

**Zum Stabilitätsnachweis von Schalenträgwerken aus
Hochleistungsbeton**

Dissertation

zur

**Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)**

der

**Abteilung Bauingenieurwesen
im Fachbereich D an der
Bergischen Universität Wuppertal**

von

Matthias Andres

aus Bochum

2004

Veröffentlicht als Heft 1 in der Schriftenreihe des
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau
Fachbereich D, Abteilung Bauingenieurwesen
Bergische Universität Wuppertal

Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Bergische Universität Wuppertal

Organisation und Verwaltung

Dipl.-Ing. W. Hammer
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Bergische Universität Wuppertal
Pauluskirchstraße 7
42285 Wuppertal
Telefon: (0202) 439-4209

© **Dr.-Ing. Matthias Andres**
Lewackerstraße 267
44879 Bochum

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Untersuchung des Stabilitätsversagens einer Schalenstruktur aus Stahlbeton und hierbei speziell aus dem Werkstoff Hochleistungsbeton. Mit den seitens der Materialtechnologie entstandenen Betonen hoher Festigkeit ist es zunehmend möglich, die Querschnittsdicke von Stahlbetonstrukturen zu reduzieren. Hierdurch tritt vermehrt die Problematik des Stabilitätsversagens gegenüber dem sonst üblichen Spannungsversagen in den Vordergrund.

Zur Erforschung dieses Phänomens wird in eine isoparametrische Finite-Element-Formulierung ein im Besonderen den Nachriss- und Nachbruchbereich des Betons realitätsnah beschreibendes Materialgesetz implementiert. Des Weiteren werden die aus der Elastostatik bekannten Stabilitätskriterien auf ihre Gültigkeit und Anwendbarkeit hin überprüft und erweitert.

Aus der zeitaufwändigen geometrischen und materiellen nichtlinearen Analyse heraus wird ein Konzept zur Berücksichtigung von initialen Schädigungen bei der Stabilitätsanalyse von Tragwerken entwickelt. Durch die Definition von die Schädigung beschreibenden Parametern ist es möglich mit Hilfe einer der klassischen Stabilitätsanalyse ähnlichen Vorgehensweise eine verbesserte Abschätzung des kritischen Lastniveaus vorzunehmen.

Unter der Berücksichtigung der Ergebnisse von einigen Analysen von Anwendungsbeispielen wird zum Abschluss ein Vorschlag zur Einbettung der vorgestellten Vorgehensweise in das derzeit bestehende Normenkonzept unterbreitet.

Abstract

The present work deals with the investigation of the phenomenon of stability failure of a reinforced concrete shell structure, especially made of high performance concrete. The development of concrete mixtures with high compression strength allows the reduction of cross-section height of reinforced concrete structures. Due to this, stability failure come into the forefront against the usually occurring stress failure.

To research this phenomenon an isoparametric finite element formulation is extended with a non-linear material law for concrete, which describes the behaviour after cracking and crushing close to reality. Furthermore the known stability criteria of elastostatics are proofed and extended for validity and applicability.

From among time-consuming geometrical and material non-linear analysis a concept for consideration of initial damage in stability analysis is developed. As a result of the definition of damage-describing parameters and the use of a procedure near to the classical stability analysis it is possible to estimate a critical load factor nearer to reality.

At last a proposal for the integration of the developed concept into the actual standard specifications is made under the consideration of the results of some analysis of applications.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1999 bis 2004 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehr- und Forschungsgebiet Statik und Dynamik der Tragwerke des Fachbereichs D, Abteilung Bauingenieurwesen der Bergischen Universität Wuppertal.

Mein Dank gilt in besonderem Maße Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Harte, der mir durch die Durchsetzung des Forschungsthemas die Möglichkeit zur Promotion an seinem Lehr- und Forschungsgebiet gegeben hat. Während der Bearbeitung stand er mir stets mit anregenden Diskussionen und kritischen Fragen zur Seite und hat so einen großen Anteil an dem Gelingen dieser Arbeit.

Daneben geht mein herzlicher Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. e.h. W.B. Krätzig, der neben der Übernahme des zweiten Referats mir während meiner Studienzeit an der Ruhr-Universität Bochum die Freude an der wissenschaftlichen Arbeit vermittelt hat. Auch er hat mich über die Jahre mit großem Einsatz stets in meiner Arbeit bestärkt und unterstützt.

Zusätzlich geht mein Dank an meine Kolleginnen und Kollegen für die gute Zusammenarbeit und für die hilfreichen Ratschläge, die zu dem vorliegenden Resultat meiner Arbeit beigetragen haben.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG danke ich für die Finanzierung großer Teile meiner Arbeit im Rahmen des Forschungsprojektes „Grundsatzuntersuchungen zum Stabilitätsverhalten von Schalenkonstruktionen aus Hochleistungsbeton“.

Ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Nicole und meiner Familie, die mir stets verständnisvoll und motivierend in allen Phasen meiner Arbeit zur Seite standen.

Bochum, im Mai 2004

Matthias Andres

Tag der Einreichung: 28. November 2003

Tag der mündlichen Prüfung: 11. März 2004

Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Harte

em. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. e.h. W.B. Krätzig

Vorsitzender der Prüfungskommission: Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Zahlten

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Ziel und Gliederung der Arbeit	3
2 Zum Stabilitätsversagen von Schalentragswerken aus Stahlbeton	6
2.1 Phänomenologie des Stabilitätsversagens	6
2.2 Allgemeiner Überblick über die Lösungsmethoden des Stabilitätsproblems.	9
2.3 Beulversuche an Stahlbetonschalen	13
3 Kontinuumsmechanische und schalentheoretische Grundlagen und Finite-Element-Formulierung	16
3.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen	16
3.1.1 Kontinuumsmechanische Betrachtungsweisen	16
3.1.2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	17
3.1.3 Prinzip der virtuellen Verschiebungen	17
3.2 Schalentheoretische Grundlagen	18
3.2.1 Darstellung der Geometrie	18
3.2.2 Grundgleichungen der REISSNER-MINDLIN-Schalentheorie	21
3.2.2.1 Deformationszustand	21
3.2.2.2 Kinematik	21
3.2.2.3 Konsistenter Schnittgrößentensor	21
3.2.2.4 Konstitutive Beziehungen	22
3.3 Inkrementelle Vorgehensweise	24
3.4 Berücksichtigung von geometrischen Imperfektionen	25
3.4.1 Addition von Verschiebungsinkrementen und facettenartige Abbildung	25

3.4.2	Erweiterung des Ortsvektors unter Beibehaltung des perfekten Geometrieansatzes	27
3.5	Gleichungslösung und Determinantenbildung	28
3.6	Beispiel zur Problematik bei hochwertigen Elementansätzen	28
3.7	Finite-Elemente Programmsystem FEMAS 2000	30
4	Ein normgerechtes Materialmodell für hochfesten Stahlbeton	32
4.1	Zum Materialverhalten des Werkstoffs Beton	32
4.2	Betonmodell nach DARWIN & PECKNOLD	34
4.3	Einaxialer Spannungszustand	36
4.3.1	Beschreibung nach MODEL CODE 90	37
4.3.2	Beschreibung nach DIN 1045-1	38
4.4	Biaxiales Versagenskriterium	40
4.5	Rissverhalten	42
4.6	Weitere festigkeitsabhängige Betoneigenschaften	42
4.7	Materialmodell für Betonstahl	45
4.8	Tension-Stiffening bei hochfesten Betonen	46
4.8.1	Allgemeines	46
4.8.2	Ein vereinfachtes Verfahren zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons	47
4.8.3	Ein detailliertes Verfahren zur Berücksichtigung der Mitwirkung von Beton	48
4.9	Softening-Verhalten des Werkstoffs Stahlbeton	54
4.9.1	Softening unter Zugbeanspruchung	54
4.9.2	Softening unter Druckbeanspruchung	55
4.10	Die Zufallsverteilung des Werkstoffparameters Zugfestigkeit.	59
4.11	Verifizierungsbeispiele	61
4.11.1	Scheibe unter einaxialer Belastung	61
4.11.2	Scheibe unter biaxialer Belastung	62
4.11.3	Scheibe mit unterschiedlichen Abmessungen unter einaxialer Druckbelastung	63
4.11.4	Schubversagen einer Scheibe nach VECCIO & COLLINS	64
4.11.5	Zugstab mit zentrischer Bewehrung	66
4.11.6	Zugstab mit unterschiedlichen Tension-Stiffening Modellierungen.	67

5	Auswahl und Bemessung stabilitätsgefährdeter Modellschalen nach DIN 1045-1	68
5.1	Erweiterung des allgemeinen Bemessungskonzeptes für hochfeste Betone. . .	68
5.2	Auswahl von stabilitätsgefährdeten Modellschalen	71
5.3	Bemessung und Konstruktion der Modellschalen	78
5.3.1	Allgemeine Vorgaben	78
5.3.2	Ergebnisdiskussion der Bemessung der Modellschalen für Hochleistungs- beton	79
6	Traglast- und Stabilitätsanalyse von Stahlbetonschalen mit Hilfe der FEM	85
6.1	Geometrisch und physikalisch nichtlineare Traglastanalyse	85
6.1.1	Allgemeine Vorgehensweise bei Anwendung der FEM	85
6.1.2	Inkrementell-iterative Pfadverfolgungsalgorithmen	86
6.1.3	Normative Vorgaben nach DIN 1045-1	87
6.2	Stabilitätsanalyse von Stahlbeton-Schalentragwerken	89
6.2.1	Allgemeine Stabilitätskriterien	89
6.2.2	Elastische globale Stabilitätsanalyse	90
6.2.2.1	Abhängigkeit von der Diskretisierungstiefe	91
6.2.2.2	Einfluss des Hochleistungsbetons auf das globale Stabili- tätsverhalten	92
6.2.3	Geometrisch und physikalisch nichtlineare Stabilitätsanalyse	95
6.2.3.1	Allgemeines	95
6.2.3.2	Die begleitende Eigenwertanalyse	96
6.2.3.3	Determinantenanalyse der tangentialen Steifigkeits- und Teilmatrizen	100
6.2.3.4	Steifigkeitsparameter nach BERGAN	102
6.2.3.5	Die begleitende Ermittlung der Eigenfrequenzen	105
6.2.3.6	Parallele lineare Analyse zur Identifizierung des Versa- gensmechanismus	105
6.2.3.7	Weitere Stabilitätskriterien	108
7	Konzept zu einer schädigungsorientierten Stabilitätsanalyse	110
7.1	Allgemeines	110
7.2	Begriffsdefinition	110
7.2.1	Schädigung	110

7.2.2	Initiale Schädigung	113
7.2.3	Anisotropie	114
7.3	Approximation der Beullast durch Initialschädigung	117
8	Anwendungsbeispiele	121
8.1	Ebene Wandscheibe mit geometrischen Imperfektionen	121
8.2	Zylindrisches Schalenfeld unter Einzellast	123
8.3	Schalenbogen unter Einzellast	126
8.4	Gedrücktes zylindrisches Schalenfeld	132
8.5	Parameterstudie Rotationshyperboloid	140
8.6	Kühlturmschale GRAND GULF, USA	147
8.6.1	Beschreibung des Schalentragswerks	147
8.6.2	Nichtlineare Stabilitätsanalysen	149
8.6.3	Schädigungsorientierte Stabilitätsanalyse	156
8.7	Aufwindkraftwerk	157
9	Übertragung auf das derzeitige Normenkonzept	162
9.1	Vorhandene Beulkriterien	162
9.2	Vorschlag für einen verbesserten Stabilitätsnachweis für den Planungsprozess ⁶³	
10	Zusammenfassung und Ausblick	167
A	Ergänzende Formeln und Diagramme	169
A.1	Nichtlineare kinematische Größen	169
A.2	Verbund	171
A.3	Bruchenergie	171
A.4	Normalverteilung der Zugfestigkeit	172
A.5	Verhältniswertbildung logarithmisch skaliertter Matrizen	172
A.6	Gedrücktes zylindrisches Schalenfeld	173
	Literaturverzeichnis	176

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

$(\dots)^0$	Variablen des unverformten, perfekten und spannungsfreien Ausgangszustandes
$(\dots)_{imp}^0$	Variablen des unverformten, imperfekten und spannungsfreien Ausgangszustandes
$(\dots)^-$	Variablen des Nachbarzustandes
$(\dots)^+$	1. Variation
$(\dots), \delta(\dots)$	
$(\dots)^{++}$	2. Variation
$(\dots)^*$	Variablen außerhalb der Schalenmittelfläche
$(\dots)^L$	Variablen, linear von den Verformungen abhängig
$(\dots)^{NL}$	Variablen, nichtlinear von den Verformungen abhängig
$(\dots)^{\textcircled{i}}, (\dots)_i$	Variablen im i-ten Berechnungsschritt
$d(\dots)$	differentielles oder inkrementelles (infinitesimales) Element
$\ (\dots)\ $	Norm eines Vektors
$\Delta(\dots)$	Differenzen
\forall	alle Elemente einer Menge
\exists	ein Element einer Menge
$(\dots)^{o/u}$	Variablen an Ober- und Unterseite des Schalenquerschnitts
$(\dots)_d$	schädigungsabhängige Variable

Kontinuumsmechanik

Π	Gesamtpotenzial
Π_i, Π_a	Potenzial der inneren und äußeren Kräfte
$\delta^* A_i, \delta^* A_a$	virtuelle innere und äußere Arbeit
t, t_0	Zeit, Bezugszeitpunkt

Schalentheorie

\mathbf{i}_i	Einheitsvektoren der orthonormierten Vektorbasis
----------------	--

X^i	globale orthogonal-kartesische Koordinaten
$\Theta^\alpha = \xi^\alpha$	materielle Schalenmittelflächenkoordinate
$\Theta^3 = \xi^3$	Dickenkoordinate des Schalenkontinuums
A^i	Komponenten des Normaleneinheitsvektors
Ψ_1, Ψ_2	Eulerwinkel
\mathbf{r}	Ortsvektor eines Punktes auf der Schalenmittelfläche
\mathbf{a}_α	kovariante Basisvektoren
\mathbf{a}^α	kontravariante Basisvektoren
\mathbf{a}_3	Einheitsvektor in Dickenrichtung
$a_{\alpha\beta}$	kovarianter Metriktensor
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\omega}$	Verschiebungs-, Differenz- und Rotationsvektor
γ_{ij}	GREEN'scher Verzerrungstensor
$\alpha_{\alpha\beta}$	Dehnverzerrungstensor
$\beta_{\alpha\beta}$	Biegeverzerrungstensor
γ_α	Schubverzerrungstensor
σ^{ij}	zweiter PIOLA-KIRCHHOFF'scher Spannungstensor
$\tilde{N}^{(\alpha\beta)}, \tilde{Q}^\alpha$	Pseudo-Normalkraft- und Pseudo-Querkrafttensor
$N^{(\alpha\beta)}, M^{(\alpha\beta)}, Q^\alpha$	Normalkraft-, Momenten- und Querkrafttensor
$N^{<\alpha\beta>}, M^{<\alpha\beta>}, Q^{<\alpha>}$	physikalischer Normalkraft-, Momenten- und Querkrafttensor
E^{ijkl}	dreidimensionaler elastischer Werkstofftensor
G	Schubmodul
$\overset{0}{\mu}$	Shifter des Schalenkontinuums
F	Fläche des Schalenkontinuums
h	Schalendicke
K	GAUSS'sche Krümmung

Finite-Element-Formulierung

$\mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{M}$	Steifigkeits-, Dämpfungs- und Massenmatrix
$\mathbf{K}_T, \mathbf{C}_T$	tangentiale Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix
$\tilde{\mathbf{K}}_T$	skalierte tangentiale Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_e	elastische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_u, \mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_G$	Anfangsverformungsmatrix, Anfangsspannungsmatrix = geometrische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_U	Verschiebungssteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_N	nichtlinearer Anteil der tangentiale Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}}, \ddot{\mathbf{V}}$	Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor
$\mathbf{P}_a, \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_c, \mathbf{F}_m$	Vektor der äußeren-, inneren-, Dämpfungs- und Trägheitskräfte
$\overset{0}{\mathbf{P}}$	Vektor des Bezugslastfalls
\mathbf{L}	normierte obere Dreiecksmatrix
\mathbf{D}	Diagonalmatrix
D_{ii}	Hauptdiagonalelemente
X	Verhältniswert der Determinanten der Teilmatrizen
A^e	Elementfläche

n_{int} Anzahl der Integrationspunkte je Element

Betonmodell

C	Werkstoffmatrix
E_0	Anfangselastizitätsmodul
E_i	Elastizitätsmodul in i-ter Hauptspannungsrichtung
E_{cm}	mittlerer Elastizitätsmodul für Normalbeton
E_S	Sekantenelastizitätsmodul
E_c	Elastizitätsmodul des Betons
ε_c	Betondehnung
ε_{iu}	äquivalente einaxiale Dehnung in i-ter Richtung
ε_{cu}	Bruchdehnung des Betons
ε_{ic}	äquivalente einaxiale Dehnung bei max. Druckspannung
ε_{c1}	Betondehnung bei Erreichen der maximalen Druckspannung
ε_{c1u}	Betondehnung bei Versagen nach DIN 1045-1 (2001)
γ_{12}, τ_{12}	Schubverzerrung und -spannung
σ_i	Spannung in i-Richtung
σ_{1c}, σ_{2c}	axiale Betondruckspannungen
σ_{1t}, σ_{2t}	axiale Betonzugspannungen
f_c	Betondruckfestigkeit
f_{ck}	charakteristische Zylinderdruckfestigkeit
$f_{ck,cube}$	charakteristische Würfeldruckfestigkeit
f_{cm}	Mittelwert der Zylinderdruckfestigkeit des Betons
f_{cR}	rechnerischer Mittelwert der Zylinderdruckfestigkeit des Betons bei nichtlinearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung nach DIN 1045-1 (2001)
f_c'	90 % der mittleren Zylinderdruckfestigkeit
f_{ct}	zentrische Zugfestigkeit
f_{ctm}	Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit des Betons
$f_{ct,fl}$	Biegezugfestigkeit des Betons
G_c	Zerstauchungsenergie
G_{cu}	außerhalb der Schädigungszone dissipierte Energie
G_{cl}	innerhalb der Schädigungszone dissipierte Energie
g_{cl}^*	volumenspezifische Bruchenergie
g_{cl}^{red}	rechnerisch reduzierte Bruchenergie
g_{cl}^{diff}	Differenz der reduzierten und normalen Bruchenergie
h_{cl}	Höhe des Rissbandes (Prozesszonenhöhe) im Beton
h	Bauteilhöhe
$n, n_E, n_{f_{ck}}$	Parameter zur Beschreibung des Nachbruchbereichs nach DARWIN & PECKNOLD
$l^*(\)$	charakteristische Risslänge
l_{eq}	äquivalente Risslänge
ν	Querdehnungszahl

Stahlmodell

E_0, E_s	Elastizitätsmodul des Stahls
E_T	tangentialer Elastizitätsmodul
E_S	Sekantenelastizitätsmodul
f_{yk}	charakteristischer Wert der Fließgrenze des Betonstahls
f_{ym}	Mittelwert der Fließgrenze des Betonstahls
f_{yR}	rechnerischer Mittelwert der Fließgrenze des Betonstahls bei nichtlinearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung
f_{tR}	rechnerischer Mittelwert der Zugfestigkeit des Betonstahls bei nichtlinearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung
f_t	Stahlzugfestigkeit
Δf_{yk}	Fließgrenze nach kinematischer Verfestigung
ε_{su}	Dehnung bei Erreichen der Zugfestigkeit
A_s, a_s	Querschnittsfläche der Bewehrung
d_s	Durchmesser der Bewehrung

Verbundmodell

σ_s, σ_c	Stahl- und Betonspannung
$\sigma_{sr}, \varepsilon_{sr}$	Stahlspannung und -dehnung im Rissquerschnitt
$\sigma_{sm}, \varepsilon_{sm}$	mittlere Stahlspannung und -dehnung
$\varepsilon_s^{\text{II}}$	Stahldehnung im reinen Zustand II
τ_b	Verbundspannung
τ_{sm}	mittlere Verbundspannung
τ_{max}	maximale Verbundspannung
τ_f	Verbundreibungsspannung
zul. τ_1	Grundwert der Verbundspannung nach DIN 1045 (1988)
f_{bd}	Bemessungswert der Verbundspannung nach DIN 1045-1 (2001)
T_{um}	Verbundkraft
U_s	Umfang des Bewehrungsstahls
s	Schlupf (Relativverschiebung) zwischen Beton und Betonstahl
v_s, v_c	Stahl- und Betonverschiebung
δ_s	Längenänderung am Stabelement
s_r	Rissabstand
α_e	Verhältnis der E-Moduli von Stahl und Beton
k_1, n_s, c_0, n	Parameter des Verbundmodells nach König, Tue & Zink (2001)
a, α	Vorfaktor und Exponent eines allgemeinen Verbundgesetzes
$A_{c,eff}$	effektive Betonquerschnittsfläche
ρ	auf den Gesamtquerschnitt bezogener Bewehrungsgrad

Bemessungskonzept

ε_{c2}	Betondehnung bei Erreichen der Festigkeitsgrenze bei Anwendung des Parabel-Rechteck-Diagramms
--------------------	---

ε_{c2u}	Bruchdehnung des Betons im Parabel-Rechteck-Diagramm
σ_c	Betonspannung
σ_s	zulässige Spannung der Betonstahlbewehrung nach DIN 1045-1 (2001)
$f_{ct,0}$	Bezugsbetonzugfestigkeit
$f_{ct,eff}$	wirksame Betonzugfestigkeit
h_t	Höhe der Betonzugzone im betrachteten Querschnitt
f_{cd}	Bemessungswert der einaxialen Druckfestigkeit des Betons
α	Dauerstandsbeiwert
c_{nom}, c_{min}	Nenn- bzw. Mindestmaß der Betondeckung
Δc	Vorhaltmaß der Betondeckung für unplanmäßige Abweichungen
d	statische Nutzhöhe
d_1	Abstand des Bewehrungsschwerpunktes von der Bauteiloberfläche
d_s^*	Grenzdurchmesser der Bewehrung
ξ	bezogene Druckzonenhöhe
k_a	bezogener Abstand der Betondruckspannungs-Resultierenden vom Querschnittsrand
k_c	Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der Spannungsverteilung innerhalb der Zugzone
α_R	Völligkeitsparameter der Betonspannungsverteilung
n	Parameter zur Völligkeit der Spannungs-Dehnungslinie
k	Beiwert zur Berücksichtigung nichtlinear verteilter Betonzugspannungen
γ_c	Teilsicherheitsbeiwert für Beton
γ'_c	zusätzlicher Teilsicherheitsbeiwert für hochfeste Betone nach DIN 1045-1 (2001)
γ_s	Teilsicherheitsbeiwert für Bau- und Spannstahl
A_{ct}	Fläche der Betonzugzone

Stabilität

\mathbf{V}_{crit}	Verschiebungsvektor des kritischen Gleichgewichtszustandes
\mathbf{V}_{alt}	alternative Lösung für den Verschiebungszuwachs im kritischen Gleichgewichtszustand
Ψ	Eigenvektor
ξ	Amplitude der Störverformung
λ_{min}	Lastfaktor im Nachbeulminimum
λ_{crit}	kritischer Beullastfaktor
Λ	Eigenwert des linearisierten Eigenwertproblems
β	Eigenwert des inkrementellen Eigenwertproblems
S_P	Steifigkeitsparameter
$X_{\mathbf{K}_e}, X_{\mathbf{K}_u}, X_{\mathbf{K}_\sigma}$	prozentuale Änderung des Steifigkeitsparameters von \mathbf{K}_e , \mathbf{K}_u , \mathbf{K}_σ beim Vergleich von linearer und nichtlinearer Analyse
$\rho_{imp}, \rho_{creep}, \rho_{crack}, \rho_{pl}$	Abminderungsfaktor für Verfahren nach DULÁCSKA & KOLLAR

Schädigungsmodell

$D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$	Dehn- und Biegesteifigkeit
D	Schädigungsparameter
D^{comp}	Schädigung des Betons infolge Druck
D^{ten}	Schädigung des Betons infolge Zug
D^{steel}	Schädigung des Bewehrungsstahls
t_{crack}	Risstiefe
e_{si}	Schwerlinie der Bewehrungslage
e_{ges}	Lage der Schwerlinie des Gesamtquerschnitts

Stochastik

μ	arithmetisches Mittel
σ_x	Standardabweichung oder Streuung
σ_x^2	Varianz
X, Z	Zufallsvariablen
$N(\mu, \sigma_x^2)$	Normalverteilung
$N(0, 1)$	Standardnormalverteilung
$P(a < X \leq b)$	Wahrscheinlichkeitsdichte für das Intervall von a bis b
$\Theta\left(\frac{X-\mu}{\sigma_x}\right)$	Summenwahrscheinlichkeit der Zufallsvariablen X

Schalengeometrie

r	Radius
r', r''	Schalenneigung und -krümmung
Δr	Shift der erzeugenden Hyperbel in radialer Richtung
a, b	Taillenradius, Krümmungsparameter
h_{ges}	Gesamthöhe einer Hyperbelschale
h_T	Taillenhöhe
R_1, R_2	Hauptkrümmungsradien eines Rotationshyperboloids
φ_u	Neigung des unteren Schalenrandes eines Rotationshyperboloids
t	Schalendicke

Numerische Analysen

G	Eigengewicht
W	Windlasten
γ_R	Teilsicherheitsbeiwert für den Tragwiderstand
λ	Lastfaktor
c_{pa}	Druckbeiwert für den Windaußendruck
φ	Beiwert zur Berücksichtigung der dynamischen Überhöhung
F_i	Interferenzfaktor

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die vorliegende Arbeit umfasst die drei Themen Schalen, Stabilität und Stahlbetonnicht-linearität, die jedes für sich betrachtet eine große wissenschaftliche Herausforderung darstellt.

Schalenskonstruktionen, deren Lastabtrag krümmungsbedingt in erster Linie über Membranspannungen erfolgt, werden bereits seit frühester baugeschichtlicher Zeit konstruiert - z.B. Schatzhaus des Atreus (Mykene), Pantheon (Rom), Hagia Sophia (Istanbul), etc. [Harte 2001]. Eine Ermittlung der Schnittgrößen für beliebig gekrümmte Konstruktionen hingegen ist erst seit der Einführung der Finite-Element-Methode (FEM) in einem überschaubaren Zeitraum möglich.

Das Stabilitätsverhalten eines Tragwerks gibt eine Auskunft über den Versagensmechanismus einer Struktur. Je dünnwandiger und schlanker eine Struktur ist, desto eher kann die Grenztragfähigkeit durch den Verlust der Stabilität erreicht werden. Hinzu kommt der Einfluss von Formabweichungen von der perfekten Geometrie (geometrische Imperfektionen), die die Grenztragfähigkeit zusätzlich negativ beeinflussen können.

Im Gegensatz zu dem Stabilitätsverlust bei Stahlbetontragwerken gehört die Auslegung gegen Stabilitätsverlust beim Stahlbau zur gängigen Bemessungspraxis. Die Erforschung von Beulphänomenen genießt hier nach wie vor großes Interesse in der internationalen Fachwelt z.B. Arbocz & Wunderlich (2001) und Schneider (2002).

Bei Stahlbeton lassen die konstruktiv bedingten Wanddicken in Bezug auf die sonstigen Abmessungen ein Beulversagen zunächst nicht erwarten. Die Weiterentwicklung des Betons zu einem hochfesten Hochleistungswerkstoff mit Druckfestigkeiten über 100 N/mm^2 , neuere Publikationen sprechen von theoretisch erreichbaren Festigkeiten bis zu 500 N/mm^2 [Hillemeier 2003] - hierbei handelt es sich nicht mehr um einen herkömmlichen Beton sondern vielmehr um einen nahezu homogenen Werkstoff (s. Bild 1.1) - ermöglicht allerdings in Zukunft den Entwurf schlanker Stahlbetonschalen, d.h. größere Abmessungen mit geringeren Wanddicken [Harte & Krätzig 2001], [Harte & Montag 2001] .

Zudem zeigen diese Betone aufgrund ihrer andersartigen Zusammensetzung gegenüber

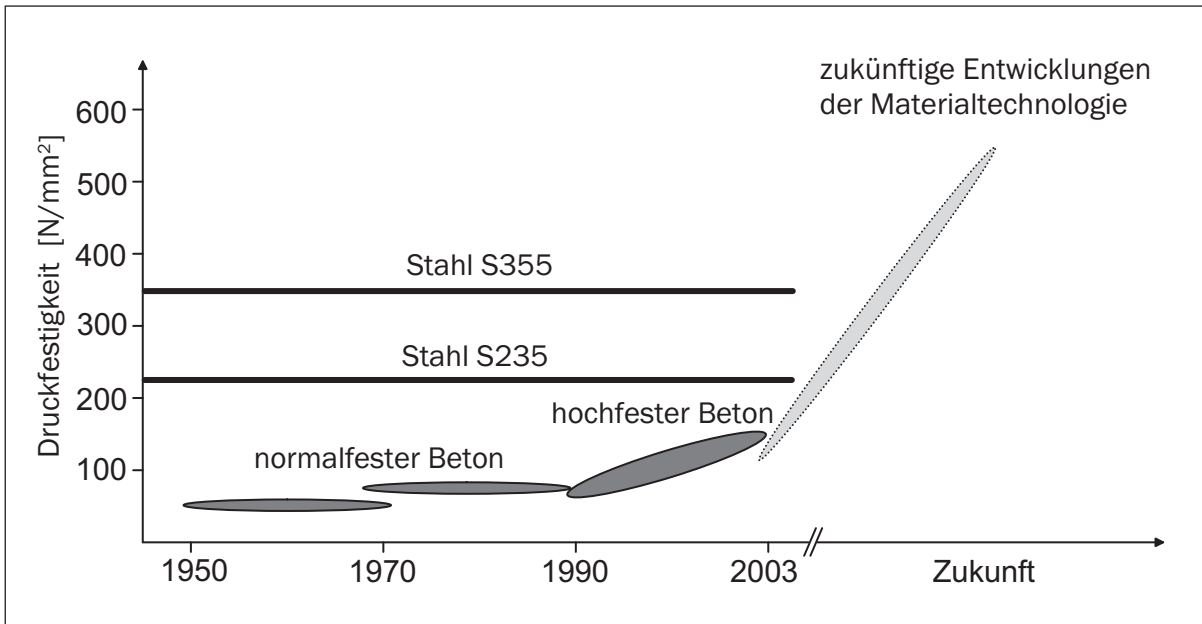


Bild 1.1: Geschichtliche Weiterentwicklung des Werkstoffs Beton im Vergleich zum Werkstoff Stahl

normalfesten Betonen neben der erhöhten Druckfestigkeit und der erhöhten Steifigkeit auch ein weitaus spröderes Verhalten im Nachbruchbereich. Damit gewinnt die Auslegung gegenüber Stabilitätsversagen auch beim Werkstoff Stahlbeton an Bedeutung. Aus sicherheitstechnischen Gründen ist das Stabilitätsversagen eines Stahlbetontragwerks gegenüber dem eines Stahltragwerks sogar kritischer anzusehen, da aufgrund der geringen Duktilität in der Regel der sofortige Kollaps des Tragwerks zu erwarten ist.

Dieser Tatsache trägt die neue Normengeneration im Stahlbetonbau kaum Rechnung. Eine Erweiterung der erlaubten Methoden zur Schnittgrößenermittlung auf nichtlineare Verfahren ermöglicht dem Tragwerksplaner zwar eine Ausnutzung der Umlagerungsfähigkeiten des Tragwerks bei der Bemessung nach DIN 1045-1 (2001), aber hinsichtlich der Sicherheit gegenüber Stabilitätsversagen von Schalentragwerken beschränkt sich die DIN 1045-1 (2001) auf eine nicht ausreichende Verformungsbegrenzung bei der nichtlinearen Analyse. Die bisherige Regelung der DIN 1045 (1988) wurde aufgrund der Inkonsistenz zu dem geänderten Sicherheitskonzept nicht übernommen.

Damit wird die mögliche Existenz von Verzweigungspunkten auf geometrisch- und physikalisch nichtlinearen Last-Verformungspfaden ausgeschlossen; eine auch im Stahlbau ursprünglich verbreitete Auffassung, die erst in den 60er Jahren erfolgreich widerlegt werden konnte. Gerade die Materialnichtlinearität des Stahlbetons, mit der deutlichen Reduktion der Biegesteifigkeit bei Übergang des Querschnitts in den Zustand II, kann das Stabilitätsverhalten signifikant negativ beeinflussen.

Das Grenztragverhalten eines Schalentragwerks kann ebenso wie bei anderen Tragwerken mit Hilfe unterschiedlicher Methoden analysiert werden. Dabei wird die Wahl des Verfahrens durch den Gefährdungsgrad des Tragwerks gegen ein Versagensszenario bestimmt. So wird im Allgemeinen für die Bemessung ein linear elastisches Vorgehen als hinreichend

genau erachtet. Ebenso wird in der Regel die Ermittlung des linearen Beulfaktors als ein probates Mittel zur Dimensionierung der Tragwerksgeometrie und -schlankheit angesehen. Als nächste Stufe zur Genauigkeitssteigerung kann die geometrische Nichtlinearität bei der Ermittlung der Schnittgrößen (Theorie II. Ordnung) bzw. bei der Bestimmung der Beullast berücksichtigt werden.

Im Stahlbetonbau beginnt eine Tragfähigkeitsanalyse immer mit einer linearen statischen Berechnung und der daraus folgenden Bemessung nach DIN 1045-1 (2001). Im Anschluss daran kann die Standsicherheit des Tragwerks mittels einer nichtlinearen Analyse verifiziert bzw. die Bemessung mit Hilfe einer Iteration unter Berücksichtigung der nichtlinearen Schnittgrößen optimiert werden. Dabei ist neben der geometrischen Nichtlinearität auch der Einfluss der materiellen Nichtlinearität des Werkstoffs Stahlbeton zu beachten. Ebenfalls müssen bei einem solchen Vorgehen die Auswirkungen der Formabweichungen überprüft werden sowie begleitende Analysen zur Stabilität der Gleichgewichtszustände zur Anwendung kommen.

Allgemeingültige Aussagen zum Stabilitätsverhalten sind allenfalls auf numerischem Weg mit erträglichem Aufwand herleitbar. Die Durchführung der alternativ erforderlichen Experimente im Maßstab 1:1 oder an Modellen von Stahlbetonschalen zur Verifikation des zur Anwendung kommenden Materialmodells ist zum einen aufgrund des hohen finanziellen Aufwandes und zum anderen aufgrund der Skalierungsungenauigkeiten, die beispielsweise bei einer Modellbildung mit Mikrobeton sehr groß wären, kaum möglich. Zudem gelten die so erzielten Ergebnisse ausschließlich für die untersuchten Schalengeometrien unter den spezifischen Randbedingungen und Belastungen und sind nur schwer und mit starken Einschränkungen auf andere Verhältnisse übertragbar. Somit bietet sich die FEM-Methode aufgrund ihrer Allgemeingültigkeit und ihres hohen Entwicklungsstandes als numerische Plattform für die zu leistende Forschungsarbeit an.

Die FEM ist aufgrund ihrer flexiblen Anwendungsbereiche in den letzten Jahrzehnten zu einem sehr wichtigen Werkzeug in der Ingenieur Tätigkeit geworden. In der näheren Vergangenheit wurden neben zahlreichen Elementansätzen in erster Linie die Entwicklung komplexer Materialmodelle vorangetrieben, die eine äußerst wirklichkeitsnahe Abbildung des Material- und Tragwerksverhaltens ermöglichen. Zur Anwendung kommt innerhalb dieser Arbeit ein vergleichsweise einfaches Materialmodell, da hier nicht die realitätsgenaue Erfassung des Betons im Mikro- bzw. Mesobereich im Vordergrund steht, sondern vielmehr eine uneingeschränkte Anwendbarkeit bei beliebig großer Schalenträgwerke erreicht werden soll. Dieses Materialmodell wird in Bezug auf die veränderten Materialeigenschaften des Werkstoffs Hochleistungsbeton erweitert.

1.2 Ziel und Gliederung der Arbeit

Ziel der Arbeit ist neben der grundlegenden Erforschung der stabilitätsgefährdenden Mechanismen eines konservativ belasteten Stahlbetontragwerks die Entwicklung eines Nachweisverfahrens zur Bestimmung von Stabilitätsgrenzen unter Berücksichtigung von geometrischen und strukturellen Imperfektionen. Hierbei wird besonderes Augenmerk auf

den Werkstoff Hochleistungsbeton, welcher sich durch sein sprödes Nachbruchverhalten auszeichnet, gelegt.

Nach einem kurzen Überblick, einer kurzen Einführung in die Behandlung des allgemeinen Stabilitätsproblems, der speziellen phänomenologischen Beuleigenschaften dünner Flächentragwerke aus Stahlbeton, einer ersten Einordnung in die strukturmechanischen Approximationshierarchie und einer Literaturschau der in der Vergangenheit durchgeführten Forschungsarbeiten in Kapitel 2, erfolgt zunächst eine kurze Darstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen und die Herleitung der verwendeten isoparametrischen Schalenelementformulierung nach der REISSNER-MINDLIN-Theorie in Kapitel 3. Ebenfalls wird in diesem Kapitel eine Erweiterung des verwendeten Elementansatzes zur Analyse von imperfekten Schalenstrukturen eingeführt.

Die Analyse nichtlinearen Materialverhaltens mit Hilfe der FEM erfordert neben einem stabilen und möglichst genauen Finite-Elemente-Ansatz ein einfaches, aber hinreichend genaues, Materialgesetz für den Werkstoff Beton. In Kapitel 4, dem ersten Kern dieser Arbeit, wird mit dem Werkstoffmodell von Darwin & Pecknold (1977b) ein solches Materialgesetz vorgestellt und für die Anwendung auf hochfeste Normbetone nach CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 und DIN 1045-1 (2001) erweitert bzw. modifiziert. Bei schwach bewehrten Schalentragwerken bekommt die Mitwirkung des Betons nach Rissbildung eine erhöhte Bedeutung, so dass hier gleich zwei Modellierungen - nach König et al. (2001) und nach Noakowski (1988), in jüngster Zeit modifiziert und erweitert für zyklische Beanspruchung durch Noh (2002) - umgesetzt werden. Die verwendeten Materialmodelle müssen anhand von Experimenten an Probekörpern, wie z. B. Zugstäben, Biegebalken oder ebenen Flächentragwerken, skaliert und verifiziert werden. Hierzu kann auf Literaturergebnisse zurückgegriffen werden. Am Ende des Kapitels finden sich zahlreiche numerische Beispielrechnungen, die die korrekte Umsetzung des Materialmodells belegen sollen.

Im Hinblick auf eine normkonforme Analyse von Stahlbetonschalen aus hochfestem Beton werden die in Kapitel 5 dargestellten Erweiterungen programminterner Bemessungsroutinen unumgänglich. Aufgrund der Ergebnisse einer Parameterstudie mit Rotationsschalen unterschiedlicher GAUSS'scher Krümmung K - Hyperboloiden $K < 0$; Zylinder $K = 0$; Ellipsoiden $K > 0$ - von Eckstein et al. (1979), welche zeigt, dass Schalen negativer GAUSS'scher Krümmung am ehesten stabilitätsgefährdet, aber weniger imperfektionsempfindlich sind und einer zusätzlich durchgeführten Vorstudie werden hier negativ gekrümmte Modellschalen für die weiteren Betrachtungen ausgewählt und zunächst einer normgerechten Bemessung unter Berücksichtigung der Besonderheiten von Hochleistungsbetonen unterzogen. Ergänzend hierzu sind die Arbeiten von Addai (1976) und Benz (1976) zu nennen, die ebenfalls Parameteruntersuchungen an Rotationsschalen mit Hilfe von Schalenringelementen, durchgeführt haben.

Kapitel 6 beinhaltet den zweiten wesentlichen Kern dieser Arbeit, die Grundlagen für die Durchführung der linearen und nichtlinearen Traglast- und Stabilitätsanalysen für Stahlbeton-Schalentragwerke. Hierbei wird zwischen den herkömmlichen nichtlinearen Traglastanalysen in Abschnitt 6.1 und den Stabilitätsanalysen in den Abschnitten 6.2.2 bzw. 6.2.3 unterschieden. In Abschnitt 6.2.3 werden die vorhandenen, zum größten Teil bei elastischen bzw. elasto-plastischen Werkstoffen wie Stahl und Laminaten angewandten

Methoden zur Analyse von Stabilitätsproblemen und zur Berücksichtigung von geometrischen Imperfektionen hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit bei Stahlbetontragwerken überprüft und erweitert. Hierbei gebräuchliche Verfahren sind im Wesentlichen die Beobachtung der Determinante der tangentialen Steifigkeitsmatrix sowie die Auswertung des Indifferenzkriteriums über die Lösung von Eigenwertproblemen.

Den dritten Kernpunkt der Arbeit stellt Kapitel 7 dar, in welchem ein Konzept zur globalen Stabilitätsanalyse unter Berücksichtigung von strukturellen Vorschädigungen aufgezeigt wird, welche als Folge von Vorbelastungen oder Materialfehlern entstehen können.

In Kapitel 8 wird nach Abschluss der Implementierung der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Algorithmen und Verfahren die Gültigkeit und Anwendbarkeit dieser Vorgehensweisen anhand von mehreren Beispielstrukturen aufgezeigt und es werden die jeweiligen Vor- und Nachteile herausgestellt.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden in Kapitel 9 dazu genutzt, eine Möglichkeit zur Einbettung der Nachweise zur Stabilitätssicherung in den Entwurfs- und Konstruktionsprozess aufzuzeigen.

Abschließend werden in Kapitel 10 die Ergebnisse zusammenfassend bewertet und verschiedene Ausblicke auf weiterführende Untersuchungen gegeben.

Kapitel 2

Zum Stabilitätsversagen von Schalentragwerken aus Stahlbeton

2.1 Phänomenologie des Stabilitätsversagens

Das Antwortverhalten eines beanspruchten Tragwerks richtet sich im Wesentlichen nach den Steifigkeitsverteilungen und Lagerungen des Systems. „Gutmütige Systeme“ versagen bei Überschreiten der angesetzten Bemessungslast durch ein Spannungsversagen, das heißt im Fall von Stahlbeton durch Versagen der Betondruckzone oder Fließen der Stahlbewehrung.

Problematischer ist das Versagen infolge Stabilitätsverlust. Bei dieser Versagensart handelt es sich um den Verlust des stabilen Gleichgewichts im System. Dieser Punkt ist im Allgemeinen durch das Auftreten des ersten Instabilitätspunktes innerhalb einer FE-Analyse definiert. Dieser Punkt besagt, dass in diesem Belastungszustand des Tragwerks nicht exakt ein Verformungszustand, sondern vielmehr ein indifferenter - sprich unbestimmter - Zustand herrscht. Dies wird bei Betrachtung der häufig angeführten Kugelanalogie in Bild 2.1 deutlich.

Im Fall des stabilen Gleichgewichts (a) ist die Antwort des Systems auf eine Belastung eindeutig und bestimmt. Bei Eintritt eines indifferenten Gleichgewichtszustandes (b) existieren mindestens zwei unterschiedliche Systemantworten. Im Fall des labilen Gleichgewichts (c) ist das System nicht in der Lage den momentanen Zustand beizubehalten, und es erfolgt eine Entlastung des Systems bis bestenfalls zu einem Punkt der Konsolidierung. Neben diesen drei bekannten Zuständen eines Tragwerks - stabil, indifferent und instabil - sind hier die Zustände „praktisch stabil“ und „praktisch instabil“ mit aufgenommen worden [Vielsack 1986]. Diese Begriffserweiterung gewinnt für dünnwandige Schalentragwerke an Bedeutung, da mitunter ein starkes Clustering - Anhäufung auf engem Raum - von Instabilitätspunkten auftritt. Die dadurch erhöhte Sensitivität gegenüber Störungen macht die Definition dieses Begriffs sinnvoll, der eine Unterschreitung eines abhängig von der Struktur definierten Grenzwertes für die Größe des Umgebungsbereichs eines Instabilitätspunktes beschreibt. Diese Modellvorstellung der Kugel kann aber nur eine leichte Vorstellung der Komplexität des Stabilitätsproblems übermitteln, da sich in diesem einfa-

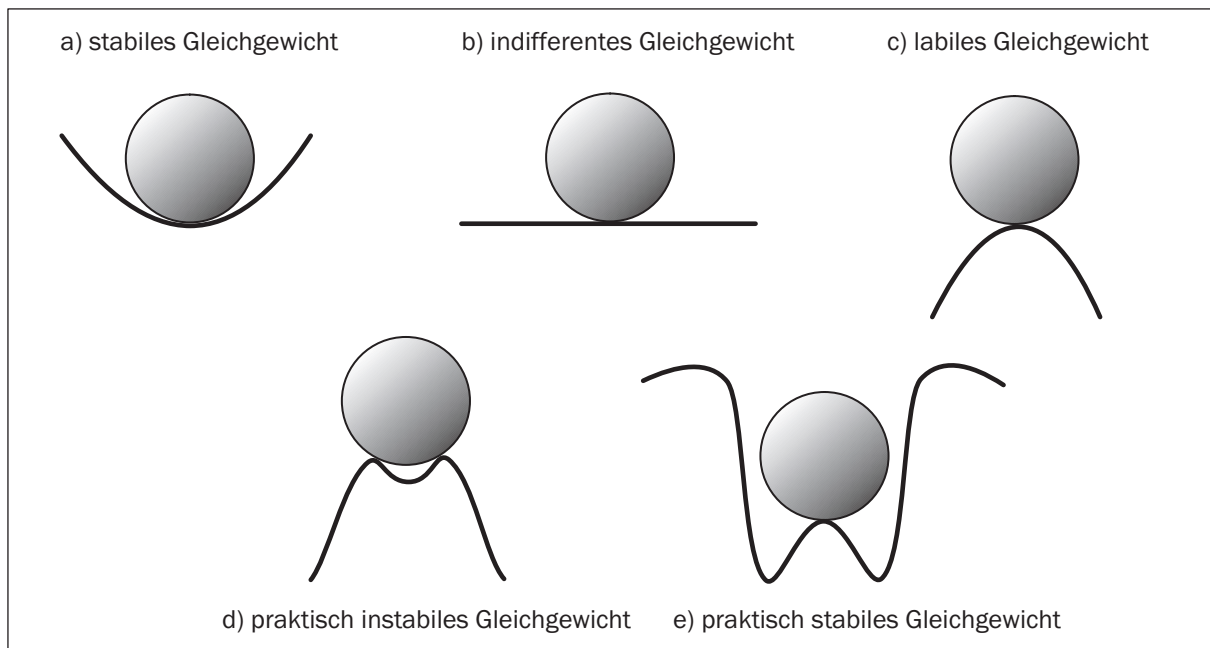


Bild 2.1: Stabilitätsverhalten am Beispiel der Kugel in einer Ebene

chen Beispiel die Bewegungen der Kugel ausschließlich in einer Ebene abspielen. Eine reale Struktur hat eine sehr viel höhere Anzahl von Freiheitsgraden, so dass hier die Vorstellung eines indifferenten oder labilen Gleichgewichtszustandes ungleich schwieriger wird.

Wodurch fällt nun also in einem Tragwerk die Entscheidung zwischen einem Spannungs- oder Stabilitätsversagen?

Wird ein Tragwerk mit elastischem Materialverhalten betrachtet, so kann lediglich die Einteilung in stabilitätsgefährdet oder -ungefährdet getroffen werden. Ein einfaches Beispiel für ein absolut **stabiles Tragwerk** ist der ausschließlich auf Zug beanspruchte Stab. Die Belastung kann bei elastischem Materialverhalten bis ins Unendliche gesteigert werden, ohne dass es zu einem Zustand des indifferenten Gleichgewichts kommt. Ein genauso einfaches Beispiel für ein **stabilitätsgefährdetes Tragwerk** ist der Druck- oder Knickstab, der bei rein elastischer Betrachtung bei der kritischen Last den Zustand des indifferenten Gleichgewichts erreicht.

Stabilitätsversagen tritt also vornehmlich bei überwiegend druckbeanspruchten Tragwerken auf.

Wird gleichfalls das reale Materialverhalten bei der Analyse des Tragwerks berücksichtigt, so ist erkennbar, dass der Zugstab durch Überschreiten der Materialfestigkeiten versagt, also ein eindeutiges Spannungsversagen aufzeigt. Der Gleichgewichtsverlust des Knickstabs hingegen kann nun sowohl durch Spannungsversagen als auch durch Stabilitätsversagen eintreten. Hierbei ist die Größe der kritischen Last entscheidend. Um ein Stabilitätsversagen zu vermeiden, muss also eine kritische Last oberhalb der Bemessungslast sichergestellt sein.

Bei komplexen Tragwerken ist eine Einschätzung der möglichen Versagensart nur in ei-

nigen hinreichend bekannten Fällen möglich, da hier meist sowohl Zonen mit Druck- als auch Zugbeanspruchung und gegebenenfalls unterschiedliche Materialeigenschaften vorherrschen. Somit erscheint eine Überprüfung der Sicherheit eines Tragwerks gegenüber Stabilitätsversagen in jedem Fall notwendig.

Das Stabilitätsversagen tritt in zwei unterschiedlichen Arten auf. Beim **Durchschlagsproblem** entzieht sich das Tragwerk durch stark anwachsende Verformungen einer erhöhten Lastzufuhr. Das **Snap-Through-Buckling** lässt sich gut an einem flach gespannten Bogen zeigen, der durch eine gleichmäßige Auflast belastet wird. Der Bogen trägt die Last bis zu einem kritischen Lastzustand durch Druck in seine Auflager ab. Zum einen durch die größer werdenden Verformungen und zum anderen durch Erreichen der kritischen Druckbelastung verliert der Bogen sein stabiles Gleichgewicht und schlägt in eine über Zug abtragende Bogenform durch.

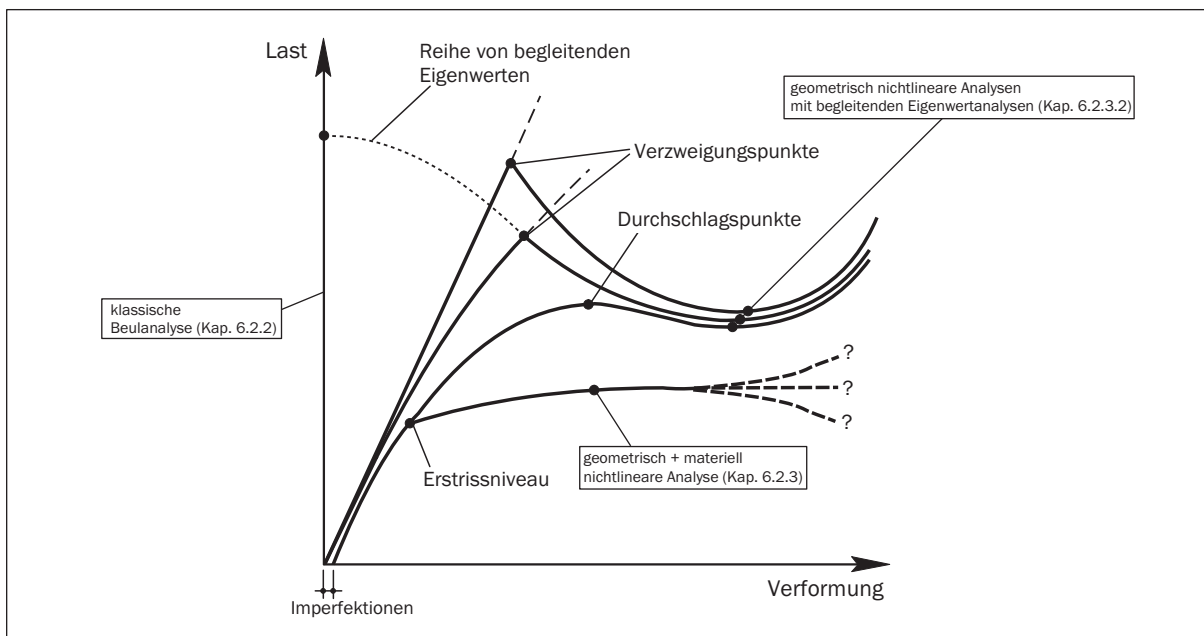


Bild 2.2: Mögliche Tragwerksantworten

Beim **Verzweigungsproblem** existieren auf einem Lastniveau des Systems unterschiedliche Tragwerksantworten. Das reine **Bifurcation Buckling** tritt zumeist bei sowohl geometrisch als auch strukturell perfekten Schalen auf. Sobald Imperfektionen und/oder Materialnichtlinearitäten berücksichtigt werden, tritt in den meisten Fällen nur noch das Stabilitätsversagen in Form von Durchschlagen ein. Für das Tragwerk gibt es an dem Punkt des indifferenten Gleichgewichts mehrere Möglichkeiten, auf eine weitere Lastveränderung zu reagieren. Die Systemantwort verzweigt also in eine bestimmte Anzahl von möglichen Zuständen (Verzweigungsäste). Je nach Art der Störung in diesem Punkt und je nach Art des Schalentyps kann der Verzweigungsast durch stabiles oder instabiles Gleichgewicht beschrieben werden. In Bild 2.2 sind zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Einflüsse neben den Auswirkungen unterschiedlicher Analyseansätze auch die Einflüsse geometrischer Imperfektionen und materieller Nichtlinearität auf das Stabilitätsverhalten einer Schalenstruktur dargestellt.

Eine nähere Beschreibung dieser Beulphänomene findet sich ausreichend in der Literatur [Petersen 1982], [Ramm 1982], [Bushnell 1985], [Bažant & Cedolin 1991], so dass an dieser Stelle auf eine detailliertere Darstellung verzichtet wird.

2.2 Allgemeiner Überblick über die Lösungsmethoden des Stabilitätsproblems

Die Problemstellung des Stabilitätsversagens wird innerhalb dieser Arbeit mit Hilfe der FEM behandelt, so dass an dieser Stelle vorab eine Eingrenzung des Gültigkeitsbereichs der im Folgenden aufgeführten Methoden und Analysen vorgenommen werden soll. Die Klassifizierung eines Tragwerks, gleich welcher geometrischer Form, kann im Sinne der FEM in geeigneter Weise unter Zuhilfenahme der allgemeinen Bewegungsgleichung erfolgen:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}. \quad (2.1)$$

Dieses mit Hilfe der allgemeinen Bewegungsgleichung beschriebene System kann nun je nach Beschaffenheit in die folgenden Gruppen eingeteilt werden [Ziegler 1977]:

- Konservative Systeme:
 - nichtgyroskopisch
 - gyroskopisch
- Nichtkonservative Systeme:
 - nichtgyroskopisch und dissipativ
 - gyroskopisch und dissipativ
 - zirkulatorisch
 - allgemein zirkulatorisch.

Ein konservatives System herrscht vor, wenn die Energiesumme im System während des untersuchten Zeitraums konstant bleibt, das heißt, wenn keine Energie dem System entnommen oder zugeführt wird. Im Gegensatz dazu liegt ein nichtkonservatives System vor, wenn die Energiesumme über den beobachteten Zeitraum veränderlich ist.

Um die weiteren Begriffe zu erläutern, werden die einzelnen Systemmatrizen der Bewegungsgleichung betrachtet. Die Massenmatrix \mathbf{M} fließt in den Ausdruck für die kinetische Energie des Tragwerks ein und ist stets positiv definit. Die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} beinhaltet sowohl die innere als auch die äußere Dämpfung des Systems.

Beinhaltet das System innere Dämpfung, so liegt ein gyroskopisches System vor. Herrscht äußere Dämpfung, dann existiert ein dissipatives System. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist bei konservativen Kräften immer symmetrisch. Bei nichtkonservativen Kräften bzw. zirkulatorischen Kräften verliert die Steifigkeitsmatrix ihre Symmetrieeigenschaft [Ziegler 1977].

Ein Stahlbeton-Schalentragerwerk kann somit durch unterschiedliche Modelle beschrieben werden, was zu einer Vielzahl von unterschiedlichen Lösungsansätzen führt. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die im üblichen Bauwesen dominierenden Problemstellungen von konservativen und nichtgyroskopischen Systemen.

Das Phänomen des Stabilitätsverlustes von Schalentragerwerken wurde in der Vergangenheit bereits von einer Vielzahl an Forschern untersucht und behandelt. Eine Mehrheit der geleisteten Forschungsarbeiten beschränkt sich hierbei auf die Untersuchung von elastischen Materialien. Allenfalls wurden Schalen aus dem Werkstoff Stahl, da sie aufgrund der hohen Festigkeiten und des hohen Elastizitätsmoduls besonders dünn herzustellen und zu verwenden sind, als beulgefährdet erkannt. In der Literatur, wie u. a. in Brendel (1979), Schelkle (1981), Eckstein (1983) und Helnwein (1996), findet sich ein guter Überblick über die verbreitetsten Verfahren.

Die Beulgefährdung von Stahlbetonschalen hingegen wird in der Regel als unrealistisch angesehen. In der Vergangenheit entstanden einige wenige Arbeiten von Forschern, die sich mit dieser Thematik intensiver befasst haben [Wittek 1980], [Billig 1992], [Dulácska & Kollár 1995], [Baillis, Jullien & Limam 2000].

Mit dem heutigen Kenntnisstand gibt es infolge der vergangenen Forschungsarbeiten drei verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung der kritischen Last eines Stahlbetontragerwerks.

Analytische Lösung. Diese allgemeinste Vorgehensweise ist aufgrund der komplizierten Differentialgleichungen auf einfache Strukturen und einfache Belastungssituationen beschränkt. Der Ansatz von nichtlinearem Materialverhalten ist bei diesem Lösungsweg nahezu unmöglich.

Numerische Lösung. Beispielsweise mit Hilfe der FEM können für elastisches Materialverhalten und geometrisch linearer oder nichtlinearer Kinematik die Beullasten von beliebigen Strukturen hinreichend genau ermittelt werden. Bei dieser Art der Berechnung können bereits verschiedene Imperfektionen in die Berechnung einfließen. Hierbei ist es theoretisch möglich, nichtlineares Materialverhalten zu berücksichtigen.

Überschlagsformeln. Die dritte Vorgehensweise entsteht aus der Suche nach Vereinfachungen für den entwerfenden und planenden Ingenieur und beinhaltet die Benutzung von überschlägigen Verfahren oder Formeln, die für bestimmte Schalen oder Lastsituationen auch den Einfluss der materiellen Nichtlinearität berücksichtigen können. Hierbei ist eine allgemeingültige Aussage allerdings schwer zu treffen, da diese Formeln durch Experimente an speziellen Strukturen begründet sind.

Für linear elastisches und für elasto-plastisches Material wurden weitere Verfahren zur Bestimmung kritischer Lasten entwickelt. Aus diesen Verfahren sei beispielsweise das **Störenergiekonzept** nach Duddeck et al. (1990) hervorgehoben, in dem die Stabilitätsgefährdung eines Tragerwerks durch die Größe einer aufgebrauchten Störenergie abgeschätzt wird. Diese Störenergie ist gerade so groß, dass das Tragerwerk in einen zweiten Verformungszustand ausweicht.

Eine zweite Art von Verfahren, welche aus dem Wunsch heraus entstanden, das reale Verhalten nach Überschreiten eines Instabilitätspunktes zu beschreiben, sind die **dynamisch**

quasi-statischen Vorgehensweisen. Hierbei kann das Durchschlagen eines Systems, welches in der Realität ein dynamischer Prozess ist - da effektiv kein Lastentzug am System erfolgt - besser beschrieben werden. Der statische Pfad wird durch ein Einschwingen des Systems nach dem Durchschlagen wieder erreicht.

Aufgrund der Pfadabhängigkeit der Lösung bei einem System aus Stahlbeton, welches beim Aufreißen des Querschnitts die Kräfte vom Beton auf den Stahl überträgt und als Zwei-Phasen-Werkstoff modelliert ist, sind das Störenergiekonzept und die dynamischen Verfahren [Billig 1992] nach Auffassung des Autors allerdings nur äußerst beschränkt anwendbar.

Um noch einmal die besonderen Eigenschaften eines Schalentragswerks darzulegen, soll an dieser Stelle kurz auf einen typischen Beulmechanismus eingegangen werden. Eine dünne Schale kann verhältnismäßig große Membrankräfte, aber nur geringe Biegemomente aufnehmen. Kommt es infolge einer weiteren Laststeigerung zu größeren Verformungen - die einzige Möglichkeit des Tragwerks auf die erhöhte Belastung zu reagieren - erzeugen die im System gespeicherten Membranspannungen infolge der Verformungen Biegespannungen, welche das Tragwerk dann endgültig beulen lassen.

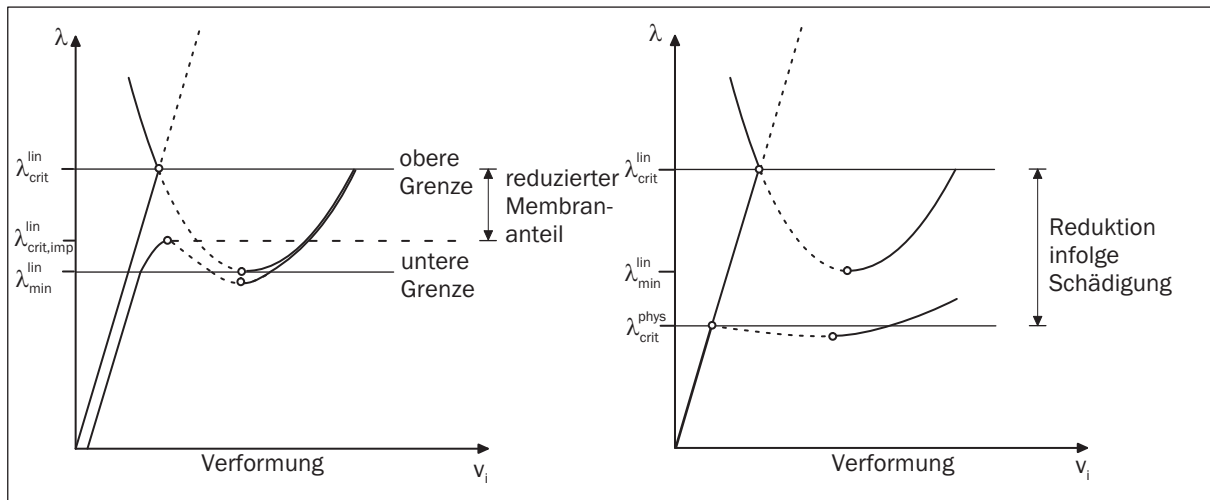


Bild 2.3: Reduzierte Beullast nach Wittek (1980) und Reduktion infolge Schädigung des Stahlbetonquerschnitts

In der Arbeit von Wittek (1980) wurde auf diese Gegebenheit im Besonderen eingegangen. Das **Konzept der reduzierten Membranspannung** sieht vor, die untere Grenze der Beullast - bei einer perfekten Schale gegeben durch das Nachbeulminimum - durch die Reduktion der im perfekten System gespeicherten Membranspannungen zu erreichen. Dieses Vorgehen führt in Wittek (1980) zum Ziel, da eine direkte Korrelation zwischen der Größe der Membranspannungen und der Tiefe des Nachbeulbereichs gefunden wird. Es ist allerdings auf den Anwendungsbereich der Schalen mit weitestgehend linearem Vorbeulverhalten beschränkt. Die für solche Schalen ermittelten kritischen Lasten geben eine konservative Abschätzung des Nachbeulminimums an. In Bild 2.3 ist dieses Vorgehen in dem linken Teil noch einmal dargestellt. Der rechte Teil des Bildes 2.3 stellt den Unterschied bei Berücksichtigung von materiellen Nichtlinearitäten (Schädigung des

Stahlbetonquerschnitts) prinzipiell dar.

Die bisher aufgeführten Aussagen lassen sich im Wesentlichen auf allgemeine Schalentragerwerke beziehen. Ein typisches Verhalten von Stahlbetonschalen ist aber die Wechselwirkung zwischen Verformung und Abbau der Steifigkeit des Querschnitts. In viel stärkerem Maße als bei anderen Baustoffen beeinflussen diese beiden Größen sich gegenseitig, so dass eine klare Trennung zwischen Spannungsversagen und Stabilitätsversagen schwierig erscheint. Ramm (1986) führt eine Einteilung der Tragwerke in Form einer Skala ein, die die Wahrscheinlichkeit der Versagensform des Tragwerks widerspiegeln soll. In Tabelle 2.1 ist diese Art der Darstellung abgebildet. Dabei sei darauf hingewiesen, dass diese Einteilung nur eine ungefähre Abschätzung der globalen Beulgefährdung einer Struktur erlaubt.

Da bereits einfache Tragwerke nur in den seltensten Fällen ausschließlich Druck- bzw. Zugzonen aufweisen, ist eine Vorabanschätzung des Tragwerksversagens zurzeit nur durch umfangreiche Parameterstudien zu bestimmten Tragwerkstypen oder aber durch einen ausgiebigen Erfahrungsschatz möglich.

Eine weitere vereinfachte Vorgehensweise beinhaltet das Verfahren nach Dulácska & Kollár (1995). Es ist als sehr konservativ anzusehen, so dass seine wirtschaftliche Anwendbarkeit eher fraglich ist. Das Grundkonzept der Methode besteht darin, zunächst die Beullast nach linearer Theorie unter Annahme von linear elastischem Material zu bestimmen und sie mittels Faktoren für Vorverformungen, Kriecheinfluss, Rissbildung und Plastizieren des Betons abzumindern:

$$\lambda_{crit} = \lambda_{crit}^{lin} \cdot \rho_{imp} \cdot \rho_{creep} \cdot \rho_{crack} \cdot \rho_{pl}. \quad (2.2)$$

Der Nachweis ausreichender Beulsicherheit ist schließlich erbracht, wenn gilt:

$$\frac{\lambda_{crit}}{\gamma} \geq 1. \quad (2.3)$$

Die Größe des Sicherheitsfaktors γ ist abhängig vom Verhältnis der plastischen Versagenslast zu der linearen Beullast des Tragwerks. Um die Anwendbarkeit des Verfahrens zu testen und gleichzeitig die Gültigkeit für hochfeste Betonsorten zu überprüfen, wurde

Stabilitätsversagen	Spannungsversagen
symmetrische Geometrie	asymmetrische Geometrie
perfekte Geometrie	imperfekte Geometrie
symmetrische Belastung	asymmetrische Belastung
globale Belastung	lokale Belastung
gleichmäßige Randbedingungen	ungleichmäßige Randbedingungen
ausschließlich Membranspannungen	Biegespannungen
Druckbeanspruchung	Zugbeanspruchung
ungerissen	gerissen

Tabelle 2.1: Einteilung von Systemeigenschaften, welche die Versagensart beeinflussen [Ramm 1986]

es in Andres & Schindelin (2001) bei verschiedenen Hyperboloiden und Zylindern aus normal- bzw. hochfesten Betonen angewendet. Die Ergebnisse der Analysen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Anwendung des Verfahrens erweist sich für ein überschlätiges Verfahren als umständlich und zeitintensiv, da jeder Querschnitt überprüft werden muss.
- Die Ermittlung des Krieeinflusses erfolgt mittels eines sehr einfachen Gesetzes über einen direkten Zusammenhang mit der Druckfestigkeit des Betons. Bei hochfesten Betonen werden die Ergebnisse unrealistisch.
- Die zur Verfügung stehenden Diagramme sind nur für einige Sonderfälle (Geometrie und Belastung) gültig. Die Interpolation auf andere Gegebenheiten erscheint in einigen Fällen fraglich.
- Die Ergebnisse bestätigen die angesprochene konservative Prägung des Verfahrens. Eine wirtschaftliche Auslegung einer Betonschale erscheint mit diesem Verfahren nur schwer möglich.

Zusammenfassend ist dieses Verfahren für einen Nachweis der Beulsicherheit bei Betonschalentragwerken problematisch, da die Beschränkungen viele Anwendungsfälle ausschließen. Die konservative Ausprägung des Verfahrens verursacht, dass Beulversagen bei Schalen, die diesen Nachweis erfüllen, nicht mehr wahrscheinlich ist. Jedoch sind die daraus resultierenden Schalendicken in den meisten Fällen wirtschaftlich nicht vertretbar. Auch spätere Veröffentlichungen wie beispielsweise Kollár & Farago (2003) zeigen, dass die Anwendung dieses Verfahrens nur einen ungefähren Anhaltspunkt für das kritische Lastniveau vermitteln kann.

2.3 Beulversuche an Stahlbetonschalen

Zur Ermittlung von realistischen Beullasten bei Schalentragwerken aus Beton bzw. Stahlbeton wurden in der Vergangenheit nur wenige Versuche durchgeführt. Dieses Defizit gegenüber den Beuluntersuchungen im Stahlbau ist durch die speziellen Werkstoffeigenschaften des Stahlbetons zu erklären. Der Werkstoff Beton ist sehr spröde und inhomogen, so dass eine experimentelle Untersuchung des Nachbeulbereichs kaum möglich erscheint. Ein weiterer Grund für die nur spärlich durchgeführten Experimente ist in den hohen Kosten und den großen Dimensionen der benötigten Prüfvorrichtung zu finden, da der Werkstoff Beton eine Abbildung des Versuchskörpers mit nahezu gleichen Materialeigenschaften auf einen kleineren Maßstab nahezu unmöglich macht.

An dieser Stelle soll nun ein kleiner Überblick über die in der Vergangenheit durchgeführten Versuche mit dem Werkstoff Beton- bzw. Stahlbeton und Mörtel gegeben werden. Die aufgeführten Tabellen 2.2 - 2.4 unterteilen sich in die unterschiedlichen Tragwerksformen anhand des Kriteriums der GAUSS'schen Krümmung.

Bei genauerer Betrachtung der Tabellen, die im Wesentlichen durchgeführte Experimente, aber auch Schadensfälle von Stahlbetonschalen enthalten, fallen vor allem die wenigen

Autor bzw. Literaturstelle	Bauteildicke [cm]	Krümmungsradius [m]	Schlankheit [-]	Bewehrung	Schalentyp
[Schubiger 1950]	8.0	22.95 - 45.90	1/574 - 1/287	ja	Kuppel
[Torroja 1950]	0.8	5.0	1/625	nein	Kuppel
[Csonka 1958]	0.6	1.728 - 3.450	1/576 - 1/288	nein	Kuppel
[Dischinger 1925]	6.0	28.28	1/472	ja	Kugel
[Torroja 1950]	9.0	44.0	1/489	ja	Kugel
[Beck 1963]	13.0	100	1/769	ja	Kugel
[Litle et al. 1970]	0.635	2.16	1/340	nein	Kugel
[Griggs 1971]	0.64	2.16	1/340	ja	Kugel
[Khaidukov & Shugaev 1971]	0.6	5.1	1/850	ja	Kugel
[Odello & Allgood 1973]	5.1	18.68 - 24.40	1/366 - 1/478	ja	Kugel
[Müller & Weidlich 1978]	2.8 - 3.9	4.0 - 8.5	1/11 - 1/22	ja	Kugel
[Vandepitte et al. 1979]	0.7	2.43	1/350	nein	Kugel
[Weidlich 1979]	0.25 - 0.4	8.5	1/340 - 1/212	ja	Kugel
in New Mexico aus Herzog (1996)	12.7	77.78	1/612	ja	Kugel
[Csonka 1956], [Csonka 1958]	6.0	42.23 - 46.95	1/704 - 1/783	ja	Paraboloid
[Ballesteros 1978]	6.0	32.9 - 33.5	1/558 - 1/548	ja	Paraboloid

Tabelle 2.2: Versuche bzw. Abmessungen von Betonschalen mit positiver GAUSS'scher Krümmung ($K > 0$)

Autor bzw. Literaturstelle	Bauteildicke [cm]	Krümmungsradius [m]	Schlankheit [-]	Bewehrung	Schalentyp
[Committee of Inquiry 1966]	12.7	50.29 - 88.52	1/396 - 1/697	ja	Hyperboloid
[Scordelis 1984]	6.3	47.69	1/757	ja	Hyperboloid

Tabelle 2.3: Versuche bzw. Abmessungen von Betonschalen mit negativer GAUSS'scher Krümmung ($K < 0$)

Einträge bei hyperbolischen Schalen auf. Die bei diesen Schalentypen durchgeführten Experimente wurden in der Hauptsache unter Verwendung von Ersatzmaterialien wie z. B. Kupfer [Der & Fidler 1968], Aluminium [Krätzig 1968] oder PVC [Der & Fidler 1968], [Mateja 1964] durchgeführt. Die so gefundenen Ergebnisse wurden dann im Nachgang auf große Stahlbetonschalen extrapoliert und führen beispielsweise zu den Stabilitätsuntersuchungen von Zerna et al. (1980), in denen Plastizieren und Rissbildung des Werkstoffs Stahlbeton für rotationssymmetrische Belastungen Berücksichtigung finden.

Autor bzw. Literaturstelle	Bauteil- dicke [cm]	Krümmungs- radius [m]	Schlankheit [-]	Beweh- rung	Schalentyp
[Dischinger & Finsterwalder 1932]	1.5	8.43	1/562	ja	Tonne
[van Riel et al. 1957]	1.0	1.0	1/100	ja	Tonne
[Griggs 1971]	0.53	1.28	1/240	ja	Tonne
in Budapest aus Dischinger & Finsterwalder (1932)	8.0	6.4 - 12.2	1/80 - 1/153	ja	Zylinder
[Allen 1950]	12.7	48.96	1/386	ja	Zylinder
[Torroja 1950]	8.0	12.2	1/153	ja	Zylinder
[Gouda 1951]	2.22	1.83	1/83	ja	Zylinder
aus Rüdiger & Urban (1955)	6.0	9.53	1/159	ja	Zylinder
[Rabich 1957]	4.0	2.48	1/62	ja	Zylinder
[Griggs 1971]	0.65	1.32	1/200	ja	Zylinder
[Haas & van Koten 1971]	1.0	5.0	1/50	ja	Zylinder

Tabelle 2.4: Versuche bzw. Abmessungen von Betonschalen mit GAUSS'scher Krümmung gleich Null ($K = 0$)

Kapitel 3

Kontinuumsmechanische und schalentheoretische Grundlagen und Finite-Element-Formulierung

3.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die zur Formulierung von finiten Schalenelementen benötigte Schalentheorie wird aus der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik hergeleitet. Von daher wird an dieser Stelle in aller Kürze auf die wesentlichen Grundlagen eingegangen. Ausführliche Herleitungen und Erläuterungen finden sich in einer großen Zahl von Literaturstellen wie u. a. in Truesdell & Noll (1965) und Green & Zerna (1968).

3.1.1 Kontinuumsmechanische Betrachtungsweisen

Jeder Punkt eines Kontinuums eines Körpers kann mit Hilfe eines Ortsvektors bezogen auf das globale, kartesische Koordinatensystem beschrieben werden. Diese Beschreibung kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt erfolgen, so dass zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 die Referenzkonfiguration und zu einem Zeitpunkt t die Momentankonfiguration des Körpers herrscht.

Die Beschreibung der tensoriellen Eigenschaften dieser Materialpunkte kann durch zwei unterschiedliche Darstellungsarten erfolgen. Bei Problemen der Strömungsmechanik wird im Allgemeinen die EULER'sche Beschreibung, auch Feldbeschreibung genannt, gewählt, da hier keine aussagekräftige Referenzkonfiguration gegeben ist und die Beschreibung der tensoriellen Eigenschaften über die Momentankonfiguration zur Zeit t erfolgt. Im Gegensatz dazu steht die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise, welche die tensoriellen Eigenschaften zur Zeit t einem durch die Referenzkonfiguration zur Zeit t_0 eindeutig beschriebenen Materialpunkt zuweist. Diese Darstellungsart, auch materielle Betrachtungsweise genannt, findet ihre Anwendung zumeist bei Problemen der Strukturmechanik, da hier ausgezeichnete Referenzkonfigurationen vorherrschen.

In der Kontinuumsmechanik wird die Lage der Materialpunkte oft in konvektiven krummlinigen Koordinaten Θ^i beschrieben. Die Herleitung der Basisvektoren und Metriktensoren kann sowohl bezogen auf die Momentan- als auch bezogen auf die Referenzkonfiguration erfolgen.

3.1.2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Die gesamte Kontinuumsmechanik ist auf den Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik gegründet, welche axiomatischer Natur sind. Im Einzelnen sind dies der

- **Massenerhaltungssatz** - „Die Masse eines Körpers ist während des betrachteten Zeitraums konstant.“
- **Impulserhaltungssatz** - „Die Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der an diesen Körper angreifenden resultierenden Kraft.“
- **Drehimpulserhaltungssatz** - „Die Änderung des Drehimpulses eines Körpers ist gleich der Momente der an diesen Körper angreifenden Kräfte bezogen auf einen festen Raumpunkt.“

Diese Sätze bilden, gemeinsam mit der Bilanzgleichung der kinetischen Energie, die physikalische Basis dieser Theorie. Für eine detaillierte Betrachtung wird an dieser Stelle auf die Literaturstellen Schroeder (1981) und Menzel (1996) verwiesen.

3.1.3 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen erfüllt das Gleichgewicht einer allgemeinen, mechanischen Problemstellung. Es entsteht aus dem Variationsprinzip, welches Grundlage einer jeden FE-Modellierung ist, und gilt als Basis einer reinen Weggrößenformulierung. Hierbei werden ausschließlich Weggrößen variiert, so dass es folgende Kernaussage beinhaltet:

„Die Summe der inneren und äußeren Arbeit, welche durch die inneren bzw. äußeren Kraftgrößen entlang der virtuellen inneren bzw. äußeren Weggrößen wirkend erzeugt werden, ergibt sich zu Null.“

$$\delta^* A = \delta^* A_i + \delta^* A_a = 0. \quad (3.1)$$

Anders als die Lösung der für das Gleichgewicht herleitbaren Differentialgleichungen stellt diese Formulierung nur eine „schwache“ Form der Gleichgewichtsbedingung dar. Sie besagt, dass die geometrischen Randbedingungen exakt erfüllt werden, das globale Gleichgewicht hingegen nur im Mittel erfüllt wird und somit lokale Fehler auftreten. Die zur Anwendung der FEM notwendige Linearisierung bzw. Inkrementierung wird in Abschnitt 3.2 beschrieben.

3.2 Schalentheoretische Grundlagen

Die Auswahl der in der Arbeit zur Anwendung kommenden finiten Elemente erfolgt in erster Linie nach deren Verwendbarkeit für Materialien mit nichtlinearem Werkstoffverhalten. Ebenso kann für spätere Beschränkungen der Anwendbarkeit die Wahl der in der Elementformulierung verwendeten Schalentheorie verantwortlich sein.

Bekanntermaßen setzt sich die Schalentheorie aus der Membran- und Biegetheorie zusammen. Die Biegetheorie wiederum kann in die zwei Hauptgruppen der schubstarreren KIRCHHOFF-LOVE- und der schubweichen REISSNER-MINDLIN-Theorien unterteilt werden. Sie unterscheiden sich im Wesentlichen in der Vernachlässigung bzw. Berücksichtigung der Schubverzerrungen.

Die weiteren Herleitungen werden in Tensorschreibweise durchgeführt. Für den Einblick in die grundlegenden Zusammenhänge und mathematischen Regeln dieser Schreibweise stehen dem interessierten Leser zahlreiche Literaturstellen zur Verfügung, wie beispielsweise Schroeder (1981) und Başar & Krätzig (1988).

Im Folgenden wird die Schalentheorie zur isoparametrischen Formulierung des hauptsächlich zur Anwendung kommenden finiten Elementes dargestellt. Das isoparametrische Konzept kann durch die Annahme von zwei oder drei Drehfreiheitsgraden und verschiedenartigen Direktorformulierungen in ein auf der REISSNER-MINDLIN-Theorie basierendes Elementkonzept umgesetzt werden. Die Vor- bzw. Nachteile der jeweiligen Formulierungen sind beispielsweise in der Arbeit von Deml (1997) hinreichend genau beschrieben. Allen Formulierungen liegt aber der isoparametrische Grundgedanke, der gleichwertigen Beschreibung von Geometrie und Verschiebungen, zu Grunde. Auf eine ergänzende Darstellung der Schalentheorie des an gewissen Stellen dieser Arbeit ebenfalls verwendeten Schalelementes mit hochwertigem Verschiebungsansatz nach der KIRCHHOFF-LOVE-Theorie wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Hierzu sei im Wesentlichen auf die Arbeiten von Harte (1982), Eckstein (1983) und Zahlten (1990) verwiesen.

3.2.1 Darstellung der Geometrie

Wie in Bild 3.1 für die Referenz- und Momentankonfiguration dargestellt, kann jeder in einem konvektiven Koordinatensystem abgebildete Punkt der Schalenmittelfläche durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Theta^1, \Theta^2) \quad (3.2)$$

beschrieben werden. Bezogen auf das globale kartesische Koordinatensystem kann der Ortsvektor mit

$$\mathbf{r} = X^i(\Theta^\alpha) \mathbf{i}_i \quad (3.3)$$

ausgedrückt werden. Die geometrischen Variablen des Grundzustandes lassen sich folglich wie in Tabelle 3.1 angeben. Um nun das Schalenkontinuum zu beschreiben, wird die Koordinate Θ^3 benutzt, die in jedem Punkt der Schalenmittelfläche normal zu dieser

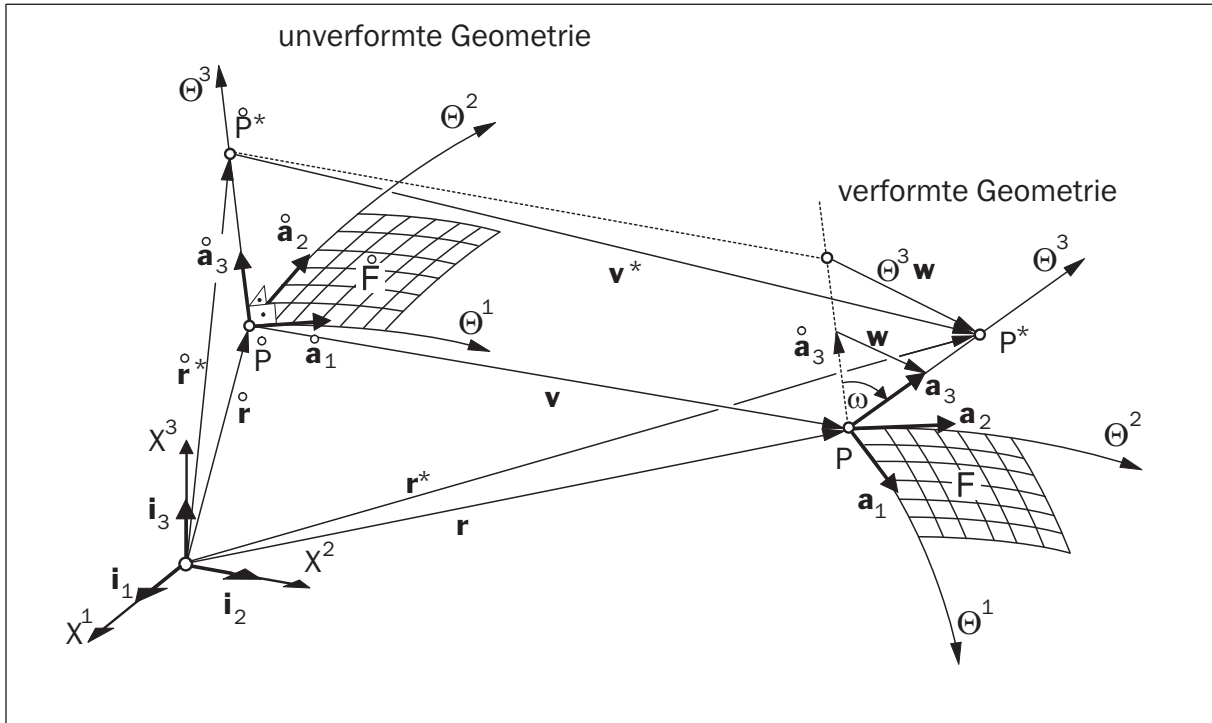


Bild 3.1: Referenz- und Momentankonfiguration

Basisvektoren	$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}, \quad \mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2}{ \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 }$
Metrikensoren	$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta$
Metrikdeterminante	$a = a_{\alpha\beta} = a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2$
Flächeninhalt	$dF = \sqrt{a} \, d\Theta^1 d\Theta^2$
Krümmungstensoren	$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta}, \quad b_\alpha^\beta = b_{\alpha\lambda} a^{\lambda\beta}$
Christoffelsymbole	$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \mathbf{a}^\lambda \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}$

Tabelle 3.1: Basisvektoren und Metrikensoren

gerichtet ist. Bei einer vorhandenen Schalendicke h hat somit die Schalenoberseite die Koordinate $\Theta_o^3 = +h/2$ bzw. die Schalenunterseite die Koordinate $\Theta_u^3 = -h/2$. Somit kann der Ortsvektor im Schalenkontinuum zu

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \Theta^3 \mathbf{a}_3 \quad (3.4)$$

geschrieben werden. Die Metrikgrößen ergeben sich durch Anwendung von Gleichung 3.4 auf die Gleichungen in Tabelle 3.1 entsprechend.

Wird zur Herleitung des finiten Elementes ein isoparametrisches Konzept benutzt, so wird sowohl der Grund- als auch der Verformungszustand durch dieselben Variablen beschrieben. In der hier verwendeten Theorie wurden gemäß Bařar (1987) und Montag (1997) zur Beschreibung die drei globalen, orthogonal-kartesischen Koordinaten und zwei unabhän-

gige Eulerwinkel (s. Bild 3.2) zur Abbildung gewählt. Der Ortsvektor der Schalenmittelfläche lässt sich somit durch

$$\mathbf{r} = X^i \mathbf{i}_i \quad (3.5)$$

ausdrücken.

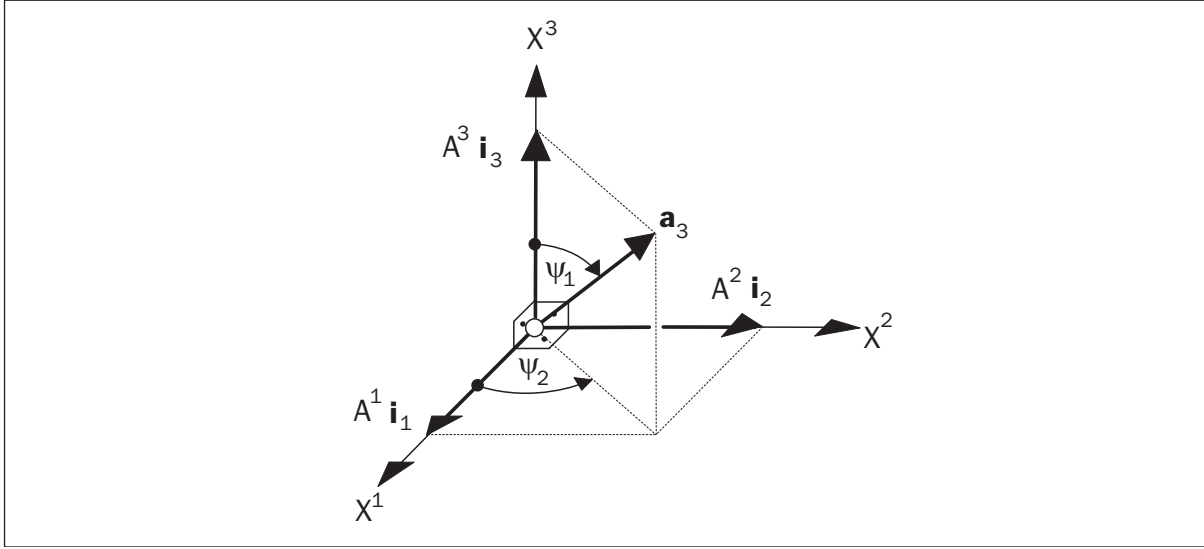


Bild 3.2: Definition der Rotationsvariablen

Der für die im Weiteren verwendete Theorie ebenfalls benötigte Direktor wird mit Hilfe der Eulerwinkel durch

$$\mathbf{a}_3 = A^i \mathbf{i}_i \quad (3.6)$$

beschrieben. Hierbei stellen A^i die Komponenten des Normaleneinheitsvektors bezüglich des globalen orthogonal-kartesischen Koordinatensystems dar. Sie lassen sich mit Hilfe der oben definierten Eulerwinkel durch

$$A^1 = \sin \Psi_1 \cos \Psi_2, \quad A^2 = \sin \Psi_1 \sin \Psi_2, \quad A^3 = \cos \Psi_1 \quad (3.7)$$

ausdrücken. Nach Einführung dieser Größen kann der Ortsvektor eines beliebigen Punktes des unverformten Schalenkontinuums nun durch

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{r} + \Theta^3 \mathbf{a}_3 = X^i \mathbf{i}_i + \xi^3 A^i \mathbf{i}_i \quad (3.8)$$

beschrieben werden. Dem verwendeten isoparametrischen Konzept folgend werden die konvektiven Koordinaten Θ^α, Θ^3 , soweit es die FE-Formulierung betrifft, durch die normierten Koordinaten ξ^α, ξ^3 ersetzt. Dies soll die approximative Abbildung des Ortsvektors verdeutlichen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der unverformte, spannungsfreie Ausgangszustand durch den Kopfzeiger 0 gekennzeichnet.

3.2.2 Grundgleichungen der REISSNER-MINDLIN-Schalentheorie

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts 3.2 erwähnt, stellt die REISSNER-MINDLIN-Theorie eine schubweiche Biegetheorie dar. Im Folgenden sollen nun die notwendigen Grundgleichungen zur Umsetzung dieser Theorie in die FEM zusammengefasst werden.

3.2.2.1 Deformationszustand

Im Rahmen des isoparametrischen Grundkonzeptes wird der Deformationszustand, ebenfalls wie die Ausgangsgeometrie, durch drei orthogonal-kartesische Verschiebungen und zwei Euler-Winkel beschrieben. Wie in Bild 3.1 dargestellt, ergeben sich die beiden Verschiebungsvektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{r}^0 = \left(X^i - \overset{0}{X}^i \right) \mathbf{i}_i, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_3^0 = \left(A^i - \overset{0}{A}^i \right) \mathbf{i}_i. \quad (3.10)$$

3.2.2.2 Kinematik

Die kinematischen Beziehungen können bezogen auf die Referenzkonfiguration (GREEN'scher Verzerrungstensor) oder auf die Momentankonfiguration (ALMANZI'scher Verzerrungstensor) formuliert werden. Im Hinblick auf die später zu wählenden konsistenten Schnittgrößen wird im Rahmen dieser Theorie von dem GREEN'schen Verzerrungstensor ausgegangen:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_{,i}^* \mathbf{r}_{,j}^* - \overset{0}{\mathbf{r}}_{,i}^* \overset{0}{\mathbf{r}}_{,j}^* \right). \quad (3.11)$$

Unter Vernachlässigung von Dickenverzerrungen im Rahmen einer REISSNER-MINDLIN-Schubverzerrungstheorie ergibt sich der bekannte Tensor:

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha\beta} & \gamma_{\alpha 3} \\ \gamma_{3\alpha} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} + \xi^3 \beta_{\alpha\beta} & \frac{1}{2} \gamma_\alpha \\ \frac{1}{2} \gamma_\alpha & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Die einzelnen Komponenten des GREEN'schen Verzerrungstensors $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ und γ_α , die auch als Dehnverzerrungs-, Biegeverzerrungs- und Schubverzerrungstensoren bezeichnet werden, sind für den isoparametrischen Ansatz der Vollständigkeit halber im Anhang A.1 angegeben.

3.2.2.3 Konsistenter Schnittgrößentensor

Wie bereits erwähnt, muss zu dem verwendeten Verzerrungstensor der energetisch konjugierte Spannungstensor ausgewählt werden. Hier ist es der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor, der für den Aufbau der Schnittgrößentensoren verwendet wird. Die

Pseudo-Normalkraft-, Momenten- und Pseudo-Querkrafttensoren können durch Integration der Spannungen zu

$$\tilde{N}^{(\alpha\beta)} = \int_{\xi_u^3}^{\xi_o^3} \mu \sigma^{(\alpha\beta)} d\xi^3; \quad M^{(\alpha\beta)} = \int_{\xi_u^3}^{\xi_o^3} \mu \sigma^{(\alpha\beta)} \xi^3 d\xi^3; \quad \tilde{Q}^\alpha = \int_{\xi_u^3}^{\xi_o^3} \mu \sigma^{(\alpha 3)} d\xi^3 \quad (3.13)$$

ausgedrückt werden. Durch eine entsprechende Transformation können dann die physikalischen Schnittgrößen unter Berücksichtigung des Shifters des Schalenkontinuums zu

$$\begin{bmatrix} N^{<\alpha\beta>} \\ M^{<\alpha\beta>} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a_{\alpha\alpha}}} \begin{bmatrix} N^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

bestimmt werden.

3.2.2.4 Konstitutive Beziehungen

Den konstitutiven Beziehungen, oder auch Werkstoffgesetzen, kommt bei einer materiell-nichtlinearen Betrachtung naturgemäß eine besondere Bedeutung zu. Im Fall von linear elastischem Materialverhalten kann der dreidimensionale Werkstofftensor nach Bařar & Krätzig (1985) zu

$$E^{ijkl} = G \left(a^{ik} a^{jl} + a^{il} a^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} a^{ij} a^{kl} \right) \quad (3.15)$$

für ein Schalenelement bestimmt werden. Hierin ist die Transformation vom Materialkoordinatensystem in das Elementkoordinatensystem enthalten.

Innerhalb der hier betrachteten Schalentheorie können durch die Forderung des ebenen Spannungszustandes ($\sigma_{33} = 0$) die Pseudo-Schnittgrößentensoren für lineares Materialverhalten unter Einführung der Dehn- (D) bzw. Biegesteifigkeit (B) und des Schubmoduls zu

$$\tilde{N}^{(\alpha\beta)} = DH^{\alpha\beta\varphi\lambda} \alpha_{(\varphi\lambda)}, \quad M^{(\alpha\beta)} = BH^{\alpha\beta\varphi\lambda} \beta_{(\varphi\lambda)}, \quad \tilde{Q}^\alpha = Gha^{\alpha\lambda} \gamma_\lambda \quad (3.16)$$

definiert werden. Der Elastizitätstensor $H^{\alpha\beta\varphi\lambda}$ besteht ausschließlich aus Informationen der Metrik und der Querdehnungszahl:

$$H^{\alpha\beta\varphi\lambda} = \frac{1-\nu}{2} \left(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right). \quad (3.17)$$

Er ist symmetrisch und enthält in allgemeiner Form sechs unabhängige Komponenten. Bei der Verwendung von orthogonalen Flächenkoordinaten ($a^{12} = a^{21} = 0$) reduziert sich seine Zusammensetzung auf vier unabhängige Komponenten.

Zur Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens wird das Schalenelement von der klassischen 2D-Approximation in eine 2 $\frac{1}{2}$ D-Approximation überführt [Montag 1997].

Dazu wird das Element in Dickenrichtung in einzelne Schichten unterteilt (Multi-layered-modelling, s. Bild 3.3). Ergänzend hierzu ist in Bild 3.4 das konzeptionelle Vorgehen der Multi-Level-Strategie zur Ermittlung der tangentialen Steifigkeitsmatrix dargestellt.

Hierbei erfolgt die Ermittlung der Spannungen und Dehnungen in jedem Integrationspunkt und in jeder Schicht des Elementes. Der Verbund zwischen Beton- und Stahlschicht wird im ungerissenen Zustand über die Gleichheit der Dehnungen und im gerissenen Zustand über den Ansatz eines Tension-Stiffening Modells gewährleistet.

Sowohl die (N)onlinear(A)rbitarily(C)urved(S)hell-Elements (NACS-Elemente) nach Harte (1982) als auch die (A)ssumed(S)train(E)lements (ASE-Elemente) nach Menzel (1996) können innerhalb dieses Konzeptes verwendet werden.

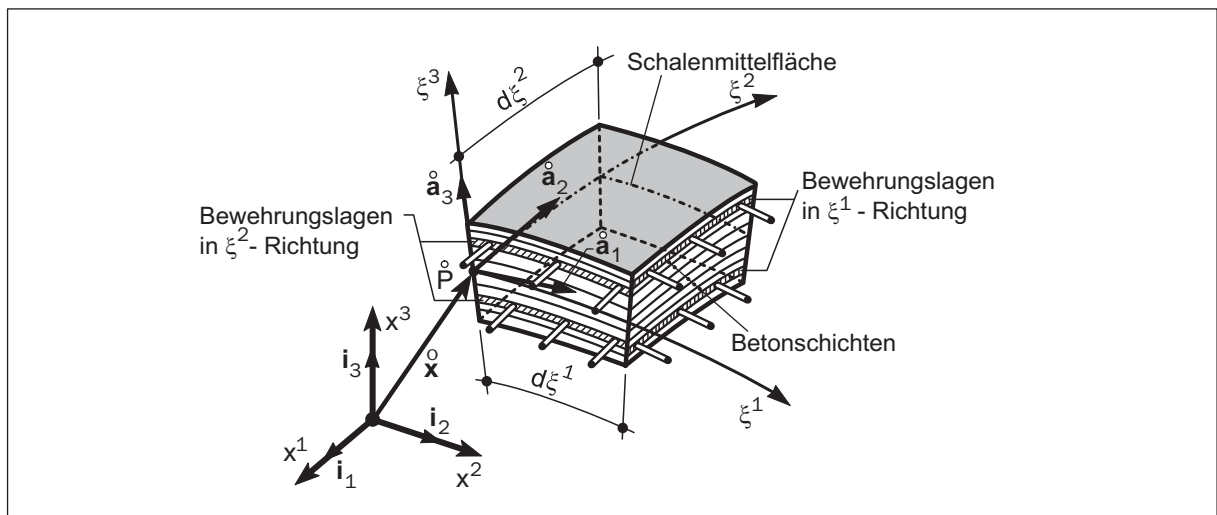


Bild 3.3: Geschichtetes Schalelement nach Zahlten (1990)

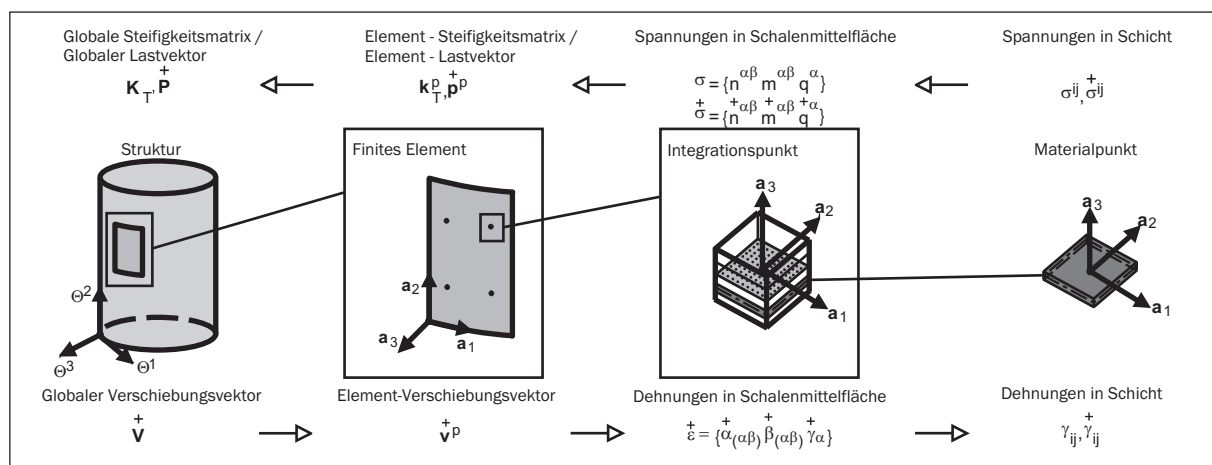


Bild 3.4: Multi-Level-Konzept zur Ermittlung der tangentialen Steifigkeitsmatrix

3.3 Inkrementelle Vorgehensweise

Die Basis einer FE-Modellierung liegt in der Linearisierung des Variationsprinzips, in diesem Fall der Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Hierzu werden zur Approximation des tatsächlichen Zustandes des Tragwerks drei Zustände definiert (Bild 3.5). Der Ausgangszustand - in den entsprechenden Gleichungen durch den Kopf-

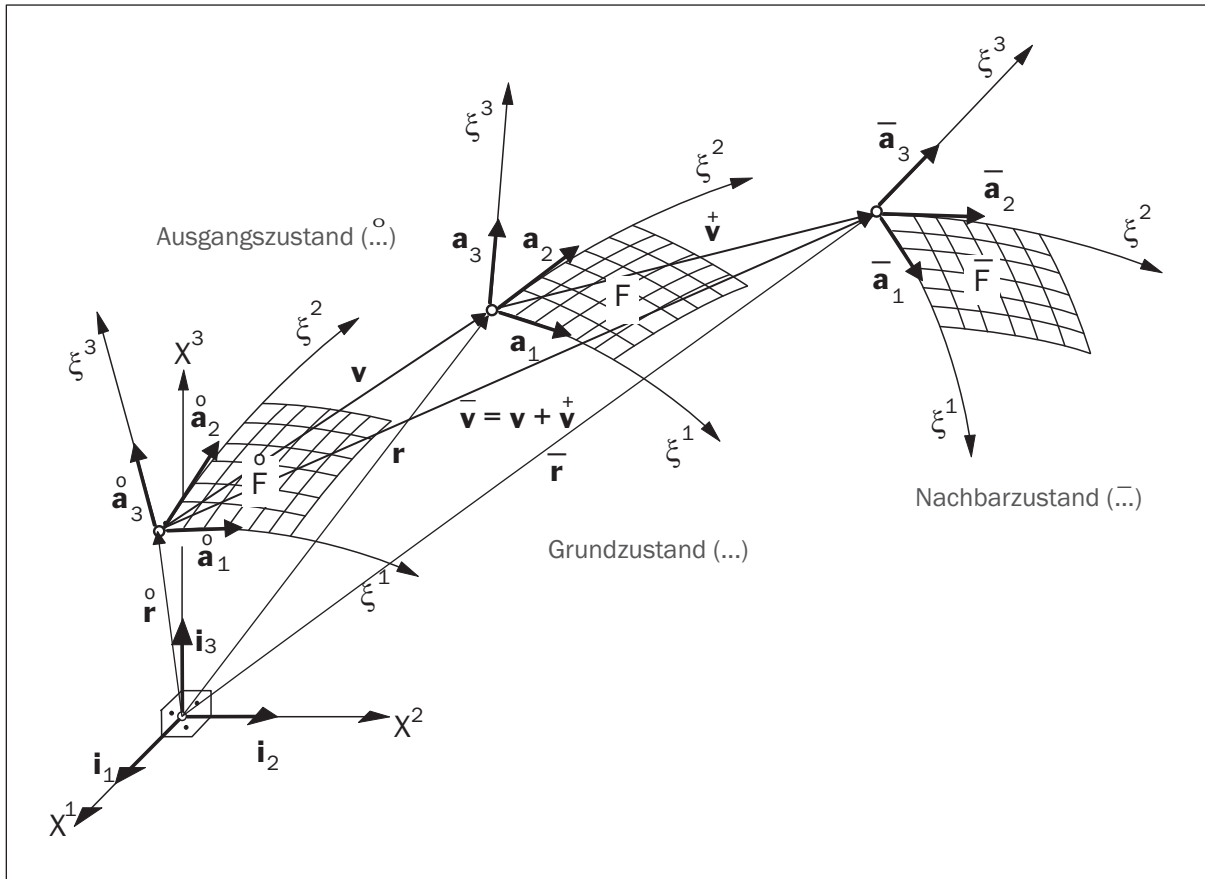


Bild 3.5: Ausgangs-, Grund- und Nachbarzustand einer Schalenstruktur

zeiger (0) gekennzeichnet - stellt die unverformte und spannungsfreie Ausgangslage des Tragwerks dar, der Grundzustand gibt einen bekannten und ausiterierten Gleichgewichtszustand wieder. Der Nachbarzustand - erkennbar durch den Kopfzeiger (-) - stellt den neuen unbekanntem, um ein Inkrement erweiterten Gleichgewichtszustand dar.

Die Linearisierung erfolgt somit für alle relevanten Variablen durch die Abbildung der Veränderung zwischen Grund- und Nachbarzustand mit Hilfe der ersten (+) und der zweiten Variation (++). Die Variationen der Verzerrungsgrößen des GREEN'schen Verzerrungstensors sind im Anhang A.1 vollständig ausformuliert.

In einem nächsten Schritt kann nun das in Abschnitt 3.1.3 dargestellte Prinzip der virtuellen Verschiebungen durch Anwendung der Linearisierung angegeben werden:

$$\delta A_i^* = -\delta A_a^* \Leftrightarrow \mathbf{K}_T \cdot \mathbf{V}^+ = \mathbf{P}_a - \mathbf{F}_i. \quad (3.18)$$

Hierbei beinhaltet die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T das energetische Produkt \mathbf{K}_U der ersten Variation der Verzerrungsgrößen mit den inkrementellen Pseudo-Kraftgrößen und das energetische Produkt \mathbf{K}_G der zweiten Variation der Verzerrungsgrößen mit den Pseudokraftgrößen. Der Vektor der äußeren Belastung \mathbf{P}_a wird durch das energetische Produkt von der äußeren Belastung mit den virtuellen Verschiebungen ausgedrückt. \mathbf{F}_i , der Vektor der Ungleichgewichtskräfte, ergibt sich aus dem energetischen Produkt der ersten Variation der Verzerrungsgrößen mit den Pseudokraftgrößen. Für eine ausführlichere Beschreibung kann auf die Literatur wie u. a. Menzel (1996) und Montag (1997) verwiesen werden.

Das Auffinden des Gleichgewichts des Nachbarzustandes wird üblicherweise mit inkrementell-iterativen Algorithmen erreicht.

Die hier dargestellten Zusammenhänge sind die Grundlage für die in Kapitel 6 vorgestellten Algorithmen zur Analyse beliebig gekrümmter geometrisch- und materieller nichtlinearer Schalenträgerwerke.

3.4 Berücksichtigung von geometrischen Imperfektionen

Innerhalb einer isoparametrischen FE-Formulierung gibt es unterschiedliche Möglichkeiten zur Berücksichtigung von geometrischen Imperfektionen. Die Konzepte unterscheiden sich in der Approximationsgüte der imperfekten Struktur. Für den jeweiligen Anwendungsfall kann eine Überprüfung der einzelnen Konzepte im Hinblick auf die jeweiligen Vor- bzw. Nachteile sinnvoll sein. Bild 3.6 zeigt die um den imperfekten Ausgangszustand erweiterten Zustände eines belasteten Schalenelementes innerhalb einer inkrementell/iterativen Analyse.

Im Weiteren werden zwei unterschiedliche Ansätze vorgestellt und auf die Anwendung im Bereich der allgemeinen Schalenträgerwerke kritisch betrachtet. Umfangreichere Ausführungen zu dieser Problematik finden sich beispielsweise in Deml (1997), wo Algorithmen zur Bestimmung einer maßgebenden Imperfektionsfigur bereitgestellt werden.

3.4.1 Addition von Verschiebungsinkrementen und facettenartige Abbildung

Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung einer geometrischen Imperfektion ist die Veränderung der Geometrieingangsdaten des perfekten Ausgangssystems durch die Addition der innerhalb einer Vorabanalyse zur Bestimmung einer maßgebenden Imperfektionsverteilung ermittelten Verformungsfigur. Das so entstandene imperfekte System wird nun in einer neu zu startenden Analyse als unverformter und spannungsfreier Ausgangszustand angenommen. Hierbei wird die Form des Tragwerks mit den so entstandenen Elementen facettenartig abgebildet. Den Vorteilen, die diese Vorgehensweise mit sich bringt - unveränderter Elementansatz, Spannungen werden „automatisch“ auf das imperfekte System

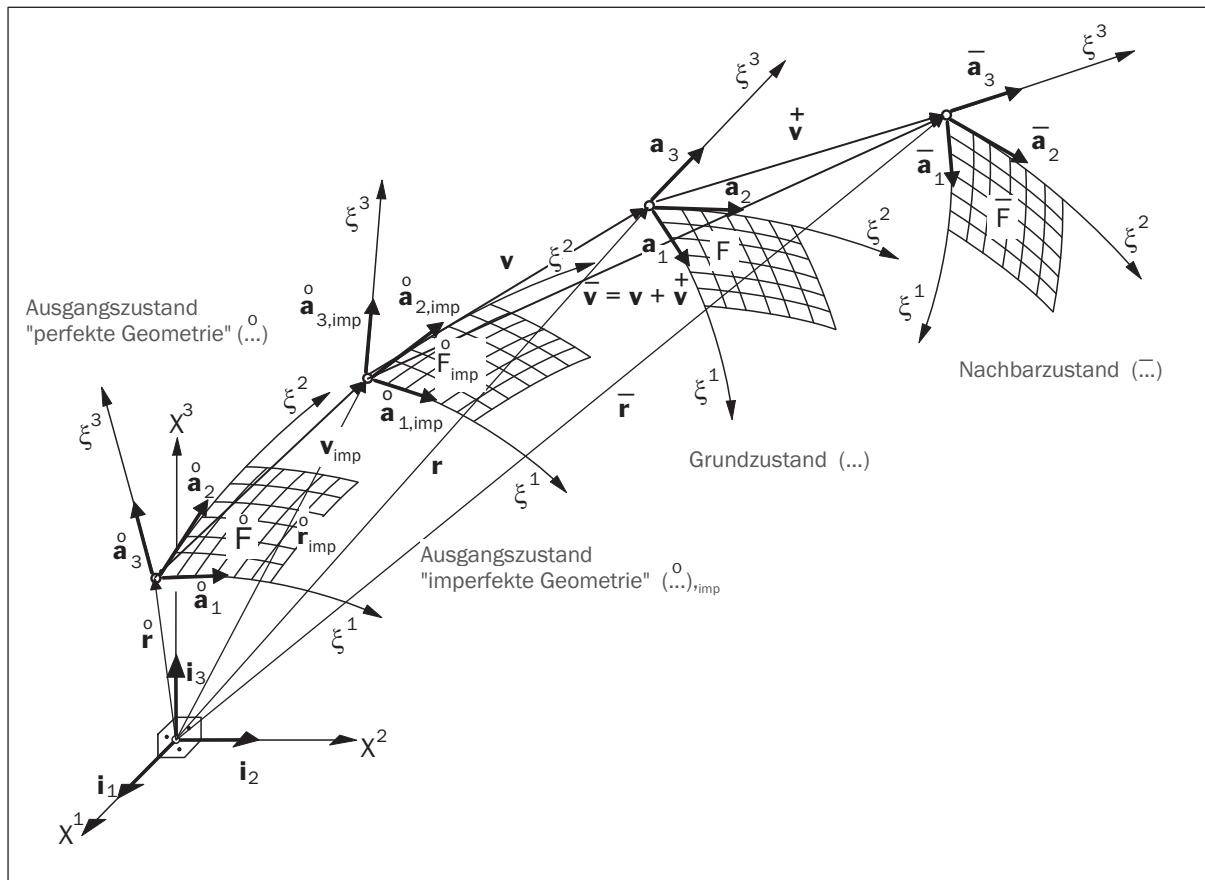


Bild 3.6: Ausgangs-, Grund- und Nachbarzustand eines imperfekten Schalentragwerks

bezogen, die zu addierenden Verschiebungen sind konsistent zu den Freiheitsgraden des Systems - stehen ebenso Nachteile gegenüber.

Diese Nachteile können je nach Aufgabenstellung zu einem Ausschluss dieser Methode führen. Die beiden größten Nachteile bestehen darin, dass zum einen die Informationen des perfekten Systems durch das „Überschreiben“ mit dem imperfekten System verloren gehen, und dass zum anderen das FE-Modell durch die Verwendung von ebenen Elementen seine Krümmungseigenschaften verliert.

Der erste Nachteil kann durch eine aufwändige parallele Speicherung behoben werden, so dass das Vorgehen auch für Algorithmen zur Suche der ungünstigsten Imperfektionsfiguren angewendet werden kann. Der zweite Nachteil wiegt schwerer und führt bei stark gekrümmten Schalentragwerken zu einer „künstlichen“ Versteifung des Systems.

Ein weiteres Problem kann je nach Umsetzung des isoparametrischen Elementansatzes bei der Bestimmung der Eulerwinkel entstehen. Die Vorgabe einer beliebig geformten Geometrie ist prinzipiell möglich, jedoch sind bei einem imperfekten System öfter Verschnidungslinien zwischen zwei benachbarten Elementen möglich, bei denen eine eindeutige Bestimmung des Euler-Winkels nur mit numerischen Tricks bzw. Näherungen möglich ist. Die Ergänzung des isoparametrischen Konzeptes mit diesem Vorgehen und die im Anschluss daran durchgeführten zahlreichen Analysen zeigen sehr gute Ergebnisse bei

perfekt ebenen Ausgangssystemen (vgl. Beispiel 8.1) und durchaus akzeptable Resultate bei schwach gekrümmten Ausgangssystemen (vgl. Beispiel 8.4).

3.4.2 Erweiterung des Ortsvektors unter Beibehaltung des perfekten Geometrieansatzes

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der geometrischen Imperfektion ist im Folgenden näher erläutert. Bei ihr wird der Ortsvektor eines jeden Integrationspunktes (3.3) im Hinblick auf die abzubildende imperfekte Struktur erweitert. Der so entstandene Ortsvektor eines Punktes im Schalenkontinuum der imperfekten Struktur wird durch

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{imp}^* &= X_{imp}^0 \mathbf{i}_i + \xi^3 A_{imp}^0 \mathbf{i}_i \\ &= (X^i + \Delta X^i) \mathbf{i}_i + \xi^3 A_{imp}^0 \mathbf{i}_i\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\text{mit } A_{imp}^1 &= \sin(\Psi_1 + \Delta\Psi_{1,imp}) \cos(\Psi_2 + \Delta\Psi_{2,imp}) \\ A_{imp}^2 &= \sin(\Psi_1 + \Delta\Psi_{1,imp}) \sin(\Psi_2 + \Delta\Psi_{2,imp}) \\ A_{imp}^3 &= \cos(\Psi_1 + \Delta\Psi_{1,imp})\end{aligned}$$

exakt beschrieben.

Unter Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme kann gezeigt werden, dass Gleichung (3.19) auch in die Form

$$\mathbf{r}_{imp}^* = \left(X^i + \xi^3 A^i f_{imp}^i \right) \mathbf{i}_i + (\Delta X^i + \xi^3 \Delta A^i) \mathbf{i}_i \quad (3.20)$$

übertragen werden kann (s. Anhang A.1). Durch die Grundvoraussetzung der Spannungsfreiheit des imperfekten Zustandes kann der GREEN'sche Verzerrungstensor zu

$$\gamma_{ij,imp} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_{,i}^* \mathbf{r}_{,j}^* - \mathbf{r}_{,i,imp}^* \mathbf{r}_{,j,imp}^* \right) \quad (3.21)$$

bestimmt werden. Eine Aufspaltung in die einzelnen Bestandteile des Verzerrungstensors $\alpha_{\alpha\beta,imp}$, $\beta_{\alpha\beta,imp}$ und $\gamma_{\alpha,imp}$ ist analog zu dem der perfekten Geometrie möglich (s. Anhang A.1). Die Umsetzung dieser Vorgehensweise innerhalb eines Elementkonzeptes beinhaltet in einem weiteren elementaren Schritt die Bestimmung der unbekanntenen Größen ΔX^i und $\Delta\Psi$ aus der Verschiebung und Verdrehung eines Elementes. Ohne Weiteres lässt sich der erhöhte Zeitaufwand bei der Durchführung der Umwandlung von äußeren Verschiebungen und Verdrehungen in die Zuwächse für die Ortsvektorformulierung erkennen, da diese Umwandlung für jeden Punkt des FE-Netzes erfolgt, so dass bei einem großen Netz ein nicht zu unterschätzender Zuwachs an Rechenzeit zu verzeichnen ist. Ein Weg, diese Transformation zu umgehen, ist durch eine direkte Erweiterung der metrischen Größen gegeben. Hierbei wird unter Anwendung der Formfunktionen eine vorgegebene Verformung des FE-Netzes in die Metrik eingebracht.

Der wesentliche Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der Tatsache begründet, dass hierbei die Krümmungseigenschaften eines durch Schalenelemente abgebildeten Tragwerks bestehen bleiben. Ebenfalls sind zu jeder Zeit die Informationen des ursprünglichen perfekten Systems verfügbar.

3.5 Gleichungslösung und Determinantenbildung

Ausgehend von dem GAUSS'schen Eliminationsverfahren, bei dem die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems durch systematische Elimination in eine obere Dreiecksmatrix überführt wird, kann gezeigt werden, dass eine beliebige symmetrische Matrix in folgende Form umgewandelt werden kann:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \quad (3.22)$$

mit \mathbf{L} - normierte obere Dreiecksmatrix
 \mathbf{D} - Diagonalmatrix.

Diese Zerlegung bietet gegenüber dem ursprünglichen Verfahren nach CHOLESKY [Bathe & Wilson 1976]

$$\mathbf{K}_T = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^T \quad (3.23)$$

mit $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$

den Vorteil, dass auch indefinite Gleichungssysteme, die sich durch negative Diagonalglieder D_{ii} kennzeichnen, ohne Weiteres gelöst werden können.

Die Gleichungslösung erfolgt mit Hilfe der Zerlegung nach Gleichung (3.22). Folglich ermittelt sich die für das in Abschnitt 6.2.3.3 vorgestellte Verfahren benötigte Determinante der tangentialen Steifigkeitsmatrix zu

$$\det \mathbf{K}_T = \det \mathbf{D} = \prod_{i=1}^{NN} D_{ii}. \quad (3.24)$$

3.6 Beispiel zur Problematik bei hochwertigen Elementansätzen

Zur Darstellung der Bedeutung von unterschiedlichen Elementansätzen wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Vergleich zwischen einem isoparametrischen Ansatz (ASE4-Element) und dem hochwertigen Verschiebungsansatz des NACS-Elementes durchgeführt. Um diesen Unterschied für eine Analyse unter Berücksichtigung von materieller Nichtlinearität darzustellen, wurde das folgende Beispiel ausgewählt.

Es wird eine beidseitig eingespannte Wand untersucht, die die Abmessungen $H = 2.5 \text{ m}$ und $B = 10.0 \text{ m}$ hat. Die Belastung wird in Form einer mittigen, horizontalen, von Einspannung zu Einspannung, verlaufenden Linienlast gewählt. Für den Werkstoff wird ein Beton der Güte C 80/95 und ein Bewehrungsgrad von 0.25 % für die vertikale und 0.083 % für die horizontale Richtung verwendet. Die Wand wird sowohl mit einer ebenen als auch mit einer zylindrischen Geometriefunktion abgebildet. Das Werkstoffverhalten des Materials Stahlbeton wird mit Hilfe der in den weiteren Kapiteln beschriebenen Gesetzmäßigkeiten abgebildet. Als Tension-Stiffening Modell wird an dieser Stelle ein einfaches Modell

nach Gilbert & Warner (1978) verwendet, welches beispielsweise in der Arbeit von Zahlen (1990) beschrieben wird.

Wird die Analyse mit dem ASE4-Element durchgeführt, so ist das Ergebnis für jede verwendete Geometriefunktion nahezu identisch, es unterscheidet sich lediglich durch eine schwache Änderung der Steifigkeit infolge der variierenden Radien des Systems. Bei der Analyse mit dem NACS-Element hingegen werden in Abhängigkeit von der gewählten Geometriefunktion starke Unterschiede in dem Antwortverhalten des Tragwerks gefunden.

Bei Betrachtung des Last-Verformungsdiagramms in Bild 3.7 fällt auf, dass bei einer Krümmung infolge $R = 50.0$ m die Anfangssteifigkeit anwächst, sich aber weitestgehend derselbe Last-Verschiebungsverlauf einstellt. Wird nun in einem nächsten Schritt der Radius erhöht, so sinkt zwar die Anfangssteifigkeit ab und nähert sich derjenigen der ebenen Struktur an, aber mit Einsetzen der Rissbildung verliert die Struktur scheinbar ihre Tragfähigkeit und kollabiert. Dieses Verhalten tritt bei weiterer Steigerung des Radius stärker auf.

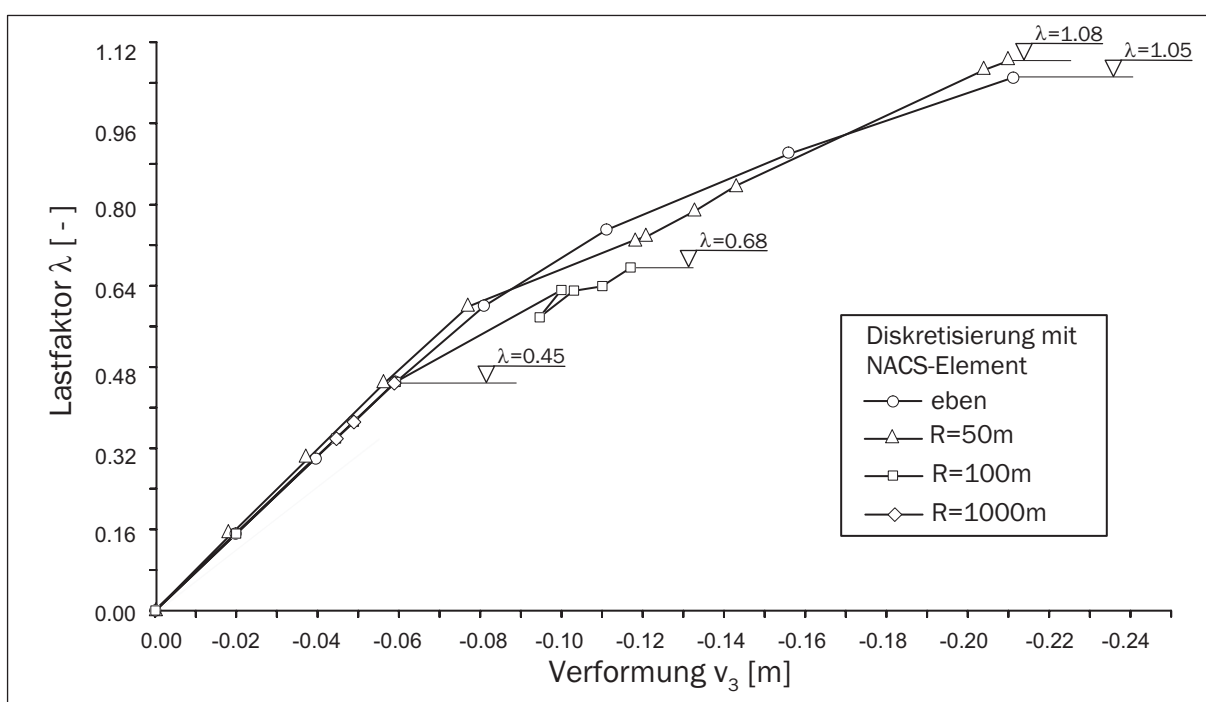


Bild 3.7: Last-Verformungsdiagramm für eine Wand mit unterschiedlichen Radien

Der Grund hierfür liegt in dem Elementansatz der NACS-Elemente verborgen. Durch seine hochwertigen Ansatzfunktionen sind eine große Anzahl von Freiheitsgraden zur Umsetzung dieser Theorie notwendig (bei dem hier verwendeten Element 13 Freiheitsgrade pro Knoten). Diese Freiheitsgrade müssen zur Erzeugung der Gesamtsteifigkeitsmatrix in Richtung des globalen Koordinatensystems transformiert werden. Dieses gelingt allerdings nur sinnvoll für die Freiheitsgrade mit physikalischer Bedeutung, so dass die weiteren Positionen der Steifigkeitsmatrix untransformiert bleiben.

Wird nun eine linear elastische oder geometrisch nichtlineare Analyse durchgeführt, so

verringert sich zwar die Genauigkeit der Ergebnisse (bei einer geometrisch nichtlinearen Berechnung führt das zu einer Steigerung der Anzahl der Iterationsschritte), aber dennoch stellt sich am Ende des Iterationsvorgangs der richtige Gleichgewichtszustand ein. Das Defizit der Steifigkeitsmatrix wird in diesem Fall über die Ungleichgewichtskräfte wieder ausgeglichen.

Beim Eintreten eines Risses, und somit beim Verschwinden von Haupt- und einzelner Nebendiagonalglieder der Steifigkeitsmatrix, gewinnen die vormals niedrigen Werte der untransformierten Positionen an Einfluss und das Ergebnis der Gleichungslösung wird verfälscht. Dieses Verhalten gilt unabhängig von dem zur Lösung des nichtlinearen Problems angewandten Verfahren.

Beim Newton-Raphson-Verfahren führt dies zu einem erhöhten Iterationsbedarf, verursacht aber ansonsten keine Nachteile. Bei der Verwendung eines Bogenlängenverfahrens hingegen gewinnen die Ungleichgewichtskräfte innerhalb der Rechenvorschrift eine höhere Bedeutung, da hiermit die Lastkorrektur gesteuert wird. Die Transformation der einzelnen Anteile in das globale Koordinatensystem kann hier ebenfalls nur für die Positionen korrespondierend zu den physikalisch sinnvollen Freiheitsgraden erfolgen, so dass durch diese Ungenauigkeit größere Rückschritte innerhalb der Iteration bis hin zu frühzeitigem Versagen erklärt werden können.

Das Ergebnis dieser Voruntersuchung ist, dass die einfachste und konsistente FE-Formulierung unter gleichzeitiger Berücksichtigung von gekrümmten Schalentragwerken und materieller Nichtlinearität die isoparametrische Formulierung darstellt. Daher wurde im weiteren Verlauf dieser Arbeit das ASE4-Element als Basis verwendet.

3.7 Finite-Elemente Programmsystem FEMAS 2000

In dieser Arbeit wurde das Finite-Elemente Programmsystem FEMAS 2000 (Finite Element Moduln Allgemeiner Strukturen) verwendet [Beem et al. 1996]. Die ursprüngliche Fassung entstand an der Ruhr-Universität Bochum und wurde seitdem an verschiedenen Stellen (Ruhr-Universität Bochum, Technische Universität Kaiserslautern, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Bergische Universität Wuppertal) kontinuierlich weiterentwickelt. Die zu Beginn der Arbeit vorliegende Programmversion stellte eine Kombination der Versionen der Hochschulen Bochum und Aachen dar. Das Programmsystem ist, wie bereits der Name andeutet, in modularer Weise aufgebaut, so dass eine Erweiterung und Ergänzung an jeder Schnittstelle ohne großen Aufwand erfolgen kann. In Tabelle 3.2 sind in aller Kürze die in Wörmann (2004) und der vorliegenden Arbeit durchgeführten Erweiterungen und Ergänzungen aufgeführt. Eine ausführlichere Beschreibung der einzelnen Bausteine findet sich in Harte et al. (2003).

Problembeschreibung	Systemgleichungen	Module
lineare Statik	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-1
Theorie 2. Ordnung	$\{\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V})\} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-2
nichtlineare Statik ^{*,**}	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-3
nichtlineare Statik mit begleitender Eigenwertanalyse für Stabilitätsprobleme [*]	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$ $\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot (\mathbf{K}_u(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V}))\} \cdot \Psi = \mathbf{0}$	STA-4
nichtlineare Statik mit Last-Zeit-Funktion	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(t)$	STA-5
nichtlineare Statik mit begleitender Eigenfrequenzberechnung ^{**}	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$ $\{\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}\} \cdot \Psi = \mathbf{0}$	STA-6
nichtlineare Statik mit lin. <u>und</u> nichtlin. Materialgesetz [*]	$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STA-7
Klassische Stabilität	$\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V})\} \cdot \Psi = \mathbf{0}$	STB-1
lineare Statik mit An- wendung des Stabilitäts- kriteriums von MÜNGER [*]	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	STB-2
lineare Stabilitäts- analyse mit geschädigter Struktur [*]	$\{\mathbf{K}_e(d) + \Lambda \cdot \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{V}, d)\} \cdot \Psi = \mathbf{0}$	STB-3
Eigenfrequenzberechnung	$\{\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}\} \cdot \Psi = \mathbf{0}$	DYN-0
lineare Dynamik	$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(t)$	DYN-2
nichtlineare Dynamik	$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(t)$	DYN-3
lineare, stationäre Feldprobleme ^{**}	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$	FIELD-1
lineare, instationäre Feldprobleme ^{**}	$\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(t)$	FIELD-2
nichtlineare, instationäre Feldprobleme ^{**}	$\mathbf{C}(\mathbf{V}) \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}(\mathbf{V}, t)$	FIELD-3

Tabelle 3.2: Erstellung bzw. Erweiterung der Programmmodule von FEMAS 2000 im Rahmen dieser Arbeit (...) ^{*} und nach Wörmann (2004) (...) ^{**}

Kapitel 4

Ein normgerechtes Materialmodell für hochfesten Stahlbeton

4.1 Zum Materialverhalten des Werkstoffs Beton

Beton ist ein inhomogener Werkstoff, da er aus mehreren Komponenten besteht, die je nach Mischungsverhältnis und Herstellung in ihren Gewichtsprozentanteilen und ihrer Verteilung variieren. Die Komponenten bestehen im Wesentlichen aus Zuschlagstoff, Wasser und Bindemittel, welches sich in seiner Zusammensetzung zusätzlich unterscheiden kann.

Der Zuschlagstoff wird je nach Zielsetzung aus unterschiedlichen Körnungen, welche an einer vorgebbaren Sieblinie orientiert sind, zusammengestellt. Das Bindemittel beinhaltet hauptsächlich Zement und verschiedene puzzolanische Zusatzstoffe wie beispielsweise Flugasche und/oder Silikastoffe. Hinzu kommen, je nach Anwendungsbereich, weitere chemische Zusatzstoffe wie Luftporenbildner oder Betonverflüssiger.

Durch diese Auflistung wird deutlich, dass der Werkstoff Beton sich stark von Werkstoffen wie Stahl, Kunststoff oder Holz unterscheidet, deren Materialeigenschaften weniger inhomogen sind.

Dennoch kann für den Werkstoff Beton das Materialverhalten durch entsprechende Gesetzmäßigkeiten beschrieben werden. Bei der Abbildung des Materialverhaltens ist es wichtig, unterschiedliche Genauigkeitsstufen zu unterscheiden. Nach der Einteilung in Bild 4.1, die erstmals von van Mier (1984) eingeführt wurde, können die Modellgesetze für den Werkstoff Beton in drei Stufen unterschieden werden. Je nach Anwendungsgebiet kann aus den Modellierungsstufen eine Entscheidung für einen einzelnen Bereich gefällt werden.

Die Betonformulierungen im Mikro-Bereich eignen sich vor allem zur Beschreibung der chemischen Prozesse innerhalb des Werkstoffs und sind zurzeit auf die Analyse von kleinen Gesamtsystemen beschränkt.

In den Meso-Bereich fallen diejenigen Betonformulierungen, welche die einzelnen Bestandteile des Betons beschreiben und ihre jeweiligen Eigenschaften und die Wechselwirkungen zwischen ihnen abbilden. Hiermit können Prozesse wie fortschreitende Rissbildung oder der Kräftefluss innerhalb des Gefüges realitätsnah abgebildet werden.

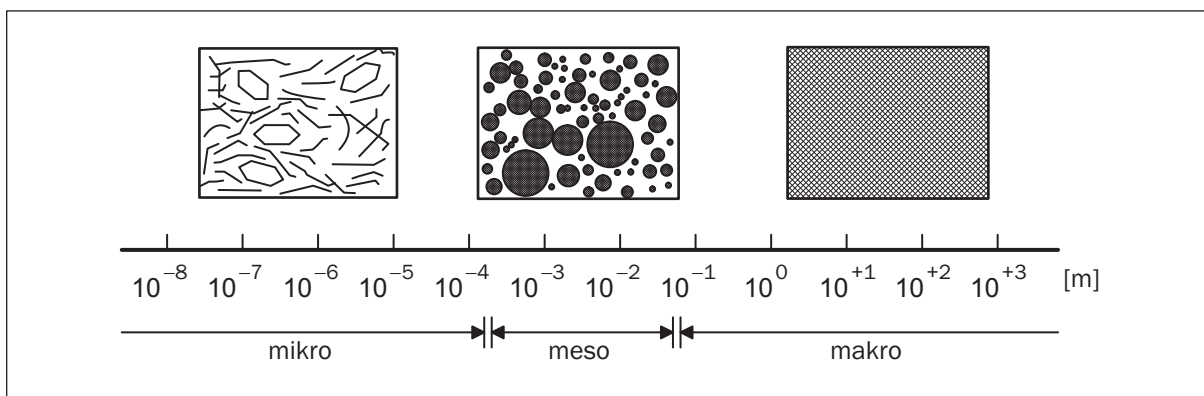


Bild 4.1: Abbildungsstufen des Werkstoffs Beton nach van Mier (1984)

In der letzten Kategorie, im Makro-Bereich, befindet sich hingegen der Großteil der Betonformulierungen. In dieser Kategorie wird der eigentlich stark inhomogene Werkstoff Beton zur Modellierung innerhalb einer Werkstoffbeziehung bezüglich seiner Festigkeitseigenschaften „homogenisiert“. Hierdurch ist es möglich, große Strukturen zu beschreiben und das Verhalten realitätsnah abzubilden. Dennoch kann auch in dieser Kategorie das Verhalten des Betons nicht durch ein einfaches elastisches Materialgesetz abgebildet werden, da beispielsweise in einen Druck- und einen Zugbereich unterschieden werden muss. Es existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Betonformulierungen, die sich zum einen in der Beschreibung des elasto-plastischen Druckbereichs und zum anderen in der Formulierung der Rissbildung stark unterscheiden.

Es wurden in den letzten Jahren eine große Anzahl von Betonmodellen vorgestellt, wobei sich alle in die drei Klassen

- elastische Betonmodelle
- plastische Betonmodelle
- plastische Bruchmodelle

einfügen lassen.

Elastische Modelle basieren auf der Elastizitätstheorie und können entweder lastgeschichtsunabhängig oder -abhängig formuliert werden. Der erste Fall wird hyperelastisches Modell genannt. Hierbei wird einem momentanen Verzerrungszustand ein eindeutiger Spannungszustand zugeordnet. Der zweite Fall umschreibt die so genannten hypoelastischen Modelle, welche inkrementell formuliert sind und somit den Be- und Entlastungspfad richtig simulieren können. Aufgrund der relativ einfachen Modellierung werden diese Modelle von vielen Forschern verwendet.

Die plastischen Betonmodelle haben ihren Ursprung in der Materialmodellierung des Werkstoffs Stahl, bei der die Fließbedingung, bestehend aus einer Verfestigungs- und einer Fließregel, gefunden wird. Die Fließbedingung stellt die Grenze zwischen dem elastischen und plastischen Bereich dar.

Die plastischen Bruchmodelle bilden den Nachbruchbereich des Betons besser ab, da hier direkt die bruchmechanischen Eigenschaften des Werkstoffs Beton eingehen. Sie haben sich in der Vergangenheit daher sehr bei der numerischen Analyse reiner Betonbauteilen bewährt. Die Formulierungen der plastischen Beton- bzw. Bruchmodelle sind in einem dreidimensionalen Kontinuum angesiedelt und ihre Umsetzung ist meist kompliziert und die Anwendung (zurzeit) sehr rechenintensiv.

Die Wahl der Betonmodellierung innerhalb dieser Arbeit fiel vor diesem Hintergrund auf ein elasto-plastisches Modell mit einer Schädigungskomponente, welches sich für die Anwendung bei Schalentragwerken und großen Strukturen gut einsetzen lässt. Zudem wurde hierdurch, wie bereits erwähnt, die Umsetzung der normativen Vorgaben ermöglicht. Dadurch lässt sich die Anpassung der Betonmodellierung auf die Belange des Hochleistungsbetons elegant durchführen. Der gewählte Ansatz nach DARWIN & PECKNOLD wird im folgenden Abschnitt beschrieben und erläutert.

4.2 Betonmodell nach DARWIN & PECKNOLD

Das Materialmodell nach Darwin & Pecknold (1977b) wurde in früheren Arbeiten wie z. B. Kompfner (1983), Elenas (1990) und zuletzt Noh (2002) erfolgreich in FE-Programmcodes implementiert. Im Folgenden sei dieses Verfahren aus Gründen der Vollständigkeit in aller Kürze erläutert und beschrieben.

Es wird von einem inkrementell linear-orthotropen ebenen Spannungszustand des Betons ausgegangen. Die inkrementelle Stoffgleichung für orthotropes Material lautet für orthogonal zueinander stehende Richtungen 1 und 2:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1\nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 \\ \nu_1 E_2 & E_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Unter Berücksichtigung einer äquivalenten Querdehnungszahl $\nu = \sqrt{\nu_1 \cdot \nu_2}$ und der Erweiterung des Werkstoffgesetzes um einen Schubterm, kann die inkrementelle konstitutive Beziehung wie folgt formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2) \cdot G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Da die Hauptspannungsrichtungen in der Regel nicht mit den Richtungen des konvektiven, lokalen Koordinatensystems übereinstimmen, muss die Werkstoffmatrix in Hauptspannungsrichtung transformiert werden. Diese Drehung in Hauptspannungsrichtung wird mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & \sin^2 \Theta & \sin \Theta \cos \Theta \\ \sin^2 \Theta & \cos^2 \Theta & -\sin \Theta \cos \Theta \\ -2 \sin \Theta \cos \Theta & 2 \sin \Theta \cos \Theta & \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

und der Transformationsvorschrift

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} \quad (4.4)$$

durchgeführt.

Das Materialmodell basiert auf der Überlegung, dass jeder zweiachsigel Spannungszustand durch zwei für die Hauptspannungsrichtungen ermittelte, äquivalente Spannungs-Dehnungsbeziehungen abgebildet werden kann. Somit liegen die Werkstoffbeziehungen entkoppelt vor. Dabei wird näherungsweise angenommen, dass der Schubmodul richtungsunabhängig ist.

Diese Richtungsunabhängigkeit wird dadurch erreicht, dass die beiden Schubterme der Gleichungen (4.2) und (4.4) gleichgesetzt und somit der Ausdruck

$$(1 - \nu^2) \cdot G = \frac{1}{4} \left(E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{|E_1 E_2|} \right) \quad (4.5)$$

gefunden wird.

Des Weiteren werden die Tangentialsteifigkeiten und die inkrementellen Spannungen in dem entkoppelten System bestimmt. Dadurch lässt sich die Gleichung (4.2) in folgender Form formulieren:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Durch das Gleichsetzen der Gleichungen (4.2) und (4.6) resultieren nun die inkrementellen, äquivalenten, einachsigen Verzerrungen zu:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu\sqrt{E_2/E_1} \\ \nu\sqrt{E_1/E_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Definiert sind sie ebenfalls durch Umformung der Gleichung (4.6):

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\sigma_1}{E_1} \\ \frac{d\sigma_2}{E_2} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Die gesamten äquivalenten Verzerrungen lassen sich durch Aufsummierung über die Lastinkremente somit zu

$$\varepsilon_{iu} = \sum_k d\varepsilon_{iu} \quad (k = 1, \dots, \text{Lastinkremente}) \quad (4.9)$$

ermitteln. Dieser äquivalente einachsige Verzerrungszustand ist ein fiktiver Zustand und verändert sich während einer Berechnung kontinuierlich. Das hat zur Konsequenz, dass nicht, wie in der Realität, die Deformationsgeschichte einer bestimmten Richtung betrachtet wird, sondern die Belastungsgeschichte verschiedener Hauptspannungsrichtungen akkumuliert wird. Dieser Effekt, der von mehreren Forschern beschrieben wird, wird durch die Definition von 90°-Sektoren abgeschwächt. Verlässt eine Hauptspannungsrichtung durch Drehung diesen Sektor, so werden die Richtungen vertauscht, damit die Belastungsgeschichte die Realität besser abbildet.

Aus den obenstehenden Gleichungen ist zu erkennen, dass hauptsächlich der Einfluss der Schubverzerrung eliminiert wird. Nach der obenstehenden Transformation in den äquivalenten einachsigen Zustand können nun die äquivalenten Spannungs-Dehnungslinien, wie in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 näher erläutert, für beide Richtungen bestimmt werden.

4.3 Einaxialer Spannungszustand

Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen im einachsigen Zustand benötigt. Das Verhalten des Betons ist in der Vergangenheit durch eine Vielzahl von Experimenten bestimmt worden. Um das grundsätzliche Verhalten des Werkstoffs Beton und im Speziellen des Werkstoffs Hochleistungsbeton unter Druckbeanspruchung zu verstehen, eignet sich eine Erläuterung anhand von Bild 4.2. Hierbei ist in hellgrau zum Vergleich das bekannte Verhalten des normalfesten

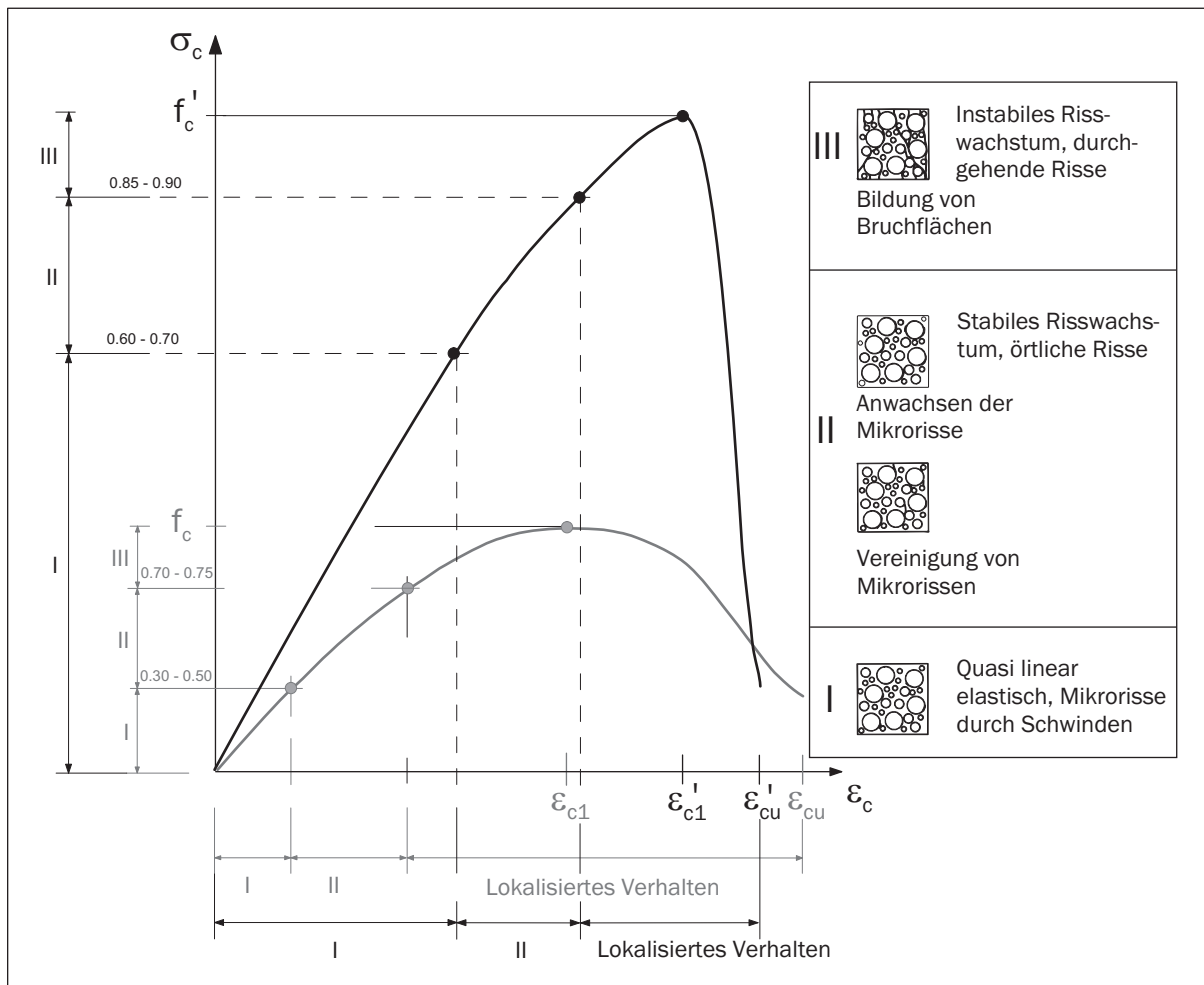


Bild 4.2: Verhalten des Werkstoffs Beton unter Druckbeanspruchung

Betons dargestellt. Im unbelasteten Zustand befinden sich bereits Mikrorisse im Betongefüge, welche im weiteren Verlauf der Belastung stetig ansteigen. Ab einem gewissen Zeitpunkt vereinigen sich diese Mikrorisse zu größeren Makrorissen und schwächen das Betongefüge in zunehmendem Maße. Der Bereich des instabilen Risswachstums beginnt bei Normalbeton ab einer Belastung von ca. 70 % – 90 % der maximalen Druckfestigkeit [Mehlhorn & Kollegger 1995].

Das Verhalten des höherfesten Betons ist aufgrund seines ähnlichen Gefügebau nicht grundsätzlich verschieden, vielmehr unterscheidet es sich im Wesentlichen durch ein Ver-

schieben der jeweiligen Grenzen der für den Normalbeton bereits erläuterten Rissbereiche. Hierbei fällt in erster Linie der über einen weiten Bereich annähernd lineare Verlauf der Spannungs-Dehnungskurve auf. Zum einen ist der Grund in dem weitaus geringeren Auftreten von Mikrorissen im ungerissenen Zustand - resultierend aus dem dichten Gefüge - zu suchen und zum anderen verhindert die höhere Zugfestigkeit - die höhere Bindung der einzelnen Komponenten aneinander - das frühe Vergrößern dieser Mikrorisse [Madi & Slate 1989]. Der Nachbruchast fällt infolge der erhöhten Sprödigkeit des Materials stärker als bei Normalbeton ab.

In den unterschiedlichen Normen finden somit auch, je nach Entstehungszeitraum oder -ort, unterschiedliche Formulierungen des einachsigen Spannungs-Dehnungsverhaltens Einzug. Hierbei unterscheiden sie sich sowohl in der funktionalen Beschreibung der Kurve als auch in dem Gültigkeitsbereich. Eine oft verwendete Formulierung ist die Beschreibung des ansteigenden Astes nach Saenz (1964), welche für Normalbetone im Bereich unterhalb eines C55/67 gilt:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_{iu} E_0}{1 + \left(\frac{E_0}{E_S} - 2 \right) \cdot \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2}. \quad (4.10)$$

Wird hingegen eine normgerechte Betrachtungsweise angestrebt, so existiert als Ausgangsbasis zum einen die europäische Normung und zum anderen die neue deutsche Normung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde aus Gründen der Vollständigkeit auf beide Normen Bezug genommen und die jeweiligen Gesetzmäßigkeiten in den Programmcode implementiert.

4.3.1 Beschreibung nach MODEL CODE 90

In dem CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 wird für alle erfassten Betongüten der ansteigende Ast der Spannungs-Dehnungslinie durch folgenden Zusammenhang vorgegeben:

$$\sigma_i = \frac{\frac{E_0}{E_S} \cdot \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} - \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{E_S} - 2 \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)} \cdot f_{cm} \quad (4.11)$$

mit $E_S = f_{cm}/\varepsilon_{c1}$.

Der abfallende Ast nach Überschreiten der maximalen Druckfestigkeit kann dann durch unterschiedliche Gleichungen abgebildet werden. Bei Anwendung des CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 wird korrespondierend zum Ansatz nach Darwin & Pecknold (1977a) ein linearer Verlauf angesetzt (s. Bild 4.3). Hierbei wird im Hinblick auf die Anwendung von hochfestem Beton, im Gegensatz zum Originalansatz, die maximale Dehnung ε_{cu} variabel angesetzt. Die Geradengleichung

$$\sigma_i = \frac{- \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \cdot 0.8 \right) + (n - 0.2)}{n - 1} \cdot f_{cR} \quad (4.12)$$

beschreibt diesen abfallenden Ast. Der Parameter n wird in Tabelle 4.1 vorgegeben.

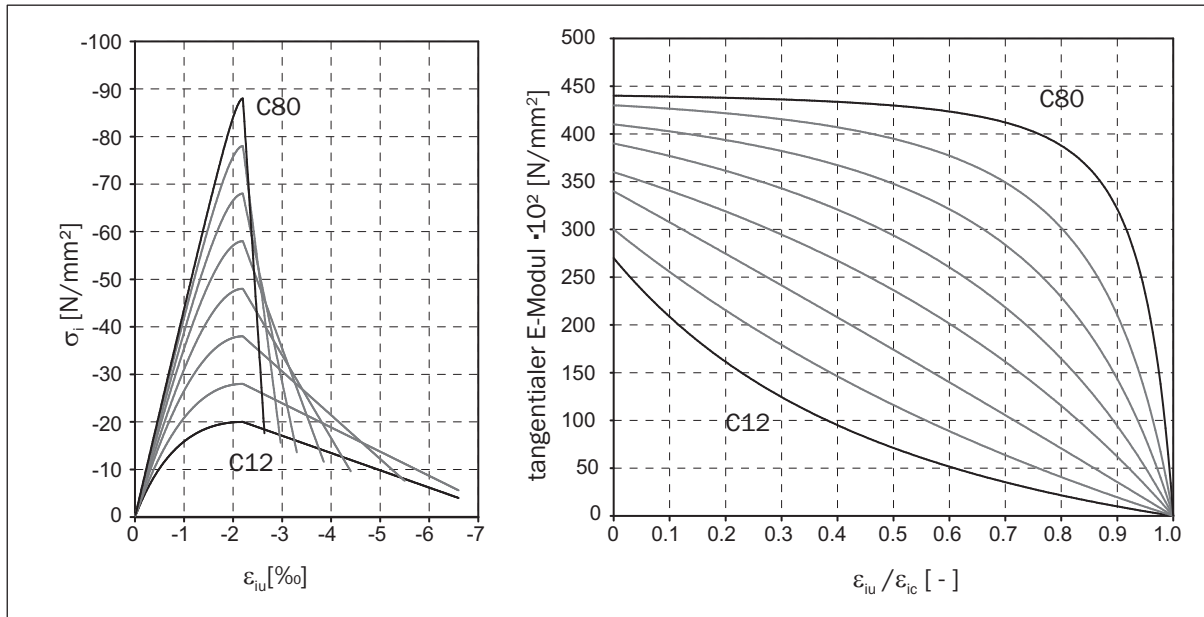


Bild 4.3: Spannungs-Dehnungslinien und Verlauf des tangentialen Elastizitätsmoduls für Betone nach CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203

Festigkeitsklasse	C 20	C 40	C 60	C 80	C 90	C 100
n	3.00	2.00	1.50	1.20	1.01	1.01

Tabelle 4.1: Parameter n für die Anwendung des Betonmodells nach DARWIN & PECK-NOLD

Um die Verwendung aller nach CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 erlaubten Betongüten zu ermöglichen, wurde bezüglich des Elastizitätsmoduls und der Druckfestigkeit eine lineare Interpolation des Faktors n durchgeführt. Die resultierenden Faktoren n_E und $n_{f_{ck}}$ ergeben nach Mittelung den gesuchten Faktor n . Ein Vorschlag zur Erweiterung auf die Festigkeitsklassen C 90 und C 100 ist ebenfalls in Tabelle 4.1 eingeführt.

4.3.2 Beschreibung nach DIN 1045-1

Wird die Analyse in Anlehnung an DIN 1045-1 (2001) durchgeführt, so wird der ansteigende Ast des Diagramms folgendermaßen beschrieben:

$$\sigma_i = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \cdot f_{cR} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \eta &= \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} \\ k &= -1.1 \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_{c1} / f_c. \end{aligned}$$

Als Parameter dieser Kurven wird die äquivalente einachsige Dehnung (ε_{ic}) an der Stelle der maximalen Druckspannung (σ_{ic}) benötigt. Der Wert resultiert aus der Berücksichtigung des biaxialen Versagenskriteriums aus dem biaxialen Spannungszustand. Bild 4.4

zeigt den prinzipiellen Verlauf der erweiterten Spannungs-Dehnungsbeziehung nach DIN 1045-1 (2001). Der ansteigende Ast verläuft vom Nullpunkt bis zum Punkt A der Kurve.

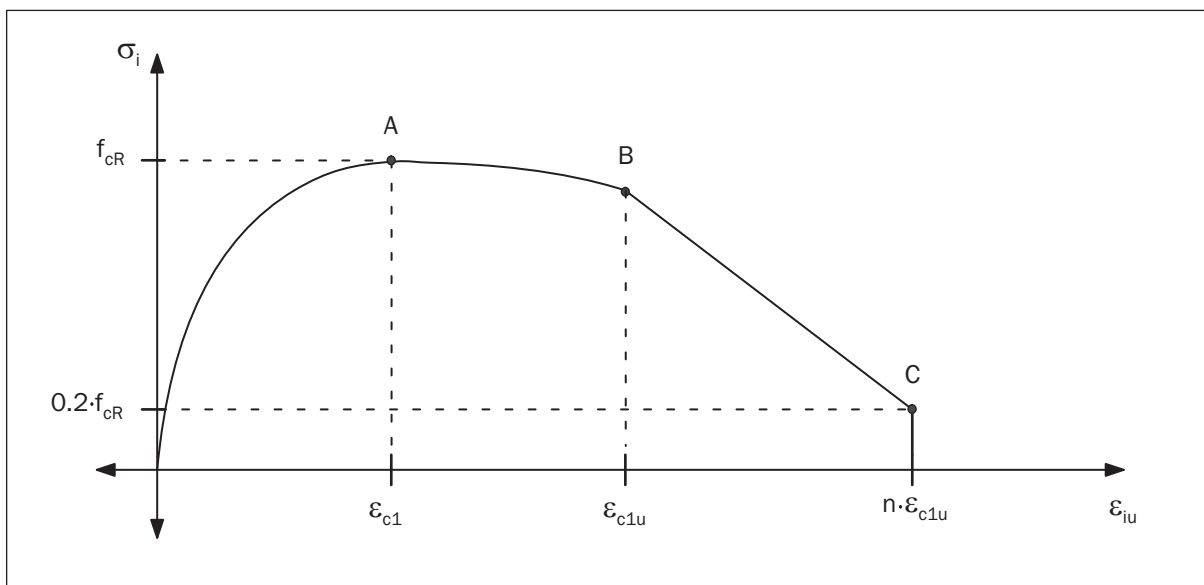


Bild 4.4: Prinzipielle Spannungs-Dehnungslinie für die Anwendung des DARWIN & PECKNOLD-Modells nach DIN 1045-1 (2001)

Der abfallende Ast wird bei Verwendung der Erweiterung noch einmal in zwei Bereiche (Bereich A-B und B-C) unterteilt. Die DIN 1045-1 (2001) sieht nur den Bereich bis zum Erreichen der Betonbruchdehnung ϵ_{cu} (A-B) vor. In diesem Bereich gilt weiterhin Gleichung (4.13). Zur Anpassung an das Konzept nach DARWIN & PECKNOLD wird die maximale Betondehnung (Punkt C) in Anlehnung an die Grenzdehnungen des CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 erhöht und für diesen erweiterten Bereich ebenfalls ein linearer Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie eingeführt. Der komplette Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie für die unterschiedlichen Betongüten ist in Bild 4.5 abgebildet. Tabelle 4.2 können die zugehörigen Parameter entnommen werden. Weitere Parameter finden sich in Tabelle A.5 im Anhang dieser Arbeit. Hierin ist die Abnahme der maximalen Betonbruchdehnung mit wachsender Betonfestigkeit, welche das spröde Verhalten des hochfesten Betons abbilden soll, erkennbar. Desweiteren wird das steifere Verhalten des hochfesten Betons durch den steileren Anstieg der Kurven im Vorbruchbereich deutlich.

Festigkeitsklasse	C 12	C 16	C 20	C 25	C 30	C 35	C 40	C 45	C 50
$0,2 \cdot f_{cR}$	1.73	2.31	2.89	3.61	4.34	5.06	5.78	6.50	7.23
n	1.886	1.886	1.886	1.729	1.571	1.414	1.257	1.179	1.1
	C 55	C 60	C 70	C 80	C 90	C 100			
$0,2 \cdot f_{cR}$	7.87	8.50	9.71	10.87	11.97	13.01			
n	1.051	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0			

Tabelle 4.2: Parameter n für die Anwendung des DARWIN & PECKNOLD Betonmodells in Anlehnung an die DIN 1045-1 (2001)

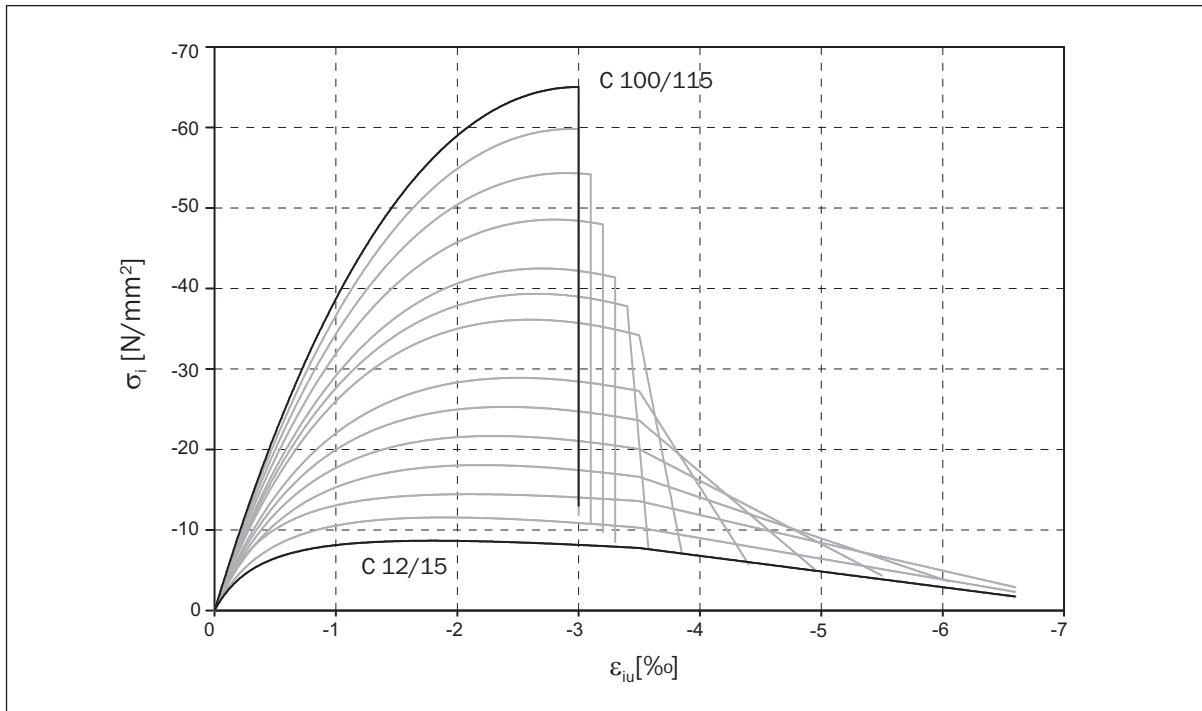


Bild 4.5: Erweiterte Spannungs-Dehnungslinien für Betone nach DIN 1045-1 (2001)

4.4 Biaxiales Versagenskriterium

Grundlage des verwendeten Betonmodells ist die Transformation des zweiachsigen Spannungszustandes in zwei äquivalente einachsige Spannungszustände. Hierfür müssen die äquivalenten Spannungs-Dehnungsdiagramme aufgestellt werden, wozu die maximalen Druckfestigkeiten und zugehörigen Dehnungen benötigt werden. Mit einem vorgegebenen Spannungsverhältnis können mit Hilfe eines biaxialen Versagenskriteriums die benötigten Werte ermittelt werden. Hierzu wird in den meisten Fällen auf das Versagenskriterium nach Kupfer & Gerstle (1973) zurückgegriffen. Ihre Untersuchungen umfassten verschiedene Betonfestigkeiten im Bereich von 19.0 – 62.0 N/mm². Die so gefundenen Versagenskurven zeigen eine Abhängigkeit von der maximalen Festigkeit des Betons. Es werden in Kupfer & Gerstle (1973) einige Approximationen dieser Versuchsergebnisse angegeben, wobei sich die in den Gleichungen (4.14) - (4.18) angegebene durchgesetzt hat.

Für den Druck-Druck-Bereich ist dies:

$$\sigma_{1c} = \alpha \cdot \sigma_{2c} \quad (4.14)$$

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3.65 \cdot \alpha}{[1 + \alpha]^2} f_c \quad (4.15)$$

für den Zug-Druck-Bereich:

$$\sigma_{1t} = \alpha \cdot \sigma_{2c} \quad (4.16)$$

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3.28 \cdot \alpha}{[1 + \alpha]^2} f_c \quad (4.17)$$

und für den Zug-Zug-Bereich:

$$\sigma_{1t} = \sigma_{2t} = \sigma_t. \quad (4.18)$$

Ihre Anwendung für Betone höherer Festigkeit ist hingegen nach jüngeren Forschungsergebnissen nicht zutreffend. In den derzeit gültigen Normen findet sich jedoch keine Vorschrift zur Abbildung des zweiachsialen Betonverhaltens für hochfesten Beton.

Der CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 beschränkt sich auf das Kupfer-Gerstle-Versagenskriterium und auf den Hinweis nach Forschungsbedarf in Bezug auf andere, höherfeste Betone. Die DIN 1045-1 (2001) hingegen behandelt das biaxiale Materialverhalten von Beton nicht und verweist im Kapitel zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung lediglich auf die Verwendung eines „geeigneten“ Stahlbetonmodells.

Hier soll daher die in jüngster Zeit experimentell von Curbach et al. (2000) ermittelte, biaxiale Versagenskurve zur Anwendung kommen. Sie wurde für Probekörper der Festigkeit B85, welche in etwa einem C70/85 entspricht, ermittelt. Mit Gleichung (4.19) kann deren Verlauf anhand der experimentellen Ergebnisse approximiert werden:

$$\frac{\left(\frac{\sigma_1}{f'_c} + \frac{\sigma_2}{f'_c} - 1.310\right)^2}{0.769} + \frac{\left(\frac{\sigma_1}{f'_c} - \frac{\sigma_2}{f'_c}\right)^2}{1.143} = 1.0 \quad (4.19)$$

mit $f'_c = 0.9 \cdot f_{cm}$.

Auch wenn diese Kurve streng genommen nur für den im Experiment verwendeten Beton gilt, so zeigt sie doch das tendenziell andere Verhalten von Betonen höherer Festigkeit. In den Bereichen der unteren Spannungsverhältnisse steigt die Festigkeitssteigerung infolge Querdruck gegenüber normalfesten Betonen an, während sie in den Bereichen der oberen Spannungsverhältnisse unter der Steigerungsrate des normalfesten Betons liegt.

In jüngeren Veröffentlichungen führen Curbach et al. (2002) eine Verallgemeinerung des biaxialen Druckversagens in Abhängigkeit der Festigkeitsklassen ein:

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 - 2c)^2}{2 \cdot a^2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{2 \cdot b^2} = 1 \quad (4.20)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= 1.150 \cdot 10^{-4} \cdot |f'_c|^2 - 2.493 \cdot 10^{-2} \cdot |f'_c| + 1.996 \\ b &= 0.173 \cdot 10^{-4} \cdot |f'_c|^2 - 0.259 \cdot 10^{-2} \cdot |f'_c| + 0.810 \\ c &= -1.169 \cdot 10^{-4} \cdot |f'_c|^2 + 2.007 \cdot 10^{-2} \cdot |f'_c| - 0.239 \\ f'_c &= 0.9 \cdot f_{cm}. \end{aligned}$$

Diese allgemeinen Formulierungen (4.20) ergeben für den einachsialen Spannungsfall nicht exakt die einachsiale Festigkeit, wodurch auf eine zu grobe Näherung der empirischen Vorfaktoren geschlossen werden kann. Aus diesem Grund wird das Versagenskriterium nach Curbach et al. (2000) für die Analyse von Betonen der Güte C55/67 und höher angewendet. Die Umsetzung der biaxialen Versagenskurven ist im Rahmen des Beispiels in Abschnitt 4.11.2 überprüft worden. An dieser Stelle befindet sich auch eine grafische Darstellung (Bild 4.17) der Bruchkurven.

Für den Zug-Druck-Bereich hingegen wird von vielen Forschern auf die Ähnlichkeit von Hochleistungsbeton zu Normalbeton hingewiesen. Es gibt jedoch auch hier Untersuchungen, welche ein leicht ungünstigeres Verhalten von hochfestem Beton aufzeigen. Zwar findet sich in Richter (1999) hierzu eine Kurve zu durchgeführten Experimenten, doch wird aufgrund von zu wenigen vorliegenden Ergebnissen im Folgenden von einem gegenüber normalfestem Beton unveränderten Verhalten ausgegangen.

Im Zug-Zug-Bereich ist auch bei hochfesten Betonsorten nach wie vor Gleichung (4.18) gültig.

4.5 Rissverhalten

Der Werkstoff Beton reißt mit Überschreiten der Zugfestigkeit auf, wobei sich innerhalb eines Körpers ein Rissband einstellt. Zur Modellierung dieses Verhaltens innerhalb eines Werkstoffgesetzes existieren unterschiedliche Ansätze, die von ihrer Güte her stark variieren. Bei einem Schalentragwerk, welches im Wesentlichen in zwei Richtungen Belastungen erfährt, kann sich neben einem ersten Riss ein zweiter Riss in anderer Richtung ausbilden. Dieses Verhalten wird durch zwei orthogonal zueinander entstehende Risse abgebildet.

In dieser Arbeit wurde ein Rissmodell gewählt, welches ein Rotieren, also eine Veränderung der Rissrichtung in jedem Lastschritt in Hauptdehnungsrichtung, erlaubt. Ein Riss öffnet sich zuerst senkrecht zu der stärker beanspruchten Hauptspannungsrichtung, wobei damit für die weitere Berechnung die Querkontraktion zu Null gesetzt wird. Gleichzeitig fällt die Steifigkeit dieser Betonschicht zu Null ab - das Nachrissverhalten des Betons wird über die modifizierte Stahlkennlinie berücksichtigt. Bei wechselnder Belastungsrichtung, aber auch bereits durch die Umlagerung der Spannungen im System bei monotoner Belastung, kann sich zum einen die Rissrichtung ändern und zum anderen dieser Riss wieder schließen. Diese Risschließung erfolgt über eine Lokalkontaktformulierung, da die Rissränder Verzahnungen aufweisen, die ein exaktes Schließen des Risses verhindern [Noh 2002].

4.6 Weitere festigkeitsabhängige Betoneigenschaften

Neben der ein- und zwei axialen Druckfestigkeit sind für den Verlauf der nichtlinearen Analyse die Parameter Elastizitätsmodul, zentrische Zugfestigkeit und Querdehnung des Betons von entscheidender Bedeutung.

Elastizitätsmodul. Der Elastizitätsmodul kann nach DIN 1045-1 (2001) aus der Druckfestigkeit zu

$$E_{cm} = 9.5 \cdot (f_{ck} + 8.0)^{1/3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (4.21)$$

abgeleitet werden.

Gleichung (4.21) zeigt, dass der Elastizitätsmodul bei den höherfesten Betonen langsamer ansteigt, da mit zunehmender Festigkeit der Einfluss des Elastizitätsmoduls des Zuschlagstoffs auf den Gesamt-Elastizitätsmodul anwächst und dieser bei den unterschiedlichen Betongütern unverändert bleibt.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass auch der Wert des Elastizitätsmoduls keinesfalls eine feststehende Größe ist. Zum einen ist er innerhalb des Bauteils nicht konstant, wengleich er auch nicht in solchem Maße schwankt wie die Zugfestigkeit, und zum anderen ist der analytische Wert, welcher in den Normen und Vorschriften angeführt wird, nur als ein Richtwert zu verstehen. Vielmehr zeigen verschiedene Untersuchungen, wie beispielsweise von Schäper (2002), dass der Wert von mehr Parametern abhängig ist als nur von der Druckfestigkeit. Allerdings kommen diese Untersuchungen auch zu dem Schluss, dass eine genauere Bestimmung des tatsächlich vorhandenen Elastizitätsmoduls zurzeit nur durch eine Vorabuntersuchung des zu verwendenden Betons möglich ist. Daher wird im weiteren Verlauf ausschließlich mit den normativen Werten des Elastizitätsmoduls gearbeitet, wengleich auch dieser Aspekt bei der Bewertung der Ergebnisse nicht in Vergessenheit geraten sollte.

Zugfestigkeit. Die zentrische Zugfestigkeit des Werkstoffs Beton ist eine versuchstechnisch schwierig zu bestimmende Größe. Daher stehen zur Bestimmung der zentrischen Zugfestigkeit Ersatz-Versuchsanordnungen zur Verfügung, die es erlauben, die zentrische Zugfestigkeit über die Biegezugfestigkeit oder die Spaltzugfestigkeit zu ermitteln.

Der Zusammenhang zwischen diesen Größen beruht auf statistischen Erkenntnissen und kann daher nur eine Näherung der tatsächlich vorhandenen Größe darstellen. Daher ist, im Besonderen bei von der Norm stark abweichenden Betonrezepturen, diese Einflussgröße vorab zu bestimmen. Im Folgenden sind die normativen Regelungen angegeben, die dem planenden Ingenieur eine gute Grundlage für die Größe dieses Materialkennwertes geben.

Der Mittelwert kann bis einschließlich der Festigkeitsklasse C 50/60 aus der charakteristischen Druckfestigkeit zu

$$f_{ctm} = 0.30 \cdot f_{ck}^{2/3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (4.22)$$

ermittelt werden. Dieser Zusammenhang ist identisch zur Ermittlung nach DIN 1045 (1988) für die herkömmlichen Betonfestigkeitsklassen.

Bei den Festigkeiten ab einem C 55/67 wird die mittlere Zugfestigkeit hingegen nach der Gleichung

$$f_{ctm} = 2.12 \cdot \ln \left(1 + \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right) \right) \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (4.23)$$

bestimmt.

Die Zugfestigkeit steigt mit wachsender Druckfestigkeit nur noch unterproportional an. Dieses Verhalten ist anschaulich durch die Zusammensetzung des Betonquerschnitts zu erklären. Im Bereich der unteren Festigkeitsklassen bestimmt der Verbund zwischen Zementmatrix und Zuschlagskörnern und die Zugfestigkeit des Werkstoffs Zement die Größe

der Zugfestigkeit. Die Steigerung der Druckfestigkeit wird in hohem Maße durch die Steigerung des Verbundes zwischen Matrix und Zuschlag erreicht. Dadurch steigt die Zugfestigkeit kontinuierlich an.

In Bild 4.6 ist ein typisches Zugversagen eines geritzten Zugprobekörpers dargestellt. Der typische Lastabfall wird bei Rissinitiierung in Punkt A erkennbar. Der Riss pflanzt sich bei abnehmender Last immer weiter durch den Querschnitt bis zu dem Punkt F, in dem der Gesamtquerschnitt versagt, hindurch.

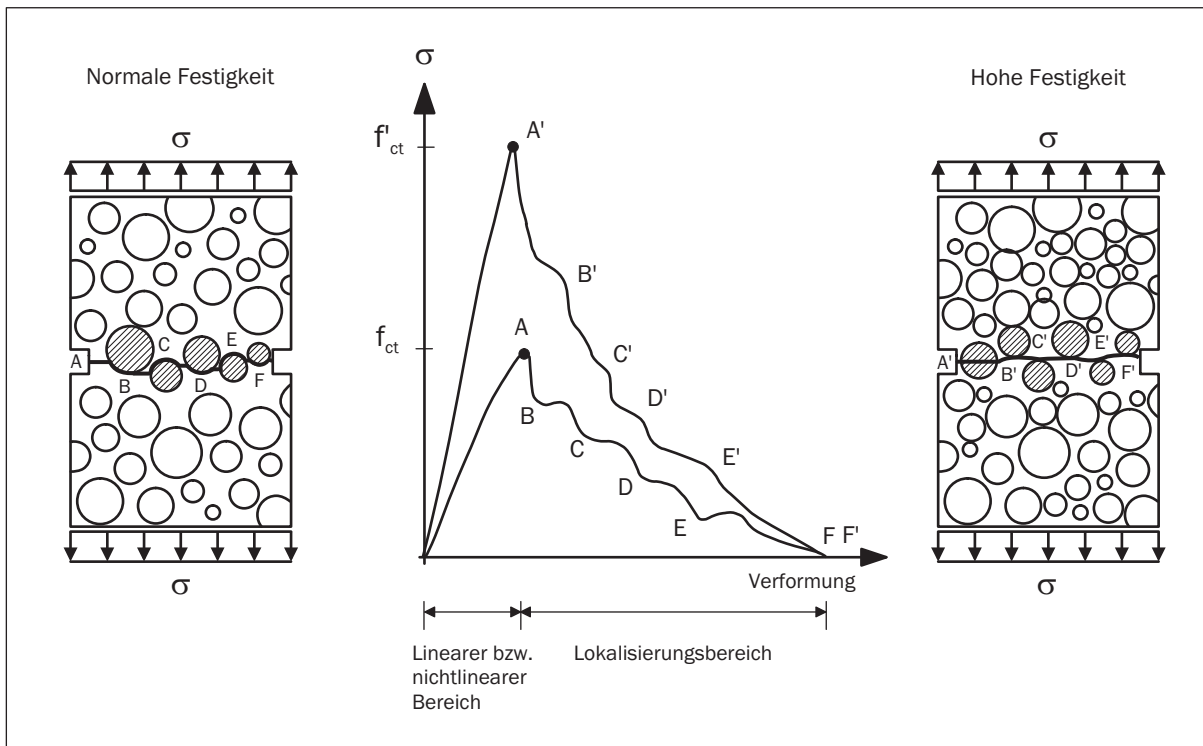


Bild 4.6: Typisches Last-Verformungsdiagramm eines geritzten Zugprobekörpers

Bei den höherfesten Betonen verändert sich dieser Zusammenhang insofern, dass nun neben der Güte des Verbundes die Zugfestigkeit des Zuschlags einen erhöhten Einfluss erfährt. Der Betonquerschnitt versagt aufgrund des hohen Verbundes zwischen Matrix und Zuschlag nicht mehr sukzessive um die einzelnen Zuschlagskörner herum, sondern spaltet die einzelnen Körner. Hierdurch ist zum einen der geringere Anstieg der Zugfestigkeit in den höherfesten Betonklassen und zum anderen der stärkere Lastabfall nach Erreichen der Zugfestigkeit zu erklären.

In Abschnitt 4.10 wird zusätzlich die Tatsache behandelt, dass die Zugfestigkeit, wie viele Materialkennwerte bei Beton, keine feste Größe darstellt, sondern eine zufallsbehaftete Größe ist.

Querdehnungszahl. Zu der Bestimmung der Querdehnung für höherfesten Beton wurden beispielsweise von Persson (1995) Versuchsreihen durchgeführt. Dort wurde für hochfesten Beton eine leicht geringere Querdehnung festgestellt. Diese Differenz ist in starkem

Maße abhängig von den verwendeten Zuschlagstoffen und der übrigen Betonzusammensetzung. Daher wird im Allgemeinen für alle Betongüten ein mittlerer Wert von $\nu = 0.2$ angenommen. Der überproportionale Anstieg der Querdehnung ab einer Längsdehnung des Betons von ca. 70 %, u. a. aufgezeigt von Seelmann (1997), wird im einaxialen Druck- und im Zug-Druckbereich mittels der Gleichung

$$\nu = 0.2 + 0.6 \cdot \left(\frac{\sigma_2}{f'_c} \right)^4 + 0.4 \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1t}} \right)^4 \leq 0.99 \quad (4.24)$$

nach Darwin & Pecknold (1977b) berücksichtigt.

4.7 Materialmodell für Betonstahl

Das Werkstoffmodell zur Beschreibung des Materials Stahl ist ein einaxiales, bilineares Materialgesetz.

Der Stahl behält zunächst bis zum Erreichen der Fließspannung ein rein elastisches Materialverhalten. Nach Überschreiten dieser gütespezifischen Grenze gelangt der Stahl in den Fließbereich, in welchem unter starker Zunahme der Dehnung nur noch ein leichter Zuwachs der Spannungen zu verzeichnen ist. Die Entlastung aus diesem Bereich erfolgt hingegen rein elastisch. Es kann aber bis zum Erreichen der maximal aufnehmbaren Druckspannung nur eine Dehnung mit dem Betrag der zweifachen Fließdehnungsgrenze abgebaut werden. Das bedeutet, dass nach einer Zugbeanspruchung über die Fließdehnungsgrenze hinaus die Stauchungsgrenze zu einem früheren Zeitpunkt als bei einem vorher unbelasteten Stahl erreicht wird.

Dieses Verhalten, der so genannte Bauschinger-Effekt, ist in der Vergangenheit durch zahlreiche Versuche am Betonstahl beobachtet worden. Ein Materialmodell, welches dieses Verhalten beschreibt, ist das kinematische Verfestigungsmodell nach PRAGER [Reckling 1967]. Dieses findet im vorliegenden Rechenmodell Verwendung (s. Bild 4.7).

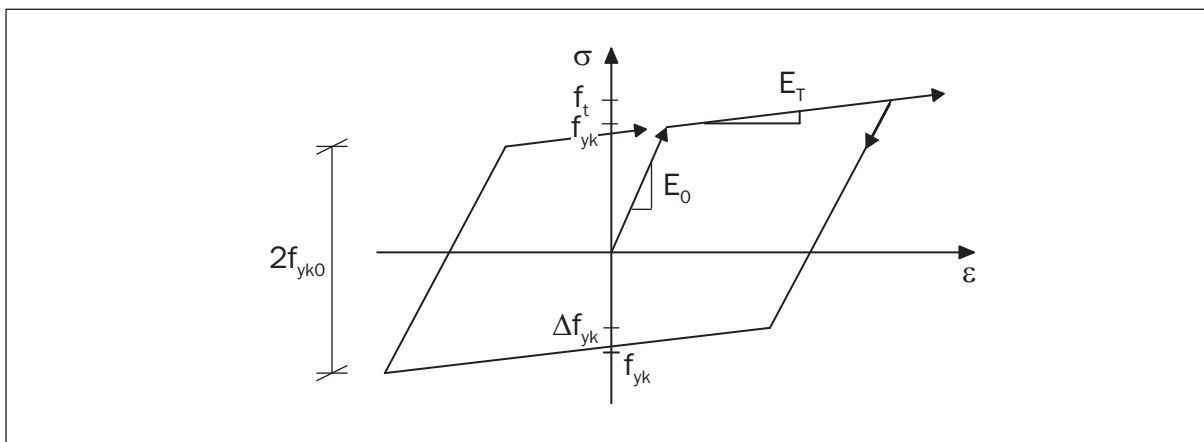


Bild 4.7: Kinematisches Verfestigungsmodell nach PRAGER

4.8 Tension-Stiffening bei hochfesten Betonen

4.8.1 Allgemeines

Das Mitwirken des Betons zwischen den einzelnen Rissen kann bei einem Konzept der verschmierten Risse nur durch ein darauf abgestimmtes Tension-Stiffening Konzept abgebildet werden. Wenn auch dieser Effekt für die Endtraglast eines Tragwerks, solange es nicht durch große Verformungszunahme versagt, nicht entscheidend ist, so ist die möglichst realistische Abbildung dieses Effektes Garant für eine realistische Tragwerksantwort. Mittels eines einfachen Stabmodells kann der Verbundmechanismus zwischen Beton und Stahl aufgezeigt werden.

Bild 4.8 zeigt ein differentielles Stabelement an dem die Gleichgewichts- und die Kontinuitätsbedingungen aufgestellt werden können. Die Stahl- und Betonspannung ermittelt sich zu

$$d\sigma_s(x) = \tau_b(x, s) \frac{U_s}{A_s} dx \quad (4.25)$$

$$d\sigma_c(x) = -\tau_b(x, s) \frac{U_s}{A_c} dx. \quad (4.26)$$

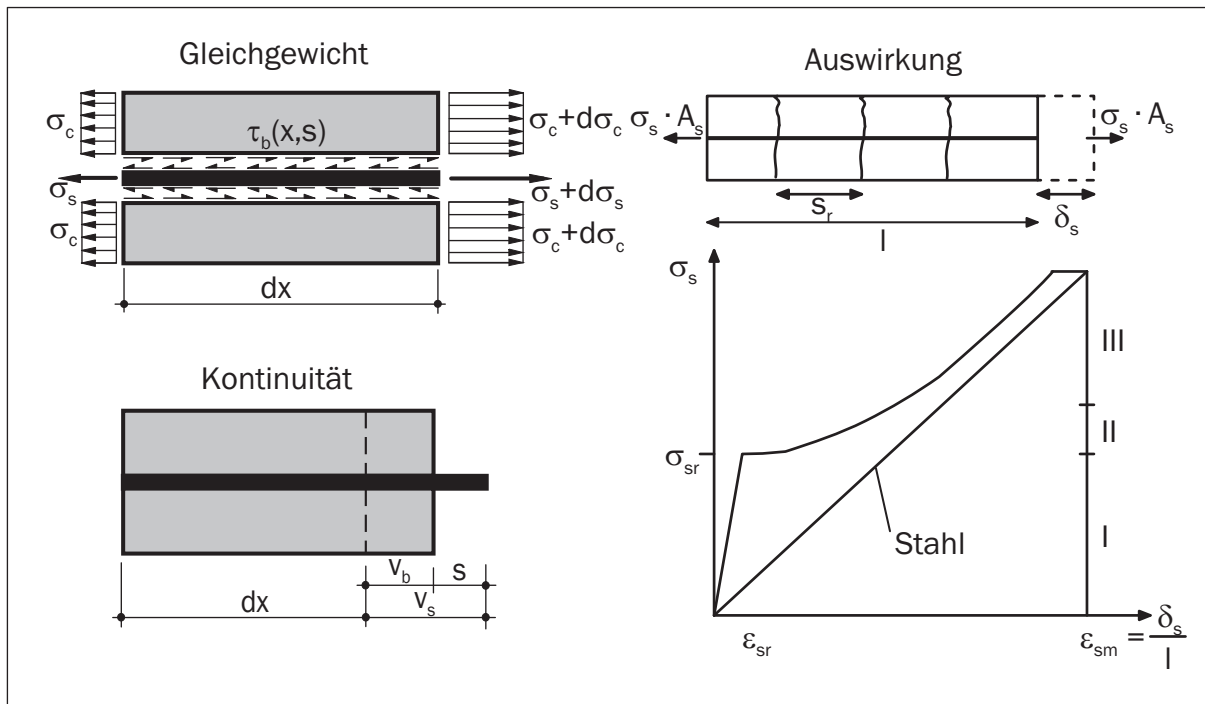


Bild 4.8: Verbund von Stahlbeton an einem Stabmodell

Die Kontinuitätsbedingung gibt die Relativverschiebung (Schlupf) zwischen dem Stahl und dem Beton an:

$$s(x) = v_s(x) - v_c(x). \quad (4.27)$$

4.8.2 Ein vereinfachtes Verfahren zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons

Um das komplizierte Tension-Stiffening Verhalten von Stahlbeton möglichst einfach abzubilden, wurde im Rahmen dieser Arbeit für den hochfesten Beton das Konzept nach Tue (1993) und König et al. (2001) implementiert, welches die Erweiterung des Verbundgesetzes nach Bergner (1997) beinhaltet.

Befindet sich der betrachtete Querschnitt im Einzelrisszustand, so berechnet sich die in den Beton übergehende Verbundkraft zu

$$T_{um} = \tau_{sm} \cdot U_s \cdot \frac{s_r}{2} = \frac{P}{1 + \alpha_e \cdot \rho}. \quad (4.28)$$

Im abgeschlossenen Rissbild wird die Verbundkraft mit Hilfe einer parabolischen Annäherung der Stahlspannung zwischen den Rissen zu

$$T_{um} = A_{c,eff} \cdot f_{ct,fl} \cdot \left[r \cdot \frac{k_1 - 0.33(3r - r^2)}{k_1 - 0.67} \right]^{n_s} \cdot r \quad (4.29)$$

ermittelt. Somit kann die Erhöhung der Steifigkeit durch das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen direkt mit

$$\Delta \varepsilon = \alpha \cdot \frac{T_{um}}{A_s \cdot E_s} \quad (4.30)$$

zu

$$\frac{\Delta E}{E_s} = \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_s^{II} - \Delta \varepsilon} \quad (4.31)$$

bestimmt werden.

Das umgesetzte Verfahren hat zwei Nachteile, die ebenfalls für ähnliche Verfahren gelten [Zahlten 1990], [Gruber 1994]. Diese Nachteile zeigen sich bei einer nichtlinearen Analyse in Form von schlechtem Konvergenzverhalten und bei der gleichzeitigen Verwendung eines Bogenlängenverfahrens durch einen möglichen Lastabfall im Bereich nach der Rissinitiation.

Das schlechte Konvergenzverhalten rührt von der Tatsache her, dass bei „einfachen“ Tension-Stiffening Verfahren zur Bestimmung des Effekts der Sekanten-Elastizitätsmodul E_S verwendet wird. Hierbei muss in jedem Iterationsschritt der Einfluss neu bestimmt werden, und somit schwanken die Steifigkeitsverteilung im Tragwerk und ebenfalls die Ungleichgewichtskräfte mitunter innerhalb des Iterationsvorgangs stark.

Der beobachtete Lastabfall bei kombinierter Verwendung eines Bogenlängenverfahrens betrifft in erster Linie Tragwerke, bei denen die Art der Belastung eine starke Veränderung der Steifigkeitsverteilung in lokalen Bereichen verursacht. Dieses beobachtete Verhalten kann nicht auf alle Tragwerkstypen übertragen werden. Nach Überschreiten der Rissinitiation kann auch mit diesen einfachen Tension-Stiffening Modellierungen eine gute Abbildung des Gesamttragverhaltens der Struktur erreicht werden.

4.8.3 Ein detailliertes Verfahren zur Berücksichtigung der Mitwirkung von Beton

Im Gegensatz zu einfachen Verfahren bieten kompliziertere Verbundmodelle die Möglichkeit den Versteifungseffekt genauer und variabler zu berücksichtigen. In der Vergangenheit wurden zahlreiche detaillierte Konzepte zur Beschreibung des Verbundes zwischen Stahl und Beton entwickelt.

Im Folgenden wird auf das für die Anwendung bei finiten Flächenelementen von Noh (2002) entwickelte Verfahren zurückgegriffen. Weitergehend wurden hierin Ergänzungen eingearbeitet, welche für die Berücksichtigung der veränderten Eigenschaften von Hochleistungsbeton nötig erscheinen. Das Konzept nach Noh (2002) beinhaltet an zwei unterschiedlichen Stellen die Berücksichtigung einer Normalverteilung der Zugfestigkeit. Eine zusätzliche Einführung einer normalverteilten Zugfestigkeit über das diskretisierte Elementnetz, wie in Abschnitt 4.10 gezeigt, erscheint im ersten Moment falsch, korrigiert sich aber bei Betrachtung des verschmierten Risskonzeptes innerhalb der FEM selbstständig. Die über das Elementnetz gelegte normalverteilte Zugfestigkeit gibt lediglich die Zugfestigkeit im jeweilig betrachteten Materialpunkt an und bestimmt somit den Zeitpunkt der Rissinitiierung. Die Zugfestigkeitsverteilung innerhalb des „Einzugsbereichs“ des Materialpunktes findet indes im Rahmen des Tension-Stiffening Konzeptes mit Hilfe der Abhängigkeit zwischen Zugfestigkeit und Rissabstand nach Schwennicke (1983) Berücksichtigung. Weitergehendes wird in Abschnitt 4.10 beschrieben.

Das Tension-Stiffening Konzept basiert auf einem iterativen Algorithmus nach Tassios & Yannopolous (1981) und Eligehausen et al. (1983). Hierbei wird die differentielle Verbundgleichung durch eine numerische Integration innerhalb einer Iterationsvorschrift gelöst. Hierzu wird die Implementierung eines Verbundgesetzes zwischen Beton und Stahl notwendig.

Der Verbund zwischen Beton und Stahl hängt von vielen unterschiedlichen Parametern ab. Beispielsweise sind für seine Größe und Ausbildung der Stabdurchmesser, die Betondeckung, der Abstand der Bewehrung von der Betonieröffnung und der Grad der Umschnürung von entscheidender Bedeutung. Die Lage des Betonstahls innerhalb des Bauteils wird in den Normen CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 und DIN 1045-1 (2001) durch die Bereiche des guten und mäßigen Verbundes festgelegt. Die Definition entspricht im Wesentlichen der des Verbundbereichs I und II der DIN 1045 (1988).

An dieser Stelle sollen kurz einige Gesetze zur Beschreibung dieses Verbundes vorgestellt werden. Um die Möglichkeit eines Vergleichs zu gewährleisten, werden hier die Gesetze für nicht umschnürten Beton mit Betonstahl im guten Verbundbereich verglichen. Durch den Vergleich wird deutlich, welches Gesetz für das in dieser Arbeit angestrebte Ziel am geeignetsten erscheint.

Den meisten Verbundgesetzen liegt zur Beschreibung des Verlaufs des ansteigenden Astes eine Exponentialfunktion der Form

$$\tau(s) = a \cdot \tau_{max} \cdot s^\alpha \quad (4.32)$$

zugrunde.

Sie unterscheidet sich lediglich in der Präzision der Beschreibung der Parameter a und α und der Bestimmung von τ_{max} . Die einfachsten Ansätze finden sich in den entsprechenden Normtexten, da diese einen möglichst weiten Gültigkeitsbereich erfassen müssen, ohne die Anwendung durch zu komplexe Zusammenhänge zu behindern. Das CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 beispielsweise beschreibt den Verbund durch ein Gesetz der Form

$$\begin{aligned}
 \tau(s) &= \tau_{max} \cdot \left(\frac{s}{s_1}\right)^\alpha & 0 \leq s \leq s_1 \\
 \tau(s) &= \tau_{max} & s_1 < s \leq s_2 \\
 \tau(s) &= \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2}\right) & s_2 < s \leq s_3 \\
 \tau(s) &= \tau_f & s_3 < s.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Hierbei sind $s_1 = 0.6$, $\alpha = 0.4$ und $\tau_{max} = 2.0 \cdot \sqrt{f_{ck}}$ anzusetzen. Diese Verbundgesetze wurden in Experimenten mit normalfesten Betonen aufgestellt.

Mit Aufkommen des Werkstoffs Hochleistungsbeton wurden bzw. werden in jüngster Zeit zahlreiche Experimente zu seinem Verbundverhalten durchgeführt. Gattesco & Bernardi (2002) beispielsweise verwenden diesen Ansatz für Hochleistungsbeton in ihrer Arbeit über den Einfluss der Haltbarkeit von Beton in Bezug auf Chlorid-Angriff auf die Momentenumlagerung, obwohl die Erweiterung für Hochleistungsbeton des MODEL CODE 90, das CEB/FIP Bulletin D'Information No. 228, auf die Notwendigkeit einer Anpassung der Parameter hinweist.

Die Experimente mit Hochleistungsbetonen dienen der Frage, inwiefern sich das Verbundverhalten mit wachsender Festigkeit und durch die veränderte Zusammensetzung des Betons verändert. Hierbei sind im Wesentlichen die Arbeiten von Tue (1993) und Kurz (1997) zu nennen. Als wesentliche Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich die im Folgenden aufgeführten Punkte nennen.

Kurz (1997) zeigt mit Hilfe der durchgeführten Experimente, dass die maximale Verbundspannung mit wachsender Betonfestigkeit ansteigt, aber ansonsten das Verbundverhalten sich sehr ähnlich zu dem des Normalbetons verhält. Jedoch ist bei der Anwendung von Hochleistungsbeton zu beachten, dass der Anstieg der Zugfestigkeit unterproportional zu dem der Druckfestigkeit ist, so dass ein durch das Versagen des Zugrings initiiertes Versagen des Verbundes vermieden werden muss.

Dieser Gefahr tragen auch König et al. (2001) in ihrem Modellvorschlag zur Erweiterung der normativen Verbundgesetze Rechnung, indem sie die maximal anzusetzende Betonfestigkeitsklasse auf einen B 85 (C 70/85) begrenzen. Kann die Gefahr von Längsrissen vermieden werden, so steigt die Verbundspannung in starkem Maße an, da in einem solchen Fall die hohe Druckfestigkeit dominiert. Dieses günstige Verbundverhalten kann aber nur durch die konstruktive Ausführung mit ausreichender Betondeckung gewährleistet werden.

Bei Hochleistungsbeton wird dabei der Großteil der Verbundkraft durch den sich bildenden Druck an der ersten Stahlrippe hinter dem Riss übertragen. Diese nahezu punktuelle Kraftübertragung ist ein weiterer Nachteil, da hierdurch die Verformungsfähigkeit des Bauteils in starkem Maße sinkt.

In diesem Zusammenhang ist auf eine interessante Neuentwicklung der Baustahlindustrie hinzuweisen, dem tiefgerippten Betonstahl. Forschungsergebnisse von Tue & Krumbach (1998) zeigen, dass durch die veränderte Rippengeometrie die Gefahr der Längsrissbildung verringert und die Duktilität des Werkstoffs erhöht werden kann.

Das Verbundgesetz nach Tue (1993) beschreibt den Zusammenhang durch

$$\tau(s) = 0.29 \cdot f_{ck,cube} \cdot s^{0.3}, \quad (4.34)$$

wobei darauf hingewiesen sei, dass die Ortsabhängigkeit des Verbundes, im Rahmen dieser Arbeit durch das Modell nach Kreller (1990) beschrieben, vernachlässigt wurde. Dieses Verbundgesetz wurde nach Experimenten in einer Entfernung von 40 mm vom Riss ermittelt. Mit Grundlage dieses Gesetzes wurde von König et al. (2001) ein Vorschlag zur Erweiterung des Gesetzes für Hochleistungsbetone gemacht:

$$\tau(s) = c_0 \cdot f_{cm} \cdot s^n. \quad (4.35)$$

Gleichung (4.35) beschreibt das Verbundverhalten höherer Betonfestigkeiten realistischer. Die dazu benötigten Parameter sind in Tabelle 4.3 angegeben.

Bei steigendem Feinkorngehalt und steigender Fließfähigkeit des Betons verringert sich die Verbundwirkung. Eine Erhöhung der Betonfestigkeit hat zur Folge, dass die plastischen Zonen im Rippenbereich geringer werden, so dass dadurch der Verbund steifer wird. Des Weiteren hat die Erhöhung des Elastizitätsmoduls zur Folge, dass der Schlupf geringer wird. Bei der Beschreibung des Verhaltens durch ein Gesetz nach Gleichung (4.32) verringert sich der Parameter α mit wachsender Druckfestigkeit des Betons.

Ein weiteres Verbundgesetz für monotone Belastungen ist das ortsabhängige Gesetz nach Kreller (1990), welches die Frage nach der Länge des verbundfreien Bereichs wegfällen lässt. Der Verbund wird für Normalbeton auf den Bereich

$$0 \leq x \leq 6.0 \cdot d_s \quad (4.36)$$

vom Rissufer definiert. Der Charakter des Gesetzes ist identisch zu Gleichung (4.33). Der Unterschied besteht darin, dass abhängig von der Entfernung vom Rissufer, der Maximalwert und die Grenzen $s_1 - s_3$ des Verlaufs veränderlich sind. Dieses lässt eine detailliertere Betrachtung des Verbundes zu. Das Verbundgesetz wird in sechs unterschiedlichen Kurven definiert, dessen Parameter der Tabelle 4.4 entnommen werden können.

Ein Vergleich der oben vorgestellten unterschiedlichen Verbundgesetze und weitere nach Noakowski (1988) und König et al. (1994) sind in Bild 4.9 in ihrer vorliegenden Formulierung exemplarisch für einen C 70/85 dargestellt. Die Anwendung der für den Normalbeton hergeleiteten Verbundgesetze zeigt, dass alle in der selben Größenordnung liegen, wobei

	$\leq C 30/37$	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60	C 55/67	C 60/75	$\geq C 70/85$
c_0	0.31	0.29	0.27	0.25	0.23	0.21	0.19	0.17
n	0.30	0.28	0.28	0.26	0.26	0.24	0.22	0.20

Tabelle 4.3: Parameter zum Verbundgesetz nach König et al. (2001)

Verbund- gesetz Nr.	Verbundbereich nach DIN 1045 (1988) bzw. DIN 1045-1 (2001)							
	I bzw. gut				II bzw. mäßig			
	$s_1[mm]$	$s_2[mm]$	$s_3[mm]$	τ_f/τ_{max}	$s_1[mm]$	$s_2[mm]$	$s_3[mm]$	τ_f/τ_{max}
1	s_1^1	s_1^1	0.05	0.001	s_1^1	s_1^1	0.05	0.001
2	s_1^2	s_1^2	0.15	0.025	s_1^2	s_1^2	0.30	0.025
3	s_1^3	s_1^3	0.30	0.050	s_1^3	s_1^3	0.60	0.050
4	s_1^4	$s_1^4 + 0.1$	0.55	0.150	s_1^4	$s_1^4 + 0.2$	1.45	0.150
5	s_1^5	$s_1^5 + 0.1$	0.55	0.150	s_1^5	$s_1^5 + 0.2$	1.95	0.150
6	0.25	0.35	1.0	0.150	0.40	0.60	2.5	0.150
nach Kreller (1990):								
$\tau_{max} = a \cdot \sqrt{f_{ck}}, a = 0.36 \cdot c/d_s + 1.28, \alpha = 0.003f_{ck} + 0.1625$								
angepasst für Hochleistungsbeton nach König et al. (2001):								
$\tau_{max} = c_0 \cdot f_{cm} \cdot 0.6^n, c_0$ und n nach Tabelle 4.3								
allgemein gültig:								
$\tau_{max}^i = i/6 \cdot \tau_{max} \geq 0.5 \cdot \tau_{max}, s_1^i = \left(\frac{\tau_{max}^i}{\tau_{max}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot s_1^6, i = 1 \dots 5$								

Tabelle 4.4: Verbundgesetz nach Kreller (1990) und Erweiterung für Hochleistungsbeton nach König et al. (2001)

anzumerken ist, dass die Gesetze nach Noakowski (1988), Tue (1993) und König et al. (2001) nur für den geringen Schlupfbereich ($s \leq 0.6$) gelten können. Eine Detaildarstellung des Bereichs findet sich im Anhang A.2 dieser Arbeit. Zur Beschreibung eines möglichst großen Schlupfbereiches wird innerhalb dieser Arbeit das Verbundgesetz von König et al. (2001) in das Konzept von Kreller (1990) integriert. Dieses Vorgehen verspricht innerhalb der Werkstoffmodellierung eine gute Beschreibung des Verbundes von Hochleistungsbeton. Auch lässt es sich leicht veränderten Eingangswerten der Betoneigenschaften anpassen. Hierzu wird mit $s_1 = 0.6$, in Anlehnung an die Regelungen des CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203, die maximale Verbundspannung zu

$$\tau_{max} = c_0 \cdot f_{cm} \cdot 0.6^n \quad (4.37)$$

ermittelt. So können die Gleichungen (4.33) auch für den Hochleistungsbeton angewandt werden. In Bild 4.10 ist der Verlauf der so bestimmten Spannungs-Schlupfbeziehung dargestellt.

Die Normen DIN 1045 (1988) und DIN 1045-1 (2001) beinhalten lediglich die Werte der Verbundspannung zul. τ_1 bzw. f_{bd} , welche für die Berechnung von Verankerungslängen zu verwenden sind. Bei der Bestimmung der Schnittgrößen mit Hilfe des nichtlinearen Vorgehens verweist die DIN 1045-1 (2001) auf das DAfStb-Heft 525, welches aufgrund

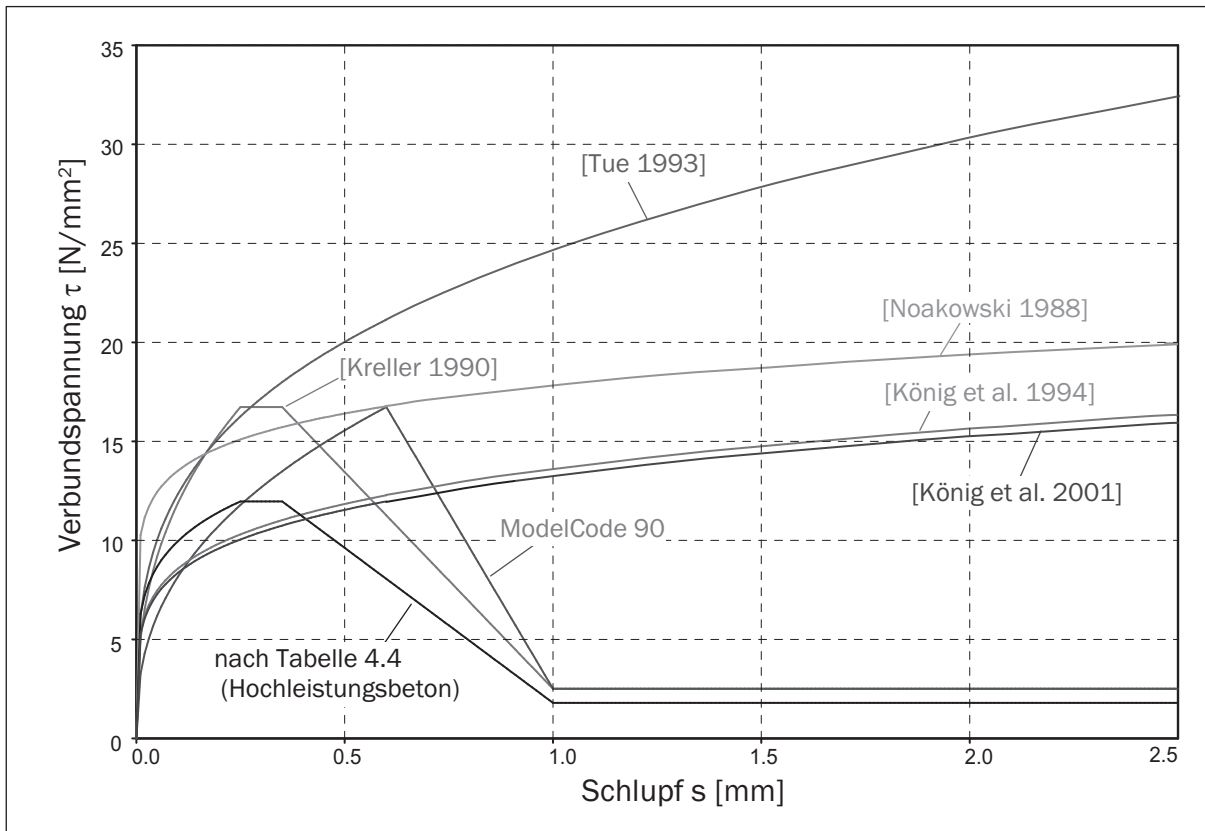


Bild 4.9: Vergleich unterschiedlicher Verbundgesetze an einem C 70/85

seines Erscheinungszeitpunkts innerhalb dieser Arbeit keine Berücksichtigung gefunden hat.

Für den Modellaufbau wird die durch das Tension-Stiffening modifizierte Stahlkennlinie, ähnlich dem Vorgehen bei der Kennlinie des Betons, durch charakteristische Punkte abgebildet (s. Bild 4.11). Es existieren im Belastungsbereich fünf und für den Entlastungsast vier Stützstellen der Kurve. An diesen Punkten wird die Stahlspannung bzw. -dehnung im Rissquerschnitt als bekannt vorausgesetzt oder aber vorab ermittelt. So kann eine fehlende Größe innerhalb der durchzuführenden Iteration ermittelt werden. Die Positionen dieser charakteristischen Punkte können Bild 4.11 entnommen werden. Es wird nun mit Hilfe der oben erwähnten Iteration die mittlere Dehnung ε_{sm} ermittelt. Die Iterationsvorschrift wird in Noh (2002) ausführlich beschrieben.

Die Rissstahlspannung berechnet sich dann beispielsweise zu

$$\sigma_{sr,\eta\%} = \frac{f_{ct,\eta\%}}{\rho} + f_{ct,5\%} \frac{E_s}{E_c}. \quad (4.38)$$

Der Vorteil dieses Vorgehens liegt in der Verwendung des jeweiligen tangentialen Elastizitätsmoduls. Hierdurch wird die Konvergenz in starkem Maße erhöht.

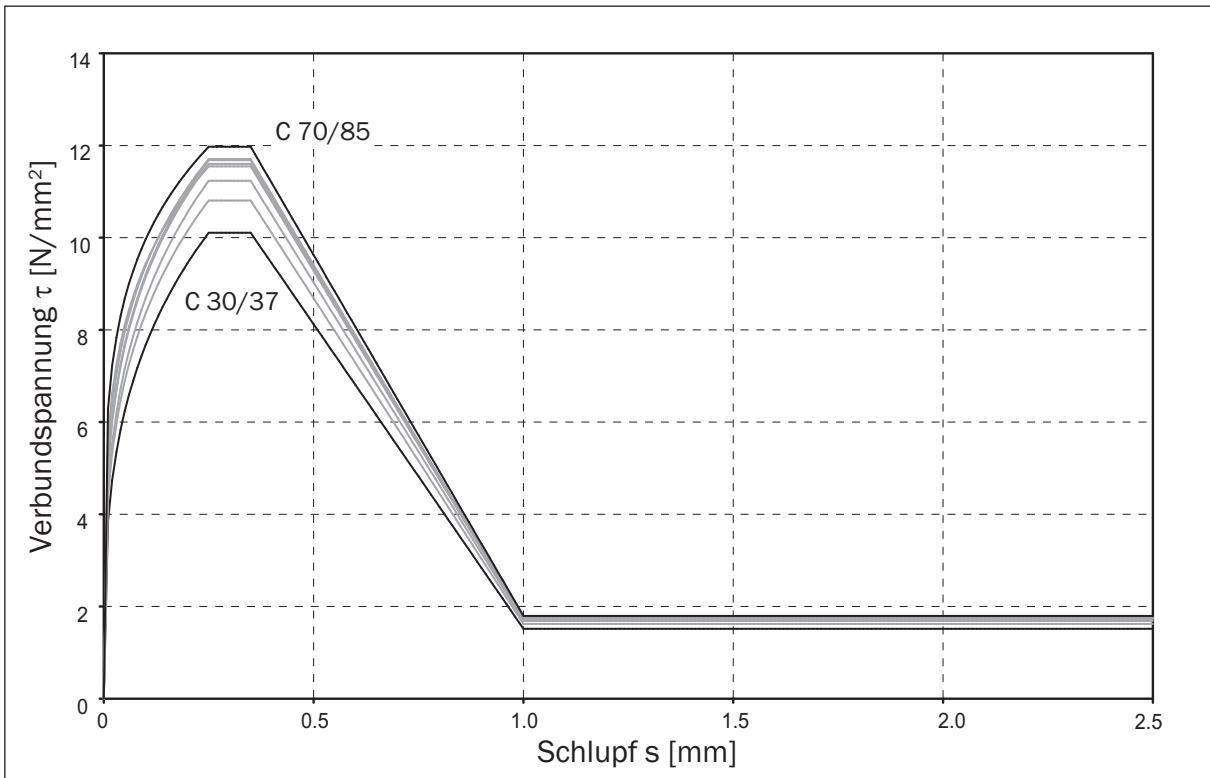


Bild 4.10: Spannungs-Schlupfbeziehung für Betongüten C 30/37 - C 70/85

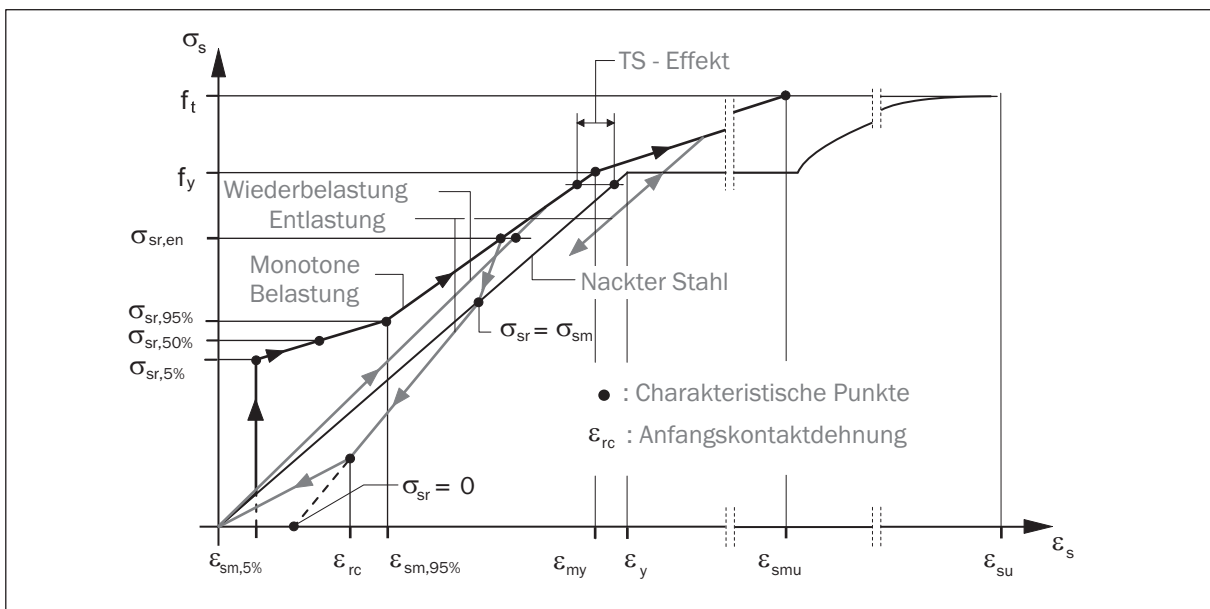


Bild 4.11: Modifizierte Stahlkennlinie nach Noh (2002)

4.9 Softening-Verhalten des Werkstoffs Stahlbeton

Der Werkstoff Stahlbeton besitzt, wie bereits erwähnt, als ein charakteristisches Merkmal ein von der Betonmischung und von der Art bzw. Größe der Stahleinlage abhängiges, mehr oder weniger sprödes Verhalten. In erster Linie zeichnet sich die Komponente Beton durch ein sprödes Nachbruch- bzw. Nachrissverhalten aus. Das Verhalten des reinen Betons in den jeweiligen Nachversagensbereichen beschreibt der Begriff des „Softenings“. Dieses „Aufweichen“ des Querschnitts nach Überschreiten der Maximalspannung hat sowohl bei Zug- als auch bei Druckversagen seinen Ursprung in der begrenzten Zugfestigkeit des Betons.

Die beiden Versagensmuster zeichnen sich zudem durch eine starke Lokalisierung innerhalb des Probekörpers bzw. des Bauteils aus. Das bedeutet, dass das eigentliche Versagen des Bauteils auf einen lokalen Bereich beschränkt ist. Dieses Verhalten wurde von vielen Forschern in der jüngeren Vergangenheit untersucht. Bei diesen Experimenten zeigt sich zudem ein weiterer Effekt, der „Size-Effekt“, welcher in den nächsten beiden Abschnitten erläutert werden soll.

4.9.1 Softening unter Zugbeanspruchung

Die Bestimmung der Zugfestigkeit wird oftmals durch einen indirekten Versuch, wie beispielsweise dem Drei-Punkt-Biegeversuch, vorgenommen, da die Entwicklung der Zugspannung im Probekörper in einem direkten zentrischen Zugversuch nur schwer messbar ist.

Wird hingegen mit hohem Aufwand ein solcher direkter Versuch durchgeführt, so sind einige interessante Zusammenhänge erkennbar [van Mier 1984]. Der Versuch wird verformungsabhängig gefahren, um so das Nachrissverhalten beobachten zu können. Der zum Versagen führende Riss entsteht nur in einem Querschnitt des Probekörpers, so dass der Schädigungsbereich des Probekörpers unabhängig von den Probekörperabmessungen ist. Somit lassen sich also bei den Versuchen von der Geometrie der Probekörper unabhängige Last-Verschiebungskurven feststellen.

In Bild 4.12 ist der Versuchsaufbau und das Resultat einiger Probekörper aus den zentrischen Zugversuchen von Rimmel (1994) dargestellt. Im Gegensatz zu einem vergleichbaren normalfesten Beton ist bei einem höherfesten Beton die stärkere Neigung zum plötzlichen Entlasten nach Erreichen der maximalen Zugfestigkeit erkennbar. Für einige Proben wurde sogar ein Snap-Back-Verhalten in unmittelbarer Versagenspunktnähe festgestellt.

Wird anstelle der Verschiebung eine mittlere Verzerrungsgröße, hier die mittlere Längsdehnung, als Bezugsgröße für die Zugspannung eingeführt, so ist es ersichtlich, dass diese Diagramme einem großen Size-Effekt unterliegen.

Innerhalb einer FE-Modellierung muss dieser Effekt natürlich Berücksichtigung finden, um somit ein netzunabhängiges Antwortverhalten der Struktur zu gewährleisten [Bažant & Oh (1983)].

Bei der Modellierung des in dieser Arbeit zur Anwendung kommenden Materialgesetzes für Stahlbeton kann der Size-Effekt auf alternative Art und Weise Berücksichtigung finden.

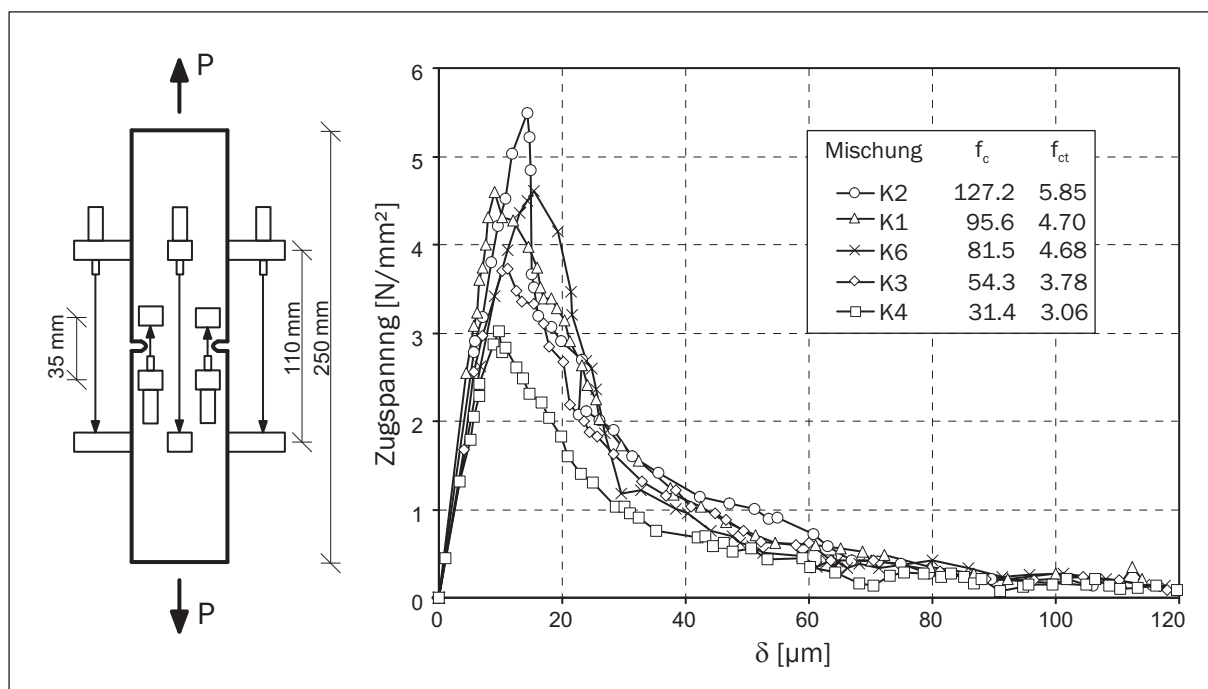


Bild 4.12: Zentrischer Zugversuch nach Remmel (1994)

Hierbei übernimmt die Verbunddetailuntersuchung, die bei Risseintritt aktiviert wird, die Gewährleistung für ein netzunabhängiges Verhalten im Nachrissbereich. Das in Abschnitt 4.8.3 beschriebene Verfahren arbeitet durch den iterativen Prozess zur Auffindung des Rissabstandes und der Rissstahlspannung unabhängig von der Größe der einzelnen finiten Elemente, so dass hierbei von einer Formulierung im Meso-Bereich gesprochen werden kann.

Dieser Weg kann beschritten werden, da mit diesem Modell nicht das Verhalten des reinen Betons im Nachrissbereich beschrieben werden soll. Eine Erweiterung auf diesen Fall ist nur über eine andere Formulierung des Verhaltens von Beton im Nachrissbereich zu bewerkstelligen, wie beispielsweise nach Borges & Bittencourt (2002).

4.9.2 Softening unter Druckbeanspruchung

Im Beton entstehen bereits im unbelasteten Zustand, unmittelbar nach dem Betoniervorgang, durch Eigenspannungen initiierte Mikrorisse, die eine gewisse Vorschädigung der Struktur bedeuten. Wird das Bauteil bzw. der Probekörper nun einer wachsenden Druckbeanspruchung ausgesetzt, so vereinen sich diese Mikrorisse durch die auftretenden Zugspannungen, so dass es schließlich nach Bažant & Oh (1983) zu der Ausbildung eines Rissbandes der Höhe h_{cl} kommt. In spröden und quasi-spröden Materialien verursachen somit zur Hauptspannungsrichtung senkrechte Trennrisse das Druckversagen. Die Bildung dieser Trennrisse bedeutet für die Gesamtstruktur keine Energiefreisetzung, so dass daraus kein Size-Effekt entstehen kann. Vielmehr leiten sie nur die Versagensform ein, welche im Nachbruchbereich durch Energieverlust und damit durch einen Size-Effekt

gekennzeichnet ist.

In van Mier et al. (1987) wird anhand von ein-, zwei- und dreiaxialen Druckversuchen gezeigt, dass dieser Effekt tatsächlich auftritt. Dass dieses Verhalten auch für den Werkstoff Hochleistungsbeton gültig ist, zeigen die Ergebnisse von Němeček (2000) für druckbelastete Betonstützen unterschiedlicher Querschnittsdicke. Hierbei ist die erreichte Bruchlast weitestgehend unabhängig von den Abmessungen, während aber die Kurve im Nachbruchbereich in Abhängigkeit von den Abmessungen variiert.

Um nun diesen Effekt in einem Materialmodell innerhalb der FEM zu berücksichtigen, eröffnen sich verschiedene Möglichkeiten.

Die einfachste und vielleicht ingenieurmäßigste Möglichkeit besteht darin, den abfallenden Ast der einaxialen Spannungs-Dehnungskurve in Abhängigkeit von einer elementspezifischen Größe zu formulieren. Diese elementspezifische Größe ist dabei nichts anderes als eine Abschätzung der zu erwartenden Risslänge in dem verwendeten finiten Element.

Oliver (1989) zeigt in seiner Arbeit zwei unterschiedliche Methoden zur Festlegung dieser Größe auf. Der Ansatz für die Ermittlung der charakteristischen Länge innerhalb eines isoparametrischen Elementes lautet

$$l^*(\Theta) = \left(\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial N_i^*(\Theta)}{\partial x} \cos \Theta_j + \frac{\partial N_i^*(\Theta)}{\partial y} \sin \Theta_j \right] \Phi_i \right)^{-1}. \quad (4.39)$$

Die unbekannte Funktion Φ in dieser Bestimmungsgleichung kann nach Oliver (1989) in Abhängigkeit von der Rissrichtung bestimmt werden. Nun kann für jeden Integrationspunkt die charakteristische Länge bestimmt werden.

Die so genannte äquivalente Länge hingegen kann als gute Näherung für verschiedene Elementtypen angesehen werden. Mancevski (1998) zeigt, dass für flächenhafte Elemente beispielsweise die Länge

$$l_{eq} = \sqrt{A^e / n_{int}} \quad (4.40)$$

eine gute Näherung darstellt. Als Bedingung für die Anwendung dieses einfachen Zusammenhangs zwischen äquivalenter Länge und Elementgröße bzw. Anzahl der Integrationspunkte ist zu beachten, dass das Element annähernd quadratisch sein sollte. Bei Wegfall dieser Beschränkung muss die charakteristische Länge in jedem Integrationspunkt explizit nach Gleichung (4.39) ermittelt werden.

Als weiterer Parameter wird die Kenngröße Zerstauchungsenergie G_c benötigt, ein Materialparameter, welcher nur schwer bestimmt werden kann.

Die Zerstauchungsenergie ist die Energie, die zur Zerstörung des gesamten Probekörpers benötigt wird. Sie lässt sich in die beiden energetischen Anteile G_{cu} , die Energie, die im Probekörper außerhalb der Schädigungszone aufgenommen wird, und G_{cl} , die Energie, die in der Schädigungszone des Bauteils dissipiert wird, aufspalten:

$$\begin{aligned} G_c &= G_{cu} + G_{cl} \\ &= h \cdot g_{cu} + h_{cl} \cdot (g_{cl1} + g_{cl2}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Augenscheinlich ist also lediglich der Energieanteil G_{cl} eine Materialkonstante und unabhängig von den Bauteil- bzw. Probekörperabmessungen. Um nun mit Hilfe der Zerstauchungsenergie eine Netzunabhängigkeit zu erhalten, muss die Modifikation der Spannungs-Dehnungslinie elementgrößenabhängig erfolgen. Die Kurve wird in einem solchen Maße angepasst, dass sich die volumenspezifische Bruchenergie zu

$$g_{cl}^* = \frac{g_{cl} \cdot h_{cl}}{l_{eq}} \quad (4.42)$$

ergibt. In Bild 4.13 ist dieses Vorgehen prinzipiell dargestellt.

Bei Verwendung des in Abschnitt 4.3 vorgestellten Betonmodells nach CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 ergibt die Auswertung der Flächen unterhalb der Kurve eine Bestimmungsgleichung für die anzusetzende Bruchdehnung

$$\varepsilon_{cu}^m = n \cdot \varepsilon_{c1u}^m = \frac{g_{cl}}{0.6 \cdot l_{eq}^m \cdot f_{cR}} - \frac{f_{cR}}{1.2 \cdot E_0} + \varepsilon_{c1} \quad (m = 1 \dots \text{Anz. der Elemente}). \quad (4.43)$$

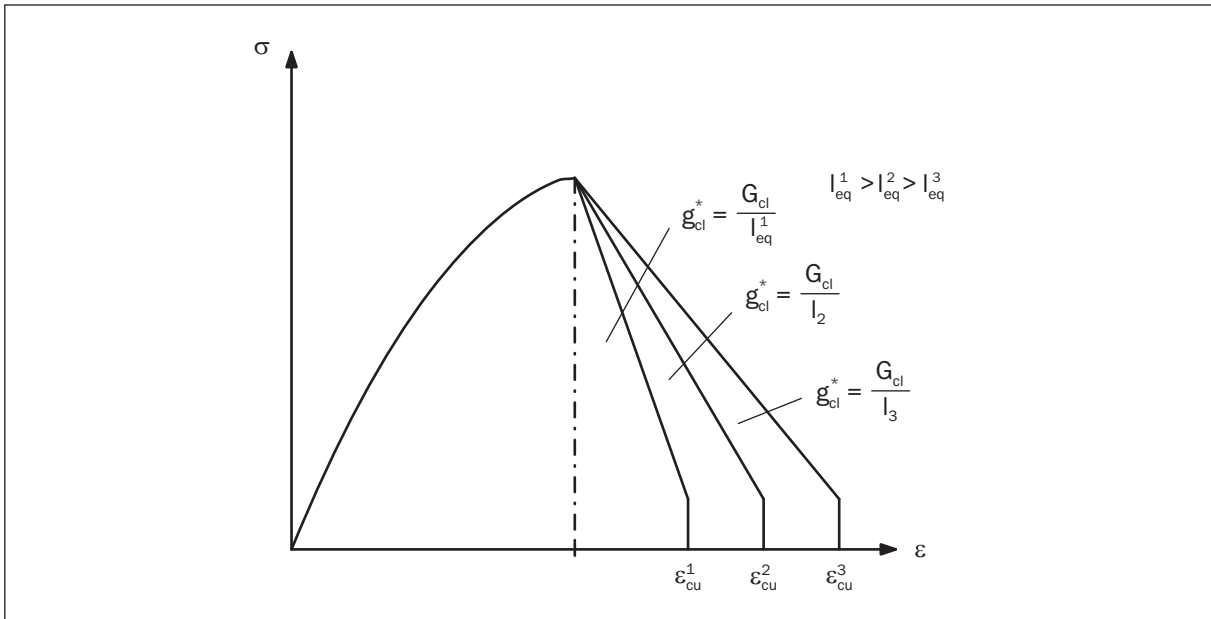


Bild 4.13: Berücksichtigung der Lokalisierung im Druckzustand

Die Bestimmung der Bruchdehnung wird bei dem ebenfalls vorgestellten Betonmodell nach DIN 1045-1 (2001) ungleich aufwändiger. Hier beschreibt die analytische Kurve auch einen Teil des Nachbruchbereichs und erst die Erweiterung des Nachbruchbereichs wird durch eine Gerade beschrieben. Soll hier der Size-Effekt berücksichtigt werden, so ist eine Möglichkeit die Gerade des erweiterten Bereichs entsprechend der charakteristischen Länge des Elementes anzupassen. Dieses erfolgt durch Ermittlung der Dehnung nach Gleichung (4.45), indem nicht g_{cl}^{diff} sondern an dessen Stelle $g_{cl}^{diff} \cdot \frac{h_{cl}}{l_{eq}}$ gesetzt wird.

Der folgende Absatz befasst sich mit der Frage, wie die Größe der Zerstauchungsenergie plausibel ermittelt werden kann. In den Arbeiten von Vonk (1992) und Pölling (2000)

wird lediglich auf die Notwendigkeit einer genaueren Untersuchung des Materialparameters Zerstauchungsenergie hingewiesen. Im weiteren Verlauf des SFB 398, eines an der Ruhr-Universität Bochum installierten Sonderforschungsbereichs, ist geplant, diesen Materialparameter durch Experimente genauer zu definieren. Die Forschung auf dem Gebiet der Bestimmung der Materialkonstanten Zerstauchungsenergie ist bisher nicht zu einer „eindeutigen“ Zuordnung nach einzelnen Betongüteklassen vorangeschritten.

Um nun eine Einbindung in das hier angestrebte normgerechte Materialmodell zu ermöglichen, wird versucht, eine „normgerechte“ Zerstauchungsenergie durch die Auswertung der einaxialen Spannungs-Dehnungskurven der Regelungen zu erhalten. Das Vorgehen wird im Folgenden schrittweise erläutert:

- In Gleichung (4.13) wird die Rechenfestigkeit f_{cR} durch die charakteristische Größe f_{ck} ersetzt. Für diese Kurve wird dann durch Auswertung des Integrals

$$g_{cl} = \int_{\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}}^{\varepsilon_c = \varepsilon_{c1u}} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c + \frac{f_{ck}^2}{2 \cdot E_0} \quad (4.44)$$

die Bruchenergie des Normbetons bestimmt (s. Anhang A.3). Die Ergebnisse dieser Auswertung finden sich in der Tabelle 4.5.

- Die Prozesszonenbreite wird in Anlehnung an die Arbeit nach Borges & Bittencourt (2002) zu $h_{cl} = 1.5 \cdot h$ im jeweiligen Integrationspunkt bestimmt.
- Die reduzierte Zerstauchungsenergie g_{cl}^{red} für die Kurven nach Gleichung (4.13) mit der Rechenfestigkeit f_{cR} wird ermittelt.
- Die Differenz g_{cl}^{diff} dieser beiden Werte der Bruchenergie wird bestimmt und mit Hilfe der Größe der Prozesszone h_{cl} der abfallende Ast des einaxialen Betonmodells modelliert. Der Parameter n aus Tabelle 4.5 ergibt sich somit zu

$$n = 1.0 + \frac{g_{cl}^{diff}}{\varepsilon_{c1u} \cdot (0.1 \cdot f_c + 0.5 \cdot \sigma(\varepsilon_{c1u}))}. \quad (4.45)$$

Die so berechneten Werte der Zerstauchungsenergie sind bei genauerer Betrachtung augenscheinlich gute Anhaltswerte zur Durchführung einer FE-Analyse ohne Kenntnis der exakten Baustoffkennwerte des jeweilig zu betrachtenden Bauwerks. Werden sie - unter der Berücksichtigung einer Probekörperhöhe von 0.1 – 0.2 m - mit Baustoffkennwerten aus anderen Veröffentlichungen [Pölling 2000], [Vonk 1992] verglichen, so ist eine gute Übereinstimmung in dem Bereich $G_{cl} = 10.0 - 30.0 \text{ kN/m}$ festzustellen.

Das Vorgehen rechtfertigt sich nach Meinung des Autors dadurch, dass die Abminderung der Festigkeit von f_{ck} auf f_{cR} nicht aus der Überlegung eines Materialsicherheitsbeiwertes herrührt, sondern vielmehr ein Bestandteil des nichtlinearen Nachweiskonzeptes darstellt.

Festigkeitsklasse	C 12	C 16	C 20	C 25	C 30	C 35	C 40	C 45
$g_{cl} \cdot 10^3 [\text{kNm/m}^3]$	23.19	30.27	34.94	42.75	50.11	56.89	63.19	71.11
$g_{cl}^{red} \cdot 10^3 [\text{kNm/m}^3]$	16.20	20.93	23.85	28.83	33.37	37.42	41.00	45.69
n	1.47	1.48	1.37	1.38	1.37	1.36	1.34	1.37
Festigkeitsklasse	C 50	C 55	C 60	C 70	C 80	C 90	C 100	
$g_{cl} \cdot 10^3 [\text{kNm/m}^3]$	78.97	81.26	82.39	88.34	91.65	96.67	110.62	
$g_{cl}^{red} \cdot 10^3 [\text{kNm/m}^3]$	53.99	53.91	48.75	48.45	45.76	43.84	46.77	
n	1.21	1.20	1.35	1.38	1.41	1.48	1.64	

Tabelle 4.5: Zerstauchungsenergie der Lokalisierungszone von Betonen in Anlehnung an die DIN 1045-1 (2001)

4.10 Die Zufallsverteilung des Werkstoffparameters Zugfestigkeit

Die Zugfestigkeit von Beton ist eine innerhalb eines Bauteils variable Größe. Verschiedene Forscher haben in der Vergangenheit in zahlreichen Experimenten die Zufallsverteilung der Zugfestigkeit getestet und sie als eine normalverteilte Größe identifiziert. Ziel ist es, an dieser Stelle eine Möglichkeit zu schaffen, den normalverteilten Charakter dieser Größe in eine FE-Analyse einfließen zu lassen. Hierzu wird im Vorfeld der FE-Analyse, nach Erzeugung der Diskretisierung, mittels der neugeschaffenen Programmteile ein Netz von Zufallszahlen über die Struktur gelegt. Diese Zufallszahlen Z sind $N(0;1)$ verteilt, so dass mit Hilfe dieser Zahlen zu einem späteren Zeitpunkt jede andere Größe, welche einer Normalverteilung gehorcht (s. Anhang A.4), erzeugt werden kann.

In diesem Fall ist es die Zugfestigkeit mit

$$f_{ct,ran} = \sigma_x \cdot Z + \mu. \quad (4.46)$$

Der Charakter der Normalverteilung der Zugfestigkeit wird nach DIN 1045-1 (2001) wie in Bild 4.14 angenommen. Der Bereich der zu erwartenden Zugfestigkeit erstreckt sich zwischen den beiden Fraktilwerten über 90 %. Somit kann die Ungleichung zur Bestimmung der Varianz nach Schuëller (1981) zu

$$P(f_{ctm} - 1.645 \sigma_x < f_{ct,ran} \leq f_{ctm} + 1.645 \sigma_x) = 90 \% \quad (4.47)$$

angegeben werden. Wird diese aufgelöst, so resultiert daraus die Varianz als abhängige Größe von der mittleren Betonzugfestigkeit zu

$$\sigma_x^2 = (0.182 \cdot f_{ctm})^2. \quad (4.48)$$

Bild 4.14 zeigt die Varianz in Abhängigkeit von der mittleren Betonzugfestigkeit. Tabelle 4.6 beinhaltet die entsprechenden Werte für die unterschiedlichen Betongüten der DIN 1045-1 (2001).

Die Erzeugung von zufallsverteilten Zahlenfeldern nach Petersen (1992) wurde als Baustein in das Programmsystem implementiert. Somit kann bereits bei der Eingabe die

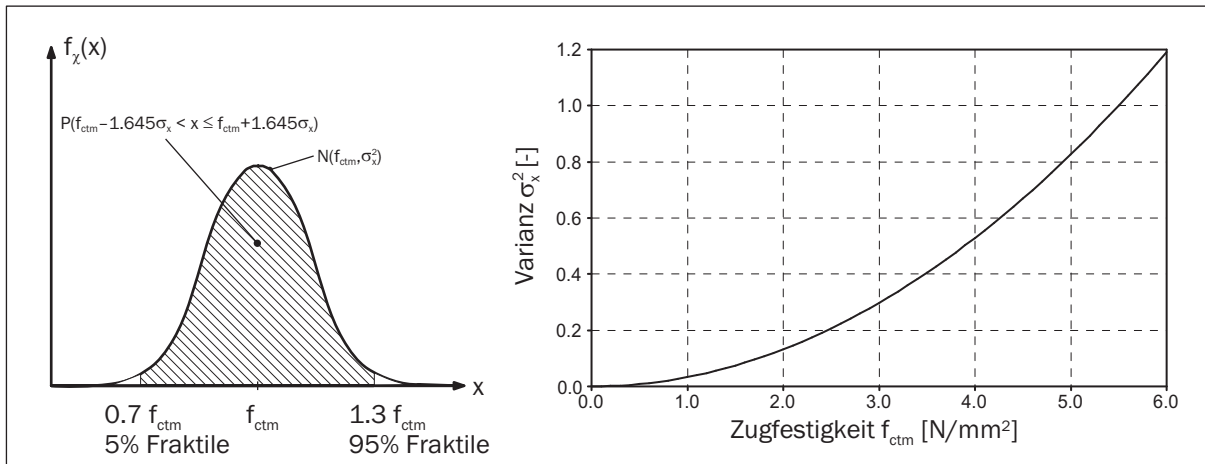


Bild 4.14: Normalverteilung der Zugfestigkeit nach DIN 1045-1 (2001) (links) - Varianz der Zufallsgröße Zugfestigkeit in Abhängigkeit der mittleren Betonzugfestigkeit (rechts)

Festigkeitsklasse	C 12	C 16	C 20	C 25	C 30	C 35	C 40	C 45	C 50
σ_x^2	8.48	11.96	16.03	22.39	27.86	33.92	40.58	47.83	55.68
Festigkeitsklasse	C 55	C 60	C 70	C 80	C 90	C 100			
σ_x^2	58.43	64.13	70.09	76.32	82.81	89.57			

Tabelle 4.6: Streuung der Zugfestigkeit nach DIN 1045-1 (2001)

Struktur in unterschiedliche Bereiche unterteilt und über diese Bereiche zufallsverteilte Zahlen erzeugt werden. Der für dieses Programmteil benötigte Startparameter, welcher die Variation des Zufallsfeldes gewährleistet, wird mittels der Systemuhrzeit des jeweiligen Rechners ermittelt, so dass bei den durchzuführenden Analysen praktisch keine identischen Zufallsverteilungen auftreten können.

Zur Verifizierung der hier gemachten Aussage wird folgendes Beispiel benutzt. Eine Platte wird mit 25×50 Elementen diskretisiert. Daraus ergibt sich, dass ein Feld mit $25 \times 50 \times 4 = 5000$ Zufallszahlen erzeugt werden muss. Dieses Feld wird dann in Form eines Zahlennetzes über die Diskretisierung gelegt. In Bild 4.15 ist die Zufallsverteilung der 5000 erzeugten Zufallszahlen für vier Diskretisierungen zu erkennen. Sie unterscheiden sich nur durch den Startzeitpunkt der Berechnung. Für die Darstellung der Häufigkeiten wurde eine Klassenbreite von 0.25 gewählt. Hierbei ist die Zufälligkeit der Verteilungen untereinander und die ausgeprägte Normalverteilung zu erkennen. Ebenfalls in Bild 4.15 sind zwei benachbarte Schnitte durch die Platte dargestellt und die dazugehörigen Zufallszahlen aufgetragen. Der Verlauf gibt lediglich einen ersten Eindruck der Verteilung der Zufallsgröße für zwei unterschiedliche Diskretisierungen wieder. Dieser hier verwendete Ansatz ist nur als eine erste Annäherung an die Problematik der zufallsbehafteten Materialkennwerte zu verstehen. Detailliertere Modelle berücksichtigen hingegen die Korrelation der einzelnen Kennwerte untereinander. Diese speziellen Analysemethoden der stochastischen Strukturmechanik [Schuëller 2000] sind zurzeit noch sehr rechenintensiv

und eignen sich daher nicht für die hier durchgeführte Analysen.

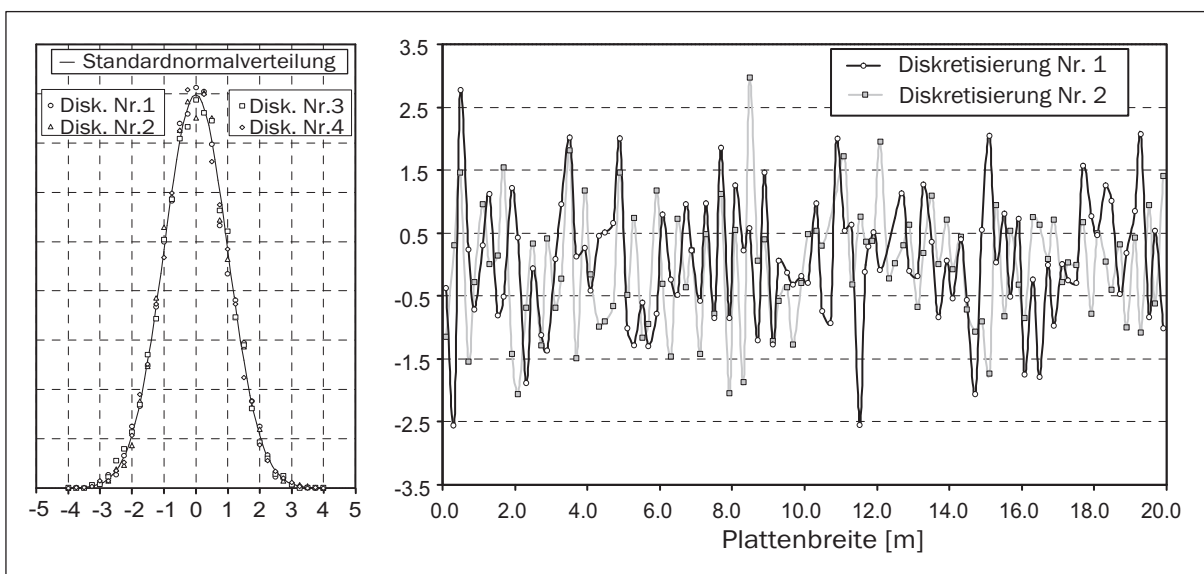


Bild 4.15: Verteilung der Zugfestigkeit für zeitlich versetzt erstellte Netze

4.11 Verifizierungsbeispiele

In diesem Abschnitt soll die korrekte Umsetzung und die Anwendbarkeit des vorangestellten Materialgesetzes gezeigt werden. Hierzu wurden im Laufe der Implementierungsphase zahlreiche Benchmark-Tests durchgeführt, von denen im Folgenden einige Ergebnisse dargestellt werden sollen.

4.11.1 Scheibe unter einaxialer Belastung

Die in Bild 4.16 dargestellte Scheibe wird durch eine einaxiale Beanspruchung belastet. Hierbei wird die Belastung in Form einer Knotenverschiebung des rechten Scheibenrandes aufgegeben. Die Berechnung wurde für die Betone C 20/25, C 45/55 und C 100/115 nach DIN 1045-1 (2001) durchgeführt. Es ist erkennbar, dass zum einen die vorgeschriebenen Festigkeiten (f_{cR}) erreicht werden und zum anderen der Softening-Bereich des Betons gut abgebildet wird. Als einaxiale Spannungs-Dehnungskurve wurde hier ausschließlich der nach DIN 1045-1 (2001) vorgegebene Verlauf angenommen, da an dieser Stelle die Verifizierung der Implementierung des Materialmodells dargestellt werden soll. Als Pfadverfolgungsalgorithmus wurde der Algorithmus nach Crisfield (1981) eingesetzt, der im Vergleich zu anderen Bogenlängenverfahren die besten Ergebnisse erzielte. Numerische Schwierigkeiten bei diesem Beispiel herrschten nur am direkten Umkehrpunkt aufgrund des gleichzeitigen Eintritts aller Integrationspunkte in den Softeningbereich.

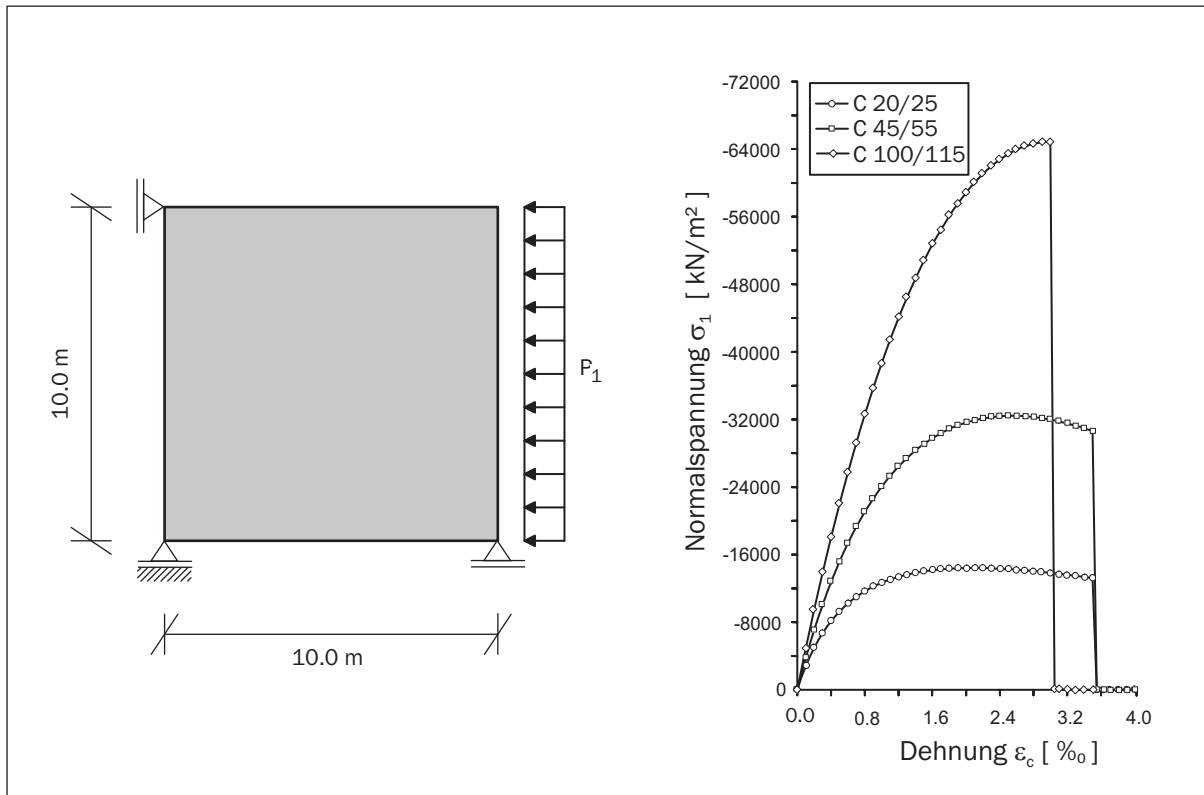


Bild 4.16: Scheibe unter einaxialer Beanspruchung: System und FE-Ergebnis

4.11.2 Scheibe unter biaxialer Belastung

Zur Beschreibung des biaxialen Verhaltens des Werkstoffs Beton und zur Überprüfung der im Speziellen für Hochleistungsbeton getroffenen Annahmen, wird die in Bild 4.17 dargestellte Scheibe mit unterschiedlichen Spannungsverhältnissen P_1/P_2 bis zum Versagenseintritt durch Betonbruch belastet. In Bild 4.17 sind zusätzlich neben den durchgezogenen Linien der experimentellen Kurven nach Kupfer & Gerstle (1973) und Curbach et al. (2000) die Ergebnisse der FE-Berechnung mit einer Diskretisierung von einem Element dargestellt. Es herrscht bei allen Spannungsverhältnissen eine gute Übereinstimmung, so dass von einer korrekten Umsetzung der experimentellen Kurven ausgegangen werden kann.

Diese Berechnungen wurden ebenfalls für Diskretisierungen mit einem feineren Elementnetz durchgeführt. Hierbei bleibt anzumerken, dass bei einem feineren Elementnetz numerische Ungenauigkeiten zu einem Versagen vor der eigentlichen Bruchlast führen können. Diese Tatsache ändert aber nichts an der Gültigkeit des hier verwendeten Betonmodells, es zeigt lediglich seine Schwächen und Anwendungsgrenzen für ein reines Betontragwerk auf.

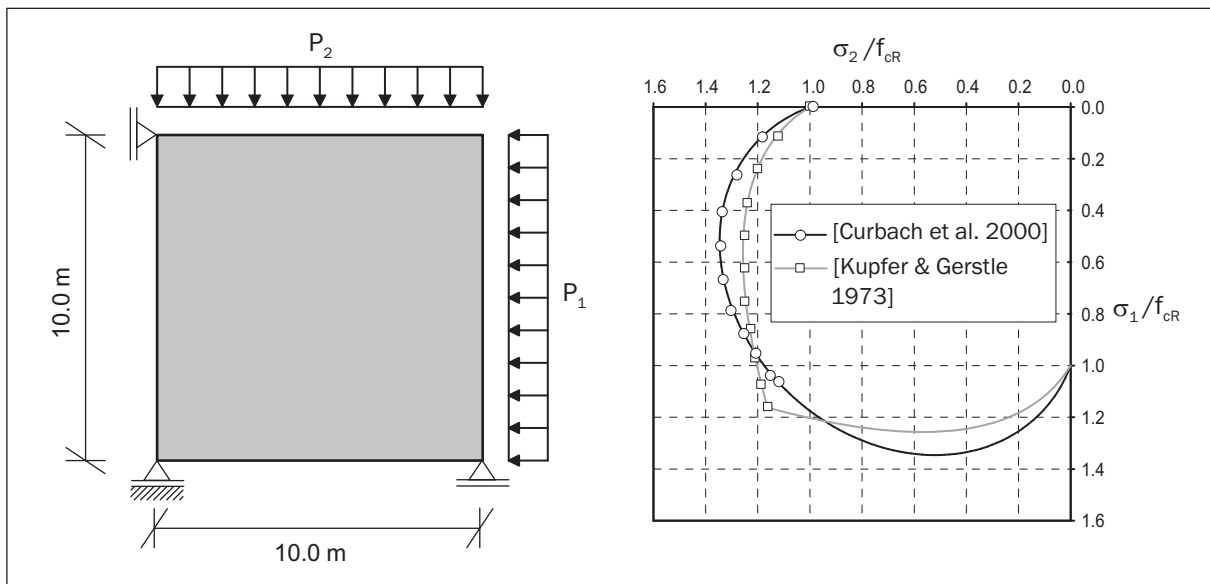


Bild 4.17: Scheibe unter biaxialer Beanspruchung: System und Ergebnis der FE-Analyse

4.11.3 Scheibe mit unterschiedlichen Abmessungen unter einaxialer Druckbelastung

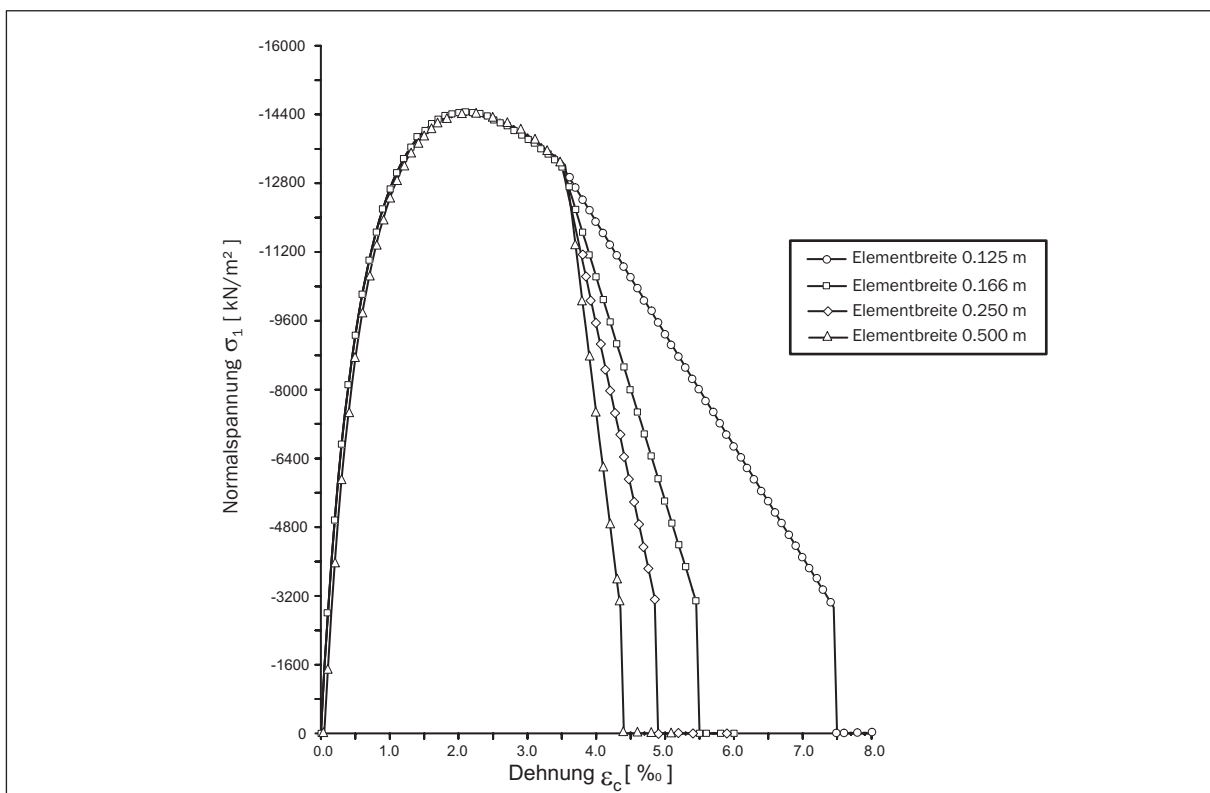


Bild 4.18: Lokalisierung der Dehnungen

Zur Überprüfung der Funktionsweise des Algorithmus zur Verhinderung des Lokalisierungsphänomens unter Druckbeanspruchung wurde das Beispiel der einaxial belasteten Scheibe für unterschiedliche FE-Netze untersucht. Hierzu wurde die bereits in Abschnitt 4.11.1 dargestellte Scheibe aus einem C 20/25 in Netzen mit 2×2 , 4×4 , 6×6 und 8×8 Elementen diskretisiert. Somit betragen die Abmessungen der finiten Elemente jeweils 0.500 m, 0.250 m, $0.1\overline{66}$ m und 0.125 m. Das Ergebnis ist in Bild 4.18 in Form eines Last-Dehnungsdiagramms dargestellt.

Es ist erkennbar, dass bei Berücksichtigung des Lokalisierungseffektes die Ergebnisse der unterschiedlichen Diskretisierungen im Nachbruchbereich voneinander differieren - bei sinkender Elementgröße werden die Dehnungen im Nachbruchbereich größer. Für die Verschiebung des Gesamttragwerks - in diesem Beispiel die horizontale Verschiebung der Scheibe - folgt daraus, dass diese nahezu konstant bleibt.

Wird die Analyse ein zweites Mal mit Nicht-Berücksichtigung des Algorithmus durchgeführt, so sind konstante Dehnungen für die unterschiedlichen Diskretisierungen erkennbar. Somit differieren die Verschiebungen, was zu einer falschen Abbildung des tatsächlichen Last-Verformungsverhaltens führen würde.

4.11.4 Schubversagen einer Scheibe nach VECCIO & COLLINS

Neben den Materialgesetzen für Beton und Stahl im Zug- und Druckbereich ist für eine „exakte“ Abbildung des realen Bauteilverhaltens ein gutes Rissmodell notwendig. Das im Abschnitt 4.5 beschriebene „smeared rotating crack model“, also das Modell mit sich verändernder Rissrichtung, wird anhand eines von vielen Forschern beschriebenen Experiments von Veccio & Collins (1986) überprüft. Hierbei wurden zahlreiche Stahlbetonscheiben mit unterschiedlichen Abmessungen und Bewehrungsgehalten einer reinen Schubbeanspruchung ausgesetzt und die Rissbildung, die Versagensmechanismen sowie die entstehenden Spannungen erfasst.

Zur Überprüfung wurde ein Versuch mit den in Bild 4.19 angegebenen Geometrie- und Materialdaten herausgegriffen und mit dem hier verwendeten Materialmodell nachgerechnet. Die Längsbewehrung dieser Scheibe ist in etwa doppelt so groß wie deren Querbewehrung, so dass hier das Rotieren der Rissrichtung in Richtung der starken Längsbewehrung gut zu beobachten ist.

Hierzu wurde ein finites Elementnetz mit 8×8 Elementen erzeugt, welches entsprechend dem Versuchsaufbau in Bild 4.19 gelagert wurde. Die Belastung wurde in Form von Schubspannungen erzeugenden Linienlasten an den Rändern der äußeren Elemente aufgebracht, wobei diese innerhalb der FE-Modellierung in äquivalente Knotenlasten gemäß Bild 4.19 umgeformt werden. Die resultierenden Schubkräfte [kN/m] müssen zum Vergleich mit den anderen Ergebnissen noch mit Hilfe der Abmessungen der Scheibe in Schubspannungen [N/mm^2] umgerechnet werden. Bild 4.20 zeigt die Ergebnisse der durchgeführten Berechnung im Vergleich mit den experimentellen Daten von Veccio & Collins (1986) und den FE-Resultaten von Stempniewski (1990) und Kolleger & Mehlhorn (1987). Hierbei ist die Drehung der Rissrichtung aus dem Zustand orthogonal zur Hauptspannungsrichtung bei

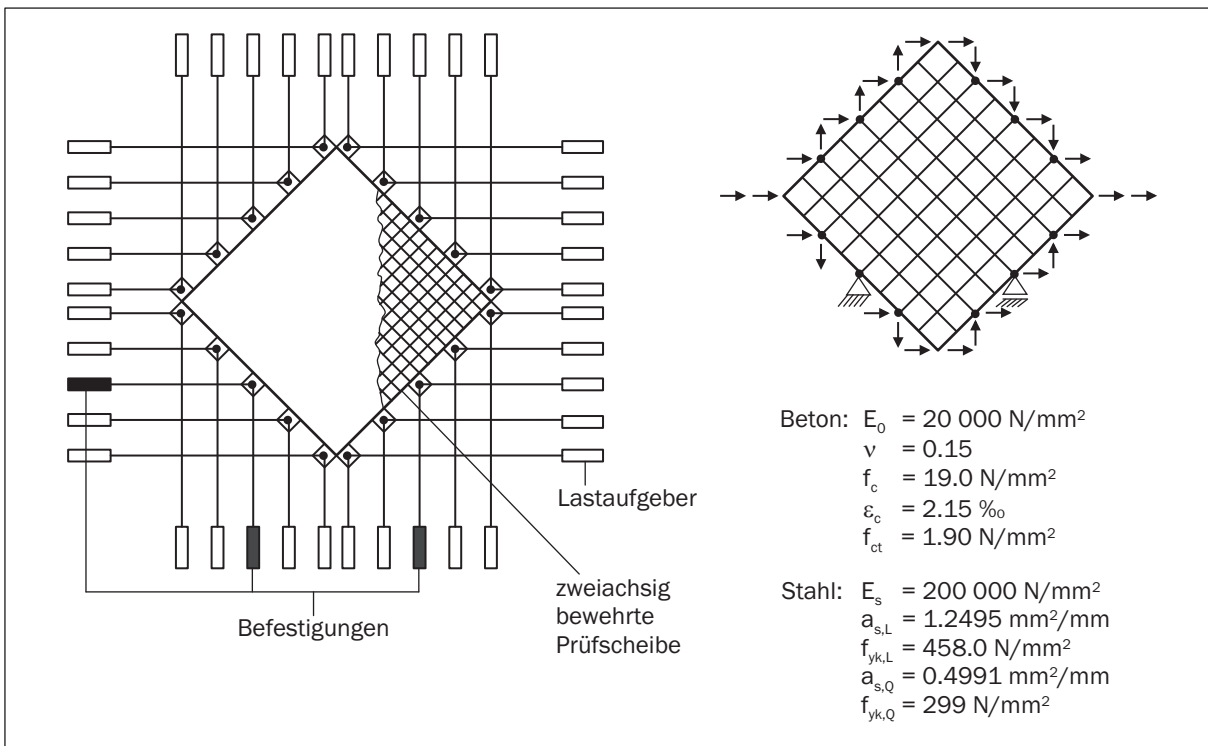


Bild 4.19: Versuchsaufbau und Materialdaten einer Stahlbetonscheibe unter Schubbeanspruchung nach Vecchio & Collins (1986)

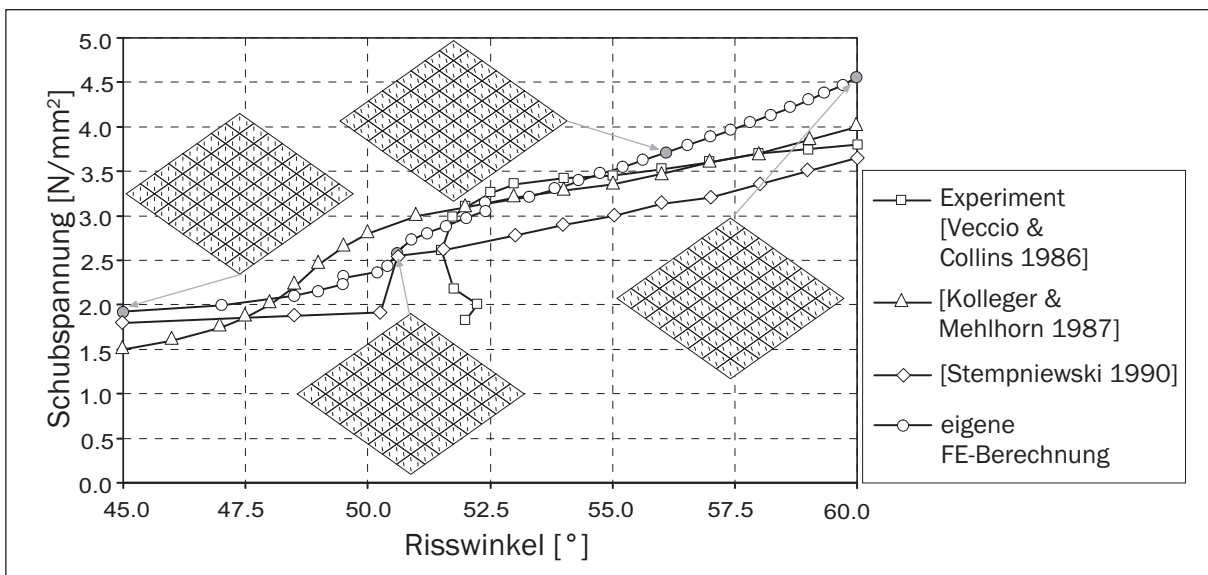


Bild 4.20: Veränderung der Rissrichtung für eine schubbeanspruchte Stahlbetonscheibe nach Vecchio & Collins (1986)

Erstrissbildung in den Zustand in Richtung der starken Längsbewehrung - einer Hauptdehnungsrichtung - gut erkennbar.

4.11.5 Zugstab mit zentrischer Bewehrung

Bei diesem Beispiel handelt es sich um einen einfachen einaxialen Spannungszustand, an dem die Gültigkeit der Tension-Stiffening Modellierung aus Kapitel 4.8.3 und ebenfalls die Anwendbarkeit der zufallsverteilten Zugfestigkeit gezeigt werden soll. Die FE-Berechnungen werden in diesem Fall mit Versuchen verglichen, die im Rahmen einer bereits abgeschlossenen Forschungsarbeit [Andres & Harte 2000] durchgeführt wurden.

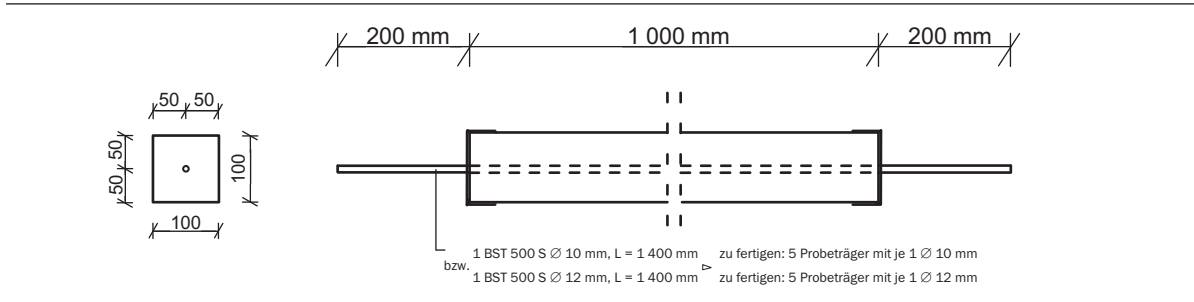


Bild 4.21: Abmessungen der Versuchskörper nach Andres & Harte (2000)

Sie umfassen eine Versuchsreihe von insgesamt 10 Zugstäben, deren Abmessung Bild 4.21 zu entnehmen sind. Jeweils die Hälfte der Anzahl wurde mit einer Bewehrung von 0.79 % (\varnothing 10 mm) beziehungsweise 1.13 % (\varnothing 12 mm) der Betonfläche durchgeführt. Die Bewehrung wurde zentrisch eingelegt und durch den am Beton geklebten Einspannschuh durchgeführt und verschweißt. So wurde eine kraftschlüssige Verbindung zwischen dem gesamten Versuchskörper und dem Kraftaufgeber der Versuchsanlage hergestellt. Für die vergleichende FE-Berechnung wurden die in weiteren Versuchen ermittelten Materialeigenschaften zu $E = 39960 \text{ MN/m}^2$, $f_c = 82.03 \text{ MN/m}^2$ und $f_t = 2.88 \text{ MN/m}^2$ angesetzt.

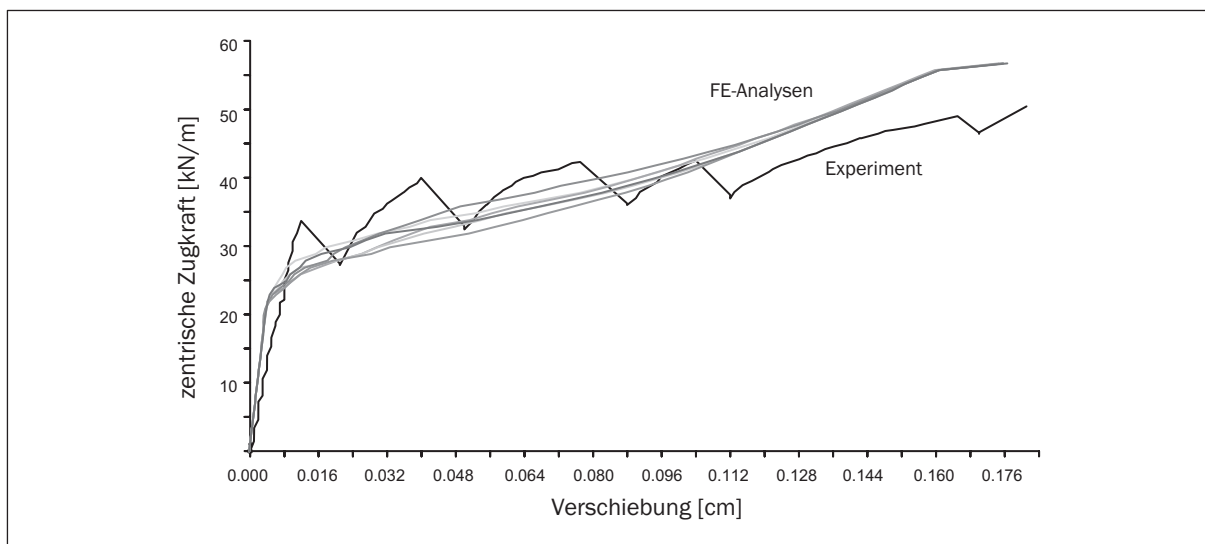


Bild 4.22: Last-Verformungsdiagramm für einen Zugstab

In Bild 4.22 sind die Ergebnisse von fünf FE-Berechnungen der Last-Verformungskurve des Probekörpers Z14 gegenübergestellt. Die Kurven der FE-Berechnung befinden sich in einem guten Näherungsbereich der Versuchskurve und übertreffen nur leicht die reale Versagenslast. Die durch die höhere Festigkeit angestiegene Verbundspannung zeigt sich durch eine höhere Steifigkeit des Systems im Nachrissbereich. Die zufällige Verteilung der Zugfestigkeit zeigt sich in den geringfügigen Unterschieden der fünf FE-Ergebniskurven untereinander.

4.11.6 Zugstab mit unterschiedlichen Tension-Stiffening Modellierungen

Zur Veranschaulichung des Einflusses unterschiedlicher Tension-Stiffening Modellierungen wurde ein Zugstab mit den Abmessungen nach Abschnitt 4.11.5 mit einigen unterschiedlichen Tension-Stiffening Modellen getestet und gegenübergestellt. Zur Anwendung kamen hierbei die Gesetze nach Gilbert & Warner (1978), König et al. (2001) und nach Noakowski (1988). Bild 4.23 zeigt die Ergebnisse dieser Analyse.

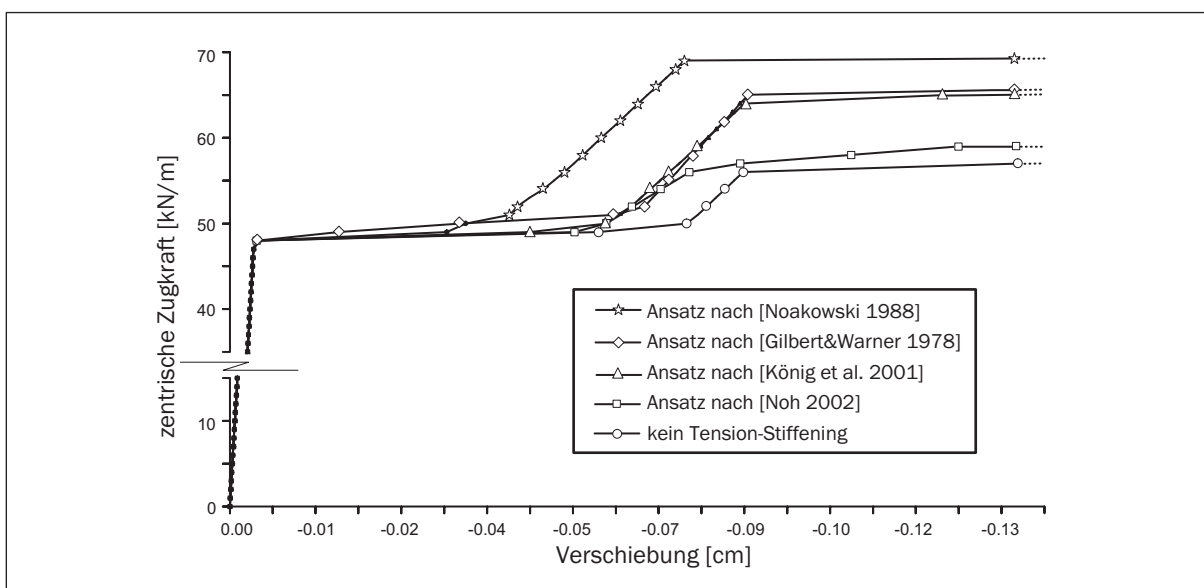


Bild 4.23: Zugstab mit unterschiedlichen Tension-Stiffening Modellierungen

Die Ergebnisse deuten auf einen großen Unterschied im Erstrissbereich hin. Hier bilden die Gesetze nach Gilbert & Warner (1978), Noakowski (1988) und König et al. (2001) das Tragverhalten gegenüber Noh (2002) sehr viel steifer ab. Im abgeschlossenen Rissbild nähern sich alle Kurven wieder an, die Grenztraglast wird in diesem Beispiel bei allen Formulierungen erreicht, allerdings beschreibt die Modellierung nach Noh (2002) den Verlauf sehr viel realitätsnaher.

Kapitel 5

Auswahl und Bemessung stabilitätsgefährdeter Modellschalen nach DIN 1045-1

5.1 Erweiterung des allgemeinen Bemessungskonzeptes für hochfeste Betone

Um eine nichtlineare Analyse durchzuführen, ist zuvor die erforderliche Bewehrung einer Stahlbetonschale zu ermitteln. Dies wird heute in der Regel rechnergestützt im Anschluss an eine lineare FE-Analyse erledigt. Die in dem Programmsystem FEMAS 2000 vorhandenen Bemessungsroutinen wurden im Rahmen dieser Arbeit für die Anwendung hochfester Betone verändert bzw. erweitert.

Der Unterschied zu der Bemessung mit normalfestem Beton ist zum einen die veränderliche maximale Betonstauchung ε_{cu} und zum anderen der veränderte Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie.

Die Spannungs-Dehnungslinie ist nach DIN 1045-1 (2001) mit

$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{für } 0 \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{c2} \quad (5.1)$$

und

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{für } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2u} \quad (5.2)$$

gegeben.

Die Ermittlung des Bemessungswertes der Betonfestigkeit erfolgt nach

$$f_{cd} = \alpha \cdot f_{ck} / \gamma'_c \quad (5.3)$$

mit $\alpha = 0.85$ (Dauerstandsbeiwert).

Für Betone bis zu einer Festigkeitsklasse von C 50/60 beträgt der Teilsicherheitsbeiwert

$\gamma_c^* = 1.5$ und berechnet sich für Betone höherer Festigkeit zu:

$$\gamma_c^* = 1.5 \cdot \frac{1}{1.1 - \frac{f_{ck}}{500}}. \quad (5.4)$$

Die festigkeitsabhängigen Parameter der Gleichungen (5.1) und (5.3) finden sich in Tabelle 5.1 wieder. Hierbei wird auch die unterschiedliche Behandlung von normal- und hochfestem Beton deutlich.

Um eine Bemessung nach dem Normenkonzept durchzuführen, müssen die Grenzen der einzelnen Bemessungsbereiche neu definiert werden. Die Bereichsgrenzen lauten:

$$\text{Bereich 1: } -\infty \leq \xi \leq 0 \quad (5.5)$$

$$\text{Bereich 2: } 0 \leq \xi \leq \frac{\varepsilon_{c2u}}{25.0 + \varepsilon_{c2u}} \quad (5.6)$$

$$\text{Bereich 3 und 4a: } \frac{\varepsilon_{c2u}}{25.0 + \varepsilon_{c2u}} \leq \xi \leq 1.0 \quad (5.7)$$

$$\text{Bereich 4: } 1.0 \leq \xi \leq 1 + \frac{d_1}{d} \quad (5.8)$$

$$\text{Bereich 5: } 1.0 + \frac{d_1}{d} \leq \xi \leq \infty. \quad (5.9)$$

Innerhalb dieser Bereiche können nun in allgemeiner Form die jeweiligen Dehnungszustände hergeleitet werden. Um eine allgemeine Bemessung durchführen zu können, wurde im Anschluss daran eine iterative Vorgehensweise zur Bewehrungsermittlung für die veränderten Eingangswerte modifiziert. Dazu musste die Bestimmung der Betondruckspannung im Querschnitt in allgemeiner Form hergeleitet werden [Andres 1998].

In den Bildern 5.1 und 5.2 sind die Beiwerte k_a (bezogener Abstand der resultierenden aufnehmbaren Betondruckkraft vom Querschnittsrand) und α_R (Völligkeit der Spannungsverteilungskurve) in Abhängigkeit von den unterschiedlichen Betongütern dargestellt.

Bei steigender Betonfestigkeit nimmt die Völligkeit der Spannungs-Dehnungslinie ab, aber auch der Randabstand der Resultierenden der Betondruckspannung vermindert sich. Daher ist bei einer Bemessung eines stark auf Biegung oder Zug beanspruchten Bauteils die ermittelte Bewehrungsmenge nahezu identisch, während bei druckbeanspruchten Bauteilen die höhere Betonfestigkeit bewehrungsmindernd wirkt. Eine Besonderheit bei der Bemessung stellt hierbei der voll überdrückte Querschnitt dar. Hier wird die maximal

Festigkeitsklasse	C 12/15 - C 50/60	C 55/67	C 60/75	C 70/85	C 80/95
n	2.0	2.0	1.9	1.8	1.7
ε_{c2}	-2.0	-2.03	-2.06	-2.1	-2.14
ε_{c2u}	-3.5	-3.1	-2.7	-2.5	-2.4
γ_c^*	1.5	1.5151	1.5306	1.5625	1.5957
	C 90/105	C 100/115			
n	1.6	1.55			
ε_{c2}	-2.17	-2.2			
ε_{c2u}	-2.3	-2.2			
γ_c^*	1.6304	1.6667			

Tabelle 5.1: Festigkeitsabhängige Größen nach DIN 1045-1 (2001)

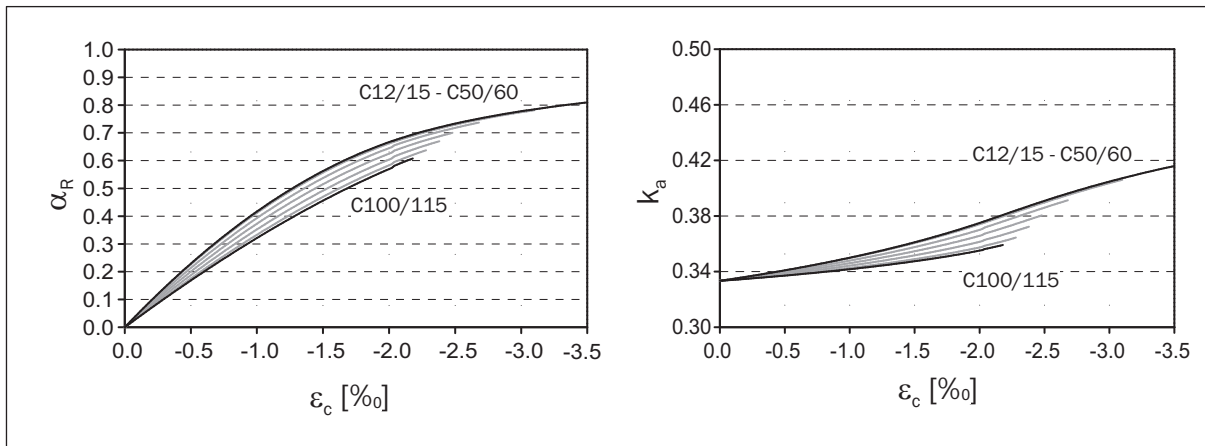


Bild 5.1: α_R und k_a bei einem überwiegend auf Biegung beanspruchten Querschnitt

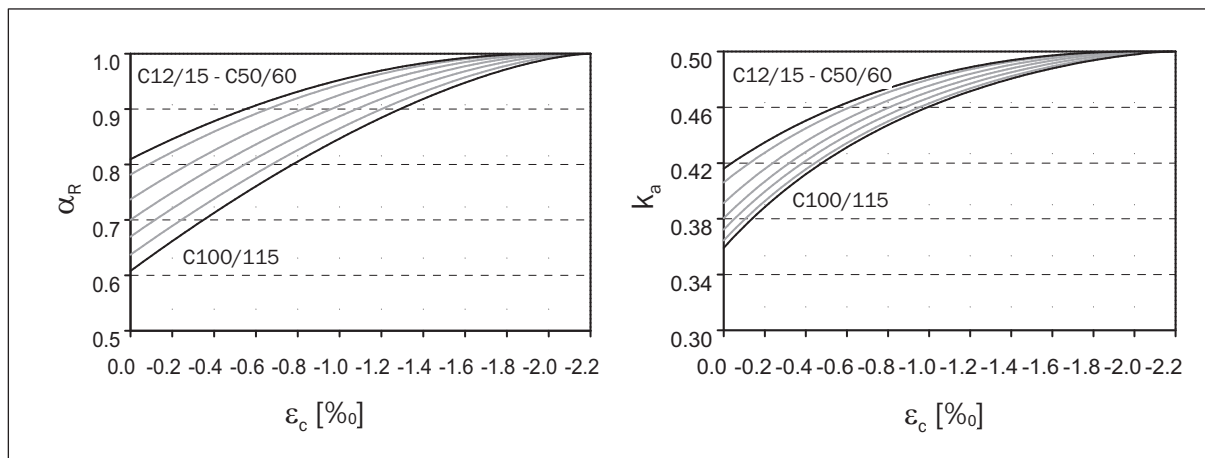


Bild 5.2: α_R und k_a bei einem ganz überdrückten Querschnitt

erlaubte Betonstauchung für normalfesten Beton bei vereinfachter Berücksichtigung der günstigen Wirkung des Kriechens auf 2.2‰ beschränkt, während für den hochfesten Beton unverändert ε_{c2} gilt. Diese Regelung sorgt für einen Sprung bei dem Übergang der Güteklassen von normalfestem zu hochfestem Beton und sollte daher verändert werden.

Zur Verifikation der erweiterten Bemessungsroutinen soll die Ermittlung der Bewehrung einer einfachen Innenstütze (Bild 5.3) unter starker Druckbeanspruchung gezeigt werden, da dort die höhere Druckfestigkeit in stärkerem Maße ausgenutzt werden kann. Es ist erkennbar, dass mit zunehmender Zylinderdruckfestigkeit die Reduktion der erforderlichen Bewehrung aufgrund des erhöhten Sicherheitsbeiwertes für hochfesten Beton nach DIN 1045-1 (2001) geringer ausfällt.

An dieser Stelle sei im Hinblick auf die DIN 1045-1 (2001) auf einige Besonderheiten bei der Bemessung mit hochfestem Beton eingegangen. Für stark auf Biegung beanspruchte Bauteile wird die bezogene Druckzonenhöhe x/d für normalfesten Beton auf 0.45 und für hochfesten Beton auf 0.35 beschränkt. Diese Regelung trägt dem Umstand der mangelnden Duktilität des Werkstoffs Beton Rechnung. Wird die Duktilität auf einem anderen Weg,

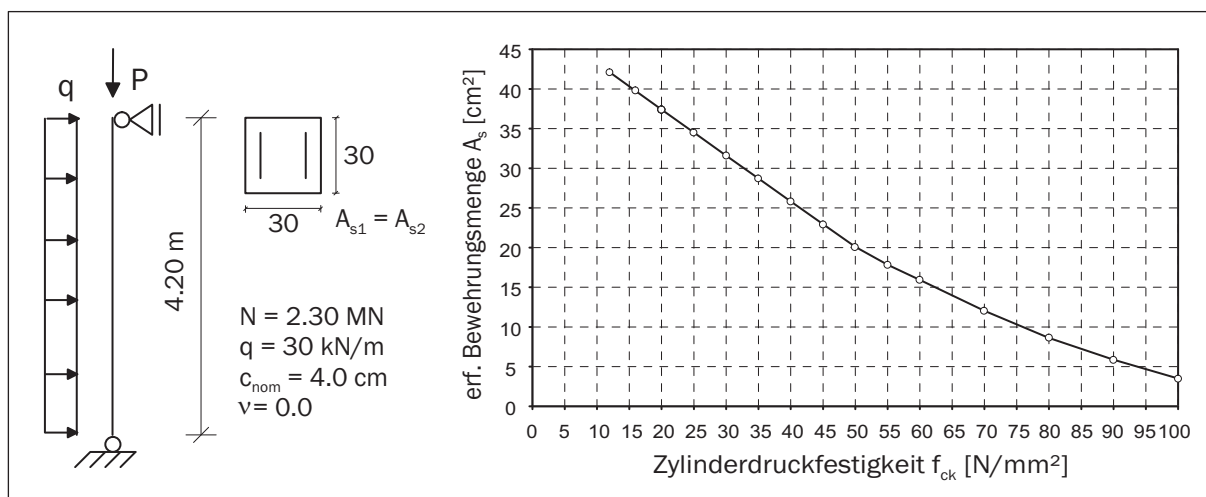


Bild 5.3: System und Bemessungsergebnisse einer axial gedrückten und auf Biegung beanspruchten Innenstütze

z. B. durch Umbügelung, Zugabe von Stahlfasern oder Veränderung der Bewehrungsmenge erhöht, so darf von dieser Beschränkung abgesehen werden. Weitere besondere Regelungen hinsichtlich hochfesten Betons betreffen zum großen Teil die Querbewehrung, der aber naturgemäß bei der Konstruktion von Schalentragwerken weniger Bedeutung zukommt. Daher wird hier von einer vertiefenden Betrachtung abgesehen.

Für den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit wird nach DIN 1045-1 (2001) eine Mindestbewehrung

$$A_s = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct} / \sigma_s \quad (5.10)$$

und ein maximaler Stabdurchmesser

$$d_s = d_s^* \cdot \frac{k_c \cdot k \cdot h_t}{4 \cdot (h - d)} \cdot \frac{f_{ct,eff}}{f_{ct,0}} \geq d_s^* \cdot \frac{f_{ct,eff}}{f_{ct,0}} \quad (5.11)$$

gefordert.

Die Größe der Mindestbewehrung ist folglich in erheblichem Maße von der Zugfestigkeit des Betons abhängig. Die Differenz zwischen einem C 30/37 und einem C 80/95 beträgt beispielsweise ca. 65 %.

Die programmtechnischen Voraussetzungen zur Durchführung dieses Nachweises innerhalb des Programmsystems FEMAS 2000 wurden ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit geschaffen.

5.2 Auswahl von stabilitätsgefährdeten Modellschalen

Um eine Auswahl von Modellschalen zu treffen, die im Rahmen dieser Arbeit näher zu betrachten sind, müssen mehrere Parameter berücksichtigt werden. Die Arbeit soll hierbei

die Untersuchung der Schalentypen Kreiszylinderschale und Hyperboloidschale umfassen. Des Weiteren erfolgt eine Beschränkung auf ausgewählte Lastfälle, die für eine praktische Anwendung sinnvoll erscheinen. Bei der Hyperbelschale werden daher die Lastfälle Eigengewicht und Winddruck gewählt. Der Kreiszyylinder dagegen wird mit dem Lastfall Axialdruck beaufschlagt, um einen einfachen und überschaubaren Spannungszustand zu erreichen.

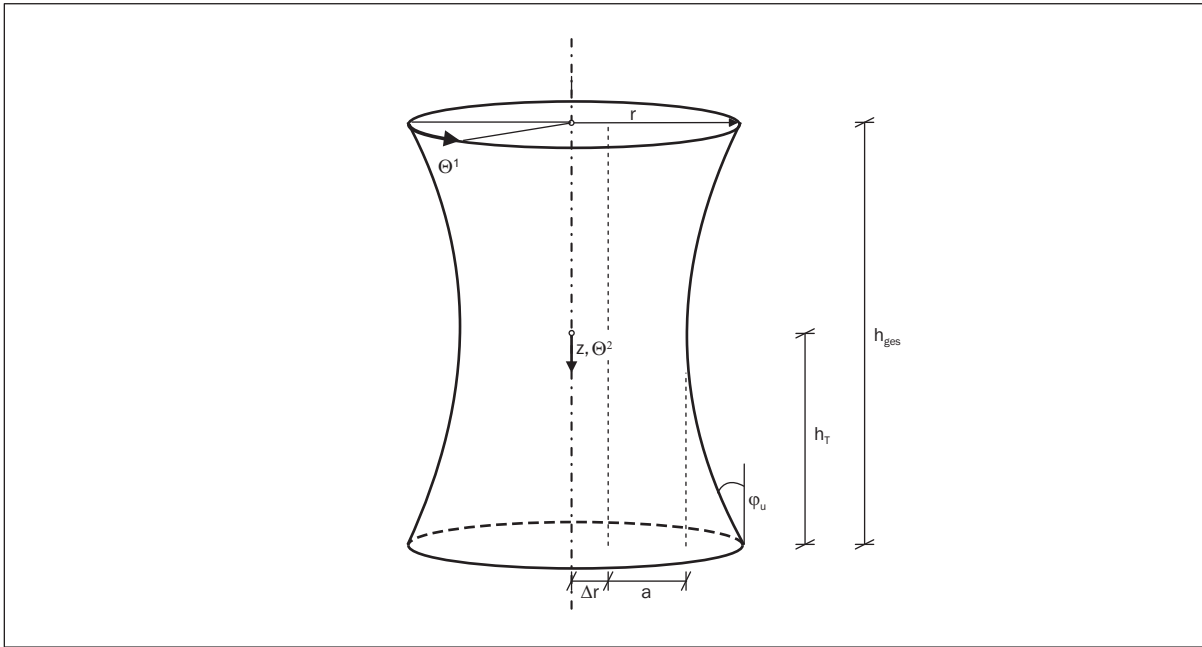


Bild 5.4: Geometrie eines Rotationshyperboloids

Bei der Auswahl einer speziellen Hyperbelgeometrie nach Bild 5.4, welche der Gleichung

$$r(\theta_2) = \Delta r + a \cdot \sqrt{\left(\frac{\theta_2}{b}\right)^2 + 1}. \quad (5.12)$$

gehört, kann für eine allgemeine Betrachtung auf die Arbeit von Eckstein et al. (1979) zurückgegriffen werden. In dieser Arbeit wurden Schalentypen unterschiedlicher GAUSS'scher Krümmung auf ihre Beullast und Anfälligkeit gegenüber Imperfektionen überprüft. Diese Überprüfung wurde für die Lastfälle Axialdruck und Manteldruck durchgeführt. Bei Hyperbelschalen wurde der Bereich der minimalen Beullast bei einem Verhältnis der Hauptkrümmungsradien $R_1/R_2 = 0.07$ identifiziert (Bild 5.5). Allerdings wurde gleichzeitig herausgearbeitet, dass gerade in diesem Fall die Imperfektionsempfindlichkeit am geringsten ist.

Daraus allein lässt sich aufgrund der vielfältigen Parameter in Gleichung (5.12) keine eindeutige ungünstige Geometrie festlegen. Für eine spätere Übertragung der Ergebnisse dieser Arbeit auf reale Bauwerke werden die Geometrieparameter von existierenden Kühltürmen und Vorstudien herangezogen. Die Neigung des unteren Schalenrandes bewegt sich hierbei in einem Bereich von 15° bis 19° . Der Grund hierfür liegt in einer möglichst geringen

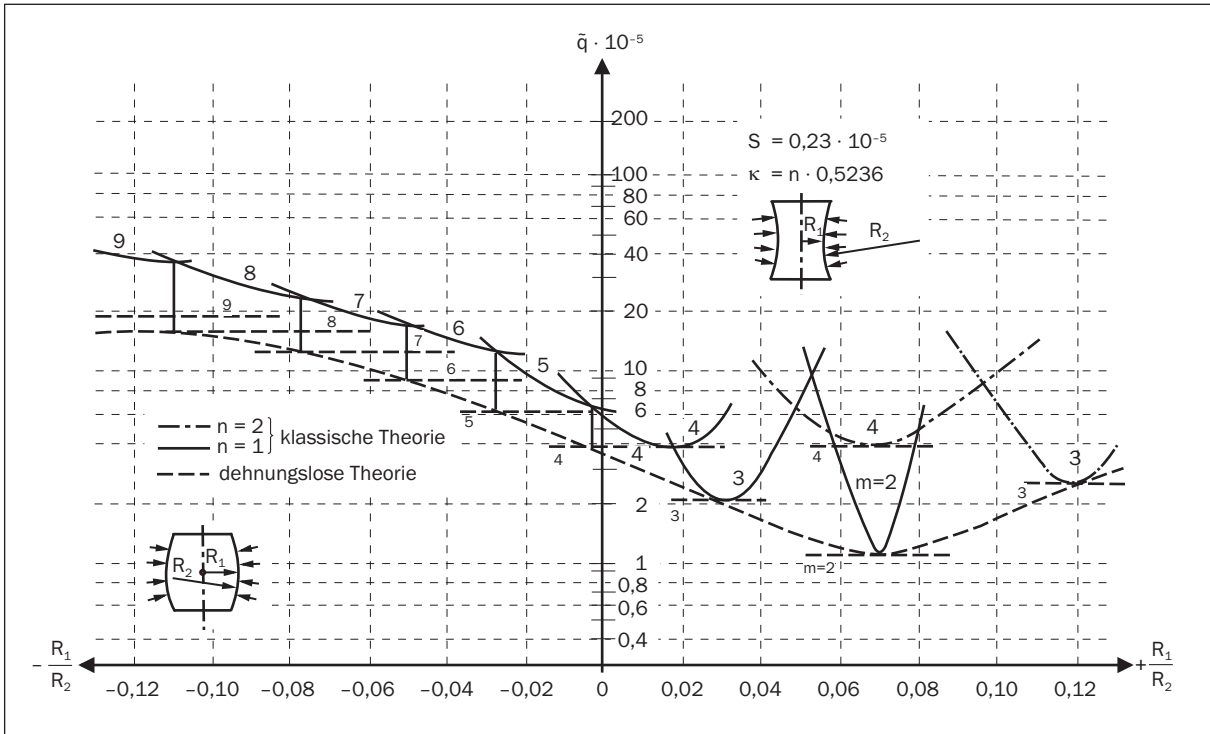


Bild 5.5: Beullast und Imperfektionsempfindlichkeit nach Eckstein et al. (1979)

Meridiankrümmungsdifferenz zwischen Fußpunkt und Taille, die das Lastabtragungsverhalten einer Hyperbelschale positiv beeinflusst.

Um der Größenordnung eines realen Bauwerks zu entsprechen und damit auch sinnvolle Bewehrungsmengen zu erzielen, wurden daher für die betrachtete Schale $h_{ges} = 200$ m, $h_T = 100$ m, $a = 50$ m und $\varphi_u = 15.0^\circ$ gewählt. Daraus folgt nach Umstellung von Gleichung (5.12) die Gleichung zur Ermittlung von b zu

$$b = \sqrt{-\frac{h_T^2}{2} + \sqrt{\frac{h_T^4}{4} + \frac{a^2 h_T^2}{\tan^2 \varphi_u}}}. \tag{5.13}$$

Diese führt bei den oben gewählten Parametern zu $b = 119.66$ m. Im Folgenden ist diese Geometrie mit Schalen­geometrie I bezeichnet.

Mittels der Näherung für die Hauptkrümmungsradien

$$R_1 \approx -r(\theta_2) \tag{5.14}$$

$$R_2 \approx \frac{b^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\theta_2}{b}\right)^2 + 1}}{a} \tag{5.15}$$

für eine Hyperbelschale mit konstantem Meridiankrümmungsradius ermittelt sich das Verhältnis R_1/R_2 zu 0.1746. Diese Schale weist nicht die geringste Beullast auf.

Wird eine Schale mit $R_1/R_2 = 0.07$ angestrebt, so kann bei gegebenen Parametern h_{ges} ,

h_T und a der Parameter b aus folgender Gleichung gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_2} &= \frac{a}{b^2 \sqrt{\left(\frac{\theta_2}{b}\right)^2 + 1}} = 0.07 \\ &= \frac{a^2}{0.07} = b^2 \sqrt{\left(\frac{\theta_2}{b}\right)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Bei den hier verwendeten Parametern führt dies zu einem Parameter $b = 176.25$ m. Eine weitere Beschränkung in der Arbeit von Eckstein et al. (1979) ist die Bedingung eines konstanten Meridiankrümmungsradius R_2 . Dies führt zu der Bedingung

$$\left(\frac{\theta_2}{b}\right)^2 \ll 1. \quad (5.17)$$

Bei Überprüfung der bis hierher gewählten Schalen auf Gültigkeit von Gleichung (5.17) fällt auf, dass die Bedingung erst ab einem Parameter $b \geq 300.0$ m annähernd erfüllt ist. Daher wird für die endgültige Festlegung der Schalengeometrie II eine zusätzliche Analyse der linearen Beullast für die hier gegebenen Schalencharakteristika notwendig.

Hierzu wurde bei einer Hyperbelschale mit konstantem Parameter a und konstanter Höhe H der Parameter b variiert. Als Lagerungsarten wurden die Einspannung des unteren Randes und der freie und ausgesteifte obere Rand untersucht. In Bild 5.6 ist das Ergebnis einer klassischen Stabilitätsanalyse einer Schale mit konstanter Dicket = 25.0 cm zu sehen. Es ist jeweils die Beullast eines bestimmten Lastfalls - Eigengewicht (G), Windinnensog (W_i), Windaußendruck (W_a) und $G + W_a + W_i$ - über dem gemittelten Verhältnis R_1/R_2 aufgetragen. Die Verläufe zeigen, dass, anders als bei den untersuchten Schalen in Eckstein et al. (1979), kein lokales Beulminimum bei dem Verhältnis $R_1/R_2 = 0.07$ entsteht, sondern erst bei einer geringeren Meridiankrümmung der Schale. Die Lage dieses Minimums variiert in den betrachteten Fällen mit unterschiedlicher Schalendicke (s. Bild 5.7) bzw. unterschiedlicher Lagerung nur leicht - im Fall einer Membranlagerung tritt für diese spezielle Geometrie kein Beulminimum auf (Bild 5.8) -, so dass ein mittleres Verhältnis zu $R_1/R_2 = 0.037$ angegeben werden kann.

Aus diesen Überlegungen heraus wird für die Schalengeometrie II ein Parameter $b = 250.5$ m gewählt, da die zusätzlich durchgeführten Untersuchungen zeigten, dass das Auftreten des Beulminimums in starkem Maße von den übrigen Schalenparametern wie Dicke t , Δr , a , b und φ_u abhängig ist. Daher kann hier keine allgemeingültige Grenze für Hyperboloidschalen festgelegt werden.

Die Neigung des unteren Schalenrandes dieser Schale beträgt nach Gleichung

$$r' = a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} \cdot \frac{z}{b^2} \quad (5.18)$$

$\varphi_u = 8.02^\circ$. Die Krümmungsdifferenz zwischen dem unteren Rand und der Taille kann anhand der Gleichung

$$r'' = \frac{a}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-3/2} \quad (5.19)$$

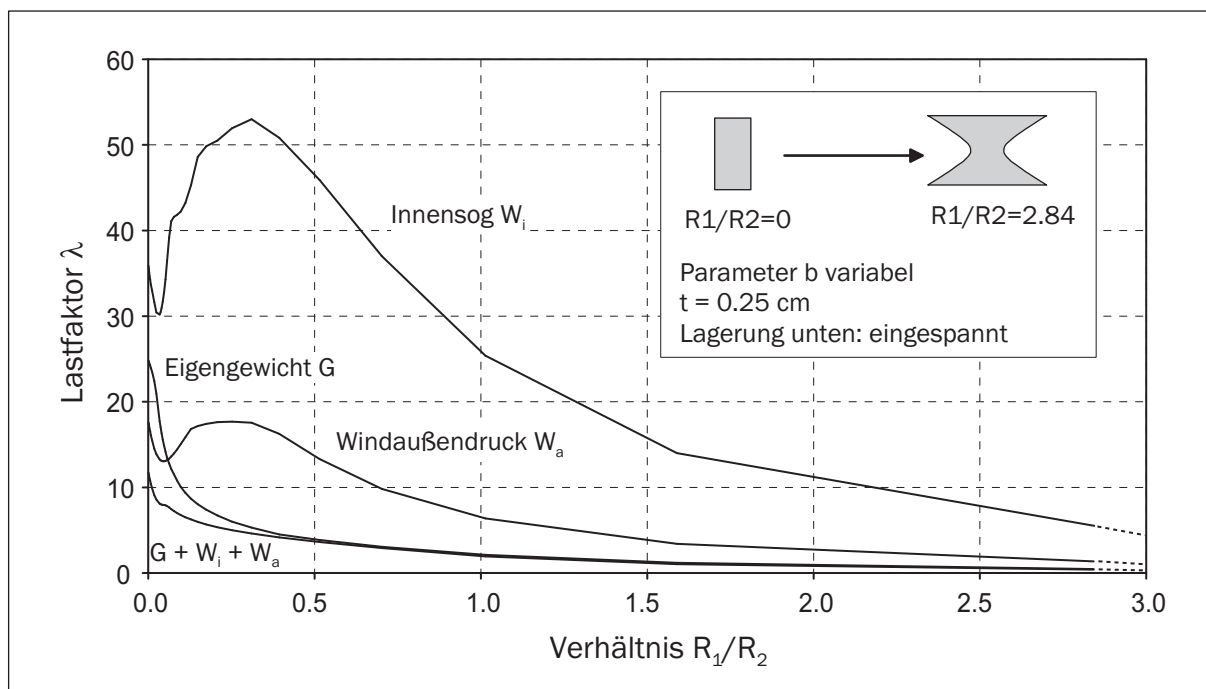


Bild 5.6: Beullasten eines eingespannten Rotationshyperboloiden mit Schalendicke $t = 25.0$ cm

ermittelt werden. Für Schallengeometrie I ergibt sich die Krümmungsdifferenz zu $(1.5776 \cdot 10^{-3} - 3.4919 \cdot 10^{-3})$ und für Schallengeometrie II zu $(1.0590 \cdot 10^{-3} - 1.6096 \cdot 10^{-3})$.

Weiterhin entscheidend für den Spannungszustand im Tragwerk ist neben der Form auch die Lagerung des Tragwerks. Prinzipiell können sowohl am oberen als auch am unteren Rand unterschiedliche Lagerungsarten (Bild 5.10) zwischen frei und eingespannt gewählt werden. Um auch an dieser Stelle nicht den Bezug zu realen Bauwerken zu verlieren, wird im Rahmen dieser Arbeit nur auf einige Lagerungsarten näher eingegangen. Durch ein Stützenfachwerk gelagerte Kühltürme liegen in dem Bereich zwischen idealer Membranlagerung und gelenkiger Lagerung des unteren Randes. Diese Form der Lagerung wird aber nicht näher betrachtet. Die in jüngerer Zeit beliebteren radialgestützten Kühlturmschalen mit einem oberen Aussteifungsrandglied hingegen liegen genau innerhalb des Bereichs der Lagerungsarten 2.1, 3.1, 2.3 und 3.3. Um die Lagerung des oberen Randes bei Art 2.3 und 3.3 zu realisieren, wurde an der oberen Knotenreihe der Diskretisierung die Verdrehung um die Θ_2 -Achse behindert. Dadurch wird erreicht, dass eine unendliche Steifigkeit des oberen Randes simuliert wird, wobei die Starrkörperbewegung des oberen Randes ungehindert bleibt. In Tabelle 5.2 sind die im weiteren Verlauf der Arbeit betrachteten Hyperbelschalen aufgeführt.

Als klassisches Beispiel für eine überwiegend auf Druck beanspruchte Struktur soll im weiteren Verlauf auch eine Kreiszyllinderschale untersucht werden. Die Auswahl der Geometrie einer solchen Kreiszyllinderschale fällt aufgrund der verschiedenen, die Beullast bestimmenden, Parameter wie beispielsweise Höhe, Radius und Dicke schwer. Eine Orientierung an bereits bestehenden Forschungsarbeiten, wie beispielsweise Popov & Med-

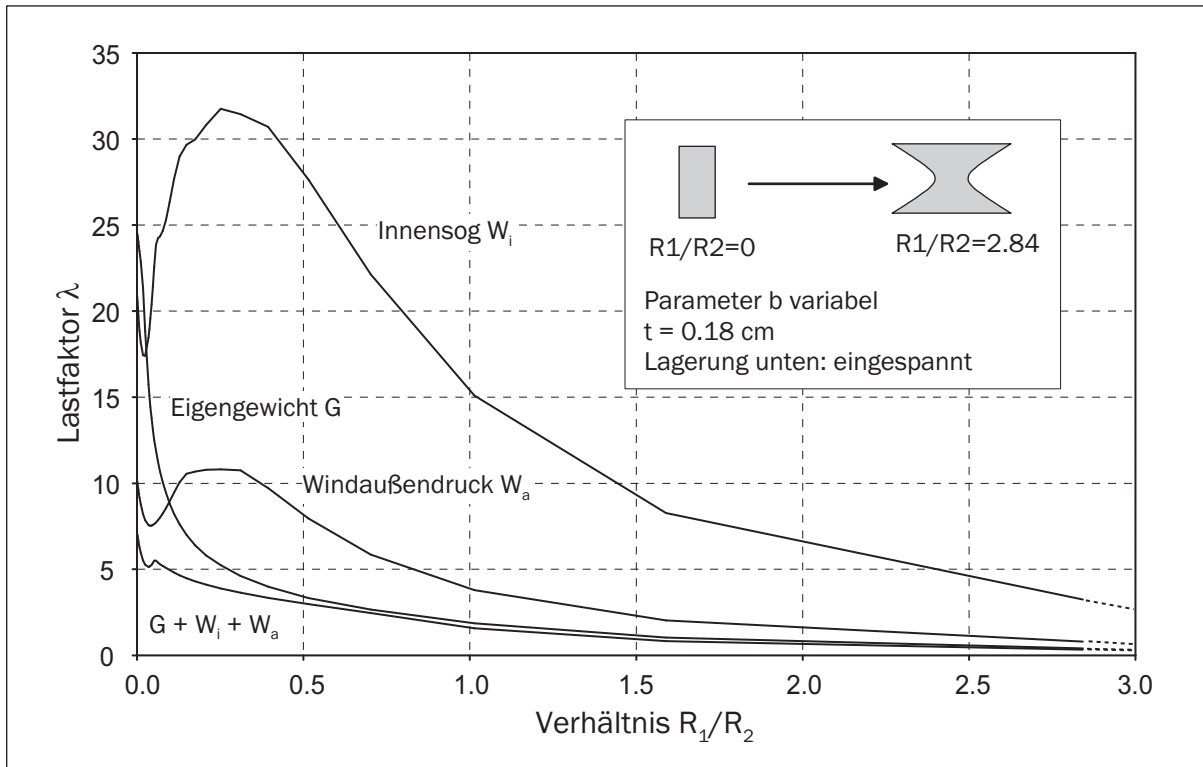


Bild 5.7: Beullasten eines eingespannten Rotationshyperboloiden mit Schalendicke $t = 18.0$ cm

Kennung	Schalenform	Material	Lagerung (unten-oben)
I 30 aa	I	C 30/37	gelenkig-frei (2.1)
I 30 ab	I	C 30/37	gelenkig-ausgesteift (2.3)
I 30 ba	I	C 30/37	eingespannt-frei (3.1)
I 30 bb	I	C 30/37	eingespannt-ausgesteift (3.3)
I 80 aa	I	C 80/95	gelenkig-frei (2.1)
I 80 ab	I	C 80/95	gelenkig-ausgesteift (2.3)
I 80 ba	I	C 80/95	eingespannt-frei (3.1)
I 80 bb	I	C 80/95	eingespannt-ausgesteift (3.3)
II 30 aa	II	C 30/37	gelenkig-frei (2.1)
II 30 ab	II	C 30/37	gelenkig-ausgesteift (2.3)
II 30 ba	II	C 30/37	eingespannt-frei (3.1)
II 30 bb	II	C 30/37	eingespannt-ausgesteift (3.3)
II 80 aa	II	C 80/95	gelenkig-frei (2.1)
II 80 ab	II	C 80/95	gelenkig-ausgesteift (2.3)
II 80 ba	II	C 80/95	eingespannt-frei (3.1)
II 80 bb	II	C 80/95	eingespannt-ausgesteift (3.3)

Tabelle 5.2: Bezeichnungen der Modellschalen

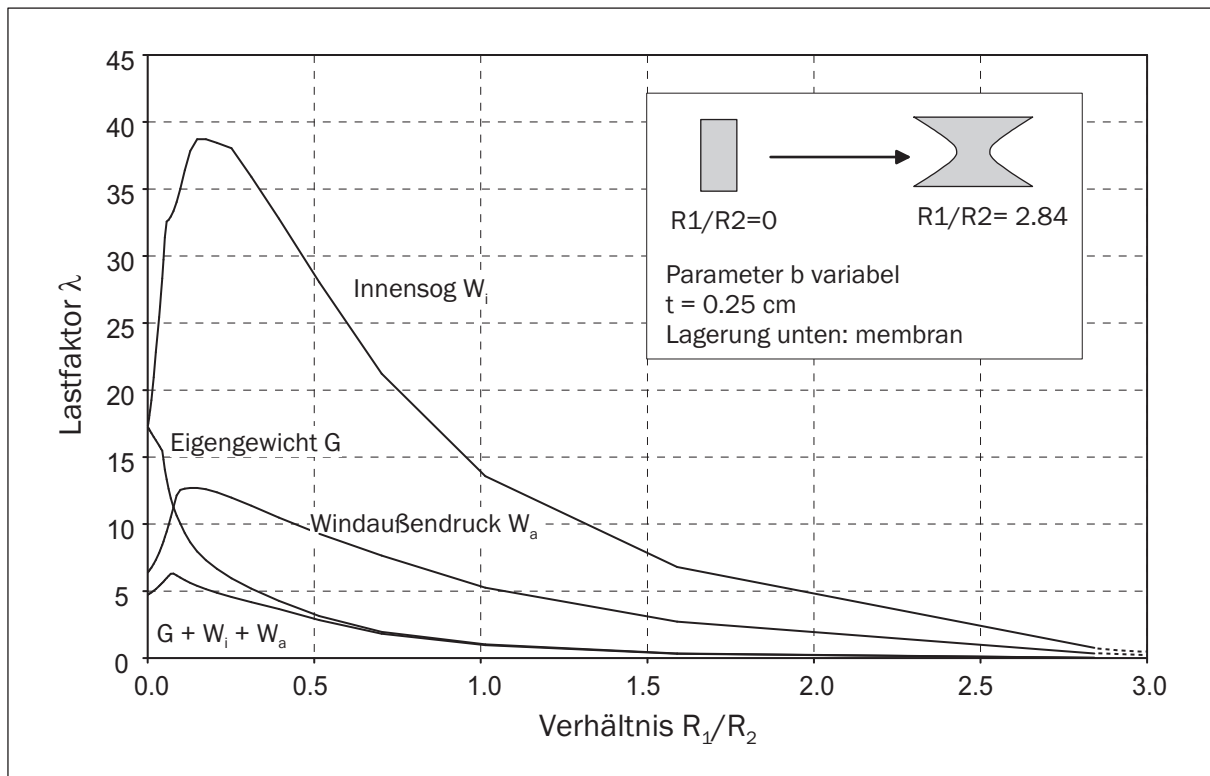


Bild 5.8: Beullasten eines membran gelagerten Rotationshyperboloiden mit Schalendicke $t = 25.0$ cm

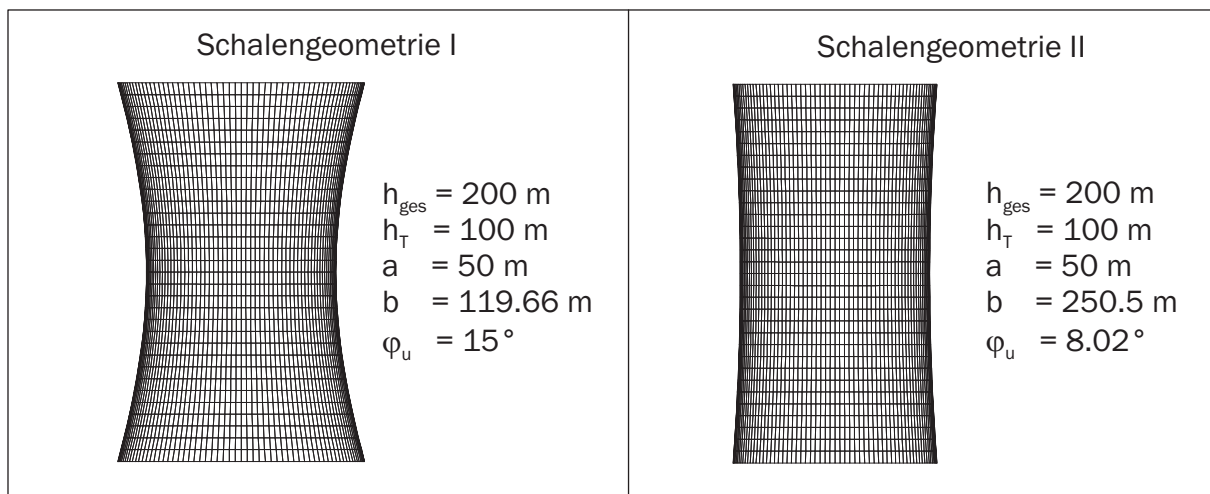


Bild 5.9: Geometrien der untersuchten Hyperbelschalen

wadowski (1981), ist nur bedingt möglich, da die in den Untersuchungen als besonders stabilitätsgefährdeten Abmessungen nur Gültigkeit für Stahlschalen besitzen - im Speziellen Silos und Kaminrohre.

Wird hingegen der Werkstoff Stahlbeton verwendet, so werden die in diesen Publikationen als besonders stabilitätsgefährdet identifizierten Abmessungsbereiche verlassen. Da-

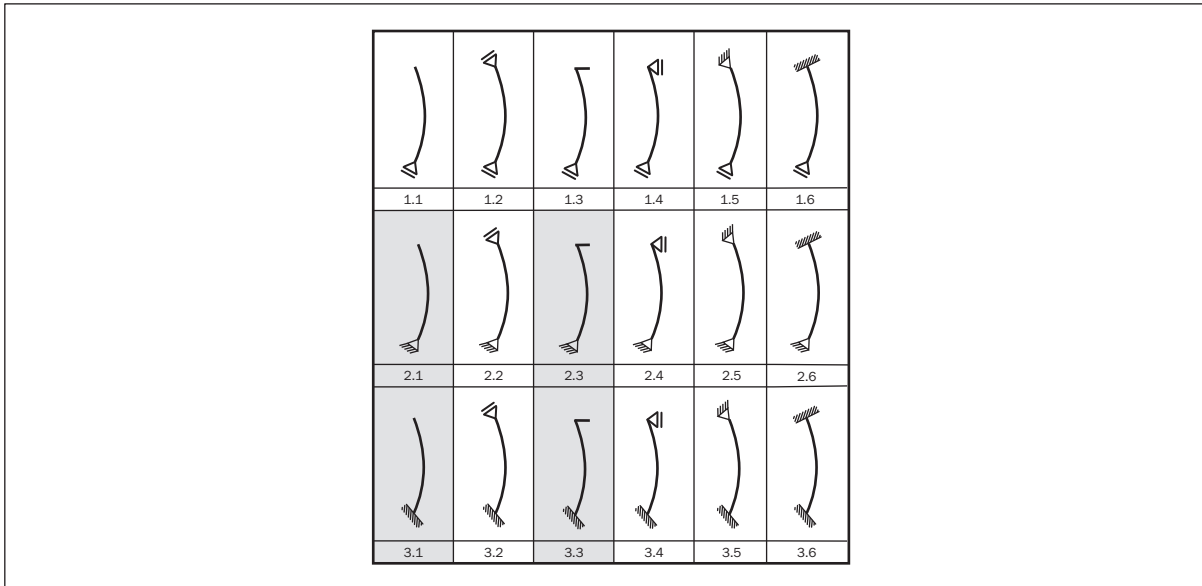


Bild 5.10: Lagerungsvarianten einer Hyperbelschale

her wurde als Beispiel für ein ausschließlich druckbeanspruchtes Schalentragwerk ein axial gedrücktes Schalenfeld untersucht. Diese Wahl bedeutet eine Reduktion der Parameter, welche die kritische Last beeinflussen, auf zwei Größen; die Schalendicke und der Schalenradius.

5.3 Bemessung und Konstruktion der Modellschalen

5.3.1 Allgemeine Vorgaben

Für die Verifizierung der programmtechnischen Erweiterungen und für die in Kapitel 8 durchgeführten nichtlinearen Analysen wurde im Rahmen der Arbeit für die in dieser Studie betrachteten Modellschalen die Bewehrung für unterschiedliche Betongüten ermittelt. Im Folgenden sind diese Ergebnisse exemplarisch für drei Schalen dargestellt. Die Schalen wurden jeweils unter einer Kombination von Eigengewicht und Wind belastet.

Die Bemessung der Schalen wurde nach DIN 1045-1 (2001) durchgeführt. Hierzu ist zuerst die Expositionsklasse des zu entwerfenden Bauteils zu wählen.

Expositionsklassen legen in Abhängigkeit der Beaufschlagungsart des Bauwerks, sprich der das Bauwerk umgebenden Bedingungen, die Mindestbetonfestigkeitsklassen, die notwendige Mindestbetondeckung und das Vorhaltemaß fest.

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c \quad (5.20)$$

Hierdurch soll bereits zu Zeiten des Entwurfs und der Planung eine möglichst hohe Dauerhaftigkeit des Bauwerks erreicht werden. Die hier betrachteten Modellschalen sind als Kühlturmbauwerk denkbar und unterliegen daher ebenfalls den Regelungen der BTR

(1997). Ohne näher auf die Vorschriften einzugehen wird für einen im Kühlturm- bzw. Tankbau üblichen sehr dichten Beton und einer sehr sorgfältigen Fertigung die Betondeckung zu $c_{nom} = 30$ mm gewählt.

Für eine realitätsnahe Auslegung der Bewehrung werden die maßgebenden Lastfallkombinationen benötigt. Da hier eine Hyperbelschale betrachtet wird, welche in den meisten Fällen als Kühlturm genutzt wird, sollen in Anlehnung an die BTR (1997) - basierend auf der Norm DIN 1045 (1988) - die beiden Kombinationen $G + W + T$ mit $\gamma_s = 1.75$ und $G + 1.75 W$ mit $\gamma_s = 1.0$ gewählt werden.

Da dieser Arbeit aber andererseits die neue DIN 1045-1 (2001) zugrunde liegen soll, wurde dem Teilsicherheitskonzept durch eine geeignete normkonforme Lastkombination Rechnung getragen. Voruntersuchungen zeigen, dass eine einfache Transformation in das neue Normenkonzept die Bewehrungsmengen stark (bis zu 40 %) ansteigen lassen [Andres et al. 1999]. Ein Herausarbeiten der maßgeblichen Lastkombination kann und soll allerdings nicht Bestandteil dieser Arbeit sein. Daher wird in Anlehnung an die DIN 1045-1 (2001) ausschließlich die Lastkombination $1.0 G + 1.5 W$ für günstig wirkendes Eigengewicht und den Verkehrslastfall Wind gewählt. Der Lastfall Wind auf eine Kühlturmschale ist für eine Stabilitätsuntersuchung unter Berücksichtigung von materiellen Nichtlinearitäten sehr geeignet, da der Lastabtrag der Hyperbelschale sowohl durch ausgeprägte Zug- als auch Druckbereiche erfolgt. Die zurzeit in der Erstellung befindliche Neufassung der BTR-Entwurf, Stand 07/03 2003] gibt von den hier festgelegten Annahmen leicht differierende Lastkombinationen vor. Die dort festgelegten Teilsicherheits- und Kombinationsbeiwerte standen zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit zur Diskussion und konnte daher noch nicht angesetzt werden.

5.3.2 Ergebnisdiskussion der Bemessung der Modellschalen für Hochleistungsbeton

Die Bewehrungsermittlung wird für die Betongüteklassen C 30/37, C 50/60, C 70/80, C 80/95 und C 100/115 durchgeführt. An dieser Stelle sind exemplarisch die Ergebnisse für die Hyperbelschale mit einer gelenkigen Lagerung am unteren Schalenrand aus C 30/37 und C 80/95 dargestellt. In den Bildern 5.11 und 5.12 für die Schalengeometrie I fällt auf, dass die maximale Bewehrung für alle Betonsorten gleich bleibt, da hier Bereiche mit starker Biege- bzw. Zugbeanspruchung maßgebend sind. Der Knick in dem Verlauf der Meridianbewehrung der Schale mit Aussteifung des oberen Randes resultiert aus der Entlastung des Anströmmeridians im oberen Schalenbereich. Hier wird der bei etwa 100° gegenüber dem Anströmmeridian versetzte, in der Flanke liegende Zugbereich maßgebend.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die zusätzliche Berücksichtigung von Temperaturlastfällen die Bewehrung für höherfeste Betone aufgrund der erhöhten Steifigkeit anwachsen lassen würde [Andres & Harte 2000].

Ergänzend hierzu wurde die Bewehrung für denselben Hyperboloiden mit einer Schalendicke von $t = 21$ cm ermittelt, die aus der linearen Beulanalyse entstammt. Die Bilder

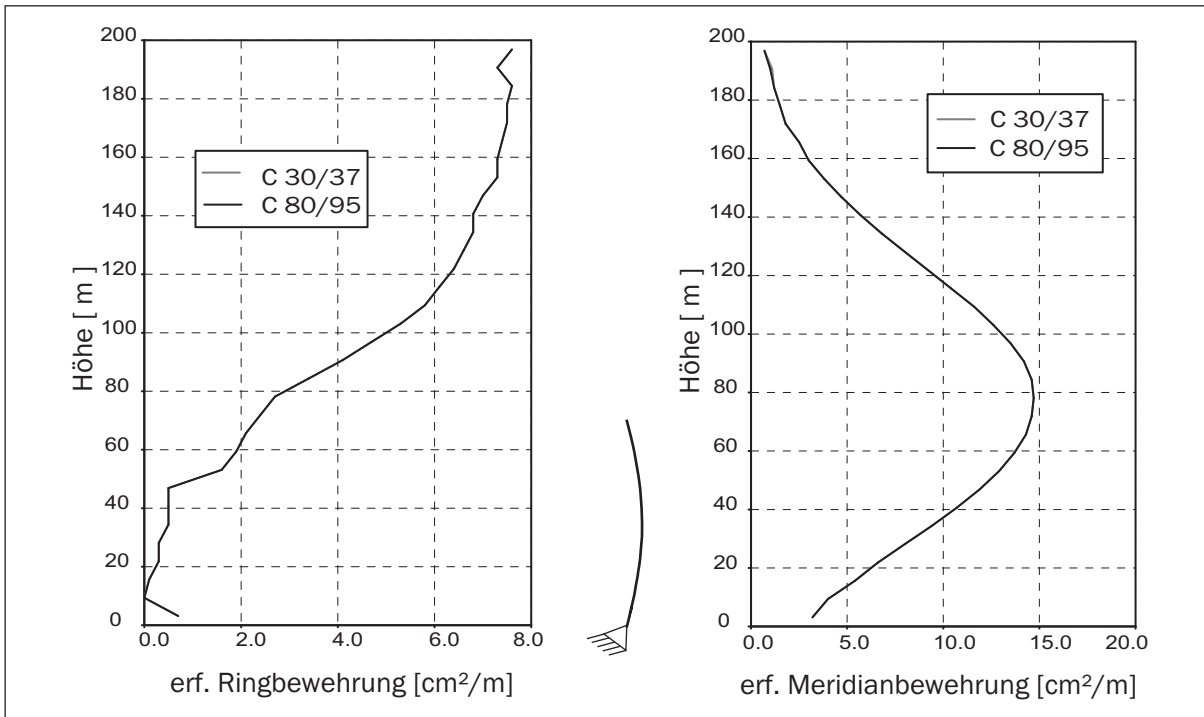


Bild 5.11: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „I 30 aa“ und „I 80 aa“ für die Schalendicke $t = 25$ cm

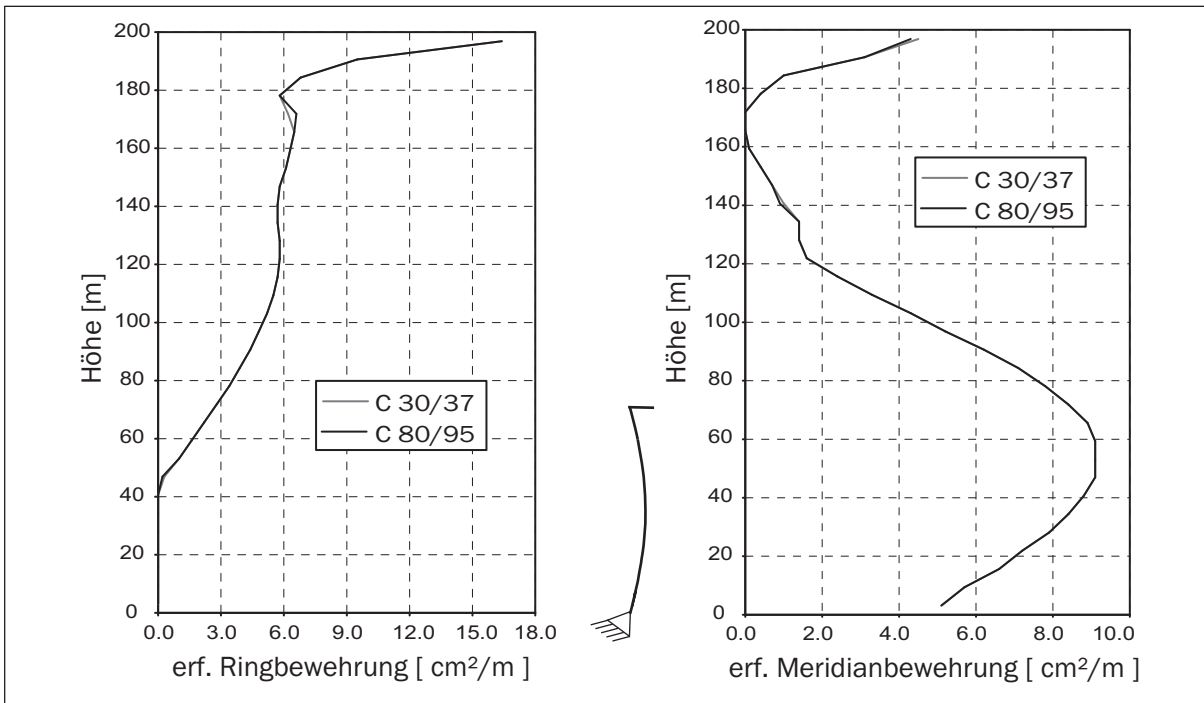


Bild 5.12: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „I 30 ab“ und „I 80 ab“ für die Schalendicke $t = 25$ cm

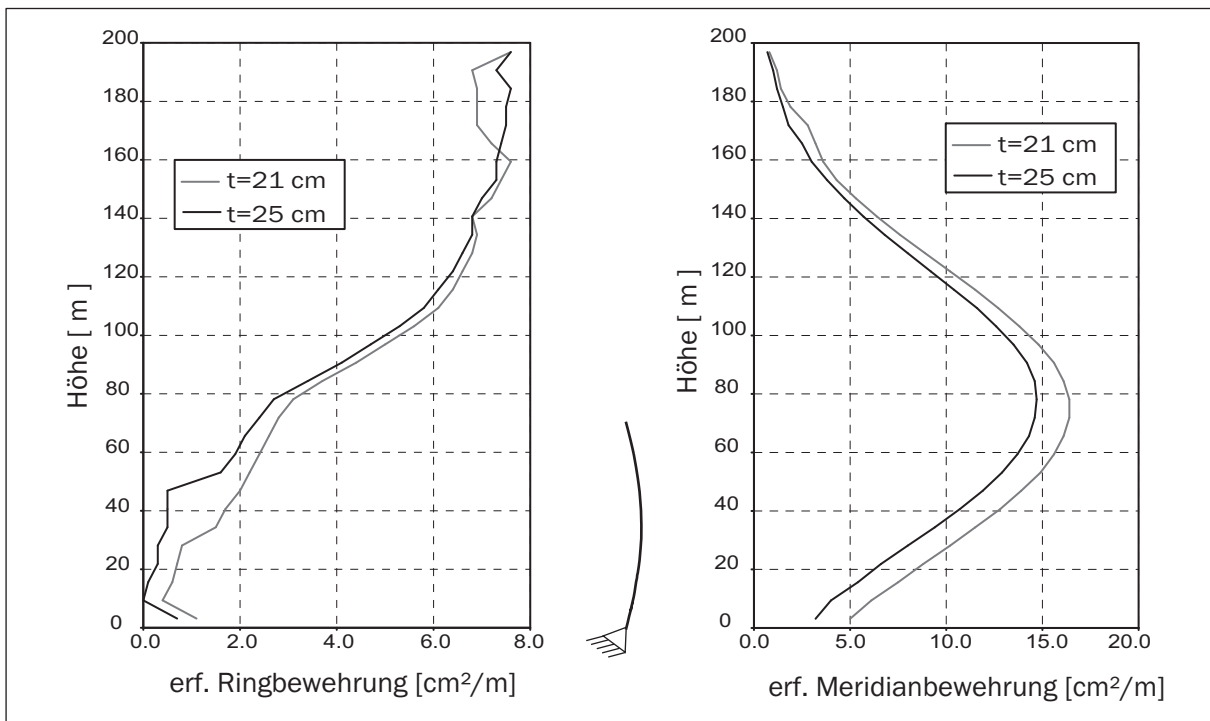


Bild 5.13: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „I 80 aa“ für die Schalendicke $t = 21$ cm bzw. $t = 25$ cm

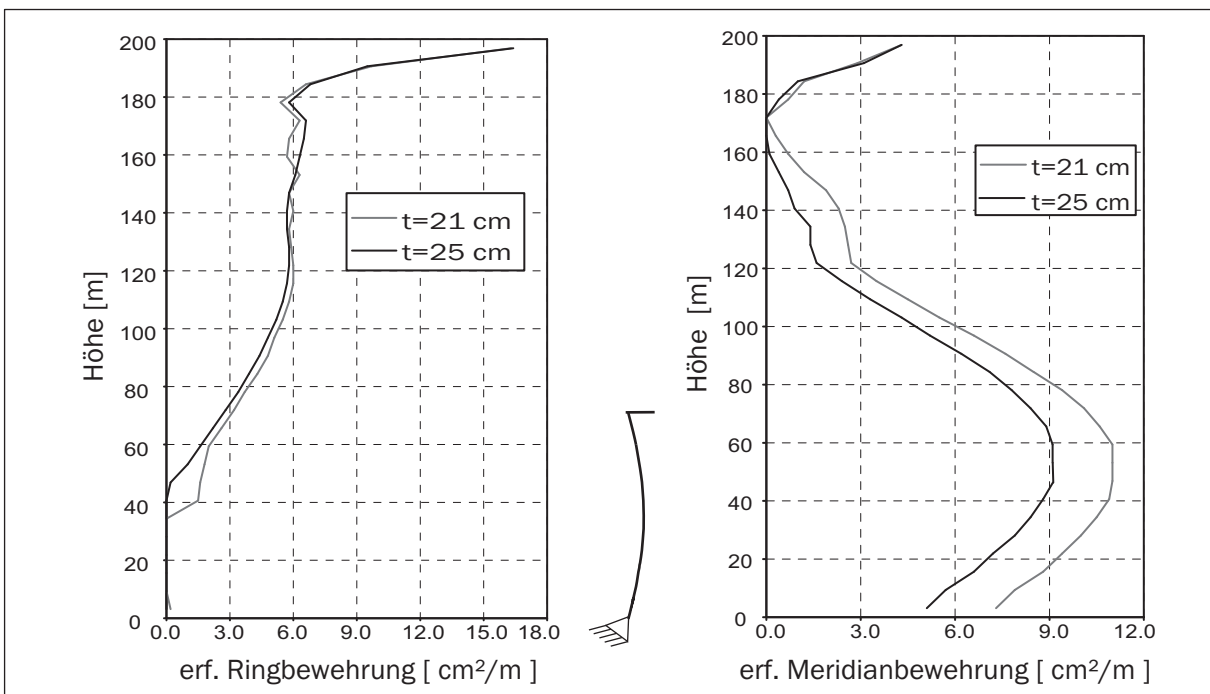


Bild 5.14: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „I 80 ab“ für die Schalendicke $t = 21$ cm bzw. $t = 25$ cm

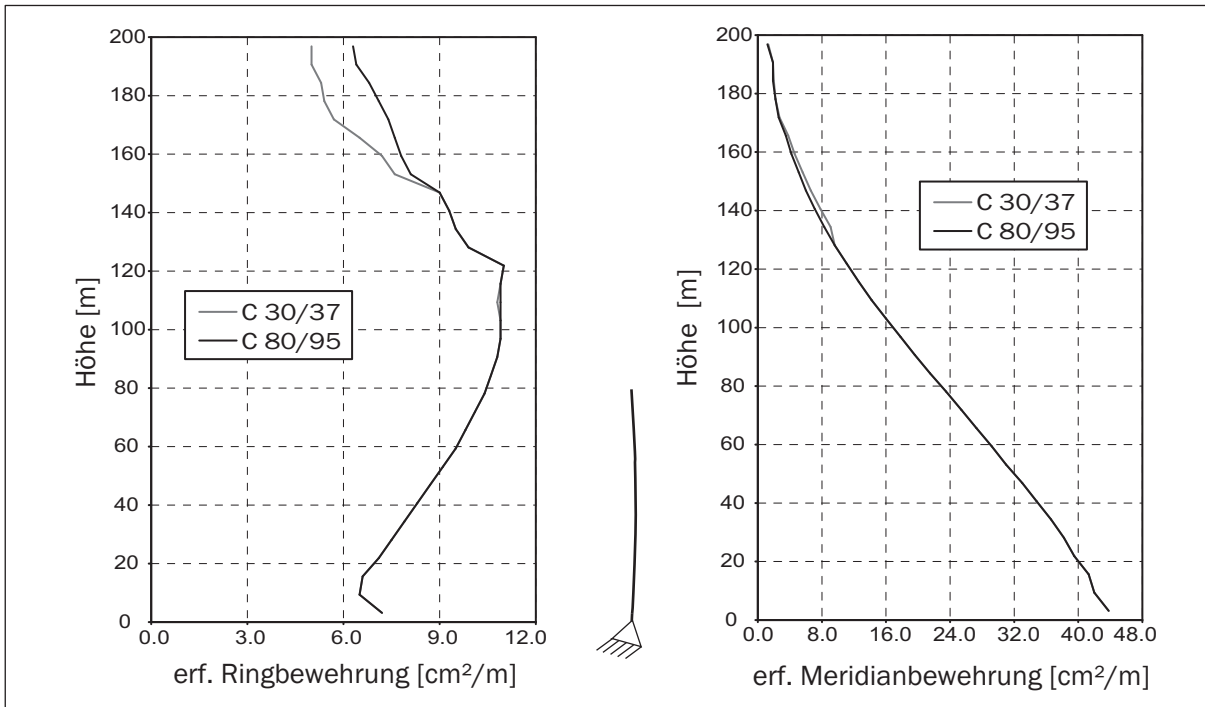


Bild 5.15: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „II 30 aa“ und „II 80 aa“ für die Schalendicke $t = 20$ cm

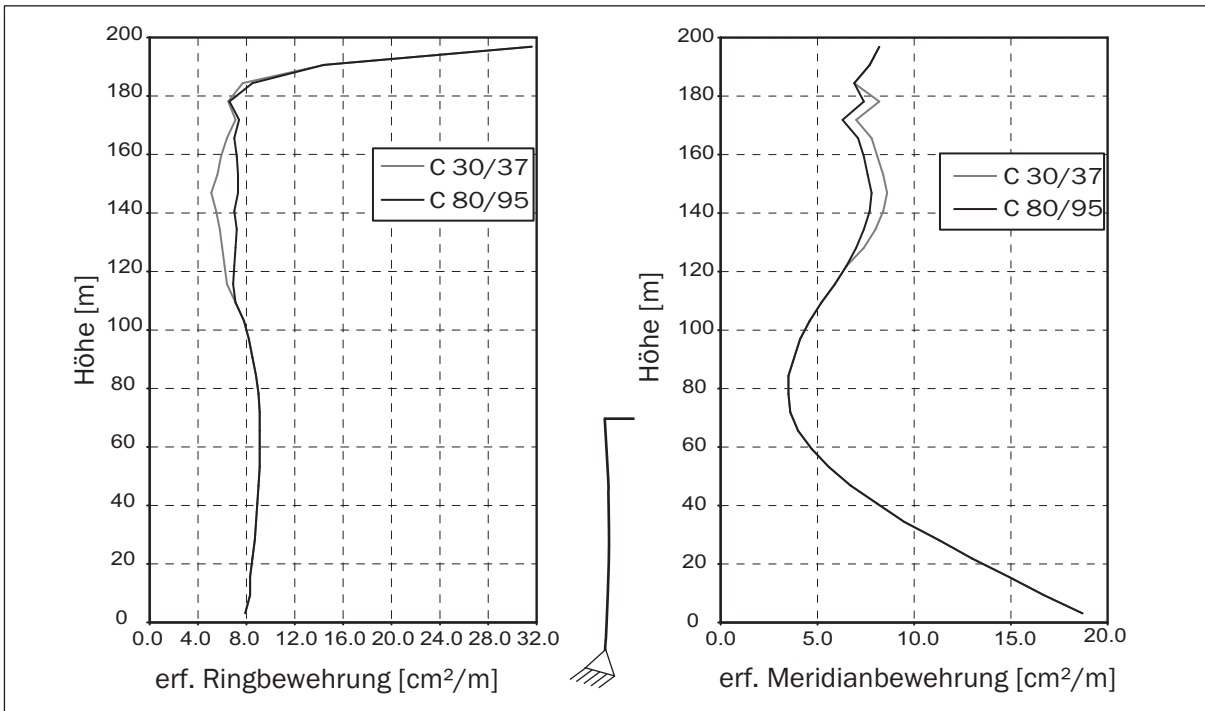


Bild 5.16: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „II 30 ab“ und „II 80 ab“ für die Schalendicke $t = 20$ cm

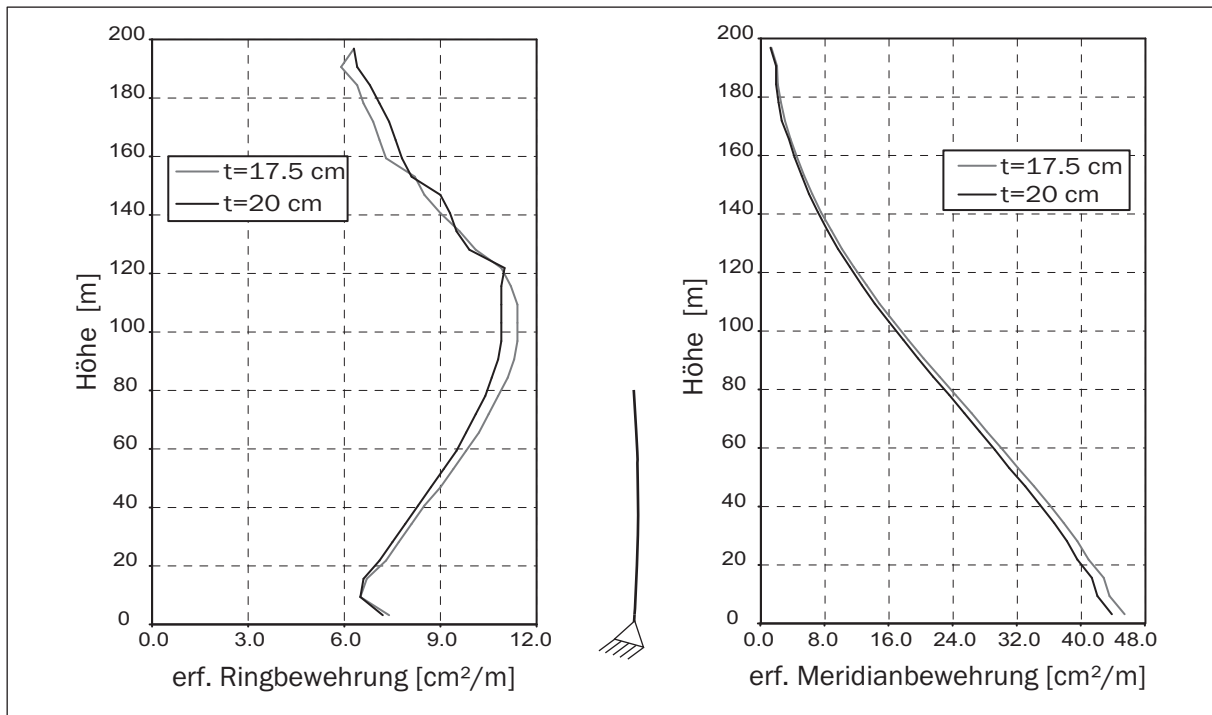


Bild 5.17: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „II 80 aa“ für die Schalendickent $t = 17.5$ cm bzw. $t = 20$ cm

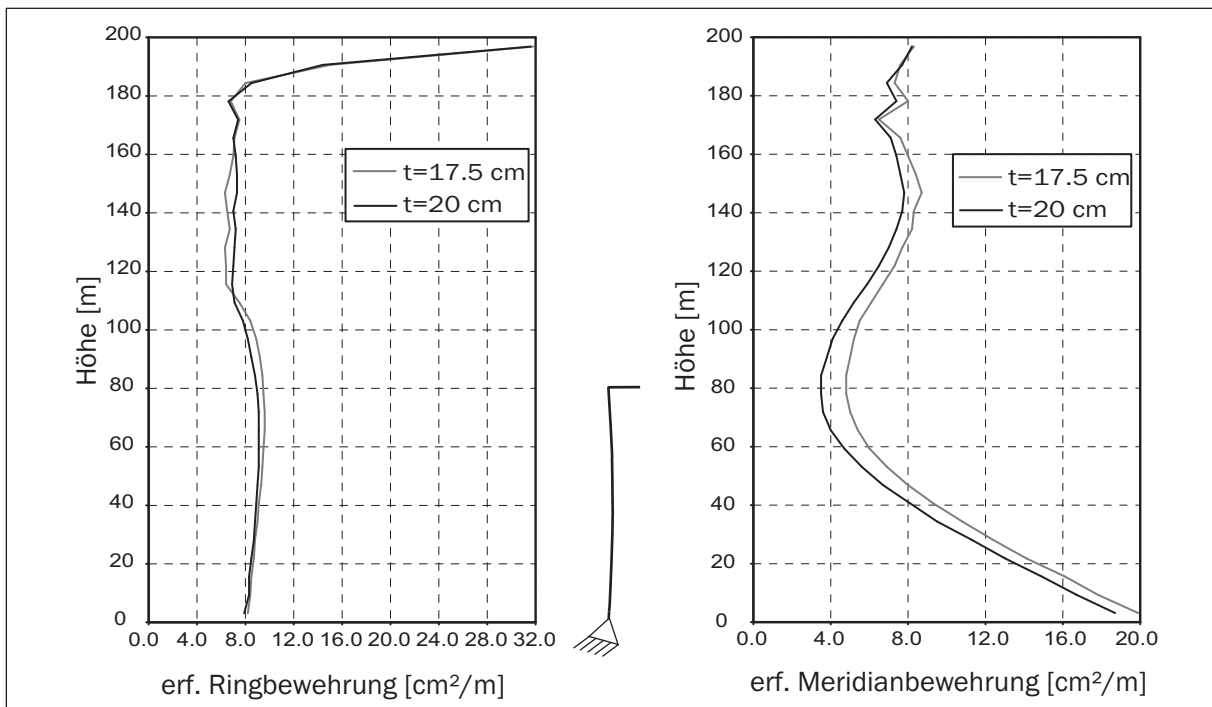


Bild 5.18: Ring- und Meridianbewehrung für Schale „II 80 ab“ für die Schalendickent $t = 17.5$ cm bzw. $t = 20$ cm

5.13 und 5.14 zeigen, dass nicht allein die Reduktion des inneren Hebelarms zu einer Bewehrungserhöhung führt, sondern auch der veränderte Schnittgrößenverlauf aufgrund des verringerten Eigengewichts der Schale.

Die Analyse der Schalengeometrie II zeigt hingegen gänzlich andere Verläufe. Der unterschiedliche Verlauf der Bewehrungsmengen über die Höhe ist in der schwachen Meridianskrümmung der Schale begründet. Die Schale verhält sich hinsichtlich ihres Lastabtrags nahezu wie eine zylindrische Schale. Ein merklicher Unterschied zwischen den ermittelten Bewehrungsmengen lässt sich in erster Linie im oberen Schalendrittel infolge des steiferen Verhaltens und somit der größeren Ringzugkräfte der C 80/95-Schale erkennen.

Der Vergleich mit den Ergebnissen der am unteren Rand eingespannten Schalen zeigt nahezu identische Bewehrungsgehalte. Da die Bemessungsschnittgrößen im Wesentlichen durch die Membrankräfte in der Schale dominiert sind, ist dieses Resultat plausibel.

Kapitel 6

Traglast- und Stabilitätsanalyse von Stahlbetonschalen mit Hilfe der FEM

6.1 Geometrisch und physikalisch nichtlineare Traglastanalyse

6.1.1 Allgemeine Vorgehensweise bei Anwendung der FEM

Die wesentlichen Zusammenhänge zur Durchführung einer FE-Analyse wurden bereits in Kapitel 3 beschrieben. Das linearisierte Prinzip der virtuellen Verschiebungen kann in seiner allgemeinen Form durch die allgemeine Bewegungsgleichung der FEM ausgedrückt werden:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}_T \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}_a - \mathbf{F}_m - \mathbf{F}_c - \mathbf{F}_i. \quad (6.1)$$

Sie besteht auf der Seite der inneren Verschiebungsarbeiten aus dem energetischen Produkt der linearen Massenmatrix (\mathbf{M}) mit den inkrementellen Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{V}}$, der tangentialen Dämpfungsmatrix (\mathbf{C}_T) mit den inkrementellen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{V}}$ und der tangentialen Steifigkeitsmatrix (\mathbf{K}_T) mit den inkrementellen Verschiebungen \mathbf{V} . Die rechte Seite der Gleichung besteht aus den äußeren Kräften (\mathbf{P}_a), sowie den Trägheits- (\mathbf{F}_m), Dämpfungs- (\mathbf{F}_c) und Ungleichgewichtskräften (\mathbf{F}_i). Im Rahmen der hier durchgeführten Untersuchungen erfolgt die Beschränkung auf das Teilgebiet der statischen Analyse, so dass Gleichung (6.1) zu

$$\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}_a - \mathbf{F}_i \quad (6.2)$$

reduziert werden kann.

6.1.2 Inkrementell-iterative Pfadverfolgungsalgorithmen

Die zur Auswahl stehenden Algorithmen zur Auffindung der Gleichgewichtszustände innerhalb einer inkrementell-iterativen Vorgehensweise, bei der die Gesamtsteifigkeitsbeziehung in der Umgebung eines ausiterierten Gleichgewichtszustandes linearisiert wird, lassen sich in die beiden Gruppen der Newton- und der Bogenlängenverfahren unterteilen, wie in vielfachen anderen Arbeiten ausführlich zu finden [Eckstein 1983], [Methfessel 1989], [Zahlten 1990], [Schneider 1997], [Spohr 1998] .

Gerade im Hinblick auf die bei der Betrachtung von Durchschlagsproblemen auftretenden Extrempunkte im Lösungsraum, welche durch horizontale Tangenten im Last-Verschiebungsdiagramm gekennzeichnet sind, treten die Vorteile der Bogenlängenverfahren in den Vordergrund. Sie sind in der Lage derartige Extrempunkte zu überwinden und den Lösungspfad im instabilen Bereich zu verfolgen. Die Verfahren sind hinlänglich bekannt und sollen an dieser Stelle nicht näher beschrieben werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde allerdings ein Bogenlängenverfahren zur Lösung benutzt, welches weitaus weniger bekannt ist als das Verfahren nach Riks (1979), Wempner (1971) und Wessels (1977). Das hier verwendete Bogenlängenverfahren nach Crisfield (1981) bzw. Crisfield (1984) unterscheidet sich gegenüber den anderen Bogenlängenverfahren in der Annäherung von der Ebene der tangentialen Steifigkeit an den Gleichgewichtspfad. Es ist für stark ausgeprägte Durchschlagsprobleme, wie beispielsweise dem Snap-Back-Problem, ein sehr effektives Verfahren, welches in leicht abgewandelter Form erfolgreich innerhalb der Stabilitätsanalyse eingesetzt wird [de Borst 1987], [Schneider 1997]. In Bild 6.1 ist das Verfahren anhand der Darstellung eines Last-Verformungsdiagramms eines Ein-Freiheitsgradsystems dem Verfahren nach Riks (1979), Wempner (1971) und Wessels (1977) gegenübergestellt.

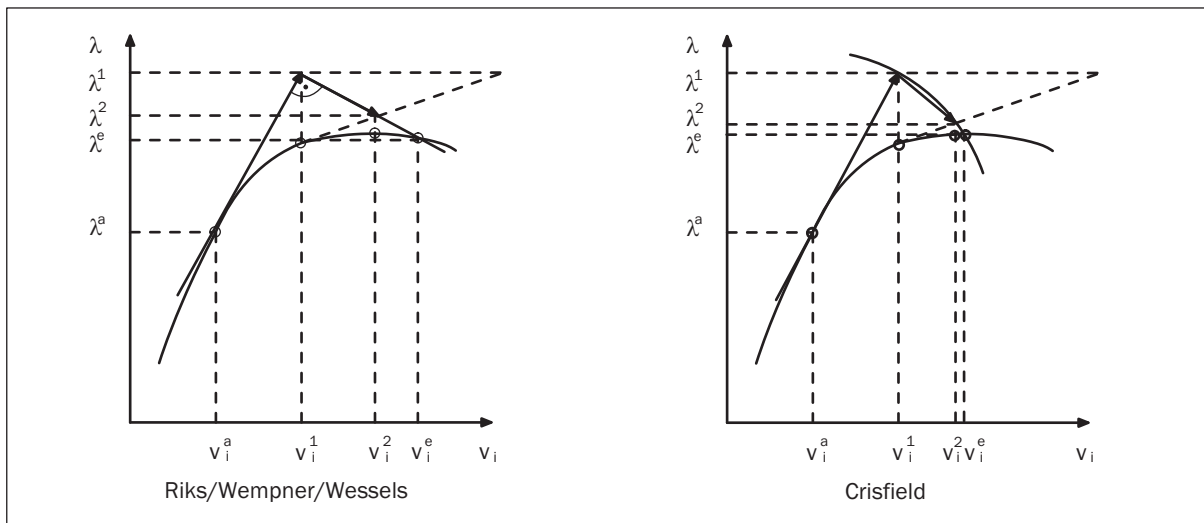


Bild 6.1: Gegenüberstellung von Iterationsalgorithmen

Neben der Definition der Schnittebene als Kreis unterscheidet es sich dadurch, dass die Definition der Schnittebene innerhalb des Lastschritts im Gegensatz zu den anderen Ver-

fahren veränderlich ist. Hierdurch gelingt das Überschreiten eines Extrempunktes sicherer und stabiler.

6.1.3 Normative Vorgaben nach DIN 1045-1

Die nichtlineare Ermittlung von Schnittgrößen, die in Deutschland erstmals ausdrücklich in der DIN 1045-1 (2001) geregelt wird, ist in Form einer Ermittlung des Tragwiderstandes zu führen. Der Bemessungswert dieses Tragwiderstandes muss hierbei größer als der Bemessungswert der maßgebenden Einwirkungskombination sein. Nach DIN 1045-1 (2001) dürfen hierzu folgende rechnerische Mittelwerte der Baustofffestigkeiten - die Nomenklatur „Mittelwerte“ an dieser Stelle ist nach Meinung des Autors unangemessen, da es sich um keine Mittelwerte im Sinne der Materialtechnologie handelt - angenommen werden:

$$\begin{aligned}
 f_{yR} &= 1.1 \cdot f_{yk} \\
 f_{tR} &= 1.05 \cdot f_{yR} && \text{für Betonstahl mit normaler Duktilität} \\
 f_{tR} &= 1.08 \cdot f_{yR} && \text{für Betonstahl mit hoher Duktilität} \\
 f_{cR} &= 0.85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} && \text{für Beton } \leq \text{C } 50/60 \\
 f_{cR} &= 0.85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} / \gamma'_c && \text{für Beton } \geq \text{C } 55/67.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Als Teilsicherheitsbeiwert für den Tragwiderstand darf hierbei $\gamma_R = 1.3$ angesetzt werden. Der Grenzzustand der Tragfähigkeit ist erreicht, wenn entweder die kritische Stahldehnung, die kritische Betondehnung oder aber ein indifferentes Gleichgewicht am Gesamtsystem oder in Teilen davon erreicht wird.

Diese Form des Nachweises ist von seinem Ansatz her in erster Linie für Systeme gültig, in denen sich die Schnittgrößen aller Einzellastfälle der jeweiligen Lastfallkombinationen ungünstig überlagern, wie es beispielsweise bei einem Einfeld- oder Durchlaufträger unter Linienlast der Fall ist. Beeinflusst hingegen das Eigengewicht die zum späteren Versagen führenden Tragwerksteile positiv, so verliert diese Form des Nachweises mit einem Tragwiderstand von $\gamma_R = 1.3$ über die gesamte Lastfallkombination ihre Gültigkeit. Eine genauere Betrachtung der Vorfaktoren in den Gleichungen (6.3) zeigt, dass durch Zusammenfassen des jeweiligen Teilsicherheitsbeiwertes mit dem Beiwert des Tragwiderstandes annähernd der Materialteilsicherheitsbeiwert, welcher bei einer Bemessung mit linearen Schnittgrößen anzusetzen ist, resultiert:

$$\begin{aligned}
 \gamma_s &= 1.15 \approx 1.3/1.1 = 1.182 \\
 \gamma_c &= 1.5 \approx 1.3/0.85 = 1.529.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Weitere Probleme dieser Nachweisführung werden ausführlich in Six (2003) behandelt. Gerade im Hinblick auf höherfesten Beton bewirkt eine Reduktion der Festigkeit auf f_{cR} ebenfalls ein Sinken des Elastizitätsmoduls. Das System wird dabei zunehmend weicher und bildet bei stark verformungsabhängigen Berechnungen nicht mehr das reale Tragwerksverhalten ab. Eine in Six (2003) vorgeschlagene künstliche Modifikation des Elastizitätsmoduls bewirkt zwar einerseits ein realeres Steifigkeitsverhalten, verändert aber andererseits die Völligkeit der Spannungs-Dehnungslinie, was zu einer veränderten aufnehmbaren Druckkraft des Querschnitts führt.

Die Vorgaben der DIN 1045-1 (2001) sind also ausschließlich für eine allgemeine Bemessung unter Zuhilfenahme von nichtlinearen Schnittgrößen gemacht. Auch der Dauerstandsbeiwert α rührt aus dem Bemessungsansatz her und bedarf keiner Berücksichtigung bei einer Traglastuntersuchung.

Zur realitätsnahen Untersuchung von stabilitätsgefährdenden Lastfallkombinationen müssen abweichend von den Regelungen in den Gleichungen (6.3) die realen Mittelwerte der Baustofffestigkeiten angesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 f_{yR} &= f_{ym} = f_{yk} \\
 f_{tR} &= 1.05 \cdot f_{yR} && \text{(normalduktil)} \\
 f_{tR} &= 1.08 \cdot f_{yR} && \text{(hochduktil)} \\
 f_{cR} &= f_{cm} = f_{ck} + 8.0 \text{ [N/mm}^2\text{]} && \text{für Beton } \leq \text{C 50/60} \\
 f_{cR} &= f_{cm}/\gamma'_c = (f_{ck} + 8.0)/\gamma'_c \text{ [N/mm}^2\text{]} && \text{für Beton } \geq \text{C 55/67.}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Dieser Tatsache wurde in der DIN 1045-1 (2001) durch einen Nebensatz in Absatz 9.1.5(1): „... f_c der Höchstwert der ertragenen Betondruckspannungen; ... bei Verformungsberechnungen f_{cm} ...“ Rechnung getragen. Allerdings ist hierbei kein weiterer Hinweis auf die anzusetzenden Stahlkennwerte bzw. auf die Nachweisführung im Hinblick auf ein mögliches Stabilitätsversagen getroffen worden.

Bei dieser modifizierten Nachweisführung ist ein Teilsicherheitsbeiwert von $\gamma_R = 1.3$ für den Tragwiderstand nicht mehr ausreichend, so dass hier lastfallabhängig neue Beiwerte definiert werden müssen. Wird hierbei nach den unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten eines Druck- bzw. Zugversagens unterschieden, so resultieren je nach Versagensart und dem Versagen verursachenden Lastfall unterschiedliche Teilsicherheitsbeiwerte (s. Tabelle 6.1)

Eine Diskussion über die Definition von versagensabhängigen Teilsicherheitsbeiwerten wird bereits seit Einführung des Teilsicherheitskonzeptes bis zum heutigen Zeitpunkt von verschiedenen Seiten aus geführt [Constantinescu 2000], [Eibl 2000], [Quast 2000], [Six 2003]. Diese hier angegebenen Vorschläge der lastfall- und versagensabhängigen Teilsicherheitsbeiwerte entstehen allein aus der Umrechnung der innerhalb des derzeit gültigen Normenkonzeptes gegebenen Teilsicherheitsbeiwerte. Für eine sinnvolle Neufestlegung solcher Sicherheiten sind umfangreiche Zuverlässigkeitsanalysen an unterschiedlichen Tragsystemen durchzuführen. Hierbei ist ebenfalls über eine sinnvolle Festlegung eines Mittelwertes der Zugfestigkeit des Betonstahls nachzudenken [Six 2003].

Das in Kapitel 4 vorgestellte Materialmodell kann sowohl für die normkonformen als auch für die modifizierten Festigkeiten angewendet werden.

	Druckversagen	Zugversagen
ständige Last	$1.3/0.85 \cdot 1.35 = 2.07$	$1.3/1.1 \cdot 1.35 = 1.60$
Verkehrslast	$1.3/0.85 \cdot 1.5 = 2.29$	$1.3/1.1 \cdot 1.5 = 1.77$

Tabelle 6.1: Teilsicherheitsbeiwerte γ_R für einzelne Lastfälle

6.2 Stabilitätsanalyse von Stahlbeton-Schalentragwerken

6.2.1 Allgemeine Stabilitätskriterien

Eine Stabilitätsuntersuchung kann nach zwei unterschiedlichen Verfahren durchgeführt werden, der Energiemethode oder der Gleichgewichtsmethode.

Die Energiemethode hat die Gültigkeit des Prinzips der virtuellen Verschiebungen sowie die Beschränkung auf ein konservatives System zur Voraussetzung. Hierdurch wird die Existenz eines Gesamtpotenzials der Form

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_i + \mathbf{\Pi}_a \quad (6.6)$$

gefordert. Gleichgewicht herrscht in dem System für $\delta\mathbf{\Pi} = 0$. Das Potenzial hängt von Systemparametern ab, hier ausgedrückt durch den Verschiebungsvektor \mathbf{V} .

Daraus folgt für einen Gleichgewichtszustand:

$$\delta\mathbf{\Pi}(\mathbf{V}) = 0. \quad (6.7)$$

Die Variation des Gleichgewichts ergibt:

$$\mathbf{\Pi}\left(\mathbf{V} + \overset{+}{\mathbf{V}}\right) = \mathbf{\Pi}(\mathbf{V}) + \delta\mathbf{\Pi}(\mathbf{V}) + \frac{1}{2}\delta^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{V}) + \dots \quad (6.8)$$

Für ein infinitesimales Inkrement $\overset{+}{\mathbf{V}}$ wird das Verhalten von $\mathbf{\Pi}(\mathbf{V} + \overset{+}{\mathbf{V}})$ allein durch die 2. Variation $\delta^2\mathbf{\Pi}(\mathbf{V})$ bestimmt.

Daher gilt für:

- $\delta^2\mathbf{\Pi} > 0$ Systemenergie wird verbraucht (System stabil), der Körper kann die Gleichgewichtslage nicht verlassen
- $\delta^2\mathbf{\Pi} = 0$ Stabilitätsgrenze
- $\delta^2\mathbf{\Pi} < 0$ Systemenergie wird freigesetzt (System instabil).

In bestimmten Fällen verliert die Energiemethode hingegen ihre Gültigkeit. Dann kann nur eine genügend kleine Norm der Verschiebung $\|\mathbf{V}\|$, nicht aber eine kleine Verschiebung \mathbf{V} garantiert werden [Leipholz 1968]. Daraus folgt, dass in der Struktur örtlich große Verschiebungen möglich sind. Somit ist die Ljapunowsche Stabilitätsdefinition [Ljapunov 1966] in einem solchen Fall verletzt und das energetische Kriterium unbrauchbar.

Bei der Gleichgewichtsmethode, auch statisches Stabilitätskriterium genannt, wird überprüft, ob neben der trivialen Gleichgewichtslage andere nichttriviale Gleichgewichtslagen existieren. Bei dem hier betrachteten Fall eines konservativen Systems führen die energetische und die statische Methode zu der gleichen Stabilitätsaussage.

Hierzu wird ausgehend von dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Abschnitt 3.1.3), der schwachen Formulierung der Gleichgewichtsbedingung, die Bedingung an der Stabilitätsgrenze zu

$$\mathbf{K}_T \cdot \left\{ \overset{+}{\mathbf{V}} + \overset{+}{\mathbf{V}}_{alt} \right\} = \overset{+}{\mathbf{P}} = \overset{+}{\lambda} \cdot \overset{0}{\mathbf{P}} \quad (6.9)$$

formuliert. Somit existieren an einem solchen Punkt des Belastungspfades mindestens zwei unabhängige Verschiebungszustände $\overset{+}{\mathbf{V}}$ und $\overset{+}{\mathbf{V}}_{alt}$.

Wie bereits in Abschnitt 3.3 erläutert, kann die tangentielle Steifigkeitsmatrix in ihre energetischen Anteile aufgespalten werde. Somit ergibt sich Gleichung (6.9) zu

$$\{\mathbf{K}_U + \mathbf{K}_G\} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_{alt} = \{\mathbf{K}_U + \mathbf{K}_\sigma\} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_{alt} = \mathbf{0}, \quad (6.10)$$

worin \mathbf{K}_U die Verschiebungssteifigkeitsmatrix und \mathbf{K}_G die Spannungssteifigkeitsmatrix bzw. geometrische Matrix symbolisieren. Für den Grenzfall der Referenzkonfiguration, also des verformungs- und spannungsfreien Ausgangszustandes, geht die Matrix \mathbf{K}_U in \mathbf{K}_e - die linear elastische initiale Steifigkeitsmatrix - und \mathbf{K}_G bzw. \mathbf{K}_σ in eine Nullmatrix über:

$$\mathbf{K}_U \rightarrow \mathbf{K}_e \quad \wedge \quad \mathbf{K}_\sigma = \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

Hieraus ergibt sich die Abspaltung von der Matrix $\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_U - \mathbf{K}_e$, - der Anfangsverformungsmatrix - die den Einfluss der Verschiebungen auf die strukturelle Steifigkeit beinhaltet.

Somit ergibt sich aus Gleichung (6.10)

$$\{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma\} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_{alt} = \mathbf{0}. \quad (6.12)$$

Innerhalb dieser Arbeit wird zwar eine Beschränkung auf konservative Systeme vorgenommen, jedoch steht bei Anwendung der schwachen Formulierung einer Erweiterung hinsichtlich nicht-konservativer Belastungen kein Hindernis im Weg.

6.2.2 Elastische globale Stabilitätsanalyse

Die klassische Stabilitätsgleichung liefert für Problemstellungen mit nahezu linearem Vorbeulverhalten eine gute Näherung. Bei Tragwerken mit ausgeprägt nichtlinearem Vorbeulverhalten führt ihre Anwendung hingegen zu einer starken Überschätzung der tatsächlich vorhandenen kritischen Last, da die Steifigkeitsänderungen infolge nichtlinearer Verformungen keine Berücksichtigung in dem zu lösenden Eigenwertproblem finden.

Mit Durchführung der Linearisierung $\Lambda^2 = \Lambda$, die sich im Bereich um $\Lambda \approx 1.0$ der exakten Lösung annähert, und Vernachlässigung der nichtlinearen Matrizen, führt die in Abschnitt 6.2.3.2 noch herzuleitende Gleichung (6.21) zu dem linearen Stabilitätsproblem

$$\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot (\mathbf{K}_\sigma^L + \mathbf{K}_u^L)\} \cdot \Psi = \mathbf{0}. \quad (6.13)$$

Hierin ist Ψ der zu dem Eigenwert Λ gehörige Eigenvektor. Bei zusätzlicher Streichung der Anfangsverformungsmatrix resultiert daraus die Gleichung des klassischen Stabilitätsproblems

$$\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot \mathbf{K}_\sigma^L\} \cdot \Psi = \mathbf{0}. \quad (6.14)$$

Die Lösung der Gleichungen (6.13) bzw. (6.14), zum Beispiel mit Hilfe des Iterationsverfahrens nach Corr & Jennings (1976), ergibt eine Schar von Eigenwerten. Die maximale Anzahl der möglichen Eigenwerte ist hierbei gleich der Ordnung n der Matrix \mathbf{K}_e , also der Anzahl der Freiheitsgrade der Struktur. Der Algorithmus ermittelt eine vorgebbare Anzahl von Eigenwerten x ($0 < x \leq n$) mit einer vorgebbaren Genauigkeit. Zu Beginn der Iteration benötigt der Algorithmus lediglich x Startvektoren, die im Laufe der Iteration die Form der Eigenvektoren annehmen. Einen weiteren Vorteil zeigt diese Methode bei den in Abschnitt 6.2.3.2 herzuleitenden begleitenden Eigenwertberechnungen, da hierbei in jedem weiteren Lastschritt die Eigenvektoren des vorherigen als Startvektoren herangezogen werden können. Bei gleichmäßiger Veränderung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T werden die benötigten Iterationsschritte hierdurch stark minimiert. Im Fall von starken Steifigkeitsveränderungen, beispielsweise infolge großflächiger Rissbildung, verliert dieser positive Effekt an Bedeutung, da sich die Eigenformen im gleichen Maße stark verändern.

Aus dieser so ermittelten Schar der Eigenwerte stellen nur die positiven Werte eine Lösung für den Instabilitätspunkt dar. Mit Hilfe des kleinsten positiven Eigenwertes kann das kritische Lastniveau bestimmt werden

$$\lambda_{crit} = \Lambda \cdot \lambda. \quad (6.15)$$

Die sich mitunter ergebenden negativen Eigenwerte haben für die Stabilitätsabschätzung der Struktur keine Bedeutung, da sie einen Wechsel der Belastungsrichtung voraussetzen würden.

Eine Aussage über das Versagensmuster bei Erreichen bzw. Überschreiten des Instabilitätspunktes liefert die dem Eigenwert zugehörige Eigenform.

Die globale Stabilitätsanalyse wird in der Regel zur Auslegung des Tragwerks hinsichtlich der Geometrie und der Schalendicke herangezogen.

6.2.2.1 Abhängigkeit von der Diskretisierungstiefe

Eine Analyse mit Hilfe der FEM ist definitionsgemäß abhängig von der Netzfeinheit der Diskretisierung.

Eine wesentliche Voraussetzung für ein praktisch einsetzbares finites Element ist hierbei die Gültigkeit der Konvergenz, das heißt die Fähigkeit, bei Netzverfeinerung gegen die richtige Lösung zu konvergieren.

Um für die im Vergleich zum Spannungsproblem viel sensiblere Lösung des Stabilitätsproblems gesicherte Ergebnisse zu gewährleisten, wurden zahlreiche Konvergenztests, sowohl mit dem ASE4- als auch mit dem NACS-Element, durchgeführt.

Natürlich ist aufgrund des höherwertigen Ansatzes und aufgrund der exakten Geometrieabbildung das Konvergenzverhalten des NACS-Elementes deutlich besser. Dennoch sind die Ergebnisse mit dem ASE4-Element durchaus zufrieden stellend, da vergleichbare Genauigkeit zwar mit erheblich feinerer Vernetzung, aber ähnlicher Rechenzeit erreicht wird. Ergebnisse in Form der jeweils geringsten positiven Eigenwerte eines durch Eigengewicht und Wind belasteten Hyperboloiden sind in den Tabellen 6.2 und 6.3 dargestellt. Hierbei

Umfang/Höhe	2	4	8	16	32	64	128	256	512
2	278.82	33.75	13.20	12.32	12.21	12.20	12.20	12.20	12.20
4	162.60	24.51	6.43	5.73	5.65	5.65	5.65	5.65	5.65
8	35.69	24.05	6.00	5.12	5.04	5.03	5.03	5.03	5.03
16	15.11	12.78	5.98	5.10	5.02	5.01	5.01	5.01	5.01
32	14.07	11.75	5.98	5.10	5.01	5.01	5.01	5.0	5.0
64	13.80	11.63	5.98	5.10	5.01	5.0	5.0	5.0	5.0
128	13.73	11.57	5.98	5.10	5.02	5.0	5.0	5.0	5.0
256	13.72	11.57	5.98	5.10	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
512	13.72	11.57	5.98	5.10	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0

Tabelle 6.2: Beullasten für einen Rotationshyperboloiden unter Eigengewicht-Wind-Beanspruchung mit variierender Netzfeinheit beim NACS-Element

Umfang/Höhe	2	4	8	16	32	64	128	256	512
2	1406.9	241.81	53.45	11.68	7.71	7.01	6.85	6.81	6.80
4	1139.2	247.06	31.08	13.24	10.55	10.00	9.87	9.83	9.83
8	1078.8	205.32	29.78	9.65	6.85	6.39	6.29	6.26	6.25
16	1063.8	193.09	27.76	9.13	6.05	5.37	5.20	5.16	5.15
32	1058.8	189.96	27.15	8.93	5.94	5.28	5.12	5.08	5.0
64	1024.0	189.18	26.98	8.87	5.91	5.25	5.09	5.0	5.0
128	1013.6	188.99	26.94	8.86	5.91	5.26	5.0	5.0	5.0
256	1010.8	188.95	26.94	8.86	5.90	5.0	5.0	5.0	5.0
512	1010.2	188.95	26.93	8.86	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0

Tabelle 6.3: Beullasten für einen Rotationshyperboloiden unter Eigengewicht-Wind-Beanspruchung mit variierender Netzfeinheit beim ASE4-Element

ist die unbedingte Notwendigkeit einer ausreichend feinen Diskretisierung erkennbar, da die Beullast von der unsicheren Seite konvergiert.

Ergänzend hierzu sei an dieser Stelle eine wichtige Einschränkung bei der Stabilitätsanalyse für das betrachtete ASE4-Element genannt. Die Konvergenz der Lösung mit dem ASE4-Element ist in starkem Maße abhängig von der verwendeten Geometriefunktion. Eine Beschreibung einer Schale mit Hilfe von ebenen Elementen, unter Vernachlässigung der Krümmungseigenschaften, kann eine starke Verschlechterung des Ergebnisses bedeuten, welches auch nicht ohne weiteres durch eine einfache Netzverfeinerung behoben werden kann. Um das Ergebnis zu verbessern, muss in einem solchen Fall das Netz um ein Vielfaches verfeinert werden.

6.2.2.2 Einfluss des Hochleistungsbetons auf das globale Stabilitätsverhalten

Der Einfluss des Hochleistungsbetons auf das globale Stabilitätsverhalten lässt sich durch vergleichende FE-Analysen deutlich herausstellen. Wird beispielsweise eine zylindrische Struktur unter verschiedenen Belastungen untersucht, so ist erkennbar, dass unabhängig

von der Art der Belastung der Zusammenhang zwischen kleinstem positiven Eigenwert und Betongüteklasse mit dem Anstieg des Elastizitätsmoduls korreliert. Dasselbe Verhalten gilt auch für den windbelasteten Hyperboloiden (Bild 6.2). Verwunderlich ist dieses Verhalten nicht, da bei analytisch hergeleiteten Beulformeln einfacher Tragstrukturen der Elastizitätsmodul immer linear eingeht.

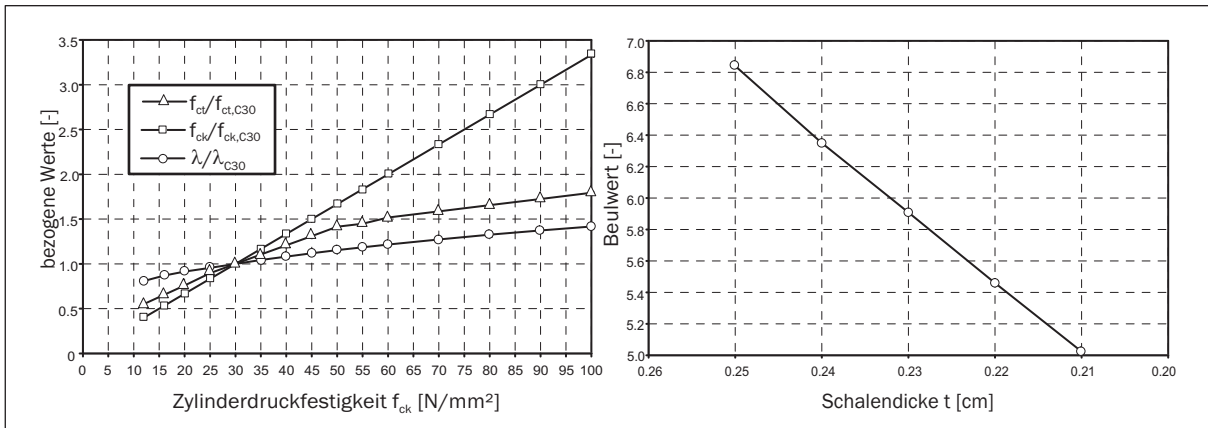


Bild 6.2: Beullast in Abhängigkeit von der Betongüteklasse (links) und von der Schalendicke (rechts)

Wichtig hierbei ist, dass die Gültigkeit des proportionalen Zusammenhangs zwischen Beullastfaktor und Elastizitätsmodul auf direkt gelagerte Systeme beschränkt ist. Wird beispielsweise das Schalentragwerk indirekt auf nachgiebigen Stützen gelagert, so kann der proportionale Anstieg der Beullast in Abhängigkeit von der Steifigkeit der Lagerung differieren.

In Bild 6.3 sind die Beulfiguren der jeweils kleinsten Beulwerte für einen Hyperboloiden aus C 30/37 und C 80/95 gegenübergestellt. Bei den Eigenformen, die zu den linear ermittelten Beullasten korrespondieren, ist kein Unterschied zu erkennen. Dieses Verhalten ist, wie schon der proportionale Zuwachs von Elastizitätsmodul und Beullast, bei zusammengesetzten Tragwerkssystemen bestehend aus unterschiedlichen Steifigkeiten nicht zu beobachten.

Bei Variation der Schalendicke wird, wie in Bild 6.2 dargestellt, für die Hyperbelschale unter Windlast eine lineare Abnahme der Beullast erzielt.

Ebenfalls wird an dieser Stelle eine lineare Beuluntersuchung des Schalentyps Kreiszyylinder durchgeführt. Eine erste Untersuchung soll die Grenze zwischen Stabknicken und Zylinderbeulen unter der Belastung Eigengewicht und Windlast festlegen. Hierzu wurde eine Zylinderschale der Höhe $L = 100$ m aus einem C 30/37 mit Variation von Schalendicke und Schalradius einer linearen Beulanalyse unterzogen. Bild 6.4 gibt den Zusammenhang zwischen der Schalendicke und dem Verhältnis L/R an. Tabelle 6.4 zeigt die Variationsparameter der nachfolgenden Untersuchung.

Das Ergebnis dieser Analysen ist in Bild 6.4 dargestellt. Die Steigerung und die Abhängigkeit der Beullast von dem Elastizitätsmodul fällt für alle betrachteten Varianten gleich aus. Die Analyse zeigt auch, dass sich die maßgebenden Beulformen mit Steigerung des

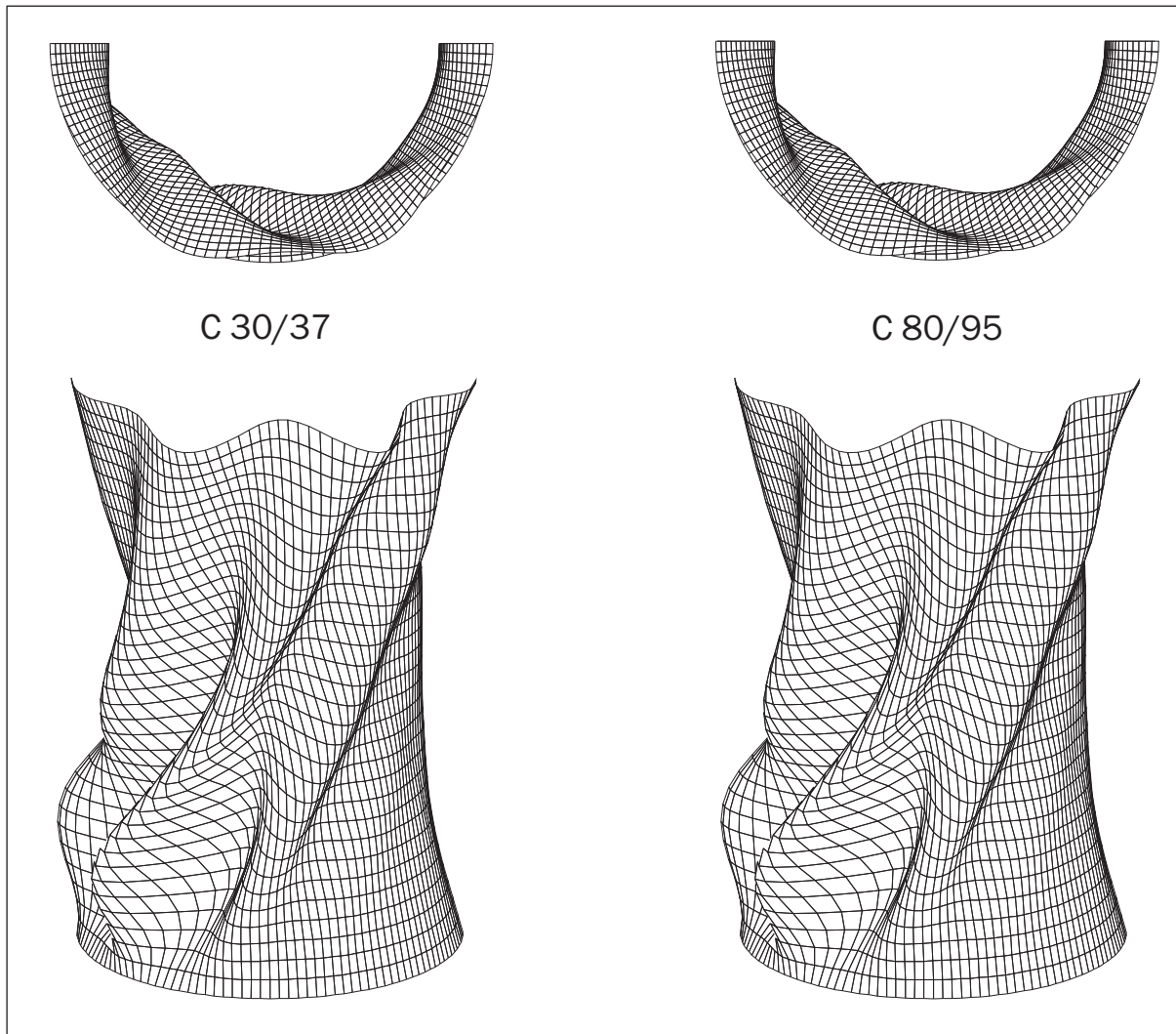


Bild 6.3: Beulfiguren einer Hyperbelschale für Beton C 30/37 (links) und C 80/95 (rechts)

	Manteldruck	Axiallast	Eigengewicht+Wind
C 30/37	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$
C 50/60	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$
C 70/85	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$
C 100/115	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$	$0.1667 \leq L/R \leq 1$

Tabelle 6.4: Variationsparameter zur linearen Beulanalyse der Zylinderschale

Elastizitätsmoduls nicht verändern. Die Beullasten wurden im Folgenden auf die Beullasten des C 30/37-Systems bezogen.

Um nun den Vorteil eines größeren Elastizitätsmoduls auszunutzen, wird in der folgenden Untersuchung mit zunehmendem Elastizitätsmodul die Dicke der Schale bei gleichbleibender Beullast im Sinne einer Optimierung reduziert. In Bild 6.5 sind hierzu Ergebnisse dargestellt. Wird die Schalendicke beispielsweise ausgehend von der Beullast infolge

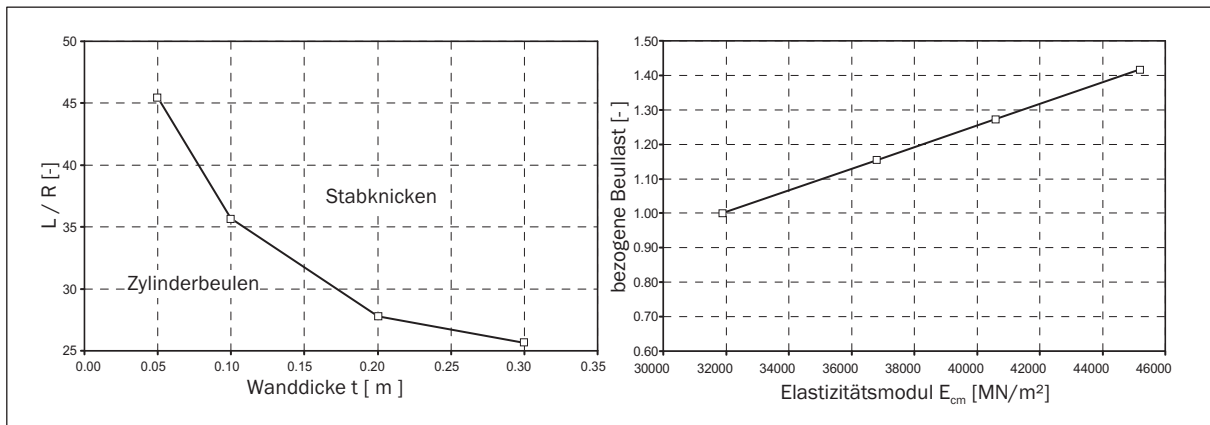


Bild 6.4: Grenze zwischen Stabknicken und Zylinderbeulen (links) -
bezogene Beullast - Elastizitätsmodul für die Varianten der Tabelle 6.4 (rechts)

Axiallast reduziert, so wird der nichtlineare Zusammenhang zwischen Schalendicke und Elastizitätsmodul sichtbar. Auch ist erkennbar, dass die Reduktion der Schalendicke für verschiedene Lastfälle die bezogene Beullast in unterschiedlichem Maße beeinflusst.

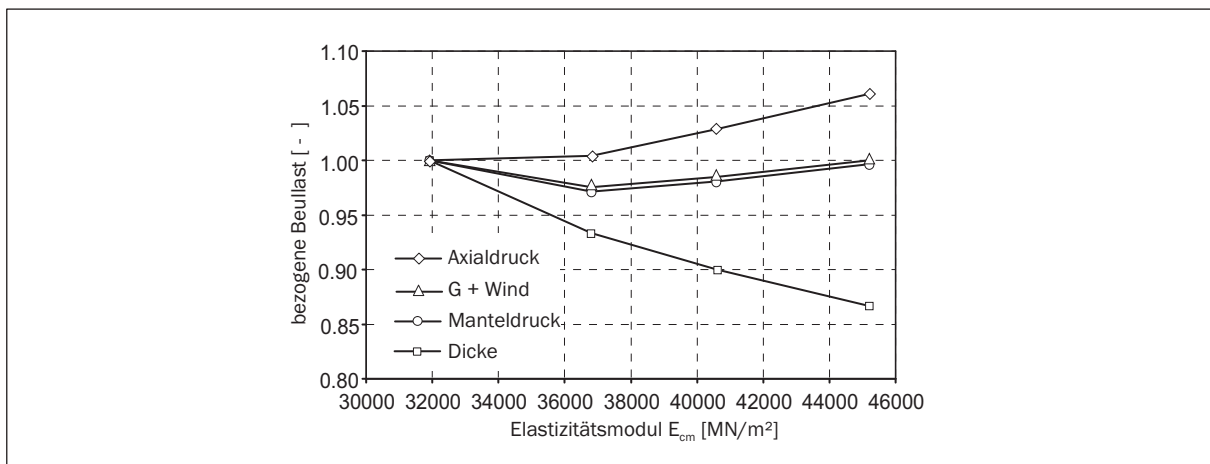


Bild 6.5: Entwicklung der bezogenen Beullast eines Kreiszylinders bei Zunahme des Elastizitätsmoduls und gleichzeitiger Reduktion der Schalendicke

6.2.3 Geometrisch und physikalisch nichtlineare Stabilitätsanalyse

6.2.3.1 Allgemeines

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellte klassische Stabilitätsanalyse liefert, wie bereits erwähnt, gute Approximationen der kritischen Last bei nahezu linearem Vorbeulpfad. Gewinnen geometrische und/oder materielle Nichtlinearitäten im Vorbeulpfad an

Bedeutung, so verändern sich mit Steigerung der Belastung die erreichbaren kritischen Lasten und die zugehörigen Eigenformen deutlich gegenüber den Resultaten der klassischen Analyse. Dies führt zwangsläufig zu der Notwendigkeit einer, die herkömmliche nichtlineare Analyse, begleitenden Untersuchung, so dass ein Indifferenzpunkt sicher identifiziert werden kann. Hierzu wurden in der Vergangenheit eine Reihe unterschiedlicher Verfahren bzw. Erkennungsmechanismen hergeleitet, welche innerhalb einer FE-Analyse zumeist in einer Kombination zum Erfolg führen. Im Folgenden sind diese Lösungsstrategien aufgeführt und werden hinsichtlich der Problematik der materiellen Nichtlinearität ergänzt bzw. umformuliert.

6.2.3.2 Die begleitende Eigenwertanalyse

Vorbeulbereich. Das Verfahren der begleitenden Eigenwertanalyse ist ein effizientes und oft verwendetes Verfahren zur Identifizierung indifferenter Gleichgewichtszustände. Die folgenden Formulierungen des Eigenwertproblems sind in erster Linie für elastische und elasto-plastische Materialien entwickelt worden. Hierbei wird von einer Aufspaltung der tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T in einen linear und einen nichtlinear von den Verschiebungen abhängigen Teil der Anfangsspannungsmatrix und der Anfangsverformungsmatrix nach Gleichung (6.16) ausgegangen

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_T &= \mathbf{K}_e + \underbrace{\mathbf{K}_\sigma^L + \mathbf{K}_u^L}_{\mathbf{K}^L} + \underbrace{\mathbf{K}_\sigma^{NL} + \mathbf{K}_u^{NL}}_{\mathbf{K}^{NL}} \\ &= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}^L + \mathbf{K}^{NL} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_N.\end{aligned}\quad (6.16)$$

Die Kopfzeiger (L) und (NL) geben die lineare und nichtlineare Abhängigkeit von den Verformungen mit $\mathbf{K}^L = \mathbf{K}^L(\mathbf{V})$ und $\mathbf{K}^{NL} = \mathbf{K}^{NL}(\mathbf{V}^2)$ an.

Wird von der so definierten tangentialen Steifigkeitsmatrix der nichtlineare Teil abgespalten

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{K}_T - \mathbf{K}_e, \quad (6.17)$$

so kann die Bedingung am Indifferenzpunkt (Gleichung (6.12)) durch

$$\{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_N\} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

formuliert werden. Der von den Verschiebungen abhängige Teil \mathbf{K}_N kann sodann als Taylor-Reihe der Form

$$\mathbf{K}_N = \Lambda \cdot \mathbf{K}_{N1} + \Lambda^2 \cdot \mathbf{K}_{N2} + \Lambda^3 \cdot \mathbf{K}_{N3} + \Lambda^4 \cdot \mathbf{K}_{N4} + \dots \Lambda^n \cdot \mathbf{K}_{Nn} \quad (6.19)$$

entwickelt werden. Wird Gleichung (6.19) in Gleichung (6.18) eingesetzt und die Reihenentwicklung nach dem quadratischen Term abgebrochen, so resultiert daraus ein quadratisches Eigenwertproblem der Form

$$\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot \mathbf{K}_{N1} + \Lambda^2 \cdot \mathbf{K}_{N2}\} \cdot \Psi = \mathbf{0}. \quad (6.20)$$

Hierin ist die Matrix \mathbf{K}_{N1} der linear und die Matrix \mathbf{K}_{N2} der quadratisch von den Verschiebungen abhängige Teil des nichtlinearen Anteils \mathbf{K}_N der tangentialen Steifigkeitsmatrix.

Um zu verdeutlichen das $\overset{+}{\mathbf{V}}$ die dem ermittelten Eigenwert zugehörige Eigenform darstellt wurde an dieser Stelle Ψ eingeführt.

Die bereits in Abschnitt 6.2.2 vorweggenommene Linearisierung $\Lambda^2 = \Lambda$, welche im Umgebungsbereich des Indifferenzpunktes das exakte Ergebnis widerspiegelt, führt schließlich zum Eigenwertproblem

$$\{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot (\mathbf{K}_{N^1} + \mathbf{K}_{N^2})\} \cdot \Psi = \{\mathbf{K}_e + \Lambda \cdot (\mathbf{K}^L + \mathbf{K}^{NL})\} \cdot \Psi = \mathbf{0}. \quad (6.21)$$

Eine Analyse der Struktur unter der Annahme einer linearen Kinematik unter gleichzeitiger Berücksichtigung von materieller Nichtlinearität - welche ausschließlich akademischen Wert hat - hat zur Folge, dass die nichtlinear von den Verschiebungen abhängigen Anteile aus der tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T verschwinden. Das Eigenwertproblem bleibt davon unberührt, die einzige Änderung liegt darin, dass das lineare Eigenwertproblem somit die höchste Approximationsstufe darstellt.

Die begleitende Eigenwertanalyse beinhaltet die Lösung des oben hergeleiteten Eigenwertproblems in jedem Gleichgewichtszustand der nichtlinearen Analyse. Auf diesem Weg erfolgt eine Annäherung an den Punkt des indifferenten Gleichgewichts und eine Identifizierung des Instabilitätspunktes durch die Beobachtung der Entwicklung der Eigenwerte bzw. des kleinsten positiven Eigenwertes. Eine Abschätzung der zu erwartenden kritischen Last liefert in jedem Lastschritt den Zusammenhang

$$\lambda_{crit} = \Lambda \cdot \lambda. \quad (6.22)$$

In der Nähe des Instabilitätspunktes konvergiert der Eigenwert Λ zu dem Wert 1.0. Die Anzahl der gleichen Eigenwerte in diesem Punkt gibt Aufschluss über die Anzahl der dort vorhandenen Verzweigungsäste; die dazugehörigen Eigenformen zeigen den Versagensmechanismus an dem erreichten Lastniveau. Dabei ist aufgrund von rechnerbedingten Rundungsungenauigkeiten und der Wahl der Lastschrittgröße das Erreichen des theoretisch exakten Eigenwertes 1.0 unmöglich.

Die Anwendung von inkrementell-iterativen Pfadverfolgungsalgorithmen innerhalb einer nichtlinearen Analyse führt zu einer möglichen Abwandlung des dargestellten Eigenwertproblems in eine inkrementelle Form. Hierbei wird die Näherung

$$\Lambda \cdot \mathbf{K}^L = \mathbf{K}^L + (\Lambda - 1) \cdot \mathbf{K}^L \approx \mathbf{K}^L + \beta \cdot \Delta \mathbf{K}^L \quad (6.23)$$

eingeführt. Die Matrix $\Delta \mathbf{K}^L$ gibt hierbei die Änderung der Anfangsspannungs- und der Anfangsverformungsmatrix innerhalb des durchgeführten Lastschritts an. Einsetzen von (6.23) in (6.21) liefert das inkrementelle Eigenwertproblem

$$\{\mathbf{K}_T + \beta \cdot \Delta \mathbf{K}^L\} \cdot \Psi = \mathbf{0}. \quad (6.24)$$

Somit ergibt sich der Lastfaktor der Stabilitätsgrenze zu

$$\lambda_{crit} = \lambda + \beta \cdot \Delta \lambda. \quad (6.25)$$

Die vorstehenden Aussagen sind uneingeschränkt gültig für lineares Materialverhalten, aber auch für nichtlineares Materialverhalten behält die Linearisierung ihre Legitimität. Die Entwicklung des Eigenwertes über die Belastungsgeschichte hingegen ändert sich bei Berücksichtigung der Nichtlinearität des Werkstoffs Stahlbeton grundlegend. Abhängig ist die Entwicklung und damit die Güte der Approximation des zu erwartenden kritischen Lastzustandes in erster Linie von der dominierenden Beanspruchung des Tragwerks.

Tritt überwiegend Druck im gesamten Tragwerk auf, so wird die zunehmende Plastizierung des Betons durch die stetige Abminderung des tangentialen Elastizitätsmoduls des Werkstoffs Beton gut durch die Veränderung von \mathbf{K}_{N1} abgebildet. Somit erfolgt eine stetige Annäherung des Eigenwertes an den Wert 1.0.

Anders verhält sich das Kriterium bei ausgeprägter Rissbildung im Vorbeulbereich. Der dadurch erfolgte Abbau der Steifigkeit des Tragwerks verursacht einen starken Abfall des bestimmten Eigenwertes Λ . Hierdurch wird mitunter bereits weit vor dem tatsächlichen Erreichen der kritischen Last ein Eigenwert nahe 1.0 ermittelt, der zu der Annahme eines nahegelegenen Indifferenzpunktes verleiten kann. Dennoch nähert sich der Eigenwert kontinuierlich dem Wert 1.0 an, wenngleich auch dessen Aussagekraft zur Vorabschätzung eines kritischen Lastniveaus verloren geht.

Bei nichtlinearem Materialverhalten kann auch der Wechsel des bei Belastungsbeginn kleinsten positiven Eigenwertes in einen negativen Eigenwert einen Indifferenzpunkt darstellen. Hierbei kann die tangentiale Steifigkeitsmatrix positiv-definit und die Determinante ungleich Null bleiben. In diesem Fall entsteht die Verzweigung durch eine Kombination von Be- und Entlastung in Teilen des Tragwerks [Bažant & Cedolin 1991].

Nachbeulbereich. Die begleitende Eigenwertanalyse identifiziert einen Indifferenzpunkt und liefert zusätzlich die zu dem entsprechenden Eigenwert zugehörige Eigenform Ψ , also die Form, in die das Tragwerk ausweicht.

Die Ausbildung des Verlaufs nach Überschreiten eines Indifferenzpunktes unterscheidet sich nach Art des Indifferenzpunktes. Bei einem Durchschlagsproblem kann der Nachbeulbereich bei vorheriger Wahl eines geeigneten Pfadverfolgungsalgorithmus ohne Weiteres verfolgt werden.

Bei der Berücksichtigung eines nichtlinearen Betonmodells stellt sich hier allerdings die Forderung nach einem Modell, welches zyklische Belastung abbilden kann, da im Durchschlagspunkt die Verformung unter Lastreduktion zunimmt, so dass es zu einer Lastumkehr kommt.

Zur Ermittlung des weiteren Pfadverlaufs eines Verzweigungsproblems hat sich in der Vergangenheit das Aufbringen einer Störverformung im letzten ausiterierten Gleichgewichtszustand bewährt. Mit deren Hilfe kann der primäre Pfad verlassen und der sekundäre Pfad beschriftet werden [Eckstein 1983]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{crit} + \xi \cdot \Psi. \quad (6.26)$$

Bei linear elastischem Material führt diese Vorgehensweise zu einem garantierten Auffinden des Nachbeulpfades, unabhängig von der Wahl des Parameters ξ und der Wahl einer Bogenlängen- oder Lastinkrementierung. Lediglich die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration wird durch eine sinnvolle Wahl verbessert.

Anders hingegen verhält es sich bei der Berücksichtigung von nichtlinearem Materialverhalten. Hier treten einige zusätzliche Probleme auf, so dass die Ermittlung des Nachbeulbereichs in abgeänderter Form durchgeführt werden muss.

Das erste Problem besteht in der Annäherung an den Verzweigungspunkt. Bedingt durch numerische Modellungenauigkeiten und daraus mögliche Strukturänderungen kann der Antwortpfad ohne erkennbare Anzeichen in einen sekundären Pfad wechseln, so dass der gesamte Belastungspfad fälschlicherweise als stabil angesehen werden kann.

Ein zweites Problem tritt bei dem Aufbringen der Störverformung und dem Wechsel in den sekundären Pfad auf. Hier spielt der Parameter ξ und die Auswahl der Bogenlängen- oder Lastinkrementierung eine entscheidende Rolle. Die Lastinkrementierung funktioniert nur in den seltensten Fällen und der Erfolg ist in starkem Maße abhängig von der Größe der Störverformung. Ist diese zu gering, so verbleibt die Tragwerksantwort auf dem primären Pfad und springt unter Umständen bei größer werdenden numerischen Abweichungen in einen „zufälligen“ Sekundärpfad. Bei zu großer Störverformung kann globales Tragwerksversagen eintreten, so dass die Analyse nicht weitergeführt werden kann.

Die Inkrementierung über die Bogenlänge hingegen erlaubt eine größere Bandbreite für die Wahl des Parameters ξ , um in den korrekten Nachbeulpfad zu gelangen. Dennoch kommt es mitunter zu Konvergenzschwierigkeiten im direkten Umgebungsbereich des Verzweigungspunktes.

Aus diesem Grund wurde das Vorgehen für die Besonderheit des Materials modifiziert und dadurch stabilisiert. Die Analyse erfolgt nach folgendem Schema:

- Analyse des Vorbeulbereichs mit begleitender Eigenwertanalyse nach Gleichung (6.21) oder (6.24).
- Beobachtung des Eigenwertes Λ und zusätzlicher Parameter aus den folgenden Abschnitten.
- Nahe des Verzweigungspunktes - vor Eintritt der numerischen Ungenauigkeiten - erfolgt die Sicherung der zu dem geringsten positiven Eigenwert gehörigen Eigenform.
- Entlastung des Tragwerks um einen festgelegten Anteil der bis dorthin aufgebrauchten Belastung (30 % - 40 %).
- Aufbringen der Störverformung in Form der abgespeicherten Eigenform.
- Wiederholte Belastung der gestörten Schale.

Der Vorteil dieser Vorgehensweise wird bei Betrachtung der beispielhaften Last-Verformungskurve in Bild 6.6 deutlich.

Es ist erkennbar, dass durch Vorgabe der am tatsächlichen Verzweigungspunkt vorherrschenden Eigenform der Nachbeulpfad auch von einem niedrigeren Lastniveau aus erreicht werden kann. Somit wird durch diese Vorgehensweise nicht nur der numerisch kritische Bereich in der unmittelbaren Umgebung des Verzweigungspunktes umgangen, sondern zugleich erheblich Rechenzeit eingespart, was bei großen Schalensystemen ein nicht zu unterschätzender Gesichtspunkt ist.

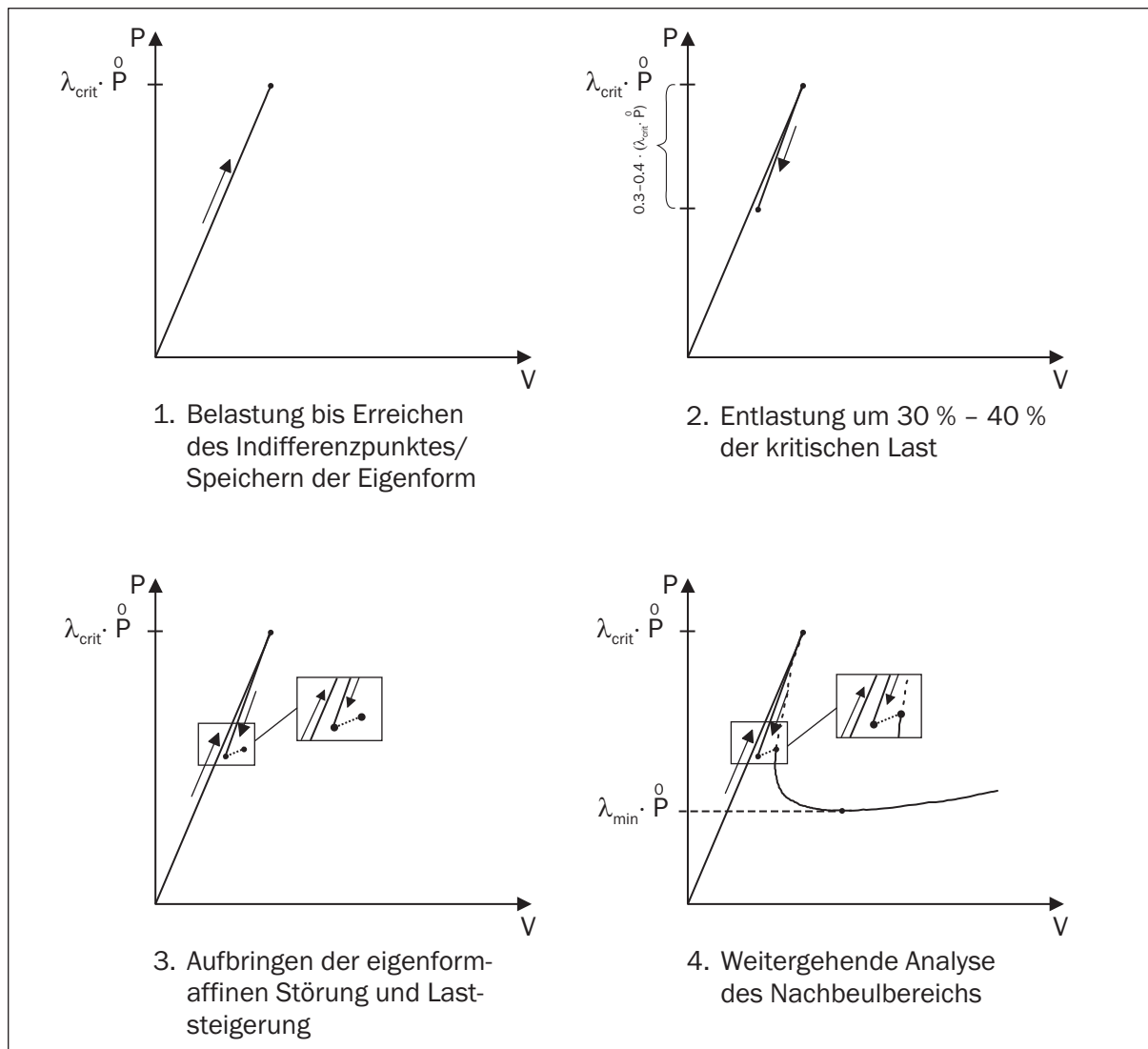


Bild 6.6: Vorgehensweisen zum Auffinden des kritischen Nachbeulbereichs einer Stahlbeton-Schalenstruktur

6.2.3.3 Determinantenanalyse der tangentialen Steifigkeits- und Teilmatrizen

Ausgehend von Gleichung (6.12) gelingt es, für jeden Gleichgewichtspunkt auf dem nicht-linearen Lösungspfad die folgenden Bedingungen für die Determinante der tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T herzuleiten [Krätzig 1989]:

Stabiles Gleichgewicht:

$$\det \mathbf{K}_T > 0 \quad \text{und} \quad \forall D_{ii} > 0 \quad (6.27)$$

Indifferentes Gleichgewicht:

$$\det \mathbf{K}_T = 0 \quad \text{und} \quad \exists D_{ii} = 0 \quad (6.28)$$

Instabiles Gleichgewicht:

$$\det \mathbf{K}_T < 0 \quad \text{und} \quad \exists D_{ii} < 0 \quad (6.29)$$

Diese Überprüfung setzt aus Gründen der Effizienz die Verwendung eines Pfadverfolgungsverfahrens voraus, welches die jeweils aktuelle Steifigkeitsmatrix verwendet. Hierbei sei auf die in Abschnitt 3.5 vorgestellte Dreieckszerlegung der tangentialen Steifigkeitsmatrix verwiesen.

Es muss dabei beachtet werden, dass die Bedingung $\det \mathbf{K}_T > 0$ nur ein notwendiges und kein hinreichendes Kriterium für das Vorhandensein eines stabilen Zustandes darstellt. Bei einer Zerlegung der Steifigkeitsmatrix nach Abschnitt 3.5 müssen sämtliche Diagonalglieder D_{ii} positiv sein.

Bei einer Zerlegung nach dem erweiterten Cholesky-Verfahren [Zurmühl 1964] müssen hingegen sämtliche Werte der transponierten oberen Dreiecksmatrix reell sein. Nur dann kann von einem stabilen Tragwerkszustand ausgegangen werden.

Im Hinblick auf die zu behandelnden Problemstellungen muss durch eine entsprechende Skalierung der Determinante verhindert werden, dass sie den von der Hardware nicht abbildbaren Zahlenraum übersteigt. Hierzu stehen verschiedene Ansätze zur Verfügung, wie sie beispielsweise in Jäppelt (1998) beschrieben sind.

Für eine hohe zu erwartende Anzahl von Systemfreiheitsgraden (n_{dof}) bietet sich die logarithmische Skalierung an:

$$\det \tilde{\mathbf{K}}_T = (-1)^{negd} \sum_{i=1}^{n_{dof}} \log | D_{ii} | \quad (6.30)$$

mit $negd$ = Anzahl der negativen Diagonalglieder.

Begleitend zu den nichtlinearen Analysen sollen die Determinantenentwicklungen mit Hilfe von Verhältniswerten der Determinanten der Steifigkeitsmatrix bzw. einzelner Teilmatrizen beobachtet werden. Hierzu ist es notwendig noch einmal genauer auf die Skalierung der Determinante zu schauen. Eine Verhältniswertbildung der Form

$$X = \frac{\det \mathbf{K}_{Tk}}{\det \mathbf{K}_{T1}} = \frac{\prod_{i=1}^{n_{dof}} (D_{ii})_k}{\prod_{i=1}^{n_{dof}} (D_{ii})_1} = \frac{\det \tilde{\mathbf{K}}_{Tk}}{\det \tilde{\mathbf{K}}_{T1}} \quad (6.31)$$

ist nur für eine Skalierung der einzelnen Determinanten mit einer Norm der Diagonalglieder $\|D\|$ der Form

$$\det \tilde{\mathbf{K}}_{Tk} = \prod_{i=1}^{n_{dof}} \frac{(D_{ii})_k}{\|D\|} \quad (6.32)$$

gültig.

Für eine logarithmische Skalierung nach Gleichung (6.30) hingegen muss der Verhältniswert nach

$$X = 10^{(\det \tilde{\mathbf{K}}_{Tk} - \det \tilde{\mathbf{K}}_1)} \quad (6.33)$$

gebildet werden. Die Herleitung dieses Zusammenhangs findet sich im Anhang A.5 dieser Arbeit.

Die tangentiale Steifigkeitsmatrix lässt sich, wie bereits in Abschnitt 6.2.1 gezeigt, in einzelne Teilmatrizen unterteilen. Für die Beobachtung der Entwicklung dieser Teilmatrizen lassen sich nach der gleichen Vorgehensweise die Determinanten bestimmen. Aufgrund der Matrizeneigenschaft

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) \quad (6.34)$$

ist die Aufsummierung der Einzeldeterminanten zur Gesamtdeterminante der tangentialen Steifigkeitsmatrix nicht möglich. Dennoch eignen sie sich zur Beobachtung der Veränderung der Teilmatrizen.

Der große Nachteil dieser Einzeldeterminanten liegt in der aufwändigen Bestimmung. Im Gegensatz zu der Determinante der gesamten tangentialen Steifigkeitsmatrix, die bei der Gleichungslösung als Nebenprodukt anfällt, müssen die Determinanten der Teilmatrizen in einem getrennt von der Gleichungslösung arbeitenden Algorithmus ermittelt werden. Dieses Vorgehen ist für große Systeme sehr zeitintensiv und wird in dieser Arbeit nicht angewendet.

6.2.3.4 Steifigkeitsparameter nach BERGAN

Ein weiteres Maß zur Beschreibung des Steifigkeitszustandes eines Tragwerks ist der Current-Stiffness-Parameter S_P nach Bergan et al. (1978) und Bergan (1980). Der Parameter (6.35) wurde speziell für Systeme mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden konzipiert, da die Darstellung eines Last-Verschiebungspfades nur einen einzelnen Freiheitsgrad des Tragwerks wiederspiegelt und somit das Gesamtverformungsverhalten schlecht abbilden kann:

$$S_P = \frac{\partial \mathbf{V}^T / \partial \lambda \cdot \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}^T / \partial \lambda \cdot \mathbf{P}} \quad (6.35)$$

Wie in Gleichung (6.35) zu erkennen, ist der Steifigkeitsparameter als Quotient der Produkte der Verschiebungsänderung und Last definiert.

Innerhalb einer inkrementell-iterativen Analyse kann mit Hilfe der proportionalen Laststeigerung

$$\mathbf{P}_i^+ = \lambda_i^+ \cdot \mathbf{P}^0 \quad (6.36)$$

und der Linearisierung

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i^T}{\partial \lambda} = \frac{\mathbf{V}_i^+}{\lambda^+} = \frac{\mathbf{V}_i^+}{\lambda_i^+} \quad (6.37)$$

Gleichung (6.35) zu

$$S_P = \frac{\left(\overset{+}{\mathbf{V}}_1/\overset{+}{\lambda}_1\right) \cdot \left(\overset{+}{\mathbf{P}}_1/\overset{+}{\lambda}_1\right)}{\left(\overset{+}{\mathbf{V}}_i/\overset{+}{\lambda}_i\right) \cdot \left(\overset{+}{\mathbf{P}}_i/\overset{+}{\lambda}_i\right)} = \left(\frac{\overset{+}{\lambda}_i}{\overset{+}{\lambda}_1}\right)^2 \cdot \frac{\overset{+}{\mathbf{V}}_1 \cdot \overset{+}{\mathbf{P}}_1}{\overset{+}{\mathbf{V}}_i \cdot \overset{+}{\mathbf{P}}_i} \quad (6.38)$$

umformuliert werden.

Wird nun noch die inkrementelle Form der Bewegungsgleichung (6.2) berücksichtigt, so wird Gleichung (6.38) zu

$$S_P = \left(\frac{\overset{+}{\lambda}_i}{\overset{+}{\lambda}_1}\right)^2 \cdot \frac{\overset{+}{\mathbf{V}}_1^T \cdot \mathbf{K}_{T1} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_1}{\overset{+}{\mathbf{V}}_i^T \cdot \mathbf{K}_{Ti} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_i}. \quad (6.39)$$

Der in Bild 6.7 dargestellte Steifigkeitsparameter S_P kann über den Lastfaktor λ oder über die Verschiebungsnorm $\|\mathbf{V}\|$ aufgetragen werden, wobei er das nachfolgend beschriebene typische Verhalten zeigt.

Zu Belastungsbeginn ist der Parameter laut Definition immer 1.0. Mit weicher werdendem System wächst das Verschiebungsinkrement an und führt zu einem Abfall von S_P in den Bereich $0 < S_P < 1.0$. Wird das System steifer, so steigt S_P in den Bereich $S_P > 1.0$ an. Tritt während der Belastungsgeschichte ein Durchschlagspunkt auf, so hat der Verlauf des Steifigkeitsparameters an dieser Stelle einen Nulldurchgang. Anders hingegen das Verhalten des Steifigkeitsparameters beim Auftreten eines Verzweigungspunktes. Anhand des Steifigkeitsparameters $S_P \neq 0$ ist ein solcher Punkt indifferenten Gleichgewichts nicht identifizierbar.

Innerhalb einer nichtlinearen Analyse kann die Anfangsspannungsmatrix von der tangentialen Steifigkeitsmatrix separiert werden. Somit resultieren zwei Teilmatrizen, für die getrennt ein Steifigkeitsparameter $S_P^{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u}$ bzw. $S_P^{\mathbf{K}_\sigma}$ bestimmt werden kann.

Werden die beiden Parameter nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} S_P^{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u} &= \frac{\overset{+}{\mathbf{V}}_1^T \cdot (\mathbf{K}_{e1} + \mathbf{K}_{u1}) \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_1}{\overset{+}{\mathbf{V}}_i^T \cdot (\mathbf{K}_{ei} + \mathbf{K}_{ui}) \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_i + \overset{+}{\mathbf{V}}_i^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma i} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_i} \\ S_P^{\mathbf{K}_\sigma} &= \frac{\overset{+}{\mathbf{V}}_1^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma 1} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_1}{\overset{+}{\mathbf{V}}_i^T \cdot (\mathbf{K}_{ei} + \mathbf{K}_{ui}) \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_i + \overset{+}{\mathbf{V}}_i^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma i} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_i} \end{aligned} \quad (6.40)$$

bestimmt, so kann durch Summenbildung der Steifigkeitsparameter der tangentialen Steifigkeitsmatrix ermittelt werden

$$S_P^{\mathbf{K}_T} = S_P^{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u} + S_P^{\mathbf{K}_\sigma}. \quad (6.41)$$

Sind die Parameter hingegen nach

$$S_P^{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u} = \frac{\overset{+}{\mathbf{V}}_1^T \cdot (\mathbf{K}_{e1} + \mathbf{K}_{u1}) \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_1}{\overset{+}{\mathbf{V}}_i^T \cdot (\mathbf{K}_{ei} + \mathbf{K}_{ui}) \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_i}, \quad S_P^{\mathbf{K}_\sigma} = \frac{\overset{+}{\mathbf{V}}_1^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma 1} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_1}{\overset{+}{\mathbf{V}}_i^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma i} \cdot \overset{+}{\mathbf{V}}_i} \quad (6.42)$$

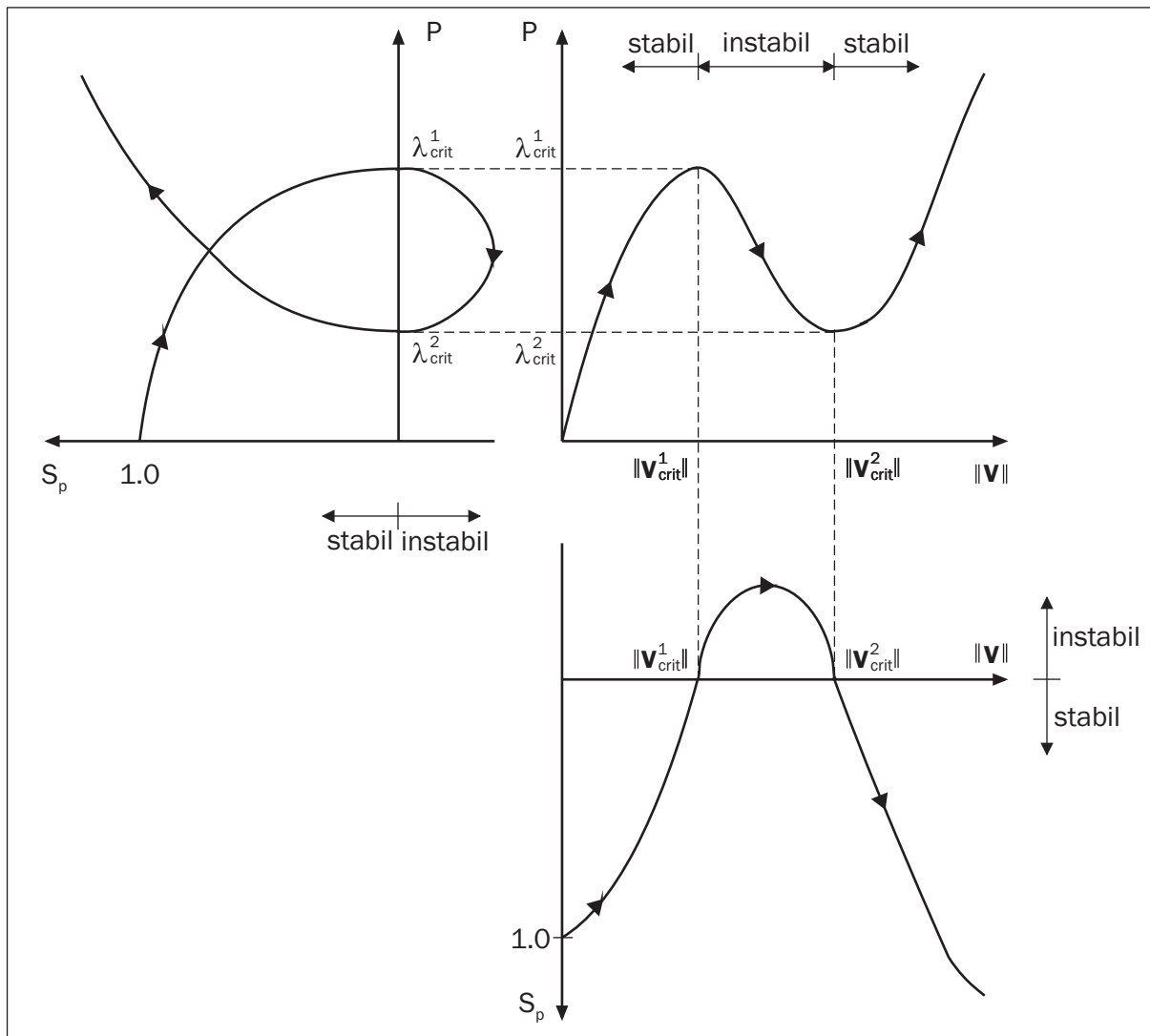


Bild 6.7: Verlauf des Steifigkeitsparameters nach Bergan (1980)

ermittelt, so wird einerseits eine höhere Aussagekraft des einzelnen Parameters erreicht, andererseits geht aber die Gültigkeit der Summenbildung aus Gleichung (6.41) verloren.

Das prinzipielle Verhalten der Teilmatrizen kann für lineares Materialverhalten ohne weiteres vorab abgeschätzt werden. Der Parameter $S_P^{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u}$ verhält sich entweder konstant oder erfährt einen verformungsbedingten Abfall. Der Parameter $S_P^{\mathbf{K}_\sigma}$ fällt zusätzlich proportional zur Laststeigerung ab. Wird dieser Lastabfall hingegen durch eine entsprechende Skalierung behindert, so zeigt dieser Parameter während der Analyse ausschließlich den Verformungszuwachs an. Der Unterschied zwischen materieller Nichtlinearität und Linearität wird durch einen direkten Vergleich der Steifigkeitsparameter der nichtlinearen und linearen Analyse deutlich. Er wird in Abschnitt 6.2.3.6 näher behandelt.

6.2.3.5 Die begleitende Ermittlung der Eigenfrequenzen

Eine weitere Möglichkeit zur Identifizierung kritischer Lastzustände ist die begleitende Ermittlung der Eigenfrequenz. Wird das Eigenwertproblem

$$\{\mathbf{K}_T - \omega^2 \cdot \mathbf{M}\} \cdot \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \quad (6.43)$$

gelöst, so kann ein kritischer Lastzustand erkannt werden.

Hierbei fällt auf, dass bei konstanter Massenmatrix eine Veränderung der Eigenfrequenz nur über die Veränderung der tangentialen Steifigkeitsmatrix erfolgen kann. Somit ist bei linearem Materialverhalten allein durch Veränderung der Anfangsspannungs- und Anfangsverformungsmatrix, welche Bestandteil von \mathbf{K}_T sind, eine veränderte Eigenfrequenz zu beobachten.

Das Verhalten lässt sich anhand des Beispiels eines Druckstabes gut erläutern. Der Vergleich der Ergebnisse einer linear durchgeführten Eigenfrequenzanalyse mit denen einer innerhalb einer nichtlinearen Analyse begleitenden Eigenfrequenzanalyse nach Gleichung (6.43) zeigt, dass die begleitende Analyse geringere Werte für die Eigenfrequenzen liefert, da die Anteile der Anfangsspannungs- und Anfangsverformungsmatrix bei steigender Belastung absolut gesehen zwar anwachsen, aber aufgrund der Krafttrichtung negativ in die Gesamtsteifigkeitsmatrix einfließen. Daher sinkt die Eigenfrequenz ab. Wird zusätzlich noch die materielle Nichtlinearität berücksichtigt und begleitend zu einer nichtlinearen Analyse das Eigenwertproblem gelöst, so wird ein noch stärkerer Abfall der Eigenfrequenz beobachtet, da zusätzlich die Steifigkeit des Tragwerks infolge der Druckbeanspruchung reduziert wird. Eine ausführliche Betrachtung dieser Zusammenhänge findet sich in der Arbeit von Wörmann (2004).

Das Auffinden des kritischen Punktes erfolgt durch Ermittlung der Nullstelle der Eigenfrequenzkurve. Hierbei ist zu beachten das nicht alle beobachteten Eigenfrequenzen gleichzeitig und in gleichem Maße zu Null abfallen Noh (2002). Brendel (1979) zeigt in seinen Untersuchungen, dass auch bei dieser Vorgehensweise ein Wechsel der maßgeblichen Eigenform, ähnlich dem Verhalten bei der begleitenden Eigenwertlösung des Stabilitätsproblems, für den Lastfaktor möglich ist. Bei Erreichen eines Durchschlagspunktes nähert sich der Frequenzverlauf der Nullstelle in Form einer vertikalen Tangente an.

Dieses Vorgehen kann unter Umständen bei einigen Tragwerkstypen wesentlich stabilere Lösungen als die vorher genannten Verfahren liefern. Die der reduzierten Eigenfrequenz zugehörigen Eigenform gibt Aufschluss über den lokalen oder globalen Charakter des Stabilitätsversagens. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dieses Verfahren nur an kleinen Beispielen begleitend zu den weiteren Stabilitätskriterien eingesetzt.

6.2.3.6 Parallele lineare Analyse zur Identifizierung des Versagensmechanismus

Allgemeines. Das Hauptproblem der in den vorausgegangenen Abschnitten beschriebenen Analysen liegt neben der numerischen Anfälligkeit in der Interpretation der dabei gewonnenen Ergebnisse.

In Tabelle 6.5 sind sämtliche Parameter zur Beurteilung der Stabilität noch einmal zusammengefasst. Hieraus wird deutlich, dass die Art des Versagens - Traglast- oder Stabilitätsversagen - nur durch die Beobachtung der Entwicklung der einzelnen Parameter über die Belastungsgeschichte erfolgen kann. Hierbei fällt auf, dass in den meisten Fällen von Stabilitätsversagen bei Berücksichtigung von materieller Nichtlinearität die Veränderung der Parameter sich dem Verhalten der Parameter bei Betrachtung eines materiell linearen Vergleichmodells annähert. Im Folgenden wird daher versucht, die Ursache des Versagens durch eine intensivere Betrachtung der Systemmatrizen zu identifizieren.

Aufspaltung der tangentialen Matrix. Die bereits in Gleichung (6.16) eingeführte Aufspaltung der tangentialen Matrix in die Anteile \mathbf{K}_e , \mathbf{K}_u und \mathbf{K}_σ bedeutet für eine nichtlineare Analyse, dass alle nichtlinearen Anteile (geometrisch und strukturell) in die Matrizen \mathbf{K}_u und \mathbf{K}_σ einfließen.

Betrachtet man hingegen die materielle Nichtlinearität im Zuge einer nichtlinearen Analyse als eine strukturelle Schädigung - der Begriff Schädigung und die numerische Umsetzung werden in Kapitel 7 näher erläutert -, so kann die tangentialsteifigkeitsmatrix auch in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{Td} &= \mathbf{K}_{ed} + \underbrace{\mathbf{K}_{\sigma d}^L + \mathbf{K}_{ud}^L}_{\mathbf{K}_d^L} + \underbrace{\mathbf{K}_{\sigma d}^{NL} + \mathbf{K}_{ud}^{NL}}_{\mathbf{K}_d^{NL}} \\ &= \mathbf{K}_{ed} + \mathbf{K}_d^L + \mathbf{K}_d^{NL}\end{aligned}\quad (6.44)$$

formuliert werden. Der Index (d) soll dabei die Abhängigkeit von der materiellen Nichtlinearität/Schädigung ausdrücken [Krätzig et al. 2000]. Die einzelnen Matrixanteile können in folgender Form nach Anteilen, die schädigungsbehaftet und schädigungsfrei sind, aufgespalten werden

$$\mathbf{K}_{ed} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e(d) \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(d=0) \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_d^L &= \mathbf{K}^L(\mathbf{V}) + \mathbf{K}^L(\mathbf{V}, d) \\ &= \mathbf{K}_\sigma^L(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_u^L(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_\sigma^L(\mathbf{V}, d) + \mathbf{K}_u^L(\mathbf{V}, d)\end{aligned}\quad (6.46)$$

und analog für den nichtlinearen Anteil der Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_d^{NL} &= \mathbf{K}^{NL}(\mathbf{V}^2) + \mathbf{K}^{NL}(\mathbf{V}^2, d) \\ &= \mathbf{K}_\sigma^{NL}(\mathbf{V}^2) + \mathbf{K}_u^{NL}(\mathbf{V}^2) + \mathbf{K}_\sigma^{NL}(\mathbf{V}^2, d) + \mathbf{K}_u^{NL}(\mathbf{V}^2, d).\end{aligned}\quad (6.47)$$

Diese Aufspaltung ist notwendig, da speziell bei dem Material Stahlbeton die Änderung

Gleichgewichtszustand	Steifigkeitsparameter	Determinante von \mathbf{K}_T	Diagonalwerte
stabil	$S_P \neq 0$	$\det \mathbf{K}_{Td} > 0$	$\forall D_{ii} > 0$
indifferent (Durchschlagspunkt)	$S_P = 0$	$\det \mathbf{K}_{Td} = 0$	$\exists D_{ii} = 0$
indifferent (Verzweigungspunkt)	$S_P \neq 0$	$\det \mathbf{K}_{Td} = 0$	$\exists D_{ii} = 0$
instabil	$S_P \neq 0$	$\det \mathbf{K}_{Td} \neq 0$	$\exists D_{ii} < 0$

Tabelle 6.5: Übersicht über die Parameter zur Identifizierung der Versagensart

der Steifigkeitsmatrix zum einen von der Verringerung des Elastizitätsmoduls, beispielsweise durch Fließen der Bewehrung oder Plastizieren des Betons, zum anderen von Steifigkeitsveränderungen durch Rissbildung und resultierenden wachsenden Verformungen abhängt. Diese beiden Tragwerkeigenschaften beeinflussen sich gegenseitig, so dass die Aufweichung des Systems durch Plastizieren oder Rissbildung starke Verformungszuwächse und die wachsenden Verformungen wiederum progressives Aufreißen der Struktur verursachen.

In Tabelle 6.6 sind die einzelnen Bestandteile der tangentialen Steifigkeitsmatrix für die sich aus der Einführung des Schädigungsbegriffs ergebenden vier Fälle der FEM zusammengestellt.

Beobachtung der einzelnen Matrixanteile. Innerhalb einer nichtlinearen Berechnung nach Fall 4 der Tabelle 6.6 lassen sich mit Hilfe der in Kapitel 7 noch einzuführenden Definition der Schädigung die drei Matrizenanteile

$$\mathbf{K}_{ed}, \quad \mathbf{K}_{ud}^L + \mathbf{K}_{ud}^{NL}, \quad \mathbf{K}_{\sigma d}^L + \mathbf{K}_{\sigma d}^{NL} \quad (6.48)$$

separieren. Hierdurch lässt sich aber lediglich die Größe der Schädigung durch Beobachtung der Veränderung von \mathbf{K}_{ed} quantifizieren.

Strebt man einen detaillierten Vergleich an, so wird eine Analyse nach Fall 3 der Tabelle 6.6 benötigt, bei der die Anteile

$$\mathbf{K}_e, \quad \mathbf{K}_u^L + \mathbf{K}_u^{NL}, \quad \mathbf{K}_\sigma^L + \mathbf{K}_\sigma^{NL} \quad (6.49)$$

separiert werden.

Die Analyse wird zweckmäßigerweise parallel zu der geometrisch und materiell-nichtlinearen Analyse durchgeführt. Nach Ausiteration des Gleichgewichtszustandes wird für das erreichte Lastniveau der Verformungszustand unter Ansatz geometrischer Nichtlinearität aber materieller Linearität bestimmt.

Wie bereits in Abschnitt 6.2.3.3 erläutert ist der Aufwand für eine direkte Beobachtung der einzelnen Bestandteile durch eine Determinantenberechnung sehr aufwändig, so dass zur Beurteilung der in Abschnitt 6.2.3.4 vorgestellte Steifigkeitsparameter herangezogen wird. Für den Anteil der elastischen Steifigkeitsmatrix beispielsweise ergibt sich die prozentuale

Fall	Kinematik	Schädigung/Materialgesetz	vorhandene Matrizenanteile
1	Linear	Nein/Linear	$\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u^L + \mathbf{K}_\sigma^L$
2	Linear	Ja/Nichtlinear	$\mathbf{K}_{ed} + \mathbf{K}_{ud}^L + \mathbf{K}_{\sigma d}^L$
3	Nichtlinear	Nein/Linear	$\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u^L + \mathbf{K}_u^{NL} + \mathbf{K}_\sigma^L + \mathbf{K}_\sigma^{NL}$
4	Nichtlinear	Ja/Nichtlinear	$\mathbf{K}_{ed} + \mathbf{K}_{ud}^L + \mathbf{K}_{ud}^{NL} + \mathbf{K}_{\sigma d}^L + \mathbf{K}_{\sigma d}^{NL}$

Tabelle 6.6: Anteile der tangentialen Steifigkeitsmatrix

Änderung infolge der materiellen Nichtlinearität durch den Verhältniswert

$$X_{\mathbf{K}_e} = \frac{S_P^{\mathbf{K}_e} - S_P^{\mathbf{K}_{ed}}}{S_P^{\mathbf{K}_e}} = \frac{\frac{\Delta \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{K}_{e1} \cdot \Delta \mathbf{V}_1}{\Delta \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{K}_{ei} \cdot \Delta \mathbf{V}_1} - \frac{\Delta \mathbf{V}_1^{*T} \cdot \mathbf{K}_{ed1} \cdot \Delta \mathbf{V}_1}{\Delta \mathbf{V}_1^{*T} \cdot \mathbf{K}_{edi} \cdot \Delta \mathbf{V}_1}}{\frac{\Delta \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{K}_{e1} \cdot \Delta \mathbf{V}_1}{\Delta \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{K}_{ei} \cdot \Delta \mathbf{V}_1}}, \quad (6.50)$$

wobei der Verschiebungsvektor der nichtlinearen Analyse mit $(\dots)^*$ gekennzeichnet ist. Analog hierzu lassen sich die prozentualen Änderungen der anderen Teilmatrizen bestimmen.

6.2.3.7 Weitere Stabilitätskriterien

Eigenwert- und Eigenvektorbestimmung mit Hilfe der \mathbf{LDL}^T -Zerlegung. Die Lösung der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen begleitenden Eigenwertprobleme ist, wie bereits erwähnt, zeit- und rechenaufwändig. Daher kann es bei großen Strukturen von Vorteil sein, diesen Schritt einzusparen. Fujii & Noguchi (2002) zeigen in ihrem Konzept der Eigenwertproblemfreien Eigenvektorbestimmung, dass bei FE-Analysen, welche die Cholesky-Zerlegung \mathbf{LDL}^T der Steifigkeitsmatrix benutzen, die Lösung des Eigenwertproblems zum Auffinden von Verzweigungspunkten entfallen kann.

Der wesentliche Grundgedanke basiert auf der bereits in Abschnitt 3.5 vorgestellten Auflösung von \mathbf{K}_T in die Bestandteile \mathbf{L} , \mathbf{D} und \mathbf{L}^T . Mit der Definition eines Vektors \mathbf{t}_k , der die Spalte k der Matrix \mathbf{L} wiedergibt, gilt:

$$\mathbf{K}_T = [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k, \dots, \mathbf{t}_{n_{dof}}] \mathbf{D} [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k, \dots, \mathbf{t}_{n_{dof}}]^T. \quad (6.51)$$

Die Steifigkeitsmatrix kann im Sinne einer Spektralzerlegung durch Eigenwerte und Eigenvektoren ausgedrückt werden:

$$\mathbf{K}_T = \sum_{j=1}^{n_{dof}} \Lambda_j \mathbf{\Psi}_j \mathbf{\Psi}_j^T. \quad (6.52)$$

Mit der Definition eines Vektors \mathbf{e}_k , dessen einziges Element ungleich 0 das k -te mit dem Wert 1.0 ist, und nach einigen mathematischen Umformungen der Inversen der Gleichungen (6.51) und (6.52) unter der Voraussetzung der Orthogonalitätsbedingung $(\mathbf{t}_j^T \cdot \mathbf{s}_k) = \delta_{jk}$, lässt sich nahe dem Verzweigungspunkt der Eigenvektor $\mathbf{\Psi}$ bestimmen:

$$\mathbf{\Psi}_k \cong \frac{\mathbf{s}_k}{|\mathbf{s}_k|} \quad (6.53)$$

mit $\mathbf{s}_k = (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{e}_k^T$.

Der zugehörige Eigenwert kann näherungsweise zu

$$\Lambda_{crit} \cong \frac{D_{kk}}{|\mathbf{s}_k|^2} \quad (6.54)$$

bestimmt werden. Nahe dem Verzweigungspunkt nähert sich dieser Eigenwert dem Wert 0 an. Ein großer Nachteil dieser Methode liegt für Systeme mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden und ausgeprägter Bandstruktur der Steifigkeitsmatrix in dem Verlust dieser speichersparenden Struktur bei der Inversion der oberen Dreiecksmatrix. Die benötigte Inversion ist darüberhinaus auch sehr rechenintensiv. Abzulesen ist dieses an dem 4-fach erhöhtem Zeitaufwand einer numerischen Matrizeninversion gegenüber der Lösung des Gleichungssystems.

Turkkila (2002) stellt eine Erweiterung dieses Konzeptes für die Behandlung des klassischen Eigenwertproblems vor. Die Verbesserung des Eigenwertes innerhalb einer Iteration zur Bestimmung des kleinsten positiven Eigenwertes wird durch den Quotienten der jeweiligen Diagonalglieder der Matrizen \mathbf{D} und $\mathbf{D}_{,\Lambda}$, die aus der Diagonalzerlegung der Matrizen \mathbf{K}_T und $\mathbf{K}_{T,\Lambda}$ entstehen, erreicht:

$$\Delta\Lambda_k = \Lambda_k^{i+1} - \Lambda_k^i = -\frac{D_{kk}^i}{D_{kk,\Lambda}^i}. \quad (6.55)$$

Der Vorteil dieses Vorgehens liegt in dem Wegfall des zusätzlichen Eigenwertproblems. Für Systeme mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden erfordert die Ermittlung der Diagonalglieder $D_{kk,\Lambda}^i$ hingegen großen rechnerischen Aufwand, da eine zusätzliche Diagonalzerlegung durchgeführt werden muss, so dass die Vorgehensweise zur Abschätzung des kritischen Lastniveaus keinen entscheidenden Vorteil bietet.

Direkte Berechnung. Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von Stabilitätspunkten unter Umgehung einer zeitaufwändigen begleitenden Analyse bietet die direkte Berechnung [Wriggers et al. 1988], [Wriggers & Simo 1990]. Hierfür wird das zu lösende Gleichungssystem der Gleichgewichtsbedingungen $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \lambda) = \mathbf{0}$ mit einer den Stabilitätspunkt beschreibenden Nebenbedingung erweitert [Planinc & Saje 1999]:

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}, \lambda) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}(\mathbf{V}, \lambda) \\ \det \mathbf{K}_T(\mathbf{V}, \lambda) \end{array} \right\} = \mathbf{0}. \quad (6.56)$$

So kann ausgehend vom Grundzustand der Punkt des indifferenten Gleichgewichts bestimmt werden. Hierbei konvergiert der Lastfaktor innerhalb einer Iteration gegen den kritischen Beullastfaktor. Als Nebenbedingung kann ebenso die Bedingung für den Eigenvektor $\mathbf{K}_T \cdot (\mathbf{V}, \lambda) \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}$ eingefügt werden [Wriggers & Simo 1990]. Dieses Verfahren eignet sich in erster Linie für Systeme mit einem eindeutigen Eigenvektor im Stabilitätspunkt. Ist dieser Stabilitätspunkt nicht eindeutig, so kann während der Iteration durch ständiges Wechseln des Eigenvektors die Lösung divergieren. Auch versagt die direkte Methode bei einem so ausgeprägten nichtlinearen Verhalten des Materials Stahlbeton. Hierbei ändert sich infolge der Belastung mitunter die Steifigkeitsverteilung des Tragwerks so signifikant, dass die Berechnung des Stabilitätspunktes ausschließlich auf Grundlage des Grundzustandes zu einer Überschätzung des maximal erreichbaren Lastniveaus führen kann.

Kapitel 7

Konzept zu einer schädigungsorientierten Stabilitätsanalyse

7.1 Allgemeines

Mit den in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten und weiterentwickelten Methoden ist es möglich, ein Tragwerk hinsichtlich seiner Tragfähigkeit und Stabilität unter der Berücksichtigung von materieller Nichtlinearität zu analysieren und der Versagensart nach zu beurteilen.

Derartige Analysen sind bei komplexen Tragstrukturen aufwändig und führen zu der Suche nach einer einfachen und zeitsparenden Lösungsmethode zur Beantwortung der Stabilitätsfrage. Hierzu wird im Folgenden der Versuch unternommen, die nichtlinearen Eigenschaften des Tragwerks auf eine möglichst einfache Art und Weise für eine Stabilitätsanalyse abzubilden. Das Konzept sieht vor, die durch die materielle Nichtlinearität entstehende Anisotropie des Tragwerks in eine vereinfachende lineare Stabilitätsanalyse einfließen zu lassen. Die vereinfachte Analyse wird mit Hilfe des Eigenwertproblems nach Gleichung (6.13) durchgeführt. Um die Schädigung in die lineare Steifigkeitsmatrix einfließen zu lassen, müssen vorab die Begriffe Schädigung und Anisotropie definiert werden.

7.2 Begriffsdefinition

7.2.1 Schädigung

Die Schädigung beschreibt den Zustand eines Tragwerks, vor oder nach einer Belastung, der unwiederbringliche Strukturänderungen beinhaltet.

Solche Schädigungen werden in der Literatur durch eine Vielzahl von unterschiedlichen Schädigungsparametern D beschrieben [Mazars et al. 1992], [Krätzig et al. 2000], [Krätzig

& Petryna 2001], [Noh 2002]. Diese Parameter unterscheiden sich im Wesentlichen durch ihre Anzahl pro Tragwerk. Bei einer Umsetzung innerhalb eines FEM-Konzeptes lässt sich somit die Anzahl der Parameter D am besten durch eine Ordnungsliste darstellen. Hierbei steigt mit zunehmender Ordnungszahl die Anzahl der definierten Schädigungsparameter an.

1. Ordnung: Ein Parameter D für die Schädigung des gesamten Tragwerks.
2. Ordnung: Der Parameter D wird für einzelne Teilbereiche des Tragwerks getrennt definiert.
- 3a. Ordnung: Für jedes finite Element einer speziellen Diskretisierung wird ein Parameter D definiert.
- 3b. Ordnung: In jedem Integrationspunkt eines finiten Elementes wird ein Parameter D definiert.
4. Ordnung: Für jede Schicht innerhalb eines jeden Integrationspunktes wird ein Parameter D definiert.
5. Ordnung: In jeder Schicht werden die Parameter D_1, D_2, \dots, D_n richtungsabhängig für Beton und Stahl getrennt definiert.

Diese hier vorgestellte Ordnungsliste lässt weitergehende Kombinationsmöglichkeiten zu. Beispielsweise kann auch in der Ordnungsstufe 3a eine Beschreibung durch mehrere Schädigungsparameter getrennt für die Materialkomponenten erfolgen.

Diese Auflistung gestattet es, das Für und Wider der einzelnen Ordnungsstufen für die vorliegende Problemstellung zu betrachten.

Der Parameter 1. Ordnung erlaubt es, die Material- und Querschnittsparameter der gesamten Struktur in gleichem Maße zu verändern, was zur Konsequenz hat, dass entweder lokale Mechanismen keine oder eine zu starke Rolle in einer reduzierten Beullastberechnung erhalten können. Der in Noh (2002) definierte Schädigungsparameter als Verhältniswert der Eigenfrequenzen oder aber auch der in Abschnitt 6.2.3.4 beschriebene Steifigkeitsparameter kann zu dieser Ordnungsstufe gezählt werden.

In der 2. Ordnungsstufe wird bereits auf die vorhandene Struktur eingegangen, sie erfordert aber vorab eine genaue Kenntnis der zu erwartenden Schwächen der Konstruktion.

Ordnungsstufe 3a ermöglicht bereits, lokale Schwächungen des Tragwerks besser zu beschreiben, wobei der Parameter 3b. Ordnung eine nochmalige Verfeinerung darstellt.

Bei dem Parameter 4. Ordnung gewinnt nun ebenfalls das Versagen im einzelnen Querschnitt an Bedeutung, so dass auch eine wechselnde Belastungsrichtung Berücksichtigung finden kann.

Die Verfeinerung der 5. Ordnungsstufe hat zur Folge, dass getrennt für die einzelnen Richtungen und Materialien eine Schädigung definiert wird, so dass hierin verstärkt auf die Besonderheiten des Werkstoffs Stahlbeton eingegangen werden kann.

Die Parameter D_1, D_2, \dots, D_n lassen sich getrennt nach Belastungs- und Materialart definieren. Die hier verwendeten Parameter finden sich in den Bildern 7.1 - 7.3.

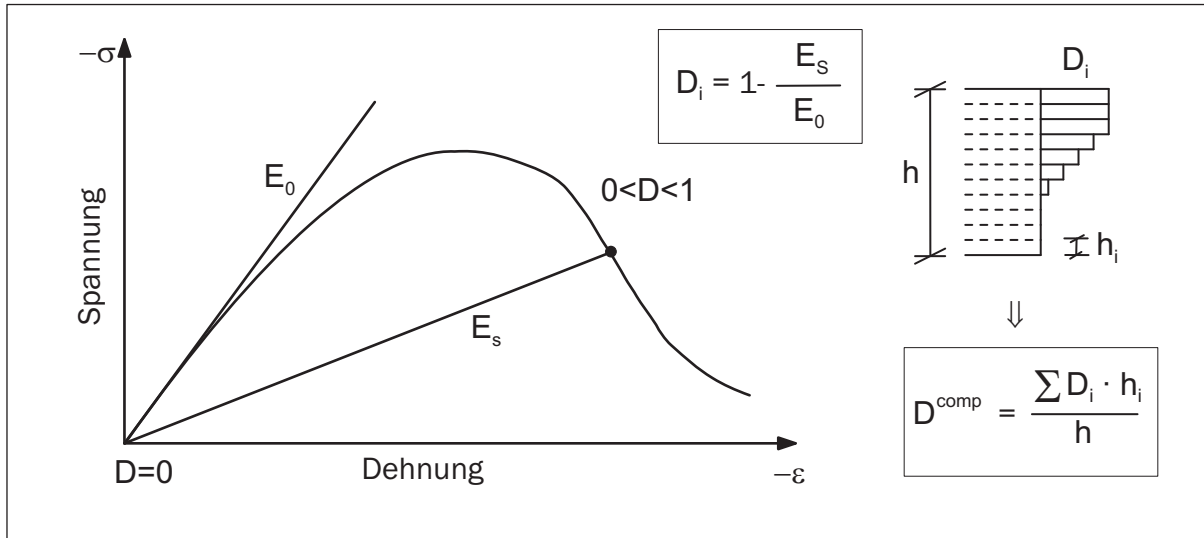


Bild 7.1: Parameter zur Beschreibung der Schädigung des Betons infolge Druckbeanspruchung

Der Parameter D^{comp} gibt die Schädigung des Betonquerschnitts infolge Druckbeanspruchung an. Durch Aufintegration der Parameter jeder Schicht über die Querschnittsdicke wird ein Schädigungsparameter für den entsprechenden Integrationspunkt bestimmt:

$$D^{comp} = \frac{\sum D_i \cdot h_i}{h}. \quad (7.1)$$

Die Schädigung wird als Verhältnis des Sekantenmoduls zum Ursprungselastizitätsmodul definiert. Als Richtung werden die beiden konvektiven Koordinatenachsen benutzt. Für die Verwendung dieses Parameters innerhalb einer nichtlinearen Berechnung, beispielsweise zur Bestimmung von \mathbf{K}_{ed} , ist der Einfluss der Lage der geschädigten Schichten im Querschnitt von großer Bedeutung, so dass für die Verwendung im Biegesteifigkeitsanteil eine entsprechende Integration erfolgen muss.

D^{ten} ist der Parameter zur Beschreibung der Rissbildung des Betons. Seine Definition erfolgt in Form einer Unterscheidung zwischen ungerissener und gerissener Schicht im jeweiligen Integrationspunkt. Danach folgt die Aufintegration der Schädigung über den Querschnitt, wobei zwischen Rissbildung startend auf Ober- oder Unterseite unterschieden wird:

$$D^{ten} = 1 - \frac{h - t_{crack}}{h}. \quad (7.2)$$

Der Parameter für die Schädigung des Stahls wird als D^{steel} definiert. Er gibt den Plastizierungsgrad des Bewehrungsstahls wieder und wird für jede Stahllage separat definiert:

$$D^{steel} = \frac{E_0 - E_S}{E_0 - E_{S,max}}. \quad (7.3)$$

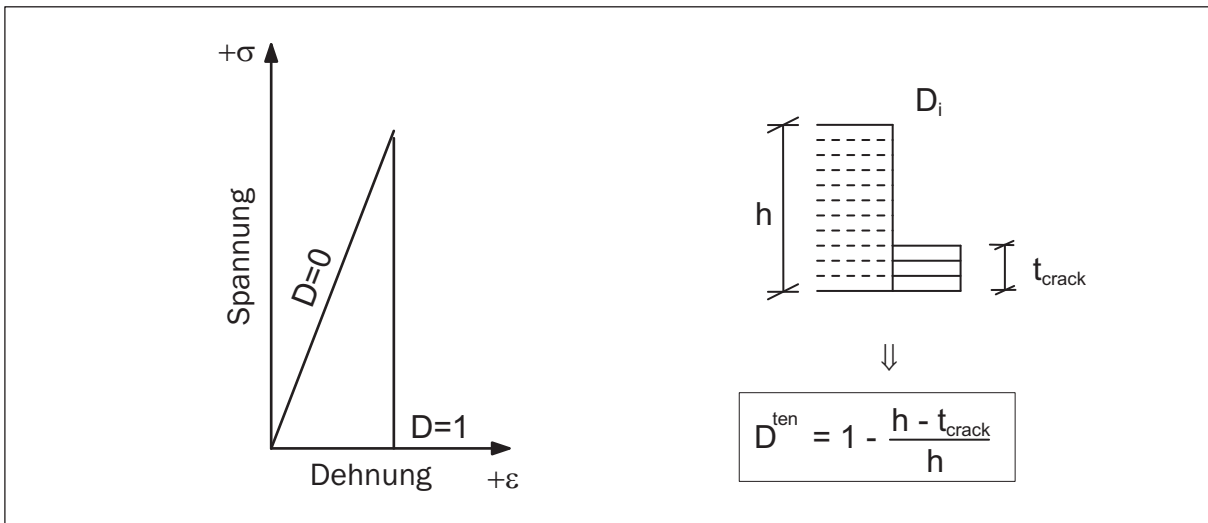


Bild 7.2: Parameter zur Beschreibung der Schädigung des Betons infolge Rissbildung

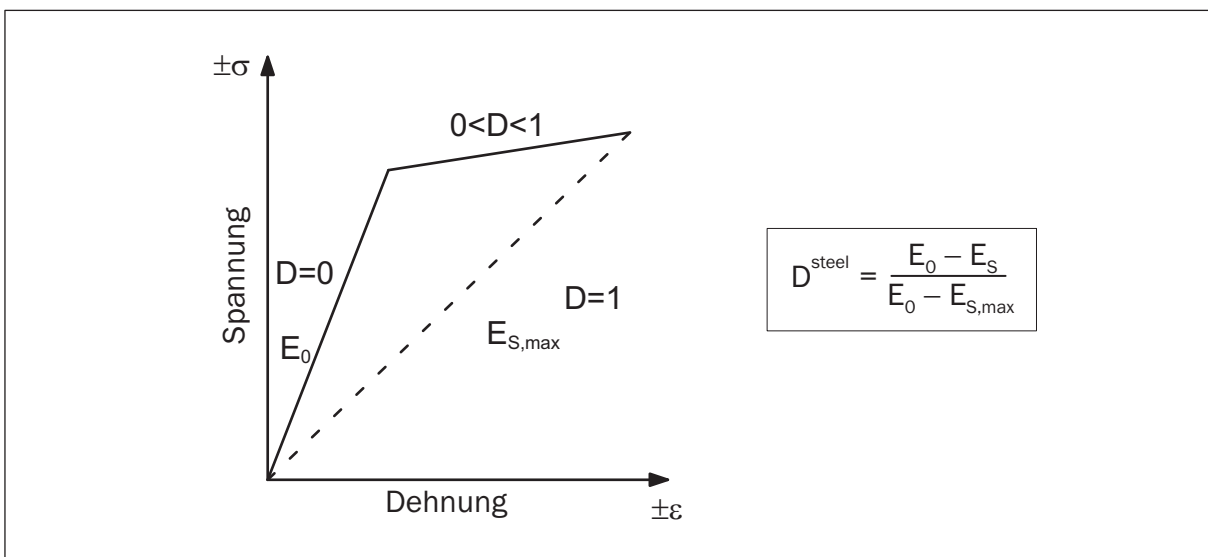


Bild 7.3: Parameter zur Beschreibung der Schädigung des Stahls infolge Druck- bzw. Zugbeanspruchung

7.2.2 Initiale Schädigung

Die definierten Schädigungsparameter ermöglichen neben der Verwendung innerhalb einer nichtlinearen Berechnung auch die Vorgabe von initialen Schädigungen. Diese Vorgabe kann auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen.

Die erste Möglichkeit besteht in der direkten Eingabe von zusätzlichen Elementinformationen durch den Anwender des Programmsystems. Hierbei werden den Integrationspunkten

eines Elementes identische Schädigungen zugewiesen (Kombination der Ordnungsstufen 3a und 5). Diese Reduktion ergibt sich ausschließlich aus Gründen der Benutzerfreundlichkeit der Eingabe.

Eine zweite Möglichkeit besteht in der direkten Übernahme des Schädigungszustandes einer vorherigen nichtlinearen Analyse. Hierzu werden während der nichtlinearen Analyse die Schädigungsinformationen pro Element und Integrationspunkt in einer Schädigungsmatrix gespeichert. Diese Speicherung erfolgt in jedem ausiterierten Lastschritt und kann für spätere Analysen verwendet werden.

Beide Vorgehensweisen zur Definition der initialen Schädigungen führen zu einem geschädigten Ausgangszustand. Die innerhalb der inkrementell-iterativen Vorgehensweise definierten drei Tragwerkszustände (s. Abschnitt 3.3) können gemäß Bild 7.4 dargestellt werden.

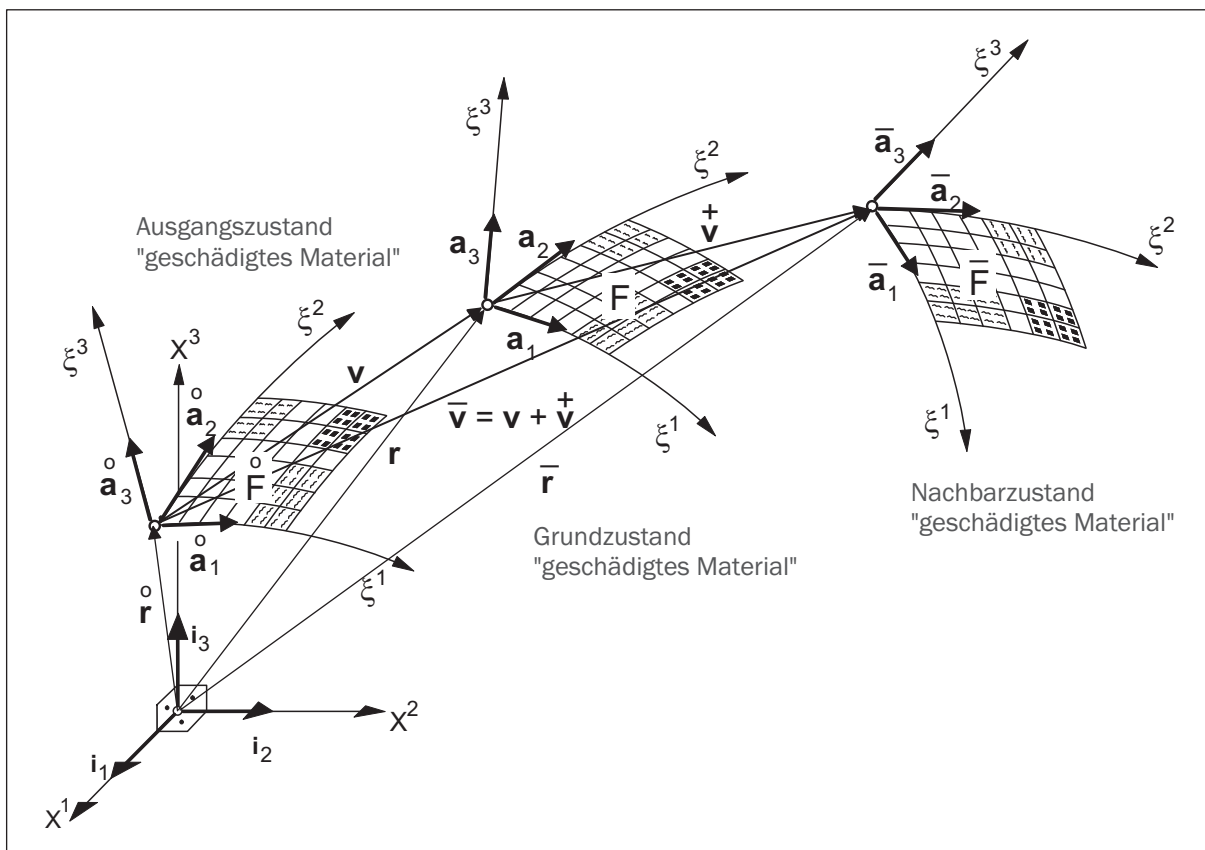


Bild 7.4: Ausgangs-, Grund- und Nachbarzustand einer initial geschädigten Schalenstruktur

7.2.3 Anisotropie

Der Begriff Anisotropie besagt, dass eine Struktur richtungsabhängiges Werkstoffverhalten aufweist. Ein Sonderfall hierbei stellt die Orthotropie dar. Sie sagt aus, dass die Struktur in zwei orthogonal zueinander stehenden Richtungen anisotropes Materialverhalten zeigt.

Die Orthotropie eines Kontinuums kann durch ein allgemeines Materialgesetz, wie es in Schultz (1996) und Lürding (2001) angegeben wird, ausgedrückt werden. Die Reduktion auf den zweidimensionalen Spannungszustand führt analog zu Abschnitt 3.2.2.4 zu einer Reduktion der unabhängigen Komponenten des Werkstoffensors. Für ebene Flächentragwerke, im Speziellen für versteifte oder wabenförmige Tragsysteme, existieren eine Vielzahl von empirisch ermittelten Werkstoffgesetzen, wovon eine gute Zusammenstellung in Başar & Krätzig (1985) zu finden ist.

Die sich infolge einer Schädigung einstellende Orthotropie wird innerhalb dieser Arbeit wie folgt berücksichtigt. Die Schädigung erfolgt richtungsabhängig, das heißt, sie orientiert sich aufgrund ihrer Definition an dem Elementkoordinatensystem Θ_α . Der Werkstofftensor wird mit den bereits in Abschnitt 3.2.2.4 dargestellten Zusammenhängen in Elementkoordinatenrichtung aufgestellt. Entgegen dem isotropen Materialverhalten existieren aufgrund der möglichen, in zwei Richtungen unterschiedlichen Schädigungen die Dehn- bzw. Biegesteifigkeiten D_{11} , D_{22} , B_{11} und B_{22} . Die bei der Verwendung eines orthogonalen ebenen Koordinatensystems verbleibenden vier Komponenten des Werkstoffensors ergeben sich beispielsweise zur Bestimmung des Pseudo-Normalkraftensors zu:

$$\tilde{N}^{(\alpha\beta)} = \begin{bmatrix} D_{11}H^{1111} & \cdot & \cdot & \nu D_{12}H^{1122} \\ \cdot & \nu D_{12}H^{1212} & \nu D_{12}H^{1212} & \cdot \\ \cdot & \nu D_{12}H^{1212} & \nu D_{12}H^{1212} & \cdot \\ \nu D_{12}H^{1122} & \cdot & \cdot & D_{22}H^{2222} \end{bmatrix} \cdot \alpha_{(\varphi\lambda)} \quad (7.4)$$

mit $D_{12} = \sqrt{D_{11}D_{22}}$.

Bei der Verwendung für allgemeine Schalenstrukturen sind auch die restlichen Komponenten des Werkstoffensors ungleich Null. Zur Bestimmung dieser Komponenten wird grundsätzlich die Dehnsteifigkeit D_{12} verwendet, da keine eindeutige Richtung dieser Größen angebar ist. Die Ermittlung des Momententensors erfolgt unter Verwendung der Biegesteifigkeiten analog. Der innerhalb der Schubverzerrungstheorie ebenfalls benötigte Schubmodul G wird korrespondierend zu der Herleitung in Abschnitt 4.2 zu

$$G = \frac{E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1E_2}}{4(1 - \nu^2)} \quad (7.5)$$

angesetzt.

Neben der Entscheidung, ob ein Einfluss auf die Dehn- und Biegesteifigkeit besteht (s. Abschnitt 7.3), ist die Frage nach der Größe dieses Einflusses von Interesse. Bei einer Schädigung infolge hoher Druckbeanspruchung des Betons wird der Einfluss zu 100 % angenommen, da hier das Material sowohl für Zug- als auch Druckbeanspruchungen geschädigt ist. Für eine Schädigung infolge Rissbildung wird zur Quantifizierung ein weiterer Parameter verwendet. Die Druckzonenhöhe, die mit Hilfe der Dehnungen an Ober- und Unterseite (7.10) näherungsweise zu

$$x_{\alpha\alpha}^{o/u} = \frac{|\gamma_{o/u}|}{|\gamma_o| + |\gamma_u|} \cdot h \quad (7.6)$$

bestimmt werden kann, führt gegebenenfalls zu einer Abminderung des Einflusses der Schädigung.

Neben der Auswirkung der Schädigung auf die Dehn- und Biegesteifigkeit entsteht durch die Rissbildung ein in Bild 7.5 dargestelltes Verschieben der Schwerlinie des Querschnitts. Hierzu wird der Versatz zwischen ursprünglicher und aktueller Schwerlinie nach

$$e_{ges} = \frac{\left(\frac{h}{2} \pm \frac{t_{crack}}{2}\right) \cdot E_c \cdot (h - t_{crack}) + E_s \cdot \sum_i a_{si} \cdot e_{si}}{E_c \cdot (h - t_{crack}) + E_s \cdot \sum_i a_{si}} - \frac{h}{2} \quad (7.7)$$

bestimmt. In die Bestimmungsgleichung fließt neben der Risstiefe auch die Menge der im Querschnitt vorhandenen Bewehrung ein, so dass diese mit wachsender Risstiefe an Bedeutung gewinnt. Für einen komplett gerissenen Querschnitt entsteht so bei symmetrischer Bewehrung ein Versatz von Null.

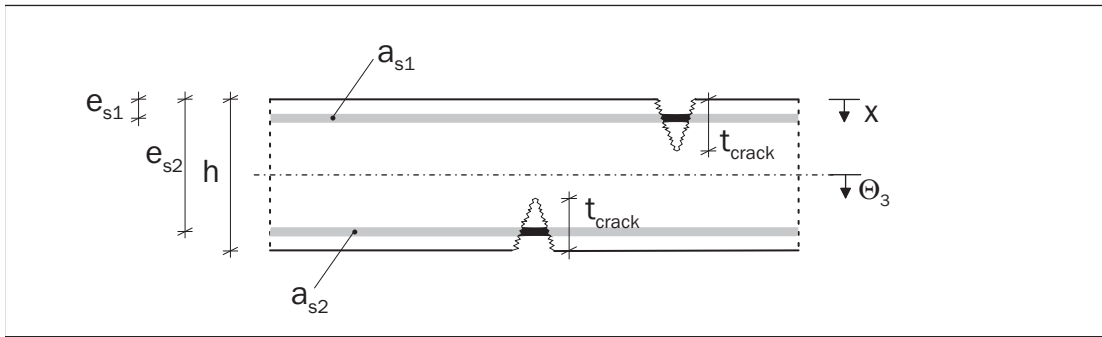


Bild 7.5: Versatz der Schwerlinie in einem gerissenen bewehrten Stahlbetonquerschnitt

Der Versatz hat zur Konsequenz, dass, ähnlich der Vorgehensweise bei anisotropen unsymmetrisch versteiften Querschnitten in der Schalentheorie, die Ergänzung des Elastizitätstensors durch Kopplungskomponenten notwendig wird. Sie bewirken, dass das Verschieben der Schwerlinie die Normalkräfte durch die Krümmung und die Momente durch die Längsdehnungen beeinflusst. Die Größe dieser Kopplungsterme ist in starkem Maße von der Form des untersuchten Querschnitts abhängig. In Bařar & Krätzig (1985) ist die Herleitung für einen unsymmetrisch versteiften Querschnitt dargestellt. In einem solchen Fall ist aufgrund des stark inhomogenen Querschnitts die Beschränkung auf die Kopplungskomponenten

$$\begin{aligned} E^{1111} &= e_1 \cdot E^{1111} = e_1 \cdot D_{11} \cdot H^{1111} \\ E^{2222} &= e_2 \cdot E^{2222} = e_2 \cdot D_{22} \cdot H^{2222} \end{aligned} \quad (7.8)$$

ausreichend. Bei der Schwerlinienverschiebung aufgrund von Risschädigung besteht der Restquerschnitt hingegen immer noch aus einem weitestgehend homogenen Material, so dass beispielsweise die Krümmung in Θ_2 -Richtung die Normalkraft in Θ_1 -Richtung ausschließlich über die Querdehnung beeinflusst. Daher werden auch hier die Komponenten E^{1122} und E^{1212} korrespondierend zum Vorgehen bei rein orthotropem Verhalten bestimmt:

$$\begin{aligned} E^{1122} &= \nu \cdot \sqrt{(e_1 \cdot D_{11}) \cdot (e_2 \cdot D_{22})} \cdot H^{1111} \\ E^{1212} &= \nu \cdot \sqrt{(e_1 \cdot D_{11}) \cdot (e_2 \cdot D_{22})} \cdot H^{1212}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Der hier beschriebene Ansatz liefert, was zahlreiche Voruntersuchungen gezeigt haben, für stark bewehrte Querschnitte gute Resultate. Die veränderten Steifigkeitseigenschaften und die zusätzlichen Momentenbeanspruchungen des Querschnitts können durch die hohe Bewehrungsmenge kompensiert werden. Bei schwach bewehrten Schalenträgwerken hingegen bewirkt eine Rissbildung aufgrund der geringen Steifigkeitsanteile der Bewehrung eine große Schwerlinienverschiebung. Innerhalb einer geometrisch und physikalisch nichtlinearen Analyse würde das Tragwerk durch zusätzliche Verformungen der erhöhten Momentenbeanspruchung entgehen. Innerhalb einer vereinfachten Stabilitätsberechnung kann nun der Versuch unternommen werden, diese Schwerlinienverschiebung in Abhängigkeit von dem Bewehrungs- und dem Schädigungsgrad zu begrenzen. Eine solche Begrenzung kann, wie eine große Anzahl von Vorberechnungen gezeigt haben, nur unter gleichzeitiger Berücksichtigung von nicht-konservativen Belastungen sinnvoll vorgenommen werden. Alle anderen empirisch ermittelten Begrenzungen können für einzelne Bewehrungs-, Schädigungs- und Geometrievarianten zwar akzeptable Lösungen bieten, allerdings verlieren sie zumeist bei dem Versuch der Verallgemeinerung ihre Gültigkeit. Im Hinblick auf das Hauptziel dieser Arbeit, die Voraussetzungen für einen alternativen Nachweis zu schaffen, wird an dieser Stelle auf eine weitere Untersuchung verzichtet und bei schwach bewehrten Querschnitten der Versatz durch Rissbildung auf einen problemabhängigen Maximalwert begrenzt.

7.3 Approximation der Beullast durch Initialschädigung

Der in den vorangegangenen Abschnitten erläuterte Schädigungsparameter soll im Folgenden für die Abschätzung des kritischen Lastniveaus einer Struktur mit nichtlinearem Materialverhalten verwendet werden. Die Analyse kann auf zwei unterschiedlichen Wegen erfolgen, die hier dargestellt werden.

Nichtlineare Analyse mit geschädigtem Material. Die Analyse der Struktur erfolgt geometrisch nichtlinear unter der Annahme eines geschädigten, sich über die weitere Belastungsgeschichte linear elastisch verhaltenen Materials. Der so ermittelte Last-Verformungspfad entspricht dem Antwortverhalten einer geschwächten Struktur.

Das verwendete Materialgesetz ist in großen Teilen dem Gesetz für elastisches Material gleichzusetzen. Der wesentliche Unterschied besteht in der vor Aufstellen des Werkstoff-tensors durchgeführten Beurteilung, ob die vorhandenen Schädigungen einen negativen Einfluss auf die Tragfähigkeit haben.

Hierzu werden als eine Näherung die Dehnungen des jeweiligen Querschnitts an Ober- und Unterseite benutzt, welche sich zu

$$\gamma_{\alpha\alpha} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \gamma_{\alpha\alpha}^{o/u} = \alpha_{\alpha\alpha} \pm \frac{h}{2} \cdot \beta_{\alpha\alpha} \quad (7.10)$$

ergeben.

Nun kann mit Hilfe der im Folgenden dargestellten Fallunterscheidungen eine Auswahl der anzusetzenden Schädigungen erfolgen. Hierzu wird der Verzerrungszustand mit Hilfe der Dehnungen aus Gleichung (7.10) in neun unterschiedliche Fälle unterteilt und die Auswirkung auf die Dehn- (D) bzw. Biegesteifigkeit (B) festgestellt.

Zusätzlich muss der Einfluss der beiden Schädigungsparameter D^{comp} und D^{ten} differenziert betrachtet werden, da sie bei unterschiedlichen Dehnungszuständen verschiedene Auswirkungen auf die Steifigkeitsanteile haben. Die Einflüsse sind in den Tabellen 7.1 und 7.2 dargestellt. Wird beispielsweise der Parameter D^{ten} betrachtet, so ist ersichtlich, dass für einen voll gezogenen Querschnitt ($\gamma_{\alpha\alpha}(\pm\frac{h}{2}) > 0$) eine Auswirkung der Schädigung auf Dehn- und Biegesteifigkeit besteht. Im Gegensatz dazu soll bei einem voll gedrückten Querschnitt ($\gamma_{\alpha\alpha}(\pm\frac{h}{2}) < 0$) eine Risschädigung ausschließlich die Biegesteifigkeit beeinflussen. Diese Forderung entsteht aus dem Ziel heraus, dass mit einer vereinfachten Berechnung eine reduzierte Beullast ermittelt werden soll. Rein phänomenologisch besitzt ein vormals gerissenes Bauteil in einem voll gedrückten Zustand auch wieder ein gewisses Maß an Biegesteifigkeit, da die Risse geschlossen sind. Die Größe dieser Steifigkeit ist hierbei abhängig von der Größe der Druckkraft und ist auch nur solange vorhanden, wie eine solche stabilisierende Kraft existiert. Im Nachbeulbereich, dessen Minimum es anzunähern gilt, erfährt das Tragwerk eine Belastungsänderung und verliert diese erzwungene Steifigkeit.

Lineare Beulanalyse mit geschädigtem Material. Hierzu wird, ausgehend von der in Gleichung (6.44) für geschädigtes Material erweiterten Steifigkeitsmatrix, analog zu dem

	$\gamma_{\alpha\alpha}(\frac{h}{2}) < 0$	$\gamma_{\alpha\alpha}(\frac{h}{2}) = 0$	$\gamma_{\alpha\alpha}(\frac{h}{2}) > 0$
$\gamma_{\alpha\alpha}(-\frac{h}{2}) < 0$	$D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$	$D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$	$D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$
$\gamma_{\alpha\alpha}(-\frac{h}{2}) = 0$	$D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$	-	$B_{\alpha\alpha}$
$\gamma_{\alpha\alpha}(-\frac{h}{2}) > 0$	$D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$	$B_{\alpha\alpha}$	$B_{\alpha\alpha}$

Tabelle 7.1: Fallunterscheidung für die Schädigung infolge Druck D^{comp}

	$\gamma_{\alpha\alpha}(\frac{h}{2}) < 0$	$\gamma_{\alpha\alpha}(\frac{h}{2}) = 0$	$\gamma_{\alpha\alpha}(\frac{h}{2}) > 0$
$\gamma_{\alpha\alpha}(-\frac{h}{2}) < 0$	$B_{\alpha\alpha}$	$B_{\alpha\alpha}$	$D_{\alpha}^{ten} > 0 \Rightarrow D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$ $D_{\alpha}^{ten} < 0 \Rightarrow B_{\alpha\alpha}$
$\gamma_{\alpha\alpha}(-\frac{h}{2}) = 0$	$B_{\alpha\alpha}$	$B_{\alpha\alpha}$	$D_{\alpha}^{ten} > 0 \Rightarrow D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$ $D_{\alpha}^{ten} < 0 \Rightarrow B_{\alpha\alpha}$
$\gamma_{\alpha\alpha}(-\frac{h}{2}) > 0$	$D_{\alpha}^{ten} < 0 \Rightarrow D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$ $D_{\alpha}^{ten} > 0 \Rightarrow B_{\alpha\alpha}$	$D_{\alpha}^{ten} < 0 \Rightarrow D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$ $D_{\alpha}^{ten} > 0 \Rightarrow B_{\alpha\alpha}$	$D_{\alpha\alpha}, B_{\alpha\alpha}$

Tabelle 7.2: Fallunterscheidung für die Schädigung infolge Rissbildung D^{ten}

Vorgehen in Abschnitt 6.2.2 das lineare Eigenwertproblem definiert:

$$\{\mathbf{K}_{ed} + \Lambda \cdot \mathbf{K}_d^L\} \cdot \Psi = \{\mathbf{K}_{ed} + \Lambda \cdot (\mathbf{K}_{ud}^L + \mathbf{K}_{\sigma d}^L)\} \cdot \Psi = \mathbf{0}. \quad (7.11)$$

Schließlich entsteht in Anlehnung an die Formulierung der klassischen Stabilitätstheorie unter ausschließlicher Berücksichtigung der Anfangsspannungsmatrix:

$$\{\mathbf{K}_{ed} + \Lambda \cdot \mathbf{K}_{\sigma d}^L\} \cdot \Psi = \{\mathbf{K}_{ed} + \Lambda \cdot (\mathbf{K}_{\sigma}^L(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_{\sigma}^L(\mathbf{V}, d))\} \cdot \Psi = \mathbf{0}. \quad (7.12)$$

Somit ist ein klassischer Stabilitätsnachweis gefunden, in den Schädigungsaspekte einfließen können.

Beim Aufstellen der Anfangsspannungsmatrix wird die Schädigung ebenfalls berücksichtigt. Für ausschließlich druckbeanspruchte Tragwerke sind beide Matrizen \mathbf{K}_{σ} und $\mathbf{K}_{\sigma d}$ identisch, da keine zusätzlichen Schnittgrößen durch einen Versatz der Schwerlinie entstehen. In diesem Fall stellt das Eigenwertproblem

$$\{\mathbf{K}_{ed} + \Lambda \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^L\} \cdot \Psi = \mathbf{0} \quad (7.13)$$

ein gleichwertiges Kriterium dar. Für Tragwerke, die sowohl auf Druck als auch auf Biegung beansprucht werden, ist dieses Kriterium gegenüber Gleichung (7.12) als ungenauer anzusehen.

Zur Durchführung des Nachweises wird für beide Kriterien die folgende Vorgehensweise innerhalb des FE-Programms notwendig:

1. Ermittlung der elastischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ed, i=1}$ mit Dehnungszustand Null.
2. Lösen von $\mathbf{K}_{ed, i=1} \cdot \mathbf{V}_{i=1} = \overset{0}{\mathbf{P}}$.
3. Aufstellen von $\mathbf{K}_{\sigma d, i=1}$.
4. Lösen des Eigenwertproblems $(\mathbf{K}_{ed, i=1} + \Lambda_{i=1} \mathbf{K}_{\sigma d, i=1}) \cdot \Psi = \mathbf{0}$.
5. Aufstellen von $\mathbf{K}_{ed, i=2}$ unter Berücksichtigung des Verformungszustandes $\mathbf{V}_{i=1}$.
6. Lösen des Eigenwertproblems $(\mathbf{K}_{ed, i=2} + \Lambda_{i=2} \mathbf{K}_{\sigma d, i=1}) \cdot \Psi = \mathbf{0}$.
7. Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{K}_{ed, i=2} \cdot \mathbf{V}_{i=2} = \overset{0}{\mathbf{P}}$.
8. Aufstellen von $\mathbf{K}_{ed, i=3}$ und $\mathbf{K}_{\sigma d, i=2}$ unter Berücksichtigung des Verformungszustandes $\mathbf{V}_{i=2}$.
9. Lösen des Eigenwertproblems $(\mathbf{K}_{ed, i=3} + \Lambda_{i=3} \mathbf{K}_{\sigma d, i=2}) \cdot \Psi = \mathbf{0}$.
10. Ausgabe der Eigenwerte $\Lambda_{i=1}$, $\Lambda_{i=2}$ und $\Lambda_{i=3}$.

Alternativ kann in der hier dargestellten Vorgehensweise $\mathbf{K}_{\sigma d}$ durch \mathbf{K}_{σ} ersetzt werden.

Zu Beginn wird die elastische Matrix $\mathbf{K}_{e, i=1}$ aufgestellt. Zu diesem Zeitpunkt ist dem System noch kein Dehnungszustand bekannt, so dass alternativ lediglich $\mathbf{K}_{ed, i=1}$ mit $\gamma_{\alpha\alpha}^{o/u} = 0$ ermittelt werden kann.

Im nächsten Schritt erfolgt die Ermittlung von $\mathbf{V}_{i=1}$. Nach dem Aufstellen der Anfangsspannungsmatrix liefert die Lösung des Eigenwertproblems in Schritt 4 die erste Näherung des kritischen Lastfaktors. Mit Hilfe des Verformungszustandes $\mathbf{V}_{i=1}$ kann eine bessere Berücksichtigung des Schädigungszustandes in $\mathbf{K}_{ed, i=2}$ erfolgen. Ein erneutes Lösen des Eigenwertproblems in Schritt 6 liefert die zweite Näherung des kritischen Lastfaktors. Darauf folgend wird die Gleichgewichtsbeziehung unter Berücksichtigung der geschädigten Steifigkeitsmatrix erneut gelöst. Der so ermittelte Verformungszustand $\mathbf{V}_{i=2}$ dient zum Aufbau einer neuen geschädigten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ed, i=3}$ und Anfangsspannungsmatrix $\mathbf{K}_{\sigma d, i=2}$. Somit wird auf die veränderten Steifigkeitseigenschaften des geschädigten Tragwerks eingegangen. Der Grundgedanke dieser Vorgehensweise ist mit der Theorie 2. Ordnung bei der Schnittgrößenermittlung vergleichbar.

Ein weiterer Ansatz sieht vor, innerhalb der linearen Beulanalyse einen Schädigungszuwachs zu simulieren und somit näher an ein maximal erreichbares Lastniveau zu gelangen. Das Vorgehen ist in den ersten sechs Schritten identisch mit dem Vorherigen. In Schritt 7 wird abweichend das Gleichungssystem $\mathbf{K}_{ed, i=2} \cdot \mathbf{V}_{i=2} = \Lambda_{i=2} \cdot \overset{0}{\mathbf{P}}$ gelöst.

Hierdurch wird bei $\Lambda_{i=2} > 1.0$ ein erhöhter Belastungszustand des Tragwerks simuliert. In einem linearen Schritt wird überprüft, ob die sich einstellende Schädigung größer als die Initialschädigung ist. Ist sie es nicht, so ergibt die weitere Analyse keine Veränderung der Beullast. Bei einer Erhöhung der Schädigung ist die ermittelte Beullast $\Lambda_{i=3}$ geringer als $\Lambda_{i=2}$ und die Iteration kann mit dem Lösen von $\mathbf{K}_{ed, i=3} \cdot \mathbf{V}_{i=3} = \Lambda_{i=3} \cdot \overset{0}{\mathbf{P}}$ fortgesetzt werden.

Die so ermittelte Beullast hängt in ihrer Güte in starkem Maße von der Qualität der vorgegebenen Schädigungsparameter ab. Wird keine Schädigung vorgegeben, so wird nach linearer Theorie eine grobe Abschätzung durchgeführt und eine Beullast ermittelt, welche in den meisten Fällen zu hoch gegenüber der realen ist. Wird hingegen ein vollständig geschädigtes Tragwerk vorgegeben, so ist die berechnete Beullast weit geringer als die reale Beullast. Umlagerungen infolge nichtlinearer Materialeigenschaften finden bei dieser Art der Nachweisführung nur bei der Erzeugung der Schädigungsmatrix innerhalb einer nichtlinearen Analyse Berücksichtigung (Kapitel 6).

Kapitel 8

Anwendungsbeispiele

8.1 Ebene Wandscheibe mit geometrischen Imperfektionen

Die Berücksichtigung von geometrischen Imperfektionen ist ein wichtiger Aspekt bei der Durchführung von Stabilitätsanalysen von Schalenträgwerken, auch bei der Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität. Die in Abschnitt 3.4 beschriebenen Ansätze wurden numerisch umgesetzt und anhand eines einfachen Beispiels verifiziert.

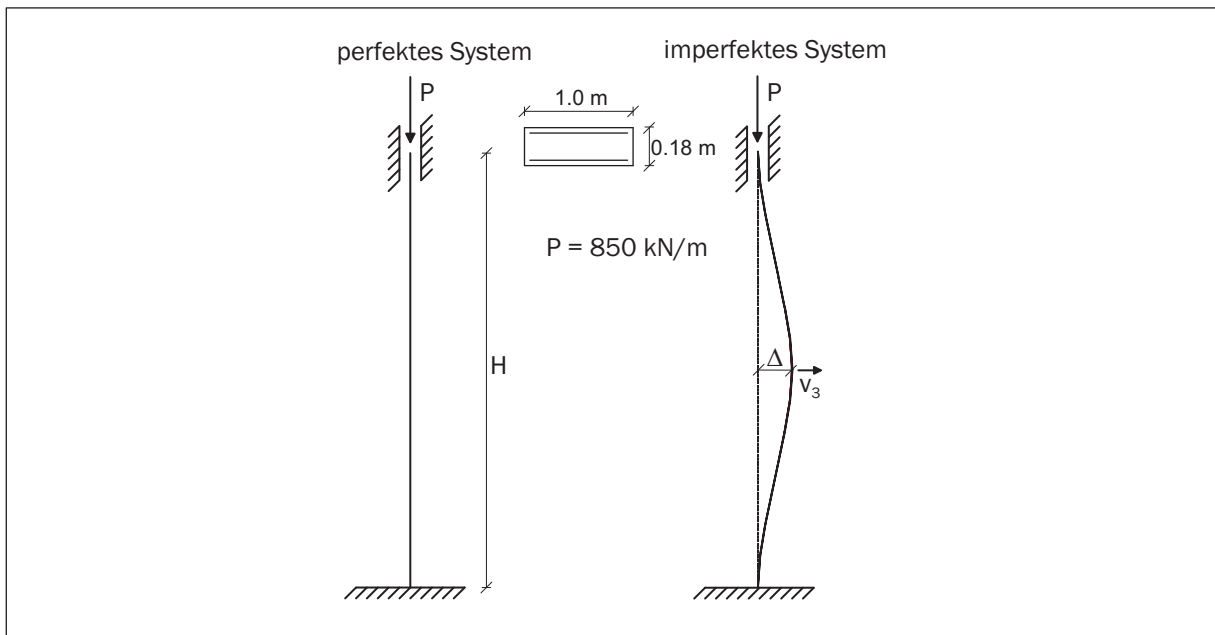


Bild 8.1: System, Materialdaten und Imperfektionsverlauf

Die in Bild 8.1 dargestellte axial belastete Wandscheibe, mit Hilfe von 14×7 ASE4-Elementen diskretisiert, wird eigenform-affinen geometrischen Imperfektionen mit variierenden Amplituden ausgesetzt. Um bei einer geometrisch und physikalisch nichtlinearen

Analyse den unterschiedlichen Charakter eines Spannungs- bzw. Stabilitätsproblems aufzuzeigen, wird das Beispiel mit unterschiedlichen Systemhöhen H analysiert.

Fließt in die analytische Ermittlung der Knicklänge nach (8.1) die erlaubte Druckfestigkeit und der Elastizitätsmodul der jeweiligen Betonsorte ein, so kann eine Grenznicklänge bestimmt werden, bei der das System das reine Spannungsproblem verlässt und in ein Stabilitätsproblem übergeht. Bei den gegebenen Abmessungen und unter Vernachlässigung der Steifigkeitsanteile der Bewehrung kann so die Höhe $H = 12.53$ m für einen Beton der Güte C 30/37 und die Höhe $H = 9.11$ m für einen Beton C 80/95 ermittelt werden.

$$H = 2 \cdot s_k = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{b \cdot h \cdot f_{cR}}} \quad (8.1)$$

Zur Betrachtung des Spannungsproblems wurde daher eine Systemhöhe von 2.50 m gewählt. Das Ergebnis der nichtlinearen Analyse zeigt (s. Bild 8.2), dass aufgrund der Imperfektionen die Verformungen in horizontaler Richtung anwachsen, und die endgültige Traglast durch die vergrößerten Biegemomente stark abfällt. Ein frühzeitiges Plastizieren in der Analyse ohne Imperfektionen tritt aufgrund der nichtlinearen Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons auf. Daher ist das zugehörige Lastniveau eines Betons der Güte C 30/37 sehr viel geringer als das eines Betons der Güte C 80/95. Bei genauerer Betrachtung des Antwortverhaltens des Tragwerks ist erkennbar, dass der Beton in den äußeren Fasern umso früher zu plastizieren beginnt je größer die Imperfektionen sind. Ebenso verhält sich das Plastizieren der Meridianbewehrung bei wachsenden Imperfektionen.

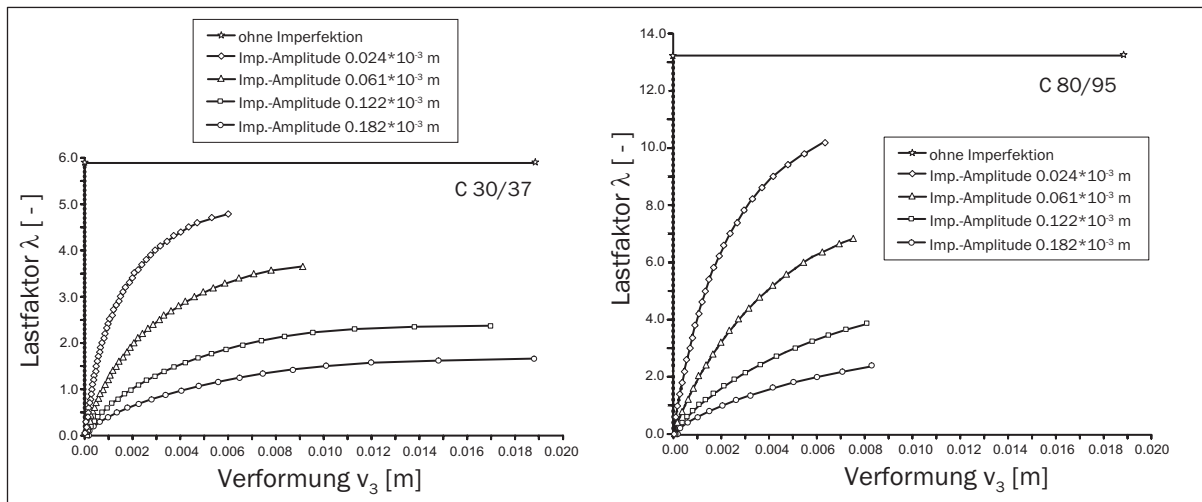


Bild 8.2: Last-Verschiebungsdiagramm einer axial gedrückten Wandscheibe mit Systemhöhe $H = 2.50$ m aus C 30/37 (links) und C 80/95 (rechts) - Spannungsversagen

Fazit: Das Tragwerk besitzt die Fähigkeit, Kräfte so umzulagern, dass eine begrenzte weitere Laststeigerung möglich ist. Allerdings plastizieren hierbei zunehmend die Beton- bzw. Stahlschichten. Hierdurch wird ein vermindertes Endtraglastniveau erreicht. Die Verformungen des Tragwerks aus hochfestem Beton sind aufgrund der erhöhten Sprödhheit des

Werkstoffs bei Eintreten des Versagens geringer als die des Tragwerks aus normalfestem Beton.

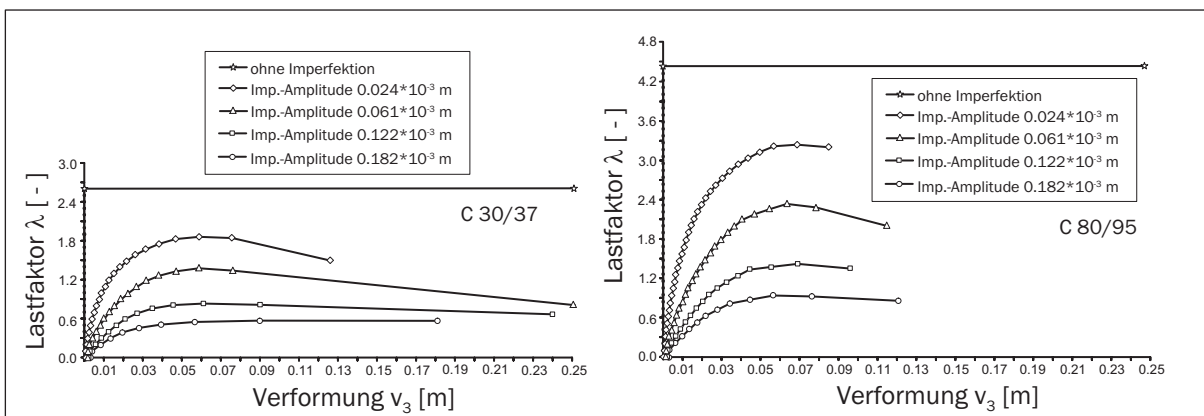


Bild 8.3: Last-Verschiebungsdiagramme einer axial gedrückten Wandscheibe mit Systemhöhe $H = 15.0$ m aus C 30/37 (links) und C 80/95 (rechts)

Um demgegenüber das Stabilitätsproblem zu untersuchen, wurde die Systemhöhe auf $H = 15.0$ m erhöht. Die Ergebnisse sind in Form von Last-Verschiebungsdiagrammen in Bild 8.3 dargestellt. Es ist erkennbar, dass der Maximalwert der aufnehmbaren Last bei Steigerung der Imperfektionen kontinuierlich abfällt. Bei Erreichen dieser Maximallast verliert bei beiden Betongütern das System seine Stabilität, was sich in dem Abfall der Last-Verformungskurven zeigt. Der Beton geringerer Festigkeit zeigt dabei auch hier ein wesentlich duktileres Verhalten als der Beton höherer Festigkeit. Der Abfall nach Überschreiten des durch die Imperfektion verursachten Durchschlagspunktes fällt bei schwächerer Imperfektionsamplitude steiler aus, so dass für dieses Beispiel von einem von der Imperfektionsgröße unabhängigen Nachbeulminimum ausgegangen werden kann.

Es ist darauf hinzuweisen, dass alle Systeme zum Zeitpunkt des Stabilitätsverlustes in gewissen Bereichen schon gerissen sind. Wird die Imperfektionsamplitude so gering gewählt, dass die Risse nicht eintreten, kann der Antwortpfad näher an den des perfekten Systems herangeführt werden. Der abfallende Ast der Last-Verformungskurve stellt sich dann umso steiler ein.

8.2 Zylindrisches Schalenfeld unter Einzellast

Das im Folgenden betrachtete Beispiel soll die Fähigkeit des verwendeten finiten Elementes bezüglich der Abbildung eines Durchschlagsproblems und die richtige Umsetzung des Steifigkeitsparameters nach Abschnitt 6.2.3.4 belegen. Hierzu wird ein zylindrisches Schalenfeld nach Sabir & Lock (1972) verwendet. Dieses, an seinen Rändern in Umfangsrichtung unverschieblich gelagerte und durch eine Einzellast normal zur Schalenmittelfläche belastete System wurde in der Vergangenheit in mehreren Arbeiten zur Verifikation der hergeleiteten Elemente verwendet, so dass ein guter Vergleich der Resultate möglich ist [Harte 1982], [Deml 1997].

In Bild 8.4 sind die Ergebnisse der eigenen Berechnung mit einer 8×8 ASE4-Elementierung eines Viertels des Systems den Resultaten verschiedener Forscher gegenübergestellt. Es ist bei einem Lastfaktor von $\lambda = 0.593$ und einer Verschiebung im Lastangriffspunkt von 12.5 mm ein Durchschlagen des Systems zu erkennen. An diesem Punkt sind die Traglastreserven des Systems erreicht, und es stellt sich nach Durchfahren des instabilen Bereichs die untere, stabile Gleichgewichtslage ein.

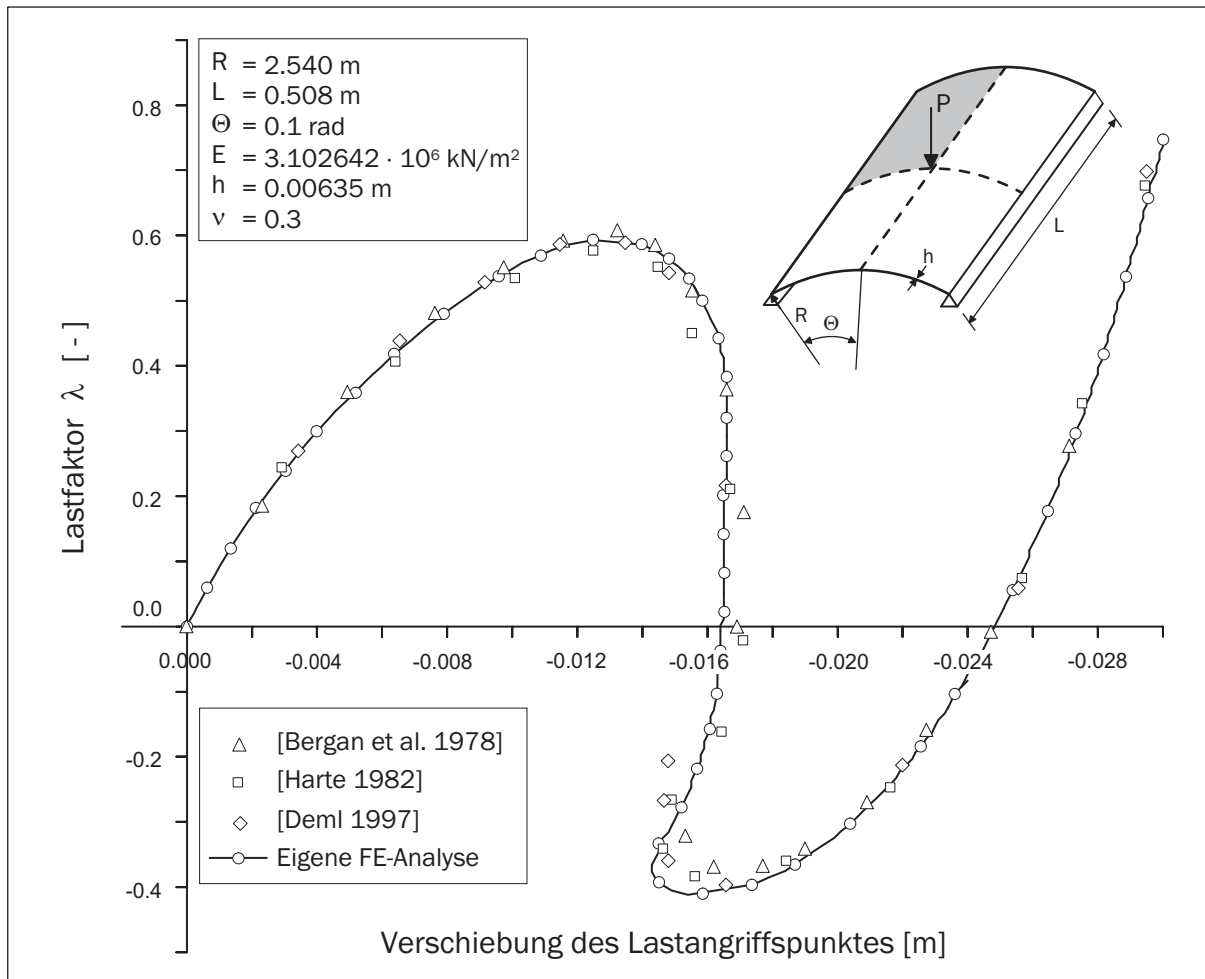


Bild 8.4: Last-Verschiebungsdiagramm des zylindrischen Schalenfeldes nach Sabir & Lock (1972)

Bergan et al. (1978) benutzen dieses Beispiel zur Ermittlung des Steifigkeitsparameters, so dass auch dieses Resultat verglichen werden kann. Bild 8.5 zeigt den Verlauf des Steifigkeitsparameters $S_P^{K^T}$ über einer Verschiebungsnorm $\|\mathbf{V}\|$. Ein direkter Vergleich der Ergebnisse ist aufgrund der unterschiedlich definierten Verschiebungsnormen nicht möglich. Der typische Verlauf des Parameters ist hingegen deutlich erkennbar. Bei Auftreten des Durchschlagpunktes erfährt der Parameter einen Nulldurchgang und wächst bis zum Punkt des vertikalen Abfalls im Last-Verschiebungsdiagramm bis ins Unendliche an. Der nächste Nulldurchgang des Parameters lokalisiert den Tiefpunkt der Kurve, wobei kurz vorher ein weiterer vertikaler Lastabfall zu erkennen ist und daher der Parameter zuvor

nochmals ins Unendliche anwächst. Das Tragwerk gewinnt erst bei einem Lastfaktor von $\lambda = 0.05$ wieder seine Ausgangssteifigkeit zurück und steigert diese, welches durch das stetige Anwachsen des Parameters ausgedrückt wird.

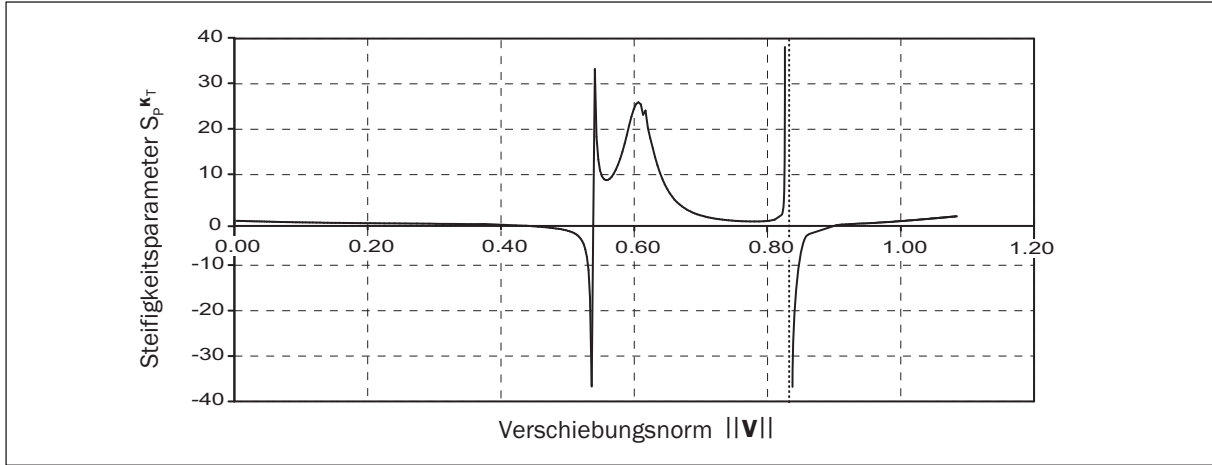


Bild 8.5: Verlauf des Steifigkeitsparameters $S_P^{K_T}$

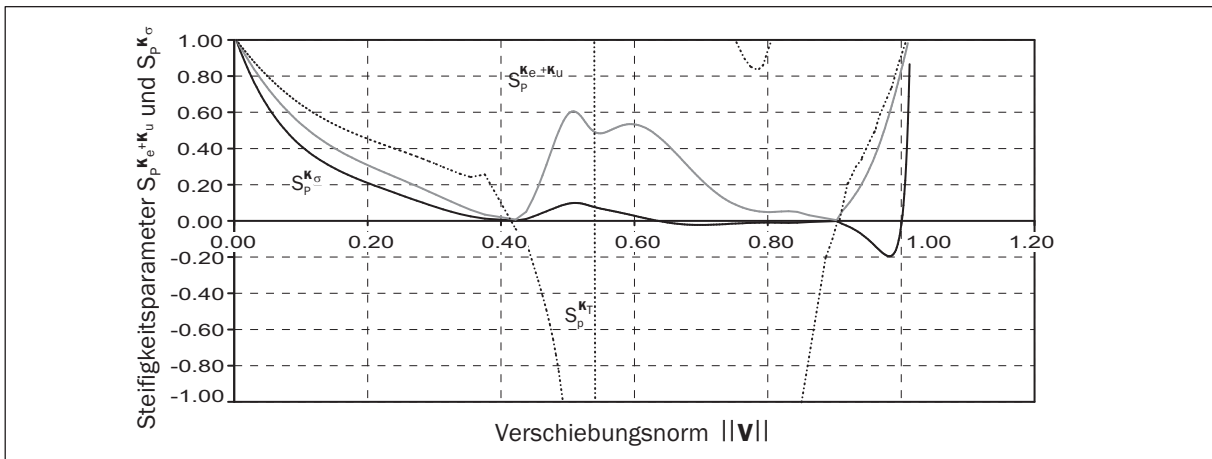


Bild 8.6: Verlauf der Parameter $S_P^{K_e+K_u}$ und $S_P^{K_\sigma}$

In Bild 8.6 sind die Verläufe der Parameter $S_P^{K_e+K_u}$ und $S_P^{K_\sigma}$ dargestellt. Anhand dieser Kurven lassen sich die typischen Verhaltensmuster dieser beiden getrennten Parameter zeigen. Im Bereich vor Erreichen des Durchschlagpunktes fallen diese Parameter ähnlich dem ursprünglichen Steifigkeitsparameter ab, wobei der jeweilige Abfall homogener erfolgt und somit eine bessere Vorhersage des Auftretens des Durchschlagpunktes erlaubt. Aufgrund der Skalierung des Parameters $S_P^{K_\sigma}$ mit dem Lastfaktor, bezogen auf das Anfangslastinkrement, steigt der Parameter zum einen nicht bis ins Unendliche an und zum anderen gibt er zusätzlich die Nulldurchgänge im Last-Verschiebungsdiagramm durch entsprechende Nullstellen wieder. Für die Analyse von realen Tragstrukturen unter Berücksichtigung von nichtlinearem Materialverhalten hingegen ist das Verhalten vor

Erreichen des Durchschlagspunktes besonders interessant. Hier zeigt sich der Vorteil der Beobachtung der Parameter der Teilmatrizen, da ihre Verläufe durch einen signifikanten Abfall zum Durchschlagspunkt gekennzeichnet sind.

8.3 Schalenbogen unter Einzellast

Das Beispiel des Schalenbogens unter Einzellast zeichnet sich durch einen Lastabtrag in Form einer Kombination aus Druck und Biegung aus. Je nach Radius und Dicke des Bogens ändert sich das Verhältnis zwischen Druck und Biegung und bestimmt somit auch die Form und das Lastniveau bei Eintritt des Stabilitätsversagens.

Das System, dessen drei ersten Beul-Eigenformen in Bild 8.7 dargestellt sind, wurde mit einem Radius $R = 16.35$ m und einem Öffnungswinkel von 20° gewählt. Als Beton wurde ein C100/115 gewählt, die höchste Betongüte nach DIN 1045-1 (2001). Die Bogendicke wurde zwischen 0.02 und 0.15 m variiert. Dieses Beispiel ist als ein akademisches Beispiel anzusehen, da das Verhältnis der Bewehrungsmenge $20.0 \text{ cm}^2/\text{m}$ zur Schalendicke sehr groß gewählt wurde. Im Folgenden werden anhand von einigen Ergebnissen der Analyse mit einem 60×1 Elementnetz aus ASE4-Elementen die wesentlichen Schlussfolgerungen belegt.

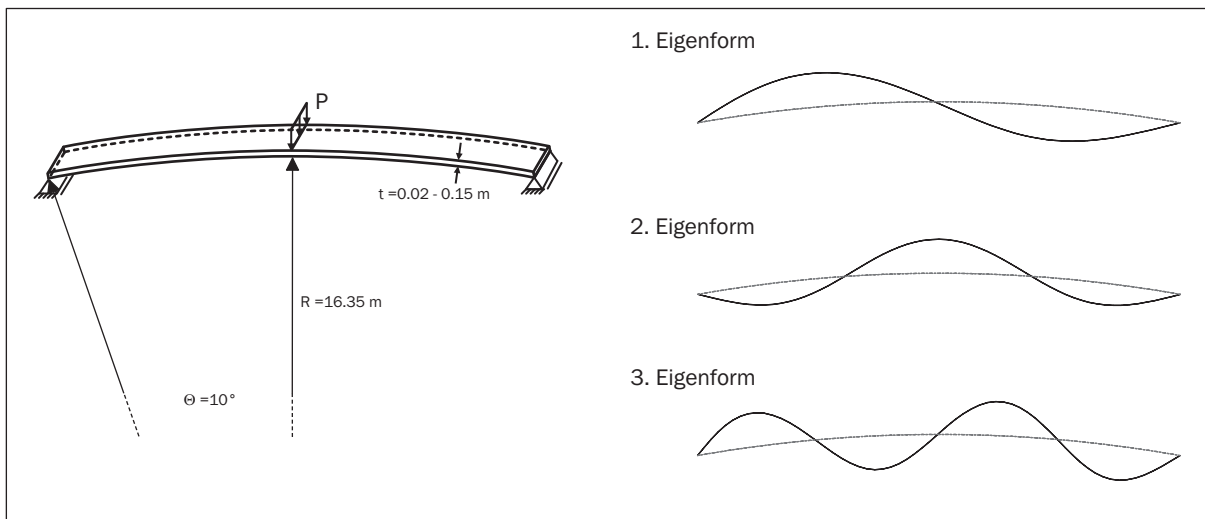


Bild 8.7: Schalenbogen unter Einzellast: System und 1., 2. und 3. Eigenform der klassischen Beulanalyse

In einem ersten Schritt werden die unterschiedlichen begleitenden Eigenwertprobleme betrachtet. Bild 8.8 zeigt das Ergebnis für einen Schalenbogen mit einer Dicke von 15.0 cm. Die Analyse erfordert die Kenntnis des Gleichgewichtszustandes zweier benachbarter Lastschritte (i und $i + 1$), daher beginnen die Ergebniskurven erst bei λ^+ . Bei Beobachtung der Approximation der kritischen Last fällt auf, dass sowohl das linearisierte (6.21) als auch das inkrementelle Eigenwertproblem (6.24) die kritische Last nur schlecht abschätzen können. Die Ursache hierfür ist in der ausgeprägten Rissbildung bereits zu Beginn

der Belastungsgeschichte zu sehen, welches im Diagramm durch den starken Abfall beider Kurven deutlich wird. Hierbei verliert das System einen wesentlichen Teil seiner Anfangssteifigkeit. Da sich beim linearisierten Eigenwertproblem die Abschätzung der kritischen Last in jedem Lastschritt nach der zu diesem Zeitpunkt verbliebenen Reststeifigkeit des Systems richtet, ist der starke Abfall und der sukzessive Anstieg durch Übertragung der Traglast auf die Stahleinlagen zu beobachten.

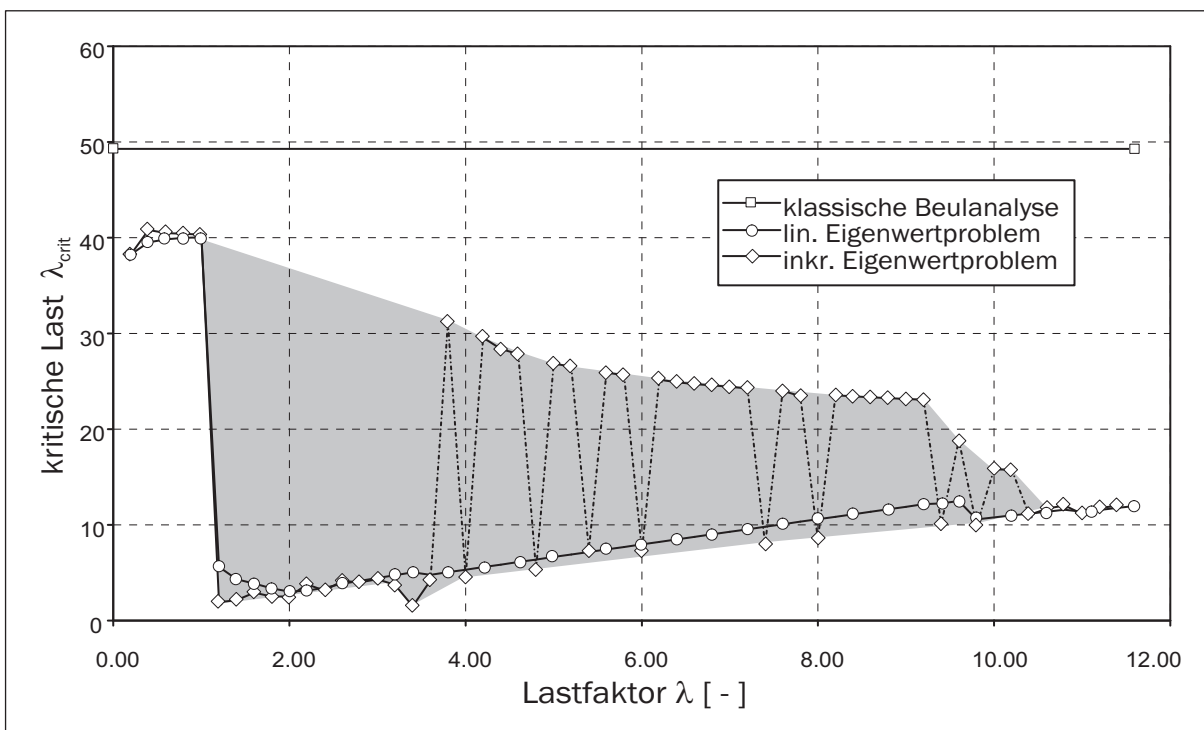


Bild 8.8: Schalenbogen unter Einzellast: Vergleich der Eigenwertprobleme

Während dort der Approximationswert der kritischen Last kontinuierlich ansteigt, alterniert der berechnete Wert bei Anwendung des inkrementellen Eigenwertproblems. Da bei diesem Eigenwertproblem die tangentielle Steifigkeitsmatrix auf der einen und die lastschrittweise Differenz der Steifigkeitsmatrix auf der anderen Seite Verwendung finden, alterniert der approximierte Wert der kritischen Last zwischen einer unteren Grenze bei starker Veränderung der Trageigenschaften und einer oberen Grenze bei keiner bis schwacher Veränderung der Trageigenschaft innerhalb eines Lastschritts. Bei zunehmend linearem Materialverhalten nähern sich obere und untere Grenze an und gehen nahezu in den Verlauf des linearisierten Eigenwertproblems über. Aufgrund des oben angeführten Verhaltens kann für einen solchen Fall kein zu bevorzugendes Eigenwertproblem benannt werden. Beide Eigenwertprobleme liefern während der Laststeigerung keine guten Abschätzungen der erreichbaren kritischen Last, zeigen aber sicher den Punkt des indifferenten Gleichgewichts bei Erreichen an.

In Bild 8.9 ist der korrespondierende Verlauf der Eigenwerte für das linearisierte Eigenwertproblem zu erkennen. Die hier dargestellte Kurve startet mit Eintritt der Rissbildung bei dem Lastfaktor 1.0. Neben dem Verlauf für geometrisch und materiell nichtlinearem

Verhalten sind hier ebenfalls die Ergebnisse einer klassischen Beulanalyse - geometrisch und materiell linear - einer ausschließlich materiell nichtlinearen und einer ausschließlich geometrisch nichtlinearen Analyse dargestellt. Man erkennt aufgrund des Unterschiedes der Kurven sehr stark die Notwendigkeit der Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten innerhalb einer solchen Analyse. Bei der untersten Kurve ist zu beobachten, dass der ermittelte Eigenwert über einen großen Belastungsbereich nahe dem Wert 1.0 verläuft. Der Abfall des Wertes verläuft hierbei kontinuierlich mit einem geringen Steigungsmaß. Die Länge dieses Bereichs verkürzt sich mit sinkender Schalendicke, da sich das Verhalten des Schalenbogens dem linearen Materialverhalten annähert.

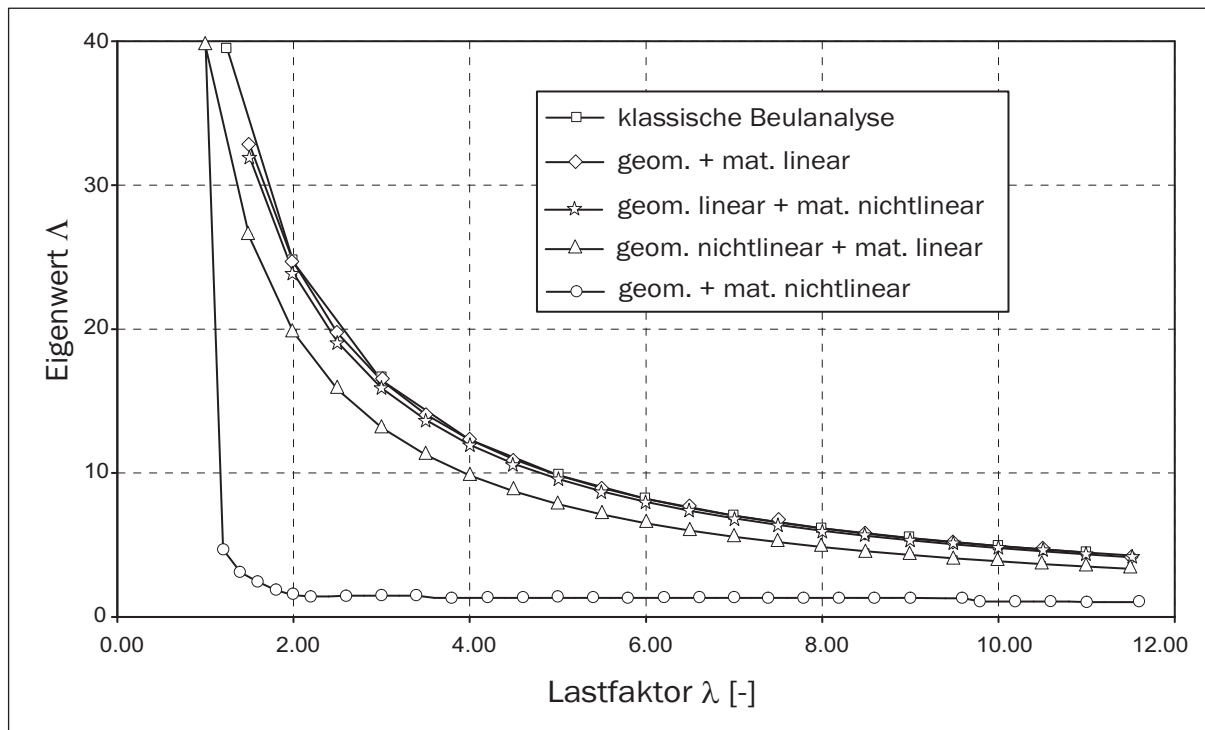


Bild 8.9: Schalenbogen unter Einzellast: Vergleich unterschiedlicher Material- und Kinematik-Modellierungen

Bild 8.10 zeigt die Verläufe der Steifigkeitsparameter der einzelnen Teilmatrizen und den Verlauf des Determinantenverhältnisses für den Schalenbogen mit einer Dicke von 15.0 cm. Zum Vergleich sind die Verläufe für lineares Materialverhalten ergänzt. Lineares Materialverhalten hat kontinuierlich fallende Kurven des Determinantenverhältnisses und des Steifigkeitsparameters $S_P^{K^T}$ zur Folge, wobei der Abfall der Determinante äußerst gering ausfällt. Dagegen ist der Einfluss des nichtlinearen Materialverhaltens in den anderen Kurven von Beginn an stark zu erkennen.

In den folgenden Diagrammen sind die Ergebnisse über den auf den Endlastfaktor bezogenen Lastfaktor aufgetragen, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse der einzelnen Schalendicken zu ermöglichen. Ein Vergleich der Verläufe des Steifigkeitsparameters $S_P^{K^T}$ für die variierenden Schalendicken zeigt Bild 8.11. Der mit sinkender Schalendicke anwachsende Abfall des Steifigkeitsparameters ist leicht zu erkennen. Das bei einigen Kurven im

hinteren Belastungsbereich zu beobachtende lokale Ansteigen des Parameters ist durch die Wahl des Lastinkrementes begründet. Einen homogenen Verlauf erreicht man zum einen durch eine Verringerung des Lastinkrementes, da die Veränderung der Steifigkeitsmatrix homogener verläuft, und zum anderen durch die Verwendung von zufallsverteilten Materialkenngrößen, da auch in diesem Fall die Steifigkeitsmatrix weniger sprunghafte Änderungen erfährt. Aufschluss über die Art des Versagens gibt die Größe des Steifigkeitsparameters $S_p^{K_T}$ bei Eintreten des Endlastniveaus. Je näher der Wert bei Null liegt - dem Wert bei Auftreten eines Durchschlagspunktes - kann bei diesem Beispiel von einem Versagen infolge Stabilitätsverlust ausgegangen werden.

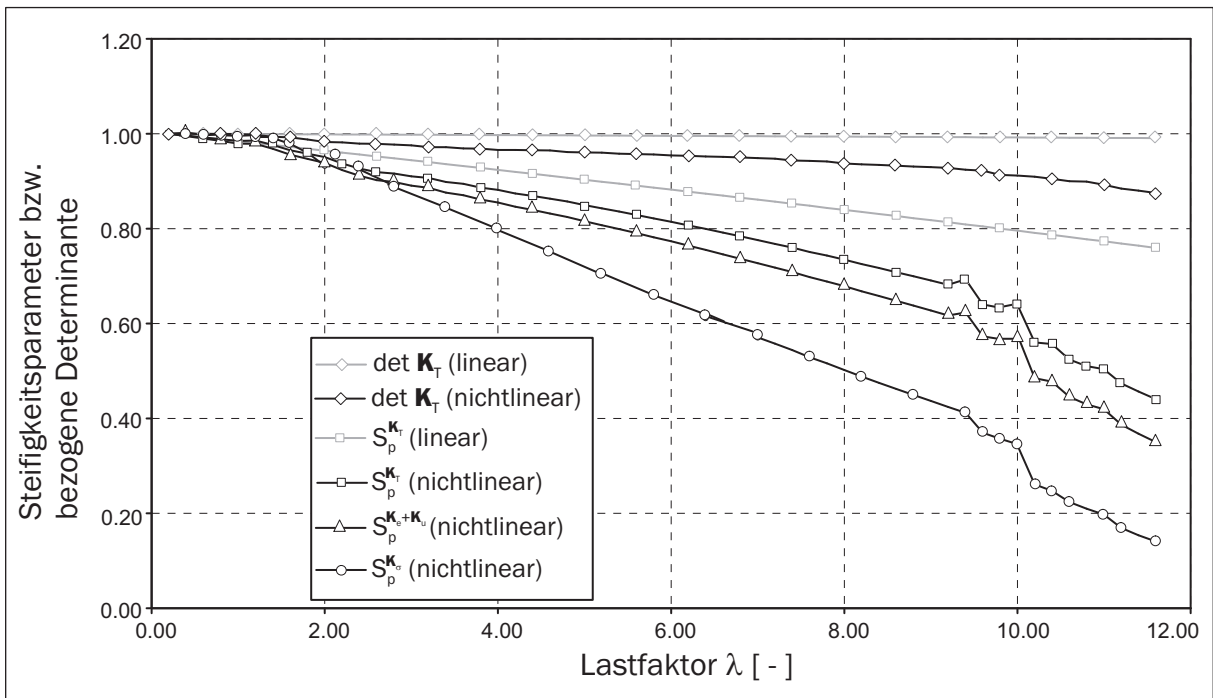


Bild 8.10: Schalenbogen unter Einzellast: Steifigkeitsparameter und Determinantenverhältnis für die Dicke $t = 0.15$ m

Der in Bild 8.12 dargestellte Vergleich zwischen den Bögen mit einer Schalendicke von $t = 0.02$ m und $t = 0.15$ m zeigt deutlich das unterschiedliche Verhalten auf. Die genaue Betrachtung der nichtlinearen Analyse zeigt in dem Fall $t = 0.15$ m ein eindeutiges Fließen der Bewehrung, welches das Versagen einleitet. Der dünnere Bogen versagt abrupt infolge Stabilitätsverlust bei dem entsprechenden Lastniveau. Neben dem unterschiedlichen Verlauf des Steifigkeitsparameters ist auch beim Determinantenverhältnis im Stabilitätsfall der Abfall auf den Wert Null erkennbar.

In Abschnitt 6.2.3.6 wurde ein Weg zur detaillierten Beobachtung der Teilmatrizen vorgestellt. Die Bilder 8.13 - 8.15 zeigen die Ergebnisse dieses Vorgehens bei den Bögen mit Schalendicke $t = 0.02$ m und $t = 0.15$ m. In Bild 8.13 ist der kontinuierliche Zuwachs der Veränderung gegenüber dem linearen Materialverhalten zu erkennen. Besonders die Kurve des Differenzparameters des Anteils der Anfangsverformungsmatrix verläuft nahezu parallel mit der des Anteils der Anfangsspannungsmatrix. Der Abfall des Parameters in

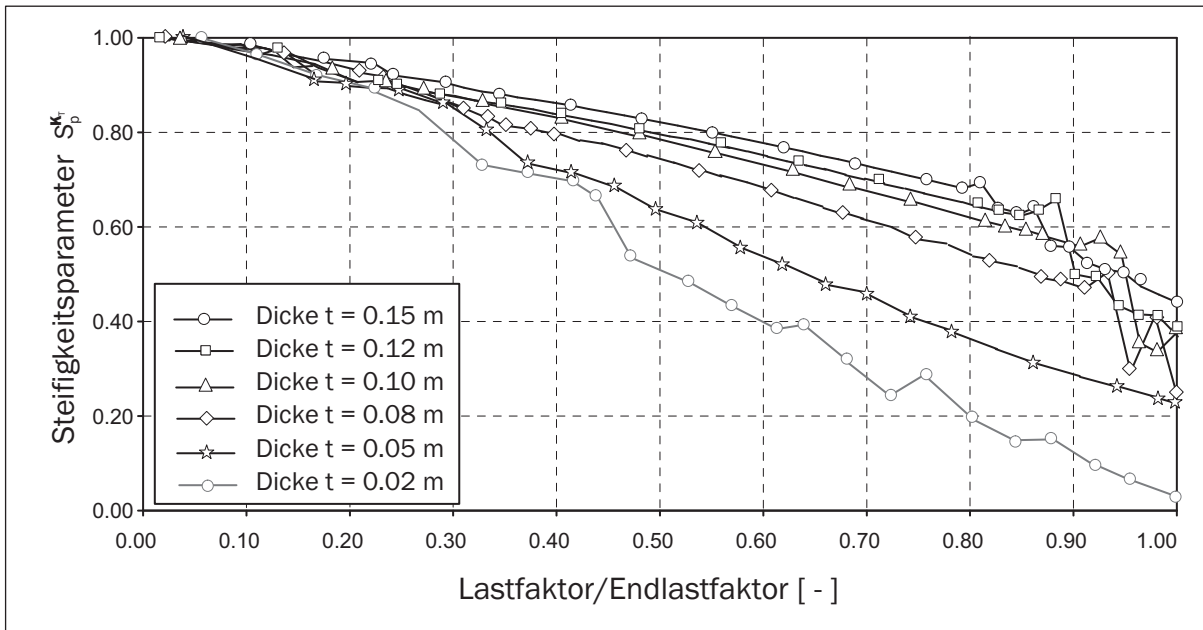


Bild 8.11: Schalenbogen unter Einzellast: Steifigkeitsparameter der tangentialen Steifigkeitsmatrix für unterschiedliche Dicken

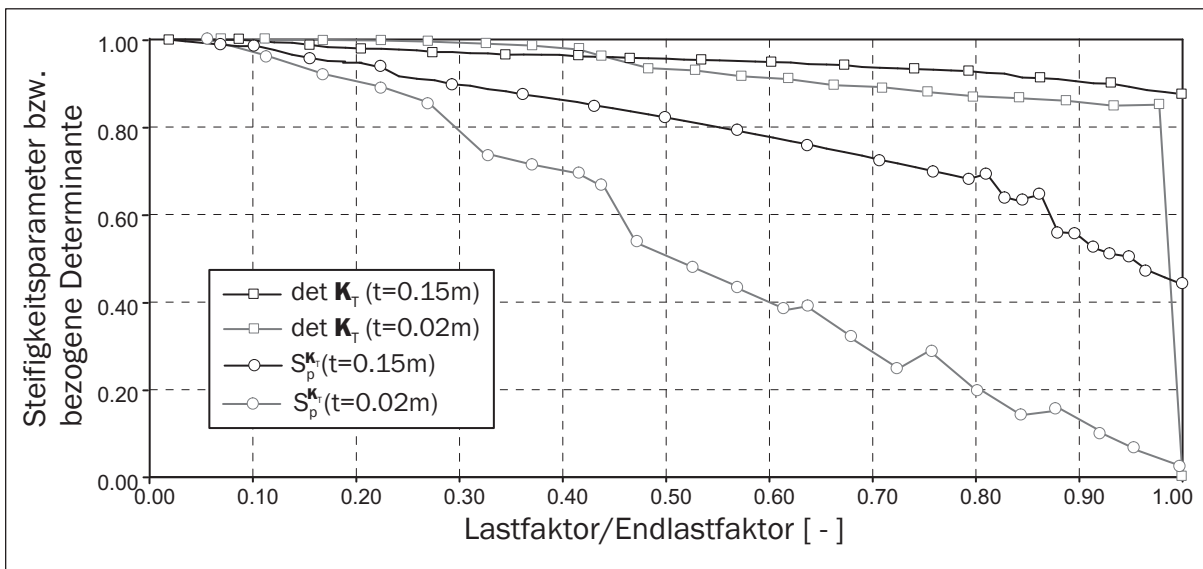


Bild 8.12: Schalenbogen unter Einzellast: Vergleich der Bögen mit $t = 0.02\text{ m}$ und $t = 0.15\text{ m}$

den negativen Bereich ist durch den nach DIN 1045-1 (2001) erhöhten Ursprungselastizitätsmodul begründet, der zu Belastungsbeginn ein steiferes Verhalten des materiell nichtlinearen Gesamtsystems verursacht.

Bild 8.14 zeigt dieses Verhalten für den Bogen mit der Dicke $t = 0.15\text{ m}$ für den Parameter des Anteils der Anfangsspannungsmatrix und der elastischen Steifigkeitsmatrix noch deutlicher. Der größte Unterschied wird jedoch bei Betrachtung des Verlaufs des

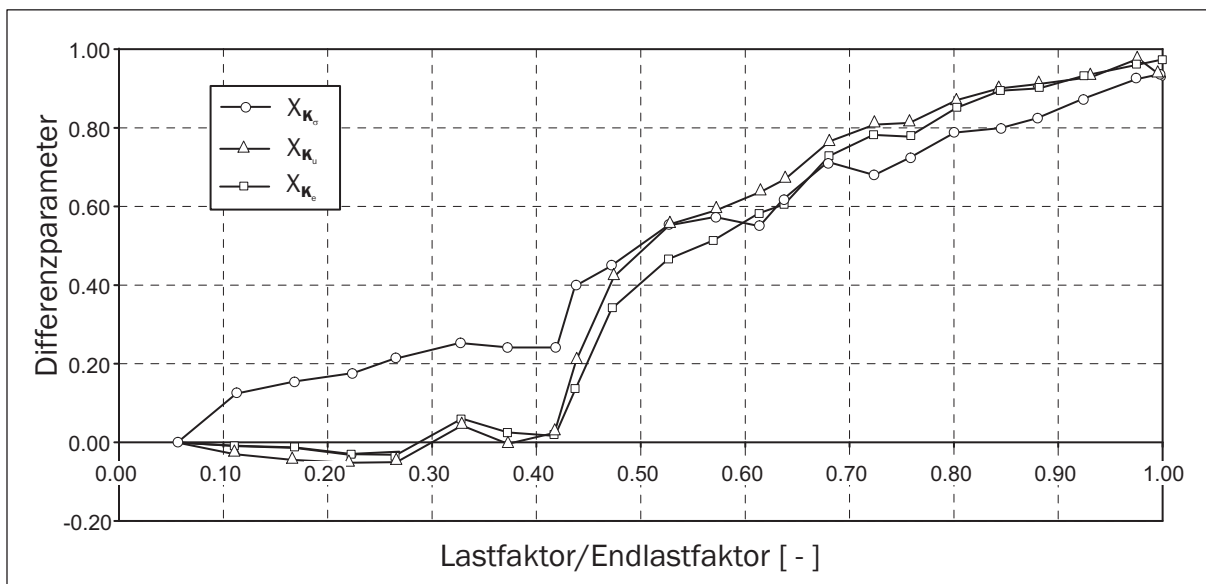


Bild 8.13: Schalenbogen unter Einzellast: Veränderung der Teilmatrizen \mathbf{K}_e , \mathbf{K}_u und \mathbf{K}_σ für den Bogen mit $t = 0.02$ m

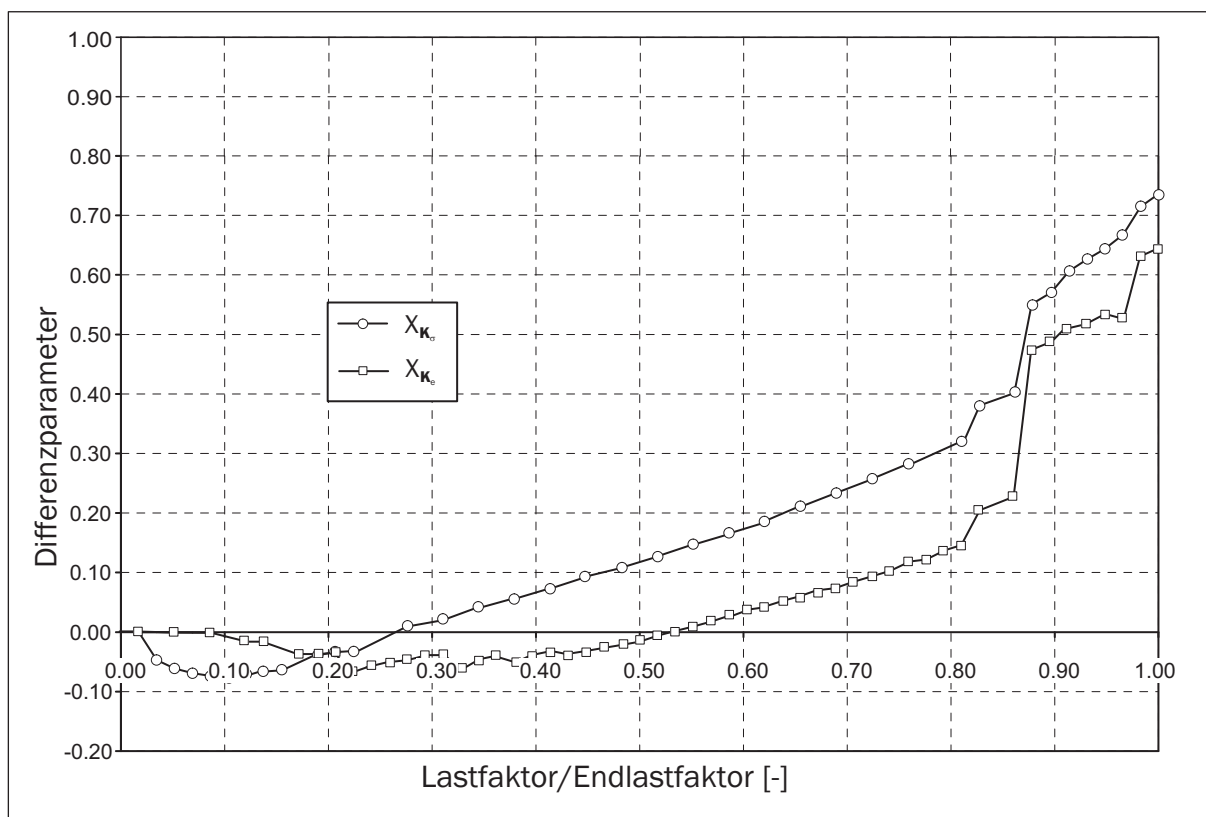


Bild 8.14: Schalenbogen unter Einzellast: Veränderung der Teilmatrizen \mathbf{K}_e und \mathbf{K}_σ für den Bogen $t = 0.15$ m

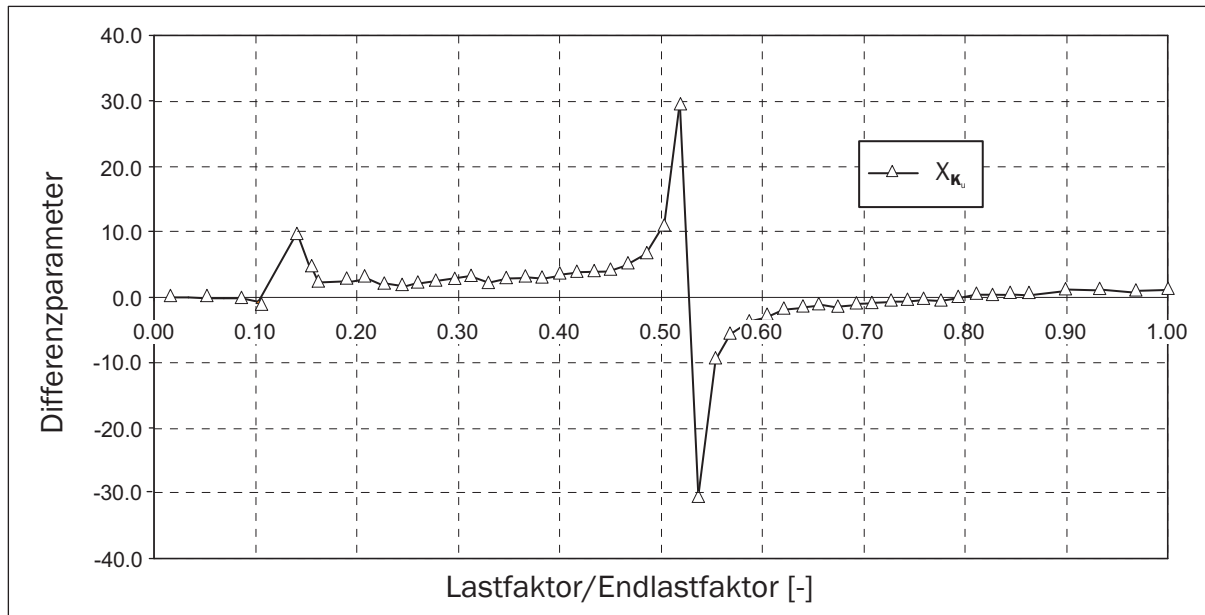


Bild 8.15: Schalenbogen unter Einzellast: Veränderung der Teilmatrix \mathbf{K}_u für den Bogen $t = 0.15$ m

Parameters der Anfangsverformungsmatrix klar (Bild 8.15). Der hohe Anstieg über einen Wert von 1.0 zeigt den bei dem Bogen mit größerer Schalendicke gestiegenen Einfluss der materiellen Nichtlinearität auf. Ein Wert größer 1.0 bzw. kleiner 0.0 bei einer solchen vergleichenden Analyse lässt auf stark unterschiedliche Verformungen der beiden Analysen schließen. Dieser Verlauf kann möglicherweise als Anzeichen für das Eintreten eines Spannungsversagens gedeutet werden. Die Analysen der anderen Schalenbögen zeigen bei geringerer Schalendicke ebenfalls eine Reduktion des Spitzenwertes des Parameters auf. Diese Spitzen resultieren im Wesentlichen aus der Umlagerung der Betonzugkräfte in die Bewehrungsstahleinlagen, was eine vergleichende Berechnung mit unterschiedlichen Tension-Stiffening Modellierungen zeigt. Steigen diese Umlagerungen an (bei dickeren Bögen aufgrund der höheren Belastung bei Rissbildung), so sinkt die Gefahr eines plötzlichen Stabilitätsversagens.

8.4 Gedrücktes zylindrisches Schalenfeld

Die Kreiszylinderschale unter Axiallast ist in der Vergangenheit von vielen Forschern als herausragendes Beulbeispiel behandelt worden. Die kritischen Lasten einer elastischen perfekten Schale, d. h. sowohl geometrisch als auch strukturell perfekt, können analytisch durch Lösen der Differentialgleichung bestimmt werden. Die Lösung hierzu findet sich in vielen grundlegenden Arbeiten zur Lösung des Stabilitätsproblems, wie zum Beispiel in Flügge (1967), Kollár & Dulácska (1975) und Pflüger (1975). Experimente mit Hochgeschwindigkeitsmessungen von Esslinger (1970) zeigen, dass der globale Stabilitätsverlust an einer lokalen Stelle des Zylinders beginnt und sich schnell zu einem globalen Versagen ausbildet. Als Endbeulmuster einer axial gedrückten Kreiszylinderschale stellt sich

dann ein dem YOSHIMURA-Pattern ähnliches Muster ein. Allerdings wird sich aufgrund der vorhandenen Biegesteifigkeit der Schalenwand nicht das ideale Beulmuster, das den dehnungslosen Grenzfall darstellt, einstellen.

Die Untersuchungen werden hier an einem Schalensegment, dessen Abmessungen an dem bekannten Beispiel nach Wolmir (1962) angelehnt sind, durchgeführt (s. Bild 8.16). Da das Stabilitätsverhalten des Schalentyps Kreiszyylinder unter Axiallast durch viele nah beieinanderliegende Eigenwerte gekennzeichnet ist (Clustering), entstehen bei sich verändernden Steifigkeiten eine korrespondierend zum niedrigsten Eigenwert über den Umfang und über die Höhe stark differierende Anzahl von Halbwellen. Für diese Parameteruntersuchung wird aus Gründen der Vergleichbarkeit für alle Schalensegmente und aufgrund der Unveränderlichkeit der Geometrie und der Randbedingungen die erste Eigenform durch eine Halbwelle in Umfangs- und Längsrichtung vorgegeben.

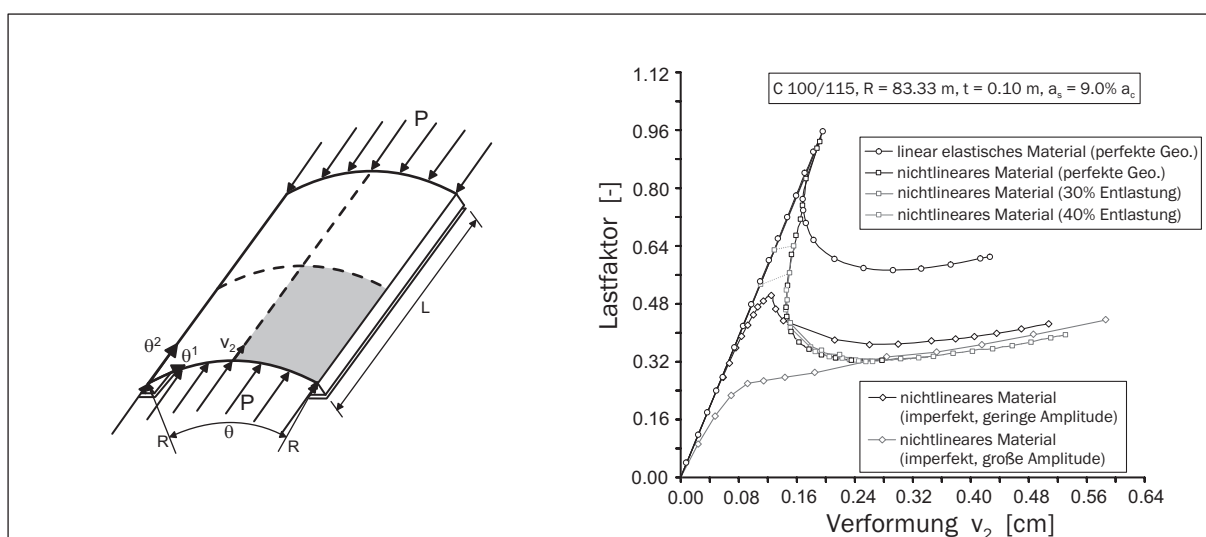


Bild 8.16: System und Belastung eines axial gedrückten Schalenfeldes (links) und Last-Verformungskurve aus modifizierter Stabilitätsanalyse (rechts)

Neben der Dicke t (0.07 m; 0.10 m) werden ebenfalls der Radius R (70.00 m; 83.33 m; 100.00 m), die symmetrische Bewehrung a_s (2.25 %; 4.50 %; 9.00 %) und die Betonsorte (C 30/37; C 100/115) des Schalenfeldes variiert. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel des Systems unter Berücksichtigung der Symmetrie-Randbedingungen betrachtet. Die hierzu notwendige Diskretisierung erfolgt durch ein 8×8 Elementnetz des ASE4-Elementtyps. Die Analyse des Schalenfeldes wird unter Berücksichtigung einer geometrisch nichtlinearen Kinematik durchgeführt. Zu Vergleichszwecken wird neben der Berücksichtigung des vollständigen materiell nichtlinearen Verhaltens des Werkstoff Stahlbeton auch eine Analyse des jeweiligen Systems unter Ansatz linearer Materialeigenschaften für Beton und Stahl durchgeführt. Begleitend zu den nichtlinearen Analysen werden die Eigenwerte des linearisierten Eigenwertproblems bestimmt und als Kriterium zum Auffinden eines Verzweigungspunktes genutzt. Hierbei zeigt sich durchgehend bei allen hier untersuchten Systemen das im Folgenden beschriebene Verhalten.

Aufgrund des linearen Vorbeulpfades des perfekten Schalenfeldes und der somit nicht auftretenden Rissbildung im Vorbeulpfad eignet sich der Eigenwert gut zur Abschätzung des sich einstellenden Verzweigungslastniveaus. Mit zunehmender Annäherung an den Verzweigungspunkt können rechnerbedingte numerische Ungenauigkeiten zu Rissbildung im Vorbeulbereich und einem „automatischen“ Ausweichen des Systems in einen Verzweigungsast führen. Die daraufhin weiter verfolgte Tragwerksantwort beschreibt zumeist den stabilen Teil des Verzweigungsastes und ist somit sicherheitstechnisch nicht aussagekräftig. Somit war es in sämtlichen untersuchten Fällen notwendig, eine Verzweigung in einem gewissen Abstand vom theoretischen Verzweigungspunkt einzuleiten.

Für das System mit linearem Materialverhalten konnte ohne weiteres die Analyse mit Hilfe des inkrementell-iterativen RIKS-WEMPNER-WESSELS-Verfahren durchgeführt werden, wobei die Anwendung des Verfahrens nach Crisfield (1981) eine geringe Verbesserung der Konvergenz herbeigeführt hat. Die Annäherung an den Verzweigungspunkt erfolgt ohne Probleme und auch die Größe der Störverformung ist in den meisten Fällen nicht von entscheidender Bedeutung zum Auffinden des nachkritischen und zum Nachbeulminimum führenden Astes.

Bei der Verwendung des nichtlinearen Betonmodells ist die Annäherung an den Verzweigungspunkt problematisch und erfordert größte Sorgfalt. Zum Aufbringen der Störverformung wird neben der üblichen Vorgehensweise auch die in Kapitel 6.2.3 beschriebene Modifizierung erfolgreich angewendet.

Die wesentlichen Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen sind im Folgenden aufgeführt:

- In dem Verzweigungspunkt existieren für die perfekte lineare Schale zwei Verzweigungsäste, auf denen die weitere Lösung verlaufen kann. Bei Aufbringen einer Störverformung, die affin zur ersten Eigenform nach außen gerichtet ist (positive Amplitude), verzweigt die Lösung in einen stabilen Ast, der zur weiteren Versteifung des Systems führt. Bei entgegengesetzter Amplitude (negativ) verzweigt die Lösung hingegen in einen instabilen, sicherheitstechnisch relevanten Pfad mit Auftreten eines Nachbeulminimums (Bild A.5).
- Das Aufbringen der Störverformung mit negativer Amplitude nach vorheriger Entlastung der Schale (s. Abschnitt 6.2.3) führt auf denselben durch eine Verzweigung im kritischen Punkt ermittelten nachkritischen Ast. Es kann also unter Einsparung von Rechenzeit der weitere Verlauf dieses Astes analysiert werden (Bild 8.16). Ein weiterer Vorteil ist die größere Unempfindlichkeit der kraft- bzw. weggesteuerten Analysen außerhalb der unmittelbaren Umgebung des Verzweigungspunktes. Aufgrund der Pfadabhängigkeit des Problems kommt es nahe des Indifferenzpunktes häufiger zu Abbrüchen der Analyse oder bei zu geringen Störverformungen zu einem Verzweigen in einen vermeintlich stabilen Ast.
- Bei der Analyse der perfekten, materiell nichtlinearen Schale spielt der Tension-Stiffening Effekt nur eine geringe Rolle, da am Verzweigungspunkt die eingeprägte Verformung bereits eine ausgiebige Rissbildung in Gang setzt und bei Erreichen des Nachbeulminimums der Einfluss des Tension-Stiffenings schon weitgehend abgebaut wurde. Deutlich wird das Verhalten bei dem Vergleich der Kurven in Bild

8.17. Das perfekte Schalenfeld wurde in diesem Fall ohne Berücksichtigung des Tension-Stiffening Effekts analysiert. Hierbei fällt auf, dass die Ausbildung des instabilen Bereichs nach Überschreiten des Verzweigungspunktes abhängig vom Tension-Stiffening Effekt ist, nicht jedoch der Absolutwert des Nachbeulminimums. Bei kleinen Imperfektionen ist das System bei Ausbildung der Rissstrukturen bereits einer größeren Belastung ausgesetzt, was zur Folge hat, dass die Rissbildung schneller über große Bereiche des Tragwerks fortschreitet und der Tension-Stiffening Effekt bei diesem Belastungszustand eine größere Bedeutung hat. Bei großen Imperfektionen schreiten die Risse frühzeitig in dem Tragwerk voran, so dass der Tension-Stiffening Effekt im anfänglichen Belastungsbereich eine große Bedeutung hat, diese allerdings bei fortschreitender Belastung verliert und die Tragwerksantwort in einem gemeinsamen Pfad endet.

- Der Bewehrungsabstand vom äußeren Rand wurde für alle Beispiele zu 0.5 cm für die äußere Lage gewählt, um den geringstmöglichen Abfall des Nachbeulminimums darzustellen. Mit anderen Worten sind die so ermittelten Werte des Nachbeulminimums ein oberer Grenzwert. Bild 8.17 zeigt den Einfluss der Vergrößerung des Bewehrungsabstandes vom äußeren Rand. Hierbei wurde alternativ ein Bewehrungsabstand von 1.5 cm gewählt, welcher für die Bewehrungsmenge realistischer erscheint. Es ist erkennbar, dass das Nachbeulminimum um weitere 5 % der kritischen Last abfällt, da der innere Hebelarm der Bewehrung geringer wird. Bei Betrachtung des Vorbeulpfades fällt hingegen auf, dass diese Reduktion nur scheinbar eintritt, da das Schalenfeld infolge seiner verminderten Biegesteifigkeit des Schalenfeldes bereits bei einem geringeren Belastungsniveau verzweigt. Die Lage der Bewehrung gewinnt bei schwach bewehrten Schalen hingegen deutlich an Bedeutung, da hier die Lage des Verzweigungspunktes in starkem Maße von dem Betonquerschnitt abhängig ist. Ein weiterer Extremfall wäre die Anordnung der Bewehrung auf Höhe der Schalenmittelfläche. Diese Art der Bewehrungsanordnung sollte spätestens seit dem Kollaps der Kühltürme von Ferrybridge für Schalentragerwerke nicht mehr verwendet werden.
- Die Diskrepanz zwischen nachkritischem Pfad der Analyse der perfekten Schalengeometrie und Pfad der imperfekten Schale hat ihre hauptsächliche Ursache in den unterschiedlichen Modellierungen der Geometrie des Schalenfeldes. Während die perfekte Schale durch eine Kreiszyylindergeometrie abgebildet wird, welche einen konstanten Ansatz der Krümmung zur Folge hat, so wird die imperfekte Schale durch eine Geometriefunktion beschrieben, die das Tragwerk nur facettenartig abbildet. Dieser Einfluss ist in Bild 8.18 dargestellt, indem die imperfekte Schale mit Hilfe des höherwertigen Imperfektionsansatzes beschrieben wird. In diesem Fall schmiegt der Pfad der imperfekten Schale sich an den nachkritischen Ast der perfekten Schale an. Ebenfalls in Bild 8.18 ist der Antwortpfad für ein Netz mit 16 x 16 Elementen dargestellt. Es erfolgt zwar eine Annäherung an den nachkritischen Ast der perfekten Schale mit Kreiszyylindergeometrie, aber selbst für ein doppelt so feines Elementnetz wird der Ast noch nicht erreicht.

Fazit: Es kann über Netzverfeinerung für imperfekte Systeme zwar eine ausreichende Annäherung an den tatsächlichen Antwortpfad erfolgen, die hierfür benötigte

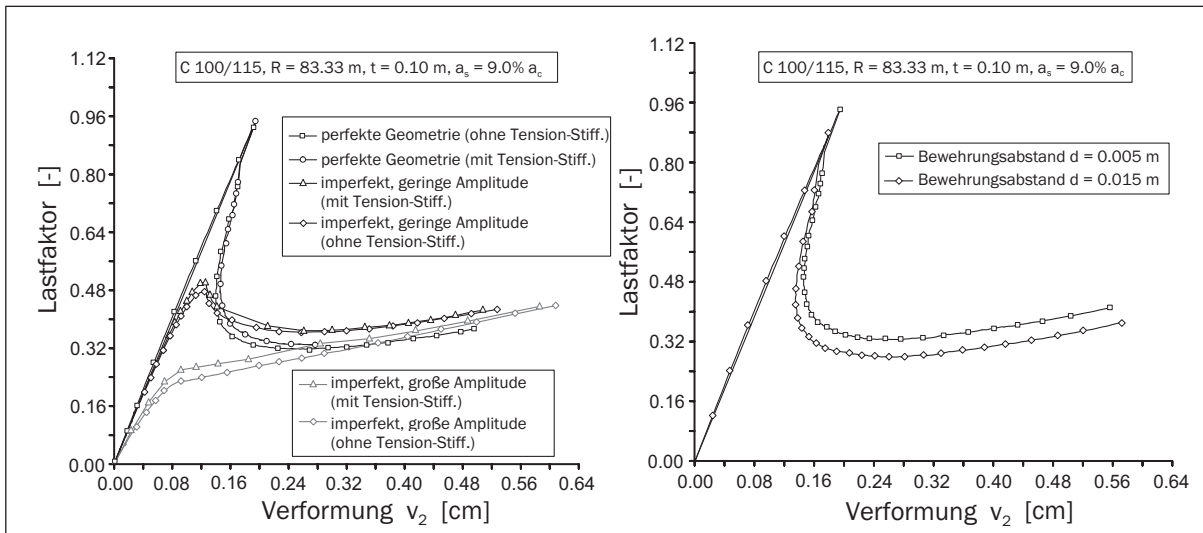


Bild 8.17: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes mit/ohne Ansatz von Tension-Stiffening (links) und mit differierenden Bewehrungslagen (rechts)

Feinheit der Diskretisierung erfordert aber einen ungleich höheren Rechenaufwand als die Analyse des perfekten Systems. Desweiteren fällt auf, dass bei größer werdender Imperfektionsamplitude die Lastumlagerung im System schneller fortschreitet und der Antwortpfad sich der perfekten Schale stärker nähert.

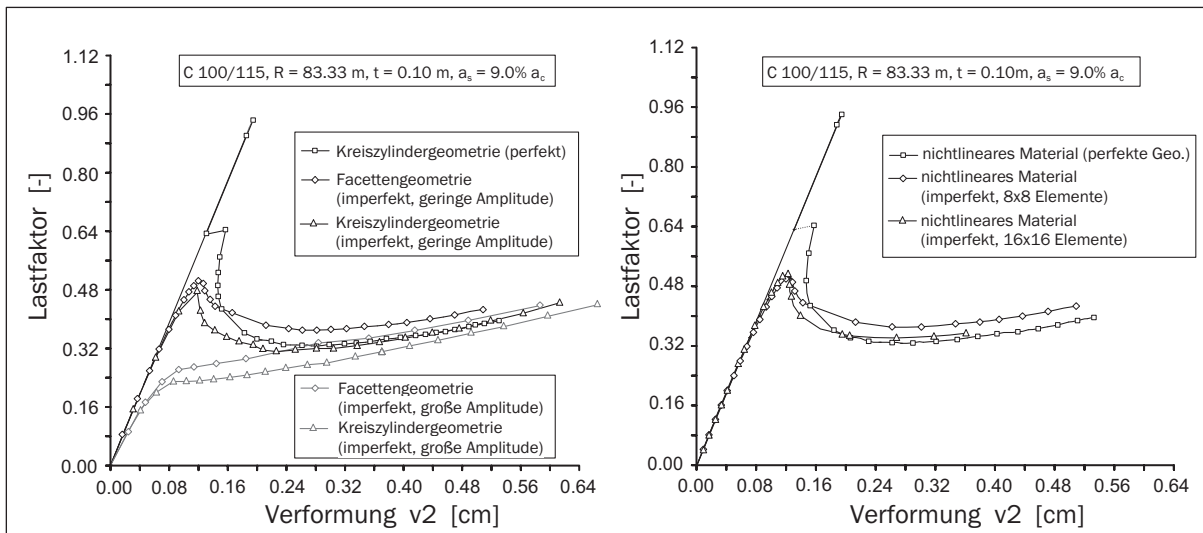


Bild 8.18: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes mit unterschiedlichen Imperfektionsansätzen (links) und verschiedenen Diskretisierungstiefen (rechts)

- Bei geringerer Betongüte zeigt bereits der Vorbeulpfad gegenüber der Lösung mit linearem Material ein verändertes Verhalten, da mit steigender Belastung der die Verzweigungslast bestimmende tangentielle Elastizitätsmodul E_T deutlicher abfällt. Bei höheren Betongüten ist ein ähnliches Verhalten bei geringeren Radien zu bemer-

ken, da hier die Verzweigungslast ansteigt, somit die Schale unter höherer Druckbeanspruchung steht, und dann ebenfalls der tangentielle Elastizitätsmodul stärker absinkt. Ein entsprechendes Diagramm hierzu ist im Anhang A.6 dargestellt (Bild A.4).

- Bei Aufbringen einer Imperfektion ist mitunter während der gesamten Belastungsgeschichte kein indifferenter Gleichgewichtszustand zu beobachten. Eine mögliche geringe Entlastung findet dann an lokalen Stellen durch Lastumlagerung im System statt.
- Die Ergebnisse der Variation der Bewehrungsmenge, der Schalendicke und des Schalenradius' sind im Anhang A.6 in den Bildern A.2 - A.4 dargestellt. Alle Varianten zeigen bei Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität ein vergleichbares Verhalten. Die Größe der Reduktion des Nachbeulminimums ist dabei stark von der Restbiegesteifigkeit des Systems abhängig.

An diesem Beispiel wird im Wesentlichen das Verhalten des Werkstoffs nach Erreichen der Verzweigungslast aufgezeigt. Die ebenfalls im Zuge der Analyse berechneten Steifigkeitsparameter und Determinantenverhältnisse lassen aufgrund des linearen Vorbeulverhaltens keinen Schluss auf ein Eintreten der Verzweigung zu.

Zur möglichen Abschätzung des Nachbeulminimums mit Hilfe einer nichtlinearen Analyse mit geschädigtem Material wird die in Abschnitt 7.3 vorgestellte Vorgehensweise angewandt. In den Bildern 8.19 und 8.20 sind einige Ergebnisse dieser Analysen dargestellt. Folgendes Verhalten ist erkennbar:

- Bei Ansatz der Schädigung in Hauptlastrichtung führt eine Rissbildung auf der Innenseite der Schale zu einer stärkeren Reduktion des maximalen Lastniveaus als die Rissbildung auf der Außenseite des Schalenfeldes, da die jeweilig entstehenden Momentenzuwächse zu einem Anwachsen der Amplitude der maßgebenden Verformungsfigur und in dem anderen Fall zu einer Entlastung führen. Das Anwachsen des Versatzmomentes bis zu einer von der Bewehrungsmenge des Querschnitts abhängigen Grenze für die Schwerlinienverschiebung und der darauffolgende Abbau bei weiterer Vergrößerung der Risstiefen ist gut erkennbar (s. Bild 8.19).
- Orthogonal zur Hauptlastrichtung verursacht eine Schädigung in Form von Rissbildung eine genau entgegengesetzte Wirkung, da nicht die entstehenden Versatzmomente das Geschehen dominieren, sondern vielmehr die Verformungen des Tragwerks durch die Schwächung der Ober- bzw. Unterseite beeinflusst werden. Daher fällt das Lastniveau bei Schwächung der Oberseite in stärkerem Maße ab.
- Eine Schwächung des Tragwerks durch Plastizieren des Betons liefert die besten Ergebnisse zur Abschätzung des Nachbeulminimums, da neben den Biegespannungsanteilen in großem Maße auch die Membranspannungsanteile reduziert werden.
- Bild 8.19 zeigt die Auswirkungen der Druckschädigung orthogonal zur Belastungsrichtung. Mit größer werdender Schädigung wird die Verzweigungslast geringer, da

die über die Querdehnung einfließenden Steifigkeiten reduziert werden. Eine Schädigung in Lastrichtung hingegen führt zu den Verläufen in Bild 8.20. Hier ist neben der Reduktion des Nachbeulminimums auch die geringere Steifigkeit im Vorbeulbereich der Struktur erkennbar.

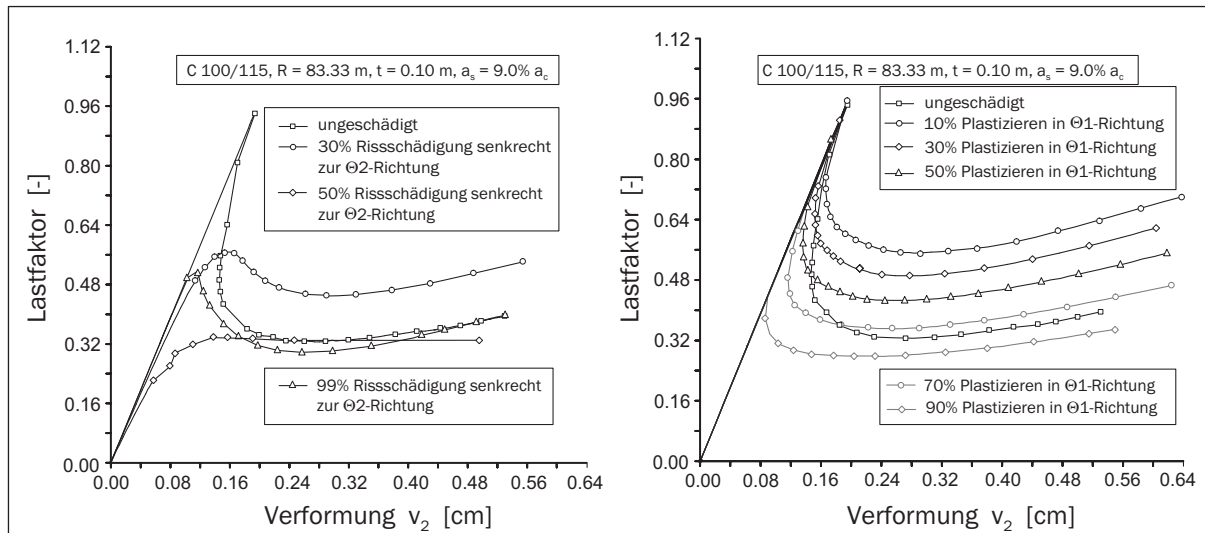


Bild 8.19: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes mit Rissbildung senkrecht zur Θ_2 -Richtung auf der Innenseite (links) und Druckschädigung orthogonal zur Belastungsrichtung (rechts)

- Bild 8.20 zeigt die Auswirkung einer Kombination der Schädigung in beide Richtungen, wie sie bei einer herkömmlichen Analyse durch die Vorgabe eines reduzierten Anfangselastizitätsmoduls möglich ist. Bei diesem Beispiel ist das Ergebnis einer gleichmäßigen Reduktion der Anfangssteifigkeit brauchbar, da die zur Haupttragrichtung senkrechte Richtung ebenfalls einen großen Einfluss auf die Größe des Nachbeulminimums hat. Hierdurch nähert sich die Kurve der endgültigen materiellen nichtlinearen Kurve sehr nah an.
- Die ebenfalls in Abschnitt 7.3 vorgestellte lineare Beulanalyse liefert für eine 50%ige Schädigung in Θ_1 - und Θ_2 -Richtung nach der 1. Iteration eine gegenüber der ursprünglichen kritischen Last um ca. 60% reduzierte kritische Last. Sie liegt immer noch über dem Nachbeulminimum, wie in Bild 8.21 zu erkennen ist, stellt aber eine bessere Annäherung an das sicherheitsrelevante Lastniveau dar. Die Reduktion im 1. Schritt erfolgt bereits durch die geringere Biegesteifigkeit bei einem Dehnungszustand von Null. Die weitere Reduktion erfolgt durch den Einfluss der mit der geschädigten Matrix ermittelten Verformungen auf die Spannungsmatrix.

Die Auswirkungen einer Schädigung aus der nichtlinearen Analyse zeigt ebenfalls Bild 8.21. Der Schädigungszustand, der sich im Wesentlichen aus einer komplett gerissene Innenseite des Schalenfeldes mit um 45° geneigten Rissen im Auflagerbereich, aus einer Druckschädigung in weiten Bereichen auf der Aussenseite, mit Ausnahme der Lasteinleitungsbereiche und der Auflagerbereiche und aus Rissbildung infolge

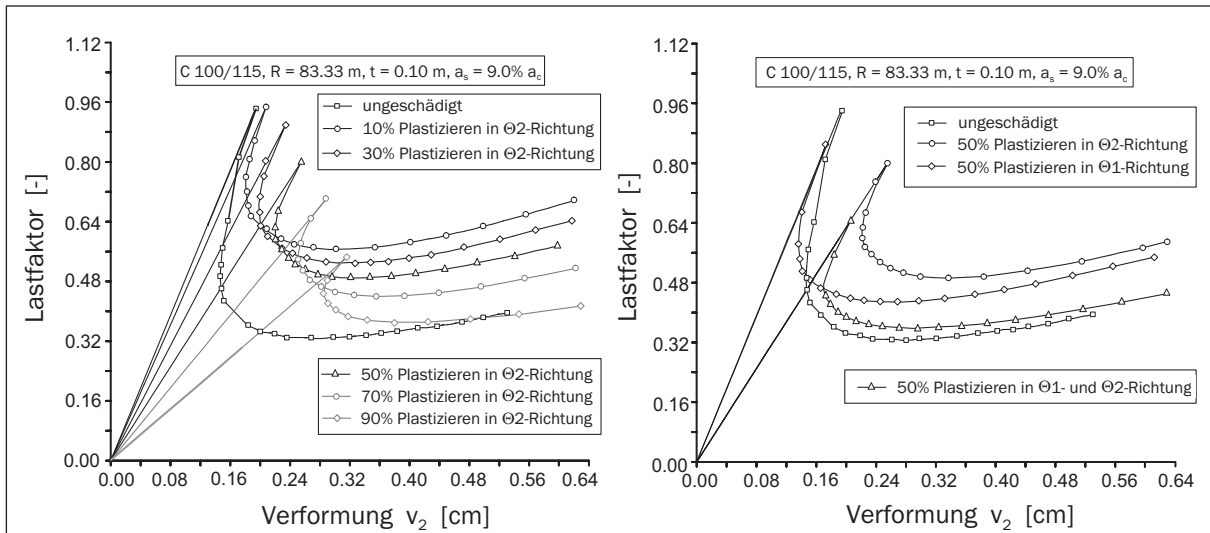


Bild 8.20: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes mit Druckschädigung in Lastrichtung (links) und in unterschiedlichen Richtungen (rechts)

Querzug zusammensetzt, führt bereits im ersten Schritt zu einer reduzierten kritischen Belastung von 0.358. Mit Durchführung der Iteration reduziert sich dieser Wert auf 0.336. Es ist ersichtlich, dass der Ansatz dieser realistischen Schädigung eine exakte Annäherung an das Nachbeulminimum erlaubt.

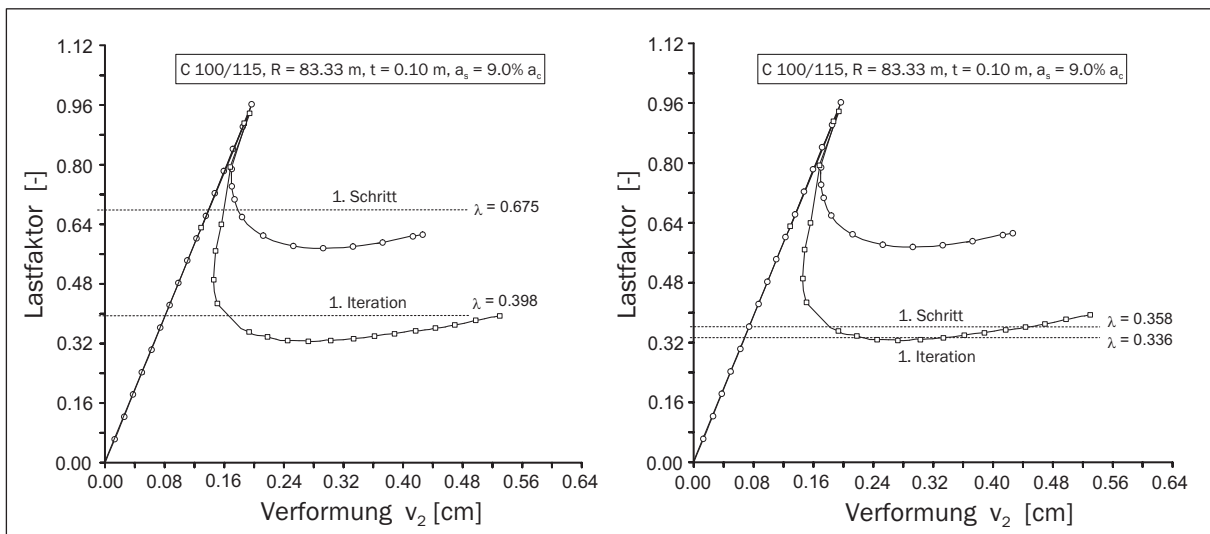


Bild 8.21: Reduzierte kritische Last bei Ansatz einer Druckschädigung (links) und der realen Schädigung aus der nichtlinearen Analyse (rechts)

8.5 Parameterstudie Rotationshyperboloid

Bei den hier betrachteten Hyperbelschalen handelt es sich um die in Abschnitt 5.2 ausgewählten Modellschalen. Die nichtlinearen Analysen werden sowohl mit als auch ohne Ansatz der in Abschnitt 4.10 beschriebenen Normalverteilung für die Zugfestigkeit durchgeführt. Sie umfassen die insgesamt 16 Systeme aus Tabelle 5.2. Um das Verhalten des Werkstoffs Hochleistungsbeton aufzuzeigen, werden im Folgenden die nichtlinearen Analysen der Schalengeometrien I und II exemplarisch für einen Lagerungsfall näher betrachtet.

Die Hyperbelschale wird zum einen mit dem Beton C 30/37 und zum anderen mit einem C 80/95 analysiert. Die Bewehrung wird gemäß Abschnitt 5.3 gewählt. Dazu ergänzend wird die Mindestbewehrung für beide Schalen zu $0.4\% \cdot A_c$ für die Ringbewehrung und $0.3\% \cdot A_c$ für die Meridianbewehrung festgelegt. Die FE-Berechnung erfolgt mit einem Netz von 64 ASE4-Elementen über den Umfang und 32 ASE4-Elementen über die Höhe.

Nach dem Konzept der DIN 1045-1 (2001) muss nun die Lastfallkombination G+1.5W gesteigert werden. Dabei muss der Tragwerkswiderstand das Lastniveau $\gamma_R = 1.3$ erreichen, um dem Nachweis zu genügen. Bei einem Tragwerk wie der Hyperbelschale scheint dieses Vorgehen aber nur bedingt einsetzbar, da durch Ansatz dieser Kombination der positive Einfluss des Eigengewichts überbewertet wird. Daher wird hier zusätzlich der Nachweis in modifizierter Form durchgeführt. Das Eigengewicht wird mit einem Lastfaktor 1.0 auf die Schale aufgebracht, und im Anschluss daran wird der Wind in Lastschritten von 0.05 gesteigert. Der somit zu erreichende Lastfaktor des Systems liegt bei $\lambda = 1.3 \cdot 1.5 = 1.95$. Dieser Nachweis entspricht nach Herausrechnen der erhöhten rechnerischen Stahlzugfestigkeit ($\gamma = 1.95/1.1 = 1.77$) in etwa dem Nachweis, welcher bei einer Bemessung nach DIN 1045 (1988) mit einem Gesamtsicherheitsbeiwert $\gamma = 1.75$ geführt worden ist. Ebenfalls werden die hier dargestellten Analysen mit den realen Materialmittelwerten durchgeführt, wie bereits in Abschnitt 6.1.3 näher erläutert.

In den Bildern 8.22 - 8.29 sind die Ergebnisse der Analyse für die Hyperboloidschalen mit Geometriefunktion I und II mit einer Einspannung am unteren und einer Aussteifung am oberen Rand dargestellt.

Bild 8.22 zeigt gleich mehrere interessante Eigenschaften der Hyperbelschale mit Geometriefunktion I. Trotz der reduzierten Dicke der C 80/95-Schale ist das Tragverhalten steifer gegenüber der C 30/37-Schale. Ebenfalls durchgeführte Analysen mit Hyperboloiden gleicher Dicke und variierender Betongüte zeigen, dass dieses aufgrund des Werkstoffs steifere Verhalten sich im Bereich nach der Erstrissbildung weiter fortsetzt.

Die Erstrissbildung im Anströmmeridian erfolgt bei dem höherfesten Beton aufgrund der größeren Zugfestigkeit auf einem höheren Lastniveau. Das Verhalten nach Erstrissbildung im Anströmmeridian hängt stark von der vorhandenen Bewehrung, der Schalendicke und der Gesamtsteifigkeit des Tragwerks ab. Nach Eintritt des Erstrisszustandes erfolgen die Umlagerungen der Kräfte innerhalb des Tragwerks. Analysen mit unterschiedlichen Tension-Stiffening Modellierungen zeigen, dass die Abbildung dieses Bereichs stark von den verwendeten Ansätzen innerhalb des Betonmodells abhängt. Mitunter treten in den Last-Verformungsdiagrammen Lastabfälle auf, die auf den ersten Blick ein Stabilitätsversagen vermuten lassen. In solchen Fällen handelt es sich aber zumeist um Umlagerungen

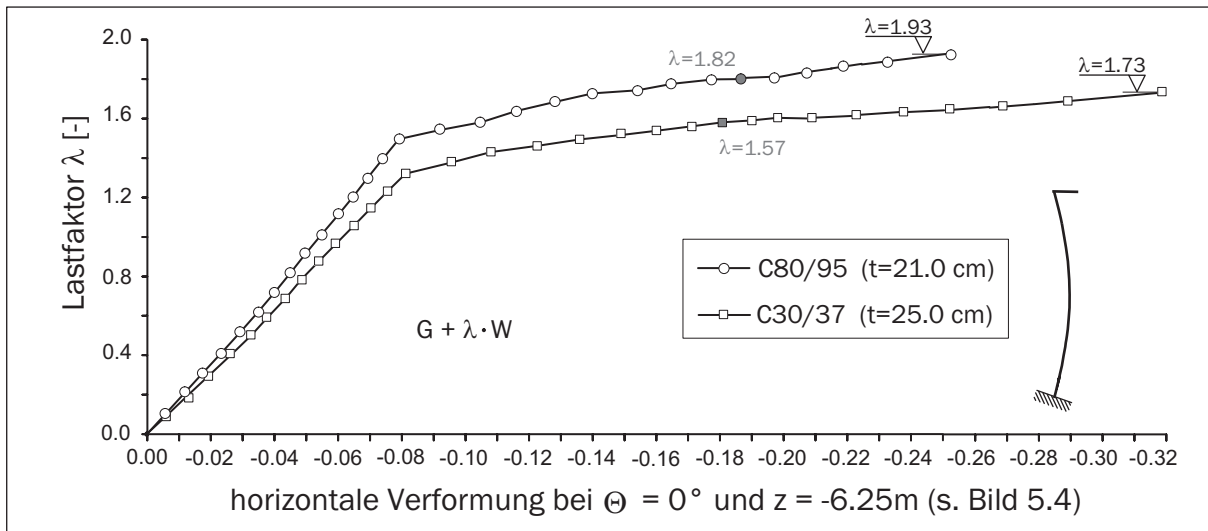


Bild 8.22: Last-Verformungsdiagramm eines mit Wind belasteten Hyperboloiden aus normal- und hochfestem Beton (Geometriefunktion I)

von Kräften innerhalb von größeren Schalenbereichen. Weiterhin ist ersichtlich, dass die Schale aus C 80/95 eine um etwa 10 % höhere Traglast besitzt. Die Ursache hierfür ist in dem steiferen Verhalten der Struktur aus C 80/95 zu finden, da die zum Versagen führenden großen Verformungen erst bei einem höheren Lastniveau erreicht werden. Diesen großen Verformungen kann auch durch einen optimierten Verlauf der Schalendicke begegnet werden.

Die in den Bildern 8.23 und 8.24 dargestellten Rissbilder der Innen- und Außenseite geben den Risszustand der Hyperbelschalen zu einem annähernd gleichen Verformungszustand weit im Nacherstrissbereich wieder. Sowohl auf der Innen- als auch auf der Außenseite sind die Risse vergleichsweise bei der C 30/37-Schale über einen weit größeren Bereich verteilt. Hierbei fällt insbesondere die Ausbildung der großen Risszone an der oberen Flanke der Hyperbelschale auf. Diese Rissbildung resultiert aus der größeren Verformung und der stärkeren Neigung zum Ovalisieren des Rotationskörpers. Werden hingegen die Rissbreiten betrachtet, so fällt auf, dass die C 80/95-Schale wesentlich größere Rissbreiten aufweist. Dieses Verhalten lässt sich durch die höhere Verbundspannung des hochfesten Betons begründen.

Zur Verdeutlichung des bei Betonfestigkeitserhöhung veränderten Lastabtrags der Schalen sind in den Bildern 8.25 und 8.26 die Verläufe der Normalkraft in Meridianrichtung einer untersuchten Schale auf verschiedenen Lastniveaus gegenübergestellt. Im direkten Vergleich ist der wesentlich schmalere Lastumlagerungsbereich der Schale aus höherfestem Beton zu erkennen. Der bei der höherfesten Schale zu beobachtende Anstieg der maximalen Zugkraft und der Abfall der maximalen Druckkraft sind in erster Linie durch die reduzierte Schalendicke zu erklären. Dennoch ist der Lastumlagerungsbereich bei der Schale aus höherfestem Beton infolge der geringeren Rissbildung und der bei gleichem Lastniveau höheren Tragwerkssteifigkeit wesentlich geringer. Hierdurch werden ebenfalls höhere Zugkräfte innerhalb des hochbeanspruchten Schalenbereichs erzwungen.

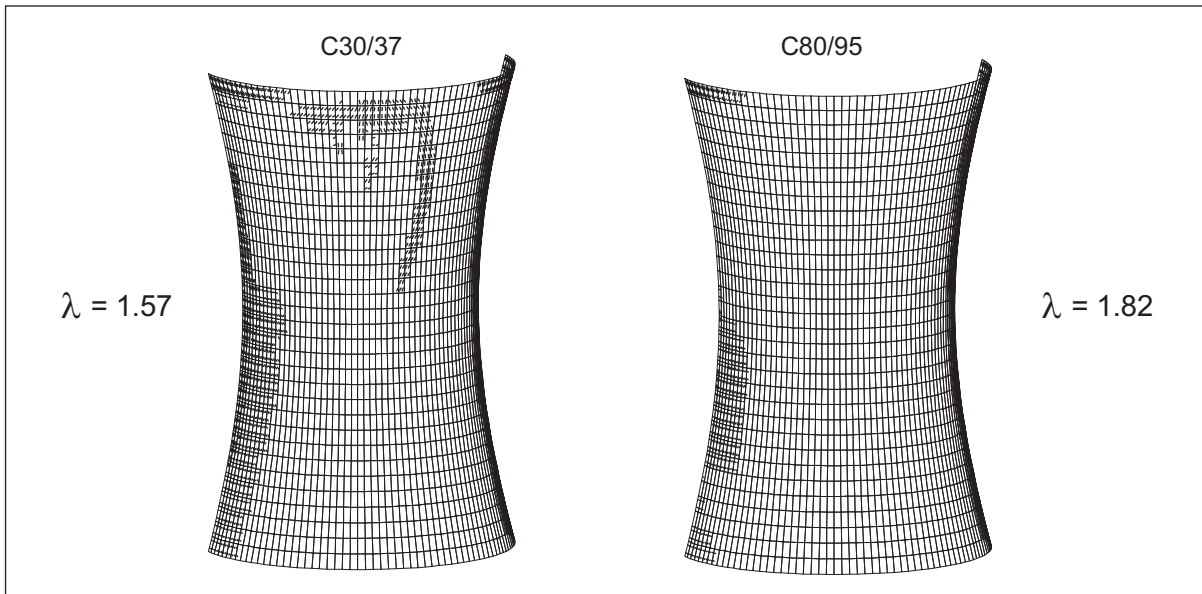


Bild 8.23: Rissbilder des Hyperboloiden mit Geometriefunktion I auf der Innenseite

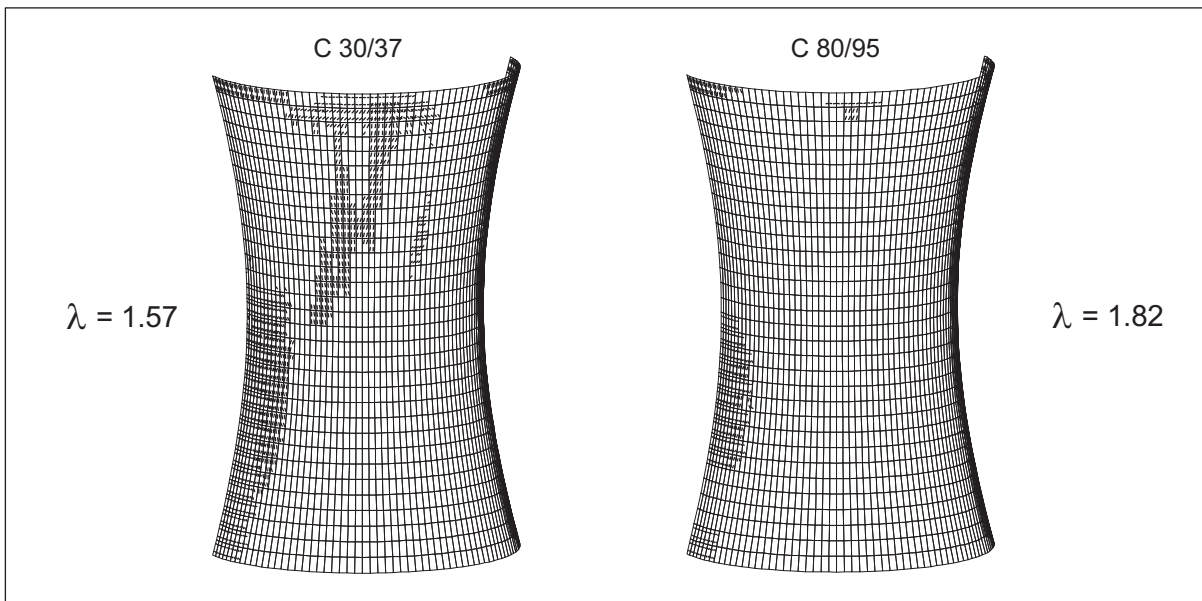


Bild 8.24: Rissbilder des Hyperboloiden mit Geometriefunktion I auf der Außenseite

Die Last-Verformungskurve der Hyperbelschale mit der Geometrie II zeigt das Bild 8.27. Auch hier lässt sich in Übereinstimmung mit der Geometrie I das trotz der Dickenreduktion steifere Tragverhalten beobachten. Die Steigerung des Endlastfaktors liegt hier ebenfalls bei ungefähr 10%. Auch die in den Bildern 8.28 und 8.29 dargestellten Rissstrukturen der Schale für ein Lastniveau mit annähernd gleichem Verformungszustand unterstreichen die Erkenntnisse des ersten Beispiels. Der größte Unterschied zwischen den beiden Geometrien, welcher bereits bei der Bemessung der Schalen im Abschnitt 5.3 deutlich wurde, liegt in dem krümmungsbedingt differierenden Lastabtrag. Die Hyperbelschale II trägt

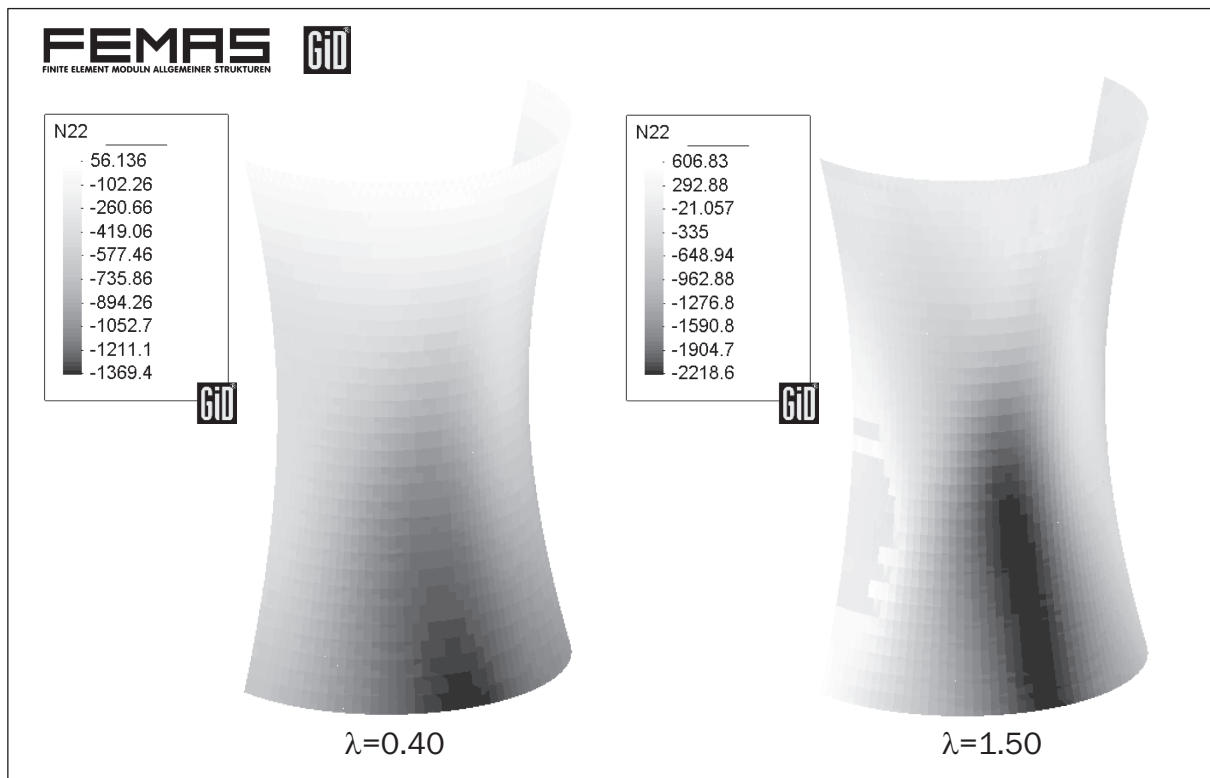


Bild 8.25: Meridiannormalkraft n_{22} der Schale „I C30 bb“ vor und nach der Rissbildung im Anströmmeridian

die Last nahezu wie eine Kreiszylinderschale ab, wobei auch hier die verminderte Umlagerungsfähigkeit bei Steigerung der Betongüte deutlich wird.

Die Parameterstudie der Hyperbelschalen umfasst insgesamt vier Nachweise der Form

$$\lambda \geq \gamma \quad (8.2)$$

für die in Tabelle 5.2 dargestellten Systeme:

Rechnerische Mittelwerte der Baustofffestigkeiten nach DIN 1045-1 (2001):

- $\lambda(G + 1.5W)$ mit der Sicherheit $\gamma_R = 1.3$
- $G + \lambda W_1$ mit der Sicherheit $\gamma = 1.95$
- $\lambda(G + W)$ mit der Sicherheit $\gamma_b^{red} = 2.51$ (s. Abschnitt 9.2)

Reale Mittelwerte der Baustofffestigkeiten (s. Abschnitt 6.1.3):

- $G + \lambda W_2$ mit der Sicherheit $\gamma = 1.75$.

Die Endlastfaktoren der nichtlinearen Analyse aller untersuchten Systeme der Hyperbelschale sind in Tabelle 8.1 dargestellt. Die eingeklammerten Werte geben hierin die

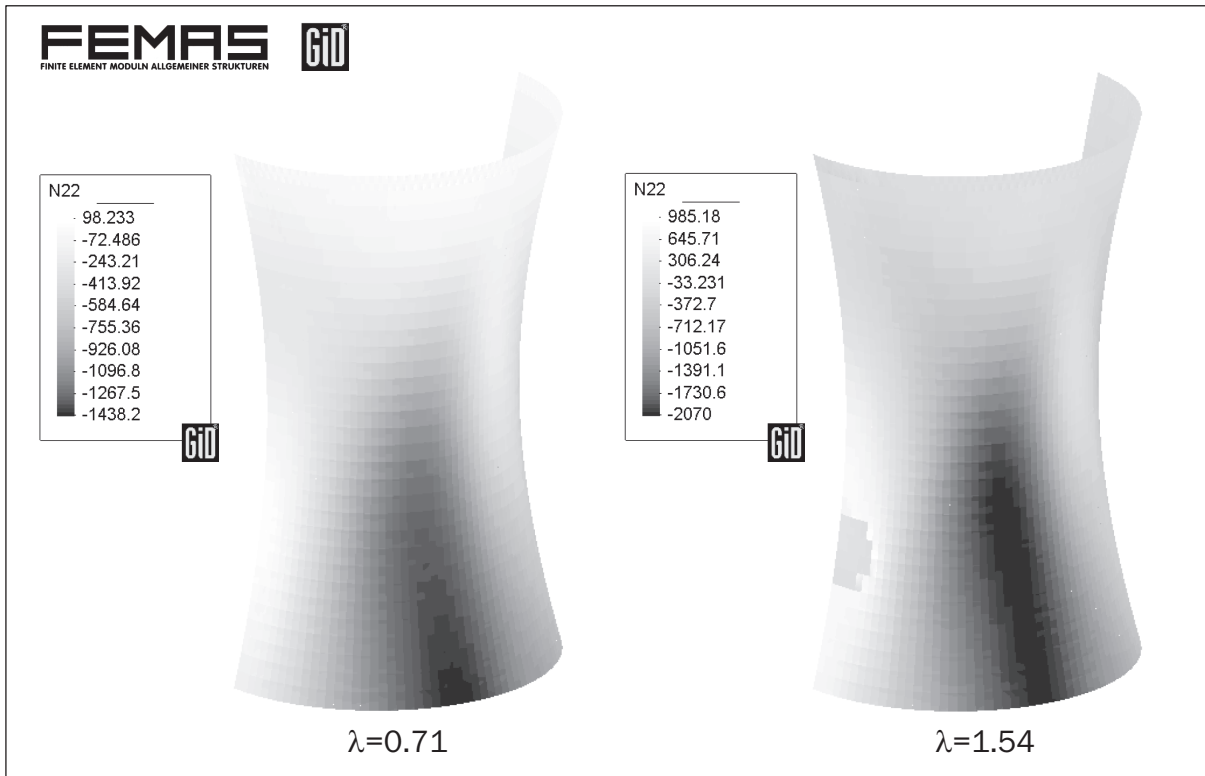


Bild 8.26: Meridiannormalkraft n_{22} der Schale „I C80 bb“ vor und nach der Rissbildung im Anströmmeridian

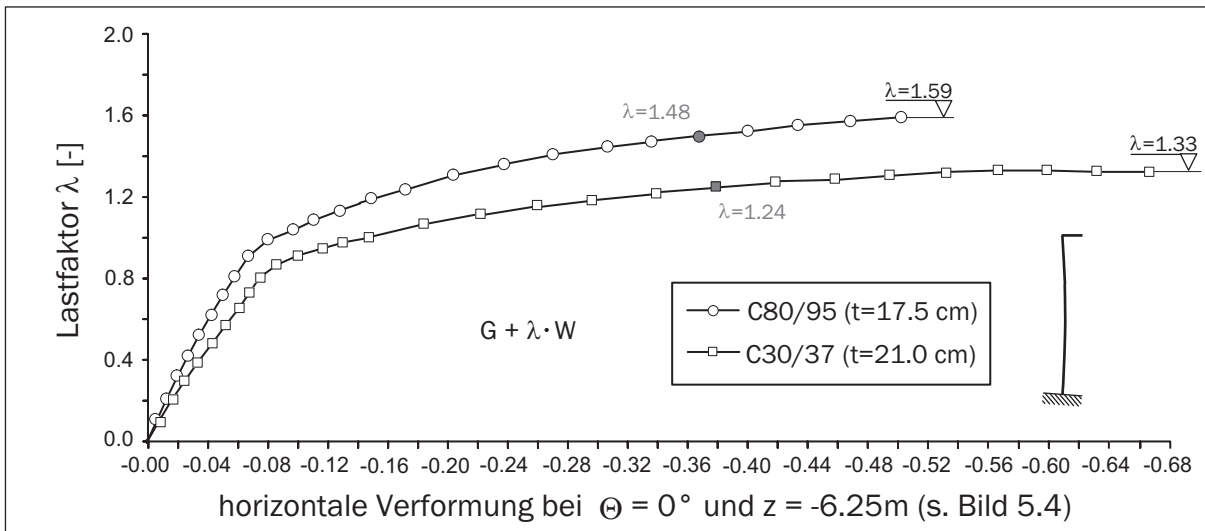


Bild 8.27: Last-Verformungsdiagramm eines mit Wind belasteten Hyperboloiden aus normal- und hochfestem Beton (Geometriefunktion II)

mit einer zufallsverteilten Zugfestigkeit ermittelten Resultate wieder. Ein mit (...) gekennzeichnete Wert zeigt ein „verformungsbedingtes stabilitätsähnliches Versagen“ des jeweiligen Systems an. Dieser, im Zuge der in dieser Arbeit durchgeführten Analysen

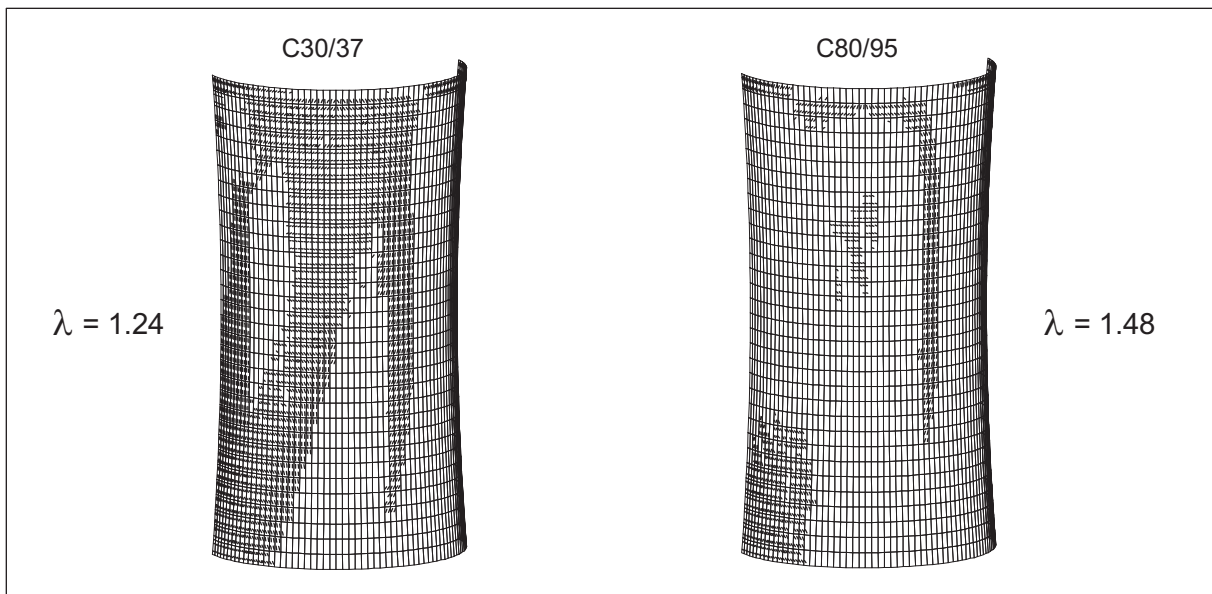


Bild 8.28: Rissbilder des Hyperboloiden mit Geometriefunktion II auf der Innenseite

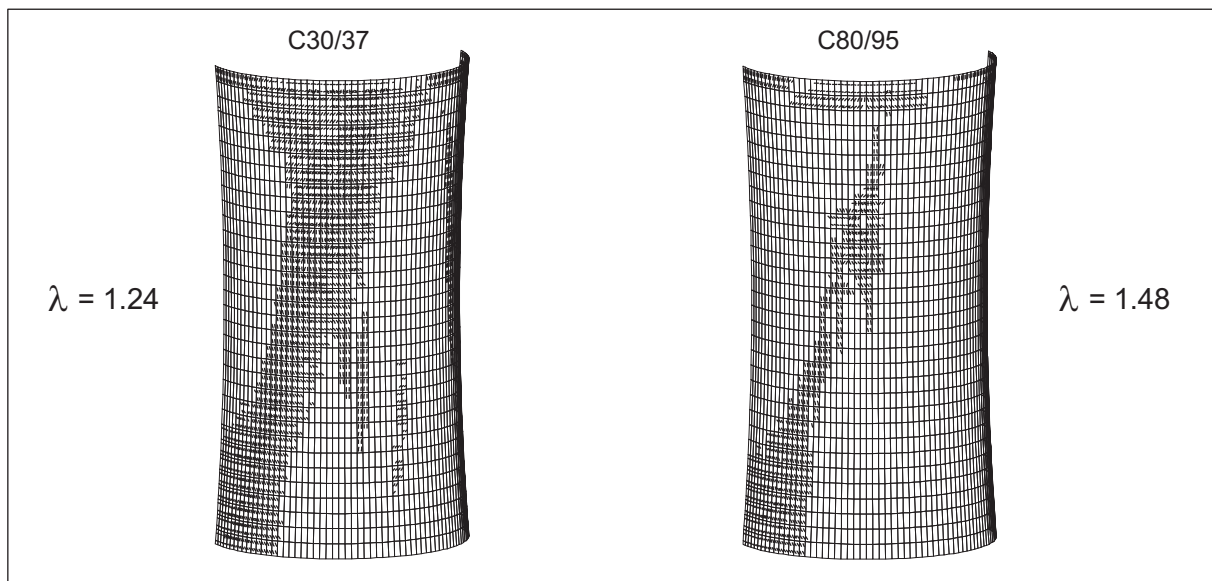


Bild 8.29: Rissbilder des Hyperboloiden mit Geometriefunktion II auf der Außenseite

entstandene Begriff, wird bei der Zusammenfassung der Ergebnisse des Abschnitts 8.6 detailliert erläutert.

Die Auswertung der Last-Verformungskurven und der Verläufe des Steifigkeitsparameter lassen zusammenfassend folgende Schlussfolgerungen zu:

- Der Nachweis 1 ist für die Systeme mit Geometriefunktion I und der aussteifenden Lagerung am oberen Rand erfüllt. Diese Schalen erfüllen somit die derzeitigen Anforderungen der DIN 1045-1 (2001). Ein Blick auf den Nachweis 3 zeigt, dass es genau die Systeme sind, die auch den Stabilitätsnachweis nach Abschnitt 9.2 er-

Nr.	Nachweis 1 $\lambda(G + 1.5W)$	Nachweis 2 $G + \lambda W_1$	Nachweis 3 $\lambda(G + W)$	Nachweis 4 $G + \lambda W_2$
I 30 aa	1.07 (1.07)	1.55 (1.56*)	1.79 (1.69)	1.57 (1.34)
I 30 ab	1.51* (1.51*)	2.02 (2.03)	2.73* (2.64)	1.68 (1.70)
I 30 ba	1.08* (1.08*)	1.57* (1.44)	1.91* (1.86*)	1.55 (1.56)
I 30 bb	1.51* (1.51*)	2.01 (1.98)	2.72 (2.12)	1.73 (1.64)
I 80 aa	1.20 (1.24)	1.65* (1.72*)	2.22* (2.01)	1.74 (1.66)
I 80 ab	1.42 (1.39)	1.93 (1.84)	3.02 (2.98)	1.92 (1.76)
I 80 ba	1.26 (1.24)	1.72* (1.73*)	2.14 (2.02)	1.76 (1.73)
I 80 bb	1.37 (1.40)	1.86 (1.85)	3.19* (2.97)	1.93 (1.77)
II 30 aa	0.82* (0.82)	1.22 (1.22)	1.21* (1.21*)	1.30* (1.29*)
II 30 ab	0.95* (0.94*)	1.28 (1.27)	1.39 (1.47*)	1.31* (1.32*)
II 30 ba	0.81* (0.82)	1.20* (1.13*)	1.21* (1.22)	1.29* (1.28*)
II 30 bb	0.94* (0.95*)	1.28 (1.27*)	1.47* (1.47*)	1.33* (1.33*)
II 80 aa	0.90 (0.90*)	1.46 (1.43)	1.44 (1.44)	1.40* (1.40*)
II 80 ab	1.15 (1.03)	1.72 (1.72)	1.86* (1.86)	1.66 (1.71)
II 80 ba	0.93 (0.94)	1.42 (1.41)	1.46 (1.33)	1.37* (1.41)
II 80 bb	1.21 (1.15)	1.64 (1.53)	1.62 (1.88*)	1.59 (1.48)

Tabelle 8.1: Ergebnisse der nichtlinearen Analysen

füllen. Die modifizierten Nachweise 2 und 4 werden von diesen Systemen teilweise leicht verfehlt, so dass hier von einer nahezu sicheren, wenn auch kaum dauerhaften Struktur ausgegangen werden kann.

- Der direkte Vergleich zwischen Nachweis 2 und 4 zeigt in vielen Fällen die durch die erhöhte Festigkeit des Betonstahls bedingte Steigerung der Endlastfaktoren bei Nachweis 1 an. In den umgekehrten Fällen dominiert die realitätsnähere Abbildung der Steifigkeit der Nachweisform 4 und führt zu einem Anstieg der Endlastfaktoren bei Nachweis 4.
- In erster Linie bei Hyperbelgeometrie II tritt häufig das bereits erwähnte verformungsbedingte stabilitätsähnliche Versagen der Struktur auf. Diese Art des Versagens wird durch einen Abfall des Steifigkeitsparameters auf Null und durch negative Diagonalglieder der Steifigkeitsmatrix angezeigt. Die großen Verformungen dieses Schalentyps sind der Grund für dieses zu frühe Versagen aller analysierten Lagerungsvarianten.
- Der direkte Vergleich der sonst identischen Schalen mit gelenkiger und mit eingespannter Lagerung am unteren Rand zeigt die untergeordnete Bedeutung der Lagerungsart. Es werden nahezu bei allen Untersuchungen die gleichen Endlastfaktoren erzielt.
- Dahingegen zeigt sich ebenfalls bei allen Untersuchungen die große Bedeutung der Aussteifung des oberen Schalenrandes. Ohne eine solche Stabilisierung erfüllt keine der hier untersuchten Schalen die Nachweise.

8.6 Kühlturmschale GRAND GULF, USA

8.6.1 Beschreibung des Schalentragwerks

Als Anwendungsbeispiel wird aus der Literatur ein Kühlturmbauwerk ausgewählt, welches in der Vergangenheit von vielen Forschern untersucht wurde [Mang et al. 1983], [Milford & Schnobrich 1984], [Min 1992], [Mahmoud & Gupta 1993]. Dieser Kühlturm wurde im Jahr 1977 für das Kraftwerk GRAND GULF NUCLEAR PLANT, PORT GIBSON, MISSISSIPPI, USA geplant und ausgeführt und stand aufgrund eines Teileinsturzes durch einen während der Bauzeit aufgetretenen Tornado im Blickpunkt der Forschungsarbeiten. In ihrer Studie kommen Mahmoud & Gupta (1993), im Gegensatz zu anderen Forschern, zu dem Schluss, dass der Turm eher infolge Beulversagens als durch Versagen der Bewehrung zum Einsturz neigt. Insofern eignet sich dieses Tragwerk hervorragend zur Überprüfung der entwickelten Algorithmen.

Die Geometrie kann mit Hilfe der Gleichung (5.12) beschrieben werden. Hierfür sind die in Tabelle 8.2 angegebenen Parameter zu verwenden. Ebenfalls sind dort die Materialkennwerte von den verwendeten Werkstoffen Beton und Stahl angegeben.

Der Dickenverlauf über die Höhe ist neben der verwendeten Diskretisierung mit 64×51 ASE4-Elementen in Bild 8.30 dargestellt. Die Lagerung der Kühlturmschale wird entgegen der realen Stützung in Form eines engen Stützenfachwerks mit einer Höhe von 10.67 m korrespondierend zu den Arbeiten der anderen Forscher als eine vollständig gelenkige Lagerung angenommen. Nach Angaben von Min (1992) wurde in Abstimmung mit den Planern des Kühlturms die Höhe der Schalenunterkante auf $Z = 30$ ft festgelegt; das entspricht einer Höhe von 9.15 m. Die Bewehrung ist der Arbeit von Mahmoud & Gupta (1993) entnommen und in Bild 8.30 dargestellt. Hierbei wird eine über die gesamte Schale und für die Innen- und Außenseite konstante Betonüberdeckung von 3.81 cm angenommen. Der gewählte Bewehrungsdurchmesser wird aufgrund nicht vorliegender Angaben sinnvoll im Mittel zu 10 mm abgeschätzt.

Die in Mahmoud & Gupta (1993) angegebenen Druckverteilungs- und Böenstaudruckkurven werden in Bild 8.31 mit den entsprechenden Kurven der BTR (1997) verglichen. Bei einer Übertragung der Windlast in die hier gültigen Beanspruchungen liefert der Normwind K 1.3 die beste Übereinstimmung. Der Böenstaudruck ist der Windzone III zuzuordnen.

Daher ergibt sich die äußere quasi-statische Windbelastung bei Nichtberücksichtigung

Geometrie		Materialkennwerte	
untere Hyperbel	obere Hyperbel	Beton	Stahl
$a = 36.31$ m	$a = 36.31$ m	$E_c = 2.81 \cdot 10^7$ kN/m ²	$E_s = 2.07 \cdot 10^8$ kN/m ²
$b = 96.01$ m	$b = 86.0685$ m	$f_c = 34473.8$ kN/m ²	$f_{yR} = 413700$ kN/m ²
$z_T = 120.03$ m	$z_T = 120.03$ m	$\gamma_c = 22.79$ kN/m ³	$\varepsilon_{su} = 0.002$
		$\nu = 0.175$	

Tabelle 8.2: Geometrieparameter und Materialkennwerte des Kühlturms GRAND GULF

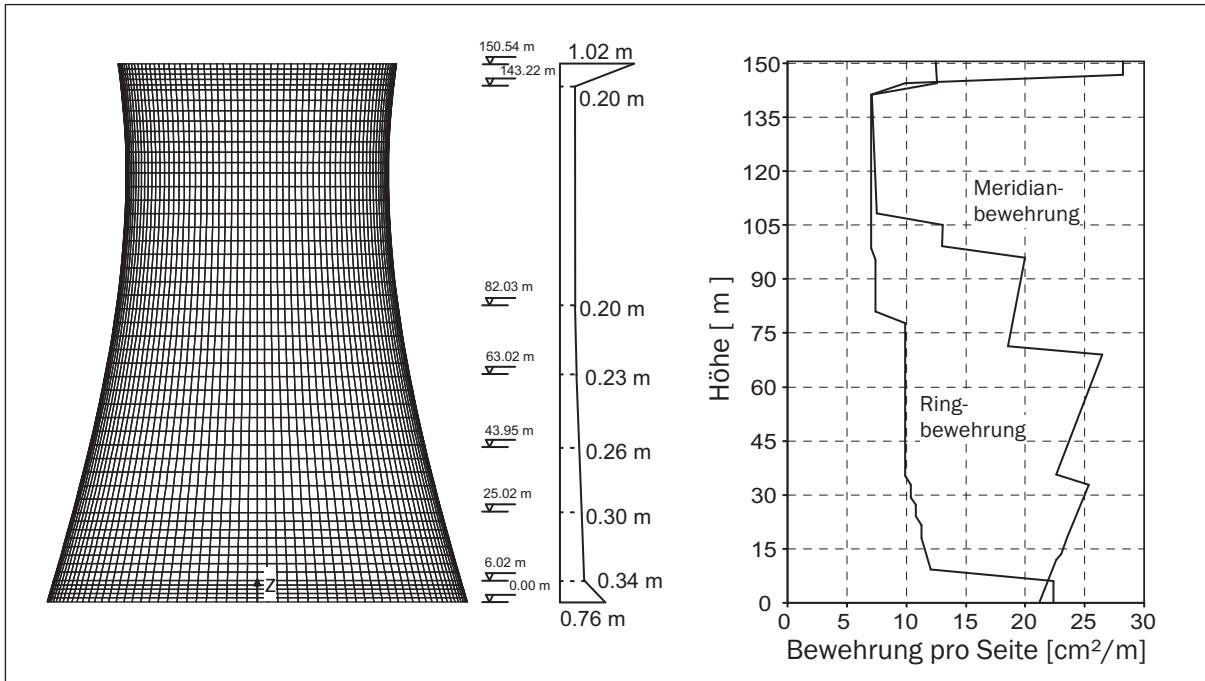


Bild 8.30: Diskretisierung, Dickenverlauf und vorhandene Bewehrungsmengen des Kühlturms GRAND GULF

einer dynamischen Erhöhung und einer Bebauungsinterferenz annähernd zu

$$\begin{aligned}
 w_a &= c_{pa}(\Theta) \cdot \varphi \cdot F_i \cdot q_b(z) \\
 &= c_{pa}(\Theta) \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.15 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^{0.22} .
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

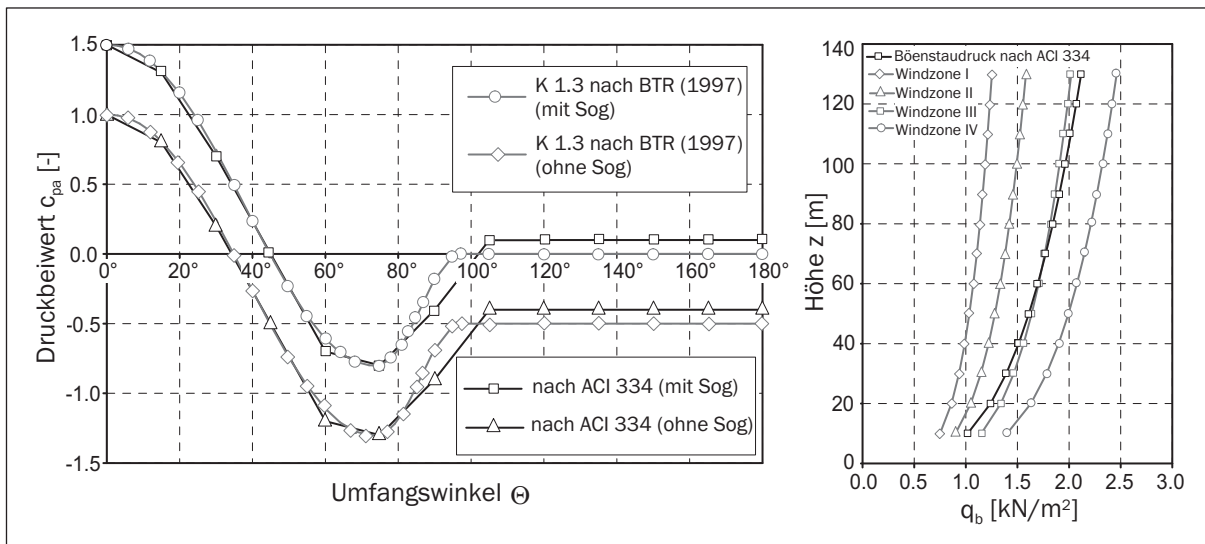


Bild 8.31: Druckverteilung der quasi-statischen Windbelastung - ein Vergleich zwischen deutschen und amerikanischen Vorschriften

Die in einer vorab durchgeführten statischen Analyse infolge Eigengewicht und Windbeanspruchung linear ermittelten Spannungen bzw. Schnittgrößen stimmen gut mit den Daten der übrigen Forscher überein. Eine durchgeführte nichtlineare Analyse mit dem in Kapitel 4 vorgestellten Werkstoffgesetz für die Lastfallkombination $G + \lambda \cdot W$ ergibt ebenfalls eine gute Übereinstimmung des in Mahmoud & Gupta (1993) erreichten Endlastfaktors einer nichtlinearen Berechnung.

8.6.2 Nichtlineare Stabilitätsanalysen

Im Folgenden wurde zur besseren Beurteilung der Stabilitätsgefährdung des Bauwerks eine begleitende Eigenwertanalyse mit zusätzlicher Beobachtung der in Kapitel 6 ausführlich beschriebenen Parameter durchgeführt. Der für die Beulanalyse maßgebende Lastfall ist hierbei $\lambda \cdot (G + W)$, welcher die größten Druckkräfte in Meridian- und Ringrichtung des Kühlturms verursacht.

Eine vorab durchgeführte klassische Beulanalyse ergibt eine Beulsicherheit von $\lambda = 9.27$, was bei der Annahme einer perfekten Geometrie und einer idealisierten Gründungssituation nach derzeitigem Sicherheitsdenken als ausreichend angesehen werden kann.

In einem weiteren Schritt soll nun das nichtlineare Verhalten des Bauwerks unter Ansatz unterschiedlicher Materialmodellierungen - linear bzw. nichtlinear, normalfester bzw. hochfester Beton - untersucht werden. Die im Folgenden analysierten Varianten sind:

- Variante 0 - originale Material- und Strukturdaten, lineares Materialgesetz
- Variante I - originale Material- und Strukturdaten, nichtlineares Materialgesetz
- Variante II - C 80/95, originale Wanddicke, nichtlineares Materialgesetz
- Variante III - C 80/95, reduzierte Wanddicke (-4 cm), nichtlineares Materialgesetz
- Variante IV - C 80/95, reduzierte Wanddicke (-4 cm), lineares Materialgesetz
- Variante V - C 80/95, reduzierte Wanddicke (-4 cm), globale Bewehrungserhöhung, nichtlineares Materialgesetz
- Variante VI - C 80/95, reduzierte Wanddicke (-4 cm), globale und 1. lokale Bewehrungserhöhung, nichtlineares Materialgesetz
- Variante VII - C 80/95, reduzierte Wanddicke (-4 cm), globale und 2. lokale Bewehrungserhöhung, nichtlineares Materialgesetz
- Variante VIII - C 80/95, reduzierte Wanddicke (-4 cm), globale und 3. lokale Bewehrungserhöhung, nichtlineares Materialgesetz

Innerhalb der materiell linearen und geometrisch nichtlinearen Analyse wird die kritische Last - in Form eines Durchschlagspunktes - bei $\lambda = 8.94$ erreicht (Variante 0). Somit ergibt die klassische Beulanalyse nur einen um 3.7% erhöhten Wert, so dass in diesem Fall von einer guten Abschätzung der erreichten Durchschlagslast gesprochen werden kann. Nach Überschreiten des kritischen Lastniveaus zeigt die Beobachtung des Last-Verformungsdiagramms in Bild 8.32 den kontinuierlichen Lastabfall bis zum Versagen aufgrund der großen Verformungen auf einem Lastniveau von $\lambda = 7.14$ an. Die zu den in Bild 8.32 markierten Lastniveaus zugehörigen Verformungsbilder in Bild 8.33 zeigen die Ausbildung einer durch die hohen Druckkräfte auf der Flanke des Turms bedingten lokalen Beule, die im Gegensatz zu einer lokalen Beeinträchtigung des Tragwerks zu einem

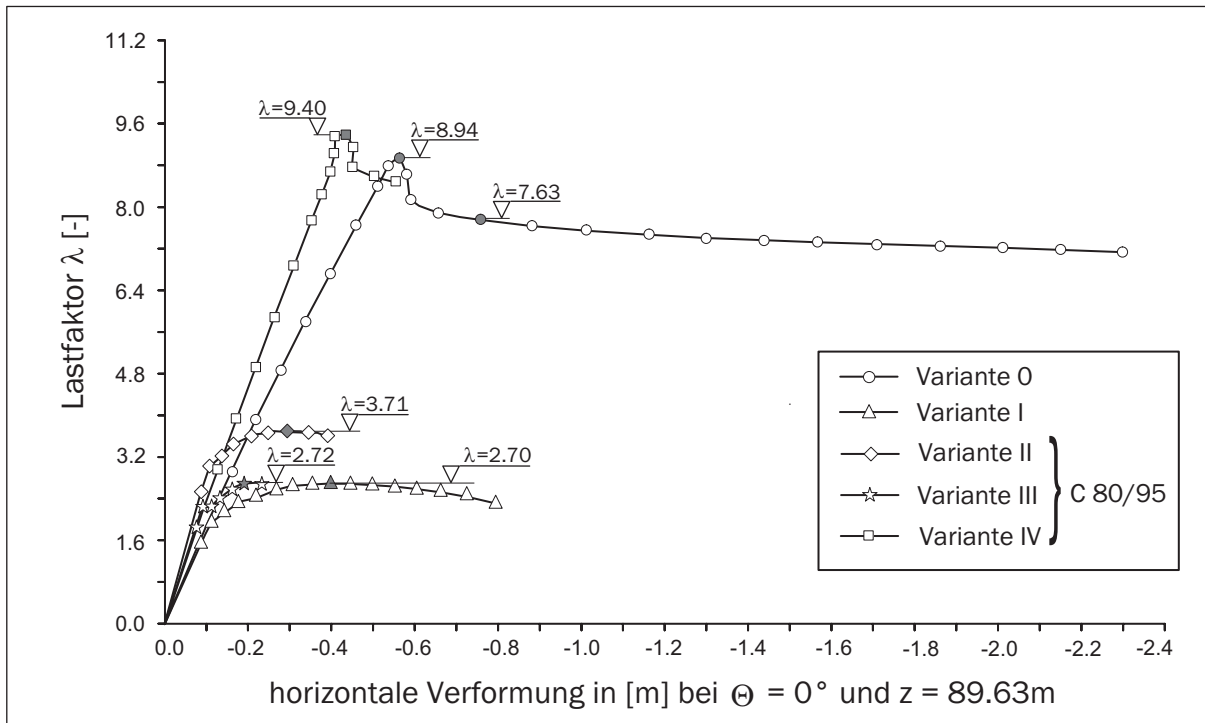


Bild 8.32: Last-Verformungskurven für unterschiedliche Modellierungen des Kühlturms GRAND GULF im Anströmmeridian

globalen labilen Verhalten führt. Bis zum Versagen des Tragwerks bildet sich diese Beule immer deutlicher aus.

Zur Verdeutlichung des durch die materielle Nichtlinearität veränderten Lastabtrags des Kühlturms wird eine geometrisch und materiell nichtlineare Analyse der Struktur mit den originalen Werkstoffkennwerten aus Tabelle 8.2 durchgeführt (Variante I). Gegenüber der nichtlinearen Analyse mit der Lastfallkombination $G + \lambda \cdot W$ zeigt sich aufgrund der erhöhten Druckkräfte, dass die erste Rissbildung erst bei einem höheren Lastniveau eintritt. Bei einem Lastniveau von $\lambda = 2.70$ tritt auch in diesem Fall - in den Last-Verformungskurven des Bildes 8.32 zu erkennen - ein Durchschlagspunkt auf. Eine Betrachtung der zugehörigen Verformungsbilder zeigt gegenüber der Analyse mit linearem Werkstoffverhalten ein gänzlich unterschiedliches Verhalten. Aufgrund der Rissbildung im Anströmmeridian und der Ausbildung eines von der Taille bis zum oberen Rand verlaufenden Rissbereichs in der Flanke bildet sich nach Durchschreiten des Durchschlagspunktes eine Aufwölbung der Flanke aus, die in einem Versagen der Ringbewehrung in diesem Bereich endet. Dieses Verhalten ist in Bild 8.34 für zwei Lastniveaus dargestellt.

Im Gegensatz zur linearen Berechnung kann also realistischer der gefährdete Bereich der Schalenstruktur lokalisiert werden. Eine weitere Erkenntnis bringt die Beobachtung der ebenfalls ermittelten Beulparameter. Hierbei wird deutlich, dass der vermeintliche Durchschlagspunkt bei $\lambda = 2.70$ nicht gleich ein global labiles Verhalten der Struktur mit sich zieht. Vielmehr reagiert die Struktur auf die lokale Schwächung mit einer Lastumlagerung in ungeschwächte Bereiche. Diese lokale Schwächung führt allerdings in diesem Fall

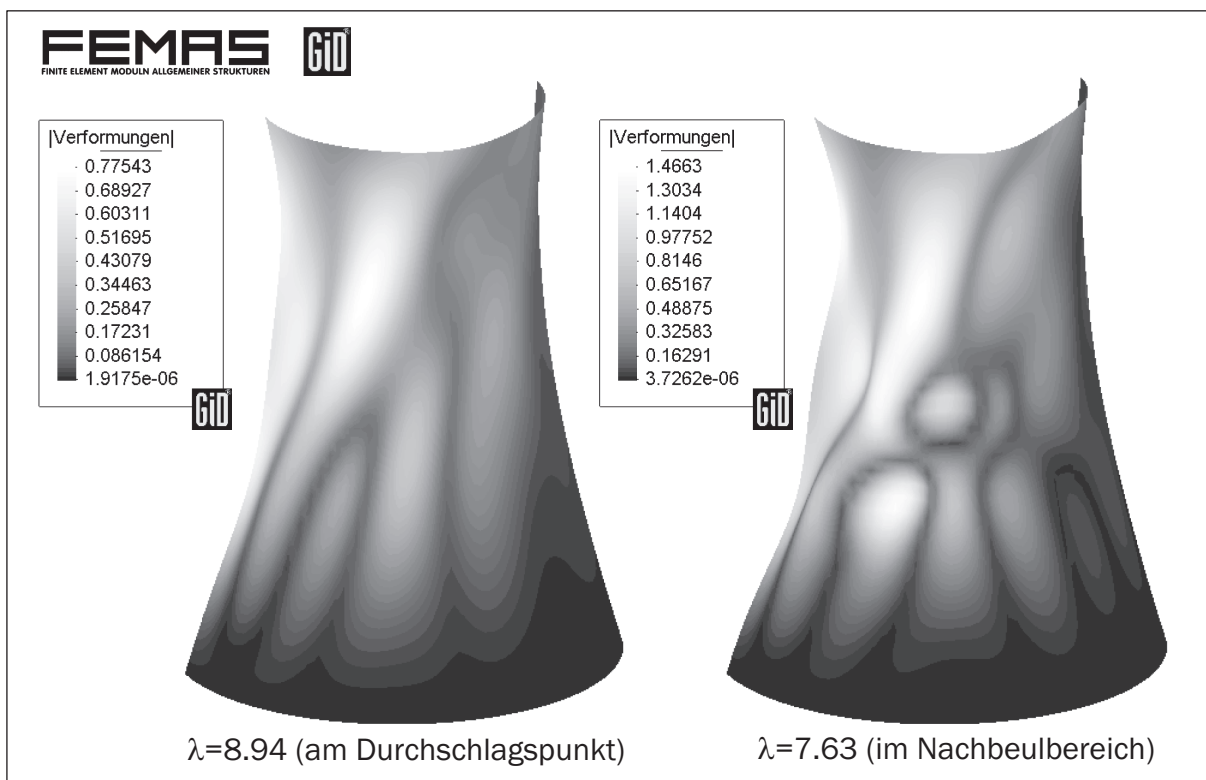


Bild 8.33: Verformungsfiguren des Kühlturms GRAND GULF bei unterschiedlichen Belastungsstufen (Variante 0)

durch das stetige Anwachsen der Verformungen zu einem global labilen Verhalten, welches sich durch den Abfall der Determinante der Steifigkeitsmatrix und durch den Abfall der Steifigkeitsparameter verrät (s. Bild 8.35).

Das Tragwerk wird nun in einem weiteren Schritt unter Ansatz der Betongüte C 80/95 analysiert (Variante II). Die Ergebnisse dieser Analyse sind ebenfalls in den Bildern 8.32 und 8.35 dargestellt. Im Last-Verformungsdiagramm erkennt man, dass bei einem Lastniveau $\lambda = 3.71$ ebenfalls ein Durchschlagspunkt erreicht zu sein scheint. Die Betrachtung des Steifigkeitsparameters lässt aber auch hier den Schluss zu, dass die zuerst lokale Instabilität erst nach der Lastumlagerung in ein globales Versagen umschlägt. Daneben ist zu erkennen, dass im Vorbeulbereich das Antwortverhalten aufgrund des höheren Elastizitätsmoduls steifer ist und das Erstrissniveau aufgrund der höheren Zugfestigkeit ansteigt. Die Verformungsfähigkeit hingegen nimmt mit wachsender Betongüte ab, so dass bei Eintritt des Versagens nur ein Drittel der Verformung der Originalstruktur erreicht wird.

Um nun die Auswirkung einer Schalendickenreduktion bei Verwendung des Werkstoffs hochfester Beton aufzuzeigen, wird die Struktur mit einer um den konstanten Wert von 4.0 cm reduzierten Dicke - der Wert ergibt sich aus einer klassischen Beulanalyse zu $\lambda = 9.63$ - unter Ansatz eines Betons C 80/95 analysiert. Hierzu wird zu Beginn die Bewehrungsmenge aus Gründen der Vergleichbarkeit konstant gehalten. Eine geometrisch nichtlineare Analyse (s. Bild 8.32) ergibt einen Lastfaktor von $\lambda = 9.40$ (Variante IV). Der Durchschlagspunkt tritt aufgrund des wesentlich steiferen Gesamttragverhaltens der

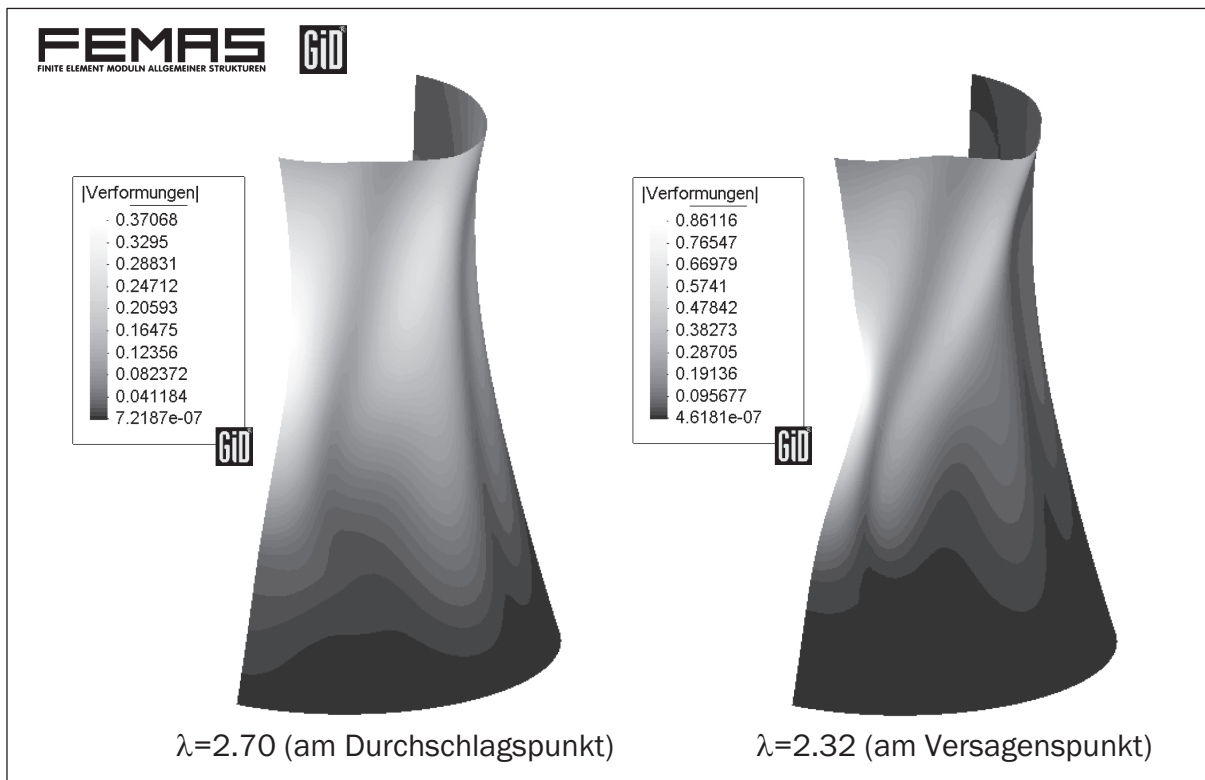


Bild 8.34: Verformungsfiguren des Kühlturms GRAND GULF aus einer nichtlinearen Analyse (Variante I)

Struktur bei einer geringeren Verformung ein. Die Last-Verformungskurve der materiell nichtlinearen Analyse (Variante III, Bild 8.32) zeigt, dass bereits bei einem Lastfaktor von $\lambda = 2.72$ das Versagen bei kleinen Verformungen der Schalenstruktur eintritt. Auch kann hier anhand dieses Verlaufs kein Durchschlagspunkt identifiziert werden. Am Verlauf des Steifigkeitsparameters in Bild 8.35 ist zu erkennen, dass bereits vor Erreichen eines möglichen Durchschlagspunktes das Tragwerksversagen durch Spannungsversagen eintritt. Dieses zeigt sich durch den stark von Null differierenden Wert des Parameters.

In Anlehnung an die Bemessungsergebnisse der in Abschnitt 8.5 betrachteten Hyperbelschalen wird zur Berücksichtigung des aufgrund der Dickenreduktion veränderten Verhältnisses von Druck- und Zugspannungen die Meridianbewehrung um $3.0 \text{ cm}^2/\text{m}$ und die Ringbewehrung um $0.5 \text{ cm}^2/\text{m}$ erhöht (Variante V). Diese und weitere lokale Bewehrungserhöhungen (Varianten VI - VIII) haben die in dem Bild 8.36 dargestellten Kurven zur Folge. Es ist leicht ersichtlich, dass die globale Bewehrungserhöhung eine Erhöhung des Lastfaktor auf $\lambda = 2.91$ verursacht. Das grundlegende Tragverhalten der Schale verändert sich hingegen nicht, was auch ein Vergleich der Entwicklung des Steifigkeitsparameters in Bild 8.37 zeigt. Hier fällt auf, dass die Bewehrungserhöhung einen tieferen Abfall des Parameters erzeugt, das Tragwerk aber dennoch infolge Spannungsversagen den Grenzzustand erreicht. In weiteren Schritten wird die Ring- und Meridianbewehrung des Tragwerks an lokalen Stellen erhöht, in erster Linie im Bereich des oberen Randes und im Bereich der Taille. Die resultierenden Last-Verformungskurven sind ebenfalls in Bild

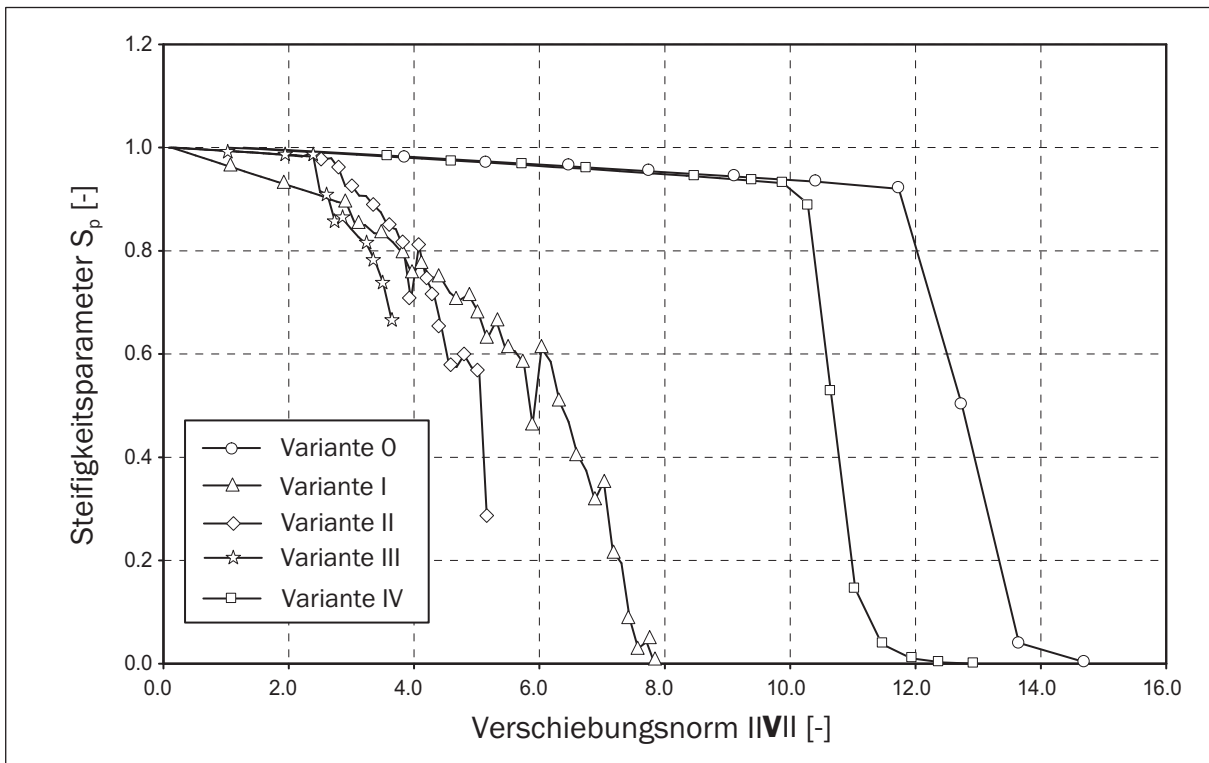


Bild 8.35: Steifigkeitsparameter für den Kühlturm GRAND GULF

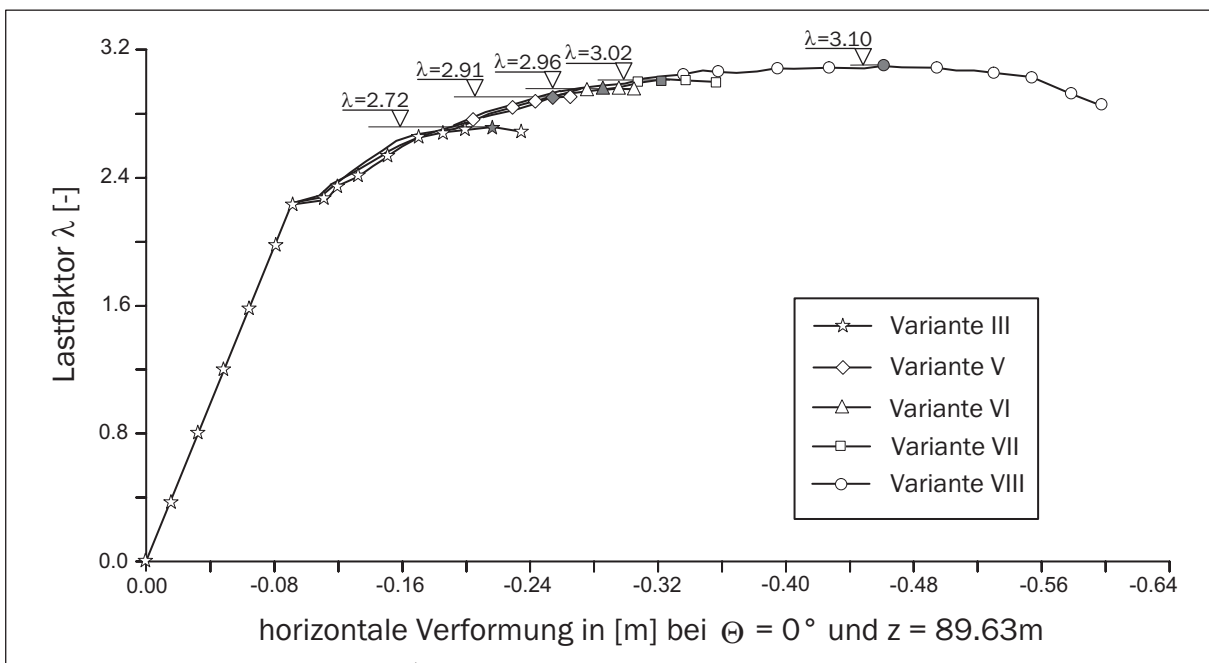


Bild 8.36: Last-Verformungskurven des Kühlturms GRAND GULF im Anströmmeridian bei Dickenreduktion und lokaler Bewehrungserhöhung

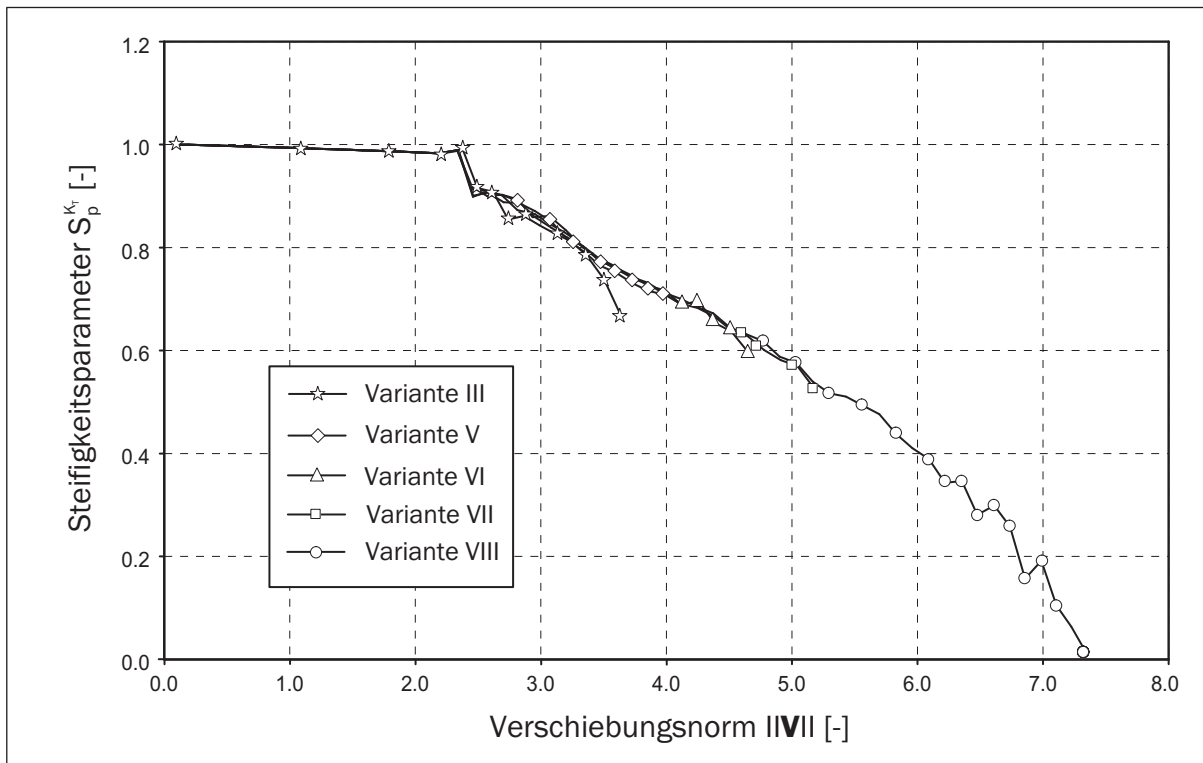


Bild 8.37: Steifigkeitsparameter für den Kühlturm GRAND GULF bei Dickenreduktion und lokaler Bewehrungserhöhung

8.36 dargestellt. Eine lokale Steigerung erhöht den erreichbaren Lastfaktor bis $\lambda = 3.10$, ohne das wesentliche Tragverhalten zu verändern. Bei diesem Lastfaktor zeigt sowohl die Last-Verformungskurve als auch die Entwicklung des Steifigkeitsparameters das Auftreten eines Durchschlagspunktes an (Bild 8.37). Eine weitere Erhöhung der Bewehrung würde eine weitere Steigerung der aufnehmbaren Last nur durch eine signifikante Erhöhung der Ringsteifigkeit ermöglichen. In diesem Fall kann also von einem das globale Versagen einleitenden Zustand ausgegangen werden. Eine Betrachtung der Verformungsfiguren aus dieser Analyse (Bild 8.38) zeigt ein gegenüber der Originalstruktur ähnliches Verhalten. Auch hier bildet sich über die Flanke von der Tailenhöhe bis zum oberen Rand eine Aufwölbung aus. Es ist aus den Verformungsbildern ersichtlich, dass aufgrund der geringeren Duktilität die Gesamtverformungen bei Erreichen des maximalen Lastniveaus und bei Eintreten des globalen Versagens gegenüber dem normalfesten Beton kleiner ausfallen. Dieselbe Beobachtung ist auch beim Vergleich der ermittelten Verschiebungsnormen in den Bildern 8.35 und 8.37 zu machen.

Bild 8.39 zeigt eine Visualisierung der Risschädigung in Ring- und Meridianrichtung kurz vor dem endgültigen Versagen des Tragwerks. Neben der ausgeprägten Schädigung im Anströmmeridian und im Bereich des oberen Randgliedes ist hierbei gut der geschädigte Bereich auf der Flanke des Turms zu erkennen.

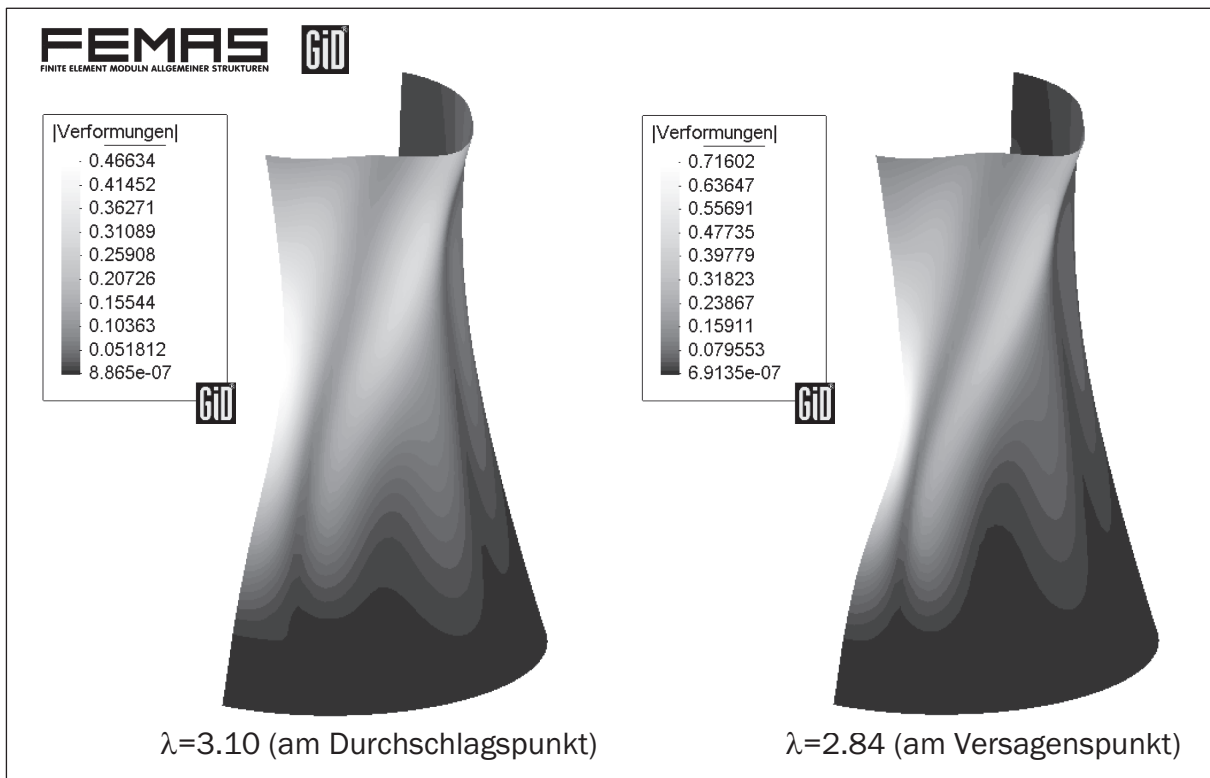


Bild 8.38: Verformungen des Kühlturms GRAND GULF aus Variante VIII

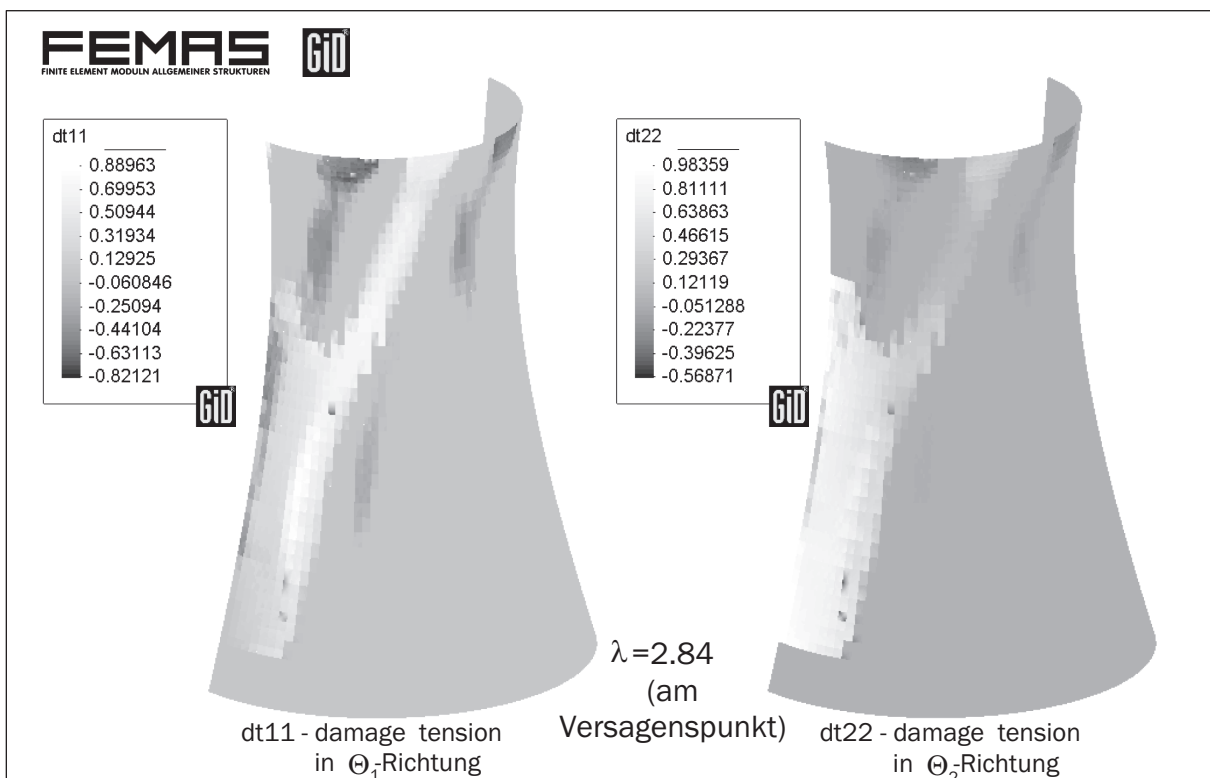


Bild 8.39: Visualisierung der Risschädigungen aus einer nichtlinearen Analyse

8.6.3 Schädigungsorientierte Stabilitätsanalyse

Zur Demonstration der im Rahmen dieser Arbeit geschaffenen Möglichkeit der Stabilitätsuntersuchung geschädigter Tragwerke wurde die Variante VIII verschiedenen Schädigungen ausgesetzt und mit Hilfe der in Kapitel 7 beschriebenen Vorgehensweisen analysiert. In Bild 8.40 sind die kritischen Lastfaktoren der unterschiedlichen Schädigungszustände aufgeführt. Die Schädigung bei einem Lastfaktor von $\lambda = 2.70$ besteht im Wesentlichen aus den im Anströmmeridian ausgeprägten Rissstrukturen. Da die Höhe der kritischen Last in erster Linie von der Ringsteifigkeit des Tragwerks abhängt, führt ihr Ansatz nur zu der geringen Reduktion auf $\lambda_{crit} = 9.20$. Die Schädigung bei der Maximallast von $\lambda = 3.10$ führt bereits zu einer Reduktion der klassischen Beullast auf $\lambda_{crit} = 6.16$. Eine weitere Abminderung auf $\lambda_{crit} = 5.56$ erfolgt unter Ansatz der Schädigung aus dem letzten ausiterierten Lastschritt bei $\lambda = 2.84$. Durch diese Analyse zeigt sich, dass allein durch die infolge materieller Nichtlinearität eingetretene Reduktion der Steifigkeit die kritische Last des Tragwerks um ungefähr 43 % reduziert wird. Die Diskrepanz zwischen dem Ergebnis der vereinfachten Beulanalyse und dem Resultat der nichtlinearen Analyse erklärt sich durch die mit wachsender Schädigung an Bedeutung gewinnenden verformungsbedingten Steifigkeitsabminderungen. Daher ist die Vorhersage gegenüber dem linearen Materialverhalten von schlechterer Qualität. Eine vordefinierte Schädigung, die die Meridianrisse im Anströmmeridian, die Schwächung der aussteifenden Wirkung des oberen Randgliedes und ein von der Taille bis zum Randglied über die Flanke verlaufenden Rissbereich grob berücksichtigt, ergibt eine noch weitere Abminderung der zu erwartenden kritischen Last auf $\lambda_{crit} = 4.51$.

Fazit: Das hier beobachtete Verhalten ist in dem ursprünglichen Definitionsrahmen des Stabilitätsbegriffs nicht direkt einzuordnen. Eine genauere Beschreibung des Verhaltens liefert der Ausdruck „verformungsbedingtes, stabilitätsähnliches Verhalten“. Diese Tragwerkseigenschaft stellt sich durch die umfangreiche Rissbildung während der Laststeigerung ein. Vergleichende Berechnungen zeigen, dass erst bei einem realitätsfernen Unterdrücken der Rissbildung ein klassisches Stabilitätsversagen eintreten kann. Dennoch lässt sich der Verformungszuwachs auch bei Lastentnahme infolge des geschwächten Ausgangssystems nicht aufhalten und führt zu einem Versagen der Gesamtstruktur.

Das ursprüngliche Bauwerk (Variante 0 und I) kann zu den stabilitätsgefährdeteren Bauwerken gezählt werden. Während sich das Lastminimum im nachkritischen Bereich bei linearem Materialverhalten noch auf einem hohen Niveau einstellt, ergibt das lokale Versagen bei Maximallast ein globales stabilitätsähnliches Versagen der gesamten Struktur, welches sich anhand der Entwicklung des Steifigkeitsparameters belegen lässt. Eine Reduktion der Schalendicke und Erhöhung der Betongüte führt zu einem steiferen Verhalten der Gesamtstruktur. Bei lokaler Erhöhung der Bewehrung kann das hierbei ursprüngliche Spannungsversagen in ein stabilitätsähnliches Versagen überführt werden. Die Beobachtung der Entwicklung des Steifigkeitsparameters eignet sich gut zur richtigen Einschätzung des Versagensmechanismus. Es ist ersichtlich, dass das lokale Versagen durch Umlagerungen in benachbarte Schalenbereiche übertragen wird und letztlich das globale Versagen der Struktur nicht aufgehalten werden kann.

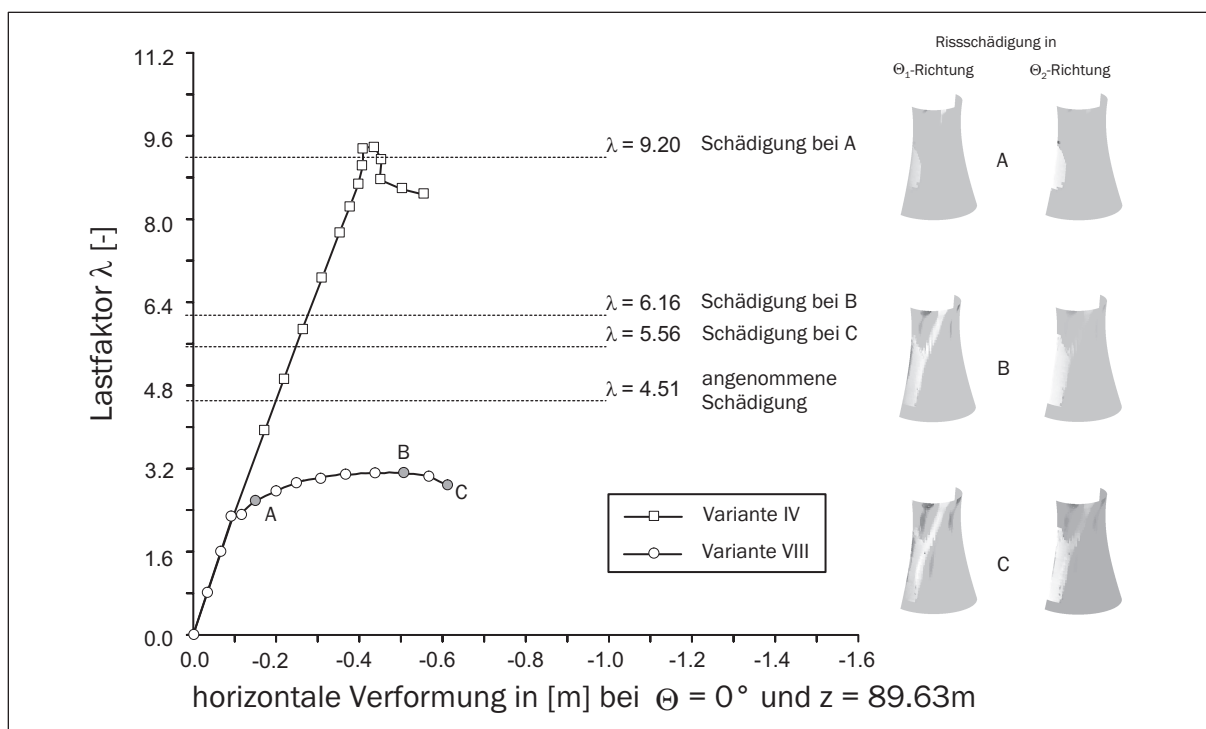


Bild 8.40: Resultate der vereinfachten Beulanalyse unter Ansatz von initialen Schädigungen des Kühlturms GRAND GULF

8.7 Aufwindkraftwerk

Das Aufwindkraftwerk gehört, anders als sein Name vermuten lässt, zu der Kategorie der Energiegewinnungsmethoden aus Solarstrahlung. Die Idee, aus durch Sonnenstrahlung erzeugtem Aufwind Energie zu produzieren, existiert schon seit Ende des 19. Jahrhunderts, wurde aber erst durch die umfangreiche Pionierarbeit von Schlaich (1994) in ein technisch durchführbares Konzept umgesetzt. Das Kraftwerk besteht im Wesentlichen aus einem hohen Kamin, welcher in der Mitte eines weit ausgedehnten Glasdaches angeordnet wird. Durch die Sonnenstrahlung wird die Luft unterhalb des Glasdaches erhitzt. Diese so erwärmte Luft strömt durch den Wärmeunterschied zwischen Kaminfuß und -kopf durch den Kamin nach oben und treibt dabei gleichzeitig die zur Stromerzeugung benötigten Turbinen am Kaminfuß an. Zur Erzeugung einer ausreichend starken Strömung wird für eine wirtschaftliche Stromgewinnung eine Mindesthöhe des Kamins von ungefähr 1000 m benötigt. Ein solches Tragwerk stellt den planenden Ingenieur vor neuartige Problemstellungen, wie beispielsweise die Frage nach den anzusetzenden Windlasten oder der Bauausführung. Zur Beantwortung dieser Fragestellungen wurden in der Vergangenheit durch Initiative von J. SCHLAICH einige Untersuchungen in Form von Diplomarbeiten und ersten Entwurfsplanungen durchgeführt.

Das aufgrund seiner großen Höhe stabähnliche Tragwerk wird in erster Linie durch die Lasten Eigengewicht und Wind beansprucht, welche in dem Tragwerk große Druckkräfte aktivieren. Daher eignet sich die Struktur in besonderem Maße für eine Untersuchung

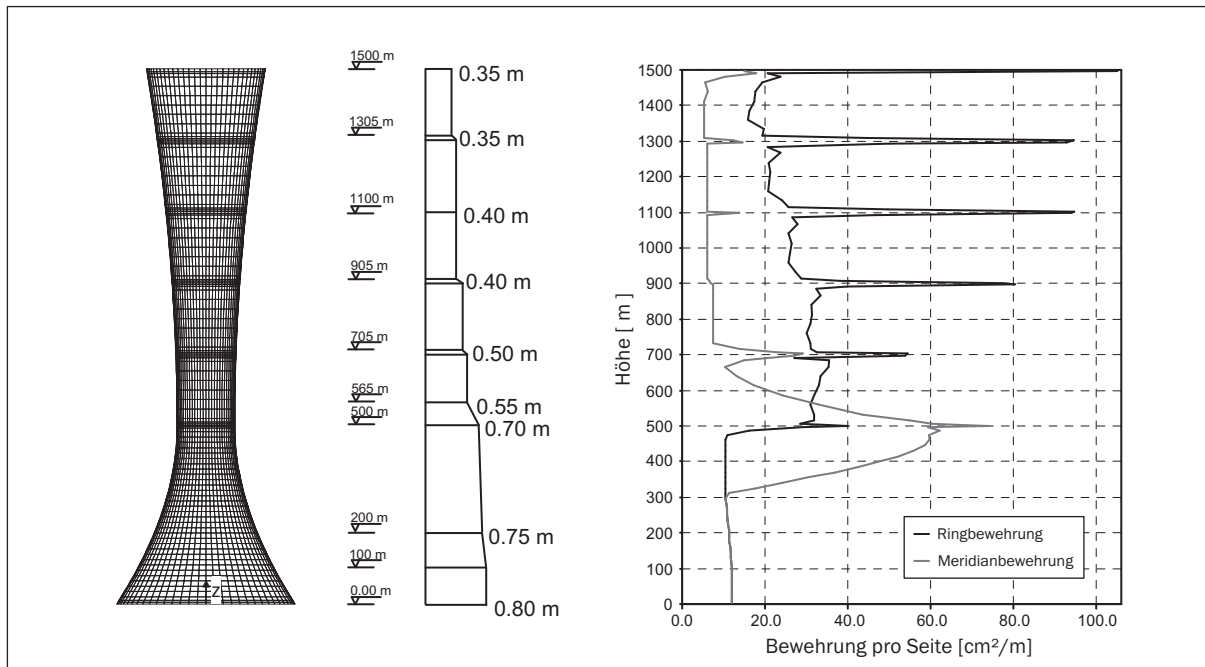


Bild 8.41: Diskretisierung, Dickenverlauf und vorhandene Bewehrungsmengen eines Aufwindkraftwerksturms

der Stabilitätseigenschaften. Eine im Zuge einer Kooperation mit der Universität Stellenbosch durchgeführte Arbeit [Schindelin 2002] befasst sich mit der Frage der Formfindung und der Lastannahmen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung haben gezeigt, dass u. a. die Eigenfrequenz eine entscheidende Größe bei dem Entwurf des Tragwerks ist.

Die hier untersuchte Schale des Kamins, eine aus zwei Hyperboloiden zusammengesetzte Schale, wurde vor dem Hintergrund der Steigerung der geringsten Eigenfrequenz gewählt. Zusätzlich bietet sie den Vorteil, dass die Lasten zu einem Großteil in Form von Membranschnittgrößen abgeleitet werden. Die Höhe des Tragwerks wurde in Anlehnung an eine derzeit aktuelle Studie zu 1500 m gewählt. Die Schalendicke dieser Beispielgeometrie wurde entsprechend des Bildes 8.41 als linear veränderlich zwischen maximal 0,80 m und minimal 0,25 m angenommen. Als Baustoff wurde ein Beton der Güte C 100/115 gewählt. Eine vorab durchgeführte Bemessung und Rissbreitenbeschränkung nach DIN 1045-1 (2001) unter Einbeziehung einer Mindestbewehrung entsprechend [BTR 1997] ist ebenfalls in Bild 8.41 dargestellt. Die Diskretisierung erfolgt für das halbe System mit 32×97 ASE4-Elementen. Zur Aussteifung des Kreisquerschnitts wurden ab der Taille in gleichmäßigen Abständen Steifen in Form von unendlich steifen Drehfedern in die Diskretisierung eingefügt. Sie verursachen neben der Beibehaltung der Form auch Randstörkräfte durch die Verdrehungsbehinderung, welche zu den sehr hohen Bewehrungsmengen in Höhe der Aussteifungen führen. Da diese Bereiche gesondert betrachtet werden müssen, wurde für die nichtlineare Untersuchung des Gesamttragwerks der direkte Umgebungsbereich vereinfachend mit linearem Materialverhalten berücksichtigt.

Im Folgenden wird in Bezug auf die bisherige Vorgehensweise der Lastfall $G + W_i + W_a$ für die Ermittlung der kritischen Last verwendet. Die Windlast wird mit Hilfe von (§.3) und

den Faktoren $F_i = 0$ und $\varphi = 1.15$ festgelegt. Die Druckverteilungskurve wird für eine rauhe Schale zu $K = 1.0$ gewählt. Der Geschwindigkeitsdruck wird wie für ebenes Gelände ab einer Höhe von 300 m konstant angenommen. Der Innendruckbeiwert wird zu $c_{pi} = -0.4$ gewählt. Dies entspricht einem mittleren Wert für Kamine und Kühlturmbauwerke. In dieser Windannahme sind aufgrund der nicht vorliegenden notwendigen experimentellen Untersuchungen viele Unsicherheiten und Abweichungen von der Realität enthalten. Gerade der Ansatz des Windinnensogs und die konstante Erhöhung der Windlast infolge von Böenanstörungen entsprechen nicht der Realität. Vielmehr ist aufgrund der Höhe des Tragwerks ein lokales Einwirken einer Windbelastung wahrscheinlicher. Eine hierfür sinnvolle Annahme müssen zukünftige Forschungsarbeiten an Windkanalversuchen ergeben.

Die so ermittelte klassische Beulanalyse des Systems ergibt einen Wert von $\lambda_{crit} = 1.74$, was bereits bei heutigem Sicherheitsdenken viel zu gering ist ($\lambda_{crit} \ll 5.0$). Dennoch wird anhand dieses Systems - da es hier ausschließlich um das Aufzeigen der Bedeutung der Schädigung geht - mit den gewählten Abmessungen das Verhalten unter Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität untersucht.

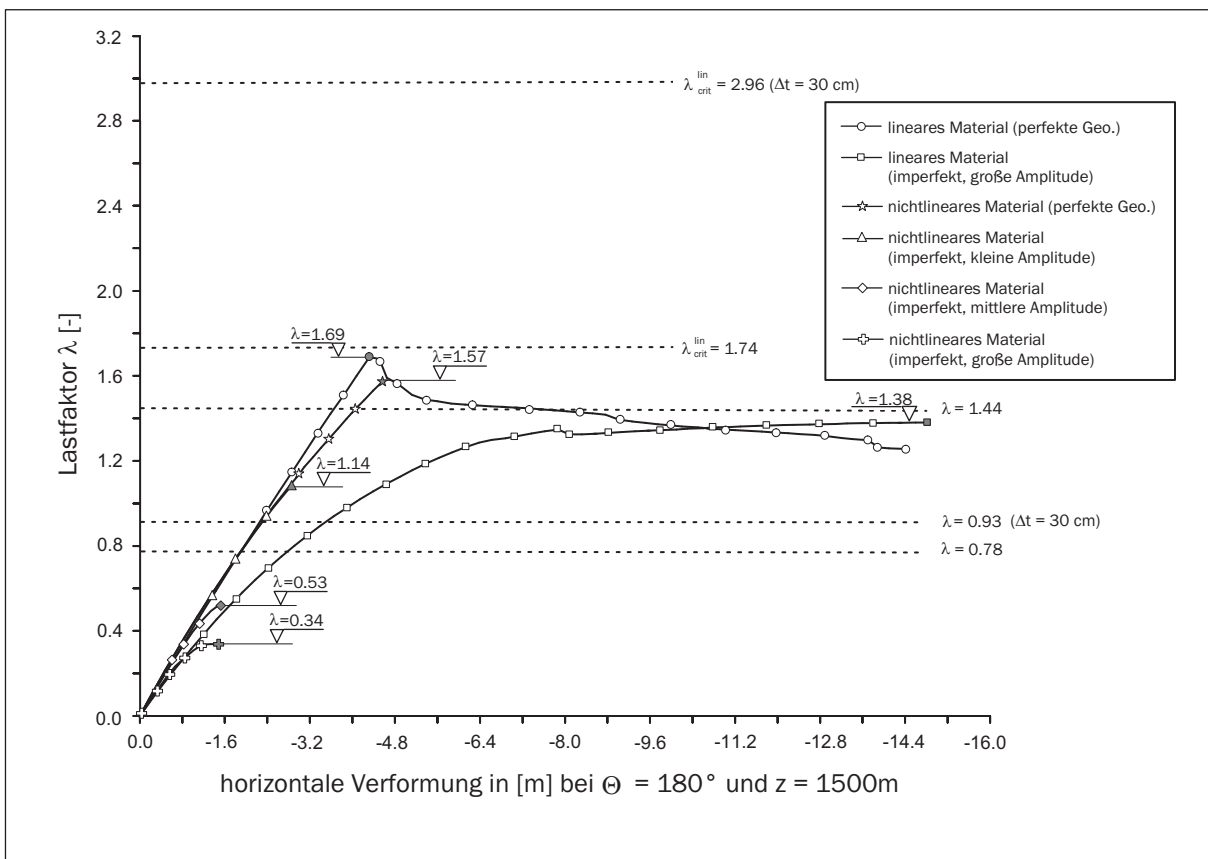


Bild 8.42: Last-Verformungskurven des Aufwindkraftwerks der horizontalen Verschiebung der Turmspitze

Wird das System geometrisch nichtlinear und unter Berücksichtigung von Imperfektionen korrespondierend zur ersten Eigenform analysiert, so stellen sich die in Bild 8.42 dargestellten Last-Verformungsverläufe an Turmspitze und in Bild 8.43 im Bereich des unteren

Schalendrittels ein. Ohne Berücksichtigung der Imperfektionen tritt bei einem Lastniveau von $\lambda_{crit} = 1.69$ ein Verzweigungspunkt auf. Wird eine Störverformung nahe diesem Punkt aufgebracht, so verzweigt das System in einen instabilen Nachbeulast, dessen Abfall immer schwächer wird. Das sich einstellende Nachbeulminimum liegt dann auf einer Höhe von $\lambda_{crit} = 1.27$. Wird das imperfektionsbehaftete System analysiert, so schmiegt sich der Verlauf, wie dargestellt, weitestgehend dem Last-Verformungsverlauf des perfekten Systems an. Bei einem Lastniveau von $\lambda = 1.35$ kreuzen sich die beiden Verläufe der horizontalen Verschiebung an der Turmspitze. Dieser Punkt des Tragwerks ist nur indirekt von der aufgegebenen Imperfektion betroffen. Es wird hier deutlich, dass bei diesem System bereits eine lokale Imperfektion - die Figur korrespondierend zum ersten Eigenwert bildet sich ausschließlich im unteren Schalenbereich auf der windabgewandten Seite aus - einen sehr großen Einfluss auf das Trag- und Verformungsverhalten des Gesamtsystems besitzt.

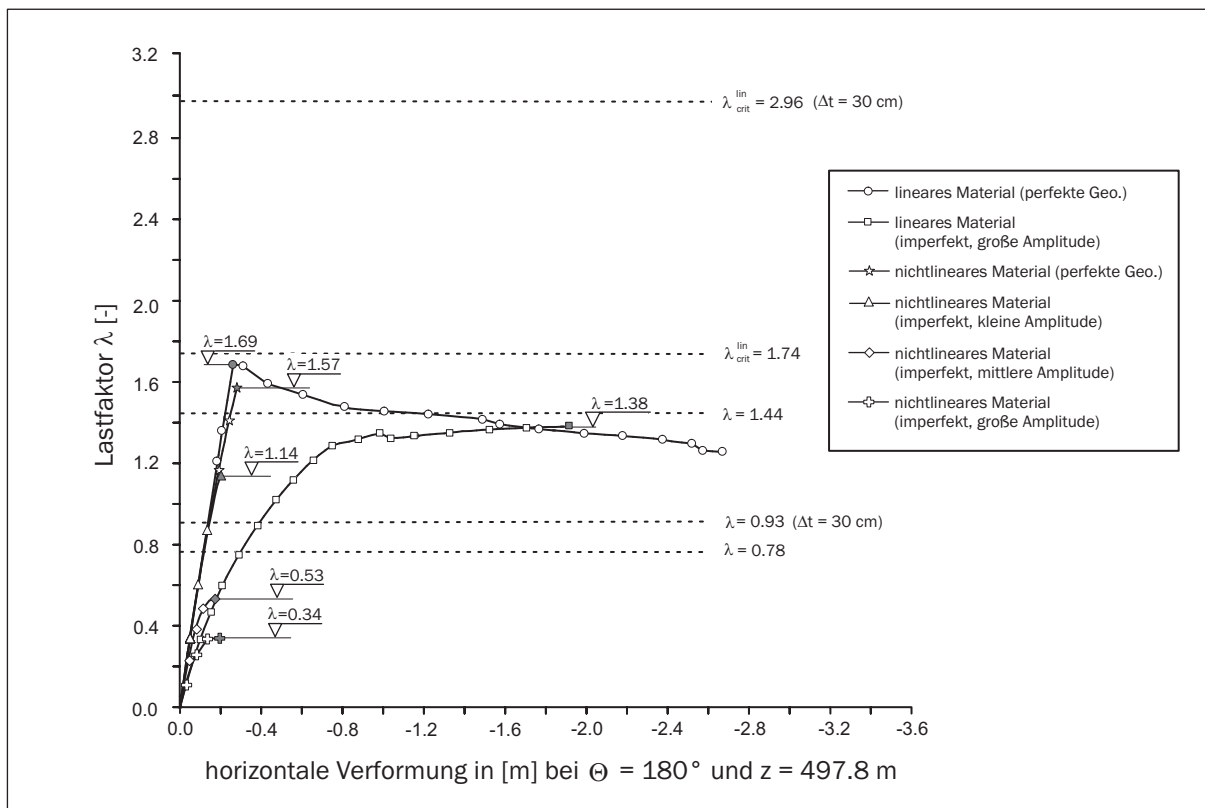


Bild 8.43: Last-Verformungskurven des Aufwindkraftwerks der horizontalen Verschiebung in der Höhe $z = 497.8$ m

Eine Analyse unter Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität verläuft bis zum Eintritt des Verzweigungspunktes nahezu identisch zu der linearen Analyse, da sich durch die hohe Belastung des Eigengewichts kaum Zugbereiche in dem Tragwerk ausbilden. Ausschließlich in dem direkten Anströmmeridian entstehen erste Risse infolge Wind. Der bereits aus der linearen Analyse bekannte Verzweigungspunkt tritt hier aufgrund der Druckschädigung des Betons bei einem Lastniveau von $\lambda_{crit} = 1.57$ ein. Ein Nachbeul-

bereich kann bei nichtlinearem Materialverhalten für den hier gewählten spröden Beton nicht ermittelt werden. Werden auf das System jetzt eigenform-affine Imperfektionen aufgebracht, so lässt sich aus den Last-Verformungslinien erkennen, dass diese, im Vergleich zu denen am linearen System geringen, Imperfektionen aufgrund der hohen Druckbeanspruchung zu Beginn der Belastungsgeschichte vom System ohne zusätzliche Verformungszuwächse verkraftet werden. Bei einem bestimmten Lastniveau, das mit wachsender Imperfektionsamplitude immer geringer wird, versagt das System durch das Auftreten eines Verzweigungspunktes schlagartig. Auch aus diesem Verhalten lässt sich die Imperfektionsempfindlichkeit des Systems erkennen.

Ebenfalls in den Bildern 8.42 und 8.43 sind die kritischen Lastniveaus der durchgeführten Stabilitätsanalysen mit geschädigtem Ausgangssystem aufgeführt. Wird beispielsweise der Schädigungszustand des Tragwerks kurz vor Erreichen der Maximallast als Initialschädigung angenommen, so liefert eine Analyse bereits eine Reduktion um 17 % der ursprünglichen linear ermittelten kritischen Last. Die reduzierte kritische Last liegt mit $\lambda_{crit} = 1.44$ bereits unterhalb der Maximallast, so dass hieraus ebenfalls die Nichtexistenz eines Nachbeulastes vermutet werden kann. Deutlicher wird der Einfluss von Schädigungen auf die Stabilität der gesamten Konstruktion bei einer, aus den linearen Schnittgrößenverläufen abgeleiteten, vorgegebenen Risschädigung im Anströmmeridian und einer angenommenen Druckschädigung im unteren Schalenbereich auf windabgewandter Seite. Die Analyse liefert das ebenfalls in den Last-Verformungsdiagrammen eingetragene kritische Lastniveau $\lambda_{crit} = 0.78$. Dieses bedeutet einen Abfall der kritischen Last um 55 % gegenüber der linearen.

Ein weiterer Eindruck von der großen Bedeutung einer großflächigen Schädigung wird bei Betrachtung der Ergebnisse einer abschließend durchgeführten Analyse mit einer globalen Schalendickenerhöhung um $\Delta t = 0.30$ m gewonnen. Hier steigt die lineare kritische Last auf einen Wert von $\lambda_{crit} = 2.96$ an und fällt bei Berücksichtigung eines identischen Schädigungszustandes auf $\lambda_{crit} = 0.93$ ab. Dieses entspricht einem Anstieg der linearen kritischen Last um 70 % und einer Erhöhung der kritischen Last der geschädigten Struktur um 19 %.

Diese hier durchgeführten Analysen zeigen bereits einige vor Verwirklichung einer solchen Struktur noch zu lösende Problemstellungen auf.

Kapitel 9

Übertragung auf das derzeitige Normenkonzept

9.1 Vorhandene Beulkriterien

Nach der Vorstellung der modifizierten Stabilitätsnachweise und der durchgeführten Beispielrechnungen zeigt dieses Kapitel einen möglichen Weg zur Einbettung der Ergebnisse in bestehende Nachweiskonzepte. Hierfür ist zuerst ein kurzer Exkurs in die geschichtliche Entwicklung des Beulkriteriums notwendig, wobei eine Beschränkung auf den Schalentyp Hyperbelschale erfolgt.

Die derzeit vorhandenen Kriterien zur Sicherstellung der Stabilität von Hyperbelschalen haben ihren Ursprung in den Auswertungen der Versuche von Mateja (1964), Zerna & Niemann (1966), Mungan (1965) und Der & Fidler (1968) (s. Abschnitt 2.3). Diese Versuche wurden im Wesentlichen an Modellen aus Ersatzmaterialien durchgeführt und die Ergebnisse in Näherungsformeln übertragen.

Neben einer einfachen Näherung in Anlehnung an die klassische Beulformel der axial belasteten Kreiszylinderschale [Krätzig 1968], der Berücksichtigung der Spannungsinteraktion nach Dunkerley [Krätzig 1968] und einer Näherungsformel zur Bestimmung des kritischen Windstaudrucks [Der & Fidler 1968] ist hierbei in erster Linie das Kriterium nach Mungan (1977) zu nennen. Mit Hilfe dieses Kriteriums kann ein zweiaxial druckbeanspruchter Querschnitt hinsichtlich seiner Beulsicherheit beurteilt werden. Hauptsächlich wurde dieser lokale Beulnachweis in der Vergangenheit zur Bestimmung der Wanddickenverläufe von Kühlturmschalen genutzt. Ein Nachteil dieses Nachweises ist neben der ausschließlichen Berücksichtigung von Membranspannungen die Beschränkung auf rotationssymmetrische Lastfälle. Ruhwedel (1986) geht in seiner Arbeit auf diese Problematik ein und entwirft ein leicht modifiziertes Kriterium, welches auf Experimenten an Kühlturmschalen unter Windbeanspruchungen basiert. Auch eine Aussteifung durch ein oberes Randglied findet in diesem erweiterten Kriterium Berücksichtigung.

Diese Kriterien dienen dazu, einen Mindest-Beulsicherheitsfaktor für das Tragwerk zu gewährleisten. Dieser Beulsicherheitsfaktor ist in der DIN 1045 (1988) und der BTR (1997)

zu $\gamma_b = 5.0$ angegeben. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass alle stabilitätsgefährdenden Einflüsse wie Rissbildung und außerplanmäßige Geometrieabweichungen in das Berechnungsmodell Einfluss gefunden haben. Ansonsten muss die Beulsicherheit um ein „entsprechendes“ Maß erhöht werden. Das übliche Vorgehen ist dennoch so, dass bei Einhaltung der Geometrieabweichungstoleranzen während der Ausführung der Nachweis der perfekten Schale bei Einhaltung des Beulsicherheitsfaktors erbracht ist. Bei Vereinfachung der Analyse hinsichtlich der Lagerung kann eine zusätzliche Erhöhung des Beulsicherheitsfaktors erforderlich sein.

Nach [Krätzig 1977] lässt sich der in der DIN 1045 (1988) vorgeschriebene Beulsicherheitsfaktor wie folgt zusammensetzen:

$$\begin{aligned}\gamma_b &= \gamma_{L1} \cdot \gamma_{L2} \cdot \gamma_{L2}^* \cdot \frac{1}{\gamma_{M1}} \cdot \frac{1}{\gamma_{M2}} \\ &= 1.40 \cdot 1.15 \cdot 2.00 \cdot 1.30 \cdot 1.20 = 5.02\end{aligned}\tag{9.1}$$

mit γ_{L1} - Sicherheitsfaktor für die Lasthöhe
 γ_{L2} - Sicherheitsfaktor für die Berechnungsannahmen
 γ_{L2}^* - Abminderung durch Rissbildung
 $1/\gamma_{M1}$ - Prüfungenaugigkeiten
 $1/\gamma_{M2}$ - Materialfehlstellen.

Dieser Aufspaltung liegt bereits der Gedanke der Teilsicherheitsbeiwerte zu Grunde. Dennoch ist eine einfache Übertragung eines solchen Sicherheitsfaktors in die NormDIN 1045-1 (2001) nicht möglich. Zur endgültigen Festlegung eines solchen Sicherheitsfaktors müssen noch weitere, den zufallsverteilten Charakter der Eingangsgrößen berücksichtigende, Analysen durchgeführt werden. Diese wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht angestrebt und durchgeführt.

9.2 Vorschlag für einen verbesserten Stabilitätsnachweis für den Planungsprozess

Die bereits in Zerna et al. (1980) unter rotationssymmetrischen Lasten und die innerhalb dieser Arbeit unter Ansatz von materiellen Nichtlinearitäten durchgeführten Analysen zeigen, dass Plastizieren des Betons und Rissbildung einen großen Einfluss auf die Beulsicherheit eines Schalentragswerks besitzen. Aus ihren Untersuchungen heraus kommen Zerna et al. (1980) zu dem Schluss, dass für Kühlturmtragwerke der Beulsicherheitsfaktor mit einem Wert von $\gamma_b = 5.0$ nach globalem Sicherheitskonzept durchaus auf $\gamma_b = 2.1$ reduziert werden könnte.

Die Ergebnisse der in Kapitel 8 analysierten Strukturen zeigen, dass die Einordnung des Stabilitätsnachweises in ein Konzept basierend auf Teilsicherheitsbeiwerten ungleich schwieriger umzusetzen ist. Hieraus entstehen die folgenden wesentlichen Schlussfolgerungen:

- Eine Stabilitätsgefährdung eines Tragwerks kann nicht ausreichend durch die Einhaltung des Sicherheitsfaktors $\gamma_R = 1.3$ gemäß geltender DIN 1045-1 (2001) ausge-

geschlossen werden. In erster Linie ergeben die angesetzten rechnerischen Mittelwerte der Baustofffestigkeiten, aber auch die vorausgesetzte Gültigkeit des Superpositionsprinzips einzelner Lastfälle mitunter eine realitätsferne Tragwerksantwort.

- Ein kompletter Verzicht auf einen separaten Stabilitätsnachweis, wie zurzeit in DIN 1045-1 (2001) vorgesehen, erscheint dem Autor zu dem jetzigen Zeitpunkt, zu dem das Konzept zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung immer noch Bestandteil kontroverser Diskussionen ist ([Eibl 2000], [König & Ahner 2000], [Quast 2000], [Six 2003]), sicherheitstechnisch höchst zweifelhaft. Solange daher keine eindeutigen Regelungen beziehungsweise tragwerksspezifische Sonderregelungen gefunden sind und der Arbeitsaufwand solcher Analysen auf ein durchführbares Maß reduziert ist, sollte ein zusätzlicher Nachweis nach dem Vorbild der bisherigen DIN 1045 (1988) gefordert werden.
- Die Ergebnisse der hier durchgeführten Analysen zeigen, dass die normkonforme Verwendung des Werkstoffs Hochleistungsbeton keine grundsätzliche Veränderung des Beulverhaltens einer Stahlbetonschale bewirkt. Dennoch erlauben höherfeste Betone eine Verminderung der Schalendicke, deren Sicherheit gegenüber Stabilitätsversagen zu überprüfen ist.
- Die Durchführung des Stabilitätsnachweises sollte aus mehreren, dem tatsächlichen Arbeitsablauf innerhalb einer Tragwerksplanung angepassten Schritten bestehen:

1. Entwurfsplanung:

An erster Stelle sollte die Durchführung von globalen Stabilitätsnachweisen zur Festlegung der Geometrie und der Bauteildicke stehen. Hierbei sollte eine, die Stabilität ungünstigst beeinflussende, Lastfallkombination gewählt werden. Zur optimalen Tragwerksauslegung und zum besseren Erkennen tragwerksspezifischer Schwachstellen, kann an dieser Stelle eine Berücksichtigung von Schädigungen gemäß dem in Kapitel 7 dargestellten Konzept erfolgen. Die Schädigungen des Tragwerks sollen hierbei möglichst realitätsnah berücksichtigt werden, beispielsweise in Anlehnung an den linear ermittelten Schnittgrößenverlauf. Sie finden sodann Eingang in die Steifigkeits- und Anfangsspannungsmatrizen der schrittweisen Bestimmung des reduzierten kritischen Beullastfaktors. Der hierbei zu erfüllende Sicherheitsfaktor lässt sich ausgehend von Gleichung (9.1) wie folgt bestimmen:

$$\lambda_{crit}^{red} \geq \gamma_b^{red} = \gamma_{L1} \cdot \gamma_{L2} \cdot \frac{1}{\gamma_{M1}} \cdot \frac{1}{\gamma_{M2}} = 2.51. \quad (9.2)$$

Die Streichung des Abminderungsfaktors für den Einfluss infolge Rissbildung ergibt eine Reduktion des Sicherheitsfaktors um 50 %, welche gut mit den Reduktionen des kritischen Lastfaktors infolge vorgegebener Schädigung der Anwendungsbeispiele aus Kapitel 8 übereinstimmt.

Die geometrisch und physikalisch nichtlinearen Analysen (s. Abschnitt 8.4) zeigen hingegen kritische Lastfaktoren bzw. Lastniveaus des Nachbeulminimums, welche um 70 % gegenüber der linear ermittelten kritischen Last reduziert sind.

Im Vergleich zu einer rein geometrisch nichtlinearen Analyse wird das Nachbeulminimum allein durch die Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität um 50 % reduziert. Diese erhöhte Reduktion des kritischen Lastniveaus, welche im Fall des Analysebeispiels aus Abschnitt 8.6 durch die infolge der materiellen Nichtlinearität vergrößerten Verformungen verursacht wird, würde konsequenter Weise eine Erhöhung des Beulsicherheitsfaktors von $\gamma_b = 5.0$ auf

$$\gamma_{b,neu} = 5.02 \cdot \frac{1/0.3}{1/0.5} = 8.37 \quad (9.3)$$

nach sich ziehen. Soll der Versuch unternommen werden den in Gleichung (9.1) aufgeführten Faktor von $\gamma_b = 5.0$ beizubehalten, so könnte eine modifizierte Aufspaltung des Sicherheitsfaktors unter der Annahme einer verbesserten Bontontechnologie und der in den Anwendungsbeispielen gezeigten Unempfindlichkeit gegenüber im Toleranzbereich befindlichen Materialfehlstellen erfolgen:

$$\begin{aligned} \gamma_b &= \gamma_{L1} \cdot \gamma_{L2} \cdot \gamma_{L2,neu}^* \\ &= 1.40 \cdot 1.15 \cdot 3.12 = 5.02 \end{aligned} \quad (9.4)$$

mit γ_{L1} - Sicherheitsfaktor für die Lasthöhe
 γ_{L2} - Sicherheitsfaktor für die Berechnungsannahmen
 $\gamma_{L2,neu}^* = \gamma_{L2,alt}^* \cdot \frac{1}{\gamma_{M1}} \cdot \frac{1}{\gamma_{M2}}$ - Abminderung für materielle Nichtlinearität (Reduktion um 68 %).

Das in Abschnitt 8.6 ausführlich beschriebene Anwendungsbeispiel zeigt anschaulich die hier angeführten Reduktionsmaße. In Bild 9.1 ist die Reduktion der kritischen Last um 50 % auf $\lambda_{crit}^{red} = 4.51$ dargestellt. Die komplette nichtlineare Analyse liefert einen maximalen Lastfaktor $\lambda = 3.10$. Dies bedeutet eine Reduktion um 68 % gegenüber dem linearen kritischen Lastniveau. Ebenfalls ist leicht zu erkennen, dass alle ermittelten Lastfaktoren eindeutig oberhalb des entsprechenden Grenzwertes liegen, so dass das Tragwerk die hier dargestellten Nachweise sicher erfüllt.

2. Ausführungsplanung:

Die Konstruktion eines Stahlbeton-Schalentragwerks erfordert einen hohen Aufwand hinsichtlich der Bemessung aller möglichen Lastfallkombinationen. An dieser Stelle grundsätzlich begleitende Stabilitätsuntersuchungen in Form von begleitenden Eigenwertanalysen, Auswertung von Beulparametern, o. ä. (s. Abschnitt 6.2.3) für alle auftretenden Lastfallkombination zu fordern erscheint unangemessen und praktisch kaum umsetzbar.

3. Verifikation der Schalenkonstruktion:

Die konstruierte Schalenstruktur soll unter Ansatz der tatsächlichen Bewehrungsmengen einer nichtlinearen Stabilitätsanalyse unterzogen werden. Hierzu sollen die realistischen Materialkennwerte in die Berechnung einfließen. Der endgültige Nachweis umfasst eine komplette nichtlineare Analyse von maximal zwei realistischen Lastfallkombinationen mit paralleler Beobachtung der in dieser Arbeit vorgestellten Parameter zur Beurteilung des Stabilitätszustandes der

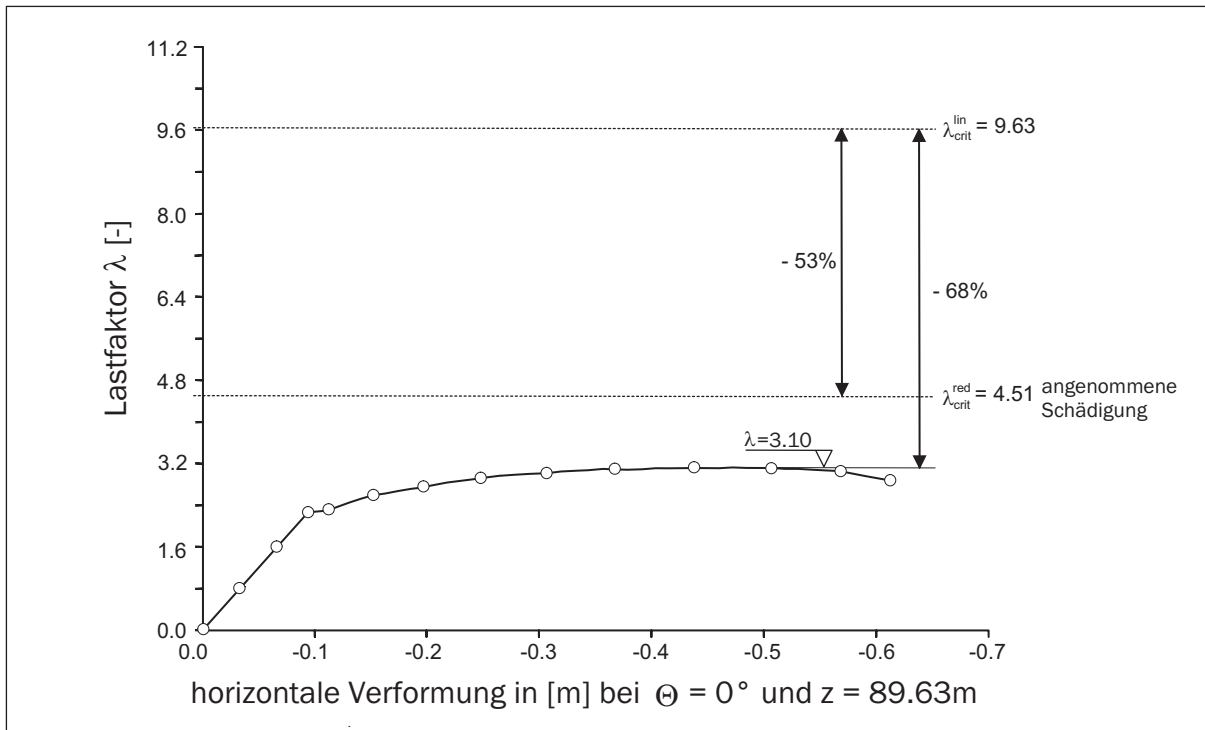


Bild 9.1: Last-Verformungskurve und kritische Lastfaktoren des Kühlturms GRAND GULF

Struktur. Die hierbei zu erreichenden Sicherheiten sind aufgrund von fehlenden Zuverlässigkeitsanalysen entsprechend der DIN 1055-100 (2001) hier nicht endgültig festlegbar. Hierzu sind weitergehende Parameterstudien notwendig.

Mit dem hier vorgeschlagenen Konzept können große Schalenstrukturen aus Stahlbeton, insbesondere Kühlturmschalen, nach Ansicht des Autors sicher gegen Stabilitätsversagen ausgelegt werden. In erster Linie kann bereits zu Beginn des Planungsprozess, also zum Zeitpunkt des Entwurfs, auf eine bei Stahlbeton übliche Schädigung des Tragwerks unter späterer Gebrauchslast Berücksichtigung finden. Eine abschließende genauere Stabilitätsanalyse mit begleitenden Verfahren soll die endgültige Schalenkonstruktion gegen Stabilitätsverlust nachweisen.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Der Entwurf und die Konstruktion eines Stahlbeton-Schalentragwerks stellt auch in der heutigen Zeit, in der der Einsatz von FE-Programmen zum Standard des Planungsprozesses gehört, große Anforderungen an den entwerfenden Ingenieur. Das Anwendungsgebiet von Schalentragwerken aus Stahlbeton ist Jahrzehnte nach der Hauptschaffenszeit der vielleicht bedeutendsten Entwerfer wie FRANZ DISCHINGER, ULRICH FINSTERWALDER, PIER LUIGI NERVI, EDUARDO TORROJA, NICHOLAS ESQUILLAN, FELIX CANDELA, OVE ARUP, und HEINZ ISLER vielfältiger denn je und reicht von kuppelartigen Dachkonstruktionen über dickwandige Offshore-Konstruktionen, Masten von Windenergieanlagen bis hin zu den großen Kühlturmbauwerken im Kraftwerksbau. Es ist zu erwarten, dass nach einer ersten Anwendung eines Hochleistungsbetons bei einer Kühlturmschale im Jahr 1999 die Entwicklung des Werkstoffs und damit auch die Einsatzmöglichkeiten eines solchen Betons zukünftig anwachsen werden.

Aus sicherheitstechnischen Überlegungen heraus ist es seit jeher von besonderem Interesse, genaueres über die Art des Versagens eines Tragwerks zu erfahren. Die vorliegende Arbeit schließt einen Teil der Wissenslücke auf diesem Gebiet. Hierbei wird der Hauptaugenmerk auf den mit einer höheren Sicherheit zu behandelnden Versagensfall des Stabilitätsverlustes gelegt.

Um gesicherte Aussagen treffen zu können und eine spätere Übertragung der Ergebnisse in bestehende normative Regelungen zu ermöglichen, wurde ein normkonformes Materialmodell für Stahlbeton in eine vorhandene isoparametrische Elementformulierung implementiert. Hierbei wurde spezieller Wert auf eine möglichst realitätsnahe Beschreibung des Nachriss- und Nachbruchbereichs gelegt.

Nach einer Überprüfung der aus der geometrisch nichtlinearen Statik bekannten Algorithmen zur Identifizierung und Einordnung indifferenter Gleichgewichtszustände entlang eines Belastungspfad wurden speziell für den hochgradig nichtlinearen Werkstoff modifizierte Algorithmen für die Analysen verwendet. Diese Modifikationen ermöglichen es, schwierig zu überwindende Verzweigungspunkte durch zeitweise Entlastung zu umgehen und sicher auf den nachkritischen Antwortpfad zu treffen. Weitere Beobachtungsparameter wie der Steifigkeitsparameter nach BERGAN und das Determinantenkriterium wurden zur Unterscheidung von Traglast- und Stabilitätsversagen erfolgreich eingesetzt. Ein Ver-

such, den Charakter des Versagens durch eine parallele lineare - nichtlineare Analyse zu identifizieren, liefert für das Beispiel eines Schalenbogens aussagekräftige Ergebnisse, scheitert aber zurzeit aufgrund des hohen Aufwands bei großen Strukturen.

Aus der festgestellten Abhängigkeit des nachkritischen Bereichs von der materiellen Nichtlinearität wurde ein möglichst einfach anzuwendendes Verfahren entwickelt, um den Einfluss der Materialschädigung zu berücksichtigen. Die Ergebnisse der zahlreichen Untersuchungen an unterschiedlichen Tragsystemen zeigen die gute Annäherung an das tatsächliche Stabilitätsverhalten.

Darüber hinaus lassen in erster Linie die Analysen des Kühlturmtragwerks den Vorteil der Kenntnis der Versagensursache klar erkennen. Hier wird deutlich, dass ab einem bestimmten Lastniveau eine weitere Lastaufnahme nur durch Veränderungen der Gesamtsteifigkeit eines Tragwerks und nicht durch lokale Bewehrungserhöhungen erreicht werden kann.

Das Anwendungsbeispiel Aufwindkraftwerk diente in erster Linie dem Hinweis auf eine weitere Problematik bei der Umsetzung dieses visionären Projektes, das Stabilitätsverhalten. Im Rahmen dieser Arbeit wurden jedoch lediglich einige kritische Stellen, die Zonen mit maximaler Druckspannung infolge Eigengewicht und Wind, des Tragwerks identifiziert und nicht der Versuch unternommen, dieses Tragwerk hinsichtlich seiner Geometrie und Abmessungen zu optimieren.

Die aus den durchgeführten Analysen gewonnenen Erkenntnisse wurden dazu genutzt, eine Einschätzung der aktuellen normativen Regelungen vorzunehmen und eine praktikable Vorgehensweise zur Überprüfung des Stabilitätsverhaltens vorzuschlagen.

Neben den stabilitätstheoretischen und materialtechnologischen Aspekten wurden ebenfalls die geometrischen Imperfektionen in die oben angeführten Betrachtungen integriert. Der hierzu benötigte Ansatz wurde in die Elementformulierung implementiert. In Zukunft gilt es, die hier ausgeklammerte Frage nach Einfluss, Art und sinnvoller Größe der geometrischen Imperfektionen näher zu untersuchen.

Ein weiterer stabilitätsgefährdender Aspekt, das Kriechen und Schwinden des Werkstoffs Beton, wurde innerhalb dieser Arbeit nicht behandelt. Die nahezu zeitgleich durchgeführten Untersuchungen von Wörmann (2004) liefern ein adäquates Modell zur Berücksichtigung hygrischer und thermischer Effekte innerhalb einer nichtlinearen Traglastanalyse [Harte & Wörmann 2002]. Die Kopplung der vorgestellten Stabilitätsanalysen mit den Auswirkungen des zeitveränderlichen nichtlinearen Materialverhaltens des Betons zur Verbesserung der abzuschätzenden kritischen Lasten sind in der Zukunft anzustreben.

Desweiteren ermöglicht die vorliegende Arbeit, die innerhalb einer nichtlinearen Analyse ermittelte Schädigungsmatrix für typische Systeme und Lastfälle abzuspeichern und auf perfekte Systeme anzuwenden. Hierdurch lässt sich, vergleichbar mit der Vorgehensweise bei geometrischen Imperfektionen, in Zukunft eine Datenbank typischer Schädigungsbilder aufbauen. Unter Verwendung der beschriebenen Algorithmen können verbesserte kritische Lastfaktoren und realistische Beulformen ermittelt werden.

Zu guter Letzt bleibt die Frage einer möglichen Korrelation zwischen Eigenfrequenzänderung und Veränderung des kritischen Lastniveaus zukünftig zu klären.

Anhang A

Ergänzende Formeln und Diagramme

A.1 Nichtlineare kinematische Größen

Variation der Verzerrungsgrößen

Dehnung:

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} \left[X_{,\alpha}^i X_{,\beta}^j - \overset{0}{X}_{,\alpha}^i \overset{0}{X}_{,\beta}^j \right] \delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

$$\overset{+}{\alpha}_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} \left[\overset{+}{X}_{,\alpha}^i X_{,\beta}^j + X_{,\alpha}^i \overset{+}{X}_{,\beta}^j \right] \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \overset{++}{\alpha}_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2} \left[\overset{++}{X}_{,\alpha}^i X_{,\beta}^j + \overset{+}{X}_{,\alpha}^i \overset{+}{X}_{,\beta}^j + \overset{+}{X}_{,\alpha}^i \overset{+}{X}_{,\beta}^j + X_{,\alpha}^i \overset{++}{X}_{,\beta}^j \right] \delta_{ij} \\ &= \left[\overset{+}{X}_{,\alpha}^i \overset{+}{X}_{,\beta}^j \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Biegung (unter Vernachlässigung der quadratischen Terme):

$$\beta_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} \left[(X_{,\alpha}^i A_{,\beta}^j + X_{,\beta}^i A_{,\alpha}^j) - \left(\overset{0}{X}_{,\alpha}^i \overset{0}{A}_{,\beta}^j + \overset{0}{X}_{,\beta}^i \overset{0}{A}_{,\alpha}^j \right) \right] \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

$$\overset{+}{\beta}_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} \left[\overset{+}{X}_{,\alpha}^i A_{,\beta}^j + X_{,\alpha}^i \overset{+}{A}_{,\beta}^j + \overset{+}{X}_{,\beta}^i A_{,\alpha}^j + X_{,\beta}^i \overset{+}{A}_{,\alpha}^j \right] \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \overset{++}{\beta}_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2} \left[\overset{++}{X}_{,\alpha}^i A_{,\beta}^j + \overset{+}{X}_{,\alpha}^i \overset{+}{A}_{,\beta}^j + \overset{+}{X}_{,\alpha}^i \overset{+}{A}_{,\beta}^j + X_{,\alpha}^i \overset{++}{A}_{,\beta}^j \right. \\ &\quad \left. + \overset{++}{X}_{,\beta}^i A_{,\alpha}^j + \overset{+}{X}_{,\beta}^i \overset{+}{A}_{,\alpha}^j + \overset{+}{X}_{,\beta}^i \overset{+}{A}_{,\alpha}^j + X_{,\beta}^i \overset{++}{A}_{,\alpha}^j \right] \delta_{ij} \\ &= \left[\overset{+}{X}_{,\alpha}^i \overset{+}{A}_{,\beta}^j + \overset{+}{X}_{,\beta}^i \overset{+}{A}_{,\alpha}^j + \frac{1}{2} X_{,\alpha}^i \overset{++}{A}_{,\beta}^j + \frac{1}{2} X_{,\beta}^i \overset{++}{A}_{,\alpha}^j \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

trigonometrische Additionstheoreme:

$$\sin(\Psi + \Delta\Psi) = \sin\Psi \cos\Delta\Psi + \cos\Psi \sin\Delta\Psi \quad (\text{A.7})$$

$$\cos(\Psi + \Delta\Psi) = \cos\Psi \cos\Delta\Psi - \sin\Psi \sin\Delta\Psi \quad (\text{A.8})$$

Komponenten des Normaleneinheitsvektors:

$$\begin{aligned} A_{imp}^1 &= (\sin \Psi_1 \cos \Psi_2) (\cos \Delta \Psi_1 \cos \Delta \Psi_2) + (\cos \Psi_1 \cos \Psi_2) \\ &\quad \cdot (\sin \Delta \Psi_1 \cos \Delta \Psi_2) - (\sin \Psi_1 \sin \Psi_2) (\sin \Delta \Psi_2 \cos \Delta \Psi_1) \\ &\quad - (\sin \Psi_2 \cos \Psi_1) (\sin \Delta \Psi_1 \sin \Delta \Psi_2) \end{aligned} \quad (A.9)$$

$$\begin{aligned} A_{imp}^2 &= (\sin \Psi_1 \sin \Psi_2) (\cos \Delta \Psi_1 \cos \Delta \Psi_2) + (\sin \Psi_2 \cos \Psi_1) \\ &\quad \cdot (\sin \Delta \Psi_1 \cos \Delta \Psi_2) + (\sin \Psi_1 \cos \Psi_2) (\cos \Delta \Psi_1 \sin \Delta \Psi_2) \\ &\quad + (\cos \Psi_1 \cos \Psi_2) (\sin \Delta \Psi_1 \sin \Delta \Psi_2) \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$A_{imp}^3 = (\cos \Psi_1 \cos \Delta \Psi_1) - (\sin \Psi_1 \sin \Delta \Psi_1) \quad (A.11)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \\ A_{imp}^i &= A^i f_{imp}^i + \Delta A^i \end{aligned} \quad (A.12)$$

Komponenten des GREEN'schen Verzerrungstensor für eine imperfekte Geometrie:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta,imp} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_{,\alpha}^* \mathbf{r}_{,\beta}^* - \mathbf{r}_{,\alpha,imp}^* \mathbf{r}_{,\beta,imp}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[(X_{,\alpha}^i + \xi^3 A_{,\alpha}^i) (X_{,\beta}^i + \xi^3 A_{,\beta}^i) - \left(X_{,\alpha}^i + \xi^3 A_{,\alpha}^i f_{imp}^i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta X_{,\alpha}^i + \xi^3 \Delta A_{,\alpha}^i \right) \left(X_{,\beta}^i + \xi^3 A_{,\beta}^i f_{imp}^i + \Delta X_{,\beta}^i + \xi^3 \Delta A_{,\beta}^i \right) \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (A.13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3,imp} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_{,\alpha}^* \mathbf{r}_{,3}^* - \mathbf{r}_{,\alpha,imp}^* \mathbf{r}_{,3,imp}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[(X_{,\alpha}^i + \xi^3 A_{,\alpha}^i) (X^3 + A^j) - \left(X_{,\alpha}^i + \xi^3 A_{,\alpha}^i f_{imp}^i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta X_{,\alpha}^i + \xi^3 \Delta A_{,\alpha}^i \right) \left(X^3 + A^j f_{imp}^j + \Delta X^3 + \Delta A^j \right) \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (A.14)$$

Dehnverzerrungstensor $\alpha_{\alpha\beta,imp}$:

$$\alpha_{\alpha\beta,imp} = \frac{1}{2} \left[(X_{,\alpha}^i X_{,\beta}^j) - (X_{,\alpha}^i X_{,\beta}^j) - (X_{,\alpha}^i \Delta X_{,\beta}^j) - (\Delta X_{,\alpha}^i X_{,\beta}^j) \right] \delta_{ij} \quad (A.15)$$

Biegeverzerrungstensor $\beta_{\alpha\beta,imp}$ (unter Vernachlässigung der quadratischen Terme):

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha\beta,imp} &= \frac{1}{2} \xi^3 \left[X_{,\alpha}^i A_{,\beta}^j + X_{,\beta}^j A_{,\alpha}^i - X_{,\alpha}^i A_{,\beta}^j f_{imp}^j - X_{,\beta}^j A_{,\alpha}^i f_{imp}^i \right. \\ &\quad \left. - X_{,\alpha}^i \Delta A_{,\beta}^j - X_{,\beta}^j \Delta A_{,\alpha}^i - \Delta X_{,\alpha}^i A_{,\beta}^j f_{imp}^j \right. \\ &\quad \left. - \Delta X_{,\beta}^j A_{,\alpha}^i f_{imp}^i - \Delta X_{,\alpha}^i \Delta A_{,\beta}^j - \Delta X_{,\beta}^j \Delta A_{,\alpha}^i \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (A.16)$$

Schubverzerrungstensor $\gamma_{\alpha,imp}$ (konstante Schubverzerrungstheorie $X_{,\alpha}^i X^3 \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3,imp} &= \frac{1}{2} \left[X_{,\alpha}^i A^j - X_{,\alpha}^i A^j f_{imp}^j - X_{,\alpha}^i \Delta A^j - \Delta X_{,\alpha}^i A^j f_{imp}^j \right. \\ &\quad \left. - \Delta X_{,\alpha}^i \Delta A^j \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (A.17)$$

A.2 Verbund

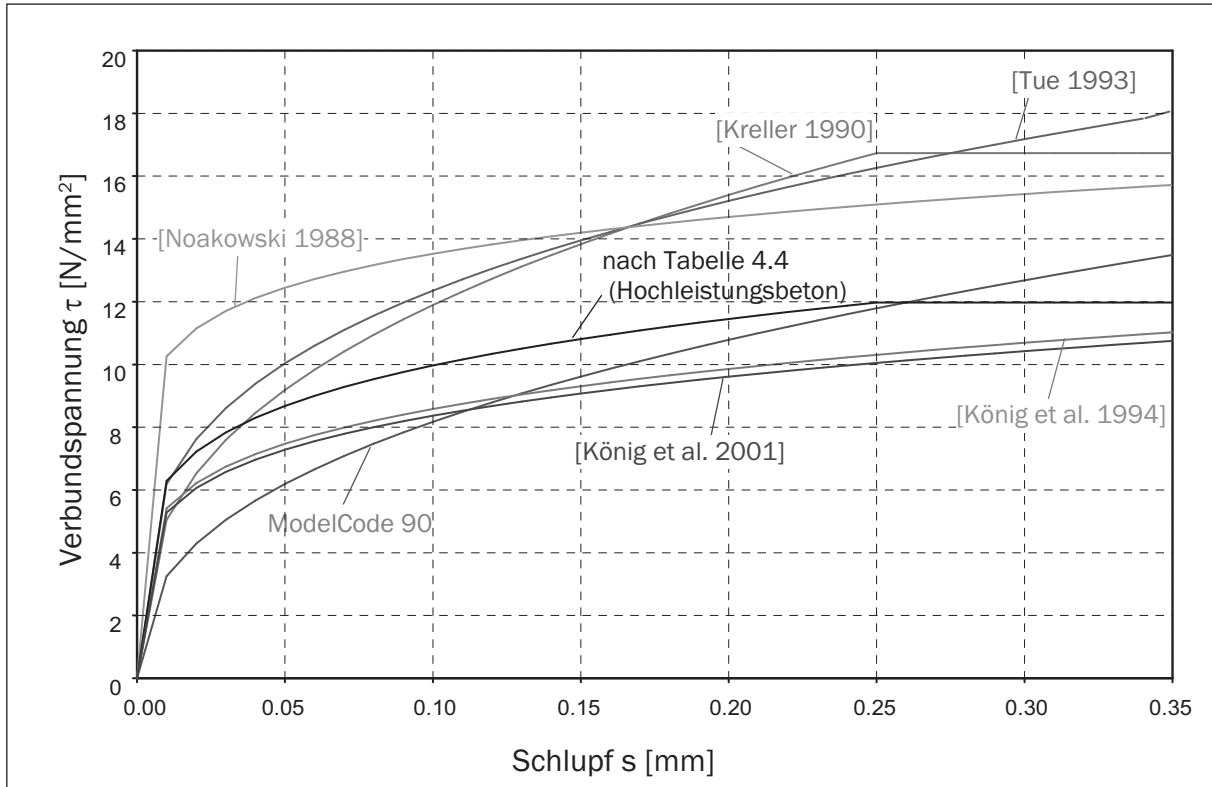


Bild A.1: Vergleich unterschiedlicher Verbundgesetze an einem C 70/85 (Detail)

A.3 Bruchenergie

Herleitung des Integrals zur Bestimmung der Bruchenergie:

$$\begin{aligned}
 G_{cl} &= \int_{\varepsilon_c=a}^{\varepsilon_c=b} \left(\left[\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right] \cdot f_c \right) d\varepsilon_c \\
 &= \int_{\varepsilon_c=a}^{\varepsilon_c=b} \left(\left[\frac{k \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}}{1 + (k-2) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} - \frac{\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + (k-2) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \right] \cdot f_c \right) d\varepsilon_c \\
 &= f_c \cdot \frac{k}{\varepsilon_{c1}} \cdot \left[\frac{\varepsilon_c \varepsilon_{c1}}{(k-2)} - \frac{\varepsilon_{c1}^2}{(k-2)^2} \cdot \ln \left[1 + \frac{(k-2)\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right] \right]_{\varepsilon_c=a}^{\varepsilon_c=b} \\
 &\quad - f_c \cdot \frac{1}{\varepsilon_{c1}^2} \left[\frac{\varepsilon_{c1}^3}{(k-2)^3} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{(k-2)\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{(k-2)\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \ln \left[1 + \frac{(k-2)\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right] \right]_{\varepsilon_c=a}^{\varepsilon_c=b} \quad (A.18)
 \end{aligned}$$

A.4 Normalverteilung der Zugfestigkeit

allgemeine Normalverteilung:

X ist $N(\mu; \sigma_x^2)$ verteilt mit $\mu \hat{=} \text{Mittelwert}$ und $\sigma_x^2 \hat{=} \text{Varianz}$

normierte Normalverteilung:

Z ist $N(0;1)$ verteilt mit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma_x} \Rightarrow X = \sigma_x \cdot Z + \mu$

Für die Zugfestigkeit gelten nach DIN 1045-1 die Schranken:

$$\begin{aligned} 5\% - \text{Fraktile} &= 0.7 \cdot f_{ctm} \\ 95\% - \text{Fraktile} &= 1.3 \cdot f_{ctm} \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= \Theta\left(\frac{b-\mu}{\sigma_x}\right) - \Theta\left(\frac{a-\mu}{\sigma_x}\right) \\ &= \Theta\left(\frac{(\mu + y\sigma_x) - \mu}{\sigma_x}\right) - \Theta\left(\frac{(\mu - y\sigma_x) - \mu}{\sigma_x}\right) \\ &= \Theta\left(\frac{y\sigma_x}{\sigma_x}\right) - \Theta\left(\frac{-y\sigma_x}{\sigma_x}\right) \\ &= \Theta(y) - \Theta(-y) \\ &= \Theta(y) - (1 - \Theta(y)) \\ &= -1 + 2 \cdot \Theta(y) \stackrel{!}{=} 0.9 \\ y &\approx 1.645 \end{aligned}$$

folgt die Streuung σ_x zu

$$\begin{aligned} \mu - 1.645 \cdot \sigma_x &= 0.7 \cdot \mu \\ \sigma_x &= \frac{0.3 \cdot \mu}{1.645} \\ \sigma_x &= 0.182 \cdot \mu = 0.182 \cdot f_{ctm} \end{aligned} \tag{A.19}$$

und die Varianz σ_x^2 zu

$$\sigma_x^2 = 0.033259 \cdot f_{ctm}^2. \tag{A.20}$$

A.5 Verhältniswertbildung logarithmisch skaliertter Matrizen

Es gilt:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\det \mathbf{K}_{Tk}}{\det \mathbf{K}_{T1}}\right) &= \log(\det \mathbf{K}_{Tk}) + \log\left(\frac{1}{\det \mathbf{K}_{T1}}\right) \\ &= \log(\det \mathbf{K}_{Tk}) - \log(\det \mathbf{K}_{T1}) \\ &= \det \tilde{\mathbf{K}}_{Tk} - \det \tilde{\mathbf{K}}_{T1} \\ \frac{\det \mathbf{K}_{Tk}}{\det \mathbf{K}_{T1}} &= 10^{(\det \tilde{\mathbf{K}}_{Tk} - \det \tilde{\mathbf{K}}_{T1})} \end{aligned} \tag{A.21}$$

A.6 Gedrücktes zylindrisches Schalenfeld

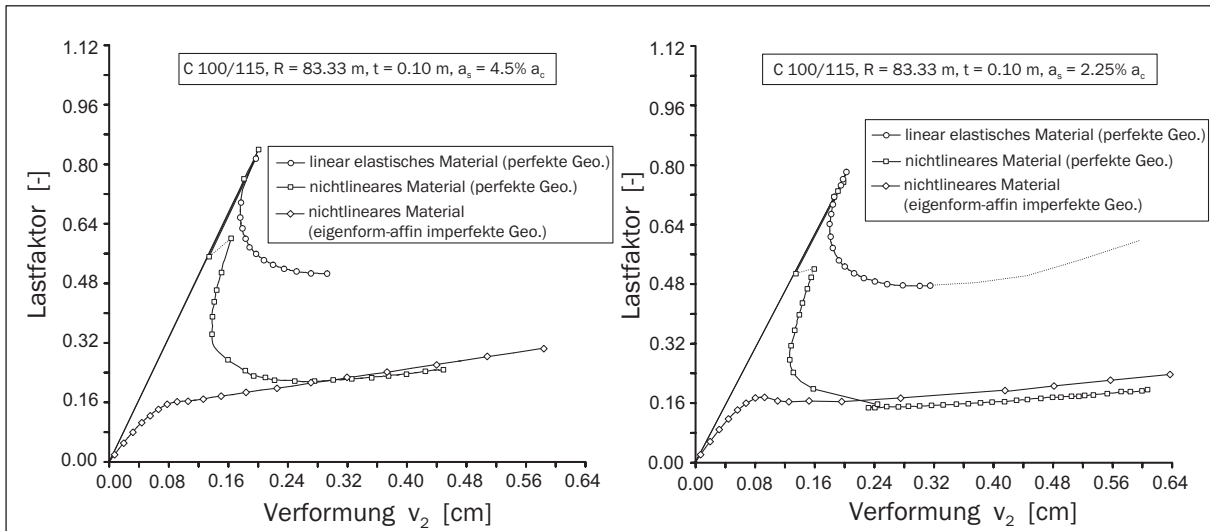


Bild A.2: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes - 4.50 % Bewehrungsmenge (links) und 2.25 % Bewehrungsmenge (rechts)

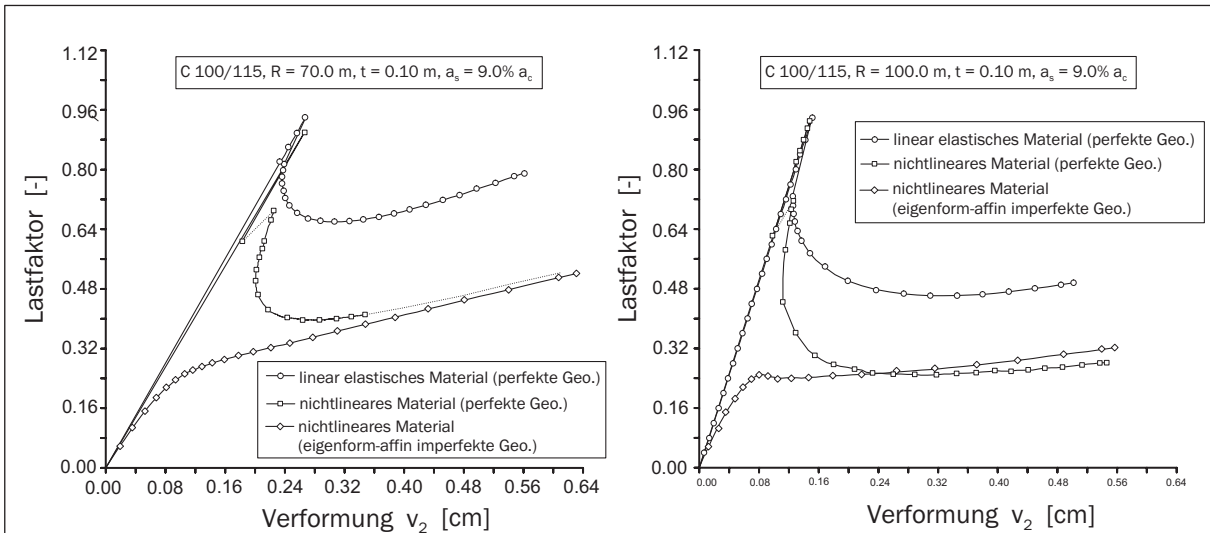


Bild A.3: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes - Radius $R = 70$ m (links) und Radius $R = 100$ m (rechts)

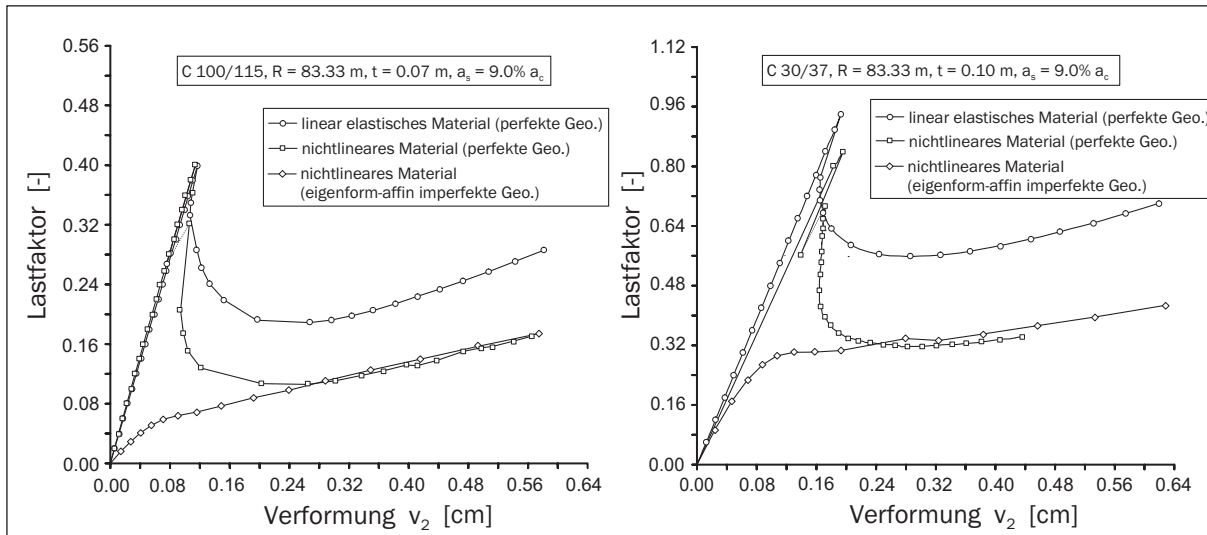


Bild A.4: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes - reduzierte Schalendicke (links) und Betongüte C 30/37 (rechts)

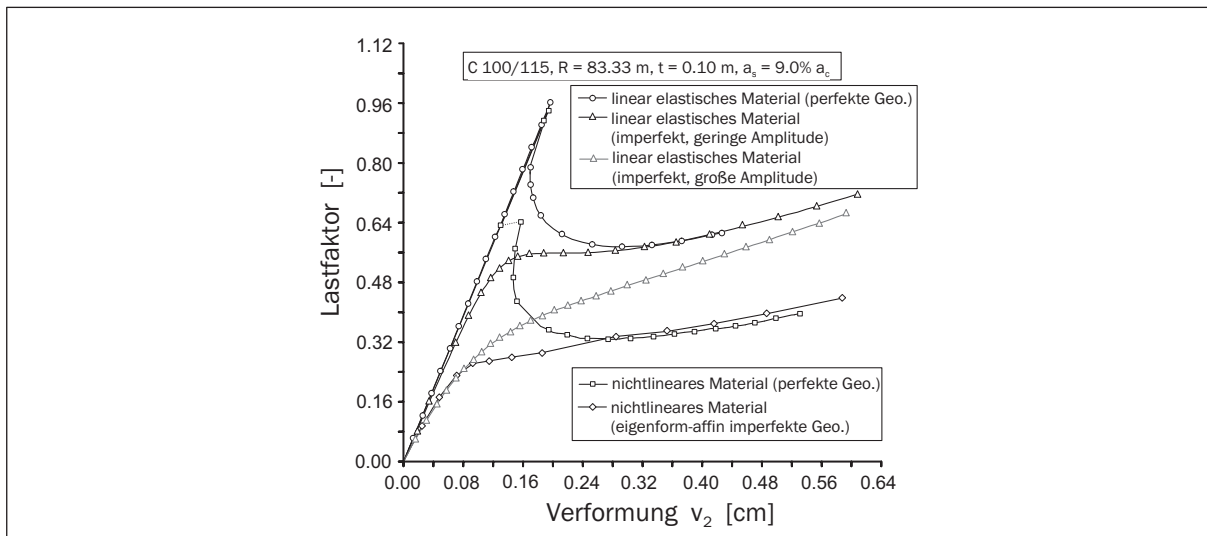


Bild A.5: Last-Verformungskurve eines Schalenfeldes - Imperfektionen bei linearem Materialverhalten

Zeile	Spalte Kenngröße	Festigkeitsklassen															analytische Bezeichnung; Erläuterung	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
1	f_{ck}	12 ^a	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100	$f_{cm} = f_{ck} + 8$	N/mm ²
2	$f_{tk, cube}$	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	115		N/mm ²
3	f_{cm}	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	108		N/mm ²
4	f_{ctm}	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2	$f_{ctm} = 0,30 f_{ctk}^{(2/3)}$	bis C50/60
5	$f_{ctk;0,05}$	1,1	1,3	1,5	1,8	2	2,2	2,5	2,7	2,9	3	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	$f_{ctk;0,05} = 0,7 f_{ctm}$	5%-Quantil
6	$f_{ctk;0,95}$	2	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6	6,3	6,6	6,8	$f_{ctk;0,95} = 1,3 f_{ctm}$	95%-Quantil
7	E_{cm}^b	25800	27400	28800	30500	31900	33300	34500	35700	36800	37800	38800	40600	42300	43800	45200		N/mm ²
8	ϵ_{c1}	-1,8	-1,9	-2,1	-2,2	-2,3	-2,4	-2,5	-2,55	-2,6	-2,65	-2,7	-2,8	-2,9	-2,95	-3,0		
9	ϵ_{c1u}																	
10	n																	
11	ϵ_{c2}																	
12	ϵ_{c2u}																	
13	ϵ_{c3}																	
14	ϵ_{c3u}																	

a Die Festigkeitsklasse C12/15 darf nur bei vorwiegend ruhenden Einwirkungen verwendet werden.

b Diese Werte stellen den mittleren Elastizitätsmodul als Sekante bei $|\sigma| \approx 0,4 f_{cm}$ dar.

Tabelle A.1: Festigkeits- und Formänderungskennwerte von Normalbeton nach DIN 1045-1 (Tabelle 9)

Literaturverzeichnis

- ACI-ASCE Committee 334 report (1984). Reinforced Concrete Cooling Tower Shells - Practice and Commentary. ACI Journal, Title No. 81-52.
- Addai, K.A. (1976). *Zur Stabilitätsberechnung allgemeiner ringversteifter Rotationschalen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 76-6, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Allen, J.E. (1950). Construction of long-span concrete arch hangar at Limestone Air Force Base. *ACI Journal* 21, 405–414.
- Andres, M. (1998). Entwurf eines Großkühlturms in Hochleistungsbeton. Diplomarbeit, Institut für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.
- Andres, M., R. Eusani und R. Harte (1999). Entwurf eines Großkühlturms - Vergleich BTR/E-DIN 1045-1. Interner Arbeitsbericht, Bergische Universität Wuppertal.
- Andres, M. und R. Harte (2000). Verifizierung der Tragsicherheit und Rissbreiten eines Kühlturms bei Einsatz eines säureresistenten Betons SRB85/35. Bericht Nr. SDT 01/2000, Bergische Universität Wuppertal.
- Andres, M. und H. Schindelin (2001). Die vereinfachte Beulanalyse für Schalenträgerwerke nach Dulácska und Kollár. Interner Arbeitsbericht, Bergische Universität Wuppertal.
- Arbocz, J. und W. Wunderlich (Hrsg.) (2001). *Euromech 424: Buckling Predictions of Imperfection Sensitive Shells*, Kerkrade, NL.
- Baillis, Ch., J.F. Jullien und A. Limam (2000). An enriched 2D modelling of cooling towers. Effects of real damage on the stability under self weight and on the strength under wind pressure. *Engineering Structures* 22, 831–846.
- Ballesteros, P. (1978). Nonlinear dynamic and creep buckling of elliptical paraboloidal shell. *IASS Bulletin* 66, 39–60.
- Başar, Y. (1987). A consistent theory of geometrically non-linear shells with an independent rotation vector. *International Journal of Solids and Structures* 23(10), 1401–1415.
- Başar, Y. und W.B. Krätzig (1985). *Mechanik der Flächenträgerwerke*. Braunschweig: Vieweg & Sohn.
- Başar, Y. und W.B. Krätzig (1988). Analysis of Shell Structures. Skriptum zur Vorlesung Flächenträgerwerke. Institut für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.
- Bathe, K.-J. und E.L. Wilson (1976). *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.

- Bažant, Z. und L. Cedolin (1991). *Stability of Structures*. Oxford: Oxford University Press.
- Bažant, Z.P. und B.H. Oh (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions* 16(93), 155–177.
- Beck, H. (1963). Die tragende Konstruktion der Festhalle der Farbwerke Hoechst AG. *Bauingenieur* 38, 95–106.
- Beem, H., C. Könke, U. Montag und W. Zahlten (1996). FEMAS 2000 - Finite Element Moduls of Arbitrary Structures - User's Manual. Institut für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.
- Benz, H.-J. (1976). *Linearisierte Stabilitäts- und Schwingungsberechnung bei versteiften Rotationsschalen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 76-10, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Bergan, P.G. (1980). Automated Incremental-Iterative Solution Schemes. In C. Taylor, E. Hinton, und D.R.J. Owen (Hrsg.), *Numerical Methods for Non-Linear Problems Vol.1*, 291–305. Swansea: Pineridge Press.
- Bergan, P.G., G. Horrigmoe, B. Krakeland und T.H. Soreide (1978). Solution Techniques for Nonlinear Finite Element Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12, 1677–1696.
- Bergner, H. (1997). Rißbreitenbeschränkung zwangbeanspruchter Bauteile aus hochfestem Normalbeton. Heft 482, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Beuth-Verlag.
- Billig, B. (1992). *Beitrag zur nichtlinearen Berechnung dünner Schalen aus Stahlbeton im vor- und nachkritischen Bereich*. Mitteilungen aus dem Lehr- und Forschungsgebiet für Festigkeitsfragen des konstruktiven Ingenieurbau Nr. 24, RWTH Aachen.
- Borges, J.U.A. und T.N. Bittencourt (2002). Analytical Model for Prediction of Size-Dependent Stress-Strain Curves of High-Strength Concrete in Uniaxial Compression. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Utilization of High Strength/High Performance Concrete, Volume 2* Leipzig, June, 165–176.
- Brendel, B. (1979). *Zur geometrischen nichtlinearen Elastostabilität* Dissertation, Universität Stuttgart.
- BTR (1997). BTR - Bautechnik bei Kühltürmen - VGB-Richtlinie für den bautechnischen Entwurf, die Berechnung, die Konstruktion und die Ausführung von Kühltürmen. Essen: VGB-Kraftwerkstechnik.
- BTR-Entwurf, Stand 07/03 (2003). BTR - Bautechnik bei Kühltürmen - VGB-Richtlinie für den bautechnischen Entwurf, die Berechnung, die Konstruktion und die Ausführung von Kühltürmen. Essen: VGB-Kraftwerkstechnik.
- Bushnell, D. (1985). *Computerized buckling analysis of shells*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers.
- CEB/FIP Bulletin D'Information No. 203 (1991). CEB/FIP Model Code 1990. Chapters 1-3. Lausanne: CEB Comite Euro-International du Beton.
- CEB/FIP Bulletin D'Information No. 228 (1995). High Performance Concrete - Recommended Extensions to the Model Code 90, Research Needs. Lausanne: CEB Comite Euro-International du Beton.

- Committee of Inquiry (1966). Report of the Committee of Inquiry into Collapse of Cooling Towers at Ferrybridge Monday 1 November 1965. Report, Central Electricity Generating Board.
- Constantinescu, D. (2000). Antwort auf Prof. Quasts Beitrag „Zur Kritik an der Stützensbemessung“. *Beton- und Stahlbetonbau* 5, 311–312.
- Corr, R.B. und A. Jennings (1976). A Simultaneous Iteration Algorithm for Symmetric Eigenvalue Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10, 647–663.
- Crisfield, M.A. (1981). A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles „Snap-Through“. *Computers & Structures* 13, 55–62.
- Crisfield, M.A. (1984). Accelerating and Damping the Modified Newton-Raphson Method. *Computers & Structures* 18(3), 395–407.
- Csonka, P. (1956). The buckling of a spheroidal shell curved in two directions. *Acta Technica (Budapest)* 14, 425–437.
- Csonka, P. (1958). Die Verformung und nachträgliche Verstärkung einer kuppelartigen Schale in Ungarn. *Bautechnik* 35, 69–72.
- Curbach, M., T. Hampel, S. Scheerer und K. Speck (2002). Hochleistungsbeton unter zwei- und dreiaxialer Beanspruchung. *Beton- und Stahlbetonbau* 97(6), 275–280.
- Curbach, M., T. Hampel, K. Speck und S. Scheerer (2000). Versuchstechnische Ermittlung und mathematische Beschreibung der mehraxialen Festigkeit von Hochleistungsbeton bei zwei- und dreiaxialer Druckbeanspruchung. Zusammenfassung des Projekts CU 37/1-2 (DFG), TU Dresden.
- DAfStb-Heft 525 (2003). Erläuterungen zu DIN 1045. Berlin: Beuth-Verlag.
- Darwin, D. und D.A. Pecknold (1977a). Analysis of cyclic loading of plane R/C structures. *Computers and Structures* 7, 137–146.
- Darwin, D. und D.A. Pecknold (1977b). Nonlinear Biaxial Stress-strain law for concrete. *Journal of the engineering mechanics division (ASCE)* 103(EM2), 229–241.
- de Borst, R. (1987). Computation of Post-Bifurcation and Post-Failure Behavior of Strain-Softening Solids. *Computers & Structures* 25(2), 211–224.
- Deml, M. (1997). *Ein Finite-Element-Konzept zur Traglastanalyse imperfektionssensitiver Schalenstrukturen*. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau Nr. 6/97, TU München.
- Der, T.J. und R. Fidler (1968). A model study of the buckling behaviour of hyperbolic shells. In *Proceedings of ICE* 41, 105–118.
- DIN 1045 (1988). Beton- und Stahlbetonbau, Bemessung und Ausführung. Ausgabe 07/88, Berlin: Beuth Verlag.
- DIN 1045-1 (2001). Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion. Ausgabe 07/01, Berlin: Beuth-Verlag.

- DIN 1055-100 (2001). Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln. Ausgabe 03/01, Berlin: Beuth Verlag.
- Dischinger, F. (1925). Fortschritte im Bau von Massivkuppeln. *Bauingenieur* 6, 362–366.
- Dischinger, F. und U. Finsterwalder (1932). Die weitere Entwicklung der Schalenbauweise „Zeiss-Dywidag“. *Beton und Eisen* 31, 101–108, 149–155, 165–170, 181–184, 213–220, 229–235, 245–247.
- Duddeck, H., B. Kröplin, D. Dinkler, J. Hillmann und W. Wagenhuber (1990). *Berechnung des nichtlinearen Tragverhaltens dünner Schalen im Vor- und Nachbeulbereich* Berlin: Springer-Verlag.
- Dulácska, E. und L. Kollár (1995). Design Procedure for the Buckling Analysis of Reinforced Concrete Shells. *Thin Walled Structures* 23, 313–321.
- Eckstein, U. (1983). *Nichtlineare Stabilitätsberechnung elastischer Schalenträgerwerke* Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 83-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Eckstein, U., W.B. Krätzig und U. Wittek (1979). Wirklichkeitsnahe Grenzbeullasten von Rotationsschalen unterschiedlicher GAUSS'scher Flächenkrümmung. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 79-5, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Eibl, J. (2000). Ein Sicherheitsformat für die nichtlineare Traglastbemessung (ULS) nach DIN 1045 neu. In *Sicherheit und Risiko im Bauwesen - Grundlagen und praktische Anwendung*, Institut für Statik, Bericht Nr. 20, III.1–III.10. TU Darmstadt.
- Elenas, A. (1990). *Ein Beitrag zur physikalisch-nichtlinearen Analyse erdbebenerregter räumlicher Aussteifungssysteme aus Stahlbetonscheiben* Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Eligehausen, R., E.P. Popov und V.V. Bertero (1983). Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations. Report, University of California, Berkeley.
- Esslinger, M. (1970). Hochgeschwindigkeitsaufnahmen vom Beulvorgang dünnwandiger, axialbelasteter Zylinder. *Der Stahlbau* 39, 73–76.
- Flügge, W. (1967). *Viscoelasticity*. Toronto: Blaisdell Publishing Company.
- Fujii, F. und H. Noguchi (2002). The buckling mode extracted from the \mathbf{LDL}^T -decomposed large-order stiffness matrix. *Communications in numerical methods in engineering* 18, 459–467.
- Gattesco, N. und D. Bernardi (2002). Influence of concrete durability on moment redistribution in HPC structures. In *6th International Symposium on High Strength/High Performance Concrete*, 1617–1627.
- Gilbert, R.I. und R.F. Warner (1978). Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs. *Journal of the structural division* 104(ST12), 1885–1899.

- Gouda, M. (1951). *An experimental and analytical investigation of stresses in reinforced concrete shell roofs*. Dissertation, University of London.
- Green, A.E. und W. Zerna (1968). *Theoretical Elasticity* (2. Aufl.). New York: Dover Publications.
- Griggs, P.H. (1971). Buckling of Reinforced Concrete Shells. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 97(EM3), 687–700.
- Gruber, K. (1994). *Nichtlineare Computersimulationen als Bestandteil eines Entwurfkonzeptes zur Steigerung der Sicherheit und Dauerhaftigkeit von Naturzugkühltürmen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 94-7, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Haas, A.M. und H. van Koten (1971). On the buckling behavior of doubly curved shells. In *RILEM International Symposium, Topic II, Buenos Aires* 77–120.
- Harte, R. (1982). *Doppelt gekrümmte finite Dreieckelemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 82-10, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Harte, R. (2001). *Schalenstatik im Wandel der Zeit*. Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N. 454, Paderborn: Schöningh-Verlag.
- Harte, R., M. Andres und R. Wörmann (2003). *FEMAS 2000 - Benutzerhandbuch zur nichtlinearen Analyse von Stahlbetonflächentragwerken*. Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- Harte, R. und W.B. Krätzig (2001). Lifetime-oriented analysis and design of large-scale cooling towers. In A. Zingoni (Hrsg.), *Proceedings of the International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*, Volume Vol. 1, 87–98. Elsevier, Kapstadt.
- Harte, R. und U. Montag (2001). Computer simulations and crack-damage evaluation for the durability of the world-largest cooling tower shell at Niederaussem power station. In K.J. Bathe (Hrsg.), *Computational Fluid and Solid Mechanics*, Volume Vol. 1, 641–644. Elsevier, Cambridge.
- Harte, R. und R. Wörmann (2002). Zur Modellierung thermischer und hygrischer Beanspruchungen von Stahlbetontragwerken. In D. Dinkler (Hrsg.), *Baustatik-Baupraxis* 8, 365–377. Braunschweig.
- Helnwein, P. (1996). *Zur initialen Abschätzbarkeit von Stabilitätsgrenzen auf nichtlinearen Last-Verschiebungspfaden elastischer Strukturen mittels der Methode der finiten Elemente*. Dissertation, TU Wien.
- Herzog, M. (1996). Die Beulfestigkeit von Stahlbetonschalen: Theorie, Versuche und Schadenfälle. *Beton- und Stahlbetonbau* 91(5,6,7), 115–121, 141–145, 164–169.
- Hillemeier, B. (2003). Nano- und Makrotechnologien revolutionieren das Bauen. *VDI-Berichte* (1771), 17–33.

- Jäppelt, U. (1998). *Elastisch-Plastisches Stabilitätsverhalten dünnwandiger versteifter Kreiszyinderschalen unter Axiallast*. Mitteilungen des Instituts für Statik Nr. 44-98, Universität Hannover.
- Khaidukov, G.K. und V.V. Shugaev (1971). Model Study of Limit State Capacity of Reinforced Concrete Shallow Shell with Large Local Deflections. In *RILEM International Symposium, Topic II, Buenos Aires*, 179–204.
- König, G. und C. Ahner (2000). Sicherheits- und Nachweiskonzept der nichtlinearen Berechnungen im Stahl- und Spannbetonbau. In *Sicherheit und Risiko im Bauwesen - Grundlagen und praktische Anwendung*, Institut für Statik, Bericht Nr. 20, I.1–I.25. TU Darmstadt.
- König, G., H. Bergner, R. Grimm, M. Held, G. Remmel und G. Simsch (1994). Hochfester Beton - Teil 2: Bemessung und Konstruktion. Heft 438, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Beuth-Verlag.
- König, G., N.V. Tue und M. Zink (2001). *Hochleistungsbeton - Bemessung, Herstellung und Anwendung*. Berlin: Ernst & Sohn Verlag.
- Kollár, L. und E. Dulácska (1975). *Schalenbeulung*. Düsseldorf: Werner-Verlag.
- Kollár, L. und T. Farago (2003). Comparing the Safety against Buckling of Cooling Towers of Cylindrical and Hyperbolic Shape. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 44(1), 3–13.
- Kolleger, J. und G. Mehlhorn (1987). Material Model for cracked Reinforced Concrete. In *IABSE Colloquium Delft*, 63–74.
- Kompfner, T.A. (1983). *Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Krätzig, W.B. (1968). Statische und dynamische Stabilität der Kühlturmschale. *Konstruktiver Ingenieurbau Berichte* 1, 65–75.
- Krätzig, W.B. (1977). Sicherheit und Bemessungskonzept. *Konstruktiver Ingenieurbau - Berichte Heft 29/30*, 81–85.
- Krätzig, W.B. (1989). Eine einheitliche statische und dynamische Stabilitätstheorie für Pfadverfolgungsalgorithmen in der numerischen Festkörpermechanik. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 69(7), 203–213.
- Krätzig, W.B. und Y.S. Petryna (2001). Assessment of structural damage and failure. *Archive of Applied Mechanics* 71, 1–15.
- Krätzig, W.B., Y.S. Petryna und F. Stangenberg (2000). Measures of structural damage for global failure analysis. *International Journal of Solids and Structures* 37, 7393–7407.
- Kreller, H. (1990). Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung. Heft 409, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Beuth-Verlag.
- Kupfer, H.B. und K.H. Gerstle (1973). Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 99(EM4), 853–866.

- Kurz, W. (1997). *Ein mechanisches Modell zur Beschreibung des Verbundes zwischen Stahl und Beton*. Dissertation, TU Darmstadt.
- Leipholtz, H. (1968). *Stabilitätstheorie*. Stuttgart: Teubner-Verlag.
- Liapunov, A.M. (1966). *Stability of Motion*. New York: Academic Press.
- Litle, W.A., F.J. Forcier und P.H. Griggs (1970). Can plastic models represent the buckling behaviour of reinforced concrete shells? In *ACI-SP 24*, 265–288.
- Lürding, D. (2001). *Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 125, Ruhr-Universität Bochum.
- Mahmoud, B.E.H. und A.K. Gupta (1993). Inelastic Large Displacement Behavior and Buckling of Hyperbolic Cooling Tower Shells. Report, North Carolina State University, USA.
- Mancevski, D. (1998). *Nichtlineare Analyse von Stahlbetonkonstruktionen mit konsistenten Simulationsalgorithmen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 98-2, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Mang, H.A., H. Floegl, F. Trappel und H. Walter (1983). Wind-Loaded Reinforced-Concrete Cooling Towers: Buckling or Ultimate Load. *Engineering Structures* 5, 163–180.
- Mateja, O. (1964). Die Stabilität hyperbolischer Kühltürme, die durch ihr Eigengewicht belastet sind. *Archivum Inzynierii Ladowej* 10, 342–409.
- Mazars, J., J.F. Dubé und J.P. Bournazel (1992). Damage Models and Modelling Strategies for Concrete Structures under Severe Loadings. In Z.P. Bažant (Hrsg.), *FramCoS 1, Fracture mechanics of concrete structures*, 260–268.
- Mehlhorn, G. und J. Kollegger (1995). Anwendung der Finite Elemente Methode im Stahlbetonbau. In G. Mehlhorn (Hrsg.), *Rechnerorientierte Baumechanik*, Der Ingenieurbau, 293–429. Berlin: Ernst & Sohn.
- Menzel, W. (1996). *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalenstrukturen unter endlichen Rotationen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 96-4, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Methfessel, M. (1989). *Untersuchungen zur Leistungssteigerung von Pfadverfolgungsalgorithmen am Beispiel der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Strukturanalyse mit geraden räumlichen Balkenelementen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 89-1, Ruhr-Universität Bochum.
- Milford, R.V. und W.C. Schnobrich (1984). Nonlinear Behavior of Reinforced Concrete Cooling Towers. Structural Research Series No. 514, University of Illinois, USA.
- Min, C.S. (1992). *A Study of Inelastic Behavior of Reinforced Concrete Shells using Supercomputers*. Dissertation, North Carolina State University, USA.
- Montag, U. (1997). *Konzepte zur Effizienzsteigerung numerischer Simulationsalgorithmen für elastoplastische Deformationsprozesse*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 97-6, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.

- Müller, F.P. und C. Weidlich (1978). An experimental investigation of the stability of shallow spherical shells of reinforced concrete subjected to uniformly distributed load. In *IASS Symposium Darmstadt*, Volume 1, 319–328.
- Mungan, I. (1965). Die Beulsicherheit von Kreiszyinderschalen unter Berücksichtigung verschiedener Hauptspannungsverhältnisse. Materialprüfamf für das Bauwesen Bericht Nr. 63, TH München.
- Mungan, I. (1977). Experimentelle Beuluntersuchungen und Stabilitätsnachweise für Kühlturmschalen. *Konstruktiver Ingenieurbau - Berichte Heft 29/30* 75–80.
- Němeček, J. (2000). *Modeling of Compressive Softening of Concrete*. CTU Reports Vol. 4, TU Prag.
- Noakowski, P. (1988). Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rißbreite. Heft 394, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Beuth-Verlag.
- Noh, S.-Y. (2002). *Beitrag zur Erklärung der Schädigungsmechanismen von Naturzugkühltürmen*. Dissertation, RWTH Aachen.
- Odello, R.J. und J.R. Allgood (1973). Shells for standard floor and roof elements. *Journal of Structural Division (ASCE)* 99, 1999–2009.
- Oliver, J. (1989). A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for numerical methods in engineering* 28 461–474.
- Persson, B. (1995). Poisson's Ratio of High Performance Concrete. In F.H. Wittmann und P. Schwesinger (Hrsg.), *High Performance Concrete: Material Properties and Design*
- Petersen, C. (1982). *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen* Wiesbaden: Verlag Vieweg.
- Petersen, W.P. (1992). Portable lagged Fibonacci series uniform random generator. Fortran 77 - Code, ETH Zürich.
- Pflüger, A. (1975). *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* Berlin: Springer-Verlag.
- Planinc, I. und M. Saje (1999). A quadratically convergent algorithm for the computation of stability points: The application of the determinant of the tangent stiffness matrix. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 169 89–105.
- Pölling, R. (2000). *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Popov, E.P. und S.J. Medwadowski (1981). *Concrete Shell Buckling*. Detroit: American Concrete Institute.
- Quast, U. (2000). Zur Kritik an der Stützenbemessung. *Beton- und Stahlbetonbau* 5, 305–311.
- Rabich, R. (1957). Die Schnittkräfte in kreiszyllindrischen Schalenträgern aus Stahlbeton. In *2nd Symposium on Concrete Shell Roof Construction* Oslo.
- Ramm, E. (1982). *Buckling of Shells*. Berlin: Springer-Verlag.

- Ramm, E. (1986). Ultimate Load and Stability Analysis of Reinforced Concrete Shells. 145–159.
- Reckling, K.A. (1967). *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*. Berlin: Springer-Verlag.
- Rommel, G. (1994). Zum Zug- und Schubtragverhalten von Bauteilen aus hochfestem Beton. Heft 444, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Beuth-Verlag.
- Richter, T. (1999). *Hochfester Beton - Hochleistungsbeton*. No. 3, Schriftenreihe Spezialbetone. Düsseldorf: Verlag Bau + Technik.
- Riks, E. (1979). An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. *International Journal of Solids and Structures* 15, 529–551.
- Rüdiger, D. und J. Urban (1955). *Kreiszyinderschalen*. Leipzig: Teubner-Verlag.
- Ruhwedel, J. (1986). *Experimentelle Beuluntersuchung von Kühlturmschalen unter Windbelastung*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 86-6, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr- Universität Bochum.
- Sabir, A.B. und A.C. Lock (1972). The Application of Finite Elements to the Large Deflection Geometrically Non-linear Behaviour of Cylindrical Shells. In C.A. Brebbia (Hrsg.), *Variational Methods in Engineering*, 7/66–7/75. University Press, Southampton.
- Saenz, L.P. (1964). Discussion of „Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete“ by Desayi and Krishnan. *ACI Journal* 61(9), 1229–1235.
- Schäper, M. (2002). E_{cm} - Der E-Modul des Betons ist keine fixe Größe. *Beton- und Stahlbetonbau* 97(5), 225–232.
- Schelke, E. (1981). *Zur Berechnung des Stabilitäts- und Nachbeulverhaltens dünner Schalenträgerwerke nach der Methode der Finiten Elemente*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Schindelin, H. (2002). Entwurf eines 1 500 m hohen Turms eines Solar-Aufwindkraftwerkes - Parameteruntersuchung zur Geometrieoptimierung. Diplomarbeit, Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- Schlaich, J. (1994). *Das Aufwindkraftwerk*. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt.
- Schneider, W. (1997). Verbesserung der Pfadverfolgungsalgorithmen für plastische Durchschlagsprobleme mit abruptem Abfall des Tragvermögens. *Leipzig Ann. Civ. Eng. Rep.* 2, 413–427.
- Schneider, W. (2002). Kollapsanalyse quasistatisch belasteter stählerner Schalenträgerwerke. Institut für Statik und Dynamik, Bericht Nr. 5-02, Universität Leipzig.
- Schroeder, F.-H. (1981). Seminarvorträge über die Erhaltungssätze und Stoffgleichungen der Kontinuumsmechanik. Lehr- und Forschungsgebiet Baumechanik, Bergische Universität Wuppertal.
- Schubiger, E. (1950). Die Schalenkuppel in vorgespanntem Beton der Kirche Felix und Regula in Zürich. *Bauzeitung* 68, 223–228.

- Schuëller, G.I. (1981). *Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken* Berlin: Ernst & Sohn.
- Schuëller, G.I. (2000). Stochastische Strukturmechanik. In *Sicherheit und Risiko im Bauwesen - Grundlagen und praktische Anwendung* Institut für Statik, Bericht Nr. 20, II.1–II.16. TU Darmstadt.
- Schultz, R. (1996). *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichten-Schalenelementen* Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 96-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- Schwennicke, A. (1983). Zur Berechnung von Stahlbetonbalken und -scheiben im gerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen. Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, TU Berlin.
- Scordelis, A.C. (1984). Analysis of thin shell roofs. In *IASS Symposium Dortmund*, Volume 3, 333–359.
- Seelmann, F. (1997). *Tragverhalten von gedruckenen Wänden aus hochfestem Normalbeton unter Berücksichtigung des Knickverhaltens der Längsbewehrung* Dissertation, TU Darmstadt.
- Six, M. (2003). Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau. Heft 534, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Beuth-Verlag.
- Smadi, M.M. und F.O. Slate (1989). Microcracking of High and Normal Strength Concretes under Short- and Long-term Loadings. *ACI Material Journal* 86(2), 117–127.
- Spohr, I. (1998). *Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Zylinderschalen*. Bericht aus dem Institut für Statik Nr. 98-87, TU Braunschweig.
- Stempniewski, L. (1990). *Flüssigkeitsgefüllte Stahlbetonbehälter unter Erdbebeneinwirkung* Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie Nr. 9, Universität Karlsruhe.
- Tassios, T.P. und P.J. Yannopolous (1981). Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationships. *ACI Journal* 78(3).
- Torroja, E. (1950). Réalisations de voûtes minces en Espagne. Annales ITBTP No. 164.
- Truesdell, C. und W. Noll (1965). The Non-Linear Field Theories of Mechanics. In S. Flügge (Hrsg.), *Handbuch der Physik III/3*. Berlin: Springer-Verlag.
- Tue, N.G. (1993). Zur Spannungsumlagerung im Spannbeton bei der Rissbildung unter statischer und wiederholter Belastung. Heft 435, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Beuth-Verlag.
- Tue, N. und R. Krumbach (1998). Verbundverhalten des neuen tiefgerippten Betonstahls und hochfestem Beton. In *Beiträge zum 35. Forschungskolloquium des DAfStb* Universität Leipzig.
- Turkkila, T. (2002). Use of \mathbf{LDL}^T Decomposition in Solution of Eigenproblem. In E. Lund, N. Olhoff, und J. Stegmann (Hrsg.), *15th Nordic Seminar on Computational Mechanics*, 151–154.

- Vandepitte, D., J. Rathé und G. Weymeis (1979). Experimental investigation into the buckling and creep buckling of shallow spherical caps subjected to uniform radial pressure. In *IASS Congress Madrid*, 1.1–1.16.
- van Mier, J.G.M. (1984). *Strain-Softening of concrete under multiaxial loading conditions* Dissertation, TU Eindhoven.
- van Mier, J.G.M., H.W. Reinhardt und B.W. van der Vlugt (1987). Ergebnisse dreiachsiger verformungsgesteuerter Belastungsversuche an Beton. *Der Bauingenieur* (62), 353–361.
- van Riel, A.C., W.J. Beranek und A.L. Bouma (1957). Tests on shell roof models of reinforced mortar. In *2nd Symposium on Concrete Shell Roof Construction* 288–306. Oslo.
- Veccio, F.J. und M.P. Collins (1986). The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear. *ACI Material Journal*, 219–231.
- Vielsack, P. (1986). Praktische Stabilität und Kollaps eines Stabes mit trockener Reibung in den Lagern. *Ingenieur-Archiv* 56, 229–240.
- Vonk, R.A. (1992). *Softening of concrete loaded in compression* Dissertation, TU Eindhoven.
- Weidlich, C. (1979). Stabilitätsuntersuchungen an flachen Kugelschalen aus Stahlbeton. In *10. DAfStb-Forschungskolloquium*, 1–6. Universität Karlsruhe.
- Wempner, G.A. (1971). Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. *International Journal of Solids and Structures* 7, 1581–1599.
- Wessels, M. (1977). *Das statische und dynamische Durchschlagsproblem der imperfekten flachen Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung* Mitteilungen des Instituts für Statik Nr. 23, TU Hannover.
- Wittek, U. (1980). *Beitrag zum Tragverhalten der Strukturen bei endlichen Verformungen unter besonderer Beachtung des Nachbeulmechanismus dünner Flächentragwerke* Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 80-1, Ruhr-Universität Bochum.
- Wörmann, R. (2004). *Zur Erfassung hygrothermischer Einflüsse auf das nichtlineare Trag- und Schädigungsverhalten von Stahlbetonflächentragwerken* Dissertation, Bergische Universität Wuppertal.
- Wolmir, A.S. (1962). *Biigsame Platten und Schalen*. Berlin: VEB.
- Wriggers, P. und J.C. Simo (1990). A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30, 155–176.
- Wriggers, P., W. Wagner und C. Miehe (1988). A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (70), 329–347.
- Zahlten, W. (1990). *Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 90-2, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.

- Zerna, W., I. Mungan und W. Steffen (1980). Bestimmung der Beulsicherheit von Schalen aus Stahlbeton unter Berücksichtigung der physikalisch-nichtlinearen Materialeigenschaften. Heft 315, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin: Ernst & Sohn.
- Zerna, W. und H.-J. Niemann (1966). Untersuchungen an Modellen des Naturzugkühlturms Ibbenbüren. Institut für Massivbau Bericht Nr. 3.2, TH Hannover.
- Ziegler, H. (1977). *Principles of Structural Stability*. Stuttgart: Birkhäuser.
- Zurmühl, R. (1964). *Matrizen*. Berlin: Springer-Verlag.