Zur Hesselink-Stratifizierung für Darstellungsvarietäten von darstellungsendlichen Köchern

Dissertation
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Jens Bender

6. Februar 2006

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20060059
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20060059]

Einleitung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $Q = (Q_0, Q_1)$ ein endlicher zusammenhängender Köcher mit Punktmenge Q_0 und Pfeilmenge Q_1. Sei $\underline{d}$ ein Dimensionsvektor, d.h. $\underline{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$. Dann erhalten wir die Darstellungsvarietät $\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$, in der jede Darstellung von Q zum Dimensionsvektor $\underline{d}$ einem Punkt entspricht. Auf dieser Varietät operiert nun die Gruppe $G(\underline{d}) = \prod_{q \in Q_0} \mathrm{Gl}_{\underline{d}_p}$ durch Basiswechsel, weshalb die Orbiten gerade die Isomorphieklassen von Darstellungen sind.
Nach einem grundlegenden Satz von Gabriel [4] gibt es in $\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$ für jeden Dimensionsvektor $\underline{d}$ nur endlich viele Orbiten genau dann, wenn Q vom Typ A_n, D_n E_6, E_7 oder E_8 ist. Man erhält dann eine endliche disjunkte Zerlegung $\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q = \bigcup_{i \in I} S_i$ in $G(\underline{d})$-invariante Teilmengen S_i, nämlich die Orbiten. So eine Zerlegung nennen wir hier eine Stratifizierung mit den Strata S_i.
Für beliebige Köcher möchte man auch solche Stratifizierungen kennen. Dabei sollten die Strata wie im endlichen Fall gute geometrische (lokale Abgeschlossenheit, Glattheit, gute Beschreibung des Abschlusses $\overline{S_i}$ usw.) und darstellungstheoretische (genaue Kenntnis der Orbiten in einem Stratum, Parametrisierung der Isomorphieklassen usw.) Eigenschaften haben. Vermutlich gibt es keine Stratifizierung, die alle diese Forderungen erfüllt. Es gibt jedoch einige interessante Vorschläge, von denen wir jetzt drei kurz vorstellen. Die erste kommt aus der Darstellungstheorie und basiert auf einem Satz von Kac, die beiden anderen kommen aus der algebraischen Geometrie.
Eine einfach zu konstruierende Stratifizierung ist die Stratifizierung nach Zerlegungstypen. Sei dazu $D = (\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_t)$ eine Zerlegung des Dimensionsvektors $\underline{d} = \sum_{i=1}^{t} \underline{d}_i$. Eine Darstellung V gehört nun zum Stratum S_D genau dann, wenn V isomorph zu $\bigoplus_{i=1}^{t} V_i$ ist, wobei die V_i Unzerlegbare zu den Dimensionsvektoren $\underline{d}_i$ sind. Offenbar ist $\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q = \bigcup_D S_D$ eine endliche Stratifizierung. Nach Kac [8] ist die Indexmenge gegeben durch $\{(n_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+} \,|\, \sum_\alpha n_\alpha \alpha = \underline{d}\} \subset \mathbb{N}^{\Phi^+}$, wobei Φ^+ die Menge der positiven Wurzeln des Wurzelsystems zum Köcher Q ist. Im endlichen Fall sind die Unzerlegbaren eindeutig durch ihre Dimensionsvektoren gegeben, weshalb dann die Strata gerade die Orbiten sind. Geometrisch ist diese Stratifizierung nicht schön. Im Allgemeinen sind die Strata nicht lokal abgeschlossen.
Eine andere Stratifizierung ist die ursprünglich zur Untersuchung von Vektorbündeln eingeführte Harder-Narasimhan-Stratifizierung (siehe [14]). Die Strata sind lokal abgeschlossen und irreduzibel. Sie sind wieder indiziert durch gewisse Zerlegungen d^* von $\underline{d}$. Ferner ist $\overline{S_{d^*}} \subset \bigcup_{e^* \geq d^*} S_{e^*}$ für eine partielle Ordnung $\geq$ auf der Menge der Zerlegungen.
Eine dritte Stratifizierung ist die auf der Theorie optimaler Einparametergruppen beruhende Hesselink-Stratifizerung [5]. Die Strata $H(\mu)$ sind irreduzibel, lokal abgeschlossen und glatt, und es gilt $\overline{H(\mu)} \subset \bigcup_{\mu' \leq \mu} H(\mu')$. Dabei sind die Strata indiziert durch eine endliche Teilmenge B von $\mathbb{Q}^d$ mit $d = \sum_{p \in Q_0} \underline{d}_p$, deren Elemente Cogewichte heißen. Allerdings kann für ein Cogewicht μ das Stratum $H(\mu)$ leer sein. LeBruyn stellt in [11] einen rekursiven Algorithmus vor, der im Fall von Köcherdarstellungen die nichtleeren Strata beschreibt. Dabei benutzt er Ergebnisse von Kirwan [10] und Schofield [15].
Nun sind aber sowohl die Harder-Narasimhan-Stratifizierung als auch die Hesselink-Stratifizierung nicht kanonisch gegeben, sondern sie hängen in star-

kem Maße ab von der Wahl einer positiven rationalen Linearform auf der Grothendieck-Gruppe der Kategorie der Darstellungen, also einem Vektor w aus $(\mathbb{Q}^+)^{Q_0}$, den wir Gewichtung nennen. Als Test für die Feinheit der Stratifizierung stellt sich die naheliegende Frage, ob es im endlichen Fall stets eine Gewichtung gibt, so daß die Strata gerade die Orbiten sind. Solch eine Gewichtung nennen wir trennend.
Im Falle der Harder-Narasimhan-Stratifizierung ist die Existenz einer trennenden Gewichtung dazu äquivalent, daß ein gewisses endliches System linearer Ungleichungen in den Koeffizienten von w eine Lösung besitzt. Diese Problem ist von Hille [6] untersucht worden. Für Köcher vom Typ A_n ist leicht zu sehen, daß immer eine trennende Gewichtung existiert.
Im Falle der Hesselink-Stratifizierung stößt man hingegen nach eingehender Untersuchung des Problems auf ein ziemlich unübersichtliches System homogener Ungleichungen vom Grad 2.
Für Köcher vom Typ A_n erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz *Sei Q ein Köcher vom Typ A_n. Dann existiert eine trennende Gewichtung genau dann, wenn Q keinen Unterköcher der Form*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & j \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & & {} \arrow[dl, dotted, no head] & & j+1 & \\
 1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] & & & & \text{mit } j \geq 4 \\
 & 2 & & & & &
\end{tikzcd}$$

enthält. In diesem Fall ist der Abschluß der Menge der trennenden Gewichtungen in $\mathbb{R}^{Q_0}$ zusammenhängend.

Insbesondere finden wir auch schon bei einfachen Köchern Orientierungen, so daß es keine Gewichtung gibt, für die die Hesselink-Strata die Orbiten sind. Wir sehen hier auch, daß die Wahl der Gewichtung wesentlich ist. Die Standardgewichtung $w = (1, \ldots, 1)$ ist trennend nur für A_3 und A_n in linearer Orientierung. Dies sind auch genau die Köcher vom Typ A, für die jede Gewichtung trennend ist. Für alle anderen Orientierungen erhalten wir echte Einschränkungen.
Für Köcher vom Typ D geben wir für alle Orientierungen die Ungleichungen an, die erfüllt sein müssen, damit eine trennende Gewichtung existiert, müssen aber die Frage nach der Existenz einer Lösung i.A. offenlassen. Besser ist die Situation für symmetrische Köcher. Dabei heißt ein Köcher Q vom Typ D_{n+2} symmetrisch, wenn ein nichttrivialer Köcherautomorphismus $Q \to Q$ existiert. Dann erhalten wir:

Satz *Sei Q ein Köcher vom Typ D_{n+2} in symmetrischer Orientierung. Dann existiert eine trennende Gewichtung genau dann, wenn Q keinen Unterköcher* *der Form*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & & j \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & & {} \arrow[dl, dotted, no head] & & j+1 \\
1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] & & & \\
 & 2 & & & &
\end{tikzcd}$$

($j \geq 4$) oder

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & {} \arrow[dl, dotted, no head] & & k+1 \\
 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
\alpha & & \beta & &
\end{tikzcd}$$

($k \geq 2$)

enthält. In diesem Fall ist der Abschluß in $\mathbb{R}^{Q_0}$ der Menge der trennenden Gewichtungen mit $w_\alpha = w_\beta$ zusammenhängend.

Die Behandlung der Fälle E_6, E_7, E_8 ist ein endliches Problem. Sie werden daher mit einem Computerprogramm bearbeitet. In einem ersten Schritt werden dazu die Ungleichungen für trennende Gewichtungen bestimmt, in einem zweiten Schritt wird überprüft, ob es eine Lösung dieser Ungleichungen gibt. Der zweite Schritt ist aber so rechenaufwendig, daß wir nur für E_6 Ergebnisse erhalten. Dort existiert eine trennende Gewichtung genau dann, wenn wir keinen Unterköcher der Gestalt wie im vorigen Satz haben.

Zum Abschluß der Einleitung umreißen wir noch den Aufbau der Arbeit. Im ersten Abschnitt wird für den Fall von $\mathrm{rep}_{\underline{d}}\, Q$ mit zykellosem Q die Hesselink-Stratifizierung eingeführt, wobei auch die erwähnten Ergebnisse von Kirwan und LeBruyn einfließen. Neu ist hier nur, daß wir die Abhängigkeit von der Gewichtung w von Anfang an berücksichtigen. Ferner haben wir wegen der teilweise unbefriedigenden Literatursituation die Beweise aufgenommen. Im zweiten Abscnitt reduzieren wir die Existenz einer trennenden Gewichtung für die Typen A_n, D_n, E_6, E_7 und E_8 auf das kombinatorische Problem, eine Lösung für ein gewisses System quadratischer Ungleichungen zu finden. Diese Frage wird dann in den nächsten drei Abschnitten nacheinander für die Fälle A_n, D_n und E_m mit $6 \leq m \leq 8$ untersucht.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. K. Bongartz für die intensive Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit.

1 Die Hesselink-Stratifizierung

In diesem Abschnitt geben wir die Konstruktion der Hesselink-Stratifizierung wieder, vergleiche [5] und [16]. Die Notationen und Beweise sind gegebenenfalls an unsere spezielle Situation einer Köcheralgebra angepaßt.

1.1 Köcher

Sei $\overline{k} = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper beliebiger Charakteristik. Sei $Q = (Q_0, Q_1)$ ein endlicher zusammenhängender Köcher (d.h. ein gerichteter Graph) mit Punktmenge Q_0 und Pfeilmenge Q_1 mit Pfeilen $\alpha : n(\alpha) \to s(\alpha)$, $\underline{d} = (\underline{d}_p)_{p \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ ein *Dimensionsvektor.* Setze

$$Q_{\underline{d}} := \left\{ i = (p, \nu) | p \in Q_0, \nu \in \{1, \ldots, \underline{d}_p\} \right\}.$$

Ein Element in $\mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}}$ ist also ein Tupel $(q_{p,\nu})_{(p,\nu) \in Q_{\underline{d}}}$ mit $q_{p,\nu} \in \mathbb{Q}$ oder kurz $(q_i)_{i \in Q_{\underline{d}}}$ mit $q_i \in \mathbb{Q}$.

Eine *Darstellung* V zum Dimensionsvektor $\underline{d}$ ist eine Familie von linearen Abbildungen

$$V = \left(V^\beta : k^{\underline{d}_p} \to k^{\underline{d}_{p'}}\right)_{\beta : p \to p' \in Q_1}.$$

Im weiteren werden die linearen Abbildungen mit ihren darstellenden Matrizen bezüglich der Standardbasen der $k^{\underline{d}_p}$ identifiziert.
$\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$ ist die Menge der Darstellungen zum Dimensionsvektor $\underline{d}$. Betrachet man $V \in \operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$ über obige Identifizierung als Tupel von Matrizen, so ist

$$\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q = \prod_{\beta : p \to p' \in Q_1} k^{\underline{d}_{p'} \times \underline{d}_p},$$

also ein Varietät. Ist $A = kQ$ die Pfadalgebra zu Q, so ist die Kategorie der endlichdimensionalen Moduln über dieser Algebra äquivalent zu der Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen von Q. Ein Köcher ist *darstellungsendlich*, wenn es nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln gibt. Das ist nach dem Satz von Gabriel [4] genau dann der Fall, wenn Q vom Typ A_n, D_n oder E_m $(m = 6, 7, 8)$ ist.
Auf $\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$ operiert $G = \operatorname{Gl}_{\underline{d}} = \prod_{p \in Q_0} \operatorname{Gl}_{\underline{d}_p} \subset \prod k^{\underline{d}_p \times \underline{d}_p}$ durch

$$g.V^\alpha := g_{s(\alpha)} V^\alpha g_{n(\alpha)}^{-1}.$$

Mit dieser Notation ist $G.V$ der G-Orbit der Darstellung V.

$$\operatorname{null}_{\underline{d}} Q = \{V \in \operatorname{rep}_{\underline{d}} Q | 0 \in \overline{G.V}\}$$

heißt der *Nullkegel*. Dabei ist $\overline{G.V}$ der Abschluß von $G.V$ bezüglich der Zariski-Topologie. Falls Q keine orientierten Zykel enthält, ist $\operatorname{null}_{\underline{d}} Q = \operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$. In diesem Fall entspricht $0 \in \operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$ gerade dem halbeinfachen Modul zum Dimensionsvektor $\underline{d}$.
Für eine natürliche Zahl t sei S_t die Permutationsgruppe einer Menge mit t Elementen. Identifizieren wir eine Permutation mit der entsprechenden Permutationsmatrix, so ist $\mathcal{W} = \prod_{p \in Q_0} S_{\underline{d}_p} \subset G$ die Weylgruppe zum Dimensionsvektor $\underline{d}$.
Weitere Informationen zu Köchern und ihren Darstellungen finden sich in [1].

1.2 Cogewichte

Eine *Einparameteruntergruppe* (1-PUG) ist ein Homomorphismus $\lambda : k^* \to G$. Λ sei die Menge aller Einparameteruntergruppen. Setze

$$M = {}^{(\Lambda \times \mathbb{N})}/_{\sim}, \text{ mit } (\mu, m) \sim (\nu, n) \iff n\mu = m\nu.$$

Die Elemente von M heißen *Cogewichte*. Ist T ein maximaler Torus von G, setze

$$\Lambda_T = \{\lambda \in \Lambda | \operatorname{bild} \lambda \subset T\}.$$

Dann gilt $\mathbb{Z}^{Q_{\underline{d}}} \xrightarrow{\sim} \Lambda_T$ unter der Abbildung $(\lambda_i)_{i \in Q_{\underline{d}}} \mapsto \left(t \mapsto \left(t^{\lambda_i}\right)_{i \in Q_{\underline{d}}}\right)$. Weiter sei

$$M_T := {}^{(\Lambda_T \times \mathbb{N})}/_{\sim} \text{ mit } \sim \text{ wie oben.}$$

Dann ist

$$M_T \simeq \Lambda_T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}}.$$

Eine Einparameteruntergruppe λ heißt *primitiv*, falls keine 1-PUG λ' existiert mit $\lambda = n\lambda'$, $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Für eine 1-PUG $\lambda \in \Lambda_T$ ist das gleichbedeutend mit $\mathrm{ggT}(\lambda_i)_{i \in Q_{\underline{d}}} = 1$. Zu jedem Cogewicht μ gibt es genau eine primitive Einparameteruntergruppe λ mit $\lambda = n\mu$, $n \in \mathbb{N}$. Dieses λ heißt die *zu μ zugehörige 1-PUG*.
G operiert auf Λ durch $(g.\lambda)(t) := g.\lambda(t) = g\lambda(t)g^{-1}$. Dies induziert eine Operation auf M.

Lemma 1 *Sind $\mu, \mu' \in M_T$ konjugiert unter G, so sind sie schon unter $\mathcal{W}$ konjugiert.*

Beweis:
Sei $N_G(T) = \{g \in G | g.T = T\}$ der Normalisator von T. Dann ist $\mathcal{W} \simeq N_G(T)/T$. Da T auf M_T trivial operiert, reicht es ein $n \in N_G(T)$ mit $\mu' = n.\mu$ zu finden.
Sei dazu $g \in G$ mit $\mu' = g.\mu$. Es ist $T.\mu' = \mu'$, da T trivial auf M_T operiert und weiter $(g.T).\mu' = gTg^{-1}\mu' gT^{-1}g^{-1} = gT\mu T^{-1}g^{-1} = g.\mu = \mu'$. Also sind $T, g.T \subset \mathrm{stab}\,(\mu') := \{g \in G | g.\mu' = \mu'\}$. Da T und $g.T$ maximale Tori in G sind, sind sie auch maximale Tori in $\mathrm{stab}\,(\mu')$. In einer zusammenhängenden affinen Gruppe sind alle maximalen Tori zueinander konjugiert (siehe [3, Cor 11.3]), also existiert ein $h \in \mathrm{stab}\,(\mu')$ mit $T = h.(g.T) = (hg).T$. Somit ist $hg \in N_G(T)$ und (da $h \in \mathrm{stab}\,(\mu')$) $\mu' = h.\mu' = (hg).\mu$. Also sind μ, μ' konjugiert unter $n = hg \in N_G(T)$. □

1.3 Norm

Wähle nun auf M eine „Norm“, das heißt eine Abbildung $q : M \to \mathbb{Q}$ mit

- $q(\mu) > 0$ für alle $0 \neq \mu \in M$
- $q(g.\mu) = q(\mu)$ für alle $g \in G$
- Für alle maximalen Tori T existiert ein Skalarprodukt $(\ ,\ )_T$ mit $q(\mu) = (\mu, \mu)_T$ für alle $\mu \in M_T$.

Nach der zweiten Eigenschaft sind die Skalarprodukte $(\ ,\ )_T$ insbesondere $\mathcal{W}$-invariant.
Ist umgekehrt für einen Torus T ein $\mathcal{W}$-invariantes Skalarprodukt $(\ ,\ )_T$ gegeben, so bestimmt dies eindeutig eine Norm im obigen Sinne: Setze für $\mu \in M$ $q(\mu) := (g.\mu, g.\mu)_T$ für ein g mit $g.\mu \in M_T$. Ist $g' \in G$ mit dieser Eigenschaft, so sind $g.\mu, g'.\mu \in M_T$ und unter G konjugiert, also nach Lemma 1 unter $\mathcal{W}$ konjugiert. Da $(\ ,\ )_T$ $\mathcal{W}$-invariant ist, ist q wohldefiniert. Die ersten beiden Eigenschaften einer Norm sind offensichtlich erfüllt. Zur dritten: Für einen maximalen Torus T' existiert ein $g \in G$ mit $T = g.T'$. Setze dann $(\ ,\ )_{T'} := (g.\ , g.\ )_T$. Wieder nach Lemma 1 ist das wohldefiniert.
Betrachte nun die Einschränkung der Norm auf $M_T \simeq \mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}}$ für einen festen Torus T. Da $\mathcal{W} = \prod S_{d_p}$ ist, reicht es zum Verständnis der Norm das entsprechende Skalarprodukt für jeden Punkt $p \in Q_0$ zu betrachten. Sei also $V = \mathbb{Q}^{\underline{d}_p} = \mathbb{Q}^n$ mit Weylgruppe $S_{\underline{d}_p} = S_n$ und S_n-invariantem Skalarprodukt $(\ ,\ )$.

Bemerkung 2 *Für $n \geq 2$ ist die Zerlegung von V in einfache $\mathbb{Q}S_n$-Moduln $V = S \oplus T$ mit $S = \langle(1,\ldots,1)\rangle_{\mathbb{Q}}$ und $T = \{(v_1,\ldots,v_n) \,|\, \sum v_i = 0\}$. Weiter ist $S \perp T$ bezüglich des gewählten Skalarproduktes.*

Beweis:
Diese Bemerkung ergibt sich aus Standardresultaten über Charaktere von Permutationsmoduln. Wir geben hier einen unabhängigen Beweis.
Offensichtlich sind S und T Moduln und die direkte Summe ist V. Sei nun $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}S_n}\mathbb{Q}^n$ und $e_1,\ldots,e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^n$. Schreibe $\phi(e_1) = \sum \lambda_i e_i$ und wähle ein $j \in \{2,\ldots,n\}$. Sei $g = \tau_{(2,j)} \in S_n$ die Transposition der Elemente 2 und j. Dann ist $\sum \lambda_i e_i = \phi(e_1) = \phi(ge_1) = g\phi(e_1) = \sum_{i\neq 2,j} \lambda_i e_i + \lambda_2 e_j + \lambda_j e_2$. Daraus folgt $\lambda_2 = \lambda_j$ für alle j. Setze nun $\mu = \lambda_2, \lambda = \lambda_1$. Dann ist $\phi(e_1) = \lambda e_1 + \mu \sum_{i\geq 2} e_i$. Sei nun $g = \tau_{(1,j)}$. Dann ist $\phi(e_j) = \phi(ge_1) = g\phi(e_1)$. Also liegt ϕ durch $\phi(e_1)$ eindeutig fest. Daraus folgt $\dim \mathrm{End}_{\mathbb{Q}S_n}\mathbb{Q}^n \leq 2$, also ist $\mathrm{End}\, S \simeq \mathbb{Q} \simeq \mathrm{End}\, T$. Insbesondere sind S und T einfach und wegen $\mathrm{Hom}(S,T) = 0$ ist $S \not\simeq T$.
Sei nun $V = S \perp S^\perp$, $S^\perp$ das orthogonale Vektorraumkomplement bezüglich des betrachteten Skalarproduktes. Dann ist $S^\perp$ wieder ein $\mathbb{Q}S_n$-Modul wegen der S_n-Invarianz des Skalarprodukts. Aus der Eindeutigkeit der isotypischen Zerlegung (und $S \not\simeq T$) folgt dann, daß $S^\perp = T$ ist, also ist $S \perp T$. □

Da S trivialer Modul ist, ist $S^* \simeq S$. Wegen $S \oplus T \simeq (S \oplus T)^* \simeq S^* \oplus T^* \simeq S \oplus T^*$ ist dann auch $T^* \simeq T$. Also ist das Skalarprodukt auf S und T jeweils durch einen (positiven) Skalar eindeutig gegeben, da $(\ ,\ )|_{T\times T} \in \mathrm{Hom}(T,T^*) \simeq \mathrm{End}\, T \simeq \mathbb{Q}$ ist, entsprechend für S.
Schreibe nun $\mathbb{Q}^{\underline{d}_p} = S_p \oplus T_p$ für die Zerlegung wie oben. Für $\underline{d}_p \leq 1$ sei dabei $T_p = 0$, für $\underline{d}_p = 0$ auch $S_p = 0$. Für $v = (v_p)_{p\in Q_0} \in \mathbb{Q}^{\underline{d}}$ sei v_p^S das Bild von v_p unter der Projektion $\mathbb{Q}^{\underline{d}_p} \to S_p$, v_p^T entprechend. Mit diesen Notationen erhalten wir:

Lemma 3 *Für $v, w \in \mathbb{Q}^{\underline{d}} \simeq M_T$ ist*

$$(v,w)_T = \sum_{p\in Q_0} \alpha_p v_p^S w_p^S + \beta_p \langle v_p^T, w_p^T \rangle_p$$

mit $\langle\ ,\ \rangle_p$ dem Standardskalarprodukt auf T_p beziehungsweise

$$q(v) = \sum_{p\in Q_0} \alpha_p (v_p^S)^2 + \beta_p ||v_p^T||_p^2$$

mit $||\ ||_p$ der Standardnorm auf T_p, $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{Q}^+$.

Die Norm ist also durch ein Paar positiver rationaler Zahlen für jeden Punkt des Köchers eindeutig festgelegt.

1.4 Optimale Cogewichte

Fixiere ab jetzt einen maximalen Torus T, oBdA sei dies der Standardtorus. Sei $V \in \mathrm{rep}_{\underline{d}}\, Q$ eine Darstellung, $\mu \in M_T$ ein Cogewicht und $\lambda = n\mu$ die zu μ zugehörige 1-PUG. μ und λ sind dann gegeben als

$$\mu = (\mu_i)_{i\in Q_{\underline{d}}} = (\mu_{p,\nu})_{(p,\nu)\in Q_{\underline{d}}} \in \mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}} \text{ und } \lambda = (\lambda_i)_{i\in Q_{\underline{d}}} \in \mathbb{Z}^{Q_{\underline{d}}}.$$

λ operiert auf $V = (V^\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ durch

$$\lambda(t).V^\alpha = \mathrm{diag}(t^{\lambda_{p',\nu'}} | 1 \leq \nu' \leq \underline{d}_{p'}) \cdot \left[V^\alpha_{\nu',\nu}\right]_{\nu',\nu} \cdot \mathrm{diag}(t^{-\lambda_{p,\nu}} | 1 \leq \nu \leq \underline{d}_p)$$
$$= \left[V^\alpha_{\nu',\nu} \cdot t^{\lambda_{p',\nu'} - \lambda_{p,\nu}}\right]_{\nu',\nu}$$

für einen Pfeil $\alpha : p \to p'$. Offensichtlich muß für $\lim_{t \to 0} \lambda(t).V^\alpha = 0$ gelten, daß $\lambda_{p',\nu'} - \lambda_{p,\nu} > 0$ ist wenn immer $V^\alpha_{\nu',\nu} \neq 0$ ist. Betrachte daher die Differenzen $\lambda_j - \lambda_i$, wobei wir kurz $i = (p, \nu)$ und $j = (p', \nu')$ schreiben. Setze

$$\begin{aligned} m(V, \mu) &:= \frac{1}{n} \min\{\lambda_{p',\nu'} - \lambda_{p,\nu} | \exists \alpha : p \to p' \in Q_1 \text{ mit } V^\alpha_{\nu',\nu} \neq 0\} \\ &= \frac{1}{n} \min\{\lambda_j - \lambda_i | (i,j) \in E(V)\} \\ &= \min\{\mu_j - \mu_i | (i,j) \in E(V)\}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$E(V) := \left\{((p,\nu),(p',\nu')) \in {Q_{\underline{d}}}^2 | \, \exists \alpha : p \to p' \in Q_1 \text{ mit } V^\alpha_{\nu',\nu} \neq 0\right\}.$$

Für $\mu \notin M_T$ existiert ein $g \in G$ mit $g.\mu \in M_T$. Definiere dann $m(V, \mu) := m(g.V, g.\mu)$. Da m $\mathcal{W}$-invariant ist, das heißt es gilt $m(w.V, w.\mu) = m(V, \mu)$ für alle $w \in \mathcal{W}, \mu \in M_T$, ist m nach Lemma 1 auf ganz M wohldefiniert. Insbesondere ist dann m sogar G-invariant.
Setze weiter

$$q_T^*(V) := \inf\{q(\mu) | m(V,\mu) \geq 1, \mu \in M_T\} = \inf\{q(\mu) | \mu \in K_T(V)\}$$

mit

$$K_T(V) := \{\mu \in M_T | \mu_j - \mu_i \geq 1 \forall (i,j) \in E(V)\} = \{\mu \in M_T | m(V,\mu) \geq 1\}.$$

Anmerkung: Dabei kann die Bedingung $m(V,\mu) \geq 1$ durch $m(V,\mu) \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ersetzt werden. Wesentlich ist, daß $\varepsilon > 0$ (vergleiche Lemma 5) gilt sowie daß die Bedingung abgeschlossen ist (vergleiche Lemma 4).
Schließlich sei

$$M_T(V) := \{\mu \in K_T(V) | q(\mu) = q_T^*(V)\}.$$

Lemma 4 *Ist $K_T \neq \emptyset$, so ist $\sharp M_T(V) = 1$.*

Beweis:
Sei K der reelle Abschluß von $K_T(V)$ in $M_\mathbb{R} := M_T \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{Q_{\underline{d}}}$. Da $\mu_j - \mu_i \geq 1$ abgschlossene Bedingungen sind, gilt weiter $\mu_j - \mu_i \geq 1$ für alle $\mu \in K$, $(i,j) \in E(V)$. Sei $(\ ,\ )$ die Fortsetzung von $(\ ,\ )_T$ auf $M_\mathbb{R} \times M_\mathbb{R}$. Schreibe wieder $q(\mu) = (\mu, \mu)$. K ist abgeschlossen, also ist $K' = \{\mu \in K | q(\mu) \leq q_T^*(V) + 1\}$ kompakt. q (eingeschränkt auf K') ist stetig, nimmt also auf K' sein absolutes Minimum an. Somit existiert ein $\mu \in K$, so daß $q(\mu)$ minimal ist.
K ist konvex, denn: seien dazu $\mu, \mu' \in K$, dann gilt für $\nu = t\mu + (1-t)\mu'$, $t \in [0,1]$, $(i,j) \in E(V)$:

$$\nu_j - \nu_i = t\mu_j + (1-t)\mu'_j - t\mu_i - (1-t)\mu'_i$$
$$= t(\mu_j - \mu_i) + (1-t)(\mu'_j - \mu'_i) \geq t + (1-t) = 1.$$

Somit gilt $\nu \in K$.
Seien nun $\mu, \mu' \in K$ verschieden mit $q(\mu) = q(\mu') = q_T^*(V)$. μ, μ' sind dann linear unabhängig, sonst wäre $\mu = \xi\mu'$. Wegen $q(\mu) = q(\mu')$ wäre dann $\xi = \pm 1$. Da $0 \notin K$ bleibt nur $\xi = 1$, also $\mu = \mu'$.
$\nu = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu'$ ist wegen der Konvexität wieder in K und es gilt

$$q(\nu) \;=\; (\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu', \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu') \;=\; \frac{1}{4}(q(\mu) + 2 \underbrace{(\mu, \mu')}_{<\sqrt{q(\mu)q(\mu')}} + q(\mu')) \;<\; q(\mu).$$

Dabei ist $(\mu, \mu')^2 < q(\mu)q(\mu')$ nach Cauchy-Schwarz und da μ, μ' linear unabhängig sind. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von $q(\mu)$. Also enthält K genau ein bezüglich q minimales Element.
Sei nun μ dieses eindeutige minimale Element in K. Es ist noch zu zeigen, daß μ rational ist.
Ist μ ein Eckpunkt von K, so ist μ als eindeutige Lösung rationaler linearer Gleichungen rational. Ist μ kein Eckpunkt, so liegt μ im Inneren einer Seite von K, also im Inneren eines affinen Raums $M = \{x \in \mathbb{R}^{Q_{\underline{d}}} | x_j - x_i = 1 \text{ für gewisse } (i,j)\}$. Da μ die Norm $q|_M$ minimiert, muß μ kritisch für $q|_M$ sein, das heißt, alle Richtungsableitungen $\frac{\partial}{\partial y} q|_M$ für $y \in T(M)$ müssen 0 sein.
Analog zu oben rechnen wir für $\nu = t\mu' + (1-t)\mu''$, $\mu', \mu'' \in M$ und $t \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} q(\nu) &= (t\mu' + (1-t)\mu'', t\mu' + (1-t)\mu'') \\ &= t^2 q(\mu') + 2t(1-t) \underbrace{(\mu', \mu'')}_{\leq \sqrt{q(\mu')q(\mu'')}} + (1-t)^2 q(\mu'') \\ &\leq \left(t\sqrt{q(\mu')} + (1-t)\sqrt{q(\mu'')} \right)^2. \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{q}$ eine konvexe Funktion, somit ist q als Verknüpfung der konvexen Funktion $\sqrt{q}$ mit der streng konvexen Funktion $()^2$ selbst streng konvex. Daraus folgt, daß q (bzw. $q|_M$) höchstens einen kritischen Punkt hat.
μ ist dann die eindeutige Lösung des Gleichungsysstems gegeben durch die linearen rationalen Gleichungen „$\mu \in M$“ und „μ kritisch“, selbst also rational. (Die Gleichungen „μ kritisch“ sind linear rational, da q als quadratische Funktion mit rationalen Koeffizienten gegeben ist.) □

In der Situation des Lemmas heißt das eindeutige $\mu_T(V) \in M_T(V)$ *bestes Cogewicht* zu V bezüglich T.
Setze

$$q^*(V) := \inf\{q_{T'}^*(V) | T' \subset G \text{ maximaler Torus}\}.$$

Da alle maximalen Tori zueinander konjugiert sind, läßt sich das auch als

$$q^*(V) = \inf\{q_T^*(g.V) | g \in G\}$$

schreiben. Da $q_T^*(g.V)$ nur von $E(g.V)$ abhängt, für das es nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ist das Infimum ein Minimum, falls das Infimum endlich ist. Insbesondere hängt $q^*(V)$ nur von der Konjugationsklasse von V ab. Weiter sei dann

$$M(V) := \{\mu \in K(V) | q(\mu) = q^*(V)\}$$

mit

$$K(V) := \{\mu \in M | m(V, \mu) \geq 1\}.$$

$M(V)$ heißt *optimale Klasse* zu V. [1] Die $\mu \in M(V)$ heißen *optimale Cogewichte* zu V. Ein maximaler Torus T mit $q(\mu_T(V)) = q^*(V)$ heißt *optimaler Torus*.
Ein Modul $V \in \operatorname{rep}_{\underline{d}} Q$ heißt nun *instabil*, falls $q^*(V) < \infty$ ist, das heißt, falls ein $\mu \in M$ existiert mit $m(V, \mu) \geq 1$ (beziehungsweise $M(V) \neq \emptyset$). V heißt *semistabil*, wenn er nicht instabil ist, das heißt, falls $m(V, \mu) \leq 0$ für alle $\mu \in M$ ist (beziehungsweise $M(V) = \emptyset$).
Nach dem Hilbert-Mumford-Kriterium liegt V im Nullkegel (d.h. es ist $0 \in \overline{G.V}$) genau dann, wenn es eine Einparametergruppe λ gibt mit $\lim_{t \to 0} \lambda(t).V = 0$ (vgl. [13], [16]). Dieses Kriterium liefert in unserer Situation folgendes:

Lemma 5 $M(V) \neq \emptyset \iff V \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q$.

Beweis:
$M(V) \neq \emptyset$
$\iff K(V) \neq \emptyset$
$\iff$ es gibt einen maximalen Torus $T' = g.T$ und ein $\lambda \in \Lambda_{T'}$ mit $\lambda \in K_{T'}(V)$
$\iff \lambda' = g.\lambda \in K_T(g.V)$
$\iff \lambda'_j - \lambda'_i > 0$ für alle $(i, j) \in E(g.V)$
$\iff \lim_{t \to 0} \lambda'(t).(g.V) = 0$
$\iff \lim_{t \to 0} \lambda(t).V = 0$
$\iff V \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q$, letzteres nach dem Hilbert-Mumford-Kriterium. $\square$

Bemerkung 6 *Es gilt $M(g.V) = g.M(V)$ für $g \in G$.*

Beweis:
Es ist

$$\begin{aligned} M(g.V) = \{\mu \in M | q(\mu) = q^*(g.V), m(g.V, \mu) \geq 1\} \\ = \{\mu | q(\mu) = q^*(V), m(V, g^{-1}.\mu) \geq 1\} \\ = \{g.\mu' | \underbrace{q(g.\mu')}_{=q(\mu')} = q^*(V), m(V, \mu') \geq 1\} = g.M(V). \end{aligned}$$

$\square$

[1] Bei Hesselink heißt diese Menge $\Lambda(V)$, das $\Lambda(V)$ bei LeBruyn (und Slodowy) ist die Menge der zugehörigen 1-PUG zu den $\mu \in M(V)$. Der „Informationsgehalt" bei LeBruyn ist also kleiner, da es mehrere Cogewichte mit gleicher zugehöriger 1-PUG geben kann. Betrachte $\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \\ 1 \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\ & 1 \end{tikzcd}$ und $\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \\ 1 \arrow[dr, "0"'] & \\ & 1 \end{tikzcd}$. Die zugehörigen optimalen Cogewichte sind $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Beide liefern aber die gleiche optimale Einparametergruppe $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ist Q zykellos (d.h. ein Baum), so tritt dieser Unterschied nicht auf.

1.5 Der Satz von Kempf-Rousseau

Sei $H < G$ eine Untergruppe, die einen maximalen Torus T von G enthält. T ist dann natürlich auch wieder ein maximaler Torus von H. In Verallgemeinerung zu den Definitionen für maximale Tori definieren wir dann

$$\Lambda_H := \{\lambda \in \Lambda |\, \mathrm{bild}\, \lambda \subset H\},\; M_H := {}^{\Lambda_H \times \mathbb{N}}/_{\sim}$$

und

$$q^*_H(V) := \inf\{q(\mu) | m(V,\mu) \geq 1, \mu \in M_H\},$$
$$M_H(V) := \{\mu \in M_H | q(\mu) = q^*_H(V)\}.$$

H heißt *optimal* für V, falls $q^*_H(V) = q^*(V)$ ist. In diesem Fall gilt $M_H(V) = M(V) \cap M_H$.
Analog zu unserer früheren Defintion von $m(V,\mu)$ definieren wir für ein Matrixtupel $(g_p)_{p \in Q_0} \in G$ und ein Cogewicht μ

$$m(g,\mu) := \min \left\{ \mu_{p,\nu'} - \mu_{p,\nu} |\, (g_p)_{\nu',\nu} \neq 0 \right\}.$$

Sei $\lambda \in \Lambda$ eine 1-PUG. Setze dann

$$P(\lambda) := \{g \in G | \lim_{t \to 0} \lambda(t).g \text{ existiert in } G\} = \{g \in G | m(g,\lambda) \geq 0\}.$$

Für ein $\mu \in M$ setze $P(\mu) := P(\lambda)$ mit $\lambda = n\mu$ der zu μ zugehörige 1-PUG. Weiter sei

$$U(\mu) = U(\lambda) = \{g \in G |\lim \lambda(t).g = e\}$$

und

$$Z(\mu) = Z(\lambda) = \{g \in G |\lim \lambda(t).g = g\}.$$

Sei für $p \in Q_0$ und $r \in \mathbb{Q}$

$$\mathrm{mult}_\mu(p,r) = \sharp\{\nu \in \{1,\ldots,\underline{d}_p\} | \mu_{p,\nu} = r\}.$$

Bemerkung 7 *$P(\mu)$ ist das semidirekte Produkt $P(\mu) = Z(\mu) \ltimes U(\mu)$ und parabolische Untergruppe von G. Es ist $Z(\mu) = \mathrm{stab}\,(\mu)$.*

Beweis:
Betrachte nur die Operation von $G = \mathrm{Gl}_{\underline{d}}$ an einem Punkt p, also oBdA $G = \mathrm{Gl}_{\underline{d}_p}$. Weiter sei T der Standardtorus, $\Lambda_T \ni \lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{d_p})$ dominant per $\mathcal{W}$-Operation. Schreibe $G \ni g = [g_{ji}]_{1 \leq j,i \leq d_p}$.

- Es ist

  $$g \in Z(\lambda) \iff \lim \lambda(t).g = g \iff \lim \left[t^{\lambda_j - \lambda_i} g_{ji}\right]_{ji} = g$$
  $$\iff \lambda_j - \lambda_i = 0 \text{ für } g_{ji} \neq 0 \iff g_{ji} = 0 \text{ für } \lambda_j \neq \lambda_i.$$

  g hat also Blockdiagonalgestalt, wobei die Blockgrößen durch die oben definierten $\mathrm{mult}_\lambda(p,?)$ gegeben sind. Aus dieser Beschreibung ergibt sich auch $Z(\mu) = \mathrm{stab}\,(\mu)$.

- Sei nun $g \in k^{\underline{d}_p \times \underline{d}_p}$ beliebig. Dann gilt

$$g+e \in U(\lambda) \iff \lim \lambda(t).g = 0 \iff \lim t^{\lambda_j-\lambda_i} g_{ji} = 0$$
$$\iff g_{ji} = 0 \text{ für } \lambda_j \leq \lambda_i.$$

  g hat somit echte obere Blockdreiecksgestalt.

- Analog erhält man, daß $g \in P(\lambda)$ (unechte) obere Blockdreiecksgestalt hat.

Es ist $P(\lambda) = U(\lambda) \cdot Z(\lambda)$ und $U(\lambda)$ ist normal in $P(\lambda)$, also ist $P(\lambda)$ das semidirekte Produkt. $P(\lambda)$ enthält die Borelgruppe der echten oberen Dreiecksmatrizen, ist also parabolisch. $\square$

Bemerkung 8 *Es gilt $P(h.\mu) = h.P(\mu)$ für $h \in G$.*

Beweis:
Es ist

$$\begin{aligned} P(h.\mu) &= \{g | \lim (h\lambda(t)h^{-1}) g (h\lambda^{-1}(t)h^{-1}) \text{ existiert}\} \\ &= \{g | \lim \lambda(t).(h^{-1}.g) \text{ existiert}\} = \{h.g' | \lim \lambda(t).g' \text{ ex}\} = h.P(\mu). \end{aligned}$$

$\square$

Satz 9 (Kempf-Rousseau, [7]) *Sei $V \in \mathrm{null}_{\underline{d}}\, Q$. Dann gilt:*

1. *$M(V) \neq \emptyset$.*
2. *Es ist $P(\mu) = P(\mu')$ für alle $\mu, \mu' \in M(V)$. $P(V) := P(\mu)$ heißt* optimale Parabolische *zu V.*
3. *Sei $\mu \in M(V)$. Dann ist $M(V) = P(V).\mu = P(\mu).\mu$.*
4. *$g.M(V) \subseteq M(V)$ gilt genau für $g \in P(V)$.*
5. *$M(V) \subset M_{P(V)}$.*

Beweis:
Der erste Teil der Behauptung ist Lemma 5. Der weitere Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

- Wir zeigen zunächst: für $\mu \in M(V)$ und $p \in P(\mu)$ gilt $p.\mu \in M(V)$. Sei $\lambda = n\mu$ die zu μ zugehörige 1-PUG. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m(V,\mu) \geq 1 &\Longrightarrow \lim \lambda(t) V \lambda^{-1}(t) = 0 \\ &\Longrightarrow \lim \underbrace{\lambda(t)p^{-1}\lambda^{-1}(t)}_{\text{Limes existiert}} \lambda(t)V\lambda^{-1}(t) \underbrace{\lambda(t)p\lambda^{-1}(t)}_{\text{Limes existiert}} = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda(t)p^{-1}Vp\lambda^{-1}(t) = 0 \Longrightarrow m(p^{-1}.V,\mu) \geq c, c \in \mathbb{Q}_+ \\ &\Longrightarrow m(V,p.\mu) \geq c \Longrightarrow \frac{1}{c}p.\mu \in K(V). \end{aligned}$$

  Weiter gilt: $\frac{1}{c}p.\mu \in M(V)$ genau dann, wenn $q(\mu) = q(\frac{1}{c}p.\mu) = \frac{1}{c^2}q(\mu)$. Das ist äquivalent zu $c = 1$, also ist $p.\mu \in M(V)$. Das ist eine Inklusion des dritten Teils der Behauptung sowie eine Richtung des vierten Teils.

- Zeige nun: für $\mu \in M(V)$ gilt $\mu \in M_{P(\mu)}$.
Da $\lambda(t).\mu = \mu$ für alle $t \in k^*$ ist, existiert der Limes $\lim \lambda(t).\mu(t')$ für alle t', also ist $\mu(t') \in P(\mu)$ für alle t'. Daraus folgt $\mu \in M_{P(\mu)}$ per Definition von $M_{P(\mu)}$. Wenn wir Teil 2 gezeigt haben, liefert dies Teil 5 der Behauptung.

- Wir zeigen: sei $\mu \in M(V)$ und $T \subset P(\mu)$ maximaler Torus. Dann gilt $M_T \cap M(V) = \{\mu_T(V)\}$ und es ist $\mu_T(V) = p.\mu$ für ein $p \in P(\mu)$.
Sei $S \subset P(\mu)$ ein maximaler Torus mit $\mu \in M_S$. So ein S existiert, da $\mu \in M_{P(\mu)}$ ist. Dann existiert ein $p \in P(\mu)$ mit $T = p.S$ (da alle maximalen Tori zueinander konjugiert sind). Insbesondere ist dann $p.\mu \in M_T$. Nach dem ersten Schritt gilt auch $p.\mu \in M(V)$. Nach Lemma 4 ist $\sharp(M(V) \cap M_T) \leq 1$, also muß $p.\mu = \mu_T(V)$ gelten. Dies ist die zweite Inklusion von Teil 3.

- Eine bekannte Tatsache über Gruppen (Bruhat-Zerlegung) [17, Korollar 10.2.9] ist: Sind P, P' parabolische Untergruppen, so gibt es einen maximalen Torus $T \subset P \cap P'$.

- Seien $\mu, \mu' \in M(V)$. Dann gilt $P(\mu) = P(\mu')$.
Sei dazu $T \subset P(\mu) \cap P(\mu')$ ein maximaler Torus. Sei weiter $\nu = \mu_T(V)$. Dann existieren nach obigem $p \in P(\mu)$, $p' \in P(\mu')$ mit $p.\mu = \nu = p'.\mu'$. Also ist $P(\nu) = P(p.\mu) = p.P(\mu) = P(\mu)$, analog für $P(\mu')$. Zusammen ist $P(\mu) = P(\mu')$. Weiter folgt $\mu = (p^{-1}p').\mu'$. Also ist der zweite Teil der Behauptung gezeigt und mit den vorigen Schritten zusammen auch die Teile 3 und 5.

- Schließlich zeigen wir noch die zweite Richtung von Teil 4: Sei $g.M(V) \subset M(V)$. Dann ist $g \in P(\mu)$.
Sei $g \in G$, $\mu \in M(V)$ mit $g.\mu = \nu \in M(V)$. Dann existiert ein $p \in P(\mu)$ mit $p.\mu = \nu = g.\mu$, also ist $(g^{-1}p).\mu = \mu$. Es reicht dann $\operatorname{stab}(\mu) \subset P(\mu)$ zu zeigen. Sei dazu $h \in \operatorname{stab}(\mu)$, also $h.\mu = \mu$. Dann ist $h.\lambda(t) = \lambda(t)$ mit $\lambda = n\mu$ zu μ zugehörige 1-PUG. Somit ist $\lim \lambda(t).h = h$, also gilt $h \in P(\mu)$ nach Definition von $P(\mu)$.

$\square$

1.6 Die Stratifizierung

Eine *Stratifizierung* von $\operatorname{null}_{\underline{d}} Q$ ist eine endliche Familie $\{S_i | i \in I\}$ von Teilmengen von $\operatorname{null}_{\underline{d}} Q$ und eine partielle Ordnung $\leq$ auf I mit

- Es ist $\operatorname{null}_{\underline{d}} Q = \bigcup_{i \in I} S_i$ und diese Vereinigung ist disjunkt.
- Es ist $\overline{S_i} \subset \bigcup_{j \leq i} S_j$.

Bemerkung 10 *In diesem Fall sind alle S_i lokal abgeschlossen.*

Beweis:
$S_i = \overline{S_i} \setminus \bigcup_{j<i} S_j = \overline{S_i} \setminus \bigcup_{j<i} \overline{S_j} \Longrightarrow S_i$ offen in $\overline{S_i}$. $\square$

Das *Blatt* zu V definieren wir als

$$[V] := \{W \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q | M(W) = M(V)\}$$

und das *Hesselink-Stratum* zu V als

$$H(V) := G.[V] = \{W | G.M(W) = G.M(V)\}.$$

Es ist also nach Teil 3 von Satz 9

$$H(V) = H(W) \iff G.M(V) \cap G.M(W) \neq \emptyset.$$

Setze nun für ein Cogewicht $0 \neq \mu \in M$

$$[\mu] := \{V \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q | \mu \in M(V)\} \text{ und } H(\mu) := G.[\mu].$$

Wenn T ein optimaler Torus für V ist, ist dann also $[\mu_T(V)] = [V]$ sowie $H(V) = G.[\mu_T(V)]$.
Da wir nun an den G-invarianten Strata interessiert sind, können wir einen festen Torus wählen. Sei dies der Standardtorus. Ein Cogewicht $\mu \in M_T$ heißt dann *dominant*, wenn $\mu_{p,\nu'} \geq \mu_{p,\nu}$ für alle $1 \leq \nu' \leq \nu \leq \underline{d}_p$ gilt.
Sei weiter

$$B := \{\mu_T(V) | V \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q, \mu_T(V) \text{ dominant}\}.$$

Da $\mu_T(V)$ nur von $E(V)$ abhängt, für das es nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ist B eine endliche Menge.
Vorsicht: $[\mu] = \emptyset$ für $\mu \in B$ ist möglich, falls T nicht optimal für V ist. B ist also nich die kleinstmögliche Indexmenge. Dieses Problem wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Lemma 11 *Es gilt*

$$\operatorname{null}_{\underline{d}} Q = \bigcup_{\mu \in B} G.[\mu].$$

Diese Vereinigung ist disjunkt.

Beweis:
Sei $V \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q$, also ist $M(V) \neq \emptyset$. Dann existiert ein $g \in G$ mit $M(g.V) \cap M_T \ni \mu' = \mu_T(g.V)$. Nach eventueller weiterer Konjugation mit $w \in \mathcal{W}$ ist μ' dominant. Also ist $g.V \in [\mu']$ bzw. gleichwertig $V \in G.[\mu']$, wobei $\mu' \in B$ ist.
Seien nun $\mu, \mu' \in B$ mit $G.[\mu] \cap G.[\mu'] \neq \emptyset$. Das bedeutet, es existieren $V \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q$ sowie $g, g' \in G$ mit $g.\mu, g'.\mu' \in M(V)$. Nach Satz 9 existiert dann ein $h \in P(V) \subset G$ mit $h.(g.\mu) = g'.\mu'$. Nach Lemma 1 sind dann μ und μ' schon unter der Weylgruppe konjugiert, da $\mu, \mu' \in M_T$. Da aber beide dominant sind, gilt $\mu = \mu'$. □

Wir definieren nun auf M eine partielle Ordnung

$$\mu \leq \mu' \iff q(\mu) < q(\mu') \text{ oder } \mu = \mu'.$$

Mit dieser Definition gilt:

Lemma 12

$$\overline{G.[\mu]} \subseteq \bigcup_{\mu' \leq \mu} G.[\mu'].$$

Das heißt, die $H(\mu) = G.[\mu], \mu \in B$, bilden eine Stratifizierung von $\operatorname{null}_{\underline{d}} Q$.

Beweis:
Sei $\mu \in B$. Setze dann

$$S(\mu) := \{V \in \mathrm{null}_{\underline{d}}\, Q | \mu_j - \mu_i \geq 1\, \forall (i,j) \in E(V)\}.$$

Die Menge $S(\mu)$ ist abgeschlossen in $\mathrm{null}_{\underline{d}}\, Q$, da sie durch die abgeschlossenen Bedingungen $V_{ji}^{\alpha} = 0$ für gewisse Matrixeinträge nur abhängig von μ definiert ist ($S(\mu)$ ist also sogar ein Vektorraum). Außerdem ist per Definition $[\mu] \subset S(\mu)$.
Sei nun $V \in S(\mu)$, $T' = g.T$ optimaler Torus für V und $\mu' = \mu_{T'}(V)$. Dann ist $q(\mu') \leq q(\mu)$. Gilt Gleichheit, ist schon μ optimal für V, also $V \in [\mu]$. Ist $q(\mu') < q(\mu)$, so ist $g.V \in [\mu']$ mit $\mu' < \mu$. Immer ist also $V \in \bigcup_{\mu' \leq \mu} G.[\mu']$.
Da $S(\mu)$ von der Parabolischen $P(\mu)$ stabilisiert wird (Definitionen einsetzen), ist mit $S(\mu)$ auch $G.S(\mu)$ abgeschlossen ([3, 11.9.1, etwas verallgemeinert] bzw. [17, ex. 7.2.11(9)]), insgesamt erhalten wir

$$\overline{G.[\mu]} \subseteq G.S(\mu) \subseteq \bigcup_{\mu' \leq \mu} G.[\mu'].$$

□

Bemerkung 13 *Sei $\mu \in M_T$ mit $[\mu] \neq \emptyset$. Dann gilt:*

1. *$[\mu]$ ist offen dicht in $S(\mu)$, insbesondere ist $\overline{[\mu]} = S(\mu)$.*
2. *$\overline{G.[\mu]} = G.S(\mu)$.*
3. *$[\mu] = \{V \in S(\mu) | q(\mu) = q^*(V)\}$ und $G.[\mu] = \{V \in G.S(\mu) | q(\mu) = q^*(V)\}$.*
4. *$S(\mu)$, $[\mu]$, $H(\mu) = G.[\mu]$ und $\overline{H(\mu)} = G.S(\mu)$ sind irreduzibel.*

Beweis:

1. $S(\mu)$ ist Vektorraum, also irreduzibel. Es reicht also, $[\mu]$ offen in $S(\mu)$ zu zeigen. Sei dazu $W \in [\mu]$, das heißt $\mu = \mu_T(W)$. Sei $V \in S(\mu)$. Dann folgt aus $E(V) \supset E(W)$ schon $V \in [\mu]$. $E(V) \supset E(W)$ ist aber eine offene Bedingung an V, $[\mu]$ enthält somit eine in $S(\mu)$ offene Umgebung von W. Also ist $[\mu]$ offen in $S(\mu)$.

2. Es ist $G.S(\mu) = G.\overline{[\mu]} \subset \overline{G.[\mu]}$. Für die andere Inklusion folgt aus dem Beweis des vorigen Lemmas.

3. Sei $V \in S(\mu)$. Dann ist $\mu \in K(V)$. Zusammen mit $q(\mu) = q^*(V)$ folgt $\mu \in M(V)$, also $V \in [\mu]$. Die andere Richtung ist trivial.

4. $S(\mu)$ ist als Vektorraum irreduzibel. Damit ist auch $[\mu]$ irreduzibel, da $[\mu]$ offen in $S(\mu)$ ist. $G.[\mu]$ und $G.S(\mu)$ sind irreduzibel als Bilder irreduzibler Mengen.

□

1.7 Beschreibung der Strata nach Kirwan [10, Kapitel 12]

In diesem Abschnitt wird ein Kriterium für $H(\mu) \neq \emptyset$ beziehungsweise $V \in H(\mu)$ entwickelt.
Sei wie oben $S(\mu) = \{V \in \text{null}_{\underline{d}}\, Q | \mu_j - \mu_i \geq 1 \; \forall (i,j) \in E(V)\}$ für $\mu \in M_T$. Sei $\lambda = n\mu$ die zu μ zugehörige 1-PUG, das heißt $n = \min\{\lambda_j - \lambda_i | (i,j) \in E(V)\}$. Damit ist

$$S(\mu) = \{V | \lim \lambda(t).V = 0\} = \{V | \lim \frac{1}{t^n} \lambda(t).V \text{ existiert}\}.$$

Setze dann

$$\begin{aligned} T(\mu) := \{V | \lim \frac{1}{t^n} \lambda(t).V = V\} &= \{V | \lambda_j - \lambda_i = n \text{ für } (i,j) \in E(V)\} \\ &= \{V | \mu_j - \mu_i = 1 \text{ für } (i,j) \in E(V)\} \subset S(\mu). \end{aligned}$$

Definiere weiter eine Abbildung $p_\mu : S(\mu) \to T(\mu)$ durch

$$p_\mu(V) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^n} \lambda(t).V.$$

Bemerkung 14 $\operatorname{stab}(\mu)$ *operiert auf* $T(\mu)$.

Beweis:
Sei $g \in \operatorname{stab}(\mu)$. Es ist zu zeigen, daß $\lim t^{-n} \lambda(t).(g.V)$ existiert. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \lim t^{-n} \lambda(t).(g.V) &= \lim t^{-n} g g^{-1} \lambda(t) g V g^{-1} \lambda^{-1}(t) g g^{-1} \\ &= g. \lim t^{-n} (g^{-1}.\lambda(t)).V = g. \lim t^{-n} \lambda(t).V = g.V. \end{aligned}$$

□

Lemma 15 *Sei* $V \in T(\mu)$. *Dann ist* $\operatorname{stab}(\mu)$ *optimal für* V.

Beweis:
Sei $V \in T(\mu)$ und $\lambda = n\mu$ die zu μ zugehörige 1-PUG. Da nach Definition von $T(\mu)$ $\lambda_j - \lambda_i = n$ für alle $(i,j) \in E(V)$ ist, ist $\lambda(t).V = t^n V$ für alle $t \in k^*$. Außerdem hängt $M(V)$ nur von $E(V)$ ab, das wiederum unabhängig von Streckungen von V mit $t \in k^*$ ist. Also haben wir:

$$M(V) = M(t^n V) = M(\lambda(t).V) = \lambda(t).M(V).$$

Nach Satz 9 Teil 4 ist also $\lambda(t) \in P(V)$ für alle $t \in k^*$, somit ist $\mu \in M_{P(V)}$. Sei nun $T \subset P(V)$ maximaler Torus mit $\mu \in M_T$. Dann ist $M_T \subset \operatorname{stab}(\mu)$.
Weiter ist $M(V) \subset M_{P(V)}$ (Satz 9 Teil 5). Sei $\nu \in M(V)$. Dann existiert ein $p \in P(V)$ mit $p.\nu \in M_T$, also $p.\nu \in \operatorname{stab}(\mu)$, und es ist $p.\nu \in M(V)$. Zusammen haben wir dann $p.\nu \in M_{\operatorname{stab}(\mu)}(V)$. □

Sei $G(\mu) < \operatorname{stab}(\mu)$ eine reduktive zusammenhängend Gruppe mit $M_{G(\mu)} = \{\nu \in M_{\operatorname{stab}(\mu)} | (\mu, \nu)_T = 0\}$. Dabei ist $T \subset \operatorname{stab}(\mu)$ ein maximaler Torus (abhängig von ν) mit $\nu \in M_T$. Da μ zentral in $\operatorname{stab}(\mu)$ ist, liegt μ in jedem maximalen Torus von $\operatorname{stab}(\mu)$. Also ist $(\mu, \nu)_T$ definiert. Eine Gruppe $G(\mu)$ mit obigen Eigenschaften existiert immer und wird bei uns im nächsten Abschnitt explizit konstruiert.
Setze weiter

$$T(\mu)^{ss} := \{V \in T(\mu) | V \text{ ist semistabil bzgl. } G(\mu)\}.$$

Lemma 16 *Es gilt*

$$T(\mu)^{ss} = [\mu] \cap T(\mu).$$

Beweis:

„$\supset$“: Sei $0 \neq V \in T(\mu)$ und $\mu \in M(V)$. Dann ist $\mu \in M(V) \cap M_{\mathrm{stab}(\mu)} = M_{\mathrm{stab}(\mu)}(V)$, da stab (μ) optimal für V ist. Angenommen, V wäre instabil bezüglich $G(\mu)$, also $M_{G(\mu)} \neq \emptyset$. Sei dann $\nu \in M_{G(\mu)}(V)$. Sei T ein maximaler Torus mit $\mu, \nu \in M_T$. Dann sind $\mu, \nu \in K_T(V)$. Da $K_T(V)$ konvex ist, liegt auch $\mu'_t := t\mu + (1-t)\nu$ in $K_T(V)$ für $t \in [0,1]$. Es gilt:

$$q(\mu'_t) = q(t\mu + (1-t)\nu) = t^2 q(\mu) + 2t(1-t)\underbrace{(\mu, \nu)}_{=0} + (1-t)^2 q(\nu).$$

Differenzieren nach t liefert ein lokales Minimum für $t = \frac{q(\nu)}{q(\mu)+q(\nu)} \in (0,1)$ mit $q(\mu'_t) < q(\mu)$, Widerspruch zur Optimalität von μ. Also ist $M_{G(\mu)}(V) = \emptyset$, somit ist V semistabil bezüglich $G(\mu)$.

„$\subset$“: Sei $V \in T(\mu)$ semistabil bezüglich $G(\mu)$. Zu zeigen ist $\mu \in M(V)$. Sei dazu $\nu \in M_{\mathrm{stab}(\mu)}(V)$. Da stab (μ) optimal für V ist (also $M_{\mathrm{stab}(\mu)}(V) \subset M(V)$), reicht es dann $\mu = \nu$ zu zeigen. Sei $T \subset$ stab (μ) maximaler Torus mit $\mu, \nu \in M_T$. Schreibe $\nu = \alpha + b\mu$ mit $(\alpha, \mu)_T = 0$. Es ist

$$\begin{aligned} 1 \leq m(V, \nu) &= \min\{\nu_j - \nu_i | (i,j) \in E(V)\} \\ &= \min\{\alpha_j - \alpha_i + b(\underbrace{\mu_j - \mu_i}_{=1 \text{ da } V \in T(\mu)})|(i,j) \in E(V)\} \\ &= \min\{\alpha_j - \alpha_i | (i,j) \in E(V)\} + b = m(V, \alpha) + b. \end{aligned}$$

Andererseits ist $m(V, \alpha) \leq 0$, da V semistabil bezüglich $\alpha \in M_{G(\mu)}$ ist. Also ist $b \geq 1$. Wegen $q(\nu) = q(\alpha) + 2b\underbrace{(\alpha, \mu)}_{=0} + b^2 q(\mu) \geq q(\mu)$ und andererseits $q(\nu) \leq q(\mu)$ wegen der Optimalität von ν ist $q(\nu) = q(\mu)$. Dies ist aber nur für $\alpha = 0$, $b = 1$ möglich, also ist $\nu = \mu$.

$\square$

Setze

$$S(\mu)^{ss} := p_\mu^{-1}(T(\mu)^{ss}).$$

Lemma 17

1. stab (μ) *operiert auf* $T(\mu)$ *und* $T(\mu)^{ss}$.
2. p_μ *ist* $P(\mu)$*-äquivariant. Dabei operiert* $P(\mu) = \mathrm{stab}(\mu) \ltimes U(\mu)$ *auf* $T(\mu)$ *wie* stab (μ).
3. $P(\mu)$ *operiert auf* $S(\mu)$ *und* $S(\mu)^{ss}$.

Beweis:
Nach der vorigen Bemerkung operiert stab (μ) auf $T(\mu)$. Durch Einsetzen der Definitionen sieht man, daß $P(\mu)$ auf $S(\mu)$ operiert (vgl. Beweis zu Lemma 12).

- Zeige nun, daß $\mathrm{stab}(\mu)$ auf $T(\mu)^{ss}$ operiert. Sei dazu $V \in T(\mu)^{ss}$ und $g \in \mathrm{stab}(\mu)$. Dann ist $\mu \in M(V)$. Da μ von g stabilisiert wird, ist auch $\mu = g.\mu \in g.M(V) = M(g.V)$, also $g.V \in [\mu]$. Da $T(\mu)^{ss} = [\mu] \cap T(\mu)$ ist und $g.V \in T(\mu)$ schon gezeigt ist, gilt $g.V \in T(\mu)^{ss}$.

- Sei $\lambda = n\mu$ die zu μ zugehörige 1-PUG. $U(\mu)$ operiert auf $T(\mu)$ trivial, denn für $u \in U(\mu)$ gilt: $u.V = u. \lim t^{-n}\lambda(t).V = \lim t^{-n}(u.\lambda(t)).(\lambda(t).V) = V$. Daraus folgt, daß $P(\mu)$ auf $T(\mu)$ nur durch $\mathrm{stab}(\mu)$ operiert.

  Sei nun $p \in P(\mu)$. Dann gilt:

  $$\begin{aligned} p_\mu(p.V) &= \lim t^{-n}\lambda(t).(p.V) \\ &= \lim t^{-n}\lambda(t)p\lambda(t)^{-1}\lambda(t)V\lambda(t)^{-1}\lambda(t)p^{-1}\lambda(t)^{-1} \\ &= (\lim \lambda(t).p).p_\mu(V). \end{aligned}$$

  Für $u \in U(\mu)$ ist also $p_\mu(u.V) = p_\mu(V)$ und für $z \in \mathrm{stab}(\mu)$ ist $p_\mu(z.V) = z.p_\mu(V)$. p_μ ist somit $P(\mu)$-äquivariant und operiert auf $T(\mu)$ wie $\mathrm{stab}(\mu)$.

- Aus der Äquivarianz und daraus, daß $\mathrm{stab}(\mu)$ auf $T(\mu)^{ss}$ operiert, folgt dann auch, daß $P(\mu)$ auf $S(\mu)^{ss}$ operiert.

□

Bemerkung 18 *Sei $V \in S(\mu)$. Dann gilt: aus $\mu = \mu_T(V)$ folgt schon $\mu = \mu_T(p_\mu(V))$.*

Beweis:
Per Definition von p_μ gilt $(i,j) \in E(p_\mu(V))$ genau dann, wenn $(i,j) \in E(V)$ und $\mu_j - \mu_i = 1$ gilt. Also ist $E(p_\mu(V)) = E(V) \setminus \{(i,j) | \mu_j - \mu_i > 1\}$.
Angenommen, μ wäre nicht optimal in $K_T(p_\mu(V))$, das heißt, es existiert ein $\mu' \in K_T(p_\mu(V))$ mit $q(\mu') < q(\mu)$.
Wäre $\mu'_j - \mu'_i \geq 1$ für alle $(i,j) \in E(V)$, wäre $\mu' \in K_T(V)$, also wäre μ nicht optimal für V. Sei also $(i,j) \in E(V) \setminus E(p_\mu(V))$ mit $\mu'_j - \mu'_i < 1$. Für dieses (i,j) gilt $\mu_j - \mu_i > 1$ und μ', μ liegen beide in $K_T(p_\mu(V))$. Auf der Verbindungsgeraden von μ und μ' existiert dann ein μ'' mit $\mu''_j - \mu''_i \geq 1$ und $q(\mu'') < q(\mu)$. Wegen der Konvexität von $K_T(p_\mu(V))$ liegt μ'' immer noch in $K_T(p_\mu(V))$. Wiederhole dies für alle solche (i,j), wir erhalten dann ein $\mu'' \in K_T(V)$ mit $q(\mu'') < q(\mu)$, Widerspruch zur Optimalität von μ. □

Lemma 19 *Sei $\mu \in M_T$, $V \in S(\mu)$. Dann sind äquivalent:*

1. *T ist optimal für V und es ist $M_T(V) = \{\mu\}$, das heißt $V \in [\mu]$.*
2. *$V \in G.[\mu]$.*
3. *$V \in S(\mu)^{ss} = p_\mu^{-1}([\mu] \cap T(\mu))$.*
4. *$p_\mu(V) \in T(\mu)^{ss}$, das heißt $p_\mu(V) \in [\mu]$.*
5. *$p_\mu(V) \in G.[\mu]$.*

Beweis:
Es gilt:

$3 \iff 4$ ist Definition von $S(\mu)^{ss}$ und p_μ.

$1 \Longrightarrow 2$ klar.

$2 \Longrightarrow 1$ Sei $V \in G.[\mu]$, also $g.V \in [\mu]$. Dann ist $q(\mu) = q^*(g.V) = q^*(V)$. Zusammen mit $V \in S(\mu)$ (das impiziert $\mu \in K(V)$) ist dann $\mu \in M(V)$, also $V \in [\mu]$.

$4 \iff 5$ wie $1 \iff 2$.

$5 \Longrightarrow 2$ OBdA sei μ dominant. Sei $p_\mu(V) \in G.[\mu]$, also insbesondere $[\mu] \neq \emptyset$. Dann ist $\mu \in B$. Angenommen, es wäre $V \notin G.[\mu]$. Wegen $S(\mu) \setminus G.[\mu] \subset \bigcup_{B \ni \mu' < \mu} G.[\mu']$ ist dann $V \in G.[\mu']$ für ein $\mu' \in B$ mit $q(\mu') < q(\mu)$. Da p_μ durch einen Limes definiert ist, ist $p_\mu(V) \in \overline{G.V} \subset \overline{G.[\mu']}$. Daraus folgt, daß $p_\mu(V) \in G.[\mu'']$ gilt für ein $\mu'' \in B$ mit $q(\mu'') \leq q(\mu') < q(\mu)$, insbesondere ist $p_\mu(V) \notin G.[\mu]$, Widerspruch.

$1 \Longrightarrow 5$ Sei $V \in [\mu]$, das heißt T ist optimal für V und es gilt $\mu_T(V) = \mu$. Wie oben ist dann auch $\mu \in B$. T ist maximaler Torus in $\mathrm{stab}\,(\mu)$ und $\mathrm{stab}\,(\mu)$ ist optimale Untergruppe für $p_\mu(V)$ (Lemma 15), also existiert ein $n \in \mathrm{stab}\,(\mu) \subset P(\mu)$, so daß T optimaler Torus für $n.p_\mu(V) = p_\mu(n.V)$ ist. Außerdem gilt $\mu_T(n.V) = n.\mu_T(V) = n.\mu = \mu$. Also ist nach voriger Bemerkung $\mu_T(p_\mu(n.V)) = \mu$. Zusammen mit T optimal für $n.V$ ergibt sich dann $p_\mu(n.V) \in [\mu]$ beziehungsweise $p_\mu(V) \in G.[\mu]$.

□

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

Folgerung 20 *Sei $\mu \in B$. Dann ist $V \in S(\mu)^{ss}$ genau dann, wenn $M_T(V) = \{\mu\}$ gilt. Insbesondere ist*

$$H(\mu) = G.S(\mu)^{ss} = G.p_\mu^{-1}(T(\mu)^{ss}) = G.p_\mu^{-1}([\mu] \cap T(\mu))$$

beziehungsweise

$$H(\mu) \neq \emptyset \iff T(\mu)^{ss} \neq \emptyset \iff [\mu] \cap T(\mu) \neq \emptyset.$$

Als Problem bleibt noch, die Gruppe $G(\mu)$ zu konstruieren. Dieses wird im folgenden Abschnitt gelöst.

1.8 Beschreibung durch Köcher nach LeBruyn [11]

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine kombinatorische Beschreibung mit Hilfe von Köchern der Mengen $T(\mu), T(\mu)^{ss}, B$ usw. zu finden und insbesondere die Gruppe $G(\mu)$ zu konstruieren.
Wir betrachten ab hier nur noch Normen q der Form

$$q(\mu) = \sum_{(p,\nu) \in Q_{\underline{d}}} w_p \mu_{p,\nu}^2,$$

das heißt, q ist gegeben durch eine Gewichtung $(w_p)_{p \in Q_0} \in \mathbb{Q}_+^{Q_0}$. Wir schreiben auch kurz $w_i = w_p$ für $i = (p, \nu) \in Q_{\underline{d}}$, dann ist $q(\mu) = \sum_{i \in Q_{\underline{d}}} w_i \mu_i^2$. (Vergleiche

Abschnitt 1.3, im allgemeinen Fall ist die Norm durch zwei Parameter pro Punkt gegeben.)
Wir folgen in diesem Abschnitt den Ergebnissen in [11], die dort für die Norm mit $w_p = 1$ für alle $p \in Q_0$ gegeben sind.
Die Menge B der dominanten $\mu_T(V)$ für $V \in \operatorname{null}_{\underline{d}} Q$ ist eine Teilmenge der Menge der dominanten Cogewichte. Um B zu bestimmen, muß V eine i.A. unendliche Menge durchlaufen. Wir suchen daher nun zunächst eine endliche Teilmenge der dominanten Cogewichte, die B enthält, sowie eine kombinatorische Beschreibung dieser Menge.
Sei

$$\Pi := \{((p,\nu),(p',\nu')) \in (Q_{\underline{d}})^2 | \, \exists \beta : p \to p' \in Q_1\}.$$

Eine Teilmenge $R \subset \Pi$ heißt *instabil*, falls es ein $\mu \in \mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}}$ mit $\mu_j - \mu_i \geq 1$ für alle $(i,j) \in R$ gibt. Für $E(V) \subset \Pi$ bedeutet das natürlich, daß $E(V)$ instabil in diesem Sinne genau dann ist, wenn V instabil im alten Sinne ist. Für eine instabile Menge R sei $\mu(R)$ das bezüglich q minimale $\mu \in \mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}}$ mit $\mu_j - \mu_i \geq 1$ für alle $(i,j) \in R$. Für eine instabile Darstellung V ist also $\mu(E(V)) = \mu_T(V)$, wobei wir wieder M_T mit $\mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}}$ für einen festen Torus T, oBdA dem Standardtorus, identifizieren.
Umgekehrt setze für $\mu \in \mathbb{Q}^{Q_{\underline{d}}}$:

$$R(\mu) := \{(i,j) \in \Pi | \mu_j - \mu_i \geq 1\} \text{ und } R_1(\mu) := \{(i,j) \in \Pi | \mu_j - \mu_i = 1\}.$$

Die *Saturierung* von R ist definiert als

$$\overline{R} := \{(i,j) \in \Pi | \mu(R)_j - \mu(R)_i \geq 1\}.$$

Eine Menge $R \subset \Pi$ heißt *saturiert*, falls $R = \overline{R}$ gilt.

Bemerkung 21 *Offensichtlich ist $\mu(\overline{R}) = \mu(R)$ und $\overline{R} = R(\mu(R))$.*

Ein *Segment* I eines Cogewichtes μ ist eine Teilmenge $I \subset Q_{\underline{d}}$, so daß eine rationale Zahl $x \in Q$ und $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $\{\mu_i | i \in I\} = \{x, x+1, \ldots, x+n\}$ und so daß I maximal mit dieser Eigenschaft ist. Wir erhalten so eine eindeutige disjunkte Zerlegung von $Q_{\underline{d}}$ in Segmente.
Ein Cogewicht μ heißt

- *balanciert*, wenn für alle Segmente I von μ gilt: $\sum_{i \in I} w_i \mu_i = 0$.
- *saturiert*, falls μ balanciert ist und für alle balancierten Cogewichte μ' mit $R(\mu) \subsetneq R(\mu')$ schon $q(\mu) \lneq q(\mu')$ gilt.

Mit diesen Notationen gilt

Proposition 22

1. *Ist $R \subset \Pi$ instabil, so ist $\mu(R)$ saturiert.*
2. *Ist $\mu \in \mathbb{Q}^{\underline{d}}$ saturiert, so ist auch $R(\mu)$ saturiert (d.h. $R(\mu) = \overline{R(\mu)}$).*

Beweis:

1. Wegen $\mu(R) = \mu(\overline{R})$ können wir annehmen, daß R saturiert ist.

   Zeige zunächst: $\mu = \mu(R)$ ist balanciert.

   Sei I ein Segment von μ, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Setze $\mu_\varepsilon := \mu + (\delta_{1,I}, \ldots, \delta_{d,I})\,\varepsilon$ mit $\delta_{i,I} = 1$ falls $i \in I$, 0 sonst. Dann ist

   $$R(\mu_\varepsilon) = \{(i,j)|(\mu_\varepsilon)_j - (\mu_\varepsilon)_i \geq 1\} = \\ \{(i,j)|\mu_j - \mu_i + (\delta_{j,I} - \delta_{i,I})\varepsilon \geq 1\} = R(\mu),$$

   denn: sind $i, j \in I$ oder $i, j \notin I$ fällt der Störterm weg. Ist aber $i \in I$ und $j \notin I$ (oder umgekehrt), so ist $\mu_j - \mu_i \pm \varepsilon \geq 1$ genau dann, wenn $\mu_j - \mu_i \geq 1$ ist, wenn nur ε klein genug ist (da $\mu_j - \mu_i \neq 1$). Es ist also $R(\mu) = R(\mu_\varepsilon)$ für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, ε_0 geeignet, das heißt, diese μ_ε sind als Kandidaten für die Optimierung zugelassen. Da $\mu = \mu_0$ optimal ist, muß also $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} q(\mu_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$ gelten.

   Weiter ist

   $$q(\mu_\varepsilon) = \sum_{i \in Q_{\underline{d}}} w_i(\mu_i + \delta_{i,I}\varepsilon)^2 = \\ \sum_{i \in Q_{\underline{d}}} w_i\mu_i^2 + 2\sum_{i \in Q_{\underline{d}}} w_i\mu_i\delta_{i,I}\varepsilon + \sum_{i \in Q_{\underline{d}}} w_i\delta_{i,I}^2\varepsilon^2 = \\ q(\mu) + 2\varepsilon\sum_{i \in I} w_i\mu_i + \varepsilon^2\sum_{i \in I} w_i.$$

   Damit ist dann $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} q(\mu_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 2\sum_{i \in I} w_i\mu_i$, folglich ist $\sum_{i \in I} w_i\mu_i = 0$. Also ist μ balanciert.

   Noch zu zeigen ist, daß $\mu(R)$ saturiert ist. Sei dazu μ' balanciert mit $R(\mu') \supsetneq R(\mu(R)) = \overline{R} = R$. Daraus folgt $q(\mu') > q(\mu(R))$, da R saturiert ist.

2. Sei nun μ saturiert. Zu zeigen ist $R(\mu) = \overline{R(\mu)}$. Angenommen, dies gelte nicht. Sei dann $\mu' = \mu(R(\mu))$. μ' ist balanciert nach 1. Es ist $R(\mu') = R(\mu(R(\mu))) = \overline{R(\mu)} \supsetneq R(\mu)$, also $q(\mu') > q(\mu)$. Andererseits ist $\mu' = \mu(R(\mu))$, also folgt $q(\mu') \leq q(\mu)$, Widerspruch.

□

Anmerkung: Für diese Proposition benötigen wir die spezielle Gestalt der Norm als $q(\mu) = \sum_{(p,\nu) \in Q_{\underline{d}}} w_p\mu_{p,\nu}^2$.
Aus der Proposition ergibt sich

Bemerkung 23 *Sei wie im vorigen Abschnitt B die Menge der dominanten optimalen Cogewichte. Dann ist $B \subset \{\mu \in \mathbb{Q}^{\underline{d}}|\mu$ dominant, saturiert$\}$. Dabei ist die rechte Seite endlich. Die andere Inklusion gilt nicht.*

Beweis:
Wir betrachten die einzelnen Behauptungen:

- Sei $\mu \in B$, also $\mu = \mu_T(V)$ dominant. Dann ist $\mu = \mu(E(V))$, also ist μ saturiert nach der Proposition.

- Saturierte Cogewichte sind insbesondere balanciert, es reicht also zu zeigen, daß es nur endlich viele balancierte Cogewichte gibt.

  Es gibt nur endlich viele Partitionen von $Q_{\underline{d}}$. Für ein Segment $I \subset Q_{\underline{d}}$ ist dann $\mu_i = x + n_i$ mit $n_i \in \{0, 1, \ldots, t\}$, $i \in I$ für eine rationale Zahl x. Für die n_i gibt es nur endlich viele Wahlmöglichkeiten. x ist dann durch die Bedingung der Balanciertheit eindeutig festgelegt. Also gibt es nur endlich viele balancierte Cogewichte.

- Sei $Q = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 3 \end{array}$. Dann ist $\mu = \begin{array}{ccc} & -1 & \\ & & \\ 0 & & 1 \end{array}$ ein saturiertes Cogewicht (es ist balanciert und es gibt keine μ' mit $R(\mu') \supsetneq R(\mu)$), aber μ ist nicht optimales Cogewicht für einen Modul V.

$\square$

Die Menge $\{\mu \in \mathbb{Q}^{\underline{d}} | \mu \text{ dominant, saturiert}\}$ ist also eine endliche Kandidatenmenge für die Indexmenge der Hesselink-Stratifizierung. Finden wir eine Möglichkeit, für ein μ aus dieser Menge zu entscheiden, ob $H(\mu)$ nicht leer ist, können wir alle Strata angeben. Zusammen mit einer Beschreibung von $G(\mu)$ ist das das Ziel des restlichen Abschnittes.
Wir haben

$$S(\mu) = \{V | E(V) \subset R(\mu)\} = \bigoplus_{(i,j) \in R(\mu)} \left(\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q\right)_{i,j}$$

und

$$T(\mu) = \{V | E(V) \subset R_1(\mu)\} = \bigoplus_{(i,j) \in R_1(\mu)} \left(\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q\right)_{i,j}.$$

Dabei ist

$$\left(\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q\right)_{(p,\nu),(p',\nu')} = \left\{V | V^{\beta}_{\gamma',\gamma} \neq 0 \text{ nur für } \beta : p \to p', (\gamma, \gamma') = (\nu, \nu')\right\}$$

für $((p,\nu),(p',\nu')) \in {Q_{\underline{d}}}^2$. p_μ ist dann die natürliche Projektion

$$p_\mu : \bigoplus_{(i,j) \in R(\mu)} \left(\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q\right)_{i,j} \to \bigoplus_{(i,j) \in R_1(\mu)} \left(\operatorname{rep}_{\underline{d}} Q\right)_{i,j}.$$

Um die Bedingung $T(\mu)^{ss} \neq \emptyset$ zu untersuchen, muß die $\operatorname{stab}(\mu)$-Operation auf $T(\mu)$ betrachtet werden. Betrachte dazu den *Segmentek öcher* $Q(\mu)$ gegeben durch

$$Q(\mu)_0 = \{(p, r) \in Q_0 \times \mathbb{Q} | \operatorname{mult}_\mu(p, r) \neq 0\}$$

$$\sharp\{\beta_r \in Q(\mu)_1 | \beta_r : (p, r) \to (p', r')\} = \begin{cases} \sharp\{\beta \in Q_1 | \beta : p \to p'\} & r' - r = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei ist wie oben

$$\operatorname{mult}_\mu(p, r) := \sharp\left\{\nu \in \{1, \ldots, \underline{d}_p\} | \mu_{p,\nu} = r\right\}.$$

Sei weiter der Dimensionsvektor $\underline{d}(\mu)$ gegeben durch

$$\underline{d}(\mu)_{p,r} = \mathrm{mult}_\mu(p,r).$$

Per Konvention sei $\underline{d}(\mu)_{(p,r)} = 0$ für $(p,r) \notin Q(\mu)_0$.

Theorem 24 *Die offensichtlichen Abbildungen* $\Phi : T(\mu) \to \mathrm{rep}_{\underline{d}(\mu)} Q(\mu)$ *und* $\phi : \mathrm{stab}\,(\mu) \to \mathrm{Gl}(\underline{d}(\mu))$ *sind Isomorphismen von Varietäten beziehungsweise algebraischen Gruppen. Weiter ist* $\Phi(g.V) = \phi(g).\Phi(V)$ *für* $V \in T(\mu)$, $g \in \mathrm{stab}\,(\mu)$.

Beweis:
Sei $V = \left[V^{\beta}_{\nu',\nu}\right]_{\beta:p\to p' \in Q_1, 1\le\nu'\le \underline{d}_{p'}, 1\le\nu\le\underline{d}_p}$ eine Darstellung in $T(\mu)$, d.h. $V^{\beta:p\to p'}_{\nu',\nu} = 0$ für $\mu_{p',\nu'} - \mu_{p,\nu} \neq 1$. Es ist

$$(\Phi(V))^{\beta_r:(p,r)\to(p',r+1)} = \left[V^{\beta:p\to p'}_{\nu',\nu}\right]_{\nu,\nu' \text{ mit } \mu_{p,\nu}=r, \mu_{p',\nu'}=r+1}.$$

Φ ist also nur ein Umsortieren der Blöcke $\neq 0$, somit ein Isomorphismus. Analog zeigt man, daß ϕ ein Isomorphismus ist, sowie $\Phi(g.V) = \phi(g).\Phi(V)$. □

Identifiziere im folgenden via dieser Isomorphismen $T(\mu)$ mit $\mathrm{rep}_{\underline{d}(\mu)} Q(\mu)$ und $\mathrm{stab}\,(\mu)$ mit $\mathrm{Gl}(\underline{d}(\mu))$.
Die Operation von $\mathrm{stab}\,(\mu)$ auf $T(\mu)$ können wir also wieder mit einer Köchersituation identifizieren. Es bleibt noch die Aufgabe, die Gruppe $G(\mu)$ zu beschreiben.
Wir definieren dazu einen Charakter

$$\chi_\mu : \mathrm{Gl}(\underline{d}(\mu)) = \prod_{(p,r)\in Q(\mu)_0} \mathrm{Gl}_{\underline{d}(\mu)_{p,r}} \to k^*$$

durch

$$g = \prod_{(p,r)\in Q(\mu)_0} g_{p,r} \mapsto \prod_{(p,r)\in Q(\mu)_0} (\det g_{p,r})^{w_p n r},$$

wobei $\lambda = n\mu$ die zu μ zugehörige 1-PUG ist.

Lemma 25 *Es ist* $G(\mu) = \chi_\mu^{-1}(1)$.

Beweis:
Sei $\rho \in \Lambda_T \subset \Lambda_{\mathrm{stab}(\mu)}$, oBdA sei T der Standardtorus in G. Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_\mu(\rho(t)) &= \chi_\mu\left(\prod_{(p,r)\in Q(\mu)_0} \rho(t)_{p,r}\right) \\ &= \prod_{(p,r)} (\det \mathrm{diag}(t^{\rho_{p,\nu}} | \mu_{p,\nu} = r)^{w_p\lambda_{p,\nu}} = \prod_{(p,r)} \prod_{\nu:\mu_{p,\nu}=r} t^{w_p\rho_{p,\nu}\lambda_{p,\nu}} \\ &= \prod_{i\in Q_{\underline{d}}} t^{w_i\rho_i\lambda_i}.\end{aligned}$$

Also ist $\chi_\mu(\rho(t)) = 1$ für alle t genau dann, wenn $\sum_i w_i\rho_i\lambda_i = 0$ ist. Das ist wiederum äquivalent zu $(\rho,\lambda)_T = 0$, was per Definition genau $\rho \in G(\mu)$ bedeutet. □

Nach King [9] ist dann $V \in T(\mu)$ semistabil bezüglich $G(\mu)$ genau dann, wenn V χ_μ-semistabil im Sinne Mumfords [12] ist. Weiter nach [9] ist das gleichbedeutend damit, daß V semistabil bezüglich $\tilde{\theta}_\mu$ ist mit

$$\tilde{\theta}_\mu : K_0(\operatorname{rep} Q(\mu)) \simeq \mathbb{N}^{Q(\mu)_0} \to \mathbb{Z} : \underline{e} \mapsto \sum_{(p,r) \in Q(\mu)_0} w_p \cdot n \cdot r \cdot \underline{e}_{p,r}.$$

Dabei heißt V *θ-semistabil* für eine additive Abbildung $\theta : K_0(\operatorname{rep} Q(\mu)) \to \mathbb{Z}$ von der Grothendiek-Gruppe in die ganzen Zahlen, falls $\theta(\underline{\dim} V) = 0$ und $\theta(\underline{\dim} W) \geq 0$ für alle Unterdarstellungen $W \subset V$ gilt. Gilt sogar $\theta(\underline{\dim} W) > 0$ für alle echten Unterdarstellungen $0 \neq W \subsetneq V$, so heißt V *θ-stabil*.
Wir betrachten im folgenden statt $\tilde{\theta}_\mu$ die Abbildung $\theta_\mu : \operatorname{rep} Q(\mu) \to \mathbb{Q}$ gegeben durch

$$\theta_\mu(V) = \sum_{(p,r) \in Q(\mu)_0} w_p \cdot r \cdot \underline{\dim}(V)_{p,r}.$$

Dann ist $\theta_\mu(V) \geq 0$ genau dann, wenn $\tilde{\theta}_\mu(\underline{\dim} V) \geq 0$ gilt, analog für „=".
Insgesamt haben wir also mit diesen Notationen und unter Verwendung von Lemma 19:

Theorem 26 *Sei $\mu \in M_T$, $V \in S(\mu)$. Dann ist $V \in G.[\mu]$ genau dann, wenn $p_\mu(V)$ betrachtet als $Q(\mu)$-Darstellung von θ_μ-semistabil ist.*

2 Trennende Gewichtungen als Lösung eines Systems quadratischer Ungleichungen

Wir fixieren im Folgenden wieder einen maximalen Torus T, oBdA sei dies der Standardtorus.

2.1 Trennende Gewichtungen

Wir suchen nun hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, daß eine Gewichtung w eine „vernünftige", d.h. möglichst feine, Stratifizierung der Darstellungsvarietät liefert.

- Wir sagen, daß eine Gewichtung zu einem Köcher *die Orbiten trennt*, falls für alle Darstellungen V das Hesselink-Stratum $H(V)$ genau der Orbit $G.V$ ist.
- Ein Köcher *erlaubt die Trennung der Orbiten*, falls es eine Gewichtung gibt, die die Orbiten trennt.
- Eine Gewichtung ist *stabil*, wenn für diese Gewichtung $p_{\mu(U)}(U)$ stabil ist für alle Unzerlegbaren U.

Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, daß ein darstellungsendlicher Köcher die Trennung der Orbiten genau dann erlaubt, wenn es eine stabile Gewichtung gibt.

Seien V', V'' zwei Moduln, μ', μ'' Cogewichte zu den jeweiligen Dimensionsvektoren $\underline{d}', \underline{d}''$. Definiere $\mu = \mu' \oplus \mu''$ zum Dimensionsvektor $\underline{d} := \underline{d}' + \underline{d}''$ durch

$$\mu_p = \left(\mu_{p,1}, \ldots, \mu_{p,\underline{d}'_p + \underline{d}''_p}\right) := \left(\mu'_{p,1}, \ldots, \mu'_{p,\underline{d}'_p}, \mu''_{p,1}, \ldots, \mu''_{p,\underline{d}''_p}\right).$$

Dann ist μ ein Cogewicht zu $\underline{\dim}V(=\underline{d})$ mit $V := V' \oplus V''$, wobei wir hier die direkte Summe als direkte Summe von Matrizen verstehen:

$$(V' \oplus V'')^\alpha := \begin{bmatrix} V'^\alpha & 0 \\ 0 & V''^\alpha \end{bmatrix}.$$

Wir haben dann $p_\mu(V' \oplus V'') = p_{\mu'}(V') \oplus p_{\mu''}(V'')$. Sei dazu $\lambda = n\mu$ die zu μ zugehörige 1-PUG und seien $\lambda' = n\mu'$, $\lambda'' = n\mu''$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_\mu(V' \oplus V'')^\alpha &= \lim t^{-n}\lambda(t). \begin{bmatrix} V'^\alpha & 0 \\ 0 & V''^\alpha \end{bmatrix} \\ &= \lim t^{-n}(\lambda' \oplus \lambda'')(t) \cdot \begin{bmatrix} V'^\alpha & 0 \\ 0 & V''^\alpha \end{bmatrix} \cdot (\lambda' \oplus \lambda'')(t)^{-1} \\ &= \lim t^{-n} \begin{bmatrix} \lambda'(t) \cdot V'^\alpha \cdot \lambda'(t)^{-1} & \lambda'(t) \cdot 0 \cdot \lambda''(t)^{-1} \\ \lambda''(t) \cdot 0 \cdot \lambda'(t)^{-1} & \lambda''(t) \cdot V''^\alpha \cdot \lambda''(t)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lim t^{-n}\lambda'(t).V'^\alpha & 0 \\ 0 & \lim t^{-n}\lambda''(t).V''^\alpha \end{bmatrix} = p_{\mu'}(V') \oplus p_{\mu''}(V''). \end{aligned}$$

Damit gilt dann auch:

$$\theta_\mu(p_\mu(V)) = \theta_{\mu'}(p_{\mu'}(V')) + \theta_{\mu''}(p_{\mu''}(V'')).$$

Bemerkung 27 *Sind μ', μ'' optimale Cogewichte zu den V', V'', so ist μ optimales Cogewicht zu V.*

Beweis:
Zu zeigen ist $\theta_\mu(p_\mu(V)) = 0$ und $\theta_\mu(U) \geq 0$ für alle Untermoduln U von $p_\mu(V)$.

- Es ist $\theta_\mu(p_\mu(V)) = \theta_{\mu'}(p_{\mu'}(V')) + \theta_{\mu''}(p_{\mu''}(V'')) = 0 + 0 = 0$.
- Sei nun $U \subset p_\mu(V)$ ein Untermodul. Dann ist U Erweiterung von zwei Untermoduln $U' \subset p_{\mu'}(V')$ beziehungsweise $U'' \subset p_{\mu''}(V'')$. Insbesondere ist dann $\underline{\dim}U = \underline{\dim}U' \oplus U''$, somit gilt:

$$\theta_\mu(U) = \theta_\mu(U' \oplus U'') = \underbrace{\theta_{\mu'}(U')}_{\geq 0} + \underbrace{\theta_{\mu''}(U'')}_{\geq 0} \geq 0.$$

□

Es reicht also, die optimalen Cogewichte Unzerlegbarer zu untersuchen. Im folgenden schreiben wir oft kurz θ_W für $\theta_{\mu(W)}$.

Bemerkung 28 *Sei U ein Unzerlegbarer mit optimalen Cogewicht $\mu = \mu(U)$. Ist $p_\mu(U)$ stabil, so besteht μ nur aus einem Segment. Es ist sogar $Q(\mu)$ zusammenhängend.*

Beweis:
Besteht μ aus mehreren Segmenten, so zerfällt $Q(\mu)$ in mehrere Komponenten. Dann ist $p_\mu(U)$ direkte Summe der zu den Komponenten gehörenden Moduln. Insbesondere ist $p_\mu(U)$ nicht stabil. □

Lemma 29 *Sei Q ein Baum (d.h. Q enthält keine Zykeln). Sei weiter U unzerlegbar, $\mu = \mu(U)$ und $Q(\mu)$ zusammenhängend (erfüllt für z.B. $p_\mu U$ stabil).*

- *Dann ist $\mu_{p,1} = \cdots = \mu_{p,\underline{d}_p}$ und es existieren $x_U \in \mathbb{Q}$, $l(p) \in \mathbb{Z}$ mit $\mu_p = x_U - l(p)$ für alle $p \in Q_0$. Wir schreiben dabei kurz μ_p für $\mu_{p,1} = \cdots = \mu_{p,\underline{d}_p}$. Die Abbildung $l : Q_0 \to \mathbb{Z}$ heißt* Levelfunktion.
- *Es ist $Q(\mu) = Q$ und $p_\mu(U) = U$. Dabei bleiben Punkte p mit $(\underline{\dim} U)_p = 0$ (und die entsprechenden Pfeile) unberücksichtigt.*

Beweis:

- Sei $r = \mu_{p,\nu}$, $r' = \mu_{p,\nu'}$. Zu zeigen ist dann $r = r'$. Angenommen, es wäre $r \neq r'$, d.h. (p,r) und (p,r') wären verschiedene Punkte in $Q(\mu)$. Da $Q(\mu)$ zusammenhängend ist, existiert eine Verbindung (ein ungerichteter Weg)

$$(p,r) = (p_0,r_0) - (p_1,r_1) - \cdots - (p_t,r_t) - (p_{t+1},r_{t+1}) = (p,r').$$

Dabei ist $r_i = r_{i+1} + \epsilon_i$ mit $\epsilon_i \in \{-1,1\}$ abhängig von der Orientierung von $(p_i,r_i) - (p_{i+1},r_{i+1})$. Per Konstruktion von $Q(\mu)$ kommt diese Verbindung her von einer Verbindung $p - p_1 - \cdots - p_t - p$ in Q. Da Q keine Zykeln enthält, aber Anfangs- und Endpunkt dieser Verbindung übereinstimmen, muß $p_i = p_{t-i}$ und $\epsilon_i = -\epsilon_{t-i}$ sowie t gerade sein. Insbesondere ist

$$r = r_0 = \sum_{i=0}^{t} \epsilon_i + r' = \sum_{i=0}^{\frac{t}{2}-1} \epsilon_i + \sum_{i=\frac{t}{2}}^{t} \epsilon_i + r' = r'.$$

Also gilt $\mu_{p,\nu} = \mu_{p,\nu'}$ für alle $1 \leq \nu, \nu' \leq \underline{d}_p$. Sei $q \in Q_0$ fix. Setze $x_U = \mu_q$ und $l(p) = \sum \epsilon_i$, wobei die Summe über die eindeutige Verbindung $q - p$ in Q läuft. Damit ist die Behauptung erfüllt.

- Wäre $p_\mu(U) \neq U$, gäbe es einen Pfeil $p \to p'$ mit $\mu_{p'} - \mu_p > 1$. Dieser Pfeil „verschwindet" bei der Projektion nach $T(\mu) = \text{rep}_{\underline{d}(\mu)}\, Q(\mu)$. Da es nur eine Verbindung $p - p'$ gibt, ist Q ohne diesen Pfeil und damit auch der Segmenteköcher nicht mehr zusammenhängend, Widerspruch.

Da μ an jedem Punkt nur einen Wert annimmt, ist $Q(\mu)_0 = Q_0$ und jeder Pfeil in Q_1 induziert maximal einen Pfeil in $Q(\mu)_1$. Ist nun $Q(\mu) \neq Q$, so gibt es ebenfalls einen „verschwindenden" Pfeil. Wir erhalten den gleichen Widerspruch.

□

Natürlich sind die Levelfunktion und x_U nur bis auf ganzzahlige Verschiebung eindeutig. Meist wählen wir l so, daß l nur Werte ≥ 0 annimmt. Nach Wahl von l ist x_U eindeutig.
Sei ab jetzt für einen gegebenen Köcher Q eine Levelfunktion l fixiert.

Ist Q kein Baum, so stimmt voriges Lemma nicht. Sei dazu $U = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 1 \arrow[dd, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ & 1 \arrow[dl, "1"] \\ 1 & \end{tikzcd}$. Dann

ist $\mu(U) = \begin{array}{cc} -1 & \\ & 0 \\ 1 & \end{array}$ und $p_\mu(U) = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 1 \arrow[dr, "1"] & \\ & 1 \arrow[dl, "1"] \\ 1 & \end{tikzcd} \neq U$, aber $p_\mu(U)$ ist stabil.

Sei von jetzt an Q ein Baum. Insbesondere unterscheiden wir nicht mehr zwischen U und $p_\mu(U)$, wenn U stabil ist.

Sei U ein Unzerlegbarer. U ist stabil genau dann, wenn $\theta_U(W) > 0$ für alle echten Untermoduln W von U gilt. Da θ_U additiv ist, reicht es, diese Bedingung für unzerlegbare W zu betrachten. Oben haben wir schon gesehen, daß notwendige Voraussetzung für die Stabilität von U ist, daß $\mu(U)$ nur aus einem Segment besteht. Damit ist

$$0 < \theta_U(W) = \sum_{p \in Q_0} (\underline{\dim} W)_p w_p \mu_p = \sum_p (\underline{\dim} W)_p w_p (x_U - l(p)).$$

x_U ist wiederum gegeben durch

$$0 = \theta_U(U) = \sum_p (\underline{\dim} U)_p w_p (x_U - l(p))$$

$$\iff x_U = \frac{\sum_p (\underline{\dim} U)_p w_p l(p)}{\sum_p (\underline{\dim} U)_p w_p} = \frac{b(U)}{a(U)},$$

wobei wir $b(U) := \sum_p (\underline{\dim} U)_p w_p l(p)$ und $a(U) := \sum_p (\underline{\dim} U)_p w_p$ setzen. Eingesetzt ergibt das:

$$0 < \underbrace{\sum_p (\underline{\dim} W)_p w_p}_{=a(W)} \frac{b(U)}{a(U)} - \underbrace{\sum_p (\underline{\dim} W)_p w_p l(p)}_{=b(W)} = a(W) \frac{b(U)}{a(U)} - b(W)$$

oder auch

$$0 < \sum_{p,q \in Q_0} \underbrace{(\underline{\dim} W)_p (\underline{\dim} U)_q (l(q) - l(p))}_{=:A_{pq}(U,W)} w_p w_q.$$

Ist Q darstellungsendlich, so haben wir für die Bedingung „alle Unzerlegbaren U stabil“ nur endlich viele Ungleichungen zu überprüfen.
Aus der ersten Version folgt

Bemerkung 30 *Es gilt*

$$\theta_U(W) > 0 \iff x_U > x_W.$$

Wegen $0 = \theta_U(U) = \theta_U(W) + \theta_U(U/W)$ *können wir auch* $\theta_U(U/W) < 0$ *statt* $\theta_U(W) > 0$ *überprüfen. Ist* U/W *wieder unzerlegbar, so haben wir*

$$\theta_U(W) > 0 \iff \theta_U(U/W) < 0 \iff x_U < x_{U/W}.$$

Dies wird die später meist benutzte Formulierung der Stabilitätsbedingung sein. Weiter beobachten wir:

Bemerkung 31 *Es ist* $A_{pp}(U,W) = (\underline{\dim}W)_p(\underline{\dim}U)_p(l(p) - l(p)) = 0$*, in den „Stabilitätsungleichungen" tauchen Summanden der Form* w_p^2 *also nicht auf.*

Lemma 32 *Sei* U *ein Unzerlegbarer und* $\mu = \mu(U)$*.*

1. *Sei* W *ein maximaler unzerlegbarer stabiler Untermodul von* $p_\mu U$ *und sei* $\theta_\mu(W) > 0$*. Dann ist* $\theta_\mu(W') > 0$ *für alle Untermoduln* $W' \subset W$*.*
2. *Sind alle maximalen unzerlegbaren Untermoduln* W *von* $p_\mu U$ *stabil und gilt* $\theta_\mu(W) > 0$*, so ist* $p_\mu U$ *stabil.*

Beweis:
Der zweite Teil folgt aus dem ersten durch Anwendung auf alle maximalen unzerlegbaren Untermoduln.
Sei nun $W' \subset W$ ein unzerlegbarer Untermodul des maximalen Unzerlegbaren $W \subset p_\mu U$. Dann ist $\theta_U(W') > 0$ zu zeigen. Es gilt $x_W < x_U$, da $\theta_U(W) > 0$ ist. Nach Voraussetzung ist W stabil, also gilt $\theta_W(W') > 0$, oder gleichwertig $x_{W'} < x_W$. Zusammen ergibt das dann $x_{W'} < x_U$, somit gilt $\theta_U(W') > 0$. □

Bevor wir in Folgerung 37 ein hinreichendes Kriterium für die Trennung der Orbiten angeben, benötigen wir noch zwei vorbereitende Lemmata.

Bemerkung 33 *Ist* U *einfach, so ist offensichtlich* $\mu(U) = (0)$*. Ist hingegen* U *nicht einfach, so existieren* $p, q \in Q_0$ *mit* $l(p) \neq l(q)$ *und* $(\underline{\dim}U)_p \neq 0 \neq (\underline{\dim}U)_q$*. Also ist* $\mu_p = x_U + l(p) \neq \mu_q = x_U + l(q)$*, insbesondere taucht in* $\mu(U)$ *mindestens ein nicht-*0 *Eintrag auf. Die Einfachen spielen bei unseren Betrachtungen über die Trennung der Orbiten somit keine Rolle.*

Lemma 34 *Sei* $\tilde{w}$ *eine stabile Gewichtung. Seien* U *und* V *nicht-einfache Unzerlegbare mit nicht-proportionalen Dimensionsionsvektoren. Dann gibt es in jeder offenen Umgebung von* $\tilde{w}$ *eine Gewichtung* w'*, so daß* $x_U(w') \not\equiv x_V(w')$ *modulo* $\mathbb{Z}$ *gilt.*

Beweis:
Seien U und V nicht-einfache Unzerlegbare.
Nach Bemerkung 28 sind $\mu(U)$ und $\mu(V)$ jeweils ein Segment. Die Bedingung „U und V stabil" ist gegeben durch endlich viele Ungleichungen $\theta_W(W') > 0$, wobei W' alle unzerlegbaren echten Untermoduln von $W = U$ bzw. $W = V$ durchläuft. Dies sind endlich viele Ungleichungen, da $\theta_W(W')$ nur vom Dimensionsvektor $\underline{\dim}W'$ abhängt, für den es nur endlich viele Möglichkeiten gibt. Diese Ungleichungen lassen sich schreiben als

$$\sum_{p,q \in Q_0} A_{pq}(W,W') w_p w_q > 0$$

für gewisse ganze Zahlen $A_{pq}(W,W')$ unabhängig von der Gewichtung w. Die Lösungsmenge S dieser Ungleichungen ist also offen und nach Voraussetzung nicht leer. Für alle $w \in S$ sind dann immer noch $\mu(U)$ und $\mu(V)$ ein Segment.
Sei nun $X \subset S$ eine zusammenhängende Umgebung von $\tilde{w}$ mit $x_U(w) \equiv x_V(w)$ modulo $\mathbb{Z}$ für alle $w \in X$. Dann müssen wir zeigen, daß die Dimensionsvektoren von U und V proportional zueinander sind.

Da x_U und x_V auf einer offenen Menge modulo $\mathbb{Z}$ übereinstimmen, sind sie schon als rationale Funktionen gleich (modulo $\mathbb{Z}$). Da X zusammenhängend ist, unterscheiden sie sich nur um eine Konstante N. Damit gilt

$$\begin{aligned} x_U = x_V + N \iff & \frac{b(U)}{a(U)} = \frac{b(V)}{a(V)} + N \\ & \iff b(U)a(V) = b(V)a(U) + Na(U)a(V). \end{aligned}$$

Da U nicht einfach ist, sind $b(U)$ und $a(U)$ teilerfremd im faktoriellen Ring der polynomialen Funktionen in den $w_p, p \in Q_0$. Also folgt aus $b(U)a(V) = (b(V) + Na(V))\,a(U)$ schon, daß $a(U)$ ein Teiler von $a(V)$ ist. Da V nicht einfach ist, folgt analog, daß $a(V)$ ein Teiler von $a(U)$ ist. Zusammen ergibt das, daß $a(U)$ und $a(V)$ proportional zueinander sind. Da der Dimensionsvektor $\underline{\dim}U$ durch $a(U) = \sum_{p\in Q_0}(\underline{\dim}U)_p w_p$ eindeutig festgelegt ist, sind dann die Dimensionsvektoren $\underline{\dim}U$ und $\underline{\dim}V$ proportional zueinander.
Haben also U und V nicht-proportionale Dimensionsvektoren, so finden wir ein $w' \in X$ mit $x_U(w') \not\equiv x_V(w')$. $\square$

Beispiel 35 *Die Variation im vorigen Lemma ist nötig.*

- *Sei $Q = A_3$ in linearer Orientierung mit Gewichtung $(1,1,1)$. Sei U der Unzerlegbare zum Dimensionsvektor $(1,1,0)$ und V der zu $(0,1,1)$. Dann sind U und V stabil und es ist $x_U \equiv \frac{1}{2} \equiv x_V$.*
- *Ist Q kein Baum, findet man sogar Beispiele, wo $H(U) = H(V)$ gilt, obwohl alle beteiligten Unzerlegbaren stabil sind. Sei dazu $Q = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 2 & & & & 3 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 4 & & \end{array}$, $w = (1,1,1,1)$. Der Unzerlegbare $U = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \overset{1}{\swarrow} & & \overset{1}{\searrow} & \\ 1 & & & & 1 \\ & \underset{1}{\searrow} & & \underset{1}{\swarrow} & \\ & & 1 & & \end{array}$ ist stabil und hat optimales Cogewicht $\mu(U) = (-1,0,0,1)$. Das optimale Cogewicht zu $V = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \overset{1}{\swarrow} & & \overset{0}{\searrow} & \\ 1 & & & & 0 \\ & \underset{1}{\searrow} & & \underset{0}{\swarrow} & \\ & & 1 & & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \overset{0}{\swarrow} & & \overset{0}{\searrow} & \\ 0 & & & & 1 \\ & \underset{0}{\searrow} & & \underset{0}{\swarrow} & \\ & & 0 & & \end{array}$ ist ebenfalls $\mu(V) = (-1,0,0,1)$ und die beiden Summanden sind stabil. Nach Variation von w fallen die beiden optimalen Cogewichte auseinander, insbesondere ist $\mu(V)$ dann kein einzelnes Segment mehr.*

Lemma 36 *Sei Q darstellungsendlich, w eine stabile Gewichtung. Dann gibt es in jeder Umgebung von w eine stabile Gewichtung w', so daß $x_U(w') \not\equiv x_V(w')$ für alle Unzerlegbaren U, V mit $U \not\simeq V$ gilt.*

Beweis:
Für einen darstellungsendlichen Köcher ist ein Unzerlegbarer bis auf Isomorphie durch seinen Dimensionsvektor festgelegt und es gibt keine zueinander proportionalen Dimensionsvektoren Unzerlegbarer. In Lemma 34 reicht es dann also, $U \not\simeq V$ zu fordern.

Für einen darstellungsendlichen Köcher ist die Menge der stabilen Gewichtungen W durch endliche viele Ungleichungen gegeben, ist also offen. Sei nun $X \subset W$ eine Umgebung von w. Sei I ein Repräsentensystem der unzerlegbaren Moduln. Für $\tilde{w} \in X$ definieren wir

$$M(\tilde{w}) = \{(U,V) | x_U(\tilde{w}) \not\equiv x_V(\tilde{w}), U, V \in I\}.$$

Da Q darstellungsendlich ist, ist das eine endliche Menge. Wähle nun ein $w_1 \in X$ so, daß $\sharp M(w_1)$ maximal ist.
Angenommen, es existieren nicht isomorphe Unzerlegbare U' und V' in I mit $x_{U'}(w_1) \equiv x_{V'}(w_1)$.
Da die Abbildung $\tilde{w} \mapsto x_U(\tilde{w})$ als rationale Funktion stetig ist, existiert eine Umgebung $W_1 \subset X$ von w_1, so daß $x_U(\tilde{w}) \not\equiv x_V(\tilde{w})$ für alle $\tilde{w} \in W_1$ und alle $(U,V) \in M(w_1)$ gilt. Nach Lemma 34 existiert nun ein $w_2 \in W_1$, so daß $x_{U'}(w_2) \not\equiv x_{V'}(w_2)$ ist. Es ist also $\sharp M(w_2) > \sharp M(w_1)$, Widerspruch.
Wir finden also immer ein $w' \in X$, so daß $x_U(w') \not\equiv x_V(w')$ für alle Unzerlegbaren U, V mit $U \not\cong V$ gilt. □

Damit erhalten wir nun:

Folgerung 37 *Sei Q darstellungsendlich, w eine stabile Gewichtung. Dann existiert in jeder Umgebung von w eine Gewichtung w', so daß die Orbiten getrennt werden.*

Beweis:
Sei w' wie im vorigen Lemma. Sei $H(\mu)$ das Stratum zum Cogewicht μ. Sei $X \in H(\mu)$. Können wir X aus μ eindeutig rekonstruieren, so werden die Orbiten getrennt.
Aus den in μ auftretenden Resten $0 \neq \mu_i$ modulo $\mathbb{Z}$ läßt sich nach Konstruktion von w' eindeutig auf die in der Zerlegung von X auftretenden nicht einfachen Unzerlegbaren schließen. Die Multiplizitäten der Unzerlegbaren erhalten wir durch die Zahl der i mit $\mu_i \equiv x_U$, genauer: der Unzerlegbare U tritt $\frac{\sharp\{i|\mu_i \equiv x_U\}}{\dim U}$ mal auf. □

Sei W_Q^s die Menge aller stabilen Gewichtungen, d.h. die Menge aller rationalen Tupel $(w_p) \in (\mathbb{Q}^+)^{Q_0}$, die die Stabilitätsungleichungen erfüllen.
Fast alle stabilen Gewichtungen sind trennend, genauer gilt:

Bemerkung 38 *Sei Q darstellungsendlich. Sei $T \subset W_Q^s$ die Menge der trennenden Gewichtungen. Dann ist T dicht in W_Q^s.*

Beweis:
Die Dichtheit von T folgt direkt aus der Folgerung: Sei $w \in W_Q^s$. Dann existiert in jeder Umgebung von w eine trennende Gewichtung, w ist also Grenzwert trennender Gewichtungen.

□

Umgekehrt ist die Stabilität einer Gewichtung eine notwendige Bedingung für die Trennung der Orbiten:

Lemma 39 *Sei U ein Unzerlegbarer mit $H(U) = G.U$. Dann ist U stabil bezüglich $\mu = \mu(U)$.*

Beweis:
Aus $H(U) = G.U$ folgt sofort, daß $Q(\mu)$ zusammenhängend ist. Sonst wäre $p_\mu(U)$ direkte Summe der zu den Komponenten von $Q(\mu)$ gehörenden Moduln, also z.B. $p_\mu(U) = W_1 \oplus W_2$ mit $W_1 \oplus W_2$ semistabil bezüglich μ. Seien $V_i \in p_\mu^{-1}(W_i)$. Dann ist $V_1 \oplus V_2 \in H(U)$, also ist $H(U) \neq G.U$.
Da U unzerlegbar und $Q(\mu)$ zusammenhängend ist, folgt nach Lemma 29 dann $Q(\mu) = Q$ und $p_\mu(U) = U$.
μ optimal für U heißt, daß U semistabil bezüglich μ ist. Angenommen, U wäre nicht stabil. Dann existiert ein Untermodul $0 \neq W \subsetneq U$ mit $\theta_\mu(W) = 0$. Zeige nun, daß $W \oplus U/W$ semistabil bezüglich μ ist:

- $\theta_\mu(W \oplus U/W) = \theta_\mu(U) = 0$, da θ_μ nur vom Dimensionvektor abhängt.
- Sei nun U' ein Untermodul von $W \oplus U/W$. Zu zeigen ist $\theta_\mu(U') \geq 0$. Dann ist U' eine Erweiterung von Untermoduln U_1, U_2 von W bzw. U/W. U_1 ist dann Untermodul von U, also $\theta_\mu(U_1) \geq 0$. Der Pullback P von
$$\begin{tikzcd} & U_2 \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, two heads] & U/W \end{tikzcd}$$
ist dann ein Untermodul von U mit $\underline{\dim} P = \underline{\dim} W \oplus U_2$, somit
$$\theta_\mu(U_2) = \underbrace{\theta_\mu(P)}_{\geq 0} - \underbrace{\theta_\mu(W)}_{=0} \geq 0.$$
Zusammen ist dann $\theta_\mu(U') = \theta_\mu(U_1) + \theta_\mu(U_2) \geq 0$.

Da $W \oplus U/W$ semistabil bezüglich μ ist, ist $W \oplus U/W \in H(V) = G.V$, andererseits ist $W \oplus U/W \not\cong U$, da U unzerlegbar, Widerspruch. □

Insgesamt haben wir somit unser Ziel erreicht, ein kombinatorisches Kriterium für die Trennung der Orbiten anzugeben:

Folgerung 40 *Sei Q ein darstellungsendlicher Köcher und sei eine Levelfunktion fest gewählt. Für eine Gewichtung w von Q sind dann äquivalent:*

1. *Die Orbiten werden getrennt (bis auf Variation der Gewichtung).*
2. *Alle Unzerlegbaren sind stabil.*
3. *Es ist $\theta_V(U) > 0$ für alle maximalen unzerlegbaren Untermoduln U von Unzerlegbaren V.*
4. *Es ist $x_V > x_U$ bzw. $x_V < x_{V/U}$ für alle maximalen unzerlegbaren Untermoduln U von Unzerlegbaren V.*

2.2 Stabile Gewichtungen

In diesem Abschnitt geben wir einige Eigenschaften an, die die Untersuchung der Stabilitätsungleichungen vereinfachen.
Ist $U = E(p)$ ein einfacher Modul, so ist $x_U = l(p)$. Die Ungleichung $x_V > x_U$ vereinfacht sich dann zu $x_V > l(p)$. Analog haben wir für einen Unzerlegbaren U mit einfachen Cokern $V/U = E(p)$ die Ungleichung $x_V < l(V/U)$.

Bemerkung 41 *Sei V Unzerlegbarer. Dann gilt $m_V \leq x_V \leq M_V$ mit $m_V := \min\{l(p) | (\underline{\dim} V)_p \neq 0\}$, $M_V := \max\{l(p) | (\underline{\dim} V)_p \neq 0\}$. Die Ungleichungen sind echt, falls V nicht einfach ist.*

Beweis:
Es ist $x_V = \frac{\sum(\underline{\dim} V)_p l(p) w_p}{\sum(\underline{\dim} V)_p w_p} \leq \frac{\sum(\underline{\dim} V)_p M_V w_p}{\sum(\underline{\dim} V)_p w_p} = M_V$, die andere Ungleichung analog. Ist V nicht einfach, gibt es ein p mit $(\underline{\dim} V)_p \neq 0$ und $p \neq M_V$, also ist obige Ungleichung echt. □

Ein einfacher Untermodul $U = E(p)$ von V heißt *mit minimalem Level*, falls $l(p) = m_V$ ist. Analog heißt ein einfacher Cokern $V/U = E(p)$ *mit maximalem Level*, falls $l(p) = M_V$. Die Ungleichung $x_V > x_U$ ist dann nach der Bemerkung erfüllt, ebenso für den Cokern.

Lemma 42 *Sei $D : \operatorname{rep} Q \to \operatorname{rep} Q^{op}$ die übliche Dualität. Sei V θ_μ-(semi)stabil. Dann ist DV $\theta_{-\mu}$-(semi)stabil.*

Beweis:
Es ist zunächst

$$\theta_{-\mu}(DV) = \sum_p (\underline{\dim} DV)_p w_p(-\mu_p) = -\sum_p (\underline{\dim} V)_p w_p \mu_p = \theta_\mu(V) = 0.$$

Sei nun W ein echter Untermodul von DV. Dann ist DW ein echter Cokern von V.

$$\theta_{-\mu}(W) = \sum_p (\underline{\dim} W)_p w_p(-\mu_p) = -\sum_p (\underline{\dim} DW)_p w_p \mu_p = -\underbrace{\theta_\mu(DW)}_{<0} > 0.$$

Zusammen: DV ist $\theta_{-\mu}$-stabil, semistabil analog. □

Insbesondere ist eine Gewichtung $w = (w_p)$ zum Köcher Q stabil genau dann, wenn diese Gewichtung für Q^{op} stabil ist.
Hat ein Köcher eine Symmetrie und gibt es überhaupt eine stabile Gewichtung, dann gibt es auch eine stabile Gewichtung, die diese Symmetrie berücksichtigt:

Lemma 43 *Seien $x, y \in Q_0$, sei $\phi : Q \to Q$ ein Köcherautomorphismus mit $\phi(x) = y$, $\phi(y) = x$ und $\phi(p) = p$ sonst. Sei $w = (w_p)_{p \in Q_0}$ eine stabile Gewichtung. Dann ist auch die Gewichtung v mit $v_x = v_y = \frac{w_x + w_y}{2}$, $v_p = w_p$ sonst, stabil.*

Beweis:
Die Gewichtung ist stabil, falls gewisse Ungleichungen

$$B_{x,y} w_x w_y + \sum_{p \neq x,y} (B_{x,p} w_x w_p + B_{y,p} w_y w_p) + \sum_{p,q \neq x,y} B_{p,q} w_p w_q > 0$$

mit $B_{p,q} = A_{p,q} + A_{q,p}$ erfüllt sind. Wie früher ist $A_{p,q} = C \cdot (l(p) - l(q))$ wobei C nur von den beteiligten Moduln abhängt. ϕ Automorphismus bedeutet insbesondere $l(x) = l(y)$, also ist $B_{x,y} = 0$. Weiter ist auch die Gewichtung w^ϕ, d.h. die Gewichtung mit vertauschtem w_x, w_y, stabil. Wir erhalten daraus

$$\sum_{p \neq x,y} (B_{x,p} w_y w_p + B_{y,p} w_x w_p) + \sum_{p,q \neq x,y} B_{p,q} w_p w_q > 0.$$

Addieren beider Ungleichungen und Division durch 2 liefert

$$\sum_{p \neq x,y} \left(B_{x,p} \underbrace{\frac{w_x + w_y}{2}}_{=v_x} \underbrace{w_p}_{=v_p} + B_{y,p} \frac{w_y + w_x}{2} w_p \right) + \sum_{p,q \neq x,y} B_{p,q} w_p w_q > 0,$$

also ist die Gewichtung v stabil. □

Bemerkung 44 *Analog zeigt man: Sei $\phi : Q \to Q$ Köcherautomorphismus, $\Phi(p) \subset Q_0$ der ϕ-Orbit von $p \in Q_0$, $w = (w_p)$ stabile Gewichtung. Dann ist auch $v = (v_p)$ mit $v_p = \frac{1}{\sharp\Phi(p)} \sum_{q\in\Phi(p)} w_q$ stabil.*

Für einen Köcher Q sei wieder W_Q^s die Menge der stabilen Gewichtungen. Weiter sei $W_Q^s(\mathbb{R})$ die Menge der reellen Tupel $(w_p) \in (\mathbb{R}^+)^{Q_0}$, die die Stabilitätsbedingungen erfüllen. Die Elemente dieser Menge nennen wir auch wieder *stabile Gewichtungen*. Da beide Mengen durch die gleichen offenen Ungleichungen gegeben sind, ist W_Q^s nicht leer genau dann, wenn $W_Q^s(\mathbb{R})$ nicht leer ist.
Wir sind nun an einer Bedingung interessiert, die zeigt, daß $W_Q^s(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist.
Sei Q ein Köcher mit n Punkten, Q' ein Unterköcher mit $n-1$ Punkten. Wir sagen, eine stabile Gewichtung $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ für Q' ist *fortsetzbar*, falls es ein $w_n \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß $(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n)$ eine stabile Gewichtung für Q ist. Ist $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ fortsetzbar, so gibt es natürlich auch eine rationale Fortsetzung. Weiter sind alle $w \in W_Q^s(\mathbb{R})$ fortsetzbar genau dann, wenn alle $w \in W_Q^s$ fortsetzbar sind.

Lemma 45 *Seien Q, Q' wie gerade.*

- *Sei $(w_1, \ldots, w_{n-1}) \in W_{Q'}^s(\mathbb{R})$. Dann ist die Menge*

  $$X = \{w_n | (w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n) \in W_Q^s(\mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}$$

  zusammenhängend.

- *Ist $W_{Q'}^s(\mathbb{R})$ zusammenhängend und sind alle $(w_1, \ldots, w_{n-1}) \in W_{Q'}^s(\mathbb{R})$ fortsetzbar, so ist $W_Q^s(\mathbb{R})$ zusammenhängend.*

Beweis:

- Bei vorgegebenen $(w_1, \ldots, w_{n-1}) \in W_{Q'}^s(\mathbb{R})$ ist X gegeben durch quadratische Ungleichungen. Nach Bemerkung 31 tritt w_n aber nur linear auf, die Ungleichungen sind also von der Form $w_n < \Xi$ oder $w_n > \Xi$, wobei Ξ von den $w_1, \ldots, w_{n-1}$ abhängt. X ist also ein offenes Intervall (oder leer), somit zusammenhängend.

- Für die zweite Aussage betrachte die Projektion $p : W_Q^s(\mathbb{R}) \to W_{Q'}^s(\mathbb{R})$ gegeben durch $(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n) \mapsto (w_1, \ldots, w_{n-1})$. p ist dann offen und hat nach Teil 1 des Lemmas zusammenhängende Fasern. Da alle stabilen Gewichtungen fortsetzbar sind, ist $p(W_Q^s(\mathbb{R})) = W_{Q'}^s(\mathbb{R})$. Mit Hilfe des folgenden Lemmas folgt aus dem Zusammenhang von $W_{Q'}^s(\mathbb{R})$ dann der Zusammenhang von $W_Q^s(\mathbb{R})$.

□

Lemma 46 *Sei $p : X \to Y$ eine offene surjektive Abbildung mit zusammenhängenden Fasern. Ist dann Y zusammenhängend, so ist auch X zusammenhängend.*

Beweis:
Angenommen nicht. Sei dann $X = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung mit offenen nicht leeren Mengen A und B. Da p offen ist, sind dann auch pA und pB offen und es gilt wegen der Surjektivität $Y = pA \cup pB$. Da Y zusammenhängend ist, ist $pA \cap pB \neq \emptyset$. Sei nun $x \in pA \cap pB$. Dann ist $p^{-1}x$ zusammenhängend und $p^{-1}x = (p^{-1}x \cap A) \cup (p^{-1}x \cap B)$ ist eine Zerlegung mit in $p^{-1}x$ offenen nicht leeren Mengen. Da $p^{-1}x$ zusammenhängend ist, ist $(p^{-1}x \cap A) \cap (p^{-1}x \cap B)$ nicht leer, also ist auch $A \cap B$ nicht leer. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, daß A und B disjunkt sind. $\square$

Wir wollen nun mit Hilfe der Folgerung 40 untersuchen, für welche Orientierungen eines Köchers es stabile Gewichtungen gibt und Bestimmungsungleichungen für diese Gewichtungen finden.

3 Typ A_n

Wir betrachten hier Köcher vom Typ A_n:

$$1 - 2 - 3 \cdots\cdots (n-1) - n \,.$$

Bezeichne die Unzerlegbaren (eindeutig bestimmt durch ihre Dimensionsvektoren) wie folgt

$$A(l,m) = \begin{array}{c} 0 \cdots 0 - 1 \cdots 1 - 0 \cdots 0 \\ \quad\; l \quad\;\; m \end{array}$$

sowie die Einfachen $E(k) := A(k,k)$.

Bemerkung 47 *Orientierungen mit Unterköcher*

$$\begin{tikzcd} & & & 4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] & & 5 \\ & 2 & & & \end{tikzcd}$$

erlauben keine Trennung der Orbiten.

Beweis:

Betrachte dazu den unzerlegbaren Modul $U = A(1,5) = \begin{tikzcd} & & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] & & 1 \\ & 1 & & & \end{tikzcd}$.

Dieser hat die Untermoduln $E(5) = \begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] & & 1 \\ & 0 & & & \end{tikzcd}$ und $A(1,4) = \begin{tikzcd} & & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] & & 1 \\ & 1 & & & \end{tikzcd}$. Angenommen, U wäre stabil. Dann liefert der erste Untermodul die Ungleichung $\mu_5 > 0$, der zweite $\mu_5 = \mu_1 < 0$, Widerspruch. $\square$

Analog erhält man natürlich, daß auch Unterköcher der Art

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & & j \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & & {} \arrow[dl, dotted, no head] & & j+1 \\
1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] & & & \\
 & 2 & & & &
\end{tikzcd} \qquad \text{mit } j \geq 4$$

keine Trennung der Orbiten erlauben. Unter Beachtung dieser „Unmöglichkeit“ bleiben also (bis auf Dualität) nur folgende Orientierungen zu untersuchen:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
1 \arrow[dr] & & & & & & & & & & n \arrow[dl] \\
 & 2 \arrow[dr, dotted, no head] & & & & & & & & n-1 \arrow[dl, dotted, no head] & \\
 & & a-1 \arrow[dr] & & a+1 \arrow[dl] \arrow[rr, dotted, no head] & & b-1 \arrow[dr] & & b+1 \arrow[dl] & & \\
 & & & a \arrow[rrrr, dotted, no head] & & & & b & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & & & & & & & n \arrow[dl] \\
 & & & & & & & & n-1 \arrow[dl, dotted, no head] & \\
 & & & a \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & b-1 \arrow[dr] & & b+1 \arrow[dl] & & \\
 & & a-1 \arrow[dl, dotted, no head] & & a+1 \arrow[rr, dotted, no head] & & b & & & \\
 & 2 \arrow[dl] & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

mit $1 \leq a \leq b \leq n$.
In einigen Spezialfällen sind die Ungleichungen, die W_Q^s beschreiben, besonders einfach, deswegen betrachten wir sie separat:

$$1 \to 2 \to 3 \cdots (n-1) \to n \qquad \text{(Lineare Orientierung)}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rrrr, dotted, no head] & & & & n \arrow[dl] \\
1 & & 3 \arrow[rr, dotted, no head] & & n-1 &
\end{tikzcd} \quad \text{bzw.} \quad
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & n-1 \arrow[dr] & \\
1 & & 3 \arrow[rr, dotted, no head] & & n
\end{tikzcd}$$

(Alternierende Orientierung)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
1 \arrow[dr] & & & & n \arrow[dl] \\
 & {} \arrow[dr, dotted, no head] & & {} \arrow[dl, dotted, no head] & \\
 & & m & &
\end{tikzcd} \qquad \text{(„Linear mit Knick“)}$$

Wir zeigen nun folgendes:

Satz 48 *Sei Q ein Köcher vom Typ A_n. Dann gilt:*

1. *Zu den oben angegebenen Orientierungen gibt es jeweils eine stabile Gewichtung. Ist Q in linearer Orientierung, so ist*

$$W_Q^s = (\mathbb{Q}^+)^n.$$

Ist Q in alternierender Orientierung, so gilt

$$W_Q^s = \left\{ (w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{Q}^+)^n | w_i w_{i+3} < w_{i+1} w_{i+2} \text{ für } i = 1, \dots, n-3 \right\}.$$

2. *Sei Q vom Typ A_n, so daß eine stabile Gewichtung existiert, und sei Q' ein Unterköcher vom Typ A_{n-1}. Dann ist jede stabile Gewichtung von Q' fortsetzbar.*

3. *Die Menge $W_Q^s(\mathbb{R})$ aller stabilen Gewichtungen über $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.*

4. *W_Q^s ist konvex genau dann, wenn Q keinen Unterköcher der Form*

$$Z = \begin{array}{ccccccc} j & & & & j+2 & & \\ & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\ & & j+1 & & & & j+3 \end{array}$$

(oder der dualen Orientierung) enthält.

Der dritte Teil des Satzes folgt aus dem zweiten mit Lemma 45 per Induktion. Zum vierten Teil: Nach Teil 1 sind die einzigen Köcher Q vom Typ A_n, die keinen Unterköcher Z enthalten, und für die W_Q^s nicht leer ist, der linear orientierte Köcher und Köcher der Art

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & n \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \cdots m \cdots & & \end{array}$$

(„Linear mit Knick"). Wie in 3.1 und 3.4 gezeigt wird, ist in diesen Fällen W_Q^s durch lineare Ungleichungen gegeben. W_Q^s ist dann als Durchschnitt von Halbräumen konvex.
Enthält nun Q einen Unterköcher der Form Z, so muß die Ungleichung $w_j w_{j+3} < w_{j+1} w_{j+2}$ gelten. Die Tupel $(1, 1, 4, 3)$ und $(3, 1, 4, 1)$ erfüllen diese Ungleichung und lassen sich nach Teil 2 zu stabilen Gewichtungen w bzw. w' von Q fortsetzen. Die Gewichtung $\frac{w+w'}{2}$ ist aber nicht stabil, da nicht $\frac{1+3}{2}\frac{1+3}{2} < 1 \cdot 4$ gilt. Also ist W_Q^s nicht konvex.
Zum Beweis der ersten beiden Teile des Satzes bestimmen wir im folgenden die Bedingungen an die Gewichtung, die erfüllt sein müssen, damit alle Unzerlegbaren stabil sind. Wir betrachten zunächst die beiden Spezialfälle lineare und alternierende Orientierung und dann den allgemeinen Fall.

3.1 Lineare Orientierung

$$1 \to 2 \to 3 \cdots\cdots (n-1) \to n$$

Jeder maximale unzerlegbare Untermodul eines Unzerlegbaren hat einen Cokern mit maximalen Level, also ist jede Gewichtung stabil. Insbesondere ist dann natürlich jede Gewichtung fortsetzbar.

3.2 Alternierende Orientierung

Sei Q ein Köcher in alternierender Orientierung. Bis auf Dualität sei die Orientierung so, daß es einen Pfeil $2 \to 1$ gibt.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] \cdots\cdots \\ 1 & & 3 & \cdots\cdots \end{tikzcd}$$

Sei $A(k,m)$ ein Unzerlegbarer. Setze dann

$$\overline{k} = \begin{cases} k & k \text{ gerade} \\ k+1 & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und } \overline{m} = \begin{cases} m & m \text{ gerade} \\ m-1 & m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

$\overline{k}$ ist also die kleinste gerade Zahl größer gleich k, $\overline{m}$ die größte gerade Zahl kleiner gleich m. Analog setze

$$\underline{k} = \begin{cases} k+1 & k \text{ gerade} \\ k & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und } \underline{m} = \begin{cases} m-1 & m \text{ gerade} \\ m & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

um die kleinste bzw. größte ungerade Zahl zu erhalten.
Definiere die Levelfunktion $l : Q_0 \to \mathbb{Z}$ durch

$$l(i) = \begin{cases} 0 & i \text{ ungerade} \\ 1 & i \text{ gerade} \end{cases}.$$

Setze $\sum_i^j := \sum_{\nu=i}^j w_\nu$ und $\sum_i'^j := \sum_{\nu=i,i+2,\ldots,j} w_\nu$ für $j-i$ gerade beziehungsweise $\sum_i'^j := \sum_{\nu=i,i+2,\ldots,j-1} w_\nu$ für $j-i$ ungerade.
Dann ist

$$x_{A(k,m)} = \frac{\sum_{\overline{k}}'^{\overline{m}}}{\sum_k^m}.$$

Die maximalen unzerlegbaren Untermoduln zu $A(k,m)$ sind $A(k,\overline{m}-1)$ und $A(\overline{k}+1,m)$.
Betrachte zunächst $A(k,\overline{m}-1) \hookrightarrow A(k,m)$. Der Cokern ist $A(\overline{m},m)$. Ist $\overline{m}=m$, das heißt ist m gerade, so ist dies ein Cokern mit maximalen Level. Dieser Fall liefert also keine Bedingung. Sei nun m ungerade, also $\overline{m}=m-1$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{A(k,m)} < x_{A(m-1,m)} \iff (w_{m-1}+w_m)\sum_{\overline{k}}^{m-1}{}' < w_{m-1}\sum_{k}^{m} \\ \iff w_{m-1}\sum_{\overline{k}}^{m-1}{}' + w_m\sum_{\overline{k}}^{m-1}{}' < w_{m-1}\sum_{\overline{k}}^{m-1}{}' + w_{m-1}\sum_{\underline{k}}^{m}{}' \\ \iff w_m\sum_{\overline{k}}^{m-3}{}' < w_{m-1}\sum_{\underline{k}}^{m-2}{}'. \end{aligned}$$

Für den zweiten Untermodul $A(\overline{k}+1, m)$ haben wir den Cokern $A(k, \overline{k})$, also erhalten wir keine Bedingung für gerades k. Für k ungerade haben wir dann

$$\begin{aligned} x_{A(k,m)} < x_{A(k,k+1)} &\iff (w_k + w_{k+1}) \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}' < w_{k+1} \sum_{k}^{m} \\ &\iff w_k \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}' + w_{k+1} \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}' < w_{k+1} \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}' + w_{k+1} \sum_{k}^{\underline{m}}{}' \\ &\iff w_k \sum_{k+3}^{\overline{m}}{}' < w_{k+1} \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}'. \end{aligned}$$

Für $m = i$, $k = i - 3$ erhalten wir hieraus die Ungleichungen

$$w_i w_{i+3} < w_{i+1} w_{i+2}$$

für $i = 1, \ldots, n-3$. Diese einfachen Ungleichungen reichen schon, um alle geforderten Ungleichungen zu erfüllen:

$$w_m \sum_{\overline{k}}^{m-3}{}' < w_{m-1} \sum_{\overline{k}+1}^{m-2}{}' \leq w_{m-1} \sum_{\underline{k}}^{m-2}{}',$$

da immer $\underline{k} \leq \overline{k} + 1$ gilt sowie

$$w_k \sum_{k+3}^{\overline{m}}{}' < w_{k+1} \sum_{k+2}^{\overline{m}-1}{}' \leq w_{k+1} \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}',$$

da immer $\underline{m} \geq \overline{m} - 1$ gilt.
Die Gewichtung $(w_1, \ldots, n)$ ist also stabil genau dann, wenn die Ungleichungen

$$w_i w_{i+3} < w_{i+1} w_{i+2}$$

für $i = 1, \ldots, n-3$ erfüllt sind. Insbesondere ist jede stabile Gewichtung $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ zu einer stabilen Gewichtung $(w_1, \ldots, w_n)$ fortsetzbar, indem wir w_n klein genug wählen. Genauer ist

$$\{w_n | (w_1, \ldots, w_n) \text{ stabil}\} = \{w_n | w_n < \frac{w_{n-1} w_{n-2}}{w_{n-3}}\}.$$

Beispiel 49 *Eine konkrete stabile Gewichtung ist gegeben durch*

$$w_i = i$$

für alle $i = 1, \ldots, n-3$. *Dann ist*

$$w_i w_{i+3} = i(i+3) = i^2 + 3i < i^2 + 3i + 2 = (i+1)(i+2) = w_{i+1} w_{i+2}.$$

3.3 Allgemein: Alternierende Orientierung mit Flügel

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
1 \arrow[dr] & & & & & & & & & n \arrow[dl] \\
& 2 \arrow[dr, dotted, no head] & & & & & & & n-1 \arrow[dl, dotted, no head] & \\
& & a-1 \arrow[dr] & & a+1 \arrow[dl] \arrow[r, dotted, no head] & b-1 \arrow[dr] & & b+1 \arrow[dl] & & \\
& & & a \arrow[rrr, dotted, no head] & & & b & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& & & & & & & & & n \arrow[dl] \\
& & & & & & & & n-1 \arrow[dl, dotted, no head] & \\
& & & a \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & b-1 \arrow[dr] & & b+1 \arrow[dl] & & \\
& & a-1 \arrow[dl, dotted, no head] & & a+1 \arrow[rr, dotted, no head] & & b & & & \\
& 2 \arrow[dl] & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Rekursive Anwendung des folgenden Lemma liefert, daß es zu jeder Orientierung dieser Art eine stabile Gewichtung gibt. Das Lemma ist konstruktiv, es lassen sich genau die Bedingungen an die Gewichtung angeben, die erfüllt sein müssen, damit sie stabil ist.

Lemma 50 *Sei Q' ein Köcher vom Typ A_m oder D_m mit stabiler Gewichtung $(w_1, \dots, w_m)$. Sei der Köcher Q vom Typ A_{m+1} bzw. D_{m+1} gegeben durch $Q_0 = Q'_0 \cup \{\gamma\}$, $Q_1 = Q'_1 \cup \{\gamma \to m\}$.*

$$
Q' = \cdots m \qquad Q = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & \gamma \arrow[dl] \\ \cdots m & \end{tikzcd}
$$

Weiter gelte $l(\gamma) \geq l(i)$ für alle $i = 1, \dots, m$. Sei V ein unzerlegbarer Q-Modul und $V' = V|_{Q'}$ die Einschränkung von V auf Q'.

1. *Ist V' ein unzerlegbarer Q'-Modul, so ist V stabil für die Gewichtung $(w_1, \dots, w_m, w_\gamma)$, falls w_γ klein genug ist.*

2. *Ist Q vom Typ A_{m+1}, so ist jede stabile Gewichtung von Q' zu einer stabilen Gewichtung von Q fortsetzbar.*

Beweis:
Ist $(\underline{\dim} V)_\gamma = 0$, so ist V bereits ein Q'-Modul. Also ist V stabil nach Voraussetzung. Sei nun $(\underline{\dim} V)_\gamma \neq 0$. Da Q vom Typ A_{m+1} oder D_{m+1} ist, ist dann $(\underline{\dim} V)_\gamma = 1$.
Sei $U \hookrightarrow V$ ein maximaler unzerlegbarer Untermodul. Sei $U' = U|_{Q'}$ die Einschränkung von U auf Q'. Auch U' ist dann wieder unzerlegbar und U' ist ein Untermodul von V'.

Schreibe wieder $a(W) = \sum_{i \in Q_0} (\underline{\dim} W)_i w_i$ und $b(W) = \sum_{i \in Q_0} (\underline{\dim} W)_i l(i) w_i$ für eine feste Levelfunktion $l : Q_0 \to \mathbb{Z}$. Weiter ist $b(V) = b(V') + l(\gamma) w_\gamma$ und $a(V) = a(V') + w_\gamma$, wobei wir $(\underline{\dim} V)_\gamma = 1$ ausnutzen. Dann gilt $x_V > x_{V'}$, denn:

$$
\begin{aligned}
x_V - x_{V'} = \frac{b(V)}{a(V)} - \frac{b(V')}{a(V')} = \frac{b(V') + l(\gamma) w_\gamma}{a(V') + w_\gamma} - \frac{b(V')}{a(V')} > 0 \\
\iff b(V')a(V') + l(\gamma) w_\gamma a(V') - b(V')a(V') - b(V') w_\gamma > 0 \\
\iff w_\gamma \big(a(V') l(\gamma) - b(V') \big) > 0 \iff l(\gamma) > x_{V'}
\end{aligned}
$$

Wegen $l(\gamma) \geq l(i)$ für alle $i = 1, \ldots, m$ hat V' einen einfachen Cokern $E(k)$ mit $l(\gamma) \geq l(k)$. Weiter ist V' stabil, also ist $l(k) > x_{V'}$. Damit gilt $x_V > x_{V'}$.
Zu zeigen ist nun $\theta_V(U) > 0$.

1. Sei zunächst $(\underline{\dim} U)_\gamma = 0$.

$$
\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & \swarrow & \\ \cdots\cdots 1 & & \end{array} = U \hookrightarrow V = \begin{array}{ccc} & & 1 \\ & \swarrow & \\ \cdots\cdots 1 & & \end{array}
$$

   In diesem Fall ist $U = U'$. Da U' ein Untermodul des stabilen Unzerlegbaren V' ist, gilt $x_U = x_{U'} \leq x_{V'}$. Also gilt mit obigem $x_U < x_V$, somit ist $\theta_V(U) > 0$.

2. Sei nun $(\underline{\dim} U)_\gamma = 1$.

$$
\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & \swarrow & \\ \cdots\cdots 1 & & \end{array} = U \hookrightarrow V = \begin{array}{ccc} & & 1 \\ & \swarrow & \\ \cdots\cdots 1 & & \end{array}
$$

   Dann ist U' ein echter Untermodul des Unzerlegbaren V'. Also gilt $\theta_{V'}(U') > 0$, da V' stabil nach Voraussetzung ist. Weiter folgt aus $x_V > x_{V'}$ auch $\theta_V(U') > \theta_{V'}(U')$. Damit haben wir:

$$
\theta_V(U) = \theta_V(U') + \theta_V(e_\gamma) > \underbrace{\theta_{V'}(U')}_{>0} + w_\gamma(\underbrace{x_V}_{>x_{V'}} - l(\gamma)).
$$

   Wegen $x(V') < l(\gamma)$ ist der zweite Summand kleiner 0, aber für w_γ klein genug ist $\theta_V(U) > 0$, da der erste Summand echt größer 0 ist.

Wir erhalten also nur im zweiten Fall eine Bedingung. Da Q darstellungsendlich ist, hat V nur endlich viele maximale unzerlegbare Untermoduln, also sind das nur endlich viele Bedingungen. Wir finden somit immer ein w_γ, daß diese erfüllt. Mit $b(V) = b(V') + l(\gamma) w_\gamma$, $a(V) = a(V') + w_\gamma$ und analog für U' können wir die Ungleichung $\theta_V(U) > 0$ auch explizit nach w_γ auflösen und erhalten dann

$$
w_\gamma < \frac{a(U')b(V') - b(U')a(V')}{l(\gamma) a(V'/U') - b(V'/U')}
$$

für $l(\gamma) > x_{V'/U'}$, sonst ist die Ungleichung immer erfüllt. Wegen $x_{U'} < x_{V'}$ ist der Zähler immer positiv.
Für den zweiten Teil des Lemmas beobachten wir, daß für einen Köcher Q vom Typ A_{m+1} die Einschränkung $V|_{Q'}$ auf Q' vom Typ A_m für einen (nicht

einfachen) Unzerlegbaren V immer unzerlegbar ist. Also können wir immer den ersten Teil des Lemmas anwenden und erhalten so endlich viele Bedingungen an w_γ, die wieder für w_γ klein genug erfüllbar sind. $\square$

Später werden wir für gewisse Typ D-Fälle die Ungleichungen für folgenden Fall benötigen:

Beispiel 51 *Sei Q' ein A_m-Köcher in alternierender Orientierung mit einem Pfeil $1 \to 2$. Hänge nun den Punkt γ an den Punkt 1 mit einem Pfeil $\gamma \to 1$ an.*

$$Q = \begin{tikzcd} \gamma \arrow[dr] & & & & \\ & 1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots\cdots \\ & & 2 & & 4 \cdots\cdots \end{tikzcd}$$

Das Lemma liefert nun die neuen Ungleichungen $w_\gamma < \frac{a(U')b(V')-b(U')a(V')}{l(\gamma)a(V'/U')-b(V'/U')}$ falls $x_{V'/U'} < l(\gamma) = 2$ ist. Letztere Bedingung ist hier immer erfüllt. Dabei ist $V' = A(1,k)$ und $U' = A(1,k-1)$ für k ungerade beziehungsweise $U' = A(1,k-2)$ für k gerade.

- *Sei zunächst k ungerade. Es ist $a(V'/U') = a(E(k)) = w_k$ und $b(V'/U') = b(E(k)) = w_k$ sowie*

  $$\begin{aligned} &a(A(1,k-1))b(A(1,k)) - b(A(1,k-1))a(A(1,k)) \\ &\qquad = \sum_{1}^{k-1}\sum_{1}^{k}{}' - \sum_{1}^{k-2}{}'\sum_{1}^{k} = w_k \sum_{2}^{k-1}{}'. \end{aligned}$$

  Daraus ergibt sich $w_\gamma < \sum{}'^{k-1}_{2}$ für k ungerade beziehungsweise es reicht

  $$w_\gamma < w_2.$$

- *Sei nun k gerade. Wir haben $a(V'/U') = a(A(k-1,k)) = w_{k-1} + w_k$ und $b(V'/U') = b(A(k-1,k)) = w_{k-1}$ sowie (vergleiche 3.2)*

  $$a(A(1,k-2))b(A(1,k)) - b(A(1,k-2))a(A(1,k)) = w_{k-1}\sum_{2}^{k-2}{}' - w_k \sum_{1}^{k-3}{}'.$$

  Zusammenfassen ergibt

  $$w_\gamma < \frac{1}{2w_k + w_{k-1}}\left(w_{k-1}\sum_{2}^{k-2}{}' - w_k\sum_{1}^{k-3}{}'\right) \quad \text{für } k = 4, \ldots, \overline{m} \text{ gerade.}$$

  Beachte: die Klammer ist > 0 wegen der üblichen Bedingungen für A_m in alternierender Orientierung.

3.4 Linear mit Knick

Dies ist auch ein Spezialfall von 3.3. Da wir die Gleichungen aber für Teil 4 von Satz 48 und auch später für Typ D brauchen, bestimmen wir hier die

Bedingungen explizit. Betrachte den folgenden A_n-Köcher

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
1 \arrow[dr] & & & & & \\
& 2 \arrow[dr, dotted, no head] & & & & n \arrow[dl, dotted, no head] \\
& & m-1 \arrow[dr] & & m+1 \arrow[dl] & \\
& & & m & &
\end{tikzcd}
.
$$

Es sind nur die Unzerlegbaren zu betrachten, die „um die Ecke gehen“ (sonst hätten wir einen linear orientierten Modul, der keine Bedingung liefert), das heißt $A(s,t)$ mit $1 \leq s < m$ und $m < t \leq n$. Die maximalen unzerlegbaren Untermoduln sind dann $A(s-1,t)$ und $A(s,t-1)$. Wähle die Levelfunktion l so, daß $l(m) = 0$ und $l(i) = m-i$ für $1 \leq i < m$ sowie $l(i) = i-m$ für $m < i \leq n$ ist. Dann ist

$$x_{A(s,t)} = \frac{\sum_{i=s}^{m-1}(m-i)w_i + \sum_{i=m+1}^{t}(i-m)w_i}{\sum_{i=s}^{t} w_i}.$$

Die Cokernungleichung zum ersten Untermodul ist

$$
\begin{aligned}
& x_{A(s,t)} < l(s) \\
\iff & \sum_{i=s}^{m-1}(m-i)w_i + \sum_{i=m+1}^{t}(i-m)w_i < (m-s)\left(\sum_{i=s}^{m-1} w_i + w_m + \sum_{i=m+1}^{t} w_i\right) \\
& \qquad \iff \frac{1}{m-s}\left(\sum_{i=s}^{m-1}(s-i)w_i + \sum_{i=m+1}^{t}(i-2m+s)w_i\right) < w_m
\end{aligned}
$$

Für $s = m-1$, $t = n$ wird das zu $\sum_{i=m+1}^{n}(i-m-1))w_i < w_m$. Aus dieser Ungleichung folgt obige für alle $1 \leq s < m < t \leq n$:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{m-s}\left(\sum_{i=s}^{m-1}(s-i)w_i + \sum_{i=m+1}^{t}(i-2m+s)w_i\right) \\
& \qquad \leq \underbrace{\sum_{i=s}^{m-1}(s-i)w_i}_{\leq 0} + \sum_{i=m+1}^{t}(i-m-\underbrace{(m-s)}_{\geq 1})w_i \\
& \qquad \qquad \leq \sum_{i=m+1}^{n}(i-(m+1))w_i < w_m
\end{aligned}
$$

Analog erhalten wir für den zweiten Untermodul

$$\sum_{i=1}^{m-1}((m-1)-i)w_i < w_m.$$

Für vorgebene w_i, $i \neq m$ finden wir also immer eine stabile Gewichtung durch Wahl von w_m groß genug.

Bemerkung 52 *An den Ungleichungen liest man ab, daß für Köcher vom Typ A die „Standardgewichtung" $w_p = 1$ für alle $p \in Q_0$ nur für die lineare Orientierung und den Köcher* $\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \searrow \; \swarrow & \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ *stabil ist. Dies sind genau die Köcher vom Typ A, für die alle Gewichtungen stabil sind.*
Aus den im nächsten Abschnitt bestimmten Ungleichungen für den Typ D lesen wir ab, daß dort die Standardgewichtung nur für D_4 (in allen Orientierungen) stabil ist.

4 Typ D_{n+2}

Wir bezeichnen die Punkte des Köchers wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \alpha & & \\ & \diagdown & \\ & & 1 - 2 - 3 \cdots\cdots (n-1) - n \;. \\ & \diagup & \\ \beta & & \end{array}$$

Wir unterscheiden zwischen D_{n+2}-Orientierungen, in der die Pfeile zwischen α und 1 sowie β und 1 in die gleiche Richtung gehen („symmetrischer Fall") und den Orientierungen, in denen diese beide Pfeile in verschiedene Richtungen gehen („asymmetrischer Fall"). Präzise heißt ein Köcher vom Typ D_{n+2} *symmetrisch* genau dann, wenn es einen nichttrivialen Köcherautomorphismus gibt.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen für die Unzerlegbaren (eindeutig bestimmt durch ihre Dimensionsvektoren) vom Typ D_{n+2}:

$$D(k,m) = \begin{array}{lll} 1 & & \\ & \diagdown & \\ & & 2 \cdots 2 - \underset{k}{2} - 1 \cdots \underset{m}{1} - 0 \cdots 0 \;, \\ & \diagup & \\ 1 & & \end{array} \quad D(0,m) = \begin{array}{lll} 1 & & \\ & \diagdown & \\ & & 1 \cdots \underset{m}{1} - 0 \cdots 0 \;, \\ & \diagup & \\ 1 & & \end{array}$$

$$A(k,m) = \begin{array}{lll} 0 & & \\ & \diagdown & \\ & & 0 \cdots 0 - \underset{k}{1} \cdots \underset{m}{1} - 0 \cdots 0 \;, \\ & \diagup & \\ 0 & & \end{array} \quad A(\alpha,m) = \begin{array}{lll} 1 & & \\ & \diagdown & \\ & & 1 \cdots \underset{m}{1} - 0 \cdots 0 \\ & \diagup & \\ 0 & & \end{array}$$

und analog für $A(\beta, m)$. Für die Einfachen schreiben wir $E(k) := A(k,k)$.

4.1 Symmetrischer Fall

Bis auf Dualität können wir annehmen, daß wir Pfeile $1 \to \alpha$ und $1 \to \beta$ haben.

Bemerkung 53 *Orientierungen mit Unterköcher*

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & 1 & & & 3 \\ \swarrow & & \searrow & & \\ \alpha & & & \beta & \end{array}$$

erlauben keine Trennung der Orbiten.

Beweis:

Betrachte den Unzerlegbaren $U = D(1,3) =$ $\begin{tikzcd}[sep=small] & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \\ 1 & & 1 & \end{tikzcd}$. Dieser hat den Untermodul $E(3) =$ $\begin{tikzcd}[sep=small] & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \\ 0 & & 0 & \end{tikzcd}$ und den Untermodul $D(0,3) =$ $\begin{tikzcd}[sep=small] & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \\ 1 & & 1 & \end{tikzcd}$ mit Cokern $E(1) =$ $\begin{tikzcd}[sep=small] & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{tikzcd}$. Angenommen, U ist stabil. Dann liefert der erste Untermodul die Ungleichung $\mu_3 > 0$, der Cokern $\mu_3 = \mu_1 < 0$, Widerspruch. $\square$

Analog sieht man, daß Unterköcher

$$\begin{tikzcd}[sep=small] & & & j \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & & \cdot \arrow[dl, dotted, no head] & & j+1 \\ & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\ \alpha & & \beta & & \end{tikzcd}$$

mit $j \geq 2$ nicht erlaubt sind.

Unter Beachtung dieser Bemerkung und der A_m-Orientierungen ohne stabile Gewichtung bleiben also (bis auf Dualität) nur folgende Orientierungen zu untersuchen:

$$\begin{tikzcd}[sep=small] & & & & & & & & & & n \arrow[dl] \\ & & & & & & & & & n-1 \arrow[dll, dotted, no head] & \\ & & 1 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \arrow[r, dotted, no head] & a-2 \arrow[dr] & & a \arrow[dl] & & & \\ \alpha & \beta & & 2 \arrow[rr, dotted, no head] & & & a-1 & & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[sep=small] & & & & & & & & & & n \arrow[dl] \\ & & & & & & & & & n-1 \arrow[dll, dotted, no head] & \\ \alpha \arrow[drr] & \beta \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & a-1 \arrow[l, dotted, no head] \arrow[dr] & & a+1 \arrow[dl] & & & \\ & & 1 & & 3 \arrow[r, dotted, no head] & \cdots & a & & & & \end{tikzcd}$$

mit $1 \leq a \leq n$.

Wie bei Typ A betrachten wir auch hier einige Spezialfälle separat:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & n \arrow[d] & \\
 & n-1 \arrow[d, dotted, no head] & \\
 & 3 \arrow[d] & \\
 & 2 \arrow[d] & \\
 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\alpha & & \beta
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & n \arrow[d] & \\
 & n-1 \arrow[d, dotted, no head] & \\
 & 3 \arrow[d] & \\
\alpha \arrow[dr] & 2 \arrow[d] & \beta \arrow[dl] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
\qquad \text{(Lineare Orientierung I und II)}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\alpha \arrow[dr] & \beta \arrow[d] & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & n \arrow[dl] \\
 & 1 & & 3 \arrow[r, dotted, no head] n-1 &
\end{tikzcd}
\text{ bzw. }
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\alpha \arrow[dr] & \beta \arrow[d] & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & n-1 \arrow[dr] & \\
 & 1 & & 3 \arrow[rr, dotted, no head] & & n
\end{tikzcd}
$$

(Alternierende Orientierung)

Wir sagen, eine Gewichtung ist *symmetrisch*, falls $w_\alpha = w_\beta$ gilt. Wir schreiben dann $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ für die Gewichtung $(w_\alpha, w_\beta, w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_0 = w_\alpha = w_\beta$. Nach Lemma 43 existiert eine stabile Gewichtung genau dann, wenn es eine symmetrische stabile Gewichtung gibt.

Satz 54 *Sei Q ein Köcher vom Typ D_{n+2} in symmetrischer Orientierung. Dann gilt:*

1. *Zu den Orientierungen der oben angegebenen Liste gibt es jeweils eine stabile Gewichtung. Die Ungleichungen, die W_Q^s bestimmen, werden jeweils am Ende der folgenden Abschnitte angegeben.*

2. *Sei Q vom Typ D_{n+2}, so daß eine stabile Gewichtung existiert, und sei Q' ein Unterköcher vom Typ D_{n+1}. Dann ist jede symmetrische stabile Gewichtung von Q' fortsetzbar. Es gibt immer nicht-symmetrische stabile Gewichtungen, die nicht fortsetzbar sind.*

3. *Die Menge $SW_Q^s(\mathbb{R})$ aller symmetrischen stabilen Gewichtungen über $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.*

Teil 3 folgt aus Teil 2 wie für Typ A wieder per Induktion aus Lemma 45.
Zum Beweis des ersten und zweiten Teils bestimmen wir im folgenden die Bedingungen an die Gewichtung, die erfüllt sein müssen, damit alle Unzerlegbaren stabil sind.
Bei den Rechnungen nutzen wir häufig die Symmetrie von Q aus. Das macht diese Fälle deutlich einfacher zu behandeln als die asymmetrischen Orientierungen.

4.1.1 Lineare Orientierung I

$$
\begin{array}{ccc}
 & n & \\
 & \downarrow & \\
 & n-1 & \\
 & \vdots & \\
 & 3 & \\
 & \downarrow & \\
 & 2 & \\
 & \downarrow & \\
 & 1 & \\
\swarrow & & \searrow \\
\alpha & & \beta
\end{array}
$$

Alle Typ A-Unterköcher sind linear orientiert, sie liefern also keine Bedingung an die Gewichtung $(w_\alpha, w_\beta, w_1, \ldots, w_n)$.
Um die maximalen unzerlegbaren Untermoduln zu bestimmen, untersuchen wir zunächst, welche Untermoduln die Unzerlegbaren haben. Wir haben

- $D(k', m') \hookrightarrow D(k, m) \iff k' \leq k, m' \leq m$,
- $D(0, m') \hookrightarrow D(k, m) \iff m' \leq m$,
- $A(\alpha, m'), A(\beta, m') \hookrightarrow D(k, m) \iff m' \leq k$,
- $A(k', m') \hookrightarrow D(k, m)$ gilt nie.
- $D(0, m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$,
- $A(k', m'), A(\alpha, m'), A(\beta, m') \hookrightarrow D(0, m)$ gilt nie, da mit Punkt 1 auch α, β zu einem Untermodul gehören.

Hieraus erhalten wir folgende Liste D_{n+2}-Unzerlegbarer mit ihren maximalen unzerlegbaren Untermoduln, wobei wir $D(0, m) \hookrightarrow D(1, m)$ mit dem ersten Punkt zusammenfassen.

1. $D(k-1, m) \hookrightarrow D(k, m)$ für $k = 1, \ldots, m-1$,
2. $D(k, m-1) \hookrightarrow D(k, m)$ für $k = 1, \ldots, m-2$,
3. $A(\alpha, m-1), A(\beta, m-1) \hookrightarrow D(m-1, m)$,
4. $D(0, m-1) \hookrightarrow D(0, m)$,

jeweils für $m = 2, \ldots, n$.
Sei die Levelfunktion $l : Q_0 \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$l(i) = i \text{ und } l(\alpha) = l(\beta) = 0.$$

Dann ist

$$x_{D(k,m)} = \frac{2\sum_{i=1}^{k} i w_i + \sum_{i=k+1}^{m} i w_i}{2\sum_{i=0}^{k} w_i + \sum_{i=k+1}^{m} w_i} \text{ und } x_{A(\alpha,k)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} i w_i}{w_\alpha + \sum_{i=1}^{k} w_i}$$

($x_{A(\beta,k)}$ analog). Dabei sei $w_0 = \frac{w_\alpha + w_\beta}{2}$. Im symmetrischen Fall ist dann gerade $w_0 = w_\alpha = w_\beta$.
Betrachte nun die einzelnen Fälle:

1. Der Cokern ist $E(k)$, die ensprechende Ungleichung ist also

$$\begin{aligned}
&x_{D(k,m)} < k \\
\iff\ & 2\sum_{i=1}^{k} iw_i + \sum_{i=k+1}^{m} iw_i < k\left(2w_0 + 2\sum_{i=1}^{k} w_i + \sum_{i=k+1}^{m} w_i\right) \\
\iff\ & \frac{1}{2k}\left(2\sum_{i=1}^{k}(i-k)w_i + \sum_{i=k+1}^{m}(i-k)w_i\right) < w_0
\end{aligned}$$

2. Der Cokern ist $E(m)$, wir erhalten also keine Bedingung.
3. Wir haben

$$\begin{aligned}
& x_{D(m-1,m)} > x_{A(\alpha,m-1)} \\
\iff\ & \left(w_\alpha + \sum_{i=1}^{m-1} w_i\right)\left(2\sum_{j=1}^{m-1} jw_j + mw_m\right) \\
& > \sum_{i=1}^{m-1} iw_i \left(w_\alpha + w_\beta + 2\sum_{j=1}^{m-1} w_j + w_m\right) \\
\iff\ & 2w_\alpha \sum_{j=1}^{m-1} jw_j + w_\alpha m w_m + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} w_i j w_j + \sum_{i=1}^{m-1} w_i m w_m \\
& > w_\alpha \sum_{i=1}^{m-1} iw_i + w_\beta \sum_{i=1}^{m-1} iw_i + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} iw_i w_j + \sum_{i=1}^{m-1} iw_i w_m \\
\iff\ & w_\alpha \sum_{i=1}^{m} iw_i + \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{(m-i)}_{>0} w_m w_i > w_\beta \sum_{i=1}^{m-1} iw_i
\end{aligned}$$

   Ebenso erhalten wir die symmetrische Bedingung.
4. Der Cokern ist $E(m)$, also erhalten wir keine Bedingung.

Insgesamt haben wir also die Ungleichungen ($m = 2, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m-1$)

$$w_0 > \frac{1}{2k}\left(2\sum_{i=1}^{k}(i-k)w_i + \sum_{i=k+1}^{m}(i-k)w_i\right) \qquad (1.)$$

$$w_\alpha \sum_{i=1}^{m} iw_i + \sum_{i=1}^{m-1}(m-i)w_m w_i > w_\beta \sum_{i=1}^{m-1} iw_i \qquad (\text{für } \beta \text{ analog})\ (3.)$$

für die Gewichtung $(w_\alpha, w_\beta, w_1, \ldots, w_n)$. Diese Bedingungen lassen sich für gebenene $w_1, \ldots, w_n$ immer erfüllen: Sei dazu $w_0 = w_\alpha = w_\beta$. Dann ist die zweite Bedingung erfüllt, die erste läßt sich durch die Wahl von w_0 groß genug erfüllen. Hier ist nicht jede stabile Gewichtung fortsetzbar. Die Gewichtung $w_\alpha = 2, w_\beta = 4, w_1 = 6, w_2 = 5$ ist stabil für D_4, läßt sich aber nicht zu einer stabilen Gewichtung von D_5 fortsetzen. Betrachte dazu die Ungleichung (1.) für $m = 3, k = 2$. Mit den angegebenen Werten wird diese zu $w_3 < \frac{1}{2}$. Die Ungleichung (3.) für $m = 3$ liefert aber $w_3 > \frac{12}{23} > \frac{1}{2}$.

Symmetrische stabile Gewichtungen, also Gewichtungen mit $w_\alpha = w_\beta = w_0$, lassen sich nach dem algemeinen Fall (4.1.3) immer fortsetzen. Explizit sehen wir das auch an den Ungleichungen: (3.) ist für symmetrische Gewichtungen immer erfüllt, die Bedingung (1.) für $m = n + 1$ läßt sich für w_{n+1} klein genug erfüllen, wenn sie schon für $m = n$ erfüllt ist.

4.1.2 Lineare Orientierung II

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & n \arrow[d] & \\
 & n-1 \arrow[d, dotted, no head] & \\
 & 3 \arrow[d] & \\
\alpha \arrow[dr] & 2 \arrow[d] & \beta \arrow[dl] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Die Typ A-Unterköcher sind

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & n \arrow[d] & & n \arrow[d] & \\
 & n-1 \arrow[d, dotted, no head] & & n-1 \arrow[d, dotted, no head] & \\
 & 3 \arrow[d] & \text{und} & 3 \arrow[d] & \\
\alpha \arrow[dr] & 2 \arrow[d] & & 2 \arrow[d] & \beta \arrow[dl] \\
 & 1 & & 1 &
\end{tikzcd} .$$

Diese liefern nur die Bedingung

$$\sum_{j=3}^{n} (j-2) w_j < w_1.$$

Zuerst geben wir wieder die unzerlegbaren Untermoduln Unzerlegbarer an.

- $D(k', m') \hookrightarrow D(k, m) \iff k' \leq k, m' \leq m$,
- $D(0, m') \hookrightarrow D(k, m)$ gilt nie, da falls α und β zu einem Untermodul gehören die Dimension am Punkt 1 schon 2 sein muß,
- $A(\alpha, m'), A(\beta, m') \hookrightarrow D(k, m) \iff m' \leq k$,
- $A(k', m') \hookrightarrow D(k, m) \iff k' = 1, m' \leq m$.
- $D(0, m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$,
- $A(\alpha, m'), A(\beta, m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$,
- $A(k', m') \hookrightarrow D(0, m) \iff k' = 1, m' \leq m$.

Die letzte Beziehung liefert wegen $A(1, m') \hookrightarrow A(\alpha, m') \hookrightarrow D(0, m)$ keinen minimalen Untermodul.
Damit erhalten wir folgende unzerlegbaren Moduln mit ihren maximalen unzerlegbaren Untermoduln:

1. $D(k-1,m) \hookrightarrow D(k,m)$ für $k = 2,\dots,m-1$,
2. $D(k,m-1) \hookrightarrow D(k,m)$ für $k = 1,\dots,m-2$,
3. $A(\alpha,m-1), A(\beta,m-1) \hookrightarrow D(m-1,m)$,
4. $A(1,m) \hookrightarrow D(1,m)$,
5. $D(0,m-1) \hookrightarrow D(0,m)$,
6. $A(\alpha,m), A(\beta,m) \hookrightarrow D(0,m)$,

mit $m = 2,\dots,n$.
Wähle die Levelfunktion l so, daß

$$l(i) = i-1 \text{ und } l(\alpha) = l(\beta) = 1$$

ist. Dann ist

$$x_{D(k,m)} = \frac{2w_0 + 2\sum_{i=2}^{k}(i-1)w_i + \sum_{i=k+1}^{m}(i-1)w_i}{2\sum_{i=0}^{k} w_i + \sum_{i=k+1}^{m} w_i}$$

und

$$x_{A(\alpha,k)} = \frac{w_\alpha + \sum_{i=2}^{k}(i-1)w_i}{w_\alpha + \sum_{i=1}^{k} w_i}.$$

Betrachte nun die einzelnen Fälle:

1. Der Cokern ist $E(k)$, die zugehörge Ungleichung ist dann

$$\begin{aligned} & x_{D(k,m)} < k-1 \\ \iff\ & 2w_0+2\sum_{i=2}^{k}(i-1)w_i+\sum_{i=k+1}^{m}(i-1)w_i < (k-1)\left(2\sum_{i=0}^{k} w_i + \sum_{i=k+1}^{m} w_i\right) \\ \iff\ & \frac{1}{2(k-1)}\left(2(2-k)w_0 + 2\sum_{i=2}^{k}(i-k)w_i + \sum_{i=k+1}^{m}(i-k)w_i\right) < w_1 \end{aligned}$$

2. Der Cokern ist $E(m)$, also erhalten wir keine Bedingung.

3. Es ist

$$
\begin{aligned}
& x_{A(\alpha,m-1)} < x_{D(m-1,m)} \\
\iff\quad & \left(w_\alpha + \sum_{i=1}^{m-1}(i-1)w_i\right)\left(2w_0 + 2\sum_{j=1}^{m-1} w_j + w_m\right) \\
& \qquad < \left(2w_0 + 2\sum_{i=1}^{m-1}(i-1)w_i + (m-1)w_m\right)\left(w_\alpha + \sum_{j=1}^{m-1} w_j\right) \\
\iff\quad & w_\alpha \left(2\sum_{j=1}^{m-1} w_j + w_m\right) \\
& \qquad\quad + \sum_{i=2}^{m-1}(i-1)w_i \left(2w_0 + 2\sum_{j=1}^{m-1} w_j + w_m\right) \\
& \qquad < w_\alpha \left(2\sum_{i=2}^{m-1}(i-1)w_i + (m-1)w_m\right) \\
& \qquad\quad + \sum_{j=1}^{m-1} w_j \left(2w_0 + 2\sum_{i=2}^{m-1}(i-1)w_i + (m-1)w_m\right) \\
\iff\quad & \sum_{i=1}^{m-1} 2(2-i)(w_\alpha - w_0)w_i < \left(\sum_{i=1}^{m-1}(m-i)w_i + (m-2)w_\alpha\right) w_m
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite ist positiv, die Ungleichung ist also erfüllt für w_α nahe bei w_0. Ebenso erhalten wir die entsprechende Bedingung für w_β.

4. Wir haben

$$
\begin{aligned}
& x_{D(1,m)} > x_{A(1,m)} \\
\iff\quad & \sum_{i=1}^{m} w_i \left(2w_0 + \sum_{j=2}^{m}(j-1)w_j\right) \\
& \qquad > \sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i \left(2w_0 + \underbrace{2w_1 + \sum_{j=2}^{m} w_j}_{=w_1+\sum_{j=1}^{m} w_j}\right) \\
\iff\quad & 2w_0 \sum_{i=1}^{m} w_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{m}(j-1)w_i w_j \\
& \qquad > 2w_0 \sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i + w_1 \sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m}(i-1)w_i w_j \\
\iff\quad & 2w_0 \sum_{i=2}^{m} \underbrace{(2-i)}_{\leq 0} w_i > w_1 \left(\sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i - 2w_0\right)
\end{aligned}
$$

Da die linke Seite ≤ 0 ist, läßt sich die Ungleichung nur erfüllen, falls $\sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i - 2w_0 < 0$ ist, d.h. $\sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i < 2w_0$. Dann können wir die obige Ungleichung umformen zu

$$\frac{2w_0}{2w_0 - \sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i} \sum_{i=2}^{m}(i-2)w_i < w_1.$$

Weiter gilt für alle $m = 2, \ldots, n$

$$\frac{2w_0}{2w_0 - \sum_{i=2}^{m}(i-1)w_i} \sum_{i=2}^{m}(i-2)w_i < \frac{2w_0}{2w_0 - \sum_{i=2}^{n}(i-1)w_i} \sum_{i=2}^{n}(i-2)w_i.$$

Es reicht also, diese Bedingung für n zu fordern. Diese Ungleichung ist eine Verschärfung der geerbten Typ A-Bedingung.

5. Der Cokern ist $E(m)$, also keine Bedingung.
6. Der Cokern ist $E(\beta)$, somit haben wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} x_{D(0,m)} < 1 \iff 2w_0 + \sum_{i=1}^{m}(i-1)w_i &< 2w_0 + \sum_{i=1}^{m} w_i \\ \iff \sum_{i=2}^{m}(i-2)w_i &< w_1 \end{aligned}$$

Dies ist die Ungleichung, die wir schon aus Typ A erhalten haben, also nichts Neues.

Zusammengefaßt haben wir somit die Bedingungen

$$\frac{1}{2(k-1)}\left(2(2-k)w_0 + 2\sum_{i=2}^{k}(i-k)w_i + \sum_{i=k+1}^{m}(i-k)w_i\right) < w_1$$
$$(\text{mit } m = 2, \ldots, n,\ k = 2, \ldots, m-1) \quad (1.)$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} 2(2-i)(w_\alpha - w_0)w_i < \left(\sum_{i=1}^{m-1}(m-i)w_i + (m-2)w_\alpha\right) w_m \quad (3.)$$

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1)w_i < 2w_0 \quad (4.)$$

$$\frac{2w_0}{2w_0 - \sum_{i=2}^{n}(i-1)w_i} \sum_{i=3}^{n}(i-2)w_i < w_1 \quad (\text{A, } 4.)$$

Die Bedingung (3.) muß natürlich auch für w_β statt w_α erfüllt sein. Diese Ungleichungen lassen sich offenbar für gegebene $w_2, \ldots, w_n$ für $w_\alpha = w_\beta (= w_0)$ sowie w_0 und w_1 groß genug erfüllen.
Wie im vorigen Fall ist wieder jede symmetrische stabile Gewichtung fortsetzbar. Die Ungleichung (3.) ist dann immer erfüllt, die anderen lassen sich wieder für w_{n+1} klein genug erfüllen, wenn die Ungleichungen für den Köcher D_{n+2} erfüllt sind.

Ist $w_\alpha \neq w_\beta$, gibt es wieder nicht-fortsetzbare Gewichtungen. Die Gewichtung $w_\alpha = 2, w_\beta = 3, w_1 = 100, w_2 = 2, w_3 = 1$ ist stabil für D_5. Für D_6 erhalten wir dann aus Ungleichung (3.), $m = 4$ die Bedingung $w_4 \geq \frac{99}{311}$. Die Ungleichung (4.), $n = 4$ ergibt $w_4 < \frac{95}{310}$. Da $\frac{95}{310} < \frac{99}{311}$ ist, ist das nicht erfüllbar.

4.1.3 Alternierende Orientierung

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[drr] & \beta \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots \\
& & 1 & & 3 \cdots
\end{tikzcd}$$

Aus Typ A erhalten wir die Ungleichungen $w_i w_{i+3} < w_{i+1} w_{i+2}$ für $i = 1, \ldots, n-3$ sowie $w_\alpha w_3 < w_1 w_2$ und $w_\beta w_3 < w_1 w_2$.

Setze (wie in 3.2) $\overline{m} := \begin{cases} m & m \text{ gerade} \\ m-1 & m \text{ ungerade} \end{cases}$ und $\underline{m} := \begin{cases} m-1 & m \text{ gerade} \\ m & m \text{ ungerade} \end{cases}$.

$\overline{m}$ ist also die größte gerade Zahl kleiner gleich m, $\underline{m}$ die größte ungerade Zahl kleiner gleich m.

Wieder zunächst die unzerlegbaren Untermoduln Unzerlegbarer:

- $D(k', m') \hookrightarrow D(k, m) \iff k' \leq k, m' \leq m$ und ($k' = k$ oder k' ungerade) und ($m' = m$ oder m' ungerade). Ist $m' = k$ ergibt auch k' ungerade einen Untermodul.
- $D(0, m') \hookrightarrow D(k, m)$ gilt nie, da falls α und β zu einem Untermodul gehören die Dimension am Punkt 1 schon 2 sein muß,
- $A(\alpha, m'), A(\beta, m') \hookrightarrow D(k, m) \iff m' \leq k$, m' ungerade,
- $A(k', m') \hookrightarrow D(k, m) \iff m' \leq m$, k' ungerade und ($m' = m$ oder m' ungerade). Ist $m' \leq k$, k' ungerade erhalten wir Untermoduln für m' ungerade oder $m' = k$.
- $D(0, m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$ und ($m' = m$ oder m' ungerade),
- $A(\alpha, m'), A(\beta, m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$ und ($m' = m$ oder m' ungerade),
- $A(k', m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$ und ($m' = m$ oder m' ungerade) und k' ungerade.

Für $D(k', m') \hookrightarrow D(k, m)$ müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden. Die Kombination $k' = k$, $m' = m$ liefert keinen echten Untermodul, ist $k' \neq k$ und $m' \neq m$ so ist der Untermodul nicht minimal. Bleibt also $k' = k$, m' ungerade bzw. $m' = m$, k' ungerade. Dies liefert die ersten vier Punkte der Liste unten. Der Fall $m' = k$, k' ungerade liefert nur einen minimalen Untermodul für m ungerade und $k = m - 1$, $k' = m - 2$ (5. der Liste).
$A(\alpha, m') \hookrightarrow D(k, m)$ ist für k ungerade minimal für $k = \overline{m} - 1$, $m' = k$ (6.). Für k gerade erhalten wir keinen minimalen Untermodul, da $A(\alpha, k-1) \hookrightarrow D(k-1, m) \hookrightarrow D(k, m)$ Für $A(k', m') \hookrightarrow D(k, m)$ erhalten wir minimale Untermoduln höchstens für $k' = 1$ und $m' = m$ im ersten Fall bzw. $m' = k$ im zweiten. $A(1, m) \hookrightarrow D(1, m)$ ist minimal (7.). $A(1, k) \hookrightarrow D(k, m)$ ist nicht minimal, da $A(1, k) \hookrightarrow A(\alpha, k) \hookrightarrow D(k, m)$.

Als minimale Untermoduln von $D(0,m)$ bleiben nur $D(0,\overline{m}-1)$ und $A(\alpha,m)$ bezeihungsweise $A(\beta,m)$. $A(1,m)$ ist kein minimaler Untermodul, da $A(1,m) \hookrightarrow A(\alpha,m)$.
Die unzerlegbaren Moduln mit ihren maximalen unzerlegbaren Untermoduln sind dann:

1. $D(k-1,m) \hookrightarrow D(k,m)$ für $2 \leq k \leq \underline{m}-1$, k gerade,
2. $D(k,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(k,m)$ für $2 \leq k \leq \overline{m}-2$, k gerade,
3. $D(k-2,m) \hookrightarrow D(k,m)$ für $3 \leq k \leq \overline{m}-1$, k ungerade,
4. $D(k,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(k,m)$ für $1 \leq k \leq \underline{m}-2$, k ungerade,
5. $D(m-2,m-1) \hookrightarrow D(m-1,m)$ für m ungerade,
6. $A(\alpha,\overline{m}-1), A(\beta,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(\overline{m}-1,m)$,
7. $A(1,m) \hookrightarrow D(1,m)$,
8. $D(0,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(0,m)$,
9. $A(\alpha,m), A(\beta,m) \hookrightarrow D(0,m)$.

jeweils für $m = 2,\ldots,n$.
Die Levelfunktion l sei gegeben durch

$$l(i) = \begin{cases} 0 & i \text{ ungerade} \\ 1 & i \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{sowie } l(\alpha) = l(\beta) = 1.$$

Setze $\sum_i^j := \sum_{\nu=i}^j w_\nu$ und $\sum_i'^j := \sum_{\nu=i,i+2,\ldots,j} w_\nu$ für $j-i$ gerade beziehungsweise $\sum_i'^j := \sum_{\nu=i,i+2,\ldots,j-1} w_\nu$ für $j-i$ ungerade (vergleiche Abschnitt 3.2).
Dann ist

$$\begin{aligned} x_{D(k,m)} &= \frac{2\sum_0'^k + \sum_{k+2}'^{\overline{m}}}{2\sum_0^k + \sum_{k+1}^m} \text{ für } k \text{ gerade} \\ x_{D(k,m)} &= \frac{2\sum_0'^{k-1} + \sum_{k+1}'^{\overline{m}}}{2\sum_0^k + \sum_{k+1}^m} \text{ für } k \text{ ungerade} \\ x_{A(\alpha,m)} &= \frac{w_\alpha + \sum_1'^{\overline{m}}}{w_\alpha + \sum_1^m} \end{aligned}$$

Wir machen folgenden Beobachtung: Es ist $x_{D(k,m)} = x^A_{A(k,m)}$, wobei letzteres der x-Wert des Unzerlegbaren $A(k,m)$ zum Köcher vom Typ A_{m+1} in alternierender Orientierung mit Gewichtung $(2w_0, 2w_1, \ldots, 2w_k, w_{k+1}, \ldots, w_m)$ ist.
Betrachte nun die einzelnen Fälle:

1. Der Cokern ist der Einfache $E(k)$, k gerade. Der Cokern ist also ein einfacher Cokern mit maximalen Level, wir erhalten keine Bedingung.

2. Die Begingung ist $x_{D(k,\overline{m}-1)} < x_{D(k,m)}$ beziehungsweise unter Verwendung der obigen Beobachtung $x^A_{A(k,\overline{m}-1)} < x^A_{A(k,m)}$. Da $A(k,\overline{m}-1) \hookrightarrow A(k,m)$ ist, müssen wir die Stabilitätsbedingungen vom Typ A_{m+1} zur Gewichtung $(2w_0, 2w_1, \ldots, 2w_k, w_{k+1}, \ldots, w_m)$ übernehmen. Die einzige neue Bedingung zu den schon geerbten Bedingungen ist $2w_k w_{k+3} < w_{k+1} w_{k+2}$.

3. Der Cokern ist $A(k-1,k)$, die zugehörige Ungleichung ist dann

$$
\begin{aligned}
& x_{D(k,m)} < x_{A(k-1,k)} \\
\iff\quad & \left(2\sum_0^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right)(w_{k-1}+w_k) < w_{k-1}\left(2\sum_0^{k} + \sum_{k+1}^{m}\right) \\
\iff\quad & w_{k-1}\left(2\sum_0^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) + w_k\left(2\sum_0^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) \\
& \qquad < w_{k-1}\left(2\sum_0^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) + w_{k-1}\left(2\sum_1^{k}{}' + \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}'\right) \\
\iff\quad & w_k\left(2\sum_0^{k-3}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) < w_{k-1}\left(2\sum_1^{k-2}{}' + \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}'\right)
\end{aligned}
$$

Ist m ungerade, erhalten wir die gleiche Ungleichung wie für $m-1$, nur auf der rechten Seite kommt der Summand $w_{k-1}w_m$ hinzu. Dann ist die Bedingung also erfüllt. Übrig bleibt die Ungleichung für gerades m.

4. Wie im Fall für k gerade (2.) können wir dies auf den Typ A_{m+1} zur Gewichtung $(2w_0, 2w_1, \ldots, 2w_k, w_{k+1}, \ldots, w_m)$ zurückführen.

5. Der Cokern ist $A(m-1,m)$, die ensprechende Ungleichung ist

$$
\begin{aligned}
& x_{D(m-1,m)} < x_{A(m-1,m)} \\
\iff\quad & 2\sum_0^{m-1}{}' \cdot (w_{m-1}+w_m) < w_{m-1}\left(2\sum_0^{m-1} + w_n\right) \\
\iff\quad & 2\sum_0^{m-3}{}' \cdot w_{m-1} + 2\sum_0^{m-3}{}' \cdot w_n + 2w_{m-1}^2 + 2w_{m-1}w_m \\
& \qquad < 2w_{m-1}\sum_0^{m-3}{}' + 2w_{m-1}\sum_1^{m-2}{}' + 2w_{m-1}^2 + w_{m-1}w_m \\
\iff\quad & w_m\left(\sum_0^{m-3}{}' + \frac{1}{2}w_{m-1}\right) < w_{m-1}\sum_1^{m-2}{}'
\end{aligned}
$$

6. Betrachte den α-Fall. Der Cokern ist dann $A(\beta,m)$, also (setze dabei for-

mal $w_{\overline{m}+1} = 0$ im Fall m gerade)

$$
\begin{aligned}
& x_{D(\overline{m}-1,m)} < x_{A(\beta,m)} \\
\iff \quad & \left(2\sum_0^{\overline{m}-2}{}' + w_{\overline{m}}\right)\left(w_\beta + \sum_1^m\right) \\
& < \left(2\sum_0^{\overline{m}-1} + w_{\overline{m}} + w_{\overline{m}+1}\right)\left(w_\beta + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right) \\
\iff \quad & \left(w_\beta + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right)\left(2\sum_0^{\overline{m}-2}{}' + w_{\overline{m}}\right) + \sum_1^{\underline{m}}{}' \cdot \left(2\sum_0^{\overline{m}-2}{}' + w_{\overline{m}}\right) \\
& < \left(w_\beta + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right)\left(2\sum_0^{\overline{m}-2}{}' + w_{\overline{m}}\right) \\
& \qquad + \left(w_\beta + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right)\left(2\sum_1^{\overline{m}-1}{}' + w_{\overline{m}+1}\right) \\
\iff \quad & \sum_1^{\underline{m}}{}' \cdot \left(2\sum_0^{\overline{m}-2}{}' + w_{\overline{m}}\right) < \left(w_\beta + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right)\left(2\sum_1^{\overline{m}-1}{}' + w_{\overline{m}+1}\right)
\end{aligned}
$$

Im Fall m ungerade (d.h. $\overline{m} = m-1$, $\underline{m} = m$) erhalten wir daraus

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_1^m{}'\sum_0^{m-3}{}' + w_{m-1}\sum_1^m{}' < 2w_\beta\sum_1^{m-2}{}' + w_\beta w_m + 2\sum_2^{m-1}{}'\sum_1^{m-2}{}' + \sum_2^{m-1}{}' w_m \\
& \qquad \iff w_m\left(w_\alpha + \sum_2^{m-3}{}'\right) < \sum_1^{m-2}{}' \cdot (w_\beta - w_\alpha + w_{m-1})
\end{aligned}
$$

Falls $w_0 = w_\alpha = w_\beta$ ist, folgt diese Ungleichung schon aus den Typ A-Ungleichungen. Betrachte nun den Fall m gerade (d.h. $\overline{m} = m$, $\underline{m} = m-1$):

$$
\begin{aligned}
& \sum_1^{m-1}{}' \cdot \left(2\sum_0^{m-2}{}' + w_m\right) < 2\left(w_\beta + \sum_2^m{}'\right)\sum_1^{m-1}{}' \\
& \qquad \iff 2w_0 + w_m < 2w_\beta + 2w_m \iff w_\alpha - w_\beta < w_m
\end{aligned}
$$

Zusammen mit der Ungleichung des β-Falls haben wir dann $|w_\alpha - w_\beta| < w_m$.

7. Der Cokern ist $D(0,1)$, also haben wir

$$
\begin{aligned}
& x_{D(1,m)} < x_{D(0,1)} \\
\iff \quad & (2w_0 + w_1)\left(2w_0 + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right) < 2w_0\left(2w_0 + 2w_1 + \sum_2^{m}\right) \\
\iff \quad & 2w_0\left(2w_0 + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right) + w_1\left(2w_0 + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right) \\
& \qquad < 2w_0\left(2w_0 + \sum_2^{\overline{m}}{}'\right) + 2w_0\left(2w_1 + \sum_3^{m}{}'\right) \\
\iff \quad & w_1 \sum_2^{\overline{m}}{}' < 2w_0 \sum_1^{m}{}'
\end{aligned}
$$

8. Es ist $x_{D(0,m)} = x^A_{A(0,m)}$ und $x_{D(0,\overline{m}-1)} = x^A_{A(0,\overline{m}-1)}$, die rechten Seiten jeweils zum Typ A_{m+1} in alternierender Orientierung mit Gewichtung $(2w_0, w_1, \ldots, w_m)$. Da $A(0,\overline{m}-1)$ Untermodul von $A(0,m)$ ist, brauchen wir genau die Stabilitätsbedingungen zu dieser Gewichtung. Die einzige neue Ungleichung ist $2w_0w_3 < w_1w_2$.

9. Der Cokern ist der Einfache $E(\beta)$ mit maximalen Level $l(\beta) = 1$, also erhalten wir keine Bedingung.

Zusammen erhalten wir damit die Ungleichungen $(m = 2, \ldots, n)$

$$2w_iw_{i+3} < w_{i+1}w_{i+2} \qquad \text{(für } i = 0, \ldots, n-3\text{) (A, 2., 4., 8.)}$$

$$w_k\left(2\sum_0^{k-3}{}' + \sum_{k+1}^{m}{}'\right) < w_{k-1}\left(2\sum_1^{k-2}{}' + \sum_{k+2}^{m-1}{}'\right)$$
$$(m \text{ gerade}, 3 \le k \le m-1,\ k \text{ ungerade}) \text{ (3.)}$$

$$w_m\left(\sum_0^{m-3}{}' + \frac{1}{2}w_{m-1}\right) < w_{m-1}\sum_1^{m-2}{}' \qquad (m \text{ ungerade}) \text{ (5.)}$$

$$w_m\left(w_\alpha + \sum_2^{m-3}{}'\right) < \sum_1^{m-2}{}' \cdot (w_\beta - w_\alpha + w_{m-1}) \qquad (m \text{ ungerade}) \text{ (6.)}$$

$$|w_\alpha - w_\beta| < w_m \qquad (m \text{ gerade}) \text{ (6.)}$$

$$w_1\sum_2^{\overline{m}}{}' < 2w_0\sum_1^{m}{}' \qquad \text{(7.)}$$

Im Fall $w_0 = w_\alpha = w_\beta$ und unter Berücksichtigung der A_{n+1}-Ungleichungen vereinfacht sich das zu den Ungleichungen

$$2w_i w_{i+3} < w_{i+1} w_{i+2} \qquad (i = 0, \ldots, n-3) \text{ (A, 2., 4., 8.)}$$

$$w_k \left(2 \sum_{0}^{k-3}{}' + \sum_{k+1}^{m}{}' \right) < w_{k-1} \left(2 \sum_{1}^{k-2}{}' + \sum_{k+2}^{m-1}{}' \right)$$

$$(m \text{ gerade}, 3 \leq k \leq m-1, k \text{ ungerade}) \text{ (3.)}$$

$$w_m \left(\sum_{0}^{m-3}{}' + \frac{1}{2} w_{m-1} \right) < w_{m-1} \sum_{1}^{m-2}{}' \qquad (m \text{ ungerade}) \text{ (5.)}$$

$$w_1 \sum_{2}^{\overline{m}}{}' < 2w_0 \sum_{1}^{\underline{m}}{}' \qquad (7.)$$

Hier läßt sich wieder nicht jede nicht-symmetrische stabile Gewichtung fortsetzen. $w_\alpha = 1, w_\beta = 3, w_1 = 2, w_2 = \frac{15}{4}, w_3 = 1$ ist stabil für D_5. Für D_6 erhalten wir dann die Ungleichungen $w_4 > 2$ (aus $(6.), m = 4$) und $w_4 < \frac{15}{16} < 2$ (aus $(A), i = 1$).
Die Fortsetzbarkeit im symmetrischen Fall folgt aus Lemma 56.
Wir geben nun noch eine konkrete stabile Gewichtung an:

Beispiel 55 *Sei $w_\alpha = w_\beta = w_0$, $w_i = 2^{-i^2}$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Dann lösen die w_i die Ungleichungen, das heißt, die Gewichtung $(w_0, \ldots, w_n)$ ist stabil.*

Beweis:
Mit diesen Wahlen ist

$$w_{j-1} w_{i+1} = 2^{-(i+1)^2 - (j-1)^2} = 2^{-i^2 - j^2} 2^{2(j-i-1)} = \underbrace{4^{j-i-1}}_{<1 \iff j < i+1} w_i w_j$$

Also ist $w_{j-1} w_{i+1} < w_i w_j$ genau dann erfüllt, wenn $j < i+1$ ist. In diesem Fall ist sogar $2w_{j-1} w_{i+1} < w_i w_j$, also sind die A_{n+1}-Ungleichungen erfüllt.
Weiter gilt

$$\sum_{i \geq j} w_i = \sum_{i \geq j} 2^{-i^2} = \sum_{k \geq 0} 2^{-(j+k)^2} = 2^{-j^2} \underbrace{\sum_{k \geq 0} 2^{-k(k+2j)}}_{< \frac{1}{1-1/2} = 2} < 2w_j$$

Damit erhalten wir (für (5.))

$$w_m \left(\sum_{0}^{m-3}{}' + \frac{1}{2} w_{m-1} \right) < w_m (2w_0) < 2 \frac{1}{2} w_{m-1} w_1 < w_{m-1} \sum_{1}^{m-2}{}'$$

und (für (3.))

$$w_k \left(2 \sum_{0}^{k-3}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}' \right) < w_k (2 \cdot 2w_0) < 4 \frac{1}{2} w_{k-1} w_1$$

$$= 2w_{k-1} w_1 < w_{k-1} \left(2 \sum_{1}^{k-2}{}' + \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}' \right)$$

sowie schließlich (für (7.))

$$w_1 \sum_2^{\overline{m}}{}' < 2w_1w_2 = 2w_1 \cdot 2^{-4} < 2w_0w_1 < 2w_0 \sum_1^{m}{}'.$$

□

4.1.4 Allgemein: Alternierende Orientierung mit Flügel

Ähnlich wie beim Typ A benutzen wir ein Fortsetzungslemma.

Lemma 56 *Sei Q' ein Köcher vom Typ D_{m+2} in symmetrischer Orientierung mit Punkten $Q_0 = \{\alpha, \beta, 1, \ldots, m\}$. Sei der Köcher Q vom Typ D_{m+3} gegeben durch $Q_0 = Q'_0 \cup \{\gamma\}$, $Q_1 = Q'_1 \cup \{\gamma \to m\}$.*

$$Q' = \quad \cdots\cdots\, m \qquad Q = \quad \cdots\cdots\, m \swarrow \gamma$$

Weiter gelte $l(\gamma) \geq l(i)$ für alle $i = \alpha, \beta, 1, \ldots, m$. Dann ist jede stabile symmetrische Gewichtung $(w_0, w_1, \ldots, w_m)$ von Q' fortsetzbar zu einer stabilen symmetrischen Gewichtung $(w_0, w_1, \ldots, w_m, w_\gamma)$ von Q mit genügend kleinem w_γ.

Beweis:
Sei V ein unzerlegbarer Q-Modul und $V' = V|_{Q'}$ die Einschränkung auf Q'. Ist V' unzerlegbar, so können wir den ersten Teil von Lemma 50 anwenden und erhalten, daß für genügend kleines w_γ V stabil ist bezüglich der Gewichtung $(w_\alpha, w_\beta, w_1, \ldots, w_m, w_\gamma)$.
Wir müssen also noch den Fall betrachten, daß V' zerlegbar ist. Dies tritt genau dann auf, wenn $V = D(m, \gamma)$ ist. In diesem Fall ist $V' = A(\alpha, m) \oplus A(\beta, m)$. Da Q' symmetrisch ist und $w_\alpha = w_\beta$ gilt, ist $x_{A(\alpha,m)} = x_{A(\beta,m)}$. Wir schreiben $x_{V'}$ für diesen Wert und $\theta_{V'}$ für $\theta_{A(\alpha,m)} = \theta_{A(\beta,m)}$.[2]
Sei nun wieder U ein maximaler unzerlegbarer Untermodul von V. Dann ist auch U' nicht notwendig unzerlegbar. U' ist aber Erweiterung von Untermoduln $U'_\delta \hookrightarrow A(\delta, m)$ für $\delta = \alpha, \beta$.
Wie in Lemma 50 gilt nun wieder $x_V > x_{V'}$ und $\theta_V(U'_\delta) > \theta_{V'}(U'_\delta)$.
Ist $(\underline{\dim} U)_\gamma = 0$, so ist

$$\theta_V(U) = \theta_V(U') = \theta_V(U'_\alpha) + \theta_V(U'_\beta) > \theta_{V'}(U'_\alpha) + \theta_{V'}(U'_\beta) \geq 0.$$

Sei nun $(\underline{\dim} U)_\gamma = 1$. Dann ist $V' \neq U'$, sonst wäre auch $V = U$.
Wir haben

$$\theta_V(U) = \theta_V(U') + w_\gamma\big(x_V - l(\gamma)\big) > \theta_{V'}(U'_\alpha) + \theta_{V'}(U'_\beta) + w_\gamma\big(x_{V'} - l(\gamma)\big).$$

Wegen $V' \neq U'$ ist $U'_\delta \neq A(\delta, m)$ für ein $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, also ist $\theta_{V'}(U'_\alpha) + \theta_{V'}(U'_\beta) > 0$. Insgesamt ist die Ungleichung also wieder für w_γ klein genug erfüllbar.
Zusammen mit den endlich vielen Ungleichungen aus Lemma 50 haben wir dann endliche viele Ungleichungen vom Typ $w_\gamma < \Xi$, also finden wir ein kleines w_γ, das die Gewichtung fortsetzt. □

Nicht symmetrische nicht fortsetzbare stabile Gewichtungen finden wir wie für die linearen Orientierungen (Abschnitte 4.1.1 und 4.1.2).

[2] Hier geht entscheidend die Existenz des nichttrivialen Köcherautomorphismus ϕ ein. Daher ist der Fall der asymmetrischen Orientierung deutlich schwieriger.

4.2 Asymmetrischer Fall

Hier gehen die Pfeile zwischen 1 und α beziehungsweise 1 und β in verschiedene Richtungen, bis auf Dualität haben wir also Pfeile $\alpha \to 1$ und $1 \to \beta$. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse zum Köcher A_m bleiben nur die folgenden Orientierungen zu untersuchen:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
&&&&&&&&&& n \arrow[dl] \\
&&&&&&&&& n-1 & \\
\alpha \arrow[dr] && 2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rrr, dotted, no head] &&& a-1 \arrow[dr] && a+1 \arrow[dl] \arrow[urr, dotted, no head] &&& \\
& 1 \arrow[dl] && 3 \arrow[rr, dotted, no head] && {} & a &&&& \\
\beta &&&&&&&&&&
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
&&&&&&&&& n \arrow[dl] \\
&&&&&&&& n-1 & \\
\beta \arrow[dr] &&&&&&&&& \\
& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && 3 \arrow[dl] \arrow[rr, dotted, no head] && a-2 \arrow[dr] && a \arrow[dl] \arrow[uur, dotted, no head] && \\
\alpha && 2 \arrow[rrrr, dotted, no head] &&&& a-1 &&&
\end{tikzcd}
$$

mit $1 \leq a \leq n$.
Wieder betrachten wir einige Spezialfälle separat:

$$
\begin{tikzcd}
& n \arrow[d] \\
& n-1 \arrow[d, dotted, no head] \\
& 3 \arrow[d] \\
\alpha \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\
& 1 \arrow[dl] \\
\beta &
\end{tikzcd}
$$

(Lineare Orientierung)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\alpha \arrow[dr] && 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots\cdots && n \arrow[dl] \\
& 1 \arrow[dl] && 3 \arrow[r, dotted, no head] & n-1 & \\
\beta &&&&&
\end{tikzcd}
\quad \text{bzw.} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\alpha \arrow[dr] && 2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] && n-1 \arrow[dr] & \\
& 1 \arrow[dl] && 3 \arrow[r, dotted, no head] & {} & n \\
\beta &&&&&
\end{tikzcd}
$$

(Alternierende Orientierung)

Für die lineare Orientierung zeigen wir, daß es immer eine stabile Gewichtung gibt, in den anderen Fällen geben wir die Stabilitätsungleichungen an. In allen Fällen gibt es nicht-fortsetzbare stabile Gewichtungen.
Wegen der im Vergleich zum vorigen Abschnitt fehlenden Symmetrie, können wir nicht mehr aus der Nichtexistenz einer symmetrischen stabilen Gewichtung auf die Nichtexistenz stabiler Gewichtungen schließen.

4.2.1 Lineare Orientierung

$$\begin{tikzcd}
 & n \arrow[d] \\
 & n-1 \arrow[d, dotted, no head] \\
 & 3 \arrow[d] \\
 \alpha \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\
 & 1 \arrow[dl] \\
 \beta &
\end{tikzcd}$$

Wir haben die A_{n+1}-Unterköcher

$$\begin{tikzcd}
 & n \arrow[d] \\
 & n-1 \arrow[d, dotted, no head] \\
 & 3 \arrow[d] \\
 \alpha \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\
 & 1
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
 & n \arrow[d] \\
 & n-1 \arrow[d, dotted, no head] \\
 & 3 \arrow[d] \\
 & 2 \arrow[d] \\
 & 1 \arrow[dl] \\
 \beta &
\end{tikzcd} .$$

Der erste liefert die Ungleichung $\sum_{j=3}^{n}(j-2)w_j < w_1$, der zweite als linear orientierter nichts.
Nun die unzerlegbaren Untermoduln der echten Typ D-Unzerlegbaren (vergleiche auch den entsprechenden Abschnitt bei symmetrischer Typ D-Orientierung):

- $D(k', m') \hookrightarrow D(k, m) \iff k' \leq k, m' \leq m$,
- $D(0, m') \hookrightarrow D(k, m) \iff m' \leq k$,
- $A(\alpha, m') \hookrightarrow D(k, m)$ tritt nicht auf, da mit dem Punkt α auch β zu einem Untermodul gehört,
- $A(\beta, m') \hookrightarrow D(k, m) \iff m' \leq m$,
- $A(k', m') \hookrightarrow D(k, m) \iff k' = 1, m' \leq k$.
- $D(0, m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$,
- $A(\beta, m') \hookrightarrow D(0, m) \iff m' \leq m$,
- $A(k', m'), A(\alpha, m') \hookrightarrow D(0, m)$ tritt nicht auf, da mit Punkt 1 auch β zu einem Untermodul gehört.

Hieraus erhalten wir folgende Liste echter D_{n+2}-Unzerlegbaren mit ihren maximalen unzerlegbaren Untermoduln.

1. $D(k-1, m) \hookrightarrow D(k, m)$ für $k = 2, \ldots, m-1$,
2. $D(k, m-1) \hookrightarrow D(k, m)$ für $k = 1, \ldots, m-2$,

3. $D(0, m-1) \hookrightarrow D(m-1, m)$,
4. $A(\beta, m) \hookrightarrow D(1, m)$,
5. $A(1, m-1) \hookrightarrow D(m-1, m)$,
6. $D(0, m-1) \hookrightarrow D(0, m)$,
7. $A(\beta, m) \hookrightarrow D(0, m)$,

jeweils für $m = 2, \ldots, n$.
Die Levelfunktion $l : Q_0 \to \mathbb{Z}$ sei

$$l(i) = i \text{ und } l(\alpha) = 2, l(\beta) = 0.$$

Dann ist

$$x_{D(k,m)} = \frac{2w_\alpha + 2\sum_{i=1}^{k} iw_i + \sum_{i=k+1}^{m} iw_i}{w_\alpha + w_\beta + 2\sum_{i=1}^{k} w_i + \sum_{i=k+1}^{m} w_i}$$

und

$$x_{A(\alpha,m)} = \frac{2w_\alpha + \sum_{i=1}^{m} iw_i}{w_\alpha + \sum_{i=1}^{m} w_i} \text{ sowie } x_{A(\beta,m)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} iw_i}{w_\beta + \sum_{i=1}^{m} w_i}.$$

Betrachte nun die einzelnen Fälle:

1. Der Cokern ist $E(k)$, die ensprechende Ungleichung ist also

$$\begin{aligned}
&x_{D(k,m)} < l(k) = k \\
\iff\ & 2w_\alpha + 2\sum_{i=1}^{k} iw_i + \sum_{i=k+1}^{m} iw_i < k\left(w_\alpha + w_\beta + 2\sum_{i=1}^{k} w_i + \sum_{i=k+1}^{m} w_i\right) \\
\iff\ & (2-k)w_\alpha - kw_\beta + 2\sum_{i=2}^{k}(i-k)w_i + \sum_{i=k+1}^{m}(i-k)w_i < 2(k-1)w_1
\end{aligned}$$

2. Der Cokern ist der Einfache $E(m)$, also ein Cokern mit maximalen Level. Wir erhalten somit keine Bedingung.

3. Wir haben

$$\begin{aligned}
& x_{D(0,m-1)} < x_{D(m-1,m)} \\
\iff\ & \left(2w_\alpha + \sum_{i=1}^{m-1} iw_i\right)\left(w_\alpha + w_\beta + 2\sum_{i=1}^{m-1} w_i + w_m\right) \\
& \quad < \left(2w_\alpha + 2\sum_{i=1}^{m-1} iw_i + mw_m\right)\left(w_\alpha + w_\beta + \sum_{i=1}^{m-1} w_i\right) \\
\iff\ & 4w_\alpha \sum_{i=1}^{m-1} w_i + 2w_\alpha w_m + (w_\alpha + w_\beta)\sum_{i=1}^{m-1} iw_i + w_m \sum_{i=1}^{m-1} iw_i \\
& < 2w_\alpha \sum_{i=1}^{m-1} w_i + (w_\alpha + w_\beta)\left(2\sum_{i=1}^{m-1} iw_i + mw_m\right) + mw_m \sum_{i=1}^{m-1} w_i \\
\iff\ & \sum_{i=2}^{m}\left((2-i)w_\alpha - iw_\beta + (i-m)w_m\right) w_i < w_1\left(w_\beta - w_\alpha + (m-1)w_m\right)
\end{aligned}$$

Beachte: Die linke Seite ist < 0, die Ungleichung also für $w_\alpha = w_\beta$ immer erfüllt.

4. Der Cokern ist $A(\alpha, 1)$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
& x_{D(1,m)} < x_{A(\alpha,1)} \\
\iff\quad & \left(2w_\alpha + 2w_1 + \sum_{i=2}^{m} iw_i\right)(w_\alpha + w_1) \\
& \qquad < \left(w_\alpha + w_\beta + 2w_1 + 2\sum_{i=2}^{m} w_i\right)(2w_\alpha + w_1) \\
\iff\quad & 2w_\alpha^2 + 2w_\alpha w_1 + w_\alpha \sum_{i=2}^{m} iw_i + 2w_\alpha w_1 + 2w_1^2 + w_1 \sum_{i=2}^{m} iw_i \\
& \qquad < 2w_\alpha w_\beta + 2w_\alpha^2 + 4w_\alpha w_1 + 4w_\alpha \sum_{i=2}^{m} w_i \\
& \qquad\qquad + w_\beta w_1 + w_\alpha w_1 + 2w_1^2 + 2w_1 \sum_{i=2}^{m} w_i \\
\iff\quad & w_\alpha \left(\sum_{i=2}^{m} (i-4)w_i - 2w_\beta\right) < w_1 \left(w_\alpha + w_\beta - \sum_{i=3}^{m} (i-2)w_i\right)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
& x_{A(1,m-1)} < x_{D(m-1,m)} \\
\iff\quad & \sum_{i=1}^{m-1} iw_i \left(w_\alpha + w_\beta + 2\sum_{i=1}^{m-1} w_i + w_m\right) \\
& \qquad < \left(2w_\alpha + 2\sum_{i=1}^{m-1} iw_i + mw_m\right) \sum_{i=1}^{m-1} w_i \\
\iff\quad & \sum_{i=2}^{m-1} \left((i-2)w_\alpha + iw_\beta + (i-m)w_m\right) w_i \\
& \qquad\qquad < w_1((m-1)w_m + w_\alpha - w_\beta)
\end{aligned}$$

6. Der Cokern ist der Einfache $E(m)$ mit maximalen Level, also erhalten wir keine Bedingung.

7. Der Cokern ist $E(\alpha)$, somit haben wir

$$\begin{aligned}
x_{D(0,m)} < l(\alpha) = 2 \iff & 2w_\alpha + \sum_{i=1}^{m} iw_i < 2w_\alpha + 2w_\beta + 2\sum_{i=1}^{m} w_i \\
\iff & \sum_{i=3}^{m} (i-2)w_i - 2w_\beta < w_1
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung folgt aus der von A_{n+1} geerbten Bedingung.

Insgesamt haben wir die also die Ungleichungen ($m = 2, \dots, n$, $k = 2, \dots, m-1$)

$$\sum_{j=3}^{n}(j-2)w_j < w_1 \tag{A}$$

$$(2-k)w_\alpha - kw_\beta + 2\sum_{i=2}^{k}(i-k)w_i + \sum_{i=k+1}^{m}(i-k)w_i < 2(k-1)w_1 \tag{1.}$$

$$\sum_{i=2}^{m}\left((2-i)w_\alpha - iw_\beta + (i-m)w_m\right)w_i < w_1\left(w_\beta - w_\alpha + (m-1)w_m\right) \tag{3.}$$

$$w_\alpha\left(\sum_{i=2}^{m}(i-4)w_i - 2w_\beta\right) < w_1\left(w_\alpha + w_\beta - \sum_{i=3}^{m}(i-2)w_i\right) \tag{4.}$$

$$\sum_{i=2}^{m-1}\left((i-2)w_\alpha + iw_\beta + (i-m)w_m\right)w_i < w_1((m-1)w_m + w_\alpha - w_\beta) \tag{5.}$$

für die Gewichtung $(w_\alpha, w_\beta, w_1, \dots, w_n)$.
Diese Ungleichungen lassen sich für gegebene $w_2, \dots, w_n$ immer erfüllen. Wähle dazu $w_\alpha = w_\beta$ so groß, daß $w_\alpha + w_\beta - \sum_{i=3}^{m}(i-2)w_i > 0$ ist. Dann ist bei allen Ungleichungen die rechte Seite eine positive Zahl mal w_1 und w_1 taucht auf den linken Seiten nicht auf. Durch die Wahl von hinreichend großem w_1 lassen sich dann alle Ungleichungen erfüllen.
Nicht jede stabile Gewichtung fortseztbar. Die Gewichtung $w_\alpha = 1, w_\beta = 3, w_1 = 1, w_2 = 9$ ist stabil für D_4. Die Ungleichung (A) für D_5 wird dann zu $w_3 < 1$, die Ungleichung (5.) wird für $m = 3$ zu $w_3 > \frac{50}{11} > 1$.

4.2.2 Alternierende Orientierung

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \\
& 1 \arrow[dl] & & 3 & \cdots \\
\beta & & & &
\end{tikzcd}$$

Setze wie in Abschnitt 3.2

$$\overline{m} := \begin{cases} m & m \text{ gerade} \\ m-1 & m \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und } \underline{m} := \begin{cases} m-1 & m \text{ gerade} \\ m & m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Wir haben die Typ A_{n+1}-Unterköcher

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \\
& 1 & & 3 & \cdots
\end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd}
& & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \\
& 1 \arrow[dl] & & 3 & \cdots \\
\beta & & & &
\end{tikzcd}$$

Der erste liefert die bekannten Ungleichungen $w_i w_{i+3} < w_{i+1}w_{i+2}$ für $i = 1, \dots, n-3$ und $w_\alpha w_3 < w_1 w_2$. Der zweite Unterköcher liefert zusätzlich noch die Bedingungen $w_\beta < w_2$ und

$$w_\beta < \frac{1}{2w_k + w_{k-1}}\left(w_{k-1}\sideset{}{'}\sum_{2}^{k-2} - w_k \sideset{}{'}\sum_{1}^{k-3}\right) \quad \text{für } k = 4, \dots, \overline{m} \text{ gerade}$$

(siehe Beispiel 51).
Nun untersuchen wir noch die zusätzlichen Unzerlegbaren. Wieder geben wir zunächst die unzerlegbaren Untermoduln an (vergleiche auch den entsprechenden Abschnitt zur symmetrischen Orientierung).

- $D(k',m') \hookrightarrow D(k,m) \iff k' \leq k, m' \leq m$ und ($k' = k$ oder k' ungerade) und ($m' = m$ oder m' ungerade). Ist $m' = k$ ergibt auch k' ungerade einen Untermodul.
- $D(0,m') \hookrightarrow D(k,m) \iff m' \leq k$, m' ungerade,
- $A(\alpha,m') \hookrightarrow D(k,m)$ tritt nicht auf, da mit dem Punkt α auch β zu einem Untermodul gehört,
- $A(\beta,m') \hookrightarrow D(k,m) \iff m' \leq m$, m' ungerade oder $m' = m$,
- $A(k',m') \hookrightarrow D(k,m) \iff$ für k gerade: $k', m' \leq m$, k' und m' ungerade (oder $m' = m$). Für k ungerade $k', m' \leq k$, k' und m' ungerade.
- $D(0,m') \hookrightarrow D(0,m) \iff m' \leq m$ und ($m' = m$ oder m' ungerade),
- $A(\alpha,m') \hookrightarrow D(0,m)$ tritt nicht auf, da mit α auch β zu einem Untermodul gehört,
- $A(\beta,m') \hookrightarrow D(0,m) \iff m' \leq m$ und ($m' = m$ oder m' ungerade),
- $A(k',m') \hookrightarrow D(0,m) \iff m' \leq m$ und ($m' = m$ oder m' ungerade) und $1 \neq k'$ ungerade.

Für $D(k',m') \hookrightarrow D(k,m)$ müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden. Die Kombination $k' = k$, $m' = m$ liefert keinen echten Untermodul, ist $k' \neq k$ und $m' \neq m$ so ist der Untermodul nicht maximal. Bleibt also $k' = k$, m' ungerade bzw. $m' = m$, k' ungerade. Dies liefert die ersten vier Punkte der Liste unten. Der Fall $m' = k$, k' ungerade liefert nur einen maximalen Untermodul für m ungerade und $k = m - 1$, $k' = m - 2$ (5. der Liste).
$A(\beta,m') \hookrightarrow D(k,m)$ ist nur maximal für $m' = m$ und $k = 1$. Für k gerade ist $A(1,m) \hookrightarrow D(2,m)$ maximal, für k ungerade $A(1,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(\overline{m}-1,m)$.
Als maximale unzerlegbaren Untermoduln von $D(0,m)$ haben wir $D(0,\overline{m}-1)$ und $A(\beta,m)$. $A(k',m')$ ist nie maximal, da immer $A(k',m') \hookrightarrow A(\beta,m')$ gilt.
Die zusätzlichen unzerlegbaren Moduln mit ihren maximalen unzerlegbaren Untermoduln sind:

1. $D(k-1,m) \hookrightarrow D(k,m)$ für $2 \leq k \leq \underline{m}-1$, k gerade,
2. $D(k,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(k,m)$ für $2 \leq k \leq \overline{m}-2$, k gerade,
3. $D(k-2,m) \hookrightarrow D(k,m)$ für $3 \leq k \leq \overline{m}-1$, k ungerade,
4. $D(k,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(k,m)$ für $1 \leq k \leq \underline{m}-2$, k ungerade,
5. $D(m-2,m-1) \hookrightarrow D(m-1,m)$ für m ungerade,
6. $D(0,\overline{m}-1) \hookrightarrow D(\overline{m}-1,m)$,
7. $A(\beta,m) \hookrightarrow D(1,m)$,

8. $A(1, m) \hookrightarrow D(2, m)$ für $m \geq 3$,
9. $A(1, \overline{m}-1) \hookrightarrow D(\overline{m}-1, m)$,
10. $D(0, \overline{m}-1) \hookrightarrow D(0, m)$,
11. $A(\beta, m) \hookrightarrow D(0, m)$.

jeweils für $m = 2, \dots, n$.
Sei die Levelfunktion l gegeben durch

$$l(i) = \begin{cases} 0 & i \text{ ungerade} \\ 1 & i \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{sowie } l(\alpha) = 1, l(\beta) = -1.$$

Benutze wieder die Abkürzungen $\sum_i^j := \sum_{\nu=i}^j w_\nu$ und $\sum_i'^j := \sum_{\nu=i,i+2,\dots,j} w_\nu$ für $j-i$ gerade beziehungsweise $\sum_i'^j := \sum_{\nu=i,i+2,\dots,j-1} w_\nu$ für $j-i$ ungerade. Setze weiter $2w_0 := w_\alpha - w_\beta$. Dann ist $w_\alpha = 2w_0 + w_\beta$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
x_{D(k,m)} &= \frac{w_\alpha - w_\beta + 2\sum_2'^k + \sum_{k+2}'^{\overline{m}}}{w_\alpha + w_\beta + 2\sum_1^k + \sum_{k+1}^m} = \frac{2\sum_0'^k + \sum_{k+2}'^{\overline{m}}}{2w_\beta + 2\sum_0^k + \sum_{k+1}^m} \quad k \text{ gerade} \\
x_{D(k,m)} &= \frac{w_\alpha - w_\beta + 2\sum_2'^{k-1} + \sum_{k+1}'^{\overline{m}}}{w_\alpha + w_\beta + 2\sum_1^k + \sum_{k+1}^m} = \frac{2\sum_0'^{k-1} + \sum_{k+1}'^{\overline{m}}}{2w_\beta + 2\sum_0^k + \sum_{k+1}^m} \quad k \text{ ungerade} \\
x_{A(\beta,m)} &= \frac{-w_\beta + \sum_2'^{\overline{m}}}{w_\beta + \sum_1^m} \\
x_{A(\alpha,m)} &= \frac{w_\alpha + \sum_2'^{\overline{m}}}{w_\alpha + \sum_1^m} = \frac{w_\beta + 2w_0 + \sum_2'^{\overline{m}}}{w_\beta + 2w_0 + \sum_1^m}
\end{aligned}$$

Betrachte nun wieder die einzelnen Fälle (vgl. auch 4.1.3):

1. Der Cokern ist der Einfache $E(k)$, k gerade. Also ist der Cokern ein Einfacher mit maximalem Level, wir erhalten keine Bedingung.
2. Der Cokern ist $A(\overline{m}, m)$, es ist also nur der Fall $\overline{m} \neq m$, das heißt m ungerade, interessant. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
& x_{D(k,m)} < x_{A(m-1,m)} \\
\iff & \left(2\sum_0^{k}{}' + \sum_{k+2}^{m-1}{}'\right)(w_{m-1} + w_m) < \left(2w_\beta + 2\sum_0^k + \sum_{k+1}^m\right) w_{m-1} \\
\iff & w_m \left(2\sum_0^{k}{}' + \sum_{k+2}^{m-3}{}'\right) < w_{m-1}\left(2w_\beta + 2\sum_1^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{m-2}{}'\right)
\end{aligned}$$

3. Der Cokern ist $A(k-1,k)$, die zugehörige Ungleichung ist

$$\begin{aligned}
& x_{D(k,m)} < x_{A(k-1,k)} \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(2\sum_{0}^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right)(w_{k-1}+w_k) < w_{k-1}\left(2w_\beta + 2\sum_{0}^{k} + \sum_{k+1}^{m}\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & w_{k-1}\left(2\sum_{0}^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) + w_k\left(2\sum_{0}^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) \\
& \quad < w_{k-1}\left(2\sum_{0}^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) + w_{k-1}\left(2w_\beta + 2\sum_{1}^{k}{}' + \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}'\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & w_k\left(2\sum_{0}^{k-3}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}'\right) < w_{k-1}\left(2w_\beta + 2\sum_{1}^{k-2}{}' + \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}'\right)
\end{aligned}$$

4. Der Cokern ist $A(m-1,m)$, es ist also nur der Fall m ungerade interessant. Dann erhalten wir die gleiche Bedingung wie gerade für $k=m$.

5. Der Cokern ist $A(m-1,m)$, wir erhalten also die gleiche Ungleichung wie beim zweiten Punkt für $k=m-1$.

6. Der Cokern ist $A(1,m)$. Setze $w_{\overline{m}+1}=0$ im Fall m gerade, rechne damit:

$$\begin{aligned}
& x_{D(\overline{m}-1,m)} < x_{A(1,m)} \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(2\sum_{0}^{\overline{m}-2}{}' + w_{\overline{m}}\right)\sum_{1}^{m} < \left(2w_\beta + 2\sum_{0}^{\overline{m}-1} + w_{\overline{m}} + w_{\overline{m}+1}\right)\sum_{2}^{\overline{m}}{}' \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\sum_{0}^{\overline{m}-2}{}'\sum_{1}^{\underline{m}}{}' + 2\sum_{0}^{\overline{m}-2}{}'\sum_{2}^{\overline{m}}{}' + w_{\overline{m}}\sum_{1}^{\underline{m}}{}' + w_{\overline{m}}\sum_{2}^{\overline{m}}{}' \\
& \quad < 2w_\beta\sum_{2}^{\overline{m}}{}' + 2\sum_{1}^{\overline{m}-1}{}'\sum_{2}^{\overline{m}}{}' + 2\sum_{0}^{\overline{m}-2}{}'\sum_{2}^{\overline{m}}{}' + w_{\overline{m}}\sum_{2}^{\overline{m}}{}' + w_{\overline{m}+1}\sum_{2}^{\overline{m}}{}' \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\sum_{1}^{\underline{m}}{}'\sum_{0}^{\overline{m}}{}' + w_{\overline{m}+1}\sum_{2}^{\overline{m}}{}' < 2w_\beta\sum_{2}^{\overline{m}}{}' + 2\sum_{2}^{\overline{m}}{}'\sum_{1}^{\overline{m}+1}{}' + w_{\overline{m}}\sum_{1}^{\underline{m}}{}' \\
\Longleftrightarrow\quad & 2w_0\sum_{1}^{\underline{m}}{}' + w_{\overline{m}+1}\sum_{2}^{\overline{m}}{}' < 2w_\beta\sum_{2}^{\overline{m}}{}' + w_{\overline{m}}\sum_{1}^{\underline{m}}{}'
\end{aligned}$$

7. Der Cokern ist hier $A(\alpha, 1)$, also:

$$\begin{aligned}
& x_{D(1,m)} < x_{A(\alpha,1)} \\
\iff \quad & \left(2w_0 + {\sum_2^{\overline{m}}}'\right)(2w_0 + w_1 + w_\beta) \\
& \qquad < \left(2w_0 + 2w_\beta + 2w_1 + \sum_2^m\right)(2w_0 + w_\beta) \\
\iff \quad & w_1 {\sum_2^{\overline{m}}}' < (2w_0 + w_\beta)\left(2w_\beta + {\sum_1^{m}}'\right) + w_1 w_\beta
\end{aligned}$$

Für ungerades m folgt die Ungleichung aus der Ungleichung für $m-1$, es reichen also die Ungleichungen für m gerade.

8.

$$\begin{aligned}
& x_{D(2,m)} > x_{A(1,m)} \\
\iff \quad & \left(2w_0 + 2w_2 + {\sum_4^{\overline{m}}}'\right)\sum_1^m > \left(2w_\beta + 2w_0 + 2w_1 + 2w_2 + \sum_3^m\right){\sum_2^{\overline{m}}}' \\
& \iff 2w_0 {\sum_1^m}' + w_2 {\sum_1^m}' > 2w_\beta {\sum_2^{\overline{m}}}' + w_1 {\sum_2^{\overline{m}}}' \\
& \qquad \iff 2w_0 {\sum_1^m}' + w_2 {\sum_3^m}' > 2w_\beta {\sum_2^{\overline{m}}}' + w_1 {\sum_4^{\overline{m}}}'
\end{aligned}$$

9. Wir rechnen (wieder mit $w_{\overline{m}+1} = 0$ falls m gerade)

$$\begin{aligned}
& x_{D(\overline{m}-1,m)} > x_{A(1,\overline{m}-1)} \\
\iff \quad & \left(2{\sum_0^{\overline{m}-2}}' + w_{\overline{m}}\right)\sum_1^{\overline{m}-1} > \left(2w_\beta + 2\sum_0^{\overline{m}-1} + w_{\overline{m}} + w_{\overline{m}+1}\right){\sum_2^{\overline{m}-2}}' \\
\iff \quad & 2{\sum_0^{\overline{m}-2}}'{\sum_1^{\overline{m}-1}}' + 2{\sum_0^{\overline{m}-2}}'{\sum_2^{\overline{m}-2}}' + w_{\overline{m}}{\sum_1^{\overline{m}-1}}' + w_{\overline{m}}{\sum_2^{\overline{m}-2}}' \\
& \quad > 2w_\beta {\sum_2^{\overline{m}-2}}' + 2{\sum_1^{\overline{m}-1}}'{\sum_2^{\overline{m}-2}}' + 2{\sum_0^{\overline{m}-2}}'{\sum_2^{\overline{m}-2}}' + w_{\overline{m}}{\sum_2^{\overline{m}-2}}' + w_{\overline{m}+1}{\sum_2^{\overline{m}-2}}' \\
\iff \quad & {\sum_1^{\overline{m}-1}}'(2w_0 + w_{\overline{m}}) > {\sum_2^{\overline{m}-2}}'(2w_\beta + w_{\overline{m}+1})
\end{aligned}$$

10. Der Cokern ist $A(\overline{m}, m)$, also ist nur der Fall m ungerade (d.h $\overline{m} = m-1$)

interessant. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
& x_{D(0,m)} < x_{A(m-1,m)} \\
\iff & \left(2w_0 + \sum_2^{m-1}{}'\right)(w_{m-1} + w_m) < \left(2w_\beta + 2w_0 + \sum_1^{m}\right) w_{m-1} \\
& \iff w_m \left(2w_0 + \sum_2^{m-3}{}'\right) < w_{m-1}\left(2w_\beta + \sum_1^{m-2}{}'\right)
\end{aligned}$$

11. Der Cokern ist der Einfache $E(\alpha)$, wobei $l(\alpha) = M_{D(0,m)}$ ist, also erhalten wir keine Bedingung.

Zusammengefasst erhalten wir also die Ungleichungen $(m = 2, \ldots, n)$

$$(2w_0 + w_\beta)w_3 < w_1 w_2, w_i w_{i+3} < w_{i+1} w_{i+2} \qquad (i = 1, \ldots, n-3) \text{ (A-1)}$$

$$w_\beta < w_2 \qquad \text{(A-2)}$$

$$w_\beta < \frac{1}{2w_k + w_{k-1}} \left(w_{k-1} \sum_2^{k-2}{}' - w_k \sum_1^{k-3}{}' \right) \qquad (k = 4, \ldots, \overline{m} \text{ gerade}) \text{ (A-2)}$$

$$w_m \left(2 \sum_0^{k}{}' + \sum_{k+2}^{m-3}{}' \right) < w_{m-1} \left(2w_\beta + 2 \sum_1^{k-1}{}' + \sum_{k+1}^{m-2}{}' \right)$$

$$(\text{für } m \text{ ungerade}, 2 \leq k \leq m-1, k \text{ gerade}) \text{ (2., 5.)}$$

$$w_k \left(2 \sum_0^{k-3}{}' + \sum_{k+1}^{\overline{m}}{}' \right) < w_{k-1} \left(2w_\beta + 2 \sum_1^{k-2}{}' + \sum_{k+2}^{\underline{m}}{}' \right)$$

$$(3 \leq k \leq \underline{m}, k \text{ ungerade}) \text{ (3., 4.)}$$

$$2w_0 \sum_1^{\underline{m}}{}' + w_{\overline{m}+1} \sum_2^{\overline{m}}{}' < 2w_\beta \sum_2^{\overline{m}}{}' + w_{\overline{m}} \sum_1^{\underline{m}}{}' \qquad \text{(6.)}$$

$$w_1 \sum_2^{\overline{m}}{}' < (2w_0 + w_\beta) \left(2w_\beta + \sum_1^{\underline{m}}{}' \right) + w_1 w_\beta \qquad (\text{für } m \text{ gerade}) \text{ (7.)}$$

$$2w_\beta \sum_2^{\overline{m}}{}' + w_1 \sum_4^{\overline{m}}{}' < 2w_0 \sum_1^{\underline{m}}{}' + w_2 \sum_3^{\underline{m}}{}' \qquad (\text{für } m \geq 3) \text{ (8.)}$$

$$(2w_\beta + w_{\overline{m}+1}) \sum_2^{\overline{m}-2}{}' < (2w_0 + w_{\overline{m}}) \sum_1^{\overline{m}-1}{}' \qquad \text{(9.)}$$

$$w_m \left(2w_0 + \sum_2^{m-3}{}' \right) < w_{m-1} \left(2w_\beta + \sum_1^{m-2}{}' \right) \qquad (\text{für } m \text{ ungerade}) \text{ (10.)}$$

Beispiel 57 *Eine stabile Gewichtung für den Köcher D_6 in der Orientierung*

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=small] \alpha \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] \\ & 1 \arrow[dl] & & 3 & \\ \beta & & & & \end{tikzcd} \quad \textit{ist } w = \begin{array}{ccccc} \frac{1}{7} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2048} \\ & \frac{1}{2} & & \frac{1}{512} & \\ \frac{1}{14} & & & & \end{array}$$

. Diese Gewichtung ist nicht fortsetzbar. Ob die Ungleichungen für größere Köcher eine Lösung haben, ist offen.

4.2.3 Alternierende Orientierung mit Flügel

Vergleiche auch Lemmata 50 und 56.
Sei Q' ein Köcher vom Typ D_{m+2} in asymmetrischer Orientierung mit Punkten $Q_0 = \{\alpha, \beta, 1, \ldots, m\}$. Sei der Köcher Q vom Typ D_{m+3} gegeben durch $Q_0 = Q'_0 \cup \{\gamma\}$, $Q_1 = Q'_1 \cup \{\gamma \to m\}$.

$$Q' = \cdots\cdots\, m \qquad Q = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \gamma \arrow[dl] \\ \cdots\cdots\, m & \end{tikzcd}$$

Sei $l(\gamma) \geq l(i)$ für $i = \alpha, \beta, 1, \ldots, m$.
Wegen der Bedingung $l(\gamma) \geq l(\alpha), l(\beta)$ ist jetzt die alternierende Orientierung kein Spezialfall mehr dieser Betrachtung, der Köcher

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=small] \alpha \arrow[dr] & & & \\ & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \gamma \arrow[dl] \\ \beta & & 2 & \end{tikzcd}$$

in alternierender Orientierung erfüllt diese Voraussetzung nicht. Wir betrachten also nur noch Situationen der Art

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & \gamma \arrow[dl] \\ & m \arrow[dl] & \\ \cdots\cdots\, m-1 & & \end{tikzcd} .$$

Sei V ein unzerlegbarer Modul mit $(\underline{\dim} V)_\gamma \neq 0$. Ist auch $V' = V|_{Q'}$ wieder unzerlegbar, so erhalten wir nach Lemma 50 nur Ungleichungen der Form $w_\gamma < \Xi$.
Sei nun V' zerlegbar. Dann ist $V = D(m, \gamma)$ und $V' = D(0, m) \oplus A(1, m)$. Wir schreiben $V_1 = D(0, m)$ und $V_2 = A(1, m)$. Da wir einen Pfeil $m \to (m-1)$ haben, haben beide Summanden den einfachen Cokern $E(m)$, also ist $x_{V_1} < l(m)$ und $x_{V_2} < l(m)$. Das ist jeweils äquivalent zu $a(V_i)l(m) - b(V_i) > 0$.
Sei U nun ein maximaler unzerlegbarer Untermodul von V.
Ist $(\underline{\dim} U) = 1$, so bleibt als einzige Möglichkeit $U = D(m-1, \gamma)$. Also ist der Cokern wieder $E(m)$ und wir haben $x_V < l(m)$ zu zeigen. Wir haben

$$\begin{aligned} x_V < l(m) &\iff \frac{b(V_1) + b(V_2) + l(\gamma) w_\gamma}{a(V_1) + a(V_2) + w_\gamma} < l(m) \\ &\iff w_\gamma < l(m)a(V_1) - b(V_1) + l(m)a(V_2) - b(V_2), \end{aligned}$$

dabei benutzen wir $l(\gamma) = l(m) + 1$. Die rechte Seite ist positiv, also haben wir wieder eine Bedingung der Art $w_\gamma < \Xi$.
Sei nun $(\underline{\dim} U) = 0$. Die einzigen Möglichkeiten für U sind dann $D(0,m)$ und $A(1,m)$. Wir schreiben $B = b(A(1,m)) = \sum_{i=1}^m l(i)w_i$ und $A = a(A(1,m)) = \sum_{i=1}^m w_i$. Wir wählen die Levelfunktion $l : Q_0 \to \mathbb{Z}$ so, daß $l(\alpha) = 1$ und $l(\beta) = -1$ ist. Dann ist

$$b(D(0,m)) = B - w_\beta + w_\alpha \qquad a(D(0,m)) = A + w_\beta + w_\alpha$$

$$b(D(m,\gamma) = 2B - w_\beta + w_\alpha + l(\gamma)w_\gamma \qquad a(D(m,\gamma) = 2A + w_\beta + w_\alpha + w_\gamma.$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned}
& x_{A(1,m)} < x_{D(m,\gamma)} \\
& \iff B\,(2A + w_\beta + w_\alpha + w_\gamma) < (2B - w_\beta + w_\alpha + l(\gamma)w_\gamma)\,A \\
& \iff 2AB + B(w_\beta + w_\alpha) + Bw_\gamma < 2AB + A(w_\alpha - w_\beta) + Al(\gamma)w_\gamma \\
& \iff B(w_\beta + w_\alpha) + A(w_\beta - w_\alpha) < w_\gamma\,(Al(\gamma) - B) \\
& \iff \sum_{i=1}^m \big(w_\beta(l(i) + 1) + w_\alpha(l(i) - 1)\big)w_i < w_\gamma \sum_{i=1}^m w_i(l(\gamma) - l(i))
\end{aligned}$$

Wegen $l(\gamma) > l(i)$ für alle $i = 1, \ldots, m$ ist die rechte Seite positiv, wir erhalten also eine Ungleichungen der Form $w_\gamma > \Xi$. Für den anderen maximalen Untermodul erhalten wir analog:

$$\begin{aligned}
& x_{D(0,m)} < x_{D(m,\gamma)} \\
\iff\ & (B + w_\alpha - w_\beta)\,(2A + w_\beta + w_\alpha + w_\gamma) \\
& \qquad < (2B - w_\beta + w_\alpha + l(\gamma)w_\gamma)\,(A + w_\beta + w_\alpha) \\
\iff\ & A(w_\alpha - w_\beta) - B(w_\beta + w_\alpha) \\
& \qquad < w_\gamma\,(Al(\gamma) - B + w_\alpha(l(\gamma) - 1) + w_\beta(l(\gamma) + 1)) \\
\iff\ & \sum_{i=1}^m \big(w_\alpha(1 - l(i)) - w_\beta(1 + l(i))\big)w_i \\
& \qquad < w_\gamma \left(w_\alpha(l(\gamma) - 1) + w_\beta(l(\gamma) + 1) + \sum_{i=1}^m (l(\gamma) - l(i))w_i \right)
\end{aligned}$$

Mit $l(\gamma) \geq l(\alpha) = 1$ ist die rechte Seite wieder positiv, wir haben also wieder eine Bedingung $w_\gamma > \Xi$.
Dies sind beides Ungleichungen vom Typ $w_\gamma > \Xi$, andererseits haben wir von vorher schon Bedingungen vom Typ $w_\gamma < \Xi$. Im Allgemeinen finden wir daher kein w_γ, das die gegebene Gewichtung fortsetzt.

Beispiel 58 *Die Gewichtung aus Beispiel 57 ist auch stabil für D_6 in der Orientierung*

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& 1 \arrow[dl] & & 3 \arrow[dr] & \\
\beta & & & & 4
\end{tikzcd} .$$

5 Typ E_n

Die Untersuchung der Typen E_6, E_7, E_8 bildet ein endliches Problem. Daher bietet es sich an, diese Köcher mit dem Computer zu bearbeiten.
Um zu entscheiden, ob es zu einem gegebenen Köcher Q eine stabile Gewichtung gibt, benötigen wir zwei Schritte:

1. Bestimme alle Unzerlegbaren V mit ihren maximalen unzerlegbaren Untermoduln U (jeweils bis auf Isomorphie). Jedes solche Paar V, U bestimmt eine Ungleichung $\sum_{p,q\in Q_0} A_{p,q}(V,U)w_p w_q > 0$ in den w_p.

2. Entscheide, ob die Menge aller so erhaltenen Ungleichungen eine Lösung hat.

Da ein Köcher vom Typ E_n darstellungsendlich ist, können wir die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Moduln in einer endlichen Liste angeben. Ein unzerlegbarer Modul ist dabei eindeutig (bis auf Isomorphie) durch seinen Dimensionsvektor festgelegt. Für jedes Paar (V, U) von Elementen dieser Liste können wir nun mit Hilfe des folgenden Satzes entscheiden, ob U ein Untermodul von V ist:

Theorem 59 (Schofield [15]) *Sei*

$$\chi(\underline{d}, \underline{e}) := \sum_{p\in Q_0} \underline{d}_p \underline{e}_p - \sum_{\beta:p\to q\in Q_1} \underline{d}_p \underline{e}_q$$

die Euler-Form zum Köcher Q für zwei Dimensionsvektoren $\underline{d}$ und $\underline{e}$. Dann ist U ein Untermodul von V genau dann, wenn

$$\max\{-\chi(\underline{\dim}U', \underline{\dim}V - \underline{\dim}U)\,|U' \text{ Untermodul von } U\} = 0$$

gilt.

Wir erhalten so alle unzerlegbaren Untermoduln U zu einem Unzerlegbaren V. Aus dieser Menge können wir wiederum mit obigem Satz die maximalen Elemente bestimmen.
Insgesamt erhalten wir so eine endliche Liste von Paaren (V, U) von unzerlegbaren Moduln, so daß U maximaler unzerlegbarer Untermodul von V ist.
Die $A_{p,q}(V, U)$ hängen nur von der Levelfunktion l und den Dimensionsvektoren von V und U ab, siehe Abschnitt 2.1. Wir können nun also die Menge aller Ungleichungen bestimmen, die für eine stabile Gewichtung erfüllt sein müssen.
Zur Untersuchung der Lösbarkeit dieses Ungleichungssystem wird dann das Verfahren der algebraischen zylindrischen Zerlegung benutzt (siehe [2], Algorithm 12.30). Leider ist die Komplexität des Verfahrens $O(sd)^{2^k}$, dabei ist d der Maximalgrad der Ungleichungen (bei uns $d = 2$), k die Zahl der Variablen (bei uns also $k = \sharp Q_0$) und s die Zahl der Ungleichungen.
In der Praxis[3] übersteigt schon für D_6 die Rechenzeit sinnvolle Grenzen (einige Tage/Wochen).

[3] Der Algorithmus wurde als Programm für das Computeralgebrasystem `mupad` implementiert. Der benutzte Rechner ist ein 3Ghz-AMD64-Rechner mit 1GByte Hauptspeicher. Das Programm findet sich unter `http://wmaz.math.uni-wuppertal.de/bender/hesselink`.

Im Falle E_6 können wir den Aufwand für einige Orientierungen durch Ausnutzen der Symmetrie des Köchers reduzieren (siehe Lemma 43). Für die Orientierung

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & 6 \arrow[d] & 4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 & & 3 & & 5 \end{tikzcd}$$

geben wir hier die mit dem Programm erhaltenen Ungleichungen an (die ersten vier Ungleichungen sind die, die sich aus den Typ A Unterköchern ergeben):

$$\begin{gathered}
w_2w_3 - w_1w_4 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_6 > 0,\\
w_3w_4 - w_2w_5 > 0,\\
w_3w_4 - w_5w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 + w_2w_5 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 - w_1w_6 > 0,\\
w_1w_4 - w_2w_5 + w_3w_4 > 0,\\
w_2w_3 + w_3w_4 - w_3w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_3w_4 + w_3w_6 > 0,\\
w_3w_4 - w_2w_3 + w_3w_6 > 0,\\
w_3w_4 - w_2w_5 - w_5w_6 > 0,\\
w_1w_2 + w_1w_4 + w_3w_4 - w_3w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - w_1w_4 - w_1w_2 - w_1w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 - w_1w_6 + w_2w_5 > 0,\\
w_1w_2 + w_1w_6 - w_3w_4 + w_3w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 - w_3w_4 + w_3w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_6 + w_3w_4 - w_3w_6 > 0,\\
w_3w_4 - w_2w_5 - w_2w_3 + w_3w_6 > 0,\\
w_2w_3 + w_2w_5 - w_3w_6 + w_4w_5 > 0,\\
w_1w_4 - w_2w_5 + w_3w_4 - w_5w_6 > 0,\\
w_2w_3 + w_3w_4 - w_3w_6 - w_5w_6 > 0,\\
w_3w_6 - w_2w_3 + w_4w_5 + w_5w_6 > 0,\\
2w_3w_4 - w_2w_5 - w_4w_5 - w_5w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - w_1w_4 - w_1w_2 - w_1w_6 + w_2w_5 > 0,\\
2w_2w_3 - 2w_1w_4 - w_1w_2 - w_1w_6 + w_2w_5 > 0,\\
w_1w_2 + w_1w_4 + w_2w_5 - w_3w_6 + w_4w_5 > 0,\\
w_1w_4 - w_2w_3 + w_1w_6 + w_3w_4 + w_3w_6 > 0,\\
w_2w_3 + w_2w_5 - w_3w_4 + w_3w_6 + w_5w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_6 + w_3w_4 - w_3w_6 - w_5w_6 > 0,\\
w_1w_4 - w_2w_5 + 2w_3w_4 - w_4w_5 - w_5w_6 > 0,\\
w_1w_4 - 2w_2w_5 + 2w_3w_4 - w_4w_5 - w_5w_6 > 0,\\
w_1w_4 - w_2w_3 + w_1w_6 - w_2w_5 + w_3w_4 + w_3w_6 > 0,\\
w_1w_2 + w_1w_4 - w_2w_5 + w_3w_4 - w_3w_6 - w_5w_6 > 0,\\
w_1w_2 + w_1w_6 + w_2w_5 - w_3w_4 + w_3w_6 + w_5w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 - w_1w_6 + w_2w_5 - w_3w_6 + w_4w_5 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 + w_2w_5 - w_3w_4 + w_3w_6 + w_5w_6 > 0,\\
w_1w_4 - w_2w_3 + w_1w_6 + w_3w_6 + w_4w_5 + w_5w_6 > 0,\\
w_1w_2 + w_1w_4 + w_2w_3 + w_2w_5 + w_3w_4 - w_3w_6 + w_4w_5 > 0,\\
w_1w_2 + w_2w_3 + w_1w_6 + w_2w_5 - 2w_3w_4 + w_3w_6 + w_5w_6 > 0,\\
w_1w_4 - 2w_2w_3 + w_1w_6 + w_3w_4 + w_3w_6 + w_4w_5 + w_5w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 - w_1w_2 - w_1w_6 + w_2w_5 + w_3w_4 - w_3w_6 + w_4w_5 > 0,
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
w_1w_2 + w_1w_4 + w_2w_3 - w_2w_5 + w_3w_4 - w_3w_6 - w_4w_5 - w_5w_6 > 0,\\
w_1w_2 + w_1w_4 - w_2w_3 + w_1w_6 + w_2w_5 - w_3w_4 + w_3w_6 + w_4w_5 + w_5w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_4 - w_1w_2 - w_1w_6 - w_2w_5 + w_3w_4 + w_3w_6 - w_4w_5 - w_5w_6 > 0.
\end{aligned}
$$

Diese 44 Ungleichungen können wir durch Ausnutzen der Symmetrie $w_5 = w_1$, $w_4 = w_2$ auf 17 Ungleichungen[4] reduzieren:

$$
\begin{gathered}
w_2w_3 - w_1w_2 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_6 > 0,\\
w_3w_6 - w_1w_2 > 0,\\
4w_1w_2 - w_3w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - w_3w_6 > 0,\\
w_2w_3 - w_1w_2 - w_1w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - w_1w_2 - w_1w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - 2w_1w_2 - w_1w_6 > 0,\\
2w_1w_2 + w_2w_3 - w_3w_6 > 0,\\
4w_1w_2 + 2w_2w_3 - w_3w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - w_1w_6 - w_3w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - 2w_1w_6 - w_3w_6 > 0,\\
w_1w_2 - w_2w_3 + w_1w_6 + w_3w_6 > 0,\\
w_1w_2 + w_2w_3 - w_1w_6 - w_3w_6 > 0,\\
2w_1w_2 - w_2w_3 + 2w_1w_6 + w_3w_6 > 0,\\
2w_2w_3 - 4w_1w_2 - 2w_1w_6 + w_3w_6 > 0,\\
4w_1w_2 - 2w_2w_3 + 2w_1w_6 + w_3w_6 > 0.
\end{gathered}
$$

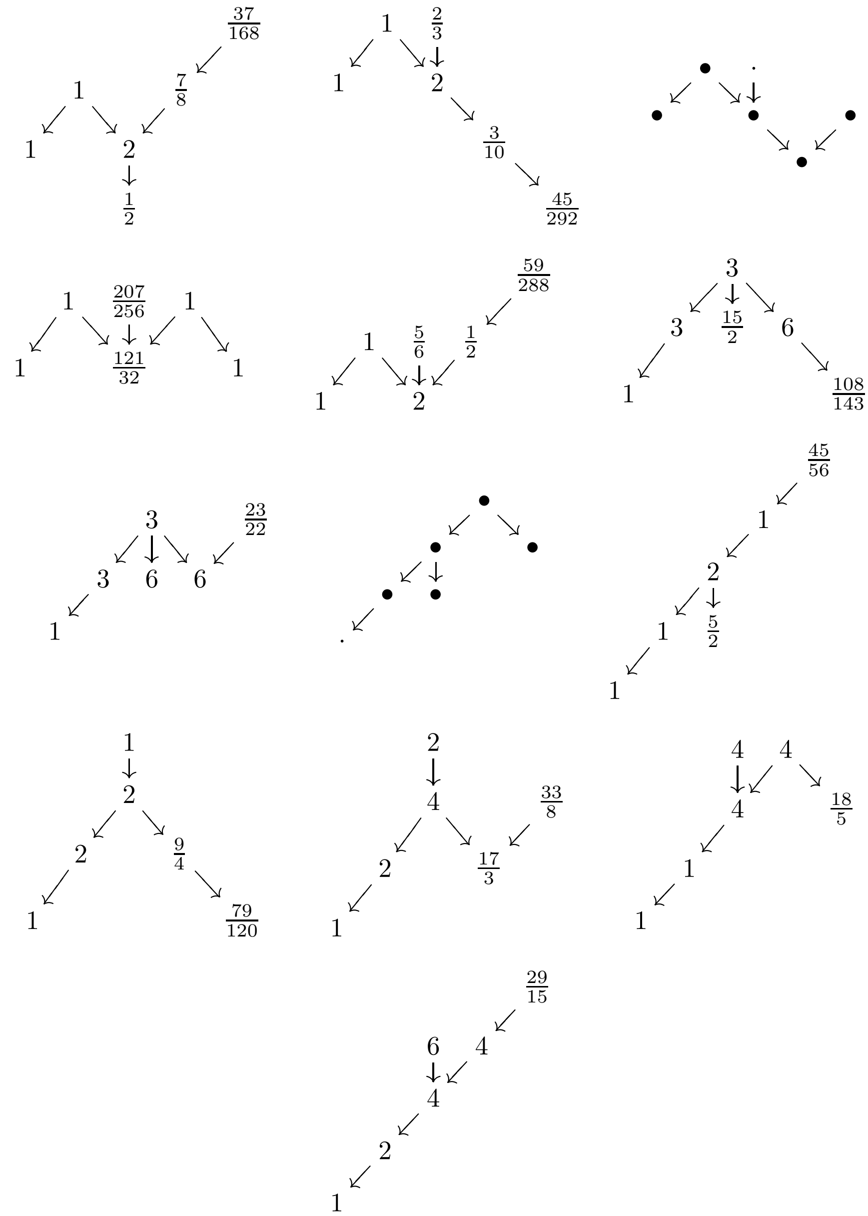
Die algebraische zylindrische Zerlegung liefert dann (u.a.) diese Lösung des Ungleichungssystems:

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \frac{207}{256} \arrow[d] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 & & \frac{121}{32} & & 1
\end{tikzcd} .
$$

Berechnungen der Ungleichungen mit dem ersten Teil des Programms für die anderen Orientierungen und Ausprobieren ergibt, daß es für alle Orientierungen von E_6 eine stabile Gewichtung gibt, bis auf die, die a priori ausscheiden, da sie einen „verbotenen" Typ A_5 oder Typ D_5 Unterköcher haben. Im folgenden wird für jede Orientierung (bis auf Dualität) eine stabile Gewichtung angegeben. Für Orientierungen, für die es keine stabile Gewichtung gibt, ist der Unterköcher vom Typ A_5 oder D_5, der eine Trennung der Orbiten verhindert, durch dickere Punkte ($\bullet$) markiert.

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
\bullet & & \bullet \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
 & & \bullet & \bullet \arrow[dr] & \\
 & & & & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
\bullet & & \bullet \arrow[d] \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\
 & & \bullet & \bullet &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 & & 2 \arrow[d] & & \frac{5}{4} \\
 & & \frac{1}{2} & &
\end{tikzcd}
$$

[4] Dieselben Ungleichungen wurden auch durch eine drei Tage dauernde Rechnung per Hand gefunden.



Die Fälle E_7 und E_8 bleiben offen.

Literatur

[1] Auslander, M.; Reiten, I.; Smalø, S. O.: Representation theory of artin algebras, Cambridge studies in advanced mathematics **36**, Cambridge University Press, 1995.

[2] Basu, S.; Pollack, R.; Roy, M.-F.: Algorithms in Real Algebraic Geometry, Algorithms and Computation in Mathematics **10**, Springer, 2003.

[3] Borel, A: Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[4] Gabriel, P.: Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscr. Math. **6** (1972), 71–103.

[5] Hesselink, W. H.: Desingularizations of varieties of nullforms, Invent. Math. **55** (1979), 141–163.

[6] Hille, L.: Aktionen algebraischer Gruppen, geometrische Quotienten und Köcher, Habilitationsschrift, Hamburg (2002), `http://www.math.uni-hamburg.de/home/hille/publ.html`.

[7] Kempf, G. R.: Instability in invariant theory, Ann. of Math. **108** (1978), 299–316.

[8] Kac, V. G.: Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory, Invent. Math. **56** (1980), 57–92.

[9] King, A.: Moduli of representations of finite dimensional algebras, Quart. J. Math. Oxford **45** (1994), 515–530.

[10] Kirwan, F. C.: Cohomolgy of quotients in symplectic and algebraic geometry, Princeton Math. Notes **31**, Princeton University Press, 1984.

[11] LeBruyn, L.: Optimal filtrations on representations of finite dimensional algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2000), 411–426.

[12] Mumford, D.: Projective invariants of projective structures and applications, Proc. I.C.M, (1962), 526–530.

[13] Mumford, D.: Geometric invariant theory, Ergebnisse der Mathematk und ihrer Grenzgebiete **34**, Springer, 1965.

[14] Reineke, M.: The Harder-Narasimhan system in quantum groups and cohomology of quiver moduli, Invent. math. **152** (2003), 349–368.

[15] Schofield, A.: General Representations of quivers, Proc. LMS **65** (1992), 46–64.

[16] Slodowy, P.: Die Theorie der optimalen Einparametergruppen für instabile Vektoren, DMV Seminar **13** (1989), Birkhäuser, 115–131.

[17] Springer, T. A.: Linear algebraic groups, Progress in Math. **9**, Birkhäuser, 1981.