Das Randverhalten des Bergman-Kerns und der Bergman-Metrik auf lineal konvexen Gebieten endlichen Typs

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Dem Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften –
der Bergischen Universität Wuppertal vorgelegt von

Sven Blumberg

unter der Betreuung von

Prof. Dr. Klas Diederich

Dezember 2005

Referent:	Prof. Dr. Klas Diederich
Korreferent:	Apl. Prof. Dr. Gregor Herbort
Tag der Disputation:	16.12.2005

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20050767

[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20050767]

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es seien Ω_1, $\Omega_2 \subset\subset \mathbb{C}^n$ zwei Gebiete. Eines der größten Probleme der komplexen Analysis mehrerer Veränderlicher ist die Charakterisierung, wann es eine biholomorphe Abbildung zwischen Ω_1 und Ω_2 gibt.
Im Fall $n = 1$ lässt sich dieses Problem durch den Riemannschen Abbildungssatz schon durch die topologische Bedingung des einfachen Zusammenhangs entscheiden. Hingegen ist für $n \geq 2$ bereits seit 1907 durch Poincaré bekannt, dass nicht einmal der Einheitsball $B^2(0,1)$ und der Einheitspolyzylinder $P^2(0,1)$ im $\mathbb{C}^2$ biholomorph äquivalent sind. Es ist also klar, dass in höheren Dimensionen andere Eigenschaften nötig sind, um Klassen von biholomorph äquivalenten Gebieten zu charakterisieren. Eine Möglichkeit dazu ist die Suche nach Objekten, die unter biholomorphen Abbildungen invariant sind.

Wir werden in dieser Arbeit Differenzialmetriken untersuchen, die unter biholomorphen Abbildungen invariant sind.

Die ursprüngliche Idee, Metriken zu untersuchen, die bezüglich einer bestimmten Abbildungsklasse invariant sind, reicht bis zu Riemann und Klein in das Jahr 1854 zurück. Bei vielen weiteren Autoren werden solche Metriken betrachtet.

Von besonderem Interesse für uns sind hier insbesondere die Carathéodory (-Reiffen)-Metrik, die Kobayashi(-Royden)-Metrik und die Bergman-Metrik.

Ist $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, so definieren wir für $q \in \Omega$ und $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ den Bergman-Kern K_Ω auf der Diagonalen durch

$$\begin{aligned} K_\Omega(q,q) &= \sup\{|f(q)|^2 \ : \ f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega),\ \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1\} \\ B_\Omega(q,X) &= \sup\{|Xf(q)|^2 \colon \ f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega),\ \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1,\ f(q) = 0\}, \end{aligned}$$

und damit schließlich die Bergman-Metrik durch

$$\mathrm{Berg}_\Omega(q,X) := \left(\frac{B_\Omega(q,X)}{K_\Omega(q,q)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Weil die drei genannten Differenzialmetriken nur in sehr speziellen Fällen explizit berechenbar sind, sind asymptotische Abschätzungen und auch besonders Abschätzungen für das Verhalten nahe des Randes $\partial\Omega$ interessant. Insbesondere das Randverhalten der Bergman-Metrik ist für die Untersuchung der Fortsetzbarkeit von biholomorphen Abbildungen zwischen zwei Gebieten auf deren Ränder nützlich.

Durch die Arbeiten von Hörmander [Hör65] und vor allem von Diederich [Di70], [Di73] ist das Verhalten des Bergman-Kerns und der Bergman-Metrik auf streng pseudokonvexen Gebieten gut bekannt. Graham konnte in [Gr75] basierend auf den Ideen von Diederich auch Abschätzungen für die Carathéodory- und Kobayashi-Metrik im streng pseudokonvexen Fall herleiten.

Im Allgemeinen fanden sich keine analogen Abschätzungen für den schwach pseudokonvexen Fall; dies begründet sich u.a. darin, dass diese nicht die spezielle Geometrie streng pseudokonvexer Gebiete besitzen, welche stark in die Abschätzungen der invarianten Metriken eingeht.
Für $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^2$ vom endlichen Typ löste Catlin in [Ca89] das Problem vollständig, indem er zeigte, dass in diesem Fall alle drei Metriken vergleichbar sind, und optimale untere sowie obere Abschätzungen angab. Weitere positive Resultate dieser Form konnten u.a. von Herbort erzielt werden, falls $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ vom endlichen Diagonaltyp ist [Her92a] oder falls die Leviform einer definierenden Funktion von Ω gewisse Definitheitsaussagen erfüllt [Her93].

Hingegen zeigten aber auch Diederich und Fornæss [DiFo80], dass es ein Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^3$ gibt, auf dem die drei Differenzialmetriken nicht vergleichbar sind (siehe auch [DiFoHe84]).

In [Mc01] fügte McNeal die Arbeiten von Chen [Chen89] und Lempert [Le81] sowie [Mc94] zusammen und konnte so die Vergleichbarkeit der drei Differenzialmetriken auf glatten, linear konvexen Gebieten vom endlichen Typ nachweisen und ihr Randverhalten in Termen einer Pseudometrik beschreiben, welche die nicht-isotrope Geometrie von Ω optimal wiedergibt. Dieses Ergebnis wollen wir auf lineal konvexe Gebiete verallgemeinern.

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ heißt lineal konvex, wenn es für jeden Randpunkt $p \in \partial\Omega$ eine komplexe Hyperfläche $H_p \ni p$ mit $H_p \cap \Omega = \emptyset$ gibt. Da offensichtlich linear konvexe Gebiete insbesondere lineal konvex sind, ist dies eine allgemeinere Gebietsklasse.
Wir wollen im Folgenden glatte, lineal konvexe Gebiete $\Omega = \{\rho < 0\} \subset\subset \mathbb{C}^n$ vom endlichen Typ (nach D'Angelo) betrachten.
Der Dissertation von Conrad [Co02] folgend führen wir Richtungsabstände zu Niveaumengen ein. Wir wählen dazu eine genügend kleine Umgebung

$U = U(\partial\Omega)$ des Randes und erhalten in jedem Punkt $q \in \Omega \cap U$ für $\varepsilon > 0$ eine zugehörige Niveaumenge

$$\partial\Omega_{q,\varepsilon} := \{z \in \Omega \cap U : \rho(z) = \rho(q) + \varepsilon\}.$$

Sei nun $X \in \mathbb{C}^n$ ein Einheitsvektor und $\varepsilon > 0$ klein genug, dann definieren wir $\tau(q, X, \varepsilon)$ als den Abstand von q zur Niveaumenge $\partial\Omega_{q,\varepsilon}$ entlang der komplexen Geraden $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto q + \lambda X$.

Hiemit zeigen wir dann zunächst einen Approximationssatz, der sich in ähnlicher Form für streng pseudokonvexe Gebiete bereits bei Diederich in [Di70] findet. Damit werden wir dann den Bergman-Kern auf der Diagonalen abschätzen und erhalten damit auch Abschätzungen für die Bergman-Metrik. Haupthilfsmittel hierzu werden die von Diederich und Fornæss konstruierten, holomorphen Stützfunktionen sein, welche optimalen Abschätzungen genügen (siehe [DiFo03]). Wir erhalten

Theorem 1 Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ. Dann gilt

$$\mathrm{Berg}_\Omega(q, X) \approx \frac{1}{\tau(q, X, |r(q)|)}$$

für $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $X \in \mathbb{C}^n$, $|X| = 1$.

Dies bedeutet eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von McNeal in [Mc94] auf den lineal konvexen Fall.

In [Li05] gelang es Lieder, analoge Abschätzungen für die Carathéodory- und Kobayashi-Metrik nachzuweisen:

Theorem ([Li05]) Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, $\mathcal{C}^\infty$-glattes, lineal konvexes Gebiet von endlichem Typ m. Ferner sei $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $X \in \mathbb{C}^n$, $|X| = 1$. Dann ist

$$\mathrm{Cara}_\Omega(q, X) \approx \frac{1}{\tau(q, X, |r(q)|)} \approx \mathrm{Kob}_\Omega(q, X).$$

D.h. in dem hier betrachteten Fall sind alle drei Differenzialmetriken vergleichbar und optimal im Sinne der Randgeometrie von Ω abschätzbar.

Wie schon zuvor bemerkt ist auch das Verhalten des Bergman-Kerns für die Fortsetzbarkeit biholomorpher Abbildungen interessant. Der Bergman-Kern wurde 1922 bzw. 1933 (siehe [Berg33] bzw. [Berg70]) von Bergman eingeführt.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Dann ist $H^2(\Omega) := \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit dem L^2-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_{L^2}$ ein Hilbertraum. Ein natürlicher Operator auf Ω ist dann die orthogonale Projektion

$$P:\ L^2(\Omega) \to H^2(\Omega).$$

Der Bergman-Kern ist die zugehörige Kernfunktion $K_\Omega(z,w)$.

Analog zu den Ergebnissen von McNeal in [Mc94] zeigen wir für den Bergman-Kern das Folgende.

Theorem 2 Sei $\Omega = \{\rho < 0\} \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ m. Es sei $p \in \partial\Omega$, dann gibt es eine Umgebung U von p, so dass für alle Multiindizes α, β eine Konstante $C = C(\alpha, \beta, n, m) > 0$ existiert, für welche die Abschätzung

$$|D^\alpha \bar{D}^\beta K_\Omega(q_1, q_2)| \leq C \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\big(\tau_j(q_1, \delta)\big)^{\alpha_j+\beta_j+2}}$$

für alle q_1, $q_2 \in U \cap \Omega$ mit $\delta = |\rho(q_1)| + |\rho(q_2)| + d(q_1, q_2)$ erfüllt ist. Dabei ist d die Pseudometrik aus [Co02].

Im letzten Abschnitt wollen wir dann schließlich die invarianten Metriken in euklidischen Koordinaten abschätzen. Wir zeigen

Satz 3 Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ m. Es sei $0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt, $\Lambda_\alpha(0)$ ein admissible Domain für $\alpha > 0$ und $\mathcal{M}(\partial\Omega, 0) = (1, m_2 \ldots, m_n)$ der Catlinsche Multityp von $\partial\Omega$ in 0. Dann gibt es ein $\alpha_0 = \alpha_0(\Omega) > 1$, so dass mit einer Konstante, die nur von n, Ω und α abhängt, für $0 < \alpha < \alpha_0$ gilt

$$F_\Omega(z, X) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{|r(z)|^{\frac{1}{m_j}}}$$

für alle $z \in \Lambda_\alpha(0)$. Dabei bezeichnen wir mit F_Ω eine der drei invarianten Metriken auf Ω.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 1 führen wir einige Hilfsmittel, Notationen und die invarianten Metriken ein. Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Geometrie lineal konvexer Gebiete, die durch die Dissertation von Conrad [Co02] sehr gut beherrschbar ist. Das Kapitel 3 beschäftigt sich mit den optimalen Stützfunktionen von Diederich und Fornæss aus [DiFo03], diese sind Grundlage der hier entstandenen Abschätzungen. Theorem 1 wird dann in Kapitel 4 unter Ausnutzung guter plurisubharmonischer Funktionen, die wir aus den Stützfunktionen gewinnen, bewiesen. Schließlich wird im Kapitel 5 nach einer kurzen Einführung und einigen Abschätzungen für den Neumann-Operator das Theorem 2 bewiesen. Abschließend wollen wir im Kapitel 6 Abschätzungen in Termen des Randabstands von $q \in \Omega$ herleiten und damit Satz 3 beweisen.

Herrn Prof. Dr. Klas Diederich möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zur Anfertigung dieser Arbeit, seine Unterstützung und die hilfreichen Gespräche während der Vorbereitungen zu dieser Arbeit danken.

KAPITEL I

Begriffe und Hilfsmittel

In diesem Abschnitt wollen wir die benötigten Hilfsmittel und Notationen einführen. Zunächst beginnen wir damit, die invarianten Metriken zu definieren, und legen dabei besonderen Wert auf die in dieser Arbeit betrachteten Bergman-Größen. Für eine ausführlichere und auch axiomatischere Darstellung verweisen wir auf [Her96] aber auch auf [JaPf93] und [Kra92].

1.1 Invariante Metriken

1.1.1 Der Bergman-Kern

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, wir definieren den sogenannten Bergman-Raum als

$$H^2(\Omega) := \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \ \|f\|_{L^2} < \infty\}.$$

Man kann zeigen, dass $H^2(\Omega)$ mit der von $L^2(\Omega)$ induzierten Hilbertraumstruktur wieder zu einem Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega f(z)\bar{g}(z)\, d^n z$ wird. Darüber hinaus ist das Punktauswertungsfunktional

$$A_z : \ H^2(\Omega) \to \mathbb{C}$$

ein stetiges, lineares Funktional. Also gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein Element $k_z \in H^2(\Omega)$, so dass

$$A_z(f) = f(z) = \langle f, k_z\rangle_{L^2} = \int\limits_\Omega f(\zeta)\, \overline{k_z(\zeta)}\, d^n\zeta$$

für alle $f \in H^2(\Omega)$ gilt. Die Funktion $K_\Omega(z,\zeta) := \overline{k_z(\zeta)}$ ist dann der Bergman-Kern. Er besitzt die folgenden Eigenschaften

1. Reproduzierend: Es gilt für alle $f \in H^2(\Omega)$
$$f(z) = \int_\Omega f(\zeta)\, K_\Omega(z,\zeta)\; d\zeta.$$

2. Konjugiert symmetrisch: Es gilt $K_\Omega(z,w) = \overline{K_\Omega(w,z)}$.

Damit hat er ähnliche Eigenschaften wie der Cauchy-Kern. Derartige reproduzierende Kernfunktionen und ihre Eigenschaften sind von großer Bedeutung in der komplexen Analysis, durch sie sind u.a. gute Abschätzungen von $\bar\partial$-Lösungen in verschiedenen Räumen möglich geworden. Weitere wichtige Kerne sind der Szegö- und der Khenkin-Kern.

Durch $K_\Omega(\cdot,w) \in H^2(\Omega)$ und die beiden oben genannten Eigenschaften ist der Bergman-Kern sogar schon eindeutig bestimmt, wie man leicht zeigt.

Darüber hinaus definiert der Bergman-Kern auch eine orthogonale Projektion $P_\Omega :\; L^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$, wie in der Einleitung schon bemerkt wurde, durch
$$P_\Omega f(z) = \int_\Omega f(\zeta)\; K_\Omega(z,\zeta)\, d\zeta.$$

Offensichtlich erhält P_Ω den Raum $H^2(\Omega)$. Man nennt P_Ω auch die Bergman-Projektion. Es gibt viele Anwendungsmöglichkeiten der Bergman-Projektion, auf die wir nicht weiter eingehen wollen, es sei z.B. auf [Di04], [DiLi81] und Kapitel 5 verwiesen.

Um weitere Eigenschaften des Bergman-Kerns herzuleiten, beachten wir, dass $H^2(\Omega)$ als Hilbertraum eine vollständige, orthonormale Basis $(\phi_j)_j$ besitzt. Mit funktionalanalytischen Mitteln kann man dann zeigen, dass für jedes Kompaktum $K \subset\subset \Omega$ auf $K \times K$

$$K_\Omega(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)\; \overline{\phi_j(\zeta)} \tag{1.1}$$

gilt. Durch die geschickte Wahl einer orthonormalen Basis von $H^2(\Omega)$ bietet Gleichung (1.1) eine Möglichkeit zur expliziten Berechnung von K_Ω, im Allgemeinen ist dies jedoch nicht möglich.
Mit Gleichung (1.1) zeigt man zudem auch noch weitere Eigenschaften für den Bergman-Kern auf der Diagonalen $\{(z,z) \,:\, z \in \Omega\}$, die wir hier für spätere Zwecke angeben wollen:

1.1 Lemma
Es seien Ω, Ω_1, $\Omega_2 \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete, dann gilt für $q \in \Omega$

1. $K_\Omega \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$,
2. $K_\Omega(q,q) = \sup\{|f(q)|^2 : \ f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \ \|f\|_{L^2} \leq 1\}$,
3. *für* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *ist* $K_{\Omega_2} \leq K_{\Omega_1}$,
4. *für* $z_j, w_j \in \Omega_j$ *gilt*
$$K_{\Omega_1 \times \Omega_2}\big((z_1, z_2), (w_1, w_2)\big) = K_{\Omega_1}(z_1, w_1)\, K_{\Omega_2}(z_2, w_2),$$
5. $K_\Omega(q,q) > 0$.

Beweis: Siehe zum Beispiel [Kra92] oder [Her87] bzw. [Her96]. □

1.2 Bemerkung
Auf Grund der Positivität von $K_\Omega(q,q)$ für beschränkte Gebiete ist es natürlich, das Nullstellenverhalten von K_Ω außerhalb der Diagonalen zu untersuchen. Dieses nach Lu Qi-Keng benannte Problem ist noch nicht vollständig gelöst, da es Gebiete gibt, wo K_Ω verschwindet, aber noch nicht klar ist, wodurch diese charakterisiert werden. Für weiterführende Informationen sei z.B. auf den Übersichtsartikel [Boas00] von Boas verwiesen.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von K_Ω, die wir gerade im letzten Kapitel benötigen werden, beschreibt das Verhalten unter biholomorphen Abbildungen.

1.3 Lemma
Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete. Es sei $f : \ \Omega_1 \to \Omega_2$ eine biholomorphe Abbildung, dann gilt
$$\det f'(z) \ K_{\Omega_2}\big(f(z), f(\zeta)\big) \det \overline{f'(\zeta)} = K_{\Omega_1}(z, \zeta).$$

Zum Abschluss wollen wir noch eine wichtige Darstellung des Bergman-Kerns angeben. Durch diese ist es gerade in der $\bar\partial$-Neumann-Theorie möglich, den Bergman-Kern durch explizite Ausdrücke zu ersetzen (siehe Kapitel 5).

1.4 Lemma
Für den Einheitskreis $\Delta(0,1) \subset \mathbb{C}$ sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\big(\Delta(0,1)\big)$ mit $\int \varphi(z)\, dz = 1$, radialsymmetrisch. Es sei weiter $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $w \in \Omega$ fest und $P^n(w,r) \subset \Omega$ ein Polyzylinder für $r > 0$ klein genug. Setze für $z \in \mathbb{C}^n$
$$\psi_w(z) := \frac{1}{r^{2n}}\, \varphi\left(\frac{z_1 - w_1}{r}\right) \cdots \varphi\left(\frac{z_n - w_n}{r}\right).$$

Dann ergibt die Cauchysche Integralformel für $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, dass

$$f(w) = \int_\Omega \psi_w(z)\, f(z)\, dz.$$

Weil dies insbesondere für $f \in H^2(\Omega)$ gilt, folgt hieraus

$$P_\Omega \psi_w(z) = K_\Omega(z, w).$$

Ein Beweis findet sich z.B. bei [Her96] oder [Kra92].

1.1.2 Die Bergman-Metrik

Wir betrachten weiterhin ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$. Da $K_\Omega(z, z)$ positiv ist, definiert $\big(g_{k\ell}(z)\big)_{k,\ell} = \big(\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_\ell} \log K_\Omega(z, z)\big)_{k,\ell}$ das Potenzial einer Kählermetrik auf Ω, der Bergman-Metrik Berg_Ω. D.h. es gilt

$$\mathrm{Berg}_\Omega(z, X) := \sum_{\ell,k=1}^{n} g_{k\ell}(z) X_k \bar{X}_\ell \quad z \in \Omega,\ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Dass $(g_{k\ell})_{k,\ell}$ tatsächlich eine positiv definite Matrix im Fall beschränkter $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ darstellt, ist nicht trivial und findet sich z.B. in [Kra92].

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Bergman-Metrik ist ihr Transformationsverhalten unter biholomorphen Abbildungen.

1.5 Lemma
Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete. Es sei weiter $f:\ \Omega_1 \to \Omega_2$ eine biholomorphe Abbildung, dann gilt

$$\mathrm{Berg}_{\Omega_1}(z, X) = \mathrm{Berg}_{\Omega_2}(f(z), f'(z)\, X).$$

D.h. biholomorphe Abbildungen sind Isometrien in der Bergman-Metrik.

Die obige Definition der Bergman-Metrik erlaubt jedoch nur einen mühsamen Zugang. Um mit der Bergman-Metrik zu arbeiten, ist die folgende Charakterisierung nützlich.

1.6 Lemma
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Wir führen zunächst eine weitere Größe B_Ω ein durch

$$B_\Omega(q, X) := \sup\{|Xf(q)|^2 :\ f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega),\ f(q) = 0,\ \|f\|_{L^2} \le 1\}.$$

Dann ist die Bergman-Länge von $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ in $q \in \Omega$ gegeben durch

$$\mathrm{Berg}_\Omega(q,X) = \left(\frac{B_\Omega(q,X)}{K_\Omega(q,q)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ein Nachweis findet sich u.a. in [Di70] und [Her96]. Tatsächlich gilt diese Charakterisierung sogar für unbeschränkte Gebiete Ω, auf denen $K_\Omega(q,q) > 0$ gilt.

Einer der Vorteile der Größe B_Ω ist, dass sie gebietsmonoton ist; d.h. aus $\Omega_1 \subset \Omega_2$ folgt für $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und $q \in \Omega_1$

$$B_{\Omega_2}(q,X) \leq B_{\Omega_1}(q,X).$$

Ein Analogon für $\mathrm{Berg}_\Omega(q,X)$ gilt im Allgemeinen jedoch nicht, ein Gegenbeispiel findet sich bei [JaPf93].

1.7 Bemerkung
Der Vollständigkeit halber wollen wir darauf hinweisen, dass für allgemeine Ω nicht einmal notwendigerweise $B_\Omega(q,X) \neq 0$ und somit auch nicht $\mathrm{Berg}_\Omega(q,X) \neq 0$ gelten muss, siehe auch [Her87]. Ist jedoch Ω beschränkt, wie wir es in dieser Arbeit voraussetzen wollen, so gilt stets $B_\Omega(q,X) \neq 0$; somit ist die Bergman-Metrik positiv definit, wie auch in der Einleitung dieses Abschnitts bemerkt wurde.

1.1.3 Berechnung des Bergman-Kerns und der Bergman-Metrik

Wir haben zuvor schon angedeutet, dass die Bergmansche Kernfunktion und die Bergman-Metrik nur in Spezialfällen explizit berechenbar sind. Drei dieser Fälle wollen wir hier jedoch angeben:

1. **Der Einheitsball $B^n(0,1) \subset \mathbb{C}^n$:**

   Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ bilden die Funktionen

   $$\varphi_\alpha(z) = \left(\frac{(n+|\alpha|)!}{\alpha!\pi^n}\right) z^\alpha, \quad z \in B^n(0,1)$$

   eine Orthonormalbasis von $H^2\big(B^n(0,1)\big)$. Durch Einsetzen in Gleichung (1.1) und geschicktes Aufsummieren erhält man dann

   $$K_{B^n(0,1)}(z,\zeta) = \frac{n!}{\pi^n} \cdot \frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+1}},$$

wobei $\langle z, w\rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j$ das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{C}^n$ ist. Siehe hierzu [JaPf93]. Für die Bergman-Metrik ergibt sich somit (siehe z.B. [Her87])

$$\operatorname{Berg}_{B^n(0,1)}(z, X) = \sqrt{n+1}\left[\frac{\|X\|^2}{1-\|z\|^2} + \frac{|\langle z, X\rangle|^2}{(1-\|z\|^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Somit stimmt aber auch $\operatorname{Berg}_{B^1(0,1)}(z, X)$ bis auf einen Faktor mit der Poincaré-Metrik auf dem Einheitskreis im $\mathbb{C}^1$ überein.

2. **Der Einheitspolyzylinder $P^n(0,1) \subset \mathbb{C}^n$:**

   Mit der Produktformel aus Lemma 1.1 und dem Ergebnis für $K_{B^1(0,1)} = K_{P^1(0,1)}$ von oben erhalten wir

$$K_{P^n(0,1)}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 - z_j\,\bar{\zeta}_j)^2}$$

   und somit analog

$$\operatorname{Berg}_{P^n(0,1)}(z, X) = \sqrt{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|^2}{(1-|z_j|^2)^2}}.$$

3. **Ein Polyzylinder $P^n(0,R) \subset \mathbb{C}^n$ mit $R = (r_1, \ldots, r_n)$:**

   Wir führen diesen Fall nur der Vollständigkeit halber auf, da wir dieses Ergebnis später benötigen. Tatsächlich lässt sich mit den Lemmata 1.3 bzw. 1.5 aus dem vorherigen Fall

$$K_{P^n(0,R)}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{r_j^2}{(r_j^2 - z_j\,\bar{\zeta}_j)^2}$$

   herleiten und analog auch

$$\operatorname{Berg}_{P^n(0,R)}(z, X) = \sqrt{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{|r_j\,X_j|^2}{(r_j^2 - |z_j|^2)^2}}.$$

1.1.4 Die Carathéodory-Metrik

Auch wenn sie nicht Gegenstand dieser Arbeit sind, wollen wir noch die Carathéodory- und die Kobayashi-Metrik einführen. Im Gegensatz zur Bergman-Metrik sind diese beiden Metriken nicht Kählersch, d.h. sie werden nicht von einem Potenzial induziert.
Beide Metriken sind Verallgemeinerungen der Poincaré-Metrik im Einheitskreis $\Delta := B^1(0,1)$ des $\mathbb{C}^1$. Dies wollen wir zunächst ein wenig motivieren.

1.8 Lemma (Schwarz)
Sei $f : \Delta \to \Delta$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \Delta.$$

Ist $f \in Aut(\Delta)$ ein Automorphismus des Einheitskreises, so gilt sogar Gleichheit.

Wir definieren nun die folgende hermitesche Metrik.

1.9 Definition
Auf dem Einheitskreis $\Delta \subset \mathbb{C}$ definieren wir die hermitesche Metrik

$$P(z,X) := \frac{|X|}{1-|z|^2}, \quad X \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Diese Metrik heißt Poincaré-Metrik.

Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine holomorphe Abbildung, sowie γ eine hermitesche Metrik. Wir sagen, dass γ dem sogenannten Schwarz-Pick-Lemma genügt, falls

$$\gamma_{\Omega_2}(f(z), f'(z)\,X) \leq \gamma_{\Omega_1}(z,X) \quad z \in \Omega_1,\, X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

gilt. Insbesondere folgt damit, dass γ invariant unter biholomorphen Abbildungen, also eine Isometrie ist.

Mit Lemma 1.8 folgt, dass die Poincaré-Metrik das Schwarz-Pick-Lemma erfüllt. Hingegen erfüllt die Bergman-Metrik dieses im Allgemeinen nicht (siehe z.B. [JaPf93]).

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, die Poincaré-Metrik auf mehrere Veränderliche zu verallgemeinern. Wir wollen, wie sich herausstellen wird, zwei Extremale untersuchen.

Im Jahre 1927 führte Carathéodory eine später nach ihm benannte Pseudoabstandsfunktion ein. Deren infinitesimale Form wollen wir betrachten.

1.10 Definition
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $p \in \Omega$ und $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Die Funktion

$$\begin{aligned}\mathrm{Cara}_\Omega(p; X) &= \sup\left\{\left|\frac{Xf}{1-|f(p)|^2}\right| : \ f \in \mathcal{O}(\Omega, \Delta)\right\}\\ &= \sup\{|Xf| : \ f \in \mathcal{O}(\Omega, \Delta), \ f(p) = 0\}.\end{aligned}$$

heißt (infinitesimale) Carathéodory(-Reiffen)-Metrik.

Folgendes Lemma zeigt, dass die Carathéodory-Metrik genau die gewünschten Eigenschaften besitzt.

1.11 Lemma
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet.

1. *Die Carathéodory-Metrik erfüllt das Schwarz-Pick-Lemma, d.h. sind $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine holomorphe Abbildung, so gilt*
$$\mathrm{Cara}_{\Omega_2}(f(z), f'(z)\, X) \leq \mathrm{Cara}_{\Omega_1}(z, X) \quad z \in \Omega_1, \ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$
2. *Es gilt*
$$\mathrm{Cara}_\Delta(z, X) = P(z, X).$$
3. *Die Carathéodory-Metrik ist die kleinste Differenzialmetrik mit den beiden obigen Eigenschaften. D.h. ist F eine Differenzialmetrik, welche das Schwarz-Pick-Lemma und $F_\Delta(z, X) = P(z, X)$ erfüllt, so gilt schon*
$$\mathrm{Cara}_\Omega(z, X) \leq F_\Omega(z, X).$$
4. *Ist Ω zusätzlich beschränkt, so ist $\mathrm{Cara}_\Delta(z, \cdot)$ eine Norm.*
5. *Ist $\Omega_1 \subset \Omega_2$, so gilt $\mathrm{Cara}_{\Omega_2}(z, X) \leq \mathrm{Cara}_{\Omega_1}(z, X)$.*

Einen Nachweis dieser Eigenschaften findet man u.a. in [Her96].

Da die Bergman-Metrik auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ nicht mit der Poincaré-Metrik übereinstimmt, ist zunächst nicht klar, ob es einen Zusammenhang zwischen Bergman- und Carathéodory-Metrik gibt. Dies konnte jedoch Hahn 1978 in [Ha78] positiv beantworten. Er zeigte für $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen,

$$\mathrm{Cara}_\Omega(z, X) \leq \mathrm{Berg}_\Omega(z, X) \quad z \in \Omega, \ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}. \tag{1.2}$$

Es sei noch bemerkt, dass die Carathéodory-Metrik (siehe [JaPf93]) lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, also deutlich angenehmere Eigenschaften als die Kobayashi-Metrik aufweist, die wir im folgenden Abschnitt angeben wollen.

1.1.5 Die Kobayashi-Metrik

Im Jahre 1967 führte Kobayashi in [Kob67] eine Pseudoabstandsfunktion auf komplexen Mannigfaltigkeiten ein. Diese ist insofern „dual“ zur Carathéodroy-Metrik, als dass sie über Abbildungen vom Einheitskreis in die Mannigfaltigkeit (das Gebiet Ω in unserem Fall) definiert ist. 1971 gab Royden ihre infinitesimale Form an, die wir im Folgenden untersuchen wollen.

1.12 Definition
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Dann heißt für $(p, X) \in \Omega \times \mathbb{C}^n$

$$\mathrm{Kob}_\Omega(p; X) = \inf\{\alpha > 0 : \exists\ f \in \mathcal{O}(\Delta, \Omega),\ f(0) = p,\ \alpha f'(0) = X\}.$$

die (infinitesimale) Kobayashi(-Royden)-Metrik.

Einige Eigenschaften der Kobayashi-Metrik gibt das folgende Lemma an. Ein Nachweis der einzelnen Behauptungen findet sich z.B. in [Her96] oder [JaPf93].

1.13 Lemma
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet.

1. *Die Kobayashi-Metrik erfüllt das Schwarz-Pick-Lemma, d.h. also sind $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine holomorphe Abbildung, so gilt*

$$\mathrm{Kob}_{\Omega_2}(f(z), f'(z)\, X) \leq \mathrm{Kob}_{\Omega_1}(z, X) \quad z \in \Omega_1,\ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

2. *Es gilt*

$$\mathrm{Kob}_\Delta(z, X) = P(z, X).$$

3. *Die Kobayashi-Metrik ist die größte Differenzialmetrik mit den beiden obigen Eigenschaften. D.h. ist F eine Differenzialmetrik, welche das Schwarz-Pick-Lemma und $F_\Delta(z, X) = P(z, X)$ erfüllt, so gilt schon*

$$F_\Omega(z, X) \leq \mathrm{Kob}_\Omega(z, X).$$

4. *Ist $\Omega_1 \subset \Omega_2$, so gilt $\mathrm{Kob}_{\Omega_2}(z, X) \leq \mathrm{Kob}_{\Omega_1}(z, X)$.*

Im Gegensatz zur Carathéodory-Metrik ist die Kobayashi-Metrik im Allgemeinen aber keine Norm, da sie nicht unbedingt die Dreiecksungleichung erfüllt.

Allerdings gibt es Beispiele (siehe [Kra92] oder [Her96]), die zeigen, dass die Carathéodory-Pseudodistanz nicht immer mit dem Pseudoabstand übereinstimmt, welcher durch die Carathéodory-Kurvenlänge induziert wird. Für die Kobayashi-Metrik hingegen gilt dies. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen.

Eigenschaft 3. des vorherigen Lemmas setzt zudem die Kobayashi-Metrik indirekt auch zur Carathéodory-Metrik in Verhältnis, denn es gilt

$$\mathrm{Cara}_\Omega(z,X) \le \mathrm{Kob}_\Omega(z,X).$$

Auf Grund dieser und der von Hahn nachgewiesenen Ungleichung (1.2) wurde lange vermutet, dass die Kobayashi-Metrik auch die Bergman-Metrik dominiert. Dies widerlegten Diederich und Fornæss.

1.14 Theorem ([DiFo80])
Es gibt ein glattes, pseudokonvexes Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^3$, so dass

$$\frac{\mathrm{Berg}_\Omega(q,X)}{\mathrm{Kob}_\Omega(q,X)}$$

nach oben unbeschränkt ist.

Ein sehr tief liegendes Resultat stammt von Lempert aus dem Jahr 1981 in [Le81], wo es ihm u.a. gelang zu zeigen, dass auf linear konvexen Gebieten die Kobayashi- und die Carathéodory-Metrik übereinstimmen. Dies zusammen mit den Ergebnissen von [Chen89] und [Mc94] ergibt schließlich eine Abschätzung der invarianten Metriken und des Bergman-Kerns auf linear konvexen Gebieten (siehe [Mc01]).

Wir möchten an dieser Stelle noch bemerken, dass die Carathéodory- und die Kobayashi-Metrik auf dem Einheitsball $B^n(0,1) \subset \mathbb{C}^n$ übereinstimmen. Zudem kann man sogar eine explizite Formel angeben. Sei $z \in B^n(0,1)$ und $X \in \mathbb{C}^n$, dann ist

$$\mathrm{Cara}_{B^n(0,1)}(z,X) = \mathrm{Kob}_{B^n(0,1)}(z,X) = \left[\frac{\|X\|^2}{1-\|z\|^2} + \frac{|\langle z,X\rangle|^2}{(1-\|z\|^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Damit stimmen sie sogar mit der Bergman-Metrik bis auf den Faktor $\sqrt{n+1}$ überein.

Zuletzt wollen wir noch darauf hinweisen, dass die Kobayashi-Metrik im Allgemeinen nur oberhalb stetig ist (siehe [Her96]). Dennoch hat sie einen größeren Anwendungsbereich als die Carathéodory-Metrik (siehe z.B. [DiFo79]).

1.2 Endlicher Typ

1.2.1 Die q-Typen nach D'Angelo

Sei $U = U(z_0)$ eine offene Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}^n$. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, dann definieren wir die Verschwindungsordnung von f in z_0 als

$$\nu(f, z_0) := \min\{k \geq 0 : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

und setzen für eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{C}^n$

$$\nu(f, z_0) := \min\{\nu(f_j, z_0), j = 1, \dots, n\}.$$

Es sei $\Omega = \{\rho < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $z_0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt. Für eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $c : \ \Delta^1(0, r) \to \mathbb{C}^n$, $r > 0$, welche wir im Folgenden als holomorphe Kurve bezeichnen wollen, mit $c(0) = z_0$ definieren wir die Kontaktordnung von c an $\partial\Omega$ in z_0 als

$$\Delta_1(\partial\Omega, z_0, c) := \frac{\nu(\rho \circ c, 0)}{\nu(c - z_0, 0)}.$$

Es bezeichne

$$\mathcal{C}_n := \{c : \ \Delta^1(0, r) \to \mathbb{C}^n, \ c \text{ ist holomorphe Kurve mit } c(0) = z_0\}.$$

Dann definieren wir den D'Angelo- bzw. 1-Typ als

$$\Delta_1(\partial\Omega, z_0) := \sup_{c \in \mathcal{C}_n} \Delta_1(\partial\Omega, z_0, c).$$

Dies entspricht geometrisch gesehen der Kontaktordnung von komplex analytischen, eindimensionalen Varietäten mit dem Rand $\partial\Omega$ in einem Punkt $z_0 \in \partial\Omega$.

Wir sagen, dass Ω vom endlichen Typ m ist, wenn

$$\Delta_1(\partial\Omega, z) \leq m \quad \text{für alle } z \in \partial\Omega.$$

D'Angelo zeigte, dass die Endlichkeit des Typs eine offene Eigenschaft ist.

1.15 Theorem (D'Angelo)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes Gebiet. Es sei $z_0 \in \partial\Omega$ mit $\Delta_1(\partial\Omega, z_0) < \infty$, dann gibt es eine offene Umgebung $U = U(z_0)$, so dass

$$\Delta_1(\partial\Omega, z) < \infty \quad \text{für alle } z \in \partial\Omega \cap U.$$

Ist Ω sogar pseudokonvex, so gilt die folgende Abschätzung für den Typ

$$\Delta_1(\partial\Omega, z) \leq \frac{\Delta_1(\partial\Omega, z_0)^{n-1-q}}{2^{n-2-q}} \quad \text{für alle } z \in \partial\Omega \cap U. \tag{1.3}$$

Dabei ist q der Rang der Levimatrix in z_0. Damit sehen wir sofort, dass streng pseudokonvexe Randpunkte vom Typ 2 sind. Andererseits kann Ω in z_0 nicht vom endlichen Typ sein, wenn es eine holomorphe Kurve c mit $c(0) = z_0$ und $\mathrm{Bild}(c) \subset \partial\Omega$ gibt.

Sei $S \subset \mathbb{C}^n$ eine $(n-q+1)$-dimensionale komplexe Hyperebene durch z_0, $1 \leq q \leq n$. Dann definieren wir den q-Typ von D'Angelo als

$$\Delta_q(\partial\Omega, z_0) := \inf_S \Delta_1(\partial\Omega \cap S, z_0), \quad 1 \leq q \leq n.$$

Dabei nehmen wir das Infimum über alle solche Hyperebenen S und wollen $\Omega \cap S \subset S$ als Gebiet in S ansehen.

1.2.2 Der Catlinsche Multityp

Wir folgen [Yu92] zur Definition des Multityps. Sei $\Omega = \{\rho < 0\} \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Es sei $z_0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt. Wir bezeichnen mit Γ_n die Menge aller n-Tupel $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $1 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \infty$ mit der Eigenschaft:
Für alle $k = 1, \ldots, n$ ist entweder $\lambda_k = \infty$ oder es existieren Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, so dass

$$a_k > 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j} = 1.$$

Die Elemente von Γ_n nennen wir Gewichte. Die Menge Γ_n kann lexikographisch angeordnet werden: Seien $\Lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ und $\Lambda'' = (\lambda''_1, \ldots, \lambda''_n)$ zwei Gewichte. Dann gilt $\Lambda' < \Lambda''$, falls für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lambda'_j = \lambda''_j \text{ für } j < k, \text{ aber } \lambda'_k < \lambda''_k.$$

Ein Gewicht $\Lambda \in \Gamma_n$ heißt ausgezeichnet, wenn es holomorphe Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n)$ um z_0 gibt, die z_0 auf den Ursprung abbilden, so dass

$$D^\alpha \bar{D}^\beta \rho(0) = 0 \quad \text{für alle } (\alpha, \beta) \text{ mit } \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j + \beta_j}{\lambda_j} < 1. \tag{1.4}$$

Wie immer bezeichnet dabei

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \text{ und } \bar{D}^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z}_1^{\beta_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{\beta_n}}.$$

Den Catlinschen Multityp $\mathcal{M}(\partial\Omega, z_0) = (m_1, \dots, m_n)$ definieren wir nun als das Infimum aller Gewichte in Γ_n mit $\mathcal{M}(\partial\Omega, z_0) \geq \Lambda$ für jedes ausgezeichnete Gewicht Λ.

Da wir Ω als glatt berandet vorausgesetzt haben, folgt sofort, dass in der obigen Notation $m_1 = 1$ gelten muss.

Nach J. Yu [Yu92] nennen wir ein Gewicht $\Lambda \in \Gamma_n$ linear ausgezeichnet, falls es einen komplex linearen Koordinatenwechsel gibt, so dass z_0 auf 0 abgebildet wird und Gleichung (1.4) in den neuen Koordinaten gilt. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(\partial\Omega, z_0) = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ den linearen Multityp, der definiert ist als das Infimum aller Gewichte in Γ_n mit $\mathcal{L}(\partial\Omega, z_0) \geq \Lambda$ für jedes linear ausgezeichnete Gewicht Λ.

Es ist klar, dass $\mathcal{L}(\partial\Omega, z_0)$ unter komplex linearen Koordinatenwechseln invariant ist und die Ungleichung $\mathcal{L}(\partial\Omega, z_0) \leq \mathcal{M}(\partial\Omega, z_0)$ sofort aus der Definition folgt. Im Allgemeinen gilt jedoch keine Gleichheit, wie das Beispiel aus [Yu92] zeigt. Setzen wir

$$\rho(z, w) = 2\big(\mathrm{Re}(w) + \mathrm{Re}(z^2)\big) + |z|^4,$$

so ist $\mathcal{L}(\partial\Omega, 0) = (1, 2)$, aber $\mathcal{M}(\partial\Omega, 0) = (1, 4)$, siehe [Yu92].

Semiregularität Der q-Typ nach D'Angelo und der Catlinsche Multityp stehen in einem besonderen Zusammenhang. So zeigte Catlin in [Ca84b]

$$m_{n-q+1} \leq \Delta_q(\partial\Omega, z_0), \quad 1 \leq q \leq n,$$

wobei $\mathcal{M}(\partial\Omega, z_0) = (m_1, \dots, m_n)$ gelte. Gebiete, bei denen sogar Gleichheit für alle q gilt, heißen semiregulär im Sinne von Diederich und Herbort (siehe [DiHe94]). Im Gegensatz zum 1-Typ ist Semiregularität keine offene Bedingung (siehe ebenfalls [DiHe94]).

1.3 Lineal konvexe Gebiete

Im Jahr 1935 führten Behnke und Peschel in [BePe35] einen neuen Konvexitätsbegriff im $\mathbb{C}^2$ in die komplexe Analysis ein. Ihr Ziel war es, Gebietsklassen zu untersuchen, die unter komplex linearen Koordinatenwechseln invariant sind. Diese Gebiete nannten sie planarkonvex und zeigten, dass sie durch eine Differenzialbedingung gegeben sind. Statt von Planarkonvexität spricht man heutzutage von linealer Konvexität.

Ein Gebiet $\Omega = \{\rho < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ heißt lineal konvex, wenn es für jeden Randpunkt $z_0 \in \partial\Omega$ eine komplexe Hyperebene H_{z_0} gibt mit $z_0 \in H_{z_0}$ und $\Omega \cap H_{z_0} = \emptyset$. Ist Ω glatt berandet, dann ist der holomorphe Tangentialraum der einzige Kandidat für die komplexe Hyperebene. Bezeichnen wir wie üblich mit $\partial\rho(z_0)$ den komplexen Gradienten einer definierenden Funktion ρ in z_0 und mit

$$T^{10}_{z_0}(\partial\Omega) := \{X \in \mathbb{C}^n : X\rho(z_0) = \langle X, \partial\rho(z_0)\rangle = 0\}$$

den holomorphen Tangentialraum von $\partial\Omega$ in z_0, so ist Ω genau dann lineal konvex, wenn für alle Randpunkte $z_0 \in \partial\Omega$ schon $z_0 + X \notin \partial\Omega$, für alle $X \in T^{10}_{z_0}(\partial\Omega)$, $X \neq 0$, gilt.

Tatsächlich war es lange eine offene Frage, ob sich – wie auch andere Formen der Konvexität – lineale Konvexität für $\mathcal{C}^2$-glatte Gebiete über die komplexe Hesse- und Leviform ausdrücken lässt. Erst 1998 konnte C. Kiselman in [Ki98] zeigen, dass ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mit $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ genau dann lineal konvex ist, wenn für jeden Randpunkt die Behnke-Peschl-Bedingung erfüllt ist, d.h. für alle $z_0 \in \partial\Omega$ gilt

$$\begin{aligned}(1.5)\quad & \operatorname{Re} H_\rho(z_0, X) + \mathcal{L}_\rho(z_0, X) := \\ & \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial z_k}(z_0) X_j X_k + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z_0) X_j \bar{X}_k \geq 0 \;\forall\; X \in T^{10}_{z_0}(\partial\Omega).\end{aligned}$$

Wir beobachten, da mit $X \in T^{10}_{z_0}(\partial\Omega)$ auch $i\,X \in T^{10}_{z_0}(\partial\Omega)$ gilt, dass jedes (streng) lineal konvexe Gebiete insbesondere (streng) pseudokonvex ist. Linear konvexe Gebiete sind also lineal konvex und lineal konvexe Gebiete sind pseudokonvex. Zudem ist lineale Konvexität invariant unter komplex linearen Koordinatenwechseln, wie schon oben angedeutet.

Wir wollen nun noch definierende Funktionen lineal konvexer Gebiete genauer untersuchen. Es sei dazu $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet vom endlichen Typ m, so dass $U \cap \Omega$ lineal konvex ist. Dabei ist $U = U(z_0)$ offene Umgebung eines Randpunkts $z_0 \in \partial\Omega$. Nach einem linearen Koordinatenwechsel, welcher lineale Konvexität erhält, können wir (nach eventueller Verkleinerung von U) wie in Conrad [Co02] davon ausgehen, dass

$$(1.6)\qquad U \cap \partial\Omega = \{z \in U : \operatorname{Re}(z_1) + h(\operatorname{Im}(z_1), z_2, \ldots, z_n) = 0\}.$$

Anhand von Gleichung (1.6) erkennt man, dass die Behnke-Peschl-Bedingung und die definierende Gleichung des holomorphen Tangentialraums an $\partial\Omega$ lokal unabhängig von $\operatorname{Re}(z_1)$ sind. Deswegen dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass alle Niveaumengen

$$\{z \in U : \rho(z) = \varepsilon\} \text{ mit } |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

wieder lineal konvex und vom endlichen Typ sind.

Tatsächlich ist es besonders interessant, speziell das Verhalten des Multityps auf lineal konvexen Gebiete zu untersuchen. Dieser ist, wie auch der 1-Typ, wichtig für Regularitätseigenschaften des $\bar{\partial}$-Neumann-Problems. Neben dem von Catlin eingeführten Multityp ist aber auch auf Grund seiner angenehmeren Eigenschaften der lineare Multityp interessant.

Seit den Untersuchungen von Diederich und Herbort in [DiHe94] hat sich zudem gezeigt, dass auch die Gebiete von besonderem Interesse sind, bei denen für die Einträge des Multityps $(1, m_2, \ldots, m_n)$ schon

$$m_{n-q+1} = \Delta_q(\partial\Omega, z) \text{ für alle } q$$

gilt, d.h. die semiregulär sind.

McNeal zeigte in [Mc92], dass auf konvexen Gebieten der 1-Typ eines Randpunkts $z_0 \in \partial\Omega$ schon durch Kontaktordnungen mit holomorphen Geraden in z_0 realisiert wird. Tatsächlich zeigten Boas und Straube in [BoStr92] dieses Ergebnis in einem allgemeineren Rahmen mit geometrischeren Methoden.
In [Yu92] konnte Yu vielmehr zeigen, dass konvexe Gebiete sogar semiregulär sind.

Conrad gelang es in [Co02], diese Ergebnisse auf lineal konvexe, glatt berandete Gebiete zu verallgemeinern:

1.16 Theorem (Conrad, [Co02])
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes, lineal konvexes Gebiet und weiter $\mathcal{M}(\partial\Omega, z_0) = (1, m_2, \ldots, m_n)$ der Multityp von $\partial\Omega$ in $z_0 \in \partial\Omega$. Dann gilt $m_{n-q+1} = \Delta_q(\partial\Omega, z_0)$ für alle $1 \leq q \leq n$.

Conrad zeigt zudem auch

1.17 Theorem (Conrad, [Co02])
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes, lineal konvexes Gebiet, so gilt $\mathcal{L}(\partial\Omega, z) = \mathcal{M}(\partial\Omega, z)$ für jeden Randpunkt $z \in \partial\Omega$.

KAPITEL II

Randgeometrie lineal konvexer Gebiete

Wir wollen in diesem Kapitel die nötigen Hilfsmittel aus [Co02] bereitstellen. Hauptaugenmerk wird dabei auf die hier eingeführten Richtungsabstände $\tau(q, X, \varepsilon)$ gelegt, welche optimal die Randgeometrie von Ω widerspiegeln.
Es sei also im Folgenden $\Omega = \{\rho < 0\} \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ m.

2.1 Eine Pseudometrik

Seien U, $z_0 \in \partial\Omega$ und ε_0 wie in Kapitel 1.3 gewählt. Im Folgenden seien stets $q \in U \cap \Omega$ mit $|\rho(q)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Einheitsvektor und $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Hängen die beiden reellwertigen Ausdrücke A und B vom Parameter $x \in \mathcal{X}$ – z.B. q, X, ε – ab und gibt es eine von x unabhängige Konstante $c > 0$, so dass $A(x) \leq c \cdot B(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt, so schreiben wir auch kurz $A \lesssim B$. Die Schreibweisen $A \gtrsim B$ und $A \approx B$ haben dann analoge Bedeutungen.

Wir führen nun einen Richtungsabstand ein, der es uns ermöglicht, sowohl die Bergman-Metrik als auch den Bergman-Kern optimal abzuschätzen. Wir halten uns dabei an [Co02] und definieren mit

$$\tau(q, X, \varepsilon) := \sup\{r > 0 : \rho(q + \lambda X) - \rho(q) < \varepsilon, \forall\ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$$

den Randabstand des Punktes q zu der Niveaumenge

$$\partial\Omega_{q,\varepsilon} := \{z : \rho(z) = \rho(q) + \varepsilon\}$$

gemessen entlang der von X aufgespannten komplexen Geraden. Da alle Punkte $q \in \partial\Omega_{q,0}$ vom endlichen Typ sind, sind die Abstände für genügend

kleines $\varepsilon > 0$ endlich. Analog zu Hefer [Hef02] im linear konvexen und zu Conrad [Co02] im lineal konvexen Fall wählen wir induktiv Koordinaten und einen linearen Koordinatenwechsel, der q in den Ursprung überführt:
Als ersten Basisvektor wählen wir die reelle Normale in q zur Niveaumenge $\partial\Omega_{q,0}$ und setzen

$$e_1 := \frac{\nabla\rho(q)}{|\nabla\rho(q)|} \text{ sowie } \tau_1(q,\varepsilon) := \tau(q, e_1, \varepsilon).$$

Es sei $p_1 \in \partial\Omega_{q,\varepsilon}$ ein Punkt auf der Geraden $z_1 : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto q + \lambda\, e_1$, der $\tau_1(q,\varepsilon)$ realisiert. Dabei parametrisieren wir die Gerade derart, dass $z_1(0) = q$ und p_1 auf der positiven $\mathrm{Re}(z_1)$-Achse liegt, also $p_1 = q + \tau_1(q,\varepsilon)e_1$. Nach Wahl dieser Achse gilt eben, dass $\frac{\partial\rho(q)}{\partial x_1} = 1$ und nach eventueller Verkleinerung von U somit $\frac{\partial\rho(z)}{\partial x_1} \approx 1$ für alle $z \in U$ ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen erhält man, dass

$$\tau_1(q,\varepsilon) \approx \mathrm{dist}(q, \partial\Omega_{q,\varepsilon}) \approx \varepsilon,$$

wobei alle Konstanten unabhängig von q und ε sind. Wir nehmen nun an, die paarweise senkrechten Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_{k-1} \in \mathbb{C}^n$ seien konstruiert. Es sei weiter $\tau_j(q,\varepsilon) := \tau(q, e_j, \varepsilon)$. Ferner seien die Punkte $p_1, \ldots, p_{k-1} \in \partial\Omega_{q,\varepsilon}$ so gewählt, dass $z_j(0) = q$ und p_j auf der positiven $\mathrm{Re}(z_j)$-Achse für $1 \le j \le k-1$ liegt. Wir wählen einen Einheitsvektor $e_k \in \langle e_1, \ldots, e_{k-1}\rangle^\perp$, der $\tau(q, \cdot, \varepsilon)$ minimiert. Zudem setzen wir $\tau_k(q,\varepsilon) := \tau(q, e_k, \varepsilon)$ und wählen $p_k \in \partial\Omega_{q,\varepsilon}$, der $\tau_k(q,\varepsilon)$ realisiert. Dabei parametrisieren wir wieder die zugehörige komplexe Gerade z_k von q nach p_k so, dass p_k auf der positiven $\mathrm{Re}(z_k)$-Achse liegt und $z_k(0) = q$ gilt. Nach Konstruktion gilt für $k \ge 2$, dass

$$\tau_k(q,\varepsilon) = \mathrm{dist}(q, \partial\Omega_{q,\varepsilon} \cap \{z_1 = \ldots = z_{k-1} = 0\})$$

und $\tau_1(q,\varepsilon) \lesssim \tau_2(q,\varepsilon) \lesssim \ldots \lesssim \tau_n(q,\varepsilon)$. Wir nennen $(e_1, \ldots, e_n)$ eine ε-minimale Basis in q und $(z_1, \ldots, z_n)$ die zugehörigen Koordinaten. Auf Grund der Orthogonalität und Minimalität der Wahl der Achsen z_k und ihrer Parametrisierung folgt, dass

$$\frac{\partial\rho(p_k)}{\partial z_j} = 0 \text{ und } \frac{\partial\rho(p_k)}{\partial y_k} = 0 \text{ für } j > k \ge 2. \tag{2.1}$$

Mit Hilfe der oben definierten Abstände $\tau_k(q,\varepsilon)$ definieren wir für $q \in \Omega \cap U$ und $\varepsilon > 0$ einen Polyzylinder $P_\varepsilon(q)$ und dessen Multiplikation mit einer positiven Konstanten $c > 0$ durch

$$
\begin{aligned}
c \cdot P_\varepsilon(q) :&= \{z : |z_k^{q,\varepsilon}| < c \cdot \tau_k(q,\varepsilon),\, k = 1,\dots,n\}, \\
&= \Big\{ z = q + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k : |\lambda_k| < c \cdot \tau_k(q,\varepsilon) \text{ für } k = 1,\dots,n \Big\},
\end{aligned}
$$

wobei die Komponenten $z_k^{q,\varepsilon}$ die Komponenten von z bezüglich der zu q und ε zugehörigen Koordinaten sind.

Wir beobachten, dass die Polyzylinder eine Pseudometrik induzieren. Genauer ist diese Pseudometrik für z, $q \in U \cap \Omega$ gegeben durch

$$d(z,q) := \inf\{\varepsilon > 0 : \, q \in P_\varepsilon(z)\}.$$

2.2 Eigenschaften der Pseudometrik

Für die späteren Abschätzungen benötigen wir nun noch einige Eigenschaften der zuvor eingeführten Pseudometrik. Wir führen hier die für diese Arbeit Nötigen auf; der Nachweis dieser und weitere Eigenschaften finden sich in [Co02].

2.1 Lemma
Es gibt ein von q und ε unabhängiges $c_0 > 0$, so dass für alle $q \in U \cap \Omega$ und $\varepsilon > 0$ klein genug gilt

$$c_0 \cdot P_\varepsilon(q) \subset \Omega_{q,\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Mit Hilfe dieses Lemma können wir auch Ableitungen der zuvor gewählten definierenden Funktion in allen Punkten des Polyzylinders $P_\varepsilon(q)$ durch die Abstände $\tau_k(q,\varepsilon)$ abschätzen.

2.2 Lemma
Es sei $q \in U \cap \Omega$ und $\varepsilon > 0$ klein genug. Dann gilt bzgl. der zu q und ε zugehörigen Koordinaten für alle $p \in \bar{P}_\varepsilon(q)$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha+\beta|}\rho}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(p) \right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\prod_{k=1}^{n} \tau_k(q,\varepsilon)^{\alpha_k+\beta_k}} \tag{2.3}$$

für alle Multiindizes α, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $1 \leq |\alpha + \beta| \leq m$.

Dieses Lemma wird z.B. für die Abschätzung der Stützfunktionen von Diederich und Fornæss ([DiFo03]) im Kapitel 3 benötigt.

Wir können nun die beiden obigen Lemmata benutzen, um die erste Ableitung der definierenden Funktion ρ in den Punkten $p_1, \ldots, p_n$ zu quantifizieren.

2.3 Lemma
Es sei $q \in U \cap \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Man betrachte die assoziierten Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ bzgl. q und ε, dann gilt:

1. *Für $1 \leq k \leq n$ ist*
$$\left|\frac{\partial \rho(p_k)}{\partial z_k}\right| \approx \frac{\tau_1(q,\varepsilon)}{\tau_k(q,\varepsilon)}.$$
2. *Für $j < k$ ist*
$$\left|\frac{\partial \rho(p_k)}{\partial z_j}\right| \lesssim \frac{\tau_1(q,\varepsilon)}{\tau_j(q,\varepsilon)}.$$

Für die Polyzylinder $P_\varepsilon(q)$ gilt eine weitere angenehme Eigenschaft. Conrad zeigte in [Co02], dass man wie im linear konvexen Fall auch im lineal konvexen Fall die Abstände $\tau(q, X, \varepsilon)$ durch die Standardabstände $\tau_k(q, \varepsilon)$ abschätzen kann. D.h. aber, dass die Größe des Polyzylinders $P_\varepsilon(q)$ in X-Richtung sich über $\tau(q, X, \varepsilon)$ kontrollieren lässt.

2.4 Lemma
Es sei $q \in U \cap \Omega$ und $X = \sum_{k=1}^n X_k e_k$ ein Einheitsvektor, dargestellt in den zu q und $\varepsilon > 0$ assoziierten Koordinaten. Dann gilt
$$\sum_{k=1}^n \frac{|X_k|}{\tau_k(q,\varepsilon)} \approx \frac{1}{\tau(q,X,\varepsilon)}.$$

Dieses Ergebnis wird es uns später ermöglichen, Abschätzungen in den ε-minimalen Koordinaten koordinatenfrei zu formulieren.

Alle weiteren, später benötigten Ergebnisse von Conrad in [Co02] wollen wir nun in einer Proposition zusammenfassen.

2.5 Proposition

1. *Seien $X \in \mathbb{C}^n$ ein Einheitsvektor und*
$$a_{jk}(q,X) := \frac{\partial^{|\alpha+\beta|}}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta} \rho(q + \lambda X)|_{\lambda=0}.$$

Dann gilt

$$\sum_{1\leq\alpha+\beta\leq m} |a_{jk}(q,X)|\tau(q,X,\varepsilon)^{\alpha+\beta} \approx \varepsilon.$$

Dabei hängen alle Konstanten nicht von q, X und ε ab.

2. *Definieren wir für $\nu = 1,\dots,m$ mit $a_\nu(q,X) := \max_{j+k=\nu} |a_{jk}(q,X)|$ wie in [Co02]*

$$\sigma(q,X,\varepsilon) := \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{a_\nu(q,X)}\right)^{\frac{1}{\nu}} : 1\leq\nu\leq m\right\},$$

   so gilt $\tau(q,X,\varepsilon)\approx\sigma(q,X,\varepsilon)$ für $X\in\mathbb{C}^n$, $|X|=1$ und $q\in U\cap\Omega$.

3. *Es gilt $\tau_1(q,\varepsilon)\approx\varepsilon$ und $\tau(q,X,\varepsilon)\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{m}}$ für jeden Einheitsvektor $X\in\mathbb{C}^n$. Ist X ein Einheitsvektor in komplex tangentialer Richtung, so gilt auch $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\lesssim\tau(q,X,\varepsilon)$.*

4. *Ist $X\in\mathbb{C}^n$ ein komplex-tangentialer Einheitsvektor und $0<\varepsilon<\delta$, so gilt*

$$\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\tau(q,X,\delta)\lesssim\tau(q,X,\varepsilon)\lesssim\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\tau(q,X,\delta).$$

5. *Für jedes $k>0$ existieren Konstanten $c(k)$ und $C(k)$, so dass*

$$c(k)P_\varepsilon(q)\subset P_{k\varepsilon}(q)\subset C(k)P_\varepsilon(q)\text{ und }P_{c(k)\varepsilon}(q)\subset kP_\varepsilon(q)\subset P_{C(k)\varepsilon(q)}.$$

6. *Für alle $z\in P_\varepsilon(q)$ und alle $X\in\mathbb{C}^n$ mit $|X|=1$ gilt*

$$\tau(q,X,\varepsilon)\approx\tau(z,X,\varepsilon). \tag{2.4}$$

7. *Es existiert eine Konstante $C>0$, so dass aus $P_\varepsilon(q)\cap P_\varepsilon(z)\neq\emptyset$ folgt, dass*

$$P_\varepsilon(q)\subset CP_\varepsilon(z)\text{ und }P_\varepsilon(z)\subset CP_\varepsilon(q).$$

8. *Die Pseudometrik $d(z,q)$ erfüllt die Eigenschaften*

$$\begin{aligned}&d(z,q)=0\iff z=q,\\&d(z,q)\approx d(q,z),\\&d(z,q)\lesssim d(z,w)+d(w,q)\quad q,\ z,\ w\in U\cap\Omega.\end{aligned}$$

KAPITEL III

Holomorphe Stützfunktionen

3.1 Einleitung

Eine der wichtigsten Hilfsmittel der komplexen Analysis sind holomorphe Stützfunktionen. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $\zeta \in \partial\Omega$, so nennen wir nach [DiFo03] die holomorphe Funktion $S_\zeta : U(\bar{\Omega}) \to \mathbb{C}$ eine Stützfunktion in ζ, wenn

1. $S_\zeta(\zeta) = 0$,
2. $\mathrm{Re}\big(S_\zeta(z)\big) < 0$ für alle $z \in \bar{\Omega} \setminus \{\zeta\}$ gilt.

Tatsächlich benötigt man in den Anwendungen meist noch eine glatte Abhängigkeit der Stützfunktionen vom Randpunkt ζ. Für linear konvexe Gebiete konnten Diederich und Fornæss in [DiFo99] solche Stützfunktionen konstruieren. Im Gegensatz zu den Stützfunktionen bzw. Stützflächen, welche sich durch den Tangentialraum eines Gebietes ergeben, erfüllen diese Stützfunktionen zusätzlich noch optimale Abschätzungen in dem Sinne, dass ihre Kontaktordnung mit Ω auch in allen *reellen* Richtungen optimal ist. Für genauere Details hierzu sei z.B. auf die Einleitungen von [DiFo99] und [DiFo03] verwiesen.
Neben holomorphen Stützfunktionen sind auch Peak-Funktionen interessant. Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ besitzt im Punkt $\zeta \in \partial\Omega$ eine Peak-funktion $P_\zeta \in A^j(\Omega) := C^j(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega)$, wenn

$$|P_\zeta(z)| < 1 \quad \text{für alle}\, z \in \bar{\Omega} \setminus \{\zeta\}$$

und $P_\zeta(\zeta) = 1$ gilt. Ist also S_ζ eine Stützfunktion in ζ, so ist z.B. $P_\zeta(z) := \exp\big(S_\zeta(z)\big)$ eine Peak-Funktion in ζ.

Tatsächlich ist die Existenz von Stützfunktionen nicht immer garantiert. Im Jahr 1973 fanden Kohn und Nirenberg in [KoNi73] ein pseudokonvexes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, welches in $0 \in \partial\Omega$ keine Stützfunktion besitzt (sie nutzten dies, um zu zeigen, dass pseudokonvexe Gebiete im Allgemeinen nicht biholomorph auf (schwach) linear konvexe Gebiete abbildbar sind). Fornæss konnte in [Fo77] das Kohn-Nirenberg-Beispiel abwandeln, um zu zeigen, dass pseudokonvexe Gebiete nicht einmal eine A^1-Peak-Funktion besitzen müssen. Siehe auch [Yu94] und [Yu97].

Im Jahr 2002 gelang es schließlich Diederich und Fornæss in [DiFo03] auch für lineal konvexe Gebiete eine glatte Familie von holomorphen Stützfunktion zu konstruieren.

Die in [DiFo99] konstruierten Stützfunktionen waren mittlerweile zu einem der Haupthilfsmitteln der komplexen Analysis auf linear konvexen Gebieten geworden. Somit kann man erwarten, dass sich viele Ergebnisse von linear konvexen auf lineal konvexe Gebiete übertragen, falls nicht die lineare Konvexität in größerem Maße benutzt wurde. Insbesondere für optimale Abschätzungen von Lösungen der $\bar{\partial}$-Gleichung (siehe z.B. [DiFiFo99], [Fi03] oder [Fi04] um nur einige zu nennen) erlauben die Stützfunktionen die Konstruktion passender Lösungsoperatoren (via Integralkernen). Für weitere Anwendungen sei z.B. auf die Einleitung von [DiFo03] verwiesen.

Wir werden in diesem Kapitel einige Abschätzungen von Lieder in [Li05] für die holomorphen Stützfunktionen angeben und mit diesen dann im Kapitel 4.2 plurisubharmonische Funktionen konstruieren, deren Levi-Form guten unteren Abschätzungen genügt.

3.2 Die Stützfunktionen

Wir wollen nun also die Stützfunktionen aus [DiFo03] einführen. Dazu sei weiterhin $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet mit glattem Rand vom endlichen Typ m. Wir wollen dabei wie in [Li05] vorgehen.

Zunächst wählen wir eine glatte Familie von Koordinatentransformationen $\ell_\zeta(z) = \Phi(\zeta)(z - \zeta)$ mit einer unitären Matrix $\Phi(\zeta)$, die glatt von $\zeta \in \partial\Omega$ abhängt und in jedem Punkt den äußeren Normalenvektor n_ζ in $\partial\Omega$ in den Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ überführt. Nun definieren wir weiter wie in [DiFi05]: Es sei $\hat{w} = \lambda_\zeta(w)$ mit

$$\hat{w}_1 := w_1\big(1 - A_\zeta(w)\big) \text{ und } \hat{w}_j := w_j \text{ für } j > 1.$$

Dabei ist A_ζ eine glatte Familie von holomorphen Polynomen, die nur von $w_2, \ldots, w_n$ abhängen und $A_\zeta(0) = 0$ erfüllen. Setzen wir nun $\hat{\ell}_\zeta = \lambda_\zeta \circ \ell_\zeta$, so haben wir

$$\begin{aligned}\hat{r}_\zeta(\hat{w}) &:= \rho\big(\hat{\ell}_\zeta^{-1}(\hat{w})\big) - \rho(\zeta),\\ \hat{a}_\alpha(\zeta) &:= \frac{1}{\alpha!}\,\frac{\partial^{|\alpha|}\hat{r}_\zeta(\hat{w})}{\partial \hat{w}^\alpha}\Big|_{\hat{w}=0}\end{aligned}$$

und

$$\hat{S}_\zeta(\hat{w}) := \hat{w}_1 + K\hat{w}_1^2 - \tilde{\varepsilon}\sum_{j=2}^{2m} M^{2^j}\sigma_j \sum_{\substack{|\alpha|=j\\ \alpha_1=0}} \hat{a}_\alpha(\zeta)\hat{w}^\alpha. \tag{3.1}$$

Dabei seien M, $K > 0$ genügend groß und $\tilde{\varepsilon} > 0$ genügend klein. Ferner ist

$$\sigma_j := \begin{cases} 1, & \text{für } j \equiv 0 \bmod 4,\\ -1, & \text{für } j \equiv 2 \bmod 4,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Zum Schluss setzen wir noch

$$S(z,\zeta) := \hat{S}_\zeta(\hat{\ell}_\zeta(z)).$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass aus der Konstruktion in [DiFo03] hervorgeht, dass zuerst die Konstanten M, K groß genug gewählt werden und erst dann $\tilde{\varepsilon}$ klein genug gewählt wird. Außerdem beobachten wir, dass die Stützfunktionen für einen festen Randpunkt $\zeta \in \partial\Omega$ holomorph in z sind. Die Stützfunktionen $S(z,\zeta)$ bilden eine $\mathcal{C}^\infty$-Familie in ζ. Gerade die Regularität der Stützfunktionen im Randpunkt $\zeta \in \partial\Omega$ ist für die Anwendungen von großer Wichtigkeit.

3.3 Abschätzungen der Stützfunktionen

Wir benötigen im Folgenden Abschätzungen für S und deren ersten Ableitungen und benutzen dabei die ε-minimalen Koordinaten in einem festen Punkt ζ. Zu festem ζ und festem ε kann man dann ein spezielles $\Phi(\zeta)$ konstruieren, das die benötigten Abschätzungen erfüllt.

Wir wollen hier nur noch zwei der Abschätzungen aus [Li05] nennen, die für uns von Belang sind. Für weitere Abschätzungen sei auf [DiFi05], [DiFo03] und [Li05] verwiesen.

3.1 Lemma ([Li05])
Für alle $z \in \bar{P}_\varepsilon(q)$ gilt

$$|S(z,p_j)| \lesssim \varepsilon.$$

für $q \in \Omega \cap U$ genügend nahe am Rand und $\varepsilon > 0$ genügend klein. Dabei ist $p_j \in \partial\Omega_{q,\varepsilon}$ ein Punkt assoziiert zu den ε-minimalen Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Neben den Abschätzungen für die Stützfunktionen brauchen wir auch Abschätzungen für die erste Ableitung der Stützfunktion in eine beliebige Richtung. Wir brauchen speziell, dass die Richtungsableitungen der Stützfunktion in einem Punkt $q \in \Omega \cap U$, der nahe genug am Rand liegt, nach unten beschränkt sind.

3.2 Lemma ([Li05])
Es gilt für $z \in P_\varepsilon(q)$

$$\left|\frac{\partial S(z,p_j)}{\partial z_j}\right| \gtrsim \frac{\varepsilon}{\tau_j(q,\varepsilon)}$$

für $q \in \Omega \cap U$ genügend nahe am Rand und $\varepsilon > 0$ genügend klein. Dabei ist $p_j \in \partial\Omega_{q,\varepsilon}$ ein Punkt assoziiert zu den ε-minimalen Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

KAPITEL IV

Bergman-Kern und Bergman-Metrik

4.1 Einleitung

Im Jahr 1922 führte Stefan Bergman die nach ihm benannte Kernfunktion in die Funktionentheorie einer Veränderlichen ein. 1933 verallgemeinerte er diese Funktion in [Berg33] in zwei Veränderliche und untersuchte ihr Randverhalten. Er erkannte, dass der Bergman-Kern eine Kählermetrik – die Bergman-Metrik – induziert und, dass diese beiden Größen ein gutes Verhalten unter biholomorphen Transformationen zeigen. Unter besonderen Voraussetzungen an das Gebiet Ω erzielte bereits Bergman erste Resultate über das Randverhalten des Kerns, der Metrik und weiterer verwandter Größen.

Das Problem bei der Untersuchung des Randverhaltens des Bergman-Kerns und der Bergman-Metrik besteht darin, dass man geeignete H^2-Funktionen konstruieren muss, deren Funktionswerte bei kontrollierbarer L^2-Norm groß werden. Hierzu stehen aber erst seit den Arbeiten von Hörmander (hierbei besonders [Hör65]) Mittel zur Verfügung, die einen einfacheren Zugang zu dieser Art von Fragestellungen ermöglichen.

Darum sind besonders die Arbeiten [Di70] und [Di73] von Diederich zu erwähnen, in denen u.a. das Randverhalten des Bergman-Kerns, der Ableitungen des Bergman-Kerns und der Bergman-Metrik auf streng pseudokonvexen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mit Steinschen Methoden optimal abgeschätzt wurde.

In [Fe74] gelang es dann Fefferman im Jahr 1974 und später Boutet de Movel und Sjöstrand 1976 in [BoSj76], das asymptotische Verhalten des Bergman-Kerns auf streng pseudokonvexen Gebieten zu charakterisieren. Fefferman konnte in diesem Fall durch die Abschätzungen des Bergman-Kerns zeigen, dass sich eine biholomorphe Abbildung $F : \Omega \to \Omega'$ glatt auf $\bar{\Omega}$ fortsetzt.

Auf schwach pseudokonvexen Gebieten hingegen sind derartig allgemeine Ergebnisse für die Bergman-Größen unbekannt. Lediglich im $\mathbb{C}^2$ gelang Catlin in [Ca89] die Beschreibung des Randverhaltens der in Kapitel 1 eingeführten invarianten Metriken und des Bergman-Kerns auf beschränkten Gebieten endlichen Typs.

Eines der Hauptprobleme bei schwach pseudokonvexen Gebieten im $\mathbb{C}^n$, $n > 2$, ist nämlich, dass entsprechende Vergleichsgebiete, die im streng pseudokonvexen Fall geeignete Kugeln sind, für schwach pseudokonvexe Gebiete im Allgemeinen nicht existieren. Selbst wenn diese existieren, ist dann eins der noch zu überwindenden Probleme, dass solche Vergleichsgebiete meist nur lokal geeignet sind, d.h. sie hängen stark vom betrachteten Randpunkt ab. Darüber hinaus ist der holomorphe Tangentialraum von $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 2$ mindestens zweidimensional, d.h. es können Kopplungseffekte zwischen Richtungen verschiedener Kontaktordnung auftreten, wir wollen hierauf nicht weiter eingehen.

Mit einigen Zusatzvoraussetzungen an Ω (siehe dafür z.B. [Her93], [Cho02a], [Cho03] oder [Her92a]/[Her92b]) fanden sich jedoch auch positive Ergebnisse.

Sehr allgemeine Ergebnisse im Zusammenhang mit den Bergman-Größen finden sich u.a. bei [DiFoHe84], [DiHeOh86] und [DiOh94]. Ganz besonders möchten wir noch die Abschätzungen von Diederich und Herbort in [DiHe94] auf semiregulären Gebieten hervorheben. Diese sehr allgemeine Gebietsklasse umfasst nämlich insbesondere die linear konvexen und lineal konvexen Gebiete.

Man kann aber im Allgemeinen nicht einmal erwarten, dass die Bergman-Größen in polynomialen Ausdrücken des Randabstands abschätzbar sind. Für den Bergman-Kern konstruierte Herbort 1983 ein solches Beispiel in [Her83a]. Ein weiteres wichtiges Beispiel findet sich bei [DiHe00a].

Zuletzt wollen wir darauf hinweisen, dass sich neben den in den oben genannten Artikeln benutzten Methoden, die meist spezielle Formen einer definierenden Funktion, Lokalisierungssätze, die Existenz von Peak-Funktionen oder guten L^2-Abschätzungen benutzen, in neuerer Zeit auch Hilfsmittel der Pluripotenzialtheorie bewährt haben, welche hierfür einen geeigneten Zugang zur Verfügung stellen. Dabei hat sich die plurikomplexe Green-Funktion als nützlich herausgestellt, siehe z.B. [Her99] oder auch besonders [DiHe00b].

In diesem Kapitel wollen wir aber zunächst, wie schon zuvor erwähnt, Abschätzungen von McNeal aus [Mc94] für den Bergman-Kern auf der Diagonalen auf den Fall lineal konvexer Gebiete übertragen.

Dazu werden wir zunächst einige Hilfsmittel bereitstellen, um einen Approximationssatz auf lineal konvexen Gebieten mit L^2-Methoden nachzuweisen. Mit diesem Approximationssatz sind wir dann in der Lage, den Bergman-Kern auf der Diagonalen geeignet nach unten abzuschätzen (obere Abschätzungen sind hingegen meist leicht herzuleiten). Tatsächlich wird sich zeigen, dass mit dem gezeigten Approximationssatz auch weitere Größen abschätzbar sind.

Mit diesen Abschätzungen sind wir dann im letzten Abschnitt dieses Kapitels dazu bereit, das Theorem 1 zu beweisen.

4.2 Hilfsmittel

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die benötigten Hilfsmittel für den Approximationssatz 4.3 zeigen, bevor wir diesen im nächsten Abschnitt angeben.

Zunächst formulieren wir eine Variation des bekannten $\bar{\partial}$-Lösungssatz von Hörmander mit L^2-Abschätzungen. Danach wollen wir aus den im letzten Abschnitt eingeführten Stützfunktionen geeignete plurisubharmonische Gewichtsfunktionen konstruieren.

Zunächst benötigen wir das folgende $\bar{\partial}$-Lösungslemma.

4.1 Lemma
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvex. Es sei weiter β eine $\bar{\partial}$-geschlossene $(0,1)$-Form auf Ω. Es gebe eine plurisubharmonische Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ und eine hermitesche positiv semidefinite Matrix $A = (a_{ij})$ mit stetigen Einträgen, welche auf $\operatorname{supp}(\beta)$ Diagonalgestalt habe und positiv definit ist. Des Weiteren gelte $\mathcal{L}_\varphi \geq A$ auf $\operatorname{supp}(\beta)$. Dann gibt es eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ von $\bar{\partial}u = \beta$ mit

$$\|u\|_\varphi^2 \leq 2 \cdot \int_\Omega \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 \cdot a_{jj}^{-1} \exp(-\varphi)\, d^n z < \infty,$$

wobei β_j die Koeffizienten der (0,1)-Form β sind.

Dieses Lemma lässt sich ähnlich wie Lemma 4.4.1 in [Hör90] zeigen. Wir wollen an dieser Stelle keinen Beweis angeben, da dieser sehr technisch ist und viel Notation benötigt. Ein Beweis findet sich z.B. bei [Her92a] oder [Her96]. Es sei auch auf [Bern85] für einen ähnlichen Satz verwiesen.

Konstruktion geeigneter plurisubharmonischer Funktionen:
An dieser Stelle ließen sich auch die von Conrad in [Co02, Lemma 5.4] konstruierten plurisubharmonischen Funktionen für unsere Zwecke benutzen. Wir verwenden hier jedoch die Stützfunktionen von Diederich und Fornæss aus [DiFo03], wie wir sie in Kapitel 3.2 eingeführt haben. Es seien also $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $\varepsilon > 0$ klein genug gegeben, dann erhalten wir Punkte $p_1, \ldots, p_n \in \partial\Omega_{q,\varepsilon}$ assoziiert zu q und ε, welche die Abstände $\tau_j(q, \varepsilon)$ realisieren. Dabei legen wir wie zuvor die ε-minimalen Koordinaten (z) zugrunde und wollen dies auch für den Rest des Kapitels tun.
Wir wissen in diesem Fall bereits aus den Lemmata 3.1 und 3.2, dass die Stützfunktionen für $z \in P_\varepsilon(q)$ folgende Abschätzungen erfüllen:

(S i) $|S(z, p_j)| \lesssim \varepsilon$ und damit $\mathrm{Re}\big(S(z, p_j)\big) \gtrsim -\varepsilon$,

(S ii) $|\partial_j S(z, p_j)| \gtrsim \frac{\varepsilon}{\tau_j(q,\varepsilon)}$.

Wir wollen nun aus diesen Stützfunktionen mit recht technischen Mitteln plurisubharmonische Funktionen φ_q konstruieren. Wir gehen auf diese Weise vor, da wir so auch direkt plurisubharmonische Funktionen erhalten, die wir im Kapitel 5 benutzen können.

Definieren wir

$$S^j(z, p_j) := S\big((q_1, \ldots, q_{j-1}, z_j, q_{j+1}, \ldots, q_n), p_j\big),$$

so gelten offenbar die Eigenschaften (S i) und (S ii) auch für die $S^j(z, p_j)$. Setzen wir nun

$$f_j(z) := \left|\exp\left(\frac{S^j(z, p_j)}{\varepsilon}\right)\right|^2,$$

so ist f_j glatt und plurisubharmonisch auf $\Omega_{q,\varepsilon}$ und es gilt, da f_j nur von z_j abhängt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_\ell}(z) &= \delta_{k,j} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell}\left(\left|\exp\left(\frac{S^j(z, p_j)}{\varepsilon}\right)\right|^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial S^j(z, p_j)}{\partial z_k}(z)\right) \\ &= \delta_{k,j}\ \delta_{\ell,j}\ \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\exp\left(\frac{S^j(z, p_j)}{\varepsilon}\right)\right|^2 \frac{\partial S^j(z, p_j)}{\partial z_k}(z)\ \overline{\frac{\partial S^j(z, p_j)}{\partial z_\ell}}(z).\end{aligned}$$

Also ist für $X \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f_j}(z, X) &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\exp\left(\frac{S^j(z, p_j)}{\varepsilon}\right)\right|^2 \frac{\partial S^j(z, p_j)}{\partial z_j}(z)\ \overline{\frac{\partial S^j(z, p_j)}{\partial z_j}}(z)\ \cdot\ |X_j|^2 \\ &\gtrsim \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\frac{\partial S^j(z, p_j)}{\partial z_j}(z)\right|^2 \cdot\ |X_j|^2,\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus (S i) folgt.

Nach Lemma 2.1 gibt es eine unabhängige Konstante $c_0 > 0$, so dass $c_0 \cdot P_\varepsilon(q) \subset \Omega_{q,\varepsilon}$ gilt. Damit folgt aber mit (S ii) für $z \in c_0 \cdot P_\varepsilon(q)$ und $X \in \mathbb{C}^n$ unmittelbar

1. $0 < f_j(z) < \exp(2)$,
2. $\mathcal{L}_{f_j}(z, X) \gtrsim \frac{|X_j|^2}{\tau_j(q,\varepsilon)^2}$.

Wir erhalten nun vollkommen analog wie in Lemma 5.4 aus [Co02] eine Konstante $\widetilde{c_1} > 0$, die nicht von q und ε abhängt, sowie plurisubharmonische Funktionen $g_j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{q,\varepsilon})$, so dass

1. $0 \leq g_j(z) < 1$,
2. $\operatorname{supp}(g_j) \subset c_0 \cdot P_\varepsilon(q)$,
3. $\mathcal{L}_{g_j}(z, X) \gtrsim \frac{|X_j|^2}{\tau_j(q,\varepsilon)^2}$ auf $\widetilde{c_1} \cdot P_\varepsilon(q) \times \mathbb{C}^n$.

Wir definieren damit weiter

$$\Phi_q(z) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n g_j.$$

Es gilt zunächst offenbar $0 \leq \Phi_q < 1$ auf $\Omega_{q,\varepsilon}$. Darüber hinaus erhalten wir auf $c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ für ein geeignetes c_1, dass

$$\mathcal{L}_{\Phi_q}(q, X) \gtrsim \sum_{j=1}^n \frac{|X_j|^2}{\tau_j(q,\varepsilon)^2}.$$

Wir haben damit also das folgende Lemma gezeigt.

4.2 Lemma
Unter den Standardvoraussetzungen gibt es eine glatte, plurisubharmonische Funktion $\varphi_q = \varphi_{q,\varepsilon}$ und zwei Konstanten $c_0, c_1 > 0$ die nicht von q und ε abhängen, so dass

1. $0 \leq \varphi_q < 1$,
2. $\operatorname{supp}(\varphi_q) \subset c_0 \cdot P_\varepsilon(q)$,
3. *auf $c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ gilt für $X \in \mathbb{C}^n$*

$$\mathcal{L}_{\varphi_q}(q, X) \gtrsim \sum_{j=1}^n \frac{|X_j|^2}{\tau_j(q,\varepsilon)^2}. \tag{4.1}$$

4.3 Ein Approximationssatz

Wir werden für die Abschätzung des Bergman-Kerns andere Methoden als McNeal in [Mc94] benutzen, da dort die lineare Konvexität im stärkeren Maße benutzt wurde. Mit den holomorphen Stützfunktionen aus [DiFo03] sind wir nämlich zunächst in der Lage, einen Approximationssatz zu beweisen, der sich in ähnlicher Form schon bei [Di70] für streng pseudokonvexe Gebiete findet (dort aber nicht mit L^2-Methoden bewiesen wird).

Wir werden den Satz nur in dem hier benötigten Rahmen formulieren und beweisen. Im Anschluss an den Beweis wollen wir dann kurz mögliche Verallgemeinerungen formulieren, da dieser Approximationssatz auch losgelöst von der hier vorgestellten Anwendung von Interesse ist. Ähnliche Sätze finden sich z.B. bei [Her92b], [Her93] und [Her96], aber auch bei [BoStYu95].

Der einfacheren Schreibweise wegen wollen wir im Folgenden die Abkürzung $\|f\|_U := \|f\|_{L^2(U)}$ benutzen.

4.3 Satz
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ. Ist $q \in \Omega$ nahe genug am Rand, $\varepsilon > 0$ klein genug, $c_1 > 0$ die Konstante aus Lemma 4.2 und $c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ der Polyzylinder aus Kapitel 2.1.
Dann gibt es für alle $f \in H^2\big(\Omega_{q,\varepsilon} \cap c_1 \cdot P_\varepsilon(q)\big)$ ein $\hat{f} \in H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$ und eine Konstante $L = L(\Omega, n, K) > 0$ mit

(a) $D^\beta \hat{f}(q) = D^\beta f(q)$, $|\beta| \leq K$,

(b) $\|\hat{f}\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} \leq L \|f\|_{\Omega_{q,\varepsilon} \cap c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}$.

4.4 Bemerkung
Ist $\Omega = \{\rho < 0\}$ und setzen wir speziell $\varepsilon = |\rho(q)|$, so erhalten wir diesen Approximationssatz insbesondere auf

$$\Omega_{q,|\rho(q)|} = \{\rho(z) < \rho(q) + |\rho(q)| = 0\} = \Omega.$$

Beweis (von Satz 4.3): Wir wollen den Satz beweisen, indem wir explizit solch ein $\hat{f}$ konstruieren. Die Beweisidee ist dabei wie folgt: Wir lösen ein $\bar{\partial}$-Problem mit Gewichten, wobei wir als Gewicht eine Folge von $\mathcal{C}^2$-glatten plurisubharmonischen Funktionen $(\phi_\delta)_\delta$ benutzen. Dabei haben die ϕ_δ die Form

$$\phi_\delta(z) := \varphi_q(z) + C \cdot \log(|z - w|^2 + \delta).$$

Die Idee, warum wir solche Folgen benutzen wollen, besteht darin, dass für $\mathcal{C}^2$-glatte Gewichte gute $\bar{\partial}$-Lösungssätze zur Verfügung stehen, wir aber durch eine logarithmische Singularität von ϕ_δ für $\delta \to 0$ zusätzliche Eigenschaften einer Lösung u_δ der $\bar{\partial}$-Gleichung

$$\bar{\partial} u = \bar{\partial}(\chi f)$$

erhalten. Dabei ist χ eine geeignete Abschneidefunktion. Wir setzen dann

$$F_\delta := \chi f - u_\delta$$

und werden dann zeigen, dass wir aus der Folge $(F_\delta)_\delta$ für $\delta \to 0$ nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge eine Grenzfunktion $\hat{f}$ erhalten, die den Bedingungen des Satzes genügt.

Wir beweisen diesen Satz in mehreren Schritten:

1. **Konstruktion des Gewichts ϕ_δ:**

   Es sei
   $$V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{|z_j|^2}{c_1^2 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)^2}$$
   (wobei z noch immer die ε-minimalen Koordinaten zentriert in q sind) und $\chi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, monoton wachsend mit
   $$\chi_1(t) := \begin{cases} t & \text{falls } t < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{falls } t > \frac{3}{4}. \end{cases}$$
   Wir setzen dann
   $$\phi_\delta := \frac{2(n+K+1)}{c} \left[\varphi_q + c \cdot \log(\chi_1 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \delta)\right],$$
   wobei φ_q die plurisubharmonische Funktion aus Lemma 4.2 ist. Dabei kann $c > 0$ unabhängig von q und ε derart gewählt werden, dass ϕ_δ auf $\Omega_{q,\varepsilon}$ plurisubharmonisch ist und auf $c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ Gleichung (4.1) erfüllt, d.h.
   $$\mathcal{L}_{\phi_\delta}(z,X) \gtrsim \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|^2}{\tau_j(q,\varepsilon)^2} \quad \text{für } (z,X) \in c_1 \cdot P_\varepsilon(q) \times \mathbb{C}^n. \tag{4.2}$$
   Um diese Unabhängigkeit einzusehen, setzen wir

$$\psi(z) := \varphi_q(z) + c \cdot \log(\chi_1 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)(z)} + \delta).$$

Damit rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi(z,X) =& \mathcal{L}_{\varphi_q}(z,X) + \frac{c}{\chi_1 \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z) + \delta} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{|\langle \frac{z}{\tau^2(q,\varepsilon)}, X\rangle|^2}{c_1^4} \left\{ \chi_1'' \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z) - \frac{[\chi_1' \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z)]^2}{\chi_1 \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z) + \delta} \right\} \right. \\ &\left. + \frac{\chi_1' \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z)}{c_1^2} \sum_{j=1}^n \frac{|X_j|^2}{\tau_j(q,\varepsilon)^2} \right]\end{aligned}$$

gilt, wobei wir die Abkürzung $\frac{z}{\tau^2(q,\varepsilon)} = \left(\frac{z_1}{\tau_1(q,\varepsilon)^2}, \dots, \frac{z_n}{\tau_n(q,\varepsilon)^2}\right)$ benutzen.

(a) Für $z \in \frac{c_1}{2} \cdot P_\varepsilon(q)$ ist $c \cdot \log(\chi_1 \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z) + \delta)$ nach Definition von χ_1 plurisubharmonisch.

(b) Für $z \in \mathbb{C}^n \setminus \frac{3\,c_1}{4} \cdot P_\varepsilon(q)$ ist $\chi_1' \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z) = \chi_1'' \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z) = 0$ und somit der Term $[\,\cdot\,] \geq 0$.

(c) Für $z \in \frac{3\,c_1}{4} \cdot P_\varepsilon(q) \setminus \frac{c_1}{2} \cdot P_\varepsilon(q)$, ist $\chi_1 \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}(z)$ gleichmäßig nach oben und unten durch unabhängige Konstanten beschränkt. Es genügt also den Term in $[\,\cdot\,]$ zu betrachten. Des Weiteren können wir annehmen, dass $0 \leq \chi_1' < 4$ und $|\chi_1''| \leq 4$ gilt. Damit ist aber der Term in $\{\,\cdot\,\}$ nach unten durch eine unabhängige Konstante $-C'$ mit $C' > 0$ abschätzbar. Da weiter $z \in \frac{3\,c_1}{4} \cdot P_\varepsilon(q)$ ist, gilt $|z_j| \leq \tau_j(q,\varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$. Deshalb ist $[\,\cdot\,] \geq -\tilde{C} \cdot \mathcal{L}_{\varphi_q}(z,X)$ mit einer unabhängigen Konstanten $\tilde{C} > 0$ abschätzbar. Durch passende Wahl von c folgt die Behauptung auch in diesem Fall.

2. **Lösung der $\bar{\partial}$-Gleichung mit Gewichten:**

Es sei $\chi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit $|\chi_2'| \leq 4$ und

$$\chi_2(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{falls } t \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}\beta &:= \bar{\partial}\big((\chi_2 \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}) \cdot f\big) \\ &= \big[(\chi_2' \circ V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}) \cdot \bar{\partial} V_{c_1\cdot P_\varepsilon(q)}\big] \cdot f\end{aligned}$$

und beachten, dass nach Wahl von χ_2, dann

$$\operatorname{supp}(\beta) \subset c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$$

gilt. Wir wählen nun die Matrix A als

$$A := (a_{ij}) = \left(\delta_{j,k} \cdot \frac{1}{\tau_j^2(q,\varepsilon)}\right)_{j,k}.$$

Betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \bar\partial u &= \beta \\ &= \bar\partial\big((\chi_2 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}) \cdot f\big), \end{aligned} \tag{4.3}$$

so sind die Voraussetzungen von Lemma 4.1 nach Konstruktion des Gewichts ϕ_δ, also wegen Gleichung (4.2), erfüllt und wir erhalten Lösungen u_δ von (4.3) mit

$$\begin{aligned} \|u_\delta\|_{\phi_\delta}^2 &\lesssim \int \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 \cdot a_{jj}^{-1} e^{-\phi_\delta}\, d^n z \\ &= \int \sum_{j=1}^n |(\chi_2' \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)})|^2 \cdot \left|\frac{\partial V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}}{\partial \bar z_j}\right|^2 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)^2 \cdot |f|^2 e^{-\phi_\delta}\, d^n z. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Auf $c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ gilt aber

$$|(\chi_2' \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)})|^2 \cdot \left|\frac{\partial V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}}{\partial \bar z_j}\right|^2 \lesssim \left|\frac{\partial V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}}{\partial \bar z_j}\right|^2 \leq \frac{1}{\tau_j(q,\varepsilon)^2}.$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (4.4) wegen der unabhängigen Beschränktheit von $|\chi_2'|$, dass

$$\|u_\delta\|_{\phi_\delta}^2 \lesssim \int_{\operatorname{supp}(\beta)} |f|^2 \exp(-\phi_\delta)\, d^n z. \tag{4.5}$$

Da nach Wahl von χ_2 aber sogar $\operatorname{supp}(\beta) \subset \frac{3c_1}{4} \cdot P_\varepsilon(q) \setminus \frac{c_1}{2} \cdot P_\varepsilon(q)$ gilt, ist ϕ_δ auf $\operatorname{supp}(\beta)$ gleichmäßig nach unten beschränkt. Dort gilt nämlich, weil χ_1 monoton wachsend angenommen wurde,

$$\begin{aligned} \phi_\delta &= \frac{2(n+K+1)}{c}\left[\varphi_q + c \cdot \log(\chi_1 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \delta)\right] \\ &\geq \frac{2(n+K+1)}{c}\left[0 + c \cdot \log\left(\tfrac{1}{2} + \delta\right)\right]. \end{aligned}$$

Da also ϕ_δ gleichmäßig nach unten beschränkt ist, ist $\exp(-\phi_\delta)$ auf $\operatorname{supp}(\beta)$ gleichmäßig nach oben beschränkt. Also ergibt sich damit aus Gleichung (4.5)

$$\|u_\delta\|^2_{\phi_\delta} \lesssim \int\limits_{\operatorname{supp}(\beta)} |f|^2 \exp(-\phi_\delta)\, d\lambda \lesssim \|f\|^2_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}.$$

Setzen wir nun noch

$$F_\delta := (\chi_2 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}) \cdot f - u_\delta,$$

so ist $F_\delta \in H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\|F_\delta\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} &\leq \|(\chi_2 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}) \cdot f\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} + \|u_\delta\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} \\
&\leq \|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \|u_\delta\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} \\
&= \|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \|u_\delta \cdot \exp(\tfrac{\phi_\delta}{2})\|_{\phi_\delta} \\
&\leq \|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \exp(C) \cdot \|u_\delta\|_{\phi_\delta} \\
&\leq (1 + \exp(C)) \cdot \|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}
\end{aligned}$$

mit einer von q und ε unabhängigen Konstanten $C > 0$. Dabei gilt

$$\|u_\delta \cdot \exp(\tfrac{\phi_\delta}{2})\|_{\phi_\delta} \leq \sup\{\exp(\tfrac{\phi_\delta}{2})\} \cdot \|u_\delta\|_{\phi_\delta} \leq \exp(C)\|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)},$$

weil ϕ_δ auf $\Omega_{q,\varepsilon}$ wegen

$$\phi_\delta \leq \frac{2(n + K + 1)}{c} \left[1 + c \cdot \log(1 + \delta)\right],$$

nach oben beschränkt ist, da $\varphi_q, \chi_1 \leq 1$ auf $\Omega_{q,\varepsilon}$ gilt.

Auf Grund der gleichmäßigen Beschränktheit der F_δ können wir nun eine in $H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$ konvergente Teilfolge aus den $(F_\delta)_\delta$ wählen und bezeichnen mit $\hat{f}$ die Grenzfunktion bzw. mit $\hat{u}$ die Grenzfunktion der $(u_\delta)_\delta$. Wir wollen nun im Folgenden zeigen, dass dieses $\hat{f}$ den Bedingungen des Satzes genügt. Zunächst einmal erfüllt $\hat{f}$ den Teil (b) wegen

$$\|\hat{f}\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} \leq \big(1 + \exp(C)\big) \cdot \|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}.$$

3. **Abschätzung der Ableitungen von u_δ:**

   Wir wollen nun zeigen, dass $D^\alpha u_\delta(q)$ für $|\alpha| \leq K$ verschwindet, da dann nach Konstruktion f und $\hat{f}$ sowie ihre Ableitungen bis zur K-ten

Stufe übereinstimmen und somit $\hat{f}$ auch die Bedingung (a) des Satzes erfüllt.

Zunächst beobachten wir dazu, dass $\|u_\delta\|^2_{\phi_\delta} \lesssim \|f\|^2_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}$ bedeutet, dass

$$\int \frac{|u_\delta|^2}{(\chi_1 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \delta)^{2(n+1+K)}} \cdot \exp\left(-\frac{2(n+1+K)}{c}\ \varphi_q\right)\, d^n z \lesssim \|f\|^2_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}$$

gilt. Somit folgt (wegen $0 \leq \varphi_q < 1$)

$$\int \frac{|u_\delta|^2}{(\chi_1 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \delta)^{2(n+1+K)}}\, d^n z \lesssim \|f\|^2_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}. \tag{4.6}$$

Sei nun $\delta \ll 1$ so klein, dass $V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}(z) < \frac{1}{2}$ für $z \in \delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ gilt. Dann ist $u_\delta \in \mathcal{O}\big(\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q)\big)$, weil

$$\bar{\partial} u_\delta = (\chi_2' \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}) \cdot \bar{\partial} V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}$$

und $\chi_2'(t) = 0$ für $t \leq \frac{1}{2}$ ist.

Wegen der Holomorphie von u_δ folgt mittels der Cauchy- und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|D^\alpha u_\delta(q)|^2 \\
&\quad \lesssim \prod_{j=1}^n \big(\delta c_1 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)\big)^{-2(2+\alpha_j)}\ \|u_\delta\|^2_{L^1(\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q))} \\
&\quad \lesssim \prod_{j=1}^n \big(\delta c_1 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)\big)^{-2(2+\alpha_j)}\ \|u_\delta\|^2_{L^2(\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q))} \|1\|^2_{L^2(\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q))} \\
&\quad \lesssim \prod_{j=1}^n \big(\delta c_1 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)\big)^{-2(2+\alpha_j)}\ \|u_\delta\|^2_{L^2(\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q))} \prod_{j=1}^n \big(\delta c_1 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)\big)^2 \\
&\quad = \prod_{j=1}^n \big(\delta c_1 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)\big)^{-2(1+\alpha_j)}\ \|u_\delta\|^2_{L^2(\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q))} \\
&\quad \lesssim \prod_{j=1}^n \big(\delta c_1 \cdot \tau_j(q,\varepsilon)\big)^{-2(1+\alpha_j)} \cdot \left(\max_{\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} (V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} + \delta)\right)^{2(n+1+K)} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \int_{\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} \frac{|u_\delta|^2}{(\chi_1 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)(q)} + \delta)^{2(n+1+K)}}\, d^n z
\end{aligned}$$

$$\lesssim \delta^{2(n+1-n+K-|\alpha|)} \|f\|^2_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}, \tag{4.7}$$

wobei diesmal im letzten Schritt die Konstante nur von δ unabhängig ist. Wir haben dabei in der letzten Ungleichung ausgenutzt, dass $V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} < \delta^2$ auf $\delta c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ ist.

Aus der Abschätzung (4.7) folgt, dass $\hat{u}$ und alle Ableitungen bis zur Ordnung K im Punkt q verschwinden. Damit folgt dann aber für $\hat{f}$ nach Konstruktion von χ_2, wenn $|\alpha| \leq K$, dass

$$\begin{aligned}
D^\alpha \hat{f}(q) &= \lim_{\delta \to 0} D^\alpha F_\delta(q) \\
&= D^\alpha\big((\chi_2 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}) \cdot f\big)(q) - \lim_{\delta \to 0} D^\alpha u_\delta(q) \\
&= \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \underbrace{D^{\alpha-\gamma}(\chi_2 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)})(q)}_{=0,\text{ falls } \gamma \neq \alpha} \cdot D^\gamma f(q) - 0 \\
&= \frac{\alpha!}{\alpha!\ 0!} \underbrace{(\chi_2 \circ V_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)})(q)}_{=1} \cdot D^\alpha f(q) \\
&= D^\alpha f(q).
\end{aligned}$$

Somit erfüllt $\hat{f}$ neben (b) auch (a) und ist in $H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$ enthalten. Also erfüllt $\hat{f}$ die Behauptung des Satzes.

□

Verallgemeinerungen

Wie man schon an dem Beweis von Satz 4.3 sieht, geht die spezielle Geometrie lineal konvexer Gebiete nur an einer Stelle ein und zwar dort, wo die holomorphen Stützfunktionen aus [DiFo03], welche optimalen Abschätzungen genügen, benutzt werden.

4.5 Bemerkung

Der Approximationssatz lässt sich in einem allgemeineren Rahmen formulieren. Wir haben zuvor nämlich vielmehr den folgenden Satz bewiesen (siehe auch [Her97]):

Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvex. Ferner sei $q \in G$ und es gebe einen Polyzylinder $P^n(q,r)$ mit Polyradius $r = (r_1, \ldots, r_n)$ und eine streng plurisubharmonische Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^2(G)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *$\varphi \leq 1$,*
2. *$\varphi \geq 0$ auf $G \cap P^n(q,r)$ und*
3. *es gibt ein $c > 0$, so dass*

$$\mathcal{L}_\varphi(z,X) \geq c \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|^2}{r_j^2} \quad \text{für } (z,X) \in (P^n(q,r) \cap G) \times \mathbb{C}^n.$$

Dann gibt es für alle $f \in H^2(\Omega \cap P^n(q,r))$ ein $\hat{f} \in H^2(\Omega)$ mit

(Ai) $D^\alpha \hat{f}(q) = D^\alpha f(q)$, $|\alpha| \leq K$,

(Aii) $\|\hat{f}\|_\Omega \leq L_{\Omega,n,K} \|f\|_{\Omega \cap P^n(q,r)}$.

Tatsächlich lässt sich der Approximationssatz sogar für (siehe [Mc89])

(i) endlich viele „Approximationsstellen“ q_j, $j = 1, \ldots, m$ statt nur q,

(ii) endlich viele partielle Differenzialoperatoren mit konstanten Koeffizienten statt der D^β,

nachweisen, falls geeignete Gewichtsfunktionen existieren.

4.4 Abschätzung von $K_\Omega(q,q)$

In diesem Abschnitt wollen wir in einem ersten Schritt den Bergman-Kern auf der Diagonalen abschätzen. Zur Erinnerung: Die Kernfunktion ist gegeben durch

$$K_\Omega(q,q) = \sup\{|f(q)|^2 : \ f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega),\ \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1\}.$$

Für K_Ω gilt zunächst das folgende Lemma.

4.6 Lemma
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen. Sei $q \in \Omega$ und $P(q) := P^n(q,R) \subset \Omega$ ein Polyzylinder mit Polyradius $R := (r_1, \ldots, r_n)$, dann ist

$$K_\Omega(q,q) \leq K_{P(q)}(q,q) \approx \prod_{j=1}^n r_j^{-2}.$$

Beweis: Die erste Ungleichung folgt aus der Monotonieeigenschaft des Bergman-Kerns wie in Lemma 1.1 beschrieben. Auf den Beweis der zweiten Abschätzung wollen wir verzichten (siehe z.B. [JaPf93] oder [Kra92] bzw. Abschnitt 1.1.3). □

In diesem Abschnitt wollen wir nun die umgekehrte Abschätzung unter Zuhilfenahme der ε-minimalen Polyzylinder herleiten, d.h. unser Ziel ist es

$$K_\Omega(q,q) \gtrsim \prod_{j=1}^n \tau_j(q, |r(q)|)^{-2}$$

für q nahe genug am Rand von Ω zu zeigen. Diese Abschätzung für die Kernfunktion kann man auf zwei Arten nachweisen:

1. Mittels eines Approximationssatzes über gewichtete L^2-Abschätzungen für das $\bar{\partial}$-Problem, indem man gute plurisubharmonische Funktionen als Gewichte wählt

oder

2. mittels guter Peak-Funktionen (siehe [Hör65]).

Wir haben hier den Approximationssatz auf Grund seiner größeren Anwendungsmöglichkeiten gewählt. Denn er lässt es auch gleichzeitig zu, dass man zum Bergman-Kern analoge Größen wie etwa B_Ω abschätzen kann, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts hingegen ist:

4.7 Lemma
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ. Es sei $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $\varepsilon > 0$ klein genug, dann gilt

$$K_{\Omega_{q,\varepsilon}}(q,q) \approx \prod_{j=1}^{n} \tau_j(q,\varepsilon)^{-2}.$$

Beweis: Nach Lemma 2.1 gibt es eine von q und ε unabhängige Konstante $c_0 > 0$, so dass $c_0 \cdot P_\varepsilon(q) \subset \Omega_{q,\varepsilon}$ gilt. Also folgt mit Lemma 4.6

$$K_{\Omega_{q,\varepsilon}}(q,q) \lesssim \prod_{j=1}^{n} \tau_j(q,\varepsilon)^{-2}.$$

Die umgekehrte Abschätzung ergibt sich folgendermaßen. Es sei $c_1 > 0$ die von q und ε unabhängigen Konstante aus Lemma 4.2. Setzen wir

$$f \equiv 1 \in H^2\big(c_1 \cdot P_\varepsilon(q)\big),$$

so gibt es nach Satz 4.3 ein $\hat{f} \in H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$ mit $\hat{f}(q) = f(q) = 1$ und eine von q und ε unabhängige Konstante $C > 0$, so dass

$$\|\hat{f}\|^2_{\Omega_{q,\varepsilon}} \leq C \cdot \|1\|^2_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} \leq C \cdot \mathrm{Vol}\big(c_1 \cdot P_\varepsilon(q)\big).$$

Damit ist aber $F(z) := \frac{\hat{f}(z)}{\sqrt{C \cdot \mathrm{Vol}(c_1 \cdot P_\varepsilon(q))}} \in H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$, und es gilt

$$\|F\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} \leq 1.$$

Daraus ergibt sich nach Definition von $K_{\Omega_{q,\varepsilon}}$, dass

$$\begin{aligned} K_{\Omega_{q,\varepsilon}}(q,q) &\geq |F(q)|^2 \\ &\gtrsim \frac{|\hat{f}(q)|^2}{\mathrm{Vol}(c_1 \cdot P_\varepsilon(q))} \\ &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(c_1 \cdot P_\varepsilon(q))} \\ &\approx \prod_{j=1}^{n} \tau_j(q,\varepsilon)^{-2} \,. \end{aligned}$$

□

4.5 Abschätzung der Bergman-Metrik

Wir wollen nun zum Beweis von Theorem 1 kommen. Dazu beachten wir zunächst einmal

Theorem ([Li05]) Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ, dann gilt für $X \in \mathbb{C}^n$, $|X| = 1$, dass

$$\frac{1}{\tau(q,X,|r(q)|)} \lesssim \mathrm{Cara}_\Omega(q,X) \lesssim \mathrm{Kob}_\Omega(q,X) \lesssim \frac{1}{\tau(q,X,|r(q)|)}.$$

Weiterhin gilt nach Hahn ([Ha78])

$$\mathrm{Cara}_\Omega(q,X) \leq \mathrm{Berg}_\Omega(q,X). \tag{4.8}$$

Es folgt damit

$$\frac{1}{\tau(q,X,|r(q)|)} \lesssim \mathrm{Cara}_\Omega(q,X) \leq \mathrm{Berg}_\Omega(q,X).$$

Also genügt es, eine obere Abschätzung der Bergman-Metrik herzuleiten.

Wir wollen daran erinnern, dass die Bergman-Metrik mittels der Größen

$$\begin{aligned} K_\Omega(q,q) &= \sup\{|f(q)|^2 \ :\ f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega),\ \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1\} \\ B_\Omega(q,X) &= \sup\{|Xf(q)|^2 :\ f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega),\ \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1,\ f(q) = 0\}, \end{aligned}$$

durch

$$\mathrm{Berg}_\Omega(q,X) := \left(\frac{B_\Omega(q,X)}{K_\Omega(q,q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert ist und weisen nun die für Theorem 1 noch fehlende Abschätzung nach.

4.8 Lemma
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ. Es sei $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $\varepsilon > 0$ klein genug, dann gilt für $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, dass

$$\big(B_{\Omega_{q,\varepsilon}}(q,X)\big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{\tau_j(q,\varepsilon)} \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n} \tau_\ell(q,\varepsilon)\right)^{-1}. \tag{4.9}$$

Beweis: Nach Lemma 2.1 gibt es eine von q und ε unabhängige Konstante $c_0 > 0$, so dass $c_0 \cdot P_\varepsilon(q) \subset \Omega_{q,\varepsilon}$ gilt. Mit der Cauchyschen Integralformel ergibt sich also für $f \in \mathcal{O}(c_0 \cdot P_\varepsilon(q))$ die Abschätzung

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(q)\right| \lesssim \frac{1}{\tau_j(q,\varepsilon)} \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n} \tau_\ell(q,\varepsilon)^2\right)^{-1} \cdot \|f\|_{L^1(c_0\cdot P_\varepsilon(q))},$$

und mit der Hölderungleichung auf $f \cdot 1$ angewandt liefert dies

$$\begin{aligned}
&\lesssim \frac{1}{\tau_j(q,\varepsilon)} \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n} \tau_\ell(q,\varepsilon)^2\right)^{-1} \|f\|_{L^2(c_0\cdot P_\varepsilon(q))} \cdot \|1\|_{L^2(c_0\cdot P_\varepsilon(q))} \\
&= \frac{1}{\tau_j(q,\varepsilon)} \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n} \tau_\ell(q,\varepsilon)^2\right)^{-1} \|f\|_{L^2(c_0\cdot P_\varepsilon(q))} \cdot \mathrm{Vol}\big(c_0 \cdot P_\varepsilon(q)\big)^{1/2} \\
&\lesssim \frac{1}{\tau_j(q,\varepsilon)} \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n} \tau_\ell(q,\varepsilon)\right)^{-1} \|f\|_{L^2(c_0\cdot P_\varepsilon(q))}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann aber Gleichung (4.9) durch Summation. □

Mit den Ergebnissen von Lieder in [Li05], der obigen Ungleichung und der optimalen Abschätzung des Bergman-Kerns in Lemma 4.7 ist das Theorem 1 wie eingangs erwähnt schon bewiesen. Wir wollen aber einen Beweis angeben, der unabhängig von den Ergebnissen in [Li05] ist.

Es gilt nämlich sogar die Umkehrung der obigen Abschätzung, wie das folgende Lemma zeigt.

4.9 Lemma
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ. Es sei $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $\varepsilon > 0$ klein genug, dann gilt für $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, dass

$$\big(B_{\Omega_{q,\varepsilon}}(q,X)\big)^{\frac{1}{2}} \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{\tau_j(q,\varepsilon)} \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n} \tau_\ell(q,\varepsilon)\right)^{-1}.$$

4.10 Bemerkung
Wie zuvor folgt natürlich, dass die Lemmata 4.7, 4.8 und 4.9 insbesondere für $\varepsilon = |\rho(q)|$ und somit für Ω gelten.

Beweis: Es sei $c_1 > 0$ die unabhängige Konstante aus Lemma 4.2. Nach [JaPf93] oder [Kra92] gibt es für das Extremalproblem, das durch $B_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}$ gegeben ist, auf dem Polyzylinder $c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ ein $f \in H^2\big(c_1 \cdot P_\varepsilon(q)\big)$ mit $\|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} = 1$, $f(q) = 0$ und

$$|Xf(q)|^2 = B_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}(q, X).$$

D.h. es gibt eine Funktion f, welche $B_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}$ realisiert. Für dieses f wählen wir nun nach Satz 4.3 ein $\hat{f} \in H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$, so dass

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} &\leq C \|f\|_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)} \leq C, \\ \hat{f}(q) &= f(q) = 0, \end{aligned}$$

und

$$|X\hat{f}(q)|^2 = |Xf(q)|^2 = B_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}(q, X).$$

Also gilt für $F(z) := \frac{\hat{f}(z)}{C} \in H^2(\Omega_{q,\varepsilon})$ dann $\|F\|_{\Omega_{q,\varepsilon}} \leq 1$, $F(q) = 0$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \big(B_{\Omega_{q,\varepsilon}}(q, X)\big)^{\frac{1}{2}} \geq |XF(q)| &= \frac{1}{C} \cdot \big(B_{c_1 \cdot P_\varepsilon(q)}(q, X)\big)^{\frac{1}{2}} \\ &\gtrsim \frac{1}{C} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{\tau_j(q, \varepsilon)} \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n} \tau_\ell(q, \varepsilon) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung z.B. aus den bekannten Ergebnissen für das konvexe Gebiet $c_1 \cdot P_\varepsilon(q)$ folgt. □

Mit den beiden Abschätzungen aus Lemma 4.7 und 4.9 sowie Lemma 2.4, folgt dann schließlich sofort:

Theorem 1 *Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ. Dann gilt*

$$\mathrm{Berg}_\Omega(q, X) \approx \frac{1}{\tau(q, X, |r(q)|)}$$

für $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $X \in \mathbb{C}^n$, $|X| = 1$.

4.11 Bemerkung
Dieses Theorem zeigt insbesondere, dass die ε-minimalen Polyzylinder gute Modellgebiete für lineal konvexe Gebiete sind.

KAPITEL V

Der Bergman-Kern außerhalb der Diagonalen

5.1 Einleitung

Wie schon eingangs erwähnt, ist die Bergmansche Kernfunktion für zahlreiche Anwendungen interessant. So gelangte Fefferman in [Fe74] durch die genaue Abschätzung des Randverhaltens der Kernfunktion zu Fortsetzungssätzen von biholomorphen Abbildungen; er zeigte, dass sich eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ von beschränkten, glatten, streng pseudokonvexen Gebieten zu einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : \bar{\Omega}_1 \to \bar{\Omega}_2$ fortsetzen lässt. Siehe auch [Web79].

Ähnliche Ergebnisse gibt es auch im Fall eigentlicher Abbildungen, wo die Bergmansche Kernfunktion eine wichtige Rolle spielt; siehe zu diesem Themenkreis auch [DiFo79].

Den engen Zusammenhang dieser Fortsetzungsproblematik mit dem Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion zeigt eine Arbeit von Bell und Boas aus dem Jahr 1981. In [BellBo81] zeigen die Autoren u.a., dass Regularitätseigenschaften der Bergman-Projektion (Condition R) und ein gewisses Wachstumsverhalten des Bergman-Kerns und seiner Ableitungen auf beschränkten, glatten, pseudokonvexen Gebieten äquivalent sind.

Des Weiteren sind im Fall schwach pseudokonvexer Gebiete z.B. die Arbeiten von Cho [Cho02a]/ [Cho02b], [Cho03] auf Gebieten mit vergleichbarer Leviform zu nennen.

Von Boas, Straube, Yu stammen ähnliche Abschätzungen in [BoStYu95] für semireguläre (dort h-extendible genannt) Gebiete. Diederich und Herbort

weisen in [DiHe97] dieses Resultat mittels anderer Techniken nach; ihr Beweis beruht auf Lokalisierungssätzen und benutzt die spezielle Geometrie der betrachteten Gebiete.
Weitere Ergebnisse finden sich auch in [DiOh94], wo mit Hilfe einer Familie geeigneter Vergleichsgebiete das Verhalten des Bergman-Kerns untersucht wird. Darüber hinaus sei noch auf die interessanten Gegenbeispiele in [DiHe99] hingewiesen.

Wie schon im letzten Kapitel bemerkt, gibt es einen engen Zusammenhang zwischen Bergman-Kern und dem $\bar{\partial}$-Neumann-Problem. Gerade die Arbeit [Ker72] hat hierzu beigetragen. Zwar war schon längere Zeit die Beziehung $P = I - \bar{\partial}^* N \bar{\partial}$ für die Bergman-Projektion und den $\bar{\partial}$-Neumann-Operator bekannt, doch nutzte Kerzman diese im größeren Maße. Dabei ist insbesondere das in Kapitel 1 angegebene Lemma 1.4 von großer Bedeutung.

Der entscheidende Vorteil von diesem Übergang vom Bergman-Kern zum $\bar{\partial}$-Neumann-Operator ist die Tatsache, dass dann auch viele Techniken der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen benutzt werden können. Für Weiteres siehe z.B. [Kra92].

Tatsächlich scheinen genau diese Techniken zusammen mit gewissen Scaling-Methoden einen guten Ansatz für die Abschätzung des Bergman-Kerns zu liefern. Siehe dazu z.B. die Artikel von Fu-Straube ([FuSt98]), Cho ([Cho96]) und McNeal ([Mc89], [Mc90], [Mc94]). Ähnliches findet sich aber auch schon bei Nagel, Rosay, Stein und Wainger in [NRSW89].

Das Ziel dieses Kapitels ist es, auf Grundlage der McNealschen Arbeit für linear konvexe Gebiete Abschätzungen für den Bergman-Kern und dessen Ableitungen auch außerhalb der Diagonalen für lineal konvexe Gebiete nachzuweisen.

Wir werden im nächsten Abschnitt einleitend den Box- und den Neumann-Operator einführen. Im dritten Abschnitt betrachten wir dann geeignete skalierte Gebiete $\Omega^{q,\varepsilon}$. Wir werden einige Eigenschaften dieser Gebiete untersuchen und dann auf ihnen die nötigen Abschätzungen des Neumann-Operators herleiten. Dabei werden wiederum die holomorphen Stützfunktionen, wie wir sie in Kapitel 3.2 eingeführt haben, aus [DiFo03] bzw. die daraus konstruierten plurisubharmonischen Funktionen (siehe Kapitel 4.2) eine wichtige Rolle spielen. An dieser Stelle weicht unsere Darstellung von der McNealschen ab, da die in [Mc94] konstruierten plurisubharmonischen Funktionen durch die Benutzung weiterer isotroper plurisubharmonischer Funktionen in ihrer Konstruktion nicht die nötigen Eigenschaften besitzen.

Im letzten Abschnitt werden wir dann zunächst die gleichmäßige Abschätzbarkeit von $K_{\Omega^{q,\varepsilon}}$ nach einer passenden Wahl von ε zeigen und dann mittels der Transformationsformel aus Lemma 1.3 die in Theorem 2 behaupteten Abschätzungen für K_Ω erhalten.

Tatsächlich scheinen die Abschätzungen des Bergman-Kerns aus Theorem 2 auch für Lösungen des $\bar{\partial}$-Problems mit Lipschitz- bzw. L^p-Abschätzungen interessant zu sein. Siehe hierzu die auf [Mc94] basierenden Arbeiten von Cumenge [Cu01a] bzw. [Cu01b].

5.2 Das $\bar{\partial}$-Neumann-Problem

In diesem Abschnitt wollen wir die benötigten Notationen und Hilfsmittel für dieses Kapitel einführen. Eine ausführlichere Darstellung findet sich u.a. bei [DiLi81], [Hör65], [Her98], [LiMi02] oder [Kra92].

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Da wir uns nur für diesen Fall interessieren, genügt es für $0 \leq q \leq n$ die $(0,q)$-Formen auf Ω mit quadratintegrierbaren Koeffizienten zu betrachten, die wir wie üblich mit $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ bezeichnen wollen.

Eine solche Form $u \in L^2_{(0,q)}(\Omega)$ ist dann gegeben durch

$$u = {\sum_{I=(i_1,\ldots,i_q)}}' u_I \, d\bar{z}^I \quad d\bar{z}^I = d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_q},$$

wobei wir wie üblich mit $\sum'$ die geordnete Summe über streng monoton wachsende Multiindizes bezeichnen. Ist $v \in L^2_{(0,q)}(\Omega)$ eine weitere $(0,q)$-Form, so erweitern wir das innere Produkt und die Norm des L^2 auf Formen durch

$$\langle u, v\rangle := {\sum_{|I|=q}}' \langle u_I, v_I\rangle_{L^2} \quad \|u\|^2 := \langle u, u\rangle.$$

Mit dem obigen inneren Produkt wird $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ zu einem Hilbertraum.

Des Weiteren bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_{(0,q)}(\Omega) \subset L^2_{(0,q)}(\Omega)$ die $(0,q)$-Formen mit $\mathcal{C}_0^\infty$-Koeffizienten. Es sei ρ eine glatte, definierende Funktion für Ω, dann definieren wir die Kontraktion einer $(0,q)$-Form mit $\partial\rho$ als

$$u \lrcorner \partial\rho := {\sum_{|I|=q-1}}' \left(\sum_{k=1}^{n} u_{kI} \frac{\partial \rho}{\partial z_k} \right) d\bar{z}^I.$$

Für die Kontraktion gilt $u \in \operatorname{dom}(\theta) \iff u \lrcorner \partial\rho = 0$ auf $\partial\Omega$. Dabei bezeichnen wir mit θ den formal adjungierten Operator zu $\bar{\partial}$, wir unterdrücken der besseren Lesbarkeit halber dabei Indizes, welche den Operator genauer charakterisieren. Für $u \in \mathcal{D}_{(0,q)}(\Omega) \subset \operatorname{dom}(\theta)$ gilt $\bar{\partial}^* u = \theta u$, wobei $\bar{\partial}^*$ der zu $\bar{\partial}$ Hilbertraumadjungierte Operator ist.
Ist $q \geq 1$ (auf $q = 0$ wollen wir nicht weiter eingehen) betrachten wir folgende Abbildungen:

$$L^2_{0,q-1}(D) \underset{\bar{\partial}^*}{\overset{\bar{\partial}}{\rightleftarrows}} L^2_{0,q}(D) \underset{\bar{\partial}^*}{\overset{\bar{\partial}}{\rightleftarrows}} L^2_{0,q+1}(D).$$

Dann heißt $\Box := \Box_{0,q} := \bar{\partial}_{0,q-1}\bar{\partial}^*_{0,q} + \bar{\partial}^*_{0,q+1}\bar{\partial}_{0,q}$ der Box- oder Laplace-Beltrami-Operator. D.h. es ist

$$\Box_{0,q} : L^2_{0,q}(D) \to L^2_{0,q}(D)$$

mit

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}(\Box_{0,q}) := \{f \in L^2_{0,q}(D) : f \in \operatorname{Dom}(\bar{\partial}_{0,q}) \cap \operatorname{Dom}(\bar{\partial}^*_{0,q}) \text{ und}\\ \bar{\partial}_{0,q} f \in \operatorname{Dom}(\bar{\partial}^*_{0,q+1}) \text{ und } \bar{\partial}^*_{0,q} f \in \operatorname{Dom}(\bar{\partial}_{0,q-1})\}.\end{aligned}$$

Die Relevanz des Box-Operators ergibt sich aus der Tatsache, dass für glatt berandete $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{D}_{0,q}(\bar{\Omega})$ mit $\bar{\partial} f = 0$ aus $\Box u = f$ für $\hat{u} := \bar{\partial}^* u$ stets $\bar{\partial}\hat{u} = f$ folgt. D.h. es ist möglich, statt einem $\bar{\partial}$-Problem die $\Box$-Gleichung zu lösen. Dass dies angenehmer ist, begründet sich u.a. in der Selbstadjungiertheit von $\Box$.

Diese Überlegungen führen uns nun zum folgenden Randwertproblem – dem $\bar{\partial}$-Neumann-Problem:

$$\begin{cases} \Box u = f & \text{auf } \Omega, \\ u \lrcorner \partial\rho = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \qquad (1) \\ \bar{\partial} u \lrcorner \partial\rho = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \qquad (2) \end{cases}$$

Dabei entspricht (1) der Integrabilitätsbedingung $f \perp \ker(\Box)$ und (2) der Randbedingung $u \in \operatorname{dom}(\Box)$.

Einer der wichtigen Schritte zur Lösung des $\bar{\partial}$-Neumann-Problems ist der Nachweis der Existenz des $\bar{\partial}$-Neumann Operators $N : L^2_{(0,q)}(\Omega) \to \operatorname{dom}(\Box)$ auf pseudokonvexen Gebieten $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$. Dieser ist der relativ inverse Operator von $\Box$, d.h. er löst die Gleichung $\Box u = f$.

Auf einen weiteren wichtigen Zusammenhang wollen wir zuletzt noch hinweisen. Bezeichnet P_q die Projektion von $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ auf den Kern von $\Box$, so gilt

$$P_q = I - \theta N \bar{\partial}.$$

Ist speziell $q = 1$, so ergibt sich hieraus die bekannte Identität für die Bergman-Projektion aus Kapitel 1.1.1.

5.3 $\bar{\partial}$-Neumann Abschätzungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Abschätzungen für den $\bar{\partial}$-Neumann-Operator beweisen. Wir gehen dabei ähnlich wie in [Cho96], [Mc94] bzw. [NRSW89] vor. Wir wollen hierzu Scaling-Methoden benutzen wie sie auch schon z.B. in [Her92a], [Cho96], [Mc89]/[Mc94] oder ursprünglich in [Ca84b] verwendet wurden.

Es sei $\Omega = \{\rho < 0\}$. Es seien weiter $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $\varepsilon > 0$ klein genug. Wir definieren zunächst die Scaling-Abbildung $\phi^{q,\varepsilon}$ als

$$\phi^{q,\varepsilon}(w) := \big(\tau_1(q,\varepsilon)\, w_1, \ldots, \tau_n(q,\varepsilon)\, w_n\big) = (z_1, \ldots, z_n),$$

wobei $(z_1, \ldots, z_n)$ die ε-minimalen Koordinaten bezüglich q und ε sind. Damit definieren wir dann

$$r := r_{q,\varepsilon} := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \rho \circ \phi^{q,\varepsilon},$$

und schließlich $\Omega^{q,\varepsilon} = \{r < 0\}$. Da unser Interesse an den $\Omega^{q,\varepsilon}$ lokal ist, wollen wir kleine, feste Umgebungen des Nullpunkts untersuchen. Sei dazu $c_1 > 0$ die von q und ε unabhängige Konstante aus Lemma 4.2. Wir fixieren dann für den Rest des Kapitels $V := (\phi^{q,\varepsilon})^{-1}\big(c_1 \cdot P_\varepsilon(q)\big)$.

5.1 Lemma
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ glatt, lineal konvex und vom endlichen Typ m. Dann sind für $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $\varepsilon > 0$ klein genug die Mengen $\{w \in V : r(w) < 0\}$ glatt und lineal konvex, unabhängig von q und ε.

Beweis: Die lineale Konvexität der Mengen $\{w \in V : \ r(w) < 0\}$ ergibt sich sofort, da $\phi^{q,\varepsilon}$ eine komplex lineare Abbildung ist.
Für den Nachweis der Glattheit von $\{w \in V : \ r(w) = 0\}$ wollen wir zeigen, dass die Koeffizienten der Taylorentwicklung von r auf V unabhängig von q und ε abschätzbar sind. Um dies einzusehen, betrachten wir die Taylorentwicklung von ρ. Es gilt nämlich, da Ω vom endlichen Typ m ist, dass

$$\rho(z) = \rho(q) + \sum_{1 \le |\alpha|+|\beta| \le m} a_{\alpha,\beta}(q) z^\alpha \bar{z}^\beta + R(z),$$

wobei der Restterm $|R(z)| \lesssim |z|^{m+1}$ erfüllt. Da $\tau_i(q,\varepsilon) \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{m}}$ (gleichmäßig in q und ε) gilt, siehe Proposition 2.5, liefert dies, dass die Glattheit von r nur von den Termen bis zur Ordnung m abhängt.

Außerdem folgt aus Lemma 2.2, da $w \in V$, dass

$$\left| \sum_{1 \le |\alpha+|\beta| \le m} a_{\alpha\beta}(q)\ \tau(q,\varepsilon)^{\alpha+\beta} \right| \lesssim \varepsilon.$$

Also lassen sich die Taylorkoeffizienten von $\rho \circ \phi^{q,\varepsilon}$ nach oben gleichmäßig durch von q unabhängige Terme abschätzen, die einen gemeinsamen Faktor ε haben. Nach Definition lassen sich dann also die Taylorkoeffizienten von $r = \frac{1}{\varepsilon}\, \rho \circ \phi^{q,\varepsilon}$ auf V gleichmäßig abschätzen. $\square$

Ein ähnliches Ergebnis im zweidimensionalen Fall, welches auch das nächste Lemma umfasst, ist [Ca84b, Prop. 5.2].

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass nur durch die Voraussetzung der linealen Konvexität von Ω und der Benutzung ε-minimaler Koordinaten wir dieses Ergebnis erhalten. Das Beispiel $\Omega = \{\rho_M < 0\} \subset \mathbb{C}^3$ mit

$$\rho_M(z) = 2\mathrm{Re}(z_3) + |z_1 z_2|^2 + |z_1|^6 + |z_2|^6$$

findet sich bei [Mc94] und zeigt, dass nach Skalierung im Allgemeinen die Taylorkoeffizienten nicht beschränkt sein müssen.

Wir wollen nun zeigen, dass $\{w \in V :\ r(w) = 0\}$ vom endlichen Typ ist, unabhängig von q und ε. Die Beweisführung ist ähnlich der von Theorem I in [Co02]. Ist nämlich $p \in \partial\Omega$ ein Randpunkt, so ist p nach [Ca87] ein Punkt endlichen Typs, falls gewisse plurisubharmonische Funktionen existieren, deren Leviform guten Abschätzungen genügt.
Tatsächlich ließen sich auch die von Conrad in [Co02, Lemma 5.4] konstruierten plurisubharmonischen Funktionen für unsere Zwecke hier benutzen, wir wollen aber auf die Stützfunktionen bzw. die daraus in Lemma 4.2 konstruierten Funktionen zurückgreifen. Darüber hinaus lässt sich dieses Resultat auch vollkommen analog zu [Mc03, Proposition 5] nachweisen.

5.2 Lemma
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ glatt, lineal konvex und vom endlichen Typ m. Ist $q \in \Omega$ nahe genug am Rand und $\varepsilon > 0$ klein genug, so sind die Mengen $\{w \in V : r(w) = 0\}$ ebenfalls vom endlichen Typ gleichmäßig in q und ε.

Beweis: Es gilt nach [Ca87]:

Es sei p ein Randpunkt des pseudokonvexen Gebietes Ω und $U = U(p)$ eine kleine Umgebung von p. Gibt es dann für $\delta > 0$ genügend klein eine Funktion $\lambda_\delta \in \mathcal{C}^2(U) \cap PSH(U)$, so dass

1. $|\lambda_\delta| \leq 1$ auf U,
2. auf dem Streifen $S_\delta := \{z \in \Omega \cap U :\ -\delta < r \leq 0\}$ ist
$$\mathcal{L}_{\lambda_\delta}(z, X) \gtrsim \delta^{-\frac{2}{m}} \|X\|^2.$$

Dann gilt eine subelliptische Abschätzung der Ordnung m nahe p. Damit ist aber dann Ω nahe p vom endlichen Typ m.

Sei also $\delta > 0$ klein genug vorgegeben. Wir gehen nun wie in [Mc94] bzw. [Mc03] vor. Wir wählen nun die ε-minimalen Koordinaten $(z_1^{q,\delta\varepsilon}, \ldots, z_n^{q,\delta\varepsilon})$ bezüglich q und $\delta\varepsilon$. Des Weiteren sei $\phi^{q,\varepsilon} = \phi^{q,\delta\varepsilon,\varepsilon}$ die zugehörige Transformation, mit Skalierungsfaktoren $\tau_1(q,\varepsilon), \ldots, \tau_n(q,\varepsilon)$. Es sei weiter $\varphi_{q,\delta\varepsilon}$ die plurisubharmonische Funktion aus Lemma 4.2. Dann folgt für $\phi^{q,\varepsilon}(w) \in c_1 \cdot P_{\delta\varepsilon}(q)$, dass

$$\mathcal{L}_{\varphi_{q,\delta\varepsilon}\circ\phi^{q,\varepsilon}}(w,X) \gtrsim \sum_{j=1}^{n} \frac{|\tau_j(q,\varepsilon)\, X_j|^2}{\tau_j(q,\delta\varepsilon)^2}.$$

Nach Proposition 2.5 ist aber $\frac{\tau_j(q,\varepsilon)}{\tau_j(q,\delta\varepsilon)} \gtrsim \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}$, und somit gilt

$$\mathcal{L}_{\varphi_{q,\delta\varepsilon}\circ\phi^{q,\varepsilon}}(w,X) \gtrsim \delta^{-\frac{2}{m}} \|X\|^2 \quad \text{für } \phi^{q,\varepsilon}(w) \in c_1 \cdot P_{\delta\varepsilon}(q).$$

Es sei bemerkt, dass nach Konstruktion von $\varphi_{q,\delta\varepsilon}$ gilt

$$\operatorname{supp}\{\varphi_{q,\delta\varepsilon} \circ \phi^{q,\varepsilon}\} \subset c_0 \cdot P_{\delta\varepsilon}(q).$$

Unser Ziel ist es analog wie in [Co02] vorzugehen: Auf Grund der Kompaktheit des Abschlusses des δ-Streifens $S_\delta := \{w \in V : -\delta < r = r_{q,\varepsilon} < 0\}$ gibt es $N = N(\delta)$ Punkte $Q_1, \ldots, Q_N \in S_\delta$, so dass für die Polyzylinder

$$P^{q,\delta\varepsilon} := (\phi^{q,\varepsilon})^{-1}\big(c_1 \cdot P_{\delta\varepsilon}(q)\big) = \left\{ w : |w_j| < c_1 \frac{\tau_j(q,\delta\varepsilon)}{\tau_j(q,\varepsilon)} \right\}$$

dann gilt

$$S_\delta \cap V \subset \bigcup_{j=1}^{N} P^{Q_j,\delta\varepsilon}.$$

Dabei können wir die Punkte $Q_1, \ldots, Q_N$ derart wählen, dass

$$Q_k \notin \bigcup_{j=1}^{k-1} P^{Q_j,\delta\varepsilon} \quad \text{für } k = 1, \ldots, M$$

gilt. Nach Definition von V gilt $\tau_j(Q_k,\varepsilon) \approx \tau_j(q,\varepsilon)$, also haben nach Konstruktion die $P^{Q_j,\delta\varepsilon}$ ebenfalls die Eigenschaften 4. und 6. aus Proposition 2.5. Zeigen wir, dass damit folgt, dass die Anzahl der $P^{Q_j,\delta\varepsilon}$, welche ein weiteres $P^{Q_k,\delta\varepsilon}$ schneiden, unabhängig von q, ε und δ ist, so ergibt sich die oben gesuchte plurisubharmonische Funktion λ durch Aufsummieren der $\varphi_{Q_k,\delta\varepsilon} \circ \phi^{q,\varepsilon}$.

5.3 Lemma
Es sei $I := \{1, \ldots, N(\delta)\}$. Dann gibt es eine obere Schranke M, die nicht von δ abhängt, so dass für alle Q_j, $j = 1, \ldots, N$ die Menge

$$\Sigma_{Q_j}^{\delta} := \{i \in I : \; P^{Q_j,\delta\varepsilon} \cap P^{Q_i,\delta\varepsilon} \neq \emptyset\}$$

höchstens M Elemente besitzt.

Beweis: Da die $P^{Q_j,\delta\varepsilon}$ ebenfalls die Eigenschaften 4. und 6. aus Proposition 2.5 erfüllen, ist der Beweis vollkommen analog zu [Co02, Lemma 6.1] bzw. der entsprechenden Behauptung im konvexen Fall. □

Damit setzen wir nun

$$\lambda_{q,\delta\varepsilon}(w) := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N(\delta)} \varphi_{Q_j,\delta\varepsilon} \circ \phi^{q,\varepsilon}(w)$$

und erhalten eine glatte, plurisubharmonische Funktion mit

1. $0 \leq \lambda_{q,\delta,\varepsilon}(w) \leq 1$,
2. $\mathcal{L}_{\lambda_{q,\delta\varepsilon}}(w, X) \gtrsim \delta^{-\frac{2}{m}}\|X\|^2$, $w \in S_\delta$, $X \in \mathbb{C}^n$.

Damit folgt aber nach [Ca87], die Endlichkeit des Typs und dieser ist unabhängig von q und ε. □

Mittels Standardtechniken (siehe z.B. [DiLi81], [DiHe94] oder [Di04]) erhält man das folgende Korollar.

5.4 Korollar

Es sei N^ε der zu $\Omega^{q,\varepsilon}$ zugehörige $\bar\partial$-Neumann-Operator. Sind dann $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$ mit $\zeta_2 \equiv 1$ auf $\operatorname{supp}(\zeta_1)$, dann gilt für $s \geq 0$

$$\|\zeta_1 N^\varepsilon g\|^2_{s+\frac{2}{m}} \lesssim \|\zeta_2 g\|_s^2 + \|\zeta_2 N^\varepsilon g\|^2, \quad g \in C^\infty_{(0,1)}(V \cap \bar\Omega).$$

Neben diesen Abschätzungen für den Neumannoperator, benötigen wir noch ein weiteres Hilfsmittel. Dieses werden wir für die Abschätzung der Bergman-Projektion benutzen.

5.5 Lemma

Sei N^ε der zu $\Omega^{q,\varepsilon}$ zugehörige $\bar\partial$-Neumann-Operator. Sei $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$ mit $\zeta \leq 1$, ist dann $h \in L^2_{0,1}(\Omega^{q,\varepsilon})$ und $\operatorname{supp}(h) \subset V$, so gilt mit einer von q und ε unabhängigen Konstanten

$$\int_{\Omega^{q,\varepsilon}} \zeta |N^\varepsilon h|^2 \lesssim \|h\|^2.$$

Beweis: Wir benutzen wie auch [Mc94] und [Cho96] die Ungleichung (2.3) aus [Ca84a], die z.B. aus der Kohn-Morrey-Gleichung folgt:

Ist $\mu \in \mathcal{C}^2(\bar\Omega)$ und $0 \leq \mu \leq 1$, so gilt schon

$$(5.1) \qquad \int_\Omega \sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial^2 \mu}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} f_k \bar f_\ell \, dV \leq 16 Q(f,f) = 16(\|\bar\partial f\|^2 + \|\bar\partial^* f\|^2)$$

für $f \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\bar\Omega)$, falls $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ glatt und pseudokonvex ist.

Wir setzen jetzt speziell $\mu(w) := \varphi_{q,\varepsilon} \circ \phi^{q,\varepsilon}(w)$ und erhalten so aus (5.1) mit den zuvor gezeigten Abschätzungen für μ, dass

$$\int_{\Omega^{q,\varepsilon}} \zeta |f|^2 \lesssim Q^\varepsilon(f,f) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\bar{\Omega}^{q,\varepsilon}), \tag{5.2}$$

wobei wir mit Q^ε die Dirichlet-Form auf $\Omega^{q,\varepsilon}$ bezeichnen. Mit den üblichen Techniken erhält man, da N^ε invers zu $\Box^\varepsilon$ ist, für $h \in L^2(\Omega^{q,\varepsilon})$ mit $\mathrm{supp}(h) \subset V$, dass

$$\begin{aligned} \|\bar\partial N^\varepsilon h\|^2 + \|\bar\partial^* N^\varepsilon h\|^2 &= \langle N^\varepsilon h, h\rangle = \langle N^\varepsilon h, h\rangle_V \\ &\le \|N^\varepsilon h\|_V \ \|h\|. \end{aligned}$$

Quadrieren wir nun beide Seiten und nutzen (5.2) mit $f := N^\varepsilon h$, so erhalten wir

$$(\|\bar\partial N^\varepsilon h\|^2 + \|\bar\partial^* N^\varepsilon h\|^2)^2 \lesssim (\|\bar\partial N^\varepsilon h\|^2 + \|\bar\partial^* N^\varepsilon h\|^2)\ \|h\|^2.$$

Nach Kürzen des gemeinsamen Faktor erhalten wir wiederum mit (5.2)

$$\int_{\Omega^{q,\varepsilon}} \zeta |N^\varepsilon h|^2 \lesssim \|\bar\partial N^\varepsilon h\|^2 + \|\bar\partial^* N^\varepsilon h\|^2 \lesssim \|h\|^2,$$

also die Behauptung. $\square$

Bei der Abschätzung des Bergman-Kerns werden wir zwei Fälle unterscheiden. Zunächst nehmen wir an, dass die Bilder der später betrachteten Punkte in zwei disjunkten Kompakta liegen. Wir werden dazu zunächst Abschätzungen für die Bergman-Projektion auf $\Omega^{q,\varepsilon}$ herleiten. Dies entspricht dann der Situation im folgenden Lemma.

5.6 Lemma
Seien K_1, $K_2 \subset V$ disjunkte Kompakta. Es sei $\psi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(K_1 \cap \Omega^{q,\varepsilon})$ und $\psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(K_2 \cap \Omega^{q,\varepsilon})$, ψ_1, $\psi_2 \le 1$, sowie $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s, t \ge 0$. Es bezeichne P^ε die zu $\Omega^{q,\varepsilon}$ gehörige Bergman-Projektion, dann gilt mit einer von q und ε unabhängigen Konstanten

$$\|\psi_2 P^\varepsilon \psi_1\|_s^2 \lesssim \|\psi_1\|_{-t}^2.$$

Beweis: Wir wählen Abschneidefunktionen ξ_1, $\xi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(K_1 \cap \Omega_{q,\varepsilon})$, sowie λ_1, $\lambda_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(K_2 \cap \Omega_{q,\varepsilon})$ mit $\xi_1 = 1$ auf $\mathrm{supp}(\psi_1)$, $\lambda_1 = 1$ auf $\mathrm{supp}(\psi_2)$ und $\xi_2 = 1$ auf $\mathrm{supp}(\xi_1)$ bzw. $\lambda_2 = 1$ auf $\mathrm{supp}(\lambda_1)$ und $\lambda_j, \chi_j \le 1$. Da ψ_1 und

ψ_2 nach Voraussetzung einen disjunkten Träger haben, ergibt sich aus der Beziehung $P^\varepsilon = I - \bar\partial^* N^\varepsilon \bar\partial$, dass

$$\begin{aligned}\psi_2 P^\varepsilon \psi_1 &= -\psi_2 \bar\partial^* N^\varepsilon \bar\partial \psi_1 \\ &= -\psi_2 \bar\partial^* \lambda_1 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1,\end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Gleichung ausgenutzt haben, dass λ_1 und $\bar\partial^*$ nach Definition von λ_1 auf dem Träger von ψ_2 kommutieren. Dementsprechend erhalten wir dann mit Korollar 5.4

$$\begin{aligned}\|\psi_2 P^\varepsilon \psi_1\|_s^2 &= \|\psi_2 \bar\partial^* \lambda_1 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1\|_s^2 \\ &\leq \|\lambda_1 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1\|_{s+1}^2 \\ &\lesssim \|\lambda_2 \bar\partial \psi_1\|_{s+1-\frac{2}{m}}^2 + \|\lambda_2 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1\|^2 \\ &= \|\lambda_2 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1\|^2,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Disjunktheit der Träger von ψ_1 und λ_2 folgt. Um nun diesen Ausdruck weiter abzuschätzen, bedienen wir uns der Selbstdualität von W^0, ist nämlich $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,1)}(\bar\Omega^{q,\varepsilon})$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}|\langle \lambda_2 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1, f\rangle|^2 &= |\langle \bar\partial \psi_1, \xi_1 N^\varepsilon \lambda_2 f\rangle|^2 \\ &\leq \|\bar\partial \psi_1^2\|_{-t-1}^2 \; \|\xi_1 N^\varepsilon \lambda_2 f\|_{t+1}^2 \\ &\lesssim \|\bar\partial \psi_1^2\|_{-t-1}^2 \; (\|\xi_2 \lambda_2 \psi_1\|_{t+1-\frac{2}{m}}^2 + \|\xi_2 N^\varepsilon \lambda_2 f\|^2) \quad \text{Korollar 5.4} \\ &\lesssim \|\bar\partial \psi_1\|_{-t-1}^2 \; \|\lambda_2 f\|^2,\end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung Lemma 5.5 und die Disjunktheit der Träger von λ_2 und ψ_1 benutzt wurden. Nach Supremumsbildung über alle $\|f\| \leq 1$ folgt

$$\|\lambda_2 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1\|^2 \lesssim \|\bar\partial \psi_1\|_{-t-1}^2 \leq \|\psi_1\|_{-t}^2.$$

Also folgt insgesamt

$$\|\psi_2 P^\varepsilon \psi_1\|_s^2 \lesssim \|\lambda_2 N^\varepsilon \bar\partial \psi_1\|^2 \lesssim \|\psi_1\|_{-t}^2,$$

d.h. die Behauptung. □

Für den zweiten Fall, den wir später untersuchen wollen, müssen wir noch die Bergman-Projektion untersuchen, wenn wir lediglich ein Kompaktum zu Grunde legen.

5.7 Lemma
Sei $K \subset\subset V$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(K \cap \Omega^{q,\varepsilon})$, $\psi_1, \psi_2 \leq 1$. Ist dann $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ und P^ε die zu $\Omega^{q,\varepsilon}$ gehörige Bergman-Projektion, so gilt mit einer von q und ε unabhängigen Konstanten

$$\|\psi_2 P^\varepsilon \psi_1\|_s^2 \lesssim \|\psi_1\|_{s+2-\frac{2}{m}}^2.$$

Beweis: Wir wählen Abschneidefunktionen ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \in \mathcal{C}_0^\infty(K \cap \Omega^{q,\varepsilon})$ mit $\xi_1 = 1$ auf $\mathrm{supp}(\psi_2)$ und $\xi_{i+1} = 1$ auf $\mathrm{supp}(\xi_i)$. Wiederum gilt wegen $P^\varepsilon = I - \bar{\partial}^* N^\varepsilon \bar{\partial}$, dass

$$\psi_2 P^\varepsilon \psi_1 = \psi_2 \psi_1 - \psi_2 \bar{\partial}^* \xi_1 N^\varepsilon \bar{\partial} \psi_1.$$

Aus Korollar 5.4 folgt wiederum

$$\begin{aligned}
\|\psi_2 P^\varepsilon \psi_1\|_s^2 &\leq \|\psi_2\psi_1\|_s^2 + \|\psi_2 \bar{\partial}^* N^\varepsilon \bar{\partial} \psi_1\|_s^2 \\
&\leq \|\psi_2\psi_1\|_s^2 + \|N^\varepsilon \bar{\partial} \psi_1\|_{s+1}^2 \\
&\lesssim \|\psi_2\psi_1\|_s^2 + (\|\xi_2 \bar{\partial} \xi_3 \psi_1\|_{s+1-\frac{2}{m}}^2 + \|\xi_2 N^\varepsilon \bar{\partial} \psi_1\|^2) \\
&\lesssim \|\xi_3 \psi_1\|_{s+2-\frac{2}{m}}^2 + \|\xi_2 N^\varepsilon \bar{\partial} \psi_1\|^2.
\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Abschätzung, da $m \geq 2$ und somit $s + 2 - \frac{2}{m} > s$ gilt. Durch Lemma 5.5 erhalten wir weiter

$$\|\xi_2 N^\varepsilon \bar{\partial} \psi_1\|^2 \lesssim \|\bar{\partial} \psi_1\|^2 \leq \|\psi_1\|_1^2,$$

und somit wegen $1 \leq s + 1 \leq s + 2 - \frac{2}{m}$ die Behauptung. $\square$

5.4 Asymptotik des Bergman-Kerns

Wir kommen nun zum Beweis des Theorem 2. Dabei wollen wir, wie zuvor bemerkt, die vorherigen Abschätzungen für den Neumann-Operator benutzen.

Theorem 2 *Sei $\Omega = \{\rho < 0\} \subset\subset \mathbb{C}^n$ eine glattes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ m. Es sei $p \in \partial\Omega$, dann gibt es eine Umgebung U von p, so dass für alle Multiindizes α, β eine Konstante $C = C(\alpha, \beta, n, m) > 0$ existiert, für welche die folgende Abschätzung*

$$|D^\alpha \bar{D}^\beta K_\Omega(q_1, q_2)| \le C \cdot \frac{1}{\tau^{\alpha+\beta+2}(q_1, \varepsilon)}$$

für alle q_1, $q_2 \in U \cap \Omega$ mit $\varepsilon = |\rho(q_1)| + |\rho(q_2)| + d(q_1, q_2)$ erfüllt ist.

Beweis: Wir folgen McNeal [Mc94] in seiner Beweisführung. Es sei $P^n(0,1)$ der Einheitspolyzylinder im $\mathbb{C}^n$ und $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(P^n(0,1))$ mit $\int \psi = 1$, $\psi \ge 0$, ψ polyradial. Für $\gamma > 0$ klein genug transformieren wir ψ zu

$$\psi_w(z) := \frac{1}{\tau^{2e}(q_1, \gamma)} \cdot \psi\left(\frac{z_1 - w_1}{\tau_1(q_1, \gamma)}, \dots, \frac{z_n - w_n}{\tau_n(q_1, \gamma)}\right),$$

wobei wir $e := (1, \dots, 1)$ setzen. Des Weiteren betrachten wir $\Omega^{q_1,\varepsilon}$, eines der zuvor untersuchten skalierten Gebiete, und leiten Abschätzungen für den Bergman-Kern auf $\Omega^{q_1,\varepsilon}$ her.

Durch Verkleinern von γ können wir erreichen, dass zunächst

$$\operatorname{supp}(\psi_w) \subset\subset \Omega^{q_1,\varepsilon}$$

gilt. Es sei nun $K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}$ der zu $\Omega^{q_1,\varepsilon}$ assoziierte Bergman-Kern. Es bezeichne weiter $P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}$ die zu $\Omega^{q_1,\varepsilon}$ gehörige Bergman-Projektion. Mittels Standardtechniken erhalten wir nun (siehe Lemma 1.4)

$$P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}} \psi_w(z) = \int K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(z, \zeta) \psi_w(\zeta)\, d\lambda(\zeta) = K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(z, w). \tag{5.3}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} D_w^\beta K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(z, w) &= D_w^\beta \big(P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}} \psi_w(z)\big) \\ &= P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}} (D_w^\beta \psi_w)(z), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit durch Vertauschen von Integration und Differenziation wegen der kompakten Konvergenz des Integrals folgt. Also ergibt sich insgesamt

$$D_z^\alpha D_w^\beta K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(z,w) = D_z^\alpha [P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(D_w^\beta \psi_w)(z)]. \tag{5.4}$$

Wir wollen zunächst zwei Fälle unterscheiden.

Seien K_1, K_2 zwei disjunkte Kompakta mit $z \in K_1$, $w \in K_2$. Es sei weiter $\eta_1,\, \eta_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(K_1 \cap \Omega_{q_1,\varepsilon})$, mit $\eta_2 = 1$ auf $\operatorname{supp}(\eta_1)$ und $\eta_1 = 1$ auf $\operatorname{supp}(\psi_w)$, $\eta_1,\, \eta_2 \leq 1$. Damit erhalten wir für $t > 0$, dass

$$\begin{aligned}
\left| D_z^\alpha [P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(D_w^\beta \psi_w)(z)] \right|^2 &\leq \sup \left| \eta_1 \cdot D_z^\alpha \eta_2 \cdot [P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(D_w^\beta \psi_w)(z)] \right|^2 \\
&\lesssim \left\| \eta_2 \cdot [P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(D_w^\beta \psi_w)] \right\|^2_{|\alpha|+n+1} \\
&\lesssim \left\| D_w^\beta \psi_w \right\|^2_{-t-|\beta|} \\
&\lesssim \left\| \psi_w \right\|^2_{-t},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei die Umformung von der ersten zur zweiten Zeile aus dem Sobolev-Lemma und der Definition des Sobolev-Norm folgt. Bei der Abschätzung zu Gleichung (5.5) wurde Lemma 5.6 benutzt. Wiederum durch Anwenden des Sobolev-Lemmas für $t > n$ erhalten wir

$$\left\| \psi_w \right\|^2_{-t} \lesssim \left| \int \psi_w \right| = 1.$$

Also ergibt sich in diesem Fall mit einer von q_1 und ε unabhängigen Konstanten

$$|D_z^\alpha D_w^\beta K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(z,w)| \lesssim 1. \tag{5.6}$$

Sei andererseits $z,\, w \in \hat{K}$ mit $\hat{K} \subset\subset \Omega^{q_1,\varepsilon}$, wobei $\hat{K}$ unabhängig von ε sei. Es seien $\eta_1,\, \eta_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\hat{K} \cap \Omega^{q_1,\varepsilon})$, mit $\eta_1 = 1$ auf $\operatorname{supp}(\psi_w)$ und $\eta_2 = 1$ auf $\operatorname{supp}(\eta_1)$, $\eta_1,\, \eta_2 \leq 1$. Dann ergibt sich wie zuvor

$$\begin{aligned}
|D_z^\alpha D_w^\beta K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(z,w)| &= |D_z^\alpha [P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(D_w^\beta \psi_w)(z)]|^2 \\
&\leq \sup \left| \eta_1 \cdot D_z^\alpha \eta_2 \cdot [P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(D_w^\beta \psi_w)(z)] \right|^2 \\
&\lesssim \left\| \eta_2 \cdot [P_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(D_w^\beta \psi_w)] \right\|^2_{|\alpha|+n+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \left\| D_w^\beta \psi_w \right\|^2_{|(\alpha|+n+1)+2-\frac{2}{m}} &(5.7)\\
&\lesssim \left\| \psi_w \right\|^2_{|\alpha|+|\beta|+n+3-\frac{2}{m}}.
\end{aligned}
$$

Wobei Gleichung (5.7) aus Lemma 5.7 folgt. Da $\hat{K} \subset\subset \Omega^{q_1,\varepsilon}$ kompakt ist, können wir γ klein genug und unabhängig von ε wählen. Damit erhalten wir, dass $\operatorname{diam}\bigl(\operatorname{supp}(\psi_w)\bigr) \geq c$ mit einer von ε unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt, und somit

$$\|\psi_w\|_s \lesssim 1,$$

wobei die Konstante nur von s – und damit in unserem Fall nur von n, m, α und β – aber nicht von q_1 und ε abhängt, also erhalten wir auch in diesem Fall Gleichung (5.6), d.h. mit einer von q_1 und ε unabhängigen Konstanten

$$|D_z^\alpha D_w^\beta K_{\Omega^{q_1,\varepsilon}}(z,w)| \lesssim 1.$$

Nun bleibt noch zu überprüfen, ob die Bilder von q_1, q_2 unter $(\phi^{q,\varepsilon})^{-1}$ unabhängig von ε und q_1 von der Randdiagonalen – d.h. von der Menge $\{(z,z) : z \in \partial\Omega^{q_1,\varepsilon}\}$ – entfernt sind, wenn wir speziell

$$\varepsilon := |r(q_1)| + |r(q_2)| + d(q_1, q_2)$$

setzen. In diesem Fall sind dann, wie wir gleich zeigen, die Bilder von q_1 und q_2 unter $(\phi^{q,\varepsilon})^{-1}$ in disjunkten Kompakta oder in einem Kompaktum enthalten, das unabhängig von ε ist. D.h. haben wir das gezeigt, so folgt (5.6) in allen Fällen mit $z = q^1$ und $w = q^2$, also mit der Transformationsformel für den Bergman-Kern die Behauptung.

Wir erinnern uns zunächst daran, dass wir mit ρ eine definierende Funktion für Ω und mit $r := r_{q_1,\varepsilon} := \frac{1}{\varepsilon}\rho \circ \phi^{q_1,\varepsilon}$ eine definierende Funktion für $\Omega^{q_1,\varepsilon}$ bezeichnen. Sei also $\widetilde{q}_1 := (\phi^{q_1,\varepsilon})^{-1}(q_1)$, $\widetilde{q}_2 := (\phi^{q_1,\varepsilon})^{-1}(q_2)$.

1. $|\widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_2| \geq \tilde{c}$ für ein unabhängiges $\tilde{c}$, so folgt sofort (5.6).

2. $|\widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_2| < \tilde{c}$. Es ist

$$
\begin{aligned}
&& \varepsilon &= |\rho(q_1)| + |\rho(q_2)| + d(q_1, q_2)\\
&& &= |\rho\bigl(\phi^{q_1,\varepsilon}(\widetilde{q}_1)\bigr)| + |\rho\bigl(\phi^{q_1,\varepsilon}(\widetilde{q}_2)\bigr)| + d(q_1, q_2)\\
&\Longrightarrow & 1 &= |r\bigl(\widetilde{q}_1\bigr)| + |r(\widetilde{q}_2)| + \tfrac{1}{\varepsilon}\, d(q_1, q_2)\\
&\Longrightarrow & 1 &\leq |r\bigl(\widetilde{q}_1\bigr)| + |r(\widetilde{q}_2)| + d(\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2).
\end{aligned}
$$

Wegen $|\widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_2| < \tilde{c}$ folgt $d(\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2) < \tilde{c}$ und damit

$$|r(\widetilde{q}_1)| + |r(\widetilde{q}_2)| \geq \frac{1}{2}.$$

Es folgt, dass in diesem Fall $|r(\widetilde{q}_1)| \geq \frac{1}{4}$ oder $|r(\widetilde{q}_2)| \geq \frac{1}{4}$ gilt. War $\tilde{c}$ klein genug, so ist die Kugel um $\widetilde{q}_1$ bzw. $\widetilde{q}_2$ mit Radius $\tilde{c}$ in $\Omega_{q_1,\varepsilon}$ enthalten und es folgt wiederum (5.6).

Die Behauptung des Theorems folgt nun aus der Transformationsformel

$$K_\Omega(z,w) = \det(\phi')(z) \cdot K_{\phi(\Omega)}(\phi(z), \phi(w)) \cdot \overline{\det(\phi')}(w)$$

durch Anwenden der Kettenregel. □

5.8 Bemerkung

1. *Tatsächlich haben wir somit alle Ableitungen von K_Ω abgeschätzt. Es genügte nämlich, $D^\alpha \bar{D}^\beta$ zu betrachten, da $\bar{D}_z^\alpha D_w^\beta K_\Omega(z,w) = 0$ gilt, siehe Kapitel 1.1.1.*

2. *Man beachte, dass Theorem 2 die gleiche Abschätzung wie Lemma 4.6 gibt, d.h. mit der unteren Abschätzung für K_Ω aus Lemma 4.7 übereinstimmt.*

3. *Wir untersuchen an dieser Stelle keine unteren Abschätzungen für Ableitungen des Bergman-Kerns $D^\alpha \bar{D}^\beta K_\Omega$, da dies im Allgemeinen ein Problem vom Schwierigkeitsgrad des Lu Qi-Keng-Problems ist (siehe Bemerkung 1.2).*

KAPITEL VI

Abschätzungen der invarianten Metriken in euklidischen Koordinaten

6.1 Einleitung

Die in den letzten Kapiteln hergeleiteten Abschätzungen beruhen auf den Richtungsabständen $\tau(q, X, |r(q)|)$. Damit waren optimale anisotrope Abschätzungen möglich, doch ist es auch interessant, das Randverhalten der invarianten Metriken in Termen der Randdistanz des betrachteten Punktes $q \in \Omega$ zu charakterisieren. Dies wird in verschiedenen Anwendungen benötigt, siehe beispielsweise [DiFo79].

Es sei bemerkt, dass dies im Allgemeinen nicht möglich sein muss. So fand Herbort in [Her83a] ein Beispiel, in dem der Bergman-Kern nicht in polynomialen Ausdrücken des Randabstands abschätzbar ist.

Ist q nahe genug am Rand, so ist $|r(q)| \approx \operatorname{dist}(q, \partial\Omega)$; somit können wir die Abschätzungen in Termen von $|r(q)|$ formulieren.

Im linear konvexen Fall gelang es Hefer in [Hef02] und [Hef04] basierend auf den Ergebnissen von Yu in [Yu92] die ε-minimalen Abstände $\tau_k(q, \varepsilon)$ durch $\tau(q, X_k, \varepsilon)$ abzuschätzen, wobei X_k nach passender Anordnung ein Basisvektor einer Multitypbasis (siehe [Yu92]) ist.

Hierbei ging jedoch stark ein, dass linear konvexe Gebiete konvexe definierende Funktionen besitzen und diese das sogenannte Bruna-Nagel-Wainger Lemma [BNW88] erfüllen.

Ist nun $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ lineal konvex und vom endlichen Typ, so stehen im Allgemeinen diese Hilfsmittel aber nicht zur Verfügung, wir wollen aber dennoch zeigen, dass sich die invarianten Metriken gut abschätzen lassen.

6.2 Eine untere Abschätzung

Sei also $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ. Wir fixieren zunächst einen Randpunkt $p_0 \in \partial\Omega$ und wählen einen komplex linearen Koordinatenwechsel, welcher p_0 in den Ursprung und die Normale in die positive $\mathrm{Re}(z_1)$-Achse überführt.

Ein wichtiger Schritt bei unseren Abschätzungen ist, dass der betrachtete Punkt $q \in \Omega$ sich nicht zu tangential dem Randpunkt $0 \in \partial\Omega$ nähert. Dies wird normalerweise dadurch verhindert, dass q innerhalb eines Kegels ist, dessen Spitze in 0 liegt und dessen Achse die positive $\mathrm{Re}(z_1)$-Achse ist.

Wir wollen jedoch sogar sogenannte admissible domains $\Lambda_\alpha(0)$ in 0 betrachten, die diese Kegel verallgemeinern. Um diese einzuführen, bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\partial\Omega, 0) = (1, m_2 \ldots, m_n)$ den Catlinschen Multityp von $\partial\Omega$ in 0 (siehe Abschnitt 1.2.2).
Die Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$ seien so gewählt, dass sie den Multityp $\mathcal{M}(\partial\Omega, 0) = (1, m_2, \ldots, m_n)$ im Punkt $0 \in \partial\Omega$ realisieren. Dann wissen wir aus [DiHe94], dass es eine definierende Funktion r von Ω gibt, so dass

$$r(z) = \mathrm{Re}(z_1) + P(z') + R_1(z') + \big(\mathrm{Im}(z_1)\big)R_2(z') + R_3(z) \tag{6.1}$$

für alle z aus einer genügend kleinen Umgebung der Null.

Wir setzen

$$\sigma(z') := \sum_{j=2}^{n} |z_j|^{m_j}.$$

Damit definieren wir nun für $\alpha > 0$

$$\Lambda_\alpha(0) := \{z \in \Omega : \ |z_1| + \sigma(z') < \alpha \cdot |r(z)|\}.$$

Wir wollen im Folgenden mit den Methoden aus [DiHe94] eine untere Abschätzung für der Bergman-Metrik innerhalb der obigen admissible domains herleiten. Genauer zeigen wir den folgenden Satz.

6.1 Satz
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ m. Es sei $0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt, $\Lambda_\alpha(0)$ ein admissible Domain für $\alpha > 0$

und $\mathcal{M}(\partial\Omega, 0) = (1, m_2 \dots, m_n)$ der Catlinsche Multityp von $\partial\Omega$ in 0. Dann gibt es ein $\alpha_0 = \alpha_0(\Omega) > 1$, so dass mit einer Konstante, die nur von n, Ω und α abhängt, für $0 < \alpha < \alpha_0$

$$F_\Omega(z, X) \gtrsim \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{|r(z)|^{\frac{1}{m_j}}}$$

für alle $z \in \Lambda_\alpha(0)$ und $X \in \mathbb{C}^n$ gilt. Dabei bezeichnen wir mit F_Ω eine der drei invarianten Metriken auf Ω. Darüber hinaus sind die X_j die Komponenten von X bezüglich der oben definierten Multityp-Basis.

Beweis: Wir wissen aus [Co02], dass lineal konvexe Gebiete insbesondere semiregulär sind. Wir wollen wie oben davon ausgehen, dass die Normale in die positive $\mathrm{Re}(z_1)$-Achse überführt wurde.
Wir verwenden die in (6.1) eingeführte definierende Funktion

$$r(z) = \mathrm{Re}(z_1) + P(z') + R_1(z') + \big(\mathrm{Im}(z_1)\big) R_2(z') + R_3(z),$$

wobei

1. $|P(z')| \leq \sigma(z')$,
2. $|R_1(z')| \leq C \cdot \sigma(z')^{1+\delta}$,
3. $|R_2(z')| \leq C \cdot |z'|$,
4. $|R_3(z)| \leq C \cdot (\mathrm{Im}(z_1))^2$

für alle z aus einer genügend kleinen Umgebung der Null gilt. Darüber hinaus ist P ein Polynom ohne pluriharmonische Terme, das homogen vom Grad 1 bzgl. $(m_2, \dots, m_n)$ ist, d.h. es gilt für $t > 0$, dass

$$t \cdot P(z') = P\left(t^{\frac{1}{m_2}} z_2, \dots, t^{\frac{1}{m_n}} z_n\right).$$

Nach [DiHe94] gibt es ein $\delta > 0$, so dass sogar

$$|R_2(z')| \leq \sigma(z')^{\frac{1}{2}+\delta}$$

gilt.

Für $M > 0$ setzen wir nun

$$r'(z) = (1 + Mx_1) r(z).$$

Damit erhalten wir mit einer analogen Rechnung auf $\Omega \cap B(0, r_1)$ wie in [DiHe94] für $r_1 > 0$ klein genug mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$, dass

$$\begin{aligned}
r'(z) &= (1 + Mx_1)\big(x_1 + P(z') + R_1(z') + y_1 R_2(z') + R_3(z)\big) \\
&= x_1 + M(x_1^2 - y_1^2) + P(z') + R_1(z') \\
&\quad + (1 + Mx_1)\big(y_1 R_2(z') + R_3(z)\big) + Mx_1\big(P(z') + R_1(z')\big) + My_1^2 \\
&\geq x_1 + M(x_1^2 - y_1^2) + P(z') \\
&\quad - C\sigma(z')^{1+\delta} - (1 + Mr_1)(|y_1|\sigma(z')^{\frac{1}{2}+\delta} + y_1^2) \\
&\quad - Mr_1\big(\sigma(z') + C\sigma(z')^{1+\delta}\big) + My_1^2.
\end{aligned}$$

Wir wissen aus [DiHe94], dass es eine $\mathcal{C}^3$-Funktion $\tilde{P}$ in $\mathbb{C}^{n-1}$ gibt, die homogen vom Grad 1 bzgl. $(m_2, \ldots, m_n)$ ist und folgende Eigenschaften hat:

1. $\tilde{P} < P$ außer im Ursprung,

2. für $\varepsilon > 0$ genügend klein, ist die Funktion

$$\tilde{P}_\varepsilon(z') := \tilde{P}(z') - 2\varepsilon \sum_{j=2}^{n} |z_j|^{m_j}$$

   plurisubharmonisch auf $\mathbb{C}^{n-1}$.

Wählen wir M genügend groß und $r_1 > 0$ genügend klein, so erhalten wir mit Hilfe der Peter-Paul-Ungleichung auf $\Omega \cap B(0, r_1)$ analog zu [DiHe94], dass

$$r'(z) \geq x_1 + M(x_1^2 - y_1^2) + P(z') - \frac{\varepsilon}{2}\sigma(z')$$

und

$$r'(z) \leq x_1 + M(x_1^2 - y_1^2) + C\sigma(z').$$

Damit sehen wir, dass die Abbildung

$$F(z) := (z_1 + Mz_1^2, z')$$

das Gebiet $\Omega \cap B(0, r_1)$ biholomorph auf ein Gebiet G mit

$$D_{\text{int}} := \{\operatorname{Re}(z_1) + C\sigma(z') < 0\} \subset G \subset \{\operatorname{Re}(z_1) + \widetilde{P}(z') - \tfrac{\varepsilon}{2}\sigma(z') < 0\} =: D_{\text{ext}}$$

abbildet. Mit dem Lokalisierungsargument wie in [DiHe94] und den Abschätzungen aus [Her83b] folgt, dass für die Bergman-Metrik gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Berg}^2_\Omega(z,X) &\geq C\,\mathrm{Berg}^2_{\Omega\cap B(0,r_2)}(z,X)\\
&= C\,\mathrm{Berg}^2_G(F(z),F'(z)X)\\
&\geq C_1\,\mathrm{Berg}^2_{D_{\mathrm{ext}}}(F(z),F'(z)X)\cdot\frac{K_{D_{\mathrm{ext}}}\big(F(z),F(z)\big)}{K_{D_{\mathrm{int}}}\big(F(z),F(z)\big)}\\
&\geq C_1\left(\frac{|X_1|^2}{(|z_1|+\sigma(z'))^2}+\sum_{j=2}^n\frac{|X_j|^2}{(|z_1|+\sigma(z'))^{\frac{2}{m_j}}}\right)\\
&= C_1\cdot\left(\sum_{j=1}^n\frac{|X_j|^2}{(|z_1|+\sigma(z'))^{\frac{2}{m_j}}}\right),\ \text{für alle } z\in\Lambda_\alpha(0).
\end{aligned}$$

Wir haben bei der Abschätzung ausgenutzt, dass $\frac{K_{D_{\mathrm{ext}}}(F(z),F(z))}{K_{D_{\mathrm{int}}}(F(z),F(z))}$ nach [Her83b] auf $\Lambda_\alpha(0)$ nach unten von 0 weg beschränkt ist, falls $\alpha_0>1$ nahe genug an 1 gewählt war. Damit ergibt sich aber mit der Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{C}^n$, dass

$$\mathrm{Berg}_\Omega(z,X)\gtrsim\sum_{j=1}^n\frac{|X_j|}{(|z_1|+\sigma(z'))^{\frac{1}{m_j}}}.$$

Mit

$$|z_1|+\sigma(z')\leq\alpha|r(z)|\ \text{für alle } z\in\Lambda_\alpha(0).$$

erhalten wir, dass

$$\mathrm{Berg}_\Omega(z,X)\gtrsim\sum_{j=1}^n\frac{|X_j|}{|r(z)|^{\frac{1}{m_j}}}.$$

Hierbei hängt die Konstante lediglich, von der Dimension n, Ω und α ab. Mit Hilfe der bereits gezeigten Vergleichbarkeit der drei invarianten Metriken folgt die Behauptung. □

6.3 Obere Abschätzung

Als nächstes wollen wir noch eine obere euklidische Abschätzung für die drei invarianten Metriken herleiten. Dazu schätzen wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung die Carathéodory-Metrik nach oben ab und wenden das Ergebnis aus Kapitel 4 über die Vergleichbarkeit der drei invarianten Metriken an.

6.2 Satz
Es seien $\Omega\subset\subset\mathbb{C}^n$ ein lineal konvexes Gebiet vom endlichen Typ m und $z\in\Omega$ nahe genug am Rand sowie $0\in\partial\Omega$ ein Randpunkt. Mit $\mathcal{M}(\partial\Omega,0)=(1,m_2,\dots,m_n)$ bezeichnen wir den Catlinschen Multityp in $0\in\partial\Omega$. Dann

gilt für alle Punkte $z \in B^d(0) := \{z \in \Omega : d(0,z) \lesssim |r(z)|\}$ *und* $X \in \mathbb{C}^n$, *dass*

$$F_\Omega(z,X) \lesssim \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{|r(z)|^{\frac{1}{m_j}}},$$

wobei wir mit F_Ω *wieder eine der drei invarianten Metriken auf* Ω *bezeichnen. Dabei sind wiederum die* X_j *die Komponenten von* X *bezüglich der oben definierten Multityp-Basis.*

Beweis: Es sei wieder ohne Einschränkung $p_0 = 0$. Um die Abschätzung zu erhalten, sei $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}^n$, wobei die X_j die Komponenten von X in der Basis um $0 \in \partial\Omega$ sind, die den Catlinschen Multityp $\mathcal{M}(\partial\Omega, 0)$ realisieren. Dann beobachten wir, dass für $q \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cara}_\Omega(q,X) &:= \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(q) X_j\right| : f \in \mathcal{O}(\Omega,\Delta),\ f(q)=0\right\} \\
&\leq \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(q) X_j\right| : f \in \mathcal{O}(\Omega,\Delta),\ f(q)=0\right\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(q) X_j\right| : f \in \mathcal{O}(\Omega,\Delta),\ f(q)=0\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |X_j| \cdot \sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(q) \frac{X_j}{|X_j|}\right| : f \in \mathcal{O}(\Omega,\Delta),\ f(q)=0\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |X_j| \cdot \mathrm{Cara}_\Omega\left(q, \frac{X_j}{|X_j|}\right) \\
&\approx \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{\tau\left(q, \frac{X_j}{|X_j|}, |r(z)|\right)} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{|r(q)|^{\frac{1}{m_j}}}.
\end{aligned}$$

Um die letzte Abschätzung nachzuweisen, beachten wir, dass nach [Co02] der lineare Multityp mit dem Multityp übereinstimmt und somit X_k die Kontaktordnung m_k in 0 hat. Nach Definition von $B^d(0)$ gilt jedoch dort $\tau(q, X_k, |r(q)|) \approx \tau(0, X_k, |r(q)|)$; da aber $\tau(0, X_k, |r(q)|) \approx \sigma(0, X_k, |r(q)|)$ (2.5) ist, folgt die Behauptung. $\square$

6.3 Bemerkung

1. *Wir haben damit insbesondere Folgendes gezeigt: Ist $q \in \Lambda_\alpha(0)$, so ist für $\varepsilon := |r(q)|$, dass*
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j^{q,\varepsilon}|}{\tau_k(q,\varepsilon)} \approx \frac{1}{\tau(q,X,\varepsilon)} \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|}{|r(q)|^{1/m_j}},$$
wobei $X_j^{q,\varepsilon}$ die Komponenten von X bezüglich der ε-minimalen Basis und X_j die Komponenten von X bezüglich der Basis sind, die in 0 den Multityp realisieren.

2. *Nach Konstruktion der admissible Domains gilt auch auf $\Lambda_\alpha(0)$ die Abschätzung $\tau(q, X_k, |r(q)|) \approx \tau(0, X_k, |r(q)|)$, so dass wir somit auch die obere Abschätzung erhalten.*

Damit haben wir aber auch mit dem folgenden Korollar ein zu [Hef04] ähnliches Ergebnis gezeigt.

6.4 Korollar

Für alle $q \in \Lambda_\alpha(0)$ und für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt für $\varepsilon := |r(q)|$
$$\tau_j(q,\varepsilon) \approx \varepsilon^{1/m_j}.$$

Beweis: Wir gehen analog zu [Fi03, Folgerung 2.6.4] vor. Es seien $v_k(q,\varepsilon)$ die ε-minimalen Koordinaten in q und $v_k(0)$ die Koordinaten, die in 0 den Multityp realisieren.
Für ein beliebiges X definieren wir dann die quadratischen Formen
$$Q_\varepsilon(X) := \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_k|^2}{\tau_j(q,\varepsilon)^2} \qquad X = \sum_{j=1}^{n} a_k v_k(q,\varepsilon)$$
$$Q_M(X) := \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_k|^2}{|r(q)|^{2/m_j}} \qquad X = \sum_{j=1}^{n} b_k v_k(0).$$
Die Eigenwerte dieser quadratischen Formen sind $\tau_j(q,\varepsilon)^{-1}$ bzw. $|r(q)|^{-1/m_j}$. Wie wir oben bemerkt haben, gilt aber
$$Q_\varepsilon(X) \approx \frac{1}{\tau(q,X,\varepsilon)^2} \approx Q_M(X). \tag{6.2}$$
Für einen symmetrischen Operator A mit den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gilt aber
$$\lambda_j = \min_{S_j} \max_{z \in S_j} \frac{z^H A z}{|z|^2},$$
wobei S_j ein j-dimensionaler Unterraum ist. Also müssen wegen (6.2) auch die der Größe nach geordneten Eigenwerte gleich sein. D.h. die Behauptung folgt. $\square$

Literaturverzeichnis

[BePe35] H. Behnke, E. Peschl, *Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen*, Math. Ann. **111** (1935), 158-177.

[BellBo81] S. R. Bell, H. P. Boas, *Regularity of the Bergman projection in weakly pseudoconvex domains*, Math. Ann. **257** (1981), 23-30.

[Berg33] S. Bergman, *Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande*, J. Reine Angew. Math. **169**, (1933), 1-42; **172** (1934) 89-128.

[Berg70] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, revised ed., American Mathematical Society, (1970).

[Bern85] B. Berndtsson, *The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donelly-Fefferman*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **46** (1996), 1083-1094.

[Boas00] H. P. Boas, *Lu Qi-Keng's Problem*, J. Korean Math. Soc. **37** (2000), No. 2, 253-267.

[BoStr92] H. P. Boas, E. J. Straube, *On equality of line type and variety type of real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$, J. Geom. Anal. **2** (1992), no. 2, 95-98.

[BoStYu95] H. P. Boas, E. J. Straube, J. Yu, *Boundary limits of the Bergman kernel and metric*, [J] Mich. Math. J. **42** (1995), No.3, 449-461.

[BoSj76] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*, Journées: Équations aux Dérivées Partielles de Rennes 1975, Asterisque, No. **34-35**, Soc. Math. France, Paris, (1976), 123-164.

[BNW88] Bruna, J., Nagel, A., Wainger, S.: *Convex hypersurfaces and Fourier transform*, Ann. Math. **127** (1988), 333-365.

[Ca84a] D. Catlin, *Global Regularity of the $\bar{\partial}$-Neumann Problem*, Complex analysis of several variables, Proc. Symp., Madison/Wis. 1982, Proc. Symp. Pure Math. **41** (1984), 39-49.

[Ca84b] D. Catlin, *Boundary invariants of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **120** (1984), 529-586.

[Ca87] D. Catlin, *Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **126** (1987), 131-191.

[Ca89] D. Catlin, *Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two*, Math. Z. **200** (1989), 429-466.

[Chen89] J. H. Chen, *Estimates of the invariant metrics on convex domains*, Ph.D. Thesis, Purdue Univ., West Lafayette, Ind. (1989).

[Cho96] S. Cho, *Estimates of the Bergman kernel function on certain pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$*, Math. Z. **222** (1996), no. 2, 329-339.

[Cho02a] S. Cho, *Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains with comparable Levi form*, J. Math. Kyoto Univ. **42** (2002), no. 2, 337-349.

[Cho02b] S. Cho, *Estimates of the Bergman kernel function on pseudoconvex domains with comparable Levi form*, J. Korean Math. Soc. **39** (2002), No.3, 425-437.

[Cho03] S. Cho, *Boundary behavior of the Bergman kernel function on pseudoconvex domains with comparable Levi form*, J. Math. Anal. Appl. **283** (2003), no. 2, 386-397.

[Co02] M. Conrad, *Nicht-isotrope Abschätzungen für lineal konvexe Gebiete endlichen Typs*, Dissertation Bergische Universität Wuppertal (2002).

[Cu01a] A. Cumenge, *Sharp estimates for $\bar{\partial}$ on convex domains of finite type*, Ark. Math. **39** (2001), 1-25.

[Cu01b] A. Cumenge, *Zero sets of functions in the Nevanlinna or the Nevanlinna-Djrbachian classes*, Pacific J. Math. **199** (2001), no. 1, 79-92.

[Da82] J. P. D'Angelo, *Real hypersurfaces, orders of contact and applications*, Ann. of Math. **115** (1982), 615-637.

[Di70] K. Diederich, *Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudo-konvexen Gebieten*, Math. Ann. **187** (1970), 9-36.

[Di73] K. Diederich, *Über die 1. und 2. Ableitungen der Bergmanschen Kernfunktion und ihr Randverhalten*, Math. Ann. **203** (1973), 129-170.

[Di04] K. Diederich, *Das $\bar{\partial}$-Neumann Problem und Anwendungen*, Vorlesung an der BU Wuppertal, 2004.

[DiFi05] K. Diederich, B. Fischer, *Hölder estimates on lineally convex domains of finite type*, preprint.

[DiFiFo99] K. Diederich, B. Fischer, J. E. Fornæss, *Hölder estimates on convex domains of finite type*, Math. Z. **232** (1999), 43-61.

[DiFo79] K. Diederich. J. E. Fornæss, *Proper holomorphic maps onto pseudoconvex domains with real-analytic boundary*, Ann. of Math. **110** (1979), 575-592.

[DiFo80] K. Diederich, J. E. Fornæss, *Comparison of the Bergman and the Kobayashi metric*, Math. Ann. **254** (1980), 257-262.

[DiFo99] K. Diederich, J. E. Fornæss, *Support functions for convex domains of finite type*, Math. Z. **230** (1999), 145-164.

[DiFo03] K. Diederich, J. E. Fornæss, *Lineally convex domains of finite type: holomorphic support functions*, Manuscripta math. **112** (2003), 403-431.

[DiFoHe84] K. Diederich, J. E. Fornæss, G. Herbort, *Boundary behavior of the Bergman metric*, Complex analysis of several variables, Proc. Symp., Madison/Wis. 1982, Proc. Symp. Pure Math. **41** (1984), 59-67.

[DiHe94] K. Diederich, G. Herbort, *Pseudoconvex domains of semiregular type*, Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry (H. Skoda, J.-M. Trépreau eds.) Vieweg 1994, 127-161.

[DiHe97] K. Diederich, G. Herbort, *An alternative proof of a theorem by Boas-Straube-Yu*, [CA] Ancona, V. (ed.) et al., Complex analysis and geometry. Proceedings of the CIRM conferences on complex analysis and geometry XII Bonn: Longman. Pitman Res. Notes Math. Ser. **366** (1997), 112-118.

[DiHe99] K. Diederich, G. Herbort, *On discontinuity of the Bergman kernel function*, Internat. J. Math. **10** (1999), no. 7, 825-832.

[DiHe00a] K. Diederich, G. Herbort, *The Bergman metric in the normal direction: A counterexample*, Mich. Math. J. **47** (2000), No. 3, 515-528.

[DiHe00b] K. Diederich, G. Herbort, *Quantitative estimates for the Green function and an application to the Bergman metric*, Ann. Inst. Fourier **50** (2000), No.4, 1205-1228.

[DiHeOh86] K. Diederich, G. Herbort, T. Ohsawa, *The Bergman kernel on uniformly extendable pseudoconvex domains*, Math. Ann. **273** (1986), no. 3, 471-478.

[DiLi81] K. Diederich, I. Lieb, *Konvexität in der komplexen Analysis*, DMV Seminar, Birkhäuser 1981.

[DiOh94] K. Diederich, T. Ohsawa, *General continuity principles for the Bergman kernel*, Internat. J. Math. **5** (1994), no. 2, 189-199.

[DiOh95] K. Diederich, T. Ohsawa, *An estimate for the Bergman distance on pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **141** (1995), no. 1, 181-190.

[Fe74] Ch. Feffermann, *The Bergmann kernel and biholomorphic mappings of pseudokonvex domains*, Inventiones mathematicae (**26**) (1974), 1-66.

[Fi03] B. Fischer, *Anisotrope Aspekte konvexer Gebiete endlichen Typs*, Habilitationsschrift an der Bergische Universität Wuppertal (2003).

[Fi04] B. Fischer, *Nonisotropic Hölder estimates on convex domains of finite type*, Michigan Math. J. **52** (2004), 219-239.

[Fo77] J. E. Fornæss, *Peak points on weakly pseudoconvex domains*, Math. Ann. **227** (1977), no. 2, 173-175.

[FuSt98] S. Fu, E. Straube, *Compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on convex domains*, Journal of Functional Analysis **159** (1998), 629-641.

[Gr75] I. Graham, *Boundary behavior of the Caratheodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary*, Trans. Math. Soc. **207** (1975), 219-239.

[Ha78] K. T. Hahn, *Inequality between the Bergman metric and Carathéodory differential metric*, Proc. Am. Math. Soc. 68 (1978), 193-194.

[Hef02] T. Hefer, *Hölder and L^p estimates for $\bar{\partial}$ on convex domains of finite type depending on Catlin's multitype*, Math. Z. **242** (2002), 367-398.

[Hef04] T. Hefer, *Extremal Bases and Hölder estimates for $\bar{\partial}$ on convex domains of finite type*, Mich. Math. J. **52** (2004), 573-602.

[Her83a] G. Herbort, *Logarithmic growth of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^3$ of finite type*, Manuscripta Math. **45** (1983), no. 1, 69-76.

[Her83b] G. Herbort, *Über das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik für eine spezielle Klasse schwach pseudokonvexer Gebiete des $\mathbb{C}^n$*, Math. Z. **184** (1983), 193-202.

[Her87] G. Herbort, *Wachstumsordnung des Bergmankerns auf pseudokonvexen Gebieten*, Schriftenr. Math. Inst. Univ. Münster, 2. Ser. **46**, 146 (1987).

[Her92a] G. Herbort, *Invariant metrics and peak functions on pseudoconvex domains of homogeneous finite diagonal type*, Math. Z. **209** (1992), 223-243.

[Her92b] G. Herbort, *The growth of the Bergman kernel on pseudoconvex domains of homogeneous finite diagonal type*, Nagoya Math. J. **126** (1992), 1-24.

[Her93] G., Herbort, *On the invariant differential metrics near pseudoconvex boundary points, where the Levi form has corank one*, Nagoya Math. J. **130** (1993), 25-54.

[Her96] G. Herbort, *Invariante Differentialmetriken*, Vorlesung an der BUGH Wuppertal, 1996.

[Her97] G. Herbort, *Geometrie pseudokonvexer Hyperflächen*, Vorlesung an der BUGH Wuppertal, 1997.

[Her98] G. Herbort, *Geometrische und analytische Invarianten pseudokonvexer Hyperflächen*, Vorlesung an der BUGH Wuppertal, 1998.

[Her99] G. Herbort, *The Bergman metric on hyperconvex domains*, Math. Z. **232** (1999), no. 1, 183-196.

[Hör65] L. Hörmander, *L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[Hör90] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland (1990).

[JaPf93] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis*, de Gruyter Expositions in Mathematics **9**, Berlin, New York (1993).

[Ker72] N. Kerzman, *The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary*, Math. Ann. **195** (1972), 149-158.

[Ki98] C. Kiselmann, *A differential condition characterizing weak lineal convexity*, Math. Ann. **311** (1998), 1-10.

[Kob67] S. Kobayashi, *Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 460-480.

[KoNi73] J. J. Kohn, L. Nirenberg, *A pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function*, Math. Ann. **201** (1973), 265-268.

[Kra92] S. G. Krantz, *Function theory of several complex variables*, second ed., Wadsworth & Brooks/Cole, (1992).

[Kra92] S. G. Krantz, *Geometric Analysis and Function Spaces*, CBMS, vol. **81**, Amer. Math Soc., Providence, RI. (1993).

[Le81] L. Lempert, *La métrique Kobayashi et la représentation des domains sur la boule*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), 427-474.

[LiMi02] I. Lieb, J. Michel, *The Cauchy-Riemann complex. Integral formulae and Neumann problem*, Aspects of Mathematics, vol. **E 34**, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 2002.

[Li05] M. Lieder, *Randverhalten der Kobayashi- und Caratheodory-Metrik auf lineal konvexen Gebieten von endlichem Typ m*, Dissertation, Bergische Universität Wuppertal (2005).

[Mc89] J. D. McNeal, *Boundary Behavior of the Bergman Kernel Function in* $\mathbb{C}^2$, Duke Math. J. **58** (1989), 499-512.

[Mc90] J. D. McNeal, *Local geometry of decoupled pseudoconvex domain*, Aspekte der Math. **E17** (1990), 223–230.

[Mc92] J. D. McNeal, *Convex domains of finite type*, J. of Func. Analysis **108** (1992), 361-373.

[Mc94] J. D. McNeal, *Estimates on the Bergman kernels of convex domains*, Advances in Mathematics **105** (1994), 108-139.

[Mc01] J. D. McNeal, *Invariant metric estimates for* $\bar{\partial}$ *on some pseudoconvex domains*, Ark. Math. **39** (2001), 121-136.

[Mc03] J. D. McNeal, *Uniform subelliptic estimates on scaled convex domains of finite type*, Explorations in complex and Riemannian geometry, Contemp. Math. **332**, 197-217 (2003) Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[NRSW89] A. Nagel, J.P. Rosay, E.M. Stein and S. Wainger, *Estimates for the Bergman and Szegö kernels in* $\mathbb{C}^2$, Ann. of Math. **129** (1989), 113-149.

[OhTa87] T. Ohsawa, K. Takegoshi, *On the Extension of* L^2 *Holomorphic Functions*, Math. Z. **195** (1987), 197-204.

[Web79] S. M. Webster, *Biholomorphic Mappings and the Bergman kernel off the Diagonal*, Inventiones mathematicae **51** (1979), 155-170.

[Yu92] J. Yu, *Multitypes of convex domains*, Ind. Univ. Math. J. **41** (1992), 837-849.

[Yu94] J. Yu, *Peak functions on weakly pseudoconvex domains*, Ind. Univ. Math. J., no.3, **43** (1994), 1271-1295.

[Yu97] J. Yu, *A counterexample to the existence of peaking functions*, Proc. of the Amer. Math Soc. **125**, Number 8 (1997), 2385-2390.

Danksagung

Zum Ende möchte ich mich noch bei all denen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ganz besonders möchte ich mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr. Diederich bedanken. Seine schönen Vorlesungen und Seminare haben mich seit dem ersten Semester begleitet und nicht nur zu meiner mathematischen Ausbildung einen sehr großen Teil beigetragen. Dankbar bin ich auch für das interessante Thema, Herrn Prof. Dr. Diederichs ständige Diskussionsbereitschaft und vor allem für die hilfreichen Bemerkungen und Tipps, die mir den richtigen Weg nicht nur in der Mathematik zeigten.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Privatdozent Dr. Bert Fischer für die vielen schönen Veranstaltungen und Erklärungen. Neben GO habe ich auch sehr viel Mathematik von ihm lernen dürfen. Ich danke herzlich für die Mühen, die ich ihm bereitet habe.

Herrn Prof. Dr. Duma gilt ein besonderer Dank für die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen. Nicht nur für die vielen Freiräume, die es mir ermöglicht haben, an Mathematik zu arbeiten, sondern auch für das immer offene Ohr für so manches Problem bin ich zu tiefstem Dank verpflichtet. Bedanken möchte ich mich auch bei den weiteren Mitarbeitern des Lehrgebiets Komplexe Analysis Herrn AOR Dr. Garske, Herrn AOR Dr. Rosen, Herrn Dipl.-Math. Hermanns, Herrn Dipl.-Ing Kretschmann und Frau Düsterer für die immer schöne und angenehme Zusammenarbeit.

Herrn Dipl.-Math. Marc Lieder danke ich für die schöne Zusammenarbeit. Viele Dinge werden erst klar, wenn man sie selber erzählt und versucht zu erklären, also über Mathematik spricht. Durch die gemeinsame mathematische Arbeit konnte ich sehr viel lernen – ich denke wir haben uns gut ergänzen können. Besonders für die persönliche Zusammenarbeit danke ich, als Freund.

Darüber hinaus gilt meiner Freundin ein ganz spezieller Dank. Sie hat mich während meines Studiums und auch vor allem während der Vorbereitung dieser Arbeit vielfältig unterstützt und mir geholfen, schwierige Phasen zu überstehen. Ich danke für Ihre große Geduld mit mir und dass es sie gibt.

Last but not least gilt auch meinen Eltern ein großer Dank. Sie haben mich immer unterstützt, meine Ziele zu verfolgen und meinen Weg zu gehen. Ohne sie hätte ich all dies nicht erreichen können.