Das Zerfallen kurzer exakter Sequenzen von Frécheträumen unter Betrachtung der Stetigkeitscharakteristiken

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

dem Fachbereich
Mathematik und Naturwissenschaften
der
Bergischen Universität Wuppertal
vorgelegt von

Martin Blankenagel

Juni 2009

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20090814
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20090814]

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Unter einer kurzen exakten Sequenz von Frécheträumen versteht man das Aufeinanderfolgen von stetigen linearen Abbildungen zwischen Frécheträumen der Form

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0,$$

wobei i injektiv und q surjektiv seien und für welche $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(q)$ gelte. Weiter sagt man, dass die obige Sequenz zerfällt, falls $\mathrm{Im}(i)$ komplementiert in G liegt, was äquivalent dazu ist, dass es zu i eine Linksinverse $L \in L(G, F)$ gibt (d.h. $L \circ i = Id_F$), sowie dazu, dass zu q eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$ existiert (d.h. $q \circ R = Id_E$).

Einige klassische Probleme aus der Analysis lassen sich über das Zerfallen bestimmter solcher Sequenzen behandeln wie etwa die stetig lineare Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen (siehe bspw. [4],[9] und [13]) oder die Existenz stetig linearer Extensionsoperatoren auf glatten bzw. auf analytischen Funktionen ([5],[15],[20] etc.). Darüber hinaus spielt das Zerfallen kurzer exakter Sequenzen von Frécheträumen eine zentrale Rolle in verschiedenen Untersuchungen der Strukturtheorie lokalkonvexer Räume (z.B. in [1],[22] und [27]).

Vor diesem Hintergrund entstand eine umfangreiche abstrakte Theorie zu diesem Themengebiet, deren Entwicklung wir nun kurz umreißen wollen. Ende der 60er Jahre führte V. P. Palamodov in [13] und [14] einige homologische Methoden in die Theorie lokalkonvexer Räume ein. Mit Hilfe seiner Untersuchungen war bereits einfach einzusehen, dass unter (für viele Anwendungszwecke) realistischen Zusatzvoraussetzungen an Frécheträume E und F mittels eines geeigneten Fundamentalsystems aus lokalen Banachräumen F_n von F und den resultierenden kanonischen Abbildungen $f^n_{n+1} : F_{n+1} \to F_n$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(I) Zu jedem weiteren Fréchetraum G zerfällt jede kurze exakte Sequenz vom obigen Typ.

(II) Die Abbildung $\sigma : \prod_{n\in\mathbb{N}} L(E, F_n) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} L(E, F_n)\,,\ (u_n) \mapsto (u_n - f^n_{n+1} \circ u_{n+1})$ ist surjektiv.

Darüber hinaus stellte Palamodov in [13] eine hinreichende Bedingung für die Surjektivität von σ vor. Für ihre Herleitung verwendete er ein selbstkorrigierendes Verfahren sehr ähnlich zum Beweis des Satzes von Mittag-Leffler. Hierauf aufbauend entwickelte V. S. Retakh wenig später in [19] eine Charakterisierung der Surjektivität von σ.

Ende der 70er Jahre zeigte D. Vogt in [21] erstmals, dass die recht starken Aussagen (I) und (II) auch auf nicht-triviale Paare (E, F) zutreffen nämlich auf $F = s$, den Raum der schnell fallenden Folgen, zusammen mit jedem Fréchetraum E, welcher die topologische Invariante (DN) erfüllt. Anschließend wiesen M. J. Wagner und D. Vogt in [26] ein analoges Resultat für $E = s$ und jeden Fréchetraum F mit der Eigenschaft (Ω) nach. Mit [23] folgte, dass für jeden shift-stabilen Potenzreihenraum $E = \Lambda^1_r(\alpha)$ bzw. $F = \Lambda^\infty_t(\beta)$ die Aussagen (I) und (II) äquivalent sind zu $F \in (\Omega)$ falls $r = \infty$ sowie zu $F \in (\overline{\overline{\Omega}})$ falls $r = 0$ bzw. zu $E \in (DN)$ unabhängig von

$t \in \{0, \infty\}$. Zur Herleitung hiervon verwendete Vogt gemischte Bedingungen an E und F sehr ähnlich zu der von H. Apiola aus [1], welche sowohl Halbnormen von E als auch Dualnormen von F gegeneinander abschätzen. Für die sogenannten vier Standardfälle aus Fréchetträumen E und F, von denen einer nuklear oder einer ein Kötheraum ist, erzielte er eine für (I) und (II) hinreichende Bedingung (S_1^*) dieses Typs sowie eine notwendige, welche er mit (S_2^*) bezeichnete. In der oben beschriebenen Situation shift-stabiler Potenzreihenräume erwiesen sich diese schon als äquivalent. Fast zwanzig Jahre später zeigten dann L. Frerick und J. Wengenroth in [6], dass (S_2^*) in den vier Standardfällen ebenfalls hinreichend für (I) und (II) ist. Der damit für die vier Standardfälle entstandenen Charakterisierung von (I) und (II) durch (S_2^*) fügten P. Domański und M. Mastyło in [3] unlängst den fünften Fall hinzu, dass alle auftretenden Räume E,F und G Fréchet-Hilberträume sind.

Unter der Vorgabe, dass beide Räume $E = \Lambda_r^1(\alpha)$ und $F = \Lambda_t^\infty(\beta)$ Potenzreihenräume seien, von denen einer (wie die meisten Potenzreihenraum-Darstellungen von Beispielen aus der Analysis) shift-stabil ist, folgte aus [23] bereits, dass (I) und (II) äquivalent zu $r = \infty$ sind. Da für manche Anwendungsprobleme jedoch der entsprechende Fall $r = 0$ interessant ist sowie die Frage, ob zu bestimmten Sequenzen Inverse von gewisser Qualität existieren, wurde ab den 80er Jahren von verschiedenen Autoren wie K. Nyberg, M. Poppenberg und D. Vogt (bspw. [11],[16],[17] und [24]) ebenfalls das zahme bzw. linear zahme Zerfallen untersucht. Sie alle nutzten dazu implizit einen Zusammenhang zur Beschaffenheit des Bildes von σ, welchen wir in Satz 1.3.4 präzisieren werden. Mit Hilfe von [11] ließ sich schließlich nachvollziehen, dass alle nuklearen Potenzreihenräume $E = \Lambda_r^1(\alpha)$ und $F = \Lambda_t^\infty(\beta)$ mit den üblichen Gradierungen (die wir in Abschnitt 4.2 angeben) sowohl für $r = \infty$ als auch für $r = t = 0$ zahmes sowie linear zahmes Zerfallen garantieren.

Wir haben die historische Entwicklung ausführlich dargestellt, weil viele Ideen der eben genannten Autoren in die vorliegende Arbeit eingeflossen sind. Außerdem tragen diese Hintergründe wesentlich zum Verständnis des Aufbaus der nachfolgenden Beobachtungen bei. So stehen in Anlehnung daran im Zentrum unserer Ausführungen die Fragen, unter welchen Bedingungen an gradierte Fréchetträume E und F Unterräume des recht allgemeinen Typs $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\varphi(n)}, F_n)$ im Bild von σ enthalten sind und was dies für das Zerfallen kurzer exakter Sequenzen bedeutet. Hierbei sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beliebig und $\ddot{L}(E_{\varphi(n)}, F_n)$ bezeichne das Bild der kanonischen Einbettung von $L(E_{\varphi(n)}, F_n)$ in $L(E, F_n)$. Auf diese Weise werden wir neue Ergebnisse erzielen wie auch die verschiedenen Untersuchungen zum (linear) zahmen Zerfallen bzw. zum uneingeschränkten Zerfallen (I) mit einer gemeinsamen Theorie untermauern.

In Kapitel 1 beschreiben wir detailliert den Zusammenhang der Beschaffenheit des Bildes von σ mit der Existenz von bestimmten Links- bzw. Rechtsinversen sowie mit der Existenz gewisser Extensions und Liftings. Hierfür werden zu einer linearen Abbildung T zwischen gradierten Fréchetträumen die zugehörige Stetigkeitscharakteristik S_T und die Offenheitscharakteristik O_T eingeführt. Als ein Hauptresultat erhalten wir damit Theorem 1.3.3, welches besagt, dass unter ähnlichen Zusatzvoraussetzungen an gradierte Fréchetträume E und F, wie sie oben angedeutet wurden, für geeignete Funktionen $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(A) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ gradierter Fréchetträume mit $O_q \circ O_i \leq \phi$ gibt es zu i eine Linksinverse $L \in L(G, F)$ mit $S_L \leq \max(O_i\,,\, S_q \circ \psi)$ und zu q eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$ mit $S_R \leq \max(O_q\,,\, \psi \circ S_i)$.

(B) $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n) \;\subset\; \sigma\big(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n)\big)$.

Ein vergleichbares Ergebnis stellt des Weiteren Theorem 1.3.2 dar, welches auf die Abschätzung der Stetigkeitscharakteristiken von entsprechenden Inversen verzichtet.

In Kapitel 2 verallgemeinern wir unsere Betrachtungen auf die Untersuchung der Abbildung $\sigma_{\mathcal{X}} : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $(x_n) \mapsto (x_n - \varrho^n_{n+1} x_{n+1})$ für ein beliebiges projektives Spektrum $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ lokalkonvexer Räume. Genauer gesagt nehmen wir eine umfangreiche Analyse des Bildes von $\sigma_{\mathcal{X}}$ vor. Vergleichbar zum oben erwähnten Resultat von Retakh und Palamodov liefert Theorem 2.1.6 zu projektiven Spektren von (LB)-Räumen eine Charakterisierung dafür, dass ein gegebener Unterraum von $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ liegt. Weiter weisen wir eine notwendige sowie eine hinreichende Bedingung hierfür in den Theoremen 2.1.7 und 2.2.6 nach, welche mit Inklusionen beschränkter Banachkugeln arbeiten und daher besser zur Verwendung in Kapitel 4 geeignet sind. Theorem 2.2.6 beschreibt dabei eine etwas stärkere Eigenschaft nämlich, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ bestimmte beschränkte Mengen liftet, was in Abschnit 2.2 näher betrachtet wird.

Kapitel 3 ist im Bezug auf die bisher erklärten Zielsetzungen dieser Arbeit eher als Einschub anzusehen. Hier folgen wir in gewisser Weise einer Idee, welche Retakh in [18] ausnutzte, und untersuchen die Abbildung $\theta_{\mathcal{Z}} : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, $(z_n) \mapsto (z_n - \iota^{n-1}_n z_{n-1})$ zu einem induktiven Spektrum $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ lokalkonvexer Räume mittels des dualen projektiven Spektrums $\mathcal{Z}' := \big(Z'_n, (\iota^n_{n+1})'\big)$. Vergleichbare Analysen von $\theta_{\mathcal{Z}}$ haben sich als zentral für verschiedene Aspekte der Strukturtheorie erwiesen. Wir zeigen, dass sich die zuvor in Kapitel 2 entwickelten Kriterien, welche beschreiben, ob das Bild von $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ einen gegebenen Unterraum enthält bzw. ob $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ bestimmte beschränkte Mengen liftet, unmittelbar auf $\theta_{\mathcal{Z}}$ übertragen lassen. Insbesondere erhalten wir damit Bedingungen an induktive Spektren $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ metrisierbarer Räume dafür, dass $\theta_{\mathcal{Z}}$ bezüglich gewisser Topologien von recht allgemeinem Typ offen aufs Bild ist, ohne hierzu direkte Beweise ausführen zu müssen.

In Kapitel 4 entwickeln wir auswertbare Bedingungen an gradierte Fréchetträume E und F dafür, dass auf eine vorgegebene Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die folgende Aussage zutrifft:

(a) Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ gradierter Fréchetträume mit $O_q \circ O_i \leq \phi$ zerfällt.

Wir betrachten dazu die drei Standardfälle, dass E oder F ein Kötheraum ist oder dass alle relevanten Räume E, F und G Fréchet-Hilberträume sind. (Um diese simultan behandeln zu können, formulieren wir unsere Ergebnisse der Kürze halber über die Beschaffenheit des Bildes von σ und verweisen auf die Theoreme 1.3.2 und 1.3.3 für entsprechende Folgerungen bzgl. des Zerfallens kurzer exakter Sequenzen.) Wir zeigen zuerst, dass es keine echte Einschränkung bedeutet, zusätzlich zu fordern, dass alle Verbindungsabbildungen $e^n_{n+1} : E_{n+1} \to E_n$ injektiv seien. Unter diesen Vorgaben erzielen wir dann gemischte Bedingungen an E und F notwendig bzw. hinreichend für (a), vergleichbar zu den oben aufgeführten (S^*_1) bzw. (S^*_2) von Vogt. Für den Fall, dass $E = \Lambda^1_r(\alpha)$ oder $F = \Lambda^\infty_t(\beta)$ ein shift-stabiler Potenzreihenraum ist, erhalten wir anschließend analoge reine Bedingungen an den jeweiligen anderen Raum vom Typ (DN) bzw. (Ω). Auf diese Weise legen die Theoreme 4.2.6 und 4.2.10 dar, dass für jeden shift-stabilen Potenzreihenraum $E = \Lambda^1_\infty(\alpha)$ bzw. $F = \Lambda^\infty_\infty(\beta)$ gilt:

- Gibt es irgendeine monoton und unbeschränkt wachsende Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für welche (a) erfüllt ist, so folgt bereits das uneingeschränkte Zerfallen (I).

Mittels ähnlicher Erkenntnisse liefert Abschnitt 4.3 schließlich für die Situation, dass beide Räume $E = \Lambda^1_r(\alpha)$ und $F = \Lambda^\infty_t(\beta)$ Potenzreihenräume sind (welche nicht shift-stabil zu sein brauchen), eine vollständige Charakterisierung der monoton wachsenden Funktionen $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, auf welche (a) zutrifft. Darüber hinaus sind die meisten Resultate des Kapitels so formuliert, dass sie ebenfalls starke Abschätzungen der Stetigkeitscharakteristiken von entsprechenden Rechts- bzw. Linksinversen implizieren.

Grundsätzlich sei noch festgestellt, dass wir für unsere Ausführungen alle Bezeichnungen und Begriffe aus dem Lehrbuch [10] von R. Meise und D. Vogt übernehmen. Beispielsweise setzen wir einen lokalkonvexen Raum stets als separiert voraus, solange nicht ausdrücklich das Gegenteil formuliert wird. Für etwas ausführlichere Angaben zur Theorie von projektiven und induktiven Limiten verweisen wir auf den Leitfaden [8] von H. Jarchow. Es sei jedoch angemerkt, dass wir im Folgenden ausschließlich abzählbare Spektren $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ und $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ betrachten. Hierbei gehen wir für Spektren lokalkonvexer Räume immer davon aus, dass die verbindenden Abbildungen stetig sind.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. D. Vogt für die Betreuung dieser Arbeit bedanken sowie für die ausgezeichnete Vorbereitung auf das Themengebiet. Mein besonderer Dank gilt weiter Prof. Dr. L. Frerick, der gerade während seiner Zeit an der Universität in Wuppertal bei inhaltlichen Fragen immer ein offenes Ohr für mich hatte. Außerdem bin ich Prof. Dr. A. Duma zu großem Dank verpflichtet, da er meine Promotion im Rahmen meiner Anstellung an der FernUniversität Hagen äußerst wohlwollend begleitet hat. Darüber hinaus danke ich meiner Familie für ihre geduldige Unterstützung.

Kapitel 1

Kurze exakte Sequenzen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit kurzen exakten Sequenzen gradierter Frécheträume

$$0 \longrightarrow F \overset{i}{\longrightarrow} G \overset{q}{\longrightarrow} E \longrightarrow 0.$$

Wir untersuchen für diese, ob i eine Linksinverse $L \in L(G, F)$ besitzt (d.h. $L \circ i = Id_F$) bzw. ob q eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$ hat (d.h. $q \circ R = Id_E$) und im Existenzfall, welchen Stetigkeitscharakteristiken diese genügen. Darüber hinaus werden wir zeigen, dass sich die Fragen, wann es für einen weiteren gradierten Fréchetraum H und ein $T \in L(F, H)$ eine Extension $\tilde{T} \in L(G, H)$ gibt (d.h. $T = \tilde{T} \circ i$) bzw. wann zu einem $T \in L(H, E)$ ein Lifting $\tilde{T} \in L(H, G)$ existiert (d.h. $T = q \circ \tilde{T}$) und welchen Stetigkeitscharakteristiken diese gegebenenfalls angehören, auf die soeben beschriebenen Untersuchungen von passend konstruierten kurzen exakten Sequenzen zurückführen lassen.

Hauptziel unserer Ausführungen ist es, den engen Zusammenhang dieser Fragestellungen zur Beschaffenheit des Bildes der Abbildung σ herauszuarbeiten, welche stets definiert sei durch

$$\sigma \; : \; \prod_{n \in \mathbb{N}} L(E, F_n) \to \prod_{n \in \mathbb{N}} L(E, F_n) \; , \; (v_n) \mapsto (v_n - f_{n+1}^n \circ v_{n+1}).$$

Die erzielten Resultate sind dabei so formuliert, dass sie sowohl die Betrachtung einzelner, fester Sequenzen ermöglichen als auch die ganzer Klassen, welche durch bestimmte Charakteristiken (vgl. Theoreme 1.3.2 und 1.3.3) beschrieben werden.

Bei all dem verstehen wir unter einem **gradierten Fréchetraum** F einen echten Fréchetraum (d.h. F ist nicht normierbar) zusammen mit einem fest vorgegebenen Fundamentalsystem von Halbnormen $\left(\|.\|_n^F\right)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|.\|_1^F \leq C_2 \, \|.\|_2^F \leq C_3 \, \|.\|_3^F \leq ...$ für geeignete reelle Zahlen $C_2, C_3, \ldots$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ entstehen dadurch die lokalen Banachräume $(F_n, \|.\|_{F_n}) := (F/\mathrm{Ker}\|.\|_n^F, \|.\|_n^F)^\wedge$ sowie die kanonischen Abbildungen $f_{n+1}^n : F_{n+1} \to F_n$ und $f^n : F \to F_n$, wobei für jedes $x \in F$ gelte $\|f^n x\|_{F_n} = \|x\|_n^F$. Die zugehörigen abgeschlossenen Nullumgebungen auf F bzw. F_n seien durch $U_n^F := \{x \in F : \|x\|_n^F \leq 1\}$ und $U_{F_n} := \{x \in F_n : \|x\|_{F_n} \leq 1\}$ bezeichnet.
Speziell nennen wir F einen **gradierten Fréchet-Hilbertraum**, falls sein fest vorgegebenes Fundamentalsystem aus Hilbert-Halbnormen besteht.
Zu einer stetigen linearen Abbildung $T : E \to F$ zwischen zwei gradierten Frécheträumen definieren wir weiter die assoziierte **Stetigkeitscharakteristik** $S_T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$S_T(n) \; := \; \min\{\, k \in \mathbb{N} \, : \, \exists \, \varepsilon > 0 \;\text{ mit }\; T(\varepsilon \, U_k^E) \subset U_n^F \,\}.$$

Ist T offen auf ihr Bild, so sei außerdem die **Offenheitscharakteristik** $O_T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben

$$O_T(n) \; := \; \min\{\, k \in \mathbb{N} \, : \, \exists \, \varepsilon > 0 \;\text{ mit }\; \varepsilon \, U_k^F \cap \mathrm{Im}(T) \subset T(U_n^E) \,\}.$$

1.1 Linksinverse und Rechtsinverse

An dieser Stelle sei angemerkt, dass bei einer kurzen exakten Sequenz beliebiger Frécheträume

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$$

der mittlere Raum G bereits echt sein muss, falls es einer der anderen Räume ist. Sind E, F und G nunmehr gradierte Frécheträume (also insbesondere echt), so ist darüber hinaus leicht einzusehen, dass alle zu i und q gehörenden Charakteristiken monoton und unbeschränkt wachsen, was wir kurz als $S_i, O_i, S_q, O_q \nearrow \infty$ notieren.

Für eine wie oben bezeichnete kurze exakte Sequenz beliebiger Frécheträume ist außerdem wohlbekannt (siehe beispielsweise [10] Satz 10.3), dass es zu i genau dann eine stetige Linksinverse gibt, wenn q eine stetige Rechtsinverse hat bzw. äquivalent wenn $\mathrm{Im}(i)$ komplementiert in G ist. Die Existenz von solchen Inversen fasst man daher zu dem Begriff des **Zerfallens** der Sequenz zusammen. Unser erster Satz analysiert nun, welchen Schluss die übliche Vorgehensweise hierbei auf die jeweiligen Stetigkeitscharakteristiken im Fall gradierter Frécheträume zulässt.

Satz 1.1.1 *Es sei eine kurze exakte Sequenz gradierter Frécheträume vorgegeben*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0.$$

Besitzt nun q eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$, so existiert zu i eine Linksinverse $L \in L(G, F)$ mit $S_L \leq \max(O_i \, , \, S_q \circ S_R \circ O_i \,)$.
Hat andererseits i eine Linksinverse $L \in L(G, F)$, so gibt es zu q eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$ mit $S_R \leq \max(O_q \, , \, O_q \circ S_L \circ S_i \,)$.

Beweis: Gehen wir zuerst davon aus, dass q eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$ besitzt, so wird durch $P_{\mathrm{Im}(i)} := Id_G - R \circ q$ wegen $q \circ P_{\mathrm{Im}(i)} = 0$ und $P_{\mathrm{Im}(i)} \circ i = i$ eine stetige Projektion auf $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(q)$ definiert. Insbesondere können wir daher $P_{\mathrm{Im}(i)}$ als Abbildung

$$P_{\mathrm{Im}(i)} \; : \; G \;\longrightarrow\; \mathrm{Im}(i)$$

auffassen. Versehen wir hierbei $\mathrm{Im}(i)$ mit der von G induzierten Unterraum-Gradierung, so folgt $S_{P_{\mathrm{Im}(i)}} \leq \max(Id_{\mathbb{N}}, S_q \circ S_R)$. Außerdem erhalten wir damit für die Inverse von i

$$i^{-1} \; : \; \mathrm{Im}(i) \;\longrightarrow\; F$$

$S_{i^{-1}} = O_i$. Zusammengefasst ist nun leicht nachzuvollziehen, dass $L := i^{-1} \circ P_{\mathrm{Im}(i)}$ die gewünschten Bedingungen erfüllt.

Ist andererseits $L \in L(G, F)$ eine Linksinverse zu i, so sind $i \circ L$ und $P_{\mathrm{Kpl}} := Id_G - i \circ L$ stetige Projektionen auf $\mathrm{Im}(i)$ bzw. auf sein Komplement. Wegen $P_{\mathrm{Kpl}} \circ i = 0$ und somit $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(i) \subset \mathrm{Ker}(P_{\mathrm{Kpl}})$ induziert P_{Kpl} weiter eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\tilde{P}_{\mathrm{Kpl}} \; : \; G/\mathrm{Ker}(q) \;\longrightarrow\; G$$

mit $P_{\mathrm{Kpl}} = \tilde{P}_{\mathrm{Kpl}} \circ Q$ für die Quotientenabbildung $Q : G \to G/\mathrm{Ker}(q)$. Statten wir hierbei $G/\mathrm{Ker}(q)$ mit der von G induzierten Quotienten-Gradierung aus, so bekommt man unmittelbar $S_{\tilde{P}_{\mathrm{Kpl}}} = S_{P_{\mathrm{Kpl}}} \leq \max(Id_{\mathbb{N}}, S_L \circ S_i)$. Analog induziert q ein eindeutig bestimmtes bijektives

$$\tilde{q} \; : \; G/\mathrm{Ker}(q) \;\longrightarrow\; E$$

mit $q = \tilde{q} \circ Q$. Für die Inverse $\tilde{q}^{-1} : E \to G/\mathrm{Ker}(q)$ überprüft man nun leicht $S_{\tilde{q}^{-1}} = O_{\tilde{q}} = O_q$. Da aus $q \circ \tilde{P}_{\mathrm{Kpl}} \circ Q = q \circ P_{\mathrm{Kpl}} = q$ schon $q \circ \tilde{P}_{\mathrm{Kpl}} = \tilde{q}$ folgt, wird durch $R := \tilde{P}_{\mathrm{Kpl}} \circ \tilde{q}^{-1}$ schließlich eine Rechtsinverse mit den gesuchten Eigenschaften definiert. ■

Wir wollen jetzt den engen Zusammenhang zwischen der Beschaffenheit des Bildes von σ und dem Zerfallen kurzer exakter Sequenzen eines bestimmten Typs darlegen. Hierzu und für spätere Verwendungen treffen wir die Konvention, dass der projektive Limes F eines abzählbaren Systems aus Banachräumen $(\mathcal{F}_n, \|.\|_{\mathcal{F}_n})$, Verbindungsabbildungen $\xi^n_{n+1} : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ und kanonischen Abbildungen $\xi^n : F \to \mathcal{F}_n$ stets mit dem festen Fundamentalsystem von Halbnormen

$$\|x\|^F_n \ := \ \|\xi^n x\|_{\mathcal{F}_n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in F$ ausgestattet sei. Jeden lokalen Banachraum F_n können wir dann mit dem Abschluss des Bildes von ξ^n also einem abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{F}_n$ identifizieren. Damit folgt direkt $f^n = \xi^n$ und $\xi^n_{n+1}|_{F_{n+1}} = f^n_{n+1}$, wenn man von den sich unterscheidenden Wertebereichen absieht. Weiter lässt sich leicht nachvollziehen, dass ein gradierter Fréchetraum auf diese Weise identisch zum projektiven Limes seiner lokalen Banachräume ist. Darüber hinaus wird sich als nützlich erweisen, dass wir zu jedem weiteren gradierten Fréchetraum E definieren

$$\ddot{L}(E_k, \mathcal{F}_n) \ := \ \{\, T \in L(E, \mathcal{F}_n) \ : \ \exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ mit } \ T(\varepsilon\, U^E_k) \subset U_{\mathcal{F}_n} \,\}$$

mit $U_{\mathcal{F}_n} := \{x \in \mathcal{F}_n : \|x\|_{\mathcal{F}_n} \le 1\}$ und $n, k \in \mathbb{N}$. Die Bezeichnung wurde dabei so gewählt, da $\ddot{L}(E_k, \mathcal{F}_n)$ offenbar das Bild der injektiven Abbildung $L(E_k, \mathcal{F}_n) \hookrightarrow L(E, \mathcal{F}_n)$, $A \mapsto A \circ e^k$ ist.

Satz 1.1.2 *Seien E und F gradierte Fréchetträume. Sind weiter $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ und $v \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$, so existieren ein gradierter Fréchetraum G und eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ q\ } E \longrightarrow 0$$

mit $S_i, O_i \le Id_{\mathbb{N}}$ und $O_q \le \phi$, sodass es für ein vorgegebenes $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\psi \ge \phi$ genau dann eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$ zu q gibt mit $S_R \le \psi$, wenn $v \in \sigma\big(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n) \big)$ ist.

Beweis: Gehen wir also davon aus, dass ein $v = (v_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ vorgegeben sei. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ entsteht damit auf kanonische Weise das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{\ i_n\ } & F_n \oplus E_{\phi(n)} & \xrightarrow{\ q_n\ } & E_{\phi(n)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle f^n_{n+1}} & & \uparrow{\scriptstyle \xi^n_{n+1}} & & \uparrow{\scriptstyle e^{\phi(n)}_{\phi(n+1)}} & & \\
0 & \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{\ i_{n+1}\ } & F_{n+1} \oplus E_{\phi(n+1)} & \xrightarrow{\ q_{n+1}\ } & E_{\phi(n+1)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

mit exakten Zeilen, indem wir unter Verwendung der Matrixdarstellung definieren

$$\xi^n_{n+1} \ := \ \begin{pmatrix} f^n_{n+1} & \overline{v}_n \\ 0 & e^{\phi(n)}_{\phi(n+1)} \end{pmatrix}$$

mit $\overline{v}_n \in L(E_{\phi(n+1)}, F_n)$, sodass $\overline{v}_n \circ e^{\phi(n+1)} = v_n$. Weiter ist leicht einzusehen, dass der projektive Limes $G := \operatorname{Proj}\big(F_n \oplus E_{\phi(n)} \, , \, \xi^n_{n+1} \big)$ mit der soeben beschriebenen Gradierung zu einem echten Fréchetraum wird, da obige Konstruktion stetige Abbildungen induziert

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ q\ } E$$

mit $\operatorname{Ker}(i) = \{0\}$, $\operatorname{Im}(i) = \operatorname{Ker}(q)$ sowie $S_i, O_i \le Id_{\mathbb{N}}$. Zeigen wir nun, dass q surjektiv ist und dass gilt $O_q \le \phi$. Seien dazu $k \in \mathbb{N}$ und $y \in U^E_{\phi(k)}$, so finden wir zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $x_j \in F$ mit

$$f^n_j \big(v_j y - f^j x_j \big) \ \in \ \frac{1}{2^{j+1}}\, U_{F_n}$$

für alle $n \le j$, da das Bild von $f^j : F \to F_j$ dicht liegt. Mittels $x_0 := 0$ definieren wir jetzt

$$z_n \;:=\; \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} f^n x_j - \sum_{j=0}^{n-1} f^n x_j + \sum_{j=n}^{\infty} f_j^n (v_j y - f^j x_j) \\ e^{\phi(n)} y \end{pmatrix}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Denn hierfür lässt sich leicht nachprüfen $\xi_{n+1}^n z_{n+1} = z_n$ und $z_k \in U_{F_k} \times U_{E_{\phi(k)}}$. Somit ist bereits gezeigt $U_{\phi(k)}^E \subset q(U_k^G)$.

Abschließend bleibt nur noch festzustellen, dass q genau dann eine Rechtsinverse $R \in L(E,G)$ mit $S_R \le \psi$ besitzt, wenn es eine Folge von Abbildungen $(R_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n \oplus E_{\phi(n)})$ gibt, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $R_n = \xi_{n+1}^n \circ R_{n+1}$ und $q_n \circ R_n = e^{\phi(n)}$. Hierbei bedeutet die zweite Eigenschaft nämlich, dass ein $w_n \in \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n)$ existiert mit

$$R_n \;=\; \begin{pmatrix} w_n \\ e^{\phi(n)} \end{pmatrix},$$

wodurch die erste Bedingung zu $w_n = f_{n+1}^n \circ w_{n+1} + v_n$ äquivalent wird. ■

Ein ähnlicher Zusammenhang, wie er gerade beschrieben wurde, besteht zwischen der Beschaffenheit des Bildes von σ und der Existenz von bestimmten Linksinversen:

Satz 1.1.3 *Seien E und F gradierte Fréchetträume. Sind weiter $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ und $v \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$, so existieren ein gradierter Fréchetraum G und eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$$

mit $S_q, O_q \le Id_{\mathbb{N}}$ und $O_i \le \phi$, sodass es für ein vorgegebenes $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\psi \ge \phi$ genau dann eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ zu i gibt mit $S_L \le \psi$, wenn $v \in \sigma\big(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n)\big)$ ist.

Beweis: Nehmen wir also an, es sei ein $v = (v_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ vorgegeben. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ seien außerdem $\overline{v}_n \in L(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ mit $\overline{v}_n \circ e^{\phi(n+1)} = v_n$ und

$$\gamma(n) \;:=\; \max\{\, k \in \mathbb{N} \,:\, \phi(k) \le n \,\}.$$

Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi(k+1) > n$ ist dann unmittelbar nachzuvollziehen $\gamma(n) \le k$. Wir bekommen somit auf kanonische Weise das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_{\gamma(n)} & \xrightarrow{i_n} & F_{\gamma(n)} \oplus E_n & \xrightarrow{q_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\uparrow{\scriptstyle f_{\gamma(n+1)}^{\gamma(n)}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \xi_{n+1}^n} & & \Big\uparrow{\scriptstyle e_{n+1}^n} & & \\
0 & \longrightarrow & F_{\gamma(n+1)} & \xrightarrow{i_{n+1}} & F_{\gamma(n+1)} \oplus E_{n+1} & \xrightarrow{q_{n+1}} & E_{n+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

mit exakten Zeilen, wenn wir wieder unter Verwendung der Matrixdarstellung definieren

$$\xi_{n+1}^n \;:=\; \begin{pmatrix} f_{\gamma(n+1)}^{\gamma(n)} & \sum_{\{\,k\in\mathbb{N}\,:\,\phi(k+1)=n+1\,\}} f_k^{\gamma(n)} \circ \overline{v}_k \\ 0 & e_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

wobei eine Summe gleich 0 sei, falls die gegebene Indexmenge leer ist. Wie im Beweis zu Satz 1.1.2 kann man nun zeigen, dass dadurch für $G := \operatorname{Proj}\big(F_{\gamma(n)} \oplus E_n\,,\, \xi_{n+1}^n\big)$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$$

induziert wird mit $S_q, O_q \leq Id_{\mathbb{N}}$ sowie $O_i \leq \phi$, da für jedes $k \in \mathbb{N}$ offenbar gilt $\gamma \circ \phi(k) \geq k$. Auf sehr ähnliche Weise lässt sich darüber hinaus nachweisen, dass das Bild der Abbildung $\xi^n : G \to F_{\gamma(n)} \oplus E_n$ dicht liegt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Weiter stellen wir fest, dass i damit genau dann eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ mit $S_L \leq \psi$ besitzt, wenn es eine Folge $(L_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} L(F_{\gamma\circ\psi(n)} \oplus E_{\psi(n)}, F_n)$ gibt, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $L_n \circ \xi^{\psi(n)}_{\psi(n+1)} = f^n_{n+1} \circ L_{n+1}$ und $L_n \circ i_{\psi(n)} \circ f^{\gamma\circ\psi(n)} = f^n \circ L \circ i = f^n$. Hierbei bedeutet die zweite Eigenschaft, dass $L_n \circ i_{\psi(n)} = f^n_{\gamma\circ\psi(n)}$ ist, und somit dass ein $u_n \in L(E_{\psi(n)}, F_n)$ existiert mit

$$L_n \;=\; \begin{pmatrix} f^n_{\gamma\circ\psi(n)} & u_n \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich der entsprechenden Matrizen wird die erste Bedingung daher äquivalent zu

$$\sum\nolimits_{\{\, k\in\mathbb{N} \,:\, \psi(n)<\phi(k+1)\leq\psi(n+1)\,\}} f^n_k \circ \overline{v}_k \circ e^{\phi(k+1)}_{\psi(n+1)} \;+\; u_n \circ e^{\psi(n)}_{\psi(n+1)} \;=\; f^n_{n+1} \circ u_{n+1}.$$

Mittels der Fallunterscheidung, ob $\phi(n+1) \leq \psi(n)$ oder $\phi(n+1) > \psi(n)$ ist, lässt sich schließlich leicht nachvollziehen, dass dies genau dann zutrifft, wenn $w_n = (d_n - u_n) \circ e^{\psi(n)}$ mit

$$d_n \;:=\; \sum\nolimits_{\{\, k\geq n \,:\, \phi(k+1)\leq\psi(n)\,\}} f^n_k \circ \overline{v}_k \circ e^{\phi(k+1)}_{\psi(n)} \;\in\; L(E_{\psi(n)}, F_n)$$

wie gewünscht $w_n - f^n_{n+1} \circ w_{n+1} = v_n$ erfüllt. ■

Bei genauerer Betrachtung der beiden letzten Beweise ist außerdem leicht einzusehen:

Bemerkung 1.1.4 *Sind in den Voraussetzungen von Satz 1.1.2 bzw. Satz 1.1.3 alle gegebenen Räume sogar gradierte Fréchet-Hilberträume, so kann der entsprechende Raum G ebenfalls mit einer Fréchet-Hilbert-Gradierung ausgestattet werden, sodass die erzielte kurze exakte Sequenz alle beschriebenen Eigenschaften behält.*

Des Weiteren kann man für die in Satz 1.1.2 bzw. in Satz 1.1.3 konstruierte kurze exakte Sequenz auch die fehlende Stetigkeitscharakteristik abschätzen durch $S_q(n) \leq \min\{k \in \mathbb{N} : \phi(k) \geq n\}$ *bzw.* $S_i(n) \leq \max\{k \in \mathbb{N} : \phi(k) \leq n\}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen lässt sich umgekehrt auch die Frage, ob eine kurze exakte Sequenz zerfällt, auf die Untersuchung des Bildes von σ reduzieren. Gehen wir hierzu im Folgenden davon aus, es seien ein echter projektiver Limes von Banachräumen $F = \mathrm{Proj}_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ (Wir nennen einen solchen projektiven Limes von Banachräumen echt, falls er als Fréchetraum echt ist.) und eine feste kurze exakte Sequenz gradierter Fréchеträume

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\;i\;} G \xrightarrow{\;q\;} E \longrightarrow 0$$

vorgegeben. Die durch G induzierten Spur-Halbnormen $\|z\|^F_n := \|iz\|^G_n$ für $z \in F$ und Quotienten-Halbnormen $\|y\|^E_n := \inf\{\|x\|^G_n : x \in G \text{ mit } qx = y\}$ für $y \in E$ bilden dann äquivalente Gradierungen auf F bzw. E. Bezeichnen wir weiter die auf diese Weise entstehenden lokalen Banachräume mit $\tilde{F}_n$ bzw. $\tilde{E}_n$, so erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die kanonischen Abbildungen $\tilde{f}^n : F \to \tilde{F}_n$ bzw. $\tilde{e}^n : E \to \tilde{E}_n$ und $\tilde{f}^n_{n+1} : \tilde{F}_n \to \tilde{F}_{n+1}$ bzw. $\tilde{e}^n_{n+1} : \tilde{E}_n \to \tilde{E}_{n+1}$ sowie $\overline{f}^{\,n} : F_{S_i(n)} \to \tilde{F}_n$ und $\underline{f}^n : \tilde{F}_{O_i(n)} \to F_n \subset \mathcal{F}_n$ bzw. $\overline{e}^{\,n} : E_{O_q(n)} \to \tilde{E}_n$ und $\underline{e}^n : \tilde{E}_{S_q(n)} \to E_n$ als auch die kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow \tilde{F}_n \xrightarrow{\;i_n\;} G_n \xrightarrow{\;q_n\;} \tilde{E}_n \longrightarrow 0$.

Zusammengefasst entsteht also insbesondere das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F}_n & & & & \\
0 \arrow[r] & \tilde{F}_{O_i(n)} \arrow[ur, "\underline{f}^n"] \arrow[rr, "i_{O_i(n)}"] & & G_{O_i(n)} \arrow[rr, "q_{O_i(n)}"] & & \tilde{E}_{O_i(n)} \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathcal{F}_{n+1} \arrow[uu, "\xi^n_{n+1}"] & & E_{O_q \circ O_i(n)} \arrow[ur, "\overline{e}^{O_i(n)}"'] & & \\
0 \arrow[r] & \tilde{F}_{O_i(n+1)} \arrow[uu, "\tilde{f}^{O_i(n)}_{O_i(n+1)}"] \arrow[ur, "\underline{f}^{n+1}"] \arrow[rr, "i_{O_i(n+1)}"] & & G_{O_i(n+1)} \arrow[uu, "g^{O_i(n)}_{O_i(n+1)}"] \arrow[rr, "q_{O_i(n+1)}"] & & \tilde{E}_{O_i(n+1)} \arrow[uu, "\tilde{e}^{O_i(n)}_{O_i(n+1)}"'] \arrow[r] & 0 \\
 & & & & E_{O_q \circ O_i(n+1)} \arrow[uu, "e^{O_q \circ O_i(n)}_{O_q \circ O_i(n+1)}"] \arrow[ur, "\overline{e}^{O_i(n+1)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nehmen wir nun zusätzlich noch beispielsweise an, dass alle Banachräume $\mathcal{F}_n$ injektiv[1] sind oder dass alle G_n Hilberträume sind, dann bekommt man darüber hinaus für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu $\underline{f}^n$ eine Extension $l_n \in L(G_{O_i(n)}, \mathcal{F}_n)$, d.h. $l_n \circ i_{O_i(n)} = \underline{f}^n$. Für die Differenz

$$A_n := l_n \circ g^{O_i(n)}_{O_i(n+1)} - \xi^n_{n+1} \circ l_{n+1}$$

folgt jetzt leicht $A_n \circ i_{O_i(n+1)} = 0$ also $\mathrm{Ker}(q_{O_i(n+1)}) = \mathrm{Im}(i_{O_i(n+1)}) \subset \mathrm{Ker}(A_n)$. Es existiert daher ein eindeutig bestimmtes $\tilde{A}_n \in L(\tilde{E}_{O_i(n+1)}, \mathcal{F}_n)$ mit $\tilde{A}_n \circ q_{O_i(n+1)} = A_n$. Abschließend erhalten wir somit ein $\overline{l_n - l_{n+1}} \in \ddot{L}(E_{O_q \circ O_i(n+1)}, \mathcal{F}_n)$, indem wir setzen

$$\overline{l_n - l_{n+1}} \; := \; \tilde{A}_n \circ \overline{e}^{O_i(n+1)} \circ e^{O_q \circ O_i(n+1)}.$$

Mittels dieser Konstruktion und indem man die Abbildung σ in gewisser Weise erweitert zu

$$\hat{\sigma} \; : \prod_{n\in\mathbb{N}} L(E, \mathcal{F}_n) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} L(E, \mathcal{F}_n) \; , \; (v_n) \mapsto (v_n - \xi^n_{n+1} \circ v_{n+1}),$$

bekommen wir schließlich das folgende Ergebnis.

Satz 1.1.5 *Seien* $F = \mathrm{Proj}_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ *ein echter projektiver Limes von Banachräumen und*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\;i\;} G \xrightarrow{\;q\;} E \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz gradierter Fréchetträume, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ *zu* $\underline{f}^n$ *eine Extension* $l_n \in L(G_{O_i(n)}, \mathcal{F}_n)$ *existiert, d.h.* $l_n \circ i_{O_i(n)} = \underline{f}^n$.

Sind nun $L \in L(G, F)$ *eine Linksinverse zu* i *und* $R \in L(E, G)$ *eine Rechtsinverse zu* q, *so folgt*

$$\big(\, \overline{l_n - l_{n+1}} \,\big)_{n\in\mathbb{N}} \; \in \; \hat{\sigma}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{O_q \circ S_L(n)}, \mathcal{F}_n) \Big) \; \cap \; \hat{\sigma}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{S_R \circ O_i(n)}, \mathcal{F}_n) \Big).$$

Ist andererseits eine Funktion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gegeben mit* $\psi \geq O_q \circ O_i$ *und*

$$\big(\, \overline{l_n - l_{n+1}} \,\big)_{n\in\mathbb{N}} \; \in \; \hat{\sigma}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n) \Big),$$

so gibt es eine Linksinverse $L \in L(G, F)$ *zu* i *mit* $S_L \leq \max(\, O_i \,,\, S_q \circ \psi \,)$ *und eine Rechtsinverse* $R \in L(E, G)$ *zu* q *mit* $S_R \leq \max(\, O_q \,,\, \psi \circ S_i \,)$.

[1] Man nennt einen Banachraum Z injektiv, falls zu jedem weiteren Banachraum Y, jedem Unterraum $X \subset Y$ und jedem $T \in L(X, Z)$ eine Extension existiert, d.h. ein $\tilde{T} \in L(Y, Z)$ mit $\tilde{T}|_X = T$.

Beweis: Sei zuerst eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ zu i vorgegeben, so folgt direkt $L|_{\mathrm{Im}(i)} = i^{-1}$ und daher $S_L \geq S_{i^{-1}} = O_i$. Also entsteht für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{v}_n \in \ddot{L}(G_{S_L(n)}, \mathcal{F}_n)$ durch

$$\tilde{v}_n := l_n \circ g^{O_i(n)} - \xi^n \circ L.$$

Weil man hierfür leicht zeigt $\tilde{v}_n \circ i = 0$ und somit $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(i) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{v}_n)$, wird weiter durch

$$v_n \ : \ E = \mathrm{Im}(q) \to \mathcal{F}_n \ , \ qx \mapsto \tilde{v}_n x$$

ein $v_n \in \ddot{L}(\tilde{E}_{S_L(n)}, \mathcal{F}_n) \subset \ddot{L}(E_{O_q \circ S_L(n)}, \mathcal{F}_n)$ definiert mit $v_n \circ q = \tilde{v}_n$. Da nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\big(v_n - \xi^n_{n+1} \circ v_{n+1} \big) \circ q \ = \ l_n \circ g^{O_i(n)} - \xi^n_{n+1} \circ l_{n+1} \circ g^{O_i(n+1)} \ = \ \big(\overline{l_n - l_{n+1}} \big) \circ q,$$

erhalten wir für die Folge $v := (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bereits $\hat{\sigma}(v) = (\, \overline{l_n - l_{n+1}} \,)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ist weiter $R \in L(E,G)$ eine Rechtsinverse zu q, so können wir außerdem für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen

$$w_n := l_n \circ g^{O_i(n)} \circ R \ \in \ \ddot{L}(E_{S_R \circ O_i(n)}, \mathcal{F}_n).$$

Mit Hilfe unserer Konstruktion von $\overline{l_n - l_{n+1}}$ lässt sich nun leicht nachvollziehen

$$\big(\, \overline{l_n - l_{n+1}} \, - \, (w_n - \xi^n_{n+1} \circ w_{n+1}) \big) \circ q \ = \ A_n \circ \big(\, g^{O_i(n+1)} \, - \, g^{O_i(n+1)} \circ R \circ q \, \big) \ = \ 0,$$

da $q^{O_i(n+1)} \circ (g^{O_i(n+1)} - g^{O_i(n+1)} \circ R \circ q) = 0$ ist und wir oben bereits $\mathrm{Ker}(q_{O_i(n+1)}) \subset \mathrm{Ker}(A_n)$ gezeigt haben. Für $w := (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bekommen wir also ebenfalls $\hat{\sigma}(w) = (\, \overline{l_n - l_{n+1}} \,)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nehmen wir andererseits an, es sei ein $v = (v_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)$ mit $\hat{\sigma}(v) = (\, \overline{l_n - l_{n+1}} \,)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben, so definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $L_n \in \ddot{L}(G_{\max(\, O_i(n) \,,\, S_q \circ \psi(n) \,)}, \mathcal{F}_n)$ durch

$$L_n := l_n \circ g^{O_i(n)} - v_n \circ q.$$

Wegen $F = \mathrm{Proj}\, \mathcal{F}_n$ und da man leicht nachweist, dass wir damit für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben

$$L_n - \xi^n_{n+1} \circ L_{n+1} \ = \ \big(\, \overline{l_n - l_{n+1}} \, - \, (v_n - \xi^n_{n+1} \circ v_{n+1}) \big) \circ q \ = \ 0,$$

impliziert die Folge $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nun eine Abbildung $L \in L(G,F)$ mit $S_L \leq \max \big(O_i, S_q \circ \psi \big)$, welche $\xi^n \circ L \circ i = L_n \circ i = l_n \circ i_{O_i(n)} \circ \tilde{f}^{\,O_i(n)} = \xi^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit bereits $L \circ i = Id_F$ erfüllt.

Um ebenfalls eine entsprechende Rechtsinverse angeben zu können, stellen wir zuerst fest, dass wir nach Obigem jedes L_n auffassen können als $L_n \in L(G, F_n)$. Setzen wir damit für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$r_n := g^n \, - \, i_n \circ \overline{f}^{\,n} \circ L_{S_i(n)} \ \in \ L(G, G_n),$$

so erhält man mittels $\overline{f}^{\,n} \circ \underline{f}^{S_i(n)} = \tilde{f}^{\,n}_{O_i \circ S_i(n)}$ leicht $r_n \circ i = 0$ also $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(i) \subset \mathrm{Ker}(r_n)$. Aus diesem Grund lässt sich ein $R_n \in L(E, G_n)$ mit $R_n \circ q = r_n$ definieren durch

$$R_n \ : \ E = \mathrm{Im}(q) \to G_n \ , \ qx \mapsto r_n x.$$

Hierfür zeigen wir im Folgenden $R_n \in \ddot{L}(E_{\max(\, O_q(n) \,,\, \psi \circ S_i(n) \,)}, G_n)$. Wir wählen dazu ein $\delta_1 > 0$ mit $i_n \circ \overline{f}^{\,n} \big(\delta_1 U_{F_{S_i(n)}} \big) \subset \frac{1}{2} U_{G_n}$ und ein $\delta_2 > 0$ mit $g^n \big(\delta_2 U^G_{\max(\, n \,,\, O_i \circ S_i(n) \,)} \big) \subset \frac{1}{2} U_{G_n}$ sowie mit

$$l_{S_i(n)} \circ g^{O_i \circ S_i(n)} \big(\, \delta_2 U^G_{\max(\, n \,,\, O_i \circ S_i(n) \,)} \big) \ - \ v_{S_i(n)} \big(\, \delta_2 U^E_{\max(\, O_q(n) \,,\, \psi \circ S_i(n) \,)} \big) \ \subset \ \delta_1 U_{\mathcal{F}_{S_i(n)}}.$$

Wegen $\psi \geq O_q \circ O_i$ gibt es weiter ein $0 < \varepsilon < \delta_2$ mit $\varepsilon U^E_{\max(O_q(n),\,\psi\circ S_i(n))} \subset q\big(\delta_2 U^G_{\max(n,\,O_i\circ S_i(n))}\big)$. Für jedes $y \in \varepsilon\, U^E_{\max(O_q(n),\,\psi\circ S_i(n))}$ existiert jetzt ein $x \in \delta_2 U^G_{\max(n,\,O_i\circ S_i(n))}$ mit $qx = y$ also mit

$$R_n y \;=\; r_n x \;=\; g^n x \;-\; i_n \circ \overline{f}^{\,n}\big(l_{S_i(n)} \circ g^{O_i\circ S_i(n)} x - v_{S_i(n)} y\big) \;\in\; U_{G_n},$$

wenn man zusätzlich $U_{\mathcal{F}_{S_i(n)}} \cap F_{S_i(n)} = U_{F_{S_i(n)}}$ berücksichtigt.

Darüber hinaus lässt sich unter Verwendung von $\overline{f}^{\,n} \circ f^{S_i(n)}_{S_i(n+1)} = \tilde{f}^n_{n+1} \circ \overline{f}^{\,n+1}$ leicht nachvollziehen

$$\big(R_n - g^n_{n+1} R_{n+1}\big) \circ q \;=\; \sum_{k=S_i(n)}^{S_i(n+1)-1} i_n \circ \overline{f}^{\,n} \circ f_k^{S_i(n)} \circ \big(L_k - f^k_{k+1} \circ L_{k+1}\big) \;=\; 0$$

falls $S_i(n+1) > S_i(n)$ sowie $\overline{f}^{\,n} = \tilde{f}^n_{n+1} \circ \overline{f}^{\,n+1}$ und damit auch $(R_n - g^n_{n+1} R_{n+1}) \circ q = 0$ falls $S_i(n+1) = S_i(n)$. Wegen $G = \operatorname{Proj} G_n$ impliziert die Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daher bereits eine Abbildung $R \in L(E,G)$ mit $S_R \leq \max\big(O_q, \psi \circ S_i\big)$, welche $\tilde{e}^n \circ q \circ R \circ q = q_n \circ R_n \circ q = q_n \circ g^n = \tilde{e}^n \circ q$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit schließlich $q \circ R = Id_E$ erfüllt. ■

Nehmen wir mit Bezug auf den vor Satz 1.1.5 unternommenen Exkurs diesmal an, dass beispielsweise alle lokalen Banachräume E_m projektiv[2] oder wieder alle G_m Hilberträume sind, so erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu $\overline{e}^{\,n}$ ein Lifting $r_n \in L(E_{O_q(n)}, G_n)$, d.h. $q_n \circ r_n = \overline{e}^{\,n}$. Da hierbei gilt

$$q_{O_i(n)} \circ \big(\, r_{O_i(n)} \circ e^{O_q\circ O_i(n)}_{O_q\circ O_i(n+1)} - g^{O_i(n)}_{O_i(n+1)} \circ r_{O_i(n+1)} \,\big) = 0,$$

wird wegen $\operatorname{Ker}(q_{O_i(n)}) = \operatorname{Im}(i_{O_i(n)})$ ein $\overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}} \in \ddot{L}(E_{O_q\circ O_i(n+1)}, F_n)$ definiert durch

$$\overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}} \;:=\; \underline{f}^n \circ i^{-1}_{O_i(n)} \circ \big(\, r_{O_i(n)} \circ e^{O_q\circ O_i(n)}_{O_q\circ O_i(n+1)} - g^{O_i(n)}_{O_i(n+1)} \circ r_{O_i(n+1)} \,\big) \circ e^{O_q\circ O_i(n+1)}.$$

Unter Verwendung dieser Definition gelangen wir nunmehr zu:

Satz 1.1.6 *Es sei eine kurze exakte Sequenz gradierter Fréchetträume vorgegeben*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\;i\;} G \xrightarrow{\;q\;} E \longrightarrow 0,$$

sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu $\overline{e}^{\,n}$ ein Lifting $r_n \in L(E_{O_q(n)}, G_n)$ existiert, d.h. $q_n \circ r_n = \overline{e}^{\,n}$.

Sind nun $L \in L(G,F)$ eine Linksinverse zu i und $R \in L(E,G)$ eine Rechtsinverse zu q, so folgt

$$\big(\,\overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}}\,\big)_{n\in\mathbb{N}} \;\in\; \sigma\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{O_q\circ S_L(n)}, F_n)\Big) \;\cap\; \sigma\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{S_R\circ O_i(n)}, F_n)\Big).$$

Ist andererseits eine Funktion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben mit $\psi \geq O_q \circ O_i$ und

$$\big(\,\overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}}\,\big)_{n\in\mathbb{N}} \;\in\; \sigma\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n)\Big),$$

so gibt es eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ zu i mit $S_L \leq \max(\,O_i\,,\,S_q \circ \psi\,)$ und eine Rechtsinverse $R \in L(E,G)$ zu q mit $S_R \leq \max(\,O_q\,,\,\psi \circ S_i\,)$.

[2]Man nennt einen Banachraum X projektiv, falls zu jedem surjektiven $q \in L(Y,Z)$ zwischen Banachräumen und jedem $T \in L(X,Z)$ ein Lifting existiert, d.h. ein $\tilde{T} \in L(X,Y)$ mit $q \circ \tilde{T} = T$.

Beweis: Sei zuerst eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ zu i gegeben, so haben wir im Beweis von Satz 1.1.5 schon gesehen $S_L \geq O_i$. Weiter lässt sich damit für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $L_n \in L(G_{S_L(n)}, F_n)$ konstruieren mit $f^n \circ L = L_n \circ g^{S_L(n)}$. Weil man darüber hinaus für beliebige $m, k \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k$ bekommt $q_m \circ (r_m \circ e^{O_q(m)} - g^m_k \circ r_k \circ g^{O_q(k)}) = 0$ und $\mathrm{Ker}(q_m) = \mathrm{Im}(i_m)$ ist, entsteht durch

$$v_n \;:=\; L_n \circ r_{S_L(n)} \circ e^{O_q \circ S_L(n)} \;+\; \underline{f}^n \circ i^{-1}_{O_i(n)} \circ \big(\, r_{O_i(n)} \circ e^{O_q \circ O_i(n)} - g^{O_i(n)}_{S_L(n)} \circ r_{S_L(n)} \circ e^{O_q \circ S_L(n)} \,\big)$$

ein $v_n \in \ddot{L}(E_{O_q \circ S_L(n)}, F_n)$. Wegen $L_n \circ i_{S_L(n)} \circ \tilde{f}^{S_L(n)} = f^n = \underline{f}^n \circ i^{-1}_{O_i(n)} \circ g^{O_i(n)}_{S_L(n)} \circ i_{S_L(n)} \circ \tilde{f}^{S_L(n)}$ und $\underline{f}^n \circ i^{-1}_{O_i(n)} \circ g^{O_i(n)}_{O_i(n+1)} \circ i_{O_i(n+1)} = \underline{f}^n \circ \tilde{f}^{O_i(n)}_{O_i(n+1)} = f^n_{n+1} \circ \underline{f}^{n+1} \circ i^{-1}_{O_i(n+1)} \circ i_{O_i(n+1)}$ gilt außerdem

$$L_n\big|_{\mathrm{Im}(i_{S_L(n)})} = \underline{f}^n \circ i^{-1}_{O_i(n)} \circ g^{O_i(n)}_{S_L(n)} \quad \text{und} \quad \underline{f}^n \circ i^{-1}_{O_i(n)} \circ g^{O_i(n)}_{O_i(n+1)}\big|_{\mathrm{Im}(i_{O_i(n+1)})} = f^n_{n+1} \circ \underline{f}^{n+1} \circ i^{-1}_{O_i(n+1)}.$$

Fasst man alle diese Feststellungen zusammen, so ist für die Folge $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jetzt leicht nachzuvollziehen $\sigma(v) = (\,\overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}}\,)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist weiter $R \in L(E,G)$ eine Rechtsinverse zu q, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\varepsilon > 0$ mit $R(\varepsilon\, U^E_{S_R(n)}) \subset U^G_n$ und daher mit $\varepsilon\, U^E_{S_R(n)} \subset q(U^G_n)$, woraus $S_R(n) \geq O_q(n)$ folgt. Wir können wegen $q_{O_i(n)} \circ (r_{O_i(n)} \circ e^{O_q \circ O_i(n)} - g^{O_i(n)} \circ R) = 0$ also ein $w_n \in \ddot{L}(E_{S_R \circ O_i(n)}, F_n)$ definieren durch

$$w_n \;:=\; \underline{f}^n \circ i^{-1}_{O_i(n)} \circ \big(\, r_{O_i(n)} \circ e^{O_q \circ O_i(n)} - g^{O_i(n)} R \,\big).$$

Wie oben folgt für $w := (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun ebenfalls $\sigma(w) = (\,\overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}}\,)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist andererseits ein $v = (v_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n)$ gegeben mit $\sigma(v) = (\,\overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}}\,)_{n\in\mathbb{N}}$, so erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $R_n \in \ddot{L}(E_{\psi \circ S_i(n)}, G_{\nu(n)})$ mit $\nu(n) := \min\big(n, O_i \circ S_i(n)\big)$ durch

$$R_n \;:=\; g^{\nu(n)}_{O_i \circ S_i(n)} \circ r_{O_i \circ S_i(n)} \circ e^{O_q \circ O_i \circ S_i(n)} \;-\; g^{\nu(n)}_n \circ i_n \circ \overline{f}^{\,n} \circ v_{S_i(n)}.$$

Hierfür ist mit Hilfe von bereits im Beweis zu Satz 1.1.5 verwendeten Vertauschbarkeiten der Verbindungsabbildungen wie beispielsweise $\overline{f}^{\,n} \circ \underline{f}^{S_i(n)} = \tilde{f}^{\,n}_{O_i \circ S_i(n)}$ leicht nachzuvollziehen

$$R_n - g^{\nu(n)}_{\nu(n+1)} \circ R_{n+1} \;=\; \sum_{k=S_i(n)}^{S_i(n+1)-1} g^{\nu(n)}_n \circ i_n \circ \overline{f}^{\,n} \circ f^{S_i(n)}_k \circ \Big(\overline{r_{O_i(k)} - r_{O_i(k+1)}} - (v_k - f^k_{k+1} \circ v_{k+1})\Big) \;=\; 0$$

falls $S_i(n) < S_i(n+1)$ sowie unmittelbar $R_n = g^{\nu(n)}_{\nu(n+1)} \circ R_{n+1}$ falls $S_i(n) = S_i(n+1)$. Da algebraisch $G = \mathrm{Proj}\, G_{\nu(n)}$ gilt, impliziert die Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit eine Abbildung $R \in L(E,G)$, welche $\tilde{e}^{\,\nu(n)} \circ q \circ R = q_{\nu(n)} \circ g^{\nu(n)} \circ R = q_{\nu(n)} \circ R_n = \tilde{e}^{\,\nu(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ also $q \circ R = Id_E$ erfüllt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\nu(n) = n$ folgt aus obiger Konstruktion außerdem bereits $S_R(n) \leq \psi \circ S_i(n)$. Nehmen wir uns nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\nu(n) = O_i \circ S_i(n) < n$, so stellen wir zuerst fest, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U^G_n \supset i(\varepsilon\, U^F_{S_i(n)}) \supset (\varepsilon^2\, U^G_{\nu(n)}) \cap \mathrm{Im}(i)$ und dass $\tilde{f}^{\,\nu(n)}_n$ daher ein Isomorphismus ist. Wegen $q_{\nu(n)} \circ (R_n - g^{\nu(n)}_n \circ r_n \circ e^{O_q(n)}) = 0$ entsteht also ein $\tilde{R}_n \in \ddot{L}(E_{\max(\,O_q(n)\,,\,\psi\circ S_i(n)\,)}, G_n)$ durch

$$\tilde{R}_n \;:=\; r_n \circ e^{O_q(n)} \;+\; i_n \circ \big(\tilde{f}^{\,\nu(n)}_n\big)^{-1} \circ i^{-1}_{\nu(n)} \circ \big(R_n - g^{\nu(n)}_n \circ r_n \circ e^{O_q(n)}\big),$$

wofür man leicht zeigt $g^{\nu(n)}_n \circ (g^n \circ R - \tilde{R}_n) = 0$ und $q_n \circ (g^n \circ R - \tilde{R}_n) = 0$. Somit gilt

$$g^n \circ R \;=\; \tilde{R}_n,$$

da mit $\tilde{f}_n^{\nu(n)}$ auch $g_n^{\nu(n)}|_{\mathrm{Im}(i_n)}$ injektiv sein muss. Zusammengefasst ist damit schließlich ebenfalls $S_R \leq \max\big(O_q, \psi \circ S_i\big)$ nachgewiesen.

Um auch eine entsprechende Linksinverse konstruieren zu können, geben wir zuerst für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu $\tilde{f}_{\gamma(n)}^{O_i(n)}$ mit $\gamma(n) := \max\big(O_i(n), S_q \circ O_q \circ O_i(n)\big)$ eine Extension $l_n \in L(G_{\gamma(n)}, \tilde{F}_{O_i(n)})$, d.h. $l_n \circ i_{\gamma(n)} = \tilde{f}_{\gamma(n)}^{O_i(n)}$, an. Wegen $q_{O_i(n)} \circ \big(g_{\gamma(n)}^{O_i(n)} - r_{O_i(n)} \circ e_{\gamma(n)}^{O_q \circ O_i(n)} \circ q_{\gamma(n)}\big) = 0$ können wir dazu

$$l_n \;:=\; i_{O_i(n)}^{-1} \circ \big(\, g_{\gamma(n)}^{O_i(n)} - r_{O_i(n)} \circ e_{\gamma(n)}^{O_q \circ O_i(n)} \circ q_{\gamma(n)} \,\big)$$

definieren, für welches man die beschriebene Eigenschaft leicht nachprüft. Setzen wir weiter

$$L_n \;:=\; \underline{f}^n \circ l_n \circ g^{\gamma(n)} \;+\; v_n \circ q,$$

so impliziert die Folge $(L_n)_{\in \mathbb{N}}$ eine Abbildung $L \in L(G, F)$, da sich wie zu Anfang dieses Beweises

$$L_n - f_{n+1}^n \circ L_{n+1} \;=\; \big(\, (v_n - f_{n+1}^n \circ v_{n+1}) \;-\; (\, \overline{r_{O_i(n)} - r_{O_i(n+1)}}\,)\,\big) \circ q \;=\; 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen lässt. Diese erfüllt schließlich wie gewünscht $S_L \leq \max\big(O_i, S_q \circ \psi\big)$ sowie $f^n \circ L \circ i = L_n \circ i = \underline{f}^n \circ l_n \circ i_{\gamma(n)} \circ \tilde{f}^{\gamma(n)} = f^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit $L \circ i = Id_F$. ■

1.2 Extensions und Liftings

Wie in der Einleitung dieses Kapitels bereits angekündigt wollen wir nun zeigen, dass sich die Frage nach der Existenz und gegebenenfalls der Stetigkeitscharakteristik einer Extension zu einer entsprechenden Abbildung auf die Untersuchung des Zerfallens einer geeigneten kurzen exakten Sequenz zurückführen lässt. Wir nutzen dazu die gewöhnliche Konstruktion des Pushouts. Die Formulierung des Satzes ist hierbei insbesondere an die Verwendung für Theorem 1.3.2 und Theorem 1.3.3 angepasst.

Satz 1.2.1 *Es sei eine kurze exakte Sequenz gradierter Frécheträume vorgegeben*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\;I\;} Y \xrightarrow{\;Q\;} E \longrightarrow 0.$$

Sind nun F ein weiterer gradierter Fréchetraum, $T \in L(X, F)$ sowie $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mu \nearrow \infty$ und $O_I \circ S_T \leq \mu$, so gibt es einen gradierten Fréchetraum G und eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\;i\;} G \xrightarrow{\;q\;} E \longrightarrow 0,$$

welche $S_q = S_Q$, $O_q = O_Q$ und $O_i \leq \mu$ erfüllt, sodass für ein gegebenes $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\nu \geq \mu$ genau dann eine Extension $\tilde{T} \in L(Y, F)$ zu T existiert mit $S_{\tilde{T}} \leq \nu$, wenn i eine Linksinverse $L \in L(G, F)$ besitzt mit $S_L \leq \nu$.

Beweis: Wir geben zunächst ein festes Fundamentalsystem von Halbnormen auf $F \times Y$ vor, indem wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(z, y)^t \in F \times Y$ mittels $\gamma(n) := \max\{k \in \mathbb{N} : \mu(k) \leq n\}$ setzen

$$\|(z, y)^t\|_n^{F \times Y} \;:=\; \max\big(\, \|z\|_{\gamma(n)}^F \,,\; \|y\|_n^Y \,\big).$$

Nun definieren wir wie beim Pushout üblich $G := (F \times Y)/L$ mit dem abgeschlossenen Unterraum $L := \{(Tx, Ix)^t : x \in X\} = \{(T \circ I^{-1}y, y)^t : y \in \mathrm{Im}(I)\}$. Ausgestattet mit der entstehenden

Quotienten-Gradierung wird G offenbar zu einem echten Fréchetraum, denn wir erhalten mittels $iz := \big[(-z,0)^t\big]_G$, $q\big[(z,y)^t\big]_G := Qy$ und $Jy := \big[(0,y)^t\big]_G$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{q} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\uparrow{\scriptstyle T} & & \big\uparrow{\scriptstyle J} & & \big\uparrow{\scriptstyle Id_E} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{I} & Y & \xrightarrow{Q} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Hierfür bekommt man unmittelbar $S_q = S_Q$ und $O_q = O_Q$. Um darüber hinaus auch $O_i \leq \mu$ zu zeigen, geben wir uns ein $n \in \mathbb{N}$ vor und wählen ein $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ mit

$$T\big(\,I^{-1}\big(\,\varepsilon\, U^Y_{\mu(n)}\,\big)\,\big) \;\subset\; T\big(\,I^{-1}\big(\,\varepsilon\, U^Y_{O_I \circ S_T(n)}\,\big)\,\big) \;\subset\; \frac{1}{2}\, U^F_n .$$

Da für ein $z \in F$ genau dann $iz \in \varepsilon\, U^G_{\mu(n)}$ ist, wenn $(-z + Tx, Ix)^t \in \varepsilon\, U^F_{\gamma\circ\mu(n)} \times \varepsilon\, U^Y_{\mu(n)}$ für ein $x \in X$ gilt, folgt nämlich schon $i^{-1}\big(\varepsilon\, U^G_{\mu(n)}\big) = \varepsilon\, U^F_{\gamma\circ\mu(n)} + T\big(I^{-1}\big(\varepsilon\, U^Y_{\mu(n)}\big)\big) \subset \frac{1}{2}\, U^F_n + \frac{1}{2}\, U^F_n \subset U^F_n$.

Besitzt jetzt weiter T eine Extension $\tilde{T} \in L(Y,F)$ mit $S_{\tilde{T}} \leq \nu$, so ist leicht nachzuvollziehen, dass wir durch $L\big[(z,y)^t\big]_G := -z + \tilde{T}y$ eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ zu i definieren können mit $S_L \leq \nu$. Ist andererseits $L \in L(G,F)$ eine Linksinverse zu i mit $S_L \leq \nu$, so wird durch $\tilde{T} := L \circ J \in L(Y,F)$ eine Extension zu T gegeben mit $S_{\tilde{T}} \leq \nu$. ■

Analog zu Satz 1.2.1 behandelt der nächste Satz Existenz und mögliche Stetigkeitsharakteristik eines Liftings unter passenden Vorgaben. Diesmal findet der sogenannte Pullback Anwendung.

Satz 1.2.2 *Es sei eine kurze exakte Sequenz gradierter Fréchetäume vorgegeben*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{Q} Z \longrightarrow 0.$$

Sind nun E ein weiterer gradierter Fréchetraum, $T \in L(E,Z)$ sowie $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mu \nearrow \infty$ und $S_T \circ O_Q \leq \mu$, so gibt es einen gradierten Fréchetraum G und eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0,$$

welche $S_i = S_I$, $O_i = O_I$ und $O_q \leq \mu$ erfüllt, sodass für ein gegebenes $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\nu \geq \mu$ genau dann ein Lifting $\tilde{T} \in L(E,Y)$ zu T existiert mit $S_{\tilde{T}} \leq \nu$, wenn q eine Rechtsinverse $R \in L(E,G)$ besitzt mit $S_R \leq \nu$.

Beweis: Wir definieren wie beim Pullback üblich $G := \{(y,x)^t \in Y \times E : Qy = Tx\}$ und geben ein festes Fundamentalsystem von Halbnormen an, indem wir für $n \in \mathbb{N}$ und $(y,x)^t \in G$ setzen

$$\|(y,x)^t\|^G_n \;:=\; \max\big(\,\|y\|^Y_n\,,\;\|x\|^E_{\mu(n)}\,\big).$$

Damit wird G offenbar zu einem echten Fréchetraum, denn wir erhalten auf kanonische Weise mittels $iz := (Iz,0)^t$, $q(y,x)^t := x$ und $P(y,x)^t := y$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{I} & Y & \xrightarrow{Q} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\uparrow{\scriptstyle Id_F} & & \big\uparrow{\scriptstyle P} & & \big\uparrow{\scriptstyle T} & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{q} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Hierfür bekommen wir direkt $S_i = S_I$ und $O_i = O_I$. Um weiter auch $O_q \leq \mu$ nachzuweisen, geben wir uns ein $n \in \mathbb{N}$ vor und wählen ein $0 < \varepsilon < 1$ mit

$$T\big(\,\varepsilon\, U^E_{\mu(n)}\,\big) \;\subset\; T\big(\,\varepsilon\, U^E_{S_T \circ O_Q(n)}\,\big) \;\subset\; Q\big(\,U^Y_n\,\big).$$

Für jedes $x \in \varepsilon\, U^E_{\mu(n)}$ existiert somit ein $y \in U^Y_n$ mit $Qy = Tx$ also mit $(y,x)^t \in U^G_n$. Daher haben wir $\varepsilon\, U^E_{\mu(n)} \subset q(U^G_n)$.

Nehmen wir darüber hinaus an, T besitze ein Lifting $\tilde{T} \in L(E,Y)$ mit $S_{\tilde{T}} \leq \nu$, so ist leicht einzusehen, dass durch $Rx := (\tilde{T}x, x)^t$ für $x \in E$ eine Rechtsinverse $R \in L(E,G)$ zu q mit $S_R \leq \nu$ gegeben wird. Ist andererseits $R \in L(E,G)$ eine Rechtsinverse zu q mit $S_R \leq \nu$, so definiert $\tilde{T} := P \circ R \in L(E,Y)$ ein Lifting zu T mit $S_{\tilde{T}} \leq \nu$. ■

Mit Hilfe der gewöhnlichen Vorgehensweise bei Produkt- und Quotientenbildung von Fréchet-Hilberträumen ergibt eine einfache Analyse der beiden vorigen Beweise außerdem:

Bemerkung 1.2.3 *Die erste Aussage der Bemerkung 1.1.4 über Fréchet-Hilbert-Gradierungen lässt sich wörtlich auf die Sätze 1.2.1 und 1.2.2 erweitern.*

1.3 Das Zerfallen von Klassen kurzer exakter Sequenzen

Wir werden nun eine interessante Verbindung aufzeigen vom Zerfallen einer ganzen Klasse von kurzen exakten Sequenzen, welche durch eine gewisse Offenheitscharakteristik beschrieben wird, zu der Existenz von Extensions bzw. Liftings für entsprechende Klassen von Abbildungen und weiter zu der Frage, ob das Bild von σ bzw. von $\hat{\sigma}$ einen bestimmten Unterraum überdeckt.

Wir benötigen dazu jedoch noch den nachfolgenden Satz. Um diesen übersichtlicher formulieren zu können, fassen wir unter den entsprechenden Vorgaben $L(E,F_n)$ in kanonischer Weise als Unterraum von $L(E,\mathcal{F}_n)$ auf.

Satz 1.3.1 *Seien E ein gradierter Fréchetraum und $F = \mathrm{Proj}_{n\in\mathbb{N}}\,(\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ ein projektiver Limes von Banachräumen. Für jede Funktion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt dann*

$$\hat{\sigma}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\Big) \;\cap\; \prod_{n\in\mathbb{N}} L(E,F_n) \;\subset\; \sigma\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n)\Big).$$

Beweis: Sei also $w = (w_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)$ mit $\hat{\sigma}(w) = (v_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} L(E,F_n)$ gegeben, so zeigen wir, dass bereits $w \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n)$ sein muss. Nehmen wir uns dazu ein $y \in E$, dann finden wir für jedes $j \in \mathbb{N}$ wegen des dichten Bildes von $f^j : F \to F_j$ ein $x_j \in F$ mit

$$f^n_j\big(\, v_j y - f^j x_j \,\big) \;\in\; \frac{1}{2^{j+1}}\, U_{F_n}$$

für alle $n \leq j$. Mittels $x_0 := 0$ definieren wir damit nun für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$z_n \;:=\; w_n y + \sum_{j=0}^{n-1} f^n x_j \;-\; \sum_{j=n}^{\infty} f^n_j(v_j y - f^j x_j).$$

Hierfür zeigt man nämlich leicht $z_n = \xi^n_{n+1} z_{n+1}$. Also folgt bereits $z_n \in f^n(F)$ und somit ebenfalls $w_n y = z_n - \sum_{j=0}^{n-1} f^n x_j + \sum_{j=n}^{\infty} f^n_j(v_j y - f^j x_j) \in F_n$. ■

Fasst man nun die bisherigen Resultate diese Kapitels geeignet zusammen, so ergibt sich:

Theorem 1.3.2 *Seien E und F gradierte Fréchetträume. Betrachten wir nun für ein gegebenes $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ die folgenden Aussagen:*

(a) *Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ gradierter Fréchetträume mit $O_q \circ O_i \leq \phi$ zerfällt.*

(b) *Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ gradierter Fréchetträume und jedem $T \in L(X, F)$ mit $O_Q \circ O_I \circ S_T \leq \phi$ existiert eine Extension $\tilde{T} \in L(Y, F)$.*

(c) *Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{Q} Z \longrightarrow 0$ gradierter Fréchetträume und jedem $T \in L(E, Z)$ mit $S_T \circ O_Q \circ O_I \leq \phi$ existiert ein Lifting $\tilde{T} \in L(E, Y)$.*

(d) *Der Unterraum $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ist ganz im Bild von σ enthalten.*

Dann gelten die Implikationen $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d)$.

Sind zusätzlich mittels der gegebenen Gradierungen von E und F alle lokalen Banachräume E_n projektiv oder alle lokalen Banachräume F_n injektiv oder ersetzt man im gesamten Wortlaut „Fréchetträume“ durch „Fréchet-Hilberträume“, so sind die Aussagen (a) bis (d) äquivalent.

Ist unter unseren Ausgangsvoraussetzungen insbesondere $F = \mathrm{Proj}_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ ein echter projektiver Limes von Banachräumen, so erhalten wir außerdem $(e) \Rightarrow (d)$ für:

(e) *Der Unterraum $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n)$ ist ganz im Bild von $\hat{\sigma}$ enthalten.*

Sind zusätzlich alle $\mathcal{F}_n$ injektiv, so impliziert (e) alle anderen Aussagen (a) bis (d).

Beweis: Wir stellen zuerst fest, dass die Implikationen $(b) \Rightarrow (a) \Leftarrow (c)$ unmittelbar folgen und dass man leicht $(a) \Rightarrow (d)$ mit Satz 1.1.2 oder Satz 1.1.3 und $(e) \Rightarrow (d)$ mit Satz 1.3.1 zeigt.

Um auch $(a) \Rightarrow (b)$ einzusehen, geben wir eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ gradierter Fréchetträume vor sowie $T \in L(X, F)$ mit $O_Q \circ O_I \circ S_T \leq \phi$ und definieren $\mu_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\mu_0(n) \; := \; \max\{\, k \in \mathbb{N} \,:\, O_Q(k) \leq \phi(n) \,\}.$$

Da man hierfür offenbar $\mu_0 \nearrow \infty$ und $O_I \circ S_T \leq \mu_0$ sowie $O_Q \circ \mu_0 \leq \phi$ erhält, lässt sich damit unter Verwendung von Satz 1.2.1 aus (a) leicht folgern, dass T eine Extension $\tilde{T} \in L(Y, F)$ besitzt.

Eine sehr ähnlichen Vorgehensweise führt ebenfalls zu $(a) \Rightarrow (c)$. Seien dazu eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{Q} Z \longrightarrow 0$ gradierter Fréchetträume und ein $T \in L(E, Z)$ mit $S_T \circ O_Q \circ O_I \leq \phi$ vorgegeben, so definieren wir $\mu_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\mu_1(n) \; := \; \min\{\, \phi(k) \,:\, k \in \mathbb{N} \text{ mit } O_I(k) \geq n \,\}.$$

Weil wir damit $\mu_1 \nearrow \infty$ und $S_T \circ O_Q \leq \mu_1$ sowie $\mu_1 \circ O_I \leq \phi$ bekommen, kann man diesmal unter Verwendung von Satz 1.2.2 mittels (a) zeigen, dass T ein Lifting $\tilde{T} \in L(E, Y)$ besitzt.

Mit Hilfe der Bemerkungen 1.2.3 und 1.1.4 lässt sich außerdem leicht prüfen, dass alle bisher nachgewiesenen Implikationen wahr bleiben, wenn man im gesamten Wortlaut des Satzes „Fréchetträume“ durch „Fréchet-Hilberträume“ ersetzt.

Abschließend bleibt noch zu bemerken, dass unter jeder der betrachteten Zusatzvoraussetzungen gemäß der Sätze 1.1.5 und 1.1.6 mit ihren Einleitungen $(d) \Rightarrow (a)$ bzw. $(e) \Rightarrow (a)$ gilt. ■

Offenbar ist damit für echte Frécheträume E und F bereits ebenfalls die wohlbekannte Tatsache (vgl. bspw. [30] Prop. 5.1.5) gezeigt, dass σ surjektiv (in der Homologischen Algebra kurz $\mathrm{Proj}^1 L(E, F_n) = 0$) sein muss, wenn jede kurze exakte Sequenz $0 \to F \to G \to E \to 0$ aus Frécheträumen zerfällt (kurz $\mathrm{Ext}^1(E, F) = 0$). Genauso folgt zudem die Äquivalenz der beiden Eigenschaften, falls E oder F eine Gradierung zulässt, sodass alle enstehenden lokalen Banachräume projektiv bzw. injektiv sind, oder falls man ausschließlich Fréchet-Hilberträume betrachtet.

Analog zu Theorem 1.3.2 ergeben sich außerdem folgende Zusammenhänge, wenn wir zusätzlich die Stetigkeitscharakteristiken der entsprechenden Inversen, Extensions und Liftings betrachten.

Theorem 1.3.3 *Seien E und F gradierte Frécheträume. Betrachten wir nun für $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi, \psi \nearrow \infty$ und $\phi \le \psi$ die folgenden Aussagen:*

(a) *Für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ gradierter Frécheträume mit $O_q \circ O_i \le \phi$ besitzt i eine Linksinverse $L \in L(G, F)$ mit $S_L \le \max(\, O_i \,,\, S_q \circ \psi \,)$.*

(b) *Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ gradierter Frécheträume und jedem $T \in L(X, F)$ mit $O_Q \circ O_I \circ S_T \le \phi$ existiert eine Extension $\tilde{T} \in L(Y, F)$ mit $S_{\tilde{T}} \le \max(\, O_I \circ S_T \,,\, S_Q \circ \psi \,)$.*

(c) $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n) \;\subset\; \sigma\big(\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, F_n) \big)$.

(d) *Für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ gradierter Frécheträume mit $O_q \circ O_i \le \phi$ besitzt q eine Rechtsinverse $R \in L(E, G)$ mit $S_R \le \max(\, O_q \,,\, \psi \circ S_i \,)$.*

(e) *Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{Q} Z \longrightarrow 0$ gradierter Frécheträume und jedem $T \in L(E, Z)$ mit $S_T \circ O_Q \circ O_I \le \phi$ existiert ein Lifting $\tilde{T} \in L(E, Y)$ mit $S_{\tilde{T}} \le \max(\, S_T \circ O_Q \,,\, \psi \circ S_I \,)$.*

Dann gelten die Implikationen $\quad (a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftarrow (d) \Leftrightarrow (e)$.

Sind zusätzlich mittels der gegebenen Gradierungen von E und F alle lokalen Banachräume E_n projektiv oder alle lokalen Banachräume F_n injektiv oder ersetzt man im gesamten Wortlaut „Frécheträume“ durch „Fréchet-Hilberträume“, so sind die Aussagen (a) bis (e) äquivalent.

Ist unter unseren Ausgangsvoraussetzungen insbesondere $F = \mathrm{Proj}_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ ein echter projektiver Limes von Banachräumen, so erhalten wir außerdem $\quad (f) \Rightarrow (c) \quad$ *für:*

(f) $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \;\subset\; \hat{\sigma}\big(\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n) \big)$.

Sind zusätzlich alle $\mathcal{F}_n$ injektiv, so impliziert (f) alle anderen Aussagen (a) bis (e).

Beweis: Wir werden die Nachweise der einzelnen Implikationen nicht im Detail ausarbeiten, da sie analog zu entsprechenden Teilen des Beweises von Theorem 1.3.2 zu führen sind. Lediglich zwei Schritte benötigen nähere Erläuterungen:

So weisen wir darauf hin, dass sich die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ wie $(a) \Rightarrow (b)$ aus Theorem 1.3.2 zeigen lässt, wobei man Satz 1.2.1 jedoch nicht auf das oben definierte μ_0 sondern auf

$$\mu \;:=\; \max\big(\, O_I \circ S_T \,,\, \min(\, \mu_0 \,,\, S_Q \circ \psi \,) \big)$$

sowie zusätzlich auf $\nu := \max(\, O_I \circ S_T \,,\, S_Q \circ \psi \,)$ anwendet.

Genauso lässt sich $(d) \Rightarrow (e)$ analog zu $(a) \Rightarrow (c)$ aus Theorem 1.3.2 verifizieren, indem man

$$\mu \ := \ \max\big(\, S_T \circ O_Q \,,\, \min(\, \mu_1 \,,\, \psi \circ S_I \,)\,\big)$$

und $\nu := \max(\, S_T \circ O_Q \,,\, \psi \circ S_I \,)$ benutzt. ■

Es sei noch angemerkt, dass man beim ersten Blick auf Theorem 1.3.3 fälschlicher Weise vermuten könnte, die Aussagen (a) und (d) wären auch ohne die zusätzlichen Voraussetzungen mittels Satz 1.1.1 äquivalent. Die Verwendung von Satz 1.1.1 führt jedoch nicht zu geeigneten Stetigkeitscharakteristiken der gesuchten Inversen.

Abschließend wollen wir kurz auf den Zusammenhang dieses Kapitels zum **zahmen** bzw. **linear zahmen Zerfallen**, wie es beispielsweise in [11],[16],[17] und [24] untersucht wurde, eingehen. Wir werden dabei beide Zerfallenstypen simultan betrachten. Zu einem gegebenen $a \in \mathbb{N}$ sei daher $\phi_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entweder definiert durch $\phi_a(n) := n + a$ oder anderenfalls durch $\phi_a(n) := a \cdot n$.

Satz 1.3.4 *Seien E und F gradierte Frécheträume. Sind zusätzlich alle lokalen Banachräume E_n projektiv oder alle lokalen Banachräume F_n injektiv oder betrachtet man im gesamten Satz ausschließlich gradierte Fréchet-Hilberträume, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ q\ } E \longrightarrow 0$ gradierter Frécheträume mit $S_i, O_i, S_q, O_q \le \phi_a$ für ein $a \in \mathbb{N}$ besitzt i eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ mit $S_L \le \phi_b$ und hat q eine Rechtsinverse $R \in L(E,G)$ mit $S_R \le \phi_b$ für ein $b \in \mathbb{N}$.*

(b) *Für jedes $a \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi_a(n+1)}, F_n) \ \subset \ \bigcup_{b\in\mathbb{N}} \sigma\big(\, \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi_b(n)}, F_n)\,\big)$.*

(c) *Zu jedem $a \in \mathbb{N}$ existiert ein $b \in \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi_a(n+1)}, F_n) \ \subset \ \sigma\big(\, \prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi_b(n)}, F_n)\,\big)$.*

(d) *Zu jedem $a \in \mathbb{N}$ existiert ein $b \in \mathbb{N}$, sodass es für jede kurze exakte Sequenz gradierter Frécheträume $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ q\ } E \longrightarrow 0$ mit $S_i, O_i, S_q, O_q \le \phi_a$ zu i eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ und zu q eine Rechtsinverse $R \in L(E,G)$ gibt mit $S_L, S_R \le \phi_b$.*

Beweis: Die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ folgt leicht aus Satz 1.1.2 zusammen mit Bemerkung 1.1.4. Eine einfache Anwendung des Faktorisierungssatzes von Grothendieck liefert weiter $(b) \Rightarrow (c)$. Ergänzend führt Theorem 1.3.3 schließlich zu $(c) \Rightarrow (d)$. ■

Wie mit Hilfe der im Beweis angegebenen Resultate ebenfalls leicht einzusehen ist, ließe sich die Liste äquivalenter Aussagen in Satz 1.3.4 noch um entsprechende Aussagen über die Existenz (linear) zahmer Extensions und Liftings erweitern.

Kapitel 2

Projektive Spektren

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit abzählbaren projektiven Spektren $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ lokalkonvexer Räume. Wir untersuchen für diese das Bild der Abbildung

$$\sigma_{\mathcal{X}} : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \ , \ (x_n) \mapsto (x_n - \varrho^n_{n+1} x_{n+1}),$$

welches relevant für einige Anwendungen in der Analysis ist. Insbesondere werden wir die hierbei erzielten Resultate in Kapitel 4 verwenden, um das Zerfallen kurzer exakter Sequenzen von Fréchetträumen zu analysieren.

Die Surjektivität von $\sigma_{\mathcal{X}}$ sowie die Frage, ob $\sigma_{\mathcal{X}}$ beschränkte Mengen liftet, wurden bereits in einigen Arbeiten (wie [2],[6],[14] und [30]) charakterisiert. Wir werden nun untersuchen, wann ein gegebener Unterraum von $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ liegt bzw. wann $\sigma_{\mathcal{X}}$ bestimmte beschränkte Mengen liftet. Außerdem betrachten wir, welche Gestalt entsprechende Urbilder besitzen.

Um die in diesem Kapitel vorgestellten Bedingungen und Beweise möglichst übersichtlich zu gestalten, werden wir im Folgenden oftmals die kanonischen Abbildungen ϱ^n_m nicht ausschreiben. Für den Fall, dass in einer Aussage Objekte aus verschiedenen Stufen des projektiven Spektrums $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ miteinander oder mit Objekten aus dem projektiven Limes Proj$\mathcal{X}$ in Beziehung gesetzt werden, treffen wir daher die **Konvention**, dass wir diese Beziehung in der Stufe mit größtem Index auffassen, in die alle relevanten Objekte auf kanonische Weise abgebildet werden können. Sind beispielsweise natürliche Zahlen $n \leq m$ sowie Teilmengen $N \subset X_n$, $M \subset X_m$ und $K \subset$ Proj$\mathcal{X}$ gegeben, so schreiben wir kurz $M \subset N + K$ und meinen damit ausführlich geschrieben $\varrho^n_m(M) \subset N + \varrho^n(K)$.

2.1 Unterräume im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$

Untersuchen wir jetzt zuerst, wann ein gegebener Unterraum von $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ enthalten ist. Eine rekursive Anwendung des Satzes von Baire liefert schon für projektive Spektren linearer Räume ohne topologische Strukturen, also für Folgen linearer Räume zusammen mit linearen Verbindungsabbildungen, folgende notwendige Bedingung.

Satz 2.1.1 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum linearer Räume und sei eine Folge von Unterräumen $Y_n \subset X_n$ gegeben. Liegt nun $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ und ist jedes X_n die abzählbare Vereinigung absolutkonvexer Mengen $A_{N,n}$, so existiert eine Folge $(N_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\ k > m$$
$$Y_m \ \subset\ \bigcap_{j\leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_{N_j,j}) \ +\ X_k.$$

Beweis: Gehen wir also davon aus, dass $\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ liegt und wir daher haben

$$\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} A_{N,1} \times \prod_{j\geq 2} X_j\Big) \;=\; \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{X}}\Big(A_{N,1} \times \prod_{j\geq 2} X_j\Big)$$

Versehen wir nun jedes Y_j mit der diskreten Topologie, so ist $\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ mit der dadurch entstehenden Produkttopologie offenbar ein vollständiger metrisierbarer Raum und nach dem Satz von Baire damit von 2. Kategorie in sich. Da die abzählbare Vereinigung magerer Mengen ebenfalls mager wäre, muss es somit ein $N_1 \in \mathbb{N}$ geben, sodass für

$$M_1 \;:=\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(A_{N_1,1} \times \prod_{j\geq 2} X_j\Big) \;=\; \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{X}}\Big(A_{N_1,1} \times A_{N,2} \times \prod_{j\geq 3} X_j\Big)$$

schon die Teilmenge $M_1 \cap \prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ von 2. Kategorie in $\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ ist. Aufgrund derselben Argumentation existiert weiter auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass für

$$M_2 \;:=\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(A_{N_1,1} \times A_{N_2,2} \times \prod_{j\geq 3} X_j\Big)$$

die Teilmenge $M_2 \cap \prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ von 2. Kategorie in $\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ ist. Rekursiv fortfahrend kann man also eine Folge $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruieren, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und

$$M_n \;:=\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\leq n} A_{N_j,j} \times \prod_{j>n} X_j\Big)$$

der Abschluss $\mathcal{M}_n := \overline{M_n \cap \prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j}$ einen inneren Punkt in $\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ hat. Da $\mathcal{M}_n$ absolutkonvex ist und die Addition auf $\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ stetig ist, lässt sich jetzt nachvollziehen, dass auch 0 im Inneren von $\mathcal{M}_n$ liegt. Denn sei U eine Umgebung von x mit $U \subset \mathcal{M}_n$, so gibt es eine Nullumgebung V mit $x + V \subset U$ und daher mit $\frac{1}{2}V \subset -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}U \subset \mathcal{M}_n$. Somit existiert ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ mit

$$\prod_{j<\tilde{m}} \{0\} \times \prod_{j\geq\tilde{m}} Y_j \;\subset\; \overline{M_n \cap \prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j} \;\subset\; \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big(M_n \;+\; \prod_{j\leq k} \{0\} \times \prod_{j>k} Y_j\Big).$$

Damit folgt die Behauptung schließlich unmittelbar aus dem nachfolgenden Lemma 2.1.2. ■

Die besondere Gestalt der Abbildung $\sigma_{\mathcal{X}}$ zeigt sich in unserem ersten Lemma, auf welches wir auch später noch einige Male zurückgreifen werden.

Lemma 2.1.2 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum linearer Räume und sei eine Folge von Unterräumen $Y_n \subset X_n$ gegeben. Betrachten wir nun für eine Folge absolutkonvexer Mengen $A_n \subset X_n$ und natürliche Zahlen $n \leq \tilde{m} < k$ die folgenden Aussagen:*

(a) $$\prod_{j<\tilde{m}} \{0\} \times \prod_{j\geq\tilde{m}} Y_j \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j\Big).$$

(b) $$Y_m \;\subset\; \bigcap_{j\leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_j) \;+\; \operatorname{Proj}\mathcal{X} \qquad \textit{für jedes } m \geq \tilde{m}.$$

(c) *Zu jedem $m \geq \tilde{m}$ existiert ein $\lambda > k$ mit*

$$Y_m \;\subset\; \bigcap_{j\leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_j) \;+\; \operatorname{Proj}\mathcal{X} \;+\; Y_\lambda.$$

(d) $$\prod_{j<\tilde{m}} \{0\} \times \prod_{j\geq\tilde{m}} Y_j \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j\Big) \;+\; \prod_{j\leq k} \{0\} \times \prod_{j>k} Y_j.$$

(e) $$Y_m \;\subset\; \bigcap_{j\leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_j) \;+\; X_k \qquad \textit{für jedes } m \geq \tilde{m}.$$

Dann gelten die Implikationen $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$.

Beweis: Um $(a) \Rightarrow (b)$ zu zeigen, geben wir uns ein beliebiges $m \geq \tilde{m}$ sowie ein $y_m \in Y_m$ vor. Nach (a) existiert nun ein $x = (x_j) \in \prod_{j \leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j$ mit

$$(0, ..., 0, y_m, 0, ...) \;=\; \sigma_{\mathcal{X}}(x).$$

Durch Koordinatenvergleich folgt schon $y_m = x_m - x_{m+1}$ und $x_j = x_{j+1}$ für $j \neq m$ und somit

$$Y_m \;\subset\; \bigcap_{j \leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(A_j) \;+\; \operatorname{Proj} \mathcal{X}.$$

Gehen wir nun davon aus, dass (c) gilt, und es daher zu jedem $\tilde{m} \leq m \leq k$ ein $\lambda_m > k$ gibt mit

$$Y_m \;\subset\; \frac{1}{2^m} \cdot \bigcap_{j \leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(A_j) \;+\; \operatorname{Proj} \mathcal{X} \;+\; Y_{\lambda_m}.$$

Nehmen wir uns jetzt ein beliebiges $b = (0, ..., 0, b_m, b_{m+1}, ...) \in \prod_{j<m}\{0\} \times \prod_{j \geq m} Y_j$, so erhalten wir damit für alle $\tilde{m} \leq m \leq k$ Zerlegungen

$$b_m \;=\; u_m \;+\; v_m \;+\; w_m.$$

Wir setzen nun $z_m := v_m + w_m$ und stellen fest, dass wir aufgrund der vorgegebenen Eigenschaften der oben durchgeführten Zerlegung $u_m = b_m - z_m$ auffassen können als

$$u_m \;\in\; \frac{1}{2^m} \bigcap_{j \leq n} (\varrho_m^j)^{-1}(A_j).$$

Sei damit $x_m := (\varrho_m^1(u_m), ..., u_m, -\varrho_{\lambda_m}^{m+1}(z_m), ..., -z_m, -\varrho^{\lambda_m+1}(v_m), ...)$, so folgt offenbar

$$\sigma_{\mathcal{X}}\big(x_m\big) \;=\; (0, ..., 0, b_m, 0, ..., 0, w_m, 0, ...).$$

Somit ist leicht nachzuvollziehen, dass wir für $d := \sum_{m=\tilde{m}}^k x_m \in \prod_{j \leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j$ bekommen

$$b \;-\; \sigma_{\mathcal{X}}(d) \;\in\; \prod_{j \leq k}\{0\} \times \prod_{j>k} Y_j,$$

womit (d) nachgewiesen ist.

Die Implikation $(d) \Rightarrow (e)$ zeigt man analog zum obigen Beweis von $(a) \Rightarrow (b)$. ■

Wir wollen nun den Spezialfall von Satz 2.1.1 untersuchen, dass $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume ist und alle X_n die abzählbare Vereinigung von beschränkten Banachkugeln $A_{N,n} \in \mathcal{BD}(X_n)$ sind. Mit Hilfe des nächsten Lemmas ist leicht einzusehen, dass wir jedes X_n damit auch als abzählbare Vereinigung beschränkter Banachkugeln $B_{N,n} \in \mathcal{BD}(X_n)$ schreiben können, sodass $B_{N,n} \subset B_{N+1,n}$ und $\varrho_{n+1}^n(B_{N,n+1}) \subset B_{N,n}$ für alle $n, N \in \mathbb{N}$ gilt. Dadurch entstehen auf den X_n in natürlicher Weise induktive Topologien, welche feiner als die gegebenen Topologien also ebenfalls separiert sind und bezüglich derer die verbindenden Abbildungen ϱ_{n+1}^n stetig bleiben. Somit können wir $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ in Zukunft der Einfachheit halber als projektives Spektrum von (LB)-Räumen[1] betrachten.

Lemma 2.1.3 *Für eine stetige lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen lokalkonvexen Räumen und beschränkte Banachkugeln $A \in \mathcal{BD}(X)$ und $B \in \mathcal{BD}(Y)$ sind $T(A) + B$ und $A \cap T^{-1}(B)$ ebenfalls beschränkte Banachkugeln.*

[1] Einen separierten abzählbaren induktiven Limes von Banachräumen bezeichnet man kurz als (LB)-Raum.

Beweis: Um diese Behauptung nachzuweisen, betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow [A \cap T^{-1}(B)] \xrightarrow{\ i\ } [A] \times [B] \xrightarrow{\ q\ } [T(A) + B] \longrightarrow 0$$

mit $i(x) := (x, T(x))$ und $q(x,y) := T(x) - y$. Hierbei sind i und q offenbar topologische Homomorphismen. Weiter ist der Kern von q in $[A] \times [B]$ abgeschlossen, da die Topologie von $[T(A) + B]$ eine in Y beschränkte Einheitskugel besitzt und somit ebenfalls separiert ist. Damit folgt schließlich schon die Behauptung, da abgeschlossene Unterräume und separierte Quotienten von Banachräumen wieder Banachräume sind. ■

Im Fall eines projektiven Spektrums von (LB)-Räumen erhalten wir ein stärkeres Ergebnis als in Satz 2.1.1, indem wir zusätzlich das Lemma von Schauder (siehe beispielsweise [10] Beweis zu Lemma 3.9) verwenden. Dazu nennen wir eine Abbildung $T : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen gleichmäßig offen oder gleichmäßig fast offen, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(T(x)) \subset T(U_\varepsilon(X))$ bzw. mit $U_\delta(T(x)) \subset \overline{T(U_\varepsilon(X))}$ für alle $x \in X$. Sind X und Y metrische Gruppen und ist T ein Gruppenhomomorphismus, so ist T damit genau dann gleichmäßig (fast) offen, wenn für jede Nullumgebung U in X auch $T(U)$ bzw. $\overline{T(U)}$ eine Nullumgebung in Y ist.

Lemma von Schauder 2.1.4 *Seien X und Y metrische Räume und sei X vollständig. Ist nun $T : X \to Y$ eine gleichmäßig fast offene Abbildung mit abgeschlossenem Graph, so ist T bereits gleichmäßig offen.*

Versieht man nämlich für ein projektives Spektrum $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ das Produkt der X_n mit den richtigen Topologien, so führt das Lemma von Schauder unmittelbar zu:

Lemma 2.1.5 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei eine Folge von Unterräumen $Y_n \subset X_n$ gegeben. Liegt nun eine Folge beschränkter Banachkugeln $A_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ vor, für welche zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\prod_{j<\tilde{m}} \{0\} \times \prod_{j \geq \tilde{m}} Y_j \ \subset \ \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Big(\sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j \leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j \Big) + \prod_{j \leq k} \{0\} \times \prod_{j>k} Y_j \Big),$$

so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ auch ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, sodass sogar gilt

$$\prod_{j<\tilde{m}} \{0\} \times \prod_{j \geq \tilde{m}} Y_j \ \subset \ \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j \leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j \Big).$$

Beweis: Wir versehen hierzu jedes X_j mit der Gruppentopologie gegeben durch die Nullumgebungsbasis $\{\varepsilon A_j : \varepsilon > 0\}$ und bezeichnen mit X den Raum $\prod_{j \in \mathbb{N}} X_j$ mit der dadurch entstehenden Produkttopologie. Mit Y bezeichnen wir ebenfalls den Raum $\prod_{j \in \mathbb{N}} X_j$ jedoch versehen mit der Gruppentopologie, welche aus der Nullumgebungsbasis $\{ \prod_{j \leq k} \{0\} \times \prod_{j>k} Y_j : k \in \mathbb{N} \}$ entsteht. Damit sind X und Y vollständige metrisierbare Räume und unsere Ausgangsbedingung ist nach der Bemerkung vor Lemma 2.1.4 äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$\sigma_{\mathcal{X}} \ : \ X \ \longrightarrow \ Y$$

gleichmäßig fast offen ist. Weiter ist der Graph von $\sigma_{\mathcal{X}}$ in $X \times Y$ abgeschlossen, da die beiden Topologien von X und Y feiner sind als das Produkt der ursprünglich auf X_j vorgegebenen Topologien, bezüglich dessen $\sigma_{\mathcal{X}}$ stetig ist. Nach dem Lemma von Schauder 2.1.4 ist $\sigma_{\mathcal{X}} : X \to Y$ somit gleichmäßig offen, was äquivalent zu der gesuchten Bedingung ist. ■

Als Verallgemeinerung der Charakterisierung von V. S. Retakh [19] und V. P. Palamodov [14] für die Surjektivität von $\sigma_{\mathcal{X}}$ (siehe auch [30] Theorem 3.2.9) erhalten wir damit eine äquivalente Bedingung dafür, dass ein beliebiger Unterraum von $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ liegt:

Theorem 2.1.6 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ ein projektives Spektrum von (LB)-Räumen und sei eine Folge von Unterräumen $Y_n \subset X_n$ gegeben. Dann liegt $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ genau dann im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$, wenn eine Folge beschränkter Banachkugeln $A_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ existiert mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}$$
$$Y_m \;\subset\; \bigcap_{j\leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(A_j) \;+\; \operatorname{Proj} \mathcal{X}.$$

Beweis: Wir beginnen damit, nachzuweisen, dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den beschriebenen Eigenschaften existiert, falls $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ enthalten ist. Dazu bemerken wir, dass sich jeder (LB)-Raum X_n als abzählbare Vereinigung beschränkter Banachkugeln schreiben lässt. Wie im Beweis von Satz 2.1.1 gesehen gibt es daher eine Folge beschränkter Banachkugeln $A_n \in \mathcal{BD}(X_n)$, für welche zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\prod_{j<\tilde{m}} \{0\} \times \prod_{j\geq\tilde{m}} Y_j \;\subset\; \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j\Big) + \prod_{j\leq k} \{0\} \times \prod_{j>k} Y_j\Big).$$

Mit Hilfe von Lemma 2.1.2 und Lemma 2.1.5 folgt nun unmittelbar, dass die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit auch die gesuchte Bedingung erfüllt.

Um die umgekehrte Implikation zu zeigen, nehmen wir an, dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den beschriebenen Eigenschaften existiert. Wieder mit Hilfe von Lemma 2.1.2 und Lemma 2.1.5 ist nun leicht einzusehen, dass es daher zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\prod_{j<\tilde{m}} \{0\} \times \prod_{j\geq\tilde{m}} Y_j \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\leq n} A_j \times \prod_{j>n} X_j\Big) \;\subset\; \operatorname{Im}(\sigma_{\mathcal{X}}).$$

Da wir immer $\prod_{j<\tilde{m}} Y_j \times \prod_{j\geq\tilde{m}} \{0\} \subset \operatorname{Im}(\sigma_{\mathcal{X}})$ haben, folgt somit schon wegen der Linearität von $\sigma_{\mathcal{X}}$, dass $\prod_{j\in\mathbb{N}} Y_j$ im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ liegt. ∎

Sind die Unterräume Y_n hierbei zusätzlich mit einer Banach-Topologie ausgestattet, so erhalten wir durch eine ähnliche Vorgehensweise außerdem eine recht starke notwendige Bedingung, welche ausschließlich mit Inklusionen beschränkter Banachkugeln arbeitet:

Theorem 2.1.7 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ ein projektives Spektrum von (LB)-Räumen und sei eine Folge beschränkter Banachkugeln $B_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ gegeben. Liegt nun $\prod_{n\in\mathbb{N}}[B_n]$ im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$, so existiert eine Folge beschränkter Banachkugeln $A_n \in \mathcal{BD}(X_n)$, sodass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $k > n$ stets ein $S > 1$ gibt mit*

$$B_n \;\subset\; S \cdot \Big(\; \bigcap_{j\leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(A_j) \;+\; \varrho^n\Big(\bigcap_{j=n+1}^{k} (\varrho^j)^{-1}(A_j)\,\Big)\Big).$$

Beweis: Wir stellen zuerst fest, dass $\prod_{j\in\mathbb{N}}[B_j]$ mit dem Produkt der entsprechenden Banach-Topologien offenbar ein Fréchetraum und damit von 2. Kategorie in sich ist. Weiter verwenden wir erneut, dass man jeden (LB)-Raum X_j als die abzählbare Vereinigung $X_j = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} A_{N,j}$ beschränkter Banachkugeln schreiben kann. Daher lässt sich analog zum Beweis von Satz 2.1.1 rekursiv eine Folge $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruieren, sodass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und

$$M_k \;:=\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\leq k} A_{N_j,j} \times \prod_{j>k} X_j\Big)$$

0 im Inneren des Abschlusses von $M_k \cap \prod_{j\in\mathbb{N}}[B_j]$ liegt, also $m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ existieren mit

$$\prod_{j\leq m}\varepsilon B_j \times \prod_{j>m}[B_j] \subset \overline{M_k \cap \prod_{j\in\mathbb{N}}[B_j]} \subset \bigcap_{\substack{\lambda\in\mathbb{N}\\ \delta>0}}\Big(M_k + \prod_{j\leq\lambda}\delta B_j \times \prod_{j>\lambda}[B_j]\Big).$$

Wir wollen nun wieder das Lemma von Schauder 2.1.4 anwenden. Dazu setzen wir $A_j := A_{N_j,j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und definieren damit den Raum X genauso wie im Beweis zu Lemma 2.1.5. Mit Y bezeichnen wir jedoch diesmal den Raum $\prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ ausgestattet mit der Gruppentopologie, welche aus der Nullumgebungsbasis $\{\prod_{j\leq m}\varepsilon B_j \times \prod_{j>m}[B_j] : m \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$ entsteht. Somit ist die obige Bedingung gleichbedeutend dazu, dass die Abbildung

$$\sigma_{\mathcal{X}} : X \longrightarrow Y$$

gleichmäßig fast offen ist. Wie bei Lemma 2.1.5 folgt jetzt, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ schon gleichmäßig offen ist und somit zu jedem vorgegebenen $k \in \mathbb{N}$ stets $m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ existieren mit

$$\prod_{j<m}\varepsilon B_j \times \prod_{j\geq m}[B_j] \subset \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\leq k} A_j \times \prod_{j>k} X_j\Big).$$

Wählen wir abschließend noch ein $n < k$ sowie ein beliebiges $y_n \in [B_n]$, so existiert also ein $x = (x_j) \in \prod_{j\leq k} A_j \times \prod_{j>k} X_j$ mit

$$(0, ..., 0, \varepsilon y_n, 0, ...) = \sigma_{\mathcal{X}}(x).$$

Analog zu Lemma 2.1.2 folgt hieraus unsere Behauptung durch Koordinatenvergleich. ■

Mittels einer Technik, welche von J. Wengenroth für seine Charakterisierung der Surjektivität von $\sigma_{\mathcal{X}}$ in [29] (siehe auch [30] Theorem 3.2.16) entwickelt wurde, erhalten wir außerdem die nachfolgende hinreichende Bedingung.

Satz 2.1.8 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei eine Folge beschränkter Banachkugeln $B_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ gegeben. Ist nun folgende Bedingung erfüllt*

$$\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n},\, \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m} \quad \exists\, K > m \quad \forall\, k \geq K \quad \exists\, S > 1$$
$$B_m \subset S \cdot \Big(B_n + \varrho^n_k\big(\bigcap_{j=K}^{k}(\varrho^j_k)^{-1}(B_j)\big)\Big)$$
$$\textit{und}$$
$$[B_m] \subset B_n + \operatorname{Proj}\mathcal{X},$$

so ist $\prod_{n\in\mathbb{N}}[B_n]$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ enthalten.

Beweis: Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Räume $[B_n]$ mit Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie mit Hilfe von Lemma 2.1.2, Lemma 2.1.5 und Theorem 2.1.6 leicht einzusehen ist, genügt es nun zu zeigen, dass es eine Folge beschränkter Banachkugeln $A_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ gibt, für welche zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{m} \geq n$ existiert, sodass für alle $k > \tilde{m}$ die Bedingung (c) aus Lemma 2.1.2 erfüllt ist. Nach Lemma 2.1.3 reicht es dazu aus, wenn wir eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen sowie eine Folge $(A_{\tilde{m}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Banachkugeln $A_{\tilde{m}_n} \in \mathcal{BD}(X_{\tilde{m}_n})$ konstruieren, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

(1)
$$\forall\, m \geq \tilde{m}_{n+1} \quad \exists\, K > m \quad \forall\, \lambda \geq K$$
$$Y_m \subset \bigcap_{j\leq n}(\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_n})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) + \operatorname{Proj}\mathcal{X} + Y_\lambda.$$

Zu diesem Zweck wählen wir mit Hilfe unserer Voraussetzungen eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, sodass wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben

$$(2) \qquad \forall\, m \geq \tilde{m}_{n+1} \quad \exists\, K > m \quad \forall\, k \geq K \quad \exists\, S > 1$$

$$(a) \qquad B_m \;\subset\; S \cdot \Big(B_{\tilde{m}_n} \;+\; \bigcap_{j=K}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) \Big)$$

und

$$(b) \qquad Y_m \;\subset\; B_{\tilde{m}_n} \;+\; \operatorname{Proj} \mathcal{X}.$$

Rekursiv konstruieren wir nun mit (2)(a) eine Folge $(A_{\tilde{m}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Banachkugeln $A_{\tilde{m}_n} \in \mathcal{BD}(X_{\tilde{m}_n})$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(3) \qquad \exists\, K > \tilde{m}_n \quad \forall\, k \geq K \quad \exists\, S > 1$$

$$B_{\tilde{m}_n} \;\subset\; S \cdot \Big(\bigcap_{j \leq n} (\varrho_{\tilde{m}_n}^{\tilde{m}_j})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;+\; \bigcap_{j=K}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) \Big),$$

da hieraus mittels (2)(b) offenbar schon (1) folgt. Dazu gehen wir für ein $i \in \mathbb{N}$ davon aus, dass bereits $(A_{\tilde{m}_j})_{j\leq i}$ gewählt sind, mittels derer (3) für $n \leq i$ erfüllt ist, was für $i = 1$ offensichtlich aufgrund von (2)(a) möglich ist. Ebenfalls aufgrund von (2)(a) finden wir jetzt ein $K_1 > \tilde{m}_{i+1}$, sodass zu jedem $k \geq K_1$ ein $S_k > 1$ existiert mit

$$(4) \qquad B_{\tilde{m}_{i+1}} \;\subset\; S_k \cdot \Big(B_{\tilde{m}_i} \;+\; \bigcap_{j=K_1}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) \Big).$$

Darüber hinaus bekommen wir mittels (3) für $n = i$ ein $K \geq K_1$, sodass zu jedem $k \geq K$ ein $C_k > 1$ existiert mit

$$(5) \qquad S_k \cdot B_{\tilde{m}_i} \;\subset\; C_k \cdot \Big(\bigcap_{j \leq i} (\varrho_{\tilde{m}_i}^{\tilde{m}_j})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;+\; \bigcap_{j=K}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) \Big).$$

Nehmen wir uns nun ein $u \in B_{\tilde{m}_{i+1}}$, so erhalten wir zu einem beliebigen $k \geq K$ durch (4) eine Zerlegung $u = v_1 + w_1$ sowie weiter mit (5) eine Zerlegung $v_1 = v + w_2$ und somit

$$u \;=\; v \;+\; w_1 \;+\; w_2.$$

Da hierbei gilt $u - w_1 - w_2 \in B_{\tilde{m}_{i+1}} + S_k \cdot \bigcap_{j=K_1}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) + C_k \cdot \bigcap_{j=K}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) \subset X_{\tilde{m}_{i+1}}$, kann man mit $S := S_k + C_k$ insbesondere $v = u - w_1 - w_2$ auffassen als

$$v \;\in\; S \cdot \Big(\bigcap_{j \leq i} (\varrho_{\tilde{m}_{i+1}}^{\tilde{m}_j})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;\cap\; \big(B_{\tilde{m}_{i+1}} + \bigcap_{j=K}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) \big) \Big).$$

Setzen wir nun $A_{\tilde{m}_{i+1}} := B_{\tilde{m}_{i+1}} + B_K$, so ist $A_{\tilde{m}_{i+1}}$ nach Lemma 2.1.3 eine beschränkte Banachkugel in $X_{\tilde{m}_{i+1}}$ und mit Obigem ist nachgewiesen

$$B_{\tilde{m}_{i+1}} \;\subset\; S \cdot \Big(\bigcap_{j \leq i+1} (\varrho_{\tilde{m}_{i+1}}^{\tilde{m}_j})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;+\; \bigcap_{j=K}^{k} (\varrho_k^j)^{-1}(B_j) \Big).$$

Also ist (3) mittels unserer Wahl von $A_{\tilde{m}_{i+1}}$ auch für $n = i + 1$ erfüllt, womit die Rekursion vollständig beschrieben ist. Wie bereits erwähnt folgt nun, dass $\prod_{n\in\mathbb{N}} [B_n]$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ liegt. ∎

2.2 Das Liften beschränkter Mengen durch $\sigma_{\mathcal{X}}$

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, wann $\sigma_{\mathcal{X}}$ bestimmte beschränkte Mengen liftet. Ist dazu eine Folge $\mathcal{B}$ beschränkter Mengen $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$ vorgegeben, so verstehen wir unter den von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ die Familie aller $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n B_n$ mit $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Entsprechend definieren wir:

Definition 2.2.1 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{B}$ eine Folge beschränkter Mengen $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$. Dann sagen wir, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet, falls zu jeder Folge $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ein $\mathcal{D} \in \mathcal{B}(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n)$ existiert mit*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n B_n \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}(\mathcal{D}).$$

Ist nun $\mathcal{D}$ eine weitere Folge beschränkter Mengen $D_n \in \mathcal{B}(X_n)$, so sagen wir, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet, falls es zu $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ stets $(S_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n B_n \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} S_n D_n\Big).$$

Hierzu sei erwähnt, dass offensichtlich in beiden durch Definition 2.2.1 bezeichneten Fällen der Unterraum $\prod_{n\in\mathbb{N}}[B_n]$ ganz im Bild von $\sigma_{\mathcal{X}}$ liegt. Besitzt $\sigma_{\mathcal{X}}$ die zweite beschriebene Eigenschaft, so ist er sogar ganz im $\sigma_{\mathcal{X}}$-Bild von $\prod_{n\in\mathbb{N}}[D_n]$ enthalten.

Lemma 2.2.2 *Sei X ein lokalkonvexer Raum und sei D eine beschränkte Banachkugel in X. Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in \frac{1}{2^{n+1}} D$, so konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ in X gegen ein $x \in D$.*

Beweis: Offenbar konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ im Banachraum $[D]$ gegen ein $x \in \frac{1}{2}\overline{D}^{[D]} \subset D$. Da D als beschränkt vorausgesetzt wurde, konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ somit auch in X gegen x. ∎

Unter Verwendung dieser nützlichen Eigenschaft beschränkter Banachkugeln und den Techniken aus Lemma 2.1.2 führt uns die besondere Gestalt von $\sigma_{\mathcal{X}}$ diesmal recht schnell zu einfachen Charakterisierungen der soeben eingeführten Bezeichnungen. Hierzu sei noch bemerkt, dass man einen lokalkonvexen Raum **lokal vollständig** nennt, falls jede abgeschlossene, beschränkte, absolutkonvexe Teilmenge schon eine Banachkugel ist.

Satz 2.2.3 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{B}$ eine Folge beschränkter Mengen $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$. Existiert nun zu jeder Folge $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Banachkugeln $D_n \in \mathcal{BD}(X_n)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$C_n B_n \;\subset\; \bigcap_{j\le n} (\varrho^j_n)^{-1}(D_j) \;+\; \varrho^n\Big(\bigcap_{j>n} (\varrho^j)^{-1}(D_j) \Big),$$

so liftet $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen. Falls alle X_n lokal vollständig sind, gilt ebenfalls die umgekehrte Implikation.
Ist nun $\mathcal{D}$ eine weitere Folge beschränkter Banachkugeln $D_n \in \mathcal{BD}(X_n)$, so liftet $\sigma_{\mathcal{X}}$ genau dann die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen, wenn es zu $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ stets $(S_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gibt, sodass wir für alle $n \in \mathbb{N}$ haben

$$C_n B_n \;\subset\; \bigcap_{j\le n} (\varrho^j_n)^{-1}(S_j D_j) \;+\; \varrho^n\Big(\bigcap_{j>n} (\varrho^j)^{-1}(S_j D_j) \Big).$$

Beweis: Weisen wir zuerst nach, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet, falls die angegebene Bedingung erfüllt ist. Sei dafür $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vorgegeben, so finden wir also eine Folge beschränkter Banachkugeln $D_n \in \mathcal{BD}(X_n)$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{n+1} C_n B_n \ \subset \ \bigcap_{j \leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(D_j) \ + \ \bigcap_{j > n} (\varrho^j)^{-1}(D_j).$$

Nehmen wir uns jetzt ein beliebiges $(b_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} C_n B_n$, dann erhalten wir damit Zerlegungen

$$2^{n+1} b_n \ = \ u_n \ + \ v_n.$$

Nun definieren wir $x_n := (\varrho_n^1(u_n), ..., u_n, \varrho^{n+1}(-v_n), \varrho^{n+2}(-v_n), ...) \in \prod_{j \in \mathbb{N}} D_j$ und stellen fest

$$\sigma_{\mathcal{X}}\Big(\frac{1}{2^{n+1}} x_n\Big) \ = \ (0, ..., 0, b_n, 0, ...).$$

Nach Lemma 2.2.2 konvergiert schließlich $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} x_n$ in $\prod_{j \in \mathbb{N}} X_j$ gegen ein $d \in \prod_{j \in \mathbb{N}} D_j$, für welches wegen der Stetigkeit von $\sigma_{\mathcal{X}}$ gilt

$$\sigma_{\mathcal{X}}(d) \ = \ \sum_{n \in \mathbb{N}} (0, ..., 0, b_n, 0, ...) \ = \ (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Um die umgekehrte Implikation zu zeigen, nehmen wir also an, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet und dass alle X_n lokal vollständig sind. Ist nun eine Folge $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gegeben, so existiert daher eine Folge beschränkter Banachkugeln $D_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ mit

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} C_n B_n \ \subset \ \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n\Big).$$

Zu beliebigen $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \in C_n B_n$ gibt es damit ein $d = (d_j) \in \prod_{j \in \mathbb{N}} D_j$, welches erfüllt

$$(0, ..., 0, b_n, 0, ...) \ = \ \sigma_{\mathcal{X}}(d).$$

Durch Koordinatenvergleich folgt schon $b_n = d_n - d_{n+1}$ und $d_j = d_{j+1}$ für alle $j \neq n$ und somit

$$b_n \ \in \ \bigcap_{j \leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(D_j) \ + \ \bigcap_{j > n} (\varrho^j)^{-1}(D_j).$$

Die noch zu beweisende Äquivalenz des Satzes folgt nun analog. Es bleibt nur zu erwähnen, dass wir an dieser Stelle nicht die lokale Vollständigkeit der X_n benötigen, da $\mathcal{D}$ schon als Folge beschränkter Banachkugeln vorausgestzt wird. ■

Für eine spätere Verwendung in Kapitel 3 sei noch kurz angemerkt, dass gemäß des gerade vorgestellten Beweises von Satz 2.2.3 für ein projektives Spektrum $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ lokalkonvexer Räume und Folgen beschränkter Banachkugeln $B_n, D_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ insbesondere gilt

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \sigma_{\mathcal{X}}\big(\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n\big) \implies B_n \subset \bigcap_{j \leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(D_j) + \bigcap_{j > n} (\varrho^j)^{-1}(D_j) \implies \prod_{n \in \mathbb{N}} \tfrac{1}{2^{n+1}} B_n \subset \sigma_{\mathcal{X}}\big(\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n\big).$$

Mit Hilfe des klassischen Mittag-Leffler Verfahrens gelangen wir nun weiter zu den nachfolgenden hinreichenden Bedingungen für das Liften beschränkter Mengen. Die hier vorgestellten Darstellungen dieser Kriterien sind dabei speziell an die Verwendung im Beweis zum anschließenden Theorem 2.2.6 angepasst.

Satz 2.2.4 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{B}$ eine Folge beschränkter Mengen $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$. Gibt es nun eine Folge beschränkter Banachkugeln $A_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\ \varepsilon > 0\,,\ \tilde{k} \geq m \quad \exists\, k_1, ..., k_p > \tilde{k}\ ,\ S > 1$$
$$B_m \ \subset\ \varepsilon \cdot \bigcap_{j \leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_j) \ +\ S \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j},$$

so liftet $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen. Erfüllt die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\ \tilde{k} \geq m \quad \exists\, k_1, ..., k_p > \tilde{k} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$B_m \ \subset\ \varepsilon \cdot \bigcap_{j \leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_j) \ +\ S \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j},$$

so existiert eine Folge $\mathcal{D}$ beschränkter Mengen $D_n \in \mathcal{B}(X_n)$, sodass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet.

Beweis: Wir beginnen damit, nachzuweisen, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet, falls eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den beschriebenen Eigenschaften existiert. Gehen wir also davon aus, dass eine solche Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorliegt, so wählen wir eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(1) $\quad \forall\, m_1 < ... < m_q$ mit $\tilde{m}_n \leq m_1 < \tilde{m}_{n+1}\,,\ C > 1\,,\ \delta > 0 \quad \exists\, k_1, ..., k_p \geq \tilde{m}_{n+1}\,,\ S > 1$

$$C \cdot \sum_{j \leq q} B_{m_j} \ \subset\ \delta \cdot \bigcap_{j \leq n} \left(\varrho^j_n\right)^{-1}(A_j) \ +\ S \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j}.$$

Als Zwischenergebnis zeigen wir zuerst, dass es dann zu allen $n \in \mathbb{N}$, $m \geq \tilde{m}_n$ und $\varepsilon > 0$ eine Folge beschränkter Mengen $\tilde{D}_j \in \mathcal{B}(X_j)$ gibt mit

$$B_m \ \subset\ \varepsilon \cdot \bigcap_{j \leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_j) \ +\ \bigcap_{j > n} (\varrho^j)^{-1}(\tilde{D}_j).$$

Seien dazu $n \in \mathbb{N}$, $m \geq \tilde{m}_n$ und $0 < \varepsilon < 1$ sowie ein beliebiges $u \in B_m$ vorgegeben, so konstruieren wir rekursiv Folgen $(u_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wir beginnen die Rekursion, indem wir $u_0 := u$ setzen. Wegen (1) können wir nun $v_1 \in \frac{\varepsilon}{4} \cdot \bigcap_{j\leq n} \left(\varrho^j_n\right)^{-1}(A_j)$ und $u_1 \in S_1 \cdot \sum_{j \leq p_1} B_{k^1_j}$ wählen für geeignete $k^1_1, ..., k^1_{p_1} \geq \tilde{m}_{n+1}$ und $S_1 > 1$ mit

$$u_0 \ =\ v_1 \ +\ u_1.$$

Nehmen wir weiter an, u_i sei bereits gewählt, so zerlegen wir dieses auf analoge Weise gemäß (1) mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$ in

$$u_i \ =\ v_{i+1} \ +\ u_{i+1}.$$

Wir stellen hierbei fest, dass wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ zu der Rekursion passende $k^i_1, ..., k^i_{p_i} \geq \tilde{m}_{n+i}$ und $S_i > 1$ bekommen mit $u_i \in S_i \cdot \sum_{j\leq p_i} B_{k^i_j}$. Daher folgt weiter

$$v_{i+1} \ \in\ \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} \cdot \bigcap_{j \leq n+i} (\varrho^j_{n+i})^{-1}(A_j).$$

Nach Lemma 2.2.2 erhält man also ein $v \in \varepsilon \cdot \bigcap_{j\leq n} (\varrho^j_n)^{-1}(A_j)$, wenn wir definieren

$$v \ :=\ \sum_{i \in \mathbb{N}} v_i.$$

Aus analogen Gründen entsteht weiter ein $w_i \in \tilde{D}_{n+i} := S_i \cdot \sum_{j \le p_i} B_{k_j^i} + A_{n+i} \in \mathcal{B}(X_{n+i})$ durch

$$w_i := u_i - \sum_{j>i} v_j.$$

Einfache Rechnungen zeigen schließlich, dass wir damit ebenfalls $u = v + w_1$ und $w_i = w_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ haben. Somit erhalten wir ein $w \in \bigcap_{j>n} (\varrho^j)^{-1}(\tilde{D}_j)$ mit

$$u \;=\; v \;+\; w,$$

womit das Zwischenergebnis bewiesen ist.

Geben wir uns nun eine beliebige Folge $(C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vor, so finden wir also zu allen $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\tilde{m}_n \le m < \tilde{m}_{n+1}$ eine Folge beschränkter Mengen $\tilde{D}_j^m \in \mathcal{B}(X_j)$ mit

$$C_m B_m \;\subset\; \frac{1}{2^{m+1}} \bigcap_{j \le n} \big(\varrho_n^j\big)^{-1}(A_j) \;+\; \bigcap_{j>n} \big(\varrho^j\big)^{-1}(\tilde{D}_j^m).$$

Nehmen wir uns nun $(b_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} C_n B_n$, dann erhalten wir damit für alle $m \ge \tilde{m}_1$ Zerlegungen

$$b_m \;=\; u_m \;+\; v_m.$$

Wir bemerken hierbei, dass wir aufgrund der vorgegebenen Eigenschaften dieser Zerlegungen $u_m = b_m - v_m$ auffassen können als

$$u_m \;\in\; \frac{1}{2^{m+1}} \bigcap_{j \le n} (\varrho_m^j)^{-1}(A_j) \;\;\cap\;\; \bigcap_{j=n+1}^{m} \big(C_m B_m + (\varrho_m^j)^{-1}(\tilde{D}_j^m)\big).$$

Damit definieren wir $x_m := (\varrho_m^1(u_m), ..., u_m, \varrho^{m+1}(-v_m), \varrho^{m+2}(-v_m), ...)$ und stellen fest

$$\sigma_{\mathcal{X}}\big(x_m\big) \;=\; (0, ..., 0, b_m, 0, ...).$$

Darüber hinaus setzen wir ergänzend $r := \big(\sum_{j=1}^{\tilde{m}_1 - 1} b_j, \sum_{j=2}^{\tilde{m}_1 - 1} b_j, ..., b_{\tilde{m}_1 - 1}, 0, ...\big)$ und bemerken $\sigma_{\mathcal{X}}\big(r\big) \;=\; (b_1, b_2, ..., b_{\tilde{m}_1 - 1}, 0, ...)$. Mit Hilfe von Lemma 2.2.2 ist nun leicht nachzuvollziehen, dass $r + \sum_{m \ge \tilde{m}_1} x_m$ in $\prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ gegen ein $d \in \prod_{j\in\mathbb{N}} D_j$ mit

$$D_j \;:=\; \sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_j} \tilde{D}_j^m \;+ \sum_{m=j}^{\tilde{m}_j} C_m B_m \;+\; A_j \;\in\; \mathcal{B}(X_j)$$

konvergiert. Für dieses d gilt schließlich wegen der Stetigkeit von $\sigma_{\mathcal{X}}$

$$\sigma_{\mathcal{X}}(d) \;=\; (b_1, b_2, ..., b_{\tilde{m}_1 - 1}, 0, ...) + \sum_{m \ge \tilde{m}_1} (0, ..., 0, b_m, 0, ...) \;=\; (b_m)_{m\in\mathbb{N}}.$$

Somit ist nachgewiesen, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet.

Nehmen wir nun an, dass die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar die stärkere im Satz beschriebene Bedingung erfüllt, so wählen wir eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall\, m_1 < ... < m_q \text{ mit } \tilde{m}_n \le m_1 < \tilde{m}_{n+1} \quad \exists\, k_1, ..., k_p \ge \tilde{m}_{n+1} \quad \forall\, C > 1\,,\; \delta > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$C \cdot \sum_{j \le q} B_{m_j} \;\subset\; \delta \cdot \bigcap_{j \le n} \big(\varrho_n^j\big)^{-1}(A_j) \;+\; S \cdot \sum_{j \le p} B_{k_j}.$$

Analog zu oben kann man jetzt zeigen, dass dann zu allen $n \in \mathbb{N}$ und $m \geq \tilde{m}_n$ eine Folge beschränkter Mengen $\tilde{D}_j \in \mathcal{B}(X_j)$ existiert, sodass es zu einem $\varepsilon > 0$ stets $(S_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gibt mit

$$B_m \subset \varepsilon \cdot \bigcap_{j \leq n} (\varrho_n^j)^{-1}(A_j) + \bigcap_{j > n} (\varrho^j)^{-1}(S_j \tilde{D}_j).$$

Ebenfalls wie oben kann man hiermit schließlich eine Folge $\mathcal{D}$ beschränkter Mengen $D_j \in \mathcal{B}(X_j)$ konstruieren, für welche $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet. ■

Da es sich in Anwendungsbeispielen oft als sehr schwierig erweist, Bedingungen wie aus Satz 2.2.3 oder aus Satz 2.2.4 zu verifizieren, welche Durchschnitte von Banachkugeln verwenden, ist man stets an hinreichenden Kriterien interessiert, welche ohne diese auskommen. Zu diesem Zweck entwickelten R. W. Braun und D. Vogt in [2] sowie L. Frerick und J. Wengenroth in [6] Verfahren, um bei geeigneten vorgegebenen Bedingungen ohne derartige Durchschnitte diese nachträglich zu erzeugen. Man verwendet dazu den folgenden Trick, welcher auch zentral für den Beweis des Lemmas von Schauder und damit für den Satz von der offenen Abbildung ist.

Lemma 2.2.5 *Sei X ein lokalkonvexer Raum und sei D eine beschränkte Banachkugel in X. Ist nun B eine beschränkte Teilmenge von X mit $B \subset \frac{1}{4}D + \frac{1}{2}B$, so folgt schon $B \subset D$.*

Beweis: Zu einem beliebigen $b \in B$ können wir rekursiv $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ und $(d_n) \in D^{\mathbb{N}}$ wählen mit

$$b = \frac{1}{4}d_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{4}d_1 + \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}b_2\big) = ... = \sum_{n \leq k} \frac{1}{2^{n+1}} d_n + \frac{1}{2^k} b_k$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da B als beschränkt vorausgesetzt wurde, konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} d_n$ also in X gegen b. Nach Lemma 2.2.2 folgt somit $b \in D$. ■

Eine ähnliche auf unsere Situation angepasste Technik liefert:

Theorem 2.2.6 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{B}$ eine Folge beschränkter Banachkugeln $B_n \in \mathcal{BD}(X_n)$. Ist nun folgende Bedingung erfüllt*

$(P_{\mathcal{B}})$ $$\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n}\,,\ \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\ \varepsilon > 0 \quad \exists\, k > m\,,\ S > 1$$
$$B_m \subset \varepsilon \cdot B_n + S \cdot B_k,$$

so liftet $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen. Gilt sogar

$(\overline{P}_{\mathcal{B}})$ $$\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n}\,,\ \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m} \quad \exists\, k > m \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$B_m \subset \varepsilon \cdot B_n + S \cdot B_k,$$

dann existiert eine Folge $\mathcal{D}$ beschränkter Mengen $D_n \in \mathcal{B}(X_n)$, sodass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet.

Beweis: Wir beginnen damit nachzuweisen, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet, falls $(P_{\mathcal{B}})$ erfüllt ist. Als Zwischenergebnis zeigen wir zuerst, dass aus $(P_{\mathcal{B}})$ schon

(1) $$\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n}\,,\ \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\ \varepsilon > 0\,,\ \tilde{k} \geq m \quad \exists\, k > \tilde{k}\,,\ S > 1$$
$$B_m \subset \varepsilon \cdot B_n + S \cdot B_k$$

folgt. Sei dafür ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ vorgegeben, so wählen wir $n \geq \tilde{n}$ und $\tilde{m} \geq n$ gemäß $(P_{\mathcal{B}})$. Ist weiter ein beliebiges $m \geq \tilde{m}$ fixiert, so zeigen wir per Induktion, dass man für alle $\tilde{k} \geq m$ erhält

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k > \tilde{k}\,,\ S > 1 \\ &B_m \ \subset\ \varepsilon \cdot B_n \ +\ S \cdot B_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir gehen dazu für ein $\tilde{k} \geq m$ davon aus, dass (2) erfüllt ist, was für $\tilde{k} = m$ offenbar aufgrund von $(P_{\mathcal{B}})$ der Fall ist. Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so existieren also $k_1 > \tilde{k}$ und $S_1 > 1$ mit

$$B_m \ \subset\ \frac{\varepsilon}{2} \cdot B_n \ +\ S_1 \cdot B_{k_1}. \tag{3}$$

Aufgrund von $(P_{\mathcal{B}})$ gibt es darüber hinaus $k > k_1 \geq \tilde{k} + 1$ und $S_2 > 1$ mit

$$S_1 \cdot B_{k_1} \ \subset\ \frac{\varepsilon}{2} \cdot B_n \ +\ S_2 \cdot B_k. \tag{4}$$

Nehmen wir uns jetzt ein $u \in B_m$, so erhalten wir mittels (3) eine Zerlegung $u = v_1 + u_1$ und weiter mit (4) eine Zerlegung $u_1 = v_2 + w$. Somit bekommen wir

$$u \ =\ v_1 + v_2 \ +\ w.$$

Da hierbei $v_1 + v_2 \in \varepsilon B_n$ ist, wird somit (2) auch für $\tilde{k} + 1$ erfüllt, womit das Zwischenergebnis bewiesen ist.

Wie mit Hilfe von Satz 2.2.4 und Lemma 2.1.3 leicht einzusehen ist, genügt es nun zu zeigen, dass eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen sowie eine Folge $(A_{\tilde{m}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Banachkugeln $A_{\tilde{m}_n} \in \mathcal{BD}(X_{\tilde{m}_n})$ existieren, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} &\forall\, m \geq \tilde{m}_{n+1}\,,\ \varepsilon > 0\,,\ \tilde{k} \geq m \quad \exists\, k_1, ..., k_p > \tilde{k}\,,\ S > 1 \\ &B_m \ \subset\ \varepsilon \cdot \bigcap_{j\leq n} (\varrho_{\tilde{m}_n}^{\tilde{m}_j})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \ +\ S \cdot \sum_{j\leq p} B_{k_j}. \end{aligned} \tag{5}$$

Zu diesem Zweck wählen wir mit Hilfe von (1) eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben

$$\begin{aligned} &\forall\, m_1, ..., m_p \geq \tilde{m}_{n+1}\,,\ C > 1\,,\ \varepsilon > 0\,,\ \tilde{k} \in \mathbb{N} \quad \exists\, k_1, ..., k_p > \tilde{k}\,,\ S > 1 \\ &C \cdot \sum_{j\leq p} B_{m_j} \ \subset\ \varepsilon \cdot B_{\tilde{m}_n} \ +\ S \cdot \sum_{j\leq p} B_{k_j}. \end{aligned} \tag{6}$$

Rekursiv konstruieren wir nun passende $(A_{\tilde{m}_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dazu gehen wir für ein $i \in \mathbb{N}$ davon aus, dass bereits $(A_{\tilde{m}_j})_{j\leq i}$ gewählt sind, mittels derer (5) für $n \leq i$ erfüllt ist, was für $i = 1$ offensichtlich aufgrund von (6) möglich ist. Damit finden wir $k_1^1, ..., k_p^1 > \tilde{m}_{i+2}$ und ein $S_1 > 1$ mit

$$B_{\tilde{m}_{i+1}} \ \subset\ \bigcap_{j\leq i} (\varrho_{\tilde{m}_i}^{\tilde{m}_j})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \ +\ S_1 \cdot \sum_{j\leq p} B_{k_j^1}. \tag{7}$$

Zu einem beliebigen $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ bekommen wir mittels (6) weitere $k_1, ..., k_p > \tilde{k}$ und $S_2 > 1$ mit

$$S_1 \cdot \sum_{j\leq p} B_{k_j^1} \ \subset\ \frac{1}{2} \cdot B_{\tilde{m}_{i+1}} \ +\ S_2 \cdot \sum_{j\leq p} B_{k_j}. \tag{8}$$

Nehmen wir uns nun ein $u \in B_{\tilde{m}_{i+1}}$, so erhalten wir durch (7) eine Zerlegung $u = v + w_1$ und weiter mit (8) eine Zerlegung $w_1 = u_1 + w$. Somit gilt

$$u \;=\; v \;+\; w \;+\; u_1.$$

Wegen der durch (7) vorgegebenen Eigenschaften der oben durchgeführten Zerlegung kann man dabei $v = u - w_1$ auffassen als

$$v \;\in\; \bigcap_{j \leq i} (\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_{i+1}})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;\cap\; \big(B_{\tilde{m}_{i+1}} + S_1 \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j^1}\big).$$

Setzen wir nun $A_{\tilde{m}_{i+1}} := B_{\tilde{m}_{i+1}} + S_1 \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j^1}$, so ist damit also gezeigt

$$B_{\tilde{m}_{i+1}} \;\subset\; \bigcap_{j \leq i+1} (\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_{i+1}})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;+\; S_2 \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j} \;+\; \frac{1}{2} B_{\tilde{m}_{i+1}}.$$

Gemäß Lemma 2.1.3 ist hierbei $A_{\tilde{m}_{i+1}} \in \mathcal{BD}(X_{\tilde{m}_{i+1}})$ und mit Hilfe von Lemma 2.2.5 folgt weiter

$$\text{(9)} \qquad B_{\tilde{m}_{i+1}} \;\subset\; 4 \cdot \bigcap_{j \leq i+1} (\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_{i+1}})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;+\; 4S_2 \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j}.$$

Geben wir uns jetzt noch ein $m \geq \tilde{m}_{i+2}$ und ein $0 < \varepsilon < 1$ vor, so erhalten wir mittels (6) für $n = i + 1$ unmittelbar $k_{p+1} > \tilde{k}$ und $S > \varepsilon \cdot S_2$ mit

$$\text{(10)} \qquad B_m \;\subset\; \frac{\varepsilon}{4} \cdot B_{\tilde{m}_{i+1}} \;+\; S \cdot B_{k_{p+1}}.$$

Fassen wir (9) und (10) nun auf offensichtliche Weise zusammen, so bekommen wir schließlich

$$B_m \;\subset\; \varepsilon \cdot \bigcap_{j \leq i+1} (\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_{i+1}})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;+\; S \cdot \sum_{j \leq p+1} B_{k_j}.$$

Also ist (5) mittels unserer Wahl von $A_{\tilde{m}_{i+1}}$ auch für $n = i + 1$ erfüllt, womit die Rekursion vollständig beschrieben ist. Wie bereits erwähnt folgt nun, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet.

Nehmen wir nun an, dass sogar $(\overline{P}_{\mathcal{B}})$ erfüllt ist, so kann man analog zu oben die Bedingung

$$\text{(11)} \qquad \forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n}\,,\ \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\ \tilde{k} \geq m \quad \exists\, k > \tilde{k} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$B_m \;\subset\; \varepsilon \cdot B_n \;+\; S \cdot B_k$$

folgern. Damit wählen wir eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall\, m_1, ..., m_p \geq \tilde{m}_{n+1}\,,\ \tilde{k} \in \mathbb{N} \quad \exists\, k_1, ..., k_p > \tilde{k} \quad \forall\, C > 1\,,\ \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$C \cdot \sum_{j \leq p} B_{m_j} \;\subset\; \varepsilon \cdot B_{\tilde{m}_n} \;+\; S \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j}.$$

Ebenfalls wie oben kann man hiermit schließlich eine Folge $(A_{\tilde{m}_n})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkter Banachkugeln $A_{\tilde{m}_n} \in \mathcal{BD}(X_{\tilde{m}_n})$ konstruieren, sodass wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben

$$\forall\, m \geq \tilde{m}_{n+1}\,,\ \tilde{k} \geq m \quad \exists\, k_1, ..., k_p > \tilde{k} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$B_m \;\subset\; \varepsilon \cdot \bigcap_{j \leq n} (\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_n})^{-1}(A_{\tilde{m}_j}) \;+\; S \cdot \sum_{j \leq p} B_{k_j}.$$

Mit Hilfe von Satz 2.2.4 und Lemma 2.1.3 folgt dann, dass eine Folge $\mathcal{D}$ beschränkter Mengen $D_n \in \mathcal{B}(X_n)$ existiert, sodass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet. ■

Wir wollen nun noch untersuchen, wie in Theorem 2.2.6 die Folge $\mathcal{D}$ vom Aufbau der zu Grunde liegenden $(\overline{P}_{\mathcal{B}})$-Bedingung abhängt. Nehmen wir dazu an, für ein vorgegebenes projektives Spektrum $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ lokalkonvexer Räume und eine Folge $\mathcal{B}$ beschränkter Banachkugeln $B_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ sei $(\overline{P}_{\mathcal{B}})$ erfüllt, so haben wir bereits gesehen, dass schon die etwas stärkere Bedingung (11) aus dem Beweis zu Theorem 2.2.6 folgt. Damit lässt sich nun leicht eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruieren mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \tilde{m}_{n+1} \leq m < \tilde{m}_{n+2} \quad \exists\, \tilde{m}_{n+2} \leq k < \tilde{m}_{n+3} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$B_m \ \subset\ \varepsilon \cdot B_{\tilde{m}_n} \ +\ S \cdot B_k. \tag{2.1}$$

Hiervon ausgehend können wir schließlich eine entsprechende Folge $\mathcal{D}$ wie im Folgenden beschrieben angeben.

Satz 2.2.7 *Sei $\mathcal{X} = (X_n, \varrho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{B}$ eine Folge beschränkter Banachkugeln $B_n \in \mathcal{BD}(X_n)$. Ist nun $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen, welche die obige Bedingung* (2.1) *erfüllt, und definieren wir eine Folge $\mathcal{D}$ beschränkter Mengen $D_j \in \mathcal{BD}(X_j)$ durch*

$$D_j \ :=\ \sum_{i=j}^{\tilde{m}_{n+2}-1} B_i \qquad \textit{falls} \qquad \tilde{m}_{n-1} < j \leq \tilde{m}_n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und mit $\tilde{m}_0 := 0$, so liftet $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen.

Beweis: Um die Behauptung zu zeigen, werden wir im Folgenden ausschließlich Satz 2.2.4 und Theorem 2.2.6 genau analysieren. Indem man zuerst im Beweis zu Theorem 2.2.6 die rekursive Konstruktion der Folge $(A_{\tilde{m}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Banachkugeln untersucht, lässt sich nämlich leicht nachvollziehen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\forall\, \tilde{m}_{n+1} \leq m < \tilde{m}_{n+2} \quad \exists\, \tilde{m}_{n+2} \leq k_1, ..., k_p < \tilde{m}_{n+3} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$B_m \ \subset\ \varepsilon \cdot \bigcap_{j\leq n} (\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_n})^{-1}\Big(\sum_{i=\tilde{m}_j}^{\tilde{m}_{j+2}-1} B_i \Big) \ +\ S \cdot \sum_{j\leq p} B_{k_j}.$$

Analog zum Zwischenergebnis zu Beginn des Beweises von Satz 2.2.4 ist weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\forall\, \tilde{m}_{n+1} \leq m < \tilde{m}_{n+2}\,,\ C_m > 1 \quad \exists\, (S^m_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (1,\infty)^{\mathbb{N}}$$
$$C_m \cdot B_m \ \subset\ \frac{1}{2^m} \cdot \bigcap_{j\leq n} (\varrho^{\tilde{m}_j}_{\tilde{m}_n})^{-1}\Big(\sum_{i=\tilde{m}_j}^{\tilde{m}_{j+2}-1} B_i \Big) \ +\ \bigcap_{j>n} S^m_j \cdot (\varrho^{\tilde{m}_j})^{-1}\Big(\sum_{i=\tilde{m}_j}^{\tilde{m}_{j+2}-1} B_i \Big)$$

einzusehen. Geben wir uns nun eine beliebige Folge $(C_n) \in (1,\infty)^{\mathbb{N}}$ und $(b_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} C_n B_n$ vor, so erhalten wir damit für alle $m \geq \tilde{m}_2$ Zerlegungen

$$b_m \ =\ u_m \ +\ v_m.$$

Hierbei können wir aufgrund der vorgegebenen Eigenschaften der Zerlegung $u_m = b_m - v_m$ als

$$u_m \ \in\ \frac{1}{2^{m+1}} \bigcap_{j\leq n} (\varrho^j_m)^{-1}\big(D_{\tilde{m}_j}\big) \ \cap\ \big(C_m + S^m_{n+1}\big) \cdot \big(D_{\tilde{m}_{n+1}}\big)$$

auffassen falls $m = \tilde{m}_{n+1}$ und für $\tilde{m}_{n+1} < m < \tilde{m}_{n+2}$ als

$$u_m \ \in\ \frac{1}{2^{m+1}} \bigcap_{j\leq n} (\varrho^j_m)^{-1}\big(D_{\tilde{m}_j}\big) \ \cap\ \big(C_m + S^m_{n+1}\big) \cdot (\varrho^m_{\tilde{m}_{n+1}})^{-1}\big(D_{\tilde{m}_{n+1}}\big) \ \cap\ \big(C_m + S^m_{n+2}\big) \cdot \big(D_{\tilde{m}_{n+2}}\big).$$

Damit definieren wir $x_m := (\varrho_m^1(u_m), ..., u_m, \varrho^{m+1}(-v_m), \varrho^{m+2}(-v_m), ...)$ und stellen fest

$$\sigma_{\mathcal{X}}\big(x_m\big) \;=\; (0, ..., 0, b_m, 0, ...).$$

Darüber hinaus setzen wir ergänzend $r := \big(\sum_{j=1}^{\tilde{m}_2-1} b_j, \sum_{j=2}^{\tilde{m}_2-1} b_j, ..., b_{\tilde{m}_2-1}, 0, ...\big)$ und bemerken $\sigma_{\mathcal{X}}\big(r\big) \;=\; (b_1, b_2, ..., b_{\tilde{m}_2-1}, 0, ...)$. Mit Hilfe von Lemma 2.2.2 ist nun leicht nachzuvollziehen, dass $r + \sum_{m\geq\tilde{m}_2} x_m$ in $\prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ gegen ein $d \in \prod_{j\in\mathbb{N}} S_j D_j$ mit $S_j := 1 + \sum_{i=j}^{\tilde{m}_{n+1}-1} C_i + \sum_{i=1}^{\tilde{m}_{n+1}-1} S_n^i$ für $\tilde{m}_{n-1} < j \leq \tilde{m}_n$ und $n \in \mathbb{N}$ konvergiert, für welches gilt

$$\sigma_{\mathcal{X}}(d) \;=\; (b_1, b_2, ..., b_{\tilde{m}_2-1}, 0, ...) + \sum_{m\geq\tilde{m}_2} (0, ..., 0, b_m, 0, ...) \;=\; (b_m)_{m\in\mathbb{N}}.$$

Somit ist nachgewiesen, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugten beschränkten Mengen in die von $\mathcal{D}$ erzeugten beschränkten Mengen liftet. ■

Um beispielsweise einen direkten Vergleich zu den Untersuchungen von D. Vogt in [25] zum „Zerfallen mit guten Konstanten“ zu ermöglichen, sei außerdem erwähnt:

Bemerkung 2.2.8 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2.7 und unter Verwendung der entsprechenden Notationen gibt es zu* $(C_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *also stets* $(S_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *mit*

$$\prod_{j\in\mathbb{N}} C_j B_j \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{j\in\mathbb{N}} S_j D_j\Big).$$

Bei genauerer Betrachtung des Beweises von Satz 2.2.7 stellt man darüber hinaus fest, dass hierbei jedes S_j *für* $\tilde{m}_{n-1} < j \leq \tilde{m}_n$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *ausschließlich von den vorgegebenen* $C_1, ..., C_{\tilde{m}_{n+1}-1}$ *abhängt, also unabhängig von den übrigen* $C_{\tilde{m}_{n+1}}, C_{\tilde{m}_{n+1}+1}, ...$ *gewählt werden kann.*

Als Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch kurz auf den Zusammenhang dieser Resultate mit bereits bekannten Kriterien für die Surjektivität von $\sigma_{\mathcal{X}}$ eingehen, ohne jedoch hierbei alle Details auszuführen. Nehmen wir dazu an, für ein gegebenes projektives Spektrum $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ lokal vollständiger Räume sei die von R. W. Braun und D. Vogt in [2] sowie von L. Frerick und J. Wengenroth in [6] beschriebene Bedingung

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathcal{B}(X_n)\,,\; m \geq n \quad \forall\, M \in \mathcal{B}(X_m)\,,\; k > m \quad \exists\, K \in \mathcal{B}(X_k)$$
$$M \;\subset\; N \;+\; K$$

erfüllt. Rekursiv lässt sich dann zu jeder Folge $\mathcal{B}$ beschränkter Mengen $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$ eine Folge $\tilde{\mathcal{B}}$ beschränkter Banachkugeln $\tilde{B}_n \in \mathcal{BD}(X_n)$ mit $B_n \subset \tilde{B}_n$ konstruieren, welche zugleich $(P_{\tilde{\mathcal{B}}})$ erfüllt. Mittels Theorem 2.2.6 ist damit schon ebenfalls (wie in [2] bzw. [6]) gezeigt, dass $\sigma_{\mathcal{X}}$ also beschränkte Mengen liftet und somit insbesondere surjektiv ist. Durch eine geeignete Verwendung von Lemma 2.2.5 lässt sich außerdem leicht zeigen, dass dieses Surjektivitätskriterium für projektive Spektren lokal vollständiger Räume äquivalent zu der Version von M. Langenbruch aus [7] (siehe auch [30] Theorem 3.3.14) ist, in welcher N von k abhängen darf.

Eine ähnliche (sogar etwas einfachere) rekursive Konstruktion geeigneter Folgen $\tilde{\mathcal{B}}$ beschränkter Banachkugeln jedoch diesmal unter Verwendung von $(\overline{P}_{\tilde{\mathcal{B}}})$ liefert darüber hinaus:

Satz 2.2.9 *Sei* $\mathcal{X} = (X_n, \varrho_{n+1}^n)$ *ein projektives Spektrum lokal vollständiger Räume. Gilt nun*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \geq n \quad \forall\, k > m \quad \exists\, N \in \mathcal{B}(X_n) \quad \forall\, M \in \mathcal{B}(X_m) \quad \exists\, K \in \mathcal{B}(X_k) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1$$
$$M \;\subset\; \varepsilon \cdot N \;+\; S \cdot K,$$

so existiert zu jeder Folge $\mathcal{B}$ *beschränkter Mengen* $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$ *eine Folge* $\mathcal{D}$ *beschränkter Mengen* $D_n \in \mathcal{B}(X_n)$*, sodass* $\sigma_{\mathcal{X}}$ *die von* $\mathcal{B}$ *erzeugten beschränkten Mengen in die von* $\mathcal{D}$ *erzeugten beschränkten Mengen liftet.*

Kapitel 3

Induktive Spektren

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit induktiven Spektren $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ lokalkonvexer Räume, also Folgen lokalkonvexer Räume Z_n zusammen mit stetigen linearen (nicht zwangsläufig injektiven) Abbildungen $\iota^n_{n+1} : Z_n \to Z_{n+1}$. Wir untersuchen für diese, wann die Abbildung

$$\theta_{\mathcal{Z}} \; : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n \;,\; (z_n) \mapsto (z_n - \iota^{n-1}_n z_{n-1}) \quad \text{mit} \quad \iota^0_1 z_0 := 0$$

bezüglich gewisser Topologien offen auf ihr Bild ist, was sich als interessant für verschiedene strukturtheoretische Betrachtungen erwiesen hat. Wir werden jedoch nicht ausführlich auf die Auswirkungen für diesen Bereich eingehen, sondern wollen hauptsächlich den engen Zusammenhang zwischen der Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$ und der Beschaffenheit des Bildes von $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ für das duale projektive Spektrum $\mathcal{Z}' := \big(Z'_n, (\iota^n_{n+1})'\big)$ herausarbeiten. Hierzu werden wir bespielsweise zeigen, dass sich die Resultate aus Kapitel 2 mittels derartiger Dualitätsbetrachtungen leicht in Aussagen übertragen lassen, wie sich $\theta_{\mathcal{Z}}$ auf Mengen verhält, welche bezüglich einer vorgegebenen schwachen Topologie bzw. einer bestimmten Teiltopologie der lokalkonvexen direkten Summe offen sind. Ebenso werden wir verdeutlichen, wie eng einige bereits bekannte Offenheitskriterien für $\theta_{\mathcal{Z}}$ mit ebenfalls bekannten Surjektivitätsbedingungen angewandt auf $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ verbunden sind.

Als lokalkonvexe direkte Summe der Z_n verstehen wir hierbei die direkte Summe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ ausgestattet mit der feinsten lokalkonvexen Topologie $T_\oplus$, für welche alle kanonischen Einbettungen $\nu_k : Z_k \hookrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ stetig bleiben. Diese besitzt eine Nullumgebungsbasis der Form

$$\big\{\, \Gamma\big(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(U_n)\big) \;:\; U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \,\big\}.$$

Daher ist leicht nachzuvollziehen, dass man den Dualraum von $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ auf kanonische Weise als $\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n\big)' = \prod_{n\in\mathbb{N}} Z'_n$ auffassen kann. Mittels dieser Identifikation folgt dann unmittelbar

$$(\theta_{\mathcal{Z}})' \;=\; \sigma_{\mathcal{Z}'}.$$

Als den induktiven Limes des Spektrums $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ bezeichnen wir den Quotienten

$$\mathrm{Ind}\mathcal{Z} \;:=\; \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n \,\big/\, H_0$$

mit $H_0 := \mathrm{span}\big(\{\, \nu_n(z) - \nu_{n+1}(\iota^n_{n+1} z) : n \in \mathbb{N} \text{ und } z \in Z_n \,\}\big)$. Er sei stets mit der entsprechenden Quotiententopologie ausgestattet, obwohl diese nicht zwangsläufig separiert sein wird. Dennoch ist leicht einzusehen, dass man damit den Dualraum von $\mathrm{Ind}\mathcal{Z}$ auf natürliche Weise als den Annulator von H_0 in $\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n\big)' = \prod_{n\in\mathbb{N}} Z'_n$ auffassen kann, also als

$$(\mathrm{Ind}\,\mathcal{Z})' \;=\; \big\{\, (x_n) \in \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} Z'_n \;:\; x_n(z) - x_{n+1}(\iota^n_{n+1} z) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, z \in Z_n \,\big\} \;=\; \mathrm{Proj}\,\mathcal{Z}'.$$

Wir werden in diesem Kapitel also die Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$ auf verschiedene Topologien beziehen. Um hierbei die Beschreibungen der jeweiligen Gegebenheiten möglichst kurz gestalten zu können, führen wir die folgende Schreibweise ein.

Definition 3.0.1 *Seien (X, t_X) und (Y, t_Y) lokalkonvexe Räume, welche nicht separiert sein müssen. Wir bezeichnen eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ als t_X-t_Y-offen, falls für jede bezüglich t_X offene Teilmenge M von X auch die Bildmenge $f(M)$ offen bezüglich $t_Y|_{\mathrm{Im}(\theta)}$ ist.*

Hierbei ist leicht nachzuvollziehen, dass eine solche lineare Abbildung $f : X \to Y$ offenbar genau dann t_X-t_Y-offen ist, wenn es zu jeder t_X-Nullumgebung U eine t_Y-Nullumgebung V gibt mit $V \cap \mathrm{Im}(f) \subset f(U)$.

3.1 Schwache Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$

Untersuchen wir nun zuerst, wie sich $\theta_{\mathcal{Z}}$ auf den durch einen gegebenen Unterraum des Dualraums von $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ erzeugten schwach-offenen Mengen verhält. An dieser Stelle sei bemerkt, dass wir dabei nicht unterscheiden werden, ob dieser Unterraum Punkte trennt, die entstehende schwache Topologie also separiert ist, oder nicht. Unser erster Satz verdeutlicht einige interessante topologische Zusammenhänge.

Satz 3.1.1 *Sei $\theta : (Z, T) \hookrightarrow (\tilde{Z}, \tilde{T})$ eine injektive stetige lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen und sei Y ein Unterraum von Z'. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*a*) *θ ist $s(Z, Y)$-$\tilde{T}$-offen.*

(*b*) *θ ist $s(Z, Y)$-$s(\tilde{Z}, \tilde{Z}')$-offen.*

(*c*) *Y ist ganz im Bild der dualen Abbildung $\theta' : \tilde{Z}' \to Z'$ enthalten.*

Beweis: Wir stellen zuerst fest, dass (a) äquivalent zur Stetigkeit der inversen Abbildung

$$\theta^{-1} : \mathrm{Im}(\theta) \to \big(Z, s(Z, Y)\big)$$

ist, wobei $\mathrm{Im}(\theta)$ mit $\tilde{T}|_{\mathrm{Im}(\theta)}$ ausgestattet sei, und damit dazu, dass für jedes $y \in Y$ gilt

$$(1) \qquad y \circ \theta^{-1} \in \big[\mathrm{Im}(\theta)\big]'.$$

Mittels des Satzes von Hahn-Banach ist dies wiederum gleichbedeutend zur Stetigkeit von

$$\theta^{-1} : \big(\,\mathrm{Im}(\theta)\,,\; s(\tilde{Z}, \tilde{Z}')|_{\mathrm{Im}(\theta)}\,\big) \to \big(Z, s(Z, Y)\big)$$

und somit zu (b). Ebenfalls mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach ist außerdem leicht einzusehen, dass (1) genau dann erfüllt wird, wenn ein $x \in \tilde{Z}'$ existiert mit $\theta' x = y$, womit schließlich auch schon die Äquivalenz zu (c) gezeigt ist. ■

Da für jedes induktive Spektrum $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ lokalkonvexer Räume wie bereits beschrieben $(\theta_{\mathcal{Z}})' = \sigma_{\mathcal{Z}'}$ erfüllt wird, stellt Satz 3.1.1 eine direkte Verbindung der Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$ zu unseren Untersuchungen aus Kapitel 2 angewandt auf $\mathcal{Z}' = \big(Z'_n, (\iota^n_{n+1})'\big)$ her. Aus diesem Grund wollen wir zeigen, dass man auch die entwickelten Kriterien wie aus Theorem 2.1.6, welche mit Inklusionen zwischen Vektorräumen und beschränkten Mengen arbeiten, auf ähnliche Weise in Bedingungen an $\mathcal{Z}$ übersetzen kann. Wir benötigen dazu jedoch noch das folgende Lemma, welches sich leicht durch Ausschreiben der einzelnen Definitionen beweisen lässt.

Lemma 3.1.2 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen, welche nicht separiert sein müssen. Für beliebige Teilmengen $M \subset X$ und $D \subset Y'$ gilt dann*

$$\big[f(M)\big]^\circ \;=\; (f')^{-1}(M^\circ),$$
$$\big[f'(D)\big]^\circ \;=\; f^{-1}(D^\circ).$$

Nehmen wir jetzt an, ein duales projektives Spektrum $\mathcal{Z}' = \big(Z_n', (\iota_{n+1}^n)'\big)$ erfülle bespielsweise das Kriterium aus Theorem 2.1.6 und hierbei ließen sich alle auftretenden beschränkten Mengen $A_n \subset Z_n'$ als Polaren von Nullumgebungen schreiben, so deutet unser nächstes Resultat bereits an, wie sich dies auf das ursprüngliche Spektrum $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota_{n+1}^n)$ übertragen lässt.

Satz 3.1.3 *Seien $Z_1 \xrightarrow{\iota_2^1} Z_2 \xrightarrow{\iota_3^2} Z_3$ stetige lineare Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen, wobei Z_3 nicht separiert sein muss. Für eine Nullumgebung $V \in \mathcal{U}_0(Z_1)$ und einen Unterraum $Y \subset Z_2'$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die von $s(Z_2, Y)$ auf V induzierte Spurtopologie stimmt mit der von $s(Z_3, Z_3')$ überein.*

(b) $$(\iota_2^1)'(Y) \;\subset\; V^\circ \;+\; (\iota_3^1)'(Z_3').$$

Beweis: Nehmen wir zuerst (a) als erfüllt an, was bedeutet, dass zu jedem endlichen $M \subset Y$ ein endliches $K = \{x_1, ..., x_p\} \subset Z_3'$ existiert mit $(\iota_3^1)^{-1}(K^\circ) \cap V \subset (\iota_2^1)^{-1}\big((2M)^\circ\big)$ also mit

$$(\iota_3^1)^{-1}(K^\circ) \;\cap\; \overline{V} \;\subset\; 2\,(\iota_3^1)^{-1}(K^\circ) \;\cap\; 2V \;\subset\; (\iota_2^1)^{-1}(M^\circ).$$

Nach Lemma 3.1.2 gilt hierbei $(\iota_2^1)^{-1}(M^\circ) = \big[(\iota_2^1)'(M)\big]^\circ$ und $(\iota_3^1)^{-1}(K^\circ) \cap \overline{V} = \big[(\iota_3^1)'(K) \cup V^\circ\big]^\circ$. Daher folgt mit Hilfe des Bipolarensatzes durch Polarisation der obigen Inklusion schon

$$(\iota_2^1)'(M) \subset \big[(\iota_2^1)'(M)\big]^{\circ\circ} \subset \big[(\iota_3^1)'(K) \cup V^\circ\big]^{\circ\circ} \subset (\iota_3^1)'(\Gamma K) + V^\circ,$$

da $(\iota_3^1)'(\Gamma K) = \{\sum_{j=1}^p \lambda_j (\iota_3^1)'(x_j) : (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ mit } \sum_{j=1}^p |\lambda_j| \leq 1\}$ als Bild einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{K}^p$ und V° als Polare einer Nullumgebung $s(Z_1', Z_1)$-kompakt sind und daher $(\iota_3^1)'(\Gamma K) + V^\circ$ insbesondere $s(Z_1', Z_1)$-abgeschlossen ist. Also gilt auch (b).

Ist andererseits (b) vorgegeben, so gibt es zu jedem endlichen $M \subset Y$ ein endliches $K \subset Z_3'$ mit

$$(\iota_2^1)'(M) \;\subset\; \frac{1}{2}V^\circ \;+\; \frac{1}{2}(\iota_3^1)'(K).$$

Durch Polarisation dieser Inklusion erhält man mit Hilfe von Lemma 3.1.2 nun leicht

$$(\iota_3^1)^{-1}(K^\circ) \;\cap\; V \;\subset\; (\iota_2^1)^{-1}(M^\circ).$$

Also ist ebenfalls (a) erfüllt. ■

Die folgende abkürzende Definition wird sich für die Übersichtlichkeit unserer anschließenden Ausführungen als äußerst nützlich erweisen.

Definition 3.1.4 *Für Teilmengen A und B in einem linearen Raum sei*

$$A \uplus B \;:=\; \Gamma\big(\,A \cup B\,\big).$$

Hierbei ist die suggerierte Nähe zu der Summe zweier Mengen beabsichtigt, da wir später an einigen Stellen ausnutzen werden, dass für endlich viele absolutkonvexe Teilmengen $A_1, ..., A_p$ eines linearen Raums offenbar $\biguplus_{j\leq p} A_j \subset \sum_{j\leq p} A_j \subset p \cdot \biguplus_{j\leq p} A_j$ gilt.

Betrachten wir nun den Fall, dass $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota_{n+1}^n)$ ein induktives Spektrum metrisierbarer Räume ist, jedes Z_n also eine abzählbare Basis $\{U_{N,n} : N \in \mathbb{N}\}$ absolutkonvexer Nullumgebungen hat. Wie leicht einzusehen ist, bildet damit jede Familie $\{U_{N,n}^\circ : N \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen bestehend aus Banachkugeln in dem entsprechenden Z_n', wodurch man $\mathcal{Z}' = \big(Z_n', (\iota_{n+1}^n)'\big)$ wie in Kapitel 2 (nach Lem. 2.1.2) beschrieben als projektives Spektrum von (LB)-Räumen auffassen kann. Ist weiter noch eine Folge von Unterräumen $Y_n \subset Z_n'$ gegeben, so führt uns Theorem 2.1.6 angewandt auf $\mathcal{Z}'$ unter Verwendung der Sätze 3.1.1 und 3.1.3 schon unmittelbar zu einer Charakterisierung der $s\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n, \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\big)$-$T_\oplus$-Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$.

Satz 3.1.5 *Sei $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota_{n+1}^n)$ ein induktives Spektrum metrisierbarer Räume und sei eine Folge von Unterräumen $Y_n \subset Z_n'$ gegeben. Dann ist $\theta_{\mathcal{Z}}$ genau dann $s\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n, \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\big)$-$T_\oplus$-offen, wenn es eine Folge von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ gibt, für welche zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{m} \geq n$ existiert, sodass für alle $m \geq \tilde{m}$ die von $s(Z_m, Y_m)$ auf $\biguplus_{j\leq n} \iota_n^j(V_j)$ induzierte Spurtopologie mit der von $s\big(\operatorname{Ind} \mathcal{Z}, (\operatorname{Ind} \mathcal{Z})'\big)$ übereinstimmt.*

Hierzu sei noch angemerkt, dass Satz 3.1.5 mit $Y_n := Z_n'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offenbar das klassische Resultat von V. S. Retakh [19] über schwache Azyklizität reproduziert, und dass man dieses auf oben beschriebene Weise mittels der Sätze 3.1.1 und 3.1.3 auch schon aus dem Surjektivitätskriterium von V. S. Retakh [19] und V. P. Palamodov [14] für $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ erhält.

Wir wollen weiter ausnutzen, dass sich auch Kriterien wie aus Theorem 2.1.7, die ausschließlich mit Inklusionen zwischen beschränkten Mengen arbeiten, unter ähnlichen Zusatzvoraussetzungen wie oben von $\mathcal{Z}'$ auf $\mathcal{Z}$ übertragen lassen:

Satz 3.1.6 *Für abgeschlossene absolutkonvexe Nullumgebungen U, V und W in einem lokalkonvexen Raum Z sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $$W \cap V \subset U.$$

(b) $$U^\circ \subset V^\circ \uplus W^\circ.$$

Beweis: Die Äquivalenz der Aussagen folgt mit Hilfe des Bipolarensatzes und der Tatsache

$$\big(V^\circ \uplus W^\circ\big)^\circ = W \cap V$$

unmittelbar durch entsprechende Polarisationen. Denn hierbei sind V° und W° und daher auch $V^\circ \uplus W^\circ = \{\lambda x + \mu y : x \in V^\circ, y \in W^\circ \text{ und } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ mit } \lambda + \mu = 1\}$ bereits $s(Z', Z)$-kompakt und somit insbesondere $s(Z', Z)$-abgeschlossen. ■

Darüber hinaus benötigen wir noch die folgende Vertauschbarkeit von Polarisation und Anwendung einer Funktion.

Lemma 3.1.7 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen, welche nicht separiert sein müssen. Für eine beliebige Teilmenge $M \subset Y$ und eine absolutkonvexe Nullumgebung U in Y gilt dann*

$$f'(M^\circ) \subset \big[f^{-1}(M)\big]^\circ,$$

$$f'(U^\circ) = \big[f^{-1}(U)\big]^\circ.$$

Beweis: Die Inklusion $f'(M^\circ) \subset \left[f^{-1}(M)\right]^\circ$ ist hierbei recht offensichtlich, da für $w \in M^\circ$ und $x \in f^{-1}(M)$ stets gilt $|f'w(x)| = |w(fx)| \leq 1$.

Bleibt also $\left[f^{-1}(U)\right]^\circ \subset f'(U^\circ)$ zu zeigen. Nehmen wir uns dazu ein beliebiges $v \in \left[f^{-1}(U)\right]^\circ$, so wird wegen $\mathrm{Ker}(f) \subset f^{-1}(U)$ und somit $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(v)$ durch

$$w \;:\; \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{K}\,,\; fx \mapsto vx$$

eine Linearform definiert, für welche $\sup_{y \in U \cap \mathrm{Im}(f)} |w(y)| \leq 1$ gilt. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es daher ein $\tilde{w} \in U^\circ \subset Y'$ mit $\tilde{w}|_{\mathrm{Im}(f)} = w$ also $f'(\tilde{w}) = \tilde{w} \circ f = v$. ■

Ausgehend von Theorem 2.1.7 gelangen wir daher recht einfach zu einer notwendigen Bedingung, welche ausschließlich mit Inklusionen zwischen Nullumgebungen arbeitet.

Satz 3.1.8 *Sei $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ ein induktives Spektrum metrisierbarer Räume und sei eine Folge von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ gegeben. Ist $\theta_\mathcal{Z}$ nun $s\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n, \prod_{n\in\mathbb{N}}[U_n^\circ]\big)$-$T_\oplus$-offen, so existiert eine Folge von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$, sodass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $k > n$ stets ein $S > 1$ gibt mit*

$$(\iota^n)^{-1}\Big(\biguplus_{j=n+1}^{k} \iota^j(V_j)\Big) \;\cap\; \biguplus_{j\leq n} \iota^j_n(V_j) \;\subset\; S \cdot U_n.$$

Beweis: Mit Hilfe von Satz 3.1.1 und Theorem 2.1.7 ist leicht einzusehen, dass eine Folge von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ existiert, sodass es zu allen $n \in \mathbb{N}$ und $k > n$ ein $S > 1$ gibt mit

$$U_n^\circ \;\subset\; S \cdot \Big(\bigcap_{j\leq n} \big[(\iota^j_n)'\big]^{-1}(V_j^\circ) \;+\; (\iota^n)'\big(\bigcap_{n<j\leq k} \big[(\iota^j)'\big]^{-1}(V_j^\circ)\big)\Big).$$

Unter Verwendung von Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.7 folgt daraus bereits

$$U_n^\circ \;\subset\; 2S \cdot \Bigg(\Big[\,\overline{\biguplus_{j\leq n} \iota^j_n(V_j)}\,\Big]^\circ \uplus \Big[\,\overline{(\iota^n)^{-1}\big(\biguplus_{n<j\leq k} \iota^j(V_j)\big)}\,\Big]^\circ \Bigg),$$

womit die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Satz 3.1.6 auch schon die gesuchte Bedingung erfüllt. ■

3.2 Starke Offenheit von $\theta_\mathcal{Z}$

Wir wollen nun für induktive Spektren $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ lokalkonvexer Räume untersuchen, wie sich $\theta_\mathcal{Z}$ auf Mengen verhält, welche bezüglich der durch eine gegebene Folge von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ erzeugten Teiltopologie der lokalkonvexen direkten Summe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ offen sind. Genauer sei dabei eine so entstehende Teiltopologie definiert als:

Definition 3.2.1 *Sei $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ ein induktives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{U}$ eine Folge von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$. Dann verstehen wir unter der von $\mathcal{U}$ erzeugten Topologie $T_\mathcal{U}$ die lokalkonvexe Topologie auf $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ definiert durch die Nullumgebunsbasis*

$$\Big\{ \biguplus_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(\varepsilon_n U_n) \;:\; (\varepsilon_n) \in (0,1)^\mathbb{N} \Big\},$$

obwohl diese nicht zwangsläufig separiert sein wird.

Man erkennt leicht, dass eine Folge von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ auf diese Weise dieselbe Topologie erzeugt wie die Folge der Abschlüsse $\overline{U}_n$. Des Weiteren ist jede entstehende Nullumgebung $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(\varepsilon_n \overline{U}_n) = \big\{(z_n) \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\varepsilon_n} \|z_n\|_{U_n} \le 1\big\}$ mit $(\varepsilon_n) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ in der lokalkonvexen direkten Summe als Urbild des Intervalls $[0,1]$ unter einer stetigen Halbnorm schon ebenfalls abgeschlossen.

Unser nächster Satz stellt eine direkte Verbindung zwischen der $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\oplus}$-Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$ und dem Liften der von der Folge der $U_n^\circ \in \mathcal{B}(Z_n')$ erzeugten beschränkter Mengen durch $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ (siehe Definition 2.2.1) her, da wir offenbar $\big[\biguplus_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(\varepsilon_n U_n)\big]^\circ = \prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\varepsilon_n} U_n^\circ$ haben.

Satz 3.2.2 *Sei $\theta : Z \hookrightarrow \tilde{Z}$ eine injektive stetige lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen. Für abgeschlossene Nullumgebungen $U \in \mathcal{U}_0(Z)$ und $V \in \mathcal{U}_0(\tilde{Z})$ sind dann äquivalent:*

(a) $$V \cap \mathrm{Im}(\theta) \subset \theta(U).$$

(b) $$U^\circ \subset \theta'(V^\circ).$$

Beweis: Da θ als injektiv vorausgesetzt wurde, ist (a) unmittelbar äquivalent zu

$$\theta^{-1}(V) \subset U$$

und nach Lemma 3.1.7 daher auch zu (b) durch entsprechende Polarisationen. ■

Indem wir diesen Zusammenhang ausnutzen, erhalten wir die folgenden Charakterisierungen für die $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\oplus}$-Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$.

Satz 3.2.3 *Sei $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota_{n+1}^n)$ ein induktives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{U}$ eine Folge von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$. Dann ist $\theta_{\mathcal{Z}}$ genau dann $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\oplus}$-offen, wenn es zu jeder Folge $(\varepsilon_n) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ eine Folge von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(\iota^n)^{-1}\Big(\biguplus_{j>n} \iota^j(V_j)\Big) \cap \biguplus_{j\le n} \iota_n^j(V_j) \subset \varepsilon_n U_n.$$

Ist $\mathcal{V}$ eine weitere Folge von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$, so ist $\theta_{\mathcal{Z}}$ genau dann $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\mathcal{V}}$-offen, wenn es zu $(\varepsilon_n) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ stets $(\delta_n) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ gibt, sodass wir für alle $n \in \mathbb{N}$ haben

$$(\iota^n)^{-1}\Big(\biguplus_{j>n} \iota^j(\delta_j V_j)\Big) \cap \biguplus_{j\le n} \iota_n^j(\delta_j V_j) \subset \varepsilon_n U_n.$$

Beweis: Wir beginnen damit zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Nullumgebungen $W_j \in \mathcal{U}_0(Z_j)$ mit $j > n$ die Menge $\biguplus_{j>n} \iota^j(W_j)$ eine Nullumgebung im induktiven Limes $\mathrm{Ind}\mathcal{Z}$ ist. Nehmen wir uns dazu für $j \le n$ ein beliebiges $z \in (\iota_{n+1}^j)^{-1}(W_{n+1}) =: W_j$, so folgt

$$\nu^j(z) - \nu^{n+1}(\iota_{n+1}^j z) = \sum\nolimits_{k=j}^{n} \Big(\nu^k(\iota_k^j z) - \nu^{k+1}(\iota_{k+1}^k \iota_k^j z)\Big) \in H_0.$$

Wegen $\iota^k = q \circ \nu^k$ für $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir daher $\iota^j(z) = \iota^{n+1}(\iota_{n+1}^j z) \in \iota^{n+1}(W_{n+1})$. Somit bildet

$$\biguplus_{j>n} \iota^j(W_j) = \biguplus_{j\in\mathbb{N}} \iota^j(W_j) = q\Big(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} \nu^j(W_j)\Big)$$

eine typische Nullumgebung im Quotienten $\mathrm{Ind}\mathcal{Z} = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} Z_j \,\big/\, H_0$.

Damit sind wir nun in der Lage nachzuweisen, dass $\theta_{\mathcal{Z}}$ schon $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\oplus}$-offen ist, falls die entsprechende Bedingung erfüllt ist. Wir können dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass alle vorgegebenen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ abgeschlossen sind und dass es zu $(\varepsilon_n) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ stets eine Folge abgeschlossener Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overline{(\iota^n)^{-1}\big(\biguplus_{j>n} \iota^j(V_j)\big)} \,\cap\, \overline{\biguplus_{j\le n} \iota_n^j(V_j)} \;\subset\; 2\,(\iota^n)^{-1}\big(\biguplus_{j>n} \iota^j(V_j)\big) \,\cap\, 2\biguplus_{j\le n} \iota_n^j(V_j) \;\subset\; \varepsilon_n U_n.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.1.2 sowie von Lemma 3.1.7 zusammen mit unserer einleitenden Feststellung vom Anfang dieses Beweises erhält man mittels Satz 3.1.6 daher

$$\frac{1}{\varepsilon_n} U_n^\circ \;\subset\; \bigcap_{j\le n} \big[(\iota_n^j)'\big]^{-1}(V_j^\circ) \;+\; (\iota^n)'\big(\bigcap_{j>n} \big[(\iota^j)'\big]^{-1}(V_j^\circ)\big).$$

Wie in Kapitel 2 im Anschluss an Satz 2.2.3 vorbereitet können wir hieraus bereits schließen

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \tfrac{1}{2^{n+1}\varepsilon_n} U_n^\circ \;\subset\; \sigma_{\mathcal{X}}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n^\circ\Big),$$

womit die $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\oplus}$-Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$ schon gemäß Satz 3.2.2 und seiner Vorbemerkung folgt.

Die Beweise der umgekehrten Implikation sowie der noch ausstehenden Äquivalenz wollen wir nunmehr nicht ausführen, da sie mittels der soeben verwendeten Resultate recht einfach bzw. analog zu führen sind. ■

Da sich diese Charakterisierungen bei der Betrachtung konkreter Spektren oft noch als recht unhandlich erweisen, ist man weiter an Kriterien interessiert, welche leichter zu verifizieren sind. Wir kommen daher zu der folgenden in gewisser Weise prädualen Version von Satz 2.2.4.

Satz 3.2.4 *Sei $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota_{n+1}^n)$ ein induktives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{U}$ eine Folge von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$. Gibt es eine Folge von Nullumgebungen $W_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ mit*

$$\forall\, n\in\mathbb{N} \quad \exists\, \tilde m \ge n \quad \forall\, m \ge \tilde m\,,\ C>1\,,\ \tilde k \ge m \quad \exists\, k_1,\dots,k_p > \tilde k\,,\ \delta>0$$
$$\delta\cdot\bigcap_{j\le p}(\iota_{k_j}^n)^{-1}(U_{k_j}) \,\cap\, C\cdot\biguplus_{j\le n}\iota_n^j(W_j) \;\subset\; (\iota_m^n)^{-1}(U_m),$$

so ist $\theta_{\mathcal{Z}}$ schon $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\oplus}$-offen. Erfüllt die Folge $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar

$$\forall\, n\in\mathbb{N} \quad \exists\, \tilde m \ge n \quad \forall\, m \ge \tilde m\,,\ \tilde k \ge m \quad \exists\, k_1,\dots,k_p > \tilde k \quad \forall\, C>1 \quad \exists\, \delta>0$$
$$\delta\cdot\bigcap_{j\le p}(\iota_{k_j}^n)^{-1}(U_{k_j}) \,\cap\, C\cdot\biguplus_{j\le n}\iota_n^j(W_j) \;\subset\; (\iota_m^n)^{-1}(U_m),$$

so existiert eine Folge $\mathcal{V}$ von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$, sodass $\theta_{\mathcal{Z}}$ bereits $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\mathcal{V}}$-offen ist.

Beweis: Wir bemerken zuerst, dass wir offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle gegebenen Nullumgebungen als abgeschlossen voraussetzen können. Nehmen wir weiter an, dass eine der beiden im Satz beschriebenen Bedingungen erfüllt sei, also mit der entsprechenden Vorgabe von Quantoren und Variablen gelte

$$\delta\cdot\bigcap_{j\le p}(\iota_{k_j}^n)^{-1}(U_{k_j}) \,\cap\, \frac{C}{2}\cdot\overline{\biguplus_{j\le n}\iota_n^j(W_j)} \;\subset\; \delta\cdot\bigcap_{j\le p}(\iota_{k_j}^n)^{-1}(U_{k_j}) \,\cap\, C\cdot\biguplus_{j\le n}\iota_n^j(W_j) \;\subset\; (\iota_m^n)^{-1}(U_m).$$

Da analog zur Argumentation aus dem Beweis zu Satz 3.1.6 die Menge $\biguplus_{j\leq p}(\iota_{k_j}^n)'(U_{k_j}^\circ)$ bereits $s(Z_n', Z_n)$-abgeschlossen ist und man wegen des Bipolarensatzes mit Lemma 3.1.7 daher hat $\big[\bigcap_{j\leq p}(\iota_{k_j}^n)^{-1}(U_{k_j})\big]^\circ = \biguplus_{j\leq p}(\iota_{k_j}^n)'(U_{k_j}^\circ) \subset \sum_{j\leq p}(\iota_{k_j}^n)'(U_{k_j}^\circ)$, folgt mit Satz 3.1.6 und Lemma 3.1.2

$$(\iota_m^n)'(U_m^\circ) \;\subset\; \frac{2}{C}\cdot\bigcap_{j\leq n}\big[(\iota_n^j)'\big]^{-1}(W_j^\circ) \;+\; \frac{1}{\delta}\cdot\sum_{j\leq p}(\iota_{k_j}^n)'(U_{k_j}^\circ).$$

Bezeichnen wir nun $B_j := U_j^\circ$ und $A_j := W_j^\circ$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und geben wir uns eine beliebige Folge $(C_n) \in (1,\infty)^{\mathbb{N}}$ vor. Der Beweis zu Satz 2.2.4 hat dann bereits gezeigt, dass man damit eine Folge beschränkter Mengen $D_n \in \mathcal{B}(Z_n')$ durch endliche Summen

$$D_n \;:=\; \sum_{j\leq p_n}(\iota_{k_j^n}^n)'(B_{k_j^n} + A_{k_j^n}) \;\subset\; 2p_n\cdot\biguplus_{j\leq p_n}(\iota_{k_j^n}^n)'(B_{k_j^n}\uplus A_{k_j^n})$$

mittels geeigneter natürlicher Zahlen $k_1^n,...,k_{p_n}^n \geq n$ konstruieren kann, sodass $(S_n) \in (1,\infty)^{\mathbb{N}}$ existiert mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_nB_n \subset \sigma_{\mathcal{Z}'}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} S_nD_n\big)$. Hierbei ließen sich alle $k_1^n,...,k_{p_n}^n$ unabhängig von der zugrunde liegenden Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen, falls schon die stärkere Reihenfolge der Quantoren in der Ausgangsbedingung vorlag. Aufgrund von Satz 3.2.2 bekommen wir daher unmittelbar $\biguplus_{n\in\mathbb{N}}\nu_n(\frac{1}{S_n}V_n)\cap\mathrm{Im}(\theta_{\mathcal{Z}}) \subset \theta_{\mathcal{Z}}\big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}}\nu_n(\frac{1}{C_n}U_n)\big)$, wenn wir die Folge der $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ durch

$$V_n \;:=\; \frac{1}{2p_n}\cdot\bigcap_{j\leq p_n}(\iota_{k_j^n}^n)^{-1}(U_{k_j^n}\cap V_{k_j^n})$$

definieren. In beiden Fällen folgt somit schließlich die entsprechende Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$. ■

Indem man den gerade vorgestellten Beweis an die Gegebenheiten von Theorem 2.2.6 anpasst, erhält man darüber hinaus die anschließenden hinreichenden Bedingungen, welche ohne die Verwendung absolutkonvexer Vereinigungen $\biguplus$ auskommen.

Satz 3.2.5 *Sei $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota_{n+1}^n)$ ein induktives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{U}$ eine Folge von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$. Ist nun folgende Bedingung erfüllt*

$$\forall\,\tilde{n}\in\mathbb{N}\quad \exists\,n\geq\tilde{n}\,,\;\tilde{m}\geq n\quad \forall\,m\geq\tilde{m}\,,\;C>1\quad \exists\,k>m\,,\;\delta>0$$
$$\delta\cdot(\iota_k^n)^{-1}(U_k)\;\cap\;C\cdot U_n\;\subset\;(\iota_m^n)^{-1}(U_m),$$

so ist $\theta_{\mathcal{Z}}$ schon $T_{\mathcal{U}}$-$T_\oplus$-offen. Gilt sogar

$$\forall\,\tilde{n}\in\mathbb{N}\quad \exists\,n\geq\tilde{n}\,,\;\tilde{m}\geq n\quad \forall\,m\geq\tilde{m}\quad \exists\,k>m\quad \forall\,C>1\quad \exists\,\delta>0$$
$$\delta\cdot(\iota_k^n)^{-1}(U_k)\;\cap\;C\cdot U_n\;\subset\;(\iota_m^n)^{-1}(U_m),$$

dann existiert eine Folge $\mathcal{V}$ von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$, sodass $\theta_{\mathcal{Z}}$ bereits $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\mathcal{V}}$-offen ist.

Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 2 kann man ebenfalls angeben, wie hierbei die Folge $\mathcal{V}$ vom Aufbau der zugrunde liegenden Bedingung abhängt. Nehmen wir dazu an, unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.5 sei die stärkere Bedingung erfüllt, so kann man mit einer vollständigen Induktion sehr ähnlich zu der im Beweis von Theorem 2.2.6 nachweisen:

$$\forall\,\tilde{n}\in\mathbb{N}\quad \exists\,n\geq\tilde{n}\,,\;\tilde{m}\geq n\quad \forall\,m\geq\tilde{m}\,,\;\tilde{k}\geq m\quad \exists\,k>\tilde{k}\quad \forall\,C>1\quad \exists\,\delta>0$$
$$\delta\cdot(\iota_k^n)^{-1}(U_k)\;\cap\;C\cdot U_n\;\subset\;(\iota_m^n)^{-1}(U_m).$$

Damit lässt sich wieder rekursiv eine streng monoton steigende Folge $(\tilde m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruieren mit

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad &\forall\, n\in\mathbb{N}\,,\ \tilde m_{n+1}\le m<\tilde m_{n+2}\quad \exists\, \tilde m_{n+2}\le k<\tilde m_{n+3}\quad \forall\, C>1\quad \exists\,\delta>0\\ &\delta\cdot(\iota_k^n)^{-1}(U_k)\ \cap\ C\cdot U_{\tilde m_n}\ \subset\ (\iota_m^n)^{-1}(U_m).\end{aligned}$$

Satz 2.2.7 und Bemerkung 2.2.8 zusammengefasst ergeben mittels der bereits bewährten Dualitätsbetrachtungen aus den Sätzen 3.2.2 und 3.1.6 sowie aus Lemma 3.1.7 nun schon unmittelbar die folgende Beschreibung einer entsprechenden Folge $\mathcal{V}$.

Satz 3.2.6 *Sei $\mathcal{Z}=(Z_n,\iota_{n+1}^n)$ ein induktives Spektrum lokalkonvexer Räume und sei $\mathcal{U}$ eine Folge von Nullumgebungen $U_n\in\mathcal{U}_0(Z_n)$. Ist nun $(\tilde m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen, welche die obige Bedingung* (3.1) *erfüllt, und definieren wir*

$$V_k\ :=\ \bigcap_{i=k}^{\tilde m_{n+2}-1}(\iota_i^k)^{-1}(U_i)\qquad \textit{falls}\qquad \tilde m_{n-1}<k\le\tilde m_n$$

für jedes $n\in\mathbb{N}$ und mit $\tilde m_0:=0$, so gibt es zu $(\varepsilon_k)\in(0,1)^{\mathbb{N}}$ stets $(\delta_k)\in(0,1)^{\mathbb{N}}$ mit

$$\biguplus_{k\in\mathbb{N}}\nu_k(\delta_kV_k)\ \cap\ \operatorname{Im}(\theta_{\mathcal{Z}})\ \subset\ \theta_{\mathcal{Z}}\Big(\biguplus_{k\in\mathbb{N}}\nu_k(\varepsilon_kU_k)\Big)$$

und hierbei hängt jedes δ_k für $\tilde m_{n-1}<k\le\tilde m_n$ und $n\in\mathbb{N}$ ausschließlich von den vorgegebenen $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{\tilde m_{n+1}-1}$ ab, kann also unabhängig von den übrigen $\varepsilon_{\tilde m_{n+1}},\varepsilon_{\tilde m_{n+1}+1},\dots$ gewählt werden.

Wir hoffen, im Verlauf dieses Kapitels ist bereits deutlich geworden, dass sich auch noch andere schon bekannte Bedingungen für die Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$ mit Hilfe der vorgestellten Methoden auf ebenfalls bekannte Surjektivitätskriterien für $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ zurückführen lassen. Nehmen wir beispielsweise an, ein induktives Spektrum $\mathcal{Z}=(Z_n,\iota_{n+1}^n)$ lokalkonvexer Räume erfülle das von J. Wengenroth in [28] untersuchte Kriterium

$$\begin{gathered}\forall\, n\in\mathbb{N}\quad \exists\, V\in\mathcal{U}_0(Z_n)\,,\ m\ge n\quad \forall\, U\in\mathcal{U}_0(Z_m)\,,\ k>m\quad \exists\, W\in\mathcal{U}_0(Z_k)\\ (\iota_k^n)^{-1}(W)\ \cap\ V\ \subset\ (\iota_m^n)^{-1}(U)\end{gathered}$$

(wie hier in der ursprünglichen Form oder mit der leicht abgewandelten Reihenfolge der Quantoren von M. Langenbruch). Gemäß Satz 3.1.6 und Lemma 3.1.7 können wir dies auf das duale projektive Spektrum $\mathcal{Z}':=\big(Z_n',(\iota_{n+1}^n)'\big)$ übertragen und erhalten eine Bedingung sehr ähnlich zu der aus den abschließenden Ausführungen des vorigen Kapitels, welche sich jedoch ausschließlich auf Polaren von Nullumgebungen bezieht. Analysiert man nun die entsprechenden Beobachtungen von R. W. Braun und D. Vogt aus [2] bzw. von L. Frerick und J. Wengenroth aus [6] oder den hierzu in Kapitel 2 unternommenen Exkurs, so stellt man (ähnlich wie im Beweis zu Satz 3.2.4) fest, dass damit die Polare jeder typischen Nullumgebung $\biguplus_{n\in\mathbb{N}}\nu_n(U_n)$ aus $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}Z_n$ durch $\sigma_{\mathcal{Z}'}$ in die Polare einer ebensolchen Nullumgebung $\biguplus_{n\in\mathbb{N}}\nu_n(V_n)$ geliftet wird. Auf das ursprüngliche induktive Spektrum zurück übersetzt liefert dies ebenfalls (wie schon Proposition 2.5 in [28]) die $T_\oplus$-$T_\oplus$-Offenheit von $\theta_{\mathcal{Z}}$.

Weiter ist leicht nachzuvollziehen, dass man den Teil des Beweises, welcher sich hierbei auf der dualen Seite also dem projektiven Spektrum abspielt, mittels derselben Methoden auch Schritt für Schritt auf die induktive Seite zu einem direkten Beweis überführen kann. Die Übersetzung der Ausführungen von Braun/Vogt bzw. Frerick/Wengenroth wird auf diese Weise jedoch strukturell den Originalbeweis von J. Wengenroth aus [28] reproduzieren.

Indem wir die soeben unternommenen Dualitätsbetrachtungen den Gegebenheiten von Satz 2.2.9 anpassen, erhalten wir darüber hinaus das folgende Resultat.

Satz 3.2.7 *Sei $\mathcal{Z} = (Z_n, \iota^n_{n+1})$ ein induktives Spektrum lokalkonvexer Räume. Gilt nun*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \geq n \quad \forall\, k > m \quad \exists\, V \in \mathcal{U}_0(Z_n) \quad \forall\, U \in \mathcal{U}_0(Z_m) \quad \exists\, W \in \mathcal{U}_0(Z_k) \quad \forall\, C > 1 \quad \exists\, \delta > 0$$
$$\delta \cdot (\iota^n_k)^{-1}(W) \;\cap\; C \cdot V \;\subset\; (\iota^n_m)^{-1}(U),$$

so existiert zu jeder Folge $\mathcal{U}$ von Nullumgebungen $U_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$ eine Folge $\mathcal{V}$ von Nullumgebungen $V_n \in \mathcal{U}_0(Z_n)$, sodass $\theta_{\mathcal{Z}}$ schon $T_{\mathcal{U}}$-$T_{\mathcal{V}}$-offen ist.

Abschließend wollen wir noch erwähnen, dass sich in unseren Ausführungen die Rollen der Kapitel 2 und 3 nicht ohne Weiteres vertauschen lassen. Genauer gesagt besteht vordergründig betrachtet die Möglichkeit, wir hätten unsere Beobachtungen zuerst für induktive Spektren direkt nachgewiesen und die Untersuchung projektiver Spektren dann auf eine entsprechende Dualität zurückgeführt. Diese Vorgehensweise hätte jedoch nicht zu so allgemeinen Ergebnissen geführt, wie wir sie hier erzielt haben. Bei genauerer Betrachtung der Sätze 3.1.6 und 3.2.2 beispielsweise ist nämlich schnell einzusehen, dass man ohne zusätzliche Voraussetzungen keine entsprechenden analogen Aussagen bekommen wird. Somit gibt es nicht nur einen ästhetischen sondern auch einen historischen Hintergrund dafür, dass zu allen zitierten Resultaten sowohl für projektive als auch für induktive Spektren direkte Beweise existieren, da die meisten von uns betrachteten Techniken zuerst für den induktiven Fall entwickelt wurden.

Kapitel 4

Auswertbare Bedingungen

In diesem Kapitel stellen wir auswertbare Bedingungen an gradierte Frécheträume E und F vor, welche beschreiben, wann eine ganze Klasse von kurzen exakten Sequenzen zerfällt, wie es in den Theoremen 1.3.2 und 1.3.3 untersucht wurde. Wir erhalten zuerst eine notwendige Bedingung, welche sowohl Halbnormen von E als auch Dualnormen von F verwendet. Um ebenfalls hinreichende Ergebnisse dieses Typs zu erzielen, setzen wir bestimmte zusätzliche Eigenschaften für E und F voraus, welche als unsere drei Standardvoraussetzungen zusammengefasst werden. Im zweiten Abschnitt nehmen wir an, dass E oder F ein Potenzreihenraum sei. Unter diesen Vorgaben bekommen wir Bedingungen, welche sich ausschließlich auf den jeweiligen anderen Raum beziehen. Abschließend wird der Fall ausgewertet, dass E und F Potenzreihenräume sind.

4.1 Drei Standardvoraussetzungen

Wir wollen also untersuchen, ob für gradierte Frécheträume E und F eine oder mehrere der Aussagen aus Theorem 1.3.2 bzw. 1.3.3 über die Existenz von Inversen, Extensions und Liftings zutreffen. Wir werden jedoch alle Resultate auf die Beschaffenheit des Bildes von σ bzw. von $\hat{\sigma}$ zurückführen und der Kürze halber auch hierüber formulieren. Die Abbildungen σ und $\hat{\sigma}$ seien dazu im Weiteren stets wie in Kapitel 1 definiert.
Wie die erzielten notwendigen Bedingungen mittels dieser Formulierung zu verstehen sind, scheint recht offensichtlich. Denn in beiden Theoremen wird die Aussage über σ von allen anderen impliziert. Bei der Betrachtung hinreichender Bedingungen werden wir immer davon ausgehen, dass einer der folgenden Fälle $(i), (ii)$ und (iii) erfüllt sei. Da wir diese simultan behandeln wollen, bezeichnen wir sie als unsere **Standardvoraussetzungen**:

(i) Seien E und F gradierte Fréchet-Hilberträume.

(ii) Sei $E = \lambda^1(\mathcal{A})$ ein Kötheraum und sei F ein beliebiger gradierter Fréchetraum.

(iii) Sei $F = \lambda^\infty(\mathcal{B})$ ein Kötheraum und sei E ein beliebiger gradierter Fréchetraum.

Hierbei bezeichnen wir eine Matrix $\mathcal{A} = (a_{j,n})_{j,n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen als eine **Köthematrix**, falls $0 \leq a_{j,n} \leq a_{j,n+1}$ für alle $j, n \in \mathbb{N}$, falls es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_{j,n} > 0$ ist, und falls zu $n \in \mathbb{N}$ stets ein $m \geq n$ existiert mit $\inf_{j\in\mathbb{N}} a_{j,n}/a_{j,m} = 0$, wobei man $0/0 := 0$ setze. Damit sei für jedes feste $p \in [1, \infty]$ der zugehörige **Kötheraum** definiert als

$$\lambda^p(\mathcal{A}) \;:=\; \Big\{\, x = (x_j) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;:\; \|x\|_n^{\lambda^p(\mathcal{A})} := \big\|\, (a_{j,n} \cdot x_j)_{j\in\mathbb{N}} \,\big\|_{l_p} < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \,\Big\}.$$

Dieser wird auf kanonische Weise zu einem gradierten Fréchetraum.

Wir werden nun darlegen, dass in Theorem 1.3.2 bzw. in Theorem 1.3.3 die Aussage über $\hat{\sigma}$ unter jeder der Standardvoraussetzungen bereits alle anderen Aussagen impliziert, wenn man im Fall (i) auch alle weiteren Räume als gradierte Fréchet-Hilberträume annimmt. Um dies so einheitlich ausdrücken zu können, bezeichnen wir in den Fällen (i) und (ii) das projektive Spektrum $(\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1}) := (F_n, f^n_{n+1})$, womit ebenfalls $\hat{\sigma} = \sigma$ folgt. Im Fall (iii) sei $(\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ wie im Anschluss unter (4.2) definiert.

Die Behauptung ist für (i) direkt einzusehen. Nehmen wir andererseits (ii) an also $E = \lambda^1(\mathcal{A})$, so erhält man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mittels $N^{\mathcal{A}}_n := \{j \in \mathbb{N} : a_{j,n} > 0\}$ den lokalen Banachraum

$$(4.1) \qquad E_n \;=\; l_1(N^{\mathcal{A}}_n, a_n) \;:=\; \left\{ x = (x_j) \in \mathbb{K}^{N^{\mathcal{A}}_n} \;:\; \|x\|_{l_1(N^{\mathcal{A}}_n, a_n)} := \textstyle\sum_{j \in N^{\mathcal{A}}_n} a_{j,n}\,|x_j| < \infty \right\}$$

mit der verbindenden Abbildung $e^n_{n+1} : E_{n+1} \to E_n, (x_j)_{j \in N^{\mathcal{A}}_{n+1}} \mapsto (x_j)_{j \in N^{\mathcal{A}}_n}$. Es reicht somit zu beweisen, dass $E_n = l_1(N^{\mathcal{A}}_n, a_n)$ projektiv ist. Seien dazu Banachräume Y und Z mit Einheitskugeln U_Y bzw. U_Z sowie ein surjektives $q \in L(Y, Z)$ gegeben. Nach dem Satz von der offenen Abbildung gibt es dann ein $S \in \mathbb{R}$ mit $U_Z \subset S \cdot q(U_Y)$. Ist darüber hinaus $T \in L(E_n, Z)$ mit $T(U_{E_n}) \subset C \cdot U_Z$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}$, so besitzt T eine Darstellung

$$T : E_n = l_1(N^{\mathcal{A}}_n, a_n) \to Z \;,\; (x_j)_{j \in N^{\mathcal{A}}_n} \mapsto \textstyle\sum_{j \in N^{\mathcal{A}}_n} x_j z_j,$$

wobei jedes $z_j \in a_{j,n}\, C \cdot U_Z$ ist. Nach Obigem finden wir hierzu $\tilde{z}_j \in a_{j,n}\, S\, C \cdot U_Y$ mit $q\tilde{z}_j = z_j$. Damit lässt sich jetzt ein $\tilde{T} \in L(E_n, Y)$ definieren durch $\tilde{T} : (x_j)_{j \in N^{\mathcal{A}}_n} \mapsto \sum_{j \in N^{\mathcal{A}}_n} x_j \tilde{z}_j$, welches bereits $T = q \circ \tilde{T}$ und $\tilde{T}(U_{E_n}) \subset S\, C \cdot U_Y$ erfüllt.

Gelte abschließend (iii), so kann man $F = \lambda^\infty(\mathcal{B})$ schreiben als $F = \operatorname{Proj}_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ mittels

$$(4.2) \qquad \mathcal{F}_n \;:=\; l_\infty(N^{\mathcal{B}}_n, b_n) \;:=\; \left\{ x = (x_j) \in \mathbb{K}^{N^{\mathcal{B}}_n} \;:\; \|x\|_{l_\infty(N^{\mathcal{B}}_n, b_n)} := \sup_{j \in N^{\mathcal{B}}_n} b_{j,n}\,|x_j| < \infty \right\}$$

und $\xi^n_{n+1} : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n, (x_j)_{j \in N^{\mathcal{B}}_{n+1}} \mapsto (x_j)_{j \in N^{\mathcal{B}}_n}$. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{F}_n = l_\infty(N^{\mathcal{B}}_n, b_n)$ injektiv ist. Geben wir uns dazu einen Banachraum Y mit der Einheitskugel U_Y und einen Unterraum $X \subset Y$ mit der Einheitskugel $U_X = U_Y \cap X$ vor. Sei außerdem $T \in L(X, \mathcal{F}_n)$ mit $T(U_X) \subset C \cdot U_{\mathcal{F}_n}$ für ein passendes $C \in \mathbb{R}$, dann ist T von der Gestalt

$$T : X \to \mathcal{F}_n = l_\infty(N^{\mathcal{B}}_n, b_n) \;,\; x \mapsto (T_j x)_{j \in N^{\mathcal{B}}_n},$$

mit jedem $T_j \in C\, b^{-1}_{j,n} \cdot (U_X)^\circ$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es hierzu $\tilde{T}_j \in C\, b^{-1}_{j,n} \cdot (U_Y)^\circ$ mit $\tilde{T}_j|_X = T_j$. Wir können somit ein $\tilde{T} \in L(Y, \mathcal{F}_n)$ durch $\tilde{T} : y \mapsto (\tilde{T}_j y)_{j \in N^{\mathcal{B}}_n}$ definieren, für welches schließlich $\tilde{T}|_X = T$ sowie $\tilde{T}(U_Y) \subset C \cdot U_{\mathcal{F}_n}$ gilt.

Ergänzend zu oben werden wir als unsere **starken Standardvoraussetzungen** bezeichnen, dass einer der Fälle $(i), (ii)$ und (iii) erfüllt sei und mittels der dadurch gegebenen Gradierung auf E zusätzlich alle $e^n_{n+1} : E_{n+1} \to E_n$ injektiv seien.

Betrachten wir jetzt zuerst die Situation, in der dies eine echte Einschränkung bedeuten würde, dass also einer der Fälle $(i), (ii)$ und (iii) gilt aber E dabei keine Gradierung zulässt, für welche alle $e^n_{n+1} : E_{n+1} \to E_n$ injektiv wären. Das erste Theorem dieses Kapitels wird unter diesen Vorgaben bereits vollständig charakterisieren, wann eine ganze Klasse kurzer exakter Sequenzen zerfällt. Wir benötigt dazu jedoch noch die folgende Definition und das anschließende Lemma.

Definition 4.1.1 *Man nennt einen Fréchetraum F abzählbar normiert bzw. eine Quojektion, falls er isomorph zu dem projektiven Limes eines abzählbaren Spektrums aus Banachräumen $\mathcal{F}_n$ und injektiven bzw. surjektiven Verbindungsabbildungen $\xi^n_{n+1} : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ ist.*

Ist F ein gradierter Fréchetraum, so lassen sich diese Eigenschaften wie folgt charakterisieren.

Lemma 4.1.2 *Für einen gradierten Fréchetraum F gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *F ist genau dann abzählbar normiert, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass es zu jedem $M \geq N$ ein $K \geq M$ gibt mit $\operatorname{Ker}(f_K^M) = \operatorname{Ker}(f_K^N)$.*

(b) *F ist genau dann eine Quojektion, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ gibt, sodass für jedes $k \geq m$ gilt $\operatorname{Im}(f_m^n) = \operatorname{Im}(f_k^n)$.*

Beweis: Gehen wir zuerst davon aus, die in (a) beschriebene Bedingung sei erfüllt, so lässt sich leicht eine streng monoton steigende Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruieren, sodass für jedes $n \geq 2$ gilt $\operatorname{Ker}(f_{M_{n+1}}^{M_n}) = \operatorname{Ker}(f_{M_{n+1}}^{M_{n-1}})$. Weiter erhalten wir kanonische Abbildungen

$$(1) \qquad F_{M_{n-1}} \xleftarrow{i_{n-1}} F_{M_n} \big/ \operatorname{Ker}(f_{M_n}^{M_{n-1}}) \xleftarrow{q_n} F_{M_n} \xleftarrow{i_n} F_{M_{n+1}} \big/ \operatorname{Ker}(f_{M_{n+1}}^{M_n}) \xleftarrow{q_{n+1}} F_{M_{n+1}}$$

mit $i_{n-1} \circ q_n = f_{M_n}^{M_{n-1}}$. Für $\mathcal{F}_n := F_{M_n} \big/ \operatorname{Ker}(f_{M_n}^{M_{n-1}})$ und $\xi_{n+1}^n := q_n \circ i_n$ folgt damit unmittelbar $F = \operatorname{Proj}_{n\geq 2}(\mathcal{F}_n, \xi_{n+1}^n)$. Darüber hinaus lässt sich wegen $i_{n-1} \circ \xi_{n+1}^n \circ q_{n+1} = f_{M_{n+1}}^{M_{n-1}}$ und $\operatorname{Ker}(f_{M_{n+1}}^{M_n}) = \operatorname{Ker}(f_{M_{n+1}}^{M_{n-1}})$ bereits nachvollziehen, dass $i_{n-1} \circ \xi_{n+1}^n$ und somit insbesondere auch ξ_{n+1}^n injektiv sein müssen.

Sei nun andererseits F abzählbar normiert vorgegeben mit $F = \operatorname{Proj}(\mathcal{F}_n, \xi_{n+1}^n)$, sodass alle $\xi_{n+1}^n : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ injektiv sind. Wir können hierbei ohne Einschränkung davon ausgehen, dass jedes kanonische $\xi^n : F \to \mathcal{F}_n$ dichtes Bild besitzt, da sich anderenfalls $\mathcal{F}_n$ durch den Abschluss des Bildes von ξ^n ersetzen lässt. Wegen der Äquivalenz der entsprechenden Gradierungen auf F, gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ und zu jedem $M \geq N$ weitere $k \in \mathbb{N}$ und $K \geq M$, sodass Fortsetzungen

$$\mathcal{F}_1 \xleftarrow{\overline{f}^1} F_N \xleftarrow{f_M^N} F_M \xleftarrow{\underline{f}^M} \mathcal{F}_k \xleftarrow{\overline{f}^k} F_K$$

der Identität von F entstehen, welche daher $\overline{f}^1 \circ f_M^N \circ \underline{f}^M = \xi_k^1$ und $\underline{f}^M \circ \overline{f}^k = f_K^M$ erfüllen. Weil mit ξ_k^1 offenbar auch $f_M^N \circ \underline{f}^M$ und $\underline{f}^M$ injektiv sein müssen, bekommen wir damit schon $\operatorname{Ker}(f_K^M) = \operatorname{Ker}(\overline{f}^k) = \operatorname{Ker}(f_K^N)$.

Nehmen wir jetzt an, die in (b) beschriebene Bedingung sei erfüllt, so lässt sich leicht eine streng monoton steigende Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruieren, sodass für jedes $n \geq 2$ gilt $\operatorname{Im}(f_{M_n}^{M_{n-1}}) = \operatorname{Im}(f_{M_{n+1}}^{M_{n-1}})$. Unter Verwendung der zu (1) gehörenden Konstruktion haben wir wieder $F = \operatorname{Proj}_{n\geq 2}(\mathcal{F}_n, \xi_{n+1}^n)$. Mittels der Surjektivität der Quotientenabbildungen q_n und der Injektivität der i_n lässt sich jedoch diesmal leicht nachvollziehen, dass alle ξ_n surjektiv sein müssen.

Sei abschließend F als Quojektion vorgegeben also als $F = \operatorname{Proj}(\mathcal{F}_n, \xi_{n+1}^n)$ mit surjektiven $\xi_{n+1}^n : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ und daher mit surjektiven $\xi^n : F \to \mathcal{F}_n$. Analog zu oben gibt es dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $M \in \mathbb{N}$ und ein $m \geq n$ sowie für jedes $k \geq m$ ein $K \geq M$, sodass Fortsetzungen

$$F_n \xleftarrow{\underline{f}^n} \mathcal{F}_M \xleftarrow{\overline{f}^M} F_m \xleftarrow{f_k^m} F_k \xleftarrow{\underline{f}^k} \mathcal{F}_K$$

von Id_F entstehen mit $\underline{f}^n \circ \overline{f}^M = f_m^n$ und $\overline{f}^M \circ f_k^m \circ \underline{f}^k = \xi_K^M$. Da hierbei mit ξ_K^M auch $\overline{f}^M \circ f_k^m$ und $\overline{f}^M$ surjektiv sind, bekommen wir somit $\operatorname{Im}(f_m^n) = \operatorname{Im}(\underline{f}^n) = \operatorname{Im}(f_k^n)$. ■

Mit Hilfe der Konstruktion eines projektiven Spektrums mit injektiven Verbindungsabbildungen vom Anfang des gerade geführten Beweises ist außerdem leicht einzusehen:

Bemerkung 4.1.3 *Zu jedem echten, abzählbar normierten Fréchet-Hilbertraum E gibt es eine Gradierung bestehend aus Hilbert-Halbnormen, sodass alle $e^n_{n+1} : E_{n+1} \to E_n$ injektiv sind.*

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass man für beliebige gradierte Fréchetäume E und F sowie ein vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ offenbar bekommt $L(E, F_n) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_k, F_n)$ und dass hierbei jedes $\ddot{L}(E_k, F_n)$ auf kanonische Weise zu einem Banachraum wird mit der Einheitskugel

$$B_{k,n} := \{ T \in L(E, F_n) : T(U^E_k) \subset U_{F_n} \}.$$

Außerdem ist $L(E, F_n)$ vollständig und somit insbesondere lokal vollständig. Mit Hilfe des Faktorisierungssatzes von Grothendieck lässt sich daher leicht nachvollziehen, dass die Familie $\{B_{k,n} : k \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen in $L(E, F_n)$ bildet.
Ist speziell $F = \mathrm{Proj}_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{F}_n, \xi^n_{n+1})$ der projektive Limes von Banachräumen, so erhält man für $L(E, \mathcal{F}_n)$ mittels der Banachkugeln $\hat{B}_{k,n} := \{T \in L(E, \mathcal{F}_n) : T(U^E_k) \subset U_{\mathcal{F}_n}\}$ völlig analoge Aussagen. Damit sind wir nun in der Lage zu zeigen:

Theorem 4.1.4 *Gilt eine der Standardvoraussetzungen und ist E nicht abzählbar normiert, so sind die folgenden Aussagen bereits äquivalent:*

(*a*) *F ist eine Quojektion.*

(*b*) *Es gibt ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt.*

(*c*) *Zu jedem $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n) \big)$.*

Beweis: Weisen wir zuerst die Implikation (*b*) $\Rightarrow$ (*a*) nach. Nehmen wir dazu an, (*b*) sei erfüllt und es sei ein entsprechendes $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben. Mit Hilfe von Theorem 2.1.7 zusammen mit unseren Ausführungen vor Theorem 4.1.4 ist dann leicht einzusehen, dass bereits gilt

$$(1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n\,,\; k \geq m \quad \exists\, K \geq \max(\phi(m+1), N)\,,\; S > 1$$

$$(2) \qquad \varrho^n_m(B_{\phi(m+1),m}) \;\subset\; S \cdot \big(\, B_{N,n} \;+\; \varrho^n_k(B_{K,k})\,\big).$$

Wir zeigen nun weiter, dass aus (2) ohne Änderung der vorgegeben Zahlen für jedes $x \in E$ folgt

$$(3) \qquad \|x\|^E_{\phi(m+1)} \cdot f^n_m(U_{F_m}) \;\subset\; S \cdot \big(\, \|x\|^E_N \cdot U_{F_n} \;+\; \|x\|^E_K \cdot f^n_k(U_{F_k})\,\big).$$

Nehmen wir uns dazu ein festes $x \in E$, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\nu \in E'$ mit $\nu x = \|x\|^E_{\phi(m+1)}$ und $|\nu\tilde{x}| \leq \|\tilde{x}\|^E_{\phi(m+1)}$ für alle $\tilde{x} \in E$. Ist außerdem $z \in U_{F_m}$, dann erhält man ein $u \in B_{\phi(m+1),m}$ durch $u\tilde{x} := \nu\tilde{x}\cdot z$. Zerlegen wir jetzt u gemäß (2) in $\varrho^n_m(u) = v + \varrho^n_k(w)$, so gilt insbesondere $\|x\|^E_{\phi(m+1)} \cdot f^n_m(z) = \varrho^n_m(u)x = vx + \varrho^n_k(w)x \in S \cdot \|x\|^E_N \cdot U_{F_n} + S \cdot \|x\|^E_K \cdot f^n_k(U_{F_k})$.
Da das Bild von $e^K : E \to E_K$ dicht liegt und die skalare Multiplikation auf jedem lokalen Banachraum von F stetig ist, lässt sich mittels (3) sogar für jedes $x \in E_K$ direkt nachvollziehen

$$(4) \qquad \|e^{\phi(m+1)}_K x\|_{E_{\phi(m+1)}} \cdot f^n_m(U_{F_m}) \;\subset\; S \cdot \big(\, \|e^N_K x\|_{E_N} \cdot U_{F_n} \;+\; \|x\|_{E_K} \cdot f^n_k(U_{F_k})\,\big).$$

Unter Verwendung von Lemma 4.1.2 können wir damit beweisen, dass F eine Quojektion sein muss, falls E nicht abzählbar normiert ist, es also zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $M \geq N$ gibt, sodass für jedes $K \geq M$ gilt $\mathrm{Ker}(e^M_K) \neq \mathrm{Ker}(e^N_K)$. Sei dazu ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben, so wählen wir zuerst $N \in \mathbb{N}$ aus (1), dazu $M \geq N$ wie gerade und des Weiteren ein $m \geq n$ mit $\phi(m+1) \geq M$.

Zu jedem $k \geq m$ gibt es dann $K \geq \max(\phi(m+1), N)$ und $S > 1$ gemäß (1) sowie ein $x \in E_K$ mit $e_K^N x = 0$ aber $e_K^M x \neq 0$ also $e_K^{\phi(m+1)} x \neq 0$. Für dieses ergibt (4) daher

$$\|e_K^{\phi(m+1)} x\|_{E_{\phi(m+1)}} \cdot f_m^n(U_{F_m}) \ \subset \ S \cdot \|x\|_{E_K} \cdot f_k^n(U_{F_k})$$

und somit insbesondere $\mathrm{Im}(f_m^n) = \mathrm{Im}(f_k^n)$.

Beweisen wir nun die Implikation $(a) \Rightarrow (c)$. Sei dazu F eine Quojektion, so gibt es nach Lemma 4.1.2 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$, sodass für alle $k > m$ gilt

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{Im}(f_m^n) \ = \ \mathrm{Im}(f_k^n).$$

Hierbei ist (5) äquivalent zur Surjektivität von $q_m \circ f_k^m$ für die kanonischen Abbildungen

$$F_n \xleftarrow{\ i_n\ } F_m \big/ \mathrm{Ker}(f_m^n) \xleftarrow{\ q_m\ } F_m \xleftarrow{\ f_k^m\ } F_k$$

mit $i_n \circ q_m = f_m^n$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung existiert also ein $S > 1$ mit

$$\text{(6)} \qquad q_m(U_{F_m}) \ \subset \ S \cdot q_m \circ f_k^m(U_{F_k}).$$

Wie mit Hilfe von Satz 2.2.9 recht leicht einzusehen ist, genügt es jetzt im Folgenden zu zeigen, dass man mittels (6) unter jeder der Standardvoraussetzungen für alle $M \in \mathbb{N}$ bekommt

$$\hat{\varrho}_m^n(\hat{B}_{M,m}) \ \subset \ S \cdot \hat{\varrho}_k^n(\hat{B}_{M,k}).$$

Nehmen wir dafür zuerst Fall (i) an, dann ist insbesondere F_k ein Hilbertraum. Gemäß (6) gibt es daher zu $q_m \circ f_k^m$ eine Rechtsinverse $R_k^m \in L(F_m/\mathrm{Ker}(f_m^n), F_k)$ mit $R_k^m \circ q_m(U_{F_m}) \subset S \cdot U_{F_k}$. Sei nun ein $u \in B_{M,m} = \hat{B}_{M,m}$ vorgegeben, so bekommt man für $w := R_k^m \circ q_m \circ u \in S \cdot B_{M,k}$ schon $\hat{\varrho}_m^n(u) = i_n \circ q_m \circ f_k^m \circ R_k^m \circ q_m \circ u = \hat{\varrho}_k^n(w)$.

Gelte andererseits (ii), so haben wir in der Einleitung dieses Kapitels unter (4.1) bereits gesehen, dass $E_M = l_1(N_M^{\mathcal{A}}, a_M)$ projektiv ist und speziell dass hier zu jedem $T \in L(E_M, F_m/\mathrm{Ker}(f_m^n))$ mit $T(U_{E_M}) \subset q_m(U_{F_m})$ ein $\tilde{T} \in L(E_M, F_k)$ existiert mit $T = q_m \circ f_k^m \circ \tilde{T}$ und $\tilde{T}(U_{E_M}) \subset S \cdot (U_{F_k})$. Ist jetzt $u \in B_{M,m} = \hat{B}_{M,m}$, dann sei $\tilde{u} \in L(E_M, F_m)$ mit $u = \tilde{u} \circ e^M$. Wählen wir damit zu $T := q_m \circ \tilde{u}$ ein $\tilde{T} \in L(E_M, F_k)$ wie gerade beschrieben, so zeigt man für $w := \tilde{T} \circ e^M \in S \cdot B_{M,k}$ leicht $\hat{\varrho}_m^n(u) = i_n \circ T \circ e^M = i_n \circ q_m \circ f_k^m \circ \tilde{T} \circ e^M = \hat{\varrho}_k^n(w)$.

Betrachten wir abschließend Standardvoraussetzung (iii), so haben wir $F_\nu \subset \mathcal{F}_\nu := l_\infty(N_\nu^{\mathcal{B}}, b_\nu)$ und $f_{\nu+1}^\nu : F_\nu \to F_{\nu+1}, (x_j)_{j \in N_{\nu+1}^{\mathcal{B}}} \mapsto (x_j)_{j \in N_\nu^{\mathcal{B}}}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Aus (6) folgt des Weiteren direkt $f_m^n(U_{F_m}) \subset S \cdot f_k^n(U_{F_k})$. Da für $j \in N_n^{\mathcal{B}}$ insbesondere $(b_{j,m}^{-1} \cdot \delta_{j,\nu})_{\nu \in N_m^{\mathcal{B}}} \in U_{F_m}$ ist, lässt sich somit recht einfach $b_{j,k} \cdot b_{j,m}^{-1} \leq S$ einsehen. Ein beliebiges $u \in \hat{B}_{M,m}$ besitzt außerdem die Gestalt

$$u : E \to \mathcal{F}_m = l_\infty(N_m^{\mathcal{B}}, b_m) \ , \ z \mapsto (u_j z)_{j \in N_m^{\mathcal{B}}},$$

wobei jedes $u_j \in b_{j,m}^{-1} \cdot \left(U_M^E\right)^\circ$ ist. Definieren wir damit weitere

$$w_j := u_j \in S\, b_{j,k}^{-1} \cdot \left(U_M^E\right)^\circ \ \text{ für } \ j \in N_n^{\mathcal{B}} \quad \text{ und } \quad w_j := 0 \ \text{ für } \ j \in N_k^{\mathcal{B}} \setminus N_n^{\mathcal{B}},$$

dann bekommt man schließlich ein $w \in S \cdot \hat{B}_{M,k}$ durch $w : z \mapsto (w_j z)_{j \in N_k^{\mathcal{B}}}$, welches offenbar $\hat{\varrho}_m^n(u) = \xi_m^n \circ u = \xi_k^n \circ w = \hat{\varrho}_k^n(w)$ erfüllt. ■

Wir haben hierbei die Standardvoraussetzungen ausschließlich für den Nachweis der Implikation $(a) \Rightarrow (c)$ verwendet und stellen daher fest:

Bemerkung 4.1.5 *Die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ aus Theorem 4.1.4 gilt auch für beliebige gradierte Fréchetträume E und F, falls E nicht abzählbar normiert ist.*

Kommen wir jetzt zu einer notwendigen Bedingung dafür, dass eine ganze Klasse kurzer exakter Sequenzen zu gradierten Fréchträumen E und F zerfällt. Wir definieren dazu für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$F_n^* \;:=\; \{\, y \in F' \;:\; \|y\|_n^{*F} := \sup_{z \in U_n^F} |yz| < \infty \,\}.$$

Hierbei nennt man $\|.\|_n^{*F}$ die n-te Dualnorm von F und $(F_n^*, \|.\|_n^{*F})$ bildet einen zu F_n' isometrisch isomorphen Banachraum. Des Weiteren gilt $\|.\|_{n+1}^{*F} \leq C \cdot \|.\|_n^{*F}$ mittels eines geeigneten $C > 1$.

Satz 4.1.6 *Seien E und F gradierte Fréchetträume. Ist nun ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ gegeben, für welches $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ enthalten ist, so folgt*

$$\begin{gathered}\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n\,,\; k \geq m \quad \exists\, K \geq N\,,\; S > 1 \qquad \forall\, x \in E\,,\; y \in F_n^* \\ \|x\|_{\phi(m+1)}^E \cdot \|y\|_m^{*F} \;\leq\; S \cdot \big(\, \|x\|_N^E \cdot \|y\|_n^{*F} \;+\; \|x\|_K^E \cdot \|y\|_k^{*F} \,\big).\end{gathered}$$

Beweis: Wir stellen zuerst fest, dass ausschließlich die Voraussetzungen von Satz 4.1.6 verwendet wurden, um im Beweis der Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ aus Theorem 4.1.4 bereits zu zeigen

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n\,,\; k \geq m \quad \exists\, K \geq N\,,\; S > 1 \qquad \forall\, x \in E \tag{1}$$

$$\|x\|_{\phi(m+1)}^E \cdot f_m^n(U_{F_m}) \;\subset\; S \cdot \big(\, \|x\|_N^E \cdot U_{F_n} \;+\; \|x\|_K^E \cdot f_k^n(U_{F_k}) \,\big). \tag{2}$$

Sei nun weiter noch ein beliebiges $\tilde{y} \in F_n'$ gegeben, so lässt sich leicht nachvollziehen, dass man ausgehend von (2) ohne Änderung der Vorgaben aus (1) erhält

$$\|x\|_{\phi(m+1)}^E \cdot \|\tilde{y} \circ f_m^n\|_{F_m'} \;\leq\; S \cdot \big(\, \|x\|_N^E \cdot \|\tilde{y}\|_{F_n'} \;+\; \|x\|_K^E \cdot \|\tilde{y} \circ f_k^n\|_{F_k'} \,\big),$$

da für alle natürlichen $\nu \geq n$ und reellen $a \geq 0$ offenbar $a \cdot \|\tilde{y} \circ f_\nu^n\|_{F_\nu'} = \sup\{|\tilde{y}z| : z \in a \cdot f_\nu^n(U_{F_\nu})\}$ ist. Somit folgt schließlich auch schon unsere Behauptung, weil es zu jedem $y \in F_n^*$ ein $\tilde{y} \in F_n'$ gibt mit $y = \tilde{y} \circ f^n$ und da hierbei für jedes $\nu \geq n$ gilt $\|y\|_\nu^{*F} \;=\; \|\tilde{y} \circ f_\nu^n\|_{F_\nu'}$. ■

Für die Betrachtung hinreichender Bedingungen werden wir im Weiteren stets davon ausgehen, dass eine der starken Standardvoraussetzungen erfüllt sei. Denn die Situation, in der dies eine echte Einschränkung zu den reinen Fällen $(i), (ii)$ und (iii) bedeuten würde, lässt sich mit Hilfe von Theorem 4.1.4 bereits umfassend behandeln.

Satz 4.1.7 *Gelte eine der starken Standardvoraussetzungen und sei ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ vorgegeben. Ist nun folgende Bedingung erfüllt*

$$\begin{gathered}\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n}\,,\; \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\; \varepsilon > 0 \quad \exists\, k > m\,,\; S > 1 \qquad \forall\, x \in E\,,\; y \in F_n^* \\ \|x\|_{\phi(m+1)}^E \cdot \|y\|_m^{*F} \;\leq\; \varepsilon \cdot \|x\|_{\phi(n+1)}^E \cdot \|y\|_n^{*F} \;+\; S \cdot \|x\|_{\phi(k+1)}^E \cdot \|y\|_k^{*F},\end{gathered}$$

so liegt $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n)$ ganz im Bild von $\hat{\sigma}$. Gilt sogar

$$\begin{gathered}\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n}\,,\; \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m} \quad \exists\, k > m \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1 \qquad \forall\, x \in E\,,\; y \in F_n^* \\ \|x\|_{\phi(m+1)}^E \cdot \|y\|_m^{*F} \;\leq\; \varepsilon \cdot \|x\|_{\phi(n+1)}^E \cdot \|y\|_n^{*F} \;+\; S \cdot \|x\|_{\phi(k+1)}^E \cdot \|y\|_k^{*F},\end{gathered}$$

dann existiert ein $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n) \big)$.

Beweis: Wir führen unsere Behauptung auf Theorem 2.2.6 zusammen mit der entsprechenden Definition 2.2.1 des Liftens beschränkter Mengen zurück. Wie damit leicht einzusehen ist, genügt es nun zu zeigen, dass man für beliebige $n \leq m \leq k$ und $N \leq M \leq K$ sowie $\varepsilon, S > 0$ aus

$$(1) \qquad \|x\|_M^E \cdot \|y\|_m^{*F} \;\leq\; \varepsilon \cdot \|x\|_N^E \cdot \|y\|_n^{*F} \;+\; S \cdot \|x\|_K^E \cdot \|y\|_k^{*F} \qquad \forall\, x \in E\,,\; y \in F_n^*$$

unter jeder der drei starken Standardvoraussetzungen bereits bekommt

$$(2) \qquad \hat{\varrho}_m^n(\hat{B}_{M,m}) \;\subset\; 3\,\varepsilon \cdot \hat{B}_{N,n} \;+\; 2\,S \cdot \hat{\varrho}_k^n(\hat{B}_{K,k}).$$

Wir stellen dazu fest, dass mit (1) wegen des dichten Bildes von $e^K : E \to E_K$ und, da für $y \in F_n'$ und $\nu \geq n$ offenbar $\|y \circ f^n\|_\nu^{*F} = \|y \circ f_\nu^n\|_{F_\nu'}$ ist, für alle $x \in E_K$ und $y \in F_n'$ gilt

$$(3) \qquad \|e_K^M x\|_{E_M} \cdot \|y \circ f_m^n\|_{F_m'} \leq \varepsilon \cdot \|e_K^N x\|_{E_N} \cdot \|y\|_{F_n'} + S \cdot \|x\|_{E_K} \cdot \|y \circ f_k^n\|_{F_k'}.$$

Nehmen wir erst an, die starke Standardvoraussetzung (i) sei erfüllt, E und F seien also gradierte Fréchet-Hilberträume, sodass alle Verbindungsabbildungen $e_{n+1}^n : E_{n+1} \to E_n$ injektiv sind. Mittels (3) lässt sich dann direkt [3] Theorem 3.3 verwenden. Dieses besagt, dass es zu jedem $\tilde{u} \in U_{L(E_M,F_m)}$ stets $\tilde{v} \in \varepsilon \cdot U_{L(E_N,F_n)}$ und $\tilde{w} \in S \cdot U_{L(E_K,F_k)}$ gibt mit

$$f_m^n \circ \tilde{u} \circ e_K^M \;=\; \tilde{v} \circ e_K^N \;+\; f_k^n \circ \tilde{w},$$

wobei $U_{L(E_\mu,F_\nu)} = \{T \in L(E_\mu, F_\nu) : T(U_{E_\mu}) \subset U_{F_\nu}\}$ die Einheitskugel von $L(E_\mu, F_\nu)$ sei für alle $\mu, \nu \in \mathbb{N}$. Um (2) einzusehen, geben wir ein $u \in B_{M,m} = \hat{B}_{M,m}$ vor und wählen $\tilde{u} \in U_{L(E_M,F_m)}$ mit $u = \tilde{u} \circ e^M$. Zerlegt man dieses nämlich auf die soeben beschriebene Weise, so gilt für $v := \tilde{v} \circ e^N \in \varepsilon \cdot B_{N,n}$ und $w := \tilde{w} \circ e^K \in S \cdot B_{K,k}$ schon $\hat{\varrho}_m^n(u) = v + \hat{\varrho}_k^n(w)$.

Gelte andererseits die starke Standardvoraussetzung (ii), so ist $E = \lambda^1(\mathcal{A})$ mit $a_{j,\nu} > 0$ für alle $j, \nu \in \mathbb{N}$. Indem man (3) auf die Einheitsvektoren $x = (\delta_{j,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ anwendet, erhält man daher

$$\big(a_{j,M}\big)^{-1} \cdot \big[(f_m^n)'\big]^{-1}\big(U_{F_m'}\big) \;\supset\; \big(2\,\varepsilon\, a_{j,N}\big)^{-1} \cdot U_{F_n'} \;\cap\; \big(2\,S\, a_{j,K}\big)^{-1} \cdot \big[(f_k^n)'\big]^{-1}\big(U_{F_k'}\big).$$

Mit Hilfe des Bipolarensatzes sowie von Lemma 3.1.2 folgt damit weiter

$$\begin{aligned} a_{j,M} \cdot f_m^n(U_{F_m}) \;&\subset\; \overline{2\,\varepsilon\, a_{j,N} \cdot U_{F_n} \;\uplus\; 2\,S\, a_{j,K} \cdot f_k^n(U_{F_k})} \\ &\subset\; 3\,\varepsilon\, a_{j,N} \cdot U_{F_n} \;+\; 2\,S\, a_{j,K} \cdot f_k^n(U_{F_k}). \end{aligned}$$

Geben wir uns nun ein beliebiges $u \in B_{M,m} = \hat{B}_{M,m}$ vor, dann besitzt dieses die Gestalt

$$u : E = \lambda^1(\mathcal{A}) \to F_m\,,\; (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mapsto \textstyle\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j u_j,$$

wobei jedes $u_j \in a_{j,M} \cdot U_{F_m}$ sein muss. Nach Obigem findet man dazu $v_j \in 3\,\varepsilon\, a_{j,N} \cdot U_{F_n}$ und $w_j \in 2\,S\, a_{j,K} \cdot U_{F_k}$ mit $f_m^n(u_j) = v_j + f_k^n(w_j)$. Die Abbildungen $v \in 3\,\varepsilon \cdot B_{N,n}$ und $w \in 2\,S \cdot B_{K,k}$, welche durch $v : (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j v_j$ bzw. $w : (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j w_j$ definiert seien, liefern somit $\hat{\varrho}_m^n(u) = v + \hat{\varrho}_k^n(w)$.

Setzen wir abschließend (iii) voraus also $F = \lambda^\infty(\mathcal{B})$, so lässt sich die Ungleichung aus (1) für alle $j \in N_n^{\mathcal{B}}$ auf $y \in F_n^*$ mit $y : (z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \mapsto z_j$ anwenden und wir erhalten leicht

$$b_{j,m} \cdot U_M^E \;\subset\; (2\,\varepsilon)^{-1} b_{j,n} \cdot U_N^E \;\cap\; (2\,S)^{-1} b_{j,k} \cdot U_K^E.$$

Unter Verwendung von Satz 3.1.6 bekommt man daher unmittelbar

$$(4) \qquad b_{j,m}^{-1} \cdot \big(U_M^E\big)^\circ \;\subset\; 2\,\varepsilon\, b_{j,n}^{-1} \cdot \big(U_N^E\big)^\circ \;+\; 2\,S\, b_{j,k}^{-1} \cdot \big(U_K^E\big)^\circ.$$

Nehmen wir uns jetzt ein beliebiges $u \in \hat{B}_{M,m}$, dann ist dieses von der Form

$$u : E \to \mathcal{F}_m = l_\infty(N_m^{\mathcal{B}}, b_m)\ ,\ x \mapsto (u_j x)_{j \in N_m^{\mathcal{B}}}$$

mit allen $u_j \in b_{j,m}^{-1} \cdot \big(U_M^E\big)^\circ$. Für $j \in N_n^{\mathcal{B}}$ kann man also u_j nach (4) zerlegen in $u_j = v_j + w_j$. Die Abbildungen $v \in 2\varepsilon \cdot \hat{B}_{N,n}$ und $w \in 2S \cdot \hat{B}_{K,k}$ definiert als $v : x \mapsto (v_j x)_{j \in N_n^{\mathcal{B}}}$ bzw. $w : x \mapsto (w_j x)_{j \in N_k^{\mathcal{B}}}$ mit $w_j := 0$ für $j \in N_k^{\mathcal{B}} \setminus N_n^{\mathcal{B}}$ erfüllen schließlich $\hat{\varrho}_m^n(u) = v + \hat{\varrho}_k^n(w)$. ■

Wendet man diesen Beweis nunmehr auf Satz 2.2.7 an, so erhält man außerdem:

Satz 4.1.8 *Gelte eine der starken Standardvoraussetzungen und sei ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ vorgegeben. Ist nun $(\tilde{m}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen mit*

$$\begin{gathered} \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \tilde{m}_{n+1} \le m < \tilde{m}_{n+2} \quad \exists\, \tilde{m}_{n+2} \le k < \tilde{m}_{n+3} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, S > 1 \\ \|x\|_{\phi(m+1)}^E \cdot \|y\|_m^{*F} \ \le\ \varepsilon \cdot \|x\|_{\phi(\tilde{m}_n+1)}^E \cdot \|y\|_{\tilde{m}_n}^{*F} \ +\ S \cdot \|x\|_{\phi(k+1)}^E \cdot \|y\|_k^{*F}, \end{gathered}$$

und definieren wir eine Funktion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\psi(\,j\,)\ :=\ \phi(\,\tilde{m}_{n+2}\,) \qquad \textit{falls} \qquad \tilde{m}_{n-1} < j \le \tilde{m}_n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und mit $\tilde{m}_0 := 0$, so folgt $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.

Das nächste Resultat legt insbesondere dar, dass man unter unseren starken Standardvoraussetzungen aus der Surjektivität von σ bereits bekommt, dass sich für jede Klasse von kurzen exakten Sequenzen zu E und F auch die Stetigkeitscharakteristiken der entsprechenden Inversen, Extensions und Liftings einheitlich abschätzen lassen.

Satz 4.1.9 *Unter jeder starken Standardvoraussetzung sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) σ ist surjektiv.

(b) Es gilt: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \ge n \quad \forall k \ge m \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall M \ge N \quad \exists K \ge M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists S > 1$
$$\|x\|_M^E \cdot \|y\|_m^{*F} \ \le\ \varepsilon \cdot \|x\|_N^E \cdot \|y\|_n^{*F} \ +\ S \cdot \|x\|_K^E \cdot \|y\|_k^{*F} \qquad \forall\, x \in E\,,\ y \in F_n^*.$$

(c) Zu jedem $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n \in \mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.

Beweis: Die Implikation $(b) \Rightarrow (c)$ lässt sich mittels derselben Vorgehensweise wie bei den Sätzen 4.1.7 und 4.1.8 direkt auf Satz 2.2.9 zurückführen.

Den Nachweis der Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ wollen wir nur grob skizzieren, da er von D. Vogt und J. Wengenroth bereits implizit erbracht wurde. So hat Vogt in [23] für Proposition 2.3 gezeigt, dass beliebige gradierte Fréchetträume E und F, für welche σ surjektiv ist, die dort beschriebene Bedingung (S_2^*) erfüllen, woraus unmittelbar (S_3^*) sowie $(S_3^\bullet)$ in [30] folgen (vgl. auch [30] Beweis zu Proposition 5.2.2). Eine Analyse des Beweises zu Lemma 5.2.4 aus [30], welches eine Variante von [23] Lemma 3.3 darstellt, ergibt schließlich schnell, dass $(S_3^\bullet)$ hier schon (b) impliziert, da E als gradierter Fréchetraum definitionsgemäß nicht normierbar ist. ■

Als offene Frage, welche wir in dieser Arbeit nicht klären können, bleibt, ob die Aussagen (a) und (c) aus Satz 4.1.9 auch für beliebige gradierte Fréchetträume E und F äquivalent sind, wenn man $(\mathcal{F}_n, \xi_{n+1}^n) := (F_n, f_{n+1}^n)$ setzt.

4.2 E oder F Potenzreihenraum

Untersuchen wir nun den Fall, dass einer der beiden Räume E und F ein Potenzreihenraum ist. Dabei seien zu einer Folge $\alpha = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\alpha \nearrow \infty$ und einem $p \in [1,\infty]$ der zugehörige **Potenzreihenraum endlichen Typs** für $r = 0$ und der **unendlichen Typs** für $r = \infty$ als

$$\Lambda_r^p(\alpha) \; := \; \big\{\, x = (x_j) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;:\; |x|_{t\alpha}^p := \big\|\,(\exp[t\alpha_j]\cdot x_j\,)_{j\in\mathbb{N}}\,\big\|_{l_p} < \infty \quad \forall\, t < r\,\big\}$$

definiert. Eine solche Folge α nennt man in diesem Zusammenhang eine **Exponentenfolge**. Darüber hinaus sei jeder einzelne Potenzreihenraum $\Lambda_r^p(\alpha)$ mit dem festen Fundamentalsystem von Halbnormen $\|.\|_n^{\Lambda_r^p(\alpha)} := |.|_{r_n\alpha}^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausgestattet, wobei wir setzen

$$r_n := -1/n \quad \text{falls} \quad r = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad r_n := n \quad \text{falls} \quad r = \infty.$$

Auf diese Weise wird $\Lambda_r^p(\alpha)$ offenbar zu einem gradierten Fréchetraum, da $\Lambda_r^p(\alpha) = \lambda^p(\mathcal{A})$ ist für eine geeignete Köthematrix $\mathcal{A}$. Mittels $j_\alpha := \min\{j \in \mathbb{N} : \alpha_j > 0\}$ gilt weiter:

Lemma 4.2.1 *Seien eine Exponentenfolge α mit $d := \sup_{j\geq j_\alpha} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} < \infty$ und $p \in [1,\infty]$ gegeben. Dann gibt es zu $t_1 < t_2 < t_3$ und $C, S > 1$ stets ein $S' > 1$, sodass alle $z_1, z_2, z_3 \geq 0$ mit*

$$z_2 \cdot |x|_{t_2\alpha}^p \;\leq\; S\cdot\big(\,z_3\cdot|x|_{t_1\alpha}^p \;+\; z_1\cdot|x|_{t_3\alpha}^p\big) \qquad \forall\, x \in \Lambda_\infty^p(\alpha)$$

und $z_2 \leq C\cdot z_3$ bereits ebenfalls die folgende Bedingung erfüllen

$$(z_2)^{1+d\,\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}} \;\leq\; S'\cdot z_1\cdot(z_3)^{d\,\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}}.$$

Beweis: Seien $t_1 < t_2 < t_3$ und $C > 1$ sowie $S > C\cdot\exp[(t_2-t_1)\alpha_{j_\alpha}]$ gegeben, so setze $\gamma := d\,\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}$. Nehmen wir nun $z_1, z_2, z_3 \geq 0$ mit $z_2 \leq C\cdot z_3$ und $z_2\cdot|x|_{t_2\alpha}^p \leq S\,(\,z_3\cdot|x|_{t_1\alpha}^p + z_1\cdot|x|_{t_3\alpha}^p\,)$ für alle $x \in \Lambda_\infty^p(\alpha)$, dann ergibt Einsetzen der Einheitsvektoren $x = (\delta_{j+1,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ für jedes $j \geq j_\alpha$

$$\begin{aligned} z_2 \;&\leq\; S\cdot\big(\,z_3\cdot\exp[(t_1-t_2)\alpha_{j+1}] \;+\; z_1\cdot\exp[(t_3-t_2)\alpha_{j+1}]\,\big)\\ &\leq\; S\cdot\big(\,z_3\cdot\tfrac{1}{\exp[(t_2-t_1)\alpha_{j+1}]} \;+\; z_1\cdot\big(\exp[(t_2-t_1)\alpha_j]\big)^{\gamma}\,\big). \end{aligned}$$

Da es zu $\xi \geq \exp[(t_2-t_1)\alpha_{j_\alpha}]$ ein $j \geq j_\alpha$ gibt mit $\exp[(t_2-t_1)\alpha_j] \leq \xi < \exp[(t_2-t_1)\alpha_{j+1}]$, folgt

$$z_2 \;\leq\; S\cdot\big(\,z_3\cdot\tfrac{1}{\xi} \;+\; z_1\cdot\xi^{\gamma}\,\big)$$

für alle $\xi > 0$. Setzt man hier $\xi := (\frac{z_3}{z_1\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}$ ein (Es sei erwähnt, dass die rechte Seite der Ungleichung aufgefasst als Funktion in $\xi > 0$ an dieser Stelle ihr Minimum annimmt.), so entsteht

$$z_2 \;\leq\; S\,(\gamma^{\frac{1}{1+\gamma}} + \gamma^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}})\cdot z_1^{\frac{1}{1+\gamma}}\cdot z_3^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}.$$

Mittels $S' := S^{1+\gamma}(\gamma^{\frac{1}{1+\gamma}} + \gamma^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}})^{1+\gamma}$ gilt somit ebenfalls die gewünschte Ungleichung. ■

Wir bezeichnen eine Exponentenfolge α und der Kürze halber auch jeden zugehörigen Potenzreihenraum $\Lambda_r^p(\alpha)$ als **shift-stabil**, falls $\sup_{j\geq j_\alpha} \alpha_{j+1}/\alpha_j < \infty$ ist. Wie man leicht nachprüft, besitzen die meisten Potenzreihenraum-Darstellungen von Beispielen aus der Analysis diese Eigenschaft. Für diese erhalten wir unter Verwendung von Lemma 4.2.1 im Folgenden interessante notwendige Bedingungen dafür, dass eine ganze Klasse kurzer exakter Sequenzen zerfällt.

Satz 4.2.2 *Sei $E = \Lambda_0^p(\alpha)$ shift-stabil mit $p \in [1, \infty]$ und sei F ein gradierter Fréchetraum. Ist nun $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt, so folgt*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, D > 1\,,\, \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m}\,,\, k \geq m \quad \exists\, S > 1 \qquad \forall\, y \in F_n^*$$
$$\big(\, \|y\|_m^{*F}\,\big)^{1+\frac{D}{\phi(m+1)}} \;\leq\; S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \big(\, \|y\|_n^{*F}\,\big)^{\frac{D}{\phi(m+1)}}.$$

Beweis: Wir stellen zuerst fest, dass man mit Hilfe von Satz 4.1.6 unmittelbar bekommt

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n\,,\, k \geq m \quad \exists\, K \geq N\,,\, S > 1$$
$$(1)\quad |x|^p_{-\frac{1}{\phi(m+1)}\alpha} \cdot \|y\|_m^{*F} \;\leq\; S \cdot \big(\, |x|^p_{-\frac{1}{N}\alpha} \cdot \|y\|_n^{*F} \;+\; |x|^p_{-\frac{1}{K}\alpha} \cdot \|y\|_k^{*F}\,\big) \qquad \forall\, x \in \Lambda_0^p(\alpha)\,,\, y \in F_n^*.$$

Sei nun ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so wählen wir $N \in \mathbb{N}$ wie gerade und setzen $D := 2\,d\,N$ mit $d := \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}$. Weiter wählen wir ein $\tilde{m} \geq n$ mit $\phi(\tilde{m}+1) \geq 2\,N$. Zu $m \geq \tilde{m}$ und $k \geq m$ findet man jetzt $K > \phi(m+1)$ und $S > 1$, sodass (1) erfüllt wird. Nach Lemma 4.2.1 existiert daher ein $S' > 1$ mit $\big(\, \|y\|_m^{*F}\,\big)^{1+\gamma} \leq S' \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \big(\, \|y\|_n^{*F}\,\big)^{\gamma}$ für alle $y \in F_n^*$, wobei

$$\gamma \;=\; d\, \frac{-\frac{1}{K} + \frac{1}{\phi(m+1)}}{-\frac{1}{\phi(m+1)} + \frac{1}{N}} \;\leq\; d\, \frac{\frac{1}{\phi(m+1)}}{\frac{1}{N} - \frac{1}{\phi(\tilde{m}+1)}} \;\leq\; \frac{D}{\phi(m+1)}$$

ist. Damit lässt sich die Behauptung schließlich leicht einsehen. ■

Um die lokalen Banachräume der verschiedenen Sorten von Potenzreihenräumen übersichtlich angeben zu können, bezeichnen wir für eine Exponentenfolge α sowie $p \in [1, \infty]$ und $t \in \mathbb{R}$

$$l_p[t\alpha] \;:=\; \{\, x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;:\; \|x\|_{l_p[t\alpha]} := |x|^p_{t\alpha} < \infty\,\}.$$

Sei nun $E = \Lambda_r^p(\alpha)$ mit $p < \infty$, so erhält man damit unmittelbar $E_n = l_p[r_n\alpha]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Fall $p = \infty$ gilt dagegen lediglich $E_n = c_0[r_n\alpha] := \{x = (x_j) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (\exp[r_n\alpha_j] \cdot x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0\}$ als abgeschlossener Unterraum von $l_\infty[r_n\alpha]$.

Lemma 4.2.3 *Seien eine Exponentenfolge α und ein $p \in [1, \infty]$ vorgegeben. Dann gibt es zu $t_1 < t_2 < t_3$ stets ein $\gamma > 0$, sodass alle $S > 1$ und $z_1, z_2, z_3 \geq 0$ mit*

$$(z_2)^{1+\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}} \;\leq\; S \cdot z_1 \cdot (z_3)^{\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}}$$

bereits für jedes $\delta > 0$ die folgende Bedingung erfüllen

$$z_2 \cdot |x|^p_{t_2\alpha} \;\leq\; \delta \cdot z_3 \cdot |x|^p_{t_1\alpha} \;+\; \delta^{-\gamma} S \cdot z_1 \cdot |x|^p_{t_3\alpha} \qquad \forall\, x \in l_p[t_3\alpha].$$

Beweis: Gehen wir davon aus, es seien feste $t_1 < t_2 < t_3$ gegeben, so definieren wir $\gamma := \frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}$. Nehmen wir uns weiter ein beliebiges $S > 1$ und darüber hinaus $z_1, z_2, z_3 \geq 0$, welche wie verlangt $z_2^{1+\gamma} \leq S \cdot z_1 \cdot z_3^{\gamma}$ erfüllen. Für $\delta > 0$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt dann entweder

$$z_2 \cdot \exp[t_2\alpha_j] \;\leq\; \delta \cdot z_3 \cdot \exp[t_1\alpha_j]$$

oder $z_3 < \delta^{-1}\, z_2 \cdot \exp[(t_2 - t_1)\alpha_j]$ also $z_2^{1+\gamma} \leq S \cdot z_1 \cdot z_3^{\gamma} < \delta^{-\gamma} S \cdot z_1 \cdot z_2^{\gamma} \cdot \exp[\gamma(t_2 - t_1)\alpha_j]$ und so

$$z_2 \cdot \exp[t_2\alpha_j] \;\leq\; \delta^{-\gamma} S \cdot z_1 \cdot \exp[t_2\alpha_j + \gamma(t_2 - t_1)\alpha_j] \;=\; \delta^{-\gamma} S \cdot z_1 \cdot \exp[t_3\alpha_j].$$

Zusammengefasst folgt daher $z_2 \cdot \exp[t_2\alpha_j] \leq \delta \cdot z_3 \cdot \exp[t_1\alpha_j] + \delta^{-\gamma} S \cdot z_1 \cdot \exp[t_3\alpha_j]$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung einfacher Eigenschaften der l_p-Norm erhält man somit für jedes $(x_j) \in l_p[t_3\alpha]$

$$\left\|(z_2 \cdot \exp[t_2\alpha_j] \cdot x_j)_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{l_p} \leq \left\|(\delta \cdot z_3 \cdot \exp[t_1\alpha_j] \cdot x_j)_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{l_p} + \left\|(\delta^{-\gamma} S \cdot z_1 \cdot \exp[t_3\alpha_j] \cdot x_j)_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{l_p},$$

was bereits unmittelbar die angestrebte Ungleichung liefert. ■

Damit kommen wir im Fall $E = \Lambda_0^p(\alpha)$ zu einer hinreichenden Bedingung für das Zerfallen kurzer exakter Sequenzen sehr ähnlich zu der notwendigen aus Satz 4.2.2. Wir nehmen dabei zusätzlich eine der starken Standardvoraussetzungen an, d.h. genauer $p = 1$ oder, dass bei $p = 2$ auch F ein gradierter Fréchet-Hilbertraum ist, oder ansonsten, dass wir $F = \lambda^\infty(\mathcal{B})$ haben. Die Abbildungen $e_{n+1}^n : E_{n+1} \to E_n$ sind unter dieser Vorgabe bereits definitionsgemäß injektiv.

Satz 4.2.4 *Sei $E = \Lambda_0^p(\alpha)$ mit $p \in [1, \infty]$ und gelte eine der starken Standardvoraussetzungen. Ist nun ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ gegeben, für welches folgende Bedingung erfüllt ist*

$$\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n},\ \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m},\ k \geq m \quad \exists\, S > 1 \qquad \forall\, y \in F_n^*$$
$$\left(\, \|y\|_m^{*F} \right)^{1+\frac{\phi(n+1)}{\phi(m+1)}} \leq S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \left(\, \|y\|_n^{*F} \right)^{\frac{\phi(n+1)}{\phi(m+1)}},$$

so existiert ein $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n) \big)$.

Beweis: Beginnen wir damit, dass für natürliche $n < m$ mit $\phi(n+1) < \phi(m+1)$ offenbar gilt

$$\frac{\phi(n+1)}{\phi(m+1)} < \frac{1}{\frac{\phi(m+1)}{\phi(n+1)} - 1} = \frac{\frac{1}{\phi(m+1)}}{\frac{1}{\phi(n+1)} - \frac{1}{\phi(m+1)}} \quad \text{also} \quad \frac{\phi(n+1)}{\phi(m+1)} < \frac{-\frac{1}{\phi(k+1)} + \frac{1}{\phi(m+1)}}{-\frac{1}{\phi(m+1)} + \frac{1}{\phi(n+1)}} =: \gamma(n,m,k)$$

für ein genügend großes $k > m$. Aus unseren Voraussetzungen erhält man daher nämlich leicht

$$\forall\, \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde{n},\ \tilde{m} \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde{m} \quad \exists\, \tilde{k} > m \quad \forall\, k \geq \tilde{k} \quad \exists\, S > 1 \qquad \forall\, y \in F_n^*$$
$$\left(\, \|y\|_m^{*F} \right)^{1+\gamma(n,m,k)} \leq S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \left(\, \|y\|_n^{*F} \right)^{\gamma(n,m,k)}.$$

Mit Hilfe von Lemma 4.2.3 lässt sich damit schon nachvollziehen, dass die stärkere Bedingung aus Satz 4.1.7 erfüllt ist und somit auch die Behauptung. ■

In den anschließenden zwei Theoremen werden wir eine Verbindung unserer Fragestellung zu den Invarianten (Ω) und $(\overline{\Omega})$ aufzeigen, welche eine interessante Rolle in der Strukturtheorie lokalkonvexer Räume spielen. So ist beispielsweise ein gradierter Fréchetraum F nach [27] Satz 3.4 unter gewissen Stabilitäts- und Nuklearitätsbedingungen genau dann zu dem Quotienten eines Potenzreihenraums $\Lambda_\infty^1(\alpha)$ isomorph, wenn er die Eigenschaft (Ω) hat oder kurz $F \in (\Omega)$, d.h.

$$(\Omega) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \geq n \quad \forall\, k \geq m \quad \exists\, \gamma > 1,\ S > 1 \qquad \forall\, y \in F_n^*$$
$$\left(\, \|y\|_m^{*F} \right)^{1+\gamma} \leq S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \left(\, \|y\|_n^{*F} \right)^{\gamma}.$$

Unter ähnlicher Vorgabe ist F laut [22] Satz 2.8 zu einem Quotienten von $\Lambda_0^1(\alpha)$ isomorph, falls

$$(\overline{\Omega}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \gamma > 0 \quad \exists\, m \geq n \quad \forall\, k \geq m \quad \exists\, S > 1 \qquad \forall\, y \in F_n^*$$
$$\left(\, \|y\|_m^{*F} \right)^{1+\gamma} \leq S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \left(\, \|y\|_n^{*F} \right)^{\gamma}$$

gilt. Beiden Bedingungen ist leicht anzusehen, dass sie ausschließlich von der Topologie auf F abhängen und nicht von der Wahl eines konkreten Fundamentalsystems von Halbnormen.

Theorem 4.2.5 *Ist $E = \Lambda_0^p(\alpha)$ shift-stabil mit $p \in [1,\infty]$ und gilt eine der starken Standardvoraussetzungen, so sind die folgenden Aussagen bereits äquivalent:*

(*a*) $F \in (\overline{\Omega})$.

(*b*) *Es gibt ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt.*

(*c*) *Es gibt $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$ ist.*

Beweis: Wir weisen die Implikation $(a) \Rightarrow (c)$ nach. Sei dazu $F \in (\overline{\Omega})$, so kann man rekursiv eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen konstruieren mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; k \geq \tilde{m}_n \quad \exists\, S > 1 \qquad \forall\, y \in F_n^*$$
$$\big(\, \|y\|_{\tilde{m}_n}^{*F} \big)^{1+\frac{1}{n}} \;\leq\; S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \big(\, \|y\|_n^{*F} \big)^{\frac{1}{n}}.$$

Definieren wir damit eine Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $\phi(m) := 1$ falls $m \leq \tilde{m}_1$ und durch

$$\phi(m) \;:=\; n \qquad \text{falls} \qquad \tilde{m}_n + 1 \leq m \leq \tilde{m}_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Obigem lässt sich nun nachvollziehen, dass auf diese Weise gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; m \geq \tilde{m}_n\,,\; k \geq m \quad \exists\, S > 1 \qquad \forall\, y \in F_n^*$$
$$\big(\, \|y\|_m^{*F} \big)^{1+\frac{1}{\phi(m+1)}} \;\leq\; S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \big(\, \|y\|_n^{*F} \big)^{\frac{1}{\phi(m+1)}}.$$

Somit erhält man (c) bereits recht einfach unter Verwendung von Satz 4.2.4.

Ergänzend bleibt festzustellen, dass $(b) \Rightarrow (a)$ direkt aus Satz 4.2.2 folgt. ∎

Im Fall eines Potenzreihenraums unendlichen Typs bekommen wir sogar (vgl. [23] Theorem 4.1):

Theorem 4.2.6 *Ist $E = \Lambda_\infty^p(\alpha)$ shift-stabil mit $p \in [1,\infty]$ und gilt eine der starken Standardvoraussetzungen, so sind die folgenden Aussagen bereits äquivalent:*

(*a*) $F \in (\Omega)$.

(*b*) *Es gibt ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt.*

(*c*) *Zu jedem $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.*

Beweis: Zeigen wir zuerst $(a) \Rightarrow (c)$. Sei also $F \in (\Omega)$, dann gilt mittels $N := 1$ offenbar

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \geq n \quad \forall\, k > m\,,\; M > N \quad \exists\, K > M$$
$$\exists\, S > 1 \;\; \forall\, y \in F_n^* \qquad \big(\, \|y\|_m^{*F} \big)^{1+\frac{K-M}{M-N}} \;\leq\; S \cdot \|y\|_k^{*F} \cdot \big(\, \|y\|_n^{*F} \big)^{\frac{K-M}{M-N}}. \tag{1}$$

Nach Lemma 4.2.3 folgt aus (1) jetzt ohne Veränderung der vorgegebenen natürlichen Zahlen

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, S > 1 \;\; \forall\, x \in \Lambda_\infty^p(\alpha)\,,\; y \in F_n^* \qquad |x|_{M\alpha}^p \cdot \|y\|_m^{*F} \leq \varepsilon \cdot |x|_{N\alpha}^p \cdot \|y\|_n^{*F} + S \cdot |x|_{K\alpha}^p \cdot \|y\|_k^{*F}.$$

Daher führt uns Satz 4.1.9 bereits unmittelbar zu (c).

Den Nachweis von $(b) \Rightarrow (a)$ wollen wir schließlich nicht im Detail ausarbeiten, da er mittels

$$\gamma \;=\; d^{\,\frac{K-\phi(m+1)}{\phi(m+1)-N}}$$

völlig analog zum Beweis von Satz 4.2.2 zu führen ist. ∎

Wir werden nun analog zu den bisherigen Ergebnissen dieses Abschnitts die Situation betrachten, dass F ein Potenzreihenraum $\Lambda_r^q(\beta)$ sei. Hierzu fassen wir auch den Dualraum von F als Folgenraum auf, indem wir wie üblich $y \in F'$ mit der Folge $(ye_j)_{j\in\mathbb{N}}$ identifizieren mit $e_j := (\delta_{j,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$. Mit Hilfe unserer Ausführungen vor Lemma 4.2.3 folgt auf diese Weise für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$F_n^* \;=\; F_n' \;=\; l_{\tilde q}[-r_n\beta]$$

mit $\tilde q \in [1,\infty]$, sodass $1/q + 1/\tilde q = 1$ gilt und wobei man $1/\infty := 0$ setze.

Satz 4.2.7 *Sei $F = \Lambda_0^q(\beta)$ shift-stabil mit $q \in [1,\infty]$ und sei E ein gradierter Fréchetraum. Ist nun $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot L(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt, so folgt*

$$\forall\, D > 1 \quad \exists\, N \in \mathbb{N},\, \tilde m > D \quad \forall\, m \geq \tilde m \quad \exists\, K \geq \phi(m+1)\,,\, S > 1 \qquad \forall\, x \in E$$
$$\big(\, \|x\|_{\phi(m+1)}^E \big)^{\frac{m}{D}} \;\leq\; S \cdot \|x\|_N^E \cdot \big(\, \|x\|_K^E \,\big)^{\frac{m}{D}-1}.$$

Beweis: Wir verwenden erneut Satz 4.1.6 und erhalten damit für $\tilde q \in [1,\infty]$ mit $1/q + 1/\tilde q = 1$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n\,,\, k \geq m \quad \exists\, K \geq N\,,\, S > 1$$

$$(1) \qquad \|x\|_{\phi(m+1)}^E \cdot |y|_{\frac{1}{m}\beta}^{\tilde q} \;\leq\; S \cdot \big(\, \|x\|_N^E \cdot |y|_{\frac{1}{n}\beta}^{\tilde q} \;+\; \|x\|_K^E \cdot |y|_{\frac{1}{k}\beta}^{\tilde q} \,\big) \qquad \forall\, x \in E\,,\, y \in l_{\tilde q}[1/n\,\beta].$$

Sei nun ein $D > 1$ gegeben und sei $d := \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\beta_{j+1}}{\beta_j}$, so nehmen wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2\,d\,D$. Hierzu wählen wir $N \in \mathbb{N}$ wie oben und setzen $\tilde m := n+1$. Zu $m \geq \tilde m$ und $k := 2\,m$ findet man jetzt $K > \phi(m+1)$ und $S > 1$, sodass (1) erfüllt wird. Nach Lemma 4.2.1 gibt es daher schließlich ein $S' > 1$, sodass $\big(\, \|x\|_{\phi(m+1)}^E \big)^{1+\gamma} \leq S' \cdot \|x\|_N^E \cdot \big(\, \|x\|_K^E \,\big)^{\gamma}$ für alle $x \in E$ gilt mit

$$\gamma \;=\; d\,\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{k}} \;=\; 2\,d\,\Big(\frac{m}{n} - 1\Big) \;\leq\; \frac{m}{D} - 1.$$

Somit folgt bereits ebenfalls die Behauptung. ■

Betrachten wir weiter die Vorgabe $F = \Lambda_0^q(\beta)$. Gelte jetzt zusätzlich wie im nachfolgenden Satz gefordert eine der starken Standardvoraussetzungen, so bedeutet dies ausgeführt $q = \infty$ oder, dass bei $q = 2$ auch E ein gradierter Fréchet-Hilbertraum ist, oder ansonsten $E = \lambda^1(\mathcal{A})$ sowie in jedem Fall, dass alle Abbildungen $e_{n+1}^n : E_{n+1} \to E_n$ injektiv sind.

Satz 4.2.8 *Sei $F = \Lambda_0^q(\beta)$ mit $q \in [1,\infty]$ und gelte eine der starken Standardvoraussetzungen. Ist nun ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$ gegeben, für welches folgende Bedingung erfüllt ist*

$$\forall\, \tilde n \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde n\,,\, \tilde m \geq n \quad \forall\, m \geq \tilde m \quad \exists\, K \geq \phi(m+1)\,,\, S > 1 \qquad \forall\, x \in E$$
$$\big(\, \|x\|_{\phi(m+1)}^E \big)^{\frac{m}{n}} \;\leq\; S \cdot \|x\|_{\phi(n+1)}^E \cdot \big(\, \|x\|_K^E \,\big)^{\frac{m}{n}-1},$$

so existiert ein $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot L(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat\sigma\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot L(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.

Beweis: Wir bemerken erst einmal, dass für natürliche $n < m < k$ offensichtlich gilt

$$\frac{m}{n} - 1 \;=\; \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} \;<\; \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{k}} \;=:\; \gamma(n,m,k).$$

Unsere Ausgangsbedingung führt uns auf diese Weise nämlich recht schnell zu

$$\forall\, \tilde n \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq \tilde n\,,\, \tilde m > n \quad \forall\, m \geq \tilde m \quad \exists\, k > m\,,\, S > 1 \qquad \forall\, x \in E$$
$$\big(\, \|x\|_{\phi(m+1)}^E \big)^{1+\gamma} \;\leq\; S \cdot \|x\|_{\phi(n+1)}^E \cdot \big(\, \|x\|_{\phi(k+1)}^E \big)^{\gamma}.$$

Identifiziert man nun F' wie oben beschrieben als Folgenraum und verwendet man Lemma 4.2.3, so lässt sich wieder die stärkere Bedingung aus Satz 4.1.7 folgern und somit die Behauptung. ■

Ähnlich zu den oben eingeführten Bedingungen (Ω) und $(\overline{\Omega})$ sind für die Strukturtheorie auch die Invarianten (DN) und ($\underline{\text{DN}}$) von Interesse. Setzt man beispielsweise wieder bestimmte Stabilitäts- und Nuklearitätsbedingungen voraus, so ist ein gradierter Fréchetraum E nach [27] Satz 4.5 genau dann isomorph zu einem Unterraum von $\Lambda^1_\infty(\alpha)$, wenn $E \in$ (DN) ist, d.h.

(DN)
$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, M \geq N\,,\ \gamma > 0 \quad \exists\, K \geq M\,,\ S > 1 \qquad \forall\, x \in E$$
$$\big(\, \|x\|^E_M \,\big)^{1+\gamma} \;\leq\; S \cdot \|x\|^E_N \cdot \big(\, \|x\|^E_K \,\big)^{\gamma}.$$

Ebenso ist E nach [22] Satz 3.2 genau dann zu einem Unterraum von $\Lambda^1_0(\alpha)$ isomorph, wenn er

($\underline{\text{DN}}$)
$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, M \geq N \quad \exists\, K \geq M\,,\ \gamma > 1\,,\ S > 1 \qquad \forall\, x \in E$$
$$\big(\, \|x\|^E_M \,\big)^{1+\gamma} \;\leq\; S \cdot \|x\|^E_N \cdot \big(\, \|x\|^E_K \,\big)^{\gamma}$$

erfüllt. Für unsere Untersuchungen ergeben sich hierzu folgende Zusammenhänge:

Theorem 4.2.9 *Ist $F = \Lambda^q_0(\beta)$ shift-stabil mit $q \in [1,\infty]$ und gilt eine der starken Standardvoraussetzungen, so sind die folgenden Aussagen bereits äquivalent:*

(*a*) $E \in$ ($\underline{\text{DN}}$).

(*b*) *Es gibt ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt.*

(*c*) *Es gibt $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n) \big)$ ist.*

Beweis: Wir zeigen $(a) \Rightarrow (c)$. Sei also $E \in$ ($\underline{\text{DN}}$), dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ entsprechend und konstruieren rekursiv eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, K \geq N+n\,,\ S > 1 \qquad \forall\, x \in E$$
$$\big(\, \|x\|^E_{N+n} \,\big)^{\frac{\tilde{m}_n}{n}} \;\leq\; S \cdot \|x\|^E_N \cdot \big(\, \|x\|^E_K \,\big)^{\frac{\tilde{m}_n}{n}-1}.$$

Weiter definieren wir eine Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $\phi(m) := N$ falls $m \leq \tilde{m}_1$ und durch

$$\phi(m) \;:=\; N+n \qquad \text{falls} \qquad \tilde{m}_n + 1 \leq m \leq \tilde{m}_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammengefasst ist jetzt leicht einzusehen, dass damit bereits gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ m \geq \tilde{m}_n \quad \exists\, K \geq \phi(m+1)\,,\ S > 1 \qquad \forall\, x \in E$$
$$\big(\, \|x\|^E_{\phi(m+1)} \,\big)^{\frac{m}{n}} \;\leq\; S \cdot \|x\|^E_N \cdot \big(\, \|x\|^E_K \,\big)^{\frac{m}{n}-1}.$$

Für ϕ ist somit ebenfalls die Bedingung aus Satz 4.2.8 erfüllt, woraus (c) unmittelbar folgt.

Die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ ergibt sich schließlich recht einfach aus Satz 4.2.7. ■

Ist F dagegen ein Potenzreihenraum unendlichen Typs, so haben wir (vgl. [23] Theorem 4.3):

Theorem 4.2.10 *Ist $F = \Lambda^q_\infty(\beta)$ shift-stabil mit $q \in [1,\infty]$ und gilt eine der starken Standardvoraussetzungen, so sind die folgenden Aussagen bereits äquivalent:*

(*a*) $E \in$ (DN).

(*b*) *Es gibt ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt.*

(*c*) *Zu jedem $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n) \big)$.*

Beweis: Weisen wir $(a) \Rightarrow (c)$ nach. Sei dazu $E \in (\mathrm{DN})$, so gilt mit dem entsprechenden $N \in \mathbb{N}$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; m > n\,,\; k > m\,,\; M \geq N \quad \exists\, K \geq M$$

$$(1) \qquad \exists\, S > 1 \;\; \forall\, x \in E \qquad \big(\, \|x\|_M^E \,\big)^{1+\frac{-n+m}{-m+k}} \;\leq\; S \cdot \|x\|_N^E \cdot \big(\, \|x\|_K^E \,\big)^{\frac{-n+m}{-m+k}}.$$

Für $\tilde{q} \in [1, \infty]$ mit $1/q + 1/\tilde{q} = 1$ erhält man aus (1) mit Hilfe von Lemma 4.2.3 nun recht leicht

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, S > 1 \;\; \forall\, x \in E\,,\; y \in l_{\tilde{q}}[-n\,\beta] \qquad \|x\|_M^E \cdot |y|_{-m\,\beta}^{\tilde{q}} \leq \varepsilon\, \|x\|_N^E \cdot |y|_{-n\,\beta}^{\tilde{q}} \;+\; S\, \|x\|_K^E \cdot |y|_{-k\,\beta}^{\tilde{q}}.$$

Fasst man F' abermals als Folgenraum auf, dann folgt (c) damit bereits gemäß Satz 4.1.9.

Die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ lässt sich schließlich sehr ähnlich zu Satz 4.2.7 beweisen, wobei man

$$\gamma \;=\; d\, \frac{-n+m}{-m+k}$$

bekommt und ausnutzt, dass es zu jedem $M \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\phi(m+1) \geq M$. ■

4.3 E und F Potenzreihenräume

Werten wir abschließend die Situation aus, in der sowohl E als auch F Potenzreihenräume sind. Für verschiedenste Untersuchungen solcher Paare von Potenzreihenräumen $\Lambda_r^p(\alpha)$ und $\Lambda_t^q(\beta)$ hat es sich bereits als äußerst aussagekräftig erwiesen, die Menge $\mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$ der endlichen Häufungspunkte von $\{\alpha_i/\beta_j : i, j \in \mathbb{N}\}$ zu analysieren, wobei genauer gelte

$$\mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\} \;:=\; \big\{\, \xi \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, (i_n), (j_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \;\text{ mit }\; (i_n), (j_n) \nearrow \infty \;\text{ und }\; \lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{i_n}/\beta_{j_n} = \xi \,\big\}.$$

Beispielsweise ist für $r = 0$ sowie für $r = \infty$ nach [12] Proposition 1.4 bzw. Theorem 1.7 unter Annahme der Nuklearität $\mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$ genau dann beschränkt, wenn das Paar $(\Lambda_\infty^q(\beta), \Lambda_r^p(\alpha))$ zahm ist, d.h. wenn es zu jedem $T \in L(\Lambda_\infty^q(\beta), \Lambda_r^p(\alpha))$ ein $\mu \in \mathbb{N}$ gibt mit $S_T(n) \leq \mu n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.3.1 *Seien α und β Exponentenfolgen mit $D := \sup \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\} < \infty$ und $p, \tilde{q} \in [1, \infty]$. Sind nun $t_1 < t_2 < t_3$ und $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ mit $\frac{t_3 - t_2}{\xi_2 - \xi_1} > D$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $S > 1$ mit*

$$|x|_{\xi_2\alpha}^p \cdot |y|_{t_2\beta}^{\tilde{q}} \;\leq\; \varepsilon \cdot |x|_{\xi_1\alpha}^p \cdot |y|_{t_3\beta}^{\tilde{q}} \;+\; S \cdot |x|_{\xi_3\alpha}^p \cdot |y|_{t_1\beta}^{\tilde{q}} \qquad \forall\, x \in l_p[\xi_3\alpha]\,,\; y \in l_{\tilde{q}}[t_3\beta].$$

Beweis: Geben wir uns also ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor, so betrachten wir zuerst die Menge

$$M_0 \;:=\; \big\{\, (i,j) \in \mathbb{N} \times I_\beta \,:\, \tfrac{t_3 - t_2}{\xi_2 - \xi_1} + \tfrac{\ln(\varepsilon)}{(\xi_2 - \xi_1)\beta_j} < \tfrac{\alpha_i}{\beta_j} \leq \gamma \,\big\}$$

mit $I_\beta := \{j \in \mathbb{N} : \beta_j > 0\}$ und mit $D < \gamma < \frac{t_3 - t_2}{\xi_2 - \xi_1}$. Wegen $\lim\limits_{j \in I_\beta} \Big(\frac{t_3 - t_2}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{\ln(\varepsilon)}{(\xi_2 - \xi_1)\beta_j} \Big) = \frac{t_3 - t_2}{\xi_2 - \xi_1} > \gamma$ lässt sich nun direkt die Endlichkeit von M_0 einsehen. Des Weiteren muss ebenfalls die Menge

$$M_1 \;:=\; \big\{\, (i,j) \in \mathbb{N} \times I_\beta \,:\, \gamma < \tfrac{\alpha_i}{\beta_j} < \tfrac{t_2 - t_1}{\xi_3 - \xi_2} \,\big\}$$

endlich sein, da es ansonsten einen Häufungspunkt $z \in \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$ in dem kompakten Intervall $[\gamma, \frac{t_2 - t_1}{\xi_3 - \xi_2}]$ geben würde, wir jedoch $\gamma > D$ vorausgesetzt haben. Daher ist leicht nachzuvollziehen, dass es ein $S > 1$ gibt, sodass für jedes $(i,j) \in \mathbb{N} \times I_\beta$ eine der folgenden Ungleichungen

$$\frac{\alpha_i}{\beta_j} \;\leq\; \frac{t_3 - t_2}{\xi_2 - \xi_1} \;+\; \frac{\ln(\varepsilon)}{(\xi_2 - \xi_1)\beta_j} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\alpha_i}{\beta_j} \;\geq\; \frac{t_2 - t_1}{\xi_3 - \xi_2} \;-\; \frac{\ln(S)}{(\xi_3 - \xi_2)\beta_j}$$

erfüllt ist. Durch geeignete Umformungen bekommt man damit bereits für alle $i, j \in \mathbb{N}$

$$\exp[\xi_2\alpha_i] \cdot \exp[t_2\beta_j] \;\leq\; \max\big(\, \varepsilon \cdot \exp[\xi_1\alpha_i] \cdot \exp[t_3\beta_j]\;,\; S \cdot \exp[\xi_3\alpha_i] \cdot \exp[t_1\beta_j] \,\big).$$

Mit Hilfe einfacher Eigenschaften der l_p-Norm und der $l_{\tilde{q}}$-Norm folgt hieraus schließlich auch schon die Behauptung. ■

Als deutliche Erweiterung zu [12] Theorem 4.1 erhalten wir damit die folgenden zwei Theoreme.

Theorem 4.3.2 *Für $E = \Lambda_0^p(\alpha)$, $F = \Lambda_0^q(\beta)$ mit $p{=}1$ oder $q{=}\infty$ oder $p{=}q{=}2$ sind äquivalent:*

(a) $D := \sup \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\} < \infty$.

(b) *Es gibt ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\phi(n)}{n} = \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ im Bild von σ liegt.*

(c) *Zu jedem $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.*

(d) *Für jede streng monoton wachsende Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi(n) \geq 2D \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(8n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.*

(e) *Für jede streng monoton wachsende Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi(n) \geq D \cdot n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+2)}, \mathcal{F}_n)\big)$.*

Beweis: Zeigen wir zuerst $(b) \Rightarrow (a)$. Sei dafür ein entsprechendes $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben, so erhält man aus Satz 4.1.6 durch Einsetzen der Einheitsvektoren $x = (\delta_{i,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $y = (\delta_{j,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ leicht

(1) $\quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n\,,\ k \geq m \quad \exists\, K \geq N\,,\ S > 1 \qquad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$

(2) $\quad \exp[-\tfrac{1}{\phi(m+1)}\alpha_i] \cdot \exp[\tfrac{1}{m}\beta_j] \ \leq\ 2S \cdot \max\big(\exp[-\tfrac{1}{N}\alpha_i] \cdot \exp[\tfrac{1}{n}\beta_j]\ ,\ \exp[-\tfrac{1}{K}\alpha_i] \cdot \exp[\tfrac{1}{k}\beta_j]\ \big).$

Dabei ist (2) für $j \in \mathbb{N}$ mit $\beta_j > 0$ äquivalent dazu, dass eine der folgenden Ungleichungen gilt

$$\Big(\frac{1}{N} - \frac{1}{\phi(m+1)}\Big)\frac{\alpha_i}{\beta_j} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{\ln(2S)}{\beta_j} \quad \text{oder} \quad \Big(\frac{1}{\phi(m+1)} - \frac{1}{K}\Big)\frac{\alpha_i}{\beta_j} \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{k} - \frac{\ln(2S)}{\beta_j}.$$

Wir nehmen uns nun ein beliebiges $\xi \in \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$ mit $\xi = \lim_{n\in\mathbb{N}} \alpha_{i_n}/\beta_{j_n}$ und bekommen hiermit wegen $\lim_{n\in\mathbb{N}} \beta_{j_n} = \infty$ bereits $\big(\frac{1}{N} - \frac{1}{\phi(m+1)}\big) \cdot \xi \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ oder $\big(\frac{1}{\phi(m+1)} - \frac{1}{K}\big) \cdot \xi \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{k}$. Wählen wir schließlich zu $n := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ gemäß (1), dann findet man also weiter für jedes $m > n$ mit $\phi(m+1) \geq 2N$ und zu $k := 2m$ ein $K > \phi(m+1)$ mit

$$\xi \ \leq\ \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{N} - \frac{1}{\phi(m+1)}} \ \leq\ 2N \qquad \text{oder} \qquad \xi \ \geq\ \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{\phi(m+1)} - \frac{1}{K}} \ \geq\ \frac{1}{2}\frac{\phi(m)}{m}.$$

Da die rechte Ungleichung nicht für alle solche $m > n$ gelten kann, folgt also $\xi \leq 2N$.

Weisen wir weiter $(a) \Rightarrow (d)$ nach. Ist dazu $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton mit $\phi(n) \geq 2D{\cdot}n$ gegeben, dann definieren wir $\tilde{m}_n := 2^n$ und stellen fest, dass damit für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \geq \tilde{m}_{n+1}$ gilt

$$\frac{\frac{1}{\tilde{m}_n} - \frac{1}{m}}{-\frac{1}{\phi(m+1)} + \frac{1}{\phi(\tilde{m}_n+1)}} \ >\ \frac{\frac{1}{2\tilde{m}_n}}{\frac{1}{\phi(\tilde{m}_n)}} \ =\ \frac{\phi(\tilde{m}_n)}{2\tilde{m}_n} \ \geq\ D.$$

Unter Verwendung von Lemma 4.3.1 und $\tilde{q} \in [1, \infty]$ mit $1/q + 1/\tilde{q} = 1$ ist nun schon nachzuvollziehen, dass daher die Bedingung aus Satz 4.1.8 erfüllt wird und somit die Behauptung gilt.

Die Implikation $(a) \Rightarrow (e)$ lässt sich abschließend sehr ähnlich zu $(a) \Rightarrow (d)$ beweisen. Hierzu setzt man diesmal $\tilde{m}_n := n$ und verwendet nunmehr, dass wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{\phi(n+2)} + \frac{1}{\phi(n+1)}} \ >\ \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{\phi(n+1)}} \ =\ \frac{\phi(n+1)}{n(n+1)} \ >\ D$$

bekommen, falls ein streng monotones $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi(n+1) \geq D \cdot (n+1)^2$ vorliegt. ∎

An dieser Stelle sei kurz darauf hingewiesen, dass $\mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$ unbeschränkt sein muss, falls eine der Exponentenfolgen α und β shift-stabil ist. Für den Beweis hierzu verwendet man erneut, dass jede Folge in einem kompakten Intervall einen Häufungspunkt besitzt.

Theorem 4.3.3 *Für $E = \Lambda_0^p(\alpha)$, $F = \Lambda_\infty^q(\beta)$ mit $p{=}1$ oder $q{=}\infty$ oder $p{=}q{=}2$ sind äquivalent:*

(a) $D := \sup \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\} < \infty$.

(b) *Es gibt ein $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi \nearrow \infty$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, F_n)$ ganz im Bild von σ liegt.*

(c) *Zu jedem $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.*

(d) *Für jede streng monoton wachsende Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\phi(n) \geq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+2)}, \mathcal{F}_n)\big)$.*

Beweis: Die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ lässt sich ähnlich wie im Beweis zu Theorem 4.3.2 zeigen. Ist nämlich ein entsprechendes $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vorgegeben, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n\,,\ k \geq m \quad \exists\, K \geq N \qquad \forall\, \xi \in \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$$
$$\Big(\frac{1}{N} - \frac{1}{\phi(m+1)}\Big) \cdot \xi \ \leq\ m-n \qquad \text{oder} \qquad \Big(\frac{1}{\phi(m+1)} - \frac{1}{K}\Big) \cdot \xi \ \geq\ k-m.$$

Wir nehmen nun wieder $n := 1$ und wählen $N \in \mathbb{N}$ wie gerade sowie $m > n$ mit $\phi(m+1) \geq 2N$. Zu jedem $k \geq m$ existiert also ein $K > \phi(m+1)$, sodass für alle $\xi \in \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$ gilt

$$\xi \ \leq\ \frac{m-n}{\frac{1}{N} - \frac{1}{\phi(m+1)}} \ \leq\ 2Nm \qquad \text{oder} \qquad \xi \ \geq\ \frac{k-m}{\frac{1}{\phi(m+1)} - \frac{1}{K}} \ \geq\ k-m.$$

Da zu einem festen $\xi \in \mathrm{LIM}\{\alpha/\beta\}$ die rechte Ungleichung nicht für alle $k \geq m$ erfüllt sein kann, muss schließlich $\xi \leq 2Nm$ sein.

Weisen wir noch $(a) \Rightarrow (d)$ nach. Sei dazu $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton mit $\phi \geq D$, so folgt

$$\frac{-n + (n+1)}{-\frac{1}{\phi(n+2)} + \frac{1}{\phi(n+1)}} \ >\ \frac{1}{\frac{1}{\phi(n+1)}} \ \geq\ D$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 4.3.1 und $\tilde{q} \in [1,\infty]$ mit $1/q + 1/\tilde{q} = 1$ lässt sich jetzt wieder einsehen, dass für $\tilde{m} := n$ die Bedingung aus Satz 4.1.8 erfüllt ist und somit auch (d). ■

Für den analogen Fall $E = \Lambda_\infty^1(\alpha)$ und $F = \Lambda_t^q(\beta)$ ist nach [23] Theorem 4.5 bereits bekannt, dass σ immer surjektiv ist, unabhängig von $t \in \{0, \infty\}$ und $q \in [1, \infty]$. In unserem nächsten Theorem machen wir hierzu detailliertere Angaben.

Lemma 4.3.4 *Sind eine Exponentenfolge α und $p \in [1,\infty]$ gegeben, so gilt für alle $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$*

$$\big(|x|^p_{\xi_2\alpha}\big)^{1+\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_3-\xi_2}} \ \leq\ |x|^p_{\xi_1\alpha} \ \cdot\ \big(|x|^p_{\xi_3\alpha}\big)^{\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_3-\xi_2}} \qquad \forall\, x \in l_p[\xi_3\alpha].$$

Beweis: Gehen wir davon aus, es seien beliebige $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ vorgegeben. Setzen wir damit $\mu := \frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3-\xi_2} > 1$ und $\nu := \frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_2-\xi_1} > 1$, so ist leicht nachzuvollziehen $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$ sowie $\frac{1}{\mu}\xi_1 + \frac{1}{\nu}\xi_3 = \xi_2$. Man erhält daher für ein beliebiges $x = (x_j) \in l_p[\xi_3\alpha]$ und alle $j \in \mathbb{N}$

$$\exp[\xi_2\alpha_j p] \cdot |x_j|^p \ =\ \exp[\tfrac{1}{\mu}\xi_1\alpha_j p] \cdot |x_j|^{p\frac{1}{\mu}} \ \cdot\ \exp[\tfrac{1}{\nu}\xi_3\alpha_j p] \cdot |x_j|^{p\frac{1}{\nu}}.$$

Wegen $\|\,(\exp[\xi_2\alpha_j p] \cdot |x_j|^p)_{j\in\mathbb{N}}\,\|_{l_1} \ =\ (\,|x|^p_{\xi_2\alpha})^p$ und $\|\,(\exp[\frac{1}{\mu}\xi_1\alpha_j p] \cdot |x_j|^{p\frac{1}{\mu}})_{j\in\mathbb{N}}\,\|_{l_\mu} \ =\ (\,|x|^p_{\xi_1\alpha})^{\frac{p}{\mu}}$ sowie $\|\,(\exp[\frac{1}{\nu}\xi_3\alpha_j p] \cdot |x_j|^{p\frac{1}{\nu}})_{j\in\mathbb{N}}\,\|_{l_\nu} = (\,|x|^p_{\xi_3\alpha})^{\frac{p}{\nu}}$ ergibt die Höldersche Ungleichung somit bereits

$$\big(|x|^p_{\xi_2\alpha}\big)^p \ \leq\ \big(|x|^p_{\xi_1\alpha}\big)^{\frac{p}{\mu}} \ \cdot\ \big(|x|^p_{\xi_3\alpha}\big)^{\frac{p}{\nu}}.$$

Hieraus folgt die Behauptung, indem man beide Seiten der Ungleichung mit $\frac{\mu}{p}$ potenziert. ■

Theorem 4.3.5 *Sind $E = \Lambda^p_\infty(\alpha)$ und $F = \Lambda^q_t(\beta)$ mit $p=1$ oder $q=\infty$ oder $p=q=2$, so gibt es zu jedem $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\psi(n)}, \mathcal{F}_n)\big)$.
Ist $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend mit $\phi(n+1) - \phi(n) \leq \phi(n+2) - \phi(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi(n+2)}, \mathcal{F}_n)\big)$.*

Beweis: Offenbar genügt es, die zweite Aussage zu zeigen. Nehmen wir dafür zuerst $t = \infty$ an. Ist des Weiteren ein entsprechendes $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vorgegeben, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_0 \;:=\; \frac{-(n+1)+(n+2)}{-n+(n+1)} \;=\; 1 \;\leq\; \frac{\phi(n+3)-\phi(n+2)}{\phi(n+2)-\phi(n+1)} \;=:\; \gamma_1.$$

Sei nun abermals $\tilde{q} \in [1,\infty]$ mit $1/q + 1/\tilde{q} = 1$ und sei $y \in l_{\tilde{q}}[-n\beta]$, dann gilt nach Lemma 4.3.4 unmittelbar $\big(|y|^{\tilde{q}}_{-(n+1)\beta}\big)^{1+\gamma} \leq |y|^{\tilde{q}}_{-(n+2)\beta} \cdot \big(|y|^{\tilde{q}}_{-n\beta}\big)^{\gamma}$ für $\gamma = \gamma_0$ und somit auch für $\gamma = \gamma_1$. Laut Lemma 4.2.3 existiert somit zu $\varepsilon > 0$ stets ein $S > 1$, sodass wir für alle $x \in \Lambda^p_\infty(\alpha)$ haben

$$|x|^p_{\phi(n+2)\alpha} \cdot |y|^{\tilde{q}}_{-(n+1)\beta} \;\leq\; \varepsilon \cdot |x|^p_{\phi(n+1)\alpha} \cdot |y|^{\tilde{q}}_{-n\beta} \;+\; S \cdot |x|^p_{\phi(n+3)\alpha} \cdot |y|^{\tilde{q}}_{-(n+2)\beta}.$$

Aus Satz 4.1.8 kann man mittels $\tilde{m}_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$ daher bereits die Behauptung folgern.

Der Fall $t = 0$ lässt sich schließlich analog zu obigem von $t = \infty$ einsehen, indem man

$$\tilde{\gamma}_0 \;:=\; \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \;=\; \frac{n}{n+2} \;<\; 1 \;\leq\; \frac{\phi(n+3)-\phi(n+2)}{\phi(n+2)-\phi(n+1)} \;=\; \gamma_1$$

abschätzt und das Übrige geeignet anpasst. ■

Hierzu sei angemerkt, dass sich Theorem 4.3.5 sowie der nachfolgende Satz 4.3.6 mit Hilfe der deutlich spezielleren Untersuchungen aus [25] sogar noch geringfügig verbessern ließen.

Abschließend wollen wir noch einmal wie im Schluss von Kapitel 1 auf das zahme bzw. linear zahme Zerfallen eingehen. Dafür sei zu einem $a \in \mathbb{N}$ wieder $\phi_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entweder definiert durch $\phi_a(n) := n + a$ oder anderenfalls durch $\phi_a(n) := a \cdot n$. Damit erhalten wir:

Satz 4.3.6 *Sind $E = \Lambda^p_0(\alpha)$ und $F = \Lambda^q_0(\beta)$ mit $p=1$ oder $q=\infty$ oder $p=q=2$, dann gilt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi_a(n+1)}, \mathcal{F}_n) \subset \hat{\sigma}\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \ddot{L}(E_{\phi_a(n+2)}, \mathcal{F}_n)\big)$ für alle $a \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Die Behauptung lässt sich völlig analog zu Theorem 4.3.5 beweisen, wobei man diesmal

$$\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3} = \frac{-\frac{1}{a(n+3)} + \frac{1}{a(n+2)}}{-\frac{1}{a(n+2)} + \frac{1}{a(n+1)}} < \frac{n+1+a}{n+3+a} = \frac{-\frac{1}{n+3+a} + \frac{1}{n+2+a}}{-\frac{1}{n+2+a} + \frac{1}{n+1+a}}$$

für alle $a \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ verwendet. ■

Da sich auf jedes ϕ_a neben Satz 4.3.6 auch die zweite Aussage aus Theorem 4.3.5 anwenden lässt, kann man mit Hilfe von Theorem 1.3.3 dann zeigen:

Theorem 4.3.7 *Seien $E = \Lambda^p_r(\alpha)$ und $F = \Lambda^q_t(\beta)$ mit $r=\infty$ oder $r=t=0$ und mit $p=1$ oder $q=\infty$ oder $p=q=2$. Ist nun $0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} E \to 0$ eine kurze exakte Sequenz gradierter Fréchet(Hilbert-)räume mit $S_i \leq \phi_a$, $O_i \leq \phi_b$, $S_q \leq \phi_c$ und $O_q \leq \phi_d$ für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, so gibt es zu i eine Linksinverse $L \in L(G,F)$ und zu q eine Rechtsinverse $R \in L(E,G)$ mit $S_L(n) \leq \phi_c \circ \phi_d \circ \phi_b(n+2)$ und $S_R(n) \leq \phi_d \circ \phi_b \circ \phi_a(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Literaturverzeichnis

[1] **H. Apiola**: *Characterization of subspaces and quotients of nuclear $L_f(\alpha, \infty)$-spaces.* Compositio Math., 50(1):65-81 (1983).

[2] **R. W. Braun, D. Vogt**: *A sufficient condition for* $\mathrm{Proj}^1 \mathcal{X} = 0$. Michigan Math. J., 44(1):149-156 (1997).

[3] **P. Domański, M. Mastyło**: *Characterization of splitting for Fréchet-Hilbert spaces via interpolation.* Math. Ann., 339(2):317-340 (2007).

[4] **P. Domański, D. Vogt**: *A splitting theorem for the space of smooth functions.* J. Funct. Anal., 153(2):203-248 (1998).

[5] **L. Frerick, D. Vogt**: *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets by means of continuous linear operators.* Proc. Amer. Math. Soc., 130(6):1775-1777 (2002).

[6] **L. Frerick, J. Wengenroth**: *A sufficient condition for vanishing of the derived projective limit functor.* Arch. Math. (Basel), 67(4):296-301 (1996).

[7] **M. Langenbruch**: *Characterization of surjective partial differential operators on spaces of real analytic functions.* Studia Math., 162(1):53-96 (2004).

[8] **H. Jarchow**: *Locally convex spaces.* B. G. Teubner, Stuttgart (1981).

[9] **R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt**: *Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 40:619-655 (1990).

[10] **R. Meise, D. Vogt**: *Einführung in die Funktionalanalysis.* Vieweg Verlag (1992).

[11] **K. Nyberg**: *A tame splitting theorem for Köthe spaces.* Arch. Math., 52:471-481 (1989).

[12] **K. Nyberg**: *Tameness of pairs of nuclear power series spaces and related topics.* Trans. Amer. Math. Soc., 283:645-660 (1984).

[13] **V. P. Palamodov**: *A criterion for splitness of differential complexes with constant coefficients (English summary).* Geometrical and algebraical aspects in several complex variables (Hrsg: C. A. Berenstein, D. C. Struppa), Edit. Elettr., 265-291 (1991).

[14] **V. P. Palamodov**: *Homological methods in the theory of locally convex spaces.* Uspehi Mat. Nauk, 26(1(157)):3-65 (1971). English transl.: Russian Math. Surveys, 26:1-64 (1971).

[15] **W. Pawłucki, W. Pleśniak**: *Extension of C^∞ functions from sets with polynomial cusps.* Studia Math., 88(3):279-287 (1988).

[16] **M. Poppenberg**: *Unterräume von* (s) *in der linear zahmen Kategorie.* Diplomarbeit, Dortmund (1985). vgl.: M. Poppenberg: *Characterization of the subspaces of* (s) *in the tame category.* Arch. Math., 54:274-283 (1990).

[17] **M. Poppenberg, D. Vogt**: *A tame splitting theorem for exact sequences of Fréchet spaces.* Math. Z., 219:141-161 (1995).

[18] **V. S. Retakh**: *On the dual of a subspaces of a countable inductive limit.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 184:44-46 (1969). English transl.: Sov. Math. Dokl., 10:39-41 (1969).

[19] **V. S. Retakh**: *Subspaces of a countable inductive limit.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 194:1277-1279 (1970). English transl.: Sov. Math. Dokl., 11:1384-1386 (1970).

[20] **R. T. Seeley**: *Extension of* C^∞ *functions defined in a half space.* Proc. Amer. Math. Soc., 15:625-626 (1964).

[21] **D. Vogt**: *Charakterisierung der Unterräume von* s. Math. Z., 155:109-117 (1977).

[22] **D. Vogt**: *Eine Charakterisierung der Potenzreihenräume von endlichem Typ und ihre Folgerungen.* Manuscripta Math., 37:269-301 (1982).

[23] **D. Vogt**: *On the functors* $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *for Fréchet spaces.* Studia Math., 85(2):163-197 (1987).

[24] **D. Vogt**: *Tame spaces and power series spaces.* Math. Z., 196:523-536 (1987).

[25] **D. Vogt**: *Tame splitting pairs of type* 0 *and* 1. Functional analysis (Trier, 1994):421-448, de Gruyter Berlin (1996).

[26] **D. Vogt, M. J. Wagner**: *Charakterisierung der Quotientenräume von* s *und eine Vermutung von Martineau.* Studia Math., 67:225-240 (1980).

[27] **D. Vogt, M. J. Wagner**: *Charakterisierung der Unterräume und Quotientenräume der nuklearen stabilen Potenzreihenräume von unendlichem Typ.* Studia Math., 70:63-80 (1981).

[28] **J. Wengenroth**: *Acyclic inductive spectra of Fréchet spaces.* Studia Math., 120(3):247-258 (1996).

[29] **J. Wengenroth**: *A new characterization of* $\mathrm{Proj}^1\mathcal{X} = 0$ *for countable spectra of (LB)-spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 127(3):737-744 (1999).

[30] **J. Wengenroth**: *Derived functors in functional analysis.* Lecture notes in mathematics 1810, Springer-Verlag Berlin (2003).