

**Noris Konstruktion und
Bahnenabschlüsse
in der Varietät der Algebren**



Dissertation
(Zweite Ausgabe)

zur Erlangung
des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich C
der Bergischen Universität Wuppertal
vorgelegt von

Roland Olbricht

im Juli 2008

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20080414

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20080414>]

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
1 Begriffe und Definitionen	8
1.1 Quotienten	8
1.2 Ein Modulraum halbeinfacher Darstellungen der freien Algebra . . .	10
2 Die Varietät der Algebren	13
2.1 Tangentialraum	15
2.2 Entartungsverhalten	24
2.3 Der Orbitabschluss der Matrixalgebra	32
3 Die Nori-Konstruktion	42
3.1 Zusammenhang zu Alg_n	43
3.2 Der Kandidat als Quotient	45
3.3 Projektiv von $\text{Hilb}_{n,g}$ nach $Z_{n,g}$	47
3.4 Von $Z_{d,g}$ nach $Z_{d^2,g}$	50
3.5 Der Morphismus π_d	52
4 Struktur der Desingularisierung	54
4.1 Fixpunkte unter der multiplikativen Gruppe	55
4.2 Die Zellenzerlegung	58
4.3 Die Fasern von π_2	60
Literaturverzeichnis	65

Vorwort

Wir wollen die Moduln fester Dimension der freien assoziativen Algebra mit Eins bis auf Isomorphie beschreiben. Da es überabzählbar unendlich viele solche gibt, suchen wir uns als geeigneten Formalismus den des Modulraums, wie er in der Algebraischen Geometrie benutzt wird; seine Analyse entspricht der Antwort auf [Rei04, Frage 4.1]: „What is the geometric structure of the quotient variety $(\mathbb{C}^{d \times d})^g // \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$?“; es stellt sich heraus, dass wir auf diese Weise allerdings nur Isomorphieklassen halbeinfacher Moduln parametrisieren können. Andererseits führt uns die Antwort zu der Varietät, die alle assoziativen Algebren mit Eins fester Dimension als Punkte anhand ihrer Strukturkonstanten parametrisiert.

Der Modulraum zu den Moduln der freien Algebra ist jedoch hochgradig singulär; Ansätze zur Desingularisierung bieten auf generische Weise [Kir85] sowie speziell für unser Problem die Konstruktion von M. V. Nori [Nor78] im Anhang zu einer Arbeit von Seshadri [Ses78]; wir werden uns hier auf letztere Konstruktion beschränken. Dabei reicht der Zusammenhang zu einem analogen Problem für Vektorbündel so weit, dass in unserem Fall sogar eine ebensolche Faserstruktur wie in [BS90] auftritt.

Noris Konstruktion führt das Problem der Desingularisierung auf die Glattheit des Orbitabschlusses der Matrixalgebra in der Varietät der Algebren zurück. Für 2×2 -Matrizen ist schon länger bekannt, dass ihr Orbitabschluss glatt ist [Ses67]; für die Orbitabschlüsse von $n \times n$ -Matrizen für $n > 2$ gilt dies nicht [LBR99]. Wir werden hier die Situation genauer analysieren und dazu auf die Sprache aus [Gab74] zurückgreifen; als ein wichtiges Hilfsmittel erweist sich, dass sich die Eins ohne strukturelle Veränderungen der Varietät fixieren lässt [LB97]. Dies lässt sich zu einer Beschreibung der Entartung von Algebrenorbiten anhand ihrer Idempotentstruktur ausbauen; dieses in [Fla74] angedeutete Konzept ist in [Sch88] systematisch entwickelt worden. Nach den für die Varietät der 5-dimensionalen Algebren bereits bekannten Ergebnissen [Maz79] hat dieser Ansatz in einer Serie von Artikeln [DP89], [DP91], [DPS92], [DP94] und [DPS96] zu reichhaltigen Ergebnissen für die Varietäten der 6-, 7- und 8-dimensionalen Algebren geführt.

Diese Arbeit lässt sich im Wesentlichen den Gebieten Geometrische Invariantentheorie, Darstellungstheorie und Algebraische Geometrie zuordnen. Ergebnisse der Geometrischen Invariantentheorie, wie sie in den Lehrbüchern [Kra84] und [SB00] zusammengestellt sind, setzen wir hier voraus. Im Hinblick auf den Übersetzungsprozess zu Vektorbündeln sei auf [New78] hingewiesen, für den Begriff der Stabilität auf [MFK94]. Der Zusammenhang zur Darstellungstheorie ist eng, so befassen sich etwa die Arbeiten [Kin94] und [Kra82] mit der Übertragung von Ergebnissen zwischen den Gebieten. Wir greifen hier auf Lemmata und Konzepte aus [Ful97] und [Hum78] zurück. Sowohl die Geometrische Invariantentheorie als auch die Darstel-

lungstheorie stützen sich wesentlich auf die Algebraische Geometrie ab; eine systematische Darstellung bieten [Gro60] und die folgenden Bände, das Standardwerk zur Einführung ist [Har77]. Neuere Lehrbücher, die nahezu die gesamten benötigten Grundlagen aus allen drei Gebieten zusammenfassen, sind [Muk03] und das Paar [LB05b] und [LB05a].

In Kapitel 1 führen wir zunächst den Modulraum der d -dimensionalen halbeinfachen Moduln der freien assoziativen Algebra in g Erzeugern ein. Dazu ziehen wir den Quotienten eines affinen Raums unter einer $GL_d(\mathbb{C})$ -Aktion heran und zeigen mit elementaren Mitteln, dass die abgeschlossenen Orbits dieser Aktion gerade die Isomorphieklassen halbeinfacher Moduln sind. Zwar erhalten wir ein endliches Erzeugendensystem des Koordinatenrings dieses Modulraums [Pro76], aber schon das zweitkleinste nichttriviale Beispiel ist singulär [LBVdB86]. Wir werden uns der Desingularisierung ab Kapitel 3 zuwenden, nachdem wir die für uns wesentlichen Eigenschaften der Varietät der Algebren kennen.

In Kapitel 2 diskutieren wir die Varietät der d -dimensionalen assoziativen Algebren mit Eins: Diese bereits seit 1968 [Fla68] untersuchte Varietät existiert im Wesentlichen in zwei Versionen, mit dem Einselement entweder fixiert [LB97] oder nicht fixiert [Gab74]. In beiden Fällen handelt es sich wieder um eine affine Varietät, die mit einer natürlichen $GL_d(\mathbb{C})$ -Aktion versehen ist. Im Fall einer fixierten Eins handelt es sich sogar um den Kegel einer projektiven Varietät. Die dadurch auf dem Tangentialraum im Ursprung induzierte lineare $GL_d(\mathbb{C})$ -Aktion erlaubt es uns, die Tangentialräume der Orbitabschlüsse jeder d -dimensionalen Algebra auf konzeptionelle Art zu bestimmen. Der Übersetzungsprozess zwischen beiden Versionen lässt sich durch die Konstruktion des „transversalen Schnittes“ [Slo80] motivieren. Diese gibt dann in Abschnitt 2.2 Anlass zu einem Ansatz, der die Idee der „Typ-II-Deformation“ [Fla74] aufgreift. Wir können diesen Zugang benutzen, um die Topologie des Abschlusses des Orbits der Matrixalgebra zu analysieren und finden auf diese Weise einen in der Entartungsordnung maximalen Orbit aus dem Abschluss des Orbits der Matrixalgebra, in dem der Orbitabschluss der Matrixalgebra schon singulär ist. Dabei erweist sich die Hochschild-Kohomologie [Lod98], da invariant unter Morita-Äquivalenz, schon in dieser einfachen Anwendung als produktives Werkzeug.

Das Kapitel 3 ist dann der Konstruktion von Nori [Nor78] gewidmet: Wir betrachten ein Paar aus einer Varietät und einem projektiven Morphismus von dieser Varietät auf den Modulraum der halbeinfachen Moduln der freien Algebra. Dazu verwenden wir die Idee des „nichtkommutativen Hilbert-Schemas“ aus [Rei05]: die uns interessierende Varietät ergibt sich als Quotient des Urbilds des Orbits der Matrixalgebra unter einem glatten Morphismus. Aus der Glattheitsdiskussion in Kapitel 2 folgt nun unmittelbar, dass Noris Konstruktion genau für $d = 2$ eine glatte Varietät liefert. Den Morphismus auf den Modulraum der halbeinfachen Moduln der freien Algebra erhalten wir mittels einiger Lemmata; wesentliche Schritte lassen sich dabei mittels der in [Muk03] betrachteten Konstruktionen bewältigen. Man vollendet die Konstruktion unter Rückgriff auf die Lemmata aus Kapitel 1 und auf allgemeine Sätze aus [Gro60] und dem Folgeband.

Den Schluss bildet Kapitel 4. Dort untersuchen wir ausführlich den Fall $d = 2$, da dort Noris Konstruktion tatsächlich eine Desingularisierung bildet: Für die globale Beschreibung berechnen wir zunächst die Betti-Zahlen der Desingularisierung mittels Reduktion auf die Menge der Fixpunkte unter einer Aktion der $GL_g(\mathbb{C})$, anschließend bestimmen wir explizit das Aussehen der Fasern, präzisieren so ein Ergebnis aus [BS90] und können eine darstellungstheoretische Interpretation der Konstruktion entwickeln.

Danksagung

Diese Arbeit ist von Anregungen und der Unterstützung so vieler Personen begleitet worden, dass ich hier nur einige exemplarisch herausgreifen will:

Vor allem mein Doktorvater *Markus Reineke* hat durch zahlreiche Diskussionen verschiedener Teile und Versionen der vorliegenden Arbeit deren Entstehen maßgeblich unterstützt. Ebenso haben die zahlreichen Hinweise und Fragen von *Michel Brion* während meines Aufenthaltes in Grenoble wesentliche Teile der Arbeit geprägt.

Auch über meine Zugehörigkeit zur *Westfälischen Wilhelms-Universität Münster* von April 2004 bis Dezember 2006 hinaus habe ich von der Zusammenarbeit mit den Kollegiaten und Institutsangehörigen in Münster profitiert; besonders sei für die geduldige Beantwortung auch trivialerer, tiefliegender oder abwegiger Fragen *Sylvain Maugéais* und *Christian Serpé* gedankt, für die Diskussion und Auseinandersetzung mit Problemen aus der Arbeit insbesondere auch *Gabriel Herz*, *Stefan Wiech*, *Björn Kroll* und *Klaus Loerke*. Mein Dank gilt ebenfalls der *Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG)* für die Finanzierung meiner Stelle im Rahmen des *Sonderforschungsbereichs 478 „Geometrische Strukturen in der Mathematik“*.

Während meines Aufenthaltes an der *Université Joseph Fourier Grenoble* habe ich ebenfalls von den Diskussionen mit den dortigen Kollegen und einer dadurch neuen Perspektive auf die bekannten Fragestellungen profitiert; neben Michel Brion haben sich hier insbesondere *Boris Pasquier* und *Markus Perling* meiner Fragen angenommen.

Ihre Vollendung hat diese Schrift an der *Bergischen Universität Wuppertal* gefunden; mein Dank gilt allen Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe rund um das *Graduiertenkolleg der DFG „Darstellungstheorie und ihre Anwendungen in Mathematik und Physik“*. Mathematisch haben mich hier insbesondere *Klaus Bongartz* sowie *Claus Mokler* unterstützt, und aus so mancher Schwierigkeit ausgeholfen haben *Sergej Mozgovoy*, *Torsten Hoge*, *Sebastian Holzmann* und *Anja Hutschenreuter*. Für das Korrekturlesen der Arbeit möchte ich Sebastian Holzmann, *Johannes Engel* und *Klaus Wiele* danken.

Aber auch vom regen Austausch auf Konferenzen, eingeladenen Vorträgen und sonstiger Korrespondenz innerhalb der Forschergemeinde habe ich gerne Gebrauch gemacht: Unter den Arbeitsgruppen trifft dies besonders auf diejenige um *Claus Ringel* und darin *Philipp Fahr* und *Lutz Hille* zu. Exemplarisch für die auf Som-

merschulen einzigartig produktive Arbeitsatmosphäre sei diejenige am *ICTP* in *Triest* erwähnt: Mit Tafel und als geduldigem Gesprächspartner Philipp Fahr auf dem Zimmer hat sich selbst weit nach Mitternacht noch so manche sonst schwierig zu erzielende Erkenntnis eingestellt.

Für die Unterstützung solcher Sommerschulen und Konferenzen, vor allem aber meines Aufenthalts in Grenoble, sei daher insbesondere dem *Resarch Training Network* „*Liegrits*“ und seinen umtriebigen Organisatoren wie z. B. *Bernhard Keller* und *Fred van Oystaeyen* gedankt.

1 Begriffe und Definitionen

Wir benötigen einen Körper, der algebraisch abgeschlossen und von Charakteristik 0 sein muss, also verwenden wir den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Unter einer Varietät verstehen wir wie in [Kra84] und [Muk03] stets die von einer lokal abgeschlossenen Teilmenge eines projektiven Raumes induzierte reduzierte Struktur. Dabei verwenden wir als Topologie mit Ausnahme der Berechnung der Betti-Zahlen in Abschnitt 4.1 stets die Zariski-Topologie.

1.1 Quotienten

Quotienten im Sinne der Geometrischen Invariantentheorie und ihre Eigenschaften liegen großen Teilen dieser Arbeit zugrunde. Wir wollen daher hier eine kurze Wiederholung der Eigenschaften angeben; sie lehnt sich an die Darstellung in [Muk03] an.

Sei X zunächst eine affine Varietät, versehen mit einer rationalen G -Aktion, d. h. einem Morphismus $\cdot * \cdot : G \times X \rightarrow X$, so dass für alle $g, h \in G$ und $x \in X$ gilt $(gh)*x = g*(h*x)$ und $1*x = x$. Wir bezeichnen dann den Unterring von $\mathbb{C}[X]$ aller unter der G -Aktion invarianten Funktionen als $\mathbb{C}[X]^G$. Für jede reductive Gruppe G (und dies sind insbesondere $GL_n(\mathbb{C})$ für jedes n und alle endlichen Gruppen) besagt dann das Theorem von Hilbert-Nagata (siehe z. B. [SB00, Théorème 2.3]), dass $\mathbb{C}[X]^G$ endlich erzeugt ist. Wir erhalten ein Paar aus einer Varietät

$$X//G := \text{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$$

und einem Morphismus $q: X \rightarrow X//G$, das wir als *Quotient* bezeichnen. Es ist $X//G$ (nach z. B. [SB00, Abschnitt 3.1]) die Varietät mit der universellen Eigenschaft, dass jeder G -invariante Morphismus mit Definitionsbereich X durch q faktorisiert. Gleichzeitig stehen die Punkte von $X//G$ in Bijektion zu den abgeschlossenen G -Orbiten von X (siehe z. B. [SB00, Théorème 3.1 (3)]). In diesem Sinne ist $X//G$ die bestmögliche Annäherung an eine Varietät, welche die G -Orbiten auf X parametrisiert.

In [Kra84] oder [Sha94, Teil II] finden wir ein für uns wichtiges Beispiel eines Quotienten:

Satz 1.1.1 *Sei \mathbb{C}^n versehen mit der Aktion von S_n durch*

$$\sigma * (v_1, \dots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) .$$

Sei $q_{S_n}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ der Morphismus, der (u_1, \dots, u_n) die Koeffizienten der Monome t^0, \dots, t^{n-1} des Polynoms $\prod_{1 \leq i \leq n} (t - u_i)$ zuordnet. Dann ist das Paar aus \mathbb{C}^n und q_{S_n} der Quotient von \mathbb{C}^n bezüglich obiger S_n -Aktion.

Während in diesem Fall die Punkte des Quotienten tatsächlich in Bijektion zu den G -Orbiten auf der ursprünglichen Varietät stehen, zeigt das nächste, aus der linearen Algebra wohlbekannte Beispiel, dass dies im Allgemeinen nicht zu erwarten ist:

Beispiel 1.1.2 (*charakteristisches Polynom*) Sei $M_n(\mathbb{C})$ versehen mit der $GL_n(\mathbb{C})$ -Aktion durch Konjugation. Dann ist der Quotient von $M_n(\mathbb{C})$ gerade das Paar aus $\chi: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ und \mathbb{C}^n , wobei χ jeder Matrix die monomialen Koeffizienten ihres charakteristischen Polynoms zuordnet.

Hier stehen die Punkte des Quotienten also in Bijektion zu nur den Orbiten der diagonalisierbaren Matrizen. Fasst man $M_n(\mathbb{C})$ als den Raum aller $\mathbb{C}[X]$ -Moduln der Dimension n auf, so parametrisiert der Quotient in diesem Fall gerade die halbeinfachen Moduln. In Satz 1.2.1 werden wir diese Beobachtung auf den uns interessierenden Fall verallgemeinern.

In diesem Sinne ist man an Werkzeugen interessiert, mit denen sich effektiv feststellen lässt, ob ein Orbit abgeschlossen ist. Ein wichtiges Hilfsmittel zu zeigen, dass ein Orbit nicht abgeschlossen ist, sind Einparameteruntergruppen:

Definition 1.1.3 Eine Einparameteruntergruppe (oder kurz 1-PUG) von G ist ein algebraischer Gruppenmorphismus $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$.

Ein 1-PUG gibt nun in jedem Punkt $x \in X$ Anlass zu einem Morphismus

$$\lambda_x: \mathbb{C}^* \rightarrow X, \alpha \mapsto \lambda(\alpha)x$$

Können wir nun λ_x zu einem Morphismus $\tilde{\lambda}_x: \mathbb{C} \rightarrow X$ fortsetzen, so setzen wir $x_0 := \tilde{\lambda}_x(0)$ und erhalten, dass Gx_0 im Abschluss von Gx liegt, denn sonst wäre \mathbb{C}^* abgeschlossen in \mathbb{C} . Insbesondere ist Gx nicht abgeschlossen, wenn $Gx_0 \neq Gx$ ist.

Ein erstes Beispiel für die Verwendung von 1-PUGn ist hier Satz 1.2.1.

Quotienten verhalten sich gut im Zusammenspiel mit der Topologie:

Satz 1.1.4 ([Muk03, Proposition 5.10]) Sei X eine affine Varietät mit G -Aktion und Quotient q und sei Z eine in X abgeschlossene G -invariante Teilmenge. Dann ist $q(Z)$ in $X//G$ ebenfalls abgeschlossen.

sowie darüber hinaus:

Korollar 1.1.5 ([Muk03, Korollar 5.11]) Sei $A \subset X//G$. Ist $q^{-1}(A)$ offen in X , so ist auch A offen in $X//G$.

Ist jeder G -Orbit abgeschlossen, so erhalten wir also sogar

Korollar 1.1.6 Ist Z offen in X , so ist auch $q(Z)$ offen in $X//G$.

Insbesondere für endliche Gruppen ist immer jeder G -Orbit abgeschlossen.

Eine andere Herangehensweise an das Problem, dass nur abgeschlossene Orbiten im Quotienten sichtbar sind, besteht darin, nur abgeschlossene Orbiten maximaler Dimension in die Betrachtung mit einzubeziehen ([Muk03], [MFK94]):

Definition 1.1.7 Sei X eine affine Varietät, auf der die reductive Gruppe G operiert. Dann heiÙe ein Punkt $x \in X$ stabil, wenn Gx abgeschlossen ist und die Isotropiegruppe von G in x endlich ist.

Wir wollen eine relative Version dieser Konstruktion betrachten. Sei dazu der Charakter einer Gruppe G wie üblich ein Morphismus algebraischer Gruppen $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$. Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ heiÙt dann *Semiinvariante bezüglich χ* , wenn

$$f(gx) = \chi(g)f(x) \text{ für jedes } g \in G, x \in X$$

gilt. Wir greifen auf die folgenden Definitionen zurück:

Definition 1.1.8

1. Ein Punkt $x \in X$ heiÙt χ -semistabil, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine χ^m -Semiinvariante f gibt mit $f(x) \neq 0$.
2. Die Varietät aller χ -semistabilen Punkte sei mit $X^{\chi\text{-sst}}$ bezeichnet.
3. Ein Punkt $x \in X$ heiÙt χ -stabil, wenn er in $X^{\chi\text{-sst}}$ liegt und bezüglich $X^{\chi\text{-sst}}$ stabil ist.

1.2 Ein Modulraum halbeinfacher Darstellungen der freien Algebra

Sei F_g die freie assoziative Algebra mit Eins in g Erzeugern und $d \in \mathbb{N}$. Wir wollen die Isomorphieklassen d -dimensionaler F_g -Moduln geometrisch beschreiben, d. h. möglichst eine Varietät konstruieren, so dass die Punkte der Varietät auf natürliche Weise in Bijektion zu den Isomorphieklassen d -dimensionaler F_g -Moduln stehen. Wir werden sehen, dass uns dies nur für die Isomorphieklassen halbeinfacher Moduln gelingt.

Wir erhalten die Isomorphieklassen aller Moduln als die Menge der Orbits der $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Aktion auf $(M_d(\mathbb{C}))^g$ per simultaner Konjugation

$$\begin{aligned} *_ : \quad \text{GL}_d(\mathbb{C}) \times (M_d(\mathbb{C}))^g &\rightarrow (M_d(\mathbb{C}))^g \\ (h, (m_1, \dots, m_g)) &\mapsto (hm_1h^{-1}, \dots, hm_g h^{-1}) . \end{aligned}$$

Sei der Ring der $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Invarianten auf $(M_d(\mathbb{C}))^g$ mit B_d bezeichnet. Da $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ reduktiv und $(M_d(\mathbb{C}))^g$ affin ist, ist B_d endlich erzeugt und damit existiert

$$Z_{d,g} := (M_d(\mathbb{C}))^g // \text{GL}_d(\mathbb{C}) = \text{Spec } B_d .$$

Es gilt nach [Art69, Formel 12.6]:

Satz 1.2.1 Die abgeschlossenen $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Orbits in $(M_d(\mathbb{C}))^g$ und damit die Punkte von $Z_{d,g}$ stehen in Bijektion zu den Isomorphieklassen halbeinfacher d -dimensionaler F_g -Moduln.

Dies gibt Anlass zu der Definition

Definition 1.2.2 *Es heie $Z_{d,g}$ der Modulraum der halbeinfachen d -dimensionalen F_g -Moduln.*

Wir wollen ein Erzeugendensystem für B_d einführen und definieren den Begriff *generische Matrix* wie in [LBVdB86]: Auf $\text{Mor}((M_d(\mathbb{C}))^g, M_d(\mathbb{C}))$ erhalten wir auf natürliche Weise eine \mathbb{C} -Algebrenstruktur durch $(f + g)(p) := f(p) + g(p)$ und $(fg)(p) := f(p)g(p)$ sowie $(\lambda f)(p) := \lambda f(p)$.

Definition 1.2.3 *Die reguläre Abbildung*

$$\begin{aligned} X_i: \quad (M_d(\mathbb{C}))^g &\rightarrow M_d(\mathbb{C}) \\ (m_1, \dots, m_g) &\mapsto m_i \end{aligned}$$

sei als generische Matrix X_i bezeichnet.

Wir benennen die von $\{X_i \mid 1 \leq i \leq g\}$ erzeugte Unteralgebra von $\text{Mor}((M_d(\mathbb{C}))^g, M_d(\mathbb{C}))$ mit $M_d(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$. Versieht man $M_d(\mathbb{C})$ mit der $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Aktion durch Konjugation, so sind die Elemente von $M_d(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ allesamt $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -äquivariant. Jede Verknüpfung eines Elements $X \in M_d(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ mit einem $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -invarianten Morphismus

$$\varphi: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

liefert also einen $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -invarianten Morphismus

$$\varphi(X): (M_d(\mathbb{C}))^g \rightarrow \mathbb{C} ,$$

also ein Element von B_d . Insbesondere sind also $\text{Spur}(X)$, $\det(X)$ und jeder Koeffizient des charakteristischen Polynoms $\chi(X)$ Invarianten.

Procesi hat bereits 1976 in [Pro76] gezeigt, dass $\{\text{Spur}(X) \mid X \in M_d(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]\}$ ein Erzeugendensystem von B_d ist; sogar endlich viele Invarianten der Form $\text{Spur}(X)$, wobei X ein Monom in den generischen Matrizen ist, bilden bereits ein Erzeugendensystem. In [Raz74] lässt sich als Schranke für den Grad der benötigten Monome d^2 finden.

Auch $\text{GL}_g(\mathbb{C})$ operiert auf $Z_{d,g}$ auf natürliche Weise: Auf $(M_d(\mathbb{C}))^g$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \bullet -: \quad \text{GL}_g(\mathbb{C}) \times (M_d(\mathbb{C}))^g &\rightarrow (M_d(\mathbb{C}))^g \\ (h, (m_1, \dots, m_g)) &\mapsto (\sum_{j=1}^g h_{1,j} m_j, \dots, \sum_{j=1}^g h_{g,j} m_j) \end{aligned}$$

Dabei vertauscht die Aktion durch \bullet mit der $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Aktion; also ist sie als Aktion auf $Z_{d,g}$ wohldefiniert.

Aus geometrischer Sicht verhält sich $Z_{d,g}$ allerdings unerfreulich; im Allgemeinen ist $Z_{d,g}$ singularär, wie das folgende Beispiel von Le Bruyn und Van Den Bergh [LBVdB86] zeigt:

Beispiel 1.2.4 Der Modulraum $Z_{2,3}$ ist isomorph zur Nullstellenmenge in \mathbb{A}^{10} des in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{10}]$ irreduziblen Polynoms

$$\begin{aligned}
p := & 4x_{10}^2 + 4x_{10}x_1x_2x_3 - 4x_{10}x_1x_9 - 4x_{10}x_2x_8 - 4x_{10}x_3x_7 \\
& + x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_4x_5x_6 + 4x_7x_8x_9 + 2x_1^2x_9^2 + 2x_2^2x_8^2 + 2x_3^2x_7^2 \\
& - 2x_1^2x_2x_3x_9 - 2x_1x_2^2x_3x_8 - 2x_1x_2x_3^2x_7 - x_1^2x_5x_6 - x_2^2x_4x_6 - x_3^2x_4x_5 \\
& + 2x_1x_2x_6x_7 + 2x_1x_3x_5x_8 + 2x_2x_3x_4x_9 - 2x_4x_9^2 - 2x_5x_8^2 - 2x_6x_7^2 .
\end{aligned}$$

Da p nur aus Monomen vom Grad mindestens 2 besteht, stimmen die Tangentialräume im Ursprung an $V(p)$ und an \mathbb{A}^{10} überein. Da $V(p)$ selbst nur Dimension 9 hat, liegt also im Ursprung eine Singularität vor.

2 Die Varietät der Algebren

Wir wollen im Folgenden die Varietät der d -dimensionalen Algebren Alg_d diskutieren. Dazu vereinbaren wir zunächst Notationen und sammeln bekannte Tatsachen aus den schon in der Einleitung erwähnten Arbeiten [Gab74], [Kra84], [Sch88] und [LB97]. Wir führen Alg_d in Anlehnung an [Gab74] ein, verzichten hier aber auf die Verallgemeinerung auf \mathbb{C} -Algebren als Grundring; der Übersetzungsprozess wird in [Muk03, Abschnitt 3.3] erläutert:

Lemma 2.0.1 *Die Menge $\widetilde{\text{Alg}}_d$ aller assoziativen Multiplikationen mit Eins auf \mathbb{C}^d , d. h.*

$$\widetilde{\text{Alg}}_d := \{m: \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d \mid m \text{ assoziativ, es gibt } \mathbf{1} \in \mathbb{C}^d\},$$

wobei $\mathbf{1}$ ein Element bezeichne, so dass für alle $y \in \mathbb{C}^d$ gilt $m(\mathbf{1} \otimes y) = y = m(y \otimes \mathbf{1})$, ist lokal abgeschlossen.

Beweis In der abgeschlossenen Untervarietät von \mathbb{A}^{d^3} zu den Assoziativitätsgleichungen definieren wir für jedes v aus $\mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ die offene Teilmenge U_v durch die Bedingung, dass $m(v \otimes _)$ und $m(_ \otimes v)$ Automorphismen auf \mathbb{C}^d sind. Dies ist äquivalent dazu, dass die durch m beschriebene Algebra eine Eins besitzt: Zu jedem Automorphismus $m(v \otimes _)$ ist $m(v \otimes _)^{-1}v$ das Einselement, andererseits erfüllt $\mathbf{1}$ die an v gestellten Anforderungen. Die Vereinigung aller dieser Untervarietäten ergibt gerade $\widetilde{\text{Alg}}_d$. \square

Also können wir definieren:

Definition 2.0.2 *Sei Alg_d die Varietät zu $\widetilde{\text{Alg}}_d$.*

Korollar 2.0.3 *Es gibt einen Isomorphismus φ von Alg_d nach*

$$\text{Alg}_d^1 := \{(m, e) \mid m: \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d, m \text{ assoziativ, } e \text{ ist Eins bezüglich } m\}.$$

Beweis Auf jedem offenen Teilstück U_v setzen wir $\varphi(m) = (m, m(v \otimes _)^{-1}v)$. Da die Eins eindeutig ist, ist dies wohldefiniert. Die Umkehrung erhalten wir durch Weglassen der Eins. \square

Der Koordinatenring von Alg_d wird erzeugt von den Funktionen $M_{i,j}^k: \text{Alg}_d \rightarrow \mathbb{C}$ mit $i, j, k \in \{1, \dots, d\}$, wobei $M_{i,j}^k$ jedem m den e_k -Anteil von $m(e_i \otimes e_j)$ zuordne; dabei ist e_1, \dots, e_d wie üblich die kanonische Basis des \mathbb{C}^d .

Der Basiswechsel auf \mathbb{C}^d induziert auf Alg_d auf natürliche Weise eine $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Operation: Jedes $g \in \text{GL}_d(\mathbb{C})$ agiert auf Alg_d per $(g * m)(x \otimes y) = gm(g^{-1}x \otimes g^{-1}y)$. Also stehen die $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Orbiten auf Alg_d in Bijektion zu den Isomorphieklassen von Algebren.

In der vorliegenden Form ist die Orbitstruktur allerdings nur schwer zugänglich. Wir werden daher motiviert durch die Idee des transversalen Schnittes, wie er in [Slo80] diskutiert wird, zu einem geeigneteren Modell für die Orbitstruktur von Alg_d übergehen:

Definition 2.0.4 *Wir fassen $m(x \otimes _)$ und $m(_ \otimes x)$ als Endomorphismen von \mathbb{C}^d auf; also können wir die Spur $\text{Spur}: \text{End}(\mathbb{C}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ auf sie anwenden. Sei nun Alg'_d die abgeschlossene Untervarietät von Alg_d , die nur Multiplikationen enthält, in denen das letzte Basiselement die Eins ist und für alle übrigen Basiselemente gilt $\text{Spur}(m(x \otimes _) + m(_ \otimes x)) = 0$, d. h.*

$$\text{Alg}'_d := \left\{ m \in \text{Alg}_d \left| \begin{array}{l} m(e_d \otimes _) = \text{id} = m(_ \otimes e_d), \\ \text{für alle } i \in \{1, \dots, d-1\} \text{ ist} \\ \text{Spur}(m(e_i \otimes _) + m(_ \otimes e_i)) = 0 \end{array} \right. \right\} .$$

Für den Zusammenhang zwischen Alg'_d und Alg_d fassen wir Alg_d als das assoziierte Faserbündel (Definition siehe [Ser58, Abschnitt 3.2]) $\text{GL}_d(\mathbb{C}) \times^{\text{GL}_{d-1}(\mathbb{C})} \text{Alg}'_d$ auf. Dazu verwenden wir [Bon96, Lemma 7.3]:

Lemma 2.0.5 *Sei G eine affine algebraische Gruppe, die auf den Varietäten X und Y operiert und sei $\pi: X \rightarrow Y$ ein äquivarianter Morphismus, so dass Y nur aus einem einzigen G -Orbit besteht. Nenne für ein $y \in Y$ den Stabilisator H und die Faser F . Dann ist X isomorph zum assoziierten Faserbündel $G \times^H F$. Insbesondere induziert dann $U \mapsto U \cap F$ eine Bijektion zwischen den G -stabilen Teilmengen von X und den H -stabilen Teilmengen von F , die mit der Abschlussrelation verträglich ist.*

Wir zeigen:

Satz 2.0.6 *Die Varietät Alg_d ist isomorph zu $\text{GL}_d(\mathbb{C}) \times^{\text{GL}_{d-1}(\mathbb{C})} \text{Alg}'_d$.*

Beweis Wir konstruieren zunächst den äquivarianten Morphismus $\varphi: \text{Alg}_d \rightarrow Y$ wie folgt: Auf

$$Y := \{(f, v) \in (\mathbb{C}^d)^\vee \otimes \mathbb{C}^d \mid f(v) = 2d\}$$

operiert $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ auf natürliche Weise durch $g * (f, v) := (f(g^{-1}_), gv)$. Um φ zu definieren, definieren wir für jedes $m \in \text{Alg}_d$ den Morphismus $\tau_m: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ durch $w \mapsto \text{Spur}(m(w \otimes _) + m(_ \otimes w))$; es ordne nun φ jedem m das Paar aus τ_m und der Eins in \mathbb{C}^d bezüglich m zu. Als Faser von φ über $(2d \cdot e_d^*, e_d)$ erhalten wir Alg'_d . \square

Wir erhalten:

Korollar 2.0.7 *Die Abschlussrelationen zwischen den $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ -Orbiten in Alg_d und den $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Orbiten in Alg'_d stimmen überein; die Singularitäten in den einander entsprechenden Orbiten sind glatt äquivalent (vgl. [Bon94] und [AK70]).*

Dabei heißen zwei Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ glatt äquivalent, wenn es offene Umgebungen $U \subset X$ und $V \subset Y$ von x bzw. y und eine Varietät Z mit $z \in Z$ sowie glatte Morphismen $\varphi: Z \rightarrow X$, $\psi: Z \rightarrow Y$ mit $\varphi(z) = x$ und $\psi(z) = y$ gibt.

Die Varietät Alg'_d enthält einen $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Fixpunkt, während Alg_d keinen $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ -Fixpunkt besitzt. Der Fixpunkt von Alg'_d ist nun einerseits der einzige abgeschlossene Orbit. Damit lässt sich die Glattheit eines Orbitabschlusses schon an der Dimension des Tangentialraums dieses Orbitabschlusses an den Fixpunkt ablesen. Andererseits hat nun der Tangentialraum von jedem Orbitabschluss an den Fixpunkt eine Struktur als $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Modul; dies vereinfacht dessen Dimensionsbestimmung erheblich. Eine formalisierte Version dieser Beobachtung ist [LBR99, Lemma 2.2.2].

Sei A eine d -dimensionale Algebra. Es bezeichne $\langle M \rangle_{\mathbb{C}}$ den von der Menge $M \subset A$ erzeugten \mathbb{C} -Vektorraum, während $\langle M \rangle$ die von M erzeugte Unteralgebra von A bezeichne. Für den Vektorraum aller $x \in A$ mit $\mathrm{Spur}((x \cdot _) + (_ \cdot x)) = 0$ führen wir die Bezeichnung $\mathrm{Spur}_0(A)$ ein. Im Hinblick auf die Definition von Alg'_d definieren wir zusätzlich $\mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) = \langle e_1, \dots, e_{d-1} \rangle_{\mathbb{C}}$. Im übrigen kürzen wir $m(x \otimes y)$ zu $x \cdot y$ ab, wenn klar ist, welche m in der jeweiligen Aussage gemeint sind.

Schließlich benötigen wir noch eine wohlbekanntete Aussage über die Dimension der $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ -Orbiten in Alg_d und der $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Orbiten in Alg'_d :

Lemma 2.0.8 *In Alg_d bzw. Alg'_d gilt, dass*

$$\dim \mathcal{O}_A = \dim \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) - \dim \mathrm{Aut} A \quad \text{bzw.} \quad \dim \mathcal{O}_A = \dim \mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) - \dim \mathrm{Aut} A$$

Beweis Sei G gleich $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$. Das Lemma folgt aus [Kra84, Anhang I Satz 3.3] bezüglich des sogar surjektiven Morphismus $_ \cdot a: G \rightarrow \mathcal{O}_A$. Dort ist dann für jedes $g \in G$ das Urbild vom Bild $(_ \cdot a)^{-1}(_ \cdot a)(g)$ gleich der g -Nebenklasse der Isotropiegruppe von a ; diese ist stets gleich der Automorphismengruppe. \square

2.1 Tangentialraum

Wir diskutieren den Fall $d = 2$ vorab, da die im Folgenden verwendeten Techniken erst ab $d \geq 3$ funktionieren: Die bis auf Isomorphie einzigen zwei zweidimensionalen Algebren sind die Vertreter N_2 und K_2 der folgenden Familien:

Definition 2.1.1 *Sei N_d die kommutative Algebra $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{d-1}]/\langle X_i X_j \rangle$, also die Algebra mit $(d-1)$ -dimensionalem Radikal, in dem jede Multiplikation trivial ist.*

Sei K_d die d -dimensionale Algebra mit einem System orthogonaler Idempotenter a_1, a_2 und $(d-2)$ -dimensionalem Radikal erzeugt von r_1, \dots, r_{d-2} , so dass $a_1 r_i = r_i a_2 = r_i$ und $r_i a_1 = a_2 r_i = r_i r_j = 0$ gelte.

Beispiel 2.1.2 ($d = 2$) Es gilt $\text{Spur}_0(K_2) = \langle e_1 - e_2 \rangle_{\mathbb{C}}$; für ein $x := t \cdot (e_1 - e_2)$ erhalten wir $x \cdot x = t^2 \cdot \mathbf{1}$. Also ist der Orbit eine Ursprungsgerade ohne den Ursprung, der Orbitabschluss ist die Gerade selbst und damit insbesondere glatt.

Wir eröffnen die Diskussion von $d \geq 3$ mit einer Beschreibung der Gestalt von Alg'_d :

Lemma 2.1.3 Die Varietät Alg'_d ist für $d \geq 3$ isomorph zu einem Kegel innerhalb von

$$\text{Hom}(\mathbb{C}^{d-1} \otimes \mathbb{C}^{d-1}, \mathbb{C}^{d-1}) = (\mathbb{C}^{d-1})^{\vee} \otimes (\mathbb{C}^{d-1})^{\vee} \otimes \mathbb{C}^{d-1} .$$

Beweis Seien $i, j, k \in \{1, \dots, d-1\}$ und $i \neq k$. Wir können die Assoziativitätsgleichung $(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k)$ umschreiben zu

$$\begin{aligned} M_{i,j}^d(m) m(e_d \otimes e_k) + \sum_{l \in \{1, \dots, d-1\}} M_{i,j}^l(m) m(e_l \otimes e_k) \\ = M_{j,k}^d(m) m(e_i \otimes e_d) + \sum_{l \in \{1, \dots, d-1\}} M_{j,k}^l(m) m(e_i \otimes e_l) \end{aligned}$$

und innerhalb von Alg'_d zu

$$\begin{aligned} M_{i,j}^d(m) e_k + \sum_{l \in \{1, \dots, d-1\}} M_{i,j}^l(m) m(e_l \otimes e_k) \\ = M_{j,k}^d(m) e_i + \sum_{l \in \{1, \dots, d-1\}} M_{j,k}^l(m) m(e_i \otimes e_l) \end{aligned}$$

vereinfachen. Betrachtet man in dieser Gleichung nur den e_k -Anteil beider Seiten, so erhält man

$$M_{i,j}^d + \sum_{l \in \{1, \dots, d-1\}} M_{i,j}^l M_{l,k}^k = \sum_{l \in \{1, \dots, d-1\}} M_{j,k}^l M_{i,l}^k .$$

Also sind die $M_{i,j}^d$ schon Funktionen in den $M_{i,j}^k$.

Für eine Algebra A und eine Vektorraumbasis $(b_i)_{1 \leq i \leq d}$, so dass die zugehörige Multiplikation m in Alg'_d liegt, also insbesondere $b_d = \mathbf{1}$ gilt, erhalten wir eine Familie von Multiplikationen m_t in Alg'_d durch Basiswechsel zu $(t \cdot b_1, \dots, t \cdot b_{d-1}, \mathbf{1})$; es gilt für $i, j, k \in \{1, \dots, d-1\}$, dass $M_{i,j}^k(m_t) = t \cdot M_{i,j}^k(m)$. Zugleich ist der Ursprung 0 in Alg'_d enthalten und ein $\text{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Fixpunkt. Er bildet also den einzigen abgeschlossenen $\text{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Orbit in Alg'_d ; die zugeordnete Algebra ist N_d . Insbesondere ist Alg'_d also ein Kegel. \square

Ob der Orbitabschluss einer Algebra glatt ist, lässt sich ermitteln, indem man die Dimension des Tangentialraums an diesen Orbitabschluss in 0 bestimmt. Wir

betrachten hier ausschließlich den Zariski-Tangententialraum und orientieren uns an der Notation aus [Kra84]:

$$T_p X := \{d: \mathcal{O}_{p,X} \rightarrow \mathbb{C} \mid d \text{ linear, für alle } f, g \in \mathcal{O}_{p,X} \text{ gilt } d(fg) = f(p)d(g) + d(f)g(p)\} .$$

Wir bezeichnen den Zariski-Tangententialraum auch abkürzend als Tangentialraum. Wir beobachten:

Lemma 2.1.4 *Sei X eine G -Varietät, $Y \subset X$ eine abgeschlossene G -stabile Untervarietät, $p \in Y$ ein Fixpunkt bezüglich der G -Aktion.*

1. Der Vektorraum $T_p X$ ist auf natürliche Weise G -Modul.
2. Der Vektorraum $T_p Y$ ist ein G -Untermodule von $T_p X$.
3. Ist p der einzige abgeschlossene Orbit, so ist X genau dann glatt, wenn $\dim T_p X = \dim X$ gilt.

Beweis

1. Jeder Morphismus $\varphi: X \rightarrow X$ induziert auf natürliche Weise einen Morphismus $d\varphi: T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} X$. Im Fixpunkt gilt für jeden Morphismus $g \cdot -$, dass $g \cdot -(p) = p$.
2. Folgt aus der Natürlichkeit der Konstruktion zu 1.
3. Die Dimension des Tangentialraums ist halbstetig. □

Wir werden also im Folgenden zu einer beliebigen Algebra den Tangentialraum an ihren Orbitabschluss in 0 als $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Modul beschreiben und erhalten auf diese Weise einen alternativen Beweis zu [LBR99], der mittels linearer Gleichungen Eigenschaften einer Algebra A in Beziehung zu den Untermoduln von $T_0 \overline{\mathcal{O}_A}$ setzt.

Gleichungen im Funktionenring von Alg'_d geben nun Anlass zu Gleichungen auf dem Tangentialraum wie üblich. Wir erhalten:

Lemma 2.1.5 *Zu jeder $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -invarianten abgeschlossenen Teilmenge X von Alg'_d ist $T_0 X = T_0 V$, wobei V der kleinste Vektorraum mit $X \subset V$ sei.*

Beweis Jede $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -invariante abgeschlossene Teilmenge X von Alg'_d ist ein Kegel, sie lässt sich also bereits durch homogene Gleichungen beschreiben. Jede Gleichung vom Grad größer oder gleich 2 induziert jedoch auf dem Tangentialraum durch 0 nur die triviale Bedingung. Um die Tangentialraumstruktur zu verstehen, reicht es also, lineare Invarianten zu betrachten. □

Wir geben die Zerlegung von $T_0 \mathrm{Alg}'_d$ in einfache Moduln an:

Theorem 2.1.6 Als $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Modul zerfällt $T_0 \mathrm{Alg}'_d$ in die einfachen Moduln

$$T_0 \mathrm{Alg}'_d = V_\Lambda \oplus \Lambda \oplus S$$

mit den folgenden Summanden:

Der Modul V_Λ wird durch die Gleichungen

$$\text{für alle } x, y \in \mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } x \cdot y \in \langle \mathbf{1}, x, y \rangle_{\mathbb{C}}$$

beschrieben, hat die Dimension $d - 1$ und das Höchstgewicht $(0, \dots, 0, -1)$.

Wir erhalten Λ vermittels der Bedingungen

$$\text{für alle } x, y \in \mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } x \cdot y = -y \cdot x \quad \text{und}$$

$$\text{für alle } x \in \mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } \mathrm{Spur}(x \cdot _) = 0$$

induzierten Gleichungen. Die Dimension von Λ ist $\frac{1}{2}d(d-1)(d-3)$; er hat als Höchstgewicht $(1, 0, \dots, 0, -1, -1)$.

Es ist S der durch die von den Bedingungen

$$\text{für alle } x, y \in \mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } x \cdot y = y \cdot x \quad \text{und}$$

$$\text{für alle } x \in \mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } \mathrm{Spur}(x \cdot _) = 0$$

erzeugten Gleichungen eingegrenzte Raum. Er hat die Dimension $\frac{1}{2}(d-1)(d^2-d-2)$. Das Höchstgewicht ist $(1, 0, \dots, 0, -2)$.

Beweis Man erhält mit Standardmethoden (siehe z. B. [Ful97]) folgende Zerlegung in einfache Unterdarstellungen:

$$(\mathbb{C}^{d-1})^\vee \otimes (\mathbb{C}^{d-1})^\vee \otimes \mathbb{C}^{d-1} = V_\Lambda \oplus \Lambda \oplus S \oplus V_S$$

beschrieben durch die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^{d-1})^\vee \otimes \mathbb{C}^{d-1} \rightarrow V_\Lambda \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow S \rightarrow S^2(\mathbb{C}^{d-1})^\vee \otimes \mathbb{C}^{d-1} \rightarrow V_S \rightarrow 0 .$$

Dabei ist V_Λ isomorph zu $(\mathbb{C}^{d-1})^\vee$ und wird beschrieben durch die Bedingungen

$$\text{für alle } x, y \in \mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } x \cdot y \in \langle \mathbf{1}, x, y \rangle_{\mathbb{C}} \quad \text{und}$$

$$\text{für alle } x \in \mathrm{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } \mathrm{Spur}((x \cdot _) + (_ \cdot x)) = 0 .$$

oder äquivalent dazu als Menge aller Punktderivationen δ mit

$$\text{für alle } i, j, k \in \{1, \dots, d-1\}, i \neq j, k \text{ gilt}$$

$$\delta(M_{i,i}^i) = 0,$$

$$\delta(M_{i,j}^j) = \delta(M_{i,k}^k) = -\delta(M_{j,i}^j) = -\delta(M_{k,i}^k),$$

$$\delta(M_{j,k}^i) = 0$$

Insbesondere treffen hier also die von $\Lambda^2(\mathbb{C}^{d-1})^\vee \otimes \mathbb{C}^{d-1}$ geerbten Bedingungen

$$\text{für alle } i, j, k \in \{1, \dots, d-1\} \text{ gilt } \delta(M_{i,j}^k) = -\delta(M_{j,i}^k)$$

zu. Ein Element $\delta \in V_\Lambda$ wird also bereits vollständig durch seine Werte auf $\{M_{1,d-1}^{d-1}, \dots, M_{d-2,d-1}^{d-1}, M_{d-1,1}^1\}$ bestimmt. Ein Höchstgewichtsvektor in V_Λ zu den rechten oberen Dreiecksmatrizen ist gegeben durch die Bedingungen $\delta(M_{d-1,1}^1) = 1$ und für alle $i \in \{1, \dots, d-2\}$, dass $\delta(M_{i,d-1}^{d-1}) = 0$.

Wir können Λ beschreiben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{für alle } x, y \in \text{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } x \cdot y = -y \cdot x \quad \text{und} \\ &\text{für alle } x \in \text{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } \text{Spur}(x \cdot _) = 0 \text{ und } \text{Spur}(_ \cdot x) = 0. \end{aligned}$$

Ein Höchstgewichtsvektor zu den rechten oberen Dreiecksmatrizen ist gegeben durch die Bedingungen $\delta(M_{d-2,d-1}^k) = \delta_{k,1}$, $\delta(M_{i,j}^k) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, d-3\}$ und $k \in \{1, \dots, d-1\}$.

Der Modul S ist der durch

$$\begin{aligned} &\text{für alle } x, y \in \text{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } x \cdot y = y \cdot x \quad \text{und} \\ &\text{für alle } x \in \text{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } \text{Spur}(x \cdot _) = 0 \text{ und } \text{Spur}(_ \cdot x) = 0 \end{aligned}$$

eingegrenzte Raum. Als Höchstgewichtsvektor zu den rechten oberen Dreiecksmatrizen erhalten wir die Punktderivation mit $\delta(M_{i,j}^k) = \delta_{i,d-1}\delta_{j,d-1}\delta_{k,1}$ für alle $i, j, k \in \{1, \dots, d-1\}$.

Der zu $(\mathbb{C}^{d-1})^\vee$ isomorphe Raum V_S wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{für alle } x, y \in \text{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } x \cdot y = y \cdot x \quad \text{und} \\ &\text{es gibt } a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C}, \text{ so dass} \\ &\text{für alle } i, j \in \{1, \dots, d-1\} \text{ gilt } e_i \cdot e_j = a_i e_j + a_j e_i \end{aligned}$$

beschrieben. Ein Höchstgewichtsvektor in V_S zu den rechten oberen Dreiecksmatrizen ist gegeben durch $\delta(M_{d-1,d-1}^{d-1}) = 2$ und $\delta(M_{d-1,i}^j) = \delta_{i,j}$, $\delta(M_{i,j}^k) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, d-2\}$, $k \in \{1, \dots, d-1\}$.

Der Modul V_S liegt allerdings außerhalb von $T_0 \text{Alg}'_d$: der obige Höchstgewichtsvektor erfüllt insbesondere nicht die durch die Gleichungen

$$\text{für alle } x \in \text{Spur}_0(\mathbb{C}^d) \text{ gilt } \text{Spur}(x \cdot _) + \text{Spur}(_ \cdot x) = 0$$

auf dem Tangentialraum induzierten Gleichungen. □

Wir nutzen im Folgenden aus, dass zu einer Algebra A der Tangentialraum des Orbitabschlusses genau dann S enthält, wenn der Orbitabschluss nicht schon in dem Vektorraum enthalten ist, dessen Tangentialraum gerade $V_\Lambda \oplus \Lambda$ ist. Analog erhält man jeweils ein Kriterium für $V_\Lambda \subset T_0 \overline{\mathcal{O}}_A$ bzw. $\Lambda \subset T_0 \overline{\mathcal{O}}_A$. Es stellt sich heraus, dass die dabei anfallenden linearen Gleichungen interessante Interpretationen als Eigenschaft für alle Elemente der Algebra besitzen. Die folgenden Sätze dieses Abschnittes entsprechen dabei [LBR99, Theorem 5.1.2].

Definition 2.1.7 Sei S_d die kommutative Algebra

$$\mathbb{C}[X, Y_1, \dots, Y_{d-3}] / \langle X^3, XY_i, Y_i Y_j \rangle,$$

also die Algebra, in der alle Multiplikationen der X, Y_1, \dots, Y_{d-3} untereinander außer $X \cdot X$ trivial sind.

Satz 2.1.8 Sei A eine d -dimensionale Algebra. Äquivalent sind:

1. Es gibt ein $x \in A$, so dass $x^2 \notin \langle \mathbf{1}, x \rangle_{\mathbb{C}}$.
2. A entartet in S_d .
3. $S \subset T_0 \overline{\mathcal{O}_A}$.

Beweis

1 \Rightarrow 2: Wir können nach Voraussetzung $(\mathbf{1}, x, x^2)$ zu einer Basis $(b_i)_{1 \leq i \leq d}$ ergänzen. Zu jedem Element der Familie von Basen

$$(b_{t,i}) := (t \cdot x, t^2 \cdot x^2, t^2 \cdot b_3, \dots, t^2 \cdot b_{d-1}, \mathbf{1})$$

erhalten wir eine Multiplikation m_t aus dem Orbit von A , so dass der Grenzwert $t \rightarrow 0$ die Multiplikation zu S_d mit der Basis $(X, X^2, Y_1, \dots, Y_{d-3}, \mathbf{1})$ ist.

2 \Rightarrow 3: Es reicht zu zeigen, dass S in $T_0 \overline{\mathcal{O}_{S_d}}$ enthalten ist. Mit der Basis

$$(t \cdot X^2, Y_1, \dots, Y_{d-3}, t \cdot X, \mathbf{1})$$

erhält man eine Gerade, deren Tangentialrichtung der oben beschriebene Höchstgewichtsraum von S ist. Da S ein einfacher $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Modul ist, ist schon ganz S in dem $\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C})$ -Modul $T_0 \overline{\mathcal{O}_{S_d}}$ enthalten.

3 \Rightarrow 1: Gilt $x^2 \in \langle \mathbf{1}, x \rangle_{\mathbb{C}}$ für jedes Element in A , so gilt insbesondere für jede Basis $e_i \cdot e_i \in \langle \mathbf{1}, e_i \rangle_{\mathbb{C}}$ für jedes $i \in \{1, \dots, d-1\}$, also $M_{i,i}^j(m) = 0$ für jedes Paar i, j mit $i, j \in \{1, \dots, d-1\}$ und $i \neq j$. Diese induzieren auf $T_0 \overline{\mathcal{O}_A}$ die Gleichungen $\delta(M_{i,i}^j) = 0$ für jedes Paar i, j mit $i, j \in \{1, \dots, d-1\}$ und $i \neq j$. Damit liegt z. B. das obige Höchstgewicht nicht in $T_0 \overline{\mathcal{O}_A}$. Wegen der Einfachheit von S folgt, dass S und $T_0 \overline{\mathcal{O}_A}$ trivialen Schnitt haben. \square

Definition 2.1.9 Sei $\mathbb{C}^{\times d}$ die Algebra zu der komponentenweisen Multiplikation auf \mathbb{C}^d , d. h. mit $e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} e_i$.

Korollar 2.1.10 Besitzt $A/\mathrm{rad} A$ als Unteralgebra eine Algebra isomorph zu $\mathbb{C}^{\times 3}$, so ist $S \subset T_0 \overline{\mathcal{O}_A}$.

Beweis Seien die Idempotenten eines Systems dreier orthogonaler Idempotenter mit e_1, e_2, e_3 bezeichnet. Es ist $(e_1 + 2e_2)^2 \notin \langle \mathbf{1}, e_1 + 2e_2 \rangle_{\mathbb{C}}$. \square

Für kommutative Algebren lässt sich der Tangentialraum ohnehin problemlos beschreiben:

Lemma 2.1.11 Sei $d \geq 3$. Jede d -dimensionale, kommutative Algebra außer N_d hat in 0 als Tangentialraum S .

Beweis Weder Λ noch V_Λ sind im Tangentialraum der kommutativen Multiplikationen enthalten. \square

Es lässt sich ebenfalls ein Kriterium angeben, ob Λ im Orbitabschluss einer Algebra liegt:

Satz 2.1.12 Sei A eine d -dimensionale Algebra. Der Modul Λ liegt genau dann in $T_0\overline{\mathcal{O}_A}$, wenn es Elemente $x, y \in A$ gibt, so dass $xy - yx \notin \langle \mathbf{1}, x, y \rangle_{\mathbb{C}}$.

Beweis Der Vektorraum mit Tangentialraum $S \oplus V_\Lambda$ wird durch genau die Gleichungen $xy - yx \in \langle \mathbf{1}, x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ für jedes Paar von Elementen $x, y \in A$ beschrieben. \square

Darüber hinaus steht wiederum für jedes d eine Algebra mit bezüglich der Entartungsrelation bis auf N_d minimalem Orbit zur Verfügung, deren Tangentialraum gerade Λ ist:

Definition 2.1.13 Sei $\widetilde{\Lambda}_d$ die nichtkommutative Algebra

$$\Lambda^* \mathbb{C}^{d-2} / \langle X_1 X_i, X_2 X_i, X_i X_j \mid 3 \leq i, j \leq d-2 \rangle,$$

also ein Quotient der äußeren Algebra mit $\dim \text{rad}^2 \widetilde{\Lambda}_d = 1$.

Lemma 2.1.14 Es gilt $T_0\overline{\mathcal{O}_{\widetilde{\Lambda}_d}} = \Lambda$.

Beweis Der Orbit von $\widetilde{\Lambda}_d$ enthält die Ursprungsgerade definiert durch

$$e_{d-2} \cdot e_{d-1} = e_1 \text{ und für alle } i, j \in \{1, \dots, d-3\} \text{ gilt } e_i \cdot e_j = 0.$$

Der Tangentialraum dieser Gerade ist das Höchstgewicht von Λ .

Es gibt kein $x \in \widetilde{\Lambda}_d$ mit $x^2 \notin \langle \mathbf{1}, x \rangle$. Zudem liegt $\mathcal{O}_{\widetilde{\Lambda}_d}$ in dem Vektorraum, der von $\text{Spur}(x \cdot _) = 0$ für alle $x \in \text{Spur}_0(\mathbb{C}^d)$ aufgespannt wird. \square

Ein hinreichendes Kriterium für die Entartung in diese Algebra ist:

Satz 2.1.15 Existieren $x, y \in A$, so dass $xy - yx \notin \langle \mathbf{1}, x, y, xy + yx \rangle$, so liegt $\widetilde{\Lambda}_d$ in $\overline{\mathcal{O}_A}$.

Beweis Ist $xy + yx \notin \langle \mathbf{1}, x, y \rangle$, so ergänzen wir $\mathbf{1}, x, y, xy + yx, xy - yx$ zu einer Basis $(b_i)_{1 \leq i \leq d}$ von A . Sei $t \in \mathbb{C}$. Mit den Basen $(\mathbf{1}, tx, ty, t^2(xy - yx), t(xy + yx), t^2 b_6, \dots)$ erhalten wir als Grenzwert für $t \rightarrow 0$ gerade die Multiplikation von $\widetilde{\Lambda}_d$ zur Basis $(\mathbf{1}, X_1, X_2, 2X_1 X_2, X_3, \dots)$.

Ist $xy + yx \in \langle \mathbf{1}, x, y \rangle$, so leistet zu einer gegebenen Basis $(b_i)_{1 \leq i \leq d}$ die Familie von Basen $(\mathbf{1}, tx, ty, t^2(xy - yx), t^2b_5, \dots)$ das gleiche. \square

Im Gegensatz zu S gibt es aber auch Algebren, die zwar Λ im Tangentialraum ihres Orbitabschlusses enthalten, aber nicht in $\widetilde{\Lambda}_d$ entarten:

Beispiel 2.1.16 Für die 4-dimensionale Algebra A erzeugt von $\mathbf{1}, a, b, c$ mit der Multiplikation $a \cdot b = c, b \cdot _ = 0, _ \cdot a = 0, c \cdot _ = 0, _ \cdot c = 0$ ist wegen $ab - ba = ab \notin \langle \mathbf{1}, a, b \rangle_{\mathbb{C}}$ in $T_0\overline{\mathcal{O}_A}$ der Raum Λ enthalten, aber A entartet nicht in $\widetilde{\Lambda}_4$, denn zu jedem $m \in \mathcal{O}_A$ ist der von $\{m(x \otimes _) \mid x \in \text{Spur}_0(A)\}$ erzeugte Untervektorraum von $M_4(\mathbb{C})$ eindimensional, aber es gibt $m \in \mathcal{O}_{\widetilde{\Lambda}_4}$, so dass der von $\{m(x \otimes _) \mid x \in \text{Spur}_0(A)\}$ erzeugte Untervektorraum von $M_4(\mathbb{C})$ zweidimensional ist.

Definition 2.1.17 Sei $A_{=}$ der Quotient aus der Wegealgebra zum Köcher

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ & \curvearrowright & \\ 1 & & 2 \\ & \curvearrowleft & \\ & \alpha & \end{array}$$

und dem Ideal erzeugt von allen Wegen der Länge 2.

Korollar 2.1.18 Sei A eine d -dimensionale Algebra. Enthält A als Unter algebra eine der Algebren $M_2(\mathbb{C}), A_{=}$ oder $\widetilde{\Lambda}_4$, so entartet A in $\widetilde{\Lambda}_d$ und es ist $\Lambda \subseteq T_0\overline{\mathcal{O}_A}$.

Beweis Die Eigenschaft $xy - yx \notin \langle \mathbf{1}, x, y, xy + yx \rangle$ wird in $M_2(\mathbb{C})$ von e_{12}, e_{21} erfüllt, in $A_{=}$ haben sie $e_1 - e_2 + \beta$ und $e_1 - e_2 + \alpha$, in $\widetilde{\Lambda}_4$ besitzen diese Eigenschaft X_1 und X_2 . \square

Für V_{Λ} finden wir folgende Bedingung:

Satz 2.1.19 Es ist $V_{\Lambda} \subseteq T_0\overline{\mathcal{O}_A}$ genau dann, wenn ein x in A existiert mit

$$\text{Spur}((x \cdot _) - (_ \cdot x)) \neq 0.$$

Beweis Durch $\text{Spur}(x \cdot _) = \text{Spur}(_ \cdot x)$ für alle $x \in A$ wird gerade der Vektorraum zu $\Lambda \oplus S$ definiert. \square

Im Gegensatz zu S und Λ finden wir zwar wieder eine Algebra K_d , deren Orbitabschluss sogar genau der Vektorraum mit Tangentialraum V_{Λ} ist, aber wir werden in Beispiel 2.2.18 zeigen, dass keine andere Algebra in K_d entartet.

Lemma 2.1.20 Es gilt $T_0\overline{\mathcal{O}_{K_d}} = V_{\Lambda}$.

Beweis Für alle Elemente x, y aus $\text{Spur}_0(K_d)$ gilt $x \cdot y \in \langle \mathbf{1}, x, y \rangle_{\mathbb{C}}$. Dies gilt weder für Λ noch für S . \square

Wir können nun für alle halbeinfachen Algebren den Tangentialraum des Orbitabschlusses im Ursprung angeben:

Theorem 2.1.21

1. Es gilt $T_0\overline{\mathcal{O}_{K_2}} = V_\Lambda$.
2. Es gilt $T_0\overline{\mathcal{O}_{M_2(\mathbb{C})}} = \Lambda$.
3. Es ist $T_0\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{\times d}}} = S$ für jedes $d \geq 3$.
4. Es ist $T_0\overline{\mathcal{O}_A} = \Lambda \oplus S$ für jede andere halbeinfache Algebra A .

Beweis Man beachte, dass für jede halbeinfache Algebra A gilt, dass jedes x aus A die Gleichung $\text{Spur}(x \cdot _) = \text{Spur}(_ \cdot x)$ erfüllt. 1. folgt aus der Vorabdiskussion, 2. daraus, dass für jedes $x \in M_2(\mathbb{C})$ gilt $x^2 \in \langle \mathbf{1}, x \rangle_{\mathbb{C}}$ und 3. aus der Kommutativität von $\mathbb{C}^{\times d}$.

Für 4. benutze man, dass es in jeder halbeinfachen Algebra außer $M_2(\mathbb{C})$ und K_2 ein System dreier primitiver orthogonaler Idempotenter e_1, e_2 und e_3 gibt, also eine Unteralgebra isomorph zu $\mathbb{C}^{\times 3}$. Ebenso enthält jede halbeinfache Algebra außer $\mathbb{C}^{\times d}$ eine Unteralgebra isomorph zu $M_2(\mathbb{C})$. \square

Um die Glattheit in aller Allgemeinheit beweisen zu können, benötigen wir noch ein Lemma zu V_Λ :

Lemma 2.1.22 Sei A eine d -dimensionale Algebra mit $T_0\overline{\mathcal{O}_A} = V_\Lambda$. Dann ist A isomorph zu K_d .

Beweis Für $d = 2$ wissen wir dies schon. Sei im Folgenden also $d \geq 3$.

Da stets $\dim T_0\overline{\mathcal{O}_A} \geq \dim \mathcal{O}_A$ gilt, brauchen wir nur Algebren mit Orbitdimension maximal $d - 1$ zu betrachten. Die Orbitdimension können wir mit Hilfe der Dimension der Automorphismengruppe berechnen; es gilt

$$\dim \mathcal{O}_A = \dim \text{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) - \dim \text{Aut } A$$

gemäß Lemma 2.0.8. Also suchen wir Algebren, in denen die Automorphismengruppe mindestens die Dimension $(d-1)^2 - (d-1)$ hat. Dass von jedem Automorphismus das Radikal auf sich selbst und Idempotente auf Idempotente abgebildet werden, liefert als untere Schranke für die Dimension des Radikals $d - 2$.

Hat nun das Radikal die Dimension $d - 2$, so muss die Automorphismengruppe auf dem Radikal transitiv operieren. Also gilt sofort für alle $a, b \in \text{rad } A$, dass $ab = ba = 0$. Für ein beliebiges Idempotent e folgt nun: gibt es ein $a \in \text{rad } A \setminus \{0\}$ mit $ae = 0$, so gilt $\text{rad } Ae = 0$; gibt es ein $a \in \text{rad } A \setminus \{0\}$ mit $ea = 0$, so gilt $e \text{ rad } A = 0$. Da aus Dimensionsgründen ein System primitiver orthogonaler Idempotenter hier aus genau zwei Idempotenten besteht, ist die Algebra isomorph zu K_d .

Hat das Radikal Dimension $d - 1$, so ist es gleich $\text{Spur}_0(\mathbb{C}^d)$. Da insbesondere für jedes Element x im Radikal gilt $\text{Spur}(x \cdot _) = \text{Spur}(_ \cdot x) = 0$, ist der Algebrenorbit bereits eine Untervarietät des Untervektorraums der Algebren mit $\text{Spur}((x \cdot _) - (_ \cdot$

$x)) = 0$ für alle $x \in \text{Spur}_0(A)$; in dessen Tangentialraum im Ursprung ist V_Λ nicht enthalten. \square

Wir können nun das uns interessierende Resultat formulieren:

Theorem 2.1.23 ([LBR99, Theorem 1.3]) *Sei A eine d -dimensionale Algebra. Die Varietät $\overline{\mathcal{O}_A}$ ist genau dann glatt, wenn A eine der Algebren $M_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}^{\times 3}$ oder für $d \geq 2$ die Algebra K_d oder N_d ist.*

Beweis Der Orbit von N_d besteht stets aus genau dem Ursprung und ist damit schon abgeschlossen und glatt.

Den Fall $T_0\overline{\mathcal{O}_A} = V_\Lambda$ haben wir im vorhergehenden Lemma diskutiert. Ist $\Lambda \subset T_0\overline{\mathcal{O}_A}$ oder $S \subset T_0\overline{\mathcal{O}_A}$, so gilt wegen

$$\dim \Lambda = \frac{1}{2}d(d-1)(d-3) \text{ und } \dim S = \frac{1}{2}(d-1)(d^2-d-2) ,$$

$$\text{dass } \dim T_0\overline{\mathcal{O}_A} \geq \frac{1}{2}d(d-1)(d-3) .$$

Andererseits gilt

$$\dim \mathcal{O}_A \leq \dim \text{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) = (d-1)^2 ,$$

also gilt für $d \geq 5$, dass $\dim T_0\overline{\mathcal{O}_A} > \dim \mathcal{O}_A$.

Die Algebren der Dimension 3 und 4 sind z. B. bei [Gab74] aufgelistet. Im Fall $d = 3$ gilt für die Algebra $\mathbb{C}^{\times 3}$, dass $\dim \overline{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{\times 3}}} = 4 = \dim S$, also ist $\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{\times 3}}}$ glatt und alle anderen Orbitabschlüsse im Abschluss von $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{\times 3}}$ sind nicht glatt, weil sie kleinere Orbitdimension, aber den gleichen Tangentialraum haben. Der einzige Orbit außerhalb dieses Abschlusses ist K_3 .

Im Fall $d = 4$ müssen wir wegen $\dim S = 15$ nur solche Algebren betrachten, für die $x^2 \in \langle 1, x \rangle_{\mathbb{C}}$ für alle Elemente x gilt. Dies sind außer K_4 nur die Algebren, deren Orbiten im Abschluss von $\mathcal{O}_{M_2(\mathbb{C})}$ liegen, und zwar $M_2(\mathbb{C})$, $A_=\$, $\widetilde{\Lambda}_4$ und N_4 . Es gilt $\dim \overline{\mathcal{O}_{M_2(\mathbb{C})}} = 6 = \dim \Lambda$, also ist $\overline{\mathcal{O}_{M_2(\mathbb{C})}}$ selbst glatt, aber kein anderer Orbitabschluss darin. \square

2.2 Entartungsverhalten

Ziel dieses Abschnitts ist es, ähnlich dem Übergang von Alg_d zu Alg'_d ein assoziiertes Faserbündel zu finden, so dass sich die Entartungsrelation von Alg_d anhand der Entartungsrelation einer kleineren Varietät beschreiben lässt.

Wir verwenden, dass die Existenz eines Systems orthogonaler Idempotenter $(\mathbf{1}_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit festen Dimensionen $\dim \mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j$ in der von m beschriebenen Algebra A eine offene Bedingung an Punkte m aus Alg_d ist.

Für die eigentliche Konstruktion benutzt man, dass für ein generisches Element a einer d -dimensionalen Algebra die gemeinsame Eigenraumzerlegung der Links- und

Rechtsmultiplikation mit a bereits wesentliche Informationen über die Blockstruktur der Algebrenmultiplikation enthält.

Die Blockstruktur der Algebra wollen wir dann fixieren und so die Orbitstruktur der Algebra verkleinern; dazu führen wir den Begriff *Feinheit* mit Symbol $F(l, r)$ und als kombinatorisches Hilfsmittel *Paare von lexikographisch monotonen Funktionen* ein.

Anschließend werden wir die Hilfsobjekte $\text{Alg}_{l,r}^\times$ und $F_{l,r}$ einführen und zeigen, dass $\text{Alg}_{l,r}^\times$ ein assoziiertes Faserbündel mit Faser $F_{l,r}$ ist. Es gibt einen offenen äquivarianten Morphismus von $\text{Alg}_{l,r}^\times$ nach Alg_d , ebenso von $F_{l,r}$ nach $F(l, r)$. Wir erhalten daraus, dass für jede Feinheit das Entartungsverhalten aller Orbits aus Alg_d , die nichtleere Schnittmenge mit dieser Feinheit haben, dem Entartungsverhalten auf der Feinheit entspricht.

Im nächsten Abschnitt zeigen wir dann, dass im Spezialfall $\overline{\mathcal{O}_{M_n(\mathbb{C})}}$ die offenen Morphismen von $\text{Alg}_{l,r}^\times$ nach Alg_{n^2} sowie von $F_{l,r}$ nach $F(l, r)$ schon glatt sind. Es sind dann also die Punkte aus den großen Orbits in $\overline{\mathcal{O}_{M_n(\mathbb{C})}}$ zu den entsprechenden Punkten in $\overline{\mathcal{O}_{M_n(\mathbb{C})}} \cap F(l, r)$ glatt äquivalent.

Die Eigenräume der Multiplikation

Sei A eine d -dimensionale \mathbb{C} -Algebra. Wir fixieren ein Element $v \in A$.

Definition 2.2.1 Sei $v \in A$ gegeben. Wir bezeichnen den Hauptraum von $v \cdot _$ bezüglich α mit $V_{\alpha, _}$. Den Hauptraum von $_ \cdot v$ bezüglich α bezeichnen wir mit $V_{_, \alpha}$. Ferner sei

$$V_{\alpha, \beta} := V_{\alpha, _} \cap V_{_, \beta} .$$

Es kommutieren $v \cdot _$ und $_ \cdot v$ miteinander. Daher gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$, dass

$$V_{\alpha, _} = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{C}} V_{\alpha, \beta} \quad \text{und} \quad V_{_, \alpha} = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{C}} V_{\alpha, \beta}$$

Sei $n(\alpha)$ die Vielfachheit des Eigenwerts α von $v \cdot _$ und $m(\alpha)$ die Vielfachheit des Eigenwerts α von $_ \cdot v$. Der Endomorphismus $(v - \alpha \mathbf{1})^{n(\alpha)} \cdot _$ bildet $V_{\beta, _}$ für $\beta \neq \alpha$ auf sich selbst ab, der Raum $V_{\alpha, _}$ ist genau der Kern des Endomorphismus. Ebenso hat der Endomorphismus $_ \cdot (v - \alpha \mathbf{1})^{m(\alpha)}$ als Kern genau $V_{_, \alpha}$ und bildet jedes $V_{_, \beta}$ für $\beta \neq \alpha$ auf sich selbst ab. Dies gibt Anlass zu der Definition:

Definition 2.2.2 Sei $I \subset \mathbb{C}$. Wir definieren $l_I, r_I \in A$ durch:

$$l_I := \prod_{\substack{\alpha \text{ Eigenwert von } v \cdot _ \\ \alpha \notin I}} (v - \alpha \mathbf{1})^{n(\alpha)}$$

$$r_I := \prod_{\substack{\alpha \text{ Eigenwert von } _ \cdot v \\ \alpha \notin I}} (v - \alpha \mathbf{1})^{m(\alpha)}$$

Das Bild von $l_I \cdot _$ ist nun genau $\bigoplus_{\alpha \in I} V_{\alpha, _}$ und auf $\bigoplus_{\alpha \in I} V_{\alpha, _}$ ist $l_I \cdot _$ ein Isomorphismus. Ebenso hat $_ \cdot r_I$ als Bild genau $\bigoplus_{\alpha \in I} V_{_, \alpha}$ und seine Einschränkung darauf ist ein Isomorphismus. Wir setzen zur Entlastung der Notation ab jetzt $V_{I, _} = \bigoplus_{\alpha \in I} V_{\alpha, _}$, $V_{_, I} = \bigoplus_{\alpha \in I} V_{_, \alpha}$ und $V_{I, J} = \bigoplus_{\alpha \in I, \beta \in J} V_{\alpha, \beta}$.

Lemma 2.2.3 Sei $u \in V_{_, J}$ und $w \in V_{I, _}$ sowie $I \cap J = \emptyset$. Dann gilt $uw = 0$.

Beweis Nach obiger Bemerkung gibt es ein $w' \in A$ mit $w = l_I w'$. Ebenso gibt es ein $u' \in A$ mit $u = u' \prod_{\alpha \in I} (v - \alpha \mathbf{1})^{n(\alpha)}$, da I und J disjunkt sind. Damit gilt

$$uw = u' \left(\left(\prod_{\alpha \in I} (v - \alpha \mathbf{1})^{n(\alpha)} \right) l_I \right) w' = u' \cdot 0$$

nach dem Satz von Cayley-Hamilton. □

Lemma 2.2.4 Sei $u \in V_{J, _}$ und $w \in V_{_, I}$. Dann gilt $uw \in V_{J, I}$.

Beweis Nach obiger Bemerkung gibt es ein $u' \in A$ mit $u = l_J u'$. Also gilt

$$uw = l_J (u' w) \in V_{J, _}$$

Ebenso gibt es ein $w' \in A$ mit $w = w' r_I$; es folgt

$$uw = (u w') r_I \in V_{_, I}$$

□

Lemma 2.2.5 Wir setzen

$$\mathbf{1} =: \sum_{\substack{\alpha \text{ Eigenwert von } v_{_} \\ \beta \text{ Eigenwert von } _ v}} \mathbf{1}_{\alpha, \beta}$$

so dass jedes $\mathbf{1}_{\alpha, \beta}$ in $V_{\alpha, \beta}$ liegt. Dann gilt $\mathbf{1}_{\alpha, \beta} = 0$ für alle $\alpha \neq \beta$.

Beweis Wir erhalten

$$\mathbf{1}_{\gamma, \delta} = \mathbf{1}_{\gamma, \delta} \mathbf{1} = \mathbf{1}_{\gamma, \delta} \left(\sum_{\substack{\varepsilon \text{ EW von } v_{_} \\ \zeta \text{ EW von } _ v}} \mathbf{1}_{\varepsilon, \zeta} \right) = \mathbf{1}_{\gamma, \delta} \left(\sum_{\zeta \text{ EW von } _ v} \mathbf{1}_{\delta, \zeta} \right) = \mathbf{1}_{\gamma, \delta} \mathbf{1}_{\delta, \delta}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Lemma 2.2.3 und im letzten Schritt Lemma 2.2.4 verwenden. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \sum_{\substack{\gamma \text{ EW von } v_{_} \\ \delta \text{ EW von } _ v}} \mathbf{1}_{\gamma, \delta} = \sum_{\substack{\gamma \text{ EW von } v_{_} \\ \delta \text{ EW von } _ v}} \mathbf{1}_{\gamma, \delta} \mathbf{1}_{\delta, \delta} = \sum_{\delta \text{ EW von } _ v} \left(\sum_{\gamma \text{ EW von } v_{_}} \mathbf{1}_{\gamma, \delta} \right) \mathbf{1}_{\delta, \delta} \\ &= \sum_{\delta \text{ EW von } _ v} \left(\sum_{\substack{\gamma \text{ EW von } v_{_} \\ \varepsilon \text{ EW von } _ v}} \mathbf{1}_{\gamma, \varepsilon} \right) \mathbf{1}_{\delta, \delta} = \sum_{\delta \text{ EW von } _ v} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}_{\delta, \delta} = \sum_{\delta \text{ EW von } _ v} \mathbf{1}_{\delta, \delta} \end{aligned}$$

Die Aussage folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $\mathbf{1} = \sum_{\gamma} \mathbf{1}_{\gamma, \gamma} + \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} \mathbf{1}_{\alpha, \beta} = 0$.

□

Lemma 2.2.6 *Wir setzen*

$$v =: \sum_{\substack{\alpha \text{ Eigenwert von } v_- \\ \beta \text{ Eigenwert von } -v}} v_{\alpha,\beta}$$

so dass jedes $v_{\alpha,\beta}$ in $V_{\alpha,\beta}$ liegt. Dann gilt $v_{\alpha,\beta} = 0$ für alle $\alpha \neq \beta$.

Beweis Es gilt

$$v \cdot \mathbf{1}_{\beta,\beta} = \sum_{\alpha \text{ EW von } v_-} v_{\alpha,\beta} \mathbf{1}_{\beta,\beta} = \sum_{\alpha \text{ EW von } v_-} v_{\alpha,\beta} \left(\sum_{\delta \text{ EW von } -v} \mathbf{1}_{\delta,\delta} \right) = \sum_{\alpha \text{ EW von } v_-} v_{\alpha,\beta}$$

Es gilt $\mathbf{1}_{\beta,\beta} \in V_{\beta,\beta}$, also $v \cdot \mathbf{1}_{\beta,\beta} \in V_{\beta,-}$, damit $\sum_{\alpha \text{ EW von } v_-} v_{\alpha,\beta} \in V_{\beta,-}$ und schließlich $v_{\alpha,\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$. \square

Die Feinheit

Definition 2.2.7 *Ein Paar von Funktionen $l, r: \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ heie Paar von lexikographisch monotonen Funktionen, wenn sie surjektiv sind und für jedes $i \in \{1, \dots, d-1\}$ gilt*

$$(l(i), r(i)) \leq_{\text{lex}} (l(i+1), r(i+1)) ,$$

d. h. es ist $l(i) < l(i+1)$ oder es ist $l(i) = l(i+1)$ und $r(i) \leq r(i+1)$.

Zu einem Paar von lexikographisch monotonen Funktionen $l, r: \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ definieren die Bedingungen

$$\text{für alle } i, j \text{ gilt } M_{i,j}^k = 0 \text{ falls } r(i) \neq l(j), l(i) \neq l(k) \text{ oder } r(j) \neq r(k)$$

eine abgeschlossene Untervarietät von Alg_d , die wir als Feinheit $F(l, r)$ bezeichnen.

Satz 2.2.8 *Sei A eine d -dimensionale \mathbb{C} -Algebra. Es ist $F(l, r) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$ genau dann, wenn es in A ein System orthogonaler Idempotenter $(\mathbf{1}_i)_{1 \leq i \leq n}$ gibt, so dass für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt*

$$\dim \mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j = \#(l^{-1}(i) \cap r^{-1}(j)) .$$

Beweis Sei zunächst $m \in F(l, r) \cap \mathcal{O}_A$. Für $p \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir

$$\mathbf{1}_p := \sum_{\{i | l(i)=r(i)=p\}} \alpha_i e_i$$

mit den α_i definiert durch $\mathbf{1} = \sum_{j=1}^d \alpha_j e_j$. Dann ist jedes $\mathbf{1}_p$ idempotent, da

$$\mathbf{1}_p = \mathbf{1} \mathbf{1}_p = \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p + \sum_{1 \leq q \leq n, q \neq p} \mathbf{1}_q \mathbf{1}_p = \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p .$$

Analog zeigt man, dass für jedes $p, q \in \{1, \dots, n\}$ und $x \in \langle e_k \mid l(k) = p, r(k) = q \rangle$ gilt $\mathbf{1}_p x = x \mathbf{1}_q = x$. Also ist $(\mathbf{1}_p)_{1 \leq p \leq n}$ das gesuchte System orthogonaler Idempotenter.

Ist nun ein System orthogonaler Idempotenter $(\mathbf{1}_i)_{1 \leq i \leq n}$ gegeben, so können wir wegen der Bedingungen an $\dim \mathbf{1}_j A \mathbf{1}_k$ eine Basis b_1, \dots, b_d von A wählen mit der Eigenschaft, dass jedes b_i Element von $\mathbf{1}_{l(i)} A \mathbf{1}_{r(i)}$ ist. Also liegt bezüglich dieser Basis die Multiplikation in $F(l, r)$. \square

Insbesondere induziert also ein System orthogonaler Idempotenter $(\mathbf{1}_i)_{1 \leq i \leq n}$ durch die Forderung $\dim \mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j = \#(l^{-1}(i) \cap r^{-1}(j))$ ein Paar lexikographisch monotoner Funktionen l, r .

Der Übergang zur Feinheit

Wir formulieren nun das zentrale Ergebnis des Abschnitts:

Theorem 2.2.9 *Seien A und B zwei d -dimensionale Algebren. Der Orbit \mathcal{O}_B liegt im Abschluss von \mathcal{O}_A genau dann, wenn $\mathcal{O}_B \cap F(l, r)$ im Abschluss von $\mathcal{O}_A \cap F(l, r)$ liegt, wobei l, r durch ein System primitiver orthogonaler Idempotenter von B induziert seien.*

Wir werden das Theorem beweisen, indem wir zunächst die Objekte und Morphismen aus dem folgenden Diagramm konstruieren:

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}_{l,r}^\times & \xrightarrow{q} & \text{Alg}_d \\ \uparrow \iota & & \uparrow \\ F_{l,r} & \xrightarrow{\pi} & F(l, r) \end{array}$$

Dabei sind q und π jeweils offene Morphismen, ι die Inklusion von $F_{l,r}$ in $\text{Alg}_{l,r}^\times$, und es ist $\text{Alg}_{l,r}^\times$ das assoziierte Faserbündel mit Faser $F_{l,r}$. Darüberhinaus liegen für jedes $p \in F_{l,r}$ die Punkte $\pi(p)$ und $q(p)$ im gleichen $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -Orbit, und π ist surjektiv.

Mit Hilfe dieses Diagramms beweisen wir dann das nachfolgende Lemma 2.2.14, aus dem das Theorem unmittelbar folgt.

Zur Konstruktion von $\text{Alg}_{l,r}^\times$ benötigen wir das Hilfsobjekt Alg_d^\times : Sei q_{S_d} der Morphismus aus Satz 1.1.1 und sei $\chi: \text{End}(\mathbb{C}^d) \rightarrow \mathbb{C}^d$ der Morphismus aus Beispiel 1.1.2, der jedem Endomorphismus die monomialen Koeffizienten seines charakteristischen Polynoms zuordnet.

Definition 2.2.10 *Sei Alg_d^\times die abgeschlossene Untervarietät*

$$\{(u, u', v, m) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \text{Alg}_d \mid q_{S_d}(u) = \chi(m(v \otimes -)), q_{S_d}(u') = \chi(m(- \otimes v))\}.$$

Sei $\tilde{q}: \text{Alg}_d^\times \rightarrow \text{Alg}_d$ definiert durch $(u, u', v, m) \mapsto m$.

Wir können also Alg_d^\times auffassen als Alg_d mit einer Zusatzstruktur, die neben m auch noch ein v und die Eigenwerte von $m(v \otimes _)$ und $m(_ \otimes v)$ kennt.

Der Morphismus \tilde{q} ist offen nach Korollar 1.1.6, da es sich um den Quotienten der $S_d \times S_d$ -Aktion auf Alg_d^\times durch Permutation jeweils der Einträge von \mathbb{C}^d handelt, verknüpft mit der Vektorbündelprojektion $\mathbb{C}^d \times \text{Alg}_d$ mit $(v, m) \mapsto m$.

Um $\text{Alg}_{l,r}^\times$ und damit q einzuführen, bezeichnen wir den Koordinatenring von $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \text{Alg}_d$ mit $\mathbb{C}[L_i, R_j, V_k, M_{l,m}^h \mid 1 \leq i, j, k, l, m, h \leq d]$ und definieren:

Definition 2.2.11 *Sei ein Paar lexikographisch monotoner Funktionen $l, r : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ gegeben. Wir definieren $\text{Alg}_{l,r}^\times$ als offene Untervarietät von Alg_d^\times zu der Menge der Ungleichungen*

$$\begin{aligned} & \{L_i \neq L_j \mid 1 \leq i, j \leq d, l(i) \neq l(j)\} \\ & \cup \{R_i \neq R_j \mid 1 \leq i, j \leq d, r(i) \neq r(j)\} \\ & \cup \{L_i \neq R_j \mid 1 \leq i, j \leq d, l(i) \neq r(j)\} . \end{aligned}$$

Den Morphismus $q: \text{Alg}_{l,r}^\times \rightarrow \text{Alg}_d$ setzen wir auf die Verknüpfung der offenen Einbettung von $\text{Alg}_{l,r}^\times$ in Alg_d^\times und \tilde{q} .

Weiterhin definieren wir eine Familie $(I(c) \mid c \in \{1, \dots, n\})$ von paarweise disjunkten Mengen $I(c) \subset \mathbb{C}$ per $I(c) := \{u_i \mid l(i) = c\} = \{u'_i \mid r(i) = c\}$.

Wir konstruieren nun einen äquivarianten Morphismus ψ von $\text{Alg}_{l,r}^\times$ auf eine Untervarietät von $(M_d(\mathbb{C}))^{n^2}$, indem wir jedem Punkt (u, u', v, m) die Projektionsmatrizen auf die $V_{I(i), I(j)}$ zuordnen, wobei i und j jeweils $\{1, \dots, n\}$ durchlaufen:

Wir definieren Morphismen $h_{i,j,k}: \text{Alg}_{l,r}^\times \rightarrow \mathbb{C}^d$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, d\}$, indem wir jedem (u, u', m) den Vektor $l_{I(i)} e_k r_{I(j)}$ zuordnen, wobei e_k der k -te Vektor der Standardbasis sei. Wir erhalten zu jeder Permutation $\sigma: \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ einen Morphismus $h_\sigma: \text{Alg}_{l,r}^\times \rightarrow M_d(\mathbb{C})$, indem wir (u, u', v, m) die Matrix mit den Spalten $h_{l(g), r(g), \sigma(g)}((u, u', v, m))$ mit $g \in \{1, \dots, d\}$ zuordnen. Es wird dann $\text{Alg}_{l,r}^\times$ durch die Urbilder $h_\sigma^{-1}(\text{GL}_d(\mathbb{C}))$ zu allen Funktionen σ überdeckt, da das Bild von $h_{i,j,k}((u, u', v, m))$ stets in $V_{I(i), I(j)}$ liegt und $\mathbb{C}^d \rightarrow \bigoplus_{i,j \in \{1, \dots, n\}} V_{I(i), I(j)}$ injektiv ist.

Es bleibt der Morphismus ψ zu definieren; die generische Projektionsmatrix $f_{i,j}: \text{Alg}_{l,r}^\times \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ erhalten wir wie folgt: Sei dazu $D_{i,j}$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die $d \times d$ -Diagonalmatrix mit Eintrag $\delta_{l(k), i} \delta_{r(k), j}$ an der Stelle (k, k) ; für jede Permutation σ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir

$$f_{i,j}: (u, u', v, m) \mapsto h_\sigma((u, u', v, m)) D_{i,j} (h_\sigma((u, u', v, m)))^{-1} .$$

Das Bild jeder Projektion $f_{i,j}$ ist jeweils $V_{I(i), I(j)}$. Da die Projektionsmatrizen eindeutig durch die Eigenräume $V_{I(i), I(j)}$ bestimmt sind, hängen die $f_{i,j}$ nicht von der Wahl des σ ab.

Wir erhalten also insgesamt einen Morphismus

$$\psi: \text{Alg}_{l,r}^\times \rightarrow (M_d(\mathbb{C}))^{n^2}, (u, u', v, m) \mapsto (f_{i,j}((u, u', v, m)))_{1 \leq i, j \leq n} .$$

Sei $H := \prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \mathrm{GL}_{\#(l^{-1}(i) \cap r^{-1}(j))}(\mathbb{C})$ und

$F_{l,r} := \{(u, u', v, m) \mid m \in F(l, r), \text{ für alle } i \text{ mit } l(i) \neq r(i) \text{ gilt } v_i = 0, \\ \text{ für alle } j, k \in \{1, \dots, n\}$

gilt $q_{S_{\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k))}}(u|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}) = \chi(m|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}(v \otimes -))$
und $q_{S_{\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k))}}(u'|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}) = \chi(m|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}(- \otimes v))\}$.

wobei $u|_J$ den Vektor aus $\mathbb{C}^{\#J}$ mit Komponenten $(u_i \mid i \in J)$ meint, $m|_J(v \otimes -)$ den Endomorphismus auf $\{w \in \mathbb{C}^d \mid w_i = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } i \notin J\}$ durch $w \mapsto m(v \otimes w)$ bezeichnet, und $m|_J(- \otimes v)$ dies für den Endomorphismus auf $\{w \in \mathbb{C}^d \mid w_i = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } i \notin J\}$ durch $w \mapsto m(w \otimes v)$ tut. Wir erhalten:

Satz 2.2.12 *Die Varietät $\mathrm{Alg}_{l,r}^\times$ ist isomorph zum assoziierten Faserbündel*

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) \times^H F_{l,r} .$$

Beweis Es operiert $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ auf dem Bild von ψ transitiv mittels simultaner Konjugation: die Menge der Systeme aller Projektionsmatrizen steht gerade in Bijektion zur Menge der $d \times d$ -Matrizen mit Eigenwerten $1, \dots, n^2$ in den entsprechenden Vielfachheiten.

Weiterhin ist ψ äquivariant bezüglich $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$: unter simultaner Konjugation wird aus dem Bild $\langle w \rangle_{\mathbb{C}}$ einer Projektionsmatrix gerade $\langle gw \rangle_{\mathbb{C}}$, und gw ist Eigenvektor von $gm(g^{-1}gv \otimes g^{-1}-)$ genau dann, wenn w Eigenvektor von $m(v \otimes -)$ ist; ebenso ist gw Eigenvektor von $gm(g^{-1}- \otimes g^{-1}gv)$ genau dann, wenn w Eigenvektor von $m(- \otimes v)$ ist.

Dass H der Stabilisator ist, gilt, da ein Element $g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ genau dann im Stabilisator liegt, wenn das Bild jedes $f_{i,j}$ stabil unter g ist.

Es bleibt die Faser über einem Punkt zu bestimmen; wir betrachten das Urbild von $((D_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n})$ und zeigen zunächst, dass dieses Urbild in $F_{l,r}$ liegt: für jedes Paar $i, j \in \{1, \dots, d\}$ gilt $m(e_i \otimes e_j) = 0$, falls $r(i) \neq l(j)$, da dies mittels Lemma 2.2.3 aus $e_i \in V_{-,I(r(i))}$ und $e_j \in V_{I(l(j)), -}$ folgt; ebenso folgt mittels Lemma 2.2.4 aus $e_i \in V_{I(l(i)), -}$ und $e_j \in V_{-,I(r(j))}$, dass $m(e_i \otimes e_j)$ in $V_{I(l(i)), I(r(j))}$ liegt. Damit liegt m in $F(l, r)$. Nach Lemma 2.2.6 liegt v in $\oplus_{\gamma} V_{\gamma, \gamma}$. Für jedes Paar $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $V_{I(i), I(j)} = \langle e_k \mid l(k) = i, r(k) = j \rangle$, also folgt $q_{S_{\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k))}}(u|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}) = \chi(m|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}(v \otimes -))$ und $q_{S_{\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k))}}(u'|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}) = \chi(m|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}(- \otimes v))$.

Umgekehrt gilt für jedes $(u, u', v, m) \in F_{l,r}$, dass $V_{I(i), -} = \langle e_k \mid l(k) = i \rangle$ und $V_{-, I(j)} = \langle e_k \mid r(k) = j \rangle$ und damit $V_{I(i), I(j)} = \langle e_k \mid l(k) = i, r(k) = j \rangle$ gilt. Also ist $\pi((u, u', v, m)) = ((D_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n})$. \square

Definition 2.2.13 *Wir definieren π durch*

$$\pi: F_{l,r} \rightarrow F(l, r), \quad (u, u', v, m) \mapsto m .$$

Dass π surjektiv ist, folgt aus Satz 2.2.8: Zu jedem m gibt es ein System von n primitiven orthogonalen Idempotenten $(\mathbf{1}_i)_{1 \leq i \leq n}$; wähle paarweise verschiedene α_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und setze $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_i$, $u_i = \alpha_{l(i)}$ und $u'_i = \alpha_{r(i)}$. Dann liegt (u, u', v, m) in $F_{l,r}$.

Damit ist die Konstruktion des Diagramms abgeschlossen und wir können das folgende Lemma beweisen:

Lemma 2.2.14 *Seien A und B zwei d -dimensionale Algebren, seien l, r durch ein System primitiver orthogonaler Idempotenter von B induziert. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es gibt ein $m \in \mathcal{O}_B$ und eine in Alg_d offene Umgebung \dot{U} von m mit $\mathcal{O}_A \cap \dot{U} = \emptyset$.*
2. *Es gibt eine in Alg_d offene Untervarietät U mit $\mathcal{O}_B \subset U$ und $\mathcal{O}_A \cap U = \emptyset$.*
3. *Es gibt eine in $F(l, r)$ offene Untervarietät U_F mit $\mathcal{O}_B \cap F(l, r) \subset U_F$ und $\mathcal{O}_A \cap U_F = \emptyset$.*
4. *Es gibt ein $m \in \mathcal{O}_B \cap F(l, r)$ und eine in $F(l, r)$ offene Umgebung \dot{U}_F von m mit $\mathcal{O}_A \cap \dot{U}_F = \emptyset$.*

Beweis $1 \Rightarrow 2$: Ist $\mathcal{O}_A \subset X$ für eine abgeschlossene Teilmenge von Alg_d , so ist für jedes $g \in \text{GL}_d(\mathbb{C})$ auch $\mathcal{O}_A = g\mathcal{O}_A \subset gX$. Also ist \mathcal{O}_A auch in der abgeschlossenen Teilmenge $\bigcap_{g \in \text{GL}_d(\mathbb{C})} gX$ enthalten. Deren Komplement ist die gesuchte offene Menge, die \mathcal{O}_B enthält.

$2 \Rightarrow 3$: Die Menge $U \cap F(l, r)$ ist eine solche offene Menge.

$3 \Rightarrow 4$: Die Menge U_F leistet für jedes $m \in \mathcal{O}_B$ das Gewünschte und nach Konstruktion ist $\mathcal{O}_B \cap F(l, r)$ nicht leer.

$4 \Rightarrow 1$: Das Urbild $\pi^{-1}(\dot{U}_F)$ ist offen und nichtleer in $F_{l,r}$. Also ist $\text{GL}_d(\mathbb{C}) \cdot (\pi^{-1}(\dot{U}_F))$ offen in $\text{Alg}_{l,r}^\times$, enthält einen Punkt (u, u', v, m) mit $m \in \mathcal{O}_B$ und hat leeren Schnitt mit $q^{-1}(\mathcal{O}_A)$. Da q offen ist, ist das Bild von $\text{GL}_d(\mathbb{C}) \cdot (\pi^{-1}(\dot{U}_F))$ offen in Alg_d und hat auch dort leeren Schnitt mit \mathcal{O}_A . \square

Nun können wir den Beweis von Theorem 2.2.9 vollenden:

Beweis [Theorem]: Dass \mathcal{O}_B im Abschluss von \mathcal{O}_A liegt, ist die Negation von Bedingung 2. Ebenso entspricht die Eigenschaft, dass $\mathcal{O}_B \cap F(l, r)$ im Abschluss von $\mathcal{O}_A \cap F(l, r)$ liegt, der Negation von Bedingung 3. \square

Der Basisgraph

Wir beschließen den Abschnitt mit einem Begriff, der zu einer gegebenen Algebra die Anzahl der potentiellen Kandidaten, in die sie entarten könnte, stark einschränkt. Wir führen dazu eine vereinfachte Version des Basisgraphen (siehe [Sch88, Abschnitt 3]) ein:

Definition 2.2.15 Sei A eine d -dimensionale Algebra, und sei $(\mathbf{1}_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein System primitiver orthogonaler Idempotenter in A . Der Basisgraph $W(A)$ zu A bestehe aus n Punkten $\{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, wobei die Anzahl der Pfeile von P_i nach P_j durch $\dim \mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j - \delta_{i,j}$ gegeben sei.

Weiterhin benötigen wir noch eine Operation samt zugehöriger transitiver Relation auf der Menge aller Basisgraphen:

Definition 2.2.16 Sei $Q := (Q_0, Q_1, s, e)$ ein Basisgraph. Die Verschmelzung von Q in den Punkten $p, p' \in Q_0$ mit $p \neq p'$ sei definiert als $Q' := (Q'_0, Q'_1, s', e')$ mit $Q'_0 := Q_0 \setminus \{p'\}$ und $Q'_1 := Q_1 \dot{\cup} \{\pi\}$, sowie

$$s': \alpha \mapsto \begin{cases} p & s(\alpha) = p' \text{ oder } \alpha = \pi \\ s(\alpha) & \text{sonst} \end{cases} \quad e': \alpha \mapsto \begin{cases} p & e(\alpha) = p' \text{ oder } \alpha = \pi \\ e(\alpha) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ein Basisgraph Q' heie größer als Q , falls $Q' = Q$ oder Q' aus Q durch wiederholte Verschmelzung entsteht.

Wir schlussfolgern daraus das folgende Theorem:

Theorem 2.2.17 Seien A und B Algebren über \mathbb{C} der Dimension d . Entartet A in B , so ist der Basisgraph zu B größer als der Basisgraph zu A .

Beweis Sei $(\mathbf{1}_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein System primitiver orthogonaler Idempotenter von B und l, r das dadurch induzierte Paar lexikographisch monotoner Funktionen. Dann liegt $\mathcal{O}_B \cap F(l, r)$ im Abschluss von $\mathcal{O}_A \cap F(l, r)$, also ist $\mathcal{O}_A \cap F(l, r)$ nicht leer. Sei $m \in \mathcal{O}_A \cap F(l, r)$. Dann gibt es bezüglich m und damit in A ein System orthogonaler Idempotenter $(\mathbf{1}'_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{C}^d)^n$, so dass $\dim \mathbf{1}_i B \mathbf{1}_j = \dim \mathbf{1}'_i A \mathbf{1}'_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. bersetzt man dies in die Sprache der Basisgraphen, so erhält man gerade die Relation, dass der Basisgraph zu B größer ist als jener zu A . \square

Beispiel 2.2.18 Es entartet keine Algebra in K_d : Denn K_d hat als Basisgraphen W seinen Gabriel-Köcher und ist zugleich die einzige Algebra mit diesem Basisgraphen. Der Graph W enthält keine Schleifen, also gibt es auch keinen Basisgraphen \tilde{W} , so dass W echt größer als \tilde{W} ist.

2.3 Der Orbitabschluss der Matrixalgebra

In diesem Abschnitt werden wir als Beispiele die Orbitabschlüsse der einfachen Algebren $M_2(\mathbb{C})$ und $M_3(\mathbb{C})$ diskutieren und daraus Schlussfolgerungen für $\overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}}$ mit $d > 3$ ziehen: Wir wissen bereits, dass $\overline{\mathcal{O}_{M_2(\mathbb{C})}}$ glatt ist, während $\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}}$ dies nicht ist. ber die Resultate von [LBR99] hinaus wollen wir hier nun genauer diejenigen Punkte von $\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}}$ bestimmen, in denen $\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}}$ noch glatt oder schon nicht mehr glatt ist; mittels Hochschild-Kohomologie lässt sich dieses Ergebnis auch auf $\overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}}$ für $d > 3$ übertragen. Da die Tangentialraumdimension invariant unter der

Aktion der $GL_d(\mathbb{C})$ ist, handelt es sich bei solchen Punktmengeen stets um ganze Orbits.

Zunächst diskutieren wir den Fall $d = 2$. Anschließend nutzen wir, dass die Konstruktion aus dem vorangehenden Abschnitt in unserer Situation besonders gute Eigenschaften besitzt: die dort nur offenen Morphismen q und π sind auf der Vereinigung der großen Orbits in $\overline{\mathcal{O}_{M_n(\mathbb{C})}}$ schon beide glatte Morphismen. Damit sind die großen Orbits schon glatt äquivalent zu $\overline{\mathcal{O}_{M_n(\mathbb{C})}} \cap F(l, r)$, wobei l, r das zu $M_n(\mathbb{C})$ gehörige Paar lexikographisch monotoner Funktionen sei. Dies ermöglicht uns die Beschreibung derjenigen Orbits aus $\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}}$, deren Algebra ein System dreier orthogonaler Idempotenter besitzt.

Der Orbitabschluss von $M_2(\mathbb{C})$

Für $M_2(\mathbb{C})$ können wir die schon aus [Gab74] bekannten Algebren aus dem Orbitabschluss mit den nun verfügbaren Werkzeugen ohne Aufwand bestimmen:

Theorem 2.3.1 *Der Abschluss des Orbits zu $M_2(\mathbb{C})$ ist die Vereinigung der Orbits zu $M_2(\mathbb{C})$, zu $A_=$, zu $\widetilde{\Lambda}_4$ und zu N_4 .*

Beweis Als Basisgraphen hat $M_2(\mathbb{C})$ den Graphen Q



Als einzige mögliche Verschmelzung davon erhalten wir den einpunktigen Basisgraphen mit drei Schlaufen. Den Graphen Q als Basisgraphen besitzen genau die Algebren $M_2(\mathbb{C})$ und $A_=$. Die Algebra $M_2(\mathbb{C})$ entartet in $A_=$ mittels z. B. der Familie zu den Basen $(e_{11}, t \cdot e_{12}, e_{21}, e_{22})$. Um diejenigen Algebren mit einpunktigem Basisgraphen im Abschluss von Q zu identifizieren, in die $M_2(\mathbb{C})$ entartet, verwenden wir, dass jedes Element x aus $M_2(\mathbb{C})$ der Bedingung $x^2 \in \langle \mathbf{1}, x \rangle$ genügt. Es folgt daraus, dass für die Multiplikation innerhalb des Radikals $xy = -yx$ gilt. So verbleiben als Kandidaten $\widetilde{\Lambda}_4$ und N_4 . Die Algebra $A_=$ entartet in Λ_4 mittels der Familie von Basen

$$\mathbf{1}, t(\mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_1 + \alpha), t(\mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_1 + \beta), t^2(\alpha + \beta) .$$

Dass $\widetilde{\Lambda}_4$ in N_4 entartet, folgt daraus, dass N_4 die einzige Algebra mit abgeschlossenem Orbit ist. \square

Die großen Orbits als Faserbündel

Wir setzen $l: \{1, \dots, n^2\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, (i-1)n + j \mapsto i$ und $r: \{1, \dots, n^2\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, (i-1)n + j \mapsto j$, jeweils für $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Wir diskutieren zunächst den Morphismus $q: \text{Alg}_{l,r}^\times \rightarrow \text{Alg}_{n^2}$: wir schreiben $q = \tilde{p}\iota\tilde{q}$ mit $\tilde{q}: \text{Alg}_{l,r}^\times \rightarrow \mathbb{C}^{n^2} \times \text{Alg}_{n^2}, (u, u', v', m) \mapsto (v, m)$ und $\iota: \text{Bild } \tilde{q} \rightarrow \mathbb{C}^{n^2} \times \text{Alg}_{n^2}$

sowie $\tilde{p}: \mathbb{C}^{n^2} \times \text{Alg}_{n^2} \rightarrow \text{Alg}_{n^2}$, $(v, m) \mapsto m$. Dann ist \tilde{q} auf sein Bild ein étaler Morphismus, ι eine offene Immersion und \tilde{p} ist eine Vektorbündelprojektion vom Rang n^2 .

Lemma 2.3.2 *Für dieses Paar l, r gilt $H = (\mathbb{C}^*)^{n^2}$ und*

$$\begin{aligned} F_{l,r} \cong \tilde{F} &= \{(\tilde{u}, v, m) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n^2} \times \text{Alg}_d \mid m \in F(l, r), \\ &\text{für alle } i \text{ mit } l(i) \neq r(i) \text{ gilt } v_i = 0, \\ &\text{für alle } i \text{ mit } l(i) = r(i) \text{ gilt } \tilde{u}_{l(i)} = v_i m_{i,i}^i\}. \end{aligned}$$

Beweis Das Aussehen von H folgt aus der Tatsache, dass für jedes Paar $j, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)) = 1$.

Per Definition liegt ein Tupel (u, u', v, m) genau dann in $F_{l,r}$, wenn m in $F(l, r)$ liegt, für alle i mit $l(i) \neq r(i)$ gilt $v_i = 0$ und für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned} qS_{\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k))}(u|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}) &= \chi(m|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}(v \otimes -)) \quad (*) \\ qS_{\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k))}(u'|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}) &= \chi(m|_{l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)}(- \otimes v)). \end{aligned}$$

Wegen $\#(l^{-1}(j) \cap r^{-1}(k)) = 1$ vereinfacht sich $(*)$ zu $u_i = \chi(m|_{\{i\}}(v \otimes -))$, wobei i das genau eine Element mit $l(i) = j$ und $r(i) = k$ sei. Es gilt $m(v \otimes e_i) = m(v_l e_l \otimes e_i)$, wobei l das genau eine Element mit $l(l) = j$ und $r(l) = j$ sei. Damit folgt $u_i = v_l m_{l,i}^i$. Es gilt ohnehin $u_l = u_i$. Analog geht man für u' und die zweite Ungleichung vor. Wir erhalten einen bijektiven Morphismus von \tilde{F} nach $F_{l,r}$ durch $(\tilde{u}, v, m) \mapsto (u, u', v, m)$ mit u, u' definiert durch $u_i = \tilde{u}_{l(i)}$ und $u'_i = \tilde{u}_{r(i)}$. \square

Der Morphismus $\pi: F_{l,r} \rightarrow F(l, r)$ erhält so die Abbildungsvorschrift $(\tilde{u}, v, m) \mapsto m$. Da $v_i = \frac{\tilde{u}_{l(i)}}{m_{i,i}^i}$ gilt und u genau die Ungleichungen erfüllen muss, paarweise verschiedene Werte zu haben, handelt es sich bei π also um eine offene Immersion, verknüpft mit einer Vektorbündelprojektion vom Rang n .

Insgesamt erhalten wir also:

Theorem 2.3.3 *Es sind Punkte aus der offenen Untervarietät von $\overline{\mathcal{O}_{M_n(\mathbb{C})}}$ aller Algebren, die ein System von n orthogonalen Idempotenten zulassen, glatt äquivalent zu den entsprechenden Punkten in $F(l, r)$.*

Der Orbitabschluss von $M_3(\mathbb{C})$

Um mit den Orbitabschlüssen $\overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}}$ mit $d \geq 3$ einfacher hantieren zu können, definieren wir zunächst eine leichte Verallgemeinerung der Wegealgebra:

Definition 2.3.4 *Sei $\mathcal{Q} := (\mathcal{Q}_0; \mathcal{Q}_1; s, e: \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_0)$ ein Köcher mit n Punkten, in dem die Punkte mit $1, \dots, n$ bezeichnet sind.*

Dann sei die Wegealgebra $\mathbb{C}\mathcal{Q}(d_1, \dots, d_n)$ mit $d_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ der \mathbb{C} -Vektorraum erzeugt von

$$\begin{aligned} & \{e_{j,k}^i \mid i \in \{1, \dots, n\}, j, k \in \{1, \dots, d_i\}\} \\ & \cup \{\omega_{i,j} \mid \omega \text{ Weg in } \mathcal{Q}, i \in \{1, \dots, d_{s(\alpha)}\}, j \in \{1, \dots, d_{e(\alpha)}\}\} \end{aligned}$$

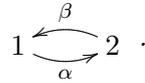
versehen mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} e_{j,k}^i e_{m,h}^l &= \delta_{i,l} \delta_{k,m} e_{j,h}^i, \\ e_{j,k}^i \omega_{l,m} &= \delta_{i,s(\omega)} \delta_{k,l} \omega_{j,m}, \\ \omega_{i,j} e_{l,m}^k &= \delta_{e(\alpha),k} \delta_{j,l} \omega_{i,m}, \\ \omega_{i,j} \nu_{k,l} &= \delta_{e(\omega),s(\nu)} \delta_{j,k} (\omega \nu)_{i,l}. \end{aligned}$$

Seien $\omega_1, \dots, \omega_m$ Wege aus \mathcal{Q}_1 mit gleichem Start- und Endpunkt und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ aus \mathbb{C} . Mit $\mathbb{C}\mathcal{Q}(d_1, \dots, d_n) / \langle \sum_{i=1}^m \lambda_i \omega_i \rangle$ sei die Quotientenalgebra von $\mathbb{C}\mathcal{Q}(d_1, \dots, d_n)$ zu der Relation $\sum_{i=1}^m \lambda_i (\omega_i)_{1,1}$ bezeichnet (diese ist isomorph zu der Quotientenalgebra bezüglich der Menge der Relationen $\{\sum_{i=1}^m \lambda_i (\omega_i)_{j,k} \mid j \in \{1, \dots, d_{s(\omega_1)}\}, k \in \{1, \dots, d_{e(\omega_1)}\}\}$).

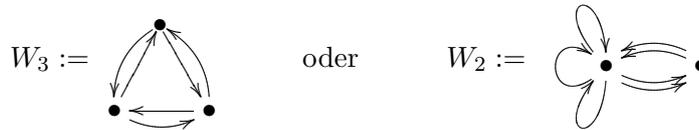
Sind alle d_i gleich 1, so erhält man gerade die übliche Definition der Wegealgebra. Zu jedem Köcher \mathcal{Q} sind die Wegealgebren $\mathbb{C}\mathcal{Q}(d_1, \dots, d_n)$ und $\mathbb{C}\mathcal{Q}(d'_1, \dots, d'_n)$ unabhängig von der Wahl der d_i und d'_i zueinander per Konstruktion Morita-äquivalent.

Beispiel 2.3.5 Sei $\mathcal{Q}_= := (\{1, 2\}, \{\alpha, \beta\}, s, e)$ mit $s(\alpha) = 1, e(\alpha) = 2, s(\beta) = 2$ und $e(\beta) = 1$. Als Graph erhalten wir den schon bekannten Graphen



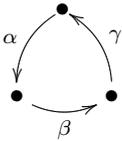
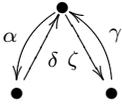
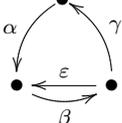
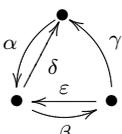
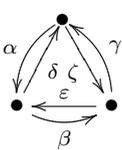
Die Algebra $\mathbb{C}\mathcal{Q}_=(1,1) / \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle$ ist isomorph zu $A_=$. Wir werden gleich auch $A_=(2,1) := \mathbb{C}\mathcal{Q}_=(2,1) / \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle$ benötigen; dies ist die einzige Algebra A , die Morita-äquivalent zu $A_=$ ist und für die $A / \text{rad } A = M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ gilt.

Die Algebra $M_3(\mathbb{C})$ weist gegenüber $M_2(\mathbb{C})$ einen deutlich komplizierteren Orbitabschluss auf: Zunächst einmal haben Algebren, deren Abschluss im Orbit von $M_3(\mathbb{C})$ liegt, als Basisgraphen einen der Graphen



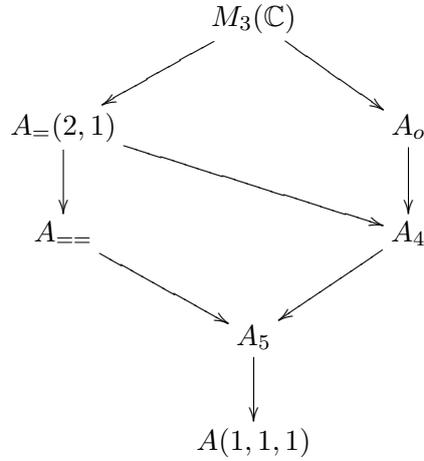
oder den einpunktigen Basisgraphen W_1 mit acht Schleifen. Wir beschränken uns hier auf Algebren zum Basisgraphen W_3 :

Theorem 2.3.6 Im Abschluss des Orbits zu $M_3(\mathbb{C})$ befinden sich die Orbite genau der folgenden Algebren zum Basisgraphen W_3 :

$A_o = \mathbb{C}Q_o / \langle \alpha\beta\gamma, \gamma\alpha\beta, \beta\gamma\alpha \rangle$	mit Q_o :	
$A_{==} = \mathbb{C}Q_{==} / \langle \alpha\delta, \delta\alpha, \gamma\zeta, \zeta\gamma \rangle$	mit $Q_{==}$:	
$A_4 = \mathbb{C}Q_4 / \langle \beta\varepsilon, \varepsilon\beta, \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma \rangle$	mit Q_4 :	
$A_5 = \mathbb{C}Q_5 / \langle \beta\varepsilon, \varepsilon\beta, \alpha\delta, \delta\alpha, \gamma\alpha, \beta\gamma, \varepsilon\delta \rangle$	mit Q_5 :	
$A(1, 1, 1) = \mathbb{C}Q_{(1,1,1)} / \langle \beta\varepsilon, \varepsilon\beta, \alpha\delta, \delta\alpha, \zeta\gamma, \gamma\zeta, \gamma\alpha, \beta\gamma, \alpha\beta, \varepsilon\delta, \delta\zeta, \zeta\varepsilon \rangle$	mit $Q_{(1,1,1)}$:	

sowie $A_{=(2, 1)}$ und $M_3(\mathbb{C})$ selbst.

Ihr Entartungsverhalten untereinander wird durch das folgende Diagramm beschrieben:



Dabei bedeutet $A \rightarrow B$, dass $\mathcal{O}_B \subset \overline{\mathcal{O}_A}$ gilt.

Beweis Jede Algebra A zum Basisgraphen W_3 besitzt ein System aus drei primitiven orthogonalen Idempotenten $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3$ und es gilt $\dim \mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j = 1$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Also hat \mathcal{O}_A nichtleeren Schnitt mit der Feinheit $F(l, r)$, wobei wir $l, r: \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 3\}$ so definieren, dass sich auf sie Satz 2.2.8 anwenden lässt:

$$l: 3(i-1) + j \mapsto i, \quad r: 3(i-1) + j \mapsto j \quad \text{für } i, j \in \{1, 2, 3\} .$$

Umgekehrt hat auch jede Algebra A , so dass $\mathcal{O}_A \cap F(l, r) \neq \emptyset$ gilt, den Basisgraphen W_3 . Nach Theorem 2.2.9 genügt es, das Inklusionsverhalten der Orbiten auf $F(l, r)$ zu studieren.

Um alle Algebren mit Basisgraphen W_3 zu finden, durchlaufen wir alle Möglichkeiten für Kombinationen von Dimensionen der Schnittmengen zwischen den $\mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j$ und $\text{rad } A$ bzw. alle möglichen Köcher. Ist z.B. für mindestens ein Paar $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ die Dimension von $\mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j \cap \text{rad } A$ gleich 0, so ist A nicht sauber. In diesem Fall bleiben genau die zwei Möglichkeiten, dass $A = M_3(\mathbb{C})$ oder dass A Morita-äquivalent zu $A_=$ ist mit $A/\text{rad } A = M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$; wir erhalten also $A_=(2, 1)$. Nun suchen wir noch nach allen sauberen Algebren mit Basisgraphen W_3 . Jeder infrage kommende Köcher muss stark zusammenhängend sein, damit ein Weg zwischen jedem Paar von Punkten existiert, aber darf höchstens einen Pfeil zwischen jedem Paar von Punkten aufweisen. Dies führt unmittelbar auf die im Theorem aufgelisteten Köcheralgebren.

Um potentielle Entartungen zwischen diesen Algebren zu untersuchen, betrachten wir deren Orbiten in $F(l, r)$: Sei die kanonische Basis des \mathbb{C}^9 mit $(e_{11}, e_{12}, \dots, e_{33})$ bezeichnet; dann liegt $e_{i,j}$ gerade in $\mathbf{1}_i A \mathbf{1}_j$. Für jeden Punkt m aus $F(l, r)$ gilt dann, dass $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, $i \in \{1, 2, 3\}$ existieren, so dass $m(e_{i,i}, e_{j,k}) = \delta_{i,j} \alpha_i e_{j,k}$ und $m(e_{j,k}, e_{i,i}) = \delta_{k,i} \alpha_i e_{j,k}$ sind. Aus $m(e_{i,j}, e_{j,k}) \in \langle e_{i,k} \rangle$ erhalten wir schließlich, dass sich jedes m in $F(l, r)$ durch die Parameter $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ wie folgt beschreiben lässt:

$$\begin{aligned} M_{11,11}^{11}(m) &= M_{11,12}^{12}(m) = M_{11,13}^{13}(m) = M_{21,11}^{21}(m) = M_{31,11}^{31}(m) = \alpha_1, \\ M_{22,21}^{21}(m) &= M_{22,22}^{22}(m) = M_{22,23}^{23}(m) = M_{12,22}^{12}(m) = M_{32,22}^{32}(m) = \alpha_2, \\ M_{33,31}^{31}(m) &= M_{33,32}^{32}(m) = M_{33,33}^{33}(m) = M_{13,33}^{13}(m) = M_{23,33}^{23}(m) = \alpha_3, \\ M_{12,23}^{13}(m) &= \beta_{13}, \quad M_{13,32}^{12}(m) = \beta_{12}, \quad M_{23,31}^{21}(m) = \beta_{21}, \\ M_{21,13}^{23}(m) &= \beta_{23}, \quad M_{32,21}^{31}(m) = \beta_{31}, \quad M_{31,12}^{32}(m) = \beta_{32}, \\ M_{12,21}^{11}(m) &= \frac{\beta_{13}\beta_{23}}{\alpha_1}, \quad M_{13,31}^{11}(m) = \frac{\beta_{12}\beta_{32}}{\alpha_1}, \quad M_{21,12}^{22}(m) = \frac{\beta_{13}\beta_{23}}{\alpha_2}, \\ M_{23,32}^{22}(m) &= \frac{\beta_{21}\beta_{31}}{\alpha_2}, \quad M_{31,13}^{33}(m) = \frac{\beta_{12}\beta_{32}}{\alpha_3}, \quad M_{32,23}^{33}(m) = \frac{\beta_{21}\beta_{31}}{\alpha_3}, \end{aligned}$$

wobei die Gleichungen

$$\beta_{12}\beta_{13} = \beta_{21}\beta_{31}, \quad \beta_{21}\beta_{23} = \beta_{12}\beta_{32}, \quad \beta_{31}\beta_{32} = \beta_{13}\beta_{23}$$

gelten. Wir erhalten also eine Varietät der Dimension 7. Während nun jeder Punkt, für den alle $\beta_{i,j} \neq 0$ sind, schon in $M_3(\mathbb{C})$ liegt, gelten für die übrigen Algebren folgende weitere Gleichungen:

Ist $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$ oder $\beta_{13} = \beta_{31} = 0$ oder $\beta_{23} = \beta_{32} = 0$ und sind jeweils alle übrigen $\beta_{i,j}$ ungleich 0, so erhält man einen Punkt in $A_=(2, 1)$. Die Schnittmenge $F(l, r) \cap \mathcal{O}_{A_=(2,1)}$ hat also die Dimension 6.

Der Orbit zu A_o wird beschrieben durch die Gleichungen $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31} = 0$ oder $\beta_{13} = \beta_{32} = \beta_{21} = 0$ und die jeweils übrigen drei $\beta_{i,j}$ müssen ungleich 0 sein; wir erhalten als Dimension wieder 6.

Zu $A_{==}$ erhalten wir als Gleichungen $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{13} = \beta_{31} = 0$ oder $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0$ oder $\beta_{13} = \beta_{31} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0$, wobei wieder jeweils alle übrigen $\beta_{i,j}$ ungleich Null sind. Die Orbitdimension ist 5.

Der Orbit zu A_4 wird dadurch beschrieben, dass die $b_{i,j}$ aus jeweils genau einem der folgenden Paare ungleich 0 sind: $(\beta_{12}, \beta_{23}), (\beta_{23}, \beta_{31}), (\beta_{31}, \beta_{12}), (\beta_{13}, \beta_{32}), (\beta_{32}, \beta_{21}), (\beta_{21}, \beta_{13})$. Wir erhalten also einen Orbit ebenfalls der Dimension 5.

Sind genau fünf der sechs $\beta_{i,j}$ gleich Null, so handelt es sich um einen Punkt in A_5 . Die Orbitdimension beträgt folglich 4.

Sind alle $\beta_{i,j}$ gleich Null, so erhalten wir einen Punkt in $A(1, 1, 1)$. Der Orbit hat Dimension 3.

Wenn der Orbit einer Algebra B im Abschluss des Orbits der Algebra A liegt, so ist $\dim \mathcal{O}_B < \dim \mathcal{O}_A$. Wir untersuchen die Relation der Entartungen innerhalb von $F(l, r)$ also absteigend nach Dimension: Die Algebra $M_3(\mathbb{C})$ entartet in $A_{=(2, 1)}$, indem man $\beta_{12} = \beta_{21} = t$ sowie alle übrigen $\beta_{i,j}$ und alle α_i auf 1 setzt und den Grenzübergang $t \rightarrow 0$ betrachtet. In A_o entartet $M_3(\mathbb{C})$, indem man $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31} = t$ setzt und das Gleiche tut. Die Entartung von $A_{=(2, 1)}$ nach $A_{==}$ wird ab $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$ durch $\beta_{13} = \beta_{31} = t$ beschrieben, diejenige nach A_4 durch $\beta_{13} = \beta_{32} = t$. Die Algebra A_o entartet in A_4 ab $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31} = 0$ mittels $\beta_{21} = t$; dass A_o nicht in $A_{==}$ entartet, sieht man daran, dass der Punkt $m \in F(l, r) \cap \mathcal{O}_{A_{==}}$ mit $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{13} = \beta_{31} = 0, \beta_{23} = \beta_{32} = 1$ keine der Gleichungen zu A_o erfüllt. Durch sukzessives Setzen der übrigen, von Null verschiedenen $\beta_{i,j}$ auf den Wert t und anschließenden Grenzübergang $t \rightarrow 0$ zeigt man, dass $A_{==}$ und A_4 in A_5 sowie A_5 in $A(1, 1, 1)$ entartet. \square

Es bleibt zu klären, inwiefern $\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}}$ nicht glatt ist.

Theorem 2.3.7 Für jedes $m \in \mathcal{O}_{A(1,1,1)}$ gilt $\dim T_m \overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}} = 75$.

Für jedes $m \in \mathcal{O}_{A_{=(2,1)}} \cup \mathcal{O}_{A_o} \cup \mathcal{O}_{A_{==}} \cup \mathcal{O}_{A_4} \cup \mathcal{O}_{A_5}$ gilt $\dim T_m \overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}} = 73$.

Beweis Nach Theorem 2.3.3 gilt für jedes $m \in (\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}} \cap F(l, r))$, dass

$$\dim T_m \overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}} = \dim T_m (\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}} \cap F(l, r)) + 66$$

und die Tangentialraumdimension hängt nur davon ab, im Orbit welcher Algebra ein Punkt liegt, nicht vom Punkt selber.

Wir betrachten die abgeschlossene Untervarietät X des \mathbb{C}^6 :

$$\{(\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{21}, \beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{32}) \mid \beta_{12}\beta_{13} = \beta_{21}\beta_{31}, \beta_{21}\beta_{23} = \beta_{12}\beta_{32}, \beta_{31}\beta_{32} = \beta_{13}\beta_{23}\}$$

Es ist $\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}} \cap F(l, r)$ per Konstruktion isomorph zu $(\mathbb{C}^3)^* \times X$.

Zu zeigen ist, dass X im Punkt $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ Tangentialraumdimension 6 und überall sonst Tangentialraumdimension 4 hat. Als Jacobische erhalten wir die 3×6 -Matrix J :

$$\begin{pmatrix} \beta_{13} & \beta_{12} & -\beta_{31} & 0 & -\beta_{21} & 0 \\ -\beta_{32} & 0 & \beta_{23} & \beta_{21} & 0 & -\beta_{12} \\ 0 & -\beta_{23} & 0 & -\beta_{13} & \beta_{32} & \beta_{31} \end{pmatrix}$$

Es gilt $\dim \ker J = 4$ genau dann, wenn J den Rang 2 hat.

Wir zeigen, dass J schon Rang 2 hat, wenn mindestens eines der $\beta_{i,j}$ ungleich 0 ist: Ist β_{12} ungleich 0, so ist der Untermatrix aus 1. und 2. Zeile, 2. und 6. Spalte ungleich 0. Analog findet man auch für jedes andere $\beta_{i,j}$ Untermatrizen, die invertierbar sind, falls $\beta_{i,j}$ ungleich 0 ist. \square

Höhere Dimensionen

Wir werden nun feststellen, dass die in $\overline{\mathcal{O}_{M_3(\mathbb{C})}}$ als glatt erkannten Orbits auch in allen $\overline{\mathcal{O}_{M_n(\mathbb{C})}}$ für $n > 3$ glatt bleiben. Dazu nutzen wir das folgende Lemma:

Lemma 2.3.8 *Sei A eine verallgemeinerte Wegealgebra (Definition 2.3.4) eines Köchers \mathcal{Q} . Seien alle Relationen von der Form $\omega = 0$ für Wege ω im Gabriel-Köcher. Sei der Basisgraph von A der Graph mit n Knoten und genau einem Pfeil von i nach j für jedes Paar von Knoten i, j mit $i \neq j$. Dann gilt*

$$\dim \text{Aut } A = n^2 - \#G_0 + \#G_1,$$

wobei $\#G_0$ die Anzahl der Punkte und $\#G_1$ die Anzahl der Pfeile im Gabriel-Köcher bezeichne.

Beweis Es reicht, die Dimension der Zusammenhangskomponente der Identität der Automorphismen zu bestimmen. Wir wählen als Vektorraumbasis von A die Basis aus Definition 2.3.4. Seien die inneren Automorphismen von A mit $\text{Int } A$ bezeichnet und sei H die Menge aller Automorphismen, die allen Idempotenten der Gestalt $e_{j,j}^i$ in A fest lassen.

Die Abbildung

$$\text{Int } A \times H \rightarrow (\text{Aut } A)^0, (h, \varphi) \mapsto \varphi h$$

ist dann surjektiv.

Denn wir finden zu jedem Automorphismus ψ einen inneren Automorphismus φ , so dass $\varphi\psi$ die $e_{j,j}^i$ fest lässt: Sei $\psi \in \text{Aut}(A)$. Wir schreiben die $e_{j,k}^i$ -Anteile von $\psi(e_{m,m}^l)$ in eine $d_i \times d_i$ -Matrix mit dem Anteil von $(e_{j,k}^i)$ als (j, k) -tem Eintrag. Dann folgt aus der Idempotenz von $\psi(e_{m,m}^l)$, dass diese Matrix diagonalisierbar ist und Eigenwerte nur 0 oder 1 hat. Da die $\psi(e_{m,m}^l)$ zueinander orthogonal sind, sind es auch die zugehörigen Matrizen. Da dies wieder $\sum d_i$ orthogonale Summanden der Eins sind, hat jedes $\psi(e_{m,m}^l)$ für jeweils genau ein i genau einmal den Eigenwert 1. Wir können also mit einem inneren Automorphismus einen Basiswechsel

durchführen, der alle $\psi(e_{m,m}^l)$ auf $e_{m,m}^l$ zurücksetzt und $\psi(e_{j,j}^i) \in e_{j,j}^i + \text{rad } A$ annehmen.

Wir argumentieren nun per Induktion über die Länge der Wege. Sei vorausgesetzt, dass für alle i, j gilt $\psi(e_{j,j}^i) - e_{j,j}^i \in \text{rad}^m A$; wir finden einen inneren Automorphismus φ , so dass $\varphi\psi(e_{j,j}^i) - e_{j,j}^i \in \text{rad}^{m+1} A$ gilt: Wir setzen $s_j^i = \psi(e_{j,j}^i) - e_{j,j}^i$. Dann folgt aus $e_{j,j}^i \psi(e_{j,j}^i) \psi(e_{l,l}^k) e_{l,l}^k = 0$ für $i \neq k$ oder $j \neq l$, dass $e_{j,j}^i s_j^i e_{l,l}^k + e_{j,j}^i s_l^k e_{l,l}^k$ in $\text{rad}^{m+1} A$ liegt und aus $e_{j,j}^i \psi(e_{j,j}^i) \psi(e_{l,l}^k) e_{h,h}^g = 0$ für g, i, k und h, j, l jeweils paarweise verschieden, dass $e_{j,j}^i s_l^k e_{h,h}^g$ in $\text{rad}^{m+1} A$ liegt. Wir setzen $s := \sum_{(i,j) <_{\text{lex}} (k,l)} e_{j,j}^i s_j^i e_{l,l}^k$. Es ist $1 - s$ invertierbar mit einem Inversen von der Form $1 + s + s'$ mit $s' \in \text{rad}^{m+1} A$ und Konjugation mit $1 - s$ leistet das Gewünschte.

Damit erhalten wir

$$\dim \text{Aut } A = \dim \text{Int } A + \dim H - \dim(\text{Int } A \cap H)$$

Es gilt $\dim \text{Int } A = \dim A - \dim Z(A)$. Da \mathcal{Q} keine Schleifen enthalten kann und zusammenhängend sein muss, gilt $Z(A) = \langle \mathbf{1} \rangle_{\mathbb{C}}$, also $\dim \text{Int } A = n^2 - 1$.

Wir erhalten $\dim H = n - \#G_0 + \#G_1$: Sei φ ein Automorphismus. Wir können φ durch seine Bilder auf den Elementen der Basis beschreiben: es gilt $\varphi(e_{j,j}^i) = e_{j,j}^i$ und wegen $\varphi(e_{j,k}^i) = \varphi(e_{j,j}^i e_{j,k}^i e_{k,k}^i) = e_{j,j}^i \varphi(e_{j,k}^i) e_{k,k}^i$, dass $\varphi(e_{j,k}^i) \in \langle e_{j,k}^i \rangle_{\mathbb{C}}$. Wegen $e_{j,l}^i = e_{j,k}^i e_{k,l}^i$ ist φ auf den $e_{j,k}^i$ bereits eindeutig durch $\varphi(e_{j,j+1}^i)$ bestimmt. Für die Wege gilt analog, dass φ schon durch $\varphi(\alpha_{1,1})$ eindeutig bestimmt ist, wobei α die Pfeile des Gabriel-Köchers durchlaufe.

Wir bestimmen $\dim(\text{Int } A \cap H)$ als $n-1$: Für $a \in A$ gilt $a^{-1} e_{j,j}^i a = e_{j,j}^i$ genau dann, wenn a invertierbar ist und $e_{j,j}^i a = a e_{j,j}^i$ gilt. Dies ist äquivalent zu a invertierbar und $a \in \langle e_{j,j}^i \rangle_{\mathbb{C}}$. Da auch das Zentrum eine Teilmenge von $a \in \langle e_{j,j}^i \rangle_{\mathbb{C}}$ ist und ein solches a genau dann invertierbar ist, wenn alle Koeffizienten ungleich 0 sind, folgt $\dim(\text{Int } A \cap H) = n - 1$. \square

Damit erhalten wir folgende Verallgemeinerung von Theorem 2.3.7:

Theorem 2.3.9 *Die Varietät*

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})} \cup \bigcup_{d_1+d_2=d} \mathcal{O}_{A=(d_1,d_2)} \cup \bigcup_{d_1+d_2+d_3=d} \mathcal{O}_{A_o(d_1,d_2,d_3)} \\ & \cup \bigcup_{d_1+d_2+d_3=d} \mathcal{O}_{A==(d_1,d_2,d_3)} \cup \bigcup_{d_1+d_2+d_3=d} \mathcal{O}_{A_4(d_1,d_2,d_3)} \cup \bigcup_{d_1+d_2+d_3=d} \mathcal{O}_{A_5(d_1,d_2,d_3)} \end{aligned}$$

ist glatt.

Beweis Man zeigt zunächst für jeden der obigen Orbiten, dass er im Abschluss von $\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}$ liegt, indem man die im Beweis zu Theorem 2.3.6 verwendeten Gleichungen verallgemeinert.

Nun zeigt man mittels Lemma 2.0.8 und Lemma 2.3.8, dass

$$\dim \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})} - \dim \mathcal{O}_{A=(d_1,d_2)} = 1$$

mit $d_1 + d_2 = d$ unabhängig von der Wahl von d und d_1 gilt; entsprechend erhält man

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})} - \dim \mathcal{O}_{A_o(d_1, d_2, d_3)} &= 1, \\ \dim \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})} - \dim \mathcal{O}_{A_{==}(d_1, d_2, d_3)} &= 2, \\ \dim \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})} - \dim \mathcal{O}_{A_4(d_1, d_2, d_3)} &= 2, \\ \dim \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})} - \dim \mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)} &= 3\end{aligned}$$

wobei die einzigen Bedingungen an d , d_1 , d_2 und d_3 die Gleichung $d_1 + d_2 + d_3 = d$ ist. Insbesondere können wir also für jedes $m \in \mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)}$ die Dimension von $T_m \mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)}$ als $\dim \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})} - 3$ ermitteln.

Proposition 2.4 aus [Gab74] liefert uns nun: es gilt für jede endlichdimensionale Algebra A und jeden Punkt $m \in \text{Alg}_n$, dass

$$T_m \underline{\text{Alg}}_n / T_m \mathcal{O}_A \cong H^2(A, A)$$

wobei $H^2(A, A)$ die 2-te Hochschild-Kohomologiegruppe bezeichne (Def. siehe z. B. [Lod98]), und $\underline{\text{Alg}}_n$ das Schema mit Raum Alg_n zu den Assoziativitätsgleichungen sei.

Die Hochschild-Kohomologie ist invariant unter Morita-Äquivalenz; für A_5 ermittelt man $\dim H^2(A_5, A_5) = 3$. Wir können nun für jedes $m \in \mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)}$ abschätzen:

$$\begin{aligned}\dim T_m \overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}} &\leq \dim T_m \underline{\text{Alg}}_n = \dim T_m \mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)} + 3 \\ &= \dim \mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)} + 3 = \dim \mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}\end{aligned}$$

Da also $\overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}}$ in allen Punkten von $\mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)}$ glatt ist, ist es insbesondere auch in allen Orbits glatt, in deren Abschluss $\mathcal{O}_{A_5(d_1, d_2, d_3)}$ liegt. \square

3 Die Nori-Konstruktion

Dass $Z_{d,g}$ im Allgemeinen singularär ist, haben wir bereits in Beispiel 1.2.4 erfahren. Um $Z_{d,g}$ trotz seiner Singularitäten untersuchen zu können, wollen wir eine sogenannte *Desingularisierung von $Z_{d,g}$* betrachten, d. h. ein Paar (X, π) aus einer glatten Varietät X und einem projektiven, birationalen Morphismus $\pi: X \rightarrow Z_{d,g}$. Es hat M. V. Nori [Nor78] im Anhang zu einer Arbeit von Seshadri [Ses78] eine Paar aus einer Varietät $D_{d,g}$ und einem projektiven, birationalen Morphismus π_d auf $Z_{d,g}$ konstruiert, so dass die Urbilder zahlreicher Singularitäten aus $Z_{d,g}$ in $D_{d,g}$ glatte Punkte sind. Wir werden in Theorem 3.2.4 zeigen, dass $D_{d,g}$ selbst allerdings nur genau für $d = 2$ eine glatte Varietät ist. Wir skizzieren kurz die Konstruktion für $D_{d,g}$, bevor wir sie in allen technischen Details einführen:

$$\begin{array}{ccccc}
 \overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}} & \hookrightarrow & \text{Alg}_{d^2} & & \\
 \uparrow & & \uparrow \kappa_{g,d^2} & & \\
 W_{d,g} & \hookrightarrow & P_{d^2,g} & \hookrightarrow & U_{d^2,g} \\
 \downarrow \sigma_{d^2} & & \downarrow \sigma_{d^2} & & \downarrow \sigma_{d^2} \\
 D_{d,g} & \hookrightarrow & \widetilde{\text{Hilb}}_{d^2,g} & \hookrightarrow & \text{Hilb}_{d^2,g} \\
 \downarrow \pi_d & & & & \downarrow \\
 Z_{d,g} & \hookrightarrow & & & Z_{d^2,g}
 \end{array}$$

Alle waagerechten Pfeile sind abgeschlossene Einbettungen. Die $\text{GL}_{d^2}(\mathbb{C})$ -Varietäten $W_{d,g}$, $P_{d^2,g}$ und den Morphismus κ_{g,d^2} werden wir in Abschnitt 3.1 angeben. Zu den $\text{GL}_{d^2}(\mathbb{C})$ -Untervarietäten $W_{d,g}$, $P_{d^2,g}$ und $U_{d^2,g}$ der Varietät $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ versehen mit der $\text{GL}_{d^2}(\mathbb{C})$ -Aktion durch simultanen Basiswechsel betrachten wir die Quotienten $D_{d,g}$, $\widetilde{\text{Hilb}}_{d^2,g}$ bzw. $\text{Hilb}_{d^2,g}$ mit Quotientenmorphisms jeweils σ_{d^2} ; diese Objekte werden in Abschnitt 3.2 eingeführt. Abschnitt 3.3 ist dem Morphismus von $\text{Hilb}_{d^2,g}$ nach $Z_{d^2,g}$ gewidmet, Abschnitt 3.4 dem Morphismus von $Z_{d,g}$ nach $Z_{d^2,g}$. Den Morphismus π_d werden wir schließlich in Abschnitt 3.5 konstruieren können.

Die Glattheit von $D_{d,g}$ hängt eng mit der Glattheit des Orbitabschlusses der $d \times d$ -Matrixalgebra in Alg_{d^2} zusammen. Diese liefert uns in Kapitel 2 das Theorem 2.1.23 sowie die anschließende Diskussion in Abschnitt 2.3.

3.1 Zusammenhang zu Alg_n

Wir sammeln zunächst einige weitere nützliche Notationen: Auf der Varietät $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ definieren wir eine $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Aktion durch

$$\begin{aligned} \cdot * \cdot : \quad \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times ((M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n) &\rightarrow (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n \\ (h, (m_1, \dots, m_g, v)) &\mapsto (hm_1h^{-1}, \dots, hm_g h^{-1}, hv) . \end{aligned}$$

Den Begriff der generischen Matrizen verwenden wir hier als

$$\begin{aligned} X_i : \quad (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n &\rightarrow M_n(\mathbb{C}), \\ (m_1, \dots, m_g, v) &\mapsto m_i \end{aligned}$$

und ergänzen ihn um den generischen Vektor

$$\begin{aligned} X' : \quad (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n, \\ (m_1, \dots, m_g, v) &\mapsto v \quad . \end{aligned}$$

Weiterhin sind zu jedem $p \in (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$

- die Unteralgebra $A\langle p \rangle := \{M(p) \in M_n(\mathbb{C}) \mid M \in M_n(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]\}$ von $M_n(\mathbb{C})$
- der Untervektorraum $V\langle p \rangle := \{m \cdot X'(p) \mid m \in A\langle p \rangle\}$ des \mathbb{C}^n

wohldefiniert.

Definition 3.1.1 Seien $g, n \in \mathbb{N}$. Es sei $P_{n,g}$ die Untervarietät in $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ zu der lokal abgeschlossenen Menge

$$\{p \in (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n \mid \dim A\langle p \rangle = n, \dim V\langle p \rangle = n\}$$

Wir führen nun den Morphismus $\kappa_{g,n} : P_{n,g} \rightarrow \text{Alg}_n$ ein. Dazu verwenden wir für Alg_n die Definition 2.0.2. Der Morphismus $\rho_p : A\langle p \rangle \rightarrow V\langle p \rangle$, $m \mapsto m \cdot X'(p)$ ist für jedes $p \in P_{n,g}$ wegen der Dimensionsbedingungen ein Vektorraumisomorphismus. Wir befördern ρ_p zum Algebrenmorphismus, indem wir \mathbb{C}^n mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} m_p : \quad \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n, \\ a \otimes b &\mapsto \rho_p(\rho_p^{-1}(a)\rho_p^{-1}(b)) = \rho_p^{-1}(a)\rho_p\rho_p^{-1}(b) = \rho_p^{-1}(a)b \end{aligned}$$

versehen.

Definition 3.1.2 Wir setzen $\kappa_{g,n} : p \mapsto m_p$.

Um zu zeigen, dass es sich dabei um eine reguläre Abbildung handelt, führen wir folgende weitere Notation ein:

Da die generischen Matrizen nicht miteinander kommutieren, benutzen wir zur kompakten Beschreibung von Monomen statt Multiindizes Wörter über dem Alphabet $\{1, \dots, g\}$. Zu dem Wort $a_1 \cdots a_m$ sei die generische Matrix $X(a_1 \cdots a_m) \in$

$M_n(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ definiert als $X_{a_1} X_{a_2} \cdots X_{a_m}$ sowie zum leeren Wort ε die generische Matrix $X(\varepsilon)$ als I . Wir überdecken $P_{n,g}$ durch die Familie der offenen Mengen

$$(P_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1, \dots, \omega_n \text{ Wörter in } \{1, \dots, g\}) ,$$

wobei $P_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die Menge der Punkte p sei, so dass der von $\{X(\omega_1)X'(p), \dots, X(\omega_n)X'(p)\}$ erzeugte Vektorraum \mathbb{C}^n ist. Dann ist die Matrix $X(\omega_1, \dots, \omega_n)(p)$ mit Spalten $X(\omega_1)X'(p), \dots, X(\omega_n)X'(p)$ invertierbar und es gilt

$$\rho_p^{-1}: w \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i X(\omega_i)(p) \quad \text{mit} \quad \alpha = (X(\omega_1, \dots, \omega_n)(p))^{-1} w .$$

Also ist $\kappa_{g,n}$ auf $P_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ wohldefiniert; da m_p unabhängig von der Wahl der $\omega_1, \dots, \omega_n$ ist, verkleben alle $\kappa_{g,n}|_{P_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)}$ und $\kappa_{g,n}$ ist auch global wohldefiniert.

Die Äquivarianz von $\kappa_{g,n}$ rechnet man durch Einsetzen in die Definitionen nach.

Lemma 3.1.3 *Der Morphismus $\kappa_{g,n}$ ist glatt.*

Beweis Sei Alg_d^1 die Varietät aus Korollar 2.0.3. Wir definieren eine Varietät Y sowie Morphismen $\varphi: P_{n,g} \rightarrow Y$, $\pi: Y \rightarrow \text{Alg}_d^1$ und $\psi: \text{Alg}_d^1 \rightarrow \text{Alg}_n$, so dass $\kappa_{g,n} = \psi\pi\varphi$, und wir zeigen, dass φ ein Isomorphismus sowie π die Verknüpfung aus einer offenen Immersion und der Projektion eines trivialen Vektorbündels ist. Dass ψ ein Isomorphismus ist, haben wir in Korollar 2.0.3 bewiesen.

Wir beobachten zunächst, dass für jedes $p \in P_{n,g}$, jedes $i \in \{1, \dots, g\}$ und jedes $w \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\kappa_{g,n}(p)((X_i X')(p) \otimes w) = (X_i(p)w) .$$

Sei $\Gamma := \{(p, m) \in P_{n,g} \times \text{Alg}_n \mid \kappa_{g,n}(p) = m\}$ der Graph von $\kappa_{g,n}$; sei

$$Y := \left\{ \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_g, m, v) \in (\mathbb{C}^n)^g \times \text{Alg}_n \times \mathbb{C}^n \\ \mid m(- \otimes v) = \text{id}, \{v_1, \dots, v_g\} \text{ erzeugen die Algebra zu } m \end{array} \right\} .$$

Dann erhalten wir einen Isomorphismus $\tilde{\varphi}: \Gamma \rightarrow Y$ via

$$\tilde{\varphi}: (p, m) \mapsto ((X_1 X')(p), \dots, (X_g X')(p), m, X'(p))$$

und den Umkehrmorphismus

$$\tilde{\varphi}^{-1}: \begin{array}{ll} Y & \rightarrow \Gamma, \\ (v_1, \dots, v_g, m, v) & \mapsto ((m(v_1 \otimes -), \dots, m(v_g \otimes -), v), m) . \end{array}$$

Wir definieren φ als Verkettung des Isomorphismus $P_{n,g} \rightarrow \Gamma$ mit $\tilde{\varphi}$.

Sei π definiert als $(v_1, \dots, v_g, m, v) \mapsto (m, v)$. Es reicht zu zeigen, dass Y in $(\mathbb{C}^n)^g \times \text{Alg}_n^1$ offen ist: sei

$$P' := \{p \in (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n \mid \dim A\langle p \rangle \leq n\} .$$

Dann ist Y das Urbild der offenen Teilmenge $P_{n,g}$ von P' unter dem Morphismus

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \quad (\mathbb{C}^n)^g \times \text{Alg}_d^1 &\rightarrow P', \\ (v_1, \dots, v_g, m, v) &\mapsto ((m(v_1 \otimes -), \dots, m(v_g \otimes -), v), m). \end{aligned}$$

□

Definition 3.1.4 Sei $W_{d,g}$ das Urbild von $\overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}}$ unter κ_{g,d^2} .

3.2 Der Kandidat als Quotient

Definition 3.2.1 Sei $U_{n,g}$ die offene Untervarietät von $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ zur Menge aller Punkte p , so dass $V\langle p \rangle$ die Dimension n hat.

Da $V\langle p \rangle$ ohnehin Dimension höchstens n hat, ist die Forderung nach Dimension n für $V\langle p \rangle$ die Forderung nach Dimension mindestens n für $V\langle p \rangle$, also eine offene Bedingung. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass $U_{n,g}$ gerade die Menge der det-stabilen Punkte von $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ bezüglich der $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Operation ist. Wir erhalten einen Inklusionsmorphismus $P_{n,g} \rightarrow U_{n,g}$.

Wir führen weitere nützliche Begrifflichkeiten ein: Wir werden häufiger Determinanten von spaltenweise zusammengesetzten Matrizen betrachten; sei also

$$\det(\omega_1 | \dots | \omega_n) := \det(X(\omega_1)X' | \dots | X(\omega_n)X'),$$

$$\det(\omega_1 | \dots | \omega_n)[\hat{j}, \omega] :=$$

$$\det(X(\omega_1)X' | \dots | X(\omega_{j-1})X' | X(\omega)X' | X(\omega_{j+1})X' | X(\omega_n)X').$$

Jede dieser Funktionen f von $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ nach \mathbb{C} ist dabei eine Semiinvariante zum Grad 1 bezüglich \det , d. h. es gilt für jedes $h \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, dass $f(h * p) = \det(h)f(p)$. Wir werden zeigen, dass der Ring der Semiinvarianten von Funktionen dieser Form erzeugt wird.

Wir werden nun die folgenden Varietäten konstruieren und damit implizit ihre Existenz beweisen:

Definition 3.2.2 Sei $\text{Hilb}_{n,g}$ der $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Quotient von $U_{n,g}$, sei $\widetilde{\text{Hilb}}_{n,g}$ der $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Quotient von $P_{n,g}$ und sei $D_{d,g}$ der $\text{GL}_{d^2}(\mathbb{C})$ -Quotient von $W_{d,g}$.

Der Quotient $\text{Hilb}_{n,g}$ der $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Aktion auf $U_{n,g}$ durch simultane Konjugation existiert, er lässt sich sogar explizit konstruieren: Wir überdecken $U_{n,g}$ wie schon $P_{n,g}$ durch die Familie der offenen Mengen

$$(U_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1, \dots, \omega_n \text{ Wörter in } \{1, \dots, g\}),$$

wobei $U_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die Menge der Punkte p sei, so dass der von $\{X(\omega_1)X'(p), \dots, X(\omega_n)X'(p)\}$ erzeugte Vektorraum \mathbb{C}^n ist. Sei $D(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die Untervarietät

von $U_{n,g}$ mit $X(\omega_i)X'(p) = e_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Jedes $U_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ist dann isomorph zu $D(\omega_1, \dots, \omega_n) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; der Isomorphismus

$$\varphi: U_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n) \rightarrow D(\omega_1, \dots, \omega_n) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

ist gegeben durch $p \mapsto (g^{-1} * p, g)$ mit $g = ((X(\omega_1)X')(p) | \dots | (X(\omega_n)X')(p))$, sein Inverses durch $(p, g) \mapsto g * p$. Die $D(\omega_1, \dots, \omega_n)$ verkleben, da jeder $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ -Orbit in $U_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ mit $D(\omega_1, \dots, \omega_n)$ genau einen Schnittpunkt hat. Die Überdeckung von $U_{n,g}$ durch die $U_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ tritt auch bereits in [VdB88] auf.

Der Quotient $\mathrm{Hilb}_{n,g}$ und seine Struktur sind Gegenstand des Artikels [Rei05]. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf die beiden Beobachtungen, dass der Quotient ein (lokal triviales) Prinzipalbündel (Def. siehe z. B. [Ser58, Abschnitt 2.2]) und glatt ist, denn lokal hat er stets die Gestalt einer Projektion $D(\omega_1, \dots, \omega_n) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow D(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Insbesondere gilt für jede $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ -invariante abgeschlossene Untervarietät X von $U_{n,g}$, dass der Quotient Q von X unter der Aktion von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ebenfalls ein glattes Prinzipalbündel und Q eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathrm{Hilb}_{n,g}$ ist. Wir erhalten:

Satz 3.2.3 *Die Quotienten $\widetilde{\mathrm{Hilb}}_{n,g}$ und $D_{d,g}$ existieren, die Quotientenabbildungen $P_{n,g} \rightarrow \widetilde{\mathrm{Hilb}}_{n,g}$ und $W_{d,g} \rightarrow D_{d,g}$ sind Prinzipalbündel und glatt und es gibt abgeschlossene Immersionen $D_{d,g} \rightarrow \widetilde{\mathrm{Hilb}}_{d^2,g}$ und $\widetilde{\mathrm{Hilb}}_{n,g} \rightarrow \mathrm{Hilb}_{n,g}$.*

Noris [Nor78] Kandidat für die Desingularisierung von $Z_{d,g}$ ist $D_{d,g}$. Den birationalen und projektiven Morphismus nach $Z_{d,g}$ werden wir später konstruieren, zunächst diskutieren wir die Glattheit von $D_{d,g}$.

Theorem 3.2.4 *Ist $\overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}}$ glatt, so auch $D_{d,g}$. Aus der Glattheit von $D_{d,g}$ folgt die Glattheit von $\kappa_{g,d^2}(W_{d,g})$.*

Beweis Sowohl $\kappa_{g,n}$ als auch der Quotient $W_{d,g} \rightarrow D_{d,g}$ sind glatte Morphismen. Der Quotient ist stets surjektiv. \square

Inwieweit die Surjektivität von κ_{g,d^2} eine Einschränkung darstellt, illustriert das folgende Lemma:

Lemma 3.2.5 *Das Bild von $\kappa_{g,n}$ besteht aus den Orbiten aller n -dimensionalen Algebren, die ein Erzeugendensystem mit höchstens g Elementen besitzen.*

Der Morphismus $\kappa_{g,n}$ ist genau dann surjektiv, wenn $g \geq n - 1$ gilt.

Beweis Das Bild von $\kappa_{g,n}$ sind genau die Orbite der n -dimensionalen Algebren, die ein Erzeugendensystem als Algebra mit g Elementen besitzen: Sei $m: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Multiplikation zur Algebra A mit Einselement $\mathbf{1}$, so dass v_1, \dots, v_g ein Erzeugendensystem von A als Algebra ist. Dann wird der Punkt $(m(v_1 \otimes \cdot), \dots, m(v_g \otimes \cdot), \mathbf{1}) \in P_{n,g}$ durch $\kappa_{g,n}$ wieder auf m abgebildet. Sei andererseits $p \in P_{n,g}$. Dann ist die Algebra zu $\kappa_{g,n}(p)$ isomorph zu $A\langle p \rangle$. Da zu jeder n -dimensionalen Algebra ein

Erzeugendensystem mit höchstens $n - 1$ Elementen existiert, ist $\kappa_{g,n}$ für $g \geq n - 1$ surjektiv.

Die Algebra N_n (definiert in Definition 2.1.1) benötigt als Algebra mindestens $n - 1$ Erzeuger: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a, b \in \text{rad } N_n$ gilt

$$(\alpha \mathbf{1} + a)(\beta \mathbf{1} + b) = \beta(\alpha \mathbf{1} + a) + \alpha(\beta \mathbf{1} + b) - \alpha\beta \mathbf{1} .$$

Also erzeugen v_1, \dots, v_m genau dann die Algebra, wenn $v_1, \dots, v_m, \mathbf{1}$ als Vektorraum den \mathbb{C}^n erzeugen. Also ist $\kappa_{g,n}$ für $g < n - 1$ nicht surjektiv. \square

Tatsächlich zeigt die Diskussion in Abschnitt 2.3, dass $D_{d,g}$ sogar unabhängig von g nur genau für $d = 2$ glatt ist; für $d \geq 3$ gehört der Orbit zu $A(d_1, d_2, d_3)$ mit $d_1 + d_2 + d_3 = d$ stets zu $\overline{\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}}$ und liegt bereits im Bild von κ_{2,d^2} .

3.3 Projektiv von $\text{Hilb}_{n,g}$ nach $Z_{n,g}$

Wir wollen in diesem Abschnitt einen projektiven Morphismus $\tilde{\pi}_n: \text{Hilb}_{n,g} \rightarrow Z_{n,g}$ konstruieren. Die Konstruktion lässt sich bereits in [VdB88] finden, wir führen hier Details aus: wir finden einen graduierten Ring P , so dass $\text{Hilb}_{n,g}$ isomorph zu $\text{Proj } P$ und $Z_{n,g}$ isomorph zu $\text{Spec } P_0$ ist. Die Varietät $\text{Proj } P$ sei wie z. B. in [Muk03] definiert; dieser Ring besteht gerade aus den Semi-Invarianten bezüglich des Charakters \det auf $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$. Wir benötigen einige technische Lemmata.

Lemma 3.3.1 *Sei der graduierte Ring $P = \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_i$ als ungraduierter Ring endlich erzeugt. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $P' := \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_{ni}$ als $P_0 = P'_0$ -Algebra endlich in P'_1 erzeugt ist.*

Beweis Sei I ein endliches Erzeugendensystem für P . Dann bilden auch alle homogenen Anteile aller Elemente aus I wieder ein endliches Erzeugendensystem \tilde{I} von P . Jedes P_i ist dann als P_0 -Modul von den endlich vielen Monomen von Totalgrad i aus dem Erzeugendensystem erzeugt. Sei m maximal mit der Eigenschaft, dass ein Erzeuger in P_m liegt. Dann wird der graduierte Ring $\tilde{P} := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \tilde{P}_i$ mit $\tilde{P}_i := P_{mi}$ bereits von endlich vielen Elementen vom Höchstgrad $m - 1$ erzeugt: Ein nicht endliches Erzeugendensystem von \tilde{P} bilden alle Produkte der Form $r_1 \cdots r_l$ mit $r_i \in \tilde{I}$, so dass die Summe der Grade der r_i jeweils ein Vielfaches von m ist. Jedes solche Produkt $r_1 \cdots r_l$ mit Summe der Grade jm für $j \geq m$ besitzt schon einen Teiler $r_p \cdots r_q$, der ebenfalls ein solches Produkt ist: Dazu reicht es, dass die Summe der Grade von r_1 bis r_{p-1} den gleichen Divisionsrest bezüglich m wie die Summe der Grade von r_1 bis r_q besitzt. Für $j \geq m$ lassen sich solche p, q mit $p \neq 1$ oder $q \neq l$ stets finden. Also reichen schon die endlich vielen Produkte der Form $r_1 \cdots r_l$, so dass die Summe der Grade gleich jm mit $j < m$ ist. Man wiederholt diesen Prozess, bis man einen Ring erhält, in dem alle Erzeuger in P_1 liegen; diesen Ring bezeichnen wir als P' . \square

Lemma 3.3.2 Sei P ein graduierter Ring, und sei $P'_n := \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_{ni}$ eine Ausdünnung. Dann sind $\text{Proj } P$ und $\text{Proj } P'$ isomorph.

Beweis Zu jedem homogenen Primideal \mathfrak{p} von P ist

$$\varphi(\mathfrak{p}) := \mathfrak{p} \cap P'_n$$

ein homogenes Primideal in P'_n , und zu jedem homogenen Primideal \mathfrak{p}' von P'_n ist

$$\psi(\mathfrak{p}') := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \{f \in P_i \mid \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}, nj \geq i} P_{nj-i} \right) f \subset \mathfrak{p}'\}$$

ein homogenes Primideal in P . Es gilt $\varphi(\psi(\mathfrak{p}')) = \mathfrak{p}'$ und aus $\varphi(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{q})$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Wir können nun $\varphi: P \rightarrow P'_n$ und $\psi: P'_n \rightarrow P$ als zueinander inverse Morphismen definieren: Dem auf $U := \{\mathfrak{p} \in P \mid g \notin \mathfrak{p}\}$ definierten Schnitt f/g können wir den auf $\varphi(U)$ definierten Schnitt fg^{n-1}/g^n zuordnen, so dass die identische Abbildung auf Schnitten in Gegenrichtung das dazu Inverse liefert. \square

Wir erhalten also eine für uns nützliche Verallgemeinerung von [Har77, Beispiel II.4.8.1]:

Lemma 3.3.3 Sei P ein graduierter Ring, der als ungraduierter Ring endlich erzeugt ist. Dann ist der natürliche Morphismus $\text{Proj } P \rightarrow \text{Spec } P_0$ ein projektiver Morphismus.

Beweis Gemäß dem vorletzten Lemma finden wir eine Ausdünnung $P' := \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_{ni}$ von P , so dass P' als P'_0 -Algebra in P'_1 endlich erzeugt ist. Nach [Har77, Beispiel II.4.8.1] ist $\varphi: \text{Proj } P' \rightarrow \text{Spec } P_0$ ein projektiver Morphismus, und nach dem vorhergehenden Lemma ist $\text{Proj } P$ isomorph zu $\text{Proj } P'$. \square

Wir finden nun einen graduierten Ring P mit den Eigenschaften

- Die Varietät $Z_{n,g}$ ist isomorph zu $\text{Spec } P_0$,
- die Varietät $\text{Hilb}_{n,g}$ ist isomorph zu $\text{Proj } P$,
- als ungraduierter Ring ist P endlich erzeugt.

Dies liefert uns den den gewünschten Satz:

Satz 3.3.4 Es gibt einen projektiven Morphismus $\tilde{\pi}_n$ von $\text{Hilb}_{n,g}$ nach $Z_{n,g}$.

Beweis Sei P der graduierte Ring der $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Semiinvarianten von $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$, d. h. $P := \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_i$ mit

$$P_i := \{f: (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{für alle } h \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), p \in (M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n \text{ gilt } f(h * p) = (\det(h))^i f(p)\} .$$

Die Varietät $Z_{n,g}$ ist isomorph zu $\text{Spec } P_0$: Für jede Invariante f von $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$f(p) = f((\lambda \cdot I) * p) = f((X_1 X'(p), \dots, X_g X'(p), \lambda X'(p))) .$$

Also gilt $f(X_1 X'(p), \dots, X_g X'(p), X'(p)) = f(X_1 X'(p), \dots, X_g X'(p), 0)$ per Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$. Da alle regulären Funktionen auf $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ Polynome in den Einträgen der generischen Matrizen und des generischen Vektors sind, sind die Invarianten schon Polynome in nur den Einträgen der generischen Matrizen; solche Polynome sind gerade die Invarianten auf $(M_n(\mathbb{C}))^g$.

Die Varietät $\text{Hilb}_{n,g}$ ist isomorph zu $\text{Proj } P$: Wir zeigen

$$D(\omega_1, \dots, \omega_n) \cong \text{Spec } P_{(\det(\omega_1 | \dots | \omega_n))} .$$

Auf $D(\omega_1, \dots, \omega_n)$ gilt

$$(X_i)_{j,k} = \frac{\det(\omega_1 | \dots | \omega_n) [\hat{k}, i\omega_j]}{\det(\omega_1 | \dots | \omega_n)} .$$

Also ist der Koordinatenring von $D(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ein Unterring von $P_{(\det(\omega_1 | \dots | \omega_n))}$. Umgekehrt ist $P_{(\det(\omega_1 | \dots | \omega_n))}$ per Konstruktion ein Unterring des Invariantenrings von $U_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$; dieser ist gleich dem Koordinatenring von $D(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Die offenen Teilstücke verkleben, da auf beiden Seiten die Restriktionsabbildungen das Einschränken des Definitionsbereichs sind.

Noch zu zeigen ist, dass P als ungraduierter Ring endlich erzeugt ist; wir zeigen dazu, dass P als ungraduierter Ring isomorph zum Ring der $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ -Invarianten auf $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ ist: Jede $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Semiinvariante ist eine $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ -Invariante, es bleibt zu zeigen, dass jede $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ -Invariante eine Summe von $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Semiinvarianten ist. Auf dem Koordinatenring R von $(M_n(\mathbb{C}))^g \times \mathbb{C}^n$ operiert \mathbb{C}^* per $\lambda * f := f((\lambda \cdot I)^{-1} \cdot)$ linear und lässt den Unterring S der $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ -Invarianten stabil. Also besitzt S als \mathbb{C}^* -Modul eine Gewichtsraumzerlegung. Dabei sind nur die Gewichtsräume zu Vielfachen von n nichtleer, denn für jedes Element f aus dem Gewichtsraum i gilt

$$\begin{aligned} f(\text{diag}(\lambda^n, 1, \dots, 1)p) &= f(\text{diag}(\lambda^{n-1}, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{-1})(\lambda \cdot I)p) \\ &= f((\lambda \cdot I)p) = \lambda^{-i} * f(p), \end{aligned}$$

wobei $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ die $n \times n$ -Diagonalmatrix mit Einträgen a_1 bis a_n auf der Diagonalen ist. Also erhalten wir eine rationale Funktion $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\lambda^n \mapsto \lambda^{-i}$; solche Funktionen existieren nur, wenn i ein Vielfaches von n ist. Jede $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ -Invariante zum Gewichtsraum nj ist eine $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Semiinvariante vom Grad j . \square

Wir bemerken noch

Lemma 3.3.5 *Es gilt $A\langle \tilde{\pi}_n(p) \rangle = A\langle p \rangle / \text{rad } A\langle p \rangle$ für jedes $p \in \text{Hilb}_{n,g}$.*

Beweis Wir zeigen zunächst, dass zu jedem Punkt p ein Punkt q mit $A\langle q \rangle = A\langle p \rangle / \text{rad } A\langle p \rangle$ im Abschluss des $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Orbits zu $\tilde{\pi}_n(p)$ liegt: Wir wählen dazu eine Basis b_1, \dots, b_n von \mathbb{C}^n , so dass genau b_{m+1}, \dots, b_n im Radikal liegen. Dann leistet $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $\lambda(t)$ jedes b_i mit $i \leq m$ auf b_i und jedes b_j mit $j > m$ auf $t^{-1}b_j$ abbildet, das Gewünschte.

Wir betrachten nun diejenigen p , für die bereits $A\langle p \rangle$ halbeinfach ist, also $A\langle p \rangle = \prod_{l=1}^r M_{d_l}(\mathbb{C})$ gilt. Zu einem Repräsentanten $q \in U_{n,g}$ von p wählen wir generische Matrizen $m_{i,j}^k$ mit jeweils $i, j \in \{1, \dots, d_k\}$ so, dass alle $m_{i,j}^k(q)$ Elementarmatrizen sind. Dann sind $m_{i,j}^k m_{l,m}^n = \delta_{j,l} \delta_{k,n} m_{i,m}^k$ allesamt in p erfüllte $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -invariante Gleichungen; diese gelten auch in $\tilde{\pi}_n(p)$ und wir finden auch dort einen Repräsentanten $q' \in \text{Hilb}_{n,g}$, so dass alle $m_{i,j}^k(q')$ Elementarmatrizen sind. \square

3.4 Von $Z_{d,g}$ nach $Z_{d^2,g}$

Die abgeschlossene Immersion $\iota: Z_{d,g} \rightarrow Z_{d^2,g}$ konstruieren wir in drei Schritten. Wir definieren ι als Morphismus; die Injektivität von ι können wir unmittelbar beweisen. Um abgeschlossene Bedingungen für das Bild von ι angeben zu können, greifen wir zunächst auf ein Lemma zurück, auf das mich Klaus Bongartz aufmerksam gemacht hat:

Lemma 3.4.1 *Sei G eine reductive Gruppe, P eine parabolische Untergruppe, X eine G -Varietät und $Y \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät, die unter P stabil ist. Dann ist auch die Untervarietät $G \cdot Y$ in X abgeschlossen.*

Beweis Es ist $G \times Y$ in $G \times X$ abgeschlossen, also ist nach Satz 1.1.4 auch $G \times^P Y$ im assoziierten Faserbündel $G \times^P X$ abgeschlossen. Wir versehen $G/P \times X$ mit einer G -Aktion durch $g * (hP, x) = (ghP, gx)$. Damit wird die Abbildung $\varphi: G \times^P X \rightarrow G/P \times X$ via $(g, x) \mapsto (gP, gx)$ ein G -äquivarianter Isomorphismus. Inesondere ist damit auch $\varphi(G \times^P Y)$ in $G/P \times X$ abgeschlossen. Da G/P eine vollständige Varietät ist, ist das Bild der Projektion $\pi_2: G/P \times X \rightarrow X$ von $\varphi(G \times^P Y)$ in X abgeschlossen. Es gilt $\pi_2 \varphi(G \times^P Y) = G \cdot Y$. \square

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}: (M_d(\mathbb{C}))^g &\rightarrow (M_{d^2}(\mathbb{C}))^g \\ p &\mapsto (X_1(p) \otimes I, \dots, X_g(p) \otimes I), \end{aligned}$$

wobei $M \otimes I$ die Blockdiagonalmatrix mit d Kopien von M auf der Diagonalen bezeichne. Da $\{g \otimes I \mid g \in \text{GL}_d(\mathbb{C})\}$ eine Untergruppe von $\text{GL}_{d^2}(\mathbb{C})$ ist, ist die Verknüpfung von $\tilde{\iota}$ mit $(M_{d^2}(\mathbb{C}))^g \rightarrow Z_{d^2,g}$ ein $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ -invarianter Morphismus, also faktorisiert er durch $(M_d(\mathbb{C}))^g \rightarrow Z_{d,g}$ zu einem $\iota: Z_{d,g} \rightarrow Z_{d^2,g}$. Insbesondere gilt für alle $p \in Z_{d,g}$ und alle Wörter ω über $\{1, \dots, g\}$, dass $\text{Spur}(X(\omega)(\iota p)) = d \text{Spur}(X(\omega)(p))$ ist.

Wir definieren nun eine parabolische Untergruppe P von $\mathrm{GL}_{d^2}(\mathbb{C})$. Wir beschreiben dazu eine $d^2 \times d^2$ -Matrix als Blockmatrix aus $d \times d$ Blöcken der Größe jeweils $d \times d$. Sei P dann die Menge der blockweise rechten oberen invertierbaren Dreiecksmatrizen, d. h.

$$P := \left\{ \left(\begin{array}{cccc} M_{1,1} & * & \cdots & * \\ & M_{2,2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & M_{d,d} \end{array} \right) \mid \text{für alle } i \text{ ist } M_{i,i} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) \right\}$$

Wir benötigen weiterhin eine Untervarietät \tilde{Y} von $(M_{d^2}(\mathbb{C}))^g$, so dass \tilde{Y} stabil unter der Aktion von P ist. Wir setzen \tilde{Y} auf die Menge aller Punkte p , so dass alle Elemente von $A\langle p \rangle$ blockweise rechte obere Dreiecksmatrizen sind, deren Diagonalblöcke alle gleiches charakteristisches Polynom haben:

$\tilde{Y} := \{p \in (M_{d^2}(\mathbb{C}))^g \mid \text{zu jedem } Q \in M_{d^2}(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}] \text{ gibt es } M_{i,j} \text{ mit}$

$$Q(p) = \begin{pmatrix} M_{1,1} & * & \cdots & * \\ & M_{2,2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & M_{d,d} \end{pmatrix},$$

so dass $\mathrm{Spur}(M_{1,1}) = \mathrm{Spur}(M_{2,2}) = \dots = \mathrm{Spur}(M_{d,d})\}$

Dass $\mathrm{GL}_{d^2}(\mathbb{C}) \cdot \tilde{Y}$ abgeschlossen ist, folgt nun aus Lemma 3.4.1 und der Tatsache, dass $P \cdot \tilde{Y} = \tilde{Y}$ ist.

Lemma 3.4.2 *Das Bild von ι ist gleich dem Bild von $\mathrm{GL}_{d^2}(\mathbb{C}) \cdot \tilde{Y}$ unter dem Quotienten und damit abgeschlossen.*

Beweis Es liegt Bild $\tilde{\iota}$ per Konstruktion in \tilde{Y} . Es reicht also zu zeigen, dass für jedes $p \in \tilde{Y}$ im Abschluss von $\mathrm{GL}_{d^2}(\mathbb{C}) \cdot p$ ein Punkt aus Bild $\tilde{\iota}$ liegt.

Sei zu p die Matrix $X_k(p)$ für jedes $k \in \{1, \dots, g\}$ in jeweils $d \times d$ -Blöcken durch $(M_{k,i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ gegeben. Dann liegt der Punkt p' gegeben durch $X_k(p') = (M_{k,i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ mit $M'_{k,i,i} = M_{k,i,i}$ für alle i und $M'_{k,i,j} = 0$ falls $i \neq j$ im Abschluss von $\mathrm{GL}_{d^2}(\mathbb{C}) \cdot p$: Man betrachte dazu die 1-PUG in $d \times d$ -Blockdiagonalgestalt $(g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ per $g_{i,i} = t^{-i}I$; der Grenzwert von $(g_{i,j})p$ in 0 ist gerade p' .

Der zu p' gehörige Modul ist die direkte Summe von d Moduln der Dimension d . Nach Satz 1.2.1 finden wir im Abschluss von $\mathrm{GL}_{d^2}(\mathbb{C}) \cdot p'$ einen Punkt p'' , so dass die Summanden bereits halbeinfach sind. Da jedes Paar von Summanden in allen Invarianten übereinstimmt, sind alle Summanden schon zueinander isomorph. Damit ist p'' die direkte Summe von d Kopien des gleichen Moduls. Also gibt es ein $g \in \mathrm{GL}_{d^2}(\mathbb{C})$ mit $gp'' \in \text{Bild } \tilde{\iota}$. \square

Wir erhalten aus der Konstruktion von ι unmittelbar:

Korollar 3.4.3 *Für jedes $p \in Z_{d^2,g}$ ist $A\langle p \rangle \cong A\langle \iota(p) \rangle$.*

3.5 Der Morphismus π_d

Mit den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte können wir nun den Morphismus $\pi_d: D_{d,g} \rightarrow Z_{d,g}$ einführen: Dazu konstruieren wir zunächst π_d als wohldefinierten Morphismus. Die Projektivität folgern wir aus allgemeinen Sätzen, die Birationalität folgt mittels linearer Algebra. Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Diagramm am Anfang von Kapitel 3. Sei darüberhinaus $\tilde{\pi}_n: \text{Hilb}_{n,g} \rightarrow Z_{n,g}$ der projektive Morphismus $\tilde{\pi}_n$ aus Satz 3.3.4.

Theorem 3.5.1 *Es existiert ein projektiver birationaler Morphismus π_d , so dass das Diagramm vom Anfang des Kapitels 3 kommutiert.*

Beweis Wir zeigen, dass $\tilde{\pi}_{d^2}(D_{d,g}) \subset \text{Bild } \iota$: Sei $p \in \sigma_{d^2}(\kappa_{g,d^2}^{-1}(\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}))$. Die Unteralgebra $A\langle p' \rangle$ zu jedem Repräsentanten p' von p ist isomorph zu ihrem Bild in Alg_{d^2} , also einem Punkt aus $\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}$. Für jede Matrix $N \in M_d(\mathbb{C})$ gilt, dass die Linksmultiplikation $N \otimes -: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ als charakteristisches Polynom gerade die d -te Potenz des charakteristischen Polynoms von N hat, denn die Linksmultiplikation operiert spaltenweise. Also hat jedes Element aus $A\langle p' \rangle$ ebenfalls als charakteristisches Polynom die d -te Potenz eines Polynoms. Da die charakteristischen Polynome Invarianten sind, besitzen auch p und $\tilde{\pi}_{d^2}(p)$ diese Eigenschaft. In $Z_{d^2,g}$ ist dies gerade die Bedingung dafür, im Bild von ι zu liegen. Da das Bild von ι zudem abgeschlossen ist, folgt aus $\sigma_{d^2}(\kappa_{g,d^2}^{-1}(\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})})) \subset \tilde{\pi}_{d^2}^{-1}(\text{Bild } \iota)$ schon, dass sein Abschluss $D_{d,g}$ in $\tilde{\pi}_{d^2}^{-1}(\text{Bild } \iota)$ enthalten ist.

Damit ist der Morphismus π_d , der p auf das Urbild von $\tilde{\pi}_{d^2}(p)$ abbildet, eine wohldefinierte stetige Abbildung. Der zugehörige Ringmorphismus ist überraschend übersichtlich: Eine Invariante $\text{Spur}(Q)$ mit $Q \in M_d(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ wird auf das Bild von $d \text{Spur}(Q)$ aus dem Invariantenring zu $Z_{d^2,g}$ abgebildet.

Dass π_d projektiv ist, erhält man aus den Tatsachen, dass $\tilde{\pi}_{d^2}|_{D_{d,g}}$ als Verknüpfung einer abgeschlossenen Immersion und eines projektiven Morphismus projektiv ist und dass ι als abgeschlossene Immersion nach [Gro60, Proposition I.5.5.1 (i)] separiert ist. Nach [Gro61, Proposition II.5.5.5 (v)] ist dann π_d projektiv.

Für die Birationalität von π_d nutzen wir, dass das Bild von $\pi_d|_{\sigma_{d^2}(\kappa_{g,d^2}^{-1}(\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}))}$ gerade alle Punkte in $Z_{d,g}$ sind, deren zugehörige Moduln einfach sind; die Menge dieser Punkte liegt dicht in $Z_{d,g}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\pi_d|_{\sigma_{d^2}(\kappa_{g,d^2}^{-1}(\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}))}$ injektiv ist: Seien $p, p' \in \sigma_{d^2}(\kappa_{g,d^2}^{-1}(\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}))$ mit $\pi_d(p) = \pi_d(p')$. Wir wählen je einen Repräsentanten q zu p und q' zu p' sowie \tilde{q} zu $\pi_d(p)$. Dann erhalten wir Algebrenmorphisme φ und φ' von \mathbb{C}^{d^2} versehen mit der Multiplikation durch $\kappa_{g,d^2}(q)$ bzw. $\kappa_{g,d^2}(q')$ nach $M_d(\mathbb{C})$, gegeben durch $X_i(q)X'(q) \mapsto X_i(\tilde{q})$ bzw. $X_i(q')X'(q') \mapsto X_i(\tilde{q})$ für jedes Polynom X in den generischen Matrizen. Diese sind stets wohldefiniert und Isomorphismen, da die Rechtsmultiplikation mit $X'(q)$ bzw. $X'(q')$ stets ein Algebrenisomorphismus und der zu $\pi_d(p)$ gehörige Modul einfach ist. Also

ist $\varphi'^{-1}\varphi$ ein Algebrenmorphismus, der jedes $X_i(q)X'(q)$ auf $X_i(q')X'(q')$ abbildet und zugleich ein Automorphismus von Vektorräumen auf \mathbb{C}^{d^2} ist. Damit gilt $p = \sigma_{d^2}(q) = \sigma_{d^2}(q') = p'$. \square

Statt einer expliziten Beschreibung von π_d erhalten wir eine Charakterisierung, indem wir Lemma 3.3.5 und Korollar 3.4.3 verbinden:

Satz 3.5.2 *Für jedes $p \in D_{d,g}$ gilt $A\langle\pi_d(p)\rangle \cong A\langle p\rangle/\text{rad } A\langle p\rangle$.*

Damit können wir nun diejenigen Teile der Desingularisierung beschreiben, die tatsächlich glatt sind:

Theorem 3.5.3 *Sei X die Menge aller Punkte p aus $Z_{d,g}$, so dass der zu p gehörige Modul einfach ist oder in genau zwei zueinander nicht isomorphe einfache Untermoduln zerfällt. Dann ist die Einschränkung von π_d auf das Urbild von X eine Desingularisierung von X .*

Beweis Es reicht zu zeigen, dass das Urbild \tilde{X} von X glatt ist. Wir wissen zu jedem Punkt $p \in \tilde{X}$, dass $A\langle p\rangle/\text{rad } A\langle p\rangle$ gleich $M_d(\mathbb{C})$ oder $M_{d_1}(\mathbb{C}) \times M_{d_2}(\mathbb{C})$ mit $d_1 + d_2 = d$ ist. Damit folgt, dass p in $\sigma_{d^2}(\kappa_{g,d^2}^{-1}(\mathcal{O}_{M_d(\mathbb{C})}))$ oder $\sigma_{d^2}(\kappa_{g,d^2}^{-1}(\mathcal{O}_{A=(d_1,d_2)}))$ liegt. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 2.3.9 und der Glattheit von κ_{g,d^2} und σ_{d^2} . \square

4 Struktur der Desingularisierung

Wir wissen nun, dass Noris Konstruktion nur im Fall $d = 2$ tatsächlich eine Desingularisierung ist. Wir beschreiben daher $D_{2,g}$ als Varietät mittels seiner Homologie und π_2 durch Beschreibung seiner einzelnen Fasern.

Die Varietät $D_{2,g}$ ist insbesondere eine Untervarietät von $\text{Hilb}_{4,g}$; wir sammeln daher hier zunächst einige Eigenschaften seiner Struktur [Rei05]: Wie schon im Beweis zu Satz 3.3.4 diskutiert, erzeugen die regulären Funktionen $\det(\omega_1 | \dots | \omega_n) : U_{n,g} \rightarrow \mathbb{C}$ (Definition siehe Abschnitt 3.2) den auf natürliche Weise graduierten Ring P der Semiinvarianten von $\text{Hilb}_{n,g}$. Wie schon für $U_{n,g}$ und $P_{n,g}$ definieren wir $\widetilde{\text{Hilb}}_{n,g}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ als die offene Teilmenge von $\widetilde{\text{Hilb}}_{n,g}$ mit $\det(\omega_1 | \dots | \omega_n) \neq 0$ und $D_{d,g}(\omega_1, \dots, \omega_{d^2})$ als die offene Teilmenge von $D_{d,g}$ mit $\det(\omega_1 | \dots | \omega_{d^2}) \neq 0$.

Satz 4.0.1 *Die Varietät $\widetilde{\text{Hilb}}_{4,g}$ wird schon durch die Mengen der Form*

$$\widetilde{\text{Hilb}}_{4,g}(i, j, k, \varepsilon), \widetilde{\text{Hilb}}_{4,g}(ji, j, i, \varepsilon), \widetilde{\text{Hilb}}_{4,g}(ii, j, i, \varepsilon) \text{ und } \widetilde{\text{Hilb}}_{4,g}(iii, ii, i, \varepsilon)$$

für paarweise verschiedene $i, j, k \in \{1, \dots, g\}$

offen überdeckt.

Für $D_{2,g}$ reichen schon $D_{2,g}(i, j, k, \varepsilon)$ und $D_{2,g}(ji, j, i, \varepsilon)$

Beweis Für jedes $X \in M_4(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ und jeden Untervektorraum $V \subset A\langle p \rangle$ folgt schon aus $XX'(p) \in VX'(p)$, dass $X(p) \in V$. In $D_{2,g}$ sind dabei $\det(ii|j|i|\varepsilon)$ und $\det(iii|ii|i|\varepsilon)$ stets gleich 0. \square

Das Ziel der beiden folgenden Abschnitte ist es, eine Zellenzerlegung für $D_{2,g}$ anzugeben. Dazu definieren wir zunächst den Begriff der Zellenzerlegung:

Definition 4.0.2 *Sei X eine Varietät. Dann heißt eine absteigende Filtrierung*

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_t = \emptyset$$

eine Zellenzerlegung für X , wenn alle X_i abgeschlossene Untervarietäten von X sind und für jedes $j \in \{1, \dots, t\}$ das Komplement $X_{j-1} \setminus X_j$ isomorph zu einem affinen Raum \mathbb{A}^{d_j} ist.

Wir erreichen diese Zellenzerlegung in zwei Schritten: Zunächst bestimmen wir im Abschnitt 4.1 die Fixpunkte von $D_{2,g}$ unter einer \mathbb{C}^* -Aktion. Nach [Kir88] lässt sich dann die Homologie von $D_{2,g}$ unmittelbar aus der Homologie der Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmenge bestimmen.

Im Abschnitt 4.2 werden wir dann eine Zellenzerlegung explizit angeben können, indem wir die Fixpunkte unter der Aktion eines so großen Torus bestimmen, dass nur noch endlich viele Fixpunkte übrigbleiben.

4.1 Fixpunkte unter der multiplikativen Gruppe

Wir wählen als \mathbb{C}^* -Aktion

$$\begin{aligned} \tau: \quad \mathbb{C}^* \times W_{d,g} &\rightarrow W_{d,g}, \\ (t, (m_1, \dots, m_g, v)) &\mapsto (tm_1, \dots, tm_g, v). \end{aligned}$$

Satz 4.1.1 Die Fixpunkte von $D_{2,g}$ unter der von der obigen Aktion induzierten Aktion von \mathbb{C}^* auf $D_{2,g}$ sind für $g \geq 3$ die disjunkte Vereinigung einer Gr_2^g mit einer Gr_3^g ; für $g = 2$ sind sie eine Gr_2^g .

Beweis Obige \mathbb{C}^* -Aktion definiert eine wohldefinierte Aktion auf jeder $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ -Semiinvariante:

$$t \bullet \det(\omega_1 | \dots | \omega_n)(p) = t^s \det(\omega_1 | \dots | \omega_n)(p),$$

wobei s die Summe der Längen der Wörter ω_i ist. Der Punkt p ist also genau dann ein Fixpunkt, wenn es ein s gibt, so dass jedes $\det(\omega_1 | \dots | \omega_n)(p)$ verschwindet, bei dem die Summe der Längen der ω_i ungleich s ist. Da $D_{2,g}$ von offenen Mengen der Form $D_{2,g}(i, j, k, \varepsilon)$ und $D_{2,g}(ji, j, i, \varepsilon)$ überdeckt wird, kann es Fixpunkte nur für $s \in \{3, 4\}$ geben.

Wir betrachten mögliche Punkte p für $s = 3$: Dazu definieren wir einen Morphismus φ von der Vereinigung aller offenen Mengen der Form $D_{2,g}(i, j, k, \varepsilon)$ in die Grassmannsche Gr_3^g der 3-dimensionalen Unterräume von \mathbb{C}^g wie folgt:

$$\varphi(p) := \{u \in \mathbb{C}^g \mid \text{es gibt ein } \lambda \in (\mathbb{C}^4)^\vee \text{ mit } u = (\lambda(X_1 X'(p)), \dots, \lambda(X_g X'(p)))\}.$$

Zur Wohldefiniertheit: Da der Vektorraum $\langle X_1 X'(p), \dots, X_g X'(p) \rangle$ die Dimension 3 hat, hat auch der Raum der Linearformen darauf höchstens Dimension 3, also auch $\varphi(p)$. Sind $i, j, k \in \{1, \dots, g\}$ so gewählt, dass $\det(i|j|k|\varepsilon)(p) \neq 0$ gilt, so liefern die Linearformen $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ definiert durch $\lambda_l(X_m X'(p)) := \delta_{l,m}$ in $\varphi(p)$ ein dreidimensionales Erzeugnis. Zudem ist $\varphi(p)$ stabil unter der $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ -Aktion auf der Definitionsmenge von φ .

Wir können nun eine Umkehrabbildung zu φ direkt angeben: Sei zu einem Unterraum U von \mathbb{C}^g der Dimension 3 eine Basis durch (u_1, u_2, u_3) gegeben. Dann ist p , definiert durch

$$X_i(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (u_1)_i \\ 0 & 0 & 0 & (u_2)_i \\ 0 & 0 & 0 & (u_3)_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X'(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*),$$

ein Punkt in der Definitionsmenge von φ , so dass $\varphi(p)$ wieder U ergibt und p ein Fixpunkt zu $s = 3$ ist: Es gilt $\det(\omega_1 | \dots | \omega_4)(p) = 0$, falls ein ω_i mindestens Länge 2 hat oder nicht genau eines der ω_i gleich ε ist, da für alle $l, m \in \{1, \dots, g\}$ gilt $X_l X_m(p) = 0$ und $\langle X_1 X'(p), \dots, X_g X'(p) \rangle$ nur Dimension drei hat. Also ist $\det(\omega_1 | \dots | \omega_4)(p) \neq 0$ nur bei einer Wortlängensumme von 3 möglich.

Wir zeigen, dass jeder Fixpunkt zu $s = 3$ einen Repräsentanten der Form (*) besitzt: Sei p aus der Vereinigung aller $D_{2,g}(i, j, k, \varepsilon)$. Für alle $l, m \in \{1, \dots, g\}$ gilt wegen $\det(ml|i|j|k)(p) = 0$, dass $X_m X_l X'(p) \in \langle X_i X'(p), X_j X'(p), X_k X'(p) \rangle$. Analog schließt man $X_m X_l X'(p) \in \langle X'(p), X_j X'(p), X_k X'(p) \rangle$, also $X_m X_l X'(p) \in \langle X_j X'(p), X_k X'(p) \rangle$ und schließlich $X_m X_l X'(p) = 0$, also $\langle X_1(p), \dots, X_g(p) \rangle X'(p) \subset \ker X_m(p)$ für alle m . Wählt man nun die ersten drei Basisvektoren von \mathbb{C}^n aus $\langle X_1(p), \dots, X_g(p) \rangle X'(p)$ und den vierten als $X'(p)$, so erhält man einen Repräsentanten der Form (*).

Sei nun $s = 4$: Wir betrachten die Menge aller Punkte, in denen für mindestens ein Paar $i, j \in \{1, \dots, g\}$ mindestens ein $\det(ji|j|i|\varepsilon)(p)$ ungleich 0 ist. Darin diskutieren wir zunächst die abgeschlossene Menge X aller solchen Punkte p , so dass $\det(\omega_1|\omega_2|\omega_3|\omega_4)(p)$ null ist für alle $\omega_1, \dots, \omega_4$ mit Summe der Wortlängen ungleich 4. Wir definieren nun φ in analoger Weise, aber von X in die Grassmannsche Gr_2^g , wiederum als

$$\varphi(p) := \{u \in \mathbb{C}^g \mid \text{es gibt ein } \lambda \in (\mathbb{C}^4)^\vee \text{ mit } u = (\lambda(X_1 X'(p)), \dots, \lambda(X_g X'(p)))\} .$$

Zur Wohldefiniertheit: Das Erzeugnis $\langle X_1 X'(p), \dots, X_g X'(p) \rangle$ hat die Dimension 2, da für alle $i, j, k \in \{1, \dots, g\}$ nach Voraussetzung $\det(i|j|k|\varepsilon) = 0$ gilt. Also hat auch der Raum der Linearformen darauf höchstens Dimension 2, also auch $\varphi(p)$. Sind $i, j \in \{1, \dots, g\}$ so gewählt, dass $\det(ji|j|i|\varepsilon)(p) \neq 0$ gilt, so liefern die Linearformen definiert durch $\lambda_l(X_m X'(p)) := \delta_{l,m}$ in $\varphi(p)$ ein zweidimensionales Erzeugnis.

Die Umkehrabbildung ψ ist gegeben, indem (u_1, u_2) folgendes Bild p zugeordnet wird:

$$m_i(p) = \begin{pmatrix} 0 & (u_2)_i & -(u_1)_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (u_1)_i \\ 0 & 0 & 0 & (u_2)_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*) .$$

Es gilt $\varphi\psi = \text{id}$ per Konstruktion. Es reicht also zu zeigen, dass alle Fixpunkte zu $s = 4$ im Bild von ψ liegen:

Sei q ein Fixpunkt zu $s = 4$. Angenommen, es gäbe ein $M \in A\langle q \rangle$, so dass M zwei verschiedene Eigenwerte hat. Da $M \in A\langle q \rangle$ und $q \in D_{2,g}(ji, j, i, \varepsilon)$, gibt es $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_-$ und α_+ mit $M = (\alpha_+ X_i X_j + \alpha_j X_j + \alpha_i X_i + \alpha_- I)(q)$; also besitzt auch $M' := (\alpha_+ X_i X_j + \alpha_j X_j + \alpha_i X_i)(q)$ mindestens einen von 0 verschiedenen Eigenwert. Daher gilt $(M')^3 \neq 0$ und M' lässt sich als Summe von Wörtern ω schreiben, von denen jedes mindestens Länge 3 hat. Andererseits gilt im Widerspruch dazu $\det(\omega|j|i|\varepsilon) = 0$, $\det(ji|\omega|i|\varepsilon) = 0$, $\det(ji|j|\omega|\varepsilon) = 0$ und $\det(ji|j|i|\omega) = 0$ für jedes Wort ω der Länge mindestens 3 und damit $X(\omega) = 0$. Damit kann $A\langle q \rangle$ nicht isomorph zu $M_2(\mathbb{C})$ oder A_- sein, es bleiben $\widetilde{\Lambda}_4$ oder N_4 . Die Algebra N_4 scheidet aus, da dort niemals $\det(ji|j|i|\varepsilon) \neq 0$ gilt. Die Algebra $A\langle q \rangle$ ist also isomorph zu $\widetilde{\Lambda}_4$. Für jedes $k \in \{1, \dots, g\}$ ist wegen $X(kkk)(q) = 0$ schon $X_k(q)$ nilpotent; damit gilt für alle $k, l \in \{1, \dots, g\}$, dass $X_k X_l(q) = -X_l X_k(q)$. Wählen wir nun die Basis $X_i X_j X'(q), X_j X'(q), X_i X'(q), X'(q)$, so erhalten wir einen Repräsentanten, der von der Form der Punkte im Bild von ψ ist. \square

Damit erhalten wir durch Anwendung des Theorems aus [Kir88, Abschnitt 0.1]:

Theorem 4.1.2 *Die Varietät $D_{2,g}$ hat die Betti-Zahlen beschrieben durch*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dim H^i(D_{2,g}, \mathbb{Q})t^i = \begin{bmatrix} g \\ 3 \end{bmatrix}_{t^2} + t^{2g-4} \begin{bmatrix} g \\ 2 \end{bmatrix}_{t^2} .$$

Dabei sind

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}_{t^2} = \frac{[b]_{t^2}[b-1]_{t^2} \cdots [b-a+1]_{t^2}}{[a]_{t^2}[a-1]_{t^2} \cdots [1]_{t^2}}$$

die Gaußschen Binomialkoeffizienten, wobei

$$[c]_{t^2} = \frac{t^{2c} - 1}{t^2 - 1}$$

sei.

Beweis Zu jedem $p \in D_{2,g}$ gibt es nur genau einen Punkt $f \in \overline{\mathbb{C}^* \cdot p} \cap D_{2,g}^{\mathbb{C}^*}$. Wir können daher den Attraktor eines Fixpunktes $f \in D_{2,g}^{\mathbb{C}^*}$ definieren als die Menge aller Punkte $p \in D_{2,g}$ mit $f \in \overline{\mathbb{C}^* \cdot p}$. Analog definiert man den Attraktor einer Fixpunktmenge als die Vereinigung der Attraktoren aller ihrer Elemente.

Die Homologie stimmt mit der Homologie der Fixpunktmenge der \mathbb{C}^* -Aktion überein, wobei die Homologie jeder Zusammenhangskomponente gemäß der Codimension ihres Attraktors in der Varietät zu verschieben ist. Die Homologie einer Grassmannschen ist dabei gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dim H^i(\text{Gr}_a^b, \mathbb{Q})t^i = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}_{t^2} .$$

Wir bestimmen nun die Dimension der Attraktoren: Ist mindestens eine der $\det(\omega_1|\omega_2|\omega_3|\omega_4)(p)$ mit Wortlängensumme $s = 3$ ungleich null, so muss p im Attraktor zu $s = 3$ liegen. Seine Dimension ist also gleich der Dimension von $D_{2,g}$; diese ist gleich der Dimension von $Z_{2,g}$ und damit $4g - 3$. Wegen $\det(\omega_1|\omega_2|\omega_3|\omega_4)(p) \neq 0$ existieren Attraktor und Fixpunktmenge nur für $g \geq 3$.

Der Attraktor zu $s = 4$ liegt in der Varietät aller Gleichungen $\det(i|j|k|\varepsilon) = 0$ und lässt sich überdecken durch die Schnittmengen der $D_{2,g}(j|i|j|i|\varepsilon)$ mit dieser Varietät für $i, j \in \{1, \dots, g\}$. Es reicht also, die Dimension einer solchen Schnittmenge auszurechnen. An jedem $p \in D_{2,g}(j|i|j|i|\varepsilon)$ erzeugen $X_i(p)$ und $X_j(p)$ per Konstruktion bereits ganz $A(p)$. Wegen $\det(k|j|i|\varepsilon) = 0$ für jedes $k \in \{1, \dots, g\}$ folgt, dass die Forderung an $X_k(p)$ für $k \neq i, j$ lautet

$$X_k(p) \in \langle X_i(p), X_j(p), I \rangle_{\mathbb{C}} .$$

Die Matrizen X_i und X_j werden durch den Morphismus

$$\xi: U \rightarrow D_{2,2}, \quad p \mapsto (X_i(p), X_j(p), X'(p))$$

charakterisiert. Da $D_{2,2}$ birational zu $Z_{2,2}$ ist, hat auch $D_{2,2}$ die Dimension 5, also der Attraktor die Dimension $3g - 1$. In $D_{2,g}$ hat er also die Codimension $g - 2$. \square

4.2 Die Zellenzerlegung

Der Vollständigkeit halber untersuchen wir noch die Aktion von $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})$ auf $D_{n,g}$ durch

$$h \bullet (m_1, \dots, m_g, v) = \left(\sum_{i=1}^g h_{1,i} m_i, \dots, \sum_{i=1}^g h_{g,i} m_i, v \right).$$

Für $n = 2$ gelingt uns die Berechnung der Fixpunkte eines maximalen Torus in $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})$ bezüglich dieser Aktion.

Satz 4.2.1 Die Aktion der Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen $(\mathbb{C}^*)^g$ als Untergruppe von $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})$ auf $D_{n,g}$ besitzt genau die folgenden Fixpunkte:

1. Orbits mit einem Repräsentanten der Form

$$m_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m_l = 0 \quad \text{für } l \neq i, j, k$$

Davon gibt es $\binom{g}{3}$ Stück.

2. Orbits mit einem Repräsentanten der Form

$$m_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$m_l = 0 \quad \text{für } l \neq i, j$$

Dies sind gerade $\binom{g}{2}$ Orbits.

Beweis Ein Fixpunkt in $D_{n,g}$ ist gleichbedeutend mit einem Punkt in $P_{n^2,g}$, so dass sein $(\mathbb{C}^*)^g$ -Orbit innerhalb seines $\mathrm{GL}_{n^2}(\mathbb{C})$ -Orbits liegt, und so dass im Quotienten das Bild des Punktes in $D_{n,g}$ liegt. Wir wählen hier als zu betrachtenden $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})$ -Torus die invertierbaren Diagonalmatrizen. Dann ist das Vorliegen eines Fixpunktes in $D_{n,g}$ im Punkt $\sigma_{n^2}(p)$ mit $p := (m_1, \dots, m_g, v)$ äquivalent dazu, dass ein $\varphi: (\mathbb{C}^*)^g \rightarrow \mathrm{GL}_{n^2}(\mathbb{C})$ existiert, so dass

$$(t_1 \cdot m_1, \dots, t_g \cdot m_g, v) = (\varphi(t)m_1\varphi(t)^{-1}, \dots, \varphi(t)m_g\varphi(t)^{-1}, \varphi(t)v)$$

gilt, denn: Aus der Existenz eines solchen φ folgt sofort, dass p ein Fixpunkt ist. Umgekehrt wählen wir Wörter $\omega_1, \dots, \omega_{n^2}$, so dass p in $P_{n^2,g}(\omega_1 | \dots | \omega_{n^2})$ liegt.

Dann ist die generische Matrix $m: P_{n^2, g} \rightarrow M_{n^2}(\mathbb{C})$, die wir spaltenweise durch $X(\omega_i)v$ in der i -ten Spalte definieren, in p invertierbar. Wir erhalten $\varphi(t) = m(t \bullet p)m(p)^{-1}$.

Falls ein solches φ existiert, gibt es Anlass zu einer Gewichtsraumzerlegung des \mathbb{C}^{n^2} . Wir suchen daher zunächst nach Punkten, die eine Gewichtsraumzerlegung zulassen. Aus obiger Gleichung folgt

$$\varphi(t)v = v, \quad \varphi(t)m_i v = t_i \cdot (m_i v), \quad \varphi(t)m_i m_j v = t_i t_j \cdot (m_i m_j v).$$

Diese Eigenschaft stellt sich als eine strenge Forderung an potentielle Fixpunkte heraus: Der Vektor v liegt stets im Gewichtsraum zu $(1, \dots, 1)$. Weiterhin nutzt man aus, dass die Rechtsmultiplikation mit v ein Isomorphismus von $\langle m_1, \dots, m_g \rangle$ nach \mathbb{C}^{n^2} ist.

Ab hier betrachten wir wieder nur den Fall $n = 2$. Für jedes $i \in \{1, \dots, g\}$ erhalten wir: Entweder ist $m_i v$ ein Eigenvektor von jedem $\varphi(t)$ zum Eigenwert t_i oder es gilt $m_i = 0$.

Gibt es paarweise verschiedene i, j, k , so dass $m_i, m_j, m_k \neq 0$, so ist

$$\langle m_i v \rangle \oplus \langle m_j v \rangle \oplus \langle m_k v \rangle \oplus \langle v \rangle$$

eine Gewichtsraumzerlegung und $m_l m_h = 0$, da $t_l t_h$ für alle l, h dann aus Dimensionsgründen kein Eigenvektor von $\varphi(t)$ ist. Wir erhalten Orbits der ersten der beiden oben angegebenen Formen. Die Normalisierung ist aufgrund der $GL_4(\mathbb{C})$ -Operation möglich.

Sind nur zwei der m_i verschieden von 0, so seien sie mit m_i und m_j bezeichnet. Es ist $m_i^2 = 0$, da es im Erzeugnis der Eigenräume zu t_i und 1 enthalten ist; analog schließt man, dass $m_j^2 = 0$ gilt. Wegen

$$0 = (m_i + m_j)^2 = m_i^2 + m_i m_j + m_j m_i + m_j^2 = m_i m_j + m_j m_i$$

folgt $m_i m_j = -m_j m_i$. Da $\dim \langle v, m_i v, m_j v, m_i m_j v \rangle = 4$ ist, erhalten wir $m_i m_j \neq 0$. Es ergibt sich die Gewichtsraumzerlegung

$$\langle m_i v \rangle \oplus \langle m_j v \rangle \oplus \langle m_i m_j v \rangle \oplus \langle v \rangle$$

und durch geeignete Basiswahl die Beschreibung des Orbits in der zweiten genannten Form.

Die Annahme, es sei nur ein $m_i \neq 0$, führt zu dem Widerspruch

$$4 = \dim \langle m_1, \dots, m_g \rangle = \dim \langle m_i v, v \rangle = 2. \quad \square$$

Mittels des Satzes von Białynicki-Birula (siehe z. B. [BBCM02, Lemma II.4.1] und Theorem II.4.2) erhalten wir, da $D_{2, g}$ nur endlich viele Torusfixpunkte besitzt:

Theorem 4.2.2 *Die Varietät $D_{2, g}$ besitzt eine Zellenzerlegung.*

Tatsächlich lässt sich diese sogar explizit beschreiben: Die Varietät $D_{2, g}$ zerfällt in die Attraktoren aus dem Beweis zu Satz 4.1.1. Durch Nachrechnen zeigt man, dass der Attraktor zu $s = 3$ ein Vektorbündel vom Rang $4g - 3$ über Gr_3^g und derjenige zu $s = 4$ ein Vektorbündel vom Rang $3g - 1$ über Gr_2^g ist.

4.3 Die Fasern von π_2

Wir untersuchen nun abschließend die Fasern von π_2 . Wegen $D_{2,g} = \sigma_2(\overline{\kappa_{g,4}^{-1}(\mathcal{O}_{M_2(\mathbb{C})})})$ können wir $D_{2,g}$ disjunkt in $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ mit

$$\begin{aligned} S_1 &:= D_{2,g} \cap \sigma_2(\kappa_{g,4}^{-1}(\mathcal{O}_{M_2(\mathbb{C})})), \\ S_2 &:= D_{2,g} \cap \sigma_2(\kappa_{g,4}^{-1}(\mathcal{O}_{A=})), \\ S_3 &:= D_{2,g} \cap \sigma_2(\kappa_{g,4}^{-1}(\mathcal{O}_{\Lambda_4})), \\ S_4 &:= D_{2,g} \cap \sigma_2(\kappa_{g,4}^{-1}(\mathcal{O}_{N_4})) \end{aligned}$$

zerlegen. Es existiert eine entsprechende Zerlegung für den Modulraum von Vektorbündeln vom Rang zwei mit trivialer Determinante auf einer glatten projektiven Kurve vom Geschlecht g [BS90]; sie ist dort mit N , N_1 , N_2 und N_3 bezeichnet. Im Gegensatz zu jener Charakterisierung betont die hier gegebene Beschreibung den engen Zusammenhang mit den 4-dimensionalen Algebren.

Satz 4.3.1 *Der Morphismus $\pi_2|_{S_1}$ ist ein Isomorphismus auf die Untervarietät von $Z_{2,g}$ aller einfachen Moduln.*

Beweis Wir erhalten, dass das Bild von S_1 in $Z_{2,g}$ gerade die zu den einfachen Moduln korrespondierenden Punkte sind: Entspricht $q \in Z_{2,g}$ einem einfachen Modul, so gibt es einen Repräsentanten q' von q und Polynome $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_g]$, so dass $P_1(q'), \dots, P_4(q')$ die Elementarmatrizen sind, also die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_1(q') &= P_2P_3(q'), & P_4(q') &= P_3P_2(q'), \\ \chi(P_1(q')) &= t(t-1), & \chi(P_2(q')) &= \chi(P_3(q')) = t^2, & \chi(P_4(q')) &= t(t-1), \\ & & P_1(q') + P_4(q') &= I \end{aligned}$$

erfüllen. Da für jedes $P \in M_4(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ und jeden Punkt $\tilde{p} \in \text{Hilb}_{d^2, g}$ die Eigenwerte von $P(\tilde{p})$ und $P(\tilde{\pi}_4(\tilde{p}))$ übereinstimmen, gilt auf jedem Urbild p unter π_2 von q , dass

$$\begin{aligned} P_1(p) &= P_2P_3(p), & P_4(p) &= P_3P_2(p), \\ \chi(P_1(p)) &= (t(t-1))^2, & \chi(P_2(p)) &= \chi(P_3(p)) = t^4, & \chi(P_4(p)) &= (t(t-1))^2, \\ & & P_1(p) + P_4(p) &= I. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $A\langle p \rangle$ isomorph zu $M_2(\mathbb{C})$. Der Morphismus $\pi_2|_{S_1}$ ist injektiv; dies haben wir im Beweis der Birationalität zu Theorem 3.5.1 gezeigt. \square

Wir beginnen nun mit der Beschreibung der Fasern über den Singularitäten: Der nachfolgende Satz entspricht dem Theorem Teil (i) aus der Einleitung von [BS90].

Satz 4.3.2 *Der Morphismus $\pi_2|_{S_2}$ hat als Bild die Untervarietät aller Punkte, die die direkte Summe zweier zueinander nicht isomorpher Moduln repräsentieren. In jedem Punkt ist die Faser isomorph zu $\mathbb{P}^{g-2} \times \mathbb{P}^{g-2}$.*

Beweis Als Bild von S_2 erhalten wir genau solche Punkte, die direkte Summen zweier zueinander nichtisomorpher einfacher Moduln sind: Jeder solche Punkt $q \in Z_{2,g}$ lässt ein $X \in M_2(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ zu, so dass $X(q)$ zwei verschiedene Eigenwerte besitzt. In $D_{2,g}$ lassen genau Punkte p aus S_1 und S_2 Matrizen $X \in M_2(\mathbb{C})[X_{1 \leq i \leq g}]$ zu, so dass $X(p)$ zwei verschiedene zweifache Eigenwerte hat, und S_1 wird schon auf die einfachen Moduln abgebildet.

Wir fixieren im Bild von S_2 einen beliebigen Punkt q . Wir wählen ein a , so dass $X_a(q)$ zwei verschiedene Eigenwerte hat. Dann finden wir $x_1, x_2, e_1, e_2 \in \mathbb{C}$, so dass $(x_1 X_a + e_1 I)(q)$ und $(x_2 X_a + e_2 I)(q)$ zueinander orthogonale Idempotente sind. Wir konstruieren zueinander inverse Morphismen $\varphi: \pi_2^{-1}(q) \rightarrow \mathbb{P}^{g-2} \times \mathbb{P}^{g-2}$ und $\psi: \mathbb{P}^{g-2} \times \mathbb{P}^{g-2} \rightarrow \pi_2^{-1}(q)$: Sei $p \in \sigma_4^{-1} \pi_2^{-1}(q)$. Dann sind per Konstruktion $p_1 := (x_1 X_a + e_1 I)$ und $p_2 := (x_2 X_a + e_2 I)$ für jedes p ebenfalls zueinander orthogonale Idempotente; also sind die Räume $p_1(p)A\langle p \rangle p_1(p)$, $p_1(p)A\langle p \rangle p_2(p)$, $p_2(p)A\langle p \rangle p_1(p)$ und $p_2(p)A\langle p \rangle p_2(p)$ jeweils genau eindimensional. Sei

$$\begin{aligned} d(j|i): \sigma_4^{-1} \pi_2^{-1}(q) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ p &\mapsto \det(p_2 X_j p_1 X' | p_1 X_i p_2 X' | p_2 X' | p_1 X')(p) . \end{aligned}$$

für alle $i, j, k \in \{1, \dots, g\}$. Dann gilt $d(j|i)d(k|l) = d(j|l)d(k|i)$, $d(i|a) = d(a|i) = 0$ und es gibt i, j , so dass $d(i|j) \neq 0$. Wir erhalten also einen Morphismus in die Segre-Einbettung

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \sigma_4^{-1} \pi_2^{-1}(q) &\rightarrow \mathbb{P}^{g-2} \times \mathbb{P}^{g-2} \\ p &\mapsto (d(i|j)(p))_{1 \leq i, j \leq g, i, j \neq a} . \end{aligned}$$

Da es sich bei allen $d(i|j)$ um Semiinvarianten vom Grad 1 handelt, ist der Morphismus $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ -invariant, also auch $\varphi: \pi_2^{-1}(q) \rightarrow \mathbb{P}^{g-2} \times \mathbb{P}^{g-2}$, $\sigma_4(p) \mapsto \tilde{\varphi}(p)$ wohldefiniert.

Um den Morphismus $\psi: \mathbb{P}^{g-2} \times \mathbb{P}^{g-2} \rightarrow \pi_2^{-1}(q)$ zu definieren, sei $\lambda_{i,j} := \text{Spur}(p_j X_i p_j)(q)$ mit $i \in \{1, \dots, g\}$, $j \in \{1, 2\}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \psi: (a_1 : \dots : a_{g-1}) \times (b_1 : \dots : b_{g-1}) &\mapsto \sigma_4(p') \text{ mit} \\ X_i(p') &:= \begin{pmatrix} \lambda_{i,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{i,1} & 0 & a_i \\ b_i & 0 & \lambda_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{i,2} \end{pmatrix} \text{ für } i < a, & X_a(p') &:= \begin{pmatrix} \lambda_{a,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{a,2} \end{pmatrix}, \\ X_i(p') &:= \begin{pmatrix} \lambda_{i,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{i,1} & 0 & a_{i-1} \\ b_{i-1} & 0 & \lambda_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{i,2} \end{pmatrix} \text{ für } i > a, & X'(p') &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass $\varphi\psi = \text{id}$ gilt. Um zu sehen, dass ψ surjektiv ist, wähle man für ein beliebiges $p \in \pi_2^{-1}(q)$ als Basis $p_1 X'(p)$, $p_1 X_i p_2 X'(p)$, $p_1 X_j p_2 X'(p)$, $p_2 X'(p)$ mit i, j so, dass $d(i|j) \neq 0$. Der Repräsentant ist dann von der Form der Bilder von ψ . \square

Um die Fasern über den verbleibenden Punkten zu bestimmen, definieren wir zunächst das nachfolgende Vektorbündel E , dann werden wir in Satz 4.3.3 die Faser in zwei Teilen explizit beschreiben können, bevor wir abschließend in einer technischen Form eine Beschreibung der Gesamtfaser in einem Stück angeben, an der sich noch ihre Projektivität ablesen lässt. Satz 4.3.3 steht in Zusammenhang zu Proposition 5 und 6 aus [BS90].

Sei E der Quotient des getwisteten trivialen Bündels modulo dem tautologischen Bündel, jeweils über Gr_2^g , oder explizit: Seien $V_{i,j} := (\mathbb{C}^{g-2})^3$ für $1 \leq i < j \leq g$ Vektorräume, wobei wir definieren

$$V_{i,j} := \left\{ \left(\begin{array}{cccccccccccc} u_1 & \dots & u_{i-1} & 0 & u_i & \dots & u_{j-2} & 0 & u_{j-1} & \dots & u_g \\ v_1 & \dots & v_{i-1} & 1 & v_i & \dots & v_{j-2} & 0 & v_{j-1} & \dots & v_g \\ w_1 & \dots & w_{i-1} & 0 & w_i & \dots & w_{j-2} & 1 & w_{j-1} & \dots & w_g \end{array} \right) \right\}.$$

Die zweite und dritte Zeile bilden dann eine Basis für einen zweidimensionalen Unterraum des \mathbb{C}^g , und jeder Unterraum lässt sich in mindestens einem $V_{i,j}$ auf diese Weise darstellen. Es reicht, den Verklebemorphismus $\nu_{i,j}^{i,k} : V_{i,j} \cap V_{i,k} \subset V_{i,j} \rightarrow V_{i,k}$ zu definieren; $\nu_{i,j}^{k,j}$ konstruiert man analog, andere $\nu_{i,j}^{k,l}$ erhält man durch die Verkettung $\nu_{i,l}^{k,l} \nu_{i,j}^{i,l}$:

$$\nu_{i,j}^{i,k} \left(\left(\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right) \right) := \left(\begin{array}{c} \frac{1}{w_k} u - \frac{u_k}{w_k^2} w \\ v - \frac{v_k}{w_k} w \\ \frac{1}{w_k} w \end{array} \right)$$

Man rechnet die Wohldefiniertheit wie üblich nach.

Satz 4.3.3 *Die Einschränkungen $\pi_2|_{S_3}$ und $\pi_2|_{S_4}$ haben als Bild jeweils die Untervarietät aller Moduln, die direkte Summe zweier Kopien eines eindimensionalen Moduls sind. Die Einschränkung $\pi_2|_{S_4}$ hat über jedem Punkt eine zu Gr_3^g isomorphe Faser und $\pi_2|_{S_3}$ als Faser über jedem Punkt das Vektorbündel E .*

Beweis Die Mengen S_3 und S_4 werden auf Punkte abgebildet, welche die zweifache direkte Summe eines eindimensionalen Moduls repräsentieren. Die Fasern aller Punkte sind isomorph, es reicht o.B.d.A., die Nullfaser zu diskutieren: Sei $p \in D_{2,g}$ und $q = \pi_2(p)$. Dann gilt $\iota(q) = \tilde{\pi}_4(p)$; dies ist für jedes $i \in \{1, \dots, g\}$ äquivalent dazu, dass

$$\begin{aligned} \iota(X_1(q), \dots, X_i(q) - \frac{1}{2}(\text{Spur } X_i(q))I, \dots, X_g(q)) \\ = \tilde{\pi}_4(X_1(p), \dots, X_i(p) - \frac{1}{2}(\text{Spur } X_i(q))I, \dots, X_g(p)), \end{aligned}$$

da stets $\text{Spur } X_i(p) = 2 \text{ Spur } X_i(q)$ gilt.

Liegt nun p im Urbild der Nullfaser innerhalb von S_4 , so sind alle $X_i(p)$ nilpotent, also gilt gemäß der Algebrenstruktur von N_4 , dass $X_j X_i(p) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, g\}$. Diese Menge ist genau die im Beweis zu Satz 4.1.1 berechnete Menge der Fixpunkte zu $s = 3$; sie hat sich als Grassmannsche Gr_3^g erwiesen.

Das Urbild S_3^0 der Null in S_3 zu bestimmen, erfordert mehr Aufwand: Wir konstruieren ein Bündel E über Gr_2^g und beschreiben S_3^0 so, dass wir einen Morphismus $\varphi: S_3^0 \rightarrow E$ definieren können. Zuletzt beweisen wir, dass φ ein Isomorphismus ist.

Die Menge S_3 wird schon von den offenen Mengen $D(ji, j, i, \varepsilon)$ überdeckt. Da für jedes $p \in S_3^0$ alle $X_i(p)$ schon nilpotent sind, hat p in jedem $D(ji, j, i, \varepsilon)$ die Form

$$X_i(p) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_j(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_k(p) := \begin{pmatrix} 0 & -a_k & b_k & c_k \\ 0 & 0 & 0 & b_k \\ 0 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X'(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für alle $i, j, k \in \{1, \dots, g\}$, $i < j$, $k \neq i$, $k \neq j$.

Wir definieren den Morphismus $\varphi: S_3^0 \rightarrow E$ zunächst lokal als Morphismen φ von jeder in S_3^0 offenen Menge $D(ji, j, i, \varepsilon) \cap S_3^0$ jeweils nach $V_{i,j}$ durch

$$p \mapsto \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_{i-1} & 0 & c_{i+1} & \dots & c_{j-1} & 0 & c_{j+1} & \dots & c_g \\ a_1 & \dots & a_{i-1} & 1 & a_{i+1} & \dots & a_{j-1} & 0 & a_{j+1} & \dots & a_g \\ b_1 & \dots & b_{i-1} & 0 & b_{i+1} & \dots & b_{j-1} & 1 & b_{j+1} & \dots & b_g \end{pmatrix}.$$

Da die $D(ji, j, i, \varepsilon)$ auf die gleiche Weise verkleben wie die $V_{i,j}$, ist der Morphismus wohldefiniert. Insbesondere ist φ auf jedem $V_{i,j}$ ein Isomorphismus und damit auch insgesamt ein Isomorphismus. \square

Wir geben nun noch eine explizite Beschreibung als abgeschlossene Varietät in einem \mathbb{P}^N an, wobei $N = \frac{1}{6}g(g-1)(4g-5)$: Wir können die Beschreibung von $D(ji, j, i, \varepsilon)$ in Invarianten angeben durch

$$X_i(p) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_j(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_k(p) := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\det(ji|j|k|\varepsilon)}{\det(ji|j|i|\varepsilon)} & \frac{\det(ji|k|i|\varepsilon)}{\det(ji|j|i|\varepsilon)} & \frac{\det(k|j|i|\varepsilon)}{\det(ji|j|i|\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\det(ji|k|i|\varepsilon)}{\det(ji|j|i|\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\det(ji|j|i|\varepsilon)}{\det(ji|j|k|\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für alle $i, j, k \in \{1, \dots, g\}$, $i < j$, $k \neq i, j$

sowie von $D(k, j, i, \varepsilon)$ durch

$$X_i(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_j(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_k(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_l(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\det(k|j|l|\varepsilon)}{\det(k|j|i|\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\det(k|l|i|\varepsilon)}{\det(k|j|i|\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\det(l|j|i|\varepsilon)}{\det(k|j|i|\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X'(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für alle $i, j, k, l \in \{1, \dots, g\}$, $i < j < k$, $l \notin \{i, j, k\}$.

Insbesondere reicht es also, die Semiinvarianten der Form $\det(k|j|i|\varepsilon)$, $\det(ji|j|i|\varepsilon)$ und $\det(ki|j|i|\varepsilon)$ für jeweils $i, j, k \in \{1, \dots, g\}$ zu betrachten. Wir erhalten Relationen wie folgt

$$X_{i,j} := \det(ji|j|i|\varepsilon) = \det(ij|i|j|\varepsilon),$$

$$X_{i,j,k} := \det(ki|j|i|\varepsilon) = \det(ji|k|i|\varepsilon),$$

$$X_{i,j} = X_{j,i}, \quad X_{i,j,k} = X_{i,k,j}, \quad X_{i,j,k}^2 = X_{i,j}X_{i,k},$$

sowie mit

$$Y_{i,j,k} := \det(k|j|i|\varepsilon)$$

die Determinanten-Relationen, wobei $\sigma: \{i, j, k\} \rightarrow \{i, j, k\}$ eine Permutation sei:

$$Y_{i,j,k} = \text{sgn}(\sigma)Y_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)},$$

$$Y_{i,j,k}Y_{i,l,m} = Y_{i,j,m}Y_{i,l,k} - Y_{i,j,l}Y_{i,m,k}.$$

Zwischen den $X_{*,**}$, $X_{*,**}$ und $Y_{*,**}$ erhalten wir Relationen

$$Y_{i,k,l}X_{i,j} = Y_{i,j,l}X_{i,k,j} - Y_{i,j,k}X_{i,l,j}.$$

Literaturverzeichnis

- [AK70] A. Altman and S. Kleiman. *Introduction to Grothendieck duality theory*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 146. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Art69] M. Artin. On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings. *J. Algebra*, 11:532–563, 1969.
- [BBCM02] A. Białyński-Birula, J. B. Carrell, and W. M. McGovern. *Algebraic quotients. Torus actions and cohomology. The adjoint representation and the adjoint action*, volume 131 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, II.
- [Bon94] K. Bongartz. Minimal singularities for representations of Dynkin quivers. *Comment. Math. Helv.*, 69(4):575–611, 1994.
- [Bon96] K. Bongartz. On degenerations and extensions of finite-dimensional modules. *Adv. Math.*, 121(2):245–287, 1996.
- [BS90] V. Balaji and C. S. Seshadri. Cohomology of a moduli space of vector bundles. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 87–120. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [DP89] Th. Dana-Picard. Generic algebras of dimension 6. In *Ring theory 1989 (Ramat Gan and Jerusalem, 1988/1989)*, volume 1 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 53–60. Weizmann, Jerusalem, 1989.
- [DP91] Th. Dana-Picard. 7-dimensional algebras with mixed basis-graph. In *Representations of finite-dimensional algebras (Tsukuba, 1990)*, volume 11 of *CMS Conf. Proc.*, pages 123–158. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [DP94] Th. Dana-Picard. Generic 8-dimensional algebras with mixed basis-graph. *Pacific J. Math.*, 164(2):229–261, 1994.
- [DPS92] Th. Dana-Picard and M. Schaps. Classifying generic algebras. *Rocky Mountain J. Math.*, 22(1):125–156, 1992.
- [DPS96] Th. Dana-Picard and M. Schaps. Classifying generic algebras: the local case. *Houston J. Math.*, 22(4):749–773, 1996.

- [Fla68] F. J. Flanigan. Algebraic geography: Varieties of structure constants. *Pacific J. Math.*, 27:71–79, 1968.
- [Fla74] F. J. Flanigan. Which algebras deform into a total matrix algebra? *J. Algebra*, 29:103–112, 1974.
- [Ful97] W. Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [Gab74] P. Gabriel. Finite representation type is open. In *Springer Lecture Notes in Mathematics*, volume 488, pages 132–155. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [Gro60] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4):228, 1960.
- [Gro61] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8):222, 1961.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Hum78] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.
- [Kin94] A. D. King. Moduli of representations of finite-dimensional algebras. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 45(180):515–530, 1994.
- [Kir85] F. C. Kirwan. Partial desingularisations of quotients of nonsingular varieties and their Betti numbers. *Ann. of Math. (2)*, 122(1):41–85, 1985.
- [Kir88] F. C. Kirwan. Intersection homology and torus actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(2):385–400, 1988.
- [Kra82] H. Kraft. Geometric methods in representation theory. In *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, volume 944 of *Lecture Notes in Math.*, pages 180–258. Springer, Berlin, 1982.
- [Kra84] H. Kraft. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*. Aspects of Mathematics, D1. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984.
- [LB97] L. Le Bruyn. Degenerations of matrices and rationality. UIA report 97-06, 1997.

- [LB05a] L. Le Bruyn. *noncommutative geometry@n, volume 1 : the tools*. neverendingbooks, 2005.
- [LB05b] L. Le Bruyn. *noncommutative geometry@n, volume 2 : the trade*. neverendingbooks, 2005.
- [LBR99] L. Le Bruyn and Z. Reichstein. Smoothness in algebraic geography. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 79(1):158–190, 1999.
- [LBVdB86] L. Le Bruyn and M. Van den Bergh. An explicit description of $T_{3,2}$. In *Ring theory (Antwerp, 1985)*, volume 1197 of *Lecture Notes in Math.*, pages 109–113. Springer, Berlin, 1986.
- [Lod98] J.-L. Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [Maz79] G. Mazzola. The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five. *Manuscripta Math.*, 27(1):81–101, 1979.
- [MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.
- [Muk03] S. Mukai. *An introduction to invariants and moduli*, volume 81 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Translated from the 1998 and 2000 Japanese editions by W. M. Oxbury.
- [New78] P. E. Newstead. *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, volume 51 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [Nor78] M. V. Nori. Appendix of “Desingularisation of the moduli varieties of vector bundles on curves”. In *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, pages 155–184, Tokyo, 1978. Kinokuniya Book Store.
- [Pro76] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Advances in Math.*, 19(3):306–381, 1976.
- [Raz74] Ju. P. Razmyslov. Identities with trace in full matrix algebras over a field of characteristic zero. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38:723–756, 1974.

- [Rei04] M. Reineke. The use of geometric and quantum group techniques for wild quivers. In *Representations of finite dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry*, volume 40 of *Fields Inst. Commun.*, pages 365–390. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [Rei05] M. Reineke. Cohomology of noncommutative Hilbert schemes. *Algebr. Represent. Theory*, 8(4):541–561, 2005.
- [SB00] Gerald W. Schwarz and M. Brion. *Theory of invariants and geometry of quotient varieties. (Théorie des invariants et géométrie des variétés quotients.)*. Travaux en Cours 61. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts., 2000.
- [Sch88] M. Schaps. Deformations of finite-dimensional algebras and their idempotents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 307(2):843–856, 1988.
- [Ser58] J.-P. Serre. Espaces fibrés algébriques. *Sém. C. Chevalley*, 3:1–37, 1958.
- [Ses67] C. S. Seshadri. Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. of Math. (2)*, 85:303–336, 1967.
- [Ses78] C. S. Seshadri. Desingularisation of the moduli varieties of vector bundles on curves. In *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, pages 155–184, Tokyo, 1978. Kinokuniya Book Store.
- [Sha94] I. R. Shafarevich, editor. *Algebraic geometry. IV*, volume 55 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Linear algebraic groups. Invariant theory, A translation of *Algebraic geometry. 4* (Russian), Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989 [MR1100483 (91k:14001)], Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich.
- [Slo80] P. Slodowy. *Simple singularities and simple algebraic groups*, volume 815 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [VdB88] Michel Van den Bergh. The Brauer-Severi scheme of the trace ring of generic matrices. In *Perspectives in ring theory (Antwerp, 1987)*, volume 233 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 333–338. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.