Untersuchungen einiger topologischer Sachverhalte und Konstruktionen in HST

vorgelegt im November 2008 im
Fachbereich C - Fachgruppe Mathematik der
Bergischen Universität Wuppertal
als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Dr. rer. nat.

von

Ulf Leonard Clotz

April 2009

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20090586
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20090586]

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit besteht aus zwei Hauptteilen, welche aber nicht völlig voneinander getrennt werden können. Der erste Teil baut auf der Arbeit von WIETSCHORKE [32] auf und beschäftigt sich mit der Beziehung zwischen einer so genannten *externen Äquivalenzrelation* und den daraus konstruierten Topologien. Dabei ist ein erklärtes Ziel, einige der Ergebnisse aus [32] exemplarisch in der Theorie **HST**[1] erneut herzuleiten, um zu zeigen, dass viele in **IST**[2] formal geführte Beweise nun durch eine viel konkretere, mengentheoretische Beschreibung ersetzt werden können.

Die Grundidee der externen Relationen ist folgende: Hat man einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gegeben und betrachtet die nonstandard Erweiterung $({}^*X, {}^*\mathcal{T})$[3], so ist für (genügend interessante Topologien) der Schnitt $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} {}^*V \setminus \{{}^*x\}$, wobei $\mathcal{V}(x)$ die Menge der Umgebungen von x ist, nicht leer. Ist die Topologie Hausdorffsch, so sind für verschiedene Punkte in X die (externen) Teilmengen $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} {}^*V$ von ${}^*X$ disjunkt und entsprechen somit den Äquivalenzklassen einer Relation, die auf einer gewissen Teilmenge von ${}^*X$ definiert ist. Zwei (interne) Elemente von ${}^*X$ stehen somit in Relation zueinander, wenn sie in einer gemeinsamen „Umgebung“ liegen.

Durch diese Schnitte ist die Topologie selbst eindeutig bestimmt, weil man aus ihnen sämtliche Umgebungen eines Punktes rekonstruieren kann. Damit stellt sich die Frage, wie eine Relation auf ${}^*X$ aussehen muss, damit ihre Äquivalenzklassen ebenfalls auf diese Art und Weise eine Topologie liefern. Etwas allgemeiner kann man fragen, ob es zumindest immer eine Topologie gibt, deren Umgebungsschnitte stets eine der Äquivalenzklassen umfassen.

Es stellt sich heraus, dass der Begriff der externen Äquivalenzrelation zu allgemein ist, um enge Beziehungen zur Topologie herstellen zu können. Aber unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an die Form der Relation und die Struktur der zugrunde liegenden Menge erhält man zufriedenstellende bis erschöpfende Antworten auf diese Fragen.

[1] siehe [9] und im Anhang ab Seite 119

[2] siehe etwa [19] oder [32]

[3] welche man auf verschiedene Arten erhalten kann

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit der Beschreibung gewisser topologischer Sachverhalte mittels nonstandard Methoden. Ein Grundgerüst dazu haben wir bereits im ersten Teil geschaffen, um die dortige Fragestellung überhaupt sinnvoll formulieren zu können. Weiter stellt sich heraus, dass einige im ersten Teil angewandte Methoden auch hier weiterhelfen, weshalb wir sie dort allgemeiner formulieren, als zunächst nötig. Auf der anderen Seite wiederum benutzen wir im ersten Teil Ergebnisse über topologische Strukturen, die wir erst im zweiten Teil präsentieren.

Hat man nun eine Topologie $\mathcal{T}$ gegeben, so kann man die Konstruktion der sogenannten *Umgebungsmonade* $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} {}^*V$ auch auf beliebige interne Elemente übertragen, indem man alle Mengen der Form ${}^*V$ mit $V \in \mathcal{T}$, welche das interne Element enthalten, schneidet. Damit erhält man eine genauere Beschreibung topologischer Sachverhalte. Zudem nutzen wir dabei die Möglichkeiten von **HST**, weil diese externen Schnitte tatsächlich Mengen im Sinne dieser Theorie sind. Weiterhin formulieren wir einige für interne Mengen bekannte Ergebnisse nun auch für bestimmte externe Mengen.

Unter anderem beschäftigen wir uns mit parakompakten Räumen und untersuchen damit auch lokalendliche Überdeckungen. Dabei erweist es sich als sehr vorteilhaft, insbesondere *entlegene Punkte* des topologischen Raumes zu betrachten. Wir nennen einen Punkt $\mathfrak{x} \in {}^*X$ entlegen, wenn es keinen Punkt $x \in X$ gibt, sodass $\mathfrak{x}$ in allen ($*$ - Bildern von) Umgebungen von x liegt. Mit Hilfe dieser entlegenen Punkte finden wir nun interessante Formulierungen für Regularität und die Eigenschaft einer Familie, lokalendlich zu sein.

Eine genauere Übersicht über die einzelnen Kapitel und Abschnitte werden diesen jeweils vorangestellt.

Wie schon angedeutet, liegt dieser Arbeit als mengentheoretisches Fundament die Nonstandard-Mengentheorie **HST** von Kanovei und Reeken zugrunde. Diese wird ausführlich in [9] vorgestellt und besprochen. Auch wenn wir zu Beginn einige wichtige Eigenschaften dieses Mengen-Universums aufführen werden, müssen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit immer wieder auf [9] selbst verweisen.

Die benötigten Ergebnisse aus [32] werden wir entweder im Rahmen der Arbeit erneut herleiten oder sie mit einem Verweis auf ihre Herkunft formulieren.

Die topologischen Grundlagen und Bezeichnungen der standard Welt haben wir im Wesentlichen [4] und [12] entnommen.

Kapitel 1

Vorbereitungen

In diesem Kapitel schaffen wir die Grundlage für die restliche Arbeit. Zunächst präsentieren wir kurz die Mengentheorie **HST** und stellen die (für uns) wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge zur Verfügung, sowie einen Großteil der verwendeten Bezeichnungen und Notationen. Dies kann natürlich nur eine Orientierungshilfe sein und keine vollständige Einführung in das Arbeiten mit Nonstandard-Mengentheorien im Allgemeinen und **HST** im Besonderen.

Anschließend beschäftigen wir uns näher mit gewissen Argumenten der Nonstandard-Mathematik. Insbesondere erarbeiten wir den Begriff der *Filtermonade* und stellen damit klar, wie wir diese Bezeichnung verwenden. Mit Hilfe dieser Filtermonaden verschaffen wir uns einen Einblick in nonstandard Argumente und Charakterisierungen in der mengentheoretischen Topologie. Auf diesem Weg stellen wir bereits einige Lemmata und Sätze zur Verfügung, die später nützlich sein werden.

1.1 HST

Wie schon eingangs erwähnt, arbeiten und argumentieren wir im **HST**-Universum. In diesem Abschnitt wollen wir einen kleinen Überblick über die Struktur dieses Mengen-Universums bieten und dabei die in diesem Zusammenhang verwendete Notation für den Rest der Arbeit klären. Die Axiome dieses Systems sind im Anhang ab Seite 119 aufgelistet und werden in serifenloser Schrift zitiert.

Zu Beginn klären wir kurz die Verwendung einiger mathematischer Symbole: Geordnete Paare schreiben wir in spitzen Klammern $\langle x, y \rangle$. Für Teilmengen bzw. Obermengen benutzen wir $\subseteq$ bzw. $\supseteq$, $A \cap B$ bezeichnet den Schnitt, $A \cup B$ die Vereinigung und $A \setminus B$ die mengentheoretische Differenz zweier Mengen A und B. Ist A ein linearer Teilraum von B, so schreiben wir $A \sqsubseteq B$. Diese Operationen (und weitere wie z.B. $+$, $\cdot$, Abschlüsse, Brüche usw.) müssten streng genommen zunächst in $\mathbb{WF}$ als unserem **ZFC**-Universum (siehe unten) als Abkürzungen definiert und per $*$ übertragen werden. Oder man definiert sie allgemein (per $\in$-Formel) und betrachtet im jeweiligen Universum $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ oder $\mathbb{I}$ die Einschränkung[1]. Beides würde zur Unleserlichkeit der Formeln führen, weshalb wir diese Symbole im gesamten Universum ohne Zusätze verwenden. Dies wird auch voraussichtlich keinerlei Missverständnisse hervorrufen.

Im **HST**-Universum lassen sich mehrere Klassen definieren, von denen jede ihrerseits selbst als Mengen-Universum dienen kann. Aufgrund der Beziehungen dieser Klassen untereinander lässt sich sowohl der interne Zugang zu Nonstandard-Methoden (wie etwa mit **IST**/**BST**), als auch die Superstruktur-Methode („$*$-Methode") innerhalb des Gesamt-Universums realisieren.

Die (für uns) wichtigsten Klassen sind folgende:

$\mathbb{H}$ das gesamte **HST**-Universum,

$\mathbb{WF}$ die Klasse aller wohlfundierten (d.h. $\in$-wohlgeordneten) Mengen,

$\mathbb{S}$ die Klasse aller standard Mengen,

$\mathbb{I}$ die Klasse aller internen Mengen,

$\mathtt{Ord}$ die Klasse aller Ordinalzahlen.

Das Universum $\mathbb{H}$ mag aufgrund der vielen Axiome zunächst unübersichtlich erscheinen. Weil Regularität und Potenzmengenaxiom nicht für ganz $\mathbb{H}$ zur Verfügung

[1]Eine $\in$-Formel ist in unserer formalen Sprache (s. S. 119) ohne Verwendung des einstelligen Prädikats $\mathtt{st}$ gebildet und kann als Formel über **ZFC** gelesen werden. Die Einschränkung einer solchen Formel etwa auf $\mathbb{S}$ geschieht, indem die Quantoren $\forall$, bzw. $\exists$ durch $\forall^{\mathtt{st}}$, bzw. $\exists^{\mathtt{st}}$ ersetzt werden. Dabei steht $\forall^{\mathtt{st}} x$ für $\forall x\,(\mathtt{st}\,x \Rightarrow \dots)$ und $\exists^{\mathtt{st}} x$ für $\exists x\,(\mathtt{st}\,x \wedge \dots)$.

stehen, ist $\mathbb{H}$ auch kein **ZFC**-Universum. Die weiteren Axiome von **HST** führen aber dazu, dass man in $\mathbb{H}$ die Klassen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ und $\mathbb{I}$ konstruieren kann, welche mehr innere Struktur enthalten und auch untereinander in Beziehung stehen. Dabei ist der Wechsel aus dem Gesamtuniversum $\mathbb{H}$ in eins der Teiluniversen nicht mit einer Änderung der formalen Sprache verbunden – wir benutzen stets ein und dieselbe $\in$-Relation, welche Teil der formalen Sprache ist. Befindet man sich nun in einem dieser Teiluniversen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ oder $\mathbb{I}$, so führen Konstruktionen, welche ohne das Prädikat $\mathtt{st}$ durchgeführt werden, auch nicht wieder hinaus (vergleiche Korollar 1.1.2).

Die erste wichtige Unterscheidung in $\mathbb{H}$ ist diejenige zwischen *internen* und *externen* Mengen. Dabei heißt eine Menge *intern*, wenn sie Element einer standard Menge ist (und eine Menge X heißt *standard*, wenn die Formel $\mathtt{st}X$ wahr ist). *Extern* heißen alle Mengen, die nicht intern sind.

Die Klasse $\mathbb{WF}$ ist transitiv und abgeschlossen bezüglich $\subseteq$ (d.h., ist $X \subseteq \mathbb{WF}$ eine Menge des Gesamtuniversums, so ist auch $X \in \mathbb{WF}$). Außerdem ist sie ein **ZFC**-Universum. Streng genommen bedeutet dies, dass alle **ZFC**-Axiome eingeschränkt auf $\mathbb{WF}$-Mengen erfüllt werden. Im konkreten Fall kann man auf diese Einschränkung oft verzichten, weil die betrachteten Mengen eben aufgrund der inneren Struktur von $\mathbb{WF}$ sowieso $\in$-wohlgeordnet sind. Daher ist es durchaus legitim, die Klasse $\mathbb{WF}$ als „das“ **ZFC**-Universum zu betrachten. Man beachte, dass der überwiegende Teil von $\mathbb{WF}$ aus externen Mengen besteht.

Die Klasse $\mathbb{S}$ erfüllt ebenfalls sämtliche **ZFC**-Axiome, was sich direkt aus den **HST**-Axiomen ergibt. Allerdings ist hierbei die Einschränkung der verwendeten Formeln auf standard Mengen unerlässlich. So erhält man etwa aus der $\in$-Formel, welche die natürlichen Zahlen definiert (dies ist die bekannte Definition aus **ZFC**), durch Relativierung auf $\mathbb{S}$ die standard Menge der standard natürlichen Zahlen. In dieser Menge liegen auch nichtstandard Elemente, welche von den auf $\mathbb{S}$ eingeschränkten Formeln allerdings nicht „gesehen“ werden.

Die Klasse $\mathbb{I}$ erhält man, indem man nun auch alle diese nichtstandard Elemente der standard Mengen zulässt. Das interne Universum ist somit die transitive Hülle des standard Universums. Aufgrund des Transfer-Axioms erfüllt auch $\mathbb{I}$ sämtliche **ZFC**-Axiome – eingeschränkt auf interne Mengen. Dabei ist das Auswählen von Elementen hier kein Problem, da alle Elemente einer internen Menge ebenfalls intern sind. Allerdings gibt es Teilmengen interner Mengen, welche nicht mehr intern sind, und diese können „so zahlreich“ sein, dass die Potenzmenge gar nicht mehr existiert (auch nicht als externe Menge).

Die Ordinalzahlen sind die „Gleichen“ wie in **ZFC** und liegen (ohne Einschränkungen bei der formalen Definition) in $\mathbb{WF}$.

Aufgrund der inneren Struktur des Gesamtuniversums erhält man einen $\in$-Isomorphismus zwischen $\mathbb{WF}$ und $\mathbb{S}$, der naheliegenderweise mit $*$ bezeichnet wird – und das Bild einer Menge $M \in \mathbb{WF}$ mit ${}^*M$. Damit gilt für eine $\in$-Formel (d.h. das Prädikat st kommt nicht vor) φ und Mengen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{WF}$ also:

$$\varphi^{\mathtt{wf}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\mathtt{st}}({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n)$$

Mit dieser Beziehung kann man ganz leicht aus Transfer (siehe im Anhang) den sogenannten $*$-Transfer folgern, der später noch nützlich sein wird. Dazu sei φ wieder eine $\in$-Formel:

$*$-Transfer $\qquad \varphi^{\mathtt{wf}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\mathtt{int}}({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n)$

Ist eine Menge $M \in \mathbb{WF}$ gegeben und ${}^*M \in \mathbb{S}$ die entsprechende standard Menge, so sind die Elemente von ${}^*M$ entweder standard oder nichtstandard, aber alle intern. Die Teilmenge der standard Elemente von ${}^*M$ bezeichnen wir mit ${}^*_\sigma M = {}^*M \cap \mathbb{S}$, was in der Tat eine *Menge* ist, allerdings meist extern. Es gilt: ${}^*_\sigma M = \{{}^*m : m \in M\}$.

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ usw. werden (auf die gleiche Weise wie in **ZFC**, also insbesondere mit $\in$-Formeln) in $\mathbb{H}$ definiert, liegen aufgrund ihrer Struktur in $\mathbb{WF}$ und behalten dort ihre **ZFC**-Bedeutung. Dabei sei hier $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Es gilt die Besonderheit, dass ${}^*n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei wir durchaus die Notation ${}^*n$ verwenden, wenn deutlich gemacht werden soll, dass wir in $\mathbb{S}$, bzw. $\mathbb{I}$ argumentieren.

Sprechen wir von „natürlichen Zahlen“ oder „endlich“, so meinen wir immer die (externe) Bedeutung in $\mathbb{WF}$. Die Elemente von ${}^*\mathbb{N}_0$ nennen wir allgemein *hypernatürliche Zahlen*. Eine Menge, welche bijektiv zu einer hypernatürlichen Zahl ist, bezeichnen wir als *hyperendlich* oder auch *$*$-endlich*. Die nichtstandard Elemente von ${}^*\mathbb{N}_0$ nennen wir *unendlich* und für die Menge aller unendlichen hypernatürlichen Zahlen schreiben wir auch ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = {}^*\mathbb{N}_\infty$. Für hyperendliches $X \in \mathbb{I}$ sei $\#X$ die Elementeanzahl von X (also das $N \in {}^*\mathbb{N}_0$, welches bijektiv zu X ist).

Analoges gilt für die Verwendung der Begriffe *hyperrational* und *hyperreell*. Dabei bezeichnen wir z.B. hyperreelle Zahlen als endlich, wenn sie betragsmäßig durch eine natürliche Zahl (endlich!) beschränkt und als unendlich, wenn sie größer als jede natürliche Zahl sind. Um Verwirrung zu vermeiden bezüglich der Tatsache, dass bei hypernatürlichen Zahlen gerade endlich mit standard und unendlich mit nichtstandard übereinstimmt, nennen wir endliche hyperreelle Zahlen auch *begrenzt*.

Allgemein bezeichne ${}_{\sigma}X = X \cap \mathbb{S}$ die Menge der standard Elemente einer beliebigen Menge X und ${}^{\mathsf{S}}X$ die standard Menge mit ${}_{\sigma}({}^{\mathsf{S}}X) = {}_{\sigma}X$. Diese existiert nach Standardisierung. Weiter benutzen wir für jede gerichtete Menge $(G, \prec)$ die Schreibweise ${}^{*}G_{\infty} := \{\mathfrak{g} \in {}^{*}G : \forall g \in G\,({}^{*}g \prec \mathfrak{g})\}$.

Für eine beliebige Menge X sei $\mathfrak{P}(X)$ die *Potenzmenge von* X, d.h. die Menge aller Teilmengen von X. Dabei ist für $M \in \mathbb{WF}$ stets $\mathfrak{P}(M) \in \mathbb{WF}$. Ist $\mathfrak{X} \in \mathbb{I}$ interne Menge, so existiert $\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ im Allgemeinen nicht mehr, selbst wenn $\mathfrak{X}$ standard sein sollte. Allerdings gibt es immer $\mathfrak{P}_{\mathtt{int}}(\mathfrak{X})$, die Menge aller internen Teilmengen von $\mathfrak{X}$. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{P}_{\mathtt{fin}}(\mathfrak{X})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathfrak{X}$. Diese Notation $\mathfrak{P}_{\mathtt{fin}}$ übernehmen wir auch für $\mathbb{WF}$-Mengen.

Bei den bisherigen Erläuterungen und Definitionen haben wir uns schon im Wesentlichen an folgende Notationsregeln gehalten, die wir (so weit möglich) auch im Rest der Arbeit beibehalten werden:

- Mengen in $\mathbb{WF}$ erhalten normale lateinische Buchstaben $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, deren Elemente oft passend $a, b, c, \ldots, x, y, z$ (wobei diese Elemente ja auch Mengen sind). Damit werden ${}^{*}A, {}^{*}B, \ldots$ und ${}^{*}a, {}^{*}b, \ldots$ zu standard Mengen. Diese Notation verwenden wir auch für standard Mengen, ohne vorher explizit die Menge in $\mathbb{WF}$ gewählt zu haben.

- Für Mengen/Elemente aus $\mathbb{I}$ verwenden wir Frakturschrift $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, bzw. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Dabei können interne Mengen durchaus auch standard sein. Eine Ausnahme werden wir bei hyperendlichen Zahlen machen, die auch mit N etc. bezeichnet werden. Wir erhoffen uns davon eine bessere Lesbarkeit bei hyperendlichen Summen oder Ähnlichem.

  Weil (strikt) externe Mengen sehr selten vorkommen, führen wir für diese keine eigene Notation ein. Gilt eine gewisse Eigenschaft nicht nur für interne Mengen, sondern explizit auch für externe, so verwenden wir dennoch Frakturschrift und weisen darauf hin, dass in diesem Fall auch externe Mengen zugelassen sind.

- Griechische Buchstaben sind für Ordinal- und Kardinalzahlen reserviert, mit Ausnahme von ϕ, φ, ψ, die oft Abbildungen oder Formeln repräsentieren.

- Spezielle Mengen oder Operationen, welche im Laufe der Arbeit oder eines Abschnitts immer wieder auftauchen, werden oft durch serifenlose (z.B. $\mathsf{R}, \mathsf{S}, \mathsf{E}$) oder fette Buchstaben (z.B. $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{m}$) gekennzeichnet.

Diese Konvention bezüglich Mengen aus $\mathbb{WF}$, bzw. aus $\mathbb{I}$ erweist sich als hilfreich, wenn wir Familien $(M_i)_{i\in I}$ aus $\mathbb{WF}$ mittels $*$ nach $\mathbb{S}$ übertragen: Im Grunde ist $(M_i)_{i\in I} = \{M_i : i \in I\}$ eine Abbildung $M\colon I \to \mathcal{M}$ aus der Indexmenge I in eine genügend große (d.h. alle M_i umfassende) Menge $\mathcal{M}$. Damit gilt per $*$-Transfer also ${}^*M\colon {}^*I \to {}^*\mathcal{M}$ mit ${}^*M({*i}) = {}^*(M_i)$ für jedes $i \in I$. Um aber eine Notation wie ${}^*M_{\mathfrak{i}}$ zu vermeiden, die irreführend ist (standard oder nicht standard hängt von $\mathfrak{i}$ ab – trotz des $*$ an M), „übersetzen" wir wie folgt:

$$^*\big((M_i)_{i\in I}\big) = {}^*\{M_i : i \in I\} = \big\{\mathfrak{M}_{\mathfrak{i}} : \mathfrak{i} \in {}^*I\big\} = (\mathfrak{M}_{\mathfrak{i}})_{\mathfrak{i}\in{}^*I} \tag{1.1}$$

Dabei weist ${}^*I$ darauf hin, dass die gesamte Familie als Ganzes standard ist und die Frakturschrift $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{i}$, dass interne Dinge betrachtet werden.

Die Menge aller Abbildungen von der Menge X in die Menge Y bezeichnen wir auch mit Y^X.

Im Folgenden formulieren wir noch einige Eigenschaften des **HST**-Universums, um sie später zitieren zu können.

Wir beginnen mit einem wichtigen Hilfsmittel für nonstandard Argumentationen:

Definition 1.1.1. Sei $\mathfrak{X}$ eine interne Menge. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$ heißt *ausreichende Teilmenge* von $\mathfrak{X}$, falls $\mathfrak{M}$ hyperendlich ist und alle standard Elemente von $\mathfrak{X}$ enthält, d.h. falls $\#\mathfrak{M} \in {}^*\mathbb{N}_0$ und ${}_\sigma\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ gilt. $\mathscr{A}(\mathfrak{X})$ bezeichne die Menge aller ausreichenden Teilmengen von $\mathfrak{X}$. ◇

Dass dieser Begriff tatsächlich sinnvoll ist, zeigt das nächste Lemma. Für dessen Beweis benutzen wir ein Ergebnis aus [9], das wir hier daher wiederholen.

Korollar 1.1.2: (vgl. [9, Cor. 1.1.10])

1. Ist $\psi(x_1,\dots,x_n,y)$ eine $\in$-Formel und $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n,\mathfrak{X} \in \mathbb{I}$, dann gehört auch die Menge $\mathfrak{Y} = \big\{\mathfrak{y} \in \mathfrak{X} : \psi^{\mathtt{int}}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n,\mathfrak{y})\big\}$ zu $\mathbb{I}$.
2. Dasselbe gilt für die Klassen $\mathbb{WF}$ und $\mathbb{S}$ mit den Relativierungen $\psi^{\mathtt{wf}}$, bzw. $\psi^{\mathtt{st}}$.

   Alle drei Klassen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ und $\mathbb{I}$ sind also abgeschlossen unter $\in$-Definitionen. □

Lemma 1.1.3 (Überhang): Seien $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ interne Mengen mit ${}_\sigma\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$. Dann existiert eine ausreichende Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Y}$.

Beweis: (Vergleiche [9, Ex. 1.3.8 (1)]) Sei $\mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ beliebig aber fest. Bilde für ${}^*x \in {}_\sigma\mathfrak{X}$ die internen Mengen $\mathfrak{C}_x := \{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{P}_{\mathtt{int}}(\mathfrak{X}) : {}^*x \in \mathfrak{Z} \wedge \#\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{n}\}$. Es wird $\mathfrak{C}_x$ aus der internen Menge $\mathfrak{P}_{\mathtt{int}}(X)$ per intern relativierter Formel ausgesondert, ist also selbst intern nach Korollar 1.1.2. Weiter sei $\mathcal{X} := \{\mathfrak{C}_x : {}^*x \in {}_\sigma X\}$. $\mathcal{X}$ ist von Standardgröße[2] und besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft (EDE), also ist nach Saturation $\bigcap \mathcal{X} \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein internes $\mathfrak{Z}_0$ mit ${}_\sigma\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Z}_0$ und $\#\mathfrak{Z}_0 \leq \mathfrak{n}$. Nach Voraussetzung war ${}_\sigma\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, also ist ${}_\sigma\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Z}_0 \cap \mathfrak{Y} =: \mathfrak{M}$. Somit ist auch $\mathfrak{M} \in \mathbb{I}$, ${}_\sigma\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Z}_0 \subseteq \mathfrak{X}$ und $\#\mathfrak{M} \leq \#\mathfrak{Z}_0$. Natürlich gilt auch $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Y}$. ∎

Oft wählt man obige interne Menge $\mathfrak{Y}$ als Teilmenge einer standard Menge.

Folgerung 1.1.4: 1. Ist $X \in \mathbb{WF}$ eine Menge und φ eine $\in$-Formel mit ${}^*_\sigma X \subseteq \mathfrak{Y}$ für $\mathfrak{Y} := \left\{\mathfrak{x} \in {}^*X : \varphi^{\mathtt{int}}(\mathfrak{x})\right\}$, so gibt es eine hyperendliche Teilmenge von ${}^*X$, deren Elemente alle $\varphi^{\mathtt{int}}$ erfüllen.

2. Gilt eine intern beschreibbare Eigenschaft für alle natürlichen Zahlen, so gilt sie auch für eine unendliche hypernatürliche Zahl.

Beweis: 1. Nach Korollar 1.1.2 ist $\mathfrak{Y}$ intern, also existiert nach Lemma 1.1.3 eine ausreichende Teilmenge von ${}^*X$, die in $\mathfrak{Y}$ enthalten ist.

2. Ist φ eine $\in$-Formel, sodass $\varphi^{\mathtt{int}}$ besagte intern beschreibbare Eigenschaft ist, und $\mathfrak{Y} = \left\{\mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N} : \varphi^{\mathtt{int}}(\mathfrak{n})\right\}$, so ist $\mathfrak{Y}$ intern mit $\mathbb{N} = {}_\sigma{}^*\mathbb{N} \subseteq \mathfrak{Y}$. Also existiert ein ausreichendes $\mathfrak{M}$ mit $\mathbb{N} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ und $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Y}$. Da $\mathbb{N}$ nicht intern ist (sonst wäre auch ${}^*\mathbb{N}_\infty$ intern und enthielte ein intern minimales Element), muss also $\mathfrak{M}$ eine unendliche hypernatürliche Zahl enthalten. ∎

Das nächste Lemma wird beim Arbeiten mit *Monaden* und externen Relationen hilfreich sein, weil dort ebenfalls mit standardgroßen Schnitten gearbeitet wird.

Lemma 1.1.5: Für $\lambda \in \mathtt{Ord}$ sei $(\mathfrak{x}_\eta)_{\eta\in\lambda}$ eine $\subseteq$-absteigende Kette interner Mengen und $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{I}$ eine nichtleere Familie von Standardgröße.
Ist $\bigcap\limits_{\eta\in\lambda} \mathfrak{x}_\eta \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, so existiert ein $\eta_0 \in \lambda$ mit $\mathfrak{x}_{\eta_0} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

[2] siehe Seite 121

Beweis: Nach [9, Cor. 1.3.6] existieren endliche Teilmengen $\lambda' \subseteq \lambda$ und $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, sodass $\bigcap\limits_{\eta \in \lambda'} \mathfrak{x}_\eta \subseteq \bigcup \mathcal{A}'$ ist. Da $\mathfrak{x}_\eta \supseteq \mathfrak{x}_{\eta'}$ für $\eta < \eta'$ ist, folgt $\bigcap\limits_{\eta \in \lambda'} \mathfrak{x}_\eta = \mathfrak{x}_{\eta_0}$ für $\eta_0 := \max\{\eta \in \lambda'\}$. Somit folgt $\mathfrak{x}_{\eta_0} \subseteq \bigcup \mathcal{A}' \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. ■

Hier hat man schon gesehen, dass wir für die Schnittmenge beide Notationen $\bigcap \mathcal{X}$ und $\bigcap_{i \in I} X_i$ verwenden, abhängig davon, was uns einfacher erscheint und ob wir eher an eine Menge $\{X : \phi(X)\}$ oder eine Familie $\{X_i : i \in I\}$ denken. Analoges gilt für die Vereinigung.

Im nächsten Satz fassen wir einige wichtige Beziehungen zwischen den Eigenschaften „standard" und „endlich" zusammen. Für den Beweis verweisen wir auf [9] (Lemma 1.2.16).

Satz 1.1.6

1. Ist $X \subseteq \mathbb{S}$ eine endliche Menge, die nur aus standard Elementen besteht, dann ist $X \in \mathbb{S}$ selbst standard.

2. Ist $I \subseteq \mathbb{S}$ mit $I \in \mathbb{I}$, d.h. I ist intern und enthält nur standard Elemente, dann ist I endlich (und somit standard).

3. Ist $X \in \mathbb{S}$ eine $*$-endliche Menge, dann ist sie sogar endlich und enthält nur standard Elemente: $X \subseteq \mathbb{S}$.

4. Ist $X \subseteq \mathbb{I}$ endlich, dann ist es auch intern: $X \in \mathbb{I}$. □

Zum Schluss geben wir noch ein paar Hinweise zur Verwendung von bestimmten Zeichen und Symbolen:

Sämtliche Sätze, Lemmata, Definitionen und so weiter sind gemeinsam durchlaufend nach Abschnitten nummeriert. Das Ende einer Definition wird durch ein ⋄ gekennzeichnet, das eines Beweises durch ■. Korollare und Sätze bzw. Lemmata, die nicht bewiesen werden, enden mit □.

Neue Begriffe werden beim ersten Auftreten kursiv gedruckt. Geschieht dies in einem einleitenden Text, folgt die Definition im weiteren Verlauf der Arbeit.

1.2 Nonstandard-Mathematik

Nach der Klärung der axiomatischen Grundlage geht es nun darum, mit diesen verschiedenen Ebenen einen „neuen“ Zugang zu verschiedenen mathematischen Bereichen zu finden. Dabei liegt es nahe, mit dem Begriff des *Filters* zu beginnen. Ein Filter ist sozusagen der Prototyp einer Familie, welche den Voraussetzungen für Saturation [3] genügt. Damit erhält man unmittelbar einen Einblick in die Möglichkeiten von Nonstandard-Argumenten.

Eine häufig verwendete Sorte von Filtern ist der *Umgebungsfilter* in einer Topologie. Diesen können wir nun mit den vorher erarbeiteten Methoden beschreiben und untersuchen. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass man jedem Element nicht mehr eine Familie von Umgebungen zuordnet, sondern nur noch eine ganz besondere, welche alle Informationen in sich vereint. Damit beschreiben diese *Umgebungsmonaden* die gegebene Topologie eindeutig und wir werden sehen, dass diese Beschreibung unter Zuhilfenahme zusätzlicher Strukturen, wie etwa Vektorräumen, besonders einfach wird. Allerdings sind diese Umgebungsmonaden im Allgemeinen externe Mengen, weshalb man beim Argumentieren mit Hilfe von Formeln sehr vorsichtig sein muss.

Im Rahmen der Topologie arbeitet man aber nicht nur mit Umgebungsfiltern, sondern beschreibt auch andere Konzepte mit Filtern, worauf wir am Ende dieses Abschnitts kurz eingehen.

1.2.1 Filter und Monaden

Der Begriff des Filters ist für beide mathematischen Bereiche, die wir hier behandeln, ein sehr wichtiger:

In der Topologie, wo er bei der Beschreibung von Umgebungen, aber auch zur Verallgemeinerung des Begriffs der Konvergenz von Folgen dient.

In der Nonstandard-Mathematik, wo man anhand des einfachen Konstruktes des Filters sehr schnell und leicht die Kraft der Nonstandard-Argumentation erkennt.

Filter allgemein

Die folgende Definition dient als Erinnerung, bzw. Klarstellung, wie wir den Begriff des Filters verwenden werden.

Unter einem *Filter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge X verstehen wir ein System von Teilmengen von X, d.h. $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, mit den Eigenschaften

(F1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

[3] siehe Seite 121

(F2) ist $U \in \mathcal{F}$ und $U \subseteq V \subseteq X$, so ist auch $V \in \mathcal{F}$,

(F3) sind $U, V \in \mathcal{F}$, so ist auch $U \cap V \in \mathcal{F}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, die zu jedem $U \in \mathcal{F}$ ein $V \subseteq U$ enthält, heißt *Filterbasis von* $\mathcal{F}$.

Man beachte, dass bereits jedes System $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit den beiden Eigenschaften

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und

(B2) sind $U, V \in \mathcal{B}$, so existiert ein $W \in \mathcal{B}$ mit $W \subseteq U \cap V$

einen Filter $\mathcal{F}$ auf X erzeugt, indem man sämtliche Obermengen aller Elemente von $\mathcal{B}$ hinzunimmt. Damit ist $\mathcal{B}$ Filterbasis des (von ihr erzeugten) Filters $\mathcal{F}$ und man nennt ein System, welches (B1) und (B2) erfüllt, eine *Filterbasis* (an sich).

Ist weiter $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein System mit der *endlichen Durchschnittseigenschaft* (EDE), d.h. endliche Schnitte von Elementen von $\mathcal{S}$ sind nicht leer, so entsteht durch Hinzunahme eben dieser endlichen Schnitte eine Filterbasis und wir nennen eine derartige Familie $\mathcal{S}$ eine *Filtersubbasis*.

Bemerkung 1.2.1: Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Filter auf derselben Menge X, so ist auch $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ein Filter auf X.

Bemerkung 1.2.2: Ein interessantes und auch später noch wichtiges Beispiel für einen Filter ist der so genannte *diskrete Filter*:
Sei $X \in \mathbb{WF}$ eine Menge und $\mathfrak{m} \subseteq {}^*X$ eine beliebige (eventuell externe) Teilmenge der dazugehörigen standard Menge ${}^*X \in \mathbb{S}$. Wir definieren den diskreten Filter $\mathsf{Fil}(\mathfrak{m})$ von $\mathfrak{m}$ als

$$\mathsf{Fil}(\mathfrak{m}) := \left\{ F \in \mathfrak{P}(X) \,:\, \mathfrak{m} \subseteq {}^*F \right\}. \tag{1.2}$$

Wir wählen also alle Teilmengen von X aus, deren standard Erweiterung in $\mathbb{S}$ die gegebene Menge $\mathfrak{m}$ als Teilmenge enthält.

Für Punkte $\mathfrak{x} \in {}^*X$ schreiben wir als Abkürzung $\mathsf{Fil}(\mathfrak{x})$ für $\mathsf{Fil}(\{\mathfrak{x}\})$.

Bemerkung 1.2.3: Ist $\mathfrak{x} \in {}^*X$ ein beliebiger Punkt (standard oder nichtstandard), so ist $\mathsf{Fil}(\mathfrak{x})$ ein *Ultrafilter* (d.h. für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt $A \in \mathsf{Fil}(\mathfrak{x})$ oder $X \setminus A \in \mathsf{Fil}(\mathfrak{x})$).

Monaden

Ein dem klassischen Konzept des Filters sehr nahe stehendes Konstrukt der Nonstandard-Mathematik ist die *Monade*. Wir verwenden den Begriff folgendermaßen:

Definition 1.2.4. (*nonstandard*) Sei $X \in \mathbb{WF}$ eine Menge und $\boldsymbol{m} \subseteq {}^*X \in \mathbb{S}$ eine (i.a. externe) Teilmenge. Existiert eine Familie $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ in $\mathbb{WF}$ mit

$$\boldsymbol{m} = \bigcap_{i \in I} {}^*A_i,$$

so heißt $\boldsymbol{m}$ eine *Monade* auf ${}^*X$. ◇

In **HST** ist demnach eine Monade in diesem Sinn gerade ein standardgroßer Schnitt von Standardmengen.

Bemerkung 1.2.5: Beliebige (standardgroße) Schnitte und endliche Vereinigungen von Monaden sind wieder Monaden.

Beziehungen zwischen Filtern und Monaden

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Filtern in $\mathbb{WF}$ und nichtleeren Monaden:

Satz 1.2.6
Jeder Filter erzeugt eine nichtleere Monade.

Beweis: Ist ein Filter $\mathcal{F}$ auf der Menge $X \in \mathbb{WF}$ gegeben, so ist ${}^*_\sigma\mathcal{F} = \{{}^*F : F \in \mathcal{F}\}$ standardgroße Familie interner (da standard) Teilmengen von ${}^*X$, welche die EDE besitzt. Nach Saturation ist also

$$\emptyset \neq \bigcap {}^*_\sigma\mathcal{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} {}^*F$$

eine nichtleere Monade. ■

Ist umgekehrt $\emptyset \neq \boldsymbol{m} \subseteq {}^*X$ eine Monade, so entsteht per

$$\mathcal{F} := \left\{ F \in \mathfrak{P}(X) : \boldsymbol{m} \subseteq {}^*F \right\} \tag{1.3}$$

wie oben bereits gesehen, ein Filter auf X (nämlich der diskrete Filter).

Weil wir in Zukunft fast immer einen Filter und seine Eigenschaften anhand der von diesem Filter erzeugten Monade untersuchen, bekommt diese einen eigenen Namen und ein abkürzendes Symbol:

Definition 1.2.7. (*nonstandard*) Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge X. Mit

$$\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} {}^*F$$

bezeichnen wir die *Filtermonade* des Filters $\mathcal{F}$. ◇

Ist nun $\emptyset \neq \boldsymbol{m} \subseteq {}^*X$ eine Monade und $\mathcal{F} := \mathsf{Fil}(\boldsymbol{m}) = \{F \in \mathfrak{P}(X) : \boldsymbol{m} \subseteq {}^*F\}$ der von $\boldsymbol{m}$ erzeugte (diskrete) Filter, so erkennt man schnell, dass die Filtermonade dieses diskreten Filters gerade mit der Monade selbst übereinstimmt, d.h. $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} = \boldsymbol{m}$. Umgekehrt ist $\mathcal{F}$ selbst der von der Filtermonade $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ erzeugte Filter.

Eine wichtige Eigenschaft von Filtern ist folgende:

Lemma 1.2.8: Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein Filter auf der ($\mathbb{WF}$-) Menge X, so existiert eine interne Menge $\mathfrak{F} \in {}^*\mathcal{F}$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$.

Beweis: Wähle eine ausreichende Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq {}^*\mathcal{F}$, dann ist $\mathfrak{A}$ hyperendlich, also $\bigcap \mathfrak{A} \in {}^*\mathcal{F}$ und wegen ${}^*_\sigma\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A}$ folgt $\bigcap \mathfrak{A} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$. ■

Damit sehen wir auch, wie aus einer Filtersubbasis $\mathcal{S}$ ein Filter $\mathcal{F}$ entsteht, da bereits diese Subbasis nach Saturation einen nichtleeren Schnitt $\bigcap \{{}^*S : S \in \mathcal{S}\}$ hat und der zu $\mathcal{S}$ gehörende Filter $\mathcal{F}$ gerade der von dieser Monade $\boldsymbol{m} = \bigcap \{{}^*S : S \in \mathcal{S}\}$ erzeugte diskrete Filter ist.

Lemma 1.2.9: Ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis des Filters $\mathcal{F}$, so gilt $\boldsymbol{m}_{\mathcal{S}} := \bigcap_{S \in \mathcal{S}} {}^*S = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$.

Beweis: Einerseits ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$, also folgt sofort $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{S}}$. Es sei nun andererseits $F \in \mathcal{F}$ beliebig, dann existieren $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ mit $\bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq F$, also ist auch $\boldsymbol{m}_{\mathcal{S}} \subseteq \bigcap_{i=1}^n {}^*S_i = {}^*\big(\bigcap_{i=1}^n S_i\big) \subseteq {}^*F$, und da F beliebig war, ist auch $\boldsymbol{m}_{\mathcal{S}} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$. ■

Lemma 1.2.10: Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Filter auf derselben Menge X und $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, so ist $\boldsymbol{m}_{\mathcal{H}} = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \cup \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$.

Beweis: Ist $H \in \mathcal{H}$ beliebig, so ist einerseits $H \in \mathcal{F}$, also $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq {}^*H$, und andererseits $H \in \mathcal{G}$, also $\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} \subseteq {}^*H$, und damit insgesamt $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \cup \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{H}}$.

Ist $\mathfrak{y} \notin \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \cup \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$, so existieren $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ mit $\mathfrak{y} \notin {}^*F$ und $\mathfrak{y} \notin {}^*G$. Dann ist $\mathfrak{y} \notin {}^*F \cup {}^*G \in {}^*_\sigma\mathcal{H}$, also $\mathfrak{y} \notin \boldsymbol{m}_{\mathcal{H}}$. ∎

Bemerkung 1.2.11: Ist $\mathfrak{x}$ nichtstandard, so enthält die Filtermonade des diskreten Filters $\mathsf{Fil}(\mathfrak{x})$ keine standard Elemente. Mehr noch, sie ist in folgendem Sinne minimal: Ist $\mathcal{G}$ ein beliebiger Filter auf X mit $\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} \cap \boldsymbol{m}_{\mathsf{Fil}(\mathfrak{x})} \neq \emptyset$, so folgt $\boldsymbol{m}_{\mathsf{Fil}(\mathfrak{x})} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$.

An dieser Stelle fügen wir noch ein kurzes Lemma ein, das wir später oft (implizit oder explizit) benutzen:

Lemma 1.2.12: Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf der Menge X und gilt $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{A}$ für ein internes $\mathfrak{A} \subseteq {}^*X$, so existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit ${}^*F \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis: Ist $\left({}^*X \setminus \mathfrak{A}\right) \cap {}^*F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, so ist mit Saturation auch

$$\left({}^*X \setminus \mathfrak{A}\right) \cap \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \left(\left({}^*X \setminus \mathfrak{A}\right) \cap {}^*F\right) \neq \emptyset,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ∎

Die nächsten beiden Sätze werden im Abschnitt 3.2 sehr nützlich sein, weil sie es ermöglichen, einige Aussagen, die wir über externe Äquivalenzrelationen erarbeiten, auch auf andere topologische Gebilde anzuwenden.

Satz 1.2.13

Sei $X \in \mathbb{WF}$ eine Menge, $\kappa \in \mathtt{Ord}$ und für jedes $\xi \in \kappa$ sei ein Filter $\mathcal{F}_\xi$ auf X gegeben mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\zeta} \quad \text{für alle} \quad \xi, \zeta \in \kappa \quad \text{mit} \quad \xi \leq \zeta.$$

Dann existiert eine gerichtete Menge $(\mathscr{G}, \preceq)$ und eine Abbildung $\mathsf{a}\colon \kappa \times \mathscr{G} \to \mathfrak{P}(X)$ mit

1. $\mathsf{a}(\xi, g) \in \mathcal{F}_\xi$ für jedes $\xi \in \kappa$ und alle $g \in \mathscr{G}$,
2. $\bigcap_{g \in \mathscr{G}} {}^*\big(\mathsf{a}(\xi, g)\big) = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi}$ für jedes $\xi \in \kappa$,
3. $\mathsf{a}(\xi_1, g_0) \subseteq \mathsf{a}(\xi_2, g_0)$ für jedes $g_0 \in \mathscr{G}$ und alle $\xi_1 \leq \xi_2$,

4. $\mathsf{a}(\xi_0, g_1) \subseteq \mathsf{a}(\xi_0, g_2)$ für jedes $\xi_0 \in \kappa$ und alle $g_2 \preceq g_1$.

Beweis: Es seien X, κ und $\mathcal{F}_\xi$ wie oben angegeben. Wir konstruieren zunächst

$$\mathscr{G}' := \prod_{\xi\in\kappa} \mathcal{F}_\xi = \left\{ f \in \big(\bigcup_{\xi\in\kappa} \mathcal{F}_\xi\big)^\kappa \;:\; \forall \xi \in \kappa\, (f(\xi) \in \mathcal{F}_\xi) \right\}$$

und damit

$$\mathscr{G} := \big\{ f \in \mathscr{G}' \;:\; \forall \xi_1, \xi_2 \in \kappa\, (\xi_1 \leq \xi_2 \Rightarrow f(\xi_1) \subseteq f(\xi_2)) \big\}\,.$$

Mit der Relation $g_1 \preceq g_2 \Leftrightarrow \forall \xi \in \kappa \big(g_2(\xi) \subseteq g_1(\xi)\big)$ wird $\mathscr{G}$ zu einer gerichteten Menge: Dass $\preceq$ eine Ordnung auf $\mathscr{G}$ ist, sieht man schnell. Seien nun $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$ beliebig. Definiere g_3 punktweise per $g_3(\xi) := g_1(\xi) \cap g_2(\xi) \in \mathcal{F}_\xi$, womit zunächst $g_3 \in \mathscr{G}'$ klar ist. Ist $\xi_1 \leq \xi_2$, so folgt $g_3(\xi_1) = g_1(\xi_1) \cap g_2(\xi_1) \subseteq g_1(\xi_2) \cap g_2(\xi_2) = g_3(\xi_2)$, also $g_3 \in \mathscr{G}$. Mit $g_1 \preceq g_3$, $g_2 \preceq g_3$ folgt, dass $\mathscr{G}$ gerichtet ist.

Die Abbildung $\mathsf{a}(\xi, g) := g(\xi)$ erfüllt nun alle Bedingungen:

1. Klar.

2. Aus 1. folgt, dass stets $\bigcap_{g\in\mathscr{G}}^{*}\big(\mathsf{a}(\xi, g)\big) \supseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi}$ für alle $\xi \in \kappa$ gelten muss. Für die andere Richtung zeigen wir per transfiniter Induktion über $\xi \in \kappa$:

   Ist $F \in \mathcal{F}_\xi$ beliebig, so gibt es ein $g \in \mathscr{G}$ mit $g(\xi) \subseteq F$.

   Sei also zunächst $F \in \mathcal{F}_0$ beliebig, dann ist die Abbildung g_F mit $g_F(0) = F$ und $g_F(\xi) = X$ für $\xi > 0$ in $\mathscr{G}$.

   Ist nun $\xi > 1$ und $F \in \mathcal{F}_\xi$ beliebig, so existiert zu $\zeta < \xi$ wegen $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\zeta} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi}$ ein $V \in \mathcal{F}_\zeta$ mit $V \subseteq F$ und nach Induktion ein $g_\zeta \in \mathscr{G}$ mit $g_\zeta(\zeta) \subseteq V$. Definiere nun

$$g_\xi(\gamma) := \begin{cases} g_\zeta(\gamma) & \text{falls } \gamma \leq \zeta \\ g_\zeta(\gamma) \cap F & \text{falls } \zeta < \gamma \leq \xi \\ g_\zeta(\gamma) \cup F & \text{falls } \xi < \gamma. \end{cases}$$

   Leichtes Nachrechnen liefert, dass $g_\xi \in \mathscr{G}$ und $g_\xi(\xi) \subseteq F$ ist.

   Insgesamt existiert also zu jedem $\xi \in \kappa$ und allen $F \in \mathcal{F}_\xi$ ein $g \in \mathscr{G}$ mit $g(\xi) \subseteq F$ und damit gilt $\bigcap_{g\in\mathscr{G}}^{*}\big(\mathsf{a}(\xi, g)\big) \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi}$.

3. Nach Wahl von $\mathscr{G}$.

4. Nach Wahl von $\preceq$. ∎

Verzichtet man auf die Bedingung $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\zeta}$ für $\xi \leq \zeta$, so genügt es schon, die Menge $\mathscr{G}'$ mit der Ordnung $\preceq$ aus dem Beweis zu betrachten. Definiert man dann für beliebiges (festes) $\xi_0 \in \kappa$ und beliebiges $F \in \mathcal{F}_{\xi_0}$ die Abbildung $g\colon \kappa \to \bigcup_{\xi\in\kappa} \mathcal{F}_\xi$ per $g(\xi_0) := F$ und $g(\xi) := X$ für alle $\xi \neq \xi_0$, so ist $g \in \mathscr{G}'$ mit $\mathsf{a}(\xi_0, g) \subseteq F$, also folgt wieder $\bigcap_{g\in\mathscr{G}'} {}^*(\mathsf{a}(\xi_0, g)) = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_{\xi_0}}$. Man erkennt leicht, dass auch $\mathscr{G}'$ bezüglich $\preceq$ eine gerichtete Menge ist und für jedes $\xi \in \kappa$ stets $\mathsf{a}(\xi, g) \subseteq \mathsf{a}(\xi, f)$ für alle $f \preceq g$ gilt.

Wir fassen für späteres Zitieren zusammen:

Satz 1.2.14
Sei $X \in \mathbb{WF}$ eine Menge, $\kappa \in \mathtt{Ord}$ und für jedes $\xi \in \kappa$ sei ein Filter $\mathcal{F}_\xi$ auf X gegeben.

Dann existiert eine gerichtete Menge $(\mathscr{G}', \preceq)$ und eine Abbildung $\mathsf{a}\colon \kappa \times \mathscr{G}' \to \mathfrak{P}(X)$ mit

1. $\mathsf{a}(\xi, g) \in \mathcal{F}_\xi$ für jedes $\xi \in \kappa$ und alle $g \in \mathscr{G}'$,
2. $\bigcap_{g\in\mathscr{G}} {}^*\big(\mathsf{a}(\xi, g)\big) = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi}$ für jedes $\xi \in \kappa$,
3. $\mathsf{a}(\xi_0, g_1) \subseteq \mathsf{a}(\xi_0, g_2)$ für jedes $\xi_0 \in \kappa$ und alle $g_2 \preceq g_1$. $\square$

1.2.2 Topologie

Die mengentheoretische Topologie eignet sich so gut zur Betrachtung mittels nonstandard Methoden, weil die zentralen Begriffe der offenen Menge und der Konvergenz durch Filter beschrieben werden können, also auf der nonstandard Ebene durch Monaden. Dabei ist man aber nicht auf das Konstrukt des Umgebungsfilters festgelegt, sondern kann auch alternative klassische Konzepte in nonstandard Argumentationen verwenden. So werden wir später sehen, dass es im Rahmen der Untersuchung externer Äquivalenzrelationen interessante Anwendungen für den Begriff des Abschlussoperators gibt.

Äquivalente Formulierungen

Wir greifen hier drei wichtige klassische Möglichkeiten, eine Topologie auf einer Menge zu definieren, auf und behandeln kurz die Verbindungen dieser Zugänge. Danach leiten wir die wichtigen nonstandard Konstruktionen her, um topologische Argumente durchzuführen. Anschließend behandeln wir die Spezialfälle des topologischen Vektorraums und lokalkonvexer Topologien, weil dort aufgrund der zusätzlichen Struktur die Charakterisierung mittels nonstandard Begriffen besonders einfach wird.

1. **System offener Mengen:**

   Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf der Menge X ist eine Familie $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit den Eigenschaften

   (O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

   (O2) sind $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, so ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$,

   (O3) ist I eine Menge und $\phi \in \mathcal{T}^I$ eine Abbildung, so ist $\bigcup \{\phi(i) \;:\; i \in I\} \in \mathcal{T}$.

   Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennt man die *offenen Mengen*.

2. **Umgebungsfilter:** Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf der Menge X ordnet jedem $x \in X$ einen Filter $\mathcal{U}_x \subseteq \mathfrak{P}(X)$ zu mit den Eigenschaften:

   (U1) Ist $U \in \mathcal{U}_x$, so ist $x \in U$,

   (U2) ist $U \in \mathcal{U}_x$ und $V \in \mathfrak{P}(X)$ mit $U \subseteq V$, so ist auch $V \in \mathcal{U}_x$,

   (U3) sind $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$, so ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$,

   (U4) ist $U \in \mathcal{U}_x$, so gibt es $V \in \mathcal{U}_x$ derart, dass für alle $y \in V$ stets $U \in \mathcal{U}_y$ folgt.

3. **Abschlussoperator:**

   Eine Abbildung $f\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ mit den Eigenschaften

   (AO1) $f(\emptyset) = \emptyset$,

   (AO2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$,

   (AO3) $A \subseteq f(A)$ für alle Teilmengen $A \subseteq X$ und

   (AO4) $f(f(A)) = f(A)$ für alle Teilmengen $A \subseteq X$

   heißt *Abschlussoperator*.

Ist eine Topologie $\mathcal{T}$ als System offener Mengen gegeben, so bilden für jedes $x \in X$ die Mengen $\mathcal{U}'_x := \{U \in \mathcal{T} \;:\; x \in U\}$ eine Filterbasis, deren zugehörige Filter $\mathcal{U}_x$ die Eigenschaften (U1) bis (U4) erfüllen.

Ist umgekehrt eine solche Zuordnung $x \mapsto \mathcal{U}_x$ mit (U1) bis (U4) gegeben, so erfüllt das System $\{U \in \mathfrak{P}(X) \;:\; \forall x \in U\, \exists V \in \mathcal{U}_x\, (V \subseteq U)\}$ die Bedingungen (O1) bis (O3).

Nennt man eine Teilmenge $A \subseteq X$ *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen (also Element der Topologie $\mathcal{T}$) ist und bezeichnet für eine Teilmenge $M \subseteq X$ den Schnitt $\overline{M} := \bigcap \{A \;:\; M \subseteq A \wedge X \setminus A \in \mathcal{T}\}$ aller abgeschlossenen Obermengen als den *Abschluss* von M, so erfüllt die Abbildung $M \mapsto \overline{M}$ die Eigenschaften (AO1) bis (AO4).

Ist umgekehrt eine solche Abbildung f gegeben und nennen wir die Fixpunkte von f (was wegen (AO4) gerade die Bilder unter f sind) abgeschlossen, so erfüllt das System der offenen Mengen (d.h. Komplemente von abgeschlossenen Mengen) die Eigenschaften (O1) bis (O3).

Ist ein System $\mathcal{B}_x$ für alle $x \in X$ gegeben mit

(UB1) ist $U \in \mathcal{B}_x$, so ist $x \in U$,

(UB2) zu $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_x$ existiert ein $U_3 \in \mathcal{B}_x$ mit $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$,

(UB3) zu jedem $U \in \mathcal{B}_x$ gibt es ein $V \in \mathcal{B}_x$ derart, dass für alle $y \in V$ stets $U \in \mathcal{B}_y$ gilt,

so ist $\mathcal{B}_x$ für jedes $x \in X$ eine Filterbasis und der dadurch erzeugte Filter $\mathcal{U}_x$ erfüllt gerade die Bedingungen (U1) bis (U4).

In der Nonstandard-Beschreibung von Topologien arbeiten wir im Wesentlichen mit den Umgebungsmonaden der standard (bzw. internen) Punkte. Diese kann man auffassen als die Filtermonade des Umgebungsfilters:

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, d.h. X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie auf X, so definieren wir in ${}^*X$ die *Umgebungsmonade* von $\mathfrak{x} \in {}^*X$ als

$$\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) := \bigcap \left\{ {}^*U \ : \ U \in \mathcal{T} \wedge \mathfrak{x} \in {}^*U \right\} .$$

Für $x \in X$ ist damit $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$ gerade die Filtermonade des Umgebungsfilters $\mathcal{U}_x$ von x.

Eine besondere Stellung bei der Betrachtung von Umgebungsmonaden nehmen diejenigen der standard Punkte ein: Kennt man die Umgebungsmonaden der standard Punkte, so kennt man auch die Topologie, denn man kann die Umgebungsfilter konstruieren: Nach Lemma 1.2.12 ist für jedes $x \in X$ stets

$$\mathcal{U}_x = \left\{ M \subseteq X \ : \ \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \subseteq {}^*M \right\} .$$

Ist etwa $\mathcal{S}$ eine weitere Topologie auf derselben Menge X, so ist $\mathcal{T}$ genau dann *feiner* als $\mathcal{S}$ (d.h. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$), wenn für alle $x \in X$ gilt: $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*x)$. In diesem Fall nennt man $\mathcal{S}$ *gröber* als $\mathcal{T}$.

Genauso benötigt man zur Charakterisierung von offenen bzw. abgeschlossenen Mengen lediglich standard Punkte:

Lemma 1.2.15: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so gilt:

1. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn für jedes Element $u \in U$ stets $\mu_{\mathcal{T}}({}^*u) \subseteq {}^*U$ gilt.

2. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jedes $x \in X$ aus $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^*A \neq \emptyset$ stets $x \in A$ folgt. $\square$

Wegen dieser herausragenden Stellung erhalten alle internen Punkte, die in der Umgebungsmonade eines standard Punktes liegen, auch eine besondere Bezeichnung:

Definition 1.2.16. (*nonstandard*) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Ein Punkt $\mathfrak{x} \in {}^*X$ heiße *standardnah*, wenn es ein $x \in X$ gibt mit $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({*x})$. $\mathtt{ns}({}^*X)$ bezeichne die (externe) Menge aller standardnahen Elemente von ${}^*X$.
2. Ein Punkt $\mathfrak{y} \in {}^*X$ heiße *entlegen*, wenn er nicht standardnah ist und die Menge aller entlegenen Punkte heiße $\mathtt{rmt}({}^*X) = {}^*X \setminus \mathtt{ns}({}^*X)$. $\diamond$

Das folgende Lemma formulieren wir für den späteren Gebrauch. Der Beweis ist eine leichte Folgerung von Lemma 1.2.12.

Lemma 1.2.17: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathfrak{x} \in {}^*X$, $\mathfrak{M} \subseteq {}^*X$ intern mit $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \subseteq \mathfrak{M}$, so existiert ein $V \in \mathcal{T}$ mit $\mathfrak{x} \in {}^*V \subseteq \mathfrak{M}$. $\square$

Betrachtet man Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so interessiert natürlich das Verhalten der Umgebungsmonaden unter diesen Abbildungen. Wir werden darauf später noch genauer eingehen, insbesondere bei der Verwendung stetiger Funktionen. Bereits hier können wir aber eine Beobachtung festhalten:

Lemma 1.2.18: Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, $\mathfrak{f}\colon {}^*X \to {}^*Y$ eine interne Abbildung, $\mathfrak{x} \in {}^*X$ und $\mathfrak{M} \subseteq {}^*Y$ eine interne Teilmenge mit $\mathfrak{f}(\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})) \subseteq \mathfrak{M}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{T}$ mit $\mathfrak{x} \in {}^*U$ und $\mathfrak{f}({}^*U) \subseteq \mathfrak{M}$.

Beweis: Unter den genannten Voraussetzungen ist $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \subseteq \mathfrak{f}^{-1}(\mathfrak{M})$, also folgt die Behauptung aus Lemma 1.2.17. $\blacksquare$

Auch wenn es bis hierhin den Anschein hat, interessieren wir uns beim Arbeiten im standard topologischen Raum ${}^*X$ nicht nur für standard offene Mengen. So heißen natürlich alle (internen) Elemente von ${}^*\mathcal{T}$ (interne) offene Mengen, und diese haben per $*$-Transfer intern betrachtet dieselben Eigenschaften, wie die standard offenen

Mengen. Es ist etwa, $\mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{M}}$ genau dann, wenn jede interne Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{x}$ nichtleeren Schnitt mit $\mathfrak{M}$ hat. Andererseits bringt gerade das Verhältnis zwischen standard und internen Mengen interessante Ergebnisse. Für jedes $\mathfrak{x} \in {}^*X$ gibt es laut Lemma 1.2.8 etwa eine interne Umgebung $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{x} \in \mathfrak{U} \subseteq \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})$.

Topologische Vektorräume

Die Beschreibung mit Umgebungsmonaden funktioniert besonders gut für lineare Topologien. Dazu beginnen wir mit der zusätzlichen Struktur eines Vektorraumes, welche von der Topologie berücksichtigt werden soll. Der Körper $\mathbb{K}$, über dem der Vektorraum definiert ist, muss dafür ebenfalls mit einer Topologie versehen sein. Wir betrachten hier der Einfachheit halber nur reelle Vektorräume und die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ und bezeichnen die Umgebungsmonade eines $\mathfrak{x} \in {}^*\mathbb{R}$ bzgl. dieser Topologie mit $\mathfrak{hal}(\mathfrak{x})$[4]. Weiter schreiben wir $\mathfrak{x} \approx \mathfrak{y}$, falls $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in \mathfrak{hal}(0)$. Um zu präzisieren, was oben mit „berücksichtigen“ gemeint ist, definieren wir:

Definition 1.2.19. (*standard*) *Topologischen Vektorraum* (kurz TVR) $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ nennen wir einen reellen Vektorraum R, versehen mit einer hausdorffschen[5] Topologie $\mathcal{T}$, bezüglich der die Verknüpfungen $\mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, $\langle v, w\rangle \mapsto v + w$ und $\mathbb{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, $\langle a, v\rangle \mapsto av$ jeweils in beiden Komponenten stetig sind. $\diamond$

Da somit die Addition eines Vektors $x \in \mathsf{R}$ stetig in $0 \in \mathsf{R}$ ist, muss sofort ${}^*x + \mu_{\mathcal{T}}(0) \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$ sein (siehe etwa Lemma 3.1.7 auf Seite 83) und aus der Stetigkeit der Addition von $-x$ im Punkt x folgt $-{}^*x + \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \subseteq \mu_{\mathcal{T}}(0)$, also insgesamt $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x) = {}^*x + \mu_{\mathcal{T}}(0)$. Damit reicht es also, die restlichen Eigenschaften an der Umgebungsmonade der Vektorraum-Null (*Nullumgebungsmonade*) zu untersuchen und es stellt sich heraus (siehe etwa [12, §15] für eine klassische Diskussion und [32] für die nonstandard Eigenschaften):

Satz 1.2.20

Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{T}$ eine hausdorffsche Topologie auf V, so ist $(V, \mathcal{T})$ genau dann ein topologischer Vektorraum, wenn

(TVR1) $\mu_{\mathcal{T}}(0) + \mu_{\mathcal{T}}(0) \subseteq \mu_{\mathcal{T}}(0)$,

(TVR2) $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v} \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$ für alle $\mathfrak{v} \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$ und alle $\mathfrak{r} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$,

(TVR3) $\mathfrak{s} \cdot {}^*v \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$ für alle $v \in V$ und alle $0 \approx \mathfrak{s} \in {}^*\mathbb{R}$,

[4] Abkürzung für *Halo*, vgl. Text vor Definition 2.2.2

[5] siehe Seite 92 für eine Nonstandard-Definition

(TVR4) $\mu_{\mathcal{T}}({}^*v) = {}^*v + \mu_{\mathcal{T}}(0)$ für alle $v \in V$

gilt. □

Andererseits entsteht in einem Vektorraum V, für den eine Monade $\boldsymbol{m} \subseteq {}^*V$ mit ${}_\sigma\boldsymbol{m} = \{0\}$ und Eigenschaften (TVR1) bis (TVR3) gegeben ist, eine eindeutige Vektorraumtopologie $\mathcal{T}_{\boldsymbol{m}}$, deren Nullmonade gerade $\boldsymbol{m}$ ist und deren Umgebungsmonaden Eigenschaft (TVR4) haben (siehe etwa [32]).

Damit genügt es also, bei Vektorraumtopologien die Nullumgebungsmonaden zu studieren. Die Eigenschaft ${}_\sigma\boldsymbol{m} = \{0\}$ ist dabei gerade die Hausdorffbedingung. Das bedeutet, eine Topologie $\mathcal{T}$, die verträglich mit den Vektorraumoperationen ist, erfüllt bereits (TVR1-4) und ist genau dann hausdorffsch, wenn ${}_\sigma\mu_{\mathcal{T}}(0) = \{0\}$ gilt.

Wir müssen uns aber gar nicht mit der Hausdorff-Eigenschaft (die wir explizit fordern) begnügen:

Lemma 1.2.21: Ein topologischer Vektorraum ist stets regulär.

Beweis: Sei $(V, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis (NUB), d.h. Basis des Filters der Nullumgebungen. Ist $U \in \mathcal{U}$ beliebig, so existiert $W \in \mathcal{U}$ mit $W + W \subseteq U$. Sei nun $x \in \overline{W}$ beliebig, d.h. $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \cap {}^*W \neq \emptyset$. Es gibt also $\mathfrak{v} \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$ und $\mathfrak{w} \in {}^*W$ mit ${}^*x + \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$. Da auch $-\mathfrak{v} \in \mu_{\mathcal{T}}(0) \subseteq {}^*W$ gilt, folgt ${}^*x = \mathfrak{w} + (-\mathfrak{v}) \in {}^*W + {}^*W \subseteq {}^*U$, d.h. $\overline{W} \subseteq U$. Insgesamt existiert also eine NUB abgeschlossener Mengen und nach Lemma 3.3.2 ist $(V, \mathcal{T})$ regulär. ■

Lokalkonvexe Topologien

Eine der Eigenschaften einer Vektorraum-Topologie, die man bereits an der Nullumgebungsmonade ablesen kann, ist die Lokalkonvexität.

In der klassischen Topologie definiert man die konvexe Hülle $\mathsf{C}M$, bzw. absolutkonvexe Hülle ΓM einer Teilmenge $M \subseteq V$ eines Vektorraums als den Schnitt über alle (absolut-) konvexen Obermengen. Als Folgerung erhält man (siehe beispielsweise [12, §16, Satz 1])

$$\mathsf{C}M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \, : \, n \in \mathbb{N} \wedge \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R} \wedge \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \wedge \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M \right\}$$

und

$$\Gamma M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;:\; n \in \mathbb{N} \wedge \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R} \wedge \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 1 \wedge \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M \right\}.$$

Für den Beweis dieser Gleichheit wird Induktion benutzt. Da wir aber die (absolut-) konvexe Hülle auch gerne für externe Mengen benutzen möchten, definieren wir entsprechend die Hülle über ihre Elemente analog zu oben, allerdings mit dem kleinen Unterschied, dass nun hyperendliche Summen auftreten (vergleiche auch [32]):

Konvexe und absolutkonvexe Hülle: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathfrak{M} \subseteq {}^*V$ eine beliebige (nicht notwendig interne) Teilmenge, so sei:

$$\mathsf{C}\mathfrak{M} := \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mathfrak{a}_i \mathfrak{x}_i \;:\; N \in {}^*\mathbb{N} \wedge \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_N\} \subseteq {}^*\mathbb{R} \wedge \sum_{i=1}^{N} \mathfrak{a}_i = 1 \wedge \{\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_N\} \subseteq \mathfrak{M} \right\}$$

und

$$\Gamma\mathfrak{M} := \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mathfrak{a}_i \mathfrak{x}_i \;:\; N \in {}^*\mathbb{N} \wedge \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_N\} \subseteq {}^*\mathbb{R} \wedge \sum_{i=1}^{N} |\mathfrak{a}_i| \leq 1 \wedge \{\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_N\} \subseteq \mathfrak{M} \right\}.$$

Ist $\mathfrak{M} = {}^*S$ für ein $S \in \mathbb{WF}$ standard, so gilt natürlich für die standard Elemente der (absolut-) konvexen Hülle per $\mathsf{Transfer}$, dass sie standard-endliche Summen von standard Elementen sind und $\mathsf{C}\mathfrak{M} = {}^*(\mathsf{C}S)$, bzw. $\Gamma\mathfrak{M} = {}^*(\Gamma S)$.

Definition 1.2.22. (*nonstandard*) Ist R ein Vektorraum, so heißt eine (evtl. externe) Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq {}^*\mathsf{R}$

1. *konvex*, wenn $\mathsf{C}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$,
2. *absolutkonvex*, wenn $\Gamma\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ und
3. *kreisförmig*, falls mit $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ und $|\mathfrak{a}| \leq 1$ auch stets $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ gilt. ◇

Eine konvexe, kreisförmige Menge ist dabei stets absolutkonvex.

Wir zeigen noch, dass der Name „(absolut-) konvexe Hülle" auch bei dieser Definition (insbesondere für externe Mengen) gerechtfertigt ist:

Lemma 1.2.23: Ist $\mathfrak{M} \subseteq {}^*V$ eine beliebige Teilmenge des hyperreellen Vektorraumes ${}^*V$, so ist $\Gamma\mathfrak{M}$ die ($\subseteq$-)kleinste absolutkonvexe Menge, die $\mathfrak{M}$ enthält.

Beweis: Dass $\Gamma\mathfrak{M}$ absolutkonvex ist, ergibt sich aus Definition 1.2.22 und der Gleichheit $\Gamma(\Gamma\mathfrak{M}) = \Gamma\mathfrak{M}$. Ist nun $\mathfrak{N} \subseteq {}^*V$ eine beliebige Menge mit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ und $\Gamma\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, so ist auch $\Gamma\mathfrak{M} \subseteq \Gamma\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. ∎

Ein topologischer Vektorraum heißt nun *lokalkonvex*, wenn er eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt. Dies vereinfacht sich hier erwartungsgemäß zu einem Kriterium an die Nullumgebungsmonade $\mu_{\mathcal{T}}(0)$:

Satz 1.2.24
Ein topologischer Vektorraum $(V, \mathcal{T})$ ist genau dann lokalkonvex, wenn die Nullumgebungsmonade $\mu_{\mathcal{T}}(0)$ konvex, d.h. abgeschlossen bzgl. konvexer Kombinationen $\sum_{i=1}^{N} \mathfrak{a}_i \mathfrak{x}_i$ mit $N \in {}^*\mathbb{N}$, $\mathfrak{a}_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \mathfrak{a}_i = 1$ und $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_N \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$ ist. Da im TVR die Nullumgebungsmonade kreisförmig ist (vergleiche (TVR2) oben), ist dies äquivalent dazu, dass $\mu_{\mathcal{T}}(0)$ absolutkonvex ist.

Beweis: Dies ist eine direkte Folge der Beziehung zwischen Nullumgebungsmonade und Nullumgebungsfilter. ∎

Genau wie bei topologischen Vektorräumen insgesamt reicht eine Monade mit den entsprechenden Eigenschaften bereits aus, um eine lokalkonvexe Topologie zu erzeugen, deren Nullumgebungsmonade gerade die Ausgangsmonade ist. Dabei folgt aus der Absolutkonvexität zusammen mit der Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation mit beschränkten hyperreellen Zahlen bereits die Abgeschlossenheit bzgl. Addition (vgl. Beweis von Satz 2.3.14). Wir können also diese Forderung weglassen. Den Beweis lassen wir wie den von Satz 1.2.20 weg.

Satz 1.2.25
Ist $\boldsymbol{m} \subseteq {}^*V$ eine Monade auf dem reellen Vektorraum V mit den Eigenschaften

1. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}$ für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}$ und alle $\mathfrak{a} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$,
2. $\mathfrak{a} \cdot {}^*x \in \boldsymbol{m}$ für alle $x \in V$ und alle $0 \approx \mathfrak{a} \in {}^*\mathbb{R}$,
3. $\boldsymbol{m}$ ist absolutkonvex und
4. ${}_\sigma\boldsymbol{m} = \{0\}$,

so ist $\mathcal{L} := \{U \in \mathfrak{P}(V) : \forall x \in U\, ({}^*x + \boldsymbol{m} \subseteq {}^*U)\}$ eine lokalkonvexe Topologie auf dem Raum V. □

Ist nun $(\mathsf{R},\mathcal{L})$ lokalkonvexer Raum und $\mathsf{S} \sqsubseteq \mathsf{R}$ linearer Teilraum, so können wir die Topologie von R auf S einschränken. Dabei entsteht die Relativtopologie durch die Monade $\mu_{\mathcal{L}}(0) \cap {}^*\mathsf{S}$. Weil $\mu_{\mathcal{L}}(0)$ absolutkonvex und S ein linearer Raum ist, folgt:

$$\Gamma(\mu_{\mathcal{L}}(0) \cap {}^*\mathsf{S}) = \mu_{\mathcal{L}}(0) \cap {}^*\mathsf{S}$$

Daraus kann man nun leicht folgern, dass nicht nur für jede absolutkonvexe Nullumgebung $U \subseteq \mathsf{R}$ stets $U \cap \mathsf{S}$ absolutkonvexe Nullumgebung von S ist, sondern auch, dass es zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung $V \subseteq \mathsf{S}$ von S stets eine absolutkonvexe Nullumgebung $U \subseteq \mathsf{R}$ von R gibt mit $U \cap \mathsf{S} \subseteq V$.

Aber es gilt sogar mehr (für den Beweis siehe [12]):

Lemma 1.2.26: Ist $V \subseteq \mathsf{S}$ eine absolutkonvexe Nullumgebung des linearen Teilraums $\mathsf{S} \sqsubseteq \mathsf{R}$ eines lokalkonvexen Raumes R, so gibt es eine absolutkonvexe Nullumgebung $U \subseteq \mathsf{R}$ im Gesamtraum R mit $U \cap \mathsf{S} = V$. $\square$

1.2.3 Filter und Topologie

Wir haben nun bereits ausgiebig die nonstandard Eigenschaften der Umgebungsfilter ausgenutzt und dabei erkannt, wie wichtig der Begriff des Filters und vor allem der Filtermonade (auf nonstandard Ebene) zur Definition und Charakterisierung von Topologien ist.

Andererseits hatten wir bereits erwähnt, dass man mit Filtern in topologischen Räumen auch Konvergenzen beschreiben und damit den Begriff der Folge verallgemeinern (oder ersetzen) kann. Da wir einen Filter über seine Filtermonade charakterisieren können, liegt es nahe, folgendermaßen zu definieren: Ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert genau dann gegen den Punkt x, wenn $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$ gilt. Weil wir wieder wegen der reichhaltigeren Struktur interessantere Aussagen treffen können, behandeln wir folgend lediglich topologische Vektorräume etwas ausführlicher.

Filter auf topologischen Vektorräumen

Mit der zusätzlichen Struktur des Vektorraumes können wir auch weitere topologische Eigenschaften definieren und untersuchen.

Zunächst greifen wir noch einmal den Begriff der Absolutkonvexität auf. Dabei sei der absolutkonvexe Abschluss Γ wie auf Seite 22 definiert (vgl. [32, Satz 3.3.1]):

Satz 1.2.27
Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf dem reellen Vektorraum V mit Filtermonade $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$, so gilt:

$$\Gamma \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Gamma^* F$$

Beweis: Aus der Beziehung $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq {}^*F$ folgt $\Gamma \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \Gamma^* F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und damit $\Gamma \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Gamma^* F$.

Sei für die andere Richtung nun $\mathfrak{y} \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Gamma^* F$ beliebig. Weil „$\mathfrak{y} \in \Gamma \mathfrak{M}$“ eine interne Formel ist, gibt es nach Lemma 1.1.3 eine ausreichende Teilmenge $\mathfrak{F} \subseteq {}^*\mathcal{F}$ mit $\mathfrak{y} \in \Gamma \mathfrak{f}$ für alle $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$. Damit folgt $\bigcap \mathfrak{F} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ und somit

$$\mathfrak{y} \in \bigcap_{\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}} \Gamma \mathfrak{f} = \Gamma \bigcap \mathfrak{F} \subseteq \Gamma \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}.$$

■

Die nächste Definition führen wir nun gleich im Nonstandard-Universum durch. Dabei ist es nicht schwierig zu beweisen, dass diese Definition zu der klassischen äquivalent ist.

Definition 1.2.28. (*nonstandard*)

1. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *konvergent* gegen ein Element $x \in X$, falls $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$ gilt.

2. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Cauchyfilter*, falls $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{x} + \mu_{\mathcal{T}}(0)$ für ein $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ gilt. ◇

Damit können wir nun Konvergenzkriterien für Filter aufstellen:

Lemma 1.2.29: Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf dem topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$.

1. Ist $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{x} + \mu_{\mathcal{T}}(0)$ für ein $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$, so gilt für alle $\mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ stets $(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$ und damit auch $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{y} + \mu_{\mathcal{T}}(0)$ für alle $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$.

2. Gilt $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \neq \emptyset$ für ein $x \in X$, so konvergiert $\mathcal{F}$ bereits gegen x.

3. Ist $\mathcal{G}$ ein Cauchyfilter auf X mit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ und konvergiert $\mathcal{F}$ gegen ein $x \in X$, so konvergiert auch $\mathcal{G}$ gegen x.

Beweis: 1. $\mathfrak{x}_0 \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ erfülle $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{x}_0 + \mu_{\mathcal{T}}(0)$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ seien beliebig. Dann existieren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$ mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{e}_2$. Daraus folgt

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = (\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{e}_1) - (\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{e}_2) = \mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2 \in \mu_{\mathcal{T}}(0).$$

Damit ist die Beziehung $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{y} + \mu_{\mathcal{T}}(0)$ für alle $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ klar.

2. Es sei $\mathfrak{y}_0 \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$ und $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}}$ beliebig. Dann gilt

$$\mathfrak{z} = \underbrace{(\mathfrak{z} - \mathfrak{y}_0)}_{\in \mu_{\mathcal{T}}(0)} + \underbrace{(\mathfrak{y}_0 - {}^*x)}_{\in \mu_{\mathcal{T}}(0)} + {}^*x \in \underbrace{\mu_{\mathcal{T}}(0) + \mu_{\mathcal{T}}(0)}_{\subseteq \mu_{\mathcal{T}}(0)} + {}^*x \subseteq \mu_{\mathcal{T}}(0) + {}^*x = \mu_{\mathcal{T}}({}^*x),$$

also insgesamt $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$.

3. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$ und $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$, also $\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \neq \emptyset$ und die Behauptung folgt aus dem zweiten Teil. ■

Es liegt jetzt nahe, Abbildungen zwischen Topologischen Vektorräumen zu betrachten, die stetig[6] und linear sind. Tatsächlich erhalten derartige Abbildungen in gewissem Sinn die Cauchyeigenschaft:

Lemma 1.2.30: Ist $f\colon (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ stetig, linear und $\mathcal{F}$ Cauchyfilter auf X, so ist $\mathcal{G} := \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ Basis eines Cauchyfilters auf Y.

Beweis: Wegen $f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$ ist $\mathcal{G}$ tatsächlich Filterbasis. Damit gilt sofort $\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} {}^*(f(F)) \supseteq {}^*f(\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}})$. Ist nun $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$, so existiert zu jedem $F \in \mathcal{F}$ ein $\mathfrak{z} \in {}^*F$ mit $\mathfrak{y} = {}^*f(\mathfrak{z})$ und mit Saturation folgt aus der Filtereigenschaft, dass $\mathfrak{y} \in {}^*f\big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} {}^*F\big) = {}^*f(\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}})$. Der Rest folgt aus der Linearität und der Stetigkeit von f. ■

[6] siehe Lemma 3.1.7 auf S. 83 für eine nonstandard Beschreibung

Kapitel 2

Externe Relationen

In diesem Kapitel geht es nun darum, den Begriff der *externen Relation* zu motivieren, zu definieren und anschließend zu untersuchen. Zu Beginn erläutern wir erneut die Idee, welche den externen Relationen zugrunde liegt, können dies aber nun mit dem bereits vorhandenen Nonstandard-Hintergrund besser formulieren. Anschließend definieren wir den Begriff und setzen ihn in einen ersten Zusammenhang mit Topologien.

Der zweite Abschnitt illustriert, wie sich externe Relationen nun im Universum von **HST** präsentieren. Dazu machen wir einige zusätzliche Annahmen an die Gestalt der untersuchten Relation, welche die Beschreibung um Einiges erleichtern. Schließlich erkennen wir, dass gewisse Eigenschaften der Relation (als externe Menge im Universum) ohne echte Einschränkung auch für die beschreibenden Mengen angenommen werden können.

Der dritte Abschnitt präsentiert einige Ergebnisse über externe Relationen und ihre Beziehung zu Topologien. Diese Ergebnisse stammen im Wesentlichen aus [32] (ausgenommen diejenigen in den Abschnitten 2.3.2 und 2.3.3, sowie „Gestalt der $\mathsf{e}_{\xi\eta}$“) und werden hier auch dazu genutzt, das Arbeiten und Argumentieren in **HST** transparenter zu machen. Etwa die Darstellung der *diskreten Monade* einer externen Relation mittels der ursprünglich die Relation selbst beschreibenden Mengen nutzt intensiv die Beziehung zwischen den Klassen der wohlfundierten und der standard Mengen. Diese Beziehung benutzen wir anschließend ebenfalls, um zu zeigen, dass die Struktur eines Umgebungsfilters gewissermaßen schon in der Relation selbst verankert sein muss, wenn die diskrete Monade bereits die Umgebungsmonade einer Topologie sein soll. Nach einem kurzen Abschnitt über Relativtopologien untersuchen wir Relationen, die mit der Struktur eines Vektorraumes verträglich sind und erarbeiten uns für einige dieser *begrenzt linearen Relationen* mehrere Bedingungen, unter denen eine auf dem Gesamtraum erzeugte Topologie auf bestimmten

Unterräumen gerade eine ebenfalls durch die Relation erzeugte Topologie induziert. Danach untersuchen wir kurz die Möglichkeit, mit Hilfe der Relation einen sogenannten *Abschlussoperator* zu erzeugen. Zum Abschluss dieses Abschnitts präsentieren wir noch den *Schattenraum* als eine mögliche Vervollständigung gewisser Relationen.

Am Ende des Kapitels geben wir im vierten Abschnitt zwei Beispiele, an denen wir einige der zuvor behandelten Begriffe anwenden. Insbesondere das zweite Beispiel zeigt die Möglichkeiten, aber auch die „Gefahren“ unserer Vereinfachung, weil es uns nicht gelingt, die Umgebungsmonade der assoziierten Topologie exakt zu beschreiben, sondern nur näherungsweise. Aber selbst bei genau bekannter Monade wäre die standard Beschreibung dieser Topologie noch undurchsichtig.

2.1 Grundlagen

Ist eine Topologie auf einer Menge X gegeben, so entstehen (wie wir gesehen haben) aus den Umgebungsfiltern die Umgebungsmonaden der einzelnen Punkte. Dabei ist die Topologie eindeutig bestimmt, wenn man zu jedem standard Punkt ${}^*x \in {}^*X$ die Umgebungsmonade kennt. Andererseits muss aber die Topologie bereits bekannt sein, um diese Umgebungsmonaden zu konstruieren. Nun liegt die Frage nahe, ob man nicht jedem standard Punkt derart eine Monade zuordnen kann, dass diese die Umgebungsmonaden einer Topologie bilden.

Um die Sache etwas zu erleichtern, beschränkt man sich auf hausdorffsche Topologien, weil dort die Umgebungsmonaden von verschiedenen standard Punkten stets disjunkt sind (siehe Abschnitt 3.3 auf Seite 92). Damit bilden also die Umgebungsmonaden der standard Punkte auf der Menge der standardnahen Punkte eine Partition, mit der wiederum eine Äquivalenzrelation verknüpft ist.

Das führt zu dem Ansatz, von einer symmetrischen, transitiven Relation auf der Menge ${}^*X$ auszugehen, welche dann auf ihrem Definitionsbereich zu einer Äquivalenzrelation wird. Weil sogar im Fall einer gegebenen Topologie die Menge der standardnahen Punkte eine externe Menge bilden kann (und dies in den „meisten“ Fällen tut), können wir nicht erwarten, eine Relation der oben genannten Art durch interne Formeln beschreiben zu können. Somit ist also eine Motivation gegeben, *externe Relationen* (auf standard Mengen) zu untersuchen.

Definition

Hier gießen wir nun die oben motivierte Konstruktion in eine formal saubere Form. Dabei legen wir der Relation immer eine standard Menge zu Grunde, sodass die entstehenden Topologien als solche in $\mathbb{WF}$ verstanden werden können.

Unter einer *externen Äquivalenzrelation* auf der standard Menge ${}^*X$ verstehen wir eine (durchaus externe) Teilmenge

$$\mathsf{E} \subseteq {}^*X \times {}^*X \in \mathbb{S}$$

des cartesischen Produkts ${}^*X \times {}^*X$, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in {}^*X\, (\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle \in \mathsf{E} \Rightarrow \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x}\rangle \in \mathsf{E})$, d.h. die Relation ist symmetrisch;

2. $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in {}^*X\, (\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle \in \mathsf{E} \wedge \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\rangle \in \mathsf{E} \Rightarrow \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle \in \mathsf{E})$, d.h. die Relation ist transitiv.

Auf der (möglicherweise externen) Teilmenge

$$\mathtt{dom}\,\mathsf{E} := \left\{ \mathfrak{x} \in {}^*X \;:\; \exists^{\mathtt{int}} \mathfrak{y} \in {}^*X\, (\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle \in \mathsf{E}) \right\} \subseteq {}^*X$$

wird E somit tatsächlich zu einer Äquivalenzrelation. Weil wir dabei im Sinn haben, aus den Äquivalenzklassen Umgebungsmonaden zu machen, die eine Topologie eindeutig bestimmen, fordern wir zusätzlich

3. ${}^*_\sigma X := {}^*X \cap \mathbb{S} \subseteq \mathtt{dom}\,\mathsf{E} = \{\mathfrak{x} \in {}^*X \;:\; \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle \in \mathsf{E}\}$, jedes standard Element von ${}^*X$ kommt vor;

4. ${}^{\mathsf{S}}\mathsf{E} = \mathtt{id}\,|_{{}^*X \times {}^*X}$, verschiedene standard Elemente stehen nicht in Relation.

Wie in diesen Fällen üblich, schreiben wir in Zukunft „$x \,\mathsf{E}\, y$“ statt „$\langle x, y\rangle \in \mathsf{E}$“.

Die assoziierte Topologie

Ist ein Element $\mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ gegeben, so betrachten wir zunächst dessen Äquivalenzklasse $[\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}} := \{\mathfrak{y} \in {}^*X \;:\; \mathfrak{x} \,\mathsf{E}\, \mathfrak{y}\}$ und konstruieren damit eine Topologie auf X, deren Umgebungsmonaden möglichst „nahe“ an den Äquivalenzklassen sind. Dabei denken wir an die Charakterisierung offener Mengen durch die Umgebungsmonaden von standard Punkten (vgl. Lemma 1.2.15):

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heiße *offen bezüglich der assoziierten Topologie* $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$, wenn für jedes $u \in U$ stets $[{}^*u]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*U$ gilt.
Dies definiert tatsächlich eine Topologie:
Sei also $\mathcal{T}_{\mathsf{E}} := \{U \subseteq X \;:\; \forall u \in U\, ([{}^*u]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*U)\}$. Wir überprüfen die Bedingungen an ein System offener Mengen von Seite 18:

(O1) Z.z. $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ und $X \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$: Klar.

(O2) Z.z. $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$, dann auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$: Ist $u \in U_1 \cap U_2$, dann ist nach Voraussetzung auch $[{}^*u]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*U_1$ und $[{}^*u]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*U_2$, also folgt die Behauptung.

(O3) Z.z. $(U_i)_i \subseteq \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$, dann auch $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$: Ist $u \in \bigcup_i U_i$ beliebig, so folgt für ein i_0 passend, dass $[{}^*u]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*U_{i_0} \subseteq \bigcup_i {}^*U_i \subseteq {}^*\big(\bigcup_i U_i\big)$.

Die Umgebungsmonaden der assoziierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ bezeichnen wir der Einfachheit halber mit μ_{E}, d.h. wir definieren für $\mathfrak{x} \in {}^*X$ nun

$$\mu_{\mathsf{E}}(\mathfrak{x}) := \bigcap \left\{ {}^*U \in {}^*_\sigma\mathcal{T}_{\mathsf{E}} \ : \ \mathfrak{x} \in {}^*U \right\} .$$

Es ist damit für jedes $x \in X$ immer $[{}^*x]_{\mathsf{E}} \subseteq \mu_{\mathsf{E}}({}^*x)$ und $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ ist die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft. Unser Interesse gilt im Wesentlichen der Frage, wann die Äquivalenzklasse (oder zumindest deren *diskrete Monade*, siehe Abschnitt 2.3.1) gleich der Umgebungsmonade ist und ob man diese Eigenschaft der Relation selbst ansehen kann.

Beziehung der Relation zu Topologien

Ein Ziel haben wir mit der assoziierten Topologie bereits erreicht: Wir können aus einer externen Äquivalenzrelation stets eine (eindeutig bestimmte) Topologie erzeugen. Damit für alle standard Punkte nun die Umgebungsmonaden gleich den Äquivalenzklassen sind, müssen letztere auf jeden Fall selbst Monaden sein. Allerdings schränkt man sich dadurch bei der Wahl der Relation sehr ein und wir haben ja eine Möglichkeit, jeder Teilmenge (einer gegebenen standard Menge) auf gewisse eindeutige Weise eine Monade zuzuweisen: Die Filtermonade des zugehörigen diskreten Filters. Diese Zuordnung ist insofern eindeutig, weil diese Monade die (bzgl. $\subseteq$) kleinste Monade ist, welche die gegebene Menge enthält.

Wie wir später erkennen, ist die Bedingung, dass jede Äquivalenzklasse eines standard Punktes selbst bereits Monade ist, in diesem Sinne weder notwendig noch hinreichend für unser Vorhaben:

Es gibt Relationen mit der Eigenschaft, dass die Äquivalenzklassen der standard Punkte alle Monaden sind, aber diese Monade nicht mit der Umgebungsmonade der assoziierten Topologie übereinstimmt (siehe Beispiel ab Seite 69).

Andererseits gibt es Relationen, deren Äquivalenzklassen keine Monaden sind, deren assoziierte Umgebungsmonaden aber gerade die Filtermonaden des diskreten Filters sind: Siehe Beispiel 3.3.3 auf Seite 86 in [32].

Ein schönes Ergebnis erhält man, falls die Relation selbst sogar *monadisch* ist, d.h. die externe Menge E die Darstellung $\mathsf{E} = \bigcap_{\xi\in\kappa} \mathfrak{M}_\xi$ für interne Mengen $\mathfrak{M}_\xi$ und eine Ordinalzahl κ hat. Relationen dieser Art werden ausführlich in [3, Abschnitt 6.3] behandelt. Auch wenn die genauen Voraussetzungen dort etwas anders sind als bei uns (insbesondere wird in **IST** argumentiert), können wir das zentrale Ergebnis auch hier (und in unserer Notation) formulieren.

Satz 2.1.1
([3, Theorem 6.3.1]) Es sei $X \in \mathbb{WF}$ und $\mathsf{E} \subseteq {}^*X \times {}^*X$ derart, dass

1. für alle $x \in X$ stets $\langle {*x}, {*x} \rangle \in \mathsf{E}$,
2. für alle $x \in X$ und $\mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in {}^*X$ aus $\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{y} \rangle, \langle \mathfrak{y}, {*x} \rangle \in \mathsf{E}$ stets $\langle \mathfrak{z}, {*x} \rangle \in \mathsf{E}$ folgt und
3. es eine Ordinalzahl κ und interne Mengen $\mathfrak{M}_\xi$ für $\xi \in \kappa$ gibt, sodass $\mathsf{E} = \bigcap_{\xi \in \kappa} \mathfrak{M}_\xi$ gilt.

Dann gibt es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X derart, dass für jedes $x \in X$ stets $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) = [{*x}]_{\mathsf{E}}$ gilt. □

Weitere schöne Ergebnisse erhält man, wenn man zusätzliche Strukturen zulässt, wie etwa lineare Räume. Externe Relationen auf Vektorräumen, wobei die Relation die lineare Struktur respektieren soll, führen zu interessanten Beobachtungen (siehe Abschnitt 2.3.5 ab Seite 49).

2.2 Darstellung in HST

In diesem Abschnitt wollen wir explizit die Struktur des Mengenuniversums von **HST** ausnutzen, um näher auf die Gestalt der untersuchten Relationen einzugehen. Dabei profitieren wir zum einen davon, tatsächlich mit externen *Mengen* arbeiten und die Symbole $\in$ und $\subseteq$ ohne formale Tricks durchaus naiv lesen zu können, zum anderen haben wir mit $\mathbb{WF}$ ein „echtes" **ZFC**-Universum zur Verfügung, aus dem wir mit dem $\in$-Isomorphismus $*$ in die Welt der standard, und damit auch der internen und externen, Mengen wechseln können.

Zudem werden wir weitere Einschränkungen machen, um gewisse Ergebnisse herleiten zu können.

2.2.1 Die Gestalt der Relation

Unsere erste Einschränkung ist mehr formaler Natur:
Wir gehen davon aus, dass die externe Relation E durch eine $\mathtt{st}$-$\in$-Formel definierbar ist. Das bedeutet, es gibt eine Formel $\varphi(x)$ in der $\mathtt{st}$-$\in$-Sprache, für die E die einzige Menge ist, welche $\varphi(\mathsf{E})$ erfüllt. In **HST** folgt aber nun aus dieser Eigenschaft, dass E in Δ_2^{ss} ist (siehe [9]), d.h. es existieren zwei Ordinalzahlen $\kappa, \lambda \in \mathtt{Ord}$ und interne Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$, sodass gilt

$$\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}.$$

Da wir hier im Wesentlichen innerhalb der Ausgangsmenge ${}^*X$ entstehende Strukturen betrachten, ist es ebenfalls keine Einschränkung, von $\mathsf{e}_{\xi\eta} \subseteq {}^*X \times {}^*X$ auszugehen.

Für die weitere Untersuchung ist es interessant zu wissen, „wie viele" Äquivalenzklassen man erhält, d.h. „wie groß" der Quotient ${}^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}\!/\!_{\mathsf{E}}$ ist. Dabei garantieren uns die Eigenschaften 3. und 4. auf Seite 31, dass ${}^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}\!/\!_{\mathsf{E}}$ nicht „kleiner" als X wird, d.h. es gibt eine Injektion $X \to {}^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}\!/\!_{\mathsf{E}}$, $x \mapsto [{}^*x]_{\mathsf{E}}$. Eine ausgezeichnete Stellung nehmen dabei Relationen ein, für die diese Abbildung sogar bijektiv ist:

Enthält jede Äquivalenzklasse von E ein standard Element, so nennen wir die Relation *vollständig*. Als Formel geschrieben bedeutet das

$$\forall^{\mathtt{int}} \mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}\; \exists^{\mathtt{st}} \mathfrak{y} \in {}^*X\; (\mathfrak{x}\,\mathsf{E}\,\mathfrak{y}).$$

Bei dieser Unterscheidung zwischen vollständigen und nicht vollständigen Relationen rücken wir schon etwas vom ursprünglichen Ziel ab, lediglich die Äquivalenzklassen der standard Elemente als Umgebungsmonaden einer Topologie auffassen zu wollen.

Andererseits gibt es natürlich auch interessante Topologien, bei denen man ausgezeichnete Umgebungsmonaden, welche kein standard Element enthalten, anschaulich gesprochen mit einem solchen bestückt und dadurch zu einer *Vervollständigung* der Topologie übergeht. Eine analoge Überlegung im Fall der nicht vollständigen Relationen beschäftigt sich wieder mit der Größe des Quotienten $^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$ und führt zum Begriff des Schattenraumes (siehe Abschnitt 2.3.8).

Unabhängig von diesen Überlegungen wissen wir allgemein, dass (im Fall $\mathsf{E} \in \Delta_2^{\mathsf{ss}}$) sowohl die Menge E als auch der Quotient $^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$ entweder von Standardgröße sind, oder man eine $*$-unendliche interne Menge injektiv einbetten kann ([9, Theorem 1.4.11]).

2.2.2 Erweiterung der Notation

Wir gehen also im Folgenden immer davon aus, dass die externe Relation E in der Form $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa}\bigcap_{\eta\in\lambda}\mathsf{e}_{\xi\eta}$ vorliegt. Für unsere Zwecke ist es zusätzlich sinnvoll, die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ immer standard zu wählen und zudem zu fordern, dass sie eine $\subseteq$-absteigende Kette bezüglich $\eta \in \lambda$ bilden, d.h. $\mathsf{e}_{\xi\eta'} \subseteq \mathsf{e}_{\xi\eta}$ für $\eta \leq \eta'$. Interessant ist für die Menge E ja der Schnitt $\bigcap_{\eta\in\lambda}\mathsf{e}_{\xi\eta}$ und für $\lambda = \omega$ kann man aus einer beliebigen Familie $\{\mathsf{e}_{\xi\eta} : \eta \in \omega\}$ stets eine $\subseteq$-absteigende Familie $\left\{e'_{\xi\eta} : \eta \in \omega\right\}$ mit $\bigcap_{\eta\in\omega}\mathsf{e}_{\xi\eta} = \bigcap_{\eta\in\omega}e'_{\xi\eta}$ konstruieren. Mit Satz 1.2.14 von Seite 17 erkennt man zudem, dass selbst für $\lambda > \omega$ diese Einschränkung eher formaler Natur ist.

Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E} \subseteq {}^*X$ schreiben wir $\mathsf{e}_{\xi\eta}(\mathfrak{x}) := \{\mathfrak{y} \in {}^*X : \langle\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle \in \mathsf{e}_{\xi\eta}\}$. Damit gilt dann $[\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}} = \bigcup_{\xi\in\kappa}\bigcap_{\eta\in\lambda}\mathsf{e}_{\xi\eta}(\mathfrak{x})$. Ist $\mathfrak{x}$ standard, also etwa $\mathfrak{x} = {*x}$ für $x \in X$, so sind auch sämtliche Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}({*x})$ standard.

Aufgrund der Struktur von **HST** gibt es in diesem Fall in $\mathbb{WF}$ eine Abbildung

$$d\colon \kappa\times\lambda \to \mathfrak{P}(X\times X) \quad \text{mit} \quad {}^*(d(\xi,\eta)) = \mathsf{e}_{\xi\eta}.$$

Wir schreiben in Zukunft kürzer ${}^*(d(\xi,\eta)) = {}^*(d_{\xi\eta})$ und übernehmen auch die Schreibweise $d_{\xi\eta}(x)$ für die Menge mit ${}^*(d_{\xi\eta}(x)) = \mathsf{e}_{\xi\eta}({*x})$.

Durch Anwendung des $\in$-Isomorphismus' $*$ auf das gesamte System erhalten wir die standard Abbildung ${}^*d\colon {*\kappa}\times{}^*\lambda \to {}^*(\mathfrak{P}(X\times X))$, die auf standard Paaren $\langle{}^*\xi, {*\eta}\rangle$ gerade mit $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ übereinstimmt. Auch hier entsteht für ein internes $\mathfrak{y} \in {}^*X$ (und interne $\mathfrak{x} \in {*\kappa}$, $\mathfrak{h} \in {}^*\lambda$) analog die (interne) Menge ${}^*d_{\mathfrak{x}\mathfrak{h}}(\mathfrak{y})$. Hier weichen wir etwas von der Notationskonvention in Gleichung (1.1) auf Seite 8 ab, weil wir dieses d tatsächlich als Abbildung lesen.

Einer Abbildung $f \in \lambda^\kappa$ können wir damit die Vereinigung $\bigcup_{\xi\in\kappa}d_{\xi f(\xi)}$ zuordnen. Diese Zuordnung bezeichnen wir mit $D\colon \lambda^\kappa \to \mathfrak{P}(X\times X)$ und das Bild von f unter D mit D_f, was uns sofort die standard Abbildung ${}^*D\colon {}^*(\lambda^\kappa) \to {}^*\mathfrak{P}(X\times X)$ liefert.

Weiter sei

$$D\colon (\lambda^\kappa) \times X \to \mathfrak{P}(X), \quad \langle f, x\rangle \mapsto D_f(x) := \bigcup_{\xi\in\kappa} d_{\xi f(\xi)}(x).$$

Per $*$-Transfer ist dann wieder

$$^*D\colon {}^*(\lambda^\kappa) \times {}^*X \to {}^*(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}_{\mathtt{int}}({}^*X), \quad \langle \mathfrak{f}, \mathfrak{y}\rangle \mapsto {}^*D_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{y}) = \bigcup_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} {}^*d_{\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{y}).$$

Die Doppelbelegung der Buchstaben d und D birgt keine Gefahren, da wir stets mit den Bildern unter den Abbildungen arbeiten werden (denen man ansieht, welche Abbildung gerade gemeint ist) und nie etwas wie $\mathtt{dom}D$ verwenden, was in der Tat doppeldeutig wäre.

Fasst man diese Mengen $D_f(x)$ für $f \in \lambda^\kappa$ und $x \in X$ zu einer Familie zusammen, so erhält man:

Satz 2.2.1
Für jedes $x \in X$ ist die Familie $\{D_f(x) : f \in \lambda^\kappa\}$ eine Filterbasis.

Beweis: Es sei $x \in X$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $\emptyset \notin \{D_f(x) : f \in \lambda^\kappa\} \neq \emptyset$ ist und für alle $f, g \in \lambda^\kappa$ stets ein $h \in \lambda^\kappa$ existiert mit $D_h(x) \subseteq D_f(x) \cap D_g(x)$ (siehe Seite 12). Wir zeigen nur die zweite Eigenschaft:

Es seien also f, g beliebig. Definiere $h\colon \kappa \to \lambda$, $\xi \mapsto \max(f(\xi), g(\xi))$. Dann ist nach obiger Definition $d_{\xi h(\xi)} = d_{\xi f(\xi)} \cap d_{\xi g(\xi)}$ für alle $\xi \in \kappa$ und somit

$$D_h(x) = \bigcup_{\xi\in\kappa} d_{\xi h(\xi)}(x) \subseteq \left(\bigcup_{\xi\in\kappa} d_{\xi f(\xi)}(x)\right) \cap \left(\bigcup_{\xi\in\kappa} d_{\xi g(\xi)}(x)\right) = D_f(x) \cap D_g(x).$$

■

2.2.3 Begrenzt lineare Relationen

Es sei nun R ein reeller Vektorraum. Eine Relation E auf R heißt *begrenzt linear*, wenn sie verträglich mit der Vektorraumstruktur ist. Um diese Bezeichnung präzise zu definieren, benötigen wir noch etwas mehr Notation:

Wir verwenden auf ${}^*\mathbb{R}$ die übliche Topologie und bezeichnen die Umgebungsmonade eines $\mathfrak{x} \in {}^*\mathbb{R}$ bzgl. dieser Topologie mit $\mathfrak{hal}(\mathfrak{x})$. Weiter schreiben wir $\mathfrak{x} \approx \mathfrak{y}$, falls $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in \mathfrak{hal}(0)$ und $\mathfrak{x} \approx_b \mathfrak{y}$, falls $\mathfrak{x} \approx \mathfrak{y}$ und beide Zahlen begrenzt (d.h. betragsmäßig kleiner als eine standard natürliche Zahl) sind.

Als Abkürzung führen wir noch die Mengen ${}^*\mathbb{R}_i := \{\mathfrak{r} \in {}^*\mathbb{R} : \mathfrak{r} \approx 0\} = \mathfrak{hal}(0)$ und ${}^*\mathbb{R}_b := \{\mathfrak{r} \in {}^*\mathbb{R} : \exists^{\mathtt{st}} n \in {}^*\mathbb{N}\, (|\mathfrak{r}| \leq n)\}$ ein. Dabei ist hier gerade ${}^*\mathbb{R}_b = \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$ (siehe Definition 3.4.1 auf Seite 20), was zur Einschränkung „$\approx_b$“ in Punkt 2 unten führt.

Definition 2.2.2. Eine externe Relation E auf dem hyperreellen Vektorraum $^*\mathsf{R}$ heißt *begrenzt linear*, falls die Eigenschaften

1. ist $\mathfrak{x} \mathrel{\mathsf{E}} \mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y} \mathrel{\mathsf{E}} \mathfrak{y}'$, so auch $(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \mathrel{\mathsf{E}} (\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}')$ und

2. ist $\mathfrak{x} \mathrel{\mathsf{E}} \mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{a} \approx_b \mathfrak{a}'$, so auch $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}) \mathrel{\mathsf{E}} (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{x}')$

erfüllt werden. ◇

Im Abschnitt 1.2.2 auf Seite 21 hatten wir gesehen, dass es bei einer Vektorraumtopologie ausreicht, die Nullumgebungsmonade zu kennen. Auch hier folgt aus der Eigenschaft $(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \mathrel{\mathsf{E}} (\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}')$ für alle $\mathfrak{x} \mathrel{\mathsf{E}} \mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y} \mathrel{\mathsf{E}} \mathfrak{y}'$ sofort, dass für jedes $\mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ stets $[\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}} = \mathfrak{x} + [0]_{\mathsf{E}}$ gilt. Also schauen wir uns die Äquivalenzklasse der Null etwas genauer an:

Satz 2.2.3
([32]) Die Nullklasse $[0]_{\mathsf{E}}$ einer begrenzt linearen Äquivalenzrelation hat folgende Eigenschaften:

1. $[0]_{\mathsf{E}} + [0]_{\mathsf{E}} = [0]_{\mathsf{E}}$;

2. für $\mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ und $\mathfrak{a} \in {}^*\mathbb{R}_i$ gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{x} \in [0]_{\mathsf{E}}$;

3. für $\mathfrak{x} \in [0]_{\mathsf{E}}$ und $\mathfrak{a} \in {}^*\mathbb{R}_b$ gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{x} \in [0]_{\mathsf{E}}$;

4. ${}_{\sigma}[0]_{\mathsf{E}} = \{0\}$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition. ■

2.2.4 Zur Wahl der darstellenden Mengen

Bisher haben wir die Darstellung der Relation $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi \in \kappa} \bigcap_{\eta \in \lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}$ weitgehend unabhängig von den Eigenschaften der Relation E selbst betrachtet. Wir haben von den Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ lediglich verlangt, dass sie standard und $\subseteq$-absteigend bezüglich η sind. Hier wollen wir uns klar machen, dass man zumindest zwei Eigenschaften von E auf die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ übertragen kann, ohne sich dadurch wirklich einschränken zu müssen.

Symmetrie von E

Bei der Definition der Relation E haben wir deren Symmetrie gefordert:

$$\mathfrak{x} \mathrel{\mathsf{E}} \mathfrak{y} \Leftrightarrow \mathfrak{y} \mathrel{\mathsf{E}} \mathfrak{x}.$$

Danach haben wir gesehen, dass in den für uns relevanten Fällen die Relation die Gestalt $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}$ hat. Wir betrachten sogar ausschließlich solche Relationen, für welche die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ standard sind. Für diese Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ ist allerdings keine Symmetrie vorausgesetzt, obwohl es machmal sehr hilfreich wäre.

Daher zeigen wir nun, dass man immer symmetrische Mengen $\mathsf{c}_{\xi\eta}$ (und geeignete Indexmengen) konstruieren kann, für die $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda'} \mathsf{c}_{\xi\eta}$ gilt.

Ist $\{\mathsf{e}_{\xi\eta} : \eta \in \lambda\}$ gerichtet bezüglich $\subseteq$, so kann man auch die $\mathsf{c}_{\xi\eta}$ derart konstruieren, dass $\{\mathsf{c}_{\xi\eta} : \eta \in \lambda'\}$ gerichtet bezüglich $\subseteq$ bleibt. Wir werden gleich diese Zusatzvoraussetzung mitbenutzen, weil man der Konstruktion ansieht, wie der allgemeinere Fall ohne Gerichtetheit zu behandeln ist.

Ist $M \subseteq X \times X$ eine Menge von Paaren, so schreiben wir

$$M^{-1} := \{\langle m, n\rangle : \langle n, m\rangle \in M\}$$

für die Menge der „gespiegelten“ Paare.

Es sei also $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}$ mit $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ standard und

$$\forall\xi \left(\forall\eta_1, \eta_2\, \exists\eta_3\, (\mathsf{e}_{\xi\eta_3} \subseteq \mathsf{e}_{\xi\eta_1} \cap \mathsf{e}_{\xi\eta_2})\right),$$

d.h. für jedes $\xi \in \kappa$ ist die Familie $\{\mathsf{e}_{\xi\eta} : \eta \in \lambda\}$ gerichtet bzgl. $\subseteq$.

Wir betrachten nun die Menge $\nu := \{\langle\eta_1, \eta_2\rangle \in \lambda \times \lambda : \eta_1 \geq \eta_2\}$ mit der Ordnung

$$\langle\eta_1, \eta_2\rangle < \langle\theta_1, \theta_2\rangle \Leftrightarrow (\eta_1 < \theta_1) \vee (\eta_1 = \theta_1 \wedge \eta_2 < \theta_2).$$

Weiter sei für $\xi \in \kappa$ und $\langle\eta_1, \eta_2\rangle \in \nu$ nun

$$\mathsf{c}_{\xi,\langle\eta_1,\eta_2\rangle} := (\mathsf{e}_{\xi\eta_1} \cup \mathsf{e}^{-1}_{\xi\eta_2}) \cap (\mathsf{e}_{\xi\eta_2} \cup \mathsf{e}^{-1}_{\xi\eta_1}).$$

Durch leichtes Nachrechnen erhält man

$$\mathsf{c}^{-1}_{\xi,\langle\eta_1,\eta_2\rangle} = \mathsf{c}_{\xi,\langle\eta_1,\eta_2\rangle} \text{ und } \mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\langle\eta_1,\eta_2\rangle\in\nu} \mathsf{c}_{\xi,\langle\eta_1,\eta_2\rangle},$$

womit die Familie $\left\{\mathsf{c}_{\xi,\langle\eta_1,\eta_2\rangle} : \xi \in \kappa \wedge \langle\eta_1, \eta_2\rangle \in \nu\right\}$ die geforderten Eigenschaften hat.

Sind weiter zwei Mengen $\mathsf{c}_{\xi,\langle\eta_1,\eta_2\rangle}$ und $\mathsf{c}_{\xi,\langle\theta_1,\theta_2\rangle}$ gegeben, so folgt für die Menge $\mathsf{c}_{\xi,\langle\tau_1,\tau_2\rangle}$ mit $\tau_i := \max\{\eta_i, \theta_i\}$ zum einen $\mathsf{c}_{\xi,\langle\tau_1,\tau_2\rangle} \subseteq \mathsf{c}_{\xi,\langle\eta_1,\eta_2\rangle} \cap \mathsf{c}_{\xi,\langle\theta_1,\theta_2\rangle}$ und zum anderen $\langle\tau_1, \tau_2\rangle \in \nu$. Es ist sogar $\langle\tau_1, \tau_2\rangle \geq \max\{\langle\eta_1, \eta_2\rangle, \langle\theta_1, \theta_2\rangle\}$.

Linearität

Ist E begrenzt linear auf dem Vektorraum R, so kann man Mengen $\mathsf{e}'_{\xi\eta}$ derart definieren, dass $\mathsf{e}'_{\xi\eta}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y} + \mathsf{e}'_{\xi\eta}(0)$ für alle $\mathfrak{y} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ gilt und sich die Relation als Ganzes nur unwesentlich verändert.

Es sei dazu $\langle \xi, \eta \rangle \in \kappa \times \lambda$ beliebig,

$$\mathsf{e}'_{\xi\eta} := \left\{ \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \rangle \in {}^*\mathsf{R} \times {}^*\mathsf{R} : \ \langle 0, \mathfrak{s} - \mathfrak{r} \rangle \in \mathsf{e}_{\xi\eta} \right\}$$

und $\mathsf{E}' := \bigcup_{\xi \in \kappa} \bigcap_{\eta \in \lambda} \mathsf{e}'_{\xi\eta}$. Ist $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ standard, so auch $\mathsf{e}'_{\xi\eta}$. Es sei nun $\mathfrak{a} \in [0]_{\mathsf{E}}$, d.h. zu jedem $\xi \in \kappa$ gibt es ein $\eta \in \lambda$ mit $\langle 0, \mathfrak{a} \rangle \in \mathsf{e}_{\xi\eta}$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\langle 0, \mathfrak{a} - 0 \rangle \in \mathsf{e}'_{\xi\eta}$, also $\mathfrak{a} \in [0]_{\mathsf{E}'}$, d.h. $[0]_{\mathsf{E}} = [0]_{\mathsf{E}'}$.

Nun gilt $\mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\, \mathsf{E}'$ wegen Symmetrie und Transitivität genau dann, wenn $\mathfrak{x}\, \mathsf{E}'\, \mathfrak{x}$, was nach Konstruktion wiederum äquivalent ist zu $0\, \mathsf{E} (\mathfrak{x} - \mathfrak{x})$, und dies ist schließlich stets erfüllt. Es ist also unabhängig von E immer $\mathtt{dom}\, \mathsf{E}' = {}^*\mathsf{R}$.

Ist nun aber $\mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\, \mathsf{E}$ beliebig, so folgt $\mathfrak{y} \in [\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}} \Leftrightarrow (\mathfrak{y} - \mathfrak{x}) \in [0]_{\mathsf{E}} \Leftrightarrow \mathfrak{y} \in [\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}'}$, also ist $[\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}} = \mathfrak{x} + [0]_{\mathsf{E}} = \mathfrak{x} + [0]_{\mathsf{E}'} = [\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}'}$. Beschränkt man sich also weiterhin auf $\mathtt{dom}\, \mathsf{E}$, so stimmen die beiden Relationen überein.

2.3 Schlussfolgerungen

Nun haben wir die Vorbereitungen so weit abgeschlossen, dass wir in der Lage sind, externe Relationen genauer auf ihr Verhältnis zur entstehenden assoziierten Topologie zu untersuchen. Wir beginnen mit der Filtermonade des diskreten Filters und geben für standard Punkte eine Beschreibung dieser Monade durch die Relation (und ihre darstellenden Mengen) selbst an.

Danach erkennen wir, dass die Familien $\{D_f(x) \,:\, f \in \lambda^\kappa\}$ von Seite 35 eine wichtige Brücke zwischen Relation und Topologie bereitstellen und formulieren daraus ein Kriterium, wann die Relation *topologisch* (siehe Definition 2.3.4) ist.

Anschließend behandeln wir kurz das Verhalten einer auf eine Teilmenge eingeschränkten Relation und wenden uns dann den begrenzt linearen Relationen zu. Die meisten der dort präsentierten Ergebnisse stammen aus der Arbeit von Wietschorke [32], erhalten aber im Zuge dieser Arbeit und vor allem durch die Möglichkeiten von **HST** neue und zum Teil deutlich kürzere und übersichtlichere Beweise.

Im Anschluss konstruieren wir eine Abbildung, welche bezüglich der assoziierten Topologie abgeschlossene Mengen erkennt und erneut ein Kriterium liefert, wann die Relation topologisch ist.

Zum Abschluss gehen wir von einem standardgroßen Quotienten ${}^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}\!/\mathsf{E}$ aus und behandeln den sogenannten Schattenraum. Insbesondere untersuchen wir (unter einer weiteren Bedingung an die Relation) eine naheliegende Konstruktion einer lokalkonvexen Topologie auf dem Schattenraum und formulieren ein Kriterium, wann diese als Vervollständigung der lokalkonvexen Topologie des Ausgangsraumes dienen kann.

2.3.1 Die diskrete Monade

Wir betrachten Relationen nur auf standard Mengen ${}^*X$, und für diese ist die Menge aller internen Teilmengen $\mathfrak{P}_{\mathtt{int}}({}^*X)$ von ${}^*X$ sogar ebenfalls standard, denn $\mathfrak{P}_{\mathtt{int}}({}^*X) = {}^*\big(\mathfrak{P}(X)\big)$. Also kann man in **HST** die folgende Teilmenge

$$\mathcal{F}([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}) := \big\{\mathfrak{F} \in \mathfrak{P}_{\mathtt{int}}({}^*X) \,:\, \mathtt{st}\mathfrak{F} \wedge [\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}} \subseteq \mathfrak{F}\big\}$$

von $\mathfrak{P}_{\mathtt{int}}({}^*X)$ definieren, welche Standardgröße hat.

Die durch $\mathsf{Standardisierung}$ hieraus entstehende standard Menge ${}^{\mathsf{S}}\mathcal{F}([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}})$ ist gerade das $*$-Bild des von $[\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}$ erzeugten *diskreten Filters* $\mathsf{Fil}([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}})$ in $\mathbb{WF}$ (siehe auch Bemerkung 1.2.2 auf Seite 12). Damit erklärt sich der Name *diskrete Monade* für den Schnitt:

$$\delta([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}) := \bigcap \mathcal{F}([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}).$$

Dies ist nämlich die Filtermonade des von der Äquivalenzklasse $[\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}$ erzeugten diskreten Filters, und damit die kleinste Monade, welche $[\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}$ als Teilmenge enthält.

Ist nun $f \in \lambda^\kappa$ eine Funktion von κ nach λ, so schreiben wir als Abkürzung mit der Notation von Seite 35:

$$\mathsf{E}_f := \bigcup_{\mathfrak{x} \in {}^*\kappa} {}^*d_{\mathfrak{x}\,{}^*f(\mathfrak{x})} = {}^*D_{{}^*f} = {}^*(D_f)$$

Insbesondere ist also E_f eine standard Menge (die unter Benutzung von $f \in \mathbb{WF}$ konstruiert wird).

Damit können wir auch $\mathsf{E}_f({*x}) = {}^*\big(D_f(x)\big)$ für $x \in X$ schreiben. Unter Zuhilfenahme dieser Notation werden wir die diskrete Monade nun besser beschreiben. Bisher kennen wir nämlich nur ihre Definition als Filtermonade, d.h. als einen Schnitt „von oben“. Der nächste Satz erlaubt uns die Beschreibung „von unten“ über die E definierenden Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$. Der Beweis ist analog zu [32], wo er allerdings in **IST** geführt wird.

Satz 2.3.1

([32]) Sei $[{*x}]_{\mathsf{E}}$ die Äquivalenzklasse von ${*x} \in {}^*X$ bezüglich der externen Relation E für ein $x \in X$. Dann ist

$$\delta([{*x}]_{\mathsf{E}}) = \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \bigcup_{\mathfrak{x} \in {}^*\kappa} {}^*d_{\mathfrak{x}\,{}^*f(\mathfrak{x})}({*x}) = \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \mathsf{E}_f({*x}).$$

Beweis: Ist $\mathcal{F} = \mathsf{Fil}([{*x}]_{\mathsf{E}})$ der durch die Äquivalenzklasse $[{*x}]_{\mathsf{E}}$ erzeugte diskrete Filter, so ist genau dann $F \in \mathcal{F}$, wenn $[{*x}]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*F$, also ausformuliert

$$\bigcup_{\xi \in \kappa} \bigcap_{\eta \in \lambda} {}^*(d_{\xi\eta}(x)) \subseteq {}^*F$$

gilt. Dabei ist ${}^*(d_{\xi\eta}(x)) \subseteq {}^*F$ äquivalent zu $d_{\xi\eta}(x) \subseteq F$, also gilt

$$\forall \xi \in \kappa\, \exists \eta \in \lambda\, (d_{\xi\eta}(x) \subseteq F),$$

was mit $\mathsf{Auswahl}$ äquivalent ist zu

$$\exists f \in \lambda^\kappa\, \forall \xi \in \kappa\, (d_{\xi f(\xi)}(x) \subseteq F),$$

was wiederum $D_f(x) = \bigcup_{\xi \in \kappa} d_{\xi f(\xi)}(x) \subseteq F$ für ein $f \in \lambda^\kappa$ bedeutet. Damit gilt auch $\mathsf{E}_f({*x}) = {}^*(D_f(x)) \subseteq {}^*F$, und weil die diskrete Monade von $[{*x}]_{\mathsf{E}}$ gerade die Filtermonade des diskreten Filters ist, folgt somit

$$\bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \mathsf{E}_f({*x}) \subseteq \delta([{*x}]_{\mathsf{E}}).$$

Andererseits ist

$$[{}^*x]_{\mathsf{E}} = \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} \bigcup_{\mathfrak{x}\in{}^*_\sigma\kappa} {}^*d_{\mathfrak{x}{}^*f(\mathfrak{x})}({}^*x) \subseteq \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} \bigcup_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} {}^*d_{\mathfrak{x}{}^*f(\mathfrak{x})}({}^*x) = \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} \mathsf{E}_f({}^*x),$$

also auch $\delta([{}^*x]_{\mathsf{E}}) \subseteq \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} \mathsf{E}_f({}^*x)$.

Insgesamt folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung 2.3.2: Da wir im Beweis von Satz 2.3.1 lediglich die Gestalt der Äquivalenzklasse $[{}^*x]_{\mathsf{E}} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*x)$ mit $\mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*x) = {}^*(d_{\xi\eta}(x))$ und $\mathsf{e}_{\xi\eta'}({}^*x) \subseteq \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*x)$ für $\eta \leq \eta'$ ausgenutzt haben, können wir das Ergebnis auch auf diesen allgemeinen Fall unabhängig von Relationen ausweiten.

Aus dieser Darstellung können wir leicht eine nächste Folgerung ableiten, welche sich so ähnlich auch in [32] findet. Für spätere Verwendungen formulieren wir diese allerdings etwas allgemeiner (vgl. Bemerkung 2.3.2):

Lemma 2.3.3: Ist $\{M_{\xi\eta} : \xi \in \kappa \wedge \eta \in \lambda\}$ eine Familie von Teilmengen $M_{\xi\eta} \subseteq X$ der $\mathbb{WF}$-Menge X, die inklusionsabsteigend bzgl. η sind, und $A \subseteq X$ eine weitere Teilmenge, so gilt:

$${}^*A \cap \delta\Big(\bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} {}^*(M_{\xi\eta})\Big) = \delta\Big(\bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} {}^*A \cap {}^*(M_{\xi\eta})\Big)$$

Beweis: Nach Satz 2.3.1 ist

$${}^*A \cap \delta(\bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} {}^*(M_{\xi\eta})) = {}^*A \cap \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*(\bigcup_{\xi\in\kappa} M_{\xi f(\xi)})$$

und weil allgemein

$${}^*A \cap \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*(\bigcup_{\xi\in\kappa} M_{\xi f(\xi)}) = \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*(\bigcup_{\xi\in\kappa} A \cap M_{\xi f(\xi)})$$

und nach Satz 2.3.1 wieder

$$\bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*(\bigcup_{\xi\in\kappa} A \cap M_{\xi f(\xi)}) = \delta(\bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} {}^*A \cap {}^*(M_{\xi\eta}))$$

gilt, folgt die Behauptung. ∎

Da die diskrete Monade die kleinste Monade ist, welche die Äquivalenzklasse eines Elementes enthält, ist für jedes $\mathfrak{x} \in {}^*X$ stets $\delta([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}) \subseteq \mu_{\mathsf{E}}(\mathfrak{x})$. Damit präzisiert sich das anfangs genannte Ziel, die Umgebungsmonaden „möglichst nahe“ an die Äquivalenzklassen zu bekommen, zu der Frage:

Wann gilt $\delta([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}) = \mu_{\mathsf{E}}(\mathfrak{x})$?

Weil eine Topologie ja bereits durch die Umgebungsmonaden der standard Punkte eindeutig bestimmt ist, werden wir uns bei dieser Betrachtung auch auf standard Punkte beschränken. Außerdem bilden die Umgebungsmonaden einer Topologie auf allen Elementen betrachtet gar keine Äquivalenzklassen.
Das motiviert unsere nächste

Definition 2.3.4. Eine externe Äquivalenzrelation E auf der standard Menge ${}^*X$ heißt *topologisch*, wenn gilt:

$$\forall^{\mathsf{st}}\mathfrak{x} \in {}^*X\,(\delta([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}}) = \mu_{\mathsf{E}}(\mathfrak{x})) \tag{2.1}$$

◇

Damit lautet unsere Fragestellung jetzt also:

Wann ist eine externe Äquivalenzrelation topologisch?

Eine erste Antwort erhält man, wenn man die Darstellung benutzt, die in Abschnitt 2.2.2 erarbeitet wurde:

2.3.2 Beziehung der Relation zu Umgebungsfiltern

Wir betrachten die beiden Verallgemeinerungen der Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ zum einen zu ${}^*d_{\mathfrak{x}\mathfrak{h}}$ für $\mathfrak{x} \in {}^*\kappa$ und $\mathfrak{h} \in {}^*\lambda$ und zum anderen zu ${}^*D_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{y})$ für $\mathfrak{f} \in {}^*(\lambda^\kappa)$ und $\mathfrak{y} \in {}^*X$ (siehe Seite 35) vor dem Hintergrund des Umgebungsfilters.

Die Familie $\{D_f(x) :\ x \in X \wedge f \in \lambda^\kappa\}$ habe die Eigenschaft

$$\forall x \in X\, \forall f \in \lambda^\kappa\, \exists g \in \lambda^\kappa\, \forall y \in D_g(x)\, \exists h \in \lambda^\kappa\, (D_h(y) \subseteq D_f(x)). \tag{2.2}$$

Wir betrachten unter dieser Voraussetzung für $x \in X$ den von der Filterbasis $\mathcal{B}(x) := \{D_f(x) :\ f \in \lambda^\kappa\}$ erzeugten Filter $\mathcal{F}(x)$. Dass $\mathcal{B}(x)$ tatsächlich eine Filterbasis ist, haben wir in Satz 2.2.1 gezeigt.

Satz 2.3.5
Unter den eben genannten Voraussetzungen gilt: Die Zuordnung $\mathcal{F}\colon x \mapsto \mathcal{F}(x)$ erfüllt die Eigenschaften eines Umgebungsfilters von Seite 18.

Beweis: U1 Z.z.: Für alle $U \in \mathcal{F}(x)$ gilt $x \in U$.

Ist $U \in \mathcal{F}(x)$ beliebig, dann ist für ein $f \in \lambda^\kappa$ per def. $D_f(x) \subseteq U$, also $x \in U$.

U2,3 Dies gilt, weil $\mathcal{F}(x)$ Filter ist.

U4 Z.z.: Zu jedem $U \in \mathcal{F}(x)$ gibt es ein $V \in \mathcal{F}(x)$, sodass für jedes $y \in V$ stets $U \in \mathcal{F}(y)$ gilt.

Sind $x \in X$ und $U \in \mathcal{F}(x)$ beliebig, so gibt es ein $f \in \lambda^\kappa$ mit $D_f(x) \subseteq U$ und nach Formel (2.2) ein $g \in \lambda^\kappa$ passend zu x und f. Es ist damit $D_g(x) \in \mathcal{F}(x)$. Ist nun $y \in D_g(x)$ beliebig, dann ist für ein $h \in \lambda^\kappa$ nach Formel (2.2) oben $D_h(y) \subseteq D_f(x) \subseteq U$, also auch $U \in \mathcal{F}(y)$. ∎

Somit entsteht auf X eine Topologie $\mathcal{T}'$ derart, dass die $\mathcal{T}'$-Umgebungen eines beliebigen Punktes $x \in X$ genau die Elemente von $\mathcal{F}(x)$ sind. Das bedeutet für jedes $x \in X$:

$$\mu_{\mathcal{T}'}({}^*x) = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}(x)} = \delta([{}^*x]_{\mathsf{E}}).$$

Damit ist aber $\mathcal{T}'$ gleich der assoziierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$, da diese gerade die feinste Topologie $\mathcal{T}$ mit der Eigenschaft $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \supseteq [{}^*x]_{\mathsf{E}}$ für alle $x \in X$ ist.

Wir haben jetzt also ein (etwas sperrig wirkendes) hinreichendes Kriterium an die Relation E, topologisch zu sein.

Dieses Kriterium ist aber auch notwendig: Dazu betrachten wir umgekehrt eine externe Relation derart, dass $\mu_{\mathsf{E}}({}^*x) = \delta([{}^*x]_{\mathsf{E}})$ für alle $x \in X$ (also E topologisch) ist und folgern daraus Eigenschaft (2.2).

Satz 2.3.6

Ist E topologisch, so erfüllt die Familie $\{D_f(x) \,:\, x \in \mathsf{R} \wedge f \in \lambda^\kappa\}$ die Eigenschaft (2.2).

Beweis: Es seien $x_0 \in X$ und $f_0 \in \lambda^\kappa$ beliebig. Dann ist

$$\mu_{\mathsf{E}}({}^*x_0) = \delta([{}^*x_0]_{\mathsf{E}}) \subseteq {}^*(D_{f_0}(x_0)),$$

also existiert ein $V \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ mit $x_0 \in V \subseteq D_{f_0}(x_0)$ und dazu wiederum ein $g \in \lambda^\kappa$ mit $D_g(x_0) \subseteq V$. Sei nun $y \in D_g(x_0)$ beliebig, dann ist $y \in V$, also $\delta([{}^*y]_{\mathsf{E}}) = \mu_{\mathsf{E}}({}^*y) \subseteq {}^*V$ und es gibt ein $h \in \lambda^\kappa$ mit $D_h(y) \subseteq V \subseteq D_{f_0}(x_0)$. ∎

Mit Hilfe von Saturation kann man sogar noch Weitergehendes aus der Eigenschaft (2.2) folgern:

Lemma 2.3.7: Gilt Formel (2.2), ist $x_0 \in X$ und $\mathfrak{y} \in \delta([{*x_0}]_{\mathsf{E}})$ beliebig, so existiert ein $\mathfrak{f} \in {}^*(\lambda^\kappa)$ mit

$$^*D_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{y}) \subseteq \delta([{*x_0}]_{\mathsf{E}}).$$

Beweis: Seien $x_0 \in X$ und $\mathfrak{y} \in \delta([{*x_0}]_{\mathsf{E}}) = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}(x_0)}$ beliebig. Für jedes $f \in \lambda^\kappa$ gilt somit $\mathfrak{y} \in {}^*(D_f(x_0))$. Ist $f_0 \in \lambda^\kappa$ beliebig und $g \in \lambda^\kappa$ passend nach (2.2), so ist also $\mathfrak{y} \in {}^*(D_g(x_0))$ und es existiert nach (2.2) mit Transfer ein $\mathfrak{h} \in {}^*(\lambda^\kappa)$ mit $^*D_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{y}) \subseteq {}^*(D_{f_0}(x_0))$. Jetzt liefert uns Saturation mit der Filterbaseneigenschaft von $\{D_f(x_0) : f \in \lambda^\kappa\}$, dass es ein $\mathfrak{f} \in {}^*(\lambda^\kappa)$ geben muss mit $^*D_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{y}) \subseteq {}^*(D_f(x_0))$ für alle $f \in \lambda^\kappa$. Somit ist für dieses $\mathfrak{f}$ also $^*D_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{y}) \subseteq \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*(D_f(x_0)) = \delta([{*x_0}]_{\mathsf{E}})$. ■

In der Umkehrung wird ein Kriterium daraus:

Korollar 2.3.8: Ist eine Relation E auf der Menge R gegeben und existiert ein $x_0 \in \mathsf{R}$, in dessen diskreter Monade $\delta([{*x_0}]_{\mathsf{E}})$ es ein Element $\mathfrak{y}_0$ gibt, sodass für alle $\mathfrak{f} \in {}^*(\lambda^\kappa)$ stets $^*D_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{y}_0) \not\subseteq \delta([{*x_0}]_{\mathsf{E}})$ gilt, so ist E nicht topologisch. □

Ist eine Relation E gegeben, so hat man oft in einem gewissen Rahmen die Möglichkeit, die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ unterschiedlich zu wählen (vergleiche Abschnitt 2.2.4). Im Beispiel ab Seite 69 etwa kann man dies derart tun, dass man die Mengen $^*D_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{y})$ auch für nichtstandard $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{y}$ gut beschreiben und damit kontrollieren kann. In diesem Fall ist Korollar 2.3.8 ein praktisches Kriterium.

2.3.3 Relativtopologien

Wir beschäftigen uns nun (auch mit dem Hintergedanken späterer Verwendung) mit der Möglichkeit, eine auf einer Menge R gegebene Relation E auf eine Teilmenge $M \subseteq \mathsf{R}$ einzuschränken.

In diesem Fall kann man natürlich zunächst die Relation einschränken per

$$\mathsf{E}_M := \mathsf{E} \cap ({}^*M \times {}^*M)$$

zu einer Relation auf $^*M$ und dann auf M die assoziierte Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}$ dieser Relation bilden.

Andererseits kann man auch zuerst die assoziierte Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ auf R bilden und diese auf M einschränken zu $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M$ (siehe S. 85).

Für $y \in M$ gilt dann $[{*y}]_{\mathsf{E}} \cap {}^*M = [{*y}]_{\mathsf{E}_M}$ und damit

$$\mu_{\mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}}({*y}) \subseteq \mu_{\mathsf{E}}({*y}) \cap {}^*M = \mu_{\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M}({*y}).$$

Dabei bedeutet $\mu_{\mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}}({}^*y) \subseteq \mu_{\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M}({}^*y)$, dass die in M erzeugte Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}$ feiner ist als die Relativtopologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M$ (siehe S. 19).

Anstatt nun wieder nach neuen Bedingungen oder Einschränkungen an die gegebene Relation zu suchen, um eine allgemeine Gleichheit der Monaden zu erhalten, sehen wir uns die Teilmengen M, auf die wir einschränken, näher an. Unter gewissen topologischen Zusatzvoraussetzungen kann man nämlich auch die andere Inklusion $\mathcal{T}_{\mathsf{E}_M} \subseteq \mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M$ zeigen:

Lemma 2.3.9: Ist die Teilmenge $M \subseteq \mathsf{R}$ abgeschlossen oder offen bezüglich $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$, so stimmen die beiden Topologien $\mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}$ und $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M$ auf M überein.

Beweis: Es sei also $M \subseteq \mathsf{R}$.

1. Sei zunächst M abgeschlossen. Dann ist für $x \in \mathsf{R}$ mit $[{}^*x]_{\mathsf{E}} \cap {}^*M \neq \emptyset$ stets $x \in M$. Sei $V \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}$, also $A := M \setminus V$ abgeschlossen in M bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}$. Ist $x \in \mathsf{R} \setminus A$ beliebig, so folgt im Fall $x \notin M$ nach obigem sofort $[{}^*x]_{\mathsf{E}} \cap {}^*M = \emptyset$. Für $x \in M$ aber ist $[{}^*x]_{\mathsf{E}} \cap {}^*A = [{}^*x]_{\mathsf{E}} \cap ({}^*M \cap {}^*A) = [{}^*x]_{\mathsf{E}_M} \cap {}^*A = \emptyset$. Damit ist A abgeschlossen in R bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$, also $\mathsf{R} \setminus A$ offen bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ und somit $V = (\mathsf{R} \setminus A) \cap M$ offen bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M$.
2. Sei nun M offen. Dann ist für $x \in M$ stets $[{}^*x]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*M$, womit die Beziehung $[{}^*x]_{\mathsf{E}_M} = [{}^*x]_{\mathsf{E}} \cap {}^*M = [{}^*x]_{\mathsf{E}}$ folgt. Damit ist $V \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}_M}$ offen bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ und wegen $V = V \cap M$ offen bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_M$. ∎

2.3.4 Begrenzt lineare Relationen

Bis auf Weiteres sei E nun eine begrenzt lineare Relation auf dem hyperreellen Vektorraum ${}^*\mathsf{R}$. Wie wir in Satz 2.2.3 gesehen haben, erfüllt dann die Äquivalenzklasse der 0 stets die Bedingungen an die Nullumgebungsmonade einer Vektorraumtopologie – außer der, eine Monade zu sein. Es stellt sich somit die Frage, ob sich diese Eigenschaften nicht auch auf die diskrete Monade der Nullklasse übertragen lassen. Eine sehr weit reichende, aber (im Hinblick auf obige Fragestellung) nicht ganz zufriedenstellende Antwort gibt Satz 2.3.11.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen formulieren wir jedoch zunächst eine allgemeinere Form dieses Satzes, als für den Moment nötig wäre.

Dazu betrachten wir eine (externe) Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq {}^*\mathsf{R}$ des hyperreellen Vektorraumes ${}^*\mathsf{R}$. Wie bei den Relationen gebe es standard Mengen $\mathfrak{M}_{\xi\eta} \subseteq {}^*\mathsf{R}$ mit $\xi \in \kappa \in \texttt{Ord}$

und $\eta \in \lambda \in \mathtt{Ord}$ derart, dass $\mathfrak{M}_{\xi\eta} \subseteq \mathfrak{M}_{\xi\eta'}$ für $\eta' \leq \eta$ und $\mathfrak{M} = \bigcup_{\xi\in\kappa}\bigcap_{\eta\in\lambda}\mathfrak{M}_{\xi\eta}$ ist. Ist nun $M_{\xi\eta} \in \mathbb{WF}$ derart, dass ${}^*(M_{\xi\eta}) = \mathfrak{M}_{\xi\eta}$ und $M_f := \bigcup_{\xi\in\kappa} M_{\xi f(\xi)}$, so folgt analog der Untersuchung vor Satz 2.2.1, dass $\{M_f : f \in \lambda^\kappa\}$ Filterbasis ist. Damit erkennt man wie in Satz 2.3.1, dass für die diskrete Monade $\delta(\mathfrak{M})$ als Filtermonade des diskreten Filters ebenfalls $\delta(\mathfrak{M}) = \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*(M_f) = \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*\big(\bigcup_{\xi\in\kappa} M_{\xi f(\xi)}\big)$ gilt. Unter diesen Bedingungen können wir gewisse Eigenschaften der Menge $\mathfrak{M}$ auch für die diskrete Monade $\delta(\mathfrak{M})$ übernehmen (vergleiche mit *begrenzt lineare Menge* in [32]):

Satz 2.3.10

Ist $\mathfrak{M} = \bigcup_{\xi\in\kappa}\bigcap_{\eta\in\lambda}\mathfrak{M}_{\xi\eta}$ mit obigen Eigenschaften gegeben, so gilt:

1. Ist für beliebige $\mathfrak{a} \in \mathfrak{hal}(0)$ und $x \in \mathsf{R}$ stets $\mathfrak{a} \cdot {}^*x \in \mathfrak{M}$, so auch $\mathfrak{a} \cdot {}^*x \in \delta(\mathfrak{M})$.
2. Ist für beliebige $\mathfrak{b} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$ und $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$, so ist auch für beliebige $\mathfrak{b} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$ und $\mathfrak{y} \in \delta(\mathfrak{M})$ stets $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{y} \in \delta(\mathfrak{M})$.
3. Ist ${}_\sigma\mathfrak{M} = \{0\}$, so auch ${}_\sigma\delta(\mathfrak{M}) = \{0\}$.

Beweis: Die erste Behauptung ist klar und die dritte folgt, weil für $0 \neq x \in \mathsf{R}$ stets $\mathfrak{M} \subseteq {}^*(\mathsf{R} \setminus \{x\})$ gilt.

Wir betrachten also die zweite Behauptung. Es gelte die Voraussetzung, $\mathfrak{y} \in \delta(\mathfrak{M})$ und $0 < a \in \mathbb{R}$ seien beliebig. Wir zeigen

$$\forall^{\mathtt{int}} |\mathfrak{a}| \leq {}^*a \, (\mathfrak{a} \cdot \delta(\mathfrak{M}) \subseteq \delta(\mathfrak{M})),$$

indem wir zu jedem $f \in \lambda^\kappa$ ein $g \in \lambda^\kappa$ finden, sodass

$$\forall^{\mathtt{int}} |\mathfrak{a}| \leq {}^*a \, (\mathfrak{a} \cdot {}^*(M_g) \subseteq {}^*(M_f))$$

gilt.

Sei also $f \in \lambda^\kappa$ beliebig, dann gilt nach Voraussetzung für jedes $|\mathfrak{a}| \leq {}^*a$ stets $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq {}^*(M_f)$, also mit $\mathfrak{M} = \bigcup_{\xi\in\kappa}\bigcap_{\eta\in\lambda}\mathfrak{M}_{\xi\eta}$ auch

$$\forall \xi \in \kappa \, \exists \eta \in \lambda \, (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_{\xi\eta} \subseteq {}^*(M_f)),$$

woraus leicht

$$\forall \xi \in \kappa \, \forall^{\mathtt{int}} |\mathfrak{a}| \leq {}^*a \, \exists \eta \in \lambda \, (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_{\xi\eta} \subseteq {}^*(M_f)) \tag{2.3}$$

folgt. Angenommen, es gilt nun nicht

$$\forall \xi \in \kappa \, \exists \eta \in \lambda \, \forall^{\mathtt{int}} |\mathfrak{a}| \leq {}^*a \, (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_{\xi\eta} \subseteq {}^*(M_f)), \tag{2.4}$$

dann gibt es ein $\xi_0 \in \kappa$ derart, dass zu jedem $\eta \in \lambda$ ein internes $\mathfrak{a}$ mit $|\mathfrak{a}| \leq {}^*a$ existiert, sodass $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_{\xi_0\eta} \not\subseteq {}^*(M_f)$. Betrachten wir damit die internen Mengen

$$F_\eta := \left\{|\mathfrak{a}| \leq {}^*a : \ \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_{\xi_0\eta} \not\subseteq {}^*(M_f)\right\}.$$

Nach Voraussetzung haben wir für $\eta' \leq \eta$ stets $\mathfrak{M}_{\xi\eta} \subseteq \mathfrak{M}_{\xi\eta'}$, also auch $F_\eta \subseteq F_{\eta'}$ und da nach Annahme die F_η alle nicht leer sind, folgt mit Saturation

$$\emptyset \neq \bigcap_{\eta\in\lambda} F_\eta = \left\{|\mathfrak{a}| \leq {}^*a : \ \forall \eta \in \lambda \left(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_{\xi_0\eta} \not\subseteq {}^*(M_f)\right)\right\},$$

im Widerspruch zur Formel (2.3). Damit ist die Annahme falsch, also die Formel (2.4) richtig. Mit (Standardgrößen-)Auswahl folgt

$$\exists g \in \lambda^\kappa \, \forall \xi \in \kappa \, \forall^{\mathtt{int}} |\mathfrak{a}| \leq {}^*a \left(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_{\xi f(\xi)} \subseteq {}^*(M_f)\right).$$

Durch die geschickte zweimalige Anwendung von Transfer folgt

$$\exists g \in \lambda^\kappa \, \forall^{\mathtt{int}} \mathfrak{x} \in {}^*\kappa \, \forall^{\mathtt{int}} |\mathfrak{a}| \leq {}^*a \left(\mathfrak{a} \cdot {}^*M_{\mathfrak{x}\, {}^*f(\mathfrak{x})} \subseteq {}^*(M_f)\right),$$

d.h. $\mathfrak{a} \cdot {}^*(M_g) \subseteq {}^*(M_f)$. Weil zu Beginn $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, folgt also die Behauptung für alle beschränkten Skalare. ∎

Wir können dieses Ergebnis nun für die diskrete Monade der Nullklasse einer externen Relation übernehmen und sogar noch eine Eigenschaft mehr zeigen. Es ist ja mit den üblichen Voraussetzungen $[0]_{\mathsf{E}} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}(0)$:

Satz 2.3.11

([32]) Ist $\delta([0]_{\mathsf{E}})$ die diskrete Monade einer begrenzt linearen Äquivalenzrelation (für die wieder die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ standard sind und $\subseteq$-absteigend bzgl. η), so gilt:

1. ${}_\sigma(\delta([0]_{\mathsf{E}})) = \{0\}$, d.h. 0 ist das einzige standard Element;

2. für $\mathfrak{y} \in \operatorname{\mathtt{dom}} \mathsf{E}$ und $\mathfrak{a} \in {}^*\mathbb{R}_i$ gilt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y} \in \delta([0]_{\mathsf{E}})$, d.h. infinitesimale Skalare „absorbieren" ganz $\operatorname{\mathtt{dom}} \mathsf{E}$ in $\delta([0]_{\mathsf{E}})$;

3. für $\mathfrak{y} \in \delta([0]_{\mathsf{E}})$ und $\mathfrak{g} \in {}^*\mathbb{R}_b$ gilt $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{y} \in \delta([0]_{\mathsf{E}})$, d.h. $\delta([0]_{\mathsf{E}})$ „absorbiert" beschränkte Skalare;

4. zu jedem $\mathfrak{y} \in \delta([0]_{\mathsf{E}})$ existiert ein $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ mit $N\mathfrak{y} \in \delta([0]_{\mathsf{E}})$.

Beweis: Die ersten drei Eigenschaften folgen direkt aus obigem Satz 2.3.10.

Sei also $\mathfrak{y} \in \delta([0]_{\mathsf{E}})$ beliebig. Nach 3. gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes $f \in \lambda^\kappa$, dass $n \cdot \mathfrak{y} \in \mathsf{E}_f$. Damit enthält für jedes solche f die interne Menge

$$Y_f := \left\{\mathfrak{a} \in {}^*\mathbb{R} : \ \forall^{\mathtt{int}}\mathfrak{b} \in {}^*\mathbb{R}\,(|\mathfrak{b}| \leq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{y} \in \mathsf{E}_f)\right\}$$

nach Folgerung 1.1.4 ein $N_f \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. Nach $*$-Transfer ist $N_f{+}1 = \{n \in {}^*\mathbb{N} : \ n \leq N_f\}$ intern und damit also $M_f := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ((N_f + 1) \setminus \{n\}) \in \Pi_1^{\mathtt{ss}}$.

Es ist somit $\mathcal{M} := \{M_f : \ f \in \lambda^\kappa\}$ eine Menge von Standardgröße, die aus $\Pi_1^{\mathtt{ss}}$-Mengen besteht und welche die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Damit ist nach [9, Th.1.4.2 (i)] auch $\bigcap \mathcal{M} \neq \emptyset$.

Für ein $N \in \bigcap \mathcal{M}$ gilt aber $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und $\forall f \in \lambda^\kappa\,(N \leq N_f)$, also

$$\forall f \in \lambda^\kappa\,(N \cdot \mathfrak{y} \in \mathsf{E}_f),$$

und damit $N \cdot \mathfrak{y} \in \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} \mathsf{E}_f = \delta([0]_{\mathsf{E}})$. ∎

Bemerkung 2.3.12: Damit ist die Frage, ob die assoziierte Topologie einer begrenzt linearen Relation stets mit der Vektorraumstruktur verträglich (also eine lineare Topologie) ist, leider nicht beantwortet. Die Abgeschlossenheit der diskreten Monade bezüglich Addition können wir nicht aus derjenigen der Äquivalenzklasse $[0]_{\mathsf{E}}$ folgern, was laut Satz 1.2.20 aber nötig wäre.

Für den Fall, dass die diskrete Monade tatsächlich nicht abgeschlossen bezüglich der Addition ist, gibt es zwei Möglichkeiten:

Die diskrete Monade ist dennoch die Nullumgebungsmonade und die assoziierte Topologie damit nicht linear. Oder aber die Nullumgebungsmonade ist echt größer als die diskrete Monade, womit die Linearität der assoziierten Topologie offen bleibt.

2.3.5 Erzeugung linearer Topologien

Im nächsten Paragrafen werden wir sehen, wie man immer eine lineare Topologie erzeugt, deren Nullumgebungsmonade stets die Äquivalenzklasse $[0]_{\mathsf{E}}$ enthält. Dies wird aber im Allgemeinen nicht die feinste Topologie überhaupt, d.h. die assoziierte Topologie, sein.

Ein besseres Ergebnis erhalten wir, wenn wir eine weitere Einschränkung unserer Relation zulassen. In diesem Fall erreichen wir auch wieder unser ursprüngliches Ziel:

Ist die begrenzt lineare Relation derart, dass die Nullklasse $[0]_{\mathsf{E}}$ bereits eine Monade ist, d.h. $[0]_{\mathsf{E}} = \delta([0]_{\mathsf{E}})$, so ist die assoziierte Topologie eine separierte Vektorraumtopologie und die Nullklasse gerade die Nullumgebungsmonade. Die Topologie ist genau dann lokalkonvex, wenn die Nullklasse zusätzlich absolutkonvex ist ([32, Satz 3.1.1]). Hier folgt dieses Resultat aus der Kombination von Satz 2.2.3 mit Satz 1.2.20, bzw. mit Satz 1.2.25 für den lokalkonvexen Fall.

Im allgemeinen Fall wissen wir zumindest, dass die assoziierte Topologie einer begrenzt linearen Relation stets translationsinvariant (d.h. $\mu_{\mathsf{E}}({}^*x) = {}^*x + \mu_{\mathsf{E}}(0)$) und die skalare Multiplikation des Vektorraumes stetig in beiden Komponenten ist (siehe ebenfalls [32]).

Das Hauptproblem bei nichtmonadischen Relationen ist die Übertragung der additiven Abgeschlossenheit von der Nullklasse auf deren diskrete Monade (vergleiche Bemerkung 2.3.12 oben). Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, ist der Übergang zur absolutkonvexen Hülle der diskreten Monade. Allerdings muss man für diese erneut die übrigen Bedingungen einer linearen Topologie nachweisen.

Erzeugung lokalkonvexer Topologien

Wir erinnern uns an die Darstellung der diskreten Monade von Satz 2.3.1. Für jede Abbildung $f \in \lambda^\kappa$ erhalten wir die standard Menge $\mathsf{E}_f(0) := \bigcup_{\mathfrak{x} \in {}^*\kappa} \mathsf{e}_{\mathfrak{x}\,{}^*f(\mathfrak{x})}(0)$, sodass $\delta([0]_{\mathsf{E}}) = \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \mathsf{E}_f(0)$ gilt.

Wie in Abschnitt 1.2.2 auf Seite 22 bezeichnet ΓA wieder die absolutkonvexe Hülle der Menge A. Dann bilden wir

$$\mathsf{A}_f(0) := \Gamma\, \mathsf{E}_f(0) \quad \text{und} \quad \mu_a(0) := \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \mathsf{A}_f(0),$$

und erhalten mit dieser neuen Notation:

Satz 2.3.13

([32]) Es gilt mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von oben $\mu_a(0) = \Gamma\delta([0]_{\mathsf{E}})$.

Beweis: Weil $\delta([0]_{\mathsf{E}})$ die Filtermonade des durch die Filterbasis $\{D_f(0) : f \in \lambda^\kappa\}$ erzeugten Filters und $\mathsf{E}_f(0) = {}^*(D_f(0))$ ist, folgt die Behauptung mit Satz 1.2.27. ∎

Damit ist $\mu_a(0)$ eine absolutkonvexe Monade, die also eine lokalkonvexe Topologie erzeugt, falls sie die Bedingungen von Satz 1.2.20 erfüllt (vgl. auch [32]).

Satz 2.3.14

Die Monade $\mu_a(0) = \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \Gamma\, \mathsf{E}_f(0)$ erfüllt folgende Bedingungen:

1. $\mathfrak{a} \cdot {}^*x \in \mu_a(0)$ für alle $\mathfrak{a} \approx 0$ und alle $x \in \mathsf{R}$.

2. $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{x} \in \mu_a(0)$ für alle $\mathfrak{b} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$ und alle $\mathfrak{x} \in \mu_a(0)$.

3. $\mu_a(0) + \mu_a(0) \subseteq \mu_a(0)$.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Satz.

1. $\mathfrak{a} \cdot {}^*x \in [0]_\mathsf{E} \subseteq \delta([0]_\mathsf{E}) \subseteq \mu_a(0)$.
2. Für $\mathfrak{x} \in \mu_a(0)$ gilt $\mathfrak{x} = \sum_{\mathsf{i}=1}^{N} \mathfrak{c}_\mathsf{i} \cdot \mathfrak{x}_\mathsf{i}$ für passende $\mathfrak{c}_\mathsf{i} \in {}^*\mathbb{R}$ und $\mathfrak{x}_\mathsf{i} \in \delta([0]_\mathsf{E})$. Damit ist $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \cdot \sum_{\mathsf{i}=1}^{N} \mathfrak{c}_\mathsf{i} \cdot \mathfrak{x}_\mathsf{i} = \sum_{\mathsf{i}=1}^{N} \mathfrak{c}_\mathsf{i} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{x}_\mathsf{i}) \in \mu_a(0)$ wegen $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{x}_\mathsf{i} \in \delta([0]_\mathsf{E})$ und $\mu_a(0) = \Gamma\delta([0]_\mathsf{E})$.
3. Es seien $\mathfrak{x} = \sum_{\mathsf{i}=1}^{N} \mathfrak{c}_\mathsf{i} \cdot \mathfrak{x}_\mathsf{i}$ und $\mathfrak{y} = \sum_{\mathsf{i}=1}^{M} \mathfrak{d}_\mathsf{i} \cdot \mathfrak{y}_\mathsf{i}$ beliebig aus $\mu_a(0) = \Gamma\delta([0]_\mathsf{E})$ mit $\mathfrak{x}_\mathsf{i}$ und $\mathfrak{y}_\mathsf{i}$ aus $\delta([0]_\mathsf{E})$. Nach Satz 2.3.11 sind dann auch $2 \cdot \mathfrak{x}_\mathsf{i}$ und $2 \cdot \mathfrak{y}_\mathsf{i}$ in $\delta([0]_\mathsf{E})$ und somit
$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \sum_{\mathsf{i}=1}^{N} (\frac{1}{2} \cdot \mathfrak{c}_\mathsf{i}) \cdot (2 \cdot \mathfrak{x}_\mathsf{i}) + \sum_{\mathsf{i}=1}^{M} (\frac{1}{2} \cdot \mathfrak{d}_\mathsf{i}) \cdot (2 \cdot \mathfrak{y}_\mathsf{i}) \in \Gamma\delta([0]_\mathsf{E}) = \mu_a(0).$$
■

Außerdem ist $\mu_a(0)$ wegen Satz 2.3.13 die kleinste absolutkonvexe Monade, die $[0]_\mathsf{E}$ enthält, also entsteht daraus die feinste lokalkonvexe Topologie, deren Nullmonade eben $[0]_\mathsf{E}$ enthält.

2.3.6 Ein Satz über feinste Topologien

Betrachtet man die Nullklasse $[0]_\mathsf{E}$ einer begrenzt linearen Relation $\mathsf{E} = \bigcup\limits_{\xi\in\kappa} \bigcap\limits_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}$ mit der (üblichen) Voraussetzung, dass die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ standard sind, so stellt man fest, dass man die Nullklasse selbst als standardgroße Vereinigung von Monaden lesen kann:
$$[0]_\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \Big(\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}(0) \Big)$$
Für den Fall, dass für jedes $\xi \in \kappa$ stets $0 \in \mathsf{e}_\xi(0) := \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}(0)$ gilt, kann man die Frage stellen, ob diese Monaden wieder (lineare) Topologien auf geeigneten Unterräumen erzeugen und in welcher Beziehung diese zur assoziierten Topologie des Gesamtraums steht.

Dazu sei wieder $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}$ eine externe Relation auf dem hyperreellen Vektorraum ${}^*\mathsf{R}$. Neben den üblichen Voraussetzungen (standard, $\subseteq$-absteigend, begrenzt linear) habe E zudem *hyperkonvexe Monaden*, d.h. die Monaden $\mathsf{e}_\xi(0) := \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}(0)$ seien einerseits abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit begrenzten Skalaren und andererseits absolutkonvex, d.h. absolutkonvexe Kombinationen $\sum_{\mathsf{i}=1}^{N} \mathfrak{a}_\mathsf{i}\mathfrak{x}_\mathsf{i}$ mit $N \in {}^*\mathbb{N}$, $\sum_{\mathsf{i}=1}^{N} |\mathfrak{a}_\mathsf{i}| \leq 1$ und $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_N \in \mathsf{e}_\xi(0)$ liegen wieder in $\mathsf{e}_\xi(0)$. Wir untersuchen auf gewissen Teilräumen von R die Beziehung zwischen der Teilraumtopologie der assoziierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ und der durch diese Monaden $\mathsf{e}_\xi(0)$ erzeugten Topologie.

Die Mengen R_ξ

Aus der zusätzlichen Forderung, dass die Monaden $\mathsf{e}_\xi(0)$ bereits selbst hyperkonvex sind, entsteht die legitime Frage, ob diese Monaden auf gewissen Unterräumen des Vektorraumes R bereits eine lokalkonvexe Topologie erzeugen. Der Vergleich der Eigenschaften einer Umgebungsfilterbasis für lokalkonvexe Räume mit den schon bekannten Eigenschaften der Monaden $\mathsf{e}_\xi(0)$ motiviert die folgende Definition:

Wir definieren für $\xi \in \kappa$ folgende Teilmengen von R:

$$\mathsf{R}_\xi := \left\{x \in \mathsf{R} : \ \forall \eta \in \lambda \ \exists n \in \mathbb{N} \ \left(\frac{1}{n} {}^*x \in \mathsf{e}_{\xi\eta}(0)\right)\right\}$$

Intern betrachtet sehen diese Mengen wie folgt aus:

$$^*_\sigma\mathsf{R}_\xi = \left\{{}^*x \in {}^*\mathsf{R} : \ \exists^{\mathtt{int}} \mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N} \ \left(\frac{1}{\mathfrak{n}} {}^*x \in \mathsf{e}_\xi(0)\right)\right\}.$$

Außerdem haben auch die nichtstandard Elemente $\mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{R}_\xi$ ebenfalls die interne Eigenschaft $\exists^{\mathtt{int}} \mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N} \ \left(\frac{1}{\mathfrak{n}}\mathfrak{y} \in \mathsf{e}_\xi(0)\right)$.

Weil hier die $\mathsf{e}_\xi(0)$ absolutkonvex gewählt waren, sind die R_ξ sogar lineare Teilräume von R:

Zu $x, y \in \mathsf{R}_\xi$ gibt es laut interner Darstellung hypernatürliche Zahlen N_x und N_y mit $\frac{1}{N_x} \cdot {}^*x \in \mathsf{e}_\xi(0)$ und $\frac{1}{N_y} \cdot {}^*y \in \mathsf{e}_\xi(0)$. Wegen $\frac{N_x}{N_x+N_y} + \frac{N_y}{N_x+N_y} = 1$ ist somit

$$\frac{1}{N_x + N_y} \cdot {}^*(x+y) = \frac{N_x}{N_x + N_y} \cdot \big(\frac{1}{N_x} \cdot {}^*x\big) + \frac{N_y}{N_x + N_y} \cdot \big(\frac{1}{N_y} \cdot {}^*y\big) \in \mathsf{e}_\xi(0).$$

Damit ist also auch $x + y \in \mathsf{R}_\xi$. Dass mit x auch $r \cdot x$ für jedes $r \in \mathbb{R}$ in R_ξ liegt, ist nicht schwer einzusehen.

Es sei wieder $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ die zu E assoziierte Topologie auf R und $\mathcal{T}_\xi$ die von $\mathsf{e}_\xi(0)$ in ${}^*\mathsf{R}_\xi$ induzierte lokalkonvexe Topologie auf R_ξ, falls $\mathsf{e}_\xi(0) \subseteq {}^*\mathsf{R}_\xi$ gilt (unter dieser Voraussetzung erfüllt nämlich $\mathsf{e}_\xi(0)$ gerade die Voraussetzungen aus Satz 1.2.25 auf Seite 24).

Für den Satz, auf den wir hinarbeiten, benötigen wir noch eine weitere Einschränkung. Dabei geht es darum, dass die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}(0)$ mit der gesamten Nullklasse $[0]_{\mathsf{E}}$ nur „so viel wie nötig" gemeinsam haben. Eine präzise Formulierung liefert folgende Definition:

Definition 2.3.15. Sei E wie gehabt. Gilt zudem für alle $\xi \in \kappa$ und alle $\eta \in \lambda$ stets $\mathsf{e}_{\xi\eta}(0) \cap [0]_{\mathsf{E}} = \mathsf{e}_\xi(0)$, so hat E *strikt getrennte Monaden.* $\diamond$

Lemma 2.3.16: ([32]) Ist $\mathsf{e}_\xi(0)$ wie gehabt, sowie absolutkonvex und hat E strikt getrennte Monaden, so gilt $\mathsf{e}_\xi(0) \subseteq {}^*\mathsf{R}_\xi$.

Beweis: Die Aussage $\mathsf{e}_\xi(0) = \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}(0) \subseteq {}^*\mathsf{R}_\xi$ ist wegen $\mathsf{e}_{\xi\eta}(0) \subseteq \mathsf{e}_{\xi\eta'}(0)$ für $\eta' \leq \eta$ äquivalent zu $\exists^{\mathtt{st}}\mathfrak{h} \in {}^*\lambda\, ({}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}}(0) \subseteq {}^*\mathsf{R}_\xi)$, was nach Definition von R_ξ (und weil die beteiligten Mengen standard sind) wiederum äquivalent ist zu

$$\exists^{\mathtt{st}}\mathfrak{h} \in {}^*\lambda\, \forall^{\mathtt{st}}\mathfrak{x} \in {}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}}(0)\, \exists^{\mathtt{int}}\mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N}\, (\tfrac{1}{\mathfrak{n}}\mathfrak{x} \in \mathsf{e}_\xi(0)).$$

Ist nun $\eta \in \lambda$ fest und ${*x} \in \mathsf{e}_{\xi\eta}(0)$ beliebig standard, so ist für $\mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ stets $\frac{1}{\mathfrak{n}}{*x} \in [0]_\mathsf{E} \cap \mathsf{e}_{\xi\eta}(0) = \mathsf{e}_\xi(0)$, nach Definition der Relation und Absolutkonvexität der $\mathsf{e}_{\xi\eta}(0)$. ∎

Einschub: Gestalt der $\mathsf{e}_{\xi\eta}$

An dieser Stelle beschäftigen wir uns erneut mit Eigenschaften der die Relation E beschreibenden Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$, weil dies gut in den Zusammenhang passt. Wir betrachten hier den Fall, dass die Indexmenge κ abzählbar ist, d.h. die Relation in der Gestalt $\mathsf{E} = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{n\eta}$ vorliegt. Dann können wir nämlich die Mengen $\mathsf{e}_{n\eta}$ oBdA als $\subseteq$-aufsteigend bezüglich n annehmen:

Es sei $\mathsf{E} = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{n\eta}$ externe Äquivalenzrelation auf der standard Menge ${}^*X$. Definiere für $n \in \omega$ und $\eta \in \lambda$ die Menge $\mathsf{e}'_{n\eta} := \bigcup_{k\leq n} \mathsf{e}_{k\eta}$. Es gelten folgende Eigenschaften:

1. $\mathsf{E} = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}'_{n\eta}$
2. Für $x \in X$ gilt $[{*x}]_\mathsf{E} = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{n\eta}({*x}) = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}'_{n\eta}({*x})$.
3. Ist $\mathsf{e}_{n\eta} \subseteq \mathsf{e}_{n\eta'}$ für $\eta' \leq \eta$, so auch $\mathsf{e}'_{n\eta} \subseteq \mathsf{e}'_{n\eta'}$.

Sei nun X zusätzlich ein Vektorraum und E begrenzt lineare Relation mit $\mathsf{e}_{n\eta} \subseteq \mathsf{e}_{n\eta'}$ für $\eta' \leq \eta$.

4. $\mathsf{e}'_n(0) = \bigcup_{k\leq n} \mathsf{e}_k(0)$.
5. Hat E strikt getrennte Monaden, d.h. $[0]_\mathsf{E} \cap \mathsf{e}_{n\eta}(0) = \mathsf{e}_n(0) := \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{n\eta}(0)$, so gilt auch $[0]_\mathsf{E} \cap \mathsf{e}'_{n\eta}(0) = \mathsf{e}'_n(0) = \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}'_{n\eta}(0)$.

Behauptung 1 und 2 sind klar, die 3. verdient auch keinen expliziten Beweis.
Wir zeigen also zuerst

$$\mathsf{e}'_n(0) = \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}'_{n\eta}(0) = \bigcap_{\eta\in\lambda}\bigcup_{k\leq n} \mathsf{e}_{k\eta}(0) = \bigcup_{k\leq n}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{k\eta}(0) = \bigcup_{k\leq n} \mathsf{e}_k(0),$$

wobei das dritte = die eigentliche Behauptung darstellt:

Die $\supseteq$-Richtung ist klar. Es sei also $\mathfrak{x} \notin \bigcup_{k\leq n}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{k\eta}(0)$, d.h. zu jedem $k \leq n$ gibt es ein $\eta_k \in \lambda$ mit $\mathfrak{x} \notin \mathsf{e}_{k\eta_k}(0)$. Ist $\eta' := \max\{\eta_k : k \leq n\}$, so folgt $\mathfrak{x} \notin \mathsf{e}_{k\eta'}(0)$ für alle $k \leq n$ und damit $\mathfrak{x} \notin \bigcap_{\eta\in\lambda}\bigcup_{k\leq n} \mathsf{e}_{k\eta}(0)$.

Hat nun E strikt getrennte Monaden, so folgt für $n \in \omega$ und $\eta \in \lambda$ also

$$[0]_{\mathsf{E}} \cap \mathsf{e}_{n\eta}(0)' = [0]_{\mathsf{E}} \cap \bigcup_{k\leq n} \mathsf{e}_{k\eta}(0) = \bigcup_{k\leq n} \left([0]_{\mathsf{E}} \cap \mathsf{e}_{k\eta}(0)\right) = \bigcup_{k\leq n} \mathsf{e}_k(0) = \mathsf{e}'_n(0).$$

Der Satz

Wir kehren jetzt zurück zu unserem ursprünglichen Ziel, Beziehungen zwischen der assoziierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ auf R mit den entsprechenden induzierten Topologien $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}|_{\mathsf{R}_\xi}$ auf R_ξ und den dort durch die Monaden $\mathsf{e}_\xi(0)$ erzeugten Topologien $\mathcal{T}_\xi$ herzustellen.

Satz 2.3.17

([32]) Es sei $\mathsf{R} \in \mathbb{WF}$ reeller Vektorraum und E wie oben begrenzt lineare Relation mit hyperkonvexen Monaden auf ${}^*\mathsf{R}$. Ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ die feinste Topologie auf R, die auf allen Unterräumen R_ξ mit der durch $\mathsf{e}_\xi(0)$ induzierten Topologie $\mathcal{T}_\xi$ übereinstimmt:

(i) E hat strikt getrennte Monaden und für $\xi \in \kappa$ ist R_ξ in R abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$.

(ii) E hat strikt getrennte Monaden und es gilt $\mu_{\mathsf{E}}(0) = \delta([0]_{\mathsf{E}})$.

(iii) Es ist $\mathsf{e}_\xi(0) \subseteq {}^*\mathsf{R}_\xi$ und es gibt eine Topologie auf R, deren Umgebungsmonaden für alle $\xi \in \kappa$ auf R_ξ mit denen von $\mathcal{T}_\xi$ übereinstimmen.

(iv) E hat strikt getrennte Monaden und κ ist abzählbar. In diesem Fall induziert sogar $\mu_a(0)$ auf allen Unterräumen R_ξ die Topologie $\mathcal{T}_\xi$.

Beweis: Unter den genannten Voraussetzungen sind beide Topologien, sowohl $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ auf R, als auch $\mathcal{T}_\xi$ auf R_ξ, linear. Es reicht also für das Übereinstimmen der Topologien zu zeigen, dass jeweils die Nullumgebungsmonaden gleich sind, weshalb wir im Folgenden stets ${}^*\mathsf{R}_\xi \cap \mu_{\mathsf{E}}(0) = \mathsf{e}_\xi(0)$ zeigen wollen. Es gilt aber bereits „$\supseteq$“, da $\mathsf{e}_\xi(0) \subseteq [0]_{\mathsf{E}} \subseteq \mu_{\mathsf{E}}(0)$ immer erfüllt ist und $\mathsf{e}_\xi(0) \subseteq {}^*\mathsf{R}_\xi$ implizit (i, ii und iv mit Lemma 2.3.16) oder explizit (iii) gefordert wird.

(i) Es gilt ganz allgemein nach Lemma 2.3.9: Ist $A \subseteq \mathsf{R}$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ abgeschlossene Teilmenge, so stimmen auf A die zur eingeschränkten Relation $({}^*A \times {}^*A) \cap \mathsf{E}$ assoziierte Topologie und die durch $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ auf A induzierte Topologie überein.

Aufgrund der strikt getrennten Monaden gilt hier nun ${}^*\mathsf{R}_\xi \cap [0]_\mathsf{E} = \mathsf{e}_\xi(0)$, also ist die eingeschränkt assoziierte Topologie gerade $\mathcal{T}_\xi$.

(ii) Es ist für $A \subseteq \mathsf{R}$ stets ${}^*A \cap [{}^*x]_\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} ({}^*A \cap \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*x))$, wobei auch ${}^*A \cap \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*x)$ standard und inklusionsabsteigend bzgl. η ist. Also folgt mit Lemma 2.3.3

$$ {}^*\mathsf{R}_\xi \cap \delta([0]_\mathsf{E}) = \delta({}^*\mathsf{R}_\xi \cap [0]_\mathsf{E}) $$

und damit hier

$$ {}^*\mathsf{R}_\xi \cap \mu_\mathsf{E}(0) = {}^*\mathsf{R}_\xi \cap \delta([0]_\mathsf{E}) = \delta({}^*\mathsf{R}_\xi \cap [0]_\mathsf{E}) = \delta(\mathsf{e}_\xi(0)) = \mathsf{e}_\xi(0), $$

wobei das letzte = gilt, da $\mathsf{e}_\xi(0)$ selbst eine Monade ist.

(iii) Es sei $\mathcal{S}$ eine Topologie auf R, die auf allen Teilräumen R_ξ mit der durch $\mathsf{e}_\xi(0)$ erzeugten Topologie $\mathcal{T}_\xi$ übereinstimmt. Dann folgt

$$ [0]_\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \mathsf{e}_\xi(0) = \bigcup_{\xi\in\kappa} (\mu_\mathcal{S}(0) \cap {}^*\mathsf{R}_\xi) = \mu_\mathcal{S}(0) \cap \bigcup_{\xi\in\kappa} {}^*\mathsf{R}_\xi \subseteq \mu_\mathcal{S}(0) \cap {}^*\mathsf{R} = \mu_\mathcal{S}(0). $$

Also ist $\mu_\mathsf{E}(0) \subseteq \mu_\mathcal{S}(0)$, da $\mathcal{T}_\mathsf{E}$ die feinste Topologie auf R ist, deren Nullmonade $[0]_\mathsf{E}$ enthält. Dann gilt insbesondere ${}^*\mathsf{R}_\xi \cap \mu_\mathsf{E}(0) \subseteq {}^*\mathsf{R}_\xi \cap \mu_\mathcal{S}(0) = \mathsf{e}_\xi(0)$.

(iv) In diesem Fall ist $\mathsf{R} = \bigcup_{n\in\omega} \mathsf{R}_n$ mit $\mathsf{R}_1 \subseteq \mathsf{R}_2 \subseteq \dots$ (oBdA echt aufsteigend) und $(\mathsf{R}_n, \mathcal{T}_n)$ ist lokalkonvex, da $\mathsf{e}_n(0)$ absolutkonvex ist. Zudem folgt hier wegen $\mathsf{e}_n(0) = [0]_\mathsf{E} \cap {}^*\mathsf{R}_n$ sogar

$$ \mathsf{e}_{n+1}(0) \cap {}^*\mathsf{R}_n = ([0]_\mathsf{E} \cap {}^*\mathsf{R}_{n+1}) \cap {}^*\mathsf{R}_n = [0]_\mathsf{E} \cap {}^*\mathsf{R}_n = \mathsf{e}_n(0), $$

weshalb $\mathcal{T}_{n+1}$ auf R_n gerade $\mathcal{T}_n$ induziert.

Nach Satz 3.2.2 auf Seite 90 induziert dann die Hüllentopologie des strikten induktiven Limes auf jedem R_n gerade $\mathcal{T}_n$. Diese Hüllentopologie ist aber gerade die durch die absolutkonvexe Hülle $\mu_a(0)$ erzeugte Topologie, also folgt ${}^*\mathsf{R}_n \cap \mu_a(0) = \mathsf{e}_n(0)$, und wegen $\mu_\mathsf{E}(0) \subseteq \mu_a(0)$ die Behauptung. ∎

2.3.7 Der Abschlussoperator

Bei der Definition der assoziierten Topologie hatten wir uns an der Tatsache orientiert, dass eine Menge $U \subseteq X$ genau dann offen bezüglich einer auf X gegebenen Topologie $\mathcal{T}$ ist, wenn für jedes standard Element ${}^*u \in {}^*U$ die Umgebungsmonade $\mu_\mathcal{T}({}^*u)$ ganz in ${}^*U$ liegt: $\mu_\mathcal{T}({}^*u) \subseteq {}^*U$. Dementsprechend wurde eine Menge $U \subseteq X$

als offen bezüglich der assoziierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ einer Relation E definiert, wenn für alle $u \in U$ stets $[{}^*u]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*U$ gilt.

Nun ist im Umkehrschluss eine Menge $A \subseteq X$ abgeschlossen bezüglich einer gegebenen Topologie $\mathcal{T}$, wenn sie alle Punkte enthält, deren Umgebungsmonade die Menge ${}^*A$ schneiden, also formal: $\forall^{\mathsf{st}}\mathfrak{x} \in {}^*X\, (\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap {}^*A \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{x} \in {}^*A)$. Auch diese Eigenschaft können wir leicht auf die Äquivalenzklassen übertragen:

Lemma 2.3.18: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen bezüglich der assoziierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ einer externen Äquivalenzrelation E auf der Menge ${}^*X$, wenn gilt:

$$\forall^{\mathsf{st}}\mathfrak{x} \in {}^*X\, ([\mathfrak{x}]_{\mathsf{E}} \cap {}^*A \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{x} \in {}^*A) \qquad \square$$

Jetzt liegt es nahe, zu untersuchen, ob man auch den Abschluss einer beliebigen Menge $M \subseteq X$ erhält, wenn man sämtliche Punkte hinzunimmt, deren Äquivalenzklassen das $*$-Bild ${}^*M$ der gegebenen Menge schneiden.

Es sei also E eine externe Äquivalenzrelation auf der Menge ${}^*\mathsf{R}$. Wir definieren eine Abbildung[1] $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathfrak{P}(\mathsf{R}) \to \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ per

$$\boldsymbol{\alpha}(A) := \left\{x \in \mathsf{R} :\ [{}^*x]_{\mathsf{E}} \cap {}^*A \neq \emptyset\right\}.$$

Man erkennt leicht folgende Eigenschaften:

1. $\boldsymbol{\alpha}(\emptyset) = \emptyset$
2. $\boldsymbol{\alpha}(A \cup B) = \boldsymbol{\alpha}(A) \cup \boldsymbol{\alpha}(B)$
3. $A \subseteq \boldsymbol{\alpha}(A)$

Wir erinnern uns nun, dass eine idempotente Abbildung mit obigen drei Eigenschaften eine Topologie definiert, indem man die Fixpunkte der Abbildung als abgeschlossene Mengen auffasst (siehe Seite 18).

Aus Lemma 2.3.18 erhalten wir eine erste Beziehung dieser Abbildung zu den $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$-abgeschlossenen Mengen. Diese formulieren wir ohne Beweis

Lemma 2.3.19: $A \subseteq \mathsf{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\boldsymbol{\alpha}(A) = A$ gilt. $\square$

Damit beweisen wir eine weitere Eigenschaft von $\boldsymbol{\alpha}$:

[1] Man vergleiche diese Abbildung und ihre Eigenschaften mit der Verkettung $i \circ \mathsf{S_X}$ in [32].

Lemma 2.3.20: Bezeichnet $\overline{A}$ den topologischen Abschluss der Menge $A \subseteq \mathsf{R}$, so gilt für jede Teilmenge A von R stets $\boldsymbol{\alpha}(A) \subseteq \overline{A}$.

Beweis: Nach obiger Eigenschaft 2 folgt aus $A \subseteq B$ stets $\boldsymbol{\alpha}(A) \subseteq \boldsymbol{\alpha}(B)$ und somit ist nach Lemma 2.3.19 wegen $A \subseteq \overline{A}$ auch $\boldsymbol{\alpha}(A) \subseteq \boldsymbol{\alpha}(\overline{A}) = \overline{A}$. ∎

Um später flüssiger argumentieren zu können, formulieren wir noch das nächste Lemma. Der Beweis ist nicht schwer, weshalb wir ihn weglassen.

Lemma 2.3.21: Für alle $y \in \mathsf{R}$ und $A \subseteq \mathsf{R}$ gilt

$$[{}^*y]_{\mathsf{E}} \cap {}^*A \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta([{}^*y]_{\mathsf{E}}) \cap {}^*A \neq \emptyset. \qquad \square$$

Von formaler Seite her fehlt der Abbildung $\boldsymbol{\alpha}$ nur die Idempotenz, um ein Abschlussoperator zu sein. Aus obigen Lemmata folgt, dass für alle Teilmengen $A \subseteq \mathsf{R}$ stets $A \subseteq \boldsymbol{\alpha}(A) \subseteq \overline{A}$ gilt und die (bezüglich der assoziierten Topologie) abgeschlossenen Mengen gerade die Fixpunkte von $\boldsymbol{\alpha}$ sind. Der nächste Satz verbindet diese Sachverhalte.

Satz 2.3.22
Unter den bisherigen Voraussetzungen ist $\boldsymbol{\alpha}$ genau dann idempotent, wenn für alle $A \subseteq \mathsf{R}$ stets $\boldsymbol{\alpha}(A) = \overline{A}$ gilt. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\boldsymbol{\alpha}(A)$ stets abgeschlossen ist.

Beweis: Die Zusatzbehauptung ist klar. Ist nun $\boldsymbol{\alpha}$ idempotent, so ist für jedes $A \subseteq \mathsf{R}$ nach Lemma 2.3.19 wegen $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}(A)) = \boldsymbol{\alpha}(A)$ also $\boldsymbol{\alpha}(A)$ abgeschlossen, und damit gilt mit Lemma 2.3.20 schließlich $\boldsymbol{\alpha}(A) = \overline{A}$.
Ist umgekehrt $\boldsymbol{\alpha}(A) = \overline{A}$ für jedes $A \subseteq \mathsf{R}$, so folgt wiederum mit Lemma 2.3.19, dass $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}(A)) = \boldsymbol{\alpha}(\overline{A}) = \overline{A} = \boldsymbol{\alpha}(A)$ gilt, also $\boldsymbol{\alpha}$ idempotent ist. ∎

Wie eng die Beziehung zwischen der Tatsache, dass obige Abbildung $\boldsymbol{\alpha}$ genau dann eine Topologie definiert, wenn sie idempotent ist und unserer Definition einer topologischen Relation ist, zeigt folgender Satz:

Satz 2.3.23
([32]) Unter den bisherigen Voraussetzungen ist die Relation E genau dann topologisch,

wenn die zugehörige Abbildung $\boldsymbol{\alpha}$ idempotent ist.

Beweis: Es sei wie in Satz 2.3.1 auf Seite 41 für $r \in \mathsf{R}$

$$\delta([{}^*r]_{\mathsf{E}}) = \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} \bigcup_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} \mathsf{e}_{\mathfrak{x}\,{}^*f(\mathfrak{x})}({}^*r) \text{ und } \mathsf{E}_f({}^*r) = \bigcup_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} \mathsf{e}_{\mathfrak{x}\,{}^*f(\mathfrak{x})}({}^*r) = {}^*\big(D_f(r)\big).$$

Sei zunächst $\boldsymbol{\alpha}$ idempotent. Für $r \in \mathsf{R}$ und $f \in \lambda^\kappa$ beliebig definieren wir die Menge

$$\mathsf{M}_f(r) := D_f(r) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{R} \setminus D_f(r))\big),$$

die wegen $\mathsf{R} \setminus \mathsf{M}_f(r) = \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{R} \setminus D_f(r))$ nach Satz 2.3.22 offen ist. Daraus folgt nun $\mu_{\mathsf{E}}({}^*r) \subseteq {}^*\mathsf{M}_f(r) \subseteq \mathsf{E}_f({}^*r)$ und weil f beliebig war auch

$$\mu_{\mathsf{E}}({}^*r) \subseteq \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} {}^*\mathsf{M}_f(r) \subseteq \bigcap_{f\in\lambda^\kappa} \mathsf{E}_f({}^*r) = \delta([{}^*r]_{\mathsf{E}}).$$

Weil r ebenfalls beliebig war, ist somit E topologisch.

Sei umgekehrt E topologisch. Mit Lemma 2.3.21 folgt für beliebiges $r \in \mathsf{R}$ und $A \subseteq \mathsf{R}$ stets

$$\mu_{\mathsf{E}}({}^*r) \cap {}^*A \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta([{}^*r]_{\mathsf{E}}) \cap {}^*A \neq \emptyset \Leftrightarrow [{}^*r]_{\mathsf{E}} \cap {}^*A \neq \emptyset$$

und damit

$$\overline{A} = \big\{r \in \mathsf{R} :\ \mu_{\mathsf{E}}({}^*r) \cap {}^*A \neq \emptyset\big\} = \big\{r \in \mathsf{R} :\ [{}^*r]_{\mathsf{E}} \cap {}^*A \neq \emptyset\big\} = \boldsymbol{\alpha}(A).$$ ■

Ist $\boldsymbol{\alpha}$ nicht idempotent, so muss es also Teilmengen $A \subseteq \mathsf{R}$ geben mit $A \subsetneqq \boldsymbol{\alpha}(A) \subsetneqq \overline{A}$. Damit bringt $\boldsymbol{\alpha}$ die Menge A auf jeden Fall „näher“ an ihren Abschluss heran. Wegen der allgemeinen Gleichung $\boldsymbol{\alpha}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\alpha}^n(A)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\alpha}^n(A)$ ist also die Abbildung $\boldsymbol{\beta}\colon \mathfrak{P}(\mathsf{R}) \to \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ mit $A \mapsto \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\alpha}^n(A)$ unabhängig davon, ob die Relation topologisch ist oder nicht, stets ein Abschlussoperator.

Für eine konkrete Menge $B \subseteq \mathsf{R}$ hingegen muss man dafür gar nicht die unendliche Vereinigung bemühen, denn es gibt nach dem Lemma von Zorn in der aufsteigenden Kette $B \subseteq \boldsymbol{\alpha}(B) \subseteq \boldsymbol{\alpha}^2(B) \subseteq \ldots$ stets eine natürliche Zahl N_B mit der Eigenschaft $\boldsymbol{\alpha}^{N_B}(B) = \boldsymbol{\alpha}^{N_B+1}(B)$, woraus sofort wieder $\boldsymbol{\alpha}^{N_B}(B) = \overline{B}$ folgt.

Unklar ist, ob es für jede Topologie $\mathcal{T}$ stets ein globales $N_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $\boldsymbol{\alpha}^{N_{\mathcal{T}}}(B) = \overline{B}$ für alle $B \subseteq \mathsf{R}$ gilt, oder unter welchen Bedingungen an eine Topologie dies erfüllt ist. Mit Saturation erhält man jedoch, dass die Existenz einer solchen globalen Zahl äquivalent dazu ist, dass die mengenabhängige Zahl für alle internen Teilmengen sogar standard ist:

Existiert ein solches $N_{\mathcal{T}}$, so ist mit $*$-Transfer wegen $\forall B \in \mathfrak{P}(\mathsf{R})\,(\boldsymbol{\alpha}^{N_{\mathcal{T}}}(B) = \overline{B})$ sofort $\forall^{\mathtt{int}}\mathfrak{B} \in {}^*\mathfrak{P}(\mathsf{R})\,({}^*\boldsymbol{\alpha}^{{}^*N_{\mathcal{T}}}(\mathfrak{B}) = \overline{\mathfrak{B}})$.

Andernfalls gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ aber ein $B_n \subseteq \mathsf{R}$ mit $\boldsymbol{\alpha}^n(B_n) \neq \overline{B_n}$, d.h. die internen (sogar standard) Mengen $\mathfrak{F}_n := \left\{\mathfrak{B} \in {}^*\mathfrak{P}(\mathsf{R}) \,:\, {}^*\boldsymbol{\alpha}^n(\mathfrak{B}) \neq \overline{\mathfrak{B}}\right\}$ sind alle nichtleer und wegen $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}_m$ für $m < n$ folgt

$$\emptyset \neq \bigcap \{\mathfrak{F}_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \left\{\mathfrak{B} \in {}^*\mathfrak{P}(\mathsf{R}) \,:\, \forall n \in \mathbb{N}\,({}^*\boldsymbol{\alpha}^n(\mathfrak{B}) \neq \overline{\mathfrak{B}})\right\}.$$

Für ein $\mathfrak{B}$ aus diesem Schnitt muss also jedes N mit ${}^*\boldsymbol{\alpha}^N(\mathfrak{B}) = \overline{\mathfrak{B}}$ aus ${}^*\mathbb{N}_\infty$ sein.

2.3.8 Der Schattenraum

In Abschnitt 2.2.1 auf Seite 34 haben wir Relationen mit Äquivalenzklassen, die kein standard Element enthalten, in Anlehnung an eine ähnliche Eigenschaft bei Topologien, *nicht vollständig* genannt. Betrachten wir nun also eine nicht vollständige Relation, so liegt es nahe zu fragen, wie eine „Vervollständigung“ aussehen kann, d.h. wie man die „fehlenden“ standard Elemente zu diesen Äquivalenzklassen hinzunehmen kann. Eine befriedigende Antwort erhält man für den Fall, dass der Quotient $\mathtt{dom}\,\mathsf{E}/\mathsf{E}$ von Standardgröße ist.

In diesem Fall existiert eine Menge $\mathsf{S} \in \mathbb{WF}$ und eine (externe) Bijektion

$$\mathsf{k}\colon \mathtt{dom}\,\mathsf{E}/\mathsf{E} \to \mathsf{S}.$$

Wir nennen S den *Schattenraum* (zur Relation E).

Aufgrund der besonderen Form der hier untersuchten Relationen können wir einige Aussagen über den Schattenraum und seine Beziehung zum Ausgangsraum machen.

Allgemeines

Wir verlangen von unserer Relation E, dass jedes standard Element aus ${}^*\mathsf{R}$ in einer Äquivalenzklasse liegt und dass diese Zugehörigkeit eindeutig ist (siehe Abschnitt 2.1 auf Seite 30). Damit erhalten wir fast automatisch die Abbildung

$$\iota\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S} \qquad \iota(x) = \mathsf{k}([{}^*x]_{\mathsf{E}})$$

als eine Einbettung des Ausgangsraumes in den Schattenraum.

In dem hier untersuchten Fall, dass wir Äquivalenzklassen ohne standard Elemente haben, ist diese Abbildung natürlich nicht surjektiv und unser Interesse gilt der Suche nach einer Verbindung zwischen dem Schattenraum S und der Teilmenge $\iota(\mathsf{R})$.

Eine zweite Abbildung liefert uns eine naheliegende Erweiterung von Teilmengen $A \subseteq \mathsf{R}$, die wir als Teilmengen $\iota(A) \subseteq \iota(\mathsf{R}) \subseteq \mathsf{S}$ verstehen, auf Teilmengen des Schattenraums:

$$\mathsf{s}\colon \mathfrak{P}(\mathsf{R}) \to \mathfrak{P}(\mathsf{S}) \qquad \mathsf{s}(A) = \left\{z \in \mathsf{S} : \ \mathsf{k}^{-1}(z) \cap {}^*A \neq \emptyset\right\}$$

Der folgende Satz zeigt einige elementare Eigenschaften und Beziehungen der beiden Abbildungen und wird darum nicht bewiesen:

Satz 2.3.24

[32] Sind ι und s wie oben definiert, so gilt für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq \mathsf{R}$:

1. $\iota(A) \subseteq \mathsf{s}(A)$,
2. $\mathsf{s}(A \cup B) = \mathsf{s}(A) \cup \mathsf{s}(B)$,
3. $\mathsf{s}(A \cap B) \subseteq \mathsf{s}(A) \cap \mathsf{s}(B)$,
4. $\mathsf{s}(A \setminus B) \supseteq \mathsf{s}(A) \setminus \mathsf{s}(B)$. $\square$

Es ist also stets $A \subseteq \iota^{-1} \circ \mathsf{s}(A)$. Das ist nicht erstaunlich, weil diese Verkettung $\iota^{-1} \circ \mathsf{s}$ nichts anderes ist, als die Abbildung $\boldsymbol{\alpha}$ aus Abschnitt 2.3.7.

Lineares

Es sei nun R reeller Vektorraum und die Relation begrenzt linear. In kanonischer Weise entsteht nun auch auf dem Schattenraum S eine lineare Struktur:

Addition: Sind $s_1, s_2 \in \mathsf{S}$ und $\mathfrak{x}_i \in \mathsf{k}^{-1}(s_i)$, so definieren wir als Summe:

$$s_1 + s_2 := \mathsf{k}([\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2]_{\mathsf{E}})$$

Skalare Multiplikation: Sind $s \in \mathsf{S}$, $r \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{x} \in \mathsf{k}^{-1}(s)$, so definieren wir:

$$r \cdot s := \mathsf{k}([{}^*r \cdot \mathfrak{x}]_{\mathsf{E}})$$

Die begrenzte Linearität der Relation sorgt gerade für die Wohldefiniertheit dieser Operationen und mit $\iota(0)$ als Nullelement entsteht tatsächlich wieder ein reeller Vektorraum.

ι ist im Fall einer beschränkt linearen Relation auch linear und stellt sich unter verschiedenen Topologien als stetig heraus (siehe [32] und Satz 2.3.27). Damit können wir also auch aus topologischer Sicht R als Teilraum von S auffassen und untersuchen.

Als Ergänzung zu den in Satz 2.3.24 genannten Eigenschaften von $\mathsf{s}\colon \mathfrak{P}(\mathsf{R}) \to \mathfrak{P}(\mathsf{S})$ zeigen wir für den linearen Fall noch 3 weitere (dabei finden sich die ersten beiden auch in [32]):

Lemma 2.3.25: Unter den eben genannten Voraussetzungen ergibt sich für beliebige $A, B \subseteq \mathsf{R}$, $r \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathsf{R}$ stets:

1. $\mathtt{s}(A) + \mathtt{s}(B) \subseteq \mathtt{s}(A + B)$,

2. $\mathtt{s}(r \cdot A) = r \cdot \mathtt{s}(A)$,

3. $\mathtt{s}(x + A) = \iota(x) + \mathtt{s}(A)$.

Beweis: Sind r, x und $A, B \subseteq \mathsf{R}$ wie oben gefordert beliebig, so folgt:

1. Sind $a \in \mathtt{s}(A)$ und $b \in \mathtt{s}(B)$, also etwa $\mathfrak{a} \in \mathsf{k}^{-1}(a) \cap {}^*A$ und $\mathfrak{b} \in \mathsf{k}^{-1}(b) \cap {}^*B$, dann ist sowohl $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in {}^*A + {}^*B = {}^*(A + B)$, als auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in \mathsf{k}^{-1}(a + b)$ und somit $(a + b) \in \mathtt{s}(A + B)$.

2. Ist $a \in \mathtt{s}(A)$, etwa $\mathfrak{a} \in \mathsf{k}^{-1}(a) \cap {}^*A$, so ist auch ${}^*r \cdot \mathfrak{a} \in \mathsf{k}^{-1}(r \cdot a) \cap {}^*r \cdot {}^*A \neq \emptyset$ und somit $r \cdot a \in \mathtt{s}(r \cdot A)$. Die Umkehrung folgt ganz analog.

3. Für jedes $s \in \mathtt{s}(x + A)$ gilt, dass $\mathsf{k}^{-1}(s) \cap {}^*(x + A) \neq \emptyset$. Dann gibt es aber ein $\mathfrak{a} \in {}^*A$ mit ${}^*x + \mathfrak{a} \in \mathsf{k}^{-1}(s)$ und damit $\mathfrak{a} \in \mathsf{k}^{-1}(s - \iota(x))$, also $s - \iota(x) \in \mathtt{s}(A)$. Es folgt $\mathtt{s}(x + A) \subseteq \iota(x) + \mathtt{s}(A)$. Andererseits ist $\iota(x) + \mathtt{s}(A) = \mathtt{s}(\{x\}) + \mathtt{s}(A) \subseteq \mathtt{s}(x + A)$ nach Eigenschaft 1, also insgesamt $\mathtt{s}(x + A) = \iota(x) + \mathtt{s}(A)$ für alle $x \in \mathsf{R}$ und alle $A \subseteq \mathsf{R}$. ■

Topologisches

Es gibt, wie auch schon auf dem Ausgangsraum R, verschiedene Möglichkeiten, eine Topologie auf dem Schattenraum S zu erzeugen. Für den begrenzt linearen Fall gab es eine besonders hübsche, weil konstruktive Definition einer lokalkonvexen Topologie auf R: Die absolutkonvexe Hülle $\Gamma\delta([0]_{\mathsf{E}})$ der diskreten Monade $\delta([0]_{\mathsf{E}})$ erfüllte nämlich die Voraussetzungen aus Satz 1.2.25. Mit der bekannten Darstellung $\delta([0]_{\mathsf{E}}) = \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \mathsf{E}_f(0)$ erhält man sofort eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen für die lokalkonvexe Topologie $\mathscr{L}_{\mathsf{E}}$ auf R, nämlich $\mathcal{U} = \{\Gamma\, \mathsf{E}_f(0) : \ f \in \lambda^\kappa\}$.

Damit definieren wir die Monade $\mu_a^{\mathsf{S}}(0) := \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} {}^*\mathtt{s}(\Gamma\, \mathsf{E}_f(0))$.

Satz 2.3.26

([32]) Die Menge $\mu_a^{\mathsf{S}}(0) \subseteq {}^*\mathsf{S}$ erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 1.2.25 und erzeugt somit eine lokalkonvexe Topologie auf S.

Beweis: Aus Lemma 2.3.25 folgt, dass s absolutkonvexe Mengen wieder auf absolutkonvexe Mengen abbildet. Mit Satz 1.2.27 ist damit $\mu_a^{\mathsf{S}}(0)$ absolutkonvex.

Ist $f \in \lambda^\kappa$ beliebig, so folgt mit Satz 2.3.14 wegen $\mu_a(0) + \mu_a(0) \subseteq \mu_a(0) \subseteq \Gamma\,\mathsf{E}_f(0)$ die Existenz eines $g \in \lambda^\kappa$ mit $\Gamma\,\mathsf{E}_g(0) + \Gamma\,\mathsf{E}_g(0) \subseteq \Gamma\,\mathsf{E}_f(0)$ und daher mit Lemma 2.3.25 auch ${}^*\mathsf{s}(\Gamma\,\mathsf{E}_g(0)) + {}^*\mathsf{s}(\Gamma\,\mathsf{E}_g(0)) \subseteq {}^*\mathsf{s}(\Gamma\,\mathsf{E}_f(0))$. Insgesamt ist also auch hier wieder $\mu_a^{\mathsf{S}}(0) + \mu_a^{\mathsf{S}}(0) \subseteq \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$.

Sei nun $\mathfrak{a} \in {}^*\mathbb{R}_b$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ passend mit $|\mathfrak{a}| \leq n$. Ist $\mathfrak{x} \in \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$ beliebig, so folgt mit Obigem induktiv auch $n \cdot \mathfrak{x} \in \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$ und wegen der Absolutkonvexität daher $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{a}}{n}(n \cdot \mathfrak{x}) \in \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$, da $|\frac{\mathfrak{a}}{n}| \leq 1$.

Sei weiter $z \in \mathsf{S}$ beliebig. Ist $\mathfrak{x}_z \in \mathsf{k}^{-1}(z)$, dann folgt für alle $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$:

$$\frac{1}{N} \cdot \mathfrak{x}_z \in [0]_{\mathsf{E}} \subseteq \delta([0]_{\mathsf{E}}) \subseteq \mu_a(0) \subseteq \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \Gamma\,\mathsf{E}_f(0)$$

Damit gibt es für jedes $f \in \lambda^\kappa$ ein $n_f \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_f} \cdot \mathfrak{x}_z \in \Gamma\,\mathsf{E}_f(0)$, d.h. $\mathfrak{x}_z \in n_f \cdot \Gamma\,\mathsf{E}_f(0)$ und somit ${}^*z \in {}^*\mathsf{s}(n_f \cdot \Gamma\,\mathsf{E}_f(0)) = n_f \cdot {}^*\mathsf{s}(\Gamma\,\mathsf{E}_f(0))$. Weiter folgt also $\frac{1}{n_f} \cdot {}^*z \in {}^*\mathsf{s}(\Gamma\,\mathsf{E}_f(0))$ und weil diese Mengen absolutkonvex sind $\frac{1}{N} \cdot {}^*z \in {}^*\mathsf{s}(\Gamma\,\mathsf{E}_f(0))$ für alle $N \geq n_f$. Abschließend folgt $\frac{1}{N} \cdot {}^*z \in \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$ für alle $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ und daraus $\mathfrak{a} \cdot {}^*z \in \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$ für alle $\mathfrak{a} \approx 0$. ∎

Wir bezeichnen diese Topologie mit $\mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}}$ und untersuchen im Folgenden die Beziehung zwischen den lokalkonvexen Räumen $(\mathsf{R}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}})$ und $(\mathsf{S}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}})$.

Verallgemeinerte Stetigkeit

Versehen wir die Räume R und S mit Topologien $\mathcal{T}$, bzw. $\mathcal{S}$ und betrachten nun erneut die Abbildung ι, diesesmal aber auf der internen Ebene ${}^*\iota({}^*\mathsf{R}) \subseteq {}^*\mathsf{S}$, so drängt sich die Frage auf, wie sich die Äquivalenzklassen unter dieser Abbildung verhalten. Enthält eine Klasse ein standard Element, etwa ${}^*x$ für $x \in \mathsf{R}$, so gilt $[{}^*x]_{\mathsf{E}} \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$. Ist nun ι stetig, so folgt ${}^*\iota([{}^*x]_{\mathsf{E}}) \subseteq {}^*\iota(\mu_{\mathcal{T}}({}^*x)) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*\iota({}^*x))$. Für ein $s \in \mathsf{S} \setminus \iota(\mathsf{R})$ und dessen Klasse $\mathsf{k}^{-1}(s)$ können wir etwas derartiges nicht folgern.

Da uns aber genau dieser Fall interessiert, dass die Umgebungsmonaden auf dem Schattenraum die eingebetteten Klassen umfassen, formulieren wir folgende Voraussetzung:

$$\text{(VS)} \qquad \forall s \in \mathsf{S}\, \forall \mathfrak{x} \in \mathsf{k}^{-1}(s)\, \big({}^*\iota(\mathfrak{x}) \in \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s)\big)$$

Weil wir damit eine Eigenschaft der Stetigkeit der Abbildung ι von $\iota(\mathsf{R})$ auf ganz S verallgemeinern, nennen wir diese zusätzliche Bedingung die *verallgemeinerte Stetigkeit von ι* oder kurz (VS).

Vorarbeit

Wir zeigen nun die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung ι zwischen den lokalkonvexen Räumen $(\mathsf{R}, \mathscr{L}_\mathsf{E})$ und $(\mathsf{S}, \mathscr{L}_\mathsf{E}^\mathsf{S})$. Vergleiche dazu [32].

Satz 2.3.27
Es ist $\iota\colon (\mathsf{R}, \mathscr{L}_\mathsf{E}) \to (\mathsf{S}, \mathscr{L}_\mathsf{E}^\mathsf{S})$ linear, injektiv und stetig. Gilt zusätzlich (VS), so liegt außerdem $\iota(\mathsf{R})$ dicht in S.

Beweis: Aus der Konstruktion/Definition der Vektorraumstruktur auf S resultiert, dass gerade $\iota(x+y) = \mathsf{k}([{}^*x + {}^*y]_\mathsf{E}) = \mathsf{k}([{}^*x]_\mathsf{E} + [{}^*y]_\mathsf{E}) = \mathsf{k}([{}^*x]_\mathsf{E}) + \mathsf{k}([{}^*y]_\mathsf{E}) = \iota(x) + \iota(y)$ und analog $\iota(r \cdot x) = r \cdot \iota(x)$ ist.

Da die Äquivalenzklassen zweier verschiedener standard Elemente nach Definition disjunkt sind, ist ι injektiv.

Für den Beweis der Stetigkeit betrachten wir folgende Kette von Inklusionen:

$$ {}^*\iota(\mu_a(0)) = {}^*\iota\Bigg(\bigcap_{f \in \lambda^\kappa} \Gamma\, \mathsf{E}_f(0) \Bigg) \subseteq \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} {}^*\iota(\Gamma\, \mathsf{E}_f(0)) \subseteq \bigcap_{f \in \lambda^\kappa} {}^*\mathsf{s}(\Gamma\, \mathsf{E}_f(0)) = \mu_a^\mathsf{S}(0) $$

Nach (VS) existiert zu jedem $s \in \mathsf{S}$ ein $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}$ mit ${}^*\iota(\mathfrak{x}) \in \mu_a^\mathsf{S}({}^*s)$, was gerade Dichtheit bedeutet (vergleiche Seite 85). ■

Lemma 2.3.28: Es ist $\iota^{-1} \circ \mathsf{s}(A) \subseteq \overline{A}$ für alle $A \subseteq \mathsf{R}$.

Beweis: Folgt aus Lemma 2.3.20, da ja $\iota^{-1} \circ \mathsf{s} = \boldsymbol{\alpha}$ gilt. ■

Satz 2.3.29
Es gilt mit den bisherigen Voraussetzungen, aber bereits ohne die Eigenschaft (VS), dass stets ${}^*\iota^{-1}(\mu_a^\mathsf{S}(0)) = \mu_a(0)$ gilt.

Beweis: ${}^*\iota(\mu_a(0)) \subseteq \mu_a^\mathsf{S}(0)$ hatten wir schon bei der Konstruktion der Topologien erkannt. Es fehlt noch ${}^*\iota^{-1}(\mu_a^\mathsf{S}(0)) \subseteq \mu_a(0)$. Dazu betrachten wir für eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$ von $(\mathsf{R}, \mathscr{L}_\mathsf{E})$ die Darstellung

$$ {}^*\iota^{-1}(\mu_a^\mathsf{S}(0)) = {}^*\iota^{-1}\big(\bigcap_{U \in \mathcal{U}} {}^*\mathsf{s}({}^*U) \big) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \big({}^*\iota^{-1}({}^*\mathsf{s}({}^*U)) \big) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} {}^*\big(\iota^{-1} \circ \mathsf{s}(U) \big), $$

woraus sich mit Lemma 2.3.28 zunächst ${}^*\iota^{-1}(\mu_a^\mathsf{S}(0)) \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} {}^*\big(\overline{U}\big)$ und damit nach Lemma 1.2.21 folglich ${}^*\iota^{-1}(\mu_a^\mathsf{S}(0)) \subseteq \mu_a(0)$ ergibt. ■

Vollständigkeit des Schattenraums

Versehen wir den Schattenraum mit der lokalkonvexen Topologie $\mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}}$, so zeigt sich die enge Beziehung zum Ausgangsraum R daran, dass man die Vollständigkeit des Raumes $(\mathsf{S}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}})$ bereits in $(\mathsf{R}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}})$ erkennen kann. Ist dieses Kriterium erfüllt, kann man also den Schattenraum als eine Vervollständigung des Ausgangsraumes auffassen (vergleiche die Beschreibung durch Netze in [32]).

Satz 2.3.30
Der lokalkonvexe Raum $(\mathsf{S}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}})$ ist unter (VS) genau dann vollständig, wenn für jeden Cauchyfilter $\mathcal{C}$ auf $(\mathsf{R}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}})$ ein $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{C}} = \bigcap_{F \in \mathcal{C}} {}^*F$ und ein $\mathfrak{y} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ existieren mit $(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) \in \mu_a(0)$.

Beweis: Es sei zunächst $(\mathsf{S}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}})$ vollständig. Ist $\mathcal{C}$ ein Cauchyfilter auf $(\mathsf{R}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}})$, so erzeugt $\mathcal{C}^\iota := \{\iota(C) : C \in \mathcal{C}\}$ einen Cauchyfilter $\mathcal{G}$ auf $(\mathsf{S}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}})$:

Es ist $\iota(F_1) \cap \iota(F_2) = \iota(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{C}^\iota$, also bildet $\mathcal{C}^\iota$ eine Filterbasis und für die Filtermonade gilt

$$\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} = \boldsymbol{m}_{\mathcal{C}^\iota} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} {}^*(\iota(C)) = {}^*\iota(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} {}^*C) = {}^*\iota(\boldsymbol{m}_{\mathcal{C}}).$$

Für ein $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$ ist also ${}^*\iota^{-1}(\mathfrak{z}) \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{C}}$ und weil $\mathcal{C}$ Cauchy ist, folgt für dieses $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$ somit $\boldsymbol{m}_{\mathcal{C}} \subseteq {}^*\iota^{-1}(\mathfrak{z}) + \mu_a(0)$. Daraus folgt mit Satz 2.3.29 $\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} = {}^*\iota(\boldsymbol{m}_{\mathcal{C}}) \subseteq \mathfrak{z} + \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$, d.h. $\mathcal{G}$ ist Cauchy.

Da S vollständig ist, existiert ein $s_0 \in \mathsf{S}$ mit $\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} \subseteq \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s_0)$. Für ein $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{C}}$ folgt ${}^*\iota(\mathfrak{x}) \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} \subseteq \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s_0)$ und für ein $\mathfrak{y} \in \mathsf{k}^{-1}(s_0)$ gilt nach (VS) ${}^*\iota(\mathfrak{y}) \in \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s_0)$, also ${}^*\iota(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) \in \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$. Mit Satz 2.3.29 folgt die Bedingung.

Es gelte nun umgekehrt die Bedingung und $\mathcal{G}$ sei ein Cauchyfilter auf $(\mathsf{S}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}})$. Ist $\mathcal{V}$ eine Nullumgebungsbasis von $(\mathsf{R}, \mathscr{L}_{\mathsf{E}}^{\mathsf{S}})$, so existiert wegen der Cauchyeigenschaft ein $\phi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{G}$ mit $\phi(V) \subseteq x + V$ für alle $x \in \phi(V)$. Damit erzeugt die Familie $\mathcal{F} := \left\{\iota^{-1}(V + \phi(V)) : V \in \mathcal{V}\right\}$ einen Cauchyfilter auf R:

a) Für $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$ ist $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} {}^*(\phi(V)) \subseteq \mathfrak{y} + \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$, also auch

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} {}^*(V + \phi(V)) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} {}^*V + \bigcap_{V \in \mathcal{V}} {}^*(\phi(V)) \subseteq \mu_a^{\mathsf{S}}(0) + \mathfrak{y} + \mu_a^{\mathsf{S}}(0) = \mathfrak{y} + \mu_a^{\mathsf{S}}(0).$$

b) Ist $V \in \mathcal{V}$ beliebig, so ist für $s \in \phi(V)$ und $\mathfrak{x} \in \mathsf{k}^{-1}(s)$ stets ${}^*\iota(\mathfrak{x}) \in \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s) \subseteq {}^*(\phi(V)) + {}^*V$, also $\iota^{-1}(V + \phi(V)) \neq \emptyset$.

c) Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ beliebig, $z^1 \in V_1 \cap V_2 \subseteq V \in \mathcal{V}$ und $z^2 \in \phi(V_1) \cap \phi(V_2) \in \mathcal{G}$, dann ist $z := z^1 + z^2 \in (V_1 + \phi(V_1)) \cap (V_2 + \phi(V_2))$, also auch

$$\mu_a^{\mathsf{S}}({}^*z) = \mu_a^{\mathsf{S}}(0) + {}^*z \subseteq {}^*\big((V_1 + \phi(V_1)) \cap (V_2 + \phi(V_2))\big).$$

Damit ist

$$\emptyset \neq {}^*\iota^{-1}(\mu_a^{\mathsf{S}}({}^*z)) \subseteq {}^*\iota^{-1}\big({}^*(V_1 + \phi(V_1)) \cap {}^*(V_2 + \phi(V_2))\big)$$

und damit

$$\iota^{-1}(V_1 + \phi(V_1)) \cap \iota^{-1}(V_2 + \phi(V_2)) \supseteq \iota^{-1}((V_1 + \phi(V_1)) \cap (V_2 + \phi(V_2))) \neq \emptyset.$$

d) $\mathcal{F}$ hat damit die endliche Durchschnittseigenschaft und durch Hinzunahme dieser endlichen Schnitte entsteht eine Filterbasis $\mathcal{F}'$ mit $\boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} = \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}'}$.

e) Sind nun $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}'}$ beliebig, so ist ${}^*\iota(\mathfrak{x}_i) \in \mathfrak{y} + \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$ für $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$, damit auch ${}^*\iota(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \in \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$ und nach Satz 2.3.29 somit $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 \in \mu_a(0)$. Das ist aber gerade die Cauchyeigenschaft.

Nach der Bedingung existieren jetzt $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}'}$ und $\mathfrak{y} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ mit $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in \mu_a(0)$. Ist $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{m}_{\mathcal{G}}$, so gilt ${}^*\iota(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{z} + \mu_a^{\mathsf{S}}(0)$. Für $s := \mathsf{k}([\mathfrak{y}]_{\mathsf{E}})$ ist ${}^*\iota(\mathfrak{y}) \in \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s)$. Es folgt $\mathfrak{z} \in {}^*\iota(\mathfrak{x}) + \mu_a^{\mathsf{S}}(0) = {}^*\iota(\mathfrak{y}) + \mu_a^{\mathsf{S}}(0) = \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s)$, also $\boldsymbol{m}_{\mathcal{G}} \cap \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s) \neq \emptyset$ und damit konvergiert $\mathcal{G}$ nach Lemma 1.2.29 gegen $s \in \mathsf{S}$. ■

Bemerkung

In seiner Arbeit [32] betrachtet Wietschorke externe Relationen, welche die so genannte „Dichtheitsbedingung“

$$\text{(DHB)} \quad \forall \mathfrak{x} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}\ \exists \xi \in \kappa\, \forall \eta \in \lambda\, \exists z \in \mathsf{R}\, \big(\mathfrak{x} \in \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*z)\big),$$

erfüllen.

Wir gehen hier hingegen von standardgroßen Quotienten $^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$ aus und benutzen zur Betrachtung des Schattenraumes die Einschränkung

$$\text{(VS)} \quad \forall s \in \mathsf{S}\, \forall \mathfrak{x} \in \mathsf{k}^{-1}(s)\, \big({}^*\iota(\mathfrak{x}) \in \mu_a^{\mathsf{S}}({}^*s)\big).$$

Diese Betrachtungsweise schränkt die möglichen Fälle zumindest nicht weiter ein, als (DHB): Erfüllt die externe Relation nämlich diese Bedingung, so ist zum einen der Quotient standardgroß (vgl. [32, Anhang A]) und zum anderen erfüllt die Relation auch (VS).

Satz 2.3.31

Für den Fall, dass die Relation E die Dichtheitsbedingung (DHB) erfüllt, ist $^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$ von Standardgröße, also finden wir eine Menge $\mathsf{S} \in \mathbb{WF}$ und eine (externe) Bijektion $\mathsf{k}\colon {}^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}} \to \mathsf{S}$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{K} \in {}^{\mathtt{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$ beliebig, etwa $\mathfrak{K} = [\mathfrak{y}]_{\mathsf{E}}$ mit $\mathfrak{y} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$. Nach (DHB) existiert dann zu $\mathfrak{y}$ ein $\xi_{\mathfrak{y}} \in \kappa$ derart, dass es zu jedem $\eta \in \lambda$ ein $z_\eta \in \mathsf{R}$ gibt mit ${}^*z_\eta \in \mathsf{e}_{\xi_{\mathfrak{y}}\eta}(\mathfrak{y})$ (dabei nutzen wir aus, dass nach Abschnitt 2.2.4 ohne Beschränkung der Allgemeinheit ${}^*z \in \mathsf{e}_{\xi\eta}(\mathfrak{y}) \Leftrightarrow \mathfrak{y} \in \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*z)$ gilt). Dadurch ist also eine Abbildung $f\colon \mathtt{dom}\,\mathsf{E} \to \mathsf{R}^\lambda$ aus dem Definitionsbereich der Relation in die Menge der λ-Netze in R definiert. Nun gilt für diese Abbildung:

$$[\mathfrak{y}_1]_{\mathsf{E}} \neq [\mathfrak{y}_2]_{\mathsf{E}} \Rightarrow f(\mathfrak{y}_1) \neq f(\mathfrak{y}_2)$$

Seien dazu $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2 \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ so, dass $[\mathfrak{y}_1]_{\mathsf{E}} \neq [\mathfrak{y}_2]_{\mathsf{E}}$ und $\xi_{\mathfrak{y}_i} \in \kappa$ entsprechend (DHB) gewählt. Damit gilt $\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi_{\mathfrak{y}_1}\eta}(\mathfrak{y}_1) \cap \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi_{\mathfrak{y}_2}\eta}(\mathfrak{y}_2) = \emptyset$, also gibt es $\eta_1, \eta_2 \in \lambda$ mit $\mathsf{e}_{\xi_{\mathfrak{y}_1}\eta_1}(\mathfrak{y}_1) \cap \mathsf{e}_{\xi_{\mathfrak{y}_2}\eta_2}(\mathfrak{y}_2) = \emptyset$ und somit ist für $\eta_0 \geq \eta_1, \eta_2$ auch $\mathsf{e}_{\xi_{\mathfrak{y}_1}\eta_0}(\mathfrak{y}_1) \cap \mathsf{e}_{\xi_{\mathfrak{y}_2}\eta_0}(\mathfrak{y}_2) = \emptyset$, woraus $z^1_{\eta_0} \neq z^2_{\eta_0}$ und damit $f(\mathfrak{y}_1) \neq f(\mathfrak{y}_2)$ folgt. ∎

Für den nächsten Satz benötigen wir noch folgendes Lemma. Dazu sei wieder $d\colon (\kappa \times \lambda) \times \mathsf{R} \to \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ die Abbildung mit ${}^*(d_{\xi\eta}(x)) = \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*x)$.

Lemma 2.3.32: Ist $\mathfrak{z} \in {}^*\mathsf{R}$ derart, dass für ein $\xi \in \kappa$ und ein $\mathfrak{h} \in {}^*\lambda_\infty$ die Menge ${}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}}(\mathfrak{z}) \neq \emptyset$ ist, so gilt $\mathfrak{z} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$.

Beweis: Es ist ${}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}} \subseteq \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}$ für $\mathfrak{h} \in {}^*\lambda_\infty$ und mit ${}^*d_{\mathfrak{x}\mathfrak{h}}(\mathfrak{z}) = \{\mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{R} :\ \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{y}\rangle \in {}^*d_{\mathfrak{x}\mathfrak{h}}\}$ folgt aus ${}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}}(\mathfrak{z}) \neq \emptyset$ somit $\exists^{\mathtt{int}}\mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{R}\, \exists\xi \in \kappa\, \forall\eta \in \lambda\, (\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{y}\rangle \in \mathsf{e}_{\xi\eta})$, was äquivalent ist zu

$$\exists^{\mathtt{int}}\mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{R}\, (\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{y}\rangle \in \mathsf{E}).$$

∎

Damit können wir nun den Satz beweisen, der zusammen mit Satz 2.3.31 die Einschränkung auf standardgroße Quotienten und (VS) rechtfertigt:

Satz 2.3.33

Erfüllt die Relation E die Dichtheitsbedingung, so gilt auch (VS).

Beweis: Es sei $s \in \mathsf{S}$ beliebig und ebenso $\mathfrak{x} \in \mathsf{k}^{-1}(s) \subseteq \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$. Nach (DHB) existiert also für ein $\xi \in \kappa$ zu jedem $\eta \in \lambda$ ein $z_\eta \in \mathsf{R}$ mit $\mathfrak{x} \in \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*z_\eta)$. Wegen $\mathfrak{x} \in \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*z_\eta)$ besitzt die Menge $\mathcal{F}$ mit ${}^*_\sigma\mathcal{F} := \{\mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*z_\eta) :\ \eta \in \lambda\}$ die EDE und erzeugt so einen Filter.

Sei nun $\{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\} \subseteq \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}({}^*z_\eta)$ beliebig, dann ist

$$\mathfrak{X} = \left\{\mathfrak{h} \in {}^*\lambda :\ \exists^{\mathtt{int}}\mathfrak{z} \in {}^*\mathsf{R}\, (\{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\} \subseteq {}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}}(\mathfrak{z}))\right\} \subseteq {}^*\lambda$$

intern mit ${}^*_\sigma\lambda \subseteq \mathfrak{X}$, also existiert ein ausreichendes $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$. Sei nun $\mathfrak{h}_0 \in \mathfrak{Y}_\infty$ und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0} \in {}^*\mathsf{R}$ passend mit $\{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\} \subseteq {}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}_0}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}) \neq \emptyset$. Es ist also nach Lemma 2.3.32 oben $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0} \in \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ und somit ${}^*d_{{}^*\xi\mathfrak{h}_0}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}) \subseteq \bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}) \subseteq [\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}]_\mathsf{E}$. Damit folgt $\{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\} \subseteq [\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}]_\mathsf{E} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0} + [0]_\mathsf{E} \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0} + \delta([0]_\mathsf{E})$, also auch $(\mathfrak{y}_i - \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}) \in \delta([0]_\mathsf{E})$ für $i \in \{1, 2\}$ und somit $(\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2) = (\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}) - (\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_0}) \in \Gamma\delta([0]_\mathsf{E}) = \mu_a(0)$. Da $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2 \in \boldsymbol{m}_\mathcal{F}$ beliebig waren, folgt $\boldsymbol{m}_\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{x} + \mu_a(0)$.

Definieren wir $\mathcal{G} := \{\mathsf{s}(F) : F \in \mathcal{F}\}$, so folgt $\boldsymbol{m}_\mathcal{G} \subseteq {}^*\iota(\mathfrak{x}) + \mu_a^\mathsf{S}(0)$:
Wegen $\boldsymbol{m}_\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{x} + \mu_a(0)$ gilt für eine NUB $\mathcal{U}$ von R gerade

$$\forall U \in \mathcal{U}\, \exists F \in \mathcal{F}\, ({}^*F \subseteq \mathfrak{x} + {}^*U),$$

also auch ${}^*\mathsf{s}({}^*F) \subseteq {}^*\mathsf{s}(\mathfrak{x} + {}^*U) = {}^*\iota(\mathfrak{x}) + {}^*\mathsf{s}({}^*U)$ und somit

$$\boldsymbol{m}_\mathcal{G} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} {}^*\mathsf{s}({}^*F) \subseteq {}^*\iota(\mathfrak{x}) + \bigcap_{U\in\mathcal{U}} {}^*\mathsf{s}({}^*U) = {}^*\iota(\mathfrak{x}) + \mu_a^\mathsf{S}(0).$$

Es ist ${}^*s \in \boldsymbol{m}_\mathcal{G}$ nach Definition der Abbildung s und wegen $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{m}_\mathcal{F}$ und $\mathfrak{x} \in \mathsf{k}^{-1}(s)$. Dann ist aber ${}^*\iota(\mathfrak{x}) \in \boldsymbol{m}_\mathcal{G} \subseteq \mu_a^\mathsf{S}({}^*s)$. ■

2.4 Beispiele

Wir geben zunächst ein kleines Beispiel einer externen Relation, an der man viele der theoretischen Begriffe veranschaulichen kann. Zudem erkennen wir hier, dass bereits leichte Veränderungen in der Definition einer solchen Relation große Auswirkungen haben können.

Anschließend behandeln wir ein Beispiel, das erkennen lässt, wie schwierig der Übergang vom Verstehen und Beherrschen einer gegebenen Relation zum Verständnis der assoziierten Topologie sein kann.

2.4.1 Beispiele zu Standardgröße

Wir betrachten hier zunächst eine Relation auf dem Raum der hyperreellen Nullfolgen, deren Quotient nicht von Standardgröße ist. Anschließend modifizieren wir die Relation derart, dass der (neue) Quotient Standardgröße hat.

Es sei also R der Raum der reellen Nullfolgen, klassisch beschrieben als:

$$\mathsf{R} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;:\; \forall m \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \geq n\, (|f(k)| \leq \tfrac{1}{m}) \right\}$$

Damit erkennt man etwa mit $*$-$\mathsf{Transfer}$, dass für das $*$-Bild gilt:

$$^{*}\mathsf{R} = \left\{ \mathfrak{f} \in {}^{*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \;:\; \forall^{\mathtt{int}} \mathfrak{m} \in {}^{*}\mathbb{N}\, \exists^{\mathtt{int}} \mathfrak{n} \in {}^{*}\mathbb{N}\, \forall^{\mathtt{int}} \mathfrak{k} \geq \mathfrak{n}\, (|\mathfrak{f}(\mathfrak{k})| \leq \tfrac{1}{\mathfrak{m}}) \right\}$$

Definieren wir nun eine Relation E auf $^{*}\mathsf{R}$ per

$$\mathfrak{f}\,\mathsf{E}\,\mathfrak{g} \Leftrightarrow |\mathfrak{f}|, |\mathfrak{g}| \leq M \text{ für ein } M \in \mathbb{N} \text{ und } \mathfrak{f}(\mathfrak{i}) \approx \mathfrak{g}(\mathfrak{i}) \text{ für alle } \mathfrak{i} \in {}^{*}\mathbb{N},$$

so können wir das auch durch eine $\mathtt{st}$-$\in$-Formel ausdrücken. Mit der Definition

$$d_{MN} := \left\{ \langle f, g\rangle \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} \;:\; \forall i \in \mathbb{N} \left(|f(i)| \leq M \wedge |g(i)| \leq M \wedge |f(i) - g(i)| \leq \tfrac{1}{N} \right) \right\}$$

erkennt man, dass für $\mathsf{e}_{MN} := {}^{*}(d_{MN})$ gerade $\mathsf{E} = \bigcup_{M\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathsf{e}_{MN}$ gilt.

Der Definitionsbereich $\mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ dieser Relation ist gerade die Menge der (durch eine standard Zahl) beschränkten Folgen und die Relation begrenzt linear. Die Nullklasse besteht gerade aus denjenigen Folgen, die überall infinitesimal sind und ist eine Monade:

$$d_{MN}(0) = \left\{ f \in \mathsf{R} \;:\; \forall i \in \mathbb{N} \left(|f(i)| \leq M \wedge |f(i) - 0| \leq \tfrac{1}{N} \right) \right\} \tag{2.5}$$

$$= \left\{ f \in \mathsf{R} \;:\; \forall i \in \mathbb{N} \left(|f(i)| \leq \tfrac{1}{N} \right) \right\} \tag{2.6}$$

Damit ist auch $\mathsf{e}_{MN}(0)$ unabhängig von der Wahl von M und es gilt

$$[0]_{\mathsf{E}} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathsf{e}_{MN}(0) \tag{2.7}$$

für beliebiges $M \in \mathbb{N}$.

Also ist die assoziierte Topologie eine Vektorraumtopologie auf dem Raum der reellen Nullfolgen.

Wir interessieren uns aber mehr für den Quotienten $^{\mathsf{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$ und wollen zeigen, dass dieser nicht von Standardgröße ist. Dazu betrachten wir die Folgen $\mathfrak{f}_\mathfrak{n}$ für $\mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N}$, die bis zum $\mathfrak{n}$-ten Folgenglied konstant 1 und danach konstant 0 sind. Diese Folgen sind alle durch 1 beschränkt, also in $\mathsf{dom}\,\mathsf{E}$ und stehen paarweise nicht in Relation: Für $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ ist $\mathfrak{f}_\mathfrak{m}(\mathfrak{m}) - \mathfrak{f}_\mathfrak{n}(\mathfrak{m}) = 1$, also nicht infinitesimal.

Damit ist also ${}^*\mathbb{N} \to {}^{\mathsf{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$, $\mathfrak{n} \mapsto [\mathfrak{f}_\mathfrak{n}]_\mathsf{E}$ eine injektive Einbettung einer intern unendlichen Menge in den Quotienten $^{\mathsf{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$, weshalb dieser nach [9, Theorem 1.4.11] nicht standardgroß sein kann.

Ändern wir nun die Relation ein wenig, indem wir die Mengen d_{MN} leicht umdefinieren zu

$$d_{MN} := \left\{ \langle f, g\rangle \ : \ \forall i \in \mathbb{N} \left(|f(i)|, |g(i)| \leq M \wedge \left(i \leq N \Rightarrow |f(i) - g(i)| \leq \tfrac{1}{N} \right) \right) \right\},$$

so ändert sich $\mathsf{dom}\,\mathsf{E}$ nicht, aber zwei Folgen stehen nun in Relation zueinander, wenn sie in den standard Gliedern nur infinitesimal auseinander liegen. Damit steht jede interne (durch eine standard Zahl beschränkte) Folge jetzt in Relation zu einer standard Folge, nämlich derjenigen, die in den standard Komponenten nur infinitesimal entfernt ist. Damit ist also die neue Relation vollständig und somit $^{\mathsf{dom}\,\mathsf{E}}/_{\mathsf{E}}$ bijektiv zu R selbst.

2.4.2 Eine geometrische Konstruktion im ${}^*\mathbb{R}^2$

Im folgenden Beispiel definieren wir auf anschaulich sehr klare Art eine Relation auf dem ${}^*\mathbb{R}^2$, welche die Voraussetzungen von Seite 31 erfüllt und somit eine Topologie auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Diese Topologie zu verstehen, ist hingegen überhaupt nicht mehr leicht und wir werden auch nur einige wenige Beobachtungen erarbeiten. Das mangelnde Verständnis der Topologie hängt vermutlich damit zusammen, dass die Relation weder topologisch, noch begrenzt linear ist.

Das Beispiel

Wir definieren die Relation in ${}^*\mathbb{R}^2$ über die Äquivalenzklassen. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^2$, also ${*x} \in {}^*_\sigma\mathbb{R}^2$ standard und $\mathfrak{hal}({*x})$ die Umgebungsmonade bzgl. der Normtopologie. Da auf $\mathbb{R}^2$ alle Normen äquivalent sind und somit dieselbe Topologie induzieren, ist $\mathfrak{hal}({*x})$ unabhängig von der speziellen Norm. In der $\|\cdot\|_1$-Norm etwa ist für $\langle x_1, x_2\rangle \in \mathbb{R}^2$

$$\mathfrak{hal}(\langle {*x_1}, {*x_2}\rangle) = \left\{ \langle \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\rangle \in {}^*\mathbb{R}^2 \ : \ \forall^{\mathsf{st}} n \in {}^*\mathbb{N}\ \left(|{*x_1} - \mathfrak{y}_1| + |{*x_2} - \mathfrak{y}_2| < \tfrac{1}{n} \right) \right\}.$$

Damit sei für $\langle x_1, x_2\rangle \in \mathbb{R}^2$ nun die Äquivalenzklasse

$$[\langle {}^*x_1, {}^*x_2\rangle]_{\mathsf{E}} := \mathfrak{hal}(\langle {}^*x_1, {}^*x_2\rangle) \cap \big(\{{}^*x_1\} \times {}^*\mathbb{R} \;\cup\; {}^*\mathbb{R} \times \{{}^*x_2\}\big).$$

Wir nehmen also aus dem „euklidischen Halo“ $\mathfrak{hal}(\langle {}^*x_1, {}^*x_2\rangle)$ nur diejenigen Elemente, welche eine Koordinate mit dem definierenden standard Punkt gemeinsam haben. Da diese Mengen für verschiedene standard Punkte disjunkt sind, definieren sie auf ihrer Vereinigung (also auf $\mathtt{dom}\ \mathsf{E}$) tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

Nach dieser geometrisch-anschaulichen Definition beschreiben wir die Relation auch noch per Formel für ganz ${}^*\mathbb{R}^2$: Seien $\mathfrak{x} = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\rangle$, $\mathfrak{y} = \langle \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\rangle$ und $z = \langle z_1, z_2\rangle$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}\ \mathsf{E}\ \mathfrak{y} \;\Leftrightarrow\; \exists^{\mathtt{st}}\langle {}^*z_1, {}^*z_2\rangle \in {}^*\mathbb{R}^2 \;\big((\mathfrak{x}_1 = {}^*z_1 \vee \mathfrak{x}_2 = {}^*z_2) \wedge (\mathfrak{y}_1 = {}^*z_1 \vee \mathfrak{y}_2 = {}^*z_2) \wedge \\ \wedge \forall^{\mathtt{st}} n \in {}^*\mathbb{N}\ (|\mathfrak{x}_1 - {}^*z_1| + |\mathfrak{x}_2 - {}^*z_2| + |\mathfrak{y}_1 - {}^*z_1| + |\mathfrak{y}_2 - {}^*z_2| < \tfrac{1}{n})\big) \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung

$$\mathsf{K}(z) := \big\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 = z_1 \vee x_2 = z_2\big\} = \{z_1\} \times \mathbb{R} \;\cup\; \mathbb{R} \times \{z_2\}$$

und

$$\mathsf{e}_{zn} := \Big\{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle \,:\, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in {}^*(\mathsf{K}(z)) \wedge \|{}^*z - \mathfrak{x}\| + \|{}^*z - \mathfrak{y}\| < \frac{1}{n}\Big\}$$

ist also $\mathsf{E} = \bigcup_{z\in\mathbb{R}^2} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{e}_{zn}$ und die Relation damit von der bisher betrachteten Gestalt.

Aus der geometrischen Beschreibung ist klar, dass die Äquivalenzklassen und damit die offenen Mengen translationsinvariant unter Verschiebung mit standard Elementen sind. Es gilt $[\langle {}^*x_1, {}^*x_2\rangle]_{\mathsf{E}} + \langle {}^*y_1, {}^*y_2\rangle = [\langle {}^*x_1 + {}^*y_1, {}^*x_2 + {}^*y_2\rangle]_{\mathsf{E}}$. Damit genügt es, nur den Ursprung $\langle 0, 0\rangle$ zu untersuchen.

Zwar sind die Äquivalenzklassen selbst bereits Monaden, aber die Relation an sich ist nicht monadisch, da, wie wir sehen werden, die Klassen nicht mit den Umgebungsmonaden übereinstimmen. Auch ist E nicht begrenzt linear, weil etwa $[\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}} + [\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}} \not\subseteq [\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}}$.

Die diskrete Monade

Bevor wir die offenen Mengen untersuchen, um die Topologie besser zu verstehen, sehen wir uns die diskrete Monade an:

Für jedes $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt mit $D_\varepsilon := \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \times \{0\} \;\cup\; \{0\} \times \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \in \mathbb{WF}$ stets $[\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*(D_\varepsilon)$. Also gilt auch

$$\delta([\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}}) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} {}^*D_\varepsilon = [\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}}$$

und somit $\delta([\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}}) = [\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}}$. Daher ist sogar $[\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}} \in \Pi_1^{\mathtt{ss}}$. Damit erkennen wir auch, dass die Äquivalenzklassen tatsächlich bereits Monaden sind.

Grundlegende Eigenschaften offener Mengen

Sei $\langle 0,0\rangle \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebige $\mathcal{T}_\mathsf{E}$-offene Nullumgebung. Es ist also $[\langle 0,0\rangle]_\mathsf{E} \subseteq {}^*U$, d.h. $\bigcap_{\varepsilon>0} {}^*D_\varepsilon \subseteq {}^*U$, und damit existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit ${}^*D_{\varepsilon_0} \subseteq {}^*U$.

Zu jedem der Punkte aus D_{ε_0} kann man diese „Konstruktion“ wiederholen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber nun auf den Abschnitt $]0,\infty[\, \times \{0\}$, da das Problem durch Vorzeichenwechsel oder Koordinatentausch ganz leicht übertragbar ist. Ist also $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass $]0,\varepsilon_0[\, \times \{0\} \subseteq U$ gilt, so gibt es zu jedem $x \in]0,\varepsilon_0[$ ein reelles $r > 0$ so, dass für $|y| < r$ stets $\langle x,y\rangle \in U$ gilt.

Insgesamt kann man schließen, dass es zu jeder offenen Nullumgebung U ein $\varepsilon_U > 0$ und eine Abbildung $f_U \colon]0,\varepsilon_U[\to \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass

$$\{\langle x_1,x_2\rangle \,:\, 0 < x_1 < \varepsilon_U \wedge |x_2| < f_U(x_1)\} \subseteq U$$

gilt.

Beziehung zwischen $[\mathfrak{x}]_\mathsf{E}$ und $\mu_\mathsf{E}(\mathfrak{x})$

Mit Lemma 1.2.17 auf Seite 20 können wir ganz schnell erkennen, dass die Monade $\mu_\mathsf{E}(\langle 0,0\rangle)$ und die Klasse $[\langle 0,0\rangle]_\mathsf{E}$ nicht übereinstimmen können: Angenommen doch, dann wäre

$$\big(\{0\} \times {}^*\mathbb{R}\big) \cup \big({}^*\mathbb{R} \times \{0\}\big) \supseteq [\langle 0,0\rangle]_\mathsf{E} = \mu_\mathsf{E}(\langle 0,0\rangle),$$

also existierte eine $\mathcal{T}_\mathsf{E}$-offene Menge U mit

$$\langle 0,0\rangle \in U \subseteq \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big).$$

Wie bereits gezeigt, gäbe es in diesem U ein Element $\langle w_1,w_2\rangle$ mit $w_1 > 0$ und $w_2 \neq 0$. Es ist aber $\langle w_1,w_2\rangle \notin \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big)$, im Widerspruch zu $\langle w_1,w_2\rangle \in U$.

Dies ist auch eine gute Möglichkeit, Korollar 2.3.8 von Seite 45 anzuwenden, denn die Mengen ${}^*D_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{y}_0)$ dort kann man hier als achsenparallele Kreuze mit Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$ auffassen. Dabei gibt die interne Abbildung $\mathfrak{f} \colon {}^*\mathbb{R}^2 \to {}^*\mathbb{N}$ den Kehrwert des Durchmessers des Kreuzes an. Damit sieht man leicht, dass dieses Kriterium erfüllt ist, vergleiche auch Abbildung 2.1.

Der Abschlussoperator

Weil die Relation nicht topologisch ist, kann die Abbildung $\boldsymbol{\alpha}$ nach Satz 2.3.23 nicht idempotent und damit kein Abschlussoperator sein. Es muss also eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$

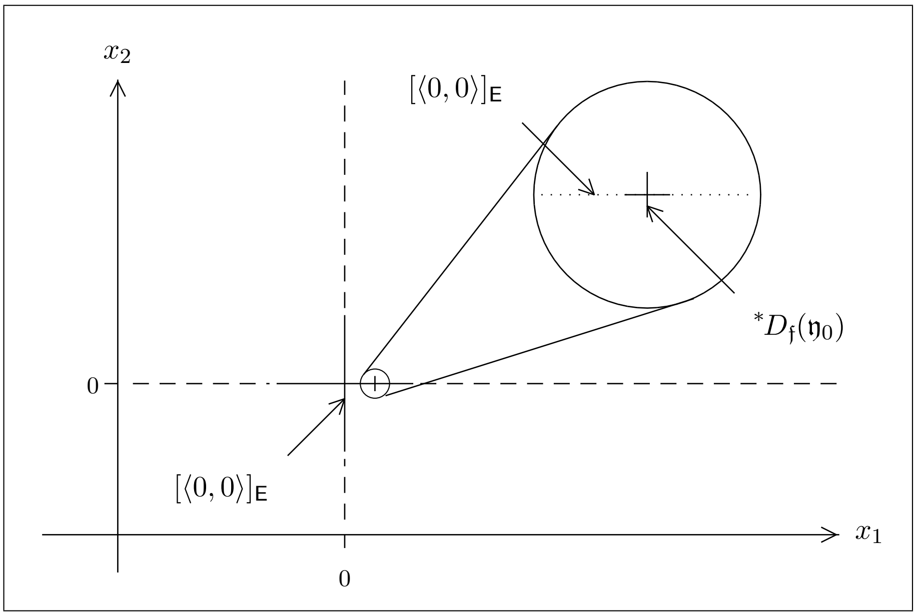

Abbildung 2.1: Grafik zur Argumentation, dass $[\langle 0,0\rangle]_{\mathsf{E}} \neq \mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle)$.

geben, für die $A \subsetneqq \boldsymbol{\alpha}(A) \subsetneqq \overline{A}$ ist, wobei $\overline{A}$ den topologischen Abschluss bezüglich $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ bedeutet.

Nun ist es gar nicht schwer, diese Menge zu finden: Sei $A :=]0,1[\times]0,1[$. Es ist dann $\boldsymbol{\alpha}(A) = [0,1] \times [0,1] \setminus \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$, also der Normabschlus von A ohne die Eckpunkte. Der $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$-Abschluss ist aber gleich dem Normabschluss, d.h. $\overline{A} = [0,1] \times [0,1]$, denn in $\mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle)$ etwa liegt, wie wir gesehen haben, ein Element $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle$ mit $0 < \mathfrak{x} \approx 0$ und $0 < \mathfrak{y} < \mathfrak{x}$, womit $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle \in {}^*A$ gilt und somit $\langle 0,0\rangle \in \overline{A}$.

In diesem Fall ist allerdings bereits $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}(A)) = \overline{A}$.

Jetzt wissen wir also, dass die Umgebungsmonade μ_{E} echt größer als die Äquivalenzklasse sein muss. Andererseits ist aber wegen $[{*x}]_{\mathsf{E}} \subseteq \mathfrak{hal}({*x})$ jede Norm-offene Menge auch offen bzgl. E und somit $\mu_{\mathsf{E}}({*x}) \subseteq \mathfrak{hal}({*x})$. Auch hier gilt keine Gleichheit, d.h. die assoziierte Topologie ist feiner als die Normtopologie. Um das zu zeigen, konstruieren wir eine $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ - offene Menge, die nicht Norm-offen ist.

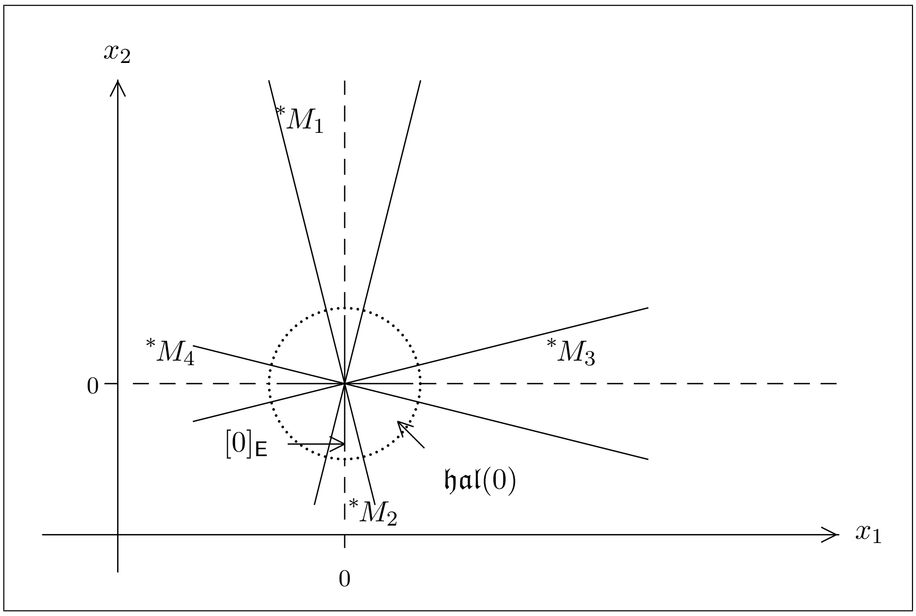

Abbildung 2.2: Grafik zur Konstruktion der Menge M.

Neue offene Menge

Wir definieren

$$M_1 := \left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \; y > 2 \cdot |x|\right\}$$
$$M_2 := \left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \; y < -2 \cdot |x|\right\}$$
$$M_3 := \left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \; x > 2 \cdot |y|\right\}$$
$$M_4 := \left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \; x < -2 \cdot |y|\right\}$$

und damit (vergleiche Abbildung 2.2)

$$M := M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup \{\langle 0, 0\rangle\}\,.$$

Da die M_i schon Norm-offen sind, sind sie und damit auch ihre Vereinigung $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$-offen. Damit nun M offen bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ ist, muss also nur noch $[\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*M$ gezeigt werden:

Für $0 < \mathfrak{x} \approx 0$ ist wegen $\mathfrak{x} > 2 \cdot |0|$ stets $\langle \mathfrak{x}, 0\rangle \in {}^*M_3$ und $\langle 0, \mathfrak{x}\rangle \in {}^*M_1$. Für $0 > \mathfrak{x} \approx 0$ ist analog $\langle \mathfrak{x}, 0\rangle \in {}^*M_4$ und $\langle 0, \mathfrak{x}\rangle \in {}^*M_2$. Insgesamt liegt also die gesamte Äquivalenzklasse in ${}^*M$ und damit ist M offen.

Andererseits sieht man leicht, dass für $0 < \mathfrak{x} \approx 0$ das Element $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle$ in $\mathfrak{hal}(\langle 0, 0\rangle)$, aber nicht in ${}^*M$ liegt, also enthält ${}^*M$ nicht die $\|\cdot\|$-Umgebungsmonade aller standard Elemente und ist daher nicht $\|\cdot\|$-offen.

Der Schlauch

Man sieht schon an der Konstruktion der Menge M oben (vergleiche auch Abbildung 2.2), dass man den Faktor 2 beliebig (standard) variieren und sich so den Achsen sehr stark nähern kann. Aber es gibt tatsächlich einen „Schlauch“ um die Äquivalenzklasse, der in der Umgebungsmonade liegen muss:

Weiter oben hatten wir bereits gesehen, dass es zu jedem offenen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\langle 0, 0\rangle \in U$ ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x \in \,]0, \varepsilon_0[\; \exists r > 0\; \forall y \in \mathbb{R}\; (|y| < r \Rightarrow \langle x, y\rangle \in U)$$

Ist nun $0 < \mathfrak{x}_0 \approx 0$, so ist $\mathfrak{x}_0 \in {}^*]0, \varepsilon_0[$ für all diese ε_0. Damit gibt es zu jeder offenen Nullumgebung $U \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ ein internes $\mathfrak{r}_U > 0$ mit $\mathfrak{A}_U^{\mathfrak{x}_0} := \{\mathfrak{x}_0\} \times\,]0, \mathfrak{r}_U[\; \subseteq {}^*U$. Es ist $\mathfrak{A}_U^{\mathfrak{x}_0}$ intern und für zwei solche Mengen $\mathfrak{A}_{U_1}^{\mathfrak{x}_0}$ und $\mathfrak{A}_{U_2}^{\mathfrak{x}_0}$ ist der Schnitt $\mathfrak{A}_{U_1}^{\mathfrak{x}_0} \cap \mathfrak{A}_{U_2}^{\mathfrak{x}_0}$ gerade diejenige der beiden mit kleinerem $\mathfrak{r}_U$. Die Familie $\mathcal{F} = \left\{\mathfrak{A}_U^{\mathfrak{x}_0} \;:\; 0 \in U \in \mathcal{T}_{\mathsf{E}}\right\}$ hat Standardgröße, also ist der Schnitt über die gesamte Familie nach Saturation nicht leer. Dieser Schnitt hat aber gerade wieder die Form $\{\mathfrak{x}_0\} \times\,]0, \mathfrak{r}[$.

Diese Betrachtung funktioniert analog auch mit $\mathfrak{B}_U^{\mathfrak{x}_0} := \{\mathfrak{x}_0\} \times\,]-\mathfrak{r}_U, 0[$ und da $\langle \mathfrak{x}_0, 0\rangle$ sowieso in $[\langle 0, 0\rangle]_{\mathsf{E}}$ liegt, gilt insgesamt (siehe auch Abbildung 2.3):

$$\forall^{\mathtt{int}} \mathfrak{x} \approx 0\; \exists^{\mathtt{int}} \mathfrak{r} > 0\; \big(\{\mathfrak{x}\} \times\,]-\mathfrak{r}, \mathfrak{r}[\; \subseteq \mu_{\mathsf{E}}(\langle 0, 0\rangle)\big).$$

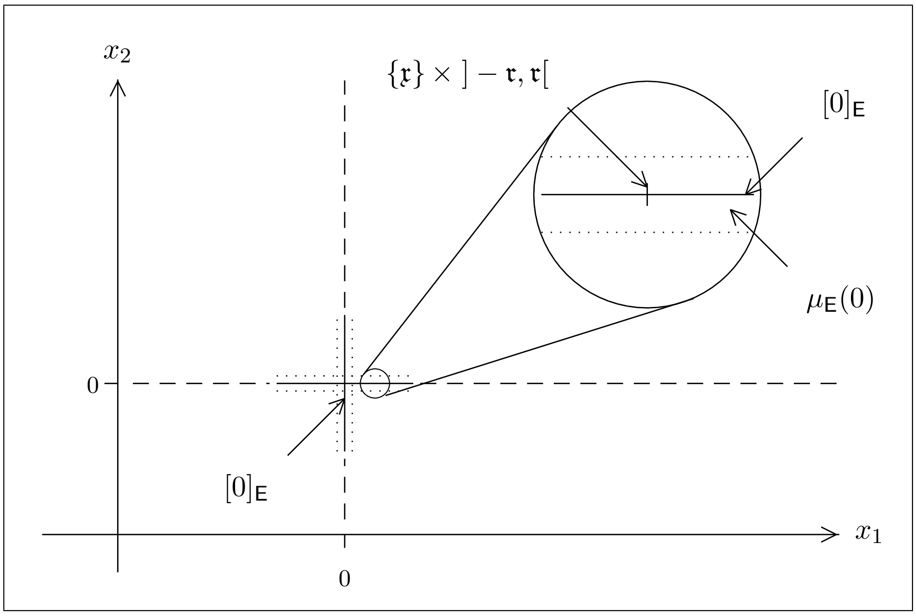

Abbildung 2.3: Grafik zur Idee der Gestalt der Nullumgebungsmonade $\mu_{\mathsf{E}}(\langle 0, 0\rangle)$.

Die Dicke des Schlauchs

Nachdem wir uns vergewissert haben, dass an jedem Punkt der Äquivalenzklasse auch ein Stück außerhalb der Klasse noch zur Umgebungsmonade gehört, zeigen wir, dass dieses Stück „unvorstellbar klein“ ist.

Sei dazu $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig (bezüglich der Normtopologie auf $\mathbb{R}$) mit der Eigenschaft $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Konstruiere wie oben die Mengen

$$\begin{aligned}
M_1^f &:= \left\{ \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \wedge |y| < f(x) \right\} \\
M_2^f &:= \left\{ \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0 \wedge |x| < f(y) \right\} \\
M_3^f &:= \left\{ \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \,:\, \langle -x, y\rangle \in M_1^f \right\} \\
M_4^f &:= \left\{ \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \,:\, \langle x, -y\rangle \in M_2^f \right\}
\end{aligned}$$

und damit

$$M^f := M_1^f \cup M_2^f \cup M_3^f \cup M_4^f \cup \{\langle 0, 0\rangle\}\,.$$

Für den Beweis, dass M^f offen bzgl. $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ ist, reicht es wieder, den Ursprung zu betrachten und $[\langle 0,0\rangle]_{\mathsf{E}} \subseteq {}^*(M^f)$ zu zeigen. Aber auch das ist analog zur obigen Menge M leicht zu erkennen.

Es ist also M^f eine bezüglich der von E induzierten Topologie offene Nullumgebung und somit $\mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle) \subseteq {}^*(M^f)$.

Fazit: Ist $0 < \mathfrak{x} \approx 0$, so ist $\langle \mathfrak{x}, 0\rangle \in \mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle)$. Ist aber $0 \leq \mathfrak{z} \leq \mathfrak{x}$ derart, dass ${}^*f(\mathfrak{x}) \leq \mathfrak{z}$ für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, so ist bereits $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle \notin \mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle)$. Für ein $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle \in \mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle)$ mit $0 < \mathfrak{x}$ und $0 \leq \mathfrak{z} \leq \mathfrak{x}$ ist also $\mathfrak{z} < {}^*f(\mathfrak{x})$ für alle derartigen f. Das ist es, was oben mit „unvorstellbar klein“ gemeint war.

Andererseits gibt es für $0 < \mathfrak{x} \approx 0$ und $0 < \mathfrak{z} < \mathfrak{x}$ mit $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle \notin \mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle)$ eine (nicht notwendig stetige!) Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit ${}^*f(\mathfrak{x}) < \mathfrak{z}$.

Da es reelle Funktionen $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ gibt, welche nicht durch eine positive, stetige Funktion f nach unten begrenzt werden können (konstruiere eine Funktion, die auf beliebigen Teilintervallen beliebig klein wird), gibt es also Elemente $0 < \mathfrak{x} \approx 0$ und $0 < \mathfrak{y} < \mathfrak{x}$ mit ${}^*g(\mathfrak{x}) \leq \mathfrak{y}$ für ein $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, aber $\mathfrak{y} < {}^*f(\mathfrak{x})$ für alle stetigen $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Von diesen Elementen können wir mit den bisherigen Erkenntnissen nicht sagen, ob sie in der Nullumgebungsmonade $\mu_{\mathsf{E}}(\langle 0,0\rangle)$ liegen oder nicht.

Einige topologische Merkmale

Kompaktheit: Wie man an der nonstandard Beschreibung von Kompaktheit (siehe [22, Abschnitt 4.1]) sehr leicht erkennt, ist die Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ nicht kompakt, weil $\mathtt{ns}({}^*\mathbb{R}^2) = {}^*\mathbb{R}^2$ nicht gilt.

Sicherlich kompakt sind endliche Vereinigungen von „Kreuzen“ der Form

$$[x_1 - r_1, x_1 + r_2] \times \{x_2\} \cup \{x_1\} \times [x_2 - s_1, x_2 + s_2]$$

für reelle Zahlen $r_i, s_i > 0$. Sicher nicht kompakt sind Mengen, die innere Punkte bezüglich der Normtopologie enthalten.

Zusammenhang: Die Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ ist zusammenhängend, sogar wegzusammenhängend.

Seien $x = \langle x_1, x_2\rangle$ und $y = \langle y_1, y_2\rangle$ zwei beliebige Punkte in $\mathbb{R}^2$. Definiere eine Abbildung

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} \langle x_1 + 2t\cdot(y_1 - x_1), x_2\rangle & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \langle y_1, x_2 + 2(t-\frac{1}{2})\cdot(y_2 - x_2)\rangle & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases},$$

welche $g(0) = x$ und $g(1) = y$ erfüllt. g ist stetig, weil für jedes $t_0 \in [0,1]$ und $\mathsf{t} \approx {}^*t_0$ stets ${}^*g(\mathsf{t}) \in [{}^*g({}^*t_0)]_{\mathsf{E}}$ gilt.

Stetigkeit: Wir benutzen hier die (bekannte) nonstandard Charakterisierung von Stetigkeit, die in Lemma 3.1.7 auf Seite 83 nochmals erwähnt wird und Korollar 3.1.9.

Für Abbildungen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, können wir den $\mathbb{R}^2$ mit der Normtopologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ und mit der assoziierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ versehen. Haben wir $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ im Ausgangsraum, so werden mehr Funktionen stetig sein, als wenn beide Räume die Normtopologie tragen. Versehen wir den Bildraum mit $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$, so werden es weniger sein.

Ein stetiger Weg $w\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\|\cdot\|}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathsf{E}})$ kann nur horizontal oder vertikal laufen und in gewissen Punkten um 90° abknicken (vgl. mit obigem Weg g).

Weil $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ feiner ist als die Normtopologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, gibt es mehr stetige Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ (letzteres ebenfalls mit der Normtopologie). Ein Beispiel dafür ist gerade die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \langle x_1, x_2\rangle \mapsto \begin{cases} \frac{x_1\cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \langle x_1, x_2\rangle \ne \langle 0, 0\rangle \\ 0 & \langle x_1, x_2\rangle = \langle 0, 0\rangle, \end{cases}$$

welche gern zur Anschauung von Nicht-Stetigkeit (bzgl. der Normtopologie) gewählt wird. Diese wiederum erkennt man, indem man ein $0 < \mathfrak{x} \approx 0$ wählt und für dieses dann ${}^*F(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \frac{1}{2} \notin \mu_{\|\cdot\|}(0)$ zeigt.

Allerdings liegt $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle$ nicht in $\mu_{\mathsf{E}}(\langle 0, 0 \rangle)$, also funktioniert dieses Argument bezüglich $\mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ nicht. Ist $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle \in [\langle 0, 0 \rangle]_{\mathsf{E}}$, so ist ${}^*F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = 0 \in \mu_{\|\cdot\|}(0)$. Gilt $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle \in \mu_{\mathsf{E}}(\langle 0, 0 \rangle) \setminus [\langle 0, 0 \rangle]_{\mathsf{E}}$, so gibt es ein $\mathfrak{e} \approx 0$ mit $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{x}_2$ oder $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{x}_1$. In beiden Fällen ist

$${}^*F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \frac{\mathfrak{e}}{1 + \mathfrak{e}} \in \mu_{\|\cdot\|}(0).$$

Kapitel 3

Nonstandard-Topologie

In diesem Kapitel geht es nicht um die Erzeugung von Topologien aus externen Relationen, sondern um die Beschreibung gegebener Topologien durch die Umgebungsmonaden. Dabei formulieren wir auch viele bekannte Tatsachen und Zusammenhänge der standard Welt, für die hier allerdings eine nonstandard Beschreibung bzw. ein nonstandard Beweis angegeben wird. Insbesondere untersuchen wir dabei die Rolle der Monaden von *entlegenen* Punkten, d.h. internen Punkten, die nicht in der Umgebungsmonade eines standard Punktes liegen. Angesichts der Erkenntnis aus Abschnitt 1.2.2, dass die Umgebungsmonaden der standard Punkte bereits die gesamte Topologie eindeutig definieren, erscheint es vielleicht zunächst überflüssig, sich näher mit entlegenen Punkten zu beschäftigen. Allerdings führt diese Beschäftigung zu interessanten Beschreibungen topologischer Sachverhalte und liefert praktische Kriterien, zum Beispiel Satz 3.3.4 oder Folgerung 3.4.7.

Im ersten Teil führen wir die Beschreibung allgemeiner topologischer Begriffe und Zusammenhänge aus Abschnitt 1.2.2 (ab Seite 17) fort.

Im zweiten Teil kümmern wir uns kurz um induktive Limites und erkennen, dass wir dort Ergebnisse aus den Untersuchungen externer Äquivalenzrelationen der Gestalt $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{\eta\in\lambda} e_{\xi\eta}$ verwenden können. Umgekehrt sind die hier erarbeiteten Ergebnisse schon im zweiten Kapitel von Interesse gewesen und in Satz 2.3.17 verwendeten wir bereits Satz 3.2.2.

Im dritten Teil beschäftigen wir uns intensiver mit den entlegenen Punkten und deren Umgebungsmonaden. Insbesondere untersuchen wir ihr Verhalten in regulären und normalen Räumen.

Im vierten Teil behandeln wir parakompakte Räume und als wichtigen Bestandteil lokalendliche Überdeckungen. Dabei liefert uns Folgerung 3.4.7 eine recht anschauliche Charakterisierung von lokalendlichen Überdeckungen – eben mit Hilfe der entlegenen Punkte. Daraus entwickeln wir Beziehungen zwischen verschiedenen Arten lokalendlicher Überdeckungen in regulären Räumen, wobei uns Ergebnisse des dritten Teils helfen. Am Ende der Untersuchungen beweisen wir den Satz, dass metrische Räume stets parakompakt sind (A. H. STONE).

3.1 Allgemeines

Ebenso wie in Abschnitt 1.2.2 die Umgebungsmonade eines internen Punktes definiert wurde (für standard Punkte ist dies gerade die Filtermonade des Umgebungsfilters), definiert man die Umgebungsmonade einer beliebigen (auch externen) Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq {}^*X$ nun als

$$\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) := \bigcap \left\{ {}^*U \; : \; {}^*U \in {}^*_\sigma\mathcal{T} \wedge \mathfrak{A} \subseteq {}^*U \right\}.$$

In [3, Abschnitt 6.1.4] findet man folgende nützliche Beschreibung der Umgebungsmonade einer internen Menge durch die Monaden ihrer Elemente:

Lemma 3.1.1: Ist $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $\mathfrak{A} \subseteq {}^*X$ eine interne Teilmenge, so gilt:

$$\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a})$$

□

Dass es sehr nützlich ist, von der Umgebungsmonade einer beliebigen Menge sprechen zu können, werden wir spätestens in Abschnitt 3.4 merken. Dort ist es auch hilfreich, den *Abschluss der Umgebungsmonade* zur Verfügung zu haben.

Für eine standard Menge hatten wir gesehen, dass die standard Elemente des Abschlusses gerade diejenigen sind, deren Umgebungsmonade die ursprüngliche Menge schneiden.

Das heißt:

$$_\sigma(\overline{{}^*A}) = {}^*_\sigma(\overline{A}) = \left\{ {}^*x \; : \; x \in X \wedge \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \cap {}^*A \neq \emptyset \right\} \tag{3.1}$$

für $A \subseteq X$.

Dabei verwenden wir für $\overline{{}^*A}$ die Beziehung

$$\overline{\mathfrak{A}} = \left\{ \mathfrak{x} \in {}^*X \; : \; \forall^{\texttt{int}} \mathfrak{V} \in {}^*\mathcal{T} \, (\mathfrak{x} \in \mathfrak{V} \Rightarrow \mathfrak{V} \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset) \right\}, \tag{3.2}$$

was nach Transfer für interne Mengen $\mathfrak{A}$ mit der klassischen Charakterisierung übereinstimmt (vergleiche Seite 21). Aus diesem Grund übernehmen wir Gleichung (3.2) für sämtliche Teilmengen $\mathfrak{A} \subseteq {}^*X$, für strikt externe sozusagen als Definition.

Obige Beschreibung (3.1) für standard Mengen und standard Elemente kann man in zwei Stufen verallgemeinern:

Lemma 3.1.2: Es sei wieder $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

1. Ist $A \subseteq X$ und $\mathfrak{x} \in {}^*X$ beliebig, so ist $\mathfrak{x} \in \overline{{}^*A} \Leftrightarrow \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

2. Sind $\mathfrak{A} \subseteq {}^*X$ und $\mathfrak{x} \in {}^*X$ beide intern beliebig, so gilt $\mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{A}} \Rightarrow \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$.

Beweis: Ist ${}^*A$ standard Menge, so folgt aus $\mathfrak{x} \notin \overline{{}^*A}$, dass ${}^*X \setminus \overline{{}^*A}$ offene standard Umgebung von $\mathfrak{x}$ und somit die Umgebungsmonade disjunkt zu ${}^*A$ ist. Die Umkehrung ist damit auch klar.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{A}$ intern, so folgt aus $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mathfrak{A} = \emptyset$ mit Lemma 1.2.17 sofort ${}^*V \cap \mathfrak{A} = \emptyset$ für ein offenes $V \subseteq X$ mit $\mathfrak{x} \in {}^*V$. Damit ist nach Gleichung (3.2) bereits $\mathfrak{x} \notin \overline{\mathfrak{A}}$. ■

Überträgt man den Abschluss auch auf die Umgebungsmonaden, so hat man zunächst zwei verschiedene Möglichkeiten:

1) Wir verwenden den in Gleichung (3.2) beschriebenen Abschluss der Umgebungsmonade $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})$ als (externe) Teilmenge von ${}^*X$, also:

$$\overline{\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})} = \left\{ \mathfrak{x} \in {}^*X \;:\; \forall^{\mathtt{int}} \mathfrak{V} \in {}^*\mathcal{T} \left(\mathfrak{x} \in \mathfrak{V} \Rightarrow \mathfrak{V} \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) \neq \emptyset \right) \right\}$$

2) Wir definieren $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) = \bigcap \left\{ {}^*\overline{V} \;:\; V \in \mathcal{T} \wedge \mathfrak{A} \subseteq {}^*V \right\}$ als den Schnitt der abgeschlossenen Umgebungen.

Zum Glück muss man diese Unterscheidung nur formal machen, denn es gilt

Lemma 3.1.3: $\overline{\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})} = \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})$ für alle internen $\mathfrak{A} \subseteq {}^*X$.

Beweis: Für beliebig offenes $V \subseteq X$ mit $\mathfrak{A} \subseteq {}^*V$ gilt stets $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) \subseteq {}^*V \subseteq {}^*\overline{V}$, also zunächst $\overline{\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})} \subseteq {}^*\overline{V}$, und damit auch $\overline{\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})} \subseteq \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{x} \notin \overline{\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})}$, so existiert eine interne Umgebung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{x}$, für die $\mathfrak{V} \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) = \emptyset$ gilt, was die Existenz einer standard offenen Umgebung ${}^*V$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{V} \cap {}^*V = \emptyset$ zur Folge hat. Damit ist aber $\mathfrak{x} \notin {}^*\overline{V}$ und damit $\mathfrak{x} \notin \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})$. ■

Dazu passend übertragen wir die Gleichung (3.1) auf interne Elemente und deren Umgebungsmonaden (welche normalerweise externe Mengen sind):

Lemma 3.1.4: Ist $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ topologischer Raum und sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{R}$ zwei interne Elemente, so gilt:

$$\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{x} \in \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y})$$

Beweis: Sei zunächst $\mathfrak{x} \in \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y})$, d.h. nach Lemma 3.1.3 hat jede (interne) Umgebung $\mathfrak{V} \in {}^*\mathcal{T}$ von $\mathfrak{x}$ nichtleeren Schnitt mit $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y})$. Nach Lemma 1.2.8 gibt es aber eine Umgebung $\mathfrak{V}_0 \subseteq \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})$, woraus sofort $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y}) \neq \emptyset$ folgt.

Ist umgekehrt $\mathfrak{x} \notin \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y})$, so existiert eine standard offene Umgebung ${}^*V \in {}^*_{\sigma}\mathcal{T}$ von $\mathfrak{y}$, für die $\mathfrak{x} \notin {}^*\overline{V}$ gilt. Mit $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y}) \subseteq {}^*V$ und $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \subseteq {}^*\mathsf{R} \setminus {}^*\overline{V}$ folgt die Behauptung. ■

In diesem Beweis kann man natürlich ganz leicht einen der internen Punkte durch eine interne Menge ersetzen. Damit erhält man eine offensichtliche Verallgemeinerung von Gleichung (3.1) zu folgender Äquivalenz:

$$\mathfrak{x} \in \overline{\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})} \Leftrightarrow \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) \neq \emptyset \tag{3.3}$$

Als Ergänzung zu Lemma 3.1.1 schließen wir daraus:

Lemma 3.1.5: Ist $\mathfrak{A} \subseteq {}^*X$ interne Teilmenge des topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$, so gilt:

$$\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a})$$

Beweis: Es gilt für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ stets $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) \subseteq \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})$, also auch $\bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) \subseteq \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{x} \in \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A})$, so folgt mit Gleichung (3.3) und Lemma 3.1.1, dass $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}_0) \neq \emptyset$ für ein $\mathfrak{a}_0 \in \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{x} \in \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}_0) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a})$. ■

Schatten

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, so gibt es für jedes $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*X)$ genau ein $x \in X$ mit $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$. In diesem Fall kann man den sogenannten *Schatten* definieren: Für $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*X)$ sei $\mathtt{sh}(\mathfrak{x}) \in X$ eben jenes Element mit $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*(\mathtt{sh}(\mathfrak{x})))$.

Einen etwas ausführlicheren Abschnitt über Konstruktionsmöglichkeiten von und mit Schatten und eine allgemeinere Definition findet man in [9, Abschnitt 2.3].

Mit dieser Zuordnung des Schattens zu standardnahen Elementen motivieren wir auch nachträglich den Namen *Schattenraum* (siehe Seite 59): Die Idee der externen Relationen war gerade, Umgebungsmonade und Äquivalenzklasse zu identifizieren. Damit können wir das einzige standard Element einer Äquivalenzklasse (diese Tatsache wurde durch die Definitionen erzwungen) als den „Schatten“ dieser Klasse auffassen. Bei nicht vollständigen Relationen ist nun der Schattenraum eine Möglichkeit, jeder Klasse einen Schatten zuordnen zu können.

Stetigkeit

Sind zwei topologische Räume $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{S})$ gegeben, so interessieren uns natürlich stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$. Dabei gibt es – je nach Zugang – auch wieder verschiedene Möglichkeiten, Stetigkeit zu definieren. Für unsere Zwecke am praktischsten ist folgende:

Definition 3.1.6. (*standard*) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen den topologischen Räumen $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{S})$ heißt *stetig*, wenn für alle $x \in X$ gilt: Zu jedem $V \in \mathcal{S}$ mit $f(x) \in V$ gibt es ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ und $f(U) \subseteq V$. ◇

Eine bekannte standard Folgerung ist, dass Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen selbst wieder offen sind.
Uns interessiert aber mehr die nonstandard Betrachtung mittels Umgebungsmonaden. Diese sieht nun wie folgt aus (vgl. etwa [3]):

Lemma 3.1.7: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen den topologischen Räumen $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{S})$ ist genau dann stetig, wenn für beliebiges $x \in X$ stets die Beziehung ${}^*f(\mu_{\mathcal{T}}({}^*x)) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*f({}^*x))$ gilt. □

Dieses Lemma beweisen wir nicht, denn man kann eine Richtung dieser Aussage sogar noch ausweiten:

Lemma 3.1.8: Ist $f\colon X \to Y$ wie oben stetig, so gilt für jedes (interne) $\mathfrak{x} \in {}^*X$ auch ${}^*f(\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*f(\mathfrak{x}))$.

Beweis: Sei $\mathfrak{x} \in {}^*X$ beliebig und $W \in \mathcal{S}$ beliebige offene Teilmenge von Y mit ${}^*f(\mathfrak{x}) \in {}^*W$. Dann ist wegen Stetigkeit $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}$ mit $\mathfrak{x} \in {}^*(f^{-1}(W)) = {}^*f^{-1}({}^*W)$, also $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \subseteq {}^*f^{-1}({}^*W)$ und damit ${}^*f(\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})) \subseteq {}^*f({}^*f^{-1}({}^*W)) = {}^*W$. Insgesamt folgt ${}^*f(\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*f(\mathfrak{x}))$. ■

Damit ist klar, dass die „Anzahl“ stetiger Funktionen $f\colon X \to Y$ davon abhängt, mit welchen Topologien X und Y versehen werden. Insbesondere gilt beim Übergang zu feineren bzw. gröberen Topologien (vergleiche Seite 19):

Korollar 3.1.9: Ist $f\colon (X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{S}_1)$ stetig und ist $\mathcal{T}_2$ feinere Topologie auf X und $\mathcal{S}_2$ gröbere Topologie auf Y, so ist $f\colon (X,\mathcal{T}_2) \to (Y,\mathcal{S}_2)$ ebenfalls stetig. □

Man kann aber nicht nur interne Eigenschaften von gegebenen (standard) stetigen Funktionen betrachten, sondern auch aus internen Überlegungen standard stetige Funktionen konstruieren. Dabei hilft uns die Schattenabbildung auf Hausdorffräumen (s.o.) und folgende Überlegung:

Ist eine interne Abbildung $\mathfrak{f}$ in einen Hausdorffraum derart gegeben, dass standard Punkte zumindest standardnahe Bilder besitzen, so liegt es nahe, eine Abbildung punktweise zu definieren, die einen standard Punkt auf den standard Schatten des internen Bildes abbildet. Per Standardisierung gibt es dann eine eindeutige standard Abbildung, welche auf den standard Punkten mit dieser Verkettung übereinstimmt. Ist der Bildraum sogar ein T_3-Raum (siehe ab Seite 92), so erhalten wir ein nützliches Ergebnis:

Satz 3.1.10

Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer und $(Y,\mathcal{S})$ ein regulärer Hausdorff-Raum. Weiter sei $\mathfrak{g}\colon {}^*X \to {}^*Y$ interne Abbildung derart, dass für jedes $x \in X$ gilt

1. $\mathfrak{g}({}^*x) \in \mathtt{ns}({}^*Y)$ und
2. $\mathfrak{g}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*x)) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*(\mathtt{sh}(\mathfrak{g}({}^*x))))$,

d.h. das (interne) Bild von ${}^*x$ sei standardnah und das Bild der Umgebungsmonade von ${}^*x$ liege ganz in der Umgebungsmonade des entsprechenden standard Punktes.

Dann ist die Abbildung $f\colon X \to Y$, $x \mapsto \mathtt{sh}(\mathfrak{g}({}^*x))$ stetig auf ganz X.

Beweis: Die Abbildung f existiert wegen der ersten Bedingung an $\mathfrak{g}$ und weil Y Hausdorffraum ist. Es seien nun $x_0 \in X$ und $V \in \mathcal{S}$ offene Umgebung von $f(x_0)$ beliebig. Wegen der Regularität gibt es eine Umgebung V' von $f(x_0)$ mit $\overline{V'} \subseteq V$ (siehe Lemma 3.3.2). Damit ist nach Konstruktion von f

$$\mathfrak{g}({}^*x_0) \in \mu_{\mathcal{S}}({}^*f({}^*x_0)) \subseteq {}^*V'$$

und somit wegen der zweiten Eigenschaft auch

$$\mathfrak{g}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*x_0)) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*f({}^*x_0)) \subseteq {}^*V'.$$

Nach Lemma 1.2.18 gibt es also ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x_0 \in U$ und $\mathfrak{g}({}^*U) \subseteq {}^*V'$. Für $u \in U$ beliebig folgt wegen $\mathfrak{g}({}^*u) \in {}^*V'$ also $f(u) \in \overline{V'} \subseteq V$.

Damit existiert also zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subseteq V$. ■

Dichtheit

Eine Menge $A \subseteq X$ liegt *dicht* in X, wenn $\overline{A} = X$ gilt. Das ist mit unseren Begriffen äquivalent zu $\forall x \in X\,(\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^*A \neq \emptyset)$. Also liegt A dicht in X, wenn in der Umgebungsmonade jedes standard Elementes ${*x}$ aus ${}^*X$ stets (interne) Elemente aus ${}^*A$ liegen.

Relativtopologien

Ist ein topologischer Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ gegeben, so kann man die *Relativtopologie* $\mathcal{T}|_M$ auf einer Teilmenge $M \subseteq \mathsf{R}$ betrachten. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ ist danach genau dann offen bzgl. $\mathcal{T}|_M$, wenn es ein $V_U \in \mathcal{T}$ gibt mit $U = V_U \cap M$.

Hier entsteht die Relativtopologie (oder *Teilraumtopologie*) ganz einfach, indem jedem Punkt $x \in M$ die Umgebungsmonade $\mu_M({*x}) := \mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^*M$ zugeordnet wird. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ ist damit genau dann offen in der Teilraumtopologie, wenn mit jedem $x \in U$ auch $\mu_M({*x}) \subseteq {}^*U$ gilt.

Man erkennt schnell, dass sich viele Eigenschaft des topologischen Raumes $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ auf den Teilraum $(M, \mathcal{T}|_M)$ übertragen. Insbesondere gibt Lemma 1.2.15 einen Hinweis, warum viele topologische Eigenschaften bei Einschränkung auf abgeschlossene Teilmengen erhalten bleiben:

Ist $A \subseteq \mathsf{R}$ abgeschlossen und gilt für ein $\mathfrak{a} \in {}^*A$ und ein $x \in \mathsf{R}$ nun $\mathfrak{a} \in \mu_{\mathcal{T}}({*x})$ bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$, so ist wegen der Abgeschlossenheit und $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^*A \neq \emptyset$ auch $x \in A$ und damit $\mathfrak{a} \in \mu_{\mathcal{T}|_A}({*x}) = \mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^*A$.

Quotientenraum

Ebenso wie man eine gegebene Topologie $\mathcal{T}$ auf einem Raum X auf eine Teilmenge M einschränken kann, um dort eine Topologie zu erhalten, kann man mit Hilfe einer gegebenen Topologie auch Topologien auf dem *Quotienten* $X/\sim$ bezüglich einer Relation $\sim$ auf X oder im linearen Fall auf dem Quotientenraum X/A bezüglich eines Teilraumes $A \sqsubseteq X$ erzeugen. Im letzteren Fall liegt es nahe, die Umgebungsmonaden der standard Punkte ${}^*(x + A)$ bezüglich der neuen Topologie $\mathcal{S}$ gerade als $\mu_{\mathcal{S}}({}^*(x + A)) := \mu_{\mathcal{T}}({*x}) + {}^*A \subseteq {}^*\!\left(X/A\right)$ zu definieren. Interessante Ergebnisse für die Quotiententopologie und ihre Beziehung zur ursprünglichen Topologie $\mathcal{T}$ auf X erhält man, wenn $\mathcal{T}$ mit der Vektorraumstruktur verträglich ist.

Ist nämlich $A \sqsubseteq V$ ein Teilraum des topologischen Vektorraumes $(V, \mathcal{T})$ und $\mathcal{S}$ auf V/A definiert durch $\mu_{\mathcal{S}}(0) = \mu_{\mathcal{S}}({}^*A) := \mu_{\mathcal{T}}(0) + {}^*A$, dann entsteht hierdurch eine Topologie auf V/A, die mit der linearen Struktur verträglich ist. Damit dies wieder zu einem topologischen Vektorraum wird, muss die Quotiententopologie noch Hausdorffsch sein (vgl. [12, §10.7]):

Lemma 3.1.11: Ist $A \sqsubseteq X$ Teilraum des topologischen Vektorraums $(V, \mathcal{T})$, so ist die Quotiententopologie $\mathcal{S}$ auf ${}^{V}\!/_{A}$ genau dann Hausdorffsch, wenn A abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$ ist.

Beweis: $\mathcal{S}$ ist genau dann Hausdorffsch, wenn ${}_{\sigma}(\mu_{\mathcal{T}}(0) + {}^{*}\!A) = {}_{\sigma}\mu_{\mathcal{S}}(0) = \{0\} = \{{}^{*}\!A\}$ ist.

Sei nun $\mathcal{S}$ Hausdorffsch und $x \in V$ mit $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^{*}\!A \neq \emptyset$, d.h. es ist ${*x} + \mathfrak{x} \in {}^{*}\!A$ für ein $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$, woraus ${*x} + {}^{*}\!A \in \mu_{\mathcal{T}}(0) + {}^{*}\!A$ und damit $x \in A$ folgt.

Ist umgekehrt A abgeschlossen und ${}^{*}(x + A) = {*x} + {}^{*}\!A \in \mu_{\mathcal{S}}(0) = \mu_{\mathcal{T}}(0) + {}^{*}\!A$ standard, dann folgt ${*x} - \mathfrak{x} \in {}^{*}\!A$ für ein $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$, woraus $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^{*}\!A \neq \emptyset$ und somit $x \in A$, d.h. $x + A = A$ folgt. ∎

3.2 Induktive Limites

In Abschnitt 2.3.6 haben wir uns mit externen Relationen beschäftigt, deren Nullklasse $[0]_{\mathsf{E}}$ als Vereinigung von Nullumgebungsmonaden aufgefasst werden kann. Dort hatte uns die Frage interessiert, unter welchen Voraussetzungen die assoziierte Topologie der Relation auf gewissen Teilräumen (welche passend zu den entsprechenden Monaden gewählt wurden) mit den Topologien dieser Nullmonaden übereinstimmt.

Hier gehen wir nun den anderen Weg, beginnen mit gegebenen Topologien auf gewissen Räumen und untersuchen die feinste Topologie auf der linearen Hülle dieser Räume, deren Nullumgebungsmonade gerade alle gegebenen Nullumgebungsmonaden umfasst.

Eine klassische Behandlung des Themas findet man etwa in [12, §19], einige nonstandard Ergebnisse in [32, Abschnitte 4.1 und 4.2].

3.2.1 Vorbereitungen

Produkttopologie

Gegeben sei eine Familie topologischer Räume $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$. Auf dem cartesischen Produkt $\prod_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$ entsteht die *Produkttopologie* lediglich aus den Monaden der standard Räume. Ist also $(\mathfrak{R}_\mathfrak{x})_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} = {}^*\big((\mathsf{R}_\xi)_{\xi\in\kappa}\big)$ und $r = (r_\xi)_{\xi\in\kappa} \in \prod_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$ mit ${}^*r = (\mathfrak{r}_\mathfrak{x})_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa}$, so setzen wir für $\xi \in \kappa$ nun $\mathfrak{M}_{{}^*\xi} = \mu_{\mathcal{T}_\xi}({}^*r_\xi)$ und $\mathfrak{M}_\mathfrak{x} = \mathfrak{R}_\mathfrak{x}$ für $\mathfrak{x}$ nichtstandard. Damit ist die Umgebungsmonade $\mu_\mathcal{T}({}^*r)$ von ${}^*r$ in der Produkttopologie $\mathcal{T}$ gegeben als $\mu_\mathcal{T}({}^*r) = \prod_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} \mathfrak{M}_\mathfrak{x}$. Dass dies tatsächlich eine Monade ist, erkennt man, indem man den Schnitt derjenigen offenen standard Umgebungen ${}^*U = (\mathfrak{U}_\mathfrak{x})_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa}$ von ${}^*r = (\mathfrak{r}_\mathfrak{x})_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa}$ betrachtet, bei denen jeweils nur für endlich viele $\mathfrak{x} \in {}^*\kappa$ die offene Umgebung $\mathfrak{U}_\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{x}$ vom Gesamtraum $\mathfrak{R}_\mathfrak{x}$ verschieden ist.

Sind die $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$ sogar topologische Vektorräume, so wird der Vektorraum $\prod_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$ (versehen mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation) durch diese Topologie ebenfalls zu einem topologischen Vektorraum. Dieser ist genau dann separiert, wenn sämtliche $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$ es sind. In diesem Fall sind nämlich die Topologien $\mathcal{T}_\xi$ bereits eindeutig durch die Umgebungsmonade der jeweiligen Vektorraumnull bestimmt. Konstruiert man nun wie oben die Monade $\mu_\mathcal{T}(0) := \prod_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa}$, so „erbt“ sie die Eigenschaften aus Satz 1.2.20 auf Seite 21, welche notwendig und hinreichend sind, damit $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ zu einem topologischen Vektorraum wird.

Direkte Summe

Ab sofort seien die Räume $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$ stets topologische Vektorräume. Die direkte Summe $\bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$ fassen wir auf als den Teilraum derjenigen Elemente des Produktes $\prod_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$, die nur endlich viele von 0 verschiedene Einträge haben. Ein internes Element $(\mathfrak{v}_\mathfrak{x})_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} \in {}^*\big(\prod_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi\big) = \prod_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} \mathfrak{R}_\mathfrak{x}$ ist demnach genau dann in ${}^*\big(\bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi\big) = \bigoplus_{\mathfrak{x}\in{}^*\kappa} \mathfrak{R}_\mathfrak{x}$ enthalten, wenn $\mathfrak{v}_\mathfrak{x}$ für nur hyperendlich viele $\mathfrak{x} \in {}^*\kappa$ von 0 verschieden ist. Bezeichnen wir diesen Raum mit $\mathsf{R}_\oplus$, so erzeugt die Monade $\mu_\mathcal{T}(0) \cap {}^*\mathsf{R}_\oplus$ die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_\oplus$, sodass $(\mathsf{R}_\oplus, \mathcal{T}_\oplus)$ ebenfalls zu einem topologischen Vektorraum wird (dass $\mu_\mathcal{T}(0) \cap {}^*\mathsf{R}_\oplus$ die entsprechenden Eigenschaften behält, ist leicht nachprüfbar). Der Einfachheit halber werden wir in Zukunft ein Element $r_\xi \in \mathsf{R}_\xi$ mit seinem Bild unter der kanonischen Einbettung (also dem Element $(s_\zeta)_{\zeta\in\kappa}$ mit $s_\xi = r_\xi$ und $s_\zeta = 0$ für $\zeta \neq \xi$) identifizieren.

Induktive Limites

Der *induktive Limes* ist allgemein für ein gerichtetes System linearer Räume $(\mathsf{R}_\xi)_{\xi\in\kappa}$ definiert, zu dem es für alle Paare $\xi \le \zeta$ eine lineare Abbildung $\mathsf{A}_{\zeta\xi} \colon \mathsf{R}_\xi \to \mathsf{R}_\zeta$ gibt, sodass für alle $\xi \le \zeta \le \chi$ stets $\mathsf{A}_{\chi\zeta} \circ \mathsf{A}_{\zeta\xi} = \mathsf{A}_{\chi\xi}$ gilt. In diesem Fall bildet man in $\bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$ die lineare Hülle H_0 aller Elemente der Form $r_\xi - \mathsf{A}_{\zeta\xi}(r_\xi)$ mit $r_\xi \in \mathsf{R}_\xi$ und $\xi \le \zeta$. Den Quotientenvektorraum $\bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi / H_0$ nennt man nun den *induktiven Limes der* R_ξ *bezüglich der* $\mathsf{A}_{\zeta\xi}$ und schreibt ihn auch $\varinjlim \mathsf{A}_{\zeta\xi}(\mathsf{R}_\xi)$.

3.2.2 Der lokalkonvexe Fall

Kümmern wir uns nun wieder um einen besonders einfachen Fall topologischer Vektorräume, um die lokalkonvexen Räume. Im Abschnitt 2.3.5 ab Seite 50 hatten wir bereits die Gestalt der Umgebungsmonaden lokalkonvexer Räume untersucht.

Die Hüllentopologie

Ist eine Familie $(\mathsf{R}_\xi)_{\xi\in\kappa}$ von lokalkonvexen Räumen mit entsprechenden linearen Abbildungen $\mathsf{A}_\xi \colon \mathsf{R}_\xi \to \mathsf{R} = \sum_{\xi\in\kappa} \mathsf{A}_\xi(\mathsf{R}_\xi)$ in die lineare Hülle gegeben, so betrachtet man die feinste lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf R, bezüglich der sämtliche Abbildungen A_ξ stetig sind. Ist diese Topologie $\mathcal{T}$ auf R separiert, so nennt man sie die *Hüllentopologie* auf $\mathsf{R} = \sum_{\xi\in\kappa} \mathsf{A}_\xi(\mathsf{R}_\xi)$.

Das bedeutet, dass die Nullumgebungsmonade $\mu_\mathcal{T}(0)$ dieser Topologie gerade die kleinste absolutkonvexe Monade ist, die sämtliche Bilder ${}^*\mathsf{A}_\xi(\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0))$ der Nullumgebungsmonaden $\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0)$ der Räume R_ξ enthält, d.h. $\mu_\mathcal{T}(0) = \Gamma\delta\big(\bigcup_{\xi\in\kappa} {}^*\mathsf{A}_\xi(\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0))\big)$. Die Topologie $\mathcal{T}$ ist genau dann separiert, wenn ${}_\sigma\mu_\mathcal{T}(0) = \{0\}$ gilt.

Damit die Monade $\mu_d := \Gamma\delta\big(\bigcup_{\xi\in\kappa} {}^*\mathsf{A}_\xi(\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0))\big)$ tatsächlich eine Vektorraumtopologie erzeugt, muss sie die Eigenschaften von Satz 1.2.25 erfüllen. Der nächste Satz hilft uns, dies zu zeigen:

Satz 3.2.1

Es sei wie oben $\mathsf{A}_\xi\colon \mathsf{R}_\xi \to \mathsf{R} = \bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$ und $\mu_\xi(0)$ die Nullumgebungsmonade des lokalkonvexen Raumes $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$. Ist $\mu := \bigcup_{\xi\in\kappa} {}^*\mathsf{A}_\xi(\mu_\xi(0))$, so gilt für die diskrete Monade $\delta(\mu)$:

1. Sind $x \in \mathsf{R}$ und $\mathfrak{a} \in \mathfrak{hal}(0)$ beliebig, so folgt $\mathfrak{a} \cdot {}^*x \in \delta(\mu)$.
2. Sind $\mathfrak{x} \in \delta(\mu)$ und $\mathfrak{a} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$ beliebig, so folgt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} \in \delta(\mu)$.

Beweis: Setzen wir $\mathcal{F}_\xi := \{\mathsf{A}_\xi(U) \,:\, 0 \in U \in \mathcal{T}_\xi\}$, so wird $\mu = \bigcup_{\xi\in\kappa} \boldsymbol{m}_{\mathcal{F}_\xi}$. Damit können wir also nach Satz 1.2.14 auch $\mu = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcap_{g\in\mathscr{G}'} {}^*(\mathsf{a}(\xi, g))$ schreiben. Nach Satz 2.3.10 müssen wir nur noch zeigen:

1. Sind $x \in \mathsf{R}$ und $\mathfrak{a} \in \mathfrak{hal}(0)$ beliebig, so folgt $\mathfrak{a} \cdot {}^*x \in \mu$.
2. Sind $\mathfrak{x} \in \mu$ und $\mathfrak{a} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$ beliebig, so folgt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} \in \mu$.

Für $x \in \mathsf{R}$ beliebig gibt es nun eine endliche Teilmenge $\kappa_x \subseteq \kappa$ mit $x = \sum_{\xi\in\kappa_x} \mathsf{A}_\xi(x_\xi)$ für $x_\xi \in \mathsf{R}_\xi$. Weil die Topologien $\mathcal{T}_\xi$ als lokalkonvex vorausgesetzt wurden, sind alle Monaden $\mu_\xi(0)$ absolutkonvex, also gilt für beliebiges $\mathfrak{a} \in \mathfrak{hal}(0)$ stets $\mathfrak{a} \cdot {}^*x_\xi \in \mu_\xi$ und weil die Summe endlich ist somit $\mathfrak{a} \cdot {}^*x = \sum_{\xi\in\kappa'} \mathfrak{a} \cdot {}^*x_\xi \in \mu$.

Ist weiter $\mathfrak{x} \in \mu$ beliebig, so also $\mathfrak{x} \in \mu_\xi(0)$ für ein $\xi \in \kappa$ und mit der Absolutkonvexität der $\mu_\xi(0)$ folgt wieder $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} \in \mu_\xi(0)$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathtt{ns}({}^*\mathbb{R})$. ∎

Damit die derart konstruierte Hüllentopologie eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie ist, fehlt nur noch die Hausdorffeigenschaft ${}_\sigma\Gamma\delta\big(\bigcup_{\xi\in\kappa} {}^*\mathsf{A}_\xi(\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0))\big) = \{0\}$. Diese ist unter den bisherigen Voraussetzungen nicht immer gegeben, aber in verschiedenen Situationen aus Zusatzbedingungen herzuleiten.

Sind die Räume $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$ zusätzlich alle vollständig, so wird auch der Raum R mit der von $\Gamma\delta\big(\bigcup_{\xi\in\kappa} {}^*\mathsf{A}_\xi(\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0))\big)$ erzeugten Topologie zu einem vollständigen Raum.

Der topologische induktive Limes

Zusätzlich zum allgemeinen Fall des induktiven Limes verlangen wir nun ein gerichtetes System $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$ lokalkonvexer Räume und die entsprechenden Abbildungen $\mathsf{A}_{\zeta\xi}$ sollen zusätzlich stetig sein (d.h. ${}^*\mathsf{A}_{\zeta\xi}(\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0)) \subseteq \mu_{\mathcal{T}_\zeta}(0)$). H_0 sei wieder wie oben und $K\colon \bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi \to \bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi/H_0$ der kanonische Homomorphismus. Bezeichnet $K_\zeta := K|_{\mathsf{R}_\zeta}$ die Einschränkung, so wird $\bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi/H_0 = \sum_{\xi\in\kappa} K_\xi(\mathsf{R}_\xi)$ und wir betrachten dort die „allgemeine Hüllentopologie" $\mathcal{T}$. Diese ist genau dann separiert (d.h. tatsächlich eine Hüllentopologie im obigen Sinn), wenn H_0 in der direkten Summe $\bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi$ abgeschlossen ist (siehe Lemma 3.1.11). In diesem Fall heißt der Raum $(\varinjlim \mathsf{A}_{\zeta\xi}(\mathsf{R}_\xi), \mathcal{T})$, d.h. $\varinjlim \mathsf{A}_{\zeta\xi}(\mathsf{R}_\xi) = \bigoplus_{\xi\in\kappa} \mathsf{R}_\xi/H_0$ versehen mit der Hüllentopologie $\mathcal{T}$, der *topologische induktive Limes der* $\mathsf{A}_{\zeta\xi}(\mathsf{R}_\xi)$.

Der strikte induktive Limes

Sind die lokalkonvexen Räume $(\mathsf{R}_\xi, \mathcal{T}_\xi)$ nun derart, dass für $\zeta \le \xi$ stets $\mathsf{R}_\zeta \subseteq \mathsf{R}_\xi$ ist und die Topologie $\mathcal{T}_\xi$ auf R_ζ gerade die Topologie $\mathcal{T}_\zeta$ induziert (was hier $\mu_{\mathcal{T}_\xi}(0) \cap {}^*(\mathsf{R}_\zeta) = \mu_{\mathcal{T}_\zeta}(0)$ bedeutet), so spricht man im Falle des topologischen induktiven Limes auch vom *strikten induktiven Limes*.

3.2.3 Der abzählbare Fall

Eine Besonderheit stellt der Fall $\kappa = \omega$ dar, wenn man also eine abzählbare Folge von Vektorräumen hat. In diesem Fall kann man o.B.d.A. annehmen, dass die Räume inklusionsaufsteigend sind, d.h. $\mathsf{R}_n \subsetneq \mathsf{R}_m$ für $n < m$ (vergleiche den Einschub vor Satz 2.3.17). Aus der Möglichkeit, die Räume nun Schritt für Schritt aufsteigend durchlaufen zu können, ergibt sich etwa, dass unter diesen Voraussetungen die lokalkonvexe Topologie des strikten induktiven Limes stets hausdorffsch ist.

Satz 3.2.2

[12, §19.4, Satz (1)] Es sei eine Folge $(\mathsf{R}_n, \mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalkonvexer Räume derart gegeben, dass für $n < m$ stets $\mathsf{R}_n \subsetneq \mathsf{R}_m$ und $\mu_{\mathcal{T}_n}(0) = \mu_{\mathcal{T}_m}(0) \cap {}^*\mathsf{R}_n$ gilt. Ist $\mathsf{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{R}_n$, so ist die durch $\Gamma\delta(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\mathcal{T}_n}(0))$ in R erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ hausdorffsch, und somit $\mathcal{T}$ die Hüllentopologie des induktiven Limes der $(\mathsf{R}_n, \mathcal{T}_n)$. Weiter erzeugt $\mathcal{T}$ jedes $\mathcal{T}_n$ auf R_n, d.h. $\mu_{\mathcal{T}}(0) \cap {}^*\mathsf{R}_n = \mu_{\mathcal{T}_n}(0)$.

Beweis: Bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{F}_n$ den Nullumgebungsfilter der Topologie $\mathcal{T}_n$ auf R_n, so folgt mit Satz 1.2.13 die Existenz einer gerichteten Menge $\mathscr{G}$ und einer Abbildung a mit den Eigenschaften

1. $\mu_{\mathcal{T}_n}(0) = \bigcap_{g\in\mathscr{G}} {}^*(\mathsf{a}(n,g))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$,
2. $\mathsf{a}(n_0, g_1) \subseteq \mathsf{a}(n_0, g_2)$ für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ und alle $g_2 \prec g_1$ und
3. $\mathsf{a}(n, g_0) \subseteq \mathsf{a}(m, g_0)$ für jedes $g_0 \in \mathscr{G}$ und alle $n \le m$.

Es sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Ist weiter $g \in \mathscr{G}$ beliebig, so gibt es nach Lemma 1.2.26 ein $V_1 \in \mathcal{F}_{n_0+1}$ mit $V_1 \cap \mathsf{R}_{n_0} = \mathsf{a}(n_0, g)$ und induktiv weiter zu jedem $k \geq 1$ ein $V_k \in \mathcal{F}_{n_0+k}$ mit $V_k = \mathsf{R}_{n_0+k} \cap V_{k+1}$. Setzen wir nun $f(n) = \mathsf{a}(n_0, g)$ für $n \leq n_0$ und $f(n) = V_{n-n_0}$ für $n > n_0$, so folgt $f \in \mathscr{G}$. Definieren wir weiter $F\colon \mathbb{N} \to \mathscr{G}, n \mapsto f$, so ist mit der Notation von Seite 35 somit $D_F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{a}(n, F(n))$ eine absolutkonvexe Menge mit $D_F \cap \mathsf{R}_{n_0} = \mathsf{a}(n_0, g)$.

Daraus folgt, dass es zu jedem $g \in \mathscr{G}$ ein $F \in \mathscr{G}^{\mathbb{N}}$ gibt mit ${}^*\mathsf{R}_{n_0} \cap \Gamma^*(D_F) = {}^*\mathsf{R}_{n_0} \cap {}^*(D_F) = {}^*(\mathsf{a}(n_0, g))$, woraus mit Satz 2.3.1 und Satz 2.3.13 wiederum

$$
{}^*\mathsf{R}_{n_0} \cap \Gamma\delta\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\mathcal{T}_n}(0)\Big) = \bigcap_{F\in\mathscr{G}^{\mathbb{N}}} {}^*\mathsf{R}_{n_0} \cap \Gamma^*(D_F) \subseteq \bigcap_{g\in\mathscr{G}} {}^*(\mathsf{a}(n_0, g)) = \mu_{\mathcal{T}_{n_0}}(0)
$$

folgt. Das bedeutet aber, dass die durch $\Gamma\delta\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\mathcal{T}_n}(0)\big)$ erzeugte lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf jedem R_n gerade die ursprüngliche Topologie $\mathcal{T}_n$ induziert.

Ist nun $x \in \mathsf{R}$ mit ${}^*x \in \mu_{\mathcal{T}}(0)$, so gibt es wegen $\mathsf{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{R}_n$ also ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit ${}^*x \in \mu_{\mathcal{T}}(0) \cap {}^*\mathsf{R}_{n_x} = \mu_{\mathcal{T}_{n_x}}(0)$. Weil $\mu_{\mathcal{T}_{n_x}}(0)$ hyperkonvex ist, folgt somit $x = 0$ und $\mathcal{T}$ ist hausdorffsch. ∎

3.3 Regularität und Normalität

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit regulären und normalen Räumen. Dabei beschreiben wir verschiedene Aspekte dieses Themas durch Eigenschaften von Umgebungsmonaden.

Am Ende nutzen wir die Charakterisierung normaler Räume durch den Satz von Tietze, um in dessen Beweis eine standard stetige Funktion durch eine interne Konstruktion zu erhalten.

Zunächst formulieren wir jedoch die klassischen *Trennungsaxiome* für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit Hilfe der Umgebungsmonaden (vgl. [3]):

(T_0) Sind $x, y \in X$ mit $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) = \mu_{\mathcal{T}}({*y})$, so ist $x = y$ („Kolmogorov-Raum“).

(T_1) Sind $x, y \in X$ mit $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({*y})$, so ist $x = y$ („Kuratowski-Raum“).

(T_2) Sind $x, y \in X$ mit $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({*y}) \neq \emptyset$, dann ist $x = y$ („Hausdorff-Raum“ oder „separierter Raum“).

(T_3') Sind $x \in X$ und $\mathfrak{y} \in {}^*X$ beliebig mit $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y}) \neq \emptyset$, dann ist $\mathfrak{y} \in \mu_{\mathcal{T}}({*x})$ („regulärer Raum“).

(T_3) $(X, \mathcal{T})$ ist T_0 und T_3'.

(T_4') Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $\mu_{\mathcal{T}}({}^*A) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*B) \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cap B \neq \emptyset$ („normaler Raum“).

(T_4) $(X, \mathcal{T})$ ist T_0 und T_4'.

In [3, Abschnitt 6.1.4] ist eine andere Definition für reguläre Räume gewählt, welche noch näher an einer üblichen Standarddefinition liegt. Für unsere Zwecke ist jedoch die hier gewählte praktischer und beide sind äquivalent zueinander:

Lemma 3.3.1: Obige Definition T_3' ist äquivalent zu

$$\forall A \subseteq X \, \forall x \in X \, (\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*A) \neq \emptyset \Rightarrow {*x} \in \overline{{}^*A}) \tag{3.4}$$

Beweis: Es gelte zunächst die Formel (3.4) und $x \in X$ und $\mathfrak{x} \in {}^*X$ seien beliebig mit $\mathfrak{x} \notin \mu_{\mathcal{T}}({*x})$. Dann existiert eine offene Umgebung V von x mit $\mathfrak{x} \notin {}^*V$. Also ist nach Voraussetzung $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*(X \setminus V)) = \emptyset$ und wegen $\mathfrak{x} \in {}^*(X \setminus V)$ ist $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*(X \setminus V))$, also $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({*x}) = \emptyset$.

Seien nun umgekehrt $x \in X$ und $A \subseteq X$ mit $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*A) \neq \emptyset$. Nach Lemma 3.1.1 gibt es ein $\mathfrak{x} \in {}^*A$ mit $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({*x}) \neq \emptyset$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({*x})$. Damit folgt $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^*A \neq \emptyset$ und somit $x \in \overline{A}$. ∎

Aus den Überlegungen in Abschnitt 3.1 ab Seite 80 leiten wir uns eine klassische Charakterisierung von Regularität ab:

Lemma 3.3.2: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann regulär, wenn es für jeden Punkt eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Umgebungen gibt.

Beweis: Nach obiger Definition und der Äquivalenz (3.3) auf Seite 82 ist $(X, \mathcal{T})$ genau dann regulär, wenn für alle $x \in X$ stets $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x) = \overline{\mu}_{\mathcal{T}}({}^*x)$ ist. ∎

Mit dieser Beschreibung erhalten wir, dass sich Regularität auf beliebige Teilräume überträgt:

Lemma 3.3.3: Ist $(X, \mathcal{T})$ regulär und $M \subseteq X$ beliebig, so ist auch $(M, \mathcal{T}|_M)$ regulär.

Beweis: Es gilt für jedes $x \in M$

$$\overline{\mu}_{\mathcal{T}|_M}({}^*x) = \overline{\mu}_{\mathcal{T}}({}^*x) \cap {}^*M = \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \cap {}^*M = \mu_{\mathcal{T}|_M}({}^*x),$$

also mit Lemma 3.3.2 die Behauptung. ∎

In unserem **HST**-Universum können wir nun eine weitere Charakterisierung von Regularität formulieren, die auf den ersten Blick erstaunlich wirken mag. Erstaunlich ist dabei die Tatsache, dass man aus dem Verhalten der entlegenen Punkte, die aus topologischer Sicht zunächst entbehrlich erscheinen, auf die Topologie selbst schließen kann.

Satz 3.3.4
Ein Hausdorffraum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ist genau dann regulär, wenn die Menge $\mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ der entlegenen Punkte abgeschlossen bezüglich Umgebungsmonadenbildung ist.

Beweis: Sei zunächst R regulär, also gilt nach Definition

$$\forall^{\mathtt{int}} \mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{R}\ \forall^{\mathtt{st}} \mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}\ (\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{y}) \cap \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{y} \in \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})). \tag{3.5}$$

Die Umgebungsmonade eines entlegenen Punktes ist also disjunkt zu allen Umgebungsmonaden von standard Punkten.

Gilt umgekehrt die Bedingung und sind $x \in \mathsf{R}$, $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}$ beliebig, so folgt aus der Beziehung $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \neq \emptyset$, dass $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*y)$ für ein $y \in \mathsf{R}$ sein muss und mit der

Hausdorff-Eigenschaft wegen $x = y$ sofort $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({*x})$ gilt. Damit ist Formel (3.5) erfüllt. ■

Weiter gilt:

Lemma 3.3.5: Ist $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ regulär, so gilt für jedes interne $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ sogar stets $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$.

Beweis: Seien $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ und $\mathfrak{H}$ wie angegeben. Dann ist nach Satz 3.3.4 und Lemma 3.1.1 also $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$. Ist nun $\mathfrak{x} \in \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{H})$, so folgt mit der Formel (3.3) auf Seite 82, dass $\mathfrak{x} \in \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ gelten muss. ■

Diese Aussage können wir auf gewisse externe Mengen ausdehnen, nämlich auf Monaden. Dabei müssen wir allerdings auf Lemma 3.1.1 verzichten, weil wir diese Aussage tatsächlich nur für interne Mengen zur Verfügung haben.

Lemma 3.3.6: Ist $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ regulär, so gilt für jede Monade $\boldsymbol{m} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ sogar auch $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{m}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$.

Beweis: Ist unter den gegebenen Voraussetzungen $x \in \mathsf{R}$ beliebig, so gilt wegen $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}({*x}) = \mu_{\mathcal{T}}({*x})$ also $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}({*x}) \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$, weshalb eine Umgebung $V \ni x$ existiert mit ${}^*\overline{V} \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$. Damit ist für $U := \mathsf{R} \setminus \overline{V}$ also $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{m}) \subseteq {}^*\overline{U}$ und $\mu_{\mathcal{T}}({*x}) \cap {}^*\overline{U} = \emptyset$. ■

In Analogie zu Lemma 3.3.2 ist ein topologischer Raum $\mathsf{R} \in \mathbb{WF}$ genau dann normal, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathsf{R}$ stets $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}({}^*A) = \mu_{\mathcal{T}}({}^*A)$ gilt. Daraus folgt:

Satz 3.3.7
Ein topologischer Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ist normal, falls für alle $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}$ stets $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) = \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})$ gilt.

Beweis: Wir benutzen Lemma 3.1.1 und Lemma 3.1.5: Sei $A \subseteq \mathsf{R}$ beliebige abgeschlossene Teilmenge. Dann gilt:

$$\mu_{\mathcal{T}}({}^*A) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in {}^*A} \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in {}^*A} \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) = \overline{\mu_{\mathcal{T}}({}^*A)}$$

■

Daraus leitet sich ganz schnell ein Unterschied zwischen regulären und normalen Räumen bezüglich der entlegenen Punkte ab:

Korollar 3.3.8: Ein regulärer Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ist normal, wenn für alle $\mathfrak{x} \in \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ stets $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) = \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})$ gilt. □

Als Ergänzung zu Lemma 3.1.5 finden wir für abgeschlossene standard Mengen eine interessante Aufteilung der Umgebungsmonade in standardnahe und entlegene Elemente:

Satz 3.3.9
Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossene Teilmenge im regulären Raum $(X, \mathcal{T})$. Dann gilt für die Umgebungsmonade von ${}^*A$ folgende Darstellung

$$\mu_{\mathcal{T}}({}^*A) = \bigcup_{a \in A} \mu_{\mathcal{T}}({}^*a) \sqcup \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathtt{rmt}({}^*A)} \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a})$$

als disjunkte Vereinigung der standardnahen und der entlegenen Elemente von $\mu_{\mathcal{T}}({}^*A)$.

Beweis: Weil X regulär ist, folgt $\bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathtt{rmt}({}^*A)} \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*X)$. Mit der Gleichheit $\bigcup_{a \in A} \mu_{\mathcal{T}}({}^*a) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathtt{ns}({}^*A)} \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a})$ folgt die Behauptung. ■

Die Umkehrung von Satz 3.3.7 gilt im Allgemeinen nicht: Ist A eine abgeschlossene Teilmenge mit ${}^*A \subsetneqq \mu_{\mathcal{T}}({}^*A)$, so wähle ein $\mathfrak{a}$ aus der Umgebungsmonade, welches nicht in ${}^*A$ liegt. Weil A abgeschlossen ist, ist damit $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) \cap {}^*A = \emptyset$, aber wäre $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) = \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a})$, so auch $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*A) = \emptyset$, im Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{a}$.

Der Satz von Tietze

Eine bekannte Charakterisierung normaler Räume ist der Satz von Tietze. Wir wollen hier einen Beweis geben, der sich im Wesentlichen an [20] orientiert. Die grobe Konstruktion wird im Grunde übernommen und daher eher knapp behandelt. Unser Augenmerk liegt auf dem Beweis, dass die konstruierte Funktion tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt, weil dieser Teil deutliche nonstandard Argumente verwendet.

Für den Beweis verwenden wir folgendes Lemma, was in [20] bewiesen wird:

Lemma 3.3.10: Sei X ein T_4-Raum, $A, Y \subseteq X$ abgeschlossen und $U \supseteq Y$ offene Obermenge.

Ist nun $C \subseteq A$ eine in A abgeschlossene Umgebung von $Y \cap A$ mit $C \subseteq U \cap A$, so existiert eine in X abgeschlossene Umgebung Z von Y mit $Z \subseteq U$ und $Z \cap A = C$. □

Weil wir uns wie erwähnt an dem dortigen Beweis orientieren, ist es klar, dass wir den Satz ebenso formulieren wie in [20].

Satz 3.3.11 (Tietze)
Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossene Teilmenge des T_4-Raums $(X, \mathcal{T})$ und $f \colon A \to [0,1]$ stetig.
Dann existiert ein stetiges $g \colon X \to [0,1]$ mit $g|_A = f$.

Beweis: Es seien X, A und f wie angegeben.

Wir definieren für $\mathfrak{n} \in {}^*\mathbb{N}$ die Menge $\mathfrak{D}_\mathfrak{n} := \left\{ \frac{\mathfrak{k}}{2^\mathfrak{n}} \ : \ 0 \leq \mathfrak{k} \leq 2^\mathfrak{n} \right\}$. Dann enthält für eine beliebige unendliche hypernatürliche Zahl $\mathfrak{N} \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ dieses $\mathfrak{D}_\mathfrak{N}$ alle standard dyadischen Zahlen zwischen 0 und 1 und zu jedem $r \in [0,1]$ gibt es ein $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{q} \approx {}^*r$.

Setze nun für $\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{k}}{2^\mathfrak{N}} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{N}$ die interne Menge $\mathfrak{A}(\mathfrak{q}) := \{\mathfrak{a} \in {}^*A \ : \ {}^*f(\mathfrak{a}) \leq \mathfrak{q}\}$. Damit ist für $0 \leq \mathfrak{k} \leq 2^\mathfrak{N}$ stets $\mathfrak{A}(\frac{\mathfrak{k}}{2^\mathfrak{N}})$ abgeschlossen (im Sinne von (3.2) auf Seite 80) und im Innern von $\mathfrak{A}(\frac{\mathfrak{k}+1}{2^\mathfrak{N}})$ enthalten. Weiter ist für standard $\mathfrak{q} \in {}_\sigma\mathfrak{D}_\mathfrak{N}$ auch $\mathfrak{A}(\mathfrak{q})$ standard.

Setzen wir nun $\mathfrak{X}(0) := \mathfrak{A}(0)$ und $\mathfrak{X}(1) := {}^*X$, so existiert nach Lemma 3.3.10 zu $\mathfrak{A}(\frac{1}{2}) = \mathfrak{A}(\frac{2^{\mathfrak{N}-1}}{2^\mathfrak{N}})$ eine in ${}^*X$ abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \cap {}^*A = \mathfrak{A}(\frac{1}{2})$, deren Inneres $\mathfrak{A}(0)$ enthält. Es sei $\mathfrak{X}(\frac{1}{2}) := \mathfrak{M}$.

Ist nun für $\mathfrak{n} < \mathfrak{N}$ induktiv $\mathfrak{X}(\mathfrak{q})$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{n}$ konstruiert, so gibt es nach Lemma 3.3.10 für jedes $\mathfrak{i} < \mathfrak{n}$ eine abgeschlossene Umgebung $\mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{X}(\frac{\mathfrak{i}}{2^\mathfrak{n}})$, die im Innern von $\mathfrak{X}(\frac{\mathfrak{i}+1}{2^\mathfrak{n}})$ liegt und $\mathfrak{U} \cap {}^*A = \mathfrak{A}(\frac{2\mathfrak{i}+1}{2^{\mathfrak{n}+1}})$ erfüllt. Setze damit $\mathfrak{X}(\frac{2\mathfrak{i}+1}{2^{\mathfrak{n}+1}}) := \mathfrak{U}$.

Insgesamt erhält man für alle $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{N}$ derart die Mengen $\mathfrak{X}(\mathfrak{q})$, welche für standard $\mathfrak{q}$ ebenfalls standard sind.

Setze nun

$$\mathfrak{g} \colon {}^*X \to {}^*[0,1], \quad \mathfrak{x} \mapsto \min \{\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{N} \ : \ \mathfrak{x} \in \mathfrak{X}(\mathfrak{q})\}.$$

Ist $x \in X$ beliebig, so gibt es ein $r \in [0,1]$ mit $\mathfrak{g}({}^*x) \approx {}^*r$, weil ja $\mathtt{ns}({}^*[0,1]) = {}^*[0,1]$ gilt. Ist weiter $\mathfrak{g}(\mathfrak{y}) \not\approx {}^*r$ für $\mathfrak{y} \in {}^*X$, so gibt es $0 \leq q_1 < q_2 \leq 1$ mit ${}^*q_i \in \mathfrak{D}_\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{g}({}^*x) < {}^*q_1 < {}^*q_2 < \mathfrak{g}(\mathfrak{y})$ oder $\mathfrak{g}(\mathfrak{y}) < {}^*q_1 < {}^*q_2 < \mathfrak{g}({}^*x)$.

Nach Konstruktion der Mengen $\mathfrak{X}(\mathfrak{q})$ und weil $\mathfrak{X}({}^*q_i)$ standard ist, folgt $\mu_\mathcal{T}({}^*x) \subseteq \mu_\mathcal{T}(\mathfrak{X}({}^*q_1)) \subseteq \mathfrak{X}({}^*q_2)$ oder $\mu_\mathcal{T}({}^*x) \cap \mathfrak{X}({}^*q_1) = \emptyset$ und in beiden Fällen damit $\mathfrak{y} \notin \mu_\mathcal{T}({}^*x)$.

Insgesamt erfüllt $\mathtt{g}$ damit die Voraussetzungen aus Satz 3.1.10, weshalb

$$g\colon X \to [0,1], \quad x \mapsto \mathtt{sh}(\mathtt{g}({}^*x))$$

eine stetige Abbildung definiert.

Ist nun $a \in A$ beliebig, dann gilt nach Konstruktion ${}^*a \in \mathfrak{A}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \geq {}^*f({}^*a)$.

Ist $f(a) = 1$, folgt wegen $\mathfrak{X}(\mathfrak{q}) \cap {}^*A = \mathfrak{A}(\mathfrak{q})$ somit $\mathtt{g}({}^*a) = 1$, also auch $g(a) = 1$. Ist $f(a) < 1$, gibt es ein $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{N}}$ mit $\mathfrak{q} > {}^*f({}^*a)$ und $\mathfrak{q} \approx {}^*f({}^*a)$. Es folgt $\mathtt{g}({}^*a) \approx {}^*f({}^*a)$ und damit $g(a) = f(a)$. ■

3.4 Parakompaktheit

Im Folgenden werden wir uns mit parakompakten Räumen auf nonstandard Ebene beschäftigen und daher auch Parakompaktheit gleich mit nonstandard Begriffen definieren (siehe Definition 3.4.12).

Als Vorbereitung untersuchen wir jedoch zunächst lokalendliche Überdeckungen, für die wir interessante Beschreibungen finden. Dabei verwenden wir die Tatsache, dass eine standard Menge genau dann endlich ist, wenn sie nur standard Elemente enthält. Mit diesen nonstandard Charakterisierungen erhalten wir recht einfache Beweise für die bekannten Aussagen von Lemma 3.4.9 und Satz 3.4.10.

Dazu benötigen wir einige Begriffe, die wir hier zum Teil als Wiederholung bereitstellen:

Definition 3.4.1. Es sei $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Die *Umgebungsmonade* einer auch externen Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq {}^*\mathsf{R}$ sei

$$\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) := \bigcap \left\{ {}^*U \ : \ U \in \mathcal{T} \wedge \mathfrak{A} \subseteq {}^*U \right\}.$$

   Für einen Punkt $\mathfrak{a} \in {}^*\mathsf{R}$ schreiben wir auch $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) := \mu_{\mathcal{T}}(\{\mathfrak{a}\})$.

2. Ein Punkt $\mathfrak{a} \in {}^*\mathsf{R}$ heiße *standardnah*, wenn es ein $x \in \mathsf{R}$ mit $\mathfrak{a} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$ gibt. $\mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$ bezeichne die (externe) Menge aller standardnahen Elemente von ${}^*\mathsf{R}$.

3. Ein Punkt $\mathfrak{b} \in {}^*\mathsf{R}$ heiße *entlegen*, wenn er nicht standardnah ist und die Menge aller entlegenen Punkte heiße $\mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R}) = {}^*\mathsf{R} \setminus \mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$. ◇

Das folgende Lemma hilft uns später bei der Ausweitung gewisser Aussagen über interne Mengen auf Monaden:

Lemma 3.4.2: Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ intern, so ist auch $\delta(\mathfrak{A}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$.

Beweis: Nach [28, Theorem 8.2.2] gilt $\delta(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \delta(\mathfrak{a})$, also zeigen wir lediglich $\delta(\mathfrak{x}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ für $\mathfrak{x} \in \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$:

Nach Bemerkung 1.2.11 gilt $\delta(\mathfrak{x}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \neq \emptyset \Rightarrow \delta(\mathfrak{x}) \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$, woraus bereits die Behauptung folgt. ■

3.4.1 Betrachtung lokalendlicher Familien

Wir geben zunächst die standard Definition von *lokalendlich*, um anschließend Charakterisierungen in der nonstandard Welt abzuleiten. Weil wir den Begriff in Abschnitt 3.4.4 ohnehin benötigen, definieren wir hier auch noch *punktendlich*.

Definition 3.4.3. (*standard*) Eine Familie $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ von Teilmengen des topologischen Raumes $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ heißt

1. *lokalendlich*, wenn jeder Punkt $x \in \mathsf{R}$ eine Umgebung $V_x \in \mathcal{T}$ besitzt, sodass $\{j \in I \,:\, V_x \cap M_j \neq \emptyset\}$ endlich ist.

2. *punktendlich*, wenn jeder Punkt $x \in \mathsf{R}$ nur in endlich vielen Mengen M_j liegt.

◇

Eine nonstandard Betrachtung führt zu Folgendem:

Lemma 3.4.4: Eine Familie $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ von Teilmengen des topologischen Raumes $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ist genau dann lokalendlich, wenn jeder Punkt $x \in \mathsf{R}$ eine Umgebung $V_x \in \mathcal{T}$ besitzt, sodass $\{\mathsf{i} \in {}^*I \,:\, {}^*V_x \cap \mathfrak{M}_\mathsf{i} \neq \emptyset\} \subseteq {}^*_\sigma I$ gilt.

Beweis: Für die Umgebung V aus Definition 3.4.3 ist $\{i \in I \,:\, V \cap M_i \neq \emptyset\}$ endlich, also enthält die Menge ${}^*\{i \in I \,:\, V \cap M_i \neq \emptyset\} = \{\mathsf{i} \in {}^*I \,:\, {}^*V \cap \mathfrak{M}_\mathsf{i} \neq \emptyset\}$ nach Satz 1.1.6 auf Seite 10 nur standard Elemente.

Umgekehrt folgt ebenfalls mit Satz 1.1.6, dass die Menge $\{\mathsf{i} \in {}^*I \,:\, {}^*V \cap \mathfrak{M}_\mathsf{i} \neq \emptyset\}$ endlich ist, falls sie nur standard Elemente enthält. ■

Vollständig im Nonstandard-Universum formuliert, lautet dieses Lemma:

> Eine standard Familie von Teilmengen ist genau dann lokalendlich, wenn jeder standard Punkt eine standard Umgebung besitzt, die nur standard Elemente der Familie nichtleer schneidet.

Lediglich eine Umformulierung von Lemma 3.4.4 stellt somit folgendes Lemma dar:

Lemma 3.4.5: Eine Familie $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ von Teilmengen des topologischen Raumes $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ist genau dann lokalendlich, wenn zu jedem $x \in \mathsf{R}$ eine offene Umgebung V_x mit ${}^*V_x \cap \left(\bigcup_{\mathsf{i}\in {}^*I \setminus {}^*_\sigma I} \mathfrak{M}_\mathsf{i}\right) = \emptyset$ existiert. □

Aus der Tatsache, dass es für jedes $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$ ein $x \in \mathsf{R}$ gibt mit $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$, folgern wir damit zwei weitere Ergebnisse ohne Beweis:

Folgerung 3.4.6: Ist $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ lokalendliche Familie im topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*X)$ ein beliebiger standardnaher Punkt, so gilt

$$\big\{\mathfrak{i} \in {}^*I \;:\; \mathfrak{x} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{i}\big\} \subseteq {}^*_\sigma I. \qquad \square$$

Folgerung 3.4.7: Ist $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathsf{R})$ lokalendliche Familie im topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, so gilt

$$\Big(\bigcup_{\mathfrak{i}\in {}^*I\setminus {}^*_\sigma I} \mathfrak{M}_\mathfrak{i}\Big) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*X). \qquad \square$$

Damit wir ein echtes Kriterium erhalten, benötigen wir noch die Umkehrung der letzten beiden Aussagen (sowohl die Aussagen, als auch deren Umkehrungen sind jeweils äquivalent). Dazu beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.4.8: Ist $x_0 \in X$ derart, dass für jede Umgebung $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ stets

$$\big\{\mathfrak{i} \in {}^*I \;:\; \mathfrak{M}_\mathfrak{i} \cap {}^*U \neq \emptyset\big\} \cap ({}^*I \setminus {}^*_\sigma I) \neq \emptyset$$

ist, so gibt es ein standardnahes $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*X)$ mit $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{j}$ für ein nichtstandard $\mathfrak{j} \in {}^*I \setminus {}^*_\sigma I$.

Beweis: Es sei x_0 wie angegeben. Wir konstruieren zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ von x_0 und jedem $i \in I$ folgende interne Menge:

$$\mathcal{F}_{U,i} := \big\{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{i}\rangle \in {}^*\big(U \times (I \setminus \{i\})\big) \;:\; \mathfrak{x} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{i}\big\}$$

Weil diese Mengen offensichtlich intern sind und die Familie $\{\mathcal{F}_{U,i} \;:\; U, i\}$ von Standardgröße, müssen wir für Saturation lediglich nachweisen, dass der Schnitt zweier solcher Mengen nichtleer ist.

Sind also U_1, U_2 und i_1, i_2 entsprechend beliebig, so gibt es nach der Voraussetzung an x_0 zu $U_1 \cap U_2$ ein $\mathfrak{j} \in {}^*I \setminus {}^*_\sigma I$ mit ${}^*(U_1 \cap U_2) \cap \mathfrak{M}_\mathfrak{j} \neq \emptyset$. Damit ist insbesondere $\mathfrak{j} \notin {}^*\{i_1, i_2\}$ und für ein $\mathfrak{x} \in {}^*(U_1 \cap U_2) \cap \mathfrak{M}_\mathfrak{j}$ gilt somit $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{j}\rangle \in \mathcal{F}_{U_1,i_1} \cap \mathcal{F}_{U_2,i_2} \neq \emptyset$.

Es folgt also:

$$\emptyset \neq \bigcap \{\mathcal{F}_{U,i} \;:\; U \in \mathcal{V}_{x_0} \wedge i \in I\} = \big\{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{i}\rangle \;:\; \mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*x_0) \wedge \mathfrak{i} \in {}^*I \setminus {}^*_\sigma I \wedge \mathfrak{x} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{i}\big\}$$

Ein Element aus diesem Schnitt hat also alle gewünschten Eigenschaften. ∎

Zwei nützliche Eigenschaften lokalendlicher Familien können wir damit ganz leicht ableiten. Ein klassischer Beweis für beide findet sich etwa in [4].

Lemma 3.4.9: Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine lokalendliche Familie im topologischen Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$, so ist auch $(\overline{U}_i)_{i\in I}$ eine.

Beweis: Sei $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$ beliebig, etwa $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$ und $\mathfrak{i} \in {}^*I$ beliebig mit $\mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{U}}_\mathfrak{i}$. Ist nun $\mathfrak{V}$ eine (interne) offene Umgebung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{V} \subseteq \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x}) \subseteq \mu_{\mathcal{T}}({}^*x)$, so gilt $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}_\mathfrak{i} \neq \emptyset$, also auch $\mathfrak{U}_\mathfrak{i} \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \neq \emptyset$ und aus Lemma 3.4.4 folgt $\mathfrak{i} \in {}^*_\sigma I$. Also ist nach Folgerung 3.4.6 auch $(\overline{U}_i)_{i\in I}$ lokalendlich. ∎

Mit diesem Lemma wird der folgende Satz besonders interessant:

Satz 3.4.10
Ist $(A_i)_{i\in I}$ lokalendliche Familie abgeschlossener Mengen im topologischen Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$, so ist für jede Teilmenge $J \subseteq I$ stets $\bigcup_{i\in J} A_i$ ebenfalls abgeschlossen.

Beweis: Seien R, $(A_i)_{i\in I}$ und $J \subseteq I$ wie im Satz gegeben. Weiter sei $x \in \mathsf{R}$ beliebig mit $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \cap {}^*(\bigcup_{i\in J} A_i) \neq \emptyset$. Nach Folgerung 3.4.7 muss das $\mathfrak{i} \in {}^*J$ mit $\mu_{\mathcal{T}}({}^*x) \cap \mathfrak{A}_\mathfrak{i} \neq \emptyset$ standard sein, also folgt ${}^*x \in \mathfrak{A}_\mathfrak{i} \subseteq {}^*(\bigcup_{i\in J} A_i)$, weil $\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ abgeschlossen. Insgesamt ist damit also auch $\bigcup_{i\in J} A_i$ abgeschlossen. ∎

In Analogie zu Lemma 3.4.4 erhalten wir ohne Schwierigkeiten folgende nonstandard Beschreibung punktendlicher Familien, welche wir daher auch nicht beweisen.

Lemma 3.4.11: Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ auf dem topologischen Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ist genau dann punktendlich, wenn für jedes $x \in \mathsf{R}$ die (standard) Menge $\{\mathfrak{i} \in {}^*I : {}^*x \in \mathfrak{U}_\mathfrak{i}\} = {}^*(\{i \in I : x \in U_i\})$ nur standard Elemente besitzt. Als Formel im internen Universum lautet dies wie folgt:

$$\left\{\mathfrak{i} \in {}^*I : {}^*x \in \mathfrak{U}_\mathfrak{i}\right\} \subseteq {}^*_\sigma I$$ □

3.4.2 Erste Eigenschaften parakompakter Räume

Wir definieren Parakompaktheit, wie oben erwähnt, gleich im nonstandard Universum. Einen Beweis für die Äquivalenz zur klassischen Definition kann man etwa [28] entnehmen.

Definition 3.4.12. (*nonstandard*) Ein Hausdorff-Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ heißt *parakompakt*, wenn es zu jeder internen Teilmenge $\mathfrak{K} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ der entlegenen Punkte von ${}^*\mathsf{R}$ eine offene lokalendliche ($\mathbb{WF}-$) Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von R mit $\mathfrak{K} \cap \left(\bigcup_{i\in I} {}^*U_i\right) = \emptyset$ gibt. ◇

Wir benutzen nun unsere Ergebnisse über entlegene Punkte, um einerseits eine weitere äquivalente nonstandard Charakterisierung zu geben und andererseits topologische Eigenschaften parakompakter Räume zu untersuchen. So gilt beispielsweise: Jeder parakompakte Raum ist normal.

Auf dem Weg dahin sehen wir zunächst, dass jeder parakompakte Raum regulär ist:

Dies folgt mit Satz 3.3.4 sofort aus folgendem

Lemma 3.4.13: In parakompakten Räumen $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ist $\mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ abgeschlossen bezüglich Umgebungsmonadenbildung.

Beweis: Sei $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ parakompakt und $\mathfrak{x} \in \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ beliebig. Nach obiger Definition gibt es eine offene, lokalendliche Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ mit $\mathfrak{x} \notin {}^*U_i$ für alle $i \in I$. Sei nun $x \in \mathsf{R}$ beliebig und V_x die passende Umgebung laut Definition 3.4.3. Nach Lemma 3.4.4 enthält $\mathfrak{J} := \{\mathfrak{i} \in {}^*I : \mathfrak{U}_\mathfrak{i} \cap {}^*V_x = \emptyset\}$ alle nichtstandard Elemente von ${}^*I$, also ist $\mathfrak{V} := \bigcup_{\mathfrak{j}\in\mathfrak{J}} \mathfrak{U}_\mathfrak{j}$ standard offene Umgebung von $\mathfrak{x}$ mit ${}^*V_x \cap \mathfrak{V} = \emptyset$, woraus insbesondere $\mu_\mathcal{T}(\mathfrak{x}) \cap \mu_\mathcal{T}({}^*x) = \emptyset$ folgt. Da x beliebig war, kann $\mu_\mathcal{T}(\mathfrak{x})$ kein standardnahes Element enthalten. ■

Parakompaktheit bleibt, wie viele andere topologische Eigenschaften auch, erhalten, wenn man die induzierte Topologie auf abgeschlossenen Teilmengen betrachtet. Dies beruht vor allem darauf, dass für abgeschlossene Teilmengen $A \subseteq \mathsf{R}$ die Implikation $\mu_\mathcal{T}({}^*x) \cap {}^*A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A$ gilt. Standard Beweise für die beiden nächsten Sätze findet man ebenfalls in [4].

Satz 3.4.14

Ist $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ parakompakt und $A \subseteq \mathsf{R}$ abgeschlossen, so ist auch $(A, \mathcal{T}|_A)$ parakompakt.

Beweis: Sind R und A wie angegeben und $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*A) = \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R}) \cap {}^*A$ eine interne Teilmenge, so gibt es laut Definition eine offene, lokalendliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von R mit ${}^*U_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$. Setzen wir $V_i := U_i \cap A$, so wird $(V_i)_{i \in I}$ zu einer (in A) offenen Überdeckung von A mit ${}^*V_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$. Ist nun $\mathfrak{i} \in {}^*I \setminus {}^*_\sigma I$ nichtstandard, so gilt $\mathfrak{V}_\mathfrak{i} = \mathfrak{U}_\mathfrak{i} \cap {}^*A \subseteq \mathtt{rmt}({}^*A)$, also $(V_i)_{i \in I}$ nach Folgerung 3.4.7 lokalendlich. ∎

Parakompakte Räume sind aber nicht nur regulär, sondern sogar normal. Allerdings benötigen wir für den Beweis dieser Tatsache die Regularität, weshalb wir diese zuerst erarbeiten mussten.

Satz 3.4.15
Jeder parakompakte Raum ist normal.

Beweis: Es sei $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ ein parakompakter Raum und $A, B \subseteq \mathsf{R}$ seien disjunkte abgeschlossene Teilmengen von R. Setze $V := \mathsf{R} \setminus B$ und

$$\mathfrak{A} := {}^*A \cap \overline{\mu}_{\mathcal{T}}({}^*B) = \left\{\mathfrak{a} \in {}^*A \,:\, \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{a}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*B) \neq \emptyset\right\},$$

womit $\mathfrak{A}$ aufgrund der ersten Gleichheit eine Monade ist.

Ist $a \in A$ beliebig, so ist wegen der Regularität $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}({}^*a) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*B) = \emptyset$, weshalb $\mathfrak{A} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*A) = \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R}) \cap {}^*A$ gilt. Nach Lemma 3.3.6 ist auch $\overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ und nach Satz 3.4.18 existiert eine offene, lokalendliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von R mit ${}^*U_i \cap \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{A}) = \emptyset$ für alle $i \in I$. Setze $J := \{i \in I \,:\, U_i \cap A \neq \emptyset\}$, dann ist für $j \in J$ stets $({}^*U_j \cap {}^*A) \cap \overline{\mu}_{\mathcal{T}}({}^*B) = \emptyset$, also existiert ein offenes $W_j \supseteq B$ mit $(U_j \cap A) \cap \overline{W_j} = \emptyset$. Setze $V_j := U_j \cap (\mathsf{R} \setminus \overline{W_j})$.

Damit ist $(V_j)_{j \in J}$ nach Folgerung 3.4.7 eine lokalendliche Familie, weil für $\mathfrak{j} \in {}^*J \setminus {}^*_\sigma J$ mit $\mathsf{Transfer}$ stets $\mathfrak{V}_\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{U}_\mathfrak{j} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ gilt. Weiter ist $\overline{V_j} \cap B = \emptyset$ für alle $j \in J$ und $A \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$. Somit ist $W := \bigcup_{j \in J} V_j$ eine offene Umgebung von A, die nach Lemma 3.4.9 und Satz 3.4.10 auch $\overline{W} \cap B = \emptyset$ erfüllt. ∎

Bedingungen für Parakompaktheit

Nun erarbeiten wir uns einige Hilfsmittel, um Parakompaktheit später leichter nachweisen zu können. Dabei besagt Satz 3.4.18, dass wir in der Definition von Parakompaktheit (Definition 3.4.12) die interne Teilmenge der entlegenen Punkte äquivalent durch eine Monade aus entlegenen Punkten ersetzen können.

Aus diesem Grund können wir eben Lemma 3.4.16 und Lemma 3.4.17 für Monaden formulieren, was die Beweise leichter macht. Die dort angegebenen Kriterien besagen, dass wir in regulären Räumen nicht darauf angewiesen sind, stets eine offene (lokalendliche) Überdeckung zu finden, sondern irgendeine (lokalendliche) Überdeckung genügt (siehe [4] für standard Formulierungen und Beweise für Lemma 3.4.16, Lemma 3.4.17, Satz 3.4.19 und Satz 3.4.20).

Lemma 3.4.16: Ist R regulär derart, dass zu jeder Monade $\boldsymbol{m} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ eine lokalendliche Überdeckung (nicht unbedingt offen oder abgeschlossen) $(U_i)_{i\in I}$ von R existiert mit ${}^*U_i \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$ für alle $i \in I$, so existiert auch zu jeder Monade $\boldsymbol{m}' \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ eine lokalendliche Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen mit ${}^*A_i \cap \boldsymbol{m}' = \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis: Ist $\boldsymbol{m}' \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ beliebige Monade, so ist wegen der Regularität nach Lemma 3.3.6 auch $\mu_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{m}') \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ und somit existiert nach Voraussetzung eine lokalendliche Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ mit ${}^*U_i \cap \mu_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{m}') = \emptyset$. Nach Lemma 3.4.9 ist dann auch $(\overline{U}_i)_{i\in I}$ eine lokalendliche Überdeckung und wegen ${}^*U_i \cap \mu_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{m}') = \emptyset$ ist ${}^*\overline{U_i} \cap \boldsymbol{m}' = \emptyset$, also die Voraussetzung erfüllt. ∎

Lemma 3.4.17: Ist R regulär derart, dass zu jeder Monade $\boldsymbol{m} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ eine lokalendliche Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen von R mit ${}^*A_i \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$ für alle $i \in I$ existiert, so existiert auch zu jeder Monade $\boldsymbol{m}' \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ eine lokalendliche Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ offener Mengen mit ${}^*O_i \cap \boldsymbol{m}' = \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis: Es sei $\boldsymbol{m} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ beliebige Monade und $\boldsymbol{m}_1 := \overline{\mu}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{m}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$. Nach Voraussetzung existiert eine lokalendliche Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen mit ${}^*A_i \cap \boldsymbol{m}_1 = \emptyset$ für alle $i \in I$. Damit existiert zu jedem $i \in I$ ein offenes V_i' mit $\boldsymbol{m} \subseteq {}^*V_i'$ und $A_i \cap \overline{V}_i' = \emptyset$. Somit ist $V_i := \mathsf{R} \setminus \overline{V}_i'$ offene Obermenge von A_i mit ${}^*V_i \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$.

Andererseits existiert nach Lemma 3.4.5 zu jedem $x \in \mathsf{R}$ eine offene Umgebung V_x mit ${}^*V_x \cap \left(\bigcup_{\mathfrak{i}\in {}^*I\setminus {}^*_\sigma I} \mathfrak{A}_\mathfrak{i}\right) = \emptyset$. Es ist daher $\boldsymbol{m}_2 := \bigcap_{x\in\mathsf{R}} {}^*(\mathsf{R} \setminus V_x) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ Monade mit $\bigcup_{\mathfrak{i}\in {}^*I\setminus {}^*_\sigma I} \mathfrak{A}_\mathfrak{i} \subseteq \boldsymbol{m}_2$. Nach Voraussetzung existiert zu $\boldsymbol{m}_2$ wiederum eine lokalendliche, abgeschlossene Überdeckung $(B_k)_{k\in J}$ von R mit ${}^*B_k \cap \boldsymbol{m}_2 = \emptyset$, d.h. ${}^*B_k \cap \left(\bigcup_{\mathfrak{i}\in {}^*I\setminus {}^*_\sigma I} \mathfrak{A}_\mathfrak{i}\right) = \emptyset$ für alle $k \in J$.

Bilde nun $O_i := \mathsf{R} \setminus \bigcup \{B_k : B_k \cap A_i = \emptyset\}$, was wegen $(B_k)_k$ lokalendlich eine offene Menge ist. Ist nun $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$ beliebig, so folgt aus $\mathfrak{x} \in \mathfrak{O}_\mathfrak{i}$, dass $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_\mathfrak{k}$ gilt, falls $\mathfrak{B}_\mathfrak{k} \cap \mathfrak{A}_\mathfrak{i} \neq \emptyset$ ist. Da $(B_k)_k$ lokalendlich ist, folgt $\mathfrak{k}$ standard und nach Konstruktion somit $\mathfrak{i}$ standard. Daher ist auch $(O_i)_i$ lokalendlich und insgesamt bilden $U_i := O_i \cap V_i$

eine lokalendliche offene Überdeckung von R mit ${}^*U_i \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$. ■

Wie eingangs erwähnt, können wir mit Hilfe des folgenden Satzes in Lemma 3.4.16 und Lemma 3.4.17 die Monaden aus entlegenen Punkten durch interne Teilmengen ersetzen.

Satz 3.4.18

Folgende Eigenschaften sind für jeden topologischen Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ äquivalent:

(1) Zu jeder internen Teilmenge $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ existiert eine lokalendliche Überdeckung $(A_i)_{i \in I}$ mit ${}^*A_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$ für alle $i \in I$.

(2) Zu jeder Monade $\boldsymbol{m} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ existiert eine lokalendliche Überdeckung $(A_i)_{i \in I}$ mit ${}^*A_i \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1): Dies ist der einfache Teil. Ist $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ intern gegeben, so ist nach Lemma 3.4.2 auch $\delta(\mathfrak{H}) \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$. Die zu dieser Monade existierende Überdeckung erfüllt auch die Voraussetzungen für $\mathfrak{H}$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei nun $\boldsymbol{m} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ Monade und für jedes $x \in \mathsf{R}$ sei V_x offene Umgebung mit ${}^*V_x \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$. Nach Standardisierung gibt es eine standard Familie $(\mathfrak{V}_{\mathfrak{x}})_{\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}}$ mit $\mathfrak{V}_{{}^*x} = {}^*V_x$ für alle $x \in \mathsf{R}$. Ist $\mathfrak{R} \subseteq {}^*\mathsf{R}$ ausreichende Teilmenge, so ist ${}^*\mathsf{R} \setminus \bigcup_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}} \mathfrak{V}_{\mathfrak{x}} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ intern. Also existiert eine lokalendliche Überdeckung $(A_i)_{i \in I}$ von R mit ${}^*A_i \cap \left({}^*\mathsf{R} \setminus \bigcup_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}} \mathfrak{V}_{\mathfrak{x}}\right) = \emptyset$, d.h. ${}^*A_i \subseteq \bigcup_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}} \mathfrak{V}_{\mathfrak{x}}$ für alle $i \in I$. Nach $*$-Transfer gilt $A_i \subseteq \bigcup_{x \in P} V_x$ für ein endliches $P \subseteq \mathsf{R}$, also ${}^*A_i \subseteq {}^*\left(\bigcup_{x \in P} V_x\right) = \bigcup_{x \in P} {}^*V_x$ und somit ${}^*A_i \cap \boldsymbol{m} = \emptyset$. ■

Eine Folgerung aus Lemma 3.4.16, Lemma 3.4.17 und Satz 3.4.18, und daher nicht mehr zu beweisen, ist folgender Satz:

Satz 3.4.19

Ist R ein regulärer Raum derart, dass zu jedem internen $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ eine lokalendliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit ${}^*U_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$ für alle $i \in I$ existiert, so ist R bereits parakompakt. □

Eine nützliche Anwendung findet dieser Satz im Beweis der folgenden Behauptung, die eine Verallgemeinerung von Satz 3.4.14 darstellt.

Satz 3.4.20

Ist $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen $A_k \subseteq \mathsf{R}$ des parakompakten Raums R, so ist auch A parakompakt.

Beweis: Es seien A und R wie angegeben und $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*A)$ interne Teilmenge. Nach Lemma 3.3.3 ist A regulär, also reicht es nach Satz 3.4.19, eine lokalendliche Überdeckung beliebiger Mengen mit der entsprechenden Disjunktheitseigenschaft zu finden.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{H}_n := \mathfrak{H} \cap {}^*A_n$ intern mit $\mathfrak{H}_n \subseteq \mathtt{rmt}({}^*A_n) = \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R}) \cap {}^*A_n$, also gibt es eine offene, lokalendliche Überdeckung $(V_i^n)_{i\in I_n}$ von R mit ${}^*V_i^n \cap \mathfrak{H}_n = \emptyset$ für jedes $i \in I_n$.

Wir setzen zunächst $W_n' := \bigcup_{i\in I_n} V_i^n$, damit $W_n := W_n' \setminus \bigcup_{k<n} W_k'$ und schießlich $U_{n,i} := V_i^n \cap W_n \cap A_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I_n$.

Ist $\mathfrak{a} \in \mathtt{ns}({}^*A)$, etwa $\mathfrak{a} \in \mu_{\mathcal{T}|_A}({}^*a)$, so folgt $\mathfrak{a} \in {}^*W_n'$ für $n := \min\{k \in \mathbb{N} : a \in A_k\}$ und somit $\mathfrak{a} \notin \mathfrak{W}_\mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} > {}^*n$. Daher folgt aus $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{n},\mathfrak{i}}$ also $\mathfrak{n}$ standard und aus $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}_\mathfrak{i}^\mathfrak{n}$ auch $\mathfrak{i}$ standard. Insgesamt ist $(U_{n,i})_{\langle n,i\rangle}$ eine lokalendliche Überdeckung von A mit ${}^*U_{n,i} \cap \mathfrak{H} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in I_n$. ∎

3.4.3 Stetige, abgeschlossene, surjektive Abbildungen

Wir untersuchen nun stetige, abgeschlossene, surjektive Abbildungen. Insbesondere das Verhalten von Umgebungsmonaden und entlegenen Punkten unter derartigen Abbildungen interessiert uns. *Abgeschlossen* nennen wir dabei eine Abbildung, die abgeschlossene Mengen stets auf abgeschlossene Mengen abbildet. Wir beginnen den Abschnitt mit einer nonstandard Charakterisierung abgeschlossener Abbildungen.

Es seien im folgenden $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ und $(\mathsf{S}, \mathcal{S})$ topologische Räume.

Lemma 3.4.21: Ist $f : \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ eine Abbildung, so ist f genau dann abgeschlossen, wenn für alle $M \subseteq \mathsf{S}$ und alle $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R} \setminus \mu_\mathcal{T}\big({}^*f^{-1}({}^*M)\big)$ stets ${}^*f(\mathfrak{x}) \in {}^*\mathsf{S} \setminus \mu_\mathcal{S}({}^*M)$ gilt.

Beweis: Es sei zunächst f abgeschlossen und $M \subseteq \mathsf{S}$ beliebig. Ist $\mathfrak{x} \notin \mu_\mathcal{T}\big({}^*f^{-1}({}^*M)\big)$, so existiert eine offene Umgebung $V \in \mathcal{T}$ von $f^{-1}(A)$ mit $\mathfrak{x} \notin {}^*V$. Damit ist ${}^*f(\mathfrak{x}) \in {}^*f({}^*\mathsf{R} \setminus {}^*V)$, was eine abgeschlossene Menge ist. Somit folgt ${}^*M \subseteq {}^*\mathsf{S} \setminus {}^*f({}^*\mathsf{R} \setminus {}^*V)$ und damit ${}^*f(\mathfrak{x}) \notin \mu_\mathcal{S}({}^*M)$.

Gelte nun umgekehrt die Bedingung und $A \subseteq \mathsf{R}$ sei abgeschlossen. Weiter sei $s \in \mathsf{S}$ mit $\mu_\mathcal{S}({}^*s) \cap {}^*f({}^*A) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $\mathfrak{a} \in {}^*A$ mit ${}^*f(\mathfrak{a}) \in \mu_\mathcal{S}({}^*s)$. Nach Voraussetzung ist somit $\mathfrak{a} \in \mu_\mathcal{T}({}^*f^{-1}({}^*s))$, also ${}^*A \cap \mu_\mathcal{T}({}^*f^{-1}({}^*s)) \neq \emptyset$. Weil A abgeschlossen ist, folgt $A \cap f^{-1}(s) \neq \emptyset$ und somit $s \in f(A)$. Weil s beliebig war, ist damit $f(A)$

abgeschlossen. ∎

Mit diesem Lemma folgt, dass stetige, abgeschlossene und surjektive Abbildungen Normalität erhalten (siehe wieder [4] für einen standard Beweis):

Satz 3.4.22

Ist R normal und $\mathsf{p}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ stetig, abgeschlossen und surjektiv, so ist auch S normal.

Beweis: Es sei also R normal und $\mathsf{p}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ stetig, abgeschlossen und surjektiv.

Weiter seien $A, B \subseteq \mathsf{S}$ abgeschlossene, disjunkte und nichtleere Teilmengen von S. Damit sind $A' := \mathsf{p}^{-1}(A)$ und $B' := \mathsf{p}^{-1}(B)$ abgeschlossene, nichtleere und zueinander disjunkte Teilmengen von R. Aus der Normalität von R folgt $\mu_{\mathcal{T}}({}^*A') \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*B') = \emptyset$.

Wir nehmen nun an, es gäbe ein $\mathfrak{z} \in \mu_{\mathcal{S}}({}^*A) \cap \mu_{\mathcal{S}}({}^*B)$ in ${}^*\mathsf{S}$.

1. Fall: ${}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{z}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*A') \neq \emptyset$. Sei etwa $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathcal{T}}({}^*A')$ mit ${}^*\mathsf{p}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}$. Es ist $\mathfrak{x} \notin \mu_{\mathcal{T}}({}^*B')$, also nach Lemma 3.4.21 auch $\mathfrak{z} = {}^*\mathsf{p}(\mathfrak{x}) \notin \mu_{\mathcal{S}}({}^*B)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Fall: ${}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{z}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*A') = \emptyset$. Dann folgt aber unmittelbar, dass $\mathfrak{z} \notin \mu_{\mathcal{S}}({}^*A)$ sein muss, im Widerspruch zur Annahme.

Also muss die Annahme falsch sein, d.h. $\mu_{\mathcal{S}}({}^*A) \cap \mu_{\mathcal{S}}({}^*B) = \emptyset$ und damit ist auch S normal. ∎

Im Folgenden untersuchen wir das Verhalten von Umgebungsmonaden unter diesen Funktionen und das Wechselspiel zwischen Urbildern von Monaden und Monaden von Urbildern.

Satz 3.4.23

Ist $\mathsf{p}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ stetig, abgeschlossen und surjektiv und $\mathfrak{s} \in {}^*\mathsf{S}$ beliebig, so gilt

$$\mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s}) = {}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s}))).$$

Beweis: Ist die Situation wie angegeben, so gilt wegen Stetigkeit ${}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s})$ für alle $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s})$, also insgesamt ${}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s}))) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s})$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{x} \notin \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s}))$, so gibt es eine offene Umgebung ${}^*V$ von ${}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s})$ mit $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R} \setminus {}^*V$, also ${}^*\mathsf{p}(\mathfrak{x}) \in {}^*\mathsf{p}({}^*\mathsf{R} \setminus {}^*V) \subseteq {}^*\mathsf{S}$. Da p abgeschlossen, ist also $\mathsf{S} \setminus \mathsf{p}(\mathsf{R} \setminus V)$ offen und wegen ${}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s}) \subseteq {}^*V$ ist $\mathfrak{s} \in {}^*\mathsf{S} \setminus {}^*\mathsf{p}({}^*\mathsf{R} \setminus {}^*V)$, also ${}^*\mathsf{p}(\mathfrak{x}) \notin \mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s})$. Damit folgt für ein $\mathfrak{y} \in \mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s})$ stets, dass ${}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{y}) \cap \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s})) \neq \emptyset$, also $\mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s})))$. ∎

Dieser Satz liefert uns bereits, dass die Topologie $\mathcal{S}$ eindeutig durch $\mathcal{T}$ und p bestimmt ist. Das bedeutet, dass es zu gegebenem $\mathcal{T}$ und p nur eine Topologie $\mathcal{S}$ geben kann, bezüglich der p tatsächlich stetig, abgeschlossen und surjektiv ist.

Nach diesem Satz ist es leicht, zu zeigen, dass man unter diesen Voraussetzungen die Reihenfolge des Bildens von Urbildmenge und Umgebungsmonade vertauschen kann:

Lemma 3.4.24: Ist $\mathsf{p}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ stetig, abgeschlossen und surjektiv und $\mathfrak{s} \in {}^*\mathsf{S}$ beliebig, so gilt:

$$ {}^*\mathsf{p}^{-1}(\mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s})) = \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s})). $$

Beweis: Nach Satz 3.4.23 gilt $\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s})) \subseteq {}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s}))) = {}^*\mathsf{p}^{-1}(\mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s}))$.
Ist umgekehrt $\mathfrak{r} \notin \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{s}))$, so folgt wie im dortigen Beweis ${}^*\mathsf{p}(\mathfrak{r}) \notin \mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s})$, also $\mathfrak{r} \notin {}^*\mathsf{p}^{-1}(\mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{s}))$. ∎

Nach dieser Vorarbeit sind wir in der Lage, das Urbild der (externen) Menge aller standardnahen Punkte unter einer solchen (standard) stetigen, abgeschlossenen und surjektiven Abbildung innerhalb des Ausgangsraumes zu beschreiben. Natürlich hängt diese Menge von der gegebenen Abbildung ab, auf die wir in der Darstellung nicht verzichten können. Dabei liefert uns Definition 3.4.1, dass wir die standardnahen Elemente folgendermaßen zusammenfassen können:

$$ \mathtt{ns}({}^*\mathsf{S}) = \bigcup_{s\in\mathsf{S}} \mu_{\mathcal{S}}({}^*s) $$

Lemma 3.4.25: Ist $\mathsf{p}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ stetig, abgeschlossen und surjektiv, so gilt:

$$ {}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathtt{ns}({}^*\mathsf{S})) = \bigcup_{s\in\mathsf{S}} {}^*\mathsf{p}^{-1}(\mu_{\mathcal{S}}({}^*s)) = \bigcup_{s\in\mathsf{S}} \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}({}^*s)) = \bigcup_{r\in\mathsf{R}} \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}({}^*r)) $$

Insbesondere liegt diese Menge in Δ_2^{ss}.

Beweis: Das erste = gilt allgemein für Abbildungen, das zweite = ist Lemma 3.4.24 und das dritte = eine Folge der Surjektivität. ∎

Haben wir nun eine Teilmenge von ${}^*\mathsf{R}$ gegeben, welche abgeschlossen unter „gemeinsamen Bildern“ ist, so hat auch die Umgebungsmonade diese Eigenschaft:

Lemma 3.4.26: Ist $\mathfrak{M} \subseteq {}^*\mathsf{R}$ eine beliebige interne Menge mit ${}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, so gilt auch ${}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{M})) = \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{M})$.

Beweis: Dies folgt mit Satz 3.4.23 und Lemma 3.4.24 aus der Tatsache, dass für interne Mengen $\mathfrak{M} \subseteq {}^*\mathsf{R}$ stets $\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{M}) = \bigcup_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} \mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{m})$ ist. ∎

Wir fassen diese Ergebnisse und einfache Folgerungen zusammen:

Korollar 3.4.27: Ist $\mathsf{p}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ stetig, abgeschlossen und surjektiv, so gilt:

1. Ist $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}$, so ist ${}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}(\mathfrak{x})) \subseteq \mu_{\mathcal{S}}({}^*\mathsf{p}(\mathfrak{x}))$.
2. Ist $\mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{S}$, so ist ${}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}(\mathfrak{y}))) = \mu_{\mathcal{S}}(\mathfrak{y})$.
3. Ist $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}$, so ist ${}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mathfrak{x}))) = \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mathfrak{x}))$.
4. Ist $\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}_{\mathtt{int}}({}^*\mathsf{R})$, so ist ${}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mathfrak{M}))) = \mu_{\mathcal{T}}({}^*\mathsf{p}^{-1}{}^*\mathsf{p}(\mathfrak{M}))$. □

3.4.4 Metrische Räume

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Satz von A. H. Stone zu beweisen, der besagt, dass jeder metrische Raum parakompakt ist. Wir folgen allerdings dem Aufbau von [24] und konstruieren zunächst eine punktendliche Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ des gegebenen metrischen Raumes R mit ${}^*U_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$ für die interne Teilmenge $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$. Im zweiten Schritt zeigen wir dann, dass in einem metrischen Raum jede punktendliche Überdeckung stets eine lokalendliche Verfeinerung besitzt. Dabei spielt die nonstandard Argumentation in diesem zweiten Schritt (Satz 3.4.29) eine deutlich größere Rolle als im ersten.

Zunächst fügen wir nun aber erst noch ein paar allgemeine Überlegungen zu metrischen Räumen ein. Mit $\mathsf{B}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{x}) = \{\mathfrak{y} \in {}^*\mathsf{R} :\ {}^*\mathsf{d}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) < \mathfrak{r}\}$ bezeichnen wir die Kugel um $\mathfrak{x}$ mit Radius $\mathfrak{r}$. Sind die beiden Parameter standard, so natürlich auch die Kugel. Wir benutzen den selben Buchstaben B auch für die Kugel in $\mathbb{WF}$, weil in diesem Fall die Parameter ebenfalls $\mathbb{WF}$-Mengen sind, was durch die Notation klar wird und dies damit aus dem Kontext heraus nicht zu Verwirrung führen dürfte.

Die Umgebungsmonade eines Punktes $\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}$ bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie bezeichnen wir einfach mit $\mu_{\mathsf{d}}(\mathfrak{x})$. Ist $\mathfrak{x}$ standard, so besitzt die Umgebungsmonade eine sehr einfache Form, mit der sich gut arbeiten lässt. Allerdings kann man diese Form nicht auf nichtstandard Elemente übertragen:

Ist $\mathsf{d}\colon \mathsf{R}\times\mathsf{R}\to\mathbb{R}$ eine Metrik auf der Menge $\mathsf{R}\in\mathbb{WF}$, so folgt für jedes $x\in\mathsf{R}$, indem man $(\mathsf{B}_{\frac{1}{n}}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ als Umgebungsbasis wählt, gerade

$$\mu_{\mathsf{d}}({*x}) = \left\{\mathfrak{y}\in {^*\mathsf{R}} :\ {^*\mathsf{d}}({*x},\mathfrak{y})\approx 0\right\}.$$

Andererseits ist für ein nichtstandard Element $\mathfrak{y}_0\in\mu_{\mathsf{d}}({*x})$ die Menge ${^*}(\mathsf{R}\setminus\{x\})$ eine standard offene Umgebung (zu den Trennungseigenschaften metrischer Räume siehe unten), also ${*x}\notin\mu_{\mathsf{d}}(\mathfrak{y}_0)\neq\{\mathfrak{y}\in{^*\mathsf{R}} :\ {^*\mathsf{d}}(\mathfrak{y}_0,\mathfrak{y})\approx 0\}$.

Allerdings gilt für alle internen standardnahen Elemente $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in{^*\mathsf{R}}$ zumindest die Implikation

$$\mathfrak{y}\in\mu_{\mathsf{d}}(\mathfrak{x})\Rightarrow {^*\mathsf{d}}(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\approx 0.$$

Trennungseigenschaften

Sind $x,y\in\mathsf{R}$ beliebig, so ist $\mathsf{d}(x,y)\in\mathbb{R}$, also ${^*\mathsf{d}}({*x},{*y}) = {^*}(\mathsf{d}(x,y))$ eine standard hyperreelle Zahl. Ist nun $\mu_{\mathsf{d}}({*x})\cap\mu_{\mathsf{d}}({*y})\neq\emptyset$, so folgt aus der Dreiecksungleichung ${^*\mathsf{d}}({*x},{*y})\approx 0$, also zusammen ${^*\mathsf{d}}({*x},{*y}) = 0$, d.h. jeder metrische Raum ist hausdorffsch. Damit gelten natürlich auch T_0 und T_1 und insbesondere ist für jedes $x\in\mathsf{R}$ die Menge $\{x\}$ abgeschlossen.

Sind nun ${*x}$ und $\mathfrak{y}$ ein standard und ein interner Punkt in ${^*\mathsf{R}}$, so folgt aus der Eigenschaft $\mu_{\mathsf{d}}(\mathfrak{y})\cap\mu_{\mathsf{d}}({*x})\neq\emptyset$ wieder mit der Dreiecksungleichung, dass ${^*\mathsf{d}}({*x},\mathfrak{y})\approx 0$ und damit $\mathfrak{y}\in\mu_{\mathsf{d}}({*x})$ ist. Also sind metrische Räume sogar regulär.

Entlegene Punkte

Eine allgemeine Betrachtung entlegener Punkte in metrischen Räumen ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, weil es sehr unterschiedliche Metriken gibt.

Betrachtet man beispielsweise die reellen Zahlen mit der euklidischen Metrik, so sind die entlegenen Punkte der Topologie gerade die unendlich großen Zahlen der Ordnungsrelation. Das bedeutet, dass sich in Kugeln mit standardnahem Mittelpunkt und begrenztem Radius keine entlegenen Punkte befinden. Als Formel geschrieben ist also für $\mathfrak{x}\in\mathtt{ns}({^*\mathbb{R}})$ und $\mathfrak{s}\in{^*\mathbb{R}_b} = \mathtt{ns}({^*\mathbb{R}})$ stets $\mathsf{B}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{x})\subseteq\mathtt{ns}({^*\mathbb{R}})$.

Betrachtet man aber etwa die diskrete Metrik, so sind die standardnahen Punkte gerade die standard Elemente, d.h. jedes interne, nichtstandard Element ist ein entlegener Punkt. Und für jedes unendliche $M\in\mathbb{WF}$ enthält ${^*M}$ auch nichtstandard Elemente. Das bedeutet weiter, dass jede unendliche standard Teilmenge von ${^*M}$ bezüglich der diskreten Topologie auch entlegene Punkte enthält.

Andererseits kann man allgemein für einen beliebigen metrischen Raum (X,d) festhalten, dass für jeden entlegenen Punkt $\mathfrak{x}_0$ stets

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{x}_0) := \left\{\mathfrak{y}\in{^*X} :\ {^*\mathsf{d}}(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{y})\approx 0\right\}\subseteq\mathtt{rmt}({^*X})$$

gilt: Angenommen, für ein $x \in X$ wäre $\mu_{\mathsf{d}}(*x) \cap \mathfrak{E}(\mathfrak{x}_0) \neq \emptyset$, so müsste wegen der Dreiecksungleichung bereits $\mathfrak{x}_0 \in \mu_{\mathsf{d}}(*x)$ sein, im Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{x}_0$.

Überdeckungen

Nun folgen die angekündigten Sätze, welche gemeinsam ergeben, dass metrische Räume parakompakt sind.

Satz 3.4.28

Ist (R, d) metrischer Raum und $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ intern, so existiert eine punktendliche offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von R mit ${}^*U_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis: Zunächst sei $\prec$ Wohlordnung auf R und für $x \in \mathsf{R}$ sei

$$n_x := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \ {}^*(\mathsf{B}_{\frac{1}{n}}(x)) \cap \mathfrak{H} = \emptyset \right\}.$$

Damit definieren wir D_x als die Teilmenge derjenigen $y \in \mathsf{B}_{\frac{1}{n_x}}(x)$, für die es ein $m_y \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass

1. $\mathsf{B}_{\frac{1}{m_y}}(y) \subseteq \mathsf{B}_{\frac{1}{n_x}}(x)$,
2. $\mathsf{B}_{\frac{1}{m_y - 1}}(y) \not\subseteq \mathsf{B}_{\frac{1}{n_x}}(x)$ und
3. $\mathsf{B}_{\frac{1}{m_y}}(y) \subseteq \mathsf{B}_{\frac{1}{n_z}}(z)$ für ein $z \prec x$

gilt.

In D_x liegen also diejenigen Elemente aus $\mathsf{B}_{\frac{1}{n_x}}(x)$, deren größte Kugelumgebung (mit Radius aus $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$), die noch ganz in $\mathsf{B}_{\frac{1}{n_x}}(x)$ enthalten ist, bereits in einer „früheren“ (bzgl. $\prec$) Kugel $\mathsf{B}_{\frac{1}{n_z}}(z)$ liegt.

Definieren wir nun

$$U_x := \mathsf{B}_{\frac{1}{n_x}}(x) \setminus \overline{\bigcup \left\{ \mathsf{B}_{\frac{1}{2m_a}}(a) : \ a \in D_x \right\}},$$

so ist $(U_x)_{x \in \mathsf{R}}$ offene, punktendliche Überdeckung von R:

- U_x ist offen: nach Konstruktion
- $(U_x)_x$ ist Überdeckung: Sei $r \in \mathsf{R}$ beliebig und x_r $\prec$-minimal mit $r \in \mathsf{B}_{\frac{1}{n_{x_r}}}(x_r)$. Wäre $r \notin U_{x_r}$, dann also $r \in \overline{\bigcup \left\{ \mathsf{B}_{\frac{1}{2m_a}}(a) : \ a \in D_{x_r} \right\}}$ und somit gäbe es $\mathfrak{x} \in {}^*D_{x_r}$ mit $\mu_{\mathsf{d}}(*r) \cap \mathsf{B}_{\frac{1}{2\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}}}(\mathfrak{x}) \neq \emptyset$.

  1. Fall: $\frac{1}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}} \approx 0$:

  Dann ist auch $\frac{1}{2\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}} \approx 0$, also $\mathsf{B}_{\frac{1}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}}}(\mathfrak{x}) \subseteq \mu_{\mathsf{d}}(*r)$, woraus $\mathsf{B}_{\frac{1}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}} - 1}}(\mathfrak{x}) \subseteq \mu_{\mathsf{d}}(*r) \subseteq {}^*(\mathsf{B}_{\frac{1}{n_{x_r}}}(x_r))$ im Widerspruch zur Definition von D_{x_r} folgt.

2. Fall: $\frac{1}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}} \not\approx 0$:

Dann ist $\mu_{\mathsf{d}}({}^*r) \subseteq \mathsf{B}_{\frac{1}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}}}(\mathfrak{x})$. Insbesondere gilt $\exists^{\mathtt{int}}\mathfrak{x} \in {}^*D_{x_r}\,({}^*r \in \mathsf{B}_{\frac{1}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}}}(\mathfrak{x}))$, also mit $*$-Transfer auch $\exists x \in D_{x_r}\,(r \in \mathsf{B}_{\frac{1}{m_x}}(x))$ und per definitionem gibt es ein $z \prec x_r$ mit $\mathsf{B}_{\frac{1}{m_x}}(x) \subseteq \mathsf{B}_{\frac{1}{n_z}}(z)$ im Widerspruch zur Wahl von x_r.

Insgesamt ist also die Annahme $r \notin U_{x_r}$ falsch und $(U_i)_{i\in I}$ Überdeckung.

- $(U_x)_{x\in\mathsf{R}}$ ist punktendlich: Sei $r \in \mathsf{R}$ beliebig und $x \in \mathsf{R}$ derart, dass $r \in U_x$. Damit ist $r \notin D_x$, also gilt für das minimale $m_r^x \in \mathbb{N}$ mit $\mathsf{B}_{\frac{1}{m_r^x}}(r) \subseteq \mathsf{B}_{\frac{1}{n_x}}(x)$, dass x wiederum $\prec$-minimal mit dieser Eigenschaft ist. Gibt es nun zu $N > m_r^x$ auch ein $y \in \mathsf{R}$ mit $\mathsf{B}_{\frac{1}{N}}(r) \subseteq U_y$, so muss $y \prec x$ sein. Damit bilden also die $w \in \mathsf{R}$ mit $r \in U_w$ eine $\prec$-absteigende Folge und da $\prec$ Wohlordnung ist, stagniert diese Folge nach endlich vielen Schritten, d.h. es gibt nur endlich viele $w \in \mathsf{R}$ mit $r \in U_w$. ■

Nun haben wir also zu einer gegebenen internen Teilmenge aus entlegenen Punkten eine standard punktendliche Überdeckung gefunden, deren standard Elemente disjunkt zur gegebenen Teilmenge sind. Mit Hilfe des nächsten Satzes können wir diese Überdeckung sogar zu einer lokalendlichen verfeinern, wobei die entsprechende Eigenschaft der Disjunktheit erhalten bleibt und insgesamt also die Parakompaktheit gezeigt ist:

Satz 3.4.29

Sei (R,d) ein metrischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene, punktendliche Überdeckung von R.

Dann existiert eine offene, lokalendliche Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$.

Beweis: Sei $(U_i)_{i\in I}$ wie angegeben und I oBdA durch $\prec$ wohlgeordnet. Weiter sei $m(x) := \max\{z \in \mathbb{Z} :\ \exists i \in I\,(\mathsf{B}_{2^z}(x) \subseteq U_i)\}$ und damit $\phi(x) := 2^{m(x)}$. Gibt es ein $x \in \mathsf{R}$, für das dieses Maximum nicht existiert, so muss wegen der Punktendlichkeit ein $i_0 \in I$ existieren mit $\mathsf{B}_{2^z}(x) \subseteq U_{i_0}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, also $\mathsf{R} \subseteq U_{i_0}$. Dann ist aber mit $V_{i_0} := U_{i_0}$ und $V_i := \emptyset$ für $i \neq i_0$ bereits $(V_i)_{i\in I}$ die gesuchte Verfeinerung.

Im Folgenden gebe es also die Abbildung $\phi\colon \mathsf{R} \to \mathbb{Q}$ und somit ${}^*\phi\colon {}^*\mathsf{R} \to {}^*\mathbb{Q}$ mit

$$ {}^*\phi(\mathfrak{x}) = 2^{\max\left\{\mathfrak{z}\in{}^*\mathbb{Z}\ :\ \exists^{\mathtt{int}}\mathfrak{i}\in{}^*I\,(\mathsf{B}_{2^{\mathfrak{z}}}(\mathfrak{x})\subseteq\mathfrak{U}_{\mathfrak{i}})\right\}} $$

nach $*$-Transfer.

Setze nun $H_i := \left\{y \in \mathsf{R} :\ \mathsf{B}_{\phi(y)}(y) \subseteq U_i \wedge \forall j \prec i\,(\mathsf{B}_{\phi(y)}(y) \not\subseteq U_j)\right\}$ für jedes $i \in I$ und damit $V_i := \bigcup_{y\in H_i} \mathsf{B}_{\frac{\phi(y)}{2}}(y)$.

1. $(V_i)_{i\in I}$ ist Familie offener Mengen: nach Konstruktion

2. $(V_i)_{i\in I}$ ist Überdeckung: Zu $x \in \mathsf{R}$ beliebig gibt es ein $\prec$-minimales $i_x \in I$ mit $\mathsf{B}_{\phi(x)}(x) \subseteq U_{i_x}$ und damit ist $x \in V_{i_x}$.

3. $(V_i)_{i\in I}$ ist Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$: nach Konstruktion

4. $(V_i)_{i\in I}$ ist lokalendlich: Sei dazu $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$ beliebig, etwa $\mathfrak{x} \in \mu_{\mathsf{d}}({}^*x_0)$. Weiter sei $\mathfrak{i} \in {}^*I$ mit $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}_\mathfrak{i}$ beliebig, also ist $\mathfrak{x} \in \mathsf{B}_{\frac{{}^*\phi(\mathfrak{y})}{2}}(\mathfrak{y})$ für ein $\mathfrak{y} \in \mathfrak{H}_\mathfrak{i}$.

   Wäre nun ${}^*\phi(\mathfrak{y}) \approx 0$, so wäre $\mathsf{B}_{{}^*\phi(\mathfrak{y})}(\mathfrak{y}) \subseteq \mu_{\mathsf{d}}({}^*x_0)$ und damit aber ${}^*\phi(\mathfrak{y}) \geq \frac{{}^*\phi({}^*x_0)}{2}$ im Widerspruch zu ${}^*\phi(\mathfrak{y}) \approx 0$.

   Damit muss ${}^*\phi(\mathfrak{y}) \not\approx 0$ sein, woraus mit $\mathfrak{x} \in \mathsf{B}_{\frac{{}^*\phi(\mathfrak{y})}{2}}(\mathfrak{y}) \cap \mu_{\mathsf{d}}({}^*x_0)$ folgt, dass ${}^*x_0 \in \mathsf{B}_{{}^*\phi(\mathfrak{y})}(\mathfrak{y}) \subseteq \mathfrak{U}_\mathfrak{i}$ ist. Weil (U_i) punktendlich ist, muss nach Lemma 3.4.11 folglich $\mathfrak{i} \in {}^*_\sigma I$ sein, was zu zeigen war. ∎

Ist nun (R, d) ein metrischer Raum und $\mathfrak{H} \subseteq \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R})$ eine interne Teilmenge der entlegenen Punkte, so existiert nach Satz 3.4.28 eine punktendliche, offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von R mit ${}^*U_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$ für alle $i \in I$. Die Überdeckung lässt sich nach Satz 3.4.29 wiederum zu einer lokalendlichen, offenen Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von R verfeinern, womit auch ${}^*V_i \cap \mathfrak{H} = \emptyset$ für alle $i \in I$ gilt und nach Definition 3.4.12 somit (R, d) parakompakt ist.

3.4.5 Abzählbar im Unendlichen

Neben den metrischen Räumen gibt es eine weitere Sorte topologischer Räume, die stets parakompakt sind und welche *abzählbar im Unendlichen* genannt werden. Wir geben hier zunächst die standard Definition, bevor wir die topologischen Eigenschaften mit unseren nonstandard Methoden untersuchen. Dabei definieren wir den Begriff wie in [14]. Eine ausführlichere Besprechung dieses Themas findet sich in [27], I §7.

Definition 3.4.30. (*standard*) Ein topologischer Raum $(\mathsf{R}, \mathcal{T})$ heißt *abzählbar im Unendlichen* (kurz aiU) oder auch *σ-kompakt*, wenn es eine abzählbare offene Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von R gibt, sodass $\overline{U_n}$ kompakt ist für alle $n \in \mathbb{N}$. ◇

In unserer Nonstandard-Welt wird dieser Begriff dank der bisherigen Ergebnisse etwas anschaulicher – auch wenn der Name dadurch an Klarheit verliert.

Satz 3.4.31

Ein Raum R ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn es eine offene Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von R gibt mit

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*U_n\Big) \cap \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R}) = \emptyset.$$

Beweis: Wir wissen, dass $\overline{U_n}$ genau dann kompakt ist, wenn ${}^*\overline{U_n} \subseteq \mathtt{ns}({}^*\overline{U_n})$ gilt (siehe [22, Abschnitt 4.1]). Mit $U_n \subseteq \overline{U_n}$ und $\mathtt{ns}({}^*\overline{U_n}) = {}^*\overline{U_n} \cap \mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$ folgt die Behauptung. ■

Damit erkennen wir, dass ein gewisser Teil metrischer Räume auch aiU ist, etwa $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Metrik. Andererseits ist nicht jeder metrische Raum aiU: Eine überabzählbare Menge mit der diskreten Metrik etwa benötigt immer überabzählbar viele Mengen zur Überdeckung, falls deren $*$-Bilder keine entlegenen Punkte enthalten dürfen.

Satz 3.4.32

Ist R abzählbar im Unendlichen, so auch parakompakt.

Beweis: Es sei R aiU und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Überdeckung aus Satz 3.4.31. Setze nun $G_1 := U_1$, dann ist $\overline{G_1} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, also existiert eine endliche Teilüberdeckung $\overline{G_1} \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{n_i}$. Setze $G_2 := \bigcup_{i=1}^m U_{n_i} \cup U_2$, womit wegen $\overline{G_2} = \bigcup_{i=1}^m \overline{U_{n_i}} \cup \overline{U_2}$ auch $\overline{G_2}$ kompakt ist. Induktiv entsteht somit die offene Überdeckung $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{G_k}$ kompakt und $\overline{G_k} \subseteq G_{k+1}$.

Setzen wir nun formal $G_{-1} := \emptyset$ und $G_0 := \emptyset$, so können wir allgemein $H_n := G_n \setminus \overline{G_{n-2}}$ definieren. Damit wird $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sofort zu einer offenen Überdeckung von R mit $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*H_n\big) \cap \mathtt{rmt}({}^*\mathsf{R}) = \emptyset$. Diese Überdeckung ist in der Tat auch lokalendlich:

Setzen wir $(\mathfrak{G}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\in{}^*\mathbb{N}} = {}^*\big((G_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ und ebenso $(\mathfrak{H}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\in{}^*\mathbb{N}} = {}^*\big((H_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, so folgt per $*$-Transfer

$$\forall^{\mathtt{int}}\mathfrak{x} \in {}^*\mathsf{R}\, \forall^{\mathtt{int}}\mathfrak{n}, \mathfrak{k} \in {}^*\mathbb{N}\, (\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}_\mathfrak{n} \wedge \mathfrak{k} \geq \mathfrak{n} + 2 \Rightarrow \mathfrak{x} \notin \mathfrak{H}_\mathfrak{k}),$$

d.h. $\mathfrak{G}_\mathfrak{n} \cap \mathfrak{H}_\mathfrak{k} = \emptyset$ für alle $\mathfrak{k} \geq \mathfrak{n} + 2$.

Ist also $\mathfrak{x} \in \mathtt{ns}({}^*\mathsf{R})$ beliebig, etwa $\mathfrak{x} \in \mu_\mathcal{T}({*x})$, so gibt es ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $x \in G_{n_x}$ und weil diese Mengen offen sind also $\mathfrak{x} \in {}^*G_{n_x} = \mathfrak{G}_{*n_x}$. Somit ist $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{H}_\mathfrak{k}$ für alle $\mathfrak{k} \geq {*n_x} + 2$. Das bedeutet, standardnahe Elemente liegen nur in standard Mengen, was nach Folgerung 3.4.6 gerade bedeutet, dass $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalendlich ist. ■

Fazit

Angesichts der Tatsache, dass diese Arbeit aus zwei, auf den ersten Blick unabhängigen, Teilen besteht, ist es sicher angebracht, ein abschließendes Fazit zu ziehen. Es waren ja sogar mindestens drei Ziele, die mit dieser Arbeit verfolgt wurden:

1. Externe Relationen auf Bedingungen zu untersuchen, wann die Äquivalenzklassen, oder zumindest deren diskrete Monaden, die Umgebungsmonaden einer Topologie darstellen.

2. Einige Begriffe und Beziehungen der mengentheoretischen Topologie mittels Nonstandard-Methoden auf neue Einsichten und Charakterisierungen zu untersuchen.

3. In beiden Bereichen die spezielle Gestalt des **HST**-Universums zu nutzen, um zu zeigen, wie dieses Axiomensystem die konkrete Arbeit mit nonstandard Argumenten ermöglicht und eventuell sogar im Vergleich zu anderen Systemen erleichtert.

Zum ersten Punkt: Im Fall, dass die Relation monadisch, d.h. selbst standardgroßer Schnitt interner Mengen ist, erhält man das gewünschte Ergebnis. Die Äquivalenzklassen der standard Punkte sind gerade die Umgebungsmonaden einer eindeutig bestimmten Topologie (Satz 2.1.1). Bei nichtmonadischen Relationen gehen wir in **HST** zumindest von der Form $\mathsf{E} = \bigcup_{\xi\in\kappa}\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}$ mit internen Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ aus. Allerdings haben wir hier diese allgemeine Form gar nicht betrachtet, sondern sind gleich davon ausgegangen, dass die Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ sogar standard sind. In diesem Fall sind die $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ o.B.d.A. gerichtet bezüglich η (siehe Satz 1.2.14). Der Einfachheit halber haben wir daher $\mathsf{e}_{\xi\eta} \subseteq \mathsf{e}_{\xi\eta'}$ für $\eta' < \eta$ benutzt. Für diesen Fall haben wir die Familie $\{D_f(x) : x \in X \wedge f \in \lambda^\kappa\}$ in $\mathbb{WF}$ konstruiert und gezeigt, dass die Relation genau dann topologisch ist, wenn diese Familie bereits die Eigenschaften eines Umgebungsfilters trägt (Satz 2.3.5 und Satz 2.3.6).

Eine weitere Frage war, ob man auch für den Fall, dass die Relation nicht als topologisch bekannt ist, Aussagen über die Umgebungsmonaden der assoziierten Topologie machen kann. Dies ist für den allgemeinen Fall nicht gelungen, was im Beispiel ab

Seite 69 sehr deutlich wird. Etwas besser wird die Situation, wenn man als zusätzliche Struktur einen Vektorraum zugrunde legt und die Relation als begrenzt linear, d.h. verträglich mit den Vektorraumoperationen voraussetzt. Dann folgt bereits aus der Tatsache, dass die Nullklasse $[0]_{\mathsf{E}}$ ein Monade (und damit gleich der diskreten Monade) ist, dass sie die Nullumgebungsmonade einer Vektorraumtopologie ist. Insbesondere ist damit die Relation topologisch und die assoziierte Topologie linear.

Aber schon der Fall $[0]_{\mathsf{E}} \neq \delta([0]_{\mathsf{E}})$ bereitet auch für begrenzt lineare Relationen Probleme. Wir können zwar gewisse Eigenschaften von der Nullklasse auf die diskrete Monade übertragen, aber wir wissen nicht, ob diese stets abgeschlossen bezüglich Addition ist. Damit kann also die Umgebungsmonade echt größer als die diskrete Monade und die Relation somit nicht-topologisch sein. Weiter bleibt damit offen, ob die assoziierte Topologie überhaupt eine Vektorraumtopologie ist.

An dieser Stelle können sicherlich zukünftige Untersuchungen anknüpfen, um herauszufinden, ob die diskrete Monade einer begrenzt linearen Relation (zumindest auf bestimmten Vektorräumen oder unter weiteren Einschränkungen) abgeschlossen bezüglich Addition ist. Weiter wäre es interessant zu wissen, ob (vielleicht unabhängig von Ergebnissen über $\delta([0]_{\mathsf{E}})$) die assoziierte Topologie einer begrenzt linearen Relation stets linear ist.

In unseren Untersuchungen haben wir uns anschließend mit der kleinsten absolutkonvexen Monade um $[0]_{\mathsf{E}}$ beschäftigt, weil diese in der Tat stets eine Vektorraumtopologie erzeugt, nämlich eine lokalkonvexe. Dazu mussten wir allerdings erneut gewisse Eigenschaften der Nullklasse von dieser auf ihre absolutkonvexe Monade übertragen. Diese Betrachtung führt zu Analogien mit der Konstruktion der Hüllentopologie auf topologischen induktiven Limites, was wiederum gewisse Zusatzbedingungen an die Monaden $\bigcap_{\eta\in\lambda} \mathsf{e}_{\xi\eta}(0)$ motivierte.

Zum zweiten Punkt: Bereits zu Beginn der Arbeiten über Nonstandard-Mathematik führte die Charakterisierung des Umgebungsfilters eines Punktes durch dessen Filtermonade zu vielen Ergebnissen der elementaren Topologie. So findet man in [22] bereits die Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen, stetiger Funktionen oder etwa von Kompaktheit mittels Umgebungsmonaden. Weitere Beschreibungen topologischer Begriffe und Konzepte findet man unter anderem in [28], [13] oder [3].

Andererseits gibt es immer noch Konzepte, welche keine (mir bekannte) nonstandard Beschreibung haben, aber eine solche durchaus interessante Folgerungen hätte. Insbesondere die Verwendung von entlegenen Punkten kann zu weiterführenden Beschreibungen und Zusammenhängen führen (siehe Folgerung 3.4.6, bzw. Folgerung 3.4.7). In metrischen Räumen etwa haben die Umgebungsmonaden der standard Punkte eine sehr praktische Darstellung, welche sich aber nicht auf entlegene Punkte übertragen lässt. Vergleicht man etwa die euklidische mit der diskreten Metrik auf $[0,1]$, so erkennt man, wie unterschiedlich entlegene Punkte in metrischen Räumen sein können.

An Grenzen stoßen nonstandard Methoden, sobald den topologischen Konzepten algebraische oder mengentheoretische Strukturen wie unendliche Ordinalzahlen innewohnen. So benutzen wir auch im nonstandard Beweis der Parakompaktheit metrischer Räume Wohlordnungen, und Good, Tree und Watson haben in [7] gezeigt, dass dieser Satz ohne das Auswahlaxiom auch gar nicht gilt (selbst mit abhängiger Auswahl gilt er nicht).

Zum dritten Punkt: Das Argumentieren in **HST** hat bei der Behandlung externer Relationen einige offensichtliche Veränderungen gegenüber Wietschorkes Argumenten und Konzepten in **IST** gebracht. So benutzen wir konsequent Filter zur Beschreibung von Konvergenz, im Gegensatz zu den Netzen bei Wietschorke. Dabei spielt sicher eine Rolle, dass die externen Filtermonaden keine „fremdartigen" Gebilde in **HST** sind. Weiter ist der Schattenraum kein unübersichtliches, formales Konstrukt, sondern einfach eine Menge in $\mathbb{WF}$, welche (extern) bijektiv zum Quotienten $\mathsf{dom}\,\mathsf{E}/\mathsf{E}$ ist. Desweiteren ermöglicht der Übergang von den standard Mengen $\mathsf{e}_{\xi\eta}$ zu deren $*$-Urbildern $d_{\xi\eta}$ viele Konstruktionen in $\mathbb{WF}$, wo die letztendlich angestrebte Topologie ebenfalls liegt. Insgesamt kann viel häufiger mit Mengen argumentiert werden und Formelmanipulationen dienen oft nur der Platzersparnis.

Im Bereich der nonstandard Beschreibungen allgemeiner Konzepte der mengentheoretischen Topologie mag die **HST**-Struktur dazu geführt haben, leichte Formulierungen von Aussagen über entlegene Punkte zu finden und auch Aussagen, welche für interne Mengen bekannt waren, auf Monaden auszuweiten.

Abschließend kann man sagen, dass die reichhaltige Struktur des **HST**-Universums eine gute Grundlage für (insbesondere mengentheoretische) Konstruktionen von Nonstandard-Argumenten bietet. Dies rechtfertigt (ganz abgesehen von den metamathematischen Vorteilen, siehe [9]) durchaus den Aufwand, der für die Herleitung dieser Struktur aus den Axiomen nötig ist.

Anhang A

Die Axiome von HST

A.1 Überblick

Die formale Sprache ist $\mathcal{L} = \{\in, \mathtt{st}, \forall, \exists, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, (,)\}$.

Die Axiome sortiert nach Geltungsbereich sind:

1) Axiome für alle Mengen

1. Extensionalität
2. Paar
3. Vereinigung
4. Unendlichkeit
5. Aussonderung
6. Sammlung

2) Axiome für standard und interne Mengen

1. $\mathbf{ZFC}^{\mathtt{st}}$
2. Transfer
3. Transitivität von $\mathbb{I}$
4. Regularität über $\mathbb{I}$
5. Standardisierung

3) Axiome für Mengen von standard Größe

1. Saturation
2. Standard-Größen-Auswahl
3. Abhängige Auswahl

A.2 Ausführlich

1) Axiome für alle Mengen

Extensionalität	$\forall X\,\forall Y\,(X = Y \Leftrightarrow \forall x\,(x \in X \Leftrightarrow x \in Y))$ Jede Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.
Paar	$\forall x\,\forall y\,\exists Z\,\forall z\,(z \in Z \Leftrightarrow (z = x \vee z = y))$ Für je zwei Mengen x, y ist $\{x, y\}$ ebenfalls eine Menge.
Vereinigung	$\forall X\,\exists U\,\forall x\,(x \in U \Leftrightarrow \exists y \in X\,(x \in y))$ Für jede Menge X ist $\bigcup X = \bigcup_{x \in X} x$ ebenfalls eine Menge.
Unendlichkeit	$\exists X\,(\emptyset \in X \wedge \forall x \in X\,(x \cup \{x\} \in X))$ Es gibt eine unendliche Menge.
Aussonderung	$\forall X\,\exists Y\,\forall x\,(x \in Y \Leftrightarrow (x \in X \wedge \Phi(x)))$ Zu jeder Menge X gibt es eine weitere Menge, welche gerade die Elemente aus X enthält, welche die Eigenschaft Φ erfüllen.
Sammlung	$\forall X\,\exists Y\,\forall x \in X\,(\exists y\,\Phi(x, y) \Rightarrow \exists y \in Y\,\Phi(x, y))$ Für jede „Abbildung“ auf dem Universum, eingeschränkt auf X definieren die Bilder wieder eine Menge.

Verbleibende **ZFC***-Axiome:*

Regularität	$\forall X \neq \emptyset\,\exists x \in X\,(x \cap X = \emptyset)$ Für jede Menge X ist jede Kette der Art $X \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$ endlich.
Potenzmenge	$\forall X\,\exists Y\,\forall x\,(x \in Y \Leftrightarrow x \subseteq X)$ Zu jeder Menge X gibt es die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X) = \{x :\ x \subseteq X\}$.
Auswahl	$\forall X\,\exists Y\,\forall x \in X \setminus \{\emptyset\}\,(\exists z\,(Y \cap x = \{z\}))$ Ist X eine Menge, so kann man ein Element aus jedem Element von X nehmen und zu einer neuen Menge zusammenfassen.

2) Axiome für standard und interne Mengen

ZFC$^{\mathtt{st}}$ Wir nehmen alle **ZFC**-Axiome und schränken sie auf standard Mengen ein.

Transfer $\Phi^{\mathtt{int}} \Leftrightarrow \Phi^{\mathtt{st}}$
wobei Φ eine beliebige, abgeschlossene $\in$-Formel ist, welche nur standard Mengen als Parameter enthält.

Transitivität von $\mathbb{I}$ $\forall^{\mathtt{int}} x\, \forall y\, (y \in x \Rightarrow \mathtt{int} y)$
selbsterklärend

Regularität über $\mathbb{I}$ $\forall X \neq \emptyset\, \exists x \in X\, (x \cap X \subseteq \mathbb{I})$
Vergleiche mit Regularität.

Standardisierung $\forall X\, \exists^{\mathtt{st}} Y\, (X \cap \mathbb{S} = Y \cap \mathbb{S})$
Zu jeder Menge X findet man eine standard Menge Y, welche gerade die standard Elemente von X als standard Elemente enthält.

3) Axiome für Mengen von Standard-Größe

Mengen von *Standard-Größe* sind der Gestalt $\{f(x) : x \in X \cap \mathbb{S}\}$, wobei X irgendeine Menge ist und f irgendeine Funktion mit $X \cap \mathbb{S} \subseteq \mathtt{dom} f$. Man spricht auch von *standardgroßen Mengen.*

Saturation Ist $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{I}$ eine $\cap$-abgeschlossene Menge von Standard-Größe mit $X \in \mathcal{X} \Rightarrow X \neq \emptyset$, dann ist $\bigcap \mathcal{X} \neq \emptyset$.

Standard-Größen-Auswahl Ist X eine Menge von Standard-Größe, F eine Funktion auf X, $F(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$, dann gibt es eine Funktion f auf X mit $f(x) \in F(x)$ für alle x.

Abhängige Auswahl ω-Folgen von Auswahlfunktionen existieren für den Fall, dass der Definitionsbereich der n-ten Auswahl vom Ergebnis der $(n-1)$-ten Auswahl abhängt.

Stichwortverzeichnis

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Bankston, Paul: *A Survey of Ultraproduct Constructions in General Topology.* Topology Atlas Invited Contributions, 8(2):1–32, 2003.

[2] Baratella, Stefano und Siu-ah Ng: *A Nonstandard Proof of the Eberlein-Šmulian Theorem.* Proceedings of the American Mathematical Society, 131(10):3177–3180, 2003.

[3] Diener, Francine und Marc Diener (Herausgeber): *Nonstandard analysis in practice.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[4] Dugundji, James: *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 7. Auflage, 1972.

[5] Espinola, R. und M.A. Khamsi: *Introduction to Hyperconvex Spaces.* In: Kirk, W.A. und B. Sims (Herausgeber): *Handbook of Metric Fixed Point Theory.* Kluwer Academic Publishers, 2001.

[6] Fajardo, Sergio und H. Jerome Keisler: *Long sequences and neocompact sets.* In: *Developments in nonstandard mathematics (Aveiro, 1994)*, Seiten 251–260. Longman, Harlow, 1995.

[7] Good, C., I. J. Tree und W. S. Watson: *On Stone's Theorem and the Axiom of Choice.* Proceedings of the American Mathematical Society, 126(4):1211–1218, 1998.

[8] Henson, C. Ward: *Nonstandard Analysis and Ultraproducts in Banach Spaces and Functional Analysis.* `citeseer.ist.psu.edu/328082.html`.

[9] Kanovei, V. und M. Reeken: *Nonstandard Analysis, Axiomatically.* Springer, 2004.

[10] Khamsi, M.A.: *On Asymptotically Nonexpansive Mappings in Hyperconvex Metric Spaces.* Proceedings of the American Mathematical Society, 132:365–373, 2004.

[11] Kutateladze, S. S.: *Some Trends in Monadology.* In: *Geometry and Applications*, Novosibirsk, 2000. Sobolev Institute.

[12] Köthe, Gottfried: *Topologische Lineare Räume I.* Springer, 1966.

[13] Landers, Dieter und Lothar Rogge: *Nichtstandard Analysis.* Springer, 1991.

[14] Lehmann, Martin: *Parakompakte Räume und Teilungen der Eins.* `mips.gsf.de/proj/cmb/teaching/SS00/Parakom.ps`, 2000.

[15] Luxemburg, W. A. J.: *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.* Holt, Rinehart and Winston, New York.

[16] MacIver, David: *Filters in Analysis and Topology.* `www.efnet-math.org/~david/mathematics`, 2004.

[17] Mortini, Raymond: *Einige Anmerkungen zum Fortsetzungssatz von Tietze.* Elemente der Mathematik, 60:150–153, 2005.

[18] Nelson, Edward: *Internal Set Theory.* `www.math.princeton.edu/~nelson`.

[19] Nelson, Edward: *Internal Set Theory; A New Approach to Nonstandard Analysis.* Bulletin of the American Mathematical Society, 83(6):1165–1198, 1977.

[20] Ossa, Erich: *A Simple Proof of the Tietze-Urysohn Extension Theorem.* Archiv der Mathematik, 71:331–332, 1998.

[21] Robinson, Abraham: *Non-standard Analysis.* In: *Proceedings of the Royal Acadamy of Science*, Seiten 432–440, Amsterdam, 1961.

[22] Robinson, Abraham: *Non-standard Analysis.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, überarbeitete Auflage, 1974.

[23] Roelcke, W.: *On the Finest Locally Convex Topology Agreeing with a Given Topology on a Sequence of Absolutely Convex Sets.* Mathematische Annalen, 198:57–80, 1972.

[24] Rudin, Mary Ellen: *A New Proof that Metric Spaces are Paracompact.* Proceedings of the American Mathematical Society, 20(2):603, 1969.

[25] Salbany, S. und T. Todorov: *Nonstandard Analysis in Topology: Nonstandard and Standard Compactifications.* Journal of Symbolic Logic, 65(4):1836–1840, 2000.

[26] Schaefer, Helmut: *Topological Vector Spaces.* Springer, 3. korrigierte Auflage, 1971.

[27] Schubert, Horst: *Topologie, Eine Einführung.* B. G. Teubner, 4. Auflage, 1975.

[28] Stroyan, K. D. und W. A. J. Luxemburg: *Introduction to the Theory of Infinitesimals.* Academic Press, New York, 1976.

[29] Vakil, Nader: *Nonstandard Topologies with Bases that Consist only of Standard Sets.* Proceedings of the American Mathematical Society, 129(7):2075–2083, 2000.

[30] Valdivia, Manuel: *On Certain Topologies on a Vector Space.* Manuscripta Mathematicae, 14:241–247, 1974.

[31] Wattenberg, Frank: *Topologies on the Set of Closed Subsets.* Pacific Journal of Mathematics, 68(2):537–551, 1977.

[32] Wietschorke, Bernd: *Die Erzeugung lokalkonvexer Topologien durch nichtmonadische Äquivalenzrelationen.* Doktorarbeit, Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal, 1993.

[33] Wietschorke, Bernd: *On the generation of topology by external equivalence-relations.* In: *Advances in analysis, probability and mathematical physics (Blaubeuren, 1992)*, Seiten 122–131. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.