Ein Splittingsatz für gradierte L-zahme Räume

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik der
Bergischen Universität Wuppertal
vorgelegt von
Xanthi Karidopoulou

Juni 2006

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20060338
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20060338]

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, einen gradierten Splittingsatz in Analogie zu den Ausführungen von Domański und Vogt in [DV] Theorem 4.5 für Produkte von Potenzreihenräumen endlichen Typs zu formulieren und nachzuweisen. Im Gegensatz zu der Theorie in [DV] wird hierbei ein abstrakter kategorieller Ansatz gewählt, der es unter anderem ermöglicht den zahmen und linear-zahmen Fall gleichzeitig zu behandeln. Darüber hinaus wird auf diese Weise die sonst sehr technische Beweisführung umgangen.

Nachdem im ersten Kapitel zunächst grundlegende Begriffe der Kategorientheorie eingeführt werden, gilt unser besonderes Interesse einer speziellen Klasse von halbabelschen Kategorien; und zwar den quasiabelschen. Diese ist insofern von Bedeutung, als sie eine aus funktionalanalytischer Sicht bedeutende Pushout- und Pullback-Konstruktion garantiert, die der Charakterisierung von Ext^1 dient und darüber hinaus von technischem Nutzen ist. Indem die Eigenschaften des Pullback und Pushout sehr genau untersucht werden, gelingt es, eine ausführliche Charakterisierung 1.1.29 dafür anzugeben, wann eine halbabelsche Kategorie quasiabelsch ist. Im Anschluß wird das der Beweisführung dienende Werkzeug in einem sehr allgemeinen kategoriellen Rahmen hergeleitet, so daß im Verlauf der folgenden Ausführungen darauf zurückgegriffen werden kann. Darunter fällt auch der Satz 1.1.43, der eine Verallgemeinerung des in [DV] Proposition 3.2 angewandten Verfahrens darstellt. Abschließend folgt eine kurze Zusammenfassung der für die weiteren Betrachtungen relevanten Begriffe aus der homologischen Algebra.

Im zweiten Abschnitt führen wir die Kategorie der L-zahmen Vektorräume ein. Diese war Grundlage vieler Untersuchungen, unter anderem von Nyberg [N1], [N2], Poppenberg und Vogt [PV1], [P1], [V4], dabei wurde jedoch eine genaue Auseinandersetzung mit der kategoriellen Struktur ausgelassen. Dieser widmen wir uns im zweiten Abschnitt. Nachdem nachgewiesen ist, daß die Kategorie der L-zahmen Räume quasiabelsch ist und genügend viele injektive Objekte besitzt, kann die Definition der Rechtsableitungen $\mathrm{Ext}_{\mathrm{L}}^k$ des Hom-Funktors auf klassische Art und Weise erfolgen. In Anlehnung an die Ausführungen von Vogt in [V4] beweisen wir zum Ende des zweiten Abschnittes den L-zahmen Splittingsatz 2.2.8. Dieser ist eine Verallgemeinerung des Theorems 6.1 in [PV1] bzw. [PV2] und des Theorems 4.7 in [V4] und impliziert das Korollar 2.2.10, welches $\mathrm{Ext}_{\mathrm{L}}^k(E,F) = 0$ im zahmen bzw. linear-zahmen Fall garantiert, wenn E ein Unterraum und F ein Quotient eines Potenzreihenraumes endlichen Typs ist und E oder F zahm bzw. linear-zahm nuklear ist. In der Kategorie der Fréchetträume ist $\mathrm{Ext}^1(E,F) \neq 0$ für einen Potenzreihenraum endlichen Typs E und einen shiftstabilen Potenreihenraum endlichen Typs F (siehe [V3] Corollary 4.4). Daher ist es notwendig, um ein dem Korollar 2.2.10 entsprechendes Resultat zu erhalten, die zahme bzw. linear-zahme Kategorie zu betrachten. Genauso wie im Fall der gradierten Fréchetträume in [DV] der Splittingsatz von Vogt und Wagner aus [VW] für den nuklearen Fall die Grundlage des gradierten Splittingsatzes 4.5 aus [DV] bildet, ist für den Beweis des gradierten L-zahmen Splittingsatzes 3.2.10 der L-zahme Splittingsatz 2.2.8 wesentlich.

Aufbauend auf die Kategorie der L-zahmen Räume kann nun im dritten Abschnitt die Einführung der Kategorie der gradierten L-zahmen Räume erfolgen. Diese ist quasiabelsch, besitzt genügend viele injektive Objekte und abzählbare unendliche Produkte. Für den Beweis des gradierten Splittingresultats spielt die Existenz der kanonischen Auflösung eine zentrale Rolle. Aus diesem Grund definieren wir für einen gradierten L-zahmen Fréchetraum das Spektrum der lokalen Fréchetträume und untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die kanonische Auflösung gradiert L-zahm exakt ist. Um den gradierten L-zahmen Splittingsatz in einem allgemeineren Rahmen formulieren zu können, betrachten wir in den folgenden Ausführungen alle zu dem Spektrum der lokalen Fréchetträume L-zahm äquivalente Spektren. Wesentlich hierbei ist, den Begriff der Striktheit aus [DV] Sec. 2 unter den uns gegebenen Umständen zu interpretieren. Im Anschluß definieren wir in Analogie zu der Definition der s-Freundlichkeit den allgemeiner gehaltenen Begriff der E-Freundlichkeit. Nachdem in der Proposition 3.2.4 der Zusammenhang zwischen dem gradierten Zerfallen und Proj^1 geklärt wurde, kann nun der Beweis des gradierten Splittingsatzes 3.2.10 auf abstrakte Weise geführt werden. Insbesondere erhalten wir aus 3.2.10 den Satz 3.2.13, ein dem gradierten Splittingresultat in

[DV] Theorem 4.5 entsprechendes Ergebnis für Produkte von Potenzreihenräumen endlichen Typs. Dabei gelingt es, die Voraussetzungen soweit abzuschwächen, daß auf zusätzliche Forderungen an den Raum in der Mitte verzichtet werden kann. Der dritte Abschnitt endet schließlich mit einer wichtigen Anwendung des gradierten L-zahmen Splittingsatzes. Dabei handelt es sich um das gradierte zahme bzw. linear-zahme Zerfallen von gradierten zahmen bzw. linear-zahmen Komplexen von Produkten von Potenzreihenräumen endlichen Typs. Dafür ist es nötig zu untersuchen, wann sich die E-Freundlichkeit eines gradierten L-zahmen Fréchetraumes auf Quotienten vererbt. Dies erreichen wir im Fall des Produkts von Potenzreihenräumen endlichen Typs mit dem Lemma 3.2.14. Ein allgemeineres Ergebnis für den nuklearen Fall liefert die Proposition 3.2.16, die auf die Proposition 2.1.20 aus dem zweiten Abschnitt aufbaut. Die Proposition 2.1.20 sagt aus, daß aus $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F)=0$, im Fall, daß F L-zahm nuklear ist, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,G)=0$ für jeden L-zahmen Quotienten G von F folgt. Dies ist das Analogon zu dem topologischen Resultat von Vogt in [V1] Corollary 1.5. Zentral für die Übertragung der E-Freundlichkeit auf Quotienten ist wie im Fall der gradierten Fréchetträume in [DV] die Striktheit des Fréchetraumes, modulo dessen der Quotient gebildet wird. Die vorliegende Arbeit endet mit dem dem Theorem 5.2 in [DV] entsprechenden gradierten L-zahmen Splittingresultat 3.2.18 für Komplexe von Produkten von Potenzreihenräumen endlichen Typs. Eine analytische Anwendung des Satzes 3.2.18 wird das Zerfallen exakter Differentialkomplexe zwischen den Räumen der ω-Ultradistributionen $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ im Sinne von [BMT] sein. In [BMT] Proposition 5.6 wurde nachgewiesen, daß $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ isomorph zu dem Produkt eines Potenzreihenraumes endlichen Typs ist. Daß die Isomorphie und die Exaktheit in der gradierten zahmen bzw. linear-zahmen Kategorie erhalten bleibt, wird dann zu zeigen sein.

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Dietmar Vogt für die ausgezeichnete Betreuung und hervorragende Förderung. Insbesondere gilt mein herzlicher Dank PD Dr. Leonhard Frerick, dessen wertvolle und unermüdliche Unterstützung sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

0 Bezeichnungen

Grundlage unserer Betrachtungen sind die üblichen Definitionen für Frécheträume (vgl. [MV]).

Unter einem lokalkonvexen Raum verstehen wir einen nicht notwendig hausdorffschen topologischen Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, der eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen besitzt. Im folgende verstehen wir unter einer Nullumgebung eines lokalkonvexen Raumes stets eine absolutkonvexe Nullumgebung.

Ein *Fréchetraum* ist ein vollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Raum.

Eine lineare Abbildung $A : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ zwischen zwei Banachräumen heißt *nuklear*, falls es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Linearformen auf E und eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F existiert mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|_E^* \|b_n\|_F < \infty$, so daß

$$A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x) b_n \text{ für alle } x \in E \text{ gilt,}$$

wobei $\|a_n\|_E^* := \sup_{x\in E, \|x\|_E \leq 1} \mid a_n(x) \mid$ ist.

Sei $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein monoton wachsendes Fundamentalsystem von Halbnormen auf einem Fréchetraum E. Ferner sei $E/\ker\|\cdot\|_n$ mit der von $\|\cdot\|_n$ induzierten Quotientennorm versehen und E_n seine Vervollständigung. Die so erzeugten Banachräume $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden als *lokale Banachräume* von E bezeichnet und $i_n : E \longrightarrow E_n$ mit $i_n(x) := x + \ker\|\cdot\|_n$ für $n \in \mathbb{N}$ als kanonische Abbildung. Die Identität auf E induziert stetige, lineare Abbildungen $i_n^k : E_k \longrightarrow E_n$ für $k \geq n$, welche durch die Beziehung $i_n^k \circ i_k = i_n$ eindeutig bestimmt sind.

Ein Fréchetraum E heißt *nuklear*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ existiert, so daß die Abbildung $i_n^k : E_k \longrightarrow E_n$ nuklear ist. Die Nuklearität ist eine linear-topologische Invariante und überträgt sich auf Unterräume, Quotienten und unendliche Produkte.

Ein Fréchetraum E mit einem monoton wachsenden Fundamentalsystem $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen besitzt die Eigenschaft (DN), falls folgendes gilt:
Es gibt ein $p \in \mathbb{N}$, so daß zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $l \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ existieren mit

$$\|x\|_k^2 \leq C\|x\|_p\|x\|_l \text{ für alle } x \in E.$$

Die Eigenschaft (DN) ist eine linear-topologische Invariante und vererbt sich auf abgeschlossene Unterräume und endliche Produkte.

Ein Fréchetraum E mit einem monoton wachsenden Fundamentalsystem $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen besitzt die Eigenschaft (Ω), falls folgendes gilt:
Zu jedem $p \in \mathbb{N}$ gibt es ein $q \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $0 < \theta < 1$ und ein $C > 0$ existieren mit

$$\|y\|_q^* \leq C\|y\|_p^{*^{1-\theta}}\|y\|_k^{*^{\theta}} \text{ für alle } y \in E'.$$

Die Eigenschaft (Ω) ist eine linear-topologische Invariante und vererbt sich auf Quotienten und abzählbar unendliche Produkte.

Wir bezeichnen mit

$$s := \{\, x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_k^2 := \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 j^{2k} < +\infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \,\}$$

den Raum der schnell fallenden Folgen. s mit den Normen $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein nuklearer Fréchetraum.

Es sei $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer reeller Zahlen, so daß $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$ gilt. Unter einem Potenzreihenraum endlichen Typs, verstehen wir im folgenden den Folgenraum

$$\Lambda_0(\alpha) := \{\, x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_k^2 := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \exp(-\frac{2\alpha_j}{k}) < +\infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \,\}.$$

Versehen mit der Folge von Hilbertnormen $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $\Lambda_0(\alpha)$ ein Fréchet-Hilbertraum.

1 Grundlagen

1.1 Der Pullback und der Pushout in halbabelschen Kategorien

Die folgenden Ausführungen sind teilweise bekannter Bestandteil der Kategorientheorie. Die Beweise sind auf einfachste Weise ausgeführt, um eine intensive Auseinandersetzung mit der Kategorientheorie zu umgehen. Die Propositionen 1.1.22, 1.1.23 und 1.1.24 und die Sätze 1.1.27 und 1.1.29 sind der Autorin aus der Kategorientheorie nicht bekannt. Ziel ist es, den Satz 1.1.29 zu beweisen.

Definition 1.1.1 *(a) Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse* $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ *von Objekten und aus einer Menge* $\mathrm{Mor}\,(E,F)$ *von Morphismen für alle Paare (E,F) von Objekten. Weiter existiere für jedes Objekt E ein Morphismus $I_E \in \mathrm{Mor}\,(E,E)$ und eine Komposition $\circ : \mathrm{Mor}\,(E,F) \times \mathrm{Mor}\,(F,G) \longrightarrow \mathrm{Mor}\,(E,G)$ für alle Tripel von Objekten (E,F,G), so daß folgendes gilt:*

(i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ für alle $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$, $g \in \mathrm{Mor}\,(F,G)$ und $h \in \mathrm{Mor}\,(G,H)$.

(ii) $I_F \circ f = f \circ I_E = f$ für alle $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$. Den Morphismus I_F bezeichnen wir als die Identität auf F.

(b) Eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie, bei der für jedes Paar von Objekten (E,F) die Menge der Morphismen $\mathrm{Mor}\,(E,F)$ bezüglich einer Verknüpfung $+$ abelsche Gruppenstruktur besitzt, so daß folgende Distributivgesetze erfüllt sind:

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h \text{ und } f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h.$$

Weiter existiert ein Objekt 0, so daß für jedes Objekt E die Mengen $\mathrm{Mor}\,(E,0)$ und $\mathrm{Mor}\,(0,E)$ genau einen Morphismus enthalten. Im folgenden bezeichnen wir das Einselement in $\mathrm{Mor}\,(E,F)$ mit 0.

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Für $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ schreiben wir im folgenden auch $f : E \longrightarrow F$.

Definition 1.1.2 *Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie.*

(a) Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ heißt Monomorphismus bzw. Epimorphismus, falls aus $f \circ g = 0$ für ein $g \in \mathrm{Mor}\,(Z,E)$ bzw. $g \circ f = 0$ für ein $g \in \mathrm{Mor}\,(F,Z)$ stets $g = 0$ folgt.

(b) Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ heißt Bimorphismus, falls f ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist.

(c) Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ heißt Isomorphismus, falls ein $g \in \mathrm{Mor}\,(F,E)$ existiert, so daß $f \circ g = I_F$ und $g \circ f = I_E$ gilt.

Ist $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ ein Isomorphismus in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$, so ist der Morphismus $g \in \mathrm{Mor}\,(F,E)$ mit $f \circ g = I_F$ und $g \circ f = I_E$ eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen g mit f^{-1}. Eine zentrale Rolle in der Kategorientheorie spielen die folgenden Begriffe:

Definition 1.1.3 *Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie.*

(a) Ein Kern eines Morphismus $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ ist ein Paar $(\ker f, k_f)$, bestehend aus einem Objekt $\ker f \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ und einem Morphismus $k_f \in \mathrm{Mor}\,(\ker f, E)$ mit $f \circ k = 0$ und der Eigenschaft, daß für alle Morphismen $j \in \mathrm{Mor}\,(Z,E)$ mit $f \circ j = 0$ genau ein Morphismus $\tilde{\jmath} \in \mathrm{Mor}\,(Z, \ker f)$ mit $j = k_f \circ \tilde{\jmath}$ existiert.

(b) Ein Kokern eines Morphismus $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ ist ein Paar $(\mathrm{coker}\, f, c_f)$, bestehend aus einem Objekt $\mathrm{coker}\, f \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ und einem Morphismus $c_f \in \mathrm{Mor}\,(F, \mathrm{coker}\, f)$ mit $c_f \circ f = 0$ und der Eigenschaft, daß für alle Morphismen $j \in \mathrm{Mor}\,(F,Z)$ mit $j \circ f = 0$ genau ein Morphismus $\tilde{\jmath} \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coker}\, f, Z)$ mit $j = \tilde{\jmath} \circ c_f$ existiert.

(c) *Ein Bild eines Morphismus* $f \in \operatorname{Mor}(E,F)$ *ist ein Paar* $(\operatorname{im} f, i_f)$*, bestehend aus einem Objekt* $\operatorname{im} f \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ *und einem Morphismus* $i_f \in \operatorname{Mor}(\operatorname{im} f, F)$*, das ein Kern eines Kokerns von* f *ist.*

(d) *Ein Kobild eines Morphismus* $f \in \operatorname{Mor}(E,F)$ *ist ein Paar* $(\operatorname{coim} f, ci_f)$*, bestehend aus einem Objekt* $\operatorname{coim} f \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ *und einem Morphismus* $ci_f \in \operatorname{Mor}(E, \operatorname{coim} f)$*, das ein Kokern eines Kerns von* f *ist.*

Kerne und Kokerne und damit auch Bilder und Kobilder eines Morphismus $f \in \operatorname{Mor}(E,F)$ sind bis auf kanonische Isomorphien eindeutig bestimmt. Das bedeutet: Falls $(\ker f, k_f)$ und $(\widetilde{\ker f}, \tilde{k}_f)$ zwei Kerne von f sind, dann existiert genau ein Isomorphismus $J : \ker f \longrightarrow \widetilde{\ker f}$ mit $\tilde{k}_f \circ J = k_f$. Analoges gilt für Kokerne. Dies rechtfertigt die Tatsache, daß wir im folgenden von dem Kern bzw. Kokern sprechen. Gleiches gilt für das Bild und das Kobild. Offensichtlich ist ein Morphismus f genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus, falls $\ker f = 0$ bzw. $\operatorname{coker} f = 0$ ist. Aus den universellen Eigenschaften des Kerns und des Kokerns folgt:

Proposition 1.1.4 *Es sei* $\mathcal{C}$ *eine additive Kategorie und* $f \in \operatorname{Mor}(E,F)$*, so daß der Kern* $(\ker f, k_f)$*, der Kokern* $(\operatorname{coker} f, c_f)$*, das Bild* $(\operatorname{im} f, i_f)$ *und das Kobild* $(\operatorname{coim} f, ci_f)$ *von* f *existieren. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus* $\tilde{f} \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coim} f, \operatorname{im} f)$*, so daß* $f = i_f \circ \tilde{f} \circ ci_f$ *gilt.*

Wir bezeichnen $\tilde{f} : \operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ aus der obigen Proposition als induzierten Morphismus zwischen Kobild und Bild von f. $\tilde{f}$ gibt Anlaß zur folgenden

Definition 1.1.5 *Es sei* $\mathcal{C}$ *eine additive Kategorie und* $f \in \operatorname{Mor}(E,F)$*, so daß der Kern* $(\ker f, k_f)$*, der Kokern* $(\operatorname{coker} f, c_f)$*, das Bild* $(\operatorname{im} f, i_f)$ *und das Kobild* $(\operatorname{coim} f, ci_f)$ *von* f *existieren.*

(a) f *heißt Homomorphismus, falls der induzierte Morphismus* $\tilde{f} : \operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ *ein Isomorphismus ist.*

(b) f *heißt Monohomomorphismus bzw. Epihomomorphismus, falls* f *ein Homomorphismus und ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus ist.*

Beispiel 1.1.6 Ist $(\ker f, k_f)$ Kern bzw. $(\operatorname{coker} f, c_f)$ Kokern eines Morphismus $f \in \operatorname{Mor}(E,F)$, so ist k_f bzw. c_f stets ein Monohomomorphismus bzw. Epihomomorphismus.

Wir sind nun so weit, eine spezielle Klasse von Kategorien zu definieren, die für unsere weiteren Betrachtungen wesentlich ist:

Definition 1.1.7 (a) *Eine additive Kategorie* $\mathcal{C}$ *heißt halbabelsch, falls für jeden Morphismus* f *der Kern und der Kokern existieren und der induzierte Morphismus* $\tilde{f} : \operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ *ein Bimorphismus ist. Weiter existiert für jedes Paar von Objekten (E,F) ein Objekt* $E \times F$ *und Morphismen* $\pi_E \in \operatorname{Mor}(E \times F, E)$ *und* $\pi_F \in \operatorname{Mor}(E \times F, F)$*, so daß für beliebige* $g_E \in \operatorname{Mor}(Z,E)$ *und* $g_F \in \operatorname{Mor}(Z,F)$ *genau ein* $g \in \operatorname{Mor}(Z, E \times F)$ *existiert mit* $g_E = \pi_E \circ g$ *und* $g_F = \pi_F \circ g$*. Das Objekt* $E \times F$ *bezeichnen wir als Produkt von* E *und* F *und den Morphismen* π_E *bzw.* π_F *als kanonische Projektion auf* E *bzw.* F*.*

(b) *Eine halbabelsche Kategorie* $\mathcal{C}$ *heißt abelsch, falls jeder Morphismus ein Homomorphismus ist.*

Beispiel 1.1.8 Betrachtet man als Objekte die Vektorräume über $\mathbb{K}$ und als Morphismen die linearen Abbildungen, so erhält man mit der üblichen Verknüpfung und Addition von Funktionen die abelsche Kategorie $\mathcal{LS}$ der linearen Räume.

Definition 1.1.9 *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt Koprodukte, falls für beliebige Objekte E und F ein Objekt $E \times F$ und Morphismen $\omega_E \in \mathrm{Mor}\,(E, E \times F)$ und $\omega_F \in \mathrm{Mor}\,(F, E \times F)$ existieren, so daß für beliebige Morphismen $g_E \in \mathrm{Mor}\,(E, Z)$ und $g_F \in \mathrm{Mor}\,(F, Z)$ genau ein Morphismus $g \in \mathrm{Mor}\,(E \times F, Z)$ existiert mit $g_E = g \circ \omega_E$ und $g_F = g \circ \omega_F$. Den Morphismus ω_E bzw. ω_F bezeichnen wir als kanonische Einbettung.*

Die folgende Definition vereinfacht die folgenden Beweisführungen:

Definition 1.1.10 *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die duale Kategorie $\mathcal{C}^o$ zu $\mathcal{C}$ besteht aus der Objektklasse $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ von $\mathcal{C}$ und für ein beliebiges Paar (E, F) von Objekten, definiert durch $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(E, F) := \mathrm{Mor}\,(F, E)$ die Menge von Morphismen in $\mathcal{C}^o$. Auf $\mathcal{C}^o$ betrachten wir die Komposition $\circ : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(E, F) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(F, G) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(E, G)$ mit $(f, g) \mapsto g \circ f$, welche in $\mathcal{C}$ gebildet wird.*

Bemerkung 1.1.11 (a) Offenbar ist die Komposition assoziativ und die Identitäten in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^o$ stimmen überein. Dies rechtfertigt die Bezeichnung duale Kategorie.

(b) Der Kern bzw. Kokern eines Morphismus $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ ist offenbar der Kokern bzw. Kern von $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(F, E)$. Der Begriff des Kerns und des Kokerns verhält sich also dual. Analog verhalten sich das Bild und das Kobild. Eine entsprechende Beziehung besteht zwischen dem Produkt und dem Koprodukt und zwischen einem Mono- und einem Epimorphismus. Die Isomorphismen in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^o$ stimmen überein. Da für jeden Morphismus f in $\mathcal{C}$ der induzierte Morphismus $\tilde{f} : \mathrm{coim}\, f \longrightarrow \mathrm{im}\, f$ in $\mathcal{C}^o$ der gleiche bleibt, ist der Begriff eines Homomorphismus invariant bezüglich des Dualisierens.

Ist $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie, so ist offensichtlich auch $\mathcal{C}^o$ additiv.

Daß die Existenz von Produkten und Koprodukten in einer additiven Kategorie äquivalent ist, zeigt folgende

Proposition 1.1.12 *Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. $\mathcal{C}$ besitzt genau dann Produkte, falls sie Koprodukte besitzt.*

Beweis: Da die beiden Aussagen der Proposition dual zueinander stehen, reicht es, folgendes nachzuweisen: Es sei $E \in \mathcal{C}$ und $F \in \mathcal{C}$. Falls Produkte existieren, betrachten wir das Produkt $E \times F$ mit den zugehörigen Projektionen π_E, π_F. Dann existiert zu den Morphismen I_E und $0 \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ genau ein Morphismus $\omega_E \in \mathrm{Mor}\,(E, E \times F)$ mit $I_E = \pi_E \circ \omega_E$ und $0 = \pi_F \circ \omega_E$. Analog erhalten wir genau einen Morphismus $\omega_F \in \mathrm{Mor}\,(F, E \times F)$ mit $I_F = \pi_F \circ \omega_F$ und $0 = \pi_E \circ \omega_F$. Es gilt $\omega_E \circ \pi_E + \omega_F \circ \pi_F = I_{E \times F}$. Dies folgt aus $\pi_E \circ (\omega_E \circ \pi_E + \omega_F \circ \pi_F) = \pi_E$ und $\pi_F \circ (\omega_E \circ \pi_E + \omega_F \circ \pi_F) = \pi_F$ und aus der universellen Eigenschaft von Produkten. Wir wollen nun nachweisen, daß $(E \times F, \omega_E, \omega_F)$ gerade das Koprodukt zu dem Paar (E, F) ist. Dazu seien $g_E \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ und $g_F \in \mathrm{Mor}\,(F, G)$ zwei beliebige Morphismen. Indem wir $g := g_E \circ \pi_E + g_F \circ \pi_F$ setzen, erhalten wir $g \circ \omega_E = g_E$ und $g \circ \omega_F = g_F$. Angenommen, es existiert $\tilde{g} \in \mathrm{Mor}\,(E \times F, G)$ mit $\tilde{g} \circ \omega_E = g_E$ und $\tilde{g} \circ \omega_F = g_F$, dann gilt $\tilde{g} = \tilde{g} \circ (\omega_E \circ \pi_E + \omega_F \circ \pi_F) = g_E \circ \pi_E + g_F \circ \pi_F = g$. Damit wäre auch die Eindeutigkeit des Morphismus g gezeigt.

Bemerkung 1.1.13 Nun ist in einer additiven Kategorie die Existenz von Produkten äquivalent zu der Existenz von Koprodukten. Unter Beachtung von Bemerkung 1.1.11 übertragen sich damit die Eigenschaften einer halbabelschen bzw. abelschen Kategorie auf die duale Kategorie.

Definition 1.1.14 *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.*

(a) Es sei $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$. Ein Tripel (P, p_1, p_2) bestehend aus einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und zwei Morphismen $p_1 \in \mathrm{Mor}\,(G, P)$ und $p_2 \in \mathrm{Mor}\,(F, P)$ mit $p_1 \circ g = p_2 \circ f$ heißt Pushout von f und g, falls für beliebige Morphismen $q_1 \in \mathrm{Mor}\,(G, Z)$ und $q_2 \in \mathrm{Mor}\,(F, Z)$ mit $q_1 \circ g = q_2 \circ f$ genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(P, Z)$ existiert, so daß $h \circ p_1 = q_1$ und $h \circ p_2 = q_2$ gilt.

(b) *Es sei $f \in \mathrm{Mor}\,(F,E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G,E)$. Ein Tripel (P,p_1,p_2) bestehend aus einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und zwei Morphismen $p_1 \in \mathrm{Mor}\,(P,G)$ und $p_2 \in \mathrm{Mor}\,(P,F)$ mit $g \circ p_1 = f \circ p_2$ heißt Pullback von f und g, falls für beliebige Morphismen $q_1 \in \mathrm{Mor}\,(Z,G)$ und $q_2 \in \mathrm{Mor}\,(Z,F)$ mit $g \circ q_1 = f \circ q_2$ genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(Z,P)$ existiert, so daß $p_1 \circ h = q_1$ und $p_2 \circ h = q_2$ gilt.*

Der Pullback bzw. Pushout in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist offensichtlich der Pushout bzw. Pullback in der dualen Kategorie $\mathcal{C}^o$. In einer additiven Kategorie impliziert die Existenz eines Pullback bzw. eines Pushout die Existenz von Produkten bzw. Koprodukten. Wir erhalten folgende

Proposition 1.1.15 *Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Existiert in $\mathcal{C}$ der Pushout bzw. Pullback, dann auch das Koprodukt bzw. Produkt.*

Beweis: Es sei $E,F \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Betrachten wir den Pushout (P,p_1,p_2) der Morphismen $0_E \in \mathrm{Mor}\,(0,E)$ und $0_F \in \mathrm{Mor}\,(0,F)$, dann gilt aufgrund der Tatsache, daß die Menge $\mathrm{Mor}\,(0,Z)$ aus genau einem Element besteht, $g_E \circ 0_E = g_F \circ 0_F$ für beliebige Morphismen $g_E \in \mathrm{Mor}\,(E,Z)$ und $g_F \in \mathrm{Mor}\,(F,Z)$. Damit sichert die Eigenschaft des Pushout die Existenz genau eines Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(P,Z)$ mit $h \circ p_1 = g_E$ und $h \circ p_2 = g_F$. Das bedeutet: (P,p_1,p_2) ist gerade das Koprodukt von E und F.

Existiert andererseits der Pullback in $\mathcal{C}$, so existiert der Pushout in der dualen Kategorie $\mathcal{C}^o$. Aus dem oben gezeigten folgt, daß Koprodukte in $\mathcal{C}^o$ existieren. Dies bedeutet jedoch, daß Produkte in $\mathcal{C}$ existieren.

Unter welchen Voraussetzungen die umgekehrte Aussage der obigen Proposition gilt, zeigt

Proposition 1.1.16 *Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Besitzt $\mathcal{C}$ Produkte und Kokerne bzw. Koprodukte und Kerne, so existiert in $\mathcal{C}$ auch der Pushout bzw. der Pullback.*

Beweis: Es sei $f \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E,G)$. Betrachten wir das Produkt $(F \times G, \pi_F, \pi_G)$, so existiert genau ein Morphismus $p \in \mathrm{Mor}\,(E, F \times G)$ mit $\pi_F \circ p = f$ und $\pi_G \circ p = -g$. Es sei $(\mathrm{coker}\, p, c_p)$ der Kokern von p und $(F \times G, \omega_F, \omega_G)$ das Koprodukt von F und G. Setzen wir nun $p_1 := c_p \circ \omega_G$ und $p_2 := c_p \circ \omega_F$, so gilt $-(p_1 \circ g) + p_2 \circ f = -(c_p \circ \omega_G \circ g) + c_p \circ \omega_F \circ f = c_p \circ \omega_G \circ (-g) + c_p \circ \omega_F \circ f = c_p \circ \omega_G \circ \pi_G \circ p + c_p \circ \omega_F \circ \pi_F \circ p = c_p \circ (\omega_G \circ \pi_G + \omega_F \circ \pi_F) \circ p = c_p \circ p = 0$. Um nachzuweisen, daß $(\mathrm{coker}\, p, p_1, p_2)$ der Pushout von f und g ist, geben wir uns beliebige Morphismen $q_1 \in \mathrm{Mor}\,(G,Z)$ und $q_2 \in \mathrm{Mor}\,(F,Z)$ vor, die $q_1 \circ g = q_2 \circ f$ erfüllen. Nun gilt $(q_1 \circ \pi_G + q_2 \circ \pi_F) \circ p = q_1 \circ \pi_G \circ p + q_2 \circ \pi_F \circ p = q_1 \circ (-g) + q_2 \circ f = -(q_1 \circ g) + q_2 \circ f = 0$. Damit sichert die Eigenschaft des Kokerns die Existenz genau einer Abbildung $h \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coker}\, p, Z)$ mit $h \circ c_p = q_1 \circ \pi_G + q_2 \circ \pi_F$. Dies impliziert einerseits $h \circ p_1 = h \circ c_p \circ \omega_G = (q_1 \circ \pi_G + q_2 \circ \pi_F) \circ \omega_G = q_1 \circ \pi_G \circ \omega_G + q_2 \circ \pi_F \circ \omega_G = q_1$ und entsprechend andererseits $h \circ p_2 = q_2$. Damit ist $(\mathrm{coker}\, p, p_1, p_2)$ der Pushout von f und g. Da die beiden Aussagen des Satzes dual zueinander stehen, folgt die Behauptung.

Wir fassen nun zusammen:

Korollar 1.1.17 *Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie in der Kerne und Kokerne existieren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$\mathcal{C}$ besitzt Produkte.*

(b) *$\mathcal{C}$ besitzt Koprodukte.*

(c) *$\mathcal{C}$ besitzt Pushouts.*

(d) *$\mathcal{C}$ besitzt Pullbacks.*

Im folgenden wollen wir den Pullback und den Pushout genauer untersuchen.

Bemerkung 1.1.18 Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und (P, p_1, p_2) der Pushout von $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$. Dann ist g genau dann ein Epimorphismus, falls p_2 ein Epimorphismus ist. Dazu sei g ein Epimorphismus. Angenommen, es existiert ein Morphismus $q \in \mathrm{Mor}\,(P, Z)$ mit $q \circ p_2 = 0$. Dann ist $0 = q \circ p_2 \circ f = q \circ p_1 \circ g$. Da nun g ein Epimorphismus ist, folgt $q \circ p_1 = 0$. Insgesamt erhalten wir aufgrund der Eigenschaft des Pushout $q = 0$ und damit ist p_2 ein Epimorphismus. Ist andererseits p_2 ein Epimorphismus und existiert ein Morphismus $q \in \mathrm{Mor}\,(G, Z)$ mit $q \circ g = 0$, dann garantiert der Pushout die Existenz genau eines Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(P, Z)$ mit $h \circ p_2 = 0$ und $h \circ p_1 = q$. Da p_2 ein Epimorphismus ist, folgt daraus $h = 0$ und damit $q = 0$.

Damit gilt natürlich auch die dazu duale Aussage: Ist (P, p_1, p_2) der Pullback von $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$, dann ist g genau dann ein Monomorphismus, falls p_2 ein Monomorphismus ist.

Mit Isomorphismen verhält es sich ähnlich. Ist (P, p_1, p_2) der Pushout von $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ und ist g ein Isomorphismus, so ist auch p_2 ein Isomorphismus. Denn es gilt $I_F \circ f = f \circ I_E = f \circ g^{-1} \circ g$ und damit existiert genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(P, F)$ mit $h \circ p_1 = f \circ g^{-1}$ und $h \circ p_2 = I_F$. Dann ist aber $p_2 \circ h \circ p_1 = p_2 \circ f \circ g^{-1} = p_1 \circ g \circ g^{-1} = p_1$ und $p_2 \circ h \circ p_2 = p_2$ und damit gilt auch $p_2 \circ h = I_P$. Entsprechend gilt die duale Aussage.

Darüber hinaus erhalten wir folgende

Proposition 1.1.19 *Es sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie, in der Kerne und Kokerne existieren.*

(a) Es sei $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ und (P, p_1, p_2) der Pushout von f und g, dann sind die Kokerne der Morphismen g und p_2 bzw. f und p_1 isomorph.

(b) Es sei $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$ und (P, p_1, p_2) der Pullback von f und g, dann sind die Kerne der Morphismen g und p_2 bzw. f und p_1 isomorph.

Beweis: Da (b) die duale Aussage von (a) ist, reicht es (a) nachzuweisen. Es sei $(\mathrm{coker}\, g, c_g)$ der Kokern von g und $(\mathrm{coker}\, p_2, c_{p_2})$ der Kokern von p_2. Es gilt $0 = c_g \circ g = 0 \circ f$. Ist nun (P, p_1, p_2) der Pushout von f und g, so existiert genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(P, \mathrm{coker}\, g)$ mit $h \circ p_2 = 0$ und $h \circ p_1 = c_g$. Da $h \circ p_2 = 0$ gilt, existiert aufgrund der Eigenschaft des Kokerns genau ein Morphismus $v \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coker}\, p_2, \mathrm{coker}\, g)$ mit $h = v \circ c_{p_2}$. Aus demselben Grund existiert aufgrund der Tatsache, daß $(c_{p_2} \circ p_1) \circ g = c_{p_2} \circ p_2 \circ f = 0$ gilt, genau ein Morphismus $z \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coker}\, g, \mathrm{coker}\, p_2)$ mit $z \circ c_g = c_{p_2} \circ p_1$. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß $v \circ z$ gerade die Identität in $\mathrm{coker}\, g$ und $z \circ v$ gerade die Identität in $\mathrm{coker}\, p_2$ ist. Aus $v \circ (z \circ c_g) = v \circ (c_{p_2} \circ p_1) = (v \circ c_{p_2}) \circ p_1 = h \circ p_1 = c_g$ folgt, da c_g stets ein Epimorphismus ist, daß $v \circ z$ die Identität in $\mathrm{coker}\, g$ ist. Um die andere Identität nachzuweisen, bemerken wir, daß die Eigenschaft des Pushout die Existenz genau eines Morphismus $j \in \mathrm{Mor}\,(P, \mathrm{coker}\, p_2)$ garantiert, für den $j \circ p_1 = c_{p_2} \circ p_1$ und $j \circ p_2 = 0$ gilt. Damit ist $j = c_{p_2}$. Da $z \circ h \circ p_1 = z \circ c_g = c_{p_2} \circ p_1$ und $z \circ h \circ p_2 = 0$ gilt, folgt $z \circ h = c_{p_2}$. Insgesamt erhalten wir $z \circ v \circ c_{p_2} = z \circ h = c_{p_2}$. Da c_{p_2} stets ein Epimorphismus ist, folgt die Behauptung.

Proposition 1.1.20 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie.*

(a) Es sei (P, p_1, p_2) der Pushout von $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$. Ist g ein Epihomomorphismus, so ist auch p_2 ein Epihomomorphismus, bzw. ist f ein Epihomomorphismus, so ist auch p_1 ein Epihomomorphismus.

(b) Es sei (P, p_1, p_2) der Pullback von $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$. Ist g ein Monohomomorphismus, so ist auch p_2 ein Monohomomorphismus, bzw. ist f ein Monohomomorphismus, so ist auch p_1 ein Monohomomorphismus.

Beweis: Der Teil (b) ist die duale Aussage von Teil (a). Es reicht also Teil (a) nachzuweisen. Da g ein Epimorphismus ist, folgt mit der Bemerkung 1.1.18, daß auch p_2 ein Epimorphismus ist. Es sei nun $(\ker p_2, k_{p_2})$ der Kern des Morphismus p_2 und $(\ker g, k_g)$ der Kern des Morphismus g. Da $p_2 \circ f \circ k_g = p_1 \circ g \circ k_g = 0$ gilt, existiert genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(\ker g, \ker p_2)$ mit $k_{p_2} \circ h = f \circ k_g$. Bezeichnet $(\mathrm{coim}\, g, ci_g)$ bzw. $(\mathrm{coim}\, p_2, ci_{p_2})$ das Kobild von g bzw. von p_2, so ist damit

$ci_{p_2} \circ f \circ k_g = ci_{p_2} \circ k_{p_2} \circ h = 0$. Das bedeutet, daß genau ein Morphismus $v \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coim} g, \operatorname{coim} p_2)$ existiert mit $v \circ ci_g = ci_{p_2} \circ f$. Insgesamt erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "ci_{p_2}"] & \operatorname{coim} p_2 \arrow[r, "\tilde{p}_2"] & P \\ E \arrow[u, "f"] \arrow[r, "ci_g"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & \operatorname{coim} g \arrow[u, "v"'] \arrow[r, "\tilde{g}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & G \arrow[u, "p_1"'] \end{tikzcd} ,$$

wobei $\tilde{p}_2$ den kanonischen Morphismus in $\operatorname{Mor}(\operatorname{coim} p_2, P)$ mit $p_2 = \tilde{p}_2 \circ ci_{p_2}$ bezeichnet und entsprechend $\tilde{g}$. Der Teil (I) des Diagramms kommutiert wegen der Faktorisierungseigenschaft von v. Der Teil (II) kommutiert wegen $\tilde{p}_2 \circ v \circ ci_g = \tilde{p}_2 \circ ci_{p_2} \circ f = p_2 \circ f = p_1 \circ g = p_1 \circ \tilde{g} \circ ci_g$ und der Tatsache, daß ci_g ein Epimorphismus ist. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß $(P, \tilde{p}_2, p_1)$ gerade der Pushout von v und $\tilde{g}$ ist. Dazu sei $q_1 \in \operatorname{Mor}(G, Z)$ und $q_2 \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coim} p_2, Z)$ mit $q_1 \circ \tilde{g} = q_2 \circ v$. Dann gilt auch $q_1 \circ g = q_1 \circ \tilde{g} \circ ci_g = q_2 \circ v \circ ci_g = q_2 \circ ci_{p_2} \circ f$. Der Pushout (P, p_1, p_2) sichert damit die Existenz genau eines Morphismus $h \in \operatorname{Mor}(P, Z)$ mit $h \circ p_1 = q_1$ und $h \circ p_2 = q_2 \circ ci_{p_2}$. Nun ist ci_{p_2} ein Epimorphismus, also folgt aus $q_2 \circ ci_{p_2} = h \circ p_2 = h \circ \tilde{p}_2 \circ ci_{p_2}$, daß $q_2 = h \circ \tilde{p}_2$ gilt. Damit ist $(P, \tilde{p}_2, p_1)$ gerade der Pushout von v und $\tilde{g}$. Da nach der Bemerkung 1.1.18 Isomorphismen auf Pushouts übergeben werden, folgt schließlich die Behauptung.

Bemerkung 1.1.21 Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie.

(a) Ist $f \in \operatorname{Mor}(E, F)$ ein Monohomomorphismus und gilt $f = h \circ g$ für ein $g \in \operatorname{Mor}(E, G)$ und ein $h \in \operatorname{Mor}(G, F)$, dann ist auch g ein Monohomomorphismus. Offensichtlich ist g ein Monomorphismus, das bedeutet, daß $g = i_g \circ \tilde{g}$ gilt, wobei $i_g \in \operatorname{Mor}(\operatorname{im} g, G)$ das Bild von g und $\tilde{g} \in \operatorname{Mor}(E, \operatorname{im} g)$ den von g induzierten kanonischen Morphismus bezeichnet. Im selben Kontext gilt dann auch $i_f \circ \tilde{f} = f$. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß $\tilde{g}$ ein Isomorphismus ist. Es sei $(\operatorname{coker} f, c_f)$ der Kokern von f. Dann gilt $c_f \circ h \circ i_g \circ \tilde{g} = c_f \circ h \circ g = c_f \circ f = 0$ und, da $\tilde{g}$ stets ein Bimorphismus ist, folgt $c_f \circ h \circ i_g = 0$. Damit sichert das Bild von f die Existenz eines Morphismus $v \in \operatorname{Mor}(\operatorname{im} g, \operatorname{im} f)$ mit $i_f \circ v = h \circ i_g$. Da i_f stets ein Monomorphismus ist, folgt aus $i_f \circ v \circ \tilde{g} = h \circ i_g \circ \tilde{g} = h \circ g = f = i_f \circ \tilde{f}$, daß $v \circ \tilde{g} = \tilde{f}$ ist. Setzen wir $w := \tilde{f}^{-1} \circ v \in \operatorname{Mor}(\operatorname{im} g, E)$, dann gilt $w \circ \tilde{g} = \tilde{f}^{-1} \circ v \circ \tilde{g} = \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} = I_E$. Nun ist $\tilde{g}$ stets ein Epimorphismus, also ist auch $\tilde{g} \circ w = I_{\operatorname{im} g}$.

Entsprechend erhalten wir die duale Aussage: Ist $f \in \operatorname{Mor}(E, F)$ ein Epihomomorphismus und gilt $f = h \circ g$ für ein $g \in \operatorname{Mor}(E, G)$ und ein $h \in \operatorname{Mor}(G, F)$, dann ist auch h ein Epihomomorphismus.

(b) Es sei $f \in \operatorname{Mor}(E, F)$ ein Homomorphismus und $g \in \operatorname{Mor}(F, G)$ ein Monohomomorphismus, dann ist $g \circ f \in \operatorname{Mor}(E, G)$ ein Homomorphismus. Denn es sei $(\operatorname{im} f, i_f)$ bzw. $(\operatorname{im} g \circ f, i_{g \circ f})$ das Bild von f bzw. von $g \circ f$. Bezeichnet $(\ker g \circ f, k_{g \circ f})$ bzw. $(\ker f, k_f)$ den Kern von $g \circ f$ bzw. f, so ist, da g ein Monomorphismus ist, $\ker g \circ f = \ker f$. Damit gilt für das Kobild $\operatorname{coim} g \circ f = \operatorname{coim} f$. Es sei $\widetilde{g \circ f} \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coim} g \circ f, \operatorname{im} g \circ f)$ bzw. $\tilde{f} \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coim} f, \operatorname{im} f)$ der kanonische Morphismus, so gilt $g \circ f = i_{g \circ f} \circ \widetilde{g \circ f} \circ ci_f$ bzw. $f = i_f \circ \tilde{f} \circ ci_f$. Es sei weiter $(\operatorname{im} g, i_g)$ das Bild von g und $(\operatorname{coker} f, c_f)$ bzw. $(\operatorname{coker} g, c_g)$ der Kokern von f bzw. g. Aus $0 = c_g \circ g \circ f = c_g \circ i_{g \circ f} \circ \widetilde{g \circ f} \circ ci_f$ folgt $0 = c_g \circ i_{g \circ f}$. Damit existiert genau ein Morphismus $h \in \operatorname{Mor}(\operatorname{im} g \circ f, \operatorname{im} g)$ mit $i_g \circ h = i_{g \circ f}$. Da g ein Monohomomorphismus ist, gilt $g = i_g \circ \tilde{g}$, wobei $\tilde{g} \in \operatorname{Mor}(F, \operatorname{im} g)$ ein Isomorphismus ist. Wir erhalten $i_g \circ \tilde{g} \circ i_f \circ \tilde{f} \circ ci_f = g \circ f = i_{g \circ f} \circ \widetilde{g \circ f} \circ ci_f = i_g \circ h \circ \widetilde{g \circ f} \circ ci_f$, woraus $\tilde{g} \circ i_f \circ \tilde{f} = h \circ \widetilde{g \circ f}$ folgt. Damit gilt $i_f \circ \tilde{f} = \tilde{g}^{-1} \circ h \circ \widetilde{g \circ f}$. Nun ist $0 = c_f \circ i_f \circ f = c_f \circ \tilde{g}^{-1} \circ h \circ \widetilde{g \circ f}$, was $c_f \circ \tilde{g}^{-1} \circ h = 0$ impliziert. Also sichert das Bild von f die Existenz genau eines Morphismus $z \in \operatorname{Mor}(\operatorname{im} g \circ f, \operatorname{im} f)$ mit $i_f \circ z = \tilde{g}^{-1} \circ h$. Beachten wir, daß $\tilde{g} \circ i_f \circ \tilde{f} = h \circ \widetilde{g \circ f}$ gilt, so folgt damit $\tilde{g} \circ i_f \circ z \circ \widetilde{g \circ f} = h \circ \widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ i_f \circ \tilde{f}$. Da $\tilde{g} \circ i_f$ ein Monomorphismus ist, muß schon $z \circ \widetilde{g \circ f} = \tilde{f}$ gelten. Damit ist $z \circ \widetilde{g \circ f} \circ \tilde{f}^{-1} = I_{\operatorname{im} f}$. Nun ist $\widetilde{g \circ f} \circ \tilde{f}^{-1}$ stets ein Bimorphismus, also gilt auch $\widetilde{g \circ f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ z = I_{\operatorname{im} g \circ f}$. Setzen wir schließlich $\widetilde{g \circ f}^{-1} := \tilde{f}^{-1} \circ z$, so gilt $\widetilde{g \circ f} \circ \widetilde{g \circ f}^{-1} = I_{\operatorname{im} f}$ und $\widetilde{g \circ f}^{-1} \circ \widetilde{g \circ f} = \tilde{f}^{-1} \circ z \circ \widetilde{g \circ f} = I_{\operatorname{im} g \circ f}$.

Entsprechend erhalten wir die duale Aussage: Es sei $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ ein Epihomomorphismus und $g \in \mathrm{Mor}\,(F, G)$ ein Homomorphismus, dann ist $g \circ f \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ ein Homomorphismus.

Proposition 1.1.22 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie.*

(a) Es sei (P, p_1, p_2) der Pushout von $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ und (Q, q_1, q_2) der Pullback von p_2 und p_1, dann existiert genau ein Epimorphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(E, Q)$ mit $q_1 \circ h = g$ und $q_2 \circ h = f$.

(b) Es sei (P, p_1, p_2) der Pullback von $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$ und (Q, q_1, q_2) der Pushout von p_2 und p_1, dann existiert genau ein Monomorphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(Q, E)$ mit $h \circ q_1 = g$ und $h \circ q_2 = f$.

Beweis: Da (b) die duale Aussage von (a) ist, reicht es (a) zu zeigen. Wir betrachten $p \in \mathrm{Mor}\,(E, F \times G)$ mit $\pi_G \circ p = -g$ und $\pi_F \circ p = f$. Ist $(\mathrm{coker}\, p, c_p)$ der Kokern von p, so ist, wie der Beweis von Proposition 1.1.16 zeigt, $(\mathrm{coker}\, p, c_p \circ \omega_G, c_p \circ \omega_F)$ ein Pushout von f und g. Es sei nun $(\mathrm{im}\, p, i_p)$ das Bild von p. Dann ist $(\mathrm{im}\, p, -\pi_G \circ i_p, \pi_F \circ i_p)$ ein Pullback von $c_p \circ \omega_F$ und $c_p \circ \omega_G$. Denn zunächst gilt $-(c_p \circ \omega_G \circ (-\pi_G \circ i_p) + c_p \circ \omega_F \circ \pi_F \circ i_p = c_p \circ \omega_G \circ \pi_G \circ i_p + c_p \circ \omega_F \circ \pi_F \circ i_p = c_p \circ (\omega_G \circ \pi_G + \omega_F \circ \pi_F) \circ i_p = c_p \circ i_p = 0$. Sind $v_1 \in \mathrm{Mor}\,(Z, G)$ und $v_2 \in \mathrm{Mor}\,(Z, F)$ zwei beliebige Morphismen mit $c_p \circ \omega_G \circ v_1 = c_p \circ \omega_F \circ v_2$, dann folgt $c_p \circ (-(\omega_G \circ v_1) + \omega_F \circ v_2) = 0$. Wegen der universellen Faktorisierungseigenschaft des Bildes existiert damit genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(Z, \mathrm{im}\, P)$ mit $i_p \circ h = -(\omega_G \circ v_1) + \omega_F \circ v_2$. Schließlich gilt dann auch $-(\pi_G \circ i_p) \circ h = \pi_G \circ \omega_G \circ v_1 - \pi_G \circ \omega_F \circ v_2 = v_1$ und entsprechend $\pi_F \circ i_p \circ h = v_2$. Also ist $(\mathrm{im}\, p, -\pi_G \circ i_p, \pi_F \circ i_p)$ ein Pullback von $c_p \circ \omega_F$ und $c_p \circ \omega_G$.
Es sei $ci_p \in \mathrm{Mor}\,(E, \mathrm{coim}\, p)$ das Kobild von p und $\tilde{p} \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coim}\, p, \mathrm{im}\, p)$ der von p induzierte Morphismus, dann ist $\tilde{p} \circ ci_p$ in einer halbabelschen Kategorie stets ein Epimorphismus. Es gilt $-(\pi_G \circ i_p) \circ (\tilde{p} \circ ci_p) = -(\pi_G \circ p) = g$ und $(\pi_F \circ i_p) \circ (\tilde{p} \circ ci_p) = \pi_F \circ p = f$. Da Pullbacks und Pushouts bis auf kanonische Isomorphien eindeutig bestimmt sind, folgt die Behauptung.

Proposition 1.1.23 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie.*

(a) Es sei (P, p_1, p_2) der Pushout von $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$. Ist g oder f ein Monohomomorphismus, dann ist (E, g, f) der Pullback von p_2 und p_1.

(b) Es sei (P, p_1, p_2) der Pullback von $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$. Ist g oder f ein Epihomomorphismus, dann ist (E, g, f) der Pushout von p_2 und p_1.

Beweis: Es sei (Q, q_1, q_2) der Pullback von p_2 und p_1. Mit der Proposition 1.1.22 existiert genau ein Epimorphimus $h \in \mathrm{Mor}\,(E, Q)$ mit $q_1 \circ h = g$ und $q_2 \circ h = f$. Da g ein Monohomomorphismus ist, folgt mit der Bemerkung 1.1.21 (a), daß auch h ein Monohomomorphismus ist. Insgesamt ist also h ein Isomorphismus und es folgt die Behauptung. Damit gilt auch der Teil (b) als duale Aussage von (a).

Proposition 1.1.24 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie.*

(a) Es sei (P, p_1, p_2) der Pushout von $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$. Weiter sei $Q \in \mathrm{Mor}\,(G, Z)$ mit $\ker Q = \mathrm{im}\, g$. Für den induzierten Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(P, Z)$ mit $h \circ p_1 = Q$ und $h \circ p_2 = 0$ gilt dann $\ker h = \mathrm{im}\, p_2$.

(b) Es sei (P, p_1, p_2) der Pullback von $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$. Weiter sei $J \in \mathrm{Mor}\,(Z, G)$ mit $\mathrm{im}\, J = \ker g$. Für den induzierten Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(Z, P)$ mit $p_1 \circ h = J$ und $p_2 \circ h = 0$ gilt dann $\mathrm{im}\, h = \ker p_2$.

Beweis: Es sei $(\operatorname{coker} g, c_g)$ bzw. $(\operatorname{coker} c_{p_2}, c_{p_2})$ der Kokern von g bzw. von p_2 und $(\ker Q, k_Q)$ bzw. $(\ker h, k_h)$ der Kern von Q bzw. h. Weiter sei $(\operatorname{coim} Q, ci_Q)$ das Kobild von Q und $(\operatorname{im} Q, i_Q)$ das Bild von Q. Aus $\operatorname{im} g = \ker Q$ folgt stets $\operatorname{coker} g = \operatorname{coim} Q$. Denn es ist $c_g \circ k_Q = 0$, da $k_Q = i_g$ gilt, wobei $(\operatorname{im} g, i_g)$ gerade das Bild von g bezeichnet. Ist andererseits $j \in \operatorname{Mor}(G, H)$ mit $j \circ k_Q = 0$, dann gilt auch $j \circ g = 0$, da g über sein Bild bzw. über den Kern von Q faktorisiert. Somit existiert genau ein Morphismus $\tilde{j} \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coker} g, H)$ mit $\tilde{j} \circ c_g = j$. Damit gilt auch die duale Aussage: Ist $\operatorname{coker} g = \operatorname{coim} Q$, so folgt stets $\operatorname{im} g = \ker Q$. Insgesamt verhält sich also (b) dual zu (a). Im folgenden weisen wir (a) nach. Die Faktorisierungseigenschaft des Pushout liefert dann genau einen Morphismus $v \in \operatorname{Mor}(P, \operatorname{coker} g = \operatorname{coim} Q)$ mit $v \circ p_1 = c_g = ci_Q$ und $v \circ p_2 = 0$. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß gerade $h = i_Q \circ \tilde{Q} \circ v$ gilt, wobei $\tilde{Q}$ die von Q induzierte Abbildung zwischen $\operatorname{coim} Q$ und $\operatorname{im} Q$ bezeichnet. Es ist $i_Q \circ \tilde{Q} \circ v \circ p_1 = i_Q \circ \tilde{Q} \circ ci_Q = Q$ und $i_Q \circ \tilde{Q} \circ v \circ p_2 = 0$. Aus der Eindeutigkeit des Morphismus h folgt $h = i_Q \circ \tilde{Q} \circ v$.
Nun gilt es $\ker h = \operatorname{im} p_2$ zu zeigen. Es ist $c_{p_2} \circ p_1 \circ g = c_{p_2} \circ p_2 \circ f = 0$. Damit sichert der Kokern von g die Existenz eines Morphismus $z \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coker} g, \operatorname{coker} p_2)$ mit $z \circ c_g = c_{p_2} \circ p_1$. Für z gilt: $z \circ v \circ p_1 = z \circ c_g = c_{p_2} \circ p_1$ und $z \circ v \circ p_2 = 0 = c_{p_2} \circ p_2$. Die Eindeutigkeit der Faktorisierung eines Pushout impliziert dann $z \circ v = c_{p_2}$. Da $0 = h \circ k_h = i_Q \circ \tilde{Q} \circ v \circ k_h$ gilt und i_Q stets ein Monomorphismus und $\tilde{Q}$ stets ein Bimorphismus ist, folgt $v \circ k_h = 0$. Insgesamt erhalten wir $c_{p_2} \circ k_h = z \circ v \circ k_h = 0$.
Sei nun $j \in \operatorname{Mor}(H, P)$ mit $c_{p_2} \circ j = 0$. Da $h \circ p_2 = 0$ gilt, faktorisiert h bezüglich eines Morphismus $w \in \operatorname{Mor}(\operatorname{coker} p_2, Z)$ über den Kokern von p_2. Somit gilt auch $h \circ j = w \circ c_{p_2} \circ j = 0$. Der Kern von h liefert schließlich einen eindeutig bestimmten Morphismus $\tilde{j} \in \operatorname{Mor}(H, \ker h)$ mit $k_h \circ \tilde{j} = j$ und es folgt die Behauptung.

Definition 1.1.25 *Es sei $\mathcal{C}$ ein halbabelsche Kategorie.*

(a) Eine Folge von Morphismen

$$\cdots \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow \cdots$$

in $\mathcal{C}$ heißt Komplex, falls die Hintereinanderausführung zweier Morphismen stets der Nullmorphismus ist.

(b) Ein Komplex heißt azyklisch in F, falls $\operatorname{im} f = \ker g$ gilt.

(c) Ein Komplex heißt linksexakt bzw. rechtsexakt in F, falls er azyklisch in F ist und f bzw. g ein Homomorphismus ist.

(d) Ein Komplex heißt exakt in F, falls er links- und rechtsexakt in F ist.

(e) Ein Komplex heißt exakt, falls er an allen Stellen exakt ist.

(f) Eine kurze Sequenz in $\mathcal{C}$ ist ein Komplex der Form

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0.$$

Aus homologischer Sicht ist die folgende Klasse von Kategorien (siehe [Wen] Definition 5.1.2) von besonderem Interesse:

Definition 1.1.26 *Eine halbabelsche Kategorie $\mathcal{C}$ heißt quasiabelsch, falls für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow E \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} Z \longrightarrow 0$ gilt:*

(a) für jeden Morphismus $f \in \operatorname{Mor}(E, F)$ existiert folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow f & & \uparrow & & \uparrow I & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{J} & G & \xrightarrow{Q} & Z & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{1}$$

(b) *für jeden Morphismus* $f \in \mathrm{Mor}\,(F, Z)$ *existiert folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & E & \xrightarrow{J} G & \xrightarrow{Q} Z & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow I & \uparrow & \uparrow f & \\ 0 \longrightarrow & E & \longrightarrow P & \longrightarrow F & \longrightarrow 0. \end{array} \tag{2}$$

Wann eine halbabelsche Kategorie quasiabelsch ist, zeigt folgender

Satz 1.1.27 *Es sei* $\mathcal{C}$ *eine halbabelsche Kategorie.*

(a) $\mathcal{C}$ *besitzt genau dann die Eigenschaft 1.1.26 (a), falls für den Pushout* (P, p_1, p_2) *von zwei beliebigen Morphismen* $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ *und* $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ *gilt: Ist* g *ein Monohomomorphismus, dann ist auch* p_2 *ein Monohomomorphismus.*

(b) $\mathcal{C}$ *besitzt genau dann die Eigenschaft 1.1.26 (b), falls für den Pullback* (P, p_1, p_2) *von zwei beliebigen Morphismen* $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ *und* $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$ *gilt: Ist* g *ein Epihomomorphismus, dann ist auch* p_2 *ein Epihomomorphismus.*

Beweis: Es sei $0 \longrightarrow E \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} Z \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz. Wir betrachten den Pushout (P, p_1, p_2) von f und J. Aufgrund der universellen Eigenschaften des Pushout und der Bemerkung 1.1.21 (b) und der Propositionen 1.1.24 folgt die Behauptung unmittelbar aus der Voraussetzung.

Sind andererseits $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ zwei beliebige Morphismen, wobei g ein Monohomomorphismus ist, dann erhalten wir folgende kurze exakte Sequenz:
$0 \longrightarrow E \xrightarrow{g} G \xrightarrow{c_g} \mathrm{coker}\, g \longrightarrow 0$, wobei $(\mathrm{coker}\, g, c_g)$ den Kokern von g bezeichnet. Die Eigenschaft 1.1.26 (1) liefert dann ein Objekt $\tilde{P} \in \mathrm{Obj}\,(C)$ und zwei Morphismen $q_1 \in \mathrm{Mor}\,(G, \tilde{P})$ und $q_2 \in \mathrm{Mor}\,(F, \tilde{P})$ mit $q_2 \circ f = q_1 \circ g$, wobei q_2 ein Monohomomorphismus ist. Es sei (P, p_1, p_2) der Pushout von f und g. Dann existiert genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(P, \tilde{P})$ mit $h \circ p_1 = q_1$ und $h \circ p_2 = q_2$. Da q_2 ein Monohomomorphismus ist, folgt aus der Bemerkung 1.1.21 (a), daß auch p_2 ein Monohomomorphismus ist. Damit wäre (a) gezeigt. (b) ist gerade die duale Aussage von (a).

Bemerkung 1.1.28 Aufgrund der Symmetrie können wir den Satz 1.1.27 (a) auch wie folgt formulieren: $\mathcal{C}$ besitzt genau dann die Eigenschaft 1.1.26 (a), falls für den Pushout (P, p_1, p_2) von zwei beliebigen Morphismen $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ gilt: Ist f ein Monohomomorphismus, dann ist auch p_1 ein Monohomomorphismus. Analoges gilt auch für die Aussage 1.1.27 (b) .

Berücksichtigen wir den Satz 1.1.27, so liefert der folgende Satz eine Charakterisierung von quasiabelschen Kategorien:

Satz 1.1.29 *Es sei* $\mathcal{C}$ *eine halbabelsche Kategorie.*

(a) *Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

- (i) *Es sei* $p \in \mathrm{Mor}\,(E, F \times G)$ *und* $(\mathrm{coker}\, p, c_p)$ *der Kokern und* $(\mathrm{im}\, p, i_p)$ *das Bild von* p. *Ist* $\pi_G \circ i_p$ *ein Monohomomorphismus, so ist* $c_p \circ \omega_F$ *ein Monohomomorphismus.*
- (ii) *Für den Pushout* (P, p_1, p_2) *von zwei beliebigen Morphismen* $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ *und* $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ *gilt: Ist* g *ein Monohomomorphismus, dann ist auch* p_2 *ein Monohomomorphismus.*
- (iii) *Ist* $A \in \mathrm{Mor}\,(F \times G, Z)$ *ein Epihomomorphismus, für den* $\pi_G \circ k_A \in \mathrm{Mor}\,(\ker A, G)$ *ein Monohomomorphismus ist, so ist* $A \circ \omega_F \in \mathrm{Mor}\,(F, Z)$ *ein Monohomomorphismus.*

(b) *Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

- (i) *Es sei* $p \in \mathrm{Mor}\,(F \times G, E)$ *und* $(\ker p, k_p)$ *der Kern und* $(\mathrm{coim}\, p, ci_p)$ *das Kobild von* p. *Ist* $ci_p \circ \omega_G$ *ein Epihomomorphismus, so ist* $\pi_F \circ k_p$ *ein Epihomomorphismus.*

(ii) *Für den Pullback (P, p_1, p_2) von zwei beliebigen Morphismen $f \in \mathrm{Mor}\,(F, E)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(G, E)$ gilt: Ist g ein Epihomomorphismus, dann ist auch p_2 ein Epihomomorphismus.*

(iii) *Ist $A \in \mathrm{Mor}\,(Z, F \times G)$ ein Monohomomorphismus, für den $c_A \circ \omega_G \in \mathrm{Mor}\,(G, \mathrm{coker}\,A)$ ein Epihomomorphismus ist, so ist $\pi_F \circ A \in \mathrm{Mor}\,(Z, F)$ ein Epihomomorphismus.*

Beweis: Im folgenden weisen wir den Teil (a) nach. Die Aussage (b) ist die duale Aussage zu (a).
$''(i) \Rightarrow (ii)''$: Es sei $f \in \mathrm{Mor}\,(E, F)$ und $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ und (P, p_1, p_2) der Pushout von f und g. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß im Fall, daß g ein Monohomomorphismus ist, auch p_2 ein Monohomomorphismus ist. Dazu betrachten wir den Morphismus $p \in \mathrm{Mor}\,(E, F \times G)$ mit $\pi_G \circ p = -g$ und $\pi_F \circ p = f$. Wie der Beweis der Proposition 1.1.16 zeigt, ist $(\mathrm{coker}\,p, c_p \circ \omega_G, c_p \circ \omega_F)$ ein Pushout von f und g. In der Proposition 1.1.22 haben wir nachgewiesen, daß $(\mathrm{im}\,p, -\pi_G \circ i_p, \pi_F \circ i_p)$ ein Pullback von $c_p \circ \omega_F$ und $c_p \circ \omega_G$ ist. Ist g ein Monohomomorphismus, so ist nach der Proposition 1.1.23 (E, g, f) ein Pullback von $c_p \circ \omega_F$ und $c_p \circ \omega_G$. Da Pullbacks bis auf kanonische Isomorphien eindeutig bestimmt sind, ist unter Berücksichtigung der Bemerkung 1.1.21 (b), auch der Morphismus $-\pi_G \circ i_p$ bzw. $\pi_G \circ i_p$ ein Monohomomorphismus. Damit folgt nach Voraussetzung, daß $c_p \circ \omega_F$ ein Monohomomorphismus ist. Da Pushouts bis auf kanonische Isomorphien eindeutig bestimmt sind, folgt zusammen mit der Bemerkung 1.1.21 (b) schließlich die Behauptung.

$''(ii) \Rightarrow (iii)''$: Es sei $A \in \mathrm{Mor}\,(F \times G, Z)$ ein Epihomomorphismus, so daß $\pi_G \circ k_A \in \mathrm{Mor}\,(\ker A, G)$ ein Monohomomorphismus ist. Dann gilt $A \circ \omega_G \circ \pi_G \circ k_A + A \circ \omega_F \circ \pi_F \circ k_A = A \circ (\omega_G \circ \pi_G + \omega_F \circ \pi_F) \circ k_A = A \circ k_A = 0$. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß $(Z, -A \circ \omega_G, A \circ \omega_F)$ der Pushout von $\pi_F \circ k_A$ und $\pi_G \circ k_A$ ist. Dazu sei $q_1 \in \mathrm{Mor}\,(G, H)$ und $q_2 \in \mathrm{Mor}\,(F, H)$ mit $q_1 \circ \pi_G \circ k_A = q_2 \circ \pi_F \circ k_A$. Dann gilt $(-q_1 \circ \pi_G + q_2 \circ \pi_F) \circ k_A = 0$. Damit sichert das Kobild von A die Existenz genau eines Morphismus $v \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coim}\,A, H)$ mit $-q_1 \circ \pi_G + q_2 \circ \pi_F = v \circ ci_A$. Dabei sei $(\mathrm{coim}\,A, ci_A)$ das Kobild von A. Da A ein Epihomomorphismus ist, faktorisiert $A = \tilde{A} \circ ci_A$ über sein Kobild, wobei $\tilde{A} \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coim}\,A, Z)$ ein Isomorphismus ist. Setzen wir $h := v \circ \tilde{A}^{-1}$, so erhalten wir $h \circ -A \circ \omega_G = -(v \circ \tilde{A}^{-1} \circ A \circ \omega_G) = -(v \circ \tilde{A}^{-1} \circ \tilde{A} \circ ci_A \circ \omega_G) = -(v \circ ci_A \circ \omega_G) = -((-q_1 \circ \pi_G + q_2 \circ \pi_F) \circ \omega_G) = q_1$ und entsprechend $h \circ A \circ \omega_F = q_2$. Existiert ein weiterer Morphismus $\tilde{h} \in \mathrm{Mor}\,(Z, H)$ mit $\tilde{h} \circ (-A \circ \omega_G) = q_1$ und $\tilde{h} \circ A \circ \omega_F = q_2$, dann ist $\tilde{h} \circ A = \tilde{h} \circ A \circ (\omega_G \circ \pi_F + \omega_F \circ \pi_F) = h \circ A$. Da A ein Epimorphismus ist, folgt $\tilde{h} = h$. Damit ist $(Z, -A \circ \omega_G, A \circ \omega_F)$ der Pushout von $\pi_F \circ k_A$ und $\pi_G \circ k_A$. Aus der Voraussetzung folgt schließlich, daß $A \circ \omega_F$ ein Monohomomorphismus ist.

$''(iii) \Rightarrow (i)''$: Da der Kokern $c_p \in \mathrm{Mor}\,(F \times G, \mathrm{coker}\,p)$ ein Epihomomorphismus ist und der Kern des Kokerns stets das Bild ist, folgt damit nach Voraussetzung, daß $c_p \circ \omega_F$ ein Monohomomorphismus ist.

Beispiel 1.1.30 (a) Die Kategorie $\mathcal{LCS}$ der lokalkonvexen Räume ist quasiabelsch. Unter Beachtung des Satzes 1.1.27 reicht es, dazu die Eigenschaften (a) (i) und (b) (i) aus dem Satz 1.1.29 nachzuweisen. Um die Eigenschaft (a) (i) nachzuweisen, reicht es, zu zeigen: Ist $A \subset F \times G$ ein Unterraum und $\pi_G|_A$ ein Monohomomorphismus, so ist $q \circ \omega_F$, wobei q die Quotientenabbildung von $F \times G$ auf $F \times G/A$ bezeichnet, ein Monohomomorphismus. Dazu sei U_F bzw. U_G eine Nullumgebung in F bzw. G. Zu U_F und U_G existiert eine Nullumgebung V_G in G mit $\pi_G((U_F \times U_G) \cap A) \supset V_G \cap \mathrm{im}\,\pi_G|_A$. Da die Abbildung $\pi_G|_A$ ein Monomorphismus ist, gilt dann nach einer einfachen Rechnung $q((U_F + U_F) \times 0) \supset (U_F \times V_G + A) \cap \mathrm{im}\,q|_{F \times 0}$. Offensichtlich ist $q \circ \omega_F$ ein Monomorphismus, und es folgt die Behauptung.
Um die Eigenschaft (b) (ii) nachzuweisen, reicht es, zu zeigen: Ist $A \subset F \times G$ ein Unterraum und $q \circ \omega_G$ ein Epihomomorphismus, wobei q die Quotientenabbildung von $F \times G$ auf $F \times G/A$ bezeichnet, so ist $\pi_F|_A$ ein Epihomomorphismus. Dazu sei U_F bzw. U_G eine Nullumgebung in F bzw. in G. Zu U_G existiert eine Nullumgebung V_F in F und eine Nullumgebung V_G in G mit $q(0 \times U_G) \supset V_F \times V_G + A$. Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V_G \subset U_G$ und $V_F \subset U_F$. Dann folgt $\pi_F((U_F \times (U_G - U_G)) \cap A) \supset \pi_F((V_F \times (V_G - U_G)) \cap A) \supset \pi_F(V_F \times V_G) = V_F$. Damit ist $\pi_F|_A$ ein Epihomomorphismus.

(b) Die Kategorie der Frécheträume $\mathcal{F}$ bzw. der Banachräume $\mathcal{B}$ unterscheiden sich in Hinblick auf Kerne, Kobilder und Monomorphismen nicht von der Kategorie $\mathcal{LCS}$ der lokalkonvexen Räume.

Das Bild eines Morphismus $T \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ in der Kategorie $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{B}$ ist jedoch der Abschluß $\overline{T(E)}$ in F. Beachten wir, daß aber aufgrund des Satzes über die offene Abbildung ein Morphismus T in der Kategorie $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{B}$ genau dann ein Homomorphismus ist, falls T offen auf $T(E)$ ist, so folgt wie in (a), daß die Kategorie $\mathcal{F}$ der Frécheträume bzw. $\mathcal{B}$ der Banachräume quasiabelsch ist.

Im folgenden weisen wir einige technische Hilfsmittel nach, die der Beweisführung in den nächsten Kapiteln dienen.

Proposition 1.1.31 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie und*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \stackrel{J_0}{\longrightarrow} & W & \stackrel{Q_0}{\longrightarrow} & V & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle L}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle T} & & \uparrow{\scriptstyle R} & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \stackrel{J}{\longrightarrow} & G & \stackrel{Q}{\longrightarrow} & Z & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Dann gilt: Es existiert genau dann ein Morphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}\,(G,F)$ mit $\Phi \circ J = L$, falls ein Morphismus $\Psi \in \mathrm{Mor}\,(Z,W)$ existiert mit $Q_0 \circ \Psi = R$.

Beweis: Im Beweis berücksichtigen wir, daß die beiden Aussagen der Proposition dual zueinander stehen. Es sei $\Phi \in \mathrm{Mor}\,(G,F)$ mit $L = \Phi \circ J$. Da Q ein Epihomomorphismus ist, gilt $Q = \tilde{Q} \circ ci_Q$, wobei $(\mathrm{coim}\, Q, ci_Q)$ das Kobild von Q und $\tilde{Q}$ den von Q induzierten Morphismus von $\mathrm{coim}\, Q$ nach Z bezeichnet. Weil J ein Monomorphismus ist, gilt $J = i_J \circ \tilde{J}$, wobei $(\mathrm{im}\, J, i_J)$ das Bild von J und $\tilde{J}$ den von J induzierten Morphismus von E auf $\mathrm{im}\, J$ bezeichnet. Setzen wir $\tilde{h} : G \longrightarrow W$ mit $\tilde{h} := T - J_0 \circ \Phi$, so gilt $\tilde{h} \circ J = T \circ J - J_0 \circ \Phi \circ J = T \circ J - J_0 \circ L = T \circ J - T \circ J = 0$. Da $\tilde{J}$ ein Bimorphismus ist, folgt daraus $\tilde{h} \circ i_J = 0$. Nun gilt $\mathrm{im}\, J = \ker Q$. Damit ist $\tilde{h} \circ k_Q = 0$, wobei $(\ker Q, k_Q)$ den Kern von Q bezeichnet. Dann existiert genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coim}\, Q, W)$ mit $h \circ ci_Q = \tilde{h}$. Insgesamt erhalten wir: $Q_0 \circ h \circ ci_Q = Q_0 \circ \tilde{h} = Q_0 \circ (T - J_0 \circ \Phi) = Q_0 \circ T = R \circ Q = R \circ \tilde{Q} \circ ci_Q$. Da ci_Q ein Epimorphismus ist, folgt somit $Q_0 \circ h = R \circ \tilde{Q}$. Die Behauptung folgt schließlich mit $\Psi := h \circ \tilde{Q}^{-1}$.

Definition 1.1.32 *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $E \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Ein Morphismus $P \in \mathrm{Mor}\,(E,E)$ heißt Projektor bzw. Projektion, falls $P \circ P = P$ gilt.*

Bemerkung 1.1.33 Jeder Projektor $P \in \mathrm{Mor}\,(E,E)$ in einer halbabelschen Kategorie ist ein Homomorphismus. Denn es sei $(\mathrm{im}\, P, i_P)$ das Bild von P, $(\mathrm{coim}\, P, ci_P)$ das Kobild von P und $\tilde{P} \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coim}\, P, \mathrm{im}\, P)$ der kanonische Morphismus, so daß $P = i_P \circ \tilde{P} \circ ci_P$ gilt. Dann folgt aus $i_P \circ \tilde{P} \circ ci_P = P = P \circ P = i_P \circ \tilde{P} \circ ci_P \circ i_P \circ \tilde{P} \circ ci_P$, daß $\tilde{P} \circ ci_P \circ i_p \circ \tilde{P} = \tilde{P}$ gilt. Da $\tilde{P}$ stets ein Bimorphismus ist, folgt einerseits $\tilde{P} \circ ci_P \circ i_P = I_{\mathrm{im}\, P}$ und andererseits $ci_P \circ i_P \circ \tilde{P} = I_{\mathrm{coim}\, P}$. Also ist $\tilde{P}$ ein Isomorphismus und damit P ein Homomorphismus.

Proposition 1.1.34 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie und*

$$0 \longrightarrow F \stackrel{J}{\longrightarrow} G \stackrel{Q}{\longrightarrow} E \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Es existiert ein Morphismus $L \in \mathrm{Mor}\,(G,F)$ mit $L \circ J = I_F$.

(b) Es existiert ein Morphismus $R \in \mathrm{Mor}\,(E,G)$ mit $Q \circ R = I_E$.

(c) Es existiert ein Projektor $P \in \mathrm{Mor}\,(G,G)$ mit $\mathrm{im}\, P = \mathrm{im}\, J = \ker Q$.

Beweis: Die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) folgt unmittelbar aus der Proposition 1.1.31.

"$(a) \Rightarrow (c)$": Es sei $L \in \mathrm{Mor}\,(G,F)$ mit $L \circ J = I_E$. Dann ist L ein Epimorphismus. Setzen wir $P := J \circ L$, dann gilt $J \circ L \circ J \circ L = J \circ L$. P ist also eine Projektion. Es gilt noch $\mathrm{im}\, P = \mathrm{im}\, J$ nachzuweisen. Bezeichnet $(\mathrm{coker}\, P, c_P)$ den Kokern von P, dann ist $0 = c_P \circ P = c_P \circ J \circ L$. Da L ein Epimorphismus ist, folgt daraus $c_P \circ i_J = 0$. Für den Kokern $(\mathrm{coker}\, J, c_J)$ von J gilt darüber hinaus $c_J \circ P = c_J \circ J \circ L = 0$. Damit existiert genau ein $\tilde{z} \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{coker}\, P, \mathrm{coker}\, J)$ mit $c_J = \tilde{z} \circ c_P$. Ist nun $v \in \mathrm{Mor}\,(Z,G)$ mit $c_P \circ v = 0$, dann gilt auch $c_J \circ v = \tilde{z} \circ c_P \circ v = 0$, woraus dann die Behauptung folgt.

"$(c) \Rightarrow (a)$": Es sei $P \in \mathrm{Mor}\,(G,G)$ mit $P \circ P = P$. Weiter sei $P = i_P \circ \tilde{P} \circ ci_P$ wie in der Bemerkung 1.1.33. Nach 1.1.33 gilt dann $\tilde{P}^{-1} = ci_P \circ i_p$. Laut Voraussetzung ist das Bild $(\mathrm{im}\, P, i_P)$ von P gerade das Bild $(\mathrm{im}\, J, i_J)$ von J. Da J ein Monohomomorphismus ist, gilt $J = i_J \circ \tilde{J}$, wobei $\tilde{J} \in \mathrm{Mor}\,(F, \mathrm{im}\, J)$ ein Isomorphismus ist. Setzen wir schließlich $L := \tilde{J}^{-1} \circ \tilde{P} \circ ci_P$, so erhalten wir $L \circ J = \tilde{J}^{-1} \circ \tilde{P} \circ ci_P \circ J = \tilde{J}^{-1} \circ \tilde{P} \circ ci_P \circ i_J \circ \tilde{J} = \tilde{J}^{-1} \circ \tilde{J} = I_F$.

Definition 1.1.35 *Eine kurze exakte Sequenz in einer halbabelschen Kategorie $\mathcal{C}$ zerfällt in $\mathcal{C}$, falls eine der Bedingungen (a)-(c) aus dem Satz 1.1.34 erfüllt ist.*
Die Abbildung L bzw. R aus dem Satz 1.1.34 bezeichnen wir als Linksinverse von J bzw. als Rechtsinverse von Q.

Unmittelbar aus der Definition einer quasiabelschen Kategorie erhalten wir den folgenden

Satz 1.1.36 *Es sei $\mathcal{C}$ eine quasiabelsche Kategorie und $E,\ F \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ zerfällt in $\mathcal{C}$.

(b) Für jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow H \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ und jeden Morphismus $\phi \in \mathrm{Mor}\,(H,F)$ existiert ein Morphismus $\psi \in \mathrm{Mor}\,(G,F)$ mit $\psi \circ J = \phi$.

(c) Für jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} H \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ und jeden Morphismus $\phi \in \mathrm{Mor}\,(E,H)$ existiert ein Morphismus $\psi \in \mathrm{Mor}\,(E,G)$ mit $Q \circ \psi = \phi$.

Proposition 1.1.37 *(a) Es sei*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & F & \xrightarrow{J_0} & W & \xrightarrow{Q_0} & V & \longrightarrow 0 \\ & {\scriptstyle L}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle T} & & & \\ 0 \longrightarrow & E & \xrightarrow{J} & G & \xrightarrow{Q} & Z & \longrightarrow 0. \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Dann existiert genau ein Morphismus $R \in \mathrm{Mor}\,(Z,V)$ mit $R \circ Q = Q_0 \circ T$.

(b) Es sei

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & F & \xrightarrow{J_0} & W & \xrightarrow{Q_0} & V & \longrightarrow 0 \\ & & & \uparrow{\scriptstyle T} & & \uparrow{\scriptstyle R} & \\ 0 \longrightarrow & E & \xrightarrow{J} & G & \xrightarrow{Q} & Z & \longrightarrow 0. \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Dann existiert genau ein Morphismus $L \in \mathrm{Mor}\,(E,F)$ mit $J_0 \circ L = T \circ J$.

Beweis: Da die Aussagen (a) und (b) des Satzes duale Aussagen sind, reicht es, den Teil (a) nachzuweisen. Es gilt $c_{J_0} \circ T \circ J = c_{J_0} \circ J_0 \circ L = 0$, wobei $(\mathrm{coker}\, J_0, c_{J_0})$ den Kokern von J_0 bezeichnet. Damit existiert genau ein Morphismus $S : \mathrm{coker}\, J \longrightarrow \mathrm{coker}\, J_0$ mit $S \circ c_J = c_{J_0} \circ T$, wobei $(\mathrm{coker}\, J, c_J)$ den Kokern von J bezeichnet. Es sei $Q = \tilde{Q} \circ ci_Q$ und $Q_0 = \tilde{Q}_0 \circ ci_{Q_0}$ wie in der Proposition 1.1.31. Beachten wir, daß aus $\mathrm{im}\, J_0 = \ker Q_0$ bzw. $\mathrm{im}\, J = \ker Q$ stets $\mathrm{coker}\, J_0 = \mathrm{coim}\, Q_0$ bzw.

$\operatorname{coker} J = \operatorname{coim} Q$ folgt und setzen wir $R := \tilde{Q}_0 \circ S \circ \tilde{Q}^{-1}$, so gilt: $R \circ Q = \tilde{Q}_0 \circ S \circ \tilde{Q}^{-1} \circ Q = \tilde{Q}_0 \circ S \circ ci_Q = \tilde{Q}_0 \circ c_{J_0} \circ T = Q \circ T$.
Um die Eindeutigkeit des Morphismus R nachzuweisen, sei $\tilde{R} \in \operatorname{Mor}(Z, V)$ mit $Q_0 \circ T = \tilde{R} \circ Q$. Dann folgt $ci_{Q_0} \circ T = \tilde{Q}_0^{-1} \circ \tilde{R} \circ \tilde{Q} \circ ci_Q$. Da $\operatorname{coker} J = \operatorname{coim} Q$ und $\operatorname{coker} J_0 = \operatorname{coim} Q_0$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit des Morphismus S aus der obigen Herleitung, daß $\tilde{Q}_0^{-1} \circ \tilde{R} \circ \tilde{Q} = S$ ist. Insgesamt folgt damit die Behauptung.

Lemma 1.1.38 *Es sei $\mathcal{C}$ eine quasiabelsche Kategorie.*

(a) Für jedes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r, "\tilde{J}"] & X \arrow[r, "\tilde{Q}"] & Y \arrow[r] & 0 \\
& F \arrow[u, "g"'] & & & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "J"] \arrow[u, "f"'] & G \arrow[r, "Q"] \arrow[uu, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[uu, "k"] & 0
\end{tikzcd}$$

existiert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r, "\tilde{J}"] & X \arrow[r, "\tilde{Q}"] & Y \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & F \arrow[r, dotted, "p_2"] \arrow[u, "g"'] & P \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[u, dotted, "w"] & Z \arrow[r, dotted] \arrow[u, "k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "J"] \arrow[u, "f"'] & G \arrow[r, "Q"] \arrow[u, dotted, "p_1"] & Z \arrow[r] \arrow[u, "I"] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei (P, p_1, p_2) der Pushout zu f und J ist und $w \circ p_1 = h$ gilt. Die Abbildung w ist dadurch eindeutig bestimmt, daß $w \circ p_2 = \tilde{J} \circ g$ und $w \circ p_1 = h$ gilt.

(b) Für jedes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r, "\tilde{J}"] & X \arrow[r, "\tilde{Q}"] & Y \arrow[r] & 0 \\
& & & F \arrow[u, "f"] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "J"] \arrow[uu, "k"'] & G \arrow[r, "Q"] \arrow[uu, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[u, "g"] & 0
\end{tikzcd}$$

existiert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r, "\tilde{J}"] & X \arrow[r, "\tilde{Q}"] & Y \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & W \arrow[r, dotted, "j"] \arrow[u, "I"'] & P \arrow[r, dotted, "p_2"] \arrow[u, dotted, "p_1"] & F \arrow[r, dotted] \arrow[u, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "J"] \arrow[u, "k"'] & G \arrow[r, "Q"] \arrow[u, dotted, "w"] & Z \arrow[r] \arrow[u, "g"] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei (P, p_1, p_2) der Pullback zu f und $\tilde{Q}$ ist und $p_1 \circ w = h$ gilt. Die Abbildung w ist dadurch eindeutig bestimmt, daß $p_2 \circ w = g \circ Q$ und $p_1 \circ w = h$ gilt.

Beweis: Da (b) die duale Aussage zu (a) ist, reicht es, (a) nachzuweisen. Es sei (P, p_1, p_2) der Pushout von f und J. Dann erhalten wir wie im Beweis des Satzes 1.1.27 das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "p_2"] & P \arrow[r, "q"] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[u, "f"] \arrow[r, "J"] & G \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "Q"] & Z \arrow[u, "I"] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Da nun $\tilde{J} \circ g \circ f = h \circ J$ gilt, sichert der Pushout die Existenz genau einer Abbildung $w : P \longrightarrow X$, so daß $w \circ p_2 = \tilde{J} \circ g$ und $w \circ p_1 = h$ gilt. Es bleibt noch $\tilde{Q} \circ w = k \circ q$ nachzuweisen. Es ist einerseits $\tilde{Q} \circ w \circ p_1 = \tilde{Q} \circ h = k \circ Q = k \circ q \circ p_1$ und andererseits $\tilde{Q} \circ w \circ p_2 = \tilde{Q} \circ \tilde{J} \circ g = 0 = k \circ q \circ p_2$. Da der Pushout die Existenz genau einer Abbildung $s : P \longrightarrow Y$ garantiert mit $s \circ p_1 = 0$ und $s \circ p_2 = 0$, folgt damit $\tilde{Q} \circ w = k \circ q$ und insgesamt die Behauptung.

Lemma 1.1.39 *Es sei $\mathcal{C}$ eine quasiabelsche Kategorie.*

(a) Für jedes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
& & F_1 & & & \\
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "J_1"] & & G_1 \arrow[r, "Q_1"] & Z_1 \arrow[r] & 0 \\
& & F_2 \arrow[uu, "j_1^2"] & & & \\
0 \arrow[r] & E_2 \arrow[uu, "i_1^2"] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[rr, "J_2"] & & G_2 \arrow[uu, "g_1^2"] \arrow[r, "Q_2"] & Z_2 \arrow[uu, "z_1^2"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

existiert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[rr, dashed] & & F_1 \arrow[rr, dashed, "p_2^1"] & & P_1 \arrow[rr, dashed, "q_1"] & & Z_1 \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "J_1"] & & G_1 \arrow[ur, dashed, "p_1^1"] \arrow[rr, "Q_1"] & & Z_1 \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr] & & 0 & \\
& 0 \arrow[rr, dashed] & & F_2 \arrow[uu, "j_1^2"] \arrow[rr, dashed, "p_2^2"] & & P_2 \arrow[uu, dashed, "w"] \arrow[rr, dashed, "q_2"] & & Z_2 \arrow[uu, dashed, "z_1^2"] \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & E_2 \arrow[uu, "i_2^1"] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[rr, "J_2"] & & G_2 \arrow[uu, "g_1^2"] \arrow[ur, dashed, "p_1^2"] \arrow[rr, "Q_2"] & & Z_2 \arrow[uu, "z_1^2"] \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr] & & 0, &
\end{tikzcd}$$

wobei (P_1, p_1^1, p_2^1) der Pushout zu f_1 und J_1 und (P_2, p_1^2, p_2^2) der Pushout zu f_2 und J_2 ist. Die Abbildung $w : P_2 \longrightarrow P_1$ ist dadurch eindeutig bestimmt, daß $w \circ p_2^2 = p_2^1 \circ j_1^2$ und $w \circ p_1^2 = p_1^1 \circ g_1^2$ gilt.

(b) Für jedes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r, "J_1"] & G_1 \arrow[rr, "Q_1"] & & Z_1 \arrow[r] & 0 \\
& & & F_1 \arrow[ur, "f_1"] & & \\
0 \arrow[r] & E_2 \arrow[uu, "i_1^2"] \arrow[r, "J_2"] & G_2 \arrow[uu, "g_1^2"] \arrow[rr, "Q_2"] & & Z_2 \arrow[uu, "z_1^2"] \arrow[r] & 0 \\
& & & F_2 \arrow[uu, "j_1^2"] \arrow[ur, "f_2"] & &
\end{tikzcd}$$

existiert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr, "J_1"] & & G_1 \arrow[rr, "Q_1"] & & Z_1 \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr, dashed] & & E_1 \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr, dashed, "j_1"] & & P_1 \arrow[ur, dashed, "p_1^1"] \arrow[rr, dashed, "p_2^1"] & & F_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
& 0 \arrow[rr] & & E_2 \arrow[uu, "i_1^2"] \arrow[rr, "J_2"] & & G_2 \arrow[uu, "g_1^2"] \arrow[rr, "Q_2"] & & Z_2 \arrow[uu, "z_1^2"] \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr, dashed] & & E_2 \arrow[uu, dashed, "i_2^1"] \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr, dashed, "j_2"] & & P_2 \arrow[uu, dashed, "w"] \arrow[ur, dashed, "p_1^2"] \arrow[rr, dashed, "p_2^2"] & & F_2 \arrow[uu, "j_1^2"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[rr, dashed] & & 0,
\end{tikzcd}
$$

wobei (P_1, p_1^1, p_2^1) der Pullback zu Q_1 und f_1 und (P_2, p_1^2, p_2^2) der Pullback zu Q_2 und f_2 ist. Die Abbildung $w : P_2 \longrightarrow P_1$ ist dadurch eindeutig bestimmt, daß $p_2^1 \circ w = j_1^2 \circ p_2^2$ und $p_1^1 \circ w = g_1^2 \circ p_1^2$ gilt.

Beweis: Die Aussage (b) ist die duale Aussage zu (a). Im folgenden weisen wir (a) nach. Es sei (P_1, p_1^1, p_2^1) der Pushout zu f_1 und J_1 und (P_2, p_1^2, p_2^2) der Pushout zu f_2 und J_2, so erhalten wir wie im Beweis des Satzes 1.1.27 das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[rr, dashed] & & F_1 \arrow[rr, dashed, "p_2^1"] & & P_1 \arrow[rr, dashed, "q_1"] & & Z_1 \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "J_1"] & & G_1 \arrow[ur, dashed, "p_1^1"] \arrow[rr, "Q_1"] & & Z_1 \arrow[ur, dashed, "I"'] \arrow[rr] & & 0 \\
& 0 \arrow[rr, dashed] & & F_2 \arrow[uu, "j_1^2"] \arrow[rr, dashed, "p_2^2"] & & P_2 \arrow[rr, dashed, "q_2"] & & Z_2 \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & E_2 \arrow[uu, "i_1^2"] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[rr, "J_2"] & & G_2 \arrow[uu, "g_1^2"] \arrow[ur, dashed, "p_1^2"] \arrow[rr, "Q_2"] & & Z_2 \arrow[uu, "z_1^2"] \arrow[ur, dashed, "I"'] \arrow[rr] & & 0.
\end{tikzcd}
$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß $p_2^1 \circ j_1^2 \circ f_2 = p_2^1 \circ f_1 \circ i_1^2 = p_1^1 \circ J_1 \circ i_1^2 = p_1^1 \circ g_1^2 \circ J_2$ gilt. Damit garantiert der Pushout (P_2, p_1^2, p_2^2) die Existenz genau einer Abbildung $w : P_2 \longrightarrow P_1$ mit $w \circ p_2^2 = p_2^1 \circ j_1^2$ und $w \circ p_1^2 = p_1^1 \circ g_1^2$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $q_1 \circ w = z_1^2 \circ q_2$ gilt. Es ist einerseits $q_1 \circ w \circ p_1^2 = q_1 \circ p_1^1 \circ g_1^2 = Q_1 \circ g_1^2 = z_1^2 \circ Q_2 = z_1^2 \circ q_2 \circ p_1^2$ und andererseits $q_1 \circ w \circ p_2^2 = q_1 \circ p_2^1 \circ j_1^2 = 0 = z_1^2 \circ q_2 \circ p_2^2$. Da der Pushout die Existenz genau einer Abbildung $s : P_2 \longrightarrow Z_1$ garantiert mit $s \circ p_1^2 = 0$ und $s \circ p_2^2 = 0$, folgt $q_1 \circ w = z_1^2 \circ q_2$ und es folgt die Behauptung.

Definition 1.1.40 *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein (projektives) Spektrum bzw. projektives System $(F_n, j_n^m)_{n,m \in \mathbb{N}, n \leq m}$ in $\mathcal{C}$ ist ein Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Objekten in $\mathcal{C}$ und eine Familie $(j_n^m : F_m \longrightarrow F_n)_{n,m \in \mathbb{N}, n \leq m}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$, so daß $j_n^m \circ j_m^k = j_n^k$ für alle $n \leq m \leq k$ gilt. Dabei soll j_n^n für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade die Identität in F_n bezeichnen. Zur Vereinfachung schreiben wir $(F_n, j_n^m)_{n,m \in \mathbb{N}}$.*

Im folgenden sei L eine nicht-leere Menge, bestehend aus monoton wachsenden Abbildungen $l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:
(i) $\mathrm{id}, \mathrm{id} + 1 \in L$, (ii) $l_1, l_2 \in L \Rightarrow l_1 \circ l_2 \in L$ und
(iii) $l_1, l_2 \in L \Rightarrow \exists_{l_3 \in L}$ mit $l_3(n) < l_3(n+1) \, \forall_{n \in \mathbb{N}}$ und $l_3 \geq l_1, l_2$.

Definition 1.1.41 *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Zwei Spektren $(F_n, j_n^m)_{n,m \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{F}_n, \tilde{j}_n^m)_{n,m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}$ heißen L-äquivalent, falls ein $l \in L$ existiert, so daß Morphismen $T_n^{l(n)} : F_{l(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ und*

$S_n^{l(n)} : \tilde{F}_{l(n)} \longrightarrow F_n$ *existieren, so daß*

$$S_n^{l(n)} \circ T_{l(n)}^{l^2(n)} = j_n^{l^2(n)} \text{ bzw. } T_n^{l(n)} \circ S_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{j}_n^{l^2(n)} \text{ und} \tag{3}$$

$$\tilde{j}_n^m \circ T_m^{l(m)} = T_n^{l(n)} \circ j_{l(n)}^{l(m)} \text{ bzw. } j_n^m \circ S_m^{l(m)} = S_n^{l(n)} \circ \tilde{j}_{l(n)}^{l(m)} \tag{4}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ *und* $m \geq n$ *gilt.*
Im Fall $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \, l(n) \leq l(n+1) \; \forall_{n \in \mathbb{N}}\}$ *bezeichnen wir die Spektren schlicht als äquivalent.*

Offensichtlich definiert die obige Definition eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller abzählbarer Spektren in $\mathcal{C}$, und stimmt mit der Definition von äquivalenten überabzählbaren Spektren in [FW] 2.7 überein. Sie unterscheidet sich zunächst von der in [DV] Sec. 2 eingeführten Äquivalenzrelation zwischen abzählbaren projektiven Spektren in der Kategorie der Fréchetträume im Fall $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \, l(n) \leq l(n+1) \; \forall_{n \in \mathbb{N}}\}$ darin, daß sie zusätzlich die Eigenschaft (4) fordert. Im folgenden werden wir jedoch nachweisen, daß aus der Eigenschaft (3) schon die Eigenschaft (4) folgt. Der Grund dafür, daß wir diese vermeintlich zusätzliche Bedingung in die Definition miteinbeziehen, ist der, daß sie die Beweisführungen erheblich vereinfacht. Für den Beweis des folgenden Satzes 1.1.43 ist sie sogar unabdingbar.

Bemerkung 1.1.42 Die Eigenschaft (3) impliziert die Eigenschaft (4). Denn sind $(F_n, j_n^m)_{n,m \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{F}_n, \tilde{j}_n^m)_{n,m \in \mathbb{N}}$ zwei Spektren in einer Kategorie $\mathcal{C}$, so daß entsprechend der obigen Definition ein $k \in L$ existiert, so daß (3) gilt, dann erfüllen die Morphismen aus (3) folgende Eigenschaft:

$$\tilde{j}_n^{k^2(n)} \circ T_{k^2(n)}^{k^3(n)} = T_n^{k(n)} \circ j_{k^2(n)}^{k^3(n)} \text{ und } j_n^{k^2(n)} \circ S_{k^2(n)}^{k^3(n)} = S_n^{k(n)} \circ \tilde{j}_{k^2(n)}^{k^3(n)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Wir wählen die Folgen von Morphismen $(T_{k^{2(n-1)}(1)}^{k^{2n-1}(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S_{k^{2n-1}(1)}^{k^{2n}(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ und setzen zunächst $\tilde{T}_1^{k(1)} := T_1^{k(1)}$ und $\tilde{S}_m^{k^2(1)} := j_m^{k(1)} \circ S_{k(1)}^{k^2(1)}$ für $1 \leq m \leq k(1)$. Es sei $n \in \mathbb{N}$.
Für $k^{2(n-1)}(1) < m \leq k^{2n}(1)$ definieren wir $\tilde{T}_m^{k^{2n+1}(1)} := \tilde{j}_m^{k^{2n}(1)} \circ T_{k^{2n}(1)}^{k^{2n+1}(1)}$ und für $k^{2n-1}(1) < m \leq k^{2n+1}(1)$ setzen wir $\tilde{S}_m^{k^{2n+2}(1)} := j_m^{k^{2n+1}(1)} \circ S_{k^{2n+1}(1)}^{k^{2n+2}(1)}$. Auf diese Weise erhalten wir für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{k}(m) \in \mathbb{N}$ und ein $k'(m) \in \mathbb{N}$ und Morphismen $\tilde{T}_m^{\tilde{k}(m)} : F_{\tilde{k}(m)} \longrightarrow \tilde{F}_m$ und $\tilde{S}_m^{k'(m)} : \tilde{F}_{k'(m)} \longrightarrow F_m$, so daß $\tilde{T}_m^{\tilde{k}(m)} \circ j_{\tilde{k}(m)}^{\tilde{k}(m+1)} = \tilde{j}_m^{m+1} \circ \tilde{T}_{m+1}^{\tilde{k}(m+1)}$ und $\tilde{S}_m^{k'(m)} \circ \tilde{j}_{k'(m)}^{k'(m+1)} = j_m^{m+1} \circ \tilde{S}_{m+1}^{k'(m+1)}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.
Denn sei $m \in \mathbb{N}$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $k^{2(n-1)}(1) < m \leq k^{2n}(1)$ gilt. Dann ist $\tilde{T}_m^{\tilde{k}(m)} \circ j_{\tilde{k}(m)}^{\tilde{k}(m+1)} = \tilde{j}_m^{k^{2n}(1)} \circ T_{k^{2n}(1)}^{k^{2n+1}(1)} \circ j_{k^{2n+1}(1)}^{\tilde{k}(m+1)}$. Ist $k^{2(n-1)}(1) < m+1 \leq k^{2n}(1)$, so gilt $\tilde{j}_m^{m+1} \circ \tilde{T}_{m+1}^{\tilde{k}(m+1)} = \tilde{j}_m^{m+1} \circ j_{m+1}^{k^{2n}(1)} \circ \tilde{T}_{k^{2n}(1)}^{k^{2n+1}(1)}$. Im Fall, daß $k^{2n}(1) < m+1 \leq k^{2(n+1)}(1)$ gilt, erhalten wir einerseits $\tilde{j}_m^{m+1} \circ \tilde{T}_{m+1}^{\tilde{k}(m+1)} = \tilde{j}_m^{m+1} \circ \tilde{j}_{m+1}^{k^{2n+2}(1)} \tilde{T}_{k^{2n+2}(1)}^{k^{2n+3}(1)}$ und unter Berücksichtigung von (5) andererseits $\tilde{j}_m^{k^{2n}(1)} \circ T_{k^{2n}(1)}^{k^{2n+1}(1)} \circ j_{k^{2n+1}(1)}^{\tilde{k}(m+1)} = \tilde{j}_m^{k^{2n}(1)} \circ T_{k^{2n}(1)}^{k^{2n+1}(1)} \circ j_{k^{2n+1}(1)}^{k^{2n+3}(1)} = \tilde{j}_m^{k^{2n}(1)} \circ \tilde{j}_{k^{2n}(1)}^{k^{2n+2}(1)} \circ T_{k^{2n+2}(1)}^{k^{2n+3}(1)}$. Der Nachweis der entsprechenden Aussage für die Morphismen $S_m^{k'(m)}$ geht analog. Darüber hinaus bleibt die Eigenschaft (3) im folgenden Sinne erhalten: Es gilt $\tilde{T}_m^{\tilde{k}(m)} \circ \tilde{S}_{\tilde{k}(m)}^{k'(\tilde{k}(m))} = \tilde{j}_m^{k'(\tilde{k}(m))}$ und $\tilde{S}_m^{k'(m)} \circ \tilde{T}_{k'(m)}^{\tilde{k}(k'(m))} = j_m^{\tilde{k}(k'(m))}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Denn sei $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $k^{2(n-1)} < m \leq k^{2n}$. Dann gilt $\tilde{T}_m^{\tilde{k}(m)} \circ \tilde{S}_{\tilde{k}(m)}^{k'(\tilde{k}(m))} = \tilde{j}_m^{k^{2n}(1)} \circ T_{k^{2n}(1)}^{k^{2n+1}(1)} \circ S_{k^{2n+1}(1)}^{k^{2n+2}(1)} = \tilde{j}_m^{k^{2n+2}(1)}$.
Die Bedingung $\tilde{S}_m^{k'(m)} \circ \tilde{T}_{k'(m)}^{\tilde{k}(k'(m))} = j_m^{\tilde{k}(k'(m))}$ folgt analog. Es ist $\tilde{k}(n) \leq k^3(n)$ und $k'(n) \leq k^3(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir nun $l(n) := k^3(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist $l \in L$. Definieren wir schließlich $\hat{T}_m^{l(m)} := \tilde{T}_m^{\tilde{k}(m)} \circ j_{\tilde{k}(m)}^{l(m)}$ und $\hat{S}_m^{l(m)} := \tilde{S}_m^{k'(m)} \circ \tilde{j}_{k'(m)}^{l(m)}$, so erhalten wir Morphismen, die der Bedingung (3) und (4) genügen, und es folgt die Behauptung.

Wir beenden diesen Abschnitt mit der folgenden Anwendung, die eine Verallgemeinerung des in [DV] Proposition 3.2 eingeführten Verfahrens darstellt:

Proposition 1.1.43 *Es seien $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, $(G_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ Spektren in einer quasiabelschen Kategorie, so daß folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen existiert*

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{J_1} & G_1 & \xrightarrow{Q_1} & E_1 & \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{J_n} & G_n & \xrightarrow{Q_n} & E_n & \rightarrow 0 \\
 & \uparrow j_n^{n+1} & & \uparrow g_n^{n+1} & & \uparrow i_n^{n+1} & \\
0 \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{J_{n+1}} & G_{n+1} & \xrightarrow{Q_{n+1}} & E_{n+1} & \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & .
\end{array}
\tag{6}
$$

(a) *Es sei $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein weiteres Spektrum, so daß ein $l \in L$ und Morphismen $T_n^{l(n)} : \tilde{F}_{l(n)} \longrightarrow F_n$ und $S_n^{l(n)} : F_{l(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ existieren, so daß $S_n^{l(n)} \circ T_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{\jmath}_n^{l^2(n)}$ bzw. $T_n^{l(n)} \circ S_{l(n)}^{l^2(n)} = j_n^{l^2(n)}$ und $S_n^{l(n)} \circ j_{l(n)}^{l(n+1)} = \tilde{\jmath}_n^{n+1} \circ S_{n+1}^{l(n+1)}$ bzw. $T_n^{l(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l(n)}^{l(n+1)} = j_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann existiert ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, so daß das folgende Diagramm mit exakten Zeilen*

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 \longrightarrow & \tilde{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{J}_1} & \tilde{G}_1 & \xrightarrow{\tilde{Q}_1} & E_{l(1)} & \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & \tilde{F}_n & \xrightarrow{\tilde{J}_n} & \tilde{G}_n & \xrightarrow{\tilde{Q}_n} & E_{l(n)} & \rightarrow 0 \\
 & \uparrow \tilde{\jmath}_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{g}_n^{n+1} & & \uparrow i_{l(n)}^{l(n+1)} & \\
0 \longrightarrow & \tilde{F}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{J}_{n+1}} & \tilde{G}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n+1}} & E_{l(n+1)} & \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
\tag{7}
$$

kommutiert und so daß Morphismen $p_n^{l(n)} : G_{l(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n^{l(n)} : \tilde{G}_{l(n)} \longrightarrow G_n$ existieren mit $v_n^{l(n)} \circ p_{l(n)}^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l(n)} \circ v_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ und $\tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l(n+1)} = p_n^{l(n)} \circ g_{l(n)}^{l(n+1)}$ bzw. $v_n^{l(n)} \circ \tilde{g}_{l(n)}^{l(n+1)} = g_n^{n+1} \circ v_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $Q_n \circ v_n^{l(n)} = i_n^{l^2(n)} \circ \tilde{Q}_{l(n)}$ und $\tilde{Q}_n \circ p_n^{l(n)} = Q_{l(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Es sei $(\tilde{E}_n, \tilde{\imath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein weiteres Spektrum, so daß ein $l \in L$ und Morphismen $T_n^{l(n)} : \tilde{E}_{l(n)} \longrightarrow E_n$ und $S_n^{l(n)} : E_{l(n)} \longrightarrow \tilde{E}_n$ existieren, so daß $S_n^{l(n)} \circ T_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{\imath}_n^{l^2(n)}$ bzw. $T_n^{l(n)} \circ S_{l(n)}^{l^2(n)} = i_n^{l^2(n)}$ und $S_n^{l(n)} \circ i_{l(n)}^{l(n+1)} = \tilde{\imath}_n^{n+1} \circ S_{n+1}^{l(n+1)}$ bzw. $T_n^{l(n)} \circ \tilde{\imath}_{l(n)}^{l(n+1)} = i_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann* *existiert ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, so daß das folgende Diagramm mit exakten Zeilen*

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\tilde{J}_1} & \tilde{G}_1 & \xrightarrow{\tilde{Q}_1} & \tilde{E}_{l(1)} & \to 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{\tilde{J}_n} & \tilde{G}_n & \xrightarrow{\tilde{Q}_n} & \tilde{E}_{l(n)} & \to 0 \\
 & \uparrow j_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{g}_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{i}_{l(n)}^{l(n+1)} & \\
0 \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{J}_{n+1}} & \tilde{G}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n+1}} & \tilde{E}_{l(n+1)} & \to 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
\tag{8}
$$

kommutiert und so daß Morphismen $p_n^{l^2(n)} : G_{l^2(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n : \tilde{G}_n \longrightarrow G_n$ existieren mit $v_n \circ p_n^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g_n^{n+1} \circ v_{n+1} = v_n \circ \tilde{g}_n^{n+1}$ bzw. $p_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = \tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $p_n^{l^2(n)} \circ J_{l^2(n)} = \tilde{J}_n \circ j_n^{l^2(n)}$ und $v_n \circ \tilde{J}_n = J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.1.44 Der obige Satz besagt, daß, ausgehend von dem Diagramm (6), für jedes zu $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bzw. $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ L-äquivalente Spektrum $(\tilde{F}_n, \tilde{j}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{E}_n, \tilde{i}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein L-äquivalentes Spektrum $(\tilde{G}, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ existiert, so daß das Diagramm (7) bzw. (8) kommutiert. Sind die Spektren $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{F}_n, \tilde{j}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bzw. $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{E}_n, \tilde{i}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ äquivalent bezüglich $l \in L$, so sind die Spektren $(G_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bezüglich l bzw. l^2 äquivalent. Die Tatsache, daß in 1.1.43 (b) die Spektren $(G_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ L-äquivalent bezüglich l^2 sind und daß das Diagramm (8) bezüglich eines Teilspektrums von $(\tilde{E}_n, \tilde{i}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ kommutiert, läßt sich darauf zurückführen, daß die beiden Aussagen 1.1.43 (a) und (b) nicht dual zueinander stehen.

Beweis: (a) Da nach Voraussetzung $\tilde{j}_n^{n+1} \circ S_{n+1}^{l(n+1)} = S_n^{l(n)} \circ j_{l(n)}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, liefert das Lemma 1.1.39 (a) für $n \in \mathbb{N}$ folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr, dashed] & & \tilde{F}_n \arrow[rr, dashed, "\tilde{J}_n"] & & \tilde{G}_n \arrow[rr, dashed, "\tilde{Q}_n"] & & E_{l(n)} \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & F_{l(n)} \arrow[ur, "S_n^{l(n)}"] \arrow[rr, "J_{l(n)}"'] & & G_{l(n)} \arrow[ur, dashed, "p_n^{l(n)}"] \arrow[rr, "Q_{l(n)}"'] & & E_{l(n)} \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr, dashed] & & \tilde{F}_{n+1} \arrow[uu, "\tilde{j}_n^{n+1}"] \arrow[rr, dashed, "\tilde{J}_{n+1}"] & & \tilde{G}_{n+1} \arrow[uu, dashed, "\tilde{g}_n^{n+1}"] \arrow[rr, dashed, "\tilde{Q}_{n+1}"] & & E_{l(n+1)} \arrow[uu, dashed, "i_{l(n)}^{l(n+1)}"] \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & F_{l(n+1)} \arrow[uu, "j_{l(n)}^{l(n+1)}"] \arrow[ur, "S_{n+1}^{l(n+1)}"] \arrow[rr, "J_{l(n+1)}"'] & & G_{l(n+1)} \arrow[uu, "g_{l(n)}^{l(n+1)}"] \arrow[ur, dashed, "p_{n+1}^{l(n+1)}"] \arrow[rr, "Q_{l(n+1)}"'] & & E_{l(n+1)} \arrow[uu, "i_{l(n)}^{l(n+1)}"] \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr] & & 0. &
\end{tikzcd}
$$

Da $(\tilde{G}_{l(n)}, p_{l(n)}^{l^2(n)}, \tilde{J}_{l(n)})$ der Pushout zu $S_{l(n)}^{l^2(n)}$ und $J_{l^2(n)}$ ist, erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$, indem wir das Lemma 1.1.38 (a) anwenden, folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r, "J_n"] & G_n \arrow[r, "Q_n"] & E_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & \tilde{F}_{l(n)} \arrow[u, "T_n^{l(n)}"] \arrow[r, dashed, "\tilde{J}_{l(n)}"] & \tilde{G}_{l(n)} \arrow[u, dashed, "v_n^{l(n)}"'] \arrow[r, dashed, "\tilde{Q}_{l(n)}"] & E_{l^2(n)} \arrow[u, "i_n^{l^2(n)}"'] \arrow[r, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{l^2(n)} \arrow[u, "S_{l(n)}^{l^2(n)}"] \arrow[r, "J_{l^2(n)}"] & G_{l^2(n)} \arrow[u, dashed, "p_{l(n)}^{l^2(n)}"'] \arrow[r, "Q_{l^2(n)}"] & E_{l^2(n)} \arrow[u, "I"'] \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

so daß $v_n^{l(n)} \circ p_{l(n)}^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ gilt. Setzen wir $\tilde{g}_n^m := \tilde{g}_n^{n+1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_{m-1}^m$ für alle $m \geq n$, so sind die Abbildungen $\tilde{g}_n^m$ nach dem Lemma 1.1.39 (a) gerade dadurch eindeutig bestimmt, daß $\tilde{g}_n^m \circ p_m^{l(m)} = p_n^{l(n)} \circ g_{l(n)}^{l(m)}$ und $\tilde{g}_n^m \circ \tilde{J}_m = \tilde{J}_n \circ \tilde{\jmath}_n^m$ gilt. Da $p_n^{l(n)} \circ v_{l(n)}^{l^2(n)} \circ p_{l^2(n)}^{l^3(n)} = p_n^{l(n)} \circ g_{l(n)}^{l^3(n)}$ und $p_n^{l(n)} \circ v_{l(n)}^{l^2(n)} \circ \tilde{J}_{l^2(n)} = p_n^{l(n)} \circ J_{l(n)} \circ T_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{J}_n \circ S_n^{l(n)} \circ T_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{J}_n \circ \tilde{\jmath}_n^{l^2(n)}$ ist, folgt damit, daß $p_n^{l(n)} \circ v_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir erhalten also ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)$, so daß Morphismen $p_n^{l(n)} : G_{l(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n^{l(n)} : \tilde{G}_{l(n)} \longrightarrow G_n$ existieren mit $v_n^{l(n)} \circ p_{l(n)}^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l(n)} \circ v_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ und $\tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l(n+1)} = p_n^{l(n)} \circ g_{l(n)}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß auch $v_n^{l(n)} \circ \tilde{g}_{l(n)}^{l(n+1)} = g_n^{n+1} \circ v_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das Lemma 1.1.38 (a) liefert für $n \in \mathbb{N}$ folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r, "J_n"] & G_n \arrow[r, "Q_n"] & E_n \arrow[r] & 0 \\
 & F_{n+1} \arrow[u, "j_n^{n+1}"] & & & \\
0 \arrow[r, dashed] & \tilde{F}_{l(n+1)} \arrow[u, "T_{n+1}^{l(n+1)}"] \arrow[r, dashed, "\tilde{J}_{l(n+1)}"] & \tilde{G}_{l(n+1)} \arrow[uu, dashed, "w_n"'] \arrow[r, dashed, "\tilde{Q}_{l(n+1)}"] & E_{l^2(n+1)} \arrow[uu, "i_n^{l^2(n+1)}"'] \arrow[r, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{l^2(n+1)} \arrow[u, "S_{l(n+1)}^{l^2(n+1)}"] \arrow[r, "J_{l^2(n+1)}"'] & G_{l^2(n+1)} \arrow[u, dashed, "p_{l(n+1)}^{l^2(n+1)}"'] \arrow[r, "Q_{l^2(n+1)}"'] & E_{l^2(n+1)} \arrow[u, "I"'] \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei die Abbildungen $w_n : \tilde{G}_{l(n+1)} \longrightarrow G_n$ genau dadurch eindeutig bestimmt sind, daß $w_n \circ p_{l(n+1)}^{l^2(n+1)} = g_n^{l^2(n+1)}$ und $w_n \circ \tilde{J}_{l(n+1)} = J_n \circ j_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)}$ gilt. Nun gilt einerseits $g_n^{n+1} \circ v_{n+1}^{l(n+1)} \circ p_{l(n+1)}^{l^2(n+1)} = g_n^{n+1} \circ g_{n+1}^{l^2(n+1)} = g_n^{l^2(n+1)}$ und $v_n^{l(n)} \circ \tilde{g}_{l(n)}^{l(n+1)} \circ p_{l(n+1)}^{l^2(n+1)} = v_n^{l(n)} \circ p_{l(n)}^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = g_n^{l^2(n+1)}$. Andererseits ist $g_n^{n+1} \circ v_{n+1}^{l(n+1)} \circ \tilde{J}_{l(n+1)} = g_n^{n+1} \circ J_{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)} = J_n \circ j_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)}$ und $J_n \circ j_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)} = J_n \circ T_n^{l(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l(n)}^{l(n+1)} = v_n^{l(n)} \circ \tilde{J}_{l(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l(n)}^{l(n+1)} = v_n^{l(n)} \circ \tilde{g}_{l(n)}^{l(n+1)} \circ \tilde{J}_{l(n+1)}$, da nach Voraussetzung $j_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)} = T_n^{l(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l(n)}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aus der Eindeutigkeit der Abbildungen w_n folgt somit, daß $v_n^{l(n)} \circ \tilde{g}_{l(n)}^{l(n+1)} = g_n^{n+1} \circ v_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit erhalten wir insgesamt ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)$, so daß einerseits das Diagramm (7) erfüllt ist und so daß andererseits Morphismen $p_n^{l(n)} : G_{l(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n^{l(n)} : \tilde{G}_{l(n)} \longrightarrow G_n$ existieren mit $v_n^{l(n)} \circ p_{l(n)}^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l(n)} \circ v_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ und $\tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l(n+1)} = p_n^{l(n)} \circ g_{l(n)}^{l(n+1)}$ bzw. $v_n^{l(n)} \circ \tilde{g}_{l(n)}^{l(n+1)} = g_n^{n+1} \circ v_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt die Behauptung.

(b) Da nach Voraussetzung $i_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)} = T_n^{l(n)} \circ \tilde{i}_{l(n)}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, liefert das Lemma 1.1.39 (b) für $n \in \mathbb{N}$ folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & F_n \arrow[rr, "J_n"] & & G_n \arrow[rr, "Q_n"] & & E_n \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr, dashed] & & F_n \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr, dashed, "\tilde{J}_n"] & & \tilde{G}_n \arrow[ur, dashed, "v_n"] \arrow[rr, dashed, "\tilde{Q}_n"] & & \tilde{E}_{l(n)} \arrow[ur, "T_n^{l(n)}"] \arrow[rr, dashed] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & F_{n+1} \arrow[uu, dashed, "j_n^{n+1}"'] \arrow[rr, "J_{n+1}"] & & G_{n+1} \arrow[uu, "g_n^{n+1}"'] \arrow[rr, "Q_{n+1}"] & & E_{n+1} \arrow[uu, "i_n^{n+1}"'] \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & F_{n+1} \arrow[uu, "j_n^{n+1}"] \arrow[ur, dashed, "I"] \arrow[rr, dashed, "\tilde{J}_{n+1}"'] & & \tilde{G}_{n+1} \arrow[uu, dashed, "\tilde{g}_n^{n+1}"] \arrow[ur, "v_{n+1}"'] \arrow[rr, dashed, "\tilde{Q}_{n+1}"'] & & \tilde{E}_{l(n+1)} \arrow[uu, "\tilde{i}_{l(n)}^{l(n+1)}"] \arrow[ur, "T_{n+1}^{l(n+1)}"'] \arrow[rr, dashed] & & 0. &
\end{tikzcd}$$

Da $(\tilde{G}_n, \tilde{Q}_n, v_n)$ der Pullback von Q_n und $T_n^{l(n)}$ ist, erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$, indem wir das Lemma 1.1.38 (b) anwenden, folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r, "J_n"] & G_n \arrow[r, "Q_n"] & E_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & F_n \arrow[u, "I"] \arrow[r, dashed, "\tilde{J}_n"] & \tilde{G}_n \arrow[u, dashed, "v_n"'] \arrow[r, dashed, "\tilde{Q}_n"] & \tilde{E}_{l(n)} \arrow[u, "T_n^{l(n)}"'] \arrow[r, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{l^2(n)} \arrow[u, "j_n^{l^2(n)}"] \arrow[r, "J_{l^2(n)}"] & G_{l^2(n)} \arrow[u, dashed, "p_n^{l^2(n)}"'] \arrow[r, "Q_{l^2(n)}"] & E_{l^2(n)} \arrow[u, "S_{l(n)}^{l^2(n)}"'] \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

so daß $v_n \circ p_n^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ gilt. Setzen wir $\tilde{g}_n^m := \tilde{g}_n^{n+1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_{m-1}^m$ für alle $m \geq n$, so sind die Abbildungen $\tilde{g}_n^m$ nach dem Lemma 1.1.39 (b) gerade dadurch eindeutig bestimmt, daß $v_n \circ \tilde{g}_n^m = g_n^m \circ v_m$ und $\tilde{Q}_n \circ \tilde{g}_n^m = \tilde{i}_{l(n)}^{l(m)} \circ \tilde{Q}_m$ gilt. Da $v_n \circ p_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)}$ und $\tilde{Q}_n \circ p_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = S_{l(n)}^{l^2(n)} \circ Q_{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = S_{l(n)}^{l^2(n)} \circ T_{l^2(n)}^{l^3(n)} \circ \tilde{Q}_{l^2(n)} = \tilde{i}_{l(n)}^{l^3(n)} \circ \tilde{Q}_{l^2(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt damit, daß $p_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir erhalten also ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)$, so daß Morphismen $p_n^{l^2(n)} : G_{l^2(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n : \tilde{G}_n \longrightarrow G_n$ existieren mit $v_n \circ p_n^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ und $g_n^{n+1} \circ v_{n+1} = v_n \circ \tilde{g}_n^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß auch $p_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = \tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das Lemma 1.1.38 (b) liefert für $n \in \mathbb{N}$ folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r, "J_n"] & G_n \arrow[r, "Q_n"] & E_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & F_n \arrow[u, "I"] \arrow[r, dashed, "\tilde{J}_n"] & \tilde{G}_n \arrow[u, dashed, "v_n"'] \arrow[r, dashed, "\tilde{Q}_n"] & \tilde{E}_{l(n)} \arrow[u, "T_n^{l(n)}"'] \arrow[r, dashed] & 0 \\
 & & & E_{l^2(n)} \arrow[u, "S_{l(n)}^{l^2(n)}"'] & \\
0 \arrow[r] & F_{l^2(n+1)} \arrow[uu, "j_n^{l^2(n+1)}"] \arrow[r, "J_{l^2(n+1)}"'] & G_{l^2(n+1)} \arrow[uu, dashed, "w_n"'] \arrow[r, "Q_{l^2(n+1)}"'] & E_{l^2(n+1)} \arrow[u, "i_{l^2(n)}^{l^2(n+1)}"'] \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei die Abbildungen w_n nach dem Lemma 1.1.38 (b) gerade dadurch eindeutig bestimmt sind, daß $v_n \circ w_n = g_n^{l^2(n+1)}$ und $\tilde{Q}_n \circ w_n = S_{l(n)}^{l^2(n)} \circ i_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} \circ Q_{l^2(n+1)}$ gilt. Es ist $v_n \circ p_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} =$

$g_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = g_n^{l^2(n+1)}$ und $v_n \circ \tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)} = g_n^{n+1} \circ v_{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)} = g_n^{n+1} \circ g_{n+1}^{l^2(n+1)} = g_n^{l^2(n+1)}$. Weiter gilt $\tilde{Q}_n \circ p_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = S_{l(n)}^{l^2(n)} \circ Q_{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = S_{l(n)}^{l^2(n)} \circ i_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} \circ Q_{l^2(n+1)}$ und $\tilde{Q}_n \circ \tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)} = \tilde{\imath}_{l(n)}^{l(n+1)} \circ \tilde{Q}_{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)} = \tilde{\imath}_{l(n)}^{l(n+1)} \circ S_{l(n+1)}^{l^2(n+1)} \circ Q_{l^2(n+1)} = S_{l(n)}^{l^2(n)} \circ i_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} \circ Q_{l^2(n+1)}$, da $S_n^{l(n)} \circ i_{l(n)}^{l(n+1)} = \tilde{\imath}_n^{n+1} \circ S_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Aus der Eindeutigkeit der Abbildung w_n, folgt somit $p_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = \tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)}$. Damit erhalten wir insgesamt ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)$ so daß das Diagramm (8) erfüllt ist und, so daß Morphismen $p_n^{l^2(n)} : G_{l^2(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n : \tilde{G}_n \longrightarrow G_n$ existieren mit $v_n \circ p_n^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ und $g_n^{n+1} \circ v_{n+1} = v_n \circ \tilde{g}_n^{n+1}$ bzw. $p_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = \tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt die Behauptung.

Bemerkung 1.1.45 Es seien $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, $(G_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ Spektren in einer quasiabelschen Kategorie $\mathcal{C}$, so daß das Diagramm (6) existiert. Sind $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{E}_n, \tilde{\imath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ zwei zu $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bzw. $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ L-äquivalente Spektren bezüglich $l \in L$, so liefert der Satz 1.1.43 ein zu $(G_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ L-äquivalentes Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, so daß das folgende Diagramm mit exakten Zeilen kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \tilde{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{J}_1} & \tilde{G}_1 & \xrightarrow{\tilde{Q}_1} & \tilde{E}_{l^2(1)} & \to 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & \tilde{F}_n & \xrightarrow{\tilde{J}_n} & \tilde{G}_n & \xrightarrow{\tilde{Q}_n} & \tilde{E}_{l^2(n)} & \to 0 \\
& \uparrow \tilde{\jmath}_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{g}_n^{n+1} & & \uparrow i_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} & \\
0 \longrightarrow & \tilde{F}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{J}_{n+1}} & \tilde{G}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n+1}} & \tilde{E}_{l^2(n+1)} & \to 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & .
\end{array} \tag{9}$$

Das für den Beweis von Satz 1.1.43 angewandte Verfahren führt dazu, daß man im Gegensatz zu dem Verfahren in [DV] Proposition 3.2 nicht zu Teilspektren $(\tilde{E}_{l^{2n+1}(1)}, \tilde{\imath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{F}_{l^{2n-1}(1)}, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ übergehen muß, um das Diagramm (9) zu erhalten. Alle Verluste bezüglich der Teilspektren und der Äquivalenz von Spektren, die durch das Verfahren in 1.1.43 entstehen, sind wieder durch Funktionen in der Menge L darstellbar, nämlich höchstens durch l^2. Sind die Spektren L-äquivalent, ohne daß die Eigenschaft (4) erfüllt ist, so beträgt der Verlust nach der Bemerkung 1.1.42 höchstens l^6.

1.2 Kohomologie

Im folgende Abschnitt stellen wir einige homologische Grundlagen zusammen, die im Laufe unserer weiteren Ausführungen von Bedeutung sind. Dabei halten wir uns eng an den Rahmen unserer Betrachtungen. Für eine intensivere Auseinandersetzung verweisen wir auf das Lehrbuch [Wei], die Arbeit [P] von Palamodov, die fundamental ist, was das Einbinden homologischer Methoden in die Funktionalanalysis anbelangt, und auf [Wen].

Definition 1.2.1 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie.*

(a) Ein Objekt $P \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ heißt projektiv, falls für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(P, E)$ und jeden Epihomomorphismus $q \in \mathrm{Mor}(F, E)$ ein Morphismus $f' \in \mathrm{Mor}(P, F)$ existiert, so daß $f = q \circ f'$ gilt.

(b) Ein Objekt $I \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ heißt injektiv, falls für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(E, I)$ und jeden Monohomomorphismus $i \in \mathrm{Mor}(E, F)$ ein Morphismus $f' \in \mathrm{Mor}(F, I)$ existiert, so daß $f = f' \circ i$ gilt.

(c) *Die Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt genügend viele injektive* 0*bjekte, falls für jedes Objekt $E \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ ein injektives Objekt $I \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ und ein Monohomomorphismus $j \in \mathrm{Mor}\,(E, I)$ existieren.*

(d) *Eine injektive Auflösung für ein Objekt $E \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ ist ein exakter Komplex der Form*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{\iota_0} I_1 \xrightarrow{\iota_1} I_2 \longrightarrow \cdots,$$

wobei die Objekte I_n für alle $n \geq 0$ injektiv in $\mathcal{C}$ sind.

Dual zu 1.2.1 (c) und (d) kann man auch die Existenz von genügend vielen projektiven Objekten und projektiven Auflösungen definieren. Davon sehen wir ab, da es für unsere weiteren Betrachtungen irrelevant ist.

Beispiel 1.2.2 (a) In der Kategorie $\mathcal{LS}$ der $\mathbb{K}$-Vektorräume ist jedes Element injektiv und projektiv. In der Kategorie $\mathcal{LCS}$ der lokalkonvexen Räume, $\mathcal{B}$ der Banachräume und $\mathcal{F}$ der Fréchetträume ist für jede beliebige Indexmenge J der Raum $l_\infty(J) := \{x := (x_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J \,:\, \|x\|_{\infty,J} := \sup_{j\in J} |x_j| < +\infty\}$ versehen mit der von der Norm $\|\cdot\|_{\infty,J}$ induzierten Topologie ein injektives Objekt.

(b) Für jede beliebige Indexmenge J ist der Raum $l_1(J) := \{x := (x_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J \,:\, \|x\|_{1,J} := \sum_{j\in J} |x_j| < +\infty\}$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{1,J}$ ein projektives Objekt in der Kategorie $\mathcal{B}$ der Banachräume.

Bemerkung 1.2.3 Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie. Definieren wir analog zu dem Produkt zweier Objekte in $\mathcal{C}$ das beliebige Produkt, so folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des Produkts, daß beliebige Produkte injektiver Objekte wieder injektiv sind.

Wir skizzieren den Beweis des folgenden Satzes, um später darauf zurückgreifen zu können.

Satz 1.2.4 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten, dann existiert für jedes Objekt $E \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ eine injektive Auflösung*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{\iota_0} I_1 \xrightarrow{\iota_1} I_2 \longrightarrow \cdots.$$

Beweis: Zu $E \in \mathcal{C}$ wählen wir ein injektives Objekt $I_0 \in \mathcal{C}$ und einen Monohomomorphismus $\iota : E \longrightarrow I_0$. Betrachten wir den Kokern $(\mathrm{coker}\,\iota, c_\iota)$ von ι, so wählen wir ein weiteres injektives Objekt $I_1 \in \mathcal{C}$ und einen Monohomomorphismus $j_1 : \mathrm{coker}\,\iota \longrightarrow I_1$ und setzen $\iota_0 := j_1 \circ c_\iota$. Nun ist j_1 ein Monohomomorphismus und c_ι ein Epihomomorphismus, also ist nach 1.1.21 (b) der Morphismus ι_0 ein Homomorphismus. Da j_1 ein Monomorphismus ist, ist der Kern von ι_0 gerade der Kern von c_i, der gerade das Bild von i ist. Ein sukzessives Fortfahren liefert die Behauptung.

Definition 1.2.5 *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ Kategorien.*

(a) *Ein Funktor F von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}$ ist eine Vorschrift die jedem Objekt $E \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$ ein Objekt $F(E) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ zuordnet, sowie jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(E, G)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(F(E), F(G))$ zuordnet, so daß $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(E, G)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(G, H)$ und $F(I_E) = I_{F(E)}$ für alle $E \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$ gilt.*

(b) *Ein Funktor F zwischen zwei additiven Kategorien heißt additiv, falls $F(g+f) = F(g)+F(f)$ für alle $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(E, G)$ gilt.*

Definition 1.2.6 *Es sei F ein additiver Funktor zwischen zwei halbabelschen Kategorien.*

(a) *F heißt injektiv, falls für jeden exakten Komplex $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} E$ der Komplex $0 \longrightarrow F(H) \xrightarrow{F(j)} F(G) \xrightarrow{F(q)} F(E)$ exakt ist.*

(b) *F heißt semi-injektiv, falls für jeden exakten Komplex $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G$ der Komplex $0 \longrightarrow F(H) \xrightarrow{F(j)} F(G)$ exakt ist.*

Bemerkung 1.2.7 Jeder injektive Funktor ist insbesondere semi-injektiv.
Dies ist leicht einzusehen, da jeder Monohomomorphismus $j \in \mathrm{Mor}\,(H, G)$ die kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{c_j} \mathrm{coker}\, j \longrightarrow 0$ induziert.

Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche und $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Weiter sei $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein additiver und semi-injektiver Funktor. Im folgenden wollen wir die Rechtsableitungen des Funktors F definieren, dabei verzichten wir auf das Einführen der Kategorie der Kokomplexe. Für einen allgemeineren Ansatz siehe [Var] 2.1.5. Es sei $E \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ und

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{\iota_0} I_1 \xrightarrow{\iota_1} I_2 \longrightarrow \cdots$$

eine injektive Auflösung von E in $\mathcal{C}$. Dann ist

$$0 \longrightarrow F(E) \xrightarrow{F(\iota)} F(I_0) \xrightarrow{F(\iota_0)} F(I_1) \xrightarrow{F(\iota_1)} F(I_2) \longrightarrow \cdots$$

ein aufgrund der Kovarianz und Additivität des Funktors ein Komplex. Damit induziert für alle $k \geq 1$ der Kern $(\ker F(\iota_k), k_{F(\iota_k)})$ von $F(\iota_k)$ genau einen Morphismus $j \in \mathrm{Mor}\,(\mathrm{im}\, F(\iota_{k-1}), \ker F(\iota_k))$, so daß $k_{F(\iota_k)} \circ j = i_{F(\iota_{k-1})}$ gilt, wobei $(\mathrm{im}\, F(\iota_{k-1}), i_{F(\iota_{k-1})})$ das Bild von $F(\iota_{k-1})$ bezeichnet. Aus 1.1.21 (a) folgt, daß j ein Monohomomorphismus ist, dies rechtfertigt die Schreibweise $\ker F(\iota_{k-1}) \hookrightarrow \mathrm{im}\, F(\iota_{k-1})$ für j. Wir setzen $F^0(E) := \ker F(\iota_0)$ und $F^k(E) := \mathrm{coker}\,(\ker F(\iota_{k-1}) \hookrightarrow \mathrm{im}\, F(\iota_{k-1}))$ für $k \geq 1$. Die auf diese Weise definierten Rechtsableitungen $F^k(E)$ sind unabhängig von der Wahl der injektiven Auflösung von E. Ist $g \in \mathrm{Mor}\,(E, G)$ und $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\eta} J_0 \xrightarrow{\eta_0} J_1 \longrightarrow \cdots$ eine injektive Auflösung von G, so existiert stets das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & I_0 & \xrightarrow{\iota_0} & I_1 & \longrightarrow \cdots \\
 & g \downarrow & & \downarrow g_0 & & \downarrow g_1 & \\
0 \longrightarrow & G & \xrightarrow{\eta} & J_0 & \xrightarrow{\eta_0} & J_1 & \longrightarrow \cdots .
\end{array}$$

Wenden wir den Funktor F auf das obige Diagramm an, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & F(E) & \xrightarrow{F(\iota)} & F(I_0) & \xrightarrow{F(\iota_0)} & F(I_1) & \longrightarrow \cdots \\
 & F(g) \downarrow & & \downarrow F(g_0) & & \downarrow F(g_1) & \\
0 \longrightarrow & F(G) & \xrightarrow{F(\eta)} & F(J_0) & \xrightarrow{F(\eta_0)} & F(J_1) & \longrightarrow \cdots .
\end{array}$$

Die Morphismen $F(g_n)$ aus dem obigen Diagramm induzieren dann Morphismen $F^n(g) : F^n(E) \longrightarrow F^n(G)$, so daß F^n ein Funktor wird. Ist F ein injektiver Funktor, so ist der Funktor F^0 isomorph zu F (siehe [P] §2).

Wir kommen nun zu einem zentralen Resultat. Für den Beweis verweisen wir auf [P] 2.1 oder [Wen] 2.1.1.

Satz 1.2.8 *Es sei $\mathcal{C}$ eine halbabelsche und $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Darüber hinaus besitze $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte. Weiter sei $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein additiver und semi-injektiver Funktor. Dann induziert jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ den exakten Komplex*

$$0 \longrightarrow F^0(H) \xrightarrow{F^0(j)} F^0(G) \xrightarrow{F^0(q)} F^0(E) \longrightarrow F^1(H) \xrightarrow{F^1(j)} F^1(G) \xrightarrow{F^1(q)} F^1(E) \longrightarrow F^2(H) \longrightarrow \cdots .$$

Diesen bezeichnen wir als die lange exakte Kohomologie-Sequenz.

Eine wichtige Rolle für die weiteren Ausführungen spielt der projektive Limesfunktor. Um diesen in Anlehnung an [Wen] 3.1 definieren zu können, führen wir zunächst die Kategorie $\mathcal{LS}^{\mathbb{N}}$ der projektiven Spektren in der Kategorie $\mathcal{LS}$ der $\mathbb{K}$-Vektorräume ein. Die Objekte in $\mathcal{LS}^{\mathbb{N}}$ bilden die Spektren $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ in der Kategorie $\mathcal{LS}$. Ein Morphismus $f : (E_n, i_n^m) \longrightarrow (F_n, j_n^m)$ ist eine Folge $(f_n : E_n \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linearen Abbildungen, so daß $f_n \circ i_n^{n+1} = j_n^{n+1} \circ f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir erhalten so die abelsche Kategorie $\mathcal{LS}^{\mathbb{N}}$ der projektiven Spektren in $\mathcal{LS}$. Die Kategorie $\mathcal{LS}^{\mathbb{N}}$ besitzt genügend viele injektive Objekte.

Es sei nun $\mathcal{E} := (E_n, i_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{LS}^{\mathbb{N}}$. Wir setzen

$$\operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \,:\, i_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ für alle}\, n \in \mathbb{N}\}$$

und definieren den projektiven Limesfunktor wie folgt: $\operatorname{Proj} : \mathcal{LS}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{LS}$ mit $\operatorname{Proj}(\mathcal{E}) := \operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n$ für alle $\mathcal{E} \in \mathcal{LS}^{\mathbb{N}}$ und $\operatorname{Proj}(f) \in \operatorname{Mor}(\operatorname{Proj}(\mathcal{E}), \operatorname{Proj}(\mathcal{F}))$ mit $\operatorname{Proj}(f)((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Proj}(\mathcal{E})$. Der Funktor Proj ist additiv und injektiv. Für seine Rechtsableitungen gelten die folgenden bekannten Aussagen, die wir zum Abschluß dieses Abschnitts aufführen. Was die Beweise anbelangt, verweisen wir auf [Wen] 3.1.4 und 3.1.7.

Satz 1.2.9 *Es sei $\mathcal{E} := (E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{LS}^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:*

$\operatorname{Proj}^0(\mathcal{E})$ ist isomorph zu $\operatorname{Proj}(\mathcal{E})$, $\operatorname{Proj}^k(\mathcal{E}) = 0$ für alle $k \geq 2$ und $\operatorname{Proj}^1(\mathcal{E})$ ist isomorph zu $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n/\operatorname{im}\sigma$ mit $\sigma : \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ und $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n - i_n^{n+1}(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.2.10 *Es seien $\mathcal{E} := (E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $\mathcal{F} := (F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ zwei äquivalente Spektren in $\mathcal{LS}$. Dann ist $\operatorname{Proj}^k(\mathcal{E})$ isomorph zu $\operatorname{Proj}^k(\mathcal{F})$ für alle $k \geq 0$.*

2 Die Kategorie der L-zahmen Räume

In dem folgenden Abschnitt führen wir zunächst die Kategorie der L-zahmen Vektorräume ein und beweisen anschließend einen L-zahmen Splittingsatz. Dies ist grundlegend für die Ausführungen im Abschnitt 3.

2.1 Einführung

Es sei wie in dem Abschnitt 1.1 L eine nicht-leere Menge, bestehend aus monoton wachsenden Abbildungen $l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:
(i) $\mathrm{id}, \mathrm{id}+1 \in L$, (ii) $l_1, l_2 \in L \Rightarrow l_1 \circ l_2 \in L$ und
(iii) $l_1, l_2 \in L \Rightarrow \exists_{l_3 \in L} \,\mathrm{mit}\, l_3(n) < l_3(n+1) \forall_{n \in \mathbb{N}} \,\mathrm{und}\, l_3 \geq l_1, l_2$.
Die Forderung $\mathrm{id} \in L$ erleichtert die folgenden Beweisführungen. Der Grund dafür, daß wir auch von $\mathrm{id}+1 \in L$ ausgehen, läßt sich darauf zurückführen, daß sich bei dem Splittingresultat 2.2.8 der "Verlust von 1" nicht umgehen läßt (siehe auch [V4]).

Die Objekte in der Kategorie der L-zahmen Räume sind die Vektorräume versehen mit einer Familie monoton wachsender Halbnormen $(\| \cdot \|_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Die Morphismen zwischen zwei Objekten $(E, (\| \cdot \|_n^E)_{n \in \mathbb{N}})$ und $(F, \| \cdot \|_n^F)_{n \in \mathbb{N}})$ sind alle linearen Abbildungen $T : E \longrightarrow F$, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $\|Tx\|_n^F \leq C_n \|x\|_{l(n)}^E$ für alle $x \in E$ gilt. In diesem Fall bezeichnen wir T als L-zahmen Operator und schreiben $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E, F)$. Wegen der Eigenschaft (iii) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $l \geq \mathrm{id}$ gilt.
Im folgenden setzen wir $B_n^E := \{x \in E : \|x\|_n^E \leq 1\}$. Dann ist eine lineare Abbildung $T : E \longrightarrow F$ genau dann ein L-zahmer Operator, falls ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $T(B_{l(n)}^E) \subset C_n B_n^F$ gilt.

Aufgrund der Eigenschaft (ii) ist die Verknüpfung zweier L-zahmer Operatoren wieder ein L-zahmer Operator. Da das Halbnormensystem monoton wachsend ist, impliziert die Eigenschaft (iii), daß die Summe zweier L-zahmer Operatoren wieder ein L-zahmer Operator ist. Zusammen mit der üblichen Verknüpfung, Addition und skalaren Multiplikation von Operatoren ist $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E, F)$ für alle L-zahmen Räume E und F ein Vektorraum, und wir erhalten so die additive Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der L-zahmen Räume.

Beispiel 2.1.1 Setzen wir $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall_{n \in \mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1) \text{ und } \exists_{b \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} : l(n) \leq n + b\}$, so erhalten wir die Kategorie der zahmen Räume.

Im Fall $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall_{n \in \mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1) \text{ und } \exists_{a,b \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} : l(n) \leq an + b\}$ erhalten wir die Kategorie der linear zahmen Räume.

Es sei $(E, (\| \cdot \|_n^E)_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und $A \subset E$ ein linearer Teilraum von E. Wir bezeichnen A versehen mit $(\| \cdot \|_n^E)_{n \in \mathbb{N}}$ als *L-zahmen Unterraum* von E und $(E/A, (\| \cdot \|_n^\wedge)_{n \in \mathbb{N}})$, wobei $\| \cdot \|_n^\wedge$ die von der Halbnorm $\| \cdot \|_n^E$ induzierte Quotientenhalbnorm bezeichnet, als *L-zahmen Quotienten* von E.

Für jeden L-zahmen Unterraum A von $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ ist offensichtlich aufgrund der Eigenschaft (i) die Einbettung $j : A \hookrightarrow E$ und die Quotientenabbildung $q : E \longrightarrow E/A$ auf den L-zahmen Quotienten ein L-zahmer Operator. Damit ist T genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, falls T injektiv bzw. surjektiv ist. Denn ist $g \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(G, E)$ bzw. $g \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(F, G)$ und $T \circ g = 0$ bzw. $g \circ T = 0$, dann folgt aufgrund der Injektivität bzw. Surjektivität von T, daß $g = 0$ ist. Ist andererseits $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E, F)$ ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, dann ist die Einbettung $j : T^{-1}(0) \longrightarrow F$ bzw. die Quotientenabbildung $q : F \longrightarrow F/T(E)$ ein L-zahmer Operator. Unter der Annahme, daß T nicht injektiv bzw. nicht surjektiv ist, gilt: $j \neq 0$ bzw. $q \neq 0$. Es ist jedoch $T \circ j = 0$ bzw. $q \circ T = 0$. Dies widerspricht der Definition eines Monomorphismus bzw. Epimorphismus.

$T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E, F)$ ist genau dann ein Isomorphismus in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, falls T bijektiv ist und ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $\|x\|_n^E \leq C_n \|T(x)\|_{l(n)}^F$ für alle $x \in E$ gilt.

Denn die an T gestellte Bedingung ist notwendig und hinreichend für die L-Zahmheit der Umkehrabbildung.

Es sei $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,F)$. Ist $A \supset T(E)$ ein L-zahmer Unterraum von F, dann ist auch $T : E \longrightarrow A$ ein L-zahmer Operator. Ist $A \subset T^{-1}(0)$ ein Unterraum, dann ist aufgrund der L-Zahmheit von T auch die Abbildung $\tilde{T} : E/A \longrightarrow F$ mit $T = \tilde{T} \circ q$ ein L-zahmer Operator.
Damit ist offensichtlich die Einbettung $T^{-1}(0) \hookrightarrow E$ Kern und die Quotientenabbildung $F \longrightarrow F/T(E)$ Kokern von T. Entsprechend ist die Einbettung $T(E) \hookrightarrow F$ Bild und die Quotientenabbildung $E \longrightarrow E/T^{-1}(0)$ Kobild von T. Wir verwenden im folgenden für den Kern und Kokern bzw. für das Bild und Kobild von $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,F)$ in Einklang mit dem Kapitel 1 die Bezeichnung $\ker T$ und $\operatorname{coker} T$ bzw. $\operatorname{im} T$ und $\operatorname{coim} T$.

Betrachten wir nun die von $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,F)$ induzierte Abbildung $\tilde{T} : E/T^{-1}(0) \longrightarrow T(E)$ zwischen Kobild und Bild von T mit $\tilde{T} \circ q = T_{E \to T(E)}$, so ist $\tilde{T}$ stets injektiv und surjektiv, d.h. ein Bimorphismus in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. $\tilde{T}$ ist genau dann ein Isomorphismus in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, falls die Umkehrabbildung $\tilde{T}^{-1}$ ein L-zahmer Operator ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $\|y\|_n^\wedge \leq C_n \|\tilde{T}(y)\|_{l(n)}^F$ für alle $y \in E/T^{-1}(0)$ gilt. Damit erhalten wir: $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,F)$ ist genau dann ein Homomorphismus in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, falls ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $\|q(x)\|_n^\wedge \leq C_n \|T(x)\|_{l(n)}^F$ für alle $x \in E$ gilt. In diesem Fall bezeichnen wir T als *L-zahmen Homomorphismus*.

Es seien $E, F \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Für eine lineare Abbildung $T : E \longrightarrow F$ existiert genau dann ein $l \in L$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert mit $\|q(x)\|_n^\wedge \leq C_n \|T(x)\|_{l(n)}^F$ für alle $x \in E$, falls ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $T(C_n B_n^E) \supset B_{l(n)}^F \cap \operatorname{im} T$ gilt. Ist $T : E \longrightarrow F$ linear und genügt T einer der beiden Bedingungen, so bezeichnen wir T als L-zahm offen aufs Bild.

Für eine endliche Folge $(E_k, (\|\cdot\|_n^k)_{n\in\mathbb{N}})_{k\leq N}$ von Objekten in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ ist das Produkt $\prod_{k\leq N} E_k$ versehen mit dem aufsteigenden Halbnormensystem $(\max_{k\leq N} \|\cdot\|_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Objekt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Die natürlichen Projektionen $\pi_k : \prod_{k\leq N} E_k \longrightarrow E_k$ sind dann aufgrund der Eigenschaft (i) L-zahme Operatoren. Sei nun F ein beliebiges Objekt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und $g_k \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(F, E_k)$ für $k = 1, \ldots, N$. Dann ist aufgrund der Eigenschaft (iii) die Abbildung $g : F \longrightarrow \prod_{k\leq N} E_k$ mit $g = (g_k)_{k\leq N}$ ein L-zahmer Operator. Damit wäre die Existenz von endlichen Produkten in der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ nachgewiesen. Wir fassen nun zusammen: Eine lineare Abbildung $g : F \longrightarrow \prod_{k\leq N} E_k$ ist genau dann ein L-zahmer Operator, falls $\pi_k \circ g \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(F, E_k)$ für alle $k \leq N$ gilt. Wir bezeichnen das L-zahme endliche Produkt mit $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} E_n$ bzw. im Fall $N = 2$ mit $E_1 \times_L E_2$.

Die Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ besitzt jedoch im Allgemeinen keine unendlichen Produkte.
Weiter gilt:

Bemerkung 2.1.2 Es sei $(T_n : E_n \longrightarrow F_n)_{n\leq N}$ eine endliche Familie L-zahmer Homomorphismen, dann ist auch der Operator $T := (T_n \circ \pi_n)_{n\leq N} : \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} E_n \longrightarrow \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} F_n$ ein L-zahmer Homomorphismus. Offensichtlich ist T ein L-zahmer Operator, denn es gilt: $\pi_n \circ T = T_n \circ \pi_n$. Um nachzuweisen, daß T auch L-zahm offen auf sein Bild ist, sei $l \in L$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $C_k > 0$ existiert mit $\inf_{z_n \in \ker T_n} \|x_n + z_n\|_k^n \leq C_k \|T_n(x_n)\|_{l(k)}^n$ für alle $x_n \in E_n$ und $n = 1, \ldots N$. Es sei $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Zu $x_n \in E_n$ für $n = 1, \ldots, N$ wählen wir $y_n \in \ker T_n$, so daß $\|x_n + y_n\|_k^n \leq \epsilon + \inf_{z_n \in \ker T_n} \|x_n + z_n\|_k^n \leq \epsilon + C_k \|T_n(x_n)\|_{l(k)}^n$ gilt. Damit gilt $\max_{n\leq N} \|x_n + y_n\|_k^n \leq \epsilon + C_k \max_{n\leq N} \|T_n(x_n)\|_{l(k)}^n$. Da $(y_n)_{n\leq N} \in \ker T$ gilt und $\epsilon > 0$ beliebig wählbar ist, folgt $\inf_{(z_n)_{n\leq N} \in \ker T} \max_{n\leq N} \|x_n + z_n\|_k^n \leq C_k \max_{n\leq N} \|T_n(x_n)\|_{l(k)}^n$ für alle $(x_n)_{n\leq N} \in \prod_{n\leq N} E_n$. Somit ist T ein L-zahmer Homomorphismus.

Lemma 2.1.3 *Eine Projektion P in E ist genau dann L-zahm, falls der Operator $\Phi : \operatorname{im} P \times_L \ker P \longrightarrow E$ mit $\Phi(x,y) := x + y$ ein L-zahmer Isomorphismus ist.*

Beweis: Die Abbildung Φ ist stets linear und bijektiv. Da die Addition in E L-zahm ist, ist Φ stets L-zahm. Es gilt $\Phi^{-1} = (P, \mathrm{id} - P)$. Ist nun P L-zahm, so ist Φ^{-1} als Produkt zweier L-zahmer

Operatoren L-zahm. Andererseits gilt $P = \pi \circ \Phi^{-1}$, wobei π die natürliche Projektion auf $\operatorname{im} P$ bezeichnet. Mit Φ^{-1} ist dann auch P L-zahm.

Bemerkung 2.1.4 Es sei $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$, dann ist jede Projektion P auf $\overline{0}^E$ L-zahm, wobei mit $\overline{0}^E$ die Abschließung der 0 in E bezüglich der vom Halbnormensystem auf E induzierten Topologie gemeint ist. Denn jeder Operator $T : F \longrightarrow E$ mit $\operatorname{im} T \subset \overline{0}^E$ ist L-zahm, da stets $T(B_n^F) \subset \overline{0}^E \subset B_n^E$ gilt. Da in der Kategorie der Vektorräume jedes Objekt injektiv ist, folgt mit demselben Argument, daß $\overline{0}^E$ in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ injektiv ist.

Aus homologischer Sicht ist die Existenz genügend vieler injektiver Objekte von Bedeutung. Um dies zu untersuchen, benötigen wir folgendes

Lemma 2.1.5 *(a) Es sei J eine beliebige Indexmenge, dann ist $l_\infty(J) := \{x := (x_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J : \|x\|_{\infty,J} := \sup_{j\in J}|x_j| < +\infty\}$ ein injektives Objekt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$.*

(b) Es sei $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von beliebigen Indexmengen, dann ist das Produkt $(\prod_{k\in\mathbb{N}} l_\infty(J_k), (\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}})$ mit $\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_n := max_{k\le n}\|x_k\|_{\infty,J_k}$ ein injektives Objekt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$.

Beweis: (a) Es sei $T : E \longrightarrow l_\infty(J)$ ein L-zahmer Operator und $i : E \longrightarrow F$ ein L-zahmer Monohomomorphismus. Dann ist der Operator $i^{-1} : \operatorname{im} i \longrightarrow E$ L-zahm. Es sei π_j die natürliche Projektion und $t_j := \pi_j \circ T \circ i^{-1} : \operatorname{im} i \longrightarrow \mathbb{K}$ für $j \in J$. Dann existieren aufgrund der Zahmheit der Operatoren T und i^{-1} ein $s \in \mathbb{N}$ und eine Abbildung $l_i \in L$, so daß $C_T, C_i > 0$ existieren mit $|t_j \circ i(x)| = |\pi_j \circ T(x)| \le \sup_{j\in J}|\pi_j \circ T(x)| = \|T(x)\|_{\infty,J} \le C_T\|x\|_s \le C_TC_i\|i(x)\|_{l_i(s)}$ für alle $x \in E$.
Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach lassen sich die Funktionale t_j auf ganz F fortsetzen, wobei die obige Ungleichung erhalten bleibt. Bezeichnen wir nun diese Fortsetzungen mit $\tilde{t}_j$ und setzen $\tilde{T} : F \longrightarrow l_\infty(J)$ mit $\tilde{T} := (\tilde{t}_j)_{j\in J}$, so ist $\tilde{T}$ wegen der obigen Ungleichung wohldefiniert und L-zahm im folgenden Sinne: für $m := l_i(s)$ existiert ein $C > 0$, so daß $\|\tilde{T}(x)\|_{\infty,J} \le C\|x\|_m$ für alle $x \in F$ gilt. Schließlich folgt aus $\tilde{T} \circ i(x) = (\tilde{t}_j \circ i(x))_{j\in J} = (\pi_j \circ T(x))_{j\in J} = T(x)$ für alle $x \in E$ die Behauptung.

(b) Es sei $T : E \longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{N}} l_\infty(J_k)$ ein L-zahmer Operator und $i : E \longrightarrow F$ ein L-zahmer Monohomomorphismus. Betrachten wir die Operatoren $T_k := \pi_k \circ T : E \longrightarrow l_\infty(J_k)$, so erhalten wir, wie der Beweis von (a) zeigt, Operatoren $\tilde{T}_k : F \longrightarrow l_\infty(J_k)$ mit $\tilde{T}\circ i = T_k$, so daß ein $m_k \in \mathbb{N}$ und ein $C_k > 0$ existiert mit $\|\tilde{T}_k(x)\|_{\infty,J_k} \le C_k\|x\|_{m_k}$ für alle $x \in E$ gilt. Dabei gilt $m_k = l_i \circ (s_k)$, wobei $s_k \in \mathbb{N}$ aus der L-zahmheit von T_k bzw. $l_i \in L$, aus der L-zahmen Offenheit aufs Bild der Abbildung i resultiert. Nun gilt jedoch $\|T_k(x)\|_{\infty,J_k} = \|\pi_k \circ T\|_{\infty,J_k} \le \|T(x)\|_k$. Ist also $l_T \in L$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $C_k > 0$ existiert mit $\|T(x)\|_k \le C_k\|x\|_{l_T(k)}$ für alle $x \in E$ gilt, so kann damit $m_k = l_i \circ l_T(k) =: l(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ gewählt werden. Setzen wir nun $\tilde{T} := (\tilde{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so gilt $\tilde{T}\circ i = (\tilde{T}_k \circ i)_{k\in\mathbb{N}} = (\pi_k \circ T)_{k\in\mathbb{N}} = T$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $C_n > 0$ mit $\|\tilde{T}(x)\|_n = \max_{k\le n}\|\tilde{T}_k(x)\|_{\infty,J_k} \le C_n\|x\|_{l(n)}$ für alle $x \in E$. $\tilde{T}$ ist somit ein L-zahmer Operator und es folgt die Behauptung.

Proposition 2.1.6 *Die Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ besitzt genügend viele injektive Objekte.*

Beweis: Zu $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ betrachten wir den L-zahmen Quotienten $F := E/\overline{0}^E$. Da jedes algebraische Komplement von $\overline{0}^E$ ein L-zahmes topologisches Komplement ist, gilt: E ist L-zahm isomorph zu $F \times_L \overline{0}^E$. Wir setzen $U_k := \{y \in F : \|y\|_k^\wedge \le 1\}$, wobei $(\|\cdot\|_k^\wedge)_{k\in\mathbb{N}}$ die von den Halbnormen $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf E induzierte Familie monoton wachsender Quotientenhalbnormen auf F bezeichnet, und definieren $J_k : F \longrightarrow l_\infty(U_k^\circ)$ mit $y \mapsto (\phi(y))_{\phi\in U_k^\circ}$. Da nun $\sup_{\phi\in U_k^\circ}|\phi(y)| = \|y\|_k^\wedge$ für alle $y \in F$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Abbildung J_k für alle $k \in \mathbb{N}$ wohldefiniert, und der Operator $\tilde{J} : F \longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{N}} l_\infty(U_k^\circ)$ mit $\tilde{J}(y) := (J_k(y))_{k\in\mathbb{N}}$ genügt der Gleichung $\|\tilde{J}(y)\|_n := \max_{k\le n}\|J_k(y)\|_{\infty,U_k^\circ} = \max_{k\le n}\sup_{\phi\in U_k^\circ}|\phi(y)| = \max_{k\le n}\|y\|_k^\wedge = \|y\|_n^\wedge$ für alle $y \in F$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\tilde{J}$ wegen der Separiertheit von F injektiv und ein L-zahmer Homomorphismus. Betrachten wir schließlich die Abbildung $J := (\tilde{J} \times \mathrm{id}) \circ \Phi : E \longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{N}} l_\infty(U_k^\circ) \times \overline{0}^E$ vermöge des kanonischen L-zahmen Isomorphismus Φ zwischen E und $F \times_L \overline{0}^E$, so ist J injektiv und ein L-zahmer Homomorphismus. Mit der Bemerkung 2.1.4, dem Lemma 2.1.5 (b) und der Bemerkung 1.2.3 folgt die Behauptung.

Bemerkung 2.1.7 Da die Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ halbabelsch ist und genügend viele injektive Objekte besitzt, existiert nach 1.2.4 für jeden L-zahmen Vektorraum E eine injektive Auflösung in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Der Beweis der Proposition 2.1.6 macht deutlich, daß für alle L-zahmen Fréchetr äume E ein injektiver L-zahmer Fréchetraum $I \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und ein injektiver Monohomomorphismus $i : E \longrightarrow I$ existieren. Berücksichtigen wir den Beweis des Satzes 1.2.4, so existiert für jeden L-zahmen Fréchetraum E eine injektive Auflösung

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{\iota_0} I_1 \xrightarrow{\iota_1} I_2 \longrightarrow \cdots,$$

wobei die Räume I_k für alle $k \geq 0$ L-zahme Fréchetr äume sind.

Definition 2.1.8 *Es sei $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ ein Fréchetraum und $(E_n, (i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Banachräume. E heißt L-zahm nuklear, falls ein $l \in L$ existiert, so daß $i_n^{l(n)} : E_{l(n)} \longrightarrow E_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nuklear ist.*

Bemerkung 2.1.9 Es sei E ein L-zahmer Fréchetraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener L-zahmer Unterraum. Ist E L-zahm nuklear, dann ist auch der L-zahme Unterraum F bzw. der L-zahme Quotient E/F L-zahm nuklear. Um dies einzusehen, beachten wir zunächst, daß der lokale Banachraum F_n von F bzw. G_n von E/F isometrisch isomorph zu $\overline{i_n(F)}$ bzw. $E_n/\overline{i_n(F)}$ ist, falls $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Banachräume von E bezeichnet. Existiert nun ein $l \in L$, so daß die Abbildung $i_n^{l(n)} : E_{l(n)} \longrightarrow E_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nuklear ist, so existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ eine nukleare Abbildung $D_n : l_2 \longrightarrow l_2$ und stetige Abbildungen $T_n : E_{l(n)} \longrightarrow l_2$ und $S_n : l_2 \longrightarrow E_n$, so daß $i_n^{l^3(n)} = S_n \circ D_n \circ T_n$ gilt. Die Behauptung folgt dann wie im Beweis von [MV] Satz 28.6.
Ist $(E_n)_{n\leq N}$ eine endliche Folge L-zahm nuklearer Fréchetr äume, dann ist auch das L-zahme Produkt $\mathrm{T^L}$-$\prod_{n\leq N} E_n$ L-zahm nuklear. Denn, bezeichnet G_k für $k \in \mathbb{N}$ den lokalen Banachraum des Produkts $\prod_{n\leq N} E_n$, dann ist G_k für $k \in \mathbb{N}$ isomorph zu dem Produkt $\prod_{n\leq N} E_n^k$, dabei sei E_n^k für $k \in \mathbb{N}$ der lokale Banachraum von E_n.

Proposition 2.1.10 *Es sei F ein L-zahmer Fréchetraum und $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein Spektrum in der Kategorie der Banachräume. Weiter sei $(j_n : F \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linearer Abbildungen mit $j_n^m \circ j_m = j_n$ für alle $m \geq n$, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert mit $\|j_n(x)\|^{F_n} \leq C_n \|x\|_{l(n)}$ für alle $x \in F$. Darüber hinaus existiere ein $l \in L$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert mit $\|x\|_n \leq C_n \|j_{l(n)}(x)\|^{F_{l(n)}}$ für alle $x \in F$. Weiter existiere ein $l \in L$, so daß $j_n^{l(n)}(F_{l(n)}) \subset \overline{j_n(F)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Versehen wir das Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ mit dem monoton wachsenden Halbnormensystem $(\max_{k\leq n} \|\cdot\|^{F_k})_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist kurze Sequenz*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \xrightarrow{\sigma} \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \longrightarrow 0$$

mit $j(x) := (j_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_n - j_n^{n+1}(x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ L-zahm exakt.

Beweis: Unmittelbar aus den Voraussetzungen folgt, daß $\operatorname{im} j = \ker \sigma$ gilt und daß σ surjektiv ist. Offensichtlich ist j ein injektiver L-zahmer Homomorphismus und σ L-zahm. Um nachzuweisen, daß σ ein L-zahmer Homomorphismus ist, beachten wir, daß $j_n^{l(n)}(F_{l(n)}) \subset \overline{j_n(F)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir wählen für $\epsilon > 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ein $z \in F$, so daß $\|j_n^{l(n)}(x_{l(n)}) - j_n(z)\|^{F_n} \leq \epsilon$ gilt. Die Behauptung folgt dann wie im Beweis des Satzes 3.1.5.

Bemerkung 2.1.11 (a) Insbesondere ist nach dem Satz 2.1.10 für jeden L-zahmen Fréchetraum die kanonische Auflösung bezüglich des Spektrums der lokalen Banachräume $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ L-zahm exakt. Jedes zu dem Spektrum der lokalen Banachräume L-äquivalente Spektrum $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes im folgenden Sinne: Aufgrund der L-Äquivalenz existieren ein $l \in L$ und stetige Operatoren $T_n^{l(n)} : F_{l(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ und $S_n^{l(n)} : \tilde{F}_{l(n)} \longrightarrow F_n$, so daß $T_n^{l(n)} \circ S_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{\jmath}_n^{l^2(n)}$ und $S_n^{l(n)} \circ T_{l(n)}^{l^2(n)} = j_n^{l^2(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Setzen wir $\tilde{\jmath}_n = T_n^{l(n)} \circ j_{l(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $S_n^{l(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l(n)} = j_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\tilde{\jmath}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes 2.1.10.

(b) Jeder L-zahm nukleare Fréchetraum besitzt ein zu dem Spektrum der lokalen Banachräume $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ L-äquivalentes Spektrum $(\tilde{F}, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{F}_n = l_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn, da ein $l \in L$ existiert, so daß die Abbildungen $j_n^{l(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nuklear sind, existieren stetige Abbildungen $S_n^{l(n)} : F_{l(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ und $T_n : \tilde{F}_n \longrightarrow F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $T_n \circ S_n^{l(n)} = j_n^{l(n)}$ und $\tilde{F}_n = l_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Folgen der Operatoren $(T_{l^n(1)} : \tilde{F}_{l^n(1)} \longrightarrow F_{l^n(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S_{l^{n-1}(1)}^{l^n(1)} : F_{l^n(1)} \longrightarrow \tilde{F}_{l^{n-1}(1)})_{n\in\mathbb{N}}$. Für $1 < m \leq l(1) - 1$ setzen wir $\tilde{F}_m := \tilde{F}_1$. Im Fall $n \geq 1$ und $l^n(1) \leq m \leq l^{n+1}(1) - 1$ setzen wir $\tilde{F}_m := \tilde{F}_{l^n(1)}$. Weiter definieren wir $\tilde{\jmath}_1^{l(1)} := S_1^{l(1)} \circ T_{l(1)}$ und $\tilde{\jmath}_{l^{n+1}(1)-1}^{l^{n+1}(1)} := S_{l^n(1)}^{l^{n+1}(1)} \circ T_{l^{n+1}(1)}$ für $n \geq 1$ und $j_m^{m+1} = \mathrm{id}$ sonst. Dann existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $l^{n-1} \leq m \leq l^n(1) - 1$, so daß $j_m^{m+1} = S_{l^{n-1}(1)}^{l^n(1)} \circ T_{l^n(1)}$ gilt. Das so erzeugte Spektrum $(\tilde{F}, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ist bezüglich l^2 L-äquivalent zu $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$.

Das nachfolgende Lemma ist für spätere Ausführungen von technischem Nutzen.

Lemma 2.1.12 *In der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ gilt: $I \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ ist genau dann ein injektives Objekt, falls für jeden beliebigen L-zahmen Operator $T : E \longrightarrow I$ und jeden beliebigen injektiven Operator $i : E \longrightarrow F$, für den ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $\|x\|_n \leq C_n \|i(x)\|_{l(n)}$ für alle $x \in E$ gilt, der aber nicht notwendig L-zahm ist, ein L-zahmer Operator $\hat{T} : F \longrightarrow I$ existiert, so daß $T = \hat{T} \circ i$ gilt.*

Beweis: Offensichtlich gilt es nur die Notwendigkeit nachzuweisen. Wir betrachten die surjektive Abbildung $A : E \times F \longrightarrow F$ mit $A(x,y) := i(x) + y$ für alle $x \in E$ und $y \in F$ und bezeichnen mit $\hat{F}$ den Raum F versehen mit den aufsteigenden Halbnormen $\|y\|_n^\wedge := \inf\{\|(\xi,\eta)\|_n \ : \ y = A(\xi,\eta)\}$ für $y \in F$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $B_n^{\hat{F}} \supset A(B_n^E \times B_n^F)$. Die Abbildung $A : E \times_L F \longrightarrow \hat{F}$ ist somit ein L-zahmer Operator. Die Einbettung $\omega : E \longrightarrow E \times_L F$ mit $\omega(x) := (x, 0)$ für $x \in E$ ist L-zahm und aus $A \circ \omega = i$ folgt auch die L-Zahmheit der Abbildung $i : E \longrightarrow \hat{F}$. Da nun $i : E \longrightarrow F$ L-zahm offen aufs Bild ist und stets $\frac{1}{2}B_n^{\hat{F}} \subset A(B_n^E \times B_n^F)$ gilt, existiert ein $l \in L$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert, so daß $i(B_n^E) \supset i(\frac{1}{2}B_n^E + \frac{1}{2}B_n^E) \supset \frac{1}{2}i(B_n^E) + (\frac{1}{2}C_n B_{l(n)}^F \cap \operatorname{im} i) \supset \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}C_n\} A(B_n^E \times B_{l(n)}^F) \cap \operatorname{im} i \supset \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}C_n\}\frac{1}{2}B_{l(n)}^{\hat{F}} \cap \operatorname{im} i$ gilt. Damit folgt insgesamt, daß $i : E \longrightarrow \hat{F}$ ein L-zahmer Homomorphismus ist. Nun ist I ein injektives Objekt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, das bedeutet, daß bezüglich $i : E \longrightarrow \hat{F}$ ein L-zahmer Operator $\hat{T} : \hat{F} \longrightarrow I$ existiert mit $\hat{T} \circ i = T$. Die Einbettung $F \hookrightarrow \hat{F}$ ist ein L-zahmer Operator, denn es gilt $B_n^F \subset i(B_n^E) + B_n^F = A(B_n^E \times B_n^F) \subset B_n^{\hat{F}}$. Damit ist auch $\hat{T} : F \longrightarrow I$ L-zahm und es folgt die Behauptung.

Wir halten nun eine weitere wichtige Eigenschaft der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ fest:

Satz 2.1.13 *Die Kategorie der L-zahmen Vektorräume $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ ist quasiabelsch.*

Beweis: dies beweist man analog zu 1.1.30.

Es sei $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Wir setzen $\mathrm{T^L}(E, \cdot)(X) := \mathrm{T^L}(E, X)$ für alle $X \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und $\mathrm{T^L}(E, \cdot)(T) := T^*$ für alle $T \in \mathrm{T^L}(X, Y)$ und alle $X, Y \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ mit $T^* : \mathrm{T^L}(E, X) \longrightarrow \mathrm{T^L}(E, Y)$ und $T^*(A) := T \circ A$

für alle $A \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,X)$. Wir erhalten so einen additiven Funktor $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,\cdot) : \mathcal{T}^L\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{LS}$, wobei $\mathcal{LS}$ die Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume bezeichnet.

Proposition 2.1.14 *Es sei $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Der Funktor $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,\cdot)$ ist injektiv.*

Beweis: Es sei $0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{q} Z$ exakt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Da die Kategorie $\mathcal{LS}$ abelsch ist, reicht es, zu zeigen, daß j^* injektiv ist und $\operatorname{im} j^* = \ker q^*$ gilt. Aus $0 = j^*(h) = j \circ h$ für $h \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,X)$ folgt aufgrund der Injektivität von j, daß $h = 0$ ist. Damit ist j^* injektiv. Um $\operatorname{im} j^* = \ker q^*$ nachzuweisen, sei $f \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,Y)$ mit $f = j^*(h)$ und $h \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,X)$. Da $\operatorname{im} j = \ker q$ gilt, folgt aus $q^*(f) = q \circ f = q \circ j \circ h = 0$, daß $\operatorname{im} j^* \subseteq \ker q^*$ gilt. Ist $f \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,Y)$ mit $0 = q^*(f) = q \circ f$, dann ist $\operatorname{im} f \subseteq \ker q = \operatorname{im} j$. Nun ist j ein L-zahmer Homomorphismus, das bedeutet, daß $j^{-1} : \operatorname{im} j \longrightarrow X$ ein L-zahmer Operator ist. Die Tatsache, daß $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} j$ gilt, impliziert, daß auch $j^{-1} \circ f : E \longrightarrow X$ ein L-zahmer Operator ist. Für $h := j^{-1} \circ f$ gilt $f = j^*(h)$ und es folgt die Behauptung.

Wir sind nun so weit, die Rechtsableitungen des Hom-Funktors $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,\cdot)$ in der Kategorie der L-zahmen Vektorräume definieren zu können. Gemäß dem Abschnitt 1.2 setzen wir $\mathrm{Ext}^0_{\mathrm{L}}(E,F) := \ker \iota_0^* = \operatorname{im} \iota^* \cong \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,F)$ und $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E,F) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} \iota_{k-1}^* \hookrightarrow \ker \iota_k^*) = \ker \iota_k^* / \operatorname{im} \iota_{k-1}^*$ für $k \geq 1$. Im folgenden sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt genau dann $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$, falls $\ker \iota_k^* = \operatorname{im} \iota_{k-1}^*$ ist. Da stets $\operatorname{im} \iota_{k-1}^* \subseteq \ker \iota_k^*$ gilt, ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$ genau dann, falls $\ker \iota_k^* \subseteq \operatorname{im} \iota_{k-1}^*$ gilt, das heißt, falls für alle $A \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,I_k)$ mit $\iota_k \circ A = 0$ ein $B \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,I_{k-1})$ existiert, so daß $A = \iota_{k-1} \circ B$ gilt.

Bemerkung 2.1.15 Es seien $E,\ F \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$.

(a) Ist $(F_n)_{n\leq N}$ eine endliche Folge L-zahmer Räume, so folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des endlichen Produkts, daß $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E, \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} F_n) = \prod_{n\leq N} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,F_n)$ gilt.
Weiter ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E, \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} F_n)$ isomorph zu $\prod_{n\leq N} \mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E,F_n)$ für alle $k \geq 1$. Denn es sei
$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\iota^n} I_0^n \xrightarrow{\iota_0^n} I_1^n \xrightarrow{\iota_1^n} I_2^n \xrightarrow{\iota_2^n} \ldots$ eine injektive Auflösung von F_n für $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, so ist aufgrund der Bemerkung 2.1.2 und 1.2.3 der folgende exakte Komplex
$0 \longrightarrow \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} F_n \xrightarrow{(\iota^n)_{n\leq N}} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} I_0^n \xrightarrow{(\iota_0^n)_{n\leq N}} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} I_1^n \xrightarrow{(\iota_1^n)_{n\leq N}} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} I_2^n \xrightarrow{(\iota_2^n)_{n\leq N}} \ldots$ eine injektive Auflösung von $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} F_n$ in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$.
Dann ist $(\iota^n)^*_{n\leq N} = (\iota^{n*})_{n\leq N}$ und $(\iota_k^n)^*_{n\leq N} = (\iota_k^{n*})_{n\leq N}$ für alle $k \geq 0$.
Damit ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E, \mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} F_n) = \ker(\iota_k^n)^*_{n\leq N} / \operatorname{im}(\iota_{k-1}^n)^*_{n\leq N} = \prod_{n\leq N} \ker \iota_k^{n*} / \prod_{n\leq N} \operatorname{im} \iota_{k-1}^{n*} = \prod_{n\leq N} \ker \iota_k^{n*} / \operatorname{im} \iota_{k-1}^{n*} = \prod_{n\leq N} \mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E,F_n)$ für alle $k \geq 1$.

(b) Ist $(E_n)_{n\leq N}$ eine endliche Folge L-zahmer Räume, so folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des endlichen Koprodukts, daß $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}(\mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} E_n, F)$ isomorph zu $\prod_{n\leq N} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E_n,F)$ ist.
Weiter ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(\mathrm{T}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} E_n, F)$ isomorph zu $\prod_{n\leq N} \mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E_n,F)$ für alle $k \geq 1$.

Da $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ halbabelsch, $\mathcal{LS}$ abelsch und $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,\cdot)$ ein additiver und injektiver Funktor für jedes $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ ist, erhalten wir die Existenz der langen exakten Kohomologie-Sequenz:

Satz 2.1.16 *Es sei $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Dann induziert jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$ in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ einen exakten Komplex*

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,Y) \xrightarrow{q^*} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{L}}(E,X) \longrightarrow \ldots$$

in $\mathcal{LS}$.

Ist eine kurze Sequenz exakt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, so bezeichnen wir sie im folgenden als L-zahm exakt. Zerfällt sie in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, so bezeichnen wir dies als L-zahmes Zerfallen.

Aus der Existenz der langen exakten Kohomologie-Sequenz und der Tatsache, daß $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ quasiabelsch ist, folgt:

Proposition 2.1.17 *Es sei $E, F \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$

(ii) Jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ *zerfällt in* $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$.

Beweis: "$(i) \Rightarrow (ii)$": Es sei $0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ exakt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Betrachten wir die lange exakte Kohomologie-Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,F) \xrightarrow{j^*} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,G) \xrightarrow{q^*} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) \longrightarrow \dots ,$$

so ist q^* surjektiv, da nach Voraussetzung $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$ gilt. Die Surjektivität der Abbildung q^* bedeutet insbesondere, daß für die Identität in E ein Operator $R \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,G)$ existiert mit $q \circ R = \mathrm{id}_E$.
"$(ii) \Rightarrow (i)$": Wir wählen eine injektive Auflösung $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{\iota_0} I_1 \xrightarrow{\iota_1} \dots$ für F in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Um $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$ nachzuweisen, zeigen wir im folgenden, daß für alle $A \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(F, I_1)$ mit $i_1 \circ A = 0$ ein Operator $B \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(F, I_0)$ existiert, so daß $A = i_0 \circ B$ gilt. Aus $i_1 \circ A = 0$ folgt $\mathrm{im}\, A \subseteq \ker i_1 = \mathrm{im}\, i_0$. Aufgrund der L-zahmen Exaktheit der injektiven Auflösung ist $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{\iota_0} \mathrm{im}\, \iota_0 \longrightarrow 0$ exakt in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Da die Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ quasiabelsch ist, erhalten wir folgendes L-zahme kommutative Diagramm mit L-zahm exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\iota} & I_0 & \xrightarrow{\iota_0} & \mathrm{im}\, \iota_o & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \mathrm{id} & & \uparrow & & \uparrow A & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{10}$$

Nach Voraussetzung zerfällt die untere Zeile in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Damit existiert nach 1.1.31 ein Operator $B \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E, I_0)$ mit $\iota_0 \circ B = A$.

Unmittelbar aus der Proposition 2.1.17 und dem Satz 1.1.36 erhalten wir folgenden

Satz 2.1.18 *Es sei E, $F \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$.

(b) Für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und jeden Operator $\phi \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(H,F)$ existiert ein Operator $\psi \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(G,F)$ mit $\psi \circ J = \phi$.

(c) Für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} H \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und jeden Operator $\phi \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,H)$ existiert ein Operator $\psi \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E,G)$ mit $Q \circ \psi = \phi$.

Zum Schluß dieses Abschnitts untersuchen wir $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E,F)$ im Fall, daß $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und F ein L-zahm nuklearer Fréchetraum ist. Mit der selben Beweisführung wie in [V1] Theorem 1.3 und Corollary 1.5 erhalten wir das folgende Lemma und die anschließende Proposition.

Lemma 2.1.19 *Es sei $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und F ein L-zahm nuklearer Fréchetraum.*
Dann gilt $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$ für alle $k \geq 2$.

Beweis: Beachten wir die Bemerkung 2.1.11, so folgt aus der Proposition 2.1.10, daß eine kurze L-zahm exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} \prod_{n\in\mathbb{N}} l_\infty \xrightarrow{\sigma} \prod_{n\in\mathbb{N}} l_\infty \longrightarrow 0$$

existiert. Nach dem Lemma 2.1.5 (b) ist die obige Sequenz eine injektive Auflösung für F, woraus offensichtlich die Behauptung folgt.

Proposition 2.1.20 *Es sei $E \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und F ein L-zahm nuklearer Fréchetraum, so daß* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$ *gilt. Dann ist* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,G) = 0$ *für jeden separierten L-zahmen Quotienten G von F.*

Beweis: Da G ein separierter L-zahmer Quotient von F ist, erhalten wir eine kurze L-zahm exakte Sequenz der Form $0 \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$, wobei H ein abgeschlossener L-zahmer Unterraum von F ist. Mit dem Satz 2.1.16 erhalten wir den folgenden exakten Komplex:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{L}}(E,H) \longrightarrow \ \ldots \, .$$

Einerseits gilt nach der Voraussetzung $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,F) = 0$. Nach der Bemerkung 2.1.9 und dem Lemma 2.1.19 ist andererseits $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{L}}(E,H) = 0$. Damit gilt auch $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(E,G) = 0$, und es folgt die Behauptung.

2.2 Ein L-zahmer Splittingsatz

Im folgenden beweisen wir einen L-zahmen Splittingsatz in Anlehnung an die Ausführungen von Vogt in [V4].

Indem wir uns auf die wesentlichen Voraussetzungen, die für den Beweis notwendig sind, beschränken, erhalten wir zunächst die folgende Version des Lemmas 4.5 aus [V4]:

Lemma 2.2.1 *Es seien E_0, E_1 und E_2 bzw. F_0, F_1 und F_2 Banachräume. Weiter seien $i_2^1 : E_2 \longrightarrow E_1$ und $i_0^1 : E_1 \longrightarrow E_0$ mit $i_0^2 := i_0^1 \circ i_1^2$ bzw. $j_2^1 : F_2 \longrightarrow F_1$ und $j_0^1 : F_1 \longrightarrow F_0$ mit $j_0^2 := j_0^1 \circ j_1^2$ stetige lineare Verbindungsabbildungen. Darüber hinaus sei $B_i := \{y \in E_i' : \|y\|_i^* \le 1\}$ und $U_i := \{x \in F_i : \|x\|_i \le 1\}$ für $i = 0,1,2$.Existieren reelle Folgen $r_k \nearrow +\infty$, $s_k \nearrow +\infty$ und positive monoton wachsende Funktionen ϕ, ψ mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r_k}{s_{k-1}} < +\infty$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\psi(s_k)}{\phi(r_k)} < +\infty$, so daß*

$$\begin{aligned} i_1^{2'} B_1 \quad &\subset \quad r_k\, i_0^{2'} B_0 + \frac{1}{\phi(r_k)} B_2 \quad \textit{und} \\ j_0^1 U_1 \quad &\subset \quad \frac{1}{s_k} U_0 + \psi(s_k) j_0^2 U_2 \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $C > 0$, so daß für jede nukleare Abbildung $b : E_1 \longrightarrow F_1$ mit $\nu(b) \le 1$ nukleare Operatoren $r_0 : E_0 \longrightarrow F_0$ mit $\nu(r_0) \le \epsilon$ und $r_2 : E_2 \longrightarrow F_2$ mit $\nu(r_2) \le C$ existieren, so daß $j_0^1 \circ b \circ i_1^2 = r_0 \circ i_0^2 + j_0^2 \circ r_2$ gilt.

Für den Beweis der Aussage (a) des anschließenden Lemmas verweisen wir auf [MV] Lemma 29.13. Die Aussage (b) folgt ähnlich unter Berücksichtigung des Bipolarensatzes.

Lemma 2.2.2 *Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_0 \le \|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2$ Halbnormen auf E. Weiter sei $U_i := \{x \in E : \|x\|_i \le 1\}$ bzw. $B_i := \{y \in (E, \|\cdot\|_i)' : \|y\|_i^* \le 1\}$ für $i = 0,1,2$ und $0 < \theta < 1$.*

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es existiert ein $C > 0$, so daß $\|\cdot\|_1^* \le C \|\cdot\|_0^{*^{1-\theta}} \|\cdot\|_2^{*^{\theta}}$ auf $(E, \|\cdot\|_0)'$ gilt.

(ii) Es existiert ein $C > 0$, so daß $\|\cdot\|_1^* \le C(s\|\cdot\|_0^* + s^{1-\frac{1}{\theta}} \|\cdot\|_2^*)$ für alle $s > 0$ auf $(E, \|\cdot\|_0)'$ gilt.

(iii) Es existiert ein $C > 0$, so daß $\sup_{x \in U_1} |y(x)| \leq C \sup\{|y(x)| : x \in sU_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} U_2\}$ für alle $s > 0$ und $y \in (E, \|\cdot\|_0)'$ gilt.

(iv) Es existiert ein $C > 0$, so daß $U_1 \subset C(sU_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} U_2)$ für alle $s > 0$ gilt.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es existiert ein $C > 0$, so daß $\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|_0^{1-\theta} \|\cdot\|_2^{\theta}$ gilt.

(ii) Es existiert ein $C > 0$, so daß $\|\cdot\|_1 \leq C(s\|\cdot\|_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} \|\cdot\|_2)$ für alle $s > 0$ gilt.

(iii) Es existiert ein $C > 0$, so daß $\sup_{y \in B_1} |y(x)| \leq C \sup\{|y(x)| : y \in sB_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} B_2\}$ für alle $s > 0$ gilt.

(iv) Es existiert ein $C > 0$, so daß $B_1 \subset C(sB_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} B_2)$ für alle $s > 0$ gilt.

Bemerkung 2.2.3 Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$ Halbnormen auf E. Weiter sei E_i der lokale Banachraum bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_i$ für $i = 0, 1, 2$ und i_n^m für $n, m = 0, 1, 2$ und $n \leq m$ die entsprechenden Verbindungsabbildungen. Für $i = 0, 1, 2$ setzen wir $U_i := \{x \in E : \|x\|_i \leq 1\}$ bzw. $B_i := \{y \in (E, \|\cdot\|_i)' : \|y\|_i^* \leq 1\}$ und $\hat{U}_i := \{x \in E_i : \|x\|_i \leq 1\}$ bzw. $\hat{B}_i := \{y \in E_i' : \|y\|_i^* \leq 1\}$.

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es existiert ein $C > 0$, so daß $U_1 \subset C(sU_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} U_2)$ für alle $s > 0$ gilt.

(ii) Es existiert ein $C > 0$, so daß $i_0^1 \hat{U}_1 \subset C(s\hat{U}_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} i_0^2 \hat{U}_2)$ für alle $s > 0$ gilt.

(b) Es gilt stets $i_k'(\hat{B}_k) = B_k$ für alle $k = 0, 1, 2$, damit sind offensichtlich die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert ein $C > 0$, so daß $B_1 \subset C(sB_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} B_2)$ für alle $s > 0$ gilt.

(ii) Es existiert ein $C > 0$, so daß $i_1^{2'} \hat{B}_1 \subset C(s\, i_0^{2'} \hat{B}_0 + s^{1-\frac{1}{\theta}} \hat{B}_2)$ für alle $s > 0$ gilt.

(c) Es seien E und F $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$ Halbnormen auf E bzw. F. Existieren C, $\tilde{C} > 0$ und $0 < \tau < \theta < 1$, so daß E der Bedingung

$$\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|_0^{1-\tau} \|\cdot\|_2^{\tau} \tag{11}$$

und F' der Bedingung

$$\|\cdot\|_1^* \leq \tilde{C} \|\cdot\|_0^{*^{1-\theta}} \|\cdot\|_2^{*^{\theta}} \tag{12}$$

genügt, so sind die Voraussetzungen des Lemmas 2.2.1, wie schon in [V4] im Anschluß an das Lemma 4.5 bemerkt wurde, bezüglich der lokalen Banachräume E_0, E_1 und E_2 bzw. F_0, F_1 und F_2 erfüllt.
Denn nach dem Lemma 2.2.2 sind die Bedingungen äquivalent zu

$$B_1 \subset C'(rB_0 + \frac{1}{r^{\frac{1}{\tau}-1}} B_2), \ r > 0 \tag{13}$$

und

$$U_1 \subset \tilde{C}'(\frac{1}{s} U_0 + s^{\frac{1}{\theta}-1} U_2), \ s > 0. \tag{14}$$

Die Voraussetzung $\tau < \theta$ ermöglicht uns die Wahl eines $\epsilon > 0$, so daß $\frac{1}{\tau} > (\epsilon + 1)\frac{1}{\theta}$ gilt. Setzen wir nun $\phi(r) := C'^{-\frac{1}{\tau}} r^{\frac{1}{\tau}-1}$, $\psi(s) := \tilde{C}'^{\frac{1}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}-1}$, $r_k := C' 2^k$ und $s_k := \tilde{C}'^{-1} 2^{(1+\epsilon)k}$ und beachten wir den obigen Teil (a) und (b), so erhalten wir die Voraussetzungen des Lemmas 2.2.1.

Durch eine Anpassung des Beweises zum Theorem 3.4 in [V4] in Hinblick auf den nuklearen Fall erhalten wir die zwei folgenden Lemmata:

Lemma 2.2.4 *Es seien E, F $\mathbb{K}$-Vektorräume und $(\|\cdot\|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Familie monoton wachsender Halbnormen auf E bzw. F. Weiter sei E_n bzw. F_n der lokale Banachraum bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_n$ auf E bzw. F und $i_n^m : E_m \longrightarrow E_n$ bzw. $j_n^m : F_m \longrightarrow F_n$ für $m \geq n$ die entsprechenden Verbindungsabbildungen.*

Existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\epsilon > 0$ ein $C > 0$, so daß für jede nukleare Abbildung $b : E_{n+1} \longrightarrow F_n$ mit $\nu(b) \leq 1$ nukleare Operatoren $u : E_n \longrightarrow F_{n-1}$ mit $\nu(u) \leq \epsilon$ und $v : E_{n+2} \longrightarrow F_{n+1}$ mit $\nu(v) \leq C$ existieren, so daß $j_{n-1}^n \circ b \circ i_{n+1}^{n+2} = u \circ i_n^{n+2} + j_{n-1}^{n+1} \circ v$ gilt, dann folgt:

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\epsilon > 0$ existiert ein $C > 0$, so daß für jede nukleare Abbildung $b : E_{n+1} \longrightarrow F_n$ mit $\nu(b) \leq 1$ nukleare Operatoren $u : E_{n+1} \longrightarrow F_{n-1}$ mit $\nu(u) \leq \epsilon$ und $v : E_{n+2} \longrightarrow F_{n+1}$ mit $\nu(v) \leq C$ existieren, so daß

$$\|j_k^{n-1} \circ u(x)\|_k \leq \epsilon \|i_{k+2}^{n+1}(x)\|_{k+2} \text{ für alle } k = 0, \ldots, n-1$$

und $j_{n-1}^n \circ b \circ i_{n+1}^{n+2} = u \circ i_{n+1}^{n+2} + j_{n-1}^{n+1} \circ v$ gilt.

Lemma 2.2.5 *Es seien E, F $\mathbb{K}$-Vektorräume und $(\|\cdot\|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Familie monoton wachsender Halbnormen auf E bzw. F. Weiter sei E_n bzw. F_n der lokale Banachraum bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_n$ auf E bzw. F und $i_n^m : E_m \longrightarrow E_n$ bzw. $j_n^m : F_m \longrightarrow F_n$ für $m \geq n$ die entsprechenden Verbindungsabbildungen.*
Erfüllen die lokalen Banachräume von E und F die Voraussetzung des obigen Lemmas, dann existiert zu jeder Familie von nuklearen Operatoren $(b_n : E_{n+1} \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Operatoren $(r_n^{n+2} : E_{n+2} \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $r_n^{n+2} \circ i_{n+2}^{n+3} - j_n^{n+1} \circ r_{n+1}^{n+3} = b_n \circ i_{n+1}^{n+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Es sei $(E_n, i_n^k)_{n,k\in\mathbb{N},n\leq k}$ ein projektives System von Banachräumen. Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|_n$ die Norm auf E_n für $n \in \mathbb{N}$. Unter dem projektiven Limes verstehen wir im folgenden den L-zahmen linearen Teilraum $\operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n : i_n^k(x_k) = x_n, \text{ für alle } n, k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, des Produkts $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ versehen mit dem monoton wachsenden Halbnormensystem $(\max_{k\leq n} \|\cdot\|_k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 2.2.6 Es seien $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{E}_n, \tilde{i}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ zwei projektive Spektren von Banachräumen, so daß ein $l \in L$ und stetige Abbildungen $S_n^{l(n)} : E_{l(n)} \longrightarrow \tilde{E}_n$ und $T_n^{l(n)} : \tilde{E}_{l(n)} \longrightarrow E_n$ existieren, so daß einerseits $S_n^{l(n)} \circ T_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{i}_n^{l^2(n)}$ und $T_n^{l(n)} \circ S_{l(n)}^{l^2(n)} = i_n^{l^2(n)}$ und andererseits $\tilde{i}_n^{n+1} \circ S_{n+1}^{l(n+1)} = S_n^{l(n)} \circ i_{l(n)}^{l(n+1)}$ und $i_n^{n+1} \circ T_{n+1}^{l(n+1)} = T_n^{l(n)} \circ \tilde{i}_{l(n)}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $\operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n$ bezüglich $l \in L$ L-zahm isomorph zu $\operatorname{proj}_{\leftarrow n} \tilde{E}_n$. Wir betrachten zunächst die Abbildung $I : \operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n \longrightarrow \operatorname{proj}_{\leftarrow n} \tilde{E}_n$ mit $I((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (S_n^{l(n)}(x_{l(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\tilde{i}_n^{n+1} \circ S_{n+1}^{l(n+1)}(x_{l(n+1)}) = S_n^{l(n)} \circ i_{l(n)}^{l(n+1)}(x_{l(n+1)}) = S_n^{l(n)}(x_{l(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist I wohldefiniert. Außerden ist $\|I((x_k)_{k\in\mathbb{N}})\|_n = \max_{k=1}^n \|S_k^{l(k)}(x_{l(k)})\|_k \leq C_n \max_{k=1}^n \|x_{l(k)}\|_{l(k)} \leq C_n \max_{k=1}^{l(n)} \|x_k\|_k = C_n \|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{l(n)}$, das bedeutet, daß I bezüglich $l \in L$ L-zahm ist.
Analog erhalten wir, daß $I^{-1} : \operatorname{proj}_{\leftarrow n} \tilde{E}_n \longrightarrow \operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n$ mit $I^{-1}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (T_n^{l(n)}(x_{l(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert und bezüglich $l \in L$ L-zahm ist. Es ist $I^{-1} \circ I(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = I^{-1}(S_n^{l(n)}(x_{l(n)}))_{n\in\mathbb{N}} = (T_n^{l(n)} \circ S_{l(n)}^{l^2(n)}(x_{l^2(n)}))_{n\in\mathbb{N}} = (i_n^{l^2(n)}(x_{l^2(n)}))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n$. Analog erhält man die entsprechende Aussage für $I \circ I^{-1}$ und es folgt die Behauptung.

Satz 2.2.7 *Es sei $0 \longrightarrow F \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ eine kurze L-zahm exakte Sequenz von Frécheträumen und es sei E oder F L-zahm nuklear. Weiter sei $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Banachräume auf E und F. Existiert für alle $l \in L$ ein $k \in L$ mit $k \geq l$, so daß für jede Folge von nuklearen Operatoren $(b_n^{l(n+1)})_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{L}(E_{l(n+1)}, F_n)$ eine Folge von Operatoren $(r_n^{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{L}(E_{k(n)}, F_n)$ existiert, so daß $r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{k(n+1)} - j_n^{n+1} \circ r_{n+1}^{k(n+1)} = b_n^{l(n+1)} \circ i_{l(n+1)}^{k(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann zerfällt die Sequenz L-zahm.*

$(r_n^{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{L}(E_{k(n)}, F_n)$ *existiert, so daß* $r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{k(n+1)} - j_n^{n+1} \circ r_{n+1}^{k(n+1)} = b_n^{l(n+1)} \circ i_{l(n+1)}^{k(n+1)}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, dann zerfällt die Sequenz* L*-zahm.*

Beweis: Es sei $(G_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Banachräume auf G. Dann erhalten wir zunächst folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{J}_1} & G_1 & \xrightarrow{\tilde{Q}_1} & \tilde{E}_1 & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_n & \xrightarrow{\tilde{J}_n} & G_n & \xrightarrow{\tilde{Q}_n} & \tilde{E}_n & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \tilde{\jmath}_n^{n+1} & & \uparrow g_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{\imath}_n^{n+1} & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{J}_{n+1}} & G_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n+1}} & \tilde{E}_{n+1} & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{J} & G & \xrightarrow{Q} & E & \rightarrow & 0,
\end{array}$$

wobei $\tilde{F}_n := \overline{g_n(J(F))}^{G_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ isometrisch isomorph zum lokalen Banachraum von $J(F)$ bezüglich der von G induzierten Halbnorm $\|\cdot\|_n$ auf $J(F)$ und $\tilde{E}_n := G_n/\overline{g_n(J(F))}^{G_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ isometrisch isomorph zum lokalen Banachraum von $G/J(F)$ bezüglich der von der Halbnorm $\|\cdot\|_n$ auf G induzierten Quotientenhalbnorm auf $G/J(F)$ ist. Da J bezüglich $l \in L$ ein L-zahmer Homomorphismus ist, folgt, daß stetige Abbildungen $S_n^{l(n)} : \tilde{F}_{l(n)} \longrightarrow F_n$ und $T_n^{l(n)} : F_{l(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ existieren, so daß $S_n^{l(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l(n)} = j_n$ und $T_n^{l(n)} \circ j_{l(n)} = \tilde{\jmath}_n$ gilt. Da $\overline{\tilde{\jmath}_n(F)} = \tilde{F}_n$ und $\overline{j_n(F)} = F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $j_n^m \circ S_m^{l(m)} = S_n^{l(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l(n)}^{l(m)}$ und $\tilde{\jmath}_n^m \circ T_m^{l(m)} = T_n^{l(n)} \circ j_{l(n)}^{l(m)}$ für alle $m > n$. Da Q bezüglich $l \in L$ ein L-zahmer Homomorphismus ist, folgt, daß stetige Abbildungen $B_n^{l(n)} : \tilde{E}_{l(n)} \longrightarrow E_n$ und $A_n^{l(n)} : E_{l(n)} \longrightarrow \tilde{E}_n$ existieren, so daß $B_n^{l(n)} \circ \tilde{\imath}_{l(n)} = i_n$ und $A_n^{l(n)} \circ i_{l(n)} = \tilde{\imath}_n$ gilt. Da $\overline{\tilde{\imath}_n(E)} = \tilde{E}_n$ und $\overline{i_n(E)} = E_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $i_n^m \circ B_m^{l(m)} = B_n^{l(n)} \circ \tilde{\imath}_{l(n)}^{l(m)}$ und $\tilde{\imath}_n^m \circ A_m^{l(m)} = A_n^{l(n)} \circ i_{l(n)}^{l(m)}$ für alle $m \geq n$.

Wir behandeln zunächst den Fall, daß E L-zahm nuklear ist. Dann erhalten wir unter Anwendung der Proposition 1.1.43 (a) ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ von Banachräumen und folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{J_1} & \tilde{G}_1 & \xrightarrow{Q_1} & \tilde{E}_{l(1)} & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{J_n} & \tilde{G}_n & \xrightarrow{Q_n} & \tilde{E}_{l(n)} & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow j_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{g}_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{\imath}_{l(n)}^{l(n+1)} & & \\
0 & \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{J_{n+1}} & \tilde{G}_{n+1} & \xrightarrow{Q_{n+1}} & \tilde{E}_{l(n+1)} & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & .
\end{array} \tag{15}$$

Darüber hinaus erhalten wir mit Hilfe der Proposition 1.1.43 (a) für alle $n \in \mathbb{N}$ stetige Abbildungen $p_n^{l(n)} : G_{l(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n^{l(n)} : \tilde{G}_{l(n)} \longrightarrow G_n$ mit $v_n^{l(n)} \circ p_{l(n)}^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l(n)} \circ v_{l(n)}^{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ und $\tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l(n+1)} = p_n^{l(n)} \circ g_{l(n)}^{l(n+1)}$ bzw. $v_n^{l(n)} \circ \tilde{g}_{l(n)}^{l(n+1)} = g_n^{n+1} \circ v_{n+1}^{l(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $\tilde{Q}_n \circ v_n^{l(n)} = \tilde{\imath}_n^{l^2(n)} \circ Q_{l(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun für $n \in \mathbb{N}$ das folgende kommutative

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r, "J_n"] & \tilde{G}_n \arrow[r, "Q_n"] & \tilde{E}_{l(n)} \arrow[r] & 0 \\
 & & & E_{l^2(n)} \arrow[u, "A^{l^2(n)}_{l(n)}"'] & \\
 & & & l_1 \arrow[u, "a_n"'] \arrow[uul, "\tilde{R}_n"] & \\
 & & & E_{l^3(n)}. \arrow[u, "d_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Da E bezüglich $l \in L$ L-zahm nuklear ist, faktorisieren die Abbildung $i^{l^3(n)}_{l^2(n)}$ über den Banachraum l_1. Da der Banachraum l_1 in der Kategorie der Banachräume projektiv ist, existieren stetige Abbildungen $\tilde{R}_n : l_1 \longrightarrow \tilde{G}_n$, so daß $Q_n \circ \tilde{R}_n = A^{l^2(n)}_{l(n)} \circ a_n$ gilt. Setzen wir nun $R_n := \tilde{R}_n \circ d_n$, so erhalten wir Operatoren mit $Q_n \circ R_n = Q_n \circ \tilde{R}_n \circ d_n = A^{l^2(n)}_{l(n)} \circ a_n \circ d_n = A^{l^2(n)}_{l(n)} \circ i^{l^3(n)}_{l^2(n)}$.
Dann gilt $Q_n \circ \left(R_n \circ i^{l^3(n+1)}_{l^3(n)} - \tilde{g}^{n+1}_n \circ R_{n+1}\right) = Q_n \circ R_n \circ i^{l^3(n+1)}_{l^3(n)} - Q_n \circ \tilde{g}^{n+1}_n \circ R_{n+1}$
$= A^{l^2(n)}_{l(n)} \circ i^{l^3(n)}_{l^2(n)} \circ i^{l^3(n+1)}_{l^3(n)} - \tilde{i}^{l(n+1)}_{l(n)} \circ Q_{n+1} \circ R_{n+1} = A^{l^2(n)}_{l(n)} \circ i^{l^3(n+1)}_{l^2(n)} - \tilde{i}^{l(n+1)}_{l(n)} \circ A^{l^2(n+1)}_{l(n+1)} \circ i^{l^3(n+1)}_{l^2(n+1)}$
$= A^{l^2(n)}_{l(n)} \circ i^{l^3(n+1)}_{l^2(n)} - A^{l^2(n)}_{l(n)} \circ i^{l^2(n+1)}_{l^2(n)} \circ i^{l^3(n+1)}_{l^2(n+1)} = 0.$
Aufgrund der Exaktheit der Zeilen im Diagramm (15) sind damit die Abbildungen
$\tilde{b}^{l^3(n+1)}_n : E_{l^3(n+1)} \longrightarrow F_n$ mit $\tilde{b}^{l^3(n+1)}_n := J_n^{-1} \circ \left(R_n \circ i^{l^3(n+1)}_{l^3(n)} - \tilde{g}^{n+1}_n \circ R_{n+1}\right)$ wohldefiniert.
Setzen wir $b^{l^4(n+1)}_n := \tilde{b}^{l^3(n+1)}_n \circ i^{l^4(n+1)}_{l^3(n+1)}$ für $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir, da E bezüglich $l \in L$ L-zahm nuklear ist, nukleare Operatoren von $E_{l^4(n+1)}$ auf F_n. Die Voraussetzung impliziert somit die Existenz eines $k \in L$ mit $k \geq l^4$ und einer Folge Operatoren $(r^{k(n)}_n : E_{k(n)} \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $r^{k(n)}_n \circ i^{k(n+1)}_{k(n)} - j^{n+1}_n \circ r^{k(n+1)}_{n+1} = b^{l^4(n+1)}_n \circ i^{k(n+1)}_{l^4(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Setzen wir nun $P_n : E_{k(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ mit $P_n := R_n \circ i^{k(n)}_{l^3(n)} - J_n \circ r^{k(n)}_n$, so gilt $\tilde{g}^{n+1}_n \circ P_{n+1}$
$= \tilde{g}^{n+1}_n \circ \left(R_{n+1} \circ i^{k(n+1)}_{l^3(n+1)} - J_{n+1} \circ r^{k(n+1)}_{n+1}\right) = \tilde{g}^{n+1}_n \circ R_{n+1} \circ i^{k(n+1)}_{l^3(n+1)} - J_n \circ j^{n+1}_n \circ r^{k(n+1)}_{n+1}$
$= \tilde{g}^{n+1}_n \circ R_{n+1} \circ i^{k(n+1)}_{l^3(n+1)} - J_n \circ \left(r^{k(n)}_n \circ i^{k(n+1)}_{k(n)} - b^{l^4(n+1)}_n \circ i^{k(n+1)}_{l^4(n+1)}\right) = R_n \circ i^{l^3(n+1)}_{l^3(n)} \circ i^{k(n+1)}_{l^3(n+1)} - J_n \circ r^{k(n)}_n \circ i^{k(n+1)}_{k(n)} = P_n \circ i^{k(n+1)}_{k(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Damit ist die Abbildung $P : \mathrm{proj}_{\leftarrow n} E_{k(n)} \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} \tilde{G}_n$ mit $P((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (P_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{proj}_{\leftarrow n} E_{k(n)}$ wohldefiniert. Im folgenden setzen wir $I_G : G \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} G_n$ mit $I_G(x) := (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $I_E : E \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} E_{k(n)}$ mit $I_E(x) := (i_{k(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ und $V : \mathrm{proj}_{\leftarrow n} \tilde{G}_n \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} G_n$ mit $V((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (v^{l(n)}_n(x_{l(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$. Die Abbildung V ist wohldefiniert, da $g^{n+1}_n \circ v^{l(n+1)}_{n+1} = v^{l(n)}_n \circ \tilde{g}^{l(n+1)}_{l(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $R := I_G^{-1} \circ V \circ P \circ I_E$ gilt dann $\tilde{\imath}_n \circ Q \circ R(x) = \tilde{Q}_n \circ g_n \circ I_G^{-1} \circ V \circ P \circ I_E(x) = \tilde{Q}_n \circ g_n(z)$ für $z \in G$ mit $I_G(z) = V \circ P \circ I_E(x)$. Das bedeutet, es ist $(g_n(z))_{n\in\mathbb{N}} = (v^{l(n)}_n \circ P_{l(n)} \circ i_{k(l(n))}(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Also gilt $\tilde{\imath}_n \circ Q \circ R(x) = \tilde{Q}_n \circ g_n(z)$
$= \tilde{Q}_n \circ v^{l(n)}_n \circ P_{l(n)} \circ i_{k(l(n))}(x) = \tilde{\imath}^{l^2(n)}_n \circ Q_{l(n)} \circ P_{l(n)} \circ i_{k(l(n))}(x) = \tilde{\imath}^{l^2(n)}_n \circ Q_{l(n)} \circ R_{l(n)} \circ i^{k(l(n))}_{l^4(n)} \circ i_{k(l(n))}(x)$
$= \tilde{\imath}^{l^2(n)}_n \circ A^{l^3(n)}_{l^2(n)} \circ i^{l^4(n)}_{l^3(n)} \circ i^{k(l(n))}_{l^4(n)} \circ i_{k(l(n))}(x) = \tilde{\imath}_n$. Da $\mathrm{proj}_{\leftarrow n} \tilde{E}_n = E$ ist, folgt damit $Q \circ R = \mathrm{id}$. Die Abbildung V ist nach der Bemerkung 2.2.6 L-zahm. Die Abbildung I_G ist L-zahm, da es sich um das Spektrum der lokalen Banachräume von G handelt. Mit demselben Argument unter Hinzunahme der Bemerkung 2.2.6 folgt die L-Zahmheit der Abbildung I_E. Schließlich ist die Abbildung P, da es sich um einen Operator zwischen zwei Teilräumen von Produkten von Banachräumen handelt, der von der n-ten in die n-te Stufe agiert, L-zahm und es folgt die Behauptung.

Wir behandeln nun den Fall, daß F L-zahm nuklear ist. Dann erhalten wir unter Anwendung der

Proposition 1.1.43 (b) ein Spektrum $(\tilde{G}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ von Banachräumen und folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_1 & \xrightarrow{J_1} & \tilde{G}_1 & \xrightarrow{Q_1} & E_{l(1)} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_n & \xrightarrow{J_n} & \tilde{G}_n & \xrightarrow{Q_n} & E_{l(n)} & \to & 0 \\
 & & \uparrow \tilde{j}_n^{n+1} & & \uparrow \tilde{g}_n^{n+1} & & \uparrow i_{l(n)}^{l(n+1)} & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_{n+1} & \xrightarrow{J_{n+1}} & \tilde{G}_{n+1} & \xrightarrow{Q_{n+1}} & E_{l(n+1)} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & .
\end{array} \tag{16}$$

Darüber hinaus erhalten wir mit Hilfe der Proposition 1.1.43 (b) für alle $n \in \mathbb{N}$ stetige Abbildungen $p_n^{l^2(n)} : G_{l^2(n)} \longrightarrow \tilde{G}_n$ und $v_n : \tilde{G}_n \longrightarrow G_n$ mit $v_n \circ p_n^{l^2(n)} = g_n^{l^2(n)}$ bzw. $p_n^{l^2(n)} \circ v_{l^2(n)} = \tilde{g}_n^{l^2(n)}$ und $g_n^{n+1} \circ v_{n+1} = v_n \circ \tilde{g}_n^{n+1}$ bzw. $p_n^{l^2(n)} \circ g_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} = \tilde{g}_n^{n+1} \circ p_{n+1}^{l^2(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $p_n^{l^2(n)} \circ \tilde{J}_{l^2(n)} = J_n \circ \tilde{j}_n^{l^2(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & F_{l(n)} & & & \\
 & l_\infty \arrow[u, "d_n"] & & & \\
 & F_{l^2(n)} \arrow[u, "a_n"] & & & \\
0 \arrow[r] & \tilde{F}_{l^3(n)} \arrow[u, "S_{l^2(n)}^{l^3(n)}"] \arrow[r, "J_{l^3(n)}"] & \tilde{G}_{l^3(n)} \arrow[uul, "\tilde{L}_n"'] \arrow[r, "Q_{l^3(n)}"] & E_{l^4(n)} \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Da F bezüglich $l \in L$ L-zahm nuklear ist, faktorisiert die Abbildung $j_{l(n)}^{l^2(n)}$ über den Banachraum l_∞. Da der Banachraum l_∞ in der Kategorie der Banachräume injektiv ist, existieren stetige Abbildungen $\tilde{L}_n : \tilde{G}_{l^3(n)} \longrightarrow l_\infty$ mit $\tilde{L}_n \circ J_{l^3(n)} = a_n \circ S_{l^2(n)}^{l^3(n)}$. Setzen wir nun $L_n := d_n \circ \tilde{L}_n$, so erhalten wir Operatoren, die der Gleichung $L_n \circ J_{l^3(n)} = d_n \circ \tilde{L}_n \circ J_{l^3(n)} = d_n \circ a_n \circ S_{l^2(n)}^{l^3(n)} = j_{l(n)}^{l^2(n)} \circ S_{l^2(n)}^{l^3(n)}$ genügen. Dann gilt $\left(L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l(n+1)} \circ L_{n+1}\right) \circ J_{l^3(n+1)} = L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} \circ J_{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l(n+1)} \circ j_{l(n+1)}^{l^2(n+1)} \circ S_{l^2(n+1)}^{l^3(n+1)}$ $= j_{l(n)}^{l^2(n)} \circ S_{l^2(n)}^{l^3(n)} \circ \tilde{j}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l^2(n+1)} \circ S_{l^2(n+1)}^{l^3(n+1)} = j_{l(n)}^{l^2(n)} \circ j_{l^2(n)}^{l^2(n+1)} \circ S_{l^2(n+1)}^{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l^2(n+1)} \circ S_{l^2(n+1)}^{l^3(n+1)} = 0$. Aufgrund der Exaktheit des Diagramms (16) faktorisieren damit die Abbildungen $L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l(n+1)} \circ L_{n+1}$ über den Quotienten $\tilde{G}_{l^3(n+1)} / \ker Q_{l^3(n+1)}$ also über $E_{l^4(n+1)}$. Das bedeutet, daß Abbildungen $\tilde{b}_n^{l^4(n+1)} : E_{l^4(n+1)} \longrightarrow F_{l(n)}$ existieren, so daß $\tilde{b}_n^{l^4(n+1)} \circ Q_{l^3(n+1)} = L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l(n+1)} \circ L_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Setzen wir nun $b_n^{l^4(n+1)} := j_n^{l(n)} \circ \tilde{b}_n^{l^4(n+1)}$ für $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir, da F bezüglich $l \in L$ L-zahm nuklear ist, nukleare Abbildungen von $E_{l^4(n+1)}$ auf F_n mit $b_n^{l^4(n+1)} \circ Q_{l^3(n+1)} = j_n^{l(n)} \circ (L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l(n+1)} \circ L_{n+1})$. Die Voraussetzung impliziert dann die Existenz eines $k \in L$ mit $k \geq l^4$ und einer Folge Operatoren $(r_n^{k(n)} : E_{k(n)} \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{k(n+1)} - j_n^{n+1} \circ r_{n+1}^{k(n+1)} = b_n^{l^4(n+1)} \circ i_{l^4(n+1)}^{k(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Setzen wir $P_n := j_n^{l(n)} \circ L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{k(n)} - r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{l(k(n))} \circ Q_{k(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt: $j_n^{n+1} \circ P_{n+1} = j_n^{n+1} \circ j_{n+1}^{l(n+1)} \circ L_{n+1} \circ \tilde{g}_{l^3(n+1)}^{k(n+1)} - j_n^{n+1} \circ r_{n+1}^{k(n+1)} \circ i_{k(n+1)}^{l(k(n+1))} \circ Q_{k(n+1)}$ $= j_n^{l(n+1)} \circ L_{n+1} \circ \tilde{g}_{l^3(n+1)}^{k(n+1)} - \left(r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{k(n+1)} - b_n^{l^4(n+1)} \circ i_{l^4(n+1)}^{k(n+1)}\right) \circ i_{k(n+1)}^{l(k(n+1))} \circ Q_{k(n+1)}$

$= j_n^{l(n+1)} \circ L_{n+1} \circ \tilde{g}_{l^3(n+1)}^{k(n+1)} - r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{k(n+1)} \circ i_{k(n+1)}^{l(k(n+1))} \circ Q_{k(n+1)} + b_n^{l^4(n+1)} \circ Q_{l^3(n+1)} \circ \tilde{g}_{l^3(n+1)}^{k(n+1)}$
$= j_n^{l(n+1)} \circ L_{n+1} \circ \tilde{g}_{l^3(n+1)}^{k(n+1)} - r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{k(n+1)} \circ i_{k(n+1)}^{l(k(n+1))} \circ Q_{k(n+1)} + j_n^{l(n)} \circ \Big(L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} - j_{l(n)}^{l(n+1)} \circ L_{n+1} \Big) \circ$
$\tilde{g}_{l^3(n+1)}^{k(n+1)} = j_n^{l(n)} \circ L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{l^3(n+1)} \circ \tilde{g}_{l^3(n+1)}^{k(n+1)} - r_n^{k(n)} \circ i_{k(n)}^{l(k(n))} \circ Q_{k(n)} \circ \tilde{g}_{k(n)}^{k(n+1)} = P_n \circ \tilde{g}_{k(n)}^{k(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Somit ist die Abbildung $P : \mathrm{proj}_{\leftarrow n} \tilde{G}_{k(n)} \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} F_n$ mit $P := (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert.
Im folgenden setzen wir $I_G : G \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} G_n$ mit $I_G(x) := (g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $I_F : F \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} F_n$ mit $I_F(x) := (j_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ und $V : \mathrm{proj}_{\leftarrow n} G_n \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} \tilde{G}_{k(n)}$ mit $V((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (p_{k(n)}^{l^2(k(n))}(x_{l^2(k(n))}))_{n \in \mathbb{N}}$. Die Abbildung V ist wohldefiniert, da $\tilde{g}_{k(n)}^{k(n+1)} \circ p_{k(n+1)}^{l^2(k(n+1))} = p_{k(n)}^{l^2(k(n))} \circ g_{l^2(k(n))}^{l^2(k(n+1))}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da $P_n \circ p_{k(n)}^{l^2(k(n))} \circ g_{l^2(k(n))} \circ J(x) = P_n \circ p_{k(n)}^{l^2(k(n))} \circ \tilde{J}_{l^2(k(n))} \circ \tilde{\jmath}_{l^2(k(n))}$
$= P_n \circ J_{k(n)} \circ \tilde{\jmath}_{k(n)}^{l^2(k(n))} \circ \tilde{\jmath}_{l^2(k(n))} = j_n^{l(n)} \circ L_n \circ \tilde{g}_{l^3(n)}^{k(n)} \circ J_{k(n)} \circ \tilde{\jmath}_{k(n)} = j_n^{l(n)} \circ L_n \circ J_{l^3(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l^3(n)}^{k(n)} \circ \tilde{\jmath}_{k(n)}$
$= j_n^{l(n)} \circ j_{l(n)}^{l^2(n)} \circ S_{l^2(n)}^{l^3(n)} \circ \tilde{\jmath}_{l^3(n)} = j_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt $I_F^{-1} \circ P \circ V \circ I_G \circ J = \mathrm{id}$. Setzen wir $L := I_F^{-1} \circ P \circ V \circ I_G$, so folgt mit derselben Argumentation wie im Fall, daß E L-zahm nuklear ist, die Behauptung.

Satz 2.2.8 *Es sei $0 \longrightarrow F \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ eine kurze L-zahm exakte Sequenz von Frécheträumen. Es sei E oder F L-zahm nuklear. Existiert ein $m \in L$, so daß für alle $l \in L$ ein $k \in L$ existiert mit $k \geq l$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{C}_n > 0$ und ein $C_n > 0$ und $0 < \tau_n < \theta_n < 1$ existieren, so daß*

$$\|\cdot\|_{m(n)}^* \leq \tilde{C}_n \|\cdot\|_{m(n+1)}^{*\,\theta_n} \|\cdot\|_{m(n-1)}^{*\,1-\theta_n} \quad \textit{auf } F' \textit{ und} \tag{17}$$
$$\|\cdot\|_{k(n+1)} \leq C_n \|\cdot\|_{k(n+2)}^{\tau_n} \|\cdot\|_{k(n)}^{1-\tau_n} \quad \textit{auf } E \textit{ gilt,} \tag{18}$$

dann zerfällt die Sequenz L-zahm.

Beweis: Es bezeichne $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das monoton wachsende Halbnormensystem auf dem L-zahmen Fréchetraum F. Setzen wir $\tilde{F} := (F, (\|\cdot\|_{m(n)})_{n \in \mathbb{N}_0})$, so ist der so erzeugte L-zahme Fréchetraum L-zahm isomorph zu F. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ gemäß der Voraussetzung. Sei nun $l \in L$. Dann impliziert die Voraussetzung, daß ein $k' \in L$ existiert mit $k' \geq l$, so daß die Bedingungen (17) und (18) gelten. Unter Berücksichtigung der Bemerkung 2.2.3 (c) sind damit die Voraussetzungen des Lemmas 2.2.1 erfüllt, derart, daß für jede beliebige Folge nuklearer Operatoren $(b_n : E_{l(n+1)} \longrightarrow F_{m(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $C > 0$ existiert, so daß nukleare Operatoren $r_0 : E_{k'(n)} \longrightarrow F_{m(n-1)}$ mit $\nu(r_0) \leq \epsilon$ und $r_2 : E_{k'(n+2)} \longrightarrow F_{m(n+1)}$ mit $\nu(r_2) \leq C$ existieren, so daß $j_{m(n-1)}^{m(n)} \circ b_n \circ i_{l(n+1)}^{k'(n+1)} \circ i_{k'(n+1)}^{k'(n+2)} = r_0 \circ i_{k'(n)}^{k'(n+2)} + j_{m(n-1)}^{m(n+1)} \circ r_2$ gilt. Dann liefert das Lemma 2.2.5 eine Familie stetiger Operatoren $(r_{m(n)}^{k'(n+2)} : E_{k'(n+2)} \longrightarrow F_{m(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_{m(n)}^{k'(n+2)} \circ i_{k'(n+2)}^{k'(n+3)} - j_{m(n)}^{m(n+1)} \circ r_{m(n+1)}^{k'(n+3)} = b_n \circ i_{l(n+1)}^{k'(n+1)} \circ i_{k'(n+1)}^{k'(n+3)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir nun $k := k' \circ (\mathrm{id} + 2)$, so ist die Voraussetzung des Lemmas 2.2.7 erfüllt, und wir erhalten, daß jede L-zahme kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow \tilde{F} \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$ L-zahm zerfällt, und es folgt die Behauptung.

Der L-zahme Splittingsatz ist eine Verallgemeinerung des Theorems 4.7 in [V4]. Beachten wir, daß ein Fréchetraum $(F, (\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}})$ genau dann die Eigenschaft (DN) besitzt, falls ein $p \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \tau < 1$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\|\cdot\|_k \leq C \|\cdot\|_p^{1-\tau} \|\cdot\|_n^{\tau}$ gilt (siehe [MV] Lemma 29.10), so erhalten wir unmittelbar aus dem Satz 2.2.8 für den Fall $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1) \,\forall_{n \in \mathbb{N}}\}$ das folgende Splittingresultat von Vogt und Wagner in [V2] und [VW]: Ist F ein Fréchetraum mit der Eigenschaft (Ω) und E ein Fréchetraum mit der Eigenschaft (DN) und ist E oder F nuklear, so ist $\mathrm{Ext}^1(E, F) = 0$.

Bemerkung 2.2.9 Es seien $E, F \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$.

(a) Es sei $A \subset E$ ein L-zahmer Unterraum von E. Weiter sei $G \subset F$ ein Unterraum und F/G ein

Bemerkung 2.2.9 Es seien $E, F \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$.

(a) Es sei $A \subset E$ ein L-zahmer Unterraum von E. Weiter sei $G \subset F$ ein Unterraum und F/G ein L-zahmer Quotient von F. Genügen E und F der Eigenschaft (17) und (18), so erfüllen auch A und F/G die Eigenschaft (17) und (18). Denn für alle $k \in \mathbb{N}$ und $y \in (F/G, \|\cdot\|_k^\wedge)'$ ist $\|y\|_k^{\wedge^*} = \|y \circ q\|_k^*|_{G^\circ}$, wobei q die Quotientenabbildung auf F/G und G° die Polare von G in $(F, \|\cdot\|_k)'$ bezeichnet.

(b) Es seien $E = \Lambda_0(\alpha)$ und $F = \Lambda_0(\beta)$ Potenzreihenräume endlichen Typs, versehen mit den Normen $\|(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_k^2 := \sum_{j=1}^\infty |x_j|^2 \exp(-\frac{2\alpha_j}{k})$ bzw. $\|(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_k^2 := \sum_{j=1}^\infty |x_j|^2 \exp(-\frac{2\beta_j}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $L := \{l \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le l(n+1) \text{ und } \exists_{b\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le n+b\}$ oder $L := \{l \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le l(n+1) \text{ und } \exists_{a,b\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le an+b\}$. Dann gilt stets $\|\cdot\|_n^* \le \|\cdot\|_{n+1}^{*^{\theta_n}} \|\cdot\|_{n-1}^{*^{1-\theta_n}}$ für $\theta_n = \frac{n+1}{2n}$ auf F. Ist nun $l \in L$, so wählen wir $k \ge l$ mit $k(n) = n+b$ für $b \in \mathbb{N}$ bzw. $k(n) = an+b$ für $a, b \in \mathbb{N}$, und wir erhalten $\|\cdot\|_{k(n+1)} \le \|\cdot\|_{k(n+2)}^{\tau_n} \|\cdot\|_{k(n)}^{1-\tau_n}$ für $\tau_n = \frac{k(n+2)}{k(n+1)} \frac{k(n+1)-k(n)}{k(n+2)-k(n)} < \frac{n+1}{2n}$ auf E. Damit genügen E und F der Bedingung (17) und (18) für $m = \mathrm{id}$.

(c) Es sei $\Lambda_0(\alpha)$ ein nuklearer Potenzreihenraum endlichen Typs. $\Lambda_0(\alpha)$ ist genau dann nuklear, falls $\sum_{j\in\mathbb{N}} \exp(-\alpha_j t) < +\infty$ für alle $t > 0$ gilt (siehe [MV] Satz 29.6 (2)). Betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ den zu $\Lambda_0(\alpha)$ assoziierten lokalen Hilbertraum $\Lambda_0^{(k)}(\alpha) = \{x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \|x\|_k^2 := \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 \exp(\frac{-2\alpha_j}{k}) < +\infty\}$, dann ist die Einbettung $i_k^{k+1} : \Lambda_0^{(k+1)}(\alpha) \hookrightarrow \Lambda_0^{(k)}(\alpha)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nuklear. Denn bezeichnet e_j den j-ten Einheitsvektor, so gilt $i_k^{k+1}(\cdot) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \cdot, e_j\rangle_{k+1} \|e_j\|_{k+1}^{-2} e_j$ und $\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|e_j\|_k}{\|e_j\|_{k+1}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \exp(-\alpha_j(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}))$. Damit ist jeder nukleare Potenzreihenraum endlichen Typs $\Lambda_0(\alpha)$ schon L-zahm nuklear.

Beachten wir, daß aus $\mathrm{Ext}_\mathrm{L}^1(E, F) = 0$ für $E, F \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ stets $\mathrm{Ext}_\mathrm{L}^1(G, H) = 0$ für jeden zu E bzw. F L-zahm isomorphen L-zahmen Raum G bzw. H folgt, so erhalten wir unmittelbar aus dem Satz 2.2.8 und den Bemerkungen 2.1.9 und 2.2.9 das folgende

Korollar 2.2.10 *Es sei* $L := \{l \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le l(n+1) \text{ und } \exists_{b\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le n+b\}$ *oder* $L := \{l \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le l(n+1) \text{ und } \exists_{a,b\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \le an+b\}$.
Weiter sei E ein Fréchetraum, der L-zahm isomorph zu einem Unterraum eines (nuklearen) Potenzreihenraumes endlichen Typs und F ein Fréchetraum, der L-zahm isomorph zu einem Quotienten eines nuklearen (nicht notwendig nuklearen) Potenzreihenraumes endlichen Typs ist. Dann gilt $\mathrm{Ext}_\mathrm{L}^1(E, F) = 0$.

Ein analoges Resultat wie in 2.2.10 erzielten Poppenberg und Vogt im Fall von zahm bzw. linear-zahm exakten Sequenzen von Fréchet-Hilberträumen, indem Sie in [PV1] Theorem 6.1 und [PV2] Theorem 6.1 einen zu 2.2.8 ähnlichen Splittingsatz für Fréchet-Hilberträume nachwiesen. Der nukleare Fall wurde neben Vogt in [V4] auch von Nyberg in [N1] und [N2] untersucht. Abschließend verweisen wir noch auf das Splittingresultat in [P1] Theorem 4.2 für Kötheräume $\lambda^1(A)$, dessen Formulierung nicht auf zahm und linear zahm eingeschränkt ist, sondern sich an einen allgemeineren Rahmen hält, was unserem Ansatz nahe steht.

3 Die Kategorie der gradierten L-zahmen Räume

3.1 Einführung

Die Objekte in der Kategorie der gradierten L-zahmen Räume sind alle Vektorräume E, versehen mit einer Familie $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Halbnormensystemen, so daß $H_k := (\|\cdot\|_{k,s})_{s\in\mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ monoton wachsend ist und die Identität $(E, H_{k+1}) \hookrightarrow (E, H_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ein L-zahmer Operator ist. In diesem Fall schreiben wir $H_{k+1} \supset H_k$ für $k \in \mathbb{N}$ und bezeichnen $(E, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ als gradierten L-zahmen Raum. Wir setzen $B^E_{k,s} := \{x \in E : \|x\|_{k,s} \le 1\}$.
Für die von den Identitäten $(E \longrightarrow (E, H_k))_{k\in\mathbb{N}}$ induzierte Initialtopologie auf E schreiben wir $\cup_{k\in\mathbb{N}} H_k$. Ein monoton wachsendes Fundamentalsystem von Halbnormen bezüglich der Topologie $\cup_{k\in\mathbb{N}} H_k$ ist $(\max_{j\le k} \|\cdot\|_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Im folgenden bezeichnen wir $(E, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ als *gradierten L-zahmen Fréchetraum*, falls $(E, \cup_{k\in\mathbb{N}} H_k)$ ein Fréchetraum ist.

Die Morphismen zwischen zwei Objekten $(E, (H^E_k)_{k\in\mathbb{N}})$ und $(F, (H^F_k)_{k\in\mathbb{N}})$ sind alle linearen Abbildungen $T : E \longrightarrow F$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $T : (E, H^E_m) \longrightarrow (F, H^F_k)$ ein L-zahmer Operator ist. Da $H_{k+1} \supset H_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit von $m > k$ ausgehen. Wir bezeichnen dann T als gradierten L-zahmen Operator und schreiben $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F)$. Zusammen mit der üblichen Verknüpfung, Addition und skalaren Multiplikation von Operatoren ist $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F)$ für alle gradierten L-zahmen Räume E und F ein Vektorraum, und wir erhalten insgesamt die additive Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der gradierten L-zahmen Räume.

Es sei $(E, (H_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in$ g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und $A \subset E$ ein linearer Teilraum. Wir bezeichnen A, versehen mit $(H_k|_A)_{k\in\mathbb{N}}$, als gradierten L-zahmen Unterraum von E und $(E/A, (\hat{H}_k)_{k\in\mathbb{N}})$, wobei $\hat{H}_k := (\|\cdot\|^{\wedge}_{k,s})_{s\in\mathbb{N}}$ das von den Halbnormen $(\|\cdot\|_{k,s})_{s\in\mathbb{N}}$ auf E induzierte System von Quotientenhalbnormen bezeichnet, als gradierten L-zahmen Quotienten von E. Für jeden gradierten L-zahmen Unterraum A von E sind dann offensichtlich die Einbettung $A \hookrightarrow E$ und die Quotientenabbildung $E \longrightarrow E/A$ gradierte L-zahme Operatoren. Daraus folgt wie im Fall der Kategorie der L-zahmen Räume, daß $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F)$ genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ ist, falls T injektiv bzw. surjektiv ist.

$T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F)$ ist genau dann ein gradierter L-zahmer Isomorphismus, falls T bijektiv ist und falls für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert mit $\|x\|_{k,s} \le C_s\|T(x)\|_{m,l(s)}$ für alle $x \in E$. Denn die an T gestellte Bedingung ist offensichtlich äquivalent zu der gradierten L-Zahmheit der Umkehrabbildung.

Es sei $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F)$ und $A \supset T(E)$ ein gradierter L-zahmer Unterraum von F. Dann ist auch $T : E \longrightarrow A$ ein gradierter L-zahmer Operator. Ist $A \subseteq T^{-1}(0)$ ein gradierter L-zahmer Unterraum von E und bezeichnet q die Quotientenabbildung von E auf E/A, dann ist aufgrund der gradierten L-Zahmheit von T auch die Abbildung $\hat{T} : E/A \longrightarrow F$ mit $T = \hat{T} \circ q$ ein gradierter L-zahmer Operator. Damit ist offensichtlich die Einbettung $T^{-1}(0) \hookrightarrow E$ Kern und die Quotientenabbildung $F \longrightarrow F/T(E)$ Kokern von T. Entsprechend ist die Einbettung $T(E) \hookrightarrow F$ Bild und die Quotientenabbildung $E \longrightarrow E/T^{-1}(0)$ Kobild von T.
Wir verwenden im folgenden für den Kern und Kokern bzw. für das Bild und Kobild von $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E, F)$ in Einklang mit dem Kapitel 1 die Bezeichnung $\ker T$ und $\operatorname{coker} T$ bzw. $\operatorname{im} T$ und $\operatorname{coim} T$.

Betrachten wir nun die von T induzierte Abbildung $\hat{T} : E/T^{-1}(0) \longrightarrow T(E)$ zwischen Kobild und Bild von T mit $T|_{E\longrightarrow T(E)} = \hat{T} \circ q$, so ist $\hat{T}$ stets ein Bimorphismus in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. $\hat{T}$ ist genau dann ein Isomorphismus in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert mit $\|y\|_{k,s} \le C_n\|\hat{T}y\|_{m,l(s)}$ für alle $y \in E/T^{-1}(0)$. Damit ist T genau dann ein gradierter L-zahmer Homomorphismus, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert mit $\|q(x)\|_{k,s} \le C_s\|T(x)\|_{m,l(s)}$ für alle $x \in E$. Das bedeutet $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F)$ ist genau dann ein gradierter L-zahmer Homomorphismus, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $T : (E, H^E_k) \longrightarrow (F, H^F_m)$ L-zahm offen auf sein Bild ist. Da $H_k \subset H_{k+1}$ gilt, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit von $m > k$ ausgehen.

Im folgenden wollen wir die Existenz von Produkten in der Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ nachweisen. Da-

zu sei $((E_n,(H_k^n)_{k\in\mathbb{N}}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare unendliche Folge von Objekten in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Wir setzen $\prod_{n\leq k} H_k^n := (\max_{n\leq k}\|\cdot\|_{k,s}^n)_{s\in\mathbb{N}}$ für $k\in\mathbb{N}$. Da das Halbnormensystem H_k^n für alle $k,n\in\mathbb{N}$ monoton wachsend ist, ist auch $\prod_{n\leq k} H_k^n$ für alle $k\in\mathbb{N}$ monoton wachsend. Um nachzuweisen, daß die Identität $(\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, \prod_{n\leq k+1} H_{k+1}^n) \hookrightarrow (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, \prod_{n\leq k} H_k^n)$ für alle $k\in\mathbb{N}$ L-zahm ist, beachten wir, daß die Identitäten $(E_n, H_{k+1}^n) \hookrightarrow (E_n, H_k^n)$ für alle $n,k\in\mathbb{N}$ L-zahm sind. Aufgrund der Existenz des endlichen L-zahmen Produktes folgt damit die L-Zahmheit der Identität $(\prod_{n\leq k} E_n, \prod_{n\leq k} H_{k+1}^n) \hookrightarrow (\prod_{n\leq k} E_n, \prod_{n\leq k} H_k^n)$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Das bedeutet, daß für alle $k\in\mathbb{N}$ ein $l_k\in\mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $s\in\mathbb{N}$ ein $C_{k,s}>0$ existiert, so daß $\max_{n\leq k}\|x_n\|_{k,s}^n \leq C_{k,s}\max_{n\leq k}\|x_n\|_{k+1,l(s)}^n \leq C_{k,s}\max_{n\leq k+1}\|x_n\|_{k+1,l(s)}^n$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Damit gilt $\prod_{n\leq k+1} H_{k+1}^n \supset \prod_{n\leq k} H_k^n$, und insgesamt ist das abzählbare unendliche Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ versehen mit $(\prod_{n\leq k} H_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Objekt in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$.
Die natürlichen Projektionen $\pi_n : (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, \prod_{n\leq m} H_m^n) \longrightarrow (E_n, H_m^n)$ sind für alle $n\in\mathbb{N}$ und $m\geq n$ L-zahme Operatoren, denn nach Abschnitt 2 ist $\pi_n : (\prod_{n=1}^m E_n, \prod_{n\leq m} H_m^n) \longrightarrow (E_n, H_m^n)$ für alle $n\leq m$ L-zahm. Da $H_{k+1}^n \supset H_k^n$ für alle $k,n\in\mathbb{N}$ gilt, ist die Identität $(E_n,H_m^n)\hookrightarrow(E_n,H_k^n)$ für alle $n,k\in\mathbb{N}$ und alle $m\geq k$ ein L-zahmer Operator. Wählen wir nun zu $n,k\in\mathbb{N}$ ein $m\geq n,k$, so ist die Projektion $\pi_n : (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, \prod_{n\leq m} H_m^n) \longrightarrow (E_n,H_m^n) \hookrightarrow (E_n,H_k^n)$ ein L-zahmer Operator und damit $\pi_n : (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, (\prod_{n\leq k} H_k^n)_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (E_n,(H_k^n)_{k\in\mathbb{N}})$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ein gradierter L-zahmer Operator.
Es sei $F\in$ g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und $g_n\in \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(F,E_n)$ für $n\in\mathbb{N}$. Weiter sei $k\in\mathbb{N}$. Für $n=1,\ldots,k$ existiert ein $m_n\in\mathbb{N}$, so daß $g_n : (F,H_{m_n}^F)\longrightarrow(E_n,H_k^n)$ L-zahm ist. Da $H_{k+1}^F\supset H_k^F$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit von $m_1=\ldots=m_k=:m$ ausgehen. Da in der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ endliche Produkte existieren, ist damit die Abbildung $(g_n)_{n\leq k} : (F,H_m^F)\longrightarrow(\prod_{n\leq k} E_n, \prod_{n\leq k} H_k^n)$ ein L-zahmer Operator. Das bedeutet, daß ein $l\in L$ existiert, so daß für alle $s\in\mathbb{N}$ ein $C_s>0$ existiert, so daß $\max_{n\leq k}\|g_n(x)\|_{k,s}^n \leq C_s\|x\|_{m,l(s)}^F$ für alle $x\in F$. Damit ist $g : (F,(H_k^F)_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, (\prod_{n\leq k} H_k^n)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Operator. Wir halten fest: Eine lineare Abbildung $g : (F,(H_k^F)_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, (\prod_{n\leq k} H_k^n)_{k\in\mathbb{N}})$ ist genau dann ein gradierter L-zahmer Operator, falls $\pi_n\circ g\in\mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(F,E_n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.
Im Gegensatz zu der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der L-zahmen Räume erhalten wir also in der Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der gradierten L-zahmen Räume die folgende

Proposition 3.1.1 *Die Kategorie* g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ *besitzt abzählbar unendliche Produkte.*

Das abzählbar unendliche gradierte L-zahme Produkt bezeichnen wir im folgenden mit $\mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

In Anlehnung an die in [DV] Sec. 2 definierte konstante Gradierung setzen wir folgendes fest: Es sei $(E,(\|\cdot\|_s)_{s\in\mathbb{N}})$ ein L-zahmer Vektorraum. Versehen wir E mit der konstanten Folge des Halbnormensystems $H:=(\|\cdot\|_s)_{s\in\mathbb{N}}$, so erhalten wir einen gradierten L-zahmen Vektorraum $(E,(H)_{k\in\mathbb{N}})$, den wir im folgenden mit E^c bezeichnen. Das von $(E_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ induzierte gradierte L-zahme Produkt $(\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, (\prod_{n\leq k} H_n)_{k\in\mathbb{N}})$ mit $\prod_{n\leq k} H_n := (\max_{n\leq k}\|\cdot\|_s^n)_{s\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

In der Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ existiert also insbesondere das endliche Produkt. Im folgenden verstehen wir unter dem endlichen Produkt stets $(\prod_{n\leq N} E_n, (\prod_{n\leq N} H_k^n)_{k\in\mathbb{N}})$ mit $\prod_{n\leq N} H_k^n := (\max_{n\leq N}\|\cdot\|_{k,s}^n)_{s\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen das endliche gradierte L-zahme Produkt mit $\mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\leq N} E_n$ und im Fall $N=2$ mit $E_1\times_g^L E_2$. Weiter gilt:

Bemerkung 3.1.2 Es sei $T_n\in\mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(E_n,F_n)$ für $n\in\mathbb{N}$. Dann ist der Operator $T:=(T_n\circ\pi_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ein gradierter L-zahmer Operator, denn offensichtlich gilt $\pi_n\circ T = T_n\circ\pi_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Sind die Operatoren $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gradierte L-zahme Homomorphismen, so ist auch der Operator T ein gradierter L-zahmer Homomorphismus. Denn sei $k\in\mathbb{N}$, dann existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein $m\geq k$, so daß $T_n : (E_n,H_k^n)\longrightarrow(F_n,H_m^n)$ für alle $n=1,\ldots,k$ L-zahm offen auf sein Bild ist. Mit der Bemerkung 2.1.2 ist dann $(T_n\circ\pi_n)_{n\leq k} : (\prod_{n\leq k} E_k, \prod_{n\leq k} H_k^n) \longrightarrow (\prod_{n\leq k} F_k, \prod_{n\leq k} H_m^n)$ L-zahm offen aufs Bild. Das bedeutet, daß ein

$l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert, so daß $\inf_{(z_n)_{n\le k}\in\ker(T_n)_{n\le k}} \max_{n\le k} \|x_n + z_n\|^n_{k,s} \le C_s \max_{n\le k} \|T_n(x_n)\|^n_{m,l(s)} \le C_s \max_{n\le m} \|T_n(x_n)\|^n_{m,l(s)}$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ gilt. Ist $(z_n)_{n\le k} \in \ker(T_n)_{n\le k}$, so gilt $(z_1, \dots, z_k, 0, 0, \dots) \in \ker T$. Damit ist also der Operator $T : (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, \prod_{n\le k} H^n_k) \longrightarrow (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, \prod_{n\le m} H^n_m)$ L-zahm offen aufs Bild, und es folgt die Behauptung.

Lemma 3.1.3 *Für jedes injektive Objekt $(I, (\|\cdot\|_s)_{s\in\mathbb{N}})$ in der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der L-zahmen Räume ist I^c ein injektives Objekt in der Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der gradierten L-zahmen Räume.*

Beweis: Es sei $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, I^c)$ und $i \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F)$ ein injektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $T : (E, H_m) \longrightarrow (I, (\|\cdot\|_s)_{s\in\mathbb{N}})$ ein L-zahmer Operator ist, und zu m existiert ein $r \in \mathbb{N}$, so daß $i : (E, H_m) \longrightarrow (F, H_r)$ L-zahm offen aufs Bild ist. Das Lemma 2.1.12 impliziert dann die Existenz eines L-zahmen Operators $\hat{T} : (F, H_r) \longrightarrow (I, (\|\cdot\|_s)_{s\in\mathbb{N}})$ mit $\hat{T} \circ i = T$. Damit ist $\hat{T} : F \longrightarrow I^c$ schon ein gradierter L-zahmer Operator.

Proposition 3.1.4 *Die Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ besitzt genügend viele injektive Objekte.*

Beweis: Es sei $E \in$ g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Da die Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ genügend viele injektive Objekte besitzt, existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein injektives Objekt $(I_n, H_n) \in \mathcal{T}^L\mathcal{S}$ mit $H_n := (\|\cdot\|^n_s)_{s\in\mathbb{N}}$ und ein injektiver L-zahmer Homomorphismus $J_n : (E, H^E_n) \longrightarrow (I_n, H_n)$. Betrachten wir nun (I_n, H_n) und $(E, H^E_n) =: E_n$ als gradierten L-zahmen Raum, so ist J_n ein injektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus. Unter Berücksichtigung der Bemerkung 3.1.2 ist damit auch der Operator $J := (J_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \longrightarrow \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ein injektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus. Wir setzen $i : (E, (H^E_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ mit $i(x) := (x)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Abbildung i ist offensichtlich injektiv. Da $\pi_n \circ i = \mathrm{id} : (E, (H^E_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (E, H^E_n)$ gilt, ist i ein gradierter L-zahmer Operator. Da stets $\|x\|_{k,s} \le \max_{n\le m} \|x\|_{n,s}$ für alle $m \ge k$ gilt, folgt, daß $i : (E, H^E_k) \longrightarrow (\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, \prod_{n\le k+1} H_n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ L-zahm offen aufs Bild ist. Also ist insgesamt $i \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n)$ ein gradierter L-zahmer Homomorphismus. Da die Komposition zweier injektiver gradierter L-zahmer Homomorphismen wieder ein injektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus ist, folgt schließlich mit $J \circ i$ unter Beachtung des Lemmas 1.2.3 und 3.1.3 die Behauptung.

Lemma 3.1.5 *Es sei $(F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum und $(F_n, j^k_n)_{n,k\in\mathbb{N}}$ ein L-zahmes projektives Spektrum von Frécheträumen. Weiter sei $(j_n : F \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie linearer Abbildungen, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\nu \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $j_n : (F, H_\nu) \longrightarrow F_n$ ein L-zahmer Operator ist und $j^k_n \circ j_k = j_n$ für alle $k \ge n$ gilt. Darüber hinaus existiere für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $j^m_n(F_m) \subset \overline{j_n(F)}^{F_n}$. Existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $r \in \mathbb{N}$, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert, so daß $j_r^{-1}(B^{F_r}_{l(s)}) \subset C_s B^F_{k,s}$ gilt, dann ist die kurze Sequenz*

$$0 \longrightarrow (F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}}) \xrightarrow{j} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \xrightarrow{\sigma} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \longrightarrow 0$$

mit $j(x) := (j_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_n - j^{n+1}_n(x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ gradiert L-zahm exakt.

Beweis: Offensichtlich implizieren die Voraussetzungen $(F, \cup_{k\in\mathbb{N}} H_k) = \mathrm{proj}_{\leftarrow k} F_k$ im topologischen Sinne, wobei wir $\mathrm{proj}_{\leftarrow k} F_k$ als Unterraum des topologischen Produkts $\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ auffassen. Damit gilt $\operatorname{im} j = \ker \sigma$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $j^m_n(F_m) \subset \overline{j_n(F)}^{F_n}$, folgt die Surjektivität der Abbildung σ. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\nu \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $j_n : (F, H_\nu) \longrightarrow F_n$ ein L-zahmer Operator ist, folgt die gradierte L-Zahmheit der Abbildungen $j_n : (F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow F_n$. Insgesamt erhalten wir, daß $j \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(F, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ gilt. Da die Abbildungen $j^m_k : F_m \longrightarrow F_k$ für alle $m \ge k$ L-zahme Operatoren und die Projektionen π_k für alle $k \in \mathbb{N}$ gradierte L-zahme Operatoren sind, ist der Operator $\pi_k \circ \sigma = \pi_k - j^{k+1}_k \circ \pi_{k+1} : \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \longrightarrow F_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gradiert L-zahm, und damit gilt insgesamt $\sigma \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(\mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)$.

Im folgenden bezeichnen wir das Halbnormensystem N_k auf F_k mit $(\|\cdot\|_s^k)_{s\in\mathbb{N}}$ und setzen $B_s^k := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n : \max_{j\le k} \|x_j\|_s^j \le 1\}$. Nach Voraussetzung existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $r \in \mathbb{N}$, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert, so daß $j_r^{-1}(B_{l(s)}^{F_r}) \subset C_s B_{k,s}^F$ gilt. Daraus folgt: $j(C_s B_{k,s}^F) \supset j(j_r^{-1}(B_{l(s)}^{F_r})) \supset B_{l(s)}^r \cap \operatorname{im} j$. Damit ist j ein gradierter L-zahmer Homomorphismus.
Um nachzuweisen, daß die Abbildung σ ein gradierter L-zahmer Homomorphismus ist, wählen wir zunächst zu $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $j_k^m(F_m) \subset \overline{j_k(F)}^{F_k}$ gilt. Im folgenden wollen wir nachweisen, daß dann $\sigma : (\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n, \prod_{n\le k} N_n) \longrightarrow (\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n, \prod_{n\le m} N_n)$ L-zahm offen ist. Da nach Voraussetzung die Abbildungen j_k^μ für alle $k, \mu \in \mathbb{N}$ L-zahm sind, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß ein $\tilde{l} \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{C}_s > 0$ existiert, so daß $\|j_n^{n+1}(\cdot)\|_s^n \le \tilde{C}_s\|\cdot\|_{\tilde{l}(s)}^{n+1}$ für alle $n = 1, \ldots, m-1$ gilt. Nun dürfen wir $\tilde{l} \ge \mathrm{id}$ annehmen, also erhalten wir, indem wir $l := \tilde{l}^m$ setzen, daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert, so daß $\|j_n^\mu(\cdot)\|_s^n \le C_s\|\cdot\|_{l(s)}^\mu$ für alle $1 \le n < \mu \le m$ gilt. Es sei $s \in \mathbb{N}$. Weiter sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ und $\epsilon > 0$. Wir wählen $z \in F$ mit $\|j_k^m(x_m) - j_k(z)\|_{l(s)}^k \le \epsilon$. Dann gilt: $\|x_n - j_n(z)\|_s^n \le \sum_{\mu=n}^{m-1} \|j_n^\mu x_\mu - j_n^{\mu+1}(x_{\mu+1})\|_s^n + \|j_n^m(x_m) - j_n(z)\|_s^n \le \sum_{\mu=n}^{m-1} C_s\|x_\mu - j_\mu^{\mu+1}(x_{\mu+1})\|_{l(s)}^\mu + C_s\|j_k^m(x_m) - j_k(z)\|_{l(s)}^k \le mC_s \max_{\mu=1}^m \|x_\mu - j_\mu^{\mu+1}(x_{\mu+1})\|_{l(s)}^\mu + C_s\epsilon$ für alle $1 \le n \le k$. Da stets $(j_n(z))_{n\in\mathbb{N}} \in \ker\sigma$ für alle $z \in F$ ist und $\epsilon > 0$ beliebig wählbar ist, erhalten wir insgesamt, daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{C}_s > 0$ existiert mit $\inf_{(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ker\sigma} \max_{n=1}^k \|x_n - z_n\|_s^n \le \tilde{C}_s \max_{\mu=1}^m \|x_\mu - j_\mu^{\mu+1}x_{\mu+1}\|_{l(s)}^\mu$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Damit ist σ ein gradierter L-zahmer Homomorphismus, und es folgt die Behauptung.

Bemerkung 3.1.6 Es sei $(F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir den zu (F, H_k) separierten Quotienten $(F, H_k)/\overline{0}^{H_k}$. Wir bezeichnen mit $(F_k, \tilde{H}_k)$ seine Vervollständigung, wobei $\tilde{H}_k$ die Fortsetzung des Halbnormensystems bestehend aus den von H_k induzierten Quotientenhalbnormen auf $F/\overline{0}^{H_k}$ bezeichnet. Betrachten wir nun die Abbildungen $j_k : F \longrightarrow F_k$ mit $x \mapsto x + \overline{0}^{H_k}$ und $j_k^m : F_m \longrightarrow F_k$ mit $x + \overline{0}^{H_m} \mapsto x + \overline{0}^{H_k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $m \ge k$, so erhalten wir ein projektives Spektrum von Fréchetträumen mit $j_k^m \circ j_m = j_k$ für alle $m \ge k$ und $\overline{j_k(F)}^{F_k} = F_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus $\|x\|_{k,s} = \inf_{z\in\overline{0}^{H_k}} \|x+z\|_{k,s} = \|j_k(x)\|_{k,s}$ für alle $k, s \in \mathbb{N}$ und alle $x \in F$, folgt daß die Abbildungen $j_k : (F, H_k) \longrightarrow (F_k, \tilde{H}_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ L-zahme Homomorphismen sind. Da $H_{k+1} \supset H_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, sind die Abbildungen $j_k^m : F_m \longrightarrow F_k$ für alle $m \ge k$ L-zahm. Das auf diese Weise erzeugte L-zahme Spektrum von Fréchetträumen bezeichnen wir im folgenden als das Spektrum der *lokalen Fréchetträume* von F.

Das Lemma 3.1.5 zusammen mit der Bemerkung 3.1.6 liefert für gradierte L-zahme Fréchetträume die Existenz einer kanonischen Auflösung, welche wir im folgenden Korollar festhalten:

Korollar 3.1.7 *Es sei $(F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum. Dann existiert ein L-zahmes projektives System $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ von Fréchetträumen und eine Familie L-zahmer Operatoren $(j_n : (F, H_n) \longrightarrow F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $F_n = \overline{j_n(F)}^{F_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die kurze Sequenz*

$$0 \longrightarrow (F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}}) \xrightarrow{j} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \xrightarrow{\sigma} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \longrightarrow 0$$

mit $j(x) := (j_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_n - j_n^{n+1}(x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ gradiert L-zahm exakt ist.

Bemerkung 3.1.8 Wir wollen nun den Bezug zu Domański und Vogt in [DV] eingeführten Definition eines gradierten Fréchetraumes erläutern. Dazu sei $((E_k, i_k^m)_{k,m\in\mathbb{N}}, (i_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein festes Spektrum aus einer Äquivalenzklasse projektiver Spektren aus Fréchetträumen auf einem Fréchetraum E im Sinne von Domański und Vogt, wobei wir für $k \in \mathbb{N}$ den Fréchetraum E_k mit einem festen

monoton wachsenden Fundamentalsystem von Halbnormen versehen, das wir mit $(\|\cdot\|_{k,s})_{s\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Dann induziert für $k \in \mathbb{N}$ die Abbildungen i_k ein monoton wachsendes Halbnormensystem $H_k := (\|i_k(\cdot)\|_{k,s})_{s\in\mathbb{N}}$ auf E. Da die Abbildungen i_k^m für alle $m \geq k$ stetig sind, ist die Einbettung $(E, H_{k+1}) \hookrightarrow (E, H_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ stetig. Die von dem Spektrum $((E_k, i_k^m)_{k,m\in\mathbb{N}}, (i_k)_{k\in\mathbb{N}})$ induzierte projektive Topologie auf E, ist gerade die lokalkonvexe Topologie $\cup_{k\in\mathbb{N}} H_k$. Setzen wir $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\}$ und versehen wir E mit der Folge $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so ist E ein gradierter L-zahmer Fréchetraum in unserem Sinne. Das bedeutet, jeder Repräsentant einer Äquivalenzklasse von projektiven Systemen im Sinne von Domański und Vogt induziert genau einen gradierten L-zahmen Fréchetraum in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Äquivalente Spektren im Sinne von Domański und Vogt induzieren gradiert L-zahm isomorphe Frécheträume in der Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$.
Ist $T : (E, ((E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}, (i_n)_{n\in\mathbb{N}})) \longrightarrow (F, ((F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}, (j_n)_{n\in\mathbb{N}}))$ ein gradierter Operator nach Domański und Vogt, so bleibt T offensichtlich unter der oben beschriebenen Betrachtungsweise ein L-zahmer gradierter Operator in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Analoges gilt auch für Homomorphismen. Insgesamt bedeutet das, daß jede gradiert exakte Sequenz im Sinne von Domański und Vogt auf die oben beschriebene Art und Weise gradiert L-zahm exakt in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ bleibt.

Sei andererseits $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\}$ und $(E, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum, dann ist das Spektrum der lokalen Frécheträume $((E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}, (i_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ein reduziertes Spektrum aus Frécheträumen auf $(E, \cup_{k\in\mathbb{N}} H_k)$ im Sinne von Domański und Vogt. Indem wir $(E, \cup_{k\in\mathbb{N}} H_k)$ mit der Menge aller zu dem Spektrum $((E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}, (i_n)_{n\in\mathbb{N}})$ äquivalenter Spektren versehen, wird $(E, \cup_{k\in\mathbb{N}} H_k)$ zu einem gradierten Fréchetraum nach Domański und Vogt. Jeder gradierte L-zahme Fréchetraum induziert eine Gradierung nach Domański und Vogt. Sind $(E, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ und $(E, (\tilde{H}_k)_{k\in\mathbb{N}})$ gradiert L-zahm isomorph, so induzieren sie die gleiche Gradierung. Da die von der Abbildung i_k induzierte Initialtopologie auf E und die von dem Halbnormensystem H_k induzierte Topologie auf E für alle $k \in \mathbb{N}$ übereinstimmen, erhalten wir: Ist $T : (E, (H_k^E)_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (F, (H_k^F)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Operator bzw. ein gradierter L-zahmer Homomorphismus zwischen zwei gradierten L-zahmen Frécheträumen, dann ist T unter der oben beschriebenen Betrachtungsweise ein gradierter Operator bzw. ein gradierter Homomorphismus im Sinne von Domański und Vogt. Das bedeutet: Gradiert L-zahm exakte Sequenzen gradierter L-zahmer Frécheträume bleiben auf die oben beschriebene Art und Weise gradiert exakt in der Betrachtungsweise von Domański und Vogt.

Satz 3.1.9 *Die Kategorie* g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ *ist quasiabelsch.*

Beweis: Für den folgenden Beweis berücksichtigen wir den Satz 1.1.29. Es sei $A \subset F \times_g^L G$ ein gradierter L-zahmer Unterraum und $\pi_G|_A$ ein injektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus. Das bedeutet, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\pi_G : (A, (H_k^F \times H_k^G)|_A) \longrightarrow (G, H_m^G)$ L-zahm offen aufs Bild ist. Beachtet man, daß $H_m^F \supset H_m^F$ gilt, so geht der Nachweis dafür, daß $q|_{F\times_g^L 0} : (F \times_g^L 0, H_k^F \times_g^L 0) \longrightarrow ((F \times_g^L G)/A, H_m^\wedge)$ injektiv und L-zahm offen aufs Bild ist, analog zu dem Beweis 1.1.30 (a). Dabei bezeichnet q die Quotientenabbildung auf $(F \times_g^L G)/A$ und $H_m^\wedge$ das von den Halbnormen $H_m^F \times H_m^G$ induzierte System von Quotientenhalbnormen auf $(F \times G)/A$. Da q ein gradierter L-zahmer Operator ist, ist auch die Einschränkung $q|_{F\times_g^L 0}$ ein gradierter L-zahmer Operator. Insgesamt folgt damit, daß $q|_{F\times_g^L 0}$ ein injektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus ist.
Der Beweis dafür, daß im Fall eines gradierten L-zahmen Unterraumes $A \subset F \times_g^L G$, so daß die Quotientenabbildung q auf $(F \times_g^L G)/A$ eingeschränkt auf $0 \times_g^L G$ ein surjektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus ist, die Abbildung $\pi_F|_A$ ein surjektiver gradierter L-zahmer Homomorphismus ist, geht analog. Hier beachte man zusätzlich, daß $H_m^G \supset H_m^G$ ist.

Es sei $E \in$ g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Analog zu der Kategorie der L-zahmen Räume setzen wir $\mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, \cdot)(X) := \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, X)$ für alle $X \in$ g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und $\mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, \cdot)(T) := T^*$ für alle $T \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(X, Y)$ und alle $X, Y \in$ g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ mit $T^* : \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, X) \longrightarrow \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, Y)$ und $T^*(A) := T \circ A$ für alle $A \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, X)$. Auf diese Weise erhalten wir einen additiven Funktor $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E,\cdot) : \text{g-}\mathcal{T}^L\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{LS}$, wobei $\mathcal{LS}$ die Kategorie der Vektorräume bezeichnet.

Genauso wie im Fall der L-zahmen Räume beweisen wir folgende

Proposition 3.1.10 *Es sei $E \in \text{g-}\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Der Funktor $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E,\cdot)$ ist injektiv.*

Die Rechtsableitungen des Hom-Funktors in der Kategorie $\text{g-}\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der gradierten L-zahmen Räume definieren wir wie folgt: $\mathrm{Ext}^0_{\mathrm{g}}(E,F) := \ker \iota_0^* = \operatorname{im} \iota^* \cong \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E,F)$ und $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{g}}(E,F) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} \iota^*_{k-1} \hookrightarrow \ker \iota^*_k) = \ker \iota^*_k / \operatorname{im} \iota^*_{k-1}$ für $k \geq 1$.

Bemerkung 3.1.11 Es seien E, $F \in \text{g-}\mathcal{T}^L\mathcal{S}$.

(a) Ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge gradiert L-zahmer Räume, so folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des abzählbar unendlichen Produkts, daß $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E,F_n)$ gilt. Berücksichtigen wir die Bemerkung 3.1.2 und 1.2.3, so folgt wie in der Bemerkung 2.1.15 (a), daß $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{g}}(E, \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^k_{\mathrm{g}}(E,F_n)$ für alle $k \geq 1$ gilt.

(b) Aus der universellen Eigenschaft des endlichen Koproduktes erhalten wir:
Ist $(E_n)_{n\leq N}$ eine endliche Folge gradierter L-zahmer Räume, so ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{g}}(\prod_{n\leq N} E_n, F)$ isomorph zu $\prod_{n\leq N} \mathrm{Ext}^k_{\mathrm{g}}(E_n,F)$ für alle $k \geq 0$.

In Analogie zu der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der L-zahmen Räume bezeichnen wir eine exakte Sequenz in $\text{g-}\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ als gradiert L-zahm exakt und das Zerfallen in $\text{g-}\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ als gradiertes L-zahmes Zerfallen.

Satz 3.1.12 *Der Satz 2.1.16, die Proposition 2.1.17 und der Satz 2.1.18 gelten auch in der Kategorie $\text{g-}\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der gradierten L-zahmen Räume.*

3.2 Ein gradierter L-zahmer Splittingsatz

In der Beweisführung der folgenden Resultate spielt die kanonische Auflösung der lokalen Frécheträume aus dem Kapitel 2 eine zentrale Rolle. Aus diesem Grund setzen wir im folgenden stets gradierte L-zahme Frécheträume voraus. Um die Ergebnisse in einem allgemeineren Rahmen zu formulieren, liegt es nahe, zu dem Spektrum der lokalen Frécheträume L-zahme äquivalente Spektren zu betrachten, was zur folgenden Definition führt:

Definition 3.2.1 *Es sei F ein gradierter L-zahmer Fréchetraum und $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Frécheträume von F. Ein zu $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ gemäß 1.1.41 in der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der L-zahmen Räume äquivalentes Spektrum $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ aus Frécheträumen bezeichnen wir als definierendes Spektrum für F.*

Bemerkung 3.2.2 Es sei $(F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum und $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Frécheträume von F.

(a) Ist $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F und $T_n^{k(n)} : F_{k(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ bzw. $S_n^{k(n)} : \tilde{F}_{k(n)} \longrightarrow F_n$ L-zahme Operatoren, die der Eigenschaft (3) und (4) aus 1.1.41 genügen, so erhalten wir, indem wir $\tilde{\jmath}_n := T_n^{k(n)} \circ j_{k(n)} : (F, H_{k(n)}) \longrightarrow \tilde{F}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ setzen, eine Familie L-zahmer Operatoren, so daß $S_n^{k(n)} \circ \tilde{\jmath}_{k(n)} = j_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Operatoren $T_n^{k(n)}$ bzw. $S_n^{k(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ L-zahm sind, existiert einerseits für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert mit $\tilde{\jmath}_m^{-1}(B_{l(s)}^{\tilde{F}_m}) \subset j_n^{-1}(C_s B_s^{F_n})$, und andererseits existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert mit $j_m^{-1}(B_{l(s)}^{F_m}) \subset \tilde{\jmath}_n^{-1}(C_s B_s^{\tilde{F}_n})$. Da für das Spektrum der lokalen Frécheträume das Bild der Abbildung j_n für alle $n \in \mathbb{N}$ dicht in F_n liegt, existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $\tilde{\jmath}_n^m(F_m) \subset \overline{\tilde{\jmath}_n(F)}^{\tilde{F}_n}$ gilt.

Insgesamt erfüllt damit jedes definierende Spektrum für F die Voraussetzungen des Lemmas 3.1.5, was die gradierte Exaktheit der kanonischen Auflösung

$$0 \longrightarrow (F,(H_k)_{k\in\mathbb{N}}) \xrightarrow{j} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{F}_n \xrightarrow{\sigma} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{F}_n \longrightarrow 0$$

mit $j(x) := (\tilde{\jmath}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_n - \tilde{\jmath}_n^{n+1}(x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert.

(b) Es sei E ein weiterer gradierter L-zahmer Fréchetraum und $(E_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Fréchetträume von E.
Ist $T : E \longrightarrow F$ ein gradierter L-zahmer Operator, dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß ein L-zahmer Operator $T_n^m : E_m \longrightarrow F_n$ existiert, so daß $j_n \circ T = T_n^m \circ i_m$ gilt.
Ist F ein L-zahmer Fréchetraum, so stimmen die lokalen Fréchetträume von F^c mit F überein. Das bedeutet, daß jeder gradierte L-zahme Operator $T : E \longrightarrow F^c$ für ein $m \in \mathbb{N}$ L-zahm über den lokalen Fréchetraum E_m von E faktorisiert. Ist $A_m : E_m \longrightarrow F^c$ L-zahm mit $A_m \circ i_m = A$, so existiert für jedes weitere definierende Spektrum $(\tilde{E}_n, \tilde{\imath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für E ein $r \in \mathbb{N}$ und ein L-zahmer Operator $S_n^r : \tilde{E}_r \longrightarrow E_m$, so daß $A_m \circ S_m^r \circ \tilde{\imath}_r = A$ gilt.
Ist schließlich $T : E \longrightarrow F$ ein gradierter L-zahmer Operator und $(\tilde{E}_n, \tilde{\imath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum auf E bzw. F, so folgt aus dem oben gezeigten und der Definition von definierenden Spektren, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ und ein L-zahmer Operator $T_n^m : \tilde{E}_m \longrightarrow \tilde{F}_n$ existieren, so daß $\tilde{\jmath}_n \circ T = T_n^m \circ \tilde{\imath}_m$ gilt.

Lemma 3.2.3 *Es sei E ein gradierter L-zahmer Fréchetraum und F ein L-zahmer Fréchetraum. Weiter sei $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für E, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ existiert, so daß $\mathrm{Ext}_{\mathrm{L}}^1(E_m, F) = 0$ gilt. Dann folgt $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g_L}}^1(E, F^c) = 0$.*

Beweis: Es sei $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{\iota_0} I_1 \xrightarrow{\iota_1} I_2 \xrightarrow{\iota_2} \ldots$ eine injektive Auflösung für F in der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der L-zahmen Räume. Nach der Bemerkung 2.1.7 können wir davon ausgehen, daß I_k für alle $k \geq 0$ ein L-zahmer Fréchetraum ist.
Dann ist $0 \longrightarrow F^c \xrightarrow{\iota} I_0^c \xrightarrow{\iota_0} I_1^c \xrightarrow{\iota_1} I_2^c \xrightarrow{\iota_2} \ldots$ unter Berücksichtigung des Lemmas 3.1.3 eine injektive Auflösung für F^c in der Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der gradierten L-zahmen Räume. Es ist $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g_L}}^1(E, F^c) = 0$ genau dann, falls für alle $A \in \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(E, I_1^c)$ mit $\iota_1 \circ A = 0$ ein $B \in \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(E, I_0^c)$ existiert, so daß $A = \iota_0 \circ B$ gilt. Ist $A \in \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(E, I_1^c)$, dann existiert nach der Bemerkung 3.2.2 (b) ein $m \in \mathbb{N}$, so daß ein Operator $A_m \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E_m, I_1)$ existiert mit $A = A_m \circ i_m$ und $\iota_1 \circ A_m = 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\mathrm{Ext}_{\mathrm{L}}^1(E_m, F) = 0$ gilt. Dann existiert ein L-zahmer Operator $B \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(E_m, I_0)$ mit $A_m = \iota_0 \circ B$. Da $B \circ i_m \in \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(E, I_0^c)$ ist und $A = \iota_0 \circ B \circ i_m$ gilt, folgt damit die Behauptung.

Die Aussage des obigen Lemmas bleibt auch unter der Voraussetzung, daß $(E,(H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein beliebiger gradierter L-zahmer Raum und F ein L-zahmer Raum ist, erhalten. Anstelle des definierenden Spektrums wird dann die Folge der L-zahmen Räume $(E, H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ betrachtet. Der Beweis des anschließenden gradierten Splittingsatzes 3.2.10 steht in engem Zusammenhang mit der folgenden

Proposition 3.2.4 *Es sei $E \in$ g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ und F ein gradierter L-zahmer Fréchetraum. Weiter sei $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F und*

$$0 \longrightarrow (F,(H_k)_{k\in\mathbb{N}}) \xrightarrow{j} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \xrightarrow{\sigma} \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n \longrightarrow 0$$

seine kanonische Auflösung mit $j(x) := (j_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_n - j_n^{n+1}(x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$. Darüber hinaus gelte $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g_L}}^1(E, F_n^c) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Es gilt $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g_L}}^1(E, F) = 0$.

(b) *Für jeden Operator* $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ *existiert* $S \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)$*, so daß* $\sigma\circ S = T$ *gilt.*

(c) *Es gilt* $\mathrm{Proj}^1(\mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, F_n^c))_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

Beweis: $''(a) \Rightarrow (b)''$: folgt unmittelbar aus 2.1.18 für die Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der gradierten L-zahmen Räume.

$''(b) \Rightarrow (a)''$: Beachten wir den Satz 2.1.17 für die Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$, so reicht es nachzuweisen, daß jede beliebige gradiert L-zahme kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{J} G \xrightarrow{Q} E \longrightarrow 0$$

gradiert L-zahm zerfällt. Da $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{g_L}}(E, F_n^c) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit der Bemerkung 3.1.11 (a), daß auch $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{g_L}}(E, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n) = 0$ ist. Damit sichert der Satz 2.1.18 für die Kategorie g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ die Existenz einer Abbildung $\phi \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(G, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ mit $\phi \circ J = j$. Wir erhalten also folgendes gradiert L-zahme kommutative Diagramm mit gradiert L-zahm exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & F & \xrightarrow{j} & \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n & \longrightarrow 0 \\
& {\scriptstyle I}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \phi} & & & \\
0 \longrightarrow & F & \xrightarrow{J} & G & \xrightarrow{Q} & E & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Die Proposition 1.1.37 (a) liefert dann eine Abbildung $T \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ mit $T\circ Q = \sigma\circ\phi$. Aus der Voraussetzung folgt dann, daß eine Abbildung $S \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \mathrm{g_L}\text{-}\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ existiert, so daß $\sigma\circ S = T$ gilt. Unter Berücksichtigung der Proposition 1.1.31 existiert damit eine Abbildung $L \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(G, F)$ mit $L \circ J = I$, woraus schließlich die Behauptung folgt.

$''(b) \Rightarrow (c)''$: folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des abzählbar unendlich gradierten L-zahmen Produktes.

$''(c) \Rightarrow (b)''$: ist offensichtlich erfüllt.

Wir kommen nun zu der Definition eines strikt gradierten L-zahmen Fréchetraumes. In Analogie zu der Definition eines strikt gradierten Fréchetraumes in [DV] Sec. 2 ist das Ziel, für ein definierendes Spektrum $(\tilde{F}_n, \jmath_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für F für alle $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $m \in \mathbb{N}$ zu sichern, so daß die kurze Sequenz $0 \longrightarrow \ker \jmath_n^m \hookrightarrow \tilde{F}_m \xrightarrow{\jmath_n^m} \tilde{F}_n \longrightarrow 0$ L-zahm exakt ist. Im Fall $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)\,\forall_{n\in\mathbb{N}}\}$ ist dies aufgrund des Satzes der offenen Abbildung genau dann der Fall, falls $\jmath_n^m$ surjektiv ist. Im Allgemeinen muß also die Definition eines strikt gradierten L-zahmen Fréchetraumes wie folgt lauten:

Definition 3.2.5 *Es sei F ein gradierter L-zahmer Fréchetraum. F heißt strikt, falls ein definierendes Spektrum $(\tilde{F}_n, \jmath_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für F existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ existiert, so daß die Abbildungen $\jmath_n^k : F_k \longrightarrow F_n$ für alle $k \geq m$ surjektive Homomorphismen in der Kategorie der L-zahmen Räume $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ sind.*

Im Anschluß beweisen wir entsprechend den Ausführungen in [DV] Sec. 2 eine äquivalente Bedingung zu der L-zahmen Striktheit eines gradierten L-zahmen Fréchetraumes. Da wir im allgemeinen Rahmen unserer Betrachtungen nicht ohne weiteres auf den Satz der offenen Abbildung zurückgreifen können, erhalten wir folgendes

Lemma 3.2.6 *Es sei F ein gradierter L-zahmer Fréchetraum. F ist genau dann strikt, falls für jedes definierende (für ein definierendes) Spektrum $(\tilde{F}_n, \jmath_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für F und alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $k \geq m$ ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert mit*

$$\jmath_n^m(B_{l(s)}^{\tilde{F}_m}) \subset \jmath_n^k(C_s B_s^{\tilde{F}_k}). \tag{19}$$

Bemerkung 3.2.7 Aufgrund der L-Zahmheit der Abbildungen $\tilde{\jmath}_n^k$ für alle $k \geq n$ ist die Bedingung (19), so zu verstehen, daß die Bilder $\tilde{\jmath}_n^m(\tilde{F}_m)$ und $\tilde{\jmath}_n^k(\tilde{F}_k)$ für alle $k \geq m$ als Quotienten L-zahm isomorph sind.

Beweis des Lemmas 3.2.6: Es sei $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß die Abbildung j_n^m ein surjektiver L-zahmer Homomorphismus ist. Ist nun $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein weiteres definierendes Spektrum für F und sind $T_n^{k(n)} : F_{k(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ und $S_n^{k(n)} : \tilde{F}_{k(n)} \longrightarrow F_n$ die aus der Äquivalenz der beiden Spektren resultierenden L-zahmen Operatoren, so existiert zu $k(n) \in \mathbb{N}$ ein $\mu \geq k(n)$, so daß für alle $\nu \geq \mu$ ein $l \in L$ existiert, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert, so daß $j_{k(n)}^\nu(C_s B_s^{F_\nu}) \supset B_{l(s)}^{F_{k(n)}}$ gilt. Damit existiert ohne Einschränkung der Allgemeinheit für alle $r \geq k^2(\mu)$ ein $l \in L$, so daß für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $C_s > 0$ existiert, so daß $\tilde{\jmath}_n^r(C_s^4 B_s^{\tilde{F}_r}) \supset \tilde{\jmath}_n^r \circ T_r^{k(r)}(C_s^3 B_{l(s)}^{F_{k(r)}}) = T_n^{k(n)} \circ j_{k(n)}^{k(r)}(C_s^3 B_{l(s)}^{F_{k(r)}}) \supset T_n^{k(n)}(C_s^2 B_{l^2(s)}^{F_{k(n)}}) \supset T_n^{k(n)} \circ S_{k(n)}^{k^2(n)}(C_s B_{l^3(s)}^{\tilde{F}_{k^2(n)}}) = \tilde{\jmath}_n^{k^2(n)}(C_s B_{l^3(s)}^{\tilde{F}_{k^2(n)}}) \supset \tilde{\jmath}_n^{k^2(\mu)}(B_{l^4(s)}^{\tilde{F}_{k^2(\mu)}})$.
Es sei andererseits $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß die Bedingung (19) erfüllt ist. Indem wir $\tilde{F}_n := j_n^{m_n}(F_{m_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen und $\tilde{F}_n$ mit der von den Abbildungen $j_n^{m_n}$ induzierten Familie von Quotientenhalbnormen $\|y\|_s^{\tilde{F}_n} := \inf\{\|z\|_s^{F_{m_n}} : j_n^{m_n}(z) = y\}$ für $s \in \mathbb{N}$ versehen, erhalten wir eine Folge $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Fréchеträumen. Es gilt $B_s^{\tilde{F}_n} \supset j_n^{m_n}(B_s^{F_{m_n}})$ und $j_n^{m_n}(B_s^{F_{m_n}}) \supset \frac{1}{2}B_s^{\tilde{F}_n}$ für alle $s, n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Eigenschaft (19) folgt daraus leicht, daß die Abbildungen $j_n^r : \tilde{F}_r \longrightarrow \tilde{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r \geq n$ surjektive L-zahme Homomorphismen sind und daß das Spektrum $(\tilde{F}_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F ist.

Anlaß der folgenden Definition sind die Ausführungen in [DV] Sec. 4. Sie verallgemeinert den Begriff s-freundlich in [DV].

Definition 3.2.8 *Es seien E und F gradierte L-zahme Fréchеträume. Weiter sei $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F. Wir setzen $F_n^{(s)} := \ker j_s^n$ für alle $n, s \in \mathbb{N}$ mit $n \geq s$. F heißt E-freundlich, falls*

(i) F strikt ist und

(ii) falls ein definierendes Spektrum $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für E existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \geq n$ existiert, so daß für alle $m \geq s$ ein $r \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $j_m^r : F_r^{(s)} \longrightarrow F_m^{(n)}$ über einen L-zahmen Fréchetraum H L-zahm faktorisiert, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\nu \geq k$ existiert, so daß $\mathrm{Ext}_{\mathrm{L}}^1(E_\nu, H) = 0$ gilt.

Bemerkung 3.2.9 (a) Die Eigenschaft 3.2.8 (ii) ist unabhängig von der Wahl des definierenden Spektrums für F. Denn es sei $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum, so daß 3.2.8 (ii) erfüllt ist. Ist $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ ein weiteres definierendes Spektrum für F, so existiert aufgrund der Äquivalenz der beiden Spektren für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $k(n) \in \mathbb{N}$ und für alle $m \geq n$ ein $k(m)$ und ein L-zahmer wohldefinierter Operator $T_m^{k(m)} : F_{k(m)}^{(k(n))} \longrightarrow \tilde{F}_m^{(n)}$. Nach Voraussetzung existiert zu $k(n)$ ein $s \geq k(n)$ und zu $k(m)$ ein $r \geq k(m), s$, so daß die Abbildung $j_{k(m)}^r : F_r^{(s)} \longrightarrow F_{k(m)}^{(k(n))}$ über H faktorisiert. Schließlich impliziert die Äquivalenz der Spektren, daß zu r ein $k(r)$ und zu s ein $k(s)$ und ein L-zahmer wohldefinierter Operator $S_r^{k(r)} : \tilde{F}_{k(r)}^{(k(s))} \longrightarrow F_r^{(s)}$ existiert, so daß $T_m^{k(m)} \circ j_{k(m)}^r \circ S_r^{k(r)} = T_m^{k(m)} \circ S_{k(m)}^{k^2(m)} \circ \tilde{\jmath}_{k^2(m)}^{k(r)} = \tilde{\jmath}_m^{k(r)}$ gilt. Damit faktorisiert auch die Einschränkung $\tilde{\jmath}_m^{k(r)} : \tilde{F}_{k(r)}^{(k(s))} \longrightarrow \tilde{F}_m^{(n)}$ über H, und es folgt die Behauptung.

(b) Es seien E und F gradierte L-zahme Fréchеträume. Die folgende Eigenschaft ist unabhängig von der Wahl des definierenden Spektrums für F: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $s \geq n$, so daß für alle $r \geq s$ und jede lineare Abbildung $A \in \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(E, \tilde{F}_s^c)$ ein Operator $B \in \mathrm{T}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}(E, \tilde{F}_r^c)$ existiert, so daß

$\tilde{\jmath}_n^s \circ A = \tilde{\jmath}_n^r \circ B$ gilt. Denn es seien $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)$ und $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ zwei definierende Spektren für F und $T_n^{k(n)} : F_{k(n)} \longrightarrow \tilde{F}_n$ bzw. $S_n^{k(n)} : \tilde{F}_{k(n)} \longrightarrow F_n$ die L-zahmen Operatoren die der Eigenschaft (3) und (4) genügen. Genügt $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)$ dieser Eigenschaft, so wählen wir zu $k(n) \in \mathbb{N}$ ein $s > k(n)$, so daß für alle $r \geq s$ und jede lineare Abbildung $A \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, \tilde{F}_s^c)$ ein Operator $B \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, \tilde{F}_r^c)$ existiert, so daß $\tilde{\jmath}_{k(n)}^s \circ A = \tilde{\jmath}_{k(n)}^r \circ B$ gilt. Es gilt: $j_n^{k(s)} \circ A = S_n^{k(n)} \circ T_{k(n)}^{k^2(n)} \circ j_{k^2(n)}^{k(s)} \circ A = S_n^{k(n)} \circ \tilde{\jmath}_{k(n)}^s \circ T_s^{k(s)} \circ A$ für alle $A \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, F_{k(s)}^c)$. Nach der Voraussetzung existiert für alle $m \geq k(s)$ ein $B \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, \tilde{F}_{k(m)}^c)$ mit $\tilde{\jmath}_{k(n)}^s \circ T_s^{k(s)} \circ A = \tilde{\jmath}_{k(n)}^{k(m)} \circ B$. Damit gilt insgesamt $j_n^{k(s)} \circ A = S_n^{k(n)} \circ \tilde{\jmath}_{k(n)}^{k(m)} \circ B = j_n^m \circ S_m^{k(m)} \circ B$. Da die Operatoren $S_m^{k(m)}$ L-zahm sind, folgt die Behauptung.

Wir sind nun so weit, einen gradierten Splittingsatz zu formulieren:

Satz 3.2.10 *Es seien E und F gradierte L-zahme Frécheträume. Darüber hinaus gelte:*

(i) Es existieren definierende Spektren $(E_n, i_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für E und $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für F, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \geq k$ existiert, so daß $\mathrm{Ext}_\mathrm{L}^1(E_m, F_n) = 0$ gilt.

(ii) F ist E-freundlich.

Dann folgt $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}_\mathrm{L}}^1(E, F) = 0$.

Beweis: Mit dem Lemma 3.2.3 folgt aus (i), daß $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}_\mathrm{L}}^1(E, F_n^c) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach der Proposition 3.2.4 reicht es, damit $\mathrm{Proj}^1(\mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, F_n^c))_{n\in\mathbb{N}} = 0$ nachzuweisen. Wir weisen im folgenden nach, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $k \geq s$ und alle $A \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, F_s^c)$ eine Abbildung $B \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, F_k^c)$ existiert, so daß $j_n^s \circ A = j_n^k \circ B$ gilt. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$. Da F strikt ist, existiert ein definierendes Spektrum $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, so daß ein $m \geq n$ existiert, so daß die Abbildungen $\tilde{\jmath}_n^m : \tilde{F}_m \longrightarrow \tilde{F}_n$ für alle $k \geq m$ surjektive Homomorphismen in $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ sind. Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $s \geq n$, so daß für alle $k \geq s$ ein $r \geq k, s$ existiert, so daß die Einschränkung $\tilde{\jmath}_k^r : \tilde{F}_r^{(s)} \longrightarrow \tilde{F}_k^{(n)}$ über einen L-zahmen Fréchetraum H faktorisiert, so daß für alle $\nu \in \mathbb{N}$ ein $\mu \geq \nu$ existiert mit $\mathrm{Ext}_\mathrm{L}^1(\tilde{E}_\mu, H) = 0$ für ein definierendes Spektrum $(\tilde{E}_n, \tilde{\imath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für E. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s \geq m$. Zu $s \in \mathbb{N}$ wählen wir $\rho \in \mathbb{N}$, so daß die Abbildung $\tilde{\jmath}_s^\tau : \tilde{F}_\tau \longrightarrow \tilde{F}_s$ für alle $\tau \geq \rho$ ein surjektiver L-zahmer Homomorphismus ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $r \geq \rho$. Ist nun $A \in \mathrm{T}_\mathrm{g}^\mathrm{L}(E, \tilde{F}_s^c)$, so erhalten wir ein $t \in \mathbb{N}$, so daß ein L-zahmer Operator $A_t : \tilde{E}_t \longrightarrow \tilde{F}_s^c$ existiert mit $A = A_t \circ \tilde{\imath}_t$. Es gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathrm{Ext}_\mathrm{L}^1(\tilde{E}_t, H) = 0$. Da die Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ quasiabelsch ist, erhalten wir damit insgesamt folgendes L-zahme kommutative Diagramm mit L-zahm exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_k^{(n)} & \rightarrow & \tilde{F}_k & \xrightarrow{\tilde{\jmath}_n^k} & \tilde{F}_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & H & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \tilde{\jmath}_n^s} & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_r^{(s)} & \rightarrow & \tilde{F}_r & \xrightarrow{\tilde{\jmath}_s^r} & \tilde{F}_s & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle A_t} & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{F}_r^{(s)} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \tilde{E}_t & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Die Proposition 1.1.38 (a) liefert dann das folgende L-zahme kommutative Diagramm mit L-zahm exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{F}_k^{(n)} \arrow[r] & \tilde{F}_k \arrow[r, "\tilde{\jmath}_n^k"] & \tilde{F}_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[u] & P \arrow[r, "q"] \arrow[u, "T"'] & \tilde{E}_t \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{\jmath}_n^s \circ A_t"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{F}_r^{(s)} \arrow[r] \arrow[u] & Z \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{E}_t \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Da $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}}(\tilde{E}_t, H) = 0$ gilt, existiert eine Abbildung $R : \tilde{E}_t \longrightarrow P$ mit $q \circ R = \mathrm{id}$. Setzen wir $\tilde{B} := T \circ R$, dann ist $\tilde{B} \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}(\tilde{E}_t, \tilde{F}_k)$ und es gilt $\tilde{\jmath}_n^s \circ A_t = \tilde{\jmath}_n^k \circ \tilde{B}$. Nun ist $\tilde{B} \circ \tilde{\imath}_t \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \tilde{F}_k^c)$ und wir erhalten: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $s \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq s$ und alle $A \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \tilde{F}_s^c)$ eine Abbildung $B \in \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{g}}(E, \tilde{F}_k^c)$ existiert, so daß $\tilde{\jmath}_n^s \circ A = \tilde{\jmath}_n^k \circ B$ gilt. Mit der Bemerkung 3.2.9 (b) folgt schließlich die Behauptung.

Der Satz 3.2.10 gilt auch in dem Fall, daß $(E, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein beliebiger gradierter L-zahmer Vektorraum ist. Dazu wäre eine Anpassung der Definition von E-freundlich nötig. Für die anschließenden Anwendungen in der Praxis ist dies jedoch irrelevant.

Wir wollen nun den Bezug zu den Anwendungen herleiten:

Bemerkung 3.2.11 (a) Es sei F ein L-zahmer Fréchetraum. Weiter sei $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein L-zahmes Spektrum aus Frécheträumen und $(\tilde{\jmath}_n : F \longrightarrow \tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie linearer Abbildungen, so daß $\tilde{\jmath} := (\tilde{\jmath}_n)_{n\in\mathbb{N}} : F \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} \tilde{F}_n$ ein topologischer Isomorphismus ist. Dabei betrachten wir $\mathrm{proj}_{\leftarrow n} \tilde{F}_n$ als Unterraum des topologischen Produkts $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{F}_n$. Darüber hinaus gelte $\tilde{F}_n := \overline{\tilde{\jmath}_n(F)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $(\|\cdot\|_s^{\tilde{F}_n})_{s\in\mathbb{N}}$ das Halbnormensystem auf $\tilde{F}_n$. Dann induzieren die linearen Abbildungen $\tilde{\jmath}_n : F \longrightarrow \tilde{F}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ein monoton wachsendes System von Halbnormen $H_n := (\|\tilde{\jmath}_n(\cdot)\|_s^{\tilde{F}_n})_{s\in\mathbb{N}}$ auf F. Da die Abbildungen $\tilde{\jmath}_n^m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ L-zahme Operatoren sind, sind die Einbettungen $(F, H_{n+1}) \hookrightarrow (F, H_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ L-zahm. Offensichtlich ist $(F, \cup_{n\in\mathbb{N}} H_n)$ ein Fréchetraum. Insgesamt ist damit $(F, (H_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum. Bezeichnet $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Frécheträume von $(F, (H_n)_{n\in\mathbb{N}})$, dann ist darüber hinaus F_n isomorph zu $\tilde{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und zwar so, daß $\|\cdot\|_s^{\tilde{F}_n} = \|\cdot\|_s^{F_n}$ für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt. Auf die eben beschriebene Art und Weise induziert das L-zahme Spektrum $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ auf dem Fréchetraum F ein definierendes Spektrum für den gradierten L-zahmen Fréchetraum $(F, (H_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Jedes weitere zu $(\tilde{F}_n, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ im Sinne der Eigenschaft (3) äquivalente L-zahme Spektrum in der Kategorie $\mathcal{T}^L\mathcal{S}$ der L-zahmen Räume induziert ein weiteres definierendes Spektrum für $(F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$.

(b) Es sei E ein Fréchetraum. Für $n \in \mathbb{N}$ induzieren die natürlichen Projektionen $p_n : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow E^n$ und $p_n^m : E^m \longrightarrow E^n$ für $m \geq n$ das Spektrum $(E^n, p_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$, so daß $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathrm{proj}_{\leftarrow n} E_n$ ein Isomorphismus ist. Das projektive System $(E^n, p_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ist offensichtlich ein striktes L-zahmes Spektrum aus Frécheträumen. Betrachten wir das von E^c induzierte Produkt g_{L}-$E^{\mathbb{N}}$, so ist $(E^n, p_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ gerade das Spektrum der lokalen Frécheträume von g_{L}-$E^{\mathbb{N}}$.

(c) Es sei $(F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum und $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ das Spektrum der lokalen Frécheträume von F. Weiter sei $A \subset F$ ein gradierter L-zahmer Unterraum von F, der bezüglich $\cup_{k\in\mathbb{N}} H_k$ abgeschlossen ist. Dann ist das Spektrum $(A_n := \overline{j_n(A)}^{F_n}, j_n^m|_{A_n})_{n,m\in\mathbb{N}}$ gerade das Spektrum der lokalen Frécheträume von A, dabei betrachten wir A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ als L-zahmen Unterraum von F_n.

Betrachten wir den gradierten L-zahmen Quotienten F/A von F, so induziert das Spektrum der lokalen Frécheträume $(F_n, j_n^m)_{n,m}$ von F ein Spektrum $(F_n/A_n, g_n^m)_{n,m}$, wobei wir F_n/A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ als L-zahmen Quotienten von F_n betrachten. Ist $q_n : F_n \longrightarrow F_n/A_n$ für $n \in \mathbb{N}$ die entsprechende Quotientenabbildung, so bezeichnet $g_n^m : F_m/A_m \longrightarrow F_n/A_n$ für $m \geq n$, gerade jenen L-zahmen Operator, für den $g_n^m \circ q_m = q_n \circ j_n^m$ gilt. Dann ist $(F_n/A_n, g_n^m)_{n,m}$ gerade das Spektrum der lokalen Frécheträume von F/A.

Ist $(\tilde{F}, \tilde{\jmath}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F, so ist $(\tilde{A}_n := \overline{\tilde{\jmath}(A)}^{\tilde{F}_n}, \tilde{\jmath}_n^m|_{\tilde{A}})_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für A und $(\tilde{F}_n/\tilde{A}_n, \tilde{g}_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F/A.

Betrachten wir die gradierte L-zahme Kategorie bezüglich $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\}$, so bezeichnen wir diese im folgenden schlicht als gradierte Kategorie. Genauso verfahren wir mit allen im Rahmen der gradierten Kategorie auftretenden Begriffen. Beachten wir die Bemerkung 3.2.11, so erhalten wir unmittelbar aus dem Satz 3.2.10 und den Splittingresultaten von Vogt und Wagner in [V3] das folgende Korollar, das die Ergebnisse des Satzes 4.5 in [DV] zusammenfaßt:

Korollar 3.2.12 *(a) Es seien E und F gradierte Frécheträume. Besitzt E ein definierendes Spektrum von (nuklearen) Frécheträumen mit der Eigenschaft* (DN) *und ist F ein strikt gradierter Fréchetraum, der ein definierendes Spektrum $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ von nuklearen (nicht notwendig nuklearen) Frécheträumen mit der Eigenschaft (Ω) besitzt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \geq n$ existiert, so daß für alle $m \geq n$ ein $r \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $j_m^r : F_r^{(s)} \longrightarrow F_m^{(n)}$ über einen nuklearen (nicht notwendig nuklearen) Fréchetraum H mit der Eigenschaft (Ω) faktorisiert, oder*

(b) ist E ein gradierter Fréchetraum, der gradiert isomorph zu einem gradierten Unterraum von $\mathrm{g_L}\text{-}\mathrm{s}^{\mathbb{N}}$ ist, und F ein strikt gradierter Fréchetraum, der ein definierendes Spektrum $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ von Frécheträumen mit der Eigenschaft (Ω) besitzt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \geq n$ existiert, so daß für alle $m \geq n$ ein $r \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $j_m^r : F_r^{(s)} \longrightarrow F_m^{(n)}$ über einen Fréchetraum H mit der Eigenschaft (Ω) faktorisiert, oder

(c) ist F ein gradierter Fréchetraum, der gradiert isomorph zu einem gradierten $\mathrm{g_L}\text{-}\mathrm{s}^{\mathbb{N}}$-freundlichen Quotienten von $\mathrm{g_L}\text{-}\mathrm{s}^{\mathbb{N}}$ ist, und E ein gradierter Fréchetraum, der ein definierendes Spektrum aus Frécheträumen mit der Eigenschaft (DN) *besitzt,*

dann gilt $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{g_L}}(E, F) = 0$.

Die Aussage 3.2.12 (a) ist eine Verallgemeinerung des Ergebnisses in [DV] Satz 4.5 (2). Unter Berücksichtigung des Korollars 2.2.10 ist eine weitere Anwendung des Satzes 3.2.10 der folgende Satz. Für den Beweis beachte man die Bemerkung 3.2.11 und die Tatsache, daß das endliche Produkt von (nuklearen) Potenzreihenräumen endlichen Typs, L-zahm isomorph zu einem (nuklearen) Potenzreihenraum endlichen Typs ist.

Satz 3.2.13 *Es sei $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} :\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)$ und $\exists_{b\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq n + b\}$ oder $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} :\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)$ und $\exists_{a,b\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq an + b\}$.*
Es sei $\Lambda_0(\alpha)$ ein (nuklearer) Potenzreihenraum endlichen Typs.

(a) Ist E ein gradierter L-zahmer Fréchetraum, der gradiert L-zahm isomorph zu einem gradierten L-zahmen Unterraum von $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ ist, und F ein strikt gradierter L-zahmer Fréchetraum, so daß folgendes gilt:

(i) Es existiert ein definierendes Spektrum $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für F, bestehend aus Quotienten von nuklearen (nicht notwendig nuklearen) Potenzreihenräumen endlichen Typs.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $s \geq n$, so daß für alle $m \geq n$ ein $l \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $j_m^l : F_l^{(s)} \longrightarrow F_m^{(n)}$ über einen Quotienten eines nuklearen (nicht notwendig nuklearen) Potenzreihenraumes endlichen Typs L-zahm faktorisiert.

Oder:

(b) *Ist F ein gradierter L-zahmer Fréchetraum, der gradiert L-zahm isomorph zu einem gradierten L-zahmen $\mathrm{g_L}$-$\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$-freundlichen Quotienten von $\mathrm{g_L}$-$\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ ist, und E ein gradierter L-zahmer Fréchetraum, der ein definierendes Spektrum von abgeschlossenen Unterräumen von nuklearen (nicht notwendig nuklearen) Potenzreihenräumen endlichen Typs besitzt.*

Dann folgt $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{g_L}}(E,F)=0$.

Im obigen Satz verstehen wir unter einem Unterraum bzw. unter einem Quotienten eines Potenzreihenraumes endlichen Typs $\Lambda_0(\alpha)$, einen Unterraum bzw. Quotienten von $\Lambda_0(\alpha)$, versehen mit den von $\Lambda_0(\alpha)$ induzierten Halbnormen bzw. Quotientenhalbnormen. Diese Forderung ist jedoch invariant unter L-zahmen Isomorphien.

Eine dem Korollar 3.2.12 (a) entsprechende Aussage ist auch im Satz 3.2.13 möglich, indem man die Eigenschaften (DN) und (Ω) durch die Eigenschaften (18) und (17) aus dem Satz 2.2.8 ersetzt. Im folgenden wollen wir ein entsprechendes Resultat wie in [DV] Theorem 5.2 für $\mathrm{g_L}$-$\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ nachweisen. Dabei spielt das folgende Lemma eine entscheidende Rolle.

Lemma 3.2.14 *Es sei $(F,(H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum und $A\subset F$ ein strikter gradierter L-zahmer Unterraum, der bezüglich $\cup_{k\in\mathbb{N}}H_k$ abgeschlossen ist. Weiter sei $(F_n,j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F. Dann existiert ein definierendes Spektrum $(G_n,g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für den gradierten L-zahmen Quotienten F/A, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $s\geq n$ existiert, so daß für alle $m\geq s$ die Einbettung $G_m^{(s)}\hookrightarrow G_m^{(n)}$ über einen L-zahmen Quotienten von $\ker j_n^m$ L-zahm faktorisiert.*

Beweis: Wir betrachten das Spektrum $(G_n:=F_n/A_n,g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ aus der Bemerkung 3.2.11 (c) mit $A_n:=\overline{j_n(A)}^{F_n}$ für $n\in\mathbb{N}$ für den gradierten L-zahmen Quotienten F/A. Bezeichnet $q_n: F_n\longrightarrow F_n/A_n$ die Quotientenabbildung, so gilt $g_n^k\circ q_k=q_n\circ j_n^k$ für alle $k\geq n$. Daraus folgt $q_k(\ker j_n^k)\subset\ker g_n^k$ für alle $k\geq n$. Da A ein strikt gradierter L-zahmer Unterraum von F ist, wählen wir zu $n\in\mathbb{N}$ ein $s\in\mathbb{N}$, so daß für alle $m\geq s$ ein $l\in L$ existiert, so daß für alle $\nu\in\mathbb{N}$ ein $C_\nu>0$ existiert mit

$$j_n^s(C_\nu B_{l(\nu)}^{A_s})\subset j_n^m(B_\nu^{A_m}). \tag{20}$$

Es sei nun $z\in\ker g_s^m$ und $x\in F_m$ mit $q_m(x)=z$. Dann gilt $0=g_s^m(z)=g_s^m\circ q_m(x)=q_s\circ j_s^m(x)$. Also ist $j_s^m(x)\in A_s$. Aus (20) folgt, daß ein $a_m\in A_m$ existiert mit $j_n^m(x)=j_n^m(a_m)$ und $\|a_m\|_\nu^{A_m}=\frac{1}{C_\nu}\|j_s^m(x)\|_{l(\nu)}^{A_s}$. Damit erhalten wir $x=\tilde a_m+a_m$ für ein $\tilde a_m\in\ker j_n^m\cap q_m^{-1}(\ker g_s^m)$. Insbesondere ist somit $\ker g_s^m\subset q_m(\ker j_n^m)$ für alle $m\geq s$. Darüber hinaus impliziert die eben gezeigte Darstellung, daß die Einbettung $\ker g_s^m\hookrightarrow q_m(\ker j_n^m)$ für alle $m\geq s$ L-zahm ist, wobei wir $q_m(\ker j_n^m)$ mit den Halbnormen $(\|y\|_\nu:=\inf\{\|\eta\|_\nu^{F_m}:\eta\in\ker j_n^m \text{ und } q_m(\eta)=y\})_{\nu\in\mathbb{N}}$ versehen. Um dies nachzuweisen, sei $m\geq s$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $l\in L$ so gewählt, daß (20) gilt und die Abbildung j_s^m bezüglich $l\in L$ L-zahm ist. Ist nun $z\in\ker g_n^m$ und $\epsilon>0$ beliebig, so wählen wir $x\in F_m$ mit $q_m(x)=z$, so daß $\|x\|_{l^2(\nu)}^{F_m}\leq\epsilon+\inf\{\|\xi\|_{l^2(\nu)}^{F_m}:q_m(\xi)=z\}$ gilt. Mit der obigen Darstellung existiert ein $\tilde a\in\ker j_n^m\cap q_m^{-1}(\ker g_n^m)$ und ein $a_m\in A_m$ mit $\|a_m\|_\nu^{A_m}=\frac{1}{C_\nu}\|j_s^m(x)\|_{l(\nu)}^{A_s}$, so daß $x=\tilde a+a_m$ gilt. Berücksichtigen wir die L-Zahmheit der Abbildung j_s^m, so existiert für alle $\nu\in\mathbb{N}$ zunächst ein $C_\nu>0$ und schließlich ein $\tilde C_\nu>0$ mit $\|z\|_\nu=\inf\{\|\eta\|_\nu^{F_m}:\eta\in\ker j_n^m \text{ und } q_m(\eta)=z\}\leq\|\tilde a\|_\nu^{F_m}\leq\|\tilde a+a_m\|_\nu^{F_m}+\|a_m\|_\nu^{F_m}\leq\|x\|_{l(\nu)}^{F_m}+\frac{1}{C_\nu}\|j_s^m(x)\|_{l(\nu)}^{F_s}\leq\|x\|_{l^2(\nu)}^{F_m}+\tilde C_\nu\|x\|_{l^2(\nu)}^{F_m}$
$\leq(1+\tilde C_\nu)\epsilon+(1+\tilde C_\nu)\inf\{\|\xi\|_{l^2(\nu)}^{F_m}:q_m(\xi)=z\}$ für alle $z\in\ker g_n^m$ und $\epsilon>0$.
Insgesamt erhalten wir also ein definierendes Spektrum $(G_n,g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für F/A, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $s\geq n$ existiert, so daß für alle $m\geq s$ die Einbettung $\ker g_s^m\hookrightarrow q_m(\ker j_n^m)$ L-zahm ist, wobei wir, wie oben beschrieben, $q_m(\ker j_n^m)$ als L-zahmen Quotienten von $\ker j_n^m$ verstehen. Da die Einbettung $q_m(\ker j_n^m)\hookrightarrow\ker g_n^m$ für alle $m\geq n$ stets L-zahm ist, folgt damit die Behauptung.

Bemerkung 3.2.15 Es sei $\Lambda_0(\alpha)$ ein (nuklearer) Potenzreihenraum endlichen Typs. Weiter sei $L:=\{l\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}:\ \forall_{n\in\mathbb{N}}:l(n)\leq l(n+1)$ und $\exists_{b\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}}:l(n)\leq n+b\}$ oder $L:=\{l\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}:\ \forall_{n\in\mathbb{N}}:$

$l(n) \leq l(n+1)$ und $\exists_{a,b\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq an+b\}$. Ein gradierter L-zahmer Fréchetraum F ist unter den obigen Voraussetzungen $\mathrm{g_L}$-$\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$-freundlich, falls er strikt ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \geq n$ existiert, so daß für alle $m \geq s$ ein $r \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $j_m^r : F_r^{(s)} \longrightarrow F_m^{(n)}$ über einen Quotienten eines nuklearen (nicht notwendig nuklearen) Potenzreihenraumes endlichen Typs L-zahm faktorisiert. Dies ist unter Berücksichtigung des Korollars 2.2.10 und der Bemerkung 3.2.11 (b) leicht einzusehen.

Beachten wir, daß das endliche Produkt von (nuklearen) Potenzreihenräumen endlichen Typs L-zahm isomorph zu einem (nuklearen) Potenzreihenraum endlichen Typs ist, so impliziert das Lemma 3.2.14 und das Korollar 2.2.10, daß gradierte L-zahme Quotienten von $\mathrm{g_L}$-$\Lambda_0(\beta)^{\mathbb{N}}$ (mit $\Lambda_0(\beta)$ nuklear) bezüglich strikt gradierter L-zahmer Unterräume $\mathrm{g_L}$-$\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$-freundlich mit $\Lambda_0(\alpha)$ nuklear (mit $\Lambda_0(\alpha)$ nicht notwendig nuklear) sind.

Ist es bezüglich der E-Freundlichkeit notwendig, daß der Fréchetraum H aus 3.2.8 (ii) L-zahm nuklear ist, so liefert die folgende Proposition zusammen mit der Proposition 2.1.20 eine hinreichende Bedingung dafür, wann ein gradierter L-zahmer Quotient eines E-freundlichen gradierten L-zahmen Fréchetraumes F wieder E-freundlich ist.

Proposition 3.2.16 *Es sei $(F, (H_k)_{k\in\mathbb{N}})$ ein gradierter L-zahmer Fréchetraum und $A \subset F$ ein strikt gradierter L-zahmer Unterraum, der bezüglich $\cup_{k\in\mathbb{N}} H_k$ abgeschlossen ist. Weiter bezeichne $(F_n, j_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ bzw. $(G_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ ein definierendes Spektrum für F bzw. F/A. Existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \geq n$, so daß für alle $m \geq s$ ein $r \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $j_m^r : F_r^{(s)} \longrightarrow F_m^{(n)}$ über einen Fréchetraum H L-zahm faktorisiert, dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \geq n$, so daß für alle $m \geq s$ ein $r \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $g_m^r : G_r^{(s)} \longrightarrow G_m^{(n)}$ über einen L-zahmen Quotienten von H faktorisiert.*

Beweis: Aufgrund der Bemerkung 3.2.9 (a) können wir uns im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf das in der Bemerkung 3.2.11 (c) induzierte Spektrum $(G_n := F_n/A_n, g_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ für den gradierten L-zahmen Quotienten F/A mit $A_n := \overline{j_n(A)}^{F_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beschränken. Nach Voraussetzung existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $s \geq n$, so daß für alle $m \geq s$ ein $r \geq m, s$ existiert, so daß die Einschränkung $j_m^r : F_r^{(s)} \longrightarrow F_m^{(n)}$ über einen Fréchetraum H L-zahm faktorisiert. Dann faktorisiert die Abbildung $\hat{j}_m^r : \ker j_s^r/(\ker j_s^r \cap A_r) \longrightarrow \ker j_n^m/(\ker j_n^m \cap A_m)$ mit $\hat{j}_m^r \circ q_r = q_m \circ i_m^l$, L-zahm über einen L-zahmen Quotienten von H, wobei q_m bzw. q_r die Quotientenabbildung von $\ker j_n^m$ bzw. $\ker j_s^r$ auf $\ker j_n^m/(\ker j_n^m \cap A_m)$ bzw. $\ker j_s^r/(\ker j_s^r \cap A_r)$ bezeichnet. Der Beweis des Lemmas 3.2.14 liefert schließlich die Behauptung.

Definition 3.2.17 *Es sei*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{T} E_0 \xrightarrow{T_0} E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \longrightarrow \cdots$$

ein exakter Komplex in g-$\mathcal{T}^L\mathcal{S}$. Der obige Komplex zerfällt genau dann gradiert L-zahm in E_k, falls die kurze gradiert L-zahm exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker T_k \hookrightarrow E_k \xrightarrow{T_k} \operatorname{im} T_k \longrightarrow 0$$

gradiert L-zahm zerfällt.

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem folgenden Splittingresultat. Was die Bedeutung von $\mathrm{g_L}$-$\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$-freundlich anbelangt, erinnern wir an die Bemerkung 3.2.15.

Satz 3.2.18 *Es sei $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)$ und $\exists_{b\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq n+b\}$ oder $L := \{l \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq l(n+1)$ und $\exists_{a,b\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} : l(n) \leq an+b\}$. Weiter sei*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{T} E_0 \xrightarrow{T_0} E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \longrightarrow \cdots$$

ein gradiert L-zahmer exakter Komplex aus gradierten L-zahmen Frécheträumen, so daß E_k für alle $k \geq 0$ gradiert L-zahm isomorph zu $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ ist, wobei $\Lambda_0(\alpha)$ einen nuklearen Potenzreihenraum endlichen Typs bezeichnet. Dann gilt:

(a) Der Komplex zerfällt gradiert L-zahm in E_k für alle $k \geq 2$.

(b) Der Komplex zerfällt gradiert L-zahm in E_k für alle $k \geq 1$ genau dann, falls $\ker T_1$ $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ *-freundlich ist.*

(c) Der Komplex zerfällt gradiert L-zahm in E_k für alle $k \geq 0$ genau dann, falls F ein gradierter $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ -freundlicher L-zahmer Fréchetraum ist und ein definierendes Spektrum aus Quotienten von Potenzreihenräumen endlichen Typs besitzt.

Beweis: Betrachten wir für $k \geq 2$ die kurze gradiert L-zahm exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker T_k \longrightarrow E_k \longrightarrow \operatorname{im} T_k \longrightarrow 0\,,$$

so ist $\operatorname{im} T_k$ ein gradierter L-zahmer Unterraum von $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ und $\ker T_k = \operatorname{im} T_{k-1}$ ist gradiert L-zahm isomorph zu $E_{k-1}/\ker T_{k-1}$. Nun ist $\ker T_{k-1} = \operatorname{im} T_{k-2}$ und $\operatorname{im} T_{k-2}$ gradiert L-zahm isomorph zu $E_{k-2}/\ker T_{k-2}$. Da gradierte L-zahme Quotienten strikt gradierter L-zahmer Frécheträume wieder strikt sind, folgt, daß $\ker T_k$ für $k \geq 1$ ein strikt gradierter L-zahmer Quotient von $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ für einen Potenzreihenraum endlichen Typs ist. Da $\ker T_k$ gradiert L-zahm isomorph zu $E_{k-1}/\ker T_{k-1}$ ist, folgt aus der Bemerkung 3.2.15, daß $\ker T_k$ für alle $k \geq 2$ $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ -freundlich ist. Die Behauptung (a) folgt dann aus dem Satz 3.2.13 (a). Für den Fall $k = 1$ müssen wir zusätzlich voraussetzen, daß $\ker T_1$ $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ -freundlich ist. Zerfällt die kurze gradiert L-zahm exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker T_1 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \operatorname{im} T_1 \longrightarrow 0\,,$$

so ist $\ker T_1$ ein gradierter L-zahmer komplementierter Unterraum von $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$, also insbesondere ein gradierter L-zahmer Quotient von $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ modulo eines strikten Unterraumes. Dann folgt aus der Bemerkung 3.2.15, daß $\ker T_1$ $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ -freundlich sind. Damit wäre (b) nachgewiesen. Im Fall k=0 impliziert die Striktheit von F die Striktheit von $\ker T_0$, was wieder mit der Bemerkung 3.2.15 die $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ -Freundlichkeit von $\ker T_1$ impliziert, also zerfällt der Komplex gradiert L-zahm nach (b) in E_1. Da F gradiert L-zahm isomorph zu $\ker T_0$ ist, folgt das gradierte L-zahme Zerfallen in $k = 0$ aus der Voraussetzung und dem Satz 3.2.13 (a). Zerfällt der Komplex in E_0, so folgt analog zu dem Teil (b), daß $\ker T_0$ und damit auch F ein $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ -freundlicher gradierter L-zahmer Quotient von $\mathrm{g_L}\text{-}\Lambda_0(\alpha)^{\mathbb{N}}$ ist. Damit wäre auch der Teil (c) nachgewiesen, und es folgt die Behauptung.

Literatur

[BMT] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Resultate Math. **17** (1990), 206-237.

[DV] P. Domański, D. Vogt, *A splitting theorem for the space of smooth functions*, J. Funct. Anal. **153** (1998), 203-248.

[FW] K. Floret, J. Wloka, *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume, Springer*, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

[MV] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, Braunschweig, 1992.

[N1] K. Nyberg, *Tameness of pairs of nuklear power series spaces and related topics*, Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984), 645-660.

[N2] K. Nyberg, *A tame splitting theorem for Köthe spaces*, Arch. Math. **52** (1989), 471-481.

[P] V. P. Palamodov, *Homological methods in the theory of locally convex spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **26 (1)** (1971), 3-66 (Russisch); Englische Übersetzung in Russian Math. Surveys **26 (1)** (1971), 1-64.

[PV1] M. Poppenberg, D. Vogt, *Tame splitting theory for Fréchet-Hilbert spaces*, Functional analysis: Lect. notes in pure and aplied math. **150** (Eds. Biestedt, D.D., Pietsch, A., Ruess, W.M., Vogt, D.), Marcel Dekker: New York Basel Honh Kong 1994.

[PV2] M. Poppenberg, D. Vogt, *A tame splitting theorem for exact sequences of Fréchet spaces*, Math. Z. **219** (1995), 141-161.

[P1] M. Poppenberg, *Properties* $(\mathrm{DN}_{(\phi,\psi)})$ *and* $(\Omega_{(\phi,\psi)})$ *for Fréchetspaces*, Arch. Math. **66** (1996), no. 5, 388-396.

[Var] O. Varol, *Kriterien für* $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F)$ *für (DF)- und Frécheträume*, Dissertation, Wuppertal, 2002.

[V1] D. Vogt, *Some results on continuous linear maps between Fréchet spaces*, Functional Analysis: Surveys and Recent Results III (K. D. Bierstedt and B. Fuchssteiner, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 349-381.

[V2] D. Vogt, *Charakterisierung der Unterräume von s*, Math. Z. **155** (1977), 109-117.

[V3] D. Vogt, *On the functors* $\mathrm{Ext}^1(E,F)$ *for Fréchet spaces*, Studia Math. **85** (1987), 163-197.

[V4] D. Vogt, *Tame splitting pairs of type 0 and 1*, Dierolf, Susanne (ed.) et al., Functional analysis, proceedings of the first international workshop held at Trier University, Germany, September 26-October 1, de Gruyter, Berlin, 1994.

[VW] D. Vogt, M. J. Wagner, *Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau*, Studia Math. **70** (1981), 225-240.

[Wei] Ch. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[Wen] J. Wengenroth, *Derived functors in functional analysis*, Habilitationsschrift, Trier, 2001.