

**Die  $XXZ$ -Kette:  
Statische Korrelationen  
bei endlichen Temperaturen**

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
des Fachbereichs Physik  
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Alexander Seel

WUB-DIS 2005-10  
November 2005

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20060026

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20060026>]

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Die <math>XXZ</math>-Kette für <math>\text{Spin-}\frac{1}{2}</math></b>	<b>9</b>
2.1	Hamilton-Operator und $R$ -Matrix . . . . .	9
2.2	Die Quantentransfermatrix . . . . .	11
2.3	Die Korrelationen bei endlichen Temperaturen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Die Thermodynamik der <math>XXZ</math>-Kette</b>	<b>17</b>
3.1	Der algebraische Bethe-Ansatz . . . . .	17
3.2	Hilfsfunktion und führender Eigenwert . . . . .	19
3.3	Freie Energie und Magnetisierung . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Die erzeugende Funktion</b>	<b>25</b>
4.1	Kombinatorik . . . . .	25
4.2	Integraldarstellungen . . . . .	30
4.3	Teilchen-Loch-Transformationen . . . . .	37
4.4	Umkehrsymmetrie . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Beispiele für Korrelationen</b>	<b>43</b>
5.1	Die Ein-Punkt-Funktionen . . . . .	43
5.2	Die <i>Emptiness Formation Probability</i> . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Der Hochtemperaturlimes</b>	<b>49</b>
6.1	Verteilung der Rapiditäten . . . . .	49
6.2	Integralgleichungen . . . . .	51
6.3	Die erzeugende Funktion . . . . .	53
6.4	Abgeleitete Größen im Hochtemperaturlimes . . . . .	55
6.5	Die Freie Energie . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Der Ising-Limes</b>	<b>59</b>
7.1	Hilfsfunktion und verallgemeinerte Dichte . . . . .	60
7.2	Die <i>Emptiness Formation Probability</i> . . . . .	61
7.3	Die Freie Energie . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Der Spezialfall freier Fermionen</b>	<b>67</b>
8.1	Die Abbildung auf die Brillouin-Zone . . . . .	68
8.2	Die <i>Emptiness Formation Probability</i> . . . . .	69

8.3	Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Der isotrope Limes</b>	<b>75</b>
9.1	Die Integralgleichungen am isotropen Punkt . . . . .	75
9.2	Die Reduktion von Vielfachintegralen . . . . .	77
<b>10</b>	<b>Der Grenzfall <math>T=0</math></b>	<b>79</b>
10.1	Integralgleichungen der Hilfsfunktion . . . . .	80
10.2	Die verallgemeinerte Dichte . . . . .	83
10.3	Die erzeugende Funktion . . . . .	84
<b>11</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Die erzeugende Funktion im Detail</b>	<b>89</b>
A.1	Matrizeninvertierung und Integralgleichungen . . . . .	89
A.2	Das Austauschen von Partitionen . . . . .	91
A.3	Kombinatorik mit Partitionen . . . . .	92
A.4	Determinanten und Permutationen . . . . .	93
<b>B</b>	<b>Der Hochtemperaturlimes</b>	<b>97</b>
B.1	Rapiditäten und führender Eigenwert . . . . .	97
B.2	Die verallgemeinerte Dichtefunktion . . . . .	98
B.3	Der Kopplungsbeitrag . . . . .	99
B.4	Die Freie Energie im Detail . . . . .	106
<b>Literatur</b>		<b>109</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Vor achtzig Jahren (1925) formulierten G. Uhlenbeck und S. Goudsmit ihre Idee, für das Elektron einen zusätzlichen Freiheitsgrad anzunehmen, den sie *Spin* taufte und damit eine Art Kreiselbewegung mit magnetischem Moment assoziierten. Beide legten die Arbeit zunächst ihrem Lehrer P. Ehrenfest vor und baten um Stellungnahme. Dieser war von der Idee begeistert und machte den Vorschlag, H. A. Lorentz zu konsultieren, der auf eine Reihe von Schwierigkeiten im klassischen Bild eines rotierenden Elektrons hinwies. Ihrer Sache nicht mehr sicher, wollten Uhlenbeck und Goudsmit ihre Arbeit zurückziehen, doch Ehrenfest entgegnete nur schmunzelnd: „Ich habe Ihre Abhandlung bereits vor längerer Zeit abgeschickt. Sie sind beide noch jung genug, um sich ein paar Dummheiten erlauben zu können!“

Der Elektronenspin erklärte jedoch nach Vorarbeiten von W. Pauli, A. Landé und A. Sommerfeld die Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld (Zeeman-Effekt), war allerdings in der ein Jahr später, 1926, von W. Heisenberg und E. Schrödinger vorgestellten Quantenmechanik zunächst nicht enthalten. Erst nachdem ihn Pauli 1927 durch die Spinmatrizen in die Quantentheorie einbezog, konnten die magnetischen Eigenschaften von Atomen, Molekülen und Festkörpern richtig beschrieben werden. Spins treten miteinander per Austauschwechselwirkung in Beziehung. Dies führte beispielsweise auf das Heisenberg-Modell [23] von 1928, das den Magnetismus von nichtleitenden Festkörpern beschreibt und ein echtes Vielteilchenproblem darstellt.

Umso interessanter war, als H. Bethe 1931 den Grundzustand der antiferromagnetischen 1D Heisenberg-Kette exakt in dem Sinne angeben konnte, dass der Energiewert durch einen Satz von Zahlen bestimmt war, die Ansatzgleichungen erfüllen mussten. Der an diesem Beispiel eingeführte Koordinaten-Bethe-Ansatz konnte auf eine Vielzahl weiterer Probleme erfolgreich angewandt und die zu Grunde liegende Struktur als Streuproblem zweier Teilchen identifiziert werden: Die Streumatrix des Vielteilchenproblems reduziert sich auf ein Produkt von Streumatrizen zweier Teilchen. Die damit verbundene Selbstkonsistenzgleichung der Zwei-Teilchen-Streumatrix ist die Yang-Baxter-Gleichung für  $R$ -Matrizen und bildet die Grundlage für alle per Bethe-Ansatz lösbaren Modelle. Beispiele finden sich in [15, 44]. Gleichbedeutend wird in Zusammenhang mit Yang-Baxter der Begriff integrabel gebraucht; das Spektrum ist durch den (algebraischen) Bethe-Ansatz bestimmt und der Grundzustand des Sys-

tems kann angegeben werden.

Aus Sicht der Thermodynamik und ihrer Hauptsätze ist der Grundzustand bei  $T = 0$  aber prinzipiell nicht erreichbar und das Einführen einer Temperatur  $T > 0$  mit den Mitteln der statistischen Mechanik unumgänglich: Die Thermodynamik eines Systems vorgegebener Ausdehnung, das mit seiner Umgebung Energie austauschen kann, wird durch Angabe der Freien Energie  $f$  pro Gitterplatz beschrieben. Für die meisten 1D integrablen Systeme ist es möglich, diese mittels zweier unterschiedlicher Methoden zu berechnen. Einerseits kann die Freie Energie als ein Funktional in Dichteverteilungen dargestellt werden, das im thermodynamischen Gleichgewicht ein Minimum annimmt. Die Bedingung für die Extremaleigenschaft ist in den so genannten TBA-Gleichungen für die Dichten umgesetzt. Andererseits ist es möglich, sie als  $f = -T \ln \Lambda_0(0)$  aus dem führenden Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda)$  einer so genannten Quantentransfermatrix (QTM) mit Spektralparameter  $\lambda = 0$  zu erhalten.

Die Methodik des thermodynamischen Bethe-Ansatzes (TBA) wurde erstmals 1969 von C. N. Yang und C. P. Yang [75] für das 1D Bose-Gas eingeführt und 1971 von M. Gaudin [16] und M. Takahashi [63] auf die mittels Bethe-Ansatz lösbare 1D Heisenberg-Kette übertragen. Die Verallgemeinerung auf weitere integrable 1D Modelle, wie etwa das 1D Hubbard-Modell [64] oder die XXZ-Kette [68, 71], bildet in der Literatur eine Klasse, die mit dem Begriff TBA überschrieben ist:

Angenommen, der Grundzustand des Systems korrespondiert zu reellen Wurzeln der Bethe-Ansatz-Gleichungen. Dann werden die Anregungen über dem Grundzustand durch komplexwertige Lösungen dargestellt, die sich zu Strings anordnen [67, 71] und durch ein Stringzentrum auf der reellen Achse charakterisiert sind. Die Thermodynamik in den Bethe-Ansatz-Lösungen ist mit der Thermodynamik von Teilchen und Löchern vergleichbar: Die Menge aller möglichen Stringlösungen werden als freie Plätze eines Gitters interpretiert, die von Teilchen besetzt werden können. Jedes Teilchen entspricht einer Stringlösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen und ein nicht besetzter Platz ist in diesem Bild einem Loch äquivalent. Wird eine feste Konfiguration der Besetzung vorgegeben, liegt die innere Energie durch Zählen der Teilchenbeiträge fest, und die zu der Realisierung passende Entropie wird als Mischungsentropie von Teilchen und Löchern eingeführt. Mit einer Legendre-Transformation auf die Freie Energie wird schließlich die Temperatur des Systems definiert.

Im thermodynamischen Limes weichen die Stringzentren auf der reellen Achse Dichteverteilungen von Teilchen und Löchern, und die Freie Energie wird zu einem Funktional. Die in diesem Stadium noch willkürlichen Dichten beschreiben das System in einem beliebig gearteten Zustand außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichtes. Die Minimierung der Freien Energie im Rahmen eines Variationsverfahrens führt schließlich auf einen unendlichen Satz von gekoppelten Integralgleichungen (TBA-Gleichungen), welche die Dichteverteilungen im thermodynamischen Gleichgewicht fixieren.

Ein prinzipiell anderer Zugang zur Thermodynamik quantenmechanischer Systeme beruht auf der Trotter-Suzuki-Zerlegung [56, 57, 72] des statistischen Operators  $e^{-H/T}$ . Diese entspricht einer Pfadintegraldarstellung [36], mit der ein beliebiges, quantenme-

chanisches System in  $d$  Dimensionen auf ein  $(d+1)$ -dimensionales klassisches System abgebildet werden kann [56, 57]. Die Abbildung auf das klassische System ist nicht eindeutig, das Vorgehen aber ist universell anwendbar. So kann etwa das 1D Ising-Modell in einem transversalen Feld mit L. Onsagers Lösung [49] des 2D Ising-Modells in Beziehung gesetzt [57] oder das klassische Monte-Carlo-Verfahren auf die Thermodynamik der 1D Heisenberg-Kette sowie des 2D XY-Modells angewandt werden [62]. Letzteres Beispiel bildet allgemein als Quanten-Monte-Carlo-Verfahren (z.B. [58, 59]) eine eigene Disziplin in der statistischen Physik, quantenmechanische Systeme bei endlichen Temperaturen numerisch zu untersuchen.

Ein besonders Augenmerk galt mit der Entdeckung von 1D Strukturen in Festkörpern den Spin-Ketten mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung. Die zugeordnete Pfadintegraldarstellung des statistischen Operators fügt dem Modell in imaginärer Zeitrichtung einen Streifen hinzu, der zum Wert der inversen Temperatur proportional ist und dessen Zerlegung in imaginäre Zeitschritte durch die Trotter-Zahl vorgegeben ist. Wird der 1D Hamilton-Operator in zwei Summen mit jeweils kommutierenden Summanden aufgeteilt, ergibt die graphische Darstellung des Pfadintegrals eine Schachbrettstruktur [2, 57]. Der englische Begriff *Checkerboard* ist suggestiver, charakterisieren doch diagonale Kreuze in abwechselnd jedem zweiten Feld die neu generierten Wechselwirkungen von jeweils vier Spins. Die von M. Suzuki [57] alternativ vorgestellte Aufteilung des Hamilton-Operators in einzelne Zwei-Platz-Terme ergibt in der graphischen Übersetzung ein verzerrtes Schachbrett, das aufgrund der Periodizität in Trotter-Richtung mit dem ursprünglichen äquivalent ist [50].

Die Zustandssumme des zugeordneten 2D klassischen Ising-Systems mit Vier-Spin-Wechselwirkung wurde 1984 von H. Betsuyaku [6, 7] mit der Transfermatrixmethode numerisch untersucht. Es zeigte sich, dass die Konvergenzrate von der gewählten Pfadintegraldarstellung abhängig und daher die verzerrte Schachbrettstruktur zu bevorzugen ist. Die mit dieser Zerlegung verknüpfte Transfermatrix ist bereits die QTM, so wie sie heute verstanden wird.

Die QTM wieder als ein integrables und per Bethe-Ansatz lösbares Modell aufzufassen, geht auf die Arbeit von T. Koma [41, 42] aus dem Jahre 1987 zurück: Für die XXZ-Kette im äußeren Feld und für das Heisenberg-Modell konnte die Freie Energie pro Gitterplatz durch den führenden Eigenwert der QTM als  $f = -T \ln \Lambda_{max}$  ausgedrückt und die  $\Lambda_{max}$  charakterisierenden Bethe-Ansatz-Gleichungen numerisch ausgewertet werden. Von den insgesamt sechzehn Boltzmann-Gewichten der Vier-Spin-Wechselwirkung sind für die Heisenberg- und XXZ-Kette nur sechs Gewichte von Null verschieden, weshalb die QTM der Diagonaltransfermatrix des Sechs-Vertex-Modells äquivalent ist. Zwar beruht die Lösung des Sechs-Vertex-Modells [4] auf Reihentransfermatrizen, wie aber R. Z. Bariev, T. T. Truong und K. D. Schotte [1, 73] in den 80er Jahren zeigten, ist eine Lösung auch mit Diagonaltransfermatrizen möglich. Letztere wiederum korrespondieren zu Reihentransfermatrizen eines dann inhomogenen Sechs-Vertex-Modells [55]. Die QTM hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die aus dem kompletten Spektrum des 1D Modells gebildete Zustandssumme im thermodynamischen Limes auf einen einzigen Eigenwert reduziert werden kann. Es ist somit im Vergleich zur herkömmlichen Transfermatrix des TBA keine Stringhypothese nötig, welche die Vollständigkeit der Bethe-Zustände beschreibt. Allerdings tritt durch die Pfadintegraldarstellung die Trotter-Zahl  $N$  als zusätzlicher Parameter auf, der im

Limes  $N \rightarrow \infty$  gesehen werden muss und die Zahl der Eigenwerte und Zustände der QTM exponentiell anwachsen lässt.

Mit der Identifizierung des Sechs-Vertex-Modells als 2D klassisches Gegenstück zu der 1D XXZ-Kette für Spin- $\frac{1}{2}$  gibt es zwei Möglichkeiten, den führenden Eigenwert zu ermitteln: Zum einen ist die QTM mit dem Bethe-Ansatz diagonalisierbar. Zum anderen erfüllen die Eigenwerte zu höheren Spindarstellungen untereinander einen Satz von Funktionalgleichungen (Fusionshierarchie), aus denen unter bestimmten Voraussetzungen der Eigenwert für Spin- $\frac{1}{2}$  folgt.

Wie die bisherigen Stationen in der Entwicklung der QTM zeigten, ist das Eigenwertproblem mit dem Bethe-Ansatz lösbar. Im thermodynamischen Limes ergibt der führende Eigenwert die Freie Energie [41,42], während die nächstführenden Eigenwerte Korrelationslängen [66] bestimmen. Das der QTM zugeordnete Ersatzmodell ist nicht-kritisch und der führende Eigenwert ist von den folgenden durch eine endliche Lücke getrennt. Der Trotter-Limes am Ende der Diagonalisierung wurde z.B. numerisch durch Extrapolation des Eigenwertes gebildet [41,42] oder auch analytisch in den Bethe-Ansatz-Gleichungen und Eigenwerten durchgeführt [65,66]. Äußere Magnetfelder können durch veränderte Randbedingungen einbezogen werden [38,39,66], ohne dass die Integrabilität verloren geht.

Einen neuen Impuls brachten Anfang der 90er Jahre die Formulierung von Hilfsfunktionen  $\mathbf{a}$  [37,38], die über nichtlineare Integralgleichungen definiert sind und die Bethe-Ansatz-Zahlen ersetzen. Die Freie Energie liest sich darin als Funktional  $f = f[\mathbf{a}]$ , und die enthaltene Kombination  $1/(1 + \mathbf{a})$  ist in natürlicher Weise als verallgemeinerte Fermi-Funktion zu deuten. Der abschließende Trotter-Limes reduziert sich in dieser Darstellung auf einen elementaren Grenzwert, der nur noch die Inhomogenität der definierenden Integralgleichung von  $\mathbf{a}$  betrifft.

Die Behandlung des Bethe-Ansatzes lässt sich auf die Grundlage eines verallgemeinerten Modells [43] stellen, das durch die  $R$ -Matrix der XXZ-Kette definiert ist und über zwei freie Funktionen  $a(\lambda)$  und  $d(\lambda)$ , die auch Parameter genannt werden, verfügt. Die Eigenwerte und -vektoren sind durch den algebraischen Bethe-Ansatz [44] bestimmt und es existieren geschlossene Formeln für Skalarprodukte [53] und Normen [43].

Die Festlegung der beiden Parameter  $a(\lambda)$  und  $d(\lambda)$  des verallgemeinerten Modells für die Darstellung der QTM der XXZ-Kette ergibt neben den Bethe-Ansatz-Gleichungen respektive Hilfsfunktionen zusätzlich die Eigenvektoren. Die Tatsache, dass der Eigenvektor zum führenden Eigenwert die statischen Korrelationen bei endlichen Temperaturen  $T > 0$  bestimmt, wurde in der vorliegenden Arbeit erkannt und erstmals konsequent ausgenutzt.

Ebenfalls mit dem algebraischen Bethe-Ansatz gelang es der Gruppe um J. M. Maillet in einer Reihe von Arbeiten [31–35], verallgemeinerte Dichtematrixelemente, Zwei-Punkt-Korrelationen und Erzeugende von Zwei-Punkt-Funktionen auf der XXZ-Kette bei  $T = 0$  durch Vielfachintegrale darzustellen.

Werden die Parameter des algebraischen Bethe-Ansatzes entsprechend für die gewöhnliche Transfermatrix gewählt, charakterisiert ein bestimmter Satz von Bethe-Ansatz-Zahlen den Grundzustand der XXZ-Kette in Energie und Eigenvektor. Mit der Dar-



stellung von lokalen Spinoperatoren mittels Elementen der Yang-Baxter-Algebra sind dann die Erwartungswerte der Dichtematrizen und Korrelationsfunktionen mit der Skalarproduktformel auswertbar. Im thermodynamischen Limes liegen die Bethe-Ansatz-Zahlen dicht und die Erwartungswerte transformieren sich in Integrale über Dichteverteilungen. So konnten z.B. die Integraldarstellungen der von M. Jimbo et al. [25, 26] erhaltenen Dichtematrixelemente reproduziert und um ein äußeres Feld erweitert werden [35], das in der zu Grunde liegenden Symmetrie von [25, 26] nicht enthalten war. Ein weiteres Beispiel bildet die Erzeugende der  $zz$ -Korrelationsfunktion: Ausgehend von  $m$  benachbarten Kettenplätzen ist durch eine naive Auswertung des Produktes lokaler Operatoren eine exponentiell in  $m$  wachsende Zahl von Summanden zu erwarten. In [33] konnte die erzeugende Funktion jedoch als eine Summe mit nur  $m+1$  Summanden in Form von Vielfachintegralen dargestellt werden.

Mit der Arbeit von M. Jimbo et al. [25] wurden 1992 die Zwei-Punkt-Funktionen auf die Basis von Dichtematrizen gestellt, die den Erwartungswert eines z.B.  $m$ -fachen Tensorproduktes von Elementen der  $gl(2)$ -Standardbasis im Grundzustand ( $T = 0$ ) wiedergeben und somit den Erwartungswert eines beliebigen, auf den Plätzen 1 bis  $m$  der unendlichen Kette wirkenden Operators beschreiben. Aus der Sichtweise der integrierbaren Modelle liegt den Dichtematrizen eine mathematische Struktur zugrunde, die sichtbar wird, wenn man den einzelnen Kettenplätzen 1 bis  $m$  unterschiedliche Inhomogenitäten zuordnet: Die Dichtematrixelemente erfüllen in den Inhomogenitäten einen Satz von Funktionalbeziehungen [8, 9], die als *reduzierte  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen* (rqKZ-Gleichungen) bezeichnet werden. Die inhomogenen Dichtematrixelemente sind durch Vielfachintegrale [25, 26] darstellbar, die zuerst im isotropen  $XXX$ -Limes [10, 11] am Beispiel der *Emptiness Formation Probability* ausgewertet werden konnten. Es ist die Hoffnung des Autors dieser Arbeit, dass sich die hier angegebenen Vielfachintegraldarstellungen für die erzeugende Funktion bei endlichen Temperaturen als ebenso nützlich erweisen. Diese Hoffnung wird bestärkt durch erste konkrete Anwendungen in der Hochtemperaturentwicklung [74] und Numerik [12].

Die nichtlinearen Integralgleichungen für die Hilfsfunktion und die Integraldarstellung des Eigenwertes der QTM können alternativ aus der Fusionshierarchie erhalten werden. Die Transfermatrizen eines Modells zu unterschiedlichen Spindarstellungen im Hilfsraum sind durch Funktionalbeziehungen miteinander verbunden [47]. Die Bildung von Verhältnissen mit anschließender Fouriertransformation der Relationen ergibt einen unendlichen Satz gekoppelter Integralgleichungen vom Faltungstyp. Wird als spezielle Transfermatrix die QTM den Betrachtungen zu Grunde gelegt, lassen sich die TBA-Gleichungen reproduzieren, wie 1998 von G. Jüttner, A. Klümper und J. Suzuki [28] für das  $t, J$ - und erweiterte Hubbard-Modell demonstriert. In diesem Zugang über die Fusionshierarchie wird die Stringhypothese durch Annahmen über die Analytizität der involvierten Funktionen ersetzt. Die Integralgleichungen sind für alle Trotter-Zahlen gültig, und das charakteristische Verhalten der Eigenwerte und Funktionen in ihren analytischen Eigenschaften kann bei einer endlichen Anzahl von Bethe-Ansatz-Wurzeln untersucht werden.

J. Suzuki erkannte 1998 für das  $sl(2)$ -Modell [54] der Fusionshierarchie, dass der unendliche Satz von Integralgleichungen an einer beliebigen Stelle exakt abgeschlossen

und somit auf ein System von endlich vielen Unbekannten abgebildet werden kann. Mit dem Abschluss auf einer beliebigen Ebene sind Modelle mit einem höheren Spin im Quantenraum beschreibbar, während der sofortige Abschluss der Hierarchie die Ergebnisse des QTM-Zugangs zur Spin- $\frac{1}{2}$  Heisenberg-Kette reproduziert.

Ein ähnlicher Schritt gelang 2000 M. Takahashi [68] auf der Ebene der reinen TBA-Gleichungen für die XXZ-Kette: Er konnte den unendlichen Satz gekoppelter Integralgleichungen auf eine Bestimmungsgleichung vereinfachen, die die Freie Energie direkt bestimmt und in ihrer Struktur völlig verschieden war von den TBA-Gleichungen. Die Äquivalenz zu dem QTM-Zugang wurde von ihm 2001 in Zusammenarbeit mit M. Shiroishi und A. Klümper [70] gezeigt.

Ob und wieweit die Fusionshierarchie für die Berechnung von Korrelationsfunktionen von Bedeutung ist, ist bislang noch nicht bekannt. Aber auch für das  $sl(3)$ -Modell können die unendlich vielen gekoppelten Integralgleichungen auf einer beliebigen Ebene der Fusionshierarchie exakt mit, im Vergleich zu [28], modifizierten Hilfsfunktionen abgeschlossen werden [13].

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die unterschiedlich gearteten Zugänge zur Thermodynamik im thermodynamischen Limes, den Trotter-Limes eingeschlossen, einander äquivalent sind und auf die gleiche Freie Energie führen. Die darüber hinausgehende Information über die statischen Korrelationen bei endlichen Temperaturen ist im Eigenvektor zum führenden Eigenwert der QTM verschlüsselt. Die darin begründete Behandlung der Korrelationen mit dem algebraischen Bethe-Ansatz erfolgt in der vorliegenden Arbeit exemplarisch am Beispiel einer ein-parametrischen erzeugenden Funktion [24] für die  $zz$ -Korrelation. Die Erzeugende ist im Rahmen des algebraischen Bethe-Ansatzes viel einfacher zu bestimmen als die  $zz$ -Korrelation direkt und ist im Gegensatz zu anderen einfach zu berechnenden Korrelationsfunktionen, wie der als Grenzfall enthaltenen *Emptiness Formation Probability*, physikalisch interessant. Zudem kann die Kombinatorik aus [33] unverändert übernommen werden, da sowohl die QTM als auch die gewöhnliche Transfermatrix nur verschiedene Darstellungen der gleichen Algebra sind.

Die nachfolgenden Kapitel sind weiter wie folgt organisiert: Die Kapitel 2 und 3 fassen die Yang-Baxter-Algebra für das Sechs-Vertex-Modell zusammen, einschließlich der Integraldarstellungen von Bethe-Ansatz-Gleichungen und führendem Eigenwert. Das Kapitel 4 bildet das Kernstück dieser Arbeit mit der erzeugenden Funktion für die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion  $\langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h}$ : Auf der Grundlage von Skalarprodukten mit dem führenden Eigenvektor der QTM wird erstmals der thermische Erwartungswert der erzeugenden Funktion bei endlichen Temperaturen in einer Vielfachintegraldarstellung angegeben. Das Kapitel 5 beinhaltet weitere Beispiele von  $zz$ -Korrelationsfunktionen und die Kapitel 6 bis 9 behandeln den Hochtemperaturlimes sowie die Grenzfälle des Ising-, XX- und isotropen Heisenberg-Modells. Das Kapitel 10 rundet die Darstellung mit dem Limes  $T = 0$  ab, dessen algebraische Struktur der Verallgemeinerung auf endliche Temperaturen zu Grunde liegt.

## Kapitel 2

# Die XXZ-Kette für Spin- $\frac{1}{2}$

### 2.1 Hamilton-Operator und R-Matrix

Auf einer Kette mit  $L$  Plätzen, dargestellt durch das  $L$ -fache Tensorprodukt  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$  für Spin- $\frac{1}{2}$ -Zustände, ist der Hamilton-Operator

$$H_{XXZ} = c \sum_{j=1}^L \left[ \sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y + \Delta (\sigma_{j-1}^z \sigma_j^z - 1) \right] \quad (2.1)$$

der 1D XXZ-Kette über die Operatoren  $\sigma_j^\alpha$ ,  $\alpha = x, y, z, +, -$  definiert. Die Wirkung von  $\sigma_j^\alpha$  ist nur für den  $j$ -ten Platz ( $j = 1, \dots, L$ ) der Kette als  $2 \times 2$  Pauli-Matrix  $\sigma^\alpha$  nichttrivial und die Verwendung periodischer Ränder bedingt  $\sigma_0^\alpha = \sigma_L^\alpha$ . Die globale Kopplung  $c > 0$  legt die Energieskala fest, während  $\Delta$  der reelle Anisotropieparameter des Modells ist.

Der Hamilton-Operator (2.1) steht in direkter Verbindung mit der trigonometrischen Lösung

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda, \mu) & c(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & c(\lambda, \mu) & b(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} b(\lambda, \mu) &= \frac{\text{sh}(\lambda - \mu)}{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta)} \\ c(\lambda, \mu) &= \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

der Yang-Baxter-Gleichung, mit der nicht nur  $H_{XXZ}$  auf der Grundlage des algebraischen Bethe-Ansatzes diagonalisiert sondern auch die Thermodynamik formuliert werden kann.

Für die Beschreibung der XXZ-Kette ist es ausreichend, sich auf fundamentale Modelle zu beschränken. Das sind solche Modelle, die vollständig durch eine  $d^2 \times d^2$  Matrix  $R(\lambda, \mu) \in \text{End}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$  festgelegt sind, die die Yang-Baxter-Gleichung

$$R_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) R_{\alpha''\gamma'}^{\alpha'\gamma}(\lambda, \nu) R_{\beta''\gamma''}^{\beta'\gamma'}(\mu, \nu) = R_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}(\mu, \nu) R_{\alpha'\gamma''}^{\alpha\gamma'}(\lambda, \nu) R_{\alpha''\beta''}^{\alpha'\beta'}(\lambda, \mu) \quad (2.3)$$

erfüllt. Die Koordinatendarstellung von (2.3) gilt bezüglich des dreifachen Tensorproduktes  $e_\alpha^{\alpha''} \otimes e_\beta^{\beta''} \otimes e_\gamma^{\gamma''}$  einer  $gl(d)$ -Standardbasis  $e_\alpha^\beta \in \text{End}(\mathbb{C}^d)$ ,

$$(e_\alpha^\beta)^{\alpha'}_{\beta'} = \delta_\alpha^{\alpha'} \delta_{\beta'}^\beta, \quad e_\alpha^\beta e_\gamma^\delta = \delta_\gamma^\beta e_\alpha^\delta. \quad (2.4)$$

Mit der kanonischen Einbettung  $e_{j\alpha}^\beta$  der Standardbasis in  $\text{End}(\mathbb{C}^d)^{\otimes L}$  ist (2.3) mit  $R_{jk}(\lambda, \mu) = R_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) e_{j\alpha}^{\alpha'} e_{k\beta}^{\beta'}$  dann äquivalent zu

$$R_{12}(\lambda, \mu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{23}(\mu, \nu) = R_{23}(\mu, \nu)R_{13}(\lambda, \nu)R_{12}(\lambda, \mu) \quad . \quad (2.5)$$

Um einen Zusammenhang der  $R$ -Matrix mit dem Hamilton-Operator herzustellen, wird als erster Schritt für den Platz  $j$  der Kette eine  $L$ -Matrix mit Einträgen

$$L_j^\alpha{}_\beta(\lambda, \mu) = R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) e_{j\gamma}^\delta \in \text{End}(\mathbb{C}^d)^{\otimes L} \quad (2.6)$$

definiert, die sich auch ergeben, wenn die Koordinatendarstellung der Yang-Baxter-Gleichung (2.3) mit  $e_{j\gamma}^{\gamma''}$  multipliziert wird,

$$\check{R}(\lambda, \mu) [L_j(\lambda, \nu) \otimes L_j(\mu, \nu)] = [L_j(\mu, \nu) \otimes L_j(\lambda, \nu)] \check{R}(\lambda, \mu) \quad . \quad (2.7)$$

Es gilt  $\check{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} = R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$  und  $L_j(\lambda, \mu)$  ist dann für alle  $j = 1, \dots, L$  eine Darstellung der Yang-Baxter-Algebra mit  $R$ -Matrix  $R(\lambda, \mu)$ . Diese spezielle Darstellung wird als fundamentale Darstellung bezeichnet. Da die Basen  $e_{j\alpha}^\beta$  für unterschiedliche Plätze kommutieren, ist dies auch für die Einträge  $L_j^\alpha{}_\beta(\lambda, \nu_j)$  der  $L$ -Matrix erfüllt. Es folgt

$$\begin{aligned} [L_j(\lambda, \nu_j) \otimes L_j(\mu, \nu_j)] [L_k(\lambda, \nu_k) \otimes L_k(\mu, \nu_k)] = \\ L_j(\lambda, \nu_j) L_k(\lambda, \nu_k) \otimes L_j(\mu, \nu_j) L_k(\mu, \nu_k) \quad , \quad (2.8) \end{aligned}$$

und  $L_j(\lambda, \nu_j) L_k(\lambda, \nu_k)$  ist (2.7) entsprechend wieder eine Darstellung. Diese Eigenschaft der so genannten Co-Multiplikation gibt in einem zweiten Schritt Anlass zu der Definition der Monodromiematrix

$$T(\lambda) = L_L(\lambda, \nu_L) \cdot \dots \cdot L_1(\lambda, \nu_1) \quad , \quad (2.9)$$

die dann ebenfalls eine Darstellung zu der gleichen  $R$ -Matrix ist,

$$\check{R}(\lambda, \mu) [T(\lambda) \otimes T(\mu)] = [T(\mu) \otimes T(\lambda)] \check{R}(\lambda, \mu) \quad . \quad (2.10)$$

Ist  $R(\lambda, \mu)$  in dem Sinne regulär, dass  $R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda_0, \nu_0) = \delta_\delta^\alpha \delta_\beta^\gamma$  für  $\lambda_0, \nu_0 \in \mathbb{C}$  gilt, dann ist  $L_j^\alpha{}_\beta(\lambda_0, \nu_0) = e_{j\beta}^\alpha$ , und für die durch

$$t(\lambda) = \text{tr} T(\lambda) \quad (2.11)$$

definierte Transfermatrix mit der Eigenschaft  $[t(\lambda), t(\mu)] = 0$  folgt im homogenen Fall  $\nu_j = \nu_0$ ,  $j = 1, \dots, L$  die Entwicklung

$$t(\lambda) = \widehat{U} \exp [(\lambda - \lambda_0)H_L + \mathcal{O}(\lambda - \lambda_0)^2] \quad (2.12)$$

um den Punkt  $\lambda = \lambda_0$ .  $\widehat{U} = t(\lambda_0) = P_{12}P_{23} \dots P_{L-1,L}$  bezeichnet den Rechtsschiebeoperator<sup>1</sup> auf der periodisch geschlossenen Kette, und der Ausdruck  $\widehat{U}^{-1}t'(\lambda_0)$  ist mit  $\check{R}_{01} = \check{R}_{L1}$  per Definition der Hamilton-Operator

$$H_L := \widehat{U}^{-1}t'(\lambda_0) = \sum_{j=1}^L \partial_\lambda \check{R}_{j-1,j}(\lambda_0, \nu_0) \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>In der Standardbasis  $e_{j\alpha}^\beta$  lautet für die Plätze  $j$  und  $k$  der Permutationsoperator  $P_{jk} = e_{j\alpha}^\beta e_{k\beta}^\alpha$

der fundamentalen Darstellung. Als Beispiel führt (2.13) mit der regulären Lösung (2.2) der Yang-Baxter-Gleichung auf

$$H_L = \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\eta)} \sum_{j=1}^L \left[ \sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y + \operatorname{ch}(\eta) (\sigma_{j-1}^z \sigma_j^z - 1) \right] , \quad (2.14)$$

und  $H_{XXZ} = 2c \operatorname{sh}(\eta) H_L$  ist der Zusammenhang zu der  $XXZ$ -Kette mit der Parametrisierung  $\Delta = \operatorname{ch}(\eta)$ .

## 2.2 Einbeziehung der Thermodynamik: Die Quantentransfermatrix

Als Alternative zu der Definition (2.6) kann eine  $L$ -Matrix auch mit vertauschter Bedeutung von Quanten- und Hilfsraum<sup>2</sup> der  $R$ -Matrix mittels

$$\bar{L}_j^{\alpha}{}_{\beta}(\lambda, \nu_j) = R^{\gamma\alpha}{}_{\delta\beta}(\nu_j, \lambda) e_{j\gamma}{}^{\delta} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^d)^{\otimes L} \quad (2.15)$$

konstruiert werden. Dann hat im homogenen Fall  $\nu_j = \lambda_0$ ,  $j = 1, \dots, L$  die aus der Monodromiematrix  $\bar{T}(\lambda) = \bar{L}_1(\lambda, \nu_1) \cdot \dots \cdot \bar{L}_L(\lambda, \nu_L)$  abgeleitete Transfermatrix  $\bar{t}(\lambda) = \operatorname{tr} \bar{T}(\lambda)$  die Entwicklung

$$\bar{t}(\lambda) = \exp \left[ -(\lambda - \nu_0) H_L + \mathcal{O}(\lambda - \nu_0)^2 \right] \widehat{U}^{-1} \quad (2.16)$$

um den Punkt  $\lambda = \nu_0$ , wenn  $R(\lambda, \mu)$  der Bedingung  $\partial_\lambda R(\lambda, \mu) = -\partial_\mu R(\lambda, \mu)$  genügt. Diese Relation ist z.B. trivial erfüllt für  $R$ -Matrizen in Differenzenform, aber auch für die  $R$ -Matrix des Hubbard-Modells. Ergänzend sei angemerkt, dass  $\bar{T}(\lambda)$  die Darstellung einer Yang-Baxter-Algebra

$$\mathbb{R}^{-1}(\lambda, \mu) [\bar{T}(\lambda) \otimes \bar{T}(\mu)] = [\bar{T}(\mu) \otimes \bar{T}(\lambda)] \mathbb{R}^{-1}(\lambda, \mu) \quad (2.17)$$

mit der Matrix  $\mathbb{R}^{\alpha\gamma}{}_{\beta\delta}(\lambda, \mu) = R^{\alpha\gamma}{}_{\delta\beta}(\lambda, \mu)$  ist. Dies ist aus der fundamentalen Darstellung ersichtlich, die sich aus Multiplikation der Yang-Baxter-Gleichung (2.3) mit  $e_{j\alpha}{}^{\alpha'}$  und anschließender Substitution  $\mu \rightarrow \lambda, \nu \rightarrow \mu, \lambda \rightarrow \nu$  ergibt.

### Die Trotter-Suzuki-Formel

Die Beschreibung der Thermodynamik des durch  $H_L$  gegebenen Systems erfolgt durch Auswerten der Zustandssumme  $Z = \operatorname{tr} e^{-\beta H_L}$  mit der inversen Temperatur  $\beta$ . Dazu ist ein Exponentialausdruck der Matrix  $H_L$  zu bestimmen, für den die Relation

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{X_M}{M} \right)^M = e^X \quad (2.18)$$

ausgenutzt wird. Die Trotter-Suzuki-Formel (2.18) ist nicht nur für eine beliebige gegen  $X$  konvergierende Folge  $(X_M)_{M \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen, sondern auch für quadratische Matrizen gültig [58]. Als Beispiel einer Anwendung folgt aus (2.12)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \widehat{U}^{-1} t \left( \lambda_0 - \frac{\beta}{N} \right) \right]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{N} \left( -\beta H_L + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right) \right]^N = e^{-\beta H_L} . \quad (2.19)$$

<sup>2</sup>In der Darstellung von  $R(\lambda, \mu) \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$  kann der mit dem Kettenplatz identifizierbare Raum als Quantenraum bezeichnet werden, während der zweite Raum dann für die Indizierung der Einträge der  $L$ -Matrix dient und als Hilfsraum bezeichnet werden kann.

Eine Möglichkeit, den Linksschiebeoperator  $\widehat{U}^{-1}$  in der Trotter-Suzuki-Formel (2.19) zu vermeiden, ist die Kombination beider Transfermatrizen  $t(\lambda)$  und  $\bar{t}(\lambda)$ , ausgedrückt durch die Beziehung

$$\bar{t}(-\lambda + \nu_0) t(\lambda + \lambda_0) = 1 + 2\lambda H_L + \mathcal{O}(\lambda^2) = 1 + 2\lambda X(\lambda) \quad . \quad (2.20)$$

Die Wahl  $\lambda = -\beta/N$ ,  $N/2 \in \mathbb{N}$  führt dann mit  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} X(\lambda) = H_L$  zu der approximierten Darstellung

$$\rho_{N,L} = \left[ \bar{t}\left(\frac{\beta}{N} + \nu_0\right) t\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0\right) \right]^{\frac{N}{2}} = \left[ 1 + \frac{2}{N} \left( -\beta H_L + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right) \right]^{\frac{N}{2}} \quad (2.21)$$

des statistischen Operators, die im so genannten Trotter-Limes  $N \rightarrow \infty$  den exakten Exponentialausdruck  $e^{-\beta H_L}$  als Grenzwert enthält.

### Die Quantentransfermatrix

Die Verwendung beider Transfermatrizen  $t(\lambda)$  und  $\bar{t}(\lambda)$  in (2.21) führt vor dem Hintergrund integrierbarer Modelle zu einer natürlichen Definition der Quantentransfermatrix. Dazu werden die insgesamt  $N$  Hilfsräume, bezüglich derer die Spuren der Monodromiematrizen  $T(\lambda)$  bzw.  $\bar{T}(\lambda)$  gebildet werden, mit  $\bar{1}, \dots, \bar{N}$  indiziert und an den entsprechenden Monodromiematrizen vermerkt, z.B.  $t(\lambda) = \text{tr}_{\bar{j}} T_{\bar{j}}(\lambda)$ . Ferner lassen sich  $T(\lambda)$  und  $\bar{T}(\lambda)$  mit  $R$ -Operatoren ausdrücken durch

$$T_{\bar{j}}(\lambda) = R_{\bar{j}L}(\lambda, \nu_0) \dots R_{\bar{j}1}(\lambda, \nu_0) \quad (2.22a)$$

$$\text{und } \bar{T}_{\bar{j}}(\lambda) = R_{1\bar{j}}(\lambda_0, \lambda) \dots R_{L\bar{j}}(\lambda_0, \lambda) \quad . \quad (2.22b)$$

Für die approximierte Darstellung des statistischen Operators folgt damit

$$\begin{aligned} \rho_{N,L} &= \text{tr}_{\bar{1}, \dots, \bar{N}} \left[ \bar{T}_{\bar{N}}\left(\frac{\beta}{N} + \nu_0\right) T_{\bar{N}-1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0\right) \dots \bar{T}_{\bar{2}}\left(\frac{\beta}{N} + \nu_0\right) T_{\bar{1}}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0\right) \right] \\ &= \text{tr}_{\bar{1}, \dots, \bar{N}} \left[ \bar{T}_{\bar{N}}\left(\frac{\beta}{N} + \nu_0\right) T_{\bar{N}-1}^t\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0\right) \dots \bar{T}_{\bar{2}}\left(\frac{\beta}{N} + \nu_0\right) T_{\bar{1}}^t\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0\right) \right] \\ &= \text{tr}_{\bar{1}, \dots, \bar{N}} \left[ R_{1\bar{N}}\left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0\right) \dots R_{L\bar{N}}\left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0\right) \right. \\ &\quad \left. R_{\bar{N}-1,1}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \dots R_{\bar{N}-1,L}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \right. \\ &\quad \dots \\ &\quad \left. R_{1\bar{2}}\left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0\right) \dots R_{L\bar{2}}\left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0\right) \right. \\ &\quad \left. R_{\bar{1}1}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \dots R_{\bar{1}L}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \right] \\ &= \text{tr}_{\bar{1}, \dots, \bar{N}} \left[ R_{1\bar{N}}\left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0\right) R_{\bar{N}-1,1}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \dots R_{\bar{1}1}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \right. \\ &\quad \dots \\ &\quad \left. R_{L\bar{N}}\left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0\right) R_{\bar{N}-1,L}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \dots R_{\bar{1}L}^{t_1}\left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0\right) \right] \\ &= \text{tr}_{\bar{1}, \dots, \bar{N}} \left[ T_1^{QTM}(\lambda_0) \dots T_L^{QTM}(\lambda_0) \right] \quad , \quad (2.23) \end{aligned}$$

wenn die Transposition  $t_1$  bezüglich des ersten Raumes (Hilfsraumes) in der dritten Gleichung durch  $R^{t_1}_{\beta\delta} = R^{\beta\gamma}_{\alpha\delta}$  definiert ist und zusätzlich  $\lambda_0 = \nu_0 =: \xi$  als Argument der Quantenmonodromiematrix

$$T_j^{QTM}(\lambda) = R_{j\bar{N}}(\lambda, \frac{\beta}{N} + \nu_0) R_{\bar{N}-1,j}^{t_1}(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \lambda) \dots R_{\bar{1}j}^{t_1}(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \lambda) \quad (2.24)$$

im Raum  $j$ ,  $j = 1, \dots, L$  angenommen wird. Der ursprüngliche Quantenraum  $j$  (die Beschreibung des  $j$ -ten Platzes der Kette) wird zum Hilfsraum der Quantenmonodromiematrix  $T_j^{QTM}(\lambda)$ , bezüglich dessen man die Quantentransfermatrix

$$t_N^{QTM}(\lambda) = \text{tr}_j T_j^{QTM}(\lambda) \quad (2.25)$$

durch Spurbildung gewinnt. Mit der inversen Temperatur  $\beta$  als Inhomogenität einer Ersatzspinkette mit  $N$  Plätzen  $\bar{1}, \dots, \bar{N}$  bilden (2.24) und (2.25) den Zugang zur Thermodynamik.

Einerseits ist die Quantentransfermatrix für die Thermodynamik von Bedeutung, da im thermodynamischen Limes  $L \rightarrow \infty$  die Freie Energie der  $XXZ$ -Kette durch den führenden Eigenwert bestimmt ist. Denn ausgehend von einer endlichen Kettenlänge  $L$ , lautet die Zustandssumme im Trotter-Limes

$$Z_L = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\text{tr}_{\bar{1} \dots \bar{L}} \rho_{N,L}}_{=: Z_{N,L}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{\bar{1} \dots \bar{N}} \left[ t_N^{QTM}(\lambda_0) \right]^L = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^L(\lambda_0) \quad , \quad (2.26)$$

wenn  $\Lambda_n(\lambda_0)$  die Eigenwerte der Quantentransfermatrix im Limes  $N \rightarrow \infty$  zum Spektralparameter  $\lambda_0$  darstellen. Sei im folgenden angenommen, dass

- (i) die Limites  $L \rightarrow \infty$  und  $N \rightarrow \infty$  vertauschen, vgl. hierzu [58, 61], und
- (ii) der größte Eigenwert der Quantentransfermatrix reell, positiv und nicht entartet ist und im Trotter-Limes von dem nächstführenden Eigenwert durch eine endliche Lücke getrennt bleibt<sup>3</sup>.

Dann wird im thermodynamischen Limes die Freie Energie pro Gitterplatz

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_{N,L}}{\beta L} = - \frac{\ln \Lambda_0(\lambda_0)}{\beta} \quad (2.27)$$

durch einen einzigen Eigenwert, den führenden Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda_0)$  der Quantentransfermatrix im Trotter-Limes, beschrieben, ohne dass auf die unendlich vielen Eigenwerte der herkömmlichen Transfermatrix  $t(\lambda)$  für das Spektrum des Hamilton-Operators  $H_L$  zurückgegriffen werden muss.

<sup>3</sup>Diese Eigenschaft lässt sich für  $\beta = 0$  beweisen. Aus der Regularität der  $R$ -Matrizen resultiert die Funktionalbeziehung

$$t_N^{QTM}(\lambda_0) t_N^{QTM}(\lambda_0) = d t_N^{QTM}(\lambda_0) \quad ,$$

die alle Eigenwerte auf  $\Lambda(\lambda_0) = 0$  oder  $\Lambda(\lambda_0) = d$  festlegt. Die Spurbildung  $\text{tr}_{\bar{1} \dots \bar{N}} t_N^{QTM}(\lambda_0) = d$  gibt schließlich Aufschluss darüber, dass mit Ausnahme eines einzelnen Eigenwertes  $\Lambda_0(\lambda_0) = d$  alle weiteren den Wert  $\Lambda(\lambda_0) = 0$  annehmen.

Andererseits sind die Eigenwerte der Quantentransfermatrix

$$t_N^{QTM}(\lambda) = \tilde{L}_{N \beta_N}^{\beta_1}(\lambda, \frac{\beta}{N} + \nu_0) \tilde{L}_{N-1 \beta_{N-1}}^{\beta_N}(\lambda, -\frac{\beta}{N} + \lambda_0) \dots \tilde{L}_1^{\beta_2}(\lambda, -\frac{\beta}{N} + \lambda_0) \quad (2.28)$$

$$\tilde{L}_{\bar{j} \beta}^{\alpha}(\lambda, \mu) = \begin{cases} R_{\beta \delta}^{\alpha \gamma}(\lambda, \mu) e_{\bar{j} \gamma}^{\delta} & , \text{ falls } \bar{j} \text{ gerade} \\ R_{\delta \beta}^{t_1 \gamma \alpha}(\mu, \lambda) e_{\bar{j} \gamma}^{\delta} & , \text{ falls } \bar{j} \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.29)$$

über den algebraischen Bethe-Ansatz zugänglich, denn für gerade  $\bar{j}$  ist  $\tilde{L}_{\bar{j}}(\lambda, \mu)$  die bereits bekannte fundamentale Darstellung (2.6) der  $R$ -Matrix  $R(\lambda, \mu)$ . Eine Transposition der Yang-Baxter-Gleichung (2.5) bezüglich Raum 1 führt auf

$$R_{23}(\lambda, \mu) R_{12}^{t_1}(\nu, \lambda) R_{13}^{t_1}(\nu, \mu) = R_{13}^{t_1}(\nu, \mu) R_{12}^{t_1}(\nu, \lambda) R_{23}(\lambda, \mu) \quad (2.30)$$

und identifiziert  $\tilde{L}_{\bar{j}}(\lambda, \mu)$  für ungerade  $\bar{j}$  ebenfalls als fundamentale Darstellung zur  $R$ -Matrix  $R(\lambda, \mu)$ . Mit der Eigenschaft der Co-Multiplikation ist somit für  $j \neq k$

$$R_{jk}(\lambda, \mu) T_j^{QTM}(\lambda) T_k^{QTM}(\mu) = T_k^{QTM}(\mu) T_j^{QTM}(\lambda) R_{jk}(\lambda, \mu) \quad . \quad (2.31)$$

## 2.3 Die Korrelationen bei endlichen Temperaturen

Die Beschreibung der Thermodynamik über die Quantentransfermatrix ermöglicht es, für endliche Temperaturen die Korrelationsfunktionen

$$\langle X_j^{(1)} \dots X_k^{(k-j+1)} \rangle_T = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}_{1, \dots, L} e^{-\beta H_L} X_j^{(1)} \dots X_k^{(k-j+1)}}{\text{tr}_{1, \dots, L} e^{-\beta H_L}} \quad (2.32)$$

beliebiger lokaler Operatoren  $X_j^{(1)}, \dots, X_k^{(k-j+1)}$  mit  $j, k \in \{1, \dots, L\}$ ,  $j \leq k$  über den algebraischen Bethe-Ansatz zu bestimmen. Mit (2.23) und (2.26) folgt für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} & \langle X_j^{(1)} \dots X_k^{(k-j+1)} \rangle_T \\ &= \lim_{N, L \rightarrow \infty} \text{tr}_{\bar{1} \dots \bar{N}} \text{tr}_{1 \dots L} T_1^{QTM}(\lambda_0) \dots T_L^{QTM}(\lambda_0) X_j^{(1)} \dots X_k^{(k-j+1)} / Z_{N, L} \\ &= \lim_{N, L \rightarrow \infty} \text{tr}_{\bar{1} \dots \bar{N}} [t^{QTM}(\lambda_0)]^{j-1} \text{tr} [T^{QTM}(\lambda_0) X^{(1)}] \dots \text{tr} [T^{QTM}(\lambda_0) X^{(k-j+1)}] \\ & \quad \times [t^{QTM}(\lambda_0)]^{L-k} / Z_{N, L} \quad , \end{aligned}$$

wobei durch die Spurbildung  $\text{tr}_{1 \dots L}$  in den Quantenräumen die lokalen Operatoren  $X_j^{(n)}$  durch Elemente der Quantenmonodromiematrix dargestellt werden,

$$X^{(n)}(\lambda) = \text{tr} [T^{QTM}(\lambda) X^{(n)}] \quad . \quad (2.33)$$



Ist die Quantentransfermatrix auf Diagonalgestalt transformierbar, wie dies z.B. bei der XXZ-Kette möglich ist, folgt weiter

$$\begin{aligned}
& \langle X_j^{(1)} \dots X_k^{(k-j+1)} \rangle_T \\
&= \lim_{N, L \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{d^N-1} \Lambda_n^{L-k+j-1}(\lambda_0) \langle \psi_n \| X^{(1)}(\lambda_0) \dots X^{(k-j+1)}(\lambda_0) | \psi_n \rangle}{\sum_{n=0}^{d^N-1} \Lambda_n^L(\lambda_0) \langle \psi_n \| \psi_n \rangle} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_0^{j-k-1}(\lambda_0) \frac{\langle \psi_0 \| X^{(1)}(\lambda_0) \dots X^{(k-j+1)}(\lambda_0) | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 \| \psi_0 \rangle} . \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Im thermodynamischen Limes wird die Korrelationsfunktion durch einen einzigen Eigenvektor  $|\psi_0\rangle$  und den zugeordneten führenden Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda_0)$ , die beide von der Trotterzahl  $N$  abhängen, bestimmt.

**Bemerkung.** Die Möglichkeit der Vertauschung von Trotter-Limes und thermodynamischem Limes ergibt bei endlichen Trotter-Zahlen  $N$  im Limes  $L \rightarrow \infty$  so genannte approximierte Darstellungen, wie etwa von der Freien Energie pro Gitterplatz (2.27) oder von den Korrelationsfunktionen (2.34).

### Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette

Die Quantenmonodromiematrix (2.24) der XXZ-Kette ist, bezogen auf ihren Hilfsraum, eine  $2 \times 2$ -Matrix,

$$T^{QTM}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} . \tag{2.35}$$

**Beispiel 1.** Seien  $X^{(1)} = \sigma^-$ ,  $X^{(k-j+1)} = \sigma^+$  und die verbleibenden  $X^{(n)} = I_2$  ( $I_d$  ist allgemein die  $d \times d$  Einheitsmatrix), dann liefert die Anwendung von (2.34)

$$\langle \sigma_j^- \sigma_k^+ \rangle_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_0^{j-k-1}(\lambda_0) \frac{\langle \psi_0 \| B(\lambda_0) [A(\lambda_0) + D(\lambda_0)]^{k-j-1} C(\lambda_0) | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 \| \psi_0 \rangle} . \tag{2.36}$$

**Beispiel 2.** Seien  $X^{(1)} = \dots = X^{(k-j+1)} = \exp(\varphi e_2^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix}$  mit  $j = 1$  und  $k = m$ , dann lautet die entsprechende Korrelationsfunktion

$$\left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_0^{-m}(\lambda_0) \frac{\langle \psi_0 \| [A(\lambda_0) + e^\varphi D(\lambda_0)]^m | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 \| \psi_0 \rangle} , \tag{2.37}$$

die eine Erzeugende [24] der  $zz$ -Korrelationsfunktion ist,

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_T = (2D_m^2 \partial_\varphi^2 - 4D_m^1 \partial_\varphi + 1) \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_T \Big|_{\varphi=0} . \tag{2.38}$$

$D_m^1$  und  $D_m^2$  bedeuten die erste und zweite diskrete Gitterableitung, die auf einer beliebigen komplexwertigen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert sind durch

$$D_m^1 a_m = a_m - a_{m-1} \quad \text{und} \quad D_m^2 a_m = a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1} . \tag{2.39}$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für die Erzeugende (2.37) aus dem algebraischen Bethe-Ansatz eine Vielfachintegraldarstellung abzuleiten. Die Vorzüge von (2.37) gegenüber Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen wie (2.36) sind

- (i) die zusätzlich enthaltenen Korrelationsfunktionen der Magnetisierung und *Emp-tiness Formation Probability* sowie
- (ii) die einfachere Struktur auf der Ebene der Yang-Baxter-Algebra, denn der auftretende Term  $A(\lambda_0) + e^\varphi D(\lambda_0)$  kann als deformierte<sup>4</sup> Quantentransfermatrix  $t_\varphi(\lambda) := A(\lambda) + e^\varphi D(\lambda)$  aufgefasst werden.

Es erweist sich für die Bestimmung des Erwartungswertes auf der rechten Seite von (2.37) als notwendig, eine inhomogene XXZ-Kette zu betrachten und erst nach Durchführung aller Manipulationen den homogenen Limes  $\xi_j \rightarrow \xi = \lambda_0 = \nu_0$  zu bilden. Denn für gleiche Spektralparameter  $\lambda = \mu$  werden die Vertauschungsrelationen (2.10) singular, und eine Auswertung mittels der Yang-Baxter-Algebra ist nur möglich, wenn die Argumente  $\lambda_0$  regularisiert werden. Die für endliche Trotter-Zahlen  $N$  über der Menge  $\{\xi\} = \{\xi_j\}_{j=1}^m$  definierte Funktion

$$\Phi_N(\varphi|\{\xi\}) = \frac{\langle \psi_0 | \left[ \prod_{j=1}^m t_\varphi(\xi_j) \right] \left\{ \prod_{j=1}^m t_0^{-1}(\xi_j) \right\} | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \quad (2.40)$$

ist aufgrund von  $[t_\varphi(\lambda), t_\varphi(\mu)] = 0$  symmetrisch bezüglich der  $\xi_j$  und eine so genannte approximierte Darstellung der Erzeugenden (2.37) mit

$$\left\langle \exp \left[ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right] \right\rangle_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow \xi} \Phi_N(\varphi|\{\xi\}) \quad . \quad (2.41)$$

Für das weitere Vorgehen wird eine Integraldarstellung von  $\Phi_N(\varphi|\{\xi\})$  auf der Grundlage des algebraischen Bethe-Ansatzes in einer Form bestimmt, in der der homogene Limes sowie der Trotter-Limes möglich sind.

---

<sup>4</sup>Da  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix}$  genau wie  $T^{QTM}(\lambda)$  eine Darstellung der Yang-Baxter-Algebra zur  $R$ -Matrix (2.2) der XXZ-Kette ist, folgt aus der Eigenschaft der Co-Multiplikation, dass  $[t_\varphi(\lambda), t_\varphi(\mu)] = 0$  gilt.

## Kapitel 3

# Die Thermodynamik der XXZ-Kette

Zur Beschreibung der anisotropen Heisenberg-Kette bei endlichen Temperaturen stehen (bislang) drei Möglichkeiten zur Auswahl:

- (i) Der TBA [16, 63, 75] stellt die Freie Energie als Funktional  $f = f[\rho]$  von Verteilungsdichten  $\rho$  dar, die aus der Stringhypothese folgen und im thermodynamischen Gleichgewicht durch die TBA-Gleichungen definiert sind. Korrelationen sind in diesem Zugang ausgespart.
- (ii) Die Pfadintegraldarstellung des statistischen Operators führt über ein 2D klassisches Ersatzproblem zu einer per Bethe-Ansatz lösbaren so genannten QTM [6, 41], deren führender Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda)$  im thermodynamischen Limes die Freie Energie  $f = -T \ln \Lambda(0)$  des Systems bestimmt, während der zugeordnete Eigenvektor alle Informationen über die statischen Korrelationen enthält.
  - (a) In der Fusionshierarchie [47] erfüllen die Eigenwerte der QTM zu höheren Spindarstellungen untereinander einen Satz von Funktionalgleichungen, aus dem unter bestimmten Voraussetzungen der Eigenwert – und nur der Eigenwert – für Spin- $\frac{1}{2}$  folgt.
  - (b) Nur der algebraische Bethe-Ansatz adressiert zusätzlich den Eigenvektor und damit die Korrelationsfunktionen. Die Formulierung des Bethe-Ansatzes über die nichtlineare Integralgleichung einer Hilfsfunktion [37–39] macht es zudem möglich, den Trotter-Limes analytisch zu bilden und die Freie Energie als Funktional  $f = f[\mathbf{a}]$  dieser Hilfsfunktion  $\mathbf{a}$  anzugeben.

### 3.1 Der algebraische Bethe-Ansatz

Die Diagonalisierung der Transfermatrix über den algebraische Bethe-Ansatz für die  $R$ -Matrix (2.2) beruht auf der direkten Anwendung der quadratischen Vertauschungsrelationen mit

$$\check{R}(\lambda, \mu) \left[ \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \right] \check{R}(\lambda, \mu) \quad (3.1)$$

der zu der Monodromiematrix  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  angeordneten Elemente der Yang-Baxter-Algebra. Eine hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit des algebraischen Bethe-

Ansatzes ist hierfür die Wirkung der Monodromiematrix als obere Dreiecksmatrix bezüglich eines Pseudovakuums  $|0\rangle$ ,

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad B(\lambda)|0\rangle \neq 0, \quad C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle \quad . \quad (3.2)$$

Die willkürlich wählbaren Eigenwerte  $a(\lambda)$  und  $d(\lambda)$  der Diagonaleinträge bestimmen dann vollständig die Lösung des algebraischen Bethe-Ansatzes und werden deshalb auch als seine Parameter bezeichnet. Für Details sei auf das Lehrbuch [44] verwiesen. Der Vektor

$$|\{\lambda\}\rangle = |\{\lambda_j\}_{j=1}^M\rangle = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_M)|0\rangle \quad (3.3)$$

ist Eigenvektor zu der betrachteten Transfermatrix, wenn die Rapiditäten (oder Bethe-Ansatz-Zahlen)  $\lambda_j$  für  $j = 1 \dots, M$  das Gleichungssystem

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \frac{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k - \eta)} \quad (3.4)$$

erfüllen. Der zum Eigenvektor  $|\{\lambda\}\rangle$  zugeordnete Eigenwert ist

$$\Lambda(\lambda) = a(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_j - \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_j)} + d(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_j + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_j)} \quad . \quad (3.5)$$

Der bisherige Überblick beruhte allein auf der darstellungsfreien Anwendung algebraischer Relationen. Ist nun für die Quantentransfermatrix als explizite Darstellung das Pseudovakuum  $|0\rangle = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{\otimes \frac{N}{2}}$  mit den Zuständen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  auf den geraden Plätzen und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  auf den ungeraden Plätzen vorgegeben, dann kann die Wirkung<sup>1</sup> der  $L$ -Matrix (2.29)

$$\tilde{L}_{\bar{j}}(\lambda, \nu) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e_{\bar{j}_1}^{-1} + b(\lambda, \nu) e_{\bar{j}_2}^{-2} & c(\lambda, \nu) e_{\bar{j}_2}^{-1} \\ c(\lambda, \nu) e_{\bar{j}_1}^{-2} & b(\lambda, \nu) e_{\bar{j}_1}^{-1} + e_{\bar{j}_2}^{-2} \end{pmatrix}, & \bar{j} \text{ gerade} \\ \begin{pmatrix} e_{\bar{j}_1}^{-1} + b(\nu, \lambda) e_{\bar{j}_2}^{-2} & c(\nu, \lambda) e_{\bar{j}_1}^{-2} \\ c(\nu, \lambda) e_{\bar{j}_2}^{-1} & b(\nu, \lambda) e_{\bar{j}_1}^{-1} + e_{\bar{j}_2}^{-2} \end{pmatrix}, & \bar{j} \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.6)$$

auf  $|0\rangle$  als obere Dreiecksmatrix verifiziert werden,

$$\tilde{L}_{\bar{j}}(\lambda, \nu)|0\rangle = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & c(\lambda, \nu) e_{\bar{j}_2}^{-1} \\ 0 & b(\lambda, \nu) \end{pmatrix} |0\rangle, & \bar{j} \text{ gerade} \\ \begin{pmatrix} b(\nu, \lambda) & c(\nu, \lambda) e_{\bar{j}_1}^{-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |0\rangle, & \bar{j} \text{ ungerade} \end{cases} \quad . \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>mit der Wirkung der Standardbasis

$$\begin{aligned} e_1^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 & e_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ e_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & e_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Quantenmonodromiematrix  $T^{QTM}(\lambda) = \tilde{L}_{\overline{N}}(\lambda, \frac{\beta}{N} + \xi) \dots \tilde{L}_{\overline{1}}(\lambda, -\frac{\beta}{N} + \xi)$  reproduziert sich die Wirkung als obere Dreiecksmatrix. Die hinreichende Bedingung (3.2) für die Anwendbarkeit ist erfüllt mit der aus (3.7) direkt ablesbaren, expliziten Darstellung

$$a(\lambda) = \left( \frac{\text{sh}(\lambda - \xi + \frac{\beta}{N})}{\text{sh}(\lambda - \xi + \frac{\beta}{N} - \eta)} \right)^{\frac{N}{2}}, \quad d(\lambda) = \left( \frac{\text{sh}(\lambda - \xi - \frac{\beta}{N})}{\text{sh}(\lambda - \xi - \frac{\beta}{N} + \eta)} \right)^{\frac{N}{2}} \quad (3.8)$$

der Parameter des algebraischen Bethe-Ansatzes. Für den Term  $-\beta H_L$  des statistischen Operators – und nur für diesen Term – ist mit der Relation  $H_{XXZ} = 2c \text{sh}(\eta) H_L$  die physikalische Temperatur  $T$  über eine Umskalierung von  $\beta$  zu definieren,

$$T = \frac{2c \text{sh}(\eta)}{\beta} . \quad (3.9)$$

### 3.2 Hilfsfunktion und führender Eigenwert

Die weitere Auswertung der (approximierten) erzeugenden Funktionen (2.40) beruht auf einer Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen, die den führenden Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda)$  und den zugehörigen Eigenvektor  $|\psi_0\rangle$  im thermodynamischen Limes festlegt.

Unglücklicherweise zeigt im Fall der Quantentransfermatrix die Verteilung der Rapiditäten  $\{\lambda_j\}_{j=1}^M$  einen Häufungspunkt, wodurch selbst im Trotter-Limes die Verteilung diskret bleibt und nicht, wie für die gewöhnliche Transfermatrix möglich, durch eine Dichtefunktion beschrieben werden kann.

Die Vorgehensweise zu der Umgehung der Dichten wurde in [37, 38] aufgezeigt. Die Darstellung erfolgt hier beginnend am Beispiel  $\Delta > 1$ , d.h.  $\eta$  ist rein reel und kann o.B.d.A. als positiv angesetzt werden. Die  $(\alpha)$   $M = N/2$   $(\beta)$  paarweise verschiedenen,  $(\gamma)$  auf der imaginären Achse verteilten Rapiditäten des führenden Eigenwertes definieren die Hilfsfunktion<sup>2</sup>

$$\mathfrak{a}(\lambda - \xi) = \frac{d(\lambda)}{a(\lambda)} \prod_{l=1}^{N/2} \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_l + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_l - \eta)} \quad (3.10)$$

in einem Koordinatensystem bezüglich  $\xi$  als neuen Ursprung mit den analytischen Eigenschaften, dass

- (i)  $\mathfrak{a}(\lambda)$  meromorph ist mit der Periode  $i\pi$  in imaginärer Richtung und
- (ii) im Analytizitätsstreifen  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \text{Im } z \leq \pi/2\}$ , Vielfachheiten eingeschlossen,  $3N/2$  Pole aufweist,
  - (a)  $N/2$  einfache Pole bei  $(\lambda_j - \xi) + \eta$ ,  $j = 1 \dots, N/2$  und
  - (b) je  $N/2$ -fache Pole bei  $\lambda = -\beta/N$  und  $\lambda = \beta/N - \eta$ .

---

<sup>2</sup>Da in der Definition von  $\mathfrak{a}(\lambda - \xi)$  nur die Kombinationen  $\lambda - \lambda_l = (\lambda - \xi) - (\lambda_l - \xi)$  und  $\lambda - \xi$  auftreten, können alle Berechnungen in einem Koordinatensystem mit  $\xi$  als neuen Ursprung durchgeführt werden, in das formal mit  $\xi = 0$  transformiert wird.

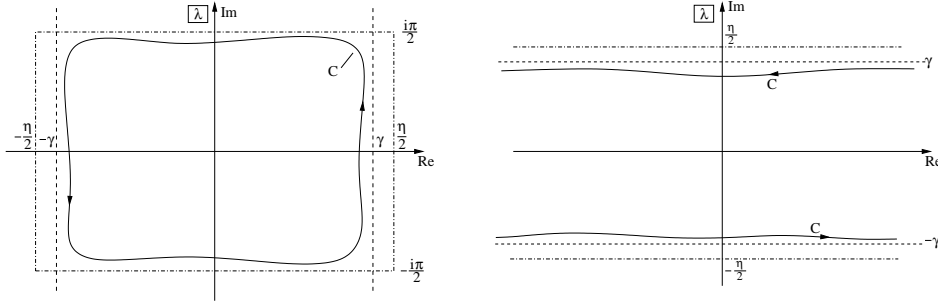


Abbildung 3.1: Die kanonische Kontur  $\mathcal{C}$  für den nichtkritischen Bereich mit  $\Delta > 1$  (links) und entsprechend für  $|\Delta| < 1$  (rechts).

- (iii) Die Zahl der Nullstellen der meromorphen Funktion  $1 + \mathfrak{a}(\lambda)$  in  $D$  ist  $3N/2$ .
- (a) Neben den  $N/2$  einfachen Rapiditäten  $\lambda_j$ ,  $1 + \mathfrak{a}(\lambda_j - \xi) = 0$ , mit  $\lambda = 0$  als Häufungspunkt im Limes  $\beta \rightarrow 0$  existieren noch
  - (b) jeweils  $N/2$  Nullstellen mit den Häufungspunkten  $\lambda = -\eta$  und  $\lambda = +\eta$  im Limes  $\beta \rightarrow 0$ . Von diesen Nullstellen wird angenommen, dass ihre Realteile betragsmäßig größer als  $\eta/2$  sind.

Die Eigenschaften  $(\alpha) - (\gamma)$  der Rapiditäten und ihre Lage in der komplexen Ebene wurden von A. Klümper et al. [40] numerisch untersucht. Der Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  bietet im feldfreien Fall zudem die Möglichkeit, die Rapiditäten analytisch zu bestimmen (Abschnitt 6.1). Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Bethe-Ansatz-Lösungen für alle Trotter-Zahlen  $N$  zum führenden Eigenwert von der durch Abbildung 3.1 (links) dargestellten Kontur  $\mathcal{C}$  eingeschlossen werden, ein Rechteck mit zwei Kanten parallel zu der reellen Achse im Abstand  $\pi/2$  und zwei Kanten parallel zu der imaginären Achse bei  $\pm\gamma$  mit  $0 < \gamma < \eta/2$ .

Unter Berücksichtigung der analytischen Eigenschaften kann zwischen den Funktionen  $\mathfrak{a}(\lambda)$  und  $1 + \mathfrak{a}(\lambda)$  als Zusammenhang die nichtlineare Integralgleichung

$$\ln \mathfrak{a}(\lambda) = \ln \left[ \frac{\text{sh}(\lambda - \frac{\beta}{N}) \text{sh}(\lambda + \frac{\beta}{N} + \eta)}{\text{sh}(\lambda + \frac{\beta}{N}) \text{sh}(\lambda - \frac{\beta}{N} + \eta)} \right]^{\frac{N}{2}} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta) \ln(1 + \mathfrak{a}(\omega))}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \quad , \quad (3.11)$$

aufgestellt [39] werden, die innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  die Funktion  $\mathfrak{a}(\lambda)$  alternativ beschreibt und mit der die Rapiditäten des führenden Eigenwertes als Nullstellen von  $1 + \mathfrak{a}(\lambda)$  zurückgewonnen werden können. Den Eigenschaften der Analytizität folgend, ist dazu nur noch die Kenntnis von  $\mathfrak{a}(\lambda)$  auf der Kontur  $\mathcal{C}$  nötig.

Der Trotter-Limes ist leicht durchzuführen, da die Trotter-Zahl  $N$  in die obige nichtlineare Integralgleichung nur noch als Parameter der Inhomogenität eingeht. Die Gleichung (3.11) lautet dann mit der umskalierten inversen Temperatur (3.9)

$$\ln \mathfrak{a}(\lambda) = -\frac{2c \text{sh}^2(\eta)}{T \text{sh}(\lambda) \text{sh}(\lambda + \eta)} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta) \ln(1 + \mathfrak{a}(\omega))}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \quad . \quad (3.12)$$

Die Weiterführung der Ableitung für Anisotropiewerte  $|\Delta| < 1$  in der Parametrisierung  $\Delta = \text{ch}(\eta)$  bedingt rein imaginäre  $\eta$ ,  $0 < \text{Im } \eta < \pi$ , die mit der Umskalierung (3.9) zu rein imaginären inversen Temperaturen  $\beta$  führen.

Als Folge davon dreht sich die Null- und Polstellenverteilung der Funktionen  $\mathfrak{a}(\lambda)$  und  $1 + \mathfrak{a}(\lambda)$  in der komplexen Ebene um  $90^\circ$ . Die Rapiditäten des führenden Eigenwertes finden sich auf der reellen Achse ein und werden für alle Trotterzahlen  $N$  von der in Abbildung 3.1 (rechts) gezeigten Kontur  $\mathcal{C}$  eingeschlossen, zwei Parallelen zu der reellen Achse bei  $\pm\gamma$ ,  $\gamma$  rein imaginär. Die weiterhin bestehende Periodizität in  $i\pi$  bedingt zusammen mit den Null- und Polstellen der Funktionen  $\mathfrak{a}(\lambda)$  und  $1 + \mathfrak{a}(\lambda)$  die Fallunterscheidung

$$0 < \text{Im } \gamma < \begin{cases} \frac{|\eta|}{2} & \text{für } 0 < \Delta < 1 \\ \frac{\pi - |\eta|}{2} & \text{für } -1 < \Delta < 0 \end{cases} . \quad (3.13)$$

Die Aufstellung der nichtlinearen Integralgleichung wird durch die reine Drehung der Null- und Polstellenverteilung der Hilfsfunktion nicht beeinflusst. Die Form der Integralgleichung (3.12) bleibt unverändert mit einer entsprechend modifizierten Kontur  $\mathcal{C}$ , die alle Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen für  $|\Delta| < 1$  umschließt.

### Einfluss eines äußeren Magnetfeldes

Die Erweiterung der bisherigen Darstellung auf ein äußeres longitudinales Feld  $h$  erfolgt formal durch die Substitution  $H_{XXZ} \rightarrow H_{XXZ} - hS^z$  im statistischen Operator  $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{N,L} = e^{-H_{XXZ}/T}$  für den feldfreien Fall, wobei

$$S^z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \sigma_j^z \quad , \quad [H_{XXZ}, S^z] = 0 \quad , \quad (3.14)$$

der Operator der  $z$ -Komponente des Gesamtspins zu der Kettenlänge  $L$  ist. Zusammen mit der Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{N,L} e^{hS^z/T} = e^{-(H_{XXZ} - hS^z)/T} \quad , \quad (3.15)$$

der Quantenmonodromiematrix  $T_j^{QTM}(\lambda)$  im feldfreien Fall und dem Exponentialausdruck

$$\exp\left(\frac{hS^z}{T}\right) = \left( \begin{array}{cc} e^{h/2T} & 0 \\ 0 & e^{-h/2T} \end{array} \right)^{\otimes L} \quad (3.16)$$

ist die approximierte Darstellung des statistischen Operators für endliche Trotterzahlen  $N$  und Kettenlängen  $L$  unter einem äußeren Feld  $h$  durch

$$\rho_{N,L} e^{\frac{hS^z}{T}} = \text{tr}_{\bar{1}, \dots, \bar{N}} T_1^{QTM}(\xi) \begin{pmatrix} e^{h/2T} & 0 \\ 0 & e^{-h/2T} \end{pmatrix}_1 \cdots T_L^{QTM}(\xi) \begin{pmatrix} e^{h/2T} & 0 \\ 0 & e^{-h/2T} \end{pmatrix}_L \quad (3.17)$$

gegeben. Auf der Ebene der Yang-Baxter-Algebra äußert sich das Feld durch die formale Substitution

$$T^{QTM}(\lambda) \rightarrow T^{QTM}(\lambda) \begin{pmatrix} e^{h/2T} & 0 \\ 0 & e^{-h/2T} \end{pmatrix} . \quad (3.18)$$

Die dadurch deformierte Quantenmonodromiematrix (3.18) bleibt eine Darstellung der Yang-Baxter-Algebra für die  $R$ -Matrix (2.2) mit den zu modifizierenden Parametern

$$a(\lambda) \rightarrow e^{h/2T} a(\lambda) \quad , \quad d(\lambda) \rightarrow e^{-h/2T} d(\lambda) \quad (3.19)$$

des algebraischen Bethe-Ansatzes in (3.4) und (3.5) sowie in den darauf aufbauenden Definitionen, z.B. der Hilfsfunktion (3.10). Die Anwesenheit des Feldes bedeutet für die Rapiditäten, dass sie sich von der reellen bzw. imaginären Achse entfernen und die einschließende Kontur  $\mathcal{C}$ , siehe Abbildung 3.1, mit einem entsprechend großen Wert von  $\gamma$  zu wählen ist.

In den nichtlinearen Integralgleichungen (3.11) und (3.12) entsteht aufgrund der Deformation eine zusätzliche Inhomogenität  $-h/T$ , sodass sich die Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda)$  für die XXZ-Kette unter einem äußeren Feld durch

$$\ln \mathbf{a}(\lambda) = -\frac{h}{T} - \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{T \operatorname{sh}(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda + \eta)} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \ln(1 + \mathbf{a}(\omega))}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \quad (3.20)$$

im Trotter-Limes definiert. Sie enthält alle Informationen zu den Rapiditäten des führenden Eigenwertes und Eigenvektors, und beschreibt im thermodynamischen Limes die Freie Energie pro Gitterplatz (2.27) sowie die Korrelationsfunktionen (2.34).

Die Definition (3.10) der Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda)$  ist aber insofern nicht eindeutig, da auch der Kehrwert der Bethe-Ansatz-Gleichungen (3.4) als Ausgangspunkt möglich ist. Bei numerischen Auswertungen [39] zeigt sich, zusätzlich zu  $\mathbf{a}(\lambda)$  die duale Entsprechung  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda) = 1/\mathbf{a}(\lambda)$  zu betrachten, die die Rapiditäten als Lösung der Gleichung  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda) = -1$  beschreibt mit der Integraldarstellung

$$\ln \bar{\mathbf{a}}(\lambda) = \frac{h}{T} - \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{T \operatorname{sh}(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda - \eta)} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \ln(1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega))}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \quad . \quad (3.21)$$

Die nichtlineare Integralgleichung (3.21) folgt direkt aus (3.20) mit der Identität  $\ln(1 + \mathbf{a}) = \ln(1 + \bar{\mathbf{a}}) + \ln \mathbf{a}$  unter Ausnutzung des Konturintegrals

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \ln \mathbf{a}(\omega)}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)} = -\frac{2c \operatorname{sh}(\eta) \operatorname{sh}(2\eta)}{T \operatorname{sh}(\lambda + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \eta)} \quad . \quad (3.22)$$

Für Argumente  $\lambda$  und  $\omega$  auf oder innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  hat der Integrand nur einen einfachen Pol bei  $\omega = 0$ , der der Funktion  $\ln \mathbf{a}(\omega)$  entsprechend (3.20) zugeordnet werden kann mit  $\operatorname{Res}_{\omega=0} \ln \mathbf{a}(\omega) = -2c \operatorname{sh}(\eta)/T$ .

### Führender Eigenwert

In der Darstellung (3.5), den führenden Eigenwert betreffend, lassen sich durch Ausklammern des ersten Summanden die Beziehung

$$\Lambda(\lambda) = a(\lambda) (1 + \mathbf{a}(\lambda - \xi)) \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\operatorname{sh}(\lambda - \lambda_l - \eta)}{\operatorname{sh}(\lambda - \lambda_l)} \right] \quad (3.23)$$



zu  $\mathfrak{a}(\lambda)$  herstellen und durch Betrachtung der Null- und Polstellenverteilung der Funktionen  $\mathfrak{a}(\lambda)$  und  $1 + \mathfrak{a}(\lambda)$  die Integraldarstellungen

$$\ln \Lambda(\lambda + \xi) = \frac{h}{2T} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta) \ln(1 + \mathfrak{a}(\omega))}{\text{sh}(\lambda - \omega) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \quad (3.24)$$

$$= -\frac{h}{2T} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta) \ln(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega))}{\text{sh}(\lambda - \omega) \text{sh}(\lambda - \omega + \eta)} \quad (3.25)$$

ableiten [39]. Das Argument  $\lambda + \xi$  im Eigenwert berücksichtigt die Beschreibung der Hilfsfunktionen  $\mathfrak{a}(\lambda)$  bzw.  $\bar{\mathfrak{a}}(\lambda)$  in einem Koordinatensystem bezüglich  $\xi$  als Ursprung mit den darin gültigen Variablen  $\lambda$  und  $\omega$ .

### 3.3 Freie Energie und Magnetisierung

Für den Integralausdruck der Freien Energie (2.27) pro Gitterplatz ist der Spektralparameter in  $\Lambda(\lambda + \xi)$  mit  $\lambda = 0$  für  $\lambda_0 = \xi$  zu spezifizieren,

$$f(h, T) = -\frac{h}{2} - T \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta) \ln(1 + \mathfrak{a}(\omega))}{\text{sh}(\omega) \text{sh}(\omega + \eta)} = \frac{h}{2} + T \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta) \ln(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega))}{\text{sh}(\omega) \text{sh}(\omega - \eta)} \quad (3.26)$$

Mit der Freien Energie als thermodynamisches Potenzial lassen sich alle thermodynamischen Größen durch partielle Ableitungen bestimmen, wie etwa die Magnetisierung

$$m(h, T) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle S^z \rangle_{h, T}}{L} = -\frac{\partial f}{\partial h}(h, T) \quad (3.27)$$

für anliegende Magnetfelder  $h$  und endliche Temperaturen  $T$ . Die explizite Ausführung der Ableitung nach dem Magnetfeld führt auf die Integraldarstellung

$$m(h, T) = -\frac{1}{2} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\omega) \text{sh}(\omega - \eta)} \frac{\sigma(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \quad (3.28)$$

$$\sigma(\lambda) = -\frac{T \partial_h \mathfrak{a}(\lambda)}{\mathfrak{a}(\lambda)} = \frac{T \partial_h \bar{\mathfrak{a}}(\lambda)}{\bar{\mathfrak{a}}(\lambda)} \quad (3.29)$$

Anstatt  $\sigma(\lambda)$  über die Abhängigkeit der Hilfsfunktionen  $\mathfrak{a}(\lambda)$  bzw.  $\bar{\mathfrak{a}}(\lambda)$  vom Magnetfeld  $h$  zu bestimmen, resultiert die partielle Ableitung von (3.21) nach  $h$  in einer alternativen Definition von  $\sigma(\lambda)$  über die (numerisch stabilere) Integralgleichung

$$\sigma(\lambda) = 1 + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{\sigma(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \quad (3.30)$$

Im Hinblick auf die erzeugende Funktion (2.37), die die Magnetisierung als Spezialfall enthält, soll für den späteren Vergleich eine zu (3.28) äquivalente Integraldarstellung angegeben werden. Sei  $G(\lambda)$  die Lösung der Integralgleichung

$$G(\lambda) = \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\lambda) \text{sh}(\lambda - \eta)} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \quad (3.31)$$

dann definieren der symmetrische Kern  $K(\lambda) = \text{sh}(2\eta)/(\text{sh}(\lambda + \eta)\text{sh}(\lambda - \eta))$ , die Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}(\lambda)$  und die Kontur  $\mathcal{C}$  den Integraloperator<sup>3</sup>

$$(\widehat{K}\varphi)(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \omega)\varphi(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \quad (3.32)$$

für eine Testfunktion  $\varphi(\lambda)$ . Mit den Inhomogenitäten  $g(\lambda) = \text{sh}(\eta)/(\text{sh}(\lambda)\text{sh}(\lambda - \eta))$  und  $e(\lambda) = 1$  der Integralgleichungen (3.30) und (3.31) lauten deren Lösungen im Operatorformalismus

$$\sigma(\lambda) = ((1 - \widehat{K})^{-1}e)(\lambda) \quad , \quad G(\lambda) = ((1 - \widehat{K})^{-1}g)(\lambda) \quad . \quad (3.33)$$

Mit der für symmetrische Kerne  $K(\lambda)$  und beliebige Testfunktionen  $g(\omega)$  und  $e(\omega)$  über eine vollständige Induktion beweisbaren Hilfsrelation

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{g(\omega)(\widehat{K}^n e)(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{(\widehat{K}^n g)(\omega)e(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.34)$$

folgt für die Lösungen  $\sigma(\lambda)$  und  $G(\lambda)$  obiger Integralgleichungen die durch Einsetzen zu verifizierende Identität

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\omega)\text{sh}(\omega - \eta)} \frac{\sigma(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \quad . \quad (3.35)$$

Zusammen mit der Lösung  $G(\lambda)$  der Integralgleichung (3.31) erschließt sich die Magnetisierung  $m(h, T)$  dann alternativ aus den Integralausdrücken

$$m(h, T) = -\frac{1}{2} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} = \frac{1}{2} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega)}{1 + \overline{\mathfrak{a}}(\omega)} \quad . \quad (3.36)$$

---

<sup>3</sup>Für den Integraloperator  $\widehat{K}$  sei angenommen, dass die Resolvente  $(1 - \widehat{K})^{-1}$  und speziell die Neumannsche Reihe  $(1 - \widehat{K})^{-1} = 1 + \widehat{K} + \widehat{K}^2 + \dots$  existieren.

## Kapitel 4

# Die $zz$ -Korrelation: Eine erzeugende Funktion

Die Auswertung der erzeugenden Funktion (2.40) in Operatordarstellung kombiniert die algebraische Struktur [33, 35, 53] der  $XXZ$ -Kette (bei  $T = 0$ ) mit der funktionentheoretischen Beschreibung [37–39] der Bethe-Ansatz-Gleichungen für die Quantentransfermatrix (bei  $T > 0$ ). Die Kombination ist möglich, da es sich nur um unterschiedliche Darstellungen der gleichen Yang-Baxter-Algebra handelt.

### 4.1 Kombinatorische Aspekte des algebraischen Bethe-Ansatzes

Die Grundlage der Auswertung des rein algebraischen Anteils der erzeugenden Funktion beruht auf der geschlossenen Darstellung von Skalarprodukten. Ist  $\{\mu_k\}_{k=1}^M$  eine beliebige Menge paarweise verschiedener komplexer Zahlen, dann sind die Vektoren

$$|\{\mu\}\rangle = B(\mu_1) \dots B(\mu_M)|0\rangle \quad , \quad \langle\{\mu}\rangle = \langle 0|C(\mu_M) \dots C(\mu_1) \quad (4.1)$$

zueinander dual mit  $\langle 0|A(\lambda) = \langle 0|a(\lambda)$ ,  $\langle 0|D(\lambda) = \langle 0|d(\lambda)$ , und es gilt das folgende

**Lemma [53] 1.** *Seien  $\{\lambda_l\}_{l=1}^M$  ein Satz Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen und  $\{\mu_k\}_{k=1}^M$  eine beliebige Menge paarweise verschiedener komplexer Zahlen, dann ist*

$$\begin{aligned} & \langle 0|C(\mu_M) \dots C(\mu_1)B(\lambda_1) \dots B(\lambda_M)|0\rangle \\ &= \frac{[\prod_{j=1}^M d(\lambda_j)a(\mu_j)] \prod_{j,k=1}^M \text{sh}(\lambda_j - \mu_k + \eta)}{\prod_{1 \leq j < k \leq M} \text{sh}(\lambda_j - \lambda_k) \text{sh}(\mu_k - \mu_j)} \det \widehat{N}(\lambda_j, \mu_k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ein Skalarprodukt im Sinne des algebraischen Bethe-Ansatzes mit  $\langle 0|0\rangle = 1$  und der für die  $XXZ$ -Kette expliziten Determinantendarstellung

$$\widehat{N}(\lambda_j, \mu_k) = t(\lambda_j, \mu_k) - t(\mu_k, \lambda_j) \frac{d(\mu_k)}{a(\mu_k)} \prod_{l=1}^M \frac{f(\mu_k, \lambda_l)}{f(\lambda_l, \mu_k)} \quad , \quad (4.3)$$

$$t(\lambda, \xi) = \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\lambda - \xi) \text{sh}(\lambda - \xi + \eta)} \quad . \quad (4.4)$$

Aufgrund der Relationen  $[C(\lambda), C(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0$  aus (3.1) ist für die Operatoren  $B(\lambda)$  und  $C(\lambda)$  keine Reihenfolge einzuhalten und das Skalarprodukt ist symmetrisch bezüglich  $\{\lambda\}$  und  $\{\mu\}$ .

Für die Anwendung der Skalarproduktformel (4.2) auf den Zähler der approximierten erzeugenden Funktion

$$\Phi_N(\varphi|\{\xi\}) = \frac{\langle \{\lambda\} | \left[ \prod_{j=1}^m (A + e^\varphi D)(\xi_j) \right] | \{\lambda\} \rangle}{\langle \{\lambda\} | \{\lambda\} \rangle \prod_{j=1}^m \Lambda_0(\xi_j)} \quad (4.5)$$

ist die Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen mit  $M = N/2$  zu spezifizieren und die Wirkung der deformierten Quantentransformmatrix  $t_\varphi(\lambda) = (A + e^\varphi D)(\lambda)$  auf den dualen Bethe-Vektor  $\langle \{\lambda\} | = \langle 0 | C(\lambda_{N/2}) \dots C(\lambda_1)$  zu analysieren. Letzteres erfolgt unter Zuhilfenahme der quadratischen Vertauschungsrelationen

$$C(\mu)A(\lambda) = f(\mu, \lambda)A(\lambda)C(\mu) - g(\mu, \lambda)A(\mu)C(\lambda) \quad (4.6a)$$

$$C(\mu)D(\lambda) = f(\lambda, \mu)D(\lambda)C(\mu) - g(\lambda, \mu)D(\mu)C(\lambda) \quad (4.6b)$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu)} \quad , \quad g(\lambda, \mu) = \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu)} \quad (4.7)$$

aus der Yang-Baxter-Algebra (3.1). Die Operatoren  $A$  und  $D$  im Term

$$\langle 0 | C(\lambda_{N/2}) \dots C(\lambda_1) \prod_{j=1}^m (A + e^\varphi D)(\xi_j) \quad (4.8)$$

sind vollständig nach links durchzutauschen und mit  $\langle 0 |$  durch ihren Vakuumerwartungswert  $a$  und  $d$  zu ersetzen. Mit den Feststellungen, dass

- (i) durch die Struktur der Vertauschungsrelationen (4.6) bei jedem einzelnen Schritt die Anzahl der Operatoren  $C$  in den neu generierten Termen unverändert bleibt
- (ii) und alle dualen Vektoren  $\langle \{\mu\} | = \langle 0 | C(\mu_M) \dots C(\mu_1)$  nach (4.1) durch die Angabe der Argumente  $\{\mu_k\}_{k=1}^M$ , von Vorfaktoren abgesehen, eindeutig bestimmt sind,

kann der Term (4.8) kombinatorisch interpretiert werden. Es sind alle Möglichkeiten von dualen Vektoren zu berücksichtigen, in deren beschreibender Menge  $\{\lambda_l\}_{l=1}^{N/2}$  von Argumenten davon minimal Null und maximal  $m$  Argumente durch Inhomogenitäten  $\xi_k \in \{\xi_j\}_{j=1}^m$  ersetzt sind.

## Mengen und Teilmengen

Für die Umsetzung der kombinatorischen Vorgaben werden die Mengen  $\{\lambda\} = \{\lambda_l\}_{l=1}^{N/2}$  und  $\{\xi\} = \{\xi_j\}_{j=1}^m$  in disjunkte Untermengen aufgeteilt.

Sind  $\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\} \subset \{\lambda\}$  disjunkte Teilmengen mit der Vereinigung  $\{\lambda\} = \{\lambda^+\} \dot{\cup} \{\lambda^-\}$ , dann ist  $p_2\{\lambda\}$  die Menge aller geordneten Paare  $(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\})$  und die Teilmengen  $\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}$  werden als Partitionen bezeichnet. Die Zahl der Elemente in  $\{\lambda\}$  wird durch  $|\lambda| = \text{card}\{\lambda\} = N/2$  dargestellt, und auf die Elemente in den Partitionen  $\{\lambda^\pm\}$  wird über  $\lambda_j^\pm$ ,  $j = 1, \dots, |\lambda^\pm|$  Bezug genommen.

Ein alternativer Zugang ist über die Indizierung möglich. Ist  $I = \{1, \dots, N/2\}$  die Indexmenge von  $\{\lambda\}$ , dann beschreibt  $p_2(I)$  die Menge aller geordneten Paare

$(\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\})$  von Partitionen  $\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\} \subset I$  mit  $\{\alpha^+\} \dot{\cup} \{\alpha^-\} = I$ . Zu jeder festen Partition  $\{\alpha^\pm\}$  der Indexmenge korrespondiert genau eine Partition  $\{\lambda^\pm\}$ , sodass  $\{\lambda_l\}_{l \in \{\alpha^\pm\}} = \{\lambda_{\alpha^\pm}\} = \{\lambda^\pm\}$  gilt.

Eine analoge Darstellung trifft für die Menge  $\{\xi\}$  zu.

Die Berücksichtigung der vollständigen Vertauschungsrelationen (4.6) mit den Funktionen  $f(\lambda, \mu)$  und  $g(\lambda, \mu)$  resultiert in zusätzlichen Vorfaktoren zu den kombinatorisch abgeleiteten dualen Vektoren, dargestellt in

**Lemma [33] 2.** *Seien  $\{\lambda_l\}_{l=1}^M$  und  $\{\xi_j\}_{j=1}^m$  beliebige Mengen paarweise verschiedener komplexer Zahlen,  $\langle 0 \| C(\lambda_M) \dots C(\lambda_1)$  ein dualer Vektor und  $t_\varphi(\lambda) = (A + e^\varphi D)(\lambda)$  die deformierte Quantentransfermatrix, dann ist*

$$\begin{aligned} \langle 0 \| C(\lambda_M) \dots C(\lambda_1) \prod_{j=1}^m (A + e^\varphi D)(\xi_j) = \\ \sum_{\substack{(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \in p_2\{\lambda\} \\ (\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| + |\lambda^-| = M}} R(\{\xi^+\} | \{\xi^-\} | \{\lambda^+\} | \{\lambda^-\}) \langle 0 \| \prod_{j=1}^{|\xi^+|} C(\xi_j^+) \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} C(\lambda_l^-) \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit dem für beliebige Parameter  $a(\lambda)$  und  $d(\lambda)$  des algebraischen Bethe-Ansatzes expliziten Koeffizienten

$$\begin{aligned} R(\{\xi^+\} | \{\xi^-\} | \{\lambda^+\} | \{\lambda^-\}) \\ = S(\{\xi^+\} | \{\lambda^+\} | \{\lambda^-\}) \prod_{j=1}^{|\xi^-|} \left\{ a(\xi_j^-) \left[ \prod_{k=1}^{|\xi^+|} f(\xi_k^+, \xi_j^-) \right] \left[ \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_l^-, \xi_j^-) \right] \right. \\ \left. + e^\varphi d(\xi_j^-) \left[ \prod_{k=1}^{|\xi^+|} f(\xi_j^-, \xi_k^+) \right] \left[ \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} f(\xi_j^-, \lambda_l^-) \right] \right\} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Der sich für  $|\xi^-| = 0$  ergebende Koeffizient  $S(\{\xi^+\} | \{\lambda^+\} | \{\lambda^-\})$  kann als das Verhältnis zweier  $m \times m$  Determinanten aufgefasst werden,

$$S(\{\xi^+\} | \{\lambda^+\} | \{\lambda^-\}) = \frac{\det \widehat{M}(\lambda_j^+, \xi_k^+)}{\det V(\lambda_j^+, \xi_k^+)} \quad , \quad (4.11)$$

mit den Einträgen

$$V(\lambda_j^+, \xi_k^+) = \frac{1}{\text{sh}(\xi_k^+ - \lambda_j^+)} \quad , \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \widehat{M}(\lambda_j^+, \xi_k^+) = a(\lambda_j^+) t(\xi_k^+, \lambda_j^+) \left[ \prod_{l=1}^{|\xi^+|} f(\xi_l^+, \lambda_j^+) \right] \left[ \prod_{m=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_m^-, \lambda_j^+) \right] \\ - e^\varphi d(\lambda_j^+) t(\lambda_j^+, \xi_k^+) \left[ \prod_{l=1}^{|\xi^+|} f(\lambda_j^+, \xi_l^+) \right] \left[ \prod_{m=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_j^+, \lambda_m^-) \right] \quad (4.13) \end{aligned}$$

### Verhältnisse von Skalarprodukten

Auf der Grundlage von Lemma 2 kann für die Rapiditäten  $\{\lambda_l\}_{l=1}^{N/2}$  des führenden Eigenwertes die weitere Auswertung der approximierten erzeugenden Funktion

$$\Phi_N(\varphi, \{\xi\}) = \sum_{\substack{(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \in p_2\{\lambda\} \\ (\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| + |\lambda^-| = N/2}} R(\{\xi^+\}|\{\xi^-\}|\{\lambda^+\}|\{\lambda^-\}) \frac{\langle \{\xi^+\} \cup \{\lambda^-\} \| \{\lambda\} \rangle}{\prod_{j=1}^{|\xi|} \Lambda_0(\xi_j) \langle \{\lambda\} \| \{\lambda\} \rangle} \quad (4.14)$$

auf das Verhältnis der Skalarprodukte  $\langle \{\xi^+\} \cup \{\lambda^-\} \| \{\lambda\} \rangle$  und  $\langle \{\lambda\} \| \{\lambda\} \rangle$  reduziert werden. Diese sind bezüglich der Argumente  $\{\lambda\}$  und  $\{\xi^+\} \cup \{\lambda^-\}$  symmetrisch, sodass für beliebige, aber festgehaltene Partitionen  $\{\lambda^+\}$  und  $\{\xi^+\}$  mit vorgegebener Kardinalzahl  $n = 0, \dots, |\xi|$  die Umsortierung

$$\tilde{\lambda}_j = \begin{cases} \lambda_j^+ & \text{für } j = 1, \dots, n \\ \lambda_{j-n}^- & \text{für } j = n+1, \dots, N/2 \end{cases} \quad (4.15)$$

der Bethe-Ansatz-Zahlen  $\lambda_j$  möglich ist. Die  $\lambda_j$  sind Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen  $\mathbf{a}(\lambda_j - \xi) = -1$  zu der Hilfsfunktion (3.10), welche über die Relation

$$\widehat{N}(\lambda_j, \mu_k) = t(\lambda_j, \mu_k) - t(\mu_k, \lambda_j) \mathbf{a}(\mu_k - \xi) \quad (4.16)$$

mit der Determinante (4.3) der Slavnov-Formel (4.2) in Verbindung steht. Der Limes  $\mu_k \rightarrow \lambda_k$  in der Normierung  $\langle \{\lambda\} \| \{\lambda\} \rangle$  ist für das Skalarprodukt (4.2) einfach zu bilden; der Vorfaktor ist regulär und die Determinanteneinträge besitzen den Grenzwert

$$\lim_{\mu_k \rightarrow \lambda_k} \widehat{N}(\lambda_j, \mu_k) = \delta_k^j \frac{\partial \ln \mathbf{a}}{\partial \lambda}(\lambda_j - \xi) + \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k + \eta) \text{sh}(\lambda_j - \lambda_k - \eta)} \quad (4.17)$$

Die Anwendung der Slavnov-Formel ergibt dann unter der Umsortierung (4.15) der Bethe-Ansatz-Zahlen

$$\frac{\langle \{\xi^+\} \cup \{\lambda^-\} \| \{\lambda\} \rangle}{\langle \{\lambda\} \| \{\lambda\} \rangle} = \left[ \prod_{j=1}^n \frac{a(\tilde{\xi}_j)}{a(\tilde{\lambda}_j)} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\xi}_k + \eta)}{\text{sh}(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k + \eta)} \right] \left[ \prod_{j=n+1}^{N/2} \prod_{k=1}^n \frac{f(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\xi}_k)}{f(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\lambda}_k)} \right] \left[ \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\text{sh}(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k)}{\text{sh}(\tilde{\xi}_j - \tilde{\xi}_k)} \right] \frac{\det N_n}{\det N_0} \quad (4.18)$$

mit  $\tilde{\xi}_j = \xi_j^+$  für  $j = 1, \dots, n$  und den aus (4.16) und (4.17) folgenden Einträgen

$$N_n^j{}_k = \begin{cases} t(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\xi}_k) - t(\tilde{\xi}_k, \tilde{\lambda}_j) \mathbf{a}(\tilde{\xi}_k - \xi) & k = 1, \dots, n \\ \delta_k^j \frac{\partial \ln \mathbf{a}}{\partial \lambda}(\tilde{\lambda}_k - \xi) + \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k + \eta) \text{sh}(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k - \eta)} & k = n+1, \dots, N/2. \end{cases} \quad (4.19)$$

Die Spalten  $k = n+1, \dots, N/2$  der Matrizen  $N_n$  und  $N_0$  sind identisch, womit das Verhältnis der zugeordneten Determinanten in (4.18) weiter vereinfacht werden kann, dargestellt in

**Lemma 3.** Seien  $\det N_n$  die Determinanten aus den Matrizen (4.19), dann ist unter Anwendung des Determinantenmultiplikationssatzes das Verhältnis

$$\frac{\det N_n}{\det N_0} = \left[ \prod_{j=1}^n \frac{1 + \mathfrak{a}(\xi_j^+ - \xi)}{\mathfrak{a}'(\lambda_j^+ - \xi)} \right] \det_n G(\lambda_j^+ - \xi, \xi_k^+ - \xi) \quad (4.20)$$

eine  $n \times n$  Determinante für alle  $n = 0, \dots, |\xi| = m$  und  $G(\lambda, \xi)$  ist die Lösung der linearen Integralgleichung

$$G(\lambda, \xi) = t(\xi, \lambda) + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G(\omega, \xi)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} . \quad (4.21)$$

Die Integration in der komplexen Ebene erfolgt entlang der kanonischen Kontur  $\mathcal{C}$ , wie im Falle der nichtlinearen Integralgleichung für die Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}(\lambda)$ .

*Beweis.* Anhang A.1 □

Das Verhältnis der Skalarprodukte (4.18) ist dann schließlich für beliebige, aber festgehaltene Partitionen  $\{\lambda^+\}$  und  $\{\xi^+\}$  mit vorgegebener Kardinalzahl  $n$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\langle \{\xi^+\} \cup \{\lambda^-\} \| \{\lambda\} \rangle}{\langle \{\lambda\} \| \{\lambda\} \rangle} &= \left[ \prod_{j=1}^n \frac{a(\xi_j^+)}{a(\lambda_j^+)} \frac{1 + \mathfrak{a}(\xi_j^+ - \xi)}{\mathfrak{a}'(\lambda_j^+ - \xi)} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda_j^+ - \xi_k^+ + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_k^+ + \eta)} \right] \\ &\left[ \prod_{j=1}^{N/2-n} \prod_{k=1}^n \frac{f(\lambda_j^-, \xi_k^+)}{f(\lambda_j^-, \lambda_k^+)} \right] \left[ \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_k^+)}{\text{sh}(\xi_j^+ - \xi_k^+)} \right] \det_n G(\lambda_j^+ - \xi, \xi_k^+ - \xi) . \quad (4.22) \end{aligned}$$

Die Beziehung (3.23) zwischen dem führenden Eigenwert der Quantentransformmatrix und der Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}(\lambda)$ ,

$$\Lambda_0(\xi_j) = a(\xi_j) (1 + \mathfrak{a}(\xi_j - \xi)) \left[ \prod_{l=1}^{N/2} f(\lambda_l, \xi_j) \right] , \quad (4.23)$$

komplettiert die Terme (4.10), (4.22) in der approximierten erzeugenden Funktion (4.14), und es folgt das Endresultat dieses Abschnittes zusammengefasst in

**Lemma 4.** Seien  $\{\lambda_l\}_{l=1}^{N/2}$  die Rapiditäten des führenden Eigenwertes und  $\{\xi_j\}_{j=1}^m$  die paarweise verschiedenen Inhomogenitäten der Plätze  $1, \dots, m$  auf der Spinkette, dann gilt für die approximierte erzeugende Funktion

$$\Phi_N(\varphi | \{\xi\}) = \sum_{\substack{(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \in p_2\{\lambda\} \\ (\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| + |\lambda^-| = N/2}} \frac{Y_{|\xi^+|}(\{\lambda^+\} | \{\xi^+\}) Z_{|\xi^+|}(\{\lambda^+\} | \{\xi^+\} | \{\xi^-\})}{\left[ \prod_{j=1}^{|\xi^+|} \mathfrak{a}'(\lambda_j^+ - \xi) \right] \left[ \prod_{j=1}^{|\xi^-|} (1 + \mathfrak{a}(\xi_j^- - \xi)) \right]} . \quad (4.24)$$

Die explizite Abhängigkeit von den Partitionen  $\{\lambda^-\}$  wird in der Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}$  absorbiert, sodass die Terme

$$Z_n(\{\lambda^+\} | \{\xi^+\} | \{\xi^-\}) = \prod_{j=1}^{m-n} \left\{ 1 + e^\varphi \mathfrak{a}(\xi_j^- - \xi) \left[ \prod_{k=1}^n \frac{f(\xi_j^-, \xi_k^+) f(\lambda_k^+, \xi_j^-)}{f(\xi_k^+, \xi_j^-) f(\xi_j^-, \lambda_k^+)} \right] \right\} , \quad (4.25)$$

$$Y_n(\{\lambda^+\}|\{\xi^+\}) = \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\bar{\mathbf{b}}(\lambda_j^+)}{\bar{\mathbf{b}}(\xi_j^+)} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda_j^+ - \xi_k^+ + \eta) \text{sh}(\lambda_j^+ - \xi_k^+ - \eta)}{\text{sh}(\xi_j^+ - \xi_k^+ + \eta) \text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_k^+ - \eta)} \right] \\ \det_n \widetilde{M}(\lambda_j^+, \xi_k^+) \det_n G(\lambda_j^+ - \xi, \xi_k^+ - \xi) \quad (4.26)$$

nur noch die Partitionen  $\{\lambda^+\}$ ,  $\{\xi^+\}$  und  $\{\xi^-\}$  mit endlichen Kardinalzahlen enthalten.  $G(\lambda, \xi)$  ist die Lösung der linearen Integralgleichung (4.21), und es sind

$$\widetilde{M}(\lambda_j^+, \xi_k^+) = t(\xi_k^+, \lambda_j^+) + e^\varphi t(\lambda_j^+, \xi_k^+) \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_l^+ - \eta) \text{sh}(\lambda_j^+ - \xi_l^+ + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_l^+ + \eta) \text{sh}(\lambda_j^+ - \xi_l^+ - \eta)} \right] , \quad (4.27)$$

$$\bar{\mathbf{b}}(\lambda) = \left[ \prod_{k=1}^m \frac{1}{f(\lambda, \xi_k)} \right] = \left[ \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(\lambda - \xi_k)}{\text{sh}(\lambda - \xi_k + \eta)} \right] . \quad (4.28)$$

*Beweisskizze.* Anhang A.2 □

Die Funktion  $G(\lambda, \xi)$  stellt eine Erweiterung der Lösung  $G(\lambda) = G(\lambda, 0)$  von Gleichung (3.31) dar und wird als verallgemeinerte Dichtefunktion bezeichnet.

## 4.2 Integraldarstellungen

Der vollständige Ausdruck  $\Phi_N(\varphi|\{\xi\})$  liegt in Differenzenform vor und wird für die weitere Rechnung formal durch  $\xi = 0$  in ein Koordinatensystem mit  $\xi$  als neuem Ursprung transformiert. Das Überführen in einen Integralausdruck folgt in der Argumentation den Darstellungen [33, 35].

Die meromorphe Funktion  $1 + \mathbf{a}(\lambda)$  weist, Vielfachheiten eingeschlossen, im Analytizitätsstreifen  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \text{Im } z \leq \pi/2\}$

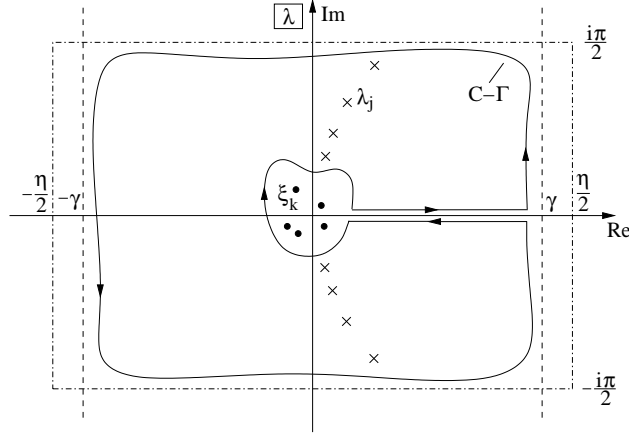
- (i)  $3N/2$  Nullstellen auf,
  - (a)  $N/2$  einfache Nullstellen bei den Rapiditäten  $\lambda_l$ ,  $l = 1, \dots, N/2$  sowie
  - (b)  $N$  zusätzliche Nullstellen  $\rho_k$  außerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,
- (ii) und sie teilt die  $3N/2$  Polstellen der Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda)$ ,
  - (a) zwei  $N/2$ -fache Polstellen bei  $\lambda = -\beta/N$  und  $\lambda = \beta/N - \eta$  sowie
  - (b)  $N/2$  einfache Pole bei  $\lambda_l + \eta$ ,  $l = 1, \dots, N/2$ .

Dann hat die Funktion  $1/(1 + \mathbf{a}(\lambda))$  innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  nur einfache Pole bei den Bethe-Ansatz-Zahlen des führenden Eigenwertes mit

$$\text{Res}_{\lambda=\lambda_j} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\lambda)} = \frac{1}{\mathbf{a}'(\lambda_j)} , \quad j = 1, \dots, N/2 . \quad (4.29)$$

Ist weiter  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto f(\omega_1, \dots, \omega_n)$  eine (a) in ihren Argumenten symmetrische Funktion, die (b) für zwei übereinstimmende Argumente zu Null wird



Abbildung 4.1: Die Kontur  $\mathcal{C} - \Gamma$  im Fall  $\Delta > 1$ .

sowie (c) analytisch auf und innerhalb  $\mathcal{C}^n$  ist, dann gilt

$$\frac{1}{n!} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{\substack{(\{\lambda^+, \{\lambda^-\}\} \in p_2\{\lambda\} \\ |\lambda^+| = n}} \frac{f(\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+)}{\prod_{j=1}^n \mathbf{a}'(\lambda_j^+)} \quad (4.30)$$

Die Umkehrung dieser Relation ordnet den kombinatorischen Summen

$$\sum_{\substack{(\{\lambda^+, \{\lambda^-\}\} \in p_2\{\lambda\} \\ (\{\xi^+, \{\xi^-\}\} \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| + |\lambda^-| = N/2}} = \sum_{n=0}^m \sum_{\substack{(\{\xi^+, \{\xi^-\}\} \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| = n}} \sum_{\substack{(\{\lambda^+, \{\lambda^-\}\} \in p_2\{\lambda\} \\ |\lambda^+| = n}} \quad (4.31)$$

der approximierten erzeugenden Funktion  $\Phi_N(\varphi|\{\xi\})$  Integralausdrücke zu, vorausgesetzt die Bedingungen (a)–(c) sind erfüllt. Die Voraussetzungen (a) und (b) folgen trivial aus der Symmetrie der Skalarprodukte und deren Determinantendarstellung, allerdings ist der Term  $Y_n(\{\lambda^+|\{\xi^+\}) Z_n(\{\lambda^+|\{\xi^+|\{\xi^-\})$  in den Variablen  $\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+$  an den Stellen  $\lambda_j^+ = \xi_k^+$ ,  $j, k = 1, \dots, n$  nicht analytisch.

Die paarweise verschiedenen Inhomogenitäten  $\{\xi_k\}_{k=1}^m$  waren bislang freie Parameter mit dem Grenzwert  $\xi (= 0)$  im homogenen Limes. Sie werden von den Rapiditäten  $\lambda_j$  verschieden und innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  so gewählt, dass die  $\xi_k$ , und nur die  $\xi_k$ , von der einfach geschlossenen Kontur  $\Gamma$  (siehe Abbildung 4.1) eingefasst werden. Dann ist  $Y_n(\{\lambda^+|\{\xi^+\}) Z_n(\{\lambda^+|\{\xi^+|\{\xi^-\})$  innerhalb  $(\mathcal{C} - \Gamma)^n$  analytisch und der entsprechende Integralausdruck

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(\{\lambda^+, \{\lambda^-\}\} \in p_2\{\lambda\} \\ |\lambda^+| = n}} \frac{Y_n(\{\lambda^+|\{\xi^+\}) Z_n(\{\lambda^+|\{\xi^+|\{\xi^-\})}{\left[ \prod_{j=1}^n \mathbf{a}'(\lambda_j^+) \right] \left[ \prod_{j=1}^{m-n} (1 + \mathbf{a}(\xi_j^-)) \right]} \\ &= \frac{1}{n!} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}-\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] \left[ \prod_{j=1}^{m-n} \frac{1}{(1 + \mathbf{a}(\xi_j^-))} \right] \\ & \quad Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}) Z_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+|\{\xi^-\}) \quad (4.32) \end{aligned}$$

existiert. Der homogene Limes  $\xi_j \rightarrow \xi (= 0)$  und der Trotter-Limes  $N \rightarrow \infty$  sind aber aus zwei Gründen nicht ausführbar:

- (i) Der homogene Limes bedingt, dass der Ursprung von der Kontur  $\Gamma$  eingeschlossen wird. Gleichzeitig ist er aber auch der Häufungspunkt der Bethe-Ansatz-Zahlen, sodass jede noch so eng um 0 gewählte, aber festgehaltene Kontur  $\Gamma$  ab einer bestimmten Trotter-Zahl von den Rapiditäten in Richtung Ursprung überschritten wird. Die Integraldarstellung ist daher auf endliche Trotter-Zahlen beschränkt.
- (ii) Der Limes  $N \rightarrow \infty$  führt zu einer wesentlichen Singularität von  $\mathbf{a}(\lambda)$  im Ursprung, und die bestehenden Terme  $\mathbf{a}(\xi_j)$  können nicht zugunsten eines Integralausdruckes analog (4.30) ersetzt werden. Das Ziel eines solchen Ausdruckes ist es, die Auswertung der Funktion  $\mathbf{a}(\lambda)$  nicht an der Stelle der Singularität vornehmen zu müssen, sondern entlang einer Kontur um die Singularität. Auf dieser Kontur ist  $\mathbf{a}(\lambda)$  analytisch. Der Trotter-Limes und der homogene Limes kommutieren nicht für die Terme  $\mathbf{a}(\xi_j)$ .

Eine Möglichkeit, die Konsequenzen der Punkte (i) und (ii) zu umgehen, zeigt

**Beispiel 3.** Die Funktion  $G(\lambda, \mu)$  weist bei  $\lambda = \mu$  eine einfache Polstelle auf mit dem Residuum  $\text{Res}_{\lambda=\mu} G(\lambda, \mu) = -1$  und die approximierte erzeugende Funktion lautet für eine einzelne Inhomogenität

$$\begin{aligned} \Phi_N(\varphi|\xi_1) &= \frac{1 + e^\varphi \mathbf{a}(\xi_1)}{1 + \mathbf{a}(\xi_1)} - (1 - e^\varphi) \int_{\mathcal{C}-\Gamma} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, \xi_1)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} \\ &= \frac{1 + e^\varphi \mathbf{a}(\xi_1)}{1 + \mathbf{a}(\xi_1)} - (1 - e^\varphi) \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} - \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{2\pi i} \right] \frac{G(\omega, \xi_1)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} \\ &= e^\varphi - (1 - e^\varphi) \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, \xi_1)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Das Resultat ist nicht mehr abhängig von  $\mathbf{a}(\xi_1)$  und der Trotter-Limes sowie der homogene Limes können unabhängig voneinander ausgeführt werden.

Übertragen auf die approximierte erzeugende Funktion  $\Phi_N(\varphi|\{\xi\})$  sind für die Limes  $N \rightarrow \infty$  und  $\xi_j \rightarrow 0$  in (4.32) die Konturintegrale über  $\Gamma$  abzuspalten,

$$\left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}-\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^{n-r} \left[ \prod_{j=1}^r \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \left[ \prod_{j=r+1}^n \int_{\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] , \quad (4.34)$$

mit dem Residuensatz auszuwerten und die verbleibenden  $\mathcal{C}$ -Integrationen zu resumieren.

### Auswertung der $\Gamma$ -Integrale

Die analytischen Eigenschaften des Integranden in (4.32) sind bekannt, und die Auswertung der Integrale auf der Kontur  $\Gamma$  findet sich in

**Lemma 5.** *Der Term  $Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}) Z_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}|\{\xi^-\})$  mit den Partitionen  $\{\xi^+\}, \{\xi^-\}$  ist in den Variablen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  symmetrisch und hat innerhalb  $\Gamma^n$  einfache Polstellen bei  $\omega_j = \xi_k^+$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ . Ist  $p_2\{\xi^-\}$  weiter die Menge aller geordneten Paare  $(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\})$  von Unterpotionen, dann folgt durch die Auswertung der  $\Gamma$ -Integrale mit einer beliebigen Auswahl von  $n - r$  Variablen  $\omega_j$*

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=r+1}^n \int_{\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathfrak{a}(\omega_j)} \right] \frac{Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}) Z_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}|\{\xi^-\})}{\prod_{k=1}^{m-n} (1 + \mathfrak{a}(\xi_k^-))} \\ &= (n-r)! \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=r}} Y_r(\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) \\ & \sum_{\substack{(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{-+}|=m-n}} \left[ \prod_{k=1}^{m-n} \frac{1 + e^\varphi \mathfrak{a}(\xi_k^{-+}) F_r(\xi_k^{-+})}{1 + \mathfrak{a}(\xi_k^{-+})} \right] \left[ \prod_{k=1}^{n-r} \frac{1 - e^\varphi F_r(\xi_k^{-})}{1 + \mathfrak{a}(\xi_k^{-})} \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

für  $r = 0, \dots, n$ . Die Funktion  $F_r(\lambda)$  ist symmetrisch bezüglich  $\{\xi^+\}, |\xi^+| = r$  sowie  $\{\omega_j\}_{j=1}^r$  und lautet

$$F_r(\lambda) = F_r(\lambda|\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) = \left[ \prod_{j=1}^r \frac{\text{sh}(\lambda - \xi_j^+ + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega_j - \eta)}{\text{sh}(\lambda - \xi_j^+ - \eta) \text{sh}(\lambda - \omega_j + \eta)} \right]. \quad (4.36)$$

*Beweis.* Durch die Symmetrie des Integranden ist einer Umsortierung der Variablen  $\omega_j$  möglich. Die einfachen Polstellen bei  $\omega_j = \xi_k^+$ ,  $j, k = 1, \dots, n$  folgen aus den einfachen Polen von  $\det_n G(\omega_j, \xi_k^+)$  bei  $\omega_j = \xi_k^+$ ,  $j, k = 1, \dots, n$  während sich die einfachen Null- und Polstellen der Terme  $\prod_{j=1}^n \mathfrak{b}(\omega_j)$  und  $\det_n \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+)$  kompensieren. Die Auswertung der Konturintegrale über  $\Gamma$  ist in Anhang A.4 zu finden.  $\square$

## Resummation der $\mathcal{C}$ -Integrale

Aus kombinatorischer Sicht ergibt die Auswertung der  $\Gamma$ -Integrationen in der approximierten erzeugenden Funktion

$$\Phi_N(\varphi|\{\xi\}) = \sum_{n=0}^m \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}-\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \text{Integrand}(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}|\{\xi^-\})$$

nach (4.34) insgesamt  $(m+1)(m+2)/2$  Terme mit  $0, \dots, m$  Konturintegralen über  $\mathcal{C}$ . Bezeichnen  $n$  die ursprünglichen Integrationen  $[\prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}-\Gamma} d\omega_j]$  und  $r$  die verbleibenden Integrationen  $[\prod_{j=1}^r \int_{\mathcal{C}} d\omega_j]$  nach Auswertung der  $\Gamma$ -Konturen, dann ist eine graphische Übersetzung in Abbildung 4.2 möglich:

- (i) Für ein festes  $n$  kennzeichnet jeder Punkt  $\bullet$  einen Summanden in (4.34), es entstehen Terme mit  $r = 0, \dots, n$   $\mathcal{C}$ -Integrationen (Abbildung 4.2 links).
- (ii) Alternativ sind eine feste Anzahl  $r$  von Konturintegralen über  $\mathcal{C}$  in den Termen  $n = r, \dots, m$  enthalten (Abbildung 4.2 rechts).

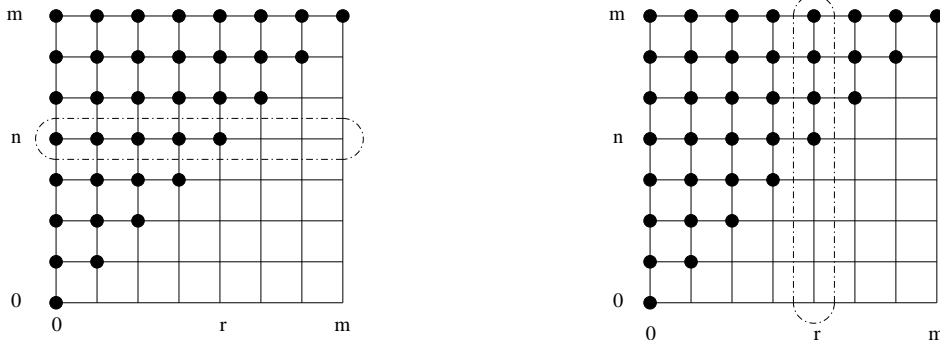


Abbildung 4.2: Graphische Darstellung aller Summanden nach Abspaltung und Auswertung der Konturintegrale über  $\Gamma$ .

Sollen in einem Summanden  $S_r$  alle Terme mit  $r$  Konturintegralen über  $\mathcal{C}$  gesammelt werden, sind für  $n = r, \dots, m$  die Gleichung (4.35) sowie die Faktoren  $(-1)^{n-r} \binom{n}{r}$  aus (4.34) zu kombinieren, und es folgt

$$\begin{aligned}
 S_r = \frac{1}{r!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| = r}} \left[ \prod_{j=1}^r \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] Y_r(\{\omega_j\}_{j=1}^r | \{\xi^+\}) \\
 \sum_{n=r}^m (-1)^{n-r} \sum_{\substack{(\{\xi^{+-}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{+-}| = m-n}} \left[ \prod_{l=1}^{m-n} \frac{1 + e^\varphi \mathbf{a}(\xi_l^{+-}) F_r(\xi_l^{+-})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{+-})} \right] \\
 \left[ \prod_{l=1}^{n-r} \frac{1 - e^\varphi F_r(\xi_l^{--})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{--})} \right] . \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Ausgehend vom höchsten Term mit  $m$  Konturintegralen  $\mathcal{C} - \Gamma$  wird die Anzahl der verbleibenden  $\mathcal{C}$ -Integrationen mit  $r = m - k$  parametrisiert. Der zu untersuchende Term ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=m-k}^m (-1)^{n-m+k} \sum_{\substack{(\{\xi^{+-}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{+-}| = m-n}} \left[ \prod_{l=1}^{m-n} \frac{1 + e^\varphi \mathbf{a}(\xi_l^{+-}) F_{m-k}(\xi_l^{+-})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{+-})} \right] \\
 \left[ \prod_{l=1}^{n-m+k} \frac{1 - e^\varphi F_{m-k}(\xi_l^{--})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{--})} \right] \\
 = \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{(\{\xi^{+-}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{--}| = j}} \left[ \prod_{l=1}^{k-j} \frac{1 + e^\varphi \mathbf{a}(\xi_l^{+-}) F_{m-k}(\xi_l^{+-})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{+-})} \right] \\
 \left[ \prod_{l=1}^j \frac{1 - e^\varphi F_{m-k}(\xi_l^{--})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{--})} \right] , \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

und seine Auswertung reduziert sich auf das Ersatzproblem in

**Lemma 6.** Seien  $p$  und  $q$  zwei beliebige auf der Indexmenge  $I_k = \{1, \dots, k\}$  definierte Funktionen und sei  $p_2(I_k)$  die Menge aller geordneten Paare  $(\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\})$  von Partitionen  $\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\} \in I_k$ . Dann gilt für  $x \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{(\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\}) \in p_2(I_k) \\ |\alpha^-|=j}} \left[ \prod_{b \in \{\alpha^+\}} (1 + x p(b)q(b)) \right] \left[ \prod_{b \in \{\alpha^-\}} (1 - x q(b)) \right] \\ = x^k \left[ \prod_{b \in I_k} (1 + p(b))q(b) \right] \quad . \quad (4.39) \end{aligned}$$

*Induktionsbeweis.* Anhang A.3 □

**Korollar 1.** Seien  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine willkürliche Funktion und  $\{\zeta\} = \{\zeta_l\}_{l=1}^k$  eine beliebige Menge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit der Indexmenge  $I_k$ . Dann folgt mit  $p(j) = \mathbf{a}(\zeta_j)$  und  $q(j) = F(\zeta_j)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{(\{\zeta^+\}, \{\zeta^-\}) \in p_2\{\zeta\} \\ |\zeta^-|=j}} \left[ \prod_{b=1}^{|\zeta^+|} (1 + x \mathbf{a}(\zeta_b^+) F(\zeta_b^+)) \right] \left[ \prod_{b=1}^{|\zeta^-|} (1 - x F(\zeta_b^-)) \right] \\ = x^k \left[ \prod_{b=1}^{|\zeta|} (1 + \mathbf{a}(\zeta_b)) F(\zeta_b) \right] \quad . \quad (4.40) \end{aligned}$$

Die Summationen in (4.38) lassen die Mengen  $\{\xi^+\}$ ,  $\{\xi^-\}$  und  $\{\omega_j\}_{j=1}^{m-k}$  invariant, sodass eine Identifikation von  $F(\circ)$  mit  $F_{m-k}(\circ | \{\omega_j\}_{j=1}^{m-k} | \{\xi^+\})$  möglich ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=m-k}^m (-1)^{n-m+k} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=m-n}} \left[ \prod_{l=1}^{m-n} \frac{1 + e^\varphi \mathbf{a}(\xi_l^{++}) F_{m-k}(\xi_l^{++})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{++})} \right] \\ \left[ \prod_{l=1}^{n-m+k} \frac{1 - e^\varphi F_{m-k}(\xi_l^{--})}{1 + \mathbf{a}(\xi_l^{--})} \right] = e^{k\varphi} \left[ \prod_{j=1}^k F_{m-k}(\xi_j^-) \right] \quad . \quad (4.41) \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit von allen  $\mathbf{a}(\xi_j)$  hebt sich heraus, und der allgemeine Summand  $S_n$  mit  $n$  Konturintegralen über  $\mathcal{C}$  lautet

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{e^{(m-n)\varphi}}{n!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] \\ &\quad Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\}) \left[ \prod_{j=1}^{m-n} F_n(\xi_j^- | \{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\}) \right] \\ &= \frac{e^{(m-n)\varphi}}{n!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\mathbf{b}(\omega_j)}{\mathbf{b}'(\xi_j^+)} \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k^+ - \eta)}{\text{sh}(\xi_j^+ - \xi_k^+ - \eta)} \right] \det_n M(\omega_j, \xi_k^+) \det_n G(\omega_j, \xi_k^+) \quad . \quad (4.42) \end{aligned}$$

Produkte über beide Partitionen  $\{\xi^-\}$  und  $\{\xi^+\}$ , wie etwa in  $F_n(\xi_j^- | \{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\})$ , lassen sich durch die Funktion

$$\mathfrak{b}(\lambda) = \left[ \prod_{l=1}^m \frac{\text{sh}(\lambda - \xi_l)}{\text{sh}(\lambda - \xi_l - \eta)} \right] \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\mathfrak{b}'(\xi_j)} = \frac{\prod_{l=1}^m \text{sh}(\xi_j - \xi_l - \eta)}{\prod_{l=1, l \neq j}^m \text{sh}(\xi_j - \xi_l)} \quad (4.43)$$

eliminieren, und die Determinante  $\det_n \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+)$  wird durch das Abspalten von Faktoren trivial umgeformt nach

$$\det_n \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+) = \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \xi_k^+ - \eta)} \right] \det_n M(\omega_j, \xi_k^+) \quad , \quad (4.44)$$

$$M(\omega_j, \xi_k^+) = t(\xi_k^+, \omega_j) \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_l^+ - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_l - \eta)} \right] + e^\varphi t(\omega_j, \xi_k^+) \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_l^+ + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_l + \eta)} \right] . \quad (4.45)$$

Ist  $f(z_1, \dots, z_n)$  eine in ihren Argumenten symmetrische Funktion, die für zwei übereinstimmende Argumente zu Null wird und auf sowie innerhalb  $\mathcal{C}^n$  analytisch ist, dann gilt mit den einfachen Polstellen der meromorphen Funktion  $1/\mathfrak{b}(\omega)$

$$\frac{1}{n!} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{dz_j}{2\pi i} \frac{1}{\mathfrak{b}(\omega_j)} \right] f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \frac{f(\xi_1^+, \dots, \xi_n^+)}{\prod_{j=1}^n \mathfrak{b}'(\xi_j^+)} . \quad (4.46)$$

Alle Inhomogenitäten  $\xi_j$  befinden sich innerhalb der Kontur  $\Gamma$  und der Integrand aus (4.42) erfüllt in den Variablen  $\xi_1^+, \dots, \xi_n^+$  die Voraussetzungen der Funktionen  $f$  aus (4.46). Es folgt das Endresultat der approximierten erzeugenden Funktion in

**Satz 1.** *Ist  $\{\xi_k\}_k^m$  eine beliebige Menge komplexer Zahlen innerhalb einer einfach geschlossen Kontur  $\Gamma$  um den Ursprung, dann lautet die approximierte erzeugende Funktion*

$$\Phi_N(\varphi | \{\xi\}) = \sum_{n=0}^m \frac{e^{(m-n)\varphi}}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{\mathfrak{b}(\omega_j)}{1 + \mathfrak{a}(\omega_j)} \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \frac{1}{\mathfrak{b}(z_j)} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k - \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k - \eta)} \right] \det M(\omega_j, z_k) \det G(\omega_j, z_k) \quad , \quad (4.47)$$

mit der Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}(\lambda)$  für endliche Trotter-Zahlen  $N$ . Die Determinanten haben die Einträge

$$M(\omega_j, z_k) = t(z_k, \omega_j) \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_l - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_l - \eta)} \right] + e^\varphi t(\omega_j, z_k) \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_l + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_l + \eta)} \right] \quad (4.48)$$

sowie  $G(\omega_j, z_k)$ , wobei  $G(\lambda, \xi)$  die Lösung der linearen Integralgleichung

$$G(\lambda, \xi) = t(\xi, \lambda) + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G(\omega, \xi)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)}$$

ist. Die Kontur  $\mathcal{C}$  ist wie in der nichtlinearen Integralgleichung (3.11) für die Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}(\lambda)$  zu wählen, und  $\Gamma$  liegt innerhalb  $\mathcal{C}$ .

### Limites

Die Trotter-Zahl  $N$  geht in (4.47) nur noch implizit über die Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda)$  ein und die vollständige Information über die Inhomogenitäten  $\{\xi\}$  ist in  $\mathbf{b}(\omega)$  enthalten. Dadurch, dass die Inhomogenitäten nur noch innerhalb der Kontur  $\Gamma$  liegen müssen, brauchen sie nicht mehr paarweise voneinander verschieden zu sein. Der homogene Limes ist einfach zu bilden und führt mit dem Trotter-Limes auf

**Lemma 7.** *Die erzeugende Funktion für  $m$  Kettenplätze lautet im Trotter-Limes und homogenen Limes mit der Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda)$  nach (3.20)*

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_n 2^2 \right\} \right\rangle_{T,h} &= \sum_{n=0}^m \frac{e^{(m-n)\varphi}}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j - \eta)} \right)^m \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j - \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k - \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k - \eta)} \right] \\ &\quad \det M(\omega_j, z_k) \det G(\omega_j, z_k) \quad . \end{aligned} \quad (4.49)$$

### 4.3 Teilchen-Loch-Transformationen

Der Übergang von der Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda)$  zu ihrem dualen Gegenstück  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda)$  lässt sich formal als eine Teilchen-Loch-Transformation deuten und ist in den Integralgleichungen mit der Identität

$$-\frac{G(\lambda, \xi)}{1 + \mathbf{a}(\lambda)} = \frac{-G(\lambda, \xi) + \mathbf{a}(\lambda)G(\lambda, \xi) - \mathbf{a}(\lambda)G(\lambda, \xi)}{1 + \mathbf{a}(\lambda)} = -G(\lambda, \xi) + \frac{G(\lambda, \xi)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\lambda)} \quad (4.50)$$

durchzuführen. Die Vorgehensweise verdeutlicht

**Beispiel 4.** *Die approximierte erzeugende Funktion lautet für eine einzelne Inhomogenität unter der Teilchen-Loch-Transformation*

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi|\xi_1) &= e^\varphi + (1 - e^\varphi) \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega - G(\omega, \xi)}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega)} \\ &= e^\varphi - (1 - e^\varphi) \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} G(\omega, \xi) + (1 - e^\varphi) \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, \xi)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega)} \\ &= 1 + (1 - e^\varphi) \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, \xi)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega)} \quad . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die Symmetrie in den Integrationsvariablen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  des allgemeinen Summanden (4.42) reduziert die Teilchen-Loch-Transformation auf

$$\left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega - G(\omega, \xi)}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega)} \right]^n = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, \xi)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega)} \right]^r \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} G(\omega, \xi) \right]^{n-r} \quad , \quad (4.52)$$

und es gilt die gleiche graphische Interpretation mit Abbildung 4.2. Jeder Summand in (4.52) ist für ein festes  $n$  als Punkt  $\bullet$  gekennzeichnet, wobei  $r$  die Anzahl der Konturintegrale mit  $\bar{\mathbf{a}}(\omega)$  darstellt. Die Variablen, die nicht in Hilfsfunktionen  $\bar{\mathbf{a}}$  auftreten, werden ausintegriert nach

**Lemma 8.** *Der Term  $Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}) \left[ \prod_{j=1}^{m-n} F_n(\xi_j^-|\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}) \right]$  mit den Partitionen  $\{\xi^+\}$  und  $\{\xi^-\}$  ist in den Variablen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  symmetrisch und weist innerhalb  $\mathcal{C}^n$  einfache Polstellen bei  $\omega_j = \xi_k^+$ ,  $j, k = 1, \dots, n$  auf. Mit  $p_2\{\xi^-\}$  als Menge aller geordneten Paare von Unterp partitionen ergibt die Auswertung der Konturintegrale für eine beliebigen Auswahl von  $n - r$  ( $r = 0, \dots, n$ ) Variablen  $\omega_j$*

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=r+1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}) \left[ \prod_{l=1}^{m-n} F_n(\xi_l^-|\{\omega_j\}_{j=1}^n|\{\xi^+\}) \right] \\
&= (n-r)! \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=r}} Y_r(\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) \left[ \prod_{l=1}^{m-r} F_r(\xi_l^-|\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) \right] \\
& \quad \sum_{\substack{(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{-+}|=m-n}} \left[ \prod_{l=1}^{n-r} \left\{ \frac{1}{F_r(\xi_l^{-+}|\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\})} - e^\varphi \right\} \right] \quad . \quad (4.53)
\end{aligned}$$

*Beweis.* analog Lemma 5 □

Die Schritte zur Aufsummation aller Beiträge mit  $r$  Konturintegralen über  $\mathcal{C}$  und enthaltener Hilfsfunktion  $\bar{\alpha}(\omega)$  sind entsprechend zu denen des allgemeinen Summanden  $S_r$ . Es sind in (4.53) für  $n = r, \dots, m$  zusätzlich der Faktor  $(-1)^{n-r} \binom{n}{r}$  aus (4.52) sowie das Vorzeichen  $(-1)^n$  von  $\det_n G(\omega_j, \xi_k^+) = (-1)^n \det_n [-G(\omega_j, \xi_k^+)]$  zu berücksichtigen. Sei  $\bar{S}_r$  die Bezeichnung des gesuchten Summanden, dann ist

$$\begin{aligned}
\bar{S}_r &= \sum_{n=r}^m \frac{e^{(m-n)\varphi}}{n!} (n-r)! \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=r}} \left[ \prod_{j=1}^r \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \\
& \quad (-1)^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} Y_r(\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) \left[ \prod_{l=1}^{m-r} F_r(\xi_l^-|\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) \right] \\
& \quad \sum_{\substack{(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{-+}|=m-n}} \left[ \prod_{l=1}^{n-r} \left( F_r^{-1}(\xi_l^{-+}|\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) - e^\varphi \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=r}} \left[ \prod_{j=1}^r \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \\
& \quad Y_r(\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) \left[ \prod_{l=1}^{m-r} F_r(\xi_l^-|\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) \right] \\
& \quad \sum_{n=r}^m e^{(m-n)\varphi} \sum_{\substack{(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{-+}|=m-n}} \left[ \prod_{l=1}^{n-r} \left( F_r^{-1}(\xi_l^{-+}|\{\omega_j\}_{j=1}^r|\{\xi^+\}) - e^\varphi \right) \right] \quad . \quad (4.54)
\end{aligned}$$



Wird, ausgehend vom höchsten Term mit  $m$  Konturintegralen, die Zahl der Integrationen mit enthaltener Hilfsfunktion  $\bar{\alpha}$  durch  $r = m - k$  parametrisiert, dann kann die Aufsummation auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m-k}^m e^{(m-n)\varphi} \sum_{\substack{(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^{-}\} \\ |\xi^{-+}|=m-n}} \left[ \prod_{l=1}^{n-m+k} \left( F_{m-k}^{-1}(\xi_l^{-} | \{\omega_j\}_{j=1}^{m-k} | \{\xi^{+}\}) - e^\varphi \right) \right] \\ &= \sum_{j=0}^k e^{(k-j)\varphi} \sum_{\substack{(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^{-}\} \\ |\xi^{--}|=j}} \left[ \prod_{l=1}^j \left( F_{m-k}^{-1}(\xi_l^{-} | \{\omega_j\}_{j=1}^{m-k} | \{\xi^{+}\}) - e^\varphi \right) \right] \quad (4.55) \end{aligned}$$

reduziert werden. Die Auswertung erfolgt mit Lemma 6, genauer mit dessen

**Korollar 2.** *Die spezielle Wahl der Funktion  $p(j) = 0$  für alle  $j \in I_k$  ergibt mit der Ersetzung  $y = 1/x \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{j=0}^k y^{k-j} \sum_{\substack{(\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\}) \in p_2(I_k) \\ |\alpha^+|=j}} \left[ \prod_{b \in \{\alpha^-\}} (q(b) - y) \right] = \left[ \prod_{l=1}^k q(l) \right] \quad (4.56)$$

Seien  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine willkürliche Funktion und  $\{\zeta\} = \{\zeta_l\}_{l=1}^k$  eine beliebige Menge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit der Indexmenge  $I_k$ . Dann folgt mit der Zuordnung  $q(j) = 1/F(\zeta_j)$

$$\sum_{j=0}^k y^{k-j} \sum_{\substack{(\{\zeta^+\}, \{\zeta^-\}) \in p_2\{\zeta\} \\ |\zeta^+|=j}} \left[ \prod_{l=1}^j \left( 1/F(\zeta_l^-) - y \right) \right] = \frac{1}{\prod_{l=1}^k F(\zeta_l)} \quad (4.57)$$

Durch die Identifizierungen von  $F(\circ)$  mit  $F_r(\circ | \{\omega_j\}_{j=1}^r | \{\xi^+\})$  und  $\{\zeta\}$  mit  $\{\xi^-\}$  heben sich in den Summanden  $\bar{S}_r$  alle Funktionen  $F_r(\circ)$  gegenseitig auf mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \bar{S}_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\}) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\bar{\mathfrak{b}}(\omega_j)}{\bar{\mathfrak{b}}'(\xi_j^+)} \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k^+ + \eta)}{\text{sh}(\xi_j^+ - \xi_k^+ + \eta)} \right] \det_n M(\omega_j, \xi_k^+) \det_n G(\omega_j, \xi_k^+) \quad (4.58) \end{aligned}$$

Es folgt mit (4.46) und den einfachen Polstellen  $\omega = \xi_l$ ,  $l = 1, \dots, m$  der meromorphen Funktion  $1/\bar{\mathfrak{b}}(\omega)$  das Endresultat der Teilchen-Loch-Transformation als

**Satz 2.** Ist  $\{\xi_k\}_k^m$  eine beliebige Menge komplexer Zahlen innerhalb einer einfach geschlossen Kontur  $\Gamma$  um den Ursprung, dann lautet mit der Hilfsfunktion  $\bar{\mathbf{a}}(\omega)$  die approximierte erzeugende Funktion

$$\Phi_N(\varphi|\{\xi\}) = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{\bar{\mathbf{b}}(\omega_j)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \frac{1}{\bar{\mathbf{b}}(z_j)} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k + \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta)} \right] \det_n M(\omega_j, z_k) \det_n G(\omega_j, z_k) \quad . \quad (4.59)$$

Die Determinanten  $\det M(\omega_j, z_k)$  und  $\det G(\omega_j, z_k)$  sind die gleichen wie in Satz 1. Die Kontur  $\mathcal{C}$  wird aus der nichtlinearen Integralgleichung für  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda) = 1/\mathbf{a}(\lambda)$  übernommen und schließt die Kontur  $\Gamma$  ein.  $G(\lambda, \xi)$  kann alternativ als die Lösung der linearen Integralgleichung

$$G(\lambda, \xi) = -t(\lambda, \xi) - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G(\omega, \xi)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega)} \quad (4.60)$$

mit der Hilfsfunktion  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda)$  aufgefasst werden. Die Information über alle Inhomogenitäten  $\{\xi\}$  trägt die Funktion

$$\bar{\mathbf{b}}(\lambda) = \left[ \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(\lambda - \xi_k)}{\text{sh}(\lambda - \xi_k + \eta)} \right] \quad .$$

Die Anwendung des homogenen Limes und des Trotter-Limes auf die approximierte erzeugende Funktion (4.59) ist zusammengefasst in

**Lemma 9.** Die erzeugende Funktion für  $m$  Kettenplätze lautet nach einer Teilchen-Loch-Transformation im Trotter-Limes und homogenen Limes

$$\left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{T,h} = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j + \eta)} \right)^m \right] \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j + \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k + \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta)} \right] \det_n M(\omega_j, z_k) \det_n G(\omega_j, z_k) \quad , \quad (4.61)$$

mit der Hilfsfunktion  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda)$  als Lösung der nichtlinearen Integralgleichung (3.21) im Limes  $N \rightarrow \infty$ .

## 4.4 Umkehrsymmetrie

Die simultanen Transformationen  $\eta \rightarrow -\eta$  und  $h \rightarrow -h$  in den nichtlinearen Integralgleichungen (3.20) und (3.21) überführen die Lösung  $\mathbf{a}(\lambda)$  in  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda)$  und umgekehrt. Mit dem Magnetfeld  $h$  als der Projektion des äußeren Feldes  $\mathbf{h}$  auf die Vorzugsrichtung, entspricht  $h \rightarrow -h$  dann einer Umkehr der  $z$ -Achse. Die verallgemeinerte Dichtefunktion  $G(\lambda, \xi)$  bleibt von den Ersetzungen  $\eta \rightarrow -\eta$  und  $\mathbf{a} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}$  unbeeinflusst, da sowohl

(4.21) als auch (4.60) äquivalente Darstellungen sind.

Die Umkehrung der Vorzugsrichtung bewirkt, dass sich die lokalen Operatoren der erzeugenden Funktion nach  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  transformieren. Das Vorzeichen  $(-1)^n$  in (4.61) wird in die Determinante  $\det_n M$  hineingezogen und in (4.49) werden die Faktoren  $e^\varphi$  neu aufgeteilt mit der anschließenden Ersetzung  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Es folgen als Ergebnis die beiden Darstellungen

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix}_j \right\rangle_{T,h} &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j + \eta)} \right)^m \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j + \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k + \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta)} \right] \\ &\quad \det_n \mathcal{M}^+(\omega_j, z_k) \det_n G(\omega_j, z_k) \quad , \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^m \begin{pmatrix} e^\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_j \right\rangle_{T,h} &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j - \eta)} \right)^m \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j - \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k - \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k - \eta)} \right] \\ &\quad \det_n \mathcal{M}^-(\omega_j, z_k) \det_n G(\omega_j, z_k) \quad , \end{aligned} \quad (4.63)$$

die über die Substitutionen  $\eta \rightarrow -\eta$  und  $\bar{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbf{a}$  ( $\mathbf{a} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}$ ) zusammenhängen. Die entsprechenden Determinanteneinträge lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\pm(\omega_j, z_k) &= \frac{\text{sh}(\mp\eta)}{\text{sh}(\omega_j - z_k) \text{sh}(\omega_j - z_k \mp \eta)} \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_l \mp \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_l \mp \eta)} \right] \\ &\quad - \frac{e^\varphi \text{sh}(\pm\eta)}{\text{sh}(\omega_j - z_k) \text{sh}(\omega_j - z_k \pm \eta)} \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_l \pm \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_l \pm \eta)} \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.64)$$

### Zusätzliche Symmetrie

Eine weitere Symmetrie der Integraldarstellungen ist für eine rein imaginäre Parametrisierung  $\eta$  der Anisotropie  $\Delta = \text{ch}(\eta)$  enthalten: Der Wertebereich  $\pi/2 < \text{Im } \eta \leq \pi$ ,  $-1 \leq \Delta < 0$  lässt sich zunächst auf der Ebene der Konturen  $\mathcal{C}$  durch die Transformation  $\eta \rightarrow i\pi - \eta$  auf das Intervall  $0 < \text{Im } \eta \leq \pi/2$ ,  $0 < \Delta \leq 1$  abbilden. Der Grund dafür ist, dass die Höhe der Kontur durch die Periodizität in  $i\pi$  für alle  $\eta$  aus dem Intervall  $\pi/2 < \text{Im } \eta \leq \pi$  auf  $|i\pi - \eta|$  reduziert ist.

In den nichtlinearen Integralgleichungen (3.20) und (3.21) gehen unter den simultanen Transformationen  $\eta \rightarrow i\pi - \eta$ ,  $h \rightarrow -h$  und  $c \rightarrow -c$  die Lösungen  $\mathbf{a}(\lambda)$  und  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda)$  ineinander über und die Anisotropie wechselt ihr Vorzeichen  $\Delta \rightarrow -\Delta$ . Die verallgemeinerte Dichtefunktion  $G(\lambda, \xi)$  bleibt davon unbeeinflusst.

Die enthaltene Transformation  $h \rightarrow -h$  bedeutet die Umkehr der Vorzugsrichtung und die beiden Integraldarstellungen (4.62) und (4.63) gehen durch die Substitutionen  $\eta \rightarrow i\pi - \eta$  und  $\bar{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbf{a}$  ( $\mathbf{a} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}$ ) auseinander hervor.

**Bemerkung.** Die vorliegende Symmetrie, die Umkehrung von Magnetfeld  $h \rightarrow -h$  und Kopplung  $c \rightarrow -c$  eingeschlossen, ermöglicht die Beschränkung auf Anisotropiewerte  $0 < \Delta \leq 1$  für  $\eta$  aus dem Intervall  $0 < \text{Im } \eta \leq \pi/2$ .

## Kapitel 5

# Beispiele für Korrelationen

Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion  $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_{T,h}$  auf der periodisch geschlossenen XXZ-Kette ging im thermodynamischen Limes aus der erzeugenden Funktion

$$\Phi_N(\varphi|\{\xi\}) = \frac{\langle \psi_0 | \left[ \prod_{j=1}^m t_\varphi(\xi_j) \right] \left[ \prod_{j=1}^m t_0^{-1}(\xi_j) \right] | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \quad (5.1)$$

durch stetige und diskrete erste und zweite Ableitungen hervor,

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_{T,h} = (2D_m^2 \partial_\varphi^2 - 4D_m^1 \partial_\varphi + 1) \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2} \right\} \right\rangle_T \Big|_{\varphi=0} \quad (5.2)$$

$D_m^1$  und  $D_m^2$  waren auf einer beliebigen komplexwertigen Folge  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$D_m^1 a_m = a_m - a_{m-1} \quad \text{und} \quad D_m^2 a_m = a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1} \quad (5.3)$$

In der erzeugenden Funktion sind aber noch zwei weitere Arten von Korrelationsfunktionen enthalten.

### 5.1 Die Ein-Punkt-Funktionen

Diese beschreiben keine Korrelationen zwischen unterschiedlichen Gitterplätzen, sondern den Erwartungswert eines beliebigen lokalen Operators  $X \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$  bei endlichen Temperaturen  $T$  und endlichen Magnetfeldern  $h$ .

Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, wird der lokale Operator  $X = (x^\alpha_\beta)$  durch die Spurbildung  $X(\lambda) = \text{tr} [T^{QTM}(\lambda)X]$  auf Elemente der Quantenmonodromiematrix projiziert und der Erwartungswert durch algebraische Auswertung des Skalarproduktes

$$\langle 0 | \left[ \prod_{l=1}^{N/2} C(\lambda_l) \right] X(\lambda) \left[ \prod_{l=1}^{N/2} B(\lambda_l) \right] | 0 \rangle \quad (5.4)$$

bestimmt. Da die Skalarprodukte nur dann von Null verschieden sind, wenn genau so viele Operatoren  $B$  wie  $C$  zwischen den Pseudovakua  $\langle 0 |$  und  $| 0 \rangle$  auftreten, reduziert sich  $X(\lambda)$  zwischen den Bethe-Eigenvektoren auf den Term  $x^1_1 A(\lambda) + x^2_2 D(\lambda)$ , und es ist

$$\langle X \rangle_{T,h} = x^1_1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{T,h} + x^2_2 \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{T,h} \quad (5.5)$$

mit

**Lemma 10.** Die Erwartungswerte der  $gl(2)$ -Standardbasis  $e_\alpha^\beta$  für einen beliebigen lokalen Operator  $X = x_\alpha^\beta e_\alpha^\beta$  lauten im thermodynamischen Limes

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} = 1 + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega)} \quad , \quad (5.6a)$$

$$\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = 1 + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} = - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega)} \quad , \quad (5.6b)$$

$$\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = 0 \quad , \quad (5.7)$$

wenn  $\mathbf{a}(\omega)$ ,  $\bar{\mathbf{a}}(\omega)$  und  $G(\omega, 0)$  die Lösungen der Integralgleichungen (3.20), (3.21) und (4.21) im Trotter-Limes sind.

*Beweis.* Zu betrachten sind die Gleichungen (4.33) und (4.51) der Beispiele 3 und 4 im homogenen Limes  $\xi_1 \rightarrow 0$  mit den Grenzwerten

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix} \rangle_{T,h} \quad \text{und} \quad \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} e^{-\varphi} \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix} \rangle_{T,h} \quad . \quad \square$$

Die Magnetisierung pro Gitterplatz folgt dann im thermodynamischen Limes unter der Anwendung von (5.6) als

$$m(h, T) = \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = -\frac{1}{2} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} = \frac{1}{2} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega)} \quad . \quad (5.8)$$

Dies ist ein Resultat, das davon unabhängig auch aus der Integraldarstellung der Freien Energie in (3.36) abgeleitet wurde.

## 5.2 Die *Emptiness Formation Probability*

Die Wahrscheinlichkeit, auf der XXZ-Kette einen String von  $m$  benachbarten, gleich ausgerichteten Spins zu finden, steht in direktem Zusammenhang mit der erzeugenden Funktion für  $m$  Kettenplätze. Ist es im feldfreien Fall unerheblich, ob der String in oder entgegen der Vorzugsrichtung ( $z$ -Achse) eingestellt ist, so bricht das äußere Feld die Spinumkehrsymmetrie<sup>1</sup>. Die Wahrscheinlichkeit  $P^+(m) = \langle e_{11}^1 \dots e_{m1}^1 \rangle_{T,h}$  für die Einstellung von  $m$  benachbarten Spins in Vorzugsrichtung ist angegeben in

**Lemma 11.** Die  $m$ -Punkt-Korrelationsfunktion  $P^+(m) = \langle e_{11}^1 \dots e_{m1}^1 \rangle_{T,h}$  hat die beiden zueinander äquivalenten Integraldarstellungen

$$\begin{aligned} & \langle e_{11}^1 \dots e_{m1}^1 \rangle_{T,h} \\ &= \frac{1}{(m!)^2} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j - \eta)} \right)^m \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j - \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \\ & \quad \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}^2(\omega_j - z_k - \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k - \eta) \text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \det t(z_k, \omega_j) \det G(\omega_j, z_k) \quad (5.9a) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Der Hamilton-Operator  $H_{XXZ}$  ist unter der Spinumkehr  $\sigma_j^\alpha \rightarrow -\sigma_j^\alpha$  invariant. Der Operator  $S^z$  des Gesamtspins, an den das Magnetfeld  $h$  in  $z$ -Richtung koppelt, transformiert sich dagegen nach  $S^z \rightarrow -S^z$ , was einer formalen Umkehr der  $z$ -Achse oder des Magnetfeldes entspricht.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j + \eta)} \right)^m \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j + \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \\
&\quad \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k + \eta) \text{sh}(\omega_j - z_k - \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta) \text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \det t(z_k, \omega_j) \det G(\omega_j, z_k) \quad , \quad (5.9b)
\end{aligned}$$

wenn  $\mathbf{a}(\omega)$ ,  $\bar{\mathbf{a}}(\omega)$  und  $G(\omega, \xi)$  die Lösungen der entsprechenden Integralgleichungen im Trotter-Limes sind.

*Beweis.* Die Aussage folgt im Limes  $\varphi \rightarrow -\infty$  der erzeugenden Funktion in den Darstellungen (4.49) und (4.61).  $\square$

Die zweite Möglichkeit, dass der String entgegen der Vorzugsrichtung eingestellt ist, beschreibt die Wahrscheinlichkeit  $P^-(m) = \langle e_{12}^2 \dots e_{m2}^2 \rangle_{T,h}$  in

**Lemma 12.** *Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 11 hat die  $m$ -Punkt-Korrelationsfunktion  $P^-(m) = \langle e_{12}^2 \dots e_{m2}^2 \rangle_{T,h}$  die beiden alternativen Integraldarstellungen*

$$\begin{aligned}
&\langle e_{12}^2 \dots e_{m2}^2 \rangle_{T,h} \\
&= \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j + \eta)} \right)^m \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j + \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \\
&\quad \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}^2(\omega_j - z_k + \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta) \text{sh}(\omega_j - \omega_k + \eta)} \right] \det t(\omega_j, z_k) \det G(\omega_j, z_k) \quad (5.10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j - \eta)} \right)^m \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j - \eta)}{\text{sh}(z_j)} \right)^m \right] \\
&\quad \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k + \eta) \text{sh}(\omega_j - z_k - \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta) \text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \det t(\omega_j, z_k) \det G(\omega_j, z_k) \quad . \\
&\hspace{15em} (5.10b)
\end{aligned}$$

*Beweis.*  $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} e^{-m\varphi} \left\langle \prod_{j=1}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix}_j \right\rangle_{T,h} = \langle e_{12}^2 \dots e_{m2}^2 \rangle_{T,h}$  in (4.49) und (4.61).  $\square$

Die  $m$ -Punkt-Korrelationsfunktionen  $P^\pm(m)$  wurden für Spinketten erstmals in [45] diskutiert, während sich der Name *Emptiness Formation Probability* aus dem Teilchenbild ableitet, zu dem man über die Jordan-Wigner-Transformation [27, 48]

$$c_j = S_j^+ \left[ \prod_{k=1}^{j-1} (2S_k^+ S_k^- - 1) \right] \quad , \quad S_j^- = c_j^\dagger \left[ \prod_{k=1}^{j-1} (1 - 2c_k^\dagger c_k) \right] \quad (5.11)$$

$$c_j^\dagger = S_j^- \left[ \prod_{k=1}^{j-1} (2S_k^+ S_k^- - 1) \right] \quad , \quad S_j^+ = c_j \left[ \prod_{k=1}^{j-1} (1 - 2c_k^\dagger c_k) \right] \quad (5.12)$$

$$\sigma_j^z = 2S_j^z = [S_j^+, S_j^-] = 1 - 2c_j^\dagger c_j \quad (5.13)$$

gelangen kann. Für die Spinoperatoren besteht mit  $\alpha = x, y, z$  der Zusammenhang  $2S_j^\alpha = \sigma_j^\alpha$  zu den Pauli-Matrizen und zusätzlich ist  $S_j^\pm = S_j^x \pm iS_j^y$ . Im Teilchenbild mit den Fermi-Operatoren  $c_j, c_j^\dagger$  beschreiben die  $m$ -Punkt-Korrelationsfunktionen

$$\langle e_{11}^1 \dots e_{m1}^1 \rangle_{T,h} = \left\langle \prod_{j=1}^m \frac{1}{2} (1 + \sigma_j^z) \right\rangle = \left\langle \prod_{j=1}^m (1 - c_j^\dagger c_j) \right\rangle_{T,h} \quad (5.14)$$

$$\langle e_{12}^2 \dots e_{m2}^2 \rangle_{T,h} = \left\langle \prod_{j=1}^m \frac{1}{2} (1 - \sigma_j^z) \right\rangle = \left\langle \prod_{j=1}^m (c_j^\dagger c_j) \right\rangle_{T,h} \quad (5.15)$$

dann die Wahrscheinlichkeit, dass  $m$  benachbarte Plätze entweder komplett leer oder vollständig mit spinlosen Fermionen besetzt sind.

Die *Emptiness Formation Probability* als spezielles Dichtematrixelement im Sinne von Jimbo et al. [25] ist bei  $T = 0$  exakt berechenbar, wie die Arbeit von H. Boos und V.E. Korepin [10] zeigt: Aus der Vielfachintegraldarstellung [45] konnte der Wert bis zu der Stringlänge  $m = 4$  auf der  $XXX$ -Kette durch die Zahl  $\ln 2$  und die Riemannsche Zeta-Funktion mit ungeraden Argumenten ausgedrückt werden. Es folgten mit den Artikeln [11, 51] weitere exakte Resultate, die schließlich auf die anisotrope Heisenberg-Kette verallgemeinert wurden [29, 30, 69].

**Bemerkung.** In dem Sonderfall  $m = 1$  reduzieren sich  $P^\pm(1)$  auf die Erwartungswerte (5.6) der Standardbasen.

### Homogener Limes ohne $\Gamma$ -Integrale

Sei  $\phi^-(m) = \phi^-(m|\{\xi\})$  die inhomogene Version der *Emptiness Formation Probability* mit der Entsprechung  $\phi^-(m|\{\xi\}) = P^-(m)$  im homogenen Limes. Dann folgt mit der Grenzwertbildung  $\varphi \rightarrow +\infty$  aus der erzeugenden Funktion (Lemma 12) durch Abgleichen mit (4.58) die inhomogene Darstellung

$$\begin{aligned} \phi^-(m) &= \frac{(-1)^m}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k)}{\text{sh}(\omega_j - \xi_k + \eta)} \right] \det_m G(\omega_j, \xi_k) \\ &\quad \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}^2(\omega_j - \xi_k + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k + \eta)} \right] \left[ \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{\text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \right] \det_m t(\omega_j, \xi_k) \quad (5.16a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^m}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \right] \frac{\det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \\ &\quad \left\{ \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k) \text{sh}(\omega_j - \xi_k + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k + \eta)} \right] \frac{\det_m t(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_k - \xi_j)} \right\} . \quad (5.16b) \end{aligned}$$

Der Term in den geschweiften Klammern ist bezüglich der Integrationsvariablen  $\omega_j$  ein symmetrisierter Ausdruck, diskutiert in



**Lemma [33] 13.** Seien  $\{\omega_j\}_{j=1}^m$  und  $\{\xi_k\}_{k=1}^m$  zwei beliebige Mengen paarweise verschiedener komplexer Zahlen, und sei  $\sigma \in \mathfrak{S}^m$  eine Permutation, welche auf die Indizes  $j$  der Elemente  $\omega_j$  wirkt. Repräsentieren  $\omega_j$  und  $\xi_k$  als Argumente die Mengen  $\{\omega_j\}_{j=1}^m$  und  $\{\xi_k\}_{k=1}^m$ , dann bezieht sich  $\omega_{\sigma(j)}$  als Argument auf die umgeordnete Menge  $\{\omega_{\sigma(j)}\}_{j=1}^m$  und es gilt

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\sigma) I(\omega_{\sigma(j)}, \xi_k) = \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k) \text{sh}(\omega_j - \xi_k + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k + \eta)} \right] \frac{\det t(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_k - \xi_j)} \quad (5.17)$$

$$I(\omega_j, \xi_k) = \frac{\prod_{j=1}^m \left[ \prod_{k=1}^{j-1} \text{sh}(\omega_j - \xi_k + \eta) \right] \left[ \prod_{k=j+1}^m \text{sh}(\omega_j - \xi_k) \right]}{\prod_{j < k} \text{sh}(\omega_k - \omega_j + \eta)} . \quad (5.18)$$

Die inhomogene Version der *Emptiness Formation Probability* wird dann schließlich ausgedrückt über den Term

$$\begin{aligned} \phi^-(m) &= \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \frac{\det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \\ &\quad (-1)^m \frac{\prod_{j=1}^m \left[ \prod_{k=1}^{j-1} \text{sh}(\omega_j - \xi_k + \eta) \right] \left[ \prod_{k=j+1}^m \text{sh}(\omega_j - \xi_k) \right]}{\prod_{j < k} \text{sh}(\omega_k - \omega_j + \eta)} , \quad (5.19) \end{aligned}$$

der durch Anwenden von Lemma 13 und durch Vergleich mit der Ausgangsdarstellung (5.16b) verifiziert wird,

$$\begin{aligned} &= (-1)^m \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \frac{\det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_j - \xi_k)} I(\omega_j, \xi_k) \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{symmetrisierter Integrand durch } \det G(\omega_{\sigma(j)}, \xi_k) = \text{sign}(\sigma) \det G(\omega_j, \xi_k) \\ \text{für alle } m! \text{ Permutationen } \sigma \in \mathfrak{S}^m \end{array} \right. \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \frac{\det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\sigma) I(\omega_{\sigma(j)}, \xi_k) \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \frac{\det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \\ &\quad \left\{ \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k) \text{sh}(\omega_j - \xi_k + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k + \eta)} \right] \frac{\det_m t(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_k - \xi_j)} \right\} . \end{aligned}$$

Der noch durchzuführende homogene Limes in (5.19) reduziert sich auf den l' Hopitalschen Grenzwert der Terme  $\det_m G(\omega_j, \xi_k)$  und  $\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_k - \xi_j)$  in

**Lemma 14.** Ist  $G(\lambda, \xi)$  die verallgemeinerte Dichtefunktion, dann lautet der homogene Limes  $\xi_k \rightarrow 0$  für die Determinante  $\det_m G(\omega_j, \xi_k)$

$$\lim_{\xi_j \rightarrow 0} \left[ \frac{\det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\xi_k - \xi_j)} \right] = \det_m \left[ \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} G}{\partial \xi^{k-1}}(\omega_j, 0) \right] . \quad (5.20)$$

*Induktionsbeweis.* Die Induktion beruht auf dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach der mit  $\xi_{m+1}$  indizierten Spalte (Zeile).  $\square$

In der Ausführung des homogenen Limes wird das entstehende Vorzeichen  $(-1)^{\frac{(m-1)m}{2}}$  mit  $(-1)^m$  zu  $i^{(m+1)m}$  verrechnet und das Endergebnis zusammengefasst in

**Lemma 15.** *Die Wahrscheinlichkeit, auf der periodisch geschlossenen XXZ-Kette im thermodynamischen Limes einen String von  $m$  benachbarten entgegen der Vorzugsrichtung eingestellten Spins zu finden, ist*

$$P^-(m) = i^{(m+1)m} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j)} \right] \left[ \frac{\prod_{j=1}^m \text{sh}^{j-1}(\omega_j + \eta) \text{sh}^{m-j}(\omega_j)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\omega_k - \omega_j + \eta)} \right] \det_m \left[ \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} G}{\partial \xi^{k-1}}(\omega_j, 0) \right] . \quad (5.21)$$

Die  $m$ -Punkt-Korrelationsfunktion  $P^+(m)$  geht durch Umkehrung der  $z$ -Achse (Kapitel 4.4), also durch die Ersetzungen  $\eta \rightarrow -\eta$  und  $\bar{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbf{a}$ , aus  $P^-(m)$  hervor und es folgt

**Korollar 3.** *Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 15 lautet die Wahrscheinlichkeit, dass  $m$  benachbarte Spins in Vorzugsrichtung eingestellt sind*

$$P^+(m) = i^{(m+1)m} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] \left[ \frac{\prod_{j=1}^m \text{sh}^{j-1}(\omega_j - \eta) \text{sh}^{m-j}(\omega_j)}{\prod_{j < k} \text{sh}(\omega_k - \omega_j - \eta)} \right] \det_m \left[ \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} G}{\partial \xi^{k-1}}(\omega_j, 0) \right] . \quad (5.22)$$

## Kapitel 6

# Der Hochtemperaturlimes

Zusätzlich zu den numerischen Ergebnissen [40] besteht im Hochtemperaturlimes die Möglichkeit, die in Abschnitt 3.2 getroffenen Annahmen über die Rapiditätenverteilung analytisch zu bestätigen. Weiterhin können die Konturintegrale der erzeugenden Funktion analytisch (hier bis zu der Ordnung  $1/T$ ) ausgewertet werden.

### 6.1 Verteilung der Rapiditäten

Für endliche Trotter-Zahlen  $N$ ,  $N/2 \in \mathbb{N}$ , sind die Bethe-Ansatz-Gleichungen (im Koordinatensystem mit  $\xi$  als Ursprung und  $h = 0$ )

$$-1 = \left[ \frac{\text{sh}(\lambda_j - \beta/N) \text{sh}(\lambda_j + \beta/N - \eta)}{\text{sh}(\lambda_j + \beta/N) \text{sh}(\lambda_j - \beta/N + \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_l + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_l - \eta)} \right] \quad (6.1)$$

im Limes  $\beta \rightarrow 0$  einer analytischen Bestimmung zugänglich. Die Rapiditäten  $\lambda_j$  skalieren mit der inversen Temperatur  $\beta = 2c \text{sh}(\eta)/T$  nach  $\lambda_j = \beta x_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ , und die Gleichungen reduzieren sich dann für beschränkte  $x_j$  im Falle des führenden Eigenwertes ( $M = N/2$ ) auf

$$-1 = \left[ \frac{x - 1/N}{x + 1/N} \right]^{N/2}. \quad (6.2)$$

Die  $\frac{N}{2}$ -te Wurzel aus  $-1$  ist  $\frac{N}{2}$ -deutig mit  $\omega_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(2j-1)\right)$  als Lösung von  $-1 = \omega^{N/2}$  und die Rapiditäten folgen zu

$$x_j = \frac{1}{N} \frac{1 + \omega_j}{1 - \omega_j} = \frac{i}{N} \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right), \quad j = 1, \dots, N/2, \quad (6.3)$$

$$\lambda_j = \frac{2ic \text{sh}(\eta)}{NT} \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right), \quad j = 1, \dots, N/2. \quad (6.4)$$

Werden die physikalische Temperatur  $T$ , die Kopplung  $c$  und der Parameter  $\eta$  als reell angenommen ( $\Delta = \text{ch}(\eta) > 1$ ), so sind die Bethe-Ansatz-Zahlen auf der imaginären Achse entsprechend (6.4) verteilt. Die Wahl eines rein imaginären Wertes von  $\eta$  (Anisotropien  $|\Delta| < 1$ ) dreht die Verteilung der Rapiditäten auf die reelle Achse.

Die triviale Lösung<sup>1</sup>  $x = 0$  ist durch die Bedingung „ $N/2$  gerade“ auszuschließen und die  $x_j$  sind im Trotter-Limes ( $x_1 \rightarrow i/\pi$ ,  $x_{N/2} \rightarrow -i/\pi$ ) beschränkt. Die unter  $N \rightarrow \infty$  zu lösende Gleichung lautet  $-1 = e^{-1/x}$ . Die Stelle  $x = 0$  ist eine wesentliche Singularität und zugleich Häufungspunkt der Rapiditäten

$$x_n = \frac{i}{\pi} \frac{1}{1 + 2n} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad . \quad (6.5)$$

### Eigenwert der Quantentransfermatrix

In der Darstellung des Eigenwertes, wenn die Bethe-Ansatz-Zahlen  $\lambda_j$  im Koordinatensystem mit  $\xi$  als Ursprung gemessen werden,

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda + \xi) = & \left[ \frac{\text{sh}(\lambda + \beta/N)}{\text{sh}(\lambda + \beta/N - \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_l - \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_l)} \right] \\ & + \left[ \frac{\text{sh}(\lambda - \beta/N)}{\text{sh}(\lambda - \beta/N + \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_l + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_l)} \right] \quad , \quad (6.6) \end{aligned}$$

sind die Limes  $\beta \rightarrow 0$  und  $\lambda \rightarrow 0$  nur dann vertauschbar, wenn  $N/2$  gerade ist. Es folgt mit den Ausführungen in Anhang B.1 das Resultat

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{\beta \rightarrow 0} \Lambda(\lambda + \xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda(\lambda + \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } M < N/2 \\ 2 & \text{für } M = N/2 \end{cases} \quad . \quad (6.7)$$

Dies identifiziert  $M = N/2$  als den führenden Eigenwert im Limes  $\beta \rightarrow 0$ . Der Wert  $\Lambda_0(\xi) = 2$  für  $\beta = 0$  folgt außerdem, wie in Abschnitt 2.2, Fußnote 3 angedeutet, aus der Funktionalbeziehung  $t_0(\xi)t_0(\xi) = 2t_0(\xi)$  der Quantentransfermatrix  $t_0(\lambda)$  und der Spurbildung  $\text{tr}_{\overline{1 \dots N}} t_0(\xi) = 2$ .

### Zusätzliche Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen

Für einen festen Satz  $\{\lambda_l\}_{l=1}^{N/2} = \{\beta x_l\}_{l=1}^{N/2}$  von Rapiditäten des führenden Eigenwertes  $\Lambda_0(\lambda)$  weist die Bethe-Ansatz-Gleichung

$$-1 = \left[ \frac{\text{sh}(\lambda - \beta/N) \text{sh}(\lambda + \beta/N - \eta)}{\text{sh}(\lambda + \beta/N) \text{sh}(\lambda - \beta/N + \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^{N/2} \frac{\text{sh}(\lambda - \beta x_l + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \beta x_l - \eta)} \right] \quad (6.8)$$

noch  $N$  weitere Lösungen auf. Die zusätzlichen Wurzeln fallen nicht mit den  $\lambda_j$  zusammen und haben als Häufungspunkte  $\pm\eta$ .

- (i) Der Häufungspunkt  $+\eta$  bedingt den Ansatz  $\lambda = \eta + \beta y$  in (6.8) und die zu lösende Gleichung lautet im Limes  $\beta \rightarrow 0$

$$-1 = \left[ \prod_{l=1}^{N/2} \frac{y + 1/N}{y - x_l} \right] \Leftrightarrow (y + 1/N)^{N/2} + \prod_{l=1}^{N/2} (y - x_l) = 0 \quad , \quad (6.9)$$

<sup>1</sup>Nur wenn der Ursprung keine Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen ist, kann sichergestellt werden, dass die Kontur  $\Gamma$  (Abbildung 4.1) um den Ursprung ausschließlich Inhomogenitäten enthält.

wenn  $y$  als beschränkt angenommen wird. Aus der Nullstellenbestimmung (6.9) eines Polynoms vom Grade  $N/2$  folgen nach dem Fundamentalsatz der Algebra  $N/2$  Wurzeln  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, N/2$ .

- (ii) Der Ansatz  $\lambda = -\eta + \beta z$  auf der rechten Seite von (6.8) reduziert im Limes  $\beta \rightarrow 0$  (bei beschränktem  $z$ ) die Bethe-Ansatz-Gleichung

$$-1 = \left[ \prod_{l=1}^{N/2} \frac{z - x_l}{z - 1/N} \right] \Leftrightarrow (z - 1/N)^{N/2} + \prod_{l=1}^{N/2} (z - x_l) = 0 \quad (6.10)$$

wieder auf die Nullstellenbestimmung eines Polynoms vom Grade  $N/2$  mit genau so vielen Wurzeln  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, N/2$ .

Die Lösungen  $\{y_j + \eta\}_{j=1}^{N/2}$  und  $\{z_l - \eta\}_{l=1}^{N/2}$  ergeben zusammen die  $N$  zusätzlichen Nullstellen der Bethe-Ansatz-Gleichungen  $1 + \mathfrak{a}(\lambda) = 0$ .

## 6.2 Integralgleichungen

Die Auswertung der Vielfachintegraldarstellungen in der Form (4.42) nimmt ihren Ausgangspunkt in der systematischen Entwicklung der Hilfsfunktion  $\bar{\mathfrak{a}}(\lambda)$ ,

$$\ln \bar{\mathfrak{a}}(\lambda) = \frac{h}{T} - \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{T \operatorname{sh}(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda - \eta)} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \ln(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega))}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \quad , \quad (6.11)$$

nach Potenzen in  $1/T = \tau$ . Der wesentlichen Singularität von  $\bar{\mathfrak{a}}(\lambda)$  im Ursprung wird durch den von [14] vorgeschlagenen Ansatz  $\bar{\mathfrak{a}}(\lambda) = \exp \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \bar{a}_n(\lambda) \right]$  mit Entwicklungstermen  $\bar{a}_n(\lambda)$  Rechnung getragen, die höchstens Pole erster Ordnung aufweisen [74]. Die Festlegung auf eine vorgegebene Ordnung in  $\tau$  folgt aus der Reihenentwicklung der exp-Funktion nach

$$\bar{\mathfrak{a}}(\lambda) = 1 + \tau \bar{\mathfrak{a}}_1(\lambda) + \tau^2 \bar{\mathfrak{a}}_2(\lambda) + \dots \quad , \quad (6.12)$$

mit Koeffizienten  $\bar{a}_n(\lambda)$ , die im Ursprung einen Pol  $n$ -ter Ordnung besitzen. Die folgenden Ergebnisse im Hochtemperaturlimes beruhen auf den Koeffizienten  $\bar{\mathfrak{a}}_1$  (für die erzeugende Funktion bis  $\tau^1$ ) und  $\bar{\mathfrak{a}}_2$  (für die Freie Energie bis  $\tau^1$ ).

Mit den Näherungen  $\ln(1 + x) \approx x - x^2/2$  und  $\ln(2 + x) \approx \ln 2 + x/2 - x^2/8$  für  $|x| \ll 1$  lautet die nichtlineare Integralgleichung (6.11) nach Ordnungen sortiert

$$\bar{\mathfrak{a}}_1(\lambda) = h - \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda - \eta)} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{\bar{\mathfrak{a}}_1(\omega)}{2} \quad , \quad (6.13)$$

$$\bar{\mathfrak{a}}_2(\lambda) = \frac{\bar{\mathfrak{a}}_1^2(\lambda)}{2} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \left[ \frac{\bar{\mathfrak{a}}_2(\omega)}{2} - \frac{\bar{\mathfrak{a}}_1^2(\omega)}{8} \right] \quad . \quad (6.14)$$

Der Term der Ordnung  $\tau^0$  ist trivial erfüllt und die Inhomogenität der Integralgleichung (6.13) enthält die vollständige Information<sup>2</sup> über die Polstellen der gesuchten Funktion.  $\bar{\alpha}_1(\lambda)$  weist innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  einen einfachen Pol bei  $\lambda = 0$  auf mit dem Residuum  $\text{Res}_{\lambda=0} \bar{\alpha}_1(\lambda) = +2c \text{sh}(\eta)$ , und es folgt

$$\bar{\alpha}_1(\lambda) = h - 2c \text{sh}(\eta) \frac{\text{sh}^2(\eta) \text{cth}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda + \eta) \text{sh}(\lambda - \eta)} \quad . \quad (6.15)$$

Die Inhomogenität  $\bar{\alpha}_1^2(\lambda)/2$  der Integralgleichung (6.14) beschreibt die Polstellen der Funktion  $\bar{\alpha}_2(\lambda)$  vollständig und wird durch die Ausintegration des Beitrages  $-\bar{\alpha}_1^2(\omega)/8$  unter dem Konturintegral auf der rechten Seite ergänzt über die Hilfsrelation

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{\text{sh}^4(\eta) \text{cth}^2(\omega)}{\text{sh}^2(\omega + \eta) \text{sh}^2(\omega - \eta)} = \frac{\text{sh}(2\lambda) \text{sh}(2\eta)}{\text{sh}^2(\lambda + \eta) \text{sh}^2(\lambda - \eta)} \quad .$$

Die nochmalige Anwendung der Hilfsrelation löst in (6.14) das verbleibende Konturintegral über  $\bar{\alpha}_2(\omega)/2$  auf mit dem Endergebnis

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2(\lambda) &= \frac{h^2}{2} + \frac{hc \text{sh}(\eta)}{2} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \eta) \text{sh}(\lambda + \eta)} + \frac{c^2 \text{sh}^2(\eta)}{2} \frac{\text{sh}(2\lambda) \text{sh}(2\eta)}{\text{sh}^2(\lambda + \eta) \text{sh}^2(\lambda - \eta)} \\ &\quad - 2hc \text{sh}(\eta) \frac{\text{sh}^2(\eta) \text{cth}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda + \eta) \text{sh}(\lambda - \eta)} + 2c^2 \text{sh}^2(\eta) \frac{\text{sh}^4(\eta) \text{cth}^2(\lambda)}{\text{sh}^2(\lambda + \eta) \text{sh}^2(\lambda - \eta)} \quad . \end{aligned} \quad (6.16)$$

## Dichtefunktion

In einem weiteren Schritt ist die verallgemeinerte Dichtefunktion  $G(\lambda, \xi)$  über die lineare Integralgleichung

$$G(\lambda, \xi) = -t(\lambda, \xi) - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G(\omega, \xi)}{1 + \bar{\alpha}(\omega)} \quad (6.17)$$

zu bestimmen. Die darin enthaltene verallgemeinerte Fermi-Verteilung  $1/(1+\bar{\alpha})$  lautet bis einschließlich erster Ordnung in  $\tau$  entwickelt

$$\frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega)} = \frac{1}{2} - \frac{\tau \bar{\alpha}_1(\omega)}{4} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad . \quad (6.18)$$

In Kombination mit dem Ansatz  $G(\lambda, \xi) = G_0(\lambda, \xi) + \tau G_1(\lambda, \xi) + \mathcal{O}(\tau^2)$  ist die Lösung (Anhang B.2) der Integralgleichung (6.17) dann nach Ordnungen sortiert

$$G_0(\lambda, \xi) = G_0(\lambda - \xi) \quad \text{mit} \quad G_0(x) = \frac{\text{sh}^2(\eta) \text{cth}(x)}{\text{sh}(x + \eta) \text{sh}(x - \eta)} \quad , \quad (6.19)$$

<sup>2</sup>Diese Eigenschaft kann durch rekursives Einsetzen der Funktion  $\bar{\alpha}_1$  gezeigt werden, und ist auf alle linearen Integralgleichungen mit dem gleichen Integrationskern übertragbar. Es folgt für  $\lambda$  innerhalb  $\mathcal{C}$  und durch Ausführen der Integration über die Variable  $\omega$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\nu}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\omega - \nu + \eta) \text{sh}(\omega - \nu - \eta)} \frac{\bar{\alpha}_1(\nu)}{2} = 0 \quad .$$

$$G_1(\lambda, \xi) = -\frac{h}{4} \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda - \xi + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \xi - \eta)} + \frac{c \operatorname{sh}(\eta)}{2} \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{ch}(\xi)}{\operatorname{sh}(\xi + \eta) \operatorname{sh}(\xi - \eta)} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \operatorname{sh}(2\lambda - \xi)}{\operatorname{sh}(\lambda + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \xi + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \xi - \eta)}. \quad (6.20)$$

$G_0(\lambda, \xi)$  ist von Differenzenform und trägt die vollständige Information über die Polstellen von  $G(\lambda, \xi)$ . Die Funktion  $G_1(\lambda, \xi)$  ist innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  holomorph. Auf diese Eigenschaften wird bei der Ausführung der Konturintegrale zurückgegriffen, wenn selbige mit dem Residuensatz und den Polstellen des Ausdrucks

$$\frac{G(\omega, \xi)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} = \frac{\bar{\mathfrak{a}}(\omega) G(\omega, \xi)}{1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega)} = \frac{G_0(\omega - \xi)}{2} + \frac{\tau G_1(\omega, \xi)}{2} + \frac{\tau G_0(\omega - \xi) \bar{\mathfrak{a}}_1(\omega)}{4} \quad (6.21)$$

ausgewertet werden.  $G_0(x)$  ist außerdem Bestandteil von  $\bar{\mathfrak{a}}_1(\lambda) = h - 2c \operatorname{sh}(\eta) G_0(\lambda)$ .

### 6.3 Die erzeugende Funktion

Wie in Lemma 5 gezeigt, können im Integranden der erzeugenden Funktion die einfachen Polstellen bei den Inhomogenitäten  $\xi_j$  ausschließlich der Dichtefunktion  $G(\lambda, \xi)$  zugeordnet werden. Der Term  $G_1(\lambda, \xi)$  in (6.21) liefert daher bei der Auswertung mittels des Residuensatzes keinen Beitrag, und es ist die Vereinfachung

$$\frac{G(\omega, \xi)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \rightarrow \frac{G_0(\omega - \xi)}{2} + \frac{\tau h}{4} G_0(\omega - \xi) - \frac{\tau c \operatorname{sh}(\eta)}{2} G_0(\omega) G_0(\omega - \xi) \quad (6.22)$$

unter den Konturintegralen der Summanden (4.42)

$$S_n = \frac{e^{(m-n)\varphi}}{n!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| = n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\mathfrak{b}(\omega_j)}{\mathfrak{b}'(\xi_j^+)} \right] \\ \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\operatorname{sh}(\omega_j - \xi_k^+ - \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_j^+ - \xi_k^+ - \eta)} \right] \det_n \left[ \frac{G(\omega_j, \xi_k^+)}{1 + \mathfrak{a}(\omega_j)} \right] \det_n M(\omega_j, \xi_k^+) \quad (6.23)$$

zulässig. Die Determinante  $\det_n \left( \frac{G}{1+\mathfrak{a}} \right)$  fasst die komplette Temperaturabhängigkeit zusammen und wird in nullter und erster Ordnung in  $\tau = 1/T$  entwickelt.

#### Nullte Ordnung in $1/T$

In der Ordnung  $\tau^0$  ist die Hilfsfunktion durch  $\mathfrak{a} = 1$  zu nähern und die Dichtefunktion  $G(\lambda, \xi)$  durch  $G_0(\lambda - \xi)$  zu ersetzen. Der Integrand von (6.23) weist dann nur noch Pole erster Ordnung bei den Inhomogenitäten  $\xi_j$  auf, und alle Konturintegrale sind mit dem Residuensatz auswertbar.

Genau diese Integrationen, in denen nur die Eigenschaft  $\operatorname{Res}_{\omega=\xi} G(\omega, \xi) = -1$  der Dichtefunktion einging, wurden bereits bei der Teilchen-Loch-Transformation aus-

geführt. Mit  $\text{Res}_{\omega=\xi} G_0(\omega - \xi) = -1$  und dem zusätzlichen Faktor  $1/2^n$  in (4.54) ist<sup>3</sup>

$$\left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{\infty} = \left( \frac{1 + e^{\varphi}}{2} \right)^m, \quad (6.24)$$

wenn der Index  $\infty$  die Hochtemperaturentwicklung der erzeugenden Funktion in nullter Ordnung bezeichnet.

### Erste Ordnung in $1/T$ , Abhängigkeit von dem Magnetfeld $h$

Wie die Entwicklung (6.22) verdeutlicht, können die Magnetfeld- und Kopplungsbeiträge in erster Ordnung bezüglich  $\tau$  getrennt voneinander bestimmt werden. Für  $c = 0$  lautet innerhalb des symmetrischen Integranden in  $S_n$  die Determinante  $\det_n \left( \frac{G}{1+a} \right)$  in erster Ordnung

$$\det_n \left[ \frac{G(\omega_j, \xi_k^+)}{1 + \mathfrak{a}(\omega_j)} \right] \rightarrow \frac{n\tau h}{2} \det_n \left[ \frac{G_0(\omega_j - \xi_k^+)}{2} \right], \quad n = 1, \dots, m, \quad (6.25)$$

und führt den reinen Magnetfeldanteil auf den Beitrag nullter Ordnung zurück via

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{\tau h} &= \sum_{n=1}^m \frac{n\tau h}{2} \frac{e^{(m-n)\varphi}}{2^n} \binom{m}{n} (1 - e^{\varphi})^n \\ &= \tau h e^{m\varphi} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{n}{2} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^n 1^{m-n}, \quad \alpha := e^{-\varphi} - 1 \\ &= \tau h e^{m\varphi} \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^n 1^{m-n} \\ &= \tau h e^{m\varphi} \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\alpha}{2} + 1 \right)^m \\ &= \frac{m\tau h}{2} e^{m\varphi} \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\alpha}{2} + 1 \right)^{m-1} \\ &= \frac{m\tau h}{2} \left( \frac{1 - e^{\varphi}}{2} \right) \left( \frac{1 + e^{\varphi}}{2} \right)^{m-1}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

### Erste Ordnung in $1/T$ , Abhängigkeit von der Kopplung $c$

Der Beitrag nullter Ordnung zeichnete sich dadurch aus, dass die Integranden in den Summanden  $S_n$  nur einfache Polstellen bei den Inhomogenitäten  $\xi_j$  aufwiesen und sich bei Auswertung einzelner Konturen der Vielfachintegrale die Struktur der Integranden reproduzierte (Lemma 8). Dies hatte zur Folge, dass nach Auswertung aller

<sup>3</sup>Für  $r = 0$  (d.h. alle Integrationen ausgeführt) folgt aus dem um  $1/2^n$  modifizierten Term  $\bar{S}_0$

$$\sum_{n=0}^m \frac{e^{(m-n)\varphi}}{2^n} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| = m-n}} (1 - e^{\varphi})^n = e^{m\varphi} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \left( \frac{e^{-\varphi} - 1}{2} \right)^n 1^{m-n} = \left( \frac{1 + e^{\varphi}}{2} \right)^m.$$



Konturintegrale keine Abhängigkeit von den Inhomogenitäten im Endergebnis der erzeugenden Funktion in nullter Ordnung enthalten war.

Die Situation für den Kopplungsbeitrag in erster Ordnung ist eine andere, denn durch die eingestreuten einfachen Polstellen am Ursprung reproduziert sich die Integrandenstruktur nicht mehr. Die Auswertung aller Konturintegrale beinhaltet eine explizite Abhängigkeit von den Inhomogenitäten (Anhang B.3) und der Kopplungsbeitrag lautet im homogenen Limes  $\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0$  in erster Ordnung

$$\left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{\tau c} = -(m-1)(\tau c \Delta) \left( \frac{1-e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^{m-2} . \quad (6.27)$$

## 6.4 Abgeleitete Größen im Hochtemperaturlimes

Die Grundlage für die Korrelationsfunktionen aus Kapitel 5 bildet die erzeugende Funktion, im Hochtemperaturlimes angegeben in

**Lemma 16.** *Die erzeugende Funktion der  $zz$ -Korrelation auf  $m$  Kettenplätzen lautet mit der Anisotropie  $\Delta$  für die periodisch geschlossene XXZ-Kette im thermodynamischen Limes bis einschließlich erster Ordnung in  $1/T$*

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{T,h} &= \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^m + \frac{mh}{2T} \left( \frac{1-e^\varphi}{2} \right) \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^{m-1} \\ &\quad - (m-1) \frac{c\Delta}{T} \left( \frac{1-e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^{m-2} + \mathcal{O}(1/T^2) . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die mit (6.28) in Beziehung stehenden Korrelationsfunktionen lassen sich entweder durch Anwenden von Differenzial-Differenzen-Operatoren gewinnen oder durch explizite Werte für die Kettenlänge  $m$  und den Parameter  $\varphi$  erhalten.

### $zz$ -Korrelationsfunktion

Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion  $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_{T,h}$  ist aus der erzeugenden Funktion durch stetige<sup>4</sup> und diskrete Ableitungen mittels

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_{T,h} = (2D_m^2 \partial_\varphi^2 - 4D_m^1 \partial_\varphi + 1) \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_T \Big|_{\varphi=0} , \quad m \geq 2 \quad (6.29)$$

zu bestimmen. Die Auswertung wird zweckmäßig aufgeteilt in den Beitrag nullter Ordnung sowie die Kopplungs- und Magnetfeldbeiträge erster Ordnung.

<sup>4</sup>Die ersten und zweiten Ableitungen der Terme mit  $e^\varphi$  in (6.28) nach dem Parameter  $\varphi$  lauten zusammengefasst und an der Stelle  $\varphi = 0$  ausgewertet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^m \Big|_{\varphi=0} &= \frac{m}{2} , & \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^m \Big|_{\varphi=0} &= \frac{m(m+1)}{4} , \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1-e^\varphi}{2} \right) \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^{m-1} \Big|_{\varphi=0} &= -\frac{1}{2} , & \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{1-e^\varphi}{2} \right) \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^{m-1} \Big|_{\varphi=0} &= -\frac{m}{2} , \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1-e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^{m-2} \Big|_{\varphi=0} &= 0 , & \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{1-e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1+e^\varphi}{2} \right)^{m-2} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

- (i) In nullter Ordnung sind, (6.29) folgend, die stetigen Ableitungen nach  $\varphi$  mit den diskreten ersten und zweiten Ableitungen<sup>5</sup>  $D_m^1$  und  $D_m^2$  zu verknüpfen mit dem Ergebnis

$$(2D_m^2 \partial_\varphi^2 - 4D_m^1 \partial_\varphi + 1) \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^m \Big|_{\varphi=0} = D_m^2 \frac{m^2 + m}{2} - 2D_m^1 m + 1 = 0 \quad . \quad (6.30)$$

- (ii) In erster Ordnung lautet die Anwendung des Differenzial-Differenzen-Operators für den Magnetfeldanteil

$$(2D_m^2 \partial_\varphi^2 - 4D_m^1 \partial_\varphi + 1) \frac{mh}{2T} \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad . \quad (6.31)$$

- (iii) Für den Kopplungsanteil in erster Ordnung ist auf die gleiche Weise zu verfahren mit dem Resultat

$$(2D_m^2 \partial_\varphi^2 - 4D_m^1 \partial_\varphi + 1)(m-1) \frac{c\Delta}{T} \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-2} \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad . \quad (6.32)$$

Die Wahl  $m = 2$  und  $\varphi = i\pi$  ergänzt die  $zz$ -Korrelationen um die Zwei-Punkt-Funktion nächster Nachbarn  $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_{T,h}$ , und es ist

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_{T,h} = -\frac{c\Delta}{T} + \mathcal{O}(1/T^2) \quad (6.33a)$$

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_{T,h} = 0 + \mathcal{O}(1/T^2) \quad , \quad m \geq 2 \quad . \quad (6.33b)$$

### Die *Emptiness Formation Probability*

Mit der geeigneten Wahl des Parameters  $\varphi \rightarrow \pm\infty$  (Lemmata 11, 12) folgt die Wahrscheinlichkeit, einen String von  $m$  benachbarten Spins zu finden, die in ( $P^+$ ) oder entgegen ( $P^-$ ) der Vorzugsrichtung orientiert sind zu

$$P^\pm(m) = \left( \frac{1}{2} \right)^m \left[ 1 \pm \frac{mh}{2T} - (m-1) \frac{c\Delta}{T} \right] + \mathcal{O}(1/T^2) \quad . \quad (6.34)$$

Die Umkehr der Vorzugsrichtung überführt  $P^+(m)$  und  $P^-(m)$  ineinander und ist einer Umkehr des Magnetfeldes  $h \rightarrow -h$  äquivalent.  $P^\pm(m)$  nach (6.34) respektiert diese Eigenschaft. Speziell  $P^\pm(1)$  sind als Ein-Punkt-Funktionen die Erwartungswerte der Standardbasen  $e_1^1$  und  $e_2^2$  eines lokalen Operators mit

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{h}{2T} \right) \quad , \quad \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle_{T,h} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{h}{2T} \right) \quad . \quad (6.35)$$

<sup>5</sup>Die diskreten Ableitungen  $D_m^1 a_m = a_m - a_{m-1}$  und  $D_m^2 a_m = a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1}$ , angewandt auf eine beliebige Folge  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , ergeben insbesondere  $D_m^2 m^2 = 2$ ,  $D_m^2 m = 0$  und  $D_m^1 m = 1$ .

## 6.5 Die Freie Energie

Die Entwicklung der Hilfsfunktion  $\bar{\mathbf{a}}$  nach Ordnungen  $1/T = \tau$  führt in der Darstellung (3.26) der Freien Energie zu Konturintegralen,

$$\begin{aligned}
f &= \frac{h}{2} + T \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta) \ln(1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega))}{\text{sh}(\omega) \text{sh}(\omega - \eta)} \\
&= \frac{h}{2} + T \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta) \ln(2 + \tau \bar{\mathbf{a}}_1(\omega) + \tau^2 \bar{\mathbf{a}}_2(\omega) + \mathcal{O}(\tau^3))}{\text{sh}(\omega) \text{sh}(\omega - \eta)} \\
&= \frac{h}{2} + T \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\omega) \text{sh}(\omega - \eta)} \left\{ \ln 2 + \frac{\bar{\mathbf{a}}_1(\omega)}{2T} + \frac{1}{T^2} \left[ \frac{\bar{\mathbf{a}}_2(\omega)}{2} - \frac{\bar{\mathbf{a}}_1(\omega)}{8} \right] \right\} + \mathcal{O}(1/T^2),
\end{aligned} \tag{6.36}$$

deren Auswertung (Anhang B.4) mit dem Residuensatz möglich ist. Die Koeffizienten  $\bar{\mathbf{a}}_1$  und  $\bar{\mathbf{a}}_2$  nach (6.15) und (6.16) geben die Freie Energie der XXZ-Kette bis zu der Ordnung  $1/T$  wieder mit

$$f = -T \ln 2 - c\Delta - \frac{1}{8} \frac{h^2}{T} - \left(1 + \frac{\Delta^2}{2}\right) \frac{c^2}{T} + \mathcal{O}(1/T^2) \quad . \tag{6.37}$$

**Bemerkung.** In den Grenzfällen des Ising-Modells, der freien Fermionen (XX-Modell) und des Paramagneten lautet die Freie Energie pro Gitterplatz bis zu der Ordnung  $1/T$

$$\text{XXZ-Kette} \quad : \quad f = -T \ln 2 - c\Delta - \frac{1}{8} \frac{h^2}{T} - \left(1 + \frac{\Delta^2}{2}\right) \frac{c^2}{T} \tag{6.38a}$$

$$\text{Ising } (c\Delta = J = \text{const}, c \rightarrow 0) \quad : \quad f = -T \ln 2 - J - \frac{1}{8} \frac{h^2}{T} - \frac{1}{2} \frac{J^2}{T} \tag{6.38b}$$

$$\text{XX } (\Delta = 0) \quad : \quad f = -T \ln 2 - \frac{1}{8} \frac{h^2}{T} - \frac{c^2}{T} \tag{6.38c}$$

$$\text{Paramagnet } (c = 0) \quad : \quad f = -T \ln 2 - \frac{1}{8} \frac{h^2}{T} \tag{6.38d}$$



## Kapitel 7

# Der Ising-Limes

Der Ising-Grenzfall  $c := J/\text{ch}(\eta)$  mit  $J > 0$  und  $\eta \rightarrow \infty$  führt von dem quantenmechanischen Hamilton-Operator der *XXZ*-Kette auf den Hamilton-Operator

$$H_I = J \sum_{j=1}^L (\sigma_{j-1}^z \sigma_j^z - 1) + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^L \sigma_j^z \quad (7.1)$$

eines klassisch lösbaren Modells [4], in dem alle Operatoren kommutieren. Eine Übersicht der Thermodynamik zu der Ising-Kette (7.1) mit periodischen Rändern gibt

**Lemma [4] 17.** *Die statistische Behandlung des Ising-Modells auf einer Kette mit  $L$  Plätzen unter periodischen Randbedingungen reduziert sich auf die beiden Eigenwerte*

$$\lambda_{1/2} = \text{ch} \left( \frac{h}{2T} \right) \pm \sqrt{\text{sh}^2 \left( \frac{h}{2T} \right) + \exp \left( \frac{4J}{T} \right)} \quad (7.2)$$

einer zugeordneten Transfermatrix. Die Zustandssumme ergibt sich zu  $Z_L = \lambda_1^L + \lambda_2^L$  und führt im thermodynamischen Limes  $L \rightarrow \infty$  auf die Freie Energie pro Gitterplatz

$$f(h, T) = -T \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_L}{L} = -T \ln \left[ \text{ch} \left( \frac{h}{2T} \right) + \sqrt{\text{sh}^2 \left( \frac{h}{2T} \right) + \exp \left( \frac{4J}{T} \right)} \right] . \quad (7.3)$$

Weiterhin sind die Ein- und Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen für  $L \rightarrow \infty$  gegeben durch die Ausdrücke

$$\langle \sigma^z \rangle_{T, h} = \langle \sigma \rangle := \frac{\text{sh} \left( \frac{h}{2T} \right)}{\sqrt{\text{sh}^2 \left( \frac{h}{2T} \right) + \exp \left( \frac{4J}{T} \right)}} , \quad (7.4)$$

$$\langle \sigma_j^z \sigma_k^z \rangle_{T, h} = \langle \sigma \rangle^2 + \left[ 1 - \langle \sigma \rangle^2 \right] \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{k-j} , \quad j < k . \quad (7.5)$$

Die Integralgleichungen der Hilfsfunktion (3.20) sowie der verallgemeinerten Dichte (4.21) reproduzieren die thermodynamischen Größen (7.3) und (7.4). Außerdem folgt aus der Vielfachintegraldarstellung der *Emptiness Formation Probability* im Ising-Grenzfall das Ergebnis von

**Lemma [60] 18.** *Seien im thermodynamischen Limes  $\langle \sigma \rangle$  die Magnetisierung und  $f(h, T)$  die Freie Energie der periodisch geschlossenen Ising-Kette. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, auf der Kette  $n + 1$  benachbarte Spins zu finden, die entlang des äußeren Magnetfeldes ausgerichtet sind, gegeben durch*

$$P^+(n+1) = \frac{1 + \langle \sigma \rangle}{2} \exp\left(\frac{n f(h, T)}{T} + \frac{nh}{2T}\right) . \quad (7.6)$$

## 7.1 Hilfsfunktion und verallgemeinerte Dichte

Im nichtkritischen Bereich  $\Delta > 1$  legen die Integralgleichungen (3.20) und (4.21) die Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda)$  und die Dichte  $G(\lambda, \zeta)$  im Analytizitätsstreifen  $|\operatorname{Im} \lambda| \leq \pi/2$ ,  $|\operatorname{Re} \lambda| \leq \gamma$  entsprechend Abbildung 3.1 fest. Alle Inhomogenitäten und Integralkerne,

$$\frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda + \eta)} = \operatorname{cth}(\lambda) - \operatorname{cth}(\lambda + \eta) \quad , \quad (7.7)$$

$$\frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \eta)} = \operatorname{cth}(\lambda - \eta) - \operatorname{cth}(\lambda + \eta) \quad , \quad (7.8)$$

sind in dem zu bildenden Ising-Limes durch die Kopplung  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} c \operatorname{sh}(\eta) = J$  und zusätzlich durch den Grenzwert  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \operatorname{cth}(\lambda \pm \eta) = \pm 1$  bestimmt, solange die Argumente  $\lambda$  den Wertebereich  $|\operatorname{Re} \lambda| \leq (1 - \delta)\eta$ ,  $0 < \delta < 1$  (das ist eine explizite Parametrisierung für  $\gamma$  in Abbildung 3.1) nicht verlassen. Die Integralgleichungen lauten somit im Ising-Limes

$$\ln \mathbf{a}(\lambda) = -\frac{h}{T} - \frac{2J}{T} [\operatorname{cth}(\lambda) - 1] + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{i\pi} \ln(1 + \mathbf{a}(\omega)) \quad , \quad (7.9)$$

$$G(\lambda, \zeta) = \operatorname{cth}(\zeta - \lambda) - 1 - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{i\pi} \frac{G(\omega, \zeta)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} \quad (7.10)$$

und haben für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  innerhalb des Streifens  $|\operatorname{Im} \lambda| \leq \pi/2$  Gültigkeit. Werden die linke Flanke der Kontur  $\mathcal{C}$  nach  $-\infty$  und die rechte Flanke nach  $+\infty$  verschoben, so sind mit den Grenzwerten  $\mathbf{a}_{\pm} = \lim_{\operatorname{Re} \omega \rightarrow \pm\infty} \mathbf{a}(\omega)$  und  $G_{\pm} = \lim_{\operatorname{Re} \omega \rightarrow \pm\infty} G(\omega, \zeta)$  die Konturintegrale<sup>1</sup> in (7.9) und (7.10) bestimmt, und die Integralgleichungen können durch Auswerten von algebraischen Ausdrücken gelöst werden.

### Hilfsfunktion

Die explizite Lösung beruht auf der Feststellung, dass die Bestimmungsgleichung im Limes  $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \pm\infty$  die Asymptotik

$$\mathbf{a}_{\pm} = K e^{-\frac{h}{T} \mp \frac{2J}{T}} \quad , \quad K := \exp\left[\frac{2J}{T} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{i\pi} \ln(1 + \mathbf{a}(\omega))\right] = \frac{1 + \mathbf{a}_+}{1 + \mathbf{a}_-} e^{\frac{2J}{T}} \quad (7.11)$$

<sup>1</sup>Die Höhe der Kontur in imaginärer Richtung ist  $\pi$  und die Linienintegrale lauten

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{i\pi} \ln(1 + \mathbf{a}(\omega)) = \ln(1 + \mathbf{a}_+) - \ln(1 + \mathbf{a}_-) \quad , \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{i\pi} \frac{G(\omega, \zeta)}{1 + \mathbf{a}(\omega)} = \frac{G_+}{1 + \mathbf{a}_+} - \frac{G_-}{1 + \mathbf{a}_-} \quad .$$

der Hilfsfunktion  $\mathbf{a}$  annimmt. Das Ersetzen der Werte  $\mathbf{a}_\pm$  in der Definitionsgleichung für die Konstante  $K = K(h, T, J)$  resultiert in einer quadratischen Gleichung mit der Lösung

$$K = e^{-\frac{2J}{T} + \frac{h}{2T}} \left[ -\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2T}\right) \pm \sqrt{\operatorname{sh}^2\left(\frac{h}{2T}\right) + \exp\left(\frac{4J}{T}\right)} \right] , \quad (7.12)$$

$$\mathbf{a}(\lambda) = K \exp\left[-\frac{h}{T} - \frac{2J}{T} \operatorname{cth}(\lambda)\right] , \quad (7.13)$$

deren Eindeutigkeit aus der Hochtemperaturentwicklung  $\mathbf{a}(\lambda) = \pm 1 + \mathcal{O}(1/T)$  folgt: Die allgemeine Struktur (6.12) der Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(1/T)$  legt in (7.12) das obere Vorzeichen fest.

### Verallgemeinerte Dichte

Solange der zweite Spektralparameter der Funktion  $G(\lambda, \zeta)$  innerhalb des Streifens  $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} \geq |\operatorname{Im} \zeta|\}$  entweder endlich ist oder zumindest  $|\operatorname{Re} \zeta| = \delta |\operatorname{Re} \lambda|$ ,  $0 \leq \delta < 1$  erfüllt, sind die Limites  $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \pm\infty$  mit

$$G_+ = -2 - \frac{G_+}{1 + \mathbf{a}_+} + \frac{G_-}{1 + \mathbf{a}_-} , \quad G_- = -\frac{G_+}{1 + \mathbf{a}_+} + \frac{G_-}{1 + \mathbf{a}_-} \quad (7.14)$$

in (7.10) von dem Parameter  $\zeta$  unabhängig. Die Grenzwerte  $G_\pm$  reduzieren sich auf eine gemeinsame, noch zu bestimmende Größe  $\langle \sigma \rangle$ , deren Definition  $G_\pm =: \langle \sigma \rangle \mp 1$  die Relation  $G_- - G_+ = 2$  erfüllt, und die aus den beiden Bestimmungsgleichungen (7.14) eindeutig als

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2T}\right)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\left(\frac{h}{2T}\right) + \exp\left(\frac{4J}{T}\right)}} \quad (7.15)$$

ermittelt werden kann. Die rechte Seite der Integralgleichung (7.10) ist bekannt, und die verallgemeinerte Dichte lautet im Ising-Limes

$$G(\lambda, \zeta) = \langle \sigma \rangle - \operatorname{cth}(\lambda - \zeta) . \quad (7.16)$$

Die Größe  $\langle \sigma \rangle$  ist durch Vergleich der Integraldarstellungen (5.8) und (7.10) als Magnetisierung  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma^z \rangle_{T,h} = 2m(h, T)$  zu deuten und gibt (7.4) wieder.

## 7.2 Die *Emptiness Formation Probability*

Bezeichnet  $\phi^+(m) = \phi^+(m|\{\xi\})$  die inhomogene Version der *Emptiness Formation Probability* mit der Entsprechung  $\phi^+(m|\{\xi\}) = P^+(m)$  im homogenen Limes,

$$\phi^+(m) = \frac{1}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] \frac{\det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{j < k} \operatorname{sh}(\xi_j - \xi_k)} \\ \left[ \prod_{j,k=1}^m \frac{\operatorname{sh}(\omega_j - \xi_k) \operatorname{sh}(\omega_j - \xi_k - \eta)}{\operatorname{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \frac{\det_m t(\xi_k, \omega_j)}{\prod_{j < k} \operatorname{sh}(\xi_k - \xi_j)} , \quad (7.17)$$

so weist der Integrand, von der verallgemeinerten Fermi-Funktion  $1/(1+\mathbf{a})$  abgesehen, nur Polstellen erster Ordnung bei allen Inhomogenitäten  $\xi_j$  auf. Die Struktur der Vielfachintegraldarstellung und die Bedeutung der Integrationskontur  $\mathcal{C}$  wird durch die Transformation auf rationale Ausdrücke<sup>2</sup> ersichtlich:

$$s_k = e^{-2\xi_k} \quad , \quad x_j = e^{-2\omega_j} \quad , \quad d\omega_j = -\frac{dx_j}{2x_j} \quad (7.18)$$

Die Determinante  $\det_m t(\xi_k, \omega_j)$  ist eine Cauchy-Determinante und der Ausdruck  $\det_m G(\omega_j, \xi_k)$  reduziert sich in seiner Struktur auf

**Lemma 19.** *Seien  $p, q \in \mathbb{C}$  beliebige komplexwertige Konstanten und seien  $\{x_j\}_{j=1}^m$  und  $\{s_j\}_{j=1}^m$  zwei beliebige Mengen paarweise verschiedener komplexer Zahlen. Dann gilt für die Cauchy-artige Determinante*

$$\det_m \left( \frac{px_j + qs_k}{x_j - s_k} \right) = (p+q)^{m-1} \left[ p \prod_{k=1}^m x_k + q \prod_{k=1}^m s_k \right] \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq m} (x_j - x_k)(s_k - s_j)}{\prod_{j,k=1}^m (x_j - s_k)} \quad (7.19)$$

*Beweis.* Die Identität ist durch den Standardbeweis für die Cauchy-Determinante zu zeigen, der auf dem Satz von Liouville beruht.  $\square$

Die Identifizierung  $p = 1 + \langle \sigma \rangle$  und  $q = 1 - \langle \sigma \rangle$  in (7.19) löst die Determinante  $\det_m G$  in eine Produktdarstellung auf, und es ist

$$\begin{aligned} \phi^+(m) &= \frac{1}{2m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{e^{-2\mathcal{C}}} \frac{dx_j}{2\pi i x_j} \frac{1}{1 + K \exp\left(-\frac{h}{T} - \frac{2J}{T} \frac{1+x_j}{1-x_j}\right)} \right] \\ &\quad \left[ \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m (x_j - x_k) \right] \frac{(1 + \langle \sigma \rangle) \prod_{k=1}^m x_k + (1 - \langle \sigma \rangle) \prod_{k=1}^m s_k}{\prod_{j,k=1}^m (x_j - s_k)} \quad (7.20) \end{aligned}$$

Die transformierte Kontur  $e^{-2\mathcal{C}}$  setzt sich entsprechend Abbildung 7.1 aus zwei konzentrischen Kreisen zusammen, auf denen die Hilfsfunktion  $\mathbf{a}$  im Limes  $a, b \rightarrow \infty$  durch ihre Asymptotik  $\mathbf{a}_{\pm}$  ersetzt werden kann. Der Einfluss der Hilfsfunktion auf die Auswertung der Konturintegrale entlang  $e^{-2\mathcal{C}}$  mittels des Residuensatzes beschränkt sich somit bei der einfachen Polstelle im Ursprung auf den Term

$$\frac{1}{1 + \mathbf{a}_-} - \frac{1}{1 + \mathbf{a}_+} = \frac{\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-}{(1 + \mathbf{a}_-)(1 + \mathbf{a}_+)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad , \quad (7.21)$$

während die einfachen Polstellen bei den Inhomogenitäten  $s_k$  in der Umgebung der Eins nur innerhalb des äußeren Kreises liegen und die Hilfsfunktion über den Term

$$\frac{1}{1 + \mathbf{a}_-} = \frac{1 + \langle \sigma \rangle}{2} + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{1 - \langle \sigma \rangle}{2} \quad (7.22)$$

<sup>2</sup>Im Ising-Grenzfall ist  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} t(\zeta, \lambda) = \text{cth}(\zeta - \lambda) - \lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{cth}(\zeta - \lambda + \eta) = -1 - \text{cth}(\lambda - \zeta)$ , und mit  $G(\lambda, \zeta) = \langle \sigma \rangle - \text{cth}(\lambda - \zeta)$  transformieren sich die Einträge der Determinanten wie

$$G(\omega_j, \xi_k) = \frac{e^{-2\omega_j} + e^{-2\xi_k}}{e^{-2\omega_j} - e^{-2\xi_k}} + \langle \sigma \rangle = \frac{(1 + \langle \sigma \rangle)x_j + (1 - \langle \sigma \rangle)s_k}{x_j - s_k} \quad , \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} t(\xi_k, \omega_j) = \frac{2s_k}{x_j - s_k} \quad .$$



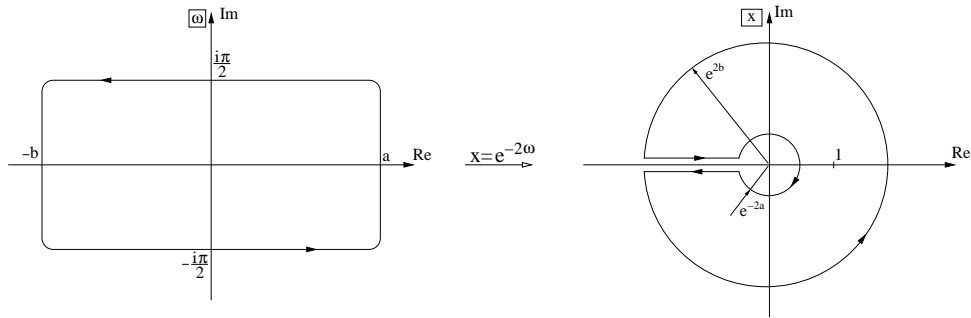


Abbildung 7.1: Unter der Transformation  $x = e^{-2\omega}$  wird die kanonische Kontur  $\mathcal{C}$  auf zwei konzentrische Kreise mit den Radien  $e^{-2a}$  und  $e^{2b}$  abgebildet; die zur reellen Achse im Abstand  $\pm i\pi/2$  parallel verlaufenden Teilabschnitte von  $\mathcal{C}$  heben sich nach der Transformation gegenseitig auf. Der Ursprung  $\omega = 0$  wird auf  $x = 1$  abgebildet.

in das Ergebnis des Konturintegrals einbeziehen. Das Verhältnis  $\lambda_2/\lambda_1$  repräsentiert die beiden Eigenwerte (7.2) der klassisch lösbaren Ising-Kette, und die Magnetisierung  $\langle \sigma \rangle$  ist durch (7.15) gegeben. Die Auswertung der Konturintegrale zeigt

**Lemma 20.** *Die Vielfachintegraldarstellung (7.20) ist bezüglich aller Inhomogenitäten  $s_k$  und aller Integrationsvariable  $x_j$  symmetrisch und die partielle Ausführung von  $n$  Konturintegralen ergibt*

$$\begin{aligned} \phi^+(m) = & \left[ \prod_{j=1}^{m-n} \int_{e^{-2c}} \frac{dx_j}{2\pi i x_j} \frac{1}{1 + K \exp\left(-\frac{h}{T} - \frac{2J}{T} \frac{1+x_j}{1-x_j}\right)} \right] \left[ \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{m-n} (x_j - x_k) \right] \\ & \frac{1}{2m!} \frac{1}{(1 + \mathbf{a}_-)^n} \sum_{j_1=1}^m \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq j_1}}^m \cdots \sum_{\substack{j_{n-1}=1 \\ j_{n-1} \neq j_1, \dots, j_{n-2}}}^m \\ & \left\{ \sum_{\substack{j_n=1 \\ j_n \neq j_1, \dots, j_{n-1}}}^m \frac{\prod_{k=1}^{m-n} \prod_{\ell=1}^n (s_{j_\ell} - x_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_n}}^m \prod_{\ell=1}^n (s_{j_\ell} - s_k)} \frac{(1 + \langle \sigma \rangle) \prod_{k=1}^{m-n} x_k + (1 - \langle \sigma \rangle) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_n}}^m s_k}{\prod_{\substack{j=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_n}}^{m-n} \prod_{k=1}^m (x_j - s_k)} \right. \\ & \left. - n(1 - \langle \sigma \rangle) \frac{\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-}{1 + \mathbf{a}_+} \frac{\left[ \prod_{k=1}^{m-n} \prod_{\ell=1}^{n-1} (s_{j_\ell} - x_k) \right] \left[ \prod_{\ell=1}^{n-1} s_{j_\ell} \right]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_{n-1}}}^m \prod_{\ell=1}^{n-1} (s_{j_\ell} - s_k)} \frac{\prod_{k=1}^{m-n} x_k^2}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_{n-1}}}^m \prod_{j=1}^{m-n} (x_j - s_k)} \right\}. \end{aligned}$$

*Beweisskizze.* Die Relation ist durch eine vollständige Induktion zu beweisen.

Die beiden Terme in der geschweiften Klammer haben für eine beliebig herausgegriffene Integrationsvariable  $x_j$  einfache Polstellen bei den Inhomogenitäten. Die Ausführung eines Konturintegrals bezüglich dieser Pole behält die Struktur des Integranden bei.

Der zweite Term in der geschweiften Klammer kompensiert für eine herausgegriffene Integrationsvariable  $x_j$  mit seiner doppelten Nullstelle bei  $x_j = 0$  die einfache

Polstelle des Vorfaktors. Ein Konturintegral, bezüglich des Pols im Ursprung ausgeführt, liefert ein Ergebnis, dessen Struktur dem zweiten Term in der geschweiften Klammer entspricht und den Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$  des kompletten Integranden vervollständigt.  $\square$

Die Auswertung aller  $n = m$  Konturintegrale sammelt die Abhängigkeit von allen Inhomogenitäten  $s_j$  in einem einzigen Term mit dem Resultat

$$\phi^+(m) = \frac{1}{(1 + \mathbf{a}_-)^m} - \frac{1 - \langle \sigma \rangle}{2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{1}{(1 + \mathbf{a}_-)^{m-1}} \sum_{k=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{s_l}{s_l - s_k} . \quad (7.23)$$

Die Beeinflussung der Größe  $\phi^+(m)$  durch die Inhomogenitäten  $s_j$  diskutiert

**Lemma 21.** *Sei  $\{s_j\}_{j=1}^m$  eine beliebige Menge paarweise verschiedener komplexer Zahlen, dann besteht für den rationalen Ausdruck die Identität*

$$\sum_{k=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{s_l}{s_l - s_k} = 1 . \quad (7.24)$$

*Beweis über Induktion.* Der Induktionsstart  $m = 1$  erfüllt die Relation trivial. Für den Induktionsschritt  $m \rightarrow m+1$  folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m+1} \frac{s_l}{s_l - s_k} &= \sum_{k=1}^m \frac{s_{m+1}}{s_{m+1} - s_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{s_l}{s_l - s_k} + \prod_{l=1}^m \frac{s_l}{s_l - s_{m+1}} \\ &\left| \prod_{l=1}^m \frac{1}{s_l - x} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{s_k - x} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{1}{s_l - s_k} \right. \text{ nach Liouville} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{s_{m+1}}{s_{m+1} - s_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{s_l}{s_l - s_k} - \sum_{k=1}^m \frac{s_k}{s_{m+1} - s_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{s_l}{s_l - s_k} \\ &= \sum_{k=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{s_l}{s_l - s_k} \quad \text{Schluss} \\ &= 1 . \quad \square \end{aligned}$$

Die *Emptiness Formation Probability* in der inhomogenen Darstellung  $\phi^+(m)$  ist somit unabhängig von den Inhomogenitäten, und der homogene Limes ergibt trivial unter Berücksichtigung der Spinumkehr (Abschnitt 4.4,  $h \rightarrow -h$ )

$$P^\pm(m) = \frac{1 \pm \langle \sigma \rangle}{2} \left[ \frac{1 \pm \langle \sigma \rangle}{2} + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{1 \mp \langle \sigma \rangle}{2} \right]^{m-1} . \quad (7.25)$$

### Nächste-Nachbar-Korrelation

Die erzeugende Funktion der  $zz$ -Korrelationsfunktion für  $m$  Gitterplätze ist ein Polynom vom Grade  $m$  in der Variable  $e^\varphi$ , d.h.

$$\left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{T,h} = f_0 + f_1 e^\varphi + \dots + f_m e^{m\varphi} \quad . \quad (7.26)$$

Die Koeffizienten  $f_n$ ,  $n = 0, \dots, m$  sind im homogenen Limes physikalisch zu interpretieren [17, 34]: Sie sind ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Segment von  $m$  benachbarten Plätzen durch einen Zustand beschrieben wird, für den die  $z$ -Komponente  $S_1^z + \dots + S_m^z$  des Gesamtspins den Eigenwert  $m/2 - n$  annimmt. Die Koeffizienten stellen damit eine Verallgemeinerung der *Emptiness Formation Probability* dar mit den Entsprechungen  $f_0 = P^+(m)$  und  $f_m = P^-(m)$ .

Speziell für  $m = 2$  Kettenplätze ist der Koeffizienten  $f_1$  durch die zusätzliche Bedingung  $1 = f_0 + f_1 + f_2$  festgelegt, wenn die erzeugende Funktion für den Parameter  $\varphi = 0$  ausgewertet wird, und es gilt

$$\left\langle \exp \left\{ \varphi e_{12}^2 + \varphi e_{22}^2 \right\} \right\rangle_{T,h} = P^+(2) + e^\varphi \frac{1 - \langle \sigma \rangle^2}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) + e^{2\varphi} P^-(2) \quad . \quad (7.27)$$

Die Parameterwahl  $\varphi = i\pi$  reproduziert dann die  $zz$ -Korrelationsfunktion  $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_{T,h}$  für benachbarte Gitterplätze nach (7.5).

## 7.3 Die Freie Energie

Die Integraldarstellung (3.26) der Freien Energie unter der Transformation  $x = e^{-2\omega}$  der Integrationsvariablen  $\omega$  lautet im Ising-Limes

$$\begin{aligned} f(h, T) &= -\frac{h}{2} - T \int_{e^{-2c}} \frac{dx}{2\pi i} \frac{\ln \left[ 1 + K \exp \left( -\frac{h}{T} - \frac{2J}{T} \frac{1+x}{1-x} \right) \right]}{x-1} \\ &= -\frac{h}{2} - T \ln(1 + \mathbf{a}_-) \\ &\left| \begin{aligned} 1 + \mathbf{a}_- &= 1 + K e^{-h/T + 2J/T} \quad , \quad -\operatorname{sh}(h/2T) = \operatorname{ch}(h/2T) - e^{h/2T} \\ &= 1 + e^{-h/2T} \left[ \operatorname{ch}(h/2T) - e^{h/2T} + \sqrt{\operatorname{sh}^2(h/2T) + e^{4J/T}} \right] \end{aligned} \right. \\ &= -T \ln \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{h}{2T} \right) + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \left( \frac{h}{2T} \right) + \exp \left( \frac{4J}{T} \right)} \right] \quad . \quad (7.28) \end{aligned}$$

Mit der zweiten Zeile der Umformung ist die *Emptiness Formation Probability* für  $n+1$  Gitterplätze durch die Freie Energie  $f(h, T)$  darzustellen als

$$P^+(n+1) = \frac{1 + \langle \sigma \rangle}{2(1 + \mathbf{a}_-)^n} = \frac{1 + \langle \sigma \rangle}{2} \exp \left( \frac{n f(h, T)}{T} + \frac{nh}{2T} \right) \quad . \quad (7.29)$$

Die Ergebnisse der Freien Energie und der *Emptiness Formation Probability* aus ihren Integraldarstellungen, beide im thermodynamischen Limes, stimmen mit den Resultaten (7.3) und (7.6) des klassischen Modells überein.



## Kapitel 8

# Der Spezialfall freier Fermionen

Freie Fermionen in *Tight-Binding*-Näherung werden auf einer periodisch geschlossenen 1D Kette mit  $L$  Plätzen in zweiter Quantisierung durch den Ein-Band-Hamilton-Operator

$$H_{FF} = 2c \sum_{j=1}^L (c_{j+1}^\dagger c_j + c_j^\dagger c_{j+1}) - \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^L (1 - 2c_j^\dagger c_j) \quad (8.1)$$

beschrieben. Die Fermi-Operatoren gehorchen den kanonischen Antivertauschungsrelationen  $\{c_j, c_k\} = \{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0$  sowie  $\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk}$  und die Anzahl der besetzten Plätze wird durch das chemische Potenzial  $\hbar$  kontrolliert. Der Hamilton-Operator (8.1) ist mit  $\phi = 2\pi/L$  über eine diskrete Fouriertransformation<sup>1</sup> mit der Ein-Teilchen-Dispersion  $\varepsilon_n = \hbar + 4c \cos(n\phi)$ ,  $n = 0, \dots, L-1$  zu diagonalisieren [15],

$$H_{diag} = \sum_{n=0}^{L-1} (\tilde{c}_n^\dagger \tilde{c}_n) \varepsilon_n - \frac{\hbar L}{2} \quad . \quad (8.2)$$

Die freien Fermionen in *Tight-Binding*-Näherung (8.1) sind in der *XXZ*-Kette als Sonderfall enthalten: Nimmt der Anisotropieparameter den Wert  $\Delta = 0$  an, dann lautet der Hamilton-Operator der *XXZ*-Kette in den Leiteroperatoren  $S^\pm = S^x \pm iS^y$  und unter der Jordan-Wigner-Transformation (5.11) - (5.13)

$$\begin{aligned} H_{XX} &= 2c \sum_{j=1}^{L-1} (S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + 2c (S_L^+ S_1^- + S_L^- S_1^+) - \hbar \sum_{j=1}^L S_j^z \\ &= 2c \sum_{j=1}^{L-1} (c_{j+1}^\dagger c_j + c_j^\dagger c_{j+1}) - 2c (c_1^\dagger c_L + c_L^\dagger c_1) \prod_{j=1}^L (1 - 2c_j^\dagger c_j) - \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^L (1 - 2c_j^\dagger c_j) . \end{aligned}$$

Die  $z$ -Komponente des Gesamtspins ist eine Erhaltungsgröße und ist im Teilchenbild zu einer festen Anzahl  $M \in \{0, 1, \dots, L\}$  besetzter Plätze äquivalent, weshalb

---

<sup>1</sup>Die diskrete Fouriertransformation ist eine unitäre Transformation der Fermi-Operatoren, welche die kanonischen Antivertauschungsrelationen invariant lässt. Es gilt für alle  $m, n = 0, \dots, L-1$   $\{\tilde{c}_m, \tilde{c}_n\} = \{\tilde{c}_m^\dagger, \tilde{c}_n^\dagger\} = 0$  und  $\{\tilde{c}_m, \tilde{c}_n^\dagger\} = \delta_{mn}$  mit

$$c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=0}^{L-1} e^{-i\phi j n} \tilde{c}_n^\dagger \quad , \quad \tilde{c}_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^L e^{i\phi n j} c_j^\dagger \quad .$$

der Term  $\prod_{j=1}^L (1 - 2c_j^\dagger c_j)$  für die Diagonalisierung durch den Zahlenfaktor  $(-1)^M$  ersetzt werden kann. Die Diagonalisierung des Hamilton-Operators  $H_{XX}$  ergibt die Darstellung (8.2) mit einer von der Anzahl  $M$  besetzter Plätze abhängigen Dispersion

$$\varepsilon_n = \begin{cases} h + 4c \cos\left((n + \frac{1}{2})\phi\right) & , \quad M \text{ gerade} \\ h + 4c \cos(n\phi) & , \quad M \text{ ungerade} \end{cases} , \quad n = 0, \dots, L-1 \quad . \quad (8.3)$$

Im thermodynamischen Limes  $L \rightarrow \infty$  nehmen die Argumente in den  $\cos$ -Termen von (8.3) kontinuierliche Werte aus dem Intervall  $[0, 2\pi)$  an. Die Fallunterscheidung für  $M$  ist nicht länger relevant und die Hamilton-Operatoren  $H_{FF}$  und  $H_{XX}$  beschreiben die Thermodynamik freier Fermionen gleichermaßen.

**Bemerkung.** Eine Verschiebung des Argumentes in der Dispersion um  $\pi$  bewirkt die Abbildung auf die erste Brillouin-Zone mit  $\varepsilon = \varepsilon(p) = h - 4c \cos p$ ,  $p \in [-\pi, \pi)$ .

Die Wahl  $\eta = i\pi/2$  als Parametrisierung von  $\Delta = \text{ch}(\eta) = 0$  vereinfacht alle Integraldarstellungen durch die ausgezeichneten Werte  $\text{sh}(\eta) = i$ ,  $\text{sh}(2\eta) = 0$  und die Additionstheoreme  $\text{sh}(\lambda \pm \eta) = \pm i \text{ch}(\lambda)$ . Die Kerne der Integralgleichungen (3.20), (3.21) und (4.21) werden zu Null und die Hilfsfunktionen sowie die verallgemeinerte Dichte sind durch die Inhomogenitäten der Integralgleichungen bestimmt zu

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{\bar{\alpha}(\lambda)} = \exp\left[-\frac{1}{T}\left(h + \frac{4ic}{\text{sh}(2\lambda)}\right)\right] , \quad (8.4)$$

$$G(\lambda, \zeta) = -\frac{2}{\text{sh}(2\lambda - 2\zeta)} . \quad (8.5)$$

## 8.1 Die Abbildung auf die Brillouin-Zone

Allen periodisch geschlossenen, regelmäßigen 1D Kristallen ist eine Brillouin-Zone  $[-\pi, \pi)$  der dimensionslosen Impulseigenwerte natürlich zugeordnet. Unter dem Gesichtspunkt, dass die  $XX$ -Spinkette einem 1D Gittermodell spinloser Fermionen äquivalent ist, ist die kanonische Kontur  $\mathcal{C}$  wie folgt zu deuten: Sie besteht aus zwei zu der reellen Achse parallelen Abschnitten  $\mathcal{C}_\pm$  (Abbildung 8.1 links), die durch die Punkte  $\pm i\pi/4$  verlaufen<sup>2</sup>. Die Parametrisierung

$$\omega : [\pi/2, \pi) \cup [-\pi, -\pi/2] \rightarrow \mathcal{C}_+ , \quad p \mapsto \frac{1}{2} \text{Artanh}(\sin p) + \frac{i\pi}{4} \quad (8.6a)$$

$$\omega : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathcal{C}_- , \quad p \mapsto \frac{1}{2} \text{Artanh}(\sin p) - \frac{i\pi}{4} \quad (8.6b)$$

ordnet jedem Punkt  $\omega \in \mathcal{C}$  eindeutig einen Impuls  $p \in [-\pi, \pi)$  zu, und es gelten für alle  $\omega$  und  $p$  einheitlich die Relationen

$$\text{sh}(2\omega) = \frac{1}{i \cos(p)} , \quad \text{ch}(2\omega) = -i \tan(p) , \quad \frac{d\omega}{\text{sh}(2\omega)} = \frac{idp}{2} . \quad (8.7)$$

<sup>2</sup>Die ursprüngliche Kontur  $\mathcal{C}$  nach Abbildung 3.1 ist frei deformierbar, solange keine Singularitäten der Integranden überschritten werden. Enthält der Integrand als Beispiel nur den Term  $1/\text{sh}(2\omega)$ , so ist die Kontur innerhalb der Analytizitätsstreifen  $-\pi/2 < \text{Im } \omega < 0$  und  $0 < \text{Im } \omega < \pi/2$  deformierbar.

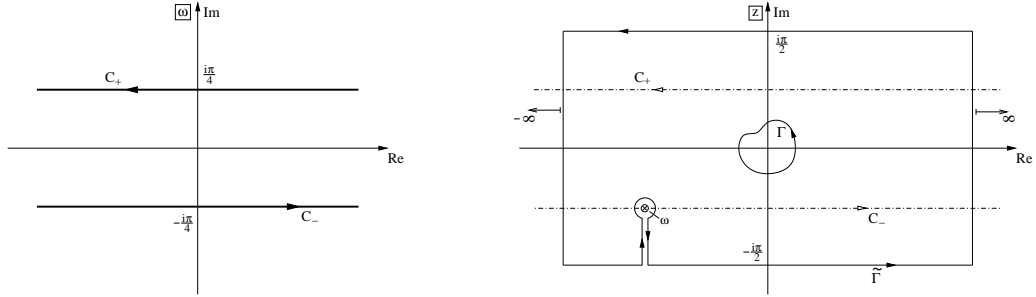


Abbildung 8.1: Die kanonische Kontur  $\mathcal{C}$  besteht aus zwei Teilkonturen  $\mathcal{C}_{\pm}$ , die im Abstand  $\pm i\pi/4$  parallel zu der reellen Achse verlaufen (links). Bei der Deformation der Kontur  $\Gamma$  in  $\tilde{\Gamma}$  ist eine Polstelle auf der Kontur  $\mathcal{C}$  zu berücksichtigen (rechts).

Alle Integraldarstellungen der Ein- und Mehr-Punkt-Korrelationsfunktionen sowie der Freien Energie sind durch Impulsintegrale über die Brillouin-Zone  $[-\pi, \pi]$  darstellbar. Die Ableitung der Integraldarstellungen birgt viele Ähnlichkeiten mit dem Vorgehen in [31], da die Funktion  $G(\lambda, \zeta)$  von der Temperatur unabhängig ist und speziell auch im Grenzfall  $T = 0$  Anwendung findet.

**Beispiel 5.** Die Magnetisierung  $m(h, T)$  nach (5.8) hat für den Parameter  $\eta = i\pi/2$  und den damit verbundenen expliziten Lösungen der Hilfsfunktion und der verallgemeinerten Dichte die Integraldarstellung

$$m(h, T) = \frac{1}{2} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{i\pi} \frac{1}{\text{sh}(2\omega)} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{1}{T}\left(h + \frac{4ic}{\text{sh}(2\omega)}\right)\right)} . \quad (8.8)$$

Die Aufteilung  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ + \mathcal{C}_-$  der Integrationskontur und die Abbildung auf die komplette Brillouin-Zone  $[-\pi, \pi]$  entsprechend (8.7) mit der neuen Variablen  $p$  ergibt

$$m(h, T) = \frac{1}{2} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{h - 4c \cos p}{T}\right)} . \quad (8.9)$$

**Beispiel 6.** Die Magnetisierung  $m(h, T) = -\partial_h f(h, T)$  entsprechend (8.9) ist konsistent mit der Integraldarstellung (3.26) der Freien Energie im XX-Limes,

$$f(h, T) = -\frac{h}{2} - T \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \ln \left[ 1 + \exp\left(-\frac{h - 4c \cos p}{T}\right) \right] . \quad (8.10)$$

Im Argument der exp-Funktion kann die Ein-Teilchen-Dispersion  $\varepsilon = h - 4c \cos p$  identifiziert werden, und  $1 + \exp(-\varepsilon/T)$  im ln-Term korrespondiert mit der Fermi-Statistik.

## 8.2 Die Emptiness Formation Probability

Im XX-Limes reduzieren sich die Determinanten  $\det_m t(\xi_k, \omega_j) = \det_m G(\omega_j, \xi_k)$  auf Cauchy-Determinanten, und die inhomogene Version  $\phi^+(m)$  der Emptiness Formati-

on Probability nach (7.17) führt im homogenen Limes auf

$$\begin{aligned} P^+(m) &= \lim_{\substack{\xi_j \rightarrow 0 \\ j=1, \dots, m}} \frac{1}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathfrak{a}(\omega_j)} \right] \frac{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \text{sh}(\omega_j - \omega_k) \text{ch}(\xi_j - \xi_k)}{\prod_{j,k=1}^m \text{sh}(\omega_j - \xi_k) \text{ch}(\omega_j - \xi_k)} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{i\pi} \frac{1}{1 + \mathfrak{a}(\omega_j)} \right] \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq m} 4 \text{sh}^2(\omega_j - \omega_k)}{\prod_{j=1}^m \text{sh}^m(2\omega_j)} \quad . \quad (8.11) \end{aligned}$$

Der Integrand ist symmetrisch bezüglich aller Integrationsvariablen  $\omega_j$ , und die Transformation (8.7) auf die Impulse  $p_j$  ergibt mit den Additionstheoremen für doppelte Argumente  $2 \text{sh}^2(\alpha) = \text{ch}(2\alpha) - 1$  und  $2 \sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$

$$\text{sh}^2(\omega_j - \omega_k) = \frac{\sin^2\left(\frac{p_j - p_k}{2}\right)}{\cos(p_j) \cos(p_k)} \quad . \quad (8.12)$$

Die Symmetrie des Integranden erlaubt die Transformation<sup>3</sup> des Vielfachintegrals über  $\mathcal{C}^m$  in ein Vielfachintegral über  $[-\pi, \pi]^m$  und es folgt die Darstellung von  $P^+(m)$  in den Impulsen  $p_j$  zu

$$P^+(m) = \frac{1}{m!} \left[ \prod_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{4c \cos p_j - h}{T}\right)} \right] \prod_{1 \leq j < k \leq m} 4 \sin^2\left(\frac{p_j - p_k}{2}\right) \quad . \quad (8.13)$$

Die ursprüngliche Determinantendarstellung des Integranden besteht weiterhin: Der symmetrische Term  $\prod_{j < k} \sin^2\left(\frac{p_j - p_k}{2}\right)$  kann in das Produkt von zwei Vandermonde-Determinanten zerlegt werden,

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sin^2\left(\frac{p_j - p_k}{2}\right) &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \sin\left(\frac{p_j - p_k}{2}\right) = \frac{1}{2^{m(m-1)}} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m (1 - e^{-ip_j + ip_k}) \\ &= \frac{1}{2^{m(m-1)}} \prod_{1 \leq j < k \leq m} (1 - e^{-ip_j} e^{ip_k}) \prod_{1 \leq k < j \leq m} (1 - e^{-ip_j} e^{ip_k}) \\ &= \frac{1}{2^{m(m-1)}} \prod_{1 \leq j < k \leq m} (e^{ip_k} - e^{ip_j}) \prod_{1 \leq k < j \leq m} (e^{-ip_j} - e^{-ip_k}) \\ &= \frac{1}{2^{m(m-1)}} \Delta(e^{ip}) \Delta(e^{-ip}) \quad . \quad (8.14) \end{aligned}$$

Die Darstellung und die Definition von Vandermonde-Determinanten  $\Delta(\circ)$  ist zusammengestellt in

<sup>3</sup>Für den rein kombinatorischen Anteil folgt durch  $[-\pi, \pi] = I_+ \cup I_-$  mit  $I_+ = [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$  und  $I_- = [-\pi/2, \pi/2]$  sowie den Mengen  $\{\omega_j\}_{j=1}^m$ ,  $\{p_j\}_{j=1}^m$  der Integrationsvariablen

$$\int_{\mathcal{C}_{\pm}} d\omega_j^{\pm} = \int_{I_{\pm}} dp_j^{\pm} \quad , \quad \left[ \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} d\omega_j \right] = \sum_{n=0}^m \sum_{\substack{(\{\omega^+\}, \{\omega^-\}) \in p_2\{\omega\} \\ |\omega^+| = n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}_+} d\omega_j^+ \right] \left[ \prod_{j=1}^{m-n} \int_{\mathcal{C}_-} d\omega_j^- \right] = \left[ \prod_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} dp_j \right] \quad .$$



**Lemma 22.** Sei  $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$  eine Menge paarweise verschiedener komplexer Zahlen. Dann ist die daraus gebildete Vandermonde-Determinante  $\Delta(\lambda)$  einem einfachen Produktterm äquivalent,

$$\prod_{1 \leq j < k \leq m} (\lambda_k - \lambda_j) =: \Delta(\lambda) = \det_m \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Der Ausdruck  $\Delta(e^{ip}) \Delta(e^{-ip})$  ist in den Variablen  $p_j$  symmetrisch. Unter den Integralen kann daher eine der beiden Determinanten durch das  $m!$ -fache Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente ersetzt [31], und das Vielfachimpulsintegral in die verbleibende Determinante gezogen werden,

$$\begin{aligned} P^+(m) &= \left[ \prod_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{4c \cos p_j - h}{T}\right)} \right] \left[ \prod_{j=1}^m e^{-i(j-1)p_j} \right] \det_m (e^{i(j-1)p_k})_{jk} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\sigma) \left[ \prod_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{4c \cos p_j - h}{T}\right)} \right] \left[ \prod_{j=1}^m e^{i(\sigma(j)-j)p_j} \right] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\sigma) \left[ \prod_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_j}{2\pi} \frac{e^{i(\sigma(j)-j)p_j}}{1 + \exp\left(\frac{4c \cos p_j - h}{T}\right)} \right] \\ &= \det_m \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{i(j-k)p}}{1 + \exp\left(\frac{4c \cos p - h}{T}\right)} \right]. \quad (8.16) \end{aligned}$$

Die Integraldarstellung (8.16) reproduziert das Ergebnis von [52], wenn die Kopplung  $c$  sowie das Magnetfeld  $h$  reskaliert werden und die Periodizität in  $2\pi$  des Integranden berücksichtigt wird,

$$\det_m \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{i(j-k)p}}{1 + \exp\left(\frac{4c \cos p - h}{T}\right)} \right] = \det_m \left[ \int_0^{2\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{i(j-k)p}}{1 + \exp\left(\frac{4c \cos p - h}{T}\right)} \right]. \quad (8.17)$$

### 8.3 Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion

Mit der Produktformel der Cauchy-Determinanten lautet die erzeugende Funktion der  $zz$ -Korrelation  $\langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h}$  in der Darstellung mit  $\bar{\mathfrak{a}}$  im  $XX$ -Limes

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix}_j \right\rangle_{T,h} &= \sum_{n=0}^m \frac{(1 - e^\varphi)^n}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_C \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega_j)} \int_\Gamma \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{th}(\omega_j)}{\text{th}(z_j)} \right)^m \right] \\ &\quad \times \left[ \det_n \left( \frac{1}{\text{sh}(\omega_j - z_k)} \right) \right]^2. \quad (8.18) \end{aligned}$$

In der Anwendung des Differenzial-Differenzen-Operators  $(1/2D_m^2\partial_\varphi^2 - D_m^1\partial_\varphi + 1/4)$  auf die erzeugende Funktion (8.18) sind die stetigen Ableitungen nach dem Parameter  $\varphi$  zu bilden<sup>4</sup>, da die erzeugende Funktion in den Termen  $(e^\varphi - 1)^n$  faktorisiert. Es folgt nach Auswertung der Ableitungen an der Stelle  $\varphi = 0$

$$\langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h} = \frac{1}{2} D_m^2 (I_1 + I_2) - D_m^1 I_1 + \frac{1}{4} . \quad (8.19)$$

Die noch auszuführenden Konturintegrale  $I_1$  und  $I_2$  weisen in den Variablen  $z$  und  $z_j$  jeweils Pole  $m$ -ter Ordnung auf,

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{th}^m(\omega)}{1 + \bar{\alpha}(\omega)} \int_{\Gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\text{th}^m(z)} \frac{1}{\text{sh}^2(\omega - z)} , \quad (8.20)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{\text{th}^m(\omega_j)}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \int_{\Gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \frac{1}{\text{th}^m(z_j)} \right] \left[ \det_2 \left( \frac{1}{\text{sh}(\omega_j - z_k)} \right) \right]^2 . \quad (8.21)$$

### Auswertung des Integrals $I_1$

Soll die  $zz$ -Korrelation als Vielfachintegral über die Brillouin-Zone dargestellt werden, so ist das  $\Gamma$ -Integral auszuführen. Die Behandlung der  $m$ -fachen Polstelle bezüglich der Variable  $z$  beschreibt

**Lemma 23.** *Sei  $\Gamma$  entsprechend Abbildung 8.1 (rechts) eine einfach geschlossene Kontur um den Ursprung, dann lautet das Konturintegral*

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{2\pi i} \left( \frac{\text{th}(\omega)}{\text{th}(z)} \right)^m \frac{1}{\text{sh}^2(\omega - z)} = \frac{2m}{\text{sh}(2\omega)} . \quad (8.22)$$

*Beweis.* Die Auswertung des Konturintegrals ist mit dem Residuensatz möglich. Wird  $\Gamma$  in  $\tilde{\Gamma}$  deformiert (Abbildung 8.1 rechts), so ergibt das ausgeführte Konturintegral mit  $\tilde{\Gamma}$  den Wert Null: Der Integrand strebt für  $|z| \rightarrow \infty$  asymptotisch gegen Null und aufgrund seiner Periodizität in  $i\pi$  heben sich die zu der reellen Achse parallel verlaufenden Teilabschnitte von  $\tilde{\Gamma}$  bei  $\pm i\pi/2$  gegenseitig auf. Es folgt mit der zweifachen Polstelle des Integranden bei  $z = \omega$

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{2\pi i} \left( \frac{\text{th}(\omega)}{\text{th}(z)} \right)^m \frac{1}{\text{sh}^2(\omega - z)} = 0 - \text{Res}_{z=\omega} \left[ \left( \frac{\text{th}(\omega)}{\text{th}(z)} \right)^m \frac{1}{\text{sh}^2(\omega - z)} \right] = \frac{2m}{\text{sh}(2\omega)} .$$

□

Das Integral  $I_1$  schließlich ist nach der Anwendung von Lemma 23 auf die Integraldarstellung (8.8) der Magnetisierung zurückzuführen mit

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{2m}{1 + \bar{\alpha}(\omega)} \frac{1}{\text{sh}(2\omega)} = m \left[ \frac{1}{2} - \langle S^z \rangle_{T,h} \right] . \quad (8.23)$$

<sup>4</sup>Die stetigen Ableitungen nach den Parameter  $\varphi$  ergeben auf den Term  $(e^\varphi - 1)^n$  angewandt

$\partial_\varphi (e^\varphi - 1)^n = n(e^\varphi - 1)^{n-1} e^\varphi$  ,  $\partial_\varphi^2 (e^\varphi - 1)^n = n(n-1)(e^\varphi - 1)^{n-2} e^{2\varphi} + n(e^\varphi - 1)^{n-1} e^\varphi$  .

### Auswertung des Integrals $I_2$

Wird das Quadrat der Cauchy-Determinante in allen Variablen explizit ausgeschrieben, ist  $I_2$  auf  $I_1$  zurückzuführen, ergänzt um einen noch zu bestimmenden Integralausdruck entsprechend

$$I_2 = I_1^2 - \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{\text{th}^m(\omega_j)}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \left[ \int_{\Gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\text{th}^m(z) \text{sh}(z - \omega_1) \text{sh}(z - \omega_2)} \right]^2. \quad (8.24)$$

### Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion

Für die Darstellung der Korrelationsfunktion  $\langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h}$  durch Impulsintegrale über die Brillouin-Zone ist nur das  $\Gamma$ -Integral in der Darstellung (8.24) auszuwerten; mittels Deformation<sup>5</sup> der Kontur  $\Gamma$  nach  $\tilde{\Gamma}$  folgt analog zu Lemma 23

$$I_2 = I_1^2 - \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega_j)} \right] \left[ \frac{1}{\text{sh}(\omega_1 - \omega_2)} \left( \left[ \frac{\text{th}(\omega_1)}{\text{th}(\omega_2)} \right]^{\frac{m}{2}} - \left[ \frac{\text{th}(\omega_2)}{\text{th}(\omega_1)} \right]^{\frac{m}{2}} \right) \right]^2. \quad (8.25)$$

Bevor die Konturintegrale über  $\mathcal{C}$  in Impulsintegrale über die Brillouin-Zone transformiert werden, ist noch mit den diskreten ersten und zweiten Ableitungen  $D_m^1$  und  $D_m^2$  auf die Terme  $I_1$  und  $I_2$  zu wirken. Mit  $D_m^1 m = 1$ ,  $D_m^2 m = 0$  und  $D_m^2 m^2 = 2$  sowie der Hilfsrelation

$$\begin{aligned} D_m^2 & \left[ \frac{1}{\text{sh}^2(\omega_1 - \omega_2)} \left( \left[ \frac{\text{th}(\omega_1)}{\text{th}(\omega_2)} \right]^{\frac{m}{2}} - \left[ \frac{\text{th}(\omega_2)}{\text{th}(\omega_1)} \right]^{\frac{m}{2}} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \text{th}^m(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{1}{m} \frac{\partial \text{cth}^m(\omega_2)}{\partial \omega_2} - \frac{1}{m} \frac{\partial \text{th}^m(\omega_2)}{\partial \omega_2} \frac{1}{m} \frac{\partial \text{cth}^m(\omega_1)}{\partial \omega_1} \end{aligned} \quad (8.26)$$

separiert der diskret differenzierte Integralausdruck in  $I_2$  in ein Produkt zweier einfacher Konturintegrale, und für die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion folgt mit der Magnetisierung  $\langle S^z \rangle_{T,h} = \langle S_1^z \rangle_{T,h} = \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h}$

$$\begin{aligned} & \langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h} - \langle S_1^z \rangle_{T,h} \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h} \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega)} \frac{\partial_{\omega} \text{th}^m(\omega)}{m} \right] \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(\omega)} \frac{\partial_{\omega} \text{cth}^m(\omega)}{m} \right]. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Die th- und cth-Terme der Integranden sind durch die Beziehungen (8.7) in Impulsvariablen darzustellen mit  $\text{th}(\omega) = 1/\text{cth}(\omega) = -ie^{ip}$ , und nach Transformation der Differenziale sowie Ableitungen ist

$$\langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h} - \langle S_1^z \rangle_{T,h} \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h} = - \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{\cos(mp)}{1 + \exp\left(\frac{h-4c \cos p}{T}\right)} \right]^2. \quad (8.28)$$

<sup>5</sup>Bei der Deformation der Kontur  $\Gamma$  nach Abbildung 8.1 (rechts) sind die beiden einfachen Polstellen bei  $z = \omega_1$  und  $z = \omega_2$  zu berücksichtigen mit dem Resultat

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\text{th}^m(z) \text{sh}(z - \omega_1) \text{sh}(z - \omega_2)} = -\frac{1}{\text{sh}(\omega_1 - \omega_2)} \left[ \frac{1}{\text{th}^m(\omega_1)} - \frac{1}{\text{th}^m(\omega_2)} \right].$$

**Bemerkung.** Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion in der Form (8.28) hat mit lokalen Feldern  $h_1$  und  $h_{m+1}$  an den Plätzen 1 und  $m+1$  die Bedeutung einer Greenschen Funktion auf der Kette,

$$g(1, m+1) := \langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h} - \langle S_1^z \rangle_{T,h} \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h} \hat{=} \frac{\partial \langle S_1^z \rangle_{T,h}}{\partial h_{m+1}} - \frac{\partial \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h}}{\partial h_1}. \quad (8.29)$$

### Der Grenzfall $T = 0$

Im Limes  $T \rightarrow 0+0$  sind für das Vorzeichen des Argumentes der exp-Funktion die Fälle  $|h| \geq 4c$  zu unterscheiden:

- (i)  $|h| \geq 4c$ ,  $g(1, m+1) = 0$

Das Argument  $\frac{h-4c \cos p}{T}$  ist entweder ausschließlich positiv oder negativ. Bei positiven Argumenten wird der Integrand und somit das Integral durch den exponentiell wachsenden Nenner im Limes  $T \rightarrow 0+0$  zu Null. Bei negativen Argumenten verbleibt für  $T \rightarrow 0+0$  eine Integration von  $\cos(mp)$  über das Intervall  $[0, 2\pi]$ , die als Ergebnis auf Null führt.

- (ii)  $|h| < 4c$

Es findet im Argument ein Vorzeichenwechsel bei  $p_0 = \arccos\left(\frac{h}{4c}\right)$  statt, mit  $0 < p_0 < \pi$ , und die Greensche Funktion  $g(1, m+1)$  ist durch Tschebyscheff-Polynome  $T_j(x) = \cos(j \arccos(x))$  auszudrücken,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0+0} g(1, m+1) &= - \left[ \int_{-p_0}^{p_0} \frac{dp}{2\pi} \cos(mp) \right]^2 = - \left[ \frac{\sin(mp_0)}{m\pi} \right]^2 \\ &= \frac{\cos(2mp_0) - 1}{2(m\pi)^2} = \frac{\cos\left(2m \arccos\left(\frac{h}{4c}\right)\right) - 1}{2(m\pi)^2} \\ &= \frac{T_{2m}\left(\frac{h}{4c}\right) - 1}{2(m\pi)^2}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Die Formeln (8.28) und (8.30) entsprechen den Darstellungen in [48] (für  $h = 0$ ) und [3]. Die Asymptotik der Zwei-Punkt-Funktion für große Abstände  $m$  auf der Kette ist in [3] behandelt.

## Kapitel 9

# Der isotrope Limes

Die Heisenberg-Kette mit der isotropen Wechselwirkung  $\langle \mathbf{S}_{j-1}, \mathbf{S}_j \rangle$  benachbarter Spins wurde bereits 1931 von H. Bethe exakt gelöst [5], dessen Name zu einem feststehenden Begriff für den darin verwandten Koordinaten-Bethe-Ansatz und den daraus abgeleiteten Bethe-Ansatz-Gleichungen wurde. Der Hamilton-Operator lautet für die Heisenberg-Kette

$$H_{XXX} = c \sum_{j=1}^L \left( \sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y + \sigma_{j-1}^z \sigma_j^z \right) - cL \quad (9.1)$$

und kann durch  $\Delta = 1$  aus dem Hamilton-Operator der  $XXZ$ -Kette gewonnen werden, wodurch sich die additive Konstante  $-cL$  erklärt. Die Parametrisierung  $\eta = 0$  des isotropen Punktes ist in allen Integralgleichungen und Integraldarstellungen nicht unmittelbar durchzuführen: Die Inhomogenitäten, Integralkerne und Vorfaktoren nehmen für  $\eta = 0$  ebenfalls den Wert Null an und führen mit den zu Geraden entarteten Konturen  $\mathcal{C}$  zu keinem verwertbaren Ergebnis.

Die Darstellungen der Hilfsfunktion, der verallgemeinerten Dichte und der erzeugenden Funktion am isotropen Punkt sind vielmehr durch einen Grenzwertprozess  $\eta \rightarrow 0$  zu bestimmen. Wird der dominante Anteil – der Grenzwert Null – in den Inhomogenitäten, Kernen und Vorfaktoren durch eine Skalierung abgespalten, so bleibt deren Struktur bestehen.

### 9.1 Die Integralgleichungen am isotropen Punkt

Der isotrope Limes  $\eta \rightarrow 0$  ist o.B.d.A. für rein imaginäre  $\eta := i\alpha$  durchzuführen, mit  $\alpha$  reell und positiv. Alle Argumente  $\lambda$ ,  $\omega$  und Inhomogenitäten  $\xi$  skalieren mit

$$\lambda = \alpha\nu \quad , \quad \omega = \alpha u \quad , \quad \xi = \alpha x \quad (9.2)$$

und im Limes  $\alpha \rightarrow 0 + 0$  lauten die Integralgleichungen (3.20) und (4.21) für die Hilfsfunktion und die verallgemeinerte Dichte

$$\ln \mathfrak{a}(\alpha\nu) = -\frac{h}{T} + \frac{2c}{T} \frac{1}{\nu(\nu+i)} - \int_{\mathcal{C}/\alpha} \frac{du}{\pi} \frac{\ln(1 + \mathfrak{a}(\alpha u))}{1 + (\nu - u)^2} \quad , \quad (9.3)$$

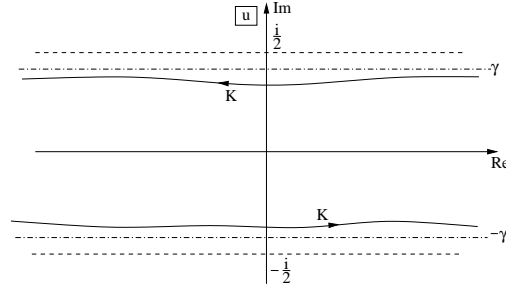


Abbildung 9.1: Die Integrationskontur  $K$  wird durch die Grenzen  $\pm\gamma$  auf einen Streifen begrenzt, für den  $0 < \gamma < i/2$  gilt.

$$-\frac{\alpha}{i}G(\alpha\nu, \alpha x) = \int_{\mathcal{C}/\alpha} \frac{du}{\pi} \frac{1}{1 + (\nu - u)^2} \frac{-\frac{\alpha}{i}G(\alpha u, \alpha x)}{1 + \mathbf{a}(\alpha u)} - \frac{1}{(\nu - x)(\nu - x - i)} \quad (9.4)$$

Aus den umskalierten Funktionen  $\mathbf{a}(\alpha\nu)$  und  $-\frac{\alpha}{i}G(\alpha\nu, \alpha x)$  werden unter Beibehaltung der Bezeichnungen per Definition die neuen Funktionen  $\mathbf{a}(\nu) = 1/\bar{\mathbf{a}}(\nu)$  und  $G(\nu, x)$ , die den Integralgleichungen

$$\ln \mathbf{a}(\nu) = -\frac{h}{T} + \frac{2c}{T} \frac{1}{\nu(\nu + i)} - \int_K \frac{du}{\pi} \frac{\ln(1 + \mathbf{a}(u))}{1 + (\nu - u)^2} \quad (9.5)$$

$$\ln \bar{\mathbf{a}}(\nu) = \frac{h}{T} + \frac{2c}{T} \frac{1}{\nu(\nu - i)} + \int_K \frac{du}{\pi} \frac{\ln(1 + \bar{\mathbf{a}}(u))}{1 + (\nu - u)^2} \quad (9.6)$$

$$G(\nu, x) = \int_K \frac{du}{\pi} \frac{1}{1 + (\nu - u)^2} \frac{G(u, x)}{1 + \mathbf{a}(u)} - \frac{1}{(\nu - x)(\nu - x - i)} \quad (9.7)$$

gehoren und mit den Darstellungen [15] zur Heisenberg-Kette äquivalent sind. Die Entartung der Kontur  $\mathcal{C}$  zur Geraden wird durch die Skalierung der Argumente aufgehoben:  $K = \mathcal{C}/\alpha$  verläuft im Streifen  $|\operatorname{Im} u| \leq \gamma$  und besteht aus zwei Teilkonturen über und unter der reellen Achse (Abbildung 9.1). Die Auswirkung der Skalierung auf die Integraldarstellungen zeigen

**Beispiel 7.** Die Freie Energie der periodisch geschlossenen Heisenberg-Kette im thermodynamischen Limes lautet am isotropen Punkt

$$f(h, T) = -\frac{h}{2} - T \int_K \frac{du}{2\pi} \frac{\ln(1 + \mathbf{a}(u))}{u(u + i)} = \frac{h}{2} + T \int_K \frac{du}{2\pi} \frac{\ln(1 + \bar{\mathbf{a}}(u))}{u(u - i)} \quad (9.8)$$

**Beispiel 8.** Die Wahrscheinlichkeit, dass auf der Heisenberg-Kette  $m$  benachbarte Spins in Vorzugsrichtung eingestellt sind, folgt aus (5.22) zu

$$P^+(m) = \left[ \prod_{j=1}^m \int_K \frac{d\nu_j}{2\pi} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\nu_j)} \right] \frac{\prod_{j=1}^m (\nu_j - i)^{j-1} \nu_j^{m-j}}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} (\nu_j - \nu_k + i)} \det_m \left[ \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}}(\nu_j, 0) \right]. \quad (9.9)$$

Die Emptiness Formation Probability für  $m$  benachbarte Spins ist im Zugang über die erzeugende Funktion durch  $m$  Konturintegrale bestimmt.

## 9.2 Die Reduktion von Vielfachintegralen

Die in Beispiel 8 vorgestellte strikte Entsprechung von Gitterplatz- und Konturanzahl besteht nicht mehr für das nachfolgende Beispiel von zwei benachbarten Gitterplätzen auf der isotropen Heisenberg-Kette:

Im feldfreien Fall gilt für die Magnetisierung der antiferromagnetisch gekoppelten Spins  $\langle \sigma^z \rangle_{T,h} = 0$ , und aus der Definition von  $P^+(m)$  folgt für  $m = 2$

$$P^+(2) = \left\langle \frac{1}{2}(1 + \sigma_1^z) \frac{1}{2}(1 + \sigma_2^z) \right\rangle_{T,h} = \frac{1 + \langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_{T,h}}{4} = \frac{1 + \langle \sigma_{j-1}^z \sigma_j^z \rangle_{T,h}}{4} . \quad (9.10)$$

Bezeichne weiter  $\varepsilon := \langle H_{XXX} \rangle / L$  die innere Energie pro Gitterplatz, dann ergibt sich aus der vorherrschenden Symmetrie  $\langle \sigma_{j-1}^x \sigma_j^x \rangle_{T,h} = \langle \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y \rangle_{T,h} = \langle \sigma_{j-1}^z \sigma_j^z \rangle_{T,h}$

$$P^+(2) = \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{12c} . \quad (9.11)$$

Die innere Energie  $\varepsilon$  steht mit der Freien Energie  $f$  über die aus der Thermodynamik bekannten Relation  $\varepsilon = \partial_{1/T}(f/T)$  in Beziehung. Auf die gleiche Weise, wie in Abschnitt 3.3 für die Magnetisierung  $m(h, T) = -\partial_h f(h, T)$  eine Integraldarstellung in (3.28) - (3.36) abgeleitet und auf die verallgemeinerte Dichte  $G(\lambda, 0)$  zurückgeführt wurde, ist

$$\varepsilon = \partial_{1/T} \left( \frac{f}{T} \right) = -c \int_K \frac{du}{\pi} \frac{1}{u(u-i)} \frac{G(u, 0)}{1 + \mathfrak{a}(u)} , \quad (9.12)$$

und die *Emptiness Formation Probability* für  $m = 2$  Gitterplätze kommt im feldfreien Fall durch ein einziges Konturintegral aus. Es ist

$$P^+(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \int_K \frac{du}{\pi} \frac{1}{u(u-i)} \frac{G(u, 0)}{1 + \mathfrak{a}(u)} . \quad (9.13)$$





## Kapitel 10

# Der Grenzfall $T=0$

Der Limes  $T \rightarrow 0$  in der erzeugenden Funktion und allen enthaltenen Größen reproduziert die Integraldarstellungen aus

**Lemma [33] 24.** *Sei die Dichteverteilung  $\rho$  der Bethe-Ansatz-Zahlen (zu der gewöhnlichen Transfermatrix) durch die lineare Integralgleichung*

$$-2\pi i \rho(\lambda, \zeta) + \int_I d\mu K(\lambda - \mu) \rho(\mu, \zeta) = t(\lambda, \zeta) \quad , \quad (10.1)$$

$$K(\lambda) = \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda + \eta) \text{sh}(\lambda - \eta)} \quad (10.2)$$

gegeben. Dann lautet die erzeugende Funktion  $\langle \exp(\varphi Q_{1,m}) \rangle = \langle \exp(\varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}{}^2) \rangle$  auf dem Integrationsintervall  $I$  im homogenen Limes

$$\begin{aligned} \langle \exp(\varphi Q_{1,m}) \rangle &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\gamma} \frac{dz_j}{2\pi i} \right] \int_I d^n \lambda \prod_{a=1}^n \left( \frac{\text{sh}(z_a + \frac{\eta}{2}) \text{sh}(\lambda_a - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(z_a - \frac{\eta}{2}) \text{sh}(\lambda_a + \frac{\eta}{2})} \right)^m \\ &W_n(\{\lambda\}, \{z\}) \det_n \widetilde{M}(\lambda_j, z_k) \det_n \rho(\lambda_j, z_k) \quad , \quad (10.3) \end{aligned}$$

$$\widetilde{M}(\lambda_j, z_k) = t(z_k, \lambda_j) + e^{\varphi} t(\lambda_j, z_k) \prod_{a=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda_a - \lambda_j + \eta) \text{sh}(\lambda_j - z_a + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_a + \eta) \text{sh}(z_a - \lambda_j + \eta)} \quad , \quad (10.4)$$

$$W_n(\{\lambda\}, \{z\}) = \prod_{a=1}^n \prod_{b=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda_a - z_b + \eta) \text{sh}(z_b - \lambda + \eta)}{\text{sh}(\lambda_a - \lambda_b + \eta) \text{sh}(z_a - z_b + \eta)} \quad . \quad (10.5)$$

Die Integrationskontur  $\gamma$  umschließt den Punkt  $\eta/2$ , und der Integrationsweg  $I$  ist definiert durch das Intervall  $I = [-\Lambda_h, \Lambda_h]$ . Mit den Intervallgrenzen ist zusätzlich eine Integrationsrichtung vorgegeben.

Im masselosen Fall  $-1 < \Delta \leq 1$  ist  $\eta$  rein imaginär mit  $-\pi < \text{Im } \eta < 0$  und  $I$  ist mit  $\Lambda_h > 0$  ein Teilintervall der reellen Achse. Für  $\Delta > 1$  ist  $\eta$  reell ( $\eta < 0$ ) und die Grenzen  $\pm \Lambda_h$  nehmen rein imaginäre Werte an mit  $\text{Im } \Lambda_h < 0$ .

Die Bestimmungsgleichung für  $\Lambda_h$  findet sich in [35], allerdings in einer zu [33] abweichenden Notation.

## 10.1 Integralgleichungen der Hilfsfunktion

Der Limes  $T \rightarrow 0$  ist in den Integralgleichungen (3.20) und (3.21) der Hilfsfunktionen  $\mathfrak{a}$  und  $\bar{\mathfrak{a}}$  nicht trivial zu bilden, da die Inhomogenitäten mit  $1/T$  skalieren. Erst die Definitionen  $\varepsilon = -T \ln \mathfrak{a}$  und  $\bar{\varepsilon} = -T \ln \bar{\mathfrak{a}}$  führen mit um  $\mp\eta/2$  verschobenen Argumenten<sup>1</sup> in  $\mathfrak{a}$  und  $\bar{\mathfrak{a}}$  auf die Bestimmungsgleichungen

$$\varepsilon(\nu) = h + \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{\operatorname{sh}(\nu + \eta/2) \operatorname{sh}(\nu - \eta/2)} + \int_{\mathcal{C} + \frac{\eta}{2}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) T \ln(1 + e^{-\varepsilon(\omega)/T})}{\operatorname{sh}(\nu - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\nu - \omega - \eta)}, \quad (10.6)$$

$$\bar{\varepsilon}(\nu) = -h + \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{\operatorname{sh}(\nu + \eta/2) \operatorname{sh}(\nu - \eta/2)} - \int_{\mathcal{C} - \frac{\eta}{2}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) T \ln(1 + e^{-\bar{\varepsilon}(\omega)/T})}{\operatorname{sh}(\nu - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\nu - \omega - \eta)}, \quad (10.7)$$

die im Grenzfalle  $T = 0$  untersucht werden können. Dass die Verschiebung der Argumente zweckmäßig ist, zeigt die genauere Analyse von (10.6) und (10.7).

### Anisotropien $\Delta > 1$

In der Parametrisierung  $\Delta = \operatorname{ch}(\eta)$  ist  $\eta$  reell zu wählen und für den Vergleich mit [33] o.B.d.A. als negativ anzusetzen. Alle Integrale sind entlang der verschobenen kanonischen Kontur  $\mathcal{C}$  auszuführen, die bei einer Höhe von  $\pi$  in imaginärer Richtung auf die maximal mögliche Breite von  $|\eta|$  durch den Limes  $\gamma \rightarrow |\eta|/2$  ausgedehnt wird (Abbildungen 3.1, 10.1). Der Limes ist erforderlich, damit die Polstellen der Integralkerne von (10.6) bzw. (10.7) bei einer fest auf der Integrationskontur vorgegebenen Variable  $\nu$  nicht auf der Kontur selbst zu liegen kommen, sondern stets außerhalb davon bleiben.

Aufgrund der Periodizität aller Integranden in  $i\pi$  tragen nur die beiden vertikalen Abschnitte von  $\mathcal{C}$  zu den Konturintegralen bei: Für eine rein imaginär gewählte Variable  $\nu$  beschreibt  $\varepsilon(\nu)$  die Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}(\nu - \eta/2)$  auf dem rechten Teilstück und  $\bar{\varepsilon}(\nu)$  entsprechend  $\bar{\mathfrak{a}}(\nu + \eta/2)$  auf dem linken ( $-\pi/2 \leq \operatorname{Im} \nu \leq \pi/2$ ). Über die Relation  $\bar{\mathfrak{a}} = 1/\mathfrak{a}$  sind  $\mathfrak{a}$  und  $\bar{\mathfrak{a}}$  auf allen relevanten Teilen der Kontur  $\mathcal{C}$  bestimmt und es gelten zusätzlich die Beziehungen  $\varepsilon(\nu + \eta) = -\bar{\varepsilon}(\nu)$  und  $\bar{\varepsilon}(\nu - \eta) = -\varepsilon(\nu)$ .

Für den Ausdruck  $T \ln(1 + e^{-\varepsilon(\omega)/T})$  ist im Grenzfalle  $T = 0$  nur entscheidend, ob der Realteil von  $\varepsilon$  positiv oder negativ ist mit

$$\lim_{T \rightarrow 0+0} T \ln(1 + e^{-\varepsilon(\omega)/T}) = \begin{cases} -\varepsilon(\omega) & , \quad \text{für alle } \omega \text{ mit } \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) < 0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} . \quad (10.8)$$

Ein Resultat der gleichen Form gilt für  $T \ln(1 + e^{-\bar{\varepsilon}(\omega)/T})$ . Unter den Annahmen, dass der Realteil der Funktion  $\varepsilon(\nu)$  bei  $\pm Q(h, c)$  zwei Nullstellen aufweist und zwischen

<sup>1</sup>Die Integralgleichungen (3.20) und (3.21) sind von Differenzenform und die Transformation der Argumente  $\lambda = \nu \mp \eta/2$  bewirkt eine Verschiebung der kanonischen Kontur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \pm \eta/2$ . In einem vorgegebenen Koordinatensystem mit komplexer Variable  $\nu$  ist der Ursprung  $\xi$  des Relativsystems von (3.20) und (3.21) in der Variablen  $\lambda$  dann mit  $\xi = \pm\eta/2$  festgelegt.

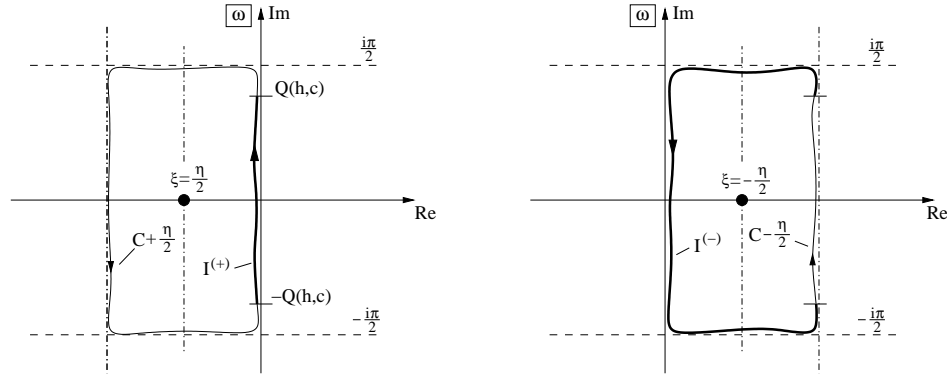


Abbildung 10.1: Die um  $\pm\eta/2$  verschobene Kontur  $\mathcal{C}$  verläuft entweder mit ihrem rechten oder linken vertikalen Teilstück auf der imaginären Achse (Die Kontur ist für eine bessere Unterscheidung versetzt neben der imaginären Achse gezeichnet). Die Stellen  $\pm Q(h, c)$  markieren die Positionen, an denen die Kontur in die komplementären Abschnitte  $\mathcal{I}^{(+)}$  und  $\mathcal{I}^{(-)}$  aufgeteilt wird. Es gilt  $\eta < 0$ .

diesen negative Werte annimmt, reduzieren sich die Integralgleichungen (10.6) und (10.7) im Grenzfall  $T = 0$  auf

$$\varepsilon(\nu) = h + \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{\operatorname{sh}(\nu + \eta/2) \operatorname{sh}(\nu - \eta/2)} - \int_{\mathcal{I}^{(+)}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \varepsilon(\omega)}{\operatorname{sh}(\nu - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\nu - \omega - \eta)} \quad , \quad (10.9)$$

$$\bar{\varepsilon}(\nu) = -h + \frac{2c \operatorname{sh}^2(\eta)}{\operatorname{sh}(\nu + \eta/2) \operatorname{sh}(\nu - \eta/2)} + \int_{\mathcal{I}^{(-)}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \bar{\varepsilon}(\omega)}{\operatorname{sh}(\nu - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\nu - \omega - \eta)} \quad . \quad (10.10)$$

Die Lage der Konturen  $\mathcal{I}^{(+)}$  und  $\mathcal{I}^{(-)}$  zeigt Abbildung 10.1; die Kopplung  $c$  sowie das äußere Feld  $h$  sind als positiv vorausgesetzt. Während  $\bar{\varepsilon}(\nu)$  entsprechend (10.10) einen nichtverschwindenden Imaginärteil aufweist, ist  $\varepsilon(\nu)$  nach (10.9) auf  $[-i\pi/2, i\pi/2]$  sogar rein reell mit  $\varepsilon(\pm Q(h, c)) = 0$ .

Dass die beiden obigen Annahmen zutreffen, ist leicht einzusehen. Für genügend starke Magnetfelder  $h > 0$  ist  $\varepsilon(\nu)$  für alle  $\nu \in [-i\pi/2, i\pi/2]$  positiv und die Teilkontur  $\mathcal{I}^{(+)}$  reduziert sich auf einen Punkt<sup>2</sup> (Nullmenge). Der Realteil der Funktion  $\bar{\varepsilon}(\omega)$  dagegen nimmt für  $\omega \in \mathcal{C} - \eta/2$  durchgängig negative Werte an. Erst nach Unterschreiten eines kritischen Feldes  $h_k$  mit  $Q(h_k, c) = 0$  entsteht zwischen  $\pm Q(0 < h < h_k, c)$  ein Bereich mit  $\varepsilon|_{\mathcal{I}^{(+)}} < 0$ .

<sup>2</sup>Ein physikalisches Bild kann mit der Magnetisierung (5.8) verbunden werden. Diese ist bei einem Vorgriff auf den Grenzfall  $T = 0$  in den Integraldarstellungen (Gleichung (10.11)) durch den Ausdruck

$$m(h, T = 0) = \frac{1}{2} + \int_{\mathcal{I}^{(+)}} \frac{d\omega}{2\pi i} G(\omega - \eta/2, 0)$$

gegeben und reduziert sich bei einem Intervall  $\mathcal{I}^{(+)}$  vom Maße Null auf den Wert  $1/2$ . Alle Spins sind dann entlang des Magnetfeldes ausgerichtet.

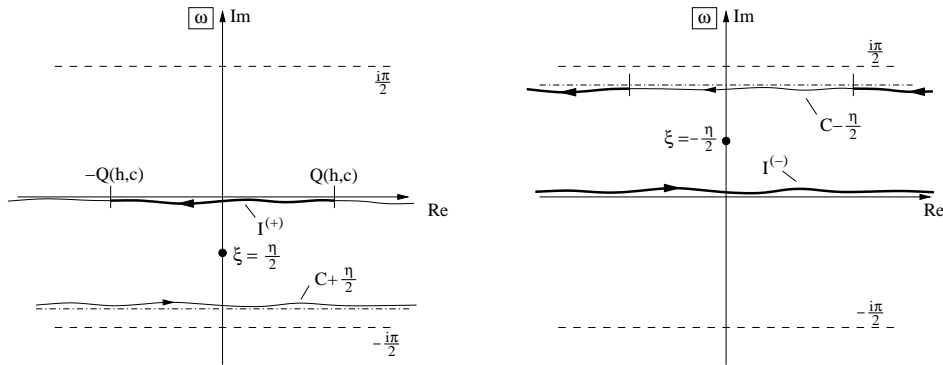


Abbildung 10.2: Die um  $\pm\eta/2$  verschobene Kontur  $\mathcal{C}$  fällt entweder mit ihrem oberen oder unteren Teilstück mit der reellen Achse zusammen. Die Stellen  $\pm Q(h, c)$  markieren die Positionen, an denen die Kontur in die komplementären Abschnitte  $\mathcal{I}^{(+)}$  und  $\mathcal{I}^{(-)}$  aufgeteilt wird. Es gilt  $-\pi/2 \leq \text{Im } \eta < 0$ .

Im Falle negativer Magnetfelder  $h < 0$  verlagern sich die Nullstellen  $\bar{\varepsilon}(\pm Q(h, c)) = 0$  auf den linken Abschnitt der Kontur, der durch die dann dort rein reellwertige Funktion  $\bar{\varepsilon}(\nu)$  beschrieben wird. Die Kontur  $\mathcal{I}^{(-)}$  reduziert sich auf das einfache Intervall  $[+Q(h, c), -Q(h, c)]$  und  $\mathcal{I}^{(+)}$  auf das entsprechende Komplement.

### Anisotropien $0 \leq \Delta < 1$

Abgesehen von der Tatsache, dass  $\eta$  jetzt rein imaginär ist, und die Kontur entsprechend Abbildung 10.2 verschoben wird, ist der Grenzfall  $T = 0$  auf die gleiche Weise wie für  $\Delta > 1$  zu behandeln. Der Vergleich mit [33] ist über  $\text{Im } \eta < 0$  durchzuführen, unter der vorläufigen Einschränkung auf das Intervall  $-\pi/2 \leq \text{Im } \eta < 0$ .

Im Limes  $T \rightarrow 0$  folgen die beiden Integralgleichungen (10.9) und (10.10) und es ist  $\varepsilon|_{\mathcal{I}^{(+)}} < 0$ . Die Abbildung 10.2 zeigt den Verlauf der Konturen  $\mathcal{I}^{(+)}$  und  $\mathcal{I}^{(-)}$  bei positiven Magnetfeldern und Kopplungen.

Bei der Behandlung von negativen Magnetfeldern  $h$  verschieben sich die Nullstellen  $\bar{\varepsilon}(\pm Q(h, c)) = 0$  auf den unteren Teil der Kontur mit entsprechend modifizierten Abschnitten  $\mathcal{I}^{(+)}$  und  $\mathcal{I}^{(-)}$ .

Das noch zu beschreibende Intervall  $-\pi \leq \text{Im } \eta \leq -\pi/2$  führt auf Teilkonturen, die nicht mit der reellen Achse zusammenfallen (Abbildung 10.3 links). Ein direkter Vergleich mit [33, 35] ist daher erst möglich, wenn die Konturen asymmetrisch gewählt werden entsprechend Abbildung 10.3 (rechts). Die Asymmetrie ist zulässig, solange die zusätzlichen Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen weiterhin außerhalb  $\mathcal{C}$  liegen.

**Bemerkung.** Der zu beschreibende Wertebereich  $-1 < \Delta \leq 0$  ist alternativ nach den Symmetrierelationen aus Abschnitt 4.4 durch die gleichzeitigen Transformationen  $c \rightarrow -c$ ,  $h \rightarrow -h$ ,  $\mathbf{a} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}$  und  $\bar{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbf{a}$  von dem Intervall  $0 \leq \Delta < 1$  aus erreichbar.

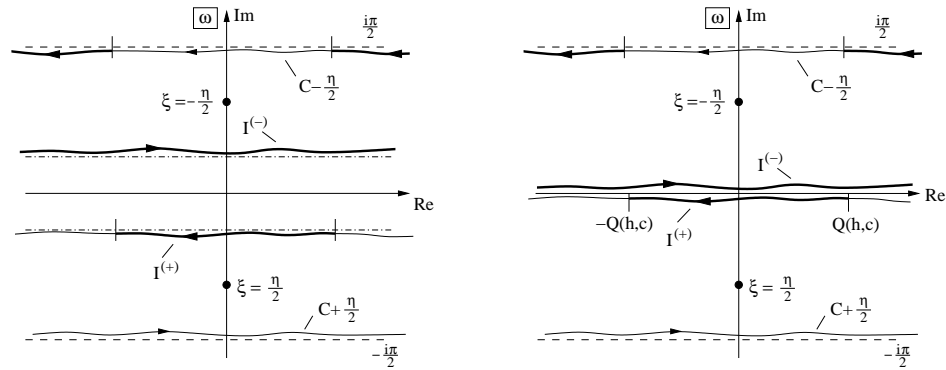


Abbildung 10.3: Die symmetrische Wahl der Kontur  $\mathcal{C}$  mit der reduzierten Höhe  $\pi - |\eta|$  im Falle  $-1 < \Delta \leq 0$  führt zu Teilabschnitten, die bei Verschiebung um  $\pm\eta/2$  nicht mit der reellen Achse zusammenfallen (links). Die asymmetrisch gewählte Kontur  $\mathcal{C}$  (rechts) behebt diese Schwierigkeit. Der Punkt  $\bullet$  kennzeichnet den Koordinatenursprung des zugeordneten Relativsystems. Es gilt  $-\pi < \text{Im } \eta \leq -\pi/2$ .

### Verallgemeinerte Fermi-Funktion

Die als Anregungsenergien interpretierbaren Funktionen  $\varepsilon(\nu)$  und  $\bar{\varepsilon}(\nu)$  bilden die Vorstufe für die verallgemeinerte Fermi-Funktion  $1/(1 + \bar{\mathbf{a}})$

$$\frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\nu - \eta/2)} = \frac{\mathbf{a}(\nu - \eta/2)}{1 + \mathbf{a}(\nu - \eta/2)} = \frac{1}{1 + e^{\varepsilon(\nu)/T}} \rightarrow \begin{cases} 1 & , \quad \nu \in \mathcal{I}^{(+)} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (10.11)$$

auf der verschobenen Kontur  $\mathcal{C}$ . Die Funktion  $\varepsilon(\nu)$  stimmt durch die Identifizierung der Intervalle  $I = -\mathcal{I}^{(+)}$  mit [35] überein. Alle Intervalle und Teilstücke enthalten Integrationsrichtungen, die durch Vergabe von Vorzeichen umgekehrt werden können.

Die verallgemeinerte Fermi-Funktion  $1/(1 + \mathbf{a})$  ergänzt den allgemeinen Zusammenhang  $1/(1 + \bar{\mathbf{a}}) + 1/(1 + \mathbf{a}) = 1$  um die Relation

$$\frac{1}{1 + \mathbf{a}(\nu - \eta/2)} = \frac{\bar{\mathbf{a}}(\nu + \eta/2)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\nu + \eta/2)} = \frac{1}{1 + e^{\bar{\varepsilon}(\nu)/T}} \rightarrow \begin{cases} 0 & , \quad \text{sonst} \\ 1 & , \quad \nu \in \mathcal{I}^{(-)} \end{cases} \quad (10.12)$$

Das Teilstück  $\mathcal{I}^{(+)}$  ist, im Gegensatz zu  $\mathcal{I}^{(-)}$ , für  $h, c > 0$  ein zusammenhängendes Intervall auf der reellen oder imaginären Achse. Der Vergleich mit den Ergebnissen [33] ist daher mit den Integraldarstellungen möglich, die den Term  $1/(1 + \bar{\mathbf{a}})$  enthalten.

## 10.2 Die verallgemeinerte Dichte

Die lineare Integralgleichung (4.60) für die Bestimmung der verallgemeinerten Dichte in der Darstellung mit  $\bar{\mathbf{a}}$ ,

$$G(\lambda - \xi, \zeta - \xi) = -t(\lambda, \zeta) - \int_{C+\xi} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G(\omega - \xi, \zeta - \xi)}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega - \xi)} \quad ,$$

ist für den Koordinatenursprung  $\xi = \eta/2$  im Limes  $T \rightarrow 0$  zu untersuchen. Die Anwendung von (10.11) ergibt

$$G(\lambda - \xi, \zeta - \eta/2) = -t(\lambda, \zeta) - \int_{\mathcal{I}^{(+)}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta) G(\omega - \eta/2, \zeta - \eta/2)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} . \quad (10.13)$$

Die Definition  $G(\lambda - \xi, \zeta - \eta/2) = 2\pi i \rho(\lambda, \zeta)$  sowie die Identifizierung der Intervalle  $I = -\mathcal{I}^{(+)}$  reproduzieren die Bestimmungsgleichung (10.1).

### 10.3 Die erzeugende Funktion

Die Darstellung (4.61) der erzeugenden Funktion mit  $\bar{\mathbf{a}}$  lautet in einem um  $\xi$  verschobenen Koordinatensystem der Integrationsvariablen

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{T,h} &= \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}+\xi} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j - \xi)} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi)}{\text{sh}(\omega_j - \xi + \eta)} \right)^m \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\Gamma+\xi} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j - \xi + \eta)}{\text{sh}(z_j - \xi)} \right)^m \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k + \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta)} \right] \\ &\quad \det_n M(\omega_j, z_k) \det_n G(\omega_j - \xi, z_k - \xi) . \end{aligned} \quad (10.14)$$

Diese Darstellung reduziert sich mit der Relation (4.44) zwischen den Determinanten  $\det_n M$  und  $\det_n \widetilde{M}$  im Limes  $T \rightarrow 0$  für  $\xi = \eta/2$  auf

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{0,h} &= \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{I}^{(+)}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(\omega_j - \eta/2)}{\text{sh}(\omega_j + \eta/2)} \right)^m \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\Gamma+\eta/2} \frac{dz_j}{2\pi i} \left( \frac{\text{sh}(z_j + \eta/2)}{\text{sh}(z_j - \eta/2)} \right)^m \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - z_k + \eta)}{\text{sh}(z_j - z_k + \eta)} \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(z_k - \omega_j + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k + \eta)} \right] \det_n \widetilde{M}(\omega_j, z_k) \det_n \rho(\omega_j, z_k) . \end{aligned}$$

Das entspricht genau (10.3)-(10.5), wenn mit dem Vorzeichen  $(-1)^n$  die Integrationsrichtung in allen  $n$  Intervallen  $\mathcal{I}^{(+)}$  umgekehrt und  $\Gamma + \eta/2$  mit  $\gamma$  identifiziert wird.

**Bemerkung.** In allen drei Abbildungen 10.1-10.3 sind die Koordinatenursprünge der Relativsysteme durch einen Punkt  $\bullet$  markiert, und die Konturen versetzt zu den Achsen und Strukturen gezeichnet, mit denen sie zusammenfallen.

# Kapitel 11

## Zusammenfassung

Die anisotrope Heisenberg-Kette als integrables System kann auf der Grundlage des verallgemeinerten Modells [43] mit der  $R$ -Matrix der  $XXZ$ -Kette behandelt werden. Das Modell enthält zwei frei wählbare Funktionen  $a(\lambda)$  und  $d(\lambda)$  als so genannte Parameter und das Eigenwertproblem der zugeordneten Transfermatrix  $t(\lambda)$  wird mit dem algebraischen Bethe-Ansatz gelöst. Eine Bestandsaufnahme hierzu bilden die Gleichungen (3.3) - (3.5). Für die Wahl der beiden Parameter sind bislang zwei Möglichkeiten bekannt, die einen Bezug zu der  $XXZ$ -Kette herstellen. Im ersten Fall ergibt sich als Darstellung die gewöhnliche Transfermatrix, deren Eigenwerte das Energiespektrum bestimmen und deren Eigenvektoren gleichzeitig die Eigenzustände der Kette bilden. Im zweiten Fall folgt als Darstellung die QTM: Der führende Eigenwert liefert im thermodynamischen Limes die Zustandssumme, während der entsprechende Eigenvektor alle Informationen über die statischen Korrelationen enthält. Die Bedeutung des führenden Eigenvektors für die Korrelationen wurde hier mit (2.34) erstmals erkannt und ausgenutzt.

Die vorliegende Arbeit hatte das Ziel, auf der  $XXZ$ -Kette die statischen Korrelationen nach (2.34) bei endlichen Temperaturen  $T$  und endlichen Magnetfeldern  $h$  zu berechnen. Die Darstellung erfolgte exemplarisch am Beispiel (2.40) einer einparametrischen erzeugenden Funktion [24] der  $zz$ -Korrelation, für die N. Kitanine et al. [33] im Grundzustand ( $T = 0$ ) eine Vielfachintegraldarstellung auf der Basis der Yang-Baxter-Algebra bestimmen konnten. Das Beispiel wurde in dieser Arbeit mit Bedacht gewählt, da die erzeugende Funktion im algebraischen Bethe-Ansatz einfacher zu behandeln ist als die  $zz$ -Korrelation direkt und im Gegensatz zu anderen einfach zu berechnenden Korrelationsfunktionen, wie z.B. der zusätzlich enthaltenen *Emptiness Formation Probability*, physikalisch interessant ist.

Die erzeugende Funktion (2.40) konnte nach dem Regularisieren in den Argumenten  $\xi_j$  und bei endlicher Trotter-Zahl  $N$  anhand von den Resultaten [33] aus dem algebraischen Bethe-Ansatz vereinfacht und mit der Slavnovschen Skalarproduktformel (4.2) in einer geschlossenen Form dargestellt werden. Zudem war es möglich, den geschlossenen Ausdruck mit der nichtlinearen Integralgleichung [39] einer Hilfsfunktion  $\alpha(\lambda)$  zu kombinieren, um damit den Trotter-Limes  $N \rightarrow \infty$  in die Integralgleichung der Hilfsfunktion (3.11) zu verlagern. Für diesen Zweck wurde von den analytischen Eigenschaften des Terms  $\alpha'/(1 + \alpha)$  Gebrauch gemacht, der bei den Bethe-Ansatz-

Zahlen der QTM einfache Polstellen mit dem Residuum Eins aufweist und durch Konturintegrale in die bestehenden Ausdrücke aufgenommen werden kann.

Das Vorgehen fand Anwendung bei einer Matrixinvertierung (Anhang A.1), die aus den Determinantendarstellungen der beteiligten Skalarprodukte folgte und im Ergebnis eine verallgemeinerte Dichtefunktion  $G(\lambda, \zeta)$  via Integralgleichung (4.21) definierte. Interessant war, dass sowohl  $G(\lambda, \zeta)$  als auch  $\mathfrak{a}(\lambda)$  über die gleiche kanonische Kontur  $\mathcal{C}$  in der komplexen Ebene definiert waren.

Das nochmalige Anwenden des Residuensatzes im Ausdruck für die erzeugende Funktion ergab schließlich ein Vielfachintegral (4.32), das mit einer nur die Bethe-Ansatz-Zahlen der QTM und nicht den Ursprung einschließenden Kontur  $\mathcal{C} - \Gamma$  gebildet wurde. Für die Durchführung des Trotter-Limes war aufgrund des Häufungspunktes der Bethe-Ansatz-Zahlen im Ursprung die Deformation von  $\mathcal{C} - \Gamma$  in die von der Trotter-Zahl unabhängige kanonische Kontur  $\mathcal{C}$  nötig. Die dabei zusätzlich zu berücksichtigenden Residuen der Integranden bei den Inhomogenitäten  $\xi_j$  konnten mit dem gefundenen kombinatorischen Lemma 6 zum Endergebnis (4.47) aufsummiert werden. (4.47) enthält die Trotter-Zahl nur noch indirekt über die Hilfsfunktion und ist somit für alle  $N$ , den Trotter-Limes mit (3.20) für  $\mathfrak{a}(\lambda)$  eingeschlossen, gültig. Eine formale Teilchen-Loch-Transformation  $\mathfrak{a}(\lambda) \rightarrow \bar{\mathfrak{a}}(\lambda)$  führte zu einer äquivalenten Integraldarstellung (3.21), (4.59), (4.60).

Bei der Vorgehensweise handelte es sich um einen konstruktiven Beweis für die in den Argumenten  $\xi_j$  regularisierte erzeugende Funktion, die zusätzlich die Magnetisierung und die *Emptiness Formation Probability* beschreibt. Der homogene Limes  $\xi_j \rightarrow \xi = 0$  schließlich führte die Resultate mit (4.49) und (4.61) auf die *XXZ-Kette* zurück.

Im Hochtemperaturlimes war es durch eine Entwicklung der Hilfsfunktion in Potenzen von  $1/T$  möglich, alle Konturintegrale für die erzeugende Funktion (6.28) bis zur einschließlich ersten Ordnung in  $1/T$  zu berechnen und durch Rekursionsbeziehungen den homogenen Limes zu bilden. Gleichzeitig waren damit die  $zz$ -Korrelation (6.33), die *Emptiness Formation Probability* (6.34) und die Ein-Punkt-Funktionen (6.35) bis zur gleichen Ordnung bestimmt. Durch Veröffentlichung der Artikel [18,19] aus dieser Arbeit konnten zudem Z. Tsuboi und M. Shiroishi [74] im isotropen Limes die Integraldarstellung der *Emptiness Formation Probability* für eine systematische Hochtemperaturentwicklung nutzen. So war es ihnen z.B. möglich, im feldfreien Fall  $P(3)$  bis zur Ordnung 42 in  $1/T$  anzugeben. Ebenfalls konnten M. Bortz und F. Göhmann [12] die Integraldarstellungen für numerische Berechnungen bei endlichen Temperaturen nutzbringend anwenden.

Die Auswertung der Integraldarstellungen ließ sich im Ising-Limes fortsetzen. Während die Hilfsfunktion auf die eindeutige Lösung (7.13) einer quadratischen Gleichung reduziert und die verallgemeinerte Dichte mit (7.16) angegeben werden konnte, wurde die Integraldarstellung der *Emptiness Formation Probability* mit dem Residuensatz berechnet. Interessant war in diesem Zusammenhang, dass das Resultat (7.25) von den Inhomogenitäten  $\xi_j$  unabhängig war. Mit der *Emptiness Formation Probability*  $P^\pm(2)$  folgte zudem die  $zz$ -Korrelation nächster Nachbarn. Die allgemeine Zwei-Punkt-Funktion für beliebige Abstände aus der erzeugenden Funktion zu ermitteln,



steht noch aus.

Abweichend von dem bisherigen Schema wurden im  $XX$ -Limes die Konturintegrale nicht berechnet, sondern einer Variablentransformation (8.6) unterzogen. Die Determinantendarstellung (8.16) der *Emptiness Formation Probability* in den neuen Impulsvariablen reproduzierte das Ergebnis aus [52], während auf die erzeugende Funktion, wie bereits bei N. Kitanine et al. [31] für den Grundzustand, der Differenzial-Differenzen-Operator (2.38) angewandt werden konnte. Die Integrale separierten daraufhin und die daraus folgende Zwei-Punkt-Funktion (8.28) verallgemeinert damit die Darstellung [31] auf endliche Temperaturen. Die Hilfsfunktion (8.4) und verallgemeinerte Dichte (8.5) waren durch die wegfallenden Integralkerne trivial durch die Inhomogenitäten der Integralgleichungen gegeben. Die Ergebnisse aus dem  $XX$ - und Ising-Limes bildeten zusammen eine weitere Veröffentlichung [21] aus dieser Arbeit.

Am isotropen Limes, der aus einer Umskalierung der Variablen folgte, konnte am Beispiel der *Emptiness Formation Probability* für zwei Gitterplätze die Reduktion der Vielfachintegrale von zwei auf eins gezeigt werden. Dies wirft die Frage auf, ob es allgemein möglich ist, die Zahl der Konturintegrale in den Vielfachintegraldarstellungen zu reduzieren. Weiterhin wurde in allen bis zu diesem Punkt betrachteten Limes die Freie Energie zusätzlich angegeben.

Den Abschluss der Arbeit bildete der Grenzfall  $T = 0$ , der auf die Integraldarstellung der erzeugenden Funktion im Grundzustand [33] (den Ausgangspunkt der Verallgemeinerung auf endliche Temperaturen) führte. Das Vorgehen ist natürlich auch auf andere Korrelationsfunktionen, wie etwa  $\langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle_{T,h}$ , anwendbar und konnte allgemein auf die Bestimmung von Dichtematrixelementen [17, 20, 22] erweitert werden. Diese bilden als thermische Erwartungswerte von Tensorprodukten der  $gl(2)$ -Standardbasis die Grundlage aller Korrelationsfunktionen. So lässt sich etwa durch Aufsummation von Dichtematrixelementen die erzeugende Funktion im  $XX$ -Limes als

$$\left\langle \prod_{j=1}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\varphi \end{pmatrix}_j \right\rangle_{T,h} = \det_m \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{(j-k)p} + e^\varphi e^{(k-j)p}}{1 + \exp\left(-\frac{4c \sin p}{T}\right)} \right]_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,m}} \quad (11.1)$$

darstellen, vorausgesetzt, es liegt kein äußeres Feld  $h$  an. (11.1) bildet damit die Verallgemeinerung der entsprechenden Formeln im  $XX$ -Limes [34].

Eine weiterführende Problemstellung ist, ob die Dichtematrixelemente in den Inhomogenitäten Funktionalgleichungen wie bei  $T = 0$  erfüllen [8, 9] und ob die Fusionshierarchie damit zusammenhängt. Eventuell kann aus den Integraldarstellungen die Asymptotik bei  $T > 0$  direkt berechnet werden, wie dies z.B. für  $T = 0$  bei der *Emptiness Formation Probability* möglich war [32, 46].



## Anhang A

# Die erzeugende Funktion im Detail

### A.1 Matrizeninvertierung und Integralgleichungen

Die Umformung des Ausdruckes  $\det N_n / \det N_0 = \det(N_0^{-1} N_n) =: \det J$  führt auf die Bestimmungsgleichung  $N_n^a{}_c = \sum_b N_0^a{}_b J^b{}_c$  einer Matrix  $J = (J^a{}_b)$ ,

- (i) deren nichttriviale Einträge in den Spalten  $b = 1, \dots, n$  enthalten sind, und
- (ii) die sich für  $b = n + 1, \dots, N/2$  wie  $J^a{}_b = \delta_b^a$  verhält.

Die Zeilen  $a$  und Spalten  $b$  der gesuchten Matrix werden für die nichttrivialen Einträge  $J^a{}_b = J(\tilde{\lambda}_a - \xi, \tilde{\xi}_b - \xi)$  durch Funktionsargumente referenziert und  $\det J$  ist effektiv eine  $n \times n$  Determinante. Aufgrund der zusätzlich bestehenden Differenzenform  $t(\lambda, \mu) = t(\lambda - \xi, \mu - \xi)$  in den Einträgen von  $N_n$  lautet die explizite Formulierung der Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \mathbf{a}}{\partial \lambda}(\tilde{\lambda}_a) J(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\xi}_c) + \sum_{b=1}^{N/2} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\tilde{\lambda}_a - \tilde{\lambda}_b + \eta) \text{sh}(\tilde{\lambda}_a - \tilde{\lambda}_b - \eta)} J(\tilde{\lambda}_b, \tilde{\xi}_c) \\ = t(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\xi}_c) - \mathbf{a}(\tilde{\xi}_c) t(\tilde{\xi}_c, \tilde{\lambda}_a) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

in einem Koordinatensystem bezüglich  $\xi$  als neuem Ursprung, in das formal mit  $\xi = 0$  transformiert wird. Für die Bestimmung der Matrix  $J$  aus (A.1) werden die freien Argumente  $\tilde{\lambda}_a$  und  $\tilde{\xi}_c$  als Variablen betrachtet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \mathbf{a}}{\partial \lambda}(\nu) J(\nu, \zeta) + \sum_{l=1}^{N/2} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\nu - \lambda_l + \eta) \text{sh}(\nu - \lambda_l - \eta)} J(\lambda_l, \zeta) \\ = t(\nu, \zeta) - \mathbf{a}(\zeta) t(\zeta, \nu) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

und die verbleibende Summation wird über die unsortierten Rapiditäten  $\{\lambda_l\}_{l=1}^{N/2}$  ausgeführt. Die analytischen Eigenschaften der letzten Gleichung fasst die Hilfsfunktion

$$F(\nu, \zeta) := t(\nu, \zeta) - \mathbf{a}(\zeta) t(\zeta, \nu) - \sum_{l=1}^{N/2} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\nu - \lambda_l + \eta) \text{sh}(\nu - \lambda_l - \eta)} J(\lambda_l, \zeta) \quad (\text{A.3})$$

zusammen, die innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  nur einen einfachen Pol bei  $\nu = \zeta$  mit dem Residuum  $\text{Res}_{\nu=\zeta} F(\nu, \zeta) = 1 + \mathfrak{a}(\zeta)$  aufweist und über

$$F(\nu, \zeta) = \frac{\partial \ln \mathfrak{a}}{\partial \lambda}(\nu) J(\nu, \zeta) \quad , \quad \frac{F(\lambda_l, \zeta)}{\mathfrak{a}'(\lambda_l)} = \frac{J(\lambda_l, \zeta)}{\mathfrak{a}(\lambda_l)} = -J(\lambda_l, \zeta) \quad (\text{A.4})$$

zu dem gesuchten Ausdruck  $J(\nu, \zeta)$  in Beziehung steht. Das Ziel, den Summenterm über alle Rapiditäten in (A.1)–(A.3) als Konturintegral zu formulieren, beruht auf den analytischen Eigenschaften der Funktion  $1 + \mathfrak{a}(\lambda)$ . Sie weist im Analytizitätsstreifen  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \text{Im } z \leq \pi/2\}$ , Vielfachheiten eingeschlossen,

- (i)  $3N/2$  Nullstellen auf,
  - (a)  $N/2$  einfache Nullstellen bei den Rapiditäten  $\lambda_l$ ,  $l = 1, \dots, N/2$  sowie
  - (b)  $N$  zusätzliche Nullstellen  $\rho_k$  außerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,
- (ii) und sie teilt die  $3N/2$  Polstellen der Hilfsfunktion  $\mathfrak{a}(\lambda)$ 
  - (a) zwei  $N/2$ -fache Polstellen bei  $\lambda = -\beta/N$  und  $\lambda = \beta/N - \eta$  sowie
  - (b)  $N/2$  einfache Pole bei  $\lambda_l + \eta$ ,  $l = 1, \dots, N/2$ .

Die Auswertung<sup>1</sup> des Konturintegrals

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\nu - \omega + \eta) \text{sh}(\nu - \omega - \eta)} \frac{F(\omega, \zeta)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} = F(\nu, \zeta) + t(\zeta, \nu) (1 + \mathfrak{a}(\zeta)) \quad (\text{A.5})$$

mit (A.3) und (A.4) bestimmt die Hilfsfunktion  $F(\nu, \zeta)$  alternativ über die lineare Integralgleichung (A.5) und ergibt mit der Definition

$$G(\nu, \zeta) := -\frac{F(\nu, \zeta)}{1 + \mathfrak{a}(\zeta)} = -\frac{J(\nu, \zeta) \mathfrak{a}'(\nu)}{\mathfrak{a}(\nu)(1 + \mathfrak{a}(\zeta))} \quad (\text{A.6})$$

die lineare Integralgleichung

$$G(\lambda, \zeta) = t(\zeta, \lambda) + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G(\omega, \zeta)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} \quad (\text{A.7})$$

für die verallgemeinerte Dichtefunktion. Die Rücktransformation in das ursprüngliche Koordinatensystem liefert für das Verhältnis der Determinanten  $\det N_n$  und  $\det N_0$  mit  $\mathfrak{a}(\lambda_j - \xi) = -1$

$$\det J = \frac{\det N_n}{\det N_0} = \left[ \prod_{j=1}^n \frac{1 + \mathfrak{a}(\xi_j^+ - \xi)}{\mathfrak{a}'(\lambda_j^+ - \xi)} \right] \det_n G(\lambda_j^+ - \xi, \xi_k^+ - \xi) \quad . \quad (\text{A.8})$$

<sup>1</sup>Es gilt für den symmetrischen Kern in den Integralgleichungen und für die in (4.4) definierte Funktion  $t(\lambda, \mu)$  die Identität

$$\frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta) \text{sh}(\lambda - \mu - \eta)} = t(\lambda, \mu) + t(\mu, \lambda) \quad .$$

## A.2 Das Austauschen von Partitionen

Der nachfolgende Abschnitt ist weniger als eine durchgehende Rechnung sondern vielmehr als eine Sammlung von Relationen und Identitäten aufzufassen.

- (i) Bestehende Determinantendarstellungen lassen sich entweder explizit ausschreiben, im Sinne einer Vandermonde- oder Cauchy-Determinante,

$$V(\lambda, \xi) = \frac{1}{\text{sh}(\xi - \lambda)} \quad (\text{A.9})$$

$$\det_n V(\lambda_j^+, \xi_k^+) = \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq n} \text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_k^+) \text{sh}(\xi_k^+ - \xi_j^+)}{\prod_{j,k=1}^n \text{sh}(\xi_k^+ - \lambda_j^+)} \quad , \quad (\text{A.10})$$

oder durch Ausklammern von Faktoren, die entweder nur Zeilen oder nur Spalten betreffen, in neue Determinantenausdrücke überführen,

$$\begin{aligned} \widehat{M}(\lambda_j^+, \xi_k^+) &= a(\lambda_j^+) t(\xi_k^+, \lambda_j^+) \left[ \prod_{l=1}^{|\xi^+|} f(\xi_l^+, \lambda_j^+) \right] \left[ \prod_{m=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_m^-, \lambda_j^+) \right] \\ &\quad - e^\varphi d(\lambda_j^+) t(\lambda_j^+, \xi_k^+) \left[ \prod_{l=1}^{|\xi^+|} f(\lambda_j^+, \xi_l^+) \right] \left[ \prod_{m=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_j^+, \lambda_m^-) \right] \quad , \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det_n \widehat{M}(\lambda_j^+, \xi_k^+) &= \left[ \prod_{j=1}^{|\lambda^+|} a(\lambda_j^+) \right] \left[ \prod_{j=1}^{|\lambda^+|} \prod_{l=1}^{|\xi^+|} f(\xi_l^+, \lambda_j^+) \right] \\ &\quad \left[ \prod_{j=1}^{|\lambda^+|} \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_l^-, \lambda_j^+) \right] \det_n \widetilde{M}(\lambda_j^+, \xi_k^-) \quad . \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

- (ii) Aufgrund der Bethe-Ansatz-Gleichungen  $-1 = \mathbf{a}(\lambda_j - \xi) = \frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} \prod_{l=1}^{N/2} \frac{f(\lambda_j, \lambda_l)}{f(\lambda_l, \lambda_j)}$  und der Definition der Hilfsfunktion  $\mathbf{a}(\lambda - \xi)$  können vorliegende Partitionen  $\{\lambda^-\}$  durch ihr Komplement  $\{\lambda^+\}$  ersetzt werden, wie etwa in der Determinantendarstellung

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(\lambda_j^+, \xi_k^+) &= t(\xi_k^+, \lambda_j^+) - e^\varphi t(\lambda_j^+, \xi_k^+) \frac{d(\lambda_j^+)}{a(\lambda_j^+)} \left[ \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} \frac{f(\lambda_j^+, \lambda_l^-)}{f(\lambda_l^-, \lambda_j^+)} \right] \left[ \prod_{k=1}^{|\xi^+|} \frac{f(\lambda_j^+, \xi_k^+)}{f(\xi_k^+, \lambda_j^+)} \right] \\ &= t(\xi_k^+, \lambda_j^+) + e^\varphi t(\lambda_j^+, \xi_k^+) \left[ \prod_{l=1}^{|\lambda^+|} \frac{f(\lambda_l^+, \lambda_j^+)}{f(\lambda_j^+, \lambda_l^+)} \right] \left[ \prod_{k=1}^{|\xi^+|} \frac{f(\lambda_j^+, \xi_k^+)}{f(\xi_k^+, \lambda_j^+)} \right] \\ &= t(\xi_k^+, \lambda_j^+) + e^\varphi t(\lambda_j^+, \xi_k^+) \left[ \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_l^+ - \eta) \text{sh}(\lambda_j^+ - \xi_l^+ + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j^+ - \lambda_l^+ + \eta) \text{sh}(\lambda_j^+ - \xi_l^+ - \eta)} \right] \quad , \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

oder in dem Faktor

$$\prod_{j=1}^{|\xi^-|} \left\{ a(\xi_j^-) \left[ \prod_{k=1}^{|\xi^+|} f(\xi_k^+, \xi_j^-) \right] \left[ \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_l^-, \xi_j^-) \right] \right. \\ \left. + e^\varphi d(\xi_j^-) \left[ \prod_{k=1}^{|\xi^+|} f(\xi_j^-, \xi_k^+) \right] \left[ \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} f(\xi_j^-, \lambda_l^-) \right] \right\} \quad (\text{A.14})$$

$$= \left[ \prod_{j=1}^{|\xi^-|} a(\xi_j^-) \right] \left[ \prod_{j=1}^{|\xi^-|} \prod_{k=1}^{|\xi^+|} f(\xi_k^+, \xi_j^-) \right] \left[ \prod_{j=1}^{|\xi^-|} \prod_{l=1}^{|\lambda^-|} f(\lambda_l^-, \xi_j^-) \right] \\ \prod_{j=1}^{|\xi^-|} \left\{ 1 + e^\varphi \mathbf{a}(\xi_j^- - \xi) \left[ \prod_{k=1}^n \frac{f(\xi_j^-, \xi_k^+) f(\lambda_l^+, \xi_j^-)}{f(\xi_k^+, \xi_j^-) f(\xi_j^-, \lambda_l^+)} \right] \right\} \quad (\text{A.15})$$

(iii) Weiterhin können Terme  $f(\lambda, \mu) = \frac{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu)}$ , die alle Inhomogenitäten  $\{\xi_j\}_{j=1}^m$  umfassen, in der Funktion

$$\bar{\mathbf{b}}(\lambda) = \left[ \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(\lambda - \xi_k)}{\text{sh}(\lambda - \xi_k + \eta)} \right] \quad , \quad \frac{1}{\bar{\mathbf{b}}'(\xi_j)} = \frac{\prod_{k=1}^m \text{sh}(\xi_j - \xi_k + \eta)}{\prod_{k=1, k \neq j}^m \text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \quad , \quad (\text{A.16})$$

zusammengezogen werden, ' bedeutet die Ableitung nach dem Argument.

Die Anwendung der Punkte (i) - (iii) führt auf den angegebenen Ausdruck der approximierten erzeugenden Funktion, in dem alle Partitionen  $\{\lambda^-\}$  zugunsten von  $\{\lambda^+\}$  beseitigt sind.

### A.3 Kombinatorik mit Partitionen

**Lemma.** Seien  $p$  und  $q$  zwei beliebige auf der Indexmenge  $I_k = \{1, \dots, k\}$  definierte Funktionen, und sei  $p_2(I_k)$  die Menge aller geordneten Paare  $(\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\})$  von Partitionen  $\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\} \in I_k$ . Dann gilt für  $x \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{\substack{(\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\}) \in p_2(I_k) \\ |\alpha^-| = j}} \left[ \prod_{b \in \{\alpha^+\}} (1 + x p(b) q(b)) \right] \left[ \prod_{b \in \{\alpha^-\}} (1 - x q(b)) \right] \\ = x^k \left[ \prod_{b \in I_k} (1 + p(b)) q(b) \right] \quad . \quad (\text{A.17})$$

*Beweis.* Induktion nach  $k$

Start  $k = 1$ :  $1 + x p(1) q(1) - (1 - x q(1)) = x(1 + p(1)) q(1)$

Schritt  $k \rightarrow k + 1$ ,

$\{k + 1\}$  kommt als Element hinzu mit den neuen Partitionen  $\{\beta^+\}$  und  $\{\beta^-\}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sum_{|\beta^-|=j} \left[ \prod_{b \in \{\beta^+\}} (1 + x p(b)q(b)) \right] \left[ \prod_{b \in \{\beta^-\}} (1 - x q(b)) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \left( \sum_{\substack{|\beta^-|=j \\ \{k+1\} \notin \{\beta^-\}}} + \sum_{\substack{|\beta^-|=j \\ \{k+1\} \in \{\beta^-\}}} \right) \left[ \prod_{b \in \{\beta^+\}} (1 + x p(b)q(b)) \right] \left[ \prod_{b \in \{\beta^-\}} (1 - x q(b)) \right] \\
&= \left[ 1 + x p(k+1)q(k+1) \right] \\
&\quad \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{|\alpha^-|=j} \left[ \prod_{b \in \{\alpha^+\}} (1 + x p(b)q(b)) \right] \left[ \prod_{b \in \{\alpha^-\}} (1 - x q(b)) \right] \\
&\quad + \left[ 1 - x q(k+1) \right] \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \sum_{|\alpha^-|=j-1} \left[ \prod_{b \in \{\alpha^+\}} (1 + x p(b)q(b)) \right] \left[ \prod_{b \in \{\alpha^-\}} (1 - x q(b)) \right] \\
&= x^k \left[ 1 + x p(k+1)F(k+1) \right] \left[ \prod_{l=1}^k (1 + p(l))q(l) \right] \\
&\quad - \left[ 1 - x q(k+1) \right] \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{|\alpha^-|=j} \left[ \prod_{b \in \{\alpha^+\}} (1 + x p(b)q(b)) \right] \left[ \prod_{b \in \{\alpha^-\}} (1 - x q(b)) \right] \\
&= x^k \left[ 1 + x p(k+1)q(k+1) \right] \left[ \prod_{l=1}^k (1 + p(l))q(l) \right] \\
&\quad - x^k \left[ 1 - x q(k+1) \right] \left[ \prod_{l=1}^k (1 + p(l))q(l) \right] \\
&= x^{k+1} \left[ \prod_{l=1}^{k+1} (1 + p(l))q(l) \right] \qquad \text{Schluss}
\end{aligned}$$

□

## A.4 Determinanten und Permutationen

Die sh-Terme in dem Term  $Z_n(\{\lambda^+|\{\xi^+|\{\xi^-\})$  lassen sich bei einer fest vorgegebenen Partition  $\{\xi_l^+\}_{l=1}^n$  von Inhomogenitäten in der Funktion

$$F_n(\lambda) = F_n(\lambda|\{\omega_l\}_{l=1}^n|\{\xi_l^+\}_{l=1}^n) = \left[ \prod_{k=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda - \xi_k^+ + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \xi_k^+ - \eta)} \frac{\text{sh}(\lambda - \omega_k - \eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega_k + \eta)} \right] \quad , \quad (\text{A.18a})$$

$$F_n(\lambda|\{\omega_l\}_{l=1}^n|\{\xi_l^+\}_{l=1}^n) \Big|_{\omega_j = \xi_k^+} = F_{n-1}(\lambda|\{\omega_l\}_{l=1}^n \setminus \{\omega_j\}|\{\xi_l^+\}_{l=1}^n \setminus \{\xi_k^+\}) \quad , \quad (\text{A.18b})$$

zusammengefasst, die dann mit ihren Eigenschaften auch in einer der Determinanten,  $\det_n \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+)$ , über die Einträge

$$\widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+) = t(\xi_k^+, z_j) + e^\varphi t(\omega_j, \xi_k^+) F_n(\omega_j | \{\omega_l\}_{l=1}^n | \{\xi_l^+\}_{l=1}^n) \quad (\text{A.19})$$

enthalten ist. Der Term  $\overline{\mathfrak{b}}(\omega_j) \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+)$  weist einfache Nullstellen bei allen Inhomogenitäten auf, mit der Ausnahme  $\omega_j = \xi_k^+$ , da sich die einfache Nullstelle von  $\overline{\mathfrak{b}}(\omega_j)$  und der einfache Pol von  $\widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+)$  kompensieren. Dann gilt

$$\overline{\mathfrak{b}}(\xi_k^+) \widetilde{M}(\xi_k^+, \xi_k^+) = -\overline{\mathfrak{b}}'(\xi_k^+) \left[ 1 - e^\varphi F_{n-1}(\xi_k^+ | \{\omega_l\}_{l=1}^n \setminus \{\omega_j\} | \{\xi_l^+\}_{l=1}^n \setminus \{\xi_k^+\}) \right], \quad (\text{A.20})$$

$$\overline{\mathfrak{b}}(\lambda) = \left[ \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(\lambda - \xi_k)}{\text{sh}(\lambda - \xi_k + \eta)} \right], \quad \frac{1}{\overline{\mathfrak{b}}'(\xi_j)} = \frac{\prod_{k=1}^m \text{sh}(\xi_j - \xi_k + \eta)}{\prod_{k \neq j} \text{sh}(\xi_j - \xi_k)}. \quad (\text{A.21})$$

### Auswertung der Integrationen

Für die Ausintegration der Variablen können die Determinanten durch Permutationen  $\sigma$  und  $\tau$  der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}^m$  dargestellt werden. In Verbindung mit der Summe über alle möglichen Partitionen besteht für  $n = 0, \dots, m$  Integrationsvariablen  $\omega_j$  der Zusammenhang

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| = n}} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\mathfrak{b}}(\omega_j)}{\overline{\mathfrak{b}}'(\xi_j^+)} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k^+ + \eta)}{\text{sh}(\xi_j^+ - \xi_k^+ + \eta)} \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k^+ - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \\ & \det_n \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+) \det_n G(\omega_j, \xi_k^+) \left[ \prod_{j=1}^{m-n} \frac{1 + e^\varphi \mathfrak{a}(\xi_j^-) F_n(\xi_j^- | \{\omega_l\}_{l=1}^n | \{\xi_l^+\}_{l=1}^n)}{1 + \mathfrak{a}(\xi_j^-)} \right] \\ & = \frac{1}{(m-n)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\sigma) \widetilde{M}(\omega_1, \xi_{\sigma(1)}) \dots \widetilde{M}(\omega_n, \xi_{\sigma(n)}) \\ & \quad \sum_{\tau \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\tau) G(\omega_1, \xi_{\tau(1)}) \dots G(\omega_n, \xi_{\tau(n)}) \\ & \quad \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\mathfrak{b}}(\omega_j)}{\overline{\mathfrak{b}}'(\xi_{\sigma(j)})} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_{\sigma(k)} + \eta)}{\text{sh}(\xi_{\sigma(j)} - \xi_{\sigma(k)} + \eta)} \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_{\sigma(k)} - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \\ & \quad \left[ \prod_{j=n+1}^m \frac{1 + e^\varphi \mathfrak{a}(\xi_{\sigma(j)}) F_n(\xi_{\sigma(j)} | \{\omega_l\}_{l=1}^n | \{\xi_{\sigma(l)}\}_{l=1}^n)}{1 + \mathfrak{a}(\xi_{\sigma(j)})} \right]. \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

Festgehaltene Permutationen  $\sigma$  und  $\tau$  ermöglichen eine Zuordnung zu Partitionen der Inhomogenitäten und es gelten die Einschränkungen

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \tau(m) & \{\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}\} &= \{\xi_{\tau(1)}, \dots, \xi_{\tau(n)}\} = \{\xi^+\} \\ &\vdots & & \\ \sigma(n+1) &= \tau(n+1) & \{\xi_{\tau(n+1)}, \dots, \xi_{\tau(m)}\} &= \{\xi^-\} \quad . \end{aligned}$$

Der Beweis von Gleichung (A.22) beruht auf den Eigenschaften der Permutationen:



- (i) Aufgrund  $\sigma(m) = \tau(m), \dots, \sigma(n+1) = \tau(n+1)$  werden die kombinierten Vorzeichen  $\text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau)$  nur von den Wirkungen der Permutationen  $\sigma$  und  $\tau$  auf die Mengen  $\{1, \dots, n\}$  bestimmt und für jede fixe Permutation  $\sigma$  können alle möglichen Permutationen  $\tau$  ausgeführt werden. Dies ergibt mit  $\text{sign}(\tau)$  die Determinante  $\det_n G(\omega_j, \xi_k^+)$ .
- (ii) Für eine festgehaltene Partition  $\{\xi^-\}$  sind solche  $\sigma \in \mathfrak{S}^m$  zu wählen, welche die Mengen  $\{1, \dots, n\}$  und  $\{n+1, \dots, m\}$  invariant lassen. Das Vorzeichen  $\text{sign}(\sigma)$  und die Wirkung von  $\sigma$  auf  $\{1, \dots, n\}$  ergeben  $(m-n)! \det_n \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+)$ .
- (iii) Alle  $\sigma \in \mathfrak{S}^m$  werden durch Summation über alle Möglichkeiten von Partitionen  $\{\xi^-\}$  mit  $|\xi^-| = n$  erreicht.

Der Ausdruck (A.22) zeigt bei einer festen Permutation  $\tau$  für eine beliebig herausgegriffene Variable  $\omega_j$  einen einzigen einfachen Pol bei  $\omega_j = \xi_{\tau(j)} = \xi_{\sigma(j)}$ . Dann ergibt die Auswertung der Integrationen  $[\prod_{j=r+1}^n \int_{\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1+\mathfrak{a}(\omega_j)}]$  mit (A.18) und (A.20) die Relation

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(m-n)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\sigma) \widetilde{M}(\omega_1, \xi_{\sigma(1)}) \dots \widetilde{M}(\omega_r, \xi_{\sigma(r)}) \\
& \sum_{\tau \in \mathfrak{S}^m} \text{sign}(\tau) G(\omega_1, \xi_{\tau(1)}) \dots G(\omega_r, \xi_{\tau(r)}) \\
& \left[ \prod_{j=1}^r \frac{\bar{\mathfrak{b}}(\omega_j)}{\bar{\mathfrak{b}}'(\xi_{\sigma(j)})} \right] \left[ \prod_{j,k=1}^r \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_{\sigma(k)} + \eta)}{\text{sh}(\xi_{\sigma(j)} - \xi_{\sigma(k)} + \eta)} \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_{\sigma(k)} - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \\
& \left[ \prod_{j=n+1}^m \frac{1 + e^\varphi \mathfrak{a}(\xi_{\sigma(j)}) F_r(\xi_{\sigma(j)} | \{\omega_l\}_{l=1}^r | \{\xi_{\sigma(l)}\}_{l=1}^r)}{1 + \mathfrak{a}(\xi_{\sigma(j)})} \right] \\
& \left[ \prod_{j=r+1}^n \frac{1 - e^\varphi F_r(\xi_{\sigma(j)} | \{\omega_l\}_{l=1}^r | \{\xi_{\sigma(l)}\}_{l=1}^r)}{1 + \mathfrak{a}(\xi_{\sigma(j)})} \right] . \tag{A.23}
\end{aligned}$$

Fixierte Permutationen  $\sigma$  und  $\tau$  ermöglichen wieder eine Zuordnung zu Partitionen der Inhomogenitäten mit den Einschränkungen

$$\begin{aligned}
\sigma(m) = \tau(m) & & \{\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(r)}\} &= \{\xi_{\tau(1)}, \dots, \xi_{\tau(r)}\} = \{\xi^+\} \\
\vdots & & & \\
\sigma(r+1) = \tau(r+1) & & \{\xi_{\tau(r+1)}, \dots, \xi_{\tau(m)}\} &= \{\xi^-\} .
\end{aligned}$$

Die Übersetzung der Permutationen in Summen über Partitionen folgt den Schritten (i)-(iii) des Beweises von Gleichung (A.22) und lautet:

- (i) Für jede festgehaltene Permutation  $\sigma$  mit  $\sigma(m) = \tau(m), \dots, \sigma(r+1) = \tau(r+1)$  führt  $\text{sign}(\tau)$  auf die Determinante  $\det_r G(\omega_j, \xi_k^+)$ .
- (ii) Mit der Festlegung auf eine bestimmte Partition  $\{\xi^-\}$  sind solche  $\sigma \in \mathfrak{S}^m$  zu wählen, welche die Mengen  $\{1, \dots, r\}$  und  $\{r+1, \dots, m\}$  invariant lassen, wobei  $\text{sign}(\sigma)$  mit einer festgehaltenen Wirkung auf  $\{r+1, \dots, m\}$  in der Determinante

$\det_r \widetilde{M}(\omega_j, \xi_k^+)$  resultiert. Die Menge  $\{r+1, \dots, m\}$  ist gemäß den beiden letzten Produkten in (A.23) entsprechend weiter aufzuteilen mit

$$(m-n)!(n-r)! \sum_{\substack{(\{\xi^{-+}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^{-}\} \\ |\xi^{-+}|=m-n}}$$

sowie den Zuordnungen der Untertypen  $\{\xi_{\tau(r+1)}, \dots, \xi_{\tau(n)}\} = \{\xi^{--}\}$  und  $\{\xi_{\tau(n+1)}, \dots, \xi_{\tau(m)}\} = \{\xi^{-+}\}$  von  $\{\xi^{-}\}$ .

- (iii) Alle  $\sigma \in \mathfrak{S}^m$  werden durch Summation über alle Möglichkeiten von Partitionen  $\{\xi^{-}\}$  mit  $|\xi^{-}| = r$  erreicht.

## Anhang B

# Der Hochtemperaturlimes

### B.1 Rapiditäten und führender Eigenwert

Werden die Bethe-Ansatz-Zahlen  $\lambda_j$  in einem Koordinatensystem mit  $\xi$  als Ursprung angegeben, dann lautet der allgemeine Eigenwert der Quantentransformmatrix

$$\Lambda(\lambda + \xi) = \left[ \frac{\text{sh}(\lambda + \beta/N)}{\text{sh}(\lambda + \beta/N - \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_l - \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_l)} \right] + \left[ \frac{\text{sh}(\lambda - \beta/N)}{\text{sh}(\lambda - \beta/N + \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_l + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_l)} \right] . \quad (\text{B.1})$$

Die Ausführung der Grenzwerte in der Reihenfolge  $\beta \rightarrow 0$  und anschließend  $\lambda \rightarrow 0$  zeigen die beiden Schritte

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Lambda(\lambda + \xi) = \left[ \frac{\text{sh}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \eta)} \right]^{N/2-M} + \left[ \frac{\text{sh}(\lambda)}{\text{sh}(\lambda + \eta)} \right]^{N/2-M} , \quad (\text{B.2})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{\beta \rightarrow 0} \Lambda(\lambda + \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } M < N/2 \\ 2 & \text{für } M = N/2 \end{cases} . \quad (\text{B.3})$$

Die Umkehr der Reihenfolge in der Grenzwertbildung nimmt den Eigenwert  $\Lambda(\xi)$  mit dem Argument  $\xi$  als Ausgangspunkt,

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi) &= \left[ \frac{\text{sh}(\beta/N)}{\text{sh}(\beta/N - \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\text{sh}(\beta x_l + \eta)}{\text{sh}(\beta x_l)} \right] + \left[ \frac{\text{sh}(\beta/N)}{\text{sh}(\beta/N - \eta)} \right]^{N/2} \left[ \prod_{l=1}^M \frac{\text{sh}(\beta x_l - \eta)}{\text{sh}(\beta x_l)} \right] \\ &= \left[ \frac{\text{sh}(\beta/N)}{\text{sh}(\beta/N - \eta)} \right]^{N/2} \frac{\prod_{l=1}^M \text{sh}(\beta x_l + \eta) + \prod_{l=1}^M \text{sh}(\beta x_l - \eta)}{\prod_{l=1}^M \text{sh}(\beta x_l)} . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Der Limes  $\beta \rightarrow 0$  führt im Fall  $M = N/2$  nur dann zu einem nichtverschwindenden Eigenwert, wenn  $N/2$  zusätzlich als geradzahlig angenommen wird. Es sind

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Lambda(\xi) = \frac{(-\beta/N)^{N/2} (1 + (-1)^M) \text{sh}^M(\eta)}{\text{sh}^{N/2}(\eta) \prod_{l=1}^M (\beta x_l)} , \quad (\text{B.5})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda(\lambda + \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } M < N/2 \\ 2 & \text{für } M = N/2 \quad , \quad N/2 \text{ gerade} \end{cases} \quad , \quad (\text{B.6})$$

wobei der führende Eigenwert  $\Lambda_0(\xi) = 2$  aus den skalierten Bethe-Ansatz-Zahlen  $x_j = \frac{i}{N} \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right)$  gewonnen wird durch

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \Lambda(\xi) &= (-1)^{N/2} (1 + (-1)^{N/2}) \left[ \prod_{l=1}^{N/2} \frac{1}{N x_l} \right] \quad , \quad N/2 \text{ gerade} \\ &= 2 \left[ \prod_{j=1}^{N/4} \frac{1}{i \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right)} \right] \left[ \prod_{j=N/4+1}^{N/2} \frac{1}{i \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right)} \right] \\ &= 2 \left[ \prod_{j=1}^{N/4} \frac{1}{i \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right)} \right] \left[ \prod_{j=1}^{N/4} \frac{1}{i \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1) + \frac{\pi}{2}\right)} \right] \\ &= 2 \left[ \prod_{j=1}^{N/4} \frac{1}{i \cot\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right)} \right] \left[ \prod_{j=1}^{N/4} \frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{N}(2j-1)\right)} \right] \\ &= 2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

## B.2 Die verallgemeinerte Dichtefunktion

Die lineare Integralgleichung (6.17) lautet mit  $G(\lambda, \xi) = G_0(\lambda, \xi) + \tau G_1(\lambda, \xi) + \mathcal{O}(\tau^2)$  und  $1/(1 + \bar{\alpha}) = 1/2 - \tau \bar{\alpha}/4 + \mathcal{O}(\tau^2)$  nach Ordnungen in  $\tau$  sortiert,

$$G_0(\lambda, \xi) = -t(\lambda, \xi) - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G_0(\omega, \xi)}{2} \quad , \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} G_1(\lambda, \xi) &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G_0(\omega, \xi) \bar{\alpha}_1(\omega)}{4} \\ &\quad - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G_1(\omega, \xi)}{2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Die Polstellen der gesuchten Funktion  $G_0(\lambda, \xi)$  werden vollständig durch die Inhomogenität  $-t(\lambda, \xi)$  in (B.8) beschrieben, sodass folgt

$$\begin{aligned} G_0(\lambda, \xi) &= -t(\lambda, \xi) + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{t(\omega, \xi)}{2} \\ &\quad \left| \frac{\text{sh}(2\eta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)} = t(\lambda, \omega) + t(\omega, \lambda) \right. \\ &= -t(\lambda, \xi) + \frac{t(\lambda, \xi) + t(\xi, \lambda)}{2} = \frac{t(\xi, \lambda) - t(\lambda, \xi)}{2} \\ &= \frac{\text{sh}^2(\eta) \text{cth}(\lambda - \xi)}{\text{sh}(\lambda - \xi + \eta) \text{sh}(\lambda - \xi - \eta)} =: G_0(\lambda - \xi) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Die Lösung  $G_0(\lambda, \xi) =: G_0(\lambda - \xi)$  ist von Differenzenform und ebenfalls Bestandteil der Funktion  $\bar{\mathbf{a}}_1(\lambda)$  in der Entwicklung  $\bar{\mathbf{a}}(\lambda) = 1 + \tau \bar{\mathbf{a}}_1(\lambda) + \mathcal{O}(\tau^2)$  mit

$$\bar{\mathbf{a}}_1(\lambda) = h - 2c \operatorname{sh}(\eta) G_0(\lambda) \quad . \quad (\text{B.11})$$

Der Term  $G_0(\omega, \xi) \bar{\mathbf{a}}_1(\omega)$  in der Bestimmungsgleichung (B.9) für  $G_1(\omega, \xi)$  hat einfache Polstellen bei  $\omega = 0$  und  $\omega = \xi$ . Die Inhomogenität dieser Integralgleichung lautet

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)} \frac{G_0(\omega, \xi) \bar{\mathbf{a}}_1(\omega)}{4} = \\ - \frac{h}{4} \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda - \xi + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \xi - \eta)} + \frac{c \operatorname{sh}(\eta)}{2} \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{ch}(\xi)}{\operatorname{sh}(\xi + \eta) \operatorname{sh}(\xi - \eta)} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \operatorname{sh}(2\lambda - \xi)}{\operatorname{sh}(\lambda + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \xi + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \xi - \eta)} \quad . \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

Der Ausdruck (B.12) ist innerhalb der Kontur  $\mathcal{C}$  frei von Polstellen und damit gleichzeitig die Lösung  $G_1(\lambda, \xi)$  von (B.9).

### B.3 Der Kopplungsbeitrag

Die Temperaturabhängigkeit der erzeugenden Funktion ist in den Intgaldarstellungen der Summanden

$$S_n = \frac{e^{(m-n)\varphi}}{n!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| = n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \frac{1}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} & Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\}) \left[ \prod_{j=1}^{m-n} F_n(\xi_j^- | \{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\}) \right] \\ &= \frac{e^{(m-n)\varphi}}{n!} \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+| = n}} \left[ \prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\mathbf{b}(\omega_j)}{\mathbf{b}'(\xi_j^+)} \right] \\ & \left[ \prod_{j,k=1}^n \frac{\operatorname{sh}(\omega_j - \xi_k^+ - \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_j^+ - \xi_k^+ - \eta)} \right] \det_n \left[ \frac{G(\omega_j, \xi_k^+)}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \right] \det_n M(\omega_j, \xi_k^+) \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

vollständig in die Determinante  $\det_n \left( \frac{G}{1 + \mathbf{a}} \right)$  verlagert. Sollen die Summanden (für  $h = 0$ ) in der ersten Ordnung  $1/T = \tau$  bestimmt werden, so ist die Determinante in entsprechender Ordnung zu bestimmen. Werden die Zeileneinträge mit den Variablen  $\omega_j$  und die Spalteneinträge mit den Inhomogenitäten  $\xi_k$  indiziert, dann folgt

$$\frac{G(\omega_j, \xi_k^+)}{1 + \mathbf{a}(\omega_j)} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\tau c \operatorname{sh}(\eta)}{2} G_0(\omega_l) G_0(\omega_l - \xi_k^+) \\ \frac{G_0(\omega_j - \xi_k^+)}{2} \quad , \quad j \neq l \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

für eine beliebige herausgegriffenen Zeile  $l = 1, \dots, n$ . Der Integrand des Summanden  $S_n$  ist symmetrisch in den  $n$  Integrationsvariablen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  und  $l = 1$  kann als Beispiel für den Zeilenindex in (B.15) gewählt werden. Die verbleibenden Konturintegrale über  $\omega_2, \dots, \omega_n$  lassen sich dann mittels  $\operatorname{Res}_{\omega=\xi} G(\omega, \xi) = \operatorname{Res}_{\omega=\xi} G_0(\omega - \xi) = -1$  ausführen entsprechend

**Korollar 4.** Sei  $\{\gamma_k\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}$  für alle  $k = 1, \dots, m$  und gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 8. Dann folgt mit Ausnahme der Variable  $\omega_1$  für die Ausführung aller verbleibenden Konturintegrale

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=n}} \left[ \prod_{j=2}^n \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\}) \left[ \prod_{l=1}^{m-n} F_n(\xi_l^- | \{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\}) \right] \\
&= - (1 - e^\varphi) \sum_{k=1}^m \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{\text{sh}(\omega_1 - \xi_l) \text{sh}(\xi_l - \xi_k + \eta)}{\text{sh}(\xi_k - \xi_l) \text{sh}(\xi_l - \omega_1 + \eta)} \right] G(\omega_1, \xi_k) \\
& \quad (n-1)! \sum_{\substack{(\{\gamma_k^+\}, \{\gamma_k^-\}) \in p_2\{\gamma_k\} \\ |\gamma_k^+|=n-1}} \left[ \prod_{b \in \{\gamma_k^+\}} \left( F_1^{-1}(\xi_b | \omega_1 | \xi_k) - e^\varphi \right) \right] .
\end{aligned} \tag{B.16}$$

*Beweis.* Für  $r = 1$  in Lemma 8 mit  $Y_n(\{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\})$  entsprechend Gleichung (4.26),  $\widetilde{M}_1(\omega_1, \xi) = (1 - e^\varphi) t(\xi, \omega_1)$  nach (4.27) und  $F_n(\xi_l^- | \{\omega_j\}_{j=1}^n | \{\xi^+\})$  aus (4.36) folgt

$$\begin{aligned}
& (n-1)! \sum_{\substack{(\{\xi^+\}, \{\xi^-\}) \in p_2\{\xi\} \\ |\xi^+|=1}} Y_1(\omega_1 | \xi_1^+) \left[ \prod_{l=1}^{m-1} F_1(\xi_l^- | \omega_1 | \xi_1^+) \right] \\
& \quad \sum_{\substack{(\{\xi^{++}\}, \{\xi^{--}\}) \in p_2\{\xi^-\} \\ |\xi^{++}|=m-n \text{ oder } |\xi^{--}|=n-1}} \left[ \prod_{l=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{F_1(\xi_l^{--} | \omega_1 | \xi_1^+)} - e^\varphi \right\} \right] \\
&= (n-1)! \sum_{k=1}^m Y_1(\omega_1 | \xi_k) \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m F_1(\xi_l | \omega_1 | \xi_k) \right] \\
& \quad \sum_{\substack{(\{\gamma_k^+\}, \{\gamma_k^-\}) \in p_2\{\gamma_k\} \\ |\gamma_k^+|=n-1}} \left[ \prod_{b \in \{\gamma_k^+\}} \left( F_1^{-1}(\xi_b | \omega_1 | \xi_k) - e^\varphi \right) \right] .
\end{aligned}$$

□

Alle  $l = 1, \dots, n$  Möglichkeiten, einen Zeilenindex zu wählen, lassen sich durch einen Vorfaktor  $n$  berücksichtigen, und es bleibt das Konturintegral

$$\begin{aligned}
S'_n &= \frac{\tau c \text{sh}(\eta)}{2} \frac{n(n-1)!}{n!} \frac{e^{(m-n)\varphi}}{2^{n-1}} \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \right] (1 - e^\varphi) \\
& \quad \sum_{k=1}^m \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{\text{sh}(\omega_1 - \xi_l) \text{sh}(\xi_l - \xi_k + \eta)}{\text{sh}(\xi_k - \xi_l) \text{sh}(\xi_l - \omega_1 + \eta)} \right] G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \xi_k) \\
& \quad \sum_{\substack{(\{\gamma_k^+\}, \{\gamma_k^-\}) \in p_2\{\gamma_k\} \\ |\gamma_k^+|=n-1}} \left[ \prod_{b \in \{\gamma_k^+\}} \left( F_1^{-1}(\xi_b | \omega_1 | \xi_k) - e^\varphi \right) \right] \tag{B.17}
\end{aligned}$$

zu bestimmen. Der Strich ' deutet an, dass von den Summanden  $S_1, \dots, S_m$  nur der Kopplungsanteil erster Ordnung berücksichtigt wird. Die beiden einfachen Polstellen bei  $\omega_1 = 0$  und  $\omega_1 = \xi_k$  des Terms  $G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \xi_k)$  ergeben dann, mit dem Residuensatz ausgewertet, unter Benutzung von  $F_1(\lambda|\omega_1|\xi_k)|_{\omega_1=\xi_k} = F_0 = 1$

$$\begin{aligned}
S'_n &= -\frac{\tau c \operatorname{sh}(\eta)}{2^{n-1}} \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) e^{(m-n)\varphi} \sum_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{cth}(\xi_k)}{\operatorname{sh}(\xi_k + \eta) \operatorname{sh}(\xi_k - \eta)} \\
&\quad \sum_{\substack{(\{\gamma_k^+\}, \{\gamma_k^-\}) \in p_2\{\gamma_k\} \\ |\gamma_k^+| = n-1}} \left\{ (1 - e^\varphi)^{n-1} - \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{\operatorname{sh}(\xi_l - \xi_k + \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_k - \xi_l)} \frac{\operatorname{sh}(-\xi_l)}{\operatorname{sh}(\xi_l + \eta)} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{b \in \{\gamma_k^+\}} \left[ \frac{\operatorname{sh}(\xi_b - \xi_k - \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_b - \xi_k + \eta)} \frac{\operatorname{sh}(\xi_b + \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_b - \eta)} - e^\varphi \right] \right\} \\
&= -\tau c \operatorname{sh}(\eta) e^{(m-1)\varphi} \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \sum_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{cth}(\xi_k)}{\operatorname{sh}(\xi_k + \eta) \operatorname{sh}(\xi_k - \eta)} \\
&\quad \sum_{\substack{(\{\gamma_k^+\}, \{\gamma_k^-\}) \in p_2\{\gamma_k\} \\ |\gamma_k^+| = n-1}} \left\{ \left( \frac{e^{-\varphi} - 1}{2} \right)^{n-1} - \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{\operatorname{sh}(\xi_l - \xi_k + \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_k - \xi_l)} \frac{\operatorname{sh}(-\xi_l)}{\operatorname{sh}(\xi_l + \eta)} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{b \in \{\gamma_k^+\}} \left[ \frac{\operatorname{sh}(\xi_b - \xi_k - \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_b - \xi_k + \eta)} \frac{\operatorname{sh}(\xi_b + \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_b - \eta)} \frac{e^{-\varphi}}{2} - \frac{1}{2} \right] \right\} . \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

Die Aufsummation aller Beiträge erster Ordnung der Summanden  $S'_1, \dots, S'_m$  reduziert sich auf das kombinatorische Problem in

**Korollar 5.** Sei  $F^{-1} = 1/F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine willkürliche Funktion über beliebige Variablen  $\xi_b$  mit der Indexmenge  $I_r = \{1 \dots, r\}$  und sei  $y \in \mathbb{C}$  beliebig, dann gilt

$$\sum_{j=0}^r \sum_{\substack{(\{\alpha^+\}, \{\alpha^-\}) \in p_2(I_r) \\ |\alpha^-| = j}} \left[ \prod_{b \in \{\alpha^-\}} \frac{y F^{-1}(\xi_b) - 1}{2} \right] = \left[ \prod_{b=1}^r \frac{y F^{-1}(\xi_b) + 1}{2} \right] . \quad (\text{B.19})$$

*Beweis.* Mit den Ersetzungen  $q(b) = y F^{-1}(\xi_b)/x$  und  $p(b) = F(\xi_b)/y$  in Lemma 6 folgt für  $k = r$  die Aussage.  $\square$

Der Kopplungsanteil der erzeugenden Funktion in erster Ordnung  $1/T$  (angedeutet durch den Index  $\tau c$ ) ist explizit abhängig von den Inhomogenitäten  $\xi_j$ , die in einem Koordinatensystem mit  $\xi$  als Ursprung gemessen werden. Mit dem binomischen Satz<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Die Summe über Partitionen ergibt umgeschrieben auf Binomialkoeffizienten

$$\sum_{n=1}^m \sum_{|\gamma_k^+| = n-1} \left( \frac{e^{-\varphi} - 1}{2} \right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \left( \frac{e^{-\varphi} - 1}{2} \right)^n 1^{m-n} = \left( \frac{e^{-\varphi} + 1}{2} \right)^{m-1} .$$

sowie den Identifizierungen  $F^{-1}(\circ) = F_1^{-1}(\circ|0|\xi_k)$ ,  $I_r = \{\gamma_k\}$ ,  $\{\alpha^-\} = \{\gamma_k^+\}$  und  $y = e^\varphi$  folgt

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_n 2^{2^n} \right\} \right\rangle_{\tau c} &= -\tau c \operatorname{sh}(\eta) \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{cth}(\xi_k)}{\operatorname{sh}(\xi_k + \eta) \operatorname{sh}(\xi_k - \eta)} \\ &\quad \left\{ \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} - \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{\operatorname{sh}(\xi_l - \xi_k + \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_k - \xi_l)} \frac{\operatorname{sh}(-\xi_l)}{\operatorname{sh}(\xi_l + \eta)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left[ \frac{\operatorname{sh}(\xi_l - \xi_k - \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_l - \xi_k + \eta)} \frac{\operatorname{sh}(\xi_l + \eta)}{\operatorname{sh}(\xi_l - \eta)} \frac{1}{2} + \frac{e^\varphi}{2} \right] \right\} . \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (B.20) weist vor der Limesbildung  $\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0$  formal bei  $\xi_k = 0$  und  $\xi_k = \xi_l$ ,  $l \neq k$  für alle  $k = 1, \dots, m$  einfache Polstellen auf, deren Residuen aber den Wert Null annehmen. Der homogene Limes führt daher auf einen endlichen Wert, der aus dem rationalen Ausdruck

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau c}(\varphi|\{s\}) &:= -\tau c \operatorname{sh}(\eta) \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \sum_{k=1}^m \frac{s_k + 1}{s_k - 1} \frac{(q - 1)^2 s_k}{(q s_k - 1)(s_k - q)} \\ &\quad \left\{ \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} - \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{(q s_l - s_k)(1 - s_l)}{(q s_l - 1)(s_k - s_l)} \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left[ \frac{(q s_l - 1)(q s_k - s_l)}{(q s_l - s_k)(q - s_l)} \frac{1}{2} + \frac{e^\varphi}{2} \right] \right\} \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

in den neuen Variablen  $q = e^{2\eta}$  und  $s_j = e^{2\xi_j}$  über Rekursionsbeziehungen extrahiert werden kann.

### Idee der Rekursionsbeziehungen

Im einfacheren Ising-Limes  $J = c\Delta = \text{const}$ ,  $c \rightarrow 0$ , lautet der zu untersuchende rationale Ausdruck

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau J}(\varphi|\{s\}) &= \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ c \rightarrow 0}} \Phi_{\tau c}(\varphi|\{s\}) = \\ &= \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \sum_{k=1}^m \frac{s_k + 1}{s_k - 1} \left\{ \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} - \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{1 - s_l}{s_k - s_l} \right] \left( \frac{s_k + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} \right\} \\ &= \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \sum_{k=1}^m \frac{s_k + 1}{s_k - 1} \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \left( \frac{1}{2} \right)^n \left( \frac{e^\varphi}{2} \right)^{m-n-1} \left\{ 1 - s_k^n \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{1 - s_l}{s_k - s_l} \right] \right\} \\ &= \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \left( \frac{1}{2} \right)^n \left( \frac{e^\varphi}{2} \right)^{m-n-1} H(m, n) , \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$



$$H(m, n) = \sum_{k=1}^m \frac{s_k + 1}{s_k - 1} \frac{\prod_{l=1, l \neq k}^m (s_k - s_l) - s_k^n \prod_{l=1, l \neq k}^m (1 - s_l)}{\prod_{l=1, l \neq k}^m (s_k - s_l)}, \quad (\text{B.23})$$

und die Abhängigkeit von den Inhomogenitäten  $s_j$  wird auf den Term  $H(m, n)$  reduziert. Durch den Satz von Liouville<sup>2</sup> besteht die Identität

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \frac{x+1}{x-1} \frac{\prod_{l=1}^m (x - s_l) - x^n \prod_{l=1}^m (1 - s_l)}{\prod_{l=1}^m (x - s_l)} \\ &= K_1^\infty(x) - \sum_{k=1}^m \frac{s_k + 1}{s_k - 1} \frac{s_k^n \prod_{l=1}^m (1 - s_l)}{(x - s_k) \prod_{l=1, l \neq k}^m (s_k - s_l)} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

zwischen den beiden rationalen Ausdrücken, und im homogenen Limes  $s_1, \dots, s_m \rightarrow 1$  kann mit der Asymptotik  $K_1(x) \sim K_1^\infty(x) = 1$  für  $|x| \rightarrow \infty$  die Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} H(m+1, n) &= \sum_{k=1}^m \frac{s_k + 1}{s_k - 1} \frac{(s_k - s_{m+1}) \prod_{l=1, l \neq k}^m (s_k - s_l) - s_k^n (1 - s_{m+1}) \prod_{l=1, l \neq k}^m (1 - s_l)}{(s_k - s_{m+1}) \prod_{l=1, l \neq k}^m (s_k - s_l)} \\ &\quad + \frac{s_{m+1} + 1}{s_{m+1} - 1} \frac{\prod_{l=1}^m (s_{m+1} - s_l) - s_{m+1}^n \prod_{l=1}^m (1 - s_l)}{\prod_{l=1}^m (s_{m+1} - s_l)} \\ &= 1 + H(m, n) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  aufgestellt werden. Es ist  $H(m, n) = m - 2n - 1$  aus dem Rekursionsanfang  $H(1, n) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s+1}{s-1} (1 - s^n) = -2n$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau J}(\varphi | \{s\}) &= \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \left( \frac{1}{2} \right)^n \left( \frac{e^\varphi}{2} \right)^{m-n-1} (m - 2n - 1) \\ &= (m-1) \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} \\ &\quad - 4 \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \frac{n}{2} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^n \left( \frac{e^\varphi}{2} \right)^{m-n-1}, \quad \alpha = 1 \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{die Behandlung des Terms } \frac{n}{2} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^n \text{ zeigt (6.26)} \end{array} \right. \\ &= (m-1) \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} - (m-1) \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-2} \\ &= -(m-1) \tau J \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-2}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

<sup>2</sup>Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f(z)$  eine beschränkte holomorphe Funktion und gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $|f(z)| \leq c$ , dann ist  $f(z)$  konstant. Als Folge davon stimmen zwei meromorphe Funktionen mit einfachen Polstellen überein, wenn sie dieselben Nullstellen, dieselben Residuen und eine identische Asymptotik besitzen.

### Rekursionsbeziehung für den Kopplungsanteil

Der allgemeine rationale Ausdruck für den Kopplungsanteil lässt sich entsprechend dem voranstehenden Ising-Limes behandeln, wenn die rechte Seite von (B.21),

$$\frac{(q-1)^2 H(m)}{2^{m-1} \prod_{l=1}^m (qs_l - 1)(s_l - q)} := \sum_{k=1}^m \frac{(q-1)^2 (s_k + 1) s_k}{(qs_k - 1)(s_k - q)(s_k - 1)} \times \\ \times \left\{ \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-1} - \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{(qs_l - s_k)(1 - s_l)}{(s_k - s_l)(qs_l - 1)} \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left[ \frac{(qs_l - 1)(qs_k - s_l)}{(q - s_l)(qs_l - s_k)} \frac{1}{2} + \frac{e^\varphi}{2} \right] \right\} ,$$

einer Funktion  $H(m)$  zugeordnet wird, die über eine Rekursionsbeziehung im homogenen Limes  $s_1, \dots, s_m \rightarrow 1$  auszuwerten ist. Es gilt

$$H(m) = \sum_{k=1}^m \frac{s_k(s_k + 1)}{(s_k - 1)} \left\{ (1 + e^\varphi)^{m-1} \left[ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (qs_l - 1)(s_l - q) \right] \right. \\ \left. - \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (1 - s_l) \left[ (qs_k - s_l)(1 - qs_l) + e^\varphi (qs_l - s_k)(s_l - q) \right]}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (s_k - s_l)} \right\} , \quad (\text{B.27})$$

und die für die Rekursionsbeziehung von  $H(m+1)$  benötigte Funktion lautet

$$K_2(x) := \frac{x(x+1)}{(x-1)} \left\{ (1 + e^\varphi)^m \left[ \prod_{l=1}^m (qs_l - 1)(s_l - q) \right] \right. \\ \left. - \frac{\prod_{l=1}^m (1 - s_l) \left[ (qx - s_l)(1 - qs_l) + e^\varphi (qs_l - x)(s_l - q) \right]}{\prod_{l=1}^m (x - s_l)} \right\} . \quad (\text{B.28})$$

$K_2(x)$  hat bei  $x = 0$  und  $x = -1$  Nullstellen und im homogenen Limes für  $|x| \rightarrow \infty$  die Asymptotik  $K_2(x) \sim K_2^\infty(x) = (x+2)(1+e^\varphi)^m(1-q)^m(q-1)^m$ . Bei  $x = 1$  liegt eine hebbare Polstelle vor und die Pole bei den Inhomogenitäten sind von erster Ordnung. Mit dem Satz von Liouville folgt

$$K_2(x) = K_2^\infty(x) + \sum_{k=1}^m s_k(s_k + 1)(q-1)s_k \left[ (1 - qs_k) + e^\varphi (s_k - q) \right] \times \\ \times \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (1 - s_l) \left[ (qs_k - s_l)(1 - qs_l) + e^\varphi (qs_l - s_k)(s_l - q) \right]}{(x - s_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (s_k - s_l)} . \quad (\text{B.29})$$

Die Identität von (B.28) mit (B.29) ergibt speziell für  $K_2(s_{m+1})$  im homogenen Limes die Rekursionsbeziehung

$$H(m+1) = K_2^\infty(1) + (1 + e^\varphi)(1 - q)(q - 1) H(m) \\ + (q - 1) Q(m, 1, 0) + (q - 1)(q - e^\varphi) Q(m, 1, 1) , \quad (\text{B.30})$$

$$Q(m, n, l) := \sum_{k=1}^m s_k^n (s_k + 1) \left[ (qs_k - 1) - e^\varphi (s_k - q) \right]^{n-l} \left[ \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq k}}^m \frac{(1 - s_b)(qs_k - s_b)(1 - qs_b) + e^\varphi (qs_b - s_k)(s_b - q)}{(s_k - s_b)} \right] . \quad (\text{B.31})$$

Der Term  $Q(m, n, l)$  ist für  $s_1 \dots, s_m \rightarrow 1$  einer Auswertung nach obigem Schema zugänglich. Zu untersuchen ist

$$K_3(x) := x^n (x + 1) \left[ (qx - 1) - e^\varphi (x - q) \right]^{n-l} \frac{\prod_{l=1}^m (1 - s_l) \left[ (qx - s_l)(1 - qs_l) + e^\varphi (qs_l - x)(s_l - q) \right]}{\prod_{b=1}^m (x - s_b)} \quad (\text{B.32})$$

mit  $K_3(0) = K_3(-1) = 0$  und der Asymptotik  $K_3(x) \sim 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  im homogenen Limes. Die Pole bei den Inhomogenitäten  $s_j$  sind von erster Ordnung, und die Einbeziehung der Residuen führt auf

$$K_3(x) = - \sum_{k=1}^m s_k^{n+1} (s_k + 1) \left[ (qs_k - 1) - e^\varphi (s_k - q) \right]^{n-l+1} (q - 1)(1 - s_k) \frac{\prod_{\substack{b=1 \\ b \neq k}}^m (1 - s_b) \left[ (qs_k - s_b)(1 - qs_b) + e^\varphi (qs_b - s_k)(s_b - q) \right]}{(x - s_k) \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq k}}^m (s_k - s_b)} . \quad (\text{B.33})$$

Die Identität von (B.32) mit (B.33) resultiert im homogenen Limes mit  $K_3(s_{m+1})$  in der Rekursionsbeziehung  $Q(m + 1, n, l) = (1 - q) Q(m, n + 1, l)$ , deren Lösung in  $Q(m, n, l) = (1 - q)^{m-1} Q(1, n + m - 1, l)$  besteht.  $Q(1, n, l) = 2(q - 1)^{n-l} (1 + e^\varphi)^{n-l}$  als Rekursionsanfang liefert

$$Q(m, n, l) = 2(1 - q)^{m-1} (q - 1)^{n+m-1-l} (1 + e^\varphi)^{n+m-1-l} . \quad (\text{B.34})$$

Die Bestimmungsgleichung (B.30) für den Kopplungsbeitrag  $H(m)$  lautet mit den jetzt nach (B.34) bekannten Termen  $Q(m, 1, 0)$  und  $Q(m, 1, 1)$

$$H(m + 1) = (1 + e^\varphi)(1 - q)(q - 1) \left[ H(m) + (1 + e^\varphi)^{m-2} (1 - q)^{m-2} (q - 1)^{m-2} (q^2 - 1)(1 - e^\varphi) \right] \quad (\text{B.35})$$

und reduziert sich in der Lösung auf das Grundproblem von

**Lemma 25.** *Sei  $x_{m+1} = A(x_m + A^{m-2}B)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  eine gegebene Rekursionsbeziehung mit komplexen Koeffizienten  $A, B \in \mathbb{C}$ . Dann ist mit dem Rekursionsanfang  $x_1$  der  $m$ -te Term bestimmt durch*

$$x_m = A^{m-1}x_1 + (m - 1)A^{m-2}B . \quad (\text{B.36})$$

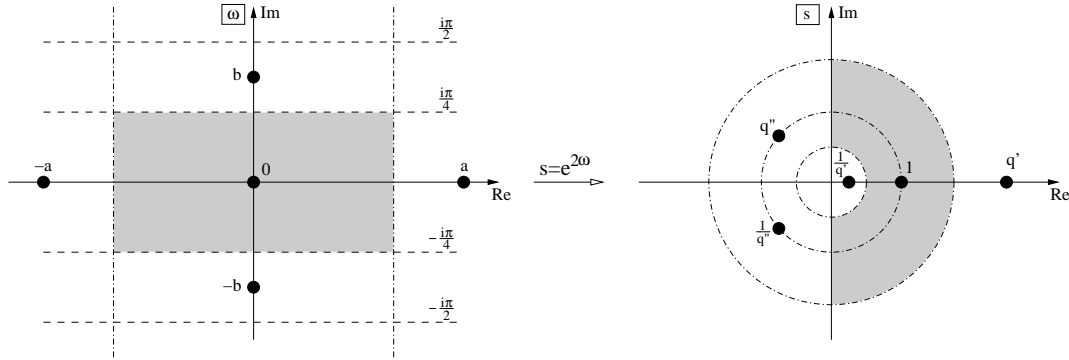


Abbildung B.1: Konforme Abbildung  $s = e^{2\omega}$  der  $\omega$ -Ebene mit  $q' = e^{2a}$  und  $q'' = e^{2b}$ . Der Ursprung  $\omega = 0$  wird auf den Punkt  $s = 1$  abgebildet.

Mit den Ersetzungen  $A = (1 + e^\varphi)(1 - q)(q - 1)$  und  $B = (q^2 - 1)(1 - e^\varphi)$  sowie dem Rekursionsanfang  $H(1) = 0$  ist

$$H(m) = (m - 1)(1 + e^\varphi)^{m-2}(1 - e^\varphi)(q - 1)^{m-1}(1 - q)^{m-2}(1 + q) \quad , \quad (\text{B.37})$$

und der Kopplungsanteil der erzeugenden Funktion stellt sich dar als

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{n=1}^m e_{n2}^2 \right\} \right\rangle_{\tau c} &= -\tau c \operatorname{sh}(\eta) \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right) \frac{(q - 1)^2 H(m)}{2^{m-1}(q - 1)^m(1 - q)^m} \\ &= -(m - 1)\tau c \operatorname{sh}(\eta) \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-2} \frac{q + 1}{q - 1} \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \frac{q + 1}{q - 1} = \operatorname{cth}(\eta) \quad , \quad \Delta = \operatorname{ch}(\eta) \end{array} \right. \\ &= -(m - 1)(\tau c \Delta) \left( \frac{1 - e^\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + e^\varphi}{2} \right)^{m-2} \quad . \quad (\text{B.38}) \end{aligned}$$

## B.4 Die Freie Energie im Detail

Dieser Abschnitt bildet eine Formelsammlung, welche die benötigten Konturintegrale für die Bestimmung der Freien Energie umfasst. Auftretende Polstellen zweiter und höherer Ordnung in den Integranden mit hyperbolischen Funktionen sind durch Transformation (Abbildung B.1) auf rationale Ausdrücke zu behandeln. Die angeführten Konturintegrale sind nach Ordnungen  $1/T$  der entwickelten Hilfsfunktion sortiert.

In erster Ordnung ist der Anteil der Hilfsfunktion an der Freien Energie durch den Koeffizienten  $\bar{\alpha}_1$  bestimmt zu

$$\begin{aligned} \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(\eta) \bar{\alpha}_1(\omega)}{\operatorname{sh}(\omega) \operatorname{sh}(\omega - \eta)} &= \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\omega) \operatorname{sh}(\omega - \eta)} \left[ h - 2c \operatorname{sh}(\eta) \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{cth}(\omega)}{\operatorname{sh}(\omega - \eta) \operatorname{sh}(\omega + \eta)} \right] \\ &= -h - 2c \operatorname{sh}(\eta) \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}^3(\eta) \operatorname{ch}(\omega)}{\operatorname{sh}^2(\omega) \operatorname{sh}^2(\omega - \eta) \operatorname{sh}(\omega + \eta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -h - 2c \operatorname{sh}(\eta) \int_{e^{2c}} \frac{ds}{2\pi i} \frac{s(s+1)(q-1)^3}{(s-1)^2(s-q)^2(qs-1)} \quad , \quad e^{2\omega} = s, \quad e^{2\eta} = q \\
&\left| \operatorname{Res}_{s=1} \frac{s(s+1)(q-1)^3}{(s-1)^2(s-q)^2(qs-1)} = \frac{q+1}{q-1} = \operatorname{cth}(\eta) \right. \\
&= -h - 2c \operatorname{ch}(\eta) \quad . \quad (B.39)
\end{aligned}$$

Die Hilfsfunktion ist in zweiter Ordnung durch den Term  $\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2/4$  in der Freien Energie enthalten mit

$$\begin{aligned}
\bar{a}_2(\omega) - \frac{\bar{a}_1^2(\omega)}{4} &= -hc \operatorname{sh}(\eta) \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{cth}(\omega)}{\operatorname{sh}(\omega-\eta) \operatorname{sh}(\omega+\eta)} + c^2 \operatorname{sh}^2(\eta) \frac{\operatorname{sh}^4(\eta) \operatorname{cth}^2(\omega)}{\operatorname{sh}^2(\omega-\eta) \operatorname{sh}^2(\omega+\eta)} \\
&+ \frac{h^2}{4} + \frac{hc \operatorname{sh}(\eta)}{2} \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\omega-\eta) \operatorname{sh}(\omega+\eta)} + \frac{c^2 \operatorname{sh}^2(\eta)}{2} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \operatorname{sh}(2\omega)}{\operatorname{sh}^2(\omega-\eta) \operatorname{sh}^2(\omega+\eta)} \quad ,
\end{aligned}$$

und die damit ausgewerteten Konturintegrale werden dargestellt als

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\omega) \operatorname{sh}(\omega-\eta)} \left[ \frac{h^2}{4} + \frac{hc \operatorname{sh}(\eta)}{2} \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\omega-\eta) \operatorname{sh}(\omega+\eta)} \right. \\
\left. + \frac{c^2 \operatorname{sh}^2(\eta)}{2} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \operatorname{sh}(2\omega)}{\operatorname{sh}^2(\omega-\eta) \operatorname{sh}^2(\omega+\eta)} \right] = -\frac{h^2}{4} + hc \operatorname{ch}(\eta) \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad hc \operatorname{sh}(\eta) \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\omega) \operatorname{sh}(\omega-\eta)} \frac{\operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{cth}(\omega)}{\operatorname{sh}(\omega-\eta) \operatorname{sh}(\omega+\eta)} \\
= hc \operatorname{sh}(\eta) \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}^3(\eta) \operatorname{ch}(\omega)}{\operatorname{sh}^2(\omega) \operatorname{sh}^2(\omega-\eta) \operatorname{sh}^2(\omega+\eta)} \\
= hc \operatorname{ch}(\eta) \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad c^2 \operatorname{sh}^2(\eta) \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\omega) \operatorname{sh}(\omega-\eta)} \frac{\operatorname{sh}^4(\eta) \operatorname{cth}^2(\omega)}{\operatorname{sh}^2(\omega-\eta) \operatorname{sh}^2(\omega+\eta)} \\
= 16c^2 \operatorname{sh}^2(\eta) \int_{e^{2c}} \frac{ds}{2\pi i} \frac{(q-1) \operatorname{sh}^4(\eta)}{(s-1)^3(s-q)} \left( \frac{s(s+1)}{s^2 - qs - s/q + 1} \right)^2 \\
\left| \operatorname{Res}_{s=1} \frac{1}{(s-1)^3(s-q)} \left( \frac{s(s+1)}{s^2 - qs - s/q + 1} \right)^2 = -\frac{1}{16} \frac{2 + \operatorname{ch}^2(\eta)}{(q-1) \operatorname{sh}^6(\eta)} \right. \\
= -c^2 (2 + \operatorname{ch}^2(\eta)) \quad .
\end{aligned}$$

Der vollständige Beitrag in zweiter Ordnung lautet bis auf Vorfaktoren

$$\int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\omega) \operatorname{sh}(\omega-\eta)} \left[ \bar{a}_2(\omega) - \frac{\bar{a}_1^2(\omega)}{4} \right] = -\frac{h^2}{4} - (2 + \Delta^2) c^2 \quad . \quad (B.40)$$



# Literaturverzeichnis

- [1] R. Z. Bariev, *Two-dimensional ice type vertex model with 2 types of staggered sites. I. the free energy and polarization*, Theor. Math. Phys. **49** (1981), 1021.
- [2] M. Barma and B. S. Shastry, *Classical equivalents of one-dimensional quantum-mechanical systems*, Phys. Rev. B **18** (1978), 3351.
- [3] E. Barouch and B. M. McCoy, *Statistical mechanics of the XY model. II. Spin correlation functions*, Phys. Rev. A **3** (1971), 786.
- [4] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 1982.
- [5] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Z. Phys. **71** (1931), 205.
- [6] H. Betsuyaku, *Study of one-dimensional XY model by the transfer-matrix method*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 629.
- [7] ———, *Study of one-dimensional quantum spin systems by the transfer-matrix method*, Prog. Theor. Phys. **73** (1985), 319.
- [8] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *A recursion formula for the correlation functions of an inhomogeneous XXX model*, Preprint, hep-th/0405044, 2004.
- [9] ———, *Reduced qKZ equation and correlation functions of the XXZ model*, Preprint, hep-th/0412191, 2004.
- [10] H. E. Boos and V. E. Korepin, *Quantum spin chains and Riemann zeta function with odd arguments*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 5311.
- [11] H. E. Boos, V. E. Korepin, Y. Nishiyama, and M. Shiroishi, *Quantum correlations and number theory*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002), 4443.
- [12] M. Bortz and F. Göhmann, *Exact thermodynamic limit of short-range correlation functions of the antiferromagnetic XXZ-chain at finite temperatures*, Eur. Phys. J. B **46** (2005), 399.
- [13] J. Damerau, private Mitteilung, 2005.
- [14] C. Destri and H. J. de Vega, *New thermodynamic Bethe ansatz equations without strings*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 2313.

- [15] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, and V. E. Korepin, *The One-Dimensional Hubbard Model*, Cambridge University Press, 2005.
- [16] M. Gaudin, *Thermodynamics of the Heisenberg-Ising ring for  $\Delta \geq 1$* , Phys. Rev. Lett. **26** (1971), 1301.
- [17] F. Göhmann, N. P. Hasenclever, and A. Seel, *Finite temperature density matrix and two-point correlations in the antiferromagnetic XXZ chain*, J. Stat. Mech. (2005), P10015.
- [18] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 7625.
- [19] ———, *Emptiness formation probability at finite temperature for the isotropic Heisenberg chain*, Physica B **359-361** (2005), 807.
- [20] ———, *Integral representation of the density matrix of the XXZ chain at finite temperatures*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 1833.
- [21] F. Göhmann and A. Seel, *The XX and Ising limits in integral formulas for finite-temperature correlation functions of the XXZ chain*, Theor. Math. Phys. **146** (2006), 119.
- [22] N. P. Hasenclever, *Integraldarstellung der Dichtematrix-Elemente und Zwei-Punkt-Korrelationen der Spin- $\frac{1}{2}$ -XXZ-Heisenbergkette bei endlicher Temperatur*, Diplomarbeit, BU Wuppertal, 2005.
- [23] W. Heisenberg, *Zur Theorie des Ferromagnetismus*, Z. Phys. **49** (1928), 619.
- [24] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *The quantum inverse scattering method approach to correlation functions*, Comm. Math. Phys. **94** (1984), 67.
- [25] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki, *Correlation functions of the XXZ model for  $\Delta < -1$* , Phys. Lett. A **168** (1992), 256.
- [26] M. Jimbo and T. Miwa, *Quantum KZ equation with  $|q| = 1$  and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime*, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 2923.
- [27] P. Jordan and E. Wigner, *Über das Paulische Äquivalenzverbot*, Z. Phys. **47** (1928), 631.
- [28] G. Jüttner, A. Klümper, and J. Suzuki, *From fusion hierarchy to excited state TBA*, Nucl. Phys. B **512** [FS] (1998), 581.
- [29] G. Kato, M. Shiroishi, M. Takahashi, and K. Sakai, *Next-nearest-neighbour correlation functions of the spin-1/2 XXZ chain at the critical region*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), L337.
- [30] ———, *Third-neighbour and other four-point correlation functions of spin-1/2 XXZ chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 5097.



- [31] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *Correlation functions of the XXZ spin- $\frac{1}{2}$  Heisenberg chain at the free fermion point from their multiple integral representations*, Nucl. Phys. B **642** (2002), 433.
- [32] ———, *Large distance asymptotic behaviour of the emptiness formation probability of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002), L753.
- [33] ———, *Spin-spin correlation functions of the XXZ- $\frac{1}{2}$  Heisenberg chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **641** (2002), 487.
- [34] ———, *On the spin-spin correlation functions of the XXZ spin- $\frac{1}{2}$  infinite chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 7441.
- [35] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin- $\frac{1}{2}$  chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **567** (2000), 554.
- [36] H. Kleinert, *Pfadintegrale in der Quantenmechanik, Statistik und Polymerphysik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 1993.
- [37] A. Klümper, *Free energy and correlation lengths of quantum chains related to restricted solid-on-solid lattice models*, Ann. Physik Lpz. **1** (1992), 540.
- [38] ———, *Thermodynamics of the anisotropic spin-1/2 Heisenberg chain and related quantum chains*, Z. Phys. B **91** (1993), 507.
- [39] ———, *Integrability of quantum chains: theory and applications to the spin-1/2 XXZ chain*, Quantum magnetism, Lecture notes in Physics, vol. 645, Springer Verlag Berlin, 2004, p. 349.
- [40] A. Klümper, J. R. Reyes Martínez, C. Scheeren, and M. Shiroishi, *The spin-1/2 XXZ chain at finite magnetic field: Crossover phenomena driven by temperature*, J. Stat. Phys. **102** (2000), 937.
- [41] T. Koma, *Thermal Bethe-ansatz-method for the one-dimensional Heisenberg model*, Prog. Theor. Phys. **78** (1987), 1213.
- [42] ———, *Thermal Bethe-ansatz-method for the spin- $\frac{1}{2}$  XXZ Heisenberg chain*, Prog. Theor. Phys. **81** (1989), 783.
- [43] V. E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391.
- [44] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, 1993.
- [45] V. E. Korepin, A. G. Izergin, F. H. L. Essler, and D. B. Uglov, *Correlation function of the spin- $\frac{1}{2}$  XXX antiferromagnet*, Phys. Lett. A **190** (1994), 182.
- [46] V. E. Korepin, S. Lukyanov, Y. Nishiyama, and M. Shiroish, *Asymptotic behavior of the emptiness formation probability in the critical phase of XXZ spin chain*, Phys. Lett. A **312** (2003), 21.

- [47] A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki, *Functional relations in solvable lattice models: I. functional relations and representation theory*, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994), 5215.
- [48] E. H. Lieb, T. D. Schultz, and D. C. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain*, Ann. Phys. (N.Y.) **16** (1961), 407.
- [49] L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition*, Phys. Rev. **65** (1944), 117.
- [50] H. De Raedt, A. Lagendijk, and J. Fivez, *Two-dimensional classical representations of the partition function of the spin-1/2 chain*, Z. Phys. B **46** (1982), 261.
- [51] K. Sakai, M. Shiroishi, Y. Nishiyama, and M. Takahashi, *Third-neighbor correlators of a one-dimensional spin-1/2 Heisenberg antiferromagnet*, Phys. Rev. E **67** (2003), 065101.
- [52] M. Shiroishi, M. Takahashi, and Y. Nishiyama, *Emptiness formation probability for the one-dimensional isotropic XY model*, J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001), 3535.
- [53] N. A. Slavnov, *Calculation of scalar products of the wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe ansatz*, Teor. Mat. Fiz. **79** (1989), 232.
- [54] J. Suzuki, *Spinons in magnetic chains of arbitrary spins at finite temperatures*, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), 2341.
- [55] J. Suzuki, Y. Akutsu, and M. Wadati, *A new approach to quantum spin chains at finite temperature*, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990), 2667.
- [56] M. Suzuki, *Generalized Trotter's formula and systematic approximants of exponential operators and inner derivations with applications to many-body problems*, Comm. Math. Phys. **51** (1976), 183.
- [57] ———, *Relationship between  $d$ -dimensional quantum spin systems and  $(d+1)$ -dimensional Ising systems*, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 1454.
- [58] ———, *Transfer-matrix method and Monte Carlo simulation in quantum spin systems*, Phys. Rev. B **31** (1985), 2957.
- [59] M. Suzuki (ed.), *Quantum Monte Carlo Methods in Condensed Matter Physics*, World Scientific Singapore, 1993.
- [60] ———, *Asymptotics and thermodynamics of spin-pattern formation probability in equilibrium spin systems*, Phys. Lett. A **301** (2002), 398.
- [61] M. Suzuki and M. Inoue, *The ST-transformation approach to analytic solutions of quantum systems. I. General formulations and basic limit theorems*, Prog. Theor. Phys. **78** (1987), 787.
- [62] M. Suzuki, S. Miyashita, and A. Kuroda, *Monte Carlo simulation of quantum spin systems. I*, Prog. Theor. Phys. **58** (1977), 1377.

- [63] M. Takahashi, *One-dimensional Heisenberg model at finite temperature*, Prog. Theor. Phys. **46** (1971), 401.
- [64] ———, *One-dimensional Hubbard model at finite temperature*, Prog. Theor. Phys. **47** (1972), 69.
- [65] ———, *Correlation length and free energy of the  $S = \frac{1}{2}$  XXZ chain*, Phys. Rev. B **43** (1991), 5788.
- [66] ———, *Correlation length and free energy of the  $S = \frac{1}{2}$  XXZ chain in a magnetic field*, Phys. Rev. B **44** (1991), 12382.
- [67] ———, *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*, Cambridge University Press, 1999.
- [68] ———, *Simplification of thermodynamic Bethe-ansatz equations*, Physics and Combinatorics: Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop, World Scientific, 2001, p. 299.
- [69] M. Takahashi, G. Kato, and M. Shiroishi, *Next nearest-neighbor correlation functions of the spin-1/2 XXZ chain at massive region*, J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004), 245.
- [70] M. Takahashi, M. Shiroishi, and A. Klümper, *Equivalence of TBA and QTM*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), L187.
- [71] M. Takahashi and M. Suzuki, *One-dimensional anisotropic Heisenberg model at finite temperatures*, Prog. Theor. Phys. **48** (1972), 2187.
- [72] H. F. Trotter, *On the product of semi-groups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 545.
- [73] T. T. Truong and K. D. Schotte, *Quantum inverse scattering method and the diagonal-to-diagonal transfer matrix of vertex models*, Nucl. Phys. B **220** [FS8] (1983), 77.
- [74] Z. Tsuboi and M. Shiroishi, *High temperature expansion of the emptiness formation probability for the isotropic Heisenberg chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), L363.
- [75] C. N. Yang and C. P. Yang, *Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction*, J. Math. Phys. **10** (1969), 1115.



# Danksagung

Den Passus über das selbstständige Verfassen der Arbeit ist nur reinen Gewissens zu unterschreiben, wenn allen, die am Entstehen mittelbar und unmittelbar beteiligt waren, angemessene Anerkennung ausgesprochen wird.

So stehe ich tief in der Schuld von Priv.-Doz. Frank Göhmann, der die Arbeit von Beginn an betreute und an mindestens einer Engstelle das Vorankommen sicherte.

Weiterhin gilt mein Dank Prof. Andreas Klümper, der die Fortschritte mit Herz verfolgte und Fragen mit Sachverstand zu beantworten wusste.

Kolleginnen und Kollegen des gesamten Lehrstuhls in früherer und aktueller Besetzung trugen bewusst oder unbewusst zu neuen Ideen innerhalb einer angenehmen Atmosphäre bei. Unter ihnen befinden sich Priv.-Doz. Michael Karbach sowie die Dipl.-Phys. Jens Damerau, Stefan Glocke und Klaus Wiele.

Von unschätzbarem Wert für die sprachlich interessierte Zielgruppe war die kritische Durchsicht des Manuskriptes von Priv.-Doz. Andreas Fledderjohann, Dipl.-Phys. Nils Peter Hasenclever und Holger Seifert. Letzterem danke ich für die Endabnahme.

Meiner Familie gebührt steter Dank.