

# Lokalisierung in Köchermodulräumen



## Dissertation

zur Erlangung des  
Doktorgrades der Naturwissenschaften  
im Fachbereich C der  
Bergischen Universität Wuppertal  
vorgelegt von

**Thorsten Weist**

im November 2008

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20090126

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20090126>]

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Köcher und Köcherdarstellungen</b>	<b>7</b>
2.1	Allgemeines . . . . .	7
2.2	Kroneckerköcher bzw. -modulräume . . . . .	13
2.3	Vermutung über die Asymptotik der Eulercharakteristik . . .	15
<b>3</b>	<b>Lokalisierung in Kroneckermodulräumen</b>	<b>18</b>
3.1	Lokalisierung in Modulräumen . . . . .	18
3.1.1	Torusfixpunkte . . . . .	18
3.1.2	Beschreibung der Fixpunkte und bipartite Köcher . .	23
3.2	Eigenschaften der Eulercharakteristik . . . . .	26
3.3	Asymptotik und Kombinatorik von Bäumen . . . . .	27
3.3.1	Einfach-erzeugte Bäume . . . . .	28
3.3.2	Lagrange-Inversionsformel . . . . .	29
3.3.3	Asymptotisches Verhalten . . . . .	30
3.4	Lokalisierung in Kroneckermodulräumen . . . . .	32
3.4.1	Kroneckermodulräume . . . . .	32
3.4.2	Stabilität bipartiter Köcher . . . . .	37
3.4.3	Einfache Lokalisierungsköcher . . . . .	48
3.4.4	Eine untere Schranke . . . . .	60
3.5	Anwendungen . . . . .	67
3.5.1	Der Fall (3,4) . . . . .	67
3.5.2	Eulercharakteristik im Fall $(n, n)$ . . . . .	70
3.5.3	Endlichkeit der Fixpunktmenge . . . . .	71
3.5.4	Der Fall $(d, d+1)$ . . . . .	72
3.5.5	Weitere Beispiele und Fragen . . . . .	77
3.6	Stabile Köcher beliebigen Dimensionstyps . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Baumdarstellungen des Kroneckerköchers</b>	<b>82</b>
4.1	Koeffizientenköcher und Baumdarstellungen . . . . .	82
4.2	Der Spiegelungsfunktor . . . . .	83
4.3	Spiegelung stabiler Baumdarstellungen . . . . .	85

4.3.2	Der allgemeine Fall . . . . .	88
4.3.3	Konstruktion von Baumdarstellungen . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Eulercharakteristik von Modulräumen stabiler Bündel</b>	<b>95</b>
5.1	Lineare Ungleichungssysteme und Polyeder . . . . .	95
5.2	Modulräume von Vektorbündeln auf der projektiven Ebene . . . . .	98
5.3	Der Fall der Rang 2-Bündel auf der projektiven Ebene . . . . .	106
5.4	Der Fall der Rang 3-Bündel auf der projektiven Ebene . . . . .	108
5.4.1	Der Fall $D \equiv 4 \pmod{6}$ . . . . .	111
5.4.2	Der Fall $D \equiv 0 \pmod{6}$ . . . . .	121

# Kapitel 1

## Einleitung

Eine bewährte Methode, um topologische Informationen über algebraische Varietäten zu erhalten, ist die Betrachtung von Fixpunkten unter einer Torusaktion. So ist zum Beispiel die Eulercharakteristik schon durch die Eulercharakteristik der Fixpunktcomponenten gegeben, siehe [CG] oder [EM]. Werden als Varietäten Modulräume gewisser Objekte betrachtet, so gehen deren Torusfixpunkte häufig einher mit einer gewissen Graduierung. Im Fall der Modulräume stabiler Köcherdarstellungen führt das dazu, dass Torusfixpunkte als Darstellungen des universellen abelschen Überlagerungsköchers verstanden werden können, die unter gewissen Bedingungen unzerlegbare Baumdarstellungen sind. Betrachtet man Modulräume stabiler Vektorbündel auf der projektiven Ebene, erhält man als Fixpunkte bzw. Fixpunktcomponenten Darstellungen des Unterraumköchers, dessen Modulräume zumindest für kleine Dimensionsvektoren bekannt sind.

Diese beiden Fälle sind Hauptgegenstand dieser Arbeit. Der Fall des Krockerköchers ist in sofern besonders interessant, als sich mit Hilfe der Lokalisierung Teile einer Vermutung von Michael Douglas [Dou] über die Eulercharakteristik der Modulräume beweisen lassen. Diese besagt, dass für teilerfremde Dimensionsvektoren  $(d, e)$  der Logarithmus der Eulercharakteristik geteilt durch  $d$  asymptotisch stetig von dem Bruch  $\frac{e}{d}$  abhängig sei. Präzisiert ergibt sich folgende Formulierung: es existiert eine stetige Funktion  $f$ , so dass für jeden teilerfremden Dimensionsvektor  $(d, e)$  ein Dimensionsvektor  $(d_s, e_s)$  existiert, so dass

$$f\left(\frac{e}{d}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \chi(M_{d_s+nd, e_s+ne}^s)}{d_s + nd}.$$

Insbesondere konvergiert die rechte Seite. In [Wei] konnte ein Kandidat für die Funktion  $f$  bestimmt und gezeigt werden, dass dieser unter der Voraussetzung der Stetigkeit und des Wertes an der Stelle 1 eindeutig bestimmt ist.

Auch wenn die Stetigkeit weiter ein offenes Problem darstellt, so kann mit

Hilfe der Lokalisierungsmethode der Wert an der Stelle 1 bestimmt werden, was insbesondere die Konvergenz an dieser Stelle zeigt. Des Weiteren kann das durch die Vermutung implizierte exponentielle Wachstum der Eulercharakteristik gezeigt werden, also erhält man insbesondere eine untere Schranke für die Funktion  $f$ .

Im Zuge der Betrachtung der Lokalisierung in Kroneckermodulräumen können weitere zuvor ungeklärte Eigenschaften des Kroneckerköchers bewiesen werden. So kann für einen gegebenen Dimensionsvektor die Frage nach der Existenz von Fixpunktanteilen, die unendlich viele Fixpunkte enthalten, beantwortet werden: nimmt man an, dass  $d \leq e$  für einen festen Dimensionsvektor  $(d, e)$ , so gibt es genau dann endlich viele Fixpunkte, wenn  $d = 1, 2$  bzw. für die entsprechenden gespiegelten Fälle.

Des Weiteren kann, beruhend auf einer Frage von Ringel [Rin2], die Existenz unzerlegbarer Baumdarstellungen für beliebige Wurzeln nachgewiesen werden, was eine Erweiterung eines Resultats aus [Fahr] ist. Es gibt also für alle Wurzeln eine unzerlegbare Darstellung, so dass zu dieser ein Koeffizientenköcher existiert, der ein Baum ist. Zudem wird explizit beschrieben, wie ein solcher Koeffizientenköcher konstruiert werden kann.

Der Beweis der unteren Schranke der Eulercharakteristik beinhaltet auch eine Untersuchung einer großen Klasse bipartiter Köcher auf Stabilität. So wird eine explizite Konstruktion einer Klasse bipartiter Köcher angegeben, die stabile Darstellungen zulassen, welche durch eine Bedingung an so genannte einfache bipartite Köcher impliziert wird, also bipartite Köcher mit nur zwei echten Randköchern.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Untersuchung von Torusfixpunkten in Modulräumen stabiler Vektorbündel auf der projektiven Ebene. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Erweiterung eines Resultats von Klyachko [Kly1], welches die Eulercharakteristik von Modulräumen stabiler Bündel vom Rang zwei liefert, auf den Fall der Bündel vom Rang drei. Die Torusfixpunkte entsprechen Tripeln von Filtrierungen von Vektorräumen, deren Äquivalenz zu Darstellungen eines Unterraumköchers ausgenutzt wird, um die Fixpunktanteile bzw. deren Eulercharakteristik zu bestimmen. Die Stabilitätsbedingung ist dabei explizit durch Lineare Ungleichungssysteme gegeben, die als Unbekannte die Länge der Arme haben. Die Lösungen stehen in Bijektion mit Lösungen quadratischer Gleichungen, so dass die Erzeugendenfunktionen explizit angegeben werden können.

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Markus Reineke, der sich während der Erstellung dieser Arbeit viel Zeit für intensive Diskussionen genommen hat und mich dadurch immer wieder vorangebracht hat. Außerdem möchte ich Iain Gordon danken, der mich während meines Aufenthalts an der „University of Edinburgh“ betreut hat und immer für ein Gespräch bereit stand, welche mich oft auf neue Ideen gebracht haben.

Des Weiteren möchte ich mich bei allen bedanken, die sich Zeit für Diskussionen und Anmerkungen zu meiner Arbeit genommen haben, durch die ich auf neue Gedanken und Ansätze gekommen bin. Aus diesen vielen möchte ich gerne Philipp Fahr und Claus Michael Ringel hervorheben.

Mein Dank gilt auch allen Mitgliedern des Graduiertenkollegs „Darstellungstheorie und ihre Anwendungen in Mathematik und Physik“ der Bergischen Universität Wuppertal und der Forschungsgruppe „Algebra and Number Theory“ der „University of Edinburgh“ für ihre Unterstützung.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Familie, meinen Freunden und besonders meiner Lebensgefährtin Julia Klima für ihre moralische Unterstützung ganz herzlich bedanken.

## Kapitel 2

# Köcher und Köcherdarstellungen

Dieses Kapitel dient dazu, die Grundlagen und Notationen einzuführen, die in den anschließenden Kapiteln benötigt werden. Dazu werden in den ersten beiden Abschnitten basierend auf [ASS], [Muk] und [King] die benötigten Grundlagen über Köcher, deren Darstellungen und deren Modulräume von (semi-)stabilen Darstellungen behandelt.

Abschließend wird eine Vermutung über die Eulercharakteristik von Kroneckermodulräumen aufgezeigt, die einen der Ausgangspunkte für die Untersuchungen in dieser Arbeit liefert.

### 2.1 Allgemeines

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Definition 2.1.1** *Ein Köcher  $Q$  besteht aus einer Menge  $Q_0$  von Punkten und einer Menge  $Q_1$  von Pfeilen  $\alpha : i \rightarrow j$  für  $i, j \in Q_0$ .*

*Ein Punkt  $q \in Q_0$  heißt Senke, falls kein  $\alpha : q \rightarrow q' \in Q_1$  existiert.*

*Ein Punkt  $q \in Q_0$  heißt Quelle, falls kein  $\alpha : q' \rightarrow q \in Q_1$  existiert.*

*Ein Köcher heißt endlich, falls die Mengen  $Q_0$  und  $Q_1$  endlich sind.*

*Ein Köcher heißt bipartit, falls eine Zerlegung  $Q_0 = I \cup J$  existiert, so dass für alle Pfeile  $\alpha : i \rightarrow j$  gilt:  $i \in I$  und  $j \in J$ .*

*Ein orientierter Zykel in einem Köcher  $Q$  ist eine Folge von Pfeilen  $\alpha_1 : i_1 \rightarrow i_2, \alpha_2 : i_2 \rightarrow i_3 \dots, \alpha_n : i_n \rightarrow i_{n+1}$ , so dass  $i_1 = i_{n+1}$ .*

Im Folgenden soll angenommen werden, dass ein Köcher  $Q$  keine orientierten Zykel hat.

Definiere die abelsche Gruppe

$$\mathbb{Z}Q_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{Z}i$$



und deren Monoid von Dimensionsvektoren  $\mathbb{N}Q_0$ .

Weiter soll eine nicht-symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{Z}Q_0$ , die Eulerform, eingeführt werden. Definiere dazu

$$\langle d, e \rangle := \sum_{i \in Q_0} d_i e_i - \sum_{\alpha: i \rightarrow j} d_i e_j.$$

Eine endlich-dimensionale  $k$ -Darstellung von  $Q$  ist gegeben durch ein Tupel

$$X = ((X_i)_{i \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1} : X_i \rightarrow X_j)$$

von endlich-dimensionalen  $k$ -Vektorräumen und  $k$ -linearen Abbildungen zwischen diesen. Der Dimensionsvektor  $\underline{\dim} X \in \mathbb{N}Q_0$  von  $X$  ist definiert durch

$$\underline{\dim} X = \sum_{i \in Q_0} \dim_k X_i i.$$

Ist ein Dimensionsvektor  $d \in \mathbb{N}Q_0$  gegeben, so ist die Varietät  $R_d(Q)$  der  $k$ -Darstellungen von  $Q$  zum Dimensionsvektor  $d$  definiert als der affine  $k$ -Raum

$$R_d(Q) = \bigoplus_{\alpha: i \rightarrow j} \text{Hom}_k(k^{d_i}, k^{d_j}).$$

Auf diesem operiert die algebraische Gruppe

$$G_d = \prod_{i \in I} \text{Gl}_{d_i}(k)$$

via simultanem Basiswechsel, also durch

$$(g_i)_{i \in Q_0} * (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1} = (g_j X_\alpha g_i^{-1})_{\alpha: i \rightarrow j}.$$

Die Bahnen stehen in Bijektion zu den Isomorphieklassen von  $k$ -Darstellungen von  $Q$  zum Dimensionsvektor  $d$ .

### Bemerkung 2.1.2

- Nur  $\{0\}$  ist eine abgeschlossene Bahn. Um das einzusehen, betrachte für  $X = (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \neq 0$  die Einparameter-Untergruppe

$$\varphi : t \mapsto (tX_\alpha)_{\alpha \in Q_1}.$$

Da  $\varphi(t)$  für alle  $t \neq 0$  in der Bahn von  $X$  liegt, ist die Nullbahn in deren Abschluss enthalten. Somit ist die Bahn  $G * X$  offen, da jeder Bahnenabschluss genau eine abgeschlossene Bahn enthält.

Wählt man im Raum der  $\mathbb{Z}$ -Linearformen  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}Q_0, \mathbb{Z})$  die Basis  $i^*$  für  $i \in Q_0$ , also  $i^*(j) = \delta_{i,j}$  für  $j \in Q_0$ , so sei

$$\dim := \sum_{i \in Q_0} i^*.$$

Sei außerdem  $\Theta \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}Q_0, \mathbb{Z})$  fest gewählt. Dann lässt sich folgendermaßen eine Funktion  $\mu : \mathbb{N}Q_0 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$  definieren:

$$\mu(d) = \frac{\Theta(d)}{\dim(d)}.$$

Diese wird im Folgenden Steigung oder Steigungsfunktion genannt wird. Ist  $\underline{\dim}X$  der Dimensionsvektor zu einer Köcherdarstellung  $X$ , so schreibt man kurz  $\mu(X)$  anstelle von  $\mu(\underline{\dim}X)$ .

**Definition 2.1.3** Eine Köcherdarstellung heißt semistabil bzw. stabil, falls für alle echten Unterdarstellungen  $0 \neq U \subsetneq X$  gilt:

$$\mu(U) \leq \mu(X) \text{ bzw. } \mu(U) < \mu(X).$$

Diese Definition ist äquivalent zu der von A.King [King]: sei wiederum eine Linearform  $\tilde{\Theta}$  gegeben. Dann heißt dort eine Darstellung  $X$ , so dass  $\Theta(\underline{\dim}X) = 0$ , genau dann semistabil bzw. stabil, wenn

$$\tilde{\Theta}(\underline{\dim}U) \geq 0 \text{ bzw. } \tilde{\Theta}(\underline{\dim}U) > 0$$

für alle Unterdarstellungen  $U \subset X$  bzw. alle echten Unterdarstellungen  $0 \neq U \subsetneq X$ .

Um die Äquivalenz zu erkennen, definiert man

$$\Theta := \mu \cdot \dim - \tilde{\Theta}$$

und überprüft, dass eine Darstellung  $X$  genau dann semistabil im obigen Sinne ist, wenn sie  $\tilde{\Theta}$ -semistabil im Sinne von King ist.

Seien im Folgenden die Mengen der semistabilen bzw. stabilen Punkte mit  $R_d^{ss}(Q)$  bzw.  $R_d^s(Q)$  bezeichnet. In dieser Situation gilt für die Isomorphieklassen der (semi-)stabilen Darstellungen der folgende Satz, der auf die Mumfordsche GIT zurückgeht und von King bewiesen wurde, siehe hierzu [Mum], [King]:

**Satz 2.1.4** Es gilt:

1. Die Menge  $R_d^s(Q)$  der stabilen Punkte ist eine offene Teilmenge der Menge der semistabilen Punkte  $R_d^{ss}(Q)$ , die wiederum eine offene Teilmenge von  $R_d(Q)$  bilden.

2. Es existiert ein kategorieller Quotient  $M_d^{ss}(Q) := R_d^{ss}(Q)//G_d$ . Zudem ist  $M_d^{ss}(Q)$  eine projektive Varietät.
3. Es existiert ein geometrischer Quotient  $M_d^s(Q) := R_d^s(Q)/G_d$ , der zudem eine glatte Untervarietät von  $M_d^{ss}(Q)$  bildet.

Zur ausführlicheren Beschreibung von Quotienten sei auf [Muk] verwiesen. Hier soll kurz auf die Konstruktion eingegangen werden.

Den im Weiteren Modulraum genannten Quotienten  $M_d^{ss}(Q)$  erhält man, indem man wie folgt einen Charakter  $\chi$  auf  $G_d$  definiert. Sei

$$\chi((g_i)_{i \in I}) := \prod_{i \in I} \det(g_i)^{\Theta(d) - \dim d \cdot \Theta_i},$$

wobei  $\Theta$  die aus den obigen Überlegungen resultierende Linearform sei.

Zu einer affinen Varietät  $X$  ist die Menge der  $\chi^n$ -Semiinvarianten vom Gewicht  $\chi^n$  definiert als

$$k[X]^{G, \chi^n} := \{f \in k[X] \mid f(g * x) = \chi(g)^n \cdot f(x) \forall g \in G, \forall x \in X\}$$

und der  $\chi$ -Semiinvariantenring als

$$k[X]_{\chi}^G := \bigoplus_{n=0}^{\infty} k[X]^{G, \chi^n}.$$

Dann gilt

$$M_d^{ss}(Q) = \text{Proj}(k[R_d(Q)]_{\chi}^G),$$

also das projektive Spektrum des Semiinvariantenrings.

### Bemerkung 2.1.5

- Da es nach Bemerkung 2.1.2 nur eine abgeschlossene Bahn gibt und somit der affine Quotient nur aus einem Punkt besteht, gilt in der betrachteten Situation  $k[R_d(Q)]^G = k$ . Also hat der Proj-Quotient keinen affinen Anteil und ist demnach eine projektive Varietät.
- Die Glattheit aller Punkte ergibt sich dadurch, dass zunächst  $R_d(Q)$  als affiner Raum glatt ist. Die Menge der stabilen Punkte  $R_d^s(Q)$  ist also als offene Teilmenge ebenso glatt. Da der Modulraum  $M_d^s(Q)$  ein algebraischer Bahnenraum zu der betrachteten Gruppenaktion eingeschränkt auf eben die stabilen Punkte ist, enthält dieser auch nur glatte Punkte.
- Der Modulraum  $M_d^{ss}(Q)$  parametrisiert nicht die semistabilen Darstellungen, sondern die polystabilen. Das sind Darstellungen, die in direkte Summen stabiler Darstellungen gleicher Steigung zerlegt werden können.

- Wenn Stabilität und Semistabilität übereinstimmen, so erhält man sogar eine glatte projektive Varietät. Das ist offenbar dann der Fall, wenn  $\mu(d) \neq \mu(e)$  für alle  $0 \neq e < d$ . In diesem Fall heißt  $d$  dann  $\Theta$ -teilerfremd.
- Sei  $M_d^{ss}(Q) = M_d^s(Q)$ . Für eine stabile Darstellung  $X$  gilt, dass ihre Bahn in  $R_d^s(Q)$  maximal mögliche Dimension hat. Da die Skalarmatrizen trivial auf  $R_d(Q)$  operieren, ist die Isotropiegruppe einer Darstellung mindestens eindimensional. Dann folgt also für die Dimension des Modulraums

$$\dim M_d^{ss}(Q) = 1 - \langle d, d \rangle.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei auf einige Eigenschaften von semistabilen bzw. stabilen Darstellungen hingewiesen, die an mehreren Stellen sehr hilfreich sein werden. Zum Beweis des folgenden Lemmas siehe zum Beispiel [HN].

**Lemma 2.1.6** *Sei zu einem Köcher  $Q$  eine kurze exakte Sequenz von Darstellungen  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$  gegeben.*

1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- $\mu(M) \leq \mu(X)$
- $\mu(X) \leq \mu(N)$
- $\mu(M) \leq \mu(N)$

2. *Es gilt*

$$\min(\mu(M), \mu(N)) \leq \mu(X) \leq \max(\mu(M), \mu(N)).$$

3. *Falls  $\mu(M) = \mu(X) = \mu(N)$ , dann ist  $X$  genau dann semistabil, wenn  $M$  und  $N$  semistabil sind.*

**Korollar 2.1.7** *Sei  $X$  eine stabile Darstellung eines Köchers  $Q$ . Dann gilt  $\text{End}(X) = k$ . Insbesondere sind stabile Darstellungen also unzerlegbar.*

*Beweis.* Sei  $\varphi \in \text{End}(X)$ . Dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow X \rightarrow \text{im}(\varphi) \rightarrow 0.$$

In dieser Situation folgt aus dem ersten Teil von Lemma 2.1.6 schon, dass entweder  $\ker(\varphi) = X$  oder  $\text{im}(\varphi) = X$ . Ist  $\varphi \neq 0$ , so hat  $\varphi$  einen Eigenwert  $\lambda \neq 0$ , da  $k$  algebraisch abgeschlossen ist. Dann folgt für  $(\varphi - \lambda) \in \text{End}(X)$  mit demselben Argument, dass  $\ker(\varphi - \lambda) = X$ , also  $\varphi = \lambda$ .

□

Sei  $X$  eine Köcherdarstellung. Eine Unterdarstellung  $Y \subsetneq X$  heißt  $\text{scss}(X)$  (strongly contradicting semistability), wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\mu(Y) = \max\{\mu(U) \mid U \subsetneq X\} =: \mu_{\max}$
- $\dim(Y) = \max\{\dim(U) \mid U \subsetneq X, \mu(U) = \mu_{\max}\}$ .

Das heißt also, dass  $Y = \text{scss}(X)$  unter den Unterdarstellungen mit maximaler Steigung von maximaler Dimension ist. Möchte man also eine Darstellung  $X$  auf Stabilität überprüfen, genügt es, die Unterdarstellung  $\text{scss}(X)$  zu kennen und an Hand dieser die Stabilitätsbedingung zu testen.

**Lemma 2.1.8** *Sei  $X$  eine Köcherdarstellung. Dann ist die Unterdarstellung  $\text{scss}(X)$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Angenommen  $U$  und  $U'$  erfüllen die Bedingungen. Es gilt  $U + U' \subseteq X$ . Betrachte die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow U \cap U' \longrightarrow U \oplus U' \longrightarrow U + U' \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow U \oplus U' \longrightarrow U' \longrightarrow 0.$$

Es gilt zunächst  $\mu(U \cap U') \leq \mu(U) = \mu(U')$  nach Voraussetzung. Aus der zweiten Sequenz erhält man mit Lemma 2.1.6, dass  $\mu(U) = \mu(U') = \mu(U \oplus U')$ .

Dann folgt wieder mit Lemma 2.1.6 aus  $\mu(U \cap U') \leq \mu(U) = \mu(U \oplus U')$ , dass  $\mu(U \oplus U') \leq \mu(U + U')$ , also  $\mu(U) = \mu(U + U')$ . Also muss wegen der Maximalität der Dimension von  $U$  gelten, dass auch  $\dim(U + U') = \dim(U) = \dim(U')$ . Daraus folgt aber schon  $U = U'$ .

□

Seien  $M, N$  zwei Darstellungen von  $Q$  und betrachte die Abbildung

$$d_{M,N} : \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_k(M_i, N_i) \rightarrow \bigoplus_{\alpha: i \rightarrow j} \text{Hom}_k(M_i, N_j)$$

mit

$$d_{M,N}((f_i)_{i \in I}) = (N_\alpha f_i - f_j M_\alpha)_{\alpha: i \rightarrow j}.$$

Wenn  $\langle \dim M, \dim N \rangle = 0$ , so haben beide Vektorräume die gleiche Dimension und wir definieren

$$c(M, N) = \det(d_{M,N}).$$

Für festes  $M$  erhalten wir eine semiinvariante Funktion  $c_M : R_e(Q) \rightarrow k$ , wobei  $e$  der Dimensionsvektor von  $M$  ist. Es gilt das Folgende, siehe [SB]:

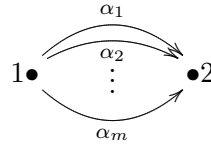
**Satz 2.1.9** Die Funktionen  $c_M$ , so dass  $\langle \underline{\dim} M, d \rangle = 0$ , erzeugen den Semiinvariantenring von  $R_d(Q)$ .

Aus [Sch] folgt sogar, dass die Funktionen  $c_M$  zu einfachen Darstellungen aus der Kategorie der Darstellungen, die  $\langle \underline{\dim} M, d \rangle = 0$  erfüllen, den Semiinvariantenring erzeugen.

## 2.2 Kroneckerköcher bzw. -modulräume

Da das Hauptaugenmerk der Arbeit auf dem  $m$ -Kroneckerköcher mit  $m \geq 3$  liegt, sollen die im ersten Abschnitt eingeführten Begriffe auf diesen angewendet werden. Dazu sei  $k = \mathbb{C}$ .

Wir betrachten also den folgenden Köcher  $K(m)$  mit zwei Punkten und  $m$  Pfeilen:



Eine Darstellung zu einem Dimensionsvektor  $(d, e)$  ist dann gegeben durch zwei  $\mathbb{C}$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  der Dimensionen  $d$  bzw.  $e$  und einem  $m$ -Tupel linearer Abbildungen

$$(X_1, \dots, X_m) \in \bigoplus_{i=1}^m \text{Hom}(V, W) = R_{d,e}(K(m)).$$

Wie schon im vorherigen Abschnitt erläutert, operiert die Gruppe  $(Gl(V) \times Gl(W))$  auf  $R_{d,e}(K(m))$  via simultanem Basiswechsel. Da die Skalarmatrizen trivial operieren, faktorisiert die Gruppenaktion durch  $P := (Gl(V) \times Gl(W))/\mathbb{C}^*$ . Für die Linearform  $\Theta := (1, 0)$  ergibt sich die Steigungsfunktion  $\mu : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ , die durch

$$\mu(d, e) = \frac{d}{d + e}$$

gegeben ist. Mit dieser Steigungsfunktion erhält man das folgende Kriterium für die (Semi-)Stabilität von Darstellungen des Kroneckerköchers:

**Lemma 2.2.1** Ein Punkt  $(X_1, \dots, X_m) \in R_{d,e}(K(m))$  ist genau dann semistabil, wenn für alle Unterräume  $U \subset V$  gilt, dass

$$\dim \sum_{k=1}^m X_k(U) \geq \dim U \cdot \frac{e}{d}$$

und genau dann stabil, wenn für alle echten Unterräume  $0 \neq U \subsetneq V$  gilt, dass

$$\dim \sum_{k=1}^m X_k(U) > \dim U \cdot \frac{e}{d}.$$

Sind also in dieser Situation  $d$  und  $e$  teilerfremd, so sind alle semistabilen Darstellungen zugleich stabil.

**Definition 2.2.2** *Es gelte  $\text{ggT}(d, e) = 1$ . Dann heißt der kategorielle Quotient*

$$M_{d,e}^m = \text{Proj}(\mathbb{C}[\bigoplus_{i=1}^m \text{Hom}(V, W)]_X^{\text{Gl}(V) \times \text{Gl}(W)})$$

*Kroneckermodulraum.*

**Bemerkung 2.2.3**

- Wir können natürlich ohne Einschränkung annehmen, dass die Darstellungen des Kroneckerköchers zum Dimensionsvektor  $(d, e)$  durch  $m$ -Tupel von  $(e \times d)$ -Matrizen mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  gegeben sind.

Ein Kroneckermodulraum kann als eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit verstanden werden. Allgemein betrachtet man dazu zu einer projektiven Varietät  $X$ , gegeben als Nullstellenmenge homogener Polynome  $P_i \in k[X_0, \dots, X_n]$ , die folgende Menge mit der Standardtopologie:

$$X' := \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid P_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, N\}.$$

Ist wie in der vorliegenden Situation  $k = \mathbb{C}$ , stimmen  $X$  und  $X'$  als Mengen offenbar überein. Der folgende Satz beschreibt, wie sich die Begriffe aus der Geometrischen Invariantentheorie auf diese Menge übertragen. Für Einzelheiten hierzu sei auf [Sha1, Kapitel 2] und [Sha2, Kapitel 7] verwiesen.

**Satz 2.2.4** *Ist  $X$  eine projektive Varietät, die nur aus glatten Punkten besteht, so ist  $X'$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit bezüglich der Standardtopologie.*

Dazu sei bemerkt, dass die Projektivität die Kompaktheit liefert, da  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  kompakt und  $X'$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ist. Aus der Glattheit aller Punkte ergibt sich, dass  $X'$  eine Mannigfaltigkeit ist.

Ein Kroneckermodulraum ist nach den ersten beiden Teilen von Bemerkung 2.1.5 bzw. Satz 2.1.4 eine glatte projektive Varietät.

Das Ergebnis, das man also zusammenfassend für die vorliegende Gruppenaktion erhält, ist der folgende Satz:

**Satz 2.2.5** *Seien  $d, e, m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 3$  und  $\text{ggT}(d, e) = 1$  gegeben. Dann ist der Kroneckermodulraum  $M_{d,e}^m$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und es existiert eine stetige Abbildung*

$$\Pi : R_{d,e}^s(K(m)) \rightarrow M_{d,e}^m,$$

so dass die  $\Pi$ -Fasern genau die Bahnen unter der betrachteten Aktion sind.

Abschließend sollen einige Eigenschaften der Mannigfaltigkeit  $M_{d,e}^m$  aufgezeigt werden, die später sehr hilfreich sein werden.

**Satz 2.2.6** 1. Es gibt Isomorphismen  $M_{d,e}^m \cong M_{e,d}^m$  und  $M_{d,e}^m \cong M_{me-d,e}^m$ .

2. Für die Dimension eines Kroneckermodulraums gilt

$$\dim M_{d,e}^m = 1 - d^2 - e^2 + dem,$$

falls  $M_{d,e}^m \neq \emptyset$ .

3. Es gilt  $M_{d,e}^m \neq \{pt\}$  genau dann, wenn

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} \leq \frac{e}{d} \leq \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \text{ gilt.}$$

*Beweis.* Um die erste Isomorphie zu erhalten, betrachtet man die Abbildung

$$\overline{(A_1, \dots, A_m)} \rightarrow \overline{(A_1^T, \dots, A_m^T)}.$$

Die zweite Isomorphie erhält man mit Hilfe des Spiegelungsfunktors, siehe Abschnitt 4.2.

Der zweite Teil des Satzes ist ein Spezialfall des fünften Teils der Bemerkung 2.1.5.

Wenn  $M_{d,e}^m \neq \{pt\}$  gilt, so folgt

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} \leq \frac{e}{d} \leq \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

aus dem zweiten Teil des Satzes.

Die andere Richtung erhält man aus [Rei2, Satz 3.5].

□

Bemerkt sei, dass die Dimensionsvektoren, die die Ungleichung des dritten Teils des Satzes erfüllen, genau den imaginären Wurzeln entsprechen. Ist der Modulraum ein Punkt, so ist der Dimensionsvektor eine reelle Wurzel, also Spiegelungen der zu den einfachen Darstellungen gehörenden Dimensionsvektoren  $(0, 1)$  bzw.  $(1, 0)$ .

## 2.3 Vermutung über die Asymptotik der Eulercharakteristik

Es soll nun näher auf die bereits erwähnte Vermutung von Michael Douglas eingegangen werden. Dazu sei im Folgenden mit  $\chi(M_{d,e}^m)$  die Eulercharakteristik des Kroneckermodulraums bezeichnet. Für eine ausführlichere Definition siehe Abschnitt 3.2. Ursprünglich formulierte Douglas die Vermutung in [Dou] folgendermaßen:



**Vermutung 2.3.1 (Douglas)** Fixiere ein  $r \in \mathbb{R}_+$  und betrachte  $(d, e) \in \mathbb{N}_+^2$  mit  $\text{ggT}(d, e) = 1$  und  $\frac{e}{d} \approx r$ .

1. Dann gibt es ein  $C_r \in \mathbb{R}$ , so dass für  $e, d \gg 0$

$$\frac{\ln(\chi(M_{d,e}^m))}{d} \approx C_r.$$

2. Die Funktion  $r \mapsto C_r$  ist stetig.

Das heißt also, dass Douglas vermutet, dass  $\frac{\ln(\chi(M_{d,e}^m))}{d}$  und somit auch die Eulercharakteristik asymptotisch schon durch den Bruch  $\frac{e}{d}$  gegeben ist und des Weiteren stetig von diesem abhängig ist. Sei

$$m_1 := \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} \quad \text{und} \quad m_2 := \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}.$$

Basierend darauf ergibt sich aus [Wei] die folgende präzierte Vermutung:

**Vermutung 2.3.2** Sei  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $m \geq 3$ , fest gewählt. Dann existiert eine stetige Funktion  $f : [m_1, m_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass folgendes gilt:

Für alle  $r \in [m_1, m_2]$  und alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  und ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $(d, e) \in \mathbb{N}^2$  mit  $\text{ggT}(d, e) = 1$ ,  $|r - e/d| < \delta$  und  $|d + e| > n$  gilt:

$$\left| f(r) - \frac{\ln(\chi(M_{d,e}^m))}{d} \right| < \varepsilon.$$

**Bemerkung 2.3.3**

- Die Vermutung lässt sich auch folgendermaßen umformulieren: es existiert eine stetige Funktion  $f$ , so dass für jeden teilerfremden Dimensionsvektor  $(d, e)$  ein Dimensionsvektor  $(d_s, e_s)$  existiert, so dass

$$f\left(\frac{e}{d}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \chi(M_{d_s+nd, e_s+ne}^m)}{d_s + nd}.$$

Insbesondere konvergiert die rechte Seite.

Es soll auf einige Konsequenzen dieser Vermutung eingegangen werden, die in [Wei] bewiesen werden. Wir nehmen also für den Rest dieses Abschnitts an, dass die Vermutung stimmt. Sei

$$K := (m - 1)^2 \ln((m - 1)^2) - (m^2 - 2m) \ln(m^2 - 2m).$$

**Satz 2.3.4** Die Funktion  $f$  ist gegeben durch

$$f(r) = \frac{K}{\sqrt{m-2}} \cdot \sqrt{r(m-r)-1}.$$

Die Konstante  $K$  ist also insbesondere der Wert an der Stelle  $r = 1$ . Weiter folgt, dass die Eulercharakteristik asymptotisch ausschließlich von der Dimension des Modulraums abhängt:

**Korollar 2.3.5** *Der Logarithmus der Eulercharakteristik  $\ln(\chi(M_{d,e}^m))$  ist asymptotisch proportional zu  $\sqrt{dem - d^2 - e^2} = \sqrt{\dim M_{d,e}^m - 1}$ .*

# Kapitel 3

## Lokalisierung in Kroneckermodulräumen

### 3.1 Lokalisierung in Modulräumen

In diesem Abschnitt soll die in [Rei1] konstruierte Lokalisierung in Köchermodulräumen für einfache Darstellungen analog zu [Rei4] auf Modulräume stabiler Darstellungen übertragen werden. Es wird ein explizites Verfahren zur Bestimmung von Fixpunkten unter der Torusaktion auf solchen Modulräumen gegeben. Diese entsprechen stabilen Darstellungen des so genannten universellen abelschen Überlagerungsköchers.

#### 3.1.1 Torusfixpunkte

Sei  $G$  eine algebraische Gruppe und sei  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  ein Charakter in  $G$ , das heißt ein Morphismus algebraischer Gruppen. Dann bezeichne  $X(G)$  die Menge aller Charaktere in  $G$  mit der offensichtlichen Gruppenstruktur, die im Folgenden additiv geschrieben wird.

Seien  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $G$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $Gl(V)$ , die auf dem Vektorraum  $V$  operiert. Für jeden Charakter  $\chi \in X(G)$  definiere die  $\chi$ -(isotypische) Komponente vom Gewicht  $\chi$  in  $G$  als

$$V_\chi = \{v \in V \mid g \cdot v = \chi(g)v \forall g \in G\}.$$

Ist  $\varphi : G \rightarrow Gl(V)$  eine rationale Darstellung, so lässt sich die Definition der  $\chi$ -Komponenten übertragen, also

$$V_\chi = \{v \in V \mid \varphi(g)v = \chi(g)v \forall g \in G\}.$$

Zum Beispiel aus [Spr] erhält man folgendes Lemma:

**Lemma 3.1.1** *Sei  $G$  eine diagonalisierbare Untergruppe von  $Gl(V)$  und  $\varphi :$*

$G \rightarrow Gl(V)$  eine rationale Darstellung. Dann gilt

$$V = \bigoplus_{\chi \in X(G)} V_\chi.$$

Sei im Folgenden vorausgesetzt, dass der zu einem Köcher  $Q$  gewählte Dimensionsvektor  $d \in \mathbb{N}Q_0$  für die gewählte Linearform  $\Theta$  teilerfremd ist. Es gilt also  $M_d^s(Q) = M_d^{ss}(Q)$  für den via  $\Theta$  gewählten Stabilitätsbegriff.

Sei weiter mit  $T := (\mathbb{C}^*)^{|Q_1|}$  der  $|Q_1|$ -dimensionale Torus bezeichnet.

Auf  $R_d(Q)$  operiert  $T$  durch

$$((t_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) \cdot ((X_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) = (t_\alpha \cdot X_\alpha)_{\alpha \in Q_1}.$$

Da sich durch die Torusaktion die Dimensionsvektoren der Unterdarstellungen eines stabilen Punktes nicht ändern, lässt diese stabile Punkte stabil. Zudem kommutiert sie offenbar mit der  $G_d$ -Aktion. Deswegen induziert sie also eine  $T$ -Aktion auf  $M_d^s(Q)$ . Sei die Fixpunktmenge im Folgenden mit  $M_d^s(Q)^T$  bezeichnet.

Da die Skalarmatrizen trivial auf  $R_d(Q)$  operieren, faktorisiert die  $G_d$ -Aktion durch den Quotienten

$$PG_d := G_d/\mathbb{C}^*.$$

Sei  $X \in M_d^s(Q)$  ein Fixpunkt unter der Torusaktion. Betrachte nun die algebraische Gruppe

$$G := \{((g_i)_{i \in Q_0}, t) \in PG_d \times T \mid t \cdot X = (g_i)_{i \in Q_0} * X\}.$$

Man erhält die folgenden Projektionen

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ PG_d & & T \end{array}$$

mit der folgenden Eigenschaft:

**Lemma 3.1.2** *Sei  $X$  ein Fixpunkt unter der Torusaktion. Dann gilt:*

1. Die Projektion  $p_2 : G \rightarrow T$  ist ein Isomorphismus.
2. Insbesondere induziert die Projektion  $p_1 : G \rightarrow PG_d$  einen Homomorphismus algebraischer Gruppen  $\varphi := p_1 \circ p_2^{-1} : T \rightarrow PG_d$  mit der Eigenschaft:

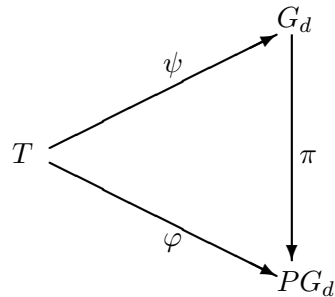
$$\varphi(t) * X = t \cdot X.$$

*Beweis.* Da  $X \in M_d^s$  ein Fixpunkt ist, ist  $p_2$  surjektiv. Da zudem  $X$  stabil ist, also die Bahn von maximal möglicher Dimension ist, ist die Isotropiegruppe von  $X$  unter der  $PG_d$  trivial. Also folgt die Injektivität.

Der zweite Teil folgt dann sofort.

□

Zu  $\varphi$  kann ein Lift  $\psi : T \rightarrow G_d$  gewählt werden, der wiederum in  $|Q_0|$  Morphismen algebraischer Gruppen  $\psi_i : T \rightarrow Gl_{d_i}$  zerlegt werden kann. Zusammen mit der Projektion  $\pi : G_d \rightarrow PG_d$  erhält man also das folgende kommutative Diagramm:



Der Lift kann zum Beispiel gewählt werden, indem das Element  $t$  auf das Tupel  $(g_i)_{i \in I}$  abgebildet wird, für das  $\det(g_i) = 1$  für alle  $i \in I$  gilt. Zum Beispiel aus [Hum, 16.2] erhält man für einen Torus folgende Eigenschaft:

**Lemma 3.1.3** *Sei  $T$  ein  $d$ -dimensionaler Torus. Dann gilt:*

$$X(T) \cong \mathbb{Z}^d.$$

Ist  $T = (\mathbb{C}^*)^d$  und  $\alpha_k \in X(T)$  gegeben durch  $\alpha_k(t_1, \dots, t_d) = t_k$  für  $1 \leq k \leq d$ , so ist der Isomorphismus gegeben, indem  $\alpha_k$  auf  $e_k$  abgebildet wird.

Mit den simultanen Eigenraumzerlegungen bezüglich  $\psi_i$ , also

$$V_i = \bigoplus_{\chi \in X(T)} V_{i,\chi},$$

ergibt sich folgendes wichtige Lemma:

**Lemma 3.1.4** *Sei  $X = (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$  ein Fixpunkt unter der Torusaktion. Dann gilt:*

$$X_\alpha(V_{i,\chi}) \subseteq V_{j,\chi+e_\alpha} \text{ für alle } \chi \in X(T), \alpha : i \rightarrow j.$$

*Beweis.* Seien also  $t = (t_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in T$  und  $v \in V_{i,\chi}$ . Dann gilt

$$\psi_j(t)X_\alpha(v) = \psi_j(t)X_\alpha\psi_i(t)^{-1}\psi_i(t)(v) = t_\alpha X_\alpha\chi(t)(v) = (\chi + e_\alpha)(t)X_\alpha(v).$$

□

Im Weiteren soll ein Köcher  $\hat{Q}$  definiert werden, so dass die Fixpunkte bzw. Fixpunkt­komponenten des anfänglichen Köchers  $Q$  mit Modulräumen dieses Köchers zu bestimmten Dimensionsvektoren identifiziert werden können. Um eine ausreichende Eindeutigkeit eben dieser Dimensionsvektoren des Köchers zu erhalten, soll zunächst die Abänderung des Lifts  $\psi$  und die Wahl eines anderen Repräsentanten zu einem Fixpunkt  $X$  untersucht werden.

**Bemerkung 3.1.5**

1. Wählt man einen anderen Lift  $\psi'$ , so gibt es, wie man sich leicht überlegt, einen Charakter  $\chi \in X(T)$ , so dass

$$\psi(t) = \chi(t)\psi'(t)$$

für alle  $t \in T$  gilt.

2. Sind zu einem Fixpunkt zwei Repräsentanten  $X$  und  $X'$  gegeben, so gibt es ein  $g \in G_d$ , so dass

$$X' = g * X.$$

Ist also  $\varphi$  ein zu  $X$  gehöriger Homomorphismus, so gilt

$$(g^{-1}\varphi(t)) * X' = t \cdot X'$$

für alle  $t \in T$ .

Aus den obigen Überlegungen erhält man folgendes Lemma:

**Lemma 3.1.6** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1.  $X$  ist ein Fixpunkt.
2. Es existiert ein Morphismus algebraischer Gruppen  $\varphi : T \rightarrow G_d$ , so dass

$$(t_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \cdot (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1} = \varphi((t_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) * (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$$

für alle  $(t_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in T$ .

Es soll zunächst gezeigt werden, dass es genügt, die Stabilität von Fixpunkten für die Unterräume zu überprüfen, die mit der Gewichtsraumzerlegung kompatibel sind. Das ist ein wichtiges Kriterium für die Anwendbarkeit der in diesem Abschnitt eingeführten Konstruktion.

**Satz 3.1.7** *Sei  $X$  ein Fixpunkt zu einem Köcher  $Q$  mit Dimensionsvektor  $d$ . Seien*

$$X_i = \bigoplus_{\chi \in X(T)} X_{i,\chi}$$

*die Gewichtsraumzerlegungen bezüglich des dazugehörigen Morphismus  $\varphi : T \rightarrow G_d$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $X$  ist semistabil.
2. Für alle Unterdarstellungen  $U$ , die mit der Gewichtsraumzerlegung von  $X$  kompatibel sind, also  $U_i = \bigoplus_{\chi \in X(T)} U_{i,\chi}$  und alle  $i \in Q_0$ , wobei  $U_{i,\chi} \subset X_{i,\chi}$ , gilt  $\mu(U) \leq \mu(X)$ .

*Beweis.* Die eine Folgerung ist klar. Sei also eine Köcherdarstellung  $X$  gegeben, für die die Voraussetzungen aus 2. erfüllt sind. Sei weiter  $U = \text{scss}(X)$  und betrachte

$$\varphi(t)U := (\varphi_i(t_\alpha)_{\alpha \in Q_1}(U_i))_{i \in Q_0}$$

für beliebiges  $(t_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in T$ .

Da  $X$  ein Fixpunkt ist, gilt nach Lemma 3.1.6, dass

$$(t_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \cdot (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1} = \varphi((t_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) * (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$$

für alle  $(t_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in T$  und einen Morphismus algebraischer Gruppen  $\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_0} : T \rightarrow PG_d$ .

Damit gilt für alle Pfeile  $\alpha : i \rightarrow j$  folgendes:

$$X_\alpha \varphi_i(t)U_i = \frac{1}{t_\alpha} \varphi_j(t)X_\alpha \varphi_i(t)^{-1} \varphi_i(t)U_i \subset \varphi_j(t)U_j,$$

da  $X_\alpha U_i \subset U_j$ . Also ist  $\varphi(t)U$  eine Unterdarstellung von  $X$ . Da  $\varphi_i(t)$  invertierbar ist für alle  $i \in Q_0$ , stimmen die Dimensionsvektoren von  $U$  und  $\varphi(t)U$  überein. Wegen der Eindeutigkeit von  $\text{scss}(X)$  gilt also  $\varphi(t)U = U$  für alle  $t \in T$ .

Das ist gleichbedeutend mit  $\varphi_i(t)U_i = U_i$  für alle  $t \in T$  und alle  $i \in Q_0$ . Das bedeutet, dass  $U = \text{scss}(X)$  mit der Gewichtsraumzerlegung kompatibel ist. Demnach gilt nach Voraussetzung, dass  $\mu(\text{scss}(X)) \leq \mu(X)$ . Also ist  $X$  semistabil, weil die Steigung von  $\text{scss}(X)$  innerhalb der Menge der Unterdarstellungen von  $X$  maximal ist.

□

Definiere einen Köcher  $\hat{Q}$  wie folgt. Die Punktmenge sei durch

$$\hat{Q}_0 = Q_0 \times X(T)$$

definiert. Für jeden Pfeil  $\alpha : i \rightarrow j$  und jeden Charakter  $\chi \in X(T)$  definiere einen Pfeil

$$(\alpha, \chi) : (i, \chi) \rightarrow (j, \chi + e_\alpha)$$

in  $\hat{Q}_1$ . Das ist die universelle abelsche Überlagerung von  $Q$ , siehe auch [Rei4]. Ist in dieser Situation  $X$  ein Fixpunkt zu  $Q$ , dann definiere den dazugehörigen Dimensionsvektor  $\hat{d} \in \mathbb{N}\hat{Q}_0$  durch

$$\hat{d}_{i,\chi} := \dim_{\mathbb{C}} V_i^X.$$

Wegen Lemma 3.1.4 kann  $X$  als Darstellung dieses Köchers aufgefasst werden.

Der Stabilitätsbegriff, der für diesen Köcher betrachtet werden soll, ist der von  $\Theta$  induzierte. Wir definieren also die Linearform  $\hat{\Theta} : \mathbb{Z}\hat{Q}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  so, dass

$$\hat{\Theta}_{i,\chi} = \Theta_i$$

für alle  $i \in Q_0$  und alle  $\chi \in X(T)$ . Stabile Fixpunkte können also wegen 3.1.7 mit stabilen Darstellungen des eben eingeführten Köchers identifiziert werden.

Es soll noch gezeigt werden, dass diese Darstellung zu einem Fixpunkt  $X$  in für spätere Zwecke hinreichende Weise eindeutig ist. Durch die Wahl eines anderen Lifts  $\psi$ , ändern sich nach Bemerkung 3.1.5 die Gewichte in den Gewichtsraumzerlegungen durch Translation um den entsprechenden Charakter  $\chi$ . Das entspricht der Gruppenaktion von  $\mathbb{Z}Q_1$  auf  $\hat{Q}_0$ , die folgendermaßen definiert ist:

$$\mu \cdot (i, \chi) = (i, \chi + \mu).$$

Das induziert offenbar eine Gruppenaktion auf der Menge der Dimensionsvektoren  $\mathbb{N}\hat{Q}_0$ . Zwei Dimensionsvektoren, die in einer Bahn liegen, heißen im Folgenden äquivalent.

Auch die Abänderung des Repräsentanten entspricht einer gleichmäßigen Verschiebung der Gewichte bzw. der Dimensionen der Gewichtsräume, so dass abschließend gilt:

**Satz 3.1.8** *Für jeden Fixpunkt  $X \in M_d^s(Q)^T$  gibt es (bis auf Äquivalenz) einen eindeutigen Dimensionsvektor  $\hat{d}$  für  $\hat{Q}$ , so dass  $X$  einer Darstellung von  $\hat{Q}$  mit Dimensionsvektor  $\hat{d}$  entspricht.*

### 3.1.2 Beschreibung der Fixpunkte und bipartite Köcher

Umgekehrt zu der Konstruktion des letzten Abschnitts soll nun eine Einbettung der Darstellungen des Köchers  $\hat{Q}$  in die Fixpunktmenge konstruiert werden. Dazu konstruiert man zunächst zu einer Darstellung von  $\hat{Q}$  eine entsprechende Darstellung von  $Q$  und zeigt, dass diese einem Fixpunkt entspricht.

Sei zu  $\hat{Q}$  ein Dimensionsvektor  $\hat{d}$ , so dass der entsprechende Dimensionsvektor  $d$  zu  $Q$  teilerfremd ist, fest gewählt. Dabei ist  $d_i$  für  $i \in Q_0$  gegeben durch

$$d_i = \sum_{\chi \in X(T)} \hat{d}_{i,\chi}.$$

Wir nennen solch einen Dimensionsvektor  $\hat{d}$  im Folgenden auch kompatibel mit  $d$ .



Seien  $V_{i,\chi}$  Vektorräume der Dimension  $\hat{d}_{i,\chi}$  für alle  $i \in Q_0$  und  $\chi \in X(T)$ . Betrachte die Vektorräume

$$V_i := \bigoplus_{\chi \in X(T)} V_{i,\chi}.$$

Dann ergibt sich eine Darstellung, indem man zu den linearen Abbildungen

$$X_{\alpha,\chi} : V_{i,\chi} \rightarrow V_{j,\chi+e_\alpha}$$

linearen Abbildungen

$$X_\alpha = \bigoplus_{\chi \in X(T)} X_{\alpha,\chi} : V_i \rightarrow V_j$$

für alle  $\alpha : i \rightarrow j$  definiert.

So erhält man eine lineare Abbildung

$$P : R_{\hat{d}}(\hat{Q}) \rightarrow R_d(Q).$$

Zudem ergibt sich durch die Zerlegung der Vektorräume  $V_i$  eine Einbettung von  $G_{\hat{d}}$  in  $G_d$ . Da die Abbildung äquivariant für die Gruppenaktion von  $G_{\hat{d}}$  ist, induziert  $P$  wegen der universellen Eigenschaft für Quotienten eine Abbildung

$$P : M_{\hat{d}}^{ss}(\hat{Q}) \rightarrow M_d^{ss}(Q).$$

Definiere nun eine Abbildung algebraischer Gruppen  $\psi = (\psi_i)_{i \in Q_0} : T \rightarrow G_d$ , so dass

$$\psi_i : T \rightarrow Gl(V_i)$$

dadurch gegeben ist, dass

$$\psi_i(t)v = \chi(t)v$$

für alle  $t \in T$  und alle  $v \in V_{i,\chi}$ .

Das macht  $\psi$  wohldefiniert und daraus ergibt sich ein Homomorphismus algebraischer Gruppen  $\varphi$ , so dass  $P(X) = Y$  nach Lemma 3.1.6 ein Fixpunkt ist.

Da Semistabilität und Stabilität wegen des teilerfremden Dimensionsvektors  $d$  übereinstimmen, werden stabile Darstellungen von  $\hat{Q}$  offenbar auf stabile Darstellungen von  $Q$  abgebildet.

**Lemma 3.1.9** *Seien  $X$  und  $X'$  zwei stabile Darstellungen von  $\hat{Q}$ , so dass  $P(X)$  und  $P(X')$  isomorph sind. Dann sind schon  $X$  und  $X'$  isomorph.*

*Beweis.* Seien also  $Y = P(X)$  und  $Y' = P(X')$  gegeben und sei

$$g = (g_i \in Gl(V_i))_{i \in Q_0}$$

ein Isomorphismus zwischen  $Y$  und  $Y'$ . Dann gilt

$$Y'_\alpha g_i = g_j Y_\alpha$$

für alle  $(\alpha : i \rightarrow j) \in Q_1$ . Da  $Y$  ein Fixpunkt ist, gibt es nach Lemma 3.1.6 einen entsprechenden Homomorphismus algebraischer Gruppen

$$\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_0}$$

und zu diesem wiederum einen Lift

$$\psi = (\psi_i : T \rightarrow G_{d_i})_{i \in Q_0}.$$

Wegen Bemerkung 3.1.5 kann angenommen werden, dass beide Fixpunkte den gleichen Lift induzieren, da sich durch die Änderung des Lifts durch Konjugation die dazugehörige Gewichtsraumzerlegung nicht ändert. Für diesen Lift und für alle  $t \in T$  bzw. alle  $\alpha : i \rightarrow j$  gilt dann folgendes:

$$\begin{aligned} \psi_j(t) Y'_\alpha \psi_i(t)^{-1} g_i &= t_\alpha \cdot Y'_\alpha g_i \\ &= g_j(t_\alpha \cdot Y_\alpha) \\ &= g_j \psi_j(t) Y_\alpha \psi_i(t)^{-1}, \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$Y'_\alpha (\psi_i(t)^{-1} g_i \psi_i(t)) = (\psi_j(t)^{-1} g_j \psi_j(t)) Y_\alpha$$

für alle  $\alpha \in Q_1$ .

Da  $Y$  und  $Y'$  stabile Darstellungen sind, besteht der Endomorphismenring nur aus den Skalaren und somit folgt:

$$(\psi_i(t)^{-1} g_i \psi_i(t))_{i \in Q_0} = a \cdot g$$

für alle  $t \in T$  und ein  $a \in \mathbb{C}$ . Das definiert einen entsprechenden Charakter  $a \in X(T)$ , so dass

$$\psi(t)^{-1} g \psi(t) = a(t) \cdot g$$

für alle  $t \in T$  gilt.

Jedes  $g_i$  induziert einen Isomorphismus zwischen den Gewichtsräumen  $V_{i,\chi}$  und  $V_{i,\chi+a}$ . Da allerdings die Vektorräume  $V_i$  endlichdimensional sind, folgt schon  $a = 0$ .

Somit kann  $g$  als Isomorphismus der Darstellungen  $X$  und  $X'$  betrachtet werden.

□

Jeder Fixpunkt kommt also von einer solchen abgeschlossenen Einbettung. Zudem sind die Bilder dieser Einbettungen paarweise disjunkt, so dass abschließend folgendes gilt:

**Satz 3.1.10** Die Menge der Fixpunkte  $M_d^s(Q)^T$  ist isomorph zu der disjunkten Vereinigung der Modulräume

$$\bigcup_{\hat{d}} M_{\hat{d}}^s(\hat{Q}),$$

wobei  $\hat{d}$  alle Äquivalenzklassen von Dimensionsvektoren durchläuft, die kompatibel mit  $d$  sind.

## 3.2 Eigenschaften der Eulercharakteristik

In diesem Abschnitt zeigen wir bekannte Eigenschaften der Eulercharakteristik auf, die im Folgenden wichtig sein werden. Für Grundlagen der Algebraischen Topologie siehe zum Beispiel [Lue].

Sei  $X$  zunächst eine glatte projektive komplexe Varietät der Dimension  $n$ . Dann sei mit  $H^i(X)$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , die  $i$ -te singuläre Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  bezeichnet. Diese sind bekanntermaßen  $\mathbb{C}$ -Vektorräume, wobei  $H^i(X) = 0$ , falls  $i > 2n$ . Zum Beweis siehe wiederum [Lue]. Definiere

$$h^k(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X)$$

für  $k = 0, 1, \dots, 2n$ .

Dann ist die Eulercharakteristik  $\chi$  definiert als

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k h^k(X).$$

Dass die Lokalisierungsmethode geeignet ist, um die Eulercharakteristik von Varietäten zu berechnen, ergibt sich aus dem folgenden Satz. Beweise sind zum Beispiel in [CG] oder [EM] zu finden.

**Satz 3.2.1** Seien  $X$  eine komplexe Varietät, auf der ein Torus  $T \subseteq X$  operiert. Seien mit  $X^T$  die Fixpunkte von  $X$  unter dieser Aktion bezeichnet. Dann gilt für die Eulercharakteristik

$$\chi(X) = \chi(X^T).$$

Aus Satz 3.1.10 zusammen mit der Additivität der Eulercharakteristik ergibt sich folgender grundlegender Satz:

**Satz 3.2.2** Sei  $Q$  ein Köcher mit Dimensionsvektor  $d$ . Dann gilt für die Eulercharakteristik des Modulraums  $M_d^s(Q)$  folgendes:

$$\chi(M_d^s(Q)) = \sum_{\hat{d}} \chi(M_{\hat{d}}^s(\hat{Q})),$$

wobei  $\hat{Q}$  der universelle abelsche Überlagerungsköcher ist und  $\hat{d}$  alle Äquivalenzklassen von Dimensionsvektoren für  $\hat{Q}$  durchläuft, die mit  $d$  kompatibel sind.

Betrachte für einen Köcher  $Q$  den Modulraum stabiler Darstellungen  $M_d^s(Q)$  für einen teilerfremden Dimensionsvektor  $d$ . Aus [Rei2] erhält man, dass die ungerade Kohomologie verschwindet. Aus dem Harten Lefschetz-Theorem, siehe zum Beispiel [GH], lässt sich folgern, dass

$$h^k(M_d^s(Q)) \leq h^{k+2}(M_d^s(Q))$$

für  $k < n$  bzw.

$$h^k(M_d^s(Q)) \geq h^{k+2}(M_d^s(Q))$$

für  $k > n$ . Dabei ist  $n$  die Dimension von  $M_d^s(Q)$ . Da offenbar außerdem gilt

$$h^0(M_d^s(Q)) = h^{2n}(M_d^s(Q)) = 1,$$

ergibt sich folgendes:

**Satz 3.2.3** *Für Modulräume stabiler Darstellungen eines Köchers  $Q$  mit teilerfremdem Dimensionsvektor  $d$  gilt:*

$$\chi(M_d^s(Q)) \geq \dim(M_d^s(Q)) + 1.$$

### 3.3 Asymptotik und Kombinatorik von Bäumen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, einige Aspekte der Kombinatorik von Bäumen zu behandeln, die für das weitere Vorgehen wichtig sind. Basierend auf vorgegebenen Eigenschaften soll die Anzahl der Bäume dieser Art gezählt werden. Und zwar entweder genau oder zumindest asymptotisch. Die behandelten Methoden sollen später benutzt werden, um die Anzahl von Torusfixpunkten bzw. Fixpunktcomponenten zu zählen bzw. eine untere Schranke für diese angeben zu können, so dass das Verhalten der Eulercharakteristik untersucht werden kann.

Ist  $a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  eine formale Potenzreihe, so sei im Folgenden

$$[x^n]a(x) := a_n \text{ für } n \geq 0.$$

**Definition 3.3.1** *Ein Graph  $G$  ist ein Tupel bestehend aus einer nicht-leeren endlichen Menge von Punkten  $V = V(G)$  und einer Menge  $X = X(G)$  von ungeordneten Paaren unterschiedlicher Punkte aus  $V$ . Jedes Paar  $x = \{u, v\}$  heißt Kante von  $G$  und wird als  $x = uv$  geschrieben.*

*Zwei Punkte  $u, v \in V$  heißen benachbart, falls es eine Kante  $x = uv$  gibt.*

*Ein Weg in einem Graph  $G$  ist eine alternierende Folge von Punkten und Kanten  $v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$ , beginnend und endend mit Punkten, so dass  $x_i = v_{i-1}v_i$ . Schreibe für einen Weg auch  $v_0 \dots v_n$ .*

*Ein Weg heißt Pfad, falls  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  gilt.*

*Ein Pfad heißt geschlossen oder auch Zykel, falls  $v_0 = v_n$  und offen, falls*

nicht.

Ein Graph heißt zusammenhängend, falls jedes Paar von Punkten durch einen Pfad verbunden werden kann.

Ein Graph heißt azyklisch, wenn er keine Zykel besitzt.

**Definition 3.3.2** Ein Baum ist ein zusammenhängender azyklischer Graph. Ein Baum mit einer Wurzel ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Punkt. Ein Graph ohne Zykel heißt Wald, die Komponenten sind also Bäume.

Betrachtet man ausschließlich Bäume, so bezeichnet man die Punkte auch als Knoten.

Für weitere Details zu Bäumen oder der Kombinatorik von Bäumen sei zum Beispiel auf [HP] oder [SF] verwiesen.

### 3.3.1 Einfach-erzeugte Bäume

Zunächst sollen einfach-erzeugte Bäume eingeführt werden, die später mit den so genannten Lokalisierungsköchern, d.h. Köchern, die von Torusfixpunkten kommen, in Verbindung gebracht werden können.

Sie wurden von Meir und Moon, siehe [MM], eingeführt und werden folgendermaßen definiert:

Sei

$$y(x) = \sum_{n \geq 1} y_n x^n$$

die Erzeugendenfunktion einer Familie  $\mathcal{T}$  von Bäumen mit Wurzel. Sei weiter

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 0} \phi_n x^n$$

eine Potenzreihe mit  $\phi_n \geq 0$  für alle  $n \geq 0$ , so dass zusätzlich  $\phi_0 > 0$  und  $\phi_j > 0$  für ein  $j \geq 2$  gilt. Erfüllt  $y(x)$  die Funktionalgleichung

$$y(x) = x\phi(y(x))$$

für eine beliebige solche Potenzreihe  $\phi$ , so heißt  $\mathcal{T}$  eine Familie einfach-erzeugter Bäume. Einen Baum  $T \in \mathcal{T}$  nennen wir einfach-erzeugt. Bemerkte sei aber, dass ein Baum in mehr als einer Klasse von einfach-erzeugten Bäumen enthalten sein kann.

Das Gewicht  $\omega(T)$  eines endlichen einfach-erzeugten Baumes  $T \in \mathcal{T}$  ist definiert als

$$\omega(T) = \prod_{j \geq 0} \phi_j^{D_j(T)},$$

wobei  $D_j(T)$  die Anzahl der Knoten mit  $j$  Nachfolgern ist. Sei mit  $|T|$  die Anzahl der Knoten eines Baumes bezeichnet. Dann gilt für die Koeffizienten

der Erzeugendenfunktion

$$y_n = \sum_{|T|=n} \omega(T).$$

Ein Beispiel für einfach-erzeugte Bäume sind Binärbäume, indem man

$$\phi(x) = 1 + 2x + x^2$$

setzt. Hier fließt also mit ein, dass bei Knoten mit einem Nachfolger zwischen Links- bzw. Rechtszweigen unterschieden wird.

### 3.3.2 Lagrange-Inversionsformel

Es soll auf die Lagrange-Inversionsformel eingegangen werden, die später ein wichtiges Hilfsmittel darstellen wird.

**Satz 3.3.3** Sei  $\phi(x) = \sum_{n \geq 0} \phi_n x^n$  eine Potenzreihe mit  $\phi(0) \neq 0$  und  $y(x)$  eine Potenzreihe, die die Funktionalgleichung

$$y(x) = x\phi(y(x))$$

erfüllt. Sei  $g(x)$  eine weitere beliebige Potenzreihe. Dann ist  $y(x)$  invertierbar und für den  $n$ -ten Koeffizienten von  $g(y(x))$  gilt, dass

$$[x^n]g(y(x)) = \frac{1}{n} [u^{n-1}]g'(u)\phi(u)^n$$

für alle  $n \geq 1$ .

Außerdem gilt, dass

$$[x^n](y(x))^m = \frac{m}{n} [u^{n-m}]\phi(u)^n.$$

Bemerkt sei, dass dieser Satz zu der Lagrange-Inversionsformel, wie sie gewöhnlich in der Literatur vorkommt, äquivalent ist. Für den Beweis und weitere Details siehe zum Beispiel [SF] oder [Drm].

In diesem Abschnitt soll zunächst ein für das Zählen von Köchern wichtiger Spezialfall betrachtet werden, der häufig vorkommt. Um letztendlich die Anzahl der Fixpunkte abschätzen zu können, wird eine asymptotische Näherung benutzt, die sich aus dem nächsten Abschnitt ergeben wird.

**Lemma 3.3.4** Sei  $\phi(x) = 1 + ax^b$  und es sei  $y(x)$  gegeben, so dass  $y(x) = x\phi(y(x))$ . Dann gilt

$$[x^n]y(x) = \frac{1}{n} \binom{n}{\frac{n-1}{b}} a^{\frac{n-1}{b}},$$

falls  $b|n-1$  und  $[x^n]y(x) = 0$  sonst.

*Beweis.* Es gilt

$$\phi(x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (ax^b)^k.$$

Daraus erhält man für die  $(n-1)$ -te Ableitung

$$\phi^{(n-1)}(x)^n = \sum_{\substack{k=0, \\ bk \geq n-1}}^n a^k bk(bk-1) \dots (bk-(n-2)) \binom{n}{k} x^{bk-(n-1)}.$$

Daraus erhält man also für den  $n$ -ten Taylorkoeffizienten nach der Lagrange-Inversionsformel 3.3.3, dass

$$[x^n]y(x) = \frac{1}{n} \binom{n}{\frac{n-1}{b}} a^{\frac{n-1}{b}},$$

falls  $b|n-1$  und  $[x^n]y(x) = 0$  sonst. Denn offenbar gilt für  $x=0$ , dass

$$x^{bk-(n-1)} \neq 0 \Leftrightarrow k = \frac{n-1}{b}.$$

□

**Korollar 3.3.5** *Sei  $m \geq 1$ . Dann gilt*

$$[x^n]y(x)^m = \frac{m}{n} \binom{n}{\frac{n-m}{b}} a^{\frac{n-m}{b}},$$

*falls  $b|n-m$  und  $n \geq m$  erfüllt sind, und es gilt  $[x^n]y(x)^m = 0$  sonst.*

Seien  $a, b, m, n \in \mathbb{N}^+$ . Dann definiere im Folgenden

$$\mathcal{A}_{a,b,m,n} := [x^n]y(x)^m,$$

falls  $y(x)$  die Funktionalgleichung  $y(x) = x\phi(y(x))$  mit  $\phi(x) = 1 + ax^b$  erfüllt und sei weiter

$$\mathcal{A}_{a,b,n} := \mathcal{A}_{a,b,1,n}.$$

### 3.3.3 Asymptotisches Verhalten

Aus [Drm] erhält man folgenden wichtigen Satz:

**Satz 3.3.6** *Sei  $F(x, y)$  eine um  $x = y = 0$  analytische Funktion in den Variablen  $x, y$ , so dass  $F(0, y) = 0$  und alle Taylorkoeffizienten von  $F$  um 0 reell und nicht negativ sind. Dann existiert eine eindeutige analytische Lösung  $y = y(x)$  der Funktionalgleichung*

$$y = F(x, y),$$

die nicht-negative Taylorkoeffizienten um 0 hat, so dass  $y(0) = 0$ .  
 Wenn der Konvergenzbereich von  $F(x, y)$  in dem Sinne groß genug ist, dass positive Lösungen  $x = x_0$  und  $y = y_0$  des Systems von Funktionalgleichungen

$$y = F(x, y) \text{ bzw. } 1 = F_y(x, y)$$

existieren, so dass  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  und  $F_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$ , dann ist  $y(x)$  analytisch für  $|x| < x_0$ .

Des Weiteren existieren um  $x_0$  analytische Funktionen  $h(x)$  bzw.  $g(x)$ , so dass

$$y(x) = g(x) - h(x) \sqrt{1 - \frac{x}{x_0}}$$

lokal um  $x_0$ .

Es gilt  $g(x_0) = y(x_0)$  und

$$h(x_0) = \sqrt{\frac{2x_0 F_x(x_0, y_0)}{F_{yy}(x_0, y_0)}}.$$

Außerdem erhält man so eine lokale analytische Fortsetzung von  $y(x)$  für  $x - x_0 \neq 0$ .

Gilt weiter, dass  $[x^n]y(x) > 0$  für alle  $n \geq n_0$ , dann ist  $x = x_0$  die einzige Singularität von  $y(x)$  für  $|x| = x_0$  und man erhält eine asymptotische Entwicklung von  $[x^n]y(x)$  der Form

$$[x^n]y(x) = \sqrt{\frac{x_0 F_x(x_0, y_0)}{2\pi F_{yy}(x_0, y_0)}} x_0^{-n} n^{-\frac{3}{2}} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})).$$

Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Satz erhalten wir folgendes Korollar:

**Korollar 3.3.7** Sei  $\phi(x) = 1 + ax^b$  und  $y(x)$ , so dass  $y(x) = x\phi(y(x)) = F(x, y)$ . Dann gilt

$$(x_0)^{-1} = ab \left( \frac{1}{(b-1)a} \right)^{\frac{b-1}{b}}.$$

*Beweis.* Mit Satz 3.3.6 folgt, dass

$$y_0 = x_0(1 + ay_0^b) \text{ bzw. } 1 = x_0(aby_0^{b-1}).$$

Daraus folgt die Behauptung durch eine einfache Rechnung.

□



## 3.4 Lokalisierung in Kroneckermodulräumen

In diesem Abschnitt soll wieder der Kroneckerköcher betrachtet werden. Der aus der Lokalisierungsmethode resultierende Köcher bzw. die dazugehörigen Torusfixpunkte sollen genau untersucht werden. Es wird eine große Klasse von Fixpunkten charakterisiert, deren Anzahl exponentiell mit dem Dimensionsvektor wächst. So lässt sich eine untere Schranke für die Eulercharakteristik von Kroneckermodulräumen bestimmen. Weiter sollen einige Beispiele von Dimensionsvektoren aufgezeigt werden, für die alle Torusfixpunkte und damit eben die Eulercharakteristik bestimmt werden können.

### 3.4.1 Kroneckermodulräume

Es sollen wieder nur Kroneckermodulräume zu Köchern mit teilerfremdem Dimensionsvektor  $(d, e) \in \mathbb{N}^2$  betrachtet und auf diesen die zuvor eingeführten Methoden angewendet werden.

Sei ein Fixpunkt  $X = (X_1, \dots, X_m) \in (M_{d,e}^m)^T$  gegeben. Dann gibt es nach den Untersuchungen des letzten Kapitels einen Homomorphismus algebraischer Gruppen  $\varphi : T \rightarrow P = (Gl(V) \times Gl(W))/\mathbb{C}^*$ , zu dem ein Lift  $\psi : T \mapsto Gl(V) \times Gl(W)$  gewählt werden kann, der wiederum in zwei Morphismen  $\psi_1 : T \mapsto Gl(V)$  und  $\psi_2 : T \mapsto Gl(W)$  zerlegt werden kann.

Seien

$$V = \bigoplus_{\chi \in X(T)} V_\chi$$

und

$$W = \bigoplus_{\chi \in X(T)} W_\chi$$

die simultanen Eigenraumzerlegungen bezüglich  $\psi_1$  bzw.  $\psi_2$ . Für diese gilt dann

$$X_k(V_\chi) \subseteq W_{\chi + \alpha_k}$$

für alle  $\chi \in X(T)$  und  $k = 1, \dots, m$ .

Der universelle abelsche Überlagerungsköcher  $\hat{Q}$  ist gegeben durch die Punkte  $(1, \chi)$  bzw.  $(2, \chi)$ , wobei  $\chi$  alle Charaktere aus  $X(T)$  durchläuft, und Pfeile

$$(1, \chi) \rightarrow (2, \chi + e_k)$$

für alle  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

Zu jedem Fixpunkt gibt es dann einen bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten Dimensionsvektor  $\hat{d}$ . Also

$$\hat{d}_{1,\chi} = \dim V_\chi \text{ bzw. } \hat{d}_{2,\chi} = \dim W_\chi$$

für  $(1, \chi), (2, \chi) \in \hat{Q}_0$ .

Sei umgekehrt der Köcher  $\hat{Q}$  mit einem Dimensionsvektor  $\hat{d}$  gegeben. Sei im

Folgendes  $\hat{Q}_f$  der volle Unterköcher, der aus den Punkten  $q \in \hat{Q}_0$  besteht, so dass  $\hat{d}_q \neq 0$  und dessen Pfeilmenge entsprechend aus den Pfeilen  $\alpha : i \rightarrow j \in \hat{Q}_1$ , so dass  $\hat{d}_i, \hat{d}_j \neq 0$ .

Eine stabile Darstellung dieses Köchers entspricht dann einem Torusfixpunkt mit Dimensionsvektor  $(d, e)$ , so dass:

$$d = \sum_{\chi \in X(T)} \hat{d}_{1,\chi}$$

bzw.

$$e = \sum_{\chi \in X(T)} \hat{d}_{2,\chi}.$$

Der Vektor  $(d, e)$  sei im Folgenden als der Dimensionstyp dieser Darstellung bezeichnet.

**Definition 3.4.1** *Ein Tupel bestehend aus einem Köcher und einem Dimensionsvektor heißt stabil, falls es mindestens eine stabile Darstellung zu dem Köcher mit diesem Dimensionsvektor gibt.*

Wenn klar ist, welcher Dimensionsvektor betrachtet wird, so werden wir im Folgenden auch von stabilen Köchern sprechen.

**Bemerkung 3.4.2**

- Der Stabilitätsbegriff, der verwendet wird, ist der, der von der ursprünglich verwendeten Linearform  $\Theta = (1, 0)$  induziert wird. Also

$$\mu(\hat{d}) = \frac{\sum_{\chi \in X(T)} \hat{d}_{1,\chi}}{\sum_{\chi \in X(T)} \hat{d}_{1,\chi} + \hat{d}_{2,\chi}}.$$

- Da der Köcher  $\hat{Q}_f$  bipartit und insbesondere zusammenhängend ist, falls es stabile Darstellungen für diesen gibt, gibt es eine Einbettung  $\lambda : (\hat{Q}_f)_0 \rightarrow \mathbb{Z}^m$ , so dass

$$\lambda(i, \chi) = \chi.$$

Die Einbettung ist bis auf Addition von Charakteren  $\mu \in \mathbb{Z}^m$  eindeutig.

Im Folgenden sei die Punktmenge des Köchers als die disjunkte Vereinigung von Quellen  $I$  und Senken  $J$  gegeben und die Punkte als Elemente von  $\mathbb{Z}^m$  angenommen.

Ist  $R \subset I \times J$  die Menge der Pfeile, so gilt

$$(i, j) \in R \Leftrightarrow j = i + e_k$$

für ein  $k \in \{1, \dots, m\}$ , wobei  $e_1, \dots, e_m$  die Standardbasis von  $\mathbb{Z}^m$  sei. Das definiert eine Funktion  $c : R \rightarrow \{1, \dots, m\}$ , für die gilt  $c(i, j) = k$ , falls  $j = i + e_k$ .

Offenbar sind die Menge  $R$  und die Funktion  $c$  durch die Punktmenge  $I \cup J$  schon eindeutig bestimmt. Trotzdem spielen diese eine wichtige Rolle, weil sie später die Köcherdarstellungen beschreiben, die unterschiedlichen Lokalisierungsdaten entsprechen.

Ein Fixpunkt  $X$  bestimmt also ein bis auf Translation eines Vektors  $\mu \in \mathbb{Z}^m$  eindeutiges Tupel  $(I, J, \hat{d})$ . Im Folgenden werden wir diese Tupel immer bis auf eben diese Translation betrachten.

Dann schließt sich folgende Definition an:

**Definition 3.4.3** *Sei  $X$  ein Fixpunkt. Dann heißt das dazugehörige Tupel  $(I, J, \hat{d})$  Lokalisierungsdatum zu  $X$ .*

*Für ein festes  $m \geq 3$  wird die Menge aller Lokalisierungsdaten vom Dimensionstyp  $(d, e)$  im Weiteren mit  $\mathcal{L}_{d,e}^m$  bezeichnet.*

Zunächst sollen einige Eigenschaften aufgezeigt werden, die sich für die Darstellungen des Köchers  $\hat{Q}$  ergeben. Definiere für einen bipartiten Köcher mit Punktmenge  $I \cup J$  und Dimensionsvektor  $d$ :

$$A_i := \{j \in J \mid \exists \alpha : i \rightarrow j \in Q_1, d_j \geq 1\}$$

bzw.

$$A_j := \{i \in I \mid \exists \alpha : i \rightarrow j \in Q_1, d_i \geq 1\}.$$

Außerdem definiere  $R_i = |A_i|$  und  $R_j = |A_j|$ .

Mit Lemma 2.2.1 erhalten wir die folgenden Bedingungen an ein Lokalisierungsdatum:

**Bemerkung 3.4.4**

- Sei  $i \in I$  mit  $\dim(i) = 1$  gegeben. Dann gilt für stabile Darstellungen  $m \geq R_i > \frac{e}{d}$ .
- Für alle  $j \in J$  gilt, dass  $R_j \leq m$ .
- Für alle  $(i, j), (i, j') \in R$  mit  $j \neq j'$  gilt  $c(i, j') \neq c(i, j)$ .
- Analog gilt für alle  $(i, j), (i', j) \in R$ , dass  $c(i, j) \neq c(i', j)$ .

Wir nennen eine Färbung, die diese Eigenschaften erfüllt, im Folgenden stabil.

**Definition 3.4.5** *Ein Zykel in einem Lokalisierungsdatum ist eine Folge von Punkten  $i_1, j_1, \dots, j_n, i_{n+1} = i_1$  (bzw.  $j_1, i_1, \dots, i_n, j_{n+1} = j_1$ ), so dass*

$$(i_k, j_k) \in R \text{ (bzw. } (i_k, j_{k+1}) \in R) \text{ und } (i_{k+1}, j_k) \in R \text{ (bzw. } (i_k, j_k) \in R)$$

für  $1 \leq k \leq n$ .

**Definition 3.4.6** Ein bipartiter Köcher heißt *m*-bipartit, falls für alle Quellen  $i \in I$  bzw. alle Senken  $j \in J$  gilt, dass

$$R_i, R_j \leq m.$$

Ein *m*-bipartiter Köcher  $Q$  mit Dimensionsvektor  $\hat{d}$ , so dass

$$|\{\alpha \in Q_1 \mid \alpha : i \rightarrow j\}| \leq 1$$

für alle Paare  $i, j \in I \cup J$ , heißt *Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp*  $(d, e)$ , falls  $M_{\hat{d}}^s(Q) \neq \emptyset$  und

$$\sum_{i \in I} \hat{d}_i = d \text{ bzw. } \sum_{j \in J} \hat{d}_j = e.$$

Lokalisierungsköcher müssen wegen Lemma 2.1.6 insbesondere zusammenhängend sein.

**Bemerkung 3.4.7**

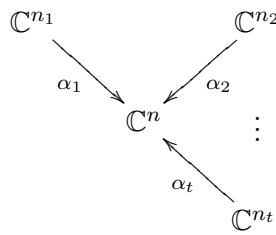
- Um die Stabilität eines *m*-bipartiten Köchers mit

$$|\{\alpha \in Q_1 \mid \alpha : i \rightarrow j\}| \leq 1$$

und einem festen Dimensionsvektor zu testen, brauchen wir keine konkrete Darstellung anzugeben, sondern können vielmehr ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine beliebige Darstellung  $X$  zu diesem Dimensionsvektor wählen, die für alle  $j \in J$  und alle Teilmengen  $A'_j \subseteq A_j$  mit  $R'_j := |A'_j|$  die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\dim\left(\bigcap_{i \in A'_j} X_\alpha(X_i)\right) = \max\left\{0, \sum_{i \in A'_j} \dim(X_\alpha(X_i)) - (R'_j - 1) \dim(X_j)\right\}.$$

Betrachtet man nämlich bipartite Teilköcher der Form



so dass ohne Einschränkung  $n_i \leq n$  für alle  $1 \leq i \leq t$  gilt, dann gibt es immer eine Darstellung, so dass die Dimension der Schnitte der Bildräume für alle Tupel linearer Abbildungen  $X_{\alpha_{i_1}}, \dots, X_{\alpha_{i_k}}$  mit  $1 \leq k \leq t$  und  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t$  minimal ist. Dass eine solche Darstellung existiert bzw. dass diese die obige Dimensionsformel erfüllt, verifiziert man durch Induktion über die Anzahl der Pfeile.

Zu jedem Lokalisierungsdatum erhält man offenbar einen Lokalisierungsköcher, der diesem zugrunde liegt. Es soll gezeigt werden, dass sich umgekehrt auch für jede Wahl der Funktion  $c$ , die den Bedingungen aus 3.4.4 genügt, ein Lokalisierungsdatum aus einem gegebenen Lokalisierungsköcher ergibt.

**Bemerkung 3.4.8**

- Es kann sein, dass sich zu einem gegebenen Lokalisierungsköcher durch unterschiedliche Färbungen der Pfeile verschiedene Typen von Lokalisierungsdaten ergeben. Betrachtet man nämlich einen Lokalisierungsköcher mit einer Färbung  $c$ , so dass diese Färbung einen Gewichtsraum mit dem Gewicht  $\chi$  und einen mit dem Gewicht  $\chi - e_k$  induziert, so gibt es auch einen Pfeil  $\alpha : \chi - e_k \rightarrow \chi$  bzw. eine Abbildung

$$X_{\alpha: \chi - e_k \rightarrow \chi} : V_{\chi - e_k} \rightarrow V_{\chi}.$$

Wenn dieser Pfeil nicht in dem Lokalisierungsköcher aufgetreten ist, so bezeichnen wir einen solchen Pfeil im Folgenden als einen durch die Färbung induzierten Pfeil. Durch solch einen Pfeil erhöht sich offenbar die Dimension des Modulraums.

- Betrachte den Köcher  $\hat{Q}$  und eine Darstellung, die einen Zykel enthält, also eine Kette von Abbildungen  $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{2n}}$  mit  $X_{\alpha_i} \neq X_{\alpha_{i+1}}$  und einen Unterraum  $U$ , so dass

$$X_{\alpha_1}^{-1} \circ X_{\alpha_2} \circ \dots \circ X_{\alpha_{2n-1}}^{-1} \circ X_{\alpha_{2n}}(U) = U.$$

Fixpunkte von Modulräumen dieses Köchers sind zyklfrei. Denn die Gewichtsraumzerlegung hat die Eigenschaft

$$X_{\alpha}(U_{\chi}) \subset U_{\chi + e_{\alpha}}$$

für einen Pfeil  $\alpha \in \hat{Q}_1$  und einen Charakter  $\chi$ . Das heißt also, dass in einem Torusfixpunkt der Modulräume des Köchers  $\hat{Q}$  keine Zyklen auftreten können.

**Lemma 3.4.9** *Seien  $Q$  ein Lokalisierungsköcher und  $c, c'$  Färbungen, die die Eigenschaften von Bemerkung 3.4.4 erfüllen. Dann gilt:*

1. *Durch die Färbung  $c$  dieses Köchers erhält man ein Lokalisierungsdatum.*
2. *Seien  $c$  und  $c'$  so gegeben, dass  $c$  keine und  $c'$  einen Zykel erzeugt. Seien weiter mit  $\dim(M_Q, c)$  bzw.  $\dim(M_Q, c')$  die Dimension der sich ergebenden Modulräume bezeichnet. Dann gilt*

$$\dim(M_Q, c) \leq \dim(M_Q, c').$$

*Beweis.* Zunächst überlegt man sich, dass sich für einen gegebenen Lokalisierungsköcher und eine gegebene Färbung der Pfeile eine Darstellung von  $\hat{Q}$  ergibt. Induziert diese keine Zykel in dem Lokalisierungsdatum, so ergibt sich für jede stabile Darstellung von  $Q$  eine stabile Darstellung von  $\hat{Q}$ . Induziert die Funktion  $c$  einen Zykel, so ist die induzierte Darstellung von  $\hat{Q}$  allerdings trotzdem stabil.

Es bleibt zu zeigen, dass die Dimension des Modulraums nicht kleiner wird, falls ein Zykel entsteht. Sei also  $j_1 = j_2$ , also  $\dim(j_{1,2}) = d_{j_1} + d_{j_2}$ . Es gilt  $R_{j_1}, R_{j_2} \geq 1$  in  $Q$ . Definiere  $\dim A_j = \sum_{i \in A_j} \dim i$ . Dann gilt für ein  $c'$ , das einen Zykel erzeugt, dass

$$\begin{aligned} \dim(M_Q, c') &= \dim(M_Q, c) + d_{j_1}^2 + d_{j_2}^2 - (d_{j_1} + d_{j_2})^2 - \dim A_{j_1} d_{j_1} \\ &\quad - \dim A_{j_2} d_{j_2} + (\dim A_{j_1} + \dim A_{j_2})(d_{j_1} + d_{j_2}) \\ &= \dim(M_Q, c) - 2d_{j_1} d_{j_2} + \dim A_{j_1} d_{j_2} + \dim A_{j_2} d_{j_1} \\ &\geq \dim(M_Q, c), \end{aligned}$$

denn  $\dim A_{j_k} \geq d_{j_k}$  wegen der Stabilität von  $Q$ . Der Fall  $i_1 = i_2$  verhält sich völlig analog. □

**Definition 3.4.10** *Ein Lokalisierungsdatum heißt Lokalisierungsdatum vom Typ 1, falls  $\dim(i) = 1$  für alle  $i \in (\hat{Q}_f)_0$ . Ein Lokalisierungsköcher  $Q$  heißt Lokalisierungsköcher vom Typ 1, falls eine Funktion  $c$  existiert, so dass das induzierte Lokalisierungsdatum vom Typ 1 ist.*

Im Folgenden soll nicht immer zwischen Lokalisierungsköchern und den dazugehörigen Lokalisierungsdaten unterschieden werden.

### 3.4.2 Stabilität bipartiter Köcher

In diesem Abschnitt untersuchen wir stabile Köcher, die wir durch die Lokalisierungsmethode erhalten. Durch eine entsprechende Färbung der Pfeile erhalten wir also ein Lokalisierungsdatum. Insbesondere geben wir ein Verfahren an, mit dem wir neue Lokalisierungsköcher durch Verkleben von Lokalisierungsköchern kleineren Dimensionstyps erhalten. Die Tabelle 3.4.46 gibt eine Übersicht der Notationen bezüglich der in diesem Abschnitt eingeführten Köcher.

Seien  $Q = (I \cup J, Q_1)$  und  $Q' = (I' \cup J', Q'_1)$  zwei bipartite Köcher mit  $j \in J, j' \in J'$ . Definiere den bipartiten Köcher

$$Q_{j,j'}(Q, Q') = (I \cup I' \cup J \setminus j \cup J' \setminus j' \cup j'', Q''_1),$$

so dass  $\alpha : i \mapsto j_1 \in Q_1''$  genau dann, wenn  $\alpha : i \mapsto j_1 \in Q_1$  oder  $\alpha : i \mapsto j_1 \in Q_1'$  mit  $j_1 \neq j, j'$  und  $\alpha : i \mapsto j'' \in Q_1''$  genau dann, wenn  $\alpha : i \mapsto j_1 \in Q_1$  oder  $\alpha : i \mapsto j_1 \in Q_1'$ , so dass  $j_1 = j$  oder  $j_1 = j'$ .

Wir erhalten also den neuen Köcher, indem wir zwei Senken der beiden alten Köcher miteinander identifizieren.

**Definition 3.4.11** *Der Köcher  $Q_{j,j'}(Q, Q')$  heißt Verklebungsköcher und der Punkt  $j, j' = j''$  Verklebungspunkt.*

**Definition 3.4.12** *Sei  $Q$  ein bipartiter Köcher mit Quellen  $I$ . Ein Teilköcher  $Q'$  mit Quellen  $I'$  heißt Randköcher von  $Q$ , wenn genau ein  $i_0 \in I'$  existiert, so dass  $|A_{i_0} \cap A_{I \setminus I'}| = 1$  und  $|A_i \cap A_{I \setminus I'}| = 0$  für alle  $i \in I'$ , so dass  $i \neq i_0$ . Ein Randköcher heißt echter Randköcher, falls er keinen anderen Randköcher enthält.*

Randköcher sind also diejenigen Teilköcher eines bipartiten Köchers, die nur eine gemeinsame Senke mit dem restlichen Köcher haben.

Das nachfolgende Lemma besagt, dass eine Unterdarstellung eines Randköchers eines Lokalisierungsköchers immer minimal mögliche Bilddimension hat. Wir werden im Folgenden für einen Unterraum  $U$  mit  $d_U$  immer abkürzend dessen Bilddimension bezeichnen. Gilt also  $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$ , so definiere

$$d_U := \sum_{\alpha: i \rightarrow j} X_\alpha(U_i).$$

Außerdem definiere

$$U_{I'} := \bigoplus_{i \in I'} U_i$$

für eine Teilmenge  $I' \subset I$ .

**Lemma 3.4.13** *Sei  $Q$  ein Lokalisierungsköcher vom Typ 1 mit Punkten  $I \cup J$ . Sei  $I_1 \subset I$  die Menge der Quellen eines Randköchers, so dass  $\dim U_{I_1} = k$  und  $d_{U_{I_1}} = b$ . Dann gilt für alle Unterräume  $U_{I_2} \subset U_{I_1}$  mit  $\dim U_{I_2} = k$ , dass  $d_{U_{I_2}} \geq b$ .*

*Beweis.* Wegen der Stabilität gilt

$$b > \frac{e}{d}k.$$

Betrachte  $U_{I_3} := U_{I \setminus I_1}$  mit  $\dim U_{I_3} = d - k$ . Aufgrund der Eigenschaften eines Randköchers erhalten wir  $d_{U_{I_3}} = e - b + 1$ . Also folgt

$$(d - k) \frac{e}{d} < e - b + 1.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{e}{d}k < b < \frac{ek}{d} + 1.$$

Also kann kein anderer Unterraum  $U_{I_2}$  gleicher Dimension existieren, so dass  $d_{U_{I_2}} = b - l$  für ein  $l \geq 1$ . Denn ansonsten würde gelten

$$b - l > \frac{e}{d}k.$$

□

Für einen gegebenen Dimensionsvektor  $(d, e)$  konstruieren wir nun einen eindeutigen Dimensionsvektor  $(d_s, e_s)$ , so dass wir neue Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d_s + kd, e_s + ke)$  durch Verkleben von Lokalisierungsköchern vom Dimensionstyp  $(d_s, e_s)$  bzw.  $(kd, ke)$  erhalten.

Sei mit  $(d, e)$  ein Dimensionsvektor fest gewählt. Zunächst zeigen wir, dass ein Dimensionsvektor  $(d_s, e_s)$ , so dass  $d_s \leq d$  und  $e_s \leq e$ , mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- $\frac{e+e_s}{d+d_s}d < e + 1$
- $\frac{e+e_s}{d+d_s}d > e$
- $\frac{e_s-1}{d_s} \leq \frac{e}{d}$ , falls  $d \neq 1$  und  $(e_s - 1)d = ed_s$ , falls  $d = 1$
- $\frac{e+e_s}{d+d_s}d' < \lceil \frac{e}{d}d' \rceil \quad \forall d' < d$
- $\text{ggT}(d + d_s, e + e_s) = 1$ .

Wir nennen diese Eigenschaften im Folgenden Verklebungsbedingung. Die erste Eigenschaft ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} de + de_s &< de + d + d_s e + d_s \\ \Leftrightarrow de_s &< d + d_s e + d_s \\ \Leftrightarrow d(e_s - 1) &< d_s(e + 1) \\ \Leftrightarrow \frac{e_s - 1}{d_s} &< \frac{e + 1}{d}. \end{aligned}$$

Die zweite Eigenschaft ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} ed + e_s d &\geq ed + ed_s \\ \Leftrightarrow \frac{e_s}{d_s} &> \frac{e}{d}. \end{aligned}$$

Also folgt die erste Eigenschaft aus der dritten.

**Lemma 3.4.14** *Sei  $(d, e) \in \mathbb{N}^2$ , so dass  $d \leq e$  und  $\text{ggT}(d, e) = 1$ . Dann existiert ein Dimensionsvektor  $(d_s, e_s)$  zu jedem Dimensionsvektor  $(d, e)$ , der die Verklebungsbedingung erfüllt. Dieser ist eindeutig bestimmt, wenn wir zusätzlich annehmen, dass  $d_s \leq d$  und  $e_s \leq e$ .*



*Beweis.* Betrachte zunächst den Spezialfall  $d = 1$ . Offensichtlich erfüllt  $(0, 1)$  die gewünschten Eigenschaften für  $(d, e) = (1, n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Falls  $d \geq 2$ , gilt schon  $e \geq 3$ . Wähle  $d_s \in \mathbb{N}$  minimal, so dass

$$d \mid 1 + ed_s.$$

Das ist möglich, weil  $\text{ggT}(d, e) = 1$  und weil deswegen natürliche Zahlen  $\lambda', \mu'$  existieren, so dass

$$\lambda'd = 1 - \mu'e.$$

Falls  $\mu' > 0$  so gilt

$$\lambda'^2 d^2 = 1 - 2\mu'e + \mu'^2 e^2 = 1 + e(\mu'^2 e - 2\mu').$$

Wegen  $\mu'^2 e > 2\mu'$  für  $e > 2$  folgt daraus die Existenz und insbesondere  $d_s \in \mathbb{N}$ .

Definiere

$$e_s = \frac{1 + e(d + d_s) - de}{d} = \frac{1 + d_s e}{d}.$$

Wegen der Wahl von  $d_s$  gilt  $e_s \in \mathbb{N}$ .

Außerdem erhalten wir

$$-e(d + d_s) + d(e + e_s) = -ed - ed_s + de + d_s e + 1 = 1.$$

Es folgt  $\text{ggT}(d + d_s, e + e_s) = 1$ .

Nun gilt

$$\frac{e_s}{d_s} = \frac{1 + d_s e}{dd_s} > \frac{e}{d}$$

und weiter

$$\frac{e_s - 1}{d_s} = \frac{d_s e - d + 1}{dd_s} < \frac{e}{d}.$$

Es bleibt also die vierte Eigenschaft zu zeigen. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\frac{e + e_s}{d + d_s} = \frac{e}{d} \left( \frac{ed + ed_s + 1}{ed + ed_s} \right) = \frac{e}{d} \left( 1 + \frac{1}{ed + ed_s} \right).$$

Da außerdem

$$\lceil \frac{e}{d} d' \rceil - \frac{e}{d} d' \geq \frac{1}{d}$$

und

$$\frac{d'}{ed + d_s e} < \frac{1}{d + d_s}$$

für alle  $d' < d$ , folgt die Behauptung.

□

Wir nennen einen Vektor  $(d_s, e_s)$ , der diese Bedingung erfüllt im Folgenden Startvektor von  $(d, e)$ . Nun zeigen wir, dass  $(d_s + kd, e_s + ke)$  mit  $k \geq 1$  ebenso ein Startvektor für den Dimensionsvektor  $(ld, le)$  mit  $l \geq 1$  ist. Das führt dazu, dass wir gewisse Köcher vom Dimensionstyp  $(ld, le)$  immer wieder an einen Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d_s + kd, e_s + ke)$  kleben können, um einen neuen stabilen Köcher zu erhalten.

**Korollar 3.4.15** *Wenn  $d, d_s, e$  und  $e_s$  die Verklebungsbedingung erfüllen, dann gilt  $\text{ggT}(d_s + kd, e_s + ke) = 1$  für alle  $k \geq 1$ .*

*Beweis.* Wie vorher haben wir

$$-e(kd + d_s) + d(ke + e_s) = 1$$

auch für beliebiges  $k \geq 1$ .

□

**Korollar 3.4.16** *Seien  $d, d_s, e, e_s \in \mathbb{N}$  so gegeben, dass sie die Verklebungsbedingung erfüllen und weiter seien  $k, l \in \mathbb{N}$ . Es gilt:*

1.

$$\frac{e_s + ke}{d_s + kd} ld < le + 1$$

2.

$$\frac{e_s + ke}{d_s + kd} ld > le$$

3.

$$\frac{e_s + ke - 1}{d_s + kd} \leq \frac{le}{ld}$$

4.

$$\frac{ke + e_s}{kd + d_s} d' < \lceil \frac{e}{d} d' \rceil \quad \forall d' < d$$

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, dass die zweite bzw. dritte äquivalent zu der zweiten bzw. dritten Eigenschaft des Dimensionsvektors  $(d + d_s, e + e_s)$  ist. Die dritte folgt wieder aus der ersten Eigenschaft. Sei  $k > 1$ . Dann erhalten wir durch eine einfache Rechnung, dass

$$\frac{e_s + ke}{d_s + kd} \leq \frac{e + e_s}{d + d_s}.$$

Daraus folgt die vierte Eigenschaft.

□

**Bemerkung 3.4.17**

- Wenn wir den Dimensionsvektor  $(d, e)$  zerlegen wollen, so dass

$$(d, e) = (d_s, e_s) + k(d', e')$$

für  $(d, e)$  teilerfremd mit den zusätzlichen Eigenschaften  $\text{ggT}(d_s, e_s) = \text{ggT}(d', e') = 1$  und  $d_s \leq d, e_s \leq e$ , so können wir wie folgt vorgehen: wähle  $e'$  minimal, so dass

$$e \mid 1 + de'$$

und

$$d' = \frac{1 + e'd}{e}.$$

Nun berechnen wir  $d_s$  und  $e_s$  wie im Beweis von Lemma 3.4.14. Es ist leicht zu sehen, dass diese Zahlen die gewünschten Eigenschaften erfüllen. In der Tat überprüft man leicht, dass

$$\frac{e - e_s}{e'} = \frac{d - d_s}{d'}.$$

Daraus folgt, dass  $e' \mid e - e_s$  und  $d' \mid d - d_s$ , weil  $\text{ggT}(d', e') = 1$  und trivialerweise  $e - e_s, d - d_s \in \mathbb{N}$  gelten. Definiere nun  $k = \frac{d - d_s}{d'}$ .

Um fortfahren zu können, benötigen wir weitere Eigenschaften der eben konstruierten Zahlen. Wegen

$$e_s d - e d_s = 1$$

erhalten wir

$$(ke + e_s)(k'd + d_s) + k - k' = (kd + d_s)(k'e + e_s).$$

Definiere für  $d_1 = k'd + d' \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq d' < d$  eine Abbildung  $f : \{0, 1, \dots, kd + d_s - 1\} \rightarrow \mathbb{N}$  durch

$$f(d_1) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{(ke + e_s)d_1 + n}{kd + d_s} \in \mathbb{N}\}.$$

Es sei bemerkt, dass  $f$  wegen  $\text{ggT}(d_s + kd, e_s + ke) = 1$  injektiv ist. Dann erhalten wir folgendes Lemma:

**Lemma 3.4.18** *Seien  $d_s, e_s, d, e$  natürliche Zahlen, die die Verklebungsbedingung erfüllen. Dann gilt*

$$(ke + e_s)(k'd + d_s) + k - k' = 0 \pmod{(kd + d_s)}$$

für alle  $k' \leq k$ .

Sei  $d_1 = k'd + d'$  mit  $0 \leq d' < d$ . Insbesondere gilt  $f(d_1) = k - k'$ , falls  $d' = d_s$  und daher  $f(d_1) \geq k + 1$ , falls  $d' \neq d_s$ .

Nun zeigen wir, wie man einen Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d_s + (k+l)d, e_s + (k+l)e)$  durch Verkleben eines Lokalisierungsköchers vom Typ  $(d_s + kd, e_s + ke)$  und gewisser Köcher vom Dimensionstyp  $(ld, le + 1)$  bekommt. Dabei wird Korollar 3.4.16 sichern, dass die Unterdarstellungen der beiden Teilköcher die Stabilitätsbedingung erfüllen. Dann werden wir zeigen, dass auch direkte Summen von Unterdarstellungen der Stabilitätsbedingung nicht widersprechen, was ebenfalls aus Korollar 3.4.16 folgt. Wir weisen noch einmal auf Bemerkung 3.4.7 hin. Wir werden also keine konkreten Darstellungen betrachten, sondern solche, die die dort angeführten Bedingungen erfüllen.

Seien  $d, e$  und  $m$  fest gewählt und sei  $S_{ld,le+1}^m$  die Menge von Tupeln, die aus einem  $m$ -bipartiten Köcher vom Dimensionstyp  $(ld, le + 1)$  und einer Senke  $j$  mit den folgenden Eigenschaften besteht:

- Es existiert höchstens ein Pfeil zwischen zwei Punkten.
- Nach dem Verringern der Dimension von  $j$  um eins ist der entstandene Köcher zusammenhängend und semistabil.
- Es existiert eine Darstellung zu diesem Köcher, so dass für alle  $d'$ -dimensionalen Unterräume  $U$  gilt

$$d_U > \frac{(k+l)e + e_s}{(k+l)d + d_s} d'.$$

Sei weiter  $\mathcal{T}_{d,e}^m$  die Menge aller  $m$ -bipartiten Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d, e)$ .

**Satz 3.4.19** *Seien  $d, d_s, e, e_s$  so gegeben, dass sie die Verklebungsbedingung erfüllen und außerdem  $k \in \mathbb{N}$ . Seien  $T^0 \in \mathcal{T}_{d_s+kd, e_s+kd}^m$  und  $(T^1, j_1) \in S_{ld,le+1}^m$ . Zudem sei  $j_0$  eine Senke von  $T^0$ , so dass  $R_{j_0} + R_{j_1} \leq m$ . Dann ist  $Q_{j_0, j_1}(T^0, T^1)$  mit Verklebungspunkt  $j_2$ , so dass  $\dim(j_2) := \dim(j_0) + \dim(j_1) - 1$ , ein Element aus  $\mathcal{T}_{d_s+(k+l)d, e_s+(k+l)e}^m$ .*

*Beweis.* Für einen Unterraum  $U$  einer der beiden Teilköcher bezeichnen wir mit  $d_U$  die Dimension des Bildes in Bezug auf den ursprünglichen Köcher und mit  $d'_U$  die Bilddimension in Bezug auf den konstruierten Köcher. Sei zunächst  $U$  ein  $d'$ -dimensionaler Unterraum von  $T^1$  mit  $d' < ld$ . Per Definition gilt

$$\frac{(k+l)e + e_s}{(k+l)d + d_s} d' < d_U = d'_U.$$

Falls  $d' = ld$ , so folgt die gleiche Ungleichung aus  $d_U = le + 1$  zusammen mit der ersten Eigenschaft des Korollars 3.4.16.

Da zudem

$$\frac{e_s + ke}{d_s + kd} > \frac{e_s + (k+l)e}{d_s + (k+l)d}$$

wegen der Eigenschaften der Dimensionsvektoren gilt, folgt das Gleiche für Unterräume des Teilköchers  $T^0$ .

Es bleibt also zu zeigen, dass die Stabilitätsbedingung auch für Unterräume gilt, die sich aus Unterräumen der beiden Teilköcher zusammensetzen. Seien also  $U'$  und  $U''$  zwei Unterräume der Dimensionen  $1 \leq d' \leq ld$  bzw.  $1 \leq d'' \leq kd + d_s$ , so dass mindestens einmal echte Ungleichheit gilt.

Es genügt also

$$d'_{U' \oplus U''} \geq \frac{le}{ld}d' + d_{U''} > \frac{(k+l)e + e_s}{(k+l)d + d_s}(d' + d'')$$

zu zeigen, wobei die erste Ungleichung aus der Semistabilität des Köchers, den man aus  $T^1$  durch Verringern der Dimension des Punktes  $j_1$  um eins erhält, folgt. Wegen  $e_s d - d_s e = 1$  ist das äquivalent zu

$$d_{U''} > \frac{(k+l)e + e_s}{(k+l)d + d_s}d'' + \frac{d'}{d((k+l)d + d_s)}.$$

Aus dem vorherigen Lemma zusammen mit der Voraussetzung erhalten wir

$$d_{U''} \geq \frac{(ke + e_s)d'' + f(d'')}{kd + d_s}.$$

Sei zunächst  $d'' < kd + d_s$ . Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $d' = ld$  an, so reicht es zu zeigen, dass

$$ld'' + ((k+l)d + d_s)f(d'') > l(kd + d_s),$$

was durch eine einfache Rechnung folgt.

Schließlich sei  $d'' = kd + d_s$  und  $d' = l'd + d_1 < ld$  mit  $0 \leq d_1 < d$ . Es gilt wieder unter Verwendung von  $e_s d - ed_s = 1$ , dass

$$\frac{(k+l)e + e_s}{(k+l)d + d_s}(kd + d_s) = ke + e_s - \frac{l}{(k+l)d + d_s}.$$

Also bleibt zu zeigen, dass

$$\lceil \frac{e}{d}(l'd + d_1) \rceil = l'e + \lceil \frac{ed_1}{d} \rceil > \frac{(k+l)e + e_s}{(k+l)d + d_s}(l'd + d_1) - \frac{l}{(k+l)d + d_s},$$

was aus der vierten Eigenschaft des Korollars 3.4.16 zusammen mit  $l > l'$  folgt.

□

Erfüllen  $T^0$  und  $T^1$  die Bedingungen aus dem Satz, dann nennen wir  $T^0$  einen Startköcher für  $T^1$ .

Als Nächstes wenden wir dieses Resultat auf spezielle Köcher an. Dazu sei  $T \in \mathcal{T}_{d,e}^m$ . Daraus konstruieren wir auf verschiedene Weisen neue Köcher  $\hat{T}$  vom Dimensionstyp  $(d, e + 1)$  wie folgt:

- Wähle ein  $i \in I$ , so dass  $R_i < m$  und definiere die Punktmenge des neuen Köchers als  $\hat{T}_0 = T_0 \cup \{j\}$ , die Menge der Pfeile als  $\hat{T}_1 = T_1 \cup \{\alpha : i \rightarrow j\}$  und schließlich definiere  $\dim(j) = 1$ .
- Wähle ein  $j \in J$ , so dass  $1 < R_j < m$  und erhöhe die Dimension dieses Punktes um eins.
- Wähle ein  $j \in J$ , so dass

$$\dim(j) < \sum_{i \in A_j} \dim(i)$$

und erhöhe die Dimension dieses Punktes um eins.

Bezeichne die Menge der resultierenden Köcher mit  $\hat{\mathcal{T}}_{d,e}^m$  und weiter bezeichne die Senke  $j$  als modifizierten Punkt.

**Korollar 3.4.20** *Seien  $d, d_s, e, e_s$  so gegeben, dass sie die Verklebungsbedingung erfüllen und sei  $k \in \mathbb{N}$ . Sei weiter  $T^0 \in \mathcal{T}_{d_s+kd, e_s+kd}^m$  und  $T^1 \in \hat{\mathcal{T}}_{d,e}^m$  mit dem modifizierten Punkt  $j_1$ . Weiter sei  $j_0$  eine Senke von  $T_0^0$ , so dass  $R_{j_0} + R_{j_1} \leq m$ . Dann ist  $Q_{j_0, j_1}(T^0, T^1)$  mit dem Verklebungspunkt  $j$ , so dass  $\dim(j) := \dim(j_0) + \dim(j_1) - 1$ , ein Element von  $\mathcal{T}_{d_s+(k+1)d, e_s+(k+1)e}$ .*

*Beweis.* Sei  $U$  ein  $d'$ -dimensionaler Unterraum von  $T^1$ . Da  $T^1$  aus einem stabilen Köcher entsteht, gilt  $d_U > \frac{e}{d}d'$ . Gilt  $d' < d$ , so folgt aus der vierten Eigenschaft des Korollars 3.4.16, dass

$$\frac{(k+1)e + e_s}{(k+1)d + d_s}d' < \lceil \frac{e}{d}d' \rceil \leq d_U \leq d'_U.$$

Wenn  $d' = d$ , so folgt dieselbe Ungleichung aus der ersten Eigenschaft zusammen mit

$$\dim(j_1) \leq \sum_{i \in A_{j_1}} \dim(i)$$

und

$$d_U = e + 1 > \frac{(k+1)e + e_s}{(k+1)d + d_s}d.$$

□

Wir behandeln nun die Frage, wie wir zu einem vorgegeben teilerfremden Dimensionsvektor  $(d, e)$  eine solche Menge von Lokalisierungsköchern konstruieren können. Dazu ordnen wir zunächst einem Tupel natürlicher Zahlen eine Menge von Lokalisierungsköchern zu. Dieses Tupel ist durch den vorgegebenen Dimensionsvektor eindeutig bestimmt, siehe Beispiel 3.4.22. Wir werden später sehen, dass diese natürlichen Zahlen mit der Anzahl der möglichen Verklebungspunkte und der möglichen Färbungen der konstruierten Köcher zusammenhängen. Diese Informationen sind notwendig, um

mit den Methoden aus Abschnitt 3.3.1 die Kardinalität der Mengen der so konstruierten Lokalisierungsköcher in Lemma 3.4.43 zu bestimmen und diese einem vorgegeben Dimensionsvektor zuzuordnen.

Um eine untere Schranke für die Eulercharakteristik in Satz 3.4.44 zu bekommen, werden wir diese Methode in Abschnitt 3.4.4 auf die Fälle  $e \geq (m-1)d$  anwenden, was wegen der Isomorphismen der Modulräume, siehe Satz 2.2.6, keine Einschränkung ist. Diese Fälle haben verschiedene Vorteile in Bezug auf das Zählen von Lokalisierungsdaten.

Seien ein Dimensionsvektor  $(d, e)$  und der entsprechende Startvektor fest gewählt. Bezeichne mit  $\mathcal{T}_{n_1}^{(d,e)}$  alle Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d_s, e_s) + n_1(d, e)$  mit  $n_1 \geq 1$ . Wie zuvor sei  $\hat{\mathcal{T}}_{n_1}^{(d,e)}$  die Menge, die durch Modifizieren einer Senke  $j_1$  entsteht. Nun fahren wir rekursiv wie folgt fort: sei  $S \in \mathcal{T}_{n_k-1, \dots, n_1}^{(d,e)}$  und  $T \in \hat{\mathcal{T}}_{n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$ . Dann sei  $\mathcal{T}_{1, n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  die Menge, die aus allen Köchern  $Q_{j_0, j_1}(S, T)$  besteht, so dass  $R_{j_0} + R_{j_1} \leq m$ . Weiter sei die Dimension des Verklebungspunktes  $j$  gegeben durch  $\dim(j) = \dim(j_0) + \dim(j_1) - 1$ . Zudem sei im Allgemeinen  $\mathcal{T}_{n_{k+1}, \dots, n_1}^{(d,e)}$  die Menge Verklebungsköcher, die aus dem Verkleben eines Köchers  $S \in \mathcal{T}_{n_{k+1}-1, n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  und eines Köchers  $T \in \hat{\mathcal{T}}_{n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  auf die eben beschriebene Weise entsteht.

**Korollar 3.4.21** *Die Mengen  $\mathcal{T}_{n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  enthalten nur stabile Köcher.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass diese Köcher die Bedingungen aus Korollar 3.4.20 erfüllen.

Wir nehmen an, dass  $\mathcal{T}_{n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  nur aus stabilen Köchern besteht. Es soll gezeigt werden, dass  $\mathcal{T}_{n_{k+1}, \dots, n_1}^{(d,e)}$  für alle  $n_{k+1} \geq 1$  dann auch nur aus stabilen Köchern besteht. Dazu zeigen wir, dass die Köcher aus  $\mathcal{T}_{n_k-1, \dots, n_1}^{(d,e)}$  Startköcher für die Köcher aus  $\hat{\mathcal{T}}_{n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  sind.

Sei also  $(d^k, e^k)$  der zu  $\hat{\mathcal{T}}_{n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  gehörige Dimensionsvektor und  $(d_s^k, e_s^k)$  der zu  $\mathcal{T}_{n_k-1, \dots, n_1}^{(d,e)}$  gehörige. Es genügt also zu zeigen, dass

$$(d_s^{k+1}, e_s^{k+1}) = (d_s^k, e_s^k) + (n_k - 1)(d^k, e^k)$$

der Startvektor für

$$(d^{k+1}, e^{k+1}) = (d_s^k, e_s^k) + n_k(d^{k+1}, e^{k+1})$$

ist. Denn die Köcher aus  $\hat{\mathcal{T}}_{n_k, \dots, n_1}^{(d,e)}$  entstehen eben durch die vor Korollar 3.4.20 beschriebene Modifikation. Das ist äquivalent zu

$$e_s^{k+1} = \frac{1 + d_s^{k+1} e^{k+1}}{d^{k+1}}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft  $d_s^{k+1} \leq d^{k+1}$ , siehe Lemma 3.4.14. Während die zweite Eigenschaft unmittelbar folgt, ist die erste äquivalent zu

$$e_s^k = \frac{1 + d_s^k e^k}{d^k},$$

was wiederum durch eine direkte Rechnung folgt. Also folgt die Behauptung nach der Induktionsvoraussetzung.

□

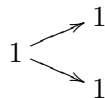
### Beispiel 3.4.22

Wähle  $(d_s, e_s) = (0, 1)$  und  $(d, e) = (1, n - 1)$ . Dann erhalten wir das Tupel  $(n_k, \dots, n_1)$  zu einem gegebenen Dimensionsvektor, indem wir wie in Bemerkung 3.4.17 verfahren. Genauer gilt  $(d, e) = (d_s, e_s) + n_k(d', e')$  und so erhalten wir rekursiv das gesamte Tupel natürlicher Zahlen. Die Rekursion bricht ab, falls  $(d_s, e_s) = (0, 1)$ .

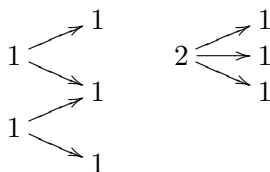
Wir betrachten den Dimensionsvektor  $(d, e) = (8, 13)$ . Das dazugehörige Tupel ist dann  $(n_3, n_2, n_1) = (1, 2, 2)$  mit  $n = 2$ . Also

$$\begin{aligned} (d, e) &= (3, 5) + (5, 8) = (1, 2) + (2, 3) + ((1, 2) + 2(2, 3)) \\ &= (0, 1) + (1, 1) + (0, 1) + 2(1, 1) \\ &\quad + ((0, 1) + (1, 1) + 2((0, 1) + 2(1, 1))) \end{aligned}$$

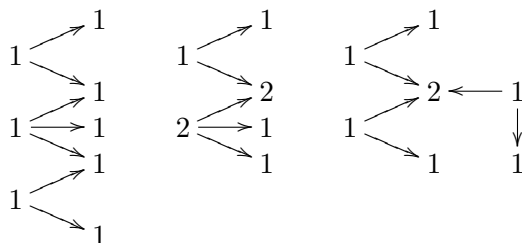
Betrachte also zunächst die Lokalisierungsköcher der Dimensionstypen  $(1, 2)$  bzw.  $(2, 3)$ , d.h.



bzw.

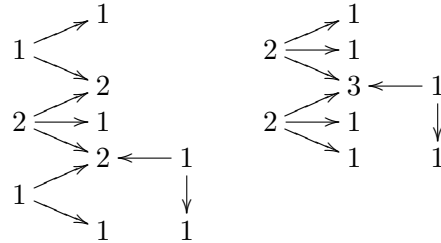


Dann ergeben sich mit den drei vor Korollar 3.4.20 beschriebenen Methoden die folgenden Lokalisierungsköcher vom Typ  $(3, 5)$  durch Verkleben:

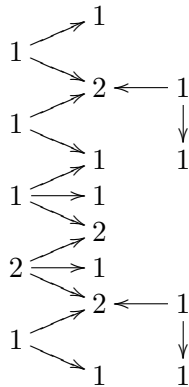




Weiter erhalten wir zum Beispiel folgende Lokalisierungsköcher vom Typ (5, 8) durch Verkleben:



Schließlich ist auch zum Beispiel der folgende bipartite Köcher vom Dimensionstyp (8, 13) nach Korollar 3.4.20 stabil:



### 3.4.3 Einfache Lokalisierungsköcher

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Menge der einfachen Lokalisierungsköcher. Diese sind Lokalisierungsköcher vom Typ eins, die zusätzlich die Eigenschaft erfüllen, dass jeder Punkt Senke von höchstens zwei Pfeilen ist. Zu einem gegebenen Dimensionstyp ist dieser Köcher eindeutig, gibt aber nach einer kleinen Modifikation Anlass zu einer exponentiell mit dem Dimensionsvektor wachsenden Klasse von Lokalisierungsköchern. Sie bilden eine der Grundlagen, um die untere Schranke für die Eulercharakteristik im nächsten Abschnitt zu erhalten. Sie definieren außerdem so genannte Köcherfunktionen, mit denen sich das aus dem letzten Abschnitt resultierende Tupel  $(n_k, \dots, n_1)$  für jeden Dimensionsvektor einfach durch das Lösen linearer Gleichungssysteme berechnen lässt. Schließlich bilden sie auch eine der Grundlagen für die Konstruktion von Baumdarstellungen im nächsten Kapitel.

Wir nehmen an, dass alle Punkte (vor und nach dem Verkleben) eindimensional sind. Sei  $(Q^{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ein bipartiter Köcher, wobei  $Q^{l_k}$  durch

$$Q_0^{l_k} = \{i_k\} \cup J_k \text{ und } Q_1^{l_k} = \{(i_k, j) \mid j \in J_k\},$$

so dass  $|J_k| = l_k$  definiert ist. Betrachte den Verklebungsköcher

$$Q^{l_1, l_2} := Q_{j_1, j_2}(Q^{l_1}, Q^{l_2}),$$

wobei  $j_1 \in J_1$  und  $j_2 \in J_2$ . Außerdem definiere die Menge aller möglichen Verklebungspunkte des resultierenden Köchers durch  $K_2 := J_2 \setminus j_2$ , wobei  $j_2$  der Verklebungspunkt von  $Q^{l_1, l_2}$  sei.

Wir fahren rekursiv wie folgt fort: seien  $Q^{l_1, l_2, \dots, l_n}$  und  $Q^{l_{n+1}}$  zwei bipartite Köcher. Dann definiere

$$Q^{l_1, \dots, l_{n+1}} := Q_{j_n, j_{n+1}}(Q^{l_1, \dots, l_n}, Q^{l_{n+1}})$$

mit  $j_n \in K_n$  und  $j_{n+1} \in Q_0^{l_{n+1}}$ . Weiter definiere wieder  $K_{n+1} := J_{n+1} \setminus j_{n+1}$ .

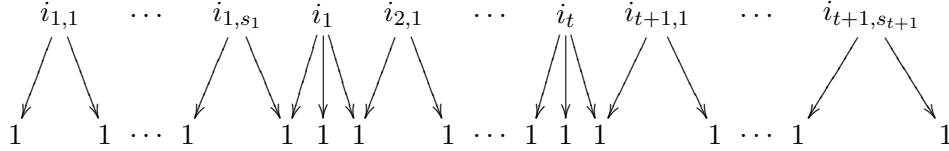
Wähle ein  $m \in \mathbb{N}$  fest, so dass  $m \geq 3$ . Seien  $n, t \in \mathbb{N}$ , so dass  $2 \leq n \leq m-1$ . Jedem  $(t+1)$ -Tupel  $(s_1, \dots, s_{t+1})_{m, n} \in \mathbb{N}^{t+1}$  ordnen wir den Köcher

$$Q^{n^{s_1}, n+1, n^{s_2}, \dots, n+1, n^{s_{t+1}}}$$

zu, wobei

$$n^{s_i} := \underbrace{n, \dots, n}_{s_i\text{-mal}}$$

Wenn wir den Fall  $m = 3$  und  $n = 2$  betrachten, so erhalten wir Köcher der folgenden Form:



mit  $\dim(i_k) = \dim(i_{j,l}) = 1$ . Definiere zudem den Köcher

$$\hat{Q}_s = Q^{n+1, n^{s_1}, n+1, n^{s_2}, \dots, n+1, n^{s_{t+1}}}$$

und

$$\hat{s} := (s_1 - 1, s_2, \dots, s_{t+1})_{m, n}.$$

Informell erhalten wir den Köcher  $\hat{Q}_{\hat{s}}$  aus dem Köcher  $Q_s$ , indem wir einen zusätzlichen Pfeil an "die Quelle am linken Rand" ankleben. Im Folgenden schreiben wir auch  $\hat{s}$  anstelle von  $\hat{Q}_{\hat{s}}$  und  $s$  anstelle von  $Q_s$ , wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind.

**Definition 3.4.23** Seien  $m, n$  und ein Tupel  $(s_1, s_2, \dots, s_{t+1})_{m, n}$  gegeben. Dann heißt der dazugehörige Köcher einfach.

Der Dimensionstyp der einfachen Köcher ist gegeben durch

$$d = \sum_{i=1}^{t+1} s_i + t$$

und

$$e = \left( \sum_{i=1}^{t+1} (n-1)s_i + 1 \right) + (n-1)t.$$

Wir überprüfen die einfachen Köcher auf Stabilität. Wir beantworten also die Frage, für welche einfachen Köcher eine stabile Darstellung existiert. Dazu nehmen wir an, dass jede lineare Abbildung zu einem Pfeil  $\alpha : i \rightarrow j$  durch  $X_\alpha = 1$  gegeben ist. Bemerkte sei, dass die Existenz einer stabilen Darstellung schon genügt, um die Dimension des Modulraums auszurechnen. Offensichtlich muss die Bilddimension  $d_U$  eines eindimensionalen Unterraums  $U$  einer stabilen Darstellungen die Eigenschaft  $d_U > n - 1$  erfüllen. Sei  $U$  nun ein Unterraum mit  $\dim U = \sum_{i=k}^l s_i + (l - k)$ . Wenn wir Stabilität voraussetzen, erhalten wir für die Bilddimension

$$d_U \geq \left( \sum_{i=k}^l (n-1)s_i + 1 \right) + (n-1)(l-k).$$

Es ist leicht zu sehen, dass es genügt, Stabilität für Unterräume dieser Dimension zu überprüfen, die zusätzlich die Eigenschaft

$$d_U = \left( \sum_{i=k}^l (n-1)s_i + 1 \right) + (n-1)(l-k)$$

erfüllen. Wir erhalten folgendes Lemma:

**Lemma 3.4.24** *Ein Köcher  $(s_1, \dots, s_{t+1})_{m,n}$  ist genau dann stabil, wenn*

$$d(l-k+1) > (t+1) \left( \sum_{i=k}^l s_i + (l-k) \right)$$

für alle  $1 \leq k < l \leq t+1$  mit  $l-k < t$ .

*Beweis.* Offensichtlich gilt  $e = (n-1)d + t + 1$ . Aus der Stabilitätsbedingung folgt, dass

$$\left( \sum_{i=k}^l (n-1)s_i + 1 \right) + (n-1)(l-k) > \frac{(n-1)d + t + 1}{d} \left( \sum_{i=k}^l s_i + (l-k) \right).$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} & d\left(\sum_{i=k}^l (n-1)s_i\right) + d(n-1)(l-k) + d(l-k+1) \\ & > (n-1)d\left(\sum_{i=k}^l s_i + (l-k)\right) + (t+1)\left(\sum_{i=k}^l s_i + (l-k)\right) \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. □

Offenbar ist die Stabilität einfacher Köcher unabhängig von  $m$  und  $n$ , so dass wir im Folgenden mit  $(s_1, s_2, \dots, s_{t+1})$  die Menge aller einfachen Köcher mit  $n < m$  bezeichnen.

Sei  $k = e - d$ . Definiere  $l_{(d,e)} := \lceil l + \frac{k}{d}l \rceil = \lceil \frac{e}{d}l \rceil$ . Sei außerdem  $I$  die Menge der Quellen und  $J$  die Menge der Senken eines einfachen Köchers.

**Lemma 3.4.25** *Sei  $X$  eine stabile Darstellung eines einfachen Köchers. Für alle Unterräume  $U = \bigoplus_{i \in I'} X_i$  der Dimension  $l$  mit  $I' \subset I$  gilt entweder  $d_U = l_{(d,e)}$  oder  $d_U = l_{(d,e)} + 1$ .*

*Beweis.* Da die Randköcher nach Lemma 3.4.13 von minimal möglicher Bilddimension sind, existiert ein Unterraum beliebiger Dimension  $l$ , so dass  $d_U = l_{(d,e)}$ .

Seien  $I_1, I_2 \subset I$ . Wir nehmen an, dass zwei Unterräume  $U_1 = \bigoplus_{i \in I_1} X_i$  bzw.  $U_2 = \bigoplus_{i \in I_2} X_i$  der gleichen Dimension existieren, so dass  $d_{U_1} = d_{U_2} + t$  mit  $t \geq 2$ . Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $d_{U_2} = l_{(d,e)}$ . Sei  $I_3 := I \setminus I_1$ . Betrachten wir den Unterraum

$$U_3 = \bigoplus_{i \in I_3} X_i,$$

so erhalten wir  $d_{U_3} = e - l_{(d,e)}$ .

Wegen der Stabilität erhalten wir aber ebenfalls

$$(d-l)_{(d,e)} \leq e - l_{(d,e)}.$$

Das kann aber nur der Fall sein, falls  $\frac{e}{d}l \in \mathbb{N}$ , was man durch eine einfache Rechnung überprüft. Das ist aber unmöglich, weil  $\text{ggT}(d, e) = 1$  und  $l < d$ . □

Daraus erhält man folgendes Korollar:

**Korollar 3.4.26** *Für einen stabilen Köcher  $(s_1, \dots, s_{t+1})$  existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $1 \leq i \leq t+1$  gilt, dass  $s_i = k$  oder  $s_i = k+1$ .*

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m = 3$  und  $n = 2$ . Gilt  $s_i = k$  für ein  $i$ , so gibt es einen Unterraum  $U$  der Dimension  $k + 2$ , so dass  $d_U = k + 5$ . Gäbe es nun ein  $j$ , so dass  $s_j = k + 2$ , so gäbe es auch einen Unterraum  $U'$  der Dimension  $k + 2$ , so dass  $d_{U'} = k + 3$ . So einen Unterraum kann es nach dem vorherigen Lemma aber nicht geben.

□

Definiere

$$s_{k,l} := \left( \sum_{i=k}^l s_i + l - k \right) (t + 1).$$

Dann erhalten wir unmittelbar folgendes Korollar:

**Korollar 3.4.27** *Sei  $(s_1, \dots, s_{t+1})$  stabil und  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq -\min_{i=1}^{t+1} s_i$ . Dann folgt, dass  $(s_1 + k, \dots, s_{t+1} + k)$  ebenso stabil ist. Insbesondere können wir also annehmen, dass  $s_i = 0$  oder  $s_i = 1$ .*

*Beweis.* Addieren wir  $k$  zu beiden Seiten der Ungleichung, so erhalten wir die Äquivalenz zu der ursprünglichen Bedingung.

□

Nun zeigen wir, dass zu einem gegebenen Dimensionsvektor genau ein Tupel dieser Art existiert, so dass der Köcher stabil ist. Außerdem werden wir dieses Tupel konstruieren.

Es folgt unmittelbar:

**Korollar 3.4.28** *Sei  $(s_1, \dots, s_t)$  stabil und*

$$\sum_{i=1}^k s_i = a$$

*für ein  $a \in \mathbb{N}$ , so dass  $k < t$ . Dann gilt*

$$\sum_{i=l}^{l+k-1} s_i \leq a$$

*für  $l + k - 1 \leq t$ .*

Zunächst zeigen wir, dass alle einfachen Köcher symmetrisch sind:

**Korollar 3.4.29** *Sei  $(s_1, \dots, s_t)$  stabil. Dann gilt  $s_i = s_{t-i+1}$  für alle  $i \leq \frac{t}{2}$ .*

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, dass die Stabilität von  $(s_1, \dots, s_t)$  äquivalent zur Stabilität von  $(s_t, \dots, s_1)$  ist.

Dann folgt die Behauptung sofort aus dem vorherigen Korollar. Denn, wenn ein nicht-symmetrischer einfacher Köcher existierte, so würde folgen, dass

$$\sum_{i=1}^k s_i = a_1, \text{ aber auch } \sum_{i=t-k+1}^t s_i = a_2$$

mit  $a_1 \neq a_2$ . Das ist aber ein Widerspruch. □

Wir können die Stabilitätsbedingung einfacher Köcher aus 3.4.24 auf die folgende Weise vereinfachen:

**Lemma 3.4.30** *Sei  $s = (s_1, \dots, s_{t+1})$  ein symmetrischer Köcher. Dann sind folgende Aussage äquivalent:*

1. Der Köcher  $s = (s_1, \dots, s_{t+1})$  ist stabil.

2. Es gilt

$$dl > s_{1,l}$$

für alle  $1 \leq l < t + 1$ .

3. Es gilt

$$dl > s_{1,l} > dl - (t + 1)$$

für alle  $1 \leq l \leq \frac{t+1}{2}$ .

*Beweis.* Sei 3. vorausgesetzt. Weiter seien  $k, l$  gegeben, so dass  $k \leq l$ . Die Symmetrie von  $s$  ergibt

$$s_{t-k+2, t+1} = s_{1,k}.$$

Außerdem gilt

$$s_{1, t+1} = d(t + 1).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} s_{k,l} &= s_{1, t+1} - s_{1, k-1} - s_{l+1, t+1} - 2(t + 1) \\ &= s_{1, t+1} - s_{1, k-1} - s_{1, t-l+1} - 2(t + 1) \\ &< d(t + 1) - d(k - 1) - d(t - l) \\ &= d(l - k + 1). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir noch die Äquivalenz von 2 und 3. Dazu sei

$$dl > s_{1,l}$$

für alle  $1 \leq l < t + 1$ . Unter Verwenden der Symmetrie erhalten wir für  $k \leq \frac{t+1}{2}$ , dass

$$\begin{aligned} s_{1,k} &= s_{1,t+1} - s_{1,t-k+1} - (t+1) \\ &> d(t+1) - d(t-k+1) - (t+1) \\ &= dk - (t+1). \end{aligned}$$

Andersrum sei  $\frac{t+1}{2} \leq l < t + 1$ . Wegen  $t + 1 - l \leq \frac{t+1}{2}$  gilt

$$\begin{aligned} s_{1,l} &= s_{1,t+1} - s_{l+1,t+1} - (t+1) \\ &= s_{1,t+1} - s_{1,t+1-l} - (t+1) \\ &< d(t+1) - d(t+1-l) \\ &= dl. \end{aligned}$$

Das vervollständigt den Beweis. □

Bemerkt sei, dass analog zum Beweis gezeigt werden kann, dass für beliebiges  $1 < k \leq l < t + 1$  gilt, dass

$$s_{k,l} + 2(t+1) > (l-k+1)d.$$

Außerdem gilt die dritte Behauptung für alle  $1 \leq l < t + 1$ , wenn stabile Darstellungen betrachtet werden.

Das nächste Resultat zeigt die Existenz und Eindeutigkeit stabiler einfacher Köcher für einen festen teilerfremden Dimensionstyp.

**Satz 3.4.31** *Sei  $\text{ggT}(d, e) = 1$ . Dann existiert genau ein  $s \in \mathbb{N}^t$ , so dass  $s$  stabil und vom Dimensionstyp  $(d, e)$  ist.*

*Beweis.* Als Erstes zeigen wir die Existenz eines solchen Köchers. Wegen Korollar 3.4.27 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $t + 1 < d < 2(t + 1)$ . Denn aus  $d = t$  erhalten wir  $s = 0$ . Für alle  $l \leq \frac{t+1}{2}$  muss  $s$  nun

$$dl - (t+1) < s_{1,l} < dl$$

erfüllen.

Da  $\text{ggT}(d, e) = 1$  und  $e = d + t + 1$ , erhalten wir, dass  $t + 1$  kein Teiler von  $d$  ist, was die Existenz eines solchen Vektors  $s$  zeigt. Bemerkt sei, dass  $t$  durch  $t = e - d$  für feste  $d, e$  eindeutig bestimmt ist.

Nun ist die Eindeutigkeit leicht zu sehen. Denn, wenn  $s'$  ein anderer stabiler einfacher Köcher wäre, so gäbe es ein minimales  $k$ , so dass  $s_k \neq s'_k$ . Insbesondere würde gelten, dass  $s_k = s'_k + l$  für ein  $l \neq 0$ . Dann hätten wir entweder  $s'_{1,k} > dk$  oder  $s'_{1,k} < dk - (t + 1)$ . □

**Korollar 3.4.32** Sei  $(s_1, \dots, s_t)$  stabil. Dann gilt für  $l_1 - k_1 = l_2 - k_2$  mit  $l_1 \geq k_1$  bzw.  $l_2 \geq k_2$ , dass entweder  $\sum_{i=k_1}^{l_1} s_i = \sum_{i=k_2}^{l_2} s_i$  oder  $\sum_{i=k_1}^{l_1} s_i = (\sum_{i=k_2}^{l_2} s_i) \pm 1$ .

*Beweis.* Wie zuvor erwähnt, gilt für alle  $k \leq l$ , dass

$$d(l - k + 1) > s_{k,l} > d(l - k + 1) - 2(t + 1).$$

Unter Betrachtung von  $s_{k,l}$  folgt die Behauptung. □

Sei  $s = (s_1, \dots, s_t)$  ein einfacher Köcher. Definiere:

$$s^l := \underbrace{(s, \dots, s)}_{l\text{-mal}}$$

Aus der Eindeutigkeit einfacher Lokalisierungsköcher zusammen mit 3.4.19 erhalten wir unmittelbar folgendes Korollar:

**Korollar 3.4.33** Seien  $d, d_s, e, e_s$  natürliche Zahlen, die die Verklebungsbedingung erfüllen. Sei weiter  $s_{(d_s, e_s)}$  der einfache Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d_s, e_s)$  und  $s_{(d, e)}$  derjenige vom Dimensionstyp  $(d, e)$ . Dann ist der einfache Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d_s + kd, e_s + ke)$  gegeben durch  $s_{(d_s + kd, e_s + ke)} = (s_{(d_s, e_s)}, \hat{s}_{(d, e)}^k)$ .

Im Folgenden nehmen wir an, dass  $s_i \in \{0, 1\}$  für alle einfachen Lokalisierungsköcher, was wegen 3.4.27 möglich ist.

Nun zeigen wir, wie wir diese Köcher konstruieren können. Dazu sei ein Tupel natürlicher Zahlen  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  gegeben. Definiere rekursiv folgenden Köcher:

- $s_{n_1} = 1^{n_1+1}$
- $s_{n_1, n_2} = (s_{n_1-1}, \hat{s}_{n_1}^{n_2})$
- $s_{n_1, \dots, n_{k+1}} = (s_{n_1, \dots, n_k-1}, \hat{s}_{n_1, \dots, n_k}^{n_{k+1}})$

Schreibe abkürzend  $s_{n_k} := s_{n_1, \dots, n_k}$ . Bemerkt sei, dass für  $k \geq 2$  gilt, dass  $s_{n_1, \dots, n_k, 0} = s_{n_1, \dots, n_k-1}$ . Aus Korollar 3.4.21 erhalten wir sofort folgendes Resultat:

**Korollar 3.4.34** Die Köcher  $s_{n_k}$  sind stabil.

Jetzt konstruieren wir die Köcher  $\hat{s}_{n_k}$  mittels Köcherfunktionen. Diese lassen sich für jeden Dimensionstyp durch Lösen Linearer Gleichungssysteme bestimmen. Sei

$$l^k := \underbrace{l, \dots, l}_{k\text{-mal}}$$



und betrachte die Abbildungen  $\eta_n^l : \{l-1, l\} \rightarrow \mathbb{N}^n \cup \mathbb{N}^{n+1}$  bzw.  $\Theta_n^l : \{l-1, l\} \rightarrow \mathbb{N}^{n+1} \cup \mathbb{N}^{n+2}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \eta_n^l &: (l-1) \mapsto (l-1), l^{n-1} \\ & \quad l \mapsto (l-1), l^n \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Theta_n^l &: (l-1) \mapsto (l-1)^{n+1}, l \\ & \quad l \mapsto (l-1)^n, l. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $\Theta_n^l(l) = (\eta_n^l)^n(l)$ . Diese Abbildungen sollen komponentenweise auf Vektoren angewendet werden, die aus natürlichen Zahlen  $l-1$  bzw.  $l$  bestehen. Definiere  $\eta_n := \eta_n^1$  bzw.  $\Theta_n := \Theta_n^1$ .

**Lemma 3.4.35** *Für alle  $k \in \mathbb{N}^+$  gilt*

$$\hat{s}_{n_k} = \eta_{n_1} \circ \eta_{n_2} \circ \dots \circ \eta_{n_k}(1).$$

*Beweis.* Sei  $k = 1$ . Für beliebiges  $n_1$  gilt  $s_{n_1} = 1^{n_1+1}$ , also  $\hat{s}_{n_1} = 01^{n_1} = \eta_{n_1}(1)$ .

Deswegen betrachte

$$\hat{s}_{n_{k+1}} = (\hat{s}_{n_k-1}, (\hat{s}_{n_k})^{n_{k+1}}).$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\hat{s}_{n_k} = \eta_{n_1} \circ \eta_{n_2} \circ \dots \circ \eta_{n_k}(1).$$

Außerdem erhalten wir

$$\eta_{n_{k+1}}(1) = 01^{n_{k+1}}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\hat{s}_{n_k-1} = \eta_{n_1} \circ \eta_{n_2} \circ \dots \circ \eta_{n_k}(0).$$

Für  $k = 1$  gilt  $\hat{s}_{n_1-1} = 01^{n_1-1} = \eta_{n_1}(0)$ . Wie oben gilt

$$\eta_{n_{k+1}-1}(0) = 01^{n_{k+1}-1}.$$

Also können wir folgern, dass

$$\begin{aligned} \hat{s}_{n_{k+1}-1} &= (\hat{s}_{n_k-1}, (\hat{s}_{n_k})^{n_{k+1}-1}) \\ &= (\eta_{n_1} \circ \eta_{n_2} \circ \dots \circ \eta_{n_k}(0), (\eta_{n_1} \circ \eta_{n_2} \circ \dots \circ \eta_{n_k}(1))^{n_{k+1}-1}) \\ &= (\eta_{n_1} \circ \eta_{n_2} \circ \dots \circ \eta_{n_k}(01^{n_{k+1}-1})) \\ &= \eta_{n_1} \circ \eta_{n_2} \circ \dots \circ \eta_{n_{k+1}}(0). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Bemerkt sei, dass diese Konstruktion wegen Korollar 3.4.27 für alle einfachen Köcher  $s$  möglich ist.

**Definition 3.4.36** Sei  $s_{d,e}^m$  ein einfacher Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp  $(d, e)$  und  $m \geq 3$ . Sei außerdem

$$\hat{s}_{d,e}^m = \eta_{n_k} \circ \dots \circ \eta_{n_1}(l)$$

mit  $l \in \mathbb{N}$ . Die Abbildungen  $\eta_{n_1}, \dots, \eta_{n_k}$  heißen Köcherfunktionen (vom Typ  $l$ ) zu  $d, e, m$ .

**Bemerkung 3.4.37**

- Mit Hilfe der einfachen Lokalisierungsköcher kann eine große Klasse von Lokalisierungsköchern bestimmt werden. Wegen Lemma 3.4.9 müssen wir nicht auf Zykel Rücksicht nehmen, die möglicherweise aus einer Färbung  $c$  resultieren.

Dazu seien  $d, e$  und  $m$  fest gewählt. Wir gehen nun so vor, dass wir an den Köcher vom Typ  $(d_s, e_s)$  Köcher vom Typ  $(d, e+1)$  kleben, die aus dem einfachen Köcher vom Typ  $(d, e)$  resultieren. Wegen 3.4.20 sind die sich ergebenden Köcher wieder stabil. Wir werden diese Methode im nächsten Abschnitt erweitern und genau untersuchen.

Durch die Köcherfunktionen erhalten wir ein einfacheres Verfahren, um zu einem gegebenen Dimensionsvektor das Tupel  $(n_k, \dots, n_1)$  zu bestimmen, und zwar durch Lösen Linearer Gleichungssysteme. Dazu seien  $m \geq 3$  und ein Dimensionsvektor  $(d, e)$ , so dass  $(m-1)d \geq e \geq d$ , fest gewählt. Weiter nehmen wir an, dass  $(n-1)d < e \leq nd$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Jetzt erhalten wir die Köcherfunktionen rekursiv wie folgt: es gilt in dieser Situation, dass

$$(d, e) = k_{1,1}(1, n-1) + k_{1,2}(1, n),$$

wobei  $k_{1,2} \neq 0$ . Die Lösung dieses Gleichungssystems ist gegeben durch

$$k_{1,1} = nd - e \text{ und } k_{1,2} = e - (n-1)d.$$

Falls  $k_{1,1} = 0$ , so sind wir fertig. Denn dann gilt  $k_{1,2} = 1$  und somit  $\hat{s}_{d,e}^m = 0$ .

Der Typ der Köcherfunktionen ist allgemein gegeben durch  $l := \lceil \frac{k_{1,1}}{k_{1,2}} \rceil$ . Falls  $k_{1,2} = 1$ , so folgt also, dass der Typ der Köcherfunktionen durch  $k_{1,1}$  gegeben ist und wir erhalten  $\hat{s}_{d,e}^m = k_{1,1}$ . Falls  $k_{1,1} = 1$ , so gilt  $\hat{s}_{d,e}^m = 0^{k_{1,2}-1}1$ .

Nehme also an, dass  $k_{1,2} \neq 1$ . Wir fahren wie folgt rekursiv fort:

Wenn  $k_{1,2} | k_{1,1}$  gilt, so folgt aus  $\text{ggT}(d, e) = 1$ , dass  $k_{1,2} = 1$ . Denn ansonsten würde  $k_{1,2}$  sowohl  $d$  als auch  $e$  teilen. Unter Berücksichtigung des Typs der Köcherfunktionen erhalten wir das Lineare Gleichungssystem

$$(d, e) = k_{2,1}((l_1 - 1)(1, n - 1) + (1, n)) + k_{2,2}(l_1(1, n - 1) + (1, n)).$$

Daraus folgt, dass

$$k_{2,1} = (l_1 + 1)e - (l_1 n - l_1 + n)d$$

bzw.

$$k_{2,2} = d(l_1 n - l_1 + 1) - l_1 e.$$

Definiere  $l_2 := \lceil \frac{k_{2,2}}{k_{2,1}} \rceil$ . Falls  $k_{2,2} = 1$ , so erhalten wir  $\hat{s}_{d,e}^m = \Theta_{k_{2,1}}(l)$ . Wenn  $k_{2,2} \neq 1$ , so ist die Kocherfunktion von der Form

$$\eta_{l_2} : l \mapsto (l - 1)l^{l_2}.$$

Wenn  $k_{2,1} = 1$ , so gilt  $\hat{s}_{d,e}^m = \eta_{l_2}(l)$ .

Falls  $k_{2,1}, k_{2,2} \neq 1$ , setzen wir rekursiv mit dem Lösen des Linearen Gleichungssystems gegeben durch

$$k_{3,1} + k_{3,2} = k_{2,1}$$

und

$$(l_2 - 1)k_{3,1} + l_2 k_{3,2} = k_{2,2}$$

fort. Dann gilt

$$k_{3,1} = k_{2,1} l_2 - k_{2,2} \text{ und } k_{3,2} = k_{2,2} - (l_2 - 1)k_{2,1}.$$

Definiere wieder  $l_3 := \lceil \frac{k_{3,2}}{k_{3,1}} \rceil$ . Wie eben gilt

$$\hat{s}_{d,e}^m = \eta_{l_2} \circ \Theta_{k_{3,1}}(l),$$

wenn  $k_{3,2} = 1$  und

$$\hat{s}_{d,e}^m = \eta_{l_2} \circ \eta_{l_3}(l),$$

wenn  $k_{3,1} = 1$ .

Wenn  $k_{3,1}, k_{3,2} \neq 1$ , fahren wir mit der Rekursion so lange bis  $k_{j,1} = 1$  oder  $k_{j,2} = 1$  fort. Definiere also

$$k_{j,1} + k_{j,2} = k_{j-1,1}$$

und

$$(l_{j-1} - 1)k_{j,1} + l_{j-1} k_{j,2} = k_{j-1,2}$$

und zudem  $l_j := \lceil \frac{k_{j,2}}{k_{j,1}} \rceil$ . Daraus erhalten wir  $\hat{s}_{d,e}^m$  wie folgt: wenn  $k_{j,2} = 1$ , so gilt

$$\hat{s}_{d,e}^m = \eta_{l_2} \circ \dots \circ \eta_{l_{j-1}} \circ \Theta_{k_{j,1}}(l)$$

und wenn  $k_{j,1} = 1$ , so gilt

$$\hat{s}_{d,e}^m = \eta_{l_2} \circ \eta_{l_3} \circ \dots \circ \eta_{l_j}(l).$$

Jetzt folgt aus 3.4.34, dass die resultierenden Köcher  $s_{d,e}^m$  stabil sind. Sie sind auch vom gewünschten Dimensionstyp, weil das Tupel  $(k_{j,1}, k_{j,2})$  genau die Anzahl der  $(l - 1)$ 's und  $l$ 's des Vektors  $\eta_{l_2} \circ \dots \circ \eta_{l_j}(l)$  angibt.

**Bemerkung 3.4.38**

- Betrachte Korollar 3.4.21 mit  $(d_s, e_s) = (0, 1)$  und  $(d, e) = (1, n - 1)$  für ein  $n \geq 2$ . Seien weiter  $m \geq 3$  und ein Dimensionsvektor  $(d', e')$ , so dass  $(m - 1)d' \geq e' \geq d'$ , fest gewählt. Weiter nehmen wir an, dass  $(n - 1)d' \leq e' \leq nd'$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Mit Hilfe von Korollar 3.4.33 überprüft man, dass

$$(n_k, \dots, n_1) = (l_k, \dots, l_2, l + 1).$$

Das zu einem Dimensionsvektor gegebene Tupel ist also schon durch die Lösungen von Linearen Gleichungssystemen gegeben.

Schließlich soll auf eine weitere Methode hingewiesen werden, mit der sich die einfachen Köcher konstruieren lassen, die allerdings im Folgenden nicht mehr benötigt wird.

Dazu definiere rekursiv folgende Köcher:

- $t_{n_1} = (0)$
- $t_{n_{k+1}} = (t_{n_k}, s_{n_k-2}, t_{n_k})$ , wenn  $n_k \geq 2$
- Falls  $n_k = 1$ , sei  $l := \min\{k' \leq k \mid n_{k'} = n_{k'+1} = \dots = n_{k-1} = 1\}$ . Sei  $l \neq 1$  und definiere

$$t_{n_{k+1}} := (t_{n_{l-1}}, (s_{n_{l-1}-2}, t_{n_{l-1}})^{k-l+2}).$$

Falls  $l = 1$ , dann definiere  $t_{n_{k+1}} := (0^{k+1})$ .

**Lemma 3.4.39** *Es gilt*

$$\hat{s}_{n_k} = (t_{n_k}, s_{n_k-1})$$

für alle  $k \geq 1$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $k = 1$ . Dann gilt  $s_{n_1} = 1^{n_1+1}$ , also  $\hat{s}_{n_1} = (0, 1^{n_1}) = (t_{n_1}, s_{n_1-1})$ .

Wir nehmen an, dass die Behauptung für ein festes  $k \geq 1$  gilt.

Dann gilt

$$s_{n_{k+1}} = (s_{n_k-1}, \hat{s}_{n_k}^{n_{k+1}}) = (s_{n_k-1}, (t_{n_k}, s_{n_k-1})^{n_{k+1}}).$$

Sei  $n_k \geq 2$ . Es folgt

$$\hat{s}_{n_{k+1}} = (\hat{s}_{n_k-1}, (t_{n_k}, s_{n_k-1})^{n_{k+1}}).$$

Da offensichtlich  $t_{n_k} = t_{n_{k-1}}$  gilt, folgt aus der Induktionsannahme, dass

$$\begin{aligned} \hat{s}_{n_{k+1}} &= (t_{n_k-1}, s_{n_k-2}, (t_{n_k}, s_{n_k-1})^{n_{k+1}}) \\ &= (t_{n_{k+1}}, s_{n_k-1}, (t_{n_k}, s_{n_k-1})^{n_{k+1}-1}) \\ &= (t_{n_{k+1}}, s_{n_k-1}, \hat{s}_{n_k}^{n_{k+1}-1}) \\ &= (t_{n_{k+1}}, s_{n_{k+1}-1}). \end{aligned}$$

Nun sei  $n_k = n_{k-1} = \dots = n_l = 1$ , so dass  $l > 1$ . Wegen obiger Bemerkung erhalten wir  $s_{n_k-1} = s_{n_{l-1}-1}$ . Also folgt

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{n_{k+1}} &= (\hat{s}_{n_k-1}, t_{n_k}, s_{n_k-1}, (t_{n_k}, s_{n_k-1})^{n_{k+1}-1}) \\
&= (\hat{s}_{n_{l-1}-1}, (t_{n_{l-1}}, (s_{n_{l-1}-2}, t_{n_{l-1}}))^{k-l+2}, s_{n_{k+1}-1}) \\
&= (t_{n_{l-1}}, s_{n_{l-1}-2}, \hat{s}_{n_{l-1}-1}, (t_{n_{l-1}}, (s_{n_{l-1}-2}, t_{n_{l-1}}))^{k-l+2}, s_{n_{k+1}-1}) \\
&= (t_{n_{l-1}}, (s_{n_{l-1}-2}, t_{n_{l-1}})^{k-l+3}, s_{n_{k+1}-1}) \\
&= (t_{n_{k+1}}, s_{n_{k+1}-1}).
\end{aligned}$$

Schließlich betrachte den vorherigen Fall für  $l = 1$ . Dann gilt  $t_k = 0^k$  und  $s_{n_k-1} = s_0 = 1$ . Also folgt

$$\hat{s}_{n_{k+1}} = (0, 0^k, 1, (0^k, 1)^{n_{k+1}-1}) = (t_{n_{k+1}}, s_{n_{k+1}-1}).$$

□

### 3.4.4 Eine untere Schranke

Sei  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 3$  wieder die Anzahl der Pfeile des Kroneckerköchers. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine untere Schranke für die Eulercharakteristik der Modulräume für teilerfremde Dimensionsvektoren anzugeben. Dazu betrachten wir die Fälle  $e > (m-1)d$ . Die anderen ergeben sich durch die Isomorphismen der Modulräume, siehe 2.2.6. Der Vorteil dieser Fälle ist, dass Färbungen, die 3.4.4 erfüllen, keine induzierten Pfeile erzeugen können, siehe 3.4.8. Also ist die Dimension der betrachteten Fixpunktcomponenten bekannt. Denn jede Quelle eines Lokalisierungsköchers von diesem Dimensionstyp muss aufgrund der Stabilitätsbedingung bereits Quelle  $m$  verschiedener Pfeile sein. Außerdem vereinfacht sich die rekursive Konstruktion der betrachteten Lokalisierungsköcher.

Wir wollen zunächst ein wichtiges Lemma beweisen, dass für die weiteren Überlegungen von großer Wichtigkeit ist:

**Lemma 3.4.40** *Sei  $X = (X_1, X_2, (X_{\alpha_i})_{1 \leq i \leq m})$  eine stabile Darstellung des Kroneckerköchers  $K(m)$  mit Dimensionsvektor  $(d, e)$ , so dass  $e > (m-1)d$ . Dann existieren kein Unterraum  $U \subset X_1, X_2$  und keine Abbildungen  $f_1, \dots, f_{2l} \in \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_m}\}$  mit  $f_i \neq f_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq 2l-1$ , so dass*

$$f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 \circ \dots \circ f_{2l-1} \circ f_{2l}^{-1}(U) = U$$

für  $U \subset X_2$  bzw.

$$f_1^{-1} \circ f_2 \circ f_3^{-1} \circ \dots \circ f_{2l-1}^{-1} \circ f_{2l}(U) = U$$

für  $U \subset X_1$ .

*Beweis.* Sei  $U$  ein Unterraum von  $X_1$  oder  $X_2$  mit  $\dim U = n$ . Wenn eine solche Kette von Abbildungen existierte, würde ein Unterraum  $U'$  der Dimension  $ln$  existieren, für dessen Bilddimension  $d_{U'} \leq (m-1)ln$  gelten würde. Dieser kann wegen der Stabilitätsbedingung aber nicht existieren, denn ansonsten würde gelten, dass

$$(m-1)ln \geq d_{U'} > \frac{e}{d}ln > \frac{(m-1)d}{d}ln = (m-1)ln,$$

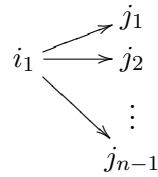
was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Der andere Fall verhält sich völlig analog.

□

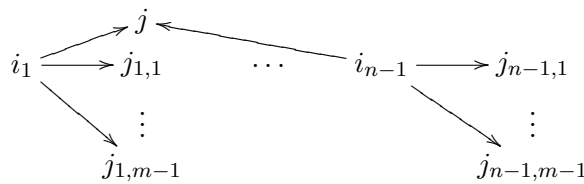
Bemerkt sei, dass dieses Lemma nicht ohne Einschränkung für den Fall  $(d, (m-1)d)$  gilt. In diesen Fällen können stabile Darstellungen Zykel haben. Und zwar genau dann, wenn  $d_{U'} = (m-1)d$  im Beweis gilt. Auf diese Fälle werden wir in Abschnitt 3.5.2 eingehen.

Betrachte zunächst die Dimensionsvektoren  $(1, n-1)$  und  $(1, n)$  mit  $2 \leq n \leq m-1$ , die durch die eben erwähnten Isomorphismen auf die Dimensionsvektoren  $(n-1, m(n-1)-1)$  und  $(n, mn-1)$  abgebildet werden. Für  $(1, n-1)$  existiert nur der Lokalisierungsköcher



wobei  $\dim(j_k) = \dim(i_1) = 1$  für alle  $1 \leq k \leq n-1$ . Wir erhalten analog den eindeutigen Lokalisierungsköcher für den Dimensionsvektor  $(1, n)$ .

Betrachte den folgenden Köcher vom Dimensionstyp  $(n-1, m(n-1)-1)$ , wobei  $\dim(j) = n-2$  und  $\dim(j_{k,l}) = \dim(i_k) = 1$  sonst:



Wieder erhalten wir analog einen Köcher vom Typ  $(n, mn-1)$ .

**Bemerkung 3.4.41**

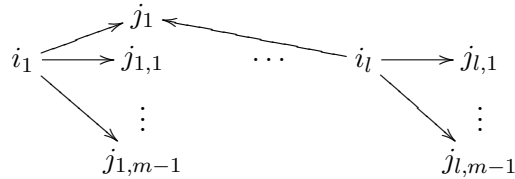
- Für den Dimensionsvektor  $(n, mn - 1)$ ,  $1 \leq n \leq m$ , ist dies der einzige Lokalisierungsköcher, weil offensichtlich jeder eindimensionale Unterraum einen  $m$ -dimensionalen Bildraum haben muss und außerdem für alle anderen Unterräume  $U$  der Dimension  $d' < n$  aus der Stabilität

$$d_U > \frac{nm - 1}{n} d'$$

folgt. Deswegen folgt  $d_U \geq md'$  für alle  $d' < d$ . Für jeden anderen Köcher dieses Dimensionstyps ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, was aus einer einfachen Überlegung folgt.

- Wie die Isomorphismen der Modulräume, sind diese Köcher auch diejenigen, die man durch Anwenden des Spiegelungsfunktors, siehe 4.2, erhält.

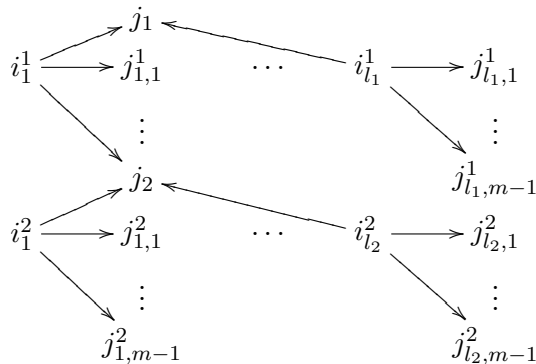
Mit dem in Abschnitt 3.4.2 angegebenen Verfahren können wir auch die eben konstruierten Köcher verkleben. Für beliebiges  $m$  definieren wir  $Q^l$  durch



Sei mit  $I \cup J$  die Menge der Punkte bezeichnet. Außerdem definieren wir  $J'_1 := J \setminus j_1$ . Sei  $\dim(j) = l - 1$  und die anderen Punkte seien alle eindimensional. Definiere den Verklebungsköcher

$$Q^{l_1, l_2} := Q_{j, j_2}(Q^{l_1}, Q^{l_2})$$

mit  $j \in J'_1$ . Für den resultierenden Köcher definiere  $\dim(j_2) = l_2$ , wobei die restlichen Dimensionen unverändert bleiben sollen. Zum Beispiel ergibt sich also:



Wir betrachten wieder die Konstruktion aus 3.4.20. Sei Dimensionsvektor  $(d, e) = (n_1(n-1)+1, n_1(m(n-1)-1)+m) = (1, m) + n_1(n-1, m(n-1)-1)$ . Dann erhalten wir die Fälle

$$\frac{m(n-1)-1}{n-1}d' \leq e' \leq \frac{mn-1}{n}d'. \quad (3.1)$$

Wir betrachten nur die in diesem Abschnitt konstruierten Teilköcher und deren Verklebungen.

Ist  $n_1 \geq 1$  fest gewählt, so bezeichnen wir die Menge der resultierenden Köcher durch  $\mathcal{Q}_{n_1}^n$ . Diese entstehen offenbar durch  $n_1$ -maliges Ankleben eines Köchers vom Dimensionstyp  $(n-1, m(n-1)-1)$ . Bezeichne den Verklebungspunkt, der beim ersten Verkleben entsteht, als anfänglichen Verklebungspunkt. Ist  $j_1$  der anfängliche Verklebungspunkt so bezeichne die Menge der Köcher, die sich durch Erhöhen der Dimension von  $j_1$  um eins ergibt mit  $\hat{\mathcal{Q}}_{n_1}^n$ .

Definiere nun rekursiv

$$\mathcal{Q}_{n_{k+1}, \dots, n_1}^n = \{Q_{j, j_1}(S, T) \mid S \in \mathcal{Q}_{n_{k+1}-1, n_k, \dots, n_1}^n, T \in \hat{\mathcal{Q}}_{n_k, \dots, n_1}^n\},$$

wobei  $j \in S_0$ , so dass  $R_j = 1$  und  $j_1$  immer der anfängliche Verklebungspunkt von  $T \in \mathcal{Q}_{n_k, \dots, n_1}^n$  sei. Außerdem sei  $\mathcal{Q}_{0, n_k, \dots, n_1}^n = \mathcal{Q}_{n_k-1, \dots, n_1}^n$ . Wegen Korollar 3.4.21 wissen wir, dass alle Köcher  $S \in \mathcal{Q}_{n_{k+1}-1, \dots, n_1}^n$  stabil sind und dass sie die Eigenschaften des Startköchers für  $T \in \hat{\mathcal{Q}}_{n_k, \dots, n_1}^n$  erfüllen. Es folgt also, dass die Verklebungsköcher ebenso stabil sind.

#### Bemerkung 3.4.42

- Ist  $(d', e')$ , so dass (3.1) gilt, vorgegeben, so können wir das dazugehörige Tupel  $(n_k, \dots, n_1)$  bestimmen, indem wir wie in Bemerkung 3.4.17 vorgehen. Wir können allerdings auch den entsprechenden gespiegelten Fall  $(d, e)$  betrachten, so dass  $(n-1)d \leq e \leq nd$  mit  $n \leq m-1$ . Dann ist der dazugehörige Startvektor  $(0, 1)$  und wir können wie in Beispiel 3.4.22 bzw. Bemerkung 3.4.38 vorgehen. Wie man sich leicht überlegt, stimmen die beiden Tupel überein.

Jetzt zählen wir die Kardinalität dieser Menge, um eine untere Schranke für die Eulercharakteristik zu erhalten. Wie schon in der Einleitung zu diesem Abschnitt erwähnt, ist der Vorteil dieser Typen von Köchern, dass durch Färbungen keine induzierten Pfeile, wie in 3.4.8 beschrieben, auftreten. Denn offensichtlich ist jeder Punkt der betrachteten Lokalisierungsköcher bereits Quelle oder Senke von  $m$  verschiedenen Pfeilen. Das heißt, dass die Dimension der auftretenden Modulräume immer null und die Eulercharakteristik somit bekannt ist, denn  $\chi(\{pt\}) = 1$ . Zwar können durch Färbungen Zykkel entstehen, allerdings können die hier betrachteten Fälle wegen 3.4.40 als weitere Lokalisierungen verstanden werden. Weiter können wir wegen Satz



2.2.6 davon ausgehen, dass  $n \geq \frac{m+1}{2}$ . Das ist ein weiterer Vorteil, der die Kombinatorik vereinfacht. Denn wegen dieser Annahme ist es nur möglich, *einen* weiteren Köcher der betrachteten Form an einen Punkt der Dimension eins zu kleben. Denn ansonsten gäbe es keine geeignete Färbung, um aus dem Lokalisierungsköcher ein Lokalisierungsdatum zu erhalten.

Betrachte also zunächst die Menge  $\mathcal{Q}_1$ , die aus dem Köcher vom Dimensionstyp  $(n, mn - 1)$  besteht. Nach dem Modifizieren der einzigen Senke, gibt es wegen der Eigenschaften aus 3.4.4 unter Berücksichtigung aller Symmetrien und der Tatsache, dass alle Köcher wie oben gezeigt zusammengeklebt werden sollen,

$$\binom{m-1}{n} \text{ Möglichkeiten}$$

eine Färbung  $c : R \mapsto \{1, \dots, m\}$  zu wählen, wobei  $R$  wieder die Menge der Pfeile sei.

Zudem hat jeder dieser Köcher  $n(m-1)$  Knoten, d.h. Punkte  $j \in J$ , so dass  $R_j = 1$ . Sei im Folgenden  $a_{n_1}^n$  die Kardinalität von  $\hat{\mathcal{Q}}_{n_1}^n$  unter der Berücksichtigung verschiedener Färbungen. Sei weiter  $K_{n_1}^n$  die Anzahl der Knoten dieser Köcher. Die Anzahl der Knoten stimmt offenbar für alle Köcher aus dieser Menge überein.

Mit den Notationen aus Abschnitt 3.3 gilt

$$a_{n_1}^n = \binom{m-1}{n} \mathcal{A}_{\binom{m-1}{n-1}, (n-1)(m-1), n(m-1), n(m-1) + (n_1-1)(n-1)(m-1)}.$$

Des Weiteren gilt

$$K_{n_1}^n = n(m-1) + (n_1-1)(n-1)(m-1) - (n_1-1).$$

Unter Berücksichtigung der eben erwähnten Konstruktion folgt das folgende Lemma durch einfache Rechnung:

**Lemma 3.4.43** *Sei  $(n_{k+1}, \dots, n_1) \in \mathbb{N}^{k+1}$  gegeben.*

1. *Die Anzahl der Knoten der Köcher aus  $\hat{\mathcal{Q}}_{n_{k+1}, \dots, n_1}^n$  ist gegeben durch*

$$K_{n_{k+1}, \dots, n_1}^n = K_{n_k-1, \dots, n_1}^n + n_{k+1} K_{n_k, \dots, n_1}^n - n_{k+1}.$$

2. *Zudem gilt*

$$a_{n_{k+1}, \dots, n_1}^n = a_{n_k-1, \dots, n_1}^n \cdot \mathcal{A}_{a_{n_k, \dots, n_1}^n, K_{n_k, \dots, n_1}^n, K_{n_k-1, \dots, n_1}^n, K_{n_k-1, \dots, n_1}^n + n_{k+1} K_{n_k, \dots, n_1}^n}.$$

Nun genügt es zu einem festen Dimensionsvektor das dazugehörige Tupel natürlicher Zahlen zu bestimmen, um eine untere Schranke für die Eulercharakteristik zu bekommen.

Sei dieses Tupel gegeben. Dann bezeichne mit  $K_{d,e}^m := K_{n_{k+1}, \dots, n_1}$  die Anzahl der Knoten und mit  $a_{d,e}^m := a_{n_{k+1}, \dots, n_1}$  die Kardinalität der eben bestimmten Mengen von Köchern.

Betrachte die Funktion

$$\phi(x) = 1 + a_{d,e}^m x^{K_{d,e}^m}.$$

Dann erfüllt die Erzeugendenfunktion  $y(x)$  die Funktionalgleichung

$$y(x) = x\phi(y(x)).$$

Da wir nur an einem asymptotischen Wert interessiert sind, der unabhängig von der Anzahl der Startknoten ist, nehmen wir an, dass nur ein Startknoten existiert. Auch der Startkücher liefert nur eine Konstante, die unberücksichtigt bleiben kann.

Wir erhalten für jeden gefärbten Baum ein Lokalisierungsdatum, indem wir das Gewicht 0 der Quelle des Startküchers zuordnen. Es kann also passieren, dass verschiedene Bäume das selbe Lokalisierungsdatum definieren. Allerdings ist die Menge der Startkücher durch  $d$  beschränkt, falls  $(d, e)$  der betrachtete Dimensionsvektor ist. Da

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\ln d}{d} = 0,$$

können wir das ebenso unberücksichtigt lassen, da wir das logarithmische asymptotische Verhalten untersuchen.

Definiere

$$u_{d,e}^m := \frac{K_{d,e}^m}{d}.$$

**Satz 3.4.44** *Sei  $e > (m-1)d$ . Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\chi(M_{d_s+nd, e_s+nd}^m))}{d_s + nd} \geq \frac{\ln(a_{d,e}^m (K_{d,e}^m - 1))}{d} + u_{d,e}^m (\ln K_{d,e}^m - \ln(K_{d,e}^m - 1)).$$

*Beweis.* Definiere

$$F(x, y) = x\phi(y(x)).$$

Wegen Satz 3.3.6 gilt

$$[x^n]y(x) = \sqrt{\frac{x_0 F_x(x_0, y_0)}{2\pi F_{yy}(x_0, y_0)}} x_0^{-n} n^{-\frac{3}{2}} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})).$$

Es reicht also  $x_0$  zu betrachten. Wegen Korollar 3.3.7 erhalten wir

$$(x_0)^{-1} = a_{d,e}^m K_{d,e}^m \left( \frac{1}{(K_{d,e}^m - 1) a_{d,e}^m} \right)^{\frac{K_{d,e}^m - 1}{K_{d,e}^m}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} ((x_0)^{-1})^{nK_{d,e}} &= (a_{d,e}^m K_{d,e}^m)^{nu_{d,e}^m d} \left( \frac{1}{(K_{d,e}^m - 1)a_{d,e}^m} \right)^{nu_{d,e}^m d - n} \\ &= (a_{d,e}^m (K_{d,e}^m - 1))^n \left( \frac{K_{d,e}^m}{(K_{d,e}^m - 1)} \right)^{nu_{d,e}^m d}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\begin{aligned} &\frac{\ln(\chi(M_{d_s+nd, e_s+nd}))}{d_s + nd} \\ &\geq \frac{\ln C}{d_s + nd} + \frac{n \cdot \ln(a_{d,e}^m (K_{d,e}^m - 1))}{d_s + nd} + \frac{nu_{d,e}^m d \cdot \ln(K_{d,e}^m)}{d_s + nd} - \frac{nu_{d,e}^m d \cdot \ln(K_{d,e}^m - 1)}{d_s + nd} \\ &=: L_{d,e,n}^m. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{d,e,n}^m = \frac{\ln(a_{d,e}^m (K_{d,e}^m - 1))}{d} + u_{d,e}^m (\ln K_{d,e}^m - \ln(K_{d,e}^m - 1)) =: L_{d,e}^m.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

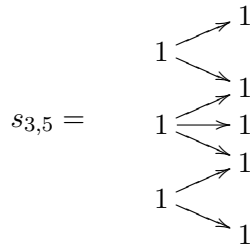
Nach einer entsprechenden Umformung erhalten wir

$$L_{d,e}^m = \frac{1}{d} (\ln a_{d,e}^m + K_{d,e}^m \ln K_{d,e}^m - (K_{d,e}^m - 1) \ln(K_{d,e}^m - 1)).$$

Wegen der Isomorphismen der Modulräume erhalten wir dadurch auch eine untere Schranke für beliebige  $d$  und  $e$ .

### Beispiel 3.4.45

In diesem Beispiel wenden wir das eingeführte Verfahren auf den Fall  $(d, e) = (5, 8)$  und  $m = 3$  an. Für den Startvektor ergibt sich  $(d_s, e_s) = (3, 5)$  und weiter



Die Köcherfunktionen sind gegeben durch  $l_1 = 1$  und  $l_2 = 2$ , also:

$$\hat{s}_{5,8} = (0, 1, 1).$$

Der gespiegelte Dimensionsvektor ist  $(8, 19)$  und es ergibt sich  $K_{5,8}^3 = 12$  bzw.  $a_{5,8}^3 = 1664$ . Also haben wir insgesamt:

$$L_{5,8}^3 = \frac{1}{5} \ln \left( 1664 \cdot \frac{12^{12}}{11^{11}} \right).$$

**Tabelle 3.4.46**

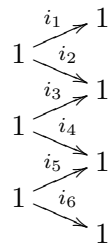
Schließlich geben wir eine Übersicht über die im Abschnitt 3.4.2 eingeführten Notationen inklusive einer Kurzbeschreibung bezüglich der Verwendung an.

Notation	Abschnitt	Beschreibung/Verwendung
$\mathcal{T}_{d,e}^m$	3.4.2	Menge der $m$ -bipartiten Lokalisierungsköcher vom Dimensionstyp $(d, e)$
$\hat{\mathcal{T}}_{d,e}^m$	3.4.2	Menge der modifizierten Köcher $T \in \mathcal{T}_{d,e}^m$
$\mathcal{T}_{n_k, \dots, n_1}^{d,e}$	3.4.2	Lokalisierungsköcher, die zu einem vorgegebenen $(d, e)$ und einem Tupel $(n_k, \dots, n_1)$ konstruiert werden. Das Tupel speichert nützliche Informationen über die rekursive Konstruktion zur Berechnung der unteren Schranke der Eulercharakteristik.
$s_{d,e}^m$	3.4.3	Einfacher Lokalisierungsköcher zum Dimensionsvektor $(d, e)$ . Diese können zur Konstruktion von Baumdarstellungen benutzt werden.
$\hat{s}_{d,e}^m$	3.4.3	Modifizierter einfacher Lokalisierungsköcher zum Dimensionsvektor $(d, e)$
$\mathcal{Q}_{n_k, \dots, n_1}^{d,e}$	3.4.4	Teilmenge von $\mathcal{T}_{n_k, \dots, n_1}^{d,e}$ , die zur Berechnung der unteren Schranke herangezogen wird. Die Kardinalität dieser Menge kann explizit bestimmt werden.

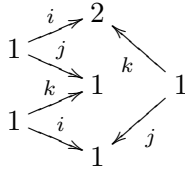
## 3.5 Anwendungen

### 3.5.1 Der Fall (3,4)

In diesem Abschnitt soll der Fall  $m \geq 3$ ,  $d = 3$  und  $e = 4$  als Beispiel genauer untersucht werden. Der einfache Lokalisierungsköcher ist gegeben durch

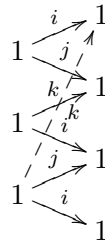


Daraus erhält man durch Färbung der Pfeile in den Farben  $\{1, \dots, m\}$  unter Berücksichtigung der Bedingungen von Bemerkung 3.4.4 ein Lokalisierungsdatum. Es soll also gelten, dass  $c(i_l) \neq c(i_{l+1})$  für  $1 \leq l \leq 5$ . Die Färbung des Lokalisierungsköchers ist dabei eindeutig bis auf die Symmetrie von  $S_2$ . Durch die Färbungen  $(i, j, k, i, j, k)$  bzw.  $(i, j, k, i, j, i)$  mit  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$  paarweise verschieden ergeben sich zwei Fälle, die genauer betrachtet werden sollen, und zwar zunächst:



Es entstehen keine neuen Symmetrien durch diese Färbung, der Modulraum zu dem induzierten Dimensionsvektor ist ein Punkt, was man an Hand der Dimensionsformel nachrechnet. Der Zykel kann durch nochmaliges Lokalisieren aufgelöst werden, so dass man den ursprünglichen Lokalisierungsköcher zurückerhält.

Der zweite Sonderfall ist



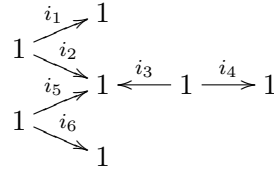
Durch Färbung der Pfeile ergibt sich ein weiterer Pfeil und dadurch eine weitere Symmetrie und zwar ist das Lokalisierungsdatum durch die Wahl der Färbung des freien, also nicht in dem Zykel vorkommenden Pfeils eindeutig bestimmt. Allerdings ergibt sich als Modulraum nun  $\mathbb{P}^1$ , die Eulercharakteristik ist demnach zwei.

Eine andere Möglichkeit, das zu sehen, ist nochmaliges Lokalisieren. Betrachtet man diesen Köcher ohne Färbung, so sind die Torusfixpunkte die Darstellungen des Köchers, für die  $X_{i_5} = 0$  oder  $X_{i_7} = 0$ , wobei  $i_7$  der induzierte Pfeil sei. Es ergibt sich also wiederum der einfache Lokalisierungsköcher.

Insgesamt erhält man also, dass es  $\frac{m(m-1)^5}{|S_2|}$  Möglichkeiten für die Wahl der Färbung gibt.

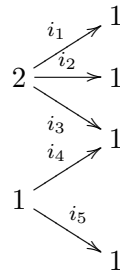
Weitere Lokalisierungsdaten ergeben sich durch den folgenden gefärbten Lo-

kalisierungsköcher:



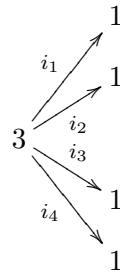
mit den Bedingungen  $c(i_1) \neq c(i_2)$ ,  $c(i_3) \neq c(i_4)$  und  $c(i_5) \neq c(i_6)$  bzw.  $c(i_2)$ ,  $c(i_3)$ ,  $c(i_5)$  paarweise verschieden. Unter der Berücksichtigung der Symmetrien von  $S_3$  ergeben sich also  $\frac{m(m-1)^4(m-2)}{|S_3|}$  Möglichkeiten.

Weiter erhält man



mit den Bedingungen  $c(i_1)$ ,  $c(i_2)$ ,  $c(i_3)$  paarweise verschieden und  $c(i_3) \neq c(i_4)$ , also  $\frac{m(m-1)^3(m-2)}{|S_2|}$  Möglichkeiten.

Falls  $m \geq 4$ , ergibt sich als Letztes noch das Lokalisierungsdatum



mit der Bedingung, dass die vier Pfeile paarweise verschieden gefärbt sind, also  $\binom{m}{4}$  Möglichkeiten.

Da wie gezeigt, alle Fixpunktcomponenten als Punkte angenommen werden können, ergibt sich insgesamt

$$\chi(M_{3,4}^m) = \binom{m}{4} + \frac{m(m-1)^3(m-2)}{2} + \frac{m(m-1)^4(m-2)}{6} + \frac{m(m-1)^5}{2}.$$

Man überprüft leicht, dass das auch genau das Ergebnis ist, dass man mit Hilfe des Algorithmus aus [Rei2] bekommt, nämlich:

$$\chi(M_{3,4}^m) = \frac{1}{24}m(m-1)(4m^2 - 7m + 2)(4m^2 - 7m + 1).$$

### 3.5.2 Eulercharakteristik im Fall $(n, n)$

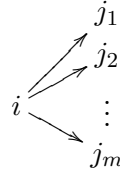
**Lemma 3.5.1** *Sei  $m \geq 3$ . Jeder stabile Torusfixpunkt des Kroneckerköchers mit  $m$  Pfeilen und Dimensionsvektor  $(n, (m-1)n)$  hat einen Zykel. D.h. es existiert ein Unterraum  $U$  und Abbildungen  $f_1, \dots, f_{2k} \in \{X_1, \dots, X_m\}$  mit  $f_i \neq f_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq 2k-1$ , so dass*

$$f_1 \circ \dots \circ f_{2k}^{-1}(U) = U.$$

#### Bemerkung 3.5.2

- Aus dem Beweis ergibt sich sogar die stärkere Bedingung, dass ein Lokalisierungsköcher eines Torusfixpunktes für diesen Dimensionsvektor keine Randköcher hat.

*Beweis.* Betrachte einen Teilköcher der Form



so dass  $\dim(i) \leq d$ . Wegen der Stabilität gilt für die Bilddimension des Punktes  $i$ , bezeichnet mit  $d_i$ , dass

$$d_i > \frac{(m-1)d}{d} \dim(i) = (m-1) \dim(i).$$

Nun gilt  $\dim(j_k) \geq \dim(i)$  für alle  $k$ . Denn wäre  $\dim(j_k) = l$  mit  $l < \dim(i)$ , könnte man den  $(\dim(i) - l)$ -Unterraum  $\ker(X_{\alpha:i \rightarrow j_k})$  betrachten. Dieser hätte nur einen  $(\dim(i) - l)(m-1)$ -dimensionalen Bildraum, was ein Widerspruch zur Stabilität ist.

Der Teilköcher ist somit vom Dimensionstyp  $(\dim(i), e')$  mit  $e' \geq m \dim(i)$ . Des Weiteren hat jeder  $k$ -dimensionale Unterraum wegen der Stabilitätsbedingung einen mindestens  $((m-1)k + 1)$ -dimensionalen Bildraum.

Angenommen der Lokalisierungsköcher hätte keinen Zykel, also insbesondere einen Randköcher. Das heißt einen Teilköcher, der nur eine gemeinsame Senke mit dem restlichen Köcher hat.

Sei ein Randköcher gewählt und vom Dimensionstyp  $(d_1, md_1)$ . Dann gilt für die Dimension  $b$  des Bildraums des restlichen Teilköchers, dass

$$b \geq (m-1)(d - d_1) + 1.$$

Also ergibt sich

$$(m-1)d = b + d_1 m - h \geq (m-1)(d - d_1) + 1 + d_1 m - h = (m-1)d + d_1 - h + 1,$$

wobei  $h \geq 1$  die Dimension des Schnitts der Bildräume der beiden Teilköcher ist. Daraus ergibt sich  $h \geq d_1 + 1$ , was offenbar ein Widerspruch ist.

□

**Korollar 3.5.3** *Die Eulercharakteristik der Kroneckermodulräume mit Dimensionsvektor  $(n, n)$  verschwindet.*

*Beweis.* Nach vorherigem Lemma folgt, dass ein Lokalisierungsköcher mit Dimensionsvektor  $(n, (m-1)n)$  einen Zykel hat. Fixpunkte des Modulraums dieses Köchers sind allerdings zyklfrei. Denn die Gewichtsraumzerlegung hat die Eigenschaft

$$X_\alpha(U_\chi) \subset U_{\chi+e_\alpha}$$

für einen Pfeil  $\alpha$  und einen Charakter  $\chi$ . Das heißt insbesondere, dass für einen Fixpunkt ein Unterraum  $U$  existiert, so dass dessen Bilddimension  $(m-1)\dim(U)$ -dimensional ist, also kann dieser nicht stabil sein.

Daraus folgt also

$$\chi(M_{n,(m-1)n}^m) = \chi(M_{n,n}^m) = 0$$

wegen der Isomorphie der Modulräume  $M_{n,(m-1)n}^m$  und  $M_{n,n}^m$ .

□

### 3.5.3 Endlichkeit der Fixpunktmenge

In diesem Abschnitt soll eine Frage, die zum Beispiel in [Dre] gestellt wird, beantwortet werden. Nämlich für welche Dimensionsvektoren die Menge der Fixpunkte endlich ist bzw. für welche Dimensionsvektoren es  $n$ -dimensionale Fixpunktcomponenten mit  $n \geq 1$  gibt. Sei wieder  $\text{ggT}(d, e) = 1$  vorausgesetzt.

**Satz 3.5.4** *Seien  $d \geq 3$ ,  $e \geq 4$  und  $m \geq 3$ . Dann gibt es unendlich viele Torusfixpunkte.*

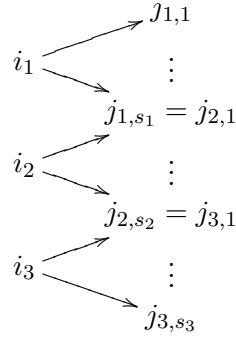
*Beweis.* Da die Torusaktion mit den Symmetrien verträglich ist, kann angenommen werden, dass

$$d < e < \frac{m}{2}d.$$

Sei außerdem  $m' \leq \frac{m}{2} \in \mathbb{N}$  so gegeben, dass  $(m' - 1)d < e < m'd$ . Dann gibt es nach Satz 3.4.27 einen Köcher  $s_{d,e}^m$ , der aus Teilköchern mit Dimensionsvektoren  $(1, m' - 1)$  bzw.  $(1, m')$  besteht. Da  $d \geq 3$ , gibt es insbesondere



einen Teilköcher der Form



mit  $s_1, s_2, s_3 \in \{m' - 1, m'\}$ . Setze nun

$$c(i_1, j_{1,1}) = c(i_2, j_{2,s_2}) = c(i_3, j_{3,s_3}) = 1,$$

$$c(i_1, j_{1,s_1}) = c(i_3, j_{3,1}) = 2$$

und

$$c(i_2, j_{2,1}) = 3.$$

So ergibt sich ein zusätzlicher Pfeil  $(i_3, j_{1,1})$  mit  $c(i_3, j_{1,1}) = 3$ . Also ist der dazugehörige Modulraum mindestens eindimensional und es gibt unendliche viele Torusfixpunkte.

□

### 3.5.4 Der Fall $(d, d+1)$

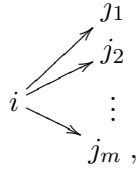
In diesem Abschnitt soll die aus der in Abschnitt 2.3 behandelten Vermutung von Douglas resultierende Funktion an der Stelle 1 untersucht werden. Der Fall  $(d - 1, d)$  ist aufgrund der Symmetrien äquivalent zu dem Fall  $(d, (m - 1)d + 1)$ . Dieser soll im Folgenden betrachtet werden. Wegen Lemma 3.4.40 kann davon ausgegangen werden, dass Lokalisierungsdaten von diesem Typ keine Zykel in dem dortigen Sinne haben. Als Folgerung daraus werden wir zeigen, dass mehrdimensionale Gewichtsräume nur durch solche Zykel entstehen, die aufgelöst werden können, so dass wir davon ausgehen können, dass alle Köcherdarstellungen von eindimensionalem Typ sind. Damit bestehen alle Lokalisierungsdaten aus Teilköchern vom Dimensionstyp  $(1, m)$ .

Sei nun  $(d, e) \in \mathbb{N}^2$  so gegeben, dass  $e > (m - 1)d$ . Dann gilt für jeden eindimensionalen Unterraum, dass der Bildraum  $m$ -dimensional ist.

**Lemma 3.5.5** *Als Endlokalisierungen treten nur Lokalisierungsdaten vom Typ 1 auf. Das heißt, es gilt  $\dim(i) = \dim(j) = 1$  für alle  $i \in I$  bzw.  $j \in J$ .*

*Beweis.* Zunächst kann wegen Lemma 3.4.40 angenommen werden, dass das Lokalisierungsdatum keine Zykel hat.

Betrachte einen Teilköcher der Form



so dass  $\dim(i) \leq d$ . Wegen der Stabilität gilt für die mit  $d_i$  bezeichnete Dimension des Bildraums dieses Punktes

$$d_i > \frac{(m-1)d+1}{d} \dim(i) > (m-1) \dim(i).$$

Nun gilt  $\dim(j_k) \geq \dim(i)$  für alle  $k$ . Denn, wenn  $\dim(j_k) = l$  wäre, so dass  $l < \dim(i)$ , könnte man den  $(\dim(i) - l)$ -dimensionalen Unterraum  $\ker(X_{\alpha:i \rightarrow j_k}(i))$  betrachten. Dieser hätte nur einen  $(\dim(i) - l)(m-1)$ -dimensionalen Bildraum, was ein Widerspruch zur Stabilität ist.

Der Teilköcher ist somit vom Dimensionstyp  $(\dim(i), e')$  mit  $e' \geq m(\dim(i))$ . Des Weiteren hat jeder  $k$ -dimensionale Unterraum wegen der Stabilitätsbedingung einen mindestens  $((m-1)k+1)$ -dimensionalen Bildraum.

Wählt man einen der Teilköcher, der am Rand liegt, der existiert, weil der ursprüngliche Köcher keine Zykel hat, so hat dieser nur einen Punkt des Bildraums, der einen nicht-leeren Schnitt mit dem Bildraum des restlichen Köchers hat. Sei dieser Teilköcher vom Dimensionstyp  $(d_1, md_1)$ . Dann gilt für die Dimension  $b$  des Bildraums des restlichen Teilköchers, dass

$$b \geq (m-1)(d-d_1) + 1.$$

Also ergibt sich

$$(m-1)d+1 = b+d_1m-h \geq (m-1)(d-d_1)+1+d_1m-h = (m-1)d+d_1-h+1,$$

wobei  $h \geq 1$  die Dimension des Schnitts der Bildräume der beiden Teilköcher ist. Daraus ergibt sich  $h \geq d_1$ , also  $h = d_1$ .

Es soll zunächst gezeigt werden, dass nach dem Entfernen dieses Teilköchers ein stabiler Köcher vom Dimensionstyp  $(d-d_1, (m-1)(d-d_1)+1)$  entsteht. Es ist offenbar nur die Stabilität nachzuprüfen, da der Teilköcher eben einen  $d_1$ -dimensionalen Schnitt mit dem restlichen Köcher hat.

Es gilt für einen beliebigen Unterraum  $U$  mit  $\dim U < d-d_1$ , dass

$$d_U > \frac{(m-1)d+1}{d} \dim U.$$

Da  $\dim U < d - d_1$ , gilt aber auch

$$d_U > \frac{(m-1)(d-d_1)+1}{(d-d_1)} \dim U,$$

was die Zwischenbehauptung zeigt.

Also kann eine Induktion über die Anzahl der Teilköcher durchgeführt werden, um die Behauptung des Satzes zu beweisen.

Betrachtet werden sollen zunächst nur Köcher mit einem Teilköcher. Dann folgt unmittelbar, dass der Dimensionstyp  $(1, m)$  ist.

Hat der Köcher nun  $n+1$  Teilköcher, so kann man einen echten Randköcher entfernen, so dass wieder ein stabiler Köcher entsteht, der nach Induktionsvoraussetzung vom geforderten Typ sein muss. Da der Köcher aber keine Zykel hat, gibt es aber mindestens zwei echte Randköcher, also folgt die Behauptung, indem die Induktionsvoraussetzung auf die jeweiligen Teilköcher nach Entfernen von jeweils einem der beiden Randköcher angewendet wird.

□

**Satz 3.5.6** *Es gilt*

$$\chi(M_{d,d+1}^m) = \frac{m}{(d+1)((m-1)d+m)} \binom{(m-1)^2d + (m-1)m}{d}.$$

*Insbesondere gilt weiter*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\ln(\chi(M_{d,d+1}^m))}{d} = (m-1)^2 \ln(m-1) - (m^2 - 2m) \ln(m^2 - 2m).$$

*Beweis.* Wie eben gezeigt, kann davon ausgegangen werden, dass alle Teilköcher die Form  $I \cup J = \{i_1, j_1, \dots, j_m\}$ ,  $R = \{(i_1, j_1), \dots, (i_1, j_m)\}$  mit  $\dim(i_1) = \dim(j_k) = 1$  haben. Die Modulräume der betrachteten Köcher sind also insbesondere 0-dimensional, die Eulercharakteristik ist also 1.

Nach Bemerkung 3.4.4 gibt es also genau eine Möglichkeit die Funktion  $c$  zu wählen, da die Symmetrien der Gruppe  $S_m$  berücksichtigt werden müssen. Nun können wieder wegen Bemerkung 3.4.4 an jeden Punkt  $j_l$ ,  $1 \leq l \leq m$ , weitere  $k$  Teilköcher geknüpft werden, wobei  $0 \leq k \leq (m-1)$ . Hier müssen wiederum die Symmetrien der  $S_k$  berücksichtigt werden. Sei  $y(x)$  die Erzeugendenfunktion dieser Köcher, wenn man von einem Startknoten ausgeht und betrachte

$$\begin{aligned} \phi(x) = 1 + \frac{(m-1)}{|S_1|} x^{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{|S_2|} x^{2(m-1)} \\ + \dots + \frac{\prod_{i=1}^{m-1} (m-i)}{|S_{m-1}|} x^{(m-1)(m-1)}. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} x^{i(m-1)} \binom{m-1}{i} = (1+x^{m-1})^{m-1}.$$

Nach Abschnitt 3.3.1 erfüllt die Erzeugendenfunktion die Funktionalgleichung  $y(x) = x(\phi(y(x)))$ . Die Erzeugendenfunktion aller Lokalisierungsköcher mit Färbungen erhält man folgendermaßen. Wir starten mit dem einfachen Lokalisierungsköcher mit Dimensionsvektor  $(1, m)$ . Dieser hat  $m$  Knoten. Das heißt die Erzeugendenfunktion ist  $y(x)^m$ . Dann erhalten wir mit der Lagrange-Inversionsformel

$$\begin{aligned} [x^n]y(x)^m &= \frac{m}{n} [u^{n-m}] \phi(u)^n \\ &= \frac{m}{n} \binom{n(m-1)}{\frac{n-m}{m-1}} \end{aligned}$$

Jetzt entspricht ein solcher Köcher mit  $(m-1)d+1$  Knoten einem Lokalisierungsdatum mit Dimensionsvektor  $(d, (m-1)d+1)$ , indem wir annehmen, dass die Quelle des Startköchers das Gewicht 0 hat. Andersrum kann o.B.d.A. angenommen werden, dass jedes der betrachteten Lokalisierungsdaten einen Punkt  $i \in I$  mit Gewicht 0 hat. Dazu gibt es allerdings genau  $d$  Wahlen. Das heißt für jedes Lokalisierungsdatum erhält man genau  $d$  Köcher. Insgesamt erhält man also:

$$\begin{aligned} \chi(M_{d, (m-1)d+1}^m) &= \frac{m}{d((m-1)d+1)} \binom{(m-1)^2d + (m-1)}{d-1} \\ &= \frac{m}{d((m-1)(d-1)+m)} \binom{(m-1)^2(d-1) + (m-1)m}{d-1}. \end{aligned}$$

Dann folgt mit  $\chi(M_{d-1, d}^m) \cong \chi(M_{d, (m-1)d+1}^m)$  die Behauptung.

Für den zweiten Teil kann Satz 3.3.6 angewendet werden. Es kann unberücksichtigt bleiben, dass genau  $d$  Bäume das selbe Lokalisierungsdatum beschreiben, denn offensichtlich gilt

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\ln d}{d} = 0.$$

Außerdem kann man von einem Startknoten ausgehen. Es wird also zusätzlich zu der Funktionalgleichung  $y(x) = x(\phi(y(x)))$  die Funktionalgleichung

$$1 = x(m-1)^2(1+y(x)^{m-1})^{m-2}y(x)^{m-2}$$

betrachtet. Und weiter

$$y_0 = x_0(1+y_0^{m-1})^{m-1}$$

bzw.

$$1 = x_0(m-1)^2(1+y_0^{m-1})^{m-2}y_0^{m-2}.$$

Dann ergibt sich

$$x_0 = \frac{1}{(m-1)^2(1+y_0^{m-1})^{m-2}y_0^{m-2}},$$

und somit

$$y_0 = \frac{(1+y_0^{m-1})^{m-1}}{(m-1)^2(1+y_0^{m-1})^{m-2}y_0^{m-2}}.$$

Also ergibt sich

$$(m-1)^2y_0^{m-1} = 1 + y_0^{m-1}$$

und schließlich

$$y_0^{m-1} = \frac{1}{(m-1)^2 - 1}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} (x_0)^{-1} &= (m-1)^2 \left( \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2 - 1} \right)^{m-2} \left( \frac{1}{(m-1)^2 - 1} \right)^{\frac{m-2}{m-1}} \\ &= (m-1)^{2(m-1)} \left( \frac{1}{m^2 - 2m} \right)^{m-2 + \frac{m-2}{m-1}} \\ &= (m-1)^{2(m-1)} \left( \frac{1}{m^2 - 2m} \right)^{\frac{m^2 - 2m}{m-1}}. \end{aligned}$$

Ist die Anzahl der Knoten der betrachteten Bäume  $(m-1)d+1$ , so entspricht jeder dieser Bäume einem Köcher vom Dimensionstyp  $(d, (m-1)d+1)$  für alle  $d \geq 1$ . Da der Logarithmus betrachtet wird, können die restlichen Faktoren aus Satz 3.4.4 unberücksichtigt bleiben. Mit Satz 3.2.2 folgt also

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\ln \chi(M_{d, (m-1)d+1}^m)}{d} &= \frac{\ln \left( (m-1)^{2(m-1)} \left( \frac{1}{m^2 - 2m} \right)^{\frac{(m^2 - 2m)}{m-1}} \right)^{(m-1)d+1}}{d} \\ &= (m-1)^2 \ln(m-1)^2 \\ &\quad - (m^2 - 2m) \ln(m^2 - 2m). \end{aligned}$$

Dann folgt wiederum mit  $\chi(M_{d-1, d}^m) \cong \chi(M_{d, (m-1)d+1}^m)$  die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.5.7**

- Definiert man die Funktion

$$f : \frac{e}{d} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\chi(M_{d_s+nd, e_s+ne}^m))}{d},$$

so erhält man also insbesondere, wie in 2.3.2 vermutet, dass

$$f(1) = (m - 1)^2 \ln(m - 1)^2 - (m^2 - 2m) \ln(m^2 - 2m)$$

gilt.

**3.5.5 Weitere Beispiele und Fragen**

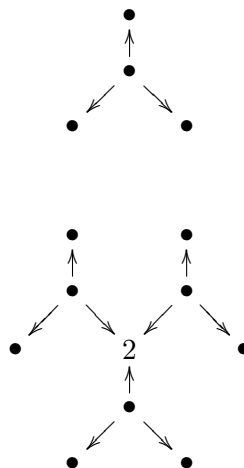
In diesem Abschnitt sollen weitere Beispiele besprochen werden. Außerdem soll auf einige Probleme und Fragestellungen hingewiesen werden, die bei der Lokalisierung in Kroneckermodulräumen auftauchen. So stellen sich vor allem die Fragen, wie man alle Lokalisierungsköcher bestimmen kann und ob es genügt die Lokalisierungsköcher vom Typ 1 zu kennen.

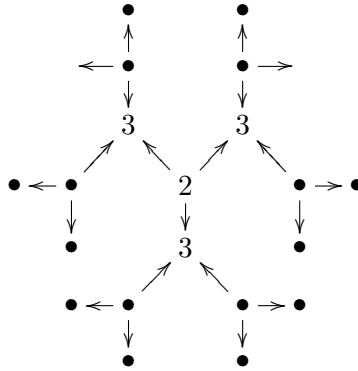
**Reelle Wurzeln**

Die reellen Wurzeln für den Kroneckerköcher sind durch die Spiegelung der Wurzeln  $(0, 1)$  bzw.  $(1, 0)$  gegeben, siehe [Kac]. Für den Fall  $m = 3$  ergibt sich somit die Folge:

$$(0, 1), (1, 3), (3, 8), (8, 21), (21, 55), \dots$$

Die eindeutigen unzerlegbaren Darstellungen zu diesen Dimensionsvektoren sind also gegeben durch die einfache Darstellung  $E_2$  und dessen Spiegelungen unter dem Spiegelungsfunktor. Es ergibt sich für die nächsten drei Fälle, wobei die Punkte jeweils eindimensionalen Unterräumen entsprechen:

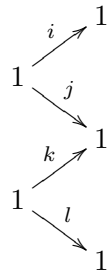




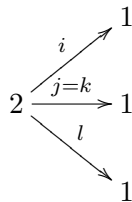
Wie in [FR] gezeigt, liefert das eine Zerlegung der ungeraden Fibonacci-Zahlen.

### Offene Fragen

Eine Frage, die sich bei der Analyse von Fixpunkten stellt, ist, ob sich alle Lokalisierungsdaten auf den Fall 1-dimensionaler zurückführen lassen. Betrachten wir zum Beispiel die Lokalisierungsköcher



so haben wir immer  $j \neq k$  vorausgesetzt. Betrachten wir aber den Köcher

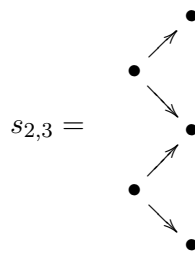


so können wir diesen in gewisser Weise auch als den Fall  $j = k$  betrachten. Dadurch kommen allerdings Bedingungen an  $i$  und  $l$  hinzu, die vorher nicht gegeben waren. Zudem erhalten wir andere Symmetrien. Im ersten Fall hat man die Symmetrien der Gruppe  $S_2$ , im zweiten die von  $S_3$ .

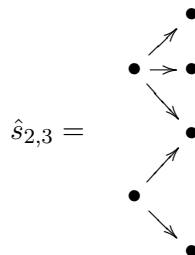
Eine weitere Frage ist, wie man alle Lokalisierungsdaten zählen kann. Oder

zumindest alle vom Typ 1. Durch die in diesem Abschnitt verwendete Verklebungsmethode bekommt man leider nicht alle Lokalisierungsköcher vom Typ 1. Würde man alle Lokalisierungsköcher dieses Typs kennen, so könnte man die Stetigkeit zeigen, was für die Existenz der Funktion reichen würde, wenn sich die anderen Fälle auf diese zurückführen lassen.

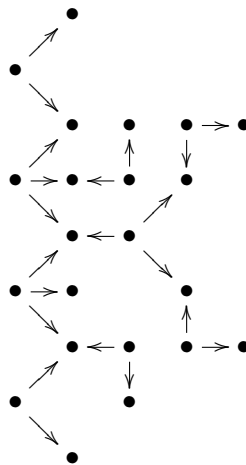
Schließlich geben wir ein Beispiel für einen Lokalisierungsköcher, der nicht mit den Methoden dieses Kapitel konstruiert werden kann. Dazu sei  $(d, e) = (7, 10) = (2, 3) + (5, 7) = (2, 3) + (2, 3) + (3, 4)$ . Es ergibt sich also  $(d_s, e_s) = (2, 3)$  und weiter



bzw.



Die zu  $(3, 4)$  gehörigen Köcher ergeben sich auf die gleiche Weise. Allerdings bekommen wir nicht den folgenden Köcher mit Dimensionsvektor  $(9, 13) = (2, 3) + (7, 10)$  durch Verkleben der obigen Köcher:





### 3.6 Stabile Köcher beliebigen Dimensionstyps

In diesem Abschnitt sollen stabile Köcher beliebiger imaginärer Wurzeln  $(d, e)$  außer des Dimensionsvektors  $(d, (m-1)d)$  konstruiert werden, so dass gilt  $d < e \leq (m-1)d + 1$ . Sie werden zusätzlich Baumdarstellungen sein, auf die im nächsten Kapitel näher eingegangen wird.

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $s \in \mathbb{N}^{t+1}$  fest gewählt. Betrachte den zu dem Tupel  $(s_1, 0^{t-1}, s_{t+1})_{n,m}$  gehörigen einfachen Köcher und weiter dessen Teilköcher  $Q^{(n+1)^{t-1}}$ . Dieser hat genau  $t-1$  Quellen  $q_1, \dots, q_{t-1}$ . Wähle zu jeder dieser Quellen  $q_i$  eine Senke  $p_i \in N_{q_i}$ , so dass  $|N_{p_i}| = 1$  gilt. Dann können wir induktiv die Köcher

$$Q^{s_1, s_2, \dots, s_k, s_{t+1}} = Q_{p_k, q} (Q^{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_{t+1}}, Q^{(n+1)^{s_k}})$$

konstruieren, wobei  $2 \leq k \leq t$  und  $q \in Q_0^{(n+1)^{s_k}}$  eine Senke einer der höchstens zwei echten Randköcher ist. Auf diese Weise können wir also jedem Tupel  $(s_1, \dots, s_{t+1}) \in \mathbb{N}^{t+1}$  einen Köcher zuordnen. Für diese Köcher erhalten wir folgende Stabilitätsbedingung:

**Lemma 3.6.1** *Sei  $s = \sum_{i=1}^{t+1} s_i$ . Der Köcher  $(s_1, s_2, \dots, s_{t+1})_{n,m}$  ist genau dann stabil, wenn*

$$sl + t > t \sum_{i=1}^l s_i + l > s(l-1) + 1$$

für alle  $l = 1, \dots, t$  gilt.

*Beweis.* Zunächst gilt  $(d, e) = (t-1+s, n(t-1)+s+1)$ . Wähle zunächst  $1 \neq k \leq l \neq t+1$ . Analog zum Abschnitt 3.4.3 erhalten wir durch einfache Rechnung die Stabilitätsbedingung

$$s(l-k+2) + t - 1 > t \sum_{i=k}^l (l-k+2).$$

Ist  $k = 1$  und  $l \leq t+1$ , so ergibt sich die Bedingung

$$sl + t > t \sum_{i=1}^l + l$$

und analog für  $k \neq 1$  und  $l = t+1$  die Bedingung

$$s(t+2-k) + t > t \sum_{i=k}^{t+1} s_i + (t+2-k).$$

Aus

$$t \sum_{i=1}^l s_i + l = ts - t \sum_{i=l+1}^{t+1} s_i + l$$

folgt dann die Behauptung durch unmittelbare Rechnung analog zum Beweis von 3.4.30.

□

Mit dem gleichen Argument wie im Beweis des Resultats 3.4.31 erhalten wir folgendes Ergebnis, wobei bemerkt sei, dass diese Köcher nicht eindeutig sind:

**Satz 3.6.2** *Zu jedem Dimensionsvektor  $(d, e) \neq (d, (m - 1)d)$  mit  $d < e \leq (m - 1)d + 1$  existiert ein Tupel  $(s_1, s_2, \dots, s_{t+1}) \in \mathbb{N}^{t+1}$ , so dass der eben konstuierte Köcher stabil ist.*

## Kapitel 4

# Baumdarstellungen des Kroneckerköchers

In diesem Kapitel soll mit Hilfe der Konstruktion stabiler Torusfixpunkte zum Kroneckerköcher aus dem letzten Kapitel die Existenz von unzerlegbaren Baumdarstellungen zu beliebigen Wurzeln nachgewiesen werden. Dabei liefert die Stabilität die Unzerlegbarkeit und die Zerlegung in Gewichtsräume die Zerlegung in Basisvektoren. Es wird zudem eine explizite Konstruktion von Baumdarstellungen für alle Dimensionsvektoren mit Hilfe des Spiegelfunktors angegeben.

### 4.1 Koeffizientenköcher und Baumdarstellungen

Basierend auf [Rin1] sollen in diesem Abschnitt die Begriffe des Koeffizientenköchers und der Baumdarstellungen eingeführt werden.

Sei  $Q$  ein Köcher mit Dimensionsvektor  $d = (d_q)_{q \in Q_0}$  und  $X$  eine Darstellung. Eine Basis von  $X$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  von  $\bigoplus_{q \in Q_0} X_q$ , so dass

$$\mathcal{B}_q := \mathcal{B} \cap X_q$$

für alle Punkte  $q \in Q_0$  eine Basis von  $X_q$  ist. Für jeden Pfeil  $\alpha : i \rightarrow j$  kann  $X_\alpha$  dann als  $(d_j \times d_i)$ -Matrix  $X_{\alpha, \mathcal{B}}$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  geschrieben werden, so dass die Zeilen durch  $\mathcal{B}_j$  und die Spalten durch  $\mathcal{B}_i$  indiziert sind. Gilt

$$X_\alpha(b) = \sum_{b' \in \mathcal{B}_j} \lambda_{b', b} b'$$

mit  $\lambda_{b', b} \in \mathbb{C}$ , so ist offenbar  $(X_{\alpha, \mathcal{B}})_{b', b} = \lambda_{b', b}$ .

**Definition 4.1.1** *Der Koeffizientenköcher  $\Gamma(X, \mathcal{B})$  einer Darstellung  $X$  mit einer Basis  $\mathcal{B}$  ist gegeben durch die Punktmenge  $\mathcal{B}$ , während die Menge der Pfeile folgendermaßen definiert ist: wenn  $(X_{\alpha, \mathcal{B}})_{b, b'} \neq 0$ , so existiert ein*

Pfeil  $(\alpha, b, b') : b \mapsto b'$ .

Eine Darstellung  $X$  heißt *Baumdarstellung*, wenn eine Basis  $\mathcal{B}$  zu  $X$  existiert, so dass der dazugehörige Koeffizientenköcher ein Baum ist.

Direkt an diese Definition schließt sich das folgende von Claus Michael Ringel formulierte Problem an, siehe [Rin2]:

Gibt es zu jedem wilden erblichen Köcher und jeder Wurzel  $d$  eine unzerlegbare Baumdarstellung? Für imaginäres  $d$  sollte es sogar mehr als eine Isomorphieklasse geben, so die Vermutung.

## 4.2 Der Spiegelungsfunktor

[BGP] bzw. [Kac] folgend kann ein Funktor konstruiert werden, der unzerlegbaren Darstellungen eines Köchers unzerlegbare Darstellungen mit einem anderen Dimensionsvektor zuordnet. Dieser soll im Folgenden genau beschrieben werden und anschließend auf Baumdarstellungen des Kroneckerköchers angewendet werden, um zu zeigen, dass es zu jedem Dimensionsvektor eine unzerlegbare Baumdarstellung gibt.

Sei  $A_q$  für ein  $q \in Q_0$  die Menge aller Pfeile, die  $q$  als Quelle oder Senke haben. Zudem definiere  $Q_q$  als den Köcher, der aus  $Q$  entsteht, indem alle Pfeile  $\alpha \in A_q$  umgedreht werden.

Sei der Punkt  $q$  zunächst eine Senke. Es gibt also offensichtlich keinen orientierten Zykel in  $Q$ , der den Punkt  $q$  beinhaltet. Wir konstruieren aus einer Darstellung  $X$  von  $Q$  eine Darstellung  $R_q^+(X)$  von  $Q_q$  folgendermaßen: Für alle  $q' \neq q$  setze  $R_q^+(X_{q'}) = X_{q'}$ . Betrachte die lineare Abbildung

$$h : \bigoplus_{\alpha:q' \rightarrow q \in A_q} X_{q'} \rightarrow X_q$$

definiert durch

$$h((v_{q'})_{\alpha:q' \rightarrow q \in A_q}) = \sum_{\alpha:q' \rightarrow q \in A_q} X_\alpha(v_{q'}).$$

Dann definiere weiter

$$R_q^+(X_q) = \ker(h).$$

Setze weiter  $R_q^+(X_\alpha) = X_\alpha$  für alle  $\alpha \notin A_q$ . Für alle  $\alpha : q' \rightarrow q \in A_q$  definiere  $R_q^+(X_\alpha)$  als die Komposition der folgenden Einbettung und Projektion:

$$R_q^+(X_q) \rightarrow \bigoplus_{\alpha:q' \rightarrow q \in A_q} X_{q'} \rightarrow R_q^+(X_{q'}) = X_{q'}.$$

Sei der Punkt  $q$  nun eine Quelle. Wir konstruieren aus einer Darstellung  $X$  von  $Q$  eine Darstellung  $R_q^-(X)$  von  $Q_q$  folgendermaßen:

Für alle  $q' \neq q$  setze  $R_q^-(X_{q'}) = X_{q'}$  und  $R_q^-(X_\alpha) = X_\alpha$  für alle  $\alpha \notin A_q$ . Betrachte die lineare Abbildung

$$h' : X_q \rightarrow \bigoplus_{\alpha: q \rightarrow q' \in A_q} X_{q'}$$

definiert durch

$$h'(v) = (X_\alpha(v))_{\alpha: q \rightarrow q' \in A_q}.$$

Dann definiere weiter

$$R_q^-(X_q) = \bigoplus_{\alpha: q \rightarrow q' \in A_q} X_{q'} / \text{im}(h').$$

Für alle  $\alpha : q \rightarrow q' \in A_q$  definiere  $R_q^-(X_\alpha)$  als die Komposition der folgenden Einbettung und Projektion:

$$X_{q'} = R_q^-(X_{q'}) \rightarrow \bigoplus_{\alpha: q \rightarrow q' \in A_q} X_{q'} \rightarrow R_q^-(X_q).$$

Sei im Folgenden  $E_q$  die einfache Darstellung zum Punkt  $q$ . Diese ist definiert durch  $X_q = \mathbb{C}$  und  $X_{q'} = 0$  für alle  $q' \neq q$ .

Betrachte außerdem zu einem Köcher  $Q$  die Matrix  $A = (a_{i,j})_{i,j \in Q_0}$  mit  $a_{i,i} = 2$  und  $-a_{i,j} = -a_{j,i}$  für  $i \neq j$ , wobei  $a_{i,j} = |\{\alpha \in Q_1 \mid \alpha : i \rightarrow j \vee \alpha : j \rightarrow i\}|$ .

Für ein  $q \in Q_0$  sei weiter  $r_q : \mathbb{Z}Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}Q_0$  definiert durch

$$r_q(q') = q' - a_{q,q'}q.$$

Es gilt folgender Satz, siehe [BGP] bzw. [Kac].

**Satz 4.2.1** *Sei  $Q$  ein Köcher und  $q \in Q_0$  ein Punkt. Sei  $q$  eine Senke (bzw. Quelle). Dann ist  $R_q^+$  (bzw.  $R_q^-$ ):  $\text{mod } \mathbb{C}Q \rightarrow \text{mod } \mathbb{C}Q_q$  ein Funktor mit den folgenden Eigenschaften (falls  $q$  eine Quelle ist, so ersetze  $+$  durch  $-$ ):*

1.  $R_q^+(U \oplus U') = R_q^+(U) \oplus R_q^+(U')$ .

2. Sei  $U$  eine unzerlegbare Darstellung von  $Q$ . Dann gilt:

- (a) Falls  $U \cong E_q$  ist, so gilt  $R_q^+(E_q) = 0$ .

- (b) Falls  $U \not\cong E_q$ , so ist  $R_q^+(U)$  unzerlegbar und  $R_q^+R_q^-(U) \cong U$  und  $\dim R_q^+(U) = r_q(\dim(U))$ .

*Insbesondere gilt:  $\text{End}U \cong \text{End}R_q^+(U)$ .*

### 4.3 Spiegelung stabiler Baumdarstellungen

Der  $m$ -Pfeile Kroneckerköcher sei im Folgenden mit  $K(m)$  bezeichnet, dessen Punktmenge sei  $\{1, 2\}$  und dessen Pfeile  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . Im Folgenden sei  $m \geq 3$ .

Wir betrachten den unendlichen regulären  $m$ -Baum als Köcher und bezeichnen diesen mit  $T(m)$ . Dazu wählen wir einen Punkt und definieren ihn als Quelle, dessen Nachbarn als Senke und setzen dieses Verfahren rekursiv fort. Jeder Punkt ist also nur Quelle oder nur Senke.

Formal: Sei  $k_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$  und  $k_l \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  für  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l \geq 3$ . Definiere die Indexmenge  $K_m$  wie folgt:

$$K_m = \{k = (1, k_2, k_3, \dots, k_n) \mid n \geq 1\}.$$

Definiere  $s(k) = n$  und  $K_m^n = \{k \in K_m \mid s(k) = n\}$ .

Betrachtet wird der Köcher  $T(m)$  mit Punktmenge  $T(m)_0 = I \cup J$  mit  $I = \{i_k \mid k \in K_m, s(k) \text{ ungerade}\}$  und  $J = \{j_k \mid k \in K_m, s(k) \text{ gerade}\}$ . Sei weiter die Menge der Pfeile gegeben durch

$$T(m)_1 = \{\alpha : i_l \rightarrow j_k \mid i_l \in I \cap K_m^n, j_k \in J \cap K_m^{n+1}\}.$$

Sei

$$X = ((X)_{q \in T(m)_0}, (X_\alpha : X_i \rightarrow X_j)_{\alpha \in T(m)_1})$$

eine endlich-dimensionale Darstellung. Dann ist der Dimensionsvektor  $\underline{\dim} X$  gegeben durch

$$\underline{\dim} X = \sum_{q \in T(m)_0} \dim X_q q.$$

Sei die Steigungsfunktion  $\mu(X) : \mathbb{N}T(m)_0 \rightarrow \mathbb{Q}$  gegeben durch

$$\mu = \frac{\sum_{i \in I} \dim(X_i)}{\sum_{q \in T(m)_0} \dim(X_q)}.$$

Definiere für eine Darstellung  $X$  des regulären  $m$ -Baumes  $d := \sum_{i \in I} \dim(X_i)$  und  $e := \sum_{j \in J} \dim(X_j)$ .

Jede Darstellung von  $T(m)$  kann als eine Darstellung des Kroneckerköchers  $K(m)$  aufgefasst werden, wenn die Pfeile von  $T(m)$  stabil gefärbt wurden, siehe Bemerkung 3.4.4. Zudem lassen sich 3.1.7 bzw. Abschnitt 3.1.2 mit analogen Argumenten auf die hiesige Situation übertragen. Betrachtet man den Kroneckerköcher mit der Stabilität  $\Theta = (1, 0)$ , so gilt also folgendes Lemma:

**Lemma 4.3.1** *Sei  $X$  eine stabile Darstellung von  $T(m)$  mit einer stabilen Färbung. Dann entspricht  $X$  einem Torusfixpunkt des Kroneckermodulraums  $K_{d,e}^m$ . Also insbesondere einer stabilen Darstellung von  $K(m)$  mit Dimensionsvektor  $(d, e)$ .*

Wendet man den Spiegelungsfunktor auf eine Darstellung  $X$  des Kroneckerköchers mit Dimensionsvektor  $(d, e)$  an, die nicht isomorph zu  $E_1$  ist, so ist  $R_1^-(X)$  offenbar eine Darstellung mit Dimensionsvektor  $(e, me - d)$ .

**Bemerkung 4.3.2**

- Sei  $e > (m - 1)d$ . Betrachten wir den regulären  $m$ -Baum, so ist jeder Punkt entweder nur Quelle oder nur Senke von genau  $m$  Pfeilen. Um einen Torusfixpunkt aus einer stabilen Darstellungen des regulären  $m$ -Baumes zu erhalten, müssen diese Pfeile so gefärbt werden, dass die Farben von Pfeilen mit gleicher Senke bzw. Quelle paarweise verschieden sind.
- Im Fall  $e < (m - 1)d$  betrachten wir einfache Lokalisierungsköcher, die offensichtlich so gefärbt werden können, dass sich keine Zyklen ergeben. Insbesondere sind also die sich ergebenden Fixpunkte Baumdarstellungen.
- Es genügt die Stabilität für unzerlegbare Unterdarstellungen zu testen. Denn, wenn  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  ein Untermodul von  $M$  ist, so dass jedes  $U_i$  unzerlegbar ist, gilt schon  $\mu(U) \leq \max(\mu(U_1), \dots, \mu(U_n))$ . Für weitere Einzelheiten siehe zum Beispiel [Rei4].
- Wegen [Kac] erhalten wir

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} \leq \frac{e}{d} \leq \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

für alle imaginären Wurzeln  $(d, e)$  des Kroneckerköchers. Wegen des Spiegelungsfunktors hat jeder Dimensionsvektor  $(d, e)$  einen korrespondierenden Dimensionsvektor  $(d', e')$ , so dass  $d' < e' \leq (m - 1)d'$ .

Betrachte wieder den regulären  $m$ -Baum und definiere

$$N_i = \{j \in J \mid (\alpha : i \rightarrow j) \in T(m)_1\}$$

für  $i \in I$  bzw.  $N_j$  analog für ein  $j \in J$ . Sei  $X$  eine Darstellung von  $T(m)$ , dann definiere

$$I_X = \{i \in I \mid \dim(X_i) \neq 0 \vee (\exists j \in N_i : \dim(X_j) \neq 0)\}.$$

Das ist insbesondere eine endliche Teilmenge von  $I$ . Sei weiter  $n_X = |I_X|$ . Indiziere diese, so dass  $I_X = \{i_1, \dots, i_{n_X}\}$ .

Definiere  $R_{I_X}^- = R_{i_1}^- \circ \dots \circ R_{i_{n_X}}^-$ . Dann gilt der folgende Satz:

**Lemma 4.3.3** *Sei  $X$ , so dass  $X \not\cong E_i$  für alle  $i \in I$ , eine stabile Darstellung des regulären  $m$ -Baumes. Dann ist auch die Darstellung  $R_{I_X}^-(X)$  eine stabile Darstellung des regulären  $m$ -Baumes.*

*Beweis.* Zunächst überlegt man sich leicht, dass die Wahl der Indizierung der Menge  $I_X$  keine Rolle spielt.

Sei also  $V$  ein Untermodul von  $R_{I_X}^-(X)$ , der nach obiger Bemerkung als unzerlegbar angenommen werden kann. Weiter kann angenommen werden, dass der Untermodul von der Form  $(V_i, X_\alpha(V_i))$  ist. Diese sind genau von der Form  $R_{I_X}^-(U)$  für einen Untermodul  $U$  des ursprünglichen Köchers. Denn es gilt:

$$\sum_{\alpha:i \rightarrow j \in A_i} R_q^-(X_\alpha)(U_j) = \bigoplus_{\alpha:i \rightarrow j \in A_i} U_j / \text{im}(h'|_{h'^{-1}(\bigoplus_{\alpha:i \rightarrow j \in A_i} U_j)}).$$

Betrachte die beiden folgenden Fälle:

Zunächst sei  $V \cong E_i$  für ein  $i \in I$ . Dann gilt  $\mu(V) = 0$  nach Definition der Stabilität von  $Q$ . Denn die Pfeile wurden umgedreht. Aber es gilt  $\mu(R_{I_X}^-(X)) \neq 0$ , denn sonst wäre schon  $e = 0$  (auch hier beachte man, dass die Pfeile umgedreht werden) und somit wäre  $X$  also isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von  $E_i$ 's,  $i \in I$ . Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Als Zweites sei  $V \not\cong E_i$  für alle  $i \in I$ . Somit ist  $V$  also o.B.d.A. von der Form  $R_{I_X}^-(U)$  für einen Untermodul  $U$  von  $X$ . Da  $X$  stabil ist, gilt  $\mu(U) < \mu(X)$ . Sei  $(d', e')$  der Dimensionsvektor von  $U$ , dann bedeutet diese Ungleichung  $\frac{d'}{e'} < \frac{d}{e}$ . Daraus folgert man aber durch direkte Rechnung  $\frac{e'}{me' - d'} < \frac{e}{me - d}$  und das bedeutet gerade  $\mu(V) < \mu(R_{I_X}^-(X))$ . □

#### Bemerkung 4.3.4

- Wie man sich leicht überlegt, erhält man aus einer Darstellung des regulären  $m$ -Baumes mit Dimensionsvektor  $(d, e)$ , die einer Darstellung von  $K(m)$  entspricht, durch Anwenden des Funktors  $R_{I_X}^-$  tatsächlich wieder eine Darstellung von  $K(m)$  mit Dimensionsvektor  $(e, me - d)$ . Denn es werden alle Pfeile umgedreht (bis auf diejenigen, dessen Quelle und Senke nach dem Spiegeln nulldimensional bleiben) und für den gespiegelten Dimensionsvektor gilt offenbar

$$\begin{aligned} r_{I_X}(d, e) &= \left( \sum_{j \in J} \dim(X_j)j, m \sum_{j \in J} \dim(X_j)j - \sum_{i \in I} \dim(X_i)i \right) \\ &= (e, me - d), \end{aligned}$$

da jeder Punkt genau  $m$  Nachbarpunkte hat.

Um nun die Existenz unzerlegbarer Baumdarstellungen zu zeigen, reicht es auf folgendes Resultat aus [Rin1] zurückzugreifen:

**Satz 4.3.5** *Sei  $X$  eine Darstellung eines Köchers  $Q$ , so dass  $\text{Ext}_{\mathbb{C}Q}^1(X, X) = 0$ . Dann ist  $X$  eine Baumdarstellung.*



Fasst man alles zusammen, so erhält man also folgendes:

**Satz 4.3.6** *Es gibt für den Kroneckerköcher für alle teilerfremden Dimensionsvektoren  $(d, e)$  eine unzerlegbare Darstellung, die ein Baum ist.*

*Beweis.* Den Fall  $e < d$  erhalten wir, indem wir in dem Fall  $(e, d)$  die Pfeile umdrehen.

Für  $d < e < (m - 1)d$  erhalten wir eine unzerlegbare Baumdarstellung  $X$ , indem wir die stabilen einfachen Köcher zu diesem Dimensionsvektor betrachten und eine geeignete Färbung anwenden, siehe 4.3.2. Für diese Darstellung gilt zudem, dass die Ext-Gruppe verschwindet. Denn es gilt

$$\dim \operatorname{Hom}(X, X) - \dim \operatorname{Ext}(X, X) = \langle \dim X, \dim X \rangle = 1$$

und außerdem  $\dim \operatorname{Hom}(X, X) = 1$ .

Für die Fälle  $e > (m - 1)d$  bestimmen wir zunächst mittels  $(d, e) \rightarrow (md - e, d)$  den entsprechenden Fall  $(d', e')$ , so dass  $d' < e' < (m - 1)d'$ . Nun wenden wir den Spiegelungsfunktor entsprechend oft auf eine schon konstruierte stabile Darstellung des regulären  $m$ -Baumes an, die zudem eine Baumdarstellung des Kroneckerköchers ist. Die gespiegelte Darstellung hat offenbar ebenso eine verschwindende Ext-Gruppe. Wegen Satz 4.3.5 ist diese also wieder eine Baumdarstellung. Wir erhalten den konkreten Koeffizientenköcher wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben.

□

### 4.3.2 Der allgemeine Fall

Der Fall allgemeiner Dimensionsvektoren  $d < e < 2d$  für den 3-Kroneckerköcher wird auch in [Fahr] behandelt. Philipp Fahr gibt einen Algorithmus an, der beschreibt, wie sich Baumdarstellungen bzw. der Koeffizientenköcher in diesem Fall aus dem Fall des Dimensionsvektors  $(d, 2d + 1)$  ergeben.

Betrachte die Abbildung  $r : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$  definiert durch  $r(d, e) = (e, me - d)$ . Es gilt folgender Satz:

**Satz 4.3.7** *1. Für jeden Dimensionsvektor  $(d, e)$  existiert eine unzerlegbare Baumdarstellung des Kroneckerköchers.*

*2. Zu jedem Dimensionsvektor  $(d, e) \neq r^l(n, n)$  mit  $l, n \in \mathbb{N}$  existiert eine stabile Baumdarstellung.*

*Beweis.* Analog zu [Fahr] erhält man aus den stabilen Köchern vom einfachen Typ  $s_{d,e}$  mit  $\operatorname{ggT}(d, e) = 1$  durch Löschen von Kanten alle Dimensionsvektoren  $(d', e')$ , so dass  $d' \leq e' \leq (m - 1)d'$ .

Präzise: Zu  $(d', e')$  betrachte den Dimensionsvektor  $(d', e)$ , so dass  $e$  minimal mit  $\operatorname{ggT}(d', e) = 1$  und  $e \geq e'$ . Es gilt offenbar  $(m - 1)d' + 1 \geq e > d'$ , da

$\text{ggT}(d', (m-1)d' + 1) = 1$ . Der einfache Lokalisierungsköcher  $s_{d',e}$  ist bipartit, also zerlegt sich die Punktmenge in  $I \cup J$ , so dass alle  $i \in I$  Quellen und alle  $j \in J$  Senken sind. Es gibt offenbar  $e - d' + 1$  Punkte  $j \in J$ , so dass  $|N_j| = 1$ . Bezeichne diese Menge mit  $J'$ . Wähle aus  $J'$  genau  $e - e'$  Punkte aus und bezeichne diese Menge mit  $J''$ .

Definiere den Köcher  $s_{d',e'}$  als den Köcher mit Punktmenge  $I \cup J \setminus J''$  und Pfeilen  $\alpha : i \rightarrow j \in (s_{d',e'})_1$  genau dann, wenn  $\alpha : i \rightarrow j \in (s_{d',e})_1$  und  $j \in J \setminus J''$ . Da es für  $s_{d',e}$  eine stabile, also insbesondere unzerlegbare Darstellung gibt, gibt es diese offenbar auch für  $s_{d',e'}$ . Denn offenbar geht die Unzerlegbarkeit durch Löschen der Kanten nicht verloren, denn alle Punkte im Lokalisierungsköcher sind eindimensional. Beachte außerdem, dass man so eine Faktordarstellung von  $s_{d',e}$  bekommt.

Wie oben gezeigt, erhält man durch die Anwendung des Spiegelungsfunktors alle teilerfremden Fälle. Die oben konstruierte unzerlegbare Faktordarstellung wird durch den Spiegelungsfunktor nun auf eine unzerlegbare Faktordarstellung abgebildet. Diese ist offenbar ein Baum, da  $R_{I_X}^-(s_{d',e})$  ein Baum ist. Denn hätte man einen Basisvektor, der mittels einer Kette von Abbildungen wieder auf sich selbst abgebildet werden würde, so gäbe es diese Kette ebenso in  $R_{I_X}^-(s_{d',e})$ .

Offenbar erhält man so jeden Dimensionsvektor, denn ist  $(d, e)$  beliebig vorgegeben, so spiegelt man diesen mittels  $(d, e) \mapsto (md - e, d)$  in den Bereich  $d \leq e \leq (m-1)d + 1$ .

Der zweite Teil ergibt sich folgendermaßen. Wegen Satz 3.6.2 existiert zu jedem Dimensionsvektor  $(d, e) \neq (n, (m-1)n)$  ein stabiler Baum in den Fällen  $d < e \leq (m-1)d + 1$ . Wie im Beweis von Satz 4.3.6 folgt, dass die Darstellungen dieses Köchers eine verschwindende Ext-Gruppe haben. Das heißt auch die gespiegelten Darstellungen sind stabile Baumdarstellungen.

□

### Bemerkung 4.3.8

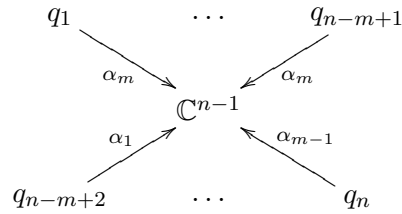
- Wie man sich leicht überlegt, existieren auch in den Fällen der in Abschnitt 3.6 konstruierten stabilen Köcher Färbungen, so dass sich keine induzierten Zyklen ergeben.

### 4.3.3 Konstruktion von Baumdarstellungen

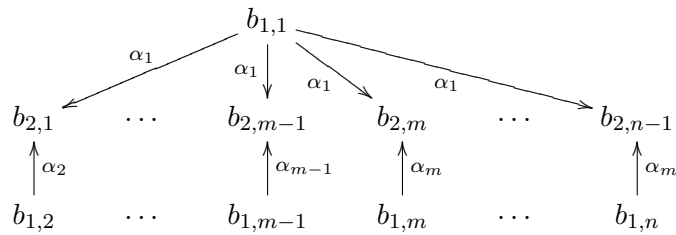
Um einen Koeffizientenköcher zu einer Baumdarstellung zu bestimmen, überlegt man sich zunächst, wie sich der Spiegelungsfunktor auf einen bereits konstruierten Koeffizientenköcher anwenden lässt.

Sei  $X$  eine Darstellung von  $T(m)$ . Betrachte eine Senke  $q$  mit Basis  $\mathcal{B}_q$  und Basen  $\mathcal{B}_{q_1}, \dots, \mathcal{B}_{q_m}$  für alle  $\alpha : q_i \rightarrow q$ . Existiert ein  $w \in \mathcal{B}_q$ , so dass  $(X_{\alpha:q_k \rightarrow q})_{v,w} = 0$  für alle  $v \in \mathcal{B}_{q_k}$ , dann gilt  $R_{q_k}^-(X_{\alpha:q_k \rightarrow q})(w) = \bar{w}$  mit

$\bar{w} \notin \mathcal{B}_{q_l}$  für alle  $1 \leq l \leq m$ . Wie man sich leicht überlegt, gilt außerdem  $(R_{q_k}^-(X_{\alpha:q_k \rightarrow q, \mathcal{B}}))_{w', \bar{w}} = 0$  für alle  $w' \in \mathcal{B}_q$  mit  $w' \neq w$ . Damit reduziert sich die Bestimmung des Koeffizientenköcher auf die folgenden Situationen, in denen  $n$  Pfeile von Punkten der Dimension eins auf einen Punkt der Dimension  $(n - 1)$  zeigen, also:



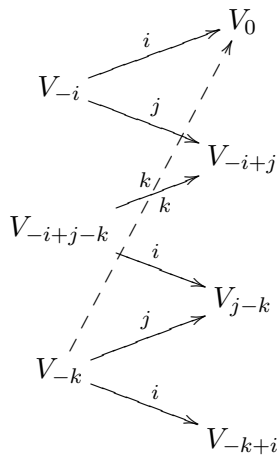
mit  $q_i = \mathbb{C}$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Das entspricht der reellen Wurzel des  $n$ -Unterraumköcher. Ein dazugehöriger Koeffizientenköcher sieht aufgrund der Unzerlegbarkeit folgendermaßen aus, siehe auch [Fahr] für den Fall  $m = 3$  und  $n = 2$ :



Der Spiegelungsfunktor verhält sich dann wie oben gezeigt.

**Bemerkung 4.3.9**

- Es sei bemerkt, dass in dem Fall  $d < e < (m - 1)d$  nicht jede Färbung sofort einen Baum ergibt, also nicht jeder Torusfixpunkt einem Baum entspricht. Betrachte zum Beispiel ein Lokalisierungsdatum mit einem Teilköcher der Form

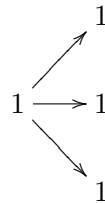


Diese betrachtete Färbung induziert einen zusätzlichen Pfeil, so dass sich offensichtlich kein Baum ergibt. Allerdings verschwindet dieser Zykel bei einem weiteren Lokalisierungsschritt, so dass wir auch zu dieser Färbung eine Baumdarstellung erhalten. Allerdings gibt es auch Färbungen, die sofort einen Baum ergeben. Diese korrespondieren zu so genannten "neighbour-avoiding-walks" im regulären  $m$ -Baum. Für den Fall  $m = 3$  erhalten wir das Sechseckgitter und wir erhalten eine kanonische untere Schranke für die Anzahl von "neighbour-avoiding-walks" durch  $\sqrt{2^d}$ . Im Allgemeinen ist die Frage nach der Anzahl von "neighbour-avoiding-walks" einer vorgegebenen Länge im Sechseckgitter allerdings ungelöst.

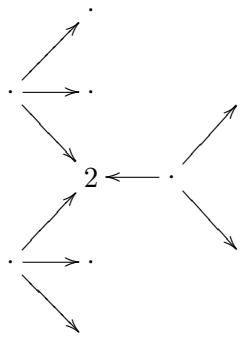
- Daraus ergibt sich insbesondere, dass zu jeder imaginären Wurzel mehr als eine Isomorphieklasse von Baumdarstellungen existiert.

**Beispiel 4.3.10**

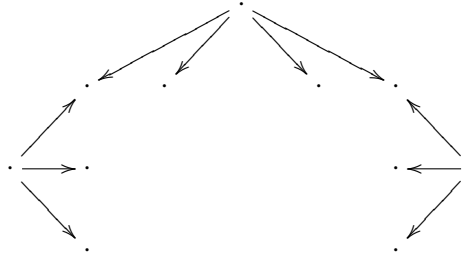
Betrachte den 3-Kroneckerköcher mit Dimensionsvektor  $(1, 3)$ , wobei die Färbung außer Acht gelassen werden soll. Dann ergibt sich der einfache Köcher



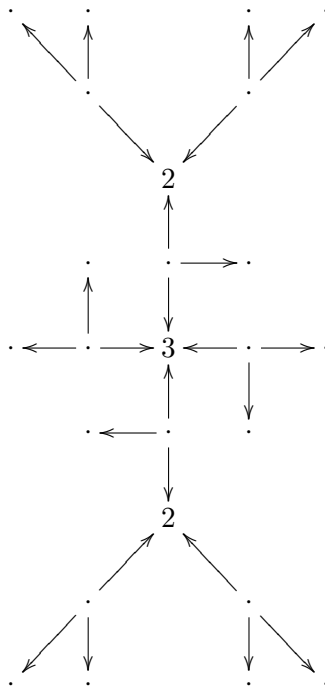
Wenden wir einmal den Spiegelungsfunktor an, so ergibt sich der Fall



mit dem Koeffizientenköcher



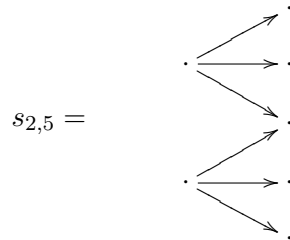
Wenden wir nochmals den Spiegelungsfunktor an, so erhalten wir den Fall  $(8, 21)$  und der Koeffizientenköcher lässt sich aus dem folgenden Köcher wie beschrieben bestimmen:



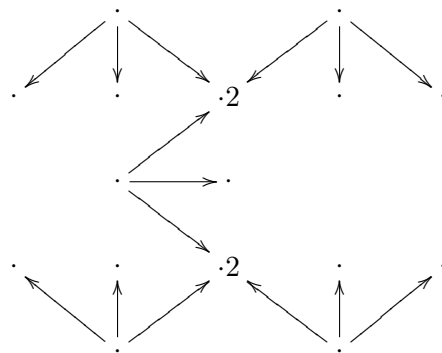
Diese Konstruktion verhält sich für beliebiges  $m$  bzw. die reellen Wurzeln  $(0, 1), (1, m), (m, m^2 - 1), \dots$  völlig analog.

**Beispiel 4.3.11**

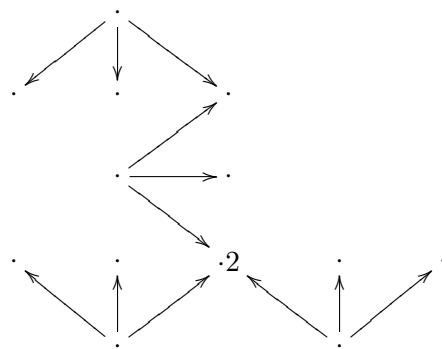
Als letztes Beispiel betrachten wir den Köcher vom einfachen Typ zum Dimensionsvektor  $(2, 5)$  und  $m = 3$ . Dann ergibt sich



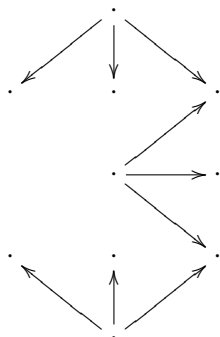
Daraus erhält man durch Löschen von Kanten die Fälle  $(2, 3)$  und  $(2, 4)$ . Es ergibt sich der gespiegelte Köcher mit Dimensionsvektor  $(5, 13)$ :



Daraus ergibt sich wie oben gezeigt der Koeffizientenköcher, die Faktordarstellungen entsprechen Faktordarstellungen mit Dimensionsvektoren  $(4, 10)$  bzw.  $(3, 7)$ , also:



bzw.



## Kapitel 5

# Eulercharakteristik von Modulräumen stabiler Bündel

Ziel dieses Kapitels ist es, das Hauptresultat aus [Kly1], mit welchem sich die Eulercharakteristik von Modulräumen stabiler Vektorbündel vom Rang zwei auf der projektiven Ebene bestimmen lässt, auf den Fall der Bündel vom Rang drei zu erweitern. Dazu werden einige Resultate aus [Kly1], [Kly2] und [Kly3] bzw. allgemeine Resultate über Vektorbündel und deren Modulräume stabiler Bündel behandelt. Zum Beispiel wird gezeigt, dass man die torischen Vektorbündel, die man als Filtrierungen von Vektorräumen darstellen kann, auch als Darstellungen des Unterraumköchers auffassen kann. Somit beschreiben die Modulräume stabiler Darstellungen Fixpunktcomponenten der Modulräume stabiler Vektorbündel. Die Existenz stabiler Darstellungen zu den betrachteten Dimensionsvektoren hängt ausschließlich von den Längen der Arme des Unterraumköchers ab. Diese müssen gewisse Ungleichungen erfüllen, was zu einem Ungleichungssystem führt, dessen Lösungen man explizit angeben kann.

### 5.1 Lineare Ungleichungssysteme und Polyeder

In diesem Abschnitt wird eine Zusammenfassung der benötigten Methoden aus der Theorie der Linearen Ungleichungssysteme gegeben. Näheres hierzu findet man zum Beispiel in [Pad], das auch die Grundlage dieses Abschnitts bildet. Dabei wird kein Wert darauf gelegt, ein solches System möglichst effizient zu lösen, da die Anwendung im nächsten Abschnitt das nicht erfordert, sondern es soll ausschließlich dargestellt werden, wie man die Lösungen solcher System erhalten kann.

**Definition 5.1.1** *Seien  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  eine  $(m \times n)$ -Matrix und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Ein*



*Polyeder*  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ist die Menge der Lösungen  $x \in \mathbb{R}^n$  eines Linearen Ungleichungssystems  $Ax \leq b$ .

Im Folgenden soll das zu einer Matrix  $A$  und einem Vektor  $b$  gehörige Polyeder mit  $P(A, b)$  bezeichnet werden.

Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder. Für die Lösungsmenge des Ungleichungssystems existiert also eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \in P(A, b)$  gilt, dass  $\|x\| \leq s$ .

Ein Polyeder ist also durch die Lösungen einer endlichen Anzahl Linearer Ungleichungen gegeben. Da jede Ungleichung einen Halbraum im ursprünglichen Raum definiert, ist ein Polyeder auch als Durchschnitt endlich vieler Halbräume zu verstehen.

**Definition 5.1.2** Seien  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist die konvexe Hülle dieser Punkte definiert als

$$\text{conv}(x_1, \dots, x_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \mu_i x_i \mid \sum_{i=1}^k \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \right\}.$$

Die Kegelhülle ist definiert als

$$\text{cone}(x_1, \dots, x_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \mu_i x_i \mid \mu_i \geq 0 \right\}.$$

**Definition 5.1.3** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beliebige Menge. Ein Punkt  $x \in P$  heißt Extrempunkt von  $P$ , wenn für alle  $x_1, x_2 \in P$  und alle  $0 < \mu < 1$ , so dass  $x = \mu x_1 + (1 - \mu)x_2$ , folgt, dass  $x = x_1 = x_2$ .

Das heißt also, dass  $x$  eindeutig als Konvexkombination von Elementen aus  $P$  darstellbar ist, nämlich mittels der trivialen.

Der folgende Satz spielt eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Lösungsmenge zu einem gegebenen Linearen Ungleichungssystem. Für den Beweis siehe [Pad].

**Satz 5.1.4** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  eine  $(m \times n)$ -Matrix und  $b \in \mathbb{R}^m$ , so dass  $m \geq n$ . Ein Punkt  $x_0 \in P(A, b)$  ist ein Extrempunkt des Polyeders genau dann, wenn  $Ax \leq b$  und  $A'x = b'$  für eine  $(n \times n)$ -Untermatrix von  $A$  mit  $\text{Rang}(A') = n$  und den entsprechenden Teilvektor  $b'$  von  $b$ .

Mit dem Ausdruck entsprechender Teilvektor ist natürlich gemeint, dass  $b'$  aus dem Vektor  $b$  entsteht, indem in diesem genau dann der Eintrag  $b_i$  entfernt wird, wenn aus der Matrix  $A$  der Zeilenvektor  $A_i$  entfernt wurde. Zusätzlich zu den Extrempunkten, deren konvexe Hülle ein Polytop darstellt, das die Ungleichungen erfüllt, sollen nun Vektoren bestimmt werden, deren positive Linearkombinationen ausgehend von diesem Polytop alle Lösungen

der Ungleichungen beschreiben.

Darauf soll nun näher eingegangen werden. Seien  $x_0, x \in \mathbb{R}^n$ . Betrachte  $x_\lambda = x_0 + \lambda x$  für  $\lambda \geq 0$ . Dann gilt  $x_\lambda \in P(A, b)$  für alle  $\lambda \geq 0$  genau dann, wenn  $x_0 \in P(A, b)$  und  $Ax \leq 0$ .

Dann schließen sich folgende Definitionen an:

**Definition 5.1.5** 1. Eine Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt Kegel, falls für jeweils zwei Punkte  $x_1, x_2 \in C$  gilt, dass  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$  für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ .

2. Ein Kegel heißt spitz, falls er keine echten Untervektorräume außer  $\{0\}$  enthält.

3. Eine Halbgerade  $y = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$  heißt Extremalstrahl eines Kegels  $C$ , falls  $y \in C$  und  $-y \notin C$  und falls für alle  $y_1, y_2 \in C$  bzw.  $0 < \mu < 1$ , so dass  $y = (1 - \mu)y_1 + \mu y_2$ , folgt, dass  $y = y_1 = y_2$ .

Der polyedrische Kegel zu einem Ungleichungssystem  $(A, b)$  ist definiert als

$$C(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}.$$

Offenbar ist  $C(A)$  sowohl ein Polyeder, als auch ein Kegel.

Der folgende Satz beschreibt, wie man alle Extremalstrahlen eines polyedrischen Kegels bestimmen kann. Zum Beweis sei auf [Pad] verwiesen.

**Satz 5.1.6** Sei  $C(A)$  ein spitzer Kegel. Dann ist  $x \in C(A)$  ein Extremalstrahl von  $C(A)$  genau dann, wenn genau  $\text{Rang}(A) - 1$  linear unabhängige Zeilenvektoren  $a_1, \dots, a_{\text{Rang}(A)-1}$  von  $A$  existieren, so dass

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\text{Rang}(A)-1} \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

und außerdem  $Ax \leq 0$ .

Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die Polyeder keine eindimensionalen Unterräume enthalten. Dazu betrachtet man nur Ungleichungssysteme, deren Lösungen  $x \in \mathbb{R}^n$  die zusätzlichen Bedingung  $x_i \geq 0$  erfüllen. Ein solches System heißt in Standardform.

Diese Annahme ist keine Einschränkung, weil man jedes Ungleichungssystem in ein System dieser Form transformieren kann. Der Vorteil ist, dass das Polyeder, also insbesondere auch der polyedrische Bereich, spitz ist, also keine Geraden enthält.

Bemerkt sei außerdem noch, dass die Menge der Extrempunkte und die Menge der Extremalstrahlen jeweils endlich sind, was aufgrund der beiden Sätze klar ist.

Schlussendlich gilt der folgende Satz:

**Satz 5.1.7** Sei  $(A, b)$  ein Lineares Ungleichungssystem in Standardform. Seien  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  alle Extrempunkte des Polyeders  $P(A, b)$  und  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$  alle Extremalstrahlen des polyedrischen Kegels  $C(A)$ . Dann ist das Polyeder  $P(A, b)$ , das alle Lösungen des Linearen Ungleichungssystems  $Ax \leq b$  beschreibt, gegeben durch

$$P(A, b) = \text{conv}(X) + \text{cone}(Y).$$

## 5.2 Modulräume von Vektorbündeln auf der projektiven Ebene

Es sollen verschiedene grundlegende Resultate aus der Theorie der Vektorbündel behandelt werden. Die Grundlage dieses Abschnitts bilden [OSS], [LeP] und [Har].

Sei  $\mathcal{E} \neq 0$  ein Vektorbündel auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}^n$ . Bezeichne mit  $c_i(\mathcal{E})$  die  $i$ -te Chernklasse und mit  $\text{rk}(\mathcal{E})$  den Rang von  $\mathcal{E}$ . Das Chernpolynom von  $\mathcal{E}$  ist gegeben durch

$$c(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{\text{rk}(\mathcal{E})} c_i(\mathcal{E})t^i.$$

Definiere

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{c_1(\mathcal{E})}{\text{rk}(\mathcal{E})}$$

als die Steigung des Vektorbündels.

**Definition 5.2.1** Ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf  $\mathbb{P}^n$  ist semistabil, falls für alle Unterbündel  $0 \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  gilt, dass

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}).$$

Ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  heißt stabil, falls für alle echten Unterbündel  $\mathcal{F}$  mit  $0 < \text{rk}(\mathcal{F}) < \text{rk}(\mathcal{E})$  gilt, dass

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}).$$

Unter diesem Stabilitätsbegriff stabile Bündel heißen auch stabil im Sinne von Mumford-Takemoto bzw.  $\mu$ -stabil.

**Definition 5.2.2** Die Diskriminante eines Vektorbündels vom Rang  $r$  auf dem  $\mathbb{P}^2$  mit Chernklassen  $c_1$  und  $c_2$  ist definiert als

$$D = \frac{1}{2r^2}(2rc_2 - (r-1)c_1^2).$$

Dann gilt folgender Satz, siehe [Bog]:

**Satz 5.2.3** Sei  $\mathcal{E}$  ein semistabiles Vektorbündel vom Rang  $r > 0$  und Diskriminante  $D$  auf der projektiven Ebene. Dann gilt  $D \geq 0$ .

Zwei semistabile Vektorbündel heißen  $S$ -äquivalent, wenn ihre Jordan-Hölder-Graduierungen isomorph sind. Grundlegend ist die Existenz eines Modulraums, der die  $S$ -Äquivalenzklassen von semistabilen Vektorbündeln parametrisiert. Es soll nicht näher auf die Konstruktion eingegangen werden, dazu siehe [Sim] und [Mar]. Es gilt der folgende Satz für (semi)-stabile Vektorbündel auf der projektiven Ebene:

**Satz 5.2.4** Seien die ersten beiden Chernklassen  $c_1, c_2$  und der Rang  $r$  fest gewählt. Dann existiert eine projektive Varietät  $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)$ , die die  $S$ -Äquivalenzklassen semistabiler Bündel  $\mathcal{E}$  auf der projektiven Ebene mit  $c_1(\mathcal{E}) = c_1$ ,  $c_2(\mathcal{E}) = c_2$  und  $\text{rk}(\mathcal{E}) = r$  parametrisiert. Die Isomorphieklassen stabiler Bündel bilden eine offene Teilmenge  $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)^s$  in  $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)$ .

### Bemerkung 5.2.5

- Eine interessante Verbindung zwischen stabilen Vektorbündeln auf der projektiven Ebene mit verschwindender erster Chernklasse zu Kroneckerköchern liefern [Hul] für Bündel vom Rang zwei bzw. drei und [Nak] allgemein. Und zwar ist die Kategorie der stabilen Vektorbündel vom Rang  $r$  auf dem  $\mathbb{P}^2$  mit Chernklassen  $c_1 = 0$  und  $c_2 = n \geq r$  äquivalent zu der Kategorie der stabilen Darstellungen des 3-Kroneckerköchers mit Dimensionsvektor  $(n, n)$ , so dass

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & X_2 & -X_1 \\ -X_2 & 0 & X_3 \\ X_1 & -X_3 & 0 \end{pmatrix} = 2n + r,$$

welche auch eine Isomorphie der Modulräume nach sich zieht. Hier sind  $X_1, X_2$  und  $X_3$  die linearen Abbildungen, die mit den drei Pfeilen identifiziert werden.

Sei im Folgenden mit  $\mathcal{O}(1)$  das Hyperebenenbündel auf der projektiven Ebene bezeichnet, das dazu duale Linienbündel mit  $\mathcal{O}(-1)$  und weiter sei

$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k},$$

falls  $k \geq 0$  bzw.

$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes |k|},$$

falls  $k < 0$ .

Betrachtet man Vektorbündel vom Rang  $r$  auf dem  $\mathbb{P}^n$ , so gilt für die Chernklassen  $c_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , dass  $c_t = 0$  für  $t > \min(r, n)$ . Für Einzelheiten siehe zum Beispiel [LeP].

Seien  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  zwei Vektorbündel vom Rang  $r$  bzw.  $s$  auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}^n$  und seien

$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r (1 + a_i t)$$

bzw.

$$c(\mathcal{F}) = \prod_{i=1}^s (1 + b_i t)$$

mit  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$  die Chernpolynome. Definiere  $c_i, i = 0, \dots, r + s$ , durch

$$\prod_{i,j} (1 + (a_i + b_j)t) = \sum_{i=0}^{r+s} c_i t^i.$$

Dann gilt folgendes für das Chernpolynom des Vektorbündels  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , siehe [Hir] oder [Har]:

$$c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\min(n, \text{rk}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}))} c_i t^i.$$

Für die Modulräume (semi)-stabiler Bündel auf der projektiven Ebene erhält man somit folgende wichtige Eigenschaft:

**Proposition 5.2.6** *Durch Twisten mit dem Linienbündel  $\mathcal{O}(k)$  erhält man einen Isomorphismus von Modulräumen*

$$\mathcal{M}(r, c_1, c_2) \cong \mathcal{M}(r, c_1 + rk, c_2 + (r-1)kc_1 + k^2 \frac{r(r-1)}{2}).$$

*Insbesondere ist der Modulraum also nur von der Diskriminante abhängig.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel mit Chernklassen  $c_1, c_2$  und Rang  $r$ . Durch das Tensorieren mit dem Linienbündel  $\mathcal{O}(k)$  bleibt der Rang von  $\mathcal{E}$  unverändert. Betrachte:

$$\begin{aligned} c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(k)) &= (1 + (k + \frac{c_1}{2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2})t) \\ &\quad (1 + (k + \frac{c_1}{2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2})t)(1 + kt)^{r-2} \pmod{t^3}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(k)) = 1 + (rk + c_1)t + (\frac{r(r-1)}{2}k^2 + (r-1)kc_1 + c_2)t^2.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Diskriminanten von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(k)$  übereinstimmen. Zudem überprüft man leicht, dass (semi)-stabile Bündel auf (semi)-stabile Bündel abgebildet werden.

□

Im Folgenden werden die Modulräume mit  $\mathcal{M}(r, D)$  oder  $\mathcal{M}(D)$  bezeichnet, wenn klar ist, was der Rang der betrachteten Vektorbündel sein soll. Durch Betrachten einer Torusaktion auf dem Modulraum und Reduzierung auf Torusfixpunkte kann die Eulercharakteristik der Modulräume ausgerechnet werden.

Der  $(n + 1)$ -dimensionale Torus  $T = (\mathbb{C}^*)^{n+1}$  operiert auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}^n$  via Multiplikation, also

$$t \cdot (x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (t_0 x_0 : t_1 x_1 : \dots : t_n x_n)$$

für  $t = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in T$ .

**Definition 5.2.7** *Ein Vektorbündel  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^n$  heißt torisch, falls  $T$  linear auf den Fasern operiert, so dass folgendes Diagramm für alle  $t \in T$  kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{t} & \mathcal{E} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{t} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Sei  $E$  ein Vektorraum, dann ist eine absteigende  $\mathbb{Z}$ -Filtrierung definiert als eine Kette von Untervektorräumen  $E(i) \subset E$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , so dass  $E(i) \subset E(i-1)$ . Sei die Menge aller Filtrierungen zu einem Vektorraum  $E$  im Folgenden mit  $\mathcal{F}(E)$  bezeichnet. Analog können Familien von Filtrierungen eines Vektorraums  $E$ , also  $E^\alpha \in \mathcal{F}(E)$  für  $\alpha \in I$  und eine Indexmenge  $I$ , definiert werden.

Sei  $\mathcal{E}$  ein torisches Vektorbündel auf  $\mathbb{P}^2$ . Die  $T = (\mathbb{C}^*)^3$ -Aktion hat eine offene Bahn, die alle Punkte  $p = (x_\alpha : x_\beta : x_\gamma) \in \mathbb{P}^2$  enthält, so dass  $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \neq 0$ . Definiere  $E := \mathcal{E}(p_0)$  als die Faser des Vektorbündels zu einem beliebigen Punkt  $p_0$  aus dieser Bahn. Da  $\mathcal{E}$  torisch ist, gilt  $te \in \mathcal{E}(tp_0)$  für alle  $e \in E$ . Wähle einen generischen Punkt  $p_\alpha$  aus der Koordinatenachse

$$X_\alpha = \{(x_\alpha : x_\beta : x_\gamma) \in \mathbb{P}^2 \mid x_\alpha = 0\}.$$

Definiere

$$E^\alpha(i) := \{e \in E \mid \lim_{tp_0 \rightarrow p_\alpha} \left( \frac{t_\alpha}{t_\beta} \right)^{-i} (te) \text{ existiert}\}$$

und  $E^\beta$ ,  $E^\gamma$  analog. Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Wahl von  $p_0$  und  $p_\alpha$ . Anstelle der gewählten rationalen Funktion kann auch jede andere Funktion mit einem Pol der Ordnung  $i$  in  $t_\alpha = 0$  genommen werden. Mit diesem Verfahren erhält man zu jedem torischen Bündel eine Familie absteigender  $\mathbb{Z}$ -Filtrierungen zu  $E$ , denn offenbar gilt:

$$\dots \subset E^\alpha(i+1) \subset E^\alpha(i) \subset E^\alpha(i-1) \subset \dots$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft  $E^\alpha(i) = 0$  für  $i \gg 0$  und  $E^\alpha = E$  für  $i \ll 0$ . Aus [Kly2] erhält man folgenden Satz:

**Satz 5.2.8** *Die Kategorie der torischen Bündel auf der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2$  ist äquivalent zu der Kategorie der Vektorräume mit einer Familie von absteigenden  $\mathbb{Z}$ -Filtrierungen  $E^\alpha \in \mathcal{F}(E)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , so dass*

$$E^\alpha(i) = 0 \text{ für } i \gg 0 \text{ und } E^\alpha(i) = E \text{ für } i \ll 0.$$

Zwei Filtrierungen  $E_1, E_2 \in \mathcal{F}(E)$  sind isomorph, falls ein  $g \in Gl(E)$  existiert, so dass  $gE_2(i) = E_1(i)$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ . Analog sind zwei Familien  $E_1^\alpha, E_2^\alpha, \alpha \in I$  für eine Indexmenge  $I$ , isomorph, falls ein  $g \in Gl(E)$  existiert, so dass  $gE_1^\alpha(i) = E_2^\alpha(i)$  für alle  $\alpha \in I$  und alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

Für die beiden Chernklassen dieser Filtrierungen bzw. der zugehörigen Vektorbündel erhält man basierend auf [Kly2] das Folgende:

$$c_1(\mathcal{E}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}, \alpha} i \dim E^{[\alpha]}(i)$$

mit  $E^{[\alpha]}(i) = E^\alpha(i)/E^\alpha(i+1)$  bzw.

$$c_2(\mathcal{E}) = \frac{c_1(\mathcal{E})^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}, \alpha} i^2 \dim E^{[\alpha]}(i) - \sum_{\alpha \neq \beta, (i,j) \in \mathbb{Z}^2} ij \dim E^{[\alpha\beta]}(i, j)$$

mit  $E^{[\alpha\beta]}(i, j) = E^\alpha(i) \cap E^\beta(j) / (E^\alpha(i+1) \cap E^\beta(j) + E^\alpha(i) \cap E^\beta(j+1))$ . Der Twist eines torischen Bündels mit einem Linienbündel entspricht einer Indexverschiebung, wenn man die Filtrierungen betrachtet. Genauer gilt folgendes:

**Lemma 5.2.9** *Sei  $\dim E = r$ . Durch Indexverschiebung  $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3, (i \mapsto i + k_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$  ändert sich die Diskriminante nicht. Insbesondere kann also angenommen werden, dass sich die Filtrierung in Standardposition befinden, d.h.  $E^\alpha(i) = E$  für alle  $i \geq 0$  und  $E^\alpha(i) \neq E$  für alle  $i < 0$ .*

*Beweis.* Sei  $D'$  die Diskriminante, die sich nach der Indexverschiebung ergibt. Wegen

$$\sum_i \dim E^{[\alpha]}(i) = r$$

folgt

$$\begin{aligned}
D' &= D + \sum_{\alpha} k_{\alpha}^2 r^2 + 2 \left( \sum_{\alpha} k_{\alpha} r \right) \left( \sum_{\alpha, i} i \dim E^{[\alpha]}(i) \right) \\
&\quad + 2 \sum_{\alpha \neq \beta} k_{\alpha} k_{\beta} r^2 - r \sum_{\alpha, i} 2k_{\alpha} i \dim E^{[\alpha]}(i) - \sum_{\alpha} r^2 k_{\alpha}^2 \\
&\quad - 2r \sum_{\alpha \neq \beta, i, j} k_{\alpha} j \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) + k_{\beta} i \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) \\
&\quad + k_{\alpha} k_{\beta} \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) \\
&= D + 2r \sum_{\alpha} k_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha, i} i \dim E^{[\beta]}(j) + 2r^2 \sum_{\alpha \neq \beta} k_{\alpha} k_{\beta} \\
&\quad - 2r \sum_{\alpha \neq \beta, i, j} k_{\alpha} j \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) + k_{\beta} i \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) \\
&\quad + k_{\alpha} k_{\beta} \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j).
\end{aligned}$$

Wähle  $n$  so groß, dass  $E^{\alpha}(n) = E$  und  $E^{\alpha}(-n) = 0$  für alle  $\alpha$ . Sei  $d_{\alpha, \beta}(i, j) = \dim E^{\alpha}(i) \cap E^{\beta}(j)$ . Dann gilt offenbar

$$\dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) = d_{\alpha, \beta}(i, j) - d_{\alpha, \beta}(i+1, j) - d_{\alpha, \beta}(i, j+1) + d_{\alpha, \beta}(i+1, j+1).$$

Für  $\alpha \neq \beta$  gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i, j} \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) &= \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n \dim E^{[\alpha, \beta]}(i, j) \\
&= d_{\alpha, \beta}(-n, -n) - d_{\alpha, \beta}(-n, n+1) \\
&\quad - d_{\alpha, \beta}(n+1, -n) + d_{\alpha, \beta}(n+1, n+1) \\
&= r.
\end{aligned}$$

Denn  $d_{\alpha, \beta}(i, j) = 0$ , falls  $i \gg 0$  oder  $j \gg 0$ . Außerdem folgt

$$\sum_j \dim E^{[\beta]}(j) = \sum_{j=-n}^n j (d_{\alpha, \beta}(-n, j) - d_{\alpha, \beta}(-n, j+1))$$



und analog zur vorherigen Gleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} j \dim E^{[\alpha,\beta]}(i,j) &= \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n j(d_{\alpha,\beta}(i,j) - d_{\alpha,\beta}(i+1,j) \\
&\quad - d_{\alpha,\beta}(i,j+1) + d_{\alpha,\beta}(i+1,j+1)) \\
&= \sum_{j=-n}^n j(d_{\alpha,\beta}(-n,j) - d_{\alpha,\beta}(-n,j+1) \\
&\quad - d_{\alpha,\beta}(n+1,j) + d_{\alpha,\beta}(n+1,j+1)) \\
&= \sum_{j=-n}^n j(d_{\alpha,\beta}(-n,j) - d_{\alpha,\beta}(-n,j+1)).
\end{aligned}$$

□

Betrachtet werden soll nun der Unterraumk6cher mit der Punktmenge

$$Q_0 = \{q_0\} \cup \{q_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{N}^+\}$$

und Pfeilen

$$Q_1 = \{\alpha : q_{i,1} \rightarrow q_0 \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\alpha : q_{i,j+1} \rightarrow q_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{N}^+\}.$$

Sei  $X$  eine Darstellung mit Dimensionsvektor  $d = (d_i)_{i \in Q_0}$ , so dass  $d_{i,j+1} \leq d_{i,j}$ . Die linearen Abbildungen seien gegeben durch  $X_{i,j} : \mathbb{C}^{d_{i,j+1}} \rightarrow \mathbb{C}^{d_{i,j}}$  bzw.  $X_{i,0} : \mathbb{C}^{d_{i,1}} \rightarrow \mathbb{C}^{d_0}$ , wobei wir davon ausgehen, dass alle betrachteten Abbildungen injektiv sind. Man 6berlegt sich leicht, dass jede solche Darstellung isomorph zu einer Darstellung  $X'$  ist, so dass

$$X'_{i,j} = \begin{pmatrix} E_{d_{i,j}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

f6r alle  $j \geq 1$ , wobei  $E_{d_{i,j}}$  die  $d_{i,j} \times d_{i,j}$ -Einheitsmatrix sei. Im Folgenden sollen alle Darstellungen diese Form haben.

Eine Darstellung  $X$  kann dann also als  $n$ -Tupel von Matrizen  $(X_{i,0})_{1 \leq i \leq n}$  mit einem Dimensionsvektor  $(d_i)_{i \in Q_0}$  aufgefasst werden, welche genau den Injektionen  $X_{i,0}$  entsprechen. Aus  $X$  erh6lt man folgenderma6en eine Filtrierung: sei mit  $(X_{i,0})_k$  die  $k$ -te Spalte definiert. Dann setze

$$E^i(j) = \langle (X_{i,0})_{n-d_{i,j}+1}, \dots, (X_{i,0})_n \rangle.$$

Umgekehrt erh6lt man analog aus einer Filtrierung eine Darstellung. Sind zwei Filtrierungen isomorph, so sind offenbar auch die Darstellungen isomorph (mit dem gleichen  $g$ ).

Sind zwei isomorphe Darstellungen  $X, X'$  gegeben, d.h. es existiert ein  $g \in Gl_d = \prod_{i \in Q_0} Gl_{d_i}$  mit  $g * X = X'$ , so gilt, falls  $d_{i,j} < d_{i,j-1}$ , dass

$$g_{i,j-1} = \begin{pmatrix} g_{i,j} & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$$

für alle  $j \geq 2$ . Dabei ist  $g_{i,j} \in \mathbb{C}^{d_{i,j} \times d_{i,j}}$ . Insbesondere existiert also eine Matrix  $g_0 \in Gl_{d_0}(E)$  und Matrizen  $g_{i,1}$ , so dass

$$g_0 X_{i,1} = X'_{i,1} g_{i,1}$$

für alle  $1 \leq i \leq n$ , wobei die Matrix  $g_{i,1}$  eben so geschachtelt ist, dass die Unterräume  $E^i(j)$  der dazugehörigen Filtrierung unter  $g_{i,j}$  invariant sind.

Bezeichne mit  $\mathcal{U}(r)$  die Menge der Unterraumköcher mit Dimensionsvektoren  $d$ , so dass  $d_{q_0} = r$  und  $d_{q_i,j} \geq d_{q_i,j+1}$ . Insgesamt erhält man also folgendes:

**Satz 5.2.10** *Die Kategorie der torischen Vektorbündel vom Rang  $r$  auf dem  $\mathbb{P}^2$  ist äquivalent zu der Kategorie der Darstellungen der Unterraumköcher  $\mathcal{U}(r)$ .*

#### Bemerkung 5.2.11

- Betrachtet man Vektorbündel im projektiven Raum  $\mathbb{P}^n$ , so dass  $n \geq 3$ , gilt der Satz 5.2.8 nicht ohne Einschränkung. Die Arme der Filtrierung stehen in Bijektion mit den Vektoren, die die zum  $\mathbb{P}^n$  gehörige Fahne erzeugen, wenn man den projektiven Raum als torische Varietät betrachtet. Damit die Filtrierungen einem torischen Vektorbündel entsprechen, müssen alle Teilfiltrierungen, die einen Kegel dieser Fahne erzeugen, ein distributives Gitter bilden. Das ist für  $n = 2$  immer erfüllt, für  $n \geq 3$  heißt das aber schon, dass jedes torische Bündel vom Rang 2 zerlegbar ist.

Betrachte die Stabilität gegeben durch die Steigungsfunktion

$$\mu(d) = \frac{\Theta(d)}{\dim d},$$

wobei  $\Theta = -q_0^*$  sei. Es gilt der folgende Satz, siehe auch [Kly1]:

**Satz 5.2.12** *Sei  $\mathcal{E}$  ein torisches Bündel auf dem  $\mathbb{P}^2$ , das durch ein Tripel von Filtrierungen  $E^\alpha$  gegeben ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $\mathcal{E}$  ist stabil im Sinne von Mumford-Takemoto.
2. Die Familie der Unterräume  $E^\alpha(i) \subset E$  ist stabil bezüglich der Gruppenaktion der  $Gl(E)$  im Sinne von Mumford.
3. Für alle Unterräume  $0 \subset F \subset E$  gilt

$$\sum_{\alpha, i > N} \frac{\dim E^\alpha(i) \cap F}{\dim F} < \sum_{\alpha, i > N} \frac{\dim E^\alpha(i)}{\dim E}.$$

*Beweis.* Man überlegt sich leicht, dass die eben eingeführte Stabilität für den Unterraumköchler äquivalent zu der dritten Aussage ist. Deswegen folgt die Äquivalenz zu zwei. Dass die dritte und erste Aussage äquivalent sind, folgt wegen der Definition der Stabilität via Chernklasse und Rang.

□

Das heißt also, dass die Modulräume der stabilen Darstellungen und der Modulraum stabiler Filtrierungen fester Länge isomorph sind. Man kann also die Fixpunktcomponenten von  $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)$  als Modulräume des Unterraumköchlers verstehen.

### 5.3 Der Fall der Rang 2-Bündel auf der projektiven Ebene

In diesem Abschnitt soll zunächst auf [Kly1] eingegangen werden, um im nächsten Abschnitt eine ähnliche Formel für die Eulercharakteristik von Rang 3-Bündeln auf der projektiven Ebene herzuleiten und diese vergleichen zu können. Dazu wird die Formel von Klyachko leicht modifiziert. Bezeichnet man mit  $H(D)$  die Hurwitzfunktion, die die Anzahl der Klassen reduzierter binärer quadratischer Formen  $Q$  mit Diskriminante  $D$  mit dem Gewicht  $\frac{2}{|\text{Aut}Q|}$  zählt, so ergibt sich für die Eulercharakteristik nach [Kly1] das Folgende:

$$\chi(\mathcal{M}(c_1, c_2)) = \begin{cases} 3H(D), & \text{falls } D \equiv -1 \pmod{4} \\ 3H(D) - \frac{3}{2}d\left(\frac{D}{4}\right), & \text{falls } D \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} .$$

Wie auch im ersten Teil der Arbeit ist der Ausgangspunkt für die Herleitung dieser Formel, dass für die Eulercharakteristik einer torischen komplexen Varietät  $X$  nach Satz 3.2.1 gilt, dass  $\chi(X) = \chi(X^T)$ .

Bezeichne mit  $\mathcal{E}$  ein Tripel von Filtrierungen eines Vektorraums, d.h.  $\mathcal{E}$  besteht aus einem Vektorraum  $E$  und Filtrierungen  $E^k(i)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Es gelte die Zusatzbedingung

$$E^k(i) = 0 \text{ für } i \gg 0 \text{ und } E^k(i) = E \text{ für } i \ll 0.$$

Ausgehend von einem Tripel von Filtrierungen definiere

$$\alpha_k := |\{i \mid \dim E^k(i) = 1\}|$$

für  $k = 1, 2, 3$ . Aus der Stabilitätsbedingung erhält man folgende Ungleichungen:

$$\alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_3 \text{ bzw. } \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_3 \text{ bzw. } \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2. \quad (5.1)$$

Dann gibt es also zu jedem Tripel  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , das diesen Ungleichungen genügt, genau ein stabiles torisches Vektorbündel. Bemerkte sei, dass hier einfließt, dass die Filtrierungen sich in Standardform befinden.

Für die Diskriminante  $-D = c_1^2 - 4c_2$  ergibt sich demnach

$$-D = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_3.$$

Wie man sich leicht überlegt, gilt für die Diskriminante  $D$  also, dass  $-D \equiv 0 \pmod{4}$  oder  $-D \equiv 3 \pmod{4}$ .

Wie im letzten Abschnitt konstruiert, ergibt sich zu jeder Filtrierung eine Darstellung des Unterraumköchers. In diesem Fall also ein Köcher mit drei Armen, die in einem Punkt zusammenlaufen. Die Existenz einer stabilen Darstellung vorausgesetzt, ist der Modulraum der stabilen Darstellungen eines solchen Köchers nulldimensional, was man an Hand der Dimensionsformel nachrechnet. Demnach ist die Eulercharakteristik jeweils 1. Es gilt also

$$\chi(\mathcal{M}(c_1, c_2)) = |\mathcal{M}(c_1, c_2)^T|.$$

Betrachtet man die Ungleichungen und benutzt die Sätze des ersten Abschnitts, so ergibt sich, dass  $P = (1, 1, 1)$  der einzige Extrempunkt des Ungleichungssystems (5.1) ist.

Des Weiteren ergeben sich die Extremalstrahlen  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  bzw.  $v_3 = (1, 0, 1)$ , wie man leicht nachrechnet.

Also ergibt sich, dass alle positiven ganzzahligen Lösungen die Form

$$\begin{aligned} v &= (1, 1, 1) + k_1(1, 1, 0) + k_2(0, 1, 1) + k_3(1, 0, 1) \\ &= (k_1 + k_3 + 1, k_1 + k_2 + 1, k_2 + k_3 + 1) \end{aligned}$$

mit  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Q}^+$  haben.

Definiere

$$\mathbb{L} = \{v \in \mathbb{N}^3 \mid v = (k_1 + k_3 + 1, k_1 + k_2 + 1, k_2 + k_3 + 1), k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Seien  $k_1, k_2, k_3 < 1$  und mindestens ein  $k_i \neq 0$ . Dann ist die einzige Lösung  $v \in \mathbb{L}$ , die man mit dieser Einschränkung erhält, offenbar  $v = (2, 2, 2)$  und zwar, falls  $k_i = \frac{1}{2}$  für alle  $i = 1, 2, 3$ . Daraus ergibt sich, dass

$$\mathbb{L} = \{v \in \mathbb{N}^3 \mid v = (k_1 + k_3 + i, k_1 + k_2 + i, k_2 + k_3 + i), k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}, i = 1, 2\}.$$

Denn, wenn  $v \in \mathbb{L}$  eine Lösung ist, so dass  $k_i \in \mathbb{Q}^+$  für  $i = 1, 2, 3$ , dann gibt es auch eine Lösung  $v' \in \mathbb{L}$ , die durch  $v' = (k'_1, k'_2, k'_3)$  gegeben ist, wobei  $k'_i := k_i - \lfloor k_i \rfloor$ . Nach obiger Überlegung gilt dann, dass  $v' = (1, 1, 1)$  oder  $v' = (2, 2, 2)$ .

Betrachte nun

$$\mathbb{L}_i = \{v \in \mathbb{N}^3 \mid v = (k_1 + k_3 + i, k_1 + k_2 + i, k_2 + k_3 + i), k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}\}$$

mit  $i = 1, 2$ . Wie man sich leicht überlegt, gilt  $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset$ . Für die Diskriminante ergibt sich für  $v \in \mathbb{L}_1$ , dass

$$D = -4k_1k_2 - 4k_1k_3 - 4k_2k_3 - 4k_1 - 4k_2 - 4k_3 - 3$$

bzw. für  $v \in \mathbb{L}_2$ , dass

$$D = -4k_1k_2 - 4k_1k_3 - 4k_2k_3 - 8k_1 - 8k_2 - 8k_3 - 12.$$

Das heißt insbesondere, dass alle Lösungen  $v \in \mathbb{L}_1$  zu Modulräumen mit  $-D \equiv 3 \pmod{4}$  und alle  $v \in \mathbb{L}_2$  zu Modulräumen mit  $-D \equiv 0 \pmod{4}$  gehören.

Offenbar sind auch alle Lösungen eindeutig durch  $k_1, k_2$  und  $k_3$  bestimmt. Bemerkte sei, dass die zweite Gleichung äquivalent zu der diophantischen Gleichung

$$xy + yz + zx = n$$

für  $x, y, z \geq 1$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  ist. Diese erhält man, indem man auf beiden Seiten durch  $-4$  teilt und anschließend  $x = k_1 - 1, y = k_2 - 1$  und  $z = k_3 - 1$  setzt. Mehr dazu findet man in [Pet].

In diesem Fall ergibt sich für die Erzeugendenfunktion

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \chi(\mathcal{M}(-4i)) x^{4i} \\ &= \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}_0^3} x^{4k_1k_2 + 4k_2k_3 + 4k_1k_3 + 8(k_1 + k_2 + k_3) + 12}. \end{aligned}$$

Im anderen Fall:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \chi(\mathcal{M}(-4i - 3)) x^{4i+3} \\ &= \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}_0^3} x^{4k_1k_2 + 4k_2k_3 + 4k_1k_3 + 4(k_1 + k_2 + k_3) + 3}. \end{aligned}$$

## 5.4 Der Fall der Rang 3-Bündel auf der projektiven Ebene

Seien  $\alpha_{ij} \geq 0$ , wobei  $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}$ . Betrachtet werden soll der Unterraumkächer mit Dimensionsvektor

$$\dim(q_0) = 3,$$

$$\dim(q_{i,k}) = 2 \text{ für } 1 \leq i \leq 3, 1 \leq k \leq \alpha_{i2}$$

und

$$\dim(q_{i,k}) = 1 \text{ für } 1 \leq i \leq 3, \alpha_{i2} + 1 \leq k \leq \alpha_{i2} + \alpha_{i1}.$$

Sei dieser Köcher im Folgenden mit  $\mathcal{U}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{31}, \alpha_{32})$  bezeichnet.

Bezeichne im Folgenden mit  $U_{ij}$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $j \in \{1, 2\}$  die sechs verschiedenen Unterräume. Es gilt offenbar immer  $U_{i1} \subset U_{i2}$ . Das heißt es gilt für die erste Chernklassen in dem Fall der Rang 3-Bündel folgendes:

$$c_1(\mathcal{E}) = \alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{32}.$$

Bei der zweiten Chernklasse tritt das folgende Problem auf: fixiert man einen Köcher  $\mathcal{U}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{31}, \alpha_{32})$ , so ändert sich die zweite Chernklasse, je nachdem, in wie vielen zweidimensionalen Unterräumen die eindimensionalen Vektorräume enthalten sind.

Wir betrachten die beiden Fälle  $U_{i1} \not\subset U_{k2}$  für alle  $i$  und  $k \neq i$  und  $U_{i1} \subset U_{j2}$  für  $i \neq j$ .

Es soll zunächst davon ausgegangen werden, dass  $U_{i1} \not\subset U_{k2}$  für alle  $i$  und  $k \neq i$ . Dann gilt:

$$c_2(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i1}\alpha_{i2} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \alpha_{i1}\alpha_{j1} + 2\alpha_{i1}\alpha_{j2} + 2\alpha_{i2}\alpha_{j1} + 3\alpha_{i2}\alpha_{j2}.$$

Seien im Folgenden  $i, j$  und  $k$  paarweise verschieden. Wählt man als Unterräume in der Stabilitätsbedingung  $U_{i1}$  bzw.  $U_{i2}$  für  $1 \leq i \leq 3$  so ergeben sich folgende sechs Ungleichungen:

$$\alpha_{i1} + 2\alpha_{i2} < 2\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + 2\alpha_{k1} + \alpha_{k2}$$

bzw.

$$2\alpha_{i1} + \alpha_{i2} < \alpha_{j1} + 2\alpha_{j2} + \alpha_{k1} + 2\alpha_{k2}. \quad (5.2)$$

Wählt man als Unterraum  $U_{i2} \cap U_{j2}$  für  $i \neq j$ , so ergibt sich die folgende Bedingung:

$$\alpha_{i2} + \alpha_{j2} < \alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} + 2\alpha_{k2}. \quad (5.3)$$

Wählt man als Unterraum  $U_{i1} \oplus U_{j1}$ , so ergibt sich

$$\alpha_{i1} + \alpha_{j1} < \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} + 2\alpha_{k1}. \quad (5.4)$$

Andere Unterräume braucht man zur Überprüfung der Stabilität offenbar nicht zu testen. Für die Diskriminante gilt in diesen Fällen

$$\begin{aligned} D &= 2c_1^2 - 6c_2 \\ &= \sum_{i=1}^3 2\alpha_{i1}^2 + 2\alpha_{i1}\alpha_{i2} + \alpha_{i2}^2 \\ &\quad - 2 \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \alpha_{i1}\alpha_{j1} + 2\alpha_{i1}\alpha_{j2} + 2\alpha_{i2}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} \right). \end{aligned}$$

Im Folgenden sei  $D(\alpha) := D$ , die zu einem Tupel  $\alpha \in \mathbb{N}^6$  gehörige Diskriminante.

Nun soll auf die andere Möglichkeit eingegangen werden. Es gelte also  $U_{i1} \subset U_{j2}$  für  $i \neq j$ . Gilt  $U_{i2} = U_{j2}$ , so müsste gelten, dass

$$\alpha_{i1} + 2\alpha_{i2} + \alpha_{j1} + 2\alpha_{j2} < 2\alpha_{k1} + \alpha_{k2},$$

was offenbar im Widerspruch zu den Ungleichungen (5.2)-(5.4) steht. Gilt  $U_{i1} = U_{j1}$ , so ergibt sich analog die Stabilitätsbedingung

$$2\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + 2\alpha_{j1} + \alpha_{j2} < \alpha_{k1} + 2\alpha_{k2},$$

wieder im Widerspruch zu obigen Ungleichungen.

Es bleibt also die Möglichkeit, dass  $U_{i1} \subset U_{j2}$ . Dann ergeben sich zusätzlich die beiden Ungleichungen

$$2\alpha_{i1} + \alpha_{j2} + \alpha_{i2} < 2\alpha_{k2} + \alpha_{k1} + \alpha_{i1}$$

bzw.

$$2\alpha_{j2} + \alpha_{i1} + \alpha_{j1} < 2\alpha_{k1} + \alpha_{k2} + \alpha_{i2}. \quad (5.5)$$

Diese stehen offenbar nicht im Widerspruch zu den obigen Ungleichungen. Man überlegt sich leicht, dass sogar gilt, dass, falls hier keine Gleichheit gilt, immer genau vier von den zwölf Ungleichungen dieser Art erfüllt sind. Zunächst soll die Veränderung der zweiten Chernklasse im Fall  $U_{i1} \subseteq U_{j2}$  für  $i \neq j$  betrachtet werden. In diesem Fall gilt folgendes:

$$\begin{aligned} c_2(\mathcal{E}) &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{k2}^2 + \alpha_{k1}\alpha_{k2} \\ &\quad + \left( \sum_{1 \leq k < l \leq 3} \alpha_{k1}\alpha_{l1} + 2\alpha_{k1}\alpha_{l2} + 2\alpha_{k2}\alpha_{l1} + 3\alpha_{k2}\alpha_{l2} \right) - \alpha_{i1}\alpha_{j2}. \end{aligned}$$

Für die Diskriminante dieser Punkte erhalten wir:

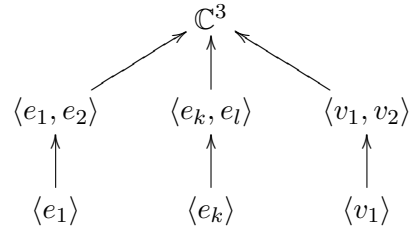
$$\begin{aligned} D &= 2c_1^2 - 6c_2 \\ &= \sum_{k=1}^3 2\alpha_{k1}^2 + 2\alpha_{k1}\alpha_{k2} + \alpha_{k2}^2 \\ &\quad - 2 \left( \sum_{1 \leq k < l \leq 3} \alpha_{k1}\alpha_{l1} + 2\alpha_{k1}\alpha_{l2} + 2\alpha_{k2}\alpha_{l1} + \alpha_{k2}\alpha_{l2} \right) + 6\alpha_{i1}\alpha_{j2}. \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, dass für die Diskriminante allgemein folgendes gilt:

$$D \equiv 0 \pmod{6} \text{ oder } D \equiv 4 \pmod{6}.$$

Bemerkt sei noch, dass sich die zweite Chernklasse nicht ändert, falls  $U_{k1} \subset U_{i1} \oplus U_{j1}$  für  $i, j, k$  paarweise verschieden.

Gilt  $\alpha_{ij} = 1$  für  $i, j$ , so ist leicht zu sehen, dass jede Filtrierung isomorph zu einer der folgenden Form ist:



Dabei sind  $k, l \in \{1, 2, 3\}$ , wobei  $k \neq l$  und  $v_1 \neq v_2$  beliebige Vektoren. Offenbar ist das auch für Filtrierungen beliebiger Länge der Fall. Bezeichne dies im Folgenden als Standardform.

#### 5.4.1 Der Fall $D \equiv 4 \pmod{6}$

Seien  $\alpha \in \mathbb{N}^6$  und  $\mathcal{U}(\alpha)$  gegeben, so dass  $D(\alpha) \equiv 4 \pmod{6}$ . Betrachtet man die Ungleichungen (5.2)-(5.5), dann gilt folgendes Lemma:

**Lemma 5.4.1** *Sei der Unterraumkächer  $\mathcal{U}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{31}, \alpha_{32})$  gegeben, so dass  $D \equiv 4 \pmod{6}$ . Dann gilt:*

1. *Es gibt keine semistabilen Punkte.*
2. *Es gibt genau zwei stabile Punkte, so dass  $U_{i1} \subseteq U_{j2}$  für  $i \neq j$ .*

*Beweis.* Sei  $\alpha$  ein semistabiler Punkt. Dann gilt o.B.d.A.

$$\alpha_{11} + 2\alpha_{12} = 2\alpha_{21} + \alpha_{22} + 2\alpha_{31} + \alpha_{32}.$$

Wie man leicht nachrechnet, ergibt sich für die Diskriminante in diesem Fall, dass

$$\begin{aligned}
 D &= 6\alpha_{11}^2 + 6\alpha_{22}^2 + 6\alpha_{32}^2 - 6\alpha_{21}\alpha_{31} + 6\alpha_{22}\alpha_{32} - 6\alpha_{21}\alpha_{32} - 6\alpha_{22}\alpha_{31} \\
 &\quad - 6\alpha_{11}\alpha_{22} - 12\alpha_{11}\alpha_{32}.
 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Der zweite Teil ergibt sich folgendermaßen: falls  $U_{i1} \subseteq U_{j2}$ , so kann dieser Punkt nicht semistabil sein, weil sonst auch für die Diskriminante dieses Punktes gelten würde, dass  $D \equiv 0 \pmod{6}$ . Betrachtet man die zwölf Ungleichungen (5.5), so müssen immer genau zwei Paare von Ungleichungen erfüllt sein.



□

Sei  $M(\mathcal{U}(\alpha))^s$  der Modulraum der stabilen Punkte zu  $\mathcal{U}(\alpha)$ . Dieser stimmt also mit dem Modulraum der semistabilen Darstellungen überein und ist damit nach Satz 2.1.4 eine glatte projektive Varietät. Nach Bemerkung 2.1.5 ergibt sich zudem, dass der Modulraum eindimensional ist. Aus [Sch2] folgt dann, dass diese glatte projektive Kurve (bzw. der Modulraum) außerdem rational ist. Damit erhält man also, siehe [Har], dass

$$M(\mathcal{U}(\alpha))^s \cong \mathbb{P}^1.$$

Bezeichne nun mit  $D(x)$  die zu  $x$  gehörige Diskriminante für einen Punkt  $x \in M(\mathcal{U}(\alpha))^s$ . Definiere außerdem

$$M(\mathcal{U}(\alpha))_D^s = \{x \in M(\mathcal{U}(\alpha))^s \mid D(x) = D\}.$$

Aus dem letzten Abschnitt bzw. aus dem vorherigen Lemma folgt, dass es genau ein  $D_1 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $M(\mathcal{U}(\alpha))_{D_1}^s = \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0), (0 : 1)\}$  gilt und dass es genau zwei Zahlen  $D_2, D_3 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $M(\mathcal{U}(\alpha))_{D_i}^s = \{\text{pt}\}$  für  $i = 2, 3$  gilt. Weiter erhalten wir

$$M(D)^T = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^6} M(\mathcal{U}(\alpha))_D^s$$

und somit

$$\chi(M(D)^T) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^6} \chi(M(\mathcal{U}(\alpha))_D^s).$$

Da aber  $\chi(\mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0), (0 : 1)\}) = 0$ , brauchen wir nur die Modulräume betrachten, für die  $M(\mathcal{U}(\alpha))_{D_i}^s = \{\text{pt}\}$  mit  $i = 2, 3$  gilt. Diese entsprechen den Inklusionen  $U_{i1} \subseteq U_{j2}$ .

Betrachtet man die zwölf Ungleichungen (5.5), so ergeben sich für paarweise verschiedene  $i, j, k$  folgende Möglichkeiten:

1.  $U_{i1} \subset U_{j2}, U_{j1} \subset U_{i2}$
2.  $U_{i1} \subset U_{j2}, U_{i1} \subset U_{k2}$
3.  $U_{i1} \subset U_{j2}, U_{k1} \subset U_{j2}$

Das Ziel ist es also, alle Lösungen der Ungleichungssysteme bestehend aus den Ungleichungen (5.2) – (5.4) und den vier zu diesen drei Fällen korrespondierenden Ungleichungen (5.5) zu finden.

Für alle  $i, j$  gelte  $\alpha_{ij} \neq 0$ . Der Fall  $\alpha_{ij} = 0$  lässt sich später als Spezialfall behandeln.

**Definition 5.4.2** Sei  $U(\alpha) := U(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$  gegeben. Sei

$$\sigma_{12} \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) := (\alpha_{21}, \alpha_{11}, \alpha_{31}, \alpha_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{32}).$$

Seien weiter  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  analog definiert. Definiere außerdem

$$\tau \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) := (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}).$$

Offenbar erhält man so eine Gruppe  $G = \langle \sigma_{ij}, 1 \leq i < j \leq 3, \tau \rangle$  mit 12 Elementen.

Es gilt folgendes offensichtliche Lemma:

**Lemma 5.4.3** Sei  $\alpha$  gegeben, so dass der Modulraum zu  $U(\alpha)$  eine stabile Darstellung enthält, für die gilt  $U_{i1} \subset U_{j2}$ . Dann enthalten die Modulräume zu  $U(\tau \cdot \alpha)$  bzw.  $U(\sigma_{ij} \cdot \alpha)$  stabile Darstellungen, so dass  $U_{j1} \subset U_{i2}$ , der Modulraum zu  $U(\sigma_{ik} \cdot \alpha)$  eine stabile Darstellung, so dass  $U_{k1} \subset U_{j2}$  und der zu  $U(\sigma_{kj} \cdot \alpha)$  eine stabile Darstellung, so dass  $U_{i1} \subset U_{k2}$ .

Betrachtet man also die obigen drei Fälle, so reicht es im Folgenden aus, die beiden Fälle  $U_{11} \subset U_{22}, U_{32}$  bzw.  $U_{11} \subset U_{22}, U_{21} \subset U_{12}$  zu betrachten. Betrachtet werden soll zunächst der erste Fall.

Die Lösungen der Ungleichungssysteme berechnen sich mit den Methoden aus Abschnitt 5.1. Im Folgenden werden die Mengen der Extrempunkte mit  $P_i$ , die der Extremalstrahlen mit  $E_i$ , wobei  $i = 1, 2$ , bezeichnet. Dann gilt:

$$E_1 = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 3, 2, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 1, 1, 1)\}$$

bzw.

$$S_1 = \{(1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 0), \\ (0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0, 0)\}.$$

Seien diese Vektoren im Folgenden mit  $u_1, u_2, u_3$  bzw.  $w_1, \dots, w_6$  bezeichnet. Es sei noch bemerkt, dass zur Berechnung der Extrempunkte bzw. Extremalstrahlen keine echte Ungleichheit gefordert wird. Das heißt also, dass der zweite und dritte Extrempunkt semistabilen Punkten entsprechen. Jeder Lösungsvektor  $v$  des Ungleichungssystems hat also die Form

$$v = (s_1 + s_2 + s_3 + k_1, s_1 + 3s_2 + 2s_3 + k_1 + k_3 + k_5, \\ s_1 + 2s_2 + 3s_3 + k_1 + k_4 + k_6, s_1 + s_2 + s_3 + k_2 + k_5 + k_6, \\ s_1 + s_2 + s_3 + k_2 + k_4, s_1 + s_2 + s_3 + k_2 + k_3) \\ = (1 + k_1, 1 + 2s_2 + s_3 + k_1 + k_3 + k_5, 1 + s_2 + 2s_3 + k_1 + k_4 + k_6, \\ 1 + k_2 + k_5 + k_6, 1 + k_2 + k_4, 1 + k_2 + k_3),$$

so dass  $0 \leq s_i \leq 1$  für  $i = 1, 2, 3$  und  $k_j \geq 0$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , da  $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ . Jetzt sind allerdings nur die ganzzahligen und stabilen Lösungen von Interesse. Es gilt folgendes:

**Lemma 5.4.4** *Alle stabilen Vektoren  $v$ , so dass  $k_i < 1$ , sind  $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 2, 2, 1, 1, 1)$  und  $v_3 = (1, 2, 2, 2, 1, 1)$  oder es gilt  $v = v_k + \sum_{i=1}^6 n_i w_i$  für  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ .*

Bemerkt sei zunächst, dass  $s_i < 1$  für  $i \neq 1$  gelten muss, damit die Stabilitätsbedingung erfüllt ist, da die Extrempunkte außer  $v_1$  eben semistabil sind.

Dass  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  ein stabiler Vektor ist, ist klar. Weiter gilt

$$(1, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{1}{3}((1, 1, 1, 1, 1, 1) + (1, 2, 3, 1, 1, 1) + (1, 3, 2, 1, 1, 1))$$

und

$$(1, 2, 2, 2, 1, 1) = \frac{2}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 1) + \frac{1}{6}((1, 2, 3, 1, 1, 1) + (1, 3, 2, 1, 1, 1)) + \frac{1}{2}((0, 0, 1, 1, 0, 0) + (0, 1, 0, 1, 0, 0)).$$

Die geforderten Lösungen haben die obere Schranke  $(1, 5, 5, 3, 2, 2)$ . Es ist also nur zu verifizieren, dass alle anderen Lösungen Linearkombinationen der gewünschten Form sind.

Für den zweiten Fall ergibt sich folgendes:

$$E_2 = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, \frac{5}{2}, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 2, 3), (1, 1, 1, 2, 1, 3), (1, 1, 2, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1, \frac{5}{2})\}$$

bzw.

$$S_2 = \{(1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 0)\}.$$

Wie oben gilt:

**Lemma 5.4.5** *Alle stabilen Vektoren, so dass  $k_i < 1$ , sind  $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 2, 1, 1, 1)$ ,  $v_3 = (1, 1, 1, 1, 1, 2)$  oder es gilt  $v = v_k + \sum_{i=1}^6 n_i w_i$  für  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ .*

Offenbar gilt  $(1, 1, 2, 1, 1, 1) = \frac{1}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 1) + \frac{2}{3}(1, 1, \frac{5}{2}, 1, 1, 1)$ . Wie oben gibt es eine obere Schranke, und zwar  $(3, 3, 5, 3, 3, 5)$ . Die anderen Lösungen erhält man wieder als Linearkombination.

Als Letztes soll der Fall betrachtet werden, falls  $\alpha_{ij} = 0$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Wie oben ergibt sich, dass o.B.d.A. angenommen werden kann, dass  $\alpha_{11} = 0$  gilt. Das entspricht dem Fall  $V_{11} \subset V_{22}, V_{32}$ . Alle anderen Fälle

können ausgeschlossen werden, wie man sich leicht überlegt. Dann erhält man für die Lösungen der Ungleichungssysteme folgendes:

$$E_3 = \{(0, 1, 1, 2, 2, 1), (0, 1, 1, 3, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 2, 2), (0, 2, 1, 1, 1, 1), \\ (0, 1, 1, 1, \frac{3}{2}, 1), (0, 1, 1, 2, 1, 2), (0, 1, 2, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1, \frac{3}{2}), \\ (0, 1, 1, 1, 1, 1)\}$$

bzw.

$$S_3 = \{(0, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1, 0), \\ (0, 1, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Analog zu den anderen Fällen erhält man:

**Lemma 5.4.6** *Alle stabilen Vektoren, so dass  $k_i < 1$ , sind  $v_1 = (0, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1, 2, 1, 1)$ ,  $v_3 = (0, 2, 2, 3, 2, 2)$  oder es gilt  $v = v_k + \sum_{i=1}^6 n_i w_i$  für  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ .*

Es bleibt also zu zeigen, dass sich alle positiven ganzzahligen Lösungen auf eindeutige Weise als Linearkombination schreiben lassen. Es gilt folgendes Lemma:

**Lemma 5.4.7** *Alle positiven ganzzahligen Lösungen lassen sich in jedem der drei Fälle auf eindeutige Weise als Linearkombination der Form  $v = v_k + \sum_{i=1}^6 k_i w_i$  schreiben, wobei  $k_i \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Je nach Startvektor  $v_1$  gilt in jedem der drei Fälle für eine Linearkombination  $\alpha$ , dass

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} - \alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}.$$

Das zeigt schon, dass die Lösungen eindeutig sind, da die jeweils betrachteten Extremalstrahlen zudem linear unabhängig sind und sich die Fälle gegenseitig ausschließen.

□

Das nächste Ziel ist es nun, zu einem gegebenen Lösungsvektor die Diskriminante auszurechnen, so dass man eine quadratische Gleichung erhält, deren Anzahl ganzzahliger Lösungen auf die Eulercharakteristik schließen lässt. Es sollen wieder die eben behandelten Fälle nacheinander behandelt werden. Im ersten Fall haben die Lösungen also die Gestalt:

$$\alpha = (k_1+1, k_1+k_3+k_5+l, k_1+k_4+k_6+m, k_2+k_5+k_6+n, k_2+k_4+1, k_2+k_3+1)$$

für  $k_i \in \mathbb{N}$  und  $l = m = n = 2$  oder  $l = m = 2$  und  $n = 1$ .

Im zweiten Fall haben die Lösungen die Gestalt

$$\alpha = (k_1+k_3+1, k_1+k_5+1, k_1+k_4+k_6+m, k_2+k_4+1, k_2+k_6+1, k_2+k_3+k_5+n)$$

für  $k_i \in \mathbb{N}$  und  $n = m = 1$ ,  $n = 1$  und  $m = 2$  oder  $n = 2$  und  $m = 1$ .

Die Lösungen im dritten Fall haben die Gestalt

$$\alpha = (0, k_2 + k_5 + n, k_3 + k_4 + n, k_1 + k_2 + k_3 + m, k_1 + k_4 + n, k_1 + k_5 + n)$$

für  $k_i \in \mathbb{N}$  und  $n = m = 1$  oder  $n = 1, 2$  und  $m = n + 1$ .

Zunächst wird angenommen, dass  $U_{i1} \not\subset U_{j2}$ . Die Diskriminante im Fall  $U_{i1} \subset U_{j2}$  für  $i \neq j$  ergibt sich anschließend daraus.

Sei  $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$ . Dann ergibt sich im ersten Fall:

$$\begin{aligned} D^1(k, l, m, n) &= 2(k_1 + 1)^2 + 2(k_1 + k_3 + k_5 + l)^2 + 2(k_1 + k_4 + k_6 + m)^2 \\ &\quad + 2(k_2 + k_5 + k_6 + n)^2 + 2(k_2 + k_4 + 1)^2 + 2(k_2 + k_3 + 1)^2 \\ &\quad + 2(k_1 + 1)(k_2 + k_5 + k_6 + n) + 2(k_2 + k_4 + 1) \\ &\quad (k_1 + k_3 + k_5 + l) + 2(k_1 + k_4 + k_6 + m)(k_2 + k_3 + 1) \\ &\quad - 2(k_1 + 1)(k_1 + k_3 + k_5 + l) - 2(k_1 + 1) \\ &\quad (k_1 + k_4 + k_6 + m) - 2(k_1 + k_4 + k_6 + m) \\ &\quad (k_1 + k_3 + k_5 + l) - 2(k_2 + k_5 + k_6 + n)(k_2 + k_4 + 1) \\ &\quad - 2(k_2 + k_5 + k_6 + n)(k_2 + k_3 + 1) - 2(k_2 + k_4 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_3 + 1) - 4(k_1 + 1)(k_2 + k_4 + 1) - 4(k_1 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_3 + 1) - 4(k_1 + k_3 + k_5 + l)(k_2 + k_5 + k_6 + n) \\ &\quad - 4(k_1 + k_3 + k_5 + l) \\ &\quad (k_2 + k_3 + 1) - 4(k_1 + k_4 + k_6 + m)(k_2 + k_4 + 1) \\ &\quad - 4(k_1 + k_4 + k_6 + m)(k_2 + k_3 + 1) \\ &= 2(k_1 + 1)(-k_1 - 3k_2 - 3k_3 - 3k_4 - l - m + n - 3) \\ &\quad + 2(k_1 + k_3 + k_5 + l) \\ &\quad (-3k_2 - k_3 - k_5 - 3k_6 + l - m - 2n - 1) \\ &\quad + 2(k_1 + k_4 + k_6 + m) \\ &\quad (k_1 - 3k_2 + k_3 - k_4 - 2k_5 + m - 2n - 1) \\ &\quad + 2(k_2 + k_5 + k_6 + n)(-k_2 - k_3 - k_4 + k_5 + k_6 + n - 2) \\ &\quad + 2(k_2 + k_4 + 1)(-k_3 + k_4) + 2(k_2 + k_3 + 1)(k_2 + k_3 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -18k_1k_2 - 6k_1k_3 - 6k_1k_4 - 6k_1k_5 - 6k_1k_6 - 6k_2k_3 \\
&\quad - 6k_2k_4 - 6k_2k_5 - 6k_2k_6 - 6k_3k_5 - 6k_3k_6 - 6k_4k_5 \\
&\quad - 6k_4k_6 - 6k_5k_6 + 2k_1(-3n - 6) + 2k_2(-3l - 3m - 3) \\
&\quad + 2k_3(-3n - 3) + 2k_4(-3n - 3) + 2k_5(-3m - 3) \\
&\quad + 2k_6(-3l - 3) \\
&\quad + 2(l^2 + m^2 + n^2 - lm - 2ln - 2mn - 2l - 2m - n - 2).
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned}
D^2(k, m, n) &= 2(k_1 + k_3 + 1)^2 + 2(k_1 + k_5)^2 + 2(k_1 + k_4 + k_6 + m)^2 \\
&\quad + 2(k_2 + k_4 + 1)^2 + 2(k_2 + k_6 + 1)^2 + 2(k_2 + k_3 + k_5 + n)^2 \\
&\quad + 2(k_1 + k_3 + 1)(k_2 + k_4 + 1) + 2(k_1 + k_5 + 1)(k_2 + k_6 + 1) \\
&\quad + 2(k_1 + k_4 + k_6 + m)(k_2 + k_3 + k_5 + n) - 2(k_1 + k_3 + 1) \\
&\quad (k_1 + k_5 + 1) - 2(k_1 + k_3 + 1)(k_1 + k_4 + k_6 + m) \\
&\quad - 4(k_1 + k_3 + 1)(k_2 + k_6 + 1) - 4(k_1 + k_3 + 1) \\
&\quad (k_2 + k_3 + k_5 + n) - 2(k_1 + k_5 + 1) \\
&\quad (k_1 + k_4 + k_6 + m) - 4(k_1 + k_5 + 1)(k_2 + k_4 + 1) \\
&\quad - 4(k_1 + k_5 + 1)(k_2 + k_3 + k_5 + n) - 4(k_1 + k_4 + k_6 + m) \\
&\quad (k_2 + k_4 + 1) - 4(k_1 + k_4 + k_6 + m)(k_2 + k_6 + 1) \\
&\quad - 2(k_2 + k_4 + 1)(k_2 + k_6 + 1) - 2(k_2 + k_4 + 1) \\
&\quad (k_2 + k_3 + k_5 + n) - 2(k_2 + k_6 + 1)(k_2 + k_3 + k_5 + n) \\
&= 2(k_1 + k_3 + 1)(-3k_2 - k_3 - 3k_5 - 3k_6 - 1 - m - 2n) \\
&\quad + 2(k_1 + k_5 + 1)(-k_1 - 3k_2 - 2k_3 - 2k_4 - k_5 - m - 2n) \\
&\quad + 2(k_1 + k_4 + k_6 + m)(k_1 - 3k_2 - k_3 - k_4 - k_5 - n - 2) \\
&\quad 2(k_2 + k_4 + 1)(-k_2 - k_3 + k_4 - k_5 - k_6 - n) \\
&\quad 2(k_2 + k_6 + 1)(-k_3 - k_5 - n + 1) + 2(k_2 + k_3 + k_5 + n)^2 \\
&= -18k_1k_2 - 6k_1k_3 - 6k_1k_4 - 6k_1k_5 - 6k_1k_6 \\
&\quad - 6k_2k_3 - 6k_2k_4 - 6k_2k_5 - 6k_2k_6 - 6k_3k_5 - 6k_3k_6 \\
&\quad - 6k_4k_5 - 6k_4k_6 - 12k_1 - 12k_2 - 12k_3 - 12k_4 - 12k_5 \\
&\quad - 12k_6 - 6k_1n - 6k_2m - 12m - 12n + 2mn + 2n^2 + 2m^2.
\end{aligned}$$

Im dritten Fall erhält man:

$$\begin{aligned}
D^3(k, m, n) &= 2(k_2 + k_5 + n)^2 + 2(k_3 + k_4 + n)^2 + 2(k_1 + k_2 + k_3 + m)^2 \\
&\quad + 2(k_1 + k_4 + n)^2 + 2(k_1 + k_5 + n)^2 - 2(k_2 + k_5 + n) \\
&\quad (k_1 + k_4 + n) - 2(k_3 + k_4 + n)(k_1 + k_5 + n) \\
&\quad - 2(k_2 + k_5 + n)(k_3 + k_4 + n) - 2(k_1 + k_2 + k_3 + m) \\
&\quad (k_1 + k_4 + n) - 2(k_1 + k_2 + k_3 + m)(k_1 + k_5 + n) \\
&\quad - 2(k_1 + k_4 + n)(k_1 + k_5 + n) - 4(k_2 + k_5 + n) \\
&\quad (k_1 + k_2 + k_3 + m) - 4(k_2 + k_5 + n)(k_1 + k_5 + n) \\
&\quad - 4(k_3 + k_4 + n)(k_1 + k_2 + k_3 + m) \\
&\quad - 4(k_3 + k_4 + n)(k_1 + k_4 + n) \\
&= 2(k_2 + k_5 + n)(-3k_1 - k_2 - 3k_3 - k_5 - 2m - n) \\
&\quad + 2(k_3 + k_4 + n)(-3k_1 - 2k_2 - k_3 - k_4 + k_5 - 2m) \\
&\quad + 2(k_1 + k_2 + k_3 + m)(-k_1 + k_2 + k_3 - k_4 - k_5 + m - 2n) \\
&\quad + 2(k_1 + k_4 + n)(k_4 - k_5) + 2(k_1 + k_5 + n)(k_1 + k_5 + n) \\
&= -6k_1k_2 - 6k_1k_3 - 6k_1k_4 - 6k_1k_5 - 6k_2k_3 \\
&\quad - 6k_2k_4 - 6k_2k_5 - 6k_3k_4 - 6k_3k_5 - 12k_1n - 12k_2n \\
&\quad - 12k_3n - 6k_4m - 6k_5m - 12mn + 2m^2.
\end{aligned}$$

Jede Lösung dieser quadratischen Gleichungen für fest vorgegebene Diskriminante  $D$  erfüllt also automatisch die Ungleichungen. Demnach braucht man „nur“ die Lösungen dieser Gleichungen zu bestimmen, um die Eulercharakteristik der Rang 3-Vektorbündel zu bestimmen. Es muss allerdings, wie oben erwähnt, die Veränderung der Diskriminante beachtet werden, falls die Unterräume ineinander liegen.

Offenbar hängt die Restklasse der Diskriminante in jedem der Fälle nur von  $l, m$  und  $n$  ab. Im ersten und zweiten Fall gilt  $D \equiv 0 \pmod{6}$ , falls der Startvektor  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  ist und  $D \equiv 4 \pmod{6}$  sonst. Im dritten Fall gilt  $D \equiv 4 \pmod{6}$ , falls der Startvektor  $(0, 1, 1, 2, 1, 1)$  bzw.  $(0, 1, 1, 1, 1, 1)$  ist und für den dritten und letzten Fall gilt  $D \equiv 0 \pmod{6}$ .

Im ersten Fall gilt dann

$$\begin{aligned}
D_{11,22}^1(l, m, n, k) &= D + 6\alpha_{11}\alpha_{22} \\
&= D^1(k, l, m, n) + 6(k_1k_2 + k_1k_4 + k_1 + k_2 + k_4 + 1) \\
&= -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j + 6k_1k_4 + 6k_3k_4 - 6k_1k_2 \\
&\quad - 6n(k_1 + k_3 + k_4) - 6l(k_2 + k_6) - 6m(k_2 + k_5) \\
&\quad - 6(k_1 + k_3 + k_5 + k_6) + 2(l^2 + m^2) \\
&\quad + n^2 - lm - 2ln - 2mn - 2l - 2m - n + 1)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
D_{11,32}^1(l, m, n, k) &= D + 6\alpha_{11}\alpha_{32} \\
&= D^1(k, l, m, n) + 6(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1 + k_2 + k_3 + 1) \\
&= -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j + 6k_1k_3 + 6k_3k_4 - 6k_1k_2 \\
&\quad - 6n(k_1 + k_3 + k_4) - 6l(k_2 + k_6) - 6m(k_2 + k_5) \\
&\quad - 6(k_1 + k_4 + k_5 + k_6) \\
&\quad + 2(l^2 + m^2 + n^2 - lm - 2ln - 2mn - 2l \\
&\quad - 2m - n + 1).
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall gilt dann

$$\begin{aligned}
D_{11,22}^2(m, n, k) &= D^2(k, m, n) + 6\alpha_{11}\alpha_{22} \\
&= -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j - 6k_1k_2 + 6k_1k_6 + 6k_2k_3 + 6k_3k_4 \\
&\quad + 6k_3k_6 + 6k_5k_6 - 6(k_1 + k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5 + k_6) \\
&\quad - 6k_1n - 6k_2m - 12m - 12n + 2mn + 2n^2 + 2m^2 + 6
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
D_{21,12}^2(m, n, k) &= D^2(k, m, n) + 6\alpha_{21}\alpha_{12} \\
&= -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j - 6k_1k_2 + 6k_1k_4 + 6k_2k_5 + 6k_3k_4 \\
&\quad + 6k_4k_5 + 6k_5k_6 - 6(k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6) \\
&\quad - 6k_1n - 6k_2m - 12m - 12n + 2mn + 2n^2 + 2m^2 + 6.
\end{aligned}$$

Im dritten Fall ändert sich die Diskriminante nicht, da  $\alpha_{11} = 0$ .

Es müssen nur die Lösungen der letzten vier quadratischen Gleichungen und die Lösungen des dritten Falls, also  $\alpha_{11} = 0$ , betrachtet werden, da die Modulräume einem  $\mathbb{P}^1$  ohne zwei Punkte entsprechen und somit die Eulercharakteristik 0 ist. Diese Punkte gehören also zu Modulräumen mit der eben berechneten Diskriminante.

Wertet man die obigen Funktionen an den relevanten Werten für  $m, n$  und  $l$  aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
D_{11,22}^1(2, 2, 1, k) &= -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j + 6k_1k_4 + 6k_3k_4 - 6k_1k_2 \\
&\quad - 6(2k_1 + 4k_2 + 2k_3 + k_4 + 3k_5 + 3k_6) - 22
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
D_{11,22}^1(2, 2, 2, k) &= -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j + 6k_1k_4 + 6k_3k_4 - 6k_1k_2 \\
&\quad - 6(3k_1 + 4k_2 + 3k_3 + 2k_4 + 3k_5 + 3k_6) - 34
\end{aligned}$$



und

$$D_{11,32}^1(2, 2, 1, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j + 6k_1 k_3 + 6k_3 k_4 - 6k_1 k_2 \\ - 6(2k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4 + 3k_5 + 3k_6) - 22$$

bzw.

$$D_{11,32}^1(2, 2, 2, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j + 6k_1 k_3 + 6k_3 k_4 - 6k_1 k_2 \\ - 6(3k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 3k_5 + 3k_6) - 34.$$

Wertet man  $D^2$  aus, so ergibt sich:

$$D_{11,22}^2(1, 2, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j - 6k_1 k_2 + 6k_1 k_6 + 6k_2 k_3 + 6k_3 k_4 \\ + 6k_3 k_6 + 6k_5 k_6 - 6(3k_1 + 2k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5 + k_6) \\ - 16$$

bzw.

$$D_{11,22}^2(2, 1, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j - 6k_1 k_2 + 6k_1 k_6 + 6k_2 k_3 + 6k_3 k_4 \\ + 6k_3 k_6 + 6k_5 k_6 - 6(2k_1 + 3k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5 + k_6) \\ - 16$$

und

$$D_{21,12}^2(1, 2, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j - 6k_1 k_2 + 6k_1 k_4 + 6k_2 k_5 + 6k_3 k_4 \\ + 6k_4 k_5 + 6k_5 k_6 - 6(3k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6) \\ - 16$$

bzw.

$$D_{21,12}^2(2, 1, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} k_i k_j - 6k_1 k_2 + 6k_1 k_4 + 6k_2 k_5 + 6k_3 k_4 \\ + 6k_4 k_5 + 6k_5 k_6 - 6(2k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6) \\ - 16.$$

Weiter gilt für  $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ , dass

$$D^3(2, 1, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} k_i k_j + 6k_4 k_5 - 12(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) - 16$$

bzw.

$$D^3(1, 1, k) = -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} k_i k_j + 6k_4 k_5 - 6(2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 + k_5) - 10.$$

Offenbar gelten folgende Gleichungen:

$$D_{11,22}^1(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = D_{11,32}^1(k_1, k_2, k_4, k_3, k_5, k_6),$$

$$D_{11,22}^2(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = D_{21,12}^2(k_1, k_2, k_5, k_6, k_3, k_4)$$

und

$$D_{11,22}^2(1, 2, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = D_{11,22}^2(2, 1, k_2, k_1, k_6, k_5, k_4, k_3).$$

Definiere

$$K_{i,j}^1(D, l, m, n) = \{k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) \in \mathbb{N}_0^6 \mid D_{i,j}^1(l, m, n, k) = D\}$$

für passende  $i, j$ . Definiere  $K_{i,j}^2(D, m, n)$  bzw.  $K^3(D, m, n)$  analog.

Dann gilt wegen der aufgezeigten Gleichungen der folgende Satz:

**Satz 5.4.8** *Sei  $D \equiv 4 \pmod{6}$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{M}(D)) &= 12|K_{11,22}^1(D, 2, 2, 1)| + 12|K_{11,22}^1(D, 2, 2, 2)| \\ &\quad + 12|K_{11,22}^2(D, 1, 2)| + 6|K^3(D, 1, 2)| + 6|K^3(D, 1, 1)|. \end{aligned}$$

Wie im Fall der Rang 2-Bündel schließt sich folgendes Korollar an. Sei dazu  $F(x)$  die Erzeugendenfunktion der Eulercharakteristik.

**Korollar 5.4.9** *Sei  $D \equiv 4 \pmod{6}$ . Es gilt*

$$\begin{aligned} F(x) &= 12 \left( \sum_{k \in \mathbb{N}_0^6} x^{D_{11,22}^1(2,2,1,k)} + x^{D_{11,22}^1(2,2,2,k)} + x^{D_{11,22}^2(1,2,k)} \right) \\ &\quad + 6 \sum_{k \in \mathbb{N}_0^5} x^{D^3(2,1,k)} + 6 \sum_{k \in \mathbb{N}_0^5} x^{D^3(1,1,k)}. \end{aligned}$$

## 5.4.2 Der Fall $D \equiv 0 \pmod{6}$

Es soll in diesem Abschnitt der Fall betrachtet werden, falls für die Diskriminante gilt  $D \equiv 0 \pmod{6}$ . In diesem Fall gibt es auch semistabile bzw. polystabile Punkte, so dass das Vorgehen des letzten Abschnitts leicht modifiziert werden muss.

Zunächst gelte  $\alpha_{ij} \neq 0$  und betrachtet werden erst alle neun Fälle von Inklusionen, die im letzten Abschnitt aufgezeigt wurden. Alle Extrempunkte bis auf den Punkt  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  entsprechen Punkten im Fall  $D \equiv 4 \pmod{6}$ . Es ist also nur noch dieser Extrempunkt zu betrachten. Allerdings ist hier

darauf zu achten, dass die Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt sein können, so dass die Ungleichungen sich nicht gegenseitig ausschließen. Deswegen betrachte alle im letzten Abschnitt auftretenden Extremalstrahlen, d.h.

$$S = \{(1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 1), \\ (0, 0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1, 0)\}.$$

Es sei bemerkt, dass sich die Extremalstrahlen der neun Fälle im letzten Abschnitt daraus ergeben, dass man aus diesen acht Strahlen die ersten beiden und zusätzlich einen der Strahlen drei bis fünf bzw. sechs bis acht weglässt. Die Linearkombinationen dieser Strahlen mit dem Extrempunkt  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  als Startpunkt haben also die Form

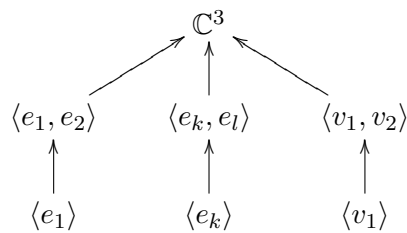
$$\alpha = (k_1 + k_3 + k_6 + 1, k_1 + k_4 + k_7 + 1, \\ k_1 + k_5 + k_8 + 1, k_2 + k_5 + k_7 + 1, k_2 + k_3 + k_8 + 1, \\ k_2 + k_4 + k_6 + 1).$$

Sei  $k = (k_1, k_2, \dots, k_8)$ . Für die Diskriminante ergibt sich dann

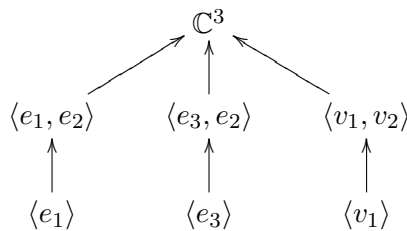
$$\begin{aligned} D(k) &= 2(k_1 + k_3 + k_6 + 1)(k_1 + k_3 + k_6 + 1) + 2(k_1 + k_3 + k_6 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_5 + k_7 + 1) - 2(k_1 + k_3 + k_6 + 1)(k_1 + k_4 + k_7 + 1) \\ &\quad - 2(k_1 + k_3 + k_6 + 1)(k_1 + k_5 + k_8) - 4(k_1 + k_3 + k_6 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_3 + k_8) - 4(k_1 + k_3 + k_6)(k_2 + k_4 + k_6 + 1) \\ &\quad + 2(k_1 + k_4 + k_7 + 1)(k_1 + k_4 + k_7 + 1) + 2(k_1 + k_4 + k_7 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_3 + k_8 + 1) - 2(k_1 + k_4 + k_7 + 1)(k_1 + k_5 + k_8 + 1) \\ &\quad - 4(k_1 + k_4 + k_7 + 1)(k_2 + k_5 + k_7 + 1) - 4(k_1 + k_4 + k_7 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_4 + k_6 + 1) + 2(k_1 + k_5 + k_8 + 1)(k_1 + k_5 + k_8 + 1) \\ &\quad + 2(k_1 + k_5 + k_8 + 1)(k_2 + k_4 + k_6 + 1) - 4(k_1 + k_5 + k_8 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_5 + k_7 + 1) - 4(k_1 + k_5 + k_8 + 1)(k_2 + k_3 + k_8 + 1) \\ &\quad + 2(k_2 + k_5 + k_7 + 1)(k_2 + k_5 + k_7 + 1) - (k_2 + k_5 + k_7 + 1) \\ &\quad 2(k_2 + k_3 + k_8 + 1) - 2(k_2 + k_5 + k_7 + 1)(k_2 + k_4 + k_6 + 1) \\ &\quad + 2(k_2 + k_3 + k_8 + 1)(k_2 + k_3 + k_8 + 1) - 2(k_2 + k_3 + k_8 + 1) \\ &\quad (k_2 + k_4 + k_6 + 1) + 2(k_2 + k_4 + k_6 + 1)(k_2 + k_4 + k_6 + 1) \\ &= 2(k_1 + k_3 + k_6 + 1)(-k_1 - 3k_2 - k_3 - 3k_4 - k_6 - 3k_8 - 4) \\ &\quad + 2(k_1 + k_4 + k_7 + 1)(-3k_2 + k_3 - k_4 - 3k_5 - 2k_6 - k_7 - 3) \\ &\quad + 2(k_1 + k_5 + k_8 + 1)(k_1 - 3k_2 - 2k_3 + k_4 - k_5 + k_6 - 2k_7 \\ &\quad - k_8 - 2) + 2(k_2 + k_5 + k_7 + 1)(-k_2 - k_3 - k_4 + k_5 - k_6 \\ &\quad + k_7 - k_8 - 1) + 2(k_2 + k_3 + k_8 + 1)(k_3 - k_4 - k_6 + k_8) \\ &\quad + 2(k_2 + k_4 + k_6 + 1)(k_2 + k_4 + k_6 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 8} k_i k_j - 12k_1 k_2 + 6k_3 k_7 + 6k_4 k_8 + 6k_5 k_6 - 18k_1 \\
&\quad - 18k_2 - 12 \sum_{i=3}^8 k_i - 18
\end{aligned}$$

Definiere  $K_1 = \{k_3, k_4, k_5\}$  und  $K_2 = \{k_6, k_7, k_8\}$ . Sei zunächst  $\alpha_{ij} = 1$  für  $i, j$ . Wie bereits gezeigt, können wir davon ausgehen, dass die Filtrierung in Standardform ist. Wir betrachten also



Dabei sind  $k, l \in \{1, 2, 3\}$ , wobei  $k \neq l$ , und  $v_1 \neq v_2$  beliebige Vektoren. Die stabilen Filtrierungen zu der hier betrachteten Länge der Arme sind genau diejenigen unter diesen, die die folgende Form haben:

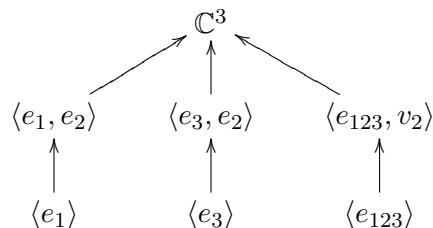


mit gewissen Bedingungen an  $v_1$  und  $v_2$ , die jetzt genauer untersucht werden sollen.

Definiere  $e_{ij} = e_i + e_j$  und  $e_{123} = (1, 1, 1)$ . Die Fälle  $v_1 = e_i$  ergeben offenbar nicht stabile Darstellungen. Die Fälle  $v_1 = e_{ij}$  für  $i \neq j$  entsprechen echt polystabilen Darstellungen, diese werden später genau analysiert. Sei also  $(v_1)_i \neq 0$ , so dass man o.B.d.A. annehmen kann, dass  $v_1 = e_{123}$ .

Weiter kann in dieser Situation o.B.d.A. angenommen werden, dass  $(v_2)_1 = 0$ , weil man zu  $v_2$  beliebige Vielfache von  $e_{123}$  addieren kann. So erhält man insgesamt folgendes Lemma:

**Lemma 5.4.10** *Alle stabilen Darstellungen von  $\mathcal{U}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  haben die Form*



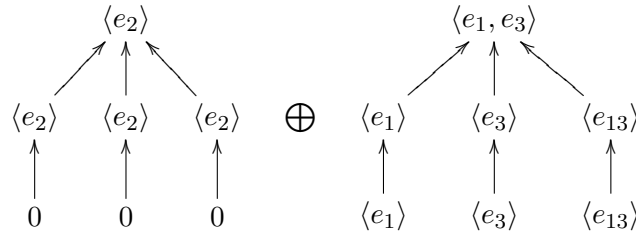
wobei  $(v_2)_1 = 0$  und  $v_2 \neq e_2, e_3, e_{23}$ . Insbesondere gilt für den Modulraum der stabilen Punkte  $\mathcal{M}(1, 1, 1, 1, 1, 1)^s = \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)\}$ .

Bemerkt sei, dass der Fall  $v_2 = e_{23}$  dem Fall  $v_2 = e_1$  entspricht. Dass die drei Darstellungen, die zu den Punkten  $(1 : 0)$ ,  $(0 : 1)$  bzw.  $(1 : 1)$  korrespondieren nicht stabil sind, sondern lediglich semistabil, überprüft man durch einfache Rechnung.

Wir erhalten folgendes Korollar für beliebige  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{31}, \alpha_{32} \in \mathbb{N}$ :

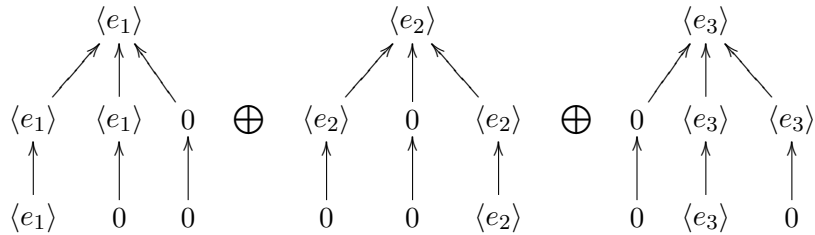
**Korollar 5.4.11** *Gibt es zum Köcher  $\mathcal{U}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{31}, \alpha_{32})$  stabile Punkte, so sind die Punkte aus 5.4.10 stabil.*

Die polystabilen Punkte lassen sich wie folgt darstellen. Es ergibt sich für  $\alpha_{i,j} = k$  für alle  $i, j$  die polystabile Darstellung, die von der folgenden induziert wird:

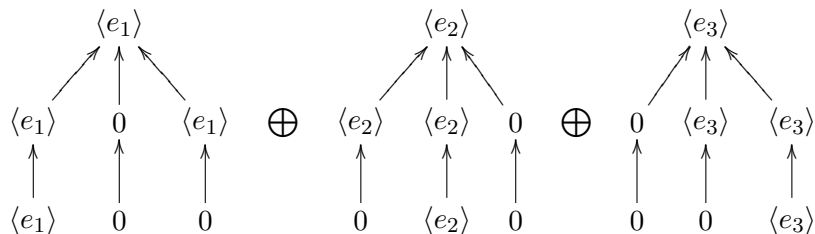


Dieser Punkt induziert also einen polystabilen Punkt des Köchers, der durch die Verlängerung der Arme mit dem Vektor  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  entsteht. Bezeichne diesen Punkt als polystabil vom Typ 1.

Betrachte weiter die polystabilen Darstellungen:



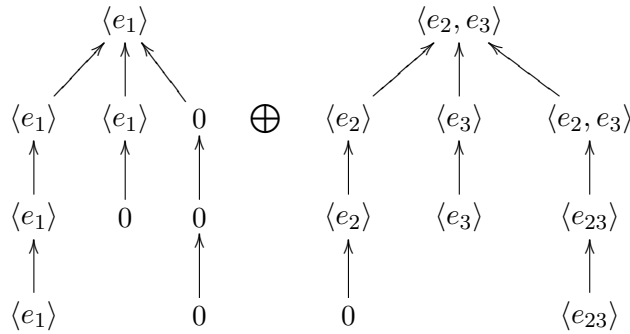
bzw.



Das sind die anderen beiden polystabilen Punkte im Fall  $\alpha_{i,j} = 1$ . Diese sind stabil unter Verlängerung von Tupeln  $(\alpha_{21}, \alpha_{12})$ ,  $(\alpha_{31}, \alpha_{22})$  und  $(\alpha_{11}, \alpha_{32})$

bzw.  $(\alpha_{11}, \alpha_{22})$ ,  $(\alpha_{21}, \alpha_{32})$  und  $(\alpha_{31}, \alpha_{12})$ . Bezeichne diese Punkte als polystabil vom Typ 2.

Betrachte nun den Fall mit Armen der Länge  $(1, 1, 2, 2, 1, 1)$ . In diesem Fall gibt es den polystabilen Punkt

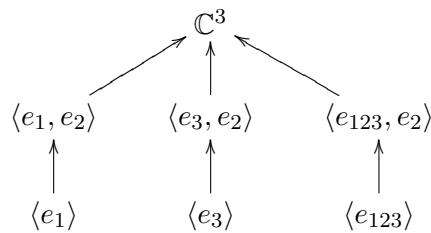


und entsprechende polystabile Punkte für die anderen fünf Verlängerungen. Dieser bleibt unter den Verlängerungen mit  $(\alpha_{11}, \alpha_{32})$ ,  $(\alpha_{31}, \alpha_{22})$ ,  $(\alpha_{21}, \alpha_{12})$  und  $(\alpha_{31}, \alpha_{12})$  bestehen. Bezeichne diese Punkte als polystabil vom Typ 3.

Wenn wir nun eine konkrete Lösung des Linearen Gleichungssystems bestimmen wollen, so können wir offenbar davon ausgehen, dass für je ein  $k \in K_i$ ,  $i = 1, 2$ , gilt, dass  $k = 0$ . Betrachtet man wieder die Ungleichungen (5.2)-(5.5) und die Überlegungen zu den polystabilen bzw. stabilen Punkten, so ergibt sich zusammenfassend folgendes Lemma:

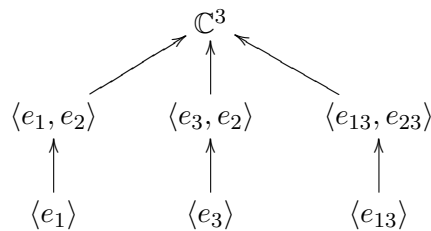
**Lemma 5.4.12** Sei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^6$  mit  $D(\alpha) \equiv 0 \pmod{6}$ , so dass  $\mathcal{U}(\alpha)$  stabile Darstellungen zulässt.

1. Die von



induzierte Filtrierung ist genau dann stabil, wenn  $k_1 > k_2$ .

2. Die von



induzierte Filtrierung ist genau dann stabil, wenn  $k_2 > k_1$ .

3. Falls  $k_1 = k_2$ , so gibt es einen polystabilen Punkt vom Typ 1.
4. Falls  $k \neq 0$  für genau ein  $k \in K_i$ ,  $i = 1, 2$ , so gibt es einen polystabilen Punkt vom Typ 2 und einen vom Typ 3.
5. Falls  $k, l \neq 0$  für genau zwei unterschiedliche  $k, l \in K_i$ ,  $i = 1, 2$ , so gibt es einen stabilen Punkt, der von einer Inklusion herkommt und einen polystabilen Punkt vom Typ 2.
6. Falls  $k, l \neq 0$  für genau ein  $k \in K_1$  und genau ein  $l \in K_2$ , so gibt es zwei polystabile Punkte vom Typ 3.
7. Falls  $k, l, n \neq 0$  für genau zwei unterschiedliche  $k, l \in K_i$  und ein  $n \in K_j$  mit  $i \neq j$ , so gibt es einen stabilen Punkt, der von einer Inklusion herkommt und einen polystabilen Punkt vom Typ 3.
8. Falls  $k, l, m, n \neq 0$  für genau zwei unterschiedliche  $k, l \in K_1$  und genau zwei unterschiedliche  $n, m \in K_2$ , so gibt es zwei stabile Punkte, die von einer Inklusion herkommen.

Betrachtet man alle in diesem Abschnitt behandelten polystabilen Filtrierungen, so ergibt sich durch einfache Rechnung aus [ALB], dass diese Punkte glatt sind. Wie bereits im letzten Abschnitt ergibt sich also, wenn wir die Existenz eines stabilen Punktes voraussetzen, dass

$$M(\mathcal{U}(\alpha))^{ss} \cong \mathbb{P}^1.$$

Den Modulraum der stabilen Punkte erhalten wir dann aus den Überlegungen des letzten Lemmas, indem wir die polystabilen Punkte weglassen.

Bemerkt sei noch, dass der Modulraum der semistabilen Punkte mit dem Modulraum der stabilen Punkte also genau dann überstimmt, falls im achten Fall des Lemmas zusätzlich  $k_1 \neq k_2$  gilt.

Schlussendlich sind die Fälle zu betrachten, falls  $\alpha_{ij} = 0$  für genau ein Paar  $i, j$ . Das ist der Fall des Extrempunktes  $(0, 2, 2, 3, 2, 2)$ , in dem o.B.d.A.  $\alpha_{11} = 0$  wie im letzten Abschnitt. Dann ergibt sich die Diskriminante:

$$\begin{aligned} D^0(k) = & -6 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} k_i k_j + 6k_4 k_5 - 24k_1 - 24k_2 \\ & - 24k_3 - 18k_4 - 18k_5 - 54. \end{aligned}$$

Es soll die Erzeugendenfunktion für diesen Fall bestimmt werden. Dazu definiere

$$D^1(k) = D(k) + 6(k_1 + k_5 + k_8 + 1)(k_2 + k_5 + k_7 + 1),$$

$$D^2(k) = D(k) + 6(k_1 + k_3 + k_6 + 1)(k_2 + k_4 + k_6 + 1)$$

und

$$D^3(k) = D(k) + 6(k_1 + k_5 + k_8 + 1)(k_2 + k_3 + k_8 + 1).$$

Das entspricht der Diskriminante der Inklusionen  $U_{31} \subset U_{12}$ ,  $U_{11} \subset U_{32}$  und  $U_{31} \subset U_{22}$ . Es reicht die Fälle zu betrachten, die sich aus diesen drei Fällen ergeben, die anderen Fälle kann man wie im letzten Abschnitt via Vertauschung der Arme konstruieren.

Sei wieder

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(\mathcal{M}(6n))x^{6n}$$

die Erzeugendenfunktion für die Eulercharakteristik.

Definiere  $\mathcal{N}^{k,l} = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}_+^l$  für ein  $k \in \mathbb{N}_+$ . Dann ergibt sich der folgende Satz:

**Satz 5.4.13** *Es gilt*

$$\begin{aligned} F(x) = & - \sum_{k=0}^{\infty} x^{D(k,k,0,\dots,0)} - 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,1}} x^{D(k_1,k_1,k_2,0,\dots,0)} \\ & - 3 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,2}} x^{D(k_1,k_1,k_2,0,0,0,k_3,0)} - 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,2}} x^{D(k_1,k_1,k_2,0,0,0,0,k_3)} \\ & - 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,2}} x^{D(k_1,k_1,k_2,k_3,0,0,0,0)} - 12 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,3}} x^{D(k_1,k_1,k_2,k_3,0,0,k_4,0)} \\ & - 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,3}} x^{D(k_1,k_1,k_2,k_3,0,k_4,0,0)} - 3 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,4}} x^{D(k_1,k_1,k_2,k_3,0,0,k_4,k_5)} \\ & - 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{1,4}} x^{D(k_1,k_1,k_2,k_3,0,k_4,k_5,0)} \\ & + 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{2,2}} x^{D^1(k_1,k_2,k_3,k_4,0,0,0,0)} + 12 \sum_{k \in \mathcal{N}^{2,3}} x^{D^1(k_1,k_2,k_3,k_4,0,0,k_5,0)} \\ & + 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{2,3}} x^{D^1(k_1,k_2,k_3,k_4,0,k_5,0,0)} + 3 \sum_{k \in \mathcal{N}^{2,4}} x^{D^1(k_1,k_2,k_3,k_4,0,0,k_5,k_6)} \\ & + 3 \sum_{k \in \mathcal{N}^{2,4}} x^{D^2(k_1,k_2,k_3,k_4,0,0,k_5,k_6)} + 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{2,4}} x^{D^2(k_1,k_2,k_3,k_4,0,k_5,k_6,0)} \\ & + 6 \sum_{k \in \mathcal{N}^{2,4}} x^{D^3(k_1,k_2,k_3,k_4,0,k_5,k_6,0)} + 6 \sum_{k \in \mathbb{N}^5} x^{D^0(k)}. \end{aligned}$$

Bemerkt sei noch, dass man im Fall  $k_1 \neq k_2$  nur die stabilen Punkte zählen muss, da sich als Modulraum der  $\mathbb{P}^1$  ohne zwei Punkte ergibt, die Eulercharakteristik demnach null ist.



# Literaturverzeichnis

- [ALB] Adriaenssens, J., Le Bruyn, L.: Local Quivers and Stable Representations. *Communications in Algebra* **31** (4), 1777-1797 (2003).
- [ASS] Assem, I., Simson, D., Skowronski, A.: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- [BGP] Bernstein, I., Gelfand, I.M., Ponomarev, V.A.: Coxeter functors and Gabriel's theorem. *Russian Math. Surveys* **28**, 17-32 (1973).
- [Bog] Bogomolov, F.A.: Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties. *Math. USSR Izvestja* **13**, 499-555, 1979.
- [CG] Chriss, N., Ginzburg, V.: *Representation Theory and Complex Geometry*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [Dou] Douglas, Michael: Mündliche Mitteilung an Markus Reineke vom 02.08.2004.
- [Dre] Drezet, J.-M.: Cohomologie des variétés de modules de hauteur nulle. *Math. Ann.* **281**, 43-85 (1988).
- [Drm] Drmota, M.: Combinatorics and Asymptotics on Trees. *Cubo Journal* **6** (2), 105-136 (2004).
- [EM] Evens, S., Mirković, I.: Fourier transform and the Iwahori-Matsumoto involution. *Duke Math. J.* **86** (1997), 435-464.
- [Fahr] Fahr, Ph.: Infinite Gabriel-Roiter measures for the 3-Kronecker quiver. Doktorarbeit, Universität Bielefeld, 2007.

- [FR] Fahr, Ph., Ringel, C.: A Partition Formula for Fibonacci Numbers. *Journal of Integer Sequences* **11**, Artikel 08.1.4 (2008).
- [Ful] Fulton, W.: *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1993.
- [GH] Griffiths, P., Harris, J.: *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, New York 1994.
- [Har] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag Inc., New York 1977.
- [Hir] Hirzebruch, F.: *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Grundlehren 131. Springer-Verlag, Heidelberg 1966.
- [HN] Harder, G., Narasimhan, M.S.: On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.* **212**, 215-248 (1974/75).
- [HP] Harary, F., Palmer, E.M.: *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York 1973.
- [Hul] Hulek, K.: On the classification of stable rank  $r$  vector bundles over the projective plane, in "Vector bundles and differential equations", *Progress in Mathematics* **7**, 113-144 (1979).
- [Hum] Humphreys, J.E.: *Linear Algebraic Groups*. Springer Verlag Inc., New York 1975.
- [Kac] Kac, V.G.: Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. *Inventiones mathematicae* **56**, 57-92 (1980).
- [King] King, A.: Moduli of representations of finite-dimensional algebras. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **45**, 515-530 (1994).
- [Kly1] Klyachko, A. A.: Moduli of Vector Bundles and Number of Classes. Translated from *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya* **25** (1), 81-83 (1991).
- [Kly2] Klyachko, A.A.: Equvariant bundles on toral varieties. *Math. USSR Izvestiya* **35** (2), 337-375 (1990).

- [Kly3] Klyachko, A.A.: Vector Bundles, Linear Representations and Spectral Problems. Preprint 2003, arXiv: math/0304325v1.
- [LeP] Le Potier, J.: Lectures on vector bundles. Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [Lue] Lück, W.: Algebraische Topologie. Vieweg, Wiesbaden 2005.
- [Mar] Maruyama, M.: Construction of Moduli Spaces of Stable Sheaves via Simpson's Idea. Moduli of vector bundles. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **179**, 147-187 (1996).
- [MM] Meir, A., Moon, J.W.: On the altitude of nodes in random trees. Can. J. Math. **30**, 997-1015 (1978).
- [Muk] Mukai, S.: An Introduction to Invariants and Moduli. Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- [Mum] Mumford, D., Fogarty J., Kirwan, F.: Geometric Invariant Theory. Springer, Berlin 1994.
- [Nak] Nakamoto, K.: On monads and vector bundles over the projective plane. Preprint 2000.
- [OSS] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H.: Vector bundles on complex projective varieties. Birkhäuser, Boston 1980.
- [Pad] Padberg, Manfred: Linear Optimization and Extensions. Springer, Berlin 1995.
- [Pet] Peters, M.: The Diophantine Equation  $xy + yz + xz = n$  and Indecomposable Binary Quadratic Forms. Experimental Mathematics **13:3**, 273-274 (2004).
- [Rei1] Reineke, Markus: Localization in quiver moduli. Preprint 2005. Erscheint in Journal für die reine und angewandte Mathematik. arXiv: math.AG/0509361
- [Rei2] Reineke, M.: The Harder-Narasimhan system in quantum groups and cohomology of quiver moduli. Inventiones mathematicae **152**, 349-368 (2003).
- [Rei3] Reineke, M.: The use of geometric and quantum group techniques for wild quivers. *Representations of finite*

*dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry*, Fields Institut Community **40**, American Math. Society, Providence, RI, 365-390 (2004).

- [Rei4] Reineke, M.: Moduli of Representations of Quivers. Preprint 2008. Erscheint in: Proceedings of ICRA XII. arXiv:0802.2147.
- [Rin1] Ringel, C.M.: Exceptional modules are tree modules. *Linear algebra and its Applications* **275-276**, 471-493 (1998).
- [Rin2] Ringel, C.M.: Combinatorial Representation Theory. History and future. *Representations of Algebras* **1**. Proceedings of the Conference on ICRA IX, Beijing 2000, Beijing Normal University Press, 122-144 (2002).
- [RU] Remmert, R., Ullrich, P.: *Elementare Zahlentheorie*. Birkhäuser Verlag, Basel 1995.
- [SB] Schofield, A., van den Bergh, M.: Semi-invariants of quivers for arbitrary dimension vectors. *Indag. Math.* **12** (1), 125-138.
- [Sch] Schofield, A.: Semi-Invariants of Quivers. *J. London Math. Soc.* **43**, 385-395 (1991).
- [Sch2] Schofield, A.: Birational classification of moduli spaces of representations of quivers. *Indag. Math.* **12** (3), 407-432 (2001).
- [SF] Sedgewick, R., Flajolet, P.: *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison Wesley, 1996.
- [Sha1] Shafarevich, I.R.: *Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space*. Springer, Berlin 1994.
- [Sha2] Shafarevich, I.R.: *Basic Algebraic Geometry 2, Schemes and Complex Manifolds*. Springer, Berlin 1994.
- [Sim] Simpson, C.T.: Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety. *Publications Mathématiques de l'IHES* **79,80** (1994).
- [Spr] Springer, T.A.: *Linear Algebraic Groups*. Birkhäuser, Boston 1981.

[Wei]

Weist, Th.: Asymptotische Eulercharakteristik von Kroneckermodulräumen. Diplomarbeit, Westfälische-Wilhelms-Universität Münster, 2005.