

Quadratkristallgitter

Universell anziehende Objekte in den Kategorien der Kristallgitter
mit festem Höchstgewicht

Thomas Konrad
Bergische Universität Wuppertal

30. April 2008

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20080293

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20080293>]

“Read, every day, something
no one else is reading. Think,
every day, something no one
else is thinking. Do every
day, something no one else
would be silly enough to do.
It is bad for the mind to be
always part of unanimity.”

Christopher Morley

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	ix
1 Grundlagen gerichteter Graphen	1
1.1 Kantengefärbte Digraphen	1
1.2 (Quasi-)Kristallgraphen	3
1.3 (Quasi-)Kristallgitter	7
1.4 Quasi-Quadratkrillgitter	12
1.5 Quadratkrillgitter	15
1.6 Zusammenfassung	17
2 Konstruktion von Kristallgittern	21
2.1 Teilkristallgitter	21
2.2 Kristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$	22
2.3 Kristallgitter vom Typ A_2	23
3 2-farbige Kristalline Graphen	33
3.1 Typ $A_1 \times A_1$	33
3.2 Typ A_2	34
3.2.1 Die Quadratkrillgitter	34
3.2.2 Eine Realisierung	41
3.2.3 Konsequenzen	46
3.3 Typ B_2 und G_2	48
4 Berechnungen für den Typ A2	51
4.1 Vorbereitungen	51
4.2 Berechnungen	51
4.3 Auswertung	55
4.4 Folgerungen	58
Ausblick	63
Danksagung	65
Literatur	67

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ein Kristallgraph ohne größte und ohne kleinste Ecke	7
1.2	Ein Quasi-Quadratkrystallgitter aber kein Kristallgitter	16
1.3	Beispiel für ein Quadratkrystallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$	18
1.4	Beispiel für ein Quadratkrystallgitter vom Typ A_2	19
1.5	Beispiel für ein Quadratkrystallgitter vom Typ B_2	19
1.6	Beispiel für ein Quadratkrystallgitter vom Typ G_2	20
2.1	Beispiel für ein Teilkristallgitter	22
2.2	Die Struktur des Hilfsgraphen Γ	25
2.3	Beispiel 1 für Quadrate aus Satz 2.3.8.	30
2.4	Beispiel 2 für Quadrate aus Satz 2.3.8.	30
2.5	Kein Quadratkrystallgitter und kein kristalliner Graph	31
3.1	Eine Zusammenhangskomponente von X_0	42
3.2	Ein kristalliner Graph vom Typ B_2	49
3.3	Ein kristalliner Graph vom Typ G_2	50
4.1	Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis Level 1.	59
4.2	Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis zum Level 2.	59
4.3	Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis zum Level 3.	60
4.4	Diese Möglichkeit tritt nicht auf.	60
4.5	Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis zum Level 4.	61

Einleitung

Sei $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ eine endlich dimensionale, komplexe Darstellung einer halbeinfachen komplexen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Masaki Kashiwara hat mit Hilfe der Theorie der Quantengruppen eine Methode entwickelt, die einer solchen Darstellung einen eindeutig bestimmten, gerichteten, kantengefärbten Graphen zuordnet; den sogenannten kristallinen Graphen. In diesem Graphen spiegeln sich viele wichtige kombinatorische Eigenschaften der Darstellung wieder. So lassen sich zum Beispiel die Gewichtsmultiplizitäten der Darstellung gewinnen und damit der Charakter der Darstellung.

Der der Darstellung ρ zugeordnete Graph hat aber noch weitere wichtige Eigenschaften. Die Zerlegung der Darstellung in einfache Darstellungen entspricht der Zerlegung des Graphen in Zusammenhangskomponenten, und der Graph, der der Darstellung

$$\rho|_{\mathfrak{g}'}: \mathfrak{g}' \rightarrow \text{End}(V).$$

einer Levi-Unteralgebra $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ zugeordnet wird, läßt sich durch Weglassen von Kanten erzeugen.

Die wichtigste Eigenschaft ist jedoch diese: Seien $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ und $\rho': \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V')$ zwei komplexe Darstellungen der halbeinfachen Lie-Algebra L und seien G, G' die zugeordneten kristallinen Graphen. Dann definiert man ein Produkt $G \otimes G'$ der beiden Graphen mit der Eigenschaft, daß $G \otimes G'$ isomorph ist zu dem Graphen, der dem Tensorprodukt der beiden Darstellungen zugeordnet wird. So kann man nur anhand der kristallinen Graphen Informationen über das Tensorprodukt der beiden Darstellungen gewinnen. Insbesondere interessiert man sich dabei für die Zerlegung des Tensorproduktes von Darstellungen in einfache Darstellungen, oder, umformuliert in die Sprache der Graphen, für die Zerlegung des Produktes $G \otimes G'$ in Zusammenhangskomponenten.

Nun ist es ein 16 Jahre altes Problem die Graphen zu charakterisieren, die mit der Methode von Kashiwara entstehen. Die Frage ist also, wie kann man einem Graphen ansehen, ob er der Graph einer Darstellung ist, und wie kann man alle Graphen angeben, die überhaupt mit dieser Methode entstehen können.

Im Juni 2001 veröffentlichte John Stembridge mit [6] zum ersten Mal seine lokale Charakterisierung von kristallinen Graphen zu komplexen Darstellungen von halbeinfachen

Lie-Algebren vom einfach verbundenen Typ, womit er als erster eine Teilantwort auf die obige Frage gab.

John Stembridge führte für komplexe halbeinfache Lie-Algebren g mit Cartan-Matrix A den Begriff des A -regulären Graphen ein. Dazu verwendete er ausschließlich lokale Eigenschaften des Graphen und zeigte, daß ein Graph genau dann A regulär ist, wenn er ein kristalliner Graph einer endlich-dimensionalen komplexen Darstellung von g ist. Um diesen Satz zu beweisen, benutzte er das Wegemodell von Peter Littelmann.

Zur Definition eines A -regulären Graphen gehören 4 sehr einfache Axiome $(P1) - (P4)$, die ich im weiteren Verlauf der Arbeit genauer vorstellen werde. Die Axiome sind so einfach, daß leicht zu sehen ist, daß jeder kristalline Graph diese erfüllt.

In meiner Diplomarbeit habe ich für den Satz von John Stembridge einen elementaren Beweis gegeben, in dem ich die Sache vom graphentheoretischen Standpunkt aus betrachtet habe. Seither beschäftigt mich die Frage nach dem Zweck der zusätzlichen 4 Axiome $(P5)$, $(P6)$, $(P5')$ und $(P6')$. Diese 4 Axiome implizieren, daß jede Zusammenhangskomponente eines A -regulären Graphen eine größte und eine kleinste Ecke besitzt. Aber wozu dienen diese Axiome noch?

Um diese Frage näher zu beleuchten, habe ich die Klasse der Graphen genauer betrachtet, die nur die Axiome $(P1) - (P4)$ erfüllen, frei nach dem *Paradoxon des Erfinders* (siehe [1]). Dabei gab es schon anfangs ein paar Probleme zu lösen.

Ich wollte theoretische Ansätze aus der Graphentheorie für meine Arbeit verwenden. Dazu habe ich Konzepte aus der allgemeinen Graphentheorie für meine Problemstellung angepaßt. In den folgenden Abschnitten werden diese um wesentliche Begriffe erweitert und so meine Theorie über die Quadratkristallgitter Stück für Stück aufgebaut.

Genauer gesagt habe ich mich im zweiten Abschnitt mit den Kristallgraphen beschäftigt, so nenne ich die Digraphen, die nur die Axiome $(P1) - (P4)$ erfüllen, und den Quasi-Kristallgraphen, so nenne ich die Digraphen, die sogar nur die ersten drei Axiome $(P1) - (P3)$ erfüllen. In diesem Abschnitt habe ich die Tatsachen aufgeführt, die ich nur aus den benannten Axiomen herleiten konnte und die im weiteren Verlauf der Arbeit kleine aber entscheidende Rollen spielen werden. Ich betrachte diese beiden Typen parallel um herauszustellen, wo das Axiom $(P4)$ wirklich benötigt wird und wo nicht.

Im dritten Abschnitt geht es um sogenannte Kristallgitter. Das sind die Kristallgraphen, die eine kleinste und eine größte Ecke besitzen. Genauso werden parallel die sogenannten Quasi-Kristallgitter betrachtet. Wieder sollen dies die Quasi-Kristallgraphen mit einer kleinsten und einer größten Ecke sein. Hier werden alle wichtigen Eigenschaften dieser Graphen aufgeführt, dessen Grund in der Existenz von kleinster und größter Ecke liegen. Dies ist ein wichtiges Zwischenziel, da alle zusammenhängenden kristallinen Graphen, die wir betrachten wollen, diese Eigenschaft besitzen.

Da nach dem dritten Abschnitt alle Vorbereitungen abgeschlossen sind, kommen wir im nächsten zur Grundidee meiner Arbeit: Den sogenannten (Quasi-)Quadratkristallgittern. Dabei handelt es sich um eine besonders einfache Sorte von (Quasi-)Kristallgittern, nämlich um die (Quasi-)Kristallgitter bei denen jedes Gewicht höchstens einmal auftaucht.

Diese Graphen haben einen so einfachen Aufbau, daß sie sich sehr leicht konstruieren lassen. Außerdem haben die (Quasi-)Quadratkristallgitter zahlreiche weitere bemerkenswerte Eigenschaften, die sie zu einer guten Grundlage machen, die Klasse der Kristallgitter zu untersuchen. Hier sollen die wichtigsten davon aufgezählt werden:

- Zu jedem dominanten Gewicht λ gibt es bis auf Isomorphie genau ein Quasi-Quadratkristallgitter $Q(\lambda)$ mit Höchstgewicht λ .
- Zu jedem Kristallgitter X mit Höchstgewicht λ gibt es genau einen Morphismus $X \rightarrow Q(\lambda)$. Außerdem ist dieser Morphismus surjektiv.
- Zweifarbige Quasi-Quadratkristallgitter sind Quadratkristallgitter.

Dabei bedeutet die zweite dieser Eigenschaften, daß sich jedes Kristallgitter X zu einem (Quasi-)Quadratkristallgitter $Q(X)$ „zusammenkleben“ läßt.

In Kapitel 2 untersuchen wir mit Hilfe der Quadratkristallgitter die Struktur von 2-farbigen Kristallgittern. Für den Typ $A_1 \times A_1$ liegt der Fall ganz einfach, da Kristallgitter von diesem Typ genau dann isomorph sind, wenn sie das gleiche Höchstgewicht haben. Erst für den Typ A_2 wird es richtig spannend. In diesem Fall werden wir einen Struktursatz für Kristallgitter angeben, der uns als Grundlage der weiteren Arbeit dienen wird. Wir sehen damit unter anderem, wie die Label eines Kristallgitters eine Färbung des zugehörigen Quadratkristallgitters induziert und warum das Kristallgitter schon durch diese Färbung festliegt. Abschließend für den Typ A_2 untersuchen wir die möglichen Färbungen des Quadratkristallgitters, die von Kristallgittern induziert werden.

Einen ähnlichen Struktursatz wie oben gibt es für die Typen B_2 und G_2 leider nicht, was zwei Beispiele zeigen. Für diesen Typ müßten also weitere Untersuchungen vorgenommen werden. Dies liegt allerdings außerhalb der Reichweite meiner bisherigen Arbeit.

Der Struktursatz aus Kapitel 2 weist uns direkt auf die Möglichkeit hin, die Kristallgitter vom Typ A_2 zu realisieren, in dem wir nur lokale Werte (Höhe/Tiefe) für die Ecken verwenden. Dies bildet einen erheblichen Vorteil gegenüber der Realisierung durch Young-Tableaux oder ähnlichem. Dort müßten diese Werte erst umständlich berechnet werden.

Für die Typen $A_1 \times A_1$ und A_2 werden im dritten Kapitel genau diese Realisierungen angegeben und bewiesen, und zwar für die Quadratkristallgitter und die zusammenhängenden kristallinen Graphen. Das ermöglicht uns im nächsten Schritt eine speziellere Version der A -regulären Graphen anzugeben, die einiges mehr an Information bietet, als die Version von Stembridge, und zwar für den einfach verbundenen Typ.

Für den Typ A_2 wandeln wir außerdem eine Charakterisierung von Danilov für kristallinen Graphen ab, die mit der Monotonie der Label entlang einfarbiger Ketten arbeitet. So stellen wir den Zusammenhang her zu aktuellen Ergebnissen auf dem Gebiet der kristallinen Graphen. Weiterhin zeigt sich so, wie nützlich die Quadratkristallgitter sind.

Mit Hilfe der Young-Tableaux gebe ich im letzten Kapitel einen elementaren Beweis für meine Realisierung der kristallinen Graphen vom Typ A_2 . Genauer gesagt verwende ich die Darstellung und die Methoden aus [5] um ausführliche Berechnungen durchzuführen.

Als Anwendung der Theorie werden zwei Sätze vorgestellt. Zuerst zeige ich: Ein Kristallgraph X erfülle die Bedingung, daß es für zwei Pfeile $x \xrightarrow{1} y$, $x \xrightarrow{2} z$ mit gleichem Anfangspunkt immer zwei Kantenzüge gibt, die höchstens die Länge 4 haben, in der gleichen Ecke enden und mit $x \xrightarrow{1} y$ bzw. mit $x \xrightarrow{2} z$ beginnen. In diesem Fall ist X ein kristalliner Graph oder ein Quadratkristallgitter, wobei diese leicht zu unterscheiden sind.

Damit haben wir gegenüber den A -regulären Graphen die Bedingungen erheblich verringert, die ausreichend dafür sind, daß ein Kristallgraph ein kristalliner Graph ist.

Der abschließende Satz besagt, daß die zusammenhängenden kristallinen Graphen vom Typ A_2 genau die Kristallgitter sind, die aus den kristallinen Graphen mit Höchstgewicht $(1, 1)$, $(2, 0)$ und $(0, 2)$ zusammengesetzt sind. Ich denke, daß sich dieser Satz am besten auf die anderen zweifarbigen Fälle verallgemeinern läßt. Ausblickend weise ich darauf hin, wie diese Sätze auf den einfach verbundenen Typ ausgeweitet werden können.

Wichtig für meine Arbeit ist der Artikel [5] von Kashiwara et. al. Dieser findet besondere Anwendung in meinen Berechnungen und dient der Verallgemeinerung auf den einfach verbundenen Typ. Die A -regulären Graphen von Stembridge und die Zuordnung der Label zu den Pfeilen von Danilov et. al. sind wichtige Ideen, die die Eckpunkte meiner Arbeit bilden.

Zu Anfang war das von mir geschriebene Computerprogramm sehr wichtig. Mit dessen Hilfe stellten sich schnell viele Vermutungen als falsch heraus. Dies gelang aber meist erst bei so großen Beispielen, die für mich nur mit sehr viel Mühe zu bewältigen gewesen wären. So konnte ich viel Zeit sparen und mich mit den Vermutungen beschäftigen, die sich später als richtig erwiesen.

Kapitel 1

Grundlagen gerichteter Graphen

„It may seem difficult at first, but everything is difficult at first.“

Miyamoto Musashi

1.1 Kantengefärbte Digraphen

In dieser Arbeit betrachten wir hauptsächlich *kantengefärbte Digraphen*. Deshalb wollen wir in diesem Abschnitt Grundlagen zu diesem Thema erarbeiten.

Die Literaturlage zu diesem Thema ist allerdings sehr spärlich. In dem Buch [4] über algebraische Graphentheorie habe ich allerdings Beiträge gefunden, die allgemein genug sind, um hier interessant zu sein.

Im Folgenden habe ich die Begriffe und Aussagen aus diesem Buch auf *kantengefärbte Digraphen* angepasst, die für diese Arbeit am wichtigsten sind.

Definition 1.1.1 (Digraph). Ein (einfacher) Digraph X besteht aus einer endlichen Menge $V(X)$ von Ecken und einer Menge $A(X)$ von Pfeilen, wobei ein Pfeil ein geordnetes Paar (x, y) von verschiedenen Ecken $x, y \in V(X)$ ist.

Eine Abbildung $c: A(X) \rightarrow I$ für eine Indexmenge I heißt I -Färbung von X und der Graph X heißt dann I -gefärbt.

Definition 1.1.2 (Homomorphismus). Seien X und Y zwei I -gefärbte Digraphen. Eine Abbildung $\sigma: V(X) \rightarrow V(Y)$ heißt Homomorphismus der I -gefärbten Digraphen X und Y , falls für alle $x, y \in V(X)$ gilt:

$$x \xrightarrow{i} y \quad \Rightarrow \quad \sigma(x) \xrightarrow{i} \sigma(y)$$

Definition 1.1.3 (Induzierter Untergraph). Sei X ein I -gefärbter Digraph und $Y \subset V(X)$ eine Teilmenge der Eckenmenge von X . Den Digraphen X_Y mit

$$\begin{aligned} V(X_Y) &:= Y \\ A(X_Y) &:= \left\{ y \xrightarrow{i} y' \in A(X) \mid y, y' \in Y \right\} \end{aligned}$$

nennen wir den durch Y induzierten Untergraphen von X .

Definition 1.1.4 (Bild eines Homomorphismus). Sei $\sigma \in \text{hom}(X, Y)$ ein Homomorphismus zweier I -gefärbter Digraphen, dann definieren wir den Graphen $\text{Im } \sigma$ durch

$$\begin{aligned} V(\text{Im } \sigma) &:= \{\sigma(x) \mid x \in X\} \subseteq V(Y) \\ A(\text{Im } \sigma) &:= \{\sigma(x) \xrightarrow{i} \sigma(y) \mid x \xrightarrow{i} y \in A(X)\} \subseteq A(Y) \end{aligned}$$

Definition 1.1.5. Sei X ein I -gefärbter Digraph. Eine Teilmenge $Y \subset V(X)$ der Eckenmenge von X heißt unabhängig (in X), falls $A(X_Y) = \emptyset$.

Definition 1.1.6. Sei X ein I -gefärbter Digraph und $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ eine Partition von $V(X)$ durch unabhängige Teilmengen $\emptyset \neq \pi_j \subset V(X)$, mit der Eigenschaft, daß für alle verschiedenen Indizes $s, t \in I$ alle Pfeile $x \rightarrow y$ mit $x \in \pi_s$ und $y \in \pi_t$ die gleiche Farbe haben.

Dann sei der Graph X/π , der Graph mit der folgenden Ecken- bzw. Pfeilmenge:

$$\begin{aligned} V(X/\pi) &:= \{\pi_j \mid j \in J\} \\ A(X/\pi) &:= \left\{ \pi_j \xrightarrow{i} \pi_k \mid \exists x \in \pi_j, y \in \pi_k : x \xrightarrow{i} y \right\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Der Graph X/π ist dann wieder ein I -gefärbter Digraph und wir bekommen einen Homomorphismus von I -gefärbten Digraphen durch

$$\sigma : V(X) \rightarrow V(X/\pi) \quad x \mapsto \pi_s \text{ mit } x \in \pi_s.$$

Ist umgekehrt $\sigma : V(X) \rightarrow V(Y)$ ein Homomorphismus von I -gefärbten Digraphen X, Y , dann bilden die nicht leeren Fasern von σ eine solche Partition π durch unabhängige Teilmengen und wir haben

$$\text{Im } \sigma \cong X/\pi.$$

Deshalb nun die folgende Definition.

Definition 1.1.7 (Kern eines Homomorphismus). Sei $\sigma \in \text{hom}(X, Y)$ ein Homomorphismus zweier I -gefärbter Digraphen und sei π die Partition von X , die durch die Fasern von σ gegeben wird. Den I -gefärbten Digraphen $\ker(\sigma) := X/\pi$ nennen wir den *Kern* von σ .

Definition 1.1.8 (Kern). Ein I -gefärbter Digraph X heißt Kern, falls jeder Endomorphismus von X ein Automorphismus ist.

Proposition 1.1.1. *Es seien X und Y zwei I -gefärbte Digraphen. Sind X und Y homomorphieäquivalente Kerne, dann sind sie isomorph.*

Beweis. Die Homomorphieäquivalenz der beiden Digraphen bedeutet, daß es zwei Morphismen $\sigma: X \rightarrow Y$ und $\tau: Y \rightarrow X$ gibt. Folglich sind $\sigma \circ \tau: Y \rightarrow Y$ und $\tau \circ \sigma: X \rightarrow X$ Endomorphismen. Die Digraphen X und Y sind aber auch Kerne, also sind $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ Automorphismen und somit X und Y isomorph. \square

Proposition 1.1.2 (Faserprodukt). *Sind $\chi: X \rightarrow Z$ und $\sigma: Y \rightarrow Z$ Homomorphismen von I -gefärbten Digraphen, dann ist $X \times_Z Y$ mit*

$$\begin{aligned} V(X \times_Z Y) &:= \{(x, y) \in X \times Y \mid \chi(x) = \sigma(y)\} \\ A(X \times_Z Y) &:= \left\{ (x, y) \xrightarrow{i} (x', y') \mid x \xrightarrow{i} x' \text{ und } y \xrightarrow{i} y' \right\} \end{aligned}$$

ein I -gefärbter Digraph und $(X \times_Z Y, pr_X, pr_Y)$ mit

$$\begin{aligned} pr_X: V(X \times_Z Y) &\rightarrow V(X) && \text{mit} && (x, y) \mapsto x, \\ pr_Y: V(X \times_Z Y) &\rightarrow V(Y) && \text{mit} && (x, y) \mapsto y \end{aligned}$$

das Faserprodukt von X und Y über Z in der Kategorie der I -gefärbten Digraphen.

Beweis. Zum Nachweis, daß $X \times_Z Y$ das Faserprodukt ist, sei T ein I -gefärbter Digraph und $\chi: T \rightarrow X$, $\sigma: T \rightarrow Y$ Morphismen von I -gefärbten Digraphen. Sei nun $f: T \rightarrow X \times_Z Y$ ein Morphismus von I -gefärbten Digraphen mit $\chi = pr_X \circ f$ und $\sigma = pr_Y \circ f$. Damit ist für ein $t \in T$ $f(t) = (\chi(t), \sigma(t))$. Also gibt es höchstens ein f mit dieser Eigenschaft und außerdem definiert

$$f: T \rightarrow (X \times_Z Y) \quad \text{mit} \quad t \mapsto (\chi(t), \sigma(t))$$

einen Morphismus von I -gefärbten Digraphen mit gerade dieser Eigenschaft. Weil die Abbildungen pr_x und pr_y Morphismen von I -gefärbten Digraphen sind, ist die Proposition damit bewiesen. \square

1.2 (Quasi-)Kristallgraphen

Sei $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ die Cartan-Matrix einer endlich dimensional, komplexen und halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Für Lie-Algebren vom einfach verbundenen Typ hat John Stembridge den Begriff des A -regulären Graphen eingeführt. Dabei handelt es sich um I -gefärbte Digraphen, von denen er zeigte, daß es genau die kristallinen Graphen sind. Zur Definition verwendete er ausschließlich lokale Eigenschaften, die er mit $(P1) - (P6)$, $(P5')$ und $(P6')$ bezeichnete. Die ersten vier Axiome sind sehr einfach und mit der Konstruktionsmethode von Kashiwara läßt sich genauso einfach zeigen, daß kristalline Graphen diese vier Axiome erfüllen. Deshalb sollen uns diese ersten vier Axiome als Grundlage dienen für die weiteren Untersuchungen.

Es sei X ein gerichteter I -kantengefärbter Graph mit folgenden Eigenschaften:

- (P1) Alle einfarbigen gerichteten Kantenzüge in X sind endlich.
- (P2) Für jede Farbe $i \in I$ endet in jeder Ecke $x \in V(X)$ höchstens ein i -farbener Pfeil und es beginnt dort auch höchstens ein solcher.

Definition 1.2.1. Für einen solchen Graphen X definieren wir für alle Ecken $x \in V(X)$ und alle Farben $i \in I$

$\varphi(x, i) :=$ Die maximale Länge eines gerichteten i -farbenen Kantenzuges, der in x beginnt.

$\varepsilon(x, i) :=$ Die maximale Länge eines gerichteten i -farbenen Kantenzuges, der in x endet.

$\mu(x, i) := \varphi(x, i) - \varepsilon(x, i)$.

Dabei nennen wir $\mu(x, i)$ das i -Gewicht von x und $\mu(x) = (\mu(x, i))_{i \in I}$ das Gewicht von X . Endet in $x \in V(X)$ ein i -farbener Pfeil $v \xrightarrow{i} x$, dann bezeichnen wir den Ausgangspunkt v dieses Pfeiles mit $E_i(x) := v$ und definieren für alle Farben $j \in I$:

$$\begin{aligned}\Delta_i \varphi(x, j) &:= \varphi(E_i x, j) - \varphi(x, j) \\ \Delta_i \varepsilon(x, j) &:= \varepsilon(E_i x, j) - \varepsilon(x, j)\end{aligned}$$

Beginnt ein i -farbener Pfeil $x \xrightarrow{i} y$ in x , dann bezeichnen wir den Endpunkt y dieses Pfeiles mit $F_i(x) := y$ und wir definieren für alle Farben $j \in I$:

$$\begin{aligned}\nabla_i \varphi(x, j) &:= \varphi(x, j) - \varphi(F_i x, j) \\ \nabla_i \varepsilon(x, j) &:= \varepsilon(x, j) - \varepsilon(F_i x, j)\end{aligned}$$

Definition 1.2.2 ((Quasi-)Kristallgraph). Sei X ein gerichteter I -kantengefärbter Graph mit (P1),(P2) und der zusätzlichen Eigenschaft:

- (P3) Für alle Ecken $x \in V(X)$ in denen ein i -farbener Pfeil endet gilt die Gleichung

$$\Delta_i \mu(x, j) := \mu(E_i x, j) - \mu(x, j) = \Delta_i \varphi(x, j) - \Delta_i \varepsilon(x, j) = a_{ij},$$

so bezeichnen wir X als I -Quasi-Kristallgraph oder kurz Quasi-Kristallgraph. Erfüllt der Graph X die zusätzliche Eigenschaft:

- (P4) Für alle Ecken $x \in V(X)$ in denen ein i -farbener Pfeil endet gelten die Ungleichungen

$$\Delta_i \varphi(x, j) \leq 0 \text{ und } \Delta_i \varepsilon(x, j) \geq 0,$$

so nennen wir X einen I -Kristallgraph oder kurz Kristallgraph.

Definition 1.2.3 (Homomorphismus von Quasi-Kristallgraphen). Es seien X, Y zwei (Quasi-)Kristallgraphen und $f: X \rightarrow Y$ ein Homomorphismus von I -gefärbten Digraphen, dann heißt f Homomorphismus von (Quasi-)Kristallgraphen, falls für jede Ecke $x \in V(X)$ gilt:

$$\mu(x) = \mu(f(x)).$$

Definition 1.2.4 (Unterkristallgraph). Es seien X und Y Graphen mit $V(Y) \subset V(X)$ und $A(Y) \subset A(X)$. Falls die Inklusion $Y \hookrightarrow X$ ein Homomorphismus von Kristallgraphen ist, heißt Y Unterkristallgraph von X .

Definition 1.2.5 (Gegengraph). Der Graph, den man aus einem gerichteten Graph X erhält, in dem man alle Pfeile herumdreht, nennt man den Gegengraphen von X und wir bezeichnen ihn mit X^* .

Bemerkung. Für alle Ecken $x \in X$ und alle Farben $j \in I$ gilt:

$$\varphi_X(x, j) = \varepsilon_{X^*}(x, j) \quad \varepsilon_X(x, j) = \varphi_{X^*}(x, j)$$

Endet in dem Graphen X außerdem ein i -farbener Pfeil in der Ecke x , bzw. beginnt ein i -farbener Pfeil in x , so gilt:

$$\begin{aligned} -\Delta_i \varphi_X(x, j) &= \nabla_i \varepsilon_{X^*}(x, j) & -\Delta_i \varepsilon_X(x, j) &= \nabla_i \varphi_{X^*}(x, j) \\ & & \text{bzw.} & \\ -\nabla_i \varphi_X(x, j) &= \Delta_i \varepsilon_{X^*}(x, j) & -\nabla_i \varepsilon_X(x, j) &= \Delta_i \varphi_{X^*}(x, j) \end{aligned}$$

Dabei gilt die jeweils zweite Gleichung schon wegen $X^{**} = X$.

Bemerkung. Falls ein i -Pfeil in $x \in V(X)$ endet, erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta_i \varphi(x, j) &= \varphi(E_i x, j) - \varphi(x, j) \\ &= \varphi(\varphi(E_i x, j) - \varphi(F_i E_i x, j)) \\ &= \nabla_i \varphi(E_i x, j) \\ \Delta_i \varepsilon(x, j) &= \nabla_i \varepsilon(E_i x, j) \\ \Delta_i \mu(x, y) &= \nabla_i \varphi(E_i x, j) - \nabla_i \varepsilon(E_i x, j) \end{aligned}$$

und falls ein i -Pfeil in $x \in V(X)$ beginnt, bekommen wir analog dazu:

$$\begin{aligned} \nabla_i \varphi(x, j) &= \Delta_i \varphi(F_i x, j) \\ \nabla_i \varepsilon(x, j) &= \Delta_i \varepsilon(F_i x, j) \end{aligned}$$

Dies führt uns direkt zur nächsten Proposition.

Proposition 1.2.1. *Ein I -kantengefärbter Digraph X ist genau dann ein (Quasi-)Kristallgraph, wenn X^* ein (Quasi-)Kristallgraph ist.*

Beweis. Zuerst einmal ist zu bemerken, daß wir nur eine Richtung überprüfen müssen, wegen $(X^*)^* = X$. Weiterhin ist einsichtig, daß X^* das Axiom (P1) bzw. das Axiom (P2) erfüllt, wenn X dies tut, weil alle Pfeile gleichzeitig herumgedreht werden.

Die wesentlichen Dinge, die wir für den Beweis zu prüfen haben, sind also die Axiome (P3) und (P4). Dazu betrachten wir nun die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}\Delta_i \varphi_{X^*}(x, j) &= -\nabla_i \varepsilon_X(x, j) \\ &= -\Delta_i \varepsilon_X(F_i x, j) \\ \Delta_i \varepsilon_{X^*}(x, j) &= -\nabla_i \varphi_X(x, j) \\ &= -\Delta_i \varphi_X(F_i x, j)\end{aligned}$$

Also erfüllt X^* das Axiom (P3) beziehungsweise das Axiom (P4), falls X dies tut. \square

Lemma 1.2.2. *Es sei X ein Quasi-Kristallgraph, $x \in V(X)$ eine Ecke und $i \in I$ eine beliebige Farbe, dann gibt es in der i -Kette durch x genau eine Ecke y mit*

$$\mu(y, i) = -\mu(x, i).$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $\mu(x, i) \geq 0$ annehmen. Sollte nämlich $\mu(x, i) < 0$ sein, so folgt die Behauptung nach Übergang zum Gegengraphen. Weiterhin ist

$$\mu(F_i^m(x), i) \in \{0, 1\}$$

für genau ein $m \in \mathbb{N}$ nach Axiom (P3). Wir nennen die Ecke $z := F_i^m(x)$, die folglich der Bedingung $\varepsilon(z, i) \geq m$ genügt.

1.Fall: Es ist $\mu(z, i) = 0$ und damit $\varphi(z, i) = \varepsilon(z, i) \geq m$. Wir setzen $y := F_i^m(z) = F_i^{2m}(x)$ und erhalten

$$\mu(y, i) = \underbrace{\mu(x, i)}_{=2m} - 2 \cdot 2m = \underbrace{\mu(x, i) - 2m}_{=0} - 2m.$$

2.Fall: Es ist $\mu(z, i) = 1$ und damit ist $\varphi(z, i) = \varepsilon(z, i) + 1 \geq m + 1$. Dann setzen wir $y := F_i^{m+1}(z) = F_i^{2m+1}(x)$ und erhalten

$$\mu(y, i) = \underbrace{\mu(x, i)}_{=2m+1} - 2 \cdot (2m + 1) = -(2m + 1).$$

Somit haben wir in beiden Fällen eine Ecke y angegeben, die die gesuchte Eigenschaft besitzt. Außerdem ist die Ecke y jeweils eindeutig bestimmt, weil die Werte von $\mu(\cdot, i)$ entlang einer i -Kette streng monoton fallen. \square

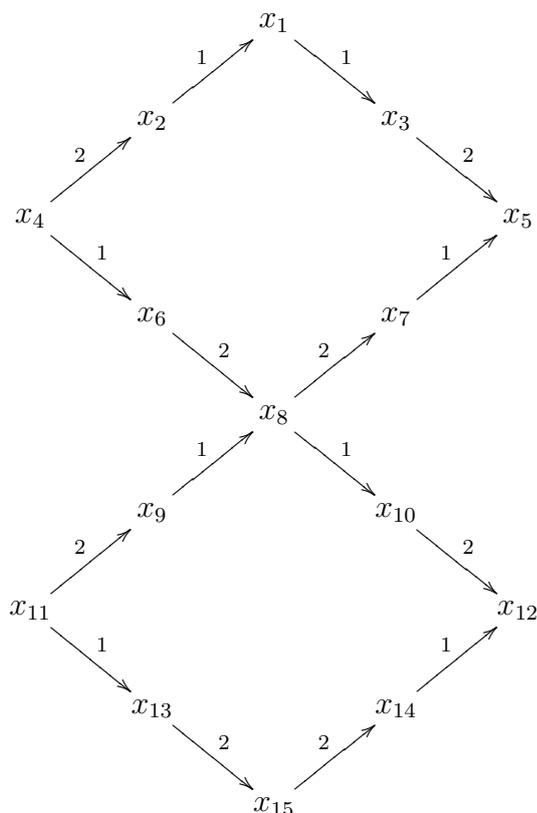


Abbildung 1.1: Ein Kristallgraph ohne größte und ohne kleinste Ecke

Bemerkung. Es gibt Kristallgraphen, die keine größte Ecke besitzen und auch keine kleinste, was das Beispiel in Abb. 1.1 zeigt. In diesem Beispiel sind x_4, x_{11} die maximalen Ecken des Graphen und x_5, x_{12} die minimalen Ecken. Nach Art des Beispiels lassen sich sogar Kristallgraphen mit beliebig vielen maximalen bzw. minimalen Ecken konstruieren. Jede Zusammenhangskomponente eines kristallinen Graphen besitzt jedoch eine größte und eine kleinste Ecke, weshalb wir diese Bedingung im nächsten Abschnitt als Axiom hinzunehmen, um damit unserem Ziel wieder ein Schritt näher zu kommen.

1.3 (Quasi-)Kristallgitter

Definition 1.3.1. Sei X ein (Quasi-)Kristallgraph ohne (gerichtete) Kreise. Auf den Ecken des (Quasi-)Kristallgraphen definieren wir die Ordnungsrelation \succeq durch die transitive reflexive Hülle der Relation

$$x \succeq y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists i \in I : x \xrightarrow{i} y.$$

Definition 1.3.2. Ein (Quasi-)Kristallgraph X , der keine (gerichteten) Kreise besitzt,

heißt (Quasi-)Kristallgitter falls es Elemente $X_0, X_1 \in V(X)$ gibt, so daß $X_0 \succeq x$ und $x \succeq X_1$ für alle $x \in V(X)$ gilt.

Bemerkung. Die Elemente X_0, X_1 eines (Quasi-)Kristallgitters X sind eindeutig bestimmt, da X keine Kreise besitzt.

Definition 1.3.3 (Höchstgewicht). Ist X ein (Quasi-)Kristallgitter, dann nennen wir das Gewicht $\mu(X_0)$ der größten Ecke X_0 (bezgl. \succeq) das Höchstgewicht von X .

Proposition 1.3.1. *Es sei X ein Quasi-Kristallgitter, $x, y \in V(X)$ zwei Ecken von X mit $x \succeq y$ und K_1, K_2 zwei gerichtete Kantenzüge in X , die x und y verbinden, dann ist für jede Farbe $i \in I$ die Anzahl der i -farbenen Pfeile in beiden Kantenzügen gleich.*

Beweis. Es genügt, die Proposition für die größte Ecke $x = X_0$ von X zu zeigen, da X_0 über allen Ecken liegt, d.h. $X_0 \succeq x$ für alle $x \in V(X)$.

Die Matrix A ist als Cartan-Matrix einer halbeinfachen Lie-Algebra invertierbar und wir können deshalb für alle Farben $i \in I$ die Anzahl der i -farbenen Pfeile in einem Kantenzug von X_0 nach y berechnen, in dem wir nur die Gewichte $\mu(X_0)$ und $\mu(y)$ betrachten.

Es ist nämlich nach Axiom (P3):

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \mu(E_{i_1}y) - (\Delta_{i_1}\mu(y, i))_{i=1, \dots, n} \\ &= \mu(E_{i_2}y) - (\Delta_{i_2}\mu(E_{i_1}y, i))_{i=1, \dots, n} - (\Delta_{i_1}\mu(y, i))_{i=1, \dots, n} \\ &= \mu(X_0) - \sum_{k=1}^l (\Delta_{i_k}\mu(E_{i_{k-1}} \cdots E_{i_1}y, i))_{i=1, \dots, n} \\ &\stackrel{(P3)}{=} \mu(X_0) - \sum_{k=1}^l A e_{i_k}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$A \cdot \sum_{k=1}^l e_{i_k} = \mu(X_0) - \mu(y),$$

was die Proposition beweist, da A invertierbar ist. Insbesondere ist die Anzahl der i -Pfeile in dem gerichteten Kantenzug von X_0 nach x nur abhängig von dem Gewicht $\mu(x)$ von x . \square

Korollar 1.3.2. *Es sei X ein Quasi-Kristallgitter, $x, y \in V(X)$ zwei Ecken von X mit $x \succeq y$ und K_1, K_2 zwei gerichtete Kantenzüge in X , die x und y verbinden, dann ist die Anzahl der Pfeile in beiden Kantenzügen gleich.*

Beweis. Nach Proposition 1.3.1 ist für jede Farbe $i \in I$ die Anzahl der i -gefärbten Pfeile in beiden Kantenzügen gleich, also auch die Summe aller dieser Anzahlen, nämlich die Gesamtanzahl aller Pfeile in jedem der Kantenzüge. \square

Definition 1.3.4 (Level). Es sei X ein Kristallgitter und $x \in V(X)$ eine Ecke von X . Die maximale Länge eines gerichteten Kantenzuges in X mit Endpunkt x nennen wir das *Level von x in X* und bezeichnen es mit $l_X(x)$ oder auch kurz mit $l(x)$.

Korollar 1.3.3. *In einem Quasi-Kristallgitter X haben zwei Ecken $x, y \in V(X)$ mit gleichem Gewicht $\mu(x) = \mu(y)$ auch das gleiche Level $l(x) = l(y)$.*

Beweis. Für den Beweis der Proposition 1.3.1 haben wir nur benutzt, daß $\mu(x) = \mu(y)$ ist. Das Korollar 1.3.2 besagt dann, daß X_0 und x den gleichen Abstand haben wie X_0 und y , also sind die Level der beiden Ecken gleich. \square

Korollar 1.3.4. *Sei X ein Quasi-Kristallgitter und $x, y \in V(X)$ zwei Ecken mit $x \succeq y$ und $\mu(x) = \mu(y)$, dann ist schon $x = y$.*

Beweis. Nach Korollar 1.3.3 haben x und y das gleiche Level. Ist nun

$$x =: x_0 \xrightarrow{i_1} x_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_n} x_n := y,$$

dann ist $l(y) = l(x) + n$. Wir haben jedoch $l(x) = l(y)$ vorausgesetzt, also ist $n = 0$ und damit $x = y$. \square

Korollar 1.3.5. *In einem Quasi-Kristallgitter X ist die größte Ecke X_0 von X die einzige Ecke mit Gewicht $\mu(X_0)$.*

Beweis. Es sei $x \in V(X)$ eine Ecke mit Gewicht $\mu(x) = \mu(X_0)$, dann ist $X_0 \succeq x$, weil X_0 die größte Ecke von X ist. Nach Korollar 1.3.4 folgt $x = X_0$. \square

Proposition 1.3.6. *Es seien X und Y Quasi-Kristallgitter mit gleichem Höchstgewicht und $\sigma: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Quasi-Kristallgittern, so ist $\text{Im}(\sigma) = Y$ und $\text{hom}(X, Y) = \{\sigma\}$.*

Bemerkung. Die Proposition besagt nicht nur, daß alle Ecken von Y durch σ getroffen werden, sondern auch alle Pfeile, was im weiteren Verlauf eine wichtige Rolle spielen wird.

Beweis der Proposition. Nach Voraussetzung stimmen die beiden Höchstgewichte $\mu(X_0)$ und $\mu(Y_0)$ überein und X_0, Y_0 sind jeweils die einzigen Ecken mit diesem Gewicht, also erhalten wir $\sigma(X_0) = Y_0$.

Wenn $\text{Im}(\sigma) \neq Y$ wäre, gäbe es einen Pfeil $y' \xrightarrow{i} y$ in Y , der nicht im Bild von σ liegt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß y eine Ecke ist, deren Abstand zu Y_0 minimal ist unter allen Ecken mit dieser Eigenschaft.

Wegen der Minimalitätseigenschaft von y , liegt y' im Bild $\text{Im}(\sigma)$ von σ . Sollte nämlich y' nicht im Bild von σ liegen, so wäre $y' \neq Y_0$ und es gäbe eine Farbe $j \in I$ mit

$$y'' := E_j y' \xrightarrow{j} y' \xrightarrow{i} y \quad \text{in } Y$$

Nun läge aber der Pfeil $y'' \xrightarrow{j} y'$ nicht im Bild von σ , was der Minimalitätseigenschaft des Pfeils $y' \xrightarrow{i} y$ widerspricht. Also liegt die Ecke y' auf jeden Fall im Bild von σ .

Weiterhin können wir davon ausgehen, daß $\mu(y', i)$ positiv ist. Wäre nämlich $\mu(y', i)$ nicht positiv, dann wäre $\mu(y, i)$ negativ und es gäbe zwei Ecken z, z' in der gleichen i -Kette mit $z \xrightarrow{i} z'$ und $\mu(z, i) = -\mu(y, i) > 0$. Der Pfeil $z' \xrightarrow{i} z$ würde nicht im Bild liegen und es wäre $z \succeq y$, was auch der Minimalitätseigenschaft des obigen Pfeils widerspricht.

Jetzt betrachten wir ein Urbild x' von y' . Dessen Gewicht stimmt mit dem von y' überein, weil σ ein Morphismus von Quasi-Kristallgraphen ist. Außerdem haben wir gesehen, daß dieses i -Gewicht positiv ist. Es gibt also einen Pfeil $x' \xrightarrow{i} x$ in X . Damit bekommen wir insgesamt $\sigma(x') = y'$ und $\sigma(x) = y$. Dies widerspricht aber unserer Annahme, daß der Pfeil $y' \xrightarrow{i} y$ nicht im Bild von σ liegt. Schließlich haben wir $\text{Im}(\sigma) = Y$ gezeigt. \square

Eine Tatsache, die wir in den weiteren Ausführungen oft benutzen werden, liefert das nächste Korollar.

Korollar 1.3.7. *Es seien X und Y Quasi-Kristallgitter mit gleichem Höchstgewicht, $\sigma: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Quasi-Kristallgittern und*

$$y_1 \xrightarrow{i} y_2 \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} y_r$$

eine maximale i -Kette in Y , d.h. $\varepsilon(y_1, i) = 0 = \varphi(y_r, i)$, dann gibt es eine maximale i -Kette

$$x_1 \xrightarrow{i} x_2 \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} x_r$$

in X mit $\sigma(x_k) = y_k$ für alle $k = 1, \dots, r$.

Beweis. Da σ nach der vorherigen Proposition surjektiv ist, gibt es eine Ecke $x_1 \in V(X)$ mit $\sigma(x_1) = y_1$. Jetzt ist auch $\varepsilon(x_1, i) = 0$, sonst wäre die obige i -Kette in Y nicht maximal. Damit erhalten wir

$$\varphi(x_1, i) = \mu(x_1, i) = \mu(y_1, i) = \varphi(y_1, i)$$

und wir setzen einfach $x_k = F_i^{k-1}x_1$, was das Korollar beweist. \square

Proposition 1.3.8. *Ist X ein (Quasi-)Kristallgitter, so gilt*

$$\text{End}(X) = \text{Aut}(X) = \{\text{id}\},$$

also ist X ein Kern.

Beweis. Für einen Endomorphismus $\sigma \in \text{End}(X)$ von X ist $\sigma(X_0) = X_0$, weil X_0 auf eine Ecke von gleichem Gewicht abgebildet werden muß. Durch diese Zuordnung und wegen Axiom (P1) ist σ schon eindeutig festgelegt, was die Behauptung beweist. \square

Bemerkung. Nach Proposition 1.1.1 bedeutet das, daß zwei Kristallgitter isomorph sind, wenn sie homomorphieäquivalent sind.

Um die nachfolgenden Ausführungen zu vereinfachen brauchen wir noch ein paar wichtige Definitionen.

Definition 1.3.5. Für ein Quasi-Kristallgitter X definieren wir die Abbildung

$$\psi: V(X) \rightarrow \mathbb{N}^{2|I|} \quad \text{durch} \quad x \rightarrow (\varphi(x, i), \varepsilon(x, i))_{i \in I}.$$

Für jeden Pfeil $x \xrightarrow{i} y$ definieren wir

$$\Delta_i \psi(y) := \psi(x) - \psi(y) = \psi(E_i y) - \psi(y) =: \text{lab}(x \rightarrow y)$$

und nennen es das *Label* des Pfeiles $x \rightarrow y$.

Für ein Kristallgitter ist diese Angabe des Labels aber oft unnötig kompliziert. In diesem Fall können wir ein paar Vereinfachungen vornehmen. Für X vom Typ A_1^n genügt nämlich schon die Angabe der Farbe des Pfeiles, um das Label zu bestimmen. Im Fall der Typen A_2 und B_2 müssen wir etwas weiter ausholen.

Es sei nun X ein 2-farbiges Kristallgitter, $x \xrightarrow{i} y$ ein Pfeil in X und $j \in I \setminus \{i\}$ die andere Farbe. Für den Typ A_2 bleiben nach den Axiomen (P3) und (P4) zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1: Die maximale j -Kette durch y ist um genau einen Pfeil länger als die maximale j -Kette durch x . In diesem Fall schreiben wir

$$x \xrightarrow{i+} y$$

Möglichkeit 2: Die maximale j -Kette durch y ist um genau einen Pfeil kürzer als die maximale j -Kette durch x . In diesem Fall schreiben wir

$$x \xrightarrow{i-} y.$$

In beiden Fällen haben wir damit das Label des Pfeiles genau angegeben und für die Menge $L = \{+, -\}$ haben wir für jedes Kristallgitter vom Typ A_2 eine $I \times L$ -Färbung gewonnen. Genauso schreiben wir

$$y = F_i^+ x, \quad x = E_i^+ y \quad \text{bzw.} \quad y = F_i^- x, \quad x = E_i^- y.$$

Für den Typ B_2 liegt der Fall ähnlich. Für $a_{ij} = -1$ ist alles wie gehabt. Für $a_{ij} = -2$ bleiben drei Möglichkeiten. Entweder ist die maximale j -Kette durch y um genau zwei Pfeile länger, genauso lang oder um genau zwei Pfeile kürzer als die maximale j -Kette durch x . Wir schreiben jeweils

$$x \xrightarrow{i+} y, \quad x \xrightarrow{i0} y \quad \text{bzw.} \quad x \xrightarrow{i-} y$$

und analog dazu

$$y = F_i^+ x, \quad y = F_i^0 x \quad \text{bzw.} \quad y = F_i^- x$$

Speziell für den Typ A_2 ergibt sich damit

Proposition 1.3.9. *Es sei X ein Kristallgitter vom Typ A_2 , $x, y \in V(X)$ zwei Ecken von X und K_1, K_2 zwei gerichtete Kantenzüge, die x und y miteinander verbinden. In diesem Fall ist für jede Farbe $k \in I \times L$ die Anzahl der k -farbenen Pfeile in beiden Kantenzügen gleich.*

Beweis. Der Beweis funktioniert genau wie der Beweis von Proposition 1.3.1 und soll hier deshalb nur kurz angerissen werden. Die Funktion ψ übernimmt dabei die Rolle der Funktion μ und die Matrix A hat hier die Form

$$A := \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix gibt genau an, wie sich die Werte von ψ durch F_i^+ und F_i^- ändern für $i \in \{1, 2\}$. Weil diese Matrix invertierbar ist, folgt die Behauptung genau wie in Proposition 1.3.1. \square

1.4 Quasi-Quadratkrystallgitter

In diesem Abschnitt betrachten wir Quasi-Kristallgitter X mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$\mu: V(X) \hookrightarrow \mathbb{Z}^{|I|}, \quad x \mapsto \mu(x)$$

injektiv ist.

Definition 1.4.1. Quasi-Kristallgitter X mit dieser Eigenschaft nennen wir *Quasi-Quadratkrystallgitter*.

Proposition 1.4.1. *Sind X und Y zwei Quasi-Quadratkrystallgitter mit dem gleichen Höchstgewicht, dann sind die beiden Graphen isomorph.*

Beweis. Wir zeigen, daß es in diesem Fall einen Morphismus $\sigma: X \rightarrow Y$ gibt. Danach wissen wir wegen der Symmetrie in X und Y , daß die beiden Graphen homomorphie-äquivalent sind. Quasi-Kristallgitter sind aber auch *Kerne*, also sind die beiden Quasi-Kristallgitter isomorph nach Lemma 1.3.8.

Wir definieren nun den Morphismus σ per Induktion nach dem Level n . Beginnend mit dem Level 0 setzen wir $\sigma(X_0) = Y_0$. Es sei weiterhin $x \in V(X)$ eine Ecke von X vom Level $n + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, daß für alle Ecken $z \in V(X)$ von Level $\leq n$ der Morphismus σ schon definiert ist und daß für alle diese Ecken z gilt:

$$\varphi(z, i) \leq \varphi(\sigma(z), i) \quad \varepsilon(z, i) \leq \varepsilon(\sigma(z), i) \quad \forall i \in I. \quad (*)$$

Da x vom Level ≥ 1 ist, gibt es einen Pfeil $x' \xrightarrow{i} x$ für ein $i \in I$ und wir setzen:

$$\sigma(x) = F_i \sigma(E_i(x)).$$

Jetzt müssen wir zeigen, daß σ wohldefiniert ist und daß σ die Bedingung (*) nun für alle Ecken vom Level $\leq n + 1$ erfüllt. Dazu sei nun $x'' \xrightarrow{j} x$ ein anderer Pfeil in X , der in x endet. Nun haben $F_i\sigma(E_i(x))$ und $F_j\sigma(E_j(x))$ das gleiche Gewicht. Weil Y ein Quasi-Quadratkrystallgitter ist, sind die beiden Ecken sogar gleich und σ ist somit wohldefiniert. Endet ein Pfeil $x' \xrightarrow{i} x$ in x , dann endet auch ein Pfeil $\sigma(x') \xrightarrow{i} \sigma(x)$ in $\sigma(x)$. Somit gelten für dieses x wieder die Bedingungen aus der Induktionsvoraussetzung.

Endet kein i -Pfeil in x , so ist $\varepsilon(x, i) = 0$ und $\varphi(x, i) = \mu(x, i)$. Das sind aber die kleinste Werte von $\varepsilon(\cdot, i)$ und $\varphi(\cdot, i)$, die überhaupt eine Ecke mit Gewicht $\mu(x)$ haben kann. Also ist hier die Bedingung (*) automatisch erfüllt. Schließlich sind damit der Induktionsschritt und der Beweis abgeschlossen. \square

Definition 1.4.2. Für ein Quasi-Kristallgitter X definieren wir das Quasi-Quadratkrystallgitter $Q(X)$ von X durch

$$\begin{aligned} V(Q(X)) &:= \{\mu(x) | x \in V(X)\} \\ A(Q(X)) &:= \{(\mu(x), \mu(y)) | (x, y) \in A(X)\}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Für die Partition π von $V(X)$, die durch die Fasern der Abbildung μ gegeben wird, ist $Q(X) = X/\pi$.

Proposition 1.4.2. Ist X ein Quasi-Kristallgitter, dann ist $Q(X)$ ein Quasi-Quadratkrystallgitter mit Höchstgewicht $\mu(X_0)$. Weiterhin ist die Abbildung $V(X) \rightarrow V(Q(X))$ mit $x \mapsto \mu(x)$ ein surjektiver Homomorphismus von Quasi-Kristallgraphen und dieser ist sogar der einzige von X nach $Q(X)$.

Bemerkung. Weil es für jedes Quasi-Kristallgitter X genau einen Morphismus von X nach $Q(X)$ gibt, schreiben wir dafür im Folgenden kurz $X \rightarrow Q(X)$.

Achtung! Für ein Kristallgitter X muß $Q(X)$ kein Kristallgitter sein. Ist nämlich X der zusammenhängende kristalline Graph vom Typ A_3 zum Höchstgewicht $(1, 0, 1)$, so ist $Q(X)$, das in Abbildung 1.2 dargestellt wird, kein Quadratkrystallgitter.

Es sei $\lambda \in \mathbb{N}^I$. In der Kategorie der Quasi-Kristallgitter mit Höchstgewicht λ liegt genau ein kristalliner Graph $X(\lambda)$ und die Proposition impliziert, daß das dazugehörige Quasi-Quadratkrystallgitter $Q(X(\lambda)) =: Q(\lambda)$ auch in dieser Kategorie liegt. Außerdem ist $Q(\lambda)$ ein universell anziehendes Objekt in dieser Kategorie nach Proposition 1.4.1.

Beweis der Proposition. Die oben genannte Abbildung ist ein surjektiver Homomorphismus von I -gefärbten Digraphen, das direkt durch die Konstruktion als Quotientengraph $Q(X) = X/\pi$ klar wird. Nun zeigen wir in mehreren Schritten, daß $Q(X)$ alle Eigenschaften eines Quasi-Quadratkrystallgitters besitzt.

- (1) Angenommen $u \xrightarrow{i} x$ und $v \xrightarrow{i} x$ sind zwei i -farbige Pfeile in $Q(X)$ und $u', v' \in V(X)$ mit $\mu(u') = u$ und $\mu(v') = v$ Urbilder von u und v in X mit $\varphi(u', i) \geq 1$ und $\varphi(v', i) \geq 1$. Nun wissen wir:

$$\mu(F_i u') = \mu(F_i v') = x$$

und wegen $\Delta_j \mu(y, i) = a_{ij}$ für alle $y \in V(X)$ wissen wir auch

$$u = \mu(u') = \mu(v') = v,$$

das heißt für eine feste Farbe $i \in I$ kommt in jedem $x \in V(Q(X))$ höchstens ein i -farbiger Pfeil an. Nach Übergang zum Gegengraphen zeigt dies, daß für jede Farbe $i \in I$ in jeder Ecke $x \in V(Q(X))$ höchstens ein i -farbiger Pfeil beginnt.

- (2) Jede i -Kette in $Q(X)$ ist eine Überlagerung von i -Ketten in X . Wir bekommen also in $Q(X)$

$$\begin{aligned} \varphi_{Q(X)}(x, i) &= \max \{ \varphi_X(y, i) \mid y \in V(X) \text{ mit } \mu(y) = x \} \\ \varepsilon_{Q(X)}(x, i) &= \min \{ \varepsilon_X(y, i) \mid y \in V(X) \text{ mit } \mu(y) = x \}. \end{aligned}$$

Diese Maxima existieren, weil X nur endlich viele i -Ketten enthält und diese endlich sind. Ist $y \in V(X)$ eine Ecke mit $\mu(y) = x$ und $\varphi(y, i) = \varphi(x, i)$, dann ist auch $\varepsilon(y, i) = \varepsilon(x, i)$. Also ist $\mu(y, i) = \mu(x, i)$ und dies sogar für alle $y \in V(X)$ mit $\mu(y) = x$. Anders ausgedrückt ist

$$\mu_{Q(X)}(x, i) = \mu_X(y, i) \text{ für alle } y \in V(X) \text{ mit } \mu(y) = x.$$

Wenn wir gezeigt haben, daß $Q(X)$ ein Quasi-Kristallgitter ist, wissen wir damit insbesondere, daß $\mu: X \rightarrow Q(X)$ ein Homomorphismus von Quasi-Kristallgraphen ist, der nach Proposition 1.3.6 eindeutig ist.

- (3) Die letzte Gleichung zeigt direkt, daß für alle $x \in V(Q(X))$ die Gleichung

$$\Delta_j \mu(x, i) = a_{ij}$$

gilt, denn sei $y \in \mu^{-1}(x)$ mit $\varepsilon(y, j) \geq 1$, dann ist

$$\begin{aligned} \Delta_j \mu(x, i) &= \mu(E_j x, i) - \mu(x, i) \\ &= \mu(E_j y, i) - \mu(y, i) \\ &= \Delta_j \mu(y, i) \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

Bis hierher wissen wir also, daß $Q(X)$ ein Quasi-Kristallgraph ist.

- (4) In diesem Punkt zeigen wir, daß $\mu(X_0)$ die größte Ecke von $Q(X)$ ist und $\mu(X_1)$ die kleinste Ecke. Es sei dazu $x \in V(Q(X))$ eine beliebige Ecke und $y \in V(X)$ eine Ecke mit $\mu(y) = x$. Dann gibt es einen gerichteten Kantenzug

$$X_0 =: y_0 \xrightarrow{i_1} y_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_n} y_n := y$$

in X . Das führt uns zu dem gerichteten Kantenzug

$$\mu(X_0) \xrightarrow{i_1} \mu(y_1) \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_m} \mu(y) = x$$

in $Q(X)$. Also ist $\mu(X_0) \succeq x$ für alle $x \in V(Q(X))$, und nach Übergang zum Gegengraphen zeigt dies, daß $x \succeq \mu(X_1)$ für alle $x \in V(Q(X))$ ist. Bis hierher wissen wir, daß $Q(X)$ ein Quasi-Kristallgitter ist.

- (5) Sind nun $x, y \in V(Q(X))$ zwei Ecken in $Q(X)$ mit gleichem Gewicht $\mu(x) = \mu(y)$. Zum Abschluß des Beweises müssen wir zeigen, daß $x = y$ ist. Es seien dazu nun $x', y' \in V(X)$ zwei Urbilder von x bzw. y . Das bedeutet $\mu(x') = \mu(y')$ und damit ist $x = y$.

□

Proposition 1.4.3. *Ist X ein Quasi-Quadratkristallgitter und $x, y \in V(X)$ mit*

$$\mu(x) = \mu(y) + \lambda A e_i \quad \lambda \geq 0,$$

dann gibt es eine i -Kette, die x mit y verbindet.

Beweis. Nach Voraussetzung haben wir $\mu(x, i) \geq \mu(y, i)$. Nehmen wir jetzt an, daß die maximale i -Kette durch x nicht die Ecke y enthält. Nun können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\varphi(x, i) = 0$ ist, denn für die letzte Ecke x' in der i -Kette durch x gilt immer noch $\mu(x', i) \geq \mu(y, i)$, weil y nicht zu dieser Kette gehört.

Genauso können wir annehmen, daß $\varepsilon(y, i) = 0$. Das bedeutet aber insgesamt $-\varepsilon(x, i) \geq \varphi(y, i)$, was schließlich bedeutet

$$\varphi(x, i) = \varepsilon(x, i) = 0 = \varphi(y, i) = \varepsilon(y, i)$$

Also ist $\lambda = 0$ und somit $x = y$. Dies widerspricht der Annahme, daß x und y nicht in der gleichen i -Kette liegen.

Schließlich ist die Proposition damit bewiesen. □

Beispiel 1. Abschließend finden wir ein Beispiel für ein Quasi-Quadratkristallgitter in Abbildung 1.2, das kein Quadratkristallgitter ist. Dabei wird das Axiom (P4) bei der Ecke x_7 verletzt. Im nächsten Abschnitt werden wir feststellen, daß für so ein Beispiel mindestens 3 Farben nötig sind.

1.5 Quadratkristallgitter

Analog zum Begriff Quasi-Quadratkristallgitter definieren wir nun:

Definition 1.5.1 (Quadratkristallgitter). Ein Kristallgitter X mit der Eigenschaft, daß die Funktion $\mu: V(X) \rightarrow \mathbb{Z}^{|I|}$ mit $\mu: x \mapsto \mu(x)$ injektiv ist, nennen wir ein Quadratkristallgitter.

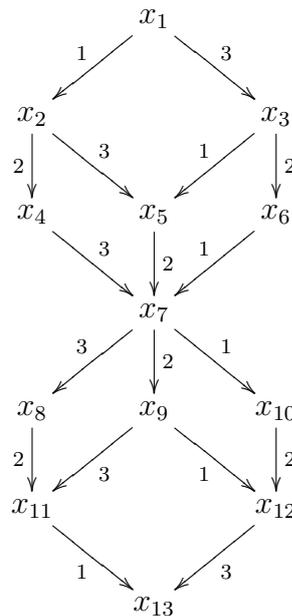


Abbildung 1.2: Ein Quasi-Quadratkristallgitter aber kein Kristallgitter

Die nächste Proposition beschreibt die Herkunft des Namens Quadratkristallgitter.

Proposition 1.5.1. *Ist X ein I -Quadratkristallgitter, so gilt:*

1. Für jede Ecke $x \in V(X)$, für die zwei verschiedene Farben $i, j \in I$ existieren mit $\varphi(x, i), \varphi(x, j) \geq 1$, gilt

$$F_i F_j x = F_j F_i x$$

2. Für jede Ecke $x \in V(X)$, für die zwei verschiedene Farben $i, j \in I$ existieren mit $\varepsilon(x, i), \varepsilon(x, j) \geq 1$, gilt

$$E_i E_j x = E_j E_i x.$$

Wobei die zweite Eigenschaft schon aus der ersten folgt, weil der Gegengraph von X auch ein Quadratkristallgitter ist.

Beweis. Ist X ein Quadratkristallgitter und $x \in V(X)$ eine Ecke wie oben, dann sind nach Axiom (P4) $\varphi(F_i x, j) \geq \varphi(x, j) \geq 1$ und $\varphi(F_j x, i) \geq \varphi(x, i) \geq 1$. Also existieren die Ecken $F_i(F_j(x))$ und $F_j(F_i(x))$. Diese beiden Ecken haben das gleiche Gewicht und sind somit gleich, weil X ein Quadratkristallgitter ist. \square

Proposition 1.5.2. *Für $|I| = 2$ ist jedes Quasi-Quadratkristallgitter ein Quadratkristallgitter.*

Beweis. Sei nun $x \in V(X)$ eine Ecke von X und $I = \{i, j\}$. Wir können annehmen, daß es einen Pfeil $y \xrightarrow{i} x$ in X gibt, denn sonst wäre nichts zu zeigen.

Es sei nun u die erste Ecke in der maximalen j -Kette durch x , dann kann u aber nicht die größte Ecke von X sein, weil es nach Korollar 1.3.1 mindestens einen i -Pfeil in jeder Kette von X_0 nach x gibt.

Nun gibt es einen Pfeil $v \xrightarrow{i} u$ in X , weil $|I| = 2$ ist. Wegen $\varepsilon(u, j) = 0$, ist $\varepsilon(v, j) \geq 0 = \varepsilon(u, j)$.

Nun erfüllen aber die Ecken v und y die Voraussetzung aus der obigen Proposition. Also liegen v und y auf der gleichen j -Kette. Damit ist also

$$\varepsilon(y, j) - \varepsilon(x, j) = \varepsilon(v, j) - \varepsilon(u, j) \geq 0.$$

Insgesamt ergibt sich das folgende Bild:

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{j} & v & \xrightarrow{j} & \cdots & \xrightarrow{j} & E_j y & \xrightarrow{j} & y \\ & & \downarrow i & & & & & & \downarrow i \\ & & u & \xrightarrow{j} & \cdots & \xrightarrow{j} & E_j x & \xrightarrow{j} & x \end{array}$$

Es sei \tilde{v} die letzte Ecke in der maximalen j -Kette durch y . Diese Ecke kann nicht die kleinste Ecke von X sein. Also gibt es einen Pfeil $\tilde{v} \xrightarrow{i} \tilde{u}$ in X . Wieder erfüllen die Ecken x und \tilde{u} die Voraussetzungen aus der obigen Proposition und wir schließen analog zu dem obigen Fall:

$$\varphi(y, j) - \varphi(x, j) = \varphi(\tilde{v}, j) - \varphi(\tilde{u}, j) \leq 0.$$

Wobei sich hier das folgende Bild ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} y & \xrightarrow{j} & F_j y & \xrightarrow{j} & \cdots & \xrightarrow{j} & \tilde{v} \\ \downarrow i & & & & & & \downarrow i \\ x & \xrightarrow{j} & F_j x & \xrightarrow{j} & \cdots & \xrightarrow{j} & \tilde{u} \end{array}$$

□

1.6 Zusammenfassung

Die wichtigsten Resultate in diesem Kapitel lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Satz 1.6.1. 1. Zu jedem Gewicht $\lambda \geq 0$ gibt es für jede halbeinfache komplexe Lie-Algebra bis auf Isomorphie genau ein Quasi-Quadratkrystallgitter mit Höchstgewicht λ .

2. Ist X ein Quasi-Krystallgitter, dann ist $Q(X)$ ein Quasi-Quadratkrystallgitter.

3. Für zwei Quasi-Krystallgitter X und Y mit gleichem Höchstgewicht sind $Q(X)$ und $Q(Y)$ isomorph.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_{11} & \xrightarrow{1} & x_{12} & \xrightarrow{1} & x_{13} & \xrightarrow{1} & x_{14} \\
\downarrow 2 & & \downarrow 2 & & \downarrow 2 & & \downarrow 2 \\
x_{21} & \xrightarrow{1} & x_{22} & \xrightarrow{1} & x_{23} & \xrightarrow{1} & x_{24} \\
\downarrow 2 & & \downarrow 2 & & \downarrow 2 & & \downarrow 2 \\
x_{31} & \xrightarrow{1} & x_{32} & \xrightarrow{1} & x_{33} & \xrightarrow{1} & x_{34}
\end{array}$$

Abbildung 1.3: Beispiel für ein Quadratkristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$

4. Für $|I| = 2$ ist jedes Quasi-Quadratkristallgitter schon ein Quadratkristallgitter.
5. Ist $\sigma: X \rightarrow Y$ ein Homomorphismus von Quasi-Kristallgittern mit gleichem Höchstgewicht, dann ist $\text{Im}(\sigma) = Y$ und $\text{hom}(X, Y) = \{\sigma\}$.

Beweis. Der Teil 2 folgt direkt aus Proposition 1.4.2. Die Behauptung 1 folgt aus der Tatsache, daß es zu jeder halbeinfachen komplexen Lie-Algebra bis auf Isomorphie genau einen zusammenhängenden kristallinen Graphen $X(\lambda)$ vom Höchstgewicht λ gibt.

Nach Proposition 1.4.2 ist $Q(\lambda) := Q(X(\lambda))$ ein Quasi-Quadratkristallgitter mit gleichem Höchstgewicht wie X . Nach Proposition 1.4.1 ist $Q(\lambda)$ isomorph zu jedem anderen Quasi-Quadratkristallgitter mit gleichem Höchstgewicht.

Die Behauptung 3 folgt aus der Tatsache, daß $Q(X)$ und $Q(Y)$ gleiches Höchstgewicht haben. Nach Teil 1 sind diese isomorph.

Der Teil 4 folgt direkt aus Proposition 1.4.1 und der Teil 5 folgt direkt aus Proposition 1.3.6.

□

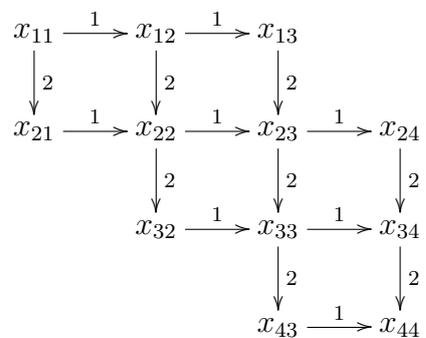
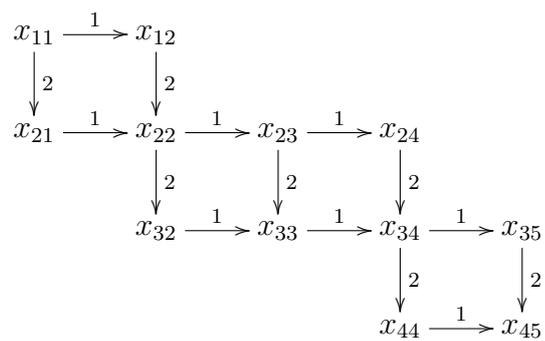
Bemerkung. Für die Existenz der Quadratkristallgitter der Typen $A_1 \times A_1$ und A_2 werden wir im späteren Verlauf dieser Arbeit einen elementaren Beweis angeben, der ohne die Existenz der kristallinen Graphen auskommt. Genauer gesagt werden wir explizite Realisierungen dieser Graphen angeben.

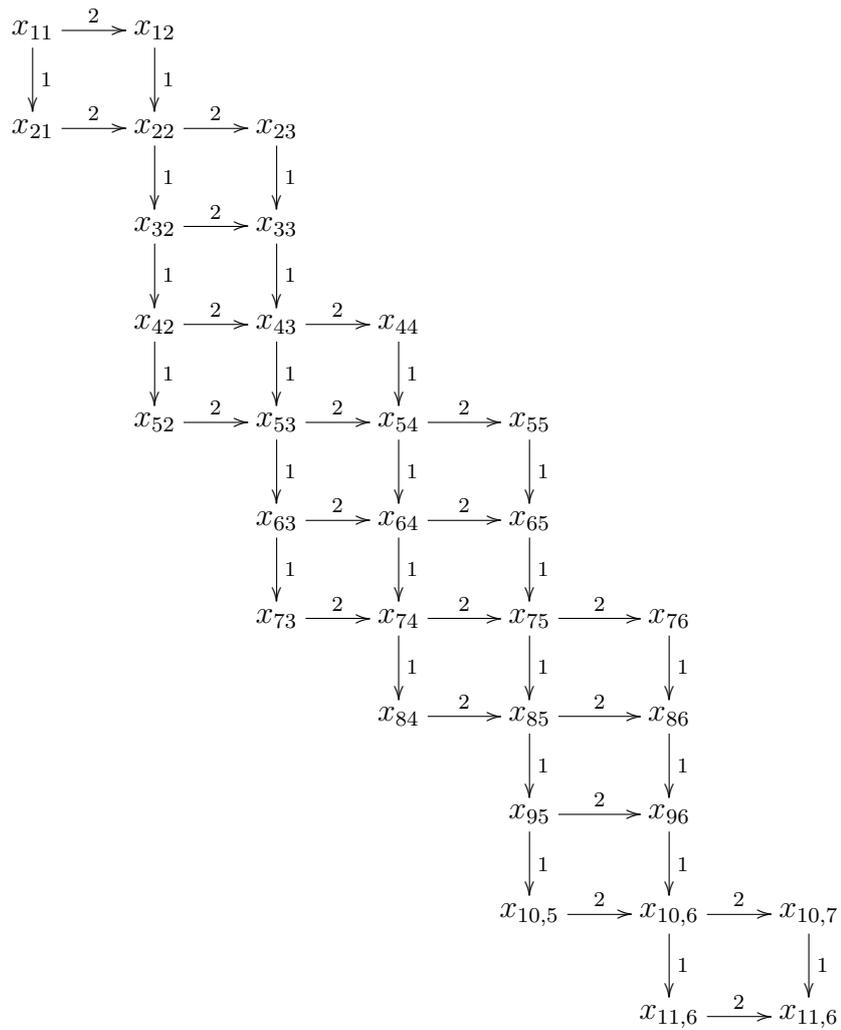
Jetzt folgen Beispiele von Quadratkristallgittern für die Typen $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 , G_2 . Für den Typ $A_1 \times A_1$ gibt es für ein festes Höchstgewicht bis auf Isomorphie nur ein Quasi-Kristallgitter. Sie haben alle die Form eines Rechteckgitters. Ein Beispiel findet man in Abbildung 1.3.

Im nächsten Kapitel werden wir uns hauptsächlich mit Quadratkristallgittern vom Typ A_2 beschäftigen. Ein Beispiel dazu findet man vorab in Abbildung 1.4.

In den Abbildungen 1.5 und 1.6 findet man auch Beispiele für Quadratkristallgitter vom Typ B_2 bzw. vom Typ G_2 .

An diesen Beispielen läßt sich schon erahnen, daß die Quadratkristallgitter mit gleichem Höchstgewicht λ bei den Typen $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 und G_2 immer länger werden.

Abbildung 1.4: Beispiel für ein Quadratkristallgitter vom Typ A_2 Abbildung 1.5: Beispiel für ein Quadratkristallgitter vom Typ B_2

Abbildung 1.6: Beispiel für ein Quadratkristallgitter vom Typ G_2

Kapitel 2

Konstruktion von Kristallgittern

„Phantasie ist wichtiger als Wissen,
denn Wissen ist begrenzt.“

Albert Einstein

Während meiner Arbeit mit Kristallgraphen und im Speziellen mit kristallinen Graphen habe ich viele Phänomene beobachtet, allerdings bin ich dabei immer wieder auf das gleiche Problem gestoßen, egal welchen Blickwinkel ich auch eingenommen habe. Dieses Problem ließ sich erst lösen, als ich den Prozeß der Konstruktion von Kristallgittern genauer betrachtete. Der Blickwinkel für dieses Kapitel ist also der des Konstrukteurs. Dies wird sich jedoch mehr in den Beweisen widerspiegeln als in den Aussagen. Wir werden uns dabei besonders mit den Kristallgittern vom Typ A_2 beschäftigen, weil sich in diesem Fall die genauesten Aussagen treffen lassen.

2.1 Teilkristallgitter

Definition 2.1.1. Ein I -gefärbter Digraph X heißt *Teilkristallgitter* vom Level n , falls:

- (1) X hat ein größtes Element.
- (2) Für jede Farbe $i \in I$ und für jede Ecke $x \in V(X)$ beginnt höchstens ein i -farbiger Pfeil in x und es endet dort höchstens ein solcher. (P1)
- (3) Alle i -Ketten von X sind endlich. (P2)
- (4) Für alle Ecken $x \in V(X)$ vom Level kleiner oder gleich n gelten die Axiome (P3) und (P4).
- (5) Für alle Ecken $x \in V(X)$ vom Level echt größer als n gilt:

$$\varphi(x, i) = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon(x, i) = 0$$

für $|I| - 1$ Farben.

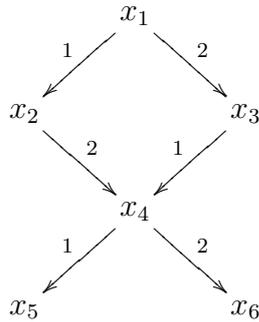


Abbildung 2.1: Beispiel für ein Teilkristallgitter

Beispiel 2. In Abbildung 2.1 sehen wir ein Beispiel für einen Teilkristallgitter vom Level 2.

Definition 2.1.2. Sind X und Y zwei Teilkristallgitter von den Leveln $l(X) = m \leq n = l(Y)$, dann heißt Y Erweiterung von X , falls es einen Morphismus $\sigma: X \rightarrow Y$ von Digraphen gibt, so daß für alle Ecken $x \in V(X)$ mit Level $l(x) \leq m$ gilt $\psi(x) = \psi(\sigma(x))$. Falls $n = m + 1$ ist nennen wir die Erweiterung direkt.

Bemerkung. Jedes Kristallgitter läßt sich als Folge von direkten Erweiterungen schreiben, was wir in den nächsten Abschnitten ausnutzen werden.

2.2 Kristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$

In diesem Abschnitt sei X ein Teilkristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$. Wir wollen nun die möglichen Erweiterungen von X betrachten.

Proposition 2.2.1. Ist X ein Kristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$, dann ist die Abbildung $\psi: V(X) \rightarrow \mathbb{N}^4$ injektiv.

Beweis. Angenommen es sind $x, y \in V(X)$ zwei Ecken mit $\psi(x) = \psi(y)$. Weiterhin sei die Ecke X_0 verbunden mit der Ecke x durch den gerichteten Kantenzug

$$K: X_0 \xrightarrow{i_1} x_1 \xrightarrow{i_2} x_2 \xrightarrow{i_3} \dots \xrightarrow{i_n} x_n = x.$$

Die besondere Form $A = 2E$ der Cartan-Matrix führt uns dazu, daß $\psi(E_{i_n} x) = \psi(E_{i_n} y)$ ist, da $a_{ij} = 0$ ist für $i \neq j$ und den Axiomen (P3) und (P4).

Induktiv existiert demnach die Ecke $E_{i_1} \cdots E_{i_n} y$ und sie ist maximal. Als Kristallgitter besitzt X aber nur eine maximale Ecke, also sind x und y über den gleichen Kantenzug mit der größten Ecke X_0 verbunden und stimmen folglich überein. \square

Bemerkung. Der Beweis der Proposition zeigt sogar genauer, daß für jedes Teilkristallgitter vom Level n die Einschränkung von ψ auf die Ecken vom Level $\leq n$ injektiv ist.

Proposition 2.2.2. *Jedes Teilkristallgitter X vom Typ $A_1 \times A_1$ und vom Level n hat bis auf Isomorphie höchstens eine direkte Erweiterung. Insbesondere sind zwei Kristallgitter mit gleichem Höchstgewicht vom Typ $A_1 \times A_1$ isomorph.*

Beweis. Für den Beweis sei $\sigma: X \rightarrow Y$ eine direkte Erweiterung von X und $x, y \in V(X)$ zwei Ecken vom Level $n + 1$. Die vorherige Bemerkung besagt, daß wir genau dann $\sigma(x) = \sigma(y)$ haben, wenn $\psi(\sigma(x)) = \psi(\sigma(y))$ ist.

Die Werte von $\psi(\sigma(x))$ und $\psi(\sigma(y))$ liegen jedoch schon durch X fest, wegen der besonderen Form der Cartan-Matrix $A = 2E$, also hat X höchstens eine direkte Erweiterung. \square

Bemerkung. Die vorherige Proposition besagt insbesondere, daß alle Kristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$ Quadratkrystallgitter sind, weil demnach jedes Kristallgitter X zum zugehörigen Quadratkrystallgitter $Q(X)$ isomorph ist.

2.3 Kristallgitter vom Typ A_2

In diesem Abschnitt betrachten wir für Teilkristallgitter vom Typ A_2 die Frage, welche direkten Erweiterungen sie haben können.

Satz 2.3.1. *Ein Kristallgitter X vom Typ A_2 hat die folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Es seien $x, y \in V(X)$ zwei Ecken von X mit gleichem Gewicht $\mu(x) = \mu(y)$ und $\psi(x, 1) \geq \psi(y, 1)$, dann gibt es eine ganze Zahl $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\psi(x) = \psi(y) + \alpha \cdot (+1, +1, -1, -1)$$

und für jedes β zwischen 0 und α existiert genau eine Ecke $z \in V(X)$ mit

$$\psi(z) = \psi(y) + \beta \cdot (+1, +1, -1, -1)$$

- (2) *Die Abbildung $\psi: V(X) \rightarrow \mathbb{N}^2$ mit $\psi(x) = (\varphi(x, 1), \varepsilon(x, 1), \varphi(x, 2), \varepsilon(x, 2))$ ist injektiv.*

- (3) *Sind $x, y \in V(X)$ zwei Ecken von X mit $\mu(x) = \mu(y)$ und $x \xrightarrow{i} x', y \xrightarrow{i} y'$ zwei Kanten in X , dann ist $\Delta_i \varphi(x, j) = \Delta_i \varphi(y, j)$, d.h. die $I \times L$ -Färbung der beiden Pfeile ist gleich.*

Beweis. Für den Beweis schreiben wir den Graphen X als Folge von direkten Erweiterungen

$$X_{(0)} \rightarrow X_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow X_{(k)} = X$$

und zeigen per Induktion nach dem Level, daß jede direkte Erweiterung bewirkt, daß die Aussagen des Satzes auch für das nächste Level gelten. Für das Level 0 gibt es nichts zu zeigen, da dort kein Pfeil ankommt.

Für den Induktionsschritt sei nun $X_{(n)}$ das Teilkristallgitter von X vom Level n und

$\pi: X_n \rightarrow X_{(n+1)}$ die direkte Erweiterung zum Teilkristallgitter von X vom Level $n + 1$. Weiterhin seien x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_m die Ecken von X_n mit

$$\mu(\pi(x_i)) = \mu(\pi(y_j)) = \mu(x) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

für eine fest gewählte Ecke $x \in V(X)$ von X vom Level $n + 1$ und

$$\varepsilon(x_i, 1) > 0 \quad \varepsilon(y_j, 2) > 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

Nach Induktionsvoraussetzung können wir die Ecken x_i, y_j echt aufsteigend nach der Länge der 1-Ketten bzw. 2-Ketten zu denen sie gehören sortieren, d.h. wir haben

$$\varphi(x_i, 1) < \varphi(x_j, 1) \quad \text{und} \quad \varphi(y_i, 2) < \varphi(y_j, 2) \quad \text{für } i < j$$

und zwar so, daß jeweils $\varphi(x_i, 1) + 1 = \varphi(x_{i+1}, 1)$ ist und $\varphi(y_j, 2) + 1 = \varphi(y_{j+1}, 2)$.

Die Erweiterung $X_{(n+1)}$ entsteht aus $X_{(n)}$ nicht nur durch Verkleben sondern auch durch Hinzufügen von neuen Ketten. Wir definieren nun:

Falls es eine Ecke y in X gibt mit $\mu(y) = \mu(x)$ und $\varepsilon(y, 1) = 0$ betrachten wir nun die 1-Kette der Länge $\mu(y, 1)$ mit maximaler Ecke x_0 und falls es eine Ecke y in X gibt mit $\mu(y) = \mu(x)$ und $\varepsilon(y, 2) = 0$ betrachten wir noch die 2-Kette der Länge $\mu(y, 2)$. Das ergibt dieses Bild:

$$x_0 \xrightarrow{1} F_1 x_0 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} F_1^{\mu(x,1)} x_0$$

und

$$y_0 \xrightarrow{2} F_2 y_0 \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} F_2^{\mu(x,2)} y_0$$

Nun konstruieren wir uns einen (ungerichteten) Hilfsgraphen Γ an dessen Eigenschaften wir die Behauptungen des Satzes ablesen können. Die Menge der Ecken $V(\Gamma)$ bestehe aus den Elementen x_i, y_j und gegebenenfalls auch x_0 bzw. y_0 .

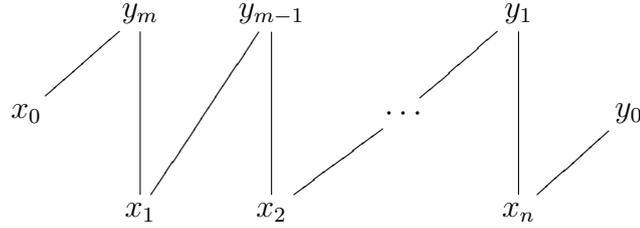
In diesem Graphen Γ verbinden wir zwei Ecken x_i und y_j miteinander, falls das Verbinden dieser beiden Ecken in X_n dazu führt, daß die neu entstandene Ecke die Axiome (P3) und (P4) erfüllt.

Nun wollen wir ein paar Eigenschaften des Graphen Γ genauer betrachten. Zuerst einmal ist zu sehen, daß Γ ein bipartiter Graph ist. Außerdem ist jede Ecke von Γ mit höchstens zwei anderen Ecken in Γ verbunden.

Weiterhin beobachten wir, daß der Graph Γ zusammenhängend ist. Zum Beweis dieser Aussage genügt es zu zeigen, daß der Grad aller Ecken bis auf zwei gleich 2 ist. Für jede Ecke ist aber schon der Grad ≥ 1 , weil $X_{(n)}$ ein Teilkristallgitter eines Kristallgitters ist. Nun sei $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit $\deg(x_i) = 1$ und $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ mit y_j die mit x_i verbundene Ecke. Nun gibt es zwei Fälle:

1. Fall: In $X_{(n+1)}$ ist $\Delta_1 \varphi(x_i, 2) = 0$. Dann könnte x_i auch mit einem y verbunden werden mit $\varphi(y, 2) = \varphi(y_j, 2) + 1$ und $\varepsilon(y, 2) = \varepsilon(y_j, 2) + 1$. So ein y gibt es aber nicht, wegen der Voraussetzung $\deg(x_i) = 1$.

Also schließen wir, daß $y_j = y_m$ ist bzw. $j = m$ und falls x_{i+1} existiert, ist y_m auch mit x_{i+1} verbunden.

Abbildung 2.2: Die Struktur des Hilfsgraphen Γ

Außerdem kann jetzt die Ecke x_{i-1} mit keiner der Ecken y_j verbunden werden. Das kann nur heißen, daß die Ecke x_{i-1} nicht existiert. Wir schließen, daß $i = 0$ oder $i = 1$ ist.

2. Fall: In $X_{(n+1)}$ ist $\Delta_1 \varepsilon(x_i, 2) = 0$. Dann könnte x_i auch mit einem y verbunden werden mit $\varphi(y, 2) = \varphi(y_j, 2) - 1$ und $\varepsilon(y, 2) = \varepsilon(y_j, 2) - 1$. So ein y gibt es aber nicht, wegen der Voraussetzung $\deg(x_i) = 1$.

Also schließen wir, $y_j = y_0$ oder $y_j = y_1$ bzw. $j = 0$ oder $j = 1$ und falls die Ecke x_{i-1} existiert, ist y_j auch mit x_{i-1} verbunden.

Außerdem kann jetzt die Ecke x_{i+1} mit keiner der Ecken y_j verbunden werden. Das kann nur heißen, daß die Ecke x_{i+1} nicht existiert bzw. das $i = n$ ist.

Insgesamt hat dann der Graph Γ die Gestalt wie in Abbildung 2.2. Dabei wird der Fall betrachtet, daß die beiden Ecken x_0, y_0 auch wirklich auftauchen. \square

Korollar 2.3.2. Für ein Kristallgitter X vom Typ A_2 und eine Ecke $x \in V(X)$ läßt sich die Gewichtsmultiplizität m_μ von $\mu = \mu(x)$ in X bestimmen durch

$$m_\mu = \#\{\lambda \mid 0 \leq \psi(x) + \lambda \cdot (+1, +1, -1, -1) \leq \psi_{Q(X)}(x)\}$$

Korollar 2.3.3. Ist X ein Kristallgitter vom Typ A_2 , dann induziert der Homomorphismus $\mu: X \rightarrow Q(X)$ eine $I \times L$ -Färbung $c_X: V(Q(X)) \rightarrow I \times L$ auf $Q(X)$ durch

$$c_X(\mu(x) \rightarrow \mu(y)) := \text{lab}(x \rightarrow y)$$

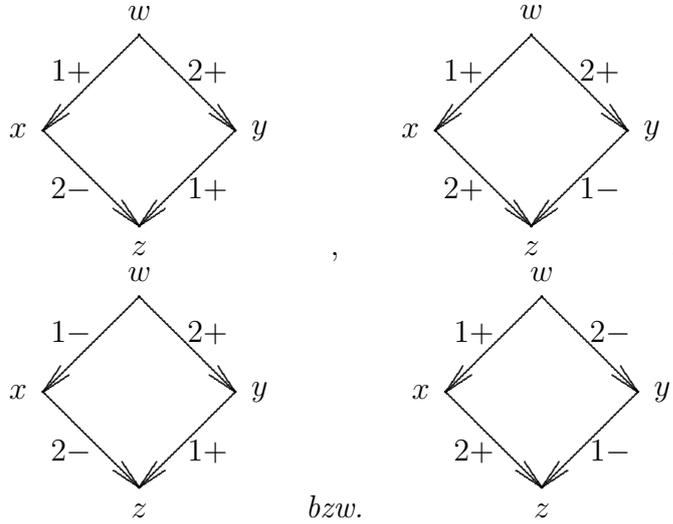
wobei $\text{lab}(x \rightarrow y)$ das Label des Pfeiles in X bezeichnet.

Beweis. Diese Definition ist wohldefiniert nach Satz 2.3.1. Wegen $\text{Im}(m\mu) = Q(X)$, wird so für jeden Pfeil eine Farbe aus $I \times L$ definiert. \square

Korollar 2.3.4. Zwei Kristallgitter X, Y vom Typ A_2 mit gleichem Höchstgewicht sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche $I \times L$ -Färbung auf $Q(X) \cong Q(Y)$ induzieren.

Als nächstes beobachten wir, welche Färbungen in einem Quadrat einer solchen induzierten $I \times L$ -Färbung eines Quadratkristallgitters auftauchen können. Diese Information wird uns später dazu dienen, die möglichen Erweiterungen eines Teilkristallgitters zu einem Kristallgitter weiter einzuschränken.

Proposition 2.3.5. *Sei X eine Kristallgitter und $Q(X)$ das dazugehörige Quadratkrystallgitter mit induzierter $I \times L$ -Färbung c_Q . Sei weiterhin $w \xrightarrow{1} x$, $w \xrightarrow{2} y$, $x \xrightarrow{2} z$ und $y \xrightarrow{1} z$ ein Quadrat in $Q(X)$, dann können die Färbungen*



nicht auftreten. Wobei jeweils die Färbungen in der zweiten Spalte schon aus Symmetriegründen nicht auftreten.

Beweis. Wegen der Symmetrie in 1 und 2 genügt es, wenn wir nur die Quadrate in der ersten Spalte betrachten. Sei nun w' ein Urbild von w unter der kanonischen Abbildung π mit $\varphi(w', 2) > 0$. So ein w' können wir wählen, da die kanonische Abbildung π surjektiv ist.

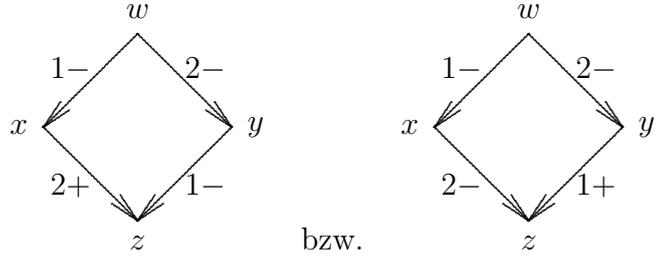
Es sei nun $\psi(w') = (a, b, c, d)$ und $F_2^+(w') =: y'$. Damit erhalten wir $\psi(y') = (a + 1, b, c - 1, d + 1)$. Weiterhin sei $F_1^+(y') =: z'$. So bekommen wir $\psi(z') = (a, b + 1, c, d + 1)$, setzen $E_2^-(z') =: x'$ und gelangen zu $\psi(x') = (a, b + 2, c + 1, d)$. Schließlich sei für das erste Quadrat $E_1^+(x') =: w''$. Dies impliziert $\psi(w'') = (a + 1, b + 1, c, d)$. Für das zweite Quadrat in der ersten Spalte setzen wir $E_1^-(x') =: w'''$, dann ist $\psi(w''') = (a + 1, b + 1, c + 1, d + 1)$. Diese Berechnung zeigt, daß in jeweils beiden Fällen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ecken

$$(E_1 E_2^- F_1^+ F_2^+)^n(w')$$

existieren und paarweise verschieden sind, weil schon die Werte von ψ paarweise verschieden sind. Also enthält das Kristallgitter unendlich viele Ecken. Ein Kristallgitter besitzt jedoch nur endlich viele Ecken, was uns einen Widerspruch zu der Annahme liefert, daß die oben genannten Färbungen der Quadrate auftreten könnten. \square

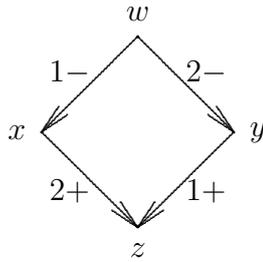
Bemerkung. Aus den gleichen Gründen können auch nicht die folgenden Färbungen auf-

treten:



Dies sieht man ähnlich wie im Beweis oben. Dazu beginnt man jedoch bei der Ecke z und geht zuerst in Richtung der beiden Minus-Pfeile. Alternativ können wir zum Gegengraphen übergehen. In diesem Fall wird aus $+$ $-$ und umgekehrt. Die vorherige Proposition liefert und schließlich den Beweis.

Proposition 2.3.6. *Sei X ein Kristallgitter und $Q(X)$ das dazugehörige Quadratkrystallgitter mit induzierter $I \times L$ -Färbung c_Q . Sei weiterhin $w \xrightarrow{1} x$, $w \xrightarrow{2} y$, $x \xrightarrow{2} z$ und $y \xrightarrow{1} z$ ein Quadrat in $Q(X)$, dann kann die Färbung*



nicht auftreten.

Beweis. Für den Beweis nehmen wir an, daß doch so ein Quadrat mit der obigen Färbung auftritt und wir nennen die Ecken dieses Quadrates wie oben.

Wir betrachten zunächst einmal den Fall, daß es ein Urbild $w' \in V(X)$ von w gibt mit $\varphi(w', 1), \varphi(w', 2) \geq 1$. Jetzt können wir vorgehen, wie in den vorherigen Beweisen. Wir setzen $\psi(w') := (a, b, c, d)$ und $x' := F_1(w')$, dann haben wir $\psi(x') = (a - 1, b + 1, c, d - 1)$. Weiterhin definieren wir $z' := F_2(w')$ und berechnen $\psi(z') = (a, b + 1, c - 1, d)$. Für $y' := E_1(z')$ erhalten wir $\psi(y') = (a + 1, b - 1, c - 2, d)$ und für $w'' := E_2(y')$ folgern wir $\psi(w'') = (a + 1, b + 1, c - 1, d - 1)$.

Diesen Vorgang kann man nun beliebig oft fortsetzen. Es sind aber alle Ecken verschieden, die dabei durchlaufen werden, weil sie sich schon im Funktionswert von ψ unterscheiden. Das Kristallgitter X besitzt demnach unendlich viele Punkte. Das ist ein Widerspruch dazu, daß ein Kristallgraph nur endlich viele Punkte besitzt. Also muß unsere Annahme falsch gewesen sein, daß so ein Quadrat mit der angegebenen Färbung auftritt. Damit ist die Proposition für den ersten Fall bewiesen.

Nun betrachten wir noch den Fall, daß es kein Urbild $w' \in V(X)$ von w gibt mit $\varphi(w', 1), \varphi(w', 2) \geq 1$. Sein nun aber $w' \in V(X)$ ein Urbild von w in X mit $\varphi(w', 1) = \varphi(w, 1)$ und $\varepsilon(w', 1) = \varepsilon(w, 1)$. In diesem Fall muß aber $\varphi(w', 2) = 0$ sein. Somit bleiben noch zwei Möglichkeiten:

- 1. Fall:** Es ist zusätzlich $\varepsilon(w', 1) = 0$. Das bedeutet, daß sich w am oberen Rand von $Q(X)$ befindet. Dort sind jedoch alle L -Färbungen $+$, was unserer Annahme $w \xrightarrow{2^-} y$ widerspricht.
- 2. Fall:** Wir haben $\varepsilon(w', 1) \geq 1$. In diesem Fall gibt es genau eine Ecke \bar{w} in X mit $\psi(\bar{w}) = \psi(w') - (+1, +1, -1, -1)$. Damit aber die Ecke \bar{w} nicht die Bedingung $\varphi(\bar{w}, 1), \varphi(\bar{w}, 2) \geq 1$ erfüllt, muß jetzt $\varphi(\bar{w}, 1) = 0$ sein bzw. $\varphi(w', 1) = 1$. Außerdem ist aber $\varphi(\bar{w}, 2) = 1$ nach der Definition von \bar{w} . Weiterhin beobachten wir, daß w', \bar{w} die einzigen Urbilder von w in X sind, also wissen wir

$$\begin{aligned}\varphi(w, 1) &= \max \{ \varphi(w', 1), \varphi(\bar{w}, 1) \} \\ \varphi(w, 2) &= \max \{ \varphi(w', 1), \varphi(\bar{w}, 2) \},\end{aligned}$$

weil der Morphismus $X \rightarrow Q(X)$ surjektiv ist. Schließlich ist $z = Q(X)_1$ die kleinste Ecke von $Q(X)$ und dort müssen die L -Färbungen alle $-$ sein, was unserer Annahme $x \xrightarrow{2^+} z$ widerspricht.

Insgesamt haben wir damit unsere Proposition bewiesen. □

Die nächste Proposition beschäftigt sich damit, wie ein Kristallgitter vom Typ A_2 am „Rand“ aussehen kann. Genauer gesagt:

Proposition 2.3.7. *Sei X ein Kristallgitter vom Typ A_2 und $Q(X)$ das dazugehörige Quadratkrystallgitter mit der durch $X \rightarrow Q(X)$ induzierten $I \times L$ Färbung c_X auf $Q(X)$. Es seien weiterhin drei Ecken $x \xrightarrow{i} y \xrightarrow{j} z$ in $Q(X)$ gegeben für zwei verschiedene Farben $i, j \in I$ mit der Eigenschaft:*

$$\varphi(x, j) = 0 = \varepsilon(z, i),$$

so tritt genau einer der beiden folgenden Fälle auf:

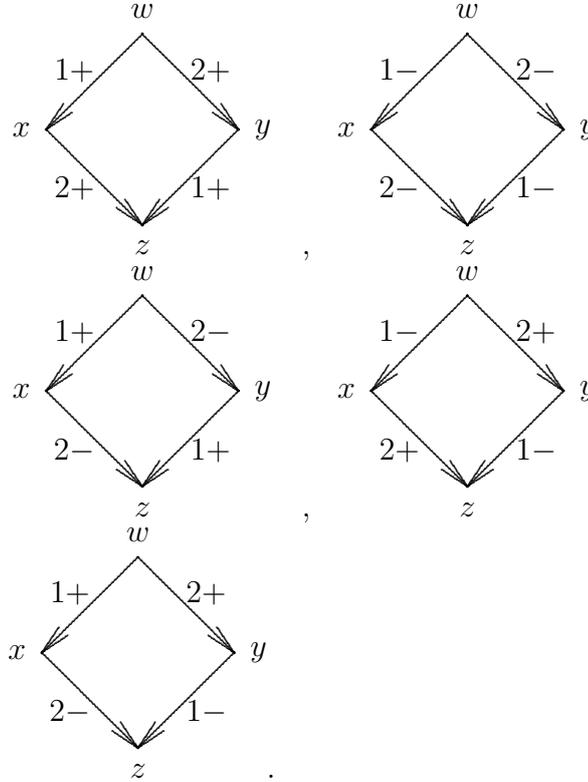
a) $x \xrightarrow{i^+} y \xrightarrow{j^-} z$

b) $x \xrightarrow{i^-} y \xrightarrow{j^+} z$

Beweis. Es sei $x' \in V(X)$ das Urbild von x in X mit $\varphi(x', i) = \varphi(x, i)$ und $\varepsilon(x', i) = \varepsilon(x, i)$. Dann gilt natürlich $0 \leq \varphi(x', j) \leq \varphi(x, j) = 0$, also ist $\varphi(x', j) = 0$. Angenommen wir haben den Fall $x \xrightarrow{i^+} y$, dann sei $y' = F_i x'$ und wir haben $\varphi(y', j) = 1$ und $\varepsilon(y', i) \geq 1$. Sollte nun $y \xrightarrow{j^+} z$ sein, dann wäre für $z' = F_j(y')$ $\varepsilon(z', i) = \varepsilon(y', i) \geq 1$. Das kann aber nicht sein, weil z' ein Urbild von z ist unter $X \rightarrow Q(X)$ und wir vorausgesetzt haben, daß $\varepsilon(z, i) = 0$ gilt.

Wir haben also gezeigt: Aus $x \xrightarrow{i^+} y$ folgt $y \xrightarrow{j^-} z$. Beim Übergang zum Gegengraphen wird bei den Färbungen aus $+$ ein $-$ und umgekehrt. Das heißt, daß aus $y \xrightarrow{j^-} z$ folgt $x \xrightarrow{i^+} y$. Schließlich bedeutet dies, daß nicht beide L -Färbungen gleich sein können, was die Proposition beweist. □

Satz 2.3.8. *Sei X eine Kristallgitter vom Typ A_2 und $Q(X)$ das dazugehörige Quadrat-
kristallgitter mit induzierter $I \times L$ -Färbung c_Q . Sei weiterhin $w \xrightarrow{1} x$, $w \xrightarrow{2} y$, $x \xrightarrow{2} z$ und
 $y \xrightarrow{1} z$ ein Quadrat in $Q(X)$, dann tritt genau einer der folgenden fünf Fälle ein*



Sind weiterhin $x \xrightarrow{i} y \xrightarrow{j} z$ Pfeile in $Q(X)$ für verschiedene Farben $i, j \in I$ mit $\varphi(x, j) = 0$ und $\varepsilon(z, i) = 0$, so tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:

$$x \xrightarrow{i+} y \xrightarrow{j-} z \quad x \xrightarrow{i-} y \xrightarrow{j+} z.$$

Außerdem kommen all diese Fälle wirklich vor.

Beweis. Bei den Quadraten haben wir alle anderen Fälle schon durch vorherige Propositionen ausgeschlossen. Abgesehen von den benötigten Beispielen folgt der Rest auch aus einer vorherigen Proposition.

Zum Abschluß des Beweises betrachten wir noch die Beispiele in den Abbildungen 2.3 und 2.4. In diesen Beispielen kommen alle oben genannten Fälle vor. Bei dem ersten Graphen handelt es sich um das Quadratkristallgitter des kristallinen Graphen zum Höchstgewicht $(2, 1)$ mit der dazugehörigen induzierten $I \times L$ -Färbung.

Das zweite Beispiel ist das Quadratkristallgitter zum Höchstgewicht $(1, 1)$ mit der eigenen $I \times L$ -Färbung.

□

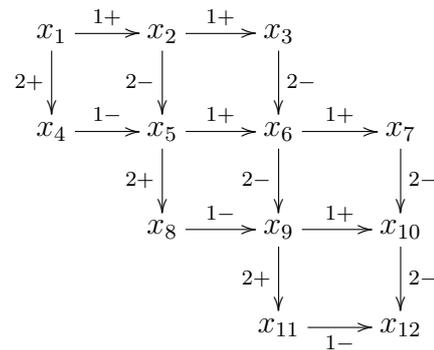


Abbildung 2.3: Beispiel 1 für Quadrate aus Satz 2.3.8.

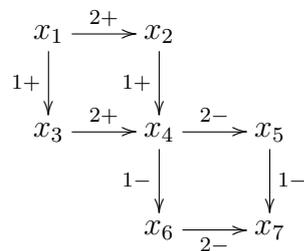


Abbildung 2.4: Beispiel 2 für Quadrate aus Satz 2.3.8.

Bemerkung. Gibt es außer den Quadratkristallgittern und den kristallinen Graphen noch andere Kristallgitter? Die Antwort auf diese Frage ist: Ja es gibt noch andere. Ein Beispiel dafür finden wir in Abbildung 2.5, was auch gleichzeitig das kleinste Beispiel ist, weil das Höchstgewicht eines solchen Kristallgitters mindestens $(2, 0, 2, 0)$ sein muß.

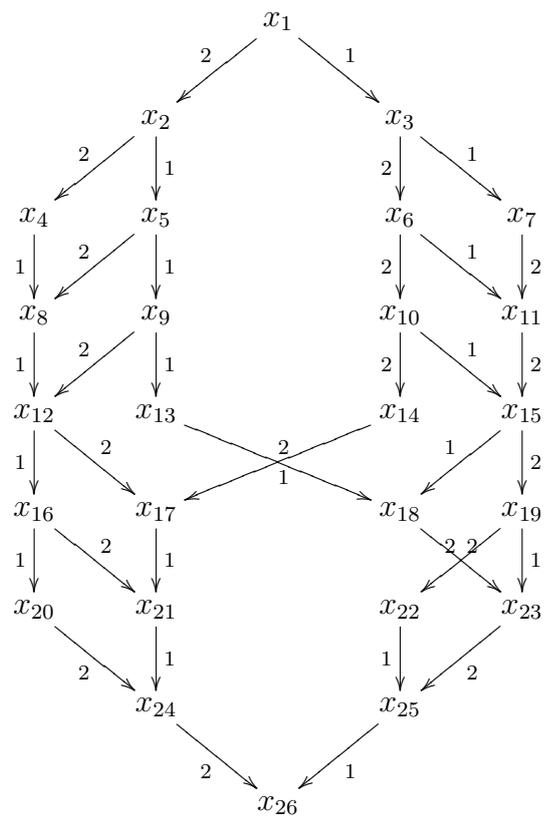


Abbildung 2.5: Ein Kristallgitter aber kein Quadratkristallgitter und kein kristalliner Graph

Kapitel 3

2-farbige Kristalline Graphen

„Mathematics consists of proving the most obvious thing in the least obvious way.“

George Polyá

In diesem Abschnitt betrachten wir 2-farbige kristalline Graphen zu irreduziblen Darstellungen von halbeinfachen komplexen Lie-Algebren und zwar im Speziellen diejenigen vom Typ A_2 . Genauer gesagt werden Realisierungen für alle Quadrat-Kristallgitter vom Typ A_2 angegeben, sowie auch für alle kristallinen Graphen vom diesem Typ. Dazu werden maßgeblich die Ideen aus dem vorherigen Kapitel verwendet.

Die kristallinen Graphen und die dazugehörigen Quadratkristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$ sind so einfach, daß sie hier kurz im nächsten Abschnitt abgehandelt werden können. Für die Typen B_2 und G_2 ist eine ähnliche Realisierung, wie für den Typ A_2 , unmöglich. Die Gründe dafür werden kurz in Abschnitt 3.3 dargelegt.

3.1 Typ $A_1 \times A_1$

Für den Typ $A_1 \times A_1$ gibt es für ein festes Höchstgewicht $\lambda \in \mathbb{N}^2$ bis auf Isomorphie genau ein Kristallgitter mit Höchstgewicht λ , nämlich das Quadratkristallgitter mit diesem Höchstgewicht. Dies wurde schon ausführlich in Abschnitt 2.2 untersucht.

Uns fehlt jetzt nur noch eine Realisierung dieser Quadratkristallgitter. Bei diesem Typ ist das sehr einfach und kann hier kurz angegeben werden.

Wir definieren den Digraphen $Q(\lambda)$ durch

$$\begin{aligned} V(Q(\lambda)) &:= \{x \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + x_2 = \lambda_1, \quad x_3 + x_4 = \lambda_2\} \\ A(Q(\lambda)) &:= \left\{ x \xrightarrow{1} y \mid x_1 + 1 = y_1, \quad x_2 + 1 = y_2, \quad x_3 = y_3, \quad x_4 = y_4 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ x \xrightarrow{2} y \mid x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 + 1 = y_3, \quad x_4 = x_3 + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Dies definiert in der Tat ein Kristallgitter vom Typ $A_1 \times A_1$ und Höchstgewicht λ . Außerdem gilt für jede Ecke x von $Q(\lambda)$

$$x = (\varphi(x, 1), \varepsilon(x, 1), \varphi(x, 2), \varepsilon(x, 2)) = \psi(x).$$

Das hat den großen Vorteil, daß für jede Ecke x sofort alle Einträge von ψ bekannt sind und nicht erst noch berechnet werden müssen.

Im nächsten Abschnitt wird klar, wie groß dieser Vorteil ist, wenn wir Kristallgitter vom Typ A_2 betrachten. Diese sind nämlich nicht mehr so leicht zu überschauen.

3.2 Typ A_2

3.2.1 Die Quadratkrystallgitter

In diesem Abschnitt wollen wir nun Realisierungen der Quadratkrystallgitter vom Typ A_2 erarbeiten. Dazu sei zunächst ein $\delta \in \mathbb{Z}$ fest vorgegeben. Wir definieren nun die zwei Funktionen $\chi_{\delta,1}, \chi_{\delta,2}: \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned}\chi_1(x) &:= \chi_{\delta,1}(a, b, c, d) = 2 \cdot (a - b) + (c - d) + \delta \\ \chi_2(x) &:= \chi_{\delta,2}(a, b, c, d) = (a - b) + 2 \cdot (c - d) - \delta\end{aligned}$$

und damit die Eckenmenge des Digraphen Q_δ durch

$$\begin{aligned}V(Q_\delta) &= \{x = (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 \mid \chi_1(x), \chi_2(x) \in 3\mathbb{Z} \text{ und} \\ &\quad \text{falls } \chi_i(x) \leq 0 \Rightarrow \varepsilon(x, i) \geq -\frac{1}{3}\chi_i(x) \text{ für } i = 1, 2 \text{ und} \\ &\quad \text{falls } \chi_i(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi(x, i) \geq \frac{1}{3}\chi_i \text{ für } i = 1, 2 \text{ und} \\ &\quad \text{falls } \chi_1(x) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x, 1) \leq \varepsilon(x, 2) \text{ und} \\ &\quad \text{falls } \chi_2(x) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x, 2) \leq \varepsilon(x, 1).\end{aligned}$$

Jetzt fehlen noch die Pfeile des Digraphen Q_δ . Falls $a > 0$ definieren wir

$$F_1(x) = \begin{cases} F_1^+(x) &= (a - 1, b + 1, c + 1, d) & \text{falls } \chi_1(x) < 0 \\ F_1^-(x) &= (a - 1, b + 1, c, d - 1) & \text{falls } \chi_1(x) \geq 0 \end{cases}$$

und falls $c > 0$ definieren wir

$$F_2(x) = \begin{cases} F_2^+(x) &= (a + 1, b, c - 1, d + 1) & \text{falls } \chi_2(x) < 0 \\ F_2^-(x) &= (a, b - 1, c - 1, d + 1) & \text{falls } \chi_2(x) \geq 0 \end{cases}$$

und analog dazu für $b > 0$

$$E_1(x) = \begin{cases} E_1^+(x) &= (a + 1, b - 1, c - 1, d) & \text{falls } \chi_1(x) \leq 0 \\ E_1^-(x) &= (a + 1, b - 1, c, d + 1) & \text{falls } \chi_1(x) > 0 \end{cases}$$

und für $d > 0$

$$E_2(x) = \begin{cases} E_2^+(x) & = (a-1, b, c+1, d-1) \quad \text{falls } \chi_2(x) \leq 0 \\ E_2^-(x) & = (a, b+1, c+1, d-1) \quad \text{falls } \chi_2(x) > 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Zuerst einmal ist zu bemerken, daß die Operatoren E_i, F_i wohldefiniert sind, falls sie existieren. Weiterhin definiert dies einen I -gefärbten Digraphen mit Eckenmenge Q_δ . Denn ist für ein $x \in Q_\delta$ $\varphi(x, i) > 0$, so ist auch $\varepsilon(F_i(x), i) > 0$ und $E_i(F_i(x)) = x$. Umgekehrt gilt dies auch nach Übergang zum Gegengraphen.

Weiterhin definiert dies sogar eine Kristallgraphstruktur auf Q_δ , da die Axiome (P1) – (P4) direkt durch die Definition erfüllt werden. Dabei fällt natürlich auf, daß Q_δ unendlich viele Ecken besitzt. Wir interessieren uns aber für die Zusammenhangskomponenten von Q_δ , die jeweils nur endlich viele Ecken besitzen.

Proposition 3.2.1. *Für jede Ecke $x \in V(Q_\delta)$ von Q_δ ist*

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= \chi_1(F_2(x)) \\ \chi_1(x) &= \chi_1(E_2(x)) \\ \chi_2(x) &= \chi_2(F_1(x)) \\ \chi_2(x) &= \chi_2(E_1(x)), \end{aligned}$$

falls die jeweiligen Operatoren E_i und F_i existieren.

Beweis. Wir müssen nur die erste Gleichung zeigen. Die zweite Gleichung folgt automatisch und genauso auch die restlichen Gleichungen wegen der Symmetrie in 1 und 2. Zum Beweis sei nun $x = (a, b, c, d)$. Im Weiteren betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1: Nehmen wir zuerst einmal an, daß $F_2(x) = F_2^+(x)$ ist. Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned} \chi_1(F_2(x)) &= \chi_1(F_2^+(x)) \\ &= \chi_1(a+1, b, c-1, d+1) \\ &= 2 \cdot (a+1-b) + ((c-1) - (d+1)) \\ &= 2 \cdot (a-b) + (c-d) \\ &= \chi_1(x) \end{aligned}$$

Fall 2: Nehmen wir schließlich an, daß $F_2(x) = F_2^-(x)$ ist. Dies impliziert:

$$\begin{aligned} \chi_1(F_2(x)) &= \chi_1(F_2^-(x)) \\ &= \chi_1(a, b-1, c-1, d+1) \\ &= 2 \cdot (a - (b-1)) + ((c-1) - (d+1)) \\ &= 2 \cdot (a-b) + (c-d) \\ &= \chi_1(x). \end{aligned}$$

Damit haben wir die Proposition bewiesen. \square

Korollar 3.2.2. Für jede Ecke $x \in V(Q_\delta)$ mit $\varphi(x, i) \geq 1$ für $i = 1, 2$ gilt

$$F_1(F_2(x)) = F_2(F_1(x)).$$

Genauso gilt das auch nach Übergang zum Gegengraphen, d.h. für jede Ecke $x \in Q_\delta$ mit $\varepsilon(x, i) \geq 1$ für $i = 1, 2$ gilt

$$E_1(E_2(x)) = E_2(E_1(x)).$$

Beweis. Weil die Operatoren F_i^+, F_i^- , $i = 1, 2$ kommutieren und die Label der Pfeile durch die Funktionen χ_1, χ_2 festliegen, folgt die Behauptung aus der vorherigen Proposition. Der Gegengraph Q_δ^* von Q_δ ist isomorph zu $Q_{-\delta}$, also folgt damit auch der zweite Teil der Behauptung. \square

Korollar 3.2.3. Jede maximale Ecke x in Q_δ bezüglich \succeq ist die größte Ecke der Zusammenhangskomponente, die sie enthält.

Beweis. Sei x eine maximale Ecke bezüglich \succeq . Wir nehmen für den Beweis an, daß x nicht die größte Ecke der Zusammenhangskomponente ist, zu der sie gehört. Wir wählen ein y in dieser Zusammenhangskomponente, so daß $x \succeq y$ aber $x \not\prec E_i y$ für ein $i \in I$ ist und daß y unter all den Ecken mit diesen Eigenschaften minimalen Abstand zu x hat. Jetzt muß es noch eine andere Farbe $j \in I \setminus \{i\}$ geben mit $\varepsilon(y, j) \geq 1$. Damit ist die Voraussetzung des vorherigen Korollars erfüllt und wir haben eine Ecke z mit

$$z := E_i(E_j(y)) = E_j(E_i(x)).$$

Es kann aber nicht $x \succeq z$ sein, sonst wäre auch $x \succeq F_j(z) = E_i(y)$, was der Wahl von y widerspricht. Es ist aber dann $F_i(z)$ eine Ecke mit den Eigenschaften $x \succeq F_i(z)$, $x \not\prec E_i(F_i(z))$ und kleinerem Abstand zu x als y , was auch der Wahl von y widerspricht. Insgesamt bedeutet das, daß es so ein y nicht geben kann und x die größte Ecke der Zusammenhangskomponente ist, der x angehört. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Lemma 3.2.4. Für jede maximale i -Kette $x_0 \xrightarrow{i} x_1 \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} x_n$ in Q_δ ist $\chi_i(x_0) \geq 0$ und $\chi_i(x_n) \leq 0$.

Beweis. Nehmen wir $\chi_i(x_0) < 0$ an. Die Definition von Q_δ impliziert nun

$$\varepsilon(x_0, i) \geq -\frac{1}{3}\chi_i(x_0) > 0.$$

Dann ist aber x_0 nicht die größte Ecke in der i -Kette, was der Wahl von x_0 widerspricht. Nehmen wir weiterhin an, es wäre $\chi_i(x_n) > 0$, dann impliziert die Definition von Q_δ , daß $\varphi(x_n, i) \geq \frac{1}{3}\chi_i(x_n) \geq 0$ ist, was aber der Wahl von x_n widerspricht. Insgesamt haben wir das Lemma damit bewiesen. \square

Lemma 3.2.5. Für jede Ecke x von Q_δ gibt es eine Ecke y von Q_δ mit $y \succeq x$ und $\chi_1(y), \chi_2(y) \geq 0$. Genauso gibt es auch eine Ecke z von Q_δ mit $x \succeq z$ und $\chi_1(z), \chi_2(z) \leq 0$.

Beweis. Für den Beweis suchen wir zunächst nur eine Ecke y' mit $y' \succeq x$ und $\chi_1(y') \geq 0$. Danach suchen wir eine Ecke y mit $y \succeq y'$ und $\chi_2(y) \geq 0$. Damit ist automatisch auch $\chi_1(y) \geq 0$.

Wir setzen $y' = (E_1)^{\varepsilon(x,1)}(x)$. Dann ist natürlich $y' \succeq x$ und nach dem vorherigen Lemma haben wir $\chi_1(y') \geq 0$. Schließlich setzen wir $y = (E_2)^{\varepsilon(y',2)}(y')$. Damit ist $y \succeq y' \succeq x$, wir haben $\chi_2(y) \geq 0$ und es ist $\chi_1(y) = \chi_1(y') \geq 0$. Der Übergang zum Gegengraphen liefert auch hier wieder den Rest des Beweises. \square

Proposition 3.2.6. *Jede Zusammenhangskomponente von Q_δ hat eine größte Ecke und eine kleinste.*

Beweis. Es sei x eine beliebige Ecke von Q_δ . Nach dem vorherige Lemma gibt es nun Ecken y, z in Q_δ gibt mit $y \succeq x \succeq z$ und $\chi_i(y) \geq 0 \geq \chi_i(z)$ für $i = 1, 2$.

Wir betrachten die Ecken $y' := (E_1)^{\varepsilon(y,1)}(y)$ und $y'' := (E_2)^{\varepsilon(y,2)}(y')$. Es ist natürlich $\varepsilon(y', 1) = 0$ und wir haben $\varepsilon(y', 2) = \varepsilon(y, 2)$, weil $\chi_1(y) \geq 0$ ist.

Weiterhin ist $\varepsilon(y'', 2) = 0$ und $\varepsilon(y'', 1) = \varepsilon(y', 1) = 0$, weil $\chi_2(y') \geq \chi_2(y) \geq 0$ ist.

Also ist x_0 eine maximale Ecke von Q_δ mit $x_0 \succeq x$. Außerdem gilt das gleiche Ergebnis auch für den Gegengraphen von Q_δ , also gibt es auch eine minimale Ecke x_1 in Q_δ mit $x \succeq x_1$.

Die maximale Ecke x_0 ist nach Korollar 3.2.3 die größte Ecke der Zusammenhangskomponente und x_0 die kleinste. \square

Satz 3.2.7. *Jede Zusammenhangskomponente X von Q_δ ist ein Quadratkristallgitter. Das Höchstgewicht einer jeden Zusammenhangskomponente X von Q_δ ist von der Form $\lambda = (m, m - \delta)$ und jedes Quadratkristallgitter mit Höchstgewicht $\lambda = (m, m - \delta)$ ist isomorph zu genau einer Zusammenhangskomponente von Q_δ .*

Definition 3.2.1. Die Zusammenhangskomponente von Q_δ mit Höchstgewicht λ bezeichnen wir mit $Q(\lambda)$.

Beweis des Satzes. Die vorherigen Ausführungen zeigen, daß jede Zusammenhangskomponente von Q_δ ein Kristallgitter ist. Sei nun X eine Zusammenhangskomponente von Q_δ . Wir müssen jetzt zeigen, daß die Abbildung $\mu: X \rightarrow \mathbb{Z}^2$ injektiv ist.

Nun seien x, y zwei Ecken in X mit $\mu(x) = \mu(y)$. Es seien weiterhin

$$\begin{aligned} X_0 &\xrightarrow{i_1} x_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_n} x_n = x \\ X_0 &\xrightarrow{j_1} y_1 \xrightarrow{j_2} \dots \xrightarrow{j_n} y_n = y \end{aligned}$$

zwei Wege die X_0 mit x beziehungsweise X_0 mit y verbinden.

Diese beiden Wege enthalten gleichviele 1-Pfeile und auch gleichviele 2-Pfeile, weil X ein Kristallgraph ist. Nach Proposition 3.2.1 enthalten beide Wege gleich viele (1+)-, (1-)-, (2+) und (2-)-Pfeile. Also sind $\varphi(x, i) = \varphi(y, i)$ und $\varepsilon(x, i) = \varepsilon(y, i)$ für $i = 1, 2$, was bedeutet, daß schon $x = y$ ist, weil X ein Kristallgitter vom Typ A_2 ist. Insgesamt wissen wir, daß X ein Quadratkristallgitter vom Typ A_2 ist.

Seien nun $x = (a, 0, c, 0)$ eine maximale Ecke von Q_δ . Nach Lemma 3.2.4 haben wir $\chi_1(x), \chi_2(x) \geq 0$ und der Definition von Q_δ zur Folge ist

$$\begin{aligned} 3a \geq \chi_1(x) &= 2a + c + \delta \\ 3c \geq \chi_2(x) &= a + 2c - \delta \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt in der ersten Gleichung auf beiden Seiten $2a$ subtrahieren und in der zweiten Gleichung auf beiden Seiten $2c$, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &\geq c + \delta \\ c &\geq a - \delta \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $c \leq a - \delta$ und $c \geq a - \delta$, also ist $c = a - \delta$, d.h. es ist $x = (a, 0, a - \delta)$, wie im Satz behauptet.

Die Ecke $(m, 0, m - \delta, 0)$ liegt in Q_δ , da alle Bedingungen der Definition erfüllt sind, was den letzten Teil des Satzes beweist, da Quadratkristallgitter mit gleichem Höchstgewicht isomorph sind. \square

Lemma 3.2.8. *Ist X ein Quadratkristallgitter vom Typ A_2 und $x \in V(X)$ eine Ecke von X mit $\varepsilon(x, i) = 0$ und $\varepsilon(x, j) = 1$ für verschiedene Farben $i, j \in I$, dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:*

- (a) $E_i(x)$ ist die größte Ecke von X .
- (b) $E_j(E_i(x))$ ist die größte Ecke von X und das Höchstgewicht von X ist von der Form $m \cdot e_j$.

Insbesondere ist das Level $l(x)$ von x höchstens 2.

Beweis. Es sei x solch eine Ecke. Falls $\chi_i(x) \geq 0$ ist, haben wir $\varepsilon(E_i x, j) = \varepsilon(x, j) = 0$. Außerdem wäre natürlich auch $\varepsilon(E_i x, i) \varepsilon(x, i) - 1 = 0$ und damit x die größte Ecke von X . Falls $\chi_i(x) < 0$ ist, ist $\varepsilon(E_i x, j) = 1$. Uns bleiben nun noch zwei Fälle. Dazu nennen wir $y := E_j(E_i(x))$ und wir bekommen:

1. Fall: Es ist $\chi_j(x) < 0$, dann ist $\varphi(y, i) = \varphi(E_i x, i) \geq 1$ und es wäre $F_j(F_i y) = x$. Schließlich wäre dann $\varepsilon(x, j) = 1 \neq 0$, was der Wahl von x widerspricht.

2. Fall: Es ist $\chi_j(x) \geq 0$, dann ist $\varepsilon(y, i) = \varepsilon(E_i x, i) = 0$ und außerdem natürlich $\varepsilon(y, j) = 0$. Damit ist y die größte Ecke von X . Außerdem ist dann, wie im 1. Fall, $\varphi(y, i) = 0$. Das Höchstgewicht von X ist also von der Form $m \cdot e_j$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

\square

Lemma 3.2.9. *Ist X ein Quadratkristallgitter vom Typ A_2 und $x \in V(X)$ eine Ecke mit $\varepsilon(x, i) = 1$ für $i = 1, 2$, dann tritt genau einer der folgenden vier Fälle ein:*

- (a) x ist die kleinste Ecke von X und X hat Höchstgewicht $(1, 1)$.
- (b) $E_2^2(E_1x)$ ist die größte Ecke von X und X hat Höchstgewicht $(0, n)$.
- (c) $E_1^2(E_2x)$ ist die größte Ecke von X und X hat Höchstgewicht $(m, 0)$.
- (d) $E_2(E_1(x))$ ist die größte Ecke von X .

Beweis. Sei x eine Ecke wie in der Voraussetzung. Falls $\chi_1(x), \chi_2(x) \geq 0$ sind, haben wir den Fall, daß $\varepsilon(E_1x, 2) = \varepsilon(x, 2) = 1$ ist und daß $\varepsilon(E_2E_1x, 1) = \varepsilon(E_1x, 1) = 0$ ist. Außerdem ist dann $\varepsilon(E_2E_1x, 2) = \varepsilon(E_1x, 2) - 1 = 0$. Das bedeutet, daß

$$E_1(E_2(x)) = E_2(E_1(x))$$

eine maximale Ecke von X ist und damit die größte Ecke von X .

Schließlich bleibt der Fall, daß $\chi_i(x) < 0$ ist für ein $i \in \{1, 2\}$. Es sei $i \in I \setminus \{i\}$ die andere Farbe in I . Nach Lemma 3.2.4 ist dann $\chi_i(E_i(x)) \geq 0$. Es ist sogar $\chi_i(E_i(x)) = 0$, weil $\chi(x)$ ein Vielfaches von 3 ist. Damit bekommen wir $\varepsilon(E_i(x), j) = 2$. Wir nennen die Ecke $y := E_j(E_i(x))$ und wir bekommen so die beiden folgenden Fälle:

- 1.Fall:** Es ist auch $\chi_j(x) < 0$. Damit ist $\varepsilon(y, i) = 1$ und natürlich auch $\varepsilon(y, j) = 1$. Außerdem sind $\chi_i(x), \chi_j(x) = 0$. Nach der obigen Beschreibung wissen wir, daß $z := E_j(E_i(y))$ die größte Ecke von X ist. Genauer wissen wir sogar

$$z = (\varepsilon(y, 1), 0, \varepsilon(y, 2), 0) = (1, 0, 1, 0),$$

also ist $x = F_i(F_j(F_i(F_j(z))))$ die kleinste Ecke von X .

- 2.Fall:** Es ist $\chi_j(x) \geq 0$, dann ist $\varepsilon(y, i) = \varepsilon(E_i(x), i) = 0$. Weiterhin ist auch $\varepsilon(E_jy, i) = \varepsilon(y, i) = 0$. Also ist $z := E_j(y)$ die größte Ecke von X . Jetzt muß aber $\varphi(z, i) = 0$ sein, denn sonst wäre $F_j^2(F_i z) = x$, also $\varepsilon(x, j) = 2$, was der Wahl von x widerspricht. Wir wissen jetzt, daß das Höchstgewicht von X gleich $n \cdot e_j$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$.

□

Satz 3.2.10. *Ist X ein Quadratkristallgitter vom Typ A_2 und Y ein Teilkristallgitter von X vom Level $n \geq 2$, dann ist jedes Kristallgitter Z , das eine Erweiterung von Y ist, isomorph zu X .*

Das bedeutet insbesondere: Ein Kristallgitter X vom Typ A_2 mit $\varphi(X_0, i) \geq 1$ für $i = 1, 2$ ist genau dann ein Quadratkristallgitter, wenn $F_1(F_2(X_0)) = F_2(F_1(X_0))$ ist.

Beweis. Es sei Y ein Teilkristallgitter von X vom Level $n \geq 2$. Es seien weiterhin $x, y \in V(Y)$ zwei Ecken vom Level $n + 1$, so daß sie in der gleichen Faser von $X \rightarrow Q(X)$ liegen. Wir müssen jetzt zeigen, daß sie auch in der gleichen Faser von $Z \rightarrow Q(Z) \cong Q(X)$ liegen.

In Y enden nun Pfeile $x' \xrightarrow{i} x$ und $y' \xrightarrow{j} y$ in x bzw. in y . Die einzige Möglichkeit, daß x und y nicht in der gleichen Faser liegen ist, daß $\varepsilon(x', j), \varepsilon(y', i) \leq 1$ ist.

In diesem Fall sind aber auch $\varepsilon(x, j) \leq \varepsilon(x', j) \leq 1$ und $\varepsilon(y, i) \leq \varepsilon(y', i) \leq 1$. Schließlich ist das Bild von x und y in X eine Ecke z mit $\varepsilon(z, i) \leq 1$ für $i = 1, 2$.

Nun muß $\varepsilon(x', j) = 1 = \varepsilon(y', 1)$ sein nach Lemma 3.2.8, weil x und y vom Level ≥ 3 sind. Nach Lemma 3.2.9 ist aber z vom Level ≤ 2 oder es ist einer der Werte $\varepsilon(x', j)$, $\varepsilon(y', i)$ gleich 2.

Weil beide Möglichkeiten der Wahl von x, y widersprechen, sehen wir, daß unsere Annahme falsch war und damit ist der Satz bewiesen. \square

Korollar 3.2.11. *Ist X ein Kristallgitter vom Typ A_2 mit Höchstgewicht $m \cdot e_i$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $i \in I$, dann ist X ein Quadratkrystallgitter.*

Beweis. Sei Y das Teilkristallgitter von X vom Level 2. Für festes Höchstgewicht $\mu = m \cdot e_i$ gibt es bis auf Isomorphie nur ein Teilkristallgitter Y vom Level 2. Dieses Y muß also das Teilkristallgitter vom Level 2 des Quadratkrystallgitters vom Höchstgewicht μ sein. Der vorherige Satz zeigt also, daß X ein Quadratkrystallgitter ist. \square

Lemma 3.2.12. *Es sei X die Zusammenhangskomponente von Q_δ mit Höchstgewicht $(m, m - \delta)$, $x \in V(X)$ eine Ecke von X mit $\chi_i(x) \geq 0$ und $j \in I \setminus \{i\}$ die andere Farbe in I , dann ist*

$$(E_i)^{\varepsilon(x,i) - \frac{1}{3} \min(0, \chi_j(x))} ((E_j)^{\varepsilon(x,j)}(x))$$

die größte Ecke von X . Außerdem ist $\varepsilon((F_j)^{\varphi(x,j)}(x), i) = 0$.

Beweis. Es sei $y := (E_j)^{\varepsilon(x,j)}(x)$ die erste Ecke in der maximalen j -Kette durch x . Für diese Ecke gilt $\chi_j(y) \geq 0$ nach Lemma 3.2.4. Außerdem ist auch $\chi_i(y) \geq \chi_i(x) \geq y$. Sei nun $z := (E_i)^{\varepsilon(y,i)}(y)$. Dann ist $\varepsilon(z, j) = \varepsilon(y, j) = 0$ weil $\chi_j(y, j) \geq 0$ ist. Außerdem ist natürlich $\varepsilon(z, i) = 0$. Also ist z die maximale Ecke von X .

Ist $\chi_j(x) \geq 0$, dann ist $\varphi(x, i) = \varphi(y, i)$ und die im Lemma beschriebene Ecke ist z die größte Ecke von X . Ist $\chi_j(x) < 0$, dann sei $m := -\frac{1}{3}\chi_j(x)$ und wir bekommen $\chi_j(E_j^m(x)) = 0$. Es ist also $\varepsilon(E_j^m(x), i) = m + \varepsilon(x, i)$, womit wir wieder in dem vorherigen Fall landen. Es ist dann $\varepsilon(y, i) = \varepsilon(x, i) + m$ und z die im Lemma beschriebene Ecke.

Es sei nun $v := (F_j)^{\varphi(x,j)}(x)$ die letzte Ecke in der maximalen j -Kette durch x . Angenommen, es wäre $\varepsilon(v, i) \geq 1$, dann wäre $\varphi(E_i v, j) = \varphi(v, j) - 1 = -1$. Weil aber alle Werte von $\varphi(\cdot, j)$ stets nicht negativ sind, liefert dies einen Widerspruch. Es muß also unsere Annahme falsch gewesen sein und damit $\varepsilon(v, i) = 0$. \square

Lemma 3.2.13. *Es seien X und Y zwei Kristallgitter mit gleichem Höchstgewicht und Typ A_2 . Weiterhin seien $Q = Q(X) \cong Q(Y)$ das Quadratkrystallgitter von X, Y und c_X, c_Y die von $X \rightarrow Q$ und $Y \rightarrow Q$ induzierten $(I \times L)$ -Färbungen auf Q , Dann enthält jede maximale einfarbige Kette in Q genauso viele $+$ -Pfeile bezüglich c_X wie bezüglich c_Y .*

Beweis. Es sei Q das Quadratkrystallgitter von X und

$$\bar{q}: q_0 \xrightarrow{j} q_1 \xrightarrow{j} \dots \xrightarrow{j} q_n$$

eine maximale j -Kette in Q mit $\chi_i(q_l) \geq 0$ für alle $l = 1, \dots, n$. Dann gibt es eine maximale j -Kette

$$\bar{x}: x_0 \xrightarrow{j} x_1 \xrightarrow{j} \dots \xrightarrow{j} x_n$$

so daß für alle $l = 1, \dots, n$ die Ecke x_l in der Faser von q_l liegt unter dem Morphismus $X \rightarrow Q$.

Wir können dies annehmen, denn sollten alle Werte von χ_i für die Ecken der Kette \bar{x} negativ sein, gehen wir zum Gegengraphen über. Dort sind dann alle Werte von χ_i nicht negativ.

Nun ist $\varepsilon(x_n, i) \leq \varepsilon(q_n, i) = 0$ nach dem vorherigen Lemma. Außerdem ist $\varepsilon(x_0, i) = \varepsilon(q_0, i)$, weil Q_0 die erste Ecke in der maximalen i -Kette durch q_0 ist.

Jetzt wissen wir also, daß die Anzahl der Pfeile in der Kette \bar{x} , bei denen sich der Wert von $\varepsilon(\cdot, i)$ verändert, gleich $\varepsilon(x_0, i) = \varepsilon(q_0, i)$ ist. Also ist dieser Wert unabhängig von X . Bei den restlichen Pfeilen ändert sich der Wert von $\varphi(\cdot, i)$. Damit ist auch die Anzahl dieser Pfeile unabhängig von X , was die Behauptung beweist. \square

3.2.2 Eine Realisierung

Wir betrachten für festes $\delta \in \mathbb{Z}$ die Funktion $\chi = \chi_\delta: \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$ mit

$$\chi(a, b, c, d) = a - b - c + d + \delta$$

und weiter betrachten wir die Menge $V \subset \mathbb{N}^4$ mit

$$V := \{x = (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 \mid \chi(x) \in 3\mathbb{Z} \text{ und} \\ \text{falls } \chi(x) < 0 \Rightarrow b, c \geq \frac{1}{3}|\chi(x)| \text{ und} \\ \text{falls } \chi(x) > 0 \Rightarrow a, d \geq \frac{1}{3}\chi(x)\}.$$

Jetzt definieren wir für dieses V und für $I = \{1, 2\}$ einen I -gefärbten Digraphen X mit Eckenmenge V . Falls $a > 0$ definieren wir

$$F_1(x) = \begin{cases} F_1^+(x) &= (a - 1, b + 1, c + 1, d) & \text{falls } \chi(x) \leq 0 \\ F_1^-(x) &= (a - 1, b + 1, c, d - 1) & \text{falls } \chi(x) > 0 \end{cases}$$

und falls $c > 0$ definieren wir

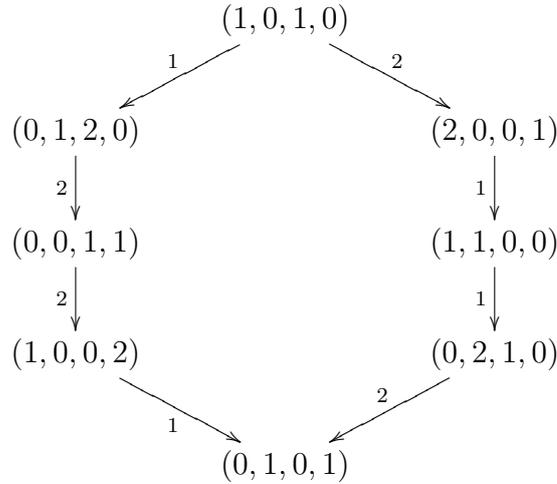
$$F_2(x) = \begin{cases} F_2^+(x) &= (a + 1, b, c - 1, d + 1) & \text{falls } \chi(x) \geq 0 \\ F_2^-(x) &= (a, b - 1, c - 1, d + 1) & \text{falls } \chi(x) < 0 \end{cases}$$

und analog dazu für $b > 0$

$$E_1(x) = \begin{cases} E_1^+(x) &= (a + 1, b - 1, c - 1, d) & \text{falls } \chi(x) < 0 \\ E_1^-(x) &= (a + 1, b - 1, c, d + 1) & \text{falls } \chi(x) \geq 0 \end{cases}$$

und für $d > 0$

$$E_2(x) = \begin{cases} E_2^+(x) &= (a - 1, b, c + 1, d - 1) & \text{falls } \chi(x) > 0 \\ E_2^-(x) &= (a, b + 1, c + 1, d - 1) & \text{falls } \chi(x) \leq 0 \end{cases}$$

Abbildung 3.1: Eine Zusammenhangskomponente von X_0 .

Bemerkung. Falls für ein Element x das Element $F_i(x)$ existiert, gibt es auch das Element $E_i(F_i(x))$ und es ist $x = E_i(F_i(x))$. Außerdem gilt auch die Aussage nach vertauschen von E_i und F_i . Dies zeigt, daß die E_i und F_i einen I -gefärbten Digraphen mit Eckenmenge V definieren. Die Bedingungen in der Definition von V garantieren, daß sich in jeder i -Kette genau eine Ecke x befindet mit $\chi(x) = 0$. Diese Ecke nennen wir die *kritische Ecke* dieser Kette.

Bemerkung. Der so entstandene Graph X_δ ist ein Kristallgraph und für jedes $x \in V(X_\delta)$ gilt:

$$x = (\varphi(x, 1), \varepsilon(x, 1), \varphi(x, 2), \varepsilon(x, 2))$$

Beispiel 3. In Abbildung 3.1 sehen wir eine Zusammenhangskomponente von X_0 .

Lemma 3.2.14. *Es sei $x \in V(X_\delta)$ eine Ecke in X_δ mit $\varphi(x, 1) > 0$, $\varphi(x, 2) > 0$ und $\chi(x) < 0$, dann ist $F_1 F_2(x) = F_2 F_1(x)$.*

Beweis. Wir haben $\chi(x) < 0$ also $F_1(x) = F_1^+(x)$. Weiterhin ist $\chi(F_1(x)) = \chi(x) - 3 < \chi < 0$, also $F_2 F_1^+(x) = F_2^- F_1^+(x)$. Analog haben wir $F_2(x) = F_2^-(x)$ und $\chi(F_2(x)) = \chi(x) + 3 \leq 0$, also $F_1 F_2^-(x) = F_1^+ F_2^-(x)$. Insgesamt haben wir

$$F_1 F_2 x = F_1^+ F_2^- x = F_2^- F_1^+ x = F_2 F_1 x.$$

□

Lemma 3.2.15. *Es sei $x \in V(X_\delta)$ eine Ecke in X_δ mit $\varphi(x, 1) > 0$, $\varphi(x, 2) > 0$ und $\chi(x) > 0$, dann ist $F_1 F_2(x) = F_2 F_1(x)$.*

Beweis. Wir haben $\chi(x) > 0$ also $F_1(x) = F_1^-(x)$. Weiterhin ist $\chi(F_1(x)) = \chi(x) - 3 \geq 0$, also $F_2F_1^-(x) = F_2^+F_1^-(x)$. Analog haben wir $F_2(x) = F_2^+(x)$ und $\chi(F_2(x)) = \chi(x) + 3 > \chi(x) > 0$, also $F_1F_2^+(x) = F_1^-F_2^+(x)$. Insgesamt haben wir also

$$F_1F_2x = F_1^-F_2^+x = F_2^+F_1^-x = F_2F_1x.$$

□

Lemma 3.2.16. *Es sei $x \in V(X_\delta)$ eine Ecke in X_δ mit $\varphi(x, 1) > 0$, $\varphi(x, 2) > 0$ und $\chi(x) = 0$, dann ist $F_1F_2^2F_1x = F_2F_1^2F_2x$.*

Beweis. Wir haben $\chi(x) = 0$, also ist $F_1x = F_1^+x$. Weiterhin ist $\chi(F_1(x)) = \chi(x) - 3 = -3$, also ist $F_2F_1^+(x) = F_2^-F_1^+x$. Damit ist $\chi(F_2F_1x) = \chi(F_1x) + 3 = 0$, also ist dann $F_2F_2^-F_1^+x = F_2^+F_2^-F_1^+x$. Jetzt ist $\chi(F_2^2F_1x) = \chi(F_2F_1x) + 3 = 0 + 3$ und damit ist $F_1F_2^+F_2^-F_1^+x = F_1^-F_2^+F_2^-F_1^+x$.

Analog zeigt man, daß auch die Ecke $F_2^-F_1^+F_1^-F_2^+x$ existiert und wir bekommen:

$$F_1F_2^2F_1x = F_1^-F_2^+F_2^-F_1^+x = F_2^-F_1^+F_1^-F_2^+x = F_2F_1^2F_2x$$

□

Lemma 3.2.17. *Ist $x \in V(X_\delta)$ mit $x = (a, b, c, b + c - a - \delta)$ eine kritische Ecke von X_δ , dann ist $(b + c - \delta, 0, b + c, 0) \succeq x$.*

Beweis. Für x wie im Lemma ist natürlich $\chi(x) = 0$ und wir haben deshalb $x_1 := (E_1^-)^bx = (a + b, 0, c, 2b + c - a - \delta)$. Für dieses x_1 haben wir dann $\chi(x_1) = 3b$. Damit bekommen wir $x_2 := (E_2^+)^bx_1 = (a, 0, c + b, b + c - a - \delta)$. Für dieses x_2 ist dann $\chi(x_2) = 3b - 3b = 0$ und wir bekommen $x_3 := (E_2^-)^{b+c-a-\delta}x_2 = (a, b + c - a - \delta, 2b + 2c - a - \delta, 0)$. Für dieses x_3 gilt dann $\chi(x_3) = \chi(x_2) - 3 \cdot (b + c - a - \delta) = -3(b + c - a - \delta)$. Schließlich ist $(E_1^+)^{b+c-a-\delta}x_3 = (b + c - \delta, 0, b + c, 0)$ und insgesamt bekommen wir

$$(E_1^+)^{b+c-a-\delta}(E_2^-)^{b+c-a-\delta}(E_2^+)^b(E_1^-)^bx = (b + c - \delta, 0, b + c, 0).$$

□

Es sei A die Cartan-Matrix vom Typ A_2 , dann beweisen die vorhergehenden Lemmata die folgende Proposition.

Proposition 3.2.18. *Jede Zusammenhangskomponente von X_δ ist A -regulär, daß heißt das jede ZHK von X_δ ein kristalliner Graph vom Typ A_2 ist. Ist umgekehrt X ein kristalliner Graph mit $\varphi(X_0, 1) = a$ und $\varphi(X_0, 2) = c$, dann ist X isomorph zur Zusammenhangskomponente von X_{c-a} , die die Ecke $(a, 0, c, 0)$ enthält.*

Bemerkung. So haben wir eine praktische Darstellung eines kristallinen Graphen gewonnen, an der sich direkt die Werte von φ und ε ablesen lassen. Sogar das Ablesen der Label ist durch die Funktion χ_δ möglich geworden.

Beweis. Die ersten vier Axiome $(P1) - (P4)$, die ein A -regulärer Graph erfüllen muß, sind genau die vier Axiome aus der Definition eines Kristallgraphen. Uns bleiben deshalb nur die Axiome $(P5)$, $(P6)$, $(P5')$ und $(P6')$. Diese Axiome werden im Folgenden explizit genannt und wir zeigen, warum jede Zusammenhangskomponente von X_δ diese Axiome erfüllt.

Für die verbleibenden Axiome setzen wir voraus, daß x eine Ecke ist mit $\varphi(x, 1) > 0$ und $\varphi(x, 2) > 0$. In diesem Fall wird verlangt:

$(P5')$ Ist $\nabla_i \varphi(x, j) = 0$ für verschiedene Farben $i, j \in \{1, 2\} = I$, dann ist

$$y := F_1 F_2(x) = F_2 F_1(x)$$

und wir haben $\Delta_i \varepsilon(x, j) = 0$.

$(P6')$ Ist $\nabla_i \varphi(x, j) = 1$ und $\nabla_j \varphi(x, i) = 1$ für verschiedene Farben $i, j \in \{1, 2\} = I$, so existiert die Ecke

$$y := F_1 F_2^2 F_1(x) = F_2 F_1^2 F_2(x)$$

und es gilt $\Delta_i \varepsilon(x, j) = 1$ und $\Delta_j \varepsilon(x, i) = -1$.

$(P5)$ Der Gegengraph erfüllt das Axiom $(P5')$.

$(P6)$ Der Gegengraph erfüllt das Axiom $(P6')$.

Für den Beweis benötigen wir nur die Aussagen aus den Lemmata 3.2.14, 3.2.15 und 3.2.16 sowie aus deren Beweisen. Ist nämlich $\Delta_i \varphi(x, j) = 0$, so befinden wir uns in der Situation von Lemma 3.2.14 oder Lemma 3.2.15. Wozu man die zugehörigen Beweise genauer betrachten sollte.

In den Beweisen werden nämlich die genauen Werte von Δ angegeben, die in den Axiomen gefordert werden, und zwar als Form von $I \times L$ -Färbungen. Gilt nun die Voraussetzung aus Axiom $(P6')$, so befinden wir uns im Fall von Lemma 3.2.16, was direkt die Existenz der geforderten Ecke nachweist und auch die geforderten Werte von Δ .

Die Axiome $(P5)$ und $(P6)$ müssen wir nun nicht mehr prüfen, weil $X_\delta^* \cong X_{-\delta}$ ist und $X_{-\delta}$ nach unserem Beweis die Axiome $(P5')$ und $(P6')$ erfüllt.

□

Bemerkung. Die vorherige Proposition weist nach, daß es sich bei den angegebenen Realisierungen wirklich um die kristallinen Graphen vom Typ A_2 handelt. Trotzdem ist dies nicht der Weg des Erfinders. Ein Zweck dieser Proposition ist die Herstellung des Zusammenhangs zur Arbeit von John Stembridge. Wie ich auf diese Realisierung gekommen bin, wird erst im nächsten Kapitel dargestellt. Dort wird ein rechnerischer Beweis angegeben und unsere drei Lemmata werden dort wieder Verwendung finden.

In meiner Diplomarbeit habe ich mich genau mit den A -regulären Graphen von John Stembridge beschäftigt. Der schwierigste Punkt in den Beweisen war oft, daß ich keine Aussage über die Label in den Quadraten und Waben hatte, die nicht in den Axiomen aufgeführt wurden. Unsere drei Hilfssätze ändern aber diese Situation. Ich möchte deshalb hier eine

Definition vorstellen, die im Fall des einfach verbundenen Typs zu der von J. Stembridge äquivalent ist und die mehr Information über die kristalline Graphen enthält.

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ die Cartan-Matrix einer halbeinfachen komplexen Lie-Algebra \mathfrak{g} vom einfach verbundenen Typ, d.h. die Matrix A ist symmetrisch, die Einträge auf der Diagonalen sind 2 und die Einträge außerhalb der Diagonalen sind entweder 0 oder -1 .

Satz 3.2.19. *Ein Kristallgitter X ist genau dann der kristalline Graph einer endlich-dimensionalen Darstellung von \mathfrak{g} , wenn X die folgenden Axiome erfüllt.*

Für jede Ecke $x \in V(X)$ und jedes Paar verschiedener Farben $i, j \in I$ mit $\varphi(x, i) \geq 1$ und $\varphi(x, j) \geq 1$ fordern wir:

(P5') *Für $\Delta_i \varphi(x, j) = 0$ und $a_{ij} = 0$ existiert die Ecke*

$$F_1^0 F_2^0 x = F_2^0 F_1^0 x$$

und für $\Delta_i \varphi(x, j) = 0$ und $a_{ij} = -1$ existiert die Ecke

$$F_2^+ F_1^- x = F_1^- F_2^+ x.$$

(P6') *Für $\Delta_i \varphi(x, j) = 1$ und $\Delta_j \varphi(x, i) = 1$ existiert die Ecke*

$$F_1^- F_2^+ F_2^- F_1^+ x = F_2^- F_1^+ F_1^- F_2^+ x.$$

(P5) *Der Gegengraph erfüllt das Axiom (P5').*

(P6) *Der Gegengraph erfüllt das Axiom (P6').*

Beweis. Wenn der Kristallgraph X die oberen 8 Axiome erfüllt, ist er natürlich auch A -regulär und damit der kristalline Graph einer endlich-dimensionalen Darstellung von \mathfrak{g} . Sei nun umgekehrt X solch ein kristalliner Graph. Jeder vollständige zweifarbige Untergraph von X ist damit der kristalline Graph einer endlich-dimensionalen Darstellung von \mathfrak{g}_{ij} . Für $a_{ij} = 0$ ist \mathfrak{g} vom Typ $A_1 \times A_1$ und damit sind alle Label 0. Das jede Zusammenhangskomponente ein Quadratkristallgitter ist, liefert den Rest.

Für $a_{ij} = -1$ ist \mathfrak{g} vom Typ A_2 . Der Rest folgt sofort aus den Lemmata [3.2.14](#), [3.2.15](#) und [3.2.16](#) sowie aus deren Beweisen. \square

Bemerkung. Dieser Satz liefert eine genauere Beschreibung der lokalen Eigenschaften eines kristallinen Graphen, als diejenige von Stembridge, im Fall eines einfach verbundenen Typs. Um für ein Kristallgitter nachzuweisen, daß es sich um einen kristallinen Graphen handelt, ist es jedoch sinnvoll, eine lokale Charakterisierung zur Verfügung zu haben, die mit weniger Forderungen auskommt. Im nächsten Kapitel werden wir genau das erarbeiten.

3.2.3 Konsequenzen

Proposition 3.2.20. *Für alle Ecken $x \in V(X_\delta)$ und alle verschiedenen Farben $i, j \in I$ mit $\chi(x) = 0$ und $\varphi(x, i) \geq 1$ existiert die Ecke $y = F_j F_i(x)$ und es gilt $\chi(y) = 0$.*

Beweis. Es sei $x = (a, b, c, d)$. Hier genügt es den Fall $i = 1$ zu betrachten, weil die Definition von X_δ symmetrisch in 1 und 2 ist. Weil $\chi(x) = 0$ ist, haben wir laut Definition $F_1 x = F_1^+ x$ und damit $z := F_1 x = (a - 1, b + 1, c + 1, d)$. Weiterhin berechnen wir

$$\chi(z) = (a - 1) - (b + 1) - (c + 1) + d + \delta = \chi(x) - 3 = -3$$

und erhalten dadurch $F_2(z) = F_2^-(z)$ und $y = F_2 F_1 x = (a - 1, b, c, d + 1)$. Schließlich führt uns das zu $\chi(y) = \chi(x) = 0$. \square

Bemerkung. Diese Proposition gilt natürlich auch für den Gegengraphen wegen $X_\delta^* \cong X_{-\delta}$. Zusammen mit Proposition 3.2.18, Lemma 3.2.14, 3.2.15 und 3.2.16 liefert uns dies eine genaue Information über die Lage der Waben in den kristallinen Graphen vom Typ A_2 . Nach den genannten Lemmata gibt es die Möglichkeit für eine Wabe genau dann, wenn χ den Wert 0 annimmt. Proposition 3.2.20 gibt uns genau diese Stellen an, weil wir dessen Aussage nach zu jeder Ecke x mit $\chi(x)$ eine weitere Ecke von echt größerem oder echt kleinerem Level bekommen, für die χ wieder den Wert 0 annimmt, und weil für alle größten und alle kleinsten Ecken ebenfalls die Funktion χ verschwindet. Auch diese Proposition wird in unserem letzten Kapitel eine wichtige Rolle spielen.

Proposition 3.2.21. *Ist X ein zusammenhängender kristalliner Graph vom Typ A_2 , $x \xrightarrow{i} y$ und $x' \xrightarrow{i} y'$ zwei Kanten in X mit $\mu(x) = \mu(y)$, dann ist auch*

$$\begin{aligned} \nabla_i \varphi(x, j) &= \nabla_i \varphi(x', j) \\ \nabla_i \varepsilon(x, j) &= \nabla_i \varepsilon(x', j) \\ \Delta_i \varphi(y, j) &= \Delta_i \varphi(y', j) \\ \Delta_i \varepsilon(y, j) &= \Delta_i \varepsilon(y', j) \end{aligned}$$

Beweis. Wir Betrachten die obige Realisierung von X . Dann ist zu sehen, daß für zwei Ecken $x, x' \in V(X)$ mit $\mu(x) = \mu(y)$ gilt:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \mu(x, 1) - \mu(x, 2) + \delta \\ \chi(x') &= \mu(x', 1) - \mu(x', 2) + \delta \end{aligned}$$

Also haben wir auch $\chi(x) = \chi(x')$. Durch den Wert von χ sind aber auch die gesuchten Werte festgelegt und wir haben die Proposition bewiesen. \square

Satz 3.2.22. *Ist X ein Kristallgitter vom Typ A_2 , dann ist X ein kristalliner Graph einer Höchstgewichtsdarstellung genau dann, wenn die Label in jeder einfarbigen Kette von X aufsteigend sind, d.h. für jeden Pfeil $x \xrightarrow{i} y$ mit Label $+$ ist auch das Label jedes folgenden Pfeiles $y \xrightarrow{i} z$ in der gleichen i -Kette $+$.*

Beweis. Ist X der kristalline Graph einer Höchstgewichtsdarstellung, dann ist X isomorph zu einer Zusammenhangskomponente von V_δ für ein $\delta \in \mathbb{Z}$. An der Definition von X_δ läßt sich ablesen, daß die Label in jeder Kette aufsteigend sind.

Ist umgekehrt X ein Kristallgitter, bei dem die Label in jeder Kette aufsteigend sind, so induziert X eine $(I \times L)$ -Färbung auf $Q(X)$ bei dem die Label in jeder Kette aufsteigend sind. Nach Lemma 3.2.13 gibt es aber nur eine solche induzierte $(I \times L)$ -Färbung von Q , nämlich die des kristallinen Graphen mit dem gleichen Höchstgewicht.

Weil ein Kristallgitter aber schon durch die induzierte $(I \times L)$ -Färbung auf seinem Quadratkrystallgitter bis auf Isomorphie festliegt, ist X ein kristalliner Graph. \square

Zusammen mit Korollar 2.3.2 liefert uns dies die folgende bemerkenswerte Aussage für Kristallgitter vom Typ A_2 . Für ein festes Gewicht $\lambda \in \mathbb{N}$ wollen wir nun die Gewichtsmultiplizitäten in $X(\lambda)$, $Q(\lambda)$ und einem Kristallgitter X mit Höchstgewicht λ vergleichen.

Satz 3.2.23. *Es sei $\mu \in \mathbb{Z}^2$ ein Gewicht, dann gilt für die Gewichtsmultiplizitäten die Ungleichung*

$$m_\mu^{X(\lambda)} \geq m_\mu^X \geq m_\mu^{Q(\lambda)},$$

wobei $m_\mu^{X(\lambda)}$ die Gewichtsmultiplizität von μ in $X(\lambda)$ bezeichne usw.

Außerdem gilt in einer der beiden Ungleichungen genau dann Gleichheit für alle Gewichte, wenn die dazugehörigen Graphen isomorph sind.

Beweis. Weil die Quadratkrystallgitter $Q(X(\lambda))$, $Q(X)$ und $Q(\lambda)$ alle das gleiche Höchstgewicht haben, sind sie isomorph. Das bedeutet, daß in allen drei Graphen $X(\lambda)$, X und $Q(\lambda)$ genau die gleichen Gewichte auftauchen. Sollte also eine der Gewichtsmultiplizitäten gleich Null sein, dann sind es auch alle anderen.

Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, wo alle $m_\mu \geq 1$ sind. Dann ist $m_\mu^{Q(\lambda)} = 1$ und der zweite Teil der Ungleichung ist automatisch erfüllt. Nun sei $x \in V(Q(\lambda))$ die Ecke von $Q(\lambda)$ mit $\mu(x) = \mu$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß für zwei Farben $i, j \in I$ die Ecke

$$E_i^m E_j^n x$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=: y}$

maximal ist in $Q(\lambda)$ mit $m = \varepsilon(E_j^{\varepsilon(x,j)} x, i)$ und $n = \varepsilon(x, j)$. Sollte das nämlich nicht funktionieren, erfüllt automatisch der Gegengraph diese Eigenschaft, wegen der besonderen Form von $Q(\lambda)$.

Nun sei y'' das Urbild von y in $X(\lambda)$ und y' das Urbild von y in X . In diesem Fall haben wir $\psi(y'') = \psi(y')$. Dies führt uns zu den Gleichungen $\varphi(F_j^n y'') = \varphi(F_j^n y') = \varphi(x)$ und $\varepsilon(F_j^n y'', j) = \varepsilon(F_j^n y', j) = \varepsilon(x, j)$, weil schon die Werte für y'' , y' und y übereingestimmt haben und wir nur j -Pfeile durchlaufen haben. Außerdem ist $\varphi(F_j^n y'', i) \leq \varphi(F_j^n y', i)$, weil die Label in der j -Kette durch y'' in $X(\lambda)$ monoton steigend sind nach Satz 3.2.22 und die Anzahl der Plus-Label und der Minus-Label in den j -Ketten durch y'' und y' gleich sind nach Lemma 3.2.13. Weiterhin gilt genau dann Gleichheit für alle Ecken, wenn die induzierte Färbung von $X(\lambda)$ und X auf $Q(\lambda)$ gleich sind, also genau dann, wenn die

beiden Graphen $X(\lambda)$ und X isomorph sind.

Nach Korollar 2.3.2 bedeutet das, daß die Ungleichung aus dem Satz gilt und wir genau dann Gleichheit für alle Gewichte haben, wenn die zugehörigen Graphen isomorph sind. \square

3.3 Typ B_2 und G_2

Für ein Kristallgitter X läßt sich zeigen:

Proposition 3.3.1. *Ist X ein Kristallgitter mit der Eigenschaft, daß alle Pfeile $x \xrightarrow{i} y$ mit gleichem Gewicht der ersten Ecke auch das gleiche Label haben, dann ist die Abbildung*

$$\psi: V(X) \rightarrow \mathbb{N}^{2|I|} \quad x \mapsto (\varphi(x, i), \varepsilon(y, i))$$

injektiv.

Beweis. Für den Beweis seien $x, y \in V(X)$ zwei Ecken in X mit $\psi(x) = \psi(y)$. Jetzt gibt es einen gerichteten Kantenzug

$$X_0 \xrightarrow{i_1} x_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_n} x$$

in X der die größte Ecke von X mit x verbindet. Weil aber $\psi(x) = \psi(y)$ ist und die Label von Pfeilen in der gleichen Faser unter dem Morphismus $X \rightarrow Q(X)$ stets gleich ist, haben wir, daß

$$E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n} x$$

eine maximale Ecke von X ist. Jetzt muß $x = y$ sein, weil X_0 die einzige maximale Ecke von X ist. \square

In Abbildungen 3.2 und 3.3 sehen wir Beispiele für kristalline Graphen vom Typ B_2 bzw. G_2 in denen es jeweils zwei Ecken x, y gibt mit $\psi(x) = \psi(y)$. In Abbildung 3.2 handelt es sich dabei um die Ecke x_{17} und x_{19} . Für beide Ecken nimmt ψ den Wert $(1, 1, 1, 1)$ an. In Abbildung 3.3 gibt es sogar 8 Paare solcher Ecken. Ein Beispiel bilden die Ecken x_{30} und x_{34} . Durch Computerberechnungen habe ich gezeigt, daß dies jeweils die Beispiele ihrer Art sind, die die wenigsten Ecken besitzen.

Auf Grund dieser Graphen kann es für diese Typen keine Realisierung wie für den Typ A_2 geben. Außerdem zeigt die vorherige Proposition, daß es in einer Faser des Morphismus $X \rightarrow Q(X)$ mehrere Label geben kann.

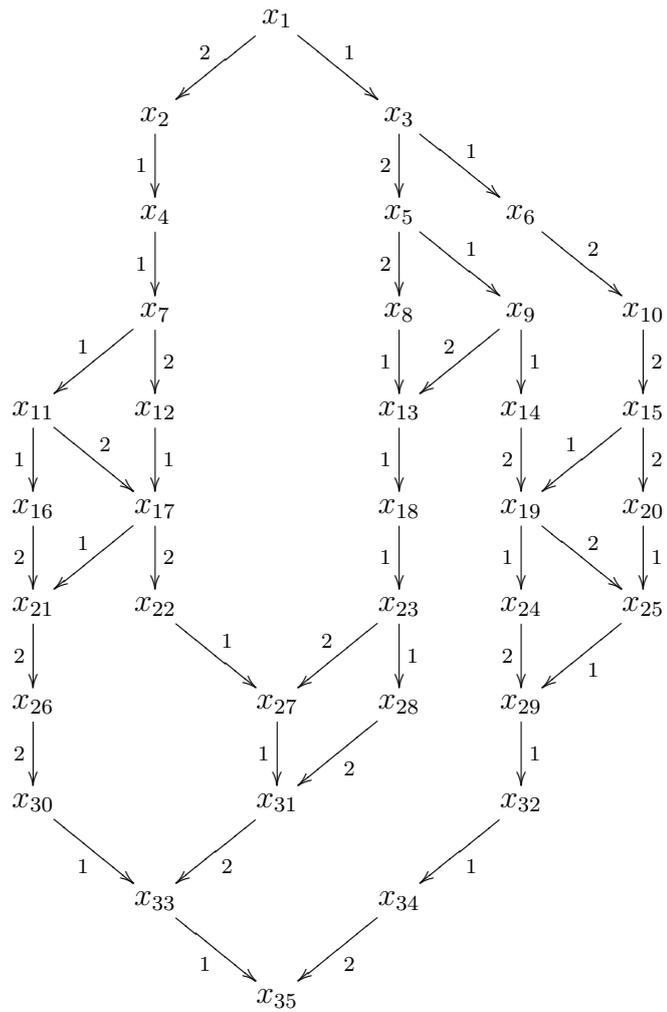
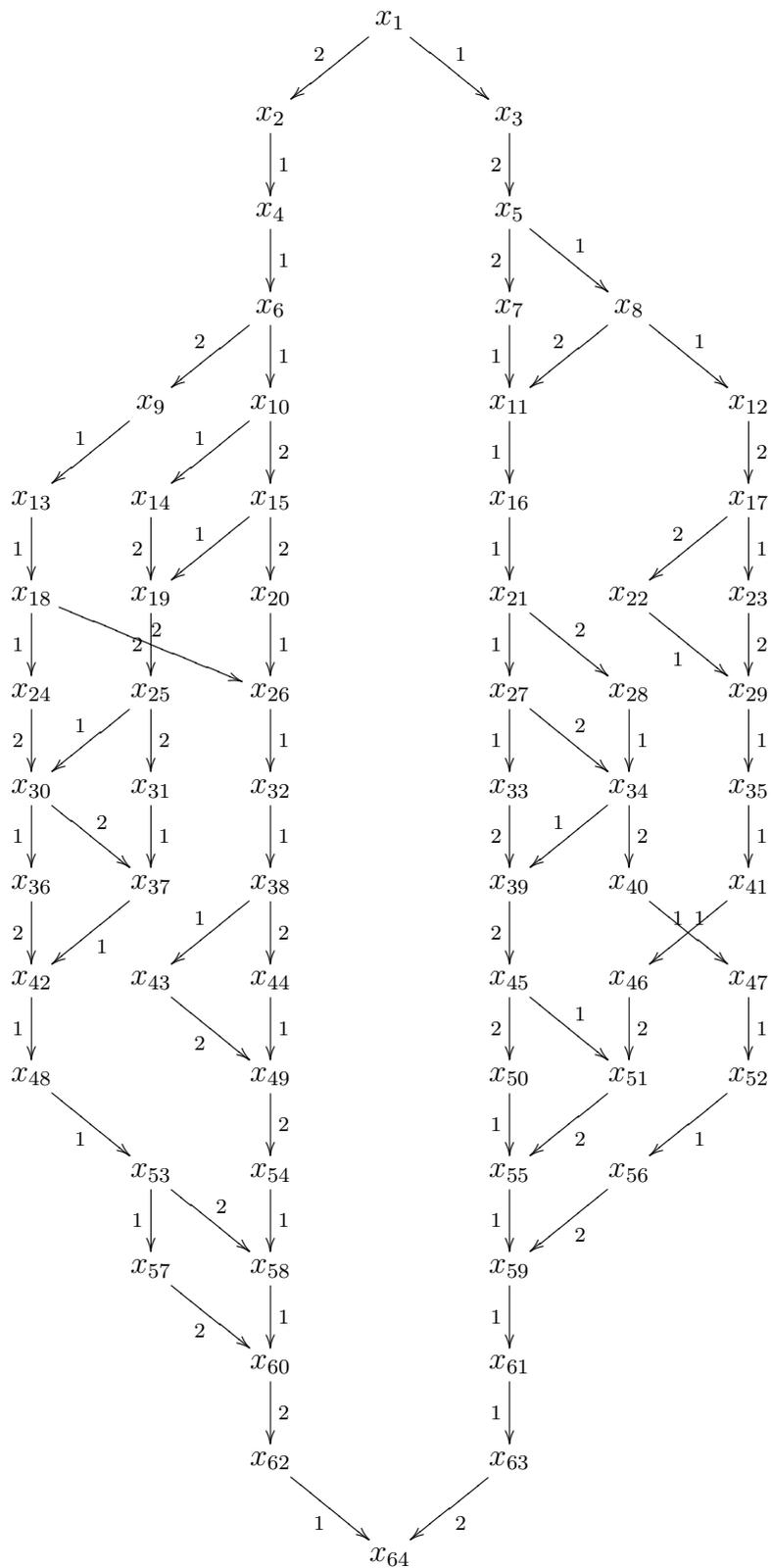


Abbildung 3.2: Ein kristalliner Graph vom Typ B_2

Abbildung 3.3: Ein kristalliner Graph vom Typ G_2

Kapitel 4

Berechnungen für den Typ A2

„My work has always tried to unite the truth with the beautiful and when I had to choose one or the other, I usually choose the beautiful.“

Hermann Weyl

4.1 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt betrachten wir speziell kristalline Graphen X von endlich dimensionalen komplexen Höchstgewichtsdarstellungen $V(\lambda)$ der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Die Ecken eines kristallinen Graphen werden wir in diesem Abschnitt mit Young-Tableaux bezeichnen.

4.2 Berechnungen

Sei nun $x \in V(X)$ von der Form

$$\begin{aligned}
 x &= \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}^{k_1} \dots \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}^{k_2} \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}^{k_3} \dots \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}}^{k_4} \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}^{k_5} \dots \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}^{k_6} \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}^{k_7} \dots \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}^{k_8} \\
 &= \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}}^{k_6} \otimes \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}}^{k_5} \otimes \left(\overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}} \otimes \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}} \right)^{k_4} \otimes \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}}^{k_3} \otimes \left(\overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}} \otimes \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}} \right)^{k_2} \otimes \left(\overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}} \otimes \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}} \right)^{k_1}
 \end{aligned}$$

wobei $\overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}}$, $\overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}}$, $\overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}}$ die Ecken des Graphen

$$\overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}} \xrightarrow{1} \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}} \xrightarrow{2} \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}}$$

bezeichnen.

Für solch ein $x \in V(X)$ definieren wir die Abbildung $k: V(X) \rightarrow \mathbb{N}^6$ durch

$$k(x) := (k_1(x), \dots, k_6(x)) := (k_1, k_2, \dots, k_6).$$

Bemerkung. Es ist immer $k_3 = 0$ oder $k_4 = 0$, damit x wirklich ein Young-Tableau ist.

Proposition 4.2.1. *Für eine Ecke x wie oben sind*

$$\begin{aligned}\varphi(x, 1) &= k_2(x) + k_3(x) \\ \varepsilon(x, 1) &= k_4(x) + k_5(x) \\ \mu(x, 1) &= k_2(x) + k_3(x) - k_4(x) - k_5(x).\end{aligned}$$

Ist außerdem $\varphi(x, 1) > 0$ bzw. $\varepsilon(x, 1) > 0$, dann sind

$$\begin{aligned}k(F_1x) - k(x) &= \begin{cases} (0, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0) & \text{falls } k_3(x) > 0 \\ (0, & -1, & 0, & 1, & 0, & 0) & \text{sonst} \end{cases} \\ &\text{bzw.} \\ k(E_1x) - k(x) &= \begin{cases} (0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 0) & \text{falls } k_4(x) > 0 \\ (0, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0) & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Beweis. Hier betrachten wir nur die 1-farbigen Untergraphen. Wir können also $\boxed{3}$ -Kästchen vernachlässigen, sowie Paare der Form $\boxed{1} \otimes \boxed{2}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}x &\rightsquigarrow \boxed{2}^{k_5} \otimes \boxed{2}^{k_4} \otimes \boxed{1}^{k_3} \otimes \boxed{1}^{k_2} \\ &\rightsquigarrow \boxed{2}^{k_5+k_4} \otimes \boxed{1}^{k_3+k_2},\end{aligned}$$

was die obige Proposition beweist. □

Proposition 4.2.2. *Für eine Ecke x wie oben ist*

$$\begin{aligned}\varphi(x, 2) &= k_1(x) + \max(0, k_5(x) - k_2(x)) \\ \varepsilon(x, 2) &= k_6(x) + \max(0, k_2(x) - k_5(x)) \\ \mu(x, 2) &= k_1(x) - k_2(x) + k_5(x) - k_6(x).\end{aligned}$$

Ist außerdem $\varphi(x, 2) > 0$ bzw. $\varepsilon(x, 2) > 0$, dann sind

$$\begin{aligned}k(F_2x) - k(x) &= \begin{cases} (0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 1) & \text{falls } k_5(x) > k_2(x) \\ (-1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0) & \text{sonst} \end{cases} \\ &\text{bzw.} \\ k(E_2x) - k(x) &= \begin{cases} (1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0) & \text{falls } k_2(x) > k_5(x) \\ (0, & 0, & 0, & 0, & 1, & -1) & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Beweis. Hier betrachten wir nur die 2-farbigen Untergraphen. Wir können also $\boxed{1}$ -Kästchen vernachlässigen, sowie Paare der Form $\boxed{2} \otimes \boxed{3}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}x &\rightsquigarrow \boxed{3}^{k_6} \otimes \boxed{2}^{k_5} \otimes \boxed{3}^{k_2} \otimes \boxed{2}^{k_1} \\ &\rightsquigarrow \boxed{3}^{k_6+\max(0, k_2-k_5)} \otimes \boxed{2}^{k_1+\max(0, k_5-k_2)},\end{aligned}$$

was die obige Proposition beweist. □

Korollar 4.2.3. *Aus den Beweisen der vorhergehenden Propositionen lassen sich zusätzlich auch folgende Werte ablesen:*

$$\begin{aligned}\varphi(E_2x, 1) &= \begin{cases} \varphi(x, 2) - 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) < 0 \\ \varphi(x, 2) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \geq 0 \end{cases} \\ \varepsilon(E_2x, 1) &= \begin{cases} \varepsilon(x, 2) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \leq 0 \\ \varepsilon(x, 2) + 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Beweis. Für $x \in V(X)$ sei $\varepsilon(x, 2) \geq 1$.

a) Sei nun $k_2(x) > k_5(x)$ dann ergibt sich aus dem Beweis von Prop. 4.2.2

$$k(E_2x) - k(x) = (1, -1, 0, 0, 0, 0)$$

b) Sei nun $k_2(x) \leq k_5(x)$ dann ergibt sich aus dem Beweis von Prop. 4.2.2

$$k(E_2x) - k(x) = (0, 0, 0, 0, 1, -1),$$

also bekommen wir

$$\begin{aligned}\varphi(E_2x, 1) &= k_2(E_2x) + k_3(E_2x) \\ &= \begin{cases} k_2(x) - 1 + k_3(x) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) < 0 \\ k_2(x) + k_3(x) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi(x, 1) - 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) < 0 \\ \varphi(x, 1) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \geq 0 \end{cases} \\ \varepsilon(E_2x, 1) &= k_4(E_2x) + k_5(E_2x) \\ &= \begin{cases} k_4(x) + k_5(x) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) < 0 \\ k_4(x) + k_5(x) + 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varepsilon(x, 1) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) < 0 \\ \varepsilon(x, 1) + 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

□

Korollar 4.2.4. *Aus den Beweisen der vorhergehenden Propositionen lassen sich zusätzlich auch folgende Werte ablesen:*

$$\begin{aligned}\varphi(E_1x, 2) &= \begin{cases} \varphi(x, 2) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \leq 0 \\ \varphi(x, 2) - 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) > 0 \end{cases} \\ \varepsilon(E_1x, 2) &= \begin{cases} \varepsilon(x, 2) + 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \leq 0 \\ \varepsilon(x, 2) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Beweis. Für $x \in V(X)$ sei $\varepsilon(x, 1) \geq 1$.

a) Sei nun $k_4(x) = 0$ dann ergibt sich aus Prop. 4.2.1

$$k(E_1x) - k(x) = (0, 0, 1, 0, -1, 0)$$

b) Sei nun $k_4(x) \neq 0$ dann ergibt sich aus Prop. 4.2.1

$$k(E_1x) - k(x) = (0, 1, 0, -1, 0, 0),$$

also ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(E_1x, 2) &= k_1(E_1x) + \max(0, k_5(E_1x) - k_2(E_1x)) \\ &= \begin{cases} k_1(x) + \max(0, (k_5(x) - 1) - k_2(E_1x)) & \text{für } k_4(x) = 0 \\ k_1(x) + \max(0, k_5(x) - (k_2(E_1x) + 1)) & \text{für } k_4(x) \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} k_1(x) + k_5(x) - 1 - k_2(x) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) > 0 \\ k_1(x) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi(x) - 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) > 0 \\ \varphi(x) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \leq 0 \end{cases} \\ \varepsilon(E_1x, 2) &= k_6(E_1x) + \max(0, k_2(E_1x) - k_5(E_1x)) \\ &= \begin{cases} k_6(x) + \max(0, k_2(x) - (k_5(x) - 1)) & \text{für } k_4(x) = 0 \\ k_6(x) + \max(0, (k_2(x) + 1) - k_5(x)) & \text{für } k_4(x) \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} k_6(x) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) > 0 \\ k_6(x) + k_2(x) - k_5(x) + 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varepsilon(x, 2) & \text{für } k_5(x) - k_2(x) > 0 \\ \varepsilon(x, 2) + 1 & \text{für } k_5(x) - k_2(x) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.5. *Zwei Young-Tableaux x und y von gleichem Format haben das gleiche Gewicht $\mu(x) = \mu(y)$ genau dann, wenn $k(x) = k(y) + \alpha(1, -1, 0, 0, -1, 1)$ für ein $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Für den Beweis seien $k(x) = (k_1, \dots, k_6)$ und $k(y) = (l_1, \dots, l_6)$.

Die Tableaux x und y haben das gleiche Format genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (c(x) - c(y))^T = 0$$

ist.

Die Tableaux x und y haben nach Prop. 4.2.1 und 4.2.2 das gleiche Gewicht genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} (c(x) - c(y))^T = 0$$

ist. Also haben x und y das gleiche Format und das gleiche Gewicht genau dann, wenn $(c(x) - c(y))^T$ Lösung des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} z = 0$$

ist. Der Lösungsraum des obigen homogenen LGS ist

$$\langle (1, 0, -1, -1, 0, 1)^T, (0, 1, -1, -1, 1, 0)^T \rangle$$

Wie schon oben gesehen, muß immer der Wert der dritten oder der vierten Komponentenfunktion von c gleich 0 sein. Damit kommen nur noch Vielfache des Vektors

$$(1, -1, 0, 0, -1, 1)$$

in Frage, was die Proposition beweist. □

Korollar 4.2.6. *Ist X ein kristalliner Graph und $x, y \in V(X)$ zwei Ecken mit gleichem Gewicht, sowie $\alpha \in \mathbb{Z}$ die ganze Zahl mit $c(x) = c(y) + \alpha(1, -1, 0, 0, -1, 1)$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \varphi(x, 1) &= \varphi(y, 1) - \alpha \\ \varepsilon(x, 1) &= \varepsilon(y, 1) - \alpha \\ \varphi(x, 2) &= \varphi(y, 2) + \alpha \\ \varepsilon(x, 2) &= \varepsilon(y, 2) + \alpha \end{aligned}$$

Beweis. Diese Ergebnisse lassen sich nach der vorhergehenden Proposition direkt aus den Prop. 4.2.1 und 4.2.2 ablesen. □

Außerdem ist folgendes Korollar ersichtlich.

Korollar 4.2.7. *Sind x und y zwei Ecken des kristallinen Graphen X mit $k(x) = k(y) + \alpha(1, -1, 0, 0, -1, 1)$, dann gibt es für jede ganze Zahl $\mu \in \mathbb{N}$ zwischen α und 0 eine Ecke $x_\mu \in V(X)$ mit $k(x_\mu) = k(y) + \mu(1, -1, 0, 0, -1, 1)$. Damit ist die Gewichtsmultiplizität von $\mu(x)$ gleich $\min(\varphi(x, 1), \varepsilon(x, 1)) + \min(\varphi(x, 2), \varepsilon(x, 2))$*

4.3 Auswertung

Satz 4.3.1. *Die Zusammenhangskomponenten der X_δ aus Abschnitt 3.2.2 sind genau die zusammenhängenden kristallinen Graphen vom Typ A_2 .*

Beweis. Es sei $X(m, m - \delta)$ der zusammenhängende kristalline Graph vom Typ A_2 mit Höchstgewicht $(m, m - \delta)$. Weiterhin sei Y die Zusammenhangskomponente von X_δ mit Höchstgewicht $(m, m - \delta)$.

In diesem Fall sind die Quadratkristallgitter der beiden Graphen isomorph und die obigen

Berechnungen zeigen, daß in jeder i -Kette von $X(m, m - \delta)$ die Label monoton steigen. Auch in jeder i -Kette von Y steigen die Label monoton.

Weil nach Lemma 3.2.13 aber die Anzahl der Plus-Pfeile und der Minus-Pfeile in jeder maximalen i -Kette von $Q(Y)$ gleich der Anzahl der jeweiligen Pfeile in $Q(X(m, m - \delta))$ ist, ist die induzierte $I \times L$ -Färbung von Y auf $Q(Y)$ und von $X(m, m - \delta)$ auf $Q(Y)$ gleich. Also sind Y und $X(m, m - \delta)$ isomorph. \square

Wir betrachten jetzt wieder die Realisierung der kristallinen Graphen vom Typ A_2 aus Kapitel 3 und nehmen den Blickwinkel des Konstrukteurs ein.

Genauer gesagt sei $\sigma: Y \rightarrow X(\lambda)$ das Teilkristallgitter vom $X(\lambda)$ vom Level n . Wir wollen nun genauer untersuchen, welche direkten Erweiterungen das Teilkristallgitter Y besitzen kann. Dazu seien $x, y \in V(Y)$ zwei Ecken mit gleichem Gewicht $\mu(\sigma(x)) = \mu(\sigma(y))$ und Level $n+1$. Unter den hier genannten Voraussetzungen liefert uns die folgende Proposition eine weitreichende Auskunft.

Proposition 4.3.2. *Für jede direkte Erweiterung $\rho: Y \rightarrow Z$ von Y gibt es zwei Fälle:*

Fall 1: *Es ist $\chi(\sigma(x)) = \chi(\sigma(y)) \neq 0$. Nun impliziert $\rho(x) = \rho(y)$ schon $\sigma(x) = \sigma(y)$.*

Fall 2: *Es ist $\chi(\sigma(x)) = \chi(\sigma(y)) = 0$. Hier muß für $\rho(x) = \rho(y)$ entweder $\sigma(x) = \sigma(y)$ gelten oder $\sigma(x) = \sigma(y) + (1, 1, -1, -1)$.*

Beweis. Sei nun $\rho: Y \rightarrow Z$ eine direkte Erweiterung von Y mit $\rho(x) = \rho(y)$. Dies bedeutet zuerst einmal, daß wir $\chi(\sigma x) = \chi(\sigma y)$ haben. Dies folgt nämlich aus dem Satz 2.3.1 wegen

$$\mu(\sigma x) = \mu(\rho x) = \mu(\rho y) = \mu(\sigma y).$$

Weiterhin impliziert der Satz 2.3.1, daß es ein $\alpha \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$\sigma(x) = \sigma(y) + \alpha(+1, +1, -1, -1).$$

Wir werden nun untersuchen, welche Werte für α in Frage kommen. Dabei helfen uns die folgenden 6 Gleichung, die erfüllt sein müssen, falls x und y in einer Erweiterung von Y zu einer Ecke verbunden werden.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \varphi(E_2 y, 1) - \varphi(x, 1) \leq 0 \\ (2) \quad & \varepsilon(E_2 y, 1) - \varepsilon(x, 1) \geq 0 \\ (3) \quad & \varphi(E_1 x, 2) - \varphi(y, 2) \leq 0 \\ (4) \quad & \varepsilon(E_1 x, 2) - \varepsilon(y, 2) \geq 0 \\ (5) \quad & (\varphi(E_2 y, 1) - \varphi(x, 1)) - (\varepsilon(E_2 y, 1) - \varepsilon(x, 1)) = -1 \\ (6) \quad & (\varphi(E_1 x, 2) - \varphi(y, 2)) - (\varepsilon(E_1 x, 2) - \varepsilon(y, 2)) = -1 \quad , \end{aligned}$$

Damit die Erweiterung wieder das Axiom (P4) erfüllt, müssen die Gleichung (1) – (4) erfüllt sein. Die Gleichungen (5) und (6) sind Voraussetzung dafür, daß die Erweiterung auch das Axiom (P3) erfüllt. Um diesen 6 Gleichungen mehr Information zu entlocken, steigen wir nun in die einzelnen Fälle ein, wie in der Proposition beschrieben.

Eine weitere wichtige Rolle spielt dabei die Tatsache, daß alle Werte aus den Gleichungen (1) – (6) in allen Erweiterungen von Y gleich sind. Aus diesem Grund können wir einfach die Werte aus $X(\lambda)$ benutzen.

Fall 1: Es ist $\chi(\sigma(x)) = \chi(\sigma(y)) < 0$. In diesem Fall haben wir $\xrightarrow{1+} x$ und $\xrightarrow{2-} y$ in $X(\lambda)$ laut Definition. Dies führt uns zu den folgenden 6 Gleichungen.

$$\begin{aligned}
(1') \quad & \varphi(y, 1) - \varphi(x, 1) \leq 0 \\
(2') \quad & (\varepsilon(y, 1) + 1) - \varepsilon(x, 1) \geq 0 \\
(3') \quad & (\varphi(x, 2) - 1) - \varphi(y, 2) \leq 0 \\
(4') \quad & \varepsilon(x, 2) - \varepsilon(y, 2) \geq 0 \\
(5') \quad & (\varphi(y, 1) - \varphi(x, 1)) - (\varepsilon(y, 1) + 1 - \varepsilon(x, 1)) = -1 \\
(6') \quad & (\varphi(x, 2) - 1 - \varphi(y, 2)) - (\varepsilon(x, 2) - \varepsilon(y, 2)) = -1 \quad ,
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x = y + \alpha(1, 1, -1, -1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(1') \quad & \varphi(y, 1) - (\varphi(y, 1) + \alpha) \leq 0 \\
(2') \quad & (\varepsilon(y, 1) + 1) - (\varepsilon(y, 1) + \alpha) \geq 0 \\
(3') \quad & (\varphi(y, 2) - \alpha - 1) - \varphi(y, 2) \leq 0 \\
(4') \quad & \varepsilon(y, 2) - \alpha - \varepsilon(y, 2) \geq 0 \\
(5') \quad & (\varphi(y, 1) - \varphi(y, 1) - \alpha) - (\varepsilon(y, 1) + 1 - \varepsilon(y, 1) + \alpha) = -1 \\
(6') \quad & (\varphi(y, 2) - \alpha - 1 - \varphi(y, 2)) - (\varepsilon(y, 2) - \alpha - \varepsilon(y, 2)) = -1 \quad ,
\end{aligned}$$

und damit aus den ersten vier Gleichungen $0 \leq \alpha \leq 0$. Wobei $\alpha = 0$ die beiden letzten Gleichungen erfüllt. Wir schließen deshalb $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Fall 2: Es ist $\chi(\sigma(x)) = \chi(\sigma(y)) > 0$. In diesem Fall haben wir $\xrightarrow{1-} x$ und $\xrightarrow{2+} y$ in $X(\lambda)$ laut Definition. Dies führt uns zu den folgenden 6 Gleichungen.

$$\begin{aligned}
(1'') \quad & (\varphi(y, 1) - 1) - \varphi(x, 1) \leq 0 \\
(2'') \quad & \varepsilon(y, 1) - \varepsilon(x, 1) \geq 0 \\
(3'') \quad & \varphi(x, 2) - \varphi(y, 2) \leq 0 \\
(4'') \quad & (\varepsilon(x, 2) + 1) - \varepsilon(y, 2) \geq 0 \\
(5'') \quad & (\varphi(y, 1) - 1 - \varphi(x, 1)) - (\varepsilon(y, 1) - \varepsilon(x, 1)) = -1 \\
(6'') \quad & (\varphi(x, 2) - \varphi(y, 2)) - (\varepsilon(x, 2) + 1 - \varepsilon(y, 2)) = -1 \quad ,
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x = y + \alpha(1, 1, -1, -1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(1'') \quad & (\varphi(y, 1) - 1) - (\varphi(y, 1) + \alpha) \leq 0 \\
(2'') \quad & \varepsilon(y, 1) - (\varepsilon(y, 1) + \alpha) \geq 0 \\
(3'') \quad & (\varphi(y, 2) - \alpha) - \varphi(y, 2) \leq 0 \\
(4'') \quad & (\varepsilon(y, 2) - \alpha + 1) - \varepsilon(y, 2) \geq 0 \\
(5'') \quad & (\varphi(y, 1) - 1 - \varphi(y, 1) - \alpha) - (\varepsilon(y, 1) - \varepsilon(y, 1) + \alpha) = -1 \\
(6'') \quad & (\varphi(y, 2) - \alpha - \varphi(y, 2)) - (\varepsilon(x, 2) - \alpha + 1 - \varepsilon(y, 2)) = -1 \quad ,
\end{aligned}$$

und damit aus den ersten vier Gleichungen $0 \leq \alpha \leq 0$. Wobei $\alpha = 0$ die beiden letzten Gleichungen erfüllt. Wir schließen deshalb $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Fall 3: Es ist $\chi(\sigma(x)) = \chi(\sigma(y)) = 0$. In diesem Fall haben wir $\xrightarrow{1^-} x$ und $\xrightarrow{2^-} y$ in $X(\lambda)$, was uns zu den folgenden 6 Gleichungen führt.

$$\begin{array}{ll}
(1''') & \varphi(y, 1) - \varphi(x, 1) \leq 0 \\
(2''') & (\varepsilon(y, 1) + 1) - \varepsilon(x, 1) \geq 0 \\
(3''') & \varphi(x, 2) - \varphi(y, 2) \leq 0 \\
(4''') & (\varepsilon(x, 2) + 1) - \varepsilon(y, 2) \geq 0 \\
(5''') & (\varphi(y, 1) - \varphi(x, 1)) - ((\varepsilon(y, 1) + 1) - \varepsilon(x, 1)) = -1 \\
(6''') & (\varphi(x, 2) - \varphi(y, 2)) - ((\varepsilon(x, 2) + 1) - \varepsilon(y, 2)) = -1
\end{array}$$

und nach Einsetzen von $x = y + \alpha(+1, +1, -1, -1)$ bekommen wir

$$\begin{array}{ll}
(1''') & \varphi(y, 1) - (\varphi(y, 1) + \alpha) \leq 0 \\
(2''') & (\varepsilon(y, 1) + 1) - (\varepsilon(y, 1) + \alpha) \geq 0 \\
(3''') & (\varphi(y, 2) - \alpha) - \varphi(y, 2) \leq 0 \\
(4''') & (\varepsilon(y, 2) - \alpha + 1) - \varepsilon(y, 2) \geq 0 \\
(5''') & (\varphi(y, 1) - \varphi(y, 1) - \alpha) - ((\varepsilon(y, 1) + 1) - \varepsilon(y, 1) - \alpha) = -1 \\
(6''') & (\varphi(y, 2) - \alpha - \varphi(y, 2)) - ((\varepsilon(y, 2) - \alpha + 1) - \varepsilon(y, 2)) = -1
\end{array}$$

und aus den ersten vier Gleichungen $1 \geq \alpha \geq 0$, wobei jeweils $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ die beiden letzten Gleichungen erfüllt. Wir schließen also $\sigma(x) = \sigma(y)$ oder $\sigma(x) = \sigma(y) + (1, 1, -1, -1)$.

Insgesamt haben wir alle Fälle betrachtet und so die Proposition bewiesen. \square

4.4 Folgerungen

Satz 4.4.1. *Es sei X ein Kristallgitter vom Typ A_2 und jede Ecke x in der zwei Pfeile beginnen habe die Eigenschaft, daß es zwei gerichtete Kantenzüge*

$$\begin{array}{l}
K_1 : x \xrightarrow{1} x_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{i} y \\
K_2 : x \xrightarrow{2} \bar{x}_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{j} y
\end{array}$$

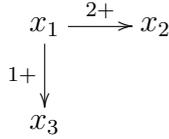
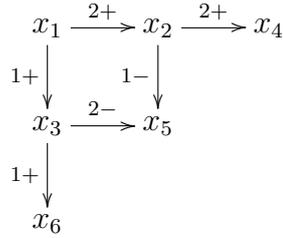
der Länge ≤ 4 gibt, die in dem gleichen Punkt enden.

Das Kristallgitter X ist genau dann der kristalline Graph einer endlich-dimensionalen komplexen Darstellung von $sl_3(\mathbb{C})$, wenn für die größte Ecke $X_0 \in V(X)$ gilt:

$$F_1 F_2(X_0) \neq F_2 F_1(X_0)$$

oder eine der Ecken nicht existiert.

Beweis des Satzes. Zu Anfang sollen ein paar einfache Fälle betrachtet werden, so daß schließlich der einzige schwierige Fall bleibt. Sollte eine der Ecken $F_1 F_2(X_0)$ bzw. $F_2 F_1(X_0)$

Abbildung 4.1: Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis Level 1.Abbildung 4.2: Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis zum Level 2.

nicht existieren, so gibt es bis auf Isomorphie genau ein Kristallgitter mit Höchstgewicht $\mu(X_0)$ nach Korollar 3.2.11. In diesem Fall wäre nichts mehr zu zeigen. Außerdem ist klar, daß jeder kristalline Graph X einer endlich-dimensionalen Darstellung von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ die oben genannten Bedingungen erfüllt, weil X damit A -regulär ist.

Um die umgekehrte Richtung zu beweisen, müssen wir weiter ausholen. Wir gehen jetzt davon aus, daß X ein Kristallgitter ist, das den obigen Bedingungen genügt. Wie wir im Folgenden zeigen werden, ist dadurch die $I \times L$ -Färbung, die X auf $Q(\lambda)$ induziert, eindeutig bestimmt. Damit ist X bis auf Isomorphie festgelegt und es muß $X \cong X(\lambda)$ gelten, weil auch $X(\lambda)$ diese Bedingungen erfüllt.

Wir betrachten nun Level für Level, welche $I \times L$ -Färbung von X auf $Q(\lambda)$ induziert wird. Um dies auch grafisch zu verdeutlichen, werden wir immer wieder Ausschnitte von $Q(\lambda)$ betrachten. In diese Graphen wird jeweils die von X induzierte $I \times L$ -Färbung eingetragen.

Wir beginnen mit Level 1. Hier ist noch alles ganz einfach, weil wir wissen, daß die Label am oberen Rand alle $-$ sind. Wir erhalten also die Situation wie in Abbildung 4.1

Wir machen weiter mit Level 2. Nach Satz 2.3.8 bleiben uns zwei Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit ist, daß das erste Quadrat nur $+$ -Label trägt. In diesem Fall wäre aber $\psi(F_1F_2(x)) = \psi(F_2F_1(x))$ und damit auch $F_1F_2(x) = F_2F_1(x)$, was wir schon ausgeschlossen haben. Uns bleibt also nur die Färbung in Abbildung 4.2.

Natürlich müssen die Ecken x_4 und x_6 nicht in diesem Quadratkristallgitter auftauchen. Bestehen bleibt aber die Tatsache, daß die Färbungen für das dritte Level schon durch Satz 2.3.8 festliegen. Genauer gesagt ist die Färbung der übrigen Kanten unabhängig davon, ob eine der genannten Ecken wirklich auftaucht. Wir erhalten die Färbung in Abbildung 4.3.

Die Bedingung an die Länge der Kantenzüge K_1, K_2 verwenden wir nun zum ersten

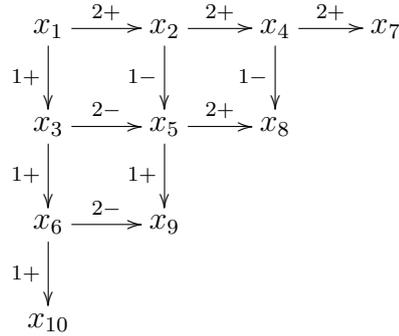
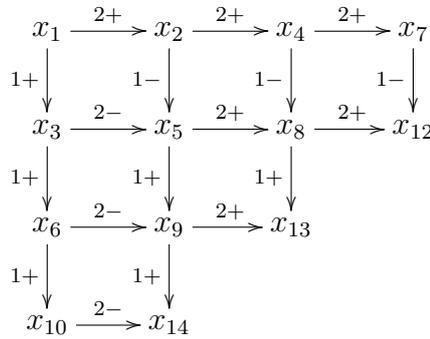
Abbildung 4.3: Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis zum Level 3.

Abbildung 4.4: Diese Möglichkeit tritt nicht auf.

Mal. Für das nächste Level bleiben uns nach Satz 2.3.8 zwei Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit besteht darin, daß das neu zu färbende Quadrat in der Mitte nur +-Label bekommt. Dies wird in Abbildung 4.4 dargestellt.

Jetzt betrachten wir diese Abbildung genauer. Wir überlegen, welche Wege die Bilder der Kantenzüge K_1 und K_2 in $Q(\lambda)$ nehmen könnten. Wir haben vorausgesetzt, daß K_1 und K_2 gleich lang sind und jeweils höchstens die Länge 4 haben. Sollten K_1 und K_2 in der maximalen Ecke beginnen und in der gleichen Ecke enden, so gilt dies auch für dessen Bilder in $Q(\lambda)$. Durch genaues betrachten der Abbildung 4.4 fällt auf, daß der Kantenzug K_1 immer ein Pfeil mit dem Label $1+$ mehr hat, als K_2 . Das kann aber nach Proposition 1.3.9 nicht sein. Wir schließen daraus, daß nur die Möglichkeit aus Abbildung 4.5 in Frage kommt.

Diese Argumentation zeigt uns, daß die $I \times L$ -Färbung von $Q(\lambda)$ eindeutig festliegt durch die Bedingungen an X aus dem Satz. Dies läßt sich einmal dadurch einsehen, daß man die Konstruktion weiter fortführt. Andererseits kann man sich den Graphen aus Abbildung 4.5 aber auch als mittleren Teil der Konstruktion denken. Zusammen mit unseren Eingangsbemerkungen haben wir schließlich den Satz bewiesen. \square

Nun kommen wir zu dem Satz, der meiner Meinung nach die besten Möglichkeiten zur

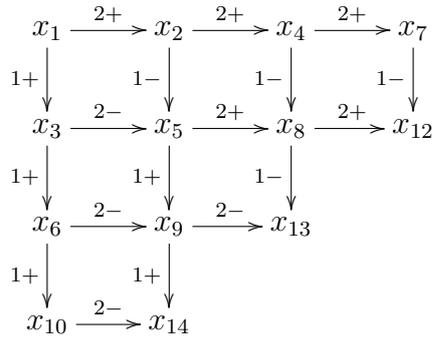


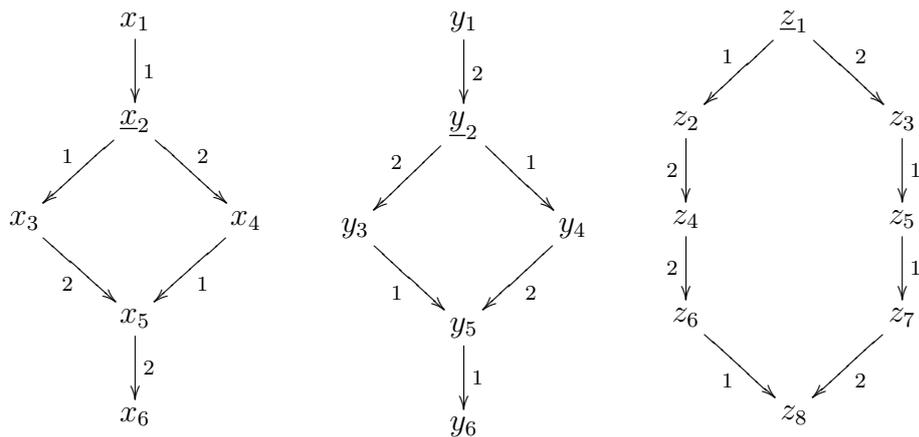
Abbildung 4.5: Die Färbung von $Q(\lambda)$ bis zum Level 4.

Verallgemeinerung zeigt. Hier zeigt sich wieder einmal, daß das Gebiet der kristallinen Graphen noch lange nicht völlig bekannt ist. Nur ein kleiner aber wesentlicher Sichtwechsel des Begriffs *lokale Eigenschaften* eines Graphen führt uns zu folgendem

Satz 4.4.2. *Es sei X ein Kristallgraph vom Typ A_2 . Genau dann ist X der kristalline Graph einer endlich-dimensionalen Darstellung von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, wenn X die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt.*

Für jede Ecke $x \in V(X)$ und für alle verschiedenen Farben $i, j \in I$ mit $\varphi(x, i) \geq 1$ und $\varphi(x, j) \geq 1$ fordern wir:

- *An der Ecke x sieht der Graph X wie einer der drei folgenden Graphen aus. Genauer gesagt gibt es von einem der folgenden Graphen eine injektiven Homomorphismus von I -gefärbten Digraphen in den Graphen X , so daß jeweils die markierte Ecke abgebildet wird auf die Ecke x .*



- *Auch der Gegengraph erfülle diese Eigenschaft.*

Bemerkung. Der Satz besagt, daß jeder kristalline Graph aus den obigen Graphen zusammengebaut ist und nicht aus „Waben“ und „Quadraten“. Zu jedem festen Höchstgewicht

gibt es eventuell mehrere Kristallgitter, die aus Waben und Quadraten bestehen, aber nur eins, daß aus den obigen Graphen zusammengefügt ist; der kristalline Graph.

Die oben genannten Bausteine eines kristallinen Graphen sind genau die zusammenhängenden kristallinen Graphen, deren Höchstgewichte $(2, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ und $(0, 0, 2, 0)$ sind.

Beweis des Satzes. Für den Beweis des Satzes können wir annehmen, daß X zusammenhängend ist. Ein I -gefärbter Digraph ist nämlich genau dann ein kristalliner Graph, wenn seine Zusammenhangskomponenten kristalline Graphen sind.

Erfüllt der Kristallgraph X zusätzlich die Voraussetzungen aus dem Satz, so ist X ein Kristallgitter und für die größte Ecke X_0 gilt natürlich

$$F_1 F_2 X_0 \neq F_2 F_1 X_0,$$

falls diese Ecken existieren. Somit erfüllt X die Voraussetzungen aus dem Satz 4.4.1 und ist ein kristalliner Graph.

Ist umgekehrt X ein zusammenhängender kristalliner Graph, $x \in V(X)$ eine und $i, j \in I$ verschiedene Farben mit $\varphi(x, i) \geq 1$ und $\varphi(x, j) \geq 1$, so bleiben zwei Fälle:

Fall 1: Es sind $\nabla_i \varphi(x, j) \neq 0$ und $\nabla_j \varphi(x, i) \neq 0$. In diesem Fall impliziert Lemma 3.2.16 die Existenz der Ecke

$$F_1^- F_2^+ F_2^- F_1^+ x = F_2^- F_1^+ F_1^- F_2^+ x$$

und der Graph X sieht an der Ecke x aus wie die Wabe aus dem Satz. Es bleibt nur zu überlegen, warum alle Ecken dieser Wabe verschieden sind. Die Proposition 1.3.9 ist der Grund dafür.

Fall 2: Es ist $\nabla_i \varphi(x, j) = 0$. Jetzt implizieren die Lemmata 3.2.14 und 3.2.16 die Existenz der Ecke

$$y := F_j^+ F_i^- x = F_i^- F_j^+ x.$$

Damit an der Ecke x ein Pfeil mit Label $i-$ starten kann, muß es einen j -Pfeil geben, der in x endet. Genauso muß es einen i -Pfeil geben, der in y beginnt, damit bei y ein Pfeil enden kann mit dem Label $j+$.

Schließlich sind beide Richtungen des Satzes damit bewiesen, weil ein Graph genau dann ein kristalliner Graph ist, wenn der Gegengraph es ist. \square

Ausblick

Nach einem wichtigen Satz von Kashiwara ist ein Kristallgraph ein kristalliner Graph genau dann, wenn alle zweifarbigen Untergraphen kristalline Graphen sind und wenn über jedem Element eine maximale Ecke liegt. So lassen sich die Charakterisierungen kristalliner Graphen auf den einfach verbundenen Typ verallgemeinern, die in dieser Arbeit gegeben wurden.

In dieser Arbeit haben wir gesehen, daß die Quadratkristallgitter ein ausgezeichnetes Mittel sind, Kristallgitter zu untersuchen. Insbesondere lassen sich potentielle Charakterisierungen von kristallinen Graphen auf ihren Wahrheitsgehalt prüfen oder schon bewiesene verstehen und verbessern.

Obwohl wir in dieser Arbeit hauptsächlich Kristallgitter vom Typ A_2 betrachtet haben, gehe ich davon aus, daß auch das Betrachten der Kristallgitter der anderen Typen zu wertvollen Informationen führt.

Eine wichtige Frage, die im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden konnte ist, wie die Realisierungen der kristallinen Graphen vom Typ $A_1 \times A_1$ und A_2 zu Realisierungen vom Typ A_n zusammengesetzt werden können.

Durch den Satz 4.4.2 stellte sich mir die Frage, wie man die Aussage des Satzes an den Young-Tableaux ablesen kann. Beim Betrachten von Beispielen ist mir aber nichts aufgefallen. Allerdings ist es mir in Beispielen gelungen, die Darstellung der Tableaux so abzuändern, daß die Aussagen einiger Sätze in dieser Arbeit an dieser Darstellung abzu lesen sind. Damit stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die Darstellung der Tableaux systematisch so abzuändern, daß sich die Aussagen der Sätze direkt ablesen lassen. Man könnte vielleicht sogar die hier vorgestellten Sätze auf die übrigen Typen verallgemeinern.

Insgesamt läßt sich festhalten, daß wir durch diese Arbeit viele Einsichten gewonnen haben. Andererseits stellen sich auch viele neue Fragen.

Danksagung

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um mich bei allen Menschen zu bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, sei es direkt oder indirekt.

Zuerst möchte ich mich bei Prof. Dr. Peter Littelmann bedanken, dem Betreuer meiner Arbeit, für die Bewertung meiner Ideen, den zahlreichen Tips zur Verbesserung meiner Arbeitstechniken und für sein Vertrauen in meine Fähigkeiten.

Genauso möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Walter Borho bedanken, durch dessen Mitarbeiterstelle ich mich während meiner Arbeit finanzieren konnte. Erst so konnte ich mich sorglos mit der Mathematik beschäftigen. Dafür ließ er mir viel Freiraum.

Auch Guido Frank hat einen wichtigen Beitrag zu meiner Arbeit geleistet. Ich danke ihm für seine Hinweise und Ratschläge zum wissenschaftlichen Arbeiten und zu technischen Problemen. Außerdem bedanke ich mich für die besonders angenehme Büroatmosphäre und sein offenes Ohr für meine Probleme.

Ich bedanke mich sehr herzlich bei meinen Eltern für meine gute Erziehung, die Möglichkeit sorgenfrei zu studieren und für Ihre Lebenserfahrung, mit der sie mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite standen.

Schließlich bedanke ich mich von ganzem Herzen bei meiner Verlobten, die mit mir die Höhen und Tiefen durchlebt hat, denen man beim Schreiben einer solchen Arbeit begegnet. Danke für die viele Zeit, die ich nicht mit ihr verbracht habe, sondern mit meiner Arbeit. Danke für das angenehme Heim, das ein ruhiges Arbeiten erst ermöglicht hat. Besonders danke ich ihr, weil sie immer entschlossen zu mir hält und immer um mein Wohl bedacht ist.

Bei all diesen Menschen bedanke ich mich. Außerdem bedanke ich mich bei allen, die mich positiv beeinflusst haben und bei denen, die mich immer wieder neu motiviert haben.

Literaturverzeichnis

- [1] George Polyá. *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Franke, 1995.
- [2] William Fulton, Joe Harris. *Representation Theory - A First Course*. Springer, New York 1991.
- [3] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, 1994.
- [4] Christopher David Godsil. *Algebraic Graph Theory*. Springer, New York, 2001.
- [5] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, Kailash C. Misra, Tetsuji Miwa, Toshiki Nakashima, Atsushi Nakayashiki. Affine Crystals and Vertex Models. *International Journal of Modern Physics A*, 7:449–484, 1992.
- [6] John R. Stembridge. A Local Characterization of Simply-Laced Crystals. Internet, Juni 2001. <http://www.math.lsa.umich.edu/~jrs/papers/xtal.ps.gz>
- [7] V. I. Danilov, A. V. Karzanov and G. A. Koshevoy. Combinatorics of A_2 -Crystals. 2007.
- [8] V. I. Danilov, A. V. Karzanov and G. A. Koshevoy. The Crossing Model for Regular A_n -Crystals. 2007.
- [9] V. I. Danilov, A. V. Karzanov and G. A. Koshevoy. B_2 -crystals: Axioms, Structure, Models. 2007.

Index

- I*-gefärbt
 - Digraph, 1
 - Faserprodukt, 3
 - Homomorphismus, 1
- Bild
 - Homomorphismus, 2
- Cartan-Matrix, 3
- Digraph, 1
 - I*-gefärbt, 1
 - Faserprodukt, 3
 - Homomorphismus, 1
 - induzierter Untergraph, 2
 - Kern, 2
- Ecke, 1
 - unabhängig, Teilmenge, 2
- Faserprodukt
 - Digraph, *I*-gefärbt, 3
- Gegengraph, 5
- Gewicht, 4
- Homomorphismus
 - Bild, 2
 - Digraph, *I*-gefärbt, 1
 - Kern, 2
 - Kristallgraph, 5
- Höchstgewicht, 8
- I*-Färbung, 1
- I*-gefärbt, 1
- Kern, 10
 - Digraph, 2
 - Homomorphismus, 2
- Kristallgitter, 8
- Kristallgraph, 4
 - Homomorphismus, 5
- Level, 9
- Lie-Algebra, 3
- Pfeil, 1
- $Q(\lambda)$, 13
- Quasi-Kristallgraph, 4
- Quasi-Kristallgitter, 8
- unabhängig
 - Teilmenge, Ecke, 2
- $X(\lambda)$, 13

