Zur Existenz von Rechtsinversen linearer partieller Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten auf $B_{p,\kappa}^{loc}(\Omega)$-Räumen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Dem Fachbereich C (Mathematik und Naturwissenschaften) der Bergischen Universität Wuppertal
vorgelegt von

Volker Hermanns

unter der Betreuung von

Prof. Dr. D. Vogt

24. Juli 2005

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20050220

[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20050220]

Einleitung

Im Jahre 1990 gelang R. Meise, B. A. Taylor und D. Vogt in [MTV90] die vollständige Beantwortung der Frage, für welche surjektiven partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten

$$P(D) : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$$

beziehungsweise

$$P(D) : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$$

die Lösung der Gleichung

$$P(D)g = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha i^{-|\alpha|} g^{(\alpha)} = f, \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

durch einen stetigen, linearen Operator

$$R : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega) \qquad \text{bzw.} \qquad R : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$$

gegeben werden kann. In dieser Veröffentlichung zeigten sie u.a. die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(MTV i.) Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ existiert eine kompakte Menge L mit der Eigenschaft $K \subset L \subset \Omega$ derart, dass für jede in Ω relativ kompakte Teilmenge ω mit $L \subset \omega$ Parameter $s \in \mathbb{N}_0$ und $D > 0$ existieren, so dass für jedes $\nu \in \mathscr{E}'(\omega)$ mit

$$P(-D)\nu|_{\omega \setminus K} \in B^0$$

bereits

$$\nu|_{\omega \setminus L} \in D \cdot B^{-s}(\omega \setminus L)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet B^0 die abgeschlossene Einheitskugel in $L_2(\mathbb{R}^n)$ und $B^{-s}(\omega \setminus L)$ die abgeschlossene Einheitskugel des Sobolevraums $W^{-s}(\omega \setminus L)$.
(In diesem Fall nennt man Ω auch *P-konvex mit Schranken* in Anlehnung an den Begriff der P-Konvexität (siehe 1.3).)

(MTV ii.) $P(D) : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ besitzt eine stetige, lineare Rechtsinverse.

(MTV iii.) $P(D) : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$ besitzt eine stetige, lineare Rechtsinverse.

Darüber hinaus konnten sie die Äquivalenz zu folgenden Bedingungen zeigen:

(MTV iv.) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $0 < \zeta_0 < \epsilon$, so dass für alle $0 < \sigma < \eta < \zeta < \zeta_0$ und alle $\xi \in \Omega_\eta \setminus \overline{\Omega_\zeta}$ es ein $E_\xi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass Folgendes gilt:

1. $\operatorname{supp}(E_\xi) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_\epsilon) - \xi$,
2. $P(D)E_\xi = \delta_0 + T_\xi$, wobei $\operatorname{supp}(T_\xi) \subset (\Omega_\sigma \setminus \overline{\Omega_\eta}) - \xi$.

(MTV v.) Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $0 < \zeta < \epsilon$, so dass es für jedes $\mu \in \mathscr{N}(\Omega_\zeta)$ ein $\nu \in \mathscr{N}(\Omega)$ gibt mit $\mu|_{\Omega_\epsilon} = \nu|_{\Omega_\epsilon}$.

Dabei wurde in den letzten beiden Bedingungen die Schreibweisen

$$\Omega_\lambda := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \lambda \text{ und } |x| < \tfrac{1}{\lambda}\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

und

$$\mathscr{N}(\Omega) := \{f \in \mathscr{D}'(\Omega) : P(D)f = 0\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

benutzt und mit δ_0 die Dirac-Distribution an der Stelle 0 bezeichnet.

Im Fall konvexer Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konnten Meise, Taylor und Vogt eine Charakterisierung durch eine Phragmén-Lindelöf-Bedingung zeigen (siehe dazu Kapitel 3.3):

(MTV vi.) P erfüllt die Bedingung $PL(\Omega)$.

Im Jahre 1996 wurden diese Ergebnisse auf den Fall nicht-quasianalytischer Klassen und Ultradistributionen in [MTV96b] verallgemeinert und 1997 für Faltungsoperatoren auf Räumen von ultradifferenzierbaren Funktionen auf beliebigen offenen Mengen dargestellt (siehe [BFM97]).

Will man nun Regularitätsaussagen über distributionelle Lösungen u der Differentialgleichung

$$P(D)u = f$$

treffen, so kann dies beispielsweise mit Hilfe des Verhaltens der Fourier-Transformierten $\hat{u}$ im Unendlichen geschehen. Um den Differentialoperator zwischen in diesem Sinne klassifizierten Distributionenräumen zu betrachten, gehen wir wie folgt vor (siehe dazu [Hoer83b], Kapitel 10):
Wir betrachten die Menge $\mathscr{K}$ derjenigen positiven Funktionen $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass es positive Konstanten C und N derart gibt, so dass

$$\kappa(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N \kappa(\eta); \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$$

erfüllt ist (sogenannte temperierte Gewichtsfunktionen). Die Menge der temperierten Distributionen mit der Eigenschaft $\kappa \cdot \hat{u} \in L^p$ sind die Banachräume $B_{p,\kappa}$. Die Menge der $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, für die $u \cdot \varphi \in B_{p,\kappa}$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ gilt, wird mit $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ bezeichnet und ist ein Fréchetraum.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine P-konvexe, offene Menge und $1 \leq p < \infty$. Betrachten wir nun den mit Hilfe der temperierten Gewichtsfunktion

$$\tilde{P}(\xi) := \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} P(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \cdots \partial \xi_n^{\alpha_n}} \right|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

definierten partiellen Differentialoperator

$$P(D) : B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \to B_{p,\kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega), \tag{1}$$

so folgt, dass dieser surjektiv ist (siehe dazu [Hoer63], Theorem 3.5.5).
Für (1) können wir jetzt ebenfalls die Frage nach der Existenz einer Rechtsinversen stellen, d. h. die Frage nach der Existenz eines stetigen, linearen Operators

$$R : B_{p,\kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega) \to B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$$

mit der Eigenschaft $P(D)Rf = f$ für jedes $f \in B_{p,\kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega)$. Diesen wollen wir im Folgenden als (p,κ)-Rechtsinverse des Operators $P(D)$ auf Ω bezeichnen.

Die vorliegende Arbeit ist der Beantwortung dieser Fragestellung gewidmet. Grundlage hierzu bildet die Veröffentlichung [MTV90]. Dabei wurde untersucht, inwiefern sich die Bedingungen (MTV i.) – (MTV vi.) auf $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$-Räume übertragen lassen.

Weiterhin wurde untersucht, welche Beziehungen zwischen den Bedingungen für die $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$-Räume und den oben angegebenen Bedingungen bestehen.

Die Hauptresultate dieser Arbeit sind:

Theorem A Für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $p \in [1, \infty)$ ist der Raum $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ isomorph zum Raum $(\ell_p)^{\mathbb{N}}$.

Mit Hilfe dieses Isomorphismus kann dann im Fall P-konvexer Mengen Ω für $p \in \{1, 2\}$ die Existenz einer (p, κ)-Rechtsinversen vollständig durch den Kern von $P(D)$ charakterisiert werden:

Theorem B Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ P-konvex und $p \in \{1, 2\}$, $\kappa \in \mathscr{K}$. Dann sind äquivalent:

1. Der Kern des Differentialoperators $P(D) : B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega)$ ist eine Quojektion (siehe Definition 1.21).
2. Für jede in Ω offene, relativ kompakte Teilmenge U existiert eine offene, relativ kompakte Teilmenge $V \supset\supset U$ von Ω derart, dass für jedes $f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega, V)$ ein $g \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega, U)$ mit $P(D)g = f$ existiert.
3. Für jede in Ω offene, relativ kompakte Teilmenge U existiert eine offene, relativ kompakte Teilmenge $V \supset\supset U$ von Ω derart, dass für jedes $f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(V)$ mit $P(D)f = 0$ ein $g \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ mit $P(D)g = 0$ und $g_{|U} = f_{|U}$ existiert.
4. Für das Paar (p,κ) besitzt $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf Ω.

Theorem C Für ein nicht-konstantes, komplexes Polynom P sind äquivalent:

1. $P(D)$ ist hyperbolisch in Bezug auf jeden nicht-charakteristischen Vektor $N \in \mathbb{R}^n$.
2. Für jedes Paar $(p,\kappa) \in [1, \infty) \times \mathscr{K}$ und jede offene, konvexe Menge Ω besitzt $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse.
3. Es existiert eine offene, beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand und ein Paar $(p,\kappa) \in [1, \infty) \times \mathscr{K}$ derart, dass der Operator $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse besitzt.
4. Jede offene, konvexe Menge Ω ist P-konvex mit Schranken.

5. Es existiert eine offene, beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand, welche P-konvex mit Schranken ist.

Abschließend kann noch das folgende Theorem gezeigt werden:

Theorem D Ist $\text{grad}(P) = 2$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$, so sind äquivalent:

1. Ω ist P-konvex mit Schranken.
2. Für alle Paare $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ besitzt der Operator $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf Ω.
3. Es existiert ein Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ mit der Eigenschaft, dass der Operator $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf Ω besitzt.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

In Kapitel 1 werden wir die benötigten Grundlagen bereitstellen. Die hier betrachteten Räume werden definiert und elementare Eigenschaften dieser Räume angegeben.
Die Grundlage für die späteren Untersuchungen zur Charakterisierung der Existenz einer Rechtsinversen R von partiellen Differentialoperatoren zwischen $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$-Räumen ist die Existenz eines Isomorphismus

$$T: \; B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \longrightarrow (\ell_p)^{\mathbb{N}}.$$

Dieser Isomorphismus wird im Rahmen des Theorems A konstruiert. Da diese Konstruktion aufwendiger ist, wird sie im Kapitel 2 getrennt behandelt.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit Charakterisierungen für die Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen im Sinne von topologischen Bedingungen.
Wir behandeln den Spezialfall $p \in \{1, 2\}$, in welchem wir mit Hilfe des in Kapitel 2 in Theorem A konstruierten Isomorphismus eine Charakterisierung der Existenz einer (p, κ)-Rechtsinversen mittels des Kerns des Differentialoperators $P(D)$ erhalten (Theorem B). Schließlich erhalten wir so eine Charakterisierung im Sinne des Kernduals für den Fall $p = 2$. Daraufhin zeigen wir, wo Probleme bei der Übertragung von Phragmén-Lindelöf-Bedingungen mit den Techniken aus [MTV90] auftreten.

In Kapitel 4 betrachten wir Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen auf den Räumen $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ und den Ergebnissen aus [MTV90]. Wir stellen Ergebnisse für hyperbolische Operatoren vor (Theorem C) und beweisen zuletzt eine Charakterisierung der Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen im Fall $\mathrm{grad}(P)=2$ und $\Omega=\mathbb{R}^n$ (Theorem D).

In Kapitel 5 formulieren wir ein offenes Problem, durch dessen Lösung die Äquivalenz der P-Konvexität mit Schranken mit der Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen in der vollen Allgemeinheit folgt und zwei weitere wichtige offene Fragestellungen.

Abschließend möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. D. Vogt für das interessante Thema und seine Unterstützung bei der Anfertigung der Arbeit bedanken. Ebenfalls möchte ich den Herren PD Dr. Leonhard Frerick sowie Dr. Daren Kunkle für die wertvollen Anregungen und ihre ständige Diskussionsbereitschaft danken und Herrn Prof. Dr. A. Duma für die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten in seinem Lehrgebiet.

Wuppertal, 24. Juli 2005 Volker Hermanns

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL I

Präliminarien

In diesem Abschnitt führen wir Bezeichnungen ein, welche in den späteren Abschnitten benötigt werden. Anschließend stellen wir die wichtigsten Grundlagen über die Räume $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ zusammen. Wir setzen voraus, dass der Leser mit den Räumen $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$ und $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sowie deren Dualräumen vertraut ist. Für allgemeine funktionalanalytische Tatsachen verweisen wir auf [MeVo92]; im Hinblick auf Distributionstheorie und die Theorie bezüglich spezieller Distributionenklassen verweisen wir auf [Hoer63], [Hoer83a] und [Hoer83b].

1.1 Notationen und Definitionen

Sei $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ ein Polynom in n Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und komplexen Koeffizienten. Wir bezeichnen mit $P(D)$ den zugehörigen partiellen Differentialoperator

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, und

$$D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

sei. Mit P_m bezeichnen wir den Hauptteil des Polynoms P, der durch

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$$

gegeben ist.

1.1 Definition
Sei $h \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor. Die Translation $\tau_h f$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Die Translation $\phi \mapsto \tau_h \phi$ ist eine stetige Abbildung auf dem Raum der Testfunktionen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Definition
Sei $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathbb{R}^n$. Die Translation $\tau_h u$ von u ist die Distribution

$$\tau_h u(\phi) = u(\tau_{-h}\phi) = u_x(\phi(x+h)), \quad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

wobei die Notation u_x bedeutet, dass u auf der Funktion $x \mapsto \phi(x+h)$ operiert.

Bemerkung: Wir werden später statt $\tau_h u$ gleichbedeutend auch die suggestive Schreibweise $u(x-h)$ benutzen.

1.3 Definition
Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt P-konvex, falls für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ eine weitere kompakte Menge $K' \subset \Omega$ existiert, so dass aus

- $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$
- $\operatorname{supp}(P(-D)\varphi) \subset K$

bereits $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K'$ *folgt.*

Bemerkung: Da für Elemente $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ die konvexe Hülle von $\operatorname{supp}(u)$ mit der konvexen Hülle von $\operatorname{supp}(P(-D)u)$ übereinstimmt, sind offene, konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ stets P-konvex.

1.2 Der Raum $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$

In diesem Abschnitt führen wir zunächst die $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$-Räume ein und geben die für die späteren Untersuchungen entscheidenden Eigenschaften für diese Räume an. Wir folgen dabei den Inhalten der Kapitel 2 und 3 aus [Hoer63].

1.4 Definition
Eine positive Funktion $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *heißt* temperierte Gewichtsfunktion, *falls Konstanten* C, $N > 0$ *unabhängig von* ξ *und* η *mit der Eigenschaft*

$$\kappa(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N \kappa(\eta) \quad \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^n$$

existieren.

Die Menge aller solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{K}$.

Temperierte Gewichtsfunktionen sind aufgrund der sich aus der Definition ergebenden Abschätzung

$$(1 + C|\xi|)^{-N} \leq \frac{\kappa(\xi + \eta)}{\kappa(\eta)} \leq (1 + C|\xi|)^N; \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$$

stetig. Die Funktionen

$$M_\kappa(\xi) := \sup_\eta \frac{\kappa(\xi + \eta)}{\kappa(\eta)} \quad \text{sowie} \quad \tilde{P}(\xi) := \sqrt{\sum_{|\alpha| \geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2}$$

für ein Polynom P sind wichtige Beispiele von Elementen aus $\mathscr{K}$. Dabei ist

$$P^{(\alpha)}(\xi) := \frac{\partial^{|\alpha|} P(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \cdots \partial \xi_n^{\alpha_n}}.$$

Bemerkungen: Die Funktion M_κ ist die kleinste Funktion mit der Eigenschaft

$$\kappa(\xi + \eta) \leq M_\kappa(\xi) \kappa(\eta); \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \ .$$

Ferner bleiben für $\kappa, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathscr{K}$ die Funktionen $\kappa_1 + \kappa_2$, $\kappa_1 \cdot \kappa_2$ und für $s \in \mathbb{R}$ auch κ^s im Raum $\mathscr{K}$.

1.5 Definition
Ist $\kappa \in \mathscr{K}$ *und* $1 \leq p \leq \infty$, *so bezeichnen wir mit* $B_{p,\kappa}$ *die Menge*

$$\left\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \hat{u} \in L_1^{\ell oc}(\mathbb{R}^n) \text{ und } \|u\|_{p,\kappa} < \infty \right\},$$

wobei

$$\|u\|_{p,\kappa} := \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\kappa(\xi)\hat{u}(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

und

$$\|u\|_{\infty,\kappa} := \inf \left\{ \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus N} |\kappa(\xi)\hat{u}(\xi)| : N \subset \mathbb{R}^n \text{ ist Nullmenge} \right\}$$

gesetzt wird.

1.6 *Die Räume $B_{p,\kappa}$ sind Banachräume mit den zuvor angegebenen Normen und es gilt*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,\kappa} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

mit stetigen Inklusionen.

Das Produkt einer schnellfallenden Funktion mit einem Element aus $B_{p,\kappa}$ ist wieder in $B_{p,\kappa}$ enthalten, denn aufgrund der Formel für die Fouriertransformation eines Produktes, der in obiger Bemerkung angegebenen Eigenschaft temperierter Gewichtsfunktionen und der Minkowski-Ungleichung gilt die folgende Aussage:

1.7 *Ist $u \in B_{p,\kappa}$ und $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\|\phi u\|_{p,\kappa} \le \|\phi\|_{1,M_\kappa} \|u\|_{p,\kappa} .$$

Dadurch ist es nun möglich, einen Unterraum von $\mathscr{D}'(\Omega)$ zu definieren, dessen Elemente sich lokal wie die Elemente aus $B_{p,\kappa}$ verhalten, jedoch unkontrolliertes Randwachstum besitzen können:

1.8 Definition
Der lokale $B_{p,\kappa}$-Raum zum Index $1 \le p \le \infty$ und Gewicht $\kappa \in \mathscr{K}$ ist der Raum

$$B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) := \{u \in \mathscr{D}'(\Omega) : \phi u \in B_{p,\kappa} \text{ für alle } \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\} .$$

Bemerkung: Der Raum $B_{p,\kappa}|_\Omega$ der Einschränkungen der Elemente von $B_{p,\kappa}$ auf die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat wegen 1.7 die Eigenschaft, unter Produktbildung mit Elementen aus $\mathscr{D}(\Omega)$ stabil zu sein. Man bezeichnet einen Unterraum von $\mathscr{D}'(\Omega)$ mit dieser Eigenschaft als semi-lokalen Raum. Der

Raum $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ besitzt zusätzlich die folgende Eigenschaft: Ist $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ und gilt $\varphi u \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, dann ist $u \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$.
Damit wird $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ zu einem sogenannten lokalen Raum.

Eine wichtige Information über die Bildmenge eines linearen, partiellen Differentialoperators $P(D) : B_{p,\kappa_1}^{\ell oc}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ ergibt die folgende Aussage, welche man mit der Identität $(P(D)u)\hat{}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi)$ beweist:

1.9 *Ist* $u \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$, *so gilt* $P(D)u \in B_{p,\ \kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega)$.

Die nächste Tatsache sichert die Existenz von Fundamentallösungen für $P(D)$ mit maximaler Regularität:

1.10 *Zu jedem partiellen Differentialoperator P(D) existiert eine Fundamentallösung* $E \in B_{\infty,\tilde{P}}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung: Dabei ist $B_{\infty,\tilde{P}}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ im $B_{p,\kappa}^{\ell oc}$-Sinne der bestmögliche Raum. Denn mit $E \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ ist wegen 1.9 dann $\delta_0 \in B_{p,\kappa/\tilde{P}}$ beziehungsweise $\kappa/\tilde{P} \in L_p$. Dies jedoch impliziert im Falle $\tilde{P}\hat{u} \in L_\infty$ dann $\kappa\hat{u} \in L_p$ beziehungsweise $B_{\infty,\tilde{P}}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$.

Mit Hilfe der Aussage aus 1.10 beweist Hörmander das folgende zentrale Surjektivitätsresultat:

1.11 *Ist* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine P-konvexe offene Menge und* $f \in B_{p,\kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega)$, *wobei* $\kappa \in \mathscr{K}$ *und* $1 \leq p < \infty$. *Dann besitzt die Gleichung*

$$P(D)u = f$$

eine Lösung $u \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$.

Zur Konstruktion von Rechtsinversen sind oftmals Faltungen sehr hilfreich; wegen $(u_1 * u_2)\hat{} = \hat{u}_1\hat{u}_2$ erhalten wir die folgende Tatsache:

1.12 *Ist* $u_1 \in B_{p,\kappa_1} \cap \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *und* $u_2 \in B_{\infty,\kappa_2}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt* $u_1 * u_2 \in B_{p,\kappa_1\cdot\kappa_2}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$.

Um ein abzählbares Fundamentalsystem von Halbnormen

$$u \mapsto \|\varphi_\nu u\|_{p,\kappa}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

für den Raum $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ zu erhalten, wählen wir eine Ausschöpfungsfolge von kompakten Teilmengen $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ von Ω und hierzu eine Folge von Testfunktionen $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ mit der Eigenschaft $\varphi_{\nu|K_\nu} \equiv 1$. Es gilt dann:

1.13 *Für jede offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der Raum $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ ein Fréchetraum mit der durch die Halbnormen $\|u\|_{p,\kappa,\varphi} := \|\varphi u\|_{p,\kappa}$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, induzierten Topologie und es gilt*

$$\mathscr{E}(\Omega) \subset B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$$

mit stetigen Inklusionen.

1.3 Induktive und projektive Topologien

In diesem Abschnitt wollen wir an die projektiven beziehungsweise induktiven Topologien erinnern. Wir stellen kurz die grundlegenden Definitionen und Sätze über diese Topologien zusammen; weiterführende Tatsachen finden sich beispielsweise in [MeVo92] oder [Koethe66].

1.14 Definition
Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie lokalkonvexer Räume und $\iota_n : E \to E_n$ eine Familie linearer Abbildungen derart, dass für $0 \neq x \in E$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\iota_n(x) \neq 0$. Die durch das Halbnormensystem

$$\{\max_{n\leq k} p_n \circ \iota_n, k \in \mathbb{N}, p_n \text{ stetige Halbnorm auf } E_n\}$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie auf E heißt projektive Topologie.

1.15 Definition
*Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und p eine Halbnorm auf E.
Es sei $N_p := \{x \in E : p(x) = 0\}$, $\|x + N_p\|_p := p(x)$ und E_p die Vervollständigung des mit der Norm $\|\cdot\|_p$ versehenen Raums E/N_p. Diesen bezeichnen wir als den lokalen Banachraum zur Halbnorm p. Ferner gilt für die kanonische Abbildung $\iota^p : E \to E_p$, $\iota^p(x) := x + N_p$, die Gleichung $\|\iota^p(x)\|_p = p(x)$, $x \in E$.*

Bemerkung: Ist F ein Unterraum eines lokalkonvexen Raumes E und p eine stetige Halbnorm auf E, so gilt

$$F_{p_{|F}} \overset{\text{isometr.}}{\simeq} \overline{\iota^p(F)}^{E_p}.$$

1.16 Definition
Eine Familie lokalkonvexer Räume $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit einer Familie linearer, stetiger Abbildungen $i_n^k : E_k \to E_n$, $k \geq n$, heißt projektives Spektrum, in Zeichen $(E_n, i_n^k)_{n\leq k}$, falls die Bedingung $i_n^k = i_n^m \circ i_m^k$ für alle $k \geq m \geq n$ erfüllt ist.

1.17 Definition
Sei $(E_n, i_n^k)_{n\leq k}$ ein projektives Spektrum lokalkonvexer Räume. Ein lokalkonvexer Raum E zusammen mit einer Familie linearer, stetiger Abbildungen $i_n : E \to E_n$, $n \in \mathbb{N}$, heißt projektiver Limes des projektiven Spektrums $(E_n, i_n^k)_{n\leq k}$, in Zeichen $E = \underset{\leftarrow n}{proj}\, E_n$, falls gilt:

1. *$i_n^k \circ i_k = i_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq n$.*

2. *Ist F ein lokalkonvexer Raum und existieren für $k \in \mathbb{N}$ stetige lineare Abbildungen $j_k : F \to E_k$ mit $i_n^k \circ j_k = j_n$ für alle $k \geq n$, dann existiert genau eine stetige lineare Abbildung $j : F \to E$, so dass $j_k = i_k \circ j$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.*

1.18 Definition
Sei $\mathcal{E} := (E_n, i_n^k)_{n \leq k}$ ein projektives Spektrum und $E := \underset{\leftarrow n}{proj}\ E_n$.

- *$\mathcal{E}$ heißt reduziert, falls $\mathrm{im}(i_n)$ dicht in E_n für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt.*
- *$\mathcal{E}$ heißt strikt, falls die Abbildungen i_n für alle $n \in \mathbb{N}$ surjektiv sind.*

Bemerkung: Trivialerweise sind strikte projektive Spektren reduziert.

1.19 Definition
Zwei projektive Spektren $(E_n, i_n^m)_{n \leq m}$ und $(F_n, j_n^m)_{n \leq m}$ heißen äquivalent, falls es eine monoton wachsende Folge $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ und stetige, lineare Abbildungen $T_n^{k(n)} : F_{k(n)} \to E_n$ und $S_n^{k(n)} : E_{k(n)} \to F_n$ gibt, so dass

$$T_n^{k(n)} \circ S_{k(n)}^{k(k(n))} = i_n^{k(k(n))} \text{ und } S_n^{k(n)} \circ T_{k(n)}^{k(k(n))} = j_n^{k(k(n))}$$

gilt.

Bemerkung: Zwei reduzierte projektive Spektren von Banachräumen sind äquivalent, falls sie zwei zueinander isomorphe Fréchetträume erzeugen.

1.20 Definition
Ein projektives Spektrum $(E_n, i_n^m)_{n \leq m}$ heißt fast strikt, falls eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. *Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert eine weitere natürliche Zahl $\ell(n) \geq n$ derart, dass*

   $$i_n^{\ell(n)}(E_{\ell(n)}) = i_n^m(E_m) \text{ für alle } m \geq \ell(n)$$

   erfüllt ist.

2. *Zu $(E_n, i_n^m)_{n \leq m}$ existiert ein äquivalentes Spektrum, welches strikt ist.*

1.21 Definition
Eine Quojektion ist ein strikter projektiver Limes einer Familie von Banachräumen.

Bemerkung: Banachräume und abzählbare Produkte von Banachräumen sind Quojektionen. Aus [Memo89], Th. 1.1.5, wissen wir, dass gilt:

1.22 *Für einen Fréchetraum F sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- *F ist eine Quojektion.*
- *Jede kurze exakte Sequenz*

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} (\ell_1)^{\mathbb{N}} \to 0$$

von Fréchetträumen zerfällt, das heißt es existiert eine stetige, lineare Abbildung $r : (\ell_1)^{\mathbb{N}} \to G$ mit der Eigenschaft $q \circ r = id_{(\ell_1)^{\mathbb{N}}}$.

1.23 Definition
Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum E zusammen mit einer Familie lokalkonvexer Räume $(E_i)_{i \in I}$ und linearen Abbildungen $j_i : E_i \to E$ bezeichnet man als induktives System, falls $\bigcup_{i \in I} j_i(E_i) = E$ gilt. Wenn es eine feinste lokalkonvexe Topologie auf E gibt, für welche alle Abbildungen j_i stetig sind, so nennt man diese die induktive Topologie des Systems $(j_i : E_i \to E)_{i \in I}$.

1.24 Definition
Ein abzählbares induktives System $(j_n : E_n \to E)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Einbettungsspektrum, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- *E_n ist ein linearer Teilraum von E und $j_n : E_n \to E$ ist Inklusion.*
- *E_n ist in E_{n+1} enthalten und die Inklusion $j_{n+1}^n : E_n \to E_{n+1}$ ist stetig.*

1.25 Definition
Ein Einbettungsspektrum $(j_n : E_n \to E)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt strikt, falls E_n ein topologischer Unterraum von E_{n+1} für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

1.26 Definition
Zwei Einbettungsspektren $(E_n, i_m^n)_{n \leq m}$ und $(F_n, j_m^n)_{n \leq m}$ heißen äquivalent, falls es eine monoton wachsende Folge $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ und stetige, lineare Abbildungen $T_{k(n)}^n : F_n \to E_{k(n)}$ und $S_{k(n)}^n : E_n \to F_{k(n)}$ gibt, so dass

$$T_{k(k(n))}^{k(n)} \circ S_{k(n)}^n = i_{k(k(n))}^n \text{ und } S_{k(k(n))}^{k(n)} \circ T_{k(n)}^n = j_{k(k(n))}^n$$

gilt.

Schließlich definieren wir den Begriff der Faststriktheit im induktiven Fall:

1.27 Definition
Ein Einbettungsspektrum von Banachräumen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt fast strikt, falls eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Für jede natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *existiert eine weitere natürliche Zahl* $m \geq n$ *derart, dass es für jedes natürliche* $k \geq m$ *und* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *mit der folgenden Eigenschaft gibt*

$$E_n \cap \delta \cdot B_{E_k} \subset \varepsilon \cdot B_{E_m} \ .$$

2. *Zu* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existiert ein äquivalentes Spektrum* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *welches strikt ist.*

Dabei sei $B_{E_j} := \{x \in E_j : \|x\|_j \leq 1\}$, $j \in \mathbb{N}$.

KAPITEL II

Folgenraumdarstellungen für $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$

Für eine topologische Charakterisierung der Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen zum partiellen Differentialoperator

$$P(D) : B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega)$$

ist das Vorhandensein einer Isomorphie zwischen $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ und $(\ell_p)^{\mathbb{N}}$ hilfreich.

Die Existenz eines solchen Isomorphismus wollen wir in diesem Kapitel zeigen. Es sei bemerkt, dass dieser Isomorphismus auch losgelöst von der hier betrachteten Problemstellung von Interesse ist.

Genauer werden wir im Folgenden eine Verallgemeinerung des in [Vo83] konstruierten Isomorphismus zwischen dem Raum $B^{\ell oc}_{1,\kappa}(\Omega)$ und einem abzählbaren Produkt von ℓ_1-Räumen darstellen:

Theorem A *Für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $p \in [1, \infty)$ ist der Raum $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ isomorph zum Raum $(\ell_p)^{\mathbb{N}}$.*

In [Vo83], 6.2 wurde der Fall $p = 1$ behandelt, d.h. die Verallgemeinerung besteht hierbei in der Zulässigkeit der Indizes $1 < p < \infty$.

Bevor wir Theorem A beweisen, zeigen wir einige Hilfsaussagen.

2.1 Vorbereitungen

Wir beginnen mit dem folgenden

2.1 Lemma
Für $1 \leq p < \infty$, $g \in \mathbb{Z}^n$ und $f \in C^n(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|f(g)|^p \leq 2^{n \cdot p} \sum_{e \in E(n)} \int_g^{g+1} |f^{(e)}(\xi)|^p d\xi \, .$$

Dabei benutzen wir die Bezeichnung $E(n)$ für die Potenzmenge der Menge $\{1, \ldots, n\}$, $f^{(e)} := \frac{\partial^m}{\partial \xi_{e_1} \cdots \partial \xi_{e_m}} f$ mit $e = \{e_1, \ldots, e_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $f^{(\emptyset)} := f$ sowie ferner

$$g + 1 := (g_1 + 1, \cdots, g_n + 1), \; g \in \mathbb{Z}^n.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Abschätzung

$$|f(g)| \leq \sum_{e \in E(n)} \int_g^{g+1} |f^{(e)}(\xi)| d\xi \tag{2.1}$$

per vollständiger Induktion über n.

$n = 1$:
Im Fall $n = 1$ erhalten wir aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_0 \in (g, g+1)$ mit der Eigenschaft $|f(\xi_0)| = \int_g^{g+1} |f(\xi)| d\xi$, so dass folgende Abschätzung gültig ist:

$$\begin{aligned} |f(g)| &= \left| f(\xi_0) - \int_g^{\xi_0} f'(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \int_g^{g+1} |f(\xi)| d\xi + \int_g^{g+1} |f'(\xi)| d\xi \, . \end{aligned}$$

Damit haben wir den Induktionsanfang geklärt.

$n - 1 \to n$:
Für $g \in \mathbb{Z}^n$, $g = (g', g_n)$ mit $g' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ und $g_n \in \mathbb{Z}$ ergibt sich aus der

Behauptung für $n = 1$

$$|f(g)| \quad \leq \quad \int\limits_{g_n}^{g_n+1} |f(g', \xi_n)| + \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} f(g', \xi_n) \right| d\xi_n \; .$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung für $n-1$ auf die Integranden und Einsetzen in die vorherige Abschätzung erhalten wir abschließend

$$\begin{aligned} |f(g)| \quad &\leq \quad \int\limits_{g_n}^{g_n+1} \left\{ \sum_{e' \in E(n-1)} \int\limits_{g'}^{g'+1} |f^{(e')}(\xi', \xi_n)| \; d\xi' \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{e' \in E(n-1)} \int\limits_{g'}^{g'+1} \left| \left(\frac{\partial f^{(e')}}{\partial \xi_n} \right) (\xi', \xi_n) \right| d\xi' \right\} d\xi_n \\ &= \sum_{e \in E(n)} \int\limits_{g}^{g+1} |f^{(e)}(\xi)| \; d\xi \; , \end{aligned}$$

da $E(n) = E(n-1) \cup \{M = M' \cup \{n\} : M' \in E(n-1)\}$. Damit ist (2.1) bewiesen.
Mit Hilfe von (2.1) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} |f(g)|^p \quad &\leq \quad \left(\sum_{e \in E(n)} \int\limits_{g}^{g+1} |f^{(e)}(\xi)| d\xi \right)^p \\ &\leq \quad 2^{n \cdot p} \sum_{e \in E(n)} \left(\int\limits_{g}^{g+1} |f^{(e)}(\xi)| d\xi \right)^p \end{aligned}$$

und mit Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\int\limits_{g}^{g+1} |f^{(e)}(\xi)| d\xi \leq \left(\int\limits_{g}^{g+1} |f^{(e)}(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{g}^{g+1} |1|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}$$

folgt dann die Behauptung. $\square$

Im nächsten Zwischenschritt beweisen wir die Darstellbarkeit des Unterraums der v-periodischen Distributionen aus $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ durch einen Folgenraum, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ ein reeller Vektor mit positiven Komponenten ist. Zuvor sichern wir die Existenz einer Abschneidefunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, welche die Eigenschaft $\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\cdot - vg) \equiv 1$ erfüllt, wobei wir für zwei reelle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Definition

$$xy := \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix}$$

benutzen:

2.2 Proposition
Setze $J := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| < v_1, \dots, |x_n| < v_n\}$. Dann gibt es eine Testfunktion $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

- $\psi \geq 0$
- $\operatorname{supp}(\psi) \subset J$
- $\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \tau_{vg}(\psi) \equiv 1$.

Beweis: Wähle für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ ein $\delta_j \in (\frac{1}{2}v_j, v_j)$ und damit eine Abschneidefunktion $\psi_0^j \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\psi_0^j \geq 0$, $\psi_0^j \equiv 1$ für $|t| < \delta_j$ und $\operatorname{supp}(\psi_0^j) \subset (-v_j, v_j)$. Setzen wir nun für $x \in \mathbb{R}$

$$\psi_1^j(x) := \psi_0^j(x) / \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_0^j(x - v_j k), \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

so erhalten wir die gewünschte Funktion durch die Definition

$$\psi(x) := \psi_1^1(x_1) \cdots \psi_1^n(x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n .$$

$\square$

Bemerkung: Der Beweis von Proposition 2.2 ist eine leichte Abwandlung des Beweises von [Frie82], Lemma 8.5.1 .

2.3 Lemma
Sei $1 \leq p < \infty$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit positiven Komponenten. Die Elemente des abgeschlossenen Unterraums

$$B^v_{p,\kappa} := \{u \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) : \ u(\cdot - vk) = u(\cdot),\, k \in \mathbb{Z}^n\}$$

von $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ besitzen eine Fourierdarstellung

$$u = \frac{1}{v_1 \cdots v_n} \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} c_g e^{2\pi i \langle g\frac{1}{v}, \cdot \rangle} .$$

Dabei bezeichnen wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und mit $g\frac{1}{v}$ das Vektorprodukt

$$g\frac{1}{v} := (g_1 \tfrac{1}{v_1}, \dots, g_n \tfrac{1}{v_n})^T.$$

Des Weiteren sei c_g die Fouriertransformierte $c_g := \widehat{\varphi u}(2\pi g\frac{1}{v})$, wobei φ eine Testfunktion mit der Eigenschaft $\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\cdot - vg) \equiv 1$ ist.
Setzt man nun

$$|u|_{p,\kappa,v} := \left(\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} |c_g|^p \kappa(2\pi g\tfrac{1}{v})^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

dann existiert eine von u unabhängige Konstante $C > 0$, so dass mit Hilfe der Testfunktionen $\varphi_e(x) := x_{e_1} \cdots x_{e_m} \varphi(x)$

$$|u|_{p,\kappa,v} \leq C \left(\sum_{e \in E(n)} \|u\|^p_{p,\kappa,\varphi_e} \right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt. Insbesondere ist $B^v_{p,\kappa}$ stetig eingebettet in den Banachraum

$$\mathscr{M} := \left\{ u = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} c_g e^{2\pi i \langle g\frac{1}{v}, x \rangle} : |u|_{p,\kappa,v} < \infty \right\} .$$

Beweis: Um zu zeigen, dass der Raum $B^v_{p,\kappa}$ ein abgeschlossener Unterraum von $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ ist, beachten wir zunächst, dass die Translationsabbildung

$$\tau_h : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

als duale Abbildung der Translation auf $\mathscr{D}(\Omega)$ stetig ist. Dass $B^v_{p,\kappa}$ ein Unterraum von $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ ist, ist klar. Damit bleibt nur noch die Abgeschlossenheit bezüglich der Relativtopologie zu zeigen. Da für $h \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$\begin{array}{cccccc} T_h : & B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) & \to & \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \\ & u & \mapsto & \iota(u) & \mapsto & \iota(u) - \tau_h(\iota(u)) \end{array}$$

stetig ist, ist

$$B^v_{p,\kappa} = \bigcap_{h \in v\mathbb{Z}^n} \ker(T_h)$$

ein abgeschlossener Unterraum des Raumes $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ und damit insbesondere vollständig.

Sei nun $u \in B^v_{p,\kappa}$ beliebig gewählt.
Aus der Poissonschen Summationsformel (siehe dazu auch [Hoer83a], 7.2.) erhalten wir für alle schnellfallenden Funktionen $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(vg) = \frac{(2\pi)^n}{v_1\cdots v_n} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \phi\left(2\pi g \tfrac{1}{v}\right) \ . \tag{2.2}$$

Ist $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ beliebig und $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ eine nach Proposition 2.2 existierende Testfunktion mit der Eigenschaft $\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x-vg) \equiv 1$, so erhält man durch Einsetzen von $\phi := \psi(\cdot)e^{-i\langle x,\cdot\rangle}$ in Gleichung (2.2)

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \hat{\psi}(x+vg)\varphi(x) = \frac{(2\pi)^n}{v_1\cdots v_n} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \psi(2\pi g\tfrac{1}{v})e^{-2\pi i\langle x,g\frac{1}{v}\rangle}\varphi(x) \ .$$

Beachtet man die Tatsache, dass periodische Distributionen in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ liegen, so folgt

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\psi) &= u(\hat{\psi}) \\
&= u(\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \hat{\psi}(\cdot)\varphi(\cdot - vg)) \\
&= u(\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \hat{\psi}(\cdot + vg)\varphi(\cdot)) \\
&= \frac{(2\pi)^n}{v_1\cdots v_n} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} u\left(e^{-2\pi i\langle\cdot,g\frac{1}{v}\rangle}\varphi(\cdot)\right)\psi(2\pi g\tfrac{1}{v}) \\
&= \frac{(2\pi)^n}{v_1\cdots v_n} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi u}(2\pi g\tfrac{1}{v})\psi(2\pi g\tfrac{1}{v}) \\
&= \frac{(2\pi)^n}{v_1\cdots v_n} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} c_g\psi(2\pi g\tfrac{1}{v}) \ .
\end{aligned}$$

Mit der Fourier-Umkehrformel erhalten wir schließlich

$$u = \frac{1}{v_1\cdots v_n} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} c_g e^{2\pi i\langle\cdot,g\frac{1}{v}\rangle} \ .$$

Mit Lemma 2.1 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|u|_{p,\kappa,v}^p &= \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} |c_g|^p \kappa(2\pi g\tfrac{1}{v})^p \\
&\le \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} d_g \\
\text{mit } d_g &:= \left(2^{n\cdot p} \sum_{e\in E(n)} \int\limits_g^{g+1} \left|\widehat{\varphi u}^{(e)}(2\pi\xi\tfrac{1}{v})(2\pi)^{|e|}\frac{1}{v_{e_1}\cdots v_{e_m}}\right|^p d\xi\right) \kappa(2\pi g\tfrac{1}{v})^p \,.
\end{aligned}
$$

Aus der Abschätzung (siehe Bemerkung zu 1.4)

$$
\begin{aligned}
(\kappa(2\pi g\tfrac{1}{v}))^p &\le (M_\kappa(2\pi g\tfrac{1}{v} - 2\pi\xi\tfrac{1}{v})\kappa(2\pi\xi\tfrac{1}{v}))^p \\
&\le \left(\sup\{M_\kappa(\alpha) : \ \|\alpha\|_\infty \le 2\pi \max_j \left|\tfrac{1}{v_j}\right|\}\right)^p \kappa(2\pi\xi\tfrac{1}{v})^p \\
&= C_{\kappa,v}\cdot\kappa(2\pi\xi\tfrac{1}{v})^p, \quad g\le\xi\le g+1
\end{aligned}
$$

gewinnen wir weiter

$$
\begin{aligned}
\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} d_g &\le C_{\kappa,v,n,p} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n}\sum_{e\in E(n)} \int\limits_g^{g+1} |\widehat{\varphi u}^{(e)}(2\pi\xi\tfrac{1}{v})|^p \kappa(2\pi\xi\tfrac{1}{v})^p d\xi \\
&\le C'_{\kappa,v,n,p} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n}\sum_{e\in E(n)} \int\limits_{2\pi g\frac{1}{v}}^{2\pi(g+1)\frac{1}{v}} |\widehat{\varphi u}^{(e)}(\xi)|^p \kappa(\xi)^p d\xi \\
&= C'_{\kappa,v,n,p} \sum_{e\in E(n)} \|u\|_{p,\kappa,\varphi_e}^p < \infty
\end{aligned}
$$

mit $\varphi_e(x) := x_{e_1}\cdots x_{e_m}\varphi(x)$ und damit die Behauptung. □

Nun weisen wir die stetige Einbettbarkeit von $\mathscr{M}$ in $B_{p,\kappa}^v$ nach:

2.4 Lemma
Mit den Bezeichnungen von Lemma 2.3 ist die Menge $\mathscr{M}$ stetig in $B_{p,\kappa}^v$ eingebettet.

Beweis: Sei $u\in\mathscr{M}$ beliebig gewählt. Um zu zeigen, dass u eine temperierte Distribution ist, beachten wir, dass nach Voraussetzung bereits die Eigenschaft

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} |c_g|^p \kappa(2\pi g\tfrac{1}{v})^p < \infty$$

erfüllt ist. Mit einer geeigneten Konstanten $C \geq 0$ gilt insbesondere für jeden Summanden $|c_g|^p \kappa(2\pi g \frac{1}{v})^p \leq C$.

Wegen der Wachstumseigenschaften der temperierten Gewichtsfunktion κ folgt dann aber sofort die Existenz von positiven Konstanten $\tilde{C} > 0$ und $m > 0$, so dass folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$|c_g| \leq \tilde{C}(1 + |g|)^m, \quad g \in \mathbb{Z}^n.$$

Da für $u = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} c_g e^{2\pi i \langle g \frac{1}{v}, \cdot \rangle}$ und $\ell := m + n + 1$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |u(\phi)| &\leq \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} |c_g| \cdot |\hat{\phi}(-2\pi g \tfrac{1}{v})| \\ &\leq \tilde{C} \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} (1 + |g|)^{-(n+1)} (1 + |g|)^\ell |\hat{\phi}(-2\pi g \tfrac{1}{v})| \\ &\leq \hat{C} \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} (1 + |g|)^{-(n+1)} \sup_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^\ell |\hat{\phi}(-2\pi x \tfrac{1}{v})|, \quad \phi \in \mathscr{S}, \end{aligned}$$

gilt, stellt die Fourierreihe

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} c_g e^{2\pi i \langle g \frac{1}{v}, \cdot \rangle}$$

eine temperierte Distribution dar, welche aufgrund der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion v-periodisch ist.

Im Folgenden benutzen wir die Schreibweise

$$\sum_{g=n_1}^{n_2} := \sum_{\{g \in \mathbb{Z}^n : |g_i| \leq n_2 \ \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}\}} - \sum_{\{g \in \mathbb{Z}^n : |g_i| \leq n_1 \ \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}\}} .$$

Um nun zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} c_g e^{2\pi i \langle g \frac{1}{v}, \cdot \rangle}$ ein Element des Raumes $B^v_{p,\kappa}$ ist, geben wir uns ein beliebiges $\epsilon > 0$ vor.

Wegen $\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} |c_g|^p \kappa(2\pi g \frac{1}{v})^p < \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass die endliche Summe

$$\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g|^p \kappa(2\pi g \tfrac{1}{v})^p$$

kleiner als ϵ für alle natürlichen $n_0 \leq n_1 \leq n_2$ ist. Für die Summe

$$\sum_{g=n_1}^{n_2} c_g e^{2\pi i \langle g\frac{1}{v}, x\rangle}$$

ergibt sich nun für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{g=n_1}^{n_2} c_g e^{2\pi i \langle g\frac{1}{v}, \cdot\rangle} \right\|_{p,\kappa,\varphi}^p &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} c_g e^{2\pi i \langle g\frac{1}{v}, \cdot\rangle} \varphi \right)^{\wedge} (x)\ \kappa(x) \right|^p dx \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \cdot |\hat{\varphi}(x - 2\pi g\tfrac{1}{v})| \right)^p \kappa(x)^p dx.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Paley-Wiener gibt es für jede natürliche Zahl N eine Konstante C_N mit der Eigenschaft, dass für $C_{n,N} := (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{p}} C_N$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \cdot |\hat{\varphi}(x - 2\pi g\tfrac{1}{v})| \right)^p \kappa(x)^p dx \\
&\qquad \leq (C_{n,N})^p \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{2\pi\ell\frac{1}{v}}^{2\pi(\ell+1)\frac{1}{v}} \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \frac{1}{(1 + |x - 2\pi g\frac{1}{v}|)^N} \right)^p \kappa(x)^p dx
\end{aligned}$$

gilt. Zum Zwecke der besseren Abschätzbarkeit werden wir jetzt die Variable x aus dem Nenner des Integranden entfernen. Dazu beachten wir, dass für $\ell \leq x \leq \ell + 1$ die Ungleichung

$$|\ell - g| \leq |\ell - x| + |x - g| \leq \sqrt{n} + |x - g|$$

gilt und somit

$$1 + |\ell - g| \leq 1 + \sqrt{n} + |x - g| \leq (1 + \sqrt{n})(1 + |x - g|)\ .$$

Insgesamt erreichen wir damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{g=n_1}^{n_2} c_g e^{2\pi i \langle g \frac{1}{v}, \cdot \rangle} \right\|_{p,\kappa,\varphi}^p \\
&\leq \quad (C_{n,N})^p \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{2\pi\ell\frac{1}{v}}^{2\pi(\ell+1)\frac{1}{v}} \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \frac{1}{(1+|x-2\pi g\frac{1}{v}|)^N} \right)^p \kappa(x)^p dx \\
&\leq \quad C_{n,N,v,p} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{\ell}^{\ell+1} \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \frac{1}{(1+2\pi|\frac{1}{v}x - \frac{1}{v}g|)^N} \right)^p \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}x)^p dx \\
&\leq \quad C'_{n,N,v,p} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{\ell}^{\ell+1} \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \frac{1}{(1+|x-g|)^N} \right)^p \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}x)^p dx \\
&\leq \quad C'_{n,N,v,p}(1+2\sqrt{n})^{N\cdot p} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \frac{1}{(1+|\ell-g|)^N} \right)^p \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \int\limits_{\ell}^{\ell+1} \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}x)^p dx \, .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Um schließlich noch das Integral

$$\int\limits_{\ell}^{\ell+1} \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}x)^p \; dx$$

nach oben abzuschätzen, beachten wir zunächst, dass

$$\int\limits_{\ell}^{\ell+1} \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}x)^p \; dx = \int\limits_{\ell-g}^{\ell-g+1} \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}(\tilde{x}+g))^p d\tilde{x}$$

gilt. Mit den Wachstumseigenschaften der temperierten Gewichtsfunktion κ existieren Konstanten $C_\nu \geq 1$ und $\hat{N} > 0$, so dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\ell-g}^{\ell-g+1} \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}\tilde{x} + 2\pi\tfrac{1}{v}g)^p d\tilde{x} &\leq \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}g)^p \int\limits_{\ell-g}^{\ell-g+1} (1 + C_\nu|\tilde{x}|)^{\hat{N}\cdot p} d\tilde{x} \\
&\leq \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}g)^p \left[1 + C_v(|\ell-g| + \sqrt{n})\right]^{\hat{N}\cdot p} \\
&\leq \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}g)^p (1+|\ell-g|)^{\hat{N}\cdot p}(1+C_v\sqrt{n})^{\hat{N}\cdot p} \,.
\end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (2.3) ergibt

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{g=n_1}^{n_2} c_g e^{2\pi i\langle g\frac{1}{v},\cdot\rangle} \right\|_{p,\kappa,\varphi}^p \\
&\leq C''_{n,N,v,p} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g| \frac{1}{(1+|\ell-g|)^N} \right]^p \int\limits_{\ell}^{\ell+1} \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}x)^p dx \\
&\leq C''_{n,N,v,p}(1+C_v\sqrt{n})^{\hat{N}\cdot p} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g|\kappa(2\pi\tfrac{1}{v}g) \frac{(1+|\ell-g|)^{\hat{N}}}{(1+|\ell-g|)^N} \right]^p
\end{aligned}$$

und mit einer genügend groß gewählten Konstante N

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{g=n_1}^{n_2} c_g e^{2\pi i\langle g\frac{1}{v},\cdot\rangle} \right\|_{p,\kappa,\varphi}^p \\
&\qquad \leq C''_{n,N,v,p}(1+C_v\sqrt{n})^{\hat{N}\cdot p} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{g=n_1}^{n_2} \frac{|c_g|\kappa(2\pi\frac{1}{v}g)}{(1+|\ell-g|)^{n+1}} \right]^p \,.
\end{aligned}$$

Die Doppelreihe im letzten Ausdruck kann nun als Norm über eine Faltung in folgender Weise interpretiert werden:

Betrachte hierzu den Banachraum $\ell_s(\mathbb{Z}^n)$, $s \in [1,\infty)$, ausgestattet mit der Norm

$$\|\alpha\|_s := \left(\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |\alpha_\lambda|^s \right)^{\frac{1}{s}} .$$

Man definiere für $f \in \ell_p(\mathbb{Z}^n)$ und $h \in \ell_1(\mathbb{Z}^n)$ die Faltung durch

$$(f * h)_g := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} f_\nu h_{g-\nu}, \quad g \in \mathbb{Z}^n.$$

Wir wenden [Flo81], Satz 14.6.1, an und erhalten für die ℓ_p-Norm dieser Faltung

$$\|f * h\|_p = \left(\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} f_\nu h_{g-\nu} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \|h\|_1 \ .$$

Setzen wir nun

$$f_g := \begin{cases} |c_g|\kappa(2\pi\frac{1}{v}g) & g \in \mathbb{Z}^n : |g_i| \leq n_2 \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \wedge \ \exists\, j \text{ mit } |g_j| > n_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und weiter

$$\begin{aligned} f &= (f_g)_{g \in \mathbb{Z}^n} \\ h &= (h_g)_{g \in \mathbb{Z}^n} := \left(\frac{1}{(1+|g|)^{n+1}} \right)_{g \in \mathbb{Z}^n} , \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{g=n_1}^{n_2} c_g e^{2\pi i \langle \frac{1}{v} g, \cdot \rangle} \right\|_{p,\kappa,\varphi}^p \\ &\qquad \leq C'''_{n,N,v,p} \ \|f * h\|_p^p \\ &\qquad \leq C'''_{n,N,v,p} \ \|f\|_p^p \cdot \|h\|_1^p \\ &\qquad = C'''_{n,N,v,p} \ \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} |f_g|^p \ \left\| \left(\frac{1}{(1+|g|)^{n+1}} \right)_{g \in \mathbb{Z}^n} \right\|_1^p \\ &\qquad = C'''_{n,N,v,p} \ \sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g|^p \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}g)^p \ \left\| \left(\frac{1}{(1+|g|)^{n+1}} \right)_{g \in \mathbb{Z}^n} \right\|_1^p \\ &\qquad \leq \tilde{C'}_{n,N,v,p} \cdot \epsilon, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\sum_{g=n_1}^{n_2} |c_g|^p \kappa(2\pi\frac{1}{v}g)^p < \epsilon$ gilt.
Also ist $(\sum_{g=0}^{n} c_g e^{2\pi i \langle \frac{1}{v} g, \cdot \rangle})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, welche gegen ein $u \in B^v_{p,\kappa}$ konvergiert. Weiter gilt

$$\|u\|_{p,\kappa,\varphi} \leq C \cdot \|(c_g \kappa(2\pi\tfrac{1}{v}g))_{g \in \mathbb{Z}^n}\|_p = C \cdot |u|_{p,\kappa,\nu} \ .$$

□

Als Gesamtergebnis ergibt sich der folgende

2.5 Satz
Der Raum $B_{p,\kappa}^{v}$ ist isomorph zum Raum $\mathscr{M}$. Insbesondere wird die Topologie auf $B_{p,\kappa}^{v}$ durch die Norm $|\cdot|_{p,\kappa,v}$ induziert. Ferner ist der Raum $B_{p,\kappa}^{v}$ isomorph zum Raum $\ell_p(\mathbb{Z}^n)$.

2.2 Beweis von Theorem A

Um mithilfe von Satz 2.5 zu schließen, dass für geeignete v_j die Räume $\prod_{j\in\mathbb{N}}(B_{p,\kappa}^{v_j}) \simeq (\ell_p)^{\mathbb{N}}$ und $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ zueinander isomorph sind, genügt es, die Pelczinski-Zerlegungsmethode (siehe [Vo83], Prop. 1.2) anzuwenden:

2.6 Proposition ([Vo83])
Für zwei lokalkonvexe Räume E und H mit den Eigenschaften

1. *E ist isomorph zu einem komplementierten Unterraum von $H^{\mathbb{N}}$ und*
2. *$H^{\mathbb{N}}$ ist isomorph zu einem komplementierten Unterraum von E*

gilt bereits

$$E \text{ ist isomorph zu } H^{\mathbb{N}}.$$

Bemerkung: Um die erste Bedingung aus Proposition 2.6 für unsere Räume nachzuweisen, genügt es wiederum, stetige, lineare Abbildungen $K : E \to H^{\mathbb{N}}$ und $L : H^{\mathbb{N}} \to E$ mit der Eigenschaft $L \circ K = id_E$ zu konstruieren. In der Tat ist dann $K \circ L$ eine Projektion in $H^{\mathbb{N}}$ und wegen der Surjektivität von L gilt $\mathrm{im}(K \circ L) = \mathrm{im}(K)$ und $K : E \to \mathrm{im}(K)$ ist ein Isomorphismus. Für die zweite Bedingung ist eine analoge Argumentation möglich.

Beweis von Theorem A:

1. Wir zeigen, dass für geeignete v_j der Raum $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ als komplementierter Unterraum in den Raum $\prod_j B_{p,\kappa}^{v_j}$ eingebettet ist. Dafür genügt es nach der obigen Bemerkung, stetige, lineare Abbildungen
$$\Phi : B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \to \prod_{j\in\mathbb{N}} B_{p,\kappa}^{v_j}$$
und
$$\Psi : \prod_{j\in\mathbb{N}} B_{p,\kappa}^{v_j} \to B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$$
mit der Eigenschaft
$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)}$$

zu konstruieren.

Wir folgen nun bei der Konstruktion von Φ und Ψ den Ideen in [Vo83] und halten zunächst fest, dass für jede offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Überdeckung aus abgeschlossenen Würfeln Q_k mit folgenden Eigenschaften existiert (Whitney cubes):

- $\bigcup_k Q_k = \Omega$,
- die Inneren der Q_k sind paarweise disjunkt,
- diam $(Q_k) \leq \min\Big(4\sqrt{n}, \mathrm{dist}(Q_k, \Omega^c)\Big) \leq 4$ diam (Q_k).

Durch Vergrößern der Kantenlängen der Würfel können wir eine Würfelfamilie $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konstruieren, welche eine ihr untergeordnete Teilung der Eins $\phi_i \in \mathscr{D}(W_i^\circ)$, $i \in \mathbb{N}$, besitzt, so dass für jedes $x \in \Omega$ eine Umgebung existiert, welche nur endlich viele Träger supp(ϕ_i) trifft.

Dies hat dann zur Konsequenz, dass ein beliebig gewähltes Kompaktum in Ω ebenfalls nur endlich viele Träger der Funktionen ϕ_i trifft. Ferner existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Testfunktion $\psi_j \in \mathscr{D}(W_j^\circ)$ mit der Eigenschaft $\psi_j\phi_j = \phi_j$ auf W_j.

Sei nun der Würfel W_j gegeben durch die Menge

$$W_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n : a_{j,i} \leq \xi_i \leq a_{j,i} + p_{j,i},\ i = 1, \dots, n\},$$

wobei $a_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,n}),\ p_j = (p_{j,1}, \dots, p_{j,n}) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^n$. Wir definieren nun Abbildungen

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi} :\ \mathscr{D}'(\Omega) &\to \prod_j \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \Bigg[\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_{\nu p_j}(\phi_j f)\Bigg]_{j\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi} :\ \prod_j \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) &\to \mathscr{D}'(\Omega) \\ (f_j)_{j\in\mathbb{N}} &\mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j f_j\ . \end{aligned}$$

Die Abbildung $\widetilde{\Phi}$ ist wohldefiniert und stetig, da es für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Indizes $\nu_1, \ldots, \nu_{n_0}$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{supp}(\phi_j) \cap \operatorname{supp}\big(\varphi(\cdot + \nu_\ell\, p_j)\big) \neq \emptyset, \quad \nu_\ell \in \{\nu_1, \ldots, \nu_{n_0}\}$$

gibt und deshalb die Reihen

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \tau_{\nu p_j}(\phi_j f)$$

unter jeder Testfunktion endlich sind.

Auch die Abbildung $\widetilde{\Psi}$ ist wohldefiniert und stetig , da für eine vorgegebene Testfunktion φ nur endlich viele Indizes $j \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft existieren, dass $\operatorname{supp}(\psi_j)$ den Träger von φ schneidet.

Wegen der Stetigkeit in der $\mathscr{D}'$-Topologie ist es nun hinreichend, von der Abbildung $\Phi := \widetilde{\Phi}_{|B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)}$ die Eigenschaft $\operatorname{im}(\Phi) \subset \prod_j B^{p_j}_{p,\kappa}$ nachzuweisen und von der Abbildung $\Psi := \widetilde{\Psi}_{|\prod B^{p_j}_{p,\kappa}}$ die Eigenschaft $\operatorname{im}(\Psi) \subset B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ nachzuweisen, um dann mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die Stetigkeit der Abbildungen Φ und Ψ (in der feineren Topologie) zu schließen.
Nun sehen wir aber, dass für ein festes $f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ jede Komponente $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \tau_{\nu p_{j_0}}(\phi_{j_0} f)$ von $\Phi(f)$ p_{j_0}-periodisch ist und lokal als endliche Summe von Translationen von Elementen aus $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) \cap \mathscr{E}'(\Omega) \subset B_{p,\kappa} \subset B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ auftritt.
Die Reihe $\sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j f_j \in \operatorname{im}(\Psi)$ ist für ein festes $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod B^{p_j}_{p,\kappa}$ lokal eine endliche Summe von Elementen aus $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}'(\Omega)$ und somit aus $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$.
Darüberhinaus gilt folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned}(\Psi \circ \Phi) f &= \sum_j \psi_j(\cdot) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \phi_j(\cdot - \nu p_j) f(\cdot - \nu p_j) \\ &= \sum_j \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \psi_j(\cdot) \phi_j(\cdot - \nu p_j) f(\cdot - \nu p_j)\ .\end{aligned}$$

Da aber sowohl ψ_j als auch ϕ_j ihren Träger innerhalb der Menge W_j besitzen, fallen für festes $j \in \mathbb{N}$ alle Summanden außer $\nu = (0, \ldots, 0)$

weg. Dies bedeutet

$$\begin{aligned}\sum_j \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \psi_j(\cdot)\phi_j(\cdot-\nu p_j)f(\cdot-\nu p_j) &= \sum_j \psi_j(\cdot)\phi_j(\cdot)f(\cdot)\\ &= \sum_j \phi_j(\cdot)f(\cdot)\\ &= f(\cdot)\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich, dass die Abbildung Φ den Raum $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ als einen topologisch komplementierten Unterraum in $\prod_j B^{p_j}_{p,\kappa} \cong (\ell_p)^{\mathbb{N}}$ einbettet.

2. Die zweite Aufgabe besteht nun darin, zu zeigen, dass der Raum $\prod_j B^{p_j}_{p,\kappa}$ zu einem topologisch komplementierten Unterraum von $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ isomorph ist. Wir verfahren dabei analog zu 1. Dazu betrachte man eine Folge $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von disjunkten in Ω relativ kompakten Würfeln

$$P_j = \{\xi\in\mathbb{R}^n : a_{j,i}\le \xi_i \le a_{j,i}+p_{j,i},\ i=1,\dots,n\},\quad p_j\in(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^n.$$

Dabei wählen wir die P_j so, dass ein beliebig vorgegebenes Kompaktum in Ω lediglich endlich viele der Würfel P_j schneidet.

Wir wählen paarweise disjunkte, offene U_j mit $P_j \subset U_j \subset \Omega$. Nach Proposition 2.2 gibt es nun für jedes $j\in\mathbb{N}$ ein $\phi_j\in\mathscr{D}(U_j)$ mit

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \phi_j(x-\nu p_j) = 1 \qquad \text{für jedes } x\in\mathbb{R}^n.$$

Schließlich wählen wir noch für jedes $j\in\mathbb{N}$ eine Funktion $\psi_j\in\mathscr{D}(U_j)$, so dass $\psi_j\phi_j=\phi_j$ gilt. Wir definieren nun Abbildungen

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}:\ \prod_j \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) &\to \mathscr{D}'(\Omega)\\ (f_j)_j &\mapsto \sum_j \phi_j f_j\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}:\ \mathscr{D}'(\Omega) &\to \prod_j \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\\ f &\mapsto \left[\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_{\nu p_j}(\psi_j f)\right]_{j\in\mathbb{N}}\,.\end{aligned}$$

Mit der gleichen Vorgehensweise wie in 1. können wir zeigen, dass die jeweiligen Einschränkungen $\Phi := \widetilde{\Phi}_{|\prod_j B_{p,\kappa}^{p_j}}$ und $\Psi := \widetilde{\Psi}_{|B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)}$ wohldefiniert und stetig sind.
Zusätzlich erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \psi_j(\cdot - \nu p_j) \sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_k(\cdot - \nu p_j) f_k(\cdot - \nu p_j) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_j(\cdot - \nu p_j)\phi_k(\cdot - \nu p_j) f_k(\cdot - \nu p_j) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \psi_j(\cdot - \nu p_j)\phi_j(\cdot - \nu p_j) f_j(\cdot - \nu p_j) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \phi_j(\cdot - \nu p_j) f_j(\cdot) \\
&= f_j(\cdot)\ ,
\end{aligned}$$

dass $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\prod_j B_{p,\kappa}^{p_j}}$ ist.

Somit ist $\prod_j B_{p,\kappa}^{p_j}$ isomorph zu einem komplementierten Unterraum von $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$.
Die Argumente aus 1. und 2. ergeben zusammen, dass

$$B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \cong \prod_j B_{p,\kappa}^{p_j} \cong (\ell_p)^{\mathbb{N}}$$

gilt.

□

KAPITEL III

Existenz von Rechtsinversen im Fall $p \in \{1,2\}$

In diesem Kapitel wollen wir abstrakte Charakterisierungen für die Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen

$$R : B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$$

zum Differentialoperator

$$P(D) : B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega)$$

diskutieren. Wir zeigen, dass die unter der Voraussetzung einer stetigen, linearen Rechtsinversen erfüllte Striktheit des Kerns

$$\ker(P(D)) := \{f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) : P(D)f = 0\}$$

auch hinreichend ist, falls $p \in \{1, 2\}$ ist (Abschnitt 3.1). Damit erhalten wir für diese p eine vollständige Charakterisierung durch eine topologische Bedingung an den Kern.

Danach zeigen wir mit Hilfe des Begriffs der (induktiven) Faststriktheit im Fall $p = 2$ eine topologische Charakterisierung duch das Kerndual (Abschnitt 3.2). Wollen wir diese Bedingung „fouriertransformieren“, um eine Phragmén-Lindelöf-Bedingung zu erhalten, ergeben sich in unserem Fall größere Hürden, wie Abschnitt 3.3 darstellt.

3.1 Eine Charakterisierung durch die Striktheit des Kerns des Differentialoperators

Wir beginnen mit notwendigen Bedingungen, welche unabhängig von dem gewählten $p \in [1, \infty)$ gelten. Dabei bezeichnen wir mit $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega, U)$ die Menge jener Elemente aus $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$, welche auf der offenen Teilmenge U von Ω verschwinden.

3.1 Lemma
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$. Dann gilt die Implikationskette (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3):

1. *$P(D)$ besitzt eine (p,κ)-Rechtsinverse auf Ω.*
2. *Für jede in Ω offene, relativ kompakte Teilmenge U existiert eine offene, relativ kompakte Teilmenge $V \supset\supset U$ von Ω derart, dass für jedes $f \in B_{p,\kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega, V)$ ein $g \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega, U)$ mit $P(D)g = f$ existiert.*
3. *Für jede in Ω offene, relativ kompakte Teilmenge U existiert eine offene, relativ kompakte Teilmenge $V \supset\supset U$ von Ω derart, dass für jedes $f \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(V)$ mit $P(D)f = 0$ ein $g \in B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ mit $P(D)g = 0$ und $g_{|U} = f_{|U}$ existiert.*

Bemerkungen: Die beiden Implikationen aus Lemma 3.1 ergeben sich insbesondere durch Wahl geeigneter Abschneidefunktionen und Ausnutzen der Stetigkeit der vorausgesetzten Rechtsinversen.
Die dritte Bedingung von Lemma 3.1 bedeutet die Faststriktheit (siehe Definition 1.20) des Kerns des Differentialoperators.

Um von der ersten Bedingung von Lemma 3.1 zur dritten Bedingung zu gelangen, können wir auch mit Hilfe des Begriffs der Quojektion argumentieren:
Setzen wir die Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen für $P(D)$ voraus, so wissen wir aufgrund von Theorem A, dass $\ker(P(D))$ im Raum $(\ell_p)^{\mathbb{N}}$ topologisch komplementiert liegt. Ein komplementierter Unterraum einer Quojektion (in diesem Falle als abzählbares Produkt von Banachräumen) ist aber wiederum eine Quojektion.

Ist die Menge Ω P-konvex, so erhalten wir wegen der dann vorhandenen Surjektivität des Operators $P(D)$ sogar:

3.2 Lemma
Ist Ω P-konvex, so sind die Bedingungen 2. und 3. aus Lemma 3.1 äquivalent.

Nutzen wir Theorem A aus, so ergibt sich in den Fällen $p = 1$ und $p = 2$ insgesamt:

Theorem B *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ P-konvex und $p \in \{1,2\}$. Dann sind äquivalent:*

1. *Der Kern des Differentialoperators $P(D) : B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega)$ ist eine Quojektion (siehe Definition 1.21).*
2. *Für jede in Ω offene, relativ kompakte Teilmenge U existiert eine offene, relativ kompakte Teilmenge $V \supset\supset U$ von Ω derart, dass für jedes $f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega, V)$ ein $g \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega, U)$ mit $P(D)g = f$ existiert.*
3. *Für jede in Ω offene, relativ kompakte Teilmenge U existiert eine offene, relativ kompakte Teilmenge $V \supset\supset U$ von Ω derart, dass für jedes $f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(V)$ mit $P(D)f = 0$ ein $g \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ mit $P(D)g = 0$ und $g_{|U} = f_{|U}$ existiert.*
4. *Für das Paar (p,κ), $\kappa \in \mathscr{K}$, besitzt $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf Ω.*

Bevor wir mit dem Beweis der Implikation 1. $\Rightarrow$ 4. beginnen, erinnern wir noch an folgende Definition aus [Domor89]:

3.3 Definition
Ein lokalkonvexer Raum A heißt injektiv in einer Kategorie $\mathscr{B}$ von lokalkonvexen Räumen, falls folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

- *A ist selbst ein Objekt in $\mathscr{B}$.*
- *Ist A enthalten in einem Objekt C von $\mathscr{B}$, so folgt bereits, dass A komplementiert in C liegt.*

Bemerkung: Produkte von injektiven Räumen sind wiederum injektiv. Ferner ist jeder Hilbertraum injektiv in der Kategorie der Fréchet-Hilberträume.

Beweis des Theorems B: Um nachzuweisen, dass die erste Bedingung die vierte Bedingung impliziert, betrachten wir (unter Beachtung des zuvor nachgewiesenen Isomorphismus $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) \simeq (\ell_p)^{\mathbb{N}}$) die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker(\widetilde{P(D)}) \hookrightarrow (\ell_p)^{\mathbb{N}} \overset{\widetilde{P(D)}}{\to} (\ell_p)^{\mathbb{N}} \to 0\ .$$

Dabei ist $\widetilde{P(D)}$ der mittels des Isomorphismus von $P(D)$ induzierte Operator, d.h.

$$\widetilde{P(D)} := T' \circ P(D) \circ T^{-1},$$

wobei $T : B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \to (\ell_p)^{\mathbb{N}}$ und $T' : B_{p,\kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega) \to (\ell_p)^{\mathbb{N}}$ Isomorphismen sind.

Wir beachten hier, dass $\ker(\widetilde{P(D)})$ als abgeschlossener Unterraum des Fréchetraums $(\ell_p)^{\mathbb{N}}$ wiederum ein Fréchetraum ist. Im Fall $p = 1$ erhalten wir aus 1.22, dass diese Sequenz zerfällt. Dies impliziert insbesondere, dass es eine stetige, lineare Rechtsinverse zum Differentialoperator $\widetilde{P(D)}$ und damit zu $P(D)$ gibt.

Im Fall $p = 2$ ist im Wesentlichen zu zeigen, das der Kern des Differentialoperators $P(D)$ isomorph zu einem Produkt von Hilberträumen ist. Dieses Produkt ist wiederum isomorph zum Raum

$$\prod_{j \in \mathbb{N}} \ell_2(I_j), \quad \ell_2(I_j) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{I_j} : \sum_{t \in I_j} |x_t|^2 < \infty \right\},$$

mit einer geeigneten Indexmenge I_j.

Mithilfe der Norm

$$\|(x_1, \ldots, x_N)\|_2^{(N)} := \left(\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

auf dem Raum $(\ell_2)^N$, $N \in \mathbb{N}$, definieren wir das Halbnormensystem $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$p_k(x) := \|\pi_k(x)\|_2^{(k)}, \quad \text{wobei } \pi_k(x) := (x_1, \ldots, x_k) \text{ gilt.}$$

Dadurch wird der Raum $(\ell_2)^{\mathbb{N}}$ topologisiert. Unter Beachtung der kanonischen Abbildung

$$\begin{array}{rcl} (\ell_2)^{\mathbb{N}} & \stackrel{\iota^{p_j}}{\to} & ({}^{(\ell_2)^{\mathbb{N}}}/_{\ker(p_j)})^{\wedge} \\ x & \mapsto & x + \ker(p_j) \end{array}$$

erhalten wir mit der Bemerkung zu 1.15, dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ der lokale Banachraum zum Kern des Differentialoperators

$$(\ker(P(D)))_{p_j|_{\ker(P(D))}}$$

isometrisch isomorph zum Raum

$$\overline{\iota^{p_j}(\ker(P(D)))}$$

ist. Dabei ist die Abschließung in $((\ell_2)^{\mathbb{N}})_{p_j}$ gemeint.

Wir erhalten also einerseits (mithilfe der lokalen Banachräume) ein Kernspektrum aus Hilberträumen $(\overline{\iota^{p_j}(\ker(P(D)))})_{j\in\mathbb{N}}$ und andererseits aus der vorausgesetzten Striktheit des Kerns ein Spektrum von Banachräumen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit surjektiven Verbindungsabbildungen

$$\sigma_n^{n+1} : F_{n+1} \to F_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit der Bemerkung zu 1.19 sind diese beiden Spektren dann äquivalent. Aufgrund der Surjektivität der Abbildungen $\sigma_n^{n+1} : F_{n+1} \to F_n$ muss, unter Umständen nach Übergang zu einem Teilspektrum, in der für jedes $n \in \mathbb{N}$ existierenden Verkettung

$$F_{n+1} \xrightarrow{A_{n+1}} \overline{\iota^{p_{n+1}}(\ker(P(D)))} \xrightarrow{B_{n+1}} F_n$$

die Abbildung B_{n+1} ebenfalls surjektiv sein. Daraus ergibt sich, dass der Raum

$$F_n \simeq \overline{\iota^{p_{n+1}}(\ker(P(D)))}/(\ker(B_{n+1}))$$

Quotient eines Hilbertraums ist und somit für jedes n die Sequenzen

$$0 \to \ker(\sigma_n^{n+1}) \hookrightarrow F_{n+1} \overset{\sigma_n^{n+1}}{\to} F_n \to 0$$

zerfallen. Unter diesen Voraussetzungen existiert nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Projektion

$$P_{n+1} : F_{n+1} \to F_{n+1}$$

mit der Eigenschaft $\operatorname{im}(P_{n+1}) = \ker(\sigma_n^{n+1})$. Mithilfe der Definition

$$R_{n+1}^n := (\sigma_n^{n+1}|_{\ker(P_{n+1})})^{-1}$$

erhalten wir weiter stetige Operatoren

$$R_{n+1}^n : F_n \to F_{n+1},$$

welche mit den Eigenschaften $\sigma_n^{n+1} \circ R_{n+1}^n = \mathrm{id}_{F_n}$ und zusätzlich $\operatorname{im}(R_{n+1}^n) = \ker(P_{n+1})$ ausgestattet sind.

Wir betrachten nun die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} T : \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} F_n &\to F_1 \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \ker(\sigma_n^{n+1}), \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto (x_1, P_2(x_2), P_3(x_3), \ldots) \end{aligned}$$

welche sich als Isomorphismus herausstellen wird, wie die folgenden Argumente zeigen:
Zunächst erhalten wir die Surjektivität der Abbildung T, indem wir für ein $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_1 \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \ker(\sigma_n^{n+1})$ das Urbild

$$v_1 := x_1 \quad \text{und} \quad v_n := x_n + \sum_{k=1}^{n-1} R_n^{n-1} \circ \cdots \circ R_{k+1}^k(x_k),\ n \geq 2$$

wählen. Die Abbildung T ist ebenfalls injektiv, da mit $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ sofort $x_1 = 0$ folgt, $x_2 \in \ker(\sigma_1^2) \cap \ker(P_2) = \{0\}$ erfüllt ist und wir sukzessive auf $x_n = 0$ für die Komponenten mit Index $n \geq 3$ schließen können. Schließlich erhalten wir die Stetigkeit der Umkehrabbildung, indem wir den Isomorphiesatz von Banach einsetzen.

Durch die vorangegangenen Überlegungen haben wir für den Kern des Differentialoperators also die Darstellung

$$\ker(P(D)) \cong \underset{\leftarrow m}{\operatorname{proj}} F_m \cong F_1 \times \prod_{n=1}^{\infty} \ker(\sigma_n^{n+1}) \cong \prod_{j\in\mathbb{N}} \ell_2(I_j)$$

gewonnen, d.h. die Darstellung als Produkt von Hilberträumen. Mit der Bemerkung hinter Definition 3.3 erhalten wir, dass $\ker(P(D))$ topologisch komplementiert im Fréchet-Hilbertraum $(\ell_2)^{\mathbb{N}}$ liegt. Damit zerfällt aber die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker(P(D)) \hookrightarrow (\ell_2)^{\mathbb{N}} \overset{\widetilde{P(D)}}{\to} (\ell_2)^{\mathbb{N}} \to 0$$

und es existiert eine stetige, lineare Rechtsinverse. □

3.2 Eine Charakterisierung durch die Striktheit des Kernduals im Fall $p = 2$

Im Fall $p = 2$ ist eine Charakterisierung im Sinne einer topologischen Bedingung an das Dual des Kerns möglich, wie die folgenden Ausführungen zeigen.

Zum Zwecke der Beschreibung des Dualraums $(B_{2,\kappa}^{\ell oc}(\Omega))'$ von $B_{2,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ beachten wir die Information aus [Hoer83b], Abschnitt 15.2., dass der Raum $B_{2,1/\check{\kappa}}^{\ell oc}(\Omega)$ das Dual des lokalkonvexen Raums

$$B_{2,\kappa}^{c}(\Omega) := B_{2,\kappa} \cap \mathscr{E}'(\Omega)$$

ist. Dieser kann als strikter, induktiver Limes einer Folge $B_{2,\kappa} \cap \mathscr{E}'(K_j)$, $j \in \mathbb{N}$, dargestellt werden, wobei die Mengen K_j eine Ausschöpfung der offenen Menge Ω durch Kompakta darstellt. Da die Stufen $B_{2,\kappa} \cap \mathscr{E}'(K_j)$ abgeschlossene Hilbertunterräume von $B_{2,\kappa}$ sind, ist der strikte induktive Limes $B^c_{2,\kappa}(\Omega)$ dieser Räume reflexiv.

3.4 Satz
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine P-konvexe offene Menge, $\kappa \in \mathscr{K}$ und es sei $\mathscr{B}_j := B_{2,1/\check{\kappa}} \cap \mathscr{E}'(K_j)$ für $j \in \mathbb{N}$. Folgende vier Bedingungen sind äquivalent:

1. *$P(D)$ besitzt eine $(2,\kappa)$-Rechtsinverse.*
2. *Das induktive Spektrum*
$$(\mathscr{B}_n + P(-D)B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^\vee}(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$$
ist fast strikt (siehe Definition 1.27).
3. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine weitere natürliche Zahl $m \geq n$ derart, dass für alle $k \geq m$ und allen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*
$$(\mathscr{B}_n + P(-D)B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^\vee}(\Omega)) \cap \delta B_{\mathscr{B}_k}$$
$$\subset \varepsilon B_{\mathscr{B}_m} + P(-D)B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^\vee}(\Omega)$$
4. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine weitere natürliche Zahl $m \geq n$ derart, dass für alle $k \geq m$ und allen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus den beiden Bedingungen*
   (a) *$u \in \mathscr{E}'(K_k)$, $\|u\|_{2,1/\check{\kappa}} \leq \delta$.*
   (b) *Es gibt ein $v \in P(-D)B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^\vee}(\Omega)$ mit $u - v \in \mathscr{E}'(K_n)$.*

   bereits

   (c) *Es gibt ein $w \in P(-D)B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^\vee}(\Omega)$ mit $u - w \in \mathscr{E}'(K_m)$, $\|u - w\|_{2,1/\check{\kappa}} \leq \varepsilon$.*

   folgt.

Beweis:

1. $\Leftrightarrow$ 2.:
Da der Kern $\ker(P(D))$ als abgeschlossener Unterraum eines reflexiven Fréchetraums reflexiv ist, ist er distinguiert bzw. dessen starker Dualraum ein

(LB)-Raum. Mit dem Satz von der offenen Abbildung können wir darauf schließen, dass

$$(\ker(P(D)))' \cong {}^{(B^{\ell oc}_{2,\kappa}(\Omega))'}\big/_{P(-D)(B^{\ell oc}_{2,\kappa/\tilde{P}}(\Omega))'}$$

ist. Theorem B zeigt nun, dass im Fall P-konvexer, offener Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Existenz einer $(2,\kappa)$-Rechtsinversen impliziert, dass der Kern $\ker(P(D))$ des entsprechenden Differentialoperators ein strikter projektiver Limes einer Familie von Banachräumen ist. Dies ist nach [Dieza84], Prop. 1, aber äquivalent zu der Tatsache, dass das zum Kernspektrum duale Spektrum strikt ist. Insbesondere ist dann der Raum

$${}^{(B^{\ell oc}_{2,\kappa}(\Omega))'}\big/_{P(-D)(B^{\ell oc}_{2,\kappa/\tilde{P}}(\Omega))'} \tag{3.1}$$

fast strikt (im induktiven Sinne). Setzen wir andererseits voraus, dass der Raum 3.1 fast strikt ist, so existiert ein striktes (induktives) Spektrum von Banachräumen, welches den Raum 3.1 erzeugt und mit [Dieza84], Prop. 1, erhalten wir, dass dessen Dual strikt ist. Aufgrund der Reflexivität ist damit der Kern eine Quojektion. Also besitzt $P(D)$ für das Paar $(2,\kappa)$ eine $(2,\kappa)$-Rechtsinverse. Mithilfe der vor dem Satz 3.4 gemachten Bemerkung bezüglich des Dualraumes von $B^{\ell oc}_{2,\kappa}(\Omega)$ erhalten wir, dass die Existenz der $(2,\kappa)$-Rechtsinversen äquivalent zur Striktheit des Raumes

$${}^{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}\big/_{P(-D)B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)\check{}}(\Omega)}$$

ist.

2. $\Leftrightarrow$ 3. $\Leftrightarrow$ 4.:
Beachten wir die Definition der Faststriktheit im induktiven Fall (siehe Definition 1.27) und die Tatsache, dass $P(-D)B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)\check{}}(\Omega)$ ein Vektorraum ist, so erhalten wir die Behauptung. $\square$

3.3 Zur Existenz von Bedingungen im Phragmén-Lindelöf-Sinne

In [MTV90] wurde eine der Bedingung 3. aus Satz 3.4 analoge Bedingung fouriertransformiert, um sogenannte Phragmén-Lindelöf-Bedingungen zu erhalten. Bei gleicher Vorgehensweise zur Charakterisierung der Existenz von (2,κ)-Rechtsinversen stossen wir jedoch auf erhebliche Schwierigkeiten, wie wir im Folgenden darlegen wollen. Dabei setzen wir elementare Kenntnisse der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, wie beispielsweise in Kapitel 2 von [Hoer90] dargestellt, voraus.
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex sowie P ein nichtkonstantes, komplexes Polynom. Für genügend kleine $\varepsilon > 0$ (dann ist die Menge Ω_ε auch konvex und nicht-leer) definieren wir das Trägerfunktional

$$\begin{aligned} h_\varepsilon : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{y \in \overline{\Omega_\varepsilon}} \langle x, y \rangle = \sup_{y \in \overline{\Omega_\varepsilon}} \sum_{j=1}^n x_j y_j \end{aligned}$$

und bezeichnen mit $V(P)$ die Nullstellenvarietät des Polynoms P.

In [MTV90] wurde die Bedingung PL(Ω) eingeführt

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $0 < \delta < \varepsilon$, so dass für alle $0 < \eta < \delta$ ein $B > 0$ existiert, so dass für alle plurisubharmonischen Funktionen $u : \mathbb{C}^n \to [-\infty, +\infty)$ die beiden Bedingungen

$$\begin{array}{ll} a) & u(z) \leq h_\varepsilon(Im\, z) + O(log(1 + |z|^2)), \quad z \in \mathbb{C}^n \\ b) & u(z) \leq h_\eta(Im\, z), \quad z \in V(P) \end{array}$$

die Bedingung

$$\begin{array}{ll} c) & u(z) \leq h_\delta(Im\, z) + B\ log(1 + |z|^2) + B, \quad z \in V(P) \end{array}$$

impliziert.

Dort wurde gezeigt, dass die Bedingung PL(Ω) oder gleichwertig die Bedingung APL(Ω), äquivalent zur Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen zum partiellen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $P(D)$ zwischen den Räumen $\mathscr{D}'(\Omega)$ (bzw. $\mathscr{E}(\Omega)$) ist.
Dabei entsteht die Bedingung APL(Ω) aus der Bedingung PL(Ω) durch Ersetzen von u durch $u := \log|f|$ mit einer ganzen, holomorphen Funktion

$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

Wir wollen analog wie in [MTV90] vorgehen. Dazu wählen wir für die konvexe Menge Ω eine konvexe Ausschöpfung $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und betrachten die zur Sequenz 3.2

$$0 \to (B^{\ell oc}_{2,\kappa/\tilde{P}}(\Omega))' \overset{P(-D)}{\to} (B^{\ell oc}_{2,\kappa}(\Omega))' \xrightarrow{\iota'} (\ker(P(D)))' \to 0 \tag{3.2}$$

isomorphe Sequenz

$$0 \to \widehat{B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)} \xrightarrow{\check{P}\cdot} \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)} \xrightarrow{\rho} \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}/\check{P}\cdot\widehat{B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)} \to 0\ . \tag{3.3}$$

Dabei ist ρ die Quotientenabbildung

$$\begin{aligned} \rho : \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)} &\to \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}/\check{P}\cdot\widehat{B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)} \\ x &\mapsto x + \check{P}\cdot \widehat{B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)} \end{aligned}$$

und für eine temperierte Gewichtsfunktion κ' ist

$$\widehat{B^c_{2,\kappa'}(\Omega)} = \bigcup_{j\in\mathbb{N},N\geq 0} \Bigg\{ f\in\mathscr{O}(\mathbb{C}^n) : |f(z)| \leq C\cdot(1+|z|)^N e^{H_{K_j}(\mathrm{Im}(z))} \\ \forall z\in\mathbb{C}^n \text{ und} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2(\kappa'(x))^2 dx < \infty \Bigg\}\ .$$

Betrachten wir nun die exakte Sequenz

$$0 \to \widehat{B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)} \xrightarrow{\check{P}\cdot} \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)} \xrightarrow{\tilde{\rho}} \{ f_{|V(\check{P})} : f\in\widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}\} \to 0\ .$$

Würde sich herausstellen, dass diese Sequenz topologisch isomorph zur Sequenz 3.3 ist (mit einer Einschränkungsabbildung $\tilde{\rho}$), so wäre die Existenz einer $(2,\kappa)$-Rechtsinversen auf Ω äquivalent zur Existenz eines stetigen, linearen Ausdehnungsoperators

$$\delta : \{ f_{|V(\check{P})} : f\in\widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}\} \to \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}\ .$$

Dabei stellt sich die Frage, ob die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}/\check{P}\cdot(\widehat{B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)}) &\to \{ f_{|V(P)} : f\in\widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}\} \\ f + \check{P}\cdot(\widehat{B^c_{2,(\tilde{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)}) &\mapsto f_{|V(P)} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Dabei ergeben sich mehrere Probleme:

1. Man drücke den Raum $\{f_{|V(\check{P})} : f \in \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}\}$ als einen Raum holomorpher Funktionen auf der Nullstellenvarietät $V(\check{P})$ mit geeigneten Gewichten (auf der Varietät) aus.
   Wir bezeichnen nun mit $\mathscr{O}(V(\check{P}))$ die in einer Umgebung der Nullstellenvarietät des Polynoms $\check{P}$ holomorphen Funktionen. Da das Kerndual $(\ker(P(D))_{B^{\ell oc}_{2,\kappa}(\Omega)})'$ ein induktiver Limes von Hilberträumen ist, sollte eine Beschreibung im Sinne einer Vereinigung von Räumen

   $$E_n := \{f \in \mathscr{O}(V(\check{P})) : \|f\|_n < \infty\}$$

   mit Normen der Form

   $$\|f\|_n := \int_V |f|^2 \, v_n d\lambda_n ,$$

   möglich sein. Dabei sind v_n geeignet gewählte Gewichtsfunktionen.

2. (Divisions-)Problem beim Nachweis der Injektivität der Abbildung T: Ist $f \in \widehat{B^c_{2,1/\check{\kappa}}(\Omega)}$ mit der Eigenschaft $f_{|V(P)} \equiv 0$, so müsste es ein $g \in \widehat{B^c_{2,(\check{P}/\kappa)^{\check{}}}(\Omega)}$ mit der Eigenschaft $f = \check{P} \cdot g$ geben (das analoge Problem in [MTV90] wird gelöst durch das (Divisions-)Lemma 2.2 aus [Han83]).

3. Lokale Beschränktheit der Umkehrabbildung von T:
   Meise, Taylor und Vogt benutzten in [MTV90] den folgenden Ausdehnungssatz (siehe Theorem 2.3 aus [Han83]):

   Sei P ein quadratfreies Polynom und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge. Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ existiert eine (von ε und k abhängige) Konstante $M \in \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:
   Für jede auf der Nullstellenvarietät $V(\check{P})$ holomorphe Funktion f mit

   $$\sup_{z \in V(\check{P})} |f(z)|(1+|z|)^{-k} e^{-h_{\Omega_\varepsilon}(\mathrm{Im}(z))} \leq 1$$

   existiert eine ganze holomorphe Funktion g mit der Eigenschaft $g_{|V(\check{P})} = f$ und

   $$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} |g(z)|(1+|z|)^{-k-M} e^{-h_{\Omega_\varepsilon}(\mathrm{Im}(z))} \leq 2 .$$

Ein in unserem Fall benötigtes (analoges) Theorem müsste aufgrund der vorgegebenen temperierten Gewichtsfunktion eine holomorphe Fortsetzung mit einer L^2-Integralabschätzung ohne Gewichtsverlust beinhalten.
Jedoch bereits in der (vergleichsweise einfachen) Situation einer Fortsetzung einer holomorphen Funktion von einer Hyperebene im $\mathbb{C}^n$ auf ganz $\mathbb{C}^n$ tritt bereits ein Gewichtsverlust (siehe dazu beispielsweise [Hoer90], Th. 4.4.3) auf. Man beachte ebenfalls in diesem Zusammenhang die Bemerkungen zu Theorem 15.3.3, [Hoer83b].

KAPITEL IV

Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen und P-Konvexität mit Schranken

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. In diesem Kapitel diskutieren wir Zusammenhänge zwischen der Existenz von Rechtsinversen des Differentialoperators $P(D)$, wenn er einerseits als Operator auf $B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega)$ und andererseits als Operator auf $\mathscr{D}'(\Omega)$ (beziehungsweise $\mathscr{E}(\Omega)$) betrachtet wird.
Wir zeigen zunächst, dass die Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen immer die Existenz einer Rechtsinversen auf $\mathscr{D}'(\Omega)$ (beziehungsweise $\mathscr{E}(\Omega)$) impliziert. Nach [MTV90] ist dies äquivalent zur Existenz genügend vieler Fundamentallösungen mit „Löchern im Träger" (siehe dazu die vierte Bedingung aus Lemma 2.1). Um aus einer solchen Bedingung eine (p,κ)-Rechtsinverse zu konstruieren, werden wir benötigen, dass diese Fundamentallösungen zusätzlich regulär sind.
Nun impliziert die Existenz von Rechtsinversen auf $\mathscr{D}'(\Omega)$ in bestimmten Fällen Hyperbolizitätseigenschaften von $P(D)$ (siehe dazu [MTV90], Abschnitt 3).
Diese werden ausgenutzt, um genügend viele reguläre Fundamentallösungen mit „Löchern im Träger" zu erzeugen.
Wir erhalten dann, dass in den folgenden wichtigen Fällen die Existenz einer $\mathscr{D}'(\Omega)$-Rechtsinversen von $P(D)$ äquivalent zu der Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen ist:

1. Ω ist eine beschränkte, nichtleere offene Menge mit C^1-Rand.

2. Ω ist ein konvexer, offener Polyeder mit nicht-charakteristischen Seiten (und als Spezialfall davon: Ω ist ein Halbraum mit nicht-charakter-

istischem Rand.)

3. $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\operatorname{grad}(P) = 2$.
4. $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Der dritte dieser vier Fälle erlaubt es uns, ein Beispiel für einen nicht-hyperbolischen Differentialoperator anzugeben, welcher trotzdem eine (p,κ)-Rechtsinverse besitzt.

4.1 Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen

Nach [MTV90] bezeichnet man eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als **P-konvex mit Schranken**, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ existiert eine kompakte Menge L mit der Eigenschaft $K \subset L \subset \Omega$ derart, dass für jede in Ω relativ kompakte Teilmenge ω mit $L \subset \omega$ Parameter $s \in \mathbb{N}_0$ und $C > 0$ existieren, so dass für jedes $\nu \in \mathscr{E}'(\omega)$ mit

$$P(-D)\nu|_{\omega\setminus K} \in B^0$$

bereits

$$\nu|_{\omega\setminus L} \in C \cdot B^{-s}(\omega \setminus L)$$

erfüllt ist, wobei B^0 die abgeschlossene Einheitskugel im $L_2(\mathbb{R}^n)$ und $B^{-s}(\omega \setminus L)$ die abgeschlossene Einheitskugel des Sobolevraums $W^{-s}(\omega \setminus L)$ bezeichnet .

Dies ist äquivalent dazu (siehe [MTV90], Theorem 2.7), dass

$$P(D) : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$$

beziehungsweise

$$P(D) : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega),$$

eine stetige lineare Rechtsinverse besitzen.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen leiten wir aus dem folgenden Spezialfall des zweiten Theorems aus [BFM97] ab:

4.1 Satz
Existiert ein stetiger, linearer Operator $R : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ *mit* $P(D)R(f) = f$ *für jedes* f *aus* $\mathscr{E}(\Omega)$, *so besitzt* $P(D) : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$ *eine stetige, lineare Rechtsinverse.*

Bemerkung: Man argumentiert hier mit Hilfe der Stetigkeit des Lösungsoperators, dass unter der Voraussetzung des Satzes folgende Bedingung erfüllt ist:

> Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $0 < \delta < \epsilon$ derart, dass für jedes $0 < \eta < \delta$ ein $\ell \in \mathbb{N}$ existiert, so dass Folgendes gilt:
> Für jedes $f \in C^\ell(\Omega, \Omega_\delta)$ existiert eine Distribution $g \in \mathscr{D}'(\Omega_\eta, \Omega_\epsilon)$ mit $P(D)g = f_{|\Omega_\eta}$.

Diese Bedingung ist nach [MTV90], Theorem 2.7, äquivalent dazu, dass der Operator $P(D) : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse besitzt beziehungsweise die Menge Ω P-konvex mit Schranken ist.

Beachten wir 1.13 und wenden Satz 4.1 auf den Differentialoperator $P(D) : B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \to B_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega)$ an, so ergibt sich unmittelbar

4.2 Korollar
Besitzt $P(D) : B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \to B_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega)$ *eine Rechtsinverse, so ist die Menge* Ω P*-konvex mit Schranken.*

Als Anwendung von Korollar 4.2 erhalten wir das folgende

4.3 Korollar
Ist $n \geq 2$, *so existiert auf keiner offenen Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *zum Differentialoperator*

$$P(D) : B_{p,\kappa}^{\ell oc}(\Omega) \to B_{p,\kappa/\tilde{P}}^{\ell oc}(\Omega)$$

eine (p,κ)-Rechtsinverse, wenn $P(D)$ *hypoelliptisch ist.*

Gäbe es nämlich eine solche Menge Ω, so wäre diese Menge auch P-konvex mit Schranken, was jedoch [MTV90], Korollar 2.11, widersprechen würde.

Im Folgenden werden unter der Voraussetzung gewisser regulärer Fundamentallösungen E Rechtsinverse konstruiert. Durch lokalendliche Summen von Ausdrücken der Form

$$\varphi f * E\ , \tag{4.1}$$

wobei φ eine geeignete Abschneidefunktion ist, können wir dies erreichen. Dabei muss darauf geachtet werden, dass diese Faltung wieder ein Element des Raums $B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega)$ ist.

Eine einfache Technik, entnommen aus dem Beweis der ersten Proposition aus [MTV96a], ergibt im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ eine hinreichende Bedingung für die Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen:

4.4 Proposition
Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und es existieren m reguläre Fundamentallösungen $E_1, \ldots E_m$ mit

$$supp(E_j) \subset \mathbb{R}^n \setminus K_j, \quad j \in \{1, \ldots m\},$$

wobei die K_j offene, konvexe Kegel mit Spitze im Nullpunkt sind. Überdecken die Kegel $K_1, \ldots K_m$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$, dann existiert für jedes Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ eine (p,κ)-Rechtsinverse des Differentialoperators $P(D)$ auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Wir wählen eine nach [Hoer63], Theorem 3.1.1, existierende reguläre Fundamentallösung E_0 und eine C^∞-Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j\in\{0,\ldots,m\}}$ der Überdeckung $\{-K_1, \ldots, -K_m\} \cup B_1(0)$, um mit

$$R(f) := \sum_{j=0}^{m} E_j * \varphi_j f$$

eine (p,κ)-Rechtsinverse auf $\mathbb{R}^n$ zu erhalten. □

Im Fall beliebiger, offener Mengen Ω zeigen wir mit der Technik des Lemmas 2.4 aus [MTV96b] folgendes hinreichendes Kriterium für die Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen:

4.5 Satz
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es gelte:

(Bed. 4.1) *Für jede Menge $K \subset\subset \Omega$ gibt es eine Menge $M \subset\subset \Omega$ derart, dass für jede Menge $L \subset\subset \Omega$ und für alle $\xi \in \Omega \setminus M$ ein $E \in B^{\ell oc}_{\infty,\tilde{P}}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit*

- *$supp(E) \cap (K - \xi) = \emptyset$*
- *$supp(P(D)E - \delta_0) \cap (L - \xi) = \emptyset$.*

Dann besitzt $P(D)$ für jedes Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf der Menge Ω.

Aus Vereinfachungsgründen zeigen wir zuvor:

4.6 Lemma
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gilt Bedingung (Bed. 4.1), so existiert eine Folge $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen der Menge Ω derart, dass für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ die Menge Ω_k relativ kompakt in der Menge Ω_{k+1} liegt, die Vereinigung der Mengen Ω_k gleich der Menge Ω und folgende Bedingung erfüllt ist:
Für jedes $\xi \in \Omega_{k+2}\backslash\overline{\Omega_{k+1}}$ existieren Distributionen $E_\xi \in B^{\ell oc}_{\infty,\tilde{P}}(\mathbb{R}^n)$ und $T_\xi \in B^{\ell oc}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ mit

- *supp*$(E_\xi) \subset (\mathbb{R}^n\backslash\Omega_k) - \xi$
- $P(D)E_\xi = \delta_0 + T_\xi$, *wobei* $\mathrm{supp}(T_\xi) \subset (\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega_{k+3}}) - \xi$.

Beweis: Man bilde eine Ausschöpfung der Menge Ω durch Mengen

$$\widetilde{\Omega_k} := \left\{x \in \Omega : |x| < k \text{ und } \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\right\},\ k \geq 1\ .$$

Man wähle nun eine Teilausschöpfung durch

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 := \widetilde{\Omega_1},\\
&\Omega_2 := \widetilde{\Omega_{k_2}},\ \text{wobei } k_2 = \max\{2, \min\{j \in \mathbb{N} : M_{\Omega_1} \subset \widetilde{\Omega_j}\}\}\\
&\Omega_q := \widetilde{\Omega_{k_q}},\ \text{wobei } k_q = \max\{k_{q-1}+1, \min\{j \in \mathbb{N} : M_{\Omega_{q-1}} \subset \widetilde{\Omega_j}\}\}
\end{aligned}$$

für $q \geq 3$. Ist dann $\xi \in \Omega_{k+2}\backslash\overline{\Omega_{k+1}}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gibt es mit der Definition $K := \Omega_k$ eine Menge $M_{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}$, so dass für dieses $\xi \in \Omega\backslash M_{\Omega_k}$ und $L := \overline{\Omega_{k+3}}$ ein $E \in B^{\ell oc}_{\infty,\tilde{P}}(\mathbb{R}^n)$ existiert, so dass einerseits $\mathrm{supp}(E) \cap (\Omega_k - \xi) = \emptyset$ und andererseits $\mathrm{supp}(P(D)E - \delta_0) \subset ((\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega_{k+3}}) - \xi)$. □

Beweis des Satzes 4.5: Gibt es für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in Lemma 4.6 beschrieben, so können wir den Beweis des Lemmas 2.4 aus [MTV96b] entsprechend übertragen und erhalten für jedes $k \in \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\}$ $(\Omega_0 := \Omega_{-1} := \Omega_{-2} := \emptyset)$ einen stetigen, linearen Operator

$$R_k : B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega, \Omega_k) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega, \Omega_{k-2})$$

welcher die Eigenschaft

$$P(D)R_k(f)_{|\Omega_{k+1}} = f_{|\Omega_{k+1}}$$

besitzt. Zusätzlich definieren wir noch den linearen, stetigen Operator

$$\begin{array}{rcl} R_0 : B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega,\Omega_0) & \to & B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega,\Omega_{-2}) \\ f & \mapsto & E*(\psi f), \end{array}$$

wobei E eine reguläre Fundamentallösung von $P(D)$ ist und $\psi \in \mathscr{D}(\Omega_4)$ eine Testfunktion mit $\psi_{|\Omega_3} \equiv 1$.
Fügen wir dann noch die Operatoren $R_1 := R_{0|B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega,\Omega_1)}$ und $R_2 := R_{0|B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega,\Omega_2)}$ hinzu, so können wir die Beweistechnik von Lemma 2.2 aus [MTV96b] anwenden und erhalten die gesuchte Rechtsinverse. □

Bemerkungen: Man sieht, dass in der folgenden hinreichenden Bedingung aus [MTV90]

(MTV vi.) Es gibt eine Folge (Ω_k) von offenen Teilmengen von Ω mit $\Omega_k \subset\subset \Omega_{k+1}$ und $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, so dass für alle $\xi \in \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k+1}}$ es $E_\xi,\ T_\xi \in \mathscr{D}'$ gibt, so dass

1. supp $(E_\xi) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k) - \xi$
2. $P(D)E_\xi = \delta_0 + T_\xi$, wobei supp $(T_\xi) \subset (\Omega_{k+4} \setminus \overline{\Omega_{k+3}}) - \xi$

die Distributionen E_ξ und T_ξ durch eine reguläre Fundamentallösung $E_\xi \in B^{\ell oc}_{\infty,\tilde{P}}(\mathbb{R}^n)$ sowie eine Restdistribution $T_\xi \in B^{\ell oc}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ ersetzt werden können, um eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen zu erhalten. Die schwächere Bedingung an den Träger der Restdistribution kann auch im allgemeinen Fall gestellt werden, was mit Hilfe der Beweistechnik beispielsweise des Theorems 2 aus [BFM97] gezeigt werden kann.

Formuliert man die *(Bed 4.1)* anstatt für $B^{\ell oc}_{p,\kappa}$-Räume für allgemeine Distributionen, so ist dies äquivalent zu folgender Bedingung aus [MTV90]

(MTV iii.) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $0 < \zeta_0 < \epsilon$ so dass für alle $0 < \sigma < \eta < \zeta < \zeta_0$ und alle $\xi \in \Omega_\eta \setminus \overline{\Omega_\zeta}$ es ein $E_\xi \in \mathscr{D}'$ gibt, so dass folgendes gilt:

1. supp $E_\xi \subset (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_\epsilon) - \xi$
2. $P(D)E_\xi = \delta_0 + T_\xi$, wobei supp $(T_\xi) \subset (\Omega_\sigma \setminus \overline{\Omega_\eta}) - \xi$.

Offen ist hingegen die Frage, ob die hinreichende Bedingung *(Bed. 4.1)* zur Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen auch notwendig ist.
Ein Vorgehen, analog zu [MTV90], Lemma 2.1, ermöglicht es leider nicht,

Fundamentallösungen gleichzeitig mit genügender Regularität und genügend großen „Löchern im Träger“ zu erzeugen.

Jedoch im Falle bestimmter Differentialoperatoren und geeigneter Mengen Ω haben wir genügend viele reguläre Fundamentallösungen mit „Löchern im Träger“ zur Verfügung, um (p,κ)-Rechtsinversen zu konstruieren, wie der folgende Abschnitt zeigen wird.

4.2 Über die Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen im hyperbolischen Fall

Im Folgenden bezeichnen wir für $0 \neq N \in \mathbb{R}^n$ mit

$$H_{\pm}(N) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, N \rangle \gtrless 0\}$$

den „oberen“ beziehungsweise „unteren“ offenen Halbraum zum Normalenvektor N. Des weiteren erinnern wir kurz an die Definition (für die Definition des Hauptteils P_m eines Polynoms P siehe Abschnitt 1.1) der Hyperbolizität des Operators $P(D)$:

4.7 Definition
Ein partieller Differentialoperator $P(D)$ heißt hyperbolisch in Bezug auf den Vektor $N \in \mathbb{R}^n$, falls für den Hauptteil P_m des Polynoms P die Ungleichung $P_m(N) \neq 0$ gilt (man spricht in diesem Falle davon, dass N nichtcharakteristisch für P ist) und es ein $\tau_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Petrowski-Bedingung

$$P(\xi + i\tau N) \neq 0, \quad \textit{falls } \tau < \tau_0 \textit{ und } \xi \in \mathbb{R}^n$$

erfüllt ist.

Die starke Aussage (vergleiche Theorem 5.6.1 [Hoer63]), dass zu jedem in Bezug auf den reellen Vektor N hyperbolischen Differentialoperator $P(D)$ eine reguläre Fundamentallösung mit Träger in einem abgeschlossenen Teilkegel der Menge $\overline{H_+(N)}$ existiert in Verbindung mit der Aussage, dass jeder in Bezug auf den Vektor N hyperbolische Differentialoperator ebenfalls in Bezug auf $-N$ hyperbolisch ist (vergleiche Theorem 5.5.1 [Hoer63]) sorgt dafür, dass in verschiedenen Situationen die Bedingung *(Bed. 4.1)* erfüllt ist.

Zunächst beweisen wir unter Beachtung von [MTV90], Theorem 3.8, das folgende

Theorem C *Für ein nicht-konstantes, komplexes Polynom P sind äquivalent:*

1. *$P(D)$ ist hyperbolisch in Bezug auf jeden nicht-charakteristischen Vektor $N \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Für jedes Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ und jede offene, konvexe Menge Ω besitzt $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse.*

3. *Es existiert eine offene, beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand und ein Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ derart, dass der Operator $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse besitzt.*

4. *Jede offene, konvexe Menge Ω ist P-konvex mit Schranken.*

5. *Es existiert eine offene, beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand, welche P-konvex mit Schranken ist.*

Beweis:

Es genügt hier der Nachweis der Implikation 1. $\Rightarrow$ 2, da die anderen Implikationen in [MTV90] bewiesen werden, aus Korollar 4.2 folgen oder aber trivial sind.
Um also aus der ersten Bedingung die zweite Bedingung zu folgern, wähle man eine offene, konvexe Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zunächst beobachten wir, dass die Menge

$$\{x \in S^{n-1} : P_m(x) \neq 0\}$$

dicht in S^{n-1} liegt. Wäre dies nicht der Fall, so würde wegen der Homogenität des Hauptteils des Polynoms P_m eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ existieren, auf welcher das Polynom P_m verschwinden würde. Mit dem Satz von Taylor würde dann aber P_m identisch verschwinden. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da P als nicht-konstant angenommen wurde.

Also existiert eine Ausschöpfung $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Menge Ω aus konvexen, offenen Polyedern Ω_k derart, dass deren Seiten nicht-charakteristisch für das Polynom P sind.

Wähle nun ein festes $k \in \mathbb{N}$ und ein $\xi \in \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k+1}}$. Unter diesen Umständen folgt, dass es eine Hyperebene

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, N\rangle = 0\}$$

durch den Nullpunkt gibt, so dass $H \cap \overline{\Omega_{k+1}} - \xi = \emptyset$ und welche nicht-charakteristisch für das Polynom P ist. Nach Voraussetzung ist der Operator dann hyperbolisch in Bezug auf N und es existiert eine Fundamentallösung $E_\xi \in B^{\ell oc}_{\infty,\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{supp}(E_\xi) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_{k+1}}) - \xi \subset (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k) - \xi.$$

Man beachte hier, dass die Fundamentallösung nach [Hoer63], Theorem 5.6.1, in einem echten Kegel liegt (bzw. der Träger enthalten in einer Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \tilde{N}\rangle \ \geq \varepsilon|x|\}$ für ein $\varepsilon > 0$ ist). Satz 4.5 zeigt dann die Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen. □

In dem Fall, dass die Menge Ω ein offener Halbraum mit nicht-charakteristischem Normalenvektor ist, erhalten wir die Äquivalenz zwischen Hyperbolizität in Richtung des Normalenvektors, der Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen auf Ω und der P-Konvexität mit Schranken der Menge Ω:

4.8 Proposition
Ist Ω ein offener Halbraum mit nicht-charakteristischem Normalenvektor $N \in \mathbb{R}^n$, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. *$P(D)$ ist hyperbolisch in Bezug auf den Vektor N.*
2. *$P(D) : B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega)$ besitzt eine stetige, lineare Rechtsinverse.*
3. *Die Menge Ω ist P-konvex mit Schranken.*

Beweis: Unter Nutzung der Technik aus Proposition 3.2, [MTV90], erhalten wir die Implikation 1.$\Rightarrow$ 2., indem wir eine geeignete Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ auf Ω wählen und mithilfe der nach Voraussetzung existierenden regulären Fundamentallösungen E_+ und E_- eine Rechtsinverse

$$R(f) := E_+ * (\varphi_0 f) + \sum_{j=1}^{\infty} E_- * (\varphi_j f)$$

angeben. Die anderen Implikationen sind klar. □

Übertragen wir den Beweis der Proposition 4 aus [MTV96a] entsprechend, so sehen wir, dass man unter gewissen Umständen auf die Bedingung, dass der Normalenvektor auf dem Halbraum nicht-charakteristisch sein muss, verzichten kann:

4.9 Proposition
Sei $N \in \mathbb{R}^n$ ein charakteristischer Vektor für das Polynom $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Es seien weiter folgende zwei Bedingungen erfüllt:

- *Es existiert ein Paar (p,κ)$\in [1,\infty)\times\mathscr{K}$ derart, dass $P(D)$ auf $\mathbb{R}^n$ eine (p,κ)-Rechtsinverse besitzt.*
- *Es existiert eine Fundamentallösung $E \in B^{\ell oc}_{\infty,\tilde{P}}(\mathbb{R}^n)$ für $P(D)$ mit* $\mathrm{supp}\,(E) \subset \overline{H_-(N)}$ $\quad$ *(*$\mathrm{supp}\,(E) \subset \overline{H_+(N)}$*).*

Dann besitzt $P(D)$ auf der Menge $H_+(N)$ ($H_-(N)$) eine (p,κ)-Rechtsinverse.

Die Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen auf einer Folge offener Mengen überträgt sich auf deren nicht-leeren Durchschnitt.
Genauer gilt der folgende

4.10 Satz
Ist $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ und $(\Omega^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Mengen im $\mathbb{R}^n$ derart, dass $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega^i =: \Omega$ offen und nicht-leer ist. Besitzt für jedes $i \in \mathbb{N}$ der Operator $P(D)$ auf der Menge Ω^i eine (p,κ)-Rechtsinverse, so besitzt $P(D)$ auch auf der Menge Ω eine (p,κ)-Rechtsinverse.

Bemerkung: Wir wählen, anders als im Beweis von [MTV90], Korollar 2.10, dargestellt, einen konstruktiven Beweis, der auch im Falle $\mathscr{D}'(\Omega)$ (beziehungsweise $\mathscr{E}(\Omega)$) zum Ziel führt.

Bevor wir zum eigentlichen Nachweis des Satzes kommen, werden wir folgende Hilfsaussage zeigen:

4.11 Lemma
Unter obigen Voraussetzungen gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für jedes $\eta \in (0,\delta)$ eine stetige lineare Abbildung

$$S : \{f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega) : \mathrm{supp}(f) \subset \Omega_\eta \backslash \overline{\Omega_\delta}\ \} \to \{f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) : \mathrm{supp}(f) \cap \Omega_\varepsilon = \emptyset\}$$

mit $P(D)S(f) = f$ für jedes $f \in \{f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega) : \mathrm{supp}(f) \subset \Omega_\eta \setminus \overline{\Omega_\delta}\ \}$ existiert.

Beweis des Lemmas: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es zunächst einmal für jeden Index $i \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\varepsilon_i > 0$ derart, dass die abgeschlossene Submenge $\overline{\Omega_\varepsilon}$ von Ω in der Submenge $(\Omega^i)_{\varepsilon_i}$ von Ω^i enthalten ist. Damit existiert aber für jeden Index $i \in \mathbb{N}$ ein $\delta_i \in (0,\varepsilon_i)$ und Abbildungen $R_i : B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega^i) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega^i)$, welche die Eigenschaft $P(D)R_i = \mathrm{id}_{B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega^i)}$ besitzen und aus Stetigkeitsgründen zusätzlich

$$R_i(f)_{|(\Omega^i)_{\varepsilon_i}} = 0, \text{ falls } f_{|(\Omega^i)_{\delta_i}} = 0, \quad f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega^i)$$

erfüllen.

Aufgrund der Tatsache, dass die Mengen $\overline{(\Omega^i)_{\delta_i}}$ jeweils kompakte Teilmengen der Menge Ω^i sind, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{(\Omega^i)_{\delta_i}} \subset \Omega_\delta$ ist. Ist nun $\eta \in (0,\delta)$, so ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega \setminus \overline{(\Omega^i)_{\delta_i}}$ eine offene Überdeckung der Menge $\overline{\Omega_\eta} \setminus \Omega_\delta$. Da $\overline{\Omega_\eta} \setminus \Omega_\delta$ kompakt ist, existiert eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und Indizes $i_1, \ldots, i_m$ derart, dass $\overline{\Omega_\eta} \setminus \Omega_\delta \subset \bigcup_{j=1}^m \Omega \setminus \overline{(\Omega^{i_j})_{\delta_{i_j}}}$ gilt. Man wähle nun eine Teilung der Eins von $\bigcup_{j=1}^m \Omega \setminus \overline{(\Omega^{i_j})_{\delta_{i_j}}}$ mit Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, welche

$$\operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset \Omega \setminus (\Omega^{i_\nu})_{\delta_{i_\nu}} \quad \text{für alle } \ \nu \in \{1, \ldots, m\}$$

erfüllen. Ist $f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega)$ gegeben mit $\operatorname{supp}(f) \subset \Omega_\eta \setminus \overline{\Omega_\delta}$, so setze man

$$R(f) := \sum_{j=1}^m R_{i_j}(\varphi_{i_j} f) \ .$$

Da die Funktion φ_{i_j} auf der Menge $(\Omega^{i_j})_{\delta_{i_j}}$ verschwindet und damit ebenfalls $\varphi_{i_j} f$ dort verschwindet, verschwindet schließlich $R_{i_j}(\varphi_{i_j} f)$ auf der Menge $(\Omega^{i_j})_{\varepsilon_{i_j}}$. Aufgrund der Tatsache

$$\overline{\Omega_\varepsilon} \subset (\Omega^{i_j})_{\varepsilon_{i_j}} \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}$$

gilt dann auch

$$R_{i_j}(\varphi_{i_j} f)_{|\overline{\Omega_\varepsilon}} \equiv 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}$$

und abschließend

$$\sum_{j=1}^m R_{i_j}(\varphi_{i_j} f) = R(f) = 0 \quad \text{auf } \ \overline{\Omega_\varepsilon} \ .$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Beweis von Satz 4.10: Man wähle eine geeignete Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (beispielsweise gibt man sich ein $\varepsilon_1 > 0$ vor, setzt dann $\varepsilon_2 = \delta_1$, danach $\varepsilon_3 = \delta_2$ usw.) und nach Lemma 4.11 existierende stetige, lineare Abbildungen

$$R_n : \{f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \subset \Omega_{\varepsilon_{n+3}} \setminus \overline{\Omega_{\varepsilon_{n+1}}}\ \} \to \{f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega) : f_{|\Omega_{\varepsilon_n}} \equiv 0\}$$

mit der Eigenschaft $P(D)R_n(f) = f$ in der Einschränkung auf die Menge $\mathrm{dom}(R_n)$. Dann wähle man eine Teilung der Eins $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Ω derart, dass

$$\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset \Omega_{\varepsilon_{n+3}} \setminus \overline{\Omega_{\varepsilon_{n+1}}}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\mathrm{supp}(\varphi_0) \subset \Omega_{\varepsilon_3}$. Da nach Voraussetzung für den Operator $P(D) : B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega_1) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega_1)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse $R_0 : B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega_1) \to B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\Omega_1)$ existiert, können wir

$$R(f) := R_0(\varphi_0 f)_{|\Omega} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\varphi_n f), \quad f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\Omega),$$

bilden, wobei $\varphi_0 f \in B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{p}}(\Omega_1)$ durch triviale Fortsetzung entstand. □

Mit Proposition 4.8 und Satz 4.10 erhalten wir für konvexe Polyeder folgendes

4.12 Korollar
Sei Ω ein offener, konvexer Polyeder im $\mathbb{R}^n$ mit Seiten, deren Normalenvektoren nicht-charakteristisch für P sind. Dann sind äquivalent:

1. *$P(D)$ ist hyperbolisch in Bezug auf jeden Vektor, welcher normal auf einer Seite von Ω steht.*
2. *Für jedes Paar (p,κ)$\in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ besitzt $P(D)$ auf Ω eine (p,κ)-Rechtsinverse.*
3. *Es existiert ein Paar (p,κ)$\in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ derart, dass $P(D)$ auf Ω eine (p,κ)-Rechtsinverse besitzt.*
4. *Die Menge Ω ist P-konvex mit Schranken.*

Im Spezialfall $n = 2$ gilt unter Beachtung von [MTV90], Theorem 4.11, folgender

4.13 Satz
Ist $n = 2$, so sind die Bedingungen 1. bis 5. aus Theorem C äquivalent zu folgenden Bedingungen:

6. *$\mathbb{R}^2$ ist P-konvex mit Schranken.*
7. *P ist hyperbolisch in Bezug auf einen Vektor $N \in \mathbb{R}^2$.*

8. *Jeder irreduzible Faktor von P ist hyperbolisch in Bezug auf jede nicht-charakteristische Richtung.*

9. *Es existiert ein Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$, so dass $P(D)$ auf $\mathbb{R}^2$ eine (p,κ)-Rechtsinverse besitzt.*

10. *Für jedes Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ besitzt $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf $\mathbb{R}^2$.*

Beweis: Die Äquivalenz der Bedingungen 1. bis 8. ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.11, [MTV90]. Mit Korollar 4.2 erhalten wir die Implikation 10.$\Rightarrow$9.$\Rightarrow$6. . Ist Bedingung 7. erfüllt, so können wir durch die Definition

$$\begin{array}{rcl} R : B^{\ell oc}_{p,\kappa/\tilde{P}}(\mathbb{R}^n) & \to & B^{\ell oc}_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & E_- * (\psi_1 f) + E_+ * (\psi_2 f) + E_+ * (\psi_3 f) \end{array}$$

für jedes Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf $\mathbb{R}^n$ definieren. Dabei sind die E_- und E_+ die nach Voraussetzung existierenden regulären Fundamentallösungen mit Trägern in den beiden entsprechenden abgeschlossenen Halbräumen und $\psi_i(x) := \varphi_i(\langle x, N\rangle), i \in \{1,2,3\}$, mit Hilfe einer Teilung der Eins $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ von $\{(-\infty,0),(-1,1),(0,\infty)\}$ definierte glatte Funktionen. Damit erhalten wir die Implikation 7. $\Rightarrow$ 10. . $\square$

4.3 Der Fall grad$(P) = 2$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$

Auch im Fall grad$(P) = 2$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist die Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen äquivalent dazu, dass die Menge Ω P-konvex mit Schranken ist. Es gilt nämlich folgendes

Theorem D *Ist* grad$(P) = 2$ *und* $\Omega = \mathbb{R}^n$*, so sind äquivalent:*

1. *Ω ist P-konvex mit Schranken.*

2. *Für alle Paare $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ besitzt der Operator $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf Ω.*

3. *Es existiert ein Paar $(p,\kappa) \in [1,\infty) \times \mathscr{K}$ mit der Eigenschaft, dass der Operator $P(D)$ eine (p,κ)-Rechtsinverse auf Ω besitzt.*

Beweis: Es genügt, lediglich die Implikation 1)⇒ 2) zu zeigen, denn die Implikation 2)⇒ 3) ist trivial und die Implikation 3)⇒ 1) folgt aus Satz 4.1.

Aus Korollar 1 zu Theorem 3 in [MTV96a] geht hervor, dass im Falle eines nicht-konstanten Polynoms vom Grad 2 aus der Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen zum Differentialoperator

$$P(D) : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

die Existenz einer Basis $\{N_1, \ldots, N_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ und Fundamentallösungen

$$E_1^{\pm}, \ldots, E_n^{\pm} \text{ mit } \operatorname{supp}(E_j^{\pm}) \subset \overline{H_{\pm}(N_j)}, \; j \in \{1, \ldots, n\},$$

folgt.
Sei nun $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Des Weiteren sei $M := B_R(0) \supset K$ mit $R > 0$ so groß gewählt, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash M$ ein $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, so dass

$$(K - \xi) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, N_{j_0} \rangle = 0\} = \emptyset$$

gilt. Ist weiter $L \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash M$, so können wir Theorem 12.8.13 aus [Hoer83b] auf die Vektoren $N = N_1, \ldots, N_n, -N_1, \ldots, -N_n$, die Menge $X = (L - \xi)$ sowie $f = \delta_0 \in B_{\infty,1}$ anwenden. Damit erhalten wir die Existenz einer Distribution $u \in B_{\infty,\tilde{P}} \subset B_{\infty,\tilde{P}}^{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

$$\operatorname{supp}(u) \cap (K - \xi) = \emptyset \text{ und } P(D)u = \delta_0 \text{ auf } (L - \xi) \, .$$

Wegen Satz 4.5 folgt schließlich die Behauptung. □

Eine Anwendung von Theorem D ist das folgende Beispiel, welches zeigt, dass aus der Existenz von (p, κ)-Rechtsinversen nicht die Hyperbolizität des Operators folgt:

Beispiel:
Es sei

$$P(z_1, z_2, z_3, z_4) := z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2.$$

Dann besitzt der entsprechende Differentialoperator eine (p,κ)-Rechtsinverse auf $\mathbb{R}^4$, ist aber nicht hyperbolisch.

Beweis: Nach [MTV90], 4.9, besitzt $P(D)$ eine Rechtsinverse auf $\mathscr{E}(\mathbb{R}^4)$ und wegen Theorem D existiert für jedes Paar (p,κ) dann eine (p,κ)-Rechtsinverse von $P(D)$ auf $\mathbb{R}^4$. □

KAPITEL V

Offene Fragen

Die Frage, ob im Allgemeinen die P-Konvexität mit Schranken für die Existenz einer (p,κ)-Rechtsinversen hinreichend ist, liesse sich positiv beantworten, falls man folgendes Stetigkeitsproblem lösen könnte:

Gibt es eine stetige, lineare Rechtsinverse R zum partiellen Differentialoperator

$$P(D) : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega),$$

so ist die Abbildung R insbesondere surjektiv und wegen Theorem 3.6.3 [Hoer83a] ist die Menge Ω damit (stark) P-konvex. Wegen der P-Konvexität mit Schranken wiederum existiert zu jeder Menge $K \subset\subset \Omega$ eine (größere) Menge $K' \subset\subset \Omega$, so dass für jede Menge $L \subset\subset \Omega$ und jeden Vektor $\xi \in \Omega \backslash K'$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} E_{\xi,K,L} : (\mathscr{D}(K) + P(-D)\mathscr{D}(L)) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi + P(-D)\psi & \mapsto & \psi(\xi) \end{array}$$

die Einschränkung einer Distribution ist. Die Wohldefiniertheit der Abbildung $E_{\xi,K,L}$ ergibt sich dabei durch die P-Konvexität der Menge Ω, denn: Gibt es $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(K)$ und $\psi_1, \psi_2 \in P(-D)\mathscr{D}(L)$ mit

$$\varphi_1 + P(-D)\psi_1 = \varphi_2 + P(-D)\psi_2 \ ,$$

so ist wegen $\operatorname{supp}(\varphi_1 - \varphi_2) \subset K$ dann $\operatorname{supp}(\psi_2 - \psi_1) \subset K'$. Ist dann $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus K'$, so gilt $\psi_2(\xi) - \psi_1(\xi) = 0$ beziehungsweise $\psi_2(\xi) = \psi_1(\xi)$.

Das Problem besteht nun darin, festzustellen, ob sich diese Abbildung zu einem Element des Raumes $B'_{1,1/\tilde{P}}(\cong B_{\infty,\tilde{P}})$ fortsetzen läßt. Dazu statten wir den Urbildraum mit der Norm des Raumes $B_{1,1/\tilde{P}}$ aus.

Anders ausgedrückt lautet die Frage: Gibt es eine Konstante $C > 0$ derart, dass die Abschätzung

$$|\psi(\xi)| \leq C\|\varphi + P(-D)\psi\|_{1,1/\tilde{P}}$$

erfüllt ist?

Spezielle wichtige offene Fragen sind die Folgenden:

1. Ist die Menge $\mathbb{R}^n$ P-konvex mit Schranken, gibt es dann (p,κ)-Rechtsinversen auf $\mathbb{R}^n$?

2. Insbesondere: Besitzt der kubische (nichthyperbolische) Differentialoperator

$$P(D) = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3}{\partial x_3^3}$$

eine (p,κ)-Rechtsinverse auf $\mathbb{R}^3$?

3. Ist die Existenz von (p,κ)-Rechtsinversen im Sinne von Phragmén-Lindelöf-Bedingungen charakterisierbar (vgl. Abschnitt 3.3)?

Literaturverzeichnis

[BFM97] J. Bonet, C. Fernandez, R. Meise, *Operators of solution for convolution equations*, Note Mat. 17, 1-12 (1997).

[Dieza84] S. Dierolf, D. N. Zarnadze, *A note on strictly regular Fréchet spaces*, Arch. Math. 42, 549-556 (1984).

[Domor89] P. Domanski, A. Ortynski, *Complemented subspaces of products of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 316, 215-231 (1989).

[Flo81] K. Floret, *Maß- und Integrationstheorie*, Teubner Studienbücher Mathematik, 1981.

[Frie82] F. G. Friedlander, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1982.

[Han83] S. Hansen, *On the "fundamental principle" of L. Ehrenpreis*, Banach Center Publ. 10, 185-201 (1983).

[Hoer63] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.

[Hoer83a] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. I*, Springer-Verlag, 1983.

[Hoer83b] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. II*, Springer-Verlag, 1983.

[Hoer90] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland-Verlag, 1990.

[Koethe66] G. Köthe, *Topologische lineare Räume*, Springer-Verlag, 1966.

[Memo89] G. Metafune, V. B. Moscatelli, *Quojection and prequojections*, Advances in the theory of Fréchet spaces, NATO ASI Ser., Ser. C 287, 235-254 (1989).

[MTV90] R. Meise, B.A. Taylor, D. Vogt, *Characterisation of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse*, Ann. Inst. Fourier 40, 619-655 (1990).

[MTV96a] R. Meise, B.A. Taylor, D. Vogt, *Continuous linear right inverses for partial differential operators of order 2 and fundamental solutions in half spaces*, Manuscripta Mathematica 90, 449-464 (1996).

[MTV96b] R. Meise, B.A. Taylor, D. Vogt, *Continuous linear right inverses for partial differential operators on non-quasianalytic classes and on ultradistributions*, Mathematische Nachrichten 180, 213-242 (1996).

[MeVo92] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg Studium 62, Aufbaukurs Mathematik, (1992).

[Vo83] D.Vogt, *Sequence space representations of spaces of test functions and distributions*, Functional analysis, holomorphy, and approximation theory, Lect. Notes Pure Appl. Math. 83, 405-443 (1983).