Die Bedeutung von Sprache im Mathematikunterricht

Eine empirische Untersuchung anhand der schriftlichen Subtraktion und der Bearbeitung von Textaufgaben in den Jahrgangsstufen 4 bis 12

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor paedagogiae (Dr. paed.)
im Fach Mathematik an der
Bergischen Universität Wuppertal

eingereicht von

Vanessa Kremer
geboren am 19.06.1972 in Düsseldorf

Dekan:	Prof. Dr. Michael Günther
Erstgutachter:	Prof. Dr. Klaus Volkert
Zweitgutachterin:	Prof. Dr. Katrin Rolka
Drittgutachter:	Prof. Dr. Wolfgang Schwarz

– Juni 2017 –

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20180514-114328-3
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20180514-114328-3]

„Sprache ist nicht alles,
aber ohne Sprache geht (fast) nichts"
Helmut J. Vollmer

Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bedeutung der Sprache für den Mathematikunterricht. Die symbolische Sprache der Mathematik gilt als eindeutig und international verständlich. Die Kommunikation von Mathematikern gelingt folglich durch die Verwendung dieser gemeinsamen Fachsprache. Im Unterricht hingegen gelingt diese Kommunikation bis heute häufig nicht. Trotz klarer Definitionen und Sätze sprechen Kinder und Lehrkräfte anscheinend noch nicht die gleiche (Fach-) Sprache. Es muss also Ursachen geben, dass die Kommunikation über alltägliche Dinge und Ereignisse möglich ist, über fachliche Dinge aber nicht. Die Einleitung beschreibt diesen Zustand und gibt einen Überblick über die einzelnen Faktoren, die zur Lösung der Problemstellung notwendig sind. Durch eine intensive Betrachtung des menschlichen Gehirns im ersten Kapitel werden die anatomischen Voraussetzungen erörtert, die sowohl für das Sprachen und Sprechen lernen als auch für das Erlernen mathematischer Prozesse von Bedeutung sind. Neben dem Aufbau des Gehirns sind auch die Funktionen der jeweiligen Areale wichtig. Im zweiten Kapitel schließen sich sprachwissenschaftliche Theorien an. Nach einer kurzen Darstellung der historischen Sprachentwicklung werden vor allem vier Sprachmodelle genauer betrachtet. Letztendlich wird mit den Kommunikationsmodellen eine Grundlage gebildet, auf deren Basis das zu Beginn angesprochene Problem der nicht funktionierenden Kommunikation bezogen werden kann. Für eine adäquate Lösung dieser Kommunikationsstörung muss auch die mathematische Sprache mit ihren anfänglich angesprochenen Definitionen und Sätzen dargestellt werden. Dies ist leider nicht für die gesamte mathematische Sprache möglich, daher beschränkt sich dieser Teil der Arbeit auf die wesentlichen Inhalte, die zur schriftlichen Subtraktion und zur Bearbeitung von Sachaufgaben notwendig sind. Die in diesem vierten Kapitel dargestellten Inhalte werden im anschließenden fünften Kapitel sprachlich aufgearbeitet. Sprache ist ein System von Regeln und Einheiten, welche zusammengefasst als Mittel der Verständigung dienen. Die Begriffe *Subjekt* und *Prädikat* werden von der Mehrheit der Menschen dem Sprachunterricht zugeordnet, da kaum einem bewusst ist, dass diese Begriffe auch in der Mathematik existieren.

Es ist wichtig, die Begrifflichkeiten der mathematischen Fachsprache sorgfältig aufzuarbeiten. Dies ist aber nur möglich, wenn man Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Fachsprachen herausstellt. Es gibt Begriffe, die in der Sprache und Mathematik von gleicher oder ähnlicher Bedeutung sind und solche, die von unterschiedlicher Bedeutung sind oder erst gar nicht in dem jeweils anderen Fachgebiet vorkommen. Verwenden Lehrkräfte und Kinder diese Begriffe in ihren unterschiedlichen Bedeutungen, so wird ihre Kommunikation zwangsläufig misslingen. Dieser Störung beugen Ruf und Gallin vor, indem sie die Sprache der Lernenden untereinander viel stärker in den Fokus rücken. Begriffsbildung und -verständnis erfolgen durch gelingende Kommunikation. Die Rolle der Lehrkraft erscheint in einem anderen Licht. Mittels einer empirischen Studie wird gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler verschiedener Schulformen und Altersstufen nach wie vor Probleme beim Verständnis der mathematischen Sprache haben. Durch Auswertung der erhobenen Daten werden beispielhaft zwei Unterrichtskonzeptionen entwickelt und vorgestellt, die das anfänglich aufgezeigte Kommunikationsproblem in den Schulen beheben sollen. Das Resümee am Schluss der Arbeit fasst die wesentlichen Aspekte zusammen und gibt einen Ausblick, was sich hinsichtlich der Sprache im Mathematikunterricht verändern sollte.

Den Anstoß zur Auseinandersetzung mit dieser Thematik erhielt ich von Prof. Dr. Klaus Volkert, dem ich zum einen für diese Möglichkeit und zum anderen für seine Unterstützung während der Entstehung der gesamten Arbeit sehr dankbar bin. Frau Prof. Dr. Katrin Rolka danke ich für die Erstellung des Zweitgutachtens. Ferner hätte diese Studie nicht ohne die Kooperation mit der Arbeitsgruppe *Didaktik und Geschichte der Mathematik* der Bergischen Universität Wuppertal und der Mitarbeit vieler Schülerinnen und Schüler, sowie Lehrerinnen und Lehrer stattfinden können. Ein ganz besonderer Dank gilt meinem Kollegen Dr. Sebastian Kitz, der mir besonders bei mathematischen und organisatorischen Problemen zur Seite stand.

Selbstverständlich möchte ich auch meiner Familie danken, die mich während dieser Zeit immer unterstützt und so manche emotionalen Tiefpunkte gemeinsam mit mir durchgestanden hat.

Wuppertal, im Juni 2017 Vanessa Kremer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Mehrheit der deutschen Bevölkerung ist davon überzeugt, dass mathematische Kompetenz für eine erfolgreiche Lebensführung wichtig ist; dies belegt unter anderem die Studie *Rechnen in Deutschland*, welche im Auftrag der Stiftung Rechnen und des Online-Lernsystems bettermarks von forsa im Jahr 2009 durchgeführt wurde. Trotzdem gibt es vor allem bei Schülerinnen und Schülern (SuS) enorme Defizite. Zwar haben die deutschen SuS im internationalen Vergleich (PISA/TIMMS) aus dem Jahr 2012 deutlich besser abgeschnitten als in den Jahren zuvor, doch es gibt immer noch zahlreiche Kinder und Jugendliche, die das Fach Mathematik im vergangenen Schuljahr mit ausreichend oder schlechter abgeschlossen haben. Im Laufe meiner eigenen Schullaufbahn, meiner Ausbildung und meiner Zeit als Lehrkraft sind mir immer wieder die folgenden von der Allgemeinheit häufig vertretenen Ansichten begegnet:

- „Mathematik ist schwer!"
- „Mathematik ist ein Horrorfach!"
- „Meine Eltern können auch nicht gut rechnen."
- „In der Mathematik kann man eindeutig zwischen *richtig* und *falsch* unterscheiden."
- „Jedes mathematische Problem hat eine eindeutige Lösung, d.h., es gibt nur eine richtige Antwort."
- „Entweder fällt es einem leicht mathematische Inhalte zu erfassen oder man ist eher sprachlich begabt."

Diese verbreiteten Ansichten können dazu führen, dass vielen Kindern Mathematik wie ein unüberwindbares Hindernis erscheint. Es können sich Ängste aufbauen und jegliche Lernmotivation verloren gehen. Besonders lernschwächere Kinder sind von diesem Problem betroffen. Sie trauen sich nicht über mathematische Verständnisschwierigkeiten zu sprechen, da sie annehmen, dass sie schlecht in Mathematik seien und sich durch Rückfragen nicht blamieren wollen. Oftmals kommt erschwerend ein geschlossener, unkommunikativer Mathematikunterricht hinzu. Die Kommunikation zwischen Lehrperson und Kindern im Mathematikunterricht erstarrt; worüber soll noch geredet werden, wenn es doch nur *falsch* oder *richtig* gibt bzw. das Ergebnis schon vorliegt. Das Lernen im Mathematikunterricht wird so von der Grund- bis zur Hochschule zu einem passiven Lernen. Vor dieser Problematik wird auch in den Lehrplänen gewarnt:

> Der Mathematikunterricht steht aber auch immer in der besonderen Gefahr, die soziale Dimension des Lernens nicht genügend zu beachten. Allzu ausgedehnte Übungen in Stillarbeit bieten z.B. zu wenig Anlässe zum Gespräch. Wird der formalistische Aspekt des Übens überbetont, so bleiben subjektive Erfahrungen und die Lebenswirklichkeit der Schüler und Schülerinnen unbeachtet. Die im Mathematikunterricht häufigen Urteile „falsch“ oder „richtig“ können die soziale Koedukation hemmen, wenn die Ursachen von Fehlleistungen nicht hinreichend geklärt und z.B. Fehler nur als Folge mangelnden Fleißes angesehen werden.[1]

1.1. Problemstellung

Mathematiker verstehen in der Regel mathematische Sätze und Probleme über Sprachgrenzen hinweg in gleicher Weise. Die symbolische Fachsprache ist meist eindeutig und international verständlich. Diese Meinung ist weit verbreitet und hält sich seit vielen Jahrhunderten. Doch bereits in der Antike war die unterstützende Rolle der Sprache bekannt und ist seither auch nicht wieder außer Acht gelassen worden. In den 90er-Jahren des vergangenen Jahrhunderts wurde besonders durch Maier/Schweiger der Einfluss der Sprache auf den Mathematikunterricht herausgestellt. Auch Bauersfeld betont, dass Rechnen und Sprache eng miteinander verknüpft sind.[2] Die Wichtigkeit von Sprache im Mathematikunterricht soll umfassend untersucht werden.

Für den Geometrieunterricht der Grundschule liegt bereits eine wissenschaftliche Arbeit zu der angedeuteten Thematik vor[3], sodass ich mich bei meinen Untersuchungen auf einen Schwerpunkt der Arithmetik stützen sowie einzelne Bereiche des Sachrechnens aufgreifen werde.

Im Zuge der Forderung nach Integration wird die Notwendigkeit immer größer, der Sprache im Mathematikunterricht die Bedeutung zukommen zu lassen, die angemessen ist. Mit Integration ist sowohl die schulische als auch die soziale Integration gemeint. Neben Sprachproblemen bezüglich Deutsch als Zweitsprache ist auch die Verarmung der eigenen Sprache zu betrachten. Dabei ist zwischen der Sprache der SuS und der der Lehrkräfte zu unterscheiden.

Der Begriff *Sprache* umfasst nicht nur die gesprochene Sprache, sondern auch die schriftliche. Ebenso gehören nonverbale, bildliche oder symbolhafte Äußerungen zum Bereich der Sprache. Differenziert betrachtet muss zwischen den verschiedenen Formen von Sprache wie Alltags-, Bildungs- oder Fachsprache unterschieden werden.

[1] vgl. Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen (1985), S.23.
[2] vgl. Bauersfeld (2003), S. 15.
[3] vgl. Wimmer (2008).

Alltagssprache bezeichnet die Sprache, die im alltäglichen Umgang verwendet wird. Dazu zählt zum einen die Sprache der SuS untereinander, zum anderen aber auch einführende Texte in Schulbüchern, welche Alltagserfahrungen darstellen. Bildungssprache ist die Sprache, die hauptsächlich im Bildungssektor gepflegt wird und deren Beherrschung zur Teilhabe an der Bildung notwendig ist. SuS müssen in der Lage sein, sowohl fachliche als auch alltägliche Themen unabhängig von der Situation in eindeutiger Art und Weise, vollständig und in angemessener Form auszudrücken. Dazu sind ein entsprechender Wortschatz und entsprechende grammatische Strukturen notwendig. Bei der Bildungssprache unterscheidet man zwischen den sogenannten BICS-Fähigkeiten (Basic Interpersonal Communicative Skills) und den CALP-Fähigkeiten (Cognitive Academic Language Proficiency). Als BICS bezeichnet man die grundlegenden Kommunikationsfähigkeiten, wie die sprachlichen Fähigkeiten in der Alltagskommunikation und die Sprachfähigkeiten im interpersonalen Bereich. Die BICS-Fähigkeiten ermöglichen die Mündlichkeit, d.h. sie dienen zur mündlichen Verständigung. Als CALP werden im Gegensatz dazu die schulbezogenen kognitiven Sprachkenntnisse bezeichnet. Dazu gehören die sprachlichen Fähigkeiten der Bildungssprache und die Sprachfähigkeiten im kognitiv akademischen Bereich. Die CALP-Fähigkeiten bewältigen die Schriftlichkeit, d.h. sie dienen zur schriftlichen Verständigung.

Fachsprache ist durch eine Fülle an Fachbegriffen sowie durch Satz- und Textkonstruktionen gekennzeichnet, die in der Allgemeinsprache kaum vorkommen (z.B. Fachbegriffe wie subtrahieren, Algorithmus, Stellenwertsystem etc.). Sie wird häufig bei Definitionen und Sätzen verwendet. Fachsprachliche Texte können von den SuS erst verstanden werden, wenn sie über das notwendige Vokabular verfügen.

Dies gilt nicht nur für Texte, sondern auch für mathematische Problemstellungen, da auch hier fachsprachliches Vokabular von Nöten ist. Deshalb ist es wichtig, dass diese unterschiedlichen Sprachniveaus auch im Mathematikunterricht beachtet und Schritt für Schritt aufgebaut werden.

1.2. Zielsetzung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich im Wesentlichen in zwei große Bereiche. Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den theoretischen Voraussetzungen der empirischen Studie. Hierzu zählen neben den anatomischen auch die sprachwissenschaftlichen und vor allem mathematischen Grundlagen. In diesen Teil fließen auch die wesentlichen Aspekte ein, die Ruf/Gallin zur Bedeutung der Sprache im Mathematikunterricht herausgearbeitet haben. Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Planung, Durchführung und Reflexion meiner empirischen Untersuchung sowie der Vorstellung möglicher Unterrichtskonzepte zu den ausgewählten mathematischen Themen.

Die anatomischen Voraussetzungen des Lernens werden erläutert, um aufzuzeigen, dass sowohl die Sprachentwicklung als auch das Erlernen von Mathematik grundsätzlich aus demselben Bereich erfolgen. Anschließend wird die Entwicklung der Sprache aus sprachwissenschaftlichen Gesichtspunkten betrachtet, Funktionen der Sprache erklärt und die mathematischen Grundlagen fachwissenschaftlich dargestellt. Dies ist notwendig, damit im folgenden Kapitel die Bedeutung der Sprache bezüglich mathematischer Sachverhalte verdeutlicht werden kann. Es wird der Einsatz von Sprache bei der schriftlichen Subtraktion und bei der Bearbeitung von Sachrechenaufgaben erläutert.

Im zweiten Teil werden zunächst die Vorbereitungen zur empirischen Untersuchung dargelegt. Neben der Auswahl der Untersuchungsgruppen werden auch die von mir eingesetzten mathematischen Aufgaben erläutert; darüber hinaus wird die Durchführung dieser Studie beschrieben. Im Anschluss erfolgt die Auswertung der Untersuchung. Basierend auf diesen Ergebnissen wurden zwei Unterrichtskonzepte entwickelt, welche auf die Bedürfnisse der SuS eingehen und den Anforderungen an die Sprache gerecht werden. Das erste Konzept befasst sich mit der Erarbeitung der schriftlichen Subtraktion, das zweite mit der Modellierung von Sachaufgaben. Freude und Motivation sollen im Vordergrund stehen. Die von mir getroffenen didaktischen und methodischen Entscheidungen werden begründet, die Bildungsstandards und der Lehrplan dabei berücksichtigt. Es finden sich zudem Hinweise auf mögliche Probleme, die von der jeweiligen Lehrkraft unter Berücksichtigung der betreffenden Lerngruppe betrachtet werden müssen. Dieser Teil der Dissertation schließt mit einem Fazit und dem Ausblick, welche Aspekte im Rahmen dieser Arbeit nicht zu klären waren, aber Anlass zu weiteren Untersuchungen geben könnten.

1.3. Gliederung und Vorgehensweise der Arbeit

Während meiner langjährigen Tätigkeit an einer Grundschule war ich häufig mit Schwierigkeiten im Mathematikunterricht konfrontiert. Trotz intensiver Vorbereitung und kritischer Reflexion erreichte ich im Unterricht häufig nur die Mehrheit der SuS. Auch wenn nur ein ganz geringer Teil der Klasse die jeweiligen Stundenziele nicht erreichte, so war dies doch für mich unbefriedigend. Dieses Empfinden begleitet mich auch heute noch in Vorlesungen. Die eigenen Erfahrungen, die Hilflosigkeit der SuS und die daraus resultierenden Leistungsdefizite der Kinder sind für mich Anlass, die Entwicklung zu mehr sprachbewusstem Mathematikunterricht voranzutreiben. Durch die Erarbeitung der eigenen Konzeptionen sollen Lehrkräfte für die Bedeutung der Sprache im Mathematikunterricht sensibilisiert werden. Die anschließende Reflexion bietet die Möglichkeit der kritischen Auseinandersetzung mit den Chancen und Grenzen dieser Unterrichtsform. Das primäre Ziel meiner Arbeit ist die Verbesserung der Unterrichtsqualität zur Behebung der Bildungsmisere im Bereich Mathematik, in der sich viele SuS befinden. Die soeben aufgeführten Gegebenheiten regten mich an, mich tiefergehend mit der Bedeutung der Sprache für den Mathematikunterricht auseinanderzusetzen, und dieses Thema zum Forschungsgegenstand einer mathematikdidaktischen Doktorarbeit zu machen.

Bei den unter Kapitel 1 dargestellten – von der Allgemeinheit oft vertretenen – Ansichten zur Mathematik handelt es sich um Vorurteile. Vielleicht ist die Kommunikation im Mathematikunterricht schwieriger als im Sprachunterricht, aber generell ist sie möglich und meiner Meinung nach unerlässlich, denn durch die Kommunikation über mathematische Inhalte werden Einsichten in die mathematischen Zusammenhänge vermittelt. Erst wenn Kinder über mathematische Probleme nachdenken und ihre Gedanken verbalisieren, wird das Lernen im Mathematikunterricht zu einem aktiven Prozess. „Lernen ist ein aktiver Vorgang und passives Lernen ist wohl prinzipiell unmöglich.“[4] Mathematische Inhalte werden von Kindern aktiv und gemeinsam erschlossen. Der Austausch und das Abwägen von individuellen Ansichten bereichert das Mathematikverständnis des einzelnen Kindes. Das flexible Denken wird geschult, indem eigene Gedankengänge dargestellt und aufgrund anderer Meinungen umgedacht werden können. Durch Kommunikation über problemhaltige mathematische Inhalte haben auch schwächere SuS die Chance, Vertrauen in ihre Denkfähigkeit und Freude am Denken zu gewinnen. Sie füh-

[4] vgl. Lorenz (1997), S.10.

len sich mit der Problemstellung nicht allein gelassen und können von den Aussagen anderer Kinder profitieren. Zusammenfassend soll betont werden, dass effektiver Mathematikunterricht ohne gute Kommunikation nicht möglich ist und dass diese der ständigen Förderung bedarf:

> Die Sprache (einschließlich facheigener Termini und Symbole) bietet umfassende Möglichkeiten, Informationen darzustellen. Im Unterricht vollzieht sich die Kommunikation in der Umgangssprache und in ihr werden auch die mathematischen Inhalte ausgedrückt. Um die Verständigung im Gespräch und um das Verstehen mathematischer Sachverhalte zu verbessern, ist es notwendig, bewusst und stetig den Sprachgebrauch zu schulen.[5]

[5] vgl. Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen (1985), S.27f.

2. Anatomische Voraussetzungen

2.1. Funktionen des Gehirns

Das Gehirn befindet sich im Inneren des Schädels. Es ist der komplizierteste Teil des menschlichen Nervensystems. Das Gehirn koordiniert alle nervlichen Impulse und ist die Quelle der Intelligenz, die es dem Menschen erst ermöglicht zu lernen. Obwohl es mit etwa zwei Kilogramm nur einen geringen Teil (ca. 3%) unseres gesamten Körpergewichts ausmacht, verbraucht es jedoch einen ziemlich großen Teil (ca. 15%) an Energie.

Das Gehirn bildet mit dem Rückenmark das Zentralnervensystem (ZNS). Es ist durch das periphere Nervensystem mit dem Körper verbunden. Das periphere Nervensystem besteht aus Nervenfaserbündeln, die zum oder vom Zentralnervensystem hin- bzw. wegführen; hierzu zählen die Hirn- und die Rückenmarksnerven. Letztere befinden sich im Rückenmark und durchziehen den gesamten Körper. Das Rückenmark verläuft durch den Spinalkanal der Wirbelsäule und endet im Hirnstamm. Dort haben die Hirnnerven ihren Ursprung, die als Reizleitungen des Kopfes bezeichnet werden. Beide Nervenzentren (Gehirn und Rückenmark) werden durch dünne Häute (Meningen) geschützt. Etwa 100 Milliarden Nervenzellen (Neuronen) sorgen für die Übermittlung von Informationen.

Das Gehirn ist von den folgenden drei Hirnhäuten umgeben:

- Harte Hirnhaut (Dura mater)
- Spinngewebshaut (Arachnoidea)
- Weiche Hirnhaut (Pia mater)

Die Hirnflüssigkeit (Liquor) befindet sich zwischen der Spinngewebshaut und der weichen Hirnhaut. Sie schützt das Gehirn vor möglichen Erschütterungen. Das Gehirn selbst ist in unterschiedliche Bereiche gegliedert:

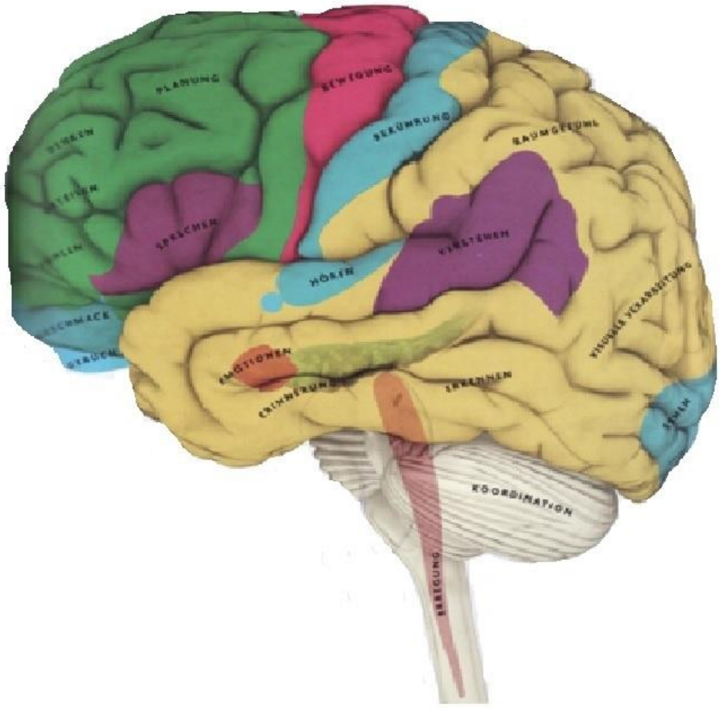


Abbildung 1: Bereiche und Funktionen des Gehirns (Carter 2014, S. 39)

2.2. Aufbau des Gehirns

Das Gehirn gliedert sich im Wesentlichen in vier große Bereiche:

- das Großhirn
- das Kleinhirn
- das Zwischenhirn
- den Hirnstamm

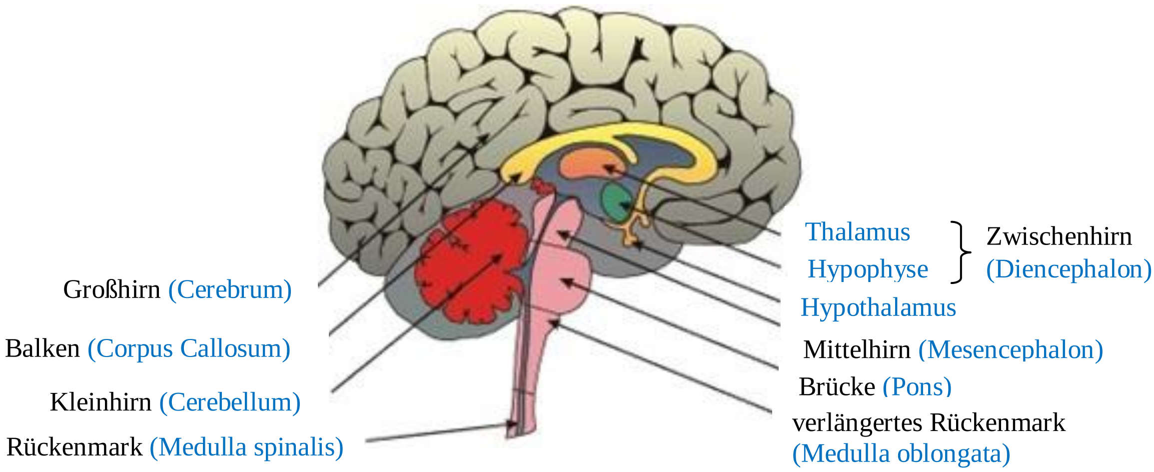


Abbildung 2: Makroskopischer Aufbau des Gehirns nach Dr. Gabriele Lambert

Das Großhirn (Cerebrum) bildet den größten Teil des Gehirns. Es besteht aus zwei Hälften – der linken und der rechten Hemisphäre. Beide sind durch ein dickes Nervenbündel (Corpus Callosum/Balken) miteinander verbunden und arbeiten eng zusammen. Jede Hirnhälfte ist auf bestimmte Aufgaben spezialisiert.

Linke Gehirnhälfte			**Rechte Gehirnhälfte**	
Spezielle Fähigkeiten	**Arbeitsweisen des Bewusstseins**		**Arbeitsweisen des Bewusstseins**	**Spezielle Fähigkeiten**
Schrift	logisch		intuitiv	Gefühle
Sprache	folgerichtig		planlos	Tastsinn
Symbole	realitätsorientiert		phantasievoll	Räumliches Vorstellungsvermögen
Lesen				
Rechnen	abstrakt		konkret	Formen/Muster
Fakten	verbal		non-verbal	Schätzungen
Sprechen	symbolisch		symbolisch	Farbempfindungen
Zuhören	zeitorientiert		nicht zeitorientiert	Musik/Gesang
Regeln	analytisch		emotionell	Kreativität
Beachten von Anweisungen				Visualisierungen

Tabelle 1: Funktionen der beiden Gehirnhälften nach teachsam

In der linken Hälfte sind hauptsächlich Sprache und Logik verankert, während in der rechten Hälfte das räumliche Vorstellungsvermögen und die Kreativität sitzen. Der Neocortex ist die äußerste Schicht der Großhirnrinde. Er ist u.a. für die Lern-, Sprech- und Denkfähigkeit sowie das Bewusstsein und das Gedächtnis zuständig. In der Hirnrinde werden die Informationen der Hirnnerven verarbeitet und im Gedächtnis gespeichert.

Das Kleinhirn (Cerebellum) ist der unterste und hinterste Teil des Gehirns. Die Oberfläche gleicht der des Großhirns, jedoch sind die Wülste feiner und gleichmäßiger. Die Hauptaufgabe des Kleinhirns ist die Koordination von Bewegungen; dazu zählt der kontrollierte Einsatz der Muskulatur, das Gleichgewicht und somit die gesamte Körperhaltung.

Das Zwischenhirn (Diencephalon) umfasst den Thalamus und den Hypothalamus sowie deren Anhangsgebilde. Der Thalamus filtert sensorische Informationen. Er entscheidet, welche Sinneseindrücke ins Bewusstsein gelangen sollen und leitet sie an die entsprechenden Verarbeitungszentren weiter. Der Hypothalamus – ein weiterer Bestandteil des Zwischenhirns – bildet die wichtigste Verbindung zwischen Hormon- und Nervensystem. Er steuert z.B. den Schlaf-Wach-Rhythmus, Hunger und Durst aber auch den Sexualtrieb und verarbeitet Schmerz- und Temperaturempfinden.

Das Stammhirn (Hirnstamm) ist entwicklungsgeschichtlich gesehen der älteste Teil des Gehirns. Es ist für die wesentlichen Lebensfunktionen zuständig und steuert u.a. die Herzfrequenz, den Blutdruck und die Atmung. Außerdem ist das Stammhirn für einige wichtige Reflexe wie den Lidschluss-, Schluck- oder Hustenreflex verantwortlich. Das Stammhirn bildet die Verbindung zwischen dem übrigen Gehirn und dem Rückenmark. Eintreffende Informationen leitet es überkreuz weiter, daher wird die linke Körperhälfte von der rechten Gehirnhälfte gesteuert und umgekehrt.

2.2.1. Zentrum für Sprachenlernen

Das menschliche Gehirn hebt sich besonders durch die für die Sprache zuständigen Areale von den Gehirnen anderer Lebewesen ab. Es befindet sich bei der Mehrheit der Menschen in der linken Hemisphäre, bei etwa 20% der Menschen (Linkshänder) jedoch in der rechten. Im Wesentlichen bilden vier Areale das sogenannte Sprachzentrum:

- das Broca-Areal
- das Wernicke-Areal
- der Fasciculus arcuatus
- das Geschwind-Areal

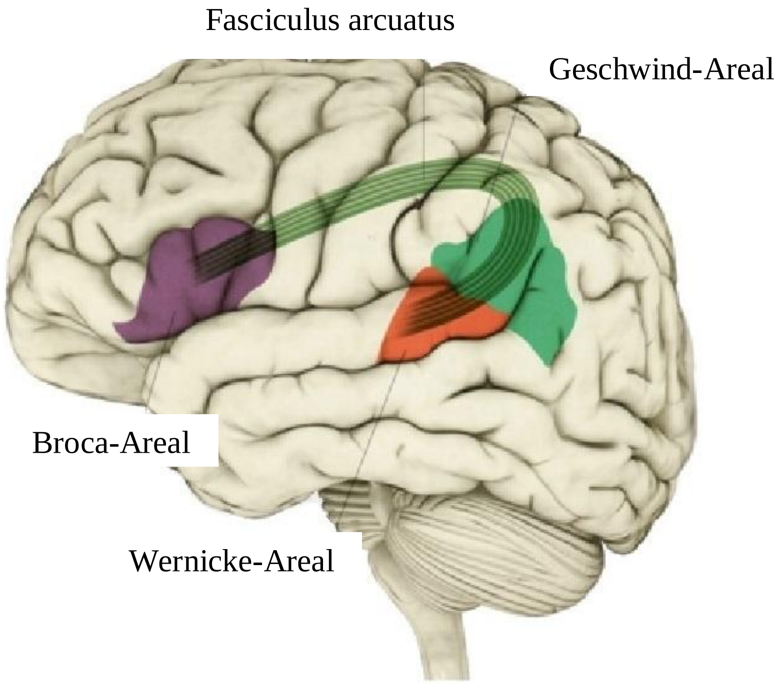


Abbildung 3: Die wichtigsten Sprachareale (Carter 2014, S. 148)

Sprechen und Verstehen sind aufwendige Prozesse. Bei der Verarbeitung von Sprache werden verschiedene Bereiche im Gehirn beansprucht. Die Sprachverarbeitung erfolgt hauptsächlich im Broca- und Wernicke-Areal. Dabei ist das Wernicke-Areal vor allem für das Verstehen von Sprache entscheidend. Es befindet sich im oberen Teil des linken Temporallappens neben dem okzipitalem und dem parietalem Cortex. Verletzungen (z.B. Hirnblutungen) in diesem Bereich können dazu führen, dass der Patient Sprache kaum noch entschlüsseln kann. Das Broca-Areal sitzt im Frontallappen und ist für die Produktion von Sprache, das Finden von Wörtern und das Bilden von Sätzen zuständig. Verletzungen in diesem Bereich bewirken, dass der Patient zwar in der Regel noch alles verstehen kann, aber Probleme hat, Wörter und Sätze zu bilden. Diese beiden Areale werden durch ein dickes Nervenband (Fasciculus arcuatus) miteinander verbunden. Es sorgt dafür, dass die Informationen aus den Arealen an das jeweils andere weitergeleitet werden. Das Geschwind-Areal umgibt das Wernicke-Areal und sitzt im unteren Teil des Parietallappens. Es ist einer der Bereiche, die erst sehr spät ausgebildet werden. Es ist für die Kombination der Laute und Bedeutungen zuständig.[6] Beim Hören werden Worte vom Wernicke-Areal aufgenommen und durch das Geschwind-Areal einer Bedeutung zugeordnet. Beim Sprechen ist es genau umgekehrt. Im Wernicke-Areal werden die Worte zu den jeweiligen Gedanken gefunden, die dann im Broca-Areal durch konkrete Bewegungen des Mundes und des Kehlkopfes ausgesprochen werden.

[6] vgl. Carter (2014), S. 148.

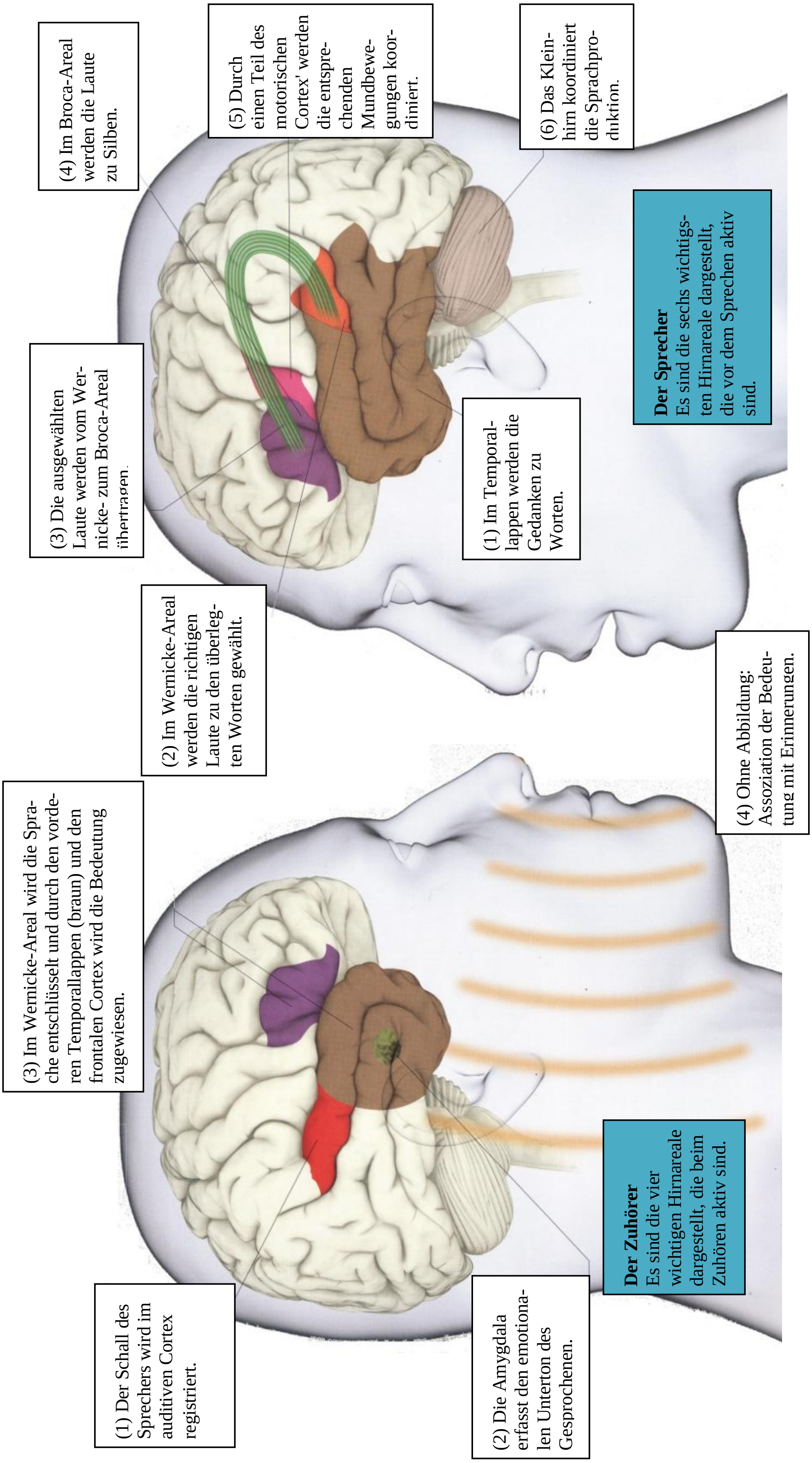


Abbildung 4: Aktivität der einzelnen Hirnareale bei der Konversation (Carter 2014, S. 150f)

2.2.2. Das numerische Gehirn

Bei der Mathematik verhält es sich anders als bei der Sprache. Während es für die Sprache zuständige Zentren (vgl. 2.2.1) gibt, so gibt es kein konkretes mathematisches Zentrum. Zwar wollen Forscher 2013 ein Zentrum für Zahlerkennung gefunden haben, im Allgemeinen müssen jedoch die Bereiche der Intelligenz betrachtet werden. Mit *Intelligenz* werden die kognitiven Fähigkeiten bezeichnet; hierzu zählen konkretes, abstraktes sowie logisches Denken. Wie die nachstehende Abbildung zeigt, gibt es sowohl in der linken als auch in der rechten Hemisphäre Areale, die mit der Intelligenz zu tun haben.

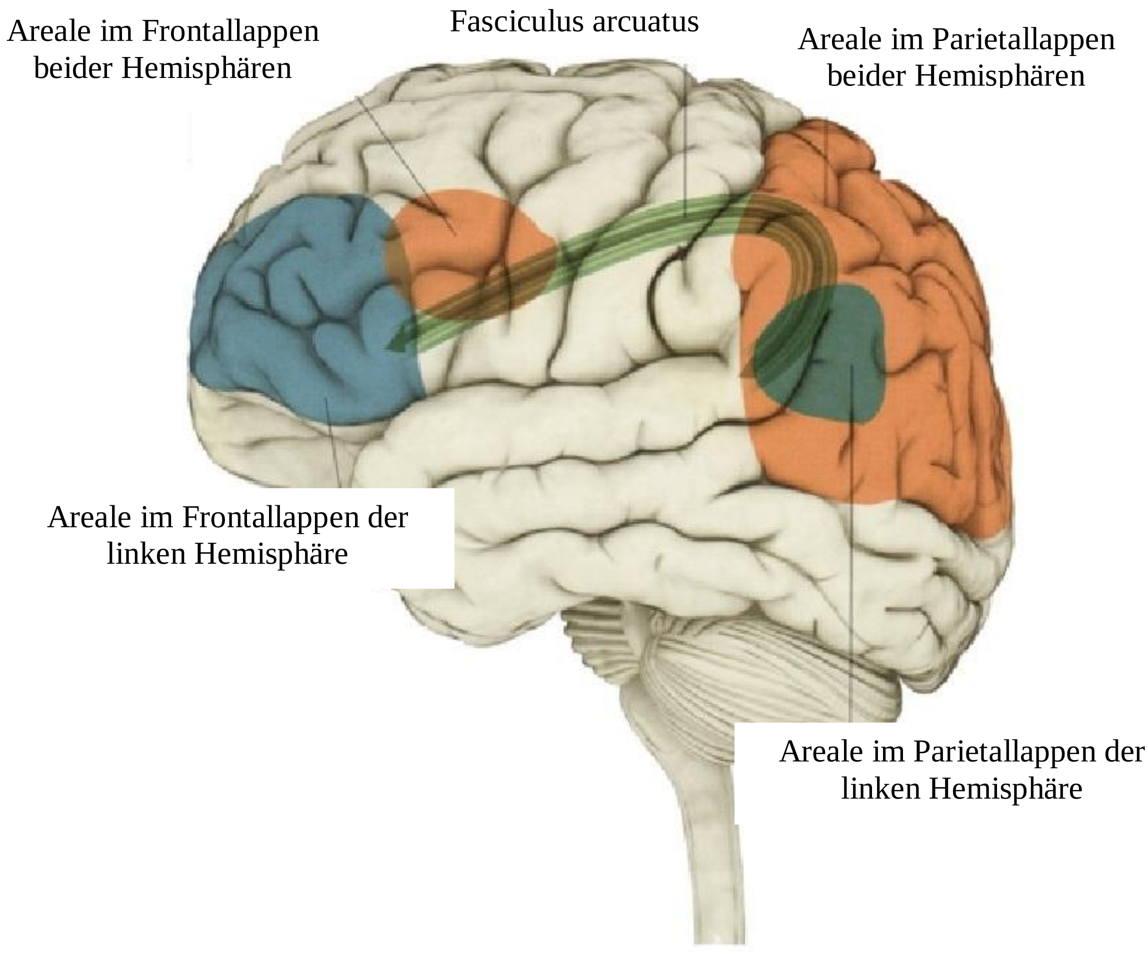


Abbildung 5: Aktive Areale bei Intelligenz und Denkvermögen (Carter 2014, S. 168)

Es wird deutlich, dass sich sowohl Areale im Frontal- als auch im Parietallappen befinden. Beide werden durch einen Nervenstrang (Fasciculus arcuatus) miteinander verbunden. Dies ist beim Sprachzentrum auch der Fall (vgl. 2.2.1). Anatomisch betrachtet ist die Aussage, man sei entweder mathematisch oder sprachlich begabt, zu widerlegen.

Im Folgenden werden nun insbesondere neuropsychologische Modelle zur Zahlenverarbeitung betrachtet, um die Bedeutung für den Mathematikunterricht deutlich herauszustellen.

2.2.3. Modelle zur Zahlenverarbeitung

Zahlen gehören zum Alltag des Menschen. Es gibt keinen Tag, an dem eine Begegnung mit Zahlen ausgeschlossen werden kann. Uhrzeiten und Busnummern ablesen oder Einkäufe bezahlen etc. ist ohne numerische Informationsverarbeitung gar nicht möglich. Die Art und Weise wie Zahlen in der Umwelt auftreten ist sehr unterschiedlich. So kann eine Zahl (z.B. im Mathematikunterricht) in ausgeschriebener Form innerhalb einer Aufgabe erscheinen oder in gesprochener Sprache durch Lehrerinnen und Lehrer (LuL) und/oder MitschülerInnen an andere herangetragen werden. Häufig treten Zahlen aber in ihrer symbolischen Form auf. Die Begegnung mit Zahlen bleibt nicht folgenlos; sie beeinflusst das menschliche Denken und Handeln. Erst der Umgang mit Zahlen ermöglicht es dem Menschen sich erfolgreich in Alltagssituationen zurechtzufinden. So ist z.B. die numerische Größe eine semantische Information über eine Zahl, durch die die Zahl in ein Verhältnis zu einer anderen Zahl gesetzt werden kann. Zahlen besitzen vielfältige mathematische Eigenschaften; sie sind gerade oder ungerade, Vielfache anderer Zahlen oder durch andere Zahlen teilbar.

Innerhalb der kognitiven Neuropsychologie gibt es verschiedene Modelle, die sich mit der mentalen, internen Darstellung von Zahlen beschäftigen. Im Fokus der meisten Modelle steht die generelle semantische Größenrepräsentation von Zahlen als die wichtigste Komponente. Einige Modelle, die wegen ihrer unterschiedlichen Ansichten über eine interne semantische Repräsentation von Zahlen interessant sind, sollen im Folgenden vorgestellt werden:

Modell der numerischen Informationsverarbeitung

1985 entwickelte McCloskey gemeinsam mit Caramazza und Basili ein erstes Modell zu grundlegenden Fähigkeiten im Umgang mit Zahlen, in dem drei Verarbeitungsschritte von Zahlen unterschieden werden:

- das Zahlenverständnis
- die abstrakte interne Repräsentation
- die Zahlenproduktion

Das Zahlenverständnis basiert auf der Darstellung mittels arabischer Zahlen, während die Zahlenproduktion die Zahlwörter meint. Die abstrakte interne Repräsentation ist als Verbindungsglied zwischen diesen Darstellungsebenen zu sehen und ist notationsunabhängig. McCloskey, Caramaza und Basili sprechen diesbezüglich von einem Input- und Outputsystem. Als Inputsystem wird das Zahlenverständnis verstanden, welches alle wichtigen Informationen über den arabischen Zahlencode sowie das Verständnis für die jeweiligen Zahlwörter aufnimmt. Als Outputsystem verstehen McCloskey et al. die Zahlenproduktion, welche die Informationen über Zahlen wieder als arabischen Code oder in Form von Zahlwörtern ausdrückt. Die Verbindung über die abstrakte interne Repräsentation wird als Verarbeitungsprozess gesehen. Hier wird mittels mathematischem Fachwissen die Input- zur Outputinformation verarbeitet; z. B. wird hier jeder Ziffer einer Zahl ihre numerische Größe (*basic quantity*) zugeordnet. Diese wird dann an eine der Ziffer entsprechende Zehnerpotenz geknüpft, um die Stelle dieser Größe festzulegen. So wird beispielsweise die arabische Zahl 49 zentral in $4 \bullet 10^1$ und $9 \bullet 10^0$ umgewandelt. Numerische Informationen werden folglich über den arabischen Code oder in verbaler Form aufgenommen. McCloskey geht davon aus, dass jede Verarbeitung einer Zahl nur mittels einer Umwandlung in eine semantische Repräsentation möglich ist. Dehaene (1992) sowie Dehaene & Cohen (1995, 1997) sehen die zentrale Stellung der Repräsentation eher kritisch. Sie nehmen die semantische Darstellung der Zahlen aus dem Zentrum und erarbeiten ein alternatives Modell, welches auch asemantische Repräsentationen mit einbezieht.

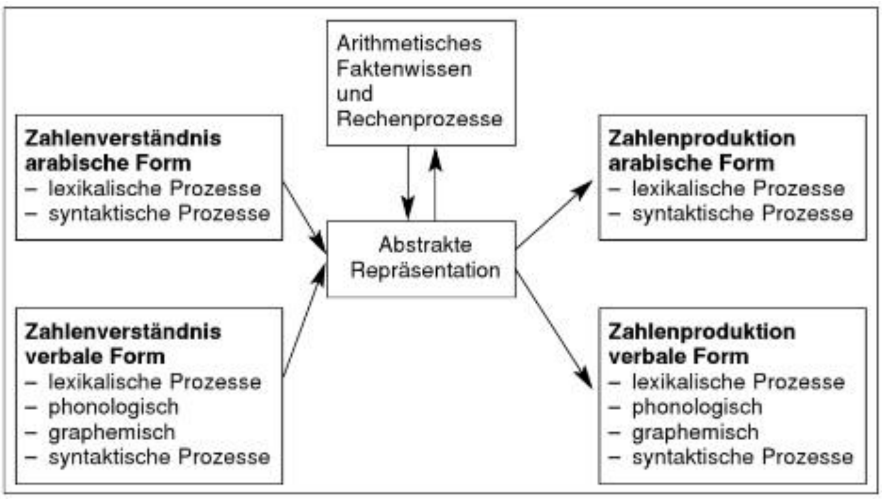


Abbildung 6: Modell der numerischen Informationsverarbeitung nach McCloskey (Lambert 2015, S. 40)

Das Triple Code Modell von Dehaene (1992)

Bei dem Triple Code Modell nach Dehaene (1992) handelt es sich um ein funktionelles Zahlenmodell, welches die verschiedenen Repräsentationsebenen der mentalen Zahlverarbeitung in drei unterschiedliche Darstellungen unterscheidet:

- die visuell-arabische Darstellung
- die auditiv-verbale Darstellung
- die analoge Größendarstellung

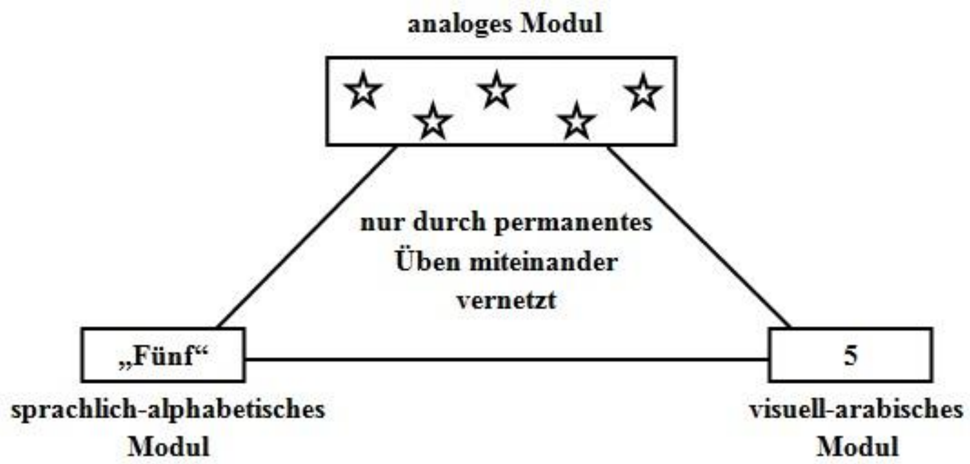


Abbildung 7: Das Triple Code Modell nach Dehaene und Cohen (1997)

Die **visuell-arabische Darstellung** ist für die syntaktische Erfassung der Zahlwörter zuständig, wobei die Semantik außer Acht gelassen wird. Die Zahlen werden nicht in ihrer einzelnen Zifferndarstellung betrachtet, sondern die Zahl wird als Ganzes gesehen.[7] Im Gehirn ist die visuell-arabische Darstellung auf beiden Seiten des okzipitotemporalen Cortex einzuordnen. Der Bereich für die arabischen Zahlen ist auf der rechten Seite zu finden; die **auditiv-verbale Darstellung** ist laut Forschung ausschließlich in der linken Gehirnhälfte – im inferioren frontalen und superioren temporalen Gyrus – vorhanden.[8] Diese Darstellung ist genau wie die visuell-arabische Darstellung noch nicht für den Bedeutungszusammenhang des Zahlwortes verantwortlich. Syntaktisch wird hier jedoch nicht allein das Zahlwort, sondern ebenfalls der umliegende Kontext beachtet. Deshalb können in der auditiv-verbalen Darstellung Rechenoperationen verarbeitet werden.[9] Zuletzt ist noch die **analoge Größendarstellung** zu nennen, die die bislang noch fehlenden inhaltlichen Informationen enthält. Die jeweilige Zahlbedeutung

[7] vgl. Dehaene (1992), S. 16.
[8] vgl. ebd., S. 17.
[9] vgl. ebd., S. 18.

wird hier relevant, um eine Beziehung in Bezug auf Größe und Position zwischen verschiedenen Zahlen herausstellen zu können. Auch bei der simultanen Zahlerfassung wird die analoge Größendarstellung zu Rate gezogen.[10] Dies geschieht durch Aktivierung eines mentalen Zahlenstrahls, der durch seine Links-Rechts-Ausrichtung und mit Hilfe einer logarithmischen Skalierung die Positionen der Zahlen repräsentiert. Auch diese Darstellung ist wie die visuell-arabische beidseitig im Gehirn lokalisiert. Sie liegt genauer im inferioren parietalen Cortex inklusive dem intraparietalen Sulcus.[11]

Diese drei Darstellungen sind nicht als vollständig autonom anzusehen, denn sie arbeiten zum Teil parallel. Es bestehen Zusammenhänge zwischen ihnen, die dafür sorgen, dass eine möglichst schnelle und genaue Zahlerfassung und -verarbeitung möglich ist.[12] Es werden dabei nicht immer alle Darstellungen gleichermaßen angesprochen, sondern meist liegt der Fokus auf einer der drei Darstellungen.

[10] vgl. Dehaene (1992), S. 19.
[11] vgl. ebd.
[12] vgl. ebd., S. 20.

3. Sprachwissenschaftliche Grundlagen

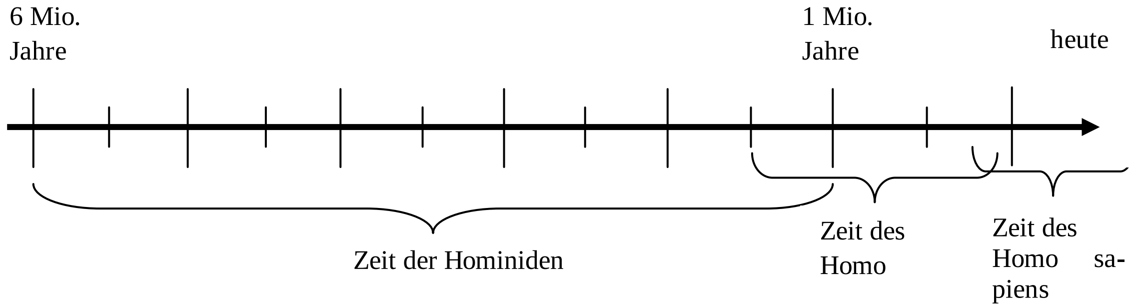
3.1. Geschichtliche Entwicklung der Sprache

Die Entwicklung unserer Sprache geht auf die Zeit der Hominiden – vor ca. 6 bis vor ca. eine Million(en) Jahre – zurück. Der Mensch hat sich aus einem weit verzweigten Stammbaum vorangegangener Primaten entwickelt. Im Vergleich mit diesen Individuen hebt er sich besonders durch seine Flexibilität, Imitations- und Sprachfähigkeit hervor. Grundlage für die Entwicklung der Sprache bildet hauptsächlich die Imitationsfähigkeit. So wird Sprache *vererbt* und muss in nachfolgenden Generationen nicht neu entwickelt werden. Aus dieser Epoche gibt es nur wenige Nachweise, so dass man davon ausgeht, dass die Frühmenschen durch den aufrechten Gang gezwungen wurden, ihre Hände sinnvoll zu nutzen (z.B. zur Entwicklung von Werkzeugen). Im Zuge der Evolution veränderte sich die Position des Kehlkopfes, woraus resultierte, dass sich auch relevante Gehirnstrukturen veränderten, die eine verbesserte Mimik sowie verbesserte motorische Fähigkeiten der Hände ermöglichten. Es wäre also denkbar, dass der Homo – vielleicht auch schon frühere Gattungen – eine Gebärdensprache entwickelte.

Die Zeit des Homo begann vor ca. 1,5 Millionen und reichte bis in die Zeit vor 40.000 Jahren. Man geht davon aus, dass in diesem Zeitraum bereits eine Lautsprache verwendet wurde. Die Gattung Homo galt als unternehmungsbereit. Das bedeutet, dass sie sich z.B. bemühte, bessere Nahrungsquellen aufzuspüren. Vor ca. 1,5 - 1 Millionen Jahre entwickelte sich der Homo Ergaster. Er gilt als Vorfahre des Neandertalers, der bis vor 30.000 Jahren in Europa lebte. Die Frühzeit des Homo Sapiens begann vor ca. 500.000 bis 200.000 Jahren. Die Sprache hat sich vermutlich in dieser Zeit entwickelt. Im Verlauf der Entwicklung des Homo sapiens kam es zu einem Bevölkerungswachstum. Dies ist u.a. auf die verbesserten Fähigkeiten (z.B. die Jagd) zurückzuführen. Man geht weiter davon aus, dass in diesem Zusammenhang eine qualitative Verbesserung der Sprache stattfand. Vor ca. 43.000 Jahren erreichte der Homo Sapiens auch Europa. Sprachen wie Baskisch oder Kaukasisch sind wohl Folgen dieser Erstbesiedlungen, da diese mit heutigen Sprachen nur schwer im Zusammenhang zu bringen sind.

Vor etwa 10.000 Jahren folgte die Zeit der neolithischen Revolution. Die wesentlichen Merkmale dieser Epoche sind Sesshaftigkeit, Keramikproduktion, Kupferverarbeitung und Tauschhandel. Die Kultivierung von wilden Pflanzenarten (Ackerbau) und die Zähmung von Wildtieren (Viehzucht) führten zur Bindung der Menschen an bestimmte

Orte. Größere und z.T. auch befestigte Siedlungen mit stabilen Hausanlagen entwickelten sich, die die leichten Wohneinrichtungen der Jäger und Sammler ablösten. Dies ist ein wesentlicher Punkt in der Entwicklung der Sprache. Die Urbevölkerung wurde durch die Überlegenheit dieser Revolution verdrängt oder assimiliert; dies geschah – außer in Australien – auf allen Kontinenten. Die Veränderung lag in einer deutlich komplexer und ausdrucksstärker werdenden Sprache. Es folgte die Zeit nach der Erfindung der Schrift. Um etwa 3200 v.Chr. wurde die Keilschrift durch die Sumerer (Mesopotamien; Irak, Türkei, Syrien, ...) entwickelt. Der heutige Mensch kann alle Sprachen dieser Welt erlernen. Dies spricht für eine Monogenese der Sprache.



3.2. Vier Modelle der Sprachentwicklung

Im Folgenden werden die vier wichtigsten Modelle der Sprachentwicklung vorgestellt. Die Begriffe Sprachentwicklung und -erwerb werden in diesem Zusammenhang für den Prozess verwendet, den ein Kind durchläuft um sprechen zu lernen. Ursprünglich stammt jedoch der Begriff *Sprachentwicklung* aus dem Bereich der Psychologie und *Spracherwerb* aus dem Bereich der Sprachwissenschaft/Linguistik. Wie unter 3.1 erläutert, wird dem Menschen erst durch seine Sprachfähigkeit seine Sonderstellung innerhalb der Welt zuteil.

Die Unterscheidung der vier Modelle lässt sich am besten anhand der folgenden Tabelle verdeutlichen:

		Umwelt	
		Aktiv	**Passiv**
Person	**Aktiv**	**Interaktionismus** Kind und Umwelt sind Teilsysteme, die wechselseitig aufeinander einwirken (Interaktionistisches Modell)	**Kognitive Theorien** Das Kind entwickelt sich im aktiven Austausch mit der Unwelt (Aktionale, kognitivistische Modelle)
	Passiv	**Behaviorismus** Entwicklungsschritte werden direkt auf Umwelteinflüsse zurückgeführt (Exogenistische Modelle)	**Reifungstheorien** Fähigkeiten entwickeln sich durch anlagebedingte Reifung (Endogenistische Modelle)

Tabelle 2: Vier Modelle der Sprachentwicklung nach Oerter/Montada 2008

Eine nähere Betrachtung der Modelle erfordert die Erläuterung von drei Basiselementen: die außerindividuelle **Umwelt**, die automatischen Prozesse der genetischen **Anlage** sowie die spontanen Aktivitäten des **Lebewesens**, das sich die Welt aneignet. Die Debatte um den Primat dieser drei Elemente lässt sich bis in die philosophischen Grundpositionen von Subjektivismus, Rationalismus, Idealismus, Konstruktivismus (Subjekt), den Nativismus und Mentalismus (Anlage) und die exogenistischen Positionen von Materialismus, Empirismus, Positivismus (Umwelt) zurückverfolgen. Die Frage des Vorrangs (Primats) ist im Moment nicht endgültig wissenschaftlich zu lösen.[13]

Exogenistische Theoriemodelle betonen den Faktor der außerindividuellen Umwelt. **Endogenistische Theoriemodelle** setzen die automatischen Prozesse der genetischen Anlage in den Vordergrund.

Während exogenistische Modelle davon ausgehen, dass soziale, kulturelle, milieubedingte, institutionelle u.a. externe Faktoren bestimmend für die (Sprach-)Entwicklung des Menschen sind, halten endogenistische Modelle dagegen genetische und instink-

[13] vgl. Melchior (2007), S. 3.

tive Einflüsse für determinierend. Der Interaktionismus stellt eine Art dialektischer Vermittlungsposition dar.
Sieht man das Individuum als Zentrum dieser Entwicklung, so muss man die Aktivität bzw. Passivität der Umwelteinflüsse einerseits und des Handelnden andererseits betrachten, die zur Sprachentwicklung beitragen. Seit den 1960er Jahren rücken immer mehr die subjektiven Leistungen in den Vordergrund.

3.2.1. Exogenistische Modelle: Behaviorismus

Exogenistische Modelle stellen die aktive Rolle der Umwelt bei Sprachentwicklungsprozessen in den Vordergrund und sehen sowohl die genetischen Faktoren als auch die Aktivität des Individuums als nebensächlich an. Im Behaviorismus wird Sprachentwicklung sowie das gesamte menschliche Verhalten durch operante (teilweise sogar klassische) Konditionierung erlernt. Das bedeutet, dass die Sprachentwicklung durch Belohnung (positive Verstärkung) und Bestrafung (negative Verstärkung) gesteuert wird. Das Kind nimmt Reize aus der Umwelt (Sprache der Eltern etc.) wahr, ahmt diese nach und erfährt dafür eine positive Reaktion („Belohnung“). Nachgeahmte Reize, die eine Belohnung nach sich ziehen, werden das Kind motivieren, dieses Sprachverhalten zu wiederholen. Das Sprachverhalten, welches keine positive Verstärkung nach sich zieht, wird abgelegt. Im Behaviorismus bei/nach WATSON wird dem Individuum eher eine passive Rolle zugeschrieben, bei späteren behavioristischen Modellen wechselte dies in eine aktivere Rolle.

3.2.2. Endogenistische Modelle: Nativismus und Mentalismus

Nativistische Ansätze heben die angeborenen sprachlichen Strukturen bzw. die genetisch bedingten Reifungsprozesse hervor. Der Spracherwerb wird als ein fast automatischer (Lern)-Prozess gesehen und nicht als ein extern gesteuerter. Differenzen bei nativistischen Modellen finden sich hinsichtlich der Verankerung (Repräsentationsebene und -ort) und der Entwicklung des angeborenen Sprachwissens. Mentalistische Modelle (CHOMSKY) betonen, „dass das Sprachwissen nur gedanklich und als ideales Konstrukt in Form logischer Regelsysteme vorliegt, ohne dass diese mentalen Zustände irgendwelchen körperlich-neurologischen Zuständen oder Muster im Gehirn entsprechen müssen (Dualismus von Körper und Geist)”.[14] Die Reifungstheorien nach *Bickerton* oder *Lenneberg* sehen den Spracherwerb als genetisch gesteuerten biologischen (körpergesteuerten) und/oder evolutionär entstandenen Prozess. In engem Zusammenhang mit diesen Reifungstheorien stehen die genetischen Instinkt- oder Prägungstheorien.

Im Nativismus ist besonders das von CHOMSKY verfasste Konzept der Generativen Grammatik (1950) von Bedeutung. Während Skinner in seinem Buch *Verbal Behavior* davon spricht, dass Sprache rein durch konditioniertes Verhalten entsteht, formuliert CHOMSKY folgende Postulate:

- Alle Kinder können von Geburt an korrekte sprachliche Strukturen produzieren, ohne sie gehört zu haben (Grammatikalität ohne Regelvermittlung).
- Trotz fehlerhafter sprachlicher Umwelteinflüsse können Kinder ab einem gewissen Alter (ca. 3 - 4 Jahre) die Erstsprache beherrschen (kurze Erwerbszeit).
- Ein Kind kann mit den bis dahin vorhandenen sprachlichen Strukturen rekursiv eine potenziell unendliche Anzahl noch nie gehörter Sätze bilden (Rekursivität).

Für CHOMSKY ist der *kreative* Aspekt der Sprache wichtig. Darunter versteht er, dass mittels einer begrenzten Anzahl von Regeln eine unbegrenzte Anzahl von Sätzen erzeugt werden kann. Kinder sind in der Lage, korrekte Sätze zu produzieren oder zu bewerten, obwohl sie die noch nie oder nur fehlerhaft gehört haben.

Im Rahmen seiner *Generativen Transformationsgrammatik* forderte CHOMSKY einen **Spracherwerbsmechanismus (Language Aquisition Device = LAD).** Mittels der sprachlichen Universalien ist das Individuum in der Lage, Hypothesenbildung und -bewertung grammatischer Regeln zu betreiben. Das Kind handelt also unbewusst als stetiger Linguist. Das dabei entstehende, nicht zu sehende und unbewusste grammatische Regelsystem nennt CHOMSKY **Kompetenz.** Das tatsächlich zu beobachtende Sprachverhalten nennt er **Performanz**. Für CHOMSKY steht die Kompetenz des Sprechers im Vordergrund und nicht das zu beobachtende Sprachverhalten (Performanz). Er bezieht sich dabei auf die von Descartes getroffene Unterscheidung zwischen Körper (Performanz) und Geist (Kompetenz) – die sogenannte Cartesianische Logik/Linguistik.

CHOMSKY sieht die Kompetenz als einen grammatischen Mechanismus der Sprache.

[14] vgl. Melchior (2007), S. 4.

Später überarbeitete er im Rahmen der *Prinzipien-und Parameter-Theorie* sein Modell. Es kam der Begriff der **Universalgrammatik (UG)** hinzu. Der Spracherwerb stützt sich weiterhin auf angeborenes und unbewusstes Sprachwissen, aber dem Spracherwerb liegt eine natürliche, allen Menschen angeborene universelle Grammatik[15] zugrunde. Die allgemein gültigen Regeln für alle Sprachen nennt CHOMSKY Prinzipien. Der Spracherwerb für das Kind besteht aus dem Erkennen und Anwenden verschiedener Eigenschaften der Erstsprache. Der Kompetenzbegriff beschreibt die Fähigkeit, solche Eigenschaften zu fixieren. CHOMSKYS nativistischer Mentalismus grenzt sich folglich zu den Theorien des Behaviorismus durch den angeborenen Spracherwerb ab. Dabei bedeutet angeboren für ihn ein gedanklicher, fest im Gehirn verankerter Algorithmus. Genetisch gesteuerte Reifungsprozesse oder neurologische Zustände sind nicht gemeint. CHOMSKYS Nativismus hatte lange Zeit nur syntaktische Themen im Blick, semantische Aspekte wurden erst im Rahmen der Interpretativen Semantik beachtet.

Andere endogenistische Modelle der Reifung

Während Chomsky den Spracherwerb als einen Prozess sieht, der unabhängig von anderen kognitiven Leistungen verläuft, fasst SLOBIN diesen als einen Prozess auf, der alle anderen kognitiven Fähigkeiten (*Denken*) beeinflusst. Der gesamte Prozess verläuft dabei weitgehend eigenständig. LENNEBERG, BICKERTON und andere formulierten auch nativistische Modelle des Spracherwerbs, allerdings bezogen diese sich mehr auf biologische Prozesse der Reifung. Bei BICKERTON steht ein angeborenes biologisches Sprachprogramm im Fokus, welches sich erst nach und nach entfaltet. LENNEBERG hingegen meint, dass die Sprache des Menschen biologisch festgelegten und evolutionär entstandenen Reifeprozessen unterliegt. Seiner Auffassung nach kann Sprache nicht erlernt werden. Die Entwicklung der Sprache basiert auf einem festen Ablaufplan, der unabhängig von den Erfahrungen des Individuums verläuft.
In den 1960er Jahren haben rein endogenistische und exogenistische-Modelle an Bedeutung verloren.

[15] vgl. Chomsky (1980), S.56.

3.2.3. Aktionale Modelle: Piagets Kognitivismus

In kognitivistischen Modellen wird die Sprachentwicklung im Rahmen der gesamten geistigen Entwicklung des Kindes in den Blickwinkel gerückt. Hier wird der Spracherwerb durch die vorsprachlichen, kognitiven Strukturen des Kindes erklärt. Auch in dem Modell von Slobin finden sich kognitivistische Ansätze, doch erst PIAGET stellte die Sprachentwicklung in einem Stufen- oder Phasenmodell dar. Bei PIAGET spielen genetische Anlagen keine Rolle und der gesamte Spracherwerb verläuft nicht von alleine. Er stellte die aktive Auseinandersetzung des Individuums mit seiner Umwelt in den Mittelpunkt. Die sprachliche Entwicklung (begriffliches Denken) bildet dabei nur einen Teil der gesamten Auseinandersetzung. PIAGET spricht in diesem Zusammenhang von einer Wechselwirkung zwischen dem Kind und der Umwelt.

a) Intelligenz und als ihr Spezialfall Sprache sind für ihn eine Besonderheit des **biologischen Anpassungsprozesses.**
b) **Adaption** bezeichnet den **Anpassungsprozess eines Individuums** an die Umwelt. PIAGET unterscheidet zwei Schemata: Verhaltens-/Handlungsschemata und kognitive Schemata. Nach PIAGET gibt es zwei Verfahren dieser Adaption: Assimilation und Akkommodation.
c) Durch die **Assimilation** werden neue Umweltinformationen in das vorhandene Wissensschema (auch kognitives Schema) eingepasst und eingefügt. Ein Baby ist z.B. schon nach wenigen Monaten in der Lage ein Lächeln zu erkennen. Es hat diese Mimik bereits in vielen Gesichtern wahrgenommen und Regeln für die Kennzeichen eines Lächelns abgeleitet. Die Fähigkeit, Muster zu identifizieren, ist darauf zurückzuführen, dass das Gehirn neue Reize in Verbindung zu bereits Bekanntem setzt. Jeder Mensch durchläuft diesen Lernprozess aufgrund biologischer Gegebenheiten anders. Piaget beschreibt Lernen und Informationsaustausch nicht als Kopieren von Informationen; es geht um Anpassung an bereits Vorhandenes.[16]
d) **Akkommodation** bezeichnet den umgekehrten Prozess zur Assimilation. Hier wird das Wissensschema durch die Umwelt verändert. Dies kann entweder selbstgesteuert-aktiv oder durch/nach Reaktionen der sprachlichen (Eltern) wie außersprachlichen Umwelt (nicht-sprachliche Reize) erfolgen.[17]

[16] vgl. Melchior (2007), S.7.
[17] vgl. ebd.

Das Beispiel des Greifens macht sehr gut die Assimilation und Akkommodation deutlich: Jedes Kind kommt mit einem Greifreflex zur Welt. Das wiederholte Greifen bestimmter Gegenstände festigt diese Bewegung. Das Kind wird zunehmend sicherer im Umgang mit dieser Tätigkeit. Versucht das Kleinkind jedoch Wasser zu greifen, muss das ausgebildete Greifschema dem neuen Gegenstand angepasst – also akkommodiert – werden. Das Kind muss lernen, Wasser mit der Handfläche zu schöpfen. Es entwickelt ein neues Schema. Assimilation bedeutet die Anpassung/Adaption der Umwelt an die kognitiven Schemata des Kindes. Akkommodation hingegen meint die Anpassung der kognitiven Schemata des Kindes an die Umwelt.

e) Während des Prozesses der Assimilation und Akkommodation kommt es zu einem Ungleichgewicht. Für das Kind ist kurzfristig die Welt nicht in Ordnung. Die **Äquilibration** will den Zustand des Gleichgewichtes wieder herstellen. Während dieser Äquilibration kommt es nicht nur zu einer äußerlichen Veränderung der Umwelt, sondern auch zu einer inneren Veränderung. Analog sieht PIAGET dies im Rahmen der kognitiven Aneignung der Welt.

Das Kind setzt sich durch Aktionen (Bewegungen) oder Äußerungen (Laute) mit der sprachlichen wie außersprachlichen Umwelt aktiv auseinander und nimmt dadurch Begriffe sukzessive auf. Es konstruiert auf jeder Entwicklungsstufe ein anderes Modell der Wirklichkeit; man nennt es daher auch aktionales Modell (Konstruktion durch Aktion).

Die einzelnen Entwicklungsphasen

Die Abfolge der einzelnen Stufen sowie die Prozesse der Adaption, Äquilibration, Assimilation, und Akkommodation sind laut PIAGET angeboren. Er unterscheidet vier gesetzmäßig ablaufende Phasen bzw. Stufen:

Sensomotorische Stufe (bis etwa 2. Lebensjahr)

In dieser Phase werden – wie der Begriff verrät – durch die visuelle Wahrnehmung (Sinne = **senso**) und die Aktivität des Individuums (Bewegungsvorgänge = **Motorik**) Merkmale ausgebildet. Dazu benötigt das Kind keine Sprache! Es sind vielmehr die eigenen, spontan auftretenden Reflexe, wodurch das Kind konkrete Handlungen systematisch ausprobiert und untersucht. Durch das permanente Trial-and-Error werden Merkmale, die zum Erfolg führen positiv abgespeichert. Einzelne Bewegungsabläufe werden zunehmend koordinierter ausgeführt. Am Ende dieser Phase verfügt das Kind über die sogenannte Objektpermanenz. Das bedeutet, es weiß, dass Objekte auch außerhalb des Wahrnehmungsfeldes noch vorhanden sind. Das Kind ist in der Lage erste Objekte und Erfahrungen widerzuspiegeln. Die Kinder bilden erste sprachliche Worte, die häufig noch undeutlich erscheinen (**Nun**u = Fernbedie**nun**g, Takto = Traktor).

Präoperationale Stufe (bis etwa 7. Lebensjahr)

In dieser Phase spielen Anthropomorphismus (Vermenschlichung der Umwelt) und magisches Denken (Kraft höherer Mächte) eine Rolle. Das Kind ist nun mehr und mehr in der Lage auf gedanklicher Ebene zu operieren. Das bedeutet, dass Kinder Situationen und Handlungen nachspielen können (z.B. die Rolle eines Feuerwehrmannes). Dennoch denkt und begreift es alles ausschließlich aus der eigenen Perspektive und kann sich noch nicht in andere hineinversetzen oder etwas aus deren Perspektive wahrnehmen (vgl. PIAGETS Drei-Berge-Versuch). In der präoperationalen Stufe bauen sich die Fähigkeit zur Symbolbildung aus. Sprache dient als ein mögliches Symbolsystem, die eigenen Erlebnisse zu repräsentieren. Durch die Sprache können nun Klassen- und Relationsbegriffe gebildet werden. Das Verständnis ist aber noch nicht komplett ausgebildet, da identische Elemente einer Klasse noch nicht unterschieden werden können.[18] Das Kind ist beispielsweise nicht in der Lage, vier unterschiedlich lange Stäbe der Größe nach zu ordnen, da es immer nur zwei der Stäbe in Relation setzen kann. Piaget spricht von der sogenannten Zentrierung. Das Kind richtet seine Aufmerksamkeit auf ein Merkmal, verliert aber weitere aus den Augen.

Stufe konkreter Operationen (bis etwa 11./12. Lebensjahr)

Auf der Stufe der konkreten Operationen nimmt das Kind die Sprache bewusst als Symbolsystem wahr. Logisch-mathematische und kategoriale Grundbegriffe werden ausgebildet. Mittels Sprache ist das Kind fähig, Klassifizierung und Systematisierung vorzunehmen. Das Kind lernt, Wörter zu definieren, Ähnlichkeiten zu erkennen und zu benennen, mit Sprache zu spielen, Sprachliches an der Realität zu überprüfen und unbekannte Wörter aus dem Kontext heraus zu beschreiben[19].

Es entwickeln sich Ansätze von metaphorischem Sprachgebrauch sowie Ironie. Klassen (Zahlen) können in Unterklassen (gerade/ungerade etc.) unterteilt werden. Der Über-

[18] vgl. Lefrancois (1994), S. 132.
[19] vgl. Fatke (2016), S. 62.

gang von dieser Phase zur nächsten wird durch das Beherrschen des hypothetisch-deduktiven Denkens und der sprachlogischen Fähigkeiten (Syllogismen) gekennzeichnet. Aus zwei wahren Aussagen kann eine wahre Folgerung abgeleitet werden (Inklusionsbeziehung). So kann z. B. aus der Aussage „Alle Kugeln sind rund." (wahr) und der Aussage „Mein blauer Ball ist auch rund." (wahr) abgeleitet werden, dass der blaue Ball auch eine Kugel ist. Dem Kind wird ein freierer selbstsicherer Umgang mit der in den Wörtern repräsentierten Realität ermöglicht.

Stufe formaler Operationen (Vor-Adoleszenz, bis 14./15. Lebensjahr)

Die höchste Stufe – die formale Operation – befähigt das Kind Probleme auf einer hypothetischen Ebene vollständig zu lösen. Es können logische Schlussfolgerungen gezogen und mental Variationen durchgespielt werden. In dieser Stufe beginnt das abstrakte Denken. Das Kind ist in der Lage, Sachverhalte kritisch zu hinterfragen und sich damit auseinanderzusetzen. Die Sprache ist dabei ein unerlässliches Hilfsmittel, da sie die Formen und Strukturen zur Verfügung stellt, mit deren Hilfe hypothetisches und abstraktes Denken erst möglich ist[20]. Nach PIAGET ist mit der Vor-Adoleszenz – ca. 15 Jahre – die kognitive Entwicklung weitgehend abgeschlossen.

Fazit (PIAGET)

Nach PIAGET steht bei der Sprachentwicklung die Auseinandersetzung des Individuums mit der Umwelt im Vordergrund. Das Kind selbst ist bei seiner Entwicklung aktiv durch Handeln, Vorstellungen und durch Symbolgebrauch. Je mehr Möglichkeiten an das Individuum herangetragen werden, sich mit seiner Umwelt auseinanderzusetzen, umso positiver kann sich das Kind entwickeln. Die Aufgabe der Umwelt (Eltern, Erzieher, LuL etc.) besteht in der Bereitstellung von Materialien und der Schaffung von Problemsituationen, die das kindliche Interesse wecken und die selbständige, aktive Problemlösung anregen. Die Sprachentwicklung ist dabei Teil des Abstraktionsprozesses. Die Welt wird zunächst durch Handlungen, dann in Bildern und schließlich in Symbolen an das Kind herangetragen. Die Sprache und deren Logik sowie die mathematische Logik bilden einen Teil dieses Symbolsystems.

[20] vgl. Fatke (2016), S. 73.

3.2.4. Bruners interaktionistisches Modell

Die interaktionistischen Ansätze behandeln die Umwelt und das Individuum als gleichwertige Elemente im Entwicklungsprozess. Die Sprache sieht BRUNER dabei als Schlüssel der kognitiven Entwicklung. Die Abhängigkeit des Kindes von Reizen aus der Umwelt nimmt stetig ab. Dies ist jedoch nur möglich, da das Individuum ein inneres Speicherungs- und Informationsverarbeitungssystem besitzt, das zwischen Reiz und Antwortverhalten vermittelt. Erst wenn das Kind in der Lage ist die Umwelt durch ein Symbolsystem wie die Sprache wahrzunehmen, ist eine intensivere Auseinandersetzung (statt elementarer Sinneseindrücke) möglich. Kognitive Kompetenzen werden nur durch die Interaktion mit Betreuungspersonen weiterentwickelt. Sprache ist der Schlüsselfaktor der kognitiven Entwicklung, weil sie parallel, abstrakt und spielerisch (hypothetisch) mehrere Alternativen (Ereignisse/Handlungen) durchspielen kann. BRUNER sieht – ähnlich wie Piaget – den Spracherwerb als Teil des Abstraktionsprozesses; allerdings gibt es bei BRUNER nur drei Darstellungsebenen, die nicht zwingend nacheinander ablaufen müssen:

<u>Die enaktive Ebene:</u> Die Auseinandersetzung mit der Umwelt durch Handeln.

<u>Die ikonische Ebene:</u> Die Auseinandersetzung mit der Umwelt durch Bilder (ikonisch-bildhaft und ikonisch-schematisch).

<u>Die symbolische Ebene:</u> Die Auseinandersetzung mit der Umwelt durch Symbole (Sprache, Logik und Mathematik).

3.2.5. Folgerungen für den Unterricht

Aktuell spielen endogenistische (Nativismus) und exogenistische (Behaviorismus) Modelle kaum noch eine Rolle, da sie teilweise als widerlegt gelten. Für den Unterricht sind aktionale (Konstruktivismus, Kognitivismus) und interaktionistische Modelle (Entdeckendes Lernen) deutlich in den Fokus gerückt. Dennoch sollten sich alle LuL mit den einzelnen Modellen auseinandersetzen, um Erklärungen für sprachliche Entwicklungen sowie Fehlentwicklungen ableiten zu können. Nativistischen Modellen sollte man äußerst kritisch begegnen, da die Lern- und Lehrbarkeit von Sprache eher beanstandet wird. Dies widerspricht dem Lehrberuf![21] LuL sollten sich nicht auf ein Modell festlegen, sondern sowohl didaktisch als auch methodisch die richtigen Konsequenzen aus den jeweiligen Modellen ableiten bzw. sich bei der didaktisch-methodischen Analyse der theoretischen Voraussetzungen aus diesen Modellen bewusst sein.

Einige Folgerungen wären z.B.:

Behaviorismus (exogenistisches Modell)	**Nativismus** (endogenistisches Modell)
Belohnungssysteme bieten Motivation, sich auch mit weniger interessanten Themen auseinanderzusetzen.	Auf implizites Sprachwissen zurückgreifen.
Eine sprachfördernde Reizumgebung schaffen.	Viele Strukturen sind bereits angelegt, jedoch nicht ausgebaut.
Eine Lernumgebung schaffen, die genug Raum zum individuellen Ausprobieren einräumt.	
Interaktionismus	**Kognitivismus**
Eine sprachfördernde Reizumgebung schaffen.	
Entdeckendes Lernen ermöglichen und fördern.	Eine Lernumgebung schaffen, die genug Raum zum individuellen Ausprobieren einräumt.
Unterschiedliche Entwicklungsstadien des Kindes beachten.	Unterschiedliche Entwicklungsstadien des Kindes beachten.
Unterrichtsinhalte vom Konkreten (Enaktiven) über das ikonische (bildhafte) zum Abstrakten (Symbolischen) erarbeiten.	
Echte Interaktionen im Unterricht zulassen.	
	Neue Inhalte in bereits vorhandenes Wissen einbetten und Zusammenhänge herstellen (Assimilation und Akkommodation).

Tabelle 3: Folgerungen für den Unterricht

[21] vgl. Melchior (2007), S. 10.

3.3.Kommunikationsmodelle

Im Folgenden werden nun ausgewählte Kommunikationsmodelle vorgestellt. Diese bilden die Basis für die im Kapitel 5 folgende Analyse der Sprache, welche zwischen den SuS untereinander oder auch zwischen SuS und LuL von Bedeutung ist.

3.3.1. Das Sender-Empfänger-Modell

Mit Funktionen der Sprache sind im Allgemeinen keine innersprachliche Funktionen gemeint. Es geht vielmehr um die Funktionen, wie Sprache zwischen dem Sprecher, dem Angesprochenen und dem Sachverhalt – das, worüber gesprochen wird – eingesetzt wird. Nach Bühler hat jedes Zeichen im Kommunikationsvorgang drei (nicht immer gleich wichtige) semantische Funktionen[22]:

- **Symptom- oder Ausdrucksfunktion:** Die Zeichen drücken die Einstellung des Senders zum Empfänger oder zum Inhalt des Geäußerten (Ärger, Freude, Ironie usw.) aus.
- **Symbol- oder auch Darstellungsfunktion:** Die Zeichen stellen den jeweiligen Sachverhalt dar.
- **Signalfunktion oder Appellfunktion:** Die Zeichen fordern den Empfänger auf, zu reagieren.

[22] vgl. Bühler (1934), S. 24-33.

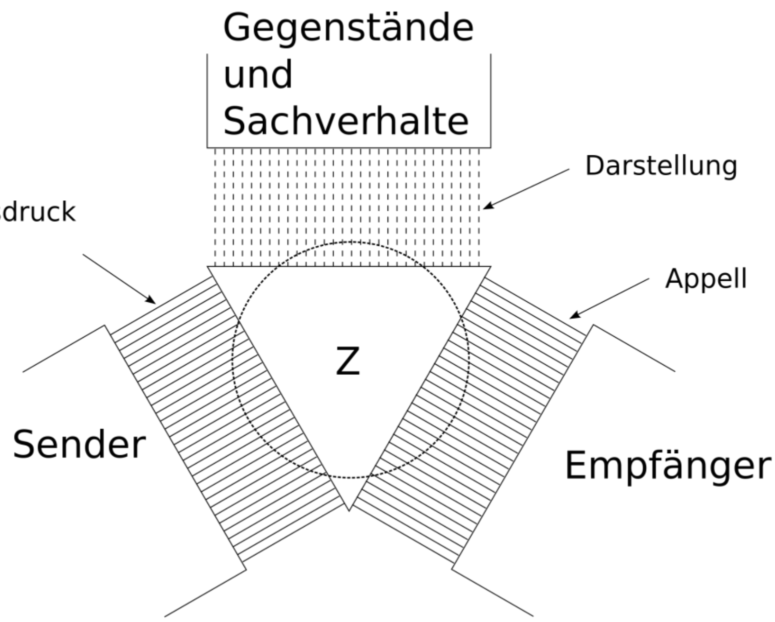


Abbildung 8: Sender-Empfänger Modell nach Bühler

3.3.2. Jakobson

Jakobson hingegen unterscheidet sechs verschiedene Funktionen der Sprache, die er wie folgt in seinem Kommunikationsmodell darstellt:

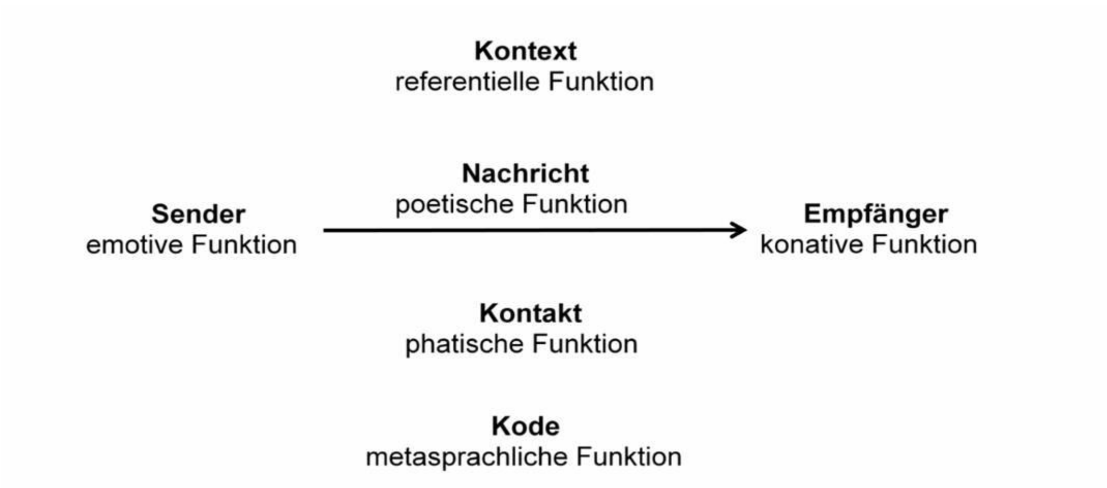


Abbildung 9: Funktionen der Sprache nach Jakobson

Dabei liegen jeder Äußerung alle sechs Funktionen zugrunde. Die Unterscheidung der einzelnen Äußerungen ergibt sich lediglich aus der unterschiedlichen Gewichtung der einzelnen Funktionen. Auch Jakobson unterscheidet die emotive Funktion (Symptomoder Ausdrucksfunktion) und die konative Funktion (Signalfunktion oder Appellfunktion). Die emotive Funktion bezieht sich dabei auch nur auf den Sender. Die Sprachäußerung drückt wie bei Bühler die Einstellung des Senders zum Empfänger oder zum Inhalt des Geäußerten (Ärger, Freude, Ironie usw.) aus. Die konative Funktion bezieht sich im Gegensatz zur emotiven ausschließlich auf den Empfänger. Die appellierende Wirkung der Nachricht löst beim Empfänger konkrete verhaltens-, einstellungs- oder gefühlmäßige Reaktionen aus, z. B. kommerzielle Werbung. Lediglich in der Symbol- oder auch Darstellungsfunktion unterscheidet Jakobson weitere Subkategorien. Steht der Gegenstand, über den geredet wird, im Zentrum, spricht Jakobson von der referentiellen Funktion der Sprache. Aussagen, die aus dem Zusammenhang gerissen werden, können vom Empfänger nicht eindeutig verstanden werden. Dies hängt hauptsächlich mit der Ökonomie des Kommunikationsprozesses zusammen. Es werden nur die Dinge zur Sprache gebracht, die nicht aus dem Zusammenhang erschlossen werden können. Wenn die Mutter in der Küche backt und das Kind bittet, ihr das Rezept zu geben, dann ist sofort unmissverständlich klar, dass es sich nicht um ein ärztliches Rezept handelt. Ist die Nachricht nicht zweckgebunden, d.h. es gibt keine Aufforderung an den Empfänger zu reagieren, so spricht Jakobson von der poetischen Funktion der Sprache. Wird über Sprache gesprochen steht die metasprachliche Funktion im Mittelpunkt. Als phatische Funktion bezeichnet er Sprache, die überwiegend dazu eingesetzt wird, den Kontakt zum Empfänger aufrecht zu erhalten. So gehören z.B. erste Kommunikationen zwischen einer Mutter und ihrem Baby (Wiederholung von „Brabbel”-Lauten) zu dieser Funktion.[23]

3.3.3. Shannon und Weaver

Ein zu Jakobson ähnliches Kommunikationsmodell erstellten Shannon und Weaver im Jahre 1949. Dieses besteht ebenfalls aus den Komponenten *Sender* und *Empfänger*, jedoch setzt es beim Kommunikationsvorgang andere Dinge in den Fokus und so werden die Komponenten *Codierer, Decodierer* und *Kanal* ergänzt.[24]

[23] vgl. Jakobson (1969), S. 61.
[24] vgl. Traut-Mattausch/Frey (2006), S. 536.

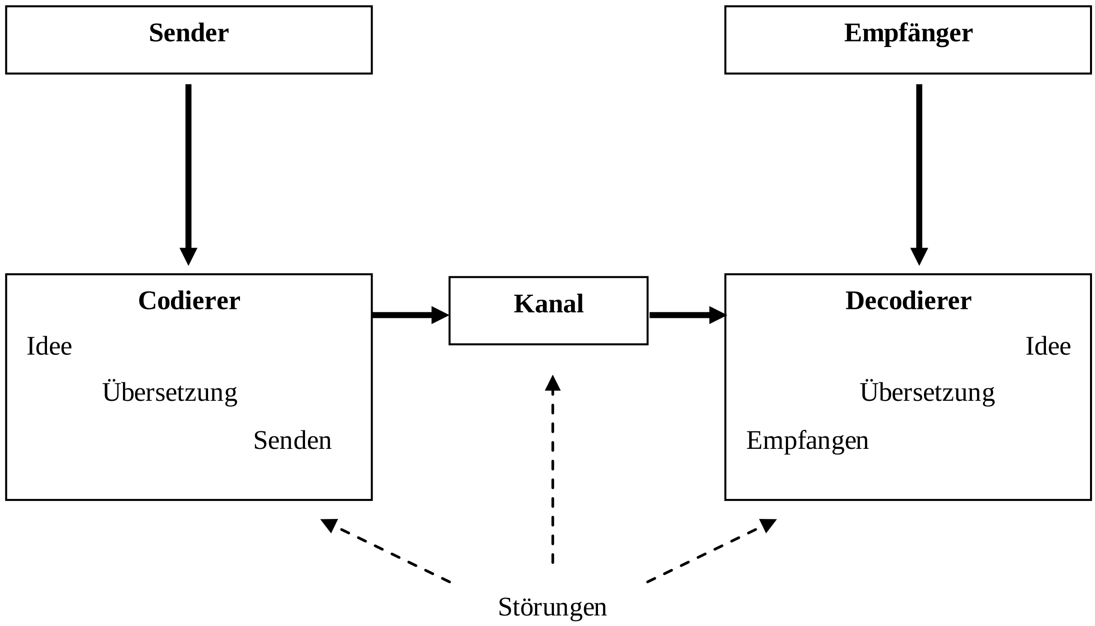


Abbildung 11: Sender- und Empfängermodell nach Shannon und Weaver 1949

Der Sender stellt in diesem Modell den Sprecher dar, von dem die Nachricht ausgeht, und der Empfänger ist der Zuhörer. Der Kanal ist dabei der Kommunikationsweg bzw. das Medium, mithilfe welches die Nachricht übermittelt wird. Die Codierungskompetenz ist ausschlaggebend für die Codierung der Nachricht, die der Sender übermitteln möchte.[25] Gelangt die Nachricht beim Empfänger an, so muss dieser sie wahrnehmen und anschließend decodieren. Diese Decodierung sollte für eine gelingende Kommunikation mit der Codierung des Senders übereinstimmen. Da aber Störungen den Kommunikationsprozess beeinflussen, geschieht es häufiger, dass die Kommunikation misslingt und die Nachricht von Sender und Empfänger unterschiedlich verstanden wird.[26] Solche Störungen können zum Beispiel die nicht ausreichende Kompetenz oder aber die nicht genügend aufgebrachte Motivation und Auseinandersetzung des Senders mit der Codierung sein: Ist er nicht in der Lage oder sieht er es nicht als notwendig an, die Nachricht entsprechend eindeutig zu codieren, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Missverständnisses seitens des Empfängers hoch.[27] Neben der Fähigkeit des Senders sind auch die Kompetenzen des Empfängers entscheidend. Ist der Sender ihm im Bereich der Nachricht kognitiv überlegen, so

[25] vgl. Traut-Mattausch/Frey (2006), S. 537.
[26] vgl. ebd.
[27] vgl. ebd.

gelingt es dem Empfänger nicht, die Nachricht korrekt zu decodieren. Dies ist vor allem bei Häufungen von Fachwörtern der Fall.[28]

Neben der versprachlichten Nachricht werden auch oft, je nach Kommunikationskanal, nonverbale Informationen übermittelt, die im besten Fall den Decodierungsprozess unterstützen, im schlechten Fall aber auch erschweren können.[29] Zu diesen nonverbalen Informationen zählen zum Beispiel Mimik, Gestik, Tonfall, Betonung und Blickkontakt. Vor allem solche Kommunikationsformen wie Ironie oder Sarkasmus bereiten einem ungeübten Empfänger Probleme beim Decodieren.

3.3.4. Schulz von Thun

Schulz von Thun hat diese Missverständnisse innerhalb einer Kommunikation genauer betrachtet und klassifiziert. Er entwickelte 1981 ein sogenanntes Vier-Seiten-Modell der Kommunikation. Dabei werden die vier Seiten sowohl als Schnäbel in Bezug auf den Sender als auch als Ohren in Bezug auf den Empfänger verstanden.[30] Eine Nachricht kann somit auf vier verschiedene Weisen mitgeteilt bzw. verstanden werden. Dabei schwingen alle vier Seiten simultan mit und es können bis zu vier Botschaften dadurch vermittelt werden.[31] Diese vier Weisen bzw. Seiten sind der Sachinhalt, die Selbstoffenbarung, die Beziehung und der Appell.

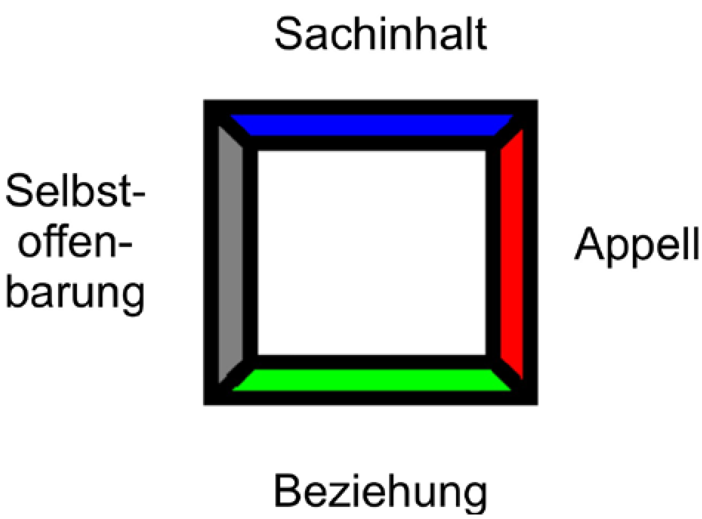


Abbildung 12: Vier Seiten der Nachricht (Schulz von Thun 2013, S. 15)

[28] vgl. Traut-Mattausch/Frey (2006), S. 537.
[29] vgl. ebd., S. 538.
[30] vgl. ebd., S. 540.
[31] vgl. ebd.

Dabei steht auf der Senderseite der **Sachinhalt** für die Sache selbst, die Information, die der Sender vermitteln möchte. Die **Selbstoffenbarung** gibt dabei etwas über den Sender kund. Meist kann man sie als Ich-Botschaften verstehen. Diese können bewusst oder unbewusst gesendet werden. Unbewusste Selbstoffenbarung geschehen meist in Form von nonverbalen Äußerungen, wie das Rotwerden bei Vorträgen als Zeichen von Aufregung.[32] Die **Beziehungsseite** gibt preis, was der Sender vom Empfänger hält und wie die beiden Instanzen zueinander stehen. Oft geschieht dies durch die Art und Weise der Formulierung, den Tonfall und weitere nonverbale Signale.[33] Der **Appell** beinhaltet die Intention des Senders. Dabei möchte er Einfluss auf den Empfänger nehmen, indem er versucht, dass der Empfänger bestimmte Dinge tut oder unterlässt.

Als Beispiel wird hierfür oft der Satz „Mir ist kalt." verwendet. Der dahinterstehende Sachinhalt ist die Feststellung „Hier ist es kalt.“. Die Selbstoffenbarung dabei ist „Ich friere." Eine Möglichkeit für die Beziehungsseite wäre „Du denkst immer an die Heizkosten und dir ist es ganz egal, dass mir immer kalt ist.". Der Appell dahinter lautet „Dreh‘ die Heizung auf!".

Die Empfängerseite ist analog dazu zu verstehen. Hier wird die Art und Weise, wie der Sachverhalt zu verstehen ist, über das **Sachohr** wahrgenommen. Das **Selbstoffenbarungsohr** nimmt Informationen über die Persönlichkeit des Senders auf. Die Art und Weise, wie mit dem Empfänger kommuniziert wird, wird über das **Beziehungsohr** registriert und der Appell wird als Befehl bzw. Aufforderung über das **Appellohr** wahrgenommen.[34] Werden Aussagen, die als Appell gedacht sind, wie in dem o.g. Beispiel nur implizit formuliert, kann es schnell zu Missverständnissen kommen. Die Qualität der Kommunikation und ihr Gelingen hängt stark von der Codierungskompetenz des Senders ab. Die meisten Schwierigkeiten entstehen durch unterschiedliche Verständnisse, also dadurch, dass der Empfänger ein anderes *Ohr* benutzt als der entsprechende *Schnabel* des Senders.[35]

[32] vgl. Schulz von Thun (2013), S. 45.
[33] vgl. ebd., S. 46.
[34] vgl. ebd., S. 47.
[35] vgl. ebd.

3.4. Schriftlichkeit vs. Mündlichkeit

Der Begriff Mündlichkeit meint den Kommunikationsweg der gesprochenen Sprache. Hierunter fallen sowohl nonverbale als auch verbale Äußerungen der Gesprächspartner. Die mündliche Kommunikation und deren Entwicklung wurde bereits in Kapitel 3.3 erläutert.

Im Gegenzug zur Mündlichkeit meint die Schriftlichkeit oder *Schriftsprache* für gewöhnlich eine verschriftete Form der gesprochenen Sprache.[36] Allerdings ist diese triviale Definition nicht ausreichend und Schriftsprache ist nicht verallgemeinerbar, es existiert nicht *die* Schriftsprache. In den verschiedenen Ländern und Kulturen der Welt gibt es unterschiedliche Systeme, um die gesprochene Sprache niederzuschreiben. Die chinesische Kultur verwendet ein Zeichensystem, dessen Zeichen nicht nur bedeutungstragende Zeichen sind, sondern auch phonetische Informationen, wie z.B. die Tonhöhe, enthalten.[37] Das deutsche Schriftsystem ist ganz anders aufgebaut. Da sich diese Dissertation auf die Auswertung deutscher Texte und Wörter bezieht, wird im Folgenden die Schriftsprache des Deutschen erläutert und die anderen Schriftsysteme außer Acht gelassen.
Die deutsche Schriftsprache ist eine alphabetische Schrift, die auf einem phonologischen System beruht.[38] Dies bedeutet, dass sich unser Schriftsystem an unserer gesprochenen Sprache orientiert. Unsere Schrift ist jedoch nur lautorientiert und nicht lautgetreu, da die Wörter nicht zwingend so verschriftet wurden, wie sie gesprochen werden.[39] Dennoch besteht ein, durchaus nicht ganz simpler Zusammenhang zwischen Wort und Schrift, genauer zwischen Phonem und Graphem. Um diesen Zusammenhang genauer verstehen zu können, muss man zunächst die beiden Begriffe *Phonem* und *Graphem* genauer betrachten. Laut Definition heißt es, „Phoneme sind [die] kleinste[n] bedeutungsdifferenzierende[n] Segmente der Lautsprache."[40] Damit sind Phoneme Lauteinheiten, die bei Austauschen zu Bedeutungsänderung führen, zum Beispiel Haus – Maus. In diesem Falle ist das /M/ bzw. das /H/ ein Phonem, da sich die Bedeutung der beiden Wörter grundlegend unterscheidet. Zu beachten ist dabei die Unterscheidung der Phoneme von den Allophonen. Allophone grenzen sich insofern von den Phonemen ab, als

[36] vgl. Bredel (2011), S. 12.
[37] vgl. Schründer-Lenzen (2013), S. 15.
[38] vgl. ebd., S. 16.
[39] vgl. ebd.
[40] ebd.

dass sie keine Bedeutungsveränderung des Wortes herbeiführen, sondern lediglich eine (regionalbedingte) Aussprachevariante darstellen.[41] Als Beispiel seien hier die beiden Aussprachevarianten des /R/ anzuführen: Zum einen als [ʀ] wie in *rot* und zum anderen als [ʁ] wie in *dort*. In der Schriftsprache hängen Phoneme eng mit den jeweiligen Graphemen zusammen. Grapheme stellen dabei eine Buchstabeneinheit dar, die die Verschriftung bestimmter Phoneme darstellen. Somit sind Grapheme „Buchstaben oder Buchstabengruppen, die mit einem Phonem korrespondieren."[42] Hieran lässt sich auch die sogenannte Phonem-Graphem-Korrespondenz (PGK) erklären. Diese besagt, dass ein Laut durch verschiedene Buchstaben (-kombinationen) dargestellt werden kann. So gibt es für den a-Laut /a:/ die Grapheme <a>, <ah> und <aa>.[43]

Analog zur PGK existiert auch eine Graphem-Phonem-Korrespondenz (GPK). Diese beschreibt die unterschiedlichen Aussprechweisen eines Buchstabens, wie die differenten Aussprachevarianten des /Y/ in *Yak* und *Xylophon*.[44]

Diese Korrespondenzen weisen in sich schon Schwierigkeiten im deutschen Schriftsystem vor, sie zeigen uns daneben auch noch eine weitere Problematik innerhalb unseres Schriftsystems auf. Es gibt viel mehr Phoneme als Buchstaben, genau genommen gibt es insgesamt „40 Phoneme, die durch unterschiedliche Buchstaben bzw. Buchstabenkombinationen repräsentiert werden."[45]

Die Schriftsprache ist also vielschichtiger aufgebaut und bedarf weiterführender Fähigkeiten als die Kompetenzen der mündlichen Verständigung. Sie ist an komplexere Regeln gebunden als die mündliche Unterhaltung, bei der man – je nach Anlass – nicht unbedingt Wert auf Satzbau oder Vollständigkeit legt. Dies sind jedoch bedeutsame Elemente der Schriftsprache.

[41] vgl. Schründer-Lenzen (2013), S. 16.
[42] vgl. ebd., S. 20.
[43] vgl. ebd., S. 21.
[44] vgl. ebd., S. 25f.
[45] vgl. ebd., S. 20.

3.5. Entwicklung der mathematischen Fachsprache

Nach dieser ausführlichen sprachwissenschaftlichen Betrachtung, welche deutlich die einzelnen Funktionen der Sprache als Kommunikationsmittel herausstellt, folgt in diesem Kapitel die Erörterung der mathematischen Fachsprache. Diesbezüglich werden zunächst kurz die historischen Aspekte mathematischer Fachsprache dargestellt. Anschließend werden einzelne mathematische Begriffe hinsichtlich ihrer Verwendung und Stellung im Satz betrachtet. Das Kapitel schließt mit der Abgrenzung der mathematischen Symbolsprache zur Alltagssprache.

3.5.1. Historische Aspekte

Die Anfänge der mathematischen Sprache gehen genau wie die Anfänge der menschlichen Lautsprache zurück in die Steinzeit. Erste Zeugnisse des Zählens tauchen ca. 30.000 v. Chr. auf. Es handelt sich dabei um Knochen mit regelmäßigen Einkerbungen in Fünfergruppen, die als erste Ansätze einer schriftlichen Buchführung gelten sollen.
Die allgemeine Wortsprache wurde erst ca. 25.000 Jahre später von Sumerern, Semiten usw. in Mesopotamien entwickelt. Die Babylonische Mathematik war da schon als hohe Kunst der Priester und Staatsdiener in dieser Kultur verankert. Von den Strichlisten und Kerbhölzern entwickelte sich die schriftliche Form der Rechenkunst stetig weiter. Über das römische Zahlensystem bis zur heutigen international gültigen Form, die ihren Ursprung in der indisch-arabischen Schreibweise mit der (indischen) Null und dem Stellenwertsystem zur Basis 10 hat. Ebenso wie die allgemeine Sprache erweitert auch die mathematische Sprache ständig ihre Ausdrucksmöglichkeiten. Die Ausweitung des Zahlensystems von den natürlichen, rationalen, irrationalen bis zu den komplexen Zahlen gehört dazu. Zusätzlich zu den Zahlen benutzt man heute viele lateinische und griechische Buchstaben für Variablen ($x \in \mathbb{M}$) und etliche simple Zeichen für Operationen (+, -, :, •).
Eine Gemeinsamkeit aller mathematischen Ziffern und Zeichen kann darin gesehen werden, dass sie sehr einfach und klein sind. Extremes Beispiel ist der Punkt, der die Multiplikation symbolisiert; kleiner geht es nicht. Mit dieser *komprimierenden* Eigenschaft und der Präzision des Zahlensystems kann die Sprache der Mathematik unübersichtlich große Mengen, Objekte und Zusammenhänge in der kürzesten Form übersichtlich und exakt darstellen (z.B. $\{a, b, ...\}$).

3.5.2. Abgrenzung mathematischer Fachsprache von der Alltagssprache

Die *Alltagssprache* wird auch als Umgangs-, Gebrauchs- oder Gemeinsprache bezeichnet. Es handelt sich um eine nicht standardisierte Sprache, die durch Worte des täglichen Gebrauchs charakterisiert wird. Mit Hilfe der Alltagssprache verständigen sich die SuS sowohl im schulischen als auch im außerschulischen Bereich. Neben der gesprochenen Sprache ist auch die non-verbale Sprache wie Gestik und Mimik von Bedeutung. Der Unterricht orientiert sich in der Regel nicht an der Alltagssprache, sondern ist auf die Verwendung der Standardsprache ausgerichtet.

Die *Standardsprache,* auch Hoch- bzw. Schriftsprache genannt, ist eine allgemeingültige Form einer Sprache, die nicht nur in den Medien, sondern vor allem im öffentlichen Bereich – auch im Schulunterricht – verwendet wird. Die SuS sollten die Hochsprache altersgemäß beherrschen, um dem Unterricht gedanklich folgen und sich angemessen am Unterrichtsgeschehen beteiligen zu können.

In Deutschland gibt es keine staatliche Einrichtung, welche die Schriftsprache festlegt, sondern der Dudenverlag – ein privates Unternehmen – gilt als maßgebliche Instanz. Seine Veröffentlichungen sind bindend für die amtliche deutsche Rechtschreibung.

Als Abgrenzung zum sprachwissenschaftlichen Bereich müssen in der mathematischen Sprache zum einen die verwendeten *Fachausdrücke* und zum anderen die verwendete *Symbolsprache* betrachtet werden.

Bei den Fachausdrücken müssen drei verschiedene Kategorien unterschieden werden:

- Worte, die in der Alltagssprache nicht vorkommen.
  Beispiele: Stellenwertsystem, Subtrahend, Minuend, Algorithmus, ...
- Worte, die in der Alltagssprache in gleicher oder ähnlicher Bedeutung vorkommen. Beispiele: Differenz, Summe, ...
- Worte, die in der Alltagssprache in abweichender Bedeutung vorkommen.
  Beispiel: *Produkt* (mathematisch das Ergebnis einer Multiplikation, umgangssprachlich die Bezeichnung für eine Ware), *Funktion* (mathematisch die Abbildung einer Menge in eine andere, alltagssprachlich Aufgabe oder Wirkungsweise einer Sache oder Person), *Folge* (mathematisch Auflistung fortlaufender Objekte, umgangssprachlich Auswirkung eines bestimmten Handelns), ...

Neben diesen Kategorien sollten die Fachbegriffe auch hinsichtlich der verschiedenen Wortarten betrachtet werden:

Wortart	Bedeutung	Beispiele
Substantive	Bezeichnung mathematischer Objekte	Summe, Relation, ...
Adjektive	Bezeichnung von Eigenschaften mathematischer Objekte	ungerade, gerade, kommutativ, ...
Verben	Bezeichnung von mathematischen Handlungen	subtrahieren, übertragen, ...
Zahlwörter	Bezeichnung der Mächtigkeit von Mengen	Vierundfünfzig, ...
Relationsbegriffe	Beziehungen zwischen mathematischen Objekten	gleich, kleiner als ...,

Tabelle 4: Wortarten der Fachbegriffe

Bereits an den hier aufgeführten Wortarten lassen sich Schwierigkeiten bezüglich der Verständlichkeit aufzeigen. So sind z.B. die Aussagen „**Alle** Punkte sind blau” und „**Einige** Punkte sind blau” in der Alltagssprache eher als diskrepant zu bezeichnen, da für das Kind entweder alle Punkte blau sind oder nur einige. In der Mathematik schließen sich die beiden Aussagen nicht unbedingt aus, denn wenn alle Punkte blau sind, sind gleichzeitig auch einige Punkte dieser Menge blau.

Konjunktionen	Bedeutung	Beispiel
Additive Konjunktion	Zusammenfügende Verbindung	und
Disjunkte Konjunktion	Einander ausschließende Verbindung	oder
Adversative Konjunktionen	Gegensatz-Beziehungen	jedoch, sondern, nur, ...
Finale Konjunktionen	Ziel-/zweckgebundene Verbindungen	damit, um ... zu
Kausale Konjunktionen	Begründende Verbindungen	weil, da
Konditionale Konjunktionen	An Bedingungen geknüpfte Verbindungen	wenn, falls, genau dann ... wenn
Modale Konjunktionen	Umstandsangebende Verbindungen	indem, ohne dass, ...
Konzessive Konjunktionen	Einschränkende Verbindungen	obwohl, obgleich, ...
Temporale Konjunktionen	Zeitliche Verbindungen	nachdem, bevor, ...

Tabelle 5: Konjunktionen der Fachbegriffe

Das folgende Beispiel soll die Mehrdeutigkeit einzelner Konjunktionen und die daraus resultierende Relevanz der Beachtung solcher Konjunktionen deutlich machen:

Konjunktionalsatz	Aussagenlogische Übersetzung
Wenn die Sonne (S) scheint, ist es hell (H).	$S \rightarrow H$
Weil die Sonne scheint, ist es hell.	$S \rightarrow H$
Genau dann, wenn die Sonne scheint, ist es hell.	$S \leftrightarrow H$

Tabelle 6: Mehrdeutigkeit einzelner Konjunktionen

Bei den hier aufgeführten Fachausdrücken handelt es sich nur um eine Auswahl an Begriffen.[46] Wie bereits oben erwähnt, ist neben den Fachausdrücken auch die Symbolsprache zu betrachten, welche charakteristisch für die mathematische Fachsprache ist. Symbole werden als Abkürzungen für Fachwörter bzw. für mathematische Objekte, Eigenschaften, Handlungen oder Beziehungen bzw. für logische Objekte und Beziehung verwendet.[47] Sehr bezeichnend für mathematische Symbole ist das Auftreten von Konstanten und Variablen.

„Konstanten sind Symbole, denen eine feste Bedeutung zugeordnet ist; d. h. sie stehen für bestimmte Objekte bzw. Objektklassen, Eigenschaften, Handlungen oder Beziehungen. Man kann sie daher auch als Namen auffassen. In der nachstehenden Tabelle sind einige Beispiele aufgelistet:" [48]

Symbol	Versprachlichung
$+$	plus
$=$	gleich
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\in$	ist Element von
$<$	kleiner als ...
$\Rightarrow$	Wenn..., ... dann
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn ...

Tabelle 7: Konstanten und ihre Versprachlichung

„Variablen sind Zeichen ohne selbständige Bedeutung. Sie stehen nicht für bestimmte Objekte, Eigenschaften, Handlungen oder Beziehungen. Vielmehr sind sie einem Grund- oder Einsatzbereich (einer *Grundmenge*) von Objekten zugeordnet, dessen Elemente bei passender Gelegenheit an ihre Stelle gesetzt werden können. Somit können

[46] Die mathematische Fachsprache umfasst noch weitere wichtige Ausdrücke, jedoch sind sie für die Thematik dieser Arbeit nicht relevant und werden deshalb nicht näher ausgeführt und erläutert.
[47] vgl. Maier/Schweiger (1999), S. 28.
[48] ebd.

Variablen als Platzhalter für die Elemente einer Menge (bzw. einer Klasse) aufgefasst werden.“[49]

Im Vergleich zur Alltagssprache lässt sich festhalten, dass auch im täglichen Leben Symbole verwendet werden. Hierbei handelt es sich jedoch hauptsächlich um Konstanten wie die folgende Auflistung zeigt:

Symbol	versprachlicht
€	Euro
&	und
§	Paragraph
@	At

Tabelle 8: Weitere Konstanten und ihre Versprachlichung

Eine Verwendung von Variablen in der Alltagssprache tritt eher selten bis nie auf. Dies hat zur Folge, dass der Umgang mit Variablen im Mathematikunterricht einen für die Kinder vollkommen neuen Bereich darstellt. Die SuS haben deshalb nicht erst Schwierigkeiten beim Rechnen bzw. Umgang mit diesen Variablen, sondern bereits beim Lesen und Versprachlichen dieser.

Fazit:

In diesem Kapitel wurde deutlich, wie wichtig und vielseitig die Sprache in diversen Bereichen verwendet wird. Bereits bei den Kommunikationsmodellen zeigte sich, dass es besonders viele Störfaktoren gibt, die unverzüglich eine gelingende Kommunikation außer Kraft setzen. Der Abschnitt über den Einsatz von Worten, Fachbegriffen und Symbolen legt offen, dass auch in diesem Bereich weitere Verständnisprobleme innerhalb des Mathematikunterrichts hinzukommen können. Im folgenden Kapitel werden zunächst die notwendigen mathematischen Grundlagen fachsprachlich unter Verwendung der Symbolsprache dargestellt um diese anschließend im fünften Kapitel hinsichtlich ihrer Bedeutung sprachlich aufzuarbeiten.

[49] Maier/Schweiger (1999), S. 28.

4. Mathematische Grundlagen

Nach den sprachwissenschaftlichen Grundlagen werden im Folgenden die mathematischen Inhalte unter Verwendung der dafür notwendigen Fachausdrücke und Symbole dargestellt. Dies ist notwendig, um im anschließenden Kapitel die in den Definitionen, Sätzen und Beweisen verwendete Fachsprache hinsichtlich ihrer Bedeutung genauer zu betrachten. Die mathematischen Schwerpunkte dieses Kapitels beziehen sich im Wesentlichen auf die schriftliche Subtraktion und die Bearbeitung von Sachaufgaben. Ziel ist es, dem Leser einen fachlichen Überblick über diese Themen zu vermitteln. Die lineare Abhandlung der einzelnen Themen gestaltet sich schwierig, da die meisten Themen miteinander vernetzt sind. Diese Vernetzung soll dem Leser durch Verweise an den entsprechenden Stellen deutlich gemacht werden. Ferner dienen die in den Fußnoten angegebenen Literaturhinweise zur Vertiefung der jeweiligen Inhalte.

4.1. Verknüpfungen

Mengen und ihre damit verbundenen Verknüpfungen, die jeweils zwei Elementen einer Menge ein Ergebnis zuordnen, bilden in der Mathematik (Algebra) ein zentrales Thema. Für allgemeine Verknüpfungen werden in der Arbeit die Zeichen „$*$” und „$\circ$” verwendet.

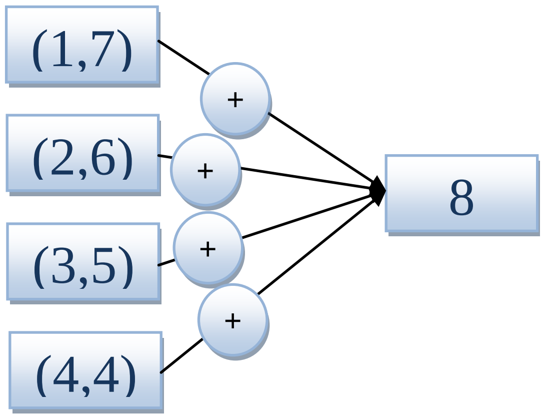
Definition Verknüpfung

Definition[50]	Sei M eine Menge mit $M \neq \emptyset$. Unter einer (inneren) Verknüpfung in M versteht man eine Abbildung „$\circ$”, die jedem Element der Menge geordneter Paare aus M x M eindeutig[51] ein Element aus M zuordnet. Formal: $\circ: M \times M \rightarrow M$ $(a, b) \mapsto a \circ b$

[50] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 174.
[51] Das bedeutet, jedem dieser Paare aus der Menge M x M wird genau ein Element der Menge zugeordnet.

Das Entscheidende der Verknüpfung wird am Beispiel der Addition verdeutlicht:

Bei der Addition natürlicher Zahlen wird jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen (a, b) die Summe der Zahlen a und b zugeordnet.



Wenn man allgemein von einer Verknüpfung spricht, ohne diese näher zu bestimmen, benutzt man häufig das Zeichen „∘". Dieses hat keine inhaltliche Bedeutung. In einem konkreten Kontext ist jedoch darauf zu achten, dass man sich an die Definition hält und die Reihenfolge der Hintereinanderausführung beachtet, z.B. wenn es sich um die Verknüpfung von Operatoren oder Funktionen handelt.
Ein ganz wesentlicher Punkt in der Definition ist die Tatsache, dass jedes Verknüpfungsergebnis (also das Bild jedes geordneten Paares) in der Menge M liegt. Man spricht auch von der Abgeschlossenheit der Menge bzgl. der Verknüpfung:

Sei $\circ$ eine Verknüpfung in M. Dann gilt für alle a, $b \in M$:

$$a \circ b \in M.$$

Diese Tatsache nennt man die Abgeschlossenheit von M bezüglich „∘".

Weitere Beispiele für Verknüpfungen sind (ohne Beweis):

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$(a, b) \mapsto a \cdot b$

b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$(a, b) \mapsto a - b$

c) $\wp(M) \times \wp(M) \rightarrow \wp(M)$ (Potenzmenge „$\wp$”)

$(A, B) \mapsto A \setminus B$ (Differenzmenge „-”)

Minus ist keine Verknüpfung in $\mathbb{N}$, denn das geordnete Paar (1, 2) hat kein Bild bzgl. „-” in $\mathbb{N}$, d.h. „-” ist keine Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ (oder ganz pragmatisch: $1-2 = -1 \notin \mathbb{N}$). Somit stellt die Subtraktion lediglich eine abgeschlossene Verknüpfung in $\mathbb{Z}$ dar.

Hier wird deutlich, dass der Begriff der Verknüpfung sehr eng mit der zugrunde gelegten Menge zusammenhängt. Der Begriff Verknüpfungsgebilde macht diese enge Kopplung deutlich:

Definition Verknüpfungsgebilde

Definition[52]	Eine (nicht leere) Menge M zusammen mit einer auf dieser Menge gegebenen Verknüpfung $\circ$ heißt (einfaches) Verknüpfungsgebilde[53]. Formal: $(M,\circ)$

Das Wort *einfach* sagt aus, dass nur eine Verknüpfung auf der Menge M betrachtet wird. In der Literatur wird statt des Begriffs *Verknüpfungsgebilde* häufig auch der Begriff *Monoid* verwendet.

Bei einer mehrfachen Verknüpfung schreibt man $a \circ b \circ c$. Dies ist zunächst nicht eindeutig. Man könnte erst $a \circ b$ bestimmen und das Ergebnis anschließend mit c verknüpfen, oder man verknüpft a mit dem Ergebnis von $b \circ c$. In der Tat gibt es Verknüpfungen, in denen diese beiden Wege nicht zu demselben Ergebnis führen:

$$(4 - 2) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$4 - (2 - 1) = 4 - 1 = 3$$

[52] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 174.

[53] Allgemein spricht man von einer algebraischen Struktur, wenn es um eine Menge M mit einer oder mehreren zu ihr gehörenden Verknüpfungen geht.

Also gilt offensichtlich für das Verknüpfungsgebilde ($\mathbb{Z}$, -) im Allgemeinen nicht $(a - b) - c = a - (b - c)$, denn: $(4 - 2) - 1 \neq 4 - (2 - 1)$.

Ein entsprechendes einfaches Beispiel für $\wp(\{a,b\})$:

$$(\{a\} \setminus \emptyset) \setminus \{a\} = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$$

$$\{a\} \setminus (\emptyset \setminus \{a\}) = \{a\} \setminus \emptyset = \{a\}$$

Also gilt: $(\{a\} \setminus \emptyset) \setminus \{a\} \neq \{a\} \setminus (\emptyset \setminus \{a\})$

Gilt für beliebige Elemente a, b, c einer Menge M mit der dazugehörenden Verknüpfung jedoch, dass beide Wege zu *demselben* Resultat führen, so nennt man diese Eigenschaft Assoziativität.

Definition Assoziativität

Definition	Sei $(M,\circ)$ ein Verknüpfungsgebilde. Gilt für alle a, b, $c \in M$ $\quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, dann heißt $(M,\circ)$ assoziatives Verknüpfungsgebilde. Man sagt auch „$\circ$" ist assoziativ in M.

In der Algebra sind aufgrund der Bedeutung der Assoziativität im Allgemeinen nur assoziative Verknüpfungsgebilde von größerem Interesse. Deshalb erhalten sie einen eigenen Namen:

Definition Halbgruppe

Definition[54]	Ein assoziatives (einfaches) Verknüpfungsgebilde heißt Halbgruppe.

[54] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 176.

Zu Beginn des Abschnittes über Verknüpfungen war die Rede davon, dass zwei Elementen einer Menge ein *Ergebnis* zugeordnet wird. Tatsächlich gibt es aber für verschiedene Elemente a und b stets zwei Möglichkeiten der Zuordnung, da es die verschiedenen geordneten Paare (a, b) und (b, a) gibt.
Eine weitere Besonderheit ganz bestimmter Verknüpfungsgebilde ist, wenn in ihnen gilt: $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$.

Definition Kommutativität

Definition	Sei $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde. Gilt für alle $a, b \in M$ $a \circ b = b \circ a$, dann heißt $(M, \circ)$ kommutatives Verknüpfungsgebilde.

Definition „neutrales Element"

Definition	Sei $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde. Gibt es ein $e \in M$ mit der Eigenschaft $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in M$, so heißt e neutrales Element der Verknüpfung „$\circ$" bzw. des Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$.

Bei der Definition ist Folgendes besonders zu beachten:
Beide Teilgleichungen in $e \circ a = a \circ e = a$, nämlich $e \circ a = a$ und $a \circ e = a$ müssen jeweils für alle $a \in M$ erfüllt sein. Ein Element der Menge darf sich also nur dann neutrales Element nennen, wenn es sowohl die Kopfzeile reproduzieren kann ($e \circ a = a$ für alle $a \in M$), als auch die erste Spalte ($a \circ e = a$ für alle $a \in M$). Dies ist keineswegs selbstverständlich:
Wie bekannt sein dürfte, gilt für alle $a \in \mathbb{Z}$: $a - 0 = a$. Die 0 ist aber kein neutrales Element des Verknüpfungsgebildes $(\mathbb{Z}, -)$, denn $0 - a = -a$, d.h. $0 - a = a$ gilt nur für $a = 0$!

Satz über die Eindeutigkeit des neutralen Elementes

Satz 1	Jedes Verknüpfungsgebilde (M, ∘) hat höchstens ein neutrales Element.

Wenn es in (M, ∘) zwei verschiedene neutrale Element gäbe, etwa e_1 und e_2, würde Folgendes gelten:

	$e_1 \circ e_2 = e_1$	(e_2 neutrales Element)
$\wedge$	$e_1 \circ e_2 = e_2$	(e_1 neutrales Element)
$\Rightarrow$	$e_1 = e_2$	(Transitivität)

Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass e_1 und e_2 verschieden sind. Also ist die Annahme falsch und es gibt <u>höchstens</u> ein neutrales Element.

<u>Definition inverse Elemente</u>

Definition	Sei (M,∘) ein Verknüpfungsgebilde mit neutralem Element e. Seien a, a'∈M Gilt a ∘ a' = a' ∘ a = e, so heißen a und a' zueinander inverse Elemente. a heißt invers zu a', a' heißt invers zu a. a und a' heißen invertierbar.

<u>Bemerkung:</u>

In einem Verknüpfungsgebilde mit neutralem Element muss nicht jedes Element invertierbar sein, auch nicht, wenn es <u>einige</u> invertierbare Elemente gibt.

Zum Beispiel sind in (ℤ, •) nur die Elemente -1 und 1 invertierbar.

Das neutrale Element ist <u>in jedem Fall</u> invertierbar, es ist immer zu sich selbst invers, denn es gilt stets: e ∘ e = e (Definition neutrales Element).

Satz über die Eindeutigkeit inverser Elemente

Satz 2

Sei $(M,\circ)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element e.

Dann gilt:

Zu jedem Element der Menge M gibt es *höchstens ein* inverses Element.

Beweis:

Seien $a_1^{-1}, a_2^{-1} \in M$ mit

$$a \circ a_1^{-1} = a_1^{-1} \circ a = e \;\wedge\; a \circ a_2^{-1} = a_2^{-1} \circ a = e$$

Dann gilt insbesondere:

	$a \circ a_1^{-1} = a \circ a_2^{-1}$	(Transitivität)
$\Rightarrow$	$a_1^{-1} \circ (a \circ a_1^{-1}) = a_1^{-1} \circ (a \circ a_2^{-1})$	(Eigenschaft „=”)
$\Rightarrow$	$(a_1^{-1} \circ a) \circ a_1^{-1} = (a_1^{-1} \circ a) \circ a_2^{-1}$	(Assoziativität)
$\Rightarrow$	$e \circ a_1^{-1} = e \circ a_2^{-1}$	(*)
$\Rightarrow$	$a_1^{-1} = a_2^{-1}$	(Definition neutrales Element)

Satz 3

Wegen der Eindeutigkeit kann man die folgende Bezeichnungsweise einführen:

Sei $(M,\circ)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element e.

Existiert zu einem Element a aus M ein inverses Element, so bezeichnet man dieses mit a^{-1}.

Dies ist die gebräuchliche Schreibweise für ein inverses Element, wenn das betrachtete Verknüpfungsgebilde nicht näher bestimmt ist. Sie ist nicht zu verwechseln mit der *Potenz* a^{-1}. Bezüglich der Addition in beliebigen Zahlenmengen schreibt man für das zu a inverse Element wie gewohnt -a.

Gruppen

Bisher wurden die Eigenschaften von Verknüpfungsgebilden jeweils auf eine spezielle Eigenschaft hin untersucht. Besonders interessant sind in der Algebra aber diejenigen Verknüpfungsgebilde, in denen mehrere dieser Eigenschaften zusammentreffen. Diese bezeichnet man als Gruppe.

Definition Gruppe

Definition[55]	Ein Verknüpfungsgebilde $(G,\circ)$ ist eine Gruppe, wenn gilt: (ASS): $(G,\circ)$ ist assoziativ. (NEU): In $(G,\circ)$ existiert ein neutrales Element. Formal: $\exists e \in G \quad \forall a \in G: (e \circ a = a \circ e = a)$ (INV): In $(G,\circ)$ gibt es zu jedem Element ein inverses Element. Formal: $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G: (a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$

Ist für eine Menge und eine gegebene Zuordnungsvorschrift „∘" zu überprüfen, ob es sich um eine Gruppe handelt, so ist bei Bedingung (ABG) insbesondere die Abgeschlossenheit der Menge G bzgl. „∘" zu überprüfen. Wenn es nicht ausdrücklich gefordert wird, kann i.d.R. davon ausgegangen werden, dass $a \circ b$ existiert und eindeutig bestimmt ist.

Lösbarkeit von Gleichungen

Satz 4	Sei $(M,\circ)$ eine Gruppe und $a, b \in M$. Dann sind alle Gleichungen der Form $a \circ x = b$ bzw. $y \circ a = b$ eindeutig in M lösbar.

[55] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 197.

$a \circ x = b$

$\Rightarrow\ a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b$ (Existenz inverser Elemente)

$\Rightarrow\ (a^{-1} \circ a) \circ x = a^{-1} \circ b$ (Assoziativgesetz)

$\Rightarrow\ e \circ x = a^{-1} \circ b$ (Definition inverser Elemente)

$\Rightarrow\ x = a^{-1} \circ b$ (Definition neutrales Element)

Da $a^{-1} \circ b$ wegen der Abgeschlossenheit von „∘” in M liegt, existiert also eine Lösung der Gleichung $a \circ x = b$. Die zweite Gleichung wird völlig analog gelöst.

Beweis der <u>Eindeutigkeit</u> der Lösungen:
Die Vorgehensweise ist die: Man nimmt an, es gäbe <u>zwei verschiedene</u> Lösungen x_1 und x_2, dann gilt :

$a \circ x_1 = b$ und $a \circ x_2 = b$

Dann folgt aufgrund der Transitivität von "=" $a \circ x_2 = a \circ x_1$

Wendet man nun das zu a inverse Element a^{-1} von links auf die Gleichung an, so ergibt sich:

$a^{-1} \circ (a \circ x_2) = a^{-1} \circ (a \circ x_1)$

$\Rightarrow (a^{-1} \circ a) \circ x_2 = (a^{-1} \circ a) \circ x_1$ („∘” assoziativ)

$\Rightarrow e \circ x_2 = e \circ x_1$ (a^{-1} ist das inverse Element zu a)

$\Rightarrow x_2 = x_1$ (e ist neutrales Element)

d.h. die als verschieden angenommenen Lösungen sind gleich, d.h. in Gruppen sind Gleichung dieser „Bauart” ($a \circ x = b$) eindeutig lösbar. Analog zeigt man dasselbe für die Gleichung der zweiten Bauart ($y \circ a = b$). Ebenso lässt sich die Umkehrung des Satzes zeigen:

Satz 5	Sei $(G,\circ)$ eine Halbgruppe, in der jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ lösbar ist. Dann gilt: $(G,\circ)$ ist eine Gruppe.

Beweis:
Da laut Voraussetzung $(G,\circ)$ eine Halbgruppe ist, müssen die Abgeschlossenheit und die Assoziativität nicht untersucht werden.

<u>Neutrales Element:</u>
Sei $a \in G$ beliebig.
Die Gleichung $a \circ x = a$ ist laut Voraussetzung lösbar. Die Lösung sei mit e_a bezeichnet. Es gilt: $a \circ e_a = a$

Behauptung:
e_a ist das neutrale Element $(G,\circ)$.

Beweis:
Sei $b \in G$ beliebig. Die Gleichung $y \circ a = b$ ist lösbar. Diese Lösung wird mit y_1 bezeichnet. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b \circ e_a &= (y_1 \circ a) \circ e_a \\ &= y_1 \circ (a \circ e_a) \\ &= y_1 \circ a \\ &= b \end{aligned}$$

Da b beliebig aus g gewählt war, ist e_a das neutrale Element des Verknüpfungsgebildes $(G, \circ)$.

Inverse Elemente:

Sei $a \in G$ beliebig und e das neutrale Element.

Laut Voraussetzung ist jede Gleichung der Form $a \circ x = e$ lösbar. Diese Lösung wird mit x_1 bezeichnet. Wegen der Kommutativität gilt:

$$a \circ x_1 = x_1 \circ a = e$$

Das bedeutet, dass x_1 das eindeutige inverse Element von a ist.

Insgesamt ist $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe.

4.2. Algebraische Gesetze

Es werden nun die grundlegenden Gesetze, die für verschiedene Verknüpfungen[56] gelten, dargestellt. Die vier Grundrechenarten werden als Beispiele für Rechenverknüpfungen angeführt, die im Folgenden samt ihrer Bezeichnungen in einer Tabelle[57] aufgeführt sind:

Verknüpfung	Begriff	Bezeichnung für a	Bezeichnung für b	Bezeichnung für c
$a + b = c$	Addition	1. Summand	2. Summand	Summe
$a - b = c$	Subtraktion	Minuend	Subtrahend	Differenz
$a \bullet b = c$	Multiplikation	Multiplikator (1. Faktor)	Multiplikand (2. Faktor)	Produkt
$a : b = c$ ($b \neq 0$)	Division	Dividend	Divisor	Quotient

[56] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 174.
[57] vgl. Kemnitz (2010), S. 6.

Das Kommutativgesetz[58]

Satz 6	Die Verknüpfung $*$: M x M $\rightarrow$ M heißt kommutativ, wenn gilt: $\forall a, b \in M: (a * b = b * a)$

Das Kommutativ- bzw. Vertauschungsgesetz gilt, wie bereits zuvor erwähnt, für die Addition und die Multiplikation mit M $\in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots\}$. Das Kommutativgesetz der Addition lautet demnach für die natürlichen Zahlen:

Das Kommutativgesetz der Addition in ℕ[59]

Satz 7	$\forall a, b \in \mathbb{N}: (a + b = b + a)$

Dieser Satz erläutert die Beziehung zwischen zwei Termen, die man gleichsetzen darf, z.B. 3 + 5 = 5 + 3.

Das Assoziativgesetz[60]

Satz 8	Die Verknüpfung $*$: M x M $\rightarrow$ M heißt assoziativ, wenn gilt: $\forall a, b, c \in M: (a * (b * c) = (a * b) * c)$

Das Assoziativ- oder auch Verbindungsgesetz, gilt unter anderem für die Addition und die Multiplikation natürlicher und ganzer Zahlen. Das Assoziativgesetz der Addition lautet demnach für die natürlichen Zahlen:

---

[58] vgl. Kemnitz (2010), S. 9.
[59] vgl. ebd.
[60] vgl. ebd.

Das Assoziativgesetz der Addition in $\mathbb{N}$[61]

Satz 9	$\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a + (b + c) = (a + b) + c)$

Die Anwendung dieses Gesetzes erleichtert die Ergebnisfindung, da Rechenvorteile genutzt werden. Betrachtet man die Aufgabe 42 + 62 = 104, so kann man folgern, dass 42 + 64 = 106 ist.

Denn: $42 + 64 = 42 + (62 + 2) = (42 + 62) + 2 = 104 + 2 = 106$

Bei der Aufgabe 16 + 18 = 34 kann das Gesetz auf ähnliche Art und Weise angewendet werden:

$$16 + 18 = 16 + (4 + 14) = (16 + 4) + 14 = 20 + 14 = 34$$

Die Kommutativ- und Assoziativgesetze für die Addition und auch für die Multiplikation lassen sich auf beliebig viele Summanden bzw. Faktoren *verallgemeinern*. Demnach kann man Folgendes formulieren:

- In jedem Summen-/Produktterm kann man die Summanden/Faktoren beliebig vertauschen.
- In jedem Summen-/Produktterm kann man Klammern einfügen oder weglassen.

Besonders der zweite Teil dieses Gesetzes, der sich auf das Weglassen von Klammern bezieht, wird häufig nicht dem Assoziativgesetz zugeschrieben.

Das Distributivgesetz[62]

Satz 10	Die Verknüpfung $*: M \times M \rightarrow M$ heißt distributiv, wenn gilt: $\forall a, b, c \in M: (a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c))$

[61] vgl. Kemnitz (2010), S. 9.
[62] vgl. ebd.

Das Verteilungsgesetz verbindet – im Gegensatz zu den vorherigen Gesetzen – *zwei* Verknüpfungen. Deshalb wird es auch Verteilungsgesetz genannt und gilt beispielsweise für die Verknüpfungen der Addition und der Multiplikation in $\mathbb{N}$:

Das Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition in $\mathbb{N}$[63]

Satz 11 $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c))$

Das Umwandeln einer Summe in ein Produkt bezeichnet man als Ausmultiplizieren, das Auflösen der Klammern in einer Gleichung wird Ausklammern genannt. Die Klammern auf der rechten Seite der Gleichung können vernachlässigt werden, wenn festgelegt wird, dass *Punkt- vor Strichrechnung* gilt.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ (a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c) \quad \text{(linksseitiges Distributivgesetz)}$$

Aufgrund des linksseitigen Distributivgesetzes[64] kann $(a + b) \bullet c$ nicht ohne Weiteres zu $a \bullet c + b \bullet c$ umgeformt werden. Die Gleichung $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$ lässt sich als ein zweites sogenanntes rechtsseitiges Distributivgesetz bezeichnen, da der Faktor c im ersten Term rechts von der Klammer steht. Diese Unterscheidung zwischen rechts- und linksseitigem Distributivgesetz ist nur notwendig, wenn es sich um eine nicht kommutative Verknüpfung handelt. Sobald die Kommutativität vorliegt, reicht ein Distributivgesetz aus. Da im Folgenden lediglich Verknüpfungen in $\mathbb{N}$ betrachtet werden, ist die Kommutativität gegeben und die oben beschriebene Unterscheidung der Distributivgesetze nicht mehr notwendig. Liegt hingegen keine kommutative Verknüpfung vor, muss ggf. kommutiert werden, bevor das Distributivgesetz angewandt werden darf:

Kommutativgesetz der Multiplikation	Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition	Kommutativgesetz der Multiplikation

$(a + b) \bullet c = c \bullet (a + b)$ $\qquad$ $c \bullet a + c \bullet b = a \bullet c + b \bullet c.$

---

[63] vgl. Kemnitz (2010), S. 9.
[64] vgl. Strang (2003), S. 65.

Das Distributivgesetz ermöglicht *Rechenvorteile*:

$54 \bullet 2 + 54 \bullet 8 = 54 \bullet (2 + 8) = 54 \bullet 10 = 540$ oder

$43 \bullet 11 = 43 \bullet (10 + 1) = 43 \bullet 10 + 43 \bullet 1 = 430 + 43 = 473$.

Eine weitere Anwendung des Distributivgesetz ist das *Ausklammern* bzw. *Faktorisieren*.

Soll zum Beispiel die Gleichung $x^3 + 3x^2 + 6x = 0$ gelöst werden, bietet es sich an, x auszuklammern:

$x^3 + 3x^2 + 6x \quad = 0$

$\Leftrightarrow x \bullet (x^2 + 3x + 6) \quad = 0$ (Distributivgesetz der Multiplikation bzgl. der Addition in $\mathbb{N}$)

Ist der auszuklammernde Faktor nicht in allen Einzelgliedern des Terms enthalten, so wird er aus den Gliedern, in denen der Faktor vollständig enthalten ist, ausgeklammert, bei den übrigen Gliedern wird der Faktor zum Nenner des entsprechenden Gliedes. Manchmal ist es erforderlich, den Bruch zu kürzen wie im Beispiel ii).

Beispiele:

i) Aus dem Term $8x + 26x^2 - 3$ soll „2” ausgeklammert werden.

Also: $8x + 26x^2 - 3 = 2 \bullet (4x + 13x^2 - \frac{3}{2})$.

ii) Aus dem Term $3x^2 + x^3 - 5x$ soll „x^2” ausgeklammert werden.

Also: $3x^2 + x^3 - 5x = x^2 \bullet (3 + x - \frac{5x}{x^2}) = x^2 \bullet (3 + x - \frac{5}{x})$

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln:

	Addition in ℕ	Multiplikation in ℕ	Mengentheoretische Vereinigung	Mengentheoretischer Durchschnitt
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetz	$a + (b + c)$ $= (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$A \cup (B \cup C)$ $= (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C)$ $= (A \cap B) \cap C$

Distributivgesetze:

Multiplikation in Bezug auf Addition	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Multiplikation in Bezug auf Subtraktion	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
Durchschnitt in Bezug auf Vereinigung	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Vereinigung in Bezug auf Durchschnitt	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Unter Benutzung der Assoziativgesetze und des Distributivgesetzes lassen sich Aufgaben des Einmaleins auf vielfältige Art und Weise lösen.

$4 \cdot 8$ kann beispielsweise folgendermaßen berechnet werden:

$$4 \cdot 8 = (2 \cdot 2) \cdot 8 = 2 \cdot (2 \cdot 8) = 2 \cdot 16 = 2 \cdot (10 + 6) = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 20 + 12 = 32$$

Selbstverständlich ist die Aufgabe wesentlich schneller zu lösen, wenn die Aufgaben des Einmaleins sicher beherrscht werden. Einsichten in Aufgaben des Einmaleins werden jedoch erst dann ermöglicht, wenn durch solche Rechnungen Querverbindungen zwischen den einzelnen Aufgaben hergestellt werden.

4.3. Lösen von Gleichungen

Das Lösen von Gleichungen setzt voraus, dass diese umgeformt werden können. Neben der Durchführung steht hier besonders die Begründung der jeweiligen Umformung im Fokus.

Eine *Äquivalenzrelation* (vgl. Kap. 4.8) besitzt drei wesentliche Eigenschaften:[65]

Reflexivität	$\forall x \in \mathbb{N}: (x = x)$
Symmetrie	$\forall x, y \in \mathbb{N}: (x = y \Rightarrow y = x)$
Transitivität	$\forall x, y, z \in \mathbb{N}: (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$

Betrachtet man die möglichen Umformungen bei der Lösung von Gleichungen, so ist zu erwähnen, dass auf beiden Seiten die gleiche Operation durchgeführt wird; bei der Division muss man darauf achten, dass die Zahl oder der Term, durch die/den man dividiert, ungleich null ist. Überdies bleibt die Gleichheit erhalten, wenn beide Seiten der Gleichung potenziert werden oder auf beiden Seiten die n-te Wurzel gezogen wird.

Rechnen mit Gleichungen:

i)	$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:	$(a = b \Rightarrow a + c = b + c)$
ii)	$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:	$(a = b \Rightarrow a - c = b - c)$
iii)	$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:	$(a = b \Rightarrow a \bullet c = b \bullet c)$
iv)	$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, c \neq 0$:	$(a = b \Rightarrow a : c = b : c)$
v)	$\forall a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$:	$(a = b \Rightarrow a^n = b^n)$
vi)	$\forall a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$:	$(a = b \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b})$

Aus diesen Eigenschaften der Gleichheit lassen sich leicht folgende Kürzungsregeln ableiten:

---
65 vgl. Scheid/Schwarz (2016), S.135.

Kürzungsregeln[66]

i) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + c = b + c \Rightarrow a = b)$

ii) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\underline{c \neq 0}$: $(a \bullet c = b \bullet c \Rightarrow a = b)$

Im Fall c = 0 der zweiten Kürzungsregel würde beispielsweise aus $2 \bullet 0 = 6 \bullet 0$ folgen, dass 2 = 6 gilt, was offensichtlich eine falsche Aussage ist.

Mit Hilfe der obengenannten Rechenregeln der Gleichung lassen sich die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier (und damit beliebig vieler) Gleichungen herleiten:

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Gleichungen[67]

i) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a = b \wedge c = d \Rightarrow a + c = b + d)$

ii) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a = b \wedge c = d \Rightarrow a - c = b - d)$

iii) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a = b \wedge c = d \Rightarrow a \bullet c = b \bullet d)$

iv) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$: $(a = b \wedge c = d \Rightarrow a : c = b : d)$

Exemplarisch sei hier i) hergeleitet:

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: beliebig mit a = b und c = d.

1) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

2) $c = d \Rightarrow c + b = d + b$

$\Rightarrow b + c = b + d$

Aus 1) und 2) folgt wegen Kommutativität b + c = c + b und wegen der Transitivität a + c = b + d.

[66] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S.5.
[67] vgl. Lehmann/Schulz (1997), S.41f.

4.4. Natürliche Zahlen

Die Peano-Axiome

Das Rechnen mit natürlichen Zahlen basiert auf dem bekannten von Guiseppe PEANO Ende des vergangenen Jahrhunderts vorgelegten Axiomensystem.

Axiome[68]

Eine nicht leere Menge A mit einem ausgezeichneten Element - 1 genannt - und einer Abbildung $A \to A$ und $n \to n'$, in der die Eigenschaften P1 bis P5 gelten, nennt man *Menge der natürlichen Zahlen* und bezeichnet sie mit ℕ. Dabei gilt:

P1: In der Menge A gibt es ein Element mit der Bezeichnung (Eins).
Formal: $1 \in A$

P2: In der Menge A existiert zu jedem Element n genau ein Element n' (Nachfolger von n)
Formal: $\forall n \in A: (n \in A \Rightarrow n' \in A)$

P3: Das ausgezeichnete Element 1 ist nicht Nachfolger irgendeines anderen Elementes aus A.
Formal: $\forall n \in A: (n' \neq 1)$

P4: Verschiedene Elemente aus A haben verschiedene Nachfolger.
Formal: $\forall n, m \in A: (n \neq m \Rightarrow n' \neq m')$

P5: Eine Teilmenge M von A, die das Element 1 sowie mit jedem Element auch seinen Nachfolger enthält, ist gleich der Menge A
Formal: $\forall M \subseteq A: (1 \in M \land (n \in M \Rightarrow n' \in M) \Rightarrow M = A)$

Bemerkung: Anstatt m' schreibt man auch m + 1.

Die obigen Axiome beziehen sich auf die ursprüngliche Form der Axiome, in denen 1 die kleinste natürliche Zahl darstellt. Später wählte PEANO die Null als kleinstes Element. Aus diesen Axiomen lassen sich die beiden nachfolgenden Definitionen ableiten:

[68] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 374.

Definition Nachfolger

Definition

Sei $(M, <)$ eine strikt geordnete Menge mit $y \in M$, dann heißt z Nachfolger von y, wenn $y < z$ ist und es kein kleineres Element als z mit dieser Eigenschaft gibt.

Formal: $y < z \wedge \neg\exists z': y < z' < z$

Definition Vorgänger

Definition

Sei $(M, <)$ eine strikt geordnete Menge mit $y \in M$, dann heißt x Vorgänger von y, wenn $x < y$ ist und es kein kleineres Element als x mit dieser Eigenschaft gibt.

Formal: $x < y \wedge \neg\exists x': x < x' < y$

4.5. Weitere Gesetze in $\mathbb{N}$

Im Folgenden werden weitere wesentliche Gesetze beim Rechnen in $\mathbb{N}$ vorgestellt und erläutert. Allerdings würde es den Rahmen dieser Arbeit sprengen, wenn alle konsequent bewiesen werden würden.

Die Kleinerrelation

Zu je zwei natürlichen Zahlen gibt es stets und eindeutig ihre Summe, die wiederum eine natürliche Zahl ist. Es lässt sich folglich zu einer gegebenen Zahl a eine weitere Zahl x finden, so dass b die Summe bildet ($a + x = b$). Dies liefert die Definition der Kleinerrelation:

Definition der Kleinerrelation

Definition[69]	Seien a, $b \in \mathbb{N}$ beliebig. Man sagt „*a kleiner als b*" genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so dass die Summe a + x gleich b ist. Man schreibt dann: $a < b$ Formal: $a < b :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}: (a + x = b)$

Dabei ist wichtig, dass Null nicht als natürliche Zahl betrachtet wird.

Analog wird im Zahlbereich $\mathbb{N}_0$ auch die Kleinergleichrelation definiert:

$$a \leq b :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}_0: (a + x = b)$$

Entscheidender Unterschied: für x ist der Wert 0 zugelassen, dies ist genau dann der Fall, wenn $a = b$ gilt.

Es lässt sich leicht zeigen, dass folgende Äquivalenz gilt:

$$a \leq b :\Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

Außerdem gelten die folgenden Gesetze analog auch für die Kleinergleichrelation.

Wesentliche Eigenschaften der Kleinerrelation:

Monotonie der Kleinerrelation bezüglich der Addition

Satz 12[70]	Für alle a, b, $c \in \mathbb{N}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

[69] vgl. Reiss/Schmieder (2014), S. 152.
[70] vgl. Strampp (2002), S. 26.

Beweis:

Seien a, b, $c \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte $a < b$. Dann lässt sich folgern:

$a < b$	$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: (a + x = b)$	(Definition der Kleinerrelation)
	$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: ((a + x) + c = b + c\ )$	(Rechnen mit Gleichungen)
	$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: (a + (x + c) = b + c)$	(Assoziativgesetz bezgl. der Addition)
	$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: (a + (c + x) = b + c)$	(Kommutativgesetz der Addition)
	$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: ((a + c) + x = b + c)$	(Assoziativgesetz der Addition)
	$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: a + c < b + c)$	(Definition der Kleinerrelation)

Transitivität der Kleinerrelation

Satz 13[71] Für alle a, b, $c \in \mathbb{N}$ gilt: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Beweis:

	$a < b \wedge b < c$	
$\Rightarrow$	$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}: (a + x_1 = b \wedge b + x_2 = c)$	(Definition der Kleinerrelation)
$\Rightarrow$	$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}: ((a + x_1) + x_2 = c\ )$	(Rechnen mit Gleichungen)
$\Rightarrow$	$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}: (a + (x_1 + x_2) = c)$	(Assoziativgesetz bezgl. der Addition)
$\Rightarrow$	$\exists x_3 \in \mathbb{N}: (a + x_3 = c)$	(Abgeschlossenheit bzgl. der Addition)
$\Rightarrow$	$a < c$	(Definition der Kleinerrelation)

Für die nächste wichtige Eigenschaft der natürlichen Zahlen, die sich mit der Kleinerrelation ergibt, benötigt man den folgenden Hilfssatz:

[71] vgl. Strampp (2002), S. 26.

Hilfssatz	Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt: $a \neq 1 \Rightarrow 1 < a$

Beweis:

Sei a eine beliebige natürliche Zahl ungleich 1.

Dann hat a einen Vorgänger $b \in \mathbb{N}$ (vgl. Peano-Axiome, (P2)). Damit ergibt sich:

$\exists b \in \mathbb{N}: (a = b')$

$\Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{N}: (a = b + 1)$ (Definition Nachfolger)

$\Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{N}: (a = 1 + b)$ (Definition Kommutativität)

$\Rightarrow \quad 1 < a$ □

Wohlordnung in ℕ

Satz 14	Sei A eine *nicht leere* Teilmenge von ℕ. Dann gilt: A besitzt ein kleinstes Element a, d.h. $\exists a \in A\ \forall x \in A: (\ a \neq x \Rightarrow a < x)$

Da die Kleinerrelation irreflexiv ist (vgl. Kap. 4.8), kann a nicht kleiner sein als es selbst. Deshalb muss die Einschränkung $a \neq x$ vorgenommen werden. Diese Eigenschaft wird auch *Minimalprinzip* oder *Prinzip vom kleinsten Element* genannt.

Behauptung: Jede nicht-leere Teilmenge A der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

Beweis: Es wird ein a aus der Menge A gewählt und zwei Mengen A_1 und A_2 gebildet mit $A_1 := \{n \in A \mid n \leq a\}$ und $A_2 := \{n \in A \mid a < n\}$.

Die Menge A_1 ist endlich und besitzt nach Satz 14a ein kleinstes Element a_0. Dieses ist nach Definition auch kleiner als alle Elemente aus A_2. Wegen $A = A_1 \cup A_2$ ist also a_0 kleinstes Element von A.

Kleinstes Element einer endlichen Menge natürlicher Zahlen

Satz 14a	Jede endliche Teilmenge von ℕ hat ein kleinstes Element.

Beweis:

Es seien a_1, a_2, ..., a_n die n verschiedenen Elemente aus A und $a_{0\text{ sei}}$ das gesuchte kleinste Element. Zunächst wird $a_0 = a_1$ gesetzt und anschließend werden die übrigen n - 1Elemente a_2, ..., a_n durchlaufen. Findet sich ein Element a_j, welches kleiner ist als a_0, so wird $a_0 = a_j$ gesetzt. Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten und a_0 ist das kleinste Element aus A.

Trichotomie in ℕ

Satz 15	Für alle a, b $\in\mathbb{N}$ gilt: $a < b \;\veebar\; b < a \;\veebar\; a = b$ d.h. es gilt immer genau einer der drei Fälle.

Der Beweis erfordert zwei Teile:

Zum einen muss gezeigt werden, dass nicht zwei der drei Fälle gleichzeitig eintreten können. Mittels der Transitivität und der Irreflexivität der Kleinerrelation kann ein indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis) durchgeführt werden. Es werden alle Möglichkeiten des Zusammentreffens zweier Fälle untersucht:

Beweis (Teil 1):

Falls $a < b \land a = b$:

Ersetzt man b durch a, so erhält man $a < a$. Dies widerspricht der Irreflexivität.

Falls $b < a \land a = b$

Ersetzt man a durch b, so erhält man $b < b$. Dies widerspricht der Irreflexivität.

Falls $a < b \land b < a$:

Durch die Transivität erhält man $a < a$. Dies widerspricht der Irreflexivität.

Im zweiten Teil wird gezeigt, dass mindestens einer der Fälle eintreten muss.

Beweis (Teil 2):

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig.

Falls nun $a = b$ gilt, so ist einer der drei Fälle eingetreten. Zu untersuchen ist $a \neq b$.

Sei nun $A := \{a, b\}$

Diese (nicht leere) Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element (Wohlordnung), wobei nur a oder b in Frage kommen. Wegen $a \neq b$ gilt also: $a < b$ oder $b < a$, denn das kleinste Element ist kleiner als jedes andere von ihm verschiedene Element der Menge, d.h. einer der drei Fälle tritt auf jeden Fall ein.

Mit Hilfe der Trichotomie gelingt es auch die Kürzungsregel für die Kleinerrelation bezüglich der Addition zu beweisen.

Kürzungsregel für Ungleichungen bezüglich der Addition

Satz 16 Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt: $a + c < b + c \Rightarrow a < b$

Beweis:

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und es gelte: $a + c < b + c$

Annahme:

$a \not< b$

$\Rightarrow \quad a = b \lor b < a$

$\Rightarrow \quad a + c = b + c \lor b + c < a + c$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a + c < b + c$. Somit ist die Annahme nicht korrekt. Daraus folgt: $a < b$.

Man beachte: Diese Regel erlaubt es, Umformungen der folgenden Art <u>ohne</u> Subtraktion durchzuführen!

$$x + 2z < 3y + 2z$$

$$\Rightarrow \quad x < 3y \qquad \text{(Kürzungsregel der Kleinerrelation)}$$

Die Subtraktion in $\mathbb{N}$

Mit Hilfe der Addition und der Kleinerrelation kann die Subtraktion eingeführt werden:

Definition[72]	Seien a, b $\in\mathbb{N}$ beliebig mit a < b. Die (eindeutige) Lösung *x* der Gleichung $a + x = b$ heißt die <u>Differenz</u> von a und b. Man schreibt für x: $x := b - a$

<u>Bemerkung</u>: Nach der Definition der Kleinerrelation existiert zu a, b $\in\mathbb{N}$ mit a < b <u>stets</u> eine Zahl x $\in\mathbb{N}$ mit a + x = b. Da dieses x sogar *eindeutig* bestimmt ist, ist auch die Differenz von a und b eindeutig.[73]

Bemerkung: Zunächst erlaubt diese Definition nicht, jeden beliebigen Summanden einer Summe zu subtrahieren, sondern nur den *ersten* in einer Summe mit zwei Summanden.

Beispiel:

$$x + 3y = 7$$

$$\Rightarrow \quad 3y = 7 - x \qquad \text{(Definition der Subtraktion)}$$

[72] vgl. Padberg/Büchter (2015), S. 201.
[73] Wenn es nicht eindeutig wäre, dann widerspräche dies dem Satz 4, denn es gäbe mehrere Möglichkeiten der Lösung.

<u>nicht</u> aber:

$$x + 3y = 7$$

$$\Rightarrow \quad x = 7 - 3y$$

Wegen des Kommutativgesetzes der Addition in ℕ gilt aber:

$$x + 3y = 7$$

$$3y + x = 7$$ (Kommutativgesetzes der Addition in ℕ)

$$x = 7 - 3y$$ (Definition der Subtraktion)

Mit Verweis auf Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in ℕ reicht bei größeren Summen somit ein Schritt:

$$x + 3y + 7z = 20$$

$$x + 7z \quad = 20 - 3y$$ (Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in ℕ, Definition der Subtraktion)

Mit der Definition der Subtraktion lässt sich nicht nur aus einer *Summengleichung* eine *Differenzgleichung* machen, sondern auch umgekehrt <u>jede *Differenzgleichung* in eine *Summengleichung* umformen</u>. Um diese Umformung leichter durchführen zu können, ist die Orientierung an folgender Merkregel nützlich:

Merkregel	Bei einer Differenzgleichung wird von einer größeren Zahl (b) eine kleinere (a) subtrahiert, und man erhält die Differenz (x). Bei der zugehörigen Summengleichung wird zu der kleineren Zahl (a) die Differenz (x) addiert, und man erhält die größere (b) (vgl. Kapitel 5.1).

Viele der geläufigen Rechenregeln für die Subtraktion lassen sich nunmehr beweisen. Dazu kann man meist die zu zeigende *Differenzgleichung* in eine **äquivalente** *Summengleichung* umformen. Anschließend kann man im Beweis dann auf Gesetze, die für die Addition gelten (Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in ℕ) zurückgreifen.

Bei der Anwendung der folgenden Rechenregeln für die Subtraktion ist es wichtig, die Existenz der Differenz x dadurch sicherzustellen, dass man sich vergewissert, ob Term b größer als Term a ist (vgl. Definition der Subtraktion).

Aus der Definition der Subtraktion folgt der nachstehende Satz, der eine große Hilfe bei Beweisen von Rechenregeln für die Subtraktion darstellt:

Satz 17 Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) $(b + a) - a = b$

(ii) $a + (b - a) = b$ für $a < b$

ad (i):

Wegen $a < a + b = b + a$ (Definition der Kleinerrelation und des Kommutativgesetzes der Addition in $\mathbb{N}$) ist die Differenz definiert.

Es gilt:

$a + b = b + a$ (Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in $\mathbb{N}$)

$\Rightarrow\ b = (b + a) - a$ (Definition der Subtraktion)

ad (ii):

$a + (b - a) = b$

$\Rightarrow\ b - a = b - a$ (Definition der Subtraktion, $a < b$)

Das ist eine wahre Aussage, also gilt damit die zu zeigende Aussage.

<u>Klammerregeln für Subtraktion</u>

Satz 18 Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) $a - (b + c) = (a - b) - c$ für $b + c < a$

(ii) $a + (b - c) = (a + b) - c$ für $c < b$

(iii) $a - (b - c) = (a - b) + c$ für $c < b < a$

ad (i):

Gelte $b + c < a$

Zu zeigen: $b < a$ (damit a-b definiert ist)

Nach der Definition der Kleinerrelation gilt: $b < b + c$

$b < b + c \land b + c < a$ (laut Voraussetzung)

$\Rightarrow b < a$ (Transitivität der Kleinerrelation)

Zu zeigen: $c < a - b$ (damit $(a - b) - c$ definiert ist)

$b + c < a$ (laut Voraussetzung)

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}: (b + c) + x = a$ (Definition der Kleinerrelation)

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}: b + (c + x) = a$ (Assoziativgesetz der Addition)

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}: c + x = a - b$ (Definition der Subtraktion)

$\Rightarrow c < a - b$ (Definition der Kleinerrelation)

Also sind **alle vorkommenden Differenzen** definiert.

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

a ist *die größere Zahl*, $b + c$ *die kleinere* (nach Voraussetzung) und $(a - b) - c$ die Differenz, damit ergibt sich nach der Merkregel auf den Seiten zuvor:

$(b + c) + ((a - b) - c) = a$ (Definition der Subtraktion)

$(b + c) + ((a - b) - c) = b + (c + ((a - b) - c)$ (Assoziativgesetz der Addition)

$= b + (a - b)$ (Satz 17 (ii))

$= a$ (Satz 17 (ii))

Also gilt: $a - (b + c) = (a - b) - c$

ad (ii):

Gelte $c < b$

Zu zeigen: $c < a + b$

Nach der Definition der Kleinerrelation gilt: $c < c + a$

Überdies: $c < b \Rightarrow c + a < b + a$ (Monotonie der Kleinerrelation bezüglich der Addition)

$c < c + a \wedge c + a < b + a \Rightarrow c < a + b$ (Transitivität der Kleinerrelation, Kommutativgesetz der Addition)

Die Differenzen $b - c$ sowie $(a + b) - c$ existieren also in $\mathbb{N}$.

$$a + b = a + (c + (b - c)) = c + (a + (b - c)) \qquad (-c)$$

$$\Leftrightarrow a + (b - c) \qquad \square$$

ad (iii):
Gelte $c < b \ \wedge \ b < a$
zu zeigen: $b - c < a$

$c + (b - c) = b$ (Satz 17 (ii))

$\Rightarrow$ $(b - c) + c = b$ (Kommutativität bezüglich der Addition)

$\Rightarrow$ $b - c < b$ (Definition der Kleinerrelation, $c \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ $b - c < a$ (Transitivität der Kleinerrelation, $b < a$)

$a = (a - (b - c)) + (b - c)$

$$\begin{aligned}((a - b) + c) + (b - c) &= (a - b) + (c + (b - c)) \\ &= (a - b) + b \\ &= a \\ \Rightarrow (a - b) + c &= a - (b - c)\end{aligned}$$

Konstanz der Differenz/Konstanz der Summe

Satz 19[74] Seien a, b, $x \in \mathbb{N}$ mit $b < a$ und $x < a$. Dann gilt:

(i) $a - b = (a + x) - (b + x)$

(ii) $a + b = (a - x) + (b + x)$

Die *erste* Aussage bildet unter anderem die Grundlage für das in der Bundesrepublik Deutschland übliche schriftliche Subtraktionsverfahren: die Erweiterungstechnik (vgl. Kapitel 5.1). Kinder begegnen dieser Aussage im Alltag bereits sehr früh. So sind Familienkonstellationen nur ein Beispiel: Bettina ist acht Jahre älter als ihre Schwester Nicole. Zwei Jahre später stellen beide fest, dass der Altersunterschied sich nicht verändert hat.

Ähnlich verhält es sich bei der *zweiten* Aussage, mit deren Hilfe vor allem beim Kopfrechnen Rechenvorteile ausgenutzt werden können. Der folgenden Situation liegt dieses Gesetz zugrunde:

Lisa und Christian haben zusammen 12 Murmeln. Christian schenkt Lisa eine Murmel. Wie viele Murmeln haben jetzt beide zusammen?

Die Beweise der beiden Aussagen bieten wenig Neues und werden hier nicht durchgeführt.

Als nützliche Regel im Umgang mit Ungleichungen erweist sich das folgende Gesetz:

Kürzungsregel von Ungleichungen bezüglich der Subtraktion

Satz 20 Seien a, b, $c \in \mathbb{N}$ mit $c < a$ und $c < b$.

Dann gilt: $a - c < b - c \Rightarrow a < b$

[74] vgl. Schwarz (1999), S. 13f.

Beweis:

Seien a, b, c $\in\mathbb{N}$ beliebig mit $c < a \wedge c < b$ und es gelte: $a - c < b - c$

$\Rightarrow \exists\, x \in\mathbb{N}: (a - c) + x = b - c$ (Definition der Kleinerrelation)

$\Rightarrow \exists\, x \in\mathbb{N}: x + (a - c) = b - c$ (Kommutativität der Addition)

$\Rightarrow \exists\, x \in\mathbb{N}: (x + a) - c = b - c$ (Satz 18 (ii))

$\Rightarrow \exists\, x \in\mathbb{N}: c + (b - c) = x + a$ (Definition Subtraktion, Merkregel)

$\Rightarrow \exists\, x \in\mathbb{N}: b = x + a$ (Satz 17 (ii), $c < b$)

$\Rightarrow \exists\, x \in\mathbb{N}: x + a = b$ (Kommutativität)

$\Rightarrow a < b$ (Definition der Kleinerrelation)

4.6. Division mit Rest

In der Grundschule werden unterschiedliche Schreibweisen verwendet:

$54 : 11 = 4 + (10 : 11)$ oder

$54 = 4 \cdot 11 + 10$

Diese Schreibweise lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Definition Division mit Rest

Definition[75] Wird a in Abhängigkeit von b wie folgt dargestellt:

$a = q \cdot b + r$ mit $0 \leq r < b$ und $a, b, q, r \in \mathbb{N}_0$, $b \neq 0$,

so nennt man dies Division mit Rest.

[75] vgl. Schwarz (1999), S. 7.

Bemerkung: Hierbei gibt q an, wie oft b in a steckt, der Rest, der übrigbleibt, ist r.

Es können nicht nur *natürliche* Zahlen mittels Division mit Rest dargestellt werden, sondern auch *ganze* Zahlen a, b:

a lässt sich bezüglich Division durch b wie folgt schreiben:

$a = q \bullet b + r$ mit $0 \leq r < |b|$

und $a, b, q \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$**,** d.h. die Reste sind immer positiv.

Natürliche Zahlen a und b lassen bei Division durch m den gleichen Rest, wenn sie sich wie folgt schreiben lassen:

$$a = q_1 \bullet m + r$$

$$b = q_2 \bullet m + r$$

Dabei sind die genauen Werte von q_1 und q_2 hier irrelevant. Wichtig ist lediglich, dass derselbe Rest r vorliegt.

Für „a und b sind restgleich bzgl. Division durch m" sagt man auch „a kongruent b modulo m":

Definition kongruent

Definition[76]	Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, die bei Division durch eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ den gleichen Rest r lassen, heißen kongruent modulo m. Formal: $a \equiv b\ (m) \Leftrightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0: (a = q_1 \bullet m + r \wedge b = q_2 \bullet m + r),\ 0 \leq r < m$

Für den interessanten Fall, dass eine Zahl bei Division durch eine andere den Rest 0 lässt, gibt es folgende Schreibweise:

[76] vgl. Schwarz (1999), S. 43.

Definition Teilbarkeit in $\mathbb{N}_0$

Definition[77]	Seien a, $b \in \mathbb{N}_0$. Es gilt a teilt b ($a \mid b$) genau dann, wenn es eine Zahl $q \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $b = q \cdot a + 0$ bzw. $a \cdot q = b$ gilt. Formal: $a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}_0 : (a \cdot q = b)$

Jede Teilbarkeitsaussage lässt sich mit Hilfe der Definition auf eine Gleichung zurückführen. Über die Darstellung von Zahlen mittels Division mit Rest gelangt man zu zwei weiteren zentralen Begriffen der Zahlentheorie: *Kongruenz* und *Teilbarkeit*.
Wenn man also zu vorgegebenen natürlichen Zahlen a und b ein q und ein r gefunden hat, so kann man sicher sein, dass dies die einzige Möglichkeit ist, a in Abhängigkeit von b in obiger Weise darzustellen:

Satz über Division mit Rest

Satz 21[78]	Seien $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$. Dann existieren eindeutig Zahlen q, $r \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt: $a = q \cdot b + r$ mit $0 \leq r < b$ Formal: $\forall a \in \mathbb{N}_0 \quad \forall b \in \mathbb{N}: (\exists q, r \in \mathbb{N}_0: (a = q \cdot b + r \ \wedge \ 0 \leq r < b)$

Der Fall $b = 0$ wird in diesem Satz ausgeschlossen, da $b = 0$ mit $0 \leq r < b$ nicht möglich ist.
Beweis:
In dem Beweis ist zweierlei zu zeigen:
1) Es erfolgt ein sogenannter Existenzbeweis, in dem gezeigt wird, dass es zu jedem Zahlenpaar (a, b) auch ein passendes Zahlenpaar (q, r) gibt (mit $0 \leq r < b$, weil r sonst kein Rest ist).

[77] vgl. Schwarz (1999), S. 8.
[78] vgl. ebd., S. 7.

2) Es wird gezeigt, dass die gefundenen Zahlen q und r auch eindeutig bestimmt sind, das heißt, dass es nicht noch ein anderes Zahlenpaar gibt, dass die Bedingungen ebenfalls erfüllt.
ad 1):

Beim Beweis wird die Wohlordnungseigenschaft (Minimalprinzip) (vgl. Satz 14) verwendet, welche aussagt, dass es in jeder nicht leeren Menge ein kleinstes Element gibt. Alternativ wäre beispielsweise auch ein Beweis über die Archimedizität möglich.

Seien $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

1. Fall: $a=0$

$\Rightarrow a = 0 \bullet b + 0$,

d.h. es existieren $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < b$ (nämlich $q = 0$, $r = 0$)

2. Fall: $a > 0$ Vorüberlegungen:

Gesucht wird ein q (und ein zugehöriges r) mit $a = q \bullet b + r$. Dieses $q \bullet b$ ist das größte Vielfache von b, das kleiner als (oder gleich) a ist, da r die Bedingung $0 \leq r < b$ erfüllen muss. Daher ist es sinnvoll, die Vielfachen von b näher zu betrachten.

Leider steht kein Maximalprinzip zur Verfügung, mit dem das größte Vielfache < a bestimmt werden könnte, aber es gibt ein Minimalprinzip.

Mit dem Minimalprinzip kann das kleinste Vielfache von b, das größer als a (oder gleich a) ist, bestimmt werden (nennen wir dieses $m \bullet b$). Das nächstkleinere Vielfache von b ($(m - 1) \bullet b$) ist dann natürlich kleiner als a und damit das größte Vielfache < a.

Nun zurück zu dem Beweis, in dem zuerst eine Menge konstruiert wurde, die alle Faktoren n enthält, mit denen das Produkt $n \bullet b$ größer als a (oder gleich) ist (z.B. die im Zahlenstrahl aufgeführten m, m+1 und m+2 liegen in dieser Menge):

Sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bullet b \geq a\}$

Idee: Zuerst soll gezeigt werden, dass M nicht leer ist, damit das Wohlordnungsprinzip (Minimalprinzip) auch anwendbar ist.

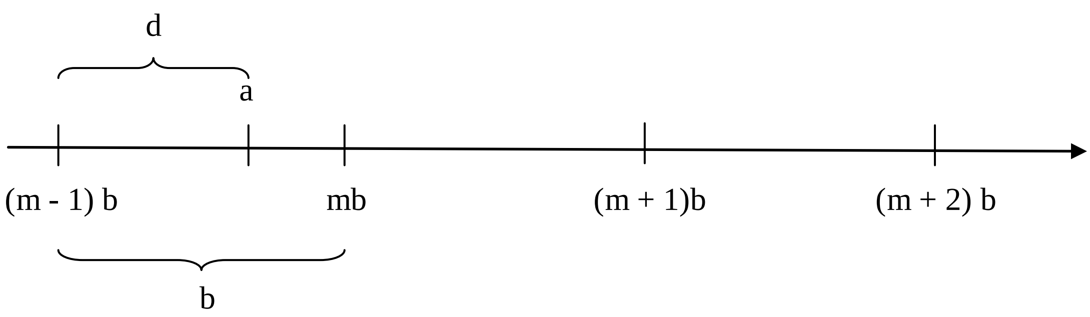
$a \in M$, denn $a \bullet b \geq a$ $(b \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow M \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: (m = \min M)$ (Wohlordnung, $M \subseteq \mathbb{N}$)

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: ((m - 1) \bullet b < a)$ (denn: Ann.: $(m - 1) \bullet b \geq a \Rightarrow m - 1 \in M$. Das ist ein Widerspruch zu $m = \min M$, da $m - 1 < m$)

$\Rightarrow \exists m, d \in \mathbb{N}: ((m - 1) \bullet b + d = a)$ (Definition Kleinerrelation)



Wenn $d > b$ gelten würde, dann wäre ein passendes q mit zugehörigem r gefunden (nämlich $q = m - 1$ und $r = d$). Der Fall $d = b$ wäre in Ordnung, da sich dann $a = m \bullet b$ ergeben würde (also: $q = m$ und $r = 0$). Um diese beiden Fälle zu erhalten, soll der Fall $b < d$ ausgeschlossen werden.

Annahme:

$b < d$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: (b + k = d)$ (Definition der Kleinerrelation)

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: (m - 1) \bullet b + (b + k) = (m-1) \bullet b + d)$ (Eigenschaft der Gleichheit)

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: (m - 1) \bullet b + (b + k) = a)$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m \bullet b - b + b + k = a)$ (Distributiv, Assoziativität)

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m \bullet b + k = a)$

$\Rightarrow m \bullet b < a$ (Definition der Kleinerrelation, $k \in \mathbb{N}$)

Das ist ein Widerspruch zu $m \in M$, also ist die Annahme falsch und wegen der Trichotomie gilt: $d \leq b$.

$d \leq b \Rightarrow d < b \vee d = b$

1. Fall: $d = b$

$\Rightarrow (m - 1) \bullet b + b = a$

$\Rightarrow ((m - 1) + 1) \bullet b = a$ (Distributiv)

$\Rightarrow m \bullet b = a$

$\Rightarrow a = m \bullet b + 0$

Also erfüllen hier $q = m$ und $r = 0$ die Behauptung.

2. Fall: $d < b$

Da gilt: $a = (m -1) \bullet b + d$ und $0 \leq d < b$, erfüllen $q = m -1$ und $r = d$ die Behauptung.

Damit erhält man in allen Fällen, zu einem beliebigen Zahlenpaar (a, b) ein passendes Zahlenpaar (q, r) gibt mit $a = q \bullet b + r$ und $0 \leq r < b$.

ad 2): Zu zeigen ist nun, dass die in. 1 gefundenen q und r auch eindeutig sind, das heißt, dass es außer diesen nicht noch andere Zahlen gibt, die die Bedingungen des Satzes erfüllen.

Seien $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ gegeben mit

$a = q_1 \bullet b + r_1$ mit $0 \leq r_1 < b$, $q_1, r_1 \in \mathbb{N}_0$ und $a = q_2 \bullet b + r_2$ mit $0 \leq r_2 < b$, $q_2, r_2 \in \mathbb{N}_0$

Dass mindestens eine solche Darstellung für a und b existiert, wurde unter 1) bewiesen. Nun soll gezeigt werden, dass es nur eine Darstellung gibt, es sich also stets um dieselben q und r handelt. Zu zeigen ist also: $q_1 = q_2$ und $r_1, = r_2$.

$$\left.\begin{array}{l} a = q_1 \cdot b + r_1 \\ a = q_2 \cdot b + r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow q_1 \cdot b + r_1 = q_2 \cdot b + r_2$$

$$\Rightarrow q_1 \cdot b = q_2 \cdot b + (r_2 - r_1) \quad (*)$$

Wenn $r_1 = r_2$ gilt, lässt sich aus (*) direkt auf die Gleichheit von q_1, und q_2 schließen:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 \cdot b = q_2 \cdot b + (r_2 - r_1) \\ (r_2 = r_1) \end{array}\right\} \Rightarrow q_1 \cdot b = q_2 \cdot b$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2$$

Jetzt ist noch zu zeigen, dass $r_1, = r_2$ auch tatsächlich gilt: (indirekter) Beweis:

Annahme: $r_1 \neq r_2$

$\Rightarrow r_1 < r_2 \quad \vee \quad r_2 < r_1$ (Trichotomie)

o.B.d.A: $r_1 < r_2$

$\Rightarrow r_2 - r_1 \in \mathbb{N}$ (Definition der Subtraktion)

Es gilt: $q_1 \cdot b = q_2 \cdot b + (r_2 - r_1)$ (*)

$b \mid q_2 \cdot b + (r_2 - r_1)$ (Definition Teilbarkeit)

Wenn b eine Summe ($q_2 \cdot b + (r_2 - r_1)$) und den einen Summanden ($q_2 \cdot b$) teilt, dann muss b auch den zweiten Summanden ($r_2 - r_1$,) teilen:

$\Rightarrow b \mid r_2 - r_1$

$\Rightarrow b \leq r_2 - r_1$ $(r_2 - r_1 \in \mathbb{N} \wedge r_2 - r_1 \neq 0)$

Das kann aber nicht gelten, denn:

Aus der Voraussetzung $(0 \leq)\ r_2 < b$ und $r_1 < r_2$ folgt $r_2 - r_1 < b$ und dazu steht $b \leq r_2 - r_1$ im Widerspruch (wegen der Trichotomie),

d.h., die Annahme ist falsch (analog ergibt sich ein Widerspruch für $r_2 < r_1$),

also gilt $r_1 = r_2$.

Insgesamt gilt damit $r_1 = r_2$ und $q_1 = q_2$ (siehe oben),

d.h., die (formal unterschiedlichen) Darstellungen von a sind identisch, die Division mit Rest ist damit eindeutig.

Bemerkung:
Die Existenz und die Eindeutigkeit der Division mit Rest lassen sich auch über vollständige Induktion zeigen, also ohne die Existenz und die Eindeutigkeit getrennt zu untersuchen.

Euklidischer Algorithmus

Über die Bestimmung der Menge der gemeinsamen Teiler den ggT von Zahlen wie 71 und 58 zu berechnen, ist verhältnismäßig einfach. Was aber, wenn der ggT größerer Zahlen bestimmt werden soll, z.B. von 11760 und 8932?

Euklid (griech. Mathematiker, lehrte um 300 v. Chr. in Alexandria) hatte auch dafür eine Lösung: den sogenannten Euklidischen Algorithmus[79].

Gegeben seien a, $b \in \mathbb{N}$ mit $b < a$[80] Ausgehend von diesen beiden Zahlen führt man nun eine fortgesetzte Division mit Rest durch. Nach Satz über Division mit Rest (vgl. Satz 21) existieren jeweils eindeutige q_i, $r_i \in \mathbb{N}_0$:

$a = q_1 \bullet b + r_1 \quad$ mit $0 \leq r_1 < b$

Im nächsten Schritt nimmt man nun b und r_1, und führt wieder eine Division mit Rest durch.

$b = q_2 \bullet r_1, + r_2$ mit $0 \leq r_2 < r_1$

Jetzt macht man weiter, indem man statt b und r_1 nun r_1 und r_2 nimmt.

$r_1 = q_3 \bullet r_2 + r_3$ mit $0 \leq r_3 < r_2$

$r_2 = q_4 \bullet r_3 + r_4$ mit $0 \leq r_4 < r_3$

79 Algorithmus: standardisiertes, nach festen Regeln ablaufendes Rechenverfahren.

80 b < a stellt keine Einschränkung der Anwendbarkeit des Verfahrens dar, denn falls a = b, gilt ggT(a, b) = a (bzw. b), falls a < b, vertauscht man a und b, d.h. man nimmt für a die größere Zahl.

Das Verfahren wird solange fortgeführt, bis irgendwann der Rest 0 bleibt.

$r_{n-1} = q_{n+1} \bullet r_{n+1}l$ mit $0 \leq r_{n+1} < r_n$

$r_n = q_{n+2} \bullet r_{n+1} + 0$

Der in der zweitletzten Zeile auftretende Rest (r_{n+1}), also der letzte von 0 verschiedene Rest, ist der ggT der Ausgangszahlen a und b (dies wird im nachfolgenden Satz festgehalten - und anschließend bewiesen).

Fraglich ist, ob auch immer der Rest 0 erscheint. Dies muss aber so sein, da die Reste von Schritt zu Schritt immer kleiner werden. Betrachtet man nämlich die Ungleichungen, die sich laut Division mit Rest ergeben, so hat man:

$b > r_1 > r_2 > r_3 > ... > r_n > r_{n+1} \geq 0$

Schlimmstenfalls wird der Rest vom vorhergehenden zum nächsten Schritt nur um 1 kleiner. Da aber b eine feste natürliche Zahl ist, ist irgendwann Schluss (vgl. Satz 14).

Nach endlich vielen Schritten ist dann tatsächlich der Rest 0 erreicht, dies passiert in der Zeile: $r_n = q_{n+2} \bullet r_{n+1} + 0$

Führen wir den Euklidischen Algorithmus einmal an obigem Beispiel durch:

$11760 = 1 \bullet 8932 + 2828$

$8932 = 3 \bullet 2828 + 448$

$2828 = 6 \bullet 448 + 140$

$448 = 3 \bullet 140 + 28$

$140 = 5 \bullet 28 + 0$

Man erhält somit: ggT(11760,8932) = 28.

Um zu zeigen, dass 28 der ggT von 11760 und 8932 ist, wird zunächst gezeigt, dass 28 zumindest ein gemeinsamer Teiler von 11760 und 8932 ist:

Aus der letzten Zeile des Euklidischen Algorithmus' ergibt sich 28 | 140, es gilt auch

28 | 28. In der vorletzten Zeile des Euklidischen Algorithmus' kann man erkennen, dass beide Summanden von 28 geteilt werden und somit auch ihre Summe von 28 geteilt wird, also:

28 | 448.

Da folglich 28 ein Teiler von 448 ist, teilt 28 auch jedes Vielfache von 448, also auch 6 • 448. Da 28 somit 6 • 448 und 140 teilt, wird auch deren Summe 2828 von 28 geteilt.

Analog kann man nun schrittweise folgern, dass auch 8932 und schließlich auch 11760 (erste Zeile) von 28 geteilt werden.
Damit erhält man also: 28 | 8932 und 28 | 11760, d.h. 28 ist ein gemeinsamer Teiler von 8932 und 11760.
Nun ist noch zu zeigen, dass 28 der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Zahlen ist, dass also jeder gemeinsame Teiler von 8932 und 11760 kleiner oder gleich 28 ist:
Sei t ein beliebiger gemeinsamer Teiler der beiden Zahlen, dann teilt t sowohl 8932 als auch 11760. Da t also 8932 teilt, teilt es auch 2 • 8932. Betrachtet man nun zuerst die erste Zeile des Euklidischen Algorithmus', ist ersichtlich, dass damit die Summe und der erste Summand von m geteilt werden. Dann wird auch der zweite Summand (hier: 2828) von t geteilt. Wird 8932 und 3 • 2828 von t geteilt, dann auch 448 usw.
Man erhält schließlich, dass t | 28 gilt. Daraus folgt $t \leq 28$, d.h. jeder gemeinsame Teiler von 11760 und 8932 (t beliebig!) ist kleiner oder gleich 28, d.h. 28 ist der größte gemeinsame Teiler.
Die Allgemeingültigkeit dieses Verfahrens soll nun bewiesen werden:

Satz 22[81] Seien a, b $\in \mathbb{N}$ und sei r_{n+1} der letzte von 0 verschiedene Rest beim Euklidischen Algorithmus. Dann gilt: $ggT(a, b) = r_{n+1}$.

Beweis:

$a = q_1 \cdot b + r_1$ mit $0 \leq r_1 < b$

$b = q_2 \cdot r_1 + r_2$ mit $0 \leq r_2 < b$

(...)

[81] vgl. Schwarz (1999), S. 21f.

$r_{n-2} = q_n \bullet r_{n-1} + r_n$ mit $0 \leq r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = q_{n+1} \bullet r_n + r_{n+1}$ mit $0 \leq r_{n+1} < r_n$

$r_n = q_{n+2} \bullet r_{n+1} + 0$

Zuerst soll gezeigt werden, dass r_{n+1} ein gemeinsamer Teiler von a und b ist: Aus der letzten Zeile des Euklidischen Algorithmus' folgt mit Definition der Teilbarkeit:

$r_{n+1} \mid r_n$

Wegen der Reflexivität der Teilbarkeit gilt außerdem: $r_{n+1} \mid r_{n+1}$

Es gilt dann auch: $r_{n+1} \mid q_{n+1} \bullet r_n + r_{n+1}$

Aus der vorletzten Zeile des Euklidischen Algorithmus' ergibt sich damit: $r_{n+1} \mid r_{n-1}$

Analog lässt sich zeigen, dass $r_{n+1} \mid r_{n-2}$ gilt und dass r_{n+1} mit entsprechender Argumentation jeden Rest, der in den darüberstehenden Zeilen auftaucht, teilt.

Schließlich ergibt sich: $r_{n+1} \mid r_2$ und $r_{n+1} \mid r_1$ daraus folgt: $r_{n+1} \mid b$ (zweite Zeile des Euklidischen Algorithmus') und damit erhält man: $r_{n+1} \mid a$ (erste Zeile des Euklidischen Algorithmus').

Folglich ist r_{n+1} ein gemeinsamer Teiler von a und b.

Ist r_{n+1} auch der größte gemeinsame Teiler?

Sei $k \in T(a) \cap T(b)$ beliebig $\Rightarrow k \mid a \wedge k \mid b$

$k \mid b \Rightarrow k \mid q_1 \bullet b$

$k \mid a \wedge k \mid q_1 \bullet b \Rightarrow k \mid r_1$

$k \mid r_1 \Rightarrow k \mid q_2 \bullet r_1$

$k \mid b \Rightarrow k \mid q_2 \bullet r_1 \Rightarrow k \mid r_2$

(...)

$k \mid r_n \Rightarrow k \mid q_{n+1} \cdot r_n$

$k \mid r_{n-1} \wedge k \mid q_{n+1} \cdot r_n \Rightarrow k \mid r_{n+1}$

$\Rightarrow k \leq r_{n+1}$

$\Rightarrow k \leq ggT(a, b)$

Alle gemeinsamen Teiler von a und b sind somit kleiner als r_{n+1}, also ist r_{n+1} der ggT(a, b).

Der letzte Beweisteil führt zur wesentlichen Eigenschaft des ggT: Jeder gemeinsame Teiler zweier Zahlen teilt den ggT dieser Zahlen.

Satz 23	Seien a, b $\in \mathbb{N}$, dann sind alle gemeinsamen Teiler von a und b auch Teiler des ggT(a, b). Formal: $\forall t \in \mathbb{N}: (t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid ggT(a, b))$.

Beweis:

Sei $t \in \mathbb{N}$ beliebig mit $t \mid a \wedge t \mid b$

$t \mid b \Rightarrow \quad t \mid q_1 \cdot b$

$t \mid a \wedge t \mid q_1 \cdot b \quad \Rightarrow t \mid r_1$

$t \mid r_1 \Rightarrow \quad t \mid q_2 \cdot r_1$

$t \mid b \wedge t \mid q_2 \cdot r_1 \quad \Rightarrow t \mid r_2$

(...)

$t \mid r_n \Rightarrow \quad t \mid q_{n+1} \cdot r_n$

$t \mid r_{n-1} \wedge t \mid q_{n+1} \cdot r_n \quad \Rightarrow t \mid r_{n+1}$

$\Rightarrow t \mid ggT(a, b)$

Der Beweis des Euklidischen Algorithmus' führt zur Aussage des oben erwähnten Satzes.

Aber der Euklidische Algorithmus liefert noch mehr:

Aus diesem Algorithmus lässt sich eine weitere Charakterisierung des ggT ableiten.

Bisher wurde folgende Charakterisierung aufgeführt:

- der ggT als Maximum der Menge der gemeinsamen Teiler

Nachfolgend wird mittels des Euklidischen Algorithmus' gezeigt, dass sich der ggT zweier Zahlen als Vielfachsumme dieser Zahlen darstellen lässt. Anschließend wird die dritte Charakterisierung des ggT bewiesen, dass der ggT zweier Zahlen die kleinste Zahl ist, die sich als Vielfachensumme dieser Zahlen darstellen lässt.

Hierfür werden die Zahlen 71 und 58 betrachtet:

$71 = 1 \cdot 58 + 13$

$58 = 4 \cdot 13 + 6$

$13 = 2 \cdot 6 + 1$

$6 = 6 \cdot 1 + 0$

Es gilt: ggT(71,58) = 1.

Geht man jetzt von der vorletzten Zeile aus, so lässt sich der ggT(71,58) = 1 folgendermaßen schreiben:

$$1 = 13 - 2 \cdot 6 \qquad (1)$$

Wird nun die vor-vorletzte Zeile umgeformt, so erhält man folgenden Term für 6:

$$6 = 58 - 4 \cdot 13 \qquad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt ergibt:

$1 = 13 - 2 \cdot (58 - 4 \cdot 13)$

$ = 13 - 2 \cdot 58 + 8 \cdot 13$

$ = 9 \cdot 13 - 2 \cdot 58 \qquad (3)$

In der vor-vor-vorletzten Zeile (1. Zeile) ergibt sich.

$$13 = 71 - 1 \cdot 58 \quad (4)$$

(4) in (3) eingesetzt ergibt:

$$1 = 9 \cdot (71 - 1 \cdot 58) - 2 \cdot 58$$

$$= 9 \cdot 71 - 9 \cdot 58 - 2 \cdot 58$$

$$= 9 \cdot 71 - 11 \cdot 58$$

1 – der ggT(71,58) – wird hier geschrieben als eine Summe von ganzzahligen Vielfachen der Zahlen 71 und 58:

ggT(71,58) = $9 \cdot 71 + (-11) \cdot 58$

Man sagt dazu auch *Vielfachensumme* oder *Linearkombination*.

Obiges Verfahren, mit dem man für beliebige Paare natürlicher Zahlen eine Darstellung des ggT als Linearkombination erhält, lässt sich natürlich auch schneller und übersichtlicher durchführen:

$11760 = 2 \cdot 8932 + 2828$	$\Leftrightarrow 2828 = 11760 - 1 \cdot 8932$
$8932 = 3 \cdot 2828 + 448$	$\Leftrightarrow 448 = 8932 - 3 \cdot 2828$
$2828 = 6 \cdot 448 + 140$	$\Leftrightarrow 140 = 2828 - 6 \cdot 448$
$448 = 3 \cdot 140 + 28$	$\Leftrightarrow 28 = 448 - 3 \cdot 140$
$140 = 5 \cdot 28 + 0$	

Es gilt: ggT(11760,8932) = 28.

Nun lässt sich 28 als Vielfachensummendarstellung von 11760 und 8932 darstellen, indem man jede Zeile des Algorithmus' (bis auf die letzte) nach dem jeweiligen Rest umformt und von unten nach oben die Reste schrittweise durch die entsprechenden Terme ersetzt. Auf Grund der Verwendung von ganzen Zahlen wird die Vielfachensummendarstellung als Differenz ausgedrückt.

Wichtig ist dabei nach dem Ersetzen das Auflösen der Klammern mittels Distributivgesetz. Man darf allerdings die erhaltenen Terme nicht vollständig ausmultiplizieren, da die jeweiligen Reste für die weiteren Ersetzungen erhalten bleiben müssen. Bevor man dann die nächste Ersetzung vornimmt, sollte man die vervielfachten Reste immer geeignet zusammenfassen, z.B. 1 • 13 und 8 • 13 zu 9 • 13.

Es ist sinnvoll, sich an folgender **REA** - **Regel** (**R**ückwärtiger **E**uklidischer **A**lgorithmus) zu orientieren:

1. Ersetzen der Reste durch die aus dem Euklidischen Algorithmus erhaltenen Terme
2. teilweises Ausmultiplizieren
3. Zusammenfassen der vervielfachten Reste

$28 = 448 - 3 \cdot 140$

$= 448 - 3 \cdot (2828 - 6 \cdot 448)$

$= 448 - 3 \cdot 2828 + 18 \cdot 448$

$= 19 \cdot 448 - 3 \cdot 2828$

$= 19 \cdot (8932 - 3 \cdot 2828) - 3 \cdot 2828$

$= 19 \cdot 8932 - 57 \cdot 2828 - 3 \cdot 2828$

$= 19 \cdot 8932 - 60 \cdot 2828$

$= 19 \cdot 8932 - 60 \cdot (11760 - 1 \cdot 8932)$

$= 19 \cdot 8932 - 60 \cdot 11760 + 60 \cdot 8932$

$= \mathbf{(-60) \cdot 11760 + 79 \cdot 8932}$

Also: ggT(11760, 8932) = $(-60) \cdot 11760 + 79 \cdot 8932$

Man könnte jetzt vermuten, dass sich der ggT zweier natürlicher Zahlen a und b stets derart schreiben lässt, nämlich:

$\text{ggT}(a,b) = x \cdot a + y \cdot b$ mit geeigneten $x, y \in \mathbb{Z}$.

Satz 24[82] Für alle a, b $\in\mathbb{N}$ existieren x, y$\in\mathbb{Z}$, so dass sich der ggT von a und b als Vielfachensummendarstellung von a und b ausdrücken lässt.

Formal: $\forall a, b \in\mathbb{N}\ \exists x, y\in\mathbb{Z}: (ggT(a, b) = x \bullet a + y \bullet b)$

Beweis:
Man beginnt die Zeilen des Euklidischen Algorithmus sukzessiv nach den Resten aufzulösen und in die nächste Zeile einzusetzen. Da in der ersten Zeile a und b vorkommen, sind sie in den nachfolgenden Einsetzungen immer mit dabei, so dass man den jeweiligen Rest als Linearkombination der beiden ausdrücken kann.

Man löst die 1. Gleichung des Euklidischen Algorithmus' nach r_1 auf:

$a = q_1 \bullet b + r_1$ (1. Zeile des Euklidischen Algorithmus')

$\Leftrightarrow r_1 = a - q_1 \bullet b$

$\Leftrightarrow r_1 = 1 \bullet a + (-q_1) \bullet b$

Man erhält für r_1 eine Linearkombination von a und b mit $r_1 = 1 \bullet + (-q_1) \bullet b$. Dann wird entsprechend die zweite Gleichung nach r_2 aufgelöst:

$b = q_2 \bullet r_1 + r_2$ (2. Zeile des Euklidischen Algorithmus')

$\Leftrightarrow r_2 = b - q_2 \bullet r_1$

Nun orientiert man sich an der REA-Regel.

Setzt man hier für r_1 die oben gewonnene Darstellung ein, so ergibt sich:

$\Leftrightarrow r_2 = b - q_2 \bullet (1 \bullet a + (-q_1) \bullet b)$ (R)

$\Leftrightarrow r_2 = b - q_2 \bullet a + q_2 \bullet q_1 \bullet b$ (E)

$\Leftrightarrow r_2 = (-q_2) \bullet a + (1 + q_2 \bullet q_1) \bullet b$ (A)

[82] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S.23.

Man erhält für r_2 somit auch eine Linearkombination von a und b mit:

$$r_2 = (-q_2) \bullet a + (1 + q_2 \bullet q_1) \bullet b$$

Dieses Verfahren zieht man bis zur letzten Zeile durch und erhält so eine Darstellung von r_{n+1}, die nur von a und b abhängig ist:

$$ggT(a, b) = r_{n+1} = x \bullet a + y \bullet b$$

Entscheidend für diesen Beweis ist, dass laut Satz über Division mit Rest alle Gleichungen existieren und eindeutig sind.

Nun weiß man, dass sich der ggT(a, b) als Linearkombination von a und b darstellen lässt. Man kann diesen Satz jedoch noch weiter verschärfen:

Satz 25	Seien $a, b \in \mathbb{N}$, dann ist der ggT von a und b die kleinste natürliche Zahl, die sich als Vielfachensummendarstellung von a und b darstellen lässt. Formal: $\forall a, b \in \mathbb{N}: (ggT(a, b) = \min(\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b$ mit $x, y \in \mathbb{Z}\}))$

Beweis:
Die Idee des Beweises beruht auf der Identitivität von $\leq$, die man häufig zum Beweis von Gleichheitsaussagen verwendet:

$\forall a, b \in \mathbb{N}: (a \leq b \land b \leq a \Rightarrow a = b)$

Zu zeigen:

(i) $ggT(a, b) \leq \min(\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b$ mit $x, y \in \mathbb{Z}\})$

(ii) $\min(\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b$ mit $x, y \in \mathbb{Z}\}) \leq ggT(a, b)$

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

(i) Wenn man zeigen kann, dass die Teilbarkeitsbeziehung gilt, so kann man auf die $\leq$-Beziehung schließen.

Klar ist, dass der ggT(a, b) sowohl a als auch b teilt:

$ggT(a, b) \mid a \wedge ggT(a, b) \mid b$

Damit teilt der ggT aber auch alle Vielfachen von a und b sowie deren Summen, also alle Vielfachensummendarstellungen von a und b:

$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}: (ggT(a, b) \mid x \bullet a + y \bullet b\})$

Der ggT(a, b) teilt also jede beliebige Vielfachensummendarstellung ($\forall x, y \in \mathbb{Z}$:) und damit insbesondere auch die kleinstmögliche.

$\Rightarrow ggT(a, b) \mid \min (\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b \text{ mit } x, y \in \mathbb{Z}\})$

$\Rightarrow ggT(a, b) \leq \min (\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b \text{ mit } x, y \in \mathbb{Z}\})$

Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Da sich nach Satz 24 der ggT(a, b) stets als Linearkombination von a und b darstellen lässt, folgt (ii) sehr schnell, denn der ggT(a, b) ist somit ein Element der Menge aller Linearkombinationen aus a und b. Das heißt aber auch, dass er nicht kleiner sein kann, als das kleinste Element dieser Menge.

$\exists x, y \in \mathbb{Z}: (ggT(a, b) = x \bullet a + y \bullet b)$ (Satz 24)

$\Rightarrow ggT(a, b) \in (\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b \text{ mit } x, y \in \mathbb{Z}\})$

Der ggT ist also ein Element der Menge aller Linearkombinationen. Also ist er größer oder gleich dem kleinsten Element dieser Menge.

$\Rightarrow \min (\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b \text{ mit } x, y \in \mathbb{Z}\}) \leq ggT(a, b)$

Damit ist (ii) gezeigt.

"$\leq$" identitiv

(i) und (ii) $\Rightarrow \min (\{c \in \mathbb{N} \mid c = x \bullet a + y \bullet b \text{ mit } x, y \in \mathbb{Z}\}) = ggT(a, b)$

4.7. Stellenwerte

Im Folgenden wird die übliche Dezimaldarstellung von natürlichen Zahlen ebenso wie die Darstellung in anderen Stellenwertsystemen betrachtet. Die einzelnen Ziffern innerhalb der Darstellung einer Zahl haben je nach *Stellung* der Ziffer einen anderen *Wert*. Diese Bedeutung nennt man den *Stellenwert* der Ziffer: Eine Tabelle, in der Zahlen entsprechend dargestellt werden, bezeichnet man demnach als Stellenwerttafel. Zahlen lassen sich in unterschiedlichen Stellenwertsystemen angeben. Die zugrundeliegende Bündelungsform wird durch einen Index an der Zahl verdeutlicht. Im Zehnersystem wird dieser Index in der Regel vernachlässigt, da heute grundsätzlich das dekadische Stellenwertsystem vorausgesetzt wird. Der Index ist lediglich bei Abweichungen von diesem System erforderlich. Die Bündelungszahl nennt man Basis (b) oder Grundzahl (g). Dabei muss gelten: $b \neq 1$ und $b \neq 0$. Beim dekadischen Stellenwertsystem spricht man von der Basis $b = 10$.

Beispiel:

$(214)_{10} = (15A)_{12}$ $\quad 1 \bullet 12^2 + 5 \bullet 12^1 + A \bullet 12^0$

$(214)_{10} = (21221)_3$ $\quad 2 \bullet 3^4 + 1 \bullet 3^3 + 2 \bullet 3^2 + 2 \bullet 3^1 + 1 \bullet 3^0$

$(214)_{10} = (554)_6$ $\quad 5 \bullet 6^2 + 5 \bullet 6^1 + 4 \bullet 6^0$

$(214)_{10} = (326)_8$ $\quad 3 \bullet 8^2 + 2 \bullet 8^1 + 6 \bullet 8^0$

Damit gilt: $214 = (15A)_{12} = (21221)_3 = (554)_6 = (326)_8$

Es ändert sich lediglich die *Zahldarstellung* der Zahl 214.

Bemerkung: Der Buchstabe A wird gewählt, da es nur zehn verschiedene Zeichen zur Darstellung von Zahlen gibt, sodass für die Ziffern > 10 eine alternative Darstellungsmöglichkeit gewählt werden muss.

Exkurs Multiplikation und Potenzen:

Bei der Durchführung von Multiplikationen in beliebigen Systemen wird dasselbe Rechenverfahren angewandt wie im Zehnersystem. Zunächst soll die Multiplikation in ℕ definiert und anschließend die gültigen Gesetze dargelegt werden.

Definition der Multiplikation in ℕ

Definition	Für alle natürlichen Zahlen a, b ∈ ℕ sei a • b' wie folgt definiert: a • b':= (a • b) + a a • b heißt das Produkt von a und b.

Die Multiplikation in ℕ ist abgeschlossen, da die definierte Verknüpfung wieder eine Verknüpfung in ℕ ergibt (vgl. Kap. 4.1). Bezüglich der Multiplikation in ℕ gelten die folgende Gesetze:

Assoziativgesetz der Multiplikation

Satz 26	Für alle a, b, c ∈ ℕ gilt: a • (b • c) = (a • b) • c

Kommutativgesetz der Multiplikation

Satz 27	Für alle a, b ∈ ℕ gilt: a • b = b • a

Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition

Satz 28	Für alle a, b, c ∈ ℕ gilt: (i) a • (b + c) = a • b + a • c (ii) (a +b) • c = a • c + b • c

Definition Potenz

Definition	Das Produkt gleicher Faktoren lässt sich verkürzt darstellen. Diese verkürzte Form bezeichnet man als *Potenzschreibweise*. Die n-te Potenz einer Zahl a (a^n) nennt man das Produkt, in der der Faktor a genau n-mal vorkommt. Die 0-te Potenz einer Zahl ist stets 1. Man nennt a die Basis und n den Exponenten. $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$ $\underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{n-mal}} = a^n$ $a^0 = 1$

Darstellung einer Zahl im b-adischen System

Zahldarstellungen basieren in unserem Zehnersystem auf der Bündelung zu 10 und es gilt beispielsweise, dass 1045664 eine abgekürzte Schreibweise ist für:

$1 \bullet 10^6 + 0 \bullet 10^5 + 4 \bullet 10^4 + 5 \bullet 10^3 + 6 \bullet 10^2 + 6 \bullet 10^1 + 4 \bullet 10^0$ (s. Satz 29)

Diese Darstellung kann auf alle anderen Stellenwertsysteme analog übertragen werden, so gilt auch:

$(15A)_{12} = 1 \bullet 12^2 + 5 \bullet 12^1 + A \bullet 12^0$

Ausrechnen liefert die Darstellung der Zahl im Zehnersystem:

$1 \bullet 12^2 + 5 \bullet 12^1 + A \bullet 12^0 = 144 + 60 + 10 = 214 = (214)_{10}$

Bei der Darstellung in anderen Stellenwertsystemen ist es wichtig, die richtige Aussprache der Zahlen zu beachten, denn die ist nicht mit der des Zehnersystems gleichzusetzen. Die Ziffernfolge 11A im Zwölfersystem wird nicht als „elf A" gelesen, sondern als „eins-eins-A", da jede Ziffer einzeln einer Potenz zugeordnet wird:

$(11A)_{12} = 1 \bullet 12^2 + 1 \bullet 12^1 + A \bullet 12^0$

Allgemein gilt:

b-adische Darstellung einer Zahl

Satz 29[83]	Jede natürliche Zahl n hat bei vorgegebener Basis $b \geq 2$, mit $b \in \mathbb{Z}$ und $k \geq 0$, $0 \leq k_i < b$ eine *eindeutige* Darstellung.
	$n = a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + ... + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet (b^0)$
	mit $a_i \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq a_i < b$ für $i \in \{0,1,2,...,k\}$ und $a_k \neq 0$

Hierbei sind $a_0, a_1, ..., a_k$ die Ziffern der jeweiligen b-adischen Darstellung.

Beweis

Die Beweisführung erfolgt über den Nachweis der Existenz (Teil 1) und den der Eindeutigkeit (Teil 2). Dabei wird der Existenzbeweis mittels vollständiger Induktion nach n geführt und der Eindeutigkeitsbeweis durch das Herbeiführen eines Widerspruchs.

Teil 1: (Existenz)

1) $n = 1$

$n = 1 = a_0 \bullet b^0 = 1 \bullet 1$, mit $b^0 = 1$, für alle $b \geq 2$

$0 \leq 1 = a_0 < b$

2) Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Aussage gilt für n

Zu zeigen ist, dass die Aussage auch für n + 1 gilt. $(A(n) \Rightarrow A(n + 1))$

$n = a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + ... + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet b^0$

$n + 1 = (a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + ... + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet b^0) + 1$

[83] vgl. Padberg (2008), S.145f.

Fall 1:

Sei $a_0 + 1 < b$

$\Rightarrow n + 1 = (a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + ... + a_1 \bullet b^1) + a_0 + 1$ $\qquad 0 \leq a_0 + 1 < b$

Dies entspricht der gesuchten Darstellung für n + 1.

Fall 2:

Sei $a_0 + 1 = b$

$$\Rightarrow n + 1 = (a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + ... + a_1 \bullet b^1) + \underbrace{a_0 + 1}_{b} \qquad a_0 + 1 = b$$

$$= (a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + ... + (a_1 + 1) \bullet b + 0 \bullet b^0$$

Falls nun $(a_1 + 1)$ kleiner als b ist, tritt wieder Fall 1 ein $(a_1 + 1 < b)$.

Falls aber $(a_1 + 1) = b$ ist, wird $(a_1 + 1)$ mit den analogen Argumenten wieder weiter verschoben. Man setzt dann $a_1' = 0$ und $a_2' = a_2 + 1$, sofern $a_2 + 1 < b$, sonst $a_2' = 0$ und $a_3' = a_3 + 1$ usw. bis schließlich das Verfahren komplett durchlaufen ist. Häufig bricht das Verfahren schon vorher ab.

Nun werden die Fälle hinsichtlich k unterschieden.

Fall 1:

Sei $a_k + 1 < b$

$\Rightarrow a_k' \coloneqq a_k + 1$ und alle $a_i' = 0$ für alle $i < k$

Fall 2:

Sei $a_k + 1 = b$

$\Rightarrow a_k' + 1 = 1$ und $a_i' = 0$

also $n + 1 = a_k' + 1 \bullet b^{k+1} + 0 \bullet b^{k-1} + ... + a_0 \bullet b^1 + a_0 \bullet b^0$

An dieser Stelle ist ebenso wie für alle anderen Fälle eine b-adische Darstellung wie definiert gefunden.

Wegen $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ und $A(1)$ gilt die Existenzaussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

Teil 2: (Eindeutigkeit)

Annahme: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $b \in \mathbb{N}$, sodass n bzgl. der Basis b zwei verschiedenen Darstellungen besitzt.

$n = a_k \bullet b^k + ... + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet b^0$ und $n = a_k' \bullet b^k + ... + a_1' \bullet b^1 + a_0' \bullet b^0$

$a'_{k'} \bullet b^{k'} + a'_{(k'-1)} \bullet b^{(k'-1)} + \ldots + a'_k \bullet b^k + \ldots + a'_1 \bullet b^1 + a'_0$

o.B.d.A. sei $k' \geq k$

Also:

$$n = \underbrace{a_k \bullet b^k + ... + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet b^0}_{A}$$

und

$$n = \underbrace{a'_{k'} \bullet b^{k'} + a'_{(k'-1)} \bullet b^{(k'-1)} + \ldots + a'_k \bullet b^k + ... + a_1' \bullet b^1 + a_0' \bullet b^0}_{B}$$

B - A

$n - n = (a'_{k'} \bullet b^{k'} + a'_{(k'-1)} \bullet b^{(k'-1)} + \ldots + a'_k \bullet b^k + ... + a_1' \bullet b^1 + a_0') - (a_k \bullet b^k + ... + a_1 \bullet b^1 + a_0) = 0$

$\Rightarrow (a'_{k'} \bullet b^{k'}) \bullet b^{k'} + (a'_{(k'-1)} - a_{(k-1)}) \bullet b^{(k-1)} + ... + (a'_{(k'+1)} - a_{(k+1)}) \bullet b^{(k+1)} + (a'_k \bullet b^k) \bullet b^k + \ldots + (a_1' - a_1) \bullet b^1 + (a_0' - a_0) = 0$

$\Rightarrow a'_{k'}, ..., a'_{k+1} = 0$ und $a'_k - a_k = 0 = a'_{k-1} - a_{k-1} = ... = a'_1 - a_1 = a'_0 - a_0 = 0$

$\Rightarrow a'_i - a_i = 0, \qquad \forall i \in \{0, ..., k\}$

$\Rightarrow a'_i = a_i$

$\Rightarrow$ Daraus folgt, dass die Darstellungen A und B übereinstimmen. $\square$

Definition[84] Für $n = a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + \ldots + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet (b^0)$ schreibt man $n = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$.

Ist b = 10, so heißt die Darstellung Dezimaldarstellung;

ist b = 2, so heißt sie Dualdarstellung oder Binärdarstellung.

Vereinbarung: Im Zehnersystem schreibt man statt $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_{10.}$ meist $a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$, d.h. statt $(214)_{10}$ wird 214 geschrieben.

Anmerkungen zur b-adischen Darstellung einer Zahl:

Im Satz zur b-adischen Zifferndarstellung wird für die Ziffern a_i der b-adischen Zahldarstellung folgende Begrenzung vorgenommen $0 \leq a_i < b$, dies bedeutet, dass die auftretenden Ziffern immer kleiner als die Basis sind, d.h., im Zehnersystem treten nur die Ziffern 0, 1, ..., 9, im Dreiersystem treten nur die Ziffern 0, 1, und 2 auf.

Im Binärsystem kommt man sogar mit den Ziffern 0 und 1 aus, damit ist das Dualsystem das *kleinste* Stellenwertsystem.

Ist die Basis größer als 10, so müssen neue Zeichen eingeführt werden, damit die *Eindeutigkeit* der Zahldarstellung in b-adischen Systemen gewährleistet ist (vgl. Bsp. 11A). Im Zwölfersystem (auch Duodezimalsystem genannt) benötigt man Ziffern für zehn und elf, um Ziffern von 0 bis (b - 1) zur Verfügung zu haben. Da es für zehn und elf keine Ziffern gibt (im Zehnersystem werden für diese keine eigenen Ziffern benötigt, weil sie größer als die Basis sind und sich durch Kombination von zwei Ziffern darstellen lassen) muss man Ziffern für zehn und elf erfinden.

Für zehn nimmt man häufig z (wie zehn) oder a oder A.

Für elf verwendet man dementsprechend e oder b oder B.

Im Folgenden wird A für zehn, B für elf, C für zwölf usw. benutzt. Im Zwölfersystem hat fünfhundertsechzig beispielsweise die Darstellung

$560 = 3 \bullet 12^2 + A \bullet 12^1 + 8 \bullet 12^0 = (3A8)_{12}$

[84] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 63f.

Würden für zehn und elf im Zwölfersystem keine neuen Ziffern eingeführt werden, so würden der Zahldarstellung $(310)_{12}$ zwei unterschiedliche Bedeutungen zukommen:

$$3 \bullet 12^2 + 1 \bullet 12^1 + 0 \bullet 12^0 = 444$$

und $$3 \bullet 12^1 + 10 \bullet 12^0 = 46$$

Dies ergibt einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Zahldarstellung im b-adischen System.

Die Zahldarstellung $(310)_{12}$ verdeutlicht, dass die Ziffer 0 in jedem Stellenwertsystem wichtig ist, denn die 0 zeigt an, dass die entsprechende Stelle nicht besetzt ist. Das bedeutet, dass die entsprechende b-Potenz in der b-adischen Darstellung nicht auftaucht.

In einem beliebigen b-adischen System stehen mit den Ziffern 0, 1, ..., b-1, damit also b-viele Ziffern zur Verfügung.

Umrechnen von einem System ins andere

Von einem b-adischen System ins Zehnersystem umrechnen

Die Zahl wird als Summe von b-Potenzen geschrieben, d.h. für $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$ wird $a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + \ldots + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet b^0$ notiert. Diese Summe lässt sich berechnen und ist (da alle b^i und $a_i \in \mathbb{N}_0$) nichts anderes als die Darstellung der Zahl im Dezimalsystem. Strenggenommen nimmt man bei Rechnungen in Stellenwertsystemen > 10 nicht die Ziffern aus der b-adischen Darstellung, sondern die entsprechenden in der dekadischen Darstellung. Für $(AB)_{12}$ schreibt man natürlich nicht $A \bullet 12^1 + B \bullet 12^0$, sondern $10 \bullet 12^1 + 11 \bullet 12^0$.

Vom Zehnersystem in ein b-adisches System umrechnen

Zur Umrechnung existieren zwei Methoden, die anhand eines Beispiels vorgestellt werden sollen:

58 soll ins Vierersystem umgewandelt werden.

METHODE 1

In der Zahldarstellung von 58 im Vierersystem symbolisieren die einzelnen Stellenwerte die jeweiligen Potenzen von 4. Man startet mit der Suche nach der größten Viererpotenz, die in der vorgegebene Zahl enthalten ist. Die Ziffern geben die Vielfachen der Stellenwerte an.

Dies ist offensichtlich 4^2, denn $4^3 > 58 > 4^2$. Dann dividiert man 58 durch 4^2 mit Rest (vgl. Kap. 4.6):

$$58 = 3 \bullet 4^2 + 10$$

Nun wird der verbliebene Rest bezüglich der nächst kleineren Viererpotenz untersucht (hier: 4^1), wie häufig er in 10 enthalten ist. Dieses schrittweise Ersetzen der verbleibenden Reste durch Viererpotenzen wird solange wiederholt bist kein Rest mehr vorhanden ist:

$$58 = 3 \bullet 4^2 + \mathbf{10}$$

$$\mathbf{10 =} 2 \bullet 4^1 + \mathbf{2}$$

$$\mathbf{2} = 2 \bullet 4^0 + \mathbf{0}$$

Ersetzen der jeweiligen Reste durch den Term der darunter stehenden Zeile ergibt:

$58 =3 \bullet 4^2 + 2 \bullet 4^1 + 2 = 3 \bullet 4^2 + 2 \bullet 4^1 + 2 \bullet 4^0$

Also: $58 = (322)_4$

METHODE 2

Euklidischer Algorithmus:

$58 = 14 \bullet 4 + 2$

$= (3 \bullet 4 + 2) \bullet 4 + 2$

$= 3 \bullet 4^2 + 2 \bullet 4^1 + 2 \bullet 4^0$

$58 = (322)_4$

Allgemein sieht das so aus:

Der Algorithmus beruht im Wesentlichen auf der Division mit Rest, es gilt:

Satz 30[85]	$\forall\, b \in \mathbb{N}$ mit $b < n$ und $b \geq 2$
	$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists q_1, a_0 \in \mathbb{N}_0$: $(n = q_1 \bullet b + a_0 \wedge 0 \leq a_0 < b)$

$n = q_1 \bullet b + a_0$ mit $0 \leq a_0 < b$

$q_1 = q_2 \bullet b + a_1$ mit $0 \leq a_1 < b$

$q_2 = q_3 \bullet b + a_2$ mit $0 \leq a_2 < b$

....

$q_{k-1} = q_k \bullet b + a_{k-1}$ mit $0 \leq a_{k-1} < b$

$q_k = q_{k+1} \bullet b + a_k$ mit $0 \leq a_k < b$

Das Verfahren bricht nach endlich vielen Zeilen (hier nach (k+1)-vielen Zeilen) ab, denn die Gleichungen des Algorithmus' lassen sich wie folgt umformen:
$n = q_1 \bullet b + a_0 \Rightarrow n \geq b \bullet q_1$

$q_1 = q_2 \bullet b + a_1 \Rightarrow q_1 \geq b \bullet q_2 \Rightarrow b \bullet q_1 \geq b \bullet b \bullet q_2$ (Monotonie der Kleinerrelation)

usw.

Insgesamt ergibt sich dann $n \geq b \bullet q_1 \geq b \bullet b \bullet q_2 \geq \ldots \geq b^k \bullet q_k \geq b^{k+1} \bullet q_{k+1}$
und da $b \geq 2$, gilt somit $n > q_1 > q_2 > \ldots > q_k > q_{k+1}$

Da die q_i also immer kleiner werden und alle q_i aus $\mathbb{N}_0$ sind, gibt es ein k+1, so dass $q_{k+1} = 0$.

D.h. die letzte Zeile des Algorithmus' lässt sich schreiben als
$q_k = 0 \bullet b + a_k$ mit $0 \leq a_k < b$

Analog zum Beispiel der Umrechnung der Zahl 58 erhält man nun für n durch Einsetzen der Gleichungen ineinander folgende Darstellung:

[85] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 64.

$n = q_1 \bullet b + a_0$

$= (q_2 \bullet b + a_1) \bullet b + a_0$

$= q_2 \bullet b^2 + a_1 \bullet b + a_0$

$= (q_3 \bullet b + a_2) \bullet b^2 + a_1 \bullet b + a_0$

$= q_3 \bullet b^3 + a_2 \bullet b^2 + a_1 \bullet b + a_0$

...

$= a_k \bullet b^k + a_{k-1} \bullet b^{k-1} + ... + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet (b^0)$

Damit ist die Gültigkeit dieses Verfahrens für beliebige Zahlen und die Existenz der b-adischen Darstellung einer Zahl (vgl. Satz 29) bewiesen. Die Eindeutigkeit des Umrechnungsalgorithmus' lässt sich über die Eindeutigkeit der Division mit Rest beweisen, was aber hier nicht durchgeführt wird.

Bemerkung:
Dieses Verfahren ähnelt sehr dem Euklidischen Algorithmus, allerdings wird beim Umrechnungsalgorithmus stets durch b dividiert.

4.8.Relationen

Eine Relation drückt eine Beziehung zwischen den Elementen einer oder mehrerer Mengen aus. Mathematisch formuliert steht ein Element h in Relation zu einem Element k oder kurz hRk. Dabei sind h und k Elemente aus noch zu bestimmenden Mengen, etwa die zwei Mengen A und B.
A ist eine Menge, die mindestens das Element h enthält (A = {h,...}). Entsprechend enthält die zweite Menge B mindestens das Element k (B = {k,...}). Die Relation bzw. Beziehung, die zwischen den Mengen A und B besteht, wird als R bezeichnet und wie folgt definiert:[86]

[86] Anstelle von R könnte natürlich auch jedes beliebige andere Zeichen stehen. Häufig findet man z.B. das Symbol ~ meist in Verbindung mit Äquivalenzrelationen.

Genau dann, wenn ein Element a mit $a \in A$ und ein Element b mit $b \in B$ in Relation steht, schreibt man aRb. Durch diese Relation werden aus den beiden Mengen verschiedene Paare/Tupel mit Elementen der beiden Mengen gebildet.
Eine Relation beschreibt eine Ansammlung von Paaren. Solche Paare schreibt man kurz (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, oder auch $(a, b) \in A \times B$ (siehe Definition Relation).
Nun könnte statt zwei verschiedener Mengen auch nur eine einzige Menge zugrunde liegen. Es läge dann der Fall vor, dass die Mengen, aus denen die Elemente a und b (bzw. h und k) stammen, identisch sind. Man spricht dabei von einer Relation in oder auf einer Menge. Der entscheidende Unterschied zwischen Relationen auf <u>einer</u> und Relationen auf <u>mehreren</u> Mengen besteht in deren möglichen Eigenschaften, die im Folgenden dargestellt werden.

Definition Relation

Definition	Eine Relation ist eine Menge von Paaren: $R \subseteq A \times B$ mit $A, B \neq \emptyset$ Man beachte, dass A und B nicht unbedingt verschieden sein müssen. Gilt A = B, so spricht man von einer Relation in/auf A. Bei Relationen zwischen zwei Mengen heißt A die *Definitionsmenge* und B die *Zielmenge* der Relation.

Eigenschaften von Relationen

Relationen innerhalb einer Menge können folgende Eigenschaften haben:

Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Asymmetrie, Identitivität (Antisymmetrie), Transitivität, Linearität (Konnexität) und Trichotomie. Diese werden nun einzeln definiert.

Definition reflexiv

Definition[87] Eine Relation R auf einer Menge A heißt reflexiv genau dann, wenn alle Elemente aus A zu sich selbst in Relation stehen.

Formal: R reflexiv $\Leftrightarrow \forall a \in A: (aRa)$

<u>Verneinung:</u>

Eine Relation ist *nicht reflexiv* genau dann, wenn es (mindestens) ein Element aus der Menge A gibt, das nicht zu sich selbst in Relation steht.

Formal: R nicht reflexiv $\Leftrightarrow \exists a \in A: (a, a) \notin \mathbb{R} \subseteq A \times A$

Beispiel: M := {1, 2, 3}   R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (2, 1)}

Definition irreflexiv

Definition Eine Relation R auf einer Menge A heißt irreflexiv genau dann, wenn kein Element aus A zu sich selbst in Relation steht

Formal: R irreflexiv $\Leftrightarrow \forall a \in A: (a \not R a)$

Wie bei der Reflexivität ist es auch bei der Irreflexivität wichtig, auf die Allaussage zu achten.

Beispiel: M := {1, 2, 3}   R = {(1, 2)}

<u>Verneinung:</u>

Eine Relation ist nicht irreflexiv genau dann, wenn es (mindestens) ein Element aus der Menge A gibt, dass zu sich selbst in Relation steht.

Formal: R nicht irreflexiv $\Leftrightarrow \exists a \in A: (aRa)$

Wenn $(a, b) \in \mathbb{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathbb{R}$, dann erhält man eine weitere Eigenschaft. Diese nennt man Symmetrie.

---

[87] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S.134.

Definition symmetrisch

Definition[88] Eine Relation R auf einer Menge A heißt symmetrisch genau dann, wenn für Elemente a, b aus A gilt: Wenn a in Relation zu b steht, so steht auch b in Relation zu a.

Formal: R symmetrisch $\Leftrightarrow \forall a, b \in A: (aRb \Rightarrow bRa)$

<u>Verneinung:</u>

Eine Relation R auf einer Menge A heißt nicht symmetrisch genau dann, wenn es (mindestens) zwei Elemente a, b aus A gibt, für die gilt: a steht in Relation zu b, aber b steht nicht in Relation zu a.

Formal: R nicht symmetrisch $\Leftrightarrow \exists a, b \in A: (aRb \wedge b \not R a)$

Definition asymmetrisch

Definition Eine Relation R auf einer Menge A heißt asymmetrisch genau dann, wenn für Elemente a, b aus A gilt: Wenn a in Relation zu b steht, so steht b nicht in Relation zu a.

Formal: R asymmetrisch $\Leftrightarrow \forall a, b \in A: (aRb \Rightarrow b \not R a)$

<u>Verneinung:</u>

Eine Relation R auf einer Menge A heißt nicht asymmetrisch genau dann, wenn es (mindestens) Elemente a, b aus A gibt, für die gilt: a steht in Relation zu b und b in Relation zu a.

Formal: R nicht asymmetrisch $\Leftrightarrow \exists a, b \in A: (aRb \wedge bRa)$

[88] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 134.

Definition identitiv

Definition[89]	Eine Relation R auf einer Menge A heißt identitiv (antisymmetrisch) genau dann, wenn für Elemente a, b aus A gilt: Wenn a in Relation zu b steht und b in Relation zu a, so sind a und b gleich. Formal: $\quad$ R identitiv $\Leftrightarrow \forall a, b \in A: (aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$

<u>Verneinung:</u>

Eine Relation R auf einer Menge A heißt nicht identitiv genau dann, wenn es Elemente a, b aus A gibt, für die gilt: a steht in Relation zu b und b in Relation zu a, und a und b sind ungleich.

Formal: $\quad$ R nicht identitiv $\Leftrightarrow \exists a, b \in A: ((aRb \wedge bRa) \wedge a \neq b)$

Definition transitiv

Definition[90]	Eine Relation R auf einer Menge A heißt transitiv genau dann, wenn für Elemente a, b, c aus A gilt: Wenn a in Relation zu b steht und b in Relation zu c, so steht auch a in Relation zu c. Formal: $\quad$ R transitiv $\Leftrightarrow \forall a, b \in A: (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

<u>Verneinung:</u>

Eine Relation R auf einer Menge A heißt nicht transitiv genau dann, wenn es Elemente a, b, c aus A gibt, für die gilt: a steht in Relation zu b und b in Relation zu c, aber a steht nicht in Relation zu c.

Formal: R nicht transitiv $\Leftrightarrow \exists a, b, c \in A: ((aRb \wedge bRc) \wedge aRc)$

---

[89] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 134.
[90] vgl. ebd.

Definition linear

Definition	Eine Relation R auf einer Menge A heißt linear (konnex) genau dann, wenn für Elemente a, b aus A gilt: a steht in Relation zu b und/oder b in Relation zu a und/oder a ist gleich b (mindestens ein Fall muss gelten). Formal: R linear (konnex) $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in A$: $(aRb \lor bRa \lor a = b)$

Das Entscheidende ist, dass verschiedene Elemente a, b auf jeden Fall in Relation zueinander stehen (entweder a zu b oder b zu a).

Daher ist folgende Formulierung der Linearität auch häufig zu finden:

R linear $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in A$: $(a \neq b \Rightarrow aRb \lor bRa)$

<u>Verneinung:</u>

Eine Relation R auf einer Menge A heißt nicht linear genau dann, wenn es Elemente a, b aus A gibt, für die gilt: a steht nicht in Relation zu b und b nicht in Relation zu a, und a ist ungleich b.

Es gibt zwei verschiedene Elemente a, b aus A, für die gilt: a steht nicht in Relation zu b.

R nicht linear $\Leftrightarrow$ $\exists a, b \in A$: $(a \not R b \land b \not R a)$

Definition trichotom

Definition	Eine Relation R auf einer Menge A heißt trichotom genau dann, wenn für Elemente a, b aus A gilt: Entweder steht a in Relation zu b oder b in Relation zu a oder a ist gleich b (genau ein Fall muss gelten). Formal: R trichotom $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in A$: $(aRb \veebar bRa \veebar a = b)$

Die Trichotomie ist der Linearität sehr ähnlich. Der entscheidende Unterschied ist das *ausschließende oder*.

Verneinung:
Eine Relation R auf einer Menge A heißt nicht trichotom genau dann, wenn einer der zwei Fälle gilt:

i) Es gibt Elemente a, b aus A, für die gilt: a steht nicht in Relation zu b und b nicht in Relation zu a und a ist ungleich b.
ii) Es gibt Elemente a, b aus A, für die gilt: a steht in Relation zu b und b in Relation zu a.
Formal: R nicht trichotom

$\Leftrightarrow$ $(\exists a, b \in A: (a \not R b \wedge b \not R a \wedge a \neq b))$ v $(\exists a, b \in A: (aRb \wedge bRa))$

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie sich die definierten Eigenschaften formal nachweisen lassen.

A, B seien Mengen mit: $A\ R\ B \Leftrightarrow A \subseteq B$

Beispiel: Es gibt Mengen A und B, für die gilt: $A \subseteq B$.
$A = \{1,3,9\}$ und $B = \{1,3,9,15,21\}$

Bemerkung: Die Elemente dieser beiden Mengen werden hinsichtlich der jeweiligen Eigenschaft angepasst, um diese zu verdeutlichen.

1. Reflexivität
Beh.: R ist reflexiv
zu zeigen: Für alle Mengen A gilt: $A \subseteq A$
Beweis: Sei $x \in A$ beliebig gewählt $\Rightarrow A \subseteq A$

2. Irreflexivität
Da R reflexiv ist, kann R nicht irreflexiv sein.

3. <u>Symmetrie</u>

Beh.: R ist nicht symmetrisch

zu zeigen: Es gibt Mengen A und B, für die gilt: $A \subseteq B$ und $B \not\subseteq A$.

Beweis: Für A= {1,3,9} und B={1,3,9,15,21} gilt:

$A \subseteq B$ und $B \not\subseteq A$ (denn alle Elemente aus A sind auch in B enthalten, aber nicht alle Elemente aus B – nämlich 15 und 21 – sind auch in A enthalten.

4. <u>Asymmetrie</u>

Beh.: R ist nicht asymmetrisch

zu zeigen: Es gibt Mengen A und B, für die gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

Beweis.: Beispiel: Für A= {1,3,9} und B = {1,3,9}[91] gilt:

$\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (Reflexivität „$\subseteq$”)

5. <u>Identität</u>

Beh.: R ist identitiv

zu zeigen: Für alle Mengen A und B gilt: Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann gilt auch $A = B$.

Beweis: Seien A,B Mengen mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

$A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (Definition Mengengleichheit)

6. <u>Transitivität</u>

Beh.: R ist transitiv

zu zeigen: Für alle Mengen A, B und C gilt: \Nenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann gilt auch $A \subseteq C$.

Beweis: Seien A, B und C Mengen mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$

Zu zeigen ist nun: Alle Elemente aus A sind auch in C enthalten. Sei $a \in A$ beliebig gewählt:

$A \subseteq B$

$a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \in C$

---

91 Auch wenn die Mengen mit verschiedenen Variablen (A,B) gekennzeichnet sind, können sie gleich sein.

7. Linearität

Beh.: R ist nicht linear

zu zeigen: Es gibt Mengen A und B, für die gilt: $A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A$

Beweis: Für $A = \{1,3,14\}$ und $B = \{1,3,21\}$ gilt:

$A \not\subseteq B$ (da $14 \in A \wedge 14 \notin B$) und $B \not\subseteq A$ (da $21 \in B \wedge 21 \notin A$)

Dieses Beispiel wurde sehr ausführlich behandelt. Dies ist nicht nötig, wenn man Abhängigkeiten zwischen bestimmten Eigenschaften als Sätze formuliert.

Satz 31	$A \neq \emptyset$, R Relation auf A, $R \neq \emptyset$	
	Beh.:	
	(i)	R asymmetrisch $\Leftrightarrow$ R irreflexiv
	(ii)	R irreflexiv und transitiv $\Leftrightarrow$ R asymmetrisch
	(iii)	R reflexiv $\Leftrightarrow$ R nicht irreflexiv
	(iv)	R symmetrisch $\Leftrightarrow$ R nicht asymmetrisch
	(v)	R asymmetrisch $\Leftrightarrow$ R identitiv und R irreflexiv

Beweis:

zu (i)

Sei R asymmetrisch, d.h. $\forall a, b \in A$: $(aRb \Rightarrow b\not R a)$

zu zeigen: R irreflexiv, d.h. $\forall a \in A$: $(a \not R a)$

Annahme: R nicht irreflexiv, d.h. $\exists a \in A$: (aRa)

$$aRa \Rightarrow a\not R a \qquad \text{(R asymmetrisch)}$$

das ist ein Widerspruch, also ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung.

zu (ii)

Sei R irreflexiv, d.h. $\forall a \in A$: $(a \not R a)$

und R transitiv, d.h. $\forall a, b, c \in A$: $((aRb \land bRc) \Rightarrow aRc)$

zu zeigen: R asymmetrisch, d.h. $\forall a, b \in A$: $(aRb \Rightarrow b \not R a)$

Annahme: R nicht asymmetrisch, d.h. $\exists a, b \in A$: $(aRb \land bRa)$

$aRb \land bRa \Rightarrow aRa$ (R transitiv)

das ist ein Widerspruch zur Irreflexivität, also ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung.

(iii) Beh.: R reflexiv $\Rightarrow$ R nicht irreflexiv

Beweis.: Sei $x \in A$ beliebig gewählt.

R reflexiv $\Rightarrow xRx$

$\Rightarrow \neg(\neg (xRx))$ (doppelte Negation)

$\Rightarrow \neg (x \not R x)$ $(\neg (xRx) \Leftrightarrow (x \not R x)$

$\Rightarrow$ R nicht reflexiv (Definition Reflexivität)

(iv) Beh.: R symmetrisch $\Rightarrow$ R nicht asymmetrisch

Beweis: Seien $x, y \in A$ beliebig gewählt mit xRy.

$xRy \Rightarrow yRx$ (R symmetrisch)

$\Rightarrow \neg(\neg (yRx))$ (doppelte Negation)

$\Rightarrow \neg (y \not R x)$ $(\neg (yRx) \Leftrightarrow (y \not R x))$

$\Rightarrow$ R nicht asymmetrisch (Definition Asymmetrie)

(v) Beh.: R asymmetrisch $\Leftrightarrow$ R identitiv und R irreflexiv

Beweis: Da eine Äquivalenz gezeigt werden soll, besteht der Beweis aus zwei Teilen:

1. $\Rightarrow$: Dass aus der Asymmetrie die Irreflexivität folgt, wurde bereits in Satz 31 (i) bewiesen, so dass dieser Teil schon erledigt ist. Bleibt noch zu zeigen, dass aus der Asymmetrie auch die Identitivität folgt. Dazu überlegt man, was passieren würde, wenn R nicht identitiv wäre, das heißt, man geht indirekt vor.

R asymmetrisch

Annahme: R nicht identitiv

$\Rightarrow \neg(\forall x, y \in A: (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y))$ (Definition Identitivität)

Wenn nicht für alle x, $y \in A$ mit $(xRy \wedge yRx)$ die Gleichheit von x und y folgt, dann gibt es offensichtlich mindestens ein x und ein y mit xRy und yRx, die ungleich sind.

$\Rightarrow \exists x, y \in A: (xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$

Hier haben sich also zwei verschiedene Elemente x, y aus A gefunden, für die sowohl xRy, als auch yRx gilt. Dann kann R aber nicht mehr asymmetrisch sein, da die Asymmetrie solche Elemente ausschließt.

$\Rightarrow$ R nicht asymmetrisch (Definition Asymmetrie)

Das ist aber ein Widerspruch zu R asymmetrisch. Also ist die Annahme falsch und R ist identitiv.

Also gilt:

R **asymmetrisch** $\Rightarrow$ R identitiv und irreflexiv

2. $\Leftarrow$: Auch hier wird indirekt bewiesen.

R identitiv und irreflexiv

Annahme: R nicht asymmetrisch

$\Rightarrow \neg(\forall x, y \in A: (xRy \Rightarrow y \not R x)$ (Definition Asymmetrie)

$\Rightarrow \exists x, y \in A: (xRy \wedge yRx)$ (Aussage der Logik)

$\Rightarrow x = y$ (R identitiv)

Das ist aber ein Widerspruch zu R irreflexiv.

Also ist die Annahme falsch und R ist asymmetrisch.

Folglich gilt:

R identitiv und irreflexiv $\Rightarrow$ R asymmetrisch

Aus dem 1. und dem 2. Teil des Beweises folgt insgesamt:

R **asymmetrisch** $\Leftrightarrow$ R identitiv und R irreflexiv.

Äquivalenzrelationen

Unter einer *Äquivalenzrelation* versteht man eine Relation auf einer Menge, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. **Äquivalenzrelationen** sind für die Logik und im Bereich des Sachrechnens von großer Bedeutung.

Definition Äquivalenzrelation

Definition[92]	Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. $A \neq \emptyset$, R Relation auf A R Äquivalenzrelation auf A $\Leftrightarrow$ R reflexiv, symmetrisch und transitiv.

[92] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 135.

Beispiele für Äquivalenzrelationen sind die Aussageformen: „x hat dieselben Eltern wie y", „x ist genauso alt wie y" und „x hat die gleiche Schuhgröße wie y".
Durch Äquivalenzrelationen lassen sich somit gemeinsame Eigenschaften von Elementen einer Menge ausdrücken. Jeder Äquivalenzrelation (~) auf einer Menge M entspricht ein Sortiervorgang. Dabei wird die Menge M vollständig in nicht leere Teilmengen zerlegt. Diese bestehen jeweils aus allen Elementen, die eine gemeinsame Eigenschaft haben (gleich alt, gleiche Schuhgröße...) und somit zueinander in Relation stehen. Man nennt diese Mengen *Äquivalenzklassen*. Eine Äquivalenzrelation zerlegt somit die ihr zugrunde liegende Menge in Klassen, in sogenannte Äquivalenzklassen. Diese sind disjunkt.

Definition Äquivalenzklasse

Definition	A sei eine nicht leere Menge, a ein Element aus A und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf A. Unter der Äquivalenzklasse von a bezüglich $\approx$ in A ($[a]_{\approx}$) versteht man die Menge aller b aus A, die zu a in Relation stehen. Formal: $A \neq \emptyset$, $a \in A$, $\approx$ Äquivalenzrelation auf A $[a]_{\approx} = \{ b \mid b \in A \wedge b \approx a \}$

Jedes Element der Menge M kann nur in genau einer Äquivalenzklasse enthalten sein. Würde ein Element nämlich in zwei Klassen gleichzeitig liegen, so würde dies bedeuten, dass die Elemente der ersten Klasse die gleichen Eigenschaften wie alle Elemente aus der zweiten Menge haben. Wegen der Transitivität folgt, dass somit die beiden Klassen identisch sein müssten.

Für die Äquivalenzklassen gilt damit folgender Satz:

Satz 32 A sei eine nicht leere Menge und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf A. Beh.:

(i) Keine Äquivalenzklasse ist leer.

(ii) Zwei verschiedene Äquivalenzklassen haben keine gemeinsamen Elemente (d.h. sie sind disjunkt).

(iii) Jedes Element der Menge A gehört zu einer Äquivalenzklasse.

Formal: $A \neq \emptyset$, $\approx$ Äquivalenzrelation auf A Beh.:

(i) $\forall a \in A\ ([a]_{\approx} \neq \emptyset)$

(ii) $\forall a, b \in A: ([a]_{\approx} \neq [b]_{\approx} \Leftrightarrow [a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} = \emptyset)$

(iii) $\forall a \in A\ \exists b \in A: (a \in [b]_{\approx}))$

Beweis:

zu (i): $\approx$ reflexiv

$\Rightarrow$ $\forall a \in A: (a \approx a)$

$\Rightarrow$ $\forall a \in A: (a \in [a]_{\approx})$ (Definition Reflexivität)

$\Rightarrow$ $\forall a \in A: ([a]_{\approx} \neq \emptyset)$ (Definition. Äquivalenzklasse)

zu (ii): „$\Rightarrow$”:

Sei $a, b \in A$ beliebig mit $[a]_{\approx} \neq [b]_{\approx}$

zu zeigen: $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} = \emptyset$

Beweisidee: Es ist zu zeigen, dass $[a]_{\approx}$ und $[b]_{\approx}$ disjunkt sind. Dies erfolgt indirekt durch die Verneinung der Aussage. Angenommen $[a]_{\approx}$ und $[b]_{\approx}$ sind nicht disjunkt - $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} \neq \emptyset$. So muss es aber mindestens ein Element geben, das in beiden Klassen liegt.

Annahme: $\exists c \in A: (c \in [a]_{\approx} \cap [b]_{\approx})$

$c \in [a]_{\approx} \cap [b]_{\approx}$

Würde ein Element nämlich in zwei Klassen $[a]_{\approx}$ und $[b]_{\approx}$ gleichzeitig liegen so würde dies bedeuten, dass es sowohl die gleiche Eigenschaft wie alle Elemente aus $[a]_{\approx}$ als auch die gleiche Eigenschaft wie alle Elemente aus $[b]_{\approx}$ hat.

...

$\Rightarrow c \in [a]_{\approx} \wedge c \in [b]_{\approx}$ (Def. „r”)

$\Rightarrow c \approx a \wedge c \approx b$ (Def. Äquivalenzklasse)

$\Rightarrow \forall x \in [a]_{\approx}: (c \approx x) \wedge \forall y \in [b]_{\approx}:(c \approx y)$ ($\approx$Transitivität)

$\Rightarrow \forall x \in [a]_{\approx}, y \in [b]_{\approx},: (c \approx x \wedge c \approx y)$

$\Rightarrow \forall x \in [a]_{\approx}, y \in [b]_{\approx},: (x \approx c \wedge c \approx y)$ ($\approx$Symmetrie)

$\Rightarrow \forall x \in [a]_{\approx}, y \in [b]_{\approx},:(x \approx y)$ ($\approx$Transitivität)

Elemente, die eine gemeinsame Eigenschaft haben, liegen aber in einer Klasse. Somit müssten $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$ ein und dieselbe Klasse sein. (Definition Äquivalenzklasse)
Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $[a]_{\approx} \neq [b]_{\approx}$, somit ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung.

$\Leftarrow$
Seien $a, b \in A$ beliebig gewählt mit $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} = \emptyset$

zu zeigen: $[a]_{\approx} \neq [b]_{\approx}$

Beweis: $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} = \emptyset$

$\Rightarrow \forall x \in [a]_{\approx}: (x \notin [b]_{\approx})$ (Definition disjunkt)

$\Rightarrow a \in [a]_{\approx} \wedge a \notin [b]_{\approx}$ ((i))

$\Rightarrow [a]_{\approx} \neq [b]_{\approx}$ (Definition Gleichheit v. Mengen) zu (iii) Sei $a \in A$ beliebig gewählt[93]

$\Rightarrow a \approx a$ (≈ reflexiv)

$\Rightarrow a \in [a]_\approx$ (Definition Äquivalenzklasse)

Die Einteilung einer Menge in Klassen kann man sich wie einen zerschlagenen Teller vorstellen. Der Teller soll dabei die zugrunde liegende Menge sein. Jede Scherbe repräsentiert eine Klasse. Die einzelnen Scherben haben kein Stück gemeinsam und wenn man alle Scherben zusammenklebt erhält man wieder den ganzen Teller. Nach der Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre (NBG) wurde die Klasseneinteilung auch mit *Zerschlagung einer Menge in Klassen* bezeichnet.

Ordnungsrelationen

Die strenge lineare Ordnungsrelation besitzt die Eigenschaften Asymmetrie, Transitivität und Linearität.

Definition strenge Ordnungsrelation

Definition[94]	Eine strenge Ordnungsrelation ist eine Relation, die irreflexiv, identitiv und transitiv ist. $A \neq \emptyset$, R Relation auf A

Der Ausdruck *strenge Ordnungsrelation* lässt sich folgendermaßen erklären:

Die Elemente der Menge werden durch solch eine Relation geordnet (*Ordnung*). Dabei darf kein Element zu sich selbst in Relation stehen (strenge ...).

[93] Man beachte, dass das Element b aus der Behauptung (iii) nicht von a verschieden sein muss a kann also durch b ersetzt werden.

[94] vgl. Scheid/Schwarz (2016), S. 137.

Definition strenge lineare Ordnungsrelation

Definition[95]	Eine strenge lineare Ordnungsrelation ist eine Relation, die irreflexiv, identitiv, transitiv und linear ist. $A \neq \emptyset$, R Relation auf A Man sagt auch (A, R) ist eine strenge Ordnung oder Kette.

Der Ausdruck *strenge lineare Ordnungsrelation* lässt sich folgendermaßen erklären:

Die Elemente der Menge werden hier geordnet. Hier kann man aber zusätzlich bei zwei vorliegenden Elementen eindeutig entscheiden, welches der beiden Elemente dem anderen in der Ordnung vorangeht (linear), so dass keine Verzweigungen entstehen.

Relationen, die reflexiv, identitiv und transitiv sind, bezeichnet man als schwache Ordnungsrelationen. Sind sie zusätzlich auch linear, so nennt man sie schwache lineare Ordnungsrelationen.

Definition schwache Ordnungsrelation

Definition	Eine schwache Ordnungsrelation ist eine Relation, die reflexiv, identitiv und transitiv ist. $A \neq \emptyset$, R Relation auf A

Der Ausdruck *schwache Ordnungsrelation* lässt sich folgendermaßen erklären:

Die Elemente der Menge werden durch solch eine Relation geordnet (*Ordnung*). Dabei dürfen Elemente aber auch zu sich selbst in Relation stehen (schwache ...). Es gibt bei dem Vorgang des Ordnens somit *Warteschleifen*.

[95] vgl. ebd.

Definition schwache lineare Ordnungsrelation

Definition

Eine schwache lineare Ordnungsrelation ist eine Relation, die reflexiv, identitiv, transitiv und linear ist.

$A \neq \emptyset$, R Relation auf A

Der Ausdruck *schwache lineare Ordnungsrelation* lässt sich folgendermaßen erklären: Die Elemente der Menge werden hier geordnet. Hier kann man aber zusätzlich bei zwei vorliegenden Elementen eindeutig (lineare ...) entscheiden, welches der beiden Elemente dem anderen in der Ordnung vorangeht, so dass keine Verzweigungen entstehen.

4.9. Größenbereiche

Nachdem Ordnungsrelationen (vgl. Kap. 4.8) und Verknüpfungen (vgl. Kap. 4.1) definiert wurden und auch die Kommutativität (vgl. ebd.), die Assoziativität (vgl. ebd.) und die Trichotomie (vgl. Kap. 4.8) schon als bekannt vorausgesetzt werden können, lässt sich abschließend die Definition für Größenbereiche aufführen:

Definition[96]

Eine nicht leere Menge G, in welcher eine Verknüpfung „+" und eine Ordnungsrelation „<" definiert ist, bezeichnet man als Größenbereich genau dann, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(G1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, für alle $a, b, c \in G$

(G2) $a + b = b + a$, für alle $a, b, \in G$

(G3) Wie auch immer a und b aus G gewählt sind, es trifft stets einer der folgenden Fälle zu: $a < b$, $a = b$ oder $b < a$, für alle $a, b, \in G$

(G4) $a < b$ gilt genau dann, wenn ein $x \in G$ existiert mit $a + x = b$

[96] vgl. Blankenagel (1994), S. 107.

Fazit:

Das Kapitel über die fachlichen Grundlagen zeigt die Komplexität des Themas. Die hier verwendete Fachsprache ermöglicht Mathematikern die Inhalte zu erfassen, SuS bleibt hingegen der Zugang zu vielen dieser Bereiche verwehrt. Dies beginnt schon zu einem sehr frühen Zeitpunkt der schulischen Entwicklung. Am Beispiel der Äquivalenz, welche in diesem Kapitel ausführlich dargestellt und durch das Äquivalenzzeichen symbolisiert wird, kann die sprachliche Bedeutung herausgestellt werden. Viele Lehrkräfte sprechen im Zusammenhang mit dem Gleichheitszeichen von „es ergibt ...” oder „das macht ....”. SuS entnehmen zwangsläufig solchen Äußerungen eine ergebnisorientierte Formulierung. Die eigentliche Bedeutung der Äquivalenz als solche „es ist genauso viel wie ...” bleibt sprachlich unberücksichtigt. Diese sprachliche Genauigkeit, welche auf dem mathematischen Teil aufbaut, wird im anschließenden Kapitel näher betrachtet.

5. Die Bedeutung der Sprache für den Mathematikunterricht

„Fachsprachliche Texte können von den SuS erst verstanden werden, wenn sie über das notwendige Vokabular verfügen." Genau aus diesem, bereits in Kapitel 1.1 erwähnten Grund ist es notwendig, die für diese Thematik verwendete Fachsprache aus Kapitel 4 den SuS zugänglich zu machen, sodass alle SuS die fachlichen Inhalte erfassen und somit einen Lernerfolg erzielen können.

Die Bereiche der schriftlichen Subtraktion und des Sachrechnens wurden ausgewählt, da bei der schriftlichen Subtraktion besonders die Sprechweise von Bedeutung ist. Die geschriebene Sprache wird lediglich hinsichtlich ihrer symbolischen Notation eingesetzt. Die gesprochene Sprache ist jedoch besonders bei dem Durchlaufen des Algorithmus' und der verschiedenen Techniken von Bedeutung. Hinzu kommen sprachliche Aspekte bei der Erarbeitung des Unterrichtsinhaltes hinsichtlich Schüler- und Lehrergesprächen.

Im Gegensatz dazu steht bei den Sachrechenaufgaben die Schriftsprache im Vordergrund, die vor allem in Form der präsentierten Aufgaben im Fokus steht. Die gesprochene Sprache wird in diesem Bereich besonders durch die Berücksichtigung der prozessbezogenen Kompetenzen verwendet.

5.1. Die Bedeutung der Sprache für die schriftliche Subtraktion

Die schriftliche Subtraktion wird im 3. Schuljahr eingeführt. Sie stellt für die SuS nach dem Algorithmus der schriftlichen Addition den zweiten zu erlernenden Algorithmus dar. Im Gegensatz zum Algorithmus der schriftlichen Addition gibt es bei dem der schriftlichen Subtraktion nicht ein Verfahren, sondern fünf unterschiedliche Methoden.[97] Die verschiedenen Methoden lassen sich anhand von zwei Aspekten klassifizieren.

Zunächst wird zwischen dem sogenannten *Abzieh*- und dem *Ergänzungsverfahren* differenziert. Diese Unterscheidung lässt sich allgemein darauf zurückführen, dass sich die Differenz zweier Zahlen entweder durch *Abziehen* (Wegnehmen) oder durch *Ergänzen* (Hinzufügen) berechnen lässt. Dieser Punkt spiegelt sich allerdings nur in den ablaufenden Kopfrechenoperationen und in der begleitenden Sprechweise wider, jedoch nicht in der Schreibweise. Das Abziehen wird mit der *Minussprechweise*, das

[97] vgl. Padberg (2008), S.222.

Ergänzen hingegen mit der *Plussprechweise* durchgeführt. [98]

Beispiel: *5**9** Sprechweise *Abziehen: 9* minus 5 gleich 4

–25 Sprechweise *Ergänzen:* 5 plus 4 gleich 9[99]

34

Während im ersten Beispiel die letzte Ziffer des Subtrahenden kleiner ist als die des Minuenden, zeigt das folgenden Beispiel nun die Problematik, dass die Ziffer des Minuenden größer ist als die des Subtrahenden.

Beispiel: *31**4*** Sprechweise *Abziehen:* 4 minus 6 gleich __, geht nicht.

*– 10**6*** Sprechweise *Ergänzen:* 6 plus __ gleich 4, geht nicht.[100]

208

Es wird deutlich, dass sich die obige Beispielaufgabe nicht direkt durch ziffernweises *Abziehen* oder *Ergänzen* lösen lässt, weil die Einerziffer des Minuenden kleiner ist als die zugehörige Ziffer im Subtrahenden. Um derartige Aufgaben berechnen zu können, müssen die SuS sogenannte *Stellenüberträge* vornehmen. Dabei gibt es drei verschiedene Techniken, die bei dieser Problematik zur Anwendung kommen: die *Entbündelungs-*, die *Auffüll-* und die *Erweiterungstechnik.*[101] Diese Techniken werden im Folgenden genauer dargestellt.

Um eine Strukturierung innerhalb der Techniken zu erhalten, müssen zwei Aspekte berücksichtigt werden. Zunächst die Art und Weise der Differenzberechnung, danach die Ausführung der verschiedenen Übertragstechniken.[102]

Durch die Kombination der beiden genannten Faktoren ergeben sich die folgenden fünf Möglichkeiten. Das *Abziehen* lässt sich nicht mit dem *Auffüllen* vereinbaren (siehe Tabelle).[103]

[98] vgl. Schwarz (1999), S.59.
[99] vgl. Padberg (2008), S. 223.
[100] vgl. ebd., S. 225.
[101] vgl. Padberg (2008), S. 225.
[102] vgl. ebd.
[103] vgl. ebd. S. 222.

Differenzbildung \ Übertragstechniken	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	**X**	**X**	**-**
Ergänzen	**X**	**X**	**X**

Tabelle 9: Subtraktionsverfahren (Padberg 2008, S. 222)

Bis zur Wahlfreiheit der unterschiedlichen Subtraktionsverfahren, welche am 14. Dezember 2001 durch die Kultusministerkonferenz beschlossen wurde, gab es ein einheitlich vorgeschriebenes Normalverfahren für die schriftliche Subtraktion, an das sich bundesweit alle Schulen halten mussten. Dieses Normalverfahren existierte seit einem Beschluss, der am 25. März 1958 auf der Kultusministerkonferenz festgelegt wurde. Dieser Beschluss schrieb vor, die schriftliche Subtraktion durch Ergänzen, kombiniert mit der *Erweiterungs*- oder *Auffülltechnik zu* lehren. Sowohl Schreibform als auch Sprechweise wurden hier bis ins Detail definiert. Mit dieser Freigabe ging „die mehr als 40-jährige Ära der Festschreibung des ergänzenden Rechnens bei der schriftlichen Subtraktion zu Ende"[104], sodass die Bundesländer es voraussichtlich nun den Lehrerinnen und Lehrern überlassen werden, welches der fünf Verfahren sie für ihren Unterricht bevorzugen.[105]

5.1.1. Die verschiedenen Übertragstechniken

Im Folgenden sollen die unterschiedlichen Übertragstechniken genauer dargestellt werden. Dabei wird deutlich, dass die Sprache ein unverzichtbares Mittel bei der Bearbeitung dieser Thematik darstellt.

[104] Fritz/Ricken/Schmidt (2009), S. 617.
[105] vgl. ebd.

Entbündelungstechnik/Borgetechnik

Bei der *Entbündelungstechnik* wird „im Minuend eine Einheit des *nächsthöheren* Stellenwertes *entbündelt*"[106], aufgelöst oder geborgt und in die kleinere Stellenwertspalte übertragen. Entbündeln meint das Umtauschen von einer Einheit in zehn nächstkleinere Einheiten, demnach zum Beispiel das Ersetzen von einem Zehner in zehn Einer.[107]

Durch das nachstehende Beispiel wird die Technik veranschaulicht:

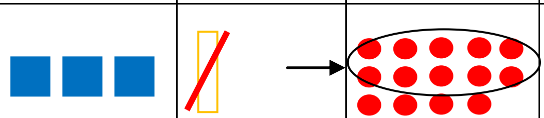
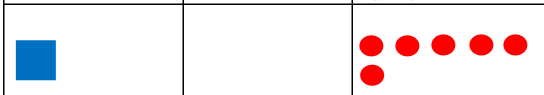
Aufgabe: 314 - 106 = 208						
Ikonisch-schematische Darstellung			Schreibweise mittels Stellenwerttafel			
Hunderter	Zehner	Einer	H	Z	E	
			3	1	4	Minuend
			3	0	14	Minuend verändert
			1	0	6	Subtrahend
			**2**	**0**	**8**	Differenz

Tabelle 10: Veranschaulichung der Entbündelungstechnik

Bei der oben dargestellten Beispielaufgabe wird konkret ein Zehner des Minuenden entbündelt oder umgetauscht (gelb), wobei dessen Wert als zehn Einer (rot) in die Stellenwertspalte der Einer übertragen wird – so wird die ziffernweise Subtraktion möglich.[108] Bei der Entbündelungstechnik wird ausschließlich der Minuend umgeformt.

Die Entbündelungstechnik ist sowohl mit dem Ergänzungsverfahren, als auch mit dem Abziehverfahren vereinbar.[109]

[106] Padberg (2008), S. 225.
[107] vgl. Schwarz (1999), S. 60.
[108] vgl. Krauter (2008), S. 15.
[109] vgl. Krauter (2008), S. 15.

Es ergeben sich folgende Sprechweisen zu den jeweiligen Verfahren:

Abziehen: *4 minus 6 geht nicht. Ich entbündele einen Zehner in 10 Einer.*

14 - 6 = 8. Es bleibt kein Zehner übrig.

Ergänzen: *6 plus __ gleich 4 geht nicht. Ich entbündele einen Zehner in 10 Einer.*

6 + 8 = 14. Es bleibt kein Zehner übrig.[110]

In der angestrebten Kurzschreibweise gibt es mehrere Möglichkeiten die vorgenommenen Entbündelungen darzustellen:

Beispiele:

$$\text{(a)}\ \begin{array}{r} 3\,1'4 \\ \underline{-106} \\ 208 \end{array} \qquad \text{(b)}\ \begin{array}{r} 3\,1'4^{10} \\ \underline{-106} \\ 208 \end{array} \qquad \text{(c)}\ \begin{array}{r} 3\,\overset{0}{1}\,\cancel{4}^{10} \\ \underline{-106} \\ 208 \end{array} \qquad \text{(d)}\ \begin{array}{r} 3\,\overset{0}{\cancel{1}}\,4 \\ \underline{-106} \\ 208 \end{array}$$

Beim Auftreten einer oder mehrerer Nullen im Minuenden muss der nächste höherwertige Stellenwert entbündelt werden. Obwohl laut Padberg empirische Untersuchungen keine erhöhte Fehleranfälligkeit bei derartigen Aufgaben nachgewiesen haben, sollte dieser Sachverhalt dennoch ausführlich im Unterricht behandelt werden, um Schwierigkeiten vorzubeugen.[111]

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 4\;0\;0 \\ \underline{-\;\;2\;2\;7} \end{array}$$

Da anfänglich kein Zehner entbündelt werden kann, muss zunächst einer der vier Hunderter entbündelt werden – es bleiben drei Hunderter und zehn Zehner übrig. Anschließend kann einer der zehn Zehner in zehn Einer aufgebrochen werden, sodass die Aufgabe nach den Entbündelungen in folgender Form dargestellt werden könnte:[112]

[110] vgl. Schipper/Ebeling/Dröge (2008), S. 132.
[111] vgl. Padberg (2008), S. 227.
[112] vgl. ebd.

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rl} 400 &= 3H + 9Z + 10E \\ \underline{-\,227} &\underline{= 2H + 2Z + 7E} \\ 173 &= 1H + 7Z + 3E \end{array} \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 9\ 10} \\ 4\cancel{0}\cancel{0} \\ \underline{-227} \\ 173 \end{array}$$

Erweiterungstechnik

Während bei der *Entbündelungstechnik* ausschließlich der Minuend verändert wird, ist bei der *Erweiterungstechnik* sowohl eine Änderung im Minuenden als auch im Subtrahenden vorzunehmen. Die Technik beruht auf dem Gesetz der *Konstanz der Differenz,*[113] welches bereits in Kapitel 4 präziser erläutert wurde. Das bedeutet, dass Minuend und Subtrahend gleichsinnig verändert werden müssen. So lässt sich die Differenzbestimmung in der betreffenden Stellenwertspalte durchführen, wobei die gesamte Differenz unverändert bleibt.[114]

Aufgabe: 314 - 106 = 208						
Ikonisch-schematische Darstellung:			Schreibweise mittels Stellenwerttafel:			
Hunderter	Zehner	Einer	H	Z	E	
			3	1	4	Minuend
			1	0	6	Subtrahend
			3	1	14	Minuend verändert
			1	1	6	Subtrahend verändert
			2	0	8	Differenz

Tabelle 11: Veranschaulichung der Erweiterungstechnik

In dieser Aufgabe wird der Minuend um zehn Einer und der Subtrahend um einen Zehner verändert. Tendenziell lässt sich diese Technik ebenfalls mit dem *Abziehen* und *Ergänzen* kombinieren.

[113] vgl. Schwarz (1999), S. 62
[114] vgl. Padberg (2008), S 227.

Die zugehörigen Sprechweisen wären die folgenden:

Abziehen: *4 minus 6 geht nicht, also erweitere ich oben mit zehn Einern und unten mit einem Zehner. 14 Einer – 6 Einer = 8 Einer, 1 Zehner - 1 Zehner = 0 Zehner.*

Ergänzen: *6 plus __ gleich 4 geht nicht, also erweitere ich oben mit zehn Einern und unten mit einem Zehner. 6 Einer + 8 Einer = 14 Einer, 0 Zehner + 1 Zehner = 1 Zehner.*[115]

Um den Prozess der Erweiterung zu verdeutlichen, kann zunächst eine vorübergehende Schreibweise eingesetzt werden, bei der die Erweiterung an den betreffenden Ziffern im Minuenden durch eine höhergestellte Zehn (^{10}) und im Subtrahenden durch eine tiefer gestellte Eins ($_1$) kenntlich gemacht wird (Beispiel (a)). Bei der finalen Notationsform wird auf die Zehn im Subtrahenden verzichtet (Beispiel (b)).[116]

Beispiele:

(a)
$$\begin{array}{r} 3\;1\;4^{10} \\ \underline{-\,1\;0_{1}\;6} \\ 2\;0\;8 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 3\;1\;4 \\ \underline{-\,1\;0_{1}6} \\ 2\;0\;8 \end{array}$$

Auffülltechnik

Die Idee der *Auffülltechnik* besteht darin, den Subtrahenden spaltenweise bis zum Minuenden aufzufüllen bzw. zu ergänzen. Hierbei wird die eigentliche Subtraktionsaufgabe als Additionsaufgabe aufgefasst, bei dem ein Summand fehlt (Platzhalteraufgabe). Der Minuend stellt die Summe oder den zu erreichenden Zielbetrag dar, während der Subtrahend als einer der beiden Summanden verstanden wird. Den anderen Summanden ergibt jene Zahl, die durch die Rechnung zum Subtrahenden hinzuaddiert werden muss, um die Zahl des Minuenden zu erreichen.[117]

Bezogen auf die obige Beispielaufgabe kann diese Thematik wie folgt verdeutlicht werden:

---

[115] vgl. Schipper/Ebeling/Dröge (2008), S. 132.
[116] vgl. Schwarz (1999), S. 63.
[117] vgl. Padberg (2008), S. 229.

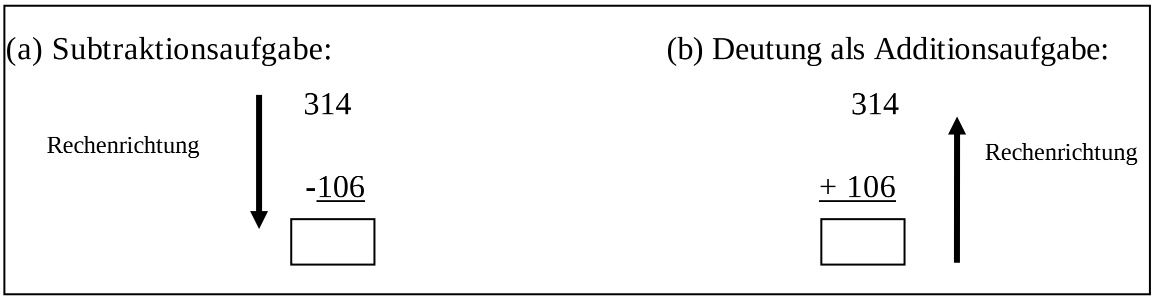


Abbildung 13: Umdeutung als Additionsaufgabe (Padberg 2008, S. 229)

Sind in einer Aufgabe mehrere Überträge notwendig, so vollzieht sich das *Auffüllen* in zwei Schritten. Zuerst wird die betreffende Ziffer des Subtrahenden bis zur nächsthöheren *vollen* Einheit des Minuenden aufgefüllt. Im oben aufgeführten Beispiel bedeutet dies, dass die 6 Einer zunächst um 4 Einer auf 10 Einer ergänzt werden, wobei diese 10 Einer gebündelt der nächsthöheren Stellenwertspalte hinzugefügt werden. Anschließend wird die Zehnerziffer des Subtrahenden weiter bis zur Zehnerziffer des Minuenden aufgefüllt. Es wird deutlich, dass es bei dieser Technik ausschließlich zu Umformungen des Subtrahenden kommt, sodass der Minuend unverändert bleibt. Weiterhin ist die *Auffülltechnik* nur mit dem *Ergänzungsverfahren* kombinierbar.[118] In der nachfolgenden Tabelle soll der Sachverhalt noch einmal veranschaulicht werden, wobei eine konkrete ikonische Darstellung an dieser Stelle schwierig ist.

Aufgabe: 314 - 106 = 208						
Ikonisch-schematische Darstellung:			Schreibweise mittels Stellenwerttafel:			
Hunderter	Zehner	Einer	H	Z	E	
			3	1	4	Minuend
			1	0	6	Subtrahend
			1	1	6	Subtrahend verändert
			2	0	8	Differenz

Tabelle 12: Veranschaulichung der Auffülltechnik

[118] vgl. Padberg (2008), S. 230.

Die zugehörige Sprechweise zum *Ergänzen* lautet wie folgt:

Ergänzen: *8 plus 8 gleich 16. Das sind die geforderten 6 Einer und 1 Zehner für die nächste Spalte.*[119]

In der späteren Kurzschreibweise wird diese Umbündelung in Form einer tiefer gestellten Eins an der betreffenden Stelle kenntlich gemacht:

$$\begin{array}{r} 3\;1\;4 \\ \underline{-1\;0_{1}6} \\ 2\;0\;8 \end{array}$$

5.1.2. Notwendiges Vorwissen für die schriftliche Subtraktion

Grundvoraussetzung für das schriftliche Subtrahieren ist nicht nur die sichere Beherrschung des kleinen Einsminuseins, sondern auch die des kleinen Einspluseins, da die SuS je nach Subtraktionsverfahren beim ergänzenden Rechnen addieren müssen.

Weiterhin müssen die Kinder, wie bei der schriftlichen Addition auch, das Stellenwertsystem verstanden haben. Dies ist wichtig, da die schriftliche Subtraktion auf einer ziffernweisen Zerlegung mit anschließenden stellenweisen Rechnungen beruht.

Ebenfalls Voraussetzung für die Einsicht in den Algorithmus ist ein grundlegendes Verständnis des Entbündels, also „die Fähigkeit, den Wert einer Ziffer im nächst niedrigeren Stellenwert auszudrücken", da bei notwendigen Stellenüberträgen häufig nächsthöhere Einheiten umgewechselt werden müssen.

5.1.3. Vor- und Nachteile der schriftlichen Subtraktion

Hat ein Kind den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion verstanden und ausreichend verinnerlicht, kann er prinzipiell alle Aufgaben dieser Operation schriftlich lösen, da derartige Algorithmen, wie die der schriftlichen Verfahren, nicht nur für aus-

[119] vgl. Schipper/Ebeling/Dröge (2008), S. 132.

gewählte, sondern prinzipiell „für ganze *Klassen* gleich strukturierter Aufgaben" konzipiert sind.[120] Ebenfalls lassen sie sich nicht nur im dezimalen Stellenwertsystem einsetzen, sondern genauso in anderen *nichtdezimalen.* [121]

Die Anwendung der schriftlichen Rechenverfahren bietet den Kindern die Möglichkeit der beispielhaften Einsicht in die Bedeutung und Funktionsweise von Algorithmen. Sie erfahren, wie komplizierte Rechnungen durch konkrete algorithmische Verfahren simplifiziert werden. Gerade durch die gegenwärtige Bedeutung von Computern ist es wichtig, den SuS diese Thematik bereits im Grundschulunterricht zu vergegenwärtigen, da diese „eine der *zentralen Leitideen* der Mathematik" darstellt.[122]

Die Vereinfachung der Aufgaben lässt sich bei den schriftlichen Rechenverfahren auf die Zerlegung der betreffenden Zahlen in ihre Stellenwerte zurückführen. Es entstehen durch diese ziffernweise Aufspaltung leichter zu berechnende Teilaufgaben, so dass die Kinder auch beim Operieren mit Zahlen im vierstelligen Bereich oder höher lediglich auf das kleine Einspluseins und das kleine Einsminuseins zurückgreifen müssen.[123] Oft geschieht dies „ohne jegliche Einsicht in die zugrundeliegende mathematische Struktur"[124], was sich mitunter in den Fehlern der SuS zeigt.

Durch das automatisierte Rechnen fühlen sich die SuS augenscheinlich sicher, es kann jedoch auch schnell zu einer generalisierten Anwendung führen, bei der Lösungen ohne jegliches Reflektieren *blind akzeptiert* werden und zugrunde liegende Zusammenhänge und mathematische Gesetzmäßigkeiten unverstanden bleiben. Eine derartige „kognitive Passivität" verführt die SuS häufig dazu, die vorliegende Aufgabe gar nicht mehr richtig zu betrachten und sie ohne Nachzudenken schriftlich zu lösen. Bei einer Studie von SELTER haben beispielsweise mehr als 60% der teilnehmenden Kinder die Aufgabe 701 – 698 schriftlich gelöst, wobei es an dieser Stelle deutlich einfacher und geschickter gewesen wäre, die halbschriftliche Strategie *Ergänzen* anzuwenden.[125]

Eine „zu frühe Automatisierung"[126] kann demnach zur Folge haben, dass die Verfahren bereits kurze Zeit nach der Behandlung im Unterricht kaum noch in Erinnerung gerufen werden können, da die Rechenschritte mehr oder weniger mechanisch, jedoch oh-

[120] vgl. Schipper/Ebeling/Dröge (2008), S. 204.
[121] vgl. ebd., S. 205.
[122] vgl. ebd., S. 206.
[123] vgl. ebd., S. 204ff.
[124] Krauthausen (1993), S. 192.
[125] vgl. Krauthausen (1993), S. 193.
[126] Padberg (2008), S. 207.

ne richtiges Verständnis ausgeführt werden.[127]

Zuletzt lässt sich noch positiv aufführen, dass die Kinder bei entsprechender Thematisierung von Sachverhalten wie zum Beispiel dem Umbündeln oder Entbündeln, eine „Einsicht in den Aufbau des *dezimalen Stellenwertsystems*" vermittelt bekommen.[128]

5.2. Die Bedeutung der Sprache für die Behandlung von Sachrechenaufgaben

Für das Verständnis von Sachrechenaufgaben ist die Sprache von etwas anderer Bedeutung als für das Verständnis der schriftlichen Subtraktion. In diesem Bereich sind die SuS – wie in keinem anderen – von der Sprache abhängig. Das beginnt mit dem Lesen und Verstehen von Texten und endet mit dem Erklären von Lösungswegen. Genau aus diesem Grund hat der überwiegende Teil der Lernenden Probleme mit der Bearbeitung von Sachrechenaufgaben. Wie genau solche Sachrechenaufgaben aufgebaut sind und welche Ziele sie verfolgen, wird in diesem Kapitel näher beschrieben.

5.2.1. Ziele und Funktionen des Sachrechnens

Sachrechnen dient in erster Linie dem Ziel, die Kinder bei der „Entwicklung allgemeiner Problemlösefähigkeiten"[129] zu unterstützen. Die SuS sollen durch mathematische Modellierung befähigt werden, sich ihre Umwelt selbst zu erschließen und somit den Alltag zu bewältigen.[130] Heinrich Winter unterscheidet drei Funktionen des Sachrechnens, die im Folgenden einzeln erläutert werden.

[127] vgl. Padberg (2008), S. 207.
[128] vgl. ebd., S. 204.
[129] Franke (2003), S. 23.
[130] vgl. ebd. S. 25.

Sachrechnen als Lernstoff

Sachrechnen als Lernstoff meint „Wissen über Größen und Fertigkeiten im Umgang mit Größen aufzubauen."[131] Der sachrechnerische Stoff umfasst die „bürgerlichen Größen" (Stückzahlen, Geldbeträge, Längen, Zeitspannen, Gewichte, Temperaturen und Flächen- und Rauminhalte)[132], sowie als Ergänzung auch elementare Verfahren und Begriffe der Statistik, wie die Gewinnung, Darstellung und Verarbeitung von Daten. „Dazu gehören bspw. das Zählen, Messen, Schätzen, Kennenlernen der Maßsysteme, Aufbau eines Repertoires an Stützpunktvorstellungen/Standardgrößen oder die Darstellung von Größen."[133]

Sachrechnen als Lernprinzip

Im Gegensatz zum Sachrechnen als Lernstoff wird in diesem Bereich die Sache deutlich stärker in den Fokus gerückt. Sachrechnen als Lernprinzip impliziert, dass „Bezüge zur Realität für das Lernen mathematischer Begriffe und Verfahren ausgenutzt werden, um die SuS stärker am Lernen zu interessieren, ihr Verständnis zu fördern und ihre Kenntnisse und Fertigkeiten besser zu festigen".[134] Bisher erworbene Kenntnisse sollen unter Berücksichtigung der Sachsituation gefestigt werden. Darüber hinaus sollen die dargestellten Situationen aber auch dazu auffordern, sich mit neuem mathematischen Wissen auseinanderzusetzen.

Sachrechnen als Lernziel

Sachrechnen als Lernziel bzw. als Beitrag zur Umwelterschließung – wie Winter die dritte Funktion auch nennt – beinhaltet die Funktionen Lernstoff und Lernprinzip und ist somit die umfassendste Funktion des Sachrechnens.[135] Gleichzeitig wird hierin die wichtigste, aber auch die unterrichtspraktisch am schwierigsten zu realisierende Funktion gesehen. Hier dient die Sache nicht nur als Mittel der Anregung, vielmehr geht es um die Sache im eigentlichen Sinne, sodass Sachrechnen auch ein Stück Sachunterricht beinhaltet. Situationen aus der Umwelt der Kinder sollen mathematisiert und modelliert werden. Dies schließt auch den Erwerb fachunabhängiger Kompetenzen mit ein. Den-

[131] Winter (1996), S. 24.
[132] vgl. ebd. S. 15.
[133] Krauthausen/Scherer (2007), S. 80f.
[134] vgl. Winter (1996) S. 31.
[135] vgl. ebd.

noch sollen die SuS erfahren, dass mathematische Modelle immer nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit zeigen und andere Aspekte bewusst ausschließen.

5.2.2. Problemlösen und Modellierungsprozesse beim Sachrechnen

> Ein ‚Problem' entsteht zum Beispiel dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht weiß, wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes Handeln (Ausführen selbstverständlicher Operationen) in den erstrebten Zustand überführen lässt, wird das Denken auf den Plan gerufen. Ihm obliegt es, ein vermittelndes Handeln allererst zu konzipieren.[136]

Das bedeutet, dass ein Problem aus drei Komponenten besteht: dem Anfangszustand, dem erwünschten, aber noch nicht erreichten Ziel und dem Weg, welcher vom Anfangs- zum Zielzustand führt. Was dabei als Problem empfunden wird, ist nicht verallgemeinerbar, sondern liegt im Ermessen des Einzelnen.

Im Mathematikunterricht sollen die Kinder befähigt werden, Probleme selbstständig zu lösen, selbst wenn ihnen hierzu kein Lösungsverfahren bekannt ist. Als Gegenpol zu den Algorithmen, die die SuS – u.a. bei der schriftlichen Subtraktion – erlernen, sollen Sachprobleme durch eigenständige und individuelle Bildung von mathematischen Modellen gelöst werden. Dabei durchlaufen die SuS einen Problemlöseprozess, bei dem zwischen dem *Modellbildungsprozess* und dem *Modellierungskreislauf* differenziert werden muss.

Im Folgenden werden die beiden zuletzt genannten Aspekte näher ausgeführt.

Modellbildungsprozess nach Blum

Der Prozess beginnt mit einer **realen Situation**, auch als erklärungsbedürftiges Phänomen bezeichnet.[137] Die erste Schwierigkeit besteht darin, das Problem innerhalb der Situation zu verstehen. Hierfür sind zum einen allgemeine Sprachkompetenzen – vgl. Kapitel 1.1 – notwendig, um die Formulierungen und (Fach)ausdrücke zu verstehen, zum anderen bedarf es aber auch spezifischen Wissens über die Situation, um diese nachvollziehen zu können.

[136] Duncker (1935), S.1
[137] vgl. Schneeberger (2009), S. 69.

Aus dieser realen Situation wird ein **reales Modell** entwickelt, welches ein Bild der Wirklichkeit darstellt. Das Sachproblem wird auf für die Aufgabe interessante Fragen eingegrenzt, sodass nur noch Aspekte betrachtet werden, die im Fokus stehen. Um ein grundlegendes Verständnis bei den SuS aufzubauen, benötigt die Entwicklung des realen Modells viel Zeit, damit lösungsrelevante Elemente herausgefiltert und ggf. fehlende Daten recherchiert werden müssen.

Aus dem realen Modell wird ein **mathematisches Modell** entwickelt. Dazu werden Rechenaufgaben notiert, ggf. Skizzen angefertigt und interne Denkprozesse externalisiert. Das mathematische Modell kann individuelle Unterschiede aufweisen und hängt stark vom Problemlöser ab. Während der eine durch Anfertigung einer Skizze weiterkommt, mag es dem anderen durch eine tabellarische Übersicht gelingen. Die Wahl der Vorgehensweise erfolgt nach individuellen Fähigkeiten, es gibt kein vorgegebenes Muster.

Durch die Bearbeitung des mathematischen Modells erhält man **mathematische Resultate**, die nicht unbedingt mit der Lösung der Aufgabe übereinstimmen müssen. An dieser Stelle ist der Rückbezug auf die Sachsituation besonders wichtig, da nur so eine kritische Hinterfragung des Ergebnisses möglich ist. Ein häufiger Fehler der SuS besteht im Unterlassen dieser Rückschau. Wenn durch den Bezug zwischen mathematischem Resultat und realer Situation festgestellt wird, dass Ergebnisse inkorrekt ist, wiederholt sich der Modellbildungsprozess so lange, bis situationsgemäße Ergebnisse vorliegt.

Eine elementare, nicht zu unterschätzende Schwierigkeit des Modellbildungsprozesses bildet die Trennung zwischen der Mathematik und der realen Welt, was die folgende Abbildung verdeutlicht:

Reale Welt	(1) Reale Situation	(2) Reales Modell
Mathematische Welt	(3) Mathem. Modell	(4) Mathem. Resultat[138]

[138] Blum (1985), S. 200.

Modellierungskreislauf nach Blum

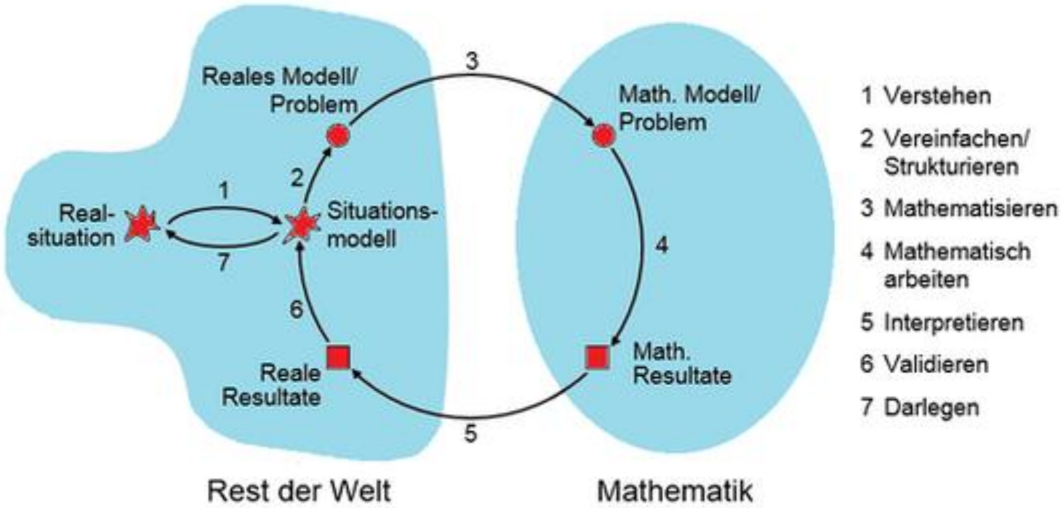


Abbildung 14: Modellierungskreislauf nach Blum

Die Abbildung zeigt den Modellierungskreislauf nach Blum. Im Vergleich zum vorher dargestellten Prozess wird hier eine Verbindung zwischen der Mathematik und dem Rest der Welt geschaffen. Mithilfe der Tätigkeiten, die zwischen den einzelnen Ankerpunkten stehen, wird dieser Übergang in den Vordergrund gerückt.

Zu Beginn steht die Realsituation, die Aufgabenstellung. Diese muss gelesen und verstanden werden, um ein Situationsmodell konstruieren zu können. Dazu werden sämtliche Gedanken, die beim Leseprozess entstehen, gesammelt. Es entsteht ein Überblick über die Thematik. Dieser Überblick wird durch Vereinfachen und Strukturieren der einzelnen Aspekte zu einem realen Modell, welches lediglich die für die Aufgabe relevanten Informationen enthält. Dieses Modell muss nun in einen mathematischen Kontext gebracht werden. Es wird in eine Funktion, eine Formel o.Ä. eingebaut und bildet so das mathematische Modell. Durch mathematisches Arbeiten mit diesem Modell – sprich durch Rechnen – erhält man das mathematische Resultat, ein Ergebnis. Dieses Ergebnis ist rein mathematisch dargestellt und muss deshalb noch in Bezug auf den Sachkontext interpretiert werden – ein reales Resultat wird erzeugt. Mit Rückblick auf das Situationsmodell wird das reale Resultat überprüft bzw. validiert. Wird das Resultat für gültig erklärt, werden in einem letzten Schritt die gewonnenen Erkenntnisse dargelegt. Hier spielt die Kompetenz des Kommunizierens eine besondere Rolle.[139] Wenn das reale Resultat falsifiziert wird, ist der Modellierungskreislauf erneut zu durchlaufen.

[139] vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 58.

Dass die SuS beim Bearbeiten von Aufgaben auf die Lösungsermittlung und das Rechnen fixiert sind, zeigt sich darin, dass bspw. *Kapitänsaufgaben* geradezu mechanisch gelöst werden.[140] Der Modellierungskreislauf wird hier oftmals nicht vollständig durchlaufen, denn es findet keine kritische Hinterfragung des realen Resultats statt.

5.2.3. Klassifizierung von Sachaufgaben

Sachrechenaufgaben werden hinsichtlich verschiedener Kriterien in Aufgabentypen unterteilt. Dabei wird zwischen der Unterteilung nach Heinrich Winter und der nach Marianne Franke unterschieden. Winter bildet drei Klassen: Eingekleidete Aufgaben, Textaufgaben und Sachaufgaben. Franke klassifiziert nach den folgenden Kriterien: beschriebene Situation, mathematischer Inhalt und Präsentationsform. Die Zuordnung einer Aufgabe zu den Aufgabentypen ist nicht immer eindeutig, da die Übergänge fließend sind. Zudem ist die Verwendung der Bezeichnungen *eingekleidete Aufgabe, Textaufgabe* und *Sachaufgabe* in der Literatur nicht einheitlich, was die Ermittlung der Zugehörigkeit erschwert. Marianne Franke meint sogar, dass eine Unterscheidung der Aufgabentypen aus heutiger Sicht nicht (mehr) erforderlich ist, da Sache und mathematischer Inhalt gleichberechtigte Komponenten in der Aufgabe darstellen sollten.[141]
Im Folgenden soll dennoch ein Überblick über die verschiedenen Aufgabentypen gegeben werden, wobei ein eindeutiger Schwerpunkt auf der Erläuterung von *Sachaufgaben* liegt.

Eingekleidete Aufgabe (Winter)

Bei eingekleideten Aufgaben ist der Sachkontext nicht nur irrelevant, sondern sogar beliebig austauschbar, da die SuS durch ihn keinerlei neue Informationen zur Sache erhalten. Bei diesem Aufgabentyp geht es vielmehr darum, erforderliche Rechenoperationen zu erkennen und durchzuführen, um das Ergebnis zu ermitteln. Dabei ist zu bemerken, dass die Formulierung des Textes auf die erforderliche Rechenoperation schließen lässt.
Eingekleidete Aufgaben folgen der Zielsetzung, Rechenverfahren anzuwenden, mathematische Begriffe zu festigen und Zahlbeziehungen zu erfassen.

---

[140] Krauthausen/Scherer (2007), S. 78.
[141] vgl. Franke (2003), S. 26f.

Typische Beispiele für eingekleidete Aufgaben sind:

1) *„32 Spielkarten werden an 4 Kinder verteilt. Wie viele Spielkarten erhält jedes Kind?*
2) *Der Vater hat ein Schlüsselbrett gebastelt. Es hat 3 Reihen mit je 8 Haken. Wie viele Schlüssel kann man aufhängen?*
3) *Zwischen welchen Viererzahlen liegen 13, 22, 5, 34“* [142]

Textaufgabe (Winter)

Textaufgaben dienen dem Ziel, Zusammenhänge zwischen den angegebenen Zahlen zu erfassen und einer mathematischen Zeichenreihe, also einem Term oder einer Gleichung, zuzuordnen. Dabei haben die Aufgaben meist genau ein richtiges Ergebnis und sind daher eindeutig zu bearbeiten. Aufgrund ihres Fokus' auf das Rechnen werden Textaufgaben auch als *Sachrechenaufgaben* bezeichnet. Während Textaufgaben im traditionellen Sachrechnen einen Schwerpunkt darstellen, werden sie im heutigen Unterricht gern als Übungsform eingesetzt. Man unterscheidet zwei Typen von Textaufgaben:

1) **Verbalisierte Zahlenaufgaben** Bsp.: *Addiere zu 159 das Vierfache von 9.*
2) **Aufgaben in Textform** Bsp.: *Herr Müller kauft für 88€ Holzlatten. Der Preis für 1m beträgt 8€. Wie viel Holz hat Herr Müller gekauft?*

Bei den Aufgaben in Textform ist die Sache zwar sinnvoll, aber nebensächlich. Schwierigkeiten entstehen bei der Bearbeitung von Textaufgaben vorwiegend darin, die Textstruktur in eine mathematische Struktur zu übertragen.

Sachaufgabe (Winter)

Bei diesem Aufgabentyp ist die Sachsituation wichtig, da sie einen Bezug zu den Alltagserfahrungen und damit zur Realität der Kinder schafft. Die Mathematik dient dem Zweck, tiefer in den Sachkontext einzudringen. Ferner folgen Sachaufgaben dem Ziel, eine gegebene Sachbeziehung zu mathematisieren und entsprechende mathematische Operationen zuzuordnen. Diese sollen durchgeführt werden, um in einem letzten Schritt einen Rückbezug des Ergebnisses zur Sachsituation herzustellen. Dabei wird das Verständnis für den Sachzusammenhang durch die mathematische Bearbeitung unterstützt.

---

[142] Grimm/Prüll (1982), S.33.

Eine typische Sachaufgabe ist:

> *Für unsere Klassenfahrt nach Borkum können wir einen Bus mieten oder mit der Bahn fahren. Was ist günstiger und/oder praktischer? Mit welchen Kosten müssen wir außerdem noch rechnen?*

Die Kinder an der Planung von Ausflügen oder Klassenfahrten zu beteiligen, bietet sich im Sachrechenunterricht besonders an. Da diese Fahrten tatsächlich durchgeführt werden, kann sich jedes Kind damit identifizieren und entwickelt das Gefühl, aktiv an der Planung beteiligt zu sein und seinen Teil zum Gelingen des Ausfluges beizutragen. Zudem werden die SuS für die bei Ausflügen anfallenden Kosten sensibilisiert und lernen, diese zu vergleichen. Sie müssen außerdem recherchieren, dass man mit Bus und Bahn nicht auf die Insel gelangt, sondern eine Fährüberfahrt nötig ist.

5.2.4. Qualitätsanforderungen an Sachrechenaufgaben (M. Franke)

Marianne Franke unterscheidet drei Faktoren, die für die Qualität von Sachrechenaufgaben bedeutsam sind:

- sachlich-semantische Faktoren
- sprachlich-syntaktische Faktoren
- mathematische Faktoren

Unter sachlich-semantischen Faktoren versteht Franke die Bekanntheit und Vertrautheit der Kinder mit der Situation. Die mathematische Problemstellung sollte einen Bezug zur Alltagswelt der Kinder besitzen. Ebenso muss sichergestellt sein, dass alle Begriffe den Kindern bekannt sind und eventuell auftretende Fachbegriffe erklärt werden. Irrelevante Angaben sollten möglichst vermieden werden, können aber auch als Differenzierungsmöglichkeit genutzt werden – viele irrelevante Angaben erhöhen den Schwierigkeitsgrad.

Sprachlich-syntaktische Faktoren meinen die sprachliche Komplexität der Problemstellung. Es ist von Bedeutung, ob die relevanten Daten direkt oder indirekt angegeben werden. Ebenso ist ihre Reihenfolge wichtig: Stehen sie in der Reihenfolge, in der sie auch zu bearbeiten sind oder ist diese gegensätzlich. Bedeutsam ist auch, ob eine direkte Fragestellung vorliegt oder in welcher Art die Frage formuliert ist. Schlüsselwörter, die

zur Lösung der Problemstellung beitragen, können den Arbeitsprozess erleichtern. Zuletzt sollte dem Satzbau Beachtung geschenkt werden. Ist es ein langer Satz mit vielen Nebensätzen oder Einschüben, ist der Verstehensprozess erschwert.
Die Art und Anzahl der Rechenoperationen fallen unter den mathematischen Faktor. Ebenso die Komplexität der zu rechnenden Aufgabe und der damit verbundene Rechenaufwand. Die Größe der Zahlen spielt zuletzt auch eine Rolle in Bezug auf die Qualität von Sachrechenaufgaben. Sie muss dem Lernstand der Kinder entsprechen, damit ein effektives und nachhaltiges Lernen erfolgen kann. Wie dieses Lernen im Detail aussehen muss, damit es nachhaltig ist, wird im folgenden Kapitel näher beschrieben.

5.3. Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht (Ruf/Gallin)

Die zu Beginn dieser Dissertation aufgezeigte Darstellung des Unterrichts, wird ebenfalls von Peter Gallin und Urs Ruf – zwei Pädagogen aus der Schweiz – bemängelt: Auch sie sehen die großen Ängste und Aggressionen sowie die starke Überforderung der SuS im Unterricht.[143] Die bis dato weitverbreitete *eindimensionale Didaktik*[144] steht dem Lernzuwachs der SuS im Wege. Die Leistungen der SuS werden nur an dem Rechenerfolg gemessen. Das bedeutet, dass nur die Schnelligkeit und die Fehlerlosigkeit bei der Bearbeitung von Aufgaben als Qualitätsmerkmale gesehen werden. Dies führt zu Stress, der die Lernenden während ihrer gesamten Schulzeit begleitet. Die enorme Stofffülle, der starke Notendruck sowie die daraus resultierende Selektion lässt kaum einen SuS den Mathematikunterricht als positive Erfahrung wahrnehmen. Die reine Fokussierung auf das erworbene Wissen ohne Berücksichtigung des Einzelnen macht letztendlich alle Beteiligten des Unterrichts austauschbar. So kann jede Lehrkraft, die ihr Konzept nur abspult, vor jede beliebige Lerngruppe gestellt werden und auch die Lerngruppe ist austauschbar, wenn sie nur abgespultes Wissen konsumieren soll. Der Lernerfolg bleibt bei solchen Konzepten auf der Strecke. Aufgrund dieser miserablen Situa-

[143] vgl. Ruf/Gallin (1998), S. 9.
[144] vgl. Ruf/Gallin (2005b), S.8.

tion entwickelten die beiden o.g. Pädagogen das dialogische Lernen, welches im Folgenden kurz vorgestellt und erläutert wird.
Dieses dialogische Lernen stellt entgegen der bisherigen Auffassung von Unterricht, den SuS als Individuum (Ich) in den Fokus. Es geht nicht mehr um die Lehrkraft als Wissensvermittler, sondern um das Kind, welches die Möglichkeit erhält, sich mit dem neuen Lernstoff auf eigenen Wegen auseinanderzusetzen. Ruf/Gallin sprechen von der *Kunst des Zuhörens*[145] statt von der *Kunst des Erklärens.*

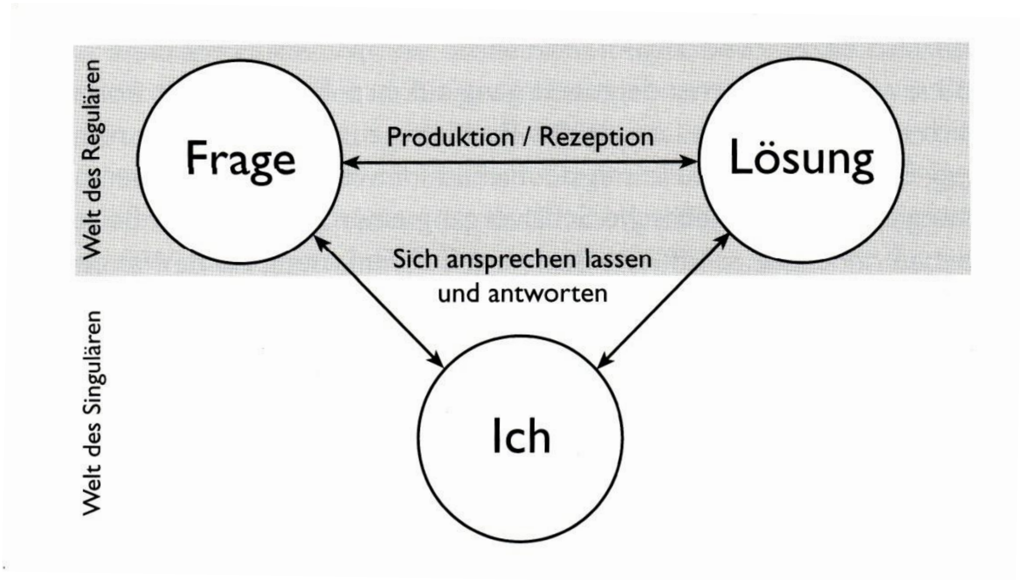


Abbildung 15: Singuläre und reguläre Welt nach Ruf/Gallin

Es geht darum, ein positives Grundgefühl zu erzeugen, sodass jeder SuS sich auf den Aufbau seiner individuellen Fachkompetenz konzentrieren kann. Dies geschieht durch ein offenes Unterrichtskonzept, dessen Ausgang nicht vorher festgelegt wird. Der dabei stattfindende Austausch setzt verschiedene Bereiche voraus, die in einen Dialog treten können. Ruf/Gallin sprechen in diesem Zusammenhang von dem Dialog zwischen der *singulären Welt* und der *regulären Welt*.

[145] vgl. Ruf/Gallin (2005a), S.24ff.

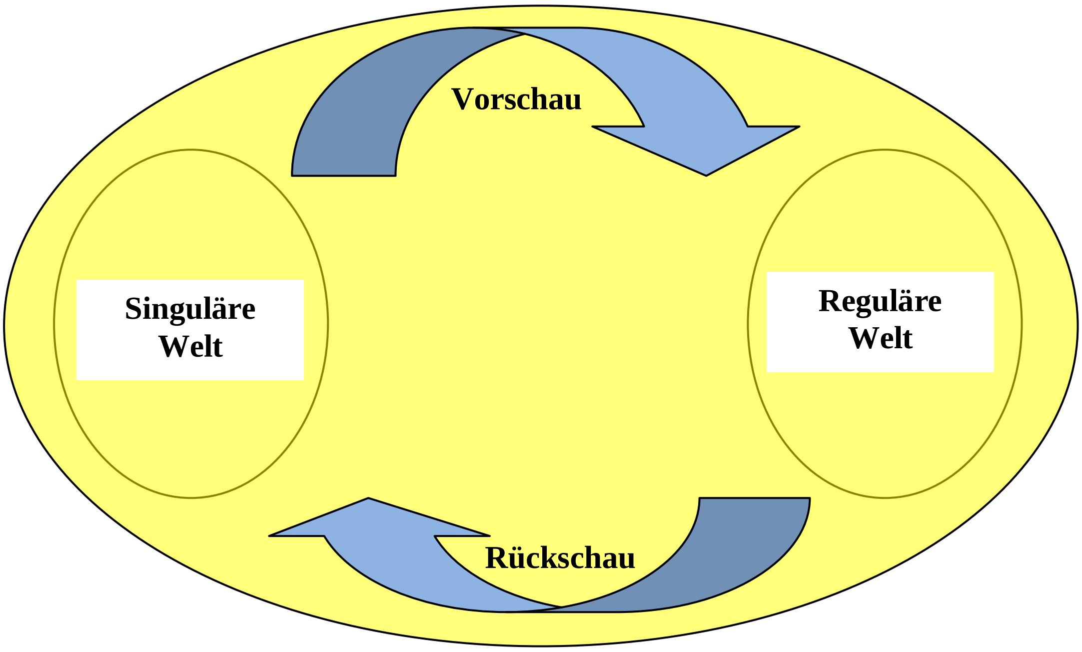


Abbildung 16: Vorschau und Rückschau nach Ruf/Gallin

Als *singuläre Welt* bezeichnen sie den Anfang des Lernprozesses. Hier soll das Kind lernen, sein Selbstvertrauen aufzubauen und sich dem Stoff auf seinem Weg – durch sein Denken und Handeln – zu nähern. In diesem Bereich geht es darum, bereits vorhandenes Wissen zu aktivieren.

Die *reguläre Welt* bezeichnet den Lernstoff. Im Rahmen dieser Arbeit stellt zum Beispiel das Kapitel 4 den Bereich der regulären Welt dar. Im Gegensatz zu den bisherigen Auffassungen wird beim dialogischen Lernen nicht die reguläre Welt betont, sondern die Wege des Lernenden hin zu dieser. Diese Wege zwischen den beiden Welten ist der Bereich des Divergierenden. Hier geht es um den bereits erwähnten Austausch. Er ermöglicht einen Zugang zum Regulären. Da das Kind in der singulären Welt sein Selbstvertrauen aufbaut, kann er ohne Angst dem Bereich des Regulären gegenübertreten. Der Mensch (singuläre Welt) und der Stoff (reguläre Welt) sind gleichwertige Pole. Deswegen stehen sie auch nicht im einseitigen, sondern im wechselseitigen Austausch – die sogenannte Vor- und Rückschau – zueinander. Durch diese Wechselwirkung wird eine Spannung erzeugt, welche das Lernen erst ermöglicht.

Diese Polarität zwischen den beiden Welten lässt sich auch auf die Polarität der beiden Gehirnhälften zurückführen: Beide Gehirnhälften sind elementar, doch einzeln nutzen sie nur wenig. Nur durch die Verbindung beider durch den Fasciculus arcuatus, welcher die Daten übermittelt, können die beiden Hälften eine produktive Leistung erbringen (vgl. Kapitel 2.2.1). Diese Wechselwirkung lässt sich mittels der nachfolgenden Abbildung zeigen.

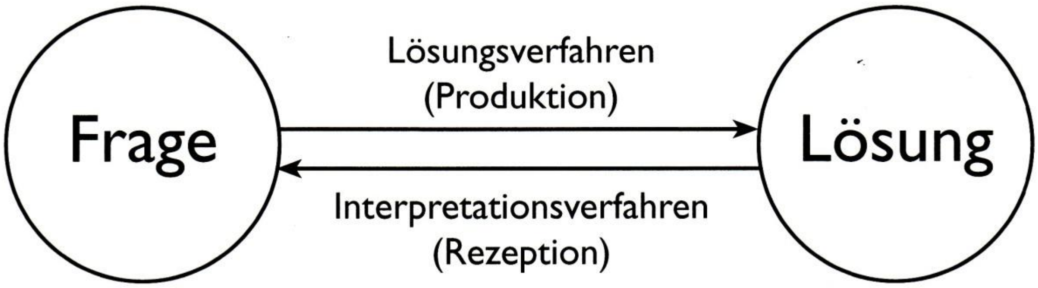


Abbildung 17: Wechselwirkung zwischen Produktion und Rezeption nach Ruf/Gallin

Auch hier zeigt sich: Das Kind möchte sich die Welt des Regulären erschließen. Dazu wird bei herkömmlichen Konzepten der Stoff lediglich vermittelt und überprüft. Die Lehrkraft übernimmt dabei beide Funktionen: Er ist derjenige, der die Aufgaben stellt, der die Vermittlung organisiert und das Wissen überprüft. Das Kind muss die Aufgaben lösen und ausführen, was die Lehrkraft von ihm erwartet. Die Bewertung der Lehrkraft muss es hinnehmen. Diese Einseitigkeit bezeichnen Ruf/Gallin als eindimensionale Didaktik mit nahezu keinem Lernerfolg.

Um die Spannung zwischen den beiden Polen sinnvoll zu nutzen, sind vier Instrumente notwendig: Kernidee, Auftrag, Reisetagebuch und Rückmeldung. Die nachfolgende Abbildung zeigt das Zusammenspiel dieser Faktoren.

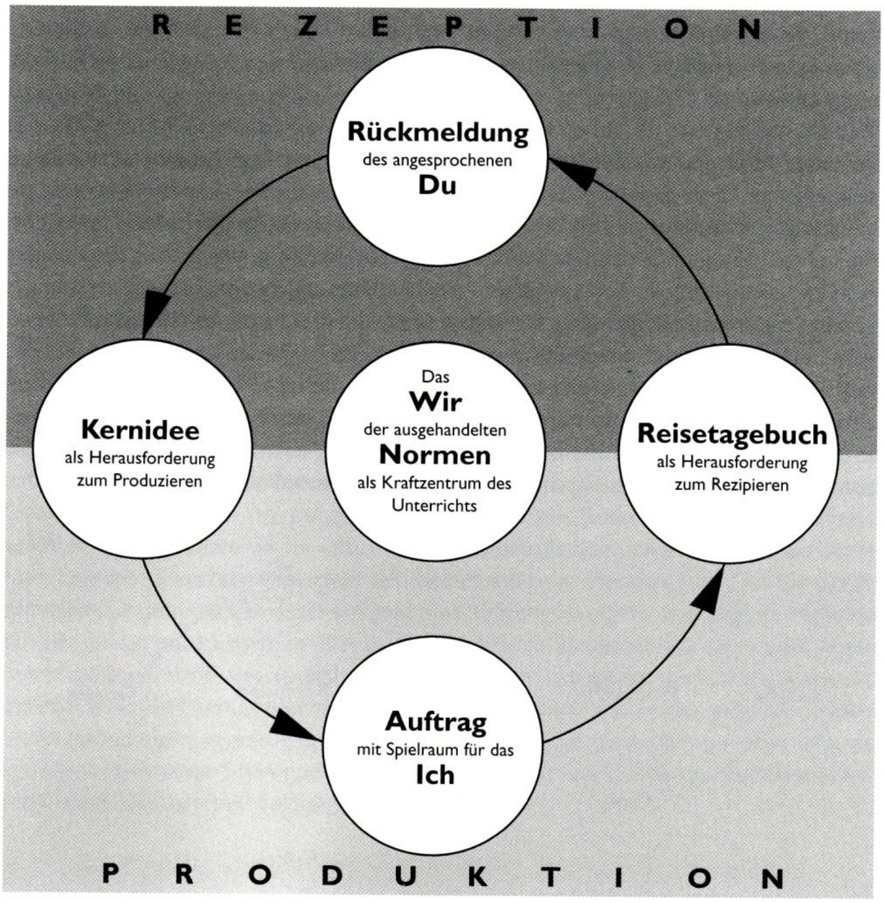


Abbildung 18: Zusammenspiel von Rezeption und Produktion nach Ruf/Gallin

Der Ursprung dieses Kreislaufes liegt in der Kernidee. Sie meint die Aufforderung an die Lehrkraft, den SuS von ihren persönlichen Erfahrungen in Bezug auf den Unterrichtsstoff zu berichten. In dieser Phase geht es darum, Ängste der SuS abzubauen, indem sich die Lehrkraft schützend vor den Lernenden stellt, so dass er nicht von der regulären Welt überrollt wird. Eine Kernidee ist sehr persönlich und kann nicht von Klasse zu Klasse bzw. von Lehrkraft zu Lehrkraft ausgetauscht werden. Durch eine Kernidee präsentiert die Lehrkraft einen durch sie persönlich reduzierten fachlichen Inhalt. Die Kernidee weckt im Kind das Interesse, sich auch über diesen Stoff auszutauschen. Dabei ist es wichtig, dass auch negative Erfahrungen ihre Berücksichtigung finden. Dieses Erzählen nennen Ruf/Gallin den Auftrag. Neben dem Erzählen ist auch das gemeinsame Erproben sowie der Austausch darüber Bestandteil dieser Phase. Nach der intensiven Beschäftigung mit dem Lernstoff, welche nur im regelmäßigen Austausch stattfindet, werden die Erfahrungen und neuen Erkenntnisse in einem Reisetagebuch festgehalten. Der gesamte Bereich von der Kernidee zum Reisetagebuch wird als Produktion bezeichnet. Durch das Reisetagebuch sind die SuS in der Lage, mit anderen über den

Stoff zu sprechen. Es findet eine Rückmeldung statt über das, was die Auseinandersetzung mit dem Stoff bei ihnen bewirkt hat. Diese sogenannte Rückschau schließt den Kreis, in dem der anfangs in den Raum gestellte Inhalt mittels der neuen Erkenntnisse betrachtet wird. Er führt jedoch auch gleichzeitig zu neuen Fragen, die eine weitere Kernidee beinhalten und lässt auf diese Art und Weise den Kreislauf von vorne beginnen. Lernen ist somit ein ständig andauernder Prozess, der das bereits Erlernte in Bezug zu neuen Bereichen setzt. SuS sind dann in der Lage, verfügbares Wissen bei neuen Problemen zielgerichtet und sinnvoll einzusetzen. Durch dieses nachhaltige Lernen werden fachliche Gebiete verstanden und eine Vernetzung der Gebiete ermöglicht.
In diesem Zusammenhang muss des Weiteren zwischen der *Sprache des Verstehens* und der *Sprache des Verstandenen*[146] unterschieden werden. Die Sprache des Verstehens ist in der Auseinandersetzung mit dem neuen Stoff von Bedeutung. Sie bezeichnet die verschiedenen Gespräche über den Inhalt sowie den Austausch von Erfahrungen. Umfasst werden hier alle Formen der eingesetzten Sprache während der Vorschau. Die Sprache des Verstandenen hingegen bezieht sich auf die Rückschau. Es ist die Sprache, die verwendet wird, um das Erlernte zu erklären bzw. zu definieren - wie die in Kapitel 4 verwendete Fachsprache.
Um diese Fachsprache zu verstehen und richtig anwenden zu können, bedarf es einiger Kompetenzen. Diese Fähigkeiten und Fertigkeiten werden im folgenden Kapitel näher ausgeführt und erläutert.

[146] vgl. Ruf/Gallin (2005a), S. 25f

5.4. Fachsprachenkompetenz

An Themen der Mathematik, die das eben erläuterte dialogische Lernen ermöglichen, sollen die SuS im Mathematikunterricht an Fachsprachenkompetenz herangeführt werden. Fachsprachenkompetenz umfasst die formale/symbolische Sprache der Mathematik (vgl. Kapitel 1.1). Obwohl diese Sprache bereits seit Jahrhunderten verwendet wird und im Allgemeinen als sehr präzise und international verständlich gilt, wird sie den Anforderungen der aktuellen Sprache im Unterricht kaum gerecht (vgl. Ruf/Gallin). Die mathematische Fachsprache, welche häufig durch den Einsatz von Lehrbüchern, Formelsammlungen und auch durch konkrete Anweisungen und Tafelbilder zum Einsatz kommt, wird in diesen Fällen nicht zielgerichtet eingesetzt und kann somit keine Begriffsbildung seitens der SuS unterstützen. Im Mathematikunterricht sollte vielmehr die Sprache in ihrer ursprünglichen Form - als Mittel der Kommunikation - verwendet werden. SuS benutzen selten von sich aus Fachtermini, noch können sie die jahrhundertelange Entwicklung der mathematischen Fachsprache in kürzester Zeit nachvollziehen. Die Entwicklung von Fachsprachenkompetenz erfordert eine Neugestaltung des Unterrichts nach den folgenden Gesichtspunkten:

(1) Herausfordernde Lernsituationen, die u.a. auch die Verwendung von Fachsprache erfordern
(2) Sprache als zentraler Kern
(3) Korrekter Einsatz von Fachsprache seitens der LuL

(1) Diese Lernsituationen enthalten mathematische Problemstellungen, welche die SuS eigenständig bearbeiten. Dabei können Sprech- und Schreibanlässe sehr einfach durch die folgenden – und weitere – Methoden geschaffen werden:
   - Reisetagebücher (Gallin/Ruf)
   - Rechenkonferenzen (Schütz 1994, Franke 2001)
   - Dokumentation von Problembearbeitungen (Selter 1996 u. a.)

(2) Durch Sprache als zentraler Kern kann Fachsprache entwickelt werden. In den vielen Gespräche bzw. Verschriftungen von SuS während der Vor- und der Rückschau werden die Lernenden feststellen, dass die Verwendung eines Fachbegriffes mitunter einen Text sehr viel kürzer machen kann. Aber auch die Verwendung von Neo-

logismen in der Fachsprache kann die Entwicklung der SuS unterstützen, sofern sie in Unterrichtsgesprächen durch alle Beteiligten kritisch betrachtet werden.

(3) Die Entwicklung von Fachsprachenkompetenz bei SuS setzt den korrekten Einsatz von Fachsprache bei LuL voraus. Es ist notwendig, dass der Lehrkraft die Vielfalt fachlicher und fachdidaktischer Begriffe bewusst ist. Da jedoch vielen Lehrkräften diese Vielfalt nicht bewusst ist und ihnen der Überblick über die einzelnen Begrifflichkeiten fehlt, stellt gerade dieser Punkt ein großes Manko in der aktuellen Unterrichtssituation dar. Begriffe aus dem Kapitel 4 – wie Minuend oder Subtrahend – werden häufig nicht korrekt verwendet.

5.5. Lehrplanbezug

In diesem Kapitel wird der mathematische Teil des Lehrplans für die Grundschulen in NRW in den Blick genommen. Es soll gezeigt werden, dass auch hier der sprachliche Aspekt verankert ist und somit der Sprache im Mathematikunterricht große Bedeutung beigemessen werden muss.

Der aktuelle Lehrplan[147] des Faches Mathematik in der Grundschule formuliert im Gegensatz zu vorherigen Fassungen keine konkreten Unterrichtsgegenstände mehr, sondern Kompetenzerwartungen, die sich in je vier prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen gliedern. Diese acht Bereiche und die ihnen zugeordneten Schwerpunkte gelten als verbindlich und sollen bei der Unterrichtsgestaltung integrativ zusammenwirken. Der Lehrplan ist somit angepasst an die Ergebnisorientierung des Unterrichts.
Im Folgenden sollen die prozessbezogenen Kompetenzen ausführlich erläutert werden, bevor sich die inhaltlichen Kompetenzen, vertreten durch den Bereich *Größen und Messen*, der das Sachrechnen meint, anschließen.
Die **prozessbezogenen Kompetenzen** sollen in der gesamten Grundschulzeit geschult werden, da ihnen für ein erfolgreiches Lernen und Nutzen von Mathematik große Bedeutung zukommt. Nur durch die Anwendung prozessbezogener Kompetenzen kann ein

[147] Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den Lehrplan aus dem Jahr 2012 und die Informationen zum Lehrplan, die vom Ministerium für Schule und Weiterbildung herausgegeben wurden.

tiefgreifendes Verständnis der inhaltsbezogenen Kompetenzen gewährleistet werden. Um den Erwerb prozessbezogener Kompetenzen zu unterstützen, ist eine lebendige Auseinandersetzung mit der Mathematik unerlässlich.
Sachrechnen bietet den Vorteil, dass es alle prozessbezogenen Kompetenzen schult, die im Folgenden einzeln erläutert werden.

1) Problemlösen/Kreativsein

Dieser Bereich fordert, dass sich die SuS mit Problemstellungen auseinandersetzen. Dabei sollen sie Zusammenhänge erschließen, Vermutungen anstellen, systematisch probieren, reflektieren und prüfen, übertragen, variieren und erfinden. Das sollen die SuS bis zum Ende der vierten Klasse trainieren:
Die SuS sollen gegebenen Problemstellungen Informationen entnehmen, die für die Lösung relevant sind. Diese Fähigkeit nennt das Ministerium für Schule und Weiterbildung **Erschließen**.

Bei der Problemlösung soll zunehmend systematisch und zielorientiert vorgegangen werden, die Einsicht in Zusammenhänge sollen die SuS sich dabei zunutze machen. Diese Kompetenz wird als **Lösen** bezeichnet.

Reflektieren und Überprüfen impliziert die Überprüfung von Ergebnissen auf ihre Angemessenheit. Die SuS sollen befähigt werden, Fehler zu finden und zu korrigieren. Des Weiteren sollen verschiedene Lösungswege verglichen und bewertet werden.

Die Kinder sollen lernen, ihre Vorgehensweisen auf ähnliche Sachverhalte zu **übertragen**.

Variieren und Erfinden heißt die Fähigkeit der Kinder, Aufgaben und Fragestellungen selbst zu erfinden, bspw. durch Modifizierung oder Fortsetzung von bereits bekannten Aufgaben.

Bei der Bearbeitung von Problemen sollen die Kinder geeignete mathematische Regeln, Algorithmen und Werkzeuge aus ihrem bekannten Repertoire auswählen und angemessen nutzen. Diese Kompetenz wird als **Anwenden** bezeichnet.

2) Modellieren

Dass die SuS Mathematik auf konkrete Aufgabenstellungen aus ihrer Erfahrungswelt anwenden, Sachsituationen durchdringen und in ein mathematisches Modell übertragen, wird als modellieren bezeichnet. Der Modellierungskreislauf als Teil dieses Prozesses wurde bereits ausführlich beschrieben (siehe Kapitel 5.2.2). Der Bereich des Modellierens ist mit den folgenden Kompetenzen verknüpft:

Zu Beginn steht das **Erfassen**. Es müssen Informationen aus Sachsituationen bzw. Sachaufgaben entnommen werden, wobei zwischen relevanten und irrelevanten Informationen zu unterscheiden ist.

Die Übersetzung von Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell und die anschließende Lösung mithilfe des Modells wird unter dem Begriff **Lösen** zusammengefasst.

Validieren ist die Kompetenz, das Rechenergebnis wieder auf die Sachsituation zu beziehen und auf Evidenz zu prüfen.

Zuordnen nennt das Ministerium für Schule und Weiterbildung die andere Richtung der Bearbeitung, nämlich eine passende Problemstellung zu einem gegebenen mathematischen Modell zu finden und eigene Fragestellungen zu entwickeln, die in einen Rahmen von Sachsituationen eingebettet sind.

3) Argumentieren

Der Bereich des Argumentierens verlangt, dass die SuS Vermutungen über mathematische Zusammenhänge anstellen und diese begründen. Ebenso sollen sie Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen erklären. Dies soll sowohl sprachlich als auch handelnd und zeichnerisch geschehen.

Die SuS sollen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten anstellen. Diese Fähigkeit fällt unter den Begriff **Vermuten**.

Bei dem **Überprüfen** sollen diese Vermutungen anhand von Beispielen getestet werden, um zu hinterfragen, ob diese Vermutungen und die daraus resultierenden Lösungen und Aussagen zutreffend sind.

Folgern meint die Bestätigung oder Widerlegung der Vermutungen anhand von Beispielen. Die SuS sollen ebenso befähigt werden, allgemeine Überlegungen zu entwickeln oder gegebene Überlegungen nachzuvollziehen.

Dass die Kinder Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten anhand von Beispielen erklären und Begründungen anderer nachvollziehen sollen, wird unter dem Oberbegriff **Begründen** festgelegt.

4) Darstellen/Kommunizieren

Mit Darstellen/Kommunizieren ist gemeint, dass die Kinder eigene Denkprozesse oder Vorgehensweisen angemessen so darstellen, dass sie für andere nachvollziehbar sind. Sie sollen ebenso üben, sich mit anderen über ihre Vorgehensweisen verbal auszutauschen – mündlich, schriftlich, oder auch mithilfe anderer Darstellungsformen wie Tabellen, Skizzen o.Ä.. Zunächst soll diese Kommunikation in der Umgangssprache erfolgen, die allerdings im Laufe der Zeit zunehmend durch die fachgebundene Sprache mit Fachtermini abgelöst werden soll.

Die SuS sollen ihre Vorgehensweisen, Lernerfahrungen und Arbeitsergebnisse z.B. in Lerntagebüchern **dokumentieren**.

Präsentieren und Austauschen ist eine sehr wichtige Kompetenz. Die Kinder sollen lernen, geeignete Darstellungsformen und Präsentationsmedien wie z.B. Folien oder Plakate zu entwickeln und zu nutzen, um ihre Lösungswege, Ideen und Ergebnisse nachvollziehbar darzustellen. Rechenkonferenzen eignen sich gut, um diese Kompetenz zu schulen.

Auch das **Kooperieren und Kommunizieren** ist in einer Gesellschaft, die zunehmend individueller wird, eine ernstzunehmende Fähigkeit. Sie meint, dass die Kinder umfangreichere Aufgaben gemeinsam bearbeiten sollen. Dazu ist es notwendig, Verabredungen zu treffen und eigene und fremde Sichtweisen zu verknüpfen.

Die SuS sollen bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte passende Fachtermini, mathematische Zeichen und Konventionen verwenden. Dies wird zusammengefasst unter: **Fachsprache verwenden**.

Zwischen Darstellungen wechseln meint, dass die SuS lernen sollen, eine Darstellungsform in eine andere zu übertragen, bspw. ein Diagramm in eine Tabelle.

Fazit:

Die Sprache im Mathematikunterricht ist von essentieller Bedeutung. Ohne Sprache ist das Lernen nicht nachhaltig. Die Entwicklung von Fachsprachenkompetenz setzt voraus, dass die Lehrkraft ebendiese besitzt. Ferner haben LuL die Aufgabe, herausfordernde Lernsituationen (Kernideen) zu schaffen, welche durch den sprachlichen Austausch ergründet werden können. Die in Kapitel 5 aufgezeigte Komplexität von Sprache beim Erwerb der schriftlichen Subtraktion und der Bearbeitung von Sachrechenaufgaben zeigt, welche große Bedeutung der Sprache im Mathematikunterricht zukommt. Im folgenden sechsten Kapitel wird die empirische Studie vorgestellt, welche sich damit befasst, die Fachsprache der SuS zu untersuchen. Im siebten Kapitel werden dann aufgrund der bis dato erarbeiteten Grundsätze zwei Unterrichtskonzeptionen vorgestellt, die der Sprache als zentrales Medium gerecht werden.

6. Empirische Untersuchung zur Bedeutung der Sprache im Rahmen der schriftlichen Subtraktion und der Bearbeitung von Textaufgaben

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die theoretischen Voraussetzungen für die nachfolgend erläuterte empirische Untersuchung aufgezeigt. Diese basiert grundlegend auf den von Jürgen Rost[148] aufgeführten Gründen für eine empirische Untersuchung:

- Gründliche Beschreibung und Ordnung der Phänomene dieser Welt.
- Aufstellen eines Regelsystems, durch welches diese Phänomene beschrieben und vorausgesagt werden können.
- Verwendung von Forschungsergebnissen zur Verbesserung des Verhaltens.

Besonders der letzte Punkt ist für diese Dissertation im Bereich der didaktischen Forschung von Bedeutung. Sollte die zugrundeliegende Hypothese der Untersuchung, welche im nächsten Unterkapitel ausführlich dargestellt wird, bestätigt werden, so hätte dies weitreichende Folgen für die Konzeption von Unterricht (vgl. Kapitel 8).

Eine empirische Untersuchung basiert immer auf den Erfahrungen der Teilnehmer. Das Wort *Empirie* wurde von dem griechischen Wort *εμπειρία* (*empeiria)*[149] abgeleitet und wird mit dem Wort Erfahrung übersetzt. Die empirische Forschung ist notwendig, um Behauptungen über wissenschaftliche Phänomene zu überprüfen. Da in der Regel eine solche Überprüfung nicht direkt möglich ist, müssen Indikatoren festgelegt werden, deren Auswertung eine Verifizierung oder Falsifizierung der Hypothese ermöglichen. Für die vorliegende Arbeit bedeutet dies, dass der Zusammenhang zwischen mathematischer und sprachlicher Fähigkeit z.B. nicht direkt durch eine Befragung konkret ermittelt werden kann, sondern dass durch die strenge Überprüfung verschiedener Faktoren innerhalb unterschiedlicher Aufgaben (mathematisches Denken, sprachliches Verständnis) der Zusammenhang zwischen diesen Bereichen herausgearbeitet werden muss und somit die Behauptung erst bestätigt oder widerlegt werden kann. Hypothesen, die durch strenge Prüfungen bestätigt wurden, können dementsprechend später für Erklärungen und Problemlösungen herangezogen werden. Häufig widerlegte Behauptungen hingegen werden verworfen und aussortiert.

---

[148] siehe dazu Rost 2012.
[149] vgl. Endruweit/Trommsdorff (1989), S. 143, 145.

6.1. Vorbereitung der Untersuchung

Die Vorbereitung der durchgeführten Untersuchung umfasst insgesamt fünf Arbeitsschritte, die im Folgenden näher erläutert werden. Im Fokus stehen die Entwicklung und Formulierung der zugrundeliegenden Hypothese sowie die zur Erforschung herangezogenen Untersuchungsmethoden. Darüber hinaus werden kurz der theoretische Rahmen sowie die Operationalisierungsphase beschrieben. Dieses Unterkapitel schließt mit der Darstellung der Untersuchungseinheit.

6.1.1. Entwicklung und Formulierung der Problemstellung

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, waren hauptsächlich Erfahrungen ausschlaggebend für die Auseinandersetzung mit dieser Thematik. Es häuften sich die Beobachtungen, dass SuS mit Defiziten im Bereich Sprache auch in der Mathematik schlechtere Leistungen erbrachten. So fiel es solchen Kindern z.B. zunehmend schwerer, sich vom zählenden Rechnen zu lösen. Statt beim Lösen mathematischer Probleme auf heuristische Strategien zurückzugreifen, verwendeten sie lediglich zählende Strategien. Diese erfordern jedoch ein enormes Maß an Konzentration, um fehlerfreie Ergebnisse zu erzielen. Dieser Belastung konnten viele SuS aber nicht dauerhaft standhalten. Des Weiteren lassen sich in der Literatur bereits seit Ende der 1970er Jahre Nachweise finden, dass der Sprache im Bereich Mathematik eine größere Bedeutung beizumessen ist als zunächst angenommen.[150] Diese Forderung setzte sich in Schriften von Pimm[151] Ende der 1980er Jahre fort und wurde besonders von Ruf und Gallin[152] sowie Maier und Schweiger[153] Ende der 1990er Jahre vertreten. Auch Lorenz[154] schloss sich zu Beginn des neuen Jahrtausends diesen Meinungen an. Alle Autoren rücken die Kommunikation über mathematische Probleme in den Mittelpunkt, da hauptsächlich über Gespräche Einsichten in Zusammenhänge vermittelt werden können. Automatisierte Rechenfertigkeiten führen nicht zum Verständnis mathematischer Inhalte. Dies hat jedoch zur Folge, dass die Unterschiede zwischen den verschiedenen Sprachen (Alltags-, Bildungs- und Fachsprache, vgl. Kapitel 1.1) stärker berücksichtigt werden müssen. Die Merkmale

[150] siehe dazu Halliday 1978.
[151] siehe dazu Pimm 1987.
[152] siehe dazu Ruf/Gallin 1998.
[153] siehe dazu Maier/Schweiger 1999.
[154] siehe dazu Lorenz 2007.

mathematischer Fachsprache wurden besonders von Maier und Schweiger untersucht und richtungsweisende Konsequenzen für die Mathematik abgeleitet. So zeichnet sich die mathematische Fachsprache durch ihre Präzision und Allgemeingültigkeit aus. Während Aussagen in der Alltagssprache je nach Kontext variieren können, wird in der Mathematik hingegen ganz präzise formuliert.[155] Zudem werden Begriffe in der Mathematik verwendet, denen in der Alltagssprache eine andere Bedeutung zukommt oder die im Alltag gar nicht verwendet werden (vgl. Kapitel 3.6). So muss SuS im Unterricht der Raum gegeben werden, sich dieses Vokabular anzueignen, um die Sprache der Mathematik zu verstehen. Neben der Entwicklung in der Fachliteratur waren als letzter Aspekt noch Studien ausschlaggebend, sich mit dieser Thematik eingehend zu beschäftigen. Diese Studien belegten die anfangs erwähnten Beobachtungen und die didaktische Entwicklung. So hat u.a. eine Untersuchung ergeben, dass sich Sprachkompetenz stärker auf die mathematischen Leistungen auswirkt als andere Faktoren wie z.B. sozioökonomischer Status, Mehrsprachigkeit, Migrationshintergrund und/oder auch Lesekompetenz.[156] Des Weiteren belegt der OECD Bildungsbericht von 2007, dass Deutschland im weltweiten Vergleich einen recht starken Zusammenhang zwischen migrationsbedingter Sprachkompetenz und der jeweiligen Mathematikleistung aufweist.[157]
Aufgrund der dargestellten Entwicklung wurde das Thema für diese Arbeit ausgewählt und die Problemstellung für die empirische Untersuchung wie folgt formuliert:

Welche Indizien gibt es für einen möglichen Zusammenhang zwischen dem mathematischen Verständnis und der sprachlichen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern?

6.1.2. Theoretischer Rahmen

Die im vorangegangenen Unterkapitel geschilderte Entwicklung hatte auch Auswirkungen auf die Lehrpläne des Landes Nordrhein-Westfalen der einzelnen Schulformen. So hat das Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW mit den aktuellen Lehrplänen des Faches Mathematik diesen Forderungen Rechnung getragen und die Sprachförderung durch die prozessbezogenen Kompetenzen in diesem Bereich berücksichtigt (vgl.

[155] vgl. Maier/Schweiger (1999), S. 12.
[156] vgl. Prediger/Renk/Büchter/Gürsoy/Benholz (2013).
[157] OECD 2007, 104ff.

Kapitel 5.5). Trotz dieser Vorgaben für die Lehrkräfte bleiben laut Studien die Defizite im mathematischen Verständnis bestehen. Sicherlich ist die noch deutlich zu geringe Berücksichtigung der inhaltsbezogenen Kompetenzen im Unterricht ein wichtiger Baustein dieser Misere. Auf der anderen Seite sind aber auch noch Ursachen in der Entwicklung des mathematischen Verständnisses unerforscht. So ist beispielsweise noch wenig bekannt über die konkreten sprachlichen Hindernisse, die ein mathematisches Verständnis blockieren oder auch die sprachlichen Mittel, die notwendig sind, um mathematisches Verständnis zu ermöglichen.

Schriftlich formulierte Mathematikaufgaben enthalten neben den mathematischen Problemen besonders viele sprachliche Hindernisse (vgl. Kapitel 5). Deshalb wurde für die Untersuchung eine Aufgabe aus dem Bereich der Sachrechenaufgaben gewählt. Diese wurde bewusst leicht verständlich formuliert, um sprachliche Hindernisse als Grund für die fehlerhafte Bearbeitung der Aufgabe weitestgehend auszuschließen. Die mündliche Sprachkompetenz soll durch den Bereich des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus‘ berücksichtigt werden. Die Aufgabe zeichnet sich dadurch aus, dass nur sehr wenig Fachvokabular notwendig ist, um sie korrekt zu lösen. Besonders aufgrund der steigenden Anzahl mehrsprachiger SuS werden sprachliche Herausforderungen im Mathematikunterricht zu einem immer wichtiger werdenden Thema. Um diese SuS individuell fördern zu können, müssen die Ursachen für die Probleme erforscht werden.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung werden genutzt, um Konzepte zur Förderung mathematischen Lernens zu entwickeln. Die Kommunikation über mathematische Probleme wird dabei in das Zentrum des Unterrichtes gerückt. Durch den Austausch über mathematische Probleme kann ein individueller Lernfortschritt erreicht werden, da Lösungswege anderer nachvollzogen, korrigiert oder verifiziert werden müssen.

6.1.3. Konzeptionelle Phase

Nach der Festlegung der Fragestellung des Forschungsprojektes sowie der Erörterung des theoretischen Rahmens konnte die Auswahl der Methoden erfolgen. In der Wissenschaft gibt es zahlreiche Methoden und Verfahren, welche zur Realisierung eines Forschungszieles verwendet werden können. Man unterscheidet zwei Kategorien, die qualitativen und die quantitativen Forschungsmethoden. Die Entscheidung für die eine oder andere Richtung ist dabei von mehreren Faktoren abhängig.

Um die in der vorliegenden Untersuchung verwendete Methode besser in den Gesamtkontext einordnen zu können, wird zunächst ein Überblick über die qualitativen und quantitativen Forschungsmethoden gegeben. Dass zunächst die qualitativen und anschließend die quantitativen Methoden aufgeführt werden, beinhaltet keineswegs eine Trennung dieser Methoden. Es ist durchaus auch möglich, dass eine Kombination dieser beiden Richtungen verwendet wird .[158] Im Fokus stehen an dieser Stelle jedoch die Unterschiede, um die Auswahl der zugrundeliegenden Untersuchungsmethode zu begründen.

Qualitative Forschungsmethode

Im Mittelpunkt der qualitativen Forschung steht der Mensch selbst. Es geht darum, die jeweiligen Sicht- bzw. Verhaltensweisen von Studienteilnehmern zu untersuchen. Auf diese Art und Weise sollen Ursachen für bestimmte Verhaltensweisen aufgezeigt und die Möglichkeit gegeben werden, eben dieses Verhalten zu verstehen.[159] Dabei werden starre theoretische Vorannahmen und standardisierte Untersuchungsinstrumente in der Regel vermieden, um möglichst repräsentative Ergebnisse zu erhalten. Es wird vielmehr der direkte Kontakt zu den Individuen, z.B. über Interviews, gesucht. Deshalb finden qualitative Untersuchungen häufig auch in der gewohnten Umgebung (holistische Herangehensweise) und nicht im Labor statt. Auch dieses Charakteristikum soll Verfälschungen reduzieren, da die wirklichkeitsnahe Untersuchung angeblich zu realistischeren Ergebnissen führt. Grundsätzlich zeichnen sich qualitative Untersuchungsmethoden folglich durch ihre sehr viel offenere Zugangsweise zum Forschungsgegenstand aus. Diese Offenheit und Flexibilität im Forschungsprozess soll der Entdeckung neuer Phänomene oder Sachverhalte dienen. Dieser Offenheit unterliegen auch die theoretischen Grundsätze und Erhebungsinstrumente. So ist es möglich, jederzeit flexibel auf plötzlich auftretende Ereignisse zu reagieren (emergente Flexibilität).

Die Auswertung der empirischen Daten erfolgt in der qualitativen Untersuchungsmethode interpretativ. Man geht davon aus, dass die Forschungsgegenstände individuell unterschiedlich wahrgenommen werden. Somit ergeben sich für verschiedene Studienteilnehmer in der Regel auch unterschiedliche Bedeutungen.[160] Aus diesem Grund fehlt

---

[158] vgl. Wolf (1995), S. 318.
[159] vgl. Wolf/Priebe (2003), S.26.
[160] vgl. Mayring (2002), S. 25ff.

dieser Form der Untersuchung die Objektivität, was als Nachteil anzuführen ist. Des Weiteren werden der enorme Zeitaufwand als nachteilig aufgeführt.

Quantitative Forschungsmethode

Quantitative Forschungsmethoden gelten als objektiv, da sie in der Regel nach festgelegten Mustern verlaufen. Es geht hauptsächlich darum, eine möglichst große Anzahl von Probanden mit standardisierten Methoden zu befragen. Dies bedeutet, dass die Teilnehmer nicht frei antworten können, sondern nur zwischen vorgegebenen Antworten wählen (z.B. Fragebogen zum Ankreuzen) können. Ihr Ziel ist eine möglichst detaillierte Beschreibung von Verhalten in Form von Modellen, Zusammenhängen und numerischen Daten, um daraus weitere Verhaltensweisen abzuleiten. Das Verhalten wird in messbare Sequenzen zerlegt (elementaristische Vorgehensweise). Die quantitative empirische Forschung will theoriegeleitet Daten sammeln (deduktives Vorgehen), die den Gütekriterien (Objektivität, Reliabilität und Validität) entsprechen müssen und die primär der Prüfung der vorangestellten Theorien und Hypothesen dienen.[161] Im Gegensatz zur qualitativen Forschung wird bei der quantitativen Forschung der fehlende Bezug zum Individuum kritisiert. Diese Forschungsmethoden seien zu abstrakt und realitätsfern.[162] Prinzipiell muss bei der Wahl quantitativer Methoden ein ausreichendes Verständnis über den Untersuchungsgegenstand vorliegen, um Behauptungen über mögliche Zusammenhänge oder ein theoretisches Modell formulieren zu können.

Bei der vorliegenden Untersuchung handelt es sich um eine Mixed-Method-Studie. Das Forschungsproblem wurde wie bei einer quantitativen Untersuchung üblich bereits im Vorfeld festgelegt und mit Hilfe des Fragebogens eine möglichst große Stichprobe untersucht, um repräsentative Ergebnisse zu erzielen. Durch die große Anzahl von Probanden wurde so eine hohe Objektivität erreicht, was die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zulässt. Leider bleibt an dieser Stelle nachteilig zu erwähnen, dass durch die Untersuchung keine Ursachen für die Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und dem mathematischen Verständnis ermittelt werden können, sondern lediglich Daten, die hinsichtlich der Problemstellung interpretiert werden. Dem Entschluss, eine Mixed-Method-Studie durchzuführen, folgten weitere Entscheidungen bezüglich Forschungsdesign, Erhebungstechnik und Auswertungsverfahren. Zum Forschungsdesign gehören

[161] vgl. Röbken/Wetzel (2016), S. 13.
[162] vgl. Saldern (1992), S. 378.

neben dem Untersuchungsziel und dem Studienablauf auch die Rahmenbedingungen. Diese beinhalten sämtliche Versuchsregeln. Die Erhebungstechniken beziehen sich auf die Art und Weise der Informationsgewinnung, während mit Auswertungsverfahren die Analyse der erhobenen Daten bezeichnet wird. In der vorliegenden Studie wurde die Umfrage als Design gewählt und der Fragebogen als Erhebungsinstrument festgelegt. Das Auswertungsverfahren basiert auf einer qualitativen Inhaltsanalyse.

6.1.4. Entwicklung des Untersuchungsinstruments

Das Untersuchungsinstrument soll objektiv, zuverlässig und gültig sein. Mit Objektivität ist gemeint, dass der Fragebogen im Allgemeinen sowie die Fragen im Einzelnen so formuliert sind, dass die verschiedenen Teilnehmer stets zu vergleichbaren Messergebnissen kommen. Diese Unabhängigkeit soll im vorliegenden Fragebogen besonders durch die sprachliche Formulierung der Fragen und Aufgaben berücksichtigt werden. Deshalb waren folgenden Aspekte von Bedeutung:

- Verständlichkeit (kurze, einfache Formulierungen)
- Eindeutigkeit (keine Verständnisfragen)
- Neutralität (keine Suggestivfragen)
- Adressatenbezug
- Keine sprachlichen Hindernisse wie z.B. doppelte Verneinung

Durch die große Anzahl an unterschiedlichen Probanden wird in dieser Studie eine relativ hohe Objektivität erzielt. Das Kriterium der Reliabilität (Zuverlässigkeit) wird durch eine Messwiederholung (Test-Retest-Verfahren) berücksichtigt. Es soll gewährleistet werden, dass die Ergebnisse unabhängig vom Zeitpunkt gleich ausfallen. Alternativ wäre eine Aufteilung der Messung in mehrere Einzelmessungen (Split-Half-Methode) möglich gewesen oder die Überprüfung der Inhalte durch zwei verschiedene Messinstrumente (Paralleltest-Methode). Von diesen Methoden wurde aufgrund des hohen Zeitaufwandes Abstand genommen. Die Messwiederholung erfolgte nach vier Wochen. Alle anderen Kriterien wie Raum, Zeitpunkt und Versuchsleiter blieben wegen der Objektivität der Untersuchung unverändert. Das Kriterium der Validität (Gültigkeit) bedeutet, dass die zu überprüfenden Inhalte vom Messinstrument korrekt erfasst werden. Dabei unterscheidet man zwischen Kriteriumsvalidität und Konstruktvalidität. Unter Krite-

riumsvalidität versteht man den Vergleich mit einem Außenkriterium, während Konstruktvalidität den Vergleich mit anderen Variablen, welche dasselbe Kriterium messen meint.
Neben den Hauptkriterien der Objektivität, Reliabilität und Validität wurden auch die unterschiedlichen Arten von Fragen berücksichtigt. Der vorliegende Fragebogen beinhaltet sowohl offene als auch geschlossene Aufgaben/Fragen. Der erste Teil des Messinstrumentes, der den statistischen Teil beinhaltet besteht aus fünf Angaben. Die ersten drei Informationen (Geschlecht, Alter und Schulform) werden dabei nicht als Frage formuliert, sondern lediglich mit einem Schlagwort gekennzeichnet. Bei der Angabe des Geschlechtes handelt es sich um eine geschlossene Formulierung. Bei der Antwort gibt es zwei Alternativen, jedoch nur eine Antwortmöglichkeit. Sie werden daher als Single-Choice-Aufgaben bezeichnet. Die Information zum Alter wird als offener Aspekt formuliert. Es gibt keine Antwortmöglichkeiten, da die selbstständige Beantwortung vom Probanden erwartet wird. Es handelt sich um eine einfache, nummerische Angabe. Die Angabe der Schulform wird hingegen wieder geschlossen notiert. Zur Beantwortung sind sechs mögliche Antworten vorgegeben. Es handelt sich somit um eine klassische Multiple-Choice-Aufgabe, bei der jedoch nur eine Antwort möglich ist.

Die nächsten beiden statistischen Informationen wurden als Fragen formuliert:

- Welche Sprache/n sprichst du/sprechen Sie zu Hause?
- Bist du/Sind Sie in Deutschland geboren?

Beide Fragen beziehen sich auf die sprachliche Kompetenz der Teilnehmer. Dabei handelt es sich bei beiden Fragen um geschlossene Fragen mit Antwortvorgaben. Im ersten Fall sind neun Antworten gegeben. Acht davon sind konkrete Sprachvorgaben. Die neunte Möglichkeit ist offener formuliert, da nicht alle existenten Sprachen aufgeführt werden können. Bei dieser Frage sind auch Mehrfachnennungen möglich. Aufgrund der Mehrsprachigkeit vieler SuS wurde diese Frage in den statistischen Teil aufgenommen. Die letzte Frage des allgemeinen Teils erfasst den Migrationshintergrund. Es gibt zwei Antwortmöglichkeiten, wobei eine Antwort eine zusätzliche freie Angabe durch den Probanden erfordert. Diese Antwort wurde auch durch eine konkrete Angabe der Dauer konkretisiert.

Der mathematische Teil des Fragebogens, der sich mit den beiden Untersuchungsgegenständen der schriftlichen Subtraktion und der Sachrechenaufgaben beschäftigt wurde durchgängig offen formuliert. Es gibt keine Antwortvorgaben, da den verschiedenen Bearbeitungsmöglichkeiten der jeweiligen Aufgaben Rechnung getragen werden sollte. Die Teilnehmer sind zum aktiven Nachdenken und eigenständiger Bearbeitung aufgerufen, bei dem die Teilnehmer ihre Texte selber formulieren. Eine genaue Betrachtung der Aufgaben erfolgt im Anschluss.

Geschlossene Aufgaben, bei denen die Antworten durch eine Skala angegeben werden müssen wie z.B. *Beurteilen Sie den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe! Von - 1 = leicht bis 5 = schwierig*, wurden nicht verwendet.

Mathematische Aufgaben der empirischen Untersuchung

Untersuchungsgegenstand I: Schriftliche Subtraktion

Aufgabe 1a:

Schreibe(n Sie) eine Anleitung, wie man die folgende Aufgabe rechnet!

$$\begin{array}{r} 704 \\ \underline{-\ 308} \end{array}$$

Bei der Aufgabe handelt es sich um eine schriftliche Subtraktionsaufgabe aus dem Zahlenraum bis 1000. Dieser Zahlenbereich wurde gewählt, damit bereits SuS eines dritten Schuljahres die Aufgabe bearbeiten können. In der dritten Klasse wird der schriftliche Subtraktionsalgorithmus eingeführt und erläutert. Da es sich bei einem Algorithmus um ein striktes Lösungs- bzw. Bearbeitungsschema handelt, muss die Aufgabe in den höheren Klassen nicht an den jeweiligen Zahlenraum angepasst werden. Durch die Reduzierung auf relativ kleine Zahlen wird die Anzahl der Rechenschritte verringert und die Konzentration der SuS kann sich verstärkt auf die Anwendung und Beschreibung des Algorithmus‘ richten: Eine dreistellige Zahl ist ausreichend, um das Verfahren kenntlich zu machen. Eine Vergleichbarkeit ist durch diese Wahl der Aufgabe eher möglich. Darüber hinaus ist jedoch anzumerken, dass es gar nicht notwendig ist, diese Aufgabe mittels des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus zu lösen. Der Minuend und Subtrahend wurden bewusst so gewählt, dass die Differenz durch Anwenden heuristischer Strategien leicht im Kopf gelöst werden kann. Durch die Erfahrung, dass einmal erlernte Schemata häufig ohne weiteres Nachdenken angewendet werden, geht es bei dieser Aufgabe vorrangig darum, ob SuS ein Verständnis für mathematische Aufgaben entwickelt haben oder lieber ein automatisierendes Rechenverfahren anwenden, auch wenn dies zur Bearbeitung der Aufgabe mitunter mehr Zeit in Anspruch nimmt. Wird der Algorithmus bei der Aufgabe angewandt, so werden die einzelnen Schritte genau betrachtet.

Im Folgenden sollen die möglichen Techniken der schriftlichen Subtraktion (vgl. Kapitel 5.1.1) an dieser Aufgabe gezeigt werden. Ferner werden mögliche Antworttexte formuliert. Aufgrund der sprachlichen Vielfalt sei angemerkt, dass an dieser Stelle nicht alle möglichen Antworten exakt aufgeführt werden können. Die angegebenen Texte sind ausführlich formuliert, um eine Grundlage für die spätere Auswertung zu bilden.

Wie Tabelle 9 zeigt, gibt es drei verschiedene Übertragstechniken, die im Folgenden auf die Aufgabe der empirischen Untersuchung bezogen werden. Die Differenzbildungen sind in den möglichen Antworttexten berücksichtigt. Sie werden jedoch zusammengefasst.

Entbündelungstechnik/Borgetechnik

Beispiele:	(a) $7'\,0'4$	(b) $7'\,0'^{10}4^{10}$	(c) $\cancel{7}0^{10}\cancel{4}^{10}$	(d) $\cancel{7}\cancel{0}4$
	$-\,308$	$-\,308$	$-\,308$	$-\,308$
	396	396	396	396

Möglicher Anleitungstext:

- Acht kann nicht von vier subtrahiert werden (Abziehverfahren) bzw. von acht kann nicht bis zur vier ergänzt werden (Ergänzungsverfahren).[163]
- Deshalb wird im Minuenden eine Einheit des *nächsthöheren* Stellenwertes *entbündelt,* aufgelöst oder geborgt und in die kleinere Stellenwertspalte übertragen. Somit muss hier ein Zehner durch 10 Einer ersetzt werden.
- Im Bereich der Zehnerstelle nehmen die Stellen den Wert 0 an. (Beim Auftreten einer oder mehrerer Nullen im Minuenden muss der nächste höherwertige Stellenwert entbündelt werden.)
- Folglich wird im Minuenden eine Einheit des *nächsthöheren* Stellenwertes (Hunderter) *entbündelt*, aufgelöst oder geborgt und in die kleinere Stellenwertspalte übertragen. Es wird also ein Hunderter in 10 Zehner umgewandelt.
- Es bleiben sechs Hunderter übrig.
- Von den nun vorhandenen 10 Zehnern ist aber einer bereits in zehn Einer entbündelt worden.
- Acht Einer können nun von 14 Einern subtrahiert bzw. von acht Einern kann zu 14 Einern ergänzt werden. Es ergibt sich im Ergebnis ein Wert von 6 Einern.
- Von den verbleibenden neun Zehner können nun die nicht vorhandenen (null) Zehner des Subtrahenden abgezogen werden bzw. von den nicht vorhandenen Zehnern des Subtrahenden zu den restlichen neun Zehnern des Minuenden ergänzt werden. Es ergibt sich ein Wert von neun an der Stelle der Zehner.
- Im letzten Schritt können von den sechs Hundertern des Minuenden die drei Hunderter des Subtrahenden abgezogen bzw. von den drei Hundertern des Subtrahenden zu den sechs Hundertern des Minuenden ergänzt werden. Es ergibt sich ein Wert von drei an der Hunderterstelle.
- Das Ergebnis lautet somit 396.

[163] Diese Aussage von Kindern bezieht sich grundsätzlich auf den Bereich der natürlichen Zahlen.

Erweiterungstechnik

Beispiele:	(a)	$7\ 0^{10}\ 4^{10}$	(b)	$7\ 0\ 4$
		$\underline{-3_1\ 0_1\ 8}$		$\underline{-3_1\ 0_1 8}$
		$3\ 9\ 6$		$3\ 9\ 6$

Möglicher Anleitungstext:

- Acht kann nicht von vier subtrahiert werden (Abziehverfahren) bzw. von acht kann nicht bis zur vier ergänzt werden (Ergänzungsverfahren).
- Deshalb werden Minuend und Subtrahend gleichsinnig (Gesetz von der *Konstanz der Differenz)* verändert. In dieser Aufgabe wird der Minuend um zehn Einer und der Subtrahend um einen Zehner erweitert/verändert.
- Acht Einer können nun von 14 Einern subtrahiert bzw. von acht Einern kann zu 14 Einern ergänzt werden. Es ergibt sich im Ergebnis ein Wert von 6 Einern.
- Eins kann nicht von null subtrahiert werden (Abziehverfahren) bzw. von eins kann nicht bis zur null ergänzt werden (Ergänzungsverfahren).
- Deshalb werden Minuend und Subtrahend gleichsinnig (Gesetz von der *Konstanz der Differenz)* verändert. In dieser Aufgabe wird der Minuend um zehn Zehner und der Subtrahend um einen Hunderter erweitert/verändert.
- Von den zehn Zehnern kann nun ein Zehner des Subtrahenden abgezogen bzw. von einem Zehner des Subtrahenden kann zu zehn Zehnern des Minuenden ergänzt werden. Es ergibt sich ein Wert von neun an der Stelle der Zehner.
- Beim letzten Schritt ist keine Erweiterung notwendig. Vier kann von sieben subtrahiert (Abziehverfahren) bzw. von vier bis zur sieben kann ergänzt werden (Ergänzungsverfahren). Es ergibt sich ein Wert von drei an der Hunderterstelle.
- Das Ergebnis lautet somit 396.

Auffülltechnik

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 7\,0\,4 \\ \underline{-\,3_{1}\,0_{1}8} \\ 3\;\;9\;\;6 \end{array}$$

Möglicher Anleitungstext:

- Von acht kann nicht bis zur vier aufgefüllt werden (Ergänzungsverfahren).
- Es wird also die betreffende Ziffer des Subtrahenden (Einer) bis zur nächsthöheren *vollen* Einheit des Minuenden aufgefüllt. Im oben aufgeführten Beispiel bedeutet dies, dass die acht Einer des Subtrahenden zunächst um 2 Einer auf 10 Einer aufgefüllt werden, wobei diese 10 Einer gebündelt der nächsthöheren Stellenwertspalte (Zehner) hinzugefügt werden.
- Nun werden zu den bereits 2 aufgefüllten Einern noch die restlichen vier Einer ergänzt. Es ergibt sich im Ergebnis ein Wert von 6 Einern.
- Anschließend wird die Zehnerziffer des Subtrahenden weiter bis zur Zehnerziffer des Minuenden aufgefüllt.
- Von eins kann nicht bis zur null aufgefüllt werden (Ergänzungsverfahren).
- Es wird also die betreffende Ziffer des Subtrahenden (Zehner) bis zur nächsthöheren *vollen* Einheit des Minuenden aufgefüllt. Im oben aufgeführten Beispiel bedeutet dies, dass der eine Zehner des Subtrahenden um neun Zehner auf 10 Zehner aufgefüllt wird, wobei diese 10 Zehner gebündelt der nächsthöheren Stellenwertspalte (Hunderter) hinzugefügt werden. Es ergibt sich ein Wert von neun an der Stelle der Zehner.
- Anschließend wird die Hunderterziffer des Subtrahenden weiter bis zur Hunderterziffer des Minuenden aufgefüllt. Im oben aufgeführten Beispiel bedeutet dies, dass die vier Hunderter des Subtrahenden um drei Hunderter zu den sieben Hundertern des Minuenden aufgefüllt werden Es ergibt sich ein Wert von drei an der Hunderterstelle.
- Das Ergebnis lautet somit 396.

Strategie des halbschriftlichen Rechnens (Hilfsaufgabe):
Durch das Verändern der Zahlen lässt sich mittels einer Hilfsaufgabe das Ergebnis leichter ermitteln. Es bedarf jedoch einer nachträglichen Korrektur des Ergebnisses.

Beispiel: *704 - 308 = 396*

704 - 304 = 400

400 - 4 = 396

Möglicher Anleitungstext:

- Von 704 werden zunächst 304 abgezogen.
- Es ergibt sich ein Wert von 400.
- Die noch fehlenden 4 Einer (Differenz von 304 zu 308) werden in einem zweiten Schritt abgezogen.
- Das Ergebnis lautet somit 396.

Strategie des halbschriftlichen Rechnens (Vereinfachen):

Minuend und Subtrahend werden nach dem Gesetz von der Konstanz der Differenz gleichsinnig verändert. Es bedarf keiner nachträglichen Korrektur des Ergebnisses.

Beispiel: *704 - 308 = 396*

696 - 300 = 396

Möglicher Anleitungstext:

- Minuend und Subtrahend werden gleichsinnig um 8 reduziert.
- Es ergibt sich die Aufgabe 696 minus 300.
- Das Ergebnis lautet somit 396.

Strategie des halbschriftlichen Rechnens (Schrittweises Rechnen):
Durch Zerlegen des Subtrahenden werden die einzelnen Stellenwerte nacheinander vom Minuenden abgezogen. Dabei ist die Reihenfolge der Stellenwerte unerheblich.

Beispiel:	*704 - 308 = 396*	*704 - 308 = 396*
	704 - 300 = 404	*704 - 8 = 696*
	404 - 8 = 396	*696 - 300 = 396*

Möglicher Anleitungstext:

- Von 704 werden zunächst 300 (Hunderter) abgezogen oder 8 (Einer), je nachdem mit welchem Stellenwert man beginnt.
- Es ergibt sich ein Wert von 404 bzw. von 696.
- Die noch fehlenden 8 Einer (Differenz von 300 zu 308) bzw. die noch fehlenden 3 Hunderter (Differenz von 8 zu 308) werden in einem zweiten Schritt abgezogen.
- Das Ergebnis lautet somit 396.

Bei versierten Rechnern werden die halbschriftlichen Strategien im Kopf geleistet, so dass zur Bearbeitung dieser Aufgabe gar keine Notation notwendig ist. Da diese Rechenschritte jedoch die Grundlage für das Kopfrechnen bilden, wurden sie hier kurz aufgeführt.

Aufgabe 1b:

Erkläre(n Sie), was die *kleine Eins* bzw. das Wort *ÜBERTRAG* bedeutet!

```
   704
-  308
   1 1
 ------
   □□□
```

Mit der kleinen Eins bezeichnet man den Übertrag bei den schriftlichen Rechenverfahren. *Übertrag* bedeutet, dass kleinere Einheiten zur nächstgrößeren Einheit zusammengefasst werden. Für dieses Bündeln ist es notwendig, dass das zugrundeliegende Stellenwertsystem beachtet wird (vgl. Kapitel 4.7). Der vorliegenden Aufgabe liegt das dekadische Stellenwertsystem zugrunde, demnach hat man die Basis b = 10, so dass durch das Zusammenfassen von zehn kleineren Einheiten eine nächstgrößere Einheit gebildet werden kann. Dieses Bündeln wird durch den Übertrag/die kleine Eins an der Stelle des nächsthöheren Stellenwertes kenntlich gemacht. Dies ist eine Stütze, die das Rechnen erleichtern soll. Sie ist aber nicht zwingend notwendig, sofern diese Bündelung beim Rechnen berücksichtigt wird.

Untersuchungsgegenstand II: Sachrechnen

Aufgabe 2:
Ein Bauer besitzt Kaninchen und Hühner. Die Tiere haben zusammen 20 Füße und 7 Köpfe. Wie viele Kaninchen und Hühner hat der Bauer?

Bei dieser Aufgabe handelt es sich nach der klassischen Einteilung nach H. Winter um eine Textaufgabe (vgl. Kapitel 5.2.3). Nach M. Franke kann diese Aufgabe als eine Knobelaufgabe klassifiziert werden. Dazu ist es notwendig, die Aufgabenstellung hinsichtlich der folgenden Kriterien zu überprüfen:

1. Beschriebene Situation
2. Mathematischer Inhalt
3. Präsentationsform

Bezüglich der **beschriebenen Situation** lässt sich die vorliegende Aufgabe der Kategorie Sachaufgabe mit Alltagsbezug zuordnen, da es sich um eine realistische Situation handelt, die durch den Aufgabentext beschrieben wird. Die SuS befinden sich zwar nicht real in dieser Situation, doch es ist eine realistische Situation, die sich die meisten SuS vorstellen können. Ferner sind alle Angaben, die für den Lösungsweg benötigt werden, in der Aufgabenstellung enthalten. Zusätzliche Recherchen entfallen.
Im Hinblick auf den **mathematischen Inhalt** steht die Arithmetik im Fokus. Im Gegensatz zur beschriebenen Situation sind in diesem Bereich weitere Unterscheidungen erforderlich. So muss neben der arithmetischen Struktur der Aufgabe auch die semantische und syntaktische Struktur berücksichtigt werden.

Zur *arithmetischen Struktur* einer Sachaufgabe gehört u.a. die Anzahl der Rechenschritte. Wird aus zwei gegebenen Größen eine dritte ermittelt, so spricht man von einem Simplex. Ist das Verknüpfen mehrerer Simplexe notwendig, so spricht man von einem Komplex. Des Weiteren wird in diesem Bereich die Rechenoperation betrachtet. Diese Aufgabe lässt verschiedene Rechenoperationen zu. Dies hängt von der Art und Weise der Berechnung ab. Zur arithmetischen Struktur zählen aber auch die Unterscheidung nach dem gesuchten Aufgabenglied (Startwert, Veränderung und Endwert) sowie die Reihenfolge der Verknüpfung der vorliegenden Zahlen. Eine genaue Darstellung dieser arithmetischen Struktur ist in den nachfolgenden Lösungsmöglichkeiten aufgezeigt.

Zur *semantischen Struktur* gehört die Unterscheidung zwischen additiv-semantischen Strukturen (Aufgaben zur Addition und Subtraktion) und multiplikativ-semantischen Strukturen (Aufgaben zur Multiplikation und Division). Dies ist in diesem Fall von der Art der Berechnung abhängig. Ferner wird in diesem Bereich die Dynamik der Situation betrachtet. Da in dieser Aufgabe keine Veränderung der Situation herbeigeführt wird, spricht man von einer statischen Situation. Würde der Bauer 5 neue Kaninchen kaufen, so wäre dies ein Beispiel für eine dynamische Situation. Schlussendlich gehört die Beziehung der Mengen noch in diesen Bereich. Die Kaninchen und Hühner stellen die Elemente der beiden Mengen dar, welche disjunkt sind.

Zur *syntaktischen Struktur* zählt unter anderem der Satzbau. In der Aufgabenstellung ist dieser sehr einfach gehalten. Insgesamt umfasst die Aufgabestellung drei Sätze, die nicht durch Kommata miteinander verbunden sind. Der erste Satz besteht aus einem Subjekt, dem Prädikat und einem Objekt und bezieht sich auf zwei bekannte Tiere. Der zweite Satz entspricht vom Aufbau dem ersten. Auch hier sind nur Begriffe aus der Alltagssprache der SuS verwendet worden. Die Frage am Ende der Aufgabe gibt eindeutig an, was zu berechnen ist. Auch hier liegt ein simpler Satzbau vor.

Bezüglich der **Präsentationsform** handelt es sich bei dieser Aufgabe um eine Sachaufgabe, welche ausschließlich durch einen Text präsentiert wird. Dies wurde bewusst gewählt, um den Fokus auf die Sprache zu legen. Bilder sollten hier nicht das Verstehen unterstützen.

Für die Bearbeitung dieser Aufgabe gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten, die im Folgenden kurz vorgestellt werden. Ebenso wie bei dem ersten Untersuchungsgegenstand können an dieser Stelle nicht alle Lösungen aufgeführt werden, da dies wegen zahl-

reicher Mischformen den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Es werden die Lösungen aufgeführt, die am häufigsten in der empirischen Studie erwartet werden.
Zuerst werden die Lösungen erläutert, welche in den unteren Schulstufen erwartet werden. Diese basieren auf verschiedenen heuristischen Strategien, da die SuS fachlich noch keine Gleichungssysteme behandelt haben. Im Anschluss werden die der höheren Schulstufen erläutert, da hier das Arbeiten mit Gleichung vorausgesetzt wird. Die Aufgabe wurde speziell aus diesem Grund ausgewählt. Die Lösungswege geben Aufschluss, ob SuS eher heuristische Strategien oder einmal erworbene Kennnisse über Gleichungssysteme anwenden. Ob sie dies fachlich korrekt durchführen werden die Ergebnisse zeigen.

Lösungsmöglichkeit I (Systematisches Probieren):
Dieses Vorgehen wird bei den SuS der Grundschule vermutlich am häufigsten verwendet. Die SuS versuchen sich durch systematisches Probieren allmählich der Lösung zu nähern. Dabei kann z.B. von einer Skizze ausgegangen werden, welche durch 20 Striche die Anzahl der gesamten Beine repräsentiert. Die entsprechende Anzahl von Strichen (Hühner 2 Striche, Kaninchen 4 Striche) wird dann in einem nächsten Schritt mit dem entsprechenden Kopf verbunden. Mit Hilfe der Skizze können falsche Ergebnisse besser erkannt und korrigiert werden.

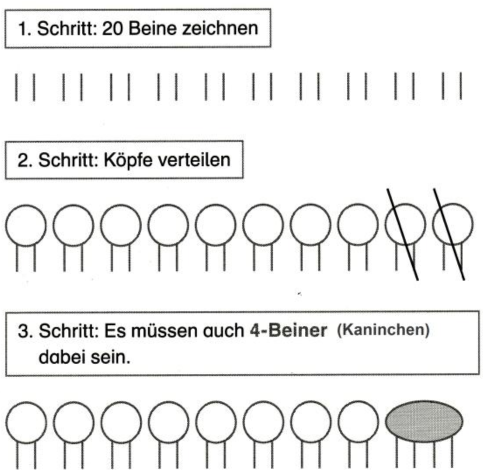


Abbildung 19: Veranschaulichungen nach Schnabel/Trapp 2015, S. 49.

Das systematische Probieren ist jedoch auch in symbolischer Notation möglich. Hier nutzen die SuS z.B. die mehrfache Addition oder die Multiplikation.

Beispiel:

4+4+4+4+2+2 = 20 (aber nur 6 Tiere, also 6 Köpfe)

4+4+4+2+2+2+2 = 20

4 • 4 (Beine) + 2 • 2 (Beine)
3 • 4 (Beine) + 4 • 2 (Beine)

Die Systematik liegt zum einen in der geordneten Verwendung der unterschiedlichen Beinanzahl und zum anderen in der systematischen Reduzierung der vierbeinigen Tiere, um die Anzahl der Tiere insgesamt zu erhöhen.

Lösungsmöglichkeit II (Rückwärtsarbeiten):

Diese Lösungsmöglichkeit beginnt mit einem beliebigen Ergebnis, indem mit einer Anzahl von Kaninchen gestartet wird. Ausgehend von dieser Anzahl lässt sich die Anzahl der anderen Tierart rechnerisch bestimmen.

Annahme:

5 Kaninchen als Startwert: 5 • 4 =20

Schlussfolgerung: Es gibt keine Hühner. Dies ist laut Aufgabenstellung nicht möglich. Der Startwert muss nun korrigiert werden. Eine Korrektur um ein Kaninchen ergibt:

4 Kaninchen als Startwert: 4 • 4 =16

Schlussfolgerung: Es gibt zwei Hühner. Dies sind in der Summe nur 6 Tiere und ist somit laut Aufgabenstellung nicht möglich. Es erfolgt eine weitere Korrektur.

3 Kaninchen als Startwert: 3 • 4 =12

Schlussfolgerung: Es gibt vier Hühner. Dies sind in der Summe 7 Tiere und somit ist die Lösung der Aufgabe ermittelt.

Lösungsmöglichkeit III (Gleichungssystem):

Bei der Aufgabe handelt es sich um ein Problem mit zwei Variablen, die über das Aufstellen eines Gleichungssystems errechnet werden können. Es sollen die Anzahl der Kaninchen (x) und die Anzahl der Hühner (y) bestimmt werden. Aufgrund der Gesamtanzahl der Tierbeine und dem Wissen über die physische Statur der Tiere ergeben sich zwei Gleichungen für zwei Unbekannte:

I $4x + 2y = 20$ II $x + y = 7$

Durch Division von I erhält man: $2x + y = 10$. Diese Gleichung kann man nach y umstellen und erhält $y = 10 - 2x$. Mittels einer Wertetabelle ergeben sich die folgenden Lösungen:

x	1	2	**3**	4	5
y	8	6	**4**	2	0

Durch Gleichung II ist ersichtlich, dass nur die Werte $x = 3$ und $y = 4$ wegen der vorgegebenen Anzahl der Köpfe in Frage kommen.

Die Einschränkung der Lösung auf eine Möglichkeit wurde bewusst gewählt. Zum einen geschieht dies aus Zeitgründen, um die Bearbeitung der Aufgabe zu reduzieren und zum anderen um eine schnellere und bessere Auswertung vornehmen zu können.

Lösungsmöglichkeit IV (Zahlzerlegung):

Eine weitere Möglichkeit ist über die Zerlegung der Zahl 20. Im Folgenden werden jedoch nur die Zahlzerlegungen aufgeführt, die von der Sachsituation her sinnvoll sind. Auf eine Zerlegung z.B. nur in Einsen wird verzichtet, da keine Tiere vorkommen, die nur ein Bein haben. Es sind folgende Zerlegungen mit den Zahlen 2 und 4 (Beinanzahl) möglich:

4+4+4+4+4	5 Köpfe	Keine mögliche Zerlegung, da die Anzahl der Köpfe und die Zusammensetzung aus zwei verschiedenen Tierarten nicht mit der Aufgabenstellung übereinstimmt.
4+4+4+4+2+2	6 Köpfe	Keine mögliche Zerlegung, da die Anzahl der Köpfe nicht mit der Aufgabenstellung übereinstimmt.
4+4+4+2+2+2+2	7 Köpfe	Einzige mögliche Zahlzerlegung der Zahl 20, die mit der Aufgabenstellung übereinstimmt.
4+4+2+2+2+2+2+2	8 Köpfe	Keine mögliche Zerlegung, da die Anzahl der Köpfe nicht mit der Aufgabenstellung übereinstimmt.
4+2+2+2+2+2+2+2+2	9 Köpfe	Keine mögliche Zerlegung, da die Anzahl der Köpfe nicht mit der Aufgabenstellung übereinstimmt.
2+2+2+2+2+2+2+2+2+2	10 Köpfe	Keine mögliche Zerlegung, da die Anzahl der Köpfe nicht mit der Aufgabenstellung übereinstimmt.

6.1.5. Zusammensetzung der Stichprobe

Die Studie befasst sich mit den Ergebnissen von SuS diverser Altersgruppen, die sich in jeweils unterschiedlichen Phasen ihrer Schul- und Bildungslaufbahn befinden. Insgesamt bilden 2242 SuS die Stichprobe (vgl. Tabelle 14) und somit die Basis dieses Vergleichs. Die Stichprobengröße ist jedoch nicht ausreichend, um die daraus resultierenden Ergebnisse zu verallgemeinern. Neben dem Kriterium der Größe wird der zuvor erwähnte Aspekt vor allem auch durch die regionale Wahl bekräftigt. Die Stichprobe bezieht sich lediglich auf zwei Ortsbereiche einer deutschen Großstadt. Mönchengladbach liegt im Westen Nordrhein-Westfalens und gehört zum Regierungsbezirk Düsseldorf. Das Stadtgebiet setzt sich seit 2009 aus vier Stadtbezirken zusammen, die wiederum in 44 Stadtteile unterteilt sind. Ende des Jahres 2015 betrug die Einwohnerzahl 259.996.

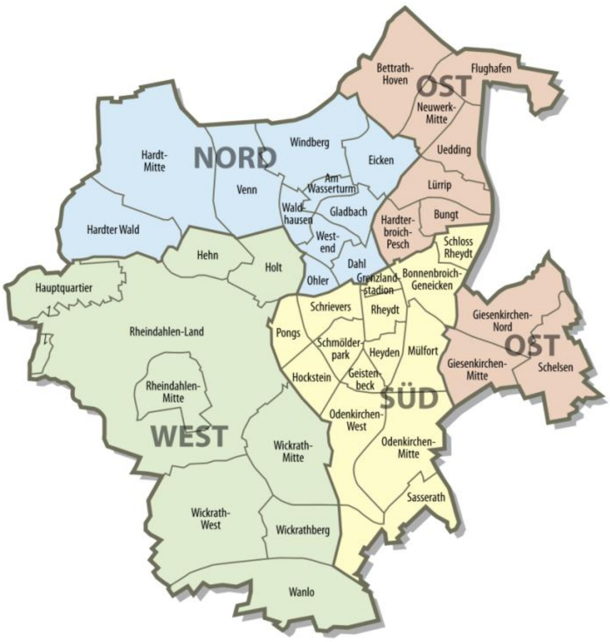


Abbildung 20: Bezirke der Stadt Mönchengladbach

Das Schulsystem der Stadt Mönchengladbach umfasst 75 Schulen, zwei Förderzentren sowie eine Hochschule. Durch dieses Angebot an verschiedenen Schulformen wird ein Bildungssektor geschaffen, welcher den benötigten Schulraum der Stadt abdeckt. Die Hochschule Niederrhein gilt in der deutschen Hochschullandschaft als attraktive Bildungsstätte. Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der einzelnen Schulformen:

Berufskolleg	7
Förderschulen	5 plus zwei Zentren
Gesamtschulen	6
Grundschulen	36
Gymnasien	9
Hauptschulen	7
Realschulen	4
Waldorfschule	1

Tabelle 13: Schulformen in Mönchengladbach

Die an der empirischen Untersuchung beteiligten Schulen liegen im Norden und im Osten der Stadt. Es handelt sich um verschiedene Klassenstufen (4 bis 12) unterschiedlicher Schulformen. So beteiligten sich eine Grundschule sowie die Hauptschule aus dem Stadtteil Lürrip. Die Realschule und das Berufskolleg liegen im Stadtteil Hardterbroich/Pesch. Eine weitere Grundschule wurde aus dem Stadtteil Uedding hinzugezogen. Diese drei Bereiche gehören zum Bezirk Mönchengladbach Ost. Eine dritte Grundschule und das Gymnasium liegen hingegen im Stadtteil Windberg, welcher zum Stadtbezirk Mönchengladbach Nord zählt. Hier liegt auch die vierte Grundschule, die zum Stadtteil Ohler zählt.

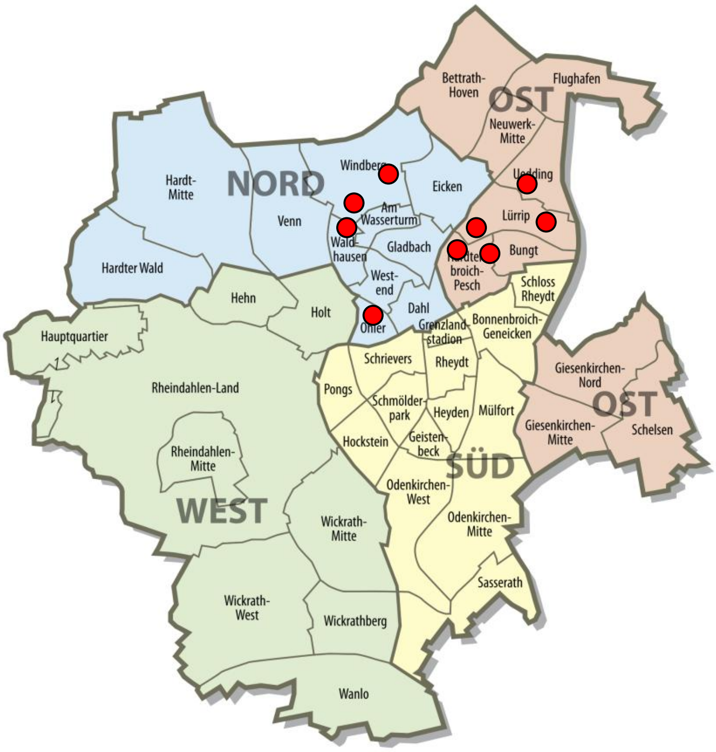


Abbildung 21: Verteilung der Schulen der Studie in Mönchengladbach

Als Grundgesamtheit dieser Untersuchung wurden die Schuldaten des Landes Nordrhein-Westfalens zugrunde gelegt. Im Vergleich der Stichprobe mit dieser Grundgesamtheit, zeigt sich, dass nur ein ganz geringer Teil der Grundgesamtheit durch die Studie erfasst wurde:

2015/2016	Öffentliche Schulen	Schulen Studie	SuS insgesamt	SuS Studie
Grundschule	2786	4	611 472	164
Hauptschule	448	1	101 855	250
Realschule	499	2	226 725	1018
Gymnasium	511	1	444 613	306
Waldorfschule	-	-	-	-
Förderschule	494	-	71 229	-
Berufskolleg	257	1	522 875	504
Gesamt	**4995**	**9**	**1 978 769**	**2242**

Tabelle 14: Schulstatistik der Stadt Mönchengladbach

Die vorliegende empirische Untersuchung stellt folglich eine Teilerhebung dar, da nur dieser oben angeführte geringe Teil von Personen befragt wird. Im Gegensatz dazu gibt es noch die sogenannte Vollerhebung. Bei der werden alle Personen miteinbezogen. Die Ergebnisse von Vollerhebungen sind somit repräsentativer als die einer Teilerhebung. Die Entscheidung gegen eine Vollerhebung fiel mit der Größe der Grundgesamtheit, die in diesem Rahmen nicht umsetzbar war. Deshalb wurde eine Teilerhebung geplant, bei der eine Strukturgleichheit von Stichprobe und Grundgesamtheit angestrebt wurde, damit die Ergebnisse der Stichprobe ein Ergebnis der Grundgesamtheit widerspiegeln. Bei den Methoden der Stichprobenwahl wird zwischen Zufallsauswahl (einfach oder geschichtet) und systematische Auswahl unterschieden. Einer zufälligen einfachen Auswahl liegen keinerlei Kriterien zugrunde. Hier haben alle Personen die gleiche Chance, in die Stichprobe aufgenommen zu werden. Aufgrund des Wahrscheinlichkeitsprinzips entspricht dann die Merkmalsverteilung der Stichprobe der der Grundgesamtheit. Diese Methode wird besonders bei einer großen Grundgesamtheit genutzt. Sie hat jedoch den Nachteil, dass die Grundgesamtheit vollständig vorliegen muss, um daraus die Stichprobe zufällig zu bestimmen. Die geschichtete Zufallsauswahl ist sinnvoll, wenn die Grundgesamtheit in Untergruppen gesplittet ist. Aufgrund dieser Unterteilung erfolgt die Festlegung der Stichproben zwar auch nach dem Zufallsprinzip, doch die zufällige Auswahl wird für jede Untergruppe separat vorgenommen. So erreicht man, dass die Ergebnisse den einzelnen Gruppen zugeordnet werden können. In der vorliegenden Studie handelt es sich um eine geschichtete Zufallsauswahl, da die Gesamtheit aller Schulen aus Mönchengladbach in Untergruppen unterteilt ist. Diese stellen die einzelnen Schulformen dar. Aus dieser Unterteilung wurden zufällig die einzelnen Schulen ausgewählt.

6.2. Durchführung der empirischen Untersuchung

Vor der empirischen Studie wurde der Fragebogen an einer Grundschule getestet, um zu sehen, ob die Fragen verständlich und eindeutig formuliert sind. Die SuS der Grundschule wurden ausgewählt, da in dieser Gruppe altersbedingt die größten Verständnisschwierigkeiten erwartet werden. Des Weiteren wurde auf den zeitlichen Umfang und auf mögliche weitere Probleme geachtet. Da sowohl bei der Verständlichkeit der Fragen, als auch bezüglich der Struktur und dem Ablauf keine Schwierigkeiten aufgetreten sind, wurde der Fragebogen für die empirische Untersuchung entsprechend vervielfältigt.

Die Durchführung wurde für den Zeitraum zwischen den Osterferien und den Sommerferien (2013) festgelegt, da dies als geeignetes Zeitfenster für alle beteiligten Schulen empfunden wurde. Die Befragungsunterlagen wurden vor den Osterferien an den einzelnen Schulen ausgeteilt und im Rahmen einer kleinen Konferenz allen beteiligten LuL erläutert. Nach den Osterferien begann die Durchführung an den einzelnen Schulen. Begonnen wurde mit den Hauptschulen. Es folgten die Realschulen, Gymnasien und die Berufskollegs. Alle SuS wurden mit dem Fragebogen zu Beginn der ersten Stunde konfrontiert. So war die Ausgangssituation für alle beteiligten Testpersonen gleich. Nach etwa einer halben Stunde konnten die Unterlagen eingesammelt und mitgenommen werden.

Die SuS der Grundschule der dritten und vierten Schuljahre wurden vor dem Ausfüllen des Fragebogens interviewt. Dies war bei dieser Altersgruppe notwendig, um die Gedanken der SuS exakt abbilden zu können. Sie verfügen noch nicht alle über einen Wortschatz, der eine detaillierte Beschreibung ermöglicht. Durch die Videosequenzen können Sprechpausen, Intonation und informative Zwischenüberlegungen festgehalten werden. Die Videosequenzen wurden für die Auswertung verschriftet.

6.3. Auswertung der empirischen Untersuchung

Die Datenanalyse der schriftlichen Befragung erfolgte durch die Kodierung der Antwortmöglichkeiten mittels Excel. Jeder Antwortmöglichkeit wurde eine Nummer zugewiesen, so dass auch nicht beantwortete Fragen durch eine einheitliche Nummer erfasst wurden. Die Kodierung ermöglicht so eine schnelle und zuverlässige statistische Analyse. Für die Berichterstattung werden die Kodierungen wieder durch ihre Benennung ersetzt. Die häufigsten Fehler, die bei dem Prozess der Kodierung auftreten können, ist die Zuweisung falscher Codes. Diese Fehler sind auf menschliches Vergehen bei der Kodierung zurückzuführen. Durch exaktes Arbeiten und eine ständige Kontrolle sollten solche Fehler bei der vorliegenden Studie vermieden werden.

Die gesamten erhobenen Daten wurden in drei Auswertungseinheiten (vgl. Kapitel 6.1.4) unterteilt:

I) Statistische Daten

II) Daten zur Subtraktion

III) Daten zum Sachrechnen

Zu den statistischen Daten zählen neben der Unterscheidung des Geschlechtes auch die Angabe der Schulform sowie der Klasse und des Alters. Des Weiteren werden hier die verschiedenen Sprachen der SuS erfasst, die im Elternhaus vorwiegend gesprochen werden. In diesem Zusammenhang sind auch die Herkunft der SuS sowie gegebenenfalls die Angabe der Dauer ihrer Lebenszeit in Deutschland von Bedeutung. Diese Angaben sind wichtig, um bei der Auswertung zu sehen, ob Mädchen oder Jungen mit oder ohne Migrationshintergrund besser oder schlechter abgeschnitten haben. Das Alter bzw. die Klasse sind notwendig, um ggf. eine Entwicklung bei der Bearbeitung der Aufgabe und deren Erklärung aufzeigen zu können. Die Daten der jeweiligen Schulform werden benötigt, um eventuelle Unterschiede hervorzuheben. Über das Erfassen der verschiedenen Sprachen soll ggf. ein Rückschluss auf Verständnisprobleme der deutschen Sprache ermöglicht werden. Alle statistisch relevanten Daten sind der ersten Seite des Fragebogens entnommen.

Für den Bereich der Subtraktion war die zweite Seite des Fragebogens von Bedeutung. Hier sollten die Teilnehmer eine Subtraktionsaufgabe lösen und das jeweilige Vorgehen entsprechend beschreiben. Im zweiten Teil der Aufgabe sollte der Übertrag verbal erläutert werden. Für die Auswertung war das Erfassen relativ vieler Datenbereiche von Bedeutung:

- Korrektheit des Ergebnisses
- Korrekter Algorithmus
- Art der Subtraktion (Ergänzungs- oder Abziehverfahren, halbschriftlich)
- Übertrag
- Fehlertypen
- Sprache (Alltags- vs. Bildungssprache)
- Fachbegriffe
- Satzbau
- Rechtschreibung

Die Zweiteilung der Aufgabe wurde auch bei der Auswertung der Daten berücksichtigt. So wurden im Bereich der Subtraktion verschiedene Kategorien gebildet. In der ersten Kategorie wurde das Ergebnis der Aufgabe betrachtet. Hier wurde zwischen richtigem Ergebnis, falschem Ergebnis und keinem Ergebnis unterschieden. Unter *kein Ergebnis* fallen alle Aufgaben, die gar nicht oder nur zum Teil bearbeitet worden sind. In einer weiteren Kategorie wurden die Daten zu den verschiedenen Lösungsmöglichkeiten festgehalten. Dazu zählen neben den unterschiedlichen Übertragstechniken und halbschriftlichen Verfahren auch die Lösungsmöglichkeiten, bei denen kein Verfahren erkennbar ist. Bei der Auswertung wurden die Daten den folgenden Unterkategorien zugeordnet:

- Ergänzungsverfahren
- Abziehverfahren (Entbündeln)
- Abziehverfahren (Erweitern)
- Abziehverfahren (Auffüllen)
- Mischverfahren
- Halbschriftliches Verfahren
- Ohne erkennbares Verfahren

Bei der zweiten Aufgabe des Subtraktionsteils wurde zunächst ausgewertet, ob die Aufgabe bearbeitet wurde oder nicht. Anschließend wurden die Antworten kategorisiert. Dazu wurden jeweils die gleichen Antworten zusammengefasst. Als Antworten traten die folgenden Möglichkeiten auf:

- Der Übertrag bedeutet die kleine Eins
- Eins im Sinn/Gedankenstütze
- Negative Zahl/Minuszahl
- Kleinere Zahl minus größerer Zahl
- Überschlag
- Rest
- Anderer Stellenwert/Stelle verrücken

Auf beide Aufgabenteile bezogen wurde des Weiteren die Verständlichkeit der Texte ausgewertet. Als Kriterien dienten die folgenden Aspekte:

- fachliche Korrektheit
- sprachliche Verständlichkeit (Wortwahl und Syntax)

Darüber hinaus wurden beide Texte hinsichtlich Bildungssprache und Alltagssprache untersucht und die in diesen Texten verwendeten Fachbegriffe erfasst und entsprechend ausgewertet. Dabei wurde zwischen fachlich korrekt und fachlich fehlerhaft eingesetzten Begriffen unterschieden.
Zuletzt wurden der Satzbau und die Rechtschreibung ausgewertet. Als Kriterium für einen korrekten Satzbau wurden folgende Aspekte zur Beurteilung herangezogen:

- Stellung der Satzglieder
- Satzergänzungen
- Satzgrenzen durch Punkte

Für die Rechtschreibung wurde ein Prozentsatz aus der Anzahl der verwendeten Wörter und der jeweiligen Fehleranzahl ermittelt.

Für den Bereich des Sachrechnens wurde die Auswertung der Daten nach ähnlichen Kriterien vorgenommen wie bei der Subtraktion. So wurde auch hier zunächst das Ergebnis untersucht, indem die Ergebnisse den folgenden Kriterien zugeordnet worden sind:

- Richtig
- Falsch
- Ohne Ergebnis
- Keine Bearbeitung

Neben den beiden ersten Kategorien war hier die Unterscheidung zwischen *ohne Ergebnis* und *keine Bearbeitung* notwendig, da durch diese Unterscheidung deutlich gemacht werden kann, welche Teilnehmer mit der Bearbeitung begonnen haben, diese jedoch auch unersichtlichen Gründen nicht zu Ende führen konnten. Keine Bearbeitung der Aufgabe lässt hingegen andere Rückschlüsse zu.

Nach der Untersuchung des Ergebnisses wurde anschließend die verwendete Strategie näher betrachtet. So werden hier alle Daten zu den heuristischen Strategien festgehalten.

Bei der Datenauswertung werden die erhobenen Informationen mittels quantitativer oder qualitativer Auswertungsverfahren statistisch ausgezählt oder textlich dargestellt und analysiert. Es geht darum, aus den vielen Informationen die wesentlichen herauszufiltern – das Material auf die wesentlichen Inhalte zu reduzieren.[164]

Im Rahmen von Bildungsforschung sollen mittels der vorliegenden Studie Lernprozesse aufgezeigt und analysiert werden. Dabei sind mit Lernprozessen keine Verhaltensänderungen im Reiz-Reaktions-Schema gemeint, sondern Prozesse der Informationsverarbeitung und der Wissensvermittlung.[165] Der Bildungsbegriff unterstreicht dabei im Gegensatz zum Lernbegriff Prozesse der Selbstreflexion. Somit kann Bildungsforschung nicht ausschließlich über das Beobachten vollzogen werden, sondern muss vielmehr das Individuum in den Mittelpunkt der Untersuchung stellen. So müssen selbst verfasste Texte der TeilnehmerInnen, wie in dieser Studie die Beschreibungen der Lösungswege und

[164] vgl. Mayring (2002), S.104.
[165] vgl. Krapp/Weidenmann (2004), S. 473.

Erläuterungen fachlicher Begriffe, kritisch ausgewertet werden. Textanalytische Methoden sind folglich in der Auswertung von besonderer Bedeutung.

Im Folgenden soll die konkrete textanalytische Verfahrensweise kurz vorgestellt und begründet werden. Aus den vielen verschiedenen Ansätzen, die zu Auswertungen von empirisch erhobenen Daten herangezogen werden können, wurde die qualitative Inhaltsanalyse ausgewählt, da diese textanalytische Vorgehensweise am besten zum vorliegenden Fragebogen sowie zur Fragestellung der Untersuchung passt. Diese Methode ist sehr gut geeignet, wenn – wie in dieser Studie – qualitative und quantitative Analyseprozesse miteinander verbunden werden müssen. Diese Vernetzung nennt man Mixed-Method, sie unterscheidet sich dadurch im Wesentlichen von den weiteren Auswertungsmöglichkeiten.

Zu den Definitionsmerkmalen der Qualitativen Inhaltsanalyse zählen:

- Einordnung in ein Kommunikationsmodell
- Bestimmung des konkreten inhaltsanalytischen Verfahrens
- Bestimmung der Analyseeinheiten
- Festlegung des Kategoriensystems und der inhaltsanalytischen Regeln

Unter Einordnung in ein Kommunikationsmodell (vgl. Kapitel 3.3) versteht man, dass die auszuwertenden Texte nur im Zusammenhang mit anderen Komponenten wie z.B. Sender, Empfänger und soziokulturellem Hintergrund ausgewertet werden dürfen. Bei der Bestimmung des konkreten inhaltsanalytischen Verfahrens geht es um die Konkretisierung der Vorgehensweise. Aus der Fragestellung, dem Ziel der Analyse, lässt sich ableiten, welche konkrete Vorgehensweise sinnvoll ist. Aus den verschiedenen Verfahren wie zusammenfassende Analyse, induktive Kategorienbildung, Explikation und Strukturierung bzw. deduktive Kategorienanwendung wurde hier eine Kombination aus zusammenfassender Inhaltsanalyse und induktiver Kategorienbildung gewählt, da sowohl quantitative als qualitative Analyseschritte von Bedeutung sind.[166]

Die Zuordnung von Kategorien zu Textpassagen ist ein zwar regelgeleiteter, aber interpretativer, und damit qualitativer Akt. Die induktive Kategorienbildung wird am besten am Beispiel der Übertragsaufgabe deutlich. Im Fragebogen wurde von den Probanden

[166] vgl. Mayring (2002), S. 122.

verlangt, den Begriff *Übertrag* zu erklären. Hier wurden die Kategoriendefinition und das Abstraktionsniveau nach den Regeln der induktiven Kategorienbildung festgelegt.

Hier eine Textpassage:

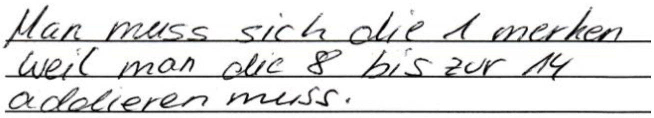

Man muss sich die 1 merken weil man die 8 bis zur 14 addieren muss.

Abbildung 22: Übertragserklärung Realschule

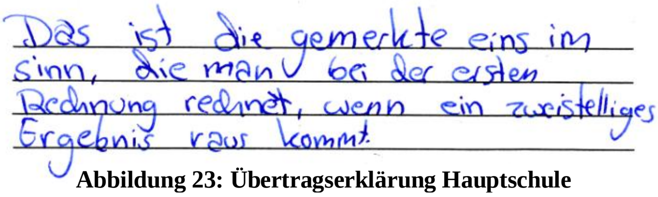

Das ist die gemerkte eins im Sinn, die man bei der ersten Rechnung rechnet, wenn ein zweistelliges Ergebnis raus kommt.

Abbildung 23: Übertragserklärung Hauptschule

Die induktive Kategorie lautet: Eins im Sinn/Gedankenstütze. Die Kategorie ergibt sich aus dem Text, da die Kategorie sehr eng am Text formuliert wurde. Bei anderen Textstellen hingegen ist es notwendig, interpretativ vorzugehen, da eine direkte Zuordnung nicht möglich ist:

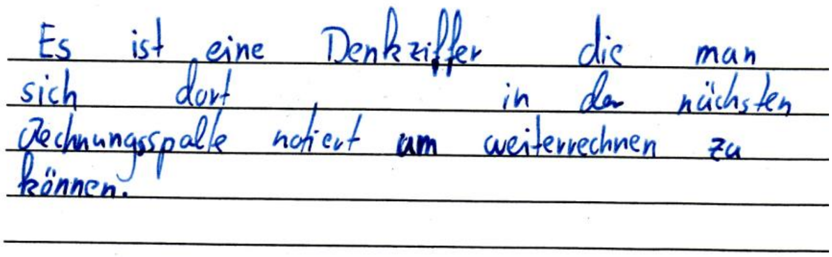
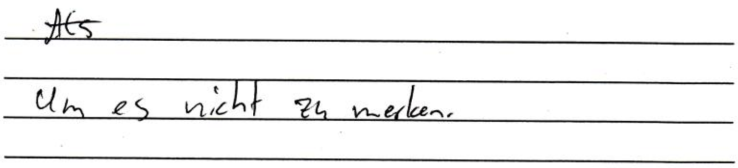

Es ist eine Denkziffer die man sich dort in der nächsten Rechnungsspalte notiert um weiterrechnen zu können.

Abbildung 24: Übertragserklärung Berufskolleg


~~Als~~

Um es nicht zu merken.

Abbildung 25: Übertragserklärung Realschule

In diesen beiden Beispielen treten nicht die Begriffe *Gedankenstütze* oder *Eins im Sinn* auf. Dennoch wurde einer Zuordnung zu dieser Kategorie vorgenommen, da die Wörter *merken* und *Denkziffer* eine Zuordnung zu eben dieser Kategorie zulassen.

Analog dazu wurden für die angeführte Beispielaufgabe die folgenden Kategorien (K) gebildet:

K1: Eins im Sinn/Gedankenstütze

K2: Negative Zahl/Minuszahl

K3: Kleinere Zahl minus größerer Zahl

K4: Überschlag

K5: Rest

K6: Anderer Stellenwert/Stelle verrücken

K7: Kein Verständnis

K8: Ohne Erklärung

6.3.1. Datenauswertung

In diesem Unterkapitel werden die erhobenen Daten statistisch ausgezählt und textlich dargestellt. Insgesamt haben 2242 SuS an der Studie teilgenommen, die sich wie folgt auf die einzelnen Schulformen verteilen:

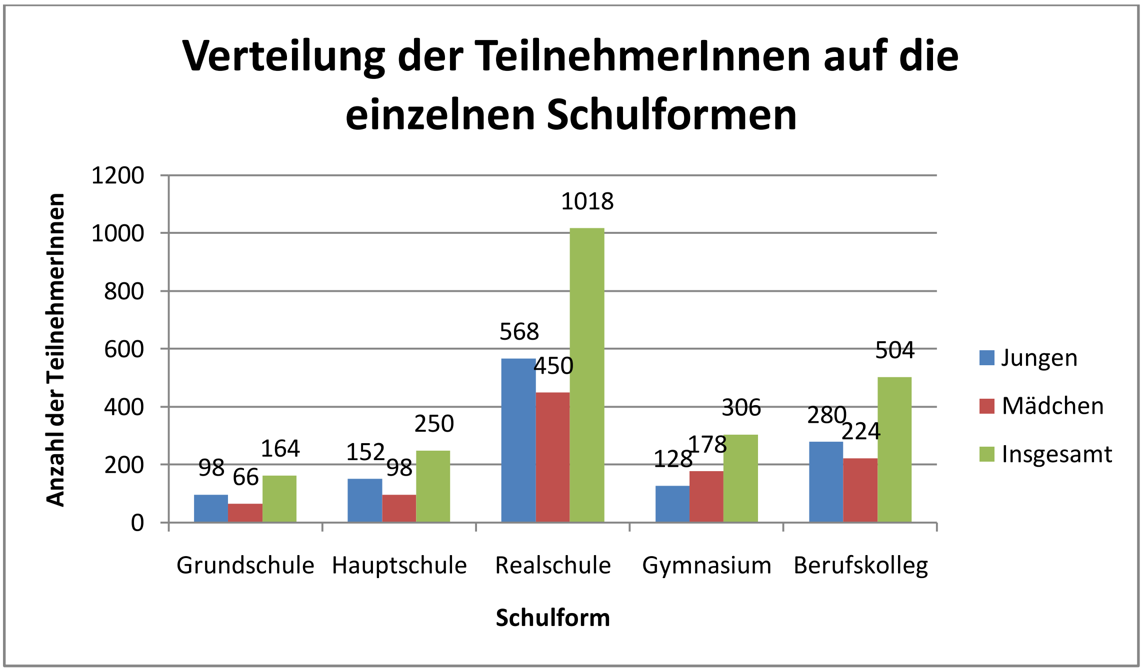


Abbildung 26: Verteilung der TeilnehmerInnen auf die einzelnen Schulformen

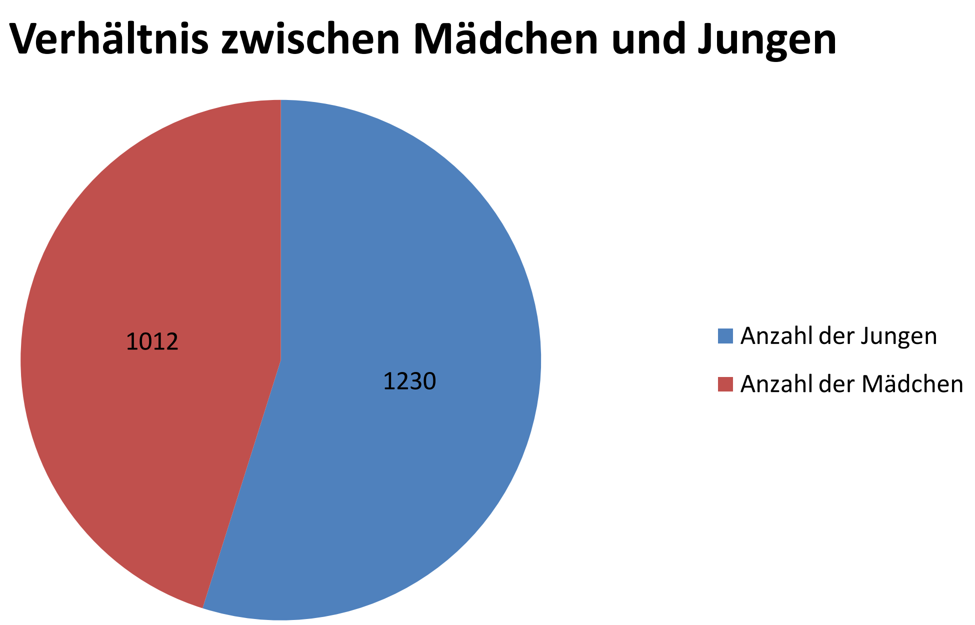


Abbildung 27: Verhältnis zwischen Mädchen und Jungen

Die Auswertung der zu Hause gesprochenen Sprachen ergab folgende Verteilung:

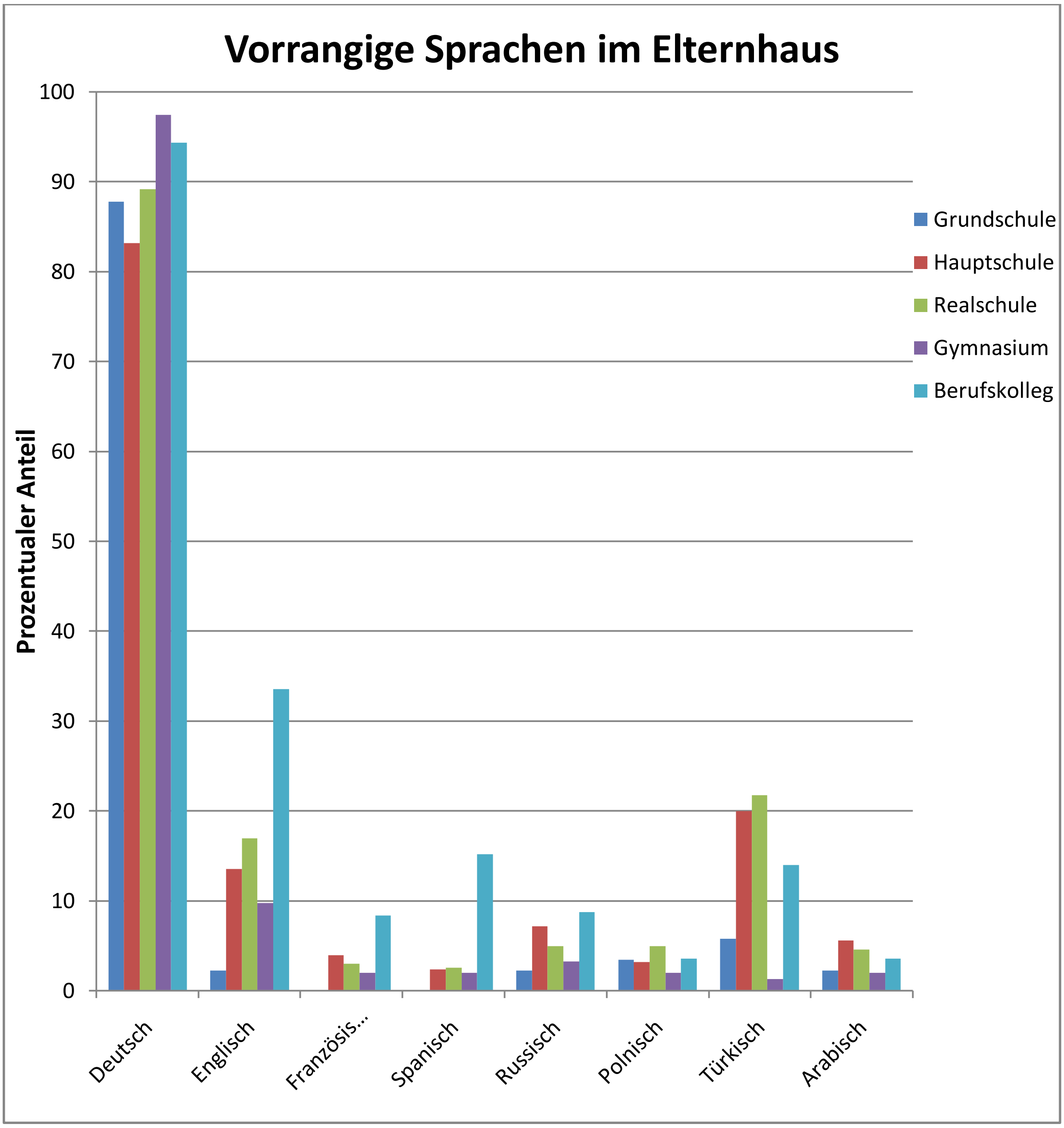


Abbildung 28: Vorrangige Sprachen im Elternhaus

Aus dem Diagramm geht hervor, dass in allen teilnehmenden Schulformen nur ein geringer Teil der SuS zu Hause nicht die deutsche Sprache spricht. Die Mehrheit der Teilnehmer kommuniziert zu Hause überwiegend in der deutschen Sprache. In der Tabelle werden neben der deutschen Sprache nur die Sprachen aufgeführt, welche auf dem Erhebungsbogen zur Auswahl standen. Die unter sonstige Sprachen möglichen Angaben werden im Folgenden der Vollständigkeit halber ohne eine Wertung alphabetisch aufgeführt: Afghanisch, Albanisch, Amerikanisch, Amharisch, Arameisch, Armenisch, Assyrisch, Berberisch, Bosnisch, Bulgarisch, Chinesisch, Dänisch, Georgisch, Griechisch, Hindi, Indisch, Inguschisch, Italienisch, Japanisch, Jugoslawisch, Kosovoalbanisch, Kroatisch, Kurdisch, Lettisch, Lingala, Litauisch, Malinke, Marokkanisch, Mindi, Montenegrinisch, Niederländisch, Pakistanisch, Persisch, Portugiesisch, Pungabi, Romanisch, Rumänisch, Schottisch-Gälisch, Schwedisch, Serbisch, Sintitikes, Suaheli, Tamilisch, Tschetschenisch, Urdu und Vietnamesisch. Diese Daten sowie die Angabe der Lebensdauer in Deutschland sind nur bei individuellen Auswertungen einzelner SuS von Bedeutung.

Die Auswertung der Daten der schriftlichen Subtraktion

Die Daten zur schriftlichen Subtraktion beziehen sich auf zwei Aufgabenteile. Im ersten Teil der Aufgabe sollte eine Anleitung zum Lösen der vorgegebenen Aufgabe verfasst werden. Bei der Auswertung wurde zuerst das Ergebnis betrachtet, welches zum Teil auf dem Blatt ausgerechnet wurde, teils aber auch aus dem Text entnommen werden konnte. Für die Bearbeitung der Aufgabe ergab sich folgendes Ergebnis:

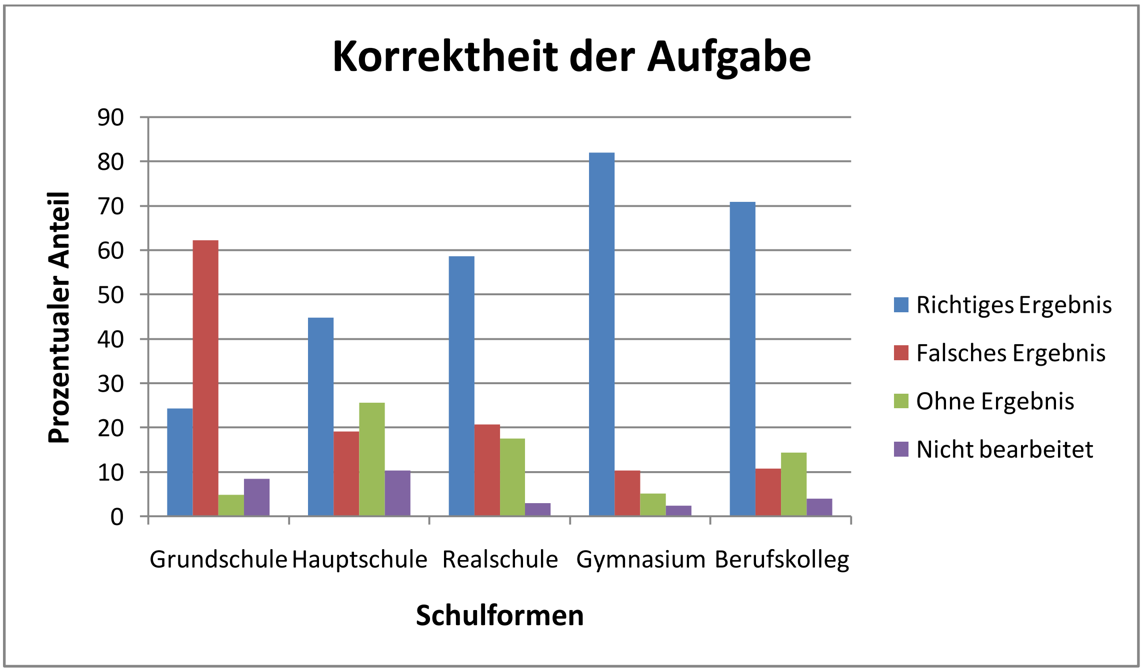
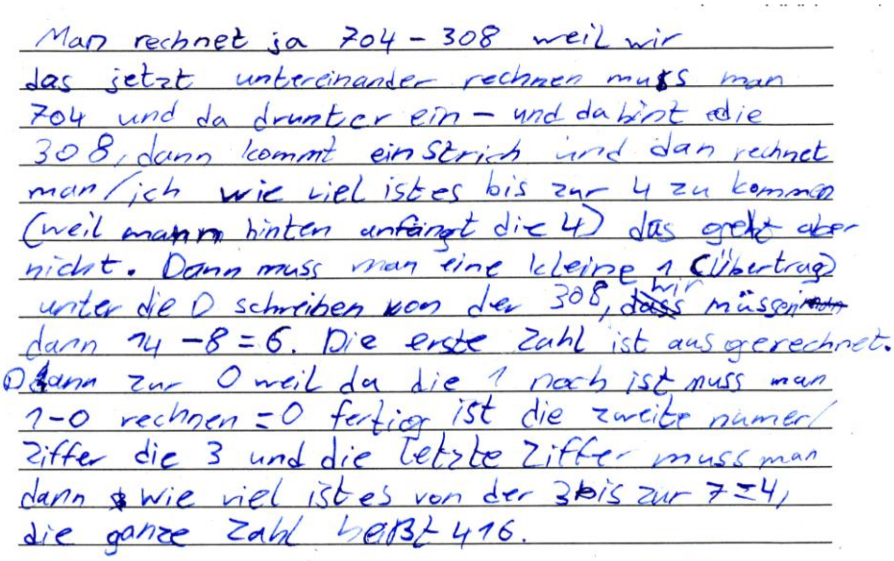


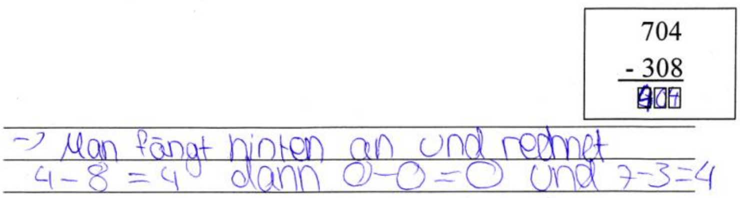
Abbildung 29: Korrektheit der Aufgabe

Nachfolgend werden einige Beispiel zu den Kategorien richtiges Ergebnis, falsches Ergebnis, ohne Ergebnis und nicht bearbeitet angegeben.



Man rechnet ja 704 – 308 weil wir
das jetzt untereinander rechnen muss man
704 und da drunter ein – und dahinst die
308, dann kommt ein Strich und dan rechnet
man/ich wie viel ist es bis zur 4 zu kommen
(weil ~~mann~~ hinten anfängt die 4) das geht aber
nicht. Dann muss man eine kleine 1 (Übertrag)
unter die 0 schreiben von der 308, ~~dass~~ wir müssen
dann 14 – 8 = 6. Die erste Zahl ist ausgerechnet.
~~D~~ dann zur 0 weil da die 1 noch ist muss man
1 – 0 rechnen = 0 fertig ist die zweite nummer/
Ziffer die 3 und die letzte Ziffer muss man
dann wie viel ist es von der 3 bis zur 7 = 4,
die ganze Zahl heißt 416.

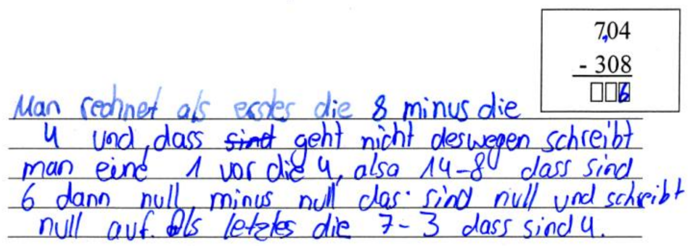
Abbildung 30: Falsches Ergebnis Gymnasium



704
- 308
404

→ Man fängt hinten an und rechnet
4 – 8 = 4 dann 0 – 0 = 0 und 7 – 3 = 4

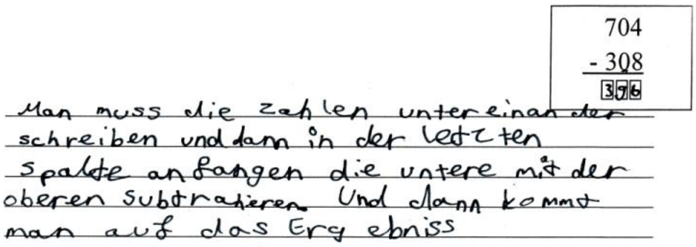
Abbildung 31: Falsches Ergebnis Berufskolleg



704
- 308
6

Man rechnet als erstes die 8 minus die
4 und dass ~~sind~~ geht nicht deswegen schreibt
man eine 1 vor die 4, also 14 – 8 dass sind
6 dann null minus null das sind null und schreibt
null auf. als letztes die 7 – 3 dass sind 4.

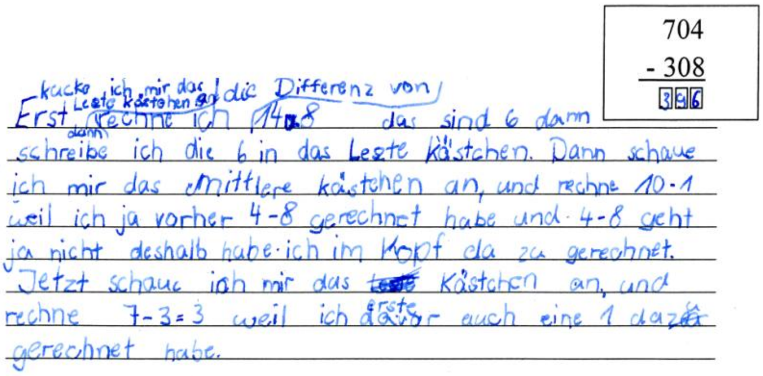
Abbildung 32: Falsches Ergebnis Realschule



704
- 308
396

Man muss die zahlen untereinander
schreiben und dann in der letzten
spalte anfangen die untere mit der
oberen subtrahieren. Und dann kommt
man auf das Ergebniss

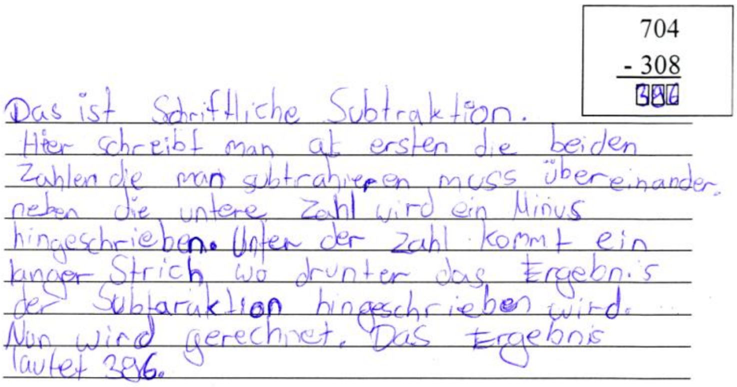
Abbildung 33: Richtiges Ergebnis Hauptschule



704
- 308
396

kucke ich mir das Leste kästchen an / die Differenz von
Erst rechne ich 14-8 das sind 6 dann
dann
schreibe ich die 6 in das Leste kästchen. Dann schaue
ich mir das mittlere kästchen an, und rechne 10-1
weil ich ja vorher 4-8 gerechnet habe und 4-8 geht
ja nicht deshalb habe ich im Kopf da zu gerechnet.
Jetzt schaue ich mir das ~~...~~ Kästchen an, und
erste
rechne 7-3=3 weil ich davor auch eine 1 dazu
gerechnet habe.

Abbildung 34: Richtiges Ergebnis Grundschule



704
- 308
396

Das ist Schriftliche Subtraktion.
Hier schreibt man at ersten die beiden
Zahlen die man subtrahieren muss übereinander.
neben die untere Zahl wird ein Minus
hingeschrieben. Unter der Zahl kommt ein
langer Strich wo drunter das Ergebnis
der Subtaraktion hingeschrieben wird.
Nun wird gerechnet. Das Ergebnis
lautet 396.

Abbildung 35: Richtiges Ergebnis Realschule

704
- 308
396

Man schreibt die zu subtrahierenden Zahlen untereinander,
wobei sich die Einerstellen unter den Einerstellen, die
Zehnerstellen unter den Zehnerstellen usw. befinden. Nun
subtrahiert man die obere rechte Zahl mit der unteren
Rechten. In diesem Fall 4-8. Da das Ergebnis ins negative
geht, schreibt man sich eine Reihe weiter links eine
kleine 1 unter die untere Zahl die man bei der
sie wird mit der 4 zur 14, um das Ergebnis positiv zu halten
weiteren Rechnung berücksichtigen muss. Nun subtrahiert
man die Zahlen der mittleren Spalte voneinander. Da
es durch die kleine 1 auch wieder negativ werden würde
(0-1) schreibt man sich eine Reihe weiter links
wieder eine kleine 1 unter die unterste Zahl. Das Ergebnis
der zweiten Spalte wird 9 ~~die~~ Die kleine 1
wird mit der oberen 0 zu 10 und man rechnet 10-1 also
9. Nun muss man nur noch die 100er Stellen voneinander
subtrahieren also. 7-3-1 = 3. Man schreibt die errechneten
Ergebnisse nun unter die Aufgabe

704
-308
396

Abbildung 36: Richtiges Ergebnis Gymnasium

704
- 308
□□□

Man rechnet die Zahlen untereinander.
Da die 4 kleiner als die 8 ist macht
man aus der 4 eine 14 und tut
die 1 von der 14 auf die linke seite
und man rechnet einfach weiter.

Abbildung 37: Ohne Ergebnis Hauptschule

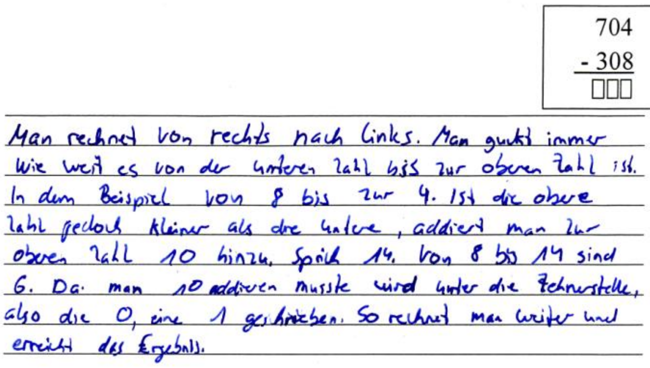


Abbildung 38: Ohne Ergebnis Berufskolleg

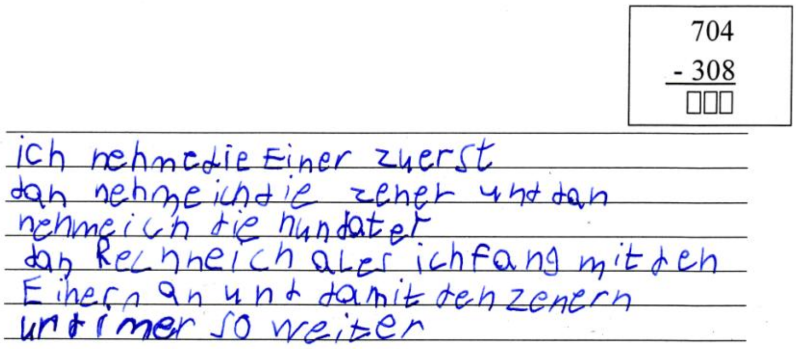


Abbildung 39: Ohne Ergebnis Grundschule

Aus der Bearbeitung der Aufgabe und dem dazugehörigen Anleitungstext konnten die folgenden Daten zu den jeweiligen Lösungsverfahren entnommen werden:

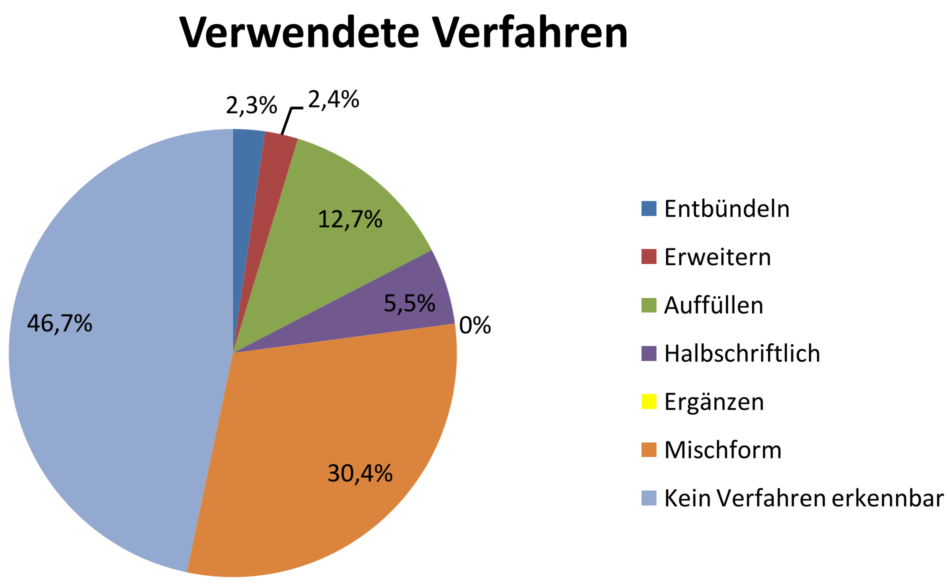


Abbildung 40: Verwendete Verfahren

Das Ergänzungsverfahren ist von keinem Teilnehmer angewendet worden, ganz gleich aus welcher Schulstufe.

Die verschiedenen Übertragstechniken werden durch die folgenden Beispiele nachgewiesen:

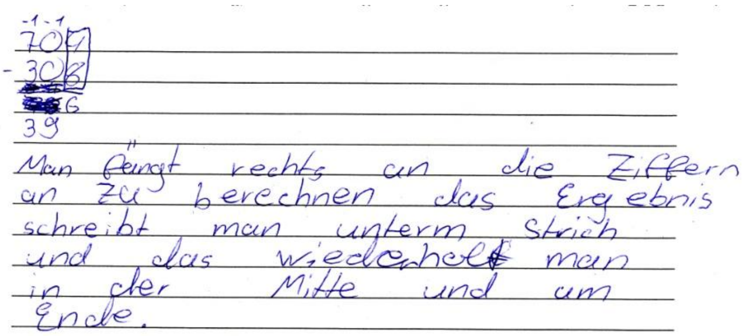


Abbildung 41: Entbündelungstechnik Hauptschule

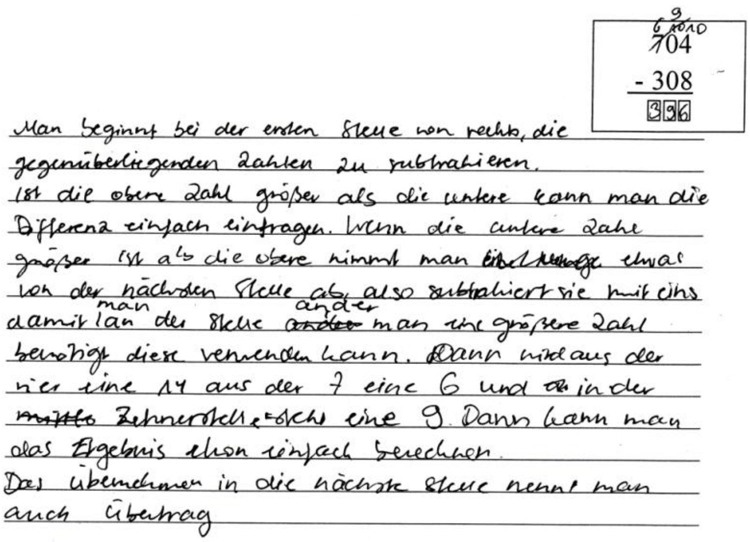


Abbildung 42: Entbündelungstechnik Gymnasium

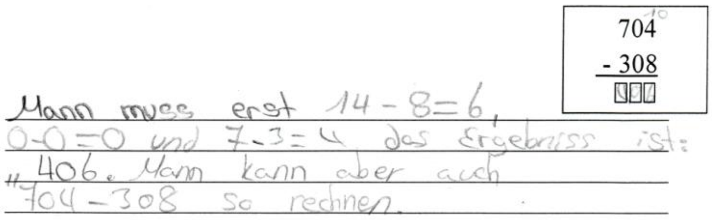


Abbildung 43: Entbündelungstechnik Grundschule

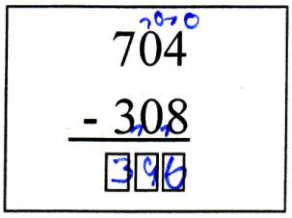


Abbildung 45: Erweiterungstechnik Hauptschule

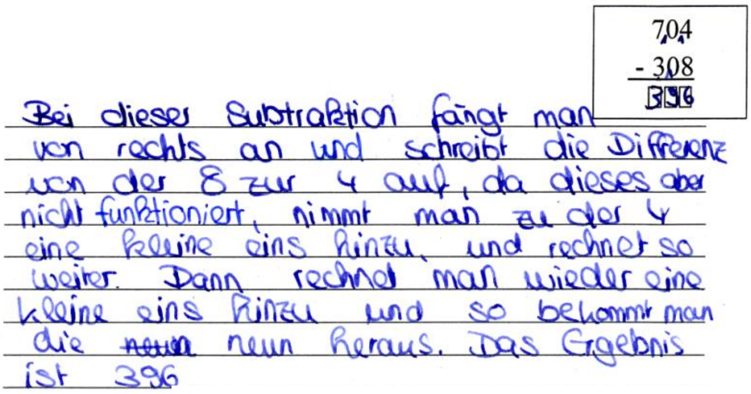


Abbildung 44: Erweiterungstechnik Realschule

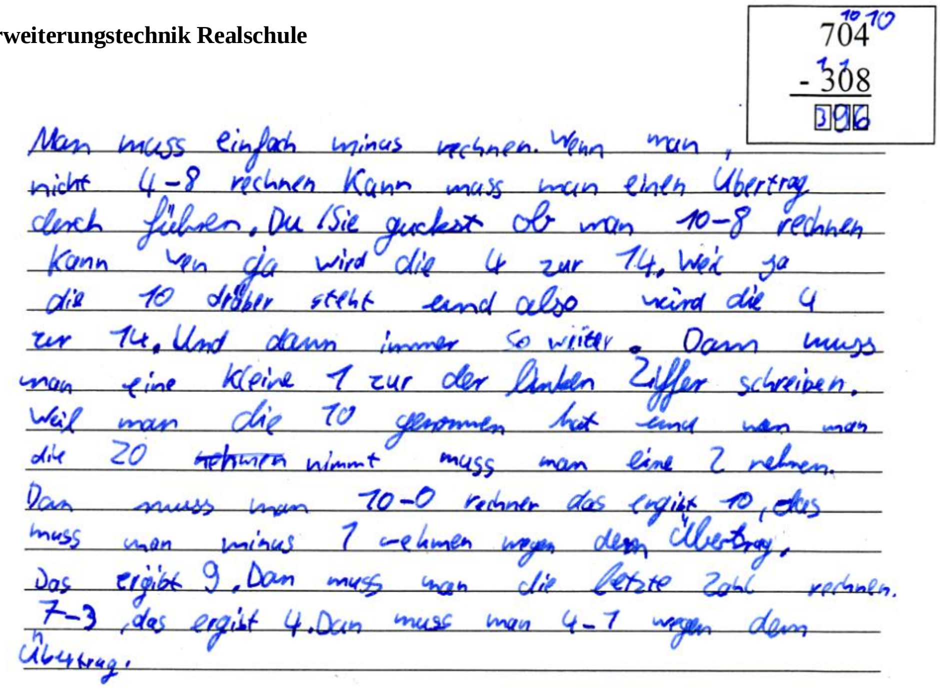
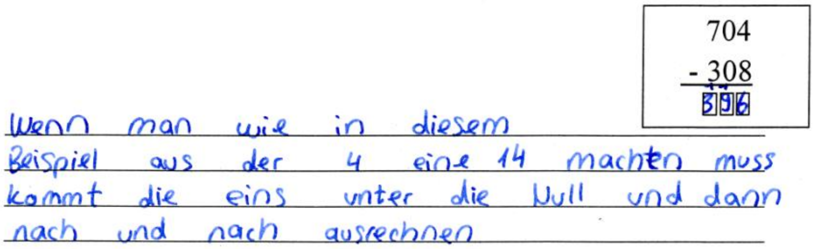
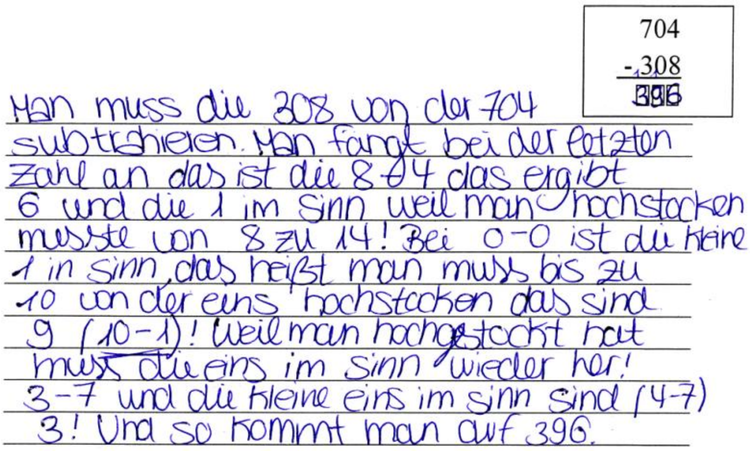


Abbildung 46: Erweiterungstechnik Gymnasium


704
- 308
396

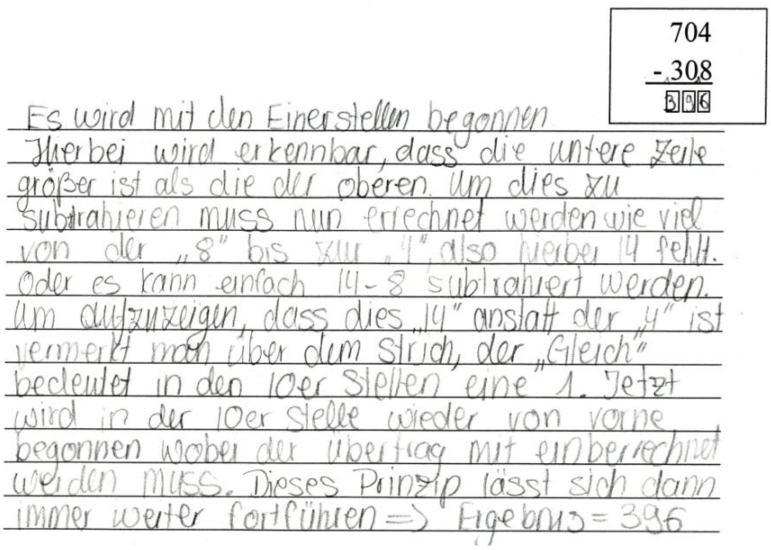
Wenn man wie in diesem Beispiel aus der 4 eine 14 machen muss kommt die eins unter die Null und dann nach und nach ausrechnen

Abbildung 47: Auffüllverfahren Hauptschule


704
- 308
396

Man muss die 308 von der 704 subtrahieren. Man fängt bei der letzten Zahl an das ist die 8 ~~0~~4 das ergibt 6 und die 1 im Sinn weil man hochstocken musste von 8 zu 14! Bei 0-0 ist die kleine 1 in Sinn, das heißt man muss bis zu 10 von der eins hochstocken das sind 9 (10-1)! Weil man hochgestockt hat muss die eins im Sinn wieder her! 3-7 und die kleine eins im sinn sind (4-7) 3! Und so kommt man auf 396.

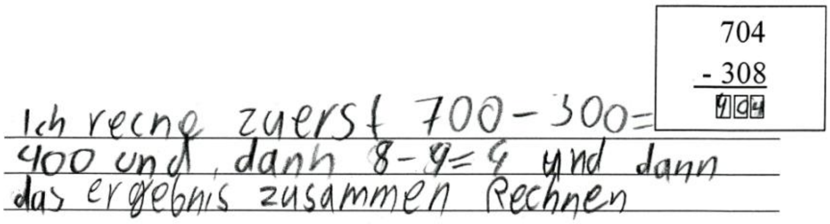
Abbildung 48: Auffüllverfahren Berufskolleg


704
- 308
396

Es wird mit den Einerstellen begonnen Hierbei wird erkennbar, dass die untere Zeile größer ist als die der oberen. Um dies zu subtrahieren muss nun errechnet werden wie viel von der „8" bis zu „4", also hierbei 14 fehlt. Oder es kann einfach 14-8 subtrahiert werden. Um aufzuzeigen, dass dies „14" anstatt der „4" ist vermerkt man über dem Strich, der „Gleich" bedeutet in den 10er Stellen eine „1. Jetzt wird in der 10er Stelle wieder von vorne begonnen wobei der Übertrag mit einberechnet werden muss. Dieses Prinzip lässt sich dann immer weiter fortführen => Ergebnis = 396

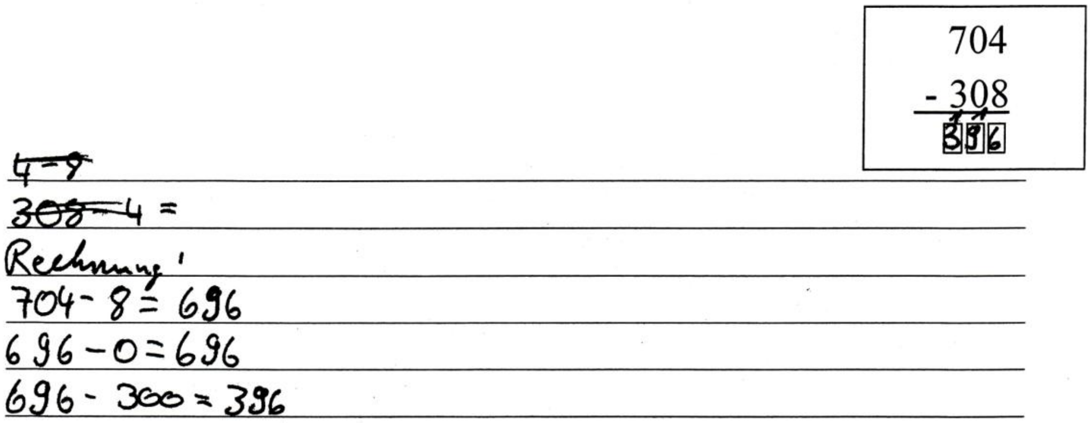
Abbildung 49: Auffüllverfahren Gymnasium

Halbschriftliche Verfahren sind in den nächsten Beispielen erkennbar:


704
- 308
404

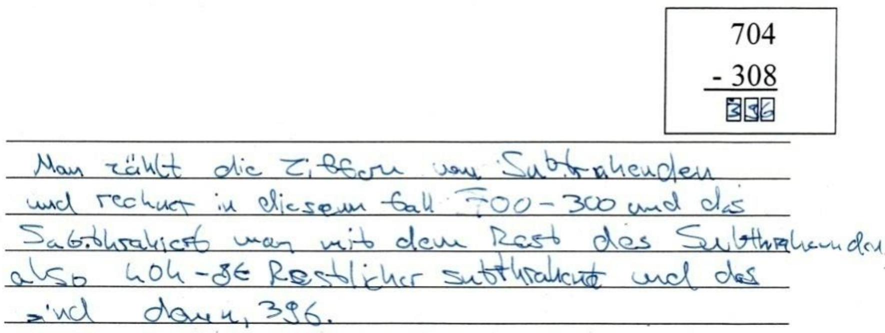
Ich recne zuerst 700 - 300 = 400 und, danh 8 - 4 = 4 und dann das ergebnis zusammen Rechnen

Abbildung 50: Halbschriftliches Verfahren Grundschule


704
- 308
396

~~4-8~~
~~308-4~~ =
Rechnung:
704 - 8 = 696
696 - 0 = 696
696 - 300 = 396

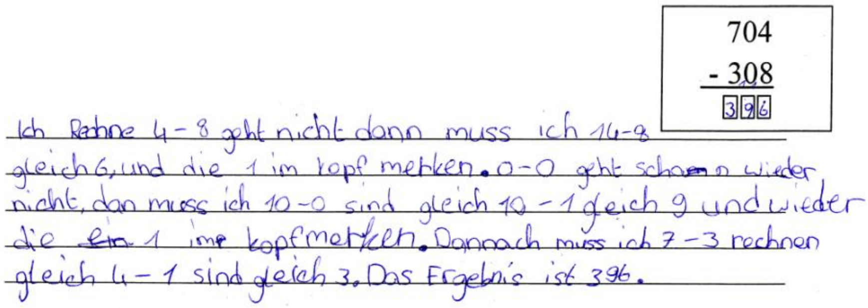
Abbildung 51: Halbschriftliches Verfahren Hauptschule


704
- 308
396

Man zählt die Ziffern vom Subtrahenden und rechnet in diesem Fall 700 - 300 und das Subtrahiert man mit dem Rest des Subtrahenden also 404 - 8 Restlicher subtrahiert und das sind dann, 396.

Abbildung 52: Halbschriftliches Verfahren Realschule

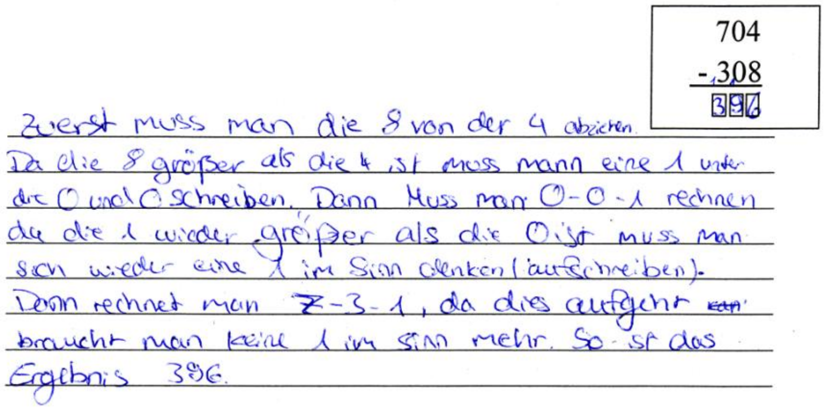
Als Mischform werden die folgenden Antworten der Teilnehmer gewertet:



704
- 308
396

Ich Rechne 4 - 8 geht nicht dann muss ich 14-8
gleich 6, und die 1 im kopf merken. 0-0 geht schon wieder
nicht, dan muss ich 10-0 sind gleich 10 - 1 gleich 9 und wieder
die ~~ein~~ 1 im kopfmerken. Dannach muss ich 7 - 3 rechnen
gleich 4 - 1 sind gleich 3. Das Ergebnis ist 396.

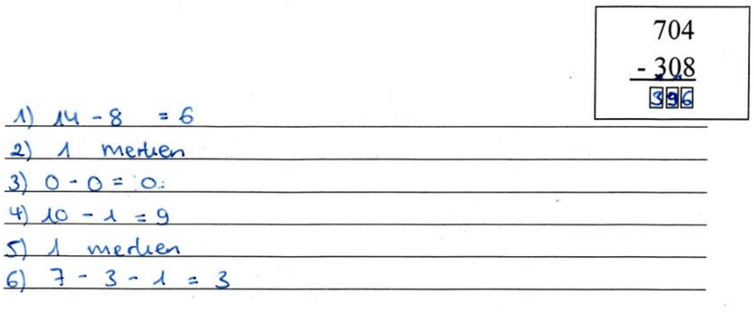
Abbildung 53: Mischform Hauptschule



704
- 308
396

Zuerst muss man die 8 von der 4 abziehen.
Da die 8 größer als die 4 ist muss mann eine 1 unter
die 0 und 0 schreiben. Dann Muss man 0-0-1 rechnen
da die 1 wieder größer als die 0 ist muss man
sich wieder eine 1 im Sinn denken (aufschreiben).
Dann rechnet man 7-3-1, da dies aufgeht ~~kan~~
braucht man keine 1 im sinn mehr. So ist das
Ergebnis 396.

Abbildung 54: Mischform Gymnasium

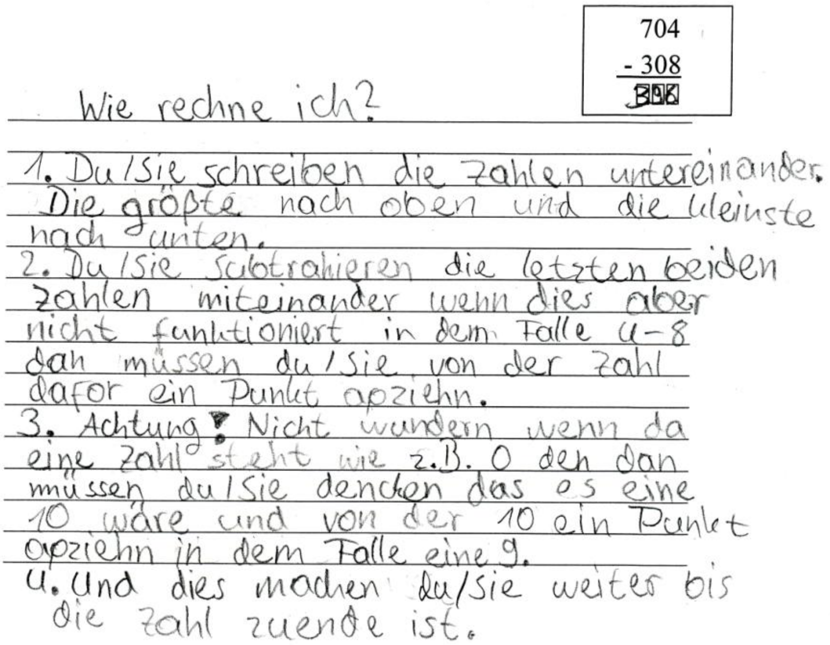


704
- 308
396

1) 14 - 8 = 6
2) 1 merken
3) 0 - 0 = 0
4) 10 - 1 = 9
5) 1 merken
6) 7 - 3 - 1 = 3

Abbildung 55: Mischform Berufskolleg

Als *Kein Verfahren erkennbar* werden zum Beispiel folgende Daten gewertet:


704
- 308
396

Wie rechne ich?

1. Du/Sie schreiben die Zahlen untereinander. Die größte nach oben und die kleinste nach unten.
2. Du/Sie subtrahieren die letzten beiden Zahlen miteinander wenn dies aber nicht funktioniert in dem Falle 4−8 dan müssen du/Sie von der Zahl dafor ein Punkt apziehn.
3. Achtung! Nicht wundern wenn da eine Zahl steht wie z.B. 0 den dan müssen du/Sie denchen das es eine 10 wäre und von der 10 ein Punkt apziehn in dem Falle eine 9.
4. Und dies machen du/sie weiter bis die Zahl zuende ist.

Abbildung 56: Kein Verfahren erkennbar Gymnasium

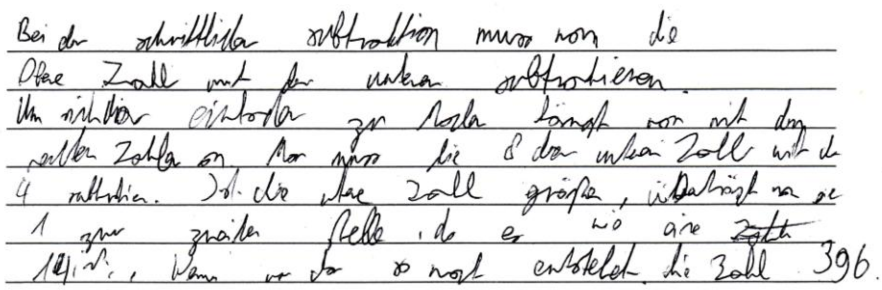
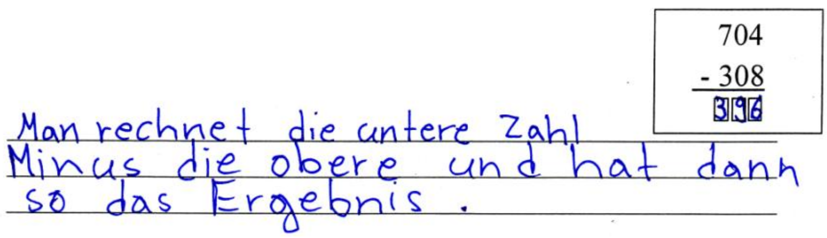

Bei der schriftlichen subtraktion muss man die obere Zahl mit der unteren subtrahieren. [illegible] 396.

Abbildung 57: Kein Verfahren erkennbar Realschule


704
- 308
396

Man rechnet die untere Zahl Minus die obere und hat dann so das Ergebnis.

Abbildung 58: Kein Verfahren erkennbar Hauptschule

Bei der Bearbeitung der Aufgabe traten bei den SuS die folgenden Fehler auf:

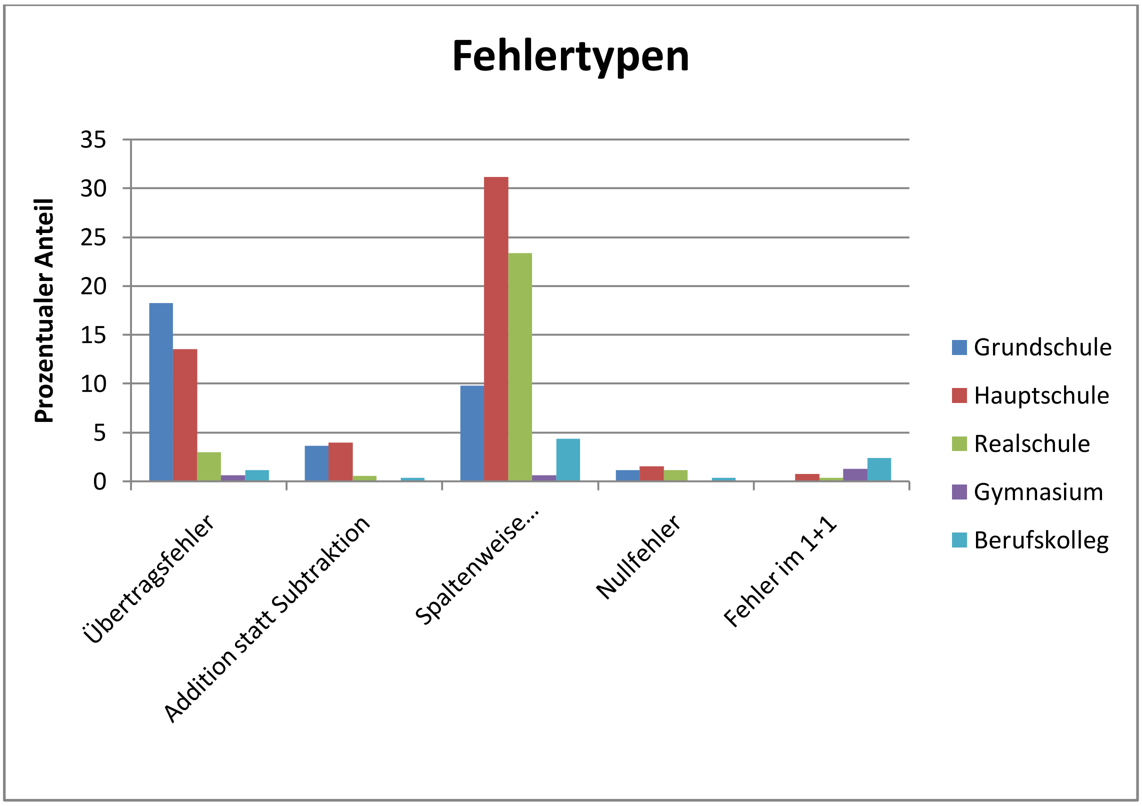


Abbildung 59: Fehlertypen

Die Übertragsfehler werden an den nachfolgenden Beispielen deutlich:

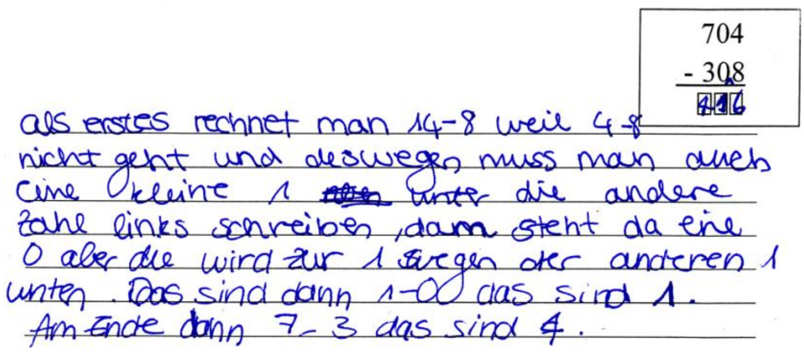
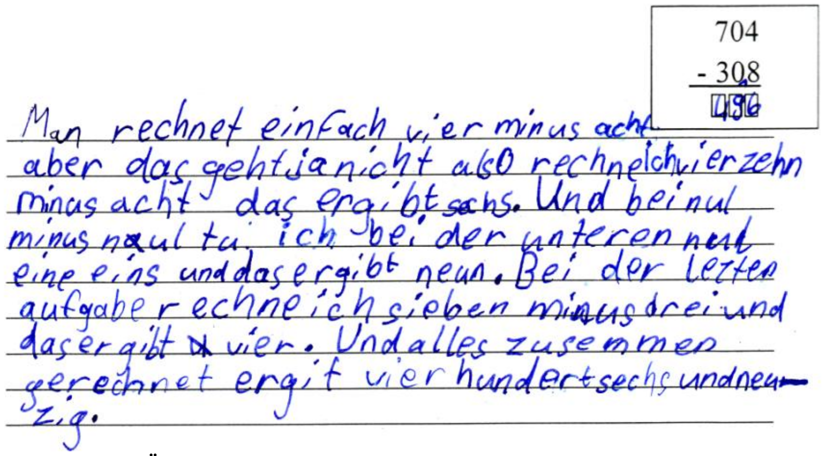


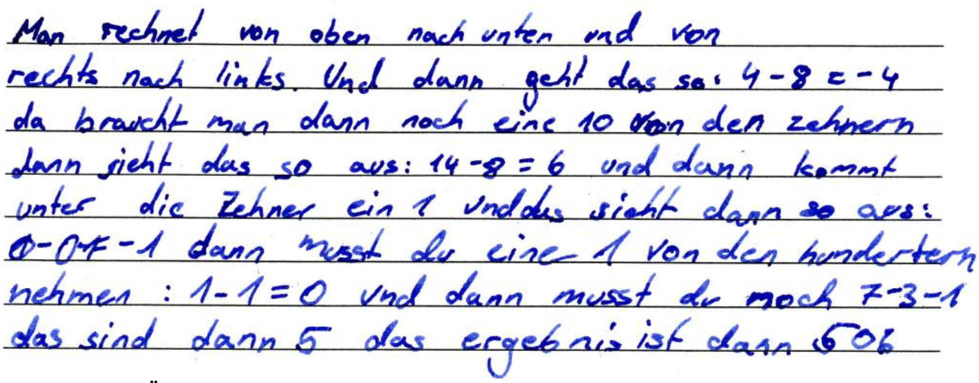
Abbildung 60: Übertragsfehler Realschule



704
- 308
496

Man rechnet einfach vier minus acht
aber das geht ja nicht also rechne ich vierzehn
minus acht das ergibt sechs. Und bei nul
minus nul tu ich bei der unteren nul
eine eins und das ergibt neun. Bei der lezten
aufgabe rechne ich sieben minus drei und
das ergibt ~~d~~ vier. Und alles zusammen
gerechnet ergit vier hundertsechsundneun-
zig.

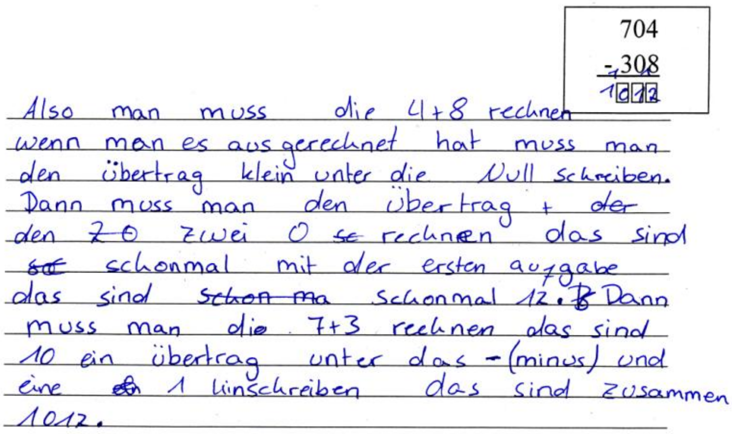
Abbildung 61: Übertragsfehler Grundschule



Man rechnet von oben nach unten und von
rechts nach links. Und dann geht das so: 4 - 8 = -4
da braucht man dann noch eine 10 von den zehnern
dann sieht das so aus: 14 - 8 = 6 und dann kommt
unter die Zehner ein 1 und das sieht dann so aus:
0-0-1 -1 dann musst du eine 1 von den hundertern
nehmen: 1-1 = 0 und dann musst du noch 7-3-1
das sind dann 5 das ergebnis ist dann 606

Abbildung 62: Übertragsfehler Gymnasium

Die Addition statt Subtraktion wird durch die folgenden Beispiele nachgewiesen:



704
- 308
1012

Also man muss die 4+8 rechnen
wenn man es ausgerechnet hat muss man
den übertrag klein unter die Null schreiben.
Dann muss man den übertrag + der
den ~~ZO~~ zwei 0 ~~se~~ rechnen das sind
~~so~~ schonmal mit der ersten aufgabe
das sind ~~schon ma~~ schonmal 12. ~~B~~ Dann
muss man die 7+3 rechnen das sind
10 ein übertrag unter das -(minus) und
eine ~~ch~~ 1 hinschreiben das sind zusammen
1012.

Abbildung 63: Addition statt Subtraktion Realschule

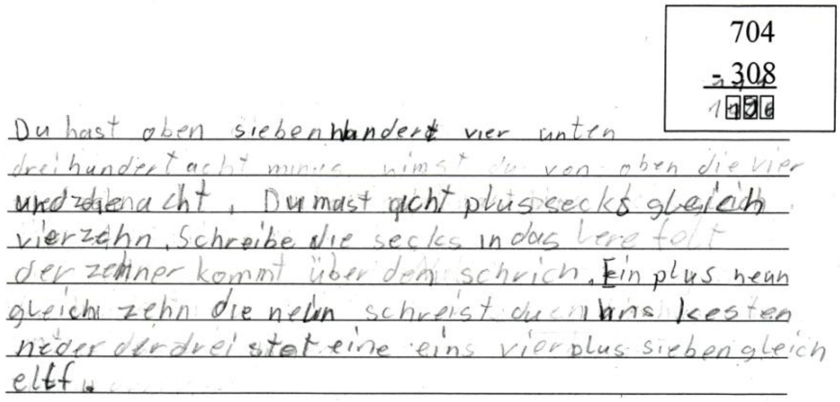


Abbildung 64: Addition statt Subtraktion Grundschule

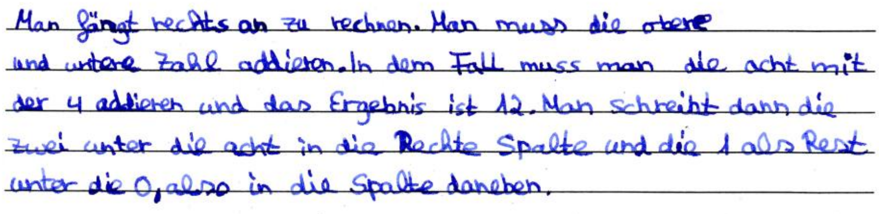


Abbildung 65: Addition statt Subtraktion Realschule

Die spaltenweise Unterschiedsbildung ist in den nächsten Beispielen erkennbar:

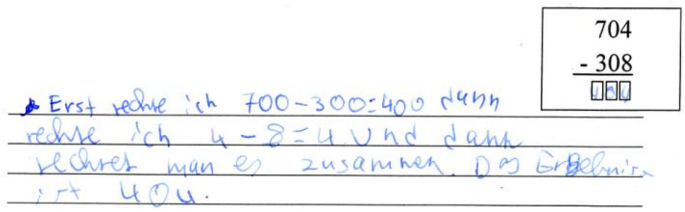


Abbildung 66: Spaltenweise Unterschiedsbildung Realschule

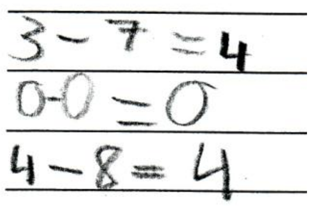


Abbildung 67: Spaltenweise Unterschiedsbildung Grundschule

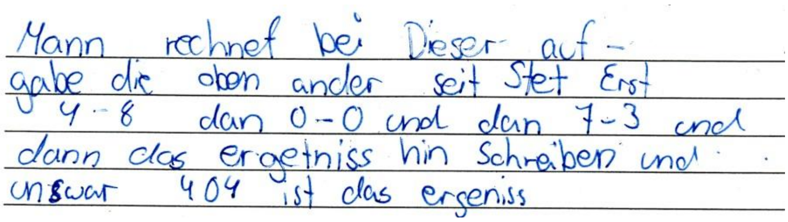


Abbildung 68: Spaltenweise Unterschiedsbildung Realschule

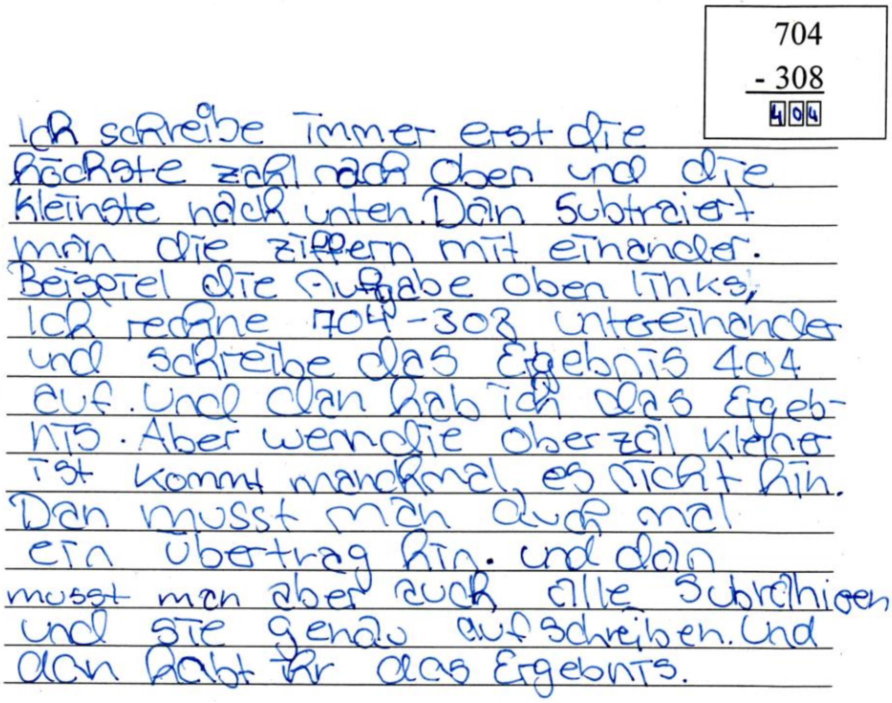


Abbildung 69: Spaltenweise Unterschiedsbildung Realschule

Nullfehler werden durch die folgenden Antworten der Teilnehmer verdeutlicht:

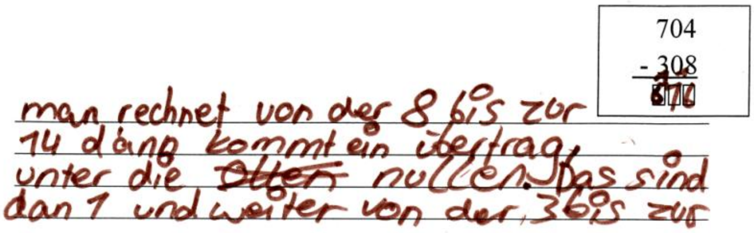
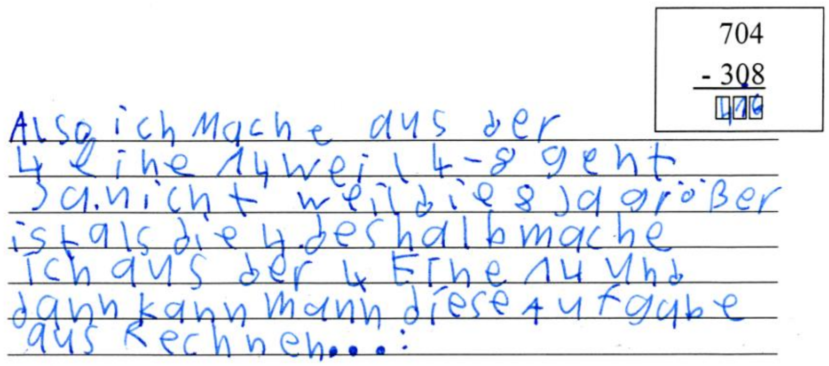


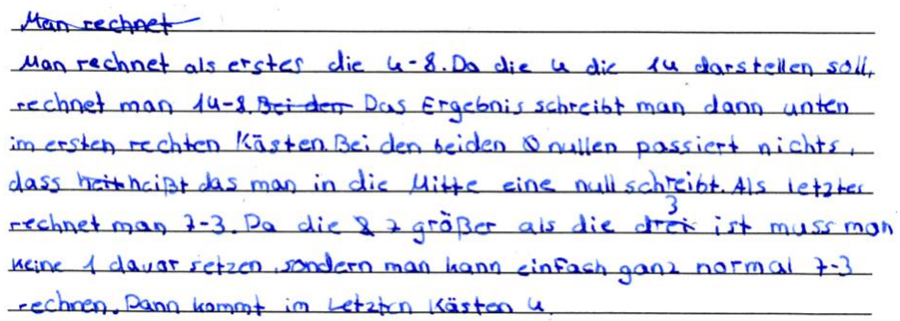
Abbildung 70: Nullfehler Realschule



704
- 308
476

Also ich Mache aus der
4 eine 14 weil 4-8 geht
ja nicht weil die 8 ja größer
ist als die 4 deshalb mache
ich aus der 4 Eine 14 und
dann kann mann diese Aufgabe
aus rechnen...:

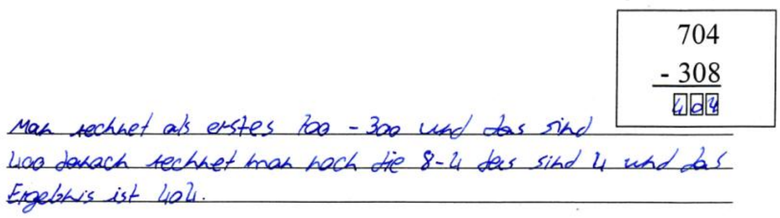
Abbildung 71: Nullfehler Grundschule



~~Man rechnet~~
Man rechnet als erstes die 4-8. Da die 4 die 14 darstellen soll,
rechnet man 14-8. ~~Bei den~~ Das Ergebnis schreibt man dann unten
im ersten rechten Kästen. Bei den beiden 0 nullen passiert nichts,
dass ~~heit~~ heißt das man in die Mitte eine null schreibt. Als letzter
rechnet man 7-3. Da die 8 7 größer als die ~~drei~~ 3 ist muss man
keine 1 davor setzen, sondern man kann einfach ganz normal 7-3
rechnen. Dann kommt im Letzten Kästen 4.

Abbildung 72: Nullfehler Realschule

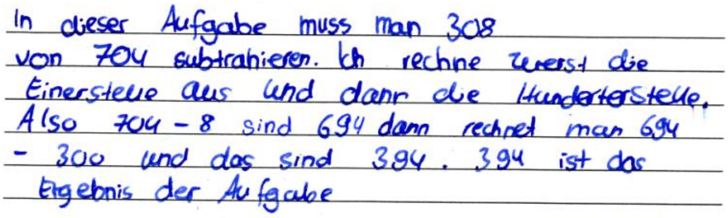
Als 1+1 Fehler werden zum Beispiel folgende Daten gewertet:



704
- 308
404

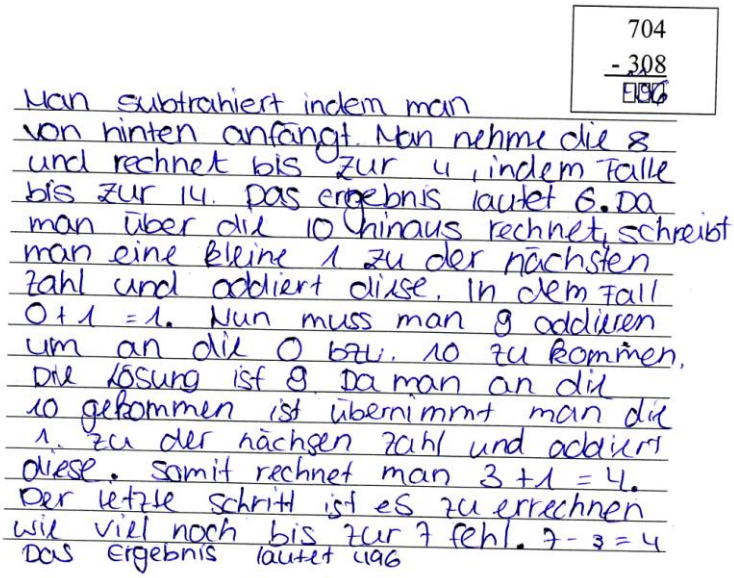
Man rechnet als erstes 700 - 300 und das sind
400 danach rechnet man noch die 8-4 das sind 4 und das
Ergebnis ist 404.

Abbildung 73: 1+1 Fehler Realschule



In dieser Aufgabe muss man 308 von 704 subtrahieren. Ich rechne zuerst die Einerstelle aus und dann die Hunderterstelle. Also 704 - 8 sind 694 dann rechnet man 694 - 300 und das sind 394. 394 ist das Ergebnis der Aufgabe

Abbildung 74: 1+1 Fehler Gymnasium



704
- 308
496

Man subtrahiert indem man von hinten anfängt. Man nehme die 8 und rechnet bis zur 4, in dem Falle bis zur 14. Das ergebnis lautet 6. Da man über die 10 hinaus rechnet, schreibt man eine kleine 1 zu der nächsten Zahl und addiert diese. In dem Fall 0+1 = 1. Nun muss man 9 addieren um an die 0 bzw. 10 zu kommen. Die Lösung ist 9. Da man an die 10 gekommen ist übernimmt man die 1 zu der nächsen Zahl und addiert diese. Somit rechnet man 3+1 = 4. Der letzte Schritt ist es zu errechnen wie viel noch bis zur 7 fehl. 7 - 3 = 4 Das Ergebnis lautet 496

Abbildung 75: 1+1 Fehler Berufskolleg

Die formulierten Texte wurden in der folgenden Kategorie hinsichtlich ihrer Verständlichkeit ausgewertet. So ergaben sich die folgenden Werte:

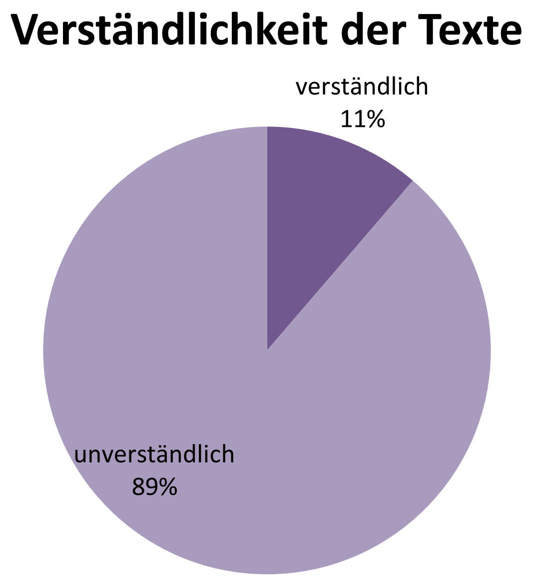


Abbildung 76: Verständlichkeit der Texte

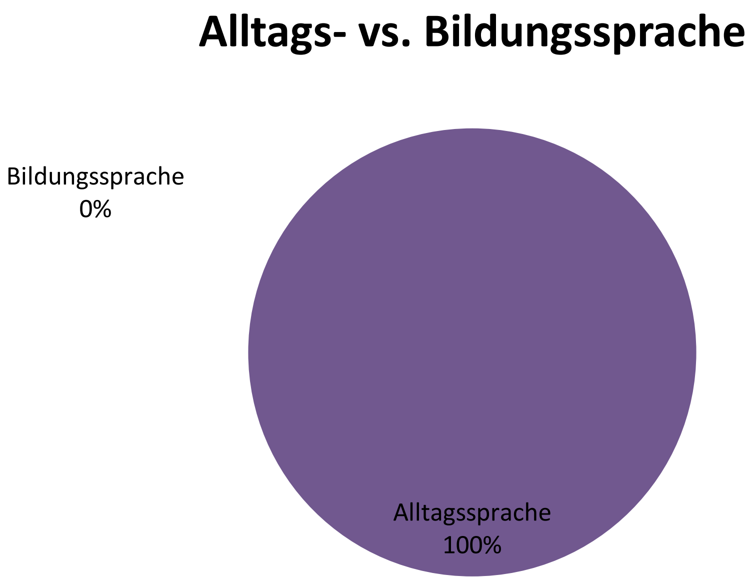


Abbildung 77: Alltags- vs. Bildungssprache

Nachfolgend sind Beispiele für die aufgeführten Kategorien angegeben.

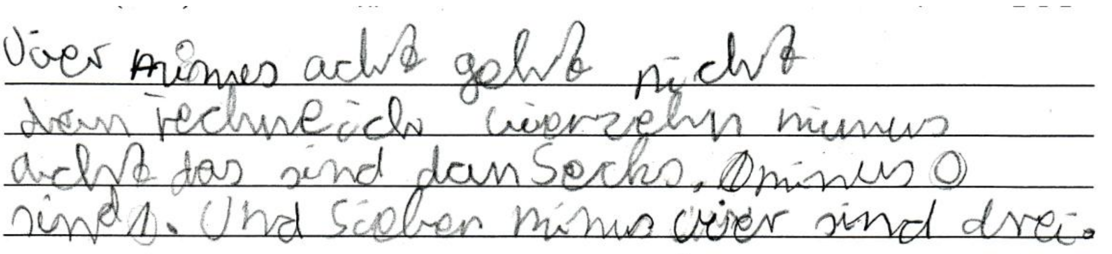
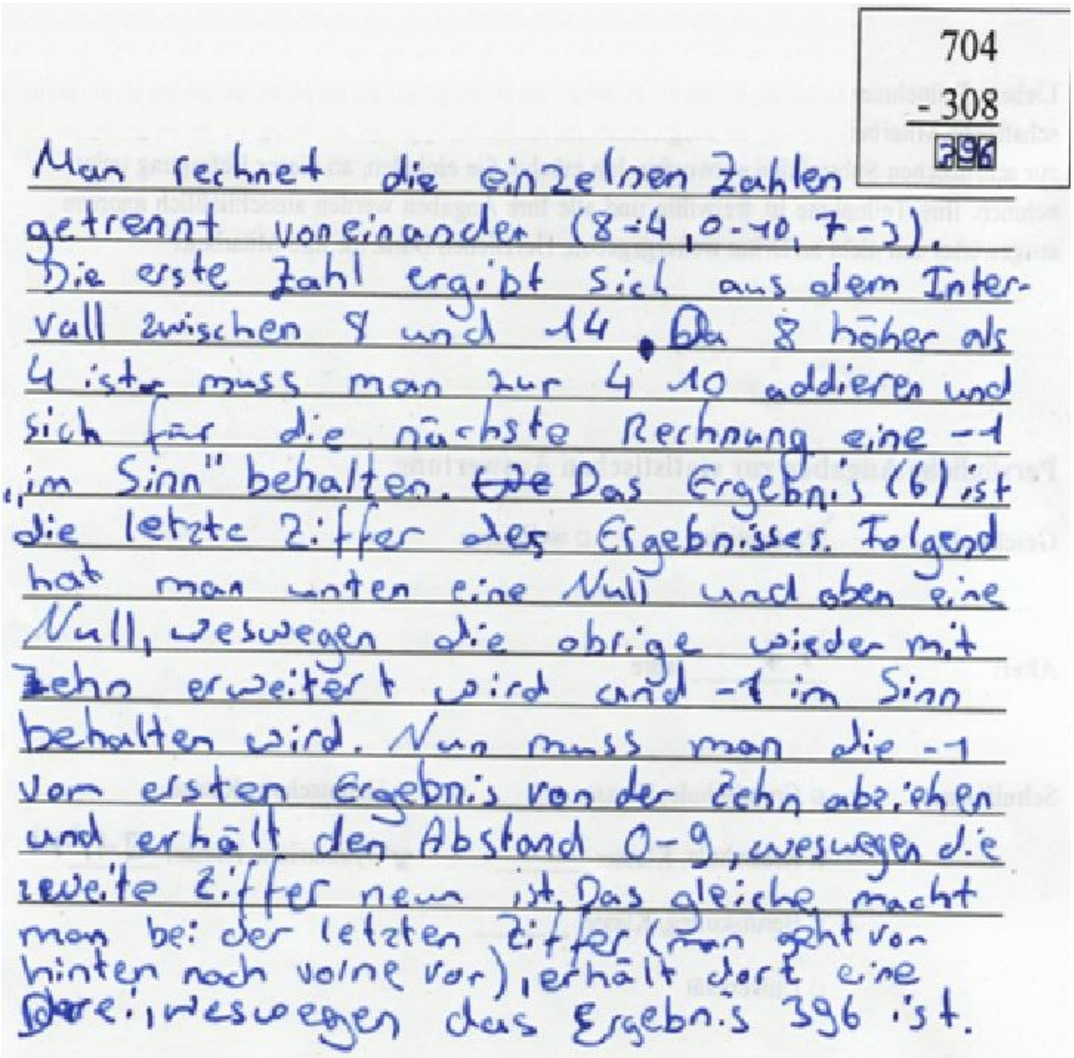

Vier minus acht geht nicht
dan rechne ich vierzehn minus
acht das sind dan Sechs. 0 minus 0
sind 0. Und Sieben minus vier sind drei.

Abbildung 78: Alltagssprache Grundschule


704
- 308
396

Man rechnet die einzelnen Zahlen
getrennt voneinander (8-4, 0-10, 7-3).
Die erste Zahl ergibt sich aus dem Inter-
vall zwischen 8 und 14. Da 8 höher als
4 ist, muss man zur 4 10 addieren und
sich für die nächste Rechnung eine -1
„im Sinn" behalten. Das Ergebnis (6) ist
die letzte Ziffer des Ergebnisses. Folgend
hat man unten eine Null und oben eine
Null, weswegen die obrige wieder mit
Zehn erweitert wird und -1 im Sinn
behalten wird. Nun muss man die -1
von ersten Ergebnis von der Zehn abziehen
und erhält den Abstand 0-9, weswegen die
zweite Ziffer neun ist. Das gleiche macht
man bei der letzten Ziffer (man geht von
hinten nach vorne vor), erhält dort eine
Drei, weswegen das Ergebnis 396 ist.

Abbildung 79: Verständlicher Text Gymnasium

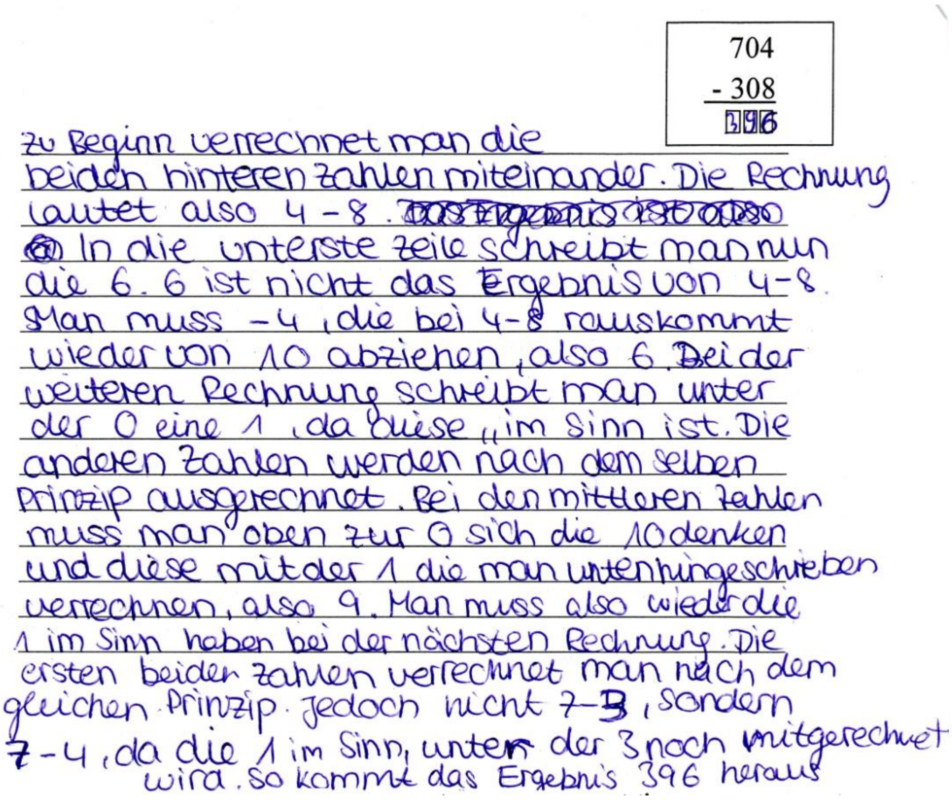


Abbildung 80: Verständlicher Text Gymnasium

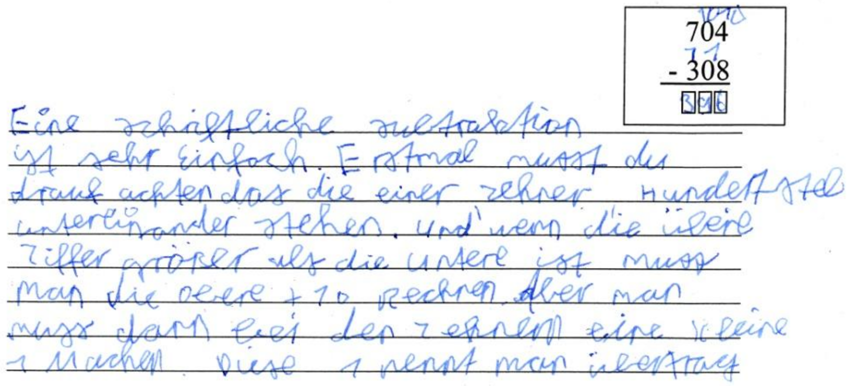
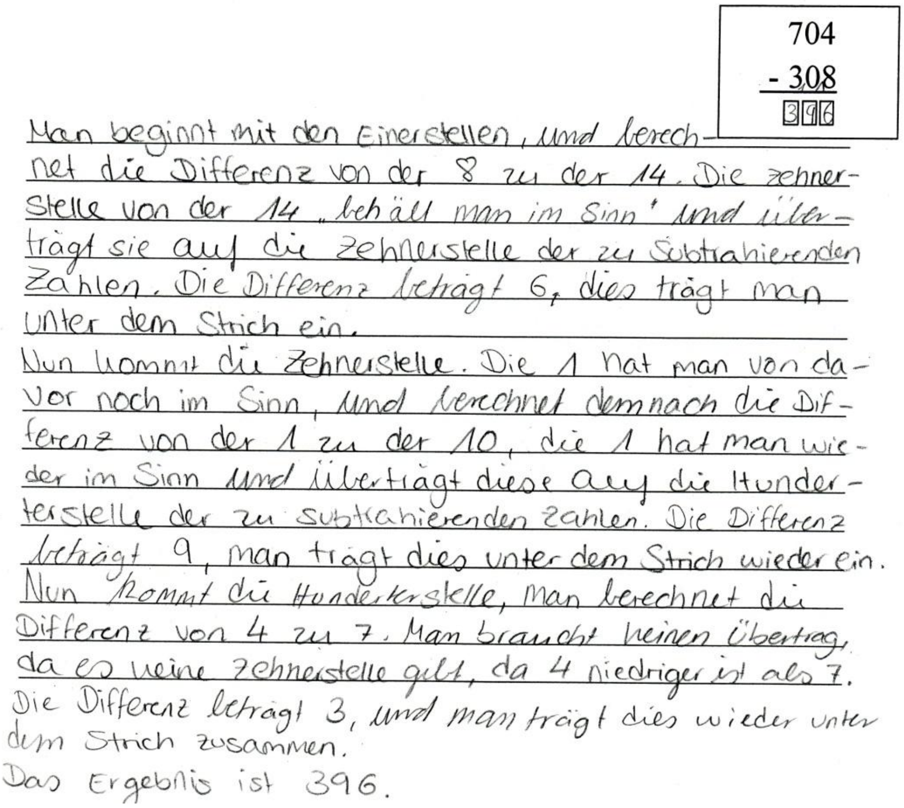


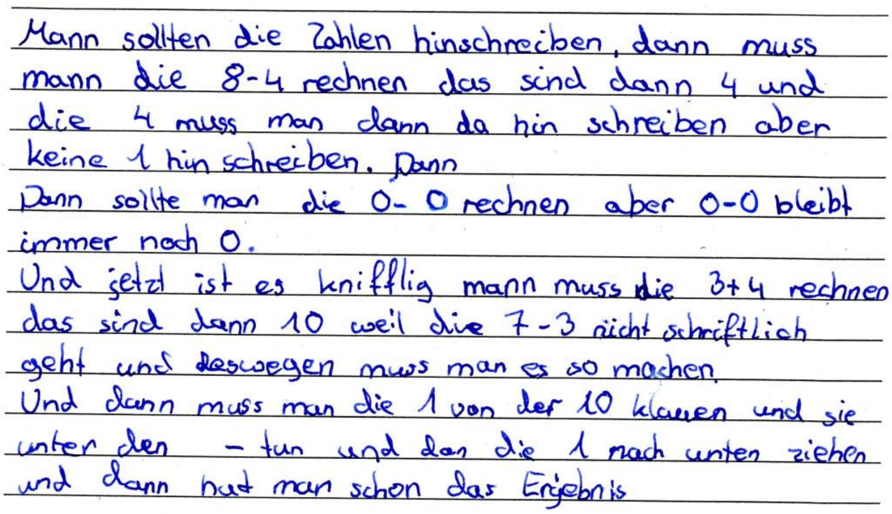
Abbildung 81: Verständlicher Text Realschule



704
- 308
396

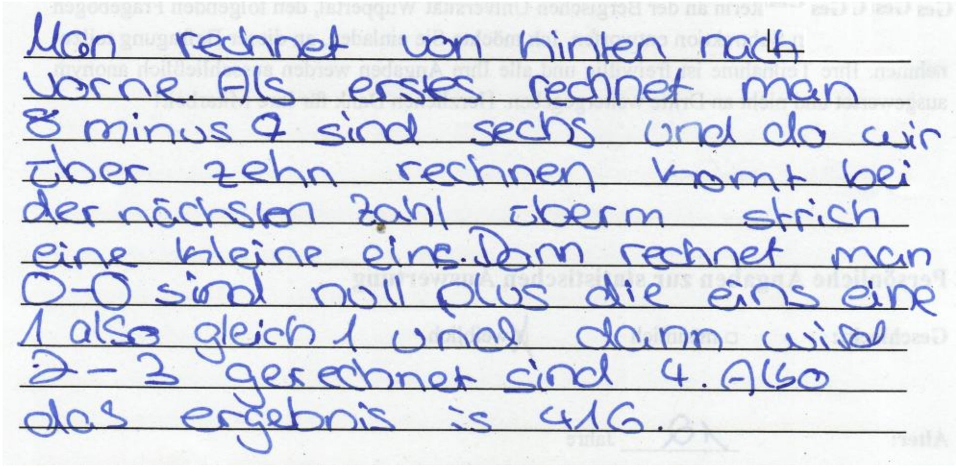
Man beginnt mit den Einerstellen, und berech-
net die Differenz von der 8 zu der 14. Die Zehner-
stelle von der 14 „behält man im Sinn" und über-
trägt sie auf die Zehnerstelle der zu Subtrahierenden
Zahlen. Die Differenz beträgt 6, dies trägt man
unter dem Strich ein.
Nun kommt die Zehnerstelle. Die 1 hat man von da-
vor noch im Sinn, und berechnet demnach die Dif-
ferenz von der 1 zu der 10, die 1 hat man wie-
der im Sinn und überträgt diese auf die Hunder-
terstelle der zu subtrahierenden Zahlen. Die Differenz
beträgt 9, man trägt dies unter dem Strich wieder ein.
Nun kommt die Hunderterstelle, man berechnet die
Differenz von 4 zu 7. Man braucht keinen Übertrag,
da es keine Zehnerstelle gibt, da 4 niedriger ist als 7.
Die Differenz beträgt 3, und man trägt dies wieder unter
dem Strich zusammen.
Das Ergebnis ist 396.

Abbildung 82: Verständlicher Text Gymnasium



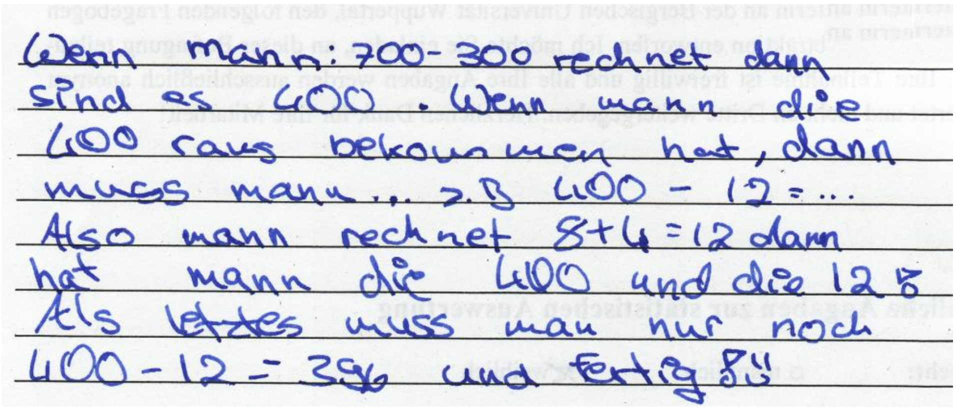
Mann sollten die Zahlen hinschreiben, dann muss
mann die 8-4 rechnen das sind dann 4 und
die 4 muss man dann da hin schreiben aber
keine 1 hin schreiben. Dann
Dann sollte man die 0- 0 rechnen aber 0-0 bleibt
immer noch 0.
Und jetzt ist es knifflig mann muss die 3+4 rechnen
das sind dann 10 weil die 7-3 nicht schriftlich
geht und deswegen muss man es so machen.
Und dann muss man die 1 von der 10 klauen und sie
unter den – tun und dan die 1 nach unten ziehen
und dann hat man schon das Ergebnis

Abbildung 83: Unverständlicher Text Realschule



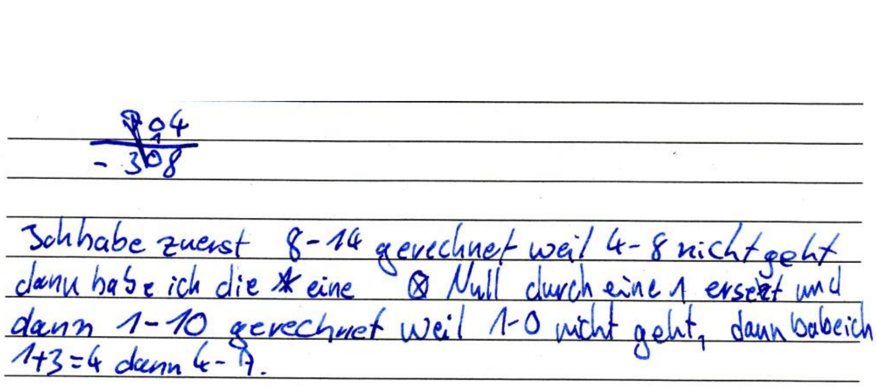
Man rechnet von hinten nach vorne. Als erstes rechnet man 8 minus 4 sind sechs und da wir über zehn rechnen komt bei der nächsten Zahl überm strich eine kleine eins. Dann rechnet man 0-0 sind null plus die eins eine 1 also gleich 1 und dann wird 2-3 gerechnet sind 4. Also das ergebnis is 416.

Abbildung 84: Unverständlicher Text Realschule



Wenn mann: 700-300 rechnet dann sind es 400. Wenn mann die 400 raus bekommen hat, dann muss mann... z.B 400 - 12 = ... Also mann rechnet 8+4 = 12 dann hat mann die 400 und die 12 8 Als letztes muss man nur noch 400 - 12 = 396 und fertig 8!!

Abbildung 85: Unverständlicher Text Gymnasium



904
\- 308

Ich habe zuerst 8-14 gerechnet weil 4-8 nicht geht dann habe ich die eine Null durch eine 1 ersetzt und dann 1-10 gerechnet weil 1-0 nicht geht, dann habe ich 1+3=4 dann 4-9.

Abbildung 86: Unverständlicher Text Hauptschule

Bei der zweiten Aufgabe zur Subtraktion sollte der Begriff Übertrag erklärt werden. Diese Aufgabe wurde wie folgt bearbeitet:

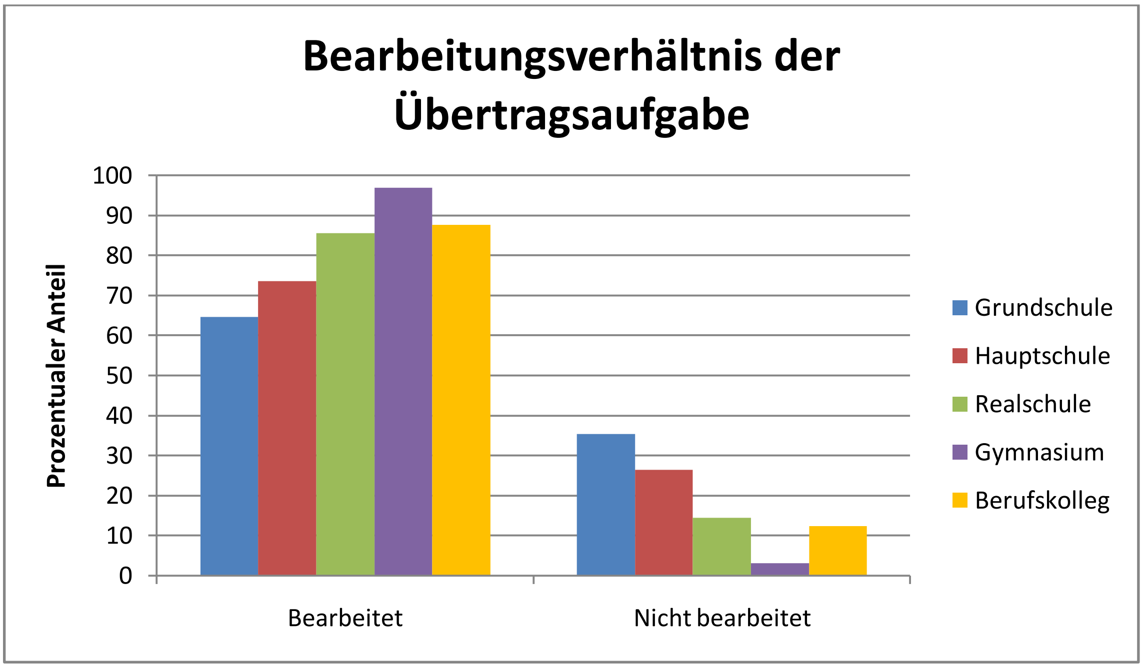


Abbildung 87: Bearbeitungsverhältnis der Übertragsaufgabe

Des Weiteren wurde die verwendete Sprache in den Texten genauer untersucht. Dazu wurden zunächst die Fachbegriffe analysiert und kategorisiert:

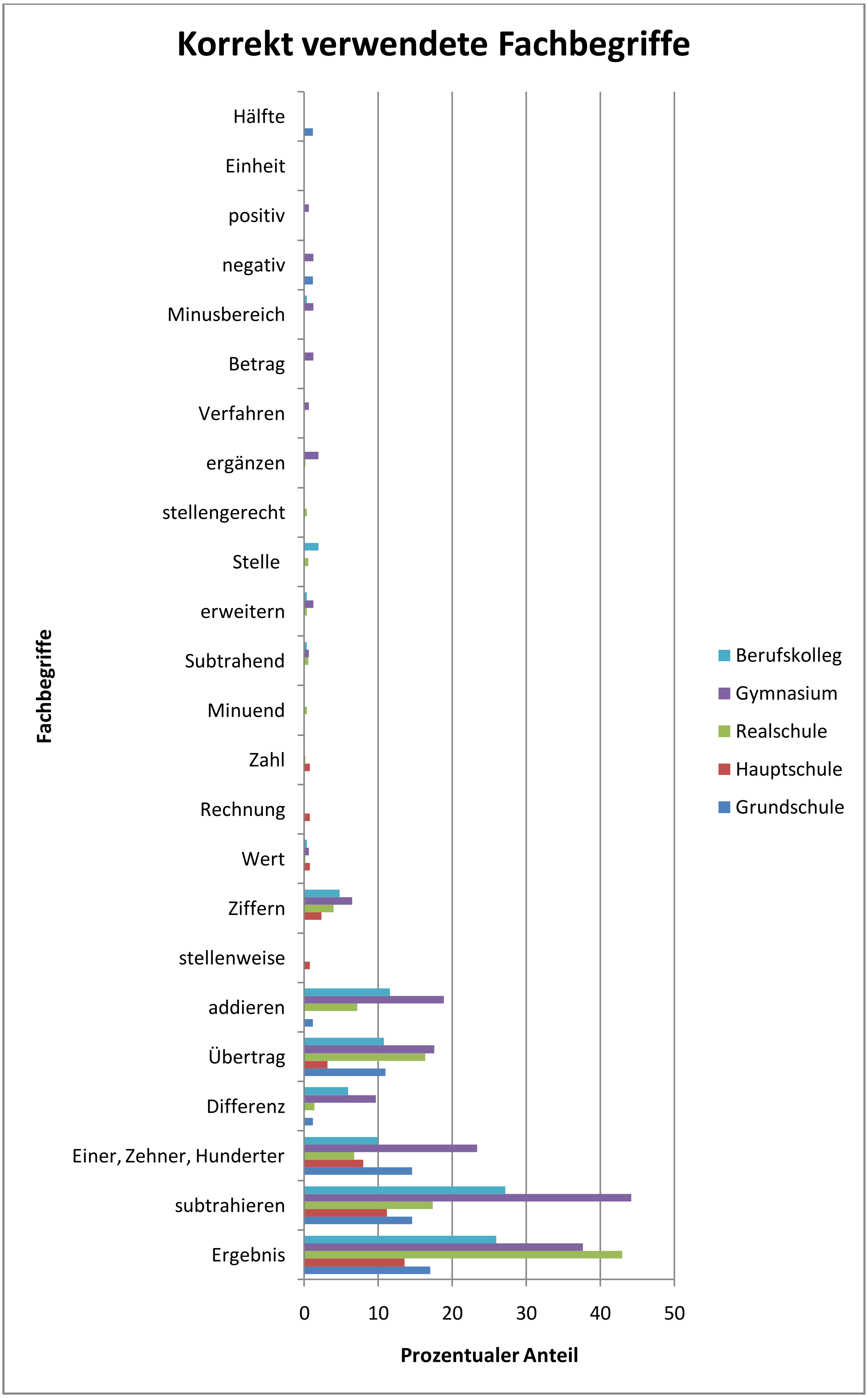


Abbildung 88: Korrekt verwendete Fachbegriffe

Im Folgenden sind diverse Beispiele zu den einzelnen Termini angegeben.

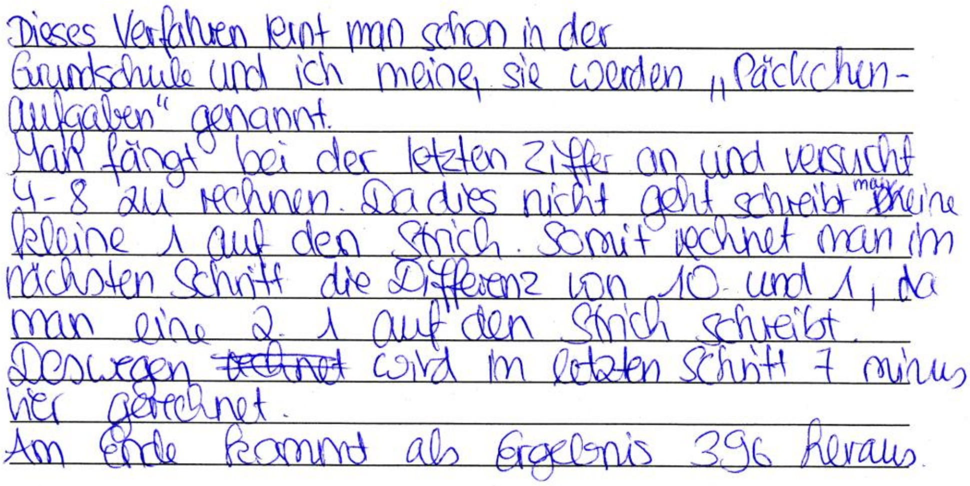

Dieses Verfahren kent man schon in der Grundschule und ich meine, sie werden „Päckchen-Aufgaben" genannt.
Man fängt bei der letzten Ziffer an und versucht 4-8 zu rechnen. Da dies nicht geht schreibt man ~~keine~~ kleine 1 auf den Strich. Somit rechnet man im nächsten Schritt die Differenz von 10 und 1, da man eine 2. 1 auf den Strich schreibt. Deswegen ~~rechnet~~ wird im letzten Schritt 7 minus vier gerechnet.
Am Ende kommt als Ergebnis 396 heraus.

Abbildung 89: Fachbegriffe Gymnasium

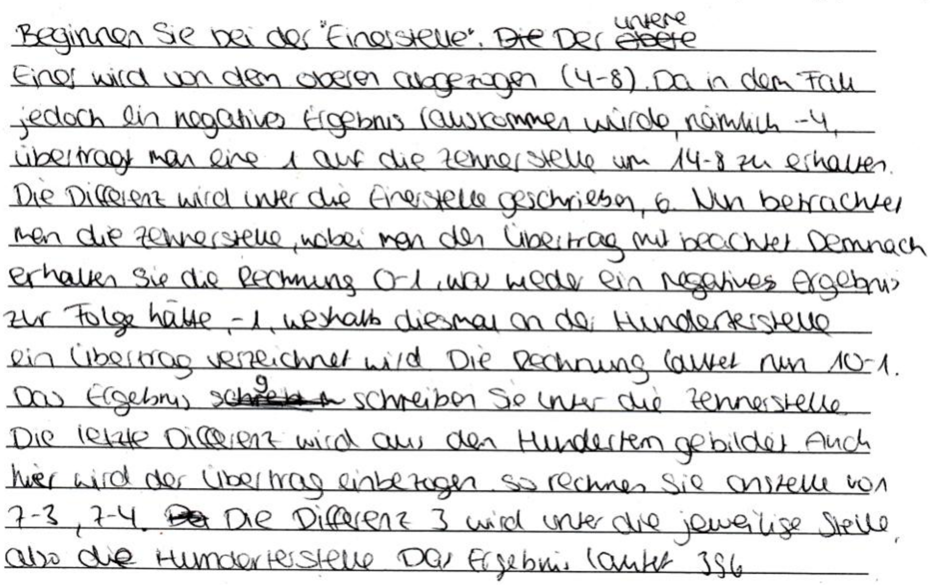

Beginnen Sie bei der "Einerstelle". ~~Die~~ Der ~~obere~~ untere Einer wird von dem oberen abgezogen (4-8). Da in dem Fall jedoch ein negatives Ergebnis rauskommen würde, nämlich -4, überträgt man eine 1 auf die Zehnerstelle um 14-8 zu erhalten. Die Differenz wird unter die Einerstelle geschrieben, 6. Nun betrachtet man die Zehnerstelle, wobei man den Übertrag mit beachtet. Demnach erhalten Sie die Rechnung 0-1, was wieder ein negatives Ergebnis zur Folge hätte, -1, weshalb diesmal an der Hunderterstelle ein Übertrag verzeichnet wird. Die Rechnung lautet nun 10-1. Das Ergebnis ~~schreiben~~ 9 schreiben Sie unter die Zehnerstelle. Die letzte Differenz wird aus den Hundertern gebildet. Auch hier wird der Übertrag einbezogen. So rechnen Sie anstelle von 7-3, 7-4. ~~Da~~ Die Differenz 3 wird unter die jeweilige Stelle, also die Hunderterstelle. Das Ergebnis lautet 396

Abbildung 90: Fachbegriffe Berufskolleg

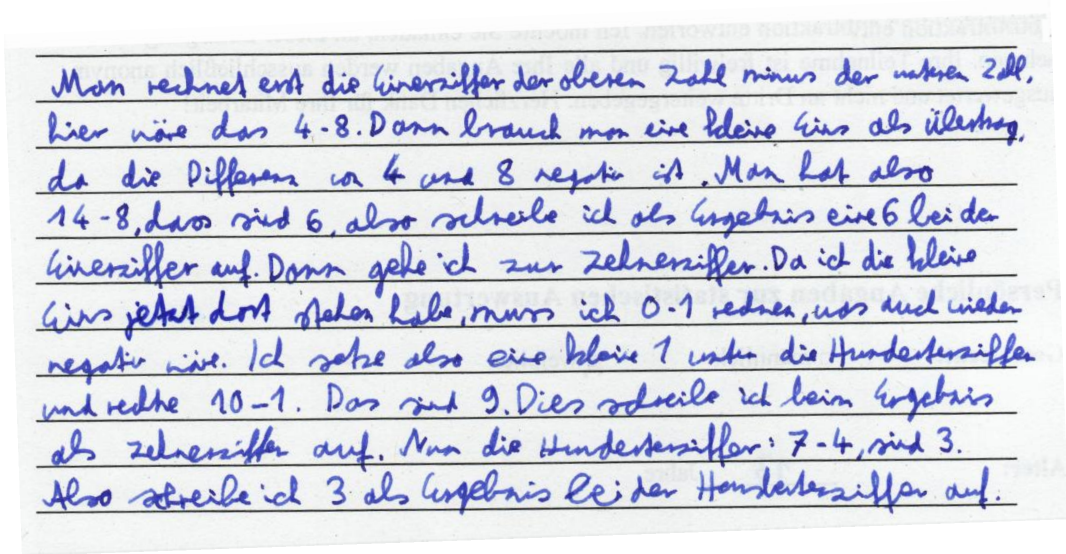

Man rechnet erst die Einerziffer der oberen Zahl minus der unteren Zahl,
hier wäre das 4-8. Dann braucht man eine kleine Eins als Übertrag,
da die Differenz von 4 und 8 negativ ist. Man hat also
14-8, dass sind 6, also schreibe ich als Ergebnis eine 6 bei der
Einerziffer auf. Dann gehe ich zur Zehnerziffer. Da ich die kleine
Eins jetzt dort stehen habe, muss ich 0-1 rechnen, was auch wieder
negativ wäre. Ich setze also eine kleine 1 unter die Hunderterziffer
und rechne 10-1. Das sind 9. Dies schreibe ich beim Ergebnis
als Zehnerziffer auf. Nun die Hunderterziffer: 7-4, sind 3.
Also schreibe ich 3 als Ergebnis bei der Hunderterziffer auf.

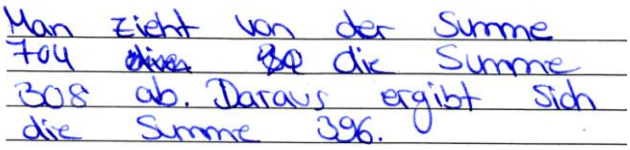
Abbildung 91: Fachbegriffe Gymnasium

Über diese Begriffe hinaus traten die folgenden Fachtermini auf, die jedoch zunächst unter sonstige Begriffe zusammengefasst werden: stellenweise Ziffern, Wert, Rechnung, Zahl, Minuend, Subtrahend, erweitern, Stelle, stellengerecht, ergänzen, Verfahren, Betrag, Minusbereich, negativ, positiv, Einheit, Hälfte. In Kapitel 8 werden einzelne Termini genauer betrachtet.

Bei der Formulierung der Texte wurden jedoch auch mathematische Begriffe verwendet, die nicht korrekt eingesetzt worden sind. Diese werden in der folgenden Übersicht dargestellt:

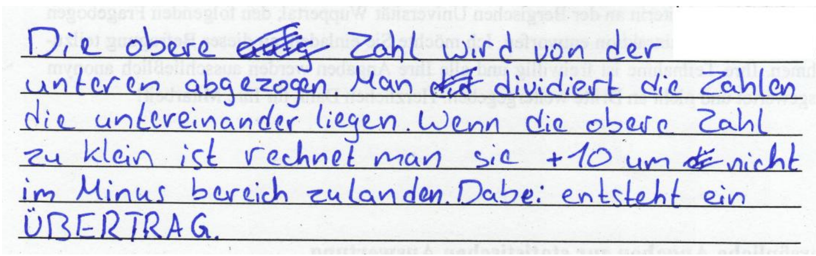
Abbildung 92: Inkorrekt verwendete Fachbegriffe

Im Folgenden sind diverse Beispiele zu den einzelnen Termini angegeben.



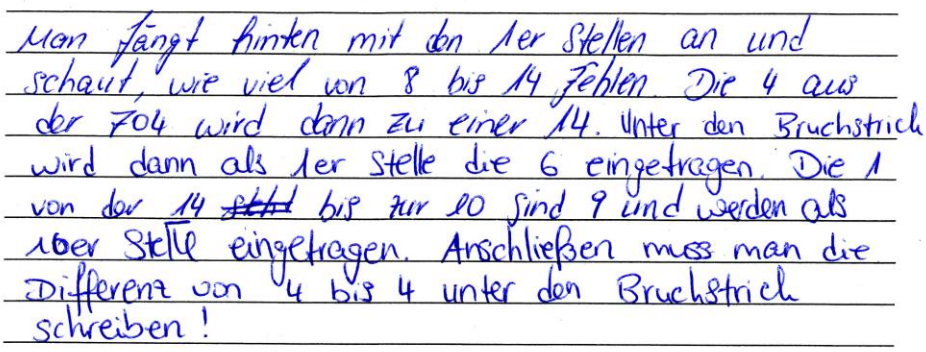
Man zieht von der Summe 704 die Summe 308 ab. Daraus ergibt sich die Summe 396.

Abbildung 93: Inkorrekte Fachbegriffe Gymnasium



Die obere Zahl wird von der unteren abgezogen. Man dividiert die Zahlen die untereinander liegen. Wenn die obere Zahl zu klein ist rechnet man sie +10 um nicht im Minus bereich zulanden. Dabei entsteht ein ÜBERTRAG.

Abbildung 94: Inkorrekte Fachbegriffe Realschule



Man fängt hinten mit den 1er Stellen an und schaut, wie viel von 8 bis 14 fehlen. Die 4 aus der 704 wird dann zu einer 14. Unter den Bruchstrich wird dann als 1er Stelle die 6 eingetragen. Die 1 von der 14 ~~steht~~ bis zur 10 sind 9 und werden als 10er Stelle eingetragen. Anschließen muss man die Differenz von 4 bis 4 unter den Bruchstrich schreiben!

Abbildung 95: Inkorrekte Fachbegriffe Gymnasium

Abschließend wurden für den Bereich der Subtraktion die Rechtschreibung und der Syntax der Texte untersucht.

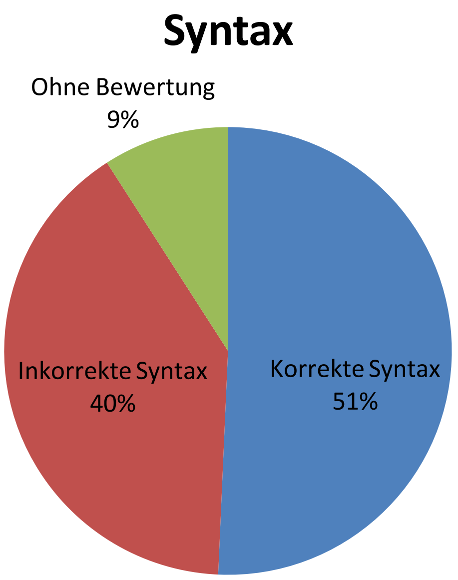


Abbildung 96: Syntax

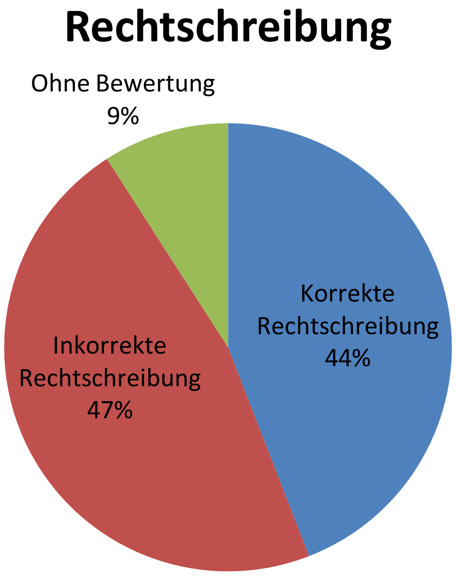


Abbildung 97: Rechtschreibung

Der Teil zum Sachrechnen beginnt ebenfalls mit der Auswertung der Ergebnisse der Aufgabe. So ergibt sich die folgende Übersicht:

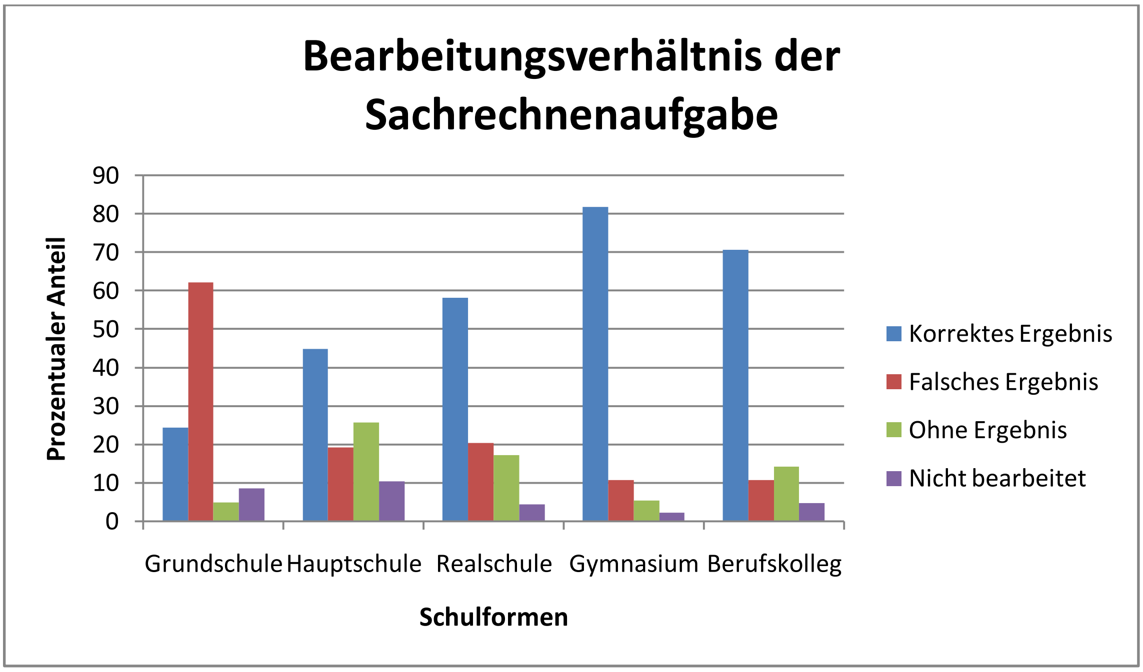


Abbildung 98: Bearbeitungsverhältnis der Sachrechenaufgabe

Bezüglich der heuristischen Strategien bzw. Lösungsmöglichkeiten konnten folgende Kategorien gebildet und ausgewertet werden:

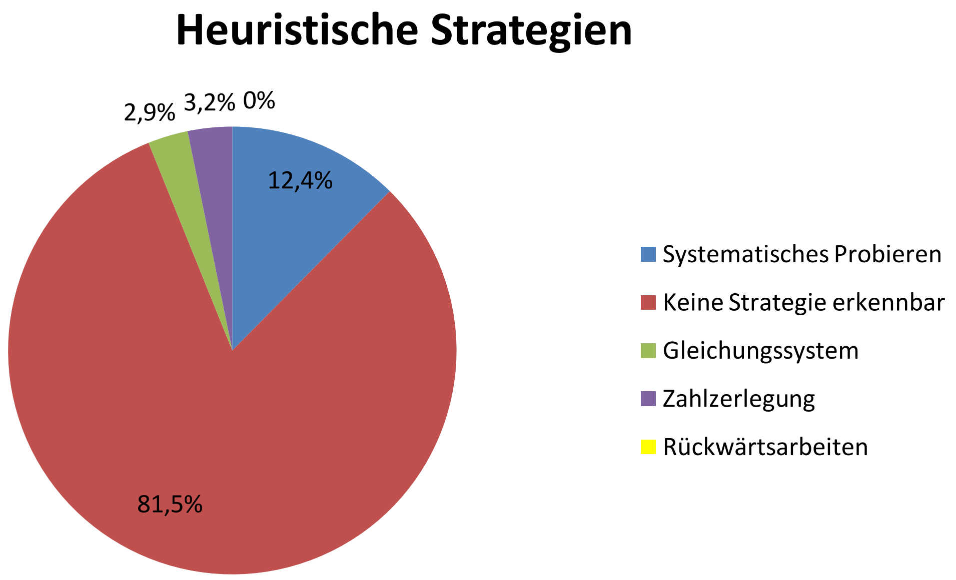


Abbildung 99: Heuristische Strategien

Im Folgenden sind diverse Beispiele zu den einzelnen Lösungsverfahren angegeben.

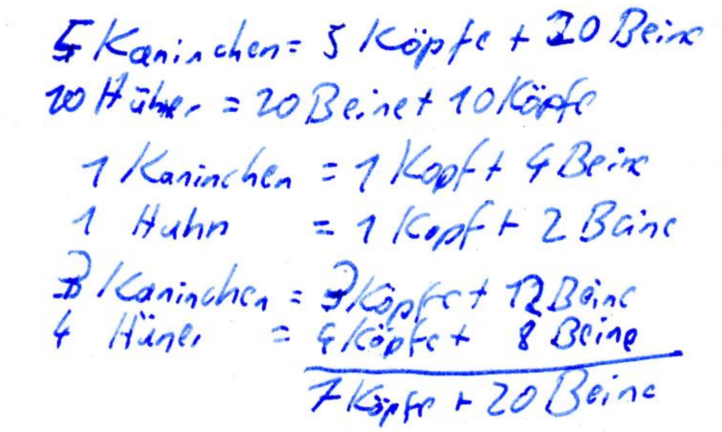


Abbildung 100: Systematisches Probieren Realschule

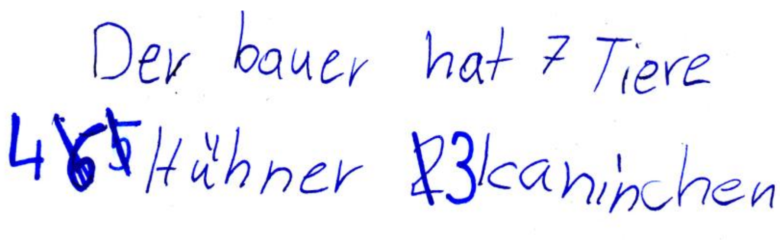


Abbildung 101: Systematisches Probieren Grundschule

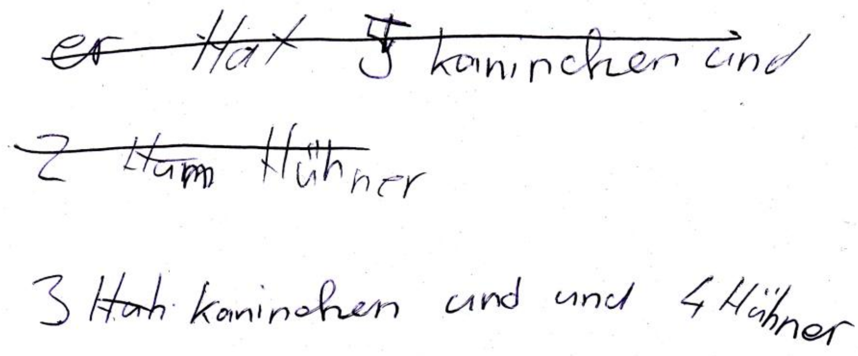


Abbildung 102: Systematisches Probieren Hauptschule

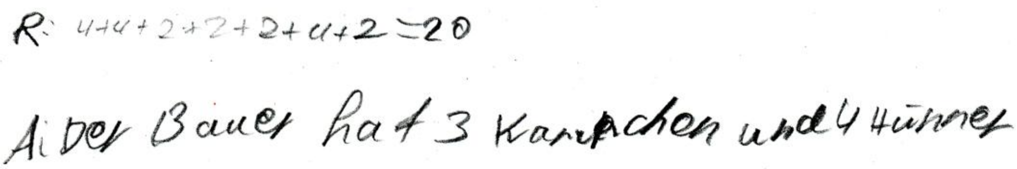


Abbildung 103: Zahlzerlegung Hauptschule

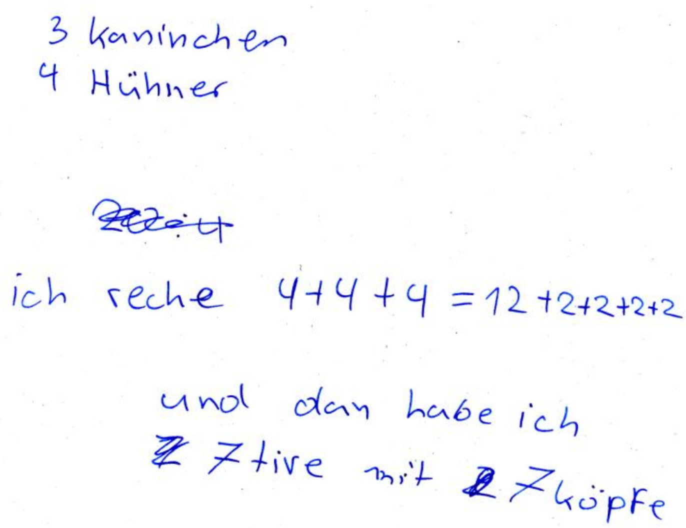


Abbildung 104: Zahlzerlegung Hauptschule

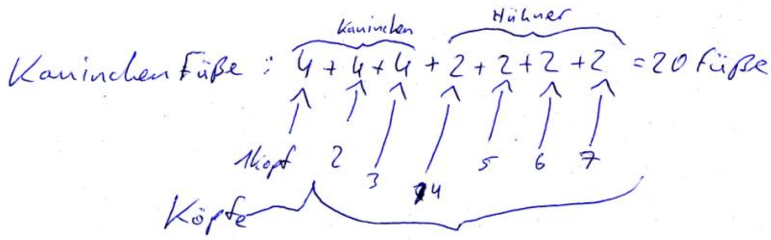
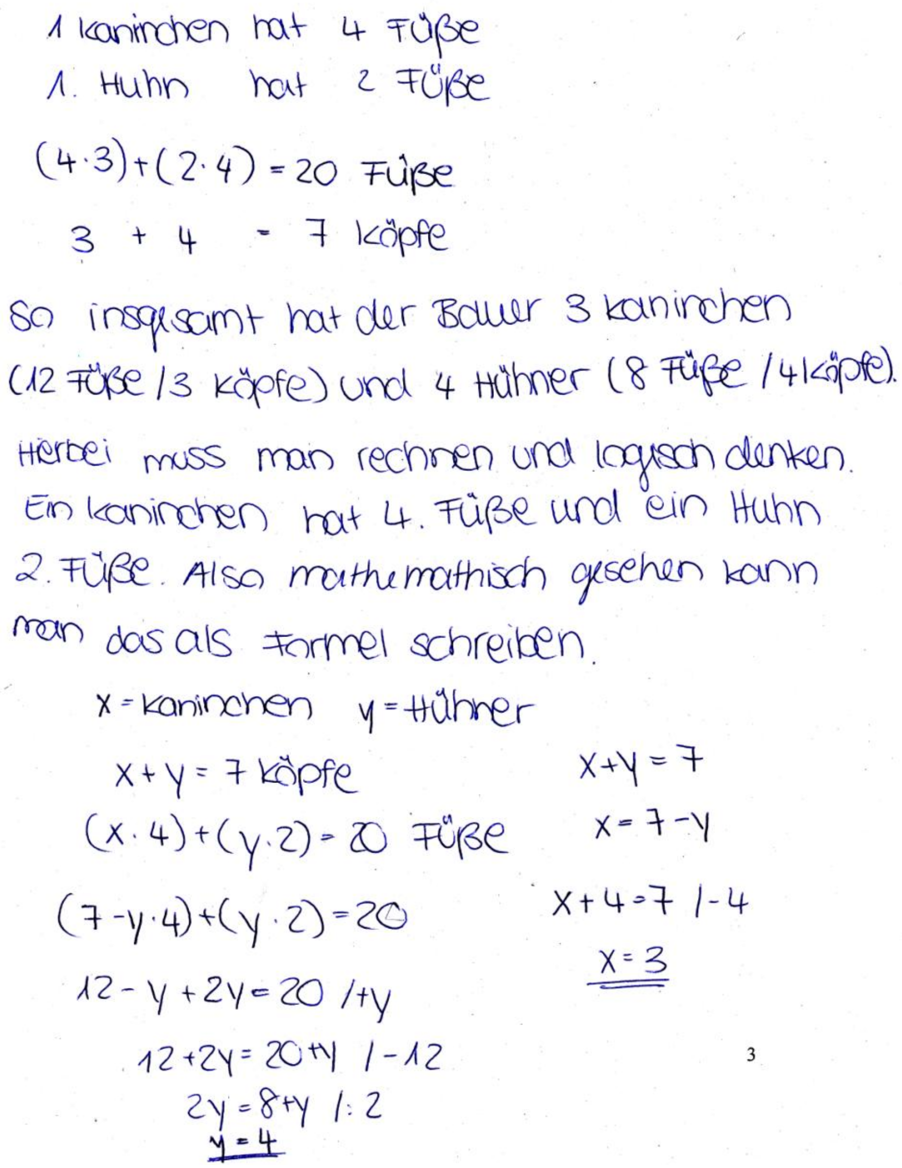


Abbildung 105: Zahlzerlegung Realschule


1 kaninchen hat 4 Füße
1. Huhn hat 2 Füße

$(4 \cdot 3) + (2 \cdot 4) = 20$ Füße

$3 + 4 = 7$ köpfe

So insgesamt hat der Bauer 3 kaninchen (12 Füße / 3 köpfe) und 4 Hühner (8 Füße / 4 köpfe).

Hierbei muss man rechnen und logisch denken. Ein kaninchen hat 4. Füße und ein Huhn 2. Füße. Also mathemathisch gesehen kann man das als formel schreiben.

x = kaninchen y = Hühner

$x + y = 7$ köpfe

$(x \cdot 4) + (y \cdot 2) = 20$ Füße

$(7 - y \cdot 4) + (y \cdot 2) = 20$

$12 - y + 2y = 20 \quad / +y$

$12 + 2y = 20 + y \quad / -12$

$2y = 8 + y \quad / : 2$

$y = 4$

$x + y = 7$

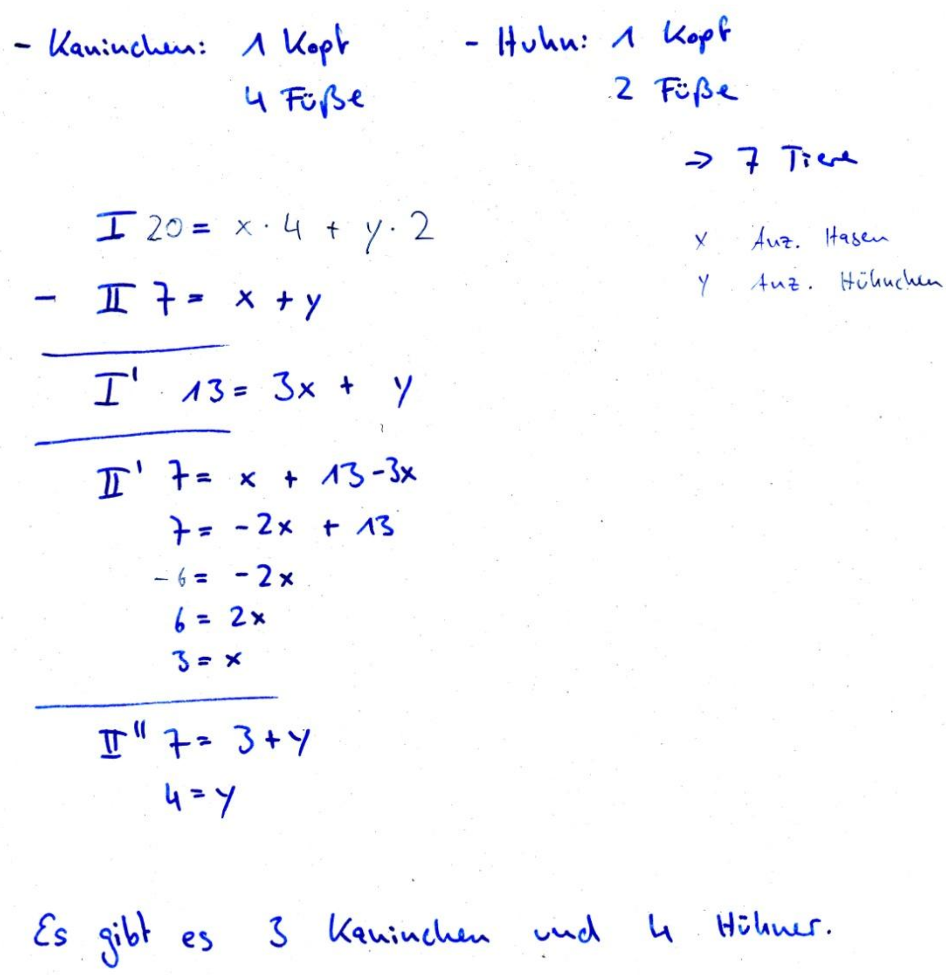
$x = 7 - y$

$x + 4 = 7 \quad / -4$

$x = 3$

3

Abbildung 106: Gleichungssystem Realschule



- Kaninchen: 1 Kopf
  4 Füße
- Huhn: 1 Kopf
  2 Füße

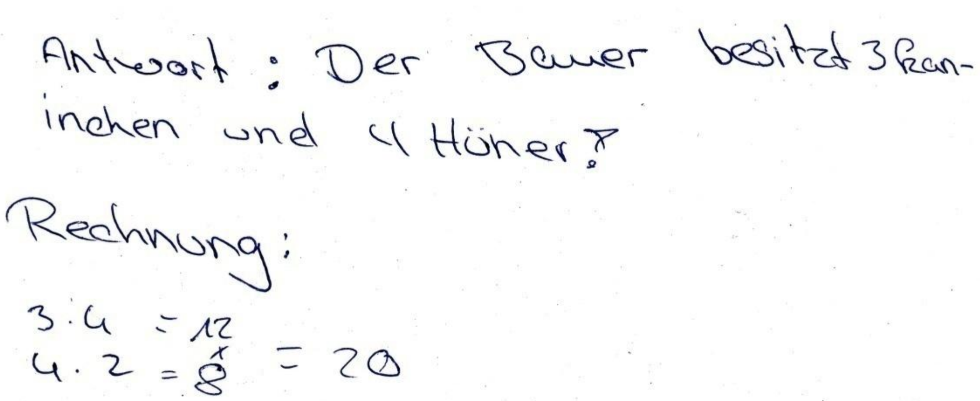
$\Rightarrow$ 7 Tiere

x Anz. Hasen
y Anz. Hühnchen

$$\mathrm{I}\quad 20 = x \cdot 4 + y \cdot 2$$
$$-\ \mathrm{II}\quad 7 = x + y$$
$$\mathrm{I}'\quad 13 = 3x + y$$
$$\mathrm{II}'\quad 7 = x + 13 - 3x$$
$$7 = -2x + 13$$
$$-6 = -2x$$
$$6 = 2x$$
$$3 = x$$
$$\mathrm{II}''\quad 7 = 3 + y$$
$$4 = y$$

Es gibt es 3 Kaninchen und 4 Hühner.

Abbildung 107: Gleichungssystem Gymnasium



Antwort: Der Bauer besitzt 3 Kan-
inchen und 4 Höner.

Rechnung:

$3 \cdot 4 = 12$
$4 \cdot 2 = 8 = 20$

Abbildung 108: Gleichungssystem Hauptschule

7 Köpfe → 7 Tiere
Kaninchen → 4 Füße
Hühner → 2 Füße

Bei 3 Kaninchen, die zusammen 12 Füße ergeben, bleiben noch 4 Tiere über, 4 Hühner haben 8 ~~Bei~~ Füße, also zusammen 7 Tiere und 20 Füße.

Abbildung 109: Keine Strategie erkennbar Gymnasium

3 Kanichen und 4 Hühner

Abbildung 110: Keine Strategie erkennbar Berufskolleg

Kaninchen = 4 Füße / 1 Kopf
Huhn = 2 Füße / 1 Kopf

3 Kaninchen 12 Füße 3 Köpfe
= 20 Füße 7 Köpfe
4 Hühner 8 Füße 4 Köpfe

Abbildung 111: Keine Strategie erkennbar Hauptschule

6.3.2. Dateninterpretation

Die vorliegende Studie lässt bezüglich der zugrundeliegenden Fragestellung

> ***Welche Indizien gibt es für einen möglichen Zusammenhang zwischen dem mathematischen Verständnis und der sprachlichen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern?***

verschiedene Schlüsse zu. Zunächst werden jedoch erst die allgemeinen Fakten zusammenfassend dargestellt. Es ist festzuhalten, dass trotz aktueller Flüchtlingssituation die meisten SuS zu Hause überwiegend deutsch sprechen (vgl. Abbildung 28). Für den Bereich der schriftlichen Subtraktion fällt auf, dass die SuS des Gymnasiums bei der Bearbeitung dieser Aufgabe am besten abgeschnitten haben, während die SuS der Grundschule in diesem Bereich die geringsten Leistungen vorweisen konnten (vgl. Abbildung 29). Im Hauptschulbereich waren gerade einmal 64% der Teilnehmer in der Lage, die Aufgabe zu lösen (vgl. Abbildung 29). Dabei sind nur 44,1% der insgesamt 64% korrekt bearbeitet. Betrachtet man die Auswertung hinsichtlich des Alters bzw. der Klasse, so kann festgestellt werden, dass die 10. Klassen des Gymnasiums am besten abgeschnitten haben, während die 5. Klassen der Hauptschule am wenigsten mit der Subtraktion zurecht gekommen sind.

Überraschend ist die Tatsache, dass für die Bearbeitung der schriftlichen Subtraktionsaufgabe am häufigsten eine Mischform der Übertragstechniken verwendet wurde. Das Ergänzungsverfahren hat hingegen kein Teilnehmer für die Bearbeitung herangezogen. Des Weiteren muss an dieser Stelle festgehalten werden, dass halbschriftliche Verfahren kaum genutzt werden. Die höchste Prozentzahl erzielt das Berufskolleg mit 8,8%. Das Gymnasium erreicht immerhin 7,2%. Jedoch war das Verfahren bei vielen SuS gar nicht erkennbar.

Bezüglich der unterschiedlichen Fehler beim Lösen der schriftlichen Subtraktionsaufgabe hat die Studie gezeigt, dass die spaltenweise Unterschiedsbildung im Bereich der Haupt-, Real- und Grundschule stark verbreitet ist. 31,2% der HauptschülerInnen, 23,4% der RealschülerInnen und 9,8% der GrundschülerInnen bilden die Differenz unabhängig davon, dass die kleinere Ziffer im Minuenden und die größere im Subtrahenden auftritt. Allerdings zeigen die GrundschülerInnen deutlich, dass sie das 1+1 besser beherrschen, als alle anderen höheren Schulformen. Grundsätzlich muss erwähnt werden, dass die Teilnehmer des Gymnasiums die wenigsten Fehler bei der Bearbeitung der schriftlichen Subtraktionsaufgabe gemacht haben. Umgekehrt fällt besonders die Hauptschule auf, welche die meisten Fehler vorweist (vgl. Abbildung 59).

Hinsichtlich der Sprache kann festgehalten werden, dass keine Bildungssprache verwendet wird, ganz unabhängig von der Schulform (vgl. Abbildung 77). Betrachtet man in diesem Zusammenhang auch Abbildung 76, so zeigt sich, dass nur ein geringer Teil der SuS in der Lage war, den schriftlichen Subtraktionsalgorithmus verständlich zu erklären. Am stärksten in diesem Bereich erweisen sich die Gymnasiasten, die mit 36,4% die meisten verständlichen Texte formuliert haben. Mit großem Abstand folgt dann die Grundschule. Hier haben 12,2% der Teilnehmer einen verständlichen Text verfasst.

Die Auswertung der sprachlichen Daten ergibt, dass die HauptschülerInnen kaum Fachbegriffe verwenden. Abgesehen vom Gymnasium werden in allen anderen Schulformen sehr häufig Begriffe wie Einer, Zehner und Hunderter benutzt (vgl. Abbildung 88). Mit zunehmendem Alter werden Fachtermini allerdings nicht mehr korrekt gebraucht. Eine Vermischung zwischen inhaltlichen Schwerpunkten ist an der Sprache erkennbar.

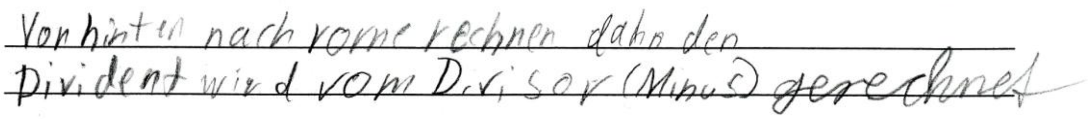


Abbildung 112: Vermischung von Fachtermini Realschule

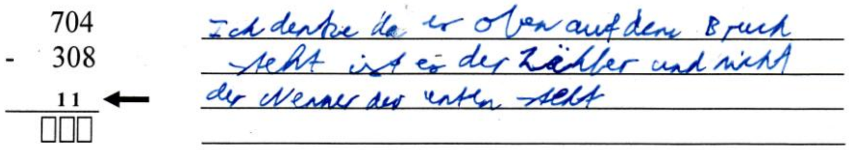


Abbildung 113: Vermischung von Fachtermini Gymnasium

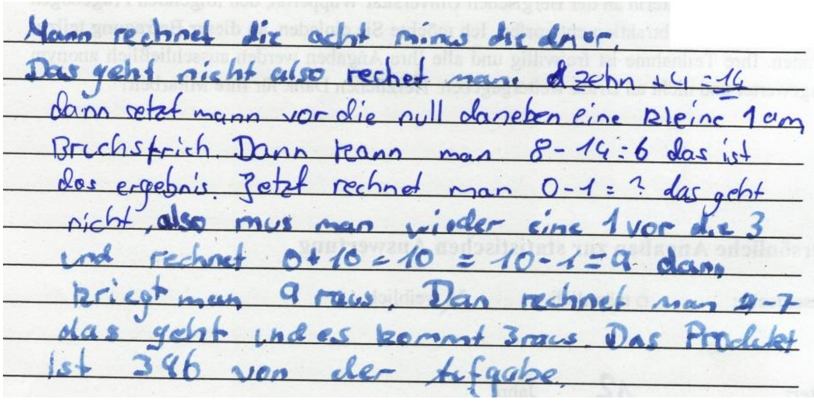


Abbildung 114: Vermischung von Fachtermini Realschule

Hinsichtlich der Rechtschreibung und der Syntax zeigen wieder die SuS der Hauptschule die geringsten Kenntnisse. Allerdings überzeugt in diesem Bereich nicht das Gymnasium, sondern das Berufskolleg (vgl. Abbildung 96, 97).

Bei der Bearbeitung der Sachrechenaufgabe haben die SuS der Grundschule sehr schlecht abgeschnitten. Auch bei den HauptschülerInnen haben nur 64% der Teilnehmer eine auswertbare Lösung hervorgebracht. Im Bereich der Knobelaufgabe sind die Gymnasiasten mit 81,9% am stärksten. Betrachtet man die Auswertung hinsichtlich des Alters bzw. der Klasse, so kann festgestellt werden, dass die Oberstufe des Gymnasiums am besten abgeschnitten hat, während die 4. Klassen der Grundschule am wenigsten mit der Knobelaufgabe zurecht gekommen sind. Bezüglich der Bearbeitung bleibt abschließend noch festzuhalten, dass heuristische Strategien nur sehr selten genutzt werden. Lediglich auf das systematische Probieren greifen einige SuS zurück (vgl. Abbildung 99).

Des Weiteren wird deutlich, dass der Modellierungskreislauf häufig nicht korrekt durchlaufen wird. Besonders die Bereiche *mathematisieren, interpretieren* und *validieren* sind sehr fehleranfällig.

Abbildung 115: Mathematisieren Grundschule

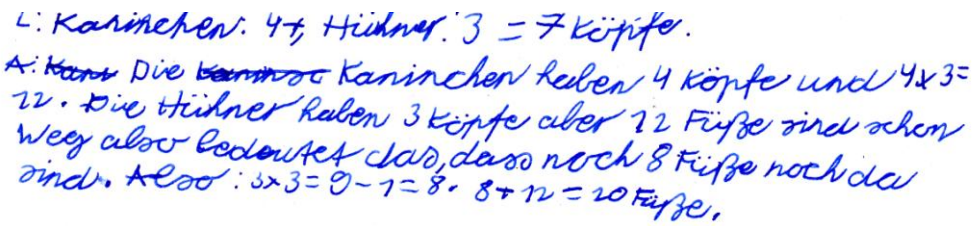


Abbildung 116: Mathematisieren Grundschule

Abbildung 117: Mathematisieren Hauptschule

Einzeln: Insgesamt hat er 7 Tiere

$20 = 4x + 2y$

$7 = 1x + \cancel{1}y \quad | -1x$

$7 - x = y$

$20 = 4x + 2 \cdot (7 - x)$

$20 = 4x + 14 - 2x$

$20 = 2x + 14 \quad | -14$

$6 = 2x \quad | :2$

$3 = x$

$7 - x = y$

$7 - 3 = y$

$4 = y$

Der Bauer hat 3 Kaninchen und 4 Hühner.

Abbildung 118: Mathematisieren Realschule

Der Bauer hat 7 Kaninchen und Hühner.

Abbildung 119: Interpretieren Realschule

Es sind 4 Kaninchen und 2 Hühner.
(und ein halbes Hahn)

Abbildung 120: Interpretieren Realschule

$4 \cdot 4 = 16$

(Zwei Hühner haben nur ein Bein.)

Es sind 4 Kaninchen und 3 Hühner.

Abbildung 121: Interpretieren Realschule

mann muss $4 \cdot 4 = 16$ weil 4 kaninchen ~~kanni~~ ~~Hüner~~ 4 Beine haben

undes sind 2 Hüner wenn 16 Beine von ~~4~~ kanin

chen muss mann bis zur 20 kommen und hüner

haben 2 Beine.

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ \hline 20 \end{array}$$

es sind 6 köpfe wenn man es rechnet

4 kaninchen ~~Hüner~~

+ 2 hüner

6

darum kommen 6 raus.

Abbildung 122: Validieren Realschule

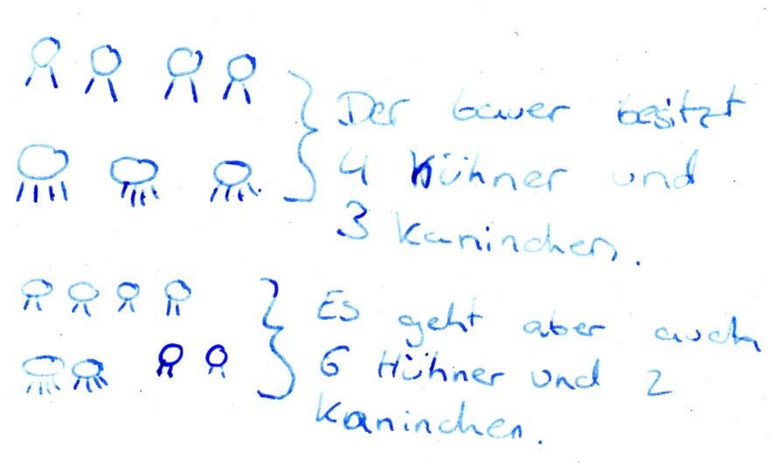


Abbildung 123: Validieren Realschule

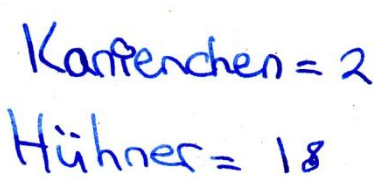


Abbildung 124: Validieren Realschule

Fazit:

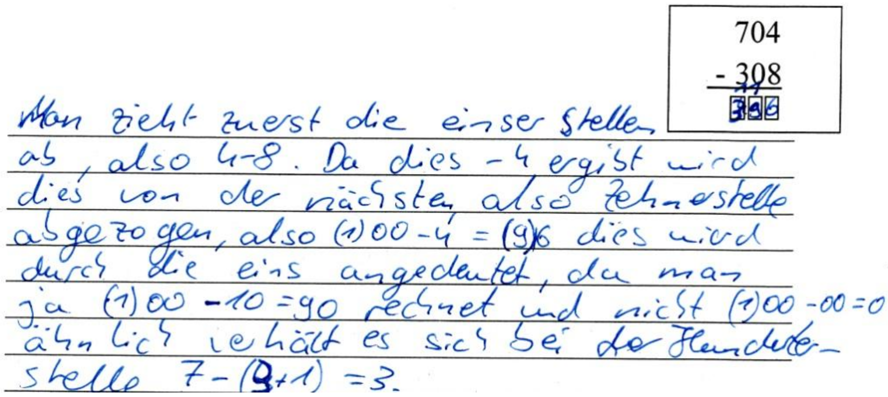
In diesem Kapitel wurde deutlich, dass die SuS des Gymnasiums in den der Studie zugrundeliegenden Bereichen der schriftlichen Subtraktion und des Sachrechnens am besten abgeschnitten haben. Allerdings zeigt sich auch, dass die HauptschülerInnen sowohl im mathematischen als auch im sprachlichen Bereich sehr große Defizite aufweisen. Die Gründe für diese Ergebnisse sollen im folgenden siebten Kapitel herausgestellt, analysiert und diskutiert werden. Im abschließenden achten Kapitel werden zwei Unterrichtsreihen vorgestellt, die den Zusammenhang von Mathematik und Sprache bei den in der Studie untersuchten Bereichen deutlich mehr in den Fokus rücken, sodass die Defizite verringert werden könnten.

7. Reflexion und Evaluation der Zusammenhänge

Die Studie lieferte vielfältige Ergebnisse, zunächst ist jedoch festzuhalten, dass die Teilnehmeranzahl der einzelnen Schulformen recht ungleichmäßig verteilt war. So konnten für die Studie nur 164 SuS aus Grundschulen zum Vergleich herangezogen werden. Dem entgegen steht die recht hohe Anzahl von SuS der Realschule. Hier konnten 1018 Fragebogen ausgewertet werden (vgl. Abbildung 26). Zwar wurden die Daten bei der Auswertung/Verarbeitung prozentual angegeben, so dass die Verhältnismäßigkeit gewahrt wurde. Dennoch wäre es wünschenswert gewesen, die Untersuchung auf ein ausgewogeneres Fundament zu stützen.

Im Folgenden sollen die in Kapitel 6 dargestellten Ergebnisse analysiert und begründet werden.

Bezüglich der schriftlichen Subtraktion zeigt sich, dass die SuS des Gymnasiums weitaus besser abgeschnitten haben als die SuS der Grundschule (vgl. Abbildung 29). Als Begründung kann unter anderem der Zeitpunkt der Einführung des Algorithmus angeführt werden. Die SuS der Grundschulen erlernen das schriftliche Subtraktionsverfahren erst im 3. Schuljahr und verfügen somit noch nicht über die Sicherheit im Umgang mit diesem Algorithmus wie die SuS der Oberstufe des Gymnasiums. Ferner besitzen die Gymnasiasten einen größeren Wortschatz, welcher beim Verbalisieren mathematischer Prozesse durchaus von Vorteil ist.


704
- 308
396

Man zieht zuerst die einser Stelle ab, also 4-8. Da dies -4 ergist wird dies von der nächsten also Zehnerstelle abgezogen, also (1)00-4 = (9)6 dies wird durch die eins angedeutet, da man ja (1)00 -10 = 90 rechnet und nicht (1)00 -00 = 0 ähnlich vehält es sich bei der Hunderter-stelle 7-(3+1) = 3.

Abbildung 125: Wortschatz Gymnasium

So zeigt dieser Text aus dem Gymnasium, dass Ausdrücke wie *ähnlich verhält es sich bei der Hunderterstelle* oder *angedeutet* verwendet werden. Solche oder ähnliche sprachliche Ausdrücke können bei den SuS der Grundschule nicht nachgewiesen werden, wie der nachfolgende Beispieltext zeigt:

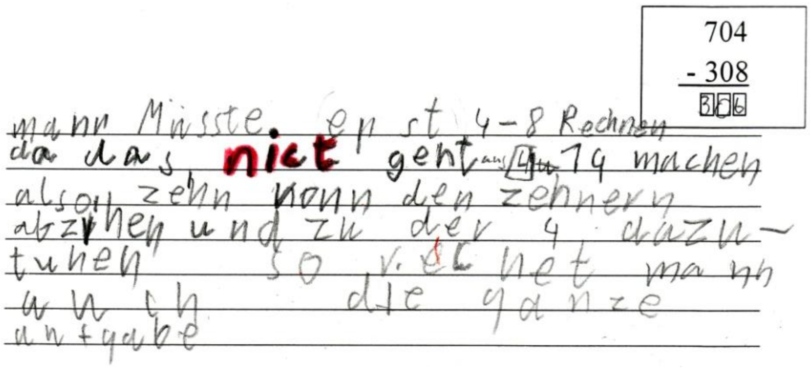


Abbildung 126: Wortschatz Grundschule

Hinsichtlich der Verständlichkeit wird beim ersten Lesen der Text aus dem Gymnasium als verständlicher empfunden. Bei genauerer Betrachtung fällt jedoch auf, dass viele Worte und Phrasen in beiden Texten gleich genutzt werden. So verwenden beide die Rechenoperation *4 - 8*. Während in anderen Texten auch das Wort *minus* auftaucht, bleiben die beiden Verfasser der obigen Texte bei der symbolischen Schreibweise. Dies könnte daran liegen, dass diese Notationsform bereits verinnerlicht ist, es könnte aber auch ein Indiz für Bequemlichkeit, Schnelligkeit oder mangelnde sprachliche Ausdrucksfähigkeit sein. Aufgrund der weiteren sprachlichen Ausführungen entsteht der Eindruck, dass der letzte Punkt ausgeschlossen werden kann. Vermutlich wären die Teilnehmer in der Lage gewesen, zumindest *4 minus 8* zu formulieren oder *von der 4 müssen 8 abgezogen werden*. Vielleicht wäre auch *8 von der 4 subtrahieren* möglich gewesen. Bei der Angabe des Ergebnisses aus dieser ersten Teilrechnung zeigt sich, dass im gymnasialen Text bereits die negativen Zahlen thematisiert worden sind – *da dies -4 ergibt*. Über dieses Wissen verfügen GrundschülerInnen noch nicht. Deshalb wird an dieser Stelle die Phrase *das geht nicht* verwendet. Im weiteren Verlauf des Grundschultextes wird von *aus vier 14* machen gesprochen. Diese Veränderung wird damit begründet, dass man *zehn von den Zehnern abziehen und zu der 4 dazutun* kann. Im gymnasialen Text wird das negative Teilergebnis durch *Abzug an der nächsten Stelle – der Zehnerstelle* – begründet. Der Teilnehmer[167] erkennt – im Gegensatz zum Grundschulprobanden – die Nullstelle in der Zehnerspalte und folgert dementsprechend, dass der Abzug an der nächsthöheren Stelle, der Hunderterstelle, vollzogen werden muss. Sprachlich wechselt er an dieser Stelle wieder in die mathematische Symbolsprache: *(1)00 - 4 = (9)6*. Die eingesetzten Klammern werden aber nicht mathematisch ge-

[167] Aus Gründen der Leserfreundlichkeit wird ausschließlich die maskuline Form verwendet.

nutzt, sondern im sprachlichen Sinn, da konkrete Bereiche der Notation hervorgehoben werden sollen. Diese Vermischung von sprachlichen und mathematischen Elementen zeigte sich in der Studie sehr häufig in Texten. Durch diese Vermischung und den Wechsel zwischen sprachlichen und mathematischen Elementen leidet die Verständlichkeit. Beide Texte nutzen die Begriffe *abziehen*, *Zehner/Zehnerstelle*, *rechnen* sowie die bereits oben angeführte Notation des Minuszeichens.

Betrachtet man die folgenden beiden Texte, die wiederum aus dem Gymnasium und der Grundschule stammen, sich jedoch auf die Erklärung des Wortes *Übertrag* beziehen, so zeigt sich, dass sich der Text aus dem Gymnasium auf die durchgeführte schriftliche Subtraktion der ersten Aufgabe bezieht. Hier wird konkret an diesem Beispiel erklärt und es kommen keine Fachbegriffe vor.

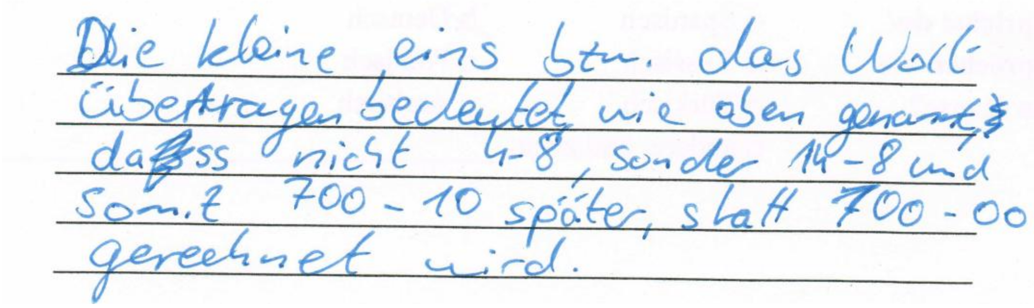
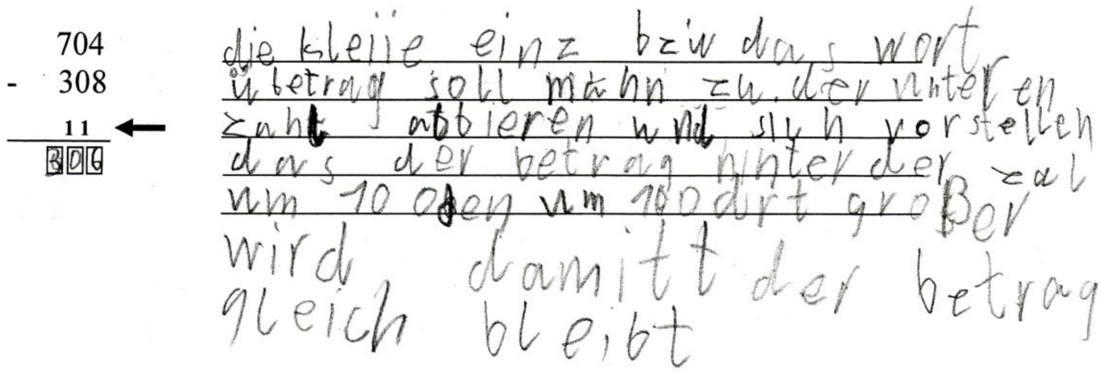

Die kleine eins bzw. das Wort
übertragen bedeutet wie oben genannt,
dass nicht 4-8, sonder 14-8 und
somit 700 - 10 später, statt 700 - 00
gerechnet wird.

Abbildung 127: Fachbegriffe Gymnasium

In dem Grundschultext fällt auf, dass bereits der Begriff *Betrag* verwendet wird.

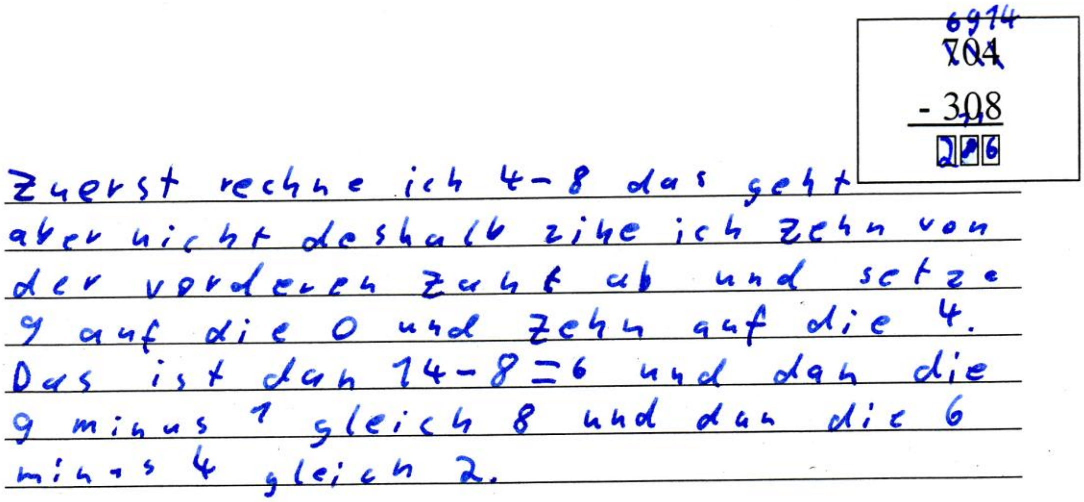

704
\- 308
11
396

die kleije einz bzw das wort
übetrag soll mahn zu der unteren
zahl abbieren und sich vorstellen
das der betrag unter der zal
um 10 oder um 100 dort großer
wird damitt der betrag
gleich bleibt

Abbildung 128: Fachbegriffe Grundschule

Zunächst liegt die Vermutung nahe, dass dieser Fachbegriff nicht als solcher eingesetzt wird. Kinder in diesem Alter kennen den Begriff eventuell aus der Alltagssprache als Bezeichnung für einen Geldwert. Im weiteren Verlauf des Textes wird dieser Begriff wiederholt, was zeigt, dass dieser Begriff dem Verfasser vertraut ist. Durch den Zusammenhang des Wortes *damit der Betrag gleich bleibt* wird deutlich, dass das Gesetz von der *Konstanz der Differenz* bzw. das *gleichsinnige Verändern* (vgl. Kapitel 4.5) thematisiert worden ist. Leider sind diese Begriffe aus dem Mathematikunterricht nicht nachhaltig von den SuS erfasst worden, sodass sie in den Fragebogen auf sprachliche Umschreibungen zurückgreifen. Es werden keine konkreten Zahlen eines Beispiels angeführt. Das Erweitern an der Zehner- und Hunderterstelle wird erfasst. Generell bleibt festzuhalten, dass in der Untersuchung die SuS des Gymnasiums den größten Anteil verständlicher Texte verfasst haben. Danach folgen die SuS der Grundschule.

Der letzte Text zeigt deutlich, dass wichtige mathematische Begriffe von den SuS nicht verinnerlicht werden. Die Ursachen liegen, wie in Kapitel 5.3 beschrieben, häufig in der Kommunikation zwischen Lehrkräften und SuS. Aufgrund der Tatsache, dass die Lehrkraft überwiegend noch als Wissensvermittler im Unterricht auftritt, fungiert eben diese auch als Sender im Kommunikationsmodell (vgl. Abbildung 11). Die kodierte Nachricht der Lehrkraft muss von den SuS wieder decodiert werden. Befinden sich nun in dieser Nachricht Fachbegriffe, die die SuS nicht entschlüsseln können, so wird diesem Teil der Nachricht keine Bedeutung beigemessen und der jeweilige Lerninhalt wird von den SuS nicht aufgenommen. Diese Form der Kommunikationsstörung kann häufig in den oberen Schulstufen und an der Universität beobachtet werden. In Grundschulen kommt es oft zu einem anderen Problem, welches die Verwendung von Fachsprache verhindert. Viele Lehrkräfte neigen dazu, Fachbegriffe durch Begriffe der Alltagssprache zu ersetzen. So wird der Begriff *ist gleich* in den meisten Fällen auf *ist* reduziert. Statt *9 minus 5 ist gleich vier*, wird sehr oft nur von *9 minus 5 ist vier* gesprochen. Der *Äquivalenzbegriff* gerät mit zunehmendem Gebrauch des Wortes *ist* in den Hintergrund. In beiden Fällen wird die Verwendung von Fachbegriffen verhindert. Ohne Fachsprache ist es zwangsläufig schwierig, bestimmte mathematische Sachverhalte auszudrücken. Das zeigen auch die nachfolgenden Beispiele aus der Realschule:

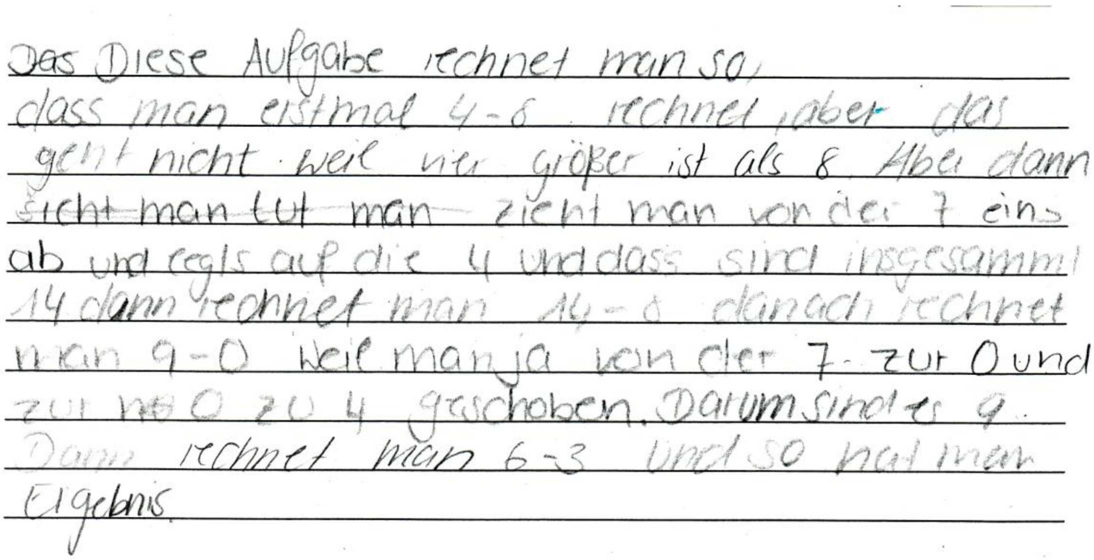


704
- 308

Zuerst rechne ich 4-8 das geht
aber nicht deshalb zihe ich Zehn von
der vorderen Zahl ab und setze
9 auf die 0 und Zehn auf die 4.
Das ist dan 14-8=6 und dan die
9 minus 1 gleich 8 und dan die 6
minus 4 gleich 2.

Abbildung 129: Fachsprache Realschule

Abgesehen von den Begriffen *minus* und *gleich* treten in diesem Text nur Wörter aus der Alltagssprache auf. Ferner fällt auf, dass zwar die einzelnen Abläufe beschrieben werden, Begründungen für die einzelnen Schritte jedoch fehlen.



~~Das~~ Diese Aufgabe rechnet man so,
dass man erstmal 4-8 rechnet, aber das
geht nicht weil vier größer ist als 8. Aber dann
~~zieht man tut man~~ zieht man von der 7 eins
ab und legts auf die 4 und dass sind insgesammt
14 dann rechnet man 14-8 danach rechnet
man 9-0 weil man ja von der 7 zur 0 und
zur ~~no~~ 0 zu 4 geschoben. Darum sind es 9.
Dann rechnet man 6-3 und so hat man
Ergebnis

Abbildung 130: Fachsprache Realschule

Auch dieser Text beschreibt die einzelnen Schritte. Doch auch hier finden sich keinerlei Erklärungen. Der nachfolgende Text beinhaltet erneut keine Fachsprache. Er fällt jedoch durch das Abweichen vom Subtraktionsalgorithmus auf. Der Verfasser beginnt die Durchführung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus‘ regelkonform an der Einerstelle. Die Problematik des Auftretens der Null in der Zehnerspalte wird jedoch umgangen, indem die Zehner- und Hunderterstelle als Ganzes betrachtet und berechnet werden.

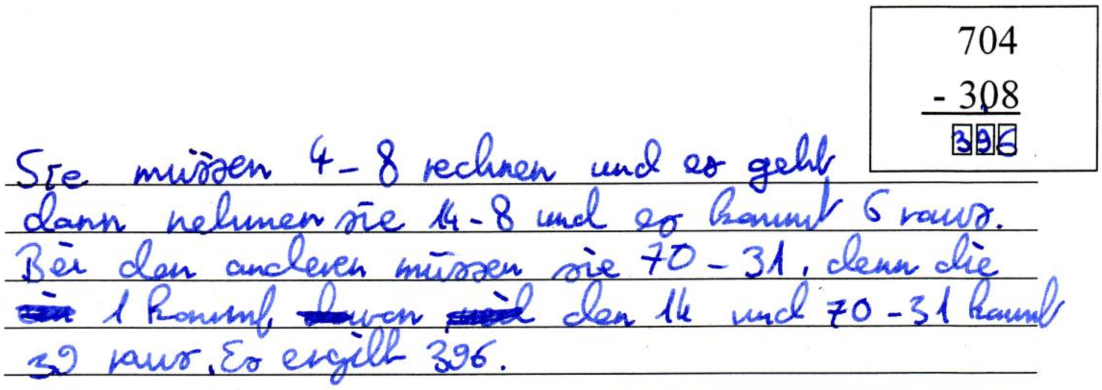

704
- 308
396
Sie müssen 4-8 rechnen und es geht
dann nehmen sie 14-8 und es kommt 6 raus.
Bei den anderen müssen sie 70-31, denn die
1 kommt ~~davon~~ den 14 und 70-31 kommt
39 raus. Es ergibt 396.

Abbildung 131: Fachsprache Realschule

Diese Modifikation des Algorithmus sowie die häufig aufgetretene Mischform bei der Übertragstechnik bieten mehrere Möglichkeiten der Interpretation: Zum einen könnten mangelnde Fachkompetenzen der Lehrkräfte ursächlich für dieses Problem sein. Zum anderen kann der Fehlerursprung bei den SuS gesucht werden, wenn sie den korrekten Algorithmus nicht verstanden haben. Letztlich könnte auch die Mischform für die SuS die geeignetere Methode der schriftlichen Subtraktion darstellen.

Neben der Untersuchung der Texte hinsichtlich Alltags- und Bildungssprache, fielen bei der Auswertung auch die folgenden Texte auf:

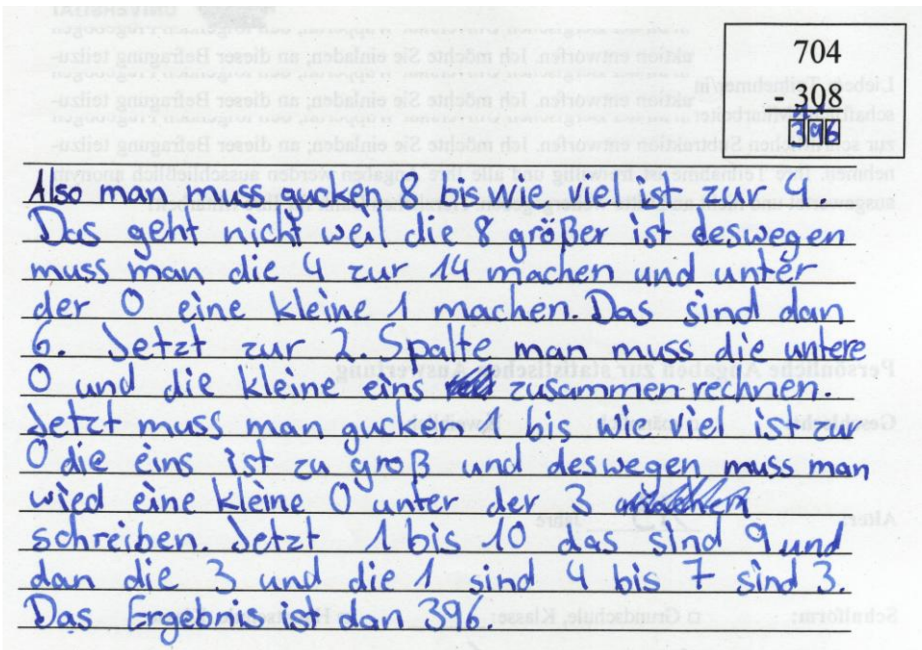
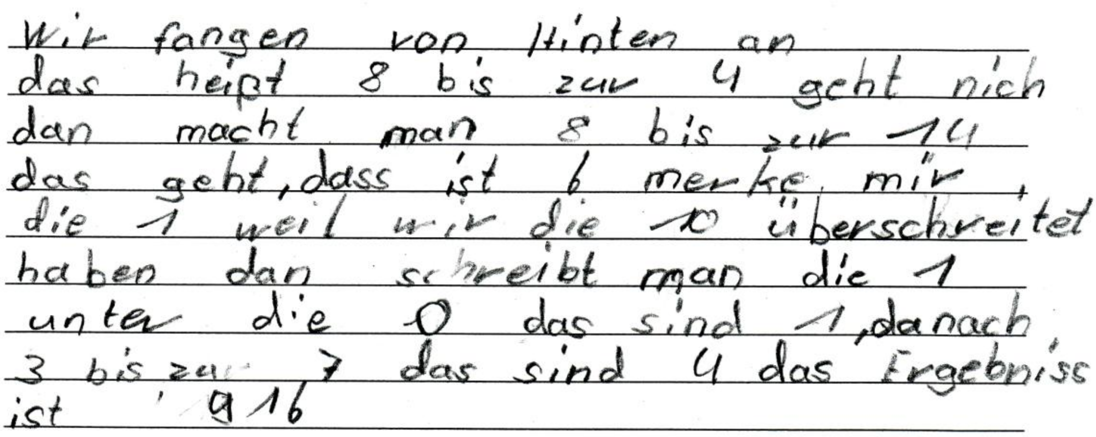
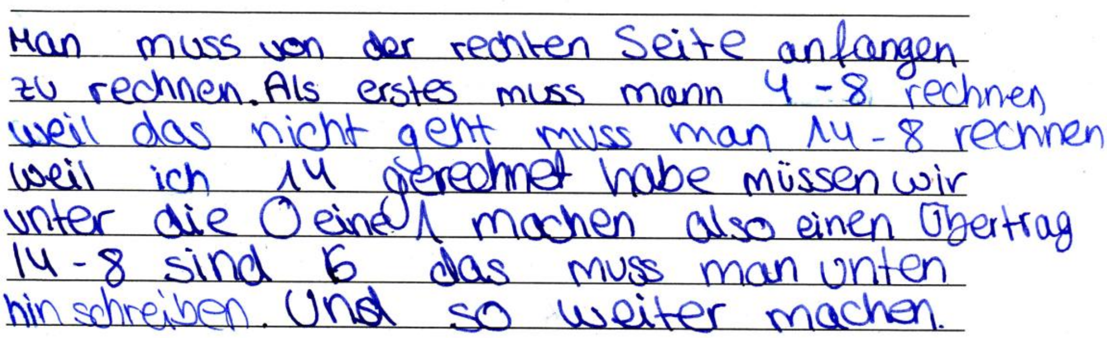

704
- 308
396
Also man muss gucken 8 bis wie viel ist zur 4.
Das geht nicht weil die 8 größer ist deswegen
muss man die 4 zur 14 machen und unter
der 0 eine kleine 1 machen. Das sind dan
6. Jetzt zur 2. Spalte man muss die untere
0 und die kleine eins zusammen rechnen.
Jetzt muss man gucken 1 bis wie viel ist zur
0 die eins ist zu groß und deswegen muss man
wied eine kleine 0 unter der 3
schreiben. Jetzt 1 bis 10 das sind 9 und
dan die 3 und die 1 sind 4 bis 7 sind 3.
Das Ergebnis ist dan 396.

Abbildung 132: Wiederkehrende Satzbausteine Realschule



Wir fangen von Hinten an
das heißt 8 bis zur 4 geht nich
dan macht man 8 bis zur 14
das geht, dass ist 6 merke mir
die 1 weil wir die 10 überschreitet
haben dan schreibt man die 1
unter die 0 das sind 1, danach
3 bis zur 7 das sind 4 das Ergebniss
ist 916

Abbildung 133: Wiederkehrende Satzbausteine Grundschule



Man muss von der rechten Seite anfangen
zu rechnen. Als erstes muss mann 4 - 8 rechnen
weil das nicht geht muss man 14 - 8 rechnen
weil ich 14 gerechnet habe müssen wir
unter die 0 eine 1 machen also einen Übertrag
14 - 8 sind 6 das muss man unten
hin schreiben. Und so weiter machen.

Abbildung 134: Wiederkehrende Satzbausteine Hauptschule

Diese Texte zeigen sprachlich, dass im Unterricht beim Durchlaufen des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus bestimmte Phrasen verwendet werden. So werden im ersten Text aus der Realschule und im zweiten Text aus der Grundschule der geläufige Ausdruck *8 bis zur 4 geht nicht* verwendet. Der Text aus der Hauptschule weicht anfangs etwas ab, da hier die symbolische Schreibweise *4 - 8* genutzt wird. Auch in diesem Text wird im nächsten Schritt *weil das nicht geht* verwendet. Bezüglich des Übertrags gleichen sich die Texte aus der Realschule und der Hauptschule. Beide gebrauchen die Ausdrücke *unter die Null eine Eins machen*. Lediglich im Grundschultext wird von *merke mir die Eins, weil wir die 10 überschritten haben* gesprochen. Die Addition des Übertrags zur Zehnerstelle des Subtrahenden wird nur in dem Realschultext angesprochen, während es in dem Grundschultext nur indirekt durch *das sind 1* auftaucht. Im Hauptschultext kommt diese Beschreibung nicht vor. Alle drei Texte erläutern das weitere Durchlaufen des Algorithmus nur sehr knapp und indirekt. Im ersten Text aus der

Realschule heißt es *jetzt muss man gucken*, der Grundschultext verwendet *danach* und der Hauptschultext formuliert *und so weiter*. Diese Texte zeigen, dass SuS sprachlich auf immer wiederkehrende Satzbausteine angewiesen sind und sie häufig verwenden. Während es im Realschultext gelingt, den Algorithmus zu durchlaufen und zum richtigen Ergebnis zu kommen, verdeutlicht der Grundschultext, dass zwar die Reihenfolge der einzelnen Arbeitsschritte umgesetzt werden kann, aber die Berechnung des Ergebnisses fehlerhaft ist. Es kommt zu einem Nullfehler[168], d.h., dass das Verständnis in diesem Bereich noch nicht ausreichend vorhanden ist.

Bezüglich der unterschiedlichen Fehlertypen ist anzumerken, dass die SuS der Grundschule weniger Einspluseinsfehler zeigen als die SuS der übrigen Schulformen (vgl. Abbildung 59). Dies lässt sich durch den zunehmenden Gebrauch des Taschenrechners erklären. Weil das Kopfrechnen in der Grundschule vermehrt eingesetzt wird, verfügen diese SuS auch über eine größere Kompetenz in diesem Bereich. Mit dem Wechsel in die weiterführende Schule erhalten viele SuS ein Handy. Dieses wird vor allem im privaten Bereich bei kleinen Rechenoperationen herangezogen. Dies zeigte sich auch in der vorliegenden Untersuchung:

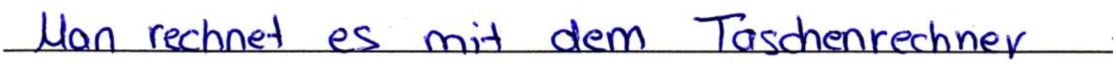


Abbildung 135: Lösen mittels Taschenrechner Realschule

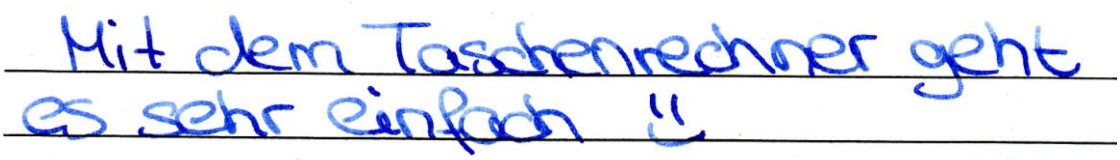


Abbildung 136: Lösen mittels Taschenrechner Hauptschule

[168] vgl. Schipper/Dröge/Ebeling (2008b), S. 138f.

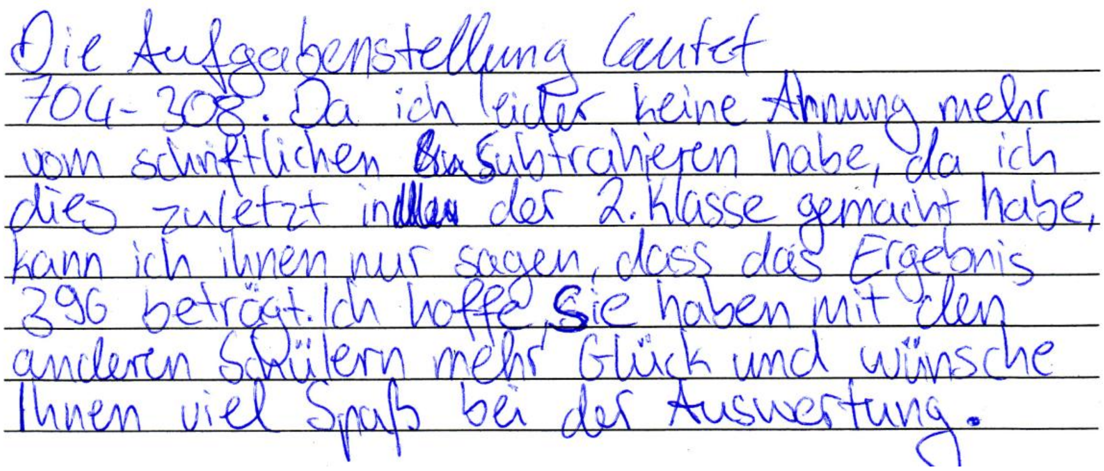

Die Aufgabenstellung lautet
704-308. Da ich leider keine Ahnung mehr
vom schriftlichen ~~Su~~ Subtrahieren habe, da ich
dies zuletzt in ~~der~~ der 2. Klasse gemacht habe,
kann ich ihnen nur sagen, dass das Ergebnis
396 beträgt. Ich hoffe Sie haben mit den
anderen Schülern mehr Glück und wünsche
Ihnen viel Spaß bei der Auswertung.

Abbildung 137: Lösen mittels Taschenrechner Gymnasium

In der Hauptschule und in der Realschule zählte die spaltenweise Unterschiedsbildung zu der häufigsten Fehlerart (vgl. Kapitel 59). Die Ursache liegt im Bereich der Übertragstechniken. Häufig verfügen die SuS nicht über das notwendige Verständnis des Entbündelns, Erweiterns und Auffüllens. Deshalb vereinfachen sie die Aufgabe und greifen auf den Grundgedanken der Subtraktion zurück, indem sie die kleinere von der größeren Zahl abziehen. Zur Bewältigung dieser Problematik ist es notwendig, durch Material Einsichten in die verschiedenen Techniken zu vermitteln.

Hinsichtlich der schriftlichen Subtraktion bleibt noch festzuhalten, dass das Heranziehen halbschriftlicher Strategien viel zu wenig umgesetzt wird (vgl. Abbildung 40). Die Aufgabe der Untersuchung war so gewählt, dass die halbschriftliche Strategie – welche auch dem Kopfrechnen zugrundeliegt – die einfachste und schnellste Möglichkeit gewesen wäre, die Aufgabe zu lösen. In der Studie erreicht das Berufskolleg die höchste Quote mit 8,8%. Dies ist ein deutliches Zeichen, dass Verfahren in der Schule erarbeitet und angewendet werden. Wird man in diesem Fall symbolisch aufgefordert, die Aufgabe mittels schriftlicher Subtraktion zu lösen, so wird der Algorithmus durchlaufen. Das flexible Rechnen, so wie es der Lehrplan vorsieht, bedarf noch weitaus größerer Beachtung.

Abschließend wird durch die Studie einmal mehr deutlich, dass es große Leistungsunterschiede zwischen den einzelnen Schulformen gibt. So zeigt sich auch in diesem Fall, dass sich soziale Ungleichheiten auf die schulische Leistung auswirken. Das schlechte Abschneiden der Hauptschule steht mit Sicherheit in einem engen Zusammenhang der sozialen Schichtzugehörigkeit, welche nach wie vor nicht in der Schule kompensiert werden kann. So belegen die erhobenen Daten, dass die SuS der Hauptschule bezüglich der Rechtschreibung und der Syntax große Defizite zeigen (vgl. Abbildung 96, 97). Allerdings schneidet in diesem Bereich nicht das Gymnasium am besten ab, sondern das Berufskolleg. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die SuS am Berufskolleg im Schnitt älter sind als die SuS der anderen Schulen. Mit zunehmendem Alter steigt in der Regel auch die Rechtschreibkompetenz, da altersbedingt häufiger eine Begegnung mit Texten stattfindet.

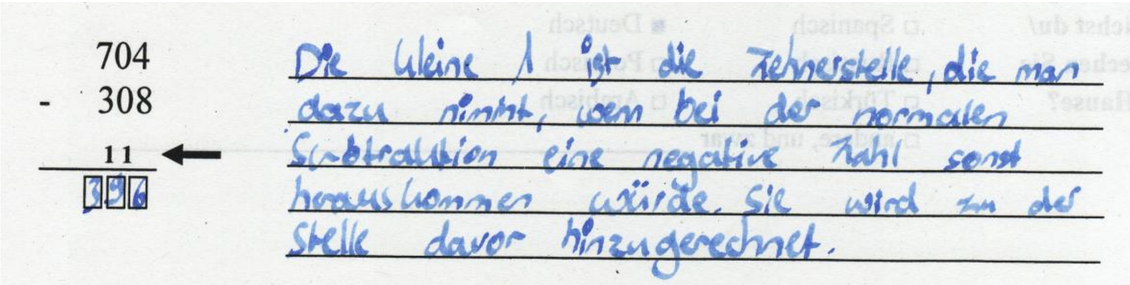


Abbildung 138: Verständlichkeit des Textes Gymnasium

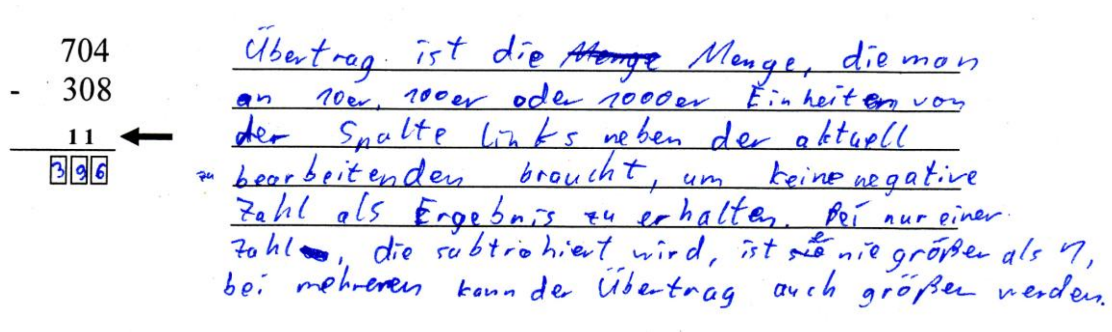


Abbildung 139: Verständlichkeit des Textes Gymnasium

Diese beiden Texte aus dem Gymnasium sind beispielhaft für verständliche und sprachlich korrekte Erklärungen dieser Schulform.

Im Bereich der Knobelaufgabe hat wieder das Gymnasium die besten Ergebnisse erzielt (vgl. Abbildung 98). Dies liegt daran, dass die meisten richtigen Ergebnisse bei den älteren SuS in der Oberstufe auftraten. So konnten zum Teil die falschen Lösungen der Unterstufe kompensiert werden. Diese Möglichkeit gibt es an der Grundschule nicht. Daher hat die Grundschule bei der Bearbeitung der Knobelaufgabe den letzten Platz belegt (vgl. Abbildung 98). Vergleicht man die Ergebnisse von den vierten und fünften Schuljahren dieser Schulformen, so lässt sich nahezu kein Unterschied feststellen. Bei der Auswertung der Daten zur Bearbeitung der Knobelaufgabe fällt zunächst auf, dass viele SuS – egal welcher Schulform – die Aufgabe grafisch gelöst haben, da grafische Hilfsmittel zum Verständnis der dargestellten Sachsituation beitragen.

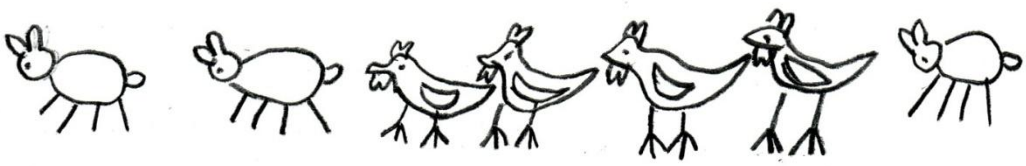


Abbildung 140: Grafische Lösung Grundschule

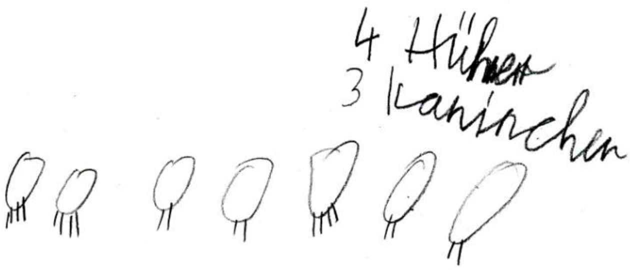


Abbildung 141: Grafische Lösung Realschule

Die einzelnen Zeichnungen unterscheiden sich nur hinsichtlich ihres Abstraktionsgrades.

Die GrundschülerInnen lagen bei der Bearbeitung deutlich zurück und auch die HauptschülerInnen haben insgesamt nur 64% an auswertbaren Lösungen hervorgebracht. Viele HauptschülerInnen bearbeiteten diese Aufgabe gar nicht oder waren der Überzeugung, dass man diese Aufgabe nicht rechnen kann.

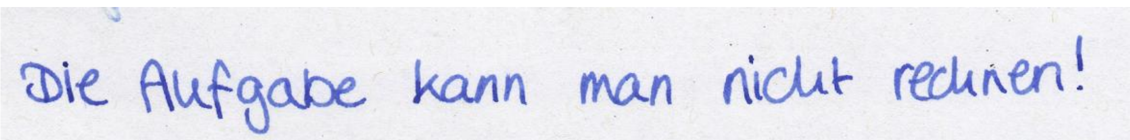


Abbildung 142: Unlösbarkeit Hauptschule

Bei der Analyse der Daten fällt auf, dass einige SuS der Realschule bei der Bearbeitung der Knobelaufgabe zu viel mathematisieren. Obwohl der Text sprachlich einfach, äußerst kurz gehalten und mit wenigen Zahlen versehen ist, kommt es - wie die nachfolgenden Beispiele zeigen - bei der Bearbeitung zu Fehlern durch die Mathematisierung:

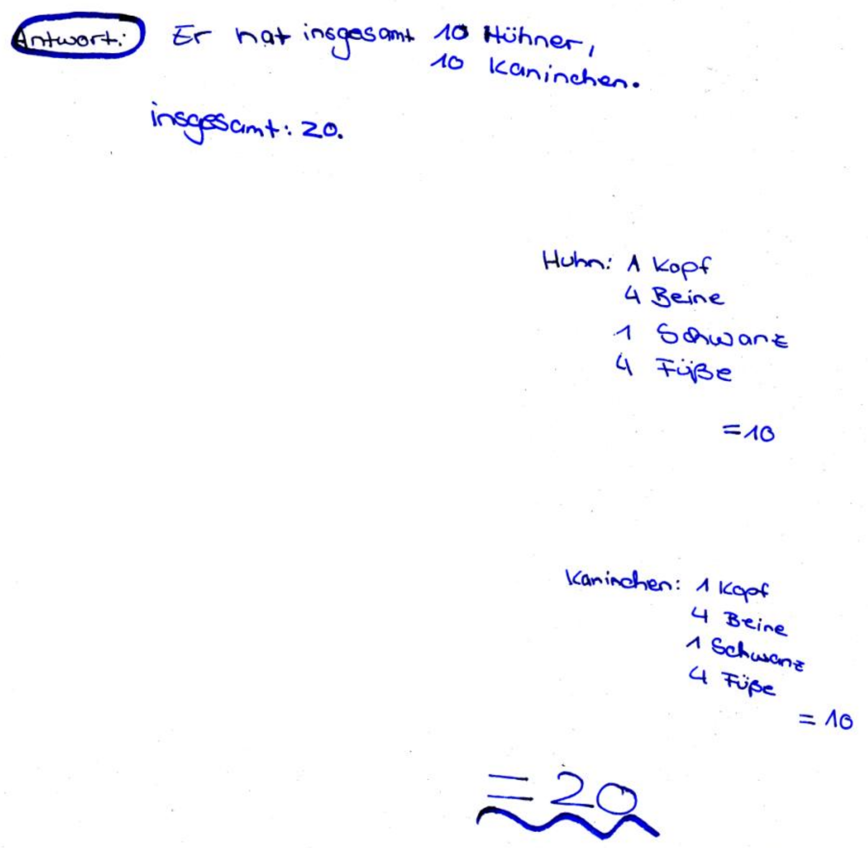


Abbildung 143: Mathematisieren Realschule

In diesem Beispiel wurde die Information, dass es nur sieben Tiere gibt, völlig außer Acht gelassen. Zur Berechnung wurden dagegen Zahlen herangezogen, die – übertragen auf die Sachsituation – gar keinen Sinn ergeben. Des Weiteren fällt auf, dass zwischen Huhn und Kaninchen laut Aufzeichnung kein Unterschied besteht. Im vorliegenden Fall haben beide Tiere vier Füße. Der Sinn der Aufgabe wurde nicht erfasst. Diese Lösung stammt von einem ausschließlich deutsch sprechenden Kind ohne Migrationshintergrund, so dass in der Regel sprachliche Schwierigkeiten ausgeschlossen werden können. Dennoch zeigt gerade diese Berechnung, dass im Bereich der Sachrechenaufgaben großer Handlungsbedarf besteht, das Verständnis für solche Aufgaben zu fördern.

Die beiden nächsten Beispiele zeigen, dass die in der Aufgabe angegebenen Zahlen durch eine Rechenoperation miteinander verknüpft werden. Die Rechnung aus der Realschule basiert auf der Subtraktion und die der Grundschule auf der Addition.

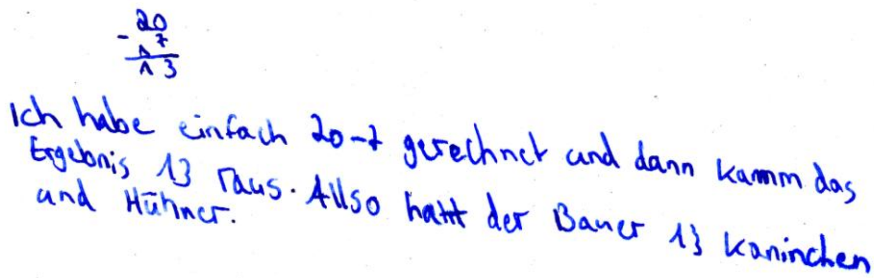


Abbildung 144: Falsche Rechenoperation Realschule

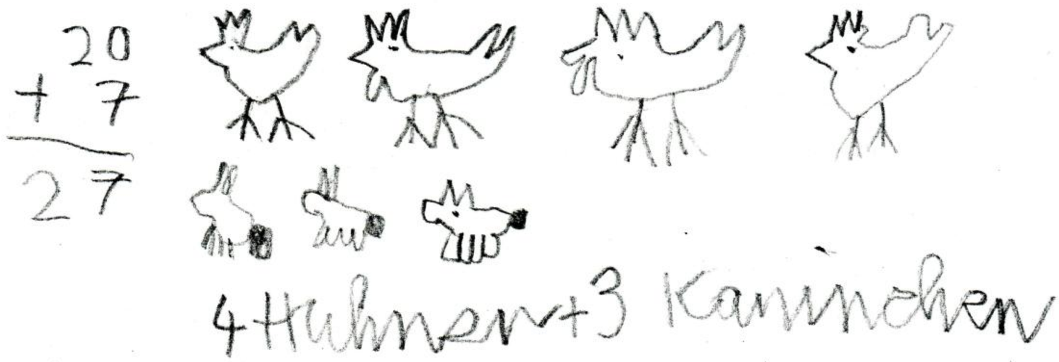


Abbildung 145: Falsche Rechenoperation Grundschule

Während in der Realschulberechnung das Ergebnis interpretiert, aber nicht validiert wird, zeigt die Grundschulberechnung, dass das Ergebnis der Berechnung in der Antwort nicht verwendet wird. Hier liegt der Schluss nahe, dass die Antwort im Umfeld aufgegriffen wurde.

Generell zeigt die Darstellung der Ergebnisse in diesem Bereich, dass Problemlöseaufgaben und heuristische Strategien noch zu wenig Beachtung im Mathematikunterricht finden. Dies kann daran liegen, dass sich einige Lehrkräfte der Bearbeitung solcher Aufgaben nicht gewachsen fühlen. Es fehlt zum einen das mathematische Wissen und zum anderen führt der Bearbeitungsfreiraum der SuS bei den Lehrkräften zu großen

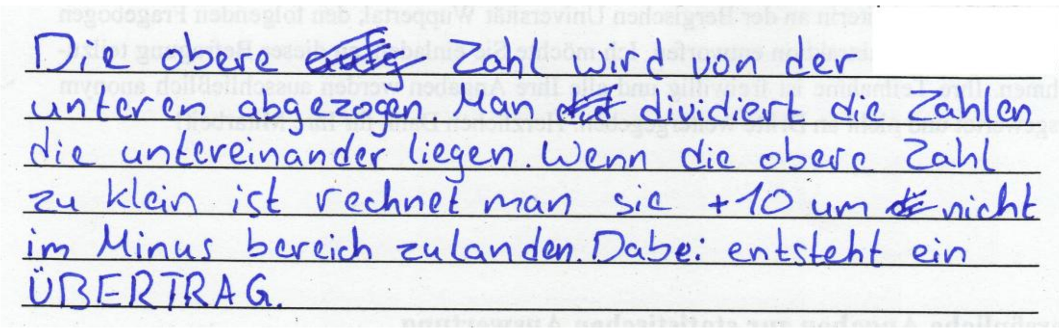
Unsicherheiten. Der Umgang mit offenen Aufgabestellungen muss für eine erfolgreiche Bewältigung sowohl von den SuS als auch von den Lehrkräften trainiert werden. In der vorliegenden Studie gelangen die SuS größtenteils durch Probieren zum Ergebnis. Ansatzweise kann hierbei von systematischem Probieren gesprochen werden. Hinsichtlich des Modellierungskreislaufes zeigt sich, dass die SuS in den Bereichen Mathematisieren, Interpretieren und Validieren ihre Fähigkeiten deutlich ausbauen müssen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die SuS die Möglichkeit erhalten, sich sprachlich über diese Aufgaben auszutauschen.

Betrachtet man abschließend die erhobenen Daten hinsichtlich der zugrundeliegenden Problemstellung ***Welche Indizien gibt es für einen möglichen Zusammenhang zwischen dem mathematischen Verständnis und der sprachlichen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern?***, so kann festgehalten werden, dass sich ein Zusammenhang leider nicht konkret nachweisen lässt. Es gibt SuS an allen Schulformen, die trotz geringer sprachlicher Kompetenz zum richtigen Ergebnis gelangen. Andererseits gibt es auch SuS, die trotz sprachlicher Kompetenz zu einem falschen Ergebnis kommen. Es zeigt sich, dass mathematische Begriffe grundsätzlich zu wenig Beachtung finden. Dies lässt den Schluss zu, dass diese Begriffe noch nicht in den Sprachgebrauch der SuS übergegangen sind. Menschen nutzen in der Regel für einen sprachlichen Austausch nur Wörter, die sicher mit Inhalt gefüllt werden können. An diesen Stellen sollte im Mathematikunterricht der Schulen nachgearbeitet werden. Die Entwicklung, in einem Wortspeicher Begriffe der einzelnen Themenschwerpunkte bereitzustellen, ist tendenziell sinnvoll. Jedoch werden die einzelnen Begriffe des Wortspeichers inhaltlich zu wenig gefüllt.

Betrachtet man die schriftliche Subtraktion und den zur Durchführung üblichen Algorithmus, so ist es durchaus wichtig, dass dieser automatisiert angewandt werden kann. Doch die Automatisierung beginnt meist viel zu früh. Das heißt, die SuS durchlaufen den Algorithmus ohne die einzelnen Schritte zu hinterfragen. Es wäre besser, die einzelnen Schritte mit den SuS intensiv zu be*sprechen*. Das setzt voraus, dass die SuS die Möglichkeiten zur Kommunikation erhalten. Auf diese Weise kann ein Verständnis für die einzelnen Rechenschritte aufgebaut werden. Dafür sollte bei der Bearbeitung der Sachrechenaufgaben viel mehr Wert auf das Erarbeiten nach einem Schema (Modellierungskreislauf) gelegt werden. Dies stellt auch eine Form des Algorithmus dar. Dieser sollte im Gegensatz zum Subtraktionsalgorithmus bereits zu einem sehr frühen Zeitpunkt in der Schule eingeführt und automatisiert werden. Dadurch wird erreicht, dass die SuS über die einzelnen Schritte nicht mehr lange nachdenken müssen. Es bleibt mehr Zeit, sich intensiver auf die sprachliche und mathematische Ebene zu konzentrieren. Erst nachdem die einzelnen Modellierungsschritte verstanden sind, sollte der mathematische Anspruch der Aufgaben komplexer gestaltet werden.

Fazit:

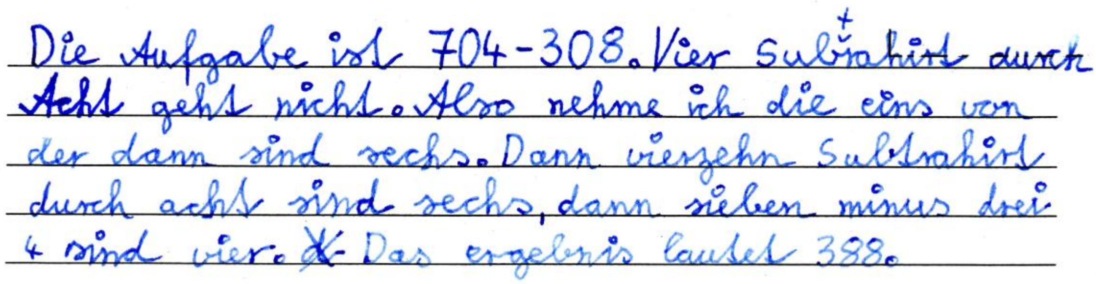
Die Studie zeigt, dass die Fachsprache der Mathematik noch viel zu wenig von den SuS angewandt wird. Einfache mathematische Begriffe wie *Ergebnis* werden überwiegend sicher verwendet. Allerdings zeigen sich bereits bei anderen Begriffen wie *subtrahieren* und *dividieren* Schwierigkeiten wie die nachfolgenden Beispiele zeigen:



Die obere ~~aufg~~ Zahl wird von der unteren abgezogen. Man ~~dit~~ dividiert die Zahlen die untereinander liegen. Wenn die obere Zahl zu klein ist rechnet man sie +10 um ~~de~~ nicht im Minus bereich zulanden. Dabei entsteht ein ÜBERTRAG.

Abbildung 146: Begriffliche Schwierigkeiten Realschule

.



Die Aufgabe ist 704-308. Vier subtrahirt durch Acht geht nicht. Also nehme ich die eins von der dann sind sechs. Dann vierzehn Subtrahirt durch acht sind sechs, dann sieben minus drei 4 sind vier. ~~X~~ Das ergebnis lautet 388.

Abbildung 147: Begriffliche Schwierigkeiten Realschule

Um die mathematische Fachsprache richtig zu erlernen, ist der Einsatz der Fachbegriffe im Mathematikunterricht von großer Bedeutung. Durch den vielfältigen Einsatz, unterstützendes Material und viel sprachlichen Austausch ist es möglich, ein sicheres Begriffsverständnis bei den SuS aufzubauen. Wie dies in den Bereichen *schriftliche Subtraktion* und *Bearbeitung von Sachrechenaufgaben* aussehen kann, sollen die nachfolgenden Konzeptionen zeigen, die eine Möglichkeit darstellen, die Sprache mehr ins Zentrum des Mathematikunterrichtes zu stellen.

8. Entwicklung von Unterrichtskonzepten

Aus den vorangegangenen Kapiteln wird deutlich, dass die Sprache für den Mathematikunterricht von ganz besonderer Bedeutung ist. Betrachtet man zum Beispiel aktuelle Schulbücher, so hat zwar durch die Vorgabe von prozessbezogenen Kompetenzen das Argumentieren und Begründen mehr Gewicht im Mathematikunterricht erhalten, dennoch zeigt die vorangehende Studie, dass das Versprachlichen mathematischer Vorgänge nach wie vor Probleme birgt, da es noch nicht adäquat im Mathematikunterricht umgesetzt wird. Der Lehrplan sieht vor, dass die SuS die schriftlichen Rechenverfahren sicher anwenden sollen. Dies beinhaltet ein automatisiertes Durchlaufen des jeweiligen Algorithmus‘. Leider werden im Zusammenhang mit den schriftlichen Rechenverfahren sehr häufig Abläufe lediglich abgespult ohne zu wissen, warum die jeweiligen Schritte notwendig sind. Dies führt in der Regel dazu, dass Fehler und Probleme häufiger auftreten. So zeigen sich beispielsweise Schwierigkeiten beim Rechnen in anderen Stellenwertsystemen, was unter anderem am fehlerhaften Durchlaufen des jeweiligen Algorithmus‘ oder am mangelnden Stellenwertverständnis liegen kann. Die schriftlichen Rechenverfahren sind ein wichtiger Bestandteil des Alltags der SuS, wenn Ergebnisse großer und/oder vieler Zahlen zügig berechnet werden müssen und elektronische Medien – wie der Taschenrechner oder der Computer – zum Rechnen nicht zur Verfügung stehen. Im Hinblick auf die weiterführende Schule ist anzumerken, dass die SuS mit weiteren Verfahren konfrontiert werden, z.B. beim Lösen von Gleichungen. Es ist wichtig, dass sie bereits in der Grundschulzeit lernen, die Zusammenhänge mathematischer Abläufe zu hinterfragen und zu verstehen. Der Einsatz von handlungsorientiertem Material erleichtert den SuS den differenzierten Zugang zum Thema.

Das entdeckende Lernen gilt als eine der wichtigsten Leitideen des Mathematikunterrichts und die folgende Unterrichtsreihe stellt diesen Aspekt in den Mittelpunkt. Generell werden die SuS in ihrer Problemlösekompetenz gefordert und gefördert, was für ihre weitere Entwicklung im privaten und später auch beruflichen Leben von großer Bedeutung ist. Sie sollen langfristig lernen, diese Kompetenz auf weitere Sachverhalte zu übertragen.

Dass das *Problemlösen/kreativ sein* eine prozessbezogene Kompetenz des Lehrplans darstellt, ist bereits bekannt. Die SuS sollen im Mathematikunterricht somit nicht nur schlichtes Sachwissen erlangen, sondern sie sollen lernen, flexibel mit ihrem Wissen umzugehen.[169]

Das entdeckende Lernen trägt einen wichtigen Anteil dazu bei. „Mathematiklernen [wird] durchgängig als konstruktiver, entdeckender Prozess verstanden"[170], bei dem Fehler gemacht werden dürfen. Diese gehören zum Lernprozess unbedingt dazu. Fehler „liefern wertvolle Einsichten in die Denkweisen der Schülerinnen und Schüler"[171] und sind Zeichen für konstruktive Gedankengänge, die gemacht wurden.[172] Es ist für die SuS daher von großer Bedeutung, dass sie sich in einer fehlertoleranten Umgebung befinden und sich für ihre Fehler nicht schämen müssen. Als Lehrkraft muss man daher stets einen angemessenen positiven Umgang mit Fehlern finden. In offenen Lernsituationen, welche bei entdeckenden Problemlöseaufgaben meist gegeben sind, steht die Lehrkraft nicht mehr als Wissensvermittler im Fokus, sondern rückt mit der Rolle als Unterstützer, Berater und Beobachter in den Hintergrund. Aber nicht nur die Lehrkraft spielt in einer fehlertoleranten Umgebung eine wichtige Rolle, sondern die ganze Klasse. Respekt untereinander ist von Bedeutung, da man nur dadurch die Meinung eines anderen anerkennen kann.

Das Prinzip der Handlungsorientierung spielt in Unterrichtskonzeptionen ebenfalls eine elementare Rolle. Generell sollte Unterricht so verlaufen, dass auch handelnde Zugänge zum jeweiligen Sachverhalt ermöglicht werden. Das Prinzip der Handlungsorientierung verwirklicht diesen haptischen bzw. enaktiven Zugang, denn Handlungsorientierung bedeutet, einen Sachverhalt nicht nur theoretisch zu behandeln und zu verstehen, sondern mit konkretem Material zu arbeiten. Dabei sollen möglichst viele, wenn nicht sogar alle Sinne angesprochen werden. Der Lehrplan greift diesen Aspekt folgendermaßen auf: „Mathematische Begriffe und Operationen können durch Handlungen mit Material (…) dargestellt werden. Die verschiedenen Darstellungen stellen einerseits eine wichtige Lernhilfe dar, andererseits sind sie aber auch Lerngegenstand mit eigenen Anforderungen für Schülerinnen und Schüler, die Bedeutung und Formen des Gebrauchs erlernen zu müssen."[173]

Zu den Zielen von Handlungsorientierung zählen einerseits das Fördern der praktischen und kreativen Fähigkeiten der SuS und andererseits das Ermöglichen des selbstständi-

[169] vgl. Lorenz. (2001), S. 27.
[170] Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 55.
[171] ebd.
[172] vgl. ebd.
[173] ebd.

gen, problemlösenden und anwendungsorientierten Arbeitens. Die Verknüpfung von praktischem Tun sowie kognitivem Lernen steht dabei im Vordergrund. Darüber hinaus kann ein Lerninhalt viel besser behalten werden, weil das konkrete Handeln den Verstehens- und Behaltensprozess bestärkt.

Die nachfolgenden Konzepte sollen Möglichkeiten aufzeigen, die zuvor genannten didaktischen Grundlagen umzusetzen, sowie der Sprache im Mathematikunterricht ihre notwendige Bedeutung zuzuschreiben.

8.1. Unterrichtskonzept zur Einführung der schriftlichen Subtraktion

Die erste Konzeption befasst sich mit der schriftlichen Subtraktion. Es geht darum, Zusammenhänge zwischen schriftlicher Addition und Subtraktion selbständig zu erkennen und diese Feststellungen in sprachlicher Form mit den Klassenkameraden zu teilen. Die Konzeption ist für ein drittes Schuljahr entwickelt worden, da in dieser Klassenstufe die schriftliche Subtraktion eingeführt wird. Die eingesetzten Methoden sind nicht auf die schriftliche Subtraktion begrenzt, sondern lassen sich auch auf weitere fachliche Inhalte in den nachfolgenden Jahrgangsstufen übertragen.

8.1.1. Rahmenbedingungen

Zur Erprobung dieser Reihe diente ein 3. Schuljahr einer Mönchengladbacher Grundschule. Dieses umfasste zur Zeit der Durchführung 12 Schüler und 10 Schülerinnen im Alter zwischen 8 und 10 Jahren. Der Mathematikunterricht dieser Klasse erstreckte sich über vier Wochenstunden, die sich aus einer Doppelstunde sowie aus zwei Einzelstunden zusammensetzten. Obwohl die Klasse unbekannt war, kann das Verhältnis zwischen LuL und Lerngruppe als freundlich beschrieben werden.

Die SuS hatten im ersten Halbjahr des Schuljahres Kenntnisse über den schriftlichen Additionsalgorithmus erlangt. Allerdings wurde die Notation der schriftlichen Addition verändert, um die Erarbeitung der schriftlichen Subtraktion zu erleichtern. Der überwiegende Teil der Klasse war im Umgang mit dem schriftlichen Additionsalgorithmus sehr sicher. Sie hatten kaum Probleme mit dem Übertrag. Die SuS verfügten über Stellenwertkompetenz, die sie u.a. durch Übung in anderen Stellenwertsystemen (z.B. Dreiersystem) gesammelt hatten. Darüber hinaus verfügte ein Großteil der Klasse über

ein recht gutes Auffassungsvermögen und im Einzelfall waren auch schon Kenntnisse über die schriftliche Subtraktion vorhanden. Im Vorfeld der vorliegenden Unterrichtskonzeption wurden der Lerngruppe arithmetische Grundlagen im Sinne des aktuellen Lehrplans vermittelt, sodass die SuS in der Lage waren, Additions- und Subtraktionsaufgaben unter Ausnutzung von Rechengesetzen (z.B. Distributivgesetz, Gesetz von der Konstanz der Summe) mündlich und halbschriftlich zu lösen und Zahlen im Zahlenraum bis 1000 unter Anwendung der Struktur des Zehnersystems (Prinzip der Bündelung, Stellenwertschreibweise) darzustellen.[174]
Den SuS waren darüber hinaus Einzel-, Partner- und Gruppenarbeitsphasen bekannt.

8.1.2. Aufbau der Unterrichtsreihe

„Wie subtrahiert man eigentlich schriftlich?" – Mathematisierung einer algorithmischen Problemstellung und Erarbeitung eines Lösungsweges

Curriculare Anbindung

Der Inhalt der Unterrichtsreihe kann dem Themensektor *Ziffernrechnen* aus dem Themenkreis *Zahlen und Operationen* des aktuellen Lehrplanes zugeordnet werden.[175] Der Fokus liegt dabei insbesondere auf der Erläuterung des schriftlichen Rechenverfahrens der Subtraktion, welches die SuS in einzelnen Rechenschritten in nachvollziehbarer Weise beschreiben und sicher ausführen sollen.

Thema

Selbstständige Erarbeitung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus' unter besonderer Berücksichtigung des entdeckenden Lernens mit der Absicht, dieses Rechenverfahren schrittweise erläutern und anwenden zu können.

Ziele

Die SuS sollen den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion im Zahlenraum bis 1000 selbstständig erarbeiten, verstehen und erläutern können.

---

[174] vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 12f.
[175] vgl. ebd., S. 14.

Tabellarische Übersicht

Stunde	Inhalt der Stunde	Ziel
1. u. 2. Std.	Schriftlicher Subtraktionsalgorithmus mit **einem** Übertrag	Beziehungen zwischen der Addition und der Subtraktion erkennen und ansatzweise verstehen.
3. Std.	Schriftlicher Subtraktionsalgorithmus mit **mehreren** Überträgen unter besonderer Berücksichtigung der Null	Erkenntnisse der vorangegangenen Stunde nutzen, auf einen erweiterten Sachverhalt anwenden und sich der Bedeutung der Null bewusst werden.
4. Std.	Verbalisieren des Algorithmus‘	Die Vorgehensweise mathematischer Schritte in Schriftsprache korrekt beschreiben können unter Berücksichtigung der Fachsprache.
5. u. 6. Std.	Schriftlicher Subtraktionsalgorithmus mit mehreren Subtrahenden	Bisherige Erkenntnisse nutzen und auf einen erweiterten Sachverhalt anwenden.
7. Std.	Schriftlicher Subtraktionsalgorithmus anhand des Musters von ANNA Zahlen	
8. Std.	Schriftlicher Subtraktionsalgorithmus in anderen Stellenwertsystemen	Das Wissen über den Algorithmus auf andere Stellenwertsysteme übertragen, um Gemeinsamkeiten festzustellen.
9. u. 10. Std.	Vertiefung und Festigung des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion an Hand von verschiedenen Stationen	Die neuen Inhalte sicher anwenden können.

Zum Aufbau der Reihe ist zu ergänzen, dass der Abstraktionsgrad sukzessiv im Lernprozess der SuS intensiviert wird. Das heißt, die SuS werden zunächst mit einem Sachverhalt konfrontiert, der ihnen aus der Alltagswelt bekannt ist. Sie erhalten die Möglichkeit, bereits vorhandenes Wissen selbstständig in einen neuen Entdeckungsprozess einfließen zu lassen. Erst im weiteren Verlauf der Reihe werden sie zunehmend mit Fachbegriffen und mathematischen Abfolgen konfrontiert.

Sachaspekte

Im Laufe der Geschichte des Rechenunterrichts sind sehr unterschiedliche Verfahren der schriftlichen Subtraktion entwickelt worden (vgl. Kapitel 5.1.1). Der Beschluss der Kultusministerkonferenz (KMK) von Dezember 2002 räumt den LuL die Möglichkeit ein, selbst zu entscheiden, welches Subtraktionsverfahren im Unterricht erarbeitet werden soll. Dabei ist keines dieser Verfahren optimal, sondern jedes hat seine Vor- bzw. Nachteile. Diese sollen nachfolgend dargestellt werden.

Die wichtigsten Verfahren unterscheiden sich nach der Art, wie die Differenz bestimmt wird – durch *Abziehen* oder durch *Ergänzen* – und wie der Übertrag (Zehnerübergang) behandelt wird – durch *Entbündeln*, durch *gleichsinniges Verändern* von Minuend und Subtrahend oder durch *Auffüllen* des Subtrahenden zum Minuenden (vgl. Kapitel 5.1.1).

Vorteile des Abziehens:

1. Das Abziehen entspricht den Vorerfahrungen der meisten Kinder zum Kopfrechnen und zum halbschriftlichen Rechnen der Subtraktion.
2. Das Verfahren ist über Handlungen mit konkretem Material leicht einsehbar und begründbar, da so das Entbündeln einer Einheit in zehn nächstkleinere Einheiten verständlich gemacht wird.
3. Das Entbündeln bei der schriftlichen Subtraktion ist die Umkehrung des Bündelns bei der schriftlichen Addition.
4. Umformungen werden ausschließlich beim Minuenden vorgenommen, so dass keine Interferenzen mit dem Übertrag bei der schriftlichen Addition entstehen können.

Nachteile des Abziehens:

1. Das Lösen von Aufgaben mit einer oder mehreren Nullen im Minuenden ist schwierig, da an der nächsthöheren Stelle nichts zum Entbündeln steht.
2. Bei mehreren Subtrahenden ist das Abziehen mit Entbündeln schwieriger, da unter Umständen mehrere Elemente der nächsthöheren Stelle entbündelt werden müssen.

Vorteile des Ergänzens:

1. Subtraktionsaufgaben mit mehreren Subtrahenden lassen sich leichter rechnen.
2. Die Technik lässt sich über Sachsituationen (z.B. Wechseln von Geldbeträgen)

erarbeiten; das Herausgeben von Wechselgeld beim Einkaufen erfolgt im Sinne des Ergänzens (wenn nicht eine Registrierkasse den Wechselbetrag anzeigt).

3. Eine oder mehrere Nullen im Minuenden stellen kein größeres Problem dar.
4. Beim Ergänzungsverfahren wird nur das Einspluseins und nicht – wie beim Abziehverfahren – zusätzlich das weniger geläufige und daher fehleranfälligere Einsminuseins benötigt.
5. Das Vorwärtszählen beherrschen die SuS generell besser als das Rückwärtszählen, daher ist die Vorstellung des Ergänzens beim schriftlichen Subtrahieren günstiger.

Nachteile des Ergänzens:

1. Die natürliche Sinngebung der Subtraktion – das Abziehen – ist durch das Ergänzen nicht mehr gegeben.
2. Verwechslungen mit der schriftlichen Addition sind nicht selten.
3. Der Hilfszehner wird von den SuS als eine Art *Trick* verstanden.

Der schriftliche Subtraktionsalgorithmus ist wesentlich schwieriger für die Kinder zu erfassen als der der schriftlichen Addition. Die wesentlichen Fehler sind die folgenden:

Beispiel	Beschreibung
564 - 326 242	Die Differenz wird zwischen den Ziffern einer Stelle bestimmt.
564 - 326 248	Der Übertrag wird nicht berücksichtigt.
564 - 326 148	Der Übertrag wird falsch zugeordnet.
564 - 326 138	Durchgängig wird über den Stellenwert hinaus ergänzt.
564 - 82 582	Der Übertrag wird nicht in die leere Stelle übernommen.
564 - 326 237	Verrechnen um 1 beim Ergänzen.
564 - 324 230	Bei gleicher Ziffer in einer Spalte wird um 10 ergänzt.
504 - 326 238	Zur 0 im Minuenden wird nicht ergänzt.
500 - 326 284	Bei mehreren Nullen im Minuenden werden keine Überträge bestimmt.
564 - 326 990	Es wird addiert statt subtrahiert.
564 - 86 78	Die Subtraktion wird nicht abgeschlossen.

Abschließend sollen drei grundlegende Aspekte der Förderung bzw. Hilfe bei Subtraktionsschwierigkeiten genannt werden:

1. Die regelmäßige Überschlagrechnung hilft den Kindern, auffallende Fehllösungen zu erkennen und zu korrigieren. Im Tausenderraum werden dabei die Zahlen auf volle Hunderter gerundet. Das gleichsinnige Verändern von Minuend und Subtrahend führt bei solchen Überschlagrechnungen in der Regel zu besseren Abschätzungen als das Runden streng nach Rundungsregeln.
2. Ebenfalls hilfreich ist die Rechenkontrolle über die schriftliche Addition.
3. Das begleitende Sprechen beim Bearbeiten einer Subtraktionsaufgabe sollte möglichst lange Zeit von den rechenschwächeren Kindern erwartet werden bis es zum *inneren Sprechen* verinnerlicht ist.

8.1.3. Aufbau der einzelnen Unterrichtssequenzen

Im Folgenden werden die jeweiligen Themen und Ziele der einzelnen Unterrichtssequenzen aufgeführt. Die Sachaspekte, die den einzelnen Sequenzen zugrunde liegen werden dargestellt sowie Entscheidungen der Unterrichtsplanung didaktisch und methodisch begründet.

Erste Unterrichtssequenz

Die erste Unterrichtssequenz besteht aus einer Doppelstunde. Es handelt sich um eine Einführungseinheit, in der das schriftliche Rechenverfahren der Subtraktion in den Fokus gestellt wird.

Thema

Selbstständige Erarbeitung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus‘, indem Zahlbeziehungen zwischen dem schriftlichen Additionsalgorithmus und dem der schriftlichen Subtraktion hergestellt und diese unter besonderer Berücksichtigung des entdeckenden Lernens überprüft und angewendet werden.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- einen mathematischen Algorithmus in einen anderen Algorithmus transferieren (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).
- die Bedeutung dieses mathematischen Kalküls für alltägliche Problemstellungen erkennen und auf ähnliche transferieren (Fach- und Sozialkompetenz).

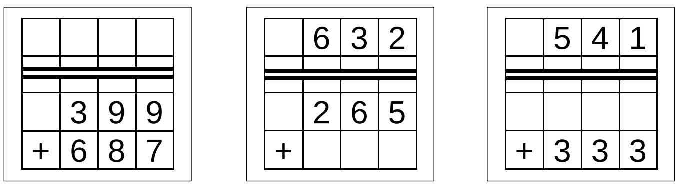
<table>
<tr><td colspan="2">Lernaufgabe:

Untersuchen des Additions- und Subtraktionsalgorithmus mit zwei Zahlen und einem Übertrag, um Beziehungen zwischen diesen Verfahren zu entdecken und aufzuschreiben.</td></tr>
<tr><td>AB 1: Reproduzieren</td><td>Die SuS lösen die Additionsaufgaben und markieren Auffälligkeiten an den Subtraktionsaufgaben.</td></tr>
<tr><td>AB 2: Zusammenhänge herstellen</td><td>Die SuS machen Entdeckungen an den verschiedenen Aufgaben.</td></tr>
<tr><td>AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren</td><td>Die SuS machen Entdeckungen an den verschiedenen Aufgaben und können diese begründen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Schwerpunkt der Reflexion: Verschiedene Entdeckungen der SuS</td></tr>
</table>

Sachaspekte

Das Thema ist im Lehrplan unter der inhaltsbezogenen Kompetenz *Zahlen und Operationen* mit dem Schwerpunkt *Ziffernrechnen* zu finden: „…erläutern die schriftlichen Rechenverfahren der Addition [...], der Subtraktion [...], [...], indem sie die einzelnen Rechenschritte an Beispielen in nachvollziehbarer Weise beschreiben.“[176]. Anhand dessen wird deutlich, dass die SuS den Algorithmus noch nicht sicher anwenden, sondern zunächst erste Erfahrungen sammeln und ein erstes Verständnis aufbauen sollen. Bezüglich ihrer *Operationsvorstellungen* wird von den SuS gefordert, dass sie „ [...] Fachbegriffe richtig (Summe, Differenz, [...], addieren, subtrahieren, [...]) verwenden.“[177]

Folgende Aufgaben werden in der Stunde behandelt:



[176] Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 14.
[177] ebd. S. 13.

Aufgaben dieser drei Typen wurden ausgewählt, um eigenständig vom Additionsalgorithmus auf den der Subtraktion schließen zu können. Hierzu muss erwähnt werden, dass die Notation der schriftlichen Addition von der üblichen Form abweicht. Dies wurde gezielt bei der Erarbeitung der schriftlichen Addition vollzogen, um nun die Beziehungen zwischen den einzelnen Zahlen aufzeigen zu können. Die Additionsaufgaben unterscheiden sich lediglich in Bezug auf die fehlende Zahl; so wurden im Sinne der Grundaufgaben Ergebnis, Startwert oder Veränderung ermittelt.

Die nachstehenden Aufgaben entsprechen den zugehörigen Subtraktionsaufgaben:

-	3	9	9
	6	8	7

	6	3	2
-	2	6	5

	5	4	1
-			
	3	3	3

Durch das Nebeneinanderstellen von Additions- und entsprechender Subtraktionsaufgabe können die SuS folgende Entdeckungen machen:

- Die Aufgaben unterscheiden sich durch das Operationszeichen.
- Die einzelnen Zahlen sind gleich, egal welche der beiden Operationen durchgeführt wird.
- Die größte Zahl steht immer oben .
- Die Subtraktion als Umkehrung der Addition und umgekehrt erkennen.
- Alle Aufgaben sind mittels Ergänzungsverfahren lösbar.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

Neben den zuvor dargestellten fachlichen Kompetenzen sollen auch die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein, Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden. Besonders die Förderung der Problemlösekompetenz findet im alltäglichen Mathematikunterricht nur selten statt und ist daher von großer Bedeutung. Der Einstieg über das Spiel Rechenfußball dient zum einen zur Festigung der Kopfrechenfähigkeiten und zum anderen sollen die SuS durch das Anwenden mündlicher Subtraktionsaufgaben auf den Inhalt der Stunde eingestimmt werden. Das Spiel ist den SuS vertraut, eine Besprechung der Regeln ist nicht mehr notwendig. Das verwendetet Plakat wird zur Visualisierung der Ergebnisse eingesetzt. So wird einerseits sichergestellt, dass die Aufgaben bereits in der Vorbereitungsphase festgelegt werden, was eine spontane Variation des Schwierigkeitsgrades verhindert. Andererseits ermöglicht es vor allem den leistungsschwächeren SuS, den vielen Aufgaben strukturierter folgen zu können.

Das Erlernen weiterer schriftlicher Rechenverfahren ist elementar für die Kinder, da sie dadurch komplexere Aufgaben schneller und effektiver lösen können. Deshalb ist es wichtig, dass sie nach der schriftlichen Addition auch das Verfahren der schriftlichen Subtraktion kennenlernen. Sie können den Algorithmus bereits auf Additionsaufgaben anwenden, sodass hier eine Verknüpfung zwischen den beiden Verfahren hergestellt werden kann. Die spezielle Anordnung der einzelnen Zahlen in der Subtraktionsaufgabe soll das Auftreten von Rechenfehlern minimieren und das Anwenden des Verfahrens erleichtern, da eine große Ähnlichkeit zur schriftlichen Addition besteht. Grundsätzlich sollen die Kinder ihre Lösungsschritte und Entdeckungen verschriften.

Dies soll ihnen zeigen, dass Mathematikunterricht nicht nur aus reinem Rechnen besteht, sondern Sprache ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichtes ist (vgl. Kapitel 5). Zudem wird diese Phase der Leitidee des Einsatzes ergiebiger Aufgaben gerecht. Bezüglich der Handlungsorientierung stehen den SuS während der gesamten Sequenz Materialien zur Verfügung. Eine Erläuterung dieses Materials erfolgt unter dem Punkt Differenzierung.

Die erste Ergebnissicherung geschieht vor allem um leistungsschwächeren SuS Impulse zu bieten, die sie anschließend überprüfen und/oder sogar weiter entwickeln können. So können auch sie in der zweiten Arbeitsphase mitarbeiten und Lösungsstrategien entwickeln. Den Abschluss der Stunde bildet die Transferphase. Hier sollen die SuS eigenständig schriftliche Subtraktionsaufgaben schreiben. Dies festigt nicht nur das Verständnis von Addition und Subtraktion als gegenseitige Umkehroperation, sondern hilft auch den neuen Sachverhalt anzuwenden. Die Auseinandersetzung mit dem neuen fachlichen Inhalt fordert innerhalb der Gruppe sprachliche Komponenten und somit auch das Anwenden von Fachsprache.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Sozialform:

Die SuS sitzen während des Einstiegs und der Problemstellung auf ihren Plätzen. So können sie gut an ihrem Arbeitsblatt arbeiten und zudem befinden sich die SuS in einer vertrauten und somit lernförderlichen Umgebung. In dieser Phase soll das Vorwissen der SuS aktiviert werden.

Während der Arbeitsphase arbeiten die SuS mit ihrem Sitznachbarn. Dies ist notwendig, damit ein sprachlicher Austausch über fachliche Inhalte stattfinden kann. Im Hinblick auf ihr weiteres gesellschaftliches Leben ist dies eine besonders wichtige Kompetenz und sollte daher kontinuierlich geschult und gefördert werden.

Während der Reflexionsphase bleiben die SuS an ihren Plätzen sitzen. Dies hat den Grund, dass alle SuS die vorgetragenen, gesammelten Entdeckungen an ihrem eigenen Material nachvollziehen und nachprüfen können. Dazu haben sie an ihren Tischen genügend Platz. Ein Wechsel der Sozialform wäre in dem Fall nicht lernförderlich, da alle SuS ihre Materialien mitnehmen müssten und somit schnell Unruhe herrschen kann.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. In Kooperation mit den SuS werden zwei Beispielaufgaben an der Tafel betrachtet und erste Schritte ggf. farblich markiert. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, so dass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

Die SuS erhalten diverse Möglichkeiten der Differenzierung. Zunächst sollen frühere Plakate der schriftlichen Addition eine Hilfe sein. Die Problemstellung ist an der Tafel visualisiert. Ebenso auch der Wortspeicher, welcher in der Reflexionsphase verwendet werden soll. In Bezug auf die Entdeckungen ist die Aufgabenstellung natürlich differenziert. Für die SuS die während der Arbeitsphase Denkanstöße benötigen, stehen ihnen zum Einen ihr Teampartner zur Verfügung und zum Anderen auch die Lehrkraft, die in der Phase eine beobachtende, unterstützende und beratende Rolle einnimmt. Darüber hinaus kann auf zusätzliches Material in Form von Rechenplättchen und einer großen Stellenwerttafel zurückgegriffen werden. Für die leistungsstärkeren SuS liegt ein weiteres Arbeitsblatt bereit, welches erste Aufgaben für eine Transferleistung bereitstellt.

Abbildung 148: Stellenwerttafel

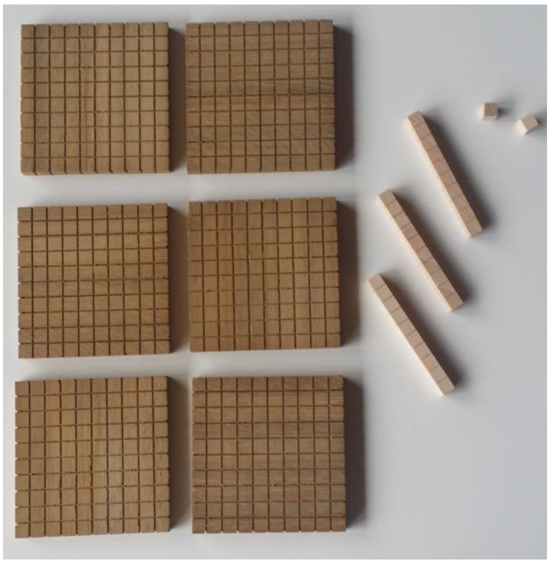


Abbildung 149: Mehrsystemmaterial

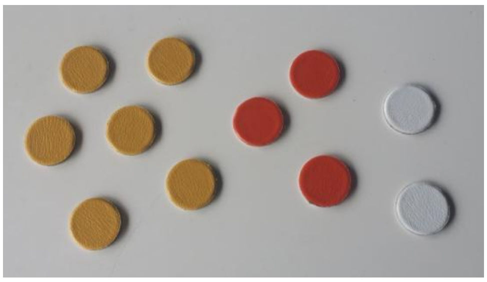


Abbildung 150: Plättchen

Verlaufsplan

Zeit	*Phasen*	*Inhalte*	*Sozialform*	*Medien/ Materialien*
5 Min.	Einstieg	Rechenfußball – Die Kopfrechenaufgaben zur Addition und Subtraktion werden von der Lehrkraft (L) vorgegeben. Richtig genannte Ergebnisse werden sukzessiv am Plakat aufgedeckt.	Plenum	Plakat
10 Min.	Problemstellung	Die Klasse wird mit einer schriftlichen Additionsaufgabe konfrontiert (stummer Impuls). Die SuS äußern sich und lösen die Aufgabe an der Tafel. Anschließend weiterer stummer Impuls in Form einer schriftlichen Subtraktionsaufgabe.	Plenum	Tafel
15 Min.	Arbeitsphase I	Die SuS arbeiten an dieser Aufgabe und halten ihre Ergebnisse auf dem Arbeitsblatt fest. **Zieltransparenz:** Die SuS erkennen den mathematischen Zusammenhang und transferieren das Wissen um die Addition auf die Subtraktion.	Partnerarbeit	Arbeitsblatt (AB) 1
15 Min.	Ergebnissicherung I	Die SuS diskutieren eigenständig ihre Lösungsansätze.	Plenum	AB 1
15 Min.	Arbeitsphase II	Die SuS arbeiten mit diesen Erkenntnissen an weiteren Aufgaben. Ihre neuen Entdeckungen verschriften sie.	Partnerarbeit	AB 1
20 Min.	Ergebnissicherung II	Die SuS tauschen ihre Entdeckungen aus und überprüfen diese rechnerisch und sprachlich. Abweichende Ergebnisse werden im Plenum vorgestellt und diskutiert.	Partnerarbeit, Plenum	AB 1
10 Min.	Transfer	Die SuS schreiben selber Aufgaben, die dem vorgegebenen Aufgabentyp entsprechen sollen. Die Aufgaben werden untereinander ausgetauscht, gelöst und auf die Anforderungen hin überprüft.	Gruppenarbeit	Konzeptpapier

Zweite Unterrichtssequenz

Die zweite Unterrichtssequenz ist eine Einzelstunde, in der die Erkenntnisse der vorangegangenen Stunden erweitert werden. In den Fokus rücken nun schriftliche Subtraktionsaufgaben mit mehreren Überträgen.

Thema

Selbstständige Erarbeitung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus mit mehreren Überträgen unter besonderer Berücksichtigung der Null, indem Erkenntnisse der letzten Stunde angewendet und handlungsorientiert auf die erweiterte Situation übertragen werden.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- den mathematischen Algorithmus unter Berücksichtigung der Null auf die erweiterte Situation mit mehreren Überträgen transferieren (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Untersuchen Subtraktionsalgorithmus hinsichtlich der Bedeutung der Null mit zwei Zahlen und mehreren Übertragen, um das Wissen der letzten Stunde zu festigen und die Bedeutung der Null zu erfassen.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS lösen die Subtraktionsaufgaben und notieren die einzelnen Schritte.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS lösen die Aufgaben und notieren Entdeckungen hinsichtlich der Null.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS lösen die Aufgaben und notieren Entdeckungen hinsichtlich der Null und können diese begründen.
Schwerpunkt der Reflexion: Verschiedene Entdeckungen der SuS	

Sachaspekte

Fachlich ist diese Sequenz auch unter der inhaltsbezogenen Kompetenz *Zahlen und Operationen* mit dem Schwerpunkt *Ziffernrechnen* zu finden, da die SuS ebenso wie bei der ersten Sequenz Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen entdecken sollen. So müssen in den vorliegenden Aufgaben zwar einzelne Ziffern betrachtet werden, die jedoch in Form von eigenständigen Zahlen zueinander in Beziehung gesetzt werden müssen, um entsprechende Zusammenhänge zu ermitteln. Ferner sollen sie die Struktur des Zehnersystems (Prinzip der Bündelung, Stellenwertschreibweise) anwenden. Erst durch Zahlzerlegungen können die Aufgaben der vorliegenden Stunde gelöst werden. Dies ist nur möglich, indem die SuS ihre Stellenwertkompetenz nutzen.

Folgende Aufgaben werden in der Stunde fokussiert:

-				
		1	0	5

-				
		3	7	0

-				
		4	0	0

Diese Aufgaben wurden ausgewählt, um den Umgang mit dem schriftlichen Algorithmus zu üben und die Besonderheit der Null bewusst zu machen. Dabei steht im Mittelpunkt, dass die Aufgaben zwei Überträge aufweisen müssen. Dies ist nur eine minimale Veränderung zur letzten Stunde, für die jedoch kein zusätzliches Wissen erforderlich ist. Die Aufgaben unterscheiden sich lediglich in der Stellung und der Häufigkeit der Null. Alle Aufgaben können nicht unter direkter Anwendung des Algorithmus‘ erfolgen, da nur das Ergebnis gegeben ist. Durch das rückwärtige Arbeiten wird der Bezug zur Umkehroperation deutlich herausgestellt. Dies wurde gezielt gewählt, um die Stellenwertkompetenz zu fördern und die Abläufe des Algorithmus in den Fokus zu rücken.

Die nachstehenden Aufgaben entsprechen möglichen Schülerlösungen:

	1	0	3	4
-		9	2	9
	1		1	
		1	0	5

	1	2	6	4
-		8	9	4
	1	1		
		3	7	0

-				
		4	0	0

Durch die bereits erworbene Stellenwertkompetenz und das Wissen der letzten Stunde sind die SuS in der Lage, folgende Entdeckungen zu machen:

- Die Aufgaben sind mit zwei dreistelligen Zahlen nicht zu lösen, wenn die Bedingungen von zwei Überträgen erfüllt sein müssen.
- Es sind unterschiedliche Zahlenkombinationen möglich, um z.B. auf die 5 am Ende der ersten Aufgabe zu kommen.
- In der letzten Spalte kann kein Übertrag erreicht werden.
- Die Null erzielt man nur, wenn keine Differenz auftritt.
- In der Spalte, wo die Null steht kann kein Übertrag erzielt werden.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In dieser Unterrichtssequenz sollen erneut die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein, Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden (vgl. didaktische Begründung erste Sequenz).

Der Einstieg erfolgt in dieser Sequenz über das 5-Minuten-Rechnen. Grundlage dieser Phase bildet der Bereich *Zahlen und Operationen* mit dem Schwerpunkt *Zahlenrechnen*, da die SuS „[...] Aufgaben aller vier Grundrechenarten unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien [...]“ lösen sollen.

In der Problemstellungsphase wird den SuS eine schriftliche Subtraktionsaufgabe präsentiert. Diesmal wird der OHP verwendet, um zum einen den Umgang mit verschiedenen Medien zu trainieren und zum anderen kann auf der Folie das Legen verschiedener Elemente zügiger vollzogen werden als an der Tafel. Die Problemstellung thematisiert die Stellung der Null innerhalb der einzelnen Zahlen sowie ihre Auswirkungen auf den schriftlichen Subtraktionsalgorithmus. Des Weiteren treten in dieser Sequenz nur Aufgaben auf, bei denen mehrere Überträge notwendig sind. In der Arbeitsphase setzen sich die SuS mit dieser Problematik auseinander. Dies ist wichtig, damit der Algorithmus fehlerfrei durchgeführt werden kann. Die Null nimmt in vielen mathematischen Situationen eine Sonderposition ein, sodass die Kinder dort besonders aufmerksam sein müssen. Diese Sensibilisierung soll durch die ausgewählten Aufgaben geschehen.

In der Reflexionsphase stellen einzelne SuS ihre Lösungswege vor und erläutern diese. Diese Präsentation fördert das Versprachlichen der mathematischen Schritte und dient zur Festigung der Argumentationsfähigkeit der Kinder. Dies ist eine wichtige Kompetenz, die die Kinder für viele weitere Lebensbereiche brauchen.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Die grundlegenden methodischen Entscheidung bezüglich der Sozialform, des Erfassens der Problemstellung und des Materials/Differenzierung decken sich mit denen der ersten Sequenz und werden an dieser Stelle nicht erneut aufgeführt (vgl. Seite 257).

Sozialform:

Die SuS sitzen während des Einstiegs und der Problemstellung auf ihren Plätzen. So können sie gut an ihrem Arbeitsblatt arbeiten und zudem befinden sich die SuS in einer vertrauten und somit lernförderlichen Umgebung. In dieser Phase soll das Vorwissen der SuS aktiviert werden.

Während der Arbeitsphase arbeiten die SuS mit ihrem Sitznachbarn gemeinsam. Dies ist notwendig, damit ein sprachlicher Austausch über fachliche Inhalte stattfinden kann. Im Hinblick auf ihr weiteres gesellschaftliches Leben ist dies eine besonders wichtige Kompetenz und sollte daher kontinuierlich geschult und gefördert werden.

Während der Reflexionsphase bleiben die SuS an ihren Plätzen sitzen. Dies hat den Grund, dass alle SuS die vorgetragenen, gesammelten Entdeckungen an ihrem eigenen Material nachvollziehen und überprüfen können. Zudem haben sie an ihren Tischen dazu genügend Platz. Ein Wechsel der Sozialform wäre in dem Fall nicht lernförderlich, da alle SuS ihre Materialien mitnehmen müssten und somit schnell Unruhe herrschen kann.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. In Kooperation mit den SuS wird eine Beispielaufgabe am OHP betrachtet und erste Schritte besprochen. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, sodass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

Zur Untersuchung der vorgegebenen Aufgaben erhalten die SuS ein Arbeitsblatt mit dem Arbeitsauftrag und genügend Platz, um ihre Entdeckungen und Lösungsvorschläge zu notieren. Zusätzlich wird konkretes und abstraktes Material bereitgestellt, so können die SuS mit Rechengeld oder Rechenplättchen sowie einer großen Stellenwerttafel arbeiten.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materia-lien***
5 Min.	Einstieg	5 Minuten Rechnen – Die SuS lösen Subtraktionsaufgaben und notieren die Ergebnisse.	Plenum	Arbeitsblatt
5 Min.	Problem-stellung	Die L präsentiert eine Beispielaufgabe am OHP. Die SuS äußern sich spontan.	Plenum	OHP, Folie
15 Min.	Arbeits-phase	In Partnerarbeit versuchen die SuS, sich diesem Problem zu nähern. Ergebnisse und Lösungswege werden auf einem Arbeitsblatt festgehalten. **Zieltransparenz:** Die SuS erfassen das mathematische Problem.	Partnerarbeit	Arbeitsblatt (AB) 1
20 Min.	Reflexion	Einige SuS erläutern ihre Vorgehensweise an der Tafel. Mittels zuvor ausgeteilter Notizkarten werden die Entdeckungen der Stunde an der Tafel visualisiert und in Kombination mit Beispielaufgaben erläutert.	Plenum	Notizkarten, Tafel

Dritte Unterrichtssequenz

Die dritte Unterrichtssequenz ist wiederum eine Einzelstunde, in der die Vorgehensweise mathematischer Schritte in Schriftsprache korrekt wiedergegeben werden soll. In das Zentrum dieser Stunde tritt die Versprachlichung und Verschriftung mathematischer Abläufe.

Thema

Verschriftung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus‘, mit der Absicht durch die korrekte Verbalisierung einen Zuwachs des mathematischen Verständnisses zu erzielen.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- den mathematischen Algorithmus verschriften (Fachkompetenz).
- Fachsprache verwenden (Fachkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Verschriften des Subtraktionsalgorithmus‘ mit mehreren Übertragen, um durch fachsprachliche Elemente das mathematische Verständnis zu fördern.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS lösen die Subtraktionsaufgaben und formulieren die einzelnen Schritte anhand des zur Verfügung stehenden Wortspeichers.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS lösen die Aufgaben, formulieren eigenständig die einzelnen Schritte und achten auf Bedeutungszusammenhänge.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS lösen die Aufgaben, formulieren eigenständig die einzelnen Schritte, achten auf Bedeutungszusammenhänge und begründen diese ansatzweise.
Schwerpunkt der Reflexion: Fach- und bildungssprachliche Elemente	

Sachaspekte

Fachlich ist diese Sequenz der inhaltsbezogenen Kompetenz *Zahlen und Operationen* mit dem Schwerpunkt *Operationsvorstellungen* zuzuordnen, da die SuS „[...] Fachbegriffe richtig ” verwenden sollen.

Das Verstehen und somit auch das Verwenden von Fachsprache weist erhebliche Schwierigkeiten auf. Begriffe, die Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten ausdrücken, sind häufig statisch. Dies beginnt bereits im 1. Schuljahr mit Verben, die eine Äquivalenzrelation ausdrücken. So wird das Ergebnis einfacher Subtraktionsaufgaben – z. B 10 minus 2 – häufig mit *ist* umschrieben – ist 8. Das Adjektiv *gleich* wird sprachlich vernachlässigt, obwohl gerade durch dieses Wort der Bezug zwischen den Zahlen hergestellt werden kann. Die SuS müssen bereits sehr früh verstehen, mit dieser sprachlichen Abstraktion umzugehen und müssen lernen, dass durch das kleine Verb *ist* ein Vorgang zum Ausdruck gebracht wird.[178]

Gerade bei der Anwendung von Algorithmen werden sprachliche Ausführungen häufig auf ein Minimum reduziert. Betrachtet man nun mögliche Begriffe wie sie bei der schriftlichen Subtraktion auftreten können (vgl. Kapitel 5.1.1), so ist festzuhalten, dass die SuS bei der Durchführung des Algorithmus mit unterschiedlichen Begriffskategorien konfrontiert werden. So müssen neben arithmetischen Begriffen, zu denen die natürlichen Zahlen als Zahlbegriffe und Begriffe von Zahlmengen zählen auch Relationsbegriffe wie z. B. ist gleich, Operationsbegriffe wie z.B. addieren und Strukturbegriffe wie z.B. Stellenwert angewendet werden. Es ist darauf zu achten, dass das Fachvokabular dabei nicht ausschließlich reproduziert wird, sondern dass die SuS die Zusammenhänge hinter den sprachlichen Ausdrücken auch verstanden haben.[179]

Das Verstehen dieser Begriffe basiert nach MAIER (1995) auf zwei inhaltlichen Dimensionen. Die erste Dimension umfasst die Verknüpfung von Sprache und Handlung. So sollen die SuS stets ihre Äußerungen durch symbolische Darstellung konkretisieren und umgekehrt. So wird sichergestellt, dass ein Zusammenhang zwischen beiden hergestellt werden kann und die SuS somit jederzeit zu Transferhandlungen in der Lage sind (modale Dimension des Verstehens). Die zweite Dimension beinhaltet die verschiedenen kognitiven Komponenten eines jeden Begriffes (mentale Dimension des Verstehens).[180]

[178] vgl. Maier/Schweiger (1999), S. 14f.
[179] ebd., S. 11f.
[180] vgl. ebd., S. 58.

Folgende Aufgaben werden in der Stunde fokussiert:

	9	8	7
-	5	6	3

	3	5	0
-	1	6	8

	7	1	1
-	4	0	9

Diese Aufgaben wurden ausgewählt, um eine Verschriftung des schriftlichen Algorithmus‘ durchzuführen. Dabei steht im Mittelpunkt, dass die SuS angeleitet werden, die fachlichen Begriffe korrekt zu verwenden und durch Handlungen zu untermauern. Die Aufgaben weisen überwiegend einen Übertrag auf, maximal jedoch zwei und beziehen sich somit fachlich auf die Inhalte der letzten beiden Sequenzen. Für die Sprachförderung im Mathematikunterricht der Grundschule gibt es noch kein zuverlässig erprobtes Gesamtkonzept – weder für die Diagnose fachsprachlicher Komponenten noch für entsprechende Unterstützungsmaßnahmen.[181] Der Wortspeicher ist ein Mittel zur Differenzierung/Förderung im Unterricht, welcher SuS zum Unterrichtsinhalt Fachvokabular anbietet und ggf. erläutert. In diesen Speicher können sowohl einzelne Begriffe, als auch Wortwendungen oder Satzbausteine aufgenommen werden. In der vorliegenden Stunde dienen die Wortspeicherplakate früherer Stunden als Hilfestellung. So finden hier die Plakate zur Subtraktion, zur schriftlichen Addition und zum Stellenwertsystem ihren Einsatz. Die Fachbegriffe des Themas werden auf diese Art und Weise transparent gemacht und deren Bedeutung geklärt. Durch die Ergänzung von Wortwendungen und Satzbausteinen wird zudem die sprachlich richtige Verwendung der Fachtermini unterstützt. Der Wortspeicher bietet so eine Basis für Reflexionsgespräche. Dadurch werden Missverständnisse zwischen Alltags- und Bildungssprache reduziert.

<u>Wortspeicher Subtraktion:</u>

- Minuend (größte Zahl)
- Subtrahend (kleinere Zahl, die abgezogen wird)
- Differenz (Ergebnis)
- Minus (-)
- gleich (=)

[181] vgl. Verboom (2013), S. 40.

- subtrahieren, abziehen, wegnehmen, auffüllen, ergänzen
- Teile
- Ganzes

Wortspeicher Stellenwertsystem:

- Einer
- Einerzahl
- Einerwürfel
- Zehner
- Zehnerzahl
- Zehnerstange
- Hunderter
- Hunderterzahl
- Hunderterplatte
- bündeln, zusammenfassen
- entbündeln, aufspalten, zerlegen
- wechseln, tauschen

Wortspeicher schriftlicher Additionsalgorithmus:

- Summanden
- Ziffer unter Ziffer: Einer unter Einer ...
- Pluszeichen, Additionszeichen
- Trennlinie über den beiden Summanden
- von unten nach oben
- bei den Einern anfangen, ganz rechts beginnen
- mehr als 10, dann Übertrag
- Übertrag bei der nächsten Stelle beachten
- dazuzählen, zusammenrechnen

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

Wie in den beiden vorangegangenen Sequenzen sollen auch in dieser Unterrichtsstunde wieder die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein, Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden (vgl. didaktische Begründung erste Sequenz).

Im Einstieg werden die SuS durch das Wortspeicherspiel auf die Unterrichtsstunde eingestimmt. In dieser Phase sollen die SuS ihr bereits vorhandenes Wissen reaktivieren. Es kommen lediglich bereits bekannte Begriffe zum Einsatz.

Die verschiedenen Probleme der Schachteln dienen der Steigerung des Schwierigkeitsgrades: Grün ist eine leichte Problemstellung, gelb eine mittelschwere, rot eine schwere und blau eine sehr schwere Problemstellung. Den Kindern ist dieses Farbschema bekannt und sie kennen solche Selbstreflexionen, sodass sie eigenständig entscheiden können, welcher Problemstellung sie sich widmen möchten. Die Ergebnisse werden auf Plakaten festgehalten, damit eine Präsentation der verschiedenen Lösungswege gut möglich ist. Bei der Erstellung der Plakate müssen die Kinder darauf achten, dass sie sich auf die wichtigen Informationen beschränken und diese gut sichtbar und nachvollziehbar aufschreiben. Somit fördert diese Handlung den effektiven Umgang mit Informationen und das Darstellen solcher. Ebenfalls entsprechen die Farben der Schachteln den Farben der Plakate, sodass eine rasche Zuordnung von Lösung zur jeweiligen Aufgabenstellung möglich ist.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

<u>Sozialform:</u>

Die SuS sitzen während des Einstiegs und der Problemstellung an ihren Plätzen. Von dort können sie gut den Ausführungen der Lehrkraft folgen und sich ausschließlich auf ihre Wortkarte konzentrieren. Das Bilden einer anderen Sozialform würde wertvolle Zeit kosten und ist nicht notwendig.

Während der Arbeitsphase haben die SuS die Wahl, ob sie in Partner- oder Gruppenarbeit arbeiten. Dies ist notwendig, damit ein sprachlicher Austausch über fachliche Inhalte stattfinden kann. Im Hinblick auf ihr weiteres gesellschaftliches Leben ist dies eine besonders wichtige Kompetenz und sollte daher kontinuierlich geschult und gefördert werden.

Während der Reflexionsphase kommen die SuS in einen Sitzkreis. Dies hat den Grund, dass alle SuS die vorgetragenen Lösungswege an großem Material im Zentrum des Kreises sehen sollen. Das Verbleiben am Platz wäre wenig sinnvoll, da aufgrund der unterschiedlichen Probleme nicht allen SuS die gleichen Materialien zur Verfügung stehen.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. In dieser Phase wird mit einer sukzessiven Abkopplung gearbeitet. Durch die farbliche Unterscheidung der einzelnen Probleme wird mit dem leichtesten Problem begonnen. Die SuS, die sich dieser Aufgabe widmen möchten, erhalten die meiste Zeit, indem sie direkt nach der Darstellung des Problems mit der Bearbeitung beginnen dürfen. Nach und nach werden die übrigen Aufgaben vorgestellt und entsprechend die Kinder in die Arbeitsphase entlassen. Den leistungsstärksten SuS bleibt die wenigste Zeit. Dafür wird die meiste Zeit darauf verwendet, die schwierige Aufgabenstellung detailliert zu erläutern. Durch das enorme Wissen und die gute Arbeitshaltung wird die wenige Zeit zur Bearbeitung effektiv genutzt und am Ende der Stunde nahezu alle SuS zeitlich wieder zusammengeführt.

Material/Differenzierung:

Dieser Unterrichtsstunde liegen verschiedene Formen der Differenzierung zugrunde. Im Einstieg wird zum einen quantitativ differenziert. So erhalten leistungsschwächere SuS nur einen Begriff, der den entsprechenden Stellen zugeordnet werden muss. Leistungsstärkere SuS können bis zu drei Wortkarten erhalten. Ferner liegt eine qualitative Differenzierung vor, da nicht alle Ausdrücke demselben Anspruchsniveau angehören. Eine Differenzierung der Problemstellung ist durch die unterschiedlich zu produzierenden Textarten gegeben. Während leistungsschwächere SuS nur einzelne Begriffe in einen vorgegebenen Text einfügen oder Begriffe entsprechenden Textpassagen zuordnen müssen, so müssen leistungsstärkere SuS einen Fehlertext überarbeiten oder einen freien Text formulieren. Zur Untersuchung der vorgegebenen Aufgaben erhalten die SuS ein Arbeitsblatt mit dem Arbeitsauftrag und ein Plakat, um Lösungen zu notieren. Zusätzlich wird konkretes und abstraktes Material bereitgestellt, so können die SuS mit Wortkarten aus dem Wortspeicher arbeiten.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materialien***
10 Min.	Einstieg	Wortspeicherspiel – Die L trägt eine kurze Geschichte vor, in der viele Begriffe der einzelnen Wortspeicher vorkommen. Die SuS folgen dem Text und müssen ihre Wortkarte an der richtigen Stelle hochhalten.	Plenum	Geschichte, Wortkarten
5 Min.	Problemstellung	Die L präsentiert einen Brief von Susi Subtraktion, in dem sie vier Probleme in verschiedenfarbigen Schachteln schildert: • Grüne Lückentext-Kiste, • Gelbe „Was passt wozu?“-Kiste • Rote „Finde den Fehler“-Kiste, • Blaue Anleitungskiste **Zieltransparenz:** Die SuS erkennen das jeweilige Problem.	Plenum	Brief, Susi Subtraktion, Rote, gelbe, grüne und blaue Kiste
20 Min.	Arbeitsphase	Die SuS versuchen sich den verschiedenen Problemen zu nähern. Ergebnisse werden auf einem Plakat festgehalten.	Partnerarbeit oder Gruppenarbeit	Plakate 1-4
10 Min.	Reflexion	Anhand von entsprechendem Material werden die einzelnen Lösungen präsentiert und auf ihre Richtigkeit hin überprüft.	Sitzkreis	Großes Material: rot, gelb, grün und blau

Vierte Unterrichtssequenz

Die vierte Unterrichtssequenz besteht wiederum aus einer Doppelstunde. In dieser Sequenz geht es sowohl um die Vertiefung der Anwendung des Algorithmus‘ als auch um die Übertragung des Algorithmus‘ auf die Subtraktion mit mehreren Subtrahenden.

Thema

Vertiefende Übungen zum schriftlichen Subtraktionsalgorithmus mit der Absicht, bisher erworbene Kenntnisse zu nutzen und auf einen erweiterten Sachverhalt – die Subtraktion mehrere Subtrahenden – anzuwenden.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- einen mathematischen Algorithmus selbstständig auf den erweiterten Sachverhalt (mehrere Subtrahenden) übertragen (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Anwenden und Festigen des Subtraktionsalgorithmus‘, um diesen auf die Subtraktion mit mehreren Subtrahenden übertragen zu können.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS lösen Subtraktionsaufgaben mit mehreren Subtrahenden.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS lösen Subtraktionsaufgaben mit mehreren Subtrahenden und formulieren die mathematischen Zusammenhänge.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS lösen Subtraktionsaufgaben mit mehreren Subtrahenden, formulieren die mathematischen Zusammenhänge und erläutern diese.
Schwerpunkt der Reflexion: Ablauf des Algorithmus‘ bei erweitertem Sachverhalt	

Sachaspekte

Fachlich ist diese Stunde nicht dem Lehrplan zuzuordnen, da die schriftliche Subtraktion mit mehreren Subtrahenden nicht explizit für die Grundschule vorgesehen ist. Dennoch wird diese Thematik in die gesamte Unterrichtsreihe mit aufgenommen, da sich besonders in dieser Stunde Zusammenhänge der Addition und der Subtraktion entdecken lassen. So ist es durchaus eine elementare Erfahrung, dass der schriftlichen Subtraktion das Zusammenfassen mehrerer Subtrahenden zugrundeliegt. So kann durch diesen Schwerpunkt (Wechsel von Addition und Subtraktion) ein tieferes Verständnis für den schriftlichen Subtraktionsalgorithmus erzielt werden.

Folgende Aufgaben werden in der Stunde fokussiert:

	8	6	7
-	2	9	9
-	3	1	4

	3	5	0
-	1	9	8
-		8	7

	6	1	9
-		2	2
-	1	9	7
-	2	0	3

Aufgaben dieser drei Typen wurden ausgewählt, um die Subtraktion mit mehreren Subtrahenden ausführen zu können. Die Aufgaben unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl der Subtrahenden, dem Übertrag, dem Stellenwert und dem Auftreten der Null. Die Vielfalt basiert auf den Stundenschwerpunkten der vorangegangenen Sequenzen. Lediglich das Auftreten mehrerer Subtrahenden muss von den SuS erarbeitet werden.

Durch die nachstehenden Aufgaben soll besonders den leistungsschwächeren SuS eine Hilfe zur selbstständigen Erarbeitung angeboten werden:

	8	6	7
+	2	9	9
+	3	1	4

	3	5	0
+	1	9	8
+		8	7

	6	1	9
+		2	2
+	1	9	7
+	2	0	3

Durch das Nebeneinanderstellen von Additions- und entsprechender Subtraktionsaufgabe können die SuS die Kenntnisse der ersten Sequenz nutzen, um den neuen Sachverhalt eigenständig zu erschließen:

- Die Aufgaben unterscheiden sich nur durch das Operationszeichen.
- Die einzelnen Zahlen sind gleich, egal welche der beiden Operationen durchgeführt wird.
- Die größte Zahl steht immer oben.
- Die Subtraktion als Umkehrung der Addition und umgekehrt erkennen.
- Alle Aufgaben sind mittels Ergänzungsverfahren lösbar.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

Das Memoryspiel im Stundeneinstieg erfordert ein großes Maß an Konzentration, sowohl bei denjenigen, die das Memory lösen, als auch bei denjenigen, die das Memory darstellen. Ferner sind alle SuS beteiligt und gleichermaßen damit beschäftigt, die zugehörigen Aufgaben zu ermitteln. Dabei werden vor allem die Kopfrechenfähigkeiten angesprochen.

In der Arbeitsphase formulieren die SuS die Zieltransparenz und beschäftigen sich mit dieser Problematik. Der Lehrplan besagt für die prozessbezogene Kompetenz *Problemlösen/kreativ sein*, dass die SuS die Problemstellung in eigenen Worten wiedergeben, diese zunehmend systematisch lösen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen sollen.[182] Dies entspricht der Stunde, da die SuS ihr Vorwissen aktivieren und in ihrem Entdeckungsprozess mit einbeziehen sollen. Im Bereich *Argumentieren* sollen die SuS Vermutungen über mathematische Zusammenhänge aufstellen, diese überprüfen und letztlich erklären können.[183] Auch diese Aspekte entsprechen dem Vorgehen der SuS, da sie darüber an ihre Entdeckungen kommen können. Dem Bereich *Darstellen/ Kommunizieren* ist unter anderem zugehörig, dass Arbeitsergebnisse festgehalten und Fachsprache verwendet werden soll.[184] Die SuS sollen ihre Entdeckungen notieren, damit sie gemeinsam besprochen werden können. Zudem gehört das Erlangen und Anwenden mathematischer Fachsprache zum Mathematikunterricht. Die Phase des Transfers dient dazu, die neuen Erkenntnisse anzuwenden, zu festigen und auf weitere Aufgaben zu übertragen. Der sprachliche Austausch innerhalb einer Kleingruppe unterstützt die SuS hinsichtlich ihrer sprachlichen und mathematischen Fähigkeiten.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

<u>Sozialform:</u>

Die SuS sitzen während des Einstiegs und der Problemstellung an ihren Plätzen. Dies ist für die Durchführung des Kopfrechenspiels notwendig, da so jeder Aufgabe ein Kind und somit ein konkreter Platz zugeordnet werden kann. In dieser Phase sollen Kopfrechenfähigkeiten trainiert werden.

Während der Arbeitsphase arbeiten die SuS in Gruppenarbeit. Dies ist notwendig, damit ein sprachlicher Austausch über fachliche Inhalte stattfinden kann. Im Hinblick auf ihr weiteres gesellschaftliches Leben ist dies eine besonders wichtige Kompetenz und sollte daher kontinuierlich geschult und gefördert werden.

Während der Reflexionsphase bleiben die SuS an ihren Plätzen sitzen. Dies hat den Grund, dass alle SuS die vorgetragenen, gesammelten Entdeckungen an ihrem eigenen Material nachvollziehen und nachprüfen können. Zudem haben sie an ihren Tischen

[182] vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 59.
[183] vgl. ebd., S. 60.
[184] vgl. ebd., S. 60.

dazu genügend Platz. Ein Wechsel der Sozialform wäre in dem Fall nicht lernförderlich, da alle SuS ihre Materialien mitnehmen müssten und somit schnell Unruhe herrschen kann.
Während des Transfers findet eine Gruppenarbeit statt. Dies ist notwendig, um einen sprachlichen Austausch über fachliche Inhalte zu ermöglichen.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. In Kooperation mit den SuS werden Beispielaufgaben an der Tafel betrachtet und erste Schritte farblich markiert. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, so dass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

In Bezug auf die Entdeckungen ist die Aufgabenstellung natürlich differenziert. So ist es durchaus möglich, dass leistungsschwächere SuS die vorliegende Aufgabe mit mehreren Subtrahenden in mehrere Aufgaben mit nur einem Subtrahenden umformen. Dies entspricht einer Subtraktion, bei der das Ergebnis ausschließlich durch das sukzessive subtrahieren erzielt wird. Leistungsstärkere SuS können entdecken, dass mehrere Subtrahenden durch Addition zu einem Subtrahenden zusammengefasst werden können. Für die SuS, die während der Arbeitsphase Denkanstöße benötigen, stehen ihnen zum einen ihre Gruppenmitglieder zur Verfügung und zum anderen auch die Lehrkraft, die in der Phase eine beobachtende, unterstützende und beratende Rolle einnimmt. Darüber hinaus kann auf zusätzliches Material in Form von Rechenplättchen und einer großen Stellenwerttafel (vgl. Abbildung 150) zurückgegriffen werden.

Verlaufsplan

Zeit	*Phasen*	*Inhalte*	*Sozialform*	*Medien/ Materialien*
20 Min.	Einstieg	Kopfrechnen-Memory. Die Kopfrechenaufgaben zur Addition und Subtraktion werden durch das Austeilen von Karten vorgegeben. Zusammengehörende Additions- und Subtraktionsaufgaben werden aus dem Spiel genommen.	Plenum	Aufgabenkarten
2 Min.	Problemstellung	Die Klasse wird mit einer schriftlichen Subtraktionsaufgabe mit mehreren Subtrahenden konfrontiert.	Plenum	Tafel
23 Min.	Arbeitsphase	Die SuS arbeiten an der neuen Problematik. Ergebnisse und Vermutungen werden auf einem Arbeitsblatt festgehalten. **Zieltransparenz:** Die SuS formulieren den mathematischen Zusammenhang.	Gruppenarbeit	AB 1
25 Min.	Reflexion	Die SuS tauschen untereinander ihre Ergebnisse aus und überprüfen diese rechnerisch und sprachlich. Abweichende Ergebnisse werden im Plenum vorgestellt und diskutiert.	Plenum	
20 Min.	Transfer	Die SuS schreiben selber Aufgaben, die dem vorgegebenen Aufgabentyp entsprechen sollen. Die Aufgaben werden untereinander ausgetauscht, gelöst und auf die Anforderungen hin überprüft.	Gruppenarbeit	

Fünfte Unterrichtssequenz

Die fünfte Unterrichtssequenz ist wieder eine Einzelstunde, in der das Erforschen von Zahlenmustern im Zentrum steht. Auch hier müssen bereits erworbene Kenntnisse auf eine Problemstellung angewendet werden.

Thema

Zahlenmuster der ANNA- Zahlen mit Hilfe der schriftlichen Subtraktion entdecken, fortführen und erläutern.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- die Form der Spiegelzahlen erkennen (Fachkompetenz).
- arithmetische Strukturen beschreiben (Fachkompetenz).
- sich produktiv mit Zahlenmustern auseinandersetzen (Fachkompetenz).
- den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion festigen, indem sie Aufgaben mit ANNA-Zahlen rechnen (Fachkompetenz)
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Produktive Auseinandersetzung mit Zahlenmustern und Aufzeigen arithmetischer Strukturen unter Anwendung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus‘.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS erkennen das Muster der ANNA-Zahlen unter Anwendung der schriftlichen Subtraktion.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS erkennen das Muster der ANNA-Zahlen unter Anwendung der schriftlichen Subtraktion und entwickeln eigene Aufgaben.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS erkennen das Muster der ANNA-Zahlen unter Anwendung der schriftlichen Subtraktion, entwickeln eigene Aufgaben und können diese fachlich begründen.
Schwerpunkt der Reflexion: Arithmetische Strukturen bei ANNA-Zahlen	

Sachaspekte

Der Grundgedanke des Ergänzungsverfahrens liegt darin, dass die Differenz zwischen Minuend und Subtrahend durch stellenweises Ergänzen des Subtrahenden zum Minuenden ermittelt wird[185].

ANNA-Zahlen sind mathematische Palindrome, d.h. Zahlen, die sowohl von vorne als auch von hinten gelesen werden können. Die Palindrome sind in diesem Fall wie der Name *Anna* vierstellig. Für die Buchstaben des Namens (A und N) werden jeweils Ziffern gesetzt, z.B. 4554, 2662. Aus den Ziffern von 0 – 9 lassen sich 90 verschiedene ANNA-Zahlen und somit 45 verschiedene Aufgaben bilden, bei denen die kleinere ANNA-Zahl von der größeren ANNA-Zahl mit gleichen Ziffern subtrahiert wird (z.B. 5225-2552).

Die Ergebnisse dieser Aufgaben zeigen folgende interessante Strukturen auf[186]:

1.) Es gibt nur eine bestimmte Anzahl möglicher Ergebnisse, nämlich 891, 1782, 2673, 3564, 4455, 5346, 6237, 7128, 8019. Diese Ergebnisse sind alles Vielfache von 891.

[185] vgl. Müller/Wittmann (2000), S. 171.
[186] vgl. Müller/Wittmann (2001), S. 196.

2.) ANNA-Zahlen mit gleicher Differenz ihrer Ziffern haben das gleiche Ergebnis.

3.) Die Einerziffer des Ergebnisses ist immer um eins größer als die Tausenderziffer und die Zehnerziffer ist um eins größer als die Hunderterziffer.

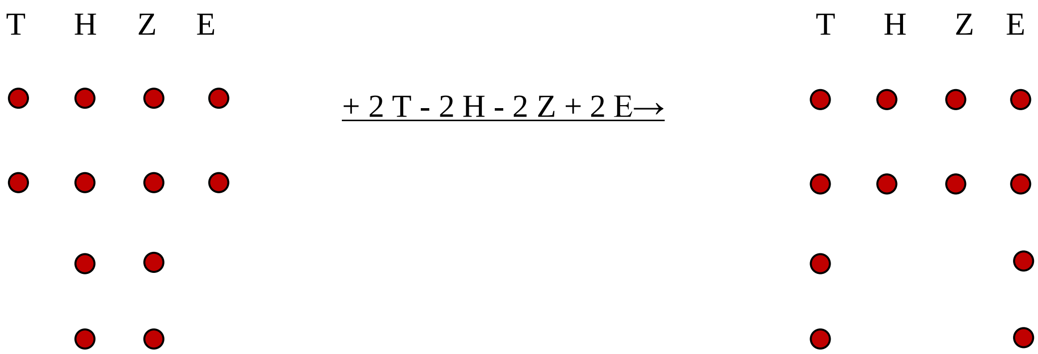
4.) Einer- und Hunderterziffer sowie Zehner- und Tausenderziffer ergeben zusammen 9.

5.) Die Ziffern im kleinsten und im größten Ergebnis, im zweitkleinsten und im zweitgrößten Ergebnis usw. sind jeweils verdreht (z. B. 2673 und 6237).

Die in 2.) - 5.) beschriebenen Strukturen resultieren aus der ersten, die wie folgt erklärt werden kann:[187]

Die kleinere der Zahlen wird an der Stellentafel gelegt. Dann werden die Plättchen der Stellenwerttafel so verschoben, dass aus der kleineren ANNA-Zahl die zugehörige größere entsteht.

Beispiel zu den Zahlen 2442 und 4224: [188]



Die Zahl im Beispiel vergrößert sich um 2000 - 200 - 20 + 2 = 891. Bei jeder ANNA-Zahl, bei der sich die Ziffern der Zahlen um zwei unterscheiden, werden zwei Plättchenpaare verschoben (von Hunderter und Zehner zu Tausender und Einer). Es werden immer so viele Plättchenpaare umgelegt, wie die Differenz der Ziffern der ANNA-Zahlen groß ist.

[187] vgl. Müller/Wittmann (2001), S. 196.
[188] T = Tausender, H = Hunderter, Z = Zehner, E= Einer

So werden z. B. vier Plättchenpaare umgelegt, um aus der Zahl 3773 die Zahl 7337 zu erzeugen. Daraus ergibt sich $3773 + 4T - 4H - 4Z + 4E = 3773 + 4 \bullet (1T - 1H - 1Z + 1E) = 3773 + 4 \bullet 891$.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

Wie in den vorangegangenen Sequenzen sollen auch in dieser Unterrichtsstunde wieder die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein, Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden (vgl. didaktische Begründung erste Sequenz).

Im Einstieg werden die SuS durch das Wortspeicherspiel auf die Unterrichtsstunde eingestimmt (vgl. dritte Sequenz). In der Problemstellungsphase wird durch eine Geschichte von Anna und ihren Zahlen die Problemstellung präsentiert. Auf diese Art und Weise gelingt es, den fachlichen Inhalt und somit auch die Struktur der ANNA-Zahlen in den Mittelpunkt zu rücken. Ferner steigert eine mögliche Identifikation mit der Grundschülerin Anna die Motivation. Das Problem ist für alle SuS gut erkennbar. Die Geschichte fordert nahezu auf, sich mit dem Aufgabenmuster auseinanderzusetzen. Durch den verbalen Austausch mit dem Sitznachbarn während der Arbeitsphase werden die prozessbezogenen Kompetenzen *Darstellen/Kommunizieren* und *Argumentieren* angewendet und gefördert. Die SuS können sich bezüglich der Muster und Strukturen der Zahlen austauschen. Ferner erhalten leistungsschwächere SuS durch die Möglichkeit, ihren Sitznachbarn um Rat zu fragen, mehr Sicherheit.

In der Reflexionsphase besprechen die SuS Aufgaben mit gleichem Ergebnis und verbalisieren weitere mathematische Entdeckungen. Sie begründen ansatzweise zugrundeliegende Muster und Strukturen. Dies fördert erneut die Verwendung mathematischer Fachsprache und die sprachliche Strukturierung eines Lösungsweges.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Sozialform:

Die SuS sitzen während des Einstiegs und der Problemstellung an ihren Plätzen. Von dort können sie gut der Geschichte folgen und sich konzentrieren. Das Bilden einer anderen Sozialform würde wertvolle Zeit kosten und ist nicht notwendig.
Während der Arbeitsphase arbeiten die SuS mit ihrem Sitznachbarn zusammen. Dies ist notwendig, da die SuS sich so über ihre Erkenntnisse austauschen sollen. Ferner stehen den SuS auf diese Art und Weise mehrere Aufgaben und Ergebnisse zur Verfügung. Dies ist für das Ordnen der Aufgaben und vor allem für das Ableiten von Regelmäßigkeiten von Bedeutung.

Während der Reflexionsphase bleiben die SuS an ihren Plätzen sitzen. Von dort können alle SuS die Tafel sehen, an der die Entdeckungen visualisiert werden. Die Visualisierung ist besonders wichtig, damit die leistungsschwächeren SuS die Entdeckungen anderer SuS sehen, erkennen und nachvollziehen können.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. In Kooperation mit den SuS wird eine Beispielaufgabe an der Tafel betrachtet und gerechnet. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, so dass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

Die SuS erhalten diverse Möglichkeiten der Differenzierung. In der Arbeitsphase erhalten die SuS zwar ein Arbeitsblatt mit dem Arbeitsauftrag und genügend Platz, um Lösungsvorschläge zu notieren, zusätzlich werden jedoch Notizkarten ausgeteilt. Die SuS notieren hier ihre Aufgaben, da das Ordnen der Aufgaben mit Karten leichter umsetzbar ist als mit einem Arbeitsblatt. Darüber hinaus werden in dieser Phase Entdeckerkarten eingesetzt, wobei die Hinweise der Entdeckerkarten nicht als verpflichtende Aufgaben für die SuS formuliert sind, weil die SuS zunächst eigene Entdeckungen machen sollen. Die Entdeckerkarten werden unterstützend eingesetzt, um einige SuS mit der offenen Aufgabenstellung nicht zu überfordern und andere SuS zu weiteren Entdeckungen anzuregen.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materialien***
8 Min.	Einstieg	Wortspeicherspiel - Die L trägt eine kurze Geschichte vor, in der viele Begriffe der einzelnen Wortspeicher vorkommen. Die SuS folgen dem Text und müssen ihre Wortkarte an der richtigen Stelle hochhalten.	Plenum	Wortkarten
12 Min.	Problem-stellung	L beginnt die Geschichte von Anna und ihren Zahlen und schreibt in Anlehnung daran ANNA-Zahlen an die Tafel. SuS beschreiben die besondere Eigenschaft der Zahlen. L setzt die Geschichte fort und notiert dabei Subtraktionsaufgaben, die Anna rechnet. SuS beschreiben das Aufgabenmuster, nach dem Anna die Aufgaben erstellt hat. Eine Aufgabe wird gemeinsam an der Tafel gerechnet. **Zieltransparenz**: SuS werden zu Entdeckungen an den Ergebnissen der ANNA-Zahlen angeregt und halten diese schriftlich fest.	Plenum	Geschichte
15 Min.	Arbeits-phase	SuS erstellen selbst Aufgaben nach gleichem Muster und berechnen deren Differenz. Sie ordnen die Aufgaben nach Größe der Ergebnisse.	Partnerarbeit	Arbeitsblatt (AB) 1-4
10 Min.	Reflexion	L schreibt zwei Aufgaben mit ANNA-Zahlen an die Tafel. SuS nennen Aufgaben mit gleichem Ergebnis und verbalisieren weitere mathematische Entdeckungen. L leitet ggf. dazu an, einige Muster und Strukturen zu begründen.	Plenum	

Sechste Unterrichtssequenz

Die sechste Unterrichtssequenz ist die letzte Einzelstunde dieser Reihe. Im Anschluss folgt noch eine Doppelstunde.

Thema

Anwenden des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus‘ in anderen Stellenwertsystemen, um den SuS die einzelnen Schritte bewusst zu machen.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- in anderen Stellenwertsystemen schriftlich subtrahieren (Fachkompetenz).
- sich intensiv mit diesem Algorithmus auseinandersetzen (Fachkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Intensive Auseinandersetzung mit dem Algorithmus der schriftlichen Subtraktion in anderen Stellenwertsystemen.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS wenden den Algorithmus auf Aufgaben in einem anderen Stellenwertsystem an.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS wenden den Algorithmus auf Aufgaben in verschiedenen Stellenwertsystemen an.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS wenden den Algorithmus auf Aufgaben in verschiedenen Stellenwertsystemen an und begründen dies.
Schwerpunkt der Reflexion: Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausstellen	

Sachaspekte

Fachlich ist diese Stunde nicht dem Lehrplan zuzuordnen, da das Rechnen in anderen Stellenwertsystemen nicht explizit für die Grundschule vorgesehen ist. Dennoch ist das Rechnen in anderen Stellenwertsystemen für die SuS wichtig, da es das Verständnis für Zusammenhänge zwischen den Zahlen verdeutlicht.

Die folgenden Aufgabentypen sehen im Mittelpunkt der Unterrichtssequenz:

	2	1	1
-		2	2
	1	1	
	1	1	2

	3	4	0
-	1	5	2
-		3	1
	1	1	
	1	1	3

	8	2	3
-		4	1
-	4	7	7
-	2	0	3
	1	1	
	1	0	1

Es handelt sich hierbei um Aufgaben aus dem Dreier-, Sechser- und Neunersystem. Gewöhnlich wird im Dezimalsystem gerechnet, das bedeutet, dass in diesem System Zahlzeichen von 0 bis 9 zur Verfügung stehen. Alle Zahlen ab 10 werden als Zusammensetzung dieser Zahlzeichen geschrieben. In anderen Stellenwertsystemen kleiner als 10 stehen dementsprechend weniger Zahlzeichen zur Verfügung, während in Systemen größer als 10 weitere Zeichen vereinbart werden müssen. So stehen im Binärsystem nur die Zahlenzeichen 0 und 1 zur Verfügung und im Fünfersystem nur die Zahlzeichen von 0 bis 4.

Das Rechnen in anderen Stellenwertsystemen funktioniert genau wie im Dezimalsystem. Allerdings muss die b-adische Ziffernschreibweise berücksichtigt werden (vgl. Kapitel 4.7). Beim Subtrahieren muss folglich das zugrundeliegende System beachtet werden, um entsprechend die Stelle des höheren Stellenwertes aufzubrechen.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

Der Einsatz anderer Stellenwertsysteme ist vom Lehrplan nicht explizit vorgeschrieben, jedoch anzuraten. Der ritualisierte Unterrichtsbeginn mit Kopfrechenaufgaben stellt für die SuS einerseits einen Orientierungsrahmen dar und andererseits werden auf diese Art und Weise die im Lehrplan beschriebene Kompetenz nach schnellem Kopfrechnen gefördert. Das Spiel der Begriffe ist den Kindern bekannt. Als Problemstellung werden den Kindern Aufgaben präsentiert, die von den SuS verlangen, die Besonderheiten anderer Stellenwertsysteme abzurufen. Durch Anwenden des Subtraktionsalgorithmus‘ im Dezimalsystem stellen die SuS fest, dass die Ergebnisse nicht korrekt sind. Es geht darum, herauszufinden, in welchen Stellenwertsystemen die Aufgaben gelöst wurden. Zur Überprüfung müssen die SuS durchgehend den Algorithmus anwenden, was eine sehr intensive Übung darstellt. Das Arbeiten bzw. Rechnen in anderen Stellenwertsystemen unterstützt den Verstehensprozess des Subtraktionsalgorithmus‘, da sie bei jedem Schritt nachdenken müssen, welche mathematische Operation sich dahinter verbirgt. Diese vom Dezimalsystem abweichenden Stellenwertsysteme sind zudem Teil des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe und werden auch in der Technik und Informatik verwendet. Somit werden die Kinder durch den Wechsel der Stellenwertsysteme auf ihren zukünftigen Unterricht vorbereitet.

Durch das Vorstellen eigener Aufgaben in der Reflexionsphase werden erneut prozessbezogene Kompetenzen gefördert und leistungsschwache SuS erhalten die Möglichkeit, die Denkweisen anderer Kinder nachzuvollziehen. Auch in dieser Sequenz muss mit Hilfe des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion begründet werden.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Der Tafelimpuls wurde als Einstieg gewählt, weil die SuS an dieser Stelle keine Unterstützung seitens der Lehrkraft benötigen. Hier wird im Sinne des guten Unterrichts mit der Minimalität der Lehrkraft gearbeitet.[189] Der Impuls ist ausreichend, um die SuS auf den Inhalt der Stunde und somit auf den Stundenschwerpunkt aufmerksam zu machen. Da hier keine Schülerdiskussion notwendig ist, wird von dem Bilden eines Kinokreises abgesehen.

---

[189] vgl. Meyer (2011), S. 47ff.

In der Arbeitsphase werden die SuS nach dem Ich-Du-Wir-Prinzip arbeiten, um die gegebenenfalls vorgegebenen Aufgaben sowie weitere eigene Aufgaben eigenständig rechnen zu können. Im Verlauf der Arbeitsphase dürfen sie mit ihrem Sitznachbarn arbeiten. Die Partnerarbeit ist insofern sinnvoll, als dass die SuS erst so die Möglichkeit des sprachlichen Austausches erhalten. Durch die Kommunikation mit dem Sitznachbarn werden die prozessbezogenen Kompetenzen *Kommunizieren* und *Argumentieren* angewendet und bezüglich der Lösung der Aufgaben können sich die SuS gegenseitig unterstützen. Zudem erhalten leistungsschwache SuS durch die Möglichkeit, ihren Sitznachbarn um Rat zu fragen, mehr Sicherheit. Der Austausch in der Gruppe unterstützt die zuvor erwähnten Aspekte. So erhalten die SuS die Möglichkeit, ihren Austausch auszuweiten und selbstgeschriebene Aufgaben zu überprüfen.
Die Reflexionsphase findet in frontaler Sitzordnung statt, damit alle SuS an die Tafel sehen können. Die Visualisierung ist besonders wichtig, damit die leistungsschwachen SuS die Lösungswege der anderen SuS sehen, erkennen und nachvollziehen können. Genau wie in der Arbeitsphase und den Stunden zuvor, dürfen die SuS auf handlungsorientiertes Material in Form von Plättchen bzw. Rechengeld und Stellenwerttafel zurückgreifen.

<u>Sozialform:</u>
Die SuS sitzen während des Einstiegs in die Stunde an ihren Plätzen. Von dort können sie gut das Spiel mit ihrem Partner durchführen und sich ausschließlich auf ihre Wortkarte konzentrieren. Das Bilden einer anderen Sozialform würde wertvolle Zeit kosten und ist nicht notwendig.
In der Arbeitsphase können die SuS zwischen Partner- oder Gruppenarbeit wählen. Der Austausch soll den Verstehensprozess unterstützen.
Während der Reflexionsphase kommen die SuS in einen Sitzkreis. Dies hat den Grund, dass alle SuS die vorgetragenen Lösungswege an großem Material im Zentrum des Kreises sehen sollen. Das Verbleiben am Platz wäre wenig sinnvoll, da aufgrund der unterschiedlichen Probleme nicht allen SuS die gleichen Materialien zur Verfügung stehen.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. In dieser Phase wird wieder mit einer sukzessiven Abkopplung gearbeitet. Durch die farbliche Unterscheidung der einzelnen Probleme wird mit dem leichtesten Problem begonnen. Die SuS, die sich dieser Aufgabe widmen möchten, erhalten die meiste Zeit, indem sie direkt nach der Darstellung des Problems mit der Bearbeitung beginnen dürfen. Nach und nach werden die übrigen Aufgaben vorgestellt und die Kinder entsprechend in die Arbeitsphase entlassen. Den leistungsstärksten SuS bleibt die wenigste Zeit. Dabei wird die meiste Zeit darauf verwendet, die schwierige Aufgabenstellung detailliert zu erläutern. Durch das enorme Wissen und die gute Arbeitshaltung wird die wenige Zeit zur Bearbeitung effektiv genutzt und am Ende der Stunde nahezu alle Schüle zeitlich wieder zusammengeführt. In Kooperation mit den SuS werden zwei Beispielaufgaben an der Tafel betrachtet und erste Schritte farblich markiert. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, so dass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

Eine Differenzierung ist hier durch die einzelnen Aufgaben gegeben. So erhalten leistungsschwächere SuS Aufgaben im Dreiersystem, leistungsstärkere SuS hingegen im Neunersystem. Zur Untersuchung der vorgegebenen Aufgaben bekommen die SuS ein Arbeitsblatt mit dem Arbeitsauftrag und genügend Platz, um Lösungsvorschläge zu notieren. Zusätzlich wird konkretes und abstraktes Material bereitgestellt, so können die SuS mit Rechenplättchen sowie großer Stellenwerttafel (vgl. Abbildung 150) arbeiten. Mit Hilfe dieses Materials und der zusätzlichen Stellenwerttafel kann die Wertigkeit genau dargestellt und entsprechende Entbündelungen vorgenommen werden.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materialien***
8 Min.	Einstieg	Spiel der Begriffe – Die SuS haben in Kuverts diverse Fachbegriffe, die durch verschiedene mathematische Anwendungen vom Partner erraten werden müssen.	Plenum	Wortkarten
2 Min.	Problemstellung	L präsentiert drei Subtraktionsaufgaben in einem anderen Stellenwertsystem als stummen Impuls.	Plenum	Tafel
20 Min.	Arbeitsphase	**Zieltransparenz:** SuS untersuchen die Aufgaben, stellen Vermutungen bzgl. der Lösungsstruktur an und erstellen weitere Aufgaben in diesem und weiteren Stellenwertsystem/en.	Partner- oder Gruppenarbeit	
15 Min.	Reflexion	SuS bringen verschiedene Aufgaben ein und diskutieren diese im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Die von den SuS zuvor notierten Erkenntnisse werden an der Tafel visualisiert.	Sitzkreis	

Siebte Unterrichtssequenz

Die siebte Unterrichtssequenz besteht aus der letzten Doppelstunde. Es handelt sich um eine Übungseinheit, in der das schriftliche Rechenverfahren der Subtraktion gefestigt wird.

Thema

Differenziertes Übungsangebot zum schriftlichen Subtraktionsalgorithmus, indem das Wissen um diesen Inhalt in verschiedenen Angeboten angewendet und gefestigt werden kann.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- den schriftlichen Subtraktionsalgorithmus anwenden und festigen (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Differenziertes Übungsangebot zum schriftlichen Subtraktionsalgorithmus, indem das Wissen um diesen Inhalt in verschiedenen Angeboten angewendet und gefestigt werden kann.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS lösen die im Angebot gekennzeichneten leichten Aufgaben.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS lösen die im Angebot gekennzeichneten mittleren Aufgaben.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS lösen die im Angebot gekennzeichneten anspruchsvollen Aufgaben.
Schwerpunkt der Reflexion: Persönlicher Übungsbedarf	

Sachaspekte

Fachlich ist diese Sequenz der inhaltsbezogenen Kompetenz *Zahlen und Operationen* mit dem Schwerpunkt *Ziffernrechnen* zuzuordnen, da die SuS sich intensiv mit der Anwendung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus‘ auseinandersetzen. Dabei wird in den unterschiedlichen Angeboten darauf geachtet, dass die einzelnen Ziele der vorangegangenen Sequenzen aufgegriffen und vertieft werden.

Insgesamt umfasst das Angebot sieben Aufgaben. Folgende Aufgaben werden in der Stunde fokussiert:

- Klecks-Aufgaben
- Finde den Fehler!
- Anleitungstext
- Triff die 309!
- 3er und 6er System
- PAPA-Aufgaben
- Sachaufgaben

Bei den *Klecksaufgaben* handelt es sich um Platzhalteraufgaben, bei denen einige Ziffern einer schriftlichen Subtraktionsaufgabe nicht vorhanden oder durch einen Tintenklecks dargestellt sind. Eine fehlende Ziffer im Ergebnis kann durch die Subtraktion der beiden entsprechenden Ziffern/Zahlen im Minuenden und im Subtrahenden ermittelt werden. Wird durch diese Differenzbildung ein Übertrag erzielt, so muss dieser bei der Berechnung des nächsthöheren Stellenwertes berücksichtigt werden. Eine fehlende Ziffer innerhalb des Minuenden oder des Subtrahenden kann durch Termumformung berechnet werden.

		4	1
-	1		8
	1	1	
	1	7	

Bei den *Finde-den-Fehler-Aufgaben* handelt es sich um schriftliche Subtraktionsaufgaben, die bereits vollständig berechnet wurden. Allerdings beinhalten die Aufgaben unterschiedliche Fehler. Die SuS müssen die Fehler finden und den jeweiligen Fehlertyp bestimmen und erläutern.

	7	2	5
-	2	4	8
	1		
	3	7	7

Bei den *Anleitungstextaufgaben* müssen Texte zu den unterschiedlichen Subtraktionsaufgaben formuliert werden. Die schriftlichen Subtraktionsaufgaben unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Aufgabenstruktur (mehrere Subtrahenden, verschiedene Überträge etc.).

Triff die 309! sind Aufgaben, bei denen das Ergebnis (309) gegeben ist. Nun sollen unterschiedliche schriftliche Subtraktionsaufgaben notiert werden. Die SuS werden aufgefordert, verschiedene Aufgaben zu finden, so dass sich im Vergleich dieser Aufgaben Muster und Strukturen aufzeigen lassen.

	7		5
-			
	3	0	9

	7	2	5
-	4	1	6
		1	
	3	0	9

	7	1	5
-	4	0	6
		1	
	3	0	9

	7	0	5
-	3	9	6
	1	1	
	3	0	9

Die Aufgaben in den anderen Stellenwertsystemen müssen gelöst und erläutert werden. Dabei sind die Schwierigkeitsgrade unterschiedlich. So müssen unterschiedliche Aufgabentypen wie z.B. mehrere Subtrahenden, mehrere Überträge, Aufgaben mit der Null bearbeitet werden.

	2	2	1
-	1	2	2
	1	1	
		2	2

	3	4	2
-	2	1	5
		1	
	1	2	3

Die *PAPA-Aufgaben* werden in Anlehnung an die ANNA-Aufgaben bearbeitet. Auch hier müssen die SuS Erläuterungen zu den einzelnen Aufgaben formulieren. Dazu müssen sie mehrere Aufgaben berechnen und anschließend Vermutungen über die Lösung anstellen.

	7	2	7	2
-	5	3	5	3
	1		1	
	1	9	1	9

	6	4	6	4
-	5	2	5	2
	1	2	1	2

Die *Sachaufgaben* sind ein zusätzliches Angebot, welches nicht von allen SuS bearbeitet werden muss. Hier werden verschiedene Sachsituationen präsentiert, die unter anderem auch mittels der schriftlichen Subtraktion zu lösen sind. Jedoch sind nicht alle Aufgaben dieser Art, um ein blindes Anwenden des Algorithmus‘ zu vermeiden.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In der Unterrichtssequenz sollen die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein, Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden. Besonders die Förderung der Problemlösekompetenz findet im alltäglichen Mathematikunterricht nur selten Platz und ist daher von großer Bedeutung. Die SuS sollen entsprechend ihres Lernniveaus und -tempos in einer lernförderlichen Umgebung[190] arbeiten und kein Kind ist dazu verpflichtet, alle Aufgaben zu bearbeiten.

Im Stundeneinstieg beginnen die SuS mit dem Spiel *Blitzrechnen*. Sie werden so auf den mathematischen Inhalt der Stunde eingestimmt und ihre Kopfrechenfähigkeiten werden gefördert – vorrangig durch die erforderliche Schnelligkeit. In der Arbeitsphase arbeiten die SuS selbständig an den verschiedenen Angeboten rund um die schriftliche Subtraktion. Die Eigenständigkeit sowie die Entscheidungskompetenz werden hier enorm gefördert, sodass wichtige Alltagsfähigkeiten geschult werden. Die SuS sollen zu eigenständig denkenden und handelnden Personen erzogen werden, damit sie die alltäglichen Probleme bewältigen können. Die Aufgaben dieser Arbeitsphase beinhalten verschiedene Schwerpunkte der vorangegangenen Stunden, sodass den SuS hier explizit die Möglichkeit geboten wird, ihre individuellen Leistungen zu reflektieren und auszubauen. Dies ist hilfreich für die Reflexionsphase, denn hier reflektieren die SuS nicht hinsichtlich der Aufgabenschwerpunkte, sondern hinsichtlich ihres persönlichen Übungsbedarfes.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Sozialform:

Die SuS sitzen während des Einstieges an ihren Plätzen. Ihr Blick wird ausschließlich auf die Projektion des Beamers fokussiert. Zudem befinden sich die SuS in einer vertrauten und somit lernförderlichen Umgebung. In dieser Phase soll das Vorwissen der SuS erneut aktiviert werden.

Während der Arbeitsphase arbeiten die SuS in Einzelarbeit, um sich ihrer individuellen Stärken und Schwächen hinsichtlich der schriftlichen Subtraktion bewusst zu werden.

Während der Reflexionsphase bleiben die SuS an ihren Plätzen sitzen. Dies hat den Grund, dass alle SuS ihr eigenes Material vor sich liegen haben und besser auf die persönlichen Defizite und Stärken eingehen können.

[190] vgl. Meyer (2011), S. 47ff.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, soll das Ziel der Stunde deutlich geworden sein. Da die Klasse im Umgang mit solchen Angeboten geübt ist, stellt diese Phase kein Problem dar. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, so dass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

Zur Übung der schriftlichen Subtraktion erhalten die SuS ein differenziertes Aufgabenangebot. Dabei sind nicht nur die einzelnen Angebote differenziert, sondern die Aufgaben eines jeden Angebots beinhalten unterschiedliche Schwierigkeitsgrade. Für SuS, die während der Arbeitsphase Denkanstöße benötigen, steht ihnen die Lehrkraft zur Verfügung, die jedoch in der Arbeitsphase eine beobachtende, unterstützende und beratende Rolle einnimmt. Darüber hinaus steht den SuS das gesamte Material der vorangegangen Stunden zur Verfügung.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materialien***
15 Min.	Einstieg	Blitzrechnen – diverse Subtraktionsaufgaben werden mittels *plickers* berechnet. **Zieltransparenz:** Die SuS festigen ihr Wissen zur schriftlichen Subtraktion an Stationen.	Plenum	*plickers*-Karten, Beamer, Laptop
50 Min.	Arbeitsphase	Die SuS arbeiten an folgenden Stationen zur schriftlichen Subtraktion: 1. Klecks-Aufgaben 2. Finde den Fehler! 3. Anleitungstext 4. Triff die 309! 5. 3er und 6er System 6. PAPA-Aufgaben 7. Sachaufgaben	Einzelarbeit	Stationen
20 Min.	Reflexion	Die SuS arbeiten die Schwierigkeiten der verschiedenen Aufgabentypen heraus. tragen Hilfestellungen zusammen und formulieren Übungsmöglichkeiten.	Plenum	
5 Min.	Abschluss	SuS erstellen ihren individuellen Übungsplan.	Einzelarbeit	Lerntagebuch

8.2. Unterrichtskonzeption zur Behandlung von Sachaufgaben

Die zweite Konzeption befasst sich mit der Bearbeitung von Sachrechenaufgaben. Es geht darum, die sprachlichen Fähigkeiten im Bereich des Modellierens zu fördern. Die Konzeption wurde für ein viertes Schuljahr entwickelt, da die Kinder in dieser Klassenstufe über vielfältige mathematische Kenntnisse verfügen. Die eingesetzten Methoden sind nicht auf die Grundschule begrenzt, sondern lassen sich auch auf die nachfolgenden Jahrgangsstufen übertragen.

8.2.1. Rahmenbedingungen

Zur Erprobung dieser Reihe diente ein 4. Schuljahr einer Mönchengladbacher Grundschule. Dieses umfasste zur Zeit der Durchführung 12 Schüler und 11 Schülerinnen im Alter zwischen 9 und 11 Jahren. Der Mathematikunterricht dieser Klasse umfasst vier Einzelstunden pro Woche. Obwohl die Klasse unbekannt war, kann das Verhältnis zwischen LuL und Lerngruppe als freundlich beschrieben werden.

Die SuS haben während ihrer gesamten Grundschulzeit Sachrechenaufgaben verschiedenster Art (vgl. Kapitel 5.2.3) bearbeitet. Der überwiegende Teil der Klasse ist im Umgang mit einfachen Textaufgaben sehr sicher. Es ergeben sich jedoch immer wieder Probleme beim Modellieren (vgl. Kapitel 5.2.2). Mit zunehmendem Komplexitätsgrad der Sachaufgaben steigt auch die Fehleranzahl. Es wird beobachtet, dass Texte nicht korrekt interpretiert, Zahlen ohne Zusammenhang miteinander verknüpft und Ergebnisse hinsichtlich ihrer Richtigkeit nicht überprüft werden. Die SuS sind dennoch sehr motiviert im Umgang mit herausfordernden Sachaufgaben. Viele verfügen über ein recht gutes Auffassungsvermögen. Im Vorfeld der vorliegenden Unterrichtskonzeption wurden der Lerngruppe arithmetische Grundlagen im Sinne des aktuellen Lehrplans für NRW vermittelt, so dass die SuS in der Lage sind, Grundrechenaufgaben unter Ausnutzung von Rechengesetzen – z.B. Distributivgesetz, Gesetz von der Konstanz der Summe – mündlich und halbschriftlich zu lösen und schriftliche Rechenverfahren sicher anzuwenden. Sie nutzen selbstständig Bearbeitungshilfen – wie z.B. Tabellen, Skizzen, Diagramme etc. – zur Lösung von Sachaufgaben.[191]

Den SuS sind darüber hinaus Einzel-, Partner- und Gruppenarbeitsphasen bekannt.

[191] vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 12f.

8.2.2. Aufbau der Unterrichtsreihe

Das Sachrechenhospital – Mathematisierung verschiedener Sachsituationen und Erarbeitung von Lösungswegen unter Zuhilfenahme der einzelnen Sachrechenärzte.

Curriculare Anbindung

Der Inhalt der Unterrichtsreihe fällt in den Themenbereich *Größen und Messen* mit dem Schwerpunkt *Sachsituationen*.[192] Der Fokus liegt insbesondere auf der Mathematisierung konkreter Situationen.

Thema

Selbstständige Bearbeitung von diversen Sachrechenaufgaben unterschiedlicher Komplexität, unter besonderer Berücksichtigung des Sachrechenhospitals mit der Absicht, eigenständig wesentliche Aspekte der Modellierung umsetzen zu können und mehr Sicherheit im Umgang mit Sachrechenaufgaben zu erhalten.

Ziele

Die SuS sollen Sachrechenaufgaben selbstständig erarbeiten, verstehen und erläutern können.

[192] vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 14.

Tabellarische Übersicht

Stunde	Inhalt der Stunde	Ziel
1. Std.	Bearbeitung verschiedener Modellierungsaufgaben	Sich der individuellen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Sachrechenaufgaben bewusst werden.
2. Std.	Kennenlernen und Erforschen des Sachrechenhospitals (Ärzte 1-2)	Sich mittels Bearbeitungshilfen intensiv mit den ersten beiden Tätigkeiten des Modellierungskreislaufes – Verstehen und Vereinfachen/Strukturieren – auseinandersetzen.
3. Std.	Kennenlernen und Erforschen des Sachrechenhospitals (Ärzte 3-4)	Sich mittels Bearbeitungshilfen intensiv mit den beiden nächsten Tätigkeiten des Modellierungskreislaufes – Mathematisieren und Mathematisch arbeiten – auseinandersetzen.
4. Std.	Kennenlernen und Erforschen des Sachrechenhospitals (Ärzte 5-7)	Sich mittels Bearbeitungshilfen intensiv mit den letzten drei Tätigkeiten des Modellierungskreislaufes – Interpretieren, Validieren und Darlegen – auseinandersetzen.
5. Std.	Bearbeiten verschiedener Modellierungsaufgaben mit Hilfe des Sachrechenhospitals innerhalb einer Schreibkonferenz	In Schreibkonferenzen die neuen Hilfen bei der Bearbeitung weiterer Modellierungsaufgaben nutzen.
6. Std.	Erstellen eigener Modellierungsaufgaben mit Hilfe des Sachrechenhospitals	Mit den erworbenen Kenntnissen eigene Modellierungsaufgaben schreiben.

Sachaspekte

In Anlehnung an die Schreibhandwerker von Sonja Gerichhausen[193], erschienen im Dieck-Verlag, wurden 7 Ärzte entwickelt, die den Kindern bei der Bearbeitung von Sachrechenaufgaben helfen sollen. Die Ärzte heißen:

- Frau Dr. Erklärmi (Chefärztin)
- Herr Dr. Simpel
- Frau Dr. Mathematix
- Herr Dr. Rechne
- Frau Dr. Wortfix (Passt alles zur Aufgabe?)
- Herr Dr. Kadast (**Ka**nn **da**s **st**immen?)
- Frau Dr. Erklärmi (Erkläre es mir!)

---

[193] vgl. Gerichhausen, Sonja (2007): Die Schreibhandwerker. Heinsberg. Dieck-Verlag.

Es wurde bewusst ein Hospital gewählt, da SuS die Situation kennen, dass Ärzte zum Einsatz kommen, wenn etwas mit dem Körper nicht in Ordnung und Hilfe notwendig ist. Sie kennen mit Sicherheit den Kinderarzt, haben aber vielleicht auch schon verschiedene Fachärzte kennen gelernt, z.B. einen Zahnarzt. Somit muss auch nicht weiter erläutert werden, dass es für verschiedene Bereiche unterschiedliche Spezialisten gibt. In einem Krankenhaus trifft man alle Spezialisten an. Das Hospital demonstriert somit einen geschlossenen Rahmen.
Sachrechenaufgaben nehmen im Mathematikunterricht der Grundschule einen hohen Stellenwert ein. Anhand von konkreten Situationen sollen die SuS die Fähigkeiten aus den Bereichen *Arithmetik, Geometrie, Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten* und *Größen* anwenden. Darüber hinaus wird jedoch auch die Kompetenz des Modellierens gefordert. Modellieren bedeutet, komplexe Probleme des alltäglichen Lebens mit Hilfe der Mathematik zu lösen. Dazu ist es in der Regel notwendig, ein Modell zu erstellen, welches in vereinfachter Form die reale Situation darstellt. Dies ist erforderlich, damit mathematisch gearbeitet werden kann.

Das Bearbeiten von Modellierungsaufgaben ist für die SuS wesentlich schwieriger als grundlegend angenommen wird. Die häufigsten Fehler beim Modellieren sind nach Maaß (2007):

- Fehler beim Aufstellen des Realmodells:
    - Es werden falsche vereinfachende Annahmen getroffen.
    - Das Realmodell wird zu stark vereinfacht und ist somit ungeeignet.

- Fehler beim Aufstellen des mathematischen Modells:
    - Es werden keine geeigneten Formeln, Algorithmen etc. angewandt.
    - Die mathematische Schreibweise ist nicht korrekt (z.B. Äquivalenzzeichen).

- Fehler beim Bearbeiten des mathematischen Modells:
    - Es treten Rechenfehler auf.
    - Das Ergebnis fehlt.
    - Es fehlen notwendige heuristische Strategien zum Bearbeiten des Modells.

- Fehler beim Interpretieren der Lösung:
    - Die Interpretation der Ergebnisse fehlt.
    - Komplexere mathematische Lösungen werden falsch interpretiert.

- Fehler zur Validierung der Lösung und ggf. erneuten Durchführung eines Modellierungsprozesses:
    - Die kritische Reflexion der Ergebnisse fehlt.
    - Die kritische Reflexion der Ergebnisse ist ungenau oder falsch.
    - Die Fehler im Modell werden erkannt, aber nicht verbessert.

- Fehler in der Kommunikation über den Modellierungsprozess:
    - Der gesamte Modellierungsprozess wird zu knapp dargestellt, wesentliche Argumente fehlen.

Darüber hinaus werden von FRANKE weitere Fehlerursachen beim Bearbeiten von Sachrechenaufgaben genannt[194]:

Identifikationsfehler:
Diese entstehen, weil

- alle Aufgaben so gelöst werden,
- die Operation im Unterricht gerade behandelt wurde,
- sich die Zahlen gut durch eine Rechenoperation verknüpfen lassen,
- das Sachproblem anders interpretiert wird als erwartet,
- Signalwörter als Hinweis auf eine Rechenoperation verstanden werden (Bsp. Kapitänsaufgaben),
- irrelevante Angaben in die Rechnung einbezogen werden.

Fehler beim Strukturieren des Lösungsplans:
Diese entstehen z. B. durch

- Einbeziehen bzw. Nichteinbeziehen von Teillösungen,
- regelwidriges Verknüpfen von Angaben, z.B. wahlloses Verknüpfen von Zahlen.

[194] vgl. Franke (2003), S. 114-115.

Fehlerhafte Verkürzung des Lösungsplans bei mehrschrittigen Aufgaben:

Diese entstehen aufgrund von

- Verlesen oder Überlesen,
- unvollständigem Erfassen der Situation,
- Vergessen von in der Aufgabe ausgewiesenen Beziehungen,
- Fehlern bei der verbalen Antwort.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Fehler den folgenden vier Kategorien zugeordnet werden können:

Sachstrukturen:

z.B. Größenbereiche sind unklar, Sachstruktur ist zu komplex, Inhalt der Aufgabe ist unbekannt, Sachzusammenhänge sind unklar.

Sprachlich-syntaktische Struktur:

z.B. Schwierigkeiten beim Verstehen von Fachbegriffen oder Fremdwörtern.

Mathematische Struktur:

z.B. fehlerhaftes Erkennen einer mathematischen Struktur, Übersehen einzelner Teilschritte beim Rechnen, Verwechseln von Größenbeziehungen.

Prozessstrukturen:

z.B. impulsive Lösungshypothesen, oberflächliches Analysieren gegebener Texte, Einstellungsprobleme, Vernachlässigen von Kontrollen, mangelhafte Kompetenzen im Bewältigen komplexer Anforderungen, unzureichende Selbstständigkeit.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder

Der Lehrplan sieht vor, dass SuS zu realen oder simulierten Situationen mathematische Fragen und Aufgabenstellungen formulieren und lösen sollen. Leider treten im Zusammenhang mit Sachrechenaufgaben sehr häufig Probleme auf. Häufig werden Angaben in den Aufgaben miteinander verknüpft, ohne den Sachzusammenhang der Situation zu beachten. Es ist folglich wichtig, den SuS einen adäquaten Zugang zu Problemaufgaben zu vermitteln und ein fachliches Verständnis anzubahnen. Das Lösen von Sachrechenaufgaben ist für das spätere Leben der SuS von elementarer Bedeutung. Sie sollen in der Lage sein, zwischen diversen Angeboten zu unterscheiden, Zahlenangebote in Medien richtig einzuschätzen und zu überprüfen sowie Bauprojekte richtig zu bearbeiten. Daher ist es wichtig, so früh wie möglich die Basis für den Umgang mit solchen Aufgaben zu legen. Der Einsatz von handlungsorientiertem Material erleichtert den SuS den Zugang zur Thematik.

In den zentralen Leitideen des Mathematikunterrichts wird der Einsatz ergiebiger Aufgaben gefordert; die Unterrichtsreihe stellt diesen Aspekt in den Mittelpunkt. Generell werden die SuS in ihrer Problemlösekompetenz gefordert und gefördert, was für ihre weitere Entwicklung im privaten und später auch beruflichen Leben von großer Bedeutung ist. Sie sollen langfristig gesehen lernen, diese Kompetenz auf weitere Sachverhalte zu übertragen.

Dass das *Problemlösen/kreativ sein* eine prozessbezogene Kompetenz des Lehrplans darstellt, ist bereits bekannt. Die SuS sollen im Mathematikunterricht somit nicht nur mathematische Fähigkeiten erlangen, sondern lernen, flexibel mit ihrem Wissen umzugehen und dieses auf verschiedenste Situationen zu übertragen und anzuwenden.[195]

Diese Unterrichtsreihe berücksichtigt in besonderem Maße die Kompetenz des *Darstellens/Kommunizierens*, da die SuS in vielen Phasen dazu aufgefordert werden, ihre Ideen und Lösungswege den anderen Kindern vorzustellen und mit ihnen zu diskutieren. Diese Kompetenz ist elementar für die sprachliche Entwicklung der SuS, da sie in vielen Bereichen ihres Lebens den sprachlichen Austausch benötigen. Ferner kann dies das mathematische Verständnis der einzelnen Unterrichtsstunden unterstützen.

[195] vgl. Lorenz (2001), S. 27.

Grundlegende methodische Entscheidungen

Die einzelnen Unterrichtssequenzen der Unterrichtsreihe verlaufen stets strukturiert. Jede Unterrichtsstunde beginnt ritualisiert, indem die Kinder gemeinsam durch den sprachlichen Austausch ihrer Ideen einen kurzen Krimi lösen. Anschließend folgt eine Problemstellung, mit welcher sie sich während der Arbeitsphase auseinandersetzen. Diese Phase beinhaltet gleichzeitig die Zieltransparenz, welche ihnen helfen soll, den Sinn und das Ziel der Stunde zu erfassen und entsprechend motiviert an das Bearbeiten der Problemstellung heranzugehen. In den Arbeitsphasen tauschen sich die SuS innerhalb ihrer Tischgruppe aus. Am Ende der Unterrichtsstunden gibt es ein Zusammentreffen, um die erzielten Arbeitsergebnisse der SuS zu besprechen und neue Erkenntnisse daraus zu ziehen.

H. Meyer definierte 2004 zehn Merkmale guten Unterrichts. Dazu zählen unter anderem der **hohe Anteil echter Lernzeit**, die **inhaltliche Klarheit** und das **sinnstiftende Kommunizieren.**[196] Diese werden in der Unterrichtsreihe verwirklicht, da die SuS viel Zeit erhalten, sich eigenständig mit den Problemen und Aufgaben auseinanderzusetzen und die Lehrkraft dadurch nicht mehr als Wissensvermittler fungiert. Das hat zur Folge, dass sie als Unterstützer in den Hintergrund rückt und die Gespräche der SuS untereinander über ihre Lösungen in den Vordergrund stellt, sodass eine sinnstiftende Kommunikation stattfinden kann. Die zuvor beschriebene Strukturierung der gesamten Unterrichtsstunden, die alle identisch aufgebaut sind, erübrigt die widerkehrenden Erklärungen der Lehrkraft, da den SuS bereits bewusst ist, was das Ziel der jeweiligen Phase ist.

8.2.3. Aufbau der einzelnen Unterrichtssequenzen

Im Folgenden werden die jeweiligen Themen und Ziele der einzelnen Unterrichtssequenzen aufgeführt. Die Sachaspekte, die den einzelnen Sequenzen zugrunde liegen werden dargestellt sowie Entscheidungen der Unterrichtsplanung didaktisch und methodisch begründet.

[196] vgl. Meyer (2011), S. 47ff.

Erste Unterrichtssequenz

Die erste Unterrichtsstunde besteht aus einer Einzelstunde. Es handelt sich um eine Sequenz, in der im Wesentlichen die individuellen Probleme beim Lösen von Sachrechenaufgaben in den Fokus gestellt werden, die im Laufe der Unterrichtsreihe reduziert werden sollen.

Thema

Auseinandersetzung mit Problemlöseaufgaben – durch das Bearbeiten verschiedener Probleme soll die persönliche Problemlösekompetenz festgestellt werden.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- aus Modellierungsaufgaben Informationen entnehmen (Fachkompetenz).
- zwischen wichtigen und unwichtigen Informationen unterscheiden (Fachkompetenz)
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- ihre persönliche Probleme reflektieren und sich derer bewusst werden (Selbstkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Auseinandersetzung mit Knobelaufgaben, um die persönliche Problemlösekompetenz zu erfassen.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS lösen Knobelaufgaben und notieren ihre Schwierigkeiten bei der Bearbeitung.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS lösen Knobelaufgaben, erläutern mathematische Zusammenhänge und notieren ihre Schwierigkeiten bei der Bearbeitung.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS lösen Knobelaufgaben, erläutern mathematische Zusammenhänge, notieren ihre Schwierigkeiten bei der Bearbeitung und begründen diese.
Schwerpunkt der Reflexion: Verschiedene Schwierigkeiten bei der Bearbeitung	

Sachaspekte

Das Thema ist im Lehrplan der inhaltsbezogenen Kompetenz *Größen und Messen* mit dem Schwerpunkt *Sachsituationen* zuzuordnen: „…formulieren zu realen oder simulierten Situationen [...] mathematische Fragen und Aufgabenstellungen und lösen sie.“[197]. Es wird deutlich, dass die SuS in der Lage sein sollen, Sachsituationen angemessen zu modellieren. Bezüglich ihrer *Größenvorstellung und dem Umgang mit Größen* wird von den SuS gefordert, „dass sie mit geeigneten Messinstrumenten Größen bestimmen und auch mit diesen rechnen können.”[198]

Folgende Aufgaben werden in der Stunde fokussiert:

1. Aufgabe:

Eine kleine Schnecke fällt in einen 9 m tiefen Brunnen. Sie kriecht jeden Tag 3 Meter hoch. Jede Nacht rutscht sie jedoch wieder 2 Meter runter. Wie viele Tage dauert es, bis die kleine Schnecke die Brunnenkante erreicht?[199]

[197] Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 66.
[198] ebd., S. 65.
[199] Schnabel/Trapp (2015), S. 73.

2. Aufgabe:

Tom las in einer Woche ein Buch mit 133 Seiten. Am Montag las er einige Seiten und von da an jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag zuvor. Am Sonntag wurde er fertig. Wie viele Seiten las er am Montag?[200]

3. Aufgabe:

Ein Schwimmbecken kann durch die Rohre A und B mit Wasser gefüllt werden. Mit Rohr A allein dauert das Füllen des Beckens 30 Stunden. Mit Rohr B allein dauert es 60 Stunden. Wie lange dauert es, wenn das Becken mit beiden Rohren gleichzeitig gefüllt wird?[201]

Diese drei Aufgaben wurden ausgewählt, um den SuS verschiedene Schwierigkeitsgrade anzubieten. Es wurde darauf geachtet, dass unterschiedliche Themenbereiche in den jeweiligen Aufgaben angesprochen werden. So geht es in der ersten Aufgabe um ein Tier aus der Natur. Die zweite Aufgabe widmet sich dem Bereich des Lesens, welcher ein wichtiger Bestandteil des Alltags der SuS darstellt. Die dritte Aufgabe kann dem Bereich Technik zugeordnet werden. Die SuS sollen entsprechend ihren Neigungen und Interessen eine Aufgabe wählen und bearbeiten.

Alle drei Aufgaben stellen ein reales Problem dar, das von den Kindern gelöst werden soll. Nachdem die SuS das Problem verstanden haben, müssen sie sich eine Strategie überlegen, wie sie zur Lösung gelangen. Diese Strategie muss nach der Umsetzung noch einmal reflektiert werden, um die Richtigkeit der Lösung zu überprüfen. Dieser Prozess entspricht den Phasen des Problemlösens nach G. POLYA:

1. Verstehen der Aufgabe
2. Ausdenken eines Plans
3. Ausführen des Plans
4. Rückschau[202]

[200] Rasch (2003), S. 96.
[201] Heinze/Manten/Hütten (2009a), S.109.
[202] vgl. Franke (2003), S.70.

Im Folgenden werden die einzelnen Aufgaben bezüglich dieses Problemlöseprozesses nach Polya dargestellt:

1. Aufgabe:

1. Verstehen der Aufgabe
    - Vorstellen einer Schnecke
    - Vorstellen des Brunnen
    - Vorstellung von hoch kriechen und runter rutschen
    - Brunnen: 9 m tief
    - Tag: 3 Meter hoch
    - Nacht: 2 Meter runter
    - 9 m = **Wie viele Tage?**

2. Ausdenken eines Plans
    - Es muss herausgefunden werden, wie viele Meter die Schnecke in 24 Stunden nach oben kriecht. Dazu muss die Nacht beachtet werden, in der sie bereits zurückgelegte Meter wieder verliert.
    - Die Bestimmung der Lösung erfordert konkrete Rechenoperationen
    - $3\,(x - 1) - 2\,(x - 1) + 3 \quad = 9$

3. Ausführen des Plans
    - Die Schnecke schafft in 24 Stunden einen Meter (3 Meter minus 2 Meter). Das heißt, sie schafft in 6 Tagen 6 Meter. Zum Erreichen des Brunnenrandes fehlen noch 3 Meter, somit kommt die Schnecke am 7. Tag am Brunnenrand an.
    - $$\begin{aligned} 3\,(x - 1) - 2\,(x - 1) + 3 &= 9 \\ 3\,(x - 1) - 2\,(x - 1) &= 6 \\ 1\,(x - 1) &= 6 \\ (x - 1) &= 6 \\ x &= 6 + 1 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

4. Rückschau

   - Die Schnecke erreicht am siebten Tag den Brunnenrand. Das Herunterrutschen dieses Tages ist nicht mehr von Bedeutung.

2. Aufgabe:

1. Verstehen der Aufgabe

   - Vorstellen eines Buches
   - Vorstellung der Menge 133
   - Buch: 133 Seiten
   - jeden Tag 5 mehr als am Tag davor
   - Sonntag: Buch fertig
   - 1. Tag = **Wie viele Seiten?**

2. Ausdenken eines Plans

   - Es muss herausgefunden werden, wie viele Seiten am ersten Tag gelesen wurden. Dazu ist es notwendig, die Gesamtanzahl der täglich zusätzlich gelesenen Seiten zu bestimmen.
   - Die Bestimmung der Lösung erfordert konkrete Rechenoperationen
   - $x + (x + 5) + (x + 10) + (x + 15) + (x + 20) + (x + 25) + (x + 30) = 133$

3. Ausführen des Plans

   - Insgesamt werden 105 Seiten zusätzlich zu der täglich gleichbleibenden Seitenanzahl gelesen. Diese wird von dem Seitenumfang des Buches abgezogen. Die verbleibenden Seiten werden gleichmäßig auf die 7 Tage verteilt.
   - $x + (x + 5) + (x + 10) + (x + 15) + (x + 20) + (x + 25) + (x + 30) = 133$

     $7x + 105 = 133$

     $7x = 133 - 105$

     $7x = 28$

     $x = 4$

4. Rückschau

   - Tom las am ersten Tag/Montag 4 Seiten des Buches. Das kann stimmen, da es durchaus möglich ist, an einem Tag 4 Seiten zu lesen.

<u>3. Aufgabe:</u>

1. Verstehen der Aufgabe

   - Vorstellung das Becken mit Wasser zu füllen
   - Wasserzufluss über Rohre
   - A = 30 Stunden = 1 Becken
   - B = 60 Stunden = 1 Becken
   - A + B = 1 Becken = **Wie viele Stunden?**

2. Ausdenken eines Plans

   - Es muss herausgefunden werden, wie viele Stunden die beiden Rohre zusammen zum Befüllen des Beckens benötigen. Dazu ist es notwendig, die Menge jedes Rohres in einer Stunde zu ermitteln.
   - Die Bestimmung der Lösung erfordert konkrete Rechenoperationen
   - 1/30 + 1/60 = 1/x

3. Ausführen des Plans

   - Die Menge beider Rohre in einer Stunde beträgt 1/20 der Gesamtmenge. Diese muss entsprechend vervielfältigt werden, um das Becken komplett zu füllen.
   - 1/30 + 1/60 = 1/x

     3/60 = 1/x

     1/20 = 1/x

     20/1 = x/1

     20 = x

4. Rückschau

    - Wenn beide Rohre gleichzeitig laufen, dauert es 20 Stunden, das Becken zu füllen. Das kann stimmen, da die Anzahl der Stunden weniger ist als bei einem der Rohre allein.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In der Unterrichtssequenz sollen die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein* und *Modellieren* gefördert werden. Besonders die Förderung der Problemlöse- und der Modellierungskompetenz findet im alltäglichen Mathematikunterricht nur selten Platz und ist daher von großer Bedeutung. Durch die gemeinsame Arbeit und den gemeinsamen Austausch sollen die SuS mit Freude verschiedene Probleme entdecken, modellieren und lösen.

Den Einstieg der Stunde bildet das Lösen von 5-Minuten-Krimis. Dieser Begriff wird den SuS nicht genannt. Im Folgenden werden diese Texte als Detektivgeschichten bezeichnet. Es handelt sich um kurze Geschichte von etwa einer halben DIN A4 Seite. Inhaltlich werden verschiedene Situationen geschildert, bei denen es darum geht, den Täter zu entlarven. Diese Einstimmung auf den Unterricht stellt bereits den Text ins Zentrum des Geschehens. Nach einem akustischen Beenden der vorgegebenen Zeit stellen die SuS kurz ihre Ergebnisse vor und begründen diese. Dies ist notwendig, um die Fakten, die zur Lösung des Falls beigetragen haben, zu thematisieren. Sie werden an der Tafel festgehalten.

In der Arbeitsphase arbeiten die SuS an den einzelnen Aufgaben. Sie notieren notwendige Arbeitsschritte auf einem Arbeitsblatt. Es werden bewusst keine Hinweise zur Lösung dieser Aufgaben gegeben, da durch das eigenständige Probieren individuelle Schwierigkeiten offen gelegt werden sollen.

In der Reflexion stellen die SuS ihre Ergebnisse vor. Dabei sollen möglichst viele ihre Probleme benennen, um festzustellen, wo sowohl allgemeine als auch persönliche Hürden im Problemlöseprozess liegen.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Sozialform:

Die SuS sitzen während der Einstiegsphase an Gruppentischen. Ihr Blick soll ins Zentrum der Gruppe gelenkt werden, da sich dort ausschließlich das Material befindet. In dieser Phase soll die Gruppenaktivität gefördert und auf das Unterrichtsthema eingestimmt werden. In allen Gruppenarbeitsphasen wird mit Methoden des kooperativen Lernens gearbeitet, d.h. dass den jeweiligen Gruppenmitgliedern konkrete Aufgaben zugeteilt werden. So kann sich keiner der Gruppenarbeit entziehen bzw. die Gruppenaufgabe alleine lösen. Außerdem fördert das Teilen des Materials eine Gruppenaktivität. Während der Arbeitsphase arbeiten die SuS in Gruppen. So kann ein permanenter Austausch über die Aufgabe stattfinden und die kommunikativen Fähigkeiten geschult werden.

Während der Reflexionsphase bleiben die SuS an ihren Plätzen sitzen. Dies hat den Grund, dass der Blick der SuS ausschließlich auf den Vortragenden gerichtet ist. Ferner würde ein Wechsel der Sozialform unnötig effektive Lernzeit beanspruchen.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. Dazu werden die Aufgaben an der Tafel präsentiert, sodass die SuS die Möglichkeit erhalten, sich für das Lösen einer dieser Aufgaben zu entscheiden. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, so dass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

Eine Differenzierung wird durch die unterschiedlichen Aufgaben erreicht. Da zum Lösen von Sachrechenaufgaben auch immer das Verstehen der Sachsituation eine Rolle spielt, entscheiden die SuS selbst, mit welcher Aufgabe sie sich auseinandersetzen möchten. Durch die Partner- bzw. Gruppenarbeit erfahren leistungsschwächere SuS die notwendige Unterstützung, die sie benötigen. Hinweiskärtchen liefern notwendige Impulse, wenn einzelne SuS eigenständig nicht weiter kommen. Die Hinweise helfen den SuS beim Ausdenken eines Plans und unterstützen sie beim Ausführen dieses Plans.

Verlaufsplan

Zeit	*Phasen*	*Inhalte*	*Sozialform*	*Medien/ Materialien*
10 Min.	Einstieg	5 Minuten-Krimis – Die SuS spielen in Viererteams. Die Detektivgeschichten werden von der Lehrkraft an die einzelnen Gruppen ausgeteilt. Nach 5 Minuten präsentieren die Gruppen kurz ihre Ergebnisse.	Gruppenarbeit	Detektivgeschichte
5 Min.	Problemstellung	Die drei Probleme der Stunde werden an der Tafel präsentiert und kurz besprochen. **Zieltransparenz:** Die SuS erkennen das Problem und wissen, dass sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen dürfen, sobald sie das Material an den Tischen erhalten.	Plenum	Tafel
20 Min.	Arbeitsphase	Die SuS sprechen an den Tischen über die Aufgaben und überlegen sich, welche der Aufgaben sie bearbeiten möchten.	Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit	AB 2
10 Min.	Reflexion	Die SuS benennen die Probleme, die bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben aufgetreten sind. Diese werde auf Plakaten festgehalten.	Plenum	Plakate

Zweite Unterrichtssequenz

Auch die zweite Unterrichtssequenz ist eine Einzelstunde. In dieser Stunde werden die ersten Ärzte des Sachrechenhospitals vorgestellt.

Thema

Einstieg in den Modellierungskreislauf mit Hilfe von Ärzten des Sachrechenhospitals, indem das Einsatzgebiet dieser fiktiven Personen an gezielten Übungen verdeutlicht wird.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- Sachsituationen verstehen (Fachkompetenz).
- Sachsituationen vereinfachen und strukturieren (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Sich der Bedeutung der einzelnen Schritte im Modellierungskreislauf bewusst werden, indem die Aufgaben von Frau Dr. Erklärmi und Herrn Dr. Simpel den jeweiligen Tätigkeiten des Kreislaufes zugeordnet werden.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS betrachten die Sachrechenaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes und stellen die Zusammenhänge zwischen den Tätigkeiten her.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes, stellen die Zusammenhänge zwischen den Tätigkeiten her und reflektieren diese.
Schwerpunkt der Reflexion: Tätigkeiten der Ärzte erfassen.	

Sachaspekte

Fachlich ist diese Stunde erneut dem Bereich *Größen und Messen* mit dem Schwerpunkt *Sachsituationen* zuzuordnen. Dort heißt es „[...] nutzen selbstständig Bearbeitungshilfen wie Tabellen, Skizzen, Diagramme etc. zur Lösung von Sachaufgaben”.[203] Das Sachrechenhospital ist eine neue Bearbeitungshilfe, die die SuS in diesem Prozess unterstützen soll.

[203] vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012), S. 66.

Im Fokus der Stunde steht das folgende Sachrechenhospital:

Abbildung 151: Sachrechenhospital

Das Bild zeigt ein Krankenhaus. Dabei werden nur die notwendigen Aspekte dargestellt. Es gibt einen Eingang. Im Haus selber befinden sich 7 Fenster, hinter jedem verbirgt sich ein Spezialist. Dies wird durch die einzelnen Köpfe der Spezialisten angedeutet. Das rote Kreuz ist im alltäglichen Gebrauch ein eindeutiges Zeichen für ärztliche Hilfe. In diesem Zusammenhang wird es auch in dieser Unterrichtssequenz eingesetzt.

Die Erarbeitung der einzelnen Spezialisten erfolgt sukzessive. Die Reihenfolge ist der des Modellierungskreislaufes angepasst. In dieser Unterrichtsstunde werden die ersten beiden Spezialisten vorgestellt:

- Frau Dr. Erklärmi (Chefärztin)
- Herr Dr. Simpel

Das Betreten des Krankenhauses durch den Eingang mit der entsprechenden Aufgabe/Problemstellung entspricht der *Realsituation* des Modellierungskreislaufes (vgl. Kapitel 5.2.2). Die Chefärztin **Frau Dr. Erklärmi** begrüßt die Kinder und lässt sich die Aufgabe bzw. Problemstellung schildern. Dieser Vorgang bezieht sich auf den ersten Schritt im

Modellierungskreislauf. Dr. Erklärmi ist eine Ärztin, die sich viel Zeit nimmt, gemeinsam mit den SuS die Aufgabenstellung gründlich anzuschauen. Mit ihrem Bleistift unterstreicht sie wichtige Hinweise, damit sie oder ihre Kollegen später schneller darauf zurückgreifen können. Dann benötigt sie das Stethoskop. Mit diesem Gerät horcht sie tief in die Aufgabe hinein und macht sich Notizen. Dies bedeutet, dass alles notiert wird, was man mit dieser Aufgabenstellung in Verbindung bringt. Sollte das bei den SuS nicht erfolgen, so wird als symbolisches Zeichen für diese Ärztin von der Lehrkraft an die entsprechende Stelle in der Aufgabenstellung eine kleine Sprechblase mit einem Frage- und Ausrufezeichen gesetzt. Das Fragezeichen soll anregen, noch einmal über die Problemstellung sorgfältig nachzudenken. Die SuS werden bezüglich der Wahrnehmung markanter Stellen unterstützt und erfahren, wo eine intensivere Auseinandersetzung mit der Aufgabe notwendig ist.

Nachdem man sorgfältig von Frau Dr. Erklärmi aufgenommen worden ist, wird man an den nächsten Spezialisten weitergeleitet. Dies kennen die SuS aus der Realität. Sie wissen, dass man in einem Krankenhaus immer eine Aufforderung erhält, sich in der nächsten Fachabteilung zu melden. Diese ist im Sachrechenhospital die Station *Situationsmodell*. Dort wartet bereits **Herr Dr. Simpel**. Mit seiner Brille schaut er ganz genau hin. Alle Assoziationen aus der ersten Behandlung werden gründlich betrachtet. Nicht benötigte Notizen werden entsorgt. Dafür hält Dr. Simpel ein entsprechendes Behältnis mit der Aufschrift *unwichtig* bereit. Die verbleibenden Notizen werden in einer ärztlichen Verordnung in eine Reihenfolge gebracht. Dazu nutzt Dr. Simpel einen Block und einen Stift. Sollte das Vereinfachen nicht gelingen, setzt die Lehrkraft einen Stift an die Stellen, wo eine Vereinfachung bzw. Strukturierung der Aufgabe notwendig ist. Die SuS werden durch das Symbol aufgefordert, unwichtige Informationen zu streichen und anschließend zu ordnen.

Die einzelnen Einsatzbereiche der verschiedenen Spezialisten werden an diversen Beispielaufgaben kenntlich gemacht und diese Markierung begründet. Die folgenden Aufgaben dienen in dieser sowie in den nachfolgenden Stunden als Übungsmaterial:

Die Bremer Stadtmusikanten

Der Esel ist bis zum Rücken 1,50m hoch. Darauf steht der Hund. Die Katze ist 10cm kleiner als der Hahn und der Hahn ist dreimal kleiner als der Esel. Zusammen erreichen sie eine Höhe von 3m.[204]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der einzelnen Tiere
- Vorstellen des Stapelns
- Vorstellung von der Erzählung
- Ich habe auch einen Hund...
- Der Hahn kräht...
- Eine Katze ist schön.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Esel: 1,50m hoch
- Katze: 10 cm kleiner als der Hahn
- Hahn: 3x kleiner als der Esel
- Höhe insgesamt: 3m
- Wie groß ist der Hund?

[204] Rasch (2003), S. 54.

Dornröschen

Dornröschen schläft 100 Jahre. Sie kann nur durch einen Kuss von einem Prinzen geweckt werden. In den ungeraden Jahren kommen 10 Prinzen und in den geraden Jahren versuchen es 15 Prinzen. Aber erst im 100. Jahr schafft es ein Prinz. Wie viele Prinzen würden dann auf jeden Fall vergeblich kommen? Der wievielte Prinz könnte es schaffen?[205]

Aufgabe:


Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Prinzessin
- Vorstellen des Prinzen
- Vorstellung von der Erzählung
- Ich möchte auch Prinzessin werden...
- Die Prinzessin hat ein schönes Kleid...
- ...


Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Dornröschenschlaf: 100 Jahre
- ungerade Jahre: 10 Prinzen
- gerade Jahre: 15 Prinzen
- Wie viele Prinzen kommen vergeblich?
- Der wievielte Prinz könnte es schaffen?

[205] Rasch (2003), S. 67.

Der Teufel und der arme Mann

Der Teufel sagte zu einem armen Mann:

Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln, doch musst du jedes Mal, wenn du zurückkommst, 8 Taler für mich ins Wasser werfen. Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Heller mehr. Wie viel hatte er anfangs?[206]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen des Teufels
- Vorstellen des armen Mannes
- Vorstellung von der Brücke
- Vorstellung von der Erzählung
- Was sind Taler?...
- Schokoladentaler...
- ...


Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Hinweg über Brücke: Verdopplung des Geldes
- Rückweg: 8 Taler ins Wasser werfen
- Dritter Rückweg: keinen Heller mehr
- Wie viele Taler hatte er anfangs?

[206] Rasch (2003), S.72.

Freie Fahrt!

Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere pro Stunde 60 km. Wie weit sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt?[207]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen des Zuges
- Vorstellen des Bahnhofes
- Papa fährt auch 80 km/h.
- 1 1/2 Stunden dauert mein Lieblingsfilm.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Zug 1: 80 km/h
- Zug 2: 60 km/h
- entgegengesetzte Richtungen
- Fahrtzeit: 1 1/2 Stunden
- Wie weit sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt?

[207] Rasch (2003), S.80.

Kaninchen

Herr Schäfer ist Kaninchenzüchter. Er besitzt Ställe für ein und für zwei Kaninchen. Insgesamt sind es 25 Ställe. Er kann darin 40 Tiere unterbringen. Wie viel Ställe sind für ein Kaninchen? Wie viele Ställe sind für zwei Kaninchen?[208]

Aufgabe:


Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellung von einem Kaninchenzüchter
- Vorstellung von einem Kaninchen
- Vorstellung von einem Stall
- Das Kaninchen ist weich.
- ...


Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Insgesamt: 25 Ställe
- 40 Tiere
- Ställe für ein Kaninchen
- Ställe für zwei Kaninchen
- Wie viel Ställe sind für ein Kaninchen?
- Wie viele Ställe sind für zwei Kaninchen?

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In dieser Unterrichtssequenz sollen erneut die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein*, *Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden. Im Einstieg dieser Stunde wird wieder eine 5-Minuten-Detektivgeschichte erarbeitet. Ritualisierte Einstiege schaffen eine Orientierung für die SuS. Besonders leistungsschwächere SuS fühlen sich in solchen Phasen zunehmend sicherer. Ebenso wird durch

[208] Rasch (2003), S.61.

das Lesen von Texten die sprachliche Kompetenz gefördert. Der Lösungsprozess ähnelt dem einer Sachrechenaufgabe, da zunächst der Fall bzw. die Aufgabe gelesen und verstanden werden muss, bevor sie gelöst wird.

In der Arbeitsphase erhalten die SuS verschiedene Modellierungsaufgaben, die durch Hinzuziehen der neuen Helfer untersucht werden sollen. Dabei steht das Lösen der Aufgabe nicht im Vordergrund. Die SuS sollen vielmehr den Einsatz der verschiedenen Ärzte den jeweiligen Stellen der Aufgaben zuordnen und begründen. Sie werden durch die Personifizierung der einzelnen Tätigkeiten des Modellierungskreislaufes für eben diese sensibilisiert. Ferner dient die Personifizierung zur Motivation.

In der Reflexion werden die einzelnen Aufgaben besprochen und die entscheidenden Stellen der Aufgaben den jeweiligen Helfern zugeordnet. Einige SuS stellen ihre Ergebnisse vor und erläutern ihre Entscheidungen. So erhalten auch leistungsschwächere SuS die Möglichkeit, die korrekten Lösungen nachzuvollziehen und ggf. können mögliche Probleme im Plenum diskutiert werden.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

<u>Sozialform:</u>

Die SuS sitzen während der Einstiegsphase an Gruppentischen. So können sie im Zentrum der Gruppe den Text lesen und bearbeiten. Durch die Gruppe erfahren die einzelnen SuS die notwendige Unterstützung bei der Bearbeitung.

In der Problemstellungsphase verbleiben die SuS an ihren Plätzen. Ein Wechsel der Sozialform würde in der Einzelstunde zu viel wertvolle Arbeitszeit einnehmen.

Während der Arbeitsphase arbeiten die SuS in der Gruppe. Im Hinblick auf ihr weiteres gesellschaftliches Leben sollte der Austausch und somit die sprachlichen Fähigkeiten kontinuierlich geschult und gefördert werden, denn diese sind besonders wichtige Kompetenzen.

Während der Reflexionsphase bleiben die SuS an ihren Plätzen sitzen. Dies hat den Grund, dass die SuS sich ggf. Notizen zu den vorgetragenen Lösungen machen können. Eine andere Sozialform wäre in dem Fall nicht lernförderlich, da alle SuS ihre Materialien mitnehmen müssten und somit schnell Unruhe herrschen kann.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. In Kooperation mit den SuS wird ein Sachrechenarzt einer Textstelle zugeordnet und gemeinsam begründet. Der Vorgang wird an der Tafel vollzogen, so dass alle SuS die einzelnen Schritte nachvollziehen können. Zudem wird das Unterrichtsziel an der Tafel visualisiert, sodass es für alle präsent ist.

Material/Differenzierung:

Eine Differenzierung wird durch die unterschiedlichen Aufgaben erreicht. Da zum Lösen von Modellierungsaufgaben auch immer das Verstehen der Sachsituation eine Rolle spielt, entscheiden die SuS selbst, mit welcher Aufgabe sie sich auseinandersetzen möchten. Durch die Partner- bzw. Gruppenarbeit erfahren leistungsschwächere SuS die notwendige Unterstützung, die sie benötigen. Ferner erhalten die SuS, die Schwierigkeiten mit der Bearbeitung der Aufgaben haben, zusätzliches Material: Hinweiskärtchen liefern notwendige Impulse, wenn einzelne SuS eigenständig nicht weiter kommen. Die Hinweise helfen den SuS beim Vereinfachen und Strukturieren, sie unterstützen die SuS beim Herausfiltern der notwendigen Informationen.

Verlaufsplan

Zeit	*Phasen*	*Inhalte*	*Sozialform*	*Medien/ Materialien*
10 Min.	Einstieg	5 Minuten-Krimis – Die SuS spielen in Viererteams. Die Detektivgeschichten werden von der Lehrkraft an die einzelnen Gruppen ausgeteilt. Nach 5 Minuten präsentieren die Gruppen kurz ihre Ergebnisse.	Gruppenarbeit	Detektivgeschichte
15 Min.	Problemstellung	Die Lehrkraft präsentiert eine Modellierungsaufgabe. Dann werden in Form einer kurzen Geschichte die ersten Sachrechenärzte vorgestellt. **<u>Zieltransparenz:</u>** Die SuS formulieren das Stundenziel.	Plenum	Tafel
15 Min.	Arbeitsphase	Die SuS arbeiten an den Aufgaben und ergründen die Einsatzgebiete der Helfer.	Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit	AB
5 Min.	Reflexion	Die SuS präsentieren ihre Ergebnisse und begründen diese.	Plenum	

Dritte Unterrichtssequenz

Auch die dritte Unterrichtssequenz ist eine Einzelstunde. In dieser Stunde werden zwei weitere Ärzte des Sachrechenhospitals vorgestellt.

Thema

Weiterarbeit am Modellierungskreislauf mit Hilfe von Ärzten des Sachrechenhospitals, indem das Einsatzgebiet dieser fiktiven Personen an gezielten Übungen verdeutlicht wird.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

- Sachsituationen mathematisieren (Fachkompetenz).
- mathematisch arbeiten (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Sich der Bedeutung der einzelnen Schritte im Modellierungskreislauf bewusst werden, indem die Aufgaben von Frau Dr. Mathematix und Herrn Dr. Rechne den jeweiligen Tätigkeiten des Kreislaufes zugeordnet werden.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes und stellen die Zusammenhänge zwischen den Tätigkeiten her.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes, stellen die Zusammenhänge zwischen den Tätigkeiten her und reflektieren diese.
Schwerpunkt der Reflexion: Tätigkeiten der Ärzte erfassen.	

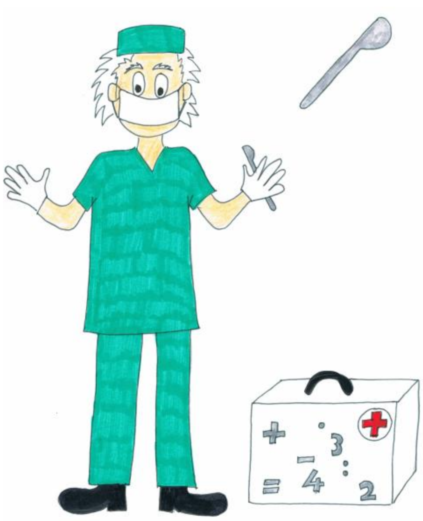
Sachaspekte

Fachlich ist diese Stunde wieder dem Bereich *Größen und Messen* mit dem Schwerpunkt *Sachsituationen* zuzuordnen.

Im Fokus der Stunde stehen die folgenden Ärzte:

- Frau Dr. Mathematix
- Herr Dr. Rechne

Mit der Strukturierung von Dr. Simpel wird man an den nächsten Spezialisten weiterverwiesen. Dieser befindet sich auf der Station *Reales Modell/Problem*. Hier treffen die SuS auf **Frau Dr. Mathematix**. Sie ist Anästhesistin und arbeitet im Operationsbereich. Sie ist dafür zuständig, die Patienten auf die Operation vorzubereiten. Mit äußerster Sorgfalt und Konzentration begegnet sie der bereits behandelten Aufgabenstellung. Mit ihrer Zahlenspritze verwandelt sie Textbausteine der Aufgabe in mathematische Operationen. Dabei hält sie sich stets an die Verordnung von Herrn Dr. Simpel. In ihrem Medizinfläschchen befinden sich jede Menge mathematische Zahlen, Operatoren und Formeln, die den SuS helfen sollen, die richtige Übersetzung zu finden. Sollte das Mathematisieren nicht funktionieren, so setzt die Lehrkraft kleine Spritzen an die Stellen, wo eine Mathematisierung der Aufgabe notwendig ist.



Nach der Arbeit von Dr. Mathematix werden die Aufgaben zur Operation weitergeleitet an **Herrn Dr. Rechne**. Die Patienten befinden sich im Operationssaal *Mathematisches Modell/Problem*. Mit dem Skalpell operiert er die vorbereiteten Stellen von Dr. Mathematix, berechnet dabei die mathematischen Aussagen und liefert das mathematische Resultat. Dabei achtet er stets darauf, alles genau auszurechnen. Sollte das mathematische Arbeiten nicht gelingen, so setzt die Lehrkraft kleine Skalpelle an die Stellen, wo das mathematische Arbeiten notwendig ist. Dr. Rechne sorgt dafür, dass man auf die Station *Mathematisches Resultat* gelangt.

Die einzelnen Einsatzbereiche der beiden Spezialisten werden an den Beispielaufgaben der vorangegangenen Stunde kenntlich gemacht und diese Markierung begründet.

Die Bremer Stadtmusikanten

Der Esel ist bis zum Rücken 1,50m hoch. Darauf steht der Hund. Die Katze ist 10cm kleiner als der Hahn und der Hahn ist dreimal kleiner als der Esel. Zusammen erreichen sie eine Höhe von 3m.[209]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen

- Vorstellen der einzelnen Tiere
- Vorstellen des Stapelns
- Vorstellung von der Erzählung
- Ich habe auch einen Hund.
- Der Hahn kräht.
- Eine Katze ist schön.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Esel: 1,50m hoch
- Katze: 10 cm kleiner als der Hahn
- Hahn: 3x kleiner als der Esel
- Höhe insgesamt: 3m
- Wie groß ist der Hund?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

$$\begin{aligned}
1{,}50\text{m} + (1{,}50 : 3) + (1{,}50 : 3 - 0{,}10\text{m}) + x &= 3\text{m} \\
1{,}50\text{m} + 0{,}50\text{m} + 0{,}40\text{m} + x &= 3\text{m} \\
2{,}40\text{m} + x &= 3\text{m} \\
x &= 3{,}00\text{m} - 2{,}40\text{m}
\end{aligned}$$

[209] Rasch (2003), S. 54.

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

$x \qquad = 0{,}60\,m$

Dornröschen

Dornröschen schläft 100 Jahre. Sie kann nur durch einen Kuss von einem Prinzen geweckt werden. In den ungeraden Jahren kommen 10 Prinzen und in den geraden Jahren versuchen es 15 Prinzen. Aber erst im 100. Jahr schafft es ein Prinz. Wie viele Prinzen würden dann auf jeden Fall vergeblich kommen? Der wievielte Prinz könnte es schaffen?

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Prinzessin
- Vorstellen des Prinzen
- Vorstellung von der Erzählung
- Ich möchte auch Prinzessin werden...
- Die Prinzessin hat ein schönes Kleid...
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Dornröschenschlaf: 100 Jahre
- ungerade Jahre: 10 Prinzen
- gerade Jahre: 15 Prinzen
- Wie viele Prinzen kommen vergeblich?
- Der wievielte Prinz könnte es schaffen?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen) .

50 (gerade Jahre) + 50 (ungerade Jahre)	= 100 (Jahre)
49 • 15 (Prinzen) + 50 • 10 (Prinzen)	=
735 + (50 - 49) • 15	=

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

735 + 500	= 1235 (vergebliche Prinzen)
750 + 500	= 1250 (Prinzen insgesamt)

Der Teufel und der arme Mann

Der Teufel sagte zu einem armen Mann:
Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln, doch musst du jedes Mal, wenn du zurückkommst, 8 Taler für mich ins Wasser werfen. Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Heller mehr. Wie viel hatte er anfangs?

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen des Teufels
- Vorstellen des armen Mannes
- Vorstellung von der Brücke
- Vorstellung von der Erzählung
- Was sind Taler?...
- Schokoladentaler...
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Hinweg über Brücke: Verdopplung des Geldes
- Rückweg: 8 Taler ins Wasser werfen
- Dritter Rückweg: keinen Heller mehr
- Wie viele Taler hatte er anfangs?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

0 +8	=	8	
8 : 2	=	4	1. Mal
4 + 8	=	12	
12 : 2	=	6	2. Mal
6 + 8	=	14	
14 : 2	=	7	3. Mal

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

$x = 7$

Freie Fahrt!

Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere pro Stunde 60 km. Wie weit sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt?

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen des Zuges
- Vorstellen des Bahnhofes
- Papa fährt auch 80 km/h.
- 1 1/2 Stunden dauert mein Lieblingsfilm.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Zug 1: 80 km/h
- Zug 2: 60 km/h
- entgegengesetzte Richtungen
- Fahrtzeit: 1 1/2 Stunden
- Wie weit sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

Zug 1: 80 km + 40 km

Zug 2: 60 km + 30 km

Strecke Zug 1 + Strecke Zug 2

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

Zug 1: 80 km + 40 km = 120 km

Zug 2: 60 km + 30 km = 90 km

Strecke Zug 1 + Strecke Zug 2 = 210 km

Kaninchen

Herr Schäfer ist Kaninchenzüchter. Er besitzt Ställe für ein und für zwei Kaninchen. Insgesamt sind es 25 Ställe. Er kann darin 40 Tiere unterbringen. Wie viel Ställe sind für ein Kaninchen? Wie viele Ställe sind für zwei Kaninchen?

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellung von einem Kaninchenzüchter
- Vorstellung von einem Kaninchen
- Vorstellung von einem Stall
- Das Kaninchen ist weich.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Insgesamt: 25 Ställe
- 40 Tiere
- Ställe für ein Kaninchen
- Ställe für zwei Kaninchen
- Wie viele Ställe sind für ein Kaninchen?
- Wie viele Ställe sind für zwei Kaninchen?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

$$1x + 2y = 40$$

$$x + y = 25$$

Mittels einer Wertetabelle ergeben sich die folgenden Lösungen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
y	19,5	19	18,5	18	17,5	17	16,5	16	15,5	**15**

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

Durch die Gleichung x + y = 25 ist ersichtlich, dass nur die Werte x = 10 und y= 15 wegen der vorgegebenen Anzahl in Frage kommen.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In dieser Unterrichtssequenz sollen erneut die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein, Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden. Die Einstiegs- und Problemstellungsphasen gleichen sich mit denen der vorangegangenen Stunde, sodass auf eine erneute Erläuterung an dieser Stelle verzichtet wird.

In der Arbeitsphase erhalten die SuS die Modellierungsaufgaben der letzten Stunde, die durch Hinzuziehen der neuen Helfer untersucht werden sollen. Dies hat den Grund, dass es nicht sinnvoll ist, inmitten des Kreislaufes zu starten. Dadurch werden unabdingbar die Aufgaben der beiden ersten Ärzte wiederholt und eine tiefere Auseinandersetzung mit der Problemstellung erreicht. Ferner erfahren die SuS, dass es sich um einen fortlaufenden Prozess handelt.

In der Reflexion werden wieder die einzelnen Aufgaben besprochen und die entscheidenden Stellen der Aufgaben den jeweiligen Helfern zugeordnet. Einige SuS stellen ihre Ergebnisse vor und erläutern ihre Entscheidungen. So erhalten auch leistungsschwächere SuS die Möglichkeit, die korrekten Lösungen nachzuvollziehen und ggf. können mögliche Probleme im Plenum diskutiert werden.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Die grundlegenden methodischen Entscheidungen gleichen sich mit denen der vorangegangenen Stunde, sodass auf eine erneute Erläuterung an dieser Stelle verzichtet wird.

Material/Differenzierung:

Zusätzlich zum Differenzierungsmaterial der ersten Stunde erhalten die SuS Bildkarten, die ihnen helfen, die Aufgabe handlungsorientiert zu lösen.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materialien***
10 Min.	Einstieg	5 Minuten-Krimis – Die SuS spielen in Viererteams. Die Detektivgeschichten werden von der Lehrkraft an die einzelnen Gruppen ausgeteilt. Nach 5 Minuten präsentieren die Gruppen kurz ihre Ergebnisse.	Gruppenarbeit	Detektivgeschichte
10 Min.	Problemstellung	Die Lehrkraft präsentiert die Modellierungsaufgabe. Dann werden in Form einer kurzen Erzählung die nächsten Sachrechenärzte vorgestellt. **Zieltransparenz:** Die SuS formulieren das Stundenziel.	Plenum	Tafel
15 Min.	Arbeitsphase	Die SuS arbeiten an den Aufgaben und ergründen die Einsatzgebiete der Helfer.	Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit	AB
10 Min.	Reflexion	Die SuS präsentieren ihre Ergebnisse und begründen diese.	Plenum	

Vierte Unterrichtssequenz

Auch die vierte Unterrichtssequenz ist eine Einzelstunde. In dieser Stunde werden die letzten drei Ärzte des Sachrechenhospitals eingeführt.

Thema

Weiterarbeit am Modellierungskreislauf mit Hilfe von Ärzten des Sachrechenhospitals, indem das Einsatzgebiet dieser fiktiven Personen an gezielten Übungen verdeutlicht wird.

Ziele

Die SuS sollen in dieser Stunde:

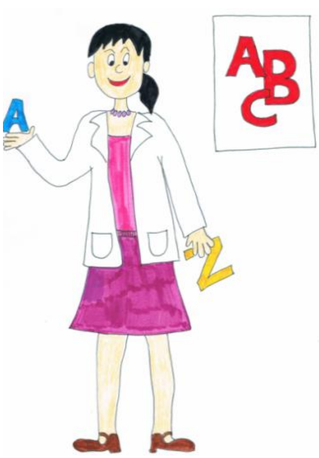
- Ergebnisse interpretieren (Fachkompetenz).
- Lösungen validieren (Fachkompetenz).
- Lösungswege darlegen (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Sich der Bedeutung der einzelnen Schritte im Modellierungskreislauf bewusst werden, indem die Aufgaben von Frau Dr. Wortfix, Herrn Dr. Kadast und Frau Dr. Erklärmi den jeweiligen Tätigkeiten des Kreislaufes zugeordnet werden.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes und stellen die Zusammenhänge zwischen den Tätigkeiten her.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS betrachten die Sachaufgaben unter den vorgegebenen Aspekten des Modellierungskreislaufes, stellen die Zusammenhänge zwischen den Tätigkeiten her und reflektieren diese.
Schwerpunkt der Reflexion: Tätigkeiten der Ärzte erfassen.	

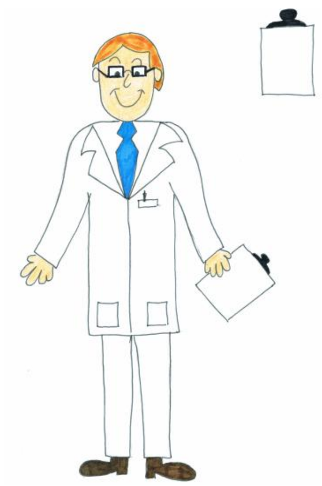
Sachaspekte

Fachlich ist diese Stunde auch dem Bereich *Größen und Messen* mit dem Schwerpunkt *Sachsituationen* zuzuordnen. Im Fokus der Stunde stehen die letzten drei Ärzte des Sachrechenhospitals:

- Frau Dr. Wortfix (Passt alles zur Aufgabe?)
- Herr Dr. Kadast (**Ka**nn **da**s **st**immen?)
- Frau Dr. Erklärmi (Erkläre es mir!)



Nachdem Herr Dr. Rechne mit der Operation fertig ist, werden die SuS zur Nachsorge an eine weitere Ärztin verwiesen. Sie heißt Frau **Dr. Wortfix** und befindet sich auf der Station *Reale Resultate*. Mit ihrer Hilfe sollen die SuS das Ergebnis und die Aufgabe in einen Zusammenhang bringen. Dr. Wortfix beschreibt den Patienten, was geschehen ist. Sie arbeitet mit einem großen Buchstabenplakat. Dieses soll den SuS verdeutlichen, dass sie sich an dieser Stelle noch einmal die ursprüngliche Sachsituation vor Augen führen, um das Ergebnis adäquat einzubetten. Da die SuS mit Hilfe dieser Ärztin die *Mathematik* verlassen und wieder in den *Rest der Welt* zurückkehren, erfolgt nach Blum eine Übersetzung des Mathematischen ins Sprachliche. Das neue mathematische Element (Ergebnis), welches während der Operation entsteht, darf dem übrigen Körper keine Probleme/Schmerzen bereiten. Ziel ist es, den Patienten gesund zu entlassen, dazu muss die volle Funktion des Körpers gewährleistet sein. Das Ergebnis muss sich folglich in die vorhandene Situation einfügen. Sollte das Interpretieren nicht gelingen, so setzt die Lehrkraft ein kleines Buchstabenplakat an das Ergebnis, da an dieser Stelle eine erneute Interpretation der Aufgabe notwendig ist.



Mit diesen Informationen werden die Patienten langsam auf das Verlassen des Krankenhauses vorbereitet. Herr **Dr. Kadast** sitzt auf der Station *Situationsmodell* genau wie Herr Dr. Simpel. Er ist für die Nachsorge zuständig. Er betrachtet die Wunde des Chirurgen, nimmt aber zusätzlich auch die Notizen von Frau Dr. Erklärmi zu Hilfe, da dort der die Ausgangssituation festgehalten wurde. Wenn alles zusammenpasst und es keine Unstimmigkeiten gibt (Kann das stimmen?), leitet Herr Dr. Kadast seine Patienten weiter. Man erkennt ihn an seiner Patientenakte. In diesem Schritt müssen die Kinder lernen, dass es nicht ausreicht, mit Hilfe von Frau Dr. Wortfix das Ergebnis in einem Antwortsatz anzugeben, sondern, dass die gesamte anfängliche Situation betrachtet werden muss. Erst dann sind die SuS in der Lage, ihre bisherigen Erkenntnisse zu validieren. Sollte dieses Validieren fehlen, so setzt die Lehrkraft eine kleine Patientenakte an die Stelle, wo Zusammenhänge nicht schlüssig sind. Hier gilt es noch einmal nachzuarbeiten.

In letzter Instanz gelangen die Patienten erneut zu Frau **Dr. Erklärmi**. Sie ist den SuS bereits aus der Einstiegssituation als Chefärztin bekannt. Sie überzeugt sich am Ende des Aufenthaltes davon, dass die Behandlung richtig war und zum Erfolg geführt hat. Dazu erklärt sie alle Arbeitsschritte ganz genau. Man erkennt Frau Dr. Erklärmi an der großen Sprechblase. In dieser befinden sich ein Fragezeichen und ein Ausrufezeichen. Das Fragezeichen symbolisiert den Einstieg, die Fragestellung, die vielen Probleme, die zu Beginn einer Behandlung vorhanden sind. Das Ausrufezeichen steht für das Ende, den erfolgreichen Abschluss dieser ärztlichen Prozedur. Durch die Kommunikation mit den Patienten und Kollegen erfährt sie die genauen Abläufe und die jeweilige Ausgangslage. Dies entspricht dem Darlegen des Situationsmodells, um wieder zur *Realsituation* zu gelangen. Sollte dieses Darlegen fehlen, so setzt die Lehrkraft ein kleine Sprechblase an den Schluss, so dass die SuS aufgefordert werden, ihre Ergebnisse jemand anderem darzulegen.

Die einzelnen Einsatzbereiche dieser Spezialisten werden an den Beispielaufgaben der vorangegangenen Stunde kenntlich gemacht und diese Markierung begründet.

Die Bremer Stadtmusikanten

Der Esel ist bis zum Rücken 1,50m hoch. Darauf steht der Hund. Die Katze ist 10cm kleiner als der Hahn und der Hahn ist dreimal kleiner als der Esel. Zusammen erreichen sie eine Höhe von 3m.[210]

<u>*Aufgabe:*</u>

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der einzelnen Tiere
- Vorstellen des Stapelns
- Vorstellung von der Erzählung
- Ich habe auch einen Hund...
- Der Hahn kräht...
- Eine Katze ist schön.
- ...

[210] Rasch (2003), S. 54.

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Esel: 1,50m hoch
- Katze: 10 cm kleiner als der Hahn
- Hahn: 3x kleiner als der Esel
- Höhe insgesamt: 3m
- Wie groß ist der Hund?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen) .

$$\begin{aligned}
1{,}50\text{m} + (1{,}50 : 3) + (1{,}50 : 3 - 0{,}10\text{m}) + x &= 3\text{m} \\
1{,}50\text{m} + 0{,}50\text{m} + 0{,}40\text{m} + x &= 3\text{m} \\
2{,}40\text{m} + x &= 3\text{m} \\
x &= 3{,}00\text{m} - 2{,}40\text{m}
\end{aligned}$$

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

$$x = 0{,}60\text{m}$$

Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- Der Hund ist 60 cm groß.

Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Richtig, da die einzelnen Größen zusammengerechnet 3 Meter ergeben.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Dornröschen

Dornröschen schläft 100 Jahre. Sie kann nur durch einen Kuss von einem Prinzen geweckt werden. In den ungeraden Jahren kommen 10 Prinzen und in den geraden Jahren versuchen es 15 Prinzen. Aber erst im 100. Jahr schafft es ein Prinz. Wie viele Prinzen würden dann auf jeden Fall vergeblich kommen? Der wievielte Prinz könnte es schaffen?

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Prinzessin
- Vorstellen des Prinzen
- Vorstellung von der Erzählung
- Ich möchte auch Prinzessin werden...
- Die Prinzessin hat ein schönes Kleid...
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Dornröschenschlaf: 100 Jahre
- ungerade Jahre: 10 Prinzen
- gerade Jahre: 15 Prinzen
- Wie viele Prinzen kommen vergeblich?
- Der wievielte Prinz könnte es schaffen?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

50 (gerade Jahre) + 50 (ungerade Jahre)	= 100 (Jahre)
49 • 15 (Prinzen) + 50 • 10 (Prinzen)	=
735 + (50 - 49) • 15	=


Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

735 + 500	= 1235 (vergebliche Prinzen)
750 + 500	= 1250 (Prinzen insgesamt)


Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- 1235 Prinzen kommen vergeblich.
- 1250 Prinzen insgesamt. Im 100. Jahr kommen die Prinzen 1236 bis 1250. Einer dieser Prinzen könnte der Retter sein.


Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Richtig, da in 100 Jahren 1250 Prinzen zum Schloss kommen können. Aber es ist fiktiv und daher schwer vorstellbar.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Der Teufel und der arme Mann

Der Teufel sagte zu einem armen Mann:
Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln, doch musst du jedes Mal, wenn du zurückkommst, 8 Taler für mich ins Wasser werfen. Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Heller mehr. Wie viel hatte er anfangs?[211]

[211] Rasch (2003), S. 72.

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen des Teufels
- Vorstellen des armen Mannes
- Vorstellung von der Brücke
- Vorstellung von der Erzählung
- Was sind Taler?...
- Schokoladentaler...
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Hinweg über Brücke: Verdopplung des Geldes
- Rückweg: 8 Taler ins Wasser werfen
- Dritter Rückweg: keinen Heller mehr
- Wie viele Taler hatte er anfangs?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

0 +8	=	8	→	
8 : 2	=	4	←	1. Mal
4 + 8	=	12	→	
12 : 2	=	6	←	2. Mal
6 + 8	=	14	→	
14 : 2	=	7	←	3. Mal

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

x = 7

Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- 7 Taler hatte er am Anfang.

Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- 7 Taler ist ein realistischer Betrag.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Freie Fahrt!

Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere pro Stunde 60 km. Wie weit sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt?[212]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen des Zuges
- Vorstellen des Bahnhofes
- Papa fährt auch 80 km/h.
- 1 1/2 Stunden dauert mein Lieblingsfilm.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Zug 1: 80 km/h
- Zug 2: 60 km/h
- entgegengesetzte Richtungen
- Fahrtzeit: 1 1/2 Stunden
- Wie weit sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt?

[212] Rasch (2003), S. 80.


Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

Zug 1: 80 km + 40 km

Zug 2: 60 km + 30 km

Strecke Zug 1 + Strecke Zug 2


Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

Zug 1: 80 km + 40 km = 120 km

Zug 2: 60 km + 30 km = 90 km

Strecke Zug 1 + Strecke Zug 2 = 210 km


Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- 210 km sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt.


Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- 210 km liegt über der Anzahl der Kilometer, die beide Züge in einer Stunde fahren.


Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Kaninchen

Herr Schäfer ist Kaninchenzüchter. Er besitzt Ställe für ein und für zwei Kaninchen. Insgesamt sind es 25 Ställe. Er kann darin 40 Tiere unterbringen. Wie viel Ställe sind für ein Kaninchen? Wie viele Ställe sind für zwei Kaninchen?[213]

213 Rasch (2003), S. 61.

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen

- Vorstellung von einem Kaninchenzüchter
- Vorstellung von einem Kaninchen
- Vorstellung von einem Stall
- Das Kaninchen ist weich
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Insgesamt: 25 Ställe
- 40 Tiere
- Ställe für ein Kaninchen
- Ställe für zwei Kaninchen
- Wie viele Ställe sind für ein Kaninchen?
- Wie viele Ställe sind für zwei Kaninchen?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

$$1x + 2y = 40$$

$$x + y = 25$$

Mittels einer Wertetabelle ergeben sich die folgenden Lösungen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
y	19,5	19	18,5	18	17,5	17	16,5	16	15,5	**15**


Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

Durch die Gleichung x + y = 25 ist ersichtlich, dass nur die Werte x = 10 und y= 15 wegen der vorgegebenen Anzahl in Frage kommen.


Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

Es sind 10 Ställe für ein Kaninchen und 15 Ställe für zwei Kaninchen.


Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Richtig, da alle weiteren Ergebnisse nicht die Gesamtzahl der Ställe berücksichtigen.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In dieser Unterrichtssequenz sollen erneut die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein, Argumentieren* und *Darstellen/Kommunizieren* gefördert werden. Die Stunde gleicht in ihrem Aufbau den beiden vorangegangenen Stunden. Deshalb wird an dieser Stelle auf eine Erläuterung der Einstiegs- und Problemstellungs- sowie der Arbeitsphase verzichtet.

In der Reflexion werden wieder die einzelnen Aufgaben besprochen und die entscheidenden Stellen der Aufgaben den jeweiligen Helfern zugeordnet. Einige SuS stellen ihre Ergebnisse vor und erläutern ihre Entscheidungen. So erhalten auch leistungsschwächere SuS die Möglichkeit, die korrekten Lösungen nachzuvollziehen und ggf. können mögliche Probleme im Plenum diskutiert werden. Anders als in den beiden vorangegangenen Stunden werden in dieser Reflexion nicht nur Schwierigkeiten im Lösungsprozess betrachtet, sondern es findet auch eine Reflexion hinsichtlich der Lösung statt.

Es ist wichtig, dass in dieser Stunde die einzelnen Tätigkeiten des Modellierungsprozess zusammengeführt und der Prozess als Ganzes betrachtet wird. Nur so werden den SuS der gesamte Prozess und der mitunter lange Weg zum Lösen einer Aufgabe deutlich.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Die grundlegenden methodischen Entscheidungen gleichen sich mit denen der vorangegangenen Stunde, sodass auf eine erneute Erläuterung an dieser Stelle verzichtet wird.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materialien***
10 Min.	Einstieg	5 Minuten-Krimis – Die SuS spielen in Viererteams. Die Detektivgeschichten werden von der Lehrkraft an die einzelnen Gruppen ausgeteilt. Nach 5 Minuten präsentieren die Gruppen kurz ihre Ergebnisse.	Gruppenarbeit	Detektivgeschichte
10 Min.	Problemstellung	Die Lehrkraft präsentiert eine problemhaltige Sachaufgabe. Dann werden kurz die weiteren Sachrechenärzte vorgestellt. **<u>Zieltransparenz:</u>** Die SuS formulieren das Stundenziel.	Plenum	Tafel
10 Min.	Arbeitsphase	Die SuS arbeiten an den Aufgaben und ordnen den Textstellen die einzelnen Helfer zu.	Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit	AB
15 Min.	Reflexion	Die SuS präsentieren ihre Ergebnisse und begründen diese. Anschließend wird das Gesamtergebnis diskutiert.	Plenum	

Fünfte Unterrichtssequenz

Die fünfte Unterrichtssequenz ist eine Einzelstunde, in der der Umgang mit den Sachrechenärzten unter besonderer Berücksichtigung der Sprache trainiert wird. Im Fokus stehen das Anwenden bereits erworbener Kenntnisse sowie die Transferleistung dieser Kenntnisse auf andere Problemstellungen.

Thema

Bearbeiten verschiedener Modellierungsaufgaben mit Hilfe des Sachrechenhospitals innerhalb einer Schreibkonferenz.

Ziele

Die SuS sollen mit Unterstützung der Bearbeitungshilfen in dieser Stunde:

- Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen entnehmen und dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen unterscheiden (erfassen) (Fachkompetenz).
- Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell (z. B. Gleichung, Tabelle, Zeichnung) übersetzen und mit Hilfe des Modells lösen (lösen) (Fachkompetenz).
- ihr Ergebnis wieder auf die Sachsituation beziehen und es auf Plausibilität prüfen (validieren) (Fachkompetenz).
- zu gegebenen mathematischen Modellen (z. B. in Form von Gleichungen, Tabellen oder Zeichnungen) passende Problemstellungen finden und im Rahmen von Sachsituationen eigene Fragestellungen entwickeln (zuordnen) (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Auseinandersetzung mit verschiedenen Modellierungsaufgaben mit Hilfe des Sachrechenhospitals innerhalb einer Schreibkonferenz, um sich durch den sprachlichen Austausch der auftretenden Probleme bewusst zu werden und sie gemeinschaftlich zu lösen.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS lösen gemeinschaftlich Problemlöseaufgaben und notieren alle ihre Beiträge.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS lösen gemeinschaftlich Problemlöseaufgaben, notieren alle ihre Beiträge und gehen dabei auf die Beiträge ihrer MitschülerInnen ein.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS lösen gemeinschaftlich Problemlöseaufgaben, notieren und begründen ihre Beiträge und gehen dabei auf die Beiträge ihrer MitschülerInnen ein.
Schwerpunkt der Reflexion: Tätigkeiten des Modellierungskreislaufs unter Zuhilfenahme der Sachrechenärzte benennen und begründen.	

Sachaspekte

Das Thema ist erneut der im Lehrplan verankerten inhaltsbezogenen Kompetenz *Größen und Messen* mit dem Schwerpunkt *Sachsituationen* zuzuordnen. Dabei wird die Methode der Schreibkonferenz aus der Germanistik eingesetzt, die unter grundlegende methodische Entscheidungen vorgestellt und begründet wird.

Folgende Aufgaben werden in der Stunde fokussiert:

Stau!

Am 11. November jeden Jahres feiern die Kinder das Fest des Heiligen Martins mit einem traditionellen Martinszug. Die Kinder haben wunderschöne Laternen gebastelt, die wegen der Kerzen im Dunkeln in vielen Farben leuchten. Wegen des Martinszuges wurden einige Straßen rund um die Schulstraße gesperrt. Deshalb ist ein großer Stau auf der Hofstraße und auf der Hardterbroicher Straße entstanden. Der Stau ist zwischen der Kreuzung Rheydter Straße und der Brücke am Bungtbach. Wahrscheinlich wird sich dieser Stau erst auflösen, wenn der Martinszug vorüber ist und sich alle Kinder für die

Mantelteilung um das Martinsfeuer versammelt haben. Die Autofahrer sind jedoch gut gelaunt, da sie sich über die vielen bunten Laternen und die schönen Martinslieder der Kinder freuen. Wie viele Fahrzeuge befinden sich in diesem Stau?

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Autos
- Vorstellen des Weges
- Vorstellen des Martinszuges
- Stau ist doof!
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Stau auf Hof- und Hardterbroicher Straße
- ab Kreuzung Rheydter Straße bis Brücke am Bungtbach
- Wie viele Fahrzeuge befinden sich in diesem Stau?


Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

- Strecke mit Lineal ausmessen und mit Maßstab berechnen
- Strecke ca. 2 km = 2000m lang
- Ein Auto ist ca. 5m lang
- 5x = 2000


Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

- 5x = 2000

  x = 400


Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- Es stehen ungefähr 400 Autos in dem Stau. Da aber auch Motorräder und LKW dort stehen könnten, ist keine exakte Angabe einer Zahl möglich.


Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Richtig, weil die unterschiedlichen Längen der verschiedenen Fahrzeuge beachtet wurden.


Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Waldi und Oskar

Familie Wolters besitzt einen Dackel. Für Waldi reicht ein Sack Trockenfutter 72 Tage. Die Nachbarn von Familie Wolters sind ebenfalls Hundebesitzer. Für Dogge Oskar reicht ein Sack Trockenfutter 36 Tage. In den Ferien versorgt Familie Wolters beide Hunde. Wie lange reicht ein Sack Trockenfutter für Waldi und Oskar?[214]

Aufgabe:


Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Hunde
- Vorstellen der Familie Wolters
- Wir haben auch einen Hund!
- Hunde sind süß.
- ...


Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Waldis Trockenfutter-Sack = 72 Tage
- Oskars Trockenfutter-Sack = 36 Tage
- Wie lange reicht ein Sack Trockenfutter für beide Tiere?


Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

A = Dackel Waldi B = Dogge Oskar

A: 1 Sack = 72 Tage
0,5 Sack = 36 Tage

B: 1 Sack = 36 Tage
0,5 Sack = 18 Tage

ODER:

1/36 x + 1/72 x = 1

[214] Heinze/Manten/Hütten (2009b), S. 55.

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

A + B:	1,5 Säcke	= 36 Tage
	0,5 Säcke	= 12 Tage
	1 Sack	= 24 Tage

ODER:

1/36 x +	1/72 x	=	1	
2/72 x +	1/72 x	=	1	
3/72 x	=	1		
x	=	72/3	=	24

Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- Ein Sack Trockenfutter reicht 24 Tage lang für beide Hunde.

Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Es ist realistisch, da 24 Tage weniger ist, als Oskar allein mit seinem Sack auskommt.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Dornröschen und die Hecke

Dornröschen hat sich an der Spindel gestochen und schläft 100 Jahre. Um das Schloss wächst eine Hecke. Im ersten Jahr wächst sie einen halben Meter. In den darauffolgenden Jahren wächst sie immer um die Höhe, die die Hecke in dem Jahr davor erreichte. Wie hoch ist die Hecke nach sechs Jahren?[215]

[215] Rasch (2003), S. 69.

<u>*Aufgabe:*</u>

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Hecke
- Vorstellen der Spindel
- Dornröschen ist schön!
- 100 Jahre schlafen möchte ich auch.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Erstes Jahr = 0,5 Meter
- Ab dem zweiten Jahr = Wachstum exponentiell
- Wie hoch ist die Hecke nach sechs Jahren?

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

- Erstes Jahr = 0,5m
- Zweites Jahr = 0,5m + 0,5m
- Drittes Jahr = 1m + 1m
- ...

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

Sechstes Jahr = 8m + 8m = 16m

Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- Die Hecke ist im sechsten Jahr 16m hoch.

Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Es ist richtig, da 16m mehr ist, als die Hecke bei linearem Wachstum erreichen würde.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Die Baggergrube

Drei Bagger A, B und C mit gleicher Leistung brauchen gemeinsam zum Ausheben einer Baugrube genau 20 Stunden.

a) Wie lange dauert das Ausheben, wenn nur zwei Bagger genutzt werden?

b) Nachdem die drei Bagger gemeinsam die Hälfte der Baugrube ausgehoben haben, fällt ein Bagger aus. Wie lange dauert nun das Ausheben der zweiten Hälfte?

c) Um wie viel Zeit verzögert sich durch den Ausfall die Fertigstellung der Arbeit?[216]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Bagger
- Vorstellen der Baugrube
- 20 Stunden sind lang.
- Bagger sind super.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Drei Bagger brauchen 20 Stunden

[216] Heinze/Manten/Hütten (2009b), S. 55.

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

- A + B + C = 20 Stunden
- Reduktion auf einen Bagger (20 • 3)
- Stundenreduktion durch den zweiten Bagger ((20 • 3) : 2)

- A + B + C = 10 Stunden
- Reduktion auf einen Bagger (10 • 3)
- Stundenreduktion durch den zweiten Bagger ((10 • 3) : 2)

- Ergebnis aus Aufgabenteil a minus Ergebnis aus Aufgabenteil b

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

- A + B + C = 20
- 20 • 3 = 60
- 60: 2 = 30

- A + B + C = 10
- 10 • 3 = 30
- 30: 2 = 15

- 30 - 15 = 15

Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- (a) Zwei Bagger brauchen zusammen 30 Stunden.
- (b) Das Ausheben der zweiten Hälfte dauert 15 Stunden.
- (c) Die Fertigstellung der Arbeit verzögert sich um 15 Stunden.

Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- (a) Es ist richtig, da 30 Stunden mehr sind, als 3 Bagger zusammen benötigen.
- (b) Es ist richtig, da 15 Stunden mehr sind, als 3 Bagger zusammen für die Hälfte benötigen.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Jim Knopf und seine Molly

Die Waggons eines Zuges sind falsch aneinandergekoppelt und sollen in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Hinter der Lok befindet sich der Speisewagen, danach wurde der Waggon der 1. Klasse angekoppelt und am Ende des Zuges hängt der Waggon der 2. Klasse. Folgende Reihenfolge soll hergestellt werden:

Lok – Waggon der 2. Klasse – Waggon der 1. Klasse – Speisewagen

Es gibt keine Rangiermöglichkeit, deshalb muss die einzige Ausweichstelle der einspurigen Bahnstrecke zum Rangieren dienen. Folgende Rangierregel muss Jim beachten:

- Die Lok kann vor- und rückwärts fahren.
- Die Lok soll den Zug ziehen.
- Der Zug soll seine Fahrtrichtung beibehalten.
- Die Waggons können beliebig an- und abgekoppelt werden.[217]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Lok
- Vorstellen des Rangierortes
- Jim Knopf ist eine tolle Geschichte.
- Zugfahren macht Spaß.
- ...

[217] Schnabel/Trapp (2015), S. 54.

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Startposition: Lok – Speisewagen – 1. Klasse – 2. Klasse
- Regeln:
  - Die Lok kann vor- und rückwärts fahren.
  - Die Lok soll den Zug ziehen.
  - Der Zug soll seine Fahrtrichtung beibehalten.
  - Die Waggons können beliebig an- und abgekoppelt werden
- Reihenfolge: Lok – Waggon der 2. Klasse – Waggon der 1. Klasse – Speisewagen

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

- Das Mathematisieren ist hier nicht möglich, da es mittels logischer Schlussfolgerungen gelöst wird.

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

- Da kein Mathematisieren stattfindet, gibt es auch kein mathematisches Resultat.

Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- Die Reihenfolge des Zuges ist: Lok – 2. Klasse – 1. Klasse – Speisewagen

Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Es ist richtig, da alle Regeln beachtet wurden.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Das Floß-Dilemma

Am Ufer eines Flusses steht ein Mann mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf. Er findet ein winziges Floß, worauf außer ihm selbst als Fahrer immer nur eines der drei mitgeführten Dinge Platz hat. Sein Problem ist:

- Wolf und Ziege kann er nicht allein lassen, sonst frisst der eine die andere.
- Die Ziege und der Kohlkopf dürfen auch nicht zusammen an einem Ufer bleiben, da sonst die Ziege das Gemüse frisst.[218]

Aufgabe:

Konstruieren/Verstehen: Situationsmodell erstellen.

- Vorstellen der Tiere
- Vorstellen des Gemüses
- Ich mag keinen Kohl.
- Wölfe sind vom Aussterben bedroht.
- ...

Vereinfachen/Strukturieren: Für die Aufgabe wichtige Aspekte abstrahieren, Realität vereinfachen.

- Ausgangslage: Mann mit Wolf, Ziege und Kohlkopf
- Außer dem Mann darf nur ein weiteres Objekt mit auf das Floß.
- Wolf und Ziege kann er nicht allein lassen, sonst frisst der eine die andere.
- Die Ziege und der Kohlkopf dürfen auch nicht zusammen an einem Ufer bleiben, da sonst die Ziege das Gemüse frisst

Mathematisieren: Aspekte in ein mathematisches Modell überführen (z.B. in Formel übertragen).

- Das Mathematisieren ist hier nicht möglich, da es mittels logischer Schlussfolgerungen gelöst wird.

[218] in Anlehnung an Schnabel/Trapp (2015), S. 26.

Mathematisch arbeiten: Ausrechnen, Ergebnis produzieren (Ergebnis = mathematisches Resultat).

- Da kein Mathematisieren stattfindet, gibt es auch kein mathematisches Resultat.

Interpretieren: Mathematisches Resultat auf Sachkontext beziehen (Antwortsatz erstellen).

- Die Reihenfolge der Floßfahrt:
    - Der Mann fährt mit der Ziege zuerst ans andere Ufer. Der Wolf und der Kohlkopf bleiben zurück.
    - Der Mann fährt zurück und holt den Wolf ans andere Ufer. Der Kohlkopf bleibt zurück. Auf dem Rückweg nimmt er die Ziege wieder mit auf das Floß, da sie sonst vom Wolf gefressen würde.
    - Der Mann fährt den Kohlkopf ans andere Ufer. Die Ziege bleibt zurück.
    - Der Mann fährt ein letztes Mal zurück und holt die Ziege.

Validieren: Antwortsatz auf Richtigkeit überprüfen.

- Es ist richtig, da alle Regeln beachtet wurden.

Darlegen:

- Aufgabe und Lösungsweg anderen vorstellen.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In der Unterrichtssequenz sollen erneut die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein* und *Modellieren* gefördert werden.

Den Einstieg der Stunde bildet das Lösen von 5-Minuten-Krimis. Ritualisierte Einstiege schaffen eine Orientierung für die SuS, da besonders leistungsschwächere SuS sich in solchen Phasen zunehmend sicherer fühlen (vgl. S. 322f).

In der Problemstellung präsentiert die Lehrkraft den SuS die einzelnen Aufgaben. Gemeinsam wird die Zieltransparenz erarbeitet und die notwendigen Regeln wiederholt.
In der Arbeitsphase arbeiten die SuS an den einzelnen Aufgaben. Sie notieren alle notwendige Arbeitsschritte und Anmerkungen auf dem Tischplakat. Es wurden bewusst zwei Aufgaben ausgewählt, die die Tätigkeiten von Frau Dr. Mathematix und Herrn Dr. Rechne nicht benötigen, damit die SuS den Modellierungskreislauf reflektiert anwenden und nicht stupide durchlaufen.
In der Reflexion stellen die SuS ihre Ergebnisse vor. Dabei sollen sie die Tätigkeiten des Modellierungskreislaufs unter Zuhilfenahme der Sachrechenärzte benennen und begründen.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

<u>Sozialform:</u>

Die SuS sitzen während der Einstiegsphase an Gruppentischen, da so ihr Blick ins Zentrum der Gruppe gelenkt wird. Dort befindet sich der Text, welcher gemeinsam bearbeitet werden muss. Dadurch wird die Gruppenaktivität gefördert und die SuS auf das Unterrichtsthema eingestimmt.
Während der Arbeitsphase ist die Sitzordnung aufgehoben. Die SuS bewegen sich die ganze Zeit frei im Raum. Die Gruppentische mit den Aufgaben bilden Haltestellen, an denen die SuS verweilen und arbeiten. Die Aufhebung der Sitzordnung ist notwendig, um alle SuS miteinander ins Schreibgespräch zu bringen. Zu Beginn der Arbeitsphase sind die SuS erst auf sich alleine gestellt. Nach und nach treten sie mit den anderen Kindern schriftlich in Kontakt. Durch das Vermeiden des Sprechens konzentrieren sich die SuS auf die schriftsprachliche Kommunikation. Diese verläuft zwar etwas langsamer, aber am Ende dieser Phase sind die einzelnen Entwicklungsschritte innerhalb einer Konversation sehr gut nachvollziehbar. Die entstehenden Plakate bilden somit eine hervorragende Reflexionsgrundlage. Besonders leistungsschwächere SuS profitieren von dieser etwas langsameren, aber durchaus intensiven Kommunikation.
Im Folgenden wird die Schreibkonferenz kurz erläutert.
Bei der Schreibkonferenz werden Gruppentische gestellt, die vollständig mit Packpapier abgeklebt sind. In der Mitte eines Tisches befindet sich jeweils eine Modellierungsaufgabe. Der übrige Platz bleibt frei. Da es sechs Gruppentische gibt, werden in der Konferenz auch sechs verschiedene Modellierungsaufgaben behandelt. Die SuS dürfen nur

einen Stift mit in die Schreibkonferenz nehmen und es gilt absolutes Sprechverbot. Jegliche Form von Konversation muss schriftlich erfolgen, selbst wenn es sich um Ausdrücke wie z.B. *nee*, *Quatsch* oder *cool* handelt. Eine Reaktion auf niedergeschriebene Äußerungen muss wiederum schriftlich erfolgen. Der Bezug einer Äußerung muss durch Pfeile deutlich gemacht werden, sodass eine Zuordnung eindeutig ist. Diese Form der Schreibkonferenz unterscheidet sich insofern von der in der Literatur üblichen Schreibkonferenz, da es sich nicht um ein Beratungs-, sondern vielmehr um ein Entwicklungsgespräch handelt. Die Anzahl der SuS, die sich an einer Konversation beteiligen, ist nicht beschränkt.

Während der Reflexionsphase bilden die SuS einen Stehkreis um den jeweiligen Gruppentisch. Dies hat den Grund, dass dadurch alle SuS die jeweilige Aufgabe und den dazugehörigen Diskussionsverlauf einsehen können. Anhand der verschrifteten Diskussion können die SuS besser reflektieren, da der Lösungsprozess der Aufgabe anhand des Gesprächsverlaufes deutlich gemacht werden kann. Ebenso können Widersprüche sowie fehlerhafte Äußerungen korrigiert werden. Leistungsschwächere SuS können vorgetragene Entdeckungen besser nachvollziehen und nachprüfen. Leistungsstärkeren SuS wird auf diese Art und Weise eine Basis für Begründungen präsentiert.

Erfassen der Problemstellung:

Bevor die SuS in die Arbeitsphase übergehen, sollen sie das Problem erfassen. Die Methode der Schreibkonferenz ist den SuS bekannt, sodass der Aufbau in der Klasse genügt, um das Stundenziel zu erfassen. Die einzelnen Probleme entnehmen die SuS den Aufgaben, da dies bereits in den letzten Stunden praktiziert wurde. Es sind somit keine Schwierigkeiten zu erwarten.

Material/Differenzierung:

Eine Differenzierung wird durch die unterschiedlichen Aufgaben erreicht. Da zum Lösen von Sachrechenaufgaben auch immer das Verstehen der Sachsituation eine Rolle spielt, entscheiden die SuS selbst, mit welcher Aufgabe sie sich auseinandersetzen möchten. Durch die freie Wahl, in eine Konversation einzusteigen oder sie zu beginnen, wird das Lerntempo und Leistungsniveau eines jeden Kindes berücksichtigt. Leistungsschwächere SuS können sich bei dem Austausch etwas zurücknehmen, wobei die Regel gilt: Jeder beteiligt sich mindestens einmal an einem Gespräch. Sie erhalten aber mehr Zeit, andere Diskussionen zu verfolgen. Die einzelnen Sachrechenärzte bleiben auch in dieser Stunde an der Tafel visualisiert. Dadurch haben die SuS schnellen Zugriff auf die Namen und Aufgabenbereiche. Dies erleichtert das Schreiben, da man sich stärker auf das konzentrieren kann, was man schreiben möchte.

Verlaufsplan

Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materia-lien***
10 Min.	Einstieg	5 Minuten-Krimis – Die SuS spielen in Viererteams. Die Detektivgeschichten werden von der Lehrkraft an die einzelnen Gruppen ausgeteilt. Nach 5 Minuten präsentieren die Gruppen kurz ihre Ergebnisse.	Gruppenarbeit	Detektivge-schichte
5 Min.	Problemstellung	Die Probleme der Stunde werden an den Gruppentischen und kurz besprochen. **Zieltransparenz:** Die SuS erkennen das Problem und wissen, dass sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen dürfen.	Plenum	Tafel
20 Min.	Arbeitsphase	Die SuS sprechen an den Tischen über die Aufgaben und überlegen sich, welche der Aufgaben sie bearbeiten möchten.	Einzel-, Partner- oder Gruppen-arbeit	AB 2
10 Min.	Reflexion	Die SuS benennen die Probleme, die bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben aufgetreten sind. Diese werde auf Plakaten festgehalten.	Plenum	Plakate

Sechste Unterrichtssequenz

Die sechste Unterrichtssequenz ist auch eine Einzelstunde. Das Schreiben eigener Modellierungsaufgaben steht dabei im Mittelpunkt. Durch dieses Arbeiten soll das Verständnis für den Modellierungskreislauf gestärkt werden.

Thema

Schreiben eigener Modellierungsaufgaben zur Vertiefung des Verständnisses für den Modellierungskreislauf.

Ziele

Die SuS sollen mit Unterstützung der Bearbeitungshilfen in dieser Stunde:

- eigene Modellierungsaufgaben verfassen, die ein Durchlaufen des Modellierungskreislaufes ermöglichen (Fachkompetenz).
- im Sinne der Teamarbeit agieren (Sozialkompetenz).
- durch gegenseitige Unterstützung innerhalb der Gruppe bzw. durch differenzierende Impulse (Material) zu einem Erfolgserlebnis geführt werden (Selbstkompetenz).
- ihren erarbeiteten Lösungsweg und die darin enthaltenen Rechenschritte erläutern (Fach- und Sprachkompetenz).

Lernaufgabe: Schreiben eigener Modellierungsaufgaben zur Vertiefung des Verständnisses für den Modellierungskreislauf.	
AB 1: Reproduzieren	Die SuS schreiben gemeinschaftlich Modellierungsaufgaben und stellen diese vor.
AB 2: Zusammenhänge herstellen	Die SuS schreiben gemeinschaftlich Modellierungsaufgaben, stellen diese vor und nehmen Bezug auf das Sachrechenhospital.
AB 3: Verallgemeinern und Reflektieren	Die SuS schreiben gemeinschaftlich Modellierungsaufgaben, stellen diese vor, nehmen Bezug auf das Sachrechenhospital und begründen ihre Auswahl.
Schwerpunkt der Reflexion: Überprüfen der Aufgaben hinsichtlich des Modellierungskreislaufes.	

Sachaspekte

Das Thema ist erneut der im Lehrplan verankerten inhaltsbezogenen Kompetenz *Größen und Messen* mit dem Schwerpunkt *Sachsituationen* zuzuordnen. Durch das selbstständige Schreiben soll eine intensive Auseinandersetzung mit dem Modellierungskreislauf erzielt werden. Das Sachrechenhospital dient dabei zur Orientierung.

Didaktische Begründung – Bedeutung für die Kinder:

In der Unterrichtssequenz sollen erneut die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen/kreativ sein* und *Modellieren* gefördert werden.

Den Einstieg der Stunde bildet das Lösen von 5-Minuten-Krimis (vgl. S. 322f).

In der Hinführung erläutert die Lehrkraft den SuS das Stundenziel. Die SuS sollen die Aufgabenstellung erfassen. Es werden die Sachrechenärzte zur Orientierung an die Tafel geheftet, damit die einzelnen Tätigkeiten des Modellierungskreislaufes visualisiert sind. Anschließend werden die notwendigen Regeln wiederholt und das Differenzierungsmaterial kurz vorgestellt. Diese kurze Phase dient zur Vorbereitung, damit im Anschluss unmittelbar mit der Arbeit begonnen werden kann.

In der Arbeitsphase arbeiten die SuS an ihren Aufgaben. Die einzelnen Gruppen müssen zunächst einen Themenschwerpunkt festlegen. Anschließend ist eine gute Zusammenarbeit erforderlich, da alle Schritte aufeinander aufbauen müssen. Während der Produktion müssen die SuS regelmäßig reflektieren und ihre Formulierungen überprüfen. Dies fördert auch die Sprachkompetenz.

In der Reflexion stellen die SuS ihre Ergebnisse vor. Dabei sollen sie die Aufgaben hinsichtlich der Tätigkeiten des Modellierungskreislaufs reflektieren. Diese Phase entspricht im Wesentlichen den Reflexionen der letzten Stunden. Dennoch erfordert es ein hohes Maß an Konzentration und Reflexionsvermögen.

Grundlegende methodische Entscheidungen:

Sozialform:

Die SuS sitzen während der Einstiegsphase an Gruppentischen (vgl. S. 323f).

Während der Arbeitsphase sind die SuS an Gruppentischen. Dies ist notwendig, um alle SuS miteinander ins Gespräch zu bringen. Die Aufgaben werden auf Konzeptpapier notiert.

Während der Reflexionsphase bilden die SuS einen Stehkreis um den jeweiligen Gruppentisch. Dies hat den Grund, dass alle SuS die jeweilige Aufgabe und die dazugehörige Entwicklung einsehen können. Anhand des Konzeptpapiers können die SuS besser reflektieren, da die Entwicklung der Aufgabe deutlich wird. Ebenso können ggf. Widersprüche sowie fehlerhafte Äußerungen korrigiert werden.

Material/Differenzierung:

Diese Aufgabe bietet eine natürliche Differenzierung. Da zum Lösen von Sachaufgaben auch immer das Verstehen der Sachsituation eine Rolle spielt, entscheiden die SuS selbst, mit welcher Sachsituation sie ihre Aufgabe versehen wollen. Für leistungsschwächere SuS stehen Wortkarten mit Impulsen zu einem Themenschwerpunkt bereit. Auf der Rückseite befinden sich weitere Unterpunkte zu diesem Thema. So wird die Entwicklung der eigenen Aufgabe unterstützt.

Verlaufsplan

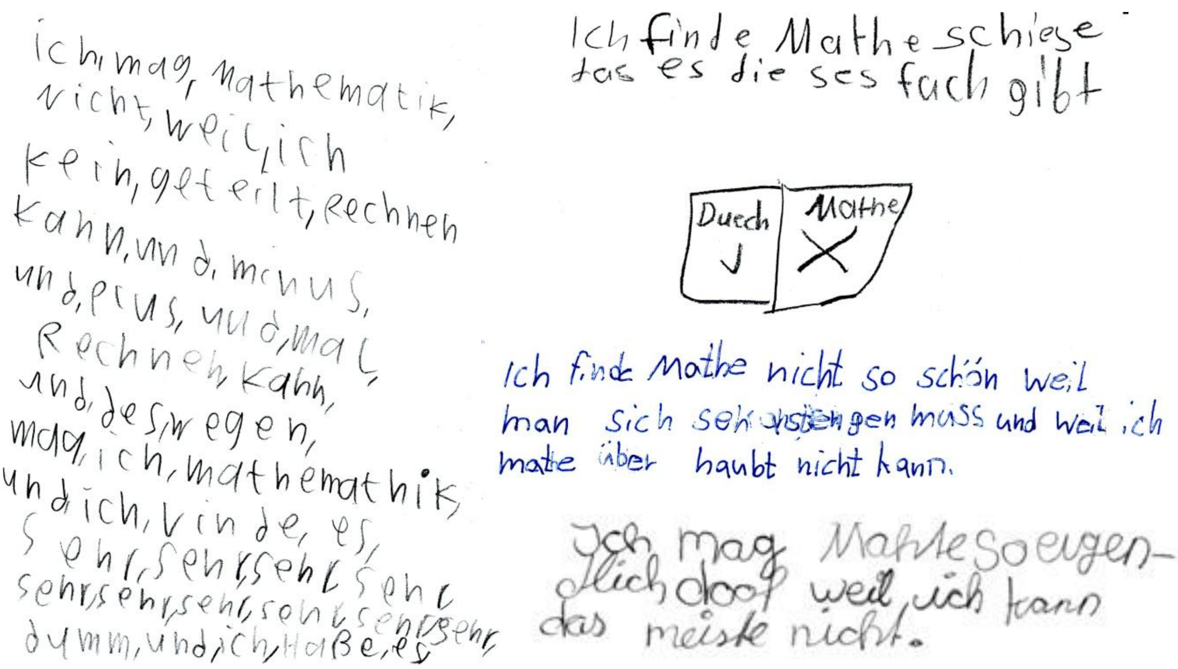
Zeit	***Phasen***	***Inhalte***	***Sozialform***	***Medien/ Materia-lien***
10 Min.	Einstieg	5 Minuten-Krimis – Die SuS spielen in Viererteams. Die Detektivgeschichten werden von der Lehrkraft an die einzelnen Gruppen ausgeteilt. Nach 5 Minuten präsentieren die Gruppen kurz ihre Ergebnisse.	Gruppenarbeit	Detektivgeschichte
5 Min.	Hinführung	Das Stundenziel wird erläutert, die notwendigen Regeln geklärt und das Differenzierungsangebot vorgestellt. **<u>Zieltransparenz:</u>** Die SuS erfassen die Aufgabenstellung und wissen, dass sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen dürfen.	Plenum	Tafel
20 Min.	Arbeitsphase	Die SuS formulieren ihre eigenen Modellierungsaufgaben und fertigen eine Skizze zu den Tätigkeiten des Kreislaufes an.	Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit	Konzeptpapier
10 Min.	Reflexion	Die SuS stellen ihre Aufgaben vor. Die Zuordnung der Tätigkeiten erfolgt durch das Plenum.	Plenum	

<u>Fazit:</u>

Die Konzeptionen zeigen, dass mathematische Inhalte vor allem durch eine intensive sprachliche Auseinandersetzung erarbeitet werden können. Dabei ist es nicht wichtig, aus welchem mathematischen Bereich die Problemstellung entnommen ist. Es ließen sich auch für die Bereiche *Raum und Form* sowie *Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten* Konzeptionen entwickeln. Dass es sich um Grundschulkonzeptionen handelt, ist nicht relevant, da sich die Methoden auch auf andere Klassenstufen übertragen lassen. Durch die vielen Partner- und Gruppenarbeitsphasen wird der sprachliche Austausch gefördert. Dies ist wie die Datenauswertung in Kapitel 7 gezeigt hat, dringend notwendig. In diesen intensiven Arbeitsphasen erhalten die SuS die Möglichkeit, die notwendigen mathematischen Begriffe inhaltlich zu festigen.

9. Resümee

Die Auseinandersetzung mit dem Thema der Dissertation war in vielerlei Hinsicht aufschlussreich. So bestätigte sich unter anderem die in der Einleitung erwähnte schwierige Einstellung zur Mathematik, welche in den folgenden Schülertexten zum Ausdruck gebracht wird:



Diese aus dem Bereich der Grundschule entnommenen Aussagen lassen sich auch auf die anderen Schulformen übertragen. Mathematik ist für viele SuS nach wie vor ein unüberwindbares Hindernis.

Im Folgenden sollen nun die Ergebnisse dieser Dissertation hinsichtlich der ihr zugrundeliegenden Fragestellung betrachtet werden:

Welche Indizien gibt es für einen möglichen Zusammenhang zwischen dem mathematischen Verständnis und der sprachlichen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern?

Die Ergebnisse der Studie sowie die der meisten anderen Überprüfungen sind lediglich Momentaufnahmen, aus denen eine Entwicklung nur schwer abzulesen ist. Die Tatsache, dass nur eine schriftliche Subtraktionsaufgabe bearbeitet werden musste, hemmt zusätzlich eine konkrete Analyse. Um eine allgemeingültige Aussage über den Zusammenhang zwischen dem mathematischen Verständnis und der sprachlichen Kompetenz treffen zu können, müssten mehrere Aufgaben analysiert werden. Dennoch lässt sich festhalten, dass zu viele SuS Probleme in den untersuchten mathematischen Bereichen haben. Allerdings ist es schwierig, einen Zusammenhang zum fachlichen Verständnis herzuleiten. Sicherlich sind nicht alle aufgetretenen Fehler beim schriftlichen Subtraktionsalgorithmus oder beim Lösen der Sachrechenaufgabe auf mangelndes Verständnis zurückzuführen. So treten u.a. in den unterschiedlichsten Bereichen (Einspluseins, Addition statt Subtraktion, Übertragsfehler, Lesen der Aufgabe etc.) auch Flüchtigkeitsfehler auf. Trotzdem lässt sich anhand mancher Texte erkennen, dass fachliche Kenntnisse und Fertigkeiten teilweise auswendig gelernt wurden, was ein nachhaltiges Lernen in der Regel verhindert. Ruf und Gallin betonen, dass nur verstandenes Wissen, welches nicht auswendig gelernt ist, langfristig abgerufen werden kann. Somit gibt es zumindest einen Zusammenhang zwischen auswendig abgerufenem Wissen und mangelndem Verständnis. Als Konsequenz für den Mathematikunterricht bedeutet das, dass der Algorithmus in der Schule viel zu früh automatisiert wird. Die SuS halten sich an feste Abläufe und wenden Begriffe automatisiert an, ohne die einzelnen Schritte detailliert zu betrachten sowie mit unterschiedlichem Material zu untermauern. In der Grundschule werden die unterschiedlichen Subtraktionsverfahren und - techniken häufig nicht alle präsentiert, sondern die Lehrkraft entscheidet sich vor der Thematisierung im Unterricht für einen möglichen Weg – den die SuS oft übernehmen (müssen). Aber gerade der Vergleich zwischen diesen verschiedenen Methoden bietet zahlreiche Gesprächsanlässe, welche zum besseren Verständnis beitragen könnten. Ein sprachlicher Austausch wäre für ein nachhaltiges mathematisches Wissen folglich eine Grundvoraussetzung. Die grundlegende Veränderung, der Sprache im Mathematikunterricht eine noch größere Bedeutung als bisher beizumessen, hat jedoch zur Folge, dass sich Lehrkräfte dieser Relevanz bewusst sein und den Unterricht entsprechend vorbereiten müssen. Das erfordert die Bereitschaft, den Unterricht offener zu gestalten und mehr Raum für die individuellen Lösungswege der SuS einzuräumen. Infolgedessen sollte die Lehrkraft über ein fundiertes mathematisches Wissen verfügen, so dass sie in der Lage ist, spontan auf die Gedanken und Äußerungen der SuS zu reagieren. Viele Lehrkräfte halten sich hingegen gerne an das Buch. Dies unterstützt jedoch nur kaum die Forderung nach einer größeren Gewichtung der Sprache im Mathematikunterricht.

Bezüglich der schriftlichen Subtraktion bleibt festzuhalten, dass ein selbständiges Entdecken des Algorithmus' eine Möglichkeit darstellt, die SuS ins Gespräch zu bringen. Für ein besseres Verständnis sollten beide Verfahren und alle Übertragstechniken thematisiert werden. Erst durch das Untersuchen der verschiedenen Methoden können Chancen und Grenzen der einzelnen Verfahren herausgearbeitet und ein tieferes Verständnis herbeigeführt werden. Des Weiteren werden nicht selten im Mathematikunterricht Begriffe eingeführt, die später leider kaum noch Beachtung finden. Bei der schriftlichen Subtraktion werden z.B., die Termini *Minuend* und *Subtrahend* verwendet, die aber mit zunehmender Sicherheit in der Anwendung des Algorithmus' vernachlässigt werden. Für die SuS ist in der Regel nicht nachvollziehbar, warum diese Begriffe zunächst eingeführt und behalten werden sollen. Es fehlt den meisten SuS eine nachvollziehbare Begründung für das Verwenden eben dieser mathematischen Begriffe. Durch einen möglichen Vergleich zwischen Fachsprache und Alltagssprache könnten Verständnislücken abgebaut werden. So könnten die SuS die Begriffe *Minuend* und *Subtrahend* alltagssprachlich ausdrücken. Das Zusammenführen von Alltags- und Fachsprache eröffnet somit die Möglichkeit, mathematische Zusammenhänge zu verdeutlichen und ein besseres Verständnis zu erzielen. Allerdings fällt bei solchen Vergleichen auf, dass auch die Ausdrucksfähigkeit in der Alltagssprache immer mehr abnimmt. Viele SuS sind mittlerweile hinsichtlich ihrer Ausdrucksfähigkeit eingeschränkt. Da Sprache im Verstehensprozess jedoch eine wesentliche Rolle spielt, liegt es auf der Hand, dass zwangsläufig auch das Verständnis mathematischer Zusammenhänge auf der Strecke bleibt. Um dieser Misere entgegenzuarbeiten, ist es erforderlich, dass man den SuS die Möglichkeit für einen sprachlichen Austausch einräumt. Dabei ist es ganz gleich, in welcher Form dies geschieht. Festzuhalten bleibt, dass Problemstellungen mehr Einzug in den Unterricht erhalten müssen, die zu einer aktiven Auseinandersetzung auffordern. Dies zeigte sich auch für den Bereich des Sachrechnens. Nur durch den Einsatz von Problemlöseaufgaben können eben auch Problemlösekompetenzen gefördert werden. So tragen Rechenkonferenzen zu einem sprachlich gestützten Mathematikunterricht bei. Begleitend sollte der Umgang mit Fachsprache im Unterricht berücksichtigt werden – z.B. durch Wortspeicher, Plakate, etc.. Dabei spielt Wortschatzarbeit, Begriffsbildung und auch Satzbildung eine große Rolle. Wie wichtig die Syntax ist, zeigt das abschließende Beispiel, bei dem der umgangssprachliche Text und die Formel hinsichtlich ihrer

Struktur sehr ähnlich aufgebaut sind. Es obliegt dem Leser, sich mit diesen Analogien genauer auseinanderzusetzen.

Ein Satz in der Alltagssprache:

Er ritt mit einer Horde junger Pferde, glänzendes Fell und guter Körperbau, ins Ausland und überlegte, wie er den Gewinn, den damit er auf den Auktionen erreichen möchte, anlegen will: einen Teil als Investition auf einen neuen Gewinn, einen Teil aber zum Verprassen: als er an den Nil kam und bei einer stattlichen Pyramide einen Grenzübergang erreichte, den er sonst nie auf diesem Weg gefunden hätte.

Ein „Satz" in der Formelsprache:

$(a + b \bullet (c + d)) + a \bullet e\,(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}) + a \bullet (h - g)$[219]

[219] vgl. Niederdrenk-Felgner (2000), S.7.

I. Literaturverzeichnis

BLANKENAGEL, Jürgen (1994): Elemente der angewandten Mathematik. Mannheim Leipzig Wien Zürich. BI-Wissenschaftsverlag.

BREDEL, Ursula; Fuhrhop, Nanna; Noack, Christina (2011): Wie Kinder lesen und schreiben lernen. Tübingen. Gunter Narr Verlag.

BÜHLER, Karl (1934): Sprachtheorie: die Darstellungsfunktion der Sprache. Stuttgart. G. Fischer.

CARTER, Rita (2014): Das Gehirn. Anatomie, Sinneswahrnehmung, Gedächtnis, Bewusstsein, Störungen. München. Dorling Kindersley Verlag.

CHOMSKY, Noam (1980): Rules and Representations. Columbia University Press, New York.

DEHAENE, Stanislas (1992): Varieties of numerical abilities. In: Cognition, 44(1-2), S. 1-42. Review.

DUNCKER, Karl (1935): Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin Göttingen Heidelberg. Springer-Verlag.

ENDRUWEIT, Günter; Trommsdorf, Gisela (1989): Wörterbuch der Soziologie. Stuttgart. Ferdinand Enke Verlag.

FATKE, Reinhard (2016): Jean Piaget. Meine Theorie der geistigen Entwicklung. Weinheim. Beltz.

FRANKE, Marianne (2001): Strategiekonferenzen. In: Grundschule 2. Braunschweig. Westermann Gruppe. S. 19-20.

FRANKE, Marianne (2003): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Berlin Heidelberg. Spektrum.

FRITZ, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (2009): Handbuch Rechenschwäche. 2. völlig überarbeitete Auflage. Weinheim. Beltz.

HALLIDAY, Michael Alexander Kirkwood (1978): Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning. London. Edward Arnold.

HEINZE, Klaus; Manten, Ursula; Hütten, Gudrun (2009a): Super M 4. Mathematik für alle. Berlin. Cornelsen Verlag.

HEINZE, Klaus; Manten, Ursula; Hütten, Gudrun (2009b): Super M 4. Aufstiege. Berlin. Cornelsen Verlag.

JAKOBSON, Roman (1969): Kindersprache, Aphasie und allgemeine Lautgesetze. Berlin. edition suhrkamp SV.

KEMNITZ, Arnfried (2010): Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge. Wiesbaden. Vieweg Teubner Verlag.

KRAUTER, Siegfried (2008): Fachdidaktische Beiträge zum Sachrechnen im Mathematikunterricht.
https://www.ph-ludwigsburg.de/fileadmin/subsites/2e-imix-t-01/user_files/Veranstaltungsmaterialien_offen/Zusatzmaterialien/Skripte_Krauter/FD_Sachrechnen_2014_11_10.pdf (zuletzt geöffnet am 28.08.2015).

KRAUTHAUSEN, Günter (1993): Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), H. 3/4. S. 189-219.

KRAUTHAUSEN, Günter; Scherer, Petra (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. Berlin Heidelberg. Springer-Verlag.

KULTUSMINISTERIUM des Landes Nordrhein-Westfalen (1985): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen. Ritterbach Verlag GmbH.

LAMBERT, Katharina (2015): Rechenschwäche. Grundlagen, Diagnose und Förderung. Göttingen. Hogrefe-Verlag.

LEHMANN, Ingmar; Schulz, Wolfgang (1997): Mengen - Relationen - Funktionen. Berlin. Springer-Verlag.
LORENZ, Jens Holger (1997): Über Mathematik reden. Rechenstrategien von Kindern. In: Sache, Wort, Zahl 25. Aulis Verlag Deubner GmbH und Co. KG. S.22-28.

LORENZ, Jens Holger (2001): Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig. Westermann Schulbuchverlag GmbH.

LORENZ, Jens Holger; Schipper, Wilhelm (2007): Hendrik Radatz. Impulse für den Mathematikunterricht. Braunschweig. Schroedel.

MAIER, Hermann; Schweiger, Fritz (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien. öbv-Verlag.

MAYRING, Philipp (2002): Einführung in die qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zu qualitativem Denken. München. Psychologie Verlags Union 1990. 5. Auflage. Weinheim. Beltz Studium.

MELCHIOR, Wolfgang (2007): Sprachentwicklung, Spracherwerb, Mehrsprachigkeit, Sprachbarrieren. http://studylibde.com/doc/1991162/sprachentwicklung--spracherwerb--mehrsprachigkeit--sprach (zuletzt geöffnet am 27.05.2016).

MEYER, Hilbert (2011): Was ist guter Unterricht? Berlin. Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

MINISTERIUM für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012): Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes Nordrhein-Westfalen. Frechen. Ritterbach Verlag GmbH.

MINISTERIUM für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2012): Richtlinien. Frechen. Ritterbach Verlag GmbH.

MÜLLER, Gerhard N.; Wittmann, Erich Ch. (2000): Das Zahlenbuch 3. Lehrerband. Leipzig. Ernst Klett Verlag.

MÜLLER, Gerhard N.; Wittmann, Erich Ch. (2001): Das Zahlenbuch 4. Lehrerband. Leipzig. Ernst Klett Verlag.

NIEDERDRENK-FELGNER, Cornelia (2000): Algebra oder Abrakadabra. In: Mathematik lehren 99. Velber-Seelze. Friedrich-Verlag. S. 4-9.

OECD (2007): Education at a Glance 2007 - OECD Indicators. Paris.

PADBERG, Friedhelm (2008): Elementare Zahlentheorie. Heidelberg. Springer/Spektrum Akademischer Verlag.

PADBERG, Friedhelm; Büchter, Andreas (2015): Einführung Mathematik Primarstufe - Arithmetik. Berlin Heidelberg New York. Springer-Verlag.

PIMM, David (1987): Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classroom. London/New York. Routledge & Keagan Paul.

PREDIGER, Susanne; Renk, N.; Büchter, A.; Gürsoy, E.; Benholz, C. (2013): Family background or language disadvantages? Factors for underachievement in high stakes tests. In: Lindmeier/Heinze (Hrsg.): Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4. Kiel, Germany. PME, 4.49-4.56.

RASCH, Renate (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Seelze-Velber. Kalmmeyer.

REISS, Christina; Schmieder, Gerald (2014): Basiswissen Zahlentheorie. Berlin Heidelberg. Springer-Verlag.

RÖBKEN, Heinke; Wetzel, Kathrin (2016): Qualitative und quantitative Forschungsmethoden. 2. Auflage. Oldenburg. Carl von Ossietzky Universität Oldenburg.

RÖHNER, Jessica; Schütz, Astrid (2012): Psychologie der Kommunikation. Wiesbaden. Springer-Verlag. S. 15-33.
ROELCKE, Thorsten (1999): Fachsprachen. Grundlagen der Germanistik 37. Berlin. Schmidt.

ROST, Jürgen (2012): Qualitative und quantitative Methoden. Eine integrative Sichtweise. In: Baros, Wassilios; Rost, Jürgen (Hrsg.): Natur- und kulturwissenschaftliche Perspektiven in der Psychologie. Methodologie, Methoden, Anwendungsbeispiele. Berlin. Regener. S. 133-150.

RUF, Urs; Gallin, Peter (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Kallmeyer, Seelze-Velber

RUF, Urs; Gallin, Peter (2005a): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen. 3. Auflage. Kallmeyer, Seelze-Velber.

RUF, Urs; Gallin, Peter (2005b): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 2: Spuren legen - Spuren lesen. 3. Auflage. Kallmeyer, Seelze-Velber

SCHEID, Harald; Schwarz, Wolfgang (2016): Elemente der Arithmetik und Algebra. Berlin Heidelberg New York. Springer-Verlag.

SALDERN, Matthias von (1992): Qualitative Forschung - quantitative Forschung: Nekrolog auf einen Gegensatz. Empirische Pädagogik. 6, 377-399.

SCHIPPER, Wilhelm; Ebeling, Astrid; Dröge, Rotraut (2008a): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. 1. Schuljahr. Braunschweig. Schroedel Verlag GmbH.

SCHIPPER, Wilhelm; Ebeling, Astrid; Dröge, Rotraut (2008b): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. 3. Schuljahr. Braunschweig. Schroedel Verlag GmbH.

SCHMIDT-THIEME, Barbara (2002): Reflexion über Mathematik in Briefen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim. WTM-Verlag. S. 439-442.

SCHMIDT-THIEME, Barbara (2004): Zur Exaktheit der Sprache im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. WTM-Verlag. Hildesheim. S. 513-516.

SCHMIDT-THIEME, Barbara (2005): „Lieber Squarry!“. Schüler reflektieren über Mathematik in Briefen. Preprint BiKon 2005/6.

SCHNABEL, Joachim; Trapp, Anja (2015): Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen - Musteraufgaben - Materialien. Augsburg. Auer Verlag.

SCHRÜNDER-LENZEN, Agi (2013): Schriftspracherwerb. Berlin Heidelberg New York. Springer-Verlag.

SCHÜTZ, Peter (1994): Forscherhefte und mathematische Konferenzen. In: Die Grundschulzeitschrift 74. Velber-Seelze. Friedrich-Verlag. S. 20-22.

SCHULTZ VON THUN, Friedemann; Sundmacher, Maren: (2013): Miteinander reden 1. Störungen und Klärungen. Allgemeine Psychologie der Kommunikation. 1. Aufl.. Reinbek bei Hamburg. Rowohlt Verlag GmbH.

SELTER, Christoph (1996): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht. In: Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main. Arbeitskreis Grundschule e.V. S. 138-150.

STRAMPP, Walter (2002): Elementare Mathematik. Vor- und Aufbaukurs. München. Oldenbourg-Verlag.

STRANG, Gilbert (2003): Lineare Algebra. Berlin Heidelberg. Springer-Verlag.

TRAUT-MATTAUSCH, Eva; Frey, Dieter (2006): Kommunikationsmodelle. In: Handbuch der Sozialpsychologie und Kommunikationspsychologie. Göttingen. Hogrefe-Verlag.

VERBOOM, Lilo (2013): Leichter gesagt. Komponenten eines sprachförderlichen Unterrichts. In: Grundschule Mathematik 39. Velber-Seelze. Friedrich Verlag.

WINTER, Heinrich (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61. S. 37-46.

WIMMER, Michaela (2008): Sprache im Geometrieunterricht der Grundschule. Eine qualitative Studie anhand der verbalen Handlungsanleitung zur Herstellung des Kantenmodells eines Würfels in den Jahrgangsstufen 2 bis 4. Dissertation, LMU München: Fakultät für Psychologie und Pädagogik.

WITTMANN, Erich Ch. (1976): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig. Vieweg Verlag.

WOLF, Willi (1995): Qualitative versus quantitative Forschung. In: König, Eckard; Zedler, Peter (Hg.): Bilanz qualitativer Forschung. Bd. I: Grundlagen qualitativer Forschung (S. 309–329). Weinheim. Beltz.

WOLF, Bernhard; Priebe, Michael (2003): Wissenschaftstheoretische Richtungen. Forschung, Statistik und Methoden. 3.Auflage. Landau. Verlag Empirische Pädagogik.

II. Abkürzungsverzeichnis

AB	Arbeitsblatt
Abb.	Abbildung
Aufg.	Aufgabe
BK	Berufskolleg
bspw.	beispielsweise
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
EA	Einzelarbeit
ebd.	ebenda
etc.	et cetera
evtl.	eventuell
f.	folgende
ff.	fortfolgende
GA	Gruppenarbeit
ggf.	gegebenenfalls
Hrsg.	Herausgeber
KMK	Kultusministerkonferenz
L	Lehrkraft
LuL	Lehrerinnen und Lehrer
MSWWF	Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung
MU	Mathematikunterricht
o.g.	oben genannt(e)
OHP	Over-Head-Projektor
PA	Partnerarbeit
PISA	Programme for International Student Assessment
S.	Seite
SuS	Schülerinnen und Schüler
TIMSS	Third International Mathematics and Science Study
u.U.	unter Umständen
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

III. Abbildungsverzeichnis

IV. Tabellenverzeichnis

V. Anhang

BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Liebe/r Teilnehmer/in, im Rahmen meiner Promotion habe ich, Vanessa Klein, wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Bergischen Universität Wuppertal, den folgenden Fragebogen zur schriftlichen Subtraktion entworfen. Ich möchte Sie einladen, an dieser Befragung teilzunehmen. Ihre Teilnahme ist freiwillig und alle Ihre Angaben werden ausschließlich anonym ausgewertet und nicht an Dritte weitergegeben. Herzlichen Dank für Ihre Mitarbeit!

Persönliche Angaben zur statistischen Auswertung

Geschlecht: □ männlich □ weiblich

Alter: __________ Jahre

Schulform:
□ Grundschule, Klasse: _______ □ Hauptschule, Klasse: _______
□ Realschule, Klasse: _______ □ Gymnasium, Klasse: _______
□ Berufskolleg, Klasse: _______
□ Universität

Welche Sprache(n) sprichst du/ sprechen Sie zu Hause?
□ Englisch □ Französisch
□ Spanisch □ Deutsch
□ Russisch □ Polnisch
□ Türkisch □ Arabisch
□ andere, und zwar ____

Bist du/Sind Sie in Deutschland geboren?
□ Ja
□ Nein, sondern in ____
Ich lebe seit _____ Jahren in Deutschland.