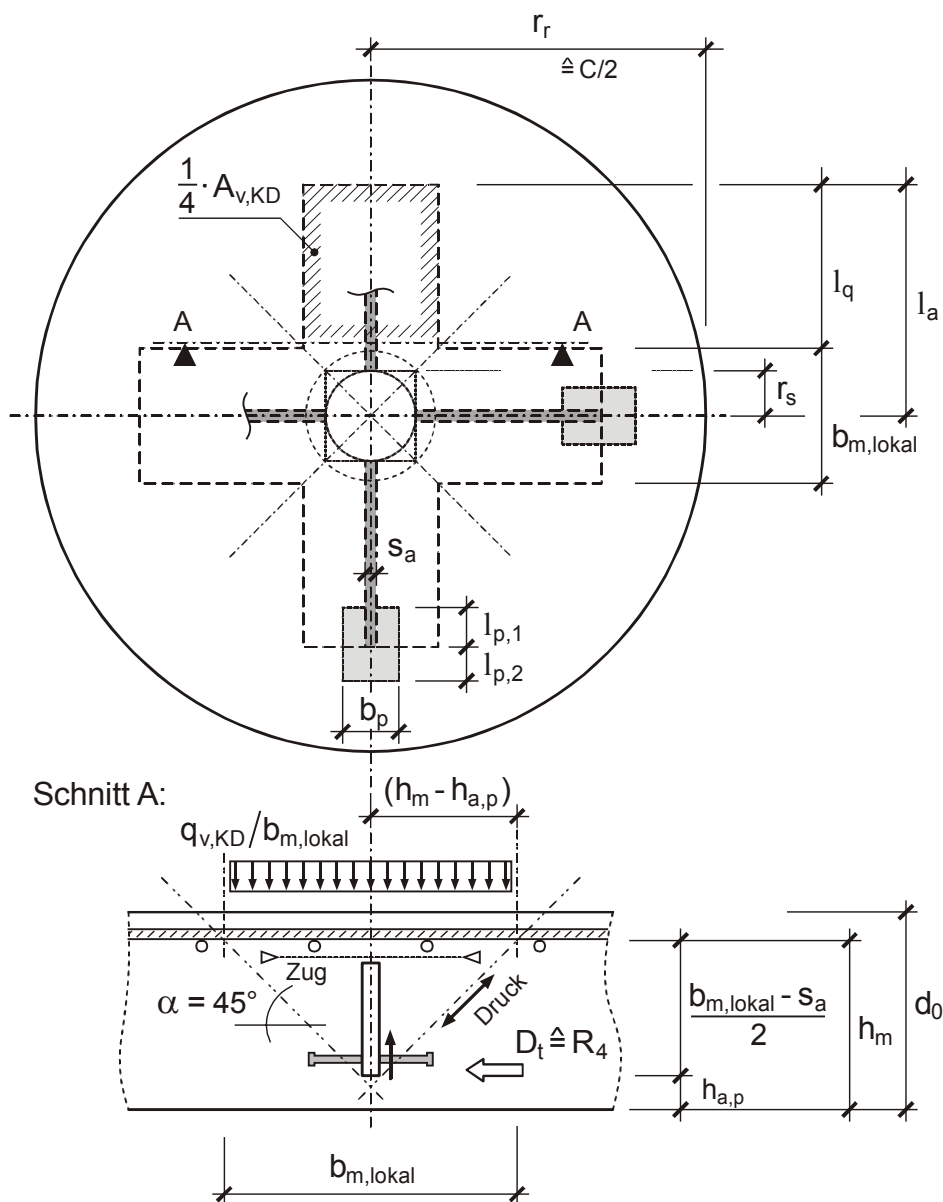
### 6.2.2.3 Anteilige Querkraft im Schwert am Stützenanschnitt

Mit Ausnahme der Querkraft am Stützenanschnitt im Steg des Stahlprofils sind alle wesentlichen Einwirkungen auf das Verbundsystem bzw. alle wesentlichen aus dem Stahlkreuz resultierenden Einflussgrößen bekannt. Die FE-Berechnungen haben gezeigt, dass kurz vor Erreichen des Bruchzustandes die vertikal ausgerichteten Dübelkräfte sich nahezu gleichmäßig verteilt über die gesamte Trägerlänge einstellen (im Gegensatz zu den Schubarmen!). Es ist somit mechanisch erforderlich, die lokalen Kopfbolzen-Reaktionen unmittelbar am Stahlkreuz, entspre-

chend dem gezeigten Querschnitt im Bild 6.14 (Schnitt A) – in die Gleichgewichtsbetrachtungen mit einzubeziehen. Über die Bruchlast „ $V_u$ “ und den Außenradius „ $r_r = C/2$ “ kann zunächst eine gleichmäßig verteilte Flächenlast berechnet werden. Mit der Annahme eines Lasteinzugbereichs von ca.  $45^\circ$ , der Plattenhöhe „ $h_m$ “ und der Stegdicke „ $s_a$ “ kann sodann

- die Lasteinleitungsbreite „ $b_{m, lokal}$ “ für die vertikale Beanspruchung der unteren und in der Druckzone eingebundenen Kopfbolzendübel:

$$\frac{1}{2} \cdot b_{m, lokal} \approx \frac{1}{2} \cdot [ 2 \cdot (h_m - h_{a,p}) + s_a ] \quad \left\{ \begin{array}{l} r_s \\ b_{c, eff} / 2 \end{array} \right.$$



**Bild 6.14:** Direkte Lasteinwirkungen auf das Verbundsystem

- die „bezogene“ Gesamtfläche „ $A_{Sys}$ “ für die gesuchte, aufnehmbare Stützenlast „ $V_u$ “:

$$A_{Sys} = \pi \cdot (C/2)^2$$

- und die resultierende, über die Länge „ $l_q$ “ (Glg. 6.61) anzusetzende Linienlast „ $q_{v,KD}$ “:

$$q_{v,KD} = \frac{V_u}{A_{Sys}} \cdot b_{m,lokal} \tag{6.60a}$$

berechnet werden. Daraus resultiert eine vertikale Scherkraft für den Einzeldübel, beidseitig mit dem Abstand „ $e_q$ “ angeordnet, in Höhe von:

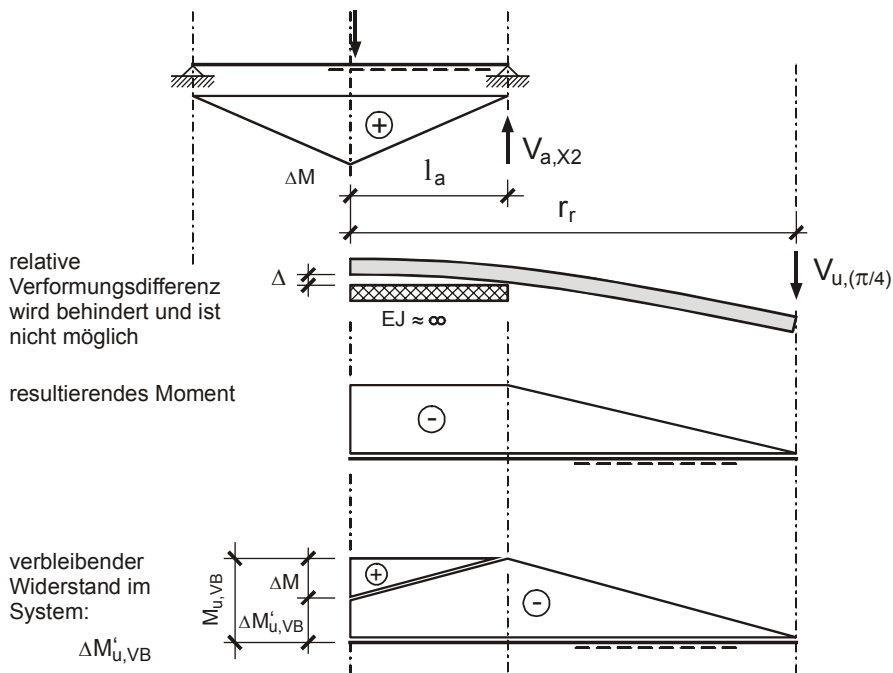
$$P_{v,KD} = \frac{1}{2} \cdot q_{v,KD} \cdot e_q \tag{6.60b}$$

Zur Vermeidung einer Überschneidung der zuvor berechneten Linienlast „ $q_{v,KD}$ “ lässt sich zusätzlich ein Einflussbereich längs des Stahlträgers, zuvor mit „ $l_q$ “ bereits genannt, definieren:

$$l_q = (l_a + l_{p,2}) - \left[ \left\{ \frac{b_{m,lokal}}{r_s} \right\} + \frac{2}{3} \cdot \sum l_p \right] \tag{6.61}$$

Es darf angenommen werden, dass der im Bereich der Stütze liegende Anteil der Linienlast „ $q_{v,KD}$ “ gemäß der Darstellung im Bild 6.16 über die Länge von ca. „ $b_{m,lokal} / 2$ “ entfällt bzw. direkt in die Stütze eingeleitet wird. Dies ist symbolisch im Bild 6.14 dadurch gekennzeichnet, dass nur die äußere und verbleibende Lasteingangsfläche „ $A_{v,KD} / 4$ “ schraffiert dargestellt ist.

Bevor über eine lokale Momentengleichgewichtsbedingung die gesuchte Querkraft „ $V_{a,A1}$ “ eines einzelnen Schwertes am Stützenanschnitt berechnet werden kann, muss der aus Kapitel 6.2.2.1 bekannte induzierte Beanspruchungszustand „ $V_{a,X2}$ “ in geeigneter Weise in die Gleichgewichtsbetrachtung aufgenommen werden.



**Bild 6.15:** Induzierter Spannungszustand infolge Versatzmoment „ $\Delta M$ “

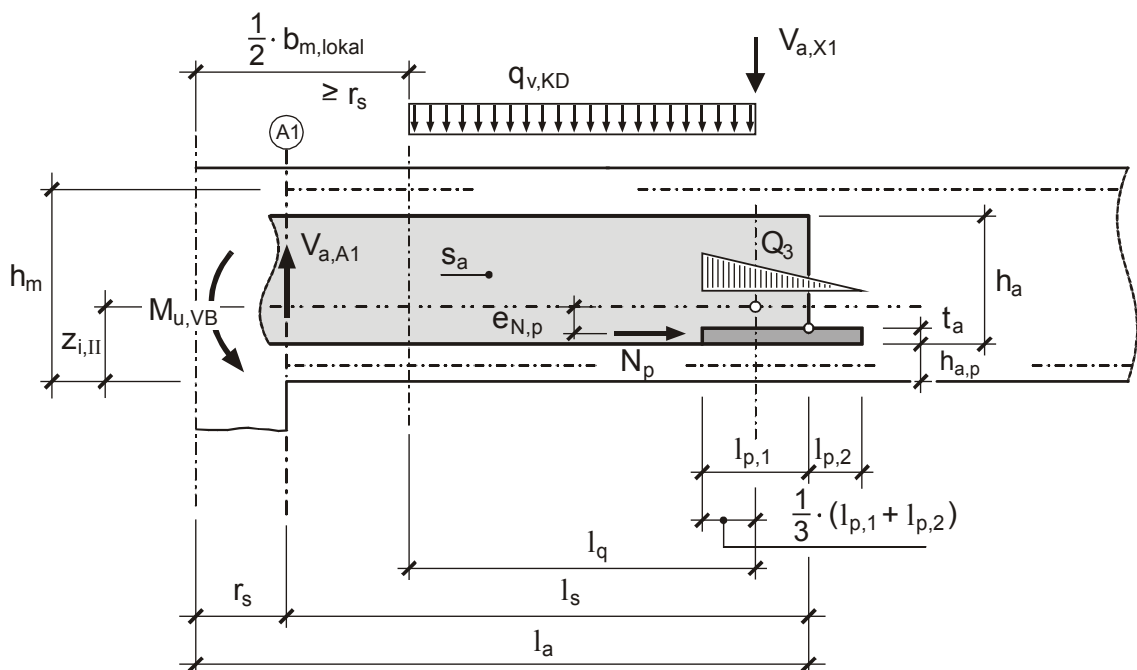
Wäre entsprechend der Verformungsdarstellung im Bild 6.15 keine Behinderung der dargestellten Verformung „ $\Delta$ “ vorhanden, so ergäbe sich auch kein in sich geschlossener Spannungszustand. Die aus Gleichung 6.58 bekannte Zwangsschnittgröße infolge der äußeren Belastung würde nicht existieren. Da ein derart dargestelltes Abheben der Platte im Stützbereich konstruktiv nicht möglich ist (aufgrund der Behinderung durch eine Kopfplatte und/oder Lasteinwirkungen der darüber angeordneten Stütze), muss zur Wiederherstellung des Zusammenhangs zwischen inneren und äußeren Schnittgrößen der innere Gleichgewichtszustand mit Hilfe der bekannten Zwangsschnittgröße „ $V_{a,X2}$ “ vom äußeren Gleichgewichtszustand getrennt werden.

Zur Berechnung der Querkraft „ $V_{a,A1}$ “ am Stützenanschnitt muss das „wirksame Biegemoment“ innerhalb des Verbundsystems um den Anteil:

$$\Delta M_{(V_{a,X2})} = \frac{1}{4} \cdot \tilde{V}_{a,X2} \cdot l_a = V_{a,X2} \cdot l_a$$

reduziert werden. Damit wird der konstruktiv bedingte, eingeprägte Spannungszustand gemäß der Gleichung 6.58 ausreichend genau erfasst. Es wird hier jedoch darauf hingewiesen (vorgezogen), dass bei der Gleichgewichtsbetrachtung am Gesamtsystem – nachfolgend im Kapitel 6.2.3 behandelt – wieder der gesamte freigeschnittene Widerstand des Verbundsystems, d.h. „ $M_{u,VB}$ “ entsprechend Bild 6.11, berücksichtigt werden muss. Mit dem im Bild 6.16 ausgewiesenen Bezugspunkt „ $Q_3$ “ liefert die zugehörige Momentengleichgewichtsbetrachtung über die Forderung „ $\sum M_{Q3} = 0$ “ die gesuchte, im Steg des Stahlträgers wirksame Querkraft am Stützenanschnitt:

$$V_{a,A1} = \frac{(M_{u,VB} - \Delta M_{(V_{a,X2})}) + N_p \cdot e_{N,p} + q_{v,KD} \cdot \frac{l_q^2}{2}}{l_s} \quad (6.62)$$



**Bild 6.16:** Auf das Stahlprofil wirkende Belastungen – Querkraft „ $V_{a,A1}$ “ am Stützenanschnitt

Es ist unbestritten, dass am Stützenanschnitt ein Membranspannungszustand wirksam ist. Dies zeigen zahlreiche Fremdversuche ([74], [75]) wie auch die eigenen Vergleichsnachrechnungen – Bild 5.79. Es wurde bereits mehrfach darauf eingegangen. Im Bemessungsmodell werden diese Membranspannungen (sie sind nicht vergleichbar mit dem Plattenschub) rechnerisch nicht verfolgt. Daher ist im Bild 6.16 sowie in Gleichung 6.62 ein entsprechender Normalkraftanteil nicht mit angegeben und herangezogen worden.

#### 6.2.2.4 Querkrafttragfähigkeit des Rechteckquerschnitts

Die kombinierte Querschnittstragfähigkeit für Normalkraft, Moment und Querkraft unter Beachtung der Randplastizierung und der Voraussetzung geradliniger Normalspannungsverteilung über die Querschnittshöhe wurde von Klöppel und Yamadá in [69] untersucht und numerisch ausgewertet. Ist über die dehnungsbegrenzte Berechnung entsprechend Bild 6.11 die zugehörige Normalspannungsverteilung bekannt, so kann, die Gültigkeit der Fließbedingung entsprechend Gleichung 3.101 (Kapitel 3) vorausgesetzt, die obere Grenze der Querkrafttragfähigkeit angegeben werden. Im Bemessungsmodell und seiner formalen Umsetzung/Anwendung im Programm Excel darf dieser Grenzwert der Querkrafttragfähigkeit bei der iterativen Suche nach dem Gleichgewichtszustand des Systems niemals überschritten werden. Für den ebenen Spannungszustand (d.h.: „ $\sigma_3 = 0$ “) reduziert sich die Fließbedingung nach Gleichung 3.101 auf die allgemein bekannte Form:

$$\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2 = \sigma_F^2$$

Daraus lassen sich die von Klöppel und Yamadá bei ihrer Ableitung benutzten ideellen, vollplastischen Querschnittskennwerte berechnen. Für den Rechteckquerschnitt ergeben sich diese zu:

$$N_{pl} = f_{yk} \cdot b \cdot h$$

$$M_{pl} = f_{yk} \cdot \frac{b \cdot h^2}{4}$$

$$V_{pl} = \frac{f_{yk}}{\sqrt{3}} \cdot b \cdot h$$

Abhängig von der Normalspannungsverteilung über die Querschnittshöhe „ $y$ “ (Bezeichnung im Bild 6.17) ist der Abstand „ $\eta_1 \cdot h$ “ zur Schwerachse bekannt. Mit der zusätzlich vorhandenen Kenntnis über die Lage der Stelle, bei der die Normalspannung die Fließspannung bzw. Streckgrenze erreicht – im Bild 6.17 mit dem Abstand „ $\eta_2 \cdot h$ “ gekennzeichnet – kann eine allgemeingültige Traglastdefinition unter Berücksichtigung von Biegemomenten-, Normalkraft- und Querkrafteinfluss angegeben werden. Dabei sind drei Fallunterscheidungen zu beachten. Bild 6.17 liefert eine Übersicht der möglichen, zu untersuchenden Fälle.

Mit einer Gleichgewichtsbetrachtung unter der Vorgabe der geradlinigen Normalspannungsverteilung und mit Hilfe der ideal-plastischen Grenztragfähigkeiten für Biegemoment, Normalkraft und Querkraft lassen sich dann nachfolgende Interaktionsbeziehungen angeben:



$$\text{Fall „I“: } \eta_1 + \eta_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} {}^I N_{u,M/Q} &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2}h} \sigma(y) \cdot b \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2}h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b \cdot dy \\ &= N_{pl} \cdot 2 \cdot \eta_1 \end{aligned} \quad (6.63a)$$

$$\begin{aligned} {}^I M_{u,N/Q} &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2}h} \sigma(y) \cdot b \cdot y \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2}h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b \cdot y \cdot dy \\ &= M_{pl} \cdot \left( 1 - 4 \cdot \eta_1^2 - \frac{4}{3} \cdot \eta_2^2 \right) \end{aligned} \quad (6.63b)$$

$$\begin{aligned} {}^I V_{u,N/M} &= \int_{(\eta_1 - \eta_2) \cdot h}^{(\eta_1 + \eta_2) \cdot h} \tau(y) \cdot b \cdot dy \\ &= \int_{(\eta_1 - \eta_2) \cdot h}^{(\eta_1 + \eta_2) \cdot h} \frac{f_{yk}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\sigma(y)}{f_{yk}} \right)^2} \cdot b \cdot dy \\ &= \frac{f_{yk}}{\sqrt{3}} \cdot b \cdot h \cdot \eta_2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= V_{pl} \cdot \eta_2 \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (6.63c)$$

$$\text{Fall „II“: } \left| \eta_2 - \eta_1 \right| \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < \eta_2 \leq 1, \quad \begin{cases} (\text{II a}): \eta_1 \leq \frac{1}{2}, \eta_1 + \eta_2 \geq \frac{1}{2} \\ (\text{II b}): \eta_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$${}^{II} N_{u,M/Q} = N_{pl} \cdot \frac{1}{2 \cdot \eta_2} \cdot \left[ 2 \cdot \eta_2 - \left( \eta_2 - \eta_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \quad (6.64a)$$

$${}^{II} M_{u,N/Q} = M_{pl} \cdot \frac{2}{3 \cdot \eta_2} \cdot \left( \eta_2 - \eta_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left( 1 - \eta_2 + \eta_1 \right) \quad (6.64b)$$

$$\begin{aligned} {}^{II} V_{u,N/M} &= V_{pl} \cdot \eta_2 \cdot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\frac{1}{2} - \eta_1}{\eta_2} \right) \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\frac{1}{2} - \eta_1}{\eta_2} \right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left( \frac{\frac{1}{2} - \eta_1}{\eta_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.64c)$$

Fall „III“:  $\left| \eta_2 - \eta_1 \right| \geq \frac{1}{2}, \quad \eta_2 \geq \frac{1}{2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{( III a ): } \eta_1 \leq \frac{1}{2} \\ \text{( III b ): } \eta_1 \geq \frac{1}{2} \end{array} \right.$

$${}^{III} N_{u,M/Q} = N_{pl} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \tag{6.65a}$$

$${}^{III} M_{u,N/Q} = M_{pl} \cdot \frac{1}{3 \cdot \eta_2} \tag{6.65b}$$

$${}^{III} V_{u,N/M} = V_{pl} \cdot \eta_2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right) \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{1 + \eta_1}{\eta_2} \right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1 + \eta_1}{\eta_2} \right) \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left( \frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left( \frac{1 + \eta_1}{\eta_2} \right) \right] \tag{6.65c}$$

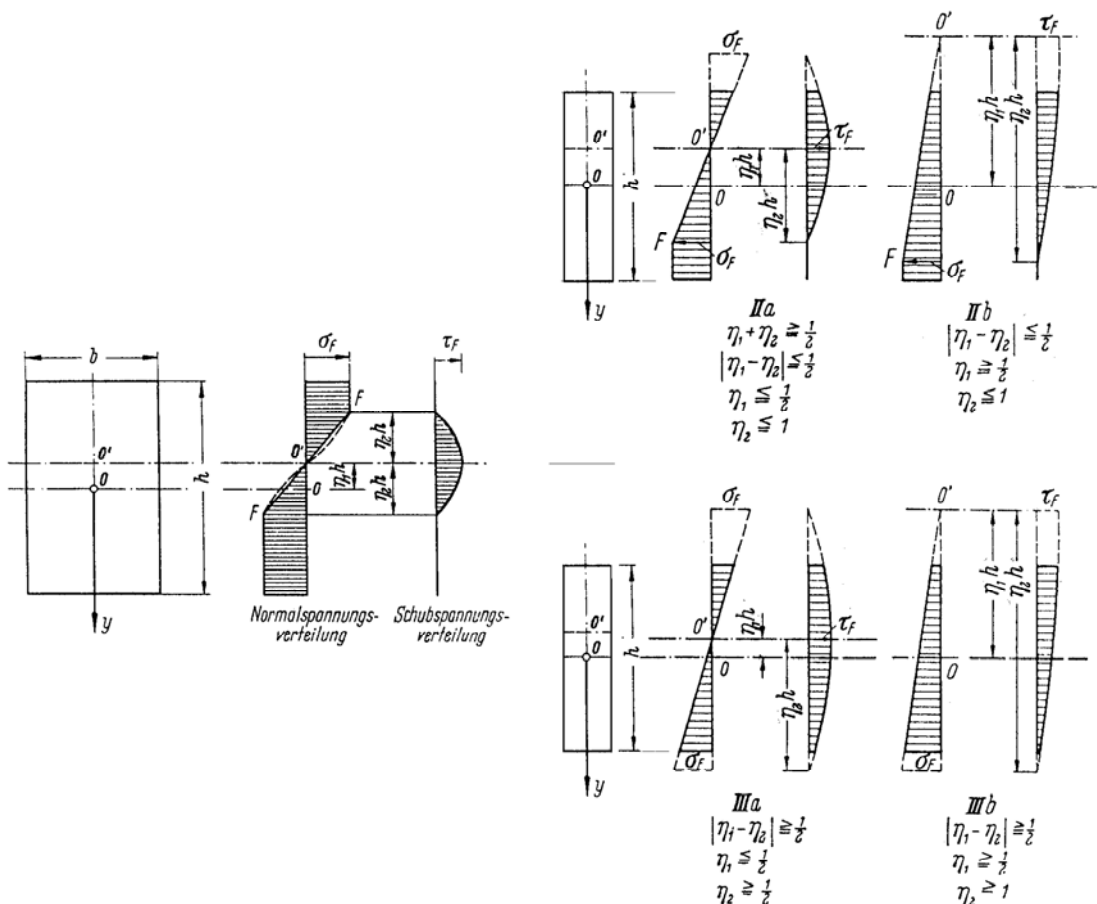


Bild 6.17: Spannungsverteilung eines Rechteckprofils im durchplastizierten Zustand, aus [69]

Normalkraft und Moment des Stahlprofils resultieren aus der Gleichgewichtsforderung innerhalb des Verbundquerschnitts und aus Vorgabe der Grenzdehnung „ $\varepsilon_{c,u,r}$ “ in radialer Richtung. Die daraus resultierende und als Interaktionsbeziehung darstellbare Querkrafttragfähigkeit am Stützenanschnitt bestimmt im Bemessungsmodell den größtmöglichen Wert für „ $V_{a,A1}$ “ – entsprechend Gleichung 6.62. Die Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese wird unterstellt, ein Membranspannungszustand nicht berücksichtigt.

### 6.2.3 Auflagerpressung und Gleichgewichtsbedingung

Für die Berechnung der Durchstanzlast einer Stahlbetonplatte (Kapitel 6.1.6) wurde aufgrund der tangentialen Umlagerungsfähigkeit die Auflagerpressung ausschließlich über die resultierenden, schräg auf die Stütze zulaufenden Druckstrebenkräfte bestimmt. Es wurde unterstellt, dass radial gerichtete Spannungskomponenten keinen wesentlichen Einfluss mehr auf die Spannungskonzentration im unmittelbaren Lasteinleitungsbereich der Stütze ausüben.

Bei der Verbundlösung entwickeln sich planmäßig ausgeprägte radiale Druckgurte und erhöhen damit den Anpressdruck im Einmündungsbereich der Stütze. Die radial ausgerichteten Biegedruckzonen mit der Höhe „ $x_r$ “ um die Stütze herum sind zudem – in der Regel – deutlich höher und größer. Dies bewirkt ein günstig wirkender Klemmdruck im Sinne des Bildes 2.8 (Kapitel 2), der die vertikale Lastaufnahme (des Betons) günstig beeinflussen kann. Mit den radial wirksamen Druckgurtkräften des Verbundquerschnitts gemäß der Darstellung im Bild 6.11 ergibt sich die gesamte Horizontalkraft aus der Verbundwirkung zu („ $n$ “ = Anzahl der Stahlschwerter):

$$h_{c,r} = \left( \sum_{i=1}^n [ F_{c,Druck} ] \right) / ( n \cdot b_{c,eff} ) \quad (6.66)$$

Überlagert mit den Horizontalkomponenten der Kegelschalenkräfte aus der Stahlbetonplatte (entsprechend Kapitel 6.1.6: „ $h_{c,s} \equiv h_s = \sum h_{s,i}$ “), resultiert daraus:

$$h_{c,VB}^* = h_{c,s} + h_{c,r} \quad (6.67)$$

Ist die wirksame, horizontale Auflagerpressung im Einmündungsbereich der Stütze bekannt, so können mit den vertikalen Anteilen der Kegelschalenkräfte „ $k_s^*$ “, der Neigungswinkel „ $\alpha^*$ “ und die resultierende Druckspannung „ $\sigma_{c,VB}$ “ am Stützenrand berechnet werden. Für die Berechnung der resultierenden Spannung am Stützenrand wird die größere der beiden Biegedruckzonen, entweder „ $x_t$ “ für die tangentiale Richtung oder „ $x_r$ “ für die radiale Richtung, angewendet. Wie zuvor erwähnt, ist in der Regel „ $x_r$ “ gegenüber „ $x_t$ “ maßgebend. Dies bestätigen alle Darstellungen zur radialen und tangentialen Spannungsverteilung im Kapitel 5. Mit „ $\bar{x}_i$ “, synonym zur maßgebenden Höhe „ $x_t$ “ oder „ $x_r$ “, folgt damit:

$$k_s^* = \sqrt{v_c^2 + h_{c,VB}^{*2}} \quad (6.68)$$

$$\alpha^* = \arctan \left( \frac{v_c}{h_{c,VB}^*} \right)$$

$$\sigma_{c,VB} = \frac{k_S^*}{\bar{x}_j \cdot \cos(\alpha^*)} \tag{6.69}$$

Vorstehende Gleichungen unterliegen den Voraussetzungen, die im Kapitel 6.1.6 bereits zum Nachweis der Stahlbetonplatte ohne Schubsicherung angegeben wurden. Sie unterscheiden sich lediglich durch die Spannungsüberlagerung aus Gleichung 6.67, um den radialgerichteten Einfluss des Verbundquerschnitts mit zu erfassen. Der Neigungswinkel „ $\alpha^*$ “ wird sich gegenüber dem Ansatz im Kapitel 6.1.6 verringern, hervorgerufen durch den größer werdenden Einfluss der horizontalen Spannungen. Abhängig von den Kegelschalenkräften „ $k_S^*$ “ und dem Neigungswinkel „ $\alpha^*$ “ kann sich die auf den Betonquerschnitt entfallende vertikale Kraftkomponente am Stützenumfang einstellen zu:

$$V_{u,c} = 2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot \left( \sum_{i=1}^{III} [ v_{s,i} ] \right) \tag{6.70}$$

Die Gesamtbruchlast des Systems resultiert aus der Addition des Betonanteils aus Gleichung 6.70 und den im Stahlträgersteg am Stützenanschnitt wirksamen Querkräften. Es wurde darauf hingewiesen, dass der eingepreßte Spannungszustand bei der Gleichgewichtsbetrachtung des Gesamtsystems nicht mit angesetzt werden darf. Die erste Bedingung zur Berechnung der Stützenlast bzw. Durchstanzlast „ $V_u$ “ des Systems ergibt sich somit für  $n$  Stahlträger zu:

$$V_u = V_{u,c} + n \cdot ( V_{a,A1} - V_{a,X2} ) \tag{6.71}$$

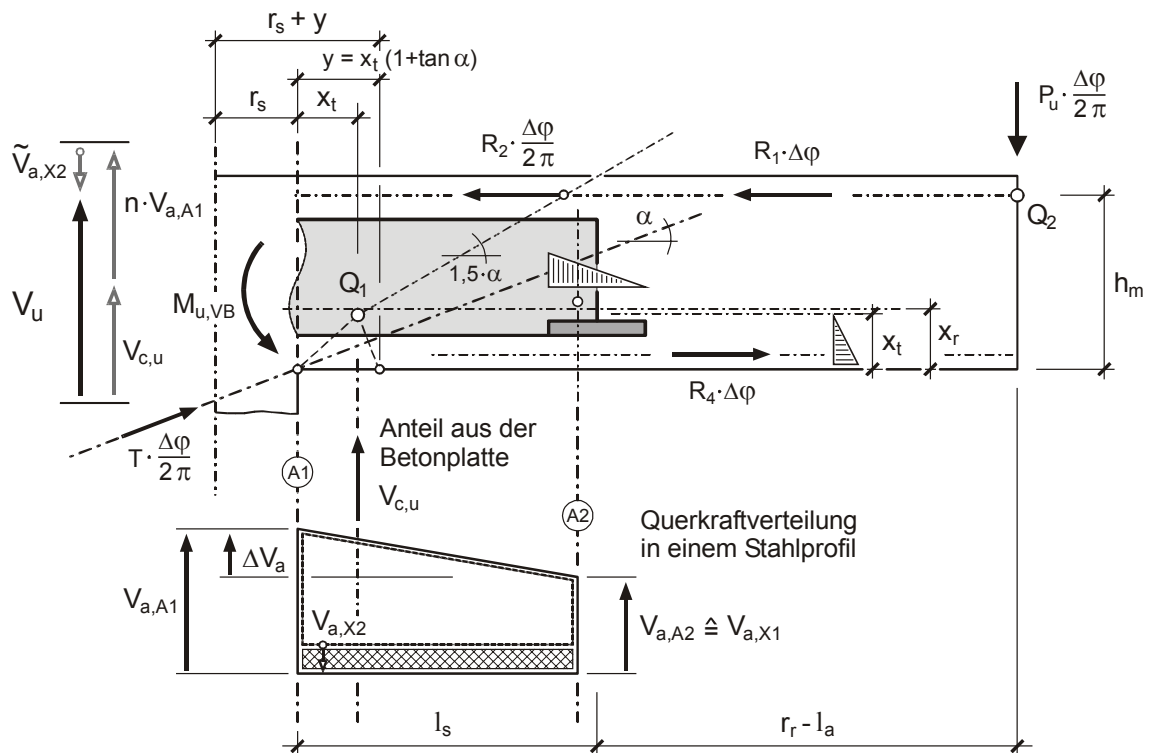


Bild 6.18: Geometrische Definitionen und im System wirksame Kraftkomponenten

Für die zweite Bedingung, dem Momentengleichgewicht, wird zusätzlich zur Gleichung 6.50 auf der Widerstandsseite der ausschließlich radial wirksame Einfluss des Verbundsystems „ $M_{u,VB}$ “ berücksichtigt. Im Kapitel 6.2.2.3 wurde angekündigt, dass aufgrund der Schnittführung der Widerstand des Verbundquerschnitts vollständig berücksichtigt werden muss. Die auf das Verbundsystem einwirkenden Kräfte und die Annahmen zum Ort der Lasteintragung bzw. ihre Bezugspunkte sind Bild 6.18 zu entnehmen.

Unter Beachtung des eingepprägten Spannungszustandes „ $V_{a,X2}$ “ entfällt auf je einen Auflagerteller die Kraft:

$$V'_{a,p} = V_{a,X1} - V_{a,X2} \quad (6.72)$$

Mit Berücksichtigung dieser, am Auflagerteller direkt eingetragenen Belastung ergibt sich der Querkraftzuwachs je Stahlprofil am Stützenanschnitt mit Gleichung 6.62 zu:

$$\Delta V_a = V_{a,A1} - V_{a,A2} \quad (6.73)$$

Wird die gesamte Stahlbetonplatte betrachtet d.h. „ $\Delta\varphi = 2 \cdot \pi$ “ (vgl. Gleichung 6.28 und 6.50), ergibt sich für:

$$\Delta\varphi \cdot R_4 = \frac{\Delta\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot D_c = D_c \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta\varphi}{2 \cdot \pi} = 1$$

Damit kann das Momentengleichgewicht in Anlehnung an Gleichung 6.50 – wieder mit Bezug auf den Punkt „ $Q_2$ “ – angegeben werden:

$$\begin{aligned} & V_{u,c} \cdot \left[ \frac{C}{2} - (r_s + x_t) \right] \\ & + n \cdot V'_{a,p} \cdot \left[ \frac{C}{2} - (l_a + l_{p,2}) + \frac{2}{3} \sum l_p \right] \\ & + n \cdot \Delta V_a \cdot \left[ \frac{C}{2} - r_s \right] = \sum_{i=1}^n M_{u,VB} \\ & + \sum_{i=1}^{III} D_{c,i} \cdot [h_m - (k_{a,i} \cdot x_t)] \end{aligned} \quad (6.74)$$

Voraussetzung für eine zuverlässige Einschätzung der Durchstanzlast sind natürlich die gewählten Eingangsparameter und die im Modell getroffenen Annahmen zur Verteilung der inneren Schnittgrößen. Die daraus berechneten Steifigkeitsverhältnisse und -verteilungen des sehr differenziert zu betrachtenden Systems müssen richtig eingeschätzt und ermittelt werden. Zu diesen wichtigen Einflussgrößen zählen ohne Zweifel die Annahmen zur Drehfedersteifigkeit „ $c_\varphi$ “ der Stahlbetonplatte und die Wegfeder „ $c_{f,a}$ “ für den radial wirksamen Verbundquerschnitt. Als Kontrolle für die Zuverlässigkeit und Leistungsfähigkeit des Berechnungsverfahrens soll die Gegenüberstellung in Tabelle 6.1 dienen. Die Tabelle enthält den Vergleich von drei Nachrechnungen mit der FE-Methode und mit dem Bemessungsmodell mit jeweils unterschiedlich gewählten Stahlträger- bzw. Verbundträgerlängen.

**Tabelle 6.1,** Vergleich der Berechnungsergebnisse mit der FE-Berechnung

**... zur Überprüfung der Ergebnisse des entwickelten Bemessungsmodells**

(Die Annahmen zu den Systemabmessungen und zum Materialverhalten entsprechen denen der Tabelle 5.1)

<b>Systeme:</b> (gekennzeichnet über die Schwertlänge)		<b>2,5·d<sub>0</sub> = 0,75 m</b>	<b>3,5·d<sub>0</sub> = 1,05 m</b>	<b>4,5·d<sub>0</sub> = 1,35 m</b>
<b>Ergebnis der FE – Berechnung</b>	Querkraft im Stahlprofil am Auflagerteller:	270 kN	155 kN	90 kN
	Querkraft im Stahlprofil am Stützenanschnitt:	<i>270 kN</i>	<i>270 kN</i>	<i>270 kN</i>
	<b>„Durchstanzlast“: *)</b> (Gesamtlast)	<b>2076 kN</b>	<b>2149 kN</b>	<b>2264 kN</b>
	<b>zugehörige Rotation:</b>	<b>0,0104</b>	<b>0,0116</b>	<b>0,012</b>
<b>Berechnungsmodell</b>	Querkraft im Stahlprofil am Auflagerteller:	271 kN	163 kN	106 kN
	Querkraft im Stahlprofil am Stützenanschnitt:	<i>295 kN</i>	<i>270 kN</i>	<i>252 kN</i>
	Lastanteil des Betonquerschnitts:	1155 kN	1200 kN	1203 kN
	Lastanteil des Stahlquerschnitts:	768 kN	963 kN	988 kN
	<b>„Durchstanzlast“:</b> (Gesamtlast)	<b>1923 kN</b>	<b>2163 kN</b>	<b>2191 kN</b>
	<b>zugehörige Rotation:</b>	<b>0,0106</b>	<b>0,0111</b>	<b>0,0111</b>
<b>Abweichungen der „Durchstanzlasten“ zwischen Modell und FE-Berechnung:</b>		<b>– 7,2 %</b>	<b>+ 0,7 %</b>	<b>– 3,2 %</b>

\*) Die Durchstanzlast entspricht dem Mittelwert aus Spalte 2 und Spalte 3 der Tabelle 5.2

Der Vergleich der Berechnungsergebnisse erfolgt mit dem FE-Modell für die Systeme mit äußerem Rundschnitt (Kapitel 5.4.1, Bild 5.41 a bis d) und nicht mit den Systemen der eigenen Versuchsdurchführungen. Mit den Ausführungen im Kapitel 2 und Kapitel 5 wurde hinreichend begründet, warum die Systeme „mit Rundschnitt“ für eine Verifizierbarkeit der Tragfähigkeit am besten geeignet sind. Entsprechend dem Einwand der nicht ausreichend angeschlossenen oberen Bewehrung, Kapitel 6.2.2, wurde der entsprechende Betonstahlquerschnitt („A<sub>s,BSt</sub>“, Bild 6.11) in der Vergleichsrechnung mit dem vereinfachten Modell ebenfalls nicht erfasst.

## 7. Zusammenfassung

Mit den entwickelten Berechnungsmodellen wird ein praxisorientiertes Berechnungsverfahren der Durchstanzsicherheit von Flachdecken mit integriertem Verbundsystem ermöglicht. Unter Beachtung der krümmungslosen Verdrehung der Stahlbetonplatte im Auflagerbereich einer Innenstütze und mit Berücksichtigung der Zugfestigkeit des Betons kann die Durchstanzsicherung einer Flachdecke sowohl ohne zusätzliche Maßnahmen zur Schubsicherung als auch mit einer Schubsicherung in Stahl und Verbund rechnerisch beurteilt werden. Mit der Verbundlösung entsteht durch Kombination der Werkstoffe Stahl und Beton eine Konstruktion, die in idealer Weise ein Zusammenwirken von tangentialen und radialen Spannungszuständen in Stützennähe herbeiführt. Im Auflagerbereich entwickelt sich eine Druckschale, deren Schubtragfähigkeit deutlich größer ist als bei konventionellen Lösungen. Vor allem aber entlastet die Konstruktionsart den Auflagerbereich, da über die gesamte Schwertlänge eine Umlagerung der Querkraftbeanspruchung auf das Stahlprofil erfolgen kann. Auf diese Weise erfährt die Stahlbetonplatte keine nur auf die Stützenkopfabmessungen konzentrierte Lasteinleitung mehr.

In Analogie zu den Modellvorschlägen nach Kinnunen und Nylander und nach Andrä werden beide Verfahren durch eine differenzierte Betrachtung der Spannungsverteilung in der zunächst überwiegend tangential orientierten Biegedruckzone ergänzt. An Stelle der empirischen und somit zugleich starren, von Versuchsergebnissen abhängigen Vorgaben für die Rotation (entsprechend den Gleichungen 2.16 / 2.17 und 2.24 / 2.25) wird die Lösung über eine tangential dehnungsabhängige, in drei Bereiche unterteilte Biegedruckzone mit Dehnungsbegrenzung gesucht. An die Stelle der aus Versuchen abgeleiteten Näherungsbedingungen treten Gleichgewichtsbetrachtungen mit zunächst unbekanntem Variationsparametern. Die gesuchten Parameter sind im Fall einer Lösung ohne Schubsicherung der Rotationswinkel „ $\psi$ “ der Stahlbetonplatte und die Höhe „ $x_t$ “ der tangential gerichteten Biegedruckzone. Bei der Anwendung einer Schubsicherung in „Stahl und Verbund“ liefert die aus der gemeinsamen Tragwirkung des Verbundquerschnitts sich einstellende radial gerichtete Biegedruckzone „ $x_r$ “ des Betons eine zusätzliche Unbekannte, die ebenfalls eine Gleichgewichtsforderung erfüllen muss. Die Parameter sind über das Momentengleichgewicht für die am herausgelösten Sektorelement freigeschnittenen äußeren Kräfte und über die inneren, horizontal geneigten, auf den Stützenumfang einwirkenden Auflagerpressungen definiert. Die inneren Kräfte, an einem Kreisringelement mit der Breite „ $dr$ “ entwickelt, bilden sich dabei so aus, dass jeder Teilkörper bzw. jedes Ringelement für sich wieder einen Gleichgewichtszustand bildet. Die gesuchten Parameter „ $\psi$ “ und „ $x_t$ “ sind über die resultierenden Umlenkkräfte aus der überwiegend tangential wirksamen Beanspruchung eindeutig zugeordnet. Die benötigten Werkstoffkennwerte für Stahl und Beton können den zur Zeit angewendeten technischen Regelwerken und Normen entnommen werden – oder alternativ aus versuchsbegleitenden Festigkeitsprüfungen. Die Einführung von Proportionalitätsfaktoren, entsprechend Gleichung 2.7, wird nicht erforderlich. Alle Einflüsse, die nach dem derzeitigen Stand der Erkenntnisse unwidersprochen physikalisch die Tragfähigkeit verändern (z.B.: Plattendicke, Stützendurchmesser und -profil, Grad der Biegebewehrung etc.) sind bei der Entwicklung des Modells berücksichtigt.

Die Qualität der erzielten Ergebnisse mit dem Modell wird über die durchgeführten FE-Berechnungen bestätigt. Die vergleichend zu den Versuchen vorgestellten FEM-Rechnungsergebnisse zeigen wiederum, dass die hier vorgestellte Finite-Elemente-Formulierung grundsätzlich – nahezu vollständig – das Problem beherrscht. Bei der Formulierung wird das Bruchkriterium von Willam und Warnke als Maß der Beanspruchbarkeit eines Volumenelementes

angewendet. Es wird effektiv und nachvollziehbar zur Steuerung des Einflusses der infolge Rissbildung neu entstandenen Materialsymmetrien und den daraus resultierenden inneren Widerständen benutzt. Die Werkstoffeigenschaften für Beton können innerhalb eines Integrationsbereichs über die strukturierte Steuerung symmetrischer Steifigkeitsmatrizen mit verhältnismäßig einfachen, aber physikalisch realen Voraussetzungen und Definitionen mit Bezug auf eine voraussetzungsgemäß vorhandene statistische Verteilung der Zug- und Druckfestigkeiten verallgemeinert werden. Die mathematische Strenge, wie sie bisher angewendet werden musste, geht dadurch verloren. Dies geschieht im Interesse der elementaren Grundlagen, die aus der Sicht der Werkstoffkunde heute zuverlässig abgegrenzt werden können und als maßgebend für die Belastungsgrenzen des Materials Beton angesehen werden dürfen. Unnötig deterministische und oft nicht zutreffende Vorgaben werden vermieden.

Die dem Betonelement neu hinzugefügten Ansätze, in den Kapiteln 3.2.3 und 3.2.4 vorgestellt, nehmen Einfluss auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten. Das Nachbruchverhalten nach Überschreiten der Zugfestigkeit beeinflusst in Kombination mit dem Schubwiderstand die numerische Orientierung der Hauptspannungsrichtungen. Über die Hauptspannungen entwickelt sich der last- bzw. pfadabhängige Umlagerungsprozess. Damit nehmen die Annahmen des Zugtragverhaltens und des Schubtragverhaltens einen direkten Einfluss auf die Druckspannungsverteilung und auf das Tragverhalten der gesamten FE-Struktur. Beide Anteile dienen nicht der Erhöhung des Tragfähigkeitswiderstands, sondern steuern die inneren Steifigkeitszustände, so dass sich reale Druckspannungsverteilungen einstellen können. Aus der Sicht der Materialwissenschaften ist es gelungen, das Spannungs-Dehnungs-Verhalten und die Werkstofffähigkeit eines spröden Materials in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit zu erfassen.

Die Ausdehnung der FE-Nachrechnungen auf Flachdeckenteilsysteme ergab Traglaststeigerungen von ca. 30 %. Diese Zunahme ist in Versuchen ohne die hier vorgestellte Lösung zur Durchstanzsicherung bestätigt [75]. Es wurde erwähnt, dass sich die Erhöhung der Durchstanzlast auf eine nicht mehr zwängungsfreie Randlagerung der Platte – wodurch die Plattenmittelfläche sich verlagert und sich zusätzliche Membrandruckspannungen entwickeln können – zurückzuführen ist. Dass diese Beobachtungen ebenfalls mit der Verbundlösung numerisch nachvollziehbar sind, weist deutlich darauf hin, dass durch die neue Lösung in „Stahl und Verbund“ die charakteristischen Eigenschaften zur Lastabtragung einer Stahlbetonplatte erhalten bleiben. Das neue Verbundsystem ist eine zuverlässige, baupraktisch unkomplizierte Variante zur Erhöhung der Schubtragfähigkeit in Stützbereichen von Flachdecken.

## 8. Ausblick

Es wurden zusätzliche Flachdeckenteilsysteme untersucht. Der Vergleich der Beanspruchungen zeigt – zuvor in der Zusammenfassung erwähnt – dass die Erhöhung des Durchstanzwiderstands unter Kurzzeitbelastung allein dem Einfluss der Betonplatte und nicht dem eingebauten Stahlprofil zugeschrieben werden muss. In [57] wird darauf hingewiesen, dass „diese Traglaststeigerung vorsichtig zu bewerten ist, da sich der Membranspannungszustand infolge Betonkriechens abbaut und bei feldweiser Deckenbelastung nur teilweise aktivieren lässt“. Da entgegen den zur Zeit zugelassenen Systemen bei der hier vorgestellten Lösung in Stahl und Verbund ein Teil der Stützenlast am Auflagerteller – weit von der Stütze entfernt – abgenommen werden kann, ist dennoch zu erwarten, dass ein Teil der genannten „stillen Tragreserven“ mit



dem neuen Verbundsystem nutzbar gemacht werden kann. Um dies in Zukunft zu ermöglichen, bedarf es lediglich des Nachweises, dass das Stahlkreuz über eine ausreichend hohe Steifigkeit und die Verbundwirkung zwischen Stahlprofil und Betonquerschnitt über eine zeitlich zuverlässige und dauerhafte Zähigkeit verfügt.

Im Kapitel 6.2.2 wurde darauf eingegangen, dass bei den eigenen Versuchen die obere Reihe der Kopfbolzen unzureichend in der oberen Bewehrung verankert wurde. Zum Anheben auf die größtmögliche Biegetragfähigkeit müssten die Dübelköpfe nach Ansicht des Verfassers in die Maschen der oberen Zug- bzw. Netzbewehrung hinein greifen. Mit dieser einfachen konstruktiven Ergänzung ließe sich vermutlich auch ein größeres Tangentialmoment in weiter von der Stütze entfernten Bereichen aktivieren. Das entwickelte Modell im Kapitel 6.2 kann diese kraftschlüssige Verankerung der Zugbewehrung berücksichtigen. Berechnungen unter der genannten Voraussetzung ergeben dann eine größere rechnerische Bruchlast bzw. einen höheren Durchstanzwiderstand. Dem Stahlquerschnitt wird dadurch ein größerer Anteil der vertikalen Lasten zugewiesen. Ohne einen vergleichenden Versuch ist jedoch jede weitere diesbezügliche Schlussfolgerung spekulativ und vermutlich auch jede hierauf basierende FE-Berechnung.

Das in der hier angewendeten Finite-Elemente-Formulierung eingesetzte Betonelement entwickelt im Fall des Druckversagens eines Integrationspunktes keinen numerischen Widerstand mehr. Die Steifigkeitsmatrix wird dann vollständig – um eine Überschätzung der Festigkeit auszuschließen – mit einem fiktiven „Steifigkeitskoeffizienten“ „ $\tilde{\beta} = 10^{-6}$ “ multipliziert. Dieser Verlust der Steifigkeit auf Druck ist eine absolute Grenz Betrachtung. Für eine erweiterte und zugleich präzisere Umlagerungsstrategie innerhalb einer physikalisch nichtlinearen Berechnung wäre die Definition eines geeigneten „Entfestigungsverhaltens“ für die betroffenen Integrationspunkte sinnvoll. Dies könnte in Anlehnung an die von Argyris bereits in [3] vorgeschlagene „volumentreue Bruchregel“ berücksichtigt werden. Voraussetzung für die von Argyris genannte „Umlagerungsstrategie“ wäre der kontinuierliche Abbau der volumetrischen Dehnungen, wobei die deviatorischen Anteile völlig unberücksichtigt bleiben und entfallen. Nach Argyris ließe sich dies direkt über die geometrischen Beziehungen im Hauptspannungsraum gemäß Gleichung 8.1 umsetzen:

$$\dot{\epsilon} = \{ \dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3, 0, 0, 0 \} \tag{8.1}$$

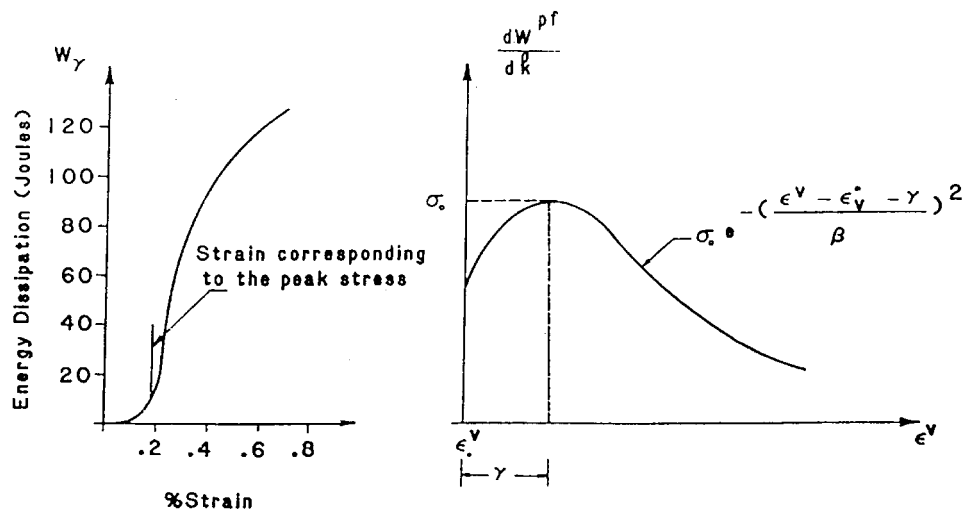


Bild 8.1: Energiedissipation für den Werkstoff Beton nach Dougill und Spooner, aus [36]

Basierend auf Versuchen von Dougill und Spooner könnte die dafür benötigte Energiedissipationsrate als Funktion der volumetrischen Dehnung „ $\varepsilon^v$ “ wie folgt formuliert werden [36]:

$$\frac{dW^{pf}}{dk} = \sigma_H \cdot e^{-\left(\frac{\varepsilon^v \cdot \varepsilon_0^v - \gamma}{\beta}\right)} \quad (8.2)$$

Eine derartige Ergänzung muss im Interesse der Qualitätssicherung und Allgemeingültigkeit experimentell überprüft und analytisch sehr sorgfältig in die FE-Formulierung eingebunden werden. Bei dem Wunsch, das Werkstoffverhalten für Beton immer differenzierter zu modellieren, darf dabei niemals das Bewusstsein für ein wesentliches Merkmal der FE-Methode verloren gehen: Die FE-Methode liefert, zumindest auf der Basis des Verschiebungsansatzes, immer einen größeren Wert für das Gesamtpotential. Um ein Überschätzen des resultierenden Steifigkeitsverhaltens zu vermeiden, müsste die vorgeschlagene Ergänzung mit dieser Sachkenntnis eingesetzt und angewendet werden.

## Bezeichnungen

Die im Text und in den Gleichungen verwendeten Formelzeichen und Indizes werden aufgeführt. Bei der Aufzählung erfolgt eine Trennung zwischen den verwendeten Formelzeichen im Kapitel 3 und 4 (Materialeigenschaften und Modelle, Methode der Finiten Elemente) und den Kapiteln 2 (mechanische Grundlagen) sowie 5 und 6 (Modellentwicklung). Werden im zweiten Teil – für Kapitel 3 und 4 – keine zusätzlichen Angaben gemacht, beziehen sich die Bezeichnungen aus Kapitel 2, 5 und 6 auf alle Kapitel. Werden keine Angaben gemacht, geht die Bedeutung aus dem begleitenden Text hervor. Nach dem lateinischen Alphabet folgt das griechische Alphabet. Großbuchstaben werden den Kleinbuchstaben vorangestellt. Die Kapitel- und Gleichungsnummern – oder alternativ die Bildnummern – beziehen sich auf die erste Anwendung der aufgezählten bzw. genannten Bezeichnung.

### Kapitel 2, 3, 5 und 6 (Einführung – Vergleichsberechnungen – Modellentwicklung)

Bezeichnung	Beschreibung	Einheit	Kapitel	Glg. / Bild
<i>Lateinische Buchstaben:</i>				
$A$	Querschnittsfläche ( <i>allgemein</i> )	[mm <sup>2</sup> ]		
$A, B, C$	konstante Faktoren des Integranden	[–]	<b>6.1.5.3</b>	Glg. 6.39
$C/2$	Außenradius einer runden Ersatzplatte	[m]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$D_i, D_c, D$	tangentiale, ringförmige Druckkraft	[kN]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.21
$E, E_a$	Elastizitätsmodul ( <i>allgemein</i> ), oder Elastizitätsmodul für Baustahl	[N/mm <sup>2</sup> ]		
$E_{cm}, E_c$	mittlerer Elastizitätsmodul für Normalbeton	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.18
$E_s$	Elastizitätsmodul für Betonstahl	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.19
$F, F_i, F_c, F_a$	wirksame, horizontale Teilschnittkräfte	[kN]	<b>6.2.2</b>	Bild 6.11
$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, G_a$	Schubmodul (Gleitmodul)	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.1.1</b>	Glg. 3.16
$H$	horizontale Kraft; Klemmkraft	[kN]	<b>2.2</b>	Bild 2.8
$J_{i,0}$	Flächenmoment 2 <sup>ten</sup> Grades für den ideellen Verbundquerschnitt unter Berücksichtigung der Reduktionszahl „ $n_0$ “	[cm <sup>2</sup> m <sup>2</sup> ]	<b>6.2.2.1</b>	Glg. 6.54
$K_S, K_i$	Kegelschalenkraft	[kN]	<b>6.1</b>	Glg. 6.1
$K = \frac{E \cdot d_0^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$	Plattensteifigkeit	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>2.1</b>	Bild 2.3
$L, L', l$	Längenmaße ( <i>allgemein</i> )	[mm]		
$M$	Biegemoment ( <i>allgemein</i> )	[kNm]		
$M_{pl}$	plastisches Grenzmoment	[kNm]	<b>6.2.2.4</b>	Glg. 6.63b
$N$	Normalkraft ( <i>allgemein</i> )	[kN]		
$N_{pl}$	plastische Grenznormalkraft	[kN]	<b>6.2.2.4</b>	Glg. 6.63a

$P_{v,KD}$	Scherkraft für den Einzeldübel	[kN]	<b>6.2.2.3</b>	Glg. 6.60b
$R_m, R_d, R_k, R_t$	Scherkräfte bei Kopfbolzendübeln	[kN]	<b>3.4</b>	Bild 3.61
$R, R_i$	Reibungswiderstand; aktiver Widerstand	[kN]	<b>2.2</b>	Bild 2.8
$R_1, R_2, R_4$	Kraftkomponenten eines Sektorelements, [66]	[kN]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$T$	resultierende Kraft aus den zur Stütze geneigten Kegelschalen, [66]	[kN]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$V, V_b$	Querkraft (allgemein); vertikaler Kraftanteil	[kN]	<b>2.1</b>	Bild 2.1
$V_{pl}$	plastische Grenzquerkraft	[kN]	<b>6.2.2.4</b>	Glg. 6.63c
$V_u$	Durchstanzwiderstand	[kN]	<b>2.1</b>	Bild 2.2
$X_1, X_2$	statisch Überzählige	[kN]	<b>6.2.2.1</b>	Glg. 6.55
$Z_i, Z_t, Z$	tangentiale, ringförmige Zugkraft	[kN]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.20
$\Delta Z_i$	verbleibende tangentielle Zugkraft	[kN]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.22
$b$	Breite eines Balkens	[mm]	<b>2.1</b>	Bild 2.1
$b_{c,eff}$	effektive Breite des radialen Druckgurtes	[mm]	<b>6.2.2</b>	Bild 6.11
$b_{m,lokal}$	Lasteinleitungsbreite	[mm]	<b>6.2.2.3</b>	Bild 6.14
$c_\varphi$	charakteristische Steifigkeit der <b>Betonplatte</b>	[kNm/m]	<b>6.2.1</b>	Glg. 6.53
$c_{f,a}, c_{f,b}$	charakteristische Steifigkeit des <b>Stahlprofils</b>	[kN/m]	<b>6.2.2.1</b>	Glg. 6.54
$d_0$	Plattendicke	[mm]	<b>2.1</b>	Bild 2.1
$e_{N,p}$	planmäßige Lastausmitte	[mm]	<b>6.2.2.3</b>	Bild 6.16
$e_q$	Abstand der Kopfbolzendübel senkrecht zur einwirkenden Krafrichtung	[mm]	<b>6.2.2.3</b>	Glg. 6.60b
$f_{ck,zyl}$	charakteristischer Wert der Zylinderdruckfestigkeit für Normalbeton nach 28 Tagen	[N/mm <sup>2</sup> ]		
$f_{ck,cube}$	charakteristischer Wert der Würfeldruckfestigkeit für Normalbeton nach 28 Tagen ( $f_{ck,cube15}$ = Kantenlänge 15 cm $f_{ck,cube20}$ = Kantenlänge 20 cm )	[N/mm <sup>2</sup> ]		
$f_c, f_{cm}$	Mittelwert der Zylinderdruckfestigkeit des Normalbetons	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>6.1.3</b>	Glg. 6.7
$f_{ct}$	zentrische Zugfestigkeit für Normalbeton	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>6.1.5.2</b>	Glg. 6.33
$f_{ctm}$	Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit für Normalbeton	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.2.3</b>	Bild 3.26
$f_s, f_{s,R}$	Streckgrenze (und rechnerischer Wert) für Betonstahl	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>2.3.1</b>	Glg. 2.10
$f_a, f_y$	Streckgrenze für Bau- bzw. Konstruktionsstahl	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>6.2.2</b>	Bild 6.11
$f_u$	Zugfestigkeit	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.4</b>	Bild 3.61

$h, h_s, h_{s,i}$	horizontale Kräfte	[kN/m]	<b>6.1.6</b>	Bild 6.9
$h_m$	statische Nutzhöhe	[m]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$k_a$	Höhenbeiwert, bezogen auf die Druckzone	[–]	<b>6.1.3</b>	Glg. 6.10
$k_x = \frac{x}{h_m}$	Höhenbeiwert, bezogen auf die Nutzhöhe	[–]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.24
$k, k_s, k_{s,i}$	Druckschalenkräfte	[kN/m]	<b>6.1.6</b>	Bild 6.9
$l_q$	Lasteinleitungslänge	[mm]	<b>6.2.2.3</b>	Bild 6.14
$m$	Schnittmoment (Platte oder Plattenstreifen)	[kNm/m]	<b>2.1</b>	Bild 2.4
$m_r$	Radiales Schnittmoment einer Platte	[kNm/m]	<b>2.1</b>	Bild 2.2
$m_\varphi$	Tangentiales Schnittmoment einer Platte	[kNm/m]	<b>2.1</b>	Bild 2.2
$n_0 = \frac{E_a}{E_{cm}}$	Reduktionszahl ohne zeitlichen Einfluss	[–]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.21
$p', p_0, p_i$	Flächenlast (Spannung)	[kN/m <sup>2</sup> ]	<b>2.1</b>	
$q$	Randbelastung (Deckenausschnitt)	[kN/m]	<b>2.1</b>	
$q_{C/2}$	Randbelastung einer Kreisplatte, [65]	[kN/m]	<b>2.1</b>	
$q_r$	Randbelastung (identisch zu: $q_{C/2}$ )	[kN/m]	<b>2.1</b>	Bild 2.1
$r, r_i$	ortsbestimmender Radius (z.B.: eines Kreisrings) zum Schwerpunkt der Lasteinleitung	[mm]	<b>2.1</b>	Bild 2.2
$r_s$	Radius einer Rundstütze	[mm]	<b>2.1</b>	Bild 2.2
$r_s + y$	Zone des Druckversagens des Betons, [50]	[mm]	<b>6.1.4</b>	Bild 6.4
$r_s' = \frac{1}{\pi} \cdot (b_1 + b_2)$	Ersatzradius für eine rechteckige Stütze (es gilt näherungsweise: $r_s \equiv r_s'$ , [ 65 ])	[mm]		
$r_r$	Außenradius einer Kreisplatte	[mm]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$r_u$	Radius des Bruchkegels einer Kreisplatte	[mm]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
${}^a r_1, {}^b r_1, {}^c r_1$	Grenzradien für die Zugkegelschalen	[mm]	<b>6.1.5.2</b>	Glg. 6.33
$r_a, r_b$	Integrationsgrenzen (unterer Grenzwert: $a$ , oberer Grenzwert: $b$ )	[mm]	<b>6.1.5.3</b>	Glg. 6.38
$s_a, h_a, l_a, t_a$	Querschnittswerte des Stahlprofils Stegbreite $\equiv s_a$ , Profilhöhe $\equiv h_a$ usw.	[mm]	<b>6.2.2.3</b>	Bild 6.16
$h_{a,p}, l_{p,1}, l_{p,2}, b_p$	Querschnittswerte des Stahlprofils Höhenlage: $h_{a,p}$ , Tellergröße: $l_{p,1}, l_{p,2}, b_p$	[mm]	<b>6.2.2.3</b>	Bild 6.14
$u_{res}$	radial aktive Umlenkkräfte	[kN]	<b>2.3.2</b>	Bild 2.14
$v, v_s, v_{s,i}$	vertikale Kräfte	[kN/m]	<b>6.1.6</b>	Bild 6.9
$w$	Verschiebung senkrecht zur Mittelfläche	[mm]	<b>2.1</b>	Bild 2.3
$x$	Höhe der Druckzone (allgemein)	[mm]	<b>2.2</b>	
$x_r, x_t$	Druckzonenhöhen nach der Umlagerung im Zustand II ( $r \equiv$ radial, $t \equiv$ tangential)	[mm]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$z$	Hebelarm der inneren Kräfte	[mm]	<b>2.3.2</b>	Bild 2.13

Griechische Buchstaben:

$\alpha$	resultierende Neigung von „T“ innerhalb der Summe der geneigten Kegelschalen	[ ° ]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$\alpha_c$	Völligkeitsbeiwert	[ – ]	<b>6.1.3</b>	Glg. 6.9
$\beta_t^*, \beta_c^*$	Reduktionsfaktoren für den offenen und geschlossenen Riss (Zug: $\beta_t^*$ , Druck: $\beta_c^*$ )	[ – ]	<b>5.</b>	
$\gamma, (\gamma_a)$	Gleitwinkel infolge Schubverformung, <b>Stahl</b>	[ – ]	<b>6.2.2.2</b>	Bild 6.13
$\varepsilon_{a,pl,x} \equiv \varepsilon_{a,pl,y}$	plastische Dehnungen im <b>Stahlprofil</b> (definiert über die gewählte Koordinatentransformation)	[ – ]	<b>5.3.1</b>	Bild 5.30b
$\varepsilon_{a,pl,yz}$	plastische Schubverzerrungen im <b>Stahlprofil</b>	[ – ]	<b>5.4.1</b>	Bild 5.50d
$\varepsilon_c, \varepsilon_{c,t}$	Dehnungen des Betonquerschnitts	[ – ]	<b>2.3.1</b>	Glg. 2.8
$\varepsilon_{c,H1}, \varepsilon_{c,H3}$	Hauptdehnungen im Betonquerschnitt	[ – ]	<b>1.2</b>	Bild 1.2
$\varepsilon_{c,cr}$	Kriechdehnung des Betons	[ – ]		
$\varepsilon_{c,el}$	elastische Grenzdehnung des Betons	[ – ]		
$\varepsilon_{c,u}$	rechnerische Bruchdehnung des Betons	[ – ]		
$\varepsilon_{c,el,x}, \varepsilon_{c,el,z}$	radial (:x) und vertikal (:y) gerichtete elastische Dehnungen im Betonquerschnitt	[ – ]	<b>5.2.1</b>	Bild 5.9a
$\varepsilon_{c,pl,x}, \varepsilon_{c,pl,y}$	radial (:x) und tangential (:y) gerichtete plastische Dehnungen im Betonquerschnitt	[ – ]	<b>5.2.1</b>	Bild 5.9b
$\varepsilon_{c,to,x}, \varepsilon_{c,to,y}$	Gesamtdehnungen in radialer und tangentialer Richtung im Betonquerschnitt	[ – ]	<b>5.3.1</b>	Bild 5.25a
$\varepsilon_{c,to,xz}$	Gesamtverzerrungen (in der x-z – Ebene) im Betonquerschnitt	[ – ]	<b>5.2.1</b>	Bild 5.17a
$\varepsilon_s, \varepsilon_{s,t}$	Dehnungen des Betonstahls	[ – ]	<b>2.3.1</b>	Glg. 2.9
$\eta_1, \eta_2$	dimensionslose Parameter, [68]	[ – ]	<b>6.2.2.4</b>	Glg. 6.63
$\kappa_a$	Schubverteilungszahl, Schubkorrekturfaktor	[ – ]	<b>6.2.2.1</b>	Glg. 6.54
$\mu$	Haftreibungskoeffizient	[ – ]	<b>2.2</b>	Bild 2.8
$\nu, \nu_c, \nu_a$	Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl), allgemein und für Beton und Baustahl	[ – ]	<b>6.2.2.2</b>	Glg. 6.59
$\rho$	Grad der wirksamen Bewehrung	[ % ]	<b>2.3.2</b>	Glg. 2.20
$\rho_L$	Grad der Bewehrung (obere Lage / längs)	[ % ]	<b>5.4</b>	Tab. 5.2
$\rho_L'$	Grad der Bewehrung (untere Lage / längs)	[ % ]	<b>5.4</b>	Tab. 5.2
$\sigma_F, \tau_F, (\sigma_k)$	Fließspannungen	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>6.2.2.4</b>	Bild 6.17
$\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}$	Hauptspannungen, nicht nach algebraischer Größe geordnet (... mit zusätzlichem Index bzw. Kennzeichnung für „Haupttrichtung“)	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>1.2</b>	Bild 1.2
$\sigma_{a,y}$	Normalspannung im <b>Stahl</b>	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>5.3.1</b>	Bild 5.30a

$\sigma_{c,x}, \sigma_{c,y}, \sigma_{c,z}$	Normalspannungen im <b>Beton</b> in Richtung der kartesischen Koordinaten oder der gedrehten Polarkoordinaten	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>1.2</b>	Bild 1.3
$\sigma_{a,yz} \equiv \tau_{a,yz}$	Schubspannung im <b>Stahl</b> , (y-z – Ebene)	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>5.3.1</b>	Bild 5.30d
$\sigma_{c,xz} \equiv \tau_{c,xz}$	Schubspannungen (x-z – Ebene) im <b>Beton</b>	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>5.2.2</b>	Bild 5.17b
$\varphi, \Delta\varphi$	Winkel des Plattenausschnittes	[ ° ]	<b>2.3.1</b>	Bild 2.11
$\psi$	Rotation, Winkel der Plattenverdrehung	[ – ]	<b>2.3.1</b>	Glg. 2.8
$\rho = \frac{r_i}{r_r}, \beta = \frac{r_r}{r_s}$	dimensionslose ortsbestimmende Parameter	[ – ]	<b>2.1</b>	Bild 2.2

**Indizes:**

<i>A1, A2</i>	Systemachsen (Bild 6.16 und Bild 6.18)		
<i>a</i>	Baustahl, Konstruktionsstahl		
<i>c</i>	Beton; kennzeichnet Druckbeanspruchung		(engl.: concrete)
<i>cr</i>	Kriechen		(engl.: creep)
<i>d</i>	Bemessungswert einer Größe		(engl.: design)
<i>eff</i>	wirksamer Wert, wirksame Kenngröße		(engl.: effective)
<i>el</i>	elastisch		
<i>I</i>	ungerissener Zustand des Betonquerschnitts,		<b>(Zustand I)</b>
<i>II</i>	gerissener Zustand des Betonquerschnitts,		<b>(Zustand II)</b>
<i>i, j, k</i>	Laufvariablen		
<i>h</i>	waagrecht wirksam, horizontal		(engl.: horizontal)
<i>k</i>	charakteristischer Wert eines Werkstoffkennwertes		(engl.: character)
<i>lokal</i>	kennzeichnet einen örtlichen Lasteinleitungsbereich		
<i>m</i>	mittlerer Wert (Durchschnittswert)		
<i>max</i>	maximaler Wert		
<i>min</i>	minimaler Wert		
<i>_o</i>	<b>oben</b>		
<i>pl</i>	plastisch		
<i>P</i>	Platte		
<i>Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub></i>	Systempunkte (Bild 6.1, Bild 6.16 und Bild 6.18)		
<i>R</i>	Beanspruchbarkeit, Rechenwert		(engl.: resistance)
<i>r</i>	radial		
<i>S</i>	Beanspruchung		(engl.: stress)
<i>s</i>	Betonstahl		
<i>t</i>	tangential; kennzeichnet Zugbeanspruchung		
<i>to</i>	Gesamtwert		(engl.: total)
<i>u, _u</i>	Grenzwert; <b>unten</b>		(engl.: ultimate)
<i>UK</i>	Unterkante		
<i>VB</i>	auf den Verbundquerschnitt bezogen		
<i>X1, X2</i>	auf die statisch Überzähligen <i>X<sub>1</sub></i> und <i>X<sub>2</sub></i> bezogen		

**Kapitel 3 und 4 (Materialmodelle und Methode der Finiten Elemente):**

Bezeichnung	Beschreibung	Kapitel	Glg. / Bild
<i>Lateinische Buchstaben:</i>			
$B, B^e$	Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix (für ein Element „e“)	4.3	Glg. 4.15
$C_G, D$	Werkstoffkonstanten ( <i>allgemein</i> )		
$C_{ijkl}$	Elastizitätstensor vierter Stufe	3.1.1	Glg. 3.2
$C_{ij}, C$	Elastizitätsmatrix	3.1.1	Glg. 3.11
$F^a$	Vektor der bekannten Knotenpunktkräfte (zusätzlich gewählte Bezeichnung aus [14]: $F^a = {}^tR$ )	4.5.1	Glg. 4.63
$F_i^{nr}$	Knotenpunktkräfte, die zu den Elementspannungen äquivalent sind, d.h. resultieren aus den Verzerrungen (zusätzlich gewählte Bezeichnung aus [14]: $F_i^{nr} = {}^tF$ )	4.5.1	Glg. 4.63
${}^tF$	entspricht: $F_i^{nr}$ ( <i>zeitlich</i> , von Lastschritten abhängig)	4.5	Glg. 4.56
$I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$	Grundinvarianten des Spannungstensors	3.1.2	Glg. 3.37
$J_{1s}, J_{2s}, J_{3s}$	Invarianten des Spannungsdeviators	3.2.1	Glg. 3.49
$J$	Jacobischer Operator	4.4.1	
$K$	Steifigkeitsmatrix, Steifigkeitsmatrix einer Gruppierung ( $K^S$ : Sekantensteifigkeit, $K^T$ : Tangentensteifigkeit und $K^0$ : Anfangssteifigkeit)	4.3	Glg. 4.19
$L$	Differentialmatrix (lineare Operator)	4.1	Glg. 4.1
$N, N_i, N^e$	Verschiebungsinterpolationsmatrix (für ein Element „e“)	4.3	Glg. 4.13
$P$	Spannungszustand an einer Stelle $P$ des Bauteils $\Rightarrow$ Spannungsbildpunkt	3.2.1	Bild 3.6
${}^tR$	entspricht: $F^a$ ( <i>zeitlich</i> , von Lastschritten abhängig)	4.5	Glg. 4.56
$T$	Spannungstensor zweiter Stufe in algebraischer Darstellung, $T \equiv \sigma_{ij}$ ; ( <b>oder Transformationsmatrix</b> )	3.1.2	Glg. 3.22
$T_H$	Spannungsmatrix in Diagonalgestalt	3.1.2	Glg. 3.38
$W, dW$	Verzerrungsenergiegedichte	3.1.1	Glg. 3.5
$dV$	Volumenelement	4.4.2	Glg. 4.37
$e_1, e_2, e_3$	Einheitsvektoren in Richtung der kartesischen Achsen (orthonormierte Basis)	3.2.2	Bild 3.22
$e = \frac{\Delta V}{V}$	Volumenänderung	3.2.1	
$n$	Normalenvektor, der senkrecht auf einer beliebig geschnittenen Ebene steht	3.1.2	Glg. 3.23



$r, s, t$	natürliche Koordinaten		<b>4.4</b>	Glg. 4.24
$r_1, r_2$	Positionsvektoren (in der Funktion nach Willam und Warnke, aus [120])		<b>3.2.1</b>	Bild 3.10
$s_{ij}$	Spannungsdeviator (mit kovarianter Permutation)		<b>3.2.1</b>	Glg. 3.42
$s_H$	Eigenvektoren von $s_{ij}$ ( $J_{1s} = 0, J_{2s}, J_{3s}$ )		<b>3.2.1</b>	Glg. 3.48
$t$	Spannungsvektor (oder Zeit)		<b>3.1.2</b>	Glg. 3.23
$u, U$	Verschiebungen (oder alternativ: $u, v, w$ )		<b>4.3</b>	Glg. 4.13

Griechische Buchstaben:

$\Gamma$	Rand		<b>4.1</b>	Bild 4.1
$\Pi$	Gesamtpotential (oder: <b>Deviatorebene, Oktaederebene</b> )		<b>4.2</b>	Glg. 4.8
$\Pi_a$	potentielle Energie der äußeren Kräfte (äußeres Potential)		<b>4.2</b>	Glg. 4.8
$\Pi_i$	potentielle Energie der inneren Kräfte (inneres Potential)		<b>4.2</b>	Glg. 4.8
$\delta_{ij}$	Identitätstensor, Kronecker-Symbol		<b>3.1.1</b>	Glg. 3.17
$\varepsilon_{ij}$	Dehnungen (mit kovarianter Permutation)		<b>3.1.1</b>	Glg. 3.5
$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	Lamé'sche Elastizitätskonstante	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.1.1</b>	Glg. 3.15
$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	Lamé'sche Elastizitätskonstante	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.1.1</b>	Glg. 3.16
$\xi, r, \theta$	Parameter zur geometrischen Darstellung eines Spannungsbildpunktes im Hauptspannungsraum		<b>3.2.1</b>	Bild 3.6
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen, nach algebraischer Größe geordnet ( $\sigma_{H1} = \sigma_1, \sigma_{H2} = \sigma_2 \dots$ )	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.1.2</b>	Glg. 3.37
$\sigma_m$	hydrostatischer Spannungsanteil	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.2.1</b>	Bild 3.7
$\sigma_{ij}, \sigma^{ij}$	Spannungstensor (mit kovarianter und kontravarianter Permutation)		<b>3.1.1</b>	Glg. 3.2
$\sigma_H$	Eigenvektoren von $T$ ( $\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}$ )	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.1.2</b>	Glg. 3.32
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Normalspannungen an einer Stelle $P$ des Bauteils ( $P$ : Spannungsbildpunkt)	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.1.2</b>	Bild 3.3
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$	Schubspannungen an einer Stelle $P$ des Bauteils ( $P$ : Spannungsbildpunkt)	[N/mm <sup>2</sup> ]	<b>3.1.2</b>	Bild 3.4

**Literaturverzeichnis**

- [ 1 ] ACI 318–99: Building Code Requirements for Structural Concrete (318-99) and Commentary (318R-99); Reported by ACI Committee 318, American Concrete Institute, Michigan, June 1999
- [ 2 ] Argyris, J.H.; Faust, G.; Roy, J.R.; Szimmat, J.; Warnke, E.P.; Willam, K.J.: Finite Elemente zur Berechnung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 234, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1973
- [ 3 ] Argyris, J.H.; Faust, G.; Szimmat, J.; Warnke, E.P.; Willam, K.J.: Recent Developments in the Finite Elements Analysis of Prestressed Concrete Reactor Vessels; Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen (ISD), University of Stuttgart, ISD–Report 151, Stuttgart 1973
- [ 4 ] Argyris, J.H.; Faust, G.; Szimmat, J.; Warnke, E.P.; Willam, K.J.: Finite Elementberechnung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 279, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn KG, Berlin 1977
- [ 5 ] Albrecht, A.: Durchstanzen bei Flachdecken – Vergleich der Bemessung und Konstruktion; Beton- und Stahlbetonbau, Heft 3, Seiten 130 bis 140, 1999
- [ 6 ] Altenbach, H.; Altenbach, J.; Naumenko, K.: Ebene Flächentragwerke – Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten; Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1998
- [ 7 ] Andersson, J.L.: Punching of Concrete Slabs with Shear Reinforcement; Transactions of the Royal Institute of Technology Stockholm, Nr 212 Civil Engineering 8 – Sweden 1963
- [ 8 ] Andrä, H.P.: Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken; Dissertation, Universität Stuttgart, 1982
- [ 9 ] Andrä, H.P.: Flachdecken: Stützenanschlüsse von Elementdecken mit Kopfbolzen und Gitterträgern; Vortrag anlässlich der 41. Ulmer Beton- und Fertigteil-Tage 1997
- [ 10 ] Andrä, H.P.: Zum Tragverhalten von Flachdecken mit Dübelleisten-Bewehrung im Auflagerbereich; Beton- und Stahlbetonbau Heft 3/1981 Seiten 53 bis 57 und Heft 4/1981 Seiten 100 bis 104; Verlag Wilhelm Ernst & Sohn
- [ 11 ] Andrä, H.P.; Baur, H.; Stiglat, K.: Zum Tragverhalten, Konstruieren und Bemessen von Flachdecken; Beton- und Stahlbetonbau Heft 10/1984 Seiten 258 bis 263, Heft 11/1984 Seiten 303 bis 310, Heft 12/1984 Seiten 328 bis 334; Verlag Ernst & Sohn
- [ 12 ] ANSYS • Guide to ANSYS User Programmable Features; Ansys Release 5.6, Third Edition · SAS IP Inc., Southpointe / Canonsburg – PA, February 2000
- [ 13 ] ANSYS Theory Reference; Edited by Peter Kohnke, Ph.D.; Ansys Release 5.6, Eleventh Edition · SAS IP Inc., Southpointe / Canonsburg – PA, November 1999
- [ 14 ] Bathe, K.-J.: Finite Elemente Methode – Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen; Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York · 1982
- [ 15 ] Beutel, R.: Durchstanzwiderstand von schubbewehrten Flachdecken im Bereich von Innenstützen; Forschungskolloquium: „Deutscher Ausschuss für Stahlbeton“ – an der RWTH Aachen, 1999, Seiten 108 bis 118

- [ 16 ] Bingham, E.C.; Reiner, M.: The Rheological Properties of Cement and Cement-Mortar-Stone; Physics – Volume 4, March 1933, pp. 88 – 96
- [ 17 ] Blatter, Ch.: Ingenieur Analysis 1 und 2; 2. Auflage, Springer Verlag Berlin · Heidelberg 1996
- [ 18 ] Bluhm, J.; de Boer, R.; Skolnik, J.: Allgemeine Plastizitätstheorie für poröse Medien; Universität – Gesamthochschule Essen, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 73, November 1996
- [ 19 ] Bode, H.: Euro-Verbundbau, Konstruktion und Berechnung; 2. Auflage, Werner Verlag GmbH & Co. KG., Düsseldorf 1998
- [ 20 ] de Boer, R.; Prediger, H.: Tensorrechnung – Grundlagen für Ingenieurwissenschaften; Universität – Gesamthochschule Essen, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 5, 1978
- [ 21 ] Borg, G.: Die Berechnung von ebenen, in ihrer Ebene belasteten Stahlbetonbauteilen mit der Methode der Finiten Elemente; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 406, Beuth Verlag GmbH, Berlin 1990
- [ 22 ] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik; 21. Auflage, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft · Leipzig und Verlag Nauka · Moskau 1979, Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch, Thun 1984
- [ 23 ] CEB-FIP Model Code 1990; Comité Euro-International du Béton, Lausanne 1990
- [ 24 ] Cedolin, L.; Crutzen, Y.R.J.; Dei Poli, S.: Triaxial Stress-Strain Relationship for Concrete; Journal of the Engineering Mechanics Division, June 1977, pp. 423 – 439
- [ 25 ] Chen, W.F.; Han, D.J.: Structural Engineering CE-STR-84-38, Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures – Program Listing and Input Manual; Report supported by the National Science Foundation under Grand No. CEE-8209626 to Purdue University, August 1984
- [ 26 ] Chen, W.F.; Han, D.J.: Plasticity for Structural Engineers; Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1988
- [ 27 ] Chen, W.F.; Zhang, H.: Structural Plasticity – Theory, Problems, and CAE Software; Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1991
- [ 28 ] Compaq Visual Fortran • Language Reference Manual; Compaq Computer Corporation, Houston – Texas; Digital Equipment Corporation, September 1999
- [ 29 ] Corley, W.G.; Hawkins, N.W.: Shearhead Reinforcement for Slabs; American Concrete Institute, ACI Journal, October 1968, pp. 811 – 879
- [ 30 ] Cunze Oliveira Lanna, A.J.: Zur Gebrauchsfähigkeit von Verbundträgern mit nachgiebiger Verdübelung; Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 92-1, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Januar 1992
- [ 31 ] Dieterle, H.; Rostasy, F.S.: Tragverhalten quadratischer Einzelfundamente aus Stahlbeton; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 387, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1987
- [ 32 ] Dilger, W.; Ernst, P.; Ghali, A.: Weiterentwicklung der Dübelleiste und Neuentwicklungen aus Kanada; Leipziger Massivbau Seminar, Band 3, Seiten 1 bis 15, 1996

- [ 33 ] DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton – Bemessung und Konstruktion; Normenausschuss Bauwesen (NABau) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, Juli 2001
- [ 34 ] Dougill, J.W.: Some Remarks on Path Independence in the Small in Plasticity; Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 33, October 1975, pp. 233 – 243
- [ 35 ] Dougill, J.W.: On Stable Progressively Fracturing Solids; Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 27, 1976, pp. 423 – 437
- [ 36 ] Dougill, J.W.; Spooner, D.C.: A Quantitative Assessment of Damage Sustained in Concrete During Compressive Loading; Magazine of Concrete Research – Vol. 27, No. 92, 1975, pp. 151 – 160
- [ 37 ] Duda, H.: Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 419, Beuth Verlag GmbH, Berlin 1991
- [ 38 ] Eggert, G.M., Dawson, P.R.; Mathur, K.K.: An Adaptive Descent Method for Non-Linear Viscoplasticity; International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 31, 1991, pp. 1031 – 1054
- [ 39 ] Eligehausen, R.; Hegger, J.; Beutel, R.; Vocke, H.: Zum Tragverhalten von Flachdecken mit Dübelleisten oder Doppelkopfkankern im Auflagerbereich; Bauingenieur 74, 1999, Seiten 202 bis 209
- [ 40 ] Eschenauer, H.; Schnell, W.: Elastizitätstheorie – Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung; 3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1993
- [ 41 ] Fenwick, R.C.: The Shear Strength of Concrete Beams; Thesis, University of Canterbury, New Zealand, 1966
- [ 42 ] Fenwick, R.C.; Paulay, T.: Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams; Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE – Vol. 94, October 1968, pp. 2325 – 2350
- [ 43 ] Freyssinet, E.: The deformation of concrete; Magazine of Concrete Research, December 1951, pp. 49 – 56
- [ 44 ] Georgopoulos, Th.: Durchstanzlast und Durchstanzwinkel über Innenstützen punktförmig gestützter Stahlbetonplatten und deren Sicherung gegen progressiven Kollaps; Dissertation, Technische Universität München, 1987
- [ 45 ] Georgopoulos, Th.; Tonis, D.: Vergleich einiger Vorschriften für den Nachweis der Sicherheit gegen Durchstanzen bei punktförmig gestützten Platten; Bauingenieur 62, 1987, Seiten 345 bis 351
- [ 46 ] Girkmann, K.: Flächentragwerke – Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Falwerke; Sechste Auflage, Unveränderter Nachdruck, Springer-Verlag, New York · Wien 1978
- [ 47 ] Glücklich, J.: The effect of microcracking on time-dependent deformations and the long-term strength of concrete; International Conference on the Structure of Concrete – Session D, Cement and Concrete Association, London 1968, pp. 176 – 189
- [ 48 ] Green, A.E.; Zerna, W.: Theoretical Elasticity; Second Edition, Oxford University Press, London 1968, Reprinted 1975

- [49] Hahn, H.G.: Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre; 2. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1982
- [50] Hallgren, M.: Punching Shear Capacity of Reinforced High Strength Concrete Slabs; Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology – Department of Structural Engineering, Stockholm, November 1996
- [51] Hammer, W.; Reyer, E.: Versuchsbericht Nr. A-04/98 – Durchstanzversuche mit Steifenkreuzen; Ruhr-Universität Bochum – Institut für konstruktiven Ingenieurbau – Bereich Konstruktionsteilprüfung, unveröffentlicht, März 1998
- [52] Han, D.J.: Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures; Thesis, Purdue University, West Lafayette, May 1984
- [53] Häusler, V.: Neuer Durchstanznachweis für Dübelleisten und ähnlichen Durchstanzbewehrungen in punktförmig gestützten Platten; Mitteilungen • Deutsches Institut für Bautechnik, Juni 1998
- [54] Hawkins, N.W.: Shear Strength of Slabs with Shear Reinforcement; Special Publication SP 42-34, Volume 2 – Shear in Reinforced Concrete; American Concrete Institute, Detroit 1974, pp. 785 – 815
- [55] Hawkins, N.W.; Corley, W.G.: Moment Transfer to Columns in Slabs with Shearhead Reinforcement; Special Publication SP 42-36, Volume 2 – Shear in Reinforced Concrete; American Concrete Institute, Detroit 1974, pp. 847 – 879
- [56] Hegger, J.; Beutel, R.: Durchstanzwiderstand von schubbewehrten Flachdecken im Bereich von Innenstützen; Bautechnik, Heft 8, Seiten 651 bis 657, 1999
- [57] Hegger, J.; Beutel, R.: Durchstanzen – Versuche und Bemessung; Der Prüflingenieur, Seiten 16 bis 33, Oktober 1999
- [58] Heilmann, H.G.: Beziehungen zwischen Zug- und Druckfestigkeit des Betons; Beton 1969, Heft 2, Seiten 68 bis 70
- [59] Heilmann, H.G.; Hilsdorf, H.; Finsterwalder, K.: Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugbeanspruchungen; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 203, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1969
- [60] Hillerborg, A.: Analysis of one Single Crack; Fracture Mechanics of Concrete – Developments in Civil Engineering 7, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, pp. 223–251, Switzerland 1983
- [61] Hirschfeld, K.: Baustatik – Theorie und Beispiele; Dritte Auflage / Erster und Zweiter Teil, Zweiter berichtigter Nachdruck, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1984
- [62] Hofstetter, G.; Mang, H.A.: Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures; Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden 1995
- [63] Houde, J.; Mirza, S.: A Finite Element Analysis of Shear Strength of Reinforced Concrete; Special Publication SP 42-5, Volume 1 – Shear in Reinforced Concrete; American Concrete Institute, Detroit 1974, pp. 103 – 128
- [64] Issler, L.; Ruoß, H.; Häfele, P.: Festigkeitslehre – Grundlagen; 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1997

- [ 65 ] Iványi, G.; Eibl, J.: Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 260, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn KG, Berlin · München · Düsseldorf 1976
- [ 66 ] Kinnunen, S.; Nylander, H.: Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement; Transactions of the Royal Institute of Technology Stockholm, Nr 158 Civil Engineering 3 – Sweden 1960
- [ 67 ] Kinnunen, S.: Punching of Concrete Slabs with Two-Way Reinforcement – With Special Reference to Dowel Effect and Deviation of Reinforcement from Polar Symmetry; Transactions of the Royal Institute of Technology Stockholm, Nr 198 Civil Engineering 6 – Sweden 1963
- [ 68 ] Klimek, G.; Klimek, M.: Discovering Curves and Surfaces with Maple; Springer-Verlag New York 1997
- [ 69 ] Klöppel, K.; Yamadá, M.: Fließpolyeder des Rechteck- und I-Querschnittes unter der Wirkung von Biegemoment, Normalkraft und Querkraft – Ein Beitrag zum allgemeinen Traglastverfahren für ebene Rahmen; Der Stahlbau, Heft 11 / November 1958
- [ 70 ] Kolmar, W.: Beschreibung der Kraftübertragung über Risse in nichtlinearen Finite-Element-Berechnungen von Stahlbetontragwerken; Dissertation, Universität Darmstadt, 1985
- [ 71 ] König, G.; Tue, N.V.: Grundlagen des Stahlbetonbaus – Einführung in die Bemessung nach Eurocode 2; BSB B.G. Teubner Studienbücher, Stuttgart · Leipzig 1998
- [ 72 ] Kupfer, H.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1973
- [ 73 ] Krishnaswamy, K.T.: Strength of concrete under combined tensile-compressive stresses; RILEM – Material and Structures, Vol. 2, No. 9, Paris 1969, pp. 187 – 194
- [ 74 ] Kordina, K.; Nölting, D.: Tragfähigkeit durchstanzgefährdeter Stahlbetonplatten – Entwicklung von Bemessungsvorschlägen; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 371, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1986
- [ 75 ] Ladner, M.; Schaeidt, W.; Gut, S.: Experimentelle Untersuchungen an Stahlbeton-Flachdecken; Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt (EMPA), Bericht Nr. 205, Dübendorf 1977
- [ 76 ] Laible, J.P.: An Experimental Investigation of Interface Shear Transfer and Applications in the Dynamic Analysis of Nuclear Containment Vessels; Thesis, Cornell University, August 1973
- [ 77 ] Laible, J.P.; White, R.N.; Gergely, P.: Experimental Investigation of Seismic Shear Transfer Across Cracks in Concrete Nuclear Containment Vessels; Special Publication SP 53-9, American Concrete Institute, Detroit 1984, pp. 203 – 226
- [ 78 ] Launay, P.; Cachon, H.: Strain and Ultimate Strength of Concrete Under Triaxial Stress; Special Publication SP 34-13, American Concrete Institute, Detroit 1972, pp. 269 – 282
- [ 79 ] Leonhardt, F.; Mönnig, E.: Vorlesungen über Massivbau – Teil 1 · Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau; Dritte, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, November 1983

- [80] Leonhardt, F.; Mönning, E.: Vorlesungen über Massivbau – Teil 2 · Sonderfälle der Bemessung im Stahlbetonbau; Dritte, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, Juni 1986
- [81] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau – Teil 4 · Nachweis der Gebrauchsfähigkeit; Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1978
- [82] Lungershausen, H.: Zur Schubtragfähigkeit von Kopfbolzendübeln; Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 88-7, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Oktober 1988
- [83] Maillart, R.: Zur Entwicklung der unterzugslosen Decke in der Schweiz und in Amerika; Schweizerische Bauzeitung 1926, Bd. 87, Nr. 21, Seiten 263 bis 265
- [84] Márkus, G.: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke; 3. Auflage, Werner Verlag, Düsseldorf 1978
- [85] Matthaei, O.; Andrä, H.P.; Tue, N.V.: Sheet Reinforcement; RILEM Publications S.A.R.L.: Connections between Steel and Concrete – Volume Two; International Symposium, University of Stuttgart, Sept. 2001
- [86] Menetrey, Ph.: Numerical Analysis of Punching Failure in Reinforced Concrete Structures; Thesis, Département de Génie Civil – École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1994
- [87] van Mier, J.G.M.: Complete Stress-Strain Behavior and Damaging Status of Concrete under Multiaxial Conditions; RILEM-CEB-CNRS, International Conference on Concrete Under Multiaxial Conditions, Presse de l'Université Paul Sabatier, France – Toulouse 1984, pp. 75 – 85
- [88] Müller, G.; Rehfeld, I.: FEM für Praktiker – Basiswissen und Arbeitsbeispiele zur Methode der Finiten Elemente mit dem FE-Programm ANSYS; Expert Verlag 1993, Kontakt & Studium, Band 441
- [89] Ollgaard, J.G., Slutter, R.G.; Fisher, J.W.: Shear Strength of Stud Connectors in Lightweight and Normal-Weight Concrete; AISC Engineering Journal, Vol. 8, Nr. 2, April 1971, pp. 55 – 64
- [90] Owen, D.R.J., Figueiras, J.A.; Damjanic, F.: Finite Element Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures including Thermal Loading; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 41, 1983, pp. 323 – 366
- [91] Pardey, A.: Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten im Vergleich zur Bruchlinientheorie; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 441, Beuth Verlag GmbH, Berlin 1994
- [92] Paulay, T.; Loeber, J.: Shear Transfer by Aggregate Interlock; Special Publication SP 42-1, Volume 1 – Shear in Reinforced Concrete; American Concrete Institute, Detroit 1974, pp. 1 – 15
- [93] Petersen, Ch.: Stahlbau – Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten, 3., überarbeitete und erweiterte Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden 1993
- [94] Piltz, H.; Härig, S.; Schulz, W.: Technologie der Baustoffe – Eigenschaften und Anwendung; 8. Vollkommen neu bearbeitete Auflage, Dr. Lüdecke-Verlagsgesellschaft mbH, Haslach i. K. 1985

- [ 95 ] Rasch, Ch.: Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 154, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1962
- [ 96 ] Reimann, H.: Zur Bemessung von dünnen Plattendecken auf Stützen ohne Kopf gegen Durchstanzen; Dissertation, Technische Hochschule Stuttgart, 1963
- [ 97 ] Remmel, G.: Zum Zug- und Schubtragverhalten von Bauteilen aus hochfestem Beton; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 444, Beuth Verlag GmbH, Berlin 1994
- [ 98 ] Ritter, K.: Beitrag zur spannungsoptischen Untersuchung des räumlichen Spannungszustandes im Stützenbereich von Flachdecken; Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe, 1961
- [ 99 ] Roik, K.; Hanswille, G.: Beitrag zur Bestimmung der Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln; Der Stahlbau, Heft 10, Seiten 301 bis 308 / 1983
- [100] Rüsck, H.; Kordina, K.; Hilsdorf, H.: Der Einfluss des mineralogischen Charakters der Zuschläge auf das Kriechen von Beton; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 146, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1962
- [101] Salas, S.L.; Hille, E.: Calculus – Einführung in die Differential- und Integralrechnung; Spektrum Akademischer Verlag, 1994
- [102] Schaefers, U.: Konstruktion, Bemessung und Sicherheit gegen Durchstanzen von balkenlosen Stahlbetondecken im Bereich von Innenstützen; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 357, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1984
- [103] Schaeidt, W.; Ladner, M.; Rösli, A.: Berechnung von Flachdecken auf Durchstanzen; Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt (EMPA), Beton-Verlag GmbH, Düsseldorf 1970
- [104] Schnobrich, W.C.; Suidan, M.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete; Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE – ST10, October 1973, pp. 2109 – 2122
- [105] Schroeder, F.H.: Seminarvorträge über die Erhaltungssätze und Stoffgleichungen der Kontinuumsmechanik; Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bautechnik, Bericht Nr. F81/1, Januar 1981
- [106] Sedlacek, G., Brozzeti, J.; Hanswille, G.; Johnson, R.; Litzner, H.U.; Canisius, T.D.G.: Relationship between Eurocode 1 and the «Material» oriented Eurocodes, IABSE: EC 1 Colloquium in Delft, 1996
- [107] Shah, S.P., Chandra, S.: Critical Stress, Volume Change, and Microcracking of Concrete; ACI Journal – Title No. 65 – 57, September 1968, pp. 770 – 781
- [108] Simo, J.C.; Taylor, R.L.: Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 48, 1984, pp. 101 – 118
- [109] Skrzypek, J.J.: Plasticity and Creep – Theory, Examples, and Problems; Begell House / CRC Press Inc., Florida 1993
- [110] Staller, M.: Durchstanzen – Theoretische Modelle und Versuchsauswertungen; Technische Universität München, Anwendungen und Entwicklung – Seminar 1997



- [111] Stiglat, K.: Statische und konstruktive Probleme mit Lösungsmöglichkeiten bei Flachdecken im Stützbereich; Bericht Nr. 3 der Bundesvereinigung der Prüflingenieur für Baustatik, 1979
- [112] Straub, L.G.: Plastic Flow in Concrete Arches; American Society of Civil Engineers – Discussions, Vol. 95, February 1931, pp. 623 – 627
- [113] Taylor, R.L., Beresford, P.J.; Wilson, E.L.: A Non-Conforming Element for Stress Analysis; International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, 1976, pp. 1211 – 1219
- [114] Vecchio, F.; Collins, M.P.: The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses; University of Toronto, Department of Civil Engineering, March 1982
- [115] Walraven, J.C.: Aggregate Interlock – A theoretical and experimental analysis; Thesis, Delft University Press, October 1980
- [116] Walter, W.: Analysis 1; Dritte, verbesserte Auflage; Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1993
- [117] Walter, W.: Analysis 2; Vierte, durchgesehene und ergänzte Auflage; Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1995
- [118] Weigler, H.; Rings, K.H.: Unbewehrter und bewehrter Beton unter Wechselbeanspruchung; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 383, Ernst & Sohn – Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin 1987
- [119] Willam, K.; Etse, G.: Failure Analysis of Elastoviscoplastic Material Models; Journal of the Engineering Mechanics, January 1999, pp. 60 – 69
- [120] Willam, K.J.; Warnke, E.P.: Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete; ISBSE – International Association of Bridge and Structural Engineers, Seminar on: "Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses", Volume - Band 19 / Paper III-1, Ismes – Bergamo (Italy), May 1974
- [121] Wilson, E.L.; Taylor, R.L.; Doherty, W.P.; Ghaboussi, J.: Incompatible Displacement Models; Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press, London 1973, pp. 43 – 57
- [122] Wischers, G.: Aufnahme und Auswirkungen von Druckbeanspruchungen auf Beton; Betontechnische Berichte Heft 2/1978 Seiten 63 bis 67 und Heft 3/1978 Seiten 98 bis 103; Beton Verlag Düsseldorf
- [123] Zienkiewicz, O.C.; Taylor R.L.: The Finite Element Method; Fourth Edition, Volume 1, Basic Formulation and Linear Problems, McGraw-Hill Book Company, London 1989
- [124] Zilch, K.; Staller, M.; Blaschko, M.: Vergleichende Untersuchungen zur Tragfähigkeit durchstanzgefährdeter Platten anhand verschiedener theoretischer Berechnungsmodelle; Forschungsbericht T 2730 – Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München, Institut für Tragwerksbau, Fraunhofer IRB Verlag 1996