Katharina Krichel

Problemlösen, Heuristik und Geometrie: Zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe

Problemlösen, Heuristik und Geometrie: Zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe

Inauguraldissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Erziehungswissenschaften (Dr. paed.)

an der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Katharina Krichel

Wuppertal, im Mai 2017

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20180108-140742-3
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20180108-140742-3]

„Geometrie ist eine große Gelegenheit, die Wirklichkeit mathematisieren zu lernen. Es ist eine Gelegenheit, Entdeckungen zu machen […]. Gewiss, man kann auch das Zahlenreich erforschen, man kann rechnend denken lernen, aber Entdeckungen, die man mit den Augen und den Händen macht, sind überzeugender und überraschender. Die Figuren im Raum sind, bis man sie entbehren kann, ein unersetzliches Hilfsmittel, die Forschung und die Erfindung zu leiten."

(Freudenthal 1973: 380)

Vorwort

Wozu eigentlich Mathematikunterricht? Mit der bildungsstandardgebundenen Lehrplanreform in den deutschen Bundesländern hat die Beantwortung dieser Frage von bildungspolitisch-staatlicher Seite eine neue Schwerpunktsetzung erhalten, ganz wesentlich bedingt durch die Ergebnisse von TIMSS und PISA[1] und andere internationale Vergleichsstudien, die schwerwiegende Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler in ganz bestimmten Bereichen offenbart haben:

Das Lösen praktischer Probleme mit Hilfe der Mathematik, also die lebensweltbezogene Anwendung der im Mathematikunterricht erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten stellt einen bedeutenden Teil in Deutschland unterrichteter Schüler vor nicht lösbare Schwierigkeiten. Deutschland, das Land der Ingenieure und die Maschinenexportnation Nummer Eins, belegte in der ersten PISA-Studie ausgerechnet im Bereich *Mathematical Literacy* einen Platz im unteren Mittelfeld der teilnehmenden OECD-Länder. Und der PISA-Bericht stellt außerdem fest: Nicht nur lag der erreichte Mittelwert unter dem OECD-Durchschnitt, Deutschland gehört außerdem zu den fünf Ländern mit den am wenigsten normalverteilten Schülerergebnissen.[2]

Nach diesem PISA-„Schock“ wurden viele mögliche Gründe für den Befund breit – und zwar in einem überraschenden Maße auch in der gesellschaftlichen Öffentlichkeit – diskutiert, noch bevor die Studienergebnisse überhaupt offiziell vorlagen.[3] Unter massivem gesellschaftlichem Handlungszwang benannte die *Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland*[4] am 6. Dezember 2001 und damit nur zwei Tage nach der Veröffentlichung der deutschen PISA-Ergebnisse bereits sogenannte „Handlungsfelder“ für die nun schnellstmöglich einzuleitenden Reformen – wenngleich eine fachdidaktische Analyse kaum begonnen war, geschweige denn als abgeschlossen gelten konnte oder gar Einigkeit über die Ursachen der festgestellten Defizite herrschte.

---

[1] TIMSS steht kurz für *Trends in International Mathematics and Science Study*, PISA für *Programme for International Student Assessment.*

[2] Vgl. OECD 2001: 80 f.

[3] Raidt weist darauf hin, dass die Reaktionen in Deutschland, nach ihrer Analyse medienbedingt, viel heftiger ausfielen als in anderen Ländern, die an der Studie PISA-I 2000 teilgenommen und gleichfalls keine vorderen Platzierungen erreicht hatten, da Informationen zu den Ergebnissen, mit dem Nimbus des Skandals, in den Medien vorzeitig publiziert wurden (vgl. RAIDT 2009: 11,75).

[4] Künftig kurz KMK genannt.

Die PISA-Ergebnisse waren sicherlich der Auslöser, nicht aber die einzige Ursache für die anschließenden Reformen.[5] Bereits im Verlauf der Neunziger Jahre war ein reformfreundliches Klima entstanden, das sich in der Denkschrift ‚Zukunft der Bildung – Schule der Zukunft'[6] aus dem Jahre 1995 ausdrückte, in einem Beschluss der KMK aus demselben Jahr, der „eine regelmäßige Durchführung von Leistungserhebungen" (BAUMERT et al. 1997: 34) empfiehlt und in dem Folgebeschluss aus dem Jahre 1997, das deutsche Schulsystem durch internationale Vergleichsstudien untersuchen zu lassen. Auch gab es bereits vor 2000 mehr oder weniger konkrete Ansätze zur Reform des Unterrichts, wie das Programm „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"[7] belegt. Rolf Becker befand in seiner Bestandsaufnahme des deutschen Bildungssystems aus dem Jahr 2012[8] aber, dass es schien, als ob den beteiligten gesellschaftlichen Gruppen durch das kollektiv empfundene Versagen bei der PISA-Studie die Probleme des Bildungssystems erst ins Bewusstsein gerückt werden mussten.

Mit Blick auf die Geschichte zeigt sich, dass sich solche Reformbestrebungen im Bereich der Bildung mit einiger Regelmäßigkeit als gesellschaftliche Projekte wiederholen. „Die sich verbreitende Erkenntnis, dass Bildung nicht nur die Identitäten und Werthaltungen nachwachsender Generationen, sondern auch die politischen und ökonomischen Chancen der Gesellschaftsmitglieder beeinflusst, heizte die politischen Diskussionen über Bildung an" (BECKER 2012: 123), stellte Becker fest – allerdings für das 19. Jahrhundert, als das gesamtdeutsche Schulwesen erstmals einer Reform unterworfen wurde. Auch in der Nachkriegszeit, unter dem Eindruck des Kalten Krieges „wurden jetzt auch die nach sozialen Schichten, Geschlechtern und Regionen sehr ungleich verteilten Bildungschancen problematisiert" (BECKER 2012: 136). Ziemlich genau fünfzig Jahre später, und weit über einhundert Jahre nach der ersten Reform, gilt noch immer: In keinem anderen Industrieland ist der schulische und damit der spätere ökonomische Erfolg so eng an die soziale Herkunft gekoppelt wie in Deutschland.[9]

Die unter dem entstandenen immensen gesellschaftlichen und politischen Druck von der KMK schließlich ab 2003 herausgegebenen *Bildungsstandards* sind zentrales Element der

---

[5] Raidt (2009) nennt die PISA-Studie daher treffend „Katalysator" der Bildungsreform.
[6] BILDUNGSKOMMISSION NRW 1995
[7] Ein Programm der Bund-Länder-Kommission, das im Anschluss an die Ergebnisse von TIMSS-III ins Leben gerufen wurde; vgl. Literaturverzeichnis.
[8] Vgl. BECKER 2012.
[9] Vgl. ARTELT et al. 2001: 40 f. oder OECD 2004a: 171/175.

jüngsten deutschen Bildungsreform[10], die keineswegs nur die Überarbeitung bzw. völlige Neukonzeption der Lehrpläne bedeutete und gleichfalls nicht nur das hier zu betrachtende Sekundarschulwesen betraf. Auch für das Fach Mathematik bedeuteten die dort formulierten Kompetenzbeschreibungen einen Bruch mit den bis dato üblichen Lehrplänen. Die Bildungsstandards machten vor allem zwei Dinge notwendig:

- eine *Abkehr* von rein fachinhaltsbezogenen Unterrichtsvorgaben und eine *Hinwendung* zur Integration prozessorientierter Inhalte
- eine *Abkehr* von der operationalisierten Beschreibung zu erlernender Fachinhalte in bestimmten Unterrichtseinheiten und eine *Hinwendung* zu Kompetenzformulierungen für Doppeljahrgangsstufen (Outputsteuerung statt Inputsteuerung).

Eine besondere Stellung nahm dabei die Problemlösefähigkeit ein. Die Bedeutung des Problemlösens war, auch in den Jahrzehnten nach dem Tod Pólyas[11], von namhaften Mathematikdidaktikern immer herausgestellt worden (vgl. SCHOENFELD 1985, WINTER 1991, LEUDERS 2003), und im Rahmen der TIMS-Studie aus dem Jahr 1995 stellte man fest, dass „in den Basisvorstellungen über die erforderlichen mathematischen Kompetenzen und über generelle Prinzipien der Stoffauswahl [...] weitgehend Konsens [besteht]. Es zählen dazu vor allem mathematisches Problemlösen, der verständige Umgang mit mathematischen Symbolen, Begriffen und Modellen sowie mathematisches Denken, und zwar – das ist entscheidend – sowohl in inner- als auch in außermathematischen Zusammenhängen" (BAUMERT et al. 1997: 60).

Erst nach dem bereits angesprochenen „PISA-Schock" jedoch wurde auch dieser Aspekt in Deutschland öffentlich diskutiert und bildungspolitisch relevant, so dass nach dem Beschluss der KMK, im Jahre 2003, das Problemlösen als eine verbindlich zu erwerbende prozessbezogene Kompetenz in den Bildungsstandards verankert wurde.[12] Nach der dortigen Begriffsbestimmung umfasst das mathematische Problemlösen die Bearbeitung vorgegebener sowie selbstformulierter Fragen, die Auswahl und Anwendung geeigneter

[10] Seit Ende der Neunziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts haben zumindest von Teilen der Gesellschaft wahrgenommene Diskrepanzen zwischen Anspruch und Wirklichkeit in der deutschen Bildungslandschaft und Modernitätsrückstand einen Prozess zunächst kleinerer Reformen oder Reformversuche in Gang gesetzt, vgl. hierzu BECKER 2012: 124 f.

[11] George (eigentlich ung. György) Pólya, * 13.12.1887, † 07.09.1985. In Ungarn geborener, später in der Schweiz und den USA lebender und arbeitender Mathematiker. Neben vielen anderen Gebieten, beschäftige er sich mit der Heuristik und der Lehre des Problemlösens und schrieb insbesondere die weltweit rezipierten und bis heute relevanten Grundlagenwerke „How to Solve It" (dt. „Schule des Denkens") und „Mathematical Discovery" (dt. „Vom Lösen mathematischer Aufgaben"). Für vollständige Literaturangaben s. Literaturverzeichnis.

[12] Vgl. ROTT 2013: 11.

heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien, die Überprüfung der Plausibilität von Ergebnissen, das Finden von Lösungsideen und schließlich die Reflexion der Lösungswege. So schreiben Heckmann und Padberg (2012: 14):

> *„Denn im Zuge der gesellschaftlichen Entwicklung haben sich die Anforderungen immer weiter in diese Richtung verschoben: Das Finden effizienter Lösungswege in (mathematischen) Problemsituationen spielt eine immer größere Rolle, während das reine Ausführen von Routinen durch den technischen Fortschritt immer weiter verdrängt wird."*

Doch auch zwanzig Jahre nach der ersten TIMS-Studie und über zehn Jahre nach Beginn der skizzierten Umgestaltungen im deutschen Mathematikunterricht sind die gesteckten Ziele nicht erreicht – während sich die PISA-Leistungen zwischen 2003 und 2009 statistisch verbessert haben und nun leicht über dem OECD-Durchschnitt liegen, wird in der aktuellen gesellschaftlichen Diskussion deutlich, dass nach wie vor Defizite bestehen; die Wirtschaft ebenso wie höhere Bildungsinstitutionen stellen immer wieder fest, dass die Fähigkeiten der Schüler nicht ihren Erwartungen entsprechen. Zentraler Kritikpunkt: Die Schüler sind, selbst bei Besitz solider mathematischer Grundkenntnisse, nicht in der Lage, mit spezifischen, praxisnahen Problemstellungen umzugehen.

Das hier beispielhaft genannte Papier *Grundbildung sichern – Abbrüche vermeiden*[13] des Landes Rheinland-Pfalz formuliert ein Anforderungsprofil, das deutliche Hinweise gibt, dass auch der aktuelle Mathematikunterricht nicht recht verfängt. Es belegt außerdem nachdrücklich die besondere Position, die die mathematischen Kompetenzen in den Augen der Bildungspolitik besitzen. „Niemand sollte scheitern – nicht in der Schule, nicht im Studium und nicht in der Ausbildung. Auch nicht an Mathematik" (MBWWK 2014: 3) lautet das alarmierende und zugleich so vielsagende Motto. Die Art von Mathematik, um die es dabei geht, ist nicht mehr das gewissenhafte, fehlerlose Durchführen zahlloser Berechnungen, sondern der situationsangemessene, kreative, aber keineswegs willkürliche Umgang mit mathematischen Fachkenntnissen.

Mittel- bis langfristig muss es also darum gehen, die Problemlösefähigkeiten der Schüler zu erweitern, damit aus Problemen Aufgaben werden – und das gelingt nur durch die Veränderungen des Mathematikunterricht mit einem neuen Fokus: Heuristik.

KATHARINA KRICHEL UND DANIELA STILLER

---

[13] Vgl. MBWWK 2014.

Zum Aufbau der Arbeit

Band A – Heute und Morgen fasst, bezogen auf das mathematische Problemlösen, die aktuelle Situation und die unmittelbare Zukunft ins Auge:

In Teil I wird zunächst – mit Fokus auf die Kompetenz des Problemlösens – in die aktuelle bildungspolitische Situation eingeführt, von TIMSS über PISA-Studien bis zur Verabschiedung der Deutschen Bildungsstandards. Zur terminologischen Absicherung werden im Anschluss die Begriffe Aufgabe, Problem und Problemlösen voneinander abgegrenzt und eigene Arbeitsdefinitionen gegeben. Darauf folgend untersucht die Arbeit die in den Lehrplanschriften der Bundesländer formulierten Aussagen zum Problemlösen. Dazu werden alle aktuellen Vorgaben in einer Bestandsaufnahme gesichtet und kategorial analysiert; so werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Ländern einerseits und die Abfolge der für die Doppeljahrgangsstufen formulierten Ziele andererseits herausgearbeitet. Abschließend werden diese Befunde, Verteilungen und Unterschiede kritisch kommentiert.

Teil II entwickelt die *Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht (IHiMU),* ein didaktisch-methodisches Konzept zum geometriebasierten Unterricht in Heuristik für die Orientierungsstufe. Zunächst wird dazu die aktuell im deutschsprachigen Raum dominierende heuristische Terminologie kurz zusammengefasst, ehe eine eigene Kategorisierung problemlösender Handlungsmuster vorgestellt wird, die für die gesamte vorliegende Arbeit (Band A und B) als Grundlage verwendet wurde. Anschließend wird das Unterrichtskonzept IHiMU mit seinen Bausteinen und Charakteristiken entwickelt und dann anhand der geometrischen Fachinhalte der Orientierungsstufe konkretisiert. IHiMU zeigt, wie lehrplankonform und auf Grundlage aktueller Lehrwerke die Problemlösefähigkeit der Schüler gezielt und nachhaltig herausgebildet werden könnte.

Band B – Gestern und Übermorgen wendet sich der besonderen Beziehung zwischen Mathematik und Heuristik zu, die eine tragende Grundlage für den Mathematikunterricht von Übermorgen sein könnte:

In Teil I wird die Geschichte der Didaktik, mit geschärftem Blick auf nicht-fachgebundene Unterrichtsformen einerseits und die Rolle des Problemlösens und seiner Berücksichtigung im Mathematikunterricht andererseits, in ihren wichtigsten Entwicklungsschritten nachgezeichnet.

Teil II befasst sich mit dem Verhältnis von Geometrie und Problemlösen. Welche Rolle spielte das Problemlösen in der Geschichte der Geometrie, und welchen inhaltlichen Beitrag kann das Lösen konkreter Probleme zum Erwerb geometrischer Kenntnisse und Fertigkeiten leisten? Welche Rolle spielte die Geometrie für die Entwicklung der Heuristik, und welchen Beitrag kann das Lösen geometrischer Probleme zum Erwerb der Problemlösefähigkeiten leisten?

Teil III synthetisiert, gestützt auf die gewonnenen Erkenntnisse, das *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education (CHIME),* ein Konzept für eine heuristikzentrierte, in Sachfächer eingebettete Vermittlung geometrischer (bzw. aller mathematischer) Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, das die engen Fachgrenzen und aktuellen politischen Vorgaben auflöst.

Band A – Heute und Morgen

Vorwort

Kurze Einführung in die Ausgangspunkte für das Forschungsinteresse sowie in Aufbau und Ziele der Arbeit.

Teil I - Problemlösen: Der bildungspolitische Rahmen

1 TIMSS, PISA und die Folgen

Überblick zu den Ergebnissen der Bildungsstudien und ihren Auswirkungen auf die deutsche Bildungspolitik.

- 1.1 TIMSS 1995
- 1.2 PISA 2000
- 1.3 PISA 2003
- 1.4 PISA 2006
- 1.5 PISA 2012
- 1.6 Die Bildungsstandards

2 Aufgabe, Problem und Problemlösen

Definitorische Grundlagen, didaktische Facetten und Bedeutung des Problemlösens.

3 Die aktuelle Lehrplansituation

3.1 Begriffsvielfalt

Einführung in die aktuell in Deutschland geltenden Lehrplanschriften

3.2 Kurzbesprechung der Lehrplanschriften

- 3.2.1 Baden-Württemberg
- 3.2.2 Bayern
- 3.2.3 Berlin
- 3.2.4 Brandenburg
- 3.2.5 Bremen
- 3.2.6 Hamburg
- 3.2.7 Hessen
- 3.2.8 Mecklenburg-Vorpommern
- 3.2.9 Niedersachsen
- 3.2.10 Nordrhein-Westfalen
- 3.2.11 Rheinland-Pfalz
- 3.2.12 Saarland
- 3.2.13 Sachsen
- 3.2.14 Sachsen-Anhalt
- 3.2.15 Schleswig-Holstein
- 3.2.16 Thüringen

3.3 Kommentar

4 Synopse und Analyse

Synoptische Darstellung und Herausarbeitung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden der Lehrplanschriften bezüglich des Problemlösens.

4.1 Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts	4.2 Problemlösen im Mathematikunterricht
4.3 Problemlösekompetenz aufbauen	4.4 Zur Verknüpfung mit den Teilgebieten

4.5 Fazit

Abschluss der Analyse des Ist-Zustands unter Betrachtung formaler Aspekte und der Frage des implementierten Lehrplans.

Teil II - Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht (IHiMU)

5 Terminologie der Heuristik

Vergleichende Darstellung der in Deutschland aktuellen heuristischen Systematiken sowie Vorstellung und Begründung einer eigenen Systematik.De

- 5.1 Das 20. Jahrhundert: Direkte Vorläufer
- 5.2 Das 21. Jahrhundert: Aktuelle Ansätze
- 5.3 Definition
- 5.4 Kategorisierungen von Heurismen
  - *5.4.1 Heurismen nach Schwarz*
  - *5.4.2 Heurismen nach Bruder*
- 5.5 Sekundarschulorientierte Kategorisierung nach Krichel/Stiller

6 Rahmenbedingungen

Beschreibung verschiedener bildungpolitischer, materialer und organisationspraktischer Einflussgrößen auf ein neues Konzept für den Mathematikunterricht.

- 6.1 Bildungsstandards und Lehrpläne
- 6.2 Rolle des Lehrers
- 6.3 Bedeutung des Schulbuchs
- 6.4 Ideen zum Erwerb der Problemlösekompetenz

IHiMU
Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht

7 Das IHiMU-Konzept

Theoretische und praxisbezogene Vorstellung des Konzepts anhand der vier zentralen geometrischen Inhaltsfelder der Orientierungsstufe.

- 7.1 Streckbrief IHiMU
- 7.2 Konzeptbausteine
  - *7.2.1 Forscheraufgaben*
  - *7.2.2 Forscherheft*
  - *7.2.3 Methodik und Lernarrangements*
  - *7.2.4 Intelligentes Üben*
  - *7.2.5 Sicherung*
- 7.3 IHiMU konkret
  - *7.3.1 Begriffsbildung/ Grundkonstruk- tionen*
  - *7.3.2 Symmetrie*
  - *7.3.3 Ebene Figuren - Vierecke*
  - *7.3.4 Flächeninhalt von Vierecken*

8 Schlusswort und Überleitung

Abschließende Bemerkungen, Ausblick zum IHiMU-Konzept sowie Überleitung auf Band B als logische Fortentwicklung vieler in diesem Band aufgeworfener Fragestellungen und gewonnener Einsichten und Grundideen.

Inhaltsverzeichnis

Teil I – Problemlösen: Der bildungspolitische Rahmen 1

1 TIMSS, PISA und die Folgen 1

1.1 TIMSS 1995 und das Programm der Bund-Länder-Kommission 2

1.2 PISA 2000 und der „Schock“ 3

1.3 PISA 2003 4

1.4 PISA 2006 6

1.5 PISA 2012 6

1.6 Die Bildungsstandards 7

2 Aufgabe, Problem und Problemlösen: allgemeine Aspekte 9

2.1 Problem und Aufgabe: eine erste Definition 9

2.2 Problemlösen: Ein universeller Prozess.. 11

2.3 Problemlösen – Nur eine Kompetenz unter vielen?.. 15

2.4 Merkmale von Routine- und Problemaufgaben 18

2.5 Von der Aufgabe zum Problem – Aufgaben öffnen... 22

2.5.1 Öffnen durch Weglassen______ 24

2.5.2 Öffnen durch Formulierung einer Umkehraufgabe______ 25

2.5.3 Öffnen durch Fehlersuche______ 26

3 Die aktuelle Lehrplansituation.. 28

3.1 Begriffsvielfalt 30

3.2 Kurzbesprechung der Lehrplanschriften 35

3.2.1 Baden-Württemberg______ 36

3.2.2 Bayern ______ 37

3.2.3 Berlin ______ 39

3.2.4 Brandenburg ______ 41

3.2.5 Bremen______ 42

3.2.6 Hamburg ______ 44

3.2.7 Hessen ______ 45

3.2.8 Mecklenburg-Vorpommern ______ 48

3.2.9 Niedersachsen ______ 50

3.2.10 Nordrhein-Westfalen ______ 52

3.2.11 Rheinland-Pfalz ______ 53

3.2.12 Saarland______ 56

3.2.13 Sachsen — *60*
3.2.14 Sachsen-Anhalt — *62*
3.2.15 Schleswig-Holstein — *65*
3.2.16 Thüringen — *70*
3.3 Kommentar zu den Lehrplanschriften 72

4 Synopse und Analyse 73

4.1 Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts 74
4.2 Allgemeine Aussagen zum Problemlösen in den Lehrplanschriften 76
4.3 Stufenspezifische Kompetenzerwartungen 80
4.3.1 Gruppe I: Problemlösen allgemein — *81*
4.3.2 Gruppe II: Prozess des Problemlösens allgemein — *83*
4.3.3 Gruppe III: Pólya Phase 1 — *85*
4.3.4 Gruppe IV: Pólya Phase 2 — *88*
4.3.5 Gruppe V: Pólya Phase 3 — *91*
4.3.6 Gruppe VI: Pólya Phase 4 — *93*
4.3.7 Gruppe VII: Zusätzliches — *95*
4.3.8 Kontinuitätsbetrachtung — *97*
4.4 Zur Verknüpfung mit den Teilgebieten 102
4.5 Fazit 105

Teil II – IHiMU: Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht 109

5 Terminologie der Heuristik 109

5.1 Das 20. Jahrhundert: Direkte Vorläufer 110
5.1.1 Pólya — *110*
5.1.2 Glatfeld — *111*
5.1.3 Schoenfeld — *112*
5.1.4 Winter — *112*
5.2 Das 21. Jahrhundert: Aktuelle Ansätze 114
5.2.1 Schwarz — *115*
5.2.2 Bruder/Collet — *115*
5.3 Definition 116
5.4 Kategorisierung von Heurismen 117
5.4.1 Kategorisierung der Heurismen nach Schwarz — *118*
5.4.2 Kategorisierung der Heurismen nach Bruder/Collet — *120*

5.5 Sekundarschulorientierte Kategorisierung nach Krichel/Stiller 123
5.5.1 Kategorie I: Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung ________________ 125
5.5.2 Kategorie II: Heurismen der Analyse und Adaption ____________________________________ 136
5.5.3 Kategorie III: Heurismen der konkreten Handlung _____________________________________ 145

6 Rahmenbedingungen 154

6.1 Bildungsstandards und kompetenzorientierte Lehrpläne 155
6.1.1 Grunderfahrungen und Geometrie ____ 156
6.1.2 Allgemeine mathematischen Kompetenzen ____ 159
6.1.3 Inhaltsspezifische mathematische Kompetenzen ____________________________________ 160
6.1.4 Niveaukonkretisierung / Anforderungsbereiche ______________________________________ 162
6.1.5 Aufgabensammlung aus den Bildungsstandards ______________________________________ 163
6.1.6 Umsetzungsbeispiel im Lehrplan: Geometrie und Problemlösen ________________________ 165
6.1.7 Lernausgangslage ____ 167
6.2 Die Rolle des Lehrers 169
6.3 Funktion und Bedeutung des Schulbuches im Mathematikunterricht 173
6.3.1 Aktuelle Schulbücher ____ 176
6.3.2 Kommentar zu Stoffverteilungsplänen ____ 181
6.4 Aktuelle Ideen zum Erwerb der Problemlösekompetenz und ihre Grenzen 182
6.4.1 Problemlösenlernen im Mathematikunterricht – Studie zum Wirkprinzip heuristischer Bildung _ 183
6.4.2 „Wer suchet, der findet“ – oder nicht? Aufgaben zum Erwerb der Problemlösekompetenz _____ 185

7 Das IHiMU- Konzept 188

7.1 Steckbrief IHiMU 188
7.2 Konzeptbausteine 190
7.2.1 Forscheraufgaben als Kern der IHiMU ____ 191
7.2.2 Forscherheft ____ 192
7.2.3 Methodik und Lernarrangements der IHiMU ____ 195
7.2.4 Intelligentes Üben ____ 199
7.2.5 Sicherung ____ 200
7.3 Das IHiMU-Konzept konkret 203
7.3.1 Begriffsbildung und Grundkonstruktionen ____ 205
7.3.2 Der Symmetriebegriff ____ 219
7.3.3 Ebene Figuren – Schwerpunkt Vierecke ____ 239
7.3.4 Flächenberechnung von Vierecken ____ 264

8 Schlusswort und Überleitung 294

Quellenverzeichnis *297*

Lehrplanschriften 297

Monographien, Sammelwerke und Zeitschriften 302

Schulbücher 310

Internetquellen und Online-Ressourcen 312

Abbildungsverzeichnis *315*

Tabellenverzeichnis *317*

Teil I – Problemlösen: Der bildungspolitische Rahmen

1 TIMSS, PISA und die Folgen

Abb. 1 Von internationalen Vergleichsstudien zu Bildungsstandards und Lehrplänen.

Um die aktuelle bildungspolitische Situation einzuordnen, soll hier ein kurzer Blick auf die TIMS-Studien der *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) und die PISA-Studien der *Organization for Economic Co-operation and Development* (OECD) geworfen werden:

Die TIMS-Studien finden alle vier Jahre statt, wurde in Deutschland allerdings nur bei der Erstdurchführung im Jahr 1995 zur Erhebung der Leistungen der Mittel- und Oberstufenschüler eingesetzt. Seither, 2007 und 2011, nahm Deutschland ausschließlich mit Grundschulkindern des (dritten und) vierten Schuljahres an der Studie teil. TIMSS besteht aus fünf Komponenten und analysiert neben den fachbezogenen Leistungen auch Daten zu den geltenden Curricula; es wurden Befragungen von Schulleitern und Fachlehrern sowie qualitative Fallstudien (auch mit Filmaufnahmen, dieser Teil wurde als Videotape Classroom Study bezeichnet) durchgeführt.[14]

Die PISA-Testungen werden seit dem Jahr 2000 im Dreijahresrhythmus durchgeführt und legen im Wechsel ihren Schwerpunkt auf einen der drei Testbereiche *Reading Literacy*, *Mathematical Literacy* und *Scientific Literacy*[15], der intensiver abgefragt wird und für den zwei Drittel der Testzeit zur Verfügung stehen. Es werden im Folgenden nur einige der Deutschland betreffenden Kernergebnisse, vorwiegend aus dem Bereich Mathematische Grundbildung, aus den vergangenen dreizehn Jahren vorgestellt und Trends aufgezeigt. Weder Aussagekraft noch Güte der Ergebnisse oder ihre bildungspolitische Interpretation sollen hier diskutiert werden; dazu gibt es umfangreiche kritische Literatur, auf die an gegebener Stelle verwiesen wird.

[14] Für eine detaillierte deskriptive Behandlung der Ergebnisse von TIMSS 1995 siehe BAUMERT et al. 1997.

[15] Ins Deutsche übertragen als Lesekompetenz, Mathematische Grundbildung und Naturwissenschaftliche Grundbildung, die im Folgenden verwendet werden.

1.1 TIMSS 1995 und das Programm der Bund-Länder-Kommission

Das Abschneiden der deutschen Schülerinnen und Schüler[16] der 7. und 8. Jahrgangsstufe bei der TIMS-Studie 1995 lag innerhalb eines breiten Mittelfeldes der fünfundvierzig Teilnehmerstaaten, wobei anzumerken ist, dass das Alter der deutschen Schüler im Schnitt um sechs bis zwölf Monate über dem der anderen Teilnehmer in diesem Mittelfeld lag. Verglichen mit den meisten anderen nordost- und westeuropäischen Ländern ließ sich ein Rückstand von etwa einem Schuljahr feststellen. Die von den deutschen Schülern gezeigten Leistungen sind außerdem auffallend heterogen: Sie bilden die erwarteten Niveaus der gesamten Sekundarstufe I - also eine Streuung von sechs Schuljahren - ab, und selbst innerhalb einer Schulform liegt die Abweichung bei zwei bis zweieinhalb Schuljahren. Auch konnten etwa 20% der getesteten Schüler nur Kenntnisse auf dem Niveau der Grundschule nachweisen, was im internationalen Vergleich negativ hervorsticht. Nur eine verschwindend geringe Gruppe von deutschen Schülern ist zu den Spitzenleistungen, die von 10% einiger ostasiatischer Länder erbracht wurden, in der Lage.[17]

Inhaltlich, sagen Baumert et al. (1997: 24), liegen die "relativen Leistungsstärken der deutschen Schülerinnen und Schüler [...] in der Arithmetik, im Umgang mit Maßeinheiten und in der deskriptiven Statistik. Die relativen Schwächen liegen in den mathematischen Kernbereichen Algebra und Geometrie."

Ebenfalls Bestandteil der TIMS-Studie war ein intensiverer Drei-Länder-Vergleich zwischen den lebensstandardähnlichen Ländern Japan (das im Spitzenfeld lag), USA und Deutschland (die vergleichbare Ergebnisse erzielten); hier traten interessante Unterschiede zutage: In Japan wird anspruchsvollerer mathematischer Stoff früher unterrichtet und in der Folge rhythmisch, aber eher knapp, wieder aufgegriffen. Der Unterricht dort zeichnet sich durch intelligente Anwendungen und Übungsformate aus, wie Baumert et al. (1997: 31 f.) ermittelt haben: „Japanischer Mathematikunterricht ist Problemlöseunterricht. Er schult mathematisches Verständnis und mathematisches Denken. [...] Die oftmals offenen Aufgabenstellungen [...] lassen Lösungen unterschiedlicher Güte zu." Angesichts dieser aus deutscher Sicht bedenklichen Ergebnisse der ersten Vergleichsstudie nach

---

[16] Im weiteren Verlauf der Arbeit wird aus Gründen der besseren Lesbarkeit auf die Verwendung der kumulativen Form („Schülerinnen und Schüler") verzichtet. Stattdessen wird nur die männliche Form (Schüler) verwendet, die aber selbstverständlich auch die weibliche Form impliziert. Aus Gründen der Orthographie wird auf die Verwendung des Großbuchstabens „I" im Wortinneren ebenfalls verzichtet („SchülerInnen").
[17] Vgl. Baumert et al. 1997: 22.

dreißig bzw. fünfundzwanzig Jahren der „Unverglichenheit“[18] startete die Bund-Länder-Kommission[19] 1998 ein Programm zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“, das nach fünf Jahren auslief. Es nahmen einhundertachtzig Schulen unter der Koordinierung durch das Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften (kurz IPN) in Kiel teil. Im Rahmen dieses Programms wurden Kernproblemfelder des deutschen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts identifiziert und Lösungsansätze in Form von elf sogenannten Modulen erarbeitet.[20]

1.2 PISA 2000 und der „Schock“

Mit PISA wurde ein langfristig angelegtes Projekt ins Leben gerufen, welches in regelmäßigen Abständen untersucht, inwieweit die Schüler in der Lage sind, ihre Kenntnisse und Fähigkeiten in realistischen Situationen anzuwenden und diese auch zur Bewältigung von Alltagsproblemen nutzen. Darüber hinaus wird geprüft, ob die Schüler ein vertieftes Verständnis für zentrale Konzepte entwickelt haben und diese in unterschiedlichen Kontexten anwenden können.

Im Jahr 2000 nahm Deutschland dann erstmals an der internationalen Vergleichsstudie PISA der OECD teil[21]; der Fokus der Studie richtete sich in diesem Jahr zwar auf die Lesekompetenz der fünfzehnjährigen Teilnehmer, sie enthielt aber auch Testteile zur mathematischen und naturwissenschaftlichen Grundbildung. Die deutschen Schüler erreichten im Durchschnitt 490 Punkte[22] und lagen damit, 10 Punkte unter dem OECD-Durchschnitt, im unteren Mittelfeld. Mit 24% ist der Anteil der Fünfzehnjährigen, deren mathematische Fähigkeiten das Grundschulniveau nicht übersteigen, auch hier ungewöhnlich groß. Dieses Ergebnis im mathematischen Bereich findet sich ganz ähnlich auch in den gemessenen Leistungen der Lesekompetenz (-16 Punkte) und der naturwissenschaftlichen Grundbildung (-13 Punkte) wieder.

Die Veröffentlichung der Ergebnisse im Jahr 2001 fand einen immensen Widerhall in der gesellschaftlichen und bildungspolitischen Diskussion (vgl. Einleitung), der die Reaktionen

[18] Die *First International Mathematics Study* (FIMS) wurde 1964, *die First International Science Study* (FISS) 1971 durchgeführt und waren die letzten Studien, die verlässliche Daten über das Kompetenzniveau deutscher Schüler lieferten.

[19] Künftig kurz BLK genannt.

[20] Für eine Übersicht über das Programm und die elf Module vgl. Internetquelle Bund-Länder-Kommission 2000-2003.

[21] Das Testformat von PISA lehnt sich eng an TIMSS an und erscheint wie eine durch die OECD appropriierte Neuauflage bzw. Fortführung derselben Studie.

[22] Japan belegte mit 557 Punkten Platz 1. Den letzten Platz belegte Brasilien mit 334 Punkten, vgl. OECD 2001.

auf TIMSS weit übertraf – obwohl die Aussagen beider Studien im Kern dieselben waren. Die KMK begann ihre Arbeit an bundesweit gültigen Standards, die ab 2003 zunächst für die Fächer Mathematik, Deutsch und die erste Fremdsprache erschienen. Darüber hinaus, und als logische Ergänzung zu verstehen, wurde in den Folgejahren ein ganzer Maßnahmenkatalog zur Qualitätsentwicklung deutscher Schulen verfasst, der das Bildungsmonitoring („Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring", 2006) und die Unterrichtsentwicklung („Konzeption der Kultusministerkonferenz zur Nutzung der Bildungsstandards für die Unterrichtsentwicklung", 2009) ebenso umfasst wie die Schaffung neuer Institutionen wie das „Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen" (IQB: 2004), das die Implementierung der Bildungsstandards überwacht und auf nationaler Ebene Evaluationen durchführt, und das „Zentrum für internationale Bildungsstudien" (ZIB: 2010).

Außerdem spielt die Europäische Kommission (mit dem Rat der Europäischen Union), die sich als koordinierender Partner und als Plattform zum internationalen Austausch sieht, eine zunehmende Rolle sowohl in der normativen als auch in der evaluativen Bildungspolitik. Die von ihr im Jahr 2009 unter dem Titel ET 2020 definierten Ziele mit den zugehörigen Indikatoren[23] schreiben eine gemeinsame europäische Bildungsperspektive fest. Ein jährlicher Anzeiger für die allgemeine und berufliche Bildung (*Education and Training Monitor)* verfolgt derzeit weiterhin die Fortschritte in jedem Mitgliedsstaat.[24]

1.3 PISA 2003

An der Folgestudie im Jahr 2003 nahm Deutschland als einer der einundvierzig Teilnehmerstaaten[25] erneut teil.[26] Die Studie legte ihren Schwerpunkt einerseits auf die mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten der fünfzehnjährigen Teilnehmer, zum anderen aber wurde eine Testung der fächerübergreifenden Fähigkeit zum Problemlösen vorgenommen.

---

[23] Die Schlussfolgerungen des Rates vom 12. Mai 2009 sind im Amtsblatt 2009/C 119/02 der Europäischen Union einzusehen, vgl. Amtsblatt der Europäischen Union (2009).

[24] Die Europäische Kommission informiert auf ihrer Internetseite umfassend zu ihren verschiedenen Aufgabenbereichen, Programmen und Projekten im Bildungsbereich, vgl. European Commission Education & Culture im Quellenverzeichnis; für den direkten Verweis auf ET 2020 und den Bildungsmonitor vgl. European Commission ET 2020 im Quellenverzeichnis.

[25] 2003 wurde PISA in sämtlichen dreißig OECD-Mitgliedsstaaten und weiteren elf sogenannten Partnerstaaten durchgeführt.

[26] Die mathematikbezogenen Ergebnisse finden sich in der Publikation OECD (2004) *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003.*

Im Bereich der Mathematischen Grundbildung erreichte Deutschland über die vier Bereiche[27] hinweg einen Durchschnittswert von 503 (500 Punkte im Bereich *Space and Shape*, 507 Punkte im Bereiche *Change and Relationship*, 514 Punkte im Bereich *Quantity* und 493 Punkte im Bereich *Uncertainty*). Betrachtet man diese Ergebnisse im Vergleich zu denen aus dem Jahr 2000 ergeben sich minimale Verbesserungen für *Space and Shape* und klarere Verbesserungen für *Change and Relationship*. Zu den anderen zwei Testbereichen konnte wegen der Anlage der PISA 2000-Tests keine vergleichende Aussage gemacht werden.

Im eigens getesteten Bereich zu den Problemlösefähigkeiten lag der erzielte Mittelwert bei 513 Punkten, was einem Rang zwischen 10 und 15 in den OECD-Ländern entspricht.[28] Etwa 40% der deutschen Schüler befanden sich allerdings unterhalb von oder auf Level eins (von drei) der angelegten Problemlösekompetenz-Skala, sind also als *Weak or Emergent Problem Solvers* bzw. *Basic Problem Solvers* einzustufen. Wie auch für die mathematischen Befunde liegen in Deutschland die Ergebnisse der Schüler weiter auseinander als in fast allen anderen Ländern, die einen ähnlichen Durchschnitt erzielten.

Besteht ein Zusammenhang zwischen den mathematischen Fähigkeiten der Schüler und ihren Kompetenzen im Bereich Problemlösen? Auch zu dieser Frage äußerte sich der PISA-Bericht, und zwar wie folgt: Es besteht, über die gesamte Studie hinweg betrachtet, ein Zusammenhang von 0.89 zwischen den Problemlösefähigkeiten und der festgestellten Mathematischen Grundbildung, der die Werte für den Zusammenhang zu Lesekompetenz, respektive Naturwissenschaftlicher Grundbildung signifikant übertrifft.[29] Für Deutschland lässt sich außerdem die Feststellung treffen, dass die Problemlösefähigkeiten der Schüler statistisch signifikant *über* ihren mathematischen Fähigkeiten liegen, was „darauf hinweisen mag, dass Schüler allgemeine Fertigkeiten besitzen, die durch das Mathematikcurriculum nicht gänzlich ausgeschöpft werden“ (OECD 2004b: 56, Übersetzung des Autors).

[27] Entsprechend den Leitideen im deutschsprachigen Diskurs *Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall;* die Zusammenlegung von Zahl und Messen ergibt *Quantity*, die anderen drei Leitideen sind jeweils einzeln vertreten.

[28] Zur Methodologie und warum keine feste Rangfolge existiert, vgl. OECD 2004b.

[29] Der statistische Zusammenhang Problemlösen / Lesekompetenz beträgt 0.82, der für Problemlösen / Naturwissenschaftliche Grundbildung 0.80.

1.4 PISA 2006

Der vergleichende Blick, den die Studie selbst auf die Ergebnisse aus 2003 und 2006 wirft, zeigte die deutschen Ergebnisse, wie die der Mehrheit der Teilnehmerländer, unverändert.

1.5 PISA 2012

Die im Jahr 2012 durchgeführte PISA-Studie beinhaltete erneut einen eigenen Teil zur Problemlösefähigkeit und die Ergebnisse zwölf Jahre nach der ersten PISA-Studie in Deutschland wurden mit Spannung erwartet. Dabei wurde die Problemlösefähigkeit nicht nur in Verknüpfung mit mathematischen Fähigkeiten abgeprüft, sondern es wurde auch untersucht, ob auch ein Zusammenhang zwischen der Problemlösefähigkeit einerseits und der Lesefähigkeit und Naturwissenschaften andererseits besteht.

Die deutschen Fünfzehnjährigen nahmen einen Rang im oberen Mittelfeld der Teilnehmerstaaten ein. Erneut zeigte sich, dass gute Leistungen über die Gebiete Mathematik, Lesen und Naturwissenschaften hinweg korrelieren und dass zwischen der Problemlösekompetenz und der allgemeinen mathematischen Performanz ein mit einem Wert von 0.81 engerer Zusammenhang statistisch nachweisbar ist als zwischen der Problemlöse- und der Lesefähigkeit bzw. Problemlösen und Naturwissenschaften. Die sehr differenzierte Analyse zeigte jedoch noch etwas sehr deutlich: Deutsche Schüler schneiden im Problemlösen, gemessen an ihren allgemeinen Fähigkeiten in Mathematik, Lesen und Naturwissenschaften unterdurchschnittlich ab.[30]

Zusammenfassung

Neben den in Punkten gemessenen Ergebnissen und der daraus entstandenen Rangfolge waren es vor allem drei Aspekte der PISA-Studien, die Aufmerksamkeit erregten und zu bis heute andauernden politischen, gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Debatten führten, die die anhaltende Umgestaltung des deutschen Bildungssystems seitdem begleiten:

1. Die auffallend große Spannweite innerhalb der Ergebnisse deutscher Schüler.
2. Die extreme Abhängigkeit der gemessenen Fähigkeiten und Fertigkeiten vom sozio-ökonomischen Hintergrund.
3. Das negative Verhältnis von Bildungsinvestition und Bildungsertrag.

[30] Vgl. OECD 2014: 69.

1.6 Die Bildungsstandards

Nach dem Scheitern deutscher Schüler bei ersten internationalen Vergleichsstudien, entschied die Kultusministerkonferenz im Oktober 1997 mit dem Konstanzer Beschluss, das deutsche Schulsystem künftig international vergleichen zu lassen (s.o.), um Erkenntnisse über die Stärken und Schwächen der Schüler in den einzelnen Kompetenzbereichen zu erhalten. Während im deutschen Schulsystem bis dato die Steuerung schulischer Leistungen vorherrschend über die Lehrpläne erfolgte und damit inputorientiert war, zeigte sich, dass die Staaten, die durch eine systematische Rechenschaftslegung in Form von Schulleistungsstudien, zentralen Prüfungen oder einer Schulevaluation, deutlich bessere Leistungen erzielten. Die daraufhin von der KMK eingeleitete Bildungsreform legt einen Schwerpunkt ihrer Arbeit auf die Entwicklung und Einführung bundesweit einheitlicher Bildungsstandards, die eine allgemeine Vergleichbarkeit der Schulabschlüsse, die Qualität schulischer Bildung sowie die Durchlässigkeit des Bildungssystems sichern sollen (KMK 2004a: 5, 9). Der Wechsel weg von inputorientierten Bildungszielen in Form von Curricula hin zu outputorientierten Standards und der so mögliche Einsatz von Indikatoren bilden die Grundlage, um Qualitätsentwicklung und Qualitätssicherung in das deutsche Bildungswesen zu implementieren und zu evaluieren.

Im Dezember 2003 wurden die Bildungsstandards für die Fächer Mathematik, Deutsch und erste Fremdsprache für den Mittleren Bildungsabschluss verabschiedet. Grundlage für die Erarbeitung der deutschen Bildungsstandards bildeten die Standards der amerikanischen Mathematikdidaktikervereinigung (NCTM), der Gemeinsame Europäische Referenzrahmen für Sprachen, die Kompetenzstufen in Anlehnung an die Large-Scale-Untersuchungen sowie die Klieme-Expertise „Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards“ (KMK 2004a: 15), die zuvor von der Bundesregierung in Auftrag gegeben wurde.

Die Konzeption der Bildungsstandards für das Fach Mathematik[31] greift die in der PISA-Studie verwendete Unterscheidung in prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen auf und formuliert sechs allgemeine mathematische Kompetenzen[32], die im Lernprozess erworben werden sollen. Die im Rahmen der PISA-Studie überprüfte Problemlösekompetenz wird als Kompetenz K2 „Probleme mathematisch lösen“ in den

[31] Auf für die vorliegende Arbeit wesentliche Aspekte der Bildungsstandards für das Fach Mathematik wird in Kap. 6.1 vertiefend eingegangen.

[32] Dies sind gemäß den Bildungsstandards *Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen(K2), Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden(K4), Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)* und *Kommunizieren (K6)*, vgl. hierzu Kap. 2.3.

Bildungsstandards verankert, worunter die Fähigkeiten, „vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten, geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden und die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren" (KMK 2004b: 8) zusammengefasst werden.

Neben diesem fachimmanenten Anspruch soll durch die Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln auch die allgemeine Problemlösefähigkeit erworben und entwickelt werden, die eine der drei zentralen Grunderfahrungen[33] im Mathematikunterricht ist und zur überfachlichen Bildung der Schüler gehören soll.[34]

Fazit

Mit der Einführung der Bildungsstandards im Jahr 2004 wurden alle Bundesländer zur Implementierung und Anwendung bundeseinheitlicher Standards verpflichtet. Für die Bundesländer bedeutete dies, ihre Lehrplanschriften oftmals radikal zu überarbeiten oder gänzlich neu zu schreiben, um sie an den Bildungsstandards mit ihren klaren Kompetenzformulierungen auszurichten.[35] Dieser erste Schritt der Bildungsreform nahm in den Bundesländern unterschiedlich viel Zeit in Anspruch (vgl. Abb. 3) und zeigte sehr unterschiedliche Ergebnisse, wie in Kapitel 3 im Detail dargestellt wird.

Doch auch acht Jahre nach der Einführung der Bildungsstandards blieben die mathematischen und problemlösebezogenen Leistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler in der PISA-Studie 2012 deutlich hinter den Erwartungen zurück. Es gibt sicherlich zahlreiche Gründe, warum in den internationalen Vergleichsstudien bislang nicht die erhoffte Steigerung der Leistungen deutscher Schüler zu beobachten ist.

Eine These dieser Arbeit ist, dass ein entscheidender Grund in der unzureichenden, teils misslungenen Integration der Bildungsstandards in die Lehrpläne liegt. Was genau damit gemeint ist und wo diese Schwierigkeiten im Einzelnen liegen, zeigt die Analyse der Lehrplanschriften für das Fach Mathematik in den Kapiteln 3 und 4.

[33] Mehr zu den Grunderfahrungen im Mathematikunterricht in Kap. 6.1.1.
[34] Vgl. KMK 2004b: 6.
[35] Vgl. KMK 2004a: 10-11.

2 Aufgabe, Problem und Problemlösen: allgemeine Aspekte

Bevor im anschließenden Kapitel die Lehrpläne für das Fach Mathematik auf ihre Aussagen zum Problemlösen hin untersucht werden, ist es sachlich und für das Verständnis der Analyse notwendig, einen verbindlichen terminologischen Rahmen zu schaffen; daher sollen hier die Begriffe Aufgabe, Problem und Problemlösen diskutiert, voneinander abgegrenzt und die für diese Arbeit zugrunde gelegten Definitionen vorgestellt werden.

2.1 Problem und Aufgabe: eine erste Definition

Das Wort Problem [griechisch προβλεμα = "das Vorgelegte"] wird im Brockhaus (2006:129) allgemein als „schwierige Aufgabe, komplizierte Fragestellung" oder auch als „nicht gelöste Frage" beschrieben. „Es beruht auf [...] der Erkenntnis, dass das verfügbare Wissen nicht ausreicht, um eine gestellte Aufgabe zu bewältigen oder einen Zusammenhang zu durchschauen, dessen Verständnis erstrebt wird [....]. Das Problem ist Ausgangspunkt des Fragens und Forschens [...]" (BROCKHAUS 2006:129).

In der Alltagssprache wird der Begriff *Problem* oft auch synonym mit den Begriffen *Ärger, Erschwernis, Komplikation, Schwierigkeit* oder *Unannehmlichkeit* gebraucht.

Neben dieser ganz allgemeinen Bedeutung findet man in der Psychologie ebenso wie in der Mathematikdidaktik spezifischere Definitionen des Begriffs *Problem*, von denen einige kurz vorgestellt werden sollen.

Dörner[36] definiert den Begriff *Problem* als einen unerwünschten Anfangszustand, den der Betreffende aufgrund fehlender Mittel und Methoden nicht unmittelbar in den für ihn wünschenswerten Zielzustand überführen kann. Der Betreffende sieht sich einer *Barriere* gegenüber, die die notwendigen Transformationen des Anfangs- in den Zielzustand zu überführen verhindert. Die Barriere kann bezüglich ihrer Beschaffenheit, in ihrem Ausmaß und in ihrem Umfang variieren, so dass das Problem und die damit verbundene Problemlösung von der Art der zugrundeliegenden Barriere abhängig sind[37] (oder einander bedingen). Darüber hinaus grenzt DÖRNER (1979: 10) das Problem klar von der Aufgabe ab, indem er schreibt:

[36] Dietrich Dörner (*28. September 1938 in Berlin) ist ein deutscher Psychologe und emeritierter Hochschullehrer der Otto-Friedrich-Universität Bamberg.
[37] Vgl. DÖRNER 1979: 10-12.

> *„Aufgaben sind geistige Anforderungen, für deren Bewältigung Methoden bekannt sind. […] Aufgaben erfordern nur reproduktives Denken, beim Problemlösen aber muß etwas Neues geschaffen werden."*

Während bei einer Aufgabe also lediglich der Einsatz bekannter und grundsätzlich abrufbarer Mittel zum Erreichen des Zieles notwendig ist, muss bei einem Problem das Wissen für die durchzuführende Transformation erst konstruiert oder vorhandene Kenntnisse um- bzw. neustrukturiert werden.[38]

Der auf dem Gebiet der Didaktik des Problemlösens lange Zeit (und wohl noch immer) maßgebliche Mathematiker George Pólya (1980: 3) hat ebenfalls den Begriff *Aufgabe* - im unterrichtlichen Kontext - differenziert definiert:

> *„Es gibt alle möglichen Unterscheidungsmerkmale zwischen Aufgaben; der für den Lehrer wichtigste Unterschied ist der zwischen Routine- und Nichtroutineaufgabe. Die letzteren verlangen vom Schüler ein gewisses Maß an Kreativität und Originalität, die Routineaufgaben dagegen nicht. Die Nichtroutineaufgabe kann vieles, die Routineaufgabe dagegen kann praktisch nichts zur geistigen Entwicklung des Schülers beitragen. Die Grenzlinie zwischen beiden Arten von Aufgaben mag nicht besonders scharf sein; aber die Extremfälle sind klar erkennbar."*

Die Unterscheidung, die Pólya hier trifft, lässt unmittelbar die Vergleichbarkeit seiner *Routineaufgabe* mit dem heute gängigen Begriff *Aufgabe* und seiner *Nichtroutineaufgabe* mit dem Begriff des *Problems* (manchmal auch *Problemaufgabe*) erkennen.

Schoenfeld (1985: 74) betont und ergänzt den subjektiven Charakter des Problems, wenn er feststellt:

> *„The difficulty with defining the term problem is that problem solving is relative. The same tasks that call for significant efforts from some people may well be routine exercise for others, and answering them may just be a matter of recall for a given mathematician. Thus being a "problem" is not a property inherent in a task. Rather, it is a particular relationship between the individual and the task that makes the task a problem for that person."*[39]

---

[38] Vgl. Dörner 1979: 27, 37.

[39] „Die Schwierigkeit mit der Definition des Begriffs Problem liegt darin, dass Problemlösen relativ ist. Dieselbe Aufgabe, die von einigen beträchtliche Anstrengungen erfordert, können für andere sehr wohl Routineaufgaben sein, und sie zu lösen mag für einen Mathematiker lediglich eine Sache der Erinnerung sein. Daher ist es nicht eine inhärente Eigenschaft einer Aufgabe, die sie zu einem „Problem" macht. Vielmehr ist es eine bestimmte Beziehung zwischen dem Individuum und der Aufgabe, die die Aufgabe für diese Person zu einem Problem macht." (Übersetzung des Autors)

Mit anderen Worten: Es ist für den Unterrichtenden nicht möglich, Aufgaben und Probleme voneinander zu trennen, ohne über exakte Kenntnisse der Fähigkeiten, Fertigkeiten und des Vorwissens der Lernenden zu verfügen. Hinzu kommt, dass in Bezug auf die Frage eines binnendifferenzierten Unterrichts, eine Aufgabe / ein Problem ganz unvermeidlich eine Doppelgestalt in den Köpfen der Schüler als Individuen einnimmt: Während einige Schüler an der Aufgabe ihre mathematischen Kenntnisse lediglich kurz wiederholend einsetzen, werden andere einiges rekonstruktives Geschick benötigen, um sich wieder an den einst bekannten „Merksatz“ zu erinnern. Möglich ist auch, dass eine Gruppe von Schülern entweder keinerlei Verbindungen zu bereits vorhandenen Kenntnissen herstellen kann, oder aber diese Kenntnisse niemals gefestigt vorhanden waren, so dass bei einer ernsthaften Auseinandersetzung für diese Lerner nur von einem Problem gesprochen werden kann.

Es wird von einer mathematischen *Aufgabe* gesprochen, wenn jemand ein Ziel erreichen möchte und die zur Zielerreichung notwendigen Methoden und Operationen kennt, diese abrufen und sicher durchführen kann.[40]

Ein (mathematisches) *Problem* liegt vor, wenn jemand ein Ziel erreichen möchte, sich jedoch Hindernissen (Barrieren) gegenüber sieht, die es ihm unmöglich machen, das Ziel auf direktem Weg und mit den vorhandenen (und bekannten) Mitteln und Methoden zu erreichen.
Der Handlungsplan eines Problemlösers weist somit Lücken auf, die ihn an einem routinemäßigen Vorgehen hindern.

Ob eine Aufgabe oder ein Problem vorliegt, ist immer personenabhängig, da das Vorhandensein einer Barriere von dem Vorwissen und den Fähigkeiten des Problemlösers abhängig ist.

2.2 Problemlösen: Ein universeller Prozess

Der Begriff des Problemlösens ist nicht auf die Mathematik beschränkt, sondern findet auch in vielen anderen Wissenschaftsbereichen wie Philosophie, Psychologie, Informatik, Ingenieurwesen und Chemie sowie in nahezu allen Lebensbereichen Anwendung.

[40] Vgl. LANGE 2013: 28.

Probleme zu lösen ist Teil unseres täglichen Lebens. Ein verloren gegangener Gegenstand, die Koordination und Einhaltung wichtiger Termine, die Vorbereitung auf eine Prüfung, das Lösen einer Schul- oder Hausaufgabe: Immer wieder sehen wir uns kleineren oder größeren Problemen gegenüber, die es zu lösen gilt und für deren erfolgreiche Bewältigung ganz unterschiedliche Fähigkeiten bzw. Dispositionen wie Motivation, Neugierde, Ausdauer, Flexibilität, Kreativität, Zielstrebigkeit und Reflexionsfähigkeit notwendig sind. Rückschläge, Frustration und Grenzerfahrungen müssen dabei ebenso in Kauf genommen werden, wie die Möglichkeiten, sein Ziel am Ende nicht zu erreichen. Andererseits kann eine erfolgreiche Problemlösung eine innere Befriedigung verschaffen, zu Lob und Anerkennung verhelfen, Chancen eröffnen oder auch allgemein Selbstbewusstsein und Selbstwertgefühl stärken, so dass die erzielten Erfolgserlebnisse zu einer höheren Leistungs- und Lernbereitschaft beitragen.

Nicht jeder Mensch ist ein intuitiv guter Problemlöser. Neben der geeigneten Motivationslage und dem zur Verfügung stehenden (fachlichen) Wissen ist auch ein gewisses Maß an „geistiger Beweglichkeit“ (vgl. BRUDER/COLLET 2011: 31) erforderlich. Gute Problemlöser sind in der Lage, das Problem auf seine wesentlichen Merkmale zu reduzieren, es zu abstrahieren und Gedankengänge auch rückwärts nachzuvollziehen. Darüber hinaus können sie Abhängigkeiten schnell erkennen und situationsangepasst mehrere Aspekte gleichzeitig und das Problem aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten. Zudem sind sie in der Lage, Annahmen und Kriterien ohne Schwierigkeiten zu variieren und bekannte Vorgehensweisen auf neue Kontexte zu übertragen.[41] Wer über diese Fähigkeiten verfügt, hat einen großen Vorteil auf dem Gebiet des Problemlösens. Doch nicht jeder Mensch besitzt ein ausreichendes Maß an solch geistiger Beweglichkeit, um quasi-intuitiv erfolgreich Probleme zu lösen[42].

Bruder[43] und Collet[44] haben aus diesem Anlass ein schulbezogenes Konzept zur Förderung der Problemlösekompetenz entwickelt, das auf der Annahme basiert, dass mangelnde geistige Beweglichkeit durch den (bewussten) Erwerb heuristischer Vorgehensweisen ausgeglichen werden kann, so dass weniger gute Problemlöser vergleichbare Ergebnisse

---

[41] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 31-33.

[42] Es ist natürlich auch nicht gesagt, dass sich Probleme beliebiger Komplexität rein intuitiv lösen lassen. Grenzen sind hier sowohl individuell als auch prinzipiell gesetzt.

[43] Regina Bruder ist Professorin für Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität Darmstadt; ihr Forschungsschwerpunkt liegt auf der unterrichtlichen Vermittlung der Problemlösefähigkeit.

[44] Christina Bauer, geborene Collet, promovierte an der Technischen Universität Darmstadt zur Förderung der Problemlösekompetenz im Mathematikunterricht.

erzielen können wie solche, die über eine ausgeprägte Form geistiger Beweglichkeit verfügen.[45]

Wie bereits erwähnt haben verschiedene Bildungsstudien zu einer Neubewertung der Ausrichtung schulischen Lernens und damit zur Festschreibung zuvor weniger beachteter Ziele geführt – im Mathematikunterricht zählen große Teile der prozessbezogenen Kompetenzen dazu, darunter das Problemlösen (vgl. Kap. 1.6), das nun Teil der schulischen Allgemeinbildung ist. Mit Blick auf Chancengleichheit ist eine gezielte Herausbildung „geistiger Beweglichkeit" im Sinne Bruders und Collets sehr zu begrüßen, da die Problemlösefähigkeit und andere Aspekte der Grundbildung eng verknüpft sind.

Wenngleich das Problemlösen in allen Lebensbereichen von elementarer Bedeutung ist, lässt sich in den vergangenen Jahren eine besonders intensive fachdidaktische Auseinandersetzung mit dem mathematischen Problemlösen und dem Problemlösen im Mathematikunterricht beobachten, und die Anzahl der Publikationen zu diesem Thema ist stark angestiegen. Bruder/Collet (2011), Link (2011), Grieser (2013) und Rott (2013) sind nur einige Autoren, die sich ausführlich mit dem (mathematischen) Problemlösen als *Prozess* beschäftigt haben.[46]

John Dewey[47] befasste sich mit der Frage des vollkommenen Denkaktes aus kognitions-
psychologischer Perspektive. Dabei nahm er eine implizit konstruktivistische Grundhaltung ein, die den zirkulären Prozess zur Problemlösung in folgende fünf Schritte gliedert:

1. Diskrepanzempfinden: Auftreten einer Schwierigkeit / eines beunruhigenden Phänomens
2. Explikation der Schwierigkeit: Prüfung der Tatsachen zur Abgrenzung und Klärung des Problems
3. Exploration des Problems: Erarbeitung von Hypothesen / möglichen Lösungen
4. Exploration der Lösungsansätze: Bewertung der Realisierbarkeit und der Erfolgsaussichten
5. Erprobung der Lösungsansätze und Prüfung der Ergebnisse[48]

[45] Vgl. Bruder/Collet 2011.
[46] Für einen detaillierten Einblick soll auf die im Literaturverzeichnis vollständig zitierten Publikationen der genannten Autoren verwiesen werden.
[47] John Dewey war US-amerikanischer Philosoph, Psychologe und Pädagoge, *20.10.1859, †01.06.1952.
[48] Vgl. Dewey 1910/2002: 11.

Die augenfälligen Parallelen dieses Ansatzes zu den wenig jüngeren Ausarbeitungen Pólyas weisen laut Hersh auf wissenschaftliche Strömungen hin, die ihren Niederschlag in den verschiedensten Forschungsdisziplinen des frühen 20. Jahrhunderts fanden, ohne dass eine direkte Übernahme angenommen werden muss.[49] Auch Neuhaus und Heinze betonen die inhaltliche Nähe zwischen Deweys und Pólyas Stufenmodellen.[50]

George Pólya hat den Begriff des Problemlösens in der Mathematikdidaktik nachhaltig geprägt und sein Werk *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme* (Originaltitel *How to solve it*) aus dem Jahre 1967 gehört bis heute zu den Grundlagewerken auf dem Gebiet der Didaktik des Problemlösens. Sein Ziel war es, den Lernenden zum selbständigen Denken zu verhelfen, indem sie lernen, ein vorliegendes Problem zu strukturieren und auf diese Weise nicht nur eine Lösung zu erhalten, sondern auch die dahinterstehenden „Motive und Verfahren" (PÓLYA 1995: 8) zu verstehen. Nach Pólya vollzieht sich das mathematische Problemlösen in vier Phasen:

1. Verstehen der Aufgabe
2. Entwicklung einer Lösungsidee
3. Ausarbeitung einer Lösung / Aufstellen eines Plans
4. Rückschau und Einordnung

Diese Phasen verknüpft er mit verschiedenen Fragenstellung wie: *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken?* (PÓLYA 1995), an denen sich der Lernende orientieren kann. Bis heute wird in der Mathematikdidaktik im Wesentlichen der Problemlöseprozess nach Pólya zugrunde gelegt, wenn auch gelegentlich leicht adaptiert.[51] Empirische Studien (vgl. BRUDER/COLLET 2011) belegen die Tragfähigkeit der von ihm etablierten Phasierung.

Problemlösen soll in dem Bemühen gesehen werden, Hindernisse auf dem Weg vom Anfangszustand zu dem erwünschten Endzustand zu überwinden. Der Problemlöser kennt zwar kein Verfahren, wie er die Hindernisse überwinden kann, ist aber bereit, sich trotz Schwierigkeiten und Rückschlägen mit dem Problem zu befassen, um sich dem Zielzustand zu nähern.

---

[49] Vgl. HERSH 2014: 68 f. Hersh bezeichnet ganz konkret Charles Sanders Peirce als Vorläufer sowohl Deweys als auch Pólyas.
[50] Für eine detailliertere Darstellung der Verbindungen zwischen Pólyas Arbeiten und psychologischen Modellen siehe ROTT 2013: 50 ff.
[51] Vergleiche die Arbeiten von SCHWARZ (2006), BRUDER/COLLET (2011), ROTT (2013), SCHREIBER (2014).

Um ein Problem erfolgreich lösen zu können, muss der Problemlöser über entsprechende kognitive wie auch metakognitive Fähigkeiten verfügen. Die kognitiven Fähigkeiten umfassen das Wissen in Form von Regeln, Sätzen, Definitionen, Beweisen und Algorithmen. Unter Metakognition wird die Fähigkeit verstanden, Wissen zielgerichtet auszuwählen, anzuwenden und Lösungsideen zu entwickeln.[52]
Problemlösen vollzieht sich somit in einem dynamischen Prozess, in dem oftmals mehrere Schritte notwendig sind, um eine Lösung zu finden, und der eine ständige Reflexion und flexible Adaption der eingesetzten kognitiven wie metakognitiven Mittel erfordert.

2.3 Problemlösen – Nur eine Kompetenz unter vielen?

An dieser Stelle soll nun der Blick auf die *Bedeutung des Problemlösens für die Beschäftigung mit Mathematik* gerichtet werden. Je nach Definition des Problembegriffs und dem damit verbundenem Konkretheitsgrad kann die Einschätzung höchst unterschiedlich ausfallen. Und natürlich spielt auch hier der Zeitgeist eine gewisse Rolle. Welche Position nimmt das deutsche Bildungssystem in dieser Frage ein?

In der Einleitung wurde die aktuelle Situation bereits skizzenhaft umrissen und gezeigt, welch exponierte Stellung die Problemlösefähigkeit nach dem Willen der Bildungspolitik einnehmen soll. Diese Forderung speist sich aus den PISA-Studien ebenso wie aus den Interessen der deutschen Wirtschaft und einer zunehmend empfundenen Unfähigkeit, mit den schulisch erworbenen Kompetenzen die Herausforderungen einer stetig komplexer werdenden Umwelt und Arbeitswelt zu meistern: kleinschrittige und nachahmende Handlungsmuster, eng umgrenzte Aufgaben, übersimplifizierte Lernszenarien erlauben es – selbst guten – Schülern nicht, den flexiblen, situationsangepassten und kreativen Einsatz ihrer eigenen Ressourcen im schulischen Kontext zu erlernen und zu erleben; und nehmen ihnen somit auch die Möglichkeit, eine echte (keineswegs fachimmanente[53]) Problemlösekompetenz zu entwickeln. Schon unter diesem Gesichtspunkt erscheint die in den Bildungsstandards vorgenommene Beiordnung des Problemlösens neben andere allgemeinen / allgemein-mathematischen / prozessbezogene Kompetenzen irreführend; tatsächlich sind alle diese Kompetenzen zusammen als integrale Bestandteile der

---

[52] Vgl. BARDY 2007: 139.
[53] Wie von Bildungsstandards und Lehrplanschriften immer wieder betont wird, handelt es sich um eine überfachliche Kompetenz und ein allgemeines Ziel von schulischem Unterricht.

Problemlösekompetenz insgesamt zu betrachten. Folgt man den Kompetenzdefinitionen der KMK, so drängen sich folgende Überlegungen und Fragen auf:

- *Mathematisch argumentieren:* Kann diese Kompetenz wirklich eigenständig gefasst werden? Setzt sie nicht immer eine vorangehende Beschäftigung (bis hin zur geistigen Durchdringung) mit einer mathematischen Fragestellung voraus? Wie sollen Argumente sinnstiftend und glaubhaft sein, wenn kein Bezugsrahmen existiert, in dem argumentiert werden muss?
- *Mathematisch modellieren:* Wie kann die Fähigkeit zu modellieren ohne konkrete Problemstellungen geschult werden? Und wichtiger, welchen Zweck hat es, ein Modell zu entwickeln, wenn sich keine weitergehende Frage anschließt, die die *Nutzung* des Modells erfordert?
- *Mathematische Darstellungen verwenden:* Rezeptiver Umgang mit solchen Darstellungen beinhaltet automatisch, dass *etwas* in den Darstellungen repräsentiert wird, sei es ein mathematisches Modell, ein innermathematischer Sachverhalt oder ein Realweltproblem. Um die Darstellungen tatsächlich zu verwenden, ist eine Erfassung des Dargestellten unabdingbar. Die eigene Erstellung solcher Darstellungen erfordert darüber hinaus noch praktisch-technische Fertigkeiten.

- *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen:* Diese Elemente sind das, was Alphabete und Phoneme für die Linguistik sind. Abseits ihres Einsatzzwecks sind sie inhalts- und bedeutungslos. Ein Umgang mit diesen Elementen ist also nur in konkreten Verwendungszusammenhängen sowohl sinnvoll als auch verständlich und erlernbar.
- *Kommunizieren:* Welche genaue Unterscheidung wird hier zum Argumentieren aufgebaut? Gelten hier nicht genau die gleichen Einschränkungen bzw. Bemerkungen wie für die Kompetenz des mathematischen Argumentierens?
- *Probleme mathematisch lösen:* Welche distinktive Kompetenz ist hier gemeint? Lassen sich „Probleme mathematisch lösen", ohne mathematisch argumentieren zu können? Ist das mathematische Modellieren nicht integraler Bestandteil des Problemlöseprozesses?[54] Inwieweit sind mathematische Darstellungen und auch die symbolischen, formalen und technischen Elemente der Mathematik nicht gerade Ausdruck des Bemühens, Probleme zu lösen? Und schließt die erfolgreiche

[54] Dies ist selbstverständlich keine neue Idee, sondern wird im Problemlösekreislauf nach Pólya angenommen.

Lösung eines Problems nicht auch oft die Kommunikation mit ein, potenziell auf allen Stufen des Problemlöseprozesses?

Besonders deutlich tritt die Problematik bei der beigeordneten Kompetenz „Modellieren" hervor, die ausschließlich als Teil eines Problemlöseprozesses verständlich ist.[55] Die auch visuell präsentierte isolierte Juxtaposition der prozessbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards ist aus diesen Überlegungen heraus irreführend. Daher sei hier eine adaptierte Darstellung der prozessbezogenen Kompetenzen, wie sie in den deutschen Lehrplanschriften für den Mathematikunterricht festgelegt sind, vorgeschlagen (Abb. 2).

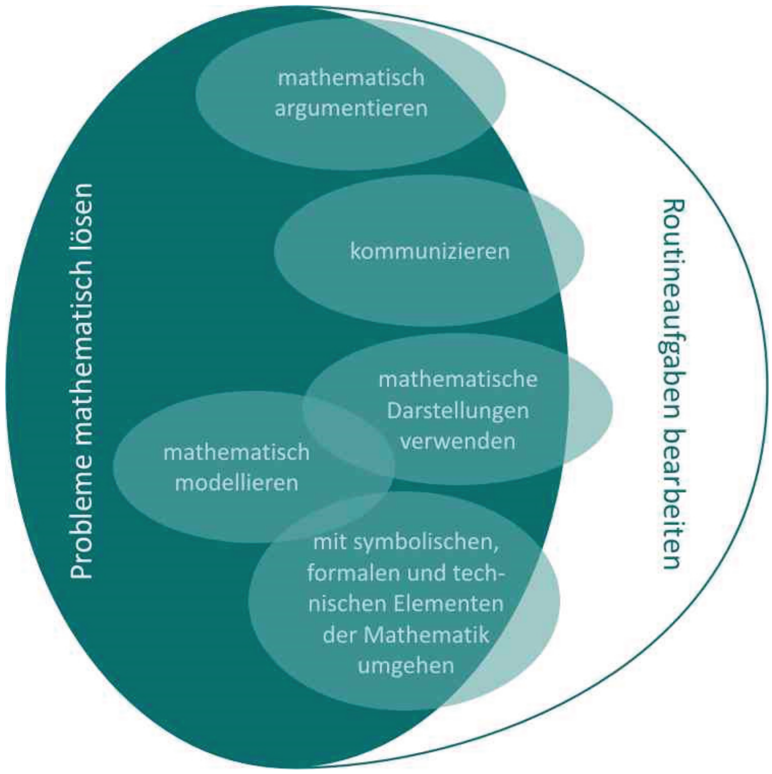


Abb. 2 Zum Zusammenhang zwischen Problemlösen und den anderen prozessbezogenen Kompetenzen.

Aus dieser Perspektive ist ein *Problem* stets Kern mathematischen Handelns – wenn der Problembegriff nicht in unzulässiger Weise eingegrenzt verstanden wird, wie es von verschiedenen Seiten gern getan wird.[56] Und damit sind große Teile des mathematischen Handelns immer (auch) Akte des Problemlösens.

Zu betonen ist, dass die Bedeutung der Teilkompetenzen keineswegs in Frage gestellt werden soll. Die oben gestellten Fragen und Anmerkungen reflektieren bereits die *Bidirek-*

[55] Vgl. GREEFRATH 2006: 17.
[56] Für die in dieser Arbeit verwendete Definition siehe Kap. 2.1.

tionalität der Verknüpfung. Andererseits gehört zu einer echten Problemlösekompetenz noch mehr, wie im folgenden Kapitel zu sehen sein wird.

2.4 Merkmale von Routine- und Problemaufgaben

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die Begriffe Aufgabe, Problem und Problemlösen definiert und voneinander abgegrenzt wurden, sollen nun die wichtigsten Merkmale, die Aufgabe und Problem(-aufgabe) unterscheiden, kontrastiert und anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. Die nachfolgende Tabelle fasst dazu die Aussagen mehrerer Autoren zu der von ihnen vorgenommenen Charakterisierung von Routine- und Problemaufgaben zusammen (vgl. LANGE 2013: 24-29). Sie erhebt dabei keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Routineaufgabe	Problem(-aufgabe)
Aufgabe kann einem bestimmten (mathematischen) Bereich oder Thema zugeordnet werden.	Kein direkter Zugang zur Aufgabe erkennbar (zum Beispiel über einen bestimmten mathematischen Bereich oder ein Thema).
Es ist offensichtlich, was gegeben und gesucht wird.	Aufgabestellung wirft Fragen auf, die ein Hindernis darstellen und ist offen / mehrdeutig. Der Zielzustand ist unbekannt oder nicht genau definiert.
Aufgabe wird nicht als (subjektiv) schwierig empfunden.	Aufgabe wird (subjektiv) als schwierig oder ungewohnt empfunden.
Lösungsweg ist offensichtlich und abrufbar.	Die (individuelle) Suche nach Lösungsideen und -wegen ist notwendig.
Einzusetzende Mittel, Methoden und Operationen sind bekannt und abrufbar.	Kein Zugang zu etwas Anwendbarem vorhanden. Entwicklung neuer Erkenntnisse erforderlich.
Reproduziertes Wissen oder die Anwendung von Algorithmen liefert die Lösung.	Anwendung verschiedener Verfahren und Verknüpfung sowie mehrere Transferleistungen sind notwendig.
Kein kreativer Prozess notwendig.	Es wird ein gewisses Maß an Kreativität gefordert.
Lösungsgarantie (Routine- oder Rechenfehler ausgenommen).	Keine garantierte Lösung.
Kein (tieferes) Verständnis notwendig.	Fehlendes Verständnis liefert auch keinen Erfolg.
Lässt keinen Raum zum Weiterdenken oder weitere mathematische Fragestellungen.	Lässt Raum zum Weiterdenken, für mathematische Fragestellungen oder einen alternativen Lösungsweg.

Tab. 1 Übersicht der wesentlichen Unterscheidungsmerkmale von Routine- und Problemaufgabe (in Anlehnung an BARDY 2007: 138 und LANGE 2013: 28 - 36).

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass die Übersicht auf völlig unterschiedliche Arten von Aufgaben und Schritte innerhalb des Problemlöseprozesses Bezug nimmt, so dass nicht alle aufgeführten Merkmale in Erscheinung treten bzw. eine Rolle spielen müssen. Ob es sich bei einer vorliegenden Situation um eine Routineaufgabe oder eine Problemaufgabe handelt, hängt schließlich auch von individuellen Vorerfahrungen des

Betreffenden ab.[57] Folgende zwei Beispiele sollen die oben genannten Merkmale von Routineaufgaben einerseits und Problemaufgaben andererseits veranschaulichen.

Routineaufgabe – ein Beispiel

Löse folgende lineare Gleichung nach x auf: $5 \cdot (x-2) = 6 + 3x$

Routineaufgabe	Anmerkung
$5 \cdot (x-2) = 6 + 3x$ Die Aufgabe kann einem bestimmten (mathematischen) Bereich oder Thema zugeordnet werden.	Diese Aufgabe ist nach den Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den Mittleren Schulanschluss der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* zuzuordnen. Die Schüler sollen unter anderem Gleichungen lösen und Fragen nach der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von linearen Gleichungen formulieren.
Aus der Aufgabestellung kann entnommen werden, was gesucht wird.	Gegeben ist die Gleichung $5 \cdot (x-2) = 6 + 3x$ Gesucht wird x.
Aufgabe wird nicht als (subjektiv) schwierig empfunden.	Das Lösen von Gleichungen wird in Jahrgang 8 thematisiert, so dass das Lösen dieser Aufgaben in einer 8. Klasse zu keinen größeren Schwierigkeiten führen sollte.
Lösungsweg ist offensichtlich und abrufbar.	Die Gleichung soll nach x aufgelöst werden. Die hierzu notwendigen Handlungsschritte sind bekannt.
Einzusetzende Mittel, Methoden und Operationen sind bekannt und abrufbar. Reproduziertes Wissen oder die Anwendung von Algorithmen liefert die Lösung.	Vereinfache den Ausdruck rechts und links soweit wie möglich (das Auflösen der Klammern durch Ausmultiplizieren und das Zusammenfassen gleicher Summanden muss beherrscht werden). $5 \cdot (x-2) = 6 + 3x$ | Vereinfachen $5x - 10 = 6 + 3x$ | Addition mit 10 $5x = 16 + 3x$ | Subtraktion von 3x $2x = 16$ | Division durch 2 $L = \{8\}$
Kein kreativer Prozess notwendig.	Das Lösen der Gleichung erfolgt nach einem vorgegebenen Algorithmus.
Lösungsgarantie (Routine- oder Rechenfehler ausgenommen).	Der Algorithmus liefert eine garantierte Lösung. Rechenfehler im Rahmen des Ausmultiplizierens, Umsortierens und der Anwendung des Kommutativgesetztes sind möglich.
Kein (tiefere) Verständnis notwendig.	Beide Seiten links und rechts des Gleichheitszeichens haben denselben Wert. Die durchzuführenden Operationen dürfen den Wahrheitsgehalt der Gleichung nicht ändern.
Lässt keinen Raum zum Weiterdenken oder weitere mathematische Fragestellungen.	Mit der Angabe der Lösung gilt die Aufgabe als gelöst.

Tab. 2 Tabellarische Übersicht über mögliche Schritte beim Lösen einer Routineaufgabe.

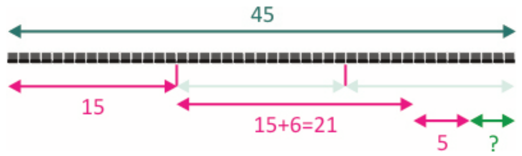
[57] Vgl. Lange 2013: 28 und Kap. 2.1.

Um die hier vorliegende Aufgabe zu lösen, muss der Betreffende lediglich über eine epistemische Struktur (Wissensstruktur) verfügen, die laut Dörner Teil der kognitiven Struktur ist und das Wissen über Regeln, Begriffe, Sätze, Definitionen und die Durchführung von Algorithmen beinhaltet. Unter einem Algorithmus wird eine schrittweise Handlungsabfolge verstanden, die so detailliert und verständlich ist, dass der Betreffende die Anweisungen unmittelbar umsetzen kann und nach einer endlichen Anzahl von Durchführungsschritten zuverlässig eine Lösung erhält.[58] Ganz anders verhält es sich bei folgender Fragestellung.

Problemaufgabe – ein Beispiel

Paula, Matz und Lukas wollen in den Zirkus. Wie alle anderen Besucher, wollen auch sie gerne in der ersten Reihe sitzen. Sie fragen an der Kasse, ob dort noch Plätze frei sind. Die Kassiererin antwortet: „Ein Drittel ist bereits von Schülern belegt, 6 Plätze mehr sind durch Familien besetzt und 5 Plätze müssen für Menschen mit Behinderung freigehalten werden. Insgesamt hat die erste Reihe 45 Plätze.“[59]

Können die drei Freunde die Show aus der ersten Reihe sehen?

Problem(-aufgabe)	Anmerkung
Kein direkter Zugang zur Aufgabe erkennbar (zum Beispiel über einen bestimmten mathematischen Bereich oder ein Thema).	Die Problemaufgabe lässt sich keinem bestimmten mathematischen Inhaltsbereich zuordnen. Sie kann daher im Kontext verschiedener mathematischer Inhalte thematisiert werden, denn es wird kein Lösungsverfahren vorgegeben, so dass unterschiedliche Ansätze und Lösungswege möglich sind.
Die Aufgabestellung wirft Fragen auf, die ein Hindernis darstellenden.	Was ist die Referenzgröße? In welchem Zusammenhang stehen die Größen zueinander?
Die Aufgabe wird (subjektiv) als schwierig oder ungewohnt empfunden.	Auch wenn die hinter der Aufgabe stehenden Rechenoperationen keine Schwierigkeiten darstellen, wird vermutlich der fehlende Zugange zu dem Problem als schwierig empfunden.
Eine (individuelle) Suche nach Lösungsideen und -wegen ist notwendig.	Fragen wie *Was ist gegeben? Was ist gesucht? Wie können alle Angaben zu einer Rechnung vereint werden*? können ebenso zielführend sein wie die Frage, aus welche bekannten Verfahren und Vorgehensweisen eine Lösungsidee entwickelt werden kann.
Anwendung verschiedener Verfahren und Verknüpfung sowie mehrere Transferleistungen sind notwendig. Das Anfertigen einer informativen Figur hilft den Sachverhalt zu strukturieren und Beziehungen zwischen den Angaben und Zusammenhänge herzustellen. Darüber hinaus werden die Aussagen auf die wesentlichen Informationen reduziert und die Größen zueinander in Beziehung gesetzt.	Das Problem lässt sich auf unterschiedliche Art und Weise lösen. **Lösungsidee 1: Erstellen einer graphischen Repräsentationsform** 

[58] Vgl. Dörner 1979: 27.
[59] Die Aufgabe ist angelehnt an die Aufgabe „Krusty der Clown“ der Jahrgangsstufe 8 der TU Darmstadt (o. J.).

	Hieraus wird ? = 45 – 15 – 21 – 5 unmittelbar ersichtlich.
Das Aufstellen einer Gleichung erfordert ein gewisses Maß an Abstraktionsfähigkeit, trägt aber ebenso dazu bei, die Aussagen auf die wesentlichen Informationen zu reduzieren, wie die informative Figur. Die Gleichung beschreibt die algebraischen Zusammenhänge, indem die Informationen zueinander in Beziehung gesetzt werden. Ist die Gleichung einmal aufgestellt, kommen erneut bekannte Mittel und Methoden zum Einsatz, so dass die Anwendung von Algorithmen die richtige Lösung liefert.	**Lösungsidee 2: Aufstellen einer Gleichung** $\begin{aligned} 45\cdot\frac{1}{3}+(45\cdot\frac{1}{3}+6)+5+x&=45 \\ 15+21+5+x&=45 \\ x&=4 \end{aligned}$ Somit gibt es noch 4 freie Plätze in der ersten Reihe.
Es wird ein gewisses Maß an Kreativität gefordert.	Die unterschiedlichen Lösungswege deuten darauf hin, dass kreative Ideen zielführend sein können.
Keine garantierte Lösung.	Fehlende Ideen liefern keine Lösung.
Fehlendes Verständnis liefert auch keinen Erfolg.	Der Betreffende muss wissen, in welchem Verhältnis die Größen zueinanderstehen.
Lässt Raum zum Weiterdenken, für mathematische Fragestellungen oder einen alternativen Lösungsweg.	Die Lösungswege können miteinander verglichen, diskutiert und bewertet werden.

Tab. 3 Tabellarische Übersicht über mögliche Schritte beim Lösen einer Problemaufgabe.

Um diese Problemaufgabe zu lösen, muss der Betreffende nach Dörner nicht nur über epistemische, sondern auch über entsprechende metakognitive und heuristische Strukturen verfügen, um die zur Überwindung der Barrieren notwendigen Transformationen durchführen zu können. Metakognition bezeichnet allgemein das Wissen und die Kontrolle über die eigenen Denk- und Lernaktivitäten, so dass die metakognitive Fähigkeit in Zusammenhang mit dem Problemlöseverhalten, das Erkennen und die Auswahl vorhandenen Wissens und Strategien für ein vorliegendes Problem umfasst.[60]

Heuristische Strukturen setzten sich „[...] aus einem Analysator für die Eigenschaften von Problemen und Aufgaben, aus einem Speicher für Lösungsmethoden (Heurismen) und aus einem Kontrollsystem, welches den Erfolg bzw. Mißerfolg der Anwendung von Lösungsverfahren feststellt“ (DÖRNER 1979: 47 f.) zusammen. Während das Vorhandensein epistemischer Strukturen somit ausreicht, um Routineaufgaben zu lösen, sind zur Problemlösung zusätzliche heuristische Fähigkeiten notwendig, da erst durch sie die Hindernisse auf dem Weg zur Zielerreichung überwunden werden können.

[60] Vgl. DÖRNER 1979: 27.

2.5 Von der Aufgabe zum Problem – Aufgaben öffnen

Es gibt einige charakteristische Merkmale die eine „einfache mathematische“ Aufgabe von einer „guten“ Problemaufgabe unterscheiden. „Gute“ Problemaufgaben ermöglichen (im Gegensatz zu einfachen mathematischen Aufgaben) ein divergentes Arbeiten auf einem individuellen sowie differenzierten Niveau. Darüber hinaus wird eine Vielzahl bereits erworbener mathematischer Kompetenzen angesprochen und miteinander verknüpft, so dass neue mathematische Ideen entwickelt oder auch neue Probleme gefunden werden. Problemaufgaben zielen auf die aktive und konstruktive Auseinandersetzung sowie eine Weiterentwicklung der Mathematik ab, anstatt die Mathematik als fertiges Konstrukt unreflektiert zu nutzen.

Die Bereitschaft, sich mit dem Problem auseinanderzusetzen, die (individuelle) Suche nach einer Lösungsidee, die Verknüpfung verschiedenster mathematischer Kompetenzen, die Entwicklung neuer Erkenntnisse, das Erkennen neuer Fragestellungen und das Finden neuer Wahrheiten oder Problemstellungen stellt den eigentlichen Lernerfolg dar und trägt zum Erwerb der Problemlösekompetenz maßgeblich bei. Um den Problemlöseprozess in Gang zu setzen und damit die Problemlösekompetenz zu fördern, bedarf es Aufgaben, die vom Bearbeiter echte Entscheidungen einfordern, indem sie mehrere Lösungswege zulassen, die Anwendung verschiedener Verfahren ermöglichen, Raum für die Entwicklung neuer Ansätze lassen oder bekannte Verfahren miteinander verknüpfen und (mindestens) eine Transferleistung erfordern. Diese in der Literatur als „offen“ bezeichneten Aufgaben erfüllen in der Regel die Anforderungen an eine Problemlöseaufgabe. Da das Öffnen von Aufgaben in den vergangenen Jahren immer wieder thematisiert wurde (vgl. HERGET 1995, BLUM/WIEGAND 2000, DOCKHORN 2000 und LEUDERS 2003), wird an dieser Stelle nur kurz Bezug auf das Thema genommen, um die für das spätere Konzept relevanten Aspekte anzusprechen.

Nach Wiegand und Blum liegt eine offene Aufgabe vor, wenn sich der Betreffende einem Anfangszustand A gegenüber sieht, den es durch gewisse Transformationen T in einen gewünschten Zielzustand Z zu überführen gilt, jedoch mindestens einer dieser drei Komponenten A, T und / oder Z unklar oder nicht eindeutig ist (BLUM/WIEGAND 2000: 52). Bezogen auf die drei genannten Komponenten lassen sich Aufgaben wie folgt klassifizieren[61]:

[61] Vgl. LEUDERS 2003: 126.

Anfangszustand	Transformation	Zielzustand	Aufgabenformat
x	x	x	**Musteraufgabe mit Lösung**
x	x	-	**Anwendungsaufgabe**
-	x	x	**Umkehrung einer Anwendungsaufgabe**
x	-	x	**Begründungsaufgabe / Beweisaufgabe**
x	-	-	**Problemaufgabe**
-	-	x	**Umkehrung einer Problemaufgabe**
-	x	-	**Erfindung einer Aufgabe zu einem Thema**
-	-	-	**Problemsituation / offene Aufgabe**

Tab. 4 Acht Aufgabenklassen nach Kategorien „Anfangszustand“, „Transformation“ und „Zielzustand“

Obige Tabelle zeigt die acht verschiedenen möglichen Aufgaben-/Problem-Szenarien, die sich kombinatorisch aus den drei Kategorien *Ausgangszustand*, *Transformation* und *Zielzustand* ergeben. Es wird (vereinfacht) nur eine binäre Ausprägung dieser drei Kategorien zugelassen: „x“ für gegeben/bekannt, „-“ für nicht gegeben/unbekannt.[62] Mit Ausnahme der Muster- und Anwendungsaufgaben stellt jedes weitere der so definierten Aufgabenformate spezifische Anforderungen an den Bearbeiter, die man als „heuristische“ Anforderungen bezeichnen kann, da es um strukturelle Entscheidungen für den Prozess der Problemfindung geht. Jedes Format kann darüber hinaus auch hinsichtlich der erforderlichen mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten differenziert ausgestaltet werden.

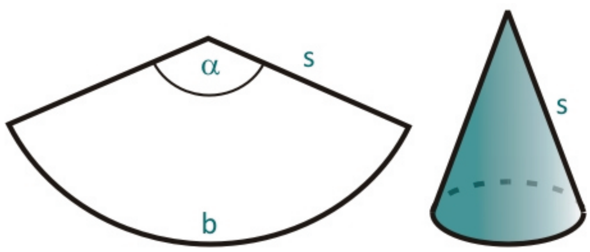
Es bietet sich eine Reihe von Möglichkeiten, eine bereits existierende Aufgabe auf ein gewähltes Aufgabenformat hin anzupassen, was auch als „Öffnen der Aufgabe“ bezeichnet wird. Hierzu zählen zum Beispiel das bewusste Weglassen oder auch das Hinzufügen von Informationen, die Formulierung einer umgekehrten Fragestellung, die Variation einer Aufgabe durch Änderung der Begriffe, Bedingungen, Behauptungen oder Fragen und die methodenoffene, das heißt, nicht auf einen bestimmten Lösungsweg oder eine bestimmte Form der Darstellung fixierte, Aufgabe.[63] Büchter und Leuders fassen diesen Prozess in einer Formel zusammen und schreiben bezüglich des Öffnens einer Aufgabe:

[62] Es leuchtet dem Praktiker unmittelbar ein, dass eine solche Aufteilung die Realität nur unzureichend abbildet, da in vielen Fällen z. B. nur Teile der „gegebenen“ Ausgangssituation auch tatsächlich wahrgenommen oder verstanden werden.
[63] Vgl. LEUDERS 2003: 127 f.

"Öffne die Grundform „Beispielaufgabe" oder „geschlossene Aufgabe" durch Umkehrung, durch Variation oder durch Weglassen" (vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005: 95).

2.5.1 Öffnen durch Weglassen

<u>Beispiel 1:</u>



Rollt man einen Kreissektor zusammen, so entsteht ein Kegel. Der Umfang U des Kegelgrundkreises ist dann gleich der Bogenlänge b des Kreissektors.

Wie groß muss der Mittelpunktswinkel α für den Kreissektor ausgewählt werden, damit ein Kegel mit der Seitenlänge s = 8 cm und Grundkreisradius r = 3 cm entsteht?

Die Formulierung beeinflusst maßgeblich das Anforderungsniveau der Aufgabe. In obiger Fassung beinhaltet diese Aufgabe viele hilfreiche Hinweise, Benennungen und Zeichnungen, so dass dadurch nicht nur die Bearbeitung, sondern auch die anschließende Korrektur der Aufgabe verhältnismäßig schnell und einfach erfolgen kann.

Anders verhält es sich bei der variierten Formulierung:

Bei welchem Mittelpunktswinkel α des Sektors entsteht ein Kegel mit maximalem Volumen, wenn s = 8 cm gegeben ist?[64]

Durch das Weglassen der Bezeichnungen und Skizzen wird so aus der Routineaufgabe eine Problemlöseaufgabe. Es ist außerdem möglich, durch neue Fragestellungen oder Arbeitsaufträge den Aufgabencharakter zu verändern. Fragen wie: *Was meinst Du dazu? Finde den Fehler in der Argumentation! Erfinde eine Geschichte zu einer gegebenen Situation! Wie lässt sich die gerade gelöste Aufgabe variieren und wie verändert sie sich dabei?* sind nur einige Aspekte, mit denen sich ursprünglich „starre" und ergebnisorientierte Aufgaben in vielseitig und kompetenzorientiert Aufgaben.

[64] In Anlehnung an HERGET 2000: 7.

Beispiel 2:

Ein Parkplatz hat eine Größe von 6000 m². Jeder Stellplatz ist 5 m lang und 3 m breit. 30% der Fläche werden für Zufahrtswege benötigt. Wie viele Autos können auf dem Parkplatz parken?

Diese Fragstellung erlaubt genau eine richtige Lösung.

Durch das Weglassen von Informationen kann die Aufgabe geöffnet werden, so dass folgende Problemaufgabe entsteht:

Ein Parkplatz ist ungefähr so groß wie ein Fußballfeld. Wie viele Autos können in etwa darauf parken? Begründe die Antwort!

Durch das bewusste Weglassen der Zahlenangaben entsteht eine Problemaufgabe, bei der Annahmen gemacht, Entscheidungen getroffen, Abschätzungen getätigt und Vereinfachungen gefunden werden müssen, um die zur Berechnung notwendigen Größen zu ermitteln. Wie groß ist ein Fußballfeld? Wie wird der Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet? Wie groß ist ein Auto im Durchschnitt? Wie breit sind die Wege zwischen den Stellplätzen? Wie wird die Wegfläche berechnet? Welche Einheiten werden benötigt?

Diese und andere Fragestellungen müssen beantwortet werden, wodurch eine hohe Transferleistung erforderlich ist und viel mathematischer Freiraum geschaffen wird, der unterschiedliche Lösungen zulässt.

2.5.2 Öffnen durch Formulierung einer Umkehraufgabe

Die Seiten eines Rechtecks sind 12 cm lang und 6 cm breit. Berechne den Flächeninhalt.

Bei dieser Aufgabe liefert die Anwendung der Formel zur Flächeninhaltsberechnung die richtige Lösung. Soll hingegen eine echte Entscheidungsmöglichkeit bezüglich des Lösungsweges bestehen und verschiedene Verfahren sowie Transferleistungen zum Einsatz kommen, kann dies durch die Formulierung einer Umkehraufgabe ermöglicht werden, die zum Beispiel lautet:

Ein Rechteck hat eine Seitenlänge von 32 m und einen Flächeninhalt von 640 m². Berechne den Umfang des Rechtecks.

Um diese Problemaufgabe zu lösen sind neben Transferleistungen auch verschiedene Lösungswege möglich. Neben Kenntnissen über die Umfangs- und Flächeninhaltsformel müssen mehrere Rechenoperationen durchgeführt werden, um eine Lösung zu erhalten. Darüber hinaus sind weitere Fragestellungen möglich, z. B. „Wie ändert sich bei gleichbleibender Breite der Flächeninhalt, wenn die Länge des Rechtecks verdoppelt / halbiert wird?“

2.5.3 Öffnen durch Fehlersuche

„Aus Fehlern lernt man“ heißt ein allgemein bekanntes Sprichwort. Aus der wenig ansprechenden Aufgabe „Löse die folgende Gleichung **$x^2 - 5x - 14 = 0$** wird durch „Einfügen“ eines Fehlers die Aufgabe geöffnet, so dass aus der einfachen Aufgabe die folgende Problemaufgabe wird:

Finde die Fehler in Pauls Hausaufgaben und korrigiere sie:

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$
$$x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 14}$$
$$= -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 14}$$
$$= -\frac{5}{2} + \sqrt{-\frac{31}{4}}$$

D < 0, also hat die Gleichung keine Lösung.

Die richtige Lösung lautet:

$$x_{1,2} = -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 14}$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14}$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{56}{4}}$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$
$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7$$
$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -2$$

Erkennen des Vorzeichenfehlers.

Erkennen des Fehlers bei der Addition eines Bruches mit einer natürlichen Zahl.

Das Beispiel zeigt, wie eine offensichtlich falsch gelöste Aufgabe dazu beitragen kann, sich noch einmal mit den Inhalten auf neue Art und Weise auseinanderzusetzen. Durch diese Aufgabenstellung findet nicht nur die Formel zur Lösung einer quadratischen Gleichung (kurz: p-q- Formel) Anwendung, sondern es werden gleichzeitig weitere Grundfähigkeiten eingeübt und die mathematische Genauigkeit geschult.

Fazit

Nach den bisherigen Ausführungen ist offenkundig, welche Bedeutung der Problemlösefähigkeit als einer der zentralen Grunderfahrungen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht zukommen sollte (WEIGAND et al. 2009: 23). Um ein (mathematisches) Problem zu lösen, benötigt der Problemlöser neben Fachwissen auch heuristische Techniken, die ein zielgerichtetes und planmäßiges Vorgehen auf dem Weg zur Problemlösung unterstützen oder sogar ermöglichen (mehr dazu in Teil II). Dabei kann ein Problem viele Facetten haben; es kann sehr eng gefasst, gezielt oder offen formuliert sein. Es kann mehrere, genau eine oder keine Lösung besitzen. Fest steht: die Kompetenz des Problemlösens, also die Fähigkeit und Fertigkeit, Probleme zu lösen, ist inner- wie außermathematisch eine „Königsdisziplin“, die als Indikator für den gesamten Bildungserfolg Aussagekraft besitzt.

3 Die aktuelle Lehrplansituation

Die Bildungshoheit der Länder, in Verbindung mit den Reformbemühungen der letzten Jahre, hat eine große Begriffsvielfalt für die in den sechzehn Bundesländern geltenden schriftlichen Vorgaben für schulischen Unterricht erzeugt. So ist zu Beginn dieses Teils darauf hinzuweisen, dass die Bezeichnungen „Bildungsplan", „Rahmenlehrplan", „Lehrplan", „Kerncurriculum", „Kernlehrplan"[65] usw. Verwendung finden, womit jeweils die von den Bildungsministerien der Bundesländer gefassten verbindlichen Bestimmungen zum (Mathematik-)Unterricht gemeint sind.

Seit der Veröffentlichung der Bildungsstandards, die die Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (künftig: KMK) im Jahr 2004 verabschiedete, sind die dort verankerten Kompetenzformulierungen für das Ende jeder Doppeljahrgangsstufe 5/6, 7/8 und 9/10, sowie die stets vorangestellten Vorüberlegungen zu der Art des angestrebten Unterrichts und seinen Ergebnissen, verbindlicher Bezugsrahmen für die Lehrplanschriften der Bundesländer.

Bereits ein Blick auf die Publikationsdaten der derzeit verbindlichen Lehrpläne[66] zeigt, dass sich nicht alle zu betrachtenden Lehrplanschriften auf die Bildungsstandards beziehen können und die Lehrplanreform bis heute nicht bundesweit abgeschlossen ist. Allerdings wurden in Deutschland Bildungsreformen schon zuvor zögerlich oder in manchen Fällen gar nicht umgesetzt: „Der von der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung vorgelegte und 1973 von Bund und Ländern verabschiedete Bildungsgesamtplan wurde nie umgesetzt", befindet Becker (2012: 124).

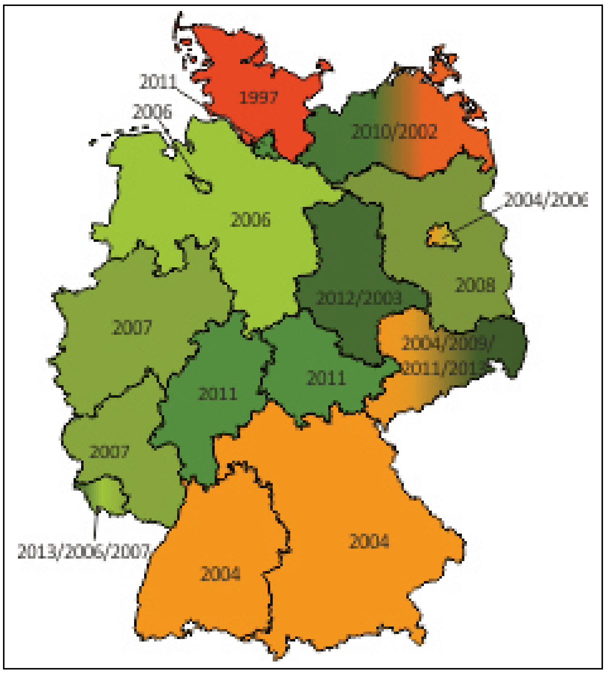


Abb. 3 Veröffentlichungsjahre der aktuellen Lehrplanschriften in der Bundesrepublik Deutschland (Stand Februar 2014).

Er geht so weit festzustellen, dass „auch gegenwärtig [...] im Unterschied zu anderen

---

[65] Im Folgenden wird zusammenfassend für diese Schriften der Sammelbegriff „Lehrplan" verwendet werden.
[66] Stand Februar 2014

europäischen Ländern Bildungsreformen in Deutschland keine einschneidenden institutionellen Veränderungen des schulischen und berufsbildenden Bildungssystems [bewirken]“ (BECKER 2012: 124).

Sowohl die überarbeiteten wie auch die noch nicht reformierten Schriften unterscheiden sich erheblich bezüglich ihrer Struktur, ihres Umfangs, ihres unterrichtlichen Konkretheitsgrades, der verwendeten Terminologie und ihrer fachdidaktischen Kategorisierung. Dieses Kapitel geht mittels einer Bestandsaufnahme folgenden Fragen nach und stellt die Ergebnisse übersichtlich dar:

1. Welchen Begriff haben die einzelnen Bundesländer zur Bezeichnung ihrer Richtlinien gewählt, welche supplementären Schriften enthalten verbindliche Maßgaben für den Mathematikunterricht, und gemeinsam mit welchen anderen Kompetenzen wird das Problemlösen aufgeführt?
2. Was wird unter Problemlösen verstanden, welche Bedeutung wird ihm beigemessen, und welchen Stellenwert besitzt es, gemessen an der Ausführlichkeit der Darstellung und seinem Integrationsgrad in die Gesamtkonzeption (d.h. wie eng ist die Verschränkung mit den fachlichen Inhalten)?
3. Inwieweit werden Fachbegriffe im Zusammenhang mit der Kompetenz des Problemlösens gebraucht (und welche), und mit welchen fachlichen Inhalten wird das Problemlösen verknüpft?
4. Wie nah sind die einzelnen Lehrpläne, bezogen auf das Problemlösen, an die Bildungsstandards angelehnt?

3.1 Begriffsvielfalt

Die folgende Tabelle bietet eine Übersicht über die in den Bundesländern aktuellen Lehrplanschriften und zusätzlichen Handreichungen sowie die für die prozessbezogenen Kompetenzen verwendeten Begrifflichkeiten.[67]

Bundesland	Kernschriften zum Unterricht	Ergänzungsschriften	Bezeichnung für die allgemeinen (mathematischen) Kompetenzen
Baden-Württemberg	Bildungsplan	Hinweise zur Umsetzung des Bildungsplans	vier überfachliche Kompetenzbereiche: ▪ Lernen ▪ Begründen ▪ Problemlösen ▪ Kommunizieren
Bayern	(Stufen-) Lehrplan	1. Fachprofil (Leitgedanken) 2. Erläuterungen und Beispielaufgaben zum Lehrplan	keine explizite Listung oder Benennung
Berlin	Rahmenlehrplan		sechs prozessbezogene mathematische Kompetenzen: ▪ Argumentieren ▪ Probleme lösen ▪ Modellierungen ▪ Darstellungen verwenden ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen ▪ Kommunizieren
Brandenburg	Rahmenlehrplan		siehe Berlin
Bremen	Bildungsplan		drei prozessbezogene Kompetenzen: ▪ Argumentieren und Kommunizieren ▪ Problemlösen (gegliedert in: Erkunden, Lösen, Reflektieren) ▪ Modellieren
Hamburg	Bildungsplan		fünf allgemeine mathematische Kompetenzen: ▪ Modellieren ▪ Argumentieren und Kommunizieren ▪ Probleme lösen ▪ Darstellungen verwenden ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Hessen	Kerncurriculum	Leitfaden Sekundarstufe I	sechs Kompetenzbereiche: ▪ Darstellen ▪ Kommunizieren ▪ Argumentieren ▪ Umgehen mit symbolischen, formalen

[67] Auf die exakte Quellenbezeichnung wird an dieser Stelle verzichtet; alle genauen Angaben zu den hier benannten Publikationen der Bundesländer finden sich am Ende der Arbeit.

			und technischen Elementen ▪ Problemlösen ▪ Modellieren
Mecklenburg-Vorpommern	Rahmenplan	Hinweis auf Internetplattform mit Aufgaben (www.mathe-mv.de)	vier allgemeine mathematische Kompetenzen (Rahmenplan 5/6): ▪ Mathematisch argumentieren und kommunizieren ▪ Aufgaben (Probleme) mathematisch lösen (gegliedert in: Erkunden, Lösen, Reflektieren) ▪ Mathematisch modellieren und mathematische Darstellungen verwenden ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Werkzeugen umgehen sechs allgemeine Kompetenzen (Rahmenplan Regionale Schule 7-10) ▪ K1 – Mathematisch argumentieren ▪ K2 - Probleme mathematisch lösen ▪ K3 - Mathematisch modellieren ▪ K4 - Mathematische Darstellungen verwenden ▪ K5 - Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen ▪ K6 – Mathematisch kommunizieren
Niedersachsen	Kerncurriculum		sechs prozessbezogene Kompetenzbereiche: ▪ Mathematisch argumentieren ▪ Probleme mathematisch lösen ▪ Mathematisch modellieren ▪ Mathematische Darstellungen verwenden ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen ▪ Kommunizieren
Nordrhein-Westfalen	Kernlehrplan	Hinweis auf Sammlung von Muster- und Modellaufgaben	vier prozessbezogene Kompetenzen: ▪ Argumentieren/Kommunizieren ▪ Problemlösen ▪ Modellieren ▪ Werkzeuge
Rheinland-Pfalz	Rahmenlehrplan	Anregungen zur Umsetzung 5 - 6 Anregungen zur Umsetzung 7 - 8 Anregungen zur Umsetzung 9 - 10	sechs allgemeine mathematische Kompetenzen: ▪ K1 - Mathematisch argumentieren ▪ K2 - Probleme mathematisch lösen ▪ K3 - Mathematisch modellieren ▪ K4 - Mathematische Darstellungen verwenden ▪ K5 - Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

			▪ K6 – Kommunizieren
Saarland	Lehrplan		sechs prozessbezogene mathematische Kompetenzen: ▪ K1 - Mathematisch argumentieren ▪ K2 - Probleme mathematisch lösen ▪ K3 - Mathematisch modellieren ▪ K4 – Mathematische Darstellungen verwenden ▪ K5 - Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen ▪ K6 – Kommunizieren
Sachsen	Lehrplan		fünf allgemeine fachliche Ziele: ▪ Entwickeln von Problemlösefähigkeiten ▪ Entwickeln eines kritischen Vernunftgebrauchs ▪ Entwickeln des verständigen Umgangs mit der fachgebundenen Sprache unter Bezug und Abgrenzung zur alltäglichen Sprache ▪ Entwickeln des Anschauungsvermögens ▪ Erwerben grundlegender Kompetenzen im Umgang mit ausgewählten mathematischen Objekten
Sachsen-Anhalt	Grundsatzband, Lehrplan (Sekundarschule)	Niveaubestimmende Aufgaben	vier allgemeine mathematische Kompetenzen: ▪ P – Probleme mathematisch lösen ▪ M – Mathematisch modellieren ▪ A – Mathematisch argumentieren und kommunizieren ▪ D – Mathematische Darstellungen und Symbole verwenden
Schleswig-Holstein	Lehrplan		keine Listung oder Benennung
Thüringen	Lehrplan		sechs allgemeine mathematische Kompetenzen: ▪ Mathematisch argumentieren ▪ Probleme mathematisch lösen ▪ Mathematisch modellieren ▪ Mathematische Darstellungen verwenden ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen ▪ Kommunizieren

Tab. 5 Übersicht über die Bezeichnung für Lehrplandokumente, supplementäre Schriften und Einteilung der allgemein mathematischen Kompetenzen in den deutschen Bundesländern (Stand Februar 2014).

Zum Vergleich hier die in den Bildungsstandards aufgeführten „allgemeinen mathematischen Kompetenzen“, auf die sich die Lehrplanschriftenbeziehen:

K1 Mathematisch argumentieren
K2 Probleme mathematisch lösen
K3 Mathematisch modellieren
K4 Mathematische Darstellungen verwenden
K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
K6 Kommunizieren

Fünf Bundesländer haben die Bezeichnung „allgemeine mathematische Kompetenzen“ übernommen. Sechs Länder sprechen von „prozessbezogenen (mathematischen) Kompetenzen“ und verweisen damit stärker auf den grundlegend anderen Charakter der hierunter gefassten Fähigkeiten und Fertigkeiten.

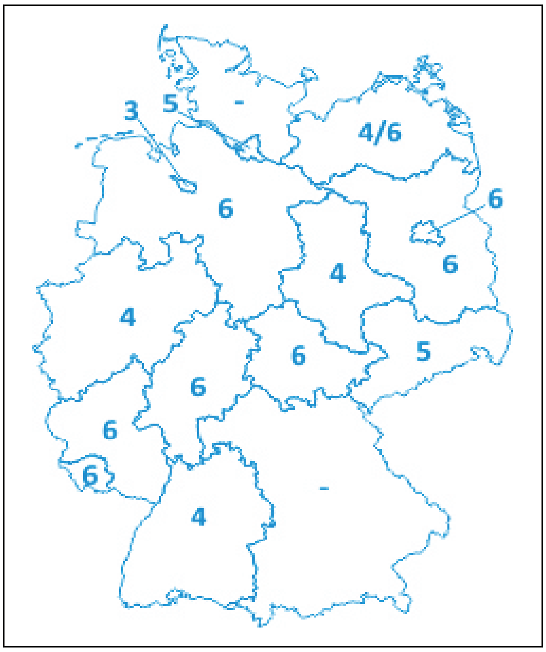


Abb. 4 Übersicht zur Anzahl der prozessbezogenen Kompetenzen in den Bundesländern.

Die Hälfte aller Bundesländer haben die sechs Kategorien der Bildungsstandards unverändert in ihre Lehrpläne übernommen. In den anderen acht Bundesländern wurden Kompetenzen verschmolzen, wovon aber das Problemlösen in keinem Fall betroffen war; in allen Ländern, die eine konkrete Benennung der prozessbezogenen / überfachlichen / allgemeinen Kompetenzen vorlegen, wird das Problemlösen also als eigenständiger Kompetenzbereich benannt und somit auch zum verwandten Kompetenzbereich „Modellieren“ abgegrenzt.[68]

[68] Zur Problematik dieser in den Bildungsstandards festgelegten Beiordnung der sechs allgemein mathematischen Kompetenzen s. Kap. 2.3.

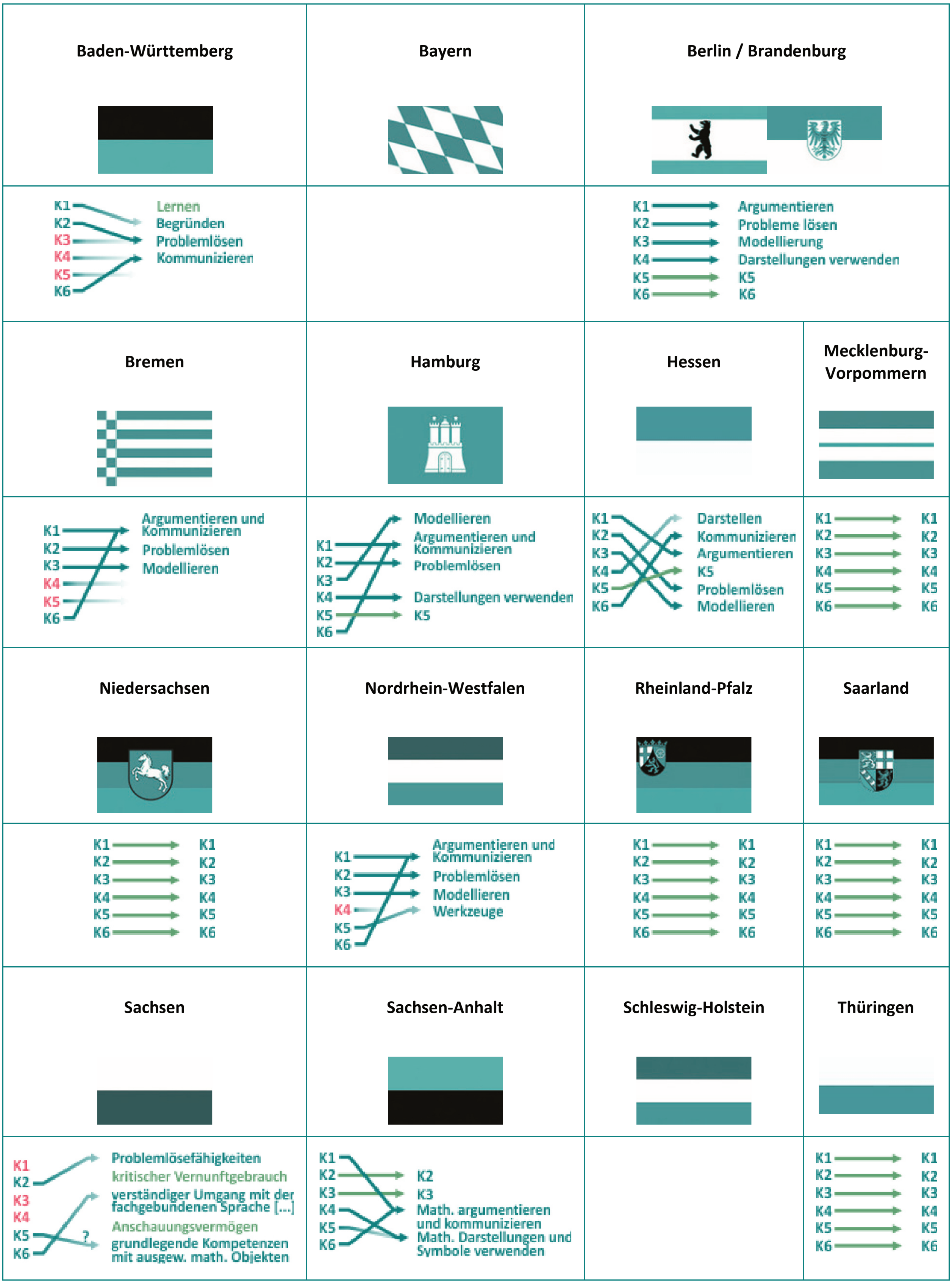


Abb. 5 Übersicht über Kombinationen, Umsortierung, Umformulierung und Neuschöpfung der in den Bildungsstandards als „allgemein mathematisch“ bezeichneten Kompetenzen in den sechzehn Bundesländern.

Es ergibt sich kein klares Bild, was die Integration der in den Bildungsstandards verankerten Kategorien als solche oder ihre terminologische Einordnung betrifft. Es ist anzumerken, dass in keiner Lehrplanschrift die Wahl ihrer jeweiligen Begrifflichkeit reflektiert oder expliziert wird, was eine fachdidaktische Einschätzung zusätzlich erschwert. Die Karte in Abb. 4 zeigt die geographische Verteilung der Anzahl der in den Bundesländern festgelegten Kategorien.

3.2 Kurzbesprechung der Lehrplanschriften

Es folgt eine Analyse der in Tab. 5 genannten, und in der Bundesrepublik Deutschland derzeit gültigen, Lehrpläne[69] für das Fach Mathematik an Gymnasien (G8) für die Sekundarstufe I mit *Blick auf das Problemlösen*.[70] Diese wurden aus drei Gründen für die Untersuchung gewählt:

1. Die Mehrheit der Bundesländer hat die Reform ihrer Lehrpläne vollständig oder weitgehend durchgeführt, was zu einer Homogenisierung der Kompetenzerwartungen über die Grenzen des (vielerorts nicht mehr in Reinkultur existierenden) dreigliedrigen Schulsystems hinweg geführt hat; die Anforderungen, die für das Gymnasium formuliert werden, beinhalten daher in aller Regel die für die anderen Sekundarschulformen gültigen Kompetenzerwartungen.
2. Die Integration und Entwicklung von prozessbezogenen Kompetenzen, wie etwa des Problemlösens, dürfte in dem Bildungsgang, der zur allgemeinen Hochschulreife führen will, einen unbestritten hohen Stellenwert besitzen.[71]
3. Seit der deutschen Wiedervereinigung ist das Gymnasium die von dem größten Anteil der Schüler besuchte Schulform.[72]

Ziel der Ausführung ist es darzustellen, an welchen Stellen und in welchem Umfang das Problemlösen in den Lehrplänen der Länder erscheint, sowie herauszuarbeiten, welcher

[69] Stand Februar 2014
[70] Für diejenigen Bundesländer, die derzeit die bildungsstandardgebundenen neuen Lehrpläne vor der endgültigen Einführung erproben, wurden diese Probefassungen anstelle der auslaufenden Lehrplanschriften berücksichtigt.
[71] Es ist eine dem Praktiker vertraute Erfahrung, dass viele Schüler an Haupt- und Realschulen oft mit dem Erlernen basaler Rechentechniken und den daraus erwachsenden Anwendungsbezügen an die Grenzen ihrer Bereitschaft zur Auseinandersetzung mit dem Fach Mathematik kommen; der Wille, sich metakognitiv und/oder kreativ mit Mathematik zu beschäftigen ist meist selten; die Frustrationsschwelle liegt oft extrem niedrig. Das es auch hier durchaus Ausnahmen gibt, soll nicht in Abrede gestellt werden.
[72] Vgl. BECKER 2012: 134.

Stellenwert dem Problemlösen in den gesetzlichen Vorgaben der einzelnen Bundesländern zugewiesen wird. Jedes Lehrplandokument wird diesbezüglich kurz kommentiert.

3.2.1 Baden-Württemberg

Die zentrale Reform, die in Baden-Württemberg umgesetzt wurde und die viele Elemente anderer Reformen enthält, ist die Einführung des Bildungsplans 2004 mit seinen Standards und Kompetenzen. Daher wird nach der Analyse der Zielstellungen der Reformen der Länder und auf nationaler Ebene der baden-württembergische *Bildungsplan* genauer analysiert (Kap. 4.3).

Das Land Baden-Württemberg hat zusätzlich zu seinem Bildungsplan für das Fach Mathematik *Hinweise zur Umsetzung des Bildungsplans* herausgebracht, sowie eine *Niveaukonkretisierungen* genannte Aufgabensammlung.

Bereits im ersten Kapitel des Bildungsplans werden die Leitgedanken zum Kompetenzerwerb dargestellt, zu denen auch das Problemlösen als überfachliche Kompetenz zählt. Unter dem Begriff versteht der Bildungsplan die Fähigkeit, „Problemlösetechniken, -strategien und Heurismen zu kennen, anzuwenden und neuen Situationen anzupassen" (BADEN-WÜRTTEMBERG 2004a: 2). In den anschließenden stufenspezifischen Bestimmungen wird für die Jahrgangsstufen 5 und 6 nochmals bekräftigt, dass „zentrales Ziel aller mathematischer Aktivitäten [...] die Fähigkeit zum Problemlösen [ist]" (BADEN-WÜRTTEMBERG 2004a: 93). Für das Ende der Jahrgangsstufe 8 formuliert der Bildungsplan, dass „die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten neben dem inhaltlichen Aufbau im Zentrum aller mathematischen Aktivitäten steht" (BADEN-WÜRTTEMBERG 2004a: 93). Für das Ende der Jahrgangsstufe 10 stellt der Bildungsplan fest, dass „durch die Hinzunahme von Fragestellungen aus anderen Fachgebieten [...] die Problemlösefähigkeiten erweitert [wird] und eine horizontale Vernetzung auch über Fachgrenzen hinaus erzielt [wird]" (BADEN-WÜRTTEMBERG 2004a: 94).

Es schließen sich im zweiten Kapitel *Kompetenzen und Inhalte* Stichpunktlisten an, die für die drei Doppeljahrgangsstufen verbindliche Inhalte unter den insgesamt neun Leitideen versammeln; ein direkter Bezug zu den überfachlichen Kompetenzen wird nicht aufgezeigt, sondern nur implizit hergestellt. Solche Verweise auf das Problemlösen lassen sich meist unter den Leitideen Vernetzung und Modellieren finden, tauchen aber gelegentlich auch an anderer Stelle auf. Für das Ende der Jahrgangsstufe 6 sollen Schüler „Situationen und Fragestellungen durch konkrete, verbale, grafische und numerische Modelle oder

Darstellungen beschreiben", „mathematische Kenntnisse auf neue Fragestellungen anwenden" und „Lösungsansätze beschreiben und begründen" (BADEN-WÜRTTEMBERG 2004a: 96). Am Ende der Jahrgangsstufe 8 sollen Schüler gemäß dem Bildungsplan Baden-Württemberg (2004a: 96) „algebraische und geometrische Fragestellungen in geeigneten Fällen ineinander überführen und gegebenenfalls auf diesem Wege lösen."[73]

Konkretisierte Hinweise und Beispiele findet man in den zugehörigen *Hinweisen zur Umsetzung des Bildungsplans* unter dem Stichpunkt „grundlegende Problemlösetechniken kennen und anwenden", der der Leitidee *Vernetzung* für die Jahrgangsstufe 10 zugeordnet wird.[74] Dort werden unter anderem das systematische Probieren, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten ebenso wie das Erstellen von Skizze, Tabelle und Graph, das Festlegen von Variablen und das Aufstellen von Gleichungen als Techniken und Strategien des Problemlösens angegeben. Dabei erfolgt weder eine Differenzierung der Begriffe *Technik* und *Strategie* noch eine eindeutige Zuordnung der Bespiele zu diesen Begriffen.

Fazit

Der Bildungsplan des Landes Baden-Württemberg fordert das Problemlösen in seinen Leitgedanken zunächst sehr zentral als eine seiner vier überfachlichen Kompetenzen ein, in den doppeljahrgangsstufenbezogenen Vorgaben wird jedoch nur sehr knapp und allgemein Bezug zu dieser Kompetenz hergestellt, und besonders die Verknüpfung zu den Leitideen und fachlichen Inhalten erfolgt kaum. Auch die Hinweise zur Umsetzung des Bildungsplans geben erst zum Ende der Mittelstufe ein paar Beispiele für das, was der Bildungsplan verlangt.

3.2.2 Bayern

Bayern führt in seinen Stufenlehrplänen die verbindlichen Fachinhalte auf und konkretisiert die Forderungen in den Erläuterungen und Beispielaufgaben zum Lehrplan für das Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium[75]. Außerdem gibt es ein *Fachprofil* Mathematik, in dem die Leitgedanken kurz dargestellt werden.

[73] Der Begriff des Problems wird hier augenscheinlich vermieden; es ist lediglich von „Sachverhalten" die Rede. Ob dadurch bewusst eine Unterscheidung zwischen dem neutralen Begriff „Sachverhalt" und dem Begriff „Problem" getroffen wird, ist unklar.
[74] Vgl. BADEN-WÜRTTEMBERG 2004b: 5.
[75] Da die Erläuterungen nur online und in Form von Datendownloads zugänglich sind, ist eine genauere Lokalisierung des Zitats nicht möglich.

Der Begriff der Problemlösefähigkeit wird im Fachprofil in der Bemerkung erwähnt, dass „beim Aufbau von flexibel einsetzbarem Wissen und von Problemlösefähigkeit [...] die Art der bearbeiteten Aufgaben eine wichtige Rolle [spielt]“ (ISB 2004a); außerdem wird unter Bezug auf die KMK-Bildungsstandards angemerkt, dass die Schüler „mathematische Lösungsverfahren und -hilfsmittel problemgerecht auswählen sowie flexibel anwenden [sollen]“ (ISB 2004a).

Im *Stufenlehrplan* wird das Problemlösen für die Jahrgangsstufe 5 ein einziges Mal explizit, im Zusammenhang mit dem Thema *Größen*, angesprochen, wo es heißt, dass „die Schüler, den mathematischen Kern eines Problems zu erkennen [lernen]“ (ISB 2004b). Impliziert wird es des Weiteren durch die Aussage, dass die Schüler „Lösungswege bei Sachaufgaben [finden] und [...] ihr Vorgehen beschreiben [können]“ (ISB 2004c). In den Erläuterungen wird nochmals betont, dass „insbesondere Aufgaben mit Problemlösecharakter oder vernetzende Aufgabenstellungen [...] erkennbar ihren Platz finden [müssen]“ (ISB 2004h).

Für die Jahrgangsstufe 6 wird bezogen auf die Beschäftigung mit rationalen Zahlen festgestellt: „Dabei kommen auch typische Problemlösungsstrategien zur Anwendung.“ (ISB 2004c). In den Jahrgangsstufen 7, 8 und 9 wird keinerlei direkter Bezug auf die Problemlösefähigkeit genommen, sie wird höchstens im Rahmen mathematischer Modellierung impliziert. In den allgemeinen Erläuterungen zur Jahrgangsstufe 10 heißt es im Zusammenhang mit der Stochastik, dass „die Jugendlichen, verschiedene Lösungsstrategien einzusetzen und Aussagen kritisch zu überprüfen [lernen]“ (ISB 2004g).

Fazit

Die in den Bildungsstandards postulierte Verschränkung von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, wird für andere prozessbezogene Kompetenzen durchaus kontinuierlich in den Stufenlehrplänen Bayerns umgesetzt, die Kompetenz der Problemlösefähigkeit wird allerdings kaum berücksichtigt. An den wenigen Stellen, an denen überhaupt Bezug auf den Begriff genommen wird, fehlen Erläuterungen, Hinweise zur konkreten Umsetzung oder ein begrifflicher, mathematischer Bezugsrahmen.

Der Bayerische Lehrplan verzichtet als einziger deutscher Lehrplan auf eine klare Benennung bzw. Auflistung der überfachlichen mathematischen Kompetenzen.

3.2.3 Berlin

Der *Rahmenlehrplan* von Berlin gliedert sich in den der sechsjährigen Grundschule und den der vierjährigen Sekundarstufe I.

Der *Rahmenlehrplan* der Grundschule greift das Problemlösen implizit im Rahmen der *Gestaltung des Unterrichts* unter dem Aspekt *Problemorientierte Aufgaben entwickeln* auf, die so angelegt sein sollen, dass sie „die Entwicklung von unterschiedlichen Lösungsstrategien" (BERLIN 2004: 12) unterstützen. Weitere Hinweise auf die Kompetenz des Problemlösens findet man in Zusammenhang mit der Methodenkompetenz, die die Nutzung heuristischer Methoden zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme zum Gegenstand hat. Im Rahmen der fachdidaktischen Ansprüche zur unterrichtlichen Gestaltung wird auf eine wiederholte Anwendung, Nutzung und Entwicklung eigener Strategien verwiesen. Darüber hinaus sollen „im Prozess der Problembearbeitung […] heuristische Vorgehensweisen als Inhalte des Mathematikunterrichts thematisiert [werden]" (BERLIN 2004: 24).

Es folgt die Aufführungen der Fachinhalte, bei denen dem Problemlösen eine eher untergeordnete Rolle beigemessen wird. Lediglich beim Thema *Zahlen und Operationen* wird das Einbringen individueller Strategien gefordert, die als Ausgangspunkt für das Weiterlernen wertgeschätzt werden sollen (BERLIN 2004: 29). Um welche Strategien es sich im Einzelnen handelt und welche heuristischen Methoden vorgesehen sind, wird an keiner Stelle im Rahmenlehrplan erläutert.

Im *Rahmenlehrplan* von Berlin für die Sekundarstufe I taucht der Begriff der Problemlösefähigkeit erstmals in Kapitel 2 *Beitrag des Mathematikunterrichts zum Kompetenzerwerb* auf, in dem es heißt, dass die „Mathematik […] einen Bereich menschlichen Denkens [fördert], in dem sich […] die Kreativität und die Problemlösefähigkeit des Einzelnen entfaltet […]" (BERLIN 2006: 9). Es werden in der Folge die Leitgedanken zum Kompetenzerwerb genannt, die auch eine Definition des Problemlösebegriffs im Rahmen der *prozessbezogenen mathematischen Kompetenz* in Anlehnung an die KMK enthalten. Der Rahmenlehrplan konkretisiert weiter, dass das „Problemlösen [sich] […] durch die Verwendung spezifischer Strategien und die Verwendung verschiedener Darstellungsformen [auszeichnet]" (BERLIN 2006: 10), wobei das *Einzeichnen von Hilfslinien*, das *Auswählen von Hilfsgrößen* sowie das *Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten* als Beispiele spezifischer Strategien genannt werden.

Im Kapitel *Standards* werden die prozessbezogenen Standards am Ende beider Doppeljahrgangsstufen erläutert, in denen die Verwendung heuristischer Strategien als eine zu erwerbende Fähigkeit im Rahmen der Problemlösekompetenz genannt wird.[76] Im Anschluss daran heißt es, dass die „[…] Komplexität der verwendeten Strategien (vom systematische Probieren über das Zeichnen einer informativen Figur bis hin zum Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten)“ (BERLIN 2006: 20) eine Möglichkeit darstellt, das Anforderungsniveau zu variieren.

Auch im Rahmenlehrplan von Berlin wird (wie in fast allen Bundesländern) darauf hingewiesen, dass die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen nur in Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben werden können.[77] In seinem Kapitel *Themen und Inhalte* will der Rahmenlehrplan diese Forderung konkret fassen: Unter Angabe einer zentralen Leitideen folgt eine kurze Zusammenfassung über die zu erwerbenden mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten, denen die mathematischen Inhalte und schließlich die Schülertätigkeiten folgen, die dem Erwerb der genannten Kompetenzen dienen sollen. Bezüglich der Problemlösefähigkeit macht der Rahmenlehrplan hier Aussagen wie: „Die Schülerinnen und Schüler wechseln […] zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen von Zahlen […], lösen Gleichungen […] durch „Ausprobieren und Korrigieren“ […] [und] durch systematisches Probieren […]“ (BERLIN 2006: 30). Bei welchen der aufgezählten Tätigkeiten es sich um Strategien im Sinne der Problemlösekompetenz handelt, wird nicht näher erläutert.[78]

Fazit

Der Rahmenlehrplan Berlin greift das Problemlösen als Themenbereich vielfach auf und weist ihm eine wichtige Bedeutung im Fach zu. Implizit tauchen heuristische Elemente immer wieder in der gut gedachten Zusammenstellung *Themen und Inhalte* auf; allerdings fehlt hier offensichtlich eine zugrundeliegende systematische Auseinandersetzung mit der Frage, was unter heuristischen Strategien, Verfahren, Techniken o. ä. zu verstehen ist, so dass die sehr wohl vorhandenen Elemente in der „Flut“ der konkret formulierten Kompetenzerwartungen und Schülertätigkeiten schwer ausfindig zu machen sind und in der Umsetzung leicht untergehen dürften.

---

[76] Vgl. BERLIN 2006: 20.
[77] Vgl. BERLIN 2006: 10.
[78] Vgl. BERLIN 2006: 30, 38, 40, 45, 56, 61.

3.2.4 Brandenburg

Wie in Berlin gliedert sich auch der *Rahmenlehrplan* des Bundeslandes Brandenburg in einen für die sechsjährige Grundschule und einen für die vierjährige Sekundarstufe I.

Da die Rahmenlehrpläne der Grundschule beider Bundesländer identisch sind, wird an dieser Stelle auf die obenstehende Kurzdarstellung für das Bundesland Berlin verwiesen. Auch die Inhalte der Rahmenlehrpläne der Sekundarstufe I decken sich in weiten Teilen, so dass erneut auf die oben aufgeführte Darstellung verwiesen wird und im Folgenden nur abweichende Inhalte dargestellt werden.

In der Einleitung zu den fachbezogenen Kompetenzen heißt es in den Rahmenlehrplänen beider Bundesländer, dass „die Konkretisierung dieser Erwartungen […] durch die Formulierung von mathematischen Kompetenzen [geschieht], die die Schülerinnen und Schüler […] in Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erwerben […]“ (BRANDENBURG 2008: 12). Während es dem Berliner Rahmenlehrplan der Sekundarstufe I weitgehend gelingt, diesen Forderungen nachzukommen, weichen die Ausführungen Brandenburgs hier erstmals von denen Berlins ab. Die stufenspezifischen *Themen und Inhalte* benennen die zentrale Leitidee, der eine Beschreibung des erwarteten Kompetenzbezugs folgt. In Verbindung mit der Leitidee *Zahl* formuliert der Rahmenlehrplan für das Ende der Doppeljahrgangsstufe 7/8, dass „die Schülerinnen und Schüler […] ihre Strategien des überschlagenden und abschätzenden Rechnens [vertiefen] […]“ (BRANDENBURG 2008: 36). Darüber hinaus sollen sie „Lösungen von Gleichungen durch „Probieren und Korrigieren“ [finden] […]“ (BRANDENBURG 2008: 37). Dass bzw. ob es sich beim *Probieren und Korrigieren* um eine heuristische Strategie handelt, bleibt offen. Unter der Leitidee *Messen, Raum und Form* wird die „Nutzung verschiedener Problemlöseverfahren“ (BRANDENBURG 2008: 38) gefordert, ohne dass solche benannt werden. Andererseits wird am Ende der Klasse 10 das Prinzip „Zusammensetzen und Zerlegen“ (BRANDENBURG 2008: 41) als vorrangig vor dem Herleiten von Formeln postuliert.

Fazit

Für den Rahmenlehrplan Brandenburgs gelten dieselben Schwächen hinsichtlich der eindeutigen Linie zum Problemlösen im Allgemeinen, sowie der heuristischen Verfahren im Besonderen, die den Berliner Lehrplan auszeichnen. Die detailliert ausgearbeiteten, wenn auch nicht ganz klar systematisierten, Ausführungen zu *Themen und Inhalten* Berlins fehlen in Brandenburg jedoch, so dass das Problemlösen insgesamt noch weniger deutlich als Bestandteil des unterrichtlichen Konzepts in Erscheinung tritt.

3.2.5 Bremen

Im Rahmen der *Aufgaben und Ziele* des Mathematikunterrichts hebt Bremens *Bildungsplan* die Vermittlung der Problemlösekompetenz bereits im ersten Kapitel mit den Worten hervor: „Mathematikunterricht vermittelt insbesondere die Kompetenz des problemlösenden Arbeitens in inner- und außermathematischen Kontexten“ (BREMEN 2006: 5). Auch wird darauf hingewiesen, dass „die prozessbezogenen Kompetenzen, wie z. B. das Problemlösen […] immer mit konkreten mathematischen Inhalten erworben und weiterentwickelt […]“ [werden müssen] (BREMEN 2006: 5).

Im Kapitel *Themen und Inhalte* liefert der Bildungsplan für die jeweiligen Doppeljahrgangsstufen eine Übersicht über die zentralen Tätigkeiten, zu denen auch das Problemlösen gezählt wird. Darin wird für das Ende der Jahrgangsstufe 6 festgelegt, dass die Schüler die Tätigkeiten Schätzen und Überschlagen, Beispiele finden und Probieren sowie das Überprüfen von Ergebnissen beherrschen sollen. In der Doppeljahrgangsstufe 7/8 werden diese Tätigkeiten um das Untersuchen von Zahlen und Formen, das Überprüfen auf mehrere Lösungen und das Überprüfen von Lösungswegen erweitert und bis zum Ende der Klasse 10 um das Zerlegen von Problemen, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sowie das Auswählen geeigneter heuristischer Strategien und Werkzeuge (auch Computerwerkzeuge) ergänzt (BREMEN 2006: 7).

Das dritte Kapitel beinhaltet die Auseinandersetzung mit den geforderten *Standards*, die sich in prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen gliedern. Der Kompetenz des Problemlösens werden dabei die zentralen Fähigkeiten und Fertigkeiten des *Erkundens*, *Lösens* und *Reflektierens* zugeordnet und entsprechend erläutert. Der Bildungsplan enthält an dieser Stelle sehr konkrete Angaben und gibt genaue Hinweise zu den zu erwerbenden zentralen Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende einer jeden Doppeljahrgangsstufe.

So beinhaltet das Erkunden am Ende der Klasse 6 die Wiedergabe inner- und außermathematischer Probleme mit eigenen Worten, das Finden von mathematischen Fragenstellungen und Vermutungen sowie die Entnahme relevanter Größen in komplexen Problemsituationen.[79] Hinzu kommen das Untersuchen von Mustern und Beziehungen und das Aufstellen von Vermutungen am Ende der Jahrgangsstufe 8, sowie das Zerlegen von Problemen in Teilprobleme, und das Erkunden mathematischer Probleme unter Verwendung von Werkzeugen bis zum Ende der Klasse 10.

---

[79] Vgl. BREMEN 2006: 13.

Das Lösen von Problemen umfasst bis zum Ende der Klasse 6 die Ermittlung von Näherungswerten für erwartete Ergebnisse durch Schätzen und Überschlagen, die Nutzung elementarer mathematischer Regeln und Verfahren zur Lösung von Alltagsproblemen und die Anwendung von Lösungsstrategien. Als explizite Beispiele nennt der Bildungsplan hierzu das Finden von Beispielen, das Überprüfen durch Probieren sowie die Anfertigung von Skizzen und Tabellen. Für die Jahrgangsstufe 8 werden die zentralen Fähigkeiten und Fertigkeiten des Problemlösens um die Lösungsstrategien Zurückführen auf Bekanntes, Spezialfälle finden und Verallgemeinern erweitert und bis zum Ende der Klasse 10 zusätzlich um das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten und die flexible Anwendung von Problemlösestrategien ergänzt. Darüber hinaus sollen die Schüler in den Jahrgängen 7/8 Algorithmen und Kalküle zur Lösung von Aufgaben und zu ihrer Bewertung nutzen, Vorgehensweisen und Lösungen bei der Problembearbeitung planen und beschreiben und auf mehrere Lösungen und Wege überprüfen sowie verschiedene Darstellungsformen nutzen.

Das Reflektieren im Problemlöseprozess sieht das Interpretieren, Überprüfen und Bewerten von Ergebnissen durch Plausibilitätsüberlegungen, Überschlagsrechnungen und Skizzen vor, die Darstellung und Überprüfung der Lösungswege auf Richtigkeit und Schlüssigkeit und den Vergleich mehrerer Lösungswege sowie der Problemlösestrategien bis hin zu ihrer Bewertung.[80]

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden um die prozessbezogenen ergänzt, womit der Bildungsplan seiner Forderung, prozessbezogene Kompetenzen immer in Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten zu entwickeln, nachkommt.[81] So wird für die Jahrgangsstufe 6 gefordert, „Folgen (in grafischer und arithmetischer Darstellung) auf Veränderungen und Muster [zu untersuchen]“ (Bremen 2006: 15), während am Ende der Klasse 8 und 10 das Problemlösen in dem Erkunden gegebener Zusammenhänge und Eigenschaften sowie in dem Aufstellen von Vermutungen Anwendung findet.[82] Nur in Klasse 8 findet man die Kompetenz des Problemlösens in Zusammenhang mit dem Unterrichtsgegenstand der Geometrie wieder, bei der die Verwendung „dynamische[r] Geometriesoftware zum Erkunden geometrischer Zusammenhänge“ vorgesehen ist (BREMEN 2006: 18).

---

[80] Vgl. BREMEN 2006: 13, 17, 21.
[81] Vgl. BREMEN 2006: 12.
[82] Vgl. BREMEN 2006: 19, 23.

Fazit

Der Bildungsplan Bremens enthält eine ausführliche und umfassende Darstellung sowie Beschreibung der Kompetenz des Problemlösens. Es findet erkennbar eine Vernetzung von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen statt, die sich für das Problemlösen allerdings auf die Teilkompetenz *Erkunden* beschränkt, während die beiden anderen problemlösenden Fähigkeiten und Fertigkeiten nicht berücksichtigt werden. Auch ist auffallend, dass das Problemlösen fast ausschließlich in Bezug auf den funktionalen Zusammenhang expliziert wird.

3.2.6 Hamburg

Im *Bildungsplan* von Hamburg wird in den allgemeinen Richtlinien zur Unterrichtsgestaltung unter dem Stichwort *Gestaltung der Lernprozesse* erstmals Bezug auf die Vermittlung von Strategien als integrativer Bestandteil der Lernkultur genommen.[83] In Kapitel 2 *Kompetenzen und ihr Erwerb im Fach Mathematik* werden die Leitgedanken zum Kompetenzerwerb ausgeführt. Hier heißt es, dass die Kompetenz, Probleme mathematisch zu lösen, in der Fähigkeit besteht, mathematikhaltige Phänomene durch das Aufstellen von Vermutungen über vorliegende Zusammenhänge zu untersuchen sowie in der Anwendung und der Reflexion heuristischer Strategien.[84] Die zu erwerbenden Kompetenzen werden im darauf folgenden Abschnitt didaktischen Grundsätzen zugeordnet, wobei das Problemlösen mit der Förderung mathematischen Denkens verknüpft wird. Außerdem wird formuliert, dass im Zuge des forschenden Lernens und der Problemorientierung die Entwicklung von Lern- und Lösungsstrategien Gegenstand des Mathematikunterrichts sein soll.[85]

Die *Anforderungen im Fach Mathematik* werden nur für das Ende der Jahrgangsstufen 6 und 10 dargestellt. Die Kompetenz des Problemlösens wird in zu erwerbende Fähigkeiten und Fertigkeiten einerseits, und die entsprechenden Schülertätigkeiten andererseits gegliedert. Die für Klasse 6 formulierten Fähigkeiten und Fertigkeiten umfassen die Bearbeitung gegebener und selbst formulierter Probleme, das Stellen von für die Mathematik charakteristischen Fragen, das Finden unterschiedlicher Lösungswege und die Überprüfung und Reflexion der Ergebnisse, Lösungswege und -ideen. Die daran anschließende Liste der Schülertätigkeiten gleicht einem strukturierten Vorgehen im Problemlöseprozess: Der

[83] Vgl. HAMBURG 2011: 7.
[84] Vgl. HAMBURG 2011: 14.
[85] Vgl. HAMBURG 2011: 15.

Bildungsplan stellt allen voran die Bereitschaft, sich mit einer unbekannten Situation zu befassen, der Tätigkeiten wie das selbständige Stellen einfacher mathematischer Probleme und deren Analyse und Verstehen folgen. Darauf aufbauend werden das situationsgerechte Stellen von Fragen und das Präzisieren von Problemstellungen mittels Fachbegriffen gefordert, dem die Erweiterung des Repertoires an Lösungsstrategien und ihrer Auswahl folgen. Hierzu werden Beispiele genannt wie das systematische Probieren, die Bildung von Analogien und das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten. Daran schließt die kritische Überprüfung des Lösungsprozesses und der Lösung an. Den Abschluss bildet die Übertragung der erarbeiteten Zusammenhänge auf künftige Problemsituationen.

Zum Ende der Klasse 10 sollen die Schüler geeignete Strategien selbständig identifizieren und auswählen können. Auch heißt es hier, dass sie die Anwendung von heuristischen Strategien, Hilfsmitteln und Prinzipien sowie ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen bis hin zur Konstruktion differenzierter Strategien beherrschen sollen.[86]

Fazit

Der Bildungsplan Hamburgs verweist zwar an verschiedenen Stellen auf die Bedeutung der Entwicklung einer Problemlösekompetenz, den eingangs formulierten Anspruch, mathematische Inhalte in Auseinandersetzung mit allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu entwickeln, erfüllt der Bildungsplan jedoch nicht. So findet man in den inhaltsbezogenen mathematischen Anforderungen keinen Hinweis auf die Verknüpfung mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, zu denen auch das Problemlösen gehört.[87]

3.2.7 Hessen

Seit 2011 gilt *Das neue Kerncurriculum für Hessen* des Hessischen Kultusministeriums, zu dem außerdem ein *Leitfaden* erschienen ist. Im *Kerncurriculum* trifft man auf das Problemlösen zuerst im Zusammenhang mit den vier *überfachlichen Kompetenzen*. Einer dieser Bereiche beschreibt die Lernkompetenz, der auch die Problemlösekompetenz zugeordnet wird, als planvollen Arbeitsprozess, in dem vorhandene Ressourcen sachgerecht eingeschätzt werden und gewonnene Erkenntnisse durch Analogiebildung sowie kombinatorisches und schlussfolgerndes Denken auf andere Anwendungssituationen übertragen werden.[88]

[86] Vgl. HAMBURG 2011: 20-22.
[87] Vgl. HAMBURG 2011: 13, 23-30.
[88] Vgl. HESSEN 2011b: 8, 10.

In den *Kompetenzbereichen des Faches* wird das Problemlösen dann in Anlehnung an die Bildungsstandards der KMK als eine von sechs Kompetenzen in Bezug auf den Mathematikunterricht näher beschrieben. Danach findet mathematisches Problemlösen statt „sobald in einer Situation nicht unmittelbar erkennbar ein Lösungsverfahren angewendet werden kann, sondern ein Lösungsweg entwickelt oder ausgewählt werden muss" (HESSEN 2011a: 13). In diesem Zusammenhang wird von den Schülern der Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln und Strategien gefordert, zu denen das Curriculum „das systematische Probieren, das Einzeichnen von Hilfslinien, das Auswählen von Hilfsgrößen, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sowie Hilfsmittel und Darstellungsformen" (HESSEN 2011a: 13) an dieser Stelle als Beispiele anführt. Auch die Reflexion von Lösungswegen und verwendeten Strategien wird als ein wesentlicher Bestandteil des Problemlöseprozesses benannt.

Im Kapitel *Lernzeitbezogene Kompetenzerwartungen* werden auch die Erwartungen im Bereich des Problemlösens für den Übergang in die Sekundarstufe II sowie für das Ende der Doppeljahrgangsstufen 5/6 und 7/8 angegeben. In mehr oder weniger wortgetreuen Zitaten der Bildungsstandards heißt es hier, dass die Schüler „geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien" (HESSEN 2011a: 17) auswählen und anwenden sollen. Für das Ende der Jahrgangsstufe 10 heißt es unmittelbar im Anschluss außerdem, dass sie „unterschiedliche Darstellungsformen und Verfahrensweisen zur Problemlösung" (HESSEN 2011a: 17) nutzen, was möglicherweise einer Konkretisierung gleichkommen soll. Auch bezogen auf die Inhaltsfelder (Leitideen) gibt es wiederholt Anmerkungen, die sich als Beschreibung heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien deuten lassen: So heißt es beim *Funktionalen Zusammenhang* an einer Stelle, dass Problemstellungen „in sprachlicher, tabellarischer oder grafischer Form" (HESSEN 2011a: 20) dargestellt werden, was eine Lösung ermögliche, und dass Gleichungen durch „Kalkül, systematisches Probieren, grafisch bzw. algorithmisch [...] gelöst" (ibid.) werden.

Für das Ende der Jahrgangsstufe 6 heißt es bei der Beschreibung der Kompetenzbereiche zunächst, dass Schüler „heuristische Problemlösestrategien und mathematische Verfahren" (HESSEN 2011a: 23) anwenden sollen.

Für das Ende der Jahrgangsstufe 8 wird gefordert, dass Schüler „heuristische Problemlösestrategien und mathematische Verfahren bewusst" (HESSEN 2011a: 25) anwenden sollen, und es wiederholt sich, was zum Ende der Jahrgangsstufe 10 ebenfalls gefordert wird, nämlich dass sie „unterschiedliche Darstellungsformen und Verfahrensweisen zur Problemlösung“ (HESSEN 2011a: 25) nutzen.

Neben diesen Postulaten stehen einige auf Pólyas Schritte zur Lösung eines Problems zurückgehende Äußerungen[89], die aber keine weiteren Informationen zu den einzusetzenden (bzw. zu lehrenden) heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien enthalten. Der Kernlehrplan Hessen stellt somit zwar fest, dass Inhaltsfelder für den Kompetenzerwerb unverzichtbare inhaltliche Zusammenhänge darstellen, stellt aber keine solche Zusammenhänge oder Beziehungen her.

Der begleitende *Leitfaden*, der laut Untertitel zu den „Maßgeblichen Orientierungstexten zum Kerncurriculum“ (HESSEN 2011b) gehört und diesen in der schulischen Praxis zu nutzen und auszudeuten helfen soll, enthält eine *Orientierungsgrundlage* zum Kompetenzaufbau im Bereich des Problemlösens. Entlang der Leitideen *Messen und Größen* sowie *Raum und Körper* wird hier exemplarisch erläutert, wie der Kompetenzaufbau über die Sekundarstufe I und durch die Inhaltsfelder Umgang mit Größen, Messvorgänge, ebene Figuren und Körper hinweg ablaufen könnte. Dabei wird die allgemeine mathematische Kompetenz durchgängig, d. h. über alle Doppeljahrgangsstufen der Sekundarstufe I hinweg, konkret in Kompetenzformulierungen beschrieben und auch anhand der sogenannten *Inhaltlichen Konkretisierungen* mit ganz spezifischen Fachinhalten des Kerncurriculums verknüpft. Aufschlussreich sind auch die ebenfalls angeführten *Vereinbarungen für die Gestaltung von Lernwegen*, die eine fachübergreifende Arbeitsweise ebenso ermöglichen wie einen jahrgangsstufenübergreifenden Methodenaufbau. Dabei werden Zerlegen und Ergänzen, Verwenden von Hilfslinien und das Darstellen der Problemsituation in einer Zeichnung als angestrebte Schülerfertigkeiten benannt. Auch sollen sie in die Lage versetzt werden, den Nutzen der angewandten Strategien und Verfahren zu bewerten, die Plausibilität der Ergebnisse zu reflektieren, modifizierte Strategien auszuwählen sowie Lösungswege und Ergebnisse in Bezug auf die Realsituation zu interpretieren und zu reflektieren.[90]

Fazit

Bei der Betrachtung des Kerncurriculums allein fällt auf, dass vielfach von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien die Rede ist, ohne dass auf die Unterscheidung der Begriffe eingegangen wird oder konkrete Beispiele benannt werden. Die formulierten

---

[89] Beispiele hierfür sind Formulierungen wie „[Schülerinnen und Schüler] interpretieren Ergebnisse mit Blick auf das zu lösende Problem“ oder „[Schülerinnen und Schüler] reflektieren Lösungswege“ (HESSEN 2011a: 32).
[90] Vgl. HESSEN 2011b: 20-29.

Kompetenzerwartungen stehen völlig unverbunden neben den Inhaltsfeldern des Mathematikunterrichts für die jeweiligen Doppeljahrgangsstufen.

Allerdings bietet der Leitfaden gute und strukturierte Anregungen, wie die Kompetenzen im schulischen Alltag aufgebaut werden könnten. Die Problemlösekompetenz wird detailliert mit verschiedenen Inhaltsfeldern verknüpft, wobei allerdings nur eine geringe Anzahl der zuvor angesprochenen heuristischen Strategien, Prinzipien und Hilfsmitteln tatsächlich konkretisiert wird.

3.2.8 Mecklenburg-Vorpommern

Der *Rahmenplan* für die schulartenunabhängige Orientierungsstufe des Landes Mecklenburg-Vorpommern, die die Klassen 5 und 6 umfasst, liegt derzeit in einer Erprobungsfassung (aus dem Jahre 2010) vor. Hier wird das Problemlösen in Zusammenhang mit der Methodenkompetenz aufgegriffen und als die Fähigkeit „mathematisch fassbare Aufgabenstellungen zu strukturieren und erfolgreich zu bearbeiten" (MECKLENBURG-VORPOMMERN 2010: 3) definiert. Im Zuge der Sachkompetenzen wird darüber hinaus die „Mathematik als Handlungsfeld für die aktive und heuristische Auseinandersetzung mit herausfordernden Fragestellungen" (MECKLENBURG-VORPOMMERN 2010: 4) bezeichnet. Im vierten Kapitel wird die Kompetenz *Aufgaben (Probleme) mathematisch lösen* im Rahmen der zu erwerbenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen erläutert. Warum hier das Wort *Problem* durch *Aufgabe* ersetzt wird und welche Absichten damit verfolgt werden, wird an keiner Stelle im Rahmenplan erläutert.

Die zentralen Fähigkeiten und Fertigkeiten beim Lösen von Problemaufgaben werden als *Erkunden*, *Lösen* und *Reflektieren* klassifiziert.

In den stufenspezifischen Hinweisen der Klasse 6 wird als *Erkunden* die Fähigkeit gesehen, inner- und außermathematische Problemstellungen mit eigenen Worten wiederzugeben und relevante Größen zu entnehmen sowie im Finden von mathematischen Fragestellungen in einfachen Problemkontexten. Das Lösen von Problemen wird in der Nutzung mathematischer Verfahren und Regeln insbesondere beim Messen, Rechnen, Konstruieren und Schlussfolgern gesehen sowie in der Anwendung von Problemlösestrategien. Hier führt der Rahmenplan das Finden von Beispielen oder das systematischen Variieren von Bedingungen an. Die Reflexion beinhaltet, die Ergebnisse in Bezug auf das Ausgangsproblem zu deuten und zu bewerten und das eigene Vorgehen zu analysieren und mit dem der Mitschüler und der Lehrkraft zu vergleichen.[91]

Der Rahmenplan für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 des gymnasialen Bildungsgangs des Landes Mecklenburg-Vorpommern stammt aus dem Jahre 2002, da weder für das Gymnasium noch die Gesamtschulen eine Überarbeitung der Rahmenpläne nach dem Beschluss der KMK im Jahre 2004 durchgeführt wurde. In diesem - nicht im Sinne der Bildungsreform kompetenzorientierten - Rahmenplan kommt dem Problemlösen eine eher untergeordnete Rolle zu. Während die Fähigkeit „Probleme und Problemsituationen erkennen, analysieren und flexibel verschiedene Lösungswege erproben" (MECKLENBURG-VORPOMMERN 2002: 4) als Wesensmerkmale der Sachkompetenz zugeordnet werden, beinhaltet die Methodenkompetenz, der das Problemlösen sinngemäß zugeordnet werden müsste, keine problemlösenden Elemente. Weitere Erläuterungen oder explizite Beispiele werden in diesem Zusammenhang nicht genannt. Die in Kapitel 6 formulierten stufenspezifischen Hinweise beinhalten zudem nur die zu erwerbenden mathematischen Inhalte, während die allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht weiter thematisiert werden. Und so ist das „systematische Probieren" in Zusammenhang mit dem Thema *Arbeiten mit Variablen* in der Jahrgangsstufe 8 nur für das geschulte Auge als Problemlösestrategie zu identifizieren.[92]

Derzeit erprobt in den Jahrgangsstufen 7 bis 10 lediglich die Regionale Schule einen den Bildungsstandards angepassten Rahmenplan. Um untersuchen zu können, inwieweit auch in Mecklenburg-Vorpommern die Problemlösekompetenz als Bestandteil des aktuellen Mathematikunterrichts realisiert wird, wird an dieser Stelle zusätzlich der Rahmenplan der Regionalen Schule, also eines nichtgymnasialen Bildungsgangs, vorgestellt.

Im Kapitel *Der Beitrag des Faches zum Kompetenzerwerb* wiederholt der Rahmenplan die Aussagen der oben zitierten Erprobungsfassung für die Orientierungsstufe. Das Problemlösen als allgemeine Kompetenz K2 wird in Kompetenzformulierungen für die Doppeljahrgangsstufen zusammenfassend dargestellt. Für das Ende der Jahrgangsstufe 6 werden das Entnehmen relevanter Größen, Mathematisieren einfacher Problemstellungen, Anwenden der Problemlösestrategien, Beispiele finden, Überprüfen durch Probieren und die Deutung der Ergebnisse benannt. Für Jahrgangsstufe 8 wird dies ergänzt durch eigenständige Untersuchung und Erkennen von Strukturen, Planung und Durchführung von Problemlösungen, die Strategie Zurückführen auf Bekanntes, Spezialfälle und Verallgemeinerungen.

[91] Vgl. MECKLENBURG-VORPOMMERN 2010: 7.
[92] Vgl. MECKLENBURG-VORPOMMERN 2010: 27.

Am Ende der Sekundarstufe I sollen die Schüler außerdem geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien selbständig auswählen und anwenden, außerdem die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen, Lösungsideen finden und Lösungswege reflektieren können.[93] Auf diese Stichpunktliste wird im weiteren Rahmenplan, im Zusammenhang mit den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, keinerlei Bezug genommen. Eine Verknüpfung von allgemeinen Kompetenzen mit mathematischen Fachinhalten erfolgt somit nicht.

Fazit

In den Rahmenplänen wird die grundsätzliche Bedeutung des Problemlösens sowohl im Zusammenhang mit der Sach- als auch der Methodenkompetenz angesprochen, allerdings enthalten die Rahmenpläne nur stichpunktartige Zusammenschauen dessen, was am Ende der Doppeljahrgangsstufen von den Schülern in dieser Hinsicht erwartet wird. Fachinhalte und allgemeine Kompetenzen stehen durchweg unverbunden nacheinander, so dass auf eine systematische Vermittlung etwa des Problemlösens im Verlauf der Sekundarstufe I an keiner Stelle eingegangen wird.

3.2.9 Niedersachsen

Im *Kerncurriculum* von Niedersachsen wird eingangs der Begriff des Problemlösens in Verbindung mit der Struktur der Kerncurricula erwähnt[94] und im Rahmen der zu er-wartenden Kompetenzen mit den Worten „die Schülerinnen und Schüler […] erkennen und präzisieren Probleme und versuchen diese unter Verwendung typischer mathematischer Strategien zu lösen“ (NIEDERSACHSEN 2006: 8) weiter thematisiert. In Kapitel 3 werden die *Prozessbezogenen Kompetenzbereiche*, denen das Problemlösen zugeordnet wird, vor-gestellt. Laut *Kerncurriculum* beinhaltet das Problemlösen die Fähigkeiten des Abstrahierens, des systematischen und logischen Denkens sowie des kritischen Urteilens. Darüber hinaus werden die Schüler zur selbständigen Problembearbeitung befähigt und Anstrengungsbereitschaft und Durchhaltevermögen werden gefördert.

Die daran anschließenden stufenspezifischen Hinweise für die Jahrgangsstufen 6, 8 und 10 zeichnen ein sehr deutliches Bild über die Kompetenzerwartungen. So sollen die Schüler am Ende der Klasse 6 einfache vorgegebene inner- und außermathematische Problemstellungen erfassen, sie mit eigenen Worten wiedergeben und mathematische Fragen stellen

[93] Vgl. MECKLENBURG-VORPOMMERN 2011: 11.
[94] Vgl. NIEDERSACHSEN 2006: 6.

und relevante Größen entnehmen können. Diese Fähigkeiten werden erweitert, so dass die Schüler am Ende der Klasse 8 zusätzlich Problemstellungen erfassen und noch fehlende Informationen beschaffen können bzw. sich am Ende der Klasse 10 Problemsituationen stellen können. Des Weiteren sind für die Klasse 6 die Anwendung verschiedener heuristischer Strategien vorgesehen. Hier nennt das Kerncurriculum das Untersuchen von Beispielen, das systematische Probieren, das Experimentieren, das Zurückführen auf Bekanntes, das Rückwärtsrechnen, das Permanenzprinzip, das Zerlegen und Zusammensetzen von Figuren und das Erkennen von Invarianten und Symmetrien. Diese Strategien werden bis Klasse 8 um die Spezialisierung und Verallgemeinerung, das Zerlegen in Teilprobleme, das Substituieren, das Variieren von Bedingungen, das Vorwärtsrechnen und das Rückwärtsarbeiten ergänzt, während bis zum Ende der Klasse 10 die Wahl und das Anwenden geeigneter Strategien im Vordergrund stehen.[95]

Darüber hinaus nennt das Kerncurriculum weitere Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Problemlösung wie die Nutzung verschiedener Darstellungsformen, die Parametervariationen sowie die Anwendung elementarer mathematischer Regeln, algebraische, numerische und graphische Verfahren und geometrische Konstruktionen. Die Liste der stufenspezifischen Hinweise sieht abschließend das Deuten und Beurteilen der Ergebnisse, die Bewertung und den Vergleich der Strategien und den konstruktiven Umgang mit Fehlern vor.[96]

Fazit

Auch wenn das Kerncurriculum von Niedersachsen eine Vielzahl von Heurismen aufführt, diese konkret benennt und darüber hinaus fordert, dass „die Bewältigung mathematischer Problemsituationen […] das Zusammenspiel von Kompetenzen [voraussetzt], die sich auf mathematische Prozesse beziehen, und Kompetenzen, die auf mathematische Inhalte ausgerichtet sind“ (NIEDERSACHSEN 2006: 8), findet man in Auseinandersetzung mit den stufenspezifischen Inhalten nur bedingt eine Verknüpfung beider Bereiche. Es werden lediglich Formulierungen wie „messen Größen“, „verwenden Terme“ oder „interpretieren die im Modell gewonnenen Ergebnisse“ (NIEDERSACHSEN 2006:28,29) aus dem prozessbezogenen Kompetenzbereich des Problemlösens aufgegriffen. Hinweise auf die konkrete Nutzung oder Anwendung heuristischer Vorgehensweisen findet man hingegen nicht.

[95] Vgl. NIEDERSACHSEN 2006: 15-16.
[96] Vgl. NIEDERSACHSEN 2006: 26-27.

3.2.10 Nordrhein-Westfalen

Der *Kernlehrplan* von Nordrhein-Westfalen ist inhaltlich eng an die Bildungsstandards geknüpft. Die in Kapitel 1 formulierten *Aufgabe und Ziele des Mathematikunterrichts* stimmen mit dem Wortlaut der Bildungsstandards weitestgehend überein.

Wie in den Bildungsstandards nachzulesen, wird auch in Nordrhein-Westfalen die Bedeutung des Erwerbs der Kompetenz des Problemlösens durch die Formulierung „Mathematische Grundbildung […] beinhaltet insbesondere die Kompetenz des problemlösenden Arbeitens im inner- und außermathematischen Kontext […]“ (NORDRHEIN-WESTFALEN 2007a: 11) hervorgehoben. Daran anschließend werden die Kompetenzerwartungen genannt, die im Einzelnen kurz erläutert werden. Das Lösen von Problemen wird dabei in der Fähigkeit gesehen, Probleme zu erfassen, zu erkunden und zu lösen. Die Schüler sollen im Einzelnen inner- und außermathematische Problemstellungen mit eigenen Worten wiedergeben und diese erkunden, Vermutungen aufstellen und Probleme in Teilproblem zerlegen. Zudem sollen sie verschiedene Darstellungsformen, mathematische Verfahren und Problem-lösestrategien nutzen und die Lösungswege und Ergebnisse überprüfen und bewerten. In Bezug auf die Problemlösestrategien nennt der Kernlehrplan Beispiele wie das Überschlagen, das Finden von Beispielen, das systematische Probieren und Schlussfolgern, das Zurückführen auf Bekanntes und Verallgemeinern.[97]

Kapitel 3 befasst sich mit Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8 und 9. Dabei sind die Wiedergabe von Problemstellungen mit eigenen Worten und die Entnahme relevanter Größen zur Erkundung eines Problems notwendig. Das Lösen eines Problems erfolgt durch das Finden mathematischer Fragestellungen sowie in der Ermittlung von Näherungswerten durch Schätzen und Überschlagen und durch die Nutzung elementarer mathematischer Regeln und Verfahren. Darüber hinaus sind für das Ende der Jahrgangsstufe 6 Problemlösestrategien wie das Finden von Beispielen und das Überprüfen durch Probieren vorgesehen und die Fähigkeit, Ergebnisse zu deuten.[98]

Die Fähigkeiten und Fertigkeiten werden bis zum Ende der Klasse 8 weiterentwickelt, so dass die Schüler zum *Erkunden* eines Problems auch Muster und Beziehungen untersuchen und Vermutungen aufstellen. Das *Lösen* setzte eine planvolle und beschreibende Vorgehensweise voraus und es kommen weitere Strategien hinzu wie das Zurückführen auf Bekanntes, Spezialfälle finden und Verallgemeinern. Auch die Nutzung verschiedener

[97] Vgl. NORDRHEIN-WESTFAHLEN 2007a: 14.
[98] Vgl. NORDRHEIN-WESTFAHLEN 2007a: 19.

Darstellungsformen ist eine zu erwerbende Fähigkeit. Die Reflexion sieht die Überprüfung und Bewertung der Ergebnisse durch eine Plausibilitätsüberlegung, Überschlagsrechnung oder Skizzen vor sowie die Überprüfung des Lösungsweges auf Richtigkeit und Schlüssigkeit.[99]

Am Ende der Jahrgangsstufe 9 werden die bislang erworbenen Fähigkeiten durch das Zerlegen eines Problems in Teilprobleme, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, den Vergleich und die Bewertung von Lösungswegen und der verwendeten Strategien vervollständigt.[100]

Die *Muster- und Modellaufgaben zum Kernlehrplan Mathematik für das achtjährige Gymnasium G8* zeigen exemplarisch Umsetzungsmöglichkeiten der Forderung, prozessbezogene Kompetenzen in Verbindung mit konkreten Inhalten zu vermitteln.[101] Dabei stellen die Muster- und Modellaufgaben nach eigener Aussage „beispielhaft Probleme dar, die die Schülerinnen und Schüler […] lösen sollen“ (NORDRHEIN-WESTFALEN 2007b: 2).

Fazit

Der *Kernlehrplan* selbst nennt unter starkem Bezug auf die Bildungsstandards einige, auch konkrete, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die die Schüler im Bereich der Problemlösefähigkeit im Lauf der Orientierungs- und Mittelstufe erwerben sollen. Dabei wird aber die explizit verlangte Verknüpfung mit den fachbezogenen Kompetenzen nicht überzeugend hergestellt. Lediglich die Handreichung *Muster- und Modellaufgaben* führt anhand einiger Beispiele konkret aus, wie diese Verschränkung gedacht wird.

3.2.11 Rheinland-Pfalz

In Rheinland-Pfalz ist der *Rahmenlehrplan* Mathematik für die Sekundarstufe I (Schuljahre 5 bis 9/10) schulartenübergreifend gültig. Zu diesem gibt es drei *Anregungen zur Umsetzung*, die Konkretisierungen für je eine Doppeljahrgangsstufe enthalten.

Das Vorwort des Rahmenlehrplans nennt die Fähigkeit zum Problemlösen, die durch die „Auseinandersetzung mit inner- und außermathematischen Problemen“ erworben werde, als oberstes Ziel des Mathematikunterrichts. Es wird an dieser Stelle auch gesagt, dass „die Vermittlung heuristischer Strategien insgesamt die Problemlösefähigkeit [steigere]“ (RHEINLAND-PFALZ 2007a: 3). Im weiteren Verlauf des Vorwortes werden die Inhalte der

---

[99] Vgl. NORDRHEIN-WESTFAHLEN 2007a: 25.
[100] Vgl. NORDRHEIN-WESTFALEN 2007b: 29.
[101] Vgl. NORDRHEIN-WESTFALEN 2007b: 35.

Bildungsstandards Mathematik wörtlich zitiert, so auch die „allgemeine mathematische" Kompetenz K2.

Nachdem auch im Kapitel *Didaktisch-methodische Konzeption* verschiedentlich die anzustrebende Problemorientierung betont wird, heißt es schließlich, dass „insbesondere das Bewusstmachen von [...] zielführenden (heuristischen) Strategien [...] Voraussetzung für die Erweiterung der Problemlösekompetenz [ist]" (RHEINLAND-PFALZ 2007a: 8).

Die erste konkrete Erwähnung einer mathematischen Arbeitsweise erfolgt in Kapitel 4 *Elektronische Medien im Mathematikunterricht* im Zusammenhang mit dem Einsatz von Dynamischer Geometriesoftware, nämlich „das Lösen eines Problems durch eine Zerlegung in bereits gelöste Teilprobleme" (RHEINLAND-PFALZ 2007a: 11).

In den folgenden Kapiteln werden allgemeine mathematische Kompetenzen, Fachinhalte und Hinweise sowie Vernetzungsmöglichkeiten für jede der in den Bildungsstandards aufgeführten Leitideen tabellarisch für die in den drei Doppeljahrgangsstufen verbindlichen Themen gefasst.

An dieser Stelle und in Bezug auf die vorliegende Arbeit ist bezüglich der Orientierungsstufe 5/6 festzuhalten, dass die Kompetenz K2 in den drei Formulierungen *geeignete Strategien zum Problemlösen anwenden, geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und durchführen* sowie *vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten* bei der Beschreibung aller behandelten Leitideen ein- oder mehrfach gefordert wird.

Für die Jahrgangsstufe 7/8 wiederholt sich der Befund der Orientierungsstufe, allerdings findet sich bei Leitidee 3 *Raum und Form* erstmals eine Konkretisierung des Begriffs *heuristisches Hilfsmittel*. Hier heißt es erweitert, dass die Schüler „geeignete heuristische Hilfsmittel (z. B. Planfigur)" (RHEINLAND-PFALZ 2007a: 52) verwenden sollen. Bei Leitidee 4 *Funktionaler Zusammenhang* werden als ein weiteres Beispiel für ein heuristisches Hilfsmittel „informative Figuren" (RHEINLAND-PFALZ 2007a: 62) genannt.

In Rheinland-Pfalz beträgt die Zeit bis zum Berufsreifeabschluss (künftig BR genannt) nur 9 Schuljahre. Daher werden die für Schüler, die den Berufsreifeabschluss anstreben, verbindlichen Inhalte separat betrachtet: Für die Leitideen 1 bis 3 finden sich die drei Formulierungen der Kompetenz K2 wieder, bei Leitidee 4 und 5 dagegen werden sie nicht erwähnt.

Für die Doppeljahrgangsstufe 9/10 mit dem Ziel Mittlerer Schulabschluss stellt sich die Sachlage ähnlich dar. Hier findet sich nur bei Leitidee 5 *Daten und Zufall* kein Bezug zur allgemeinen mathematischen Kompetenz K2.

Die drei auf jeweils eine der Doppeljahrgangsstufen bezogenen *Anregungen zur Umsetzung*, bei denen es sich im Kern um eine Sammlung von Unterrichtsprojekten handelt, die die Vermittlung der im Rahmenlehrplan festgelegten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen exemplifizieren sollen, greifen das Problemlösen verschiedentlich auf; Dynamische Geometriesoftware wird als ein Werkzeug benannt, das den Erwerb heuristischer Fähigkeiten unterstützen soll[102], es wird unter dem Punkt „Produktorientierung" auch angemerkt, dass diese Produkte dazu dienen, „die erarbeitete Problemlösung im Blicke auf die Aufgabenstellung, die Ziele, die Planung und den Arbeitsprozess zu überprüfen" (Rheinland-Pfalz 2007b: 11).

Als heuristische Strategie wird das „Lösen von Problemen durch eine maßstabsgerechte Zeichnung" (Rheinland-Pfalz 2007b: 14) benannt, bevor unter der Überschrift „Strategien für Sachaufgaben" eine ausführlichere Darstellung dessen folgt, was unter Problemlösestrategien zu verstehen ist.[103] Interessant ist, dass sich heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien hier sowohl in der dort aufgeführten Phase 1 *Ausgangssituation – Problemstellung verstehen* als auch in Phase 2 *Lösungsideen entwickeln* finden, konkret „Visualisierung: Zeichnen informativer Figuren", das „Zerlegen in Teilprobleme", das „Rückerinnern", das „Arbeiten mit Tabellen" und das „Aufstellen von Termen, Gleichungen und/oder Funktionen" (Rheinland-Pfalz 2007b: 28).

Weder in den *Anregungen* für die Jahrgangsstufen 7 und 8[104] noch in denen für die Jahrgangsstufen 9 und 10[105] wird diesen stichpunktartigen Konkretisierungen etwas hinzugefügt. Es werden lediglich Projekte genannt, an denen die Kompetenz K2 entwickelt werden kann.

Fazit

Das Problemlösen wird im rheinland-pfälzischen Rahmenlehrplan allenthalben gefordert und für die meisten Themenbereiche auch explizit als zu erwerbende Kompetenz benannt. Es wird auch eine Unterscheidung in heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien

[102] Vgl. Rheinland-Pfalz 2007b: 3.
[103] Diese Listung ist eng an Pólyas Schritte zur Problemlösung angelehnt.
[104] Vgl. Rheinland-Pfalz 2007c.
[105] Vgl. Rheinland-Pfalz 2007d.

vorgenommen – oder vielmehr aus den Bildungsstandards übernommen, die jedoch an keiner Stelle erläutert wird. Eine konsequente Verbindung von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen fehlt.

3.2.12 Saarland

Bereits auf den ersten Seiten des Lehrplans des Saarlandes zum *Beitrag des Faches Mathematik zur Erreichung der Zielsetzung des Gymnasiums* und zu den *Zentralen Zielen und Inhalten des Mathematikunterrichts bis zum Abitur* findet man zahlreiche Hinweise auf die Kompetenz des Problemlösens. So wird im jahrgangsübergreifenden Teil des Lehrplans verstärkt Wert auf „heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren" (SAARLAND 20014: 7) gelegt und die Mathematik wird als „deduzierende, beweisende und als experimentelle, heuristische Wissenschaft" (ibid.) bezeichnet.

Die Ausbildung heuristischer Strategien erfolgt dabei laut Lehrplan durch das Experimentieren und Probieren im Rahmen des entdeckenden Lernens, das die Schüler dazu befähigt, „Beziehungen und Strukturen zu entdecken und sie zu analysieren" (SAARLAND 20014: 7). Eine Vernetzung von mathematischen Inhalten und zentralen Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie Kompetenzen ist im Lehrplan vorgesehen.

In der neuesten Publikation des Bildungsministeriums Saarland tauchen die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen in unveränderter Form aus den Bildungsstandards übernommen auf. Hier werden sie auch als verbindliche Kompetenzschwerpunkte bezeichnet, denen verbindliches Fachwissen an die Seite gestellt wird.

Im Saarland wird aktuell ein neuer, kompetenzorientierter Lehrplan für die Jahrgangsstufen 5, 6 und 7 erprobt, auf den hier bevorzugt eingegangen werden soll, da er modellhaft für die angestrebten Veränderungen in der saarländischen Lehrplangestaltung steht. Für die Jahrgangsstufen 8 bis 10 liegt eine solche Neubearbeitung derzeit noch nicht vor, soll in den kommenden Schuljahren jedoch entwickelt werden. In dem neuen Lehrplanentwurf wird die Bedeutung des Problemlösens speziell für Schüler, die die allgemeine Hochschulreife erwerben wollen, bereits in den jahrgangsstufenübergreifenden Bemerkungen betont. Hier wird betont, dass „verstärkt heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren [...], die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen" (SAARLAND 2014: 7) zum Tragen kommen. Und aus dieser Einschätzung heraus wird als eines der zentralen Ziele des saarländischen Mathematikunterrichts die „Ausbildung heuristischer Strategien beim Experimentieren und Probieren" (ibid.) genannt.

Für die Jahrgangsstufe 5 bis 7 enthält der Lehrplan unter der Überschrift *Verbindliche Kompetenzschwerpunkte* detaillierte Kompetenzformulierungen, die mit den sechs prozessbezogenen Kompetenzen dadurch „verbunden“ werden, dass sie in Klammern dahinter aufgeführt sind. Die Kompetenz 2 taucht in Jahrgang 5 verschiedentlich sowohl im Themenbereich *Natürliche Zahlen* als auch bei den Themengebieten *Größen*, *Geometrische Grundbegriffe*, und *Teilbarkeit der natürlichen Zahlen* auf.[106]

Schüler sollen „Rechenterme zu verbal beschriebenen Rechenausdrücken [aufstellen]“ (SAARLAND 2014: 19) und „Zahlenrätsel durch Operationsumkehr (Rückwärtsarbeiten) [lösen]“ (ibid.).[107] Im Themenblock *Größen* heißt es bezüglich der Problemlösekompetenz, dass die Schüler „zu gegebenen Geldbeträgen mögliche Stückelungen [finden]“ (SAARLAND 2014: 21) und “einfache Sachaufgaben [lösen]“ (ibid.).[108] Beim Thema *Geometrische Grundbegriffe* wird das Problemlösen als Oberbegriff für jede Tätigkeit benutzt, bei der die Schüler zeichnerisch Lösungen ermitteln, so z. B. wenn sie „die Koordinaten von Punkten aus geometrischen Bedingungen“ (SAARLAND 2014: 25) bestimmen oder „zeichnerisch [er-mitteln], ob Punkte auf gegebenen Geraden liegen“ (SAARLAND 2014: 26). Darüber hinaus wird das Problemlösen in Zusammenhang mit der Rechteckbetrachtung vielfach aufgeführt. Danach wird die Problemlösefähigkeit der Schüler gefördert, indem sie „beim Rechteck die Symmetrieachsen und das Zentrum der Drehsymmetrie angeben“, „Flächenstücke zum Vergleich von Flächeninhalten [zerlegen und ergänzen]“ (SAARLAND 2014: 29) und Flächeninhalte schätzen. Des Weiteren findet das Problemlösen Anwendung, indem die Schüler „aus dem Flächeninhalt bzw. dem Umfang und der Angabe einer Seitenlänge die fehlende Seitenlänge [berechnen]“ oder „zum Berechnen von Seitenlängen Gleichungen auf[stellen], die sie durch Anwenden von Rechenregeln und durch Umkehroperationen der Grundrechenarten lösen“ und „in geeigneten Fällen bei gegebenem Flächeninhalt das Rechteck mit dem kleinsten Umfang“ oder „bei gegebenem Umfang das Rechteck mit dem größten Inhalt [bestimmen]“ (SAARLAND 2014: 30). Der Themenbereich *Teilbarkeit der natürlichen Zahlen* greift das Problemlösen ebenfalls als einen verbindlichen Kompetenz-

[106] Es fällt auf, dass die meisten Kompetenzformulierungen (und dies scheint tatsächlich nur diejenigen zur K2 zu betreffen) keineswegs einen erkennbaren Bezug zu irgendeiner Form von heuristischer Tätigkeit direkt angeben oder definieren.
[107] Inwiefern es sich bei den hier angesprochenen Verfahren tatsächlich um Problemlöseverhalten (Wechsel der Darstellungsform und Rückwärtsarbeiten) und nicht um die wiederholte Anwendung erlernter, algorithmischer Verhaltensweisen handelt, ist zumindest diskussionswürdig.
[108] Bei der ersten Referenz mag das systematische Probieren gemeint sein, das Lösen von Sachaufgaben als solches ist sicherlich kein Heurismus.

schwerpunkt mit den Worten auf: „Die Schülerinnen und Schüler […] testen Zahlen bis 500 auf Primzahleigenschaften [und] erstellen begründend auf den elementaren Teilbarkeitsregeln weitere Regeln zur Teilbarkeit, z. B. durch 6 und 15“ (SAARLAND 2014: 32). Und auch beim Auffinden des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen findet die Kompetenz K2 Anwendung.

In der Jahrgangsstufe 6 wird die Problemlösefähigkeit im Zusammenhang mit der Bruchrechnung überhaupt nicht erwähnt. Beim Thema *Geometrische Körper* finden sich folgende Kompetenzbeschreibungen als Ausdruck der Problemlösekompetenz: „Die Schülerinnen und Schüler beschreiben bei Polyedern die begrenzenden Flächen, deren Anzahlen und Deckungsgleichheiten […]“ (SAARLAND 2014: 44) und „identifizieren in Quadernetzen aufeinander fallende Ecken und Kanten“ (ibid.). Es heißt weiterhin: „Die Schülerinnen und Schüler berechnen aus dem Rauminhalt und dem Grundflächeninhalt die Höhe […]“ (SAARLAND 2014: 45), eine Formulierung die in ähnlicher Form noch mehrfach vorkommt. Ähnlich wie bereits in Jahrgang 5 werden in diesem Zusammenhang weitere, sehr konkrete Vorgehensweisen aufgeführt, anhand derer die Problemlösefähigkeit erworben werden soll. So heißt es beispielweise: „Die Schülerinnen und Schüler zeichnen unterschiedliche Netze des selben Quaders [und] ermitteln die elf unterschiedlichen Netze von Würfeln“ (SAARLAND 2014: 44). Im Themenkreis *Symmetrie* wird die Kompetenz K2 wiederholt angegeben und ist dann mit Verben wie „untersuchen“, „zeichnen“ und „prüfen“ verknüpft.[109] Das sehr umfassende Thema *Rationale Zahlen* wird nur an wenigen Stellen mit der Kompetenz K2 in Zusammenhang gebracht, wenn es heißt, dass Schüler „anhand der Zahlengeraden den Mittelwert zweier Zahlen [ermitteln]“ (SAARLAND 2014: 50), Gleichungen aufstellen[110] oder Textaufgaben lösen und stellen (ibid.). Auch sollen die Schülerinnen und Schüler „Lösungen zu Aussageformen durch Probieren [finden]“ (SAARLAND 2014: 56) oder „die Probe in Text und Gleichung [durchführen]“ (ibid.).

Für Jahrgangsstufe 7 finden sich die ersten Hinweise auf den Problemlösebegriff beim Thema *Bürgerliches Rechnen*, welches sich mit Zuordnungen im Alltag befasst. Hier wird die Einordnung der Proportionalität als ein Sonderfall von „je mehr-desto mehr“ mit der Kompetenz K2 in Verbindung gebracht sowie das „Prüfen [von] Wertetabellen auf Vielfacheneigenschaften, Quotientengleichheit und Additivität“ (SAARLAND 2014: 62).

---

[109] Vgl. SAARLAND 2014: 42. Anmerkung des Verfassers: Es wird nicht deutlich, inwieweit hier ein tatsächlicher Problemlöseprozess gemeint ist.
[110] Vgl. SAARLAND 2014: 47.

Und auch einen Zusammenhang zwischen Durchmesser und Umfang von Kreisen an Gegenständen zu erforschen wird dem Erwerb dieser Kompetenz beigemessen (SAARLAND 2014: 62).

Im Rahmen der Stochastik kommt das Problemlösen bei der verbalen und formalen Ergebnisbeschreibung für Zufallsexperimente sowie bei der Berechnung der Laplace-Wahrscheinlichkeit zum Tragen (SAARLAND 2014: 70). Auffallend oft wird die Kompetenz K2, wie in den beiden Schuljahren zuvor auch, in Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand der Geometrie angeführt, wonach die Schüler unter anderem Strecken und Winkel kongruenter Figuren identifizieren und verschiedene Fragestellungen zu den Kongruenzsätzen und den Eigenschaften von Dreiecken bearbeiten sollen, um die Problemlösekompetenz zu erwerben (SAARLAND 2014: 71-73). Bei den Linearen Funktionen wird das Problemlösen nur durch die Entnahme relevanter Größen aus Tabellen und Diagrammen geschult (SAARLAND 2014: 77).

Der Einsatz der neuen Medien im Geometrieunterricht wird als ideales Feld zur experimental-handlungsorientierten „Vermittlung typischer Strategien der Heuristik und des Problemlösens“ (SAARLAND 2011a: 7) bezeichnet.

In den stufenspezifischen Hinweisen zur Jahrgangsstufe 8 heißt es im Zusammenhang mit der Vermittlung von Termen, dass eine Rückwärtsanalyse durchgeführt werden kann, allerdings wird der Begriff nicht weiter kommentiert oder auf das Vorliegen einer heuristischen Strategie hingewiesen.[111]

Für die Jahrgangsstufe 9 ist das Thema Problemlösen und Heuristik an keiner Stelle erwähnt.

Fazit

Es werden auffallend häufig Bezüge zur Problemlösefähigkeit hergestellt allerdings wird auf eine Definition des Problemlösebegriffs oder die konkrete Benennung der zu erwerbenden Heurismen vollständig verzichtet.

Stattdessen wird mit einer Kompetenzbeschreibung expliziert, die nicht erkennbar mit heuristischen Fähigkeiten und Fertigkeiten korrespondiert. Die meisten Formulierungen verweisen vielmehr auf bestimmte, eher algorithmisch anmutende Vorgehensweisen bzw. einfache mathematische Grundfertigkeiten, keineswegs jedoch auf echtes problemlösendes Verhalten. Der Lehrplan Saarland (2014: 10) schreibt dazu: „Die Kompetenzschwerpunkte

[111] Vgl. SAARLAND 2011b: 3.

sind bewusst detailliert beschrieben. Dies geschieht mit dem Ziel, die Intensität der Bearbeitung möglichst präzise festzulegen.“

Trotz der sehr oft genannten Kompetenz K2 werden im Grunde nur zwei heuristische Tätigkeiten in diesem Zusammenhang eindeutig benannt: das Rückwärtsarbeiten und das Zerlegen und Ergänzen.

3.2.13 Sachsen

Die *Ziele und Aufgaben* im *Lehrplan* des Bundeslandes Sachsen sind eingangs klar und deutlich formuliert. So wird der Erwerb von Problemlösestrategien als ein überfachliches Bildungsziel so definiert, dass Schüler „lernen, planvoll zu beobachten und zu beschreiben, zu analysieren, zu ordnen und zu synthetisieren, […] und […] die Fähigkeit [entwickeln], problembezogen deduktiv oder induktiv vorzugehen […], in Alternativen zu denken, Phantasie und Kreativität zu entwickeln und zugleich Lösungen auf ihre Machbarkeit [hin] zu überprüfen“ (SACHSEN 2004/2009/2011/2013: VIII).

Die Hinführung zur bewussten Anwendung heuristischer Verfahren und die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten als allgemein fachliches Ziel werden als ein Beitrag zur allgemeinen Bildung gesehen.[112]

Es folgen die stufenspezifischen Hinweise für alle Jahrgangsstufen, die für die Klasse 5 mit der Erläuterung zur Entwicklung von Problemlösefähigkeit als erstgenanntes Ziel beginnen. Konkret werden das systematische Probieren und Zurückführen auf Bekanntes im Zusammenhang mit Volumen-/Flächeninhaltsberechnungen aufgeführt. Auch das Zerlegen in Teilprobleme wird, wenn auch ohne konkreten Inhaltsbezug, genannt. In einem der Wahlpflichtbereiche, Mathematische Puzzles und Spiele, wird erwähnt, dass die Problemlösefähigkeit hier weiter ausgebildet werden kann.[113]

Für die Jahrgangsstufe 6 wird die Entwicklung der Problemlösefähigkeit im Bilden von Modellen und Umgang mit ihnen gesehen, sowie in der Interpretation von Lösungen. „Beim Problemlösen verwenden […] [die Schülerinnen und Schüler] die Methode des Zurückführens auf Bekanntes und setzen Hilfsmittel sachgerecht ein“ (SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 13).

[112] Vgl. SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 2.
[113] Vgl. SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 8-12.

Für Klasse 7 wird die zunehmende Bewusstmachung und eigenständige Auswahl von Lösungsverfahren einerseits und heuristischer Verfahren andererseits postuliert.[114] Für das fachliche Thema *Geometrie in der Ebene* heißt es, dass die Schüler „Einblick in die heuristischen Verfahren Vorwärtsarbeiten und Rückwärtsarbeiten" (SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 17) gewinnen sollen.

Die Entwicklung der Problemlösefähigkeit wird in Klasse 8 durch die Mathematisierung inner- und außermathematischer Problemstellungen und die Beschreibung von Lösungswegen „auch durch Algorithmen"[115] erweitert. Hinzu kommen die Nutzung von Hilfsmitteln zur Visualisierung, zum Auffinden von Vermutungen und zur Beschaffung von Informationen und die Verwendung heuristischer Verfahren in Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand der Stochastik. In den anschließend beschriebenen Lernbereichen werden im Lernbereich *Vernetzung: Heuristische Strategien* das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten als heuristische Strategien sowie Skizzen, Tabellen und Variablen als heuristische Hilfsmittel konkret benannt.

In Klasse 9 sollen die Schüler in der Lage sein, „selbständig problemadäquate Lösungsverfahren sowie geeignete Hilfsmittel, Informationsquellen und Darstellungsformen" (SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 25) auszuwählen und ganz allgemein heuristische Verfahren nutzen. Es wird im Folgenden im Lernbereich *Vernetzung: Mathematik und moderne Rechentechnik* „Rechentechnik als Hilfsmittel im Problemlöseprozess" (SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 27) bezeichnet.

Bis zum Ende der Klasse 10 sollen die Schüler darüber hinaus in der Lage sein, effektive Lösungsverfahren, Hilfsmittel und Darstellungsformen auszuwählen, die Ergebnisse zu überprüfen und zu bewerten und heuristische Verfahren bewusst auswählen und anwenden. Noch einmal wird der Begriff der Problemlösestrategie aufgegriffen und zwar in Auseinandersetzung mit dem Lernbereich *Algebraische Lösungen geometrischer Probleme*; allerdings verzichtet der Lehrplan in diesem Zusammenhang darauf, konkrete Strategien zu nennen.[116]

---

[114] Vgl. SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 17.

[115] zit. nach SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 21, wo Algorithmen unterschiedslos neben Heurismen als Mittel zur Problemlösung genannt werden. Die Anwendung eines Algorithmus impliziert aber eindeutig, dass die Methode, die zur Lösung führt, bereits bekannt ist, was nach den meisten gängigen Definitionen bedeutet, dass kein Problem, sondern eine Aufgabe, zu lösen ist.

[116] Vgl. SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 21, 23, 29.

Fazit

Dem Anspruch, die allgemeinen fachlichen Ziele in Auseinandersetzung mit den ausgewählten Inhalten zu erwerben kommt der Lehrplan nur bedingt nach. Zwar wird eine Reihe von heuristischen Techniken angesprochen, allerdings ist die Zuweisung nach heuristischen Techniken einerseits und Heurismen (siehe Kap. 5) andererseits nicht eindeutig. Dem eingangs formulierten Anspruch, die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten als allgemein fachliches Ziel und als einen Beitrag zur allgemeinen Bildung zu fördern, entspricht der Lehrplan nicht, weil konkrete Anknüpfungspunkte fehlen und die stichpunktartigen Postulate zu allgemein gehalten sind.

3.2.14 Sachsen-Anhalt

In Sachsen-Anhalt gehört ein gesonderter *Grundsatzband* zu den Lehrplantexten, in dem fächerübergreifend Kernpunkte des angestrebten Unterrichts bzw. der Lern- und Schulkultur dargelegt werden. In diesem Grundsatzband wird bereits unter dem Stichwort *Problemlösekompetenz* festgestellt, dass „fachbezogenes Wissen und Können auch in ungewohnten und fächerübergreifenden Situationen anzuwenden, [...] ein zentrales Bildungsziel“ ist (SACHSEN-ANHALT 2012a: 13). Außerdem existiert ein *Lehrplan* und eine Sammlung *Niveaubestimmende Aufgaben*.

Der Lehrplan für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 (bzw. bis Jahrgangsstufe 12) des gymnasialen Bildungsgangs des Landes Sachsen-Anhalt stammt aus dem Jahre 2003; es liegt mithin keine Überarbeitung nach dem Beschluss der KMK im Jahre 2004 vor. Mit Beginn des Schuljahres 2014/2015 trat der neue *Fachlehrplan* Mathematik für die Jahrgangsstufe 10 zur Erprobung in Kraft und es erfolgte eine Überarbeitung der Fachlehrpläne für die Klassen 5 bis 9.[117]

Bei der Definition der *Aufgaben des Faches Mathematik* wird auf die Bedeutung der Problemlösefähigkeit für die allgemeine Hochschulreife hingewiesen und sie als eines der übergreifenden Ziele des Unterrichts benannt. Die Bereitschaft und Fähigkeit zum Lösen von inner- und außermathematischen Problemen soll kontinuierlich entwickelt werden, wobei besonders das „Entdecken von Beziehungen und Strukturen, […] das Entwickeln von Alternativen sowie das Vernetzen verschiedener Sachverhalte“ (SACHSEN-ANHALT 2003: 6) ausgeprägt werden sollen. Für die Jahrgangsstufe 10 heißt es, dass Schüler in der Lage sind,

[117] Vgl. SACHSEN-ANHALT 2015.

„geometrische Aussagen zu beweisen und […] ihre Fähigkeiten des Analysierens eines Problems mithilfe von heuristischen Verfahren und Strategien weiter[entwickeln]" (SACHSEN-ANHALT 2003: 77). Eine erwähnenswerte Besonderheit des Lehrplans in Sachsen-Anhalt ist die obligatorische Durchführung von *Aufgabenpraktika*, die in jedem Schuljahr im Umfang von (wenigstens) zwei Wochen durchzuführen sind. In dieser Zeit soll ganz bewusst Freiraum für die selbständige, problemlösende Tätigkeit der Schüler geschaffen werden.[118]

Um auch einen überarbeiteten, an die Bildungsstandards angepassten Lehrplantext des Landes Sachsen-Anhalt hier zu berücksichtigen, folgt an dieser Stelle zusätzlich eine kurze Darstellung des Lehrplans für die Sekundarschulen. Der Lehrplan für Sekundarschulen in Sachsen-Anhalt sieht im Erwerb allgemeiner Problemlösefähigkeit eine Voraussetzung für eine Teilhabe am gesellschaftlichen Leben.[119] Probleme mathematisch zu lösen ist eine von insgesamt vier allgemeinen mathematischen Kompetenzen, der sechs Teilkompetenzen (P1 – P6) zugeordnet werden. Neben der Fähigkeit, „Aufgabentexte inhaltlich [zu] erschließen, diese [zu] analysieren und aufgabenrelevante Informationen [zu] entnehmen" (SACHSEN-ANHALT 2012b: 9) ist die Nutzung „heuristische[r] Regeln, Strategien oder Prinzipien (vor allem Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Probleme in Teilprobleme zerlegen und Zurückführen auf Bekanntes, systematisches Probieren)" (ibid.) vorgesehen. Die Auswahl von Lösungsverfahren, die Kontrolle und Interpretation von Ergebnissen und Lösungswegen und die angemessene Nutzung von Hilfsmitteln wie die Formel- und Tabellensammlung sind weitere Bestandteile des Problemlöseprozesses.

Es folgt eine Übersichtsdarstellung aller vier allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Längsschnitt, die den Schwerpunkt der einzelnen Entwicklungen anhand von Schülertätigkeiten wiedergibt. Die Übersicht zum Problemlösen (P) umfasst dabei doppelstufenspezifische Hinweise und Schülertätigkeiten zu den zuvor definierten sechs Teilkompetenzen[120].

---

[118] Vgl. SACHSEN-ANHALT 2003: 40 und 2012b: 15, wo sich Ausführungen auch zu differenzierenden, individualisierenden und motivierenden Aspekten solcher Aufgabenpraktika finden.

[119] Vgl. SACHSEN-ANHALT 2012b: 2.

[120] Diese sind: P1 Aufgabentexte inhaltlich erschließen, diese analysieren und aufgabenrelevante Informationen entnehmen; P2 heuristische Regeln, Strategien oder Prinzipien (vor allem das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Probleme in Teilprobleme zerlegen und Zurückführen auf Bekanntes, systematisches Probieren) nutzen; P3 Lösungsverfahren auswählen und unter den Aufgabenbedingungen anwenden; P4 Ergebnisse kontrollieren und interpretieren; P5 Lösungswege reflektieren und ggf. alternative Lösungswege angeben; P6 Hilfsmittel (insbesondere Formel- und Tabellensammlungen, Taschenrechner und Mathematiksoftware) angemessen nutzen, vgl. SACHSEN-ANHALT 2012b: 9.

So sieht der Lehrplan in P2 bezüglich der Nutzung heuristischer Regeln, Strategien und Prinzipien für die Doppeljahrgangsstufe 5/6 die Anfertigung von Planfiguren, das Finden einer Idee durch Probieren und das Zurückführen auf Bekanntes vor, bevor in den Klassen 7/8 die Schüler Hilfslinien und Planfiguren zeichnen, Tabellen anlegen und Aufgaben in Teilaufgaben zerlegen. Bis zum Ende der Klasse 10 werden die bis dato erlernten Lösungsverfahren miteinander kombiniert.[121]

Nach einer (klassischen) tabellarischen Übersicht über die Kompetenzschwerpunkte (der vier Inhaltsbereiche), enthält der Lehrplan eine Verflechtungsmatrix, in der die inhaltsbezogenen Kompetenzen mit den potenziellen – abhängig von den gewählten Aufgabenstellungen – zu erwerbenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen korreliert werden. Die Problemlösekompetenz wird als zu erwerbende Kompetenz bei nahezu allen mathematischen Inhalten angegeben. Statt die Schülertätigkeiten zu benennen, beschränkt sich der Lehrplan auf die Angabe P1 bis P6[122]. Welche Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien jeweils vorgesehen, möglich oder wünschenswert sind, wird nicht erläutert.[123]

Die *Niveaubestimmenden Aufgaben* veranschaulichen die angestrebten Kompetenzniveaus für alle Jahrgangsstufen anhand konkreter Aufgaben, die hinsichtlich ihres Potenzials zur Kompetenzsteigerung durchanalysiert dargestellt werden. Leider werden die inhaltsbezogenen Kompetenzen sehr viel konkreter benannt und vorgestellt als die allgemeinen mathematischen Kompetenzen. In den Kommentaren finden sich aber gelegentlich Hinweise auf die verwendbaren oder vermittelbaren heuristischen Lehrinhalte, so etwa das systematische Probieren (vgl. SACHSEN-ANHALT 2012c: 17). Hier fällt eine Dominanz der Teilkompetenz P3 (Lösungsverfahren auswählen und unter den Aufgabenbedingungen anwenden) ins Auge. Auch deuten einige Formulierungen in den Kommentaren an, dass die Autoren eine Zerlegung in Teilprobleme (vgl. SACHSEN-ANHALT 2012c: 67) oder die Variation der Darstellung (vgl. SACHSEN-ANHALT 2012c: 69) im Blick gehabt haben könnten.

[121] Vgl. SACHSEN-ANHALT 2012b: 10.
[122] In wie weit es sich bei P3 *Lösungsverfahren auswählen und unter den Aufgabenbedingungen anwenden* tatsächlich um eine heuristische Teilkompetenz handelt, ist zumindest zweifelhaft, da ein Problem, für das das Lösungsverfahren grundsätzlich bereits bekannt ist, nach den meisten Definitionen nicht als Problem, sondern vielmehr als Aufgabe, verstanden wird. Auch P6 stellt im engeren Sinne keine heuristische Teilkompetenz dar.
[123] Vgl. SACHSEN-ANHALT 2012b: 18-57.

Fazit

Schon der ältere Lehrplan für Gymnasien verweist auf die grundlegende Bedeutung des Erwerbs der Problemlösefähigkeit und nennt im Ansatz Möglichkeiten, an welchen Stellen und auf welche Weise diese in den Unterricht integriert werden können.

Der 2012 erschienene Grundsatzband hebt die zentrale Bedeutung, nicht nur für das Fach Mathematik, noch einmal sehr deutlich hervor und fordert ganz eindeutig eine Umsetzung in allen Schulfächern. Der Lehrplan für Sekundarschulen versucht einerseits eine Aufschlüsselung der Problemlösekompetenz in Teilschritte P1 bis P6, die sich am Ablauf des Problemlöseprozesses orientieren, andererseits auch eine systematische und übersichtliche Verknüpfung der inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen in einer *Verflechtungsmatrix*. Bedauerlicherweise werden hier aber lediglich die Teilkompetenzen mit ihren Nummern angegeben, so dass zwar eine Zielrichtung der angestrebten Verknüpfungen erkennbar wird, sich keineswegs jedoch der fortschreitende Kompetenzaufbau erschließt oder gar konkrete, inhaltsbezogene Impulse gesetzt werden. Auch werden die Teilkompetenzen P1 bis P6 meist isoliert genannt, was dem Prozesscharakter grundsätzlich widerspricht.

3.2.15 Schleswig-Holstein

Der *Lehrplan* des Bundeslandes Schleswig-Holstein trat 1997 in Kraft und wurde im Jahr 2012 durch die Ergänzungsschrift „Fachanforderungen Mathematik Gymnasium Sekundarstufe I“ (Schleswig-Holstein 2012) ergänzt, die innerhalb der noch immer gültigen Lehrpläne Hilfestellungen bei der Umsetzung der Bildungsstandards in den verschiedenen Schulformen liefern sollte. Erst mit Beginn des Schuljahres 2014/2015 wurden mit Inkrafttreten der neuen *Fachanforderungen* für das Fach Mathematik die alten Lehrpläne endgültig abgelöst. Damit hat das Land Schleswig-Holstein über 10 Jahre nach Einführung der Bildungsstandards diese erstmals in seine Lehrpläne implementiert.

Die Lehrplanschriften gliedern sich in einen *Leitfaden zu den Fachanforderungen Mathematik Sekundarstufe I* und in die *Fachanforderungen Mathematik allgemein bildender Schulen Sekundarstufe I und II.*

Der *Leitfaden zu den Fachanforderungen Mathematik Sekundarstufe I* berücksichtigt, nach eigenen Aussagen, sowohl die mathematischen Inhalte als auch die mathematischen Prozesse gemäß den Vorgaben der Bildungsstandards; im Mittelpunkt steht das Mathematiktreiben als Prozess. Unter Rückbezug auf die vier Prozesskontexte *Erfinden/Entdecken,* *Prüfen/Beweisen, Überzeugen/Darstellen* und *Vernetzen/Anwenden* nach Leuders[124] soll ein Mathematikunterricht initiiert werden, der einen inhaltlichen wie prozessbezogenen Kompetenzerwerb ermöglicht. Die Prozesskontexte werden unter Zugrundelegung der in den Bildungsstandards beschriebenen sechs prozessbezogenen Kompetenzen erläutert, ohne die Kompetenzen jedoch näher zu beschreiben. Die Kompetenz K2 (Probleme mathematisch Lösen) wird dem Kontext *Erfinden/Entdecken* zugeordnet mit den Worten: „Es wird ein induktiver und intuitiver Prozess ausgelöst. Er ist gekennzeichnet durch Offenheit, Kreativität, das Zulassen von Fehlern sowie das Beschreiten individueller Wege und Umwege – Ausprägung von K2 (Probleme mathematisch lösen) und von K3 (Mathematisch modellieren)“ (SCHLESWIG-HOLSTEIN 2015: 7). Dieser Prozess wird unter anderem durch die mathematischen Handlungen wie das Aufstellen von Vermutungen, die Suche nach Beispielen und Modellen und die Formulierung und Bewertung von Problemen in Gang gesetzt (ibid.).

Unter der Überschrift *Vom Themenstrang zur Unterrichtseinheit* wird der Umgang und die Bedeutung der Themenstränge vorgestellt, die die wesentlichen mathematischen Inhalte[125] des Unterrichtsgegenstands in Form eines (roten) Fadens durchziehen sollen. Die *Fachanforderungen* führen dies exemplarisch anhand des Satzes von Pythagoras vor und schreiben diesbezüglich: „Der rote Themenstrang führt über den Flächen- (Leitidee Raum und Form) und Flächeninhaltsbegriff zur Flächeninhaltsbestimmung (Leitidee Messen). Dabei bilden die Strategien (Parkettierung, Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip) zur Flächeninhaltsbestimmung einen Schwerpunkt, um eine geometrische Erkundung beim Satz des Pythagoras zu ermöglichen“ (SCHLESWIG-HOLSTEIN 2015: 8). Unter dem Begriff *Themenkreise* beschreiben die Fachanforderungen die horizontale Vernetzung der Themenstränge, die die Möglichkeiten eines Darstellungswechsels eröffnen sollen. Als Beispiel wird die Parkettierung im Zusammenhang mit dem Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip genannt, die ein Verstehen der algebraischen Beschreibungen ermöglicht.[126]

Einen weiteren Themenschwerpunkt stellen die offenen Aufgaben dar, die in den Fachanforderungen zunächst allgemein und im Anschluss exemplarisch erläutert werden. Darin werden neben charakteristischen Merkmalen offener Aufgabenstellungen auch Techniken

[124] Timo Leuders ist Mathematikdidaktiker an der Pädagogischen Hochschule Freiburg.
[125] Tatsächlich beschränken sich die daran anschließenden Aufgabenformate auf die mathematischen Inhalte. Dabei tauchen lediglich die Prozesskontexte an einigen wenigen Stellen auf. Die prozessbezogenen Kompetenzen im Sinne der Bildungsstandards finden hingegen keinerlei Berücksichtigung.
[126] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2015: 10.

zum Öffnen von Aufgaben vorgestellt. Anstelle der hier möglichen direkten und sinnvollen, und im Sinne der Bildungsstandards notwendigen, Verknüpfung mit der Problemlösekompetenz K2 (vgl. Kap. 2.4), legen die Fachanforderungen den Schwerpunkt erneut auf die drei Anforderungsbereiche.[127]

Konkretisiert werden diese Ausführungen durch exemplarisch vorgestellte Aufgabenformate, die den Anspruch erheben, sämtliche Anforderungen zu erfüllen und sich an alle Schüler einer heterogenen Lerngruppe zu richten und somit vor allem den drei Anforderungsniveaus aus den Bildungsstandards zu entsprechen. In diesem Zusammenhang fällt auf, dass zwar die Prozesskontexte an einigen Stellen genannt und in dem vorliegenden Sachkontext kommentiert werden, das Problemlösen in Form des Erkunden/Entdecken jedoch nur an sehr wenigen Punkten, teilweise sogar nur versteckt, in Erscheinung tritt. So findet man im Erkundungsauftrag zum Themenstrang des Satzes von Pythagoras, bei dem aus einer Gliederkette (aus Büroklammern) ein Dreieck erzeugt wird, dessen Gliederanzahl dem pythagoreischen Zahlentripel entspricht, bei der dort beschriebenen Schüleraktivität das ungerichtete beziehungsweise systematische Probieren.[128] Dass es sich bei dem systematischen Probieren um eine (nach vorherrschender Meinung) heuristische Tätigkeit im Problemlöseprozess handelt, wird nicht erwähnt. Insgesamt liegt der Fokus der Aufgabenformate auf den Anforderungsniveaus und dem gemeinsamen Unterricht und nicht auf der Vermittlung prozessbezogener Kompetenzen.

In den *Fachanforderungen Mathematik allgemein bildender Schulen Sekundarstufe I und II* wird unter der Überschrift *Lernen und Unterricht* der Kompetenzbegriff erstmals definiert, der auch das Problemlösen mit einschließt.[129] Das Problemlösen taucht ein weiteres Mal im Zusammenhang mit dem Beitrag des Faches zur allgemeinen und fachlichen Bildung auf, wonach die Mathematik „beim Entdecken von Gesetzmäßigkeiten sowie beim Vergleichen und Reflektieren von Lösungswegen […] Denk- und Handlungsstrategien heraus[bildet]“ und „[zum] Erwerb weitgehender, meist heuristischer Fähigkeiten [beiträgt]“ (SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 12). Darüber hinaus wird postuliert, dass Lernergebnisse und Lösungsstrategien schriftlich festgehalten werden, um Lernergebnisse einzufordern und gleichzeitig zu fördern. Lernaufgaben sollen zudem so konzipiert sein, dass sie verschiedene Zugänge, Lösungswege und Darstellungen zulassen, damit möglichst allen Schülern ein Zugang zu

[127] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 32.
[128] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2015: 17.
[129] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 8.

den Inhalten ermöglicht wird. Dabei wird verstärkt Wert auf die Ausweisung der drei unterschiedlichen Anforderungsniveaus *Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen* und *Verallgemeinern und Reflektieren* gelegt, die sowohl bei den Lernaufgaben als auch bei den Leistungsüberprüfungen zu berücksichtigen sind.[130]

Das Land Schleswig-Holstein übernimmt in seinen Fachanforderungen die sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen aus den Bildungsstandards ebenso wie die dort formulierten drei Anforderungsniveaus Reproduzieren, Zusammenhänge erstellen und Verallgemeinern und Reflektieren. Die Kompetenz K2 (Probleme mathemisch lösen) umfasst danach das Erkennen und die Formulierung von Problemen, die Auswahl und den Einsatz von Problemlösestrategien sowie die Bewertung von Lösungen und Lösungswegen. In den Fachanforderungen wird zudem festgelegt, dass das Anforderungsniveau I, in Bezug auf die Kompetenz K2, das Lösen von Routineaufgaben und das einfacher Problemaufgaben experimentell oder mit bekannten Verfahren beinhaltet. Das Anforderungsniveau II setzt ein Repertoire an Verfahren, heuristischen Hilfsmitteln und Strategien voraus, die zur Problemlösung herangezogen und miteinander kombiniert werden sollen. Darüber hinaus gilt es, die Plausibilität von Ergebnissen zu überprüfen und eigene Probleme zu formulieren. Schließlich sieht das Anforderungsniveau III die Lösung anspruchsvoller Problemstellungen vor sowie das Finden von Lösungsideen und die Reflektion der Lösungswege.[131]

Es folgt eine tabellarische Übersicht der fünf Leitideen, die sich ebenfalls an den Bildungsstandards orientiert. Dabei verzichtet das Land auf eine Zuordnung zu Jahrgangsstufen und weist lediglich die Kompetenzerwartungen für das Ende der Sekundarstufe I aus mit dem Verweis auf einen kumulativen Kompetenzaufbau.

Die Tabellen greifen die *Inhaltsbezogene Kompetenzen*, die *verbindlichen Themen und Inhalte* sowie *Vorgaben und Hinweise* auf.

In Zusammenhang mit der Leitidee *Zahl* findet man in der Spalte *Inhaltsbezogene Kompetenzen* die Formulierung: „Die Schülerinnen und Schüler stellen Zahlen auf verschieden Weise situationsgerecht dar und wechseln zwischen diesen Darstellungen […] [und] entscheiden sich für geeignete Strategien zur Lösung einer gegebenen Gleichung" (SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 22, 24). Dass es sich bei dem Darstellungswechsel um eine heuristische Tätigkeit handelt, wird hingegen an keiner Stelle erwähnt. Stattdessen werden

[130] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 12.
[131] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 18.

in der Spalte *Vorgaben und Hinweise* das Ausklammern sowie das Probierverfahren als Strategie ausgewiesen.[132]

Bei der Leitidee *Messen* wird dem Flächeninhaltsvergleich zusammengesetzter Rechteckfiguren das Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip zugewiesen, wobei auch hier nicht direkt ersichtlich wird, dass es sich um eine heuristische Vorgehensweise handelt, da bislang nur die Begriffe „heuristische Strategien und Verfahren“ sowie „heuristische Hilfsmittel“ gebraucht wurden, das Wort „Prinzip“ bis dato jedoch nicht mit der Kompetenz K2 in Zusammengang gebracht wurde. Formulierungen wie: „Zur Festigung des Verständnisses sollte unter anderem aus gegebenen Größen wie Volumen und Kantenlängen eine fehlende Kantenlänge berechnet werden („rückwärts rechnen“ mit Zahlen als Propädeutik für formales Rechnen mit Variablen)“ (SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 27) führen zwar das Rückwärtsarbeiten als einen weiteren Heurismen auf, sind jedoch für den Laien oder ungeschulten Problemlöser nicht als solcher erkennbar. Weitere (auch versteckte oder indirekte Hinweise) auf den Erwerb der Problemlösekompetenz findet man nicht. Dennoch schreiben die Fachanforderungen unter dem Stichwort *Leistungsbewertung* vor, dass in Klassenarbeiten die allgemeinen mathematischen Kompetenzen angemessen zu berücksichtigen sind, indem zum Beispiel mathematische Sachverhalte beschrieben, begründet oder komplexe Aufgabenstellungen bearbeitet werden. Zudem wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Lösungswege und deren Erläuterungen angemessen zu berücksichtigen und zu beurteilen sind. [133] Bei den Bewertungskriterien der mündlichen Abschlussprüfungen wird unter anderem das „Verständnis für mathematische Probleme sowie die Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen [und] mathematische Sachverhalte zu beurteilen […]“ (SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 46) ebenso bewertet wie die Kreativität, Reflexionsfähigkeit und Selbstständigkeit im Rahmen der Prüfung.[134]

Fazit

Obwohl die Fachanforderungen des Landes Schleswig-Holstein erst im Jahr 2014 verbindlich in Kraft getreten sind, bleiben sie hinter den Erwartungen zurück. So werden die prozessbezogenen Kompetenzen nicht in ausreichendem Maße berücksichtigt und es findet keine systematische Verknüpfung der inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen statt. Weder die Lehrpläne anderer Bundesländer noch die stetig wachsende Anzahl an

[132] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 24.
[133] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 43.
[134] Vgl. SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 46.

Publikationen der letzten Jahre, in denen die Bedeutung der prozessbezogenen Kompetenzen (allen voran die der Problemlösekompetenz) klar herausgearbeitet wurde, haben positiven Einfluss auf die Lehrplanschriften des Landes Schleswig-Holsteins ausgeübt. Stattdessen werden Begriffe wie „heuristische Strategien“ oder „heuristische Hilfsmittel“ gebraucht, ohne diese zu erläutern oder an entsprechender Stelle auszuweisen. Andererseits werden mathematische Tätigkeiten als „heuristisch“ ausgewiesen, die de facto keine sind (siehe hierzu Kap. 5.5). Einzig mit dem Verzicht auf die Zuweisung der Leitideen zu Jahrgangsstufen und die fortlaufende Berücksichtigung der unterschiedlichen Anforderungsniveaus zeigt sich das Land innovativ und zukunftsweisend. Durch die fehlenden stufenspezifischen Hinweise bleibt den Schulen ein größerer Handlungsspielraum für einen kumulativen Kompetenzaufbau. Und die sogenannten Themenstränge eröffnen einen „vertikal ordnenden didaktischen Blick auf Inhalte und das Fällen von Entscheidungen bezüglich Reihenfolge und Schwerpunktsetzungen über mehrere Jahrgangsstufen hinweg“ (SCHLESWIG-HOLSTEIN 2014: 13). Doch ohne die Konkretisierung und Berücksichtigung der prozessbezogenen Kompetenzen kann sich dieser kumulative Kompetenzaufbau nur auf die mathematischen Inhalte beziehen, womit die Fachanforderungen keine großen Fortschritte zu den Schriften von 1997 erkennen lassen.

3.2.16 Thüringen

Thüringens *Lehrplan* legt im Vorwort seinen Fokus auf den Mathematikunterricht als allgemein bildendes Fach, in dem es gilt, Grunderfahrungen wie die allgemeine Problemlösefähigkeit oder auch heuristische Fähigkeit zu erwerben.[135]

Der Lehrplan unterscheidet zwischen *Lernkompetenzen*, zu denen unter anderem die Methodenkompetenz zählt, und den *mathematischen Kompetenzen*, denen das Problemlösen als allgemeine mathematische Kompetenz zugeordnet wird.[136] Während in Zusammenhang mit der Methodenkompetenz der Begriff der *Lösungsstrategien* gebraucht wird, die es zu entwickeln gilt, wird im Rahmen der allgemeinen mathematischen Kompetenzen das Problemlösen folgendermaßen erläutert: Es umfasst die Fähigkeit, „inner- und außermathematische Problemstellungen zu erfassen und mit eigenen Worten wiederzugeben, vorgegebene und selbst formulierte Probleme zu bearbeiten, geeignete heuristische Hilfs-

---

[135] Vgl. THÜRINGEN 2011: 5.
[136] Die zweifache Zuweisung des Problemlösens einmal zu *Lernkompetenzen: Methodenkompetenz* und dann zu *mathematischen Kompetenzen: allgemeine mathematische Kompetenzen* führt hier und in der Folge zu Verständnisschwierigkeiten bzw. Unklarheiten, wie die Begriffstrennung zu verstehen ist.

mittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auszuwählen und anzuwenden, Lösungsideen zu finden und Lösungswege zu reflektieren [und] die Plausibilität der Ergebnisse zu überprüfen“ (THÜRINGEN 2011: 8).

Die stufenspezifischen Hinweise beinhalten zum einen eine ausführliche Beschreibung der zu erwerbenden *Sachkompetenzen*, worunter die mathematischen Inhalte verstanden werden, und zum anderen eine Übersicht über die mit ihnen gemeinsam zu erwerbenden *Lernkompetenzen*.

Für die Klasse 6 ist zum Thema *Arithmetik und Algebra* die Verwendung informativer Figuren und Tabellen als heuristische Mittel zur Lösungsfindung vorgesehen, sowie das systematische Probieren und die sinnvolle Anwendung der Probe und Überschlagsrechnung.[137] Für die Doppeljahrgangsstufe 7/8 ist die Nutzung weitere Darstellungsformen vorgesehen und die Anwendung weiterer Problemlösestrategien wie der Überschlag, das Zurückführen auf Bekanntes, das Finden von Spezialfällen und das Verallgemeinern. „Interaktive Erkundungsmöglichkeiten eines CAS[138] für experimentelles und heuristisches Arbeiten“ (THÜRINGEN 2011: 25) werden darüber hinaus als Gegenstand der Doppeljahrgangsstufe 9/10 und eine zu erwerbende Methodenkompetenz gefordert.

In Verbindung mit dem Unterrichtsgegenstand der Geometrie werden in Klasse 8 weitere Lösungsstrategien erworben, so zum Beispiel das Zeichnen informativer Figuren oder das Finden von Beispielen und Gegenbeispielen. Bis zum Ende der Klasse 10 kommen weitere Strategien wie das Zerlegen von Problemen in Teilprobleme und das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zum Tragen.[139]

Fazit

Der Lehrplan sticht durch eine Fülle von Kompetenzbegriffen hervor. Zu den in den Bildungsstandards entwickelten inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen treten die *Lernkompetenzen* (Selbst-, Sozial- und Methodenkompetenz) hinzu; die *mathematischen Kompetenzen* werden zunächst in *allgemeine mathematische* und *inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen* untergliedert, allerdings ist in der Folge immer wieder auch von der sogenannten *Sachkompetenz* die Rede, worunter dann detailliertere

[137] Vgl. THÜRINGEN 2011: 12.
[138] Durch den CAS-Einsatz (Computer-Algebra-System) im Mathematikunterricht können neue Inhalte bearbeitet und neue Arbeitsformen angewandt werden. Darüber hinaus können Computer-Algebra-Systeme Denkprozesse initialisieren und zu einem entscheidenden Instrument zur Aktivierung der Schüler werden. Sie wirken somit als kognitive Werkzeuge und kognitive Medien.
[139] Vgl. THÜRINGEN 2011: 23, 28.

Aufstellungen der *inhaltlichen mathematischen Kompetenzen* aufgeführt werden. Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen*, zu denen auch das Problemlösen gehört, tauchen dagegen in den jahrgangsstufenspezifischen Ausführungen an keiner Stelle mehr auf. Diese begriffliche Vielfalt und die teils redundanten Strukturen erschweren den Überblick bei der Verwendung des *Lehrplans* Thüringen erheblich. Das Problemlösen wird nur stichpunktartig, unsystematisch und ohne erkennbaren sukzessiven Kompetenzaufbau erwähnt.

3.3 Kommentar zu den Lehrplanschriften

Die obigen Darstellungen führen deutlich vor Augen, wie extrem die Vorgaben der Bundesländer zum Thema *Problemlösen* im Mathematikunterricht konzeptionell, inhaltlich und strukturell voneinander abweichen. Zu bemerken ist jedoch, dass alle Lehrpläne das Problemlösen grundsätzlich als eine zu erwerbende Kompetenz nennen und es damit, den Bildungsstandards entsprechend, eine der verbindlich zu erwerbenden Kompetenzen in allen Bundesländern ist. Interessanterweise weicht die Position des Problemlösens – das in allen Fällen (mit Ausnahme Bayerns) vertreten ist – auch bei denjenigen Ländern, welche alle sechs Kompetenzbereiche übernommen haben, dennoch ab.

Nur wenige Lehrplantexte geben ihre Autoren preis. Der Leitfaden in Hessen gibt an, dass er „von Fachkommissionen, bestehend aus Lehrerinnen und Lehrern, unter Berücksichtigung externer fachdidaktischer Expertise erstellt“ (HESSEN 2011b: 2) wurde. Der Grundsatzband des Lehrplans Sachsen-Anhalts benennt sein Autorenteam explizit.

Auch scheint das Zitieren didaktischer Grundlagentexte, auf die sich die, mehrheitlich anonymen, Kommissionen bei ihrer Arbeit gestützt haben, unüblich. Dass dies einer (vielleicht sogar länderübergreifenden) Diskussion und Abstimmung abträglich ist, liegt auf der Hand.

4 Synopse und Analyse

Die folgenden Auswertungen basieren auf der oben verbal gefassten Inhaltsanalyse der aktuellen Lehrplantexte und Supplementschriften. Die für dieses Kapitel erfolgte Erfassung der in den Schriften enthaltenen Informationen in Tabellenform erlaubt es, einen Überblick über die formulierten Erwartungen innerhalb der Bundesländer zu gewinnen, aber auch den Vergleich zwischen den Bundesländern im Hinblick auf das Problemlösen im Mathematikunterricht anzustellen.

Entlang der den Lehrplänen mehrheitlich zugrundeliegenden Struktur werden zunächst die auf das Problemlösen bezogenen Aussagen innerhalb der *allgemeinen Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts* synoptisch betrachtet und verglichen (Kap. 4.1). Daran anschließend werden diejenigen *Aussagen zum Problemlösen* tabellarisch erfasst und, gerade mit Blick auf die vorausgegangenen Zielformulierungen, kritisch kommentiert, die in den eigentlichen Lehrplanschriften des Faches enthalten, aber *nicht* Teil der jahrgangsstufenbezogenen Kompetenzerwartungen sind (Kap. 4.2). Der folgende Teil (Kap. 4.3) betrachtet im vergleichenden Überblick die jahrgangsstufenbezogenen Kompetenzerwartungen zum Problemlösen mit dem Ziel festzustellen, ob diesen Erwartungen eine logische Abfolge im Sinne didaktischer Gestaltung zugrunde liegt. Schließlich wird im letzten Teil (Kap. 4.4) der Blick auf die Einbettung der Problemlösefähigkeiten in die mathematischen Teilgebiete bzw. Leitideen gerichtet, um zu ermitteln, ob und inwieweit sich hier eine Schwerpunktsetzung, möglicherweise sogar über Ländergrenzen hinweg, erkennen lässt.

4.1 Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts

Alle Lehrplantexte verfügen in der einen oder anderen Form über einen Einleitungsteil, der in Anlehnung an die Bildungsstandards die Ziele des Mathematikunterrichts darlegt. Die folgende Tabelle zeigt, welche Aspekte die Bundesländer in Bezug auf die Kompetenz des Problemlösens als Ziele ihres jeweiligen Mathematikunterrichts benennen.

	Entwicklung grundlegender Problemlösestrategien	Selbständiges Arbeiten fördern	Unterschiedliche Lösungswege und / oder Lösungen zulassen	Verknüpfung von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gefordert / umgesetzt	Problemlösende Aufgaben / offene Aufgabenstellungen	Horizontale Vernetzung / fächerübergreifendes Arbeiten	Entwicklung von Kreativität und / oder Phantasie	Entdeckendes Lernen	Ausdauer fördern (u. a. zur Überwindung von Schwierigkeiten beim Problemlösen)	Zielstrebigkeit
Spaltennummer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Rheinland-Pfalz	x	x	x	x / -	x	x	x	x	x	x
Saarland	x	x	x	x / x	x	x	x	x		
Hamburg	x	x	x	x / -	x	x	x	x		
Berlin	x	x	x	x / x	x	x	x			
Brandenburg	x	x	x	x / x	x	x	x			
Niedersachsen	x	x	x	x / -	x		x	x		
Sachsen	x	x	x		x	x	x	x		
Schleswig-Holstein	x	x	x		x	x	x	x		
Sachsen-Anhalt	x	x	x	x / x	x				x	
Thüringen	x	x		x / x			x		x	x
Hessen	x	x	x	x / -		x	x			
Bayern				- / x	x	x			x	x
Mecklenburg-Vorpommern		x	x			x			x	x
Bremen	x	x		x / x				x		
Baden-Württemberg	x		x		x	x				
NRW	x		x	x / -				x		

Tab. 6 Formulierungen betreffend der Problemlösekompetenz in den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts, geclustert nach Häufigkeit der Erwähnung.

Vierzehn der sechzehn deutschen Bundesländer haben in ihren einleitenden Ausführungen zu *Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts*[140] die Entwicklung grundlegender

[140] Die Kapitel der verschiedenen Lehrplanschriften tragen natürlich unterschiedliche Titel, die hier jedoch nicht im Einzelnen benannt werden sollen.

Problemlösestrategien klar als Unterrichtsziel definiert (Tab. 6 Sp. 1). Nur Bayern und Mecklenburg-Vorpommern erheben diesen Anspruch nicht explizit, was angesichts der auch dort geltenden Bildungsstandards Fragen aufwirft.

Für die anderen Bundesländer gilt, dass sich trotz der Einigkeit, dass Problemlösestrategien erworben werden sollen, die weiteren Formulierungen, wie dieses Ziel erreicht werden kann und welche Aspekte für relevant erachtet werden, ganz erheblich unterscheiden. Beim Blick auf andere, im weiteren Sinne problembezogene Formulierungen in diesen Texten, die in Tab. 6 erfasst sind, lassen sich einige interessante Beobachtungen machen: Eine zentrale Forderung der Bildungsstandards besteht in der verknüpften Lehre von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen, die sich aber nur in elf Bundesländern auch als klare Zielformulierung für den Mathematikunterricht insgesamt wiederfindet (Sp. 4). Besonders interessant ist hier das Beispiel Bayerns, wo diese Forderung fehlt, obgleich die Lehrplananalyse gezeigt hat, dass die Pläne diesem Postulat durchaus entsprechen. Auf der anderen Seite stehen hier mit Rheinland-Pfalz, Hamburg, Niedersachsen, Hessen und Nordrhein-Westfalen fünf Bundesländer, die zwar die Forderung übernehmen, ihrem eigenen Anspruch nach Analyse ihrer Lehrplanschriften allerdings nicht gerecht werden.

Selbständiges Arbeiten (Sp. 2) und das Zulassen unterschiedlicher Lösungswege bzw. Lösungen (Sp. 3) werden in insgesamt dreizehn Bundesländern für den Mathematikunterricht angestrebt, darunter auch in Mecklenburg-Vorpommern.

Elf Bundesländer schreiben die Arbeit mit problemlösenden Aufgaben bzw. offenen Aufgaben als Ziel fest (Sp. 5), darunter auch Bayern, obwohl es die Entwicklung von Problemlösestrategien also solche nicht explizit erwähnt (s. o.); auf der anderen Seite fehlt der Hinweis auf diese Aufgabentypen in Thüringen, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern, Bremen und Nordrhein-Westfalen. Ein anderer häufig mit problemorientiertem Arbeiten verknüpfter Aspekt, die horizontale Vernetzung bzw. das fächerübergreifende Arbeiten (Sp. 6), ist ebenfalls in elf Bundesländern Teil der *Aufgaben und Ziele*.

Noch zehn Länder sehen in der Entwicklung von Kreativität und/oder Fantasie ebenfalls eine Aufgabe des Mathematikunterrichts (Sp. 7); diese Zielformulierung lässt sich zumindest teilweise in Verbindung mit den zur Problemlösung notwendigen eigenständigen, kreativen Denkleistungen bringen. Einen Einbezug des entdeckenden Lernens fordern acht Bundesländer (Sp. 8). Dagegen sieht nur noch eine klare Minderheit von fünf bzw. vier Ländern in der Förderung von Ausdauer (Sp. 9) und Zielstrebigkeit (Sp. 10) allgemeine Ziele ihres Mathematikunterrichts.

Der Blick auf die Gesamtübersicht spiegelt so durchaus einen weitreichenden Konsens über immerhin acht der zehn gefundenen, direkt oder indirekt mit dem Problemlösen verknüpften Kategorien wider. Elf der sechzehn Bundesländer benennen sechs oder mehr der erfassten zehn Kategorien in ihren *Aufgaben und Zielen* und legen so grundsätzlich einen Schwerpunkt auf den Erwerb von Problemlösefähigkeiten im Mathematikunterricht. Die Rangfolge der Länder, gemessen an den von ihnen formulierten heuristisch-problemlösebezogenen, allgemeinen Unterrichtszielen, ist der Sortierung in der linken Spalte zu entnehmen.

4.2 Allgemeine Aussagen zum Problemlösen in den Lehrplanschriften

Die Analyse der *Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts* (Kap. 4.1) hat gezeigt, welchen Stellenwert dem Problemlösen im Mathematikunterricht durch die Bildungsministerien der Länder grundsätzlich zugedacht ist; nun soll untersucht werden, was die Lehrplanschriften unter dem Begriff des Problemlösens verstehen und fassen. Dazu sind in untenstehender Tabelle *allgemeine Aussagen zum Problemlösen,* die sich in den nicht auf bestimmte Jahrgangsstufen bezogenen Teilen der Lehrplanschriften finden, zusammengetragen.

	Definition Problemlösen	Lösungswege, Strategien und Lösungen reflektieren und bewerten	Strategien / mathematische Lösungsverfahren erwerben / verwenden	Probleme in inner- und außermathematischen Zusammenhängen erkennen, beschreiben mit eigenen Worten wiedergeben, …	Hilfsmittel angemessen nutzen	Computereinsatz zur Problemlösung	Erwerb von Fertig- und Fähigkeiten nach Heinrich Winter	Verschiedene Darstellungsformen nutzen	Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten	Hinweis auf Unterschiede des Anforderungsniveaus	Untersuchen Muster / Symmetrien	Vermutungen aufstellen	Probleme in Teilprobleme zerlegen	Probleme vereinfachen, Beispiele bilden und untersuchen	Texte erschließen, analysieren und relevante Informationen entnehmen
Spaltennummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Berlin	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	
Brandenburg	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x			x	
Hamburg		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				
NRW	x	x		x			x	x				x	x		
Schleswig-Holstein		x	x	x	x			x	x	x					
Rheinland-Pfalz	x	x	x			x			x	x			x		
Hessen	x	x	x		x		x	x							
Thüringen	x	x		x	x		x		x						
Baden-		x	x	x	x	x									
Sachsen-Anhalt	x		x		x		x								x
Sachsen	x	x	x		x										

Bayern		x	x		x							x			
Saarland		x	x			x				x					
Mecklenburg-Vorpommern		x	x			x									
Niedersachsen						x		x							
Bremen				x											

Tab. 7 Allgemeine Aussagen zu den Problemlösefähigkeiten in den nicht-jahrgangsstufenspezifischen Teilen der Lehrplanschriften, geclustert nach Häufigkeit.

Es fällt auf, dass nur sieben der sechzehn Bundesländer den Begriff des Problemlösens als solchen definieren, oder sich zumindest um eine Definition bemühen (Sp. 1); wie Tab. 8 durch den Vergleich der Spalten 1 und 2 zeigt, haben alle diese Länder das Entwickeln grundlegender Problemlösestrategien auch zum Ziel ihres Mathematikunterrichts erklärt (grüne Markierung Tab. 8). Damit haben sechs Bundesländer dieses Ziel erklärt, ohne in der Folge jedoch eine definitorische Basis zu schaffen (orangefarbene Markierung in Tab. 8, Sp. 1). Rot markiert sind diejenigen zwei Bundesländer, die dieses Ziel nicht ausgewiesen haben und daher auch keine Definition ausgewiesen haben.

Immerhin beschreiben dreizehn bzw. zwölf Bundesländer, dass die Schüler Lösungswege, Strategien und Lösungen reflektieren und bewerten (Tab. 7, Sp. 2) bzw. Strategien/mathematische Lösungsverfahren erwerben/verwenden (Tab. 7, Sp. 3) sollen. Nur Niedersachsen und Bremen nennen keinen dieser beiden Aspekte; sie gehören auch zu der Gruppe von Ländern ohne klare Definition des Problemlösens. Wenig stringent muten in diesem Zusammenhang die Lehrplanschriften Bayerns und Mecklenburg-Vorpommerns an, die weder die Entwicklung grundlegender Problemlösestrategien als Ziel (Tab. 6, Sp. 1) benennen noch Definitionen des Problemlösens (Tab. 7, Sp. 1) anbieten, aber beide Aspekte „Lösungsweg, Strategie und Lösung reflektieren und bewerten“ und „Strategien / mathematische Lösungsverfahren erwerben / verwenden“ beinhalten.

Acht Länder verweisen explizit auf das Erkennen, Beschreiben etc. von Problemen in inner- und außermathematischen Zusammenhängen (Tab. 7, Sp. 4) und damit auch auf den Aspekt der Problemfindung. Zwei weitere Inhalte, die in immerhin noch sieben bzw. sechs Lehrplanschriften genannt werden, seien hier hervorgehoben, da sie auf allgemeinere didaktische Ideen verweisen: Sieben Länder beziehen sich klar auf den Erwerb von Fertig- und Fähigkeiten nach Heinrich Winter (siehe Kap. 5.1.4) und sechs erwähnen im Zusammenhang mit dem Problemlösen Unterschiede im Anforderungsniveau (Sp. 10).

Eine Reihe weiterer Tätigkeitsformulierungen tritt allgemein in Verbindung mit dem Lösen von Problemen in den Lehrplanschriften auf; dabei handelt es sich um wenig spezifische Anforderungen wie die angemessene Nutzung von Hilfsmitteln (Sp. 5) oder den Computereinsatz zur Problemlösung (Sp. 6), die in neuen bzw. acht Ländern genannt werden, wobei lediglich zwei Bundesländer keine der beiden enthalten.

Auch wurden in Tab. 7 die Bundesländer nach der Anzahl berücksichtigter Aspekte sortiert, um Schwerpunkte und Einzelnennungen besser erkennbar zu machen. Die reine Anzahl dieser Nennung ist aber zunächst qualitativ wenig aussagekräftig – sie stellt lediglich potenziell ein Richtmaß für die eigenen Ansprüche in Bezug auf das Problemlösen im Mathematikunterricht dar. Inwiefern eine konkrete Beschreibung dieser Forderungen für die Kompetenzerwartungen der Jahrgangsstufen folgt, wird im nächsten Kapitel zu sehen sein.

Die Hälfte aller Lehrplanschriften benennt beispielhaft Verhalten bzw. Vorgehensweisen, die sie dem Problemlösen zuordnen. Sie werden in Tab. 9 separat dargestellt, um Übersichtlichkeit und Lesbarkeit von Tab. 7 zu erhalten. Die nachfolgende Tabelle bietet eine Übersicht zur logischen Stringenz der Lehrplanschriften bezüglich ihrer Forderungen nach Problemlösefähigkeiten, Definition von Problemlösen und inhaltlicher Konkretisierung.

	Entwicklung grundlegender Problemlösestrategien als Ziel (siehe Tab. 6, Sp. 1)	Definition des Problemlösens wird gegeben (vgl. Tab. 7, Sp. 1)	Konkretisierung durch Benennung von „Strategien“ (vgl. Tab. 9)
Spaltennummer	1	2	3
Rheinland-Pfalz			
Saarland			
Berlin			
Hamburg			
Brandenburg			
Sachsen			
Schleswig-Holstein			
Niedersachsen			
Hessen			
Sachsen-Anhalt			
Thüringen			
Bayern			
Mecklenburg-			
Bremen			
Baden-Württemberg			
NRW			

Tab. 8 Übersicht zur logischen Stringenz der Lehrplanschriften bezüglich ihrer Forderungen nach Problemlösefähigkeiten, Definition von Problemlösen und inhaltlicher Konkretisierung.

In der Spalte „Konkretisierung durch Benennung von „Strategien“ zeigt Tab. 8, wie sich die Nennungen zu den Zielformulierungen und Definitionen verteilen. Rheinland-Pfalz, Sachsen und Thüringen verzichten bei vorheriger Zielangabe und Definition auf Konkretisierungen. Schleswig-Holstein und Bremen hingegen weisen zu erwerbende Strategien aus, obwohl ihnen eine Definition des Problemlösens fehlt. Mecklenburg-Vorpommern tritt als Bundesland hervor, das Strategien benennt, obwohl es den Erwerb dieser nicht eindeutig als Ziel vorgibt. Nur die Lehrplanschriften Berlins, Brandenburgs, Hessens, Sachsen-Anhalts und Nordrhein-Westfalens bemühen sich darum, das Problemlösen in allen drei Stufen, Zielerklärung, Definition, Konkretisierung, zu berücksichtigen. Die nachfolgende Übersicht zeigt, welche heuristischen Vorgehens-/Verhaltensweisen im allgemeinen Teil der Lehrplanschriften konkret genannt werden:

Baden-Württemberg	
Bayern	
Berlin	▪ Einzeichnen von Hilfslinien, ▪ Auswählen von Hilfsgrößen, ▪ systematisches Probieren, ▪ informative Figuren, ▪ Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten
Brandenburg	▪ Einzeichnen von Hilfslinien, ▪ Auswählen von Hilfsgrößen, ▪ systematisches Probieren, ▪ informative Figuren, ▪ Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten
Bremen	▪ Beispiel finden, ▪ Überprüfen durch Probieren, ▪ Skizzen, ▪ Tabellen, ▪ Zurückführen auf Bekanntes, ▪ Spezialfälle finden, ▪ Verallgemeinern
Hamburg	▪ Denkstrategien entwickeln, bewusstmachen und einüben
Hessen	▪ systematisches Probieren, ▪ Einzeichnen von Hilfslinien, ▪ Auswählen von Hilfsgrößen, ▪ Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten
Mecklenburg-Vorpommern	▪ Beispiele finden, ▪ Überprüfen durch Probieren, ▪ Zurückführen auf Bekanntes, ▪ Spezialfälle finden, ▪ Verallgemeinern
Niedersachsen	
NRW	▪ Überschlagen, ▪ Beispiele finden, ▪ systematisches Probieren, ▪ Schlussfolgern, ▪ Zurückführen auf Bekanntes, ▪ Verallgemeinern
Rheinland-Pfalz	
Saarland	
Sachsen	
Sachsen-Anhalt	▪ Vorwärtsarbeiten, ▪ Rückwärtsarbeiten, ▪ Probleme in Teilprobleme zerlegen, ▪ Zurückführen auf Bekanntes, ▪ systematisches Probieren
Schleswig-Holstein	▪ Parkettierung, ▪ Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip
Thüringen	

Tab. 9 Konkrete Nennung heuristischer Vorgehens-/Verhaltensweisen im allgemeinen Teil der Lehrplanschriften.

Die Übersicht zeigt deutlich, dass die Nennungen heuristischer Verhaltens- und Vorgehensweisen in den Lehrplanschriften unsystematisch und vom heuristischen Standpunkt aus betrachtet auch sachlich wenn nicht falsch, so doch zumindest fragwürdig sind. Die farbig hervorgehobenen Nennungen werden in keiner gängigen Systematik (vgl. Kap. 5.4) als Heurismen genannt. Es werden unterschieds- und kommentarlos verschiedenste Handlungs- und Repräsentationsformen vermischt benannt; eine übergeordnete Struktur spezifiziert keiner der Lehrpläne. Da kein einheitlich-verbindlicher Rahmen zur Klassifizierung heuristischer Tätigkeiten existiert, wäre es nötig, entweder auf die Systematik eines Autors (beispielsweise die in Kap. 5.4 benannten) zu verweisen oder aber zugrunde gelegte Annahmen selbständig zu explizieren und zu erläutern.

4.3 Stufenspezifische Kompetenzerwartungen

Nachdem im vorangegangenen Kapitel das in den Lehrplanschriften enthaltene Verständnis speziell des Begriffs Problemlösen sowie die diesbezüglich an den Mathematikunterricht in den einzelnen Bundesländern gestellten Ansprüche herausgearbeitet wurden, soll im Folgenden untersucht werden, in wie weit sich das Problemlösen als prozessbezogene Kompetenz in der Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten in den stufenspezifischen Hinweisen wiederfindet. Zu diesem Zweck wird analysiert, auf welche Art und Weise und in welchem Umfang die Vermittlung der Problemlösekompetenz in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten in den jeweiligen Doppeljahrgangsstufen 5/6, 7/8 und 9/10 der einzelnen Bundesländer vorgesehen ist.

Die Sichtung der Lehrplanschriften (Kap. 3.1) zeigt, dass Umfang und Inhalt der stufenspezifischen Hinweise der einzelnen Bundesländer stark voneinander abweichen. Während in Baden-Württemberg die Kompetenzen und Inhalte aller Doppeljahrgangsstufen auf gerade einmal sechs Seiten erläutert werden, sind es in Rheinland-Pfalz über vierzig Seiten allein für die Orientierungsstufe. Entsprechend unterschiedlich fallen damit auch die Konkretisierungen der zu vermittelnden Kompetenzen (inhaltlich wie prozessbezogen) aus. Eine tabellarische Darstellungsweise konnte sich in allen Bundesländern durchsetzen, wobei auch hier die Unterschiede deutlich erkennbar sind. Diese reichen von einer bloßen Auflistung der mathematischen Inhalte, über eine Parallellistung von verbindlichen Inhalten und Vorschlägen sowie Hinweisen bis hin zu konkreten Verknüpfungen mathematischer Inhalte mit prozessbezogenen Kompetenzen einschließlich entsprechender Hinweise (vgl. Kap. 3). Besonders hervorzuheben ist in diesem Zusammenhang das Land Schleswig-

Holstein, welches lediglich die Kompetenzerwartungen für das Ende der Sekundarstufe I formuliert und damit auf eine Aufschlüsselung nach Doppeljahrgangsstufen verzichtet. Aus diesem Grunde wurde Schleswig-Holstein bei der folgenden jahrgangsstufenbezogenen Analyse nicht berücksichtigt. Anders ist es dagegen in Bayern: Hier liegt ein Stufenplan für jede einzelne Jahrgangstufe vor, so dass Bayern, trotz der Tatsache, dass man in den stufenspezifischen Hinweisen nur *eine* Aussage bezüglich der zu erwerbenden Problemlösekompetenz findet, in der Betrachtung berücksichtigt wird.

Angesichts der großen Menge der in den Lehrplanschriften enthaltenen Formulierungen hinsichtlich des Problemlösens, die sich teils nur durch Wortwahl oder eine leichte Verschiebung des Augenmerks unterscheiden, werden sie zur Analyse zu sechs größeren Gruppen zusammengefasst, die im Folgenden betrachtet werden.

4.3.1 Gruppe I: Problemlösen allgemein

In Gruppe I sind diejenigen Aussagen zusammengefasst, die sich mit der Problembearbeitung in einem sehr allgemeinen Sinne beschäftigen. Die Lehrplanformulierungen sind der Tab. 10 zu entnehmen.

	Probleme in inner- und außermathematischen Situationen a) erkennen b) beschreiben c) mit eigenen Worten wiedergeben d) bearbeiten e) mathematisieren	a) vorgegebene Probleme lösen und bearbeiten b) selbstformulierte Probleme lösen und bearbeiten	Problemstellungen relevante Größen entnehmen
Spaltennummer	**1**	**2**	**3**
Baden-Württemberg 6 **Baden-Württemberg 8** **Baden-Württemberg 10**	d		
Bayern 6 **Bayern 8** **Bayern 10**			
Berlin 6 **Berlin 8** **Berlin 10**			
Brandenburg 6 **Brandenburg 8** **Brandenburg 10**			
Bremen 6 **Bremen 8** **Bremen 10**	c	b	x

Hamburg 6		x	
Hamburg 8			
Hamburg 10		b	
Hessen 6	c, e		x
Hessen 8	c, e		x
Hessen 10	c, e		x
Mecklenburg-Vorpommern 6	c, e		x
Mecklenburg-Vorpommern 8			
Mecklenburg-Vorpommern 10			
Niedersachsen 6	c, e		x
Niedersachsen 8	a	a	
Niedersachsen 10		b	
NRW 6	a, c		x
NRW 8			
NRW 9			
Rheinland-Pfalz 6		a, b	
Rheinland-Pfalz 8		a, b	
Rheinland-Pfalz 10		a, b	
Saarland 6			
Saarland 8			x
Saarland 10			
Sachsen 6			
Sachsen 8	b, c, e		
Sachsen 10	e		
Sachsen-Anhalt 6			x
Sachsen-Anhalt 8			
Sachsen-Anhalt 10			
Thüringen 6			
Thüringen 8	e		
Thüringen 10			
Schleswig-Holstein			
Summe	**12**	**8**	**9**

Tab. 10 Gruppe I heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder.

Obwohl ein Problem als Kern mathematischen Handelns Grundlage für den in der Mehrheit der Länder angestrebten „problemorientierten“ Mathematikunterricht sein sollte (vgl. Kap. 2.3), wird das *Erkennen* eines Problems nur in Niedersachsen und Nordrhein-Westfalen explizit gefordert, während das *Beschreiben* eines mathematischen Problems nur in Sachsen Erwähnung findet. Immerhin legen sechs Bundesländer einen Schwerpunkt ihrer Betrachtung auf die Widergabe inner- wie außermathematischer Problemstellungen mit eigenen Worten. In Bremen, Hessen, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen und Mecklenburg-Vorpommern soll diese Fähigkeit bereits bis zum Ende der Jahrgansstufe 6 erworben werden (Sp. 1). Es fällt besonders auf, dass Hessen als einziges Bundesland eine Fortentwicklung dieser Fähigkeiten über alle drei Doppeljahrgangsstufen hinweg fest-schreibt – alle anderen Länder erwähnen sie nur für das Ende einer oder zweier Doppeljahrgangsstufen der Sekundarstufe I.

Das Lösen und Bearbeiten vorgegebener und selbst formulierter Probleme (Sp. 2) sowie die Entnahme relevanter Größen (Sp. 3) sind in ihrem Wortlaut den Bildungsstandards entnommen und werden von vier beziehungsweise sieben Bundesländern übernommen. Bayern, Berlin und Brandenburg machen an keiner Stelle Angaben, die sich sicher dieser ersten Gruppe heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen zuordnen ließen.

4.3.2 Gruppe II: Prozess des Problemlösens allgemein

Gruppe II fasst diejenigen Aussagen zusammen, die sich in übergreifender Art mit dem Prozess des Problemlösens beschäftigen. Die Formulierungen sind Tab. 11 zu entnehmen und nach ihrem üblichen Erscheinen im Problemlöseprozess nach Pólya[141] sortiert. Auch bei diesen Lehrplanformulierungen findet man erneut enge und im Wortlaut übereinstimmende Anknüpfungspunkte zu den Bildungsstandards (vgl. KMK 2004b: 8).

	a) Lösungsidee finden/entwickeln b) Lösungsplan aufstellen	Lösungsstrategien / heuristische Strategien a) auswählen b) anwenden/erproben c) bewerten d) vergleichen	Plausibilitätsüberlegungen (zur Überprüfung der Ergebnisse)
Spaltennummer	**1**	**2**	**3**
Baden-Württemberg 6 **Baden-Württemberg 8** **Baden-Württemberg 10**		 b	
Bayern 6 **Bayern 8** **Bayern 10**		b	
Berlin 6 **Berlin 8** **Berlin 10**		**b**	
Brandenburg 6 **Brandenburg 8** **Brandenburg 10**		b	
Bremen 6 **Bremen 8** **Bremen 10**	 x	b a b, c, d	 x
Hamburg 6 **Hamburg 8** **Hamburg 10**	a	a, b a, b	x x

[141] Vgl. PÓLYA 1995.

Hessen 6	a	b	
Hessen 8	a	b	
Hessen 10	a	a, b, c, d	
Mecklenburg-Vorpommern 6			
Mecklenburg-Vorpommern 8	b		
Mecklenburg-Vorpommern 10	a	a, b	x
Niedersachsen 6		b	x
Niedersachsen 8		b, c, d	
Niedersachsen 10		a, b	
NRW 6			
NRW 8	b		x
NRW 9		c, d	
Rheinland-Pfalz 6	a	a, b, c	x
Rheinland-Pfalz 8		a, b	x
Rheinland-Pfalz 10	a	a, b	x
Saarland 6			
Saarland 8			x
Saarland 10			
Sachsen 6	b	b	
Sachsen 8	b	a, b, c	
Sachsen 10		a, b	
Sachsen-Anhalt 6	a		
Sachsen-Anhalt 8			
Sachsen-Anhalt 10	a	a, b	
Thüringen 6		b	
Thüringen 8	x	b	x
Thüringen 10	b		
Schleswig-Holstein			
Summe	**16**	**26**	**11**

Tab. 11 Gruppe II heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder.

In neun Bundesländern wird die Findung einer Lösungsidee (Sp. 1) explizit gefordert, wohingegen Pólya in der Entwicklung eines Plans die eigentliche Leistung beim Lösen einer Aufgabe sieht.[142] Die Zuordnung zu Jahrgangsstufen, für die diese Kompetenz erwartet wird, spiegelt wider, dass die Bundesländer den Stellenwert dieses Schrittes im Problemlöseprozess unterschätzen: In manchen Ländern wird sie nur einmalig für das Ende der 6. Jahrgangsstufe gefordert, in anderen wird sie erst für das Ende der 8. Klasse oder gar zum Sekundarschulabschluss formuliert. Einzig Hessen weist die Fähigkeit, Lösungsideen zu entwickeln, für jede einzelne Doppeljahrgangsstufe aus.

[142] Vgl. Pólya 1995: 22.

Vierzehn der insgesamt fünfzehn berücksichtigten Bundesländer sehen in der *Auswahl* und in der *Anwendung* heuristischer Strategien (Sp. 2) eine für den Erwerb der Problemlösekompetenz wichtige Tätigkeit, wobei die *Anwendung* von Strategien nur in den Bundesländern Hessen, Niedersachsen, Rheinland-Pfalz und Sachsen für das Ende aller drei Doppeljahrgangsstufen vorgesehen ist. Bayern, Berlin und Brandenburg schreiben die *Anwendung* heuristischer Strategien nur für das Ende der Jahrgangsstufe 6 vor, während diese in Baden-Württemberg, Mecklenburg-Vorpommern und Sachsen-Anhalt erst für das Ende der Klasse 10 geplant ist.

Die *Plausibilität der gewonnenen Ergebnisse* (Sp. 3) zu überprüfen, wie es die Bildungsstandards formulieren, haben acht Bundesländer in ihre stufenspezifischen Kompetenzerwartungen übernommen. Auch in dieser Gruppe zeigt sich eine weitreichende Inkonsistenz, hinsichtlich der Zuordnung der Erwartungen an die Doppeljahrgangsstufen. Als Beispiel sei hier Nordrhein-Westfalen genannt: Am Ende der Orientierungsstufe wird keine der hier erfassten prozessualen Fähigkeiten erwartet. Am Ende der Jahrgangsstufe 8 sind dagegen das Aufstellen eines Lösungsplans (Sp. 1) und das Überprüfen der Ergebnisse (Sp. 3) in engen Grenzen vertreten – der entscheidende Schritt des Einsatzes problemlösender Strategien (Sp. 2) aber fehlt. Diese werden erst für das Ende der Sekundarstufe I eingefordert.

Ein ebenfalls interessantes, völlig andersartiges Bild ergibt sich, wenn man Sachsen-Anhalt betrachtet. In Tab. 8 gehörte es zu den wenigen Ländern, bei denen keine logischen Brüche bei der Formulierung der Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts, der angedachten Rolle des Problemlösens und der Konkretisierung festzustellen waren. Doch in den jahrgangsstufenbezogenen Kompetenzbeschreibungen fehlt nun jeder Hinweis auf einen systematischen Erwerb; nur das Finden und Entwickeln einer Lösungsidee (Sp. 1) wird für das Ende der Jahrgangsstufe 6 und 10 konkret benannt, und das Auswählen und Anwenden heuristischer Strategien (Sp. 2) tritt ein einziges Mal, für das Ende der Jahrgangsstufe 10 auf.

4.3.3 Gruppe III: Pólya Phase 1

Die dritte Gruppe fasst all die Techniken und Vorgehensweisen zusammen, die (im weitesten Sinne) der ersten Phase im Problemlöseprozess nach Pólya zugeordnet werden können und damit in direktem Zusammenhang mit der Heuristik stehen (vgl. Kap. 5.5.1). Das Anfertigen einer Skizze, Tabelle oder Gleichung sind, ebenso wie das Zerlegen von

Problemen in Teilprobleme, wichtige Techniken, um ein vorliegendes Problem zu identifizieren, die Aufgabe zu verstehen und damit den Problemlöseprozess in Gang zu setzen; in der vorliegenden Arbeit werden sie als Heuristische Techniken bezeichnet (vgl. Kap. 5.5.1). Sie sind in Tab. 12 dargestellt.

	Skizzen anfertigen / informative Figuren / Tabellen / Gleichungen	Verschiedene Darstellungsformen nutzen	Probleme in Teilprobleme zerlegen
Spaltennummer	1	2	3
Baden-Württemberg 6		x	
Baden-Württemberg 8		x	
Baden-Württemberg 10	x	x	x
Bayern 6			
Bayern 8			
Bayern 10			
Berlin 6			
Berlin 8	x	x	
Berlin 10	x	x	
Brandenburg 6			
Brandenburg 8		x	
Brandenburg 10	x		
Bremen 6	x		
Bremen 8	x	x	x
Bremen 10			x
Hamburg 6			
Hamburg 8			
Hamburg 10			
Hessen 6			
Hessen 8		x	
Hessen 10		x	
Mecklenburg-Vorpommern 6			
Mecklenburg-Vorpommern 8			
Mecklenburg-Vorpommern 10			
Niedersachsen 6	x		
Niedersachsen 8		x	
Niedersachsen 10			
NRW 6			
NRW 8	x	x	
NRW 9			x
Rheinland-Pfalz 6			
Rheinland-Pfalz 8			
Rheinland-Pfalz 10	x		
Saarland 6			
Saarland 8			
Saarland 10			

Sachsen 6 **Sachsen 8** **Sachsen 10**	 x 	 x	
Sachsen-Anhalt 6 **Sachsen-Anhalt 8** **Sachsen-Anhalt 10**	x x x		 x
Thüringen 6 **Thüringen 8** **Thüringen 10**	x x 	x x 	 x
Schleswig-Holstein			
Summe	**15**	**14**	**6**

Tab. 12 Gruppe III heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 1.

Zehn der untersuchten Lehrplanschriften greifen die drei erst genannten Disziplinen auf (Sp. 1); Bremen, Niedersachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen sehen bereits in der Orientierungsstufe Möglichkeiten einer Vermittlung dieser Techniken, wohingegen Baden-Württemberg, Brandenburg und Rheinland-Pfalz das Anfertigen einer Skizze, Tabelle oder Gleichung erst für das Ende der Jahrgangsstufe 10 vorsehen.

In den Bundesländern Bayern, Hamburg, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern und im Saarland finden diese grundlegenden Techniken gar keine Berücksichtigung; in Sachsen-Anhalt werden diese hingegen durch alle Jahrgangsstufen hinweg gefordert.

Neun Bundesländer sehen in der Nutzung verschiedener Darstellungsformen (Sp. 2) einen Beitrag zur Problembearbeitung. Interessanterweise greifen acht Bundesländer in ihren Hinweisen sowohl das Anfertigen von informativen Figuren, Tabellen und Gleichungen als auch die Nutzung verschiedener Darstellungsformen auf. Baden-Württemberg schreibt als einziges Bundesland die Anwendung verschiedener Darstellungsformen für alle Doppeljahrgangstufen als verbindliche Kompetenz vor. Was genau sich hinter der Nutzung „verschiedener" Darstellungsformen verbirgt und wodurch sich diese von den andren drei Vorgehensweisen unterscheiden oder ergänzen, wird in keiner der Lehrplanschriften erläutert. Das Zerlegen eines Problems in Teilprobleme (Sp. 3) gehört nur in fünf Bundesländer zu den erwarteten Kompetenzen, obwohl es sich hierbei eindeutig um ein allgemein akzeptiertes heuristisches Vorgehen handelt (vgl. Kap. 5.5.1). Das Zerlegen in Teilprobleme wird in vier der sechs Fälle seiner Nennung als Ziel für das Ende der Sekundarstufe I benannt, die anderen beiden Nennungen setzen es für die Jahrgangsstufe 8 fest. Es scheint daher als ein anspruchsvolleres heuristisches Handeln angesehen zu werden als die zuvor genannten.

4.3.4 Gruppe IV: Pólya Phase 2

Gruppe IV fasst Nennungen in den Lehrplanschriften zusammen, die auf Heurismen und heuristische Handlungen verweisen, welche der zweiten Phase des Problemlöseprozesses nach Pólya zuzuordnen sind. Die hier zusammengefassten heuristischen Vorgehens- und Verhaltensweisen unterstützen den Fortgang des Problemlöseprozesses bzw. setzen ihn in Gang, so dass das Zurückführen auf Bekanntes, das Finden von Spezialfällen, die Verallgemeinerung, das Aufstellen von Vermutungen, das Aufspüren von Analogien und das Erkennen von Invarianzen oder Symmetrien[143] aus den Lehrplanschriften dieser Kategorie zugeordnet werden können (siehe Kap. 5.4).

Wenngleich in der vorliegenden Arbeit lediglich das Zurückführen auf Bekanntes und die Analogiebildung (als *Heurismus der Affinität* vgl. Kap. 5.5.2) sowie der Heurismus der Symmetrie (als *Heurismus der Strukturnutzung* vgl. Kap. 5.5.2) als für die Sekundarstufe I maßgebliche Heurismen ausgewählt wurden, lassen sich, in Anlehnung an Mason, Burton und Stacey[144], auch das Finden von Spezialfällen, die Verallgemeinerung und das Aufstellen von Vermutungen in diese Kategorie begründet einordnen.[145]

	Zurückführen auf Bekanntes	Spezialfälle finden	Verallge-meinern	Vermutungen aufstellen	Analogien aufspüren	Erkennen von a) Invarianzen b) Symmetrien
Spaltennummer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Baden-Württemberg 6 Baden-Württemberg 8 Baden-Württemberg 10		x			x	
Bayern 6 Bayern 8 Bayern 10						
Berlin 6 Berlin 8 Berlin 10						

[143] In der vorliegenden Arbeit wird ein Teil dieser heuristischen Vorgehens- und Verhaltensweisen in Kategorie II: *Heurismen der Analyse und Adaption* (siehe Kap. 5.5.2) zusammengefasst.

[144] Vgl. MASON/BURTON/STACEY 2006

[145] Beim Heurismus der Analyse und Adaption steht die strukturierte Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen oder die Suche nach strukturellen Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Problemen im Mittelpunkt der Betrachtung. Das vorliegende Problem wird dabei in ein überschaubares System übertragen, für welches stellvertretend Lösungsideen entwickelt werden, die schließlich auf das ursprüngliche Problem angewandt werden, so dass Verallgemeinerungen und Abstraktionen erzeugt werden können. Nach Mason, Burton und Stacey liefern Spezialfälle und das Aufstellen von Vermutungen auf ähnliche Weise Lösungsideen, so dass diese Vorgehensweisen an dieser Stelle der zweiten Kategorie zugeordnet werden.

Brandenburg 6						
Brandenburg 8						
Brandenburg 10						
Bremen 6				x		
Bremen 8	x	x	x	x		
Bremen 10						
Hamburg 6					x	
Hamburg 8						
Hamburg 10						
Hessen 6						
Hessen 8						
Hessen 10						
Mecklenburg-Vorpommern 6						
Mecklenburg-Vorpommern 8	x	x	x			
Mecklenburg-Vorpommern 10						
Niedersachsen 6	x					a, b
Niedersachsen 8		x	x			
Niedersachsen 10						
NRW 6						
NRW 8	x	x	x	x		
NRW 9						
Rheinland-Pfalz 6						
Rheinland-Pfalz 8					x	
Rheinland-Pfalz 10						
Saarland 6						
Saarland 8						
Saarland 10						
Sachsen 6	x					
Sachsen 8						
Sachsen 10						
Sachsen-Anhalt 6	x					
Sachsen-Anhalt 8						
Sachsen-Anhalt 10						
Thüringen 6						
Thüringen 8	x	x	x			
Thüringen 10		x				
Schleswig-Holstein						
Summe	**7**	**7**	**5**	**3**	**3**	**1**

Tab. 13 Gruppe IV heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 2.

Diese zweite Phase im Prozess der Problemlösung, bei der durch Anwendung oben aufgeführter heuristischer Vorgehensweisen weitere Lösungsideen entwickelt werden können, wird nur in einem Teil der Bundesländer berücksichtigt. Sieben Bundesländer sehen im Zurückführen auf Bekanntes eine Zielkompetenz im Mathematikunterricht (Tab. 13, Sp. 1); drei Bundesländer möchten sie bereits in der Orientierungsstufe erreicht sehen, vier

Bundesländern planen sie den erst in der Jahrgangsstufe 7/8 ein. Eine Vermittlung über mehrere oder gar alle Jahrgangsstufen hinweg ist in keinem der Bundesländer vorgesehen. Fünf dieser sieben, und darüber hinaus zwei weitere, Bundesländer erwarten auch die Fähigkeit, Spezialfälle zu finden und zur Problemlösung heranziehen zu können (Tab. 13, Sp. 2); es liegt eine leichte Tendenz vor, diese Fähigkeit in höheren Jahrgangsstufen anzusiedeln. In wiederum denselben fünf Ländern, und zwar zeitlich parallel, ist auch das Verallgemeinern als Kompetenzerwartung festgeschrieben

Eine Kerngruppe von fünf Bundesländern, nämlich Bremen, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen und Thüringen hat damit erkennbar heuristische Fähigkeiten und Fertigkeiten in ihre Kompetenzerwartungen aufgenommen, die sich Pólyas zweiter Phase des Problemlöseprozesses zuordnen lassen.

Das Auffinden und die Nutzbarmachung von Analogien zur Problemlösung wird nur in den Lehrplanschriften von Baden-Württemberg, Hamburg und Rheinland-Pfalz angesprochen (Tab. 13, Sp. 5). Hier besteht keine Einigkeit über den Zeitpunkt einer unterrichtlichen Behandlung. Es fällt ins Auge, dass diese drei Länder das Zurückführen auf Bekanntes nicht in ihren Erwartungsformulierungen berücksichtigen und umgekehrt keines der Länder, bei denen dieses Ziel festgeschrieben ist, das Aufspüren von Analogien fordert; man könnte daher vermuten, dass hier eine terminologische Unschärfe vorliegt und vielleicht dasselbe heuristische Verhalten gemeint ist.

Das Aufstellen von Vermutungen und das Erkennen von Symmetrien und Invarianzen beschränken sich auf zwei beziehungsweise eine Nennung in den Lehrplanschriften und stellen damit gesamtheitlich keine Kompetenzen dar, die im Mathematikunterricht systematisch aufgebaut werden.

4.3.5 Gruppe V: Pólya Phase 3

Die fünfte Gruppe umfasst die Heurismen, die Phase 3 nach Pólya, dem „Ausführen des Plans“, zugeordnet werden können. Durch konkrete Handlungen wie das *systematische Probieren*, das *Vor- und Rückwärtsarbeiten* und das *Zerlegen und Ergänzen* wird eine Lösung gezielt angestrebt (vgl. Kap. 5.5.3).

	Zerlegen und Zusammensetzen von Figuren / Körpern	Systematisches Probieren	Computergestützter Einsatz zur Problemlösung/ -erkundung	Vorwärts-arbeiten	Rückwärts-arbeiten
Spaltennummer	1	2	3	4	5
Baden-Württemberg		x			
Baden-Württemberg					
Baden-Württemberg		x		x	x
Bayern 6					
Bayern 8					
Bayern 10					
Berlin 6					
Berlin 8	x	x			
Berlin 10	x				
Brandenburg 6					
Brandenburg 8	x		x		
Brandenburg 10	x				
Bremen 6					
Bremen 8			x	x	x
Bremen 10			x	x	x
Hamburg 6		x		x	x
Hamburg 8					
Hamburg 10	x				
Hessen 6					
Hessen 8					
Hessen 10		x	x		
Mecklenburg-Vorpommern 6					
Mecklenburg-Vorpommern 8					
Mecklenburg-Vorpommern 10			x		
Niedersachsen 6	x	x			x
Niedersachsen 8	x			x	x
Niedersachsen 10					

NRW 6					
NRW 8					
NRW 9				x	x
Rheinland-Pfalz 6		x			x
Rheinland-Pfalz 8					
Rheinland-Pfalz 10			x		
Saarland 6	x				x
Saarland 8			x		
Saarland 10					
Sachsen 6	x	x			
Sachsen 8			x	x	x
Sachsen 10			x		
Sachsen-Anhalt 6		x			
Sachsen-Anhalt 8		x			
Sachsen-Anhalt 10			x		
Thüringen 6	x	x			
Thüringen 8					
Thüringen 10				x	x
Schleswig-Holstein					
Summe	**10**	**11**	**10**	**8**	**11**

Tab. 14 Gruppe V heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 3.

Tab. 14 ist zu entnehmen, dass im systematischen Probieren und im Rückwärtsarbeiten neun der fünfzehn Bundesländer wichtige heuristische Tätigkeiten sehen, die jedoch in keinem Bundesland durch alle Klassen hinweg unterrichtet wird. Das systematische Probieren (Sp. 2) soll dabei mehrheitlich (sieben von neun Bundesländern) bereits in der Orientierungsstufe Unterrichtsziel sein. Die recht zahlreichen Nennungen des Computers als Hilfsmittel wurden an dieser Stelle mit in die Übersicht aufgenommen, da auffällt, dass es mit einer Ausnahme keine Doppelungen zwischen systematischem Probieren und dem Computereinsatz zur Problembearbeitung gibt, was möglicherweise auf eine komplementär gedachte Anwendung schließen lässt, die der Forderung nach stärkerem Einsatz moderner Technik[146] auch im Mathematikunterricht nachkommt.

[146] Dies gehört zu den aktuellen sechs prioritären Bereichen, die im ET 2020 (Education and Training 2020) der Europäischen Kommission enthalten sind. Mit dem 2009 verabschiedeten strategischen Rahmen für die europäische Zusammenarbeit auf dem Gebiet der allgemeinen und beruflichen Bildung (kurz „ET 2020") haben sich die Bildungsminister der EU-Mitgliedstaaten aufbauend auf dem bisherigen Arbeitsprogramm „Allgemeine und berufliche Bildung 2010" auf Schwerpunkte und Zielsetzungen der europäischen Bildungszusammenarbeit für die Dekade bis 2020 geeinigt, vgl. KMK (2009).

Das Rückwärtsarbeiten (Sp. 5) soll in Hamburg, Niedersachsen, Rheinland-Pfalz und im Saarland schon im Anfangsunterricht der Sekundarstufe I vermittelt werden, in Baden-Württemberg, Nordrhein-Westfalen und Thüringen dagegen erst im Jahrgang 9/10. Immerhin soll das Rückwärtsarbeiten in Bremen und Niedersachsen in zwei aufeinander folgenden Doppeljahrgangsstufen Gegenstand des Mathematikunterrichts sein. Sieben Bundesländer, die das Rückwärtsarbeiten als Kompetenzziel vorsehen, berücksichtigen auch den Heurismus des Vorwärtsarbeitens (Sp. 4) in ihren stufenspezifischen Hinweisen, wobei ein kumulativer Erwerb in keinem Bundesland vorgesehen ist. Auch über einen geeigneten Zeitpunkt, wann das Vorwärtsarbeiten als heuristische Tätigkeit eingeführt werden sollte, herrscht keine Einigkeit.

Das Zerlegen und Ergänzen (in den Lehrplanschriften meist in Verbindung mit dem Zerlegen und Zusammensetzen von Figuren und Körpern genannt[147]) ist wiederum in sieben Bundesländern eine erwartete Kompetenz. Niedersachsen, das Saarland, Sachsen und Thüringen führen es bereits in der Orientierungsstufe ein, Berlin und Brandenburg hingegen erst ab der Mittelstufe.

4.3.6 Gruppe VI: Pólya Phase 4

Die sechste Gruppe umfasst alle Aktivitäten, die die Überprüfung, Bewertung und Reflektion der Lösungen und der Lösungswege beinhalten und damit der vierten Phase nach Pólya, der sogenannten „Rückschau“, zugeordnet werden können.

	Ergebnisse / Lösungen a) überprüfen b) bewerten c) interpretieren/ deuten d) reflektieren	Lösungswege a) überprüfen b) bewerten c) reflektieren d) beschreiben e) begründen f) suchen g) vergleichen h) darstellen
Spaltennummer	1	2
Baden-Württemberg 6		d, e
Baden-Württemberg 8		d
Baden-Württemberg 10	a, c	

[147] Ob und inwieweit es sich hierbei tatsächlich um einen eigenständigen Heurismus handelt, ist diskussionswürdig, da es sich gerade bei den in den Lehrplanschriften bezeichneten Fällen im Kern um ein Zurückführen auf Bekanntes handelt und nicht um ein eigenständig strategisches Vorgehen, das über eine heuristische Technik hinausgeht (vgl. Kap. 5.5.1).

Bayern 6 **Bayern 8** **Bayern 10**		
Berlin 6 **Berlin 8** **Berlin 10**	a, b, c a	c, d, e, h h
Brandenburg 6 **Brandenburg 8** **Brandenburg 10**	a, b, c	c, d, e, h d, e, h
Bremen 6 **Bremen 8** **Bremen 10**	a, b ,c	g, h a, d, g
Hamburg 6 **Hamburg 8** **Hamburg 10**		a, c, d, f c, f
Hessen 6 **Hessen 8** **Hessen 10**	c c c	c c c
Mecklenburg- **Mecklenburg-** **Mecklenburg-**	b, c	b, g c
Niedersachsen 6 **Niedersachsen 8** **Niedersachsen 10**	c, d b, d	d, e b, g
NRW 6 **NRW 8** **NRW 9**	c a	 a, b g,
Rheinland-Pfalz 6 **Rheinland-Pfalz 8** **Rheinland-Pfalz 10**		c c c
Saarland 6 **Saarland 8** **Saarland 10**		
Sachsen 6 **Sachsen 8** **Sachsen 10**	 x b, c	c g, h
Sachsen-Anhalt 6 **Sachsen-Anhalt 8** **Sachsen-Anhalt 10**		
Thüringen 6 **Thüringen 8** **Thüringen 10**	b	d, h b, h b, c ,e, h
Schleswig-Holstein		
Summe	**16**	**28**

Tab. 15 Gruppe VI Überprüfung, Bewertung und Reflektion der Ergebnisse und Wege in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 4.

Tab. 15 kann entnommen werden, dass die Ergebnisse und Lösungen zu überprüfen, zu bewerten, zu interpretieren und zu reflektieren (Sp. 1) für zehn Bundesländer ein Ziel des Mathematikunterrichts darstellt, wobei die Schwerpunkte der Betrachtungen auf unterschiedlichen Aspekten liegen.

Zwölf Bundesländer fordern außerdem die nachträgliche Auseinandersetzung mit den gewählten Lösungswegen (Sp. 2). Acht Bundesländer sehen in der *Reflexion* der Lösungswege einen wichtigen Beitrag für den Erwerb der Problemlösekompetenz. Tatsächlich handelt es sich bei der Reflexion um eine elementare heuristische Tätigkeit, da diese nach Pólya dazu beiträgt, Wissen zu festigen, Zusammenhänge zu erkennen, und die Fähigkeit fördert, Aufgaben zu lösen[148]. Darüber hinaus wird dem *Überprüfen, Bewerten* und *Reflektieren* der *Lösungswege* (22 Nennungen über alle Jahrgangstufen hinweg) ebenso viel Bedeutung beigemessen wie der *Überprüfung, Bewertung* und *Reflektion der Lösungen* selbst (24-mal erfasst, Sp. 1).

Es ist festzustellen, dass die Mehrheit der Länder die Bedeutung der vierten Phase des Problemlöseprozesses nach Pólya grundsätzlich anerkennt und sie bei der Formulierung ihrer jahrgangsstufenbezogenen Erwartungen verankert, dabei aber dieselben logischen Inkonsistenzen und inhaltlichen Defizite für einen sukzessiven Aufbau der Kompetenzen auftreten, wie sie sich für die anderen untersuchten Gruppen bereits gezeigt haben.

Bayern, das Saarland und Sachsen-Anhalt machen zu keinem der beiden Punkte eine Angabe und berücksichtigen damit die abschließende Phase des Problemlöseprozesses nicht.

4.3.7 Gruppe VII: Zusätzliches

Die siebte und damit letzte Gruppe, die in Tab. 16 dargestellt ist, fasst all diejenigen Aussagen zusammen, die in den doppeljahrgangsstufenbezogenen Lehrplanschriften in klarer Verbindung mit dem Problemlösen gemacht wurden, aber in zumindest keinem systematischen Zusammenhang mit dieser Kompetenz stehen und außerdem in Bezug auf die zu erwerbende Problemlösekompetenz auch irreführend sein können.

So werden von jeweils zwei Bundesländern das Untersuchen auf Muster (Sp. 8), das Einzeichnen von Hilfslinien (Sp. 9) und die Variation der Bedingungen (Sp. 10) im Problemlösekontext genannt. Dass es sich nicht um eigenständige Heurismen, sondern lediglich

[148] Vgl. PÓLYA 1995: 28.

mögliche Teilaspekte heuristischer Tätigkeiten handelt, wird in den Lehrplanschriften ebenso wenig deutlich wie der genaue Inhalt und das Ziel des Suchens nach Mustern oder der Bedingungsvariation[149].

Darüber hinaus werden die Überschlagsrechnung (Sp. 1) und die Beschaffung notwendiger Informationen (Sp. 2) in jeweils fünf, das Experimentieren (Sp. 3) sogar in sechs Bundesländern als Heurismen ausgewiesen.

	Überschlag (oft zur Überprüfung der Ergebnisse)	Beschaffung notwendiger Informationen	Experimentieren	Beispiele a) finden b) untersuchen	Mehrere Lösungen in Betracht ziehen	Schätzen /mit geeigneten Repräsentanten vergleichen	Probieren und Korrigieren / Überprüfen durch Probieren	Untersuchen von Mustern	Einzeichnen von Hilfslinien	(Systematische) Variation der Bedingungen	Substituieren	Permanenzprinzip	Verdoppeln und Halbieren
Spaltennummer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Baden-Württemberg 6													
Baden-Württemberg 8													
Baden-Württemberg 10									x				
Bayern 6													
Bayern 8													
Bayern 10													
Berlin 6		x											
Berlin 8						x	x						
Berlin 10			x										
Brandenburg 6		x											
Brandenburg 8							x						
Brandenburg 10		x											
Bremen 6	x	x		x		x	x						
Bremen 8	x				x			x					
Bremen 10													
Hamburg 6													
Hamburg 8													
Hamburg 10													
Hessen 6													
Hessen 8													
Hessen 10													
Mecklenburg-Vorpommern 6				a						x			
Mecklenburg-Vorpommern 8													
Mecklenburg-Vorpommern 10			x										

[149] Es soll keineswegs abgestritten werden, dass die hier versammelten Nennungen in einem Zusammenhang mit dem Problemlöseprozess stehen (können), sie sind in den Lehrplanschriften aber inhaltlich so unzureichend ausgestaltet, dass sie eher eine Projektion der Kenntnisse des heuristisch geschulten Lesers als einen klar intendierten Inhalt des Lehrplans bzw. der Kompetenzformulierungen darstellen, wenn man solche Verbindungen zieht.

Niedersachsen 6	x		x	b		x						x	
Niedersachsen 8		x			x					x	x		
Niedersachsen 10		x											
NRW 6	x			a		x	x						
NRW 8	x				x			x					
NRW 9													
Rheinland-Pfalz 6													
Rheinland-Pfalz 8			x										
Rheinland-Pfalz 10													
Saarland 6						x	x						
Saarland 8			x										
Saarland 10													
Sachsen 6		x											
Sachsen 8													
Sachsen 10		x											
Sachsen-Anhalt 6	x												
Sachsen-Anhalt 8					x				x				
Sachsen-Anhalt 10					x								
Thüringen 6	x		x	x									x
Thüringen 8	x		x	a									
Thüringen 10			x										
Schleswig-Holstein													
Summe	**8**	**8**	**8**	**6**	**5**	**5**	**5**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**

Tab. 16 Gruppe VII heuristikbezogener Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: zusätzliche Nennungen ohne echten heuristischen Inhalt.

Ebenfalls fünf Bundesländer sehen im Schätzen und dem Vergleich von Repräsentanten und im Überprüfen durch Probieren heuristische Tätigkeiten und Niedersachsen bezeichnet darüber hinaus das Substituieren sowie das Permanenzprinzip als eine wichtige Disziplin auf dem Weg zu einer erfolgreichen Problemlösung. Thüringen führt in diesem Zusammenhang ganz konkret das Verdoppeln und Halbieren auf.

4.3.8 Kontinuitätsbetrachtung

Um einen intuitiven zusammenfassenden Blick auf die oben gesammelten Daten zu werfen und mögliche Schwierigkeiten für den kontinuierlichen und umfassenden Kompetenzaufbau im Bereich des Problemlösens erkennen zu können, werden die zu den vier Hauptphasen des Problemlöseprozesses nach Pólya (1. horizontale Achse) gehörenden Inhalte der Lehrpläne in ihrer Ausführlichkeit (vertikale Achse) und Verteilung über die Doppeljahrgangsstufen (2. horizontale Achse) in Abb. 6 (unten) aufbereitet. Ausgenommen ist erneut Schleswig-Holstein, das keine Doppeljahrgangskompetenzen ausweist, und außerdem Bayern, da seine Lehrplanschriften keinerlei relevante Daten enthalten (s. o.). Die unten folgenden länderbezogenen Darstellungen basieren auf den in und Tab. 12,

Tab. 13, Tab. 14, und Tab. 15 erfassten Daten. Die Höhe der Säulen richtet sich nach dem Anteil der in der Lehrplanschrift enthaltenen Aspekte an den insgesamt erfassten Aspekten; die Höhe der Säulen ist damit zwar ein grober Indikator für die Bandbreite der in den Lehrplanschriften enthaltenen Ausführungen, steht jedoch in keiner direkten Relation zu Qualität oder Ausführlichkeit ihrer Behandlung. Um festzustellen, ob eine bestimmte Phase des Problemlöseprozesses überhaupt angesprochen ist, ist daher primär die Existenz einer Säule entscheidend.

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass Pólyas Modell des Problemlöseprozesses stets als Ganzes zu betrachten ist, also im Ideal- bzw. eigentlich im Normalfall, unabhängig von der Komplexität des konkret zu lösenden Problems, alle drei bzw. vier Phasen des Prozesses ablaufen (müssen). Für die Kompetenzerwartungen am Ende der Orientierungsstufe muss man also erwarten, dass alle drei hier erfassten Phasen Teil der Erwartungsformulierung sind. Erst wenn alle Phasen grundsätzlich – wenn auch vielleicht zu einem eher minderen Grad – beherrscht werden, ist es denkbar, die Problemlösekompetenz für einzelne Phasen nach Pólya weiter auszubauen. Es können also vom Standpunkt einer didaktisch sinnvollen Gestaltung frühestens am Ende der Jahrgangsstufe 7/8 einzelne Phasen isoliert in den Kompetenzbeschreibungen erscheinen.

Dass in höheren Jahrgangsstufen bestimmte Phasen in den Kompetenzbeschreibungen fehlen, stellt didaktisch betrachtet dann kein Problem dar, wenn man unterstellt, dass die in früheren Doppeljahrgangsstufen erworbenen Kenntnisse weiterhin produktiv und regelmäßig im Unterricht genutzt werden. Leerstellen in Phasen, die jedoch noch nie Teil der Kompetenzerwartungen waren, können hingegen nur als weiterhin nicht geforderte Kompetenzen in diesen Bereichen interpretiert werden.

Legt man diese drei Überlegungen streng an die Lehrplanschriften an, so bauen lediglich die Kompetenzerwartungen aus Niedersachsen und Sachsen-Anhalt inhaltslogisch aufeinander auf. Relativ wenigen anderen Bundesländern gelingt es, die Kompetenzerwartungen über die Sekundarstufe I hinweg so festzuschreiben, dass auf dieser Basis ein kontinuierlicher Kompetenzaufbau wenn nicht unbedingt zu erwarten, so doch wenigstens möglich ist. Bremen, Thüringen und Sachsen-Anhalt verfolgen erkennbar das Ziel der Kontinuität und fordern in allen drei Doppeljahrgangsstufen Kompetenzen, die sich zumindest zwei der drei Phasen des Problemlöseprozesses klar zuordnen lassen. Auch in Sachsen ist die Sachlage vergleichbar; es ist hier allerdings ausgerechnet die erste Phase des Problemlöseprozesses, die in der Orientierungsstufe keine Berücksichtigung findet. Diese Gruppe von

Länden baut ihre Kompetenzerwartungen im Bereich des Problemlösens weitgehend logisch stringent aufeinander auf. Baden-Württemberg legt seinen Schwerpunkt in der Vermittlung heuristischer Kenntnisse auf die letzten beiden Jahre der Sekundarstufe I und vernachlässigt dabei ausgerechnet die darauf zuführende Doppeljahrgangsstufe 7/8.

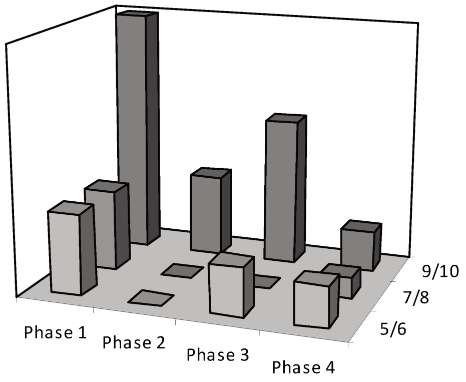
Ein andere Gruppe von Bundesländern fällt dadurch auf, dass für bestimmte Doppeljahrgangsstufen gar keine Heuristik bezogenen Kompetenzerwartungen formuliert werden: Während sich Niedersachsen um eine vergleichsweise umfassende Berücksichtigung des Problemlösens in der Orientierungsstufe und der Jahrgangsstufen 7/8 bemüht, fehlen für die letzten Jahre der Mittelstufe weitere Kompetenzerwartungen[150]. In Berlin und Brandenburg, sowie in Hessen, Nordrhein-Westfalen und Mecklenburg-Vorpommern dagegen spielt die Vermittlung von Problemlösekompetenzen in der Orientierungsstufe keine Rolle; sie wird erst in den höheren Klassen aufgegriffen, wobei aber erstaunlicherweise Kompetenzen der Phase 2 in den drei erstgenannten Ländern fehlen. In Hamburg, das dem Problemlösen in seinen jahrgangsstufenspezifischen Vorgaben insgesamt nur eine untergeordnete Rolle zuweist, fehlen Kompetenzerwartungen für die Doppeljahrgangsstufe 7/8 (sowie solche, die sich auf Phase 1 des Problemlöseprozesses beziehen) gänzlich.

Das Saarland bezieht lediglich Phase 3 des Problemlöseprozesses in seine Kompetenzerwartungen mit ein, und dies für die Orientierungsstufe und die Jahrgangsstufen 7/8. Ähnlich wenig nachvollziehbar ist die Situation in Mecklenburg-Vorpommern und auch in Rheinland-Pfalz, das wie Baden-Württemberg seinen Schwerpunkt bei der Vermittlung heuristischer Fähigkeiten und Fertigkeiten eher auf die Doppeljahrgangsstufe 9/10 legt, erscheint die Verteilung der Kompetenzerwartungen zufällig und willkürlich, da in der Orientierungsstufe nur Aspekte der Phase 3 und in Jahrgangsstufe 7/8 nur solche der Phase 2 in die Kompetenzerwartungen einfließen.

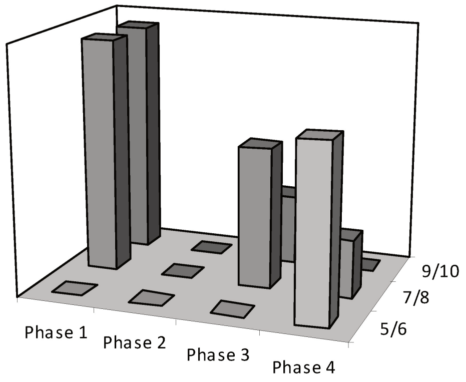
Die Kompetenzerwartungen Bayerns nehmen an keiner Stelle Bezug auf den Problemlöseprozess nach Pólya; die Nennungen des Lehrplans Schleswig-Holstein sind Kap. 3.2.15 und den entsprechenden Zeilen von Tab. 6, Tab. 7 und Tab. 8 zu entnehmen. Sie können, wie oben erwähnt, nicht in ihrer Abfolge und auf ihre didaktische Schlüssigkeit hin betrachtet werden.

[150] Inwieweit unter diesen Bedingungen die bis dahin erworbenen Kompetenzen wirklich bis zum Ende des Sekundarstufe I erhalten bleiben, ist nicht festzustellen; es ist aber bei entsprechender Gestaltung des Unterrichts immerhin grundsätzlich möglich.

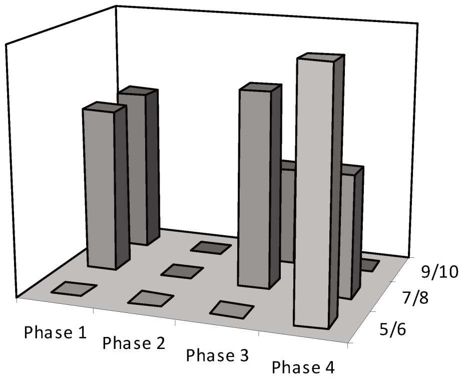
Baden-Württemberg



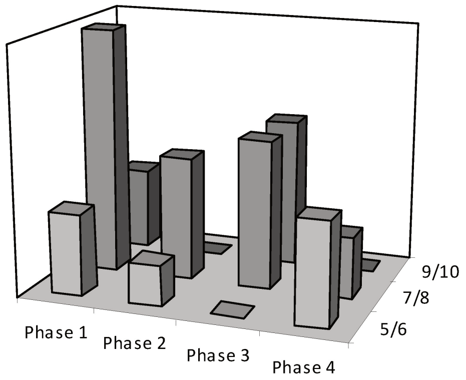
Berlin



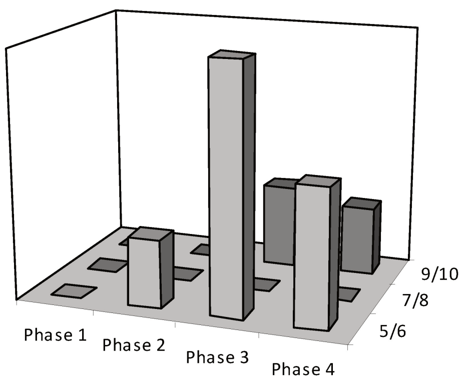
Brandenburg



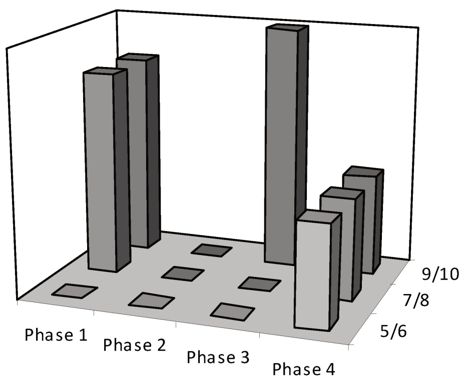
Bremen



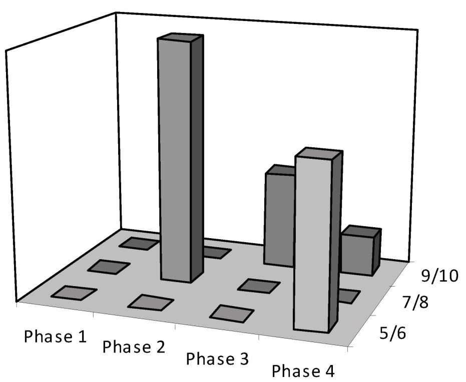
Hamburg



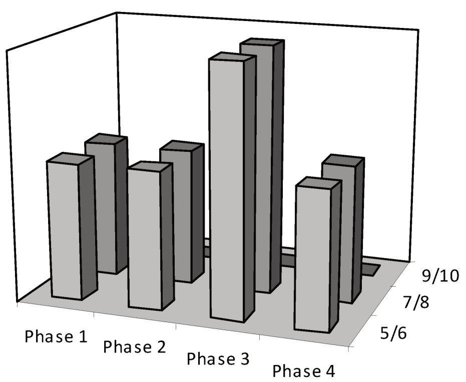
Hessen



Mecklenburg-Vorpommern



Niedersachsen



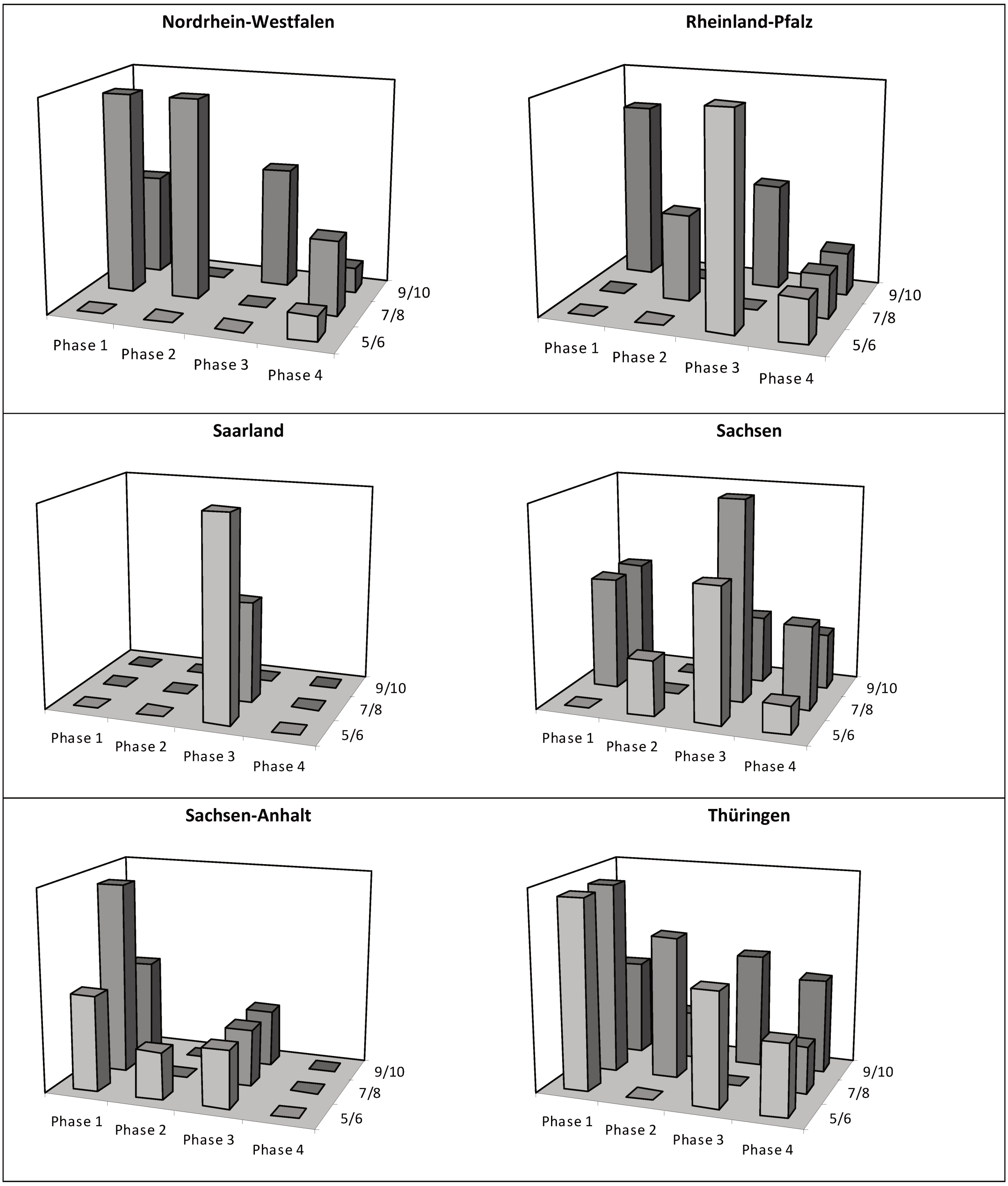


Abb. 6 Relative Berücksichtigung der in der Analyse erfassten Kategorien heuristischer Tätigkeiten in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Bundesländer, zusammengefasst nach den an Pólyas 4-Phasenmodell gebildeten Gruppen III bis VI (unter Auslassung Schleswig-Holsteins und Bayerns).[151]

[151] Die Höhe der Säulen stellt die Anzahl der in den jeweiligen Lehrplanschriften berücksichtigten Kategorien im Verhältnis zur Gesamtzahl der in der jeweiligen Gruppe erfassten Kategorien dar; eine qualitative Bewertung oder die reale Intensität der inhaltlichen Integration ist nicht ablesbar.

Eine letzte interessante Überlegung betrifft die über die Gesamtheit der Bundesländer hinweg gewonnenen Daten: Lassen sich bundesdeutsch Schwerpunkte ausmachen, was die angestrebte Vermittlung heuristischer Fähigkeiten angeht?

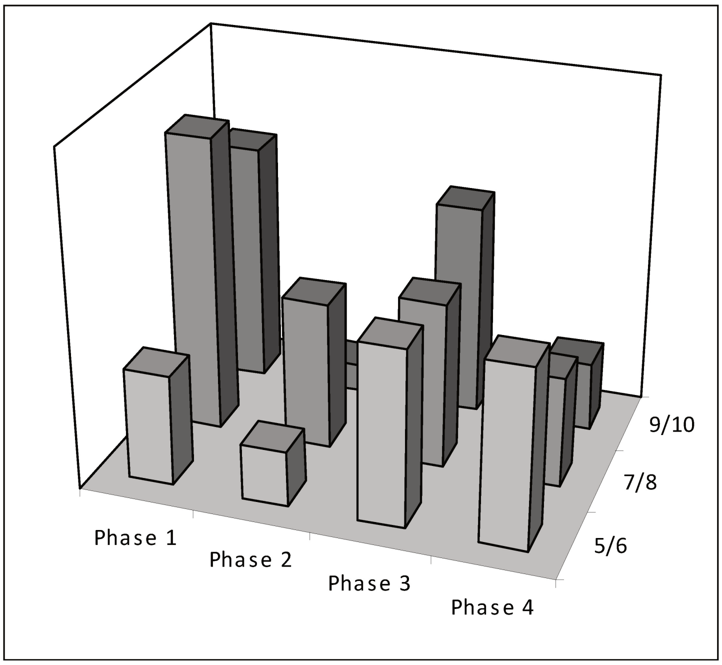


Abb. 7 Summenbildung (anteilig) über Phasen und Doppeljahrgangsstufen in allen Bundesländern hinweg.

Die aufsummierte Darstellung in Abb. 7 zeigt, dass in den Kompetenzerwartungen der Jahrgangsstufe 7/8 am intensivsten Bezug auf die Problemlösefähigkeit genommen wird; alle vier Phasen des Problemlöseprozesses treten in dieser Doppeljahrgangsstufe dabei über die Gesamtheit der bundesdeutschen Lehrplanschriften hinweg annähernd gleich stark in Erscheinung.

Die erste und dritte Phase des Problemlöseprozesses nach Pólya werden im Verlauf der Sekundarstufe I in etwa gleichmäßig berücksichtigt. Die zweite und vierte Phase treten dahinter deutlich zurück, wobei Phase 2 das klare Schlusslicht bildet. Dies ist insofern interessant, als dass Phase 2 viele der Schwierigkeiten im Problemlöseprozess bereitet. Es ist die Stelle, an der oftmals der eigentliche kreative Schritt getan werden muss, der über Erfolg oder Misserfolg der gesamten Problemlösung entscheidet und der sich auch am wenigsten klar „lehren" lässt.

4.4 Zur Verknüpfung mit den Teilgebieten

Entsprechend den Bildungsstandards müssen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, gleich welchen Namen sie in den jeweiligen Bundesländern tragen, fortwährend in den Mathematikunterricht integriert unterrichtet werden.

Die nachfolgende Tabelle (siehe Tab. 17) fasst – bezogen auf die beteiligten mathematischen Teilgebiete – zusammen, in welchen Doppeljahrgangsstufen die Lehrpläne der Bundesländer eine Verknüpfung mit der Problemlösekompetenz vorsehen. Der Überblick lässt sowohl die ungleichmäßige Berücksichtigung der Teilgebiete (siehe insbesondere Bremen und Sachsen) erkennen als auch Brüche im sukzessiven Aufbau der Problemlösekompetenz innerhalb der Teilgebiete (siehe insbesondere Berlin und Brandenburg).

Der Mangel an Verknüpfung in vielen Lehrplanschriften lässt sich aus der tabellarischen Übersicht ebenfalls leicht ablesen.

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass Schleswig-Holstein die Kompetenzerwartungen lediglich für das Ende der Sekundarstufe I formuliert und damit auf eine Aufschlüsselung nach Doppeljahrgangsstufen verzichtet, weshalb hier keine Daten eingearbeitet werden konnte.

Inhalt	Arithmetik / Algebra			Funktionen			Geometrie			Stochastik		
Bundesland / Jahrgang	**5/6**	**7/8**	**9/10**	**5/6**	**7/8**	**9/10**	**5/6**	**7/8**	**9/10**	**5/6**	**7/8**	**9/10**
Baden-Württemberg												
Bayern		x										
Berlin		x				x		x	x			
Brandenburg		x				x		x				
Bremen				x	x	x		x				
Hamburg									x			
Hessen					x							
Mecklenburg-	x											
Niedersachsen												
NRW	x	x	x		x		x	x	x		x	x
Rheinland-Pfalz	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	
Saarland	x	x			x		x	x			x	
Sachsen							x	x	x		x	
Sachsen-Anhalt	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Schleswig-Holstein												
Thüringen	x	x	x		x		x	x	x			
Summe „x“	**6**	**8**	**4**	**2**	**7**	**5**	**6**	**9**	**7**	**2**	**5**	**1**

Tab. 17 Verknüpfung von mathematischen Teilgebieten mit Problemlösefähigkeiten in den Lehrplänen.

Auch wenn auf den ersten Blick der Eindruck entsteht, dass die Kompetenz des Problemlösens einen großen Raum in den verschiedenen Themenfeldern des Mathematikunterrichts einnimmt, so ist zu bedenken, dass die Tabelle lediglich die Stellen markiert, an denen das Problemlösen in Bezug auf eines der Fachgebiete überhaupt genannt wird. Ein Indiz für die Ausführlichkeit oder den Konkretheitsgrad der genannten heuristischen Vorgehens- und Verhaltensweisen stellt es hingegen nicht dar. So wurden konkrete Aussagen wie „Die Schülerinnen und Schüler vertiefen ihre Strategie des überschlagenden und abschätzenden Rechnens“ (BRANDENBURG 2008: 36) oder „Einblicke gewinnen in die heuristischen Verfahren Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten“ (SACHSEN 2004/2009/2011/2013: 18) in der Tabelle ebenso berücksichtigt, wie die Angabe „geeignete heuristische Hilfs-mittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden“ (RHEINLAND-PFALZ 2007: 54). Auch Hinweise wie „Die Schülerinnen und Schüler *erkunden*…“

(BREMEN 2006: 1) wurde in diesem Zusammenhang berücksichtigt, da die Tätigkeit des „Erkundens“ dem Problemlösen zuzuordnen ist.

Das am häufigsten mit der Problemlösefähigkeit in Verbindung gebrachte mathematische Teilgebiet ist die Geometrie (22 Verknüpfungen), gefolgt von Arithmetik und Algebra (18). Die anderen beiden große Themen der Sekundarstufenmathematik, Funktionen (14) und Stochastik (8), fallen weit dahinter zurück. Sechs Bundesländer streben die Verknüpfung heuristischer Fertigkeiten mit der Geometrie über alle sechs Jahrgangsstufen hinweg an. Bei der Arithmetik und Algebra sind es nur vier Länder, die diese Möglichkeit der durchgehenden Anbindung sehen bzw. verbindlich fordern.

Die Aufschlüsselung derselben Daten primär nach Doppeljahrgangsstufen (siehe Tab. 18) lenkt den Blick darauf, ob ein kumulativer Aufbau der Problemlösekompetenz über die Jahrgangsstufen hinweg in den Lehrplanschriften konzeptionell überhaupt möglich ist – unbesehen der daran zu beteiligenden Teilgebiete des Faches.

Jahrgang	5 / 6				7 / 8				9 / 10			
Bundesland / Inhalt	ArAl	Fkt	Geo	Sto	ArAl	Fkt	Geo	Sto	ArAl	Fkt	Geo	Sto
Baden-Württemberg												
Bayern					x							
Berlin					x		x			x	x	
Brandenburg					x		x			x		
Bremen		x				x	x			x		
Hamburg						x					x	
Hessen												
Mecklenburg-	x											
Niedersachsen												
NRW	x		x		x	x	x	x	x		x	x
Rheinland-Pfalz	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Saarland	x		x		x		x					
Sachsen			x				x				x	
Sachsen-Anhalt	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Schleswig-Holstein												
Thüringen	x		x		x	x	x		x		x	
Summe „x“	16				25				17			

Tab. 18 Verknüpfung von mathematischen Teilgebieten mit Problemlösefähigkeiten in den Lehrplänen.

Es zeigt sich bei den meisten Bundesländern ein wenig überzeugendes Gesamtbild, wenn eine solche Verknüpfung nur in einer einzigen der drei Doppeljahrgangsstufen (siehe Mecklenburg-Vorpommern und Bayern), oder nur in Verbindung mit einem einzigen inhaltlichen Bereich (Sachsen) oder nur in zweien in Verbindung mit nur jeweils einem einzigen Themenbereich (siehe Hamburg) vorgesehen ist. Positiv ist hier zu ersehen, dass diejenigen Bundesländer, die über alle drei Doppeljahrgangsstufen eine Verknüpfung einfordern, diese dann auch innerhalb verschiedener Themenbereiche verwirklicht sehen wollen (siehe Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz und Sachsen-Anhalt).

Betrachtet man die Verteilung auf die Doppeljahrgangsstufen, zeigt sich auch in dieser Darstellung der Schwerpunkt der angestrebten Vermittlung problemlösender Fähigkeiten in den Jahrgangsstufen 7 und 8 (vgl. Abb. 7); nicht nur schreiben hier elf der sechzehn Bundesländer das Problemlösen als Teil ihrer Kompetenzerwartungen fest, es wird auch die durchgängig größte Bandbreite an Anknüpfungsbereichen gefordert: in drei Ländern über alle vier Teilgebiete hinweg, in einem Land über drei, und in vier weiteren Ländern über wenigstens zwei Teilgebiete.

In der Doppeljahrgangsstufe 9/10 setzen die Länder die Anknüpfung weitgehend fort, wobei sich nur recht geringe Verschiebungen erkennen lassen; es sind im Wesentlichen dieselben Länder und dieselben Teilgebiete betroffen. Interessant ist, dass das Anknüpfungsspektrum in der Orientierungsstufe hingegen weniger stark ausgeprägt ist, was sich zum Teil aber auch darauf zurückführen lässt, dass hier der Funktionsbegriff noch keine oder nur eine sehr untergeordnete Rolle spielt und auch im Bereich der Stochastik nur vergleichsweise wenige Inhalte vorgesehen sind.

4.5 Fazit

Die bereits in den Kurzanalysen der bundesdeutschen Lehrplanschriften deutlich hervorgetretene Uneinheitlichkeit bei der Verwendung Heuristik bezogener Termini ist nach genauer Untersuchung der spezifischen Kompetenzerwartungen eher ein sekundäres Problem. Schwerwiegender ist der Befund, dass ein gemeinsamer fachdidaktischer Referenzrahmen für das Problemlösen zu fehlen scheint, der es erlaubt, die Vorgaben der Kultusministerkonferenz umzusetzen – oder dieses Ziel wenigstens anzustreben. Es fehlt ebenso die systematische Anknüpfung der prozessbezogenen Kompetenzen, und des Problemlösens insbesondere, an die fachlichen Inhalte, obwohl diese Verknüpfung ganz explizit in den Bildungsstandards mit den Worten „Die [...] allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden von Schülerinnen und Schülern in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben“ (KMK 2004b: 9) gefordert wird. Zwar formuliert die Mehrheit der Bundesländer die Verknüpfung der inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen als klares Ziel, aber nur wenigen Ländern gelingt es, dieses Ziel auch zu erreichen (vgl. hierzu Tab. 6). Darüber hinaus fehlen oftmals Hinweise zur Konkretisierung und eine

Systematisierung (auch bezogen auf den angestrebten Kompetenz*zuwachs*) der Kompetenzerwartungen.[152]

Angesichts der teilweise sehr oberflächlichen didaktischen Ausgestaltung kommen dem Leser und Anwender dieser Schriften sicherlich große Zweifel daran, ob die aufgezeigten Verknüpfungen wenn nicht bindenden, so doch zumindest wegweisenden Charakter besitzen – oder ob vielmehr nur beispielhafte Verknüpfungs*möglichkeiten* benannt werden. Diese seltsame Doppeldeutigkeit stellt den Praktiker immer wieder vor große Probleme:

Auf der einen Seite wurde mit Einführung der Bildungsstandards eine größere Freiheit bei der Planung des individuellen Mathematikunterrichts eröffnet[153] (da ja lediglich Zielvorgaben in Zweijahresschritten vorliegen), auf der anderen Seite bleiben die zentralen Forderungen betreffend der allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch Formulierungen wie „vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten“ oder „geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden“ (KMK 2004b: 8) meist vage und verlieren viel von ihrem verbindlichen Charakter. Beide Umstände zusammengenommen dürften entscheidend dazu beitragen, dass die Lehrer weder wissen, welche Anforderungen die Bildungsstandards (in Gestalt der Lehrpläne ihres Bundeslandes) an sie stellen, noch wie sie dem holistischen Ansatz, die Problemlösekompetenz (um nur *eine* zu nennen) in steter fachinhaltlicher Auseinandersetzung zu vermitteln, nachkommen könnten/sollten. „Mehr Freiheit“[154] im Mathematikunterricht mutet da vielen Fachlehrern als fast zynische Absage auf die Frage nach vernünftigen, praktikablen Umsetzungsmöglichkeiten an: Die potenzielle Freiheit wird nicht empfunden, weil die Erwartungen selbst bei intensivem Studium der Lehrplanschriften und Bildungsstandards völlig unklar bleiben – und weil Begrifflichkeiten sowie neue Elemente des reformierten Mathematikunterrichts in diesen Schriften oftmals in sowohl unterrichtspraktisch wie auch wissenschaftlich unbefriedigender Weise undefiniert, unkommentiert und „undidaktisiert" zusammengeworfen werden. Dies zeigt sich innerhalb der Lehrplanschriften unter anderem in den fehlenden Erläuterungen und Hinweisen zu den Umsetzungs- und Verknüpfungsmöglichkeiten sowie in den fehlenden

[152] Vgl. hierzu ausführlich Kap. 3.2.
[153] Mit Inkrafttreten der Bildungsstandards wird nicht mehr vorgegeben, *wie* der Unterricht gestaltet oder welche Themen behandelt werden sollen, sondern nur, *welche Anforderungen* zu einem bestimmten Zeitpunkt erfüllt werden müssen. Die Standards sind damit auf die Ausbildung von Kompetenzen ausgerichtet, die anhand bestimmter Inhalte erworben werden. Der Weg, diese Anforderungen zu erreichen, bleibt dabei den Schulen und damit den Lehrern überlassen, vgl. hierzu Kap. 6.1.
[154] Vgl. Fußnote 153.

Definitionen des Problemlösebegriffs einerseits und den fehlenden konkreten Benennung der zu erwerbenden Heurismen andererseits.[155] Dadurch entsteht der Eindruck, dass viele Länder zwischen Treue zu den Bildungsstandards und Ratlosigkeit zur Einbindung der dort formulierten Forderungen daran gescheitert sind, logisch geschlossene, durchdachte und schulpraktisch umsetzbare Vorgaben zu formulieren.

Da sich die länderspezifischen Vorgaben zumindest im Hinblick auf die Vermittlung der Problemlösekompetenz als augenscheinlich nicht praktikabel erwiesen haben, wird beim Entwurf des neuen Unterrichtskonzepts der *Integrierten Heuristiklehre im Mathematikunterricht* (Teil III) vorwiegend auf die gemeinsam geltende Basis, die Bildungsstandards, rekurriert.

Nach allem, was über die internationalen Vergleichsstudien, die deutschen Bildungsstandards und schließlich über die in den Bundesländern geltenden Lehrplanschriften gesagt wurde, sei hier kurz zur Frage des „implementierten Lehrplans" Stellung genommen, denn ein Einwand, der gegen die vorhergehenden Betrachtungen und daraus gezogener Schlussfolgerungen über das gegenwärtige deutsche Bildungssystem erhoben werden könnte, liegt auf der Hand: In keinem Klassenraum werden die Lehrplanvorgaben vollständig und allzeit „korrekt" abgebildet. Das kann beispielsweise bedeuten: Es werden Leitideen in gewissen Jahren aus dem spiralförmigen Curriculum ausgelassen, bestimmte Anforderungsbereiche[156] (vgl. hierzu ausführlich Kap. 6.1.4) sind unterrepräsentiert oder prozessbezogene und fachliche Kompetenzen werden nicht verknüpft unterrichtet.

Sind solche Betrachtungen, wie sie im vorherigen Kapitel angestellt wurden, also überflüssig? Ganz im Gegenteil, wie folgende exemplarische Überlegungen zeigen:

Für alle drei gerade genannten Defizite kann es – alltagspraktisch gute – Gründe geben: Die Heterogenität der Lerngruppe kann es dem Lehrer unmöglich machen, gewisse Unterrichtsreihen in der erwarteten Zeit zu einem sinnvollen Abschluss zu bringen und durch verschiedenste schulorganisatorische Faktoren bleibt keine Zeit, um die eine oder andere Leitidee vertiefend wieder aufzugreifen. Wiederum aufgrund der höchst individuellen

[155] Vgl. hierzu auch Kap. 3.2.

[156] Um die Komplexität und den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben bestimmen zu können, hat die KMK die Standards in drei Anforderungsbereiche gegliedert, die eine Orientierung darstellt, in der sich die Leistungen von Schülern erfahrungsgemäß bewegen, vgl. hierzu ausführlich Kap. 6.1.4.

Lernzuwächse kommt es vor, dass nicht alle Schüler über den Anforderungsbereich II[157] hinausgelangen – zumindest nicht innerhalb der Zeit, die ihnen in der Schule zur Verfügung gestellt werden kann. Was allerdings das letzte Problem angeht, so liegen die Gründe hierfür in erster Linie in einem System von Bildungsvorschriften, das ganz bestimmte Ergebnisse erwartet, ohne den dafür erforderlichen strukturellen Anpassungen Rechnung zu tragen. Prozessbezogene Kompetenzen neben die althergebrachten Fachinhalte zu stellen, die ihrerseits lediglich zu „Kompetenzformulierungen" umgearbeitet wurden – das ist weder ein Konzept noch eine gesunde Basis für das, was ganz klar gebraucht wird: eine veränderte Unterrichtskultur.

Und: Es geht nicht um die angeblich durch die Lehrplanreform gewonnenen „Wahlmöglichkeiten und Freiheiten" für Lehrer und Lerner. Es geht um die Frage, wie alle Beteiligten vernünftig, mit vertretbarem Aufwand und *gemeinsam* eine Umgestaltung des Unterrichts bewirken können, und das geht nur mit verständlichen und anwendbaren Vereinbarungen.

Wie auch immer man den Grad der Implementierung der kompetenzorientierten Lehrpläne einschätzt, interessant wird es immer dann, wenn das vorgeschriebene Fundament konzeptuelle und strukturelle Schwächen offenbart – denn diese sind es, die Reformen letztlich ins Straucheln bringen. Wie die BLK[158] selbst feststellte, hat die Implementationsforschung ergeben, dass „in professionellen Handlungszusammenhängen sich Veränderungen nur dann entwickeln und Bestand haben, wenn diese von den Lehrkräften subjektiv angenommen und erfolgreich in veränderte Handlungsroutinen eingebaut werden können" (PRENZEL 2000: 103 -123).

[157] Im *Anforderungsbereich II* werden Zusammenhänge durch die Bearbeitung bekannte Sachverhalte und dem Verknüpfen von Kenntnisse und Fähigkeiten hergestellt, die aus verschiedenen Bereichen der Mathematik zusammengefügt werden.

[158] Die Bund-Länder-Kommission (kurz: BLK) hat als Reaktion auf die TIMS-Studie ein Projekt zur "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" initiiert, das von der Universität Kiel wissenschaftlich und der Universität Bayreuth mathematisch bis zum Auslaufen des Projektes im Herbst 2003 betreut wurde.

Teil II – IHiMU: Integrierte Heuristiklehre im Mathematik-unterricht

In Teil II wird unter engem Bezug auf die geltenden Rahmenvorgaben und die Schulrealität ein Unterrichtskonzept zur *Integrierten Heuristiklehre* entwickelt. Das Konzept hat den konkreten, praktischen Mathematikunterricht von heute vor Augen. Lehrerinnen und Lehrern soll mit dem IHiMU-Konzept ein Weg aufgezeigt werden, auf dem sie anhand der vorhandenen Strukturen mit ihren Schülern Schritte in Richtung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts gehen können.

In Kap. 6 werden maßgebliche Rahmenbedingungen abgesteckt: die Forderungen der Bildungsstandards und die in ihnen enthaltenen didaktischen Aspekte, die Rolle des Lehrers und die des Schulbuches. Hinzu tritt ein Blick auf andere aktuelle Konzepte zum schulischen Erwerb speziell der Problemlösekompetenz. Zunächst gilt es jedoch, ein fachlich und fachterminologisch solides Fundament zu legen. In diesem Sinne stellt Kap. 5 zunächst die jüngste Geschichte und aktuelle Systematiken der Heuristik vor, präsentiert und expliziert einen sekundarschulbezogenen neuen, eigenen Systematisierungsvorschlag, der beiden Konzepten dieser Arbeit zugrunde liegt.

5 Terminologie der Heuristik

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die elementare Bedeutung der Problemlösekompetenz als eine zu erwerbende allgemeine mathematische Kompetenz herausgearbeitet. Zugleich hat die Analyse der bundesweiten Lehrpläne gravierende Mängel aufgezeigt, die bislang dazu geführt haben, dass die Fähigkeit Probleme zu lösen unzureichend oder mitunter auch gar nicht im Mathematikunterricht gelehrt wurde (und bis dato wohl auch nicht wird), so dass zu erwarten ist, dass die deutschen Schüler auch in Zukunft bei den PISA-Studien Defizite in diesem Bereich aufzeigen werden. Daraus ergibt sich zunächst unmittelbar die Frage:

Kann Problemlösen überhaupt effektiv und nachhaltig im Mathematikunterricht gelehrt und gelernt werden?

Neuere Studien belegen, dass der Erwerb der Problemlösekompetenz im Rahmen schulischen Lernens möglich ist (vgl. BRUDER/COLLET 2011, ROTT 2014), womit die Frage bejaht werden kann. Bis heute sind von verschiedenen Wissenschaftlern eine Vielzahl von problemlösenden Vorgehens- bzw. Verhaltensweisen identifiziert und definitorisch bearbeitet worden. Der am häufigsten verwendete Begriff ist der des Heurismus, der all diejenigen wiederkehrenden Handlungsmuster umschreibt, die sich bei der Problemlösung als hilfreich oder nützlich erwiesen haben.

5.1 Das 20. Jahrhundert: Direkte Vorläufer

Die Heuristik gilt als eine der ältesten wissenschaftlichen Verfahren, um Erkenntnisprozesse herbeizuführen und zu optimieren (ausführlich hierzu siehe STILLER Band B). Im 20. Jahrhundert erlebte die Heuristik einen starken Aufschwung, der unter anderem auf die große Nachfrage nach kreativen Ideen in Gesellschaft, Forschung und Industrie zurückzuführen war und damit weltweit die Entwicklung neuer heuristischer Methoden vorantrieb.[159]

5.1.1 Pólya

Pólya gilt als Urvater der modernen Heuristik und seine Werke *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme* und *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsichten und Entdeckung, Lernen und Lehren* (erschienen in zwei Bänden) gehören zu den mathematikdidaktischen Standardwerken der Gegenwart. Die *Schule des Denkens* (Originaltitel „How to solve it“) aus dem Jahr 1949, wurde bis heute in 12 Sprachen übersetzt. Pólyas Werk, welches sich in erster Linie an Studenten und (Mathematik-)Lehrer richtet, ging die Frage voraus, wie (mathematische) Lösungen in der Geschichte der Mathematik gefunden und neue Tatsachen entdeckt wurden. Pólya suchte einen Weg, mathematische Erfindungen und Entdeckungen zu machen, entwickelte Lösungsmethoden mathematischer Probleme und führte verschiedene Ansätze und Fragestellungen zur Heuristik an. Die Nutzung der Methoden sollte dabei nicht nur eine Lösung des Problems liefern, sondern darüber hinaus „[…] die Mittel und Wege, die Motive und Verfahren einer Lösung […] [begreifbar machen]“ (PÓLYA 1995: 9). Kern seiner Arbeiten bilden die „Vier Phasen der Problemlösung“[160], die bis heute untrennbar mit der Heuristik verbunden sind und als Leitfaden auf dem Weg zur Problemlösung dienen.[161]

Das Buch *Vom Lösen mathematischer Aufgaben* aus dem Jahr 1961 „untersucht die Mittel und Methoden des Aufgabenlösens“ (PÓLYA 1966: 10), welche auch unter dem Begriff „Heuristik“ zusammengefasst werden. Neben ausführlichen Lösungswegen richtet Pólya

[159] Vgl. SEREBRYAKOVA 2016.
[160] Vgl. Kap. 2.2.
[161] Vgl. PÓLYA 1995: 1-3.

seinen Fokus auf die „Entstehungsgeschichte“ (PÓLYA 1966: 11) der Lösungen, mit dem Ziel, eine Anweisung zur Orientierung bei der Lösung von (mathematischen) Problemen zu entwickeln. Ausgehend von (elementaren mathematischen[162]) und „ansprechend gewählten“ Aufgaben skizziert Pólya die Entstehungsgeschichte einer Lösung, indem er Lösungswege reflektiert, kommentiert und wichtige methodische Schritte als allgemeine Anweisung formuliert.[163]

Im ersten Band stellt Pólya vier elementare Ansätze zur Problemlösung vor, zu denen er das Schema zweier geometrischer Körper, das Descartessche Schema, das Rekursionsverfahren und das Superpositionsverfahren zählt. Im zweiten Teil des ersten Bandes widmet sich Pólya schließlich dem Begriff der Aufgabe bevor er abschließend die einzelnen Lösungsschemata bewertet.[164]

5.1.2 Glatfeld

In dem 1977 veröffentlichten Sammelband mit dem Titel *Mathematik lernen. Probleme und Möglichkeiten* publiziert Martin Glatfeld[165] den Aufsatz *Mathematiklernen und Heuristik – dargestellt am Beispiel der Teilbarkeit*, in welchem er unter Rückbezug auf Pólyas Problemlöseprozess das Mathematiklernen als ein Zusammenspiel von beweisführenden und heuristischen Methoden herausarbeitet und eine Transparenz der Mathematik fordert.[166]

1990 erscheint sein Werk *Finden, Erfinden, Lernen – Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt*, in dem sich Glatfeld erneut mit dem Lernen von Mathematik unter heuristischen Aspekt befasst. Dabei wird dem heuristischen Vorgehen eine besondere Rolle sowohl in der Forschung als auch beim Lernen von Mathematik beigemessen. In dem Bestreben, „Heuristik als didaktisch-methodische Aufgabe zu reflektieren und zu konkretisieren“ (GLATFELD 1990: 7), wird darüber hinaus auf die Notwendigkeit einer Weiterentwicklung auf diesem Gebiet verwiesen. Die einzelnen Beiträge zeigen in ihrer Gesamtheit ein umfassendes Bild von der Vielschichtigkeit der Problematik, liefern darüber hinaus aber auch ganz konkrete Ansätze für die Umsetzung der Mathematik als einen dynamischen Prozess.

---

[162] Vgl. PÓLYA 1966: 12.
[163] Vgl. PÓLYA 1966: 11.
[164] Vgl. PÓLYA 1966.
[165] Heinrich WINTER ist Mathematikdidaktiker und Professor an der Pädagogischen Hochschule Westfalen-Lippe.
[166] Vgl. GLATFELD 1977: 76-139.

5.1.3 Schoenfeld

Schoenfeld stellt in seinem 1985 in Orlando/USA veröffentlichtem Buch *Mathematical Problem Solving* eine empirische Studie vor, die das Verhalten amerikanischer Schüler der Sekundarstufe I beim Lösen geometrischer Probleme analysiert. Bei der Untersuchung wird der Grad der Ausprägung für die vier Aspekte *Resources*, *Heuristics*, *Control* und *Belief System* während des Problemlöseprozesses der Schüler ermittelt.

Ressourcen umfassen nach Schoenfeld das vorhandene (mathematische) Wissen, wie Definitionen und mathematische Lehrsätze, die zur Problemlösung herangezogen werden. *Heuristik* beinhaltet alle heuristischen Strategien, über die der Problemlöser verfügt, während die *Kontrolle* die Fähigkeit darstellt, dass Vorgehen im Problemlöseprozess zu reflektieren und abschließend zu bewerten. Das *Belief System* sieht Schoenfeld als „mathematische Weltanschauung", die ausdrückt, welchen Wert die Mathematik für jeden einzelnen darstellt, so dass dieser die Rahmenbedingungen für die anderen drei genannten Aspekte liefert.

Schoenfelds Studie zeigte, dass die Schüler im Vergleich zu einem Mathematiker beim Problemlösen über wenige Ressourcen und heuristische Strategien verfügen und ihr Vorgehen eher planlos verläuft. Bei dem übergeordnete Aspekt des *Belief Systems*, zeigt sich, dass die Schüler empirisch vorgehen, der Mathematiker hingegen (wie zu erwarten) mathematisch orientiert ist. Eine Ursache für die mangelnde mathematische Weltanschauung (bezogen auf die Geometrie) kann auch in dem methodischen Vorgehen und der Unterrichtsführung des Mathematiklehrers gesehen werden. Durch die Art und Weise, wie der Geometrieunterricht in der Schule vollzogen wird (nämlich als empirische Theorie[167]), gelingt es dem Lehrer nicht, den Schülern die Bedeutung der Unterrichtsinhalte nahezubringen, so dass sie zwangsläufig eine empirischen Sichtweise von Mathematik entwickeln.[168]

5.1.4 Winter

Heinrich Winter gilt als einer der Wegbereiter der modernen Mathematikdidaktik in Deutschland und hat den Mathematikunterricht von der Grundschule bis über die Oberstufe hinaus nachhaltig beeinflusst. In einem 1988 veröffentlichten Aufsatz zum Thema *Lernen durch Entdeckungen* befasst sich Winter mit der Entstehungsgeschichte und der bis

[167] Vgl. STRUVE 1998: 13.
[168] Vgl. STRUVE 1998: 8 f.

heute fundamentalen Bedeutung des Entdeckenden Lernens[169] für den Mathematikunterricht.

Die Nutzung heuristischer Strategien sieht Winter als eine wichtige Voraussetzung beim Lernen durch Entdeckungen an, und Winter (1988: 6) definiert Heuristik als die „Kunde vom planmäßigen (geschickten, gewitzten) Lösen von Problemen (also von Aufgaben die – gemessen am jeweiligen Befähigungsstand – nicht rein routinemäßig erledigt werden können) und zum selbständigen Vermehren und Behalten des Wissens […].“

Die Methodenlehre des Archimedes[170] und dessen Grundgedanken zieht Winter als Anschauungsbeispiel heran, arbeitet daran die zugrundeliegenden Heurismen heraus und macht diese für allen Lernenden zum (erfolgreichen) Lösen von Problemen zugänglich. Gleichzeitig wird sein Kerngedanke – echtes Lernen findet durch erfinderisch-entdeckende Tätigkeit statt[171] – untermauert.

Winters Hauptwerk *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* erschien 1989. Seine darin aufgestellte Hauptthese „Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller – sowohl im Hinblick auf handfeste Leistungen, speziell Transferleistungen, als auch im Hinblick auf mögliche schwer fassbare bildende Formung –, je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht“ (WINTER 1989: 1) ist eine bis heute vielfach zitierte These in der Mathematikdidaktik. Aus psychologischer Sicht – und von Winter aufgegriffen – beruht das entdeckende Lernen auf der Idee, dass die Erkenntnisgewinnung, der Wissenserwerb sowie der Erwerb der Problemlösefähigkeit durch die Eigenaktivität und Anwendung vorhandenen Wissens erfolgt, es aber in der Regel eines äußeren Impulses bedarf, um diesen Prozess in Gang zu setzen.[172]

1996 erschien der Aufsatz *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*, in dem Winter drei sogenannte Grunderfahrungen formuliert, die seiner Ansicht nach auf vielfältige Art und Weise miteinander verbunden sind und deren Vermittlung er als eine der grundlegenden Ziele des Mathematikunterrichts erachtet, damit (auch) der Mathematik-

[169] Neben den zahlreichen einschlägigen Fachpublikationen zum Thema (WINTER 1991) sei auch auf Kap. 3.11.3 in Band B dieser Arbeit (STILLER 2017) verwiesen.
[170] Über die Bedeutung der Methodenlehre von Archimedes für die Entstehung heuristischer Strategien siehe Band B STILLER: 2017.
[171] Vgl. WINTER 1988: 7.
[172] Vgl. WINTER 1988: 2.

unterricht zur Allgemeinbildung der Schüler beitragen kann. Diese Grunderfahrungen bestehen nach Winter (1995: 37-46) darin:

1. „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formen, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben."

Diese von Winter definierten Grunderfahrungen wurden von der Kultusministerkonferenz in den Bildungsstandards sowie von einigen Bundesländern in Zusammenhang mit der Kompetenzorientierung und dem Beitrag des Faches zur Bildung aufgegriffen und teilweise direkt in die aktuell geltenden Lehrplanschriften übernommen.

5.2 Das 21. Jahrhundert: Aktuelle Ansätze

Die seit Mitte der 90er Jahre durchgeführten internationalen Vergleichsstudien[173] waren es, die eine gesellschaftliche Debatte über mögliche Gründe für das nicht erwartungsgemäße Abschneiden der deutschen Schüler ausgelöst haben. Insbesondere die Tatsache, dass das Lösen praktischer Probleme mit Hilfe der Mathematik die Teilnehmer vor scheinbar unüberwindbare Schwierigkeiten stellte, zeigte für viele akuten Handlungsbedarf auf.

Unbeschadet der Tatsache, dass sich schon seit den achtziger Jahren in der Mathematikdidaktik, durch internationale Forschungsentwicklungen beeinflusst, Problemlösen und Heuristik auch unter deutschsprachigen Spezialisten bereits als Thema etabliert hatten, wurde es nun auf der Suche nach möglichen Ursachen einerseits und geeigneten Mitteln und Wegen zur „Problemlösung" andererseits einer breiten Öffentlichkeit bekannt.

Viele namhafte Mathematikdidaktiker fanden nun das Forum, um die Schlüsselrolle heuristischer Kompetenzen auch im europäischen Umfeld in den Mittelpunkt der mathematik-didaktischen Reformdiskussion zu stellen, griffen Pólyas Ideen und Ansätze in

[173] Die offiziellen Homepages mit Informationen zu aktuellen, geplanten und früheren Studien lauten timss.bc.edu für TIMSS bzw. die für die PISA-Studie oecd.org/pisa.

Verknüpfung mit den amerikanischen Erfahrungen der letzten Jahrzehnte auf und entwickelten sie weiter.

5.2.1 Schwarz

Im Jahr 2006 veröffentlichte Schwarz[174] das Buch mit dem Titel „Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik", mit dem er sich in erster Linie – ähnlich wie bereits Pólya – an die Mathematikstudenten und -lehrer richtete. Schwarz eröffnet darin seinen Lesern Wege, die Mathematik als „kreativen Prozess kennen zu lernen und dabei ein flexibel einsetzbares Instrumentarium heuristischer Strategien des Problemlösens herauszubilden" (SCHWARZ 2006: i). Schwarz war einer der ersten, der die Heurismen systematisiert und sie in drei großen Heurismen-Klassen[175] untergliedert hat: Heurismen der Variation, Heurismen der Induktion und Heurismen der Reduktion. Diesen Klassen ordnet er weitere Strategien unter und anhand ausgewählter mathematischer Beispiele gelingt es ihm, die verschiedenen heuristischen Strategien in ihrer Reinform vorzustellen[176], indem er diese systematisiert und damit mögliche Darstellungen zur Problemlösung liefert. Diese Form der Darstellung macht deutlich, welch große Bedeutung und Sinnhaftigkeit den heuristischen Strategien zur Lösung mathematischer Probleme zukommt.

5.2.2 Bruder/Collet

Bruder und Collet befassen sich in ihrer 2011 erschienenen Arbeit *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht* ausführlich mit dem Thema des Problemlösenlernens im Kontext der schulischen Allgemeinbildung und zeigen Wege auf, mit denen die Problemlösekompetenz der Schüler (weiter)entwickelt und als Lerngegenstand sowie Lernziel in den Mathematikunterricht implementiert werden kann.[177] Ziel ist es dabei nicht (nur), den Forderungen den von der KMK festgeschriebenen Bildungsstandards zu entsprechen, sondern den Lernenden darzustellen, wie komplexe Inhalte erfasst, angegangen und

---

[174] Prof. Dr. Wolfgang Schwarz lehrt an der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der Fachgruppe Mathematik und Informatik in der Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte der Mathematik an der Bergischen Universität Wuppertal.

[175] Auf die Schwarz'sche Systematik wird in Kap. 5.4.1 näher eingegangen.

[176] Nach Schwarz treten Heurismen nur selten in Reinform auf (Seminar zur Heuristik vom 09.11.2011).

[177] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 9.

schließlich erfolgreich gelöst werden können und damit das „Wirkprinzip heuristischer Bildung“ zu skizzieren.[178]

Bruder und Collet definieren Problemlösen als „das Kennen- und Anwendenlernen von Methoden und Techniken zum Lösen individuell schwieriger Aufgaben“ (BRUDER/COLLET 2011: 14) und fassen die Methoden und Techniken unter dem Begriff „Heuristik“ zusammen. Die Heurismen – klassifiziert nach heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien – bilden den Kern ihres Unterrichtskonzepts zum mathematischen Problemlösen.[179]

5.3 Definition

Es fällt auf, dass sich die verschiedenen Autoren nicht nur hinsichtlich der von ihnen grundsätzlich erfassten, definierten und mit Benennungen versehenen problemlösenden Vorgehens- und Verhaltensweisen stark unterscheiden, sondern dass sich diese Unterschiedlichkeit auch im Differenzierungsgrad und hinsichtlich einer möglichen Hierarchisierung fortsetzt. Ebenso wird nicht immer eine Trennung eingehalten zwischen solchen Tätigkeiten, bei denen es sich tatsächlich um heuristische im Sinne der Definition handelt und solchen, die nur rein mathematisches Handeln ausdrücken. In der aktuellen Literatur haben sich mittlerweile unterschiedliche Begriffsdefinitionen in den jeweiligen Wissenschaftsdisziplinen etabliert. In der kognitiven Psychologie ist der Begriff nach Wessells (1990: 256) wie folgt definiert:

> *„In einem sehr allgemeinen Sinn kann man Strategien in Algorithmen und Heuristiken unterteilen; ein Algorithmus ist eine Lösungsmethoden die immer einen bestimmten Problemtyp löst […]. Demgegenüber stellt die Heuristik eine Lösungsmethode dar, die […] zu einer Problemlösung eingesetzt werden kann, ohne eine Lösung zu garantieren.“*

Der Didaktiker Winter versteht unter Heuristik die „Kunde […] vom Gewinnen, Finden, Entdecken, Entwickeln neuen Wissens und vom methodischen Lösen von Problemen“ (WINTER 1991: 35), während es nach Pólya „das Ziel der Heuristik ist, die Methoden und Regeln von Entdeckungen und Erfindungen zu studieren“ (PÓLYA 1995: 118).

Für die vorliegende Arbeit gelten, auf der Grundlage der vorangegangenen Ausführungen, die nachstehenden beiden Arbeitsdefinitionen:

[178] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 9, 22.
[179] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 27.

Heuristik ist die Wissenschaft, die die Mittel und Methoden auf dem Weg zur Problemlösung untersucht und damit als Schlüssel auf dem Weg zur Problemlösung verstanden werden kann.
Unter dem Begriff *Heurismus* werden die Handlungen zusammengefasst, die im Rahmen des Problemlöseprozesses ein planvolles, organisiertes und strukturiertes Vorgehen auf dem Weg zur Lösungsfindung ermöglichen. Heurismen lassen sich prinzipiell den vier Phasen des Problemlöseprozesses nach Pólya zuordnen, sind jedoch nicht an diese gebunden. In der Regel ist für eine erfolgreiche Problemlösung die Anwendung mehrerer Heurismen notwendig.

5.4 Kategorisierung von Heurismen

Trotz der Vielzahl problemlösender Vorgehens- bzw. Verhaltensweisen, der unterschiedlichen Definitionen und der Begriffsvielfalt wird dem heuristischen Vorgehen insgesamt eine besondere Rolle sowohl in der Forschung als auch beim Lernen von Mathematik beigemessen.

Die Bildungsstandards begegnen dieser fachinternen Begriffsvielfalt und Unübersichtlichkeit schlichtweg damit, dass sie sich bezüglich der Vermittlung spezifischer Heurismen gar nicht festlegen, sondern stattdessen allgemein von einer Vermittlung heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien sprechen (vgl. KMK 2004: 8). Eine Dreiteilung, die wohlgemerkt nur ein Teil (wenn überhaupt) der Autoren vornimmt. Da die Bildungsstandards allerdings keinen konkreten Bezug zu einer der aktuellen Systematiken (vgl. BRUDER/COLLET 2011, SCHWARZ 2006) herstellen, lässt sich nicht nachvollziehen, ob diese begriffliche Nähe gewollt und inhaltlich bedeutsam ist.

Die sechzehn Bundesländer haben – im Rahmen ihres beträchtlichen Gestaltungspielraumes – ihre ganz eigene Auslegung und Interpretation von Heurismen vorgenommen mit dem Ergebnis, dass an zahllosen Stellen von „heuristischen Vorgehens- und Verhaltensweisen“ die Rede ist, ohne dass das dort Beschriebene im Entferntesten die Tragweite und den Sinn eines echten Heurismus widerspiegelt. So werden in den Lehrplanschriften das systematische Probieren, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten und das Zurückführen auf Bekanntes ebenso als heuristische Tätigkeit genannt, wie das Finden von Beispielen, das Überschlagen, das Experimentieren oder das Auswählen von Hilfsgrößen (ausführlich hierzu siehe Kap. 3 und 4). Diese Wahllosigkeit und Beliebigkeit ist Ausdruck der zugrundeliegenden Unsicherheit in Bezug auf das Wesen, aber auch die Bedeutung von

Heurismen. Eine Unsicherheit, die sicherlich durch die oben skizzierte unklare Gemengelage in der Fachliteratur mit bedingt ist:

Was unterscheidet einen Heurismus von einer einfachen, mathematischen Handlung? Welche Vorgehens- und Verhaltensweisen lassen sich auf eine Vielzahl von Problemsituationen anwenden und besitzen damit einen „universellen“ Charakter im Rahmen der Problemlöseprozesse? Welche Heurismen können aus Lehrersicht praktikabel gelehrt und aus Schülersicht nachvollziehbar und sinnstiftend gelernt werden? Und welche Heurismen lassen sich realistischer Weise in der Sekundarstufe I lehren und lernen, so dass sie das Curriculum spiralförmig durchziehen, damit ein langfristiger Kompetenzaufbau ermöglicht wird?

Zur Beantwortung dieser Fragen sollen in dem nachfolgenden Kapitel zunächst zwei aktuelle Systematiken der – vom Standpunkt der jeweiligen Autoren – elementaren Heurismen vorgestellt werden. Das erste Konzept stammt von Wolfgang Schwarz, der eine fachmathematische Systematisierung der Heurismen vorgenommen hat, die einen sehr umfassenden, klar strukturierten und gut nachvollziehbaren Überblick zu den Heurismen, ihrer Kategorisierung und ihre Anwendungsmöglichkeiten liefert. Bruders und Collets Kategorisierung ist dagegen didaktisch orientiert, so dass ihr Fokus auf diejenigen Heurismen gerichtet ist, die für die Sekundarstufe I als sinnvoll und sich in der Praxis als praktikabel und erprobt gezeigt haben.

5.4.1 Kategorisierung der Heurismen nach Schwarz

Schwarz hat in seinem Buch „Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik“ die Heurismen in drei Klassen eingeteilt, die sich an dem Problemlöseprozess nach Pólya orientieren, wie folgende Übersichtstabelle zusammenfassend zeigt:

Phase I: Verstehen der Aufgabe	
Identifikation des Problems	**Auffinden einer geeigneten Darstellung**
Variation der Darstellung (Interpretation)	
▪ Systemwechsel zwischen Umgangssprache und formaler Sprache mit ikonischen Elementen ▪ Systemwechsel zwischen Geometrie und Algebra ▪ Systemwechsel zwischen diversen mathematischen Disziplinen und Linearer Algebra	

Phase II: Ausdenken eines Plans	
Variation der Problemstellung	
▪ Umformulierung und Analogiebildung ▪ Variation der Wahrnehmung durch Reorganisation ▪ Invarianzprinzip und Symmetrieprinzip ▪ Generalisierung, Spezialisierung, Extremalprinzip ▪ Sonderformen in der enumerativen Kombinatorik	
Phase III: Ausführen des Plans	
Heurismen der unvollendeten Induktion	**Heurismen der vollendeten Induktion** **Heurismen der Reduktion**
▪ Systematisches Probieren ▪ Vorwärtsarbeiten ▪ Lokale und globale Approximation	▪ La Descente Infinie – der unendliche Abstieg ▪ Rückwärtsarbeiten und Pappos-Prinzip ▪ Modularisierung

Tab. 19 Fachmethodische Systematik der heuristischen Strategien nach Schwarz (2006).

Schwarz siedelt den *Heurismus der Variation*, den er in zwei Untergruppen teilt, am Beginn des Problemlöseprozesses an:

Die *Variation der Darstellung* ist eine heuristische Strategie, die dazu beiträgt, ein Problem – im Sinne der ersten Phase nach Pólya – zu identifizieren, zu verstehen und es in eine geeignete Darstellung zu überführen. Durch die Wahl einer geeigneten Repräsentationsform wird das vorliegende Problem abstrahiert und auf die wesentlichen Informationen reduziert, so dass eine verbesserte Problemwahrnehmung erzielt werden kann, wobei die Wahl einer geeigneten Darstellungsform in der Regel nicht einschrittig verläuft.[180]

Die *Variation der Problemstellung* beinhaltet solche heuristische Techniken, die die zweite Phase im Problemlöseprozess – das Ausdenken eines Plans – unterstützen. Dabei können Fragen (vgl. PÓLYA 1995) ebenso unterstützend wirken wie die Umformulierung oder Umstrukturierung der Problemstellung, die Verallgemeinerung oder auch die Spezialisierung. Auch das Aufspüren von Analogien oder strukturellen Gemeinsamkeiten zu bereits gelösten Problemen, die Transformation der Daten oder das Auffinden von Symmetrien, sowohl innerhalb der vorliegenden Problemstellung als auch in geometrischen Kontexten, sind heuristische Tätigkeiten, die helfen, Lösungsideen zu entwickeln und das vorliegende Problem zu lösen. Dabei treten die Heurismen nach Schwarz selten in Reinform auf, so dass

[180] Vgl. SCHWARZ 2006: 3-30.

in der Regel erst eine Kombination aus mehreren Strategien der Variation eine Lösung liefert.[181]

Die *Heurismen der Induktion* umfassen „heuristische Denkmuster, bei dem vom besonderen Einzelfall auf das Allgemeine, das Gesetzmäßige geschlossen wird“ (SCHWARZ 2006: 144). Das induktive Schließen ist für die Erkenntnisgewinnung, bei der Problemfindung, der Begriffsbildung, der Problemlösung und der Beweisführung von elementarer Bedeutung. In seiner Systematik unterscheidet Schwarz zwischen der unvollendeten und der vollendeten Induktion. Während die unvollendete Induktion auf eine plausible, singuläre Beobachtung ausgerichtet ist, die den Problemfinde- und den Problemlöseprozess in Gang setzen und damit der dritten Phase „Ausführen eines Plans“ nach Pólya zugeordnet werden kann, handelt es sich bei der vollendeten Induktion um Beweistechniken im Rahmen der vollständigen Induktion, die einen demonstrativen Charakter haben, so dass hier nur bedingt von einer heuristischen Strategie gesprochen werden kann.[182]

Die *Heurismen der Reduktion* sind vornehmlich regressiv orientierte Strategien, die einen logischen Charakter haben und mit deren Hilfe nach Voraussetzungen oder falschen Konsequenzen gesucht werden kann. Die Heurismen der Reduktion werden damit überwiegend bei der Problemlösung eingesetzt und können – wie bereits die Heurismen der Induktion – der dritten Phase im Problemlöseprozess nach Pólya zugeordnet werden.

Schwarz’ fachmethodische Systematik der Heurismen ist klar strukturiert und seine Beispiele zeigen sehr deutlich, welchen Nutzen und welche Kraft die Heurismen schon in ihrer Reinform besitzen.[183]

5.4.2 Kategorisierung der Heurismen nach Bruder/Collet

Regina Bruder und Christina Collet haben in ihrem Buch *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht* zur mathematischen Problemlösung nützliche und im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I erprobte, heuristische Verfahren und Hilfsmittel aufgeführt und ausführlich erläutert.[184] Sie unterteilen die (für den Mathematikunterricht wichtigen)

---

[181] Vgl. SCHWARZ 2006: 32, 140-141.
[182] Vgl. SCHWARZ 2006: 187-190.
[183] Auf Anschauungsbeispiele soll an dieser Stelle verzichtet werden, da sie der Publikation des Autors zu entnehmen und dort reichlich vorhanden sind (SCHWARZ 2006).
[184] Es wird mit dieser Kurzdarstellung kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Es werden lediglich diejenigen von Bruder/Collet in Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien klassifizierten heuristischen Tätigkeiten und Heurismen betrachtet, die für die vorliegende Arbeit von Relevanz sind. So wird u.a. auf den Lösungsgraphen, den Wissensspeicher und auf das Transformationsprinzip in diesem Zusammenhang verzichtet.

Heurismen in heuristische Hilfsmittel, heuristische Strategien und heuristische Prinzipien (siehe Tab. 20).[185]

Heuristische Hilfsmittel	Heuristische Strategien	Heuristische Prinzipien
▪ Informative Figuren ▪ Tabellen ▪ Gleichungen ▪ Wissensspeicher ▪ Lösungsgraph	▪ Vorwärtsarbeiten ▪ Rückwärtsarbeiten ▪ Systematisches Probieren ▪ Rückführend auf Bekanntes ▪ Analogieschluss	▪ Symmetrieprinzip ▪ Zerlegungsprinzip Ergänzungsprinzip ▪ Invarianzprinzip ▪ Extremalprinzip ▪ Fallunterscheidung

Tab. 20 Heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien nach Bruder/Collet (2011).

Bei den *heuristischen Hilfsmitteln* handelt es sich nach Bruder und Collet nicht um Heurismen im eigentlichen Sinne, sondern um mögliche Vorgehensweisen, die helfen sollen, ein Problem zu erkennen, zu verstehen und zu strukturieren und damit den Mathematisierungsprozess in Gang zu setzen. Fragestellungen wie „Was ist gegeben? Was ist gesucht? Wie lautet die Bedingung?“[186] können dazu beitragen, unter den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln das geeignete auszuwählen. Die heuristischen Hilfsmittel tragen somit dazu bei, ein gegebenes Problem in einem anderen Repräsentationsmodus zu realisieren und zu abstrahieren. Auf diese Weise können wichtige Informationen herausgefiltert werden, so dass die Problemsituation überschaubarer wird. Bruder und Collet fassen die informativen Figuren, Gleichungen, Lösungsgraphen, Wissensspeicher und Tabellen in dieser Kategorie zusammen.

Während nach Bruder und Collet die heuristischen Hilfsmittel dazu beitragen, ein Problem zu verstehen und zu strukturieren, sind die *heuristischen Strategien* ihrer Ansicht nach umfassende Methoden, die Handlungspläne für den Problemlöseprozess liefern. Die Anwendung heuristischer Strategien garantiert noch keine Lösung; sie ist eine Orientierungshilfe und wirkt unterstützend auf dem Weg der Ergebnisfindung.[187] Hierzu zählen nach Bruder und Collet das systematische Probieren, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, der Analogieschluss und das Zurückführen auf Bekanntes.

Heuristische Prinzipien sind laut Bruder und Collet stark an die fachlichen Inhalte gebunden und erfordern ein gewisses Maß an geistiger Beweglichkeit. Dabei sind die Aspekt-

---

[185] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 45-46, 68-70, 87-88.
[186] Vgl. PÓLYA 1995: 20.
[187] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 69.

beachtung[188] und der Aspektwechsel[189] zwei der charakteristischsten Erscheinungsformen, die bei der Anwendung heuristischer Prinzipien zum Tragen kommen. Bruder und Collet deuten in ihrer Kategorisierung scheinbar einen hierarchischen Aufbau der Heurismen an (siehe Abb. 8).

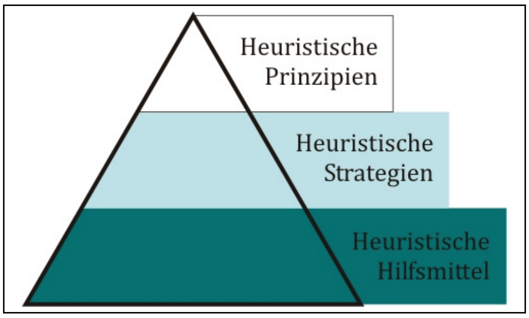


Abb. 8 Hierarchische Gliederung der Heurismen nach Bruder/Collet (2011).

Die Begriffe Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien werden im Allgemeinen wie auch im mathematischen Sprachgebrauch unterschiedlich definiert und ausgelegt. So werden anstelle des Wortes Hilfsmittel auch die Begriffe Arbeitshilfe oder Werkzeug verwendet, die Wörter Methode, Verfahrensweise, Vorgehen und Vorgehensweise sind Synonyme für den Strategiebegriff und das Wort Prinzip wird auch gleichbedeutend mit den Begriffen Grundsatz, Regel, Verfahrensweise oder Methode[190] gebraucht. Ob es sich bei der von Bruder und Collet vorgenommenen Einteilung der Heurismen in Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien um eine sinnvolle und für den Nutzer schlüssige Kategorisierung und Begriffsauswahl handelt, ist fraglich.

In der Praxis konnte sich bisher weder eine dieser Systematiken durchsetzen noch gelang eine verbindliche Festlegung „elementarer“ Heurismen für die Sekundarstufe I (vgl. Kap. 4). Dies kann sicherlich als ein Grund angesehen werden, warum die Vermittlung der Problemlösekompetenz auch über zehn Jahre nach Einführung der Bildungsstandards immer noch nicht effektiv und nachhaltig in den Unterricht implementiert worden ist. Zudem sind die Bildungsstandards sehr abstrakt gehalten und zeigen keine konkreten Möglichkeiten auf, wie sie in den Unterricht integriert werden können. So wird zwar das Problemlösen als zu erwerbende Kompetenz in den Bildungsstandards gefordert, die Heuristik, die der Schlüssel zu einer erfolgreichen Problemlösung ist, wird dagegen weder explizit erwähnt noch berücksichtigt.[191] Damit hat die KMK das Ziel, mit den Bildungsstandards die Unterrichtsprozesse zu optimieren, um den Bildungsertrag zu steigern, verfehlt.

---

[188] Aspektbetrachtung bezeichnet die Fähigkeit, mehrere Aspekte eines Problems simultan zu beachten, Abhängigkeiten zu erkennen und diese gezielt zu variieren (siehe Bruder/Collet 2011: 33).

[189] Beim Aspektwechsel kann zwischen den Annahmen, Kriterien oder Betrachtungsaspekten gewechselt werden, um neue Einsichten zu gewinnen, kann das Problem aus verschiedenen Perspektiven betrachtet werden (siehe Bruder/Collet 2011: 33).

[190] Vgl. Dudenredaktion 2004: 684.

[191] Die an dieser Stelle aufgeführten Gründe sind weder vollständig noch allein dafür verantwortlich, dass eine erfolgreiche Umsetzung Problemlösekompetenz in den Mathematikunterricht nach wie vor große Schwierigkeiten

5.5 Sekundarschulorientierte Kategorisierung nach Krichel/Stiller

Um einen für das deutsche Schulsystem tragfähigen Vorschlag zu entwickeln, wird im Folgenden eine Systematik vorgestellt, die eine Neubewertung der beschriebenen Heurismen vornimmt und sich dabei vor allem an zwei Grundideen orientiert:

1. Für einen Unterricht in Heuristik sind nur solche Heurismen relevant, die das Curriculum der Sekundarstufe I spiralförmig durchziehen können und sich immer wieder auf neue mathematische Inhalte und Problemstellungen anwenden lassen.
2. Um Heuristik für die Schüler einsichtig unterrichten zu können, müssen Heurismen so definiert sein, dass sie sich deutlich voneinander abgrenzen, eine eindeutige Bezeichnung möglich und ihr Nutzen auch für Schüler einsichtig ist.

Kurz, der verwirrenden Begriffsvielfalt soll entgegengewirkt und die Anzahl der zu vermittelnden Heurismen reduziert werden, damit am Ende eine für die Sekundarstufe I adäquate, strukturierte, normierte und konsensfähige Kategorisierung steht, deren Praktikabilität für Lehrer wie Schüler erkennbar ist.

Für das zu entwickelnde Unterrichtskonzept und für das weitere Verständnis der vorliegenden Arbeit wird daher eine Neukategorisierung und -bezeichnung der Heurismen selbst sowie eine für den Erwerb der Problemlösekompetenz für sinnvoll erachtete Auswahl von Heurismen[192] vorgenommen. Orientiert an dem Problemlöseprozess nach Pólya werden im Folgenden drei Kategorien vorgestellt, die heuristische Techniken einerseits und Heurismen andererseits in sich vereinen.

Die heuristischen Techniken und Heurismen werden dazu zunächst definiert, erläutert und im Anschluss anhand von Beispielen konkretisiert. Die Beispielaufgaben sind so gewählt, dass aus ihnen die Anwendbarkeit und der Nutzen der heuristischen Techniken und Heurismen auf dem Weg zur Problemlösung deutlich hervortreten. Damit stehen die Heuristik und ihr Wirkungsbereich als Schlüssel zu einer erfolgreichen Problemlösung im

---

bereitet oder bislang gescheitert ist. Nach Analyse der bundesweiten Lehrplanschriften kann aber angenommen werden, dass die sehr abstrakt gehaltenen Bildungsstandards und die Mängel der daraus entstandenen Konkretisierungsversuche der Bundesländer als Hauptgründe gesehen werden können. Weitere Gründe werden in den Kapiteln 6.2 und 6.3 aufgeführt.

[192] Es sei noch einmal betont, dass für die vorliegende Arbeit bewusst eine Auswahl an heuristischen Techniken und Heurismen getroffen wurde, die nach Aussage der Bildungsstandards und Lehrplanschriften für die Sekundarstufe I als relevant und vermittelbar erachtet werden. Ergänzt werden diese durch von SCHWARZ und BRUDER/COLLET vorgestellte und teilweise erprobte Heurismen, so dass in dieser Arbeit solche Heurismen und heuristischen „Hilfsmittel“ enthalten sind, die für die Schüler der Sekundarstufe I elementar sind.

Fokus und nicht die beweisende Mathematik oder die Findung neuer Sätze. Entscheidend ist zu zeigen, wie mit Hilfe der Heuristik ein Zugang zur Problemstellung geschaffen werden kann, Ideen entwickelt und Pläne umgesetzt werden können. Dass sich die vorgestellten Beispielaufgaben mit dem entsprechenden (Vor-)wissen auch anders, einfacher oder vielleicht „eleganter“ lösen lassen, steht außer Frage. Auch dass sich die Aufgaben mit anderen zur Verfügung stehenden heuristischen Techniken, Heurismen oder einer Kombination aus beiden lösen lassen, soll nicht in Abrede gestellt werden.

Die folgende Tabelle soll den Zusammenhang zwischen dem Phasenmodell und den darin enthaltenen „Leitfragen“ nach Pólya (1995) und der heuristischen Kategorisierung nach Krichel/Stiller aufzeigen. Die drei Kategorien vereinen dabei diejenigen heuristischen Techniken und Heurismen in sich, die in der jeweiligen Problemlösephase dazu beitragen (können), die von Pólya formulierten Fragen zu beantworten und so den Problemlöseprozess in Gang zu setzen, eine Lösungsidee zu entwickeln und das Problem erfolgreich zu lösen.

Phasenmodell nach Pólya und zugeordnete Leitfragen	**Kategorisierung nach Krichel/Stiller**
Phase I: Verstehen der Aufgabe ▪ Was ist unbekannt? ▪ Was ist gegeben? ▪ Wie lautet die Bedingung? ▪ Zeichne eine Figur! ▪ Führe passende Bezeichnungen ein! ▪ Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben? ▪ …	Kategorie I: Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung ▪ Tabellen ▪ Gleichungen ▪ Graphische Repräsentationsformen ▪ De- und Rekonstruktion
Phase II: Ausdenken eines Plans ▪ Hast du die Aufgabe oder eine ähnliche schon früher gesehen? ▪ Kennst du einen Lehrsatz der förderlich sein könnte? ▪ Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken? ▪ Kannst du eine allgemeinere, speziellere oder analoge Aufgabe lösen? ▪ Kannst du einen Teil der Aufgabe lösen? ▪ Hast du alle Daten benutzt? ▪ Hast du die ganze Bedingung benutzt? ▪ …	Kategorie II: Heurismen der Analyse und Adaption ▪ Heurismus der Affinität ▪ Heurismus der Strukturnutzung

Phase III: Ausführen des Plans ▪ Wenn du deinen Plan der Lösung durchführst, so kontrolliere jeden Schritt. ▪ Kannst du sehen, dass er richtig ist? ▪ Kannst du es beweisen?	Kategorie III: Heurismen der konkreten Handlung ▪ Vorwärtsarbeiten ▪ Rückwärtsarbeiten ▪ Systematisches Probieren
Phase IV: Rückschau ▪ Kannst du das Resultat kontrollieren? ▪ Kannst du den Beweis kontrollieren? ▪ Kannst du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? ▪ Kannst du es auf den ersten Blick sehen? ▪ Kannst du das Resultat oder die Methode für irgendeine andere Aufgabe gebrauchen? ▪ …	

Tab. 21 Synopse des vier Phasenmodells nach Pólya (links) und der heuristischen Kategorien nach Krichel/Stiller (rechts).

Für die Phase der Rückschau, die bei Pólya als vierte Phase im Problemlöseprozess ausgewiesen wird, wird in der vorliegenden Arbeit kein Heurismus definiert, da die Autoren in der Rückschau eine heuristisch notwendige Tätigkeit sehen, die aber nicht sinnvoll der Systematik der unmittelbar heuristischen Vorgehensweisen unterworfen werden kann; zum einen, weil der Reflexionsvorgang Bestandteil jedes Modellierungsprozesses ist[193], zum anderen, weil die Möglichkeiten der praktischen Ausgestaltung dieser Phase bei potenziell gleichbleibender Qualität extrem variabel sind, und insbesondere, weil nach Überwindung der Hindernisse kein im definitorischen Sinne problemlösender Prozess mehr stattfindet.

5.5.1 Kategorie I: Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung

Da das Wort *Technik* sinnverwandt mit den Begriffen *Erfahrung, Fertigkeit, Geübtheit, Gewandtheit, Routine, Übung, Arbeitsweise, Methode, Plan, Strategie, Verfahren, Vorgehensweise, Weg* und *Werkzeug* ist und damit die meisten der in der Literatur genutzten Begriffe umfasst, die in Verbindung mit der Heuristik gebraucht werden, wird für die vorliegende Arbeit definiert:

---

[193] Bei der mathematischen Modellbildung wird eine Realsituation in die Sprache der Mathematik übersetzt, um so die gegebene Fragestellung mit Hilfe mathematischer Werkzeuge zu lösen und reale Phänomene zu erfassen. Die im mathematischen Modell gewonnene Lösung wird, bezogen auf die jeweilige Realsituation, abschließend überprüft, interpretiert, bewertet und gegebenenfalls verändert (vgl. NORDRHEIN-WESTFALEN 2007a: 14).

Unter *heuristische Techniken* werden Vorgehensweisen zusammengefasst, die dazu beitragen, die in einer vorliegenden Problemsituation enthaltenen Daten und Informationen zu strukturieren, zu abstrahieren und auf die wesentlichen Kernaussagen zu reduzieren, so dass der Mathematisierungsprozess in Gang gesetzt und die Anwendung zielführender Heurismen eröffnet wird.[194]

Die Kategorie *Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung* wird hier als erste von insgesamt drei Kategorien für die vorliegende Arbeit behandelt. Kategorie I umfasst alle heuristischen Tätigkeiten, die – lose orientiert an der erste Phase des Problemlöseprozess nach Pólya „Identifikation des Problems und Verstehen der Aufgabe“[195] – dazu beitragen, ein Problem innerhalb eines gegebenen Sachverhalts zu identifizieren, zu verstehen und den Mathematisierungsprozess in Gang zu setzen. Nicht selten ist ein Wechsel zwischen verschiedenen heuristischen Techniken notwendig, bevor eine weiter- oder zielführende Darstellungsweise der Problemstellung gefunden wird. Zu den Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung zählen das *Anfertigen von Tabellen*, das *Erstellen graphischer Repräsentationsformen* (Skizzen, Lösungsgraphen und Koordinatensysteme), das *Aufstellen von Gleichungen* sowie die *De- und Rekonstruktion*.[196]

Neben ihrer Funktion ein Problem aus einem gegebenen Sachverhalt zu identifizieren, zu abstrahieren und den Mathematisierungsprozess in Gang zu setzen, stehen die heuristischen Techniken vielfach in einem direkten Zusammenhang mit den Heurismen der Kategorie II und III und bedingen oder unterstützen deren Anwendung. So wird beispielsweise das Anfertigen einer Tabelle oft in Kombination mit dem Heurismus des systematischen Probierens verwendet, während der Heurismus der Affinität häufig die heuristische Technik der De- und Rekonstruktion nutzt (siehe Kap. 5.5.1).

Anfertigen einer Tabelle

Mit Hilfe von Tabellen lassen sich vorliegende Texte oder Daten strukturieren, auf die wesentlichen Aussagen reduzieren, nach bestimmten Kriterien ordnen und übersichtlich darstellen. Damit sind Tabellen eine geeignete Darstellungsform, um einen Überblick über

[194] Selbstverständlich werden ähnliche oder identische Techniken auch in anderen Sachsituationen verwendet, in denen es nicht im engeren Sinnen um das Problemlösen geht.
[195] Die Phase I nach Pólya gliedert sich nach Schwarz in die Identifikation des Problems einerseits und in dem Auffinden einer geeigneten Darstellung andererseits. Aufgrund der Plausibilität der vorgenommenen Einteilung nach Schwarz wird dieser auch für die vorliegende Arbeit entsprochen (SCHWARZ 2006: 31).
[196] Damit entsprechen die Techniken der Abstraktion und Visualisierung weitgehend den Heurismen der „Variation der Darstellung“ nach Schwarz und den „heuristische Hilfsmitteln“ nach Bruder und Collet.

die zugrundeliegenden Informationen und verschiedene Lösungswege und -möglichkeiten zu erhalten.[197] Nicht selten liefern Tabellen schon eine Lösung der Problemstellung.[198]

Tabellen sind eine Strukturierungshilfe, die ein verbal gegebenes Problem abstrahieren, Zusammenhänge zwischen Daten visualisieren, sie auf die Kernaussagen reduzieren und so erste Anhaltspunkte für mögliche Lösungswege und -ideen liefern.

Anfertigen einer Tabelle – ein Beispiel:

Paula feiert ihren Geburtstag. Nach und nach treffen ihre Gäste ein. Jeder neu eintreffende Gast begrüßt zunächst Paula und dann alle schon anwesenden Gäste mit einem Händeschütteln. Als alle Gäste auf der Feier sind, wurden insgesamt 55 Mal Hände geschüttelt. Wie viele Personen befinden sich auf Paulas Feier?[199]

Lösungsvorschlag:

Die Anzahl der Partygäste kann mit Hilfe einer Tabelle ermittelt werden: Paula ist die erste Person und Gastgeberin. Als der erste Gast eintrifft, gibt er Paula die Hand, so dass 1 Händeschütteln gezählt wird. Mit dem zweiten Gast ist die dritte Person auf der Feier, der sowohl Paula als auch dem anderen Gast die Hand gibt. Damit haben insgesamt drei Händeschütteln seit Beginn der Feier stattgefunden. Diese Reihe lässt sich wie folgt fortsetzen:

Anzahl anwesender Personen	**Händeschütteln durch den neuen Gast**	**Händeschütteln insgesamt**
1 (Paula)	0	0
2	1	0 + 1 = 1
3	2	1 + 2 = 3
4	3	3 + 3 = 6
5	4	6 + 4 = 10
6	5	10 + 5 = 15
7	6	15 + 6 = 21
8	7	21 + 7 = 28
9	8	28 + 8 = 36
10	9	36 + 9 = 45
11	10	45 + 10 = 55

Wenn der 10. Gast eingetroffen ist und jeden begrüßt hat, wurden 55 Hände geschüttelt. Mit Paula befinden sich somit 11 Personen auf der Feier.

[197] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 56-61.
[198] Aussagen dieser Art beziehen sich hier und im Folgenden grundsätzlich auf den hier in Frage stehenden Kontext der in der Sekundarstufe I anzutreffenden Problemstellungen.
[199] Die Beispielaufgabe ist angelehnt an die Aufgabe „Jahrmarkt" der Jahrgangsstufe 6 der TU DARMSTADT (o. J.).

Erstellen graphischer Repräsentationsformen

Auch durch graphische Repräsentationsformen lassen sich, ähnlich wie mit Tabellen, verbal gegebene Probleme abstrahieren und auf die wesentlichen Informationen reduzieren.[200] Durch das Anfertigen einer Zeichnung können wichtige Beziehungen zwischen den Angaben hergestellt und Zusammenhänge aufgedeckt werden. Gleichzeitig können abstrakte Problemstellungen visualisiert und algebraische Zusammenhänge verifiziert werden. Eine „gute" Zeichnung führt nicht selten schon auf die Lösung oder eine Lösungsidee.[201, 202]

Graphische Repräsentationsformen finden auch bei algebraischen Fragestellungen Anwendung. Algebraische Objekte lassen sich oft durch eine geeignete Darstellung auf den Gegenstandsbereich der Geometrie übertragen, was einer Visualisierung der algebraischen Objekte entspricht.[203] Dies zeigt sich zum Beispiel in einer Punktmenge, die eine bestimmte Anzahl „visuell" zum Ausdruck bringt, bei den figurierten Zahlen oder bei Strecken, Rechtecke und Kreisflächen die eine Größe oder einen Anteil repräsentieren. Der Flächeninhalt eines Rechtecks kann das Produkt von zwei Zahlen abbilden und das Volumen eines Quaders das Produkt dreier Zahlen. Auch lassen sich Zuordnungen in einem Koordinatensystem darstellen.[204] Die figurierten Zahlen (dezentrale und zentrierte Polygonalzahlen, pronische Zahlen, (quadratische) Pyramidenzahlen[205]), die arithmetische Folgen bilden, schlagen außerdem den Bogen zur Arithmetik.

Graphische Repräsentationsformen tragen dazu bei, ein vorliegendes, verbal gegebenes, algebraisches oder arithmetisches Problem zu identifizieren, zu abstrahieren und auf die wesentlichen Informationen zu reduzieren. Auf diese Weise werden wichtige Beziehungen innerhalb der Daten und Zusammenhänge aufgezeigt, so dass erste Lösungsideen gefunden und der Lösungsprozess in Gang gesetzt werden kann.

---

[200] Vgl. SCHWARZ 2006: 5.
[201] Vgl. ABELS 2002 Beiheft.
[202] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 45-55.
[203] Schwarz (2006: 10) spricht in diesem Zusammenhang von dem Systemwechsel zwischen Geometrie und Algebra.
[204] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 55.
[205] Im Bereich der dreidimensional interpretierbaren Summen zentrierter Polygonalzahlen ließe sich die Liste hier weiterführen; allerdings kommen nur die hier genannten für den Einsatz in der Sekundarstufe I und ganz besonders der Orientierungsstufe in Frage.

Erstellen einer graphischen Repräsentation – Beispiel:

Die Seiten eines Quadrats mit der Seitenlänge a werden jeweils um b verlängert, so dass wieder ein Quadrat entsteht.[206]

Um wieviel wird der Flächeninhalt vergrößert?

Wie groß ist der Flächeninhalt des neuen Quadrats?

Lösungsvorschlag:

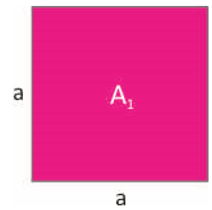
Bevor mit der Erstellung einer geeigneten graphischen Repräsentationsform begonnen wird, ist es sinnvoll, in Anlehnung an den Problemlöseprozess nach Pólya, der Aufgabenstellung die gegebenen und die gesuchten Daten zu entnehmen.

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

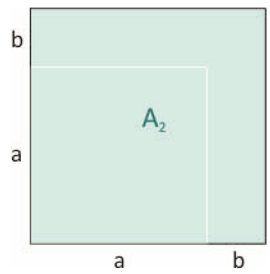
Gesucht ist die Differenz der Flächeninhalte des Ausgangsquadrats mit der Seitenlänge a und des Quadrats mit der Seitenlänge (a+b).

Durch das Anfertigen einer Zeichnung zu dem gegebenen Sachverhalt und der Einführung passender Bezeichnungen können nun wichtige Beziehungen zwischen den Angaben aufgezeigt, die Problemstellungen visualisiert und algebraische Zusammenhänge verifiziert werden.

Zeichne das Ausgangsquadrat mit der Seitenlänge a und führe passende Bezeichnungen ein.



Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge (a+b) und führe passende Bezeichnungen ein.



Der Flächeninhalt des Ausgangsquadrats A_1 beträgt:

$$A_1 = a \cdot a = a^2$$

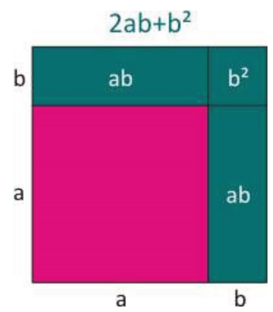
[206] Die Aufgabe ist angelehnt an die Aufgabe „Wachsende Quadrate“ der Jahrgangsstufe 8 der TU Darmstadt (o. J.).

Der Flächeninhalt A_2 des vergrößerten Quadrats beträgt:

$$A_2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$$

Die gesuchte Größe ist die Differenz $A_2 - A_1$.

Die Lösung lässt sich aus der obigen Zeichnung durch das Hinzufügen geeigneter Hilfslinien ermitteln. Die Differenzfläche zerfällt in zwei gleich große Rechteckflächen mit den Seitenlängen a und b, sowie eine quadratische Fläche mit der Seitenlänge b.
Die Gesamtdifferenz beträgt also $A_2 - A_1 = 2ab+b^2$.



Über die graphisch gewonnenen Erkenntnisse lässt sich nun die Frage nach dem Flächeninhalt des vergrößerten Quadrats (und damit die 1. binomische Formel) herleiten. Ob man dabei bei der Differenz ansetzt.

$$\begin{aligned} A_2 - A_1 &= 2ab + b^2 \\ A_2 - a^2 &= 2ab + b^2 \\ A_2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Sind binomische Formeln bereits bekannt, ist die Frage nach dem Flächeninhalt des vergrößerten Quadrats bereits beantwortet und die Differenz zwischen beiden Quadraten rechnerisch leicht zu bestimmen als:

$$\begin{aligned} A_2 - A_1 &= (a+b)^2 - a^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 \\ &= 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Gleichungen aufstellen

Durch das Aufstellen einer Gleichung wird ein verbal gegebenes Problem auf die rechnerische Bestimmung unbekannter Größen reduziert und die Beziehung zwischen den Daten wird beschrieben.[207] Damit sind Gleichungen „ein ideales Instrument der Informationsreduktion in der Phase des Verstehens eines Problems […]"(BRUDER/COLLET 2011: 67), die darüber hinaus (algebraische) Zusammenhänge beschreiben, indem die enthaltenen

[207] Vgl. SCHWARZ 2006: 14.

Informationen der Problemstellungen zueinander in Beziehung gesetzt und schließlich mathematisiert werden.

Gleichungen mathematisieren einen verbal gegebenen Sachverhalt, setzen Daten zueinander in Beziehung und reduzieren die Problemstellung auf die Bestimmung unbekannter Größen.

<u>Gleichungen – Beispiel:</u>

Um eine Entfernung von 1800 m zurückzulegen, muss das Vorderrad eines Fahrzeuges, dessen Umfang 1 m kleiner ist als der des Hinterrades, 150 Umdrehungen mehr machen als dieses. Wie oft dreht sich jedes der beiden Räder auf dieser Strecke?[208]

<u>Lösungsvorschlag:</u>

Im ersten Schritt ist es sinnvoll, die gegebenen und die gesuchten Größen aus der Aufgabenstellung zu entnehmen und zu notieren.

Gegeben sind:
die zurückgelegte Distanz,
die Differenz der Umfänge beider Räder,
die Differenz der Gesamtumdrehungsanzahl beider Räder über die Gesamtdistanz.

Im zweiten Schritt, wird notiert, was gesucht wird:

Gesucht werden die Anzahl der Umdrehungen des kleinen Rades und die Anzahl der Umdrehungen des großen Rades über die Gesamtdistanz.

Nachdem die gegebenen und gesuchten Daten herausgeschrieben wurden, werden in einem weiteren Schritt passende Bezeichnungen eingeführt. Auf diese Weise werden die Angaben in die algebraische Sprache übersetzt.

Zurückgelegte Distanz: 1800 m

Umfang des kleinen Rades: y [Meter]

Da der Umfang des großen Rades laut Aufgabenstellung um 1 m größer ist als der des kleinen Rades folgt daraus:

[208] Die Aufgabenstellung entspricht der Aufgabe „Räder“ der Jahrgangsstufe 9 der TU Darmstadt (o. J.).

Umfang des großen Rades: (y+1) [Meter]

Anzahl der Umdrehungen des kleinen Rades: x

Da das große Rad laut Aufgabenstellung 150 Umdrehungen weniger macht als das kleine Rad folgt daraus:

Anzahl der Umdrehungen des großen Rades: (x-150)

Nachdem passende Bezeichnungen eingeführt wurden und die Daten in die Sprache der Algebra übersetzt wurden, sollten die in der Aufgabestellung aufgeführten Bedingungen noch einmal unter Verwendung der gewählten Bezeichnungen notiert werden.

Das kleine Rad hat einen Umfang von y [Meter] und macht auf einer Distanz von 1800 m x Umdrehungen, während das große Rad mit einem Umfang von y+1 [Meter] auf gleicher Distanz (x-150) Umdrehungen macht.

Setzte man die Angaben über Umfang und Anzahl der Umdrehungen beider Räder mit der zurückgelegten Distanz in Beziehung, erhält man ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\begin{array}{lrl} I & x \cdot y = 1800 & \textit{kleines Rad} \\ II & (x-150)\cdot(y+1) = 1800 & \textit{großes Rad} \end{array}$$

Auflösen von Gleichung I nach y und Einsetzen in Gleichung II liefert:

$$(x-150)\cdot\left(\frac{1800}{x}+1\right)=1800$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$1650 + x - \frac{270000}{x} = 1800$$

Dies führt auf eine quadratische Gleichung der Form:

$$\begin{array}{lr} & 1650 + \frac{x^2}{x} - \frac{270000}{x} = 1800 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 270000 = 150x \\ \Leftrightarrow & x^2 - 150x - 270000 = 0 \end{array}$$

Durch Anwendung der p-q-Formel oder mithilfe der quadratischen Ergänzung ergibt sich als einzige positive Lösung $x_1 = 600$.

Gemäß den mithilfe der Instruktionsfragen eingeführten Bezeichnungen gibt x die Anzahl der Umdrehungen des kleinen Rades an. Mit x = 600 macht das kleine Rad auf einer Distanz von 1800 m somit 600 Umdrehungen. Es wurde ferner festgelegt, dass die Anzahl der Umdrehungen des großen Rades durch x-150 gegeben ist, so dass die Anzahl der Umdrehungen auf gleicher Distanz für das große Rad 600 – 150 = 450 beträgt.
Damit ist die Frage vollständig beantwortet.

De- und Rekonstruktion

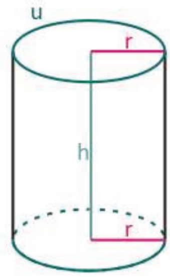
Mit Hilfe der *De- und Rekonstruktion*[209] lassen sich komplexe Problemstellungen in mehrere Teilprobleme zerlegen (dekonstruieren), so dass das Gesamtproblem überschaubarer wird. Die Teilprobleme werden, weitgehend unabhängig voneinander, gelöst und anschließend werden die gewonnenen Teilergebnisse zusammengefügt (rekonstruiert) und auf das Ausgangsproblem zurück übertragen. Dieses Vorgehen ist mit der aus der Informatik stammenden Problemlösestrategie, der sogenannten *Divide and Conquer* Methode vergleichbar, die auf der Idee basiert, ein Problem in kleinere, möglichst gleich große und voneinander unabhängige Unterprobleme zu zerlegen (divide), diese Teilprobleme rekursiv zu lösen (conquer) und schließlich die Teillösungen zu einer Lösung des Gesamtproblems zu (re-)konstruieren.[210]

Oft ermöglicht eine Dekonstruktion, zumindest bei Teilen des gegebenen Problems, Beziehungen zu bereits bekannten, gelösten Problemen zu erkennen und zu nutzen, d. h. sie kann auf den Heurismus der Affinität (vgl. Kap. 5.5.2) hinführen.

Mit Hilfe der *Dekonstruktion* wird ein komplexes Problem in ein System überschaubarer und lösbarer Teilprobleme zerlegt, für die Lösungen ermittelt werden. Die Lösungen werden anschließend im Rahmen der *Rekonstruktion* zusammengeführt und auf das Ausgangsproblem, gegebenenfalls in adaptierter Form, übertragen.

[209] In seinem Buch spricht Schwarz in diesem Zusammenhang vom *Heurismus der Modularisierung*, bei dem ein gegebenes Problem in Subprobleme zerlegt wird, für die jeweils Lösungen gesucht werden, die schließlich zusammengesetzt und auf das Ausgangsproblem übertragen werden (SCHWARZ 2006: 226 f.). Da es in der vorliegenden Arbeit darum geht, die Heuristik als Instrument einer erfolgreichen Problemlösung den Schülern der Sekundarstufe I zu vermitteln, wird die Grundidee des Heurismus' der Modularisierung aufgegriffen und als heuristische Technik der De- und Rekonstruktion bezeichnet. Durch diese Begriffswahl sollen die zwei Handlungen des Zerlegens eines Problems in überschaubare und lösbare Teilprobleme und das anschließende Zusammensetzten der Teillösungen zu einer Lösung für das ursprüngliche Problem verdeutlicht werden.
[210] Vgl. BRUNS / KLIMA 2001: 73.

De- und Rekonstruktion – Beispiel 1



Gegeben ist ein gerader Kreiszylinder mit der Höhe h und dem Radius r.
Wie groß ist seine Oberfläche?

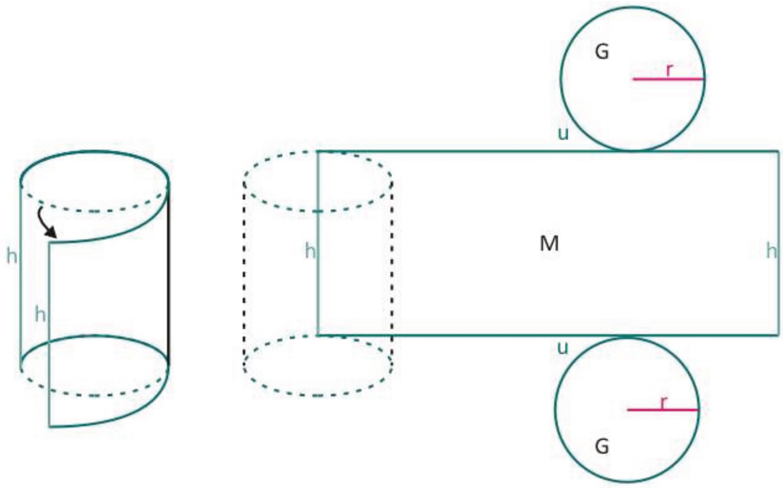
Lösungsvorschlag:

Zunächst werden der Aufgabenstellung die gegebenen und die gesuchten Daten entnommen.

Gegeben ist die Höhe h und der Radius r des Zylinders.

Gesucht ist die Oberfläche O des Zylinders.

Mit Hilfe der Dekonstruktion lässt sich die vorliegende Problemstellungen in überschaubare Teilprobleme zerlegen. Im Rahmen der Dekonstruktion wird der Zylinder durch Aufschneiden und Abwickeln in seine Einzelteile zerlegt. Das so entstandene Netz des Zylinders liefert die nachfolgenden Teilflächen:



Unter der Annahme, dass die Umfangs- und Flächeninhaltsformel für Rechtecke und Kreise bekannt sind, können die Flächeninhalte der Teilflächen wie folgt ermittelt werden: Der Flächeninhalt A_M des rechteckigen Mantels M berechnet sich nach der Formel Länge mal Breite. Der Skizze kann entnommen werden, dass die Breite des Mantels durch die Zylinderhöhe h gegeben ist. Durch das Abwickeln des Mantels kann ferner gefolgert werden, dass die Länge des Mantels dem Umfang u der kreisrunden Deck- bzw. Grundfläche entspricht, der durch $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ (als bekannt vorausgesetzt) gegeben ist. Daraus ergibt sich für den rechteckigen Mantel ein Flächeninhalt von $A_M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$.

Der Flächeninhalt AK des Kreises mit gegebenem Radius r ist gegeben durch $A_K = \pi \cdot r^2$.

Damit sind alle Teilflächen bestimmt worden.

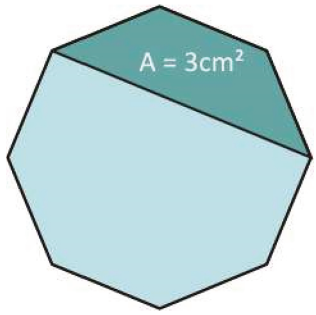
Um das Ausgangsproblem zu lösen, werden abschließend mit Hilfe der Rekonstruktion die gewonnenen Teilergebnisse zusammengeführt, so dass die Oberfläche O_{Zy} eines beliebig dimensionierten Zylinders wie folgt bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} O_{Zy} &= A_M + 2 \cdot A_K \\ &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot (\pi \cdot r^2) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \\ &= r \cdot h \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) \end{aligned}$$

Wird die Dekonstruktion im Sinne von „etwas aufteilen“ oder „etwas separieren“ genutzt, findet diese heuristische Technik in nahezu allen mathematischen Bereichen Anwendung. Insbesondere Konstruktionsaufgaben lassen sich mit Hilfe dieser Technik ohne Umwege und komplizierte oder spezielle Formelkenntnisse lösen.

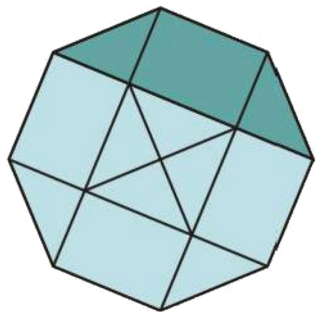
<u>Dekonstruktion – Beispiel 2</u>

Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck. Der dunkel hervorgehobene Teil des Achtecks hat einen Flächeninhalt von $A = 3cm^2$. Wie groß ist der Flächeninhalt des Achtecks?[211]



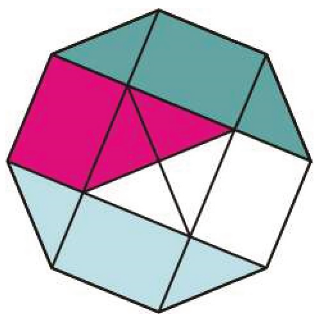
<u>Lösungsvorschlag:</u>

Durch eine geeignete Zerlegung des Achtecks erhält man die nebenstehende Darstellung, die sich aus vier kongruenten Rechtecken und acht kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzt.



Das Ausgangsteilstück, dessen Flächeninhalt bekannt ist, setzt sich aus einem Rechteck und zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammen.

Die Fläche des Achtecks setzt sich aus vier solcher Teilflächen (ein Rechteck plus zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke) zusammen, wie Einfärben oder Abzählen ergeben.



Folglich beträgt der Flächeninhalt des Achtecks $4 \cdot 3cm^2 = 12cm^2$.

[211] Die Beispielaufgabe ist adaptiert nach NOACK et. al 2015:65.

5.5.2 Kategorie II: Heurismen der Analyse und Adaption

Wurde das Problem identifiziert und gegebenenfalls in einen geeigneten Repräsentationsmodus transformiert, können in der zweiten Phase im Problemlöseprozess nach Pólya die Analyse und Adaption der nun vorliegenden mathematisierten Ausgangslage zur Entwicklung weiterführender Lösungsideen hilfreich sein.[212] Unter einer Analyse wird dabei die Untersuchung der vorliegenden Daten auf Muster und Strukturen oder bestimmte Kriterien verstanden und unter Adaption eine gezielte Manipulation der Bedingungen oder auch eine Umformulierung der Problemstellung. Diese Kategorie beinhaltet zwei Heurismen.

Heurismus der Affinität

Unter dem *Heurismus der Affinität* sollen Vorgehensweisen verstanden werden, bei denen die Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen, also strukturellen Gemeinsamkeiten mit bereits bekannten Problemlösungen im Mittelpunkt steht.[213, 214] Fragen wie *Hast du die Aufgabe schon einmal gesehen? Hast du eine ähnliche Aufgabe schon einmal gelöst? Kommt dir an dieser Aufgabe etwas bekannt vor?* die sich an der zweiten Phase im Problemlöseprozess nach Pólya orientieren, können ebenso Anknüpfungspunkte zu bereits vorhandenem Wissen schaffen und Lösungsideen liefern.

Die Affinität kann sich dabei auf die Vorgehensweise, die Darstellungsform, die Fragestellung oder andere strukturelle Merkmale einer Aufgabe beziehen.

Der *Heurismus der Affinität* beschreibt eine problemlösende Vorgehensweise, bei der bereits gelöste Probleme auf ihre Ähnlichkeit oder strukturelle Vergleichbarkeit zu einem neuen Problem hin untersucht und dann zur systematischen Planung und Durchführung der Problemlösung genutzt werden.

---

[212] Es soll an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen werden, dass der Einsatz der genannten Heurismen weder eine Lösungsidee noch eine Lösung garantiert. Auch muss davon ausgegangen werden, dass mehrere heuristische Techniken/Heurismen zum Einsatz kommen, bevor eine mögliche Lösungsidee gefunden ist.

[213] Der Unterschied zur heuristischen Technik der De- und Rekonstruktion (von anderen Autoren oft teilweise durch den Heurismus des Zerlegens und Ergänzens abgedeckt) ist unbedingt zu beachten; hier geht es um eine Ähnlichkeit im Prozess der *Problembearbeitung*, nicht darum, Teile des Problems bereits in anderen Zusammenhängen gelöst zu haben.

[214] Andere Autoren fassen dieses heuristische Vorgehen u. a. mit den Begriffen „Analogiebildung" und „Rückführen auf Bekanntes".

<u>Heurismus der Affinität – Beispiel</u>

Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius r. Wie groß ist die Oberfläche O der Kugel?

<u>Lösungsvorschlag:</u>

Zunächst werden die gegebenen und gesuchten Daten aus der Aufgabenstellung notiert.

Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius r.

Gesucht wird die Oberfläche O der Kugel.

Als nächstes werden alle für den Sachverhalt wichtigen Lehrsätze bzw. Formeln notiert. Die Formel für das Volumen V der Kugel wird als bekannt vorausgesetzt und ist gegeben durch:

$$V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

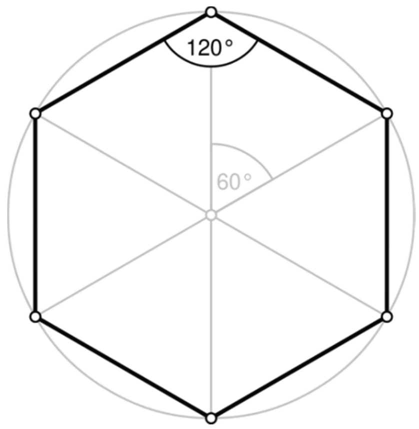
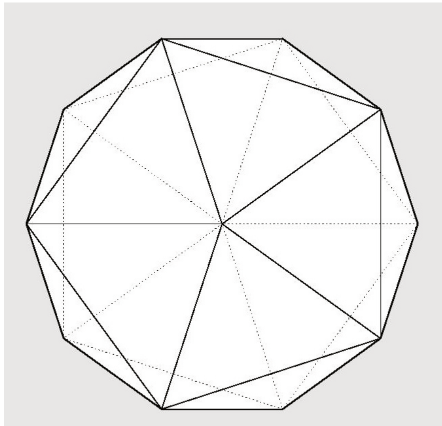
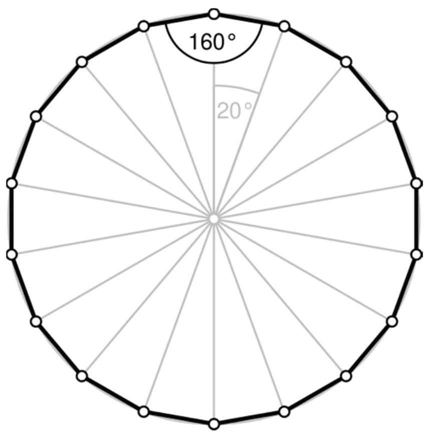
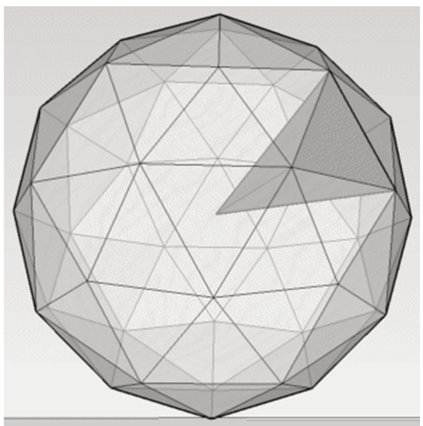
Bei dem Heurismus der Affinität steht die Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen oder nach strukturellen Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Problemen im Mittelpunkt der Betrachtung. Die Frage „Hast du eine ähnliche Aufgabe schon einmal gelöst?“ führt zu den Berechnungen am Kreis (deren Grundlagen als bekannt vorausgesetzt werden).

Aus den Berechnungen am Kreis sei bekannt:

Kreisumfang $u_{Kr} = 2 \cdot \pi \cdot r$

Kreisflächeninhalt $A_{Kr} = \pi \cdot r^2$

Ziel ist es, diese bekannten Lehrsätze für den Kreis auf das Ausgangsproblem zu übertragen und so Lösungsideen für die Berechnung der Kugeloberfläche zu entwickeln. Es gilt also, sich zunächst Gedanken zu machen, ob und wie sich vom Kreisflächeninhalt auf den Kreisumfang schließen lässt. Im Normalfall ist diese Herleitung bereits bekannt, bevor die Frage der Herleitung der Oberflächenformel für die Kugel gestellt wird. Die Gedankenfolge ist in der linken Spalte der folgenden Tabelle nachgezeichnet. In der rechten Spalte befinden sich die daran anknüpfenden Überlegungen zur Kugeloberfläche.

	Kreis	**Kugel**
1	Ein Kreis lässt sich näherungsweise aus kongruenten, gleichschenkligen Dreiecke zusammensetzen.  	Eine Kugel lässt sich näherungsweise aus kongruenten Dreieckspyramiden zusammensetzen. 
	Der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit der Grundseite g, der Schenkellänge r und der Höhe h ist gegeben durch: $A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$	Das Volumen jeder einzelnen Pyramide mit der Grundfläche G, den Seitenkanten r und der Höhe h ist gegeben durch: $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
2	Je mehr Dreiecke dem Kreis einbeschrieben werden, desto mehr nähert sich die Figur dem Kreis an.  Gleichzeitig verringert sich mit wachsender Anzahl kongruenter, gleichschenkliger Dreiecke die Länge der Dreiecksgrundseite g, so dass sich die Summe aller Grundseiten g dem Umfang u_{Kr} des Kreises annähern.	Je mehr Pyramiden der Kugel einbeschrieben werden, desto mehr nähert sich der Körper der Kugel an.  Gleichzeitig verringert sich mit wachsender Anzahl kongruenter Dreieckspyramiden die Pyramidengrundfläche G, so dass sich die Summe aller Grundflächen G der Oberfläche O_{Ku} der Kugel annähern.

3	Je kürzer die Dreiecksgrundseiten g werden, desto mehr nähert sich die Höhe h den jeweiligen Schenkeln des Dreiecks an, bis schließlich die Höhe h näherungsweise der Schenkellänge und damit dem Radius r des Kreises entspricht. Betrachtet man die Fläche des Vielecks, welche sich aus beliebiger Anzahl kongruenter, gleichschenkliger Dreiecke zusammensetzt, so ist diese gegeben durch : $A_{Vieleck} = \frac{1}{2} \cdot \sum g \cdot r$ Bildet man den Grenzwert auf der rechten Seite, so folgt daraus: $A_{Kreis} \approx \frac{1}{2} \cdot \lim_{g \to \infty} \sum g \cdot r$ Ist der Grenzwert erreicht, führt dies zu der Kreisflächeninhaltsformel: $A_{Kr} = \frac{1}{2} \cdot u_{Kr} \cdot r$	Je kleiner die Pyramidengrundflächen G gewählt werden, desto mehr nähert sich die Höhe h den jeweiligen Seitenkanten r an, bis schließlich die Höhe h näherungsweise der Seitenkante und damit dem Kugelradius r entspricht. Betrachtet man das Volumen des Körper, welches sich aus einer beliebigen Anzahl identischer Pyramiden zusammensetzt, ist diese gegeben durch: $V_{Körper} = \frac{1}{3} \cdot \sum G \cdot r$ Bildet man den Grenzwert auf der rechten Seite, so folgt daraus: $V_{Kugel} \approx \frac{1}{3} \cdot \lim_{G \to \infty} \sum G \cdot r$ Ist der Grenzwert erreicht, führt dies zu der Kugelvolumenformel: $V_{Ku} = \frac{1}{3} \cdot O_{Ku} \cdot r$
4	Da die Kreisflächeninhaltsformel ihrerseits bekannt ist (s. o.), lässt sich feststellen, dass allein in Abhängigkeit von u gilt: $\pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot u_{Kr} \cdot r$	Da die Kugelvolumenformel bereits bekannt ist (s. o.) lässt sich feststellen, dass allein in Abhängigkeit von O_{Ku} gilt: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot O_{Ku} \cdot r$
5	Durch einfache Gleichungsumformung lässt sich damit die allgemeine Formel zur Bestimmung des Kreisumfang ermitteln: $2 \cdot \pi \cdot r = u_{Kr}$	Durch einfache Gleichungsumformung lässt sich damit die allgemeine Formel zur Bestimmung des Kugeloberfläche ermitteln: $4 \cdot \pi \cdot r^2 = O_{Ku}$

Wie konnte diese Herleitung gelingen? Entscheidend ist es, zweierlei zu erkennen: erstens, dass sich die beim Kreis erfolgreich eingesetzte Idee der infinitesimalen Aufteilung auch bei der Kugel zur Anwendung bringen lässt, und zweitens, dass bei der unterschiedlichen Dimensionalität von Kreis und Kugel Kreisumfang und Kugeloberfläche sowie Kreisflächeninhalt und Kugelvolumen einander entsprechen.

Hat man diese Analogien einmal entdeckt, so ist die Anwendung des Heurismus der Affinität auf der praktischen Ebene der Herleitung geradezu banal.

Heurismus der Strukturnutzung

Unter dem *Heurismus der Strukturnutzung* sind die oft als *Symmetrieprinzip* oder auch *Mustererkennung* bezeichneten heuristischen Verfahren gefasst. Der Begriff „Struktur" bezeichnet die Gesetzmäßigkeiten (Regelmäßigkeit, Wiederholung, Ähnlichkeit), nach denen eine Menge von Daten eines (komplexen) Systems miteinander korreliert. Muster sind als Teilmenge aller Strukturen aufzufassen und zeichnen sich durch die gleichbleibende, wiederholende Anordnung von Elementen aus, die eine geschlossene Einheit bilden. Die

Anordnung der Elemente sowie die Relation zwischen diesen unterliegen bestimmten Gesetzmäßigkeiten, die die Struktur innerhalb des Musters bilden.

Die Analyse eines Problems kann zum Auffinden einer zugrundeliegenden Struktur führen, auf deren Grundlage Aussagen getroffen und Lösungen gefunden werden können, oder die Erzeugung eines Musters (Symmetrie, Identität, Harmonie oder Passung) indizieren, das in Beziehung zu einer bereits bekannten Struktur gesetzt wird.[215] Der Heurismus der Strukturnutzung ist dadurch mit dem Heurismus der Affinität verknüpft, jedoch keineswegs mit diesem identisch, da der generative Aspekt in den Vordergrund tritt. Auch für diesen Heurismus lassen sich Fragen entwickeln, die im Stile Pólyas seine Anwendung im Problemlöseprozess anstoßen helfen können, wie *Erkennst du im vorliegenden Problem Wiederholungen? Kannst du das Problem so darstellen, dass du ein Muster siehst? Wenn dies nicht der Fall ist, kannst du das Problem so verändern, dass ein Muster entsteht?*

Der *Heurismus der Strukturnutzung* bezeichnet die vorbereitende, auf einer Analyse beruhende Bearbeitung eines Problems, die durch Identifizierung von Mustern und Strukturen oder deren gezielte Generierung den Weg zur Problemlösung öffnen kann.

Heurismus der Strukturnutzung – Beispiel 1

Stelle die ersten fünf Dreieckszahlen graphisch dar. Bestimme ohne großen Rechen- und Zeitaufwand die 100. Dreieckszahl.

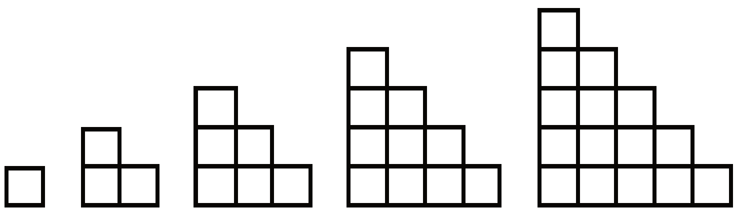
Lösungsvorschlag:

Zu Beginn werden die gegebenen und gesuchten Daten notiert.

Gegeben sind die ersten fünf Dreieckszahlen.

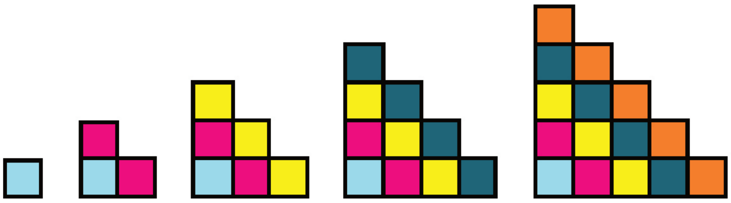
Gesucht wird die 100. Dreieckszahl.

Zunächst werden, wie in der Aufgabe gefordert, die ersten 5 Dreieckszahlen graphisch dargestellt:



[215] Vgl. MASON et al. 2006: 95.

Betrachtet man die graphische Struktur der Dreieckszahlen, lässt sich innerhalb der Darstellungsweise bereits ein Muster erkennen. Aus diesem geht hervor, dass sich die n-te Dreieckszahl als Summe aus ihrem Vorgänger und n selbst bildet:



1. Dreieckszahl D(1) = 1

2. Dreieckszahl D(2) = D(1) +2 = 3

3. Dreieckszahl D(3) = D(2) +3 = 6

4. Dreieckszahl D(4) = D(3) + 4 = 10

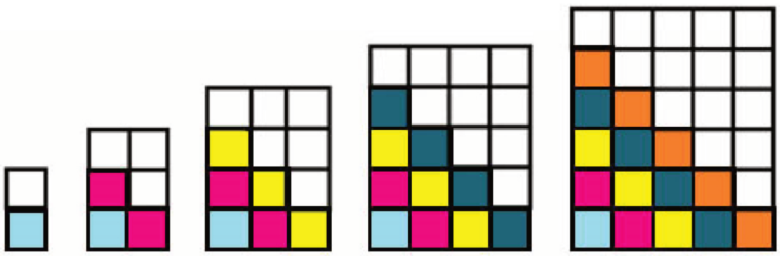
5. Dreieckszahl D(5) = D(4) + 5 = 15 ...

Die graphische Struktur der Dreieckszahlen liefert ohne großen Rechenaufwand die Lösung der ersten fünf Dreieckszahlen. Um die 100. Dreieckszahl zu bestimmen, müsste jedoch die Summe der Zahlen von 1 bis 100 ermittelt werden.

100. Dreieckszahl D(100) = D(99) + 100 = ?

Um die 100. Dreieckszahl ohne einen größeren Rechenaufwand zu ermitteln, wird nach Mustern und Strukturen gesucht. Welches Muster kann erzeugt werden? Gibt es eine weitere Darstellungsform, aus der sich die Dreieckszahlen unmittelbar berechnen lassen?

Werden die Dreieckszahlen zu einem Rechteck ergänzt, so entsteht das folgende Bild:



Das Rechteck wird durch zwei kongruente Dreiecke gebildet, die sich aus dem Doppelten der Dreieckszahl ergeben. Die (bunt gefärbten) Dreieckszahlen können nun berechnet werden, indem die Anzahl der Kästchen in einem Rechteck über die Breite und Höhe bestimmt und durch zwei dividiert wird:

$$D(1)=\frac{1\cdot 2}{2}=1$$

$$D(2)=\frac{2\cdot 3}{2}=3$$

$$D(3)=\frac{3\cdot 4}{2}=6$$

$$D(4)=\frac{4\cdot 5}{2}=10$$

$$D(5)=\frac{5\cdot 6}{2}=15$$

Die Untersuchung der Rechtecke zu den ersten fünf Dreieckszahlen zeigt, dass die Breite identisch mit n ist, die Höhe n+1.

$$D(n)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

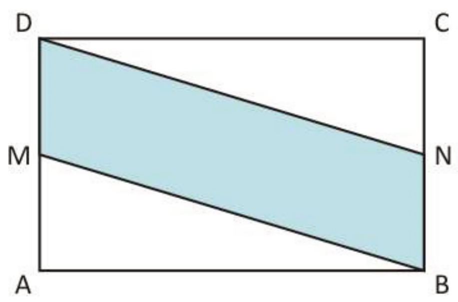
Auf diese Weise kann die 100. (oder jede beliebige andere) Dreieckszahl wie gefordert ohne Rechen- und Zeitaufwand bestimmt werden. Diese ergibt sich nach dem Muster als:

$$D(100)=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$$

<u>Heurismus der Strukturnutzung – Beispiel 2</u>

Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit einem Flächeninhalt von 18 cm². Die Punkte M und N sind die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

Gesucht ist der Flächeninhalt des blauen Vierecks MBND.[216]



[216] Die Beispielaufgabe ist adaptiert nach Noack et. al 2015:62.

Lösungsvorschlag:

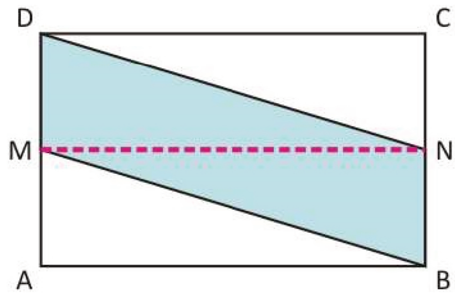
Zunächst betrachtet man die gegebenen und die gesuchten Daten.

Gegeben sind:
ein Rechteck ABCD.
der Flächeninhalt des Rechtecks vom 18 cm².
der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AD}$.
der Mittelpunkt N der Strecke $\overline{BC}$.

Gesucht ist der Flächeninhalt des Vierecks MBND.

Orientiert an der zweiten Phase im Problemlöseprozess nach Pólya können gezielte Fragestellungen wie „Kannst du durch Einzeichnen von Hilfslinien oder Ergänzungen bekannte Strukturen erzeugen oder sichtbar machen“ Anknüpfungspunkte zu bereits vorhandenem Wissen schaffen und Lösungsideen liefern.

Betrachtet man das Rechteck ABCD, wird durch Einzeichnen der Mittelparallele $\overline{MN}$ das nebenstehendes Bild erzeugt.

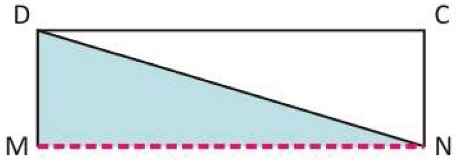


Die Mittelparallele $\overline{MN}$ zerlegt das Rechteck ABCD in zwei kongruente Rechtecke MABN und MNCD.

An dieser Stelle kann überprüft werden, ob eine ähnliche Aufgabe schon früher einmal gelöst wurde oder ob ein Lehrsatz Anwendung findet.

Unter der Annahme, dass Rechtecke und deren Eigenschaften bekannt sind, kann folgendes aus der Abbildung gefolgert werden:

In dem Rechteck MNCD ist $\overline{DN}$ die Diagonale, die das Rechteck in zwei kongruente und flächeninhaltsgleiche Dreiecke MND und NCD zerlegt.



Damit ist der Flächeninhalt des blau gefärbten Dreiecks DMN halb so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks MNCD.

Aufgrund der Kongruenz gilt Gleiches für das Rechteck ABNM, welches durch die Diagonale $\overline{MB}$ in zwei kongruente und flächeninhaltsgleiche Dreiecke MAB und BNM zerlegt wird. Folglich haben alle in dem Rechteck ABCD durch das Einzeichnen der Hilfslinie erzeugten Dreiecke denselben Flächeninhalt.

Die so gewonnenen Erkenntnisse lassen sich nun auf die Ausgangssituation übertragen.

Die beiden blau gefärbten Dreiecke ergeben zusammengesetzt ein Rechteck, welches dem halben Flächeninhalt des Rechtecks ABCD entspricht. Somit beträgt der Flächeninhalt des blauen Rechtecks MBND:

$$\frac{18cm^2}{2} = 9\ cm^2$$

In der hier beschriebenen zweiten Kategorie wurden verschiedene heuristische Vorgehensweisen zu (nur) zwei Heurismen zusammengefasst, da die Bearbeitung adäquater Beispiele zur Veranschaulichung der Heurismen immer wieder gezeigt hat, dass sich im schulischen Kontext der Sekundarstufe I das *Rückführen auf Bekanntes* schwer von der *Analogiebildung* abgrenzen lässt.[217] Der *Heurismus der Strukturnutzung* wird in dieser allgemein gehaltenen Form berücksichtigt, da er sich so situationsangepasst auch in der Sekundarstufe I immer wieder verwenden lässt.

Da es in dieser Arbeit darum geht, für Schüler einsichtige und nachvollziehbare Heurismen zu erarbeiten, mit denen sich eine Vielzahl von Problemstellungen angehen lassen, wurde und wird auch im Folgenden von einer weiteren Differenzierung in „Spezialheurismen" abgesehen. Eine unüberschaubare Menge an Heurismen, die sich nicht klar voneinander abgrenzen lassen und zudem nur in wenigen Einzelfällen Erfolg versprechen, wäre nach Analyse der bundesweiten Lehrplanschriften zudem kontraproduktiv. Diese hat unter anderem gezeigt, dass die Länder ihre ganz eigene Auslegung und Interpretation von Heurismen vorgenommen haben mit dem Ergebnis, dass an vielen Stellen von „heuristischen Vorgehens- und Verhaltensweisen" die Rede ist, ohne dass das dort Beschriebene im Entferntesten die Tragweite und den Sinn eines echten Heurismus widerspiegelt.[218] Daher gilt es eine für alle Bundesländer verbindliche Basis zu schaffen, in der eine überschaubare Anzahl an die für die Sekundarstufe I relevanter Heurismen aufgeführt, eindeutig

[217] Beide Heurismen lassen sich jedoch in der Systematik nach Krichel/Stiller der Heurismenklasse der Affinität bei- bzw. unterordnen.
[218] Vgl. hierzu ausführlich Kap. 4.3.7

benannt, definiert und klar voneinander abgrenzt werden. Das bedeutet aber keineswegs, dass die Möglichkeit einer weiteren Unterscheidung unter geeigneten Umständen und in dazu fähigen Lerngruppen nicht auch bereits in der Mittelstufe thematisiert werden kann und soll.

5.5.3 Kategorie III: Heurismen der konkreten Handlung

Wie bereits gezeigt, tragen die in der Kategorie I *Abstraktion und Visualisierung* vereinten heuristischen Techniken dazu bei, ein gegebenes Problem zu strukturieren, es auf die wesentlichen Informationen zu reduzieren oder durch eine geeignete Darstellungsform zu abstrahieren, bevor die *Heurismen der Analyse und Adaption* greifen und den neuen, mathematisierten Sachverhalt auf Strukturen untersuchen und variieren, um eine Lösungsidee zu entwickeln oder bereits eine Lösung zu liefern.

Die dritte Kategorie umfasst diejenigen Heurismen, die der dritten Phase nach Pólya, dem „Ausführen des Plans", zuzuordnen sind und grundsätzlich das Auffinden einer konkreten Lösung anstreben. Zu den *Heurismen der konkreten Handlung* gehören das *Systematische Probieren,* das *Vorwärtsarbeiten* und das *Rückwärtsarbeiten*.

Systematisches Probieren

Das systematische Probieren ist ein zielgerichtetes, planvolles und strukturiertes Vorgehen, bei dem Problemvariablen verändert und die Gesamtheit der daraus entstehenden Phänomene oder Ergebnisse auf ihren Beitrag zur Lösung des Problems hin evaluiert werden, mit dem Ziel über die Fortsetzung schließlich die eigentliche Lösung zu identifizieren. Je nach Problemsituation werden offene oder geschlossene Formen des systematischen Probierens angewandt; diese sind komplementär und werden durch das Einsetzen und Ausschließen von Lösungsmöglichkeiten, oder einem Wechsel zwischen beidem,
realisiert.

Der *Heurismus des systematischen Probierens* bezeichnet das planvolle Auswählen, Abändern oder Ausschließen im gegebenen Problem enthaltener Variablen, mit dem Ziel, durch das beobachtete Verhalten (der veränderten Ergebnisse) Schlüsse auf die zugrundeliegende Struktur des Problems zu ziehen; diese werden unmittelbar zur Lösung des Problems genutzt.

Offenes systematisches Probieren – Beispiel

Anna möchte ein eigenes Blumenbeet anlegen. Dazu erhält sie von ihren Eltern eine Drahtrolle, auf der sich 24 m Draht befinden, mit der sie ihr Beet einfassen soll. Anna möchte ein möglichst großes, rechteckiges Beet anlegen.

Welchen Flächeninhalt kann Annas Beet höchstens haben, wenn sie zum Einrahmen den gesamten Draht verbraucht?

Lösungsvorschlag:

Im ersten Schritt werden die gegeben und die gesuchten Daten herausgeschrieben.

Gegeben sind:
24 m Draht
ein rechteckiges Beet

Gesucht wird der maximale Flächeninhalt eines rechteckigen Beetes, dessen Umfang 24 m beträgt.

Als nächstes werden passende Bezeichnungen eingeführt, um die formale Schreibweise in die Sprache der Algebra zu transformieren.

Der Draht mit einer Länge von 24 m entspricht dem Umfang u des rechteckigen Beetes, so dass gilt:

$u_{\text{Rechteck}} = 24$ m.

Der Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist gegeben durch:

$$A(a,b) = a \cdot b$$

Betrachtet man die Bedingungen aus der Aufgabenstellung, so ergibt sich:

Gegeben sind 24 m Draht, mit denen ein rechteckiges Beet mit den Seitenlängen a, b eingezäunt werden soll, so dass der Flächeninhalt A des Beetes maximal wird.

Setzt man die Daten zueinander in Beziehung, so erhält man:

Der Flächeninhalt A des rechteckigen Beetes ist gegeben durch: $A(a,b) = a \cdot b$

Der Umfang u des Beetes ist gegeben durch: $24 = 2a + 2b$

Die Längen der Seiten a und b werden unter Beachtung der Bedingungen schrittweise variiert, so dass sich durch systematisches Probieren das folgende Bild ergibt[219]:

Länge Seite a	**Länge Seite b mit** $b=\frac{u-2a}{2}$	**Flächeninhalt mit** $A=a\cdot b$
2 m	10 m	20 m²
4 m	8 m	32 m²
5 m	7 m	35 m²
6 m	6 m	36 m²
7 m	5 m	35 m²
An dieser Stelle sollte das symmetrische Verhalten der Längen a und b, und damit des resultierenden Flächeninhalts auffallen.		

Es wurden systematisch ganzzahlige Lösungen ausprobiert. Der maximale Flächeninhalt liegt bei a = b = 6 m. Verlängert man a um ε so muss b um ε verkürzt werden, damit der Umfang konstant bleibt. Die Fläche beträgt dann $(6+\varepsilon)\cdot(6-\varepsilon)=36-\varepsilon^2 \prec 36$. Damit ist $a=b=6m$. optimal.

Anna erhält demnach mit ihren 24 m Draht das größte rechteckige Blumenbeet, wenn sie ein quadratisches Beet mit den Seitenlängen $a=b=6m$. anlegt.

<u>Geschlossenes systematisches Probieren – Beispiel</u>

Jim bewirbt sich bei der Donut Company in New York um einen Job als Lieferant. Jims zukünftiger Chef möchte seinen neuen Mitarbeiter auf die Probe stellen und bittet ihn, drei seiner Kunden mit Donuts zu beliefern. Doch statt Jim die Adressen zu nennen, gibt er ihm nur die folgenden Hinweise:

Die zu beliefernden Cafés liegen an verschiedenen Straßen zwischen der 1. und der 154. Straße. Zwei Geschäfte derselben Kette liegen an Straßen, deren Nummern zusammen 50 ergeben, das dritte Café liegt nur zwei Straßen von einem der anderen beiden entfernt war. Alle drei Straßennummern sind außerdem Primzahlen.

Zum Glück gibt der Chef Jim einen letzten Tipp und nennt ihm die letzte Ziffer des Produkts der Straßennummern.

[219] Heuristische Techniken tragen unter anderem dazu bei, den Mathematisierungsprozess in Gang zu setzten und die Anwendung zielführender Heurismen zu eröffnen. In dem vorliegenden Fall wurde die Tabelle in seiner Funktion als Strukturierungshilfe herangezogen, um den Heurismus des systematischen Probierens bei dem planvollen und systematischen Vorgehen zu unterstützen (vgl. Kap. 5.5.1).

Schafft Jim es, alle Cafés zu beliefern, bekommt er den Job.[220]

Lösungsvorschlag:

Unter Teilausnutzung zwei der gegebenen Informationen (Summe beider Straßennummern ist 50 und Primzahlen sind ungerade) lässt sich eine Liste erstellen, die diejenigen Straßen erfasst, an denen die beiden Cafés derselben Kette liegen können (unten links). Dann werden diejenigen Listungen ausgeschlossen, bei denen nicht beide Straßennummern Primzahlen sind; nur vier Möglichkeiten bleiben übrig. Wie in dem Beispiel zuvor wird auch in diesem Fall die Tabelle als Strukturierungshilfe herangezogen, um ein planvolles und systematisches Vorgehen zu gewährleisten.

Café 1	Café 2
1	49
3	47
5	45
7	43
9	41
11	39
13	37
15	35
17	33
19	31
21	29
23	27
25	25

Café 1	Café 2
3	47
7	43
13	37
19	31

Für jede dieser vier Möglichkeiten sind unter der gestellten Bedingung vier Straßennummern für das dritte Café möglich. Wieder lassen sich diejenigen Straßen ausschließen, bei denen es sich nicht um Primzahlen handelt (rechts).

Café 1	Café 2	Café 3
3	47	~~1~~, 5, ~~45~~, ~~49~~
7	43	5, ~~9~~, 41, ~~45~~
13	37	11, ~~15~~, ~~35~~, ~~39~~
19	31	17, ~~21~~, 29, ~~33~~

Sechs mögliche Lösungen wurden identifiziert. Um die letzte Information zur Ermittlung der richtigen Lösung nutzen zu können, werden die Produkte gebildet:

[220] Die Beispielaufgabe ist adaptiert nach HERR et al. 1994: 55 f.

Café 1	Café 2	Café 3	Π
3	47	5	705
7	43	5	1505
7	43	41	12341
13	37	11	5291
19	31	17	1001**3**
19	31	29	17081

Mit Blick auf die letzten Ziffern der Ergebnisse wird klar, dass die drei Cafés, die Jim beliefert, nur an der 19., 17. und 31. Straße liegen können – nur dieses Lösung kann über die letzte Ziffer eindeutig identifiziert werden.

Vorwärtsarbeiten

Bei dem in der Literatur als *Vorwärtsarbeiten* ausgewiesenen Heurismus handelt es sich um ein progressives Vorgehen, bei dem man mit der Lösungssuche bei den gegebenen Daten beginnt und sich zu dem gesuchten Zielzustand vorarbeitet. Das reine Vorwärtsrechnen setzt voraus, dass die Struktur eines Problems identifiziert wurde und es erlaubt, geradewegs zum Zielzustand zu gelangen. Oft ist der Heurismus aber auch hilfreich, um sich über Teilziele fortschreitend und unter erneutem Einbezug der Anfangsdaten oder durch Nutzung weiterer heuristischer Techniken dem Zielzustand anzunähern. Das Vorwärtsarbeitens basiert auf der Möglichkeit, ein vorliegendes Problem von einem Ausgangs- bis zu einem Endzustand zu betrachten.

Unter der Voraussetzung, dass die Struktur des vorliegenden Problems identifiziert werden kann, wird unter dem *Vorwärtsarbeiten* ein progressives Vorgehen verstanden, bei dem man sich vom Ausgangszustand und den darin enthaltenen und gegebenen Daten zum gesuchten Zielzustand vorarbeitet.

<u>Vorwärtsarbeiten – Beispiel</u>

Ein Mann pflückt den ganzen Tag lang Äpfel. Am Abend hat er 382 Äpfel gesammelt. Um zurück nach Hause zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Wie viele Äpfel bleiben dem Mann, wenn er das letzte Tor passiert hat?[221]

[221] Vgl. Bruder/Collet 2011: 80.

Lösungsvorschlag:

Aus der vorliegenden Problemstellung lassen sich die gegebenen Daten direkt entnehmen. Auch lässt sich die Struktur des Problems ohne Weiteres identifizieren, so dass hier das Vorwärtsarbeiten als Schlüssel zur Problemlösung gesehen werden kann.

Was ist gegeben?

Gegeben sind 382 Äpfel.

Was wird gesucht?

Die Anzahl der Äpfel hinter dem 7. Tor.

Was lässt sich aus den gegebenen Größen und der Problemstruktur unmittelbar berechnen?

Zu Beginn hat der Mann 382 Äpfel. An jedem der sieben Tore muss er die Hälfte seiner Äpfel abgeben und einen weiteren Apfel.

Durch die explizite Fragestellung kann die Lösung durch ein schrittweises und strukturiertes Vorgehen ermittelt werden.

Tor 1: $\frac{382}{2} - 1 = 190$

Tor 2: $\frac{190}{2} - 1 = 94$

Tor 3: $\frac{94}{2} - 1 = 46$

Tor 4: $\frac{46}{2} - 1 = 22$

Tor 5: $\frac{22}{2} - 1 = 10$

Tor 6: $\frac{10}{2} - 1 = 4$

Tor 7: $\frac{4}{2} - 1 = 1$

Wenn der Mann das siebte Tor passiert hat, bleibt ihm noch ein Apfel.

Rückwärtsarbeiten

Das Rückwärtsarbeiten ist die Suche nach einem Sachverhalt, aus dem heraus die vorhandene (vorgegebene) Situation erreicht werden kann. Ausgehend von dem Gegebenen gelangt man durch das Rückwärtsschreiten über einzelne Teilergebnisse vom gegebenen Problem (als Endzustand) zur Ausgangssituation oder zu einer bereits bekannten Aussage, womit das Problem als gelöst betrachtet werden kann.

Das *Rückwärtsarbeiten* basiert auf der Möglichkeit, ein vorliegendes Problem von seinem End- zum Ausgangszustand hin zu betrachten. Gelingt dies, so kann durch logisches, schrittweises Bearbeiten der Problemsituation – oftmals über Zwischenziele – der gesuchte Ausgangszustand erreicht und damit das Problem gelöst werden.

Rückwärtsarbeiten – Beispiel

Bei einem Tanzwettbewerb starten alle Paare gleichzeitig. Im Abstand von 5 Minuten scheidet jeweils die Hälfte der teilnehmenden Paare aus. Nach 25 Minuten steht das Siegerpaar fest.

Wie viele Tanzpaare haben an dem Wettbewerb teilgenommen?

Lösungsvorschlag:

Es ist bekannt, dass ein Paar den Wettbewerb gewonnen hat und über einen Gesamtzeitraum von 25 Minuten alle 5 Minuten die Hälfte der Teilnehmer ausgeschieden ist. Unter Berücksichtigung dieser Informationen und dem Rückwärtsarbeiten kann die Zahl der Gesamtteilnehmer ermittelt werden.

Wir beginnen mit dem Siegerpaar zum Zeitpunkt 0:	1 Paar
5 Minuten zuvor waren es doppelt so viele Paare, also	$1 \cdot 2 = 2$ Paare
10 Minuten vor Wettbewerbsende waren es	$2 \cdot 2 = 4$ Paare
15 Minuten	$4 \cdot 2 = 8$ Paare
20 Minuten	$8 \cdot 2 = 16$ Paare
25 Minuten	$16 \cdot 2 = 32$ Paare

Es haben 32 Tanzpaare an dem Wettbewerb teilgenommen.

Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel vorgestellte Systematik nach Krichel/Stiller wurde entwickelt, um der schwer überschaubaren Vielfalt bereits existierender heuristischer Terminologie eine Systematik entgegenzustellen, die eine tragfähige Basis für einen heuristikaffinen Mathematikunterricht schafft. Es wurde eine für den schulischen Erwerb der Problemlösekompetenz sinnvolle Auswahl elementarer und für die Sekundarstufe I relevanter Heurismen[222] getroffen und zugleich auf eine möglichst unkomplizierte Begriffswahl geachtet. Durch die Neustrukturierung wurden heuristischen Techniken und Heurismen im Vergleich zu anderen aktuellen Systematiken teilweise zusammengefasst und neu definiert, so dass sie sich deutlich voneinander abgrenzen lassen und ihr Nutzen und ihre Anwendbarkeit für Lehrer wie für Schüler gleichermaßen erkennbar und einsichtig wird. Die Tragfähigkeit dieser Systematik wird im Rahmen des in Kapitel 7.3 vorgestellten IHiMU-Konzepts nachgewiesen. Anhand einer praxisnahen und anschaulichen Entwicklung wird einerseits gezeigt, dass und andererseits auf welche Art sich die hier unterschiedenen und definierten Heurismen in der Auseinandersetzung mit den im Lehrplan NRW vorgesehenen geometrischen Inhalten der Orientierungsstufe erwerben lassen. Nachstehendes Schaubild veranschaulicht die Zusammenhänge und Wechselbeziehungen zwischen den heuristischen Techniken und den Heurismen.

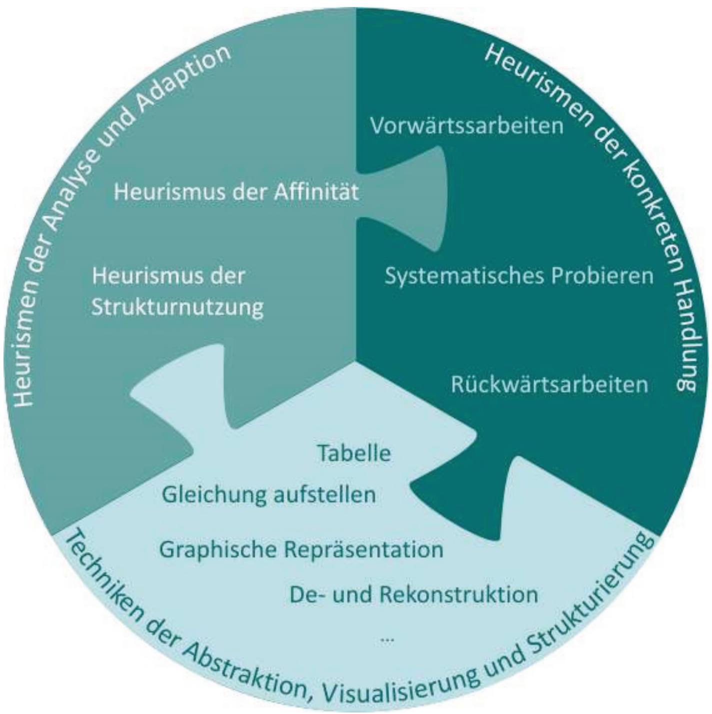


Abb. 9 Die Einteilung heuristischer Techniken und Heurismen für die Sekundarstufe I in drei Kategorien nach Krichel/Stiller.

[222] Es sei noch einmal betont, dass für die vorliegende Arbeit bewusst eine Auswahl an heuristischen Techniken und Heurismen getroffen wurde, die nach Aussage der Bildungsstandards und Lehrplanschriften für die Sekundarstufe I als relevant und vermittelbar erachtet werden. Ergänzt werden diese durch von Schwarz und Bruder/Collet vorgestellte und teilweise erprobte Heurismen, so dass in dieser Arbeit solche Heurismen und heuristischen Techniken enthalten sind, die für die Schüler der Sekundarstufe I elementar sind.

Es wurde in den Beispielen bereits an verschiedenen Stellen offensichtlich, dass einzelne Heurismen praktisch nie in ihrer „Reinform" zum Einsatz kommen, sondern synchrone oder sukzessive Kombinationen angewendet werden müssen. Der Kreis in Abb. 9 symbolisiert zum einen die Einheit der drei Kategorien, die in Kombination - dargestellt durch die Puzzleteile - den Problemlöseprozess tragen. Gleichzeitig wird impliziert, dass nicht zwingend mit der hier als Kategorie I benannten Phase begonnen werden muss[223] und ein Wechsel nicht nur zwischen den Techniken und Heurismen, sondern auch zwischen den drei Kategorien jederzeit möglich ist.

[223] Wie in Kap. 2.1 bereits erläutert, entscheiden das individuelle Vorwissen und die Fähigkeiten des Problemlösers mit darüber, welche Vorgehensweisen für ihn zielführend sind, so dass die aufgeführte Kategorisierung, die sich am Problemlöseprozess nach Pólya orientiert, nicht zwingend in ihrer Reihenfolge eingehalten werden muss.

6 Rahmenbedingungen

Historisch gesehen stehen die Begriffe Problem, Heuristik und Geometrie in einem engen Zusammenhang und bedingen einander sogar.[224] Das Problemlösen hat für die Entwicklung der Geometrie ebenso wie für die Entstehung der Heuristik eine große Rolle gespielt. Aus heutiger Sicht lässt sich sagen, dass die Heuristik die Metaebene der systematisch übergeordneten Betrachtung von Problemlöseprozessen einnimmt, um wiederkehrende Strukturen und Muster zu erkennen, die dann induktiv zur Optimierung von Lösungsprozessen bei neuen Problemstellungen nutzbar gemacht werden sollen. Wenn aber das Problemlösen für die Entwicklung der Geometrie eine so große Rolle spielte, dann ist zu erwarten, dass an ihr auch die Problemlösefähigkeit besonders früh, und vielleicht auch in besonderem Maße, ausgebildet wurde. Aus diesen Gegebenheiten heraus kann angenommen werden, dass sich gerade der Gegenstand der Geometrie aus „genetischen" Gründen anbietet, diese Fähigkeit in den Schülern zu fördern.[225]

Die meisten Verknüpfungen zwischen der Kompetenz des Problemlösens und den mathematischen Teilgebieten werden in den Lehrplänen im Bereich der Geometrie hergestellt, wie in Kap. 4.4 herausgearbeitet wurde. Daher (und aus in Band B ausführlicher betrachteten Gründen) wird das Konzept der *Integrierten Heuristiklehre im klassischen Mathematikunterricht* (kurz: IHiMU) im Folgenden (Kap. 7) exemplarisch anhand der Geometrie in der Orientierungsstufe entwickelt.[226]

Zur Vorstellung eines praxisbezogenen und umsetzbaren Konzepts wird nun der Blick auf weitere, unmittelbare Umgebungsvariablen, also auf den realen Kontext der gegenwärtigen deutschen Bildungslandschaft gerichtet. Neben den in Teil I detailliert herausgearbeiteten Merkmalen der Lehrpläne bezüglich der Problemlösekompetenz gilt es zunächst

Abb. 10 Rahmen für die Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht.

[224] Vgl. hierzu ausführlich Band B STILLER 2017.
[225] Vgl. Band B STILLER 2017.
[226] Weigand et al. hat in seinem Basisbuch *Didaktik der Geometrie* (2009) ebenfalls auf die Verbindung zwischen Geometrie und Problemlösefähigkeit verwiesen, wenn er sie auch nicht systematisch entwickelt.

noch, einige allgemeinere Aussagen der Bildungsstandards zu betrachten, die sich mit dem Charakter der Mathematikunterrichts befassen und das unterrichtliche Handlungsfeld des IHiMU-Konzepts inhaltlich wie didaktisch weiter abstecken. Da durch die Analyse der bundesweiten Lehrpläne deutlich wurde, welche Diskrepanzen zwischen den Lehrplan-ausgestaltungen der Länder existieren, wird hier der Blick in erster Linie auf die *gemeinsame* Grundlage, nämlich die Bildungsstandards, gerichtet. Regelkonformität mit dieser übergeordneten Vorgabe unter Wahrung der Widerspruchsfreiheit zu den Ländervorgaben stellt sicher, dass sich der Konzeptvorschlag auf die spezifischen Anforderungen *aller* Bundesländer anpassen lässt bzw. diesen ohnehin entspricht. Um verschiedene solcher Facetten der Bildungsstandards und die aus ihnen hervorgegangenen Lehrplanschriften geht es in Kap. 6.1.

Danach gilt die Aufmerksamkeit den Personen, die die Veränderung des Mathematikunterrichts wenn nicht initiieren so doch letztlich praktisch in die Realität umzusetzen helfen müssen, den Lehrern. Welche Anforderungen an sie gestellt werden und wie sich dies zu den Ansprüchen eines veränderten Mathematikunterrichts verhält, wird in Kap. 6.2 thematisiert. Dass dabei auch das stets zur Verfügung stehende Werkzeug Schulbuch eine große Rolle spielt, ist jedem Praktiker unmittelbar einsichtig. Einige grundsätzliche Überlegungen werden daher in Kap. 6.3 angestellt, die bei der Konzeptdarstellung wieder aufgegriffen und vertieft werden. Schließlich zeigt Kap. 6.4 aktuelle (Konzept-)Ideen, die sich ebenfalls mit der Vermittlung von Heuristik im Mathematikunterricht beschäftigen.

6.1 Bildungsstandards und kompetenzorientierte Lehrpläne

Mit der Einführung der Bildungsstandards wurden alle Bundesländer zur Implementierung und Anwendung der Standards verpflichtet. Für die Bundesländer bedeutete dies, ihre Kerncurricula zu überarbeiten und an den Bildungsstandards auszurichten. Um den Schulen genügend Gestaltungsfreiheit und Raum für ihre pädagogische Arbeit auch weiterhin zu gewähren, beziehen sich die Bildungsstandards nur auf die Kernbereiche des jeweiligen Faches, was durch die Formulierung fachlicher und überfachlicher Basisqualifikationen deutlich wird. Ein vernetztes und systematisches Lernen soll individuelle Lernwege und einen kumulativen Kompetenzerwerb ermöglichen.[227] Die Bildungsstandards dienen einerseits der Schul- und Unterrichtsentwicklung und andererseits der Vergleichbarkeit

[227] Vgl. KMK 2004a: 6, 11.

der Qualität schulischer Bildung. Der Bildungsauftrag selbst wird durch die Formulierung der Anforderungen an das Lehren und Lernen und der erwünschten Lernergebnisse konkretisiert. Durch die Standardisierung der schulischen Lehr- und Lernprozesse, der klar definierten normativen Erwartungen und die Verpflichtung der Schulen zur systematischen Rechenschaftslegung über die Ergebnisse aus Schulleistungsstudien und zentrale Prüfungen, wird eine Überprüfung und Evaluation des Bildungsauftrages ermöglicht. Gleichzeitig sollen die Standards den Schulen Orientierung für die Analyse, Planung und Überprüfung der Unterrichtsarbeit bieten, Raum für die Entwicklung einer anforderungsbezogenen Aufgabenkultur schaffen und eine Unterrichtskultur fördern, die auf die unterschiedlichen Schülervoraussetzungen eingeht. Die KMK sieht in der Implementierung der Bildungsstandards unter anderem die Möglichkeit, den Unterricht auf die zu erwartenden Leistungen auszurichten, dem Umgang mit Heterogenität zu begegnen, die Unterrichtsarbeit zu evaluieren und die Arbeit mit den Lehrplänen zu fördern.[228] Die KMK legt darüber hinaus fest, dass die Bildungsstandards die zentralen Kompetenzbereiche und die zu erreichenden Ziele am Ende einer Doppeljahrgangsstufe vorgeben, so dass der Fokus dieser curricularen Vorgaben auf das Ergebnis schulischen Lernens gerichtet ist. Die Standards konzentrieren sich dabei auf überprüfbare, fachbezogene Kompetenzen und beziehen sich damit auf die Basisqualifikation und somit auch nur auf einen Teilbereich der Bildung und Erziehung. Dem gegenüber sollen die Lehrpläne die unter dem Begriff der *schulischen Bildung* zusammengefassten Kenntnisse und Fähigkeiten in Form detailliert aufgeführter Lernziele und Lerninhalte auflisten und diese zeitlich einordnen. Darüber hinaus sollen die Lehrpläne Wege zur Zielerreichung beschreiben, diese strukturieren und den Lehrern Hinweise über mögliche methodisch-didaktische Vorgehensweisen sowie Lernerfolgskontrollen liefern. Eine Kompatibilität der Lehrpläne mit den Bildungsstandards soll von den jeweiligen Bundesländern überprüft werden.[229] Auch die Art und Weise, wie die normativen Vorgaben umgesetzt werden, soll weiterhin Ländersache bleiben.

6.1.1 Grunderfahrungen und Geometrie

In den Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss wird eingangs darauf hingewiesen, dass die schulische Bildung zur allgemeinen Bildung der Schüler beitragen und ihnen helfen soll, sich in ihrer Welt zu orientieren sowie am gesell-

[228] Vgl. KMK 2004a: 10-12.
[229] Vgl. KMK 2004a: 19.

schaftlichen Leben teilzunehmen. Sie sollen befähigt werden, ihre Lebenswelt zu verstehen, sich aktiv mit ihr auseinanderzusetzen, diese (mit) zu gestalten und sie auf die Berufswelt vorbereiten.[230] Der Mathematikunterricht trägt auf vielfältige Art und Weise dazu bei, so dass die Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts unter den sogenannten drei Grunderfahrungen in den Bildungsstandards verankert sind. Danach sollen die Schüler am Ende der Sekundarstufe I:

> *„Technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen, Mathematik in ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen und in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben." (KMK 2004b: 9)*

Bezieht man die drei Grunderfahrungen auf den Geometrieunterricht[231], lassen sich diese wie folgt konkretisieren:

Grunderfahrung G1 steht aus Sicht der Geometrie für die Identifizierung geometrischer Aspekte in der Umwelt und die Ergründung ihrer Funktionen. Mit Hilfe der Geometrie können wir die Umwelt mit anderen Augen sehen, Phänomene verstehen, mathematische Begriffe bilden und (ein)ordnen. Die nachfolgenden Beispiele sollen verdeutlichen, wie die Erschließung der Umwelt mit Hilfe der Geometrie erfolgen kann:

- Eine Klassifizierung nach Achsen, Dreh- und Verschiebesymmetrien anhand architektonischer Gebäude vornehmen.
- Das Erkennen geometrischer Körper in Verpackungen, Alltagsgegenständen und Gebäuden.
- Das Erkennen geometrischer Kurven in Brückenbögen und Flugbahnen von Bällen.[232]

[230] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 2007a: 3.
[231] Da sich das im Anschluss vorgestellte Konzept auf den Erwerb der Problemlösekompetenz in Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand der Geometrie in der Orientierungsstufe bezieht ist der Fokus der nachfolgenden Zusammenfassung der Bildungsstandards für das Fach Mathematik auf die Grundlagen und Ziele, die für den Geometrieunterricht von Bedeutung sind, gerichtet.
[232] Vgl. WEIGAND et al. 2009: 18.

Andererseits hilft die Umwelt uns, geometrische Begriffe zu verdeutlichen, zu analysieren, zu beurteilen und zu interpretieren. Darüber hinaus bietet die Umwelt zahlreiche Anlässe, geometrische Fragen zu stellen wie: [233]

- Warum sind Bodenfließen meist quadratisch / rechteckig?
- Wie groß ist die Neigung eines Daches?
- Wieviel Liter Wasser passen in ein Schwimmbad?
- Welche Flugbahn hat ein Basketball?
- Diese und andere Fragen können mithilfe der Mathematik beantwortet werden, womit sie die Grundlage für andere Wissenschaftsbereiche bildet.

Die lange Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte der Geometrie (und der Mathematik im Allgemeinen) stellt ein wichtiges Kulturgut dar, das uns nachhaltig prägt.[234] Geometrie als kulturelles Gut zu betrachten verdeutlicht nicht nur deren Nutzen für die Menschheit; eine aktive Auseinandersetzung mit der Entwicklung und Entstehung geometrischer Tätigkeiten[235] bietet die Möglichkeit, Sätze, Definitionen und Beweise zu erforschen und nachzuvollziehen.[236]

Die Quadratur des Kreises ist eines von drei klassischen Problemen der Antike und ein Beispiel für den universellen Charakter der Mathematik. Ziel war es, krummlinig begrenzte Flächen – unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal – in Rechtecke zu überführen. Die Bemühungen um eine Lösung dieses Problems dauerten mehrere Jahrhunderte an und brachten lange Zeit keine zufriedenstellenden Ergebnisse[237], verhalfen aber auf der anderen Seite zu neuen Entdeckungen, die im Laufe der Zeit zu einer Erfindungsmethode herausgearbeitet wurden und schließlich zu neuen Fortschritten führten. Auf diese Weise wurde unter Antiphon ein Approximationsverfahren entwickelt, das später von Archimedes zu einem algorithmischen Näherungsverfahren weiterentwickelt wurde,[238] so dass die ‚Unlösbarkeit' dieser Aufgabe die Grundlage für die Entwicklung neuer mathematischer Methoden und Beweisverfahren gebildet hat.[239]

[233] Die folgenden Beispiele sind entlehnt aus WEIGAND et al. 2009: 18.
[234] Band B der vorliegenden Arbeit (STILLER 2017) setzt sich ausführlich mit diesem Gedanken auseinander.
[235] Aktivitäten wie Bauen, Legen, Falten, Schneiden, Spannen und Zeichnen erlauben es, geometrisch zu handeln und Einsichten in geometrische Zusammenhänge und Eigenschaften möglichst selbständig zu gewinnen.
[236] Vgl. WEIGAND et al. 2009: 17-24.
[237] Der Beweis für die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal konnte erst im Jahre 1892 durch den deutschen Mathematiker Ferdinand von Lindemann erbracht werden (vgl. SCRIBA 2005: 406).
[238] Vgl. ZIMMERMANN 1990: 139.
[239] Vgl. KOLOSOW 1963: 108. Für weitere Ausführungen sei auf Band B (STILLER 2017) verwiesen.

Grunderfahrung G2 verweist darauf, dass die Geometrie ein eigenständiges Wissensgebiet in Form von Begriffen, Sätzen, Definitionen und Beweisen mit eigenen axiomatischen Grundlagen ist. Damit ist die Geometrie prädestiniert für eine logische, schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweise. Auch können eine mathematische Fachsprache und die Begriffsbildung in der Auseinandersetzung mit der Umwelt und in der Beschreibung von Phänomenen aus der Umwelt entwickelt werden.[240]

Grunderfahrung G3 greift unter anderem das Problemlösen auf, dessen Erwerb als zentrale Grundlage zur Erschließung der Umwelt gesehen wird. Da sich viele geometrische Probleme durch Skizzen, Zeichnungen und Modelle veranschaulichen, besser nachvollziehen, auf die Kernaussagen reduzieren und letzten Endes auch lösen lassen, wird die Geometrie nach Weigand als geeignetes Übungsfeld für das Problemlösen gesehen.[241]

6.1.2 Allgemeine mathematischen Kompetenzen

Die Bildungsstandards legen darüber hinaus sechs allgemeine mathematische Kompetenzen fest, die für alle Bereiche des mathematischen Arbeitens von Bedeutung sind und im Verbund sowie stets in Auseinandersetzung mit konkreten mathematischen Inhalten erworben und angewandt werden sollen. Dazu zählen:

- „Mathematisch Argumentieren
- Probleme mathematisch Lösen
- Mathematisch Modellieren
- Mathematische Darstellungen verwenden
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- Kommunizieren[242]“ (KMK 2004b: 8-9).

Hinter der Kompetenz K1 (mathematisch argumentieren) verbirgt sich die Fähigkeit, geeignete Fragen zu stellen, Vermutungen zu äußern und diese zu begründen, mathematische Erläuterungen, Begründungen und Beweise zu entwickeln sowie Lösungswege zu beschreiben und zu begründen. Die Kompetenz K2 beinhaltet das Lösen mathematischer Probleme, die die Bearbeitung vorgegebener und selbst formulierter Probleme, die Auswahl und Anwendung geeigneter heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien

[240] Vgl. Weigand et al. 2009: 17,21-24.
[241] Vgl. Weigand et al. 2009: 23.
[242] Siehe hierzu auch die Ausführungen in Kap. 3.1, wo die allgemeinen mathematischen Kompetenzen nach den Bildungsstandards mit den in den Lehrplanschriften verankerten verglichen werden.

zur Problembearbeitung, die Plausibilitätsüberprüfung der Ergebnisse, das Auffinden von Lösungsideen und die Reflexion der Lösungswege umfasst. Unter K3 wird das mathematische Modellieren beschrieben, bei dem eine gegebene Situation mathematisiert und auf diese Weise in ein Modell übertragen wird, innerhalb dessen gearbeitet wird. Die Interpretation und die Überprüfung der Ergebnisse ist ebenfalls eine zu erwerbende Fähigkeit. Mathematische Darstellungen verwenden ist Gegenstand der Kompetenz (K4), die die Anwendung, Unterscheidung und Interpretation unterschiedlicher Darstellungsformen mathematischer Objekte umfasst, das Erkennen von Beziehungen zwischen den Darstellungsformen und die Auswahl sowie den Wechsel zwischen den Darstellungsformen situationsgemäß vorsieht. Der Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen ist Gegenstand der Kompetenz (K5), bei der die Arbeit mit Termen, Variablen, Gleichungen, Funktionen und Diagrammen im Mittelpunkt steht und um die Fähigkeit zwischen der natürlichen, symbolischen und formalen Sprache zu wechseln, Lösungs- und Kontrollverfahren durchzuführen und Werkzeuge zu nutzen, ergänzt wird. Die letzte Kompetenzen (K6) umfasst das Kommunizieren, bei dem Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse sowohl dokumentiert als auch dargestellt und - unter Nutzung geeigneter Medien - präsentiert werden. Dabei soll eine adressatenbezogene Fachsprache genutzt und mathematische Inhalte verstanden und überprüft werden.[243]

6.1.3 Inhaltsspezifische mathematische Kompetenzen

In den Bildungsstandards werden fünf mathematische Leitideen formuliert, die jeweils verschiedene mathematische Sachgebiete vereinen und das Curriculum spiralförmig durchziehen:

- Zahl
- Messen
- Raum und Form
- funktionaler Zusammenhang
- Daten und Zufall.

Der Bereich der Geometrie umfasst insbesondere die Leitideen *Messen* und *Raum und Form*, die die folgenden mathematischen Inhalte vereinen:

[243] Vgl. KMK 2004b: 8 f.

Leitidee Messen

„Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,
- wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel),
- schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten,
- berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,
- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,
- berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,
- nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.“ (KMK 2004b:10)

Leitidee Raum und Form

„Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,
- operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
- stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,
- beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,
- wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an, insbesondere den Satz des Pythagoras und den Satz des Thales,
- zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware,
- untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen,

- setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein.“ (KMK 2004b:11)

Diese inhaltsspezifischen Kompetenzerwartungen können zu drei zentralen und für den Geometrieunterricht grundlegenden Zielen zusammengefasst werden: Die Schüler sollen ein Verständnis für geometrische Begriffe entwickeln, geometrische Denk- und Arbeitsweisen kennenlernen und die Zusammenhänge zwischen Geometrie und Umwelt erkennen.[244]

6.1.4 Niveaukonkretisierung / Anforderungsbereiche

Die Niveaukonkretisierung ist eine Ergänzung der Bildungsstandards und veranschaulicht an konkreten Aufgabenbeispielen, welche verbindlichen Anforderungen an die einzelnen Kompetenzformulierungen gestellt werden. Dabei werden drei Anforderungsbereiche unterschieden:

Anforderungsbereich I beinhaltet das Reproduzieren, das heißt „die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang“ (KMK 2004b: 13). Im *Anforderungsbereich II* werden Zusammenhänge durch die Bearbeitung bekannter Sachverhalte und durch Verknüpfen von Kenntnissen und Fähigkeiten hergestellt, die aus verschiedenen Bereichen der Mathematik zusammengefügt werden. Im letzten Anforderungsniveau, *Anforderungsbereich III*, werden komplexe Sachverhalte bearbeitet, so dass dadurch die Fähigkeit erworben wird, eigene Probleme, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen und Wertungen zu finden und zu formulieren.[245] Im Anschluss werden die so beschriebenen Niveaustufen in den Bildungsstandards konkretisiert, indem alle drei Anforderungsniveaus für alle sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen exemplarisch formuliert werden.

Durch diese Formulierung der Kompetenzerwartungen soll eine höhere Zielklarheit gewährleistet werden, die wiederum zu einer größeren Objektivität und Verbindlichkeit führt, so dass die Unterrichtsqualität durch die Fokussierung der Unterrichtsarbeit verbessert werden kann.

[244] Vgl. WEIGAND et al. 2009: 24.
[245] Vgl. KMK 2004b: 13.

6.1.5 Aufgabensammlung aus den Bildungsstandards

Eine Anknüpfung an die mathematischen Inhalte findet man in Form kommentierter Aufgabenbeispiele, bei denen jeder Aufgabe Leitidee(n) und zu erwerbende allgemeine mathematische Kompetenzen zugeordnet werden. Die nachstehende Tabelle fasst zusammen, für welche allgemeinen mathematischen Kompetenzen und zugehörigen Leitideen die Bildungsstandards Aufgabenbeispiele formuliert haben:

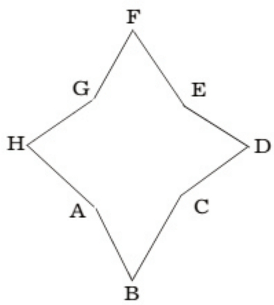
Nr.	Aufgabenstellung	Leitidee(n)	Zu erwerbende allgemeine mathematische Kompetenz(en)
1.	Lohnt sich die Abkürzung?	▪ Messen	▪ Argumentieren
2.	Warum arbeiten Studenten?	▪ Daten und Zufall	▪ Argumentieren ▪ Mathematische Darstellungen verwenden
3.	Vom Stern zur Pyramide	▪ Raum und Form ▪ Messen	▪ Argumentieren ▪ Probleme mathematisch lösen ▪ Mathematische Darstellungen verwenden ▪ kommunizieren
4.	Würfel	▪ Messen ▪ Raum und Form ▪ Daten und Zufall	▪ Probleme mathematisch lösen ▪ Mathematisch modellieren
5.	Lohnerhöhung	▪ Funktionaler Zusammenhang	▪ Argumentieren ▪ Mathematische Darstellungen verwenden
6.	Rechteck im Trapez	▪ Messen ▪ Raum und Form ▪ Funktionaler Zusammenhang	▪ Argumentieren ▪ Probleme mathematisch lösen ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
7.	Holzbestand	▪ Zahl ▪ Funktionaler Zusammenhang	▪ Probleme mathematisch lösen ▪ Modellieren ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
8.	Würfeldarstellung	▪ Raum und Form	▪ Mathematische Darstellungen verwenden
9.	Skipiste	▪ Messen ▪ Raum und Form	▪ Mathematisch modellieren ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen ▪ Kommunizieren
10.	Fakultät	▪ Zahl	▪ Mathematisch argumentieren ▪ Mathematische Darstellungen verwenden ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
11.	Zeit für Schule	▪ Zahl	▪ Mathematisch modellieren
12.	Lineare Funktionen	▪ Funktionaler Zusammenhang	▪ Probleme mathematisch lösen ▪ Mathematische Darstellungen verwenden ▪ kommunizieren

13.	Vertragshandy oder Kartenhandy?	▪ Funktionaler Zusammenhang	▪ Mathematisch modellieren
14.	Wassertank	▪ Funktionaler Zu-sammenhang	▪ Mathematisch modellieren ▪ Mathematische Darstellungen verwenden ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Tab. 22 Übersicht über die zu erwerbenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen und Leitideen aus der Aufgabensammlung der Bildungsstandards (KMK 2004b:16-36).

In fünf von insgesamt vierzehn Aufgabenbeispielen aus den Bildungsstandards wird das Problemlösens als eine zu erwerbende Kompetenz in Zusammenhang mit der Leitidee *Raum und Form*, *Daten und Zufall* und *funktionaler Zusammenhang* exemplarisch vorgestellt. Ergänzt werden die Aufgabenbeispiele durch eine tabellarische Lösungsskizze, in der Hinweise zu den Lösungen, die Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen sowie deren Zuordnung zu den Anforderungsbereichen I bis III aufgeführt werden. Die folgende Aufgabe ist ein Auszug aus den Bildungsstandards und soll zur Veranschaulichung herangezogen werden:

(3) Vom Stern zur Pyramide



Aufgabenstellung

Der nebenstehende symmetrische Stern hat folgende Eigenschaften:

Alle Seiten sowie die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CE}$ haben die gleiche Länge a. $\overline{AC}$ steht senkrecht auf $\overline{CE}$.

a) Wie viele Symmetrieachsen hat der Stern?

b) Beschreiben Sie eine Konstruktion des Sterns.

c) Die Dreiecksflächen sollen so geklappt werden, dass eine Pyramide entsteht. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide für a = 5,0 cm.

d) Der Stern wird so verändert, dass die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ nicht mehr gleich lang sind. Die Symmetrie des Sterns bleibt jedoch erhalten. Unter welchen Bedingungen kann durch Klappen der Dreiecksflächen eine Pyramide entstehen?

Beschreibung der Aufgabe und ihrer Zielsetzung

Inhaltlicher Schwerpunkt ist der Umgang mit geometrischen Figuren und an ihnen gültigen Beziehungen.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe weisen die Schülerinnen und Schüler nach, inwieweit sie insbesondere die **allgemeinen mathematischen Kompetenzen**

- mathematisch argumentieren (K 1),
- Probleme mathematisch lösen (K 2),
- mathematische Darstellungen verwenden (K 4) und
- kommunizieren (K 6)

im Rahmen der **Leitideen** Raum und Form (L 3) sowie Messen (L 2) erworben haben. Zugelassene Hilfsmittel sind Formelsammlung und Taschenrechner.

Lösungsskizze mit der Angabe von Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen sowie deren Zuordnung zu Anforderungsbereichen

	Lösungen und Hinweise	Leitidee	Anforderungsbereich I	II	III
a)	Anzahl der Symmetrieachsen: 4	L 3	K 4		
b)	Konstruktionsbeschreibung, die folgende Punkte enthält: – Konstruktion des Quadrats ACEG, – Konstruktion der vier gleichseitigen Dreiecke. (Weitere Konstruktionsmöglichkeiten existieren.)	L 3		K 6	
c)	– Erkennen des Quadrats als Grundfläche der Pyramide. – Bezeichnen der für die Bestimmung des Volumens notwendigen Teile: a – Quadratseite; h_D – Dreieckshöhe; h_P – Pyramidenhöhe. – Erstellen des Hilfsdreiecks aus $\frac{a}{2}$, h_D und h_P. – Bestimmung des Volumens $V = 29{,}5\ \text{cm}^3$ (Weitere Lösungsmöglichkeit mit Hilfe eines Dreiecks über einer Diagonale des Quadrats.)	L 2		K 2	
d)	Angabe einer der beiden Bedingungen: – Die Länge der Höhe zur Basis des gleichschenkligen Dreiecks ist größer als die Hälfte der Seitenlänge des Quadrats. – Die Länge eines Schenkels des Dreiecks ist größer als die Hälfte der Diagonalenlänge des Quadrats.	L 3			K 1

Abb. 11 Aufgabenbeispiel aus der Aufgabesammlung der Bildungsstandards (2004b: 19).

6.1.6 Umsetzungsbeispiel im Lehrplan: Geometrie und Problemlösen

Die nachfolgende Tabelle enthält eine aus dem Lehrplan Nordrhein-Westfalen für den Mittleren Schulabschluss entnommene Übersicht über die Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 6 für den Unterrichtsgegenstand Geometrie sowie eine Reihe von den nach Krichel/Stiller neu definierten heuristischen Techniken und Heurismen, die in Auseinandersetzung mit den jeweiligen mathematischen Inhalten erworben werden können. Die Zuordnung der Heurismen zu den entsprechenden Inhalten wurde im Rahmen eines Proseminars zum Thema „Heuristik" im Sommersemester 2013 an der Bergischen Universität Wuppertal erarbeitet. In diesem Proseminar wurden, in Anlehnung an das Lehrwerk *Fokus Mathematik Nordrhein-Westfahlen Jahrgang 5* und *6*,[246] Aufgaben

[246] Vgl. Fokus Mathematik 5, 2013 und Fokus Mathematik 6, 2006.

aus dem Themenbereich *Geometrie* auf ihre Problemlösefähigkeit hin untersucht und einige der Aufgaben im Sinne von Problemaufgaben geöffnet oder ergänzt (vgl. Kap. 2.5).

Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 6 nach dem Lehrplan NRW		
Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Problemlösekompetenz**	
Geometrie – ebene und räumliche Strukturen nach Maß und Form erfassen	**Heuristische Techniken**	**Mögliche Anwendung von Heurismen nach Krichel / Stiller**
SuS[247] verwenden die Grundbegriffe Punkt, Gerade, Strecke, Winkel, Abstand, Radius, parallel, senkrecht, achsensymmetrisch, punktsymmetrisch zur Beschreibung ebener und räumlicher Figuren.	▪ Erstellen graphischer Repräsentationsformen ▪ De- und Rekonstruktion ▪ Anfertigen einer Tabelle	Bei der Verwendung der Grundbegriffe selbst, werden im engeren Sinne keine Heurismen angewandt.
SuS benennen und charakterisieren Figuren und Grundkörper (Rechteck, Quadrat, Parallelogramm, Raute, Trapez, Kreis, Dreieck, (rechtwinklige, gleichseitige und gleichschenklige Dreiecke), Quader und Würfel) und identifizieren sie in ihrer Umwelt.	▪ Erstellen graphischer Repräsentationsformen ▪ De- und Rekonstruktion ▪ Anfertigen einer Tabelle	▪ Heurismus der Affinität ▪ Heurismus der Strukturnutzung ▪ Heurismus des systematischen Probierens
SuS zeichnen grundlegende ebene Figuren (parallele und senkrechte Geraden, Winkel, Rechtecke, Quadrate, Kreise) und Muster auch im ebenen Koordinatensystem (I. Quadrant).	▪ Erstellen graphischer Repräsentationsformen ▪ De- und Rekonstruktion	▪ Heurismus des systematischen Probierens ▪ Heurismus der Affinität ▪ Heurismus der Strukturnutzung
SuS skizzieren Schrägbilder, entwerfen Netze von Würfeln und Quadern und stellen Körper her.	▪ Erstellen graphischer Repräsentationsformen ▪ De- und Rekonstruktion	▪ Heurismus der Affinität
SuS schätzen und bestimmen Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken, Dreiecken, Parallelogrammen und daraus zusammengesetzten Figuren.	▪ Anfertigen einer Tabelle ▪ De- und Rekonstruktion	▪ Heurismus des systematischen Probierens ▪ Heurismus der Affinität ▪ Heurismus der Strukturnutzung ▪ Vorwärtsarbeiten ▪ Rückwärtsarbeiten
SuS schätzen und bestimmen Längen, Winkel, Umfänge von Vielecken sowie Oberflächen und Volumina von Quadern.	▪ Anfertigen einer Tabelle	▪ Heurismus des systematischen Probierens ▪ Heurismus der Strukturnutzung ▪ Heurismus der Affinität ▪ Vorwärtsarbeiten ▪ Rückwärtsarbeiten

Tab. 23 Inhaltlicher Erwartungshorizont für den Geometrieunterricht der Orientierungsstufe und verknüpfbare Heurismen.

[247] SuS steht kurz für Schülerinnen und Schüler.

Ziel dieser Übersicht ist es aufzuzeigen, welche konkreten Heurismen nach Krichel/Stiller in der Orientierungsstufe in Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand Geometrie erworben werden können. Diese sollen darüber hinaus das Curriculum spiralförmig durchziehen und somit in einem kumulativen Prozess in einer Jahrgangsstufe, aber auch über diese hinweg, stetig vertieft und weiterentwickelt werden können.

6.1.7 Lernausgangslage

Die Lernausgangslage beschreibt, über welche Kompetenzen Schüler verfügen und an welcher Stelle der Unterricht ansetzen muss, um Stärken zu fördern und Schwächen zu beheben. Dabei werden nicht nur die inhaltlichen und themenbezogenen (Vor)Erfahrungen und der allgemeine Leistungsstand der Schüler ermittelt, sondern auch das Arbeits- und Sozialverhalten sowie die soziokulturellen Voraussetzungen bestimmt, die die Schüler mitbringen.[248] Über die Lernausgangslage können an dieser Stelle nur allgemeine, hypothetische Überlegungen angestellt werden. Für die Ausgestaltung des IHiMU-Konzepts wird davon ausgegangen, dass es sich bei den Schülern, die die Qualifikation für das Gymnasien erreicht haben, in der Regel um eine Lerngruppe handelt, die über gute bis sehr gute (Schul-)Kenntnisse verfügt, aber durchaus unterschiedliche Vorerfahrungen und Lernvoraussetzungen aus der Grundschule mitbringen. Daher empfiehlt es sich, zu Schuljahresbeginn die individuelle Lernausgangslage der Schüler festzustellen, um auf dieser Grundlage die weitere Unterrichtsgestaltung abzustimmen. Darüber hinaus muss berücksichtigt werden, dass sich die Schüler zu Beginn der Orientierungsstufe meist noch in der Phase der Anpassung und Orientierung befinden, so dass Lern-, Umgangs- und Sozialformen erst noch erlernt und eingeübt werden müssen.

Orientiert man sich an den Bildungsstandards für den Primarbereich, so findet man dort eine Übersicht über die Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten die die Schüler am Ende der Jahrgangsstufe 4 erworben haben sollen. Für das Fach Mathematik heißt es:

> *„Das Mathematiklernen in der Grundschule darf nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert werden. Das Ziel ist die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen verdeutlichen, dass die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der Entwicklung mathematischer Grundbildung ist. Deren Entwicklung hängt nicht nur davon ab, welche Inhalte unterrichtet wurden, sondern in mindestens*

[248] Vgl. MEYER: 2006: 141-146.

gleichem Maße davon, wie sie unterrichtet wurden, d. h. in welchem Maße den Kindern Gelegenheit gegeben wurde, selbst Probleme zu lösen, über Mathematik zu kommunizieren usw." (KMK 2005: 6)

Weiter heißt es:

„Allgemeine mathematische Kompetenzen zeigen sich in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik und auf die gleiche Weise, in der tätigen Auseinandersetzung, werden sie erworben. Die angestrebten Formen der Nutzung von Mathematik müssen daher auch regelmäßig genutzte Formen des Mathematiklernens sein. Von zentraler Bedeutung für eine erfolgreiche Nutzung und Aneignung von Mathematik sind vor allem die folgenden fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen: Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren, Modellieren und Darstellen." (KMK 2005: 7)

Wie auch in der Sekundarstufe orientieren sich diese Standards inhaltlich an mathematischen Leitideen. Für das Gebiet der Geometrie sind in der Orientierungsstufe der Sekundarstufe I die Leitideen *Raum und Form* sowie *Muster und Strukturen* von zentraler Bedeutung, so dass die die Schüler im Idealfall die folgenden geometrischen Kenntnisse beziehungsweise Fähigkeiten mitbringen:

Raum und Form

- „über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen;
- räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten);
- zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen).
- geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen, Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen, Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen;
- Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten...);
- Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen;
- einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen;
- ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern);
- Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen,
- symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln;

- Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen;
- die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen;
- Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen;
- Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen.“ (KMK 2005: 10)

Muster und Strukturen

- „strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen,
- Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen,
- arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben.“ (KMK 2005: 10)

Für das nachfolgende Unterrichtskonzept wird angenommen, dass die Schüler über die aufgeführten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu Beginn der Jahrgangsstufe 5 am Gymnasium im Fach Mathematik verfügen.

6.2 Die Rolle des Lehrers

Nachdem der Fokus der empirischen Bildungsforschung in den letzten Jahrzehnten auf den Unterrichtsprozess und die Bedingungen schulischen Lernens und Lehrens gerichtet war, rückte in den letzten Jahren vermehrt auch der Lehrerberuf selbst in den Blick der Forschung. Die aktuelle Forschungsliteratur zu diesem Thema ist sehr vielseitig und unübersichtlich, da sich die Untersuchung weltweit und auf mehrere Wissenschaftsbereiche erstreckt. Martin Rothland (2013) hat mit seinem Buch zum Thema *Belastung und Beanspruchung im Lehrerberuf – Modelle, Befunde, Interventionen* auf der Basis aktueller Befunde und Fachdiskussionen einen umfassenden Überblick über die aktuellen Forschungsansätze und -ergebnisse geliefert. Die Rolle des Lehrers tritt als ein sehr komplexes Phänomen in Erscheinung, das durch das folgende Schaubild (Abb. 12) zusammengefasst wird:

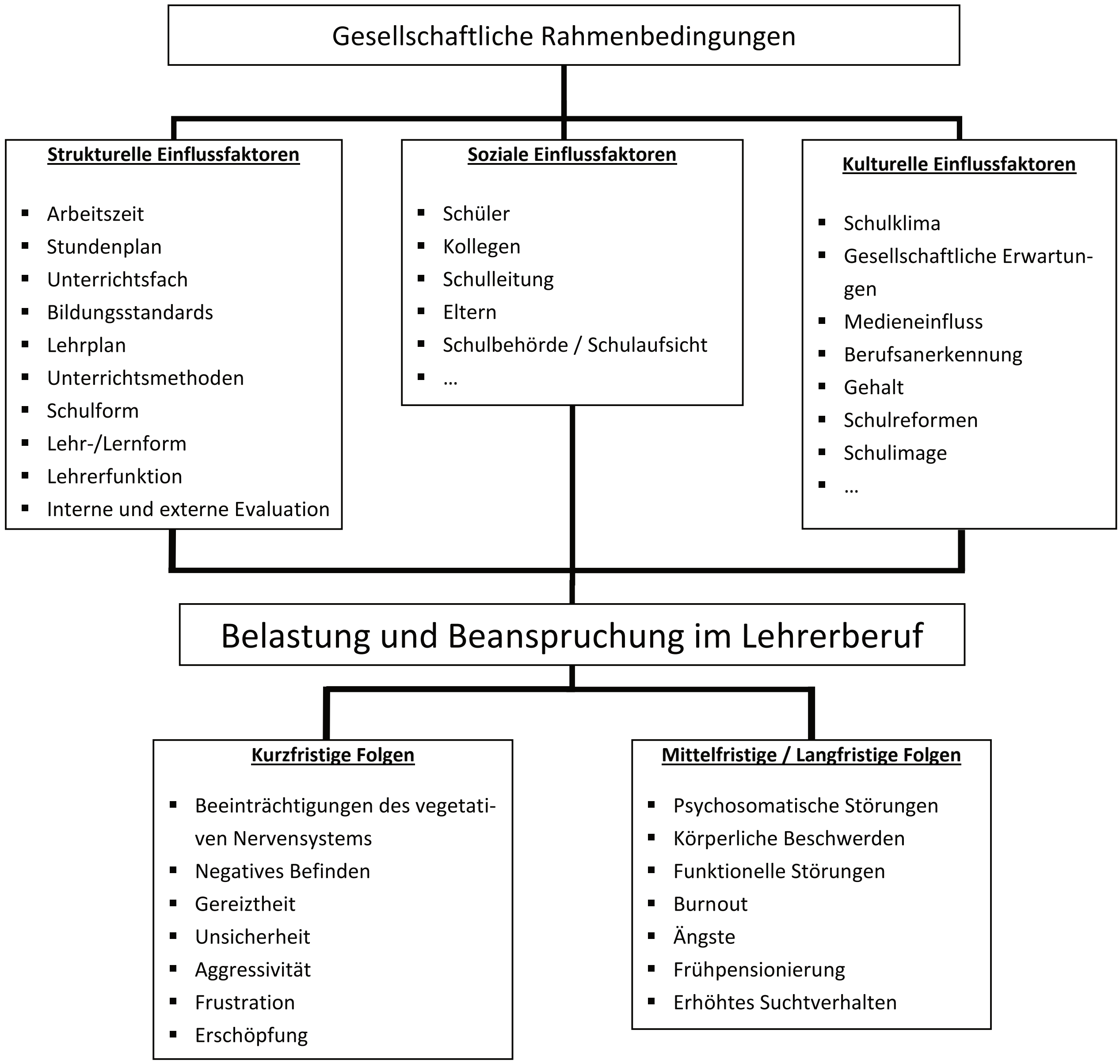


Abb. 12 Übersicht über mögliche Ursachen und negative Folgen der Belastung und Beanspruchung im Lehrerberuf (zusammengestellt nach ROTHLAND 2013).

Das Schaubild fasst die Faktoren zusammen, die mehr oder weniger starken Einfluss auf Personen im Lehrerberuf nehmen und die mögliche Ursachen für die erhöhte Belastung und Beanspruchung im Lehrerberuf sind. Für eine umfassende und weiterführende Darstellung soll an dieser Stelle auf das Werk von Rothland (2013) verwiesen werden.

Mit den von der KMK festgelegten und am 16.12.2004 verabschiedeten neuen Standards für den bildungswissenschaftlichen Teil der Lehrerbildung, mit denen die Qualität schulischer Arbeit gesichert werden soll, wird ein weiteres Indiz für die zunehmend komplexer werdende Lehrerrolle geliefert. Unter dem Begriff *Standards* werden in diesem Zusammenhang die Anforderungen an das Handeln von Lehrkräften zusammengefasst, die sich auf Kompetenzen beziehen und die Fähigkeiten, Fertigkeiten und Einstellungen beinhalten, über die eine Lehrkraft zur Bewältigung der beruflichen Anforderungen verfügen soll. Die Standards orientieren sich an den Bildungs- und Erziehungszielen, die in den Schulgesetzen der Länder verankert sind. In den in den Schulgesetzen der Länder formulierten Bildungs- und Erziehungszielen heißt es:

1. „Lehrerinnen und Lehrer sind Fachleute für das Lehren und Lernen. Ihre Kernaufgabe ist die gezielte und nach wissenschaftlichen Erkenntnissen gestaltete Planung, Organisation und Reflexion von Lehr- und Lernprozessen sowie ihre individuelle Bewertung und systemische Evaluation. Die berufliche Qualität von Lehrkräften entscheidet sich an der Qualität ihres Unterrichts.
2. Lehrerinnen und Lehrer sind sich bewusst, dass die Erziehungsaufgabe in der Schule eng mit dem Unterricht und dem Schulleben verknüpft ist. Dies gelingt umso besser, je enger die Zusammenarbeit mit den Eltern gestaltet wird. Beide Seiten müssen sich verständigen und gemeinsam bereit sein, konstruktive Lösungen zu finden, wenn es zu Erziehungsproblemen kommt oder Lernprozesse misslingen.
3. Lehrerinnen und Lehrer üben ihre Beurteilungs- und Beratungsaufgabe im Unterricht und bei der Vergabe von Berechtigungen für Ausbildungs- und Berufswege kompetent, gerecht und verantwortungsbewusst aus. Dafür sind hohe pädagogisch-psychologische und diagnostische Kompetenzen von Lehrkräften erforderlich.
4. Lehrerinnen und Lehrer entwickeln ihre Kompetenzen ständig weiter und nutzen wie in anderen Berufen auch Fort- und Weiterbildungsangebote, um die neuen Entwicklungen und wissenschaftlichen Erkenntnisse in ihrer beruflichen Tätigkeit zu berücksichtigen. Darüber hinaus sollen Lehrerinnen und Lehrer Kontakte zu außerschulischen Institutionen sowie zur Arbeitswelt generell pflegen.
5. Lehrerinnen und Lehrer beteiligen sich an der Schulentwicklung, an der Gestaltung einer lernförderlichen Schulkultur und eines motivierenden Schulklimas. Hierzu gehört auch die Bereitschaft zur Mitwirkung an internen und externen Evaluationen.“ (KMK 2004c: 3)

Neben diesen neuen Standards in der Lehrerausbildung haben auch die didaktischen Konzepte, die eine offenere Unterrichtskultur anstreben, in den letzten Jahrzehnten zu einem veränderten Lehrerbild geführt. Offener Unterricht, Projekt- und Freiarbeit, Wochenplan und Stationenlernen rücken in den Fokus und sollen den traditionellen, lehrerzentrierten Frontalunterricht ablösen. Hinzu kommen die bildungspolitisch relevanten Studien der letzten Jahre, aus denen die verbindlichen Vorgaben der KMK in Form der Bildungsstandards resultieren und die die neue kompetenzorientierte Unterrichtskultur in Deutschland prägen.

Kompetenzorientierter Unterricht zeichnet sich durch eine handlungs- und anwendungsorientierte Ausrichtung aus, innerhalb derer ein ganzheitlicher Zugang zu komplexen, lebensnahen und an den Interessen und Neigungen der Schüler orientierten Problemstellungen geschaffen wird, so dass neben der Motivation auch die soziale und volitionale Bereitschaft der Schüler gefördert sowie kognitive Fähigkeiten angesprochen werden. Die Forderung authentischer und differenzierter Aufgaben und Problemstellungen soll die individuellen Arbeitsweisen, Lernformen und Lerntempi unterstützen. Ein kompetenzorientierter Unterricht schafft zudem Raum für kooperative Handlungsformen und unterschiedliche Repräsentationsformen, so dass individuelle Lernprozesse in Gang gesetzt und Differenzierungsmaßnahmen ermöglichen werden. Der Lehrer tritt in diesem sehr komplexen System als Initiator, Organisator, Unterstützer, Berater und Moderator in Erscheinung, der die Schüler zum selbständigen und eigenverantwortlichen Lernen führt und ihnen individuelle Lernhilfen bereitstellt.[249]

Die Tatsache, dass mit der Einführung der Bildungsstandards die allgemeinen mathematischen Kompetenzen als zusätzlicher „Unterrichtsgegenstand“ Einzug in die Klassenzimmer halten, wirft die Frage auf, wie Lehrer dieses komplexe Aufgabenfeld in ihren bestehenden Unterricht integrieren sollen. Schon ohne Beachtung des Kompetenzbegriffs arbeiten viele Lehrer bereits an der Grenze ihrer beruflichen Belastbarkeit. Studien zufolge[250] beklagen Lehrer unter anderem Probleme mit Schülern, deren Verhalten von Disziplinlosigkeit und mangelnder Lern- und Leistungsbereitschaft geprägt ist, die Klassenstärke, den hohen Arbeitsaufwand, Probleme in der Interaktion mit Kollegen, Eltern und Vorgesetzten, die Neuerungen im Schulsystem und administrative Pflichten. Nun stehen sie neuen Herausforderungen gegenüber; Herausforderungen die von oben „verordnet“

---

[249] Vgl. HECKMANN/PADBERG 2012: 22-31.
[250] Vgl. hierzu ausführlich KLUSMANN et al. (2006) und ROTHLAND (2013).

werden und für deren verbindliche Durchführung der Lehrer in die Verantwortung genommen wird.

Fazit

Dass mit den Bildungsstandards eine Veränderung der Unterrichtskultur und Unterrichtsplanung vorgenommen werden muss, liegt auf der Hand. Dass diese von einem Lehrer alleine nicht bewerkstelligt werden kann, aber auch. Doch wenn die KMK eine solche Veränderung „verordnet“, sollte sie auch Wege aufzeigen, wie ihre Forderungen in der Praxis umgesetzt werden können.

6.3 Funktion und Bedeutung des Schulbuches im Mathematikunterricht

Grundlage der schulischen Arbeit ist – neben den Bildungsstandards und Lehrplänen – das Schulbuch, das den Unterricht und seine Gestaltung maßgeblich mitbestimmt und neben seiner Funktion als wirtschaftliches Gut auch als politisches sowie pädagogisches Instrument fungiert. In Deutschland ist die Entwicklung eines (Mathematik)Schulbuches an viele Rahmenbedingungen geknüpft. Ein „gutes“ Schulbuch muss bestimmte Kriterien erfüllen, damit Inhalt, Gestaltung und didaktisches Konzept eine geschlossene Einheit bilden. Das Konzept für ein neues Lehrwerk wird unter Berücksichtigung bildungspolitischer und didaktischer Anforderungen erstellt. Dabei werden die Themen und Lernziele nicht zentral vorgegeben, sondern durch die, von den jeweiligen Kultusministern der Bundesländer verabschiedeten, Lehrpläne festgelegt. Im Anschluss an die Konzeption erfolgt die Erstellung des Manuskripts, bei dem die inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt, Aufgabenstellungen erarbeitet, Seiten eingeteilt und Begleitmaterialien durch das sogenannte „Schulbuch-Team“[251] erstellt werden.[252]

Während in anderen Ländern wie beispielsweise China, Japan und Singapur ein Ministerium als zentrale Stelle über die Schulbuchzulassung entscheidet, obliegt diese Aufgabe in Deutschland den einzelnen Bundesländern. Der Vorschlag von Bildungsministerin Schavan, nach den Bildungsstandards auch einheitliche Schulbücher einzuführen, löste bei den Verantwortlichen unterschiedliche Reaktionen aus.[253] Die zuständigen Minister aus Nordrhein-Westfalen, Berlin, Brandenburg, Niedersachen, Thüringen und Rheinland-Pfalz

[251] Das sogenannte Schulbuch-Team setzt sich aus den Lehrern (Fachlehrer sowie Mitarbeiter aus der Schulverwaltung, aus der Lehrerbildung oder von Hochschulen), dem Herausgeber sowie dem Redakteur des Verlages zusammen, vgl. hierzu SCHMIT 2014: 58-65.
[252] Vgl. SCHMIT 2014: 55-81.
[253] Vgl. SCHMOOK (2007).

sind der Ansicht, dass der Weg zur Einhaltung der Bildungsstandards weiterhin Ländersache bleiben sollte und das durch eine derartige „zentralistische Führung“ keine Verbesserung der Schul- und Unterrichtsqualität erzielt würde, sondern dies vielmehr einen Verlust von Freiheit und Eigenverantwortung bewirken würde. Anders sprachen sich dagegen die Minister aus Bremen, Hamburg, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern, dem Saarland und Sachsen-Anhalt aus. Sie erhoffen sich durch einheitliche Schulbücher eine höhere Wettbewerbsfähigkeit, geringere Kosten und anstelle einer als übertrieben empfundenen Schulbuchvielfalt eine höhere Qualität.[254]

Rezat (2009) hat in seinem Buch *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers* achtzehn Mathematikschulbücher auf ihre strukturellen Merkmale hin untersucht und gezeigt, dass deutsche Mathematikbücher über ähnliche Strukturelemente verfügen. Die meisten der von ihm untersuchten Bücher sind in einzelne Kapitel untergliedert und beinhalten folgende Elemente:

- eine *Einführungsseite*, auf der Arbeitsaufträge oder Einstiegsaufgaben zu finden sind, die Denkanstöße bieten oder einen Bezug zur Lebenswelt der Schüler schaffen sollen, aber auch Raum zum Ausprobieren, Entdecken und Erforschen lassen, so dass die Schüler erste Erfahrungen mit dem neuen Thema machen können. Die Einstiegsaufgaben sind meist Anwendungsaufgaben oder es liegen innermathematische Fragstellungen zugrunde, die an die Vorkenntnisse der Schüler anknüpfen.
- *Kästen mit Merkwissen* enthalten Sätze, Definitionen, Rechenregeln oder Formeln, die in dem jeweiligen Kapitel erworben werden sollen und die anhand einer oder mehrerer Bespielaufgaben mit Musterlösungen Anwendung finden und elementare Verfahren zeigen.
- eine *Aufgabensammlung*, meist in Form geschlossener Aufgaben, ermöglicht die zuvor kennengelernten Verfahren und Techniken einzuüben, bevor Anwendungsaufgaben das Gelernte in Sachkontexte zusammenfassen. Es folgen schließlich offene oder auch vernetzte Aufgaben, die Ausgangspunkt für Problemsituationen darstellen (können) und die Kerninhalte des Kapitels beinhalten.

[254] Vgl. Schmook 2007.

- Ergänzt werden die einzelnen Kapitel – je nach Verlag - durch eine *Zusammenfassung* des Gelernten, eine zusammenfassende Übungs- oder Lerneinheit, einen Methodenteil oder eine Projektarbeit zum Thema.
- Viele Schulbücher enthalten auch einen *Wiederholungsteil*, anhand dessen das Basiswissen aus den Vorjahren oder aus vorangegangenen Kapiteln reaktiviert werden soll.

Das Schulbuch ist das Instrument, das Lehrern wie Lernenden gleichermaßen zur Verfügung steht. Studien zufolge nutzen die Lehrer das Schulbuch hauptsächlich zur Unterrichtsplanung, als methodischen Leitfaden bei der Strukturierung der Lerninhalte und als Aufgabensammlung. Schüler nutzen ihrerseits das Schulbuch für die Bearbeitung von Aufgaben, zum Festigen und zum Aneignen von Wissen, zur Selbstkontrolle, zum Wiederholen, zum Üben, zum Lernen von Regeln oder als Nachschlagewerk.

Die Aufgaben spielen dabei eine zentrale Rolle, denn sie tragen einerseits zur Entwicklung und Festigung von Kompetenzen bei, andererseits können Lernergebnisse überprüft und der Kompetenzzuwachs festgestellt werden. Mathematiktreiben heißt, sich aktiv mit der Mathematik auseinanderzusetzen und Lernprozesse in Gang zu setzen. Dies geschieht, indem Begriffe gebildet und Zusammenhänge erkundet und entdeckt werden, vorhandenes Wissen angewendet, vernetzt und vertieft oder ein Verfahren eingeübt und wiederholt wird. Die Qualität einer Aufgabe ist im Wesentlichen von den drei Merkmalen Authentizität, Offenheit und Differenzierungsvermögen abhängig, die aus einer einfachen Aufgabe eine „gute Aufgabe" machen.[255] Aufgaben müssen vielen Anforderungen genügen, damit sie vielseitig einsetzbar sind und vielfältige Aktivitäten bei den Lernenden hervorrufen können. Offene Aufgaben können das mathematische Denken auf hohem Niveau fördern, die Fähigkeiten des Argumentierens, Modellierens und Problemlösens unterstützen, die Schüleraktivitäten erhöhen und eine umfassende Selbst-Differenzierung ermöglichen (vgl. Kap. 2.5).

Das Schulbuch spiegelt unsere Unterrichtskultur wider. Entscheidend für seinen Erfolg ist unter anderem, dass es Raum zum selbständigen Arbeiten und zum aktiven Aneignen von Wissen lässt und ein kumulatives Lernen unterstützt, so dass eine offene Unterrichtsstruktur gefördert wird (vgl. SCHMIDT 2000). Doch selbst wenn ein Lehrbuch bestmöglich auf die neuen bildungspolitischen Forderungen abgestimmt ist und die veränderte Lehr-

---

[255] Vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005: 73.

und Unterrichtskultur in Form offener Aufgaben umsetzt, setzt dies voraus, „[...] dass die dahinter stehende Konzeption (auch von den Lernenden) akzeptiert wird (Einstellungen), dass das Vertrauen und die Fähigkeiten zur Umsetzung (Kompetenzen) vorhanden sind oder erworben werden und dass die äußeren (Arbeits-) Bedingungen in Einklang damit gebracht werden“ (SCHMIDT 2000: 22). Ein Schulbuch kann in seiner Konzeption noch so gut sein; ohne entsprechende Unterweisung sowohl der Lehrenden als auch der Lernenden stellt es eher ein Hindernis als eine Chance dar, die Unterrichtskultur langfristig zu verändern und zu verbessern.[256]

6.3.1 Aktuelle Schulbücher

Da das Schulbuch ein anerkanntes und legitimes Arbeitsmittel ist, das für Lehrer wie Schüler gleichermaßen zur Verfügung steht, soll es als Grundlage für das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Konzept eines heuristikaffinen Geometrieunterrichts herangezogen werden. Daher soll an dieser Stelle ein kurzer Überblick gegeben werden, in wie weit die Problemlösekompetenz als ein integraler Bestandteil in den derzeit gängigen Schulbuchreihen thematisiert wird. Für eine bessere Vergleichbarkeit wurden jeweils die Schulbücher für den Jahrgang 6 an Gymnasien in NRW ausgewählt. Ausnahme bildet das Lehrbuch

Zahlen und Größen, welches für die Gesamtschulen in NRW konzipiert wurde.[257]

Nr.	Reihentitel	Jahr	Hinweise auf prozess-bezogene Kompetezen?	Welche „Heurismen“ werden angesprochen?	Problemlösen in Sachkontexten thematisiert?	Kapitel zum Problem-lösen?
1.	**Elemente der Mathematik**	**2013**	ja (im Vorwort)	▪ Beispiele finden ▪ Überprüfen durch Probieren	ja (gekennzeichnete Aufgaben)	ja
2.	**Fokus Mathematik**	**2006**	indirekt (Hinweis auf problemlösende Einstiege)	nein	nein	nein
3.	**MatheNetz**	**2006**	ja (im Vorwort)	▪ Beispiele untersuchen ▪ Systematisches Probieren ▪ Probleme in Teilaufgaben gliedern ▪ Darstellungen wechseln	ja	ja

[256] Vgl. SCHMIDT 2000.
[257] Die Wahl gymnasialer Schulbücher für die Konzeptentwicklung wird in der Einleitung in Kap. 7 begründet. Um die Lesbarkeit zu erhalten, werden die Schulbücher fortan und im gesamten Text der Arbeit jeweils mit Titel und Jahrgangsstufe bezeichnet, nicht nach ihren Autoren bzw. Herausgebern. Die Schulbücher sind mit vollständigen Angaben in einer eigenen Rubrik des Quellenverzeichnisses zusammengestellt.

4.	**Zahlen und Größen (für Gesamtschulen)**	**2006**	nein	▪ Teilbarkeitsregel ▪ Zurückführend auf Bekanntes ▪ Systematisches Abschätzen	nein	ja
5.	**Mathe live**	**2007**	ja (im Vorwort und am Kapitelanfang)	▪ Entfernungen schätzen ▪ Lösungsweg umkehren ▪ Punktsymmetrische Kreisbilder zeichnen ▪ Fehler finden durch Überschlag	ja	nein
6.	**Lambacher Schweizer**	**2009**	ja (im Vorwort und am Kapitelanfang)	▪ Beispiele ausprobieren ▪ Tabelle anlegen ▪ Zeichnung anlegen ▪ Messen ▪ Schätzen ▪ Überschlagen ▪ Mathematische Fragstellungen finden	ja	ja
7.	**Mathematik Neue Wege**	**2007**	nein	nein	nein	nein

Tab. 24 Übersicht über die Verankerung des Problemlösens in einer Auswahl aktueller Mathematik-Schulbuchreihen für die Jahrgangsstufe 6..

Elemente der Mathematik

Im Schulbuch *Elemente der Mathematik 6 für integrierte Gesamtschulen und Gymnasien NRW* wird bereits im Einleitungstext auf die Lerneinheiten verwiesen, die zu einer eigenständigen Problembearbeitung anregen und innerhalb derer Problemlösestrategien herausgestellt werden sollen. Diese Vorgaben finden jedoch keine Umsetzung.

Auf einer Doppelseite zum Thema *Problemlösestrategien – „Beispiele finden", „Überprüfen durch Probieren"* (Elemente der Mathematik 6, 2013: 194) nimmt das Schulbuch eine kurze Einführung in die bewusste Anwendung von bereits unbewusst genutzten Strategien vor. Anhand zweier Beispielaufgaben sollen die „Strategien" Beispiele finden und Überprüfen durch Probieren behandelt werden. Die Musterlösung des ersten Beispiels wird sehr knapp gehalten und die genutzten „Strategien" sind nicht direkt als solche erkennbar. Somit sind die nachfolgenden Anwendungsaufgaben, bei denen der Schüler aufgefordert wird, die Aufgaben mit einer ihm am meisten zugesagten „Strategie" zu lösen, irreführend. Das zweite Beispiel befasst sich mit dem Anfertigen informativer Figuren auf Grundlage des Distributivgesetztes. Auch hier ist die Hinführung zu dem Heurismus kurz gehalten und die Tragweite wird nicht deutlich hervorgehoben. In einem Merkkasten werden die

„Strategien“ abschließend noch einmal zusammengefasst und (versuchsweise) in ihrem Kern erläutert.[258]

Fokus Mathematik

Im *Fokus Mathematik 6 für Gymnasium NRW* wird weder im Vorwort noch im Inhaltsverzeichnis auf die Vermittlung der prozessbezogenen Kompetenzen eingegangen.

Der Hinweis in dem Einleitungstext auf die problemösenden Einstiege in neue Themen wird zwar entsprochen, allerdings verzichtet der Fokus auf weiterführende Hinweise oder auf die konkrete Nennung anzuwendender Heurismen.[259]

MatheNetz

Bereits im Vorwort des Schulbuches *MatheNetz Gymnasium NRW* für Jahrgang 6 heißt es: „[…] Wichtig ist sich die Lösungsstrategien zu merken, denn sie können bei der Lösung anderer Probleme nützlich sein. Dabei helfen die Denkwerkzeuge in Kapitel 7. […] In den Einstiegen, Ausstiegen und Projekten, aber auch in vielen Übungen gibt es dazu reichlich Gelegenheiten […]“ (MatheNetz 6 2006: 5).

Tatsächlich findet man in dem Kapitel 7 eine Musteraufgabe, anhand derer der Problemlöseprozess beschrieben wird. Es folgen „Aufgaben zum Testen von Kompetenzen“ bei denen das Finden von Beispielen, das systematisches Probieren, die Gliederung von Problemen in Teilprobleme und der Wechsel der Darstellungen als „hilfreiche“ Problemlösestrategien ausgewiesen werden.[260] Lösungshilfen hierzu findet man lediglich im Internet, eine Erläuterung zur Anwendung der aufgeführten Strategien sucht man in dem Schulbuch vergebens. Auch die im Vorwort angekündigten „reichlichen Gelegenheiten“ sich die Lösungsstrategien zu merken, sind im Buch weder gekennzeichnet, noch findet man Hinweise auf zu erwerbende Heurismen.

Zahlen und Größen

Das Buch *Zahlen und Größen 6 für Gesamtschulen NRW* verzichtet auf ein Vorwort und weist nur im Einband auf den Umgang mit dem Schulbuch hin. Hinweise speziell zur Vermittlung prozessbezogener Kompetenzen findet man nicht. Lediglich im Inhaltsverzeichnis taucht, versteckt unter der Bezeichnung „Methoden“ (Zahlen und Größen 6, 2006: 18), der Begriff des Problemlösens in Zusammenhang mit den Teilbarkeitsregeln auf. In dem Kapitel selbst wird jedoch nur die Erarbeitung der Teilbarkeitsregel mit der Methode

[258] Vgl. Elemente der Mathematik 6, 2013: 194.
[259] Vgl. Fokus Mathematik 6, 2006: 2.
[260] Vgl. MatheNetz 6, 2006: 250.

des Gruppenpuzzles vorgestellt. Somit ist die Kapitelüberschrift „Methoden: Problemlösen; weitere Teilbarkeitsregeln“ (Zahlen und Größen 6, 2006: 18) nicht nur irreführend, sondern schlichtweg falsch. Das systematische Abschätzen wird als eine weitere Methode aufgeführt, die aber nicht mit dem Problemlösen in Verbindung gebracht wird. Betrachtet man das Kapitel genauer, wird hier das „Zurückführen von neuen Problemen auf bekannte Probleme“ im Rahmen der Flächenberechnung krummlinig begrenzter Flächen als „Verfahren, das in der Mathematik häufig angewandt wird“ (Zahlen und Größen 6, 2006: 94) angeführt. Neben dem Zurückführen auf Bekanntes wird das Schätzen von Flächen als „Methode“ eingeführt.

Mathe Live

Das Schulbuch *Mathe live 6 für die Sekundarstufe I NRW* greift im Einleitungstext die anzustrebende Kompetenzentwicklung im Mathematikunterricht auf und führt die zu erwerbenden prozessbezogenen Kompetenzen in einer Tabelle auf, beschreibt diese und verweist auf die Kapitel, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen erläutert werden.

Für den Jahrgang 6 werden vier „prozessbezogene Kästchen“, die „den Schülerinnen und Schülern situationsgebunden eine Kompetenz näher erläutern“ (Mathe live 6, 2007: Vorwort) aufgeführt. Bezogen auf die Kompetenz des Problemlösens werden das Schätzen von Entfernungen, der umgekehrte Lösungsweg und das Finden von Fehler durch Überschlagen genannt.[261] Dass es sich hierbei in den wenigsten Fällen um „echte“ Heurismen im Rahmen des Problemlöseprozesses handelt ist nach den bisherigen Ausführungen (vgl. Kap. 5.5) offensichtlich. Unter der Überschrift „Mathematische Reise“ sollen abschließend eigene Lösungsstrategien anhand eines Zündholz-Problems entwickelt werden. Anstelle einer heuristischen Vorgehensweise werden jedoch nur verschiedene allgemeine Vorgehensweisen vorgestellt. Es zeigt sich zudem deutlich, dass die Kompetenz des Problemlösens auf die Strukturierung einer Problemsituation beschränkt bleibt. Auf eine konkrete Benennung der vorgestellten heuristischen Techniken und Heurismen wird ebenso verzichtet, wie auf einen Hinweis zum Nutzen und zur Bedeutung für andere Anwendungsgebiete.

Lambacher Schweizer

Der *Lambacher Schweizer Mathematik 6 für Gymnasien NRW* verweist in dem Einführungstext „Modernen Mathematikunterricht mit dem Lambacher Schweizer“ auf die

---

[261] Vgl. Mathe live 6, 2007: 42, 49, 100, 160.

Hauptanliegen des Buches und ordnet den inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen Symbolen zu. Die Einführungsseite der einzelnen Kapitel hebt noch einmal die inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen hervor, die in diesem Kapitel erworben werden sollen.

Das Buch enthält ein eigenes Kapitel zum Thema „Probleme lösen mit Strategie und Pfiff" (Lambacher Schweizer 6, 2009: 106), in denen die „Strategien" Messen, Schätzen, Überschlagen, Beispiele ausprobieren, Anlegen einer Tabelle und Anlegen einer Zeichnung thematisiert werden. Das Kapitel beginnt, wie alle anderen Kapitel auch, mit einem Erkundungsteil, der erste Hinweise zur Strukturierung einer Problemsituation enthält. Es folgen fünf Problemaufgaben aus den Bereichen Arithmetik und Algebra, Geometrie und Stochastik, die mit Hilfe von Tipps gelöst werden sollen. Im Anschluss wird der Begriff des *mathematischen Problems* definiert und anhand von Musterbeispielen erläutert und die Schüler bekommen die Gelegenheit das zuvor Gelernte an drei Aufgaben anzuwenden. Die „Strategien" Beispiele ausprobieren, Tabellen anlegen und Zeichnung anlegen werden vorgestellt und anhand einer Beispielaufgabe konkretisiert. Danach haben die Schüler erneut die Möglichkeit, die zuvor kennengelernten Verfahren anzuwenden. Auf diese Weise werden auch die „Strategien" Messen, Schätzen und Überschlagen vermittelt. Zum Schluss wird gezeigt, wie man mathematische Fragen stellen kann und aus gelösten Problemen neue Probleme erzeugen kann. Es folgen eine Geschichte, die diese Thematik noch einmal aufgreift, ein Rückblick, der das soeben Gelernte zusammenfasst und eine Trainingsseite mit Aufgaben zum Üben.[262]

Es fällt auf, dass zwar die Einführungsseite auf die einzelnen Kompetenzen hinweist, man innerhalb der Kapitel jedoch keinen Hinweis auf eine der zu erwerbenden (insbesondere der) prozessbezogenen Kompetenzen findet und auch auf die in dem Kapitel „Probleme lösen mit Strategie und Pfiff" kennengelernten „Strategien" wird weder an entsprechender Stelle im Buch verwiesen noch Bezug darauf genommen.

Mathematik Neue Wege

Wie aus der Tabelle hervorgeht, wird in *Mathematik Neue Wege 6 Arbeitsbuch für Gymnasien NRW* die Problemlösekompetenz an keiner Stelle thematisiert.

[262] Vgl. Lambacher Schweizer 6, 2009: 104-120.

Zusammenfassung

In den sieben untersuchten Schulbuchreihen findet man gravierende Unterschiede in Art und Umfang der vorgesehenen unterrichtlichen Behandlung der Problemlösekompetenz. Während in zwei der untersuchten Schulbücher bereits zu Beginn konkrete Hinweise auf die zu erwerbenden prozessbezogenen Kompetenzen gegeben werden, finden diese in anderen Lehrwerken nur allgemein im Vorwort Berücksichtigung, während die übrigen keinerlei Aussagen über die Kompetenzen machen. Die Schulbücher, die im Vorwort näher auf die Kompetenzen eingehen, enthalten zudem entweder ein eigenes Kapitel zum Thema Problemlösen (Lambacher Schweizer, MatheNetz, Elemente der Mathematik) oder thematisieren es an entsprechender Stelle im Schulbuch (Mathe live). In den Lehrbüchern, in denen auf ein Vorwort verzichtet wird, findet auch das Problemlösen wenig bis keine Berücksichtigung (Mathe Neue Wege, Fokus Mathematik, Zahlen und Größen). Hinweise, an welcher Stelle die Problemlösekompetenz sinnvoll thematisiert werden kann, sowie Anknüpfungspunkte zu nachfolgenden Kapiteln, findet man hingegen in keinem der untersuchten Bücher. Auch die anderen Themenbereiche nehmen keinen weiteren Bezug auf die Vermittlung oder mögliche Anwendung von Heurismen. Es zeigt sich somit deutlich, dass bei den Schulbüchern eben so wenig wie bei den Lehrplänen (vgl. Kap. 3 und 4) Konsens bezüglich der Vermittlung insbesondere der prozessbezogenen Kompetenzen, allen voran der Kompetenz des Problemlösens herrscht.

6.3.2 Kommentar zu Stoffverteilungsplänen

Ergänzend zu den Schulbüchern gibt es sogenannte *Stoffverteilungspläne*, die die Umsetzung der Lehrplaninhalte und Bildungsstandards im Schulbuch auf der Basis des Kernlehrplans Mathematik in Nordrhein-Westfalen darstellen. In einer tabellarischen Übersicht werden die inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gegenübergestellt und den jeweiligen Kapiteln der Schulbücher zugeordnet, in denen sie einen besonderen Schwerpunkt bilden,[263] oder es wird auf Kapitel bzw. konkrete Aufgaben im Buch verwiesen, die die jeweiligen Kompetenzen zum Gegenstand haben. Ähnlich wie bei der Analyse der Schulbücher auf Art und Umfang der Vermittlung der Problemlösekompetenz, bleibt es auch innerhalb der Stoffverteilungspläne bei einer groben, sehr allgemeinen Zusammenführung der inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen und bei einer reinen Auflistung von Aufgaben. Weitere Erläuterungen oder Hinweise zum Umgang oder zu Möglichkeiten einer

[263] Vgl. Westermann Gruppe (2013).

sinnvollen Thematisierung findet man hingegen weder im Stoffverteilungsplan noch an entsprechender Stelle im Buch.

Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Auszug aus dem Stoffverteilungsplan für das Lehrwerk *Mathematik Neue Wege 5 und 6*. Die Tabelle zeigt, wie die prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen den Kapiteln im Schulbuch zugeordnet werden, in denen sie einen besonderen Schwerpunkt bilden.

Inhalt Neue Wege 6	**prozessbezogene Kompetenzen**	**inhaltsbezogene Kompetenzen**
Kapitel 1 Ganze Zahlen 1.1 Negative Zahlen beschreiben Situationen und Vorgänge 1.2 Anordnung auf der Zahlengeraden 1.3 Addieren und Subtrahieren mit ganzen Zahlen 1.4 Multiplikation ganzer Zahlen	*Lösen* ∞ die Problemlösestrategien „Beispiele finden“, „Überprüfen durch Probieren“ anwenden *Mathematisieren* ∞ Situationen aus Sachaufgaben in mathematische Modelle übersetzen (Terme, Figuren, Diagramme) *Validieren* ∞ die im mathematischen Modell gewonnenen Lösungen an der Realsituation überprüfen	*Darstellen* ∞ ganze Zahlen auf verschiedene Weise darstellen (Zahlengerade, Zifferndarstellung, Stellenwerttafel, Wortform) *Operieren* ∞ Grundrechenarten ausführen (Kopfrechnen und schriftliche Rechenverfahren) mit ganzen Zahlen (nur Addition und Multiplikation) *Anwenden* ∞ arithmetische Kenntnisse von Zahlen und Größen anwenden, Strategien für Rechenvorteile, Techniken des Überschlagens und die Probe als Rechenkontrolle nutzen
Kapitel 2 Teilbarkeit 2.1 Teiler und Vielfache, Teilerdiagramme 2.2 Primzahlen und Primfaktorzerlegung 2.3 ggT und kgV, Euklidischer Algorithmus	*Begründen* ∞ intuitiv verschiedene Arten des Begründens nutzen (Beschreiben von Beobachtungen, Plausibilitätsüberlegungen, Angeben von Beispielen oder Gegenbeispielen)	*Operieren* ∞ Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen bestimmen und Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 5, 10 anwenden

Abb. 13 Auszug aus dem Stoffverteilungsplan Mathematik Neue Wege 5 und 6.

6.4 Aktuelle Ideen zum Erwerb der Problemlösekompetenz und ihre Grenzen

Die durch die Bildungsstandards geforderte Etablierung der prozessbezogenen Kompetenz Problemlösen in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen schlägt sich nicht nur in den aktuellen Schulbuchreihen nieder, sondern hat ihre Spuren auch in einem wachsenden Angebot an ergänzender Literatur und sogenannten Aufgabensammlungen gefunden – was einen Hinweis darauf geben mag, dass die Unzulänglichkeiten sowohl der Vorgaben als auch der üblicherweise zur Verfügung stehenden Unterrichtsmittel rasch nach deren Inkrafttreten und Einführung offenbart wurden. Aber auch die fachdidaktische Diskussion hat sich in den letzten Jahren verstärkt mit der Problemlösekompetenz beschäftigt (vgl. Kap. 5) und auf Sekundarschulebene hat sich im deutschsprachigen Raum in erster Linie Regina Bruder (2011) mit einer Schulstudie des Themas angenommen. Nicht zuletzt ging es dabei um die grundlegende Frage, ob sich diese Kompetenz effektiv unterrichten lässt.

6.4.1 Problemlösenlernen im Mathematikunterricht – Studie zum Wirkprinzip heuristischer Bildung

Regina Bruder und Christina Collet befassen sich in ihrem 2011 erschienenen Buch *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht* ausführlich mit dem Thema des Problemlösenlernens im Kontext der schulischen Allgemeinbildung und zeigen Wege auf, mit denen die Problemlösekompetenz der Schüler (weiter-)entwickelt und als Lerngegenstand sowie Lernziel im Mathematikunterricht implementiert werden kann. Ziel ist dabei nicht (nur), den Forderungen der von der KMK festgeschriebenen Bildungsstandards zu entsprechen, sondern den Lernenden Wege aufzuzeigen, komplexe Lerninhalte zu erfassen, anzugehen und schließlich erfolgreich lösen zu können und damit das „Wirkprinzip heuristischer Bildung" zu skizzieren. Grundlage des in dem Buch vorgestellten Unterrichtskonzepts bildet ein von 2000 bis 2006 durchgeführtes Studienprojekt, an dem sich 48 Mathematiklehrkräfte und 49 Schulklassen unterschiedlicher Schulformen der Sekundarstufe I beteiligt haben.[264] In dieser Feldstudie wurde ein auf Material gestütztes Unterrichtskonzept zur Förderung der Problemlösefähigkeiten in Verbindung mit Selbstregulation entwickelt und erprobt.[265]

Basierend auf der Annahme, dass ein Mangel an geistiger Beweglichkeit die Fähigkeit, Probleme zu lösen erheblich beeinträchtigt, war es das Anliegen dieses Konzepts, durch den Erwerb heuristischer Vorgehensweisen eben diese geistige Beweglichkeit zu fördern und die Problemlösefähigkeit zu schulen. Die typischen Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit zeigen sich in der Fähigkeit zu Reduktion, Nutzung von Reversibilität, Aspektbeachtung, Aspektwechsel und Transfer. Unter Reduktion wird in diesem Zusammenhang die (intuitive) Fähigkeit verstanden, ein vorhandenes Problem auf seine Kernaussagen zu reduzieren und es auf diese Weise zu abstrahieren. Reversibilität bezeichnet die Umkehrbarkeit von Gedankengängen, das heißt, die Fähigkeit, Gedankengänge rückwärts nachzuvollziehen. Bei der Aspektbeachtung werden mehrere Problemaspekte gleichzeitig betrachtet oder es werden Abhängigkeiten erkannt und gezielt variiert. Beim Aspektwechsel wird durch den Wechsel von Annahmen und Kriterien das Problem unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet, so dass neue Lösungsideen oder -wege eröffnet

[264] Vgl. KOMOREK et al. 2006
[265] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 9 f.

werden. Transfer schließlich bezieht sich auf die Fähigkeit, bereits kennengelernte Verfahren auf andere Situationen oder Kontexte zu übertragen.[266]

In einem Vier-Phasen-Modell wird durch schrittweises Bewusstmachen heuristischer Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien[267] versucht, einem Mangel an geistiger Beweglichkeit auf Seiten der Schüler entgegenzuwirken. In der *ersten Phase* werden die Schüler durch typische Fragestellungen seitens des Lehrers an heuristische Vorgehensweisen herangeführt, ohne jedoch die Heuristik als solche zu thematisieren. In der *zweiten Phase* wird anhand eines prägnanten Beispiels auf die verschiedenen Schülertätigkeiten eingegangen und es werden mögliche heuristische Vorgehensweisen zum Lösen der Aufgaben vorgestellt. In einer *dritten Phase* folgt unter veränderten Bedingungen und Anforderungsniveaus eine Übungsphase, in der das zuvor angewandte Verfahren bewusst eingeübt wird. In der *vierten und letzten Phase* liegt der Fokus auf der Anwendung der Heurismen, indem die kennengelernten Heurismen flexibel, bewusst oder unbewusst zum Lösen von Problemen in unterschiedlichen Kontexten eingesetzt werden.[268]

Wie die Kapitel zum Problemlösen, die in allen gängigen Mathematik-Lehrwerken aufgenommen wurden (vgl. hierzu Kap. 6.3), ist auch das Konzept von Bruder/Collet ein erster Ansatz, die Kompetenz des Problemlösens als zentralen Bestandteil in den Mathematikunterricht zu integrieren. Es stellt sich jedoch erneut die Frage, ob und wie ein Lehrer nach einem solchen Konzept tatsächlich seinen Mathematikunterricht bestreiten kann, ohne Unterstützung in Form einer Fortbildung und/oder auf den Unterricht abgestimmte Materialien zu erhalten. Die von Bruder und Collet erarbeiteten und erprobten „Unterrichtsszenarien" sind sehr wohl in sich schlüssig und nachvollziehbar; allerdings steht in diesen Szenarien der Erwerb eines Heurismus oder mehrerer Heurismen im Vordergrund, während die mathematischen Inhalte keiner der Leitideen[269] zugeordnet sind. Stattdessen werden die Inhalte nach den zu erlernenden Heurismen ausgewählt, so dass das Problemlösen nicht als integrierter Bestandteil des Mathematikunterrichts angesehen werden kann, sondern die Heuristiklehre wieder als zusätzlicher, losgelöster „Themenblock"

[266] Vgl. BRUDER/COLLET 2011: 31-33.
[267] Vgl. hierzu auch die Ausführungen in Kap. 5.2.2 und 5.4.2.
[268] Vgl. KOMOREK et al. 2006: 240-267.
[269] Unter den Leitideen werden die Phänomene erfasst, die man sieht, wenn man seine Umwelt mit dem mathematischen Auge betrachtet. So wird die Wahrnehmung räumlich Figuren, Formen oder Mustern unter der Leitidee „Raum und Form" zusammengefasst, jegliche Form von Quantifizierungen lassen sich unter der Leitidee „Zahl" zusammenfassen (vgl. BLUM et al. 2006: 20). Die KMK hat fünf Leitideen formuliert, die die Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete unter sich vereinen und das mathematische Curriculum spiralförmig durchziehen.

erscheint. Die Gefahr besteht darin, dass Lehrer unter Umständen keine Möglichkeit sehen, das Konzept in ihren regulären Unterricht einzubeziehen und allenfalls, wie auch in den Mathematikschulbüchern vorgegeben, das Problemlösen als gesonderte (Projekt-)Einheit behandeln, anstatt es in aktiver Auseinandersetzung mit den übrigen mathematischen Fachinhalten zu vermitteln. Auf diese Weise nimmt das Problemlösen nach wie vor eine Sonderrolle ein, es wird weder als gleichberechtigte Kompetenz neben den mathematischen Inhalten verstanden und erworben, noch wird die Bedeutung des Problemlösens als zentrale und übergeordnete Kompetenz auf der Metaebene der Heuristik deutlich. Darüber hinaus bleibt die Frage, inwieweit eine konsequente Wiederholung der einmal vermittelten Heurismen erwartet werden kann, wenn das vorgestellte Konzept nicht erkennbar weitere Lerneinheiten vorsieht oder zumindest impliziert, etwa durch eine jahrgangsübergreifende Gesamtplanung, die für die fachlichen Inhalte im Sinne eines „spiralförmigen“ Curriculums inzwischen unbestritten als notwendig angesehen wird.

Die Studie nach Bruder/Collet konnte belegen, dass Unterricht in Problemlösestrategien wirksam ist - und das ist ihr größter Wert. Die explizierten Szenarien, die in der Studie zum Einsatz kommen, waren jedoch nicht mehr als eine zeitlich und thematische Ergänzung des bestehenden Mathematikunterrichts und können somit nicht als integrierte Heuristiklehre verstanden werden. Der Erwerb der Problemlösefähigkeit und ein langfristiger Kompetenzaufbau erfordern jedoch eine konsequente, erläuternde und strukturierte unterrichtliche Behandlung und sollte im Idealfall Gegenstand jeder Unterrichtsstunde Mathematik sein.

6.4.2 *„Wer suchet, der findet“ – oder nicht? Aufgaben zum Erwerb der Problemlösekompetenz*

Es gibt inzwischen umfassende Literatur[270] und auch Materialdatenbanken im Internet (www.problemloesenlernen.de, www.madaba.de, www.pikas.dzlm.de, www.sinus-transfer.de, www.primas.ph-freiburg.de u.v.m.), in denen sehr gute kompetenzorientierte Aufgaben zusammenstellt sind. Online-Datenbanken ermöglichen darüber hinaus eine digitale Auslese nach bestimmten Suchkriterien wie Jahrgangsstufen, Leitideen oder allge-

[270] Vgl. Schnabel, J. (2015): Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht, Düringer, L. (2014): Fermi-Aufgaben – Mathematik kompetenzorientiert 5/6: Modellieren und abschätzen, Probleme lösen, Ergebnisse präsentieren, Grieser, D. (2013): Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise durch die Mathematik, Bruder, R., Collet C. (2011): Problemlösenlernen im Mathematikunterricht, Blum, W., et al. (2006): Bildungsstandards: Mathematik konkret, Büchter, A., Leuders, T. (2005). Mathematikaufgaben selbst entwickeln.

meinen Kompetenzen. Es ist jedoch wichtig, dass diese Angebote nur als Anfang, als mögliche Unterstützung und keinesfalls als zielführende Maßnahmen auf dem Weg zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht verstanden werden können. Die meisten Aufgabensammlungen und Entwurfsbeispiele zum Erwerb der Problemlösefähigkeit sind als Ergänzung zum allgemeinen Mathematikunterricht angelegt und bieten keine didaktisch-methodisch durchkonzipierte Basis für eine integrative unterrichtliche Behandlung der Problemlösefähigkeit. Auch steht nicht in allen Fällen eine heuristische Aufbereitung oder Analyse zur Verfügung bzw. durch die nun schon mehrfach angesprochene terminologische Uneinheitlichkeit ist diese nicht immer mit dem eigenen Verfahren kompatibel. Außerdem kommt hinzu, dass der Einsatz und der Umgang mit solchen ergänzenden Materialien viel Eigeninitiative erfordert und zusätzlich Zeit und Arbeit investiert werden müssen, um aus dem großen und vielfältigen Angebot das für den eigenen Unterricht passende herauszufiltern.[271] Was dann immer noch bleibt ist die Frage, an welcher Stelle und wie diese Materialien zum Einsatz kommen und wie damit Problemlösen langfristig und nachhaltig gelehrt und gelernt werden kann.

186 **Fazit**

Ein kompetenzorientierter Mathematikunterricht stellt insgesamt hohe Erwartungen an den Lehrer (vgl. Kap. 6.2), denn mit ihm steht und fällt der Erfolg der Standardeinführung in den Unterricht. Unterstützung soll die Lehrkraft durch die standardkonformen Lehrpläne und die zur Verfügung stehenden Unterrichtsmaterialien erhalten.

Wie in Teil I herausgearbeitet und bereits ausführlich erläutert liegt eine der Hauptschwierigkeiten, einen heuristikaffinen Mathematikunterricht durchzuführen, darin, dass kein gemeinsamer fachdidaktischer Referenzrahmen für das Problemlösen existiert. Außerdem fehlt in den bildungspolitischen Vorgaben eine systematische Anknüpfung der Problemlösekompetenz an die fachlichen Inhalte sowie die Konkretisierung und Systematisierung der Kompetenzerwartungen (vgl. hierzu ausführlich Kap. 3 und 4).

Um den Forderungen der KMK gerecht zu werden und eine veränderte Unterrichtskultur an deutschen Schulen zu erreichen, muss langfristig eine Umorientierung stattfinden, so dass die Lehrer bei ihrer Unterrichtsplanung neben den inhaltlichen auch die allgemeinen

---

[271] Vgl. LEUDERS/ PHILIPP 2010: 14.

mathematischen Kompetenzen stärker berücksichtigen (können).[272] Dass diese Aufgabe nicht von einem Lehrer alleine bewältigt werden kann, steht dabei außer Frage.

Mit dem nun folgenden Konzept zur *Integrierten Heuristiklehre im Mathematikunterricht* soll ein Weg zu einem heuristikaffinen Mathematikunterricht aufgezeigt werden, bei dem die Kompetenz des Problemlösens parallel zu den mathematischen Inhalten gelehrt und gelernt wird. Ziel ist es, heuristische Techniken und Heurismen mit geeigneten mathematischen Inhalten zu verschränken und deren Erwerb didaktisch und methodisch zu kommentieren. Dabei wird unter anderem an die Idee des Aufgabenöffnens angeknüpft und es wird gezeigt, wie die Kompetenz des Problemlösens anhand adäquater Aufgaben in den Mathematikunterricht der Orientierungsstufe integriert und in Auseinandersetzung mit entsprechenden mathematischen Inhalten erworben werden kann. Auf diese Weise soll dem Lehrer eine Grundlage zur Verfügung gestellt werden, die es ihm ermöglicht, den Anforderungen der KMK im Hinblick auf die Problemlösekompetenz gerecht zu werden und einen langfristigen Kompetenzaufbau zu ermöglichen und zu fördern.

[272] Vgl. HECKMANN/PADBERG 2012: 10.

7 Das IHiMU- Konzept

Das in dieser Arbeit vorgestellte Unterrichtskonzept soll in allen Bundesländern umsetzbar sein und der gemeinsamen Grundlage aller Lehrpläne, den Bildungsstandards, genügen. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass diese Standards nicht schulformspezifisch sind, sondern dass sich die Kompetenzerwartungen auf den angestrebten Schulabschluss (bzw. ein Übergangsprofil von der Primar- zur Sekundarschule) beziehen. Die Bildungsstandards für das Fach Mathematik wurden somit für die Primarstufe, den Hauptschulanschluss, den mittleren Schulabschluss und die Allgemeine Hochschulreife formuliert. Das IHiMU-Konzept wurde auf Basis der Kompetenzerwartungen für den mittleren Schulabschluss erstellt, so dass die Konzeptidee auch unabhängig von der Schulform ist. Da jedoch nur die Lehrplanschriften der Länder und nicht die Bildungsstandards Kompetenzerwartungen für einzelne oder Doppeljahrgangsstufen ausweisen, war es für die vorliegende Arbeit unumgänglich, eine spezifische Lehrplanschrift und ihre Kompetenzformulierungen für die Orientierungsstufe zur Grundlage zu nehmen; die folgenden Ausführungen, insbesondere in Kap. 7.3, beziehen sich daher auf die Vorgaben des Landes Nordrhein-Westfalen. Mit dem Ziel, das Konzept darüber hinaus möglichst wenig einzuschränken, wurden die im folgenden Kapitel zugrunde gelegten Aufgaben aus Schulbüchern für das Gymnasium entnommen (vgl. Kap. 6.3.1) – denn eine Reduktion der Komplexität und Anpassung an schwächere Lerngruppen bereitet weniger Probleme, als den umgekehrten Weg zu gehen.

7.1 Steckbrief IHiMU

Dem Konzept zur *Integrierten Heuristiklehre im Mathematikunterricht* liegen folgende Überlegungen und Überzeugungen zugrunde, die sich aus den bisherigen Betrachtungen herleiten:

- Ein gemeinsamer fachdidaktischer und terminologischer Referenzrahmen für die Kompetenz des Problemlösens, der es erlaubt, die Vorgaben der Kultusministerkonferenz umzusetzen, ist unabdingbar.
- Die Problemlösekompetenz kann nur in Auseinandersetzung mit konkreten Lerninhalten, also unter Nutzung inhaltsbezogener Kompetenzen erworben und weiterentwickelt werden (siehe KMK 2004a:9, NORDRHEIN-WESTFAHLEN 2007a: 12), so dass eine Verschränkung beider Kompetenzen notwendig ist.

- Die Problemlösekompetenz kann als eine übergeordnete Kompetenz betrachtet werden, die die übrigen prozessbezogenen Kompetenzen unter sich vereint (vgl. Kap. 2.3).
- Historisch gesehen stehen die Begriffe Problem, Heuristik und Geometrie in einem engen Zusammenhang (vgl. STILLER Band B), so dass es sich aus „genetischen" Gründen anbietet, die Problemlösekompetenz in Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand der Geometrie zu erwerben.
- Erst durch die Reflexion problemlösender Tätigkeit kann die heuristische Kompetenz aufgebaut werden.

IHiMU ist ein Unterrichtskonzept und beinhaltet verschiedene Methoden und Lernarrangements, die situationsbedingt und mit Blick auf das jeweilige Zielbündel eingesetzt werden.

IHiMU ist ein in den regulären Mathematikunterricht eingebettetes und an der steten und planmäßigen Fortentwicklung problemlösender Fähigkeiten und Fertigkeiten im Wechselspiel mit den vorgegebenen Fachinhalten orientiertes Unterrichtskonzept. Dabei werden die medialen Lernangebote systematisch so gewählt bzw. umgestaltet, und außerdem der Unterricht methodisch so angelegt, dass der Aufbau heuristischer Kenntnisse gefördert wird. Im Verbund mit spezifischen Hilfsmitteln zur Sicherung und Reflexion problemlösenden Verhaltens ermöglicht IHiMU so innerhalb des Rahmens aktueller Vorgaben und organisatorischer Gegebenheiten eine Neuorientierung des Mathematikunterrichts.

Die IHiMU basiert auf folgenden grundlegenden Annahmen: der Wissenserwerb erfolgt konstruktiv in Abhängigkeit von Vorerfahrungen, Vorkenntnissen und Handlungskontexten und vollzieht sich individuell und selbstorganisiert. Der Erfolg hängt maßgeblich von der Eigenaktivität und affektiven Faktoren ab, also davon, für wie subjektiv bedeutsam die neu zu gewinnenden Kenntnisse oder Fertigkeiten empfunden werden.

IHiMU weist daher folgende Merkmale auf:[273]

- Das Konzept ist didaktisch-methodisch ganzheitlich orientiert. Die Stoffinhalte ergeben sich aus den Vorgaben der Lehrpläne, die ihrerseits auf den Bildungsstandards basieren.

[273] Die Art der Darstellung ist in groben Zügen an die von JANK/MEYER (1991: 355-357) gewählte angelehnt.

- Im Mittelpunkt steht der verschränkte Aufbau von Sachkenntnissen und Problemlösefähigkeiten, der durch eigene Erkundungen und Entdeckungen sowie durch Dokumentation, Erprobung und Reflexion der Lösungswege und der Ergebnisse zu einer stetig wachsenden heuristischen Kompetenz führt (vgl. Kap. 7.2.1).
- Der Lehrer übernimmt dabei die notwendige Planung, Strukturierung und Organisation sowohl vor als auch während des Unterrichtsgeschehens und fungiert als Moderator, Unterstützer und Berater. Er ist zudem maßgeblich dafür verantwortlich, dass der mittel- und langfristige inhalts- wie prozessbezogene Kompetenzaufbau ermöglicht wird, indem er dafür sorgt, dass die Arbeits- und Lernergebnisse entsprechend dokumentiert und ergänzt werden.
- Die Forscheraufgaben, das Forscherheft sowie die Problemlöse- und Merksatzbox sind die zentralen Konzeptbausteine, die in ihrer Funktion (vgl. Kap. 7.2.2) maßgeblich dazu beitragen, die geforderten mathematischen Fachinhalte einerseits und die – in Auseinandersetzung mit den Inhalten möglichen - Heurismen und heuristischen Techniken andererseits zu erwerben, stetig zu erweitern, zu vertiefen und langfristig zu sichern.
- Das Unterrichtsgeschehen ist von kooperativen Lernformen geprägt, durch die das Potenzial der Forscheraufgaben und die des Forscherheftes effektiv ausgeschöpft werden können. Darüber hinaus werden die sozialen wie kognitiven Kompetenzen durch kooperative Lernformen (siehe Kap. 7.2.3) gefördert, die Eigenverantwortung gestärkt, das Arbeiten auf differenziertem und individuellem Niveau unterstützt, die Lernkompetenz und Selbständigkeit entwickelt und die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Kommunizierens sowie die des Problemlösens ausgebildet.

7.2 Konzeptbausteine

Der traditionelle Mathematikunterricht ist geprägt von der zentralen Rolle der Lehrkraft, die die wesentliche Impulse gibt, vormacht und erklärt, bevor die Schüler das Vorgeführte nachmachen und üben. Die Einführung eines (neuen) mathematischen Themas erfolgt in der Regel über Definitionen, deren Inhalte und Bedeutung durch Beispiele illustriert werden. Ein oder mehrere Einstiegsaufgaben sollen zum Nachmachen animieren und die zahlreichen Übungsaufgaben sollen dazu beitragen, die Bezeichnungen und Verfahren zu übernehmen und zu verinnerlichen. Diese Vorgehensweise führt jedoch dazu, dass die

Inhalte meist auf ihre Definitionen reduziert werden und auf diese beschränkt bleiben. Dem Schüler wird eine passive Rolle zugewiesen, offene Herangehensweisen werden insbesondere zu Beginn eines neuen Themas selten berücksichtigt. Statt die Mathematik zu erfahren, zu erkunden und zu erforschen, erscheint sie oft noch als fertiges Produkt, aufgebaut auf einer strengen Logik.[274] Durch Forscheraufgaben und passend gewählte Unterrichtsmethoden lassen sich derartige Vorgehensweisen vermeiden und eröffnen Wege zu einem kompetenzorientierten, allen voran zu einem problemlöseorientierten und damit heuristikaffinen Mathematikunterricht.

Ein Unterricht, der die Problemlösekompetenz in besonderem Maße berücksichtigt, muss bestimmte Rahmenbedingungen erfüllen, damit der Lernprozess erfolgreich verlaufen kann. In dem nachfolgenden Kapitel sollen die Konzeptbausteine vorgestellt und erläutert werden, die einen heuristikaffinen Mathematikunterricht begünstigen.

Fragen wie:

- Welche Aufgaben eignen sich, um die Problemlösekompetenz gezielt zu entwickeln?
- Welche Lernformen eignen sich am besten, um die Problemlösefähigkeit zu erwerben?
- Welche Methoden unterstützen das Wirkprinzip heuristischer Bildung am effektivsten?
- Welchen Stellenwert nimmt das Üben in diesem Zusammenhang ein?
- Welche Bedeutung kommt der Sicherung der Ergebnisse bei?
- Welche Maßnahmen, Werkzeuge und Hilfsmittel können den langfristigen Kompetenzaufbau fördern und sichern?

sollen dazu im Folgenden beantwortet werden.

7.2.1 Forscheraufgaben als Kern der IHiMU

Offene Aufgaben fördern ein divergentes Arbeiten auf einem individuellen und differenzierten Niveau, sprechen eine Vielzahl bereits erworbener mathematischer Kompetenzen an und verknüpfen diese miteinander. Darüber hinaus ermöglichen sie eine aktive und konstruktive Auseinandersetzung mit einem vorliegenden Sachverhalt, bieten eine „echte“

[274] Zur Ursprüngen, Entwicklungen und Wandlung dieser Form des Unterrichts vgl. Band B (Stiller 2017, Kap. 2)

Entscheidungsmöglichkeit bezüglich des Lösungsweges, ermöglichen die Anwendung verschiedener Verfahren und lassen Raum für die Entwicklung neuer Ansätze (vgl. Kap. 2.5).

Forscheraufgaben lassen sich als eine sehr komplexe Form offener Aufgaben beschreiben, bei denen Beziehungen untersucht, Muster und Gesetzmäßigkeiten gefunden, Zusammenhänge entdeckt, beschrieben und begründet werden. Gleichzeitig werden vielfältige Möglichkeiten eines kreativen und entdeckenden Arbeitens eröffnet, die die Möglichkeiten einer (Selbst)Differenzierung geben. Forscheraufgaben eröffnen damit die Chance, gleiche inhaltliche Kontexte in unterschiedlicher Komplexität und auf unterschiedlichen Niveaus bearbeiten zu lassen, so dass leistungsstarke wie leistungsschwache Schüler gleichermaßen handeln und interagieren können.[275] Forscheraufgaben eigenen sich somit in besonderem Maße, den Erwerb der Problemlösekompetenz zu fördern. Aus diesem Grund und um die Komplexität existierender Aufgabenformate zu reduzieren, sollen Forscheraufgaben den Kern einer jeden Unterrichtsstunde bilden, in denen eine heuristische Technik oder ein Heurismus thematisiert wird.[276]

7.2.2 Forscherheft

Die in der Literatur als Forscherheft, Logbuch oder auch Lerntagebuch ausgewiesene Dokumentationsform (vgl. HUßMANN 2003, BARZEL et al. 2007, FABRICIUS 2009, STRAUCH et al. 2009) dient dazu, die individuellen Lernprozesse und Lernwege zu protokollieren und zu reflektieren. Im Gegensatz zu einer reinen Ergebnissicherung am Stundenende beinhaltet das Forscherheft sämtliche Schüleraktivitäten, die während einer Bearbeitungsphase durchlaufen werden. Dazu zählen die Art und Weise der Durchdringung des Arbeitsauftrages, Schwierigkeiten und deren Bewältigung, Lernerfolge und Rückschläge, Skizzen und allgemein angewandte Lösungsverfahren, zugrunde gelegte Sätze, Definitionen oder Formeln, neu gewonnene Erkenntnisse und die abschließende Reflexion, die die Schüler mit eigenen Worten festhalten. Durch das Führen eines Forscherheftes werden all die Schüleraktivitäten gefordert und gefördert, die zum Erwerb der Problemlösekompetenz maßgeblich beitragen. Damit das Forscherheft seiner Funktion, den Problemlöseprozess in Gang zu setzen und diesen zu unterstützen, gerecht werden kann, sind offene Aufgabenformate (vgl. Kap. 2.5) unabdingbar, denn durch sie wird der Raum für die genannten

---

[275] Vgl. BEZOLD 2009: 81.
[276] Auch wenn die Forscheraufgaben für das Konzept von herausragender Bedeutung sind, sollen andere Aufgabenformate für das Konzept nicht gänzlich ausgeschlossen werden.

Schüleraktivitäten geschaffen, so dass individuelle Lösungsideen entwickelt, mathematische Kompetenzen miteinander verknüpft, neue Erkenntnisse gewonnen und weiterführende Fragestellungen, Wahrheiten oder Problemstellungen gefunden werden können.

Um das dahinterliegende Ziel des Forscherheftes zu erreichen und gerade zu Beginn auch Startschwierigkeiten und daraus möglicherweise erwachsende Demotivierung zu umgehen, ist es sinnvoll, den Schülern eine differenzierte[277] Strukturierungshilfe zu geben, die sie bei ihrer Arbeit unterstützt. Diese kann zum Beispiel durch ein Verlaufsprotokoll erfolgen, auf dem die wichtigsten Kernpunkten sowie weiterführende Hinweise und Fragestellungen formuliert sind; diese dienen als Orientierung und erleichtern das Führen des Forscherheftes, wie die nachfolgende Tabelle exemplarisch verdeutlicht:

Kernpunkte	**Was soll ich machen**	**Leitfragen[278] / Wie soll ich es machen?**	**Reflexion**
Thema der Stunde	I: Ich wähle eine Überschrift, die zu der Stunde passt. II: Ich wähle eine Überschrift, die zum Lerninhalt passt. III: Ich wähle eine passende Überschrift.	I: Um welches Thema geht es in dem Arbeitsauftrag? II: Worum geht es? III: Was ist der Kern der heutigen Stunde?	I: Habe ich den Kern der Stunde erfasst? II: siehe oben III: siehe oben
Arbeitsauftrag	I: Ich überlege, wie ich einem Mitschüler erkläre, was er tun soll. II: Ich notiere in Stichworten, was ich machen soll. III: Ich gebe die Problemstellung mit eigenen Worten wieder.	I: Was soll ich konkret machen? II: Was soll ich warum herausfinden? III: Was soll ich warum herausfinden? Warum will ich das wissen?	I: Habe ich alle Fragen notiert? II: siehe oben III: siehe oben
Verstehen der Aufgabe	I: Ich sortiere die Daten nach Gegebenem und Gesuchtem. Ich überlege, ob ich einen Teil lösen kann. Ich überlege, ob ich die Aufgabe anders darstellen kann. II: Ich reduziere die Daten auf die wesentlichen Informationen und versuche, das Problem auf verschiedene Weise darzustellen.	I: Was ist gegeben? Was ist gesucht? Kann ich Teile der Aufgabe lösen? Kann ich aus den Angaben eine Zeichnung, eine Tabelle, oder Gleichung aufstellen? II: Was ist gegeben? Was ist gesucht? Kann ich Teile der Aufgabe lösen? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein? Wie lässt sich der Sachverhalt darstellen?	I: Habe ich alle Daten und Bedingungen berücksichtigt? II: siehe oben

[277] Die Ziffern I-III kennzeichnen die Anforderungsbereiche gemäß der Bildungsstandards (vgl. KMK 2004b: 13).
[278] Die Leitfragen sind eng an den Problemlöseprozess nach Pólya (1995) angelehnt.

	III: Ich versuche die Daten zu abstrahieren, zu visualisieren oder zu mathematisieren.	III: siehe II	III: siehe oben
Lösungsplan entwickeln (durch Analyse und Adaption der strukturierten Daten)	I: Ich überlege, ob ich eine ähnliche Aufgabe schon einmal gelöst habe und wie ich dabei vorgegangen bin.	I: Habe ich ähnlich Aufgaben schon einmal auf diese Weise gelöst? Welche Sätze, Definitionen und Formeln brauche ich? Welche (heuristischen) Vorgehensweisen können weiterhelfen?	I: Habe ich alle Daten und Bedingungen berücksichtigt?
	II: Ich untersuche die Daten auf Wiederholungen. Ich ändere die Bedingungen. Ich formuliere die Frage neu.	II: Habe ich ähnliche Aufgaben schon einmal gelöst? Welche Sätze, Definitionen und Formeln können mir weiterhelfen? Welche (heuristischen) Vorgehensweisen können weiterhelfen?	II: siehe oben
	III: Ich untersuche auf Muster und Strukturen, stelle Vermutungen auf und versuche Verallgemeinerungen zu finden. Ich verändere das Problem so, dass Muster entstehen. Ich ändere die Bedingungen. Ich formuliere die Frage neu.	III: siehe II	III: siehe oben
Führe den Plan aus (durch konkrete Handlungen)	I: Ich gehe systematisch, planvoll und zielgerichtet vor. Ich arbeite mich (schrittweise) vom Gegebenen zum Gesuchten vor. Ich nähere mich dem Ziel über Teilziele und -ergebnisse an.	I: Wie kann ich systematisch vorgehen? Welche Darstellung hilft mir dabei? Kann ich über die Teilergebnisse das Ausgangsproblem lösen?	I: Kontrolliere jeden Schritt. Überprüfe dein Ergebnis. Habe ich alle Daten und Bedingungen berücksichtig?
	II: siehe oben	II: siehe oben	II: siehe oben
	III: siehe oben	III: siehe oben	III: siehe oben
Kontrolliere und vollziehe nach	Kontrolliere das Ergebnis. Vollziehe den Lösungsweg nach. Notiere die Vorgehensweisen, die die Lösung geliefert haben (Sätze, Formeln, Vorgehensweisen).	Was habe ich gemacht? Welche Idee hat mich weitergebracht? Wie bewerte ich mein Vorgehen?	Kontrolliere das Ergebnis. Vollziehe den Lösungsweg nach. Notiere die Vorgehensweisen, die die Lösung geliefert haben (Sätze, Formeln, Vorgehensweisen).

Tab. 25 Aufbau und - gemäß der Anforderungsbereiche I- bis-III differenzierte - Leitfragen des Verlaufsprotokolls zur Dokumentation von Forscheraufgaben.

Durch die Verwendung eines Verlaufsprotokollbogens ist eine Differenzierung nach den durch die Bildungsstandards geforderten drei Anforderungsbereichen möglich, indem Art und Umfang der Hinweise sowie Leitfragen auf den Bögen gezielt variiert werden:

Auf diese Weise können schwächere Schüler durch Hilfs-Formulierungen und Anweisungen schrittweise durch die Aufgabenstellung bis hin zu einer Problemlösung geführt werden, während leistungsstarke Schüler nur Teilhinweise oder ausgewählte Leitfragen erhalten, um sie in ihrem Löseprozess nicht zu beeinflussen und die Entwicklung eigener Ideen zu ermöglichen. Die aufgeführten strategischen oder auch methodischen Hinweise orientieren sich an dem Phasenmodell von Pólya. Der Aufbau eigener Denkstrukturen wird unterstützt, die Schüler verinnerlichen langfristig betrachtet den Ablauf des dahinterliegenden Problemlöseprozesses und lernen dennoch, ihre ganz eigenen Fragestellungen und Vorgehensweisen zu Grunde zu legen.[279]

7.2.3 Methodik und Lernarrangements der IHiMU

Die Forscheraufgaben und das Forscherheft bilden zusammen mit der Problemlöse- und Merksatzbox (vgl. Kap. 7.2) die Kernelemente des hier entwickelten heuristikaffinen Mathematikunterrichts. Um das Potenzial der Forscheraufgaben und die des Forscherheftes effektiv auszuschöpfen, müssen darauf abgestimmte Unterrichtsmethoden ausgewählt werden. Daher soll nun kurz auf die Frage der Unterrichtsmethodik eingegangen werden, die als Teilgebiet der Didaktik verstanden wird, und einerseits Antworten auf Fragen nach der Art und Weise des Unterrichtens gibt, andererseits aber auch Möglichkeiten zum Erreichen bestimmter Lehr- oder Lernziele aufzeigt.

Unterrichten vollzieht sich anhand von didaktischen Modellen, die normative Vorgaben, zugleich aber auch Anregungen oder Strukturhilfen für die Planung und Beurteilung des Unterrichts liefern. Didaktische Modelle sind keine starren Regelwerke (schon gar nicht für den praktischen Unterricht), sondern sie geben Strukturhilfen, an denen man sich in der Unterrichtspraxis orientiert. Heute findet man im Unterricht meist eine Mischform verschiedener didaktischer Modelle verwirklicht, indem einzelne „Elemente ausgewählt, kombiniert und weitergehend im Zuge gesellschaftlicher Veränderungen sowie neuer wissenschaftlicher Erkenntnisse modifiziert werden“ (HECKMANN / PADBERG 2012: 60). Der Lehrplan NRW fordert, dass die inhaltliche und die methodische Gestaltung des Mathematikunterrichts aufeinander abgestimmt werden und eine Vielfalt an Unterrichtsformen, die von einer Wissensvermittlung durch den Lehrer bis hin zur selbständigen

[279] Vgl. BEZOLD 2009: 94.

Erarbeitung durch den Schüler reicht, Anwendung finden soll. Der Mathematikunterricht soll zudem entdeckendes Lernen anhand komplexer Problemstellungen ermöglichen.[280]

Kooperative Lernformen haben sich im kompetenzorientierten Mathematikunterricht besonders bewährt, denn durch den Austausch mit anderen Schülern können die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Kommunizierens gefordert und gefördert, Begriffe und Vorgehensweisen entwickelt und reflektiert, Lösungswege verglichen und verschiedene Darstellungsformen angewandt werden. Auf diese Weise ergibt sich nicht nur ein tieferes mathematisches Verständnis, vielmehr werden simultan die fachlichen, persönlichen, sozialen und methodischen Kompetenzen ausgebildet.[281]

Grundlage des kooperativen Lernens bilden die drei Prinzipien *Denken*, *Austauschen* und *Vorstellen*, die mit anderen Lehr- und Lernformen kombiniert werden. In der Literatur wird dieser Dreischritt auch als Think-Pair-Share oder Ich-Du-Wir-Methode bezeichnet und stellt die Grundstruktur des Kooperativen Lernens dar.[282]

Ausgangspunkt bildet dabei die *individuelle Denkzeit*, die den Schülern die Möglichkeit gibt, sich innerhalb eines fest vorgeschriebenen Zeitraums in Einzelarbeit mit der Aufgabenstellung oder dem Arbeitsauftrag auseinanderzusetzen. Diese Phase gilt als besonders wichtig, da sich auf diese Weise alle aktiv und eigenverantwortlich mit dem Arbeitsauftrag beschäftigen und nur so ihren Anteil in der Austauschphase leisten können. Darüber hinaus hat jeder die Chance, seine eigenen (Lösungs-)Ideen, Ansichten und Meinungen zu entwickeln, ohne Gefahr zu laufen, sich unter Druck setzen zu lassen oder sich vor der Klasse zu blamieren. Denn lässt man den Schülern nach dem Stellen einer Frage Zeit zum Nachdenken, steigt die Qualität und die Quantität der Antworten.

Die *Austauschphase* trägt zu einer fachlichen wie auch individuellen Förderung bei, denn hier haben die Schüler die Möglichkeit, mit einem Partner oder innerhalb einer Gruppe ihre Ergebnisse und Informationen auszutauschen, Verständnisfragen zu klären und Fehler auszuräumen. Durch die Arbeit in einem solchen geschützten Raum gewinnen die Schüler auch Sicherheit bezüglich des eigenen Verständnisses. Gleichzeitig wird durch das Zusammentragen der gewonnenen Erkenntnisse die Qualität der Beiträge verbessert und die Kompetenz Argumentieren und Kommunizieren wird gefördert. Die Partner- oder Gruppenarbeitsphase bietet darüber hinaus einen geschützten Rahmen, innerhalb dessen

[280] Vgl. Nordrhein-Westfalen 2007a: 12.
[281] Vgl. Hepp/Miehe 2006.
[282] Vgl. Brüning/Saum 2008: 17.

die Schüler sich auf die anschließende Präsentation der Ergebnisse im Plenum vorbereiten können und die dafür notwendige Sicherheit erlangen.

In der abschließenden *Vorstellungsphase* werden die Ergebnisse aus der zweiten Phase im Plenum präsentiert, verglichen, gegebenenfalls korrigiert und ergänzt, kommentiert und bewertet. Hier sollte jeder Schüler in der Lage sein, die Ergebnisse vorzustellen, da alle Beteiligten am Ende der Austauschphase über den gleichen Wissensstand verfügen sollten. Durch die drei Grundelemente individuelle Denkzeit, Austausch und Vorstellen werden somit auch persönliche Verantwortung, innere Aktivierung und Beteiligung, Sicherheit und Angstreduzierung und die Qualität der Beträge angesprochen und gefördert.[283]

Franke stellt fest, dass in dieser kooperativen Arbeitsform „die Strategiefindung über den Problemlösedialog erfolgen" kann, denn „durch das Wechselspiel von Sprechen und Zuhören, bei dem durch Fragen, Zustimmung, Ablehnung und Beurteilen ein gemeinsames Verständnis aufgebaut wird, werden neue Ideen, Lösungsansätze und Strategien entwickelt" (FRANKE 2003: 67). Zech sieht in der Gruppenarbeitsphase eine „geeignete Vorstufe für das Problemlösen des einzelnen" (ZECH 2002: 320), da auf diese Weise sowohl kognitive als auch affektive Voraussetzungen für das Problemlösen geschaffen werden: Seiner Einschätzung nach trägt das Problemlösen in Kleingruppen dazu bei, dass die Schüler lernen, ihr Vorwissen zu reaktivieren, Informationen aus dem Gesamtkontext zu entnehmen, einen Lösungsplan aufzustellen, Ideen zu entwickeln und zu diskutieren, Schlussfolgerungen zu ziehen, Lösungswege und -ergebnisse zu kontrollieren und zu formulieren, Heurismen erwerben und diese zielgerichtet einsetzen, so dass die Schüler langfristig in der Lage sind, mathematische Probleme selbständig zur bearbeiten, zu lösen und auf neue Sachzusammenhänge anzuwenden.[284]

Placemat-Verfahren

Dieses Verfahren kann dabei helfen, die Gedanken, den Austausch und die gemeinsam gewonnenen Ergebnisse zu strukturieren, zu veranschaulichen und „sichtbar" viele verschiedene Ideen miteinander zu vereinen. Gleichzeitig wird der Beitrag eines einzelnen zum Gesamtergebnis erkennbar. Der Einsatz eines Placemats ist sinnvoll, wenn es sich um eine offene Aufgabenstellung handelt, bei der auf individuelles Vorwissen zurückgegriffen werden muss und verschiedene Lösungswege möglich sind. Während die individuelle

[283] Vgl. BRÜNING/SAUM 2008: 18.
[284] Vgl. ZECH 2002: 320.

Denkzeit auch hier den Ausgangspunkt bildet, werden in der Austauschphase die Ergebnisse oder Fragen in Kleingruppen (drei bis vier Schüler) auf einem Blatt notiert. Das Blatt ist so vorbereitet, dass jeder Schüler ein eigenes Feld für seine Ergebnisse und Ideen vor sich liegen hat. Die Schüler müssen also in der Lage sein, ihre Gedanken so zu formulieren und zu dokumentieren, dass die anderen sie verstehen und nachvollziehen können. Nachdem jeder sein Feld ausgefüllt hat, findet der Austausch und Vergleich statt, indem das Blatt im Uhrzeigersinn solange gedreht wird, bis jeder die Ideen der anderen gelesen hat. Dann haben alle die Möglichkeit, ihre Ergebnisse zu verbessern, Fragen zu stellen und Diskussionen anzuregen. Gemeinsam wird schließlich geklärt, welches Gesamtergebnis in das freie Feld in der Mitte des Blattes von der Gruppe notiert wird. Die Vorstellphase findet im Plenum statt, wobei der Bogen mit den Ergebnissen als Präsentation zu Hilfe genommen werden kann.[285]

Das Drei-Schritt-Interview

Diese kooperative Methode eignet sich insbesondere dann, wenn das Vorwissen der Schüler reaktiviert oder persönliche Interessen im Fachunterricht formuliert werden sollen. Darüber hinaus bietet sie sich auch an, wenn Arbeitsergebnisse oder -prozesse diskutiert werden sollen. Durch diese Methode wird zudem die Fähigkeit, Fragen über einen konkreten Sachzusammenhang zu stellen sowie das genaue und aktive Zuhören gefördert. Die erste Phase ist die Einzelarbeitsphase, in der jeder Schüler den Arbeitsauftrag individuell bearbeitet. Die daran anschließende Austauschphase gliedert sich in drei Schritte: im ersten Schritt bilden je zwei Schüler ein Team und wählen einen Interviewer, der den anderen Schüler gezielt nach seinen Ergebnissen aus der Einzelarbeitsphase befragt und sich Notizen dazu macht. Im zweiten Schritt werden die Rollen gewechselt, so dass der Befragte zum Interviewer wird. Im dritten Schritt stellt jeder den Mitgliedern aus den anderen Gruppen die Ergebnisse nach demselben Prinzip vor.[286, 287]

Gruppenpuzzle

Grundlegendes Prinzip dieser Methode ist der Wechsel zwischen der Wissenserarbeitung in themengleichen Expertengruppen und der Wissensvermittlung in Stammgruppen. Die erste Phase beginnt mit der Einteilung der Stammgruppen und der Verteilung der Themen. Die Wissenserarbeitung erfolgt anschließend anhand eines Arbeitsauftrages in themen-

---

[285] Vgl. Barzel et al. 2007: 152.
[286] Vgl. Brüning/Saum 2008: 38 f.
[287] Vgl. Weidner 2006: 165-167.

gleichen Expertengruppen, zunächst jedoch in Einzelarbeit. Hier bearbeiten alle Schüler dasselbe Thema und bilden sich untereinander zu sogenannten „Experten“ aus. Die Wissensvermittlung erfolgt in der dritten Phase und findet in den Stammgruppen statt. Dort werden die Ergebnisse aus der Expertenarbeit den Mitschülern präsentiert. Diese Phase kann mit einer Aufgabe abgeschlossen werden, zu deren Lösung das Wissen aller Experten notwendig ist und somit gemeinsam bearbeitet werden soll. Offene Fragen können in der Plenumsphase geklärt werden, die als Abschlussphase anzusehen ist.[288, 289]

7.2.4 Intelligentes Üben

Üben ist ein wichtiger Bestandteil im Lernprozess, denn mathematische Fähigkeiten müssen nicht nur erworben, sondern auch eingeübt werden. Dabei geht es beim Üben nicht nur darum, etwas sehr oft und nach gewissen Regeln zu wiederholen, um es dadurch zu erlernen. Üben im Sinne von *intelligentem Üben* bedeutet vielmehr, sich erst einmal bewusst zu machen, was genau geübt werden soll. Leuders unterscheidet zwischen den sieben Fähigkeitsaspekten *Kenntnisse*, *Fertigkeiten*, *Verstehen*, *Anwendungsfähigkeiten*, (übergreifende) *Strategien*, *Reflexionsfähigkeit* und *Einstellungen*, die zu erwerben und somit auch einzuüben sind: *Kenntnisse* befähigen dazu, den Lerngegenstand mit eigenen Worten oder durch eine Definition wiederzugeben, während die *Fertigkeiten* die Durchführung von konkreten Berechnungen ermöglichen. Beim *Verstehen* ist der Betreffende in der Lage, den Lerngegenstand an einem Beispiel zu erläutern. Die *Anwendungsfähigkeit* heißt, auch in unbekannten Situationen mit Hilfe der gewonnenen Kenntnisse des Lerngegenstandes, Probleme zu lösen und *übergreifende Strategien* ermöglichen es, in unbekannten Kontexten weiterführende Lösungsideen unter Berücksichtigung des Kerngedankens des Lerngegenstandes zu entwickeln. Die *Reflexionsfähigkeit* meint, den Nutzen des Gelernten in einem bestimmten Kontext zu beurteilen und die *Einstellung* bezeichnet die allgemeine und notwendige Leistungsbereitschaft.

Ziel eines guten Unterrichts sollte es sein, all diese Fähigkeitsaspekte gleichermaßen zu fördern. Damit das gelingt, müssen Aufgaben so konzipiert sein, dass ein intelligentes Üben ermöglicht wird, das heißt, die Übungsaufgaben sollen einen sinnstiftenden, entdeckungsoffenen, selbstdifferenzierten und reflexiven Charakter haben. Auf diese Weise entstehen transparente, für individuelle Lösungswege offene, leistungsdifferenzierte und weiter-

[288] Vgl. Frey-Eiling/Frey 2006: 50-57.
[289] Vgl. Barzel 2007: 96-101.

führende Übungsaufgaben, die für alle Schülergruppen geeignet sind. Nach Leuders lassen sich durch die Anwendung bestimmter Techniken aus herkömmlichen Schulbuchaufgaben produktive Übungsaufgaben konstruieren. Wichtig ist, sich über das zu erreichende Ziel, nämlich *was* konkret geübt werden soll, klar zu werden. Mögliche Antworten auf diese Frage sind zum Beispiel die Wiedergabe des reinen (Fach-)Wissens, das Ausführen von Verfahren, die Anwendung von Begriffen oder das Herstellen von Beziehungen.[290]

Blum schreibt diesbezüglich: „Von „intelligentem Üben“ möchten wir sprechen, wenn wir nicht nur Routinen als Selbstzweck gepflegt werden, sondern wenn dabei allgemeine Begriffe „begreifbar“ gemacht, Stoffgebiete vernetzt, neue Erkenntnisse entdeckt und begründende Kommunikationen angestoßen werden“ (BLUM et al. 2006: 114).

7.2.5 Sicherung

Die Schüler können nur dann ein solides Grundwissen aufbauen, wenn ihnen die Möglichkeit gegeben wird, bereits erworbenes Wissen zu wiederholen, es auf neue Inhalte anzuwenden und mit diesem zu vernetzen. Durch die Sicherung erhalten die Schüler ein umfassendes und vollständiges Bild über neu gewonnene Lerninhalte und können darauf zurückgreifen und aufbauen, so dass die Sicherung eine entscheidende Phase einer jeden Unterrichtsstunde ist.

Die Ergebnissicherung fasst die wesentlichen Unterrichtsinhalte in komprimierter Form zusammen und erfolgt meist durch die Formulierung von Sätzen, Definitionen oder Formeln. Gleichzeitig sollten in dieser Phase die getroffenen Aussagen auf ihre Richtigkeit und Vollständigkeit hin überprüft und Lösungswege, die insbesondere bezogen auf den Erwerb der Problemlösekompetenz entscheidend für den weiteren Lernerfolg sind, reflektiert werden. Durch die Reflexionsphase können angewandte Verfahren und Strategien konkretisiert, bezüglich ihrer Effizienz bewertet und gegebenenfalls auch benannt werden. Außerdem können an dieser Stelle weiterführende Anregungen gegeben, zuvor nicht genannte Alternativen aufgeführt und Verständnisfragen geklärt werden. Durch die Dokumentation werden Lernergebnisse und zugleich auch Mindestanforderungen verbindlich festgehalten, so dass in den Folgestunden auf die gewonnenen Erkenntnisse zurückge-

[290] Vgl. LEUDERS et al. 2009: 130-143.

griffen, auf sie aufgebaut und diese in die nächsten Arbeitsphasen eingesetzt werden können.[291]

Die Schüler sollten sich der Bedeutung der Ergebnissicherung bewusst sein und die Dokumentation als Lern- und Erinnerungshilfe (an)erkennen und als solche nutzen; das bedeutet jedoch auch, dass eine einfache Handhabung und die Praktikabilität im Unterrichtsalltag gewährleistet werden muss. Im Laufe der Jahre haben sich im Schulbetrieb viele verschiedene Möglichkeiten etabliert, mit denen Ergebnisse gesichert und Lernfortschritte protokolliert werden können; diese reichen von Hefteinträgen, über Tafelnotizen, das Anfertigen eines Lern-Plakates, die Abfrage in Form eines Lückentextes bis hin zum Führen eines Lerntagebuches.

Angesichts des hier erhobenen Anspruchs, die prozessbezogenen Kompetenzen in Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten als kumulativen und langfristig angelegten Kompetenzaufbau zu fördern, ist eine präzise und für Schüler einsichtige Verschriftlichung der individuellen Lernprozesse wie auch der (gemeinsam) gewonnenen Erkenntnisse absolut unerlässlich. Er werden nun zwei Lernbegleiter vorgestellt, die diesen Ansprüchen genügen und grundlegende Bausteine des IHiMU-Konzepts bilden.

Problemlösebox und Merksatzbox als Werkzeuge

Neben dem Forscherheft, in dem der Lernprozess stichpunktartig und mit eigenen Worten festgehalten wird, ist es wichtig, die Lernergebnisse in Form von (Fach)Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu formulieren, zu präzisieren, zu strukturieren und zu dokumentieren. Mit der Erstellung einer Problemlöse- und Merksatzbox lassen sich die gewonnenen Erkenntnisse archivieren, so dass ein Wissensspeicher entsteht, der sich über die Jahrgangsstufen hinweg stetig ergänzen und erweitern lässt, so dass der langfristige Kompetenzaufbau gewährleistet werden kann (vgl. Tab. 26).

Um ein Problem erfolgreich lösen zu können, muss der Problemlöser zum einen über ein solides Basiswissen in Form von Sätzen, Definitionen, Regeln und Formeln verfügen, die in der *Merksatzbox* über Jahrgangsstufen hinweg gesammelt und archiviert werden. Darüber hinaus benötigt der Betreffende eine Auswahl an Heurismen oder heuristischen Techniken, die ein planvolles, organisiertes und strukturiertes Vorgehen auf dem Weg zu einer erfolgreichen Problemlösung ermöglichen. Heurismen und heuristische Techniken werden in einer dafür vorgesehenen *Problemlösebox* gesammelt, erweitert und ebenfalls archiviert.

[291] Vgl. Heckmann/Padberg 2012: 74.

Problemlösebox	Merksatzbox
Sammlung von Problemaufgaben, die durch Anwendung einer bestimmten Vorgehensweise erfolgreich oder teilweise gelöst werden konnten	Sicherung von (Merk)Sätzen, Definitionen und erarbeiteten Formeln
Beschreibung heuristischer Vorgehensweisen	Konstruktionsbeschreibungen
Bewertung heuristischer Handlungen und Vorgehensweisen	

Tab. 26 Inhalte, die in Problemlösebox und Merksatzbox gesammelt und systematisiert werden.

Mögliche Vor- und Nachteile von IHiMU

Unter Berücksichtigung der in Kap. 7.1 zusammengefassten Überlegungen und den im Anschluss daran vorgestellten Konzeptbausteinen können sich für das IHiMU-Konzept sowohl Vor- als auch Nachteile ergeben, wie die nachfolgende Listung zeigt:

Mögliche Vorteile von IHiMU

- Bessere Identifikation der Schüler mit mathematischen und heuristischen Fragestellungen durch Forscheraufgaben.
- Die Schüler übernehmen durch die grundsätzlich individualisiert angelegte Unterrichtsgestaltung entscheidend Mitverantwortung für den Verlauf und Erfolg des Unterrichts.
- Ergebnisse werden von den Schülern durch die Reflexion selbst bewertet, wodurch eine demokratische Kritik und Kontrolle der Unterrichtsarbeit möglich wird.
- Methodische, soziale und personale Kompetenz können gezielt gefördert werden.
- Disziplinierungsprobleme reduzieren sich in der Regel durch offenere Unterrichtsformen.
- Durch Synergieeffekte können materiale und zeitliche Ressourcen effektiver ausgeschöpft werden.

Mögliche Nachteile von IHiMU

- Die Leistungsbewertung prozessbezogener Kompetenzen stellt eine große Herausforderung für die Lehrer dar.
- Die Vorbereitung solcher Unterrichtsstunden erfordern ein hohes Maß an Planung und Organisation.
- Die Unterrichtsmethoden müssen von den Schülern beherrscht werden.
- Der relativ hohe Schreibaufwand durch das Führen des Forscherheftes kann bei einigen Schülern auf Ablehnung stoßen.

Die drei Säulen des IHiMU-Konzepts

Zusammenfassend lassen sich die drei Säulen betrachten, auf denen das IHiMU-Konzept ruht: auf der aus historischen Vorläufern und aktuellen Entwürfen einer didaktisierten Heuristik-Terminologie entwickelten eigenen sekundarschulbezogenen Einteilung und Definition Heuristischer Techniken und Heurismen (in Kap. 5 dargestellt), auf den komplexen Rahmenbedingungen des schulischen Unterrichts (in Kap. 6 betrachtet) und schließlich auf den zuletzt dargestellten Konzeptbausteinen.

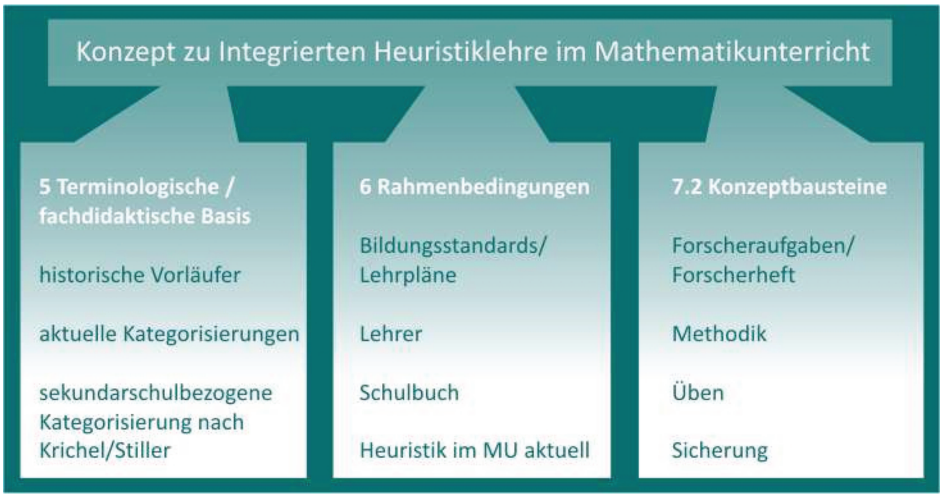


Abb. 14 Die drei Säulen des IHiMU-Konzepts.

7.3 Das IHiMU-Konzept konkret

Ein Unterrichtskonzept entsteht in der Regel aufgrund von Defiziten in der Unterrichtspraxis und beinhaltet keine umfassende Theoriebildung, sondern stellt eine Veränderung der Lehr-Lernstruktur in den Mittelpunkt der Betrachtung.

> „Ein Unterrichtskonzept bezeichnet die theoriegeleitete Grundeinstellung des Lehrers […] bezüglich Zweck, Anlage und Durchführung des Unterrichts“ (Köck 2000: 206).

Es existiert eine Reihe von Unterrichtskonzepten, die vom entdeckenden oder genetischen Lernen über den offenen oder problemorientierten und -lösenden Unterricht bis hin zum projektorientierten, schülerorientierten, handlungsorientierten oder auch wissenschaftsorientierten Unterricht reicht (vgl. Meyer 1994: 208-217; Band B, Stiller 2017: Kap. 3.11). Das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Konzept ist ein Zusammenschluss ausgewählter Aspekte aus verschiedenen Unterrichtskonzepten, die um weitere, für das Konzept der integrierten Heuristiklehre spezifische Aspekte ergänzt werden. Für den heuristik-affinen Mathematikunterricht werden die oben benannten Konzeptbausteine berücksichtigt, die auf problemorientiertem und entdeckendem Mathematikunterricht basieren. Ziel ist es, den vorwiegend inhaltsorientierten Mathematikunterricht zugunsten der prozessbezogenen Kompetenzen, allen voran der Problemlösekompetenz, zu öffnen, um einerseits den Forderungen der KMK zu entsprechen, andererseits aber auch, um eine Kompetenz zur fördern, die nicht nur in der Mathematik, sondern in nahezu allen Lebensbereichen von elementarer Bedeutung ist (vgl. Kap. 2.3).

Zur Struktur des IHiMU-Konzepts

Im Folgenden wird das Konzept anhand der folgenden vier Punkte für die zentralen geometrischen Inhalte der Orientierungsstufe entwickelt:

1. Geometrische Inhalte:
   Zuerst werden die nach Lehrplan Nordrhein-Westfalen[292] vorgesehenen für die heuristische Analyse sowie für das IHiMU-Arrangement[293] relevanten geometrischen Inhalte für die Orientierungsstufe kurz vorgestellt und in die Fachsystematik eingebettet. Dabei wird gegebenenfalls eine Selektion getroffen, soweit dies für die Konzeptdarstellung verlustfrei möglich ist und damit Redundanzen vermieden werden. Ein Transfer der konzeptionellen Idee auf die übrigen Inhalte erschließt sich dem Fachdidaktiker.[294]
2. Darstellung in Schulbüchern:
   Im Anschluss wird überprüft, wie die geforderten Inhalte in gängigen Schulbüchern eingeführt und thematisiert werden. Es folgt eine kurze Bewertung, inwieweit die Darstellung in den Schulbüchern Anknüpfungspunkte für heuristische Tätigkeiten bietet.
3. Heuristische Analyse:
   In der heuristischen Analyse werden die mathematischen Inhalte auf ihr

[292] Es sei noch einmal daran erinnert, dass es notwendig ist, Kompetenzerwartungen für das Ende der Klasse 6 zu berücksichtigen, die in den Bildungsstandards nicht formuliert sind, weshalb hier die Kompetenzerwartungen aus dem Lehrplan für Nordrhein-Westfalen zugrunde gelegt werden, vgl. Einführung in Kap. 7.
[293] Unter dem Begriff „IHiMU-Arrangement" werden die in Kap. 7.2 aufgeführten Konzeptbausteine vereint.
[294] Eine vollständige und umfassende Sachanalyse der mathematischen Inhalte, wie es bei Unterrichtsentwürfen gefordert wird, ist aufgrund der Tatsache, dass es sich hier um eine Konzeptidee handelt, nicht vorgesehen. Stattdessen sollen lediglich die auf die Heuristik anwendbaren und für das IHiMU-Arrangement notwendigen und relevanten geometrischen Inhalte fachmathematisch kurz vorzustellen werden. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

Potenzial für den Erwerb und den Aufbau eines tieferen Verständnisses von Heurismen und heuristischen Techniken hin analysiert.

4. IHiMU-Arrangement / Heuristisch-didaktische Analyse:
Schließlich steht die Art und Weise der Vermittlung elementarer Heurismen im Mittelpunkt der Betrachtung. An konkreten mathematischen Inhalten wird gezeigt, wie die Heuristiklehre in den Mathematikunterricht effektiv und nachhaltig integriert werden kann.

7.3.1 Begriffsbildung und Grundkonstruktionen

Im Mathematikunterricht in Nordrhein-Westfalen sollen in der Orientierungsstufe gemäß Lehrplan Nordrhein-Westfalen die Begriffe *Strecke*, *Gerade*, *Winkel*, *Radius*, *senkrecht*, *parallel* und *Abstand* (siehe Tab. 23) erworben bzw. vertieft werden. Im Zentrum der Betrachtung stehen die Begriffsbildung, die Durchführung und Beschreibung der Konstruktionen sowie die Anwendung der Begriffe zur Beschreibung ebener und räumlicher Figuren.[295]

1. Geometrische Inhalte

Ziel der Begriffsbildung ist es, die hinter einem Begriff stehenden Merkmale und Eigenschaften zu verstehen, Beziehungen und Verknüpfungen zwischen den Begriffen und ihren Eigenschaften herzustellen sowie die Gesamtheit aller unter einem (Ober-)Begriff zusammengefassten Objekte zu erfassen. Der Erwerb und Aufbau von Begriffsvorstellungen, Begriffswissen und zugehörigen Kenntnissen ist ein langfristig angelegter Prozess, der sich über verschiedene Denkebenen vollzieht. Ausgehend von einer intuitiven Begriffsvorstellung wird das Verständnis über verschiedenen Stufen vertieft und erweitert, bis schließlich ein abstraktes Verständnis mathematischer Begriffe entwickelt ist.

Vollrath[296] (1984) hat sich in seinem Buch *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht* intensiv mit den verschiedenen Methoden zum Begriffslehren befasst. In dem dort vorgestellten Stufenmodell beschreibt er, wie ein angemessenes Begriffsverständnis im Unterricht langfristig entwickelt werden kann. Demnach vollzieht sich das Lernen in

[295] Vgl. NORDRHEIN-WESTFALEN 2007a.
[296] Hans-Joachim Vollrath, * 24. November 1934 in Berlin, ist emeritierter Professor für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg. Vollrath befasste sich intensiv mit dem Lehren und Lernen von Mathematik und der Erforschung und Entwicklung des Mathematikunterrichts.

fünf Stufen[297] die nachfolgend kurz beschrieben und in den vorliegenden Gesamtkontext eingebettet werden sollen:

1. Stufe: Das Intuitive Begriffsverständnis
Die erste Stufe bildet das intuitive Begriffsverständnis, bei dem die Begriffsbezeichnung eingeführt und der Begriff selbst zunächst als ein Phänomen in der Umwelt wahrgenommen und ein Bezug zur Lebenswelt der Schüler hergestellt wird.

Für die Ausbildung einer angemessenen (Begriffs-)Vorstellung spielt die Handlung an konkreten Objekten eine wichtige Rolle, bei der vorgestellte Objekte durch Veränderung der Größen oder durch Transformation variiert, also Operationen in Form von Schneiden, Falten, Legen oder Verschieben durchgeführt werden können. Durch das Handeln mit konkretem Material können die wesentlichen Eigenschaften eines Begriffs erfasst und Begriffe aus der Handlung heraus entwickelt werden, so dass von einer konstruktiven[298] Begriffsbildung gesprochen wird.[299] Ist eine Operation verinnerlicht, zeigt sich dies in der Fähigkeit, die Handlungen mental, flexibel und beweglich durchzuführen.[300]

2. Stufe: Das Inhaltliche Begriffsverständnis
Die zweite Stufe umfasst das inhaltliche Begriffsverständnis, bei dem die charakteristischen Eigenschaften eines Begriffs herausgearbeitet und zueinander in Beziehung gestellt werden und der Begriff damit inhaltlich durchdrungen wird.

Neben der konkreten Handlung sind für das Verstehen neuer Begriffe Konstruktionen von elementarer Bedeutung, durch die die Eigenschaften eines Begriffs herausgearbeitet werden können. Ausgehend von einer Menge geometrischer Objekte und einem System von Beziehungen, werden durch Konstruktionen neue Objekte und Beziehungen hergestellt. Bereits durch Grundkonstruktionen, bei denen Figuren in der Ebene unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal ohne Messskala konstruiert werden, lassen sich neue Begriffe einführen, konstruktiv erwerben, charakterisieren, Zusammen-

[297] Vgl. VOLLRATH 1984: 216.
[298] Der *konstruktive* Begriffserwerb (auch als *operativer* Begriffserwerb bekannt) kann als die Lehre von Begriffen durch Handeln beschrieben werden. Das Konstruieren ist somit nicht auf das geometrische Zeichnen beschränkt, sondern beinhaltet all die handelnden Tätigkeiten, durch die ein Begriff erschlossen werden kann (vgl. FRANKE 2007: 109).
[299] Vgl. hierzu UFLIG 2013: 48; VOLLRATH/ROTH 2012: 233; WEIGAND et al. 2009: 125.
[300] Vgl. WEIGAND et al. 2009: 104.

hänge entdecken und Handlungsvorschriften begrifflich erfassen.[301] Gleichzeitig werden der Umgang mit den Werkzeugen sowie die zeichnerischen Fähigkeiten gefördert.

Zu den elementaren Grundkonstruktionen zählen das Abtragen von Strecken und das Antragen eines Winkels in einem Punkt an eine Gerade. Darauf aufbauend erfolgt die Konstruktion der Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden, die wiederum die Grundlage für die Konstruktion der Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb der Geraden, der Konstruktion einer Parallelen zu einer Geraden im vorgegebenen Abstand, dem Errichten der Senkrechten zu einer Geraden in einem Punkt der Geraden und dem Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade bilden. Diese Grundkonstruktionen sind ihrerseits die Basis für weitere, komplexere Konstruktionen.

Durch den konstruktiven Begriffserwerb wird sowohl Handlungswissen (prozedurales Wissen) als auch Sachwissen erworben, das dazu befähigt, Begriffe zu erzeugen und die hinter den Begriffen stehenden Eigenschaften zu benennen und voneinander abzugrenzen.[302] Konstruktionsbeschreibungen und das Beschreiben geometrischer Objekte tragen ebenfalls zum Aufbau einer angemessenen (Begriffs-)Vorstellung bei, die oft mit optischen Darstellungen und Handlungen verbunden wird. Durch sie werden Handlungen reflektiert, Lösungswege dokumentiert sowie die mathematische Fachsprache gebildet und angewandt. Zudem können so durchgeführte Konstruktionen zu einem späteren Zeitpunkt nachvollzogen werden.

3. Stufe: Das Integrierte Begriffsverständnis
Beim integrierten Begriffsverständnis werden Beziehungen zwischen den Eigenschaften hergestellt, Zusammenhänge zwischen diesen erkannt und Eigenschaften formal wiedergegeben, so dass schließlich darauf aufbauend Definitionen formuliert werden können.

Neben den Fähigkeiten, aktiv und mental zu operieren und geometrische Objekte und Begriffe zu beschreiben, steht die Entwicklung einer ganzheitlichen Vorstellung von Objekten im Fokus, durch die Objekte in ihrer Gesamtheit und unabhängig von ihrer Lage erfasst und wahrgenommen werden können. Um einen (geometrischen) Begriff in seiner ganzen Tragweite zu verstehen und Aufgaben- und Problemstellungen erfolgreich bearbeiten zu können, müssen neben der Begriffsvorstellung auch Kenntnisse über die hinter den

[301] Vgl. WEIGAND et al. 2009: 75.
[302] Vgl. FRANKE 2007: 109.

Begriffen stehenden Eigenschaften, die Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften sowie die Beziehungen zwischen verschiedenen Begriffen und darüber hinaus Fähigkeiten, die einen flexiblen Umgang und die Anwendung dieses Begriffswissens ermöglichen, erworben werden. Zu diesen Fähigkeiten gehören das Konstruieren, die Durchführung konkreter Berechnungen sowie das Problemlösen.[303]

4. Stufe: Das Formale Begriffsverständnis
Die vorletzte Stufe ist die des formalen Begriffsverständnisses, bei dem die verschiedenen Eigenschaften miteinander verknüpft werden, so dass mit den Begriffen operiert und sie zu einer komplexen Problemlösung herangezogen werden können.

Wurden die charakteristischen Merkmale eines Begriffs erfasst und können diese verbal formuliert werden, lassen sich darauf aufbauend Definitionen erarbeiten.[304]

5. Stufe: Das kritische Begriffsverständnis
Das kritische Begriffsverständnis stellt die höchste Stufe dar, die sich in der Fähigkeit zeigt, Definitionen und zu ihnen äquivalente Aussagen zu formulieren; diese Stufe des Begriffsverständnisses ist allerdings erst für die Oberstufe von Relevanz.

Mit Blick auf die Bedeutung dieses Wissens für die Ausbildung heuristischer Fähigkeiten sind zwei Aspekte zu betonen:

- Die Geometrie kann den Weg in die Welt der Heuristik weisen, aber nur wenn die begrifflichen Grundlagen tragfähig sind und so den sukzessiven Erwerb von heuristischen Techniken und Heurismen erlauben.
- Geometrische Grundelemente stellen als Teil der heuristischen Technik der graphischen Repräsentationsformen einen wichtigen Schlüssel für den Zugang zu vielen – keineswegs nur geometrischen – Problemstellungen dar.

Im Folgenden sollen die fachliche Beschreibung der Begriffsbildung und Grundkonstruktionen konkretisiert und die Schnittmengen zwischen mathematischen Inhalten und der Vermittlung heuristischer Techniken hergestellt werden; dabei wird der Fokus auf die Einführung der Grundbegriffe *senkrecht, parallel* und *Abstand* gelegt, die dann auch Gegenstand des ausführlich erläuterten IHiMU-Arrangements in Abschnitt 4 sein werden.

[303] Vgl. Weigand et al. 2009: 99-110.
[304] Vgl. Vollrath/Roth 2012: 235.

2. Darstellung in Schulbüchern

Die Grundbegriffe *senkrecht, parallel* und *Abstand* werden in den untersuchten Schulbüchern (siehe Kap. 6.3.1) vorwiegend über eine knappe Begriffsbeschreibung eingeführt, an deren Ende die zu erwerbenden Grundbegriffe definiert werden. Die Beschreibung sowie die Definitionen werden durch Abbildungen ergänzt, die entweder der Visualisierung dienen oder auch die praktische zeichnerische Umsetzung der Begriffe mit dem Geodreieck darstellen, wie das nachstehende Beispiel exemplarisch zeigt:

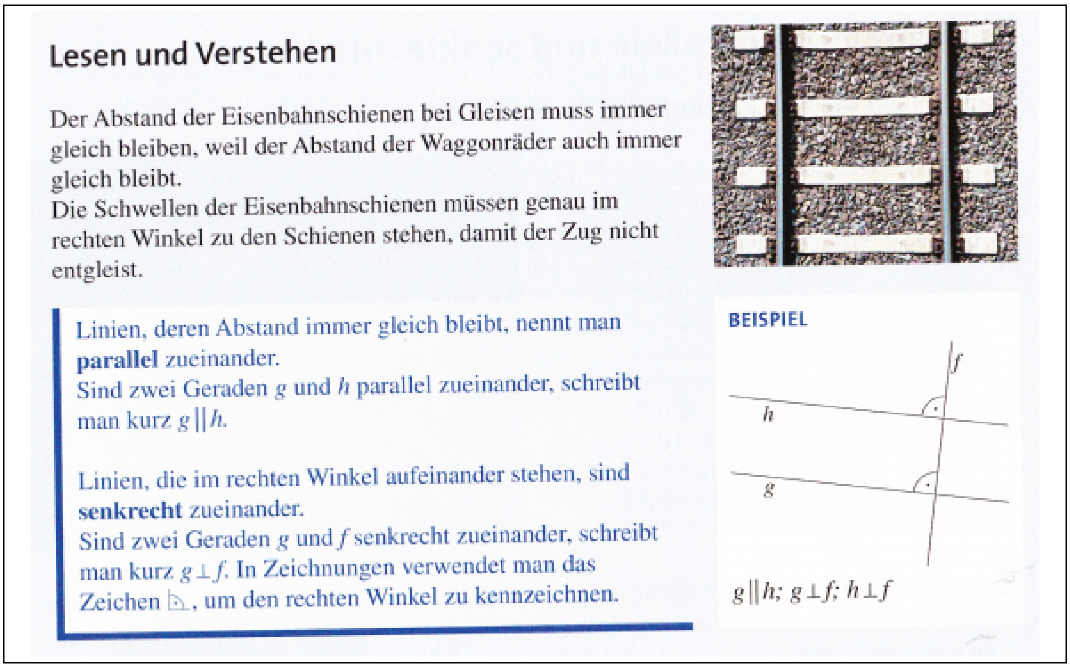


Abb. 15 Auszug aus einer Schulbuchseite zur Einführung der Grundbegriffe *senkrecht* und *parallel* (Zahlen und Größen 5, 2008:64).

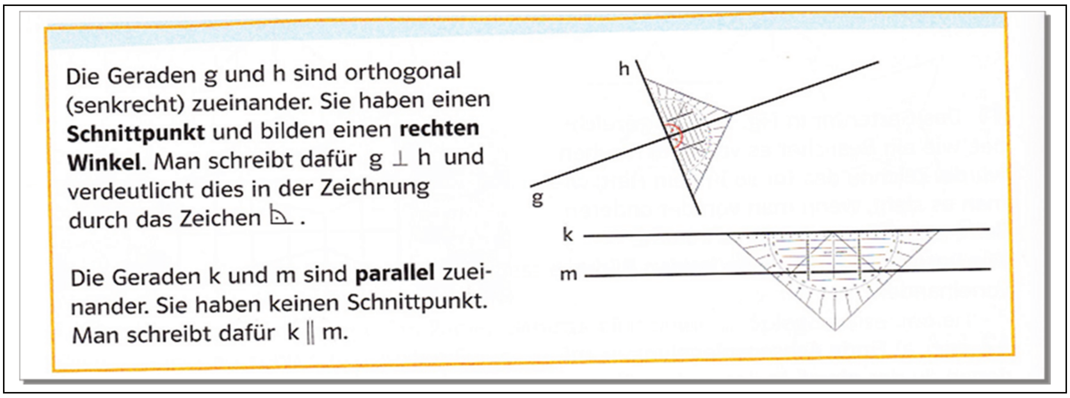
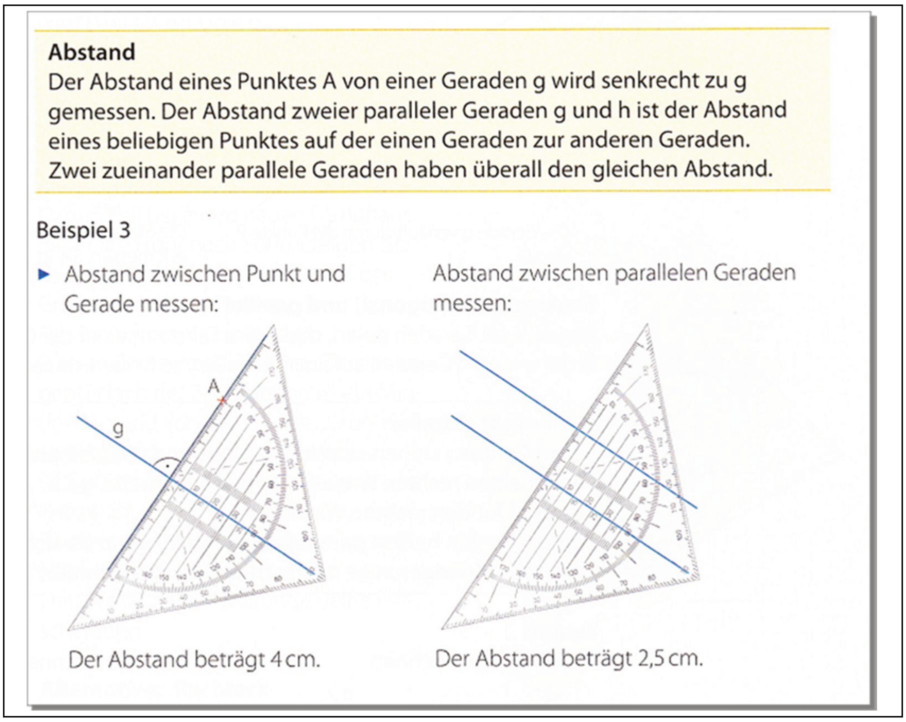


Abb. 16 Auszug aus einer Schulbuchseite zum Umgang mit dem Geodreieck (Lambacher Schweizer 5, 2009:54).

Bei der Einführung zur Abstandsmessung zeigt sich ein ähnliches Bild, bei dem die statische Präsentation als Messverfahren mit Hilfe des Geodreiecks überwiegt:



Abstand
Der Abstand eines Punktes A von einer Geraden g wird senkrecht zu g gemessen. Der Abstand zweier paralleler Geraden g und h ist der Abstand eines beliebigen Punktes auf der einen Geraden zur anderen Geraden.
Zwei zueinander parallele Geraden haben überall den gleichen Abstand.

Beispiel 3

▸ Abstand zwischen Punkt und Gerade messen:

Der Abstand beträgt 4 cm.

Abstand zwischen parallelen Geraden messen:

Der Abstand beträgt 2,5 cm.

Abb. 17 Auszug aus einer Schulbuchseite zur Einführung des Grundbegriffs Abstand (Fokus Mathematik 5, 2013: 108).

Es folgen in der Regel Übungs- und Anwendungsaufgaben, bei denen die Konstruktion und der Umgang mit dem Geodreieck sowie das Anwenden der zuvor kennengelernten Begriffe im Mittelpunkt stehen.

Die hier exemplarisch ausgewählten Schulbuchseiten zeigen, dass die Begriffe konstruktiv gebildet werden. Dabei wird von den Schülern erwartet, dass sie die Begriffe *senkrecht, parallel* und *Abstand* auf Basis einer Definition und losgelöst von jeder Kontexteinbettung durch Nachahmung einer im Bild schematisch dargestellten Handlung bilden, so dass die Konstruktionsbeispiele in erster Linie auf den korrekten Umgang mit dem Geodreieck hinführen. Ob damit das Ziel der Begriffsbildung, nämlich die hinter einem Begriff stehenden Merkmale und Eigenschaften zu verstehen und die Beziehungen und Verknüpfungen zwischen den Begriffen und ihren Eigenschaften herzustellen erreicht werden kann, ist fraglich.

Nachstehende Tabelle bietet einen vergleichenden Überblick über die Befunde in den hier betrachteten Schulbüchern:

	senkrecht		parallel		Abstand	
	Definition	Konstruktions-beschreibung und Abbildung	Definition	Konstruktions-beschreibung und Abbildung	Definition	Konstruktions-beschreibung und Abbildung
Elemente der Mathematik 5[305]	x	x	x	x	x	x
Fokus Mathematik 5	x	x	x	x	x	x
MatheNetz 5	x	x	x	x	x	x
Zahlen und Größen 5	x	x	x	x	x	x
Mathe live 5	x	x	x	x		
Lambacher Schweizer 5	x	x	x	x		
Mathe Neue Wege 5		x		x		

Tab. 27 Übersicht über Inhalte ausgewählter Schulbücher über die Einführung der Grundbegriffe *senkrecht*, *parallel* und *Abstand.*

3. Heuristische Analyse

Der konstruktive Begriffserwerb spielt auf dem Weg zu einem gesicherten Begriffsverständnis und -wissen eine entscheidende Rolle. Beim Handeln durch Nachahmen, wie es in den meisten Schulbüchern vollzogen wird, können erste Erfahrungen mit dem Begriff gesammelt und auch Eigenschaften entdeckt werden. Dem gegenüber steht das freie Handeln, bei dem ein Zielzustand durch *eigene* Handlungen und Überlegungen erreicht werden soll, d. h. es werden Objekte durch eigenes Ausprobieren konstruiert, so dass Erkenntnisse gewonnen, Zusammenhänge erkannt und Beziehungen hergestellt werden.[306]

Betrachtet man die Merkmale der heuristischen Technik *Erstellen Graphischer Repräsentationsformen* nach Krichel/Stiller (vgl. Kap. 5.5.1), so besteht eine offensichtliche Relation zum konstruktiven Begriffserwerb. Denn sowohl durch Konstruktionen als auch durch graphische Repräsentationsformen lassen sich mathematische Begriffe aus ihrer Abstraktion heraus lösen und „sichtbar“ machen, weshalb sie beide beim Aufbau von (Begriffs-) wissen eine wichtige Rolle spielen können. Nach dem Brunerschen EIS-

[305] Auf die exakte Quellenbezeichnung wird an dieser Stelle verzichtet; alle genauen Angaben zu den hier benannten Schulbüchern finden sich am Ende der Arbeit.
[306] Vgl. FRANKE 2007: 109.

Prinzip[307] stellen sie das ikonische Bindeglied zur voll abstrahierten Symbolmathematik dar. Durch eine Visualisierung mathematischer Grundbegriffe können die verschiedenen Aspekte des Objekts in den Vordergrund gerückt, Perspektiven eröffnet und neue Anknüpfungspunkte zu anderen Begriffen geliefert werden, so dass das Begriffsverständnis gefestigt wird. Gleichzeitig können wichtige Beziehungen zwischen den Angaben hergestellt und Zusammenhänge aufgezeigt oder entdeckt werden.

Während in der euklidischen Geometrie unter *Konstruieren* die exakte zeichnerische Darstellung einer Figur ausschließlich mit Hilfe von Zirkel und Lineal verstanden wird, sind bei der Erstellung graphischer Repräsentationsformen weitere Hilfsmittel wie ein Lineal mit Maßeinteilung, Winkelmesser oder ein Geodreieck erlaubt. Ebenso ist aber auch der Einsatz von Planfiguren bis hin zu Skizzen möglich, die deutlich weniger formalen Anforderungen genügen müssen und doch sicheres, (intuitives) geometrisches Wissen erfordern. Im Gegensatz zu der „reinen" Konstruktion mit Zirkel und Lineal stehen bei der Arbeit mit einer geeigneten graphischen Repräsentationsform zu einem gegebenen Sachverhalt die Ideenfindung und der kreative Umgang im Vordergrund; graphische Repräsentationen können in Konstruktionen bestehen, jedoch auch über diese hinausgehen und sind damit vielseitig und flexibel einsetzbar. Ein Vergleich und eine Bewertung verschiedener Darstellungsmöglichkeiten baut zudem das heuristische Metawissen aus, wenn der evaluative Aspekt berücksichtigt wird. Außerdem lassen sich durch graphische Darstellung Gedankengänge erfassen, die dann für die Lösung von Problemstellungen nutzbar gemacht werden können.[308]

Aus dieser Sicht ist es sinnvoll, die heuristische Technik *Graphische Repräsentationsformern erstellen* nach Krichel/Stiller in Auseinandersetzung mit der Begriffsbildung und den Grundkonstruktionen im Mathematikunterricht (einführend) zu thematisieren. Zwar kann die heuristische Technik nicht allein anhand dieses einen mathematischen Inhaltes umfassend erworben und in ihrer ganzen Tragweite erfasst werden, es wird jedoch deutlich, dass selbst im Anfangsunterricht der Sekundarstufe I eine Sensibilisierung für die Heuristik allgemein und für die heuristische Technik im Speziellen erfolgen kann. Dass Heurismen und die heuristischen Techniken ebenso wie die mathematischen Inhalte erst

[307] Auf Jerome Bruners Arbeiten zur Entwicklungspsychologie und Lernforschung wird in Band B vertiefend eingegangen. Er prägte den Dreischritt „enaktiv – ikonisch – symbolisch", der die kohärente mentale Repräsentation ermöglicht und damit das nachhaltige Lernen unterstützt.

[308] Vgl. KUNTZE 2013: 17 f.

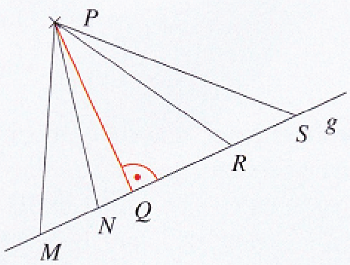
durch die fortgesetzte Auseinandersetzung und Anwendung in immer wieder neuen Sach- und Problemkontexten erworben und vertieft werden können, steht dabei außer Frage.

Welche Bedeutung die propädeutisch eingesetzte heuristische Technik *Graphische Repräsentationsformern erstellen* nach Krichel/Stiller in Zusammenhang mit der Begriffsbildung haben kann, soll nun exemplarisch anhand der Begriffe *senkrecht, parallel* und *Abstand* gezeigt werden.

4. IHiMU-Arrangement

Möchte man von Beginn an neben den mathematischen Grundbegriffen und (notwendigen) Konstruktionen auch den Umgang mit heuristischen Techniken und Heurismen fördern, kann dies wirkungsvoll über Forscheraufgaben (siehe Kap. 7.2.1) gelingen. Das nachfolgende Beispiel zeigt, wie der Abstandsbegriff in einem Schulbuch thematisiert wird.

Louis möchte auf dem Fußballplatz den kürzesten Abstand vom Elfmeterpunkt zur Torlinie finden. Die Situation kann man in einer Zeichnung abbilden.



Die kürzeste Verbindung von Punkt P zur Geraden g ist die Strecke $\overline{PQ}$. Sie ist senkrecht zur Geraden g.

Der **Abstand** eines Punktes zu einer Geraden kann ermittelt werden, indem man die Senkrechte zur Geraden durch den Punkt zeichnet und ihre Länge misst.

Abb. 18 Schulbuchseite zur Einführung des Grundbegriffes Abstand (Zahlen und Größe 5, 2008: 64).

Die in diesem Zusammenhang vorgestellte Handlung soll aufgegriffen und so adaptiert werden, dass sich die Begriffe *senkrecht, parallel* und *Abstand* als geometrische Inhalte einerseits und die heuristische Technik *Erstellen graphischer Repräsentationsformen* (einschließlich der Grundkonstruktionen) andererseits erwerben lassen. Ausgehend von der oben dargestellten Sachsituation wird die folgende Forscheraufgabe formuliert:

Forscheraufgabe

Die Fußballmannschaft des XY-Niederwesel bereitet sich auf ein wichtiges Spiel vor und trifft sich zum Training. Zum Training sind 8 Spieler und der Torwart erschienen. Die Spieler stellen sich zu Trainingsbeginn nebeneinander auf der Strafraumlinie auf. Der Torwart steht mittig auf der Torlinie im Tor.

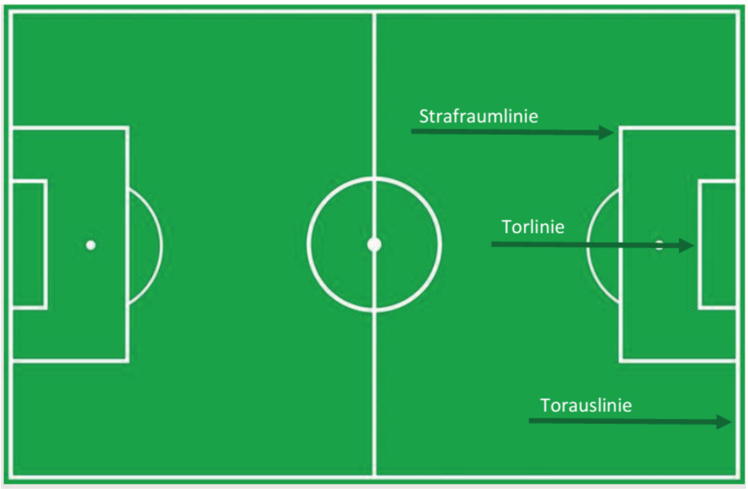


Abb. 19 Fußballfeld mit den wichtigsten Bezeichnungen als Arbeitsgrundlage.

1. *Markiere auf der linken Hälfte deines Spielfeldes die Position des Torwarts und die der 8 Spieler.*
2. *Beim heutigen Torwarttraining soll der Torwart möglichst viele Bälle halten. Dazu schießen die Spieler von ihrer Position aus nacheinander gezielt in Richtung des Torwarts.*
3. *Stelle die Situation in deiner Zeichnung graphisch dar, indem du die Schussbahn des Balles (vom Spieler bis zum Torwart) einzeichnest. Nutze dazu nur ein Lineal und einen Bleistift.*
4. *Welche Schussbahn ist die kürzeste, welches die längste? Notiere, wie du vorgegangen bist, um die Frage zu beantworten.*
5. *Wo muss/müsste der Spieler stehen, damit er die kürzeste Schussbahn zum Torwart hat? Wie gehst du vor, um die Frage zu beantworten? Zeichne die Position des Spielers ein. Welche Beobachtungen kannst du machen?*
6. *Vergleiche nun deine Ergebnisse mit deinem Nachbarn. Was fällt euch auf?*

7. *Betrachte nun die Torauslinie. Zeichne von jedem Spieler aus die kürzeste Verbindung zur Torauslinie. Nutze erneut nur ein Lineal und einen Bleistift. Wie gehst du vor? Was fällt dir auf?*
8. *Betrachte nun das Geodreieck und überlege: An welcher Stelle wäre das Geodreieck als Werkzeug besser geeignet gewesen als das Lineal? Begründe deine Antwort.*

Es wird angenommen, dass zum Zeitpunkt der Bearbeitung der vorstehenden Aufgabe die Begriffe Punkt, Strecke und deren Länge sowie Geraden bekannt sind.

Für die Auswahl eines solchen Forschungsszenarios spricht, dass man annehmen kann, dass die Mehrheit der Schüler mit dem geschilderten Sachverhalt vertraut ist und sich diesen (bildlich) vorstellen kann. Dennoch sollten vor Beginn der Bearbeitung Verständnisfragen geklärt und (Konstruktions-)Vereinbarungen getroffen werden. Um eine Realsituation im Rahmen der Modellbildung in ein Realmodell zu transformieren, wird aus den gegebenen Informationen eine problemstellungsbezogene Auswahl getroffen und die Realität vereinfacht dargestellt. So wird beispielsweise vereinbart, dass Einflüsse wie Luftwiderstand, Reibung und Gravitation unberücksichtigt bleiben und die potenziell parabelförmige Flugbahn des Balles in dem Modell als Gerade dargestellt wird.

Nach dieser Einführung erhalten die Schüler das Fußballfeld mit den wichtigsten Bezeichnungen als Arbeitsgrundlage.[309] Auf diese Weise lernen die Schüler zum einen, sich innerhalb einer graphischen Darstellung zu orientieren, wenn sie die Linienbezeichnungen auf die andere Spielfeldhälfte übertragen und für die weitere Bearbeitung nutzen. Zum anderen lernen sie, dass sich verbal gegebene Informationen und Begriffe (zunächst bezogen auf das Fußballfeld) graphisch darstellen lassen und dass durch diese Form der Visualisierung die hinter den Begriffen stehende Bedeutung und die damit verbundenen Eigenschaften, Vorschriften und Regeln buchstäblich vor Augen geführt werden können. Es ist damit zu rechnen, dass einige Schüler die Problemstellung erst schrittweise, parallel mit der visuellen Umsetzung wirklich erfassen werden – ein Aha-Effekt der für den Unterricht sehr gewinnbringend sein kann.

[309] Durch das Austeilen eines vorbereitete Spielfeldplans soll gewährleistet werden, dass alle Schüler die vorzunehmenden Konstruktionen auf der gleichen Grundlage und unter gleichen Bedingungen durchführen können und dass die Zeichnungen diejenigen Informationen enthält, die für die Begriffsbildung und -entwicklung notwendig sind. Gleichzeitig dient das Spielfeld neben der Dokumentation der eigenen Handlungsschritte zur Ergebnissicherung. Darüber hinaus wird so vermieden, dass Fragen nach der Darstellung der Flugbahn des Balls als Kurve o. ä. auftreten.

Die Schüler werden in einem ersten Arbeitsschritt dazu angeleitet, die vorliegende Sachsituation in einer Zeichnung darzustellen, diese also zu abstrahieren und damit auf die wesentlichen und für den weiteren Verlauf der Aufgabe notwendigen Elemente zu reduzieren. Die Schüler erfahren so gleich im praktischen Einsatz, dass die graphische Darstellung ein erster Schritt bei der Bearbeitung einer Forscheraufgabe sein kann. Außerdem werden auf der fachinhaltlichen Ebene erste einfache Konstruktionen mit dem Lineal durchgeführt und es wird an die bekannten Begriffe von Punkt, Gerade und Strecke produktiv angeknüpft. Die notwendigen Zeichnungen zunächst nur mit dem Lineal durchführen zu lassen, kann später helfen, die Vorteile und den Nutzen des Geodreiecks als Werkzeug hervorzuheben.

Die hier beschriebene Vorgehensweise weist viele typische Elemente der ersten Phase des Problemlöseprozesses nach Pólya auf, in der die heuristischen Techniken allgemein – und in dem vorliegenden Fall die Erstellung einer graphischen Repräsentationsform im Speziellen – dazu beitragen, ein verbal gegebenes Problem zu abstrahieren und den Mathematisierungsprozess in Gang zu setzen.

Für leistungsschwache Schüler kann, unter Nutzung des Forscherhefts (siehe Kap. 7.2.2) eine Differenzierung erfolgen, indem erweiterte Hilfestellungen zur Erstellung der Zeichnung gegeben werden. Ein solcher Tipp könnte wie folgt lauten: *Stell dir vor, du beobachtest das Geschehen aus der Luft. Wo stehen die Spieler, wo steht der Torwart? Kennzeichne die Personen durch einen Punkt.*

Durch die Dokumentation ihrer Überlegungen und Vorgehensweise sollen die Schüler lernen, ihre einzelnen Handlungsschritte unter zunehmender Verwendung der mathematischen Fachsprache verbal zu formulieren und zu reflektieren. Gleichzeitig wird das neue Wissen vernetzt, indem die Aufgabe unmittelbar an das Vorwissen der Schüler anknüpft, da Kenntnisse über die hinter den mathematischen Fachbegriffen stehenden Konzepte von Punkt, Strecke und Gerade für diese Forscheraufgabe notwendig sind. Des Weiteren erwerben die Schüler erste Kenntnisse über das Anfertigen einer Konstruktionsbeschreibung, wie sie auch in anderen Bereichen und Fächern von elementarer Bedeutung sind.

Während in der ersten Arbeitsphase die Konstruktion mit dem Lineal, das Abstraktionsvermögen sowie der Einsatz der mathematischen Fachsprache im Mittelpunkt stehen, sollen die Schüler in der zweiten Phase durch Ausprobieren und Experimentieren Ergebnisse sammeln und weiterführende Entdeckungen machen.

Der Vergleich der Längen der verschiedenen Schussbahnen s_i, die durch die Strecke zwischen Standort S_i des Spieler und Standort T des Torwarts gegeben sind, führt zu der Erkenntnis, dass diese – bei unveränderter Position des Torwarts – umso größer ist, je weiter sich der Standpunkt S des Spieler links oder rechts auf der Strafraumlinie *st* befindet (siehe Abb. 20).

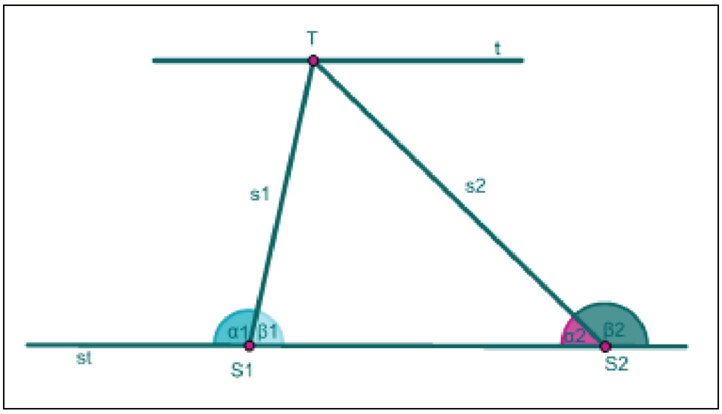


Abb. 20 Graphische Darstellung der aus der Schussbahnlinie s_i resultierenden Winkelfeldern mit den Scheitel S_1 und S_2 und den Schenkeln *st* und s_1 bzw. s_2.

Eine weitere mögliche Entdeckung, die auf Grundlage der Zeichnung gemacht werden kann, ist die, dass die Winkelfelder, welche von der Schussbahnlinie s_i und der Torlinie t eingeschlossen werden, je nach Standpunkt S_i der Spieler variiert. Darüber hinaus kann ein Zusammenhang zwischen dem Winkel α bzw. β und der Länge der Schussbahn si und/oder der Position Si des Spielers und dem Winkel α bzw. β hergestellt werden. Auch wenn der Winkelbegriff zu diesem Zeitpunkt noch nicht ausführlicher Unterrichtsgegenstand war, so kann dieser doch als entscheidendes Kriterium für die Länge der Flugbahn und damit für die Entfernung zwischen Spieler und Torwart wahrgenommen und erkannt werden. 217

Unmittelbar anknüpfend kann die Frage beantwortet werden, welche Position der Spieler mit der kürzesten Entfernung zum Torwart einnehmen muss: er muss so positioniert werden, dass die Winkelfelder links und rechts von der Schussbahnlinie s_i kongruent zueinander, α und β somit gleich groß sind und die Verbindungsgerade $\overline{S_iT}$ damit *senkrecht* auf die Torlinie t trifft (siehe Abb. 21). Die Verbindungsstrecke $\overline{S_iT}$ ist die Lotgerade ℓ von T auf *st* mit dem Lotfußpunkt $L = S_i$. Der Spieler steht damit dem Torwart T genau gegenüber. Der Vergleich mit dem Nachbarn zeigt, dass auch anders gewählte Positionen der Spieler schließlich zu dem gleichen Ergebnis führen,

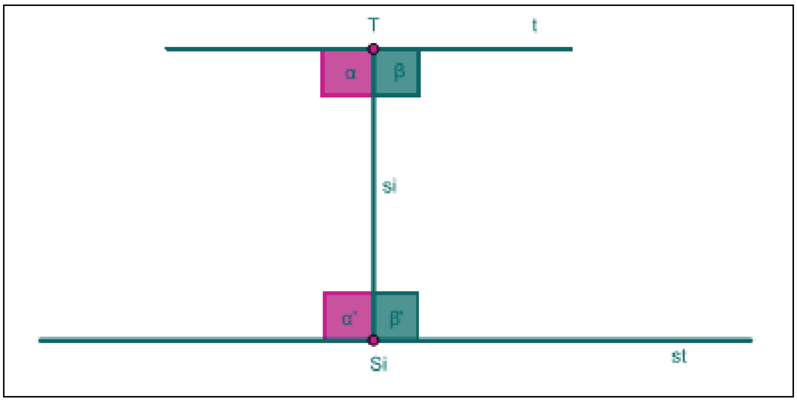


Abb. 21 Graphische Darstellung der Lotgeraden ℓ von T auf st mit dem Lotfußpunkt $L = S_i$.

und kann dazu dienen, die eigenen Vermutungen zu untermauern, zu diskutieren und gegebenenfalls auch zu verteidigen.

Die letztgenannte Problemstellung verfolgt zwei Ziele: zum einen sollen durch sie der *Abstand* eines Punktes P zu einer Geraden g bestimmt werden, so dass darauf aufbauend die Begriffe *senkrecht* und *parallel* thematisiert werden können. Zum anderen sollen hier der die Bedeutung des Geodreiecks und der Umgang mit ihm thematisiert werden. Die Schüler haben in den vorangegangenen Arbeitsaufträgen herausgefunden, dass die kürzeste Schussbahn von dem Spieler ausgeht, der dem Torwart genau gegenüber steht. Das Einzeichnen der Lotgeraden ℓ_i vom Spieler S_i zur Torauslinie *ta* zeigen, dass das Lineal zwar die Funktion eines Zeicheninstruments erfüllt, zum Einzeichnen der Lotgeraden jedoch nur bedingt geeignet ist.

An dieser Stelle kann das Geodreieck eingeführt und der richtige Umgang mit diesem Werkzeug thematisiert werden, indem die kürzeste Verbindung zwischen jedem Spieler und Torauslinie mit Hilfe des Geodreiecks eingezeichnet wird. Durch diese Konstruktionen rückt schließlich der Begriff der *Parallelität* in den Mittelpunkt der Betrachtung, der aus dem Zusammenspiel von Strafraumlinie *st*, Torauslinie *ta* und der Lotgeraden ℓ, die von jedem Spieler aus auf die Torauslinie gefällt wurde, ersichtlich wird (siehe Abb. 22).

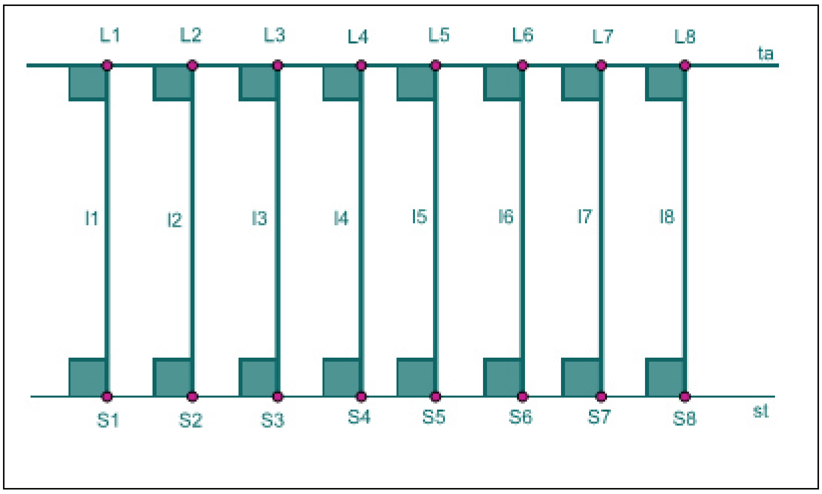


Abb. 22 Graphische Darstellung der Lotgeraden ℓ von S_i auf *ta* mit dem Lotfußpunkt L_i..

Das Anschauungsbeispiel hat gezeigt, dass durch die Nutzung graphischer Repräsentationsformen in Verbindung mit einer Forscheraufgabe, geometrische Begriffe nicht nur gelernt, sondern auch in ihrer Funktion und mit ihren charakteristischen Eigenschaften entwickelt und gebildet werden können. Durch die Möglichkeiten der eigenen konstruktiven Aktivität – statt einer bloßen Nachahmung – können Zusammenhänge sichtbar gemacht, aus bekanntem Wissen neues erzeugt, Beziehungen zwischen den Begriffen hergestellt und diese voneinander abgegrenzt werden, so dass eine langfristige Begriffsbildung und damit ein vernetzter Wissenserwerb ermöglicht werden.

Die in Auseinandersetzung mit der Bearbeitung der Forscheraufgabe gewonnenen Erkenntnisse werden abschließend in der Problemlösebox (vgl. Kap. 7.2) festgehalten; sie stehen jederzeit zur Nutzung zur Verfügung und können kontinuierlich ergänzt werden. So kann auf Grundlage der im Rahmen dieser Forscheraufgabe gewonnenen Erkenntnis zum Beispiel der Winkelbegriff zu einem späteren Zeitpunkt aufgegriffen und vertieft werden.

7.3.2 Der Symmetriebegriff

Nachdem bis zum Ende der Jahrgangsstufe 4 der Symmetriebegriff auf einer intuitiven Ebene entwickelt und die Eigenschaften der Achsenspiegelung erarbeitet sowie Muster ergänzt, nachgezeichnet, verglichen und beschrieben wurden (vgl. Kap. 6.1.7), wird dieses Thema in der Orientierungsstufe vertieft. Bis zum Ende der Jahrgangsstufe 6 sollen die Schüler nach dem Lehrplan Nordrhein-Westfalen für das Gymnasium die Grundbegriffe *achsensymmetrisch* und *punktsymmetrisch* kennen und zur Beschreibung ebener und räumlicher Figuren nutzen und Muster zeichnen können.[310] Das Auffinden von Symmetrien, die Herstellung[311] und Konstruktion[312] symmetrischer Figuren sowie die Beschreibung ebener und räumlicher Figuren unter Verwendung der Begriffe Punkt- und Achsensymmetrie steht dabei unterrichtlich im Vordergrund.

1. Geometrische Inhalte

Symmetrien begegnen uns in allen Lebensbereichen und spielen in unserem Alltag eine wichtige Rolle. Symmetrische Objekte werden aufgrund ihrer Struktureigenschaften intuitiv als schön und ästhetisch empfunden und können schneller erfasst, gespeichert und analysiert werden. Symmetrische Gegenstände weisen zudem eine hohe Funktionalität und Stabilität[313] auf und genügen somit oft auch praktischen Anforderungen in besonderem Maße.[314]

---

[310] Vgl. NORDRHEIN-WESTFALEN 2007a: 22.
[311] Die Herstellung symmetrischer Figuren beinhaltet das Falten und Scheiden und vollzieht sich auf enaktiver Ebene.
[312] Die Konstruktionen beschränken sich dabei auf das Ergänzen vorgegebener Teilfiguren zu einer achsensymmetrischen Figur oder dem Einzeichnen von Symmetrieachsen.
[313] Als Beispiel kann ein Papierflieger angeführt werden, der nur dann gut fliegt, wenn beide Seiten übereinstimmen. Ebenso ist die Funktionalität und Stabilität eines Tisches eingeschränkt, wenn ein Bein kürzer ist als die anderen.

Gemäß dem Stufenmodell nach Vollrath (siehe Kap. 7.3.1) wird in der Grundschule das Begriffswissen zunächst auf intuitiver Ebene erworben, das in der Sekundarstufe I dann vertieft und zu einem inhaltlichen Begriffsverständnis erweitert wird, ehe es schließlich in der Sekundarstufe II formal durchdrungen wird. Bezogen auf den Symmetriebegriff erfolgt die Begriffsentwicklung in der Grundschule und zu Beginn der Sekundarstufe I über die Suche nach Symmetrien in Umwelt, Natur, Kunst und Technik, durch das selbständige (und enaktive) Herstellen symmetrischer Figuren durch Spiegeln, Schnitt- und Faltübungen sowie durch das Aufspüren von Symmetrieachsen in gegebenen ebenen Figuren. Um den Symmetriebegriff inhaltlich zu durchdringen müssen daran anschließend die charakteristischen Eigenschaften von spiegel-, dreh- oder verschiebungssymmetrischen Figuren erkannt und zueinander in Beziehung gesetzt werden, so dass darauf aufbauend symmetrische Figuren als solche identifiziert und eigene Figuren konstruiert werden können. Damit ein flexibler Umgang des Begriffswissens möglich ist, müssen Beziehungen zwischen den Eigenschaften hergestellt und Zusammenhänge zwischen diesen erkannt werden, so dass eine ganzheitliche Vorstellung des Symmetriebegriffs entsteht. Im unterrichtlichen Kontext werden dazu Figuren hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften klassifiziert und der Zusammenhang zwischen Kongruenzen und Symmetrien erarbeitet, was zur Entwicklung eines integrierten Begriffsverständnisses führt.[315]

Mathematisch gesehen geht es bei Symmetriebetrachtungen ebener Figuren um die Untersuchung des Verhaltens geometrischer Figuren bei bestimmten bijektiven Abbildungen in der Ebene.[316] Diesbezüglich lassen sich Figuren nach bestimmten Eigenschaften ordnen und klassifizieren, Begriffe definieren und Konstruktionen durchführen. Der Symmetriebegriff zeichnet sich durch einen hohen Aspektreichtum aus, der formale, algebraische, ästhetische, ökonomisch-technische und arithmetische Aspekte unter sich vereint.[317] Darüber hinaus besitzen Symmetrien einen engen Alltagsbezug, ermöglichen besonders auf der enaktiven und ikonischen Ebene verschiedene Arten des Zugangs[318] und weisen zudem

[314] Vgl. Franke 2007: 218.
[315] Vgl. Weigand et.al.2009: 192-194.
[316] Ausführlich hierzu s. Scheid/Schwarz 2017: 137.
[317] Vgl. Winter 1976: 16.
[318] Zugänge zur Achsensymmetrie können auf intuitiver Ebene über das Falten, Legen, Schneiden, Bauen, Zeichnen oder Spiegeln erfolgen.

einen hohen inneren Beziehungsreichtum auf[319], weswegen sie als eine fundamentale Idee des Geometrieunterrichts gesehen werden können.[320]

Man spricht von einer symmetrischen Figur, wenn es neben der identischen Abbildung *id* mindestens eine weitere Kongruenzabbildung gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird. Die Symmetrie ist damit eine *Eigenschaft* geometrischer Figuren. In der Sekundarstufe I werden die Faltübungen oder praktischen Spiegelungen durch Konstruktionen mit dem Geodreieck – später auch mit Zirkel und Lineal – abgelöst. Auf diese Weise können symmetrische Figuren sowohl erzeugt als auch Figuren auf Symmetrieeigenschaften hin untersucht werden. Dieser aktiv-konstruktive Umgang erlaubt es, den Symmetriebegriff selbst zu erschließen und den Begriff der Kongruenzabbildung zu erarbeiten.

Ist die Symmetrie als eine Eigenschaft von Figuren auf enaktiver Ebene begriffen und erfasst, können darauf aufbauend die Merkmale einer Achsenspiegelung erarbeitet und die Achsenspiegelung auch konstruktiv durchgeführt werden – wodurch der Aspekt der Kongruenzabbildung in den Fokus rückt.[321] Eine geometrische Abbildung, die zueinander kongruente Figuren in der Ebene aufeinander abbildet, nennt man Kongruenzabbildung. Den unterschiedlichen Kongruenzabbildungen entsprechend werden – in der Orientierungsstufe in aller Regel – zwei Arten von Spiegelungen unterschieden: die *Achsenspiegelung* und die *Punktspiegelung*. Da alle übrigen Kongruenzabbildungen (Drehung, Verschiebung und Schubspiegelung) durch eine Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen erzeugt werden können,[322] kann die Achsenspiegelung als fundamental bezeichnet werden. Aus diesem Grund soll die Achsenspiegelung im Folgenden beschrieben und im Rahmen des IHiMU-Arrangements näher beleuchtet werden.

Achsenspiegelung

Eine Achsenspiegelung an der Spiegelachse g ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P‘ zuordnet und die durch folgende Bedingungen festgelegt ist:

---

[319] Vgl. WINTER 1976: 15.
[320] Vgl. SCHWILL 1993: 20 f.
[321] Vgl. WEIGAND et.al. 2009: 198 f.
[322] Vgl. WEIGAND et.al. 2009: 189.

1. Punkte, die auf der Spiegelachse g liegen, werden auf sich selbst abgebildet, so dass für alle $P \in g$ gilt $P' = P$.[323]

2. Für alle Punkte, die nicht Element der Spiegelachse g sind, ist g die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt: Für alle $P \notin g$ gilt $g \perp \overline{PP'}$.

Achsenspiegelungen sind unter anderem[324] winkeltreu, geradentreu und längentreu[325] und der Umlaufsinn kehrt sich um[326] (siehe Abb. 23).

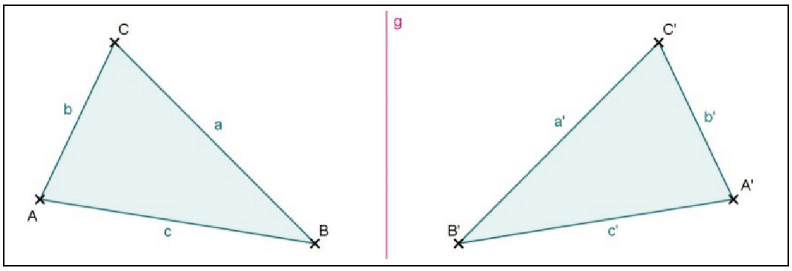


Abb. 23 Achsenspiegelung an der Spiegelachse g.

Doppelspiegelung

Die Verkettung zweier Achsenspiegelungen an den Spiegelachsen g und h ergibt je nach Lage von g und h entweder eine Verschiebung oder eine Drehung. Sind die Spiegelachsen g und h parallel, so lässt sich die Doppelspiegelung - zunächst an g und danach an h - durch eine Verschiebung rechtwinklig zu g und um das Doppelte des Abstandes von g zu h, gemessen von h nach g beschreiben.[327] Dabei legt die Reihenfolge der Achsenspiegelungen

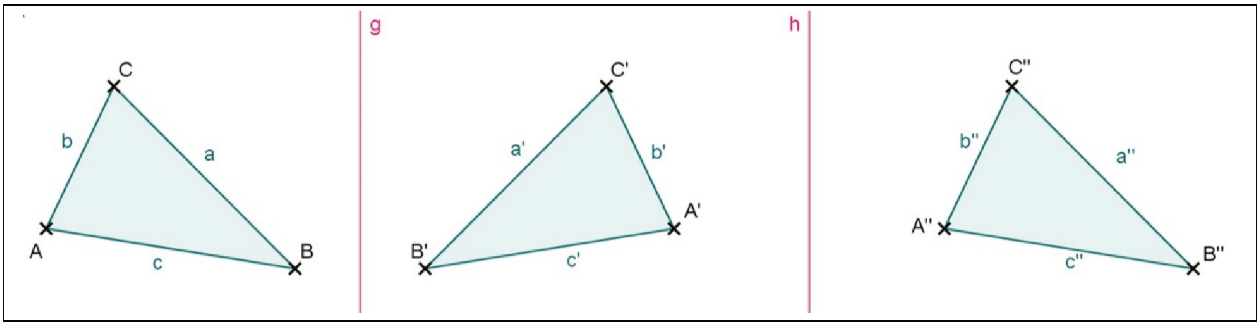


Abb. 24 Verkettung zweier Achsenspiegelungen an den zueinander parallelen Spiegelachsen g und h.

[323] Ein Punkt P heißt Fixpunkt, wenn der Punkt P des Urbildes mit dem Punkt P‘ des Bildes zusammenfallen (vgl. MÜLLER-PHILIPP/GORSKI 2012: 102).
[324] Vgl. hierzu SCHEID/SCHWARZ 2017:166-169.
[325] Ausführlich hierzu siehe SCHEID/SCHWARZ 2017: 125-127.
[326] Ist der Umlaufsinn beider Figuren umgekehrt bedeutet dies, dass entsprechende Ecken in der einen Figur im Uhrzeigersinn (negativer Umlaufsinn) aufeinanderfolgen und in der anderen Figur entgegen dem Uhrzeigersinn (positiver Umlaufsinn). Der Umlaufsinn wird auch als Drehsinn oder Orientierung bezeichnet.
[327] Vgl. SCHEID/SCHWARZ 2017: 128.

die Richtung der Verschiebung fest, so dass die Durchführungen nicht vertauschbar sind. Der Umlaufsinn von Urbild und Bild bleibt erhalten (siehe Abb. 24).

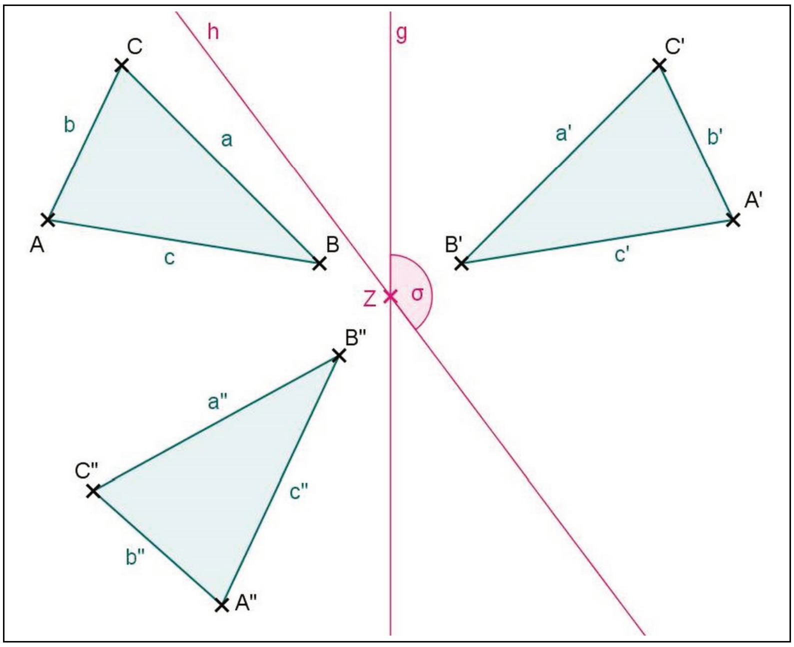


Abb. 25 Verkettung zweier Achsenspiegelungen an den Spiegelachsen g und h, die im Winkel σ aufeinander treffen.

Schneiden sich die Spiegelachsen g und h in einem Punkt Z im Winkel σ, so lässt sich die Doppelspiegelung als eine Drehung um den Drehpunkt Z gegen den Uhrzeigersinn mit einem Drehwinkel von 2σ beschreiben (siehe Abb. 25).

Liegen die beiden Spiegelachsen orthogonal zueinander, so ist die Doppelspiegelung eine Drehung um den Drehpunkt Z mit einem Drehwinkel von 180°.[328] Eine solche Drehung um 180° um das Drehzentrum Z wird auch Punktspiegelung genannt (siehe Abb. 26).

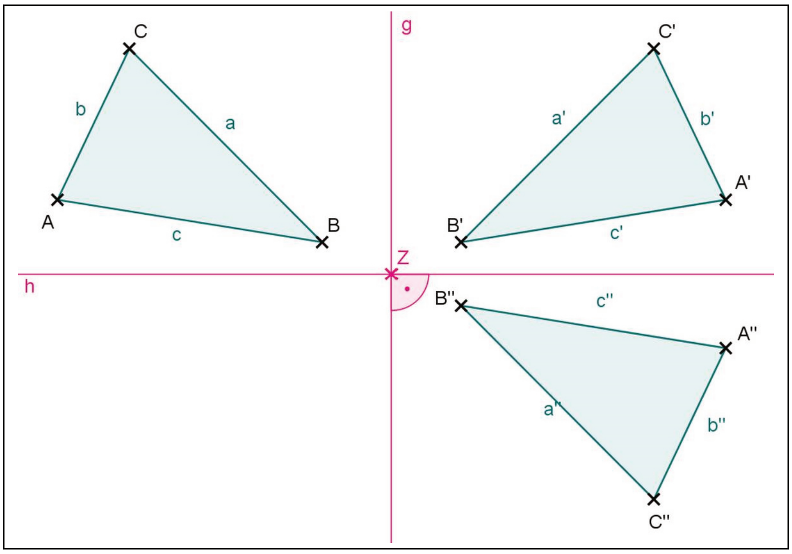


Abb. 26 Verkettung zweier Achsenspiegelungen zu 180°-Drehung.

[328] Vgl. Scheid/Schwarz 2017: 129.

Muster

Muster bilden eine Einheit und sind durch symmetrische Grundstrukturen geprägt, die unter anderem durch Kongruenzabbildungen beschrieben werden können. Durch das Auffinden dieser Strukturen innerhalb eines Musters können Verallgemeinerungen formuliert, Beziehungen zwischen den Elementen erkannt, Vorhersagen getroffen, Lösungen gefunden und Regeln und Gesetzmäßigkeiten erfasst werden.[329] Um Muster zu erfinden, nachzulegen oder fortzusetzen, müssen also die inneren Strukturen des Musters erfasst, Beziehungen hergestellt und Gesetzmäßigkeiten erkannt werden, wodurch die Fähigkeiten des Sortierens, Ordnens, Vergleichens und Verallgemeinerns gefördert und neues Wissen aufgebaut werden. Erklärtes Ziel des derzeitigen Mathematikunterrichts ist es, mit Hilfe von Mustern das Symmetrieverständnis zu erweitern, das geometrische Vorstellungsvermögen sowie das visuelle Wahrnehmungsvermögen zu schulen, die Kreativität anzuregen, den Umgang der mathematischen Fachsprache zu vertiefen und geometrische Grundfertigkeiten durch den Umgang mit mathematischen Werkzeugen zu fördern.[330] Aus diesem Anspruch heraus werden Muster und Strukturen den Kern der nachfolgenden heuristischen Analyse bilden.

2. Darstellung in Schulbüchern

In den untersuchten Schulbüchern erfolgt die Einführung des Symmetriebegriffs in der Regel über symmetrische Abbildungen aus Natur und Umwelt, denen eine Schritt-für-Schritt-Anleitung (vgl. Kap. 7.3.1) zur produktiven Herstellung symmetrischer Figuren folgt. Durch erste Schneide- und Faltübungen werden in einigen Lehrwerken die wesentlichen Eigenschaften des Symmetriebegriffs erfasst und Begriffe aus der Handlung heraus entwickelt. Daran schließt der konstruktive Begriffserwerb an, indem vorgegebene Figuren zu einer achsen- oder punktsymmetrischen Figur ergänzt und Symmetrieachsen in Abbildungen eingezeichnet werden. Trotz augenfälliger Übereinstimmungen zwischen den Darstellungen in unterschiedlichen Lehrwerken sind große Unterschiede in der Schwerpunktsetzung und Ausarbeitung innerhalb des Themas festzustellen:

In *Elemente der Mathematik 5* ist die Achsensymmetrie zunächst für ein Selbststudium vorgesehen, in dem die Begriffe *Achsensymmetrie* und *Symmetrieachse* definiert werden.[331] In Jahrgangsstufe 6 wird der Symmetriebegriff dann eingehend behandelt. Neben der

[329] Vgl. LÜKEN 2012: 81.
[330] Vgl. LÜKEN 2012: 82-86.
[331] Vgl. Elemente der Mathematik 5, 2006: 157-159.

Achsen- und der Punktsymmetrie wird auch die Verschiebungssymmetrie umfassend thematisiert. Dabei werden die Begriffe der Achsen- und Punktsymmetrie sowie die Verschiebungssymmetrie ausführlich erläutert, und anhand zahlreicher Anwendungsaufgaben werden Figuren und Alltagsgegenstände auf ihre Symmetrieeigenschaften hin untersucht, und Figuren werden zu achsen- oder punktsymmetrischen Figuren ergänzt. Die Verschiebung wird am Beispiel der Bandornamente erläutert und vertieft. Ein Exkurs zur Arbeit mit Dynamischer Geometriesoftware in Zusammenhang mit der Achsensymmetrie rundet das Thema ab.[332]

Im *Fokus Mathematik 5* findet der Einstieg zur Achsen- und Punktsymmetrie über das Auffinden von Symmetrien in Flaggen und Buchstaben statt. Im Anschluss daran werden die Begriffe der Achsen- und Punktsymmetrie erläutert, definiert und die Konstruktion achsen- und punktsymmetrischer Figuren wird anschaulich dargestellt und beschrieben. Durch zahlreiche Aufgaben wird das dort erworbene Wissen angewandt und vertieft.[333] Unter der Überschrift *Symmetrien durch Schneiden entdecken* wird in der Jahrgangsstufe 6 erneut an das Thema angeknüpft. Hier liegt der Fokus auf dem Begriff der Symmetrieebene, der über das Aufspüren von Symmetrien in dreidimensionalen Objekten (Körpern) eingeführt wird.[334]

In *MatheNetz 5* werden unter der Überschrift *Auffällig schön* die Begriffe Symmetrieachse, achsensymmetrisch, Symmetriezentrum und drehsymmetrisch kurz thematisiert. Dabei steht der ästhetische Aspekt im Mittelpunkt der Betrachtung, so dass Bilder und Objekte aus Natur und Umwelt auf ihre Symmetrieeigenschaften hin untersucht werden sollen. Eine Definition der Begriffe oder eine Konstruktionsbeschreibung findet man nicht.[335] In *MatheNetz 6* wird das Thema *Symmetrie* unter der Kapitelüberschrift *Schablonenhaft - Muster mit Symmetrien* thematisiert, die Begriffe Kongruenzabbildung, Verschiebung und Drehung werden eingeführt und erläutert. Nach einem umfassenden Aufgabenteil werden Achsen- und Punktsymmetrie eingeführt. Neben einer ausführlichen Konstruktionsbeschreibung achsen- sowie punktsymmetrischer Figuren werden die zuvor erworbenen

---

[332] Vgl. Elemente der Mathematik 6, 2013: 62-65.
[333] Vgl. Fokus Mathematik 5, 2013: 122-131.
[334] Vgl. Fokus Mathematik 6, 2006: 153-158.
[335] Vgl. MatheNetz 5, 2005: 133-136.

Kenntnisse über die Verschiebung und Drehung weiter vertieft. Den Abschluss dieser Einheit bildet erneut ein umfassender Aufgabenteil.[336]

Die Lehrwerksreihe *Zahlen und Größen* sieht die Achsen- und Punktsymmetrie erst für die Jahrgangsstufe 6 vor, wobei das Thema sehr ausführlich behandelt wird. Die Einheit bietet neben einer umfassenden Definition der Begriffe anschauliche Erläuterungen zur Konstruktion achsen- und punktsymmetrischer Figuren, auf die viele Anwendungsaufgaben folgen, ehe sie in einem allgemeinen Übungsteil endet.[337]

In *Mathe live* wird das Thema bereits in Jahrgangsstufe 5 ausführlich behandelt. Anhand von Blüten und Blättern werden die Begriffe der Achsen- und Punktspiegelung erläutert und entsprechende Figuren werden zu achsen- beziehungsweise punktsymmetrischen Figuren ergänzt. Nach einer kurzen Einführung der Bandornamente wird die Parallelverschiebung thematisiert, auf deren Grundlage eigene Bandornamente konstruiert werden.[338] In Jahrgangsstufe 6 werden unter der Überschrift *Achsensymmetrie* Mandalas und Kreismuster mit dem Zirkel konstruiert und die Achsen- und Punktsymmetrie wird erneut aufgegriffen und vertieft. Den Abschluss bilden komplexe, drehsymmetrische Zeichnungen.[339]

Im *Lambacher Schweizer 5* werden unter der Kapitelüberschrift *Symmetrie* die Achsen- und Punktsymmetrie, die orthogonalen und parallelen Geraden, die (ebenen) Figuren sowie die Koordinatensysteme gefasst. Den Einstieg bildet das Identifizieren von Symmetrien in der Umwelt. Daran anschließend wird der Begriff der Achsensymmetrie erläutert und es werden erste achsensymmetrische Figuren konstruiert und Figuren auf ihre Achsensymmetrie hin untersucht. In den nachfolgenden Kapiteln werden die orthogonalen und parallelen Geraden, die (ebenen) Figuren sowie die Koordinatensysteme thematisiert. Ein direkter Bezug zur Achsensymmetrie wird nur an einer Stelle in Verbindung mit den Symmetrieachsen eines Rechtecks hergestellt. Den Kapitelabschluss bildet die Punktsymmetrie. Neben der Konstruktion punktsymmetrischer Figuren findet man hier weitere Anknüpfungspunkte zu den vorangegangenen Kapiteln. So werden Figuren auf ihre Punkt-

[336] Vgl. MatheNetz 6, 2006: 118-126.
[337] Vgl. Zahlen und Größen 6, 2006: 199-208.
[338] Vgl. Mathe live 5, 2006: 121-140.
[339] Vgl. Mathe live 6, 2007: 73-82.

beziehungsweise Achsensymmetrie hin untersucht, und in einem Koordinatensystem dargestellte Figuren werden nach verschiedenen Gesichtspunkten gespiegelt.[340]

In *Mathe Neue Wege 5* unter dem Begriff der „Pflasterung“ die Flächenornamente und Bandornamente behandelt, ohne dass überhaupt auf den Symmetriebegriff eingegangen wird.[341] In Jahrgangsstufe 6 wird das Thema erneut aufgegriffen und vertieft. Den Anfang bilden die Spiegel- und Drehsymmetrien in der Ebene und im Raum, die kurz erläutert und anhand von Aufgaben konkretisiert werden. Dabei wird zunächst das Auffinden von Symmetrien in der Umwelt fokussiert. Im Anschluss wird die Achsensymmetrie vertieft, wobei der Schwerpunkt auf dem Einzeichnen der Spiegelachse liegt. Anschließend wird die Drehung erneut aufgegriffen und die Konstruktion drehsymmetrischer Figuren ergänzt. Der Begriff der Punktspiegelung wird dabei nur am Rande erwähnt und im weiteren Verlauf als Drehung um 180° aufgefasst. Den Abschluss bildet die Verschiebung, bei der die Konstruktion insbesondere von Bandornamenten und Parketten im Vordergrund steht.[342]

Die Schulbuchanalyse zeigt, dass bei der unterrichtlichen Behandlung des Themenbereichs der Symmetrie der konstruktive Begriffserwerb sowie das Auffinden von Symmetrien im Vordergrund stehen. Auf Muster wird nur in wenigen der untersuchten Schulbücher eingegangen, wobei dann der Fokus auf dem Konstruieren von Mustern, Mandalas, Bandornamenten und Parketten liegt. Damit wird das Potenzial der ganzheitlichen und integrierten Betrachtung von Symmetrien, einfachen und mehrfachen Achsenspiegelungen, Verschiebungen und Drehungen, die zu Mustergenerierung dienen, kaum genutzt, geschweige denn ausgeschöpft.

	Achsen-spiegelung	**Punkt-spiegelung**	**Drehung**	**Verschiebung**	**Symmetrien in Mustern**
Elemente der Mathematik 5[343]	x				
Elemente der Mathematik 6	x	x		x	x
Fokus Mathematik 5	x	x			
MatheNetz 6	x	x	x	x	x
Zahlen u. Größen 6	x	x			

340 Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 48-53.
341 Vgl. Mathe Neue Wege 5, 2005: 167-173.
342 Vgl. Mathe Neue Wege 6, 2007: 152-181.
343 Auf die exakte Quellenbezeichnung wird an dieser Stelle verzichtet; alle genauen Angaben zu den hier benannten Schulbüchern finden sich am Ende der Arbeit.

Mathe live 5 **Mathe live 6**	x x	x x	 x	x	x x
Lambacher Schweizer 5	x	x			
Mathe Neue Wege 6	x	(x)[344]	x	x	

Tab. 28 Übersicht über Inhalte ausgewählter Schulbücher bei der Einführung des Symmetriebegriffs.

3. Heuristische Analyse

Die Bildungsstandards für das Fach Mathematik benennen schon für die Primarstufe „Muster und Strukturen" als eine von insgesamt fünf mathematischen Leitideen, denen das Erkennen, Beschreiben und Darstellen von Gesetzmäßigkeiten als zu erwerbende inhaltsbezogene Kompetenzen zugeordnet werden, d. h. dass die Schüler „Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen, arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben [sollen]" (KMK 2005: 8 f.).

Muster werden aufgrund ihrer strukturellen Beschaffenheit schneller erfasst, prägen sich besser ein und können meist länger im Gedächtnis gespeichert und in der Regel detailgetreuer wiedergegeben werden als andere memorierte Objekte. Die Wahrnehmung von Mustern gehört zu den angeborenen, wenn auch individuell unterschiedlich stark ausgeprägten, Fähigkeiten des Menschen und erlaubt es uns, Regelmäßigkeiten, Wiederholungen, Ähnlichkeiten und Gesetzmäßigkeiten in einer Menge von Daten zu identifizieren. Die Mathematik wird heute vielfach als die Wissenschaft von Mustern und Strukturen bezeichnet (vgl. DEVLIN 2002, SCHWEDA 2014), so dass die Identifikation und Beschreibung von Mustern als eine elementare mathematische Tätigkeit gesehen werden kann.

Bei diesem Grundgedanken setzt der *Heurismus der Strukturnutzung* an: Das Auffinden von Strukturen – etwa in Form von Symmetrien, Harmonien oder Passungen – oder auch das bewusste Erzeugen von Mustern kann der Schlüssel sein, Zusammenhänge herzustellen, Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, diese zu beschreiben und in der Folge Entscheidungen zu treffen, die den Weg zur Problemlösung eröffnen. Durch die Auseinandersetzung mit dieser Idee auch auf geometrischer Ebene, die sich durch ihre Anschaulichkeit und die Möglichkeiten zur enaktiven Umsetzung in besonderem Maße eignet, üben die

[344] Der Begriff der Punktspiegelung wird nur am Rande erwähnt und im weiteren Verlauf als Drehung um 180° aufgefasst.

Schüler grundlegende mathematische Denk- und Arbeitsweisen, die auch für andere mathematische Teilgebiete produktiv genutzt werden können.

Die in Mustern besonders gut erkennbaren Strukturen lassen sich abbildungsgeometrisch durch Kongruenzabbildungen beschreiben.[345] Symmetrien können dabei als eine basale und niederschwellige Realisierungsform mathematischer Strukturen bezeichnet werden und eignen sich somit sehr gut, um den Weg in die komplexere Welt allgemeiner gefasster Strukturen auch jenseits der Anschaulichkeit ebener Geometrie zu weisen. Wer die abstrakte Idee einer Kongruenzabbildung im Allgemeinen auf Grundlage eines soliden Verständnisses zunächst der Achsensymmetrie und der zugrundeliegenden Kongruenzabbildung begreift, besitzt das Rüstzeug, um sich (nicht nur geometrischen) Problemstellungen mit analytischem Blick und auf der Suche nach strukturellen Auffälligkeiten bzw. Regelmäßigkeiten zu nähern und Ideen zu entwickeln, wie eine Aufschlüsselung mit Hilfe des *Heurismus der Strukturnutzung* (vgl. Kap. 5.5.2) gelingen könnte. Die Beschäftigung mit Mustern und Strukturen ist schließlich keineswegs allein auf die Geometrie beschränkt, sondern in nahezu allen Gebieten der Mathematik von elementarer Bedeutung.[346] Damit ist der *Heurismus der Strukturnutzung* eine fundamentale Idee des heuristisch orientierten Mathematikunterrichts.

Während beim *Heurismus der Strukturnutzung* das Auffinden oder Erzeugen von Strukturen fokussiert werden, so dass Regelmäßigkeiten erkannt und Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden können, kann der *Heurismus des systematischen Probierens* (Kap. 5.5.3) diesen Prozess optimieren, wenn er dazu dient, die vorliegenden Daten systematisch und damit zielgerichtet und strukturiert auf Muster und Strukturen hin zu analysieren. Ein systematisches Vorgehen zeigt sich in einem wohlüberlegten, logischen Vorgehen und stellt somit (im Idealfall) sicher, dass die Daten vollständig erfasst und berücksichtigt werden. Als Strukturierungshilfe kann die heuristische Technik *Anfertigen einer Tabelle* (Kap. 5.5.1) herangezogen werden, mit deren Hilfe Daten strukturiert und geordnet erfasst werden, so dass Aussagen getroffen und damit erste Anhaltspunkte für Lösungsideen entnommen werden können.

Das Thema Symmetrie eröffnet zudem Möglichkeiten, den Heurismus des Rückwärtsarbeitens (Kap. 5.5.3) zu behandeln, bei dem ein vorliegendes Problem von seinem End- zum Ausgangszustand hin betrachtet wird. Durch Nutzung dieses Heurismus können bei-

[345]Vgl. Franke 2007: 245.
[346]Vgl. Leuders 2016: v.

spielsweise das Verständnis über die hinter einem Begriff stehenden Eigenschaften überprüft, das Begriffswissen vertieft und Zusammenhänge zwischen Begriffen hergestellt werden.

4. IHiMU-Arrangement

In den untersuchten Schulbüchern steht, wie oben beschrieben, der konstruktive Begriffserwerb von Achsen- und Punktsymmetrie im Fokus.[347] Die Eigenschaften der Kongruenzabbildungen werden dabei in Form von Definitionen eingeführt.

Um den *Heurismus der Strukturnutzung* in Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand der Symmetrie zu thematisieren, gibt es verschiedene Vorgehensweisen und Anknüpfungspunkte. Ein möglicher und leicht umsetzbarer Ansatz wäre, die bisherige Vorgehensweise in den Schulbüchern zu erweitern, und statt ausgehend von einer Definition und einer bloßen Ergänzung vorgegebener Figuren zu einer achsen- oder punktsymmetrischen Figur auf Karopapier (vgl. *Mathe live 5*, *Fokus Mathematik 5*, *Lambacher Schweizer 5*) den Symmetriebegriff und die damit verbundenen Symmetrieeigenschaften über Forscheraufgaben selbst erarbeiten zu lassen. Unter der Voraussetzung, dass die Begriffe Abstand, parallel und senkrecht bekannt sind, wäre folgende Forscheraufgabe denkbar:

Forscheraufgaben

Sieh dir das nachfolgende Bild genau an und beschreibe, was du siehst.

Abb. 27 Fotografie einer sich spiegelnden Stadtsilhouette, von Kim Hansen/Slaunger.[348]

Das Foto zeigt eine Stadt, die am Wasser gelegen ist und in diesem gespiegelt wird. Durch die Wahl eines Fotos und eines sich spiegelnden Gegenstand wird ein unmittelbarer Bezug

[347] Einen vergleichbaren Befund erbrachte bereits die Untersuchung von Lehrwerken hinsichtlich der Grundbegriffe, vgl. Kap 7.3.1.
[348] (Eigenes Werk) [CC BY-SA 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons: https: //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6b/Viborg_by_night_2014-11-04_exposure_fused.jpg

zur Lebenswelt der Schüler geschaffen und an das Vorwissen der Schüler angeknüpft. Man darf davon ausgehen, dass zur Beschreibung des Fotos Begriffe wie „Spiegel", „Spiegelbild" oder auch „gespiegelt" gebraucht werden. Auf diese Weise wird ein direkter Zugang zum Themenbereich der Spiegelungen hergestellt und auch erste wichtige (Fach-)Begriffe eingeführt.

> *Betrachte die Stadt und wähle sechs Punkte[349] aus, markiere diese und kennzeichne sie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F. Überlege dir, wo die dazugehörigen Punkte im Spiegelbild liegen und kennzeichne diese entsprechend mit den Buchstaben A', B', C' D', E' und F'. Begründe deine Entscheidung.*

Die frühzeitige Einführung von Fachbegriffen soll die Kommunikation in dieser und den weiteren Unterrichtsstunden erleichtern. Mit der freien Punktewahl können die Schüler individuell für sie markante Stellen auswählen, so dass das Auffinden der Spiegelpunkte vereinfacht wird. Durch dieses Vorgehen erfahren die Schüler, dass Urbild und Bild die gleichen Merkmale aufweisen und einander in allen einzelnen Punkten symmetrisch entsprechen. Die Zuordnung der Buchstaben zu den Ur- und Bildpunkten soll noch einmal den Zusammenhang zwischen den beiden Bildern verdeutlichen und erleichtert zudem das weitere Arbeiten.

> *Suche auf dem Foto die Grenze zwischen Stadtbild und Spiegelbild. Welche Form hat diese Grenze? Zeichne sie mit einem geeigneten Werkzeug ein.*

> *Die Grenze zwischen dem originalen Stadtbild (Urbild) und dem Spiegelbild (Bild) wird auch Spiegelachse genannt. Hast du eine Idee, warum das so ist? Erläutere in eigenen Worten.*

Mit Hilfe solcher (und ähnlicher weiterer) Fragestellungen können praktisch alle neuen Fachbegriffe erarbeitet und die hinter den Begriffen stehenden Eigenschaften erfasst werden, so auch, dass die geradenförmige Spiegelachse Urbild und Bild voneinander so trennt, dass jedem Punkt P ein Bildpunkt P' zugeordnet wird, der dadurch bestimmt ist, dass die Verbindungsstrecke $\overline{\mathrm{PF}}$ von der Spiegelachse rechtwinklig halbiert wird.

---

[349] Die Anzahl der zu bestimmenden Punkte ist frei gewählt.

Verbinde jeden Punkt durch eine Strecke mit seinem Bildpunkt. Was fällt Dir auf?

Untersuche nun die Lage der Spiegelachse und der Verbindungsstrecken zueinander. Was stellst du fest? (Nutze dazu dein Geodreiecke.)

Durch das Einzeichnen der Verbindungsstrecke zwischen Urpunkt und Bildpunkt wird an das zuvor erworbene Wissen (Gerade, Strecke, Abstand, senkrecht, parallel) angeknüpft, das Begriffswissen vertieft und der richtige Umgang mit den Werkzeugen weiter eingeübt. Gleichzeitig werden durch das angeleitete, schrittweise Ergänzen der Abbildung Merkmale herausgearbeitet und damit Strukturen sichtbar. So kann der (wachsenden) Zeichnung entnommen werden, dass die Verbindungsstrecken senkrecht auf der Spiegelachse stehen und durch diese genau halbiert werden, dass also Punkt und Bildpunkt denselben Abstand von der Spiegelachse haben. Durch diese Vorgehensweise werden Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren weitgehend selbständig erforscht und erarbeitet, bekannte Begriffe in neuen Kontexten angewandt und neue Begriffe gebildet.[350]

Miss den Abstand von jedem Punkt bzw. Bildpunkt zur Spiegelachse und halte deine Ergebnisse in einer Tabelle fest. Was fällt dir auf?

Durch die Ergebnissammlung in einer Tabelle lassen sich ohne großen Aufwand der *Heurismus des systematischen Probierens* und die heuristische Technik der *Tabelle* einführen bzw. reaktivieren, durch die ein strukturiertes und systematisches Vorgehen begünstigt wird, auf deren Grundlage die gewonnenen Daten analysiert und zur Ergebnissicherung herangezogen werden können. Der Vergleich zeigt rasch, dass Urpunkt und Bildpunkt den gleichen Abstand zur Spiegelachse haben, womit also eine weitere Eigenschaft achsensymmetrischer Figuren erarbeitet wurde. Die Tabelle stellt zudem die Begriffe und die darin gefassten Eigenschaften von Urpunkt und Bildpunkt sowie von Strecke und Bildstrecke in einen direkten Zusammenhang, so dass die strukturellen Merkmale systematisch erfasst und verinnerlicht werden können. Durch dieses (eigenaktive) Erforschen achsensymmetrischer Objekte sollen die zugrundeliegenden Strukturen gezielt herausgearbeitet und damit sichtbar und bewusst gemacht werden, so dass Aussagen über die Eigenschaften des untersuchten Gegenstandes getroffen werden können.

[350] Diese Vorgehensweise knüpft an die heuristische Technik *Erstellen graphischer Repräsentationsformen* an, die im Rahmen der Begriffsbildung bereits thematisiert wurde. So besteht die Möglichkeit, die Technik noch einmal aufzugreifen, auch wenn an dieser Stelle der generative Aspekt des *Heurismus der Strukturnutzung* im Vordergrund stehen soll.

Um nun allgemeingültige Aussagen machen zu können ist es notwendig, aus den erkannten Strukturen und Zusammenhängen der Einstiegsaufgabe allgemeine Gesetzmäßigkeiten abzuleiten.[351] Dazu müssen weitere achsensymmetrische Figuren aus der Umwelt oder allgemeine Polygone erforscht werden, um die gewonnenen Erkenntnisse systematisch zu überprüfen.[352] Denkbar wäre im Rahmen des Forscherheftes[353] (vgl. Kap. 7.2.2) eine Sammlung verschiedener Abbildungen und damit verbundene Arbeitsaufträge. Durch die Wahl der Abbildungen und alternative Fragestellungen kann das Anforderungsniveau variiert werden, wie die nachfolgenden Beispiele verdeutlichen:

Inhalte der Problemlösebox und Merksatzbox erarbeiten

> *Betrachte folgende Abbildungen und markiere die Spiegelachse rot. Zeichne nun die Verbindungsstrecken zwischen jedem Punkt und seinem Bildpunkt ein. Halte die Ergebnisse in einer Tabelle fest. Was fällt dir auf?*

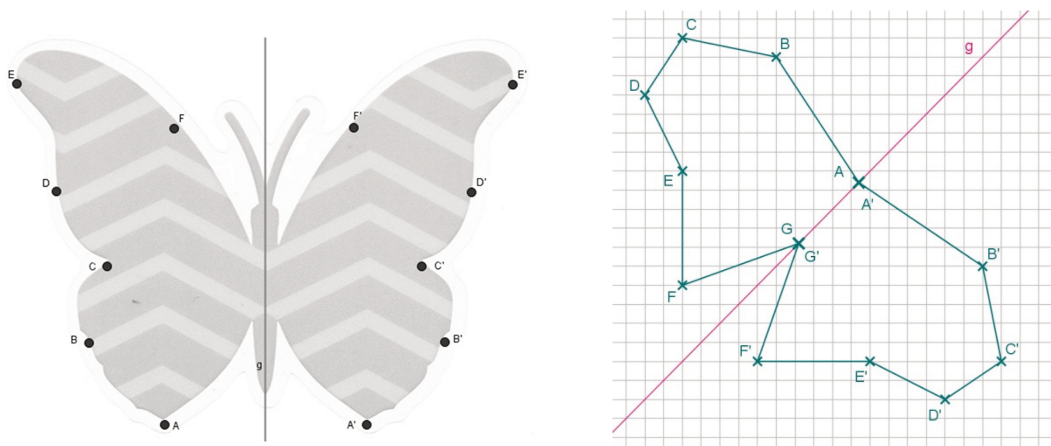


Abb. 28 Figuren mit eingezeichneten Urbild- und Bildpunkten sowie Spiegelachse g.

Diese Aufgabe ist eng an die Einstiegsaufgabe angelehnt. Durch die vertikale bzw. schräg eingezeichnete Spiegelachse wird deutlich, dass a) die Spiegelachse beliebig orientiert sein kann und b) die Verbindungsstrecken zwischen Punkt und Bildpunkt davon unabhängig immer senkrecht auf der Spiegelachse stehen. Zudem werden zuvor gebildete Begriffe auf-

---

[351] Um das weitere Vorgehen zu erleichtern, sollten notwendige Grundbegriffe in Zusammenhang mit der Einstiegsaufgabe eingeführt werden.
[352] Vgl. FRANKE 2007: 245.
[353] Durch die Arbeit mit dem Forscherheft wird das individuelle Vorgehen dokumentiert und kann zur späteren Reflexion sowie zur Ergebnissicherung herangezogen werden. Die Arbeit mit dem Forscherheft soll ein differenziertes Arbeiten ermöglichen, so dass davon auszugehen ist, dass leistungsstarke Schüler bestimmte Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten früher erkennen als andere Schüler und nicht alle Aufgabe gleichermaßen bearbeitet werden. Eine für alle Schüler verbindliche Ergebnissicherung findet auf Grundlage der Problemlösebox sowie der Merksatzbox statt.

gegriffen, so dass Begriffswissen gefordert und strukturelle Gemeinsamkeiten zur Ausgangsaufgabe hergestellt werden.

Benenne die vorgegebenen Urpunkte und Bildpunkte sinnvoll. Zeichne die Verbindungsstrecken zwischen Urpunkten und ihren Bildpunkten. Zeichne auch die Spiegelachse ein. Wie gehst du vor?[354] *Welche Hilfsmittel hast du verwendet? Begründe deine Auswahl.*

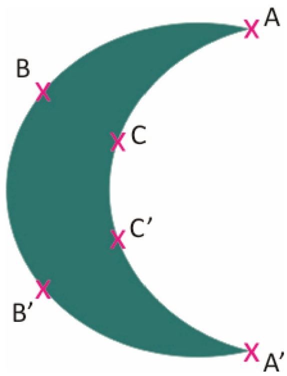


Abb. 29 Fotografie einer sich spiegelnden Wasserburg von Martin Toedtling.[355] **Achsensymmetrische Figur mit einigen eingezeichneten Punkten und Bildpunkten.**

Durch das Einzeichnen der Verbindungsstrecken zwischen Punkt und Bildpunkt wird noch einmal der Zusammenhang zwischen einander entsprechenden Punkten und ihrer Verbindungsstrecken zur Spiegelachse herausgearbeitet. Die Anordnung der Punkte lässt darüber hinaus eine wiederkehrende Struktur zu den vorausgegangenen Aufgaben erkennen.

Folgende Figuren sind achsensymmetrisch. Finde ihre Spiegelachsen und zeichne sie ein. Wie gehst du dabei vor? (Vergleiche mit deinem Partner, ob ihr gleich gearbeitet habt.)

[354] In allen vorgestellten IHiMU-Arrangements ist die Dokumentation im Forschertagebuch ein zentrales Element. Auf diese Weise werden nicht nur die einzelnen Handlungsschritte und Ergebnisse dokumentiert und gesichert, sondern es werden Möglichkeiten zur Reflexion gegeben, und die Mitschriften können zu einem späteren Zeitpunkt zur Ergänzung der Merksatz- sowie Problemlösebox herangezogen werden.
[355] Eigenes Werk [CC BY-SA 3.0 at (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/at/deed.en)], via Wikimedia Commons, https: //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8c/Anifer_Alterbach_Schlossweiher.jpg

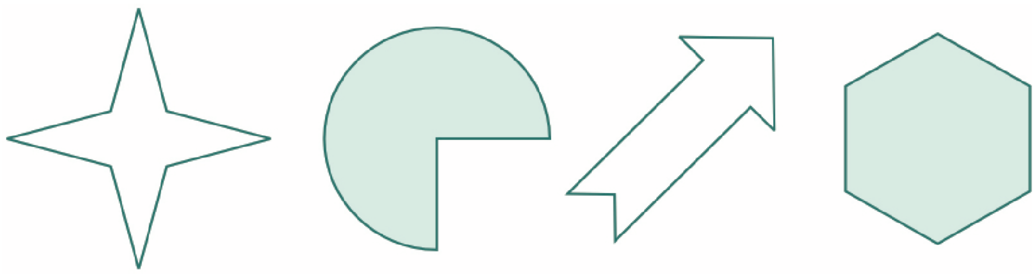


Abb. 30 Auswahl symmetrischer Figuren zur Untersuchung.

Durch diese Aufgabe wird die Aufmerksamkeit auf weitere symmetrische Objekte gelenkt, die bei Spiegelung an der Spiegelachse in sich selbst übergehen. Im Gegensatz zu den vorherigen Aufgaben müssen hier Punkt und Bildpunkt selbständig ausgewählt werden.

> *Sieh dir die nachfolgenden „Spiegelungen" genau an. Welche sind richtig und bei welchen stimmt etwas nicht? Überlege, wie du deine Vermutung überprüfen kannst. Wie gehst du vor? Tipp: Fertige eine Tabelle an. Welche Informationen würdest du dort eintragen?*

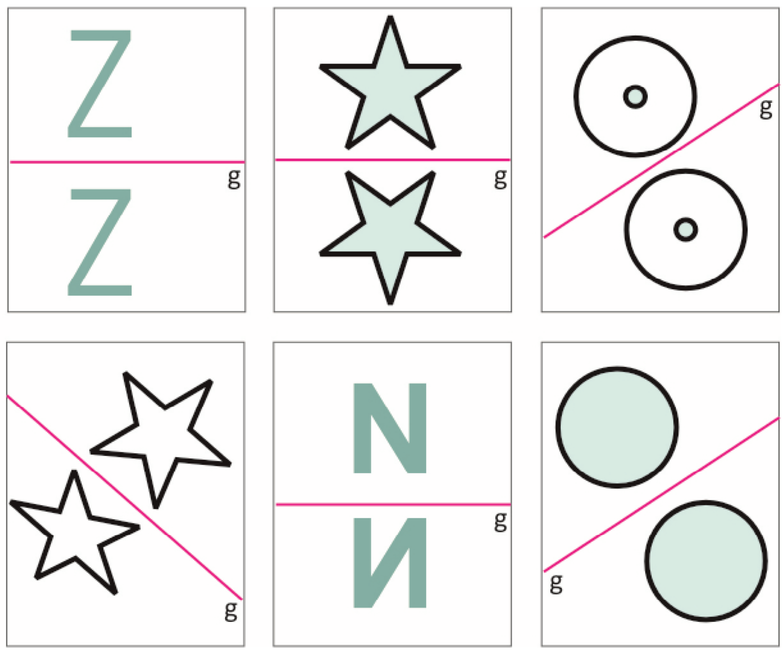
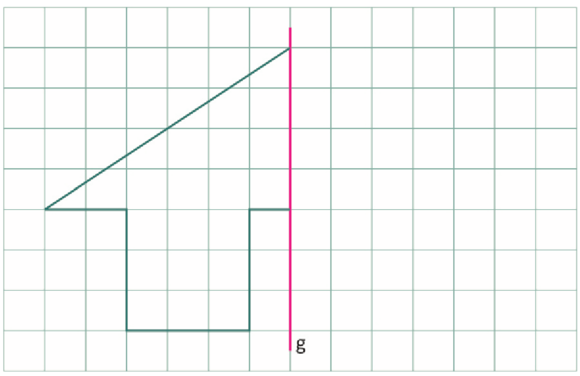


Abb. 31 Echte und nur scheinbar korrekte Achsenspiegelungen verschiedener Figuren.

Mit dieser Aufgabe soll das zuvor erworbene Wissen nun kritisch angewandt und die (echten) Spiegelungen zugrundeliegende Struktur erkannt und gegebenenfalls sichtbar gemacht werden. Dabei wird der *Heurismus des systematischen Probierens* explizit angesprochen. Um die Frage nach der Richtigkeit der angebotenen „Spiegelungen“ beantworten zu können, müssen die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren (unter Verwendung der mathematischen Fachsprache) systematisch überprüft werden, bis alle notwendigen Merkmale innerhalb der Objekte erfasst – oder zumindest so viele, bis ein klarer Widerspruch zu den geforderten Eigenschaften auftritt – und darauf aufbauend konkrete Aussagen gemacht werden können. Mit dem Tipp, eine Tabelle anzufertigen, wird noch einmal an ein planvolles und strukturiertes Vorgehen erinnert und gleichzeitig die Bedeutung der Tabelle als heuristische Technik sowie der Heurismus des systematischen Probierens für eine erfolgreiche Problemlösung hervorgehoben.[356]

Spiegle die vorgegebenen Figuren an der Spiegelachse. Wie gehst du vor?



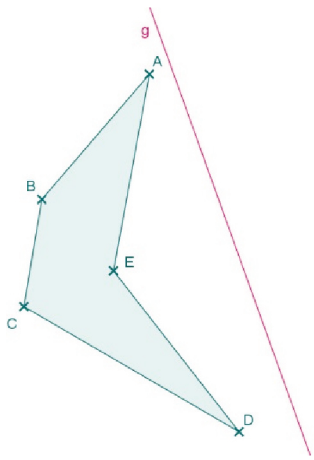


Abb. 32 An vorgegebenen Achsen zu spiegelnde Figuren.

Das Spiegeln der Figuren läuft nach dem Muster ab, das die Schülerinnen und Schüler in den Aufgaben zuvor entdeckt und analysiert haben, d. h. die Schüler besitzen die theoretischen Kenntnisse und praktischen Fähigkeiten, eine Achsenspiegelung selbständig durchzuführen, indem sie das zuvor erworbene Wissen über achsensymmetrische Figuren nun produktiv anwenden.

Spiegle das Dreieck ABC. A‘ ist der Bildpunkt von A.

[356] Mit Hilfe der Tabelle können erneut die Begriffe und die darin gefassten Eigenschaften von Urpunkt und Bildpunkt sowie von Strecke und Bildstrecke in einen direkten Zusammenhang gebracht werden, so dass die strukturellen Merkmale systematisch erfasst und verinnerlicht werden können.

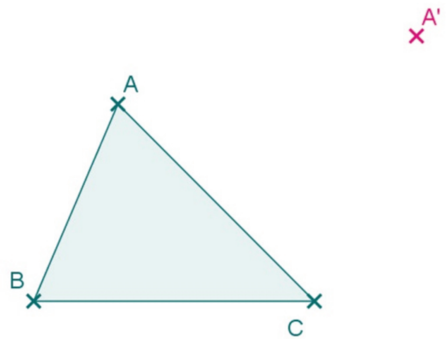


Abb. 33 Urbild und ein vorgegebener Bildpunkt, die zu einer vollständigen Achsenspiegelung ergänzt werden sollen.

Die Struktureigenschaften einer achsensymmetrischer Figuren müssen nun fast vollständig selbständig erzeugt und alle Zusammenhänge, charakteristische Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten achsensymmetrischer Figuren in einer Aufgabe produktiv angewandt werden. Hier ist es insbesondere zwingend notwendig, sich auch an Grundkonstruktionen wie die einer orthogonalen Geraden, hier auf die zuvor selbst gezeichnete Strecke $\overline{AA'}$, zurückzuerinnern. Die Aufgabe ist zudem an den Heurismus des Rückwärtsarbeitens angelehnt, der in diesem Zusammenhang thematisiert werden kann und sollte.

Durch solches Erforschen mehrerer achsensymmetrischer Figuren lassen sich strukturelle Eigenschaften nicht nur innerhalb einer Abbildung, sondern auch komparativ zwischen verschiedenen Abbildungen beobachten, so dass auch auf dieser Ebene der *Heurismus der Strukturnutzung* angesprochen wird, auf dessen Grundlage Verallgemeinerungen getroffen und Gesetzmäßigkeiten formuliert werden können. In den vorliegenden Beispielaufgaben können die Begriffe Spiegelachse, Achsensymmetrie, achsensymmetrisch, Urbild und Bild, Urpunkt, Bildpunkt und -strecke erarbeitet und die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren systematisch erforscht und entdeckt werden. Durch die immer wiederkehrenden Strukturen in verschiedenen symmetrischen Abbildungen können Aussagen getroffen werden, die in der Merksatzbox und der Problemlösebox dokumentiert werden.[357]

Die nachfolgenden Sätze sollen exemplarisch aufzeigen, wie die Dokumentation der so gewonnenen Erkenntnisse in der Merksatz- bzw. Problemlösebox erfolgen kann. Die Inhalte müssen sich in konkreter Ausgestaltung und Formulierung nach den im Unterricht durch die Schülerinnen und Schüler erarbeiteten Ergebnissen richten; daher ist zu erwar-

[357] Diese Aussagen werden gemeinsam erarbeitet und in der Problemlöse- beziehungsweise Merksatzbox (vgl. Kap. 7.2.5) festgehalten.

ten, dass sie von den nachfolgenden Beispielaussagen in Art und gegebenenfalls auch im Umfang abweichen können.

Merksatzbox

- Eine Figur ist achsensymmetrisch, wenn sie bei einer Spiegelung an einer Geraden in sich selbst übergeht.
- Eine Figur wird gespiegelt, indem jedem Punkt der Figur ein Bildpunkt zugeordnet wird, der durch folgende Bedingungen eindeutig festgelegt ist:

    1. Punkt und Bildpunkt liegen gleich weit von der Spiegelachse entfernt.
    2. Die Verbindungstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt stehen senkrecht auf der Spiegelachse.
    3. Strecke und Bildstrecke schneiden die Spiegelachsen im gleichen Punkt und im gleichen Winkel.
    4. Urstrecke und Bildstrecke sind gleich lang.
    5. Urbilder und Bildfiguren haben in ihren Bezeichnungen einen umgekehrten Umlaufsinn.
    6. …

Parallel zu diesen fachmathematischen Inhalten wurden verschiedene Heurismen und heuristische Techniken eingeführt und genutzt. Um auch diese weiter auszubauen und für künftige Problemstellungen nutzen zu können, werden die für das Problemlösen relevanten Erkenntnisse und Vorgehensweisen in der Problemlösebox festgehalten.

Problemlösebox

Um Aussagen über Bilder und Figuren machen zu können, können diese untersucht werden, indem man

- Bezeichnungen einführt,
- besondere Punkte einzeichnet,
- Entfernungen zwischen besonderen Punkten misst und vergleicht,
- die Lage von Geraden beschreibt,
- Größe und Lage von Winkeln beschreibt,
- systematisch vorgeht, um Fehler zu vermeiden und
- Tabellen nutzt, um das Vorgehen zu strukturieren.

Es wurde gezeigt, dass und wie mit Hilfe von Forscheraufgaben wichtige Begriffe der Achsensymmetrie gebildet, die hinter den Begriffen stehenden Eigenschaften, Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften sowie Beziehungen zwischen verschiedenen Begriffen hergestellt werden und auch der *Heurismus der Strukturnutzung*, der *Heurismus des systematischen Probierens* sowie die heuristische Technik *Anfertigen einer Tabelle* eingeführt oder vertieft werden können.

Um das Wissen zur Symmetrie und zugleich die nun erworbenen heuristischen Fähigkeiten weiter auszubauen, können punktsymmetrische Figuren in analoger Weise behandelt werden; im Anschluss und darauf aufbauend können auch Muster verglichen, vorgegebene Muster fortgesetzt oder eigene Muster hergestellt werden. Um ein gegebenes Muster fortzusetzen, müssen Regelmäßigkeiten erkannt und generativ umgesetzt werden, während der Vergleich von Mustern zusätzlich eine genaue Analyse der vorgegebenen Struktur erfordert. In beiden Fällen ist die Struktur von elementarer Bedeutung.[358]

7.3.3 Ebene Figuren – Schwerpunkt Vierecke

In der Orientierungsstufe werden die aus der Grundschule erworbenen Kenntnisse über ebene Figuren und Körper weiterentwickelt, indem die Begriffsbildung auf spezielle Figuren und Körper ausgeweitet wird. Ziel ist es, ebene Figuren wie Rechteck, Quadrat, Parallelogramm, Raute, Trapez, Kreis[359] und Dreiecke[360] sowie die Grundkörper Quader und Würfel benennen, unter Verwendung der bereits erworbenen Grundbegriffe[361] charakterisieren, sie in der Umwelt identifizieren und zeichnen zu können. Darüber hinaus werden Methoden zur Bestimmung von Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren und Oberflächen und Volumina von Körpern entwickelt.

1. Geometrische Inhalte

Um geometrische Begriffe zu verstehen und mit ihnen zu operieren, ist es notwendig, die hinter dem Begriff stehenden Eigenschaften zu erfassen, Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften herzustellen und Begriffe zu anderen Begriffen in Beziehung setzen und voneinander abgrenzen zu können (vgl. Kap. 7.3.1). Bei dem Erwerb neuer geometrischer

[358] Vgl. SCHWEDA 2014. An dieser Stelle soll auf den von Schweda vorgestellten Unterrichtsentwurf zum Thema Untersuchung von Parketten verwiesen werden.

[359] Die Schulbuchanalyse hat ergeben, dass dem Kreis in der Orientierungsstufe eher eine geringe Bedeutung beigemessen und dass er je nach Schulbuch in unterschiedlichen Kontexten behandelt wird. Neben Winkeln am Kreis (Mathe Neue Wege 6, Lambacher Schweizer 6 und MatheNetz 6) werden Kreismuster (Mathe live 6 und Elemente der Mathematik 6) oder Grundbegriffe am Kreis (MatheNetz 5, Elemente der Mathematik 6 und Zahlen und Größen 5) thematisiert. Aus diesem Grund werden die Kreise in der vorliegenden Arbeit nicht weiter vertieft.

[360] Dreiecke werden ebenso wie Kreise in keinem einheitlichen Kontext behandelt. Aufgrund ihrer Sonderrolle werden sie in Form eines Ausblicks am Ende dieses Kapitels kurz thematisiert.

[361] Hierzu zählen die laut Lehrplan NRW aufgeführten Grundbegriffe Winkel, Abstand, Radius, parallel, senkrecht, achsensymmetrisch und punktsymmetrisch (vgl. NORDRHEIN-WESTFALEN 2007a: 22).

Begriffe geht es somit um den Aufbau adäquater Vorstellungen, der durch das Erfassen und Systematisieren der Merkmale und Eigenschaften von Figuren erfolgt.

In der Geometrie werden die zweidimensionale Ebene und der dreidimensionale Raum unterschieden, die allgemein als Punktmengen aufgefasst werden können, so dass eine geometrische Figur als Teilmenge einer solchen Ebene beschrieben werden kann. Die Figurenklasse der Polygone erhält man, indem man mindestens drei nicht kollineare Punkte paarweise durch Strecken miteinander verbindet. Bei einem regelmäßigen Polygon sind alle Seiten kongruent zueinander, alle Innenwinkel gleich groß und die Ecken liegen auf einem gemeinsamen Kreis, wobei benachbarte Ecken unter dem gleichen Mittelpunktswinkel erscheinen. Einfache regelmäßige Polygone sind stets konvex[362] und die Symmetriegruppe ist die Diedergruppe $\mathcal{D}_n$ der Ordnung $2n$, die aus genau n Drehungen und n Spiegelungen besteht. In einem regelmäßigen Polygon mit gerader Eckenzahl n gibt es insgesamt $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen die entstehen, wenn jeweils gegenüberliegende Ecken durch eine Gerade miteinander verbunden werden und weitere $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen die durch die Verbindungsgerade der Mittelpunkte jeweils gegenüberliegender Seiten gegeben sind. Ist n ungerade, verlaufen alle Symmetrieachsen durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite (siehe Abb. 34). Jedes regelmäßige Polygon mit gerader Eckenzahl ist zudem punktsymmetrisch bezüglich seines Mittelpunkts.

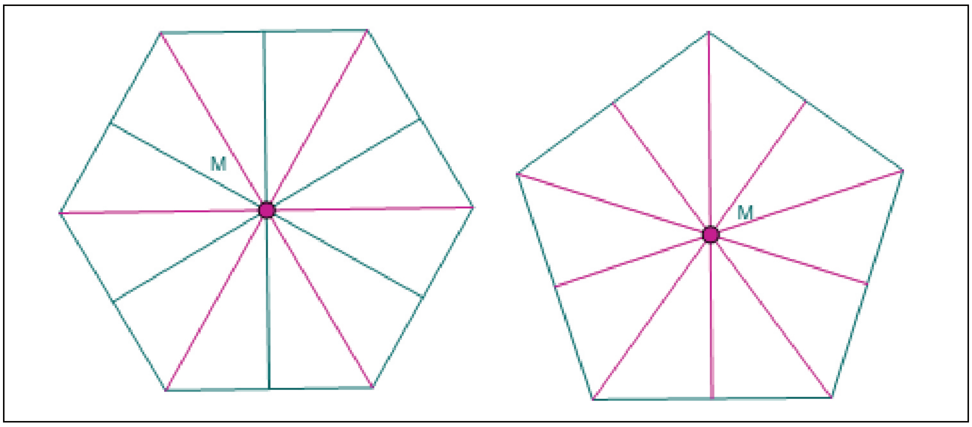


Abb. 34 Sechseck und Fünfeck mit eingezeichneten Symmetrieachsen.

Jedes Polygon mit $n > 3$ besitzt mindestens zwei Diagonalen. Die Diagonalen d eines n-Ecks verbinden zwei nicht benachbarte Ecken des Polygons miteinander, so dass jede Ecke

[362] Ein Polygon heißt konvex, wenn die Verbindungsgerade zwischen zwei beliebigen Ecken innerhalb des Polygons verläuft. Bei benachbarten Ecken ist diese Verbindungsgerade identisch mit einer Seite des Polygons. Konkave Polygone sind für die vorliegende Arbeit nicht von Bedeutung. Auf eine weitere Thematisierung wird daher verzichtet.

mit genau $(n-3)$ anderen Ecken durch Diagonalen verbunden werden kann. Die Gesamtzahl der Diagonalen in einem n-Eck ist gegeben durch $\frac{n(n-3)}{2}$.[363] Bei ungerader Eckenzahl entsteht durch die Diagonalen im Inneren ein Polygon, das ähnlich zu dem Ausgangspolygon ist (siehe Abb. 35).

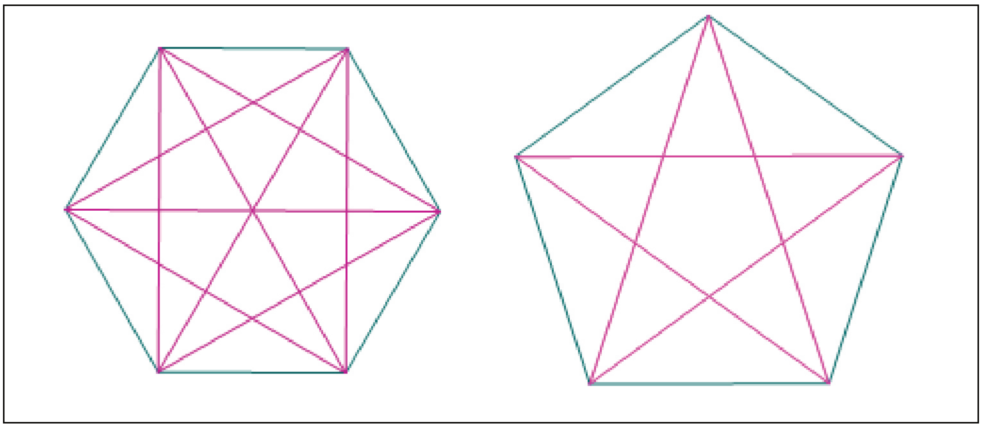


Abb. 35 Diagonalen im Sechseck und Fünfeck.

Polygone lassen sich bezüglich der Anzahl ihrer Ecken, ihrer Seiten-, Winkel-, Diagonalen- und Symmetrieeigenschaften sowie nach der Existenz von In- beziehungsweise Umkreis[364] klassifizieren.

Dreiecke

Dreiecke stellen die einfachste Polygonform dar und nehmen gleichzeitig eine Sonderrolle ein, da sich jedes konvexe Polygon durch seine Diagonalen stets wieder in die kleinste (gemessen an der Anzahl der paarweise miteinander verbundenen Punkte) Polygonform, nämlich in Dreiecke, zerlegen lässt. Dreiecke lassen sich nach dem Verhältnis der Lage der Seiten in gleichseitige, gleichschenklige oder unregelmäßige und nach den Winkeln in rechtwinklige (ein Winkel beträgt 90°), spitzwinklige (alle Winkel sind < 90°) oder stumpfwinklige (ein Winkel ist > 90°) Dreiecke einteilen. Die Innenwinkelsumme in einem planaren Dreieck beträgt stets 180°. Die Summe zweier Seiten ist immer größer als die Länge der dritten Seite, wie mittels der Dreiecksungleichung nachgewiesen werden kann.

Einfache regelmäßige Polygone mit drei Ecken bezeichnet man als gleichseitige Dreiecke. Gleichseitige Dreiecke haben drei gleich lange Seiten, die Innenwinkel betragen je 60° und

[363] Durch den Nenner in dieser Formel wird verhindert, dass bei vollständigem Umlauf über alle Eckpunkte Diagonalen doppelt gezählt werden.
[364] Da der Inkreis sowie der Umkreis in der Orientierungsstufe nicht von Relevanz sind, soll an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden.

sie besitzen drei Symmetrieachsen, die mit den Höhen *h,* den Seitenhalbierenden *s*, den Mittelsenkrechten *m* und den Winkelhalbierenden *w* (der Innenwinkel) zusammenfallen und sich im Schwerpunkt *S* des Dreiecks schneiden.

Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten bezeichnet man als gleichschenklig. Sie besitzen eine Symmetrieachse, die mit der Winkelhalbierenden w_c des von den beiden gleich langen Seiten eingeschlossenen Winkels γ, der Höhe h_c, der Mittelsenkrechten m_c und Seitenhalbierende s_c zusammenfallen. Sind alle drei Seiten unterschiedlich lang und alle Winkel unterschiedlich groß, spricht man von einem unregelmäßigen Dreieck.

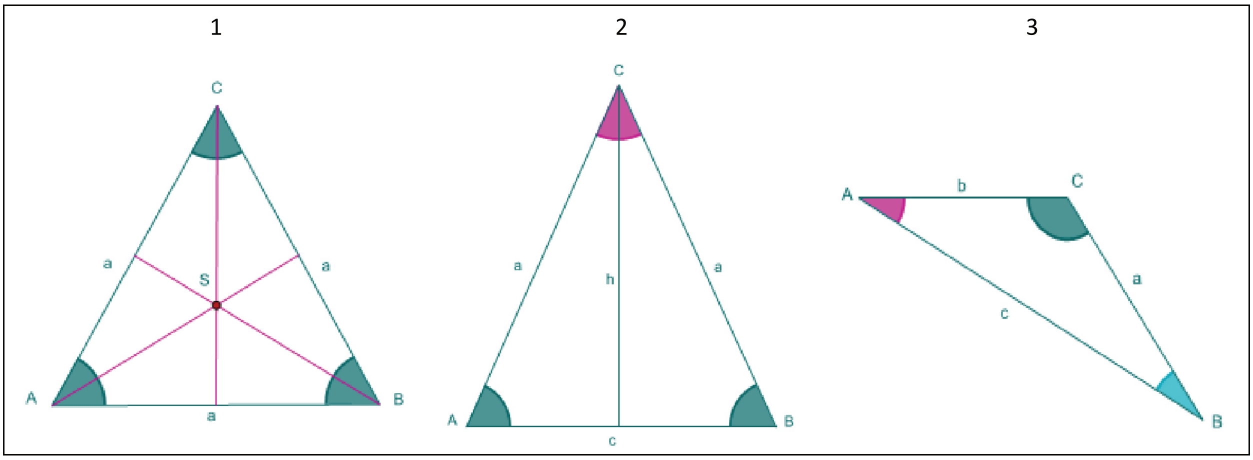


Abb. 36 Beispiel für ein gleichseitiges Dreieck mit eingezeichnetem Schwerpunkt S, Winkelhalbierenden, Symmetrieachsen, Höhe und Mittelsenkrechte (1) und ein gleichschenkliges Dreieck mit eingezeichneter Symmetrieasche, die zugleich eine Winkelhalbierende und Höhe ist (2), sowie ein unregelmäßiges Dreieck mit drei verschiedenen Winkelgrößen und Seitenlängen (3).

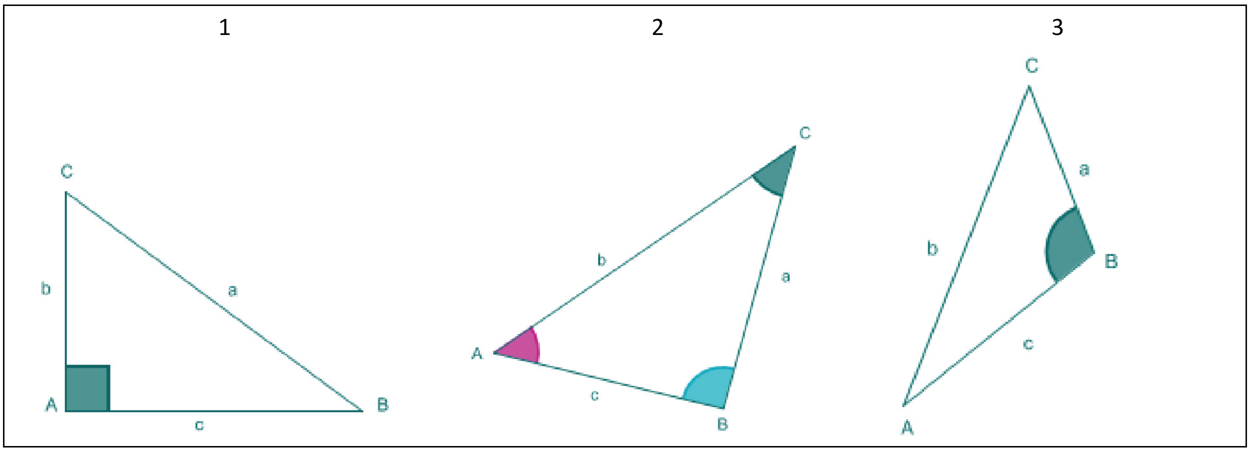


Abb. 37 Beispiele für ein rechtwinkliges (1), spitzwinkliges (2) und stumpfwinkliges (3) Dreieck.

An und mithilfe von Dreiecken lassen sich zahlreiche geometrische Definitionen und Sätze herleiten. Trotz ihrer Sonderrolle werden Dreiecke in den untersuchten Schulbüchern der Orientierungsstufe nicht explizit oder nur oberflächlich behandelt. Zwar tauchen sie in zahlreichen Kontexten[365] immer wieder auf, werden jedoch nicht weiter vertieft. Aufgrund ihrer Sonderrolle werden Dreiecke am Ende des IHiMU-Arrangements zu Vierecken (Abschnitt 4) in Form eines Ausblicks thematisiert.

Vierecke

Da in der Orientierungsstufe die Vierecke den Schwerpunkt des Themenbereiches *ebene Figuren* bilden und es unter anderem Ziel des Mathematikunterrichts sein sollte, die Zusammenhänge zwischen *verschiedenen* Viereckarten zu erkennen und ihre Eigenschaften zu verstehen, bezieht sich die heuristische Analyse (Abschnitt 3) vorwiegend auf allgemeine Vierecke, die hier kurz betrachtet werden sollen. Beliebige Polygone mit vier Ecken nennt man Vierecke. Vierecke lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten wie Symmetrieeigenschaften, der Länge ihrer Seiten, der Größe der Winkel, der Lage ihrer Seiten oder Diagonalen klassifizieren; sie können je nach Merkmalsauswahl im sogenannten „Haus der Vierecke" dargestellt und zueinander in Beziehung gesetzt werden. Ein Viereck $(n = 4)$ besitzt gemäß der Formel $\frac{n(n-3)}{2}$ zwei Diagonalen. Jedes Viereck wird durch seine Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegt.

Quadrat, Rechteck, Parallelogramm und Raute

Wie die Schulbuchanalyse zeigt (Abschnitt 2), werden Quadrate, Rechtecke, Parallelogramm und Rauten in nahezu allen Schulbüchern thematisiert, während Trapezen und Drachen eine eher geringe Bedeutung beigemessen wird (siehe Tab. 29). Aus diesem Grund wird der Schwerpunkt des IHiMU-Arrangements und der fachlichen Kurzbetrachtung an dieser Stelle auf Quadrat, Rechteck, Parallelogramm und Raute liegen.

Quadrat

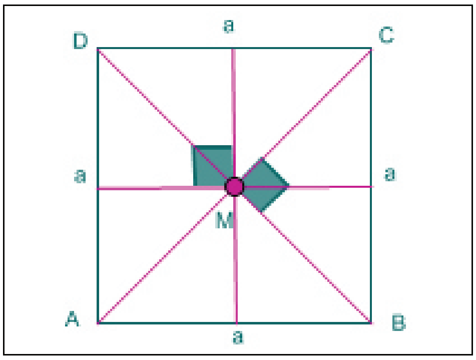


Abb. 38 Quadrat mit eingezeichneten Symmetrieachsen.

Regelmäßige Polygone mit vier Ecken werden als Quadrate bezeichnet. Sie stimmen in der Länge aller vier Seiten und der Größe aller Winkel überein. Die beiden Diagonalen sind gleich lang, halbieren einander, stehen senkrecht aufeinander und stimmen mit den Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle(DAB)$ und $\sphericalangle(BCD)$ überein. Ein Quadrat besitzt vier Symmetrieachsen, von denen zwei

---

[365] Dreiecke tauchen als ebene Figuren in Zusammenhang mit Mustern, bei Faltübungen, im Rahmen von Grundkonstruktionen und in Verbindung von Körpern und Körpernetzen auf. Dreiecke und ihre Eigenschaften werden jedoch erst zu einem späteren Zeitpunkt thematisiert und vertieft. Lediglich in dem Schulbuch Fokus Mathematik 5 wird auf „besondere" Dreiecke hingewiesen (vgl. Fokus Mathematik 5, 2013: 116).

den Diagonalen und die anderen beiden den Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ entsprechen Das Quadrat ist punktsymmetrisch zum Mittelpunkte M (siehe Abb. 38).

Rechteck

Ein Polygon mit vier Ecken und vier rechten Winkeln heißt Rechteck, wenn zudem die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind. Die beiden Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander.

Das Rechteck ist punktsymmetrisch bezüglich des Diagonalenschnittpunktes (Drehzentrum Z). Ein Rechteck besitzt zwei Symmetrieachsen, die mit den Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ übereinstimmen und damit senkrecht aufeinander stehen (siehe Abb. 39).

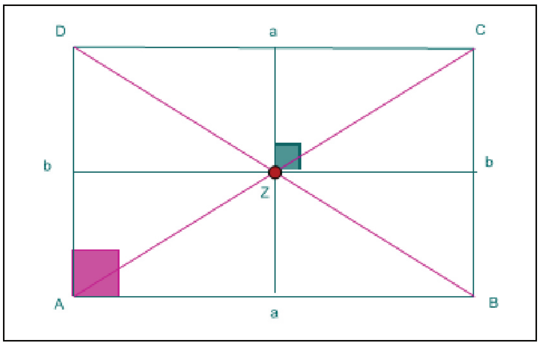


Abb. 39 Rechteck mit eingezeichneten Diagonalen, Mittelsenkrechten und Symmetrieachsen.

Parallelogramm

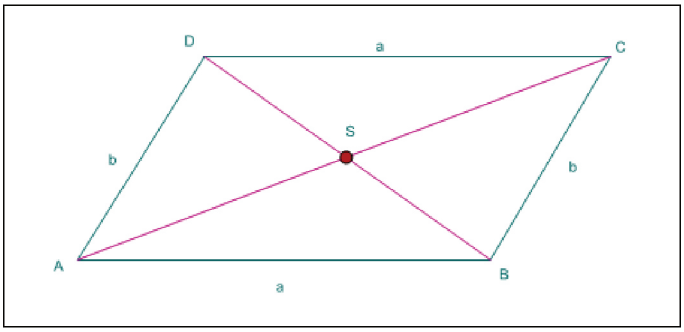


Abb. 40 Parallelogramm mit eingezeichneten Diagonalen.

Ein Viereck, bei dem die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander sind, nennt man Parallelogramm. In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und gegenüberliegende Winkel gleich groß. Die Summe zweier benachbarter Winkel beträgt 180°. Die Diagonalen des Parallelogramms halbieren einander und teilen es in zwei kongruente Dreiecke. Das Parallelogramm ist punktsymmetrisch bezüglich seines Diagonalenschnittpunktes S (siehe Abb. 40).

Raute

Ein Viereck bei dem alle Seiten gleich lang, gegenüberliegende Seiten parallel und gegenüberliegende Winkel gleich groß sind nennt man Raute oder Rhombus. Die beiden Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren einander. Die Raute ist achsensymmetrisch bezüglich ihrer beiden Diagonalen und punkt-

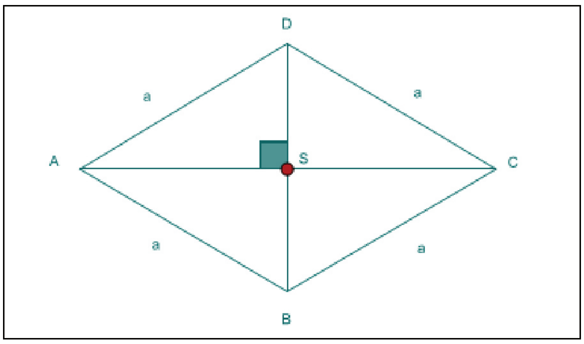


Abb. 41 Raute mit eingezeichneten Diagonalen.

symmetrisch am Diagonalenschnittpunkt S. Jeder Innenwinkel wird durch eine Diagonale halbiert. Benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180° Grad (siehe Abb. 41).

Ähnlichkeit

Da im nachstehenden IHiMU-Arrangement zum Thema *Ebene Figuren* mit dem Schwerpunkt *Vierecke* der Begriff der *Ähnlichkeit* an verschiedenen Stellen Anwendung findet, soll für das weitere Verständnis der Arbeit eine kurze Begriffserläuterung gegeben werden. In der Geometrie sind zwei Figuren F_1 und F_2 ähnlich zueinander, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung aus der Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung (Verschiebung, Drehung, Spiegelung) gibt, bei der F_1 auf F_2 abgebildet wird. Man spricht von einer zentrischen Ähnlichkeit, wenn Figur F_1 durch eine zentrische Streckung auf Figur F_2 abgebildet werden kann. Ähnliche Figuren stimmen bezüglich des Längenverhältnisses einander entsprechender Seiten überein, und einander entsprechende Winkel sind gleich groß.

Neben dieser geometrischen Sicht gibt es aber auch eine allgemeine, nicht mathematische Sicht, die für das nachfolgende Arrangement ebenfalls eine wichtige Rolle spielt. Danach wird unter „Ähnlichkeit" die Beziehung zwischen zwei oder mehreren Objekten verstanden, die bezüglich einer oder mehrerer, jedoch nicht in all ihren Eigenschaften oder (äußeren) Merkmalen übereinstimmen. Je mehr Eigenschaften oder Merkmale den Objekten gemeinsam sind, desto „ähnlicher" sind sie. Stimmen die zu vergleichenden Objekte in all ihren Eigenschaften überein, spricht man von gleichen bzw. identischen Objekten.

2. Darstellung in Schulbüchern

Das Thema *Figuren und Körper* folgt keiner einheitlichen Behandlung, sondern wird je nach Schulbuch ganz unterschiedlich ein- und ausgeführt. Im *Lambacher Schweizer 5* und im *Fokus Mathematik 5* beispielsweise schließt das Thema *Figuren* direkt an die zuvor eingeführten Grundbegriffe Symmetrie, senkrecht, parallel und Abstand an.

In *Elemente der Mathematik 5* werden Vielecke, deren Umfänge und Diagonalen (wenn auch nur sehr knapp) behandelt, bevor die besonderen Vierecke wie Parallelogramm, Rechteck, Quadrat und Raute nach der Länge und Lage der Seiten definiert werden.[366]

Im *Fokus Mathematik 5* werden bereits im Rahmen der Konstruktion mit dem Geodreieck Quadrate und Rechtecke mit dem Fokus auf die Orthogonalität der Seiten konstruiert.[367] Es

[366] Vgl. Elemente der Mathematik 5, 2006: 160-163.
[367] Vgl. Fokus Mathematik 5, 2013: 108

folgen die „besonderen“ Vierecke wie Trapez, Drachenviereck, Parallelogramm, Rechteck, Raute und Quadrat, die sehr ausführlich behandelt und im Haus der Vierecke[368] (nach Lage und Länge der Seiten) systematisiert werden. Darüber hinaus wird der Begriff der Diagonalen eingeführt und es werden besondere Dreiecke (rechtwinklig, gleichschenklig und gleichseitig) thematisiert. Weitere Anknüpfungspunkte zu ebenen Figuren finden sich in Verbindung mit der Einführung des Koordinatensystems, den Symmetrien sowie bei der Flächen- und Umfangsberechnung.[369]

In *MatheNetz 5* werden eingangs regelmäßige Vielecke in Zusammenhang mit Mustern und platonischen Körpern thematisiert, ohne diese jedoch näher zu beschreiben oder zu definieren.[370] In einem späteren Kapitel werden Figuren in der Ebene und Dreiecke sowie besondere Vierecke wie Trapez, Drachen, Parallelogramm, Rechteck, Raute und Quadrat noch einmal aufgegriffen und nach der Größe der Winkel unterschieden. Auf die Nennung weiterer charakteristischer Eigenschaften wird dabei ebenso verzichtet wie auf eine Definition oder Klassifizierung. Ausnahmen bilden die Rechtecke und Parallelogramme, die in Auseinandersetzung mit den Grundbegriffen nach Lage der Seiten definiert werden, sowie das Quadrat, welches nach Lage seiner Diagonalen definiert wird.[371] Auch bei der Flächenberechnung werden die genannten Viereckarten nicht weiter berücksichtigt. Hier liegt der Fokus auf dem Rechnen mit Einheiten.[372] In Jahrgangsstufe 6 werden die ebenen Figuren in Zusammenhang mit dem Thema *Muster und Symmetrien* noch einmal behandelt und im Haus der Vierecke nach ihren Symmetrieeigenschaften klassifiziert. Auf eine Definition der Vierecke wird auch hier verzichtet.[373]

In *Zahlen und Größen 5* werden zunächst allgemeine Vielecke behandelt, denen Rechteck, Quadrat, Parallelogramm und Raute als besondere Vierecke folgen und die nach der Länge und der Lage der Seiten sowie nach der Lage der Diagonalen definiert werden. Weitere Anknüpfungspunkte finden sich in Zusammenhang mit den Koordinatensystemen[374] sowie den Körpern und Körpernetzen.[375]

---

[368] Im Haus der Vierecke werden die Viereckarten nach verschiedenen Kriterien (Winkel, Seiten, Diagonalen oder Symmetrien) geordnet und die vielfältigen Beziehungen zwischen den Vierecken dargestellt.
[369] Vgl. Fokus Mathematik 5, 114-121; 124-128; 136; 183-205.
[370] Vgl. MatheNetz 5, 2005: 8-15.
[371] Vgl. MatheNetz 5, 2005: 108.
[372] Vgl. MatheNetz 5, 2005: 194-202.
[373] Vgl. MatheNetz 6, 2006: 121.
[374] Hier liegt der Schwerpunkt allerdings auf den Vielecken und nicht auf Vierecke.
[375] Vgl. Zahlen und Größen 5, 2008: 68; 114-118; 123-126.

Im Lehrwerk *Mathe live 5* werden ebene Figuren wie Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm nur kurz angesprochen und nach Länge und Lage der Seiten definiert.[376] Eine Vertiefung oder Erweiterung der Inhalte ist für Jahrgangsstufe 6 nicht vorgesehen.

Im *Lambacher Schweizer 5* werden Quadrate, Rechtecke und Parallelogramme definiert, während weitere Vierecke und Polygone nur am Rande erwähnt werden. Auf eine umfassendere Klassifizierung der Vierecke wird ganz verzichtet.[377] Quadrate, Rechtecke und Parallelogramme werden später in Zusammenhang mit der Flächen- und Umfangsberechnung sowie den Körpern und Körpernetzen erneut aufgegriffen und um Dreiecke ergänzt. Bezug auf die Eigenschaften der Vierecke wird an keiner Stelle genommen.[378]

Unter dem Thema *Einfache geometrische Körper und Flächen* werden im Lehrwerk *Mathe Neue Wege 5* Grundformen geometrischer Körper und Figuren in einer gemeinsamen Einheit eingeführt.[379] Es folgen Kantenmodelle von Körpern, und parallel dazu werden „Kantenmodelle“ [380] von ebenen Vielecken besprochen, worunter auch die „besonderen“ Vierecke wie Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Drachenviereck und gleichschenkliges Trapez thematisiert und mit den entsprechenden Körpern in Verbindung gebracht werden. Vertieft werden die Vierecke schließlich in einem eigenen Kapitel, wo sie anhand Länge und Lage der Seiten sowie ihrer Diagonalen definiert werden.[381] In Jahrgangsstufe 6 werden die in Jahrgangsstufe 5 gewonnenen Erkenntnisse über ebenen Figuren aufgegriffen und um Dreiecke ergänzt. Neben der Wiederholung charakteristischer Eigenschaften wie Länge und Lage der Seiten und Größe der Winkel wird die Symmetrie als weitere Eigenschaft behandelt, und die Vierecke werden entsprechend klassifiziert.[382]

[376] Vgl. Mathe live 5, 2006: 89-90.
[377] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 57 f.
[378] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 118-147; 152-155.
[379] Vgl. Mathe Neue Wege 5, 2005: 135-149.
[380] Tatsächlich ist in dem Lehrwerk von „Kantenmodellen“ ebener Vierecke die Rede. Diese unsachgemäße Bezeichnung kann zu Schwierigkeiten führen, denn gemeint sind nicht die Kanten ebener Vierecke, sondern die Seiten (s. Mathe Neue Wege 5, 2005: 143).
[381] Vgl. Mathe Neue Wege 5, 2005: 162.
[382] Vgl. Mathe Neue Wege 6, 2006: 240-244.

	Ebene Figuren							**Definition** nach Länge und Lage der...			**Klassifizierung im Haus der Vierecke (nach)...**
	Quadrat	**Rechteck**	**Raute**	**Parallelogramm**	**Trapez**	**Drachen**	**Dreieck**	**Seiten**	**Winkel**	**Diagonalen**	
Elemente der Mathematik 5	x	x	x	x				x			nein
Fokus Mathematik 5	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	Lage der Seiten
MatheNetz 5	x	x	x	x	x	x	x	(x)[383]	(x)[384]	(x)[385]	nein
MatheNetz 6											Symmetrieeigenschaften
Zahlen und Größen 5	x	x	x	x				x		x	nein
Mathe live 5	x	x	x	x				x			nein
Lambacher Schweizer 5[386]	x	x		x			x	x	x		nein
Mathe Neue Wege 5	x	x	x	x	x	x		x	x	x	nein
Mathe Neue Wege 6							x				Symmetrieeigenschaften

Tab. 29 Tabellarische Übersicht der Schulbuchanalyse zu den ebenen Figuren.

3. Heuristische Analyse

Vierecke lassen sich auf sehr viele verschiedene Weisen nach ihren Eigenschaften[387] definieren und im Haus der Vierecke systematisieren. Die Klassifikation der Vierecke erfolgt dabei nach verschiedenen Merkmalen wie nach Art, Anzahl und Lage der Seiten[388], Winkel und Diagonalen, nach vorhandenen Symmetrien oder auch nach der Anzahl der notwendigen Bestimmungsstücke.[389] In den untersuchten Schulbüchern findet überwiegend (wenn überhaupt) eine Klassifizierung nach Lage der Seiten statt. Ob es sich hierbei um eine sinnvolle Anordnung oder um eine für die Orientierungsstufe besonders geeignete Klassifizierung handelt, bleibt offen.

---

[383] Die Definition nach der Lage der Seiten ist auf Rechtecke und Parallelogramme beschränkt.
[384] Die Vierecke werden nach der Winkelgröße unterschieden. Auf eine Definition wird verzichtet.
[385] Die Definition nach der Lage der Diagonalen ist auf Quadrate beschränkt.
[386] Auf die exakte Quellenbezeichnung wird an dieser Stelle verzichtet; alle genauen Angaben zu den hier benannten Schulbüchern finden sich am Ende der Arbeit.
[387] Es gibt Eigenschaften, die eine Figur charakterisieren und solche, die eine Figur besitzt, die jedoch nicht ausreichen, um die Figur eindeutig zu definieren (vgl. Weigand et al. 2009: 136).
[388] Hier werden sowohl Art, Anzahl und Lage gleich langer wie unterschiedlich langer Seiten gefasst.
[389] Ebenfalls möglich ist eine Einteilung nach In- und Umkreis, der für die Orientierungsstufe jedoch noch nicht von Relevanz ist.

Es kann und sollte jedoch nicht Ziel des Mathematikunterrichts sein, Vierecke isoliert und primär mit Blick auf ihre jeweiligen Eigenschaften zu betrachten und zu definieren. Der Fokus sollte vielmehr darauf liegen, die Zusammenhänge, also verbindende wie unterscheidende Merkmale, zwischen verschiedenen Viereckarten zu erkennen und Vierecke unabhängig von ihrer Form und Lage[390] als solche identifizieren zu können. Möchte man die Eigenschaften eines Vierecks verstehen, muss man sich Klarheit über seinen strukturellen Aufbau verschaffen. Mit Hilfe des *Heurismus' der Strukturnutzung* und der damit verbundenen Analyse lassen sich die Strukturmerkmale von Vierecken erfassen, auf ihrer Grundlage Zusammenhänge herstellen, charakteristische Eigenschaften ableiten und schließlich (eigene) Definitionen formulieren. Das Haus der Vierecke, in dem die Vierecke hierarchisch angeordnet werden, veranschaulicht diese Systematik.

Um die große Anzahl verschiedener Strukturmerkmale zu überschauen und um konkrete Aussagen über die gewonnenen Erkenntnisse zu machen, kann die *Tabelle* als heuristische Technik in Kombination mit dem *Heurismus des systematischen Probierens* angewandt werden. Ein systematisches Vorgehen, bei dem jedes Viereck auf bestimmte strukturelle Eigenschaften hin überprüft oder variiert wird, kann (weitestgehend) sicherstellen, dass alle relevanten Figuren erfasst und einer angemessenen Überprüfung unterzogen werden.

Neben dem *Heurismus der Strukturnutzung* und dem *Heurismus des systematischen Probierens* kann in Zusammenhang mit den ebenen Figuren insbesondere auch der *Heurismus der Affinität* eingeführt oder reaktiviert werden. Dabei steht eine problemlösende Vorgehensweise im Mittelpunkt, bei der bereits gelöste Probleme auf ihre Ähnlichkeit[391] oder strukturelle Vergleichbarkeit zu einem neuen Problem hin betrachtet und zur systematischen Planung und Durchführung der Problemlösung herangezogen werden (vgl. Kap. 5.5.2). Ist ein Viereck strukturell erfasst, können mit Hilfe des *Heurismus der Affinität* weitere Viereckarten darauf aufbauend analysiert, entwickelt, klassifiziert und definiert werden.

4. IHIMU-Arrangement

Es gibt viele verschiedene Wege, ebene Figuren allgemein und Vierecke im Speziellen in der Orientierungsstufe einzuführen. Um neben dem zu vermittelnden Fachwissen auch die

[390] In der Regel identifizieren Schüler Vierecke wie Quadrate und Rechtecke nur dann als solche, wenn sie parallel oder senkrecht zu den Linien im Heft oder Buchseiten angeordnet sind. Steht ein Quadrat auf einer der Ecken, wird es oft nicht mehr als solches erkannt.

[391] Wie eingangs bereits erwähnt, kann sich diese Ähnlichkeit sowohl auf die mathematische als auch auf die nicht-mathematische Sichtweise beziehen.

Heuristik möglichst umfassend anzusprechen, sollen auch hier Forscheraufgaben das zentrale Gestaltungselement des Unterrichts sein, so dass die Eigenschaften der Vierecke selbständig erforscht und entdeckt werden, Regelmäßigkeiten erkannt, Zusammenhänge hergestellt und erste eigenen Definitionen hergeleitet werden können. In Zusammenhang mit den Vierecken sollen die *Heurismen der Strukturnutzung, der Affinität* und *des systematischen Probierens* sowie die heuristische Technik *Anfertigen einer Tabelle* Anwendung finden.

Wie oben erläutert lässt sich das Haus der Vierecke nach verschiedenen Ordnungskriterien aufbauen. Die Anordnung erfolgt dabei entweder nach der Art, Anzahl oder Lage der Seiten, der Größe und Lage der Winkel, der Lage der Diagonalen, den Symmetrieeigenschaften oder nach der Anzahl der Bestimmungsstücke. In der Regel wird die Hierarchie im Haus der Vierecke nur in eine Richtung aufgebaut und zwar meist absteigend, vom Besonderen zum Allgemeinen. Ebenso gut kann aber auch der umgekehrte Weg vom Allgemeinen zum Besonderen gewählt werden, damit Veränderungen der Eigenschaften erfasst und Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften hergestellt werden können. Das nun folgende IHiMU-Arrangement zeigt *eine* Möglichkeit auf, mit der die Eigenschaften der Vierecke über einen forschend-entdeckenden Ansatz im Rahmen problemlösender Tätigkeit eigenständig erarbeitet werden können, so dass eine Ordnung der Vierecke nach individuell gewählten Kriterien erfolgen kann.

Es wird davon ausgegangen, dass zum Zeitpunkt der Bearbeitung die Begriffe – und die hinter den Begriffen stehenden Eigenschaften und Zusammenhänge – senkrecht, parallel, rechter Winkel, Abstand, Punktsymmetrie und Achsensymmetrie bekannt sind und die Problemlösebox mit ersten Vermerken über den *Heurismus der Strukturnutzung* und den *Heurismus des systematischen Probierens* sowie über *Tabellen* als heuristisches Hilfsmittel zur Verfügung steht.

Forscheraufgaben

Die Schüler erhalten unter der Themenüberschrift „Alles Vierecke?!“[392] verschiedene Karten, auf denen Strecken(züge) abgebildet sind (siehe Abb. 42) und den folgenden Arbeitsauftrag:

[392] Es wird davon ausgegangen, dass die ebenen Figuren und somit auch der Begriff des Vierecks bereits aus der Grundschule bekannt sind (vgl. Kap. 8.3).

Auf den Karten[393] sind einige der Seiten von Vierecken versehentlich ausradiert worden. Ergänze jedes der Bilder so, dass wieder ein Viereck entsteht. Nutze dazu ein Lineal oder Geodreieck. Zeichne die fehlenden Seiten mit einem andersfarbigen Stift ein.

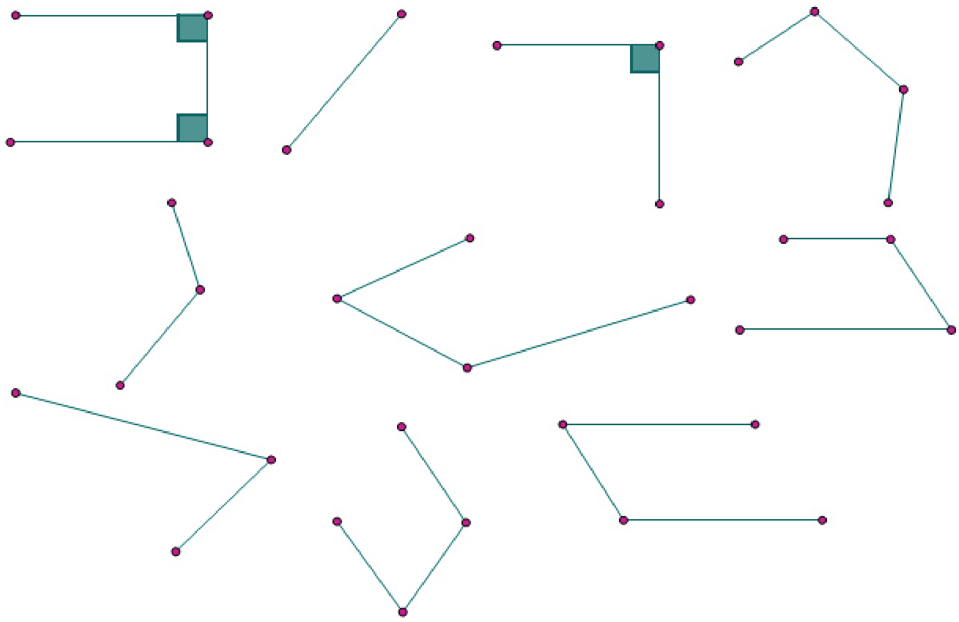


Abb. 42 Mögliche Abbildungen auf den Karten, die zu Vierecken ergänzt werden sollen.

Statt wie sonst oft üblich die Eigenschaften und die Definitionen der Vierecke vorzugeben, rückt bei dieser Vorgehensweise der generative Aspekt in den Mittelpunkt: Die Eigenschaften unterschiedlicher Vierecke werden durch die zeichnerisch-umsetzende Erfassung und die Nutzung struktureller Merkmale Schritt für Schritt erarbeitet. Gleichzeitig wird an zuvor erworbenes Wissen angeknüpft und der Umgang mit Lineal und Geodreieck gefördert. Um ein Problembewusstsein zu schaffen und den Systematisierungsprozess anzuregen oder zu unterstützen, kann sich folgende Aufgabe anschließen:

Vergleiche deine Ergebnisse mit deinem Nachbarn. Welche eurer Vierecke sind gleich, welche unterscheiden sich? Ordnet die Vierecke nach „sind gleich“ und „sind verschieden“.

Vergleicht nun die beiden Gruppen. Was fällt euch auf? Gibt es eine Regel?

[393] Um im späteren Verlauf mit den gewonnenen Ergebnissen weiterarbeiten zu können und eine Vergleichbarkeit zu gewährleisten, werden durchnummerierte Viereck-Kärtchen an die Schüler verteilt. Die dort zu ergänzenden Vierecke sind so konzipiert, dass alle laut Lehrplan NRW vorgesehenen Viereckarten eindeutig zu diesen ergänzt werden können.

Durch die Arbeit mit einem farbigen Stift fällt der Blick unweigerlich darauf, dass ein Viereck eindeutig bestimmt werden konnte, wenn nur eine einzige Seite zu ergänzen war. Es lässt sich daher schnell erkennen, dass die Anzahl vorgegebener Strecken darüber entscheidet, ob es eine eindeutige Lösung gibt, ein entsprechendes Viereck zu zeichnen oder nicht. Die Karten, auf denen drei Strecken gegeben sind, können eindeutig zu einem Viereck ergänzt werden, während in allen anderen Fällen beliebige (frei wählbare) Vierecke entstehen.

Durch das darauf folgende Ordnen wird eine erste Klassifizierung vorgenommen, ohne die determinierenden Eigenschaften vorzugeben. Nach dem Sortieren liegen diejenigen Vierecke zusammen, bei denen drei Seiten gegeben waren. Vierecke, die aus nur ein oder zwei gegebenen Seiten konstruiert wurden, unterscheiden sich hingegen zwischen den Schülern.

Alles Vierecke, aber….? Manche Vierecke sehen sich ähnlicher[394] als andere. Warum ist das so? Legt die Vierecke, die euch besonders ähnlich scheinen, zu Gruppen zusammen. Wie viele verschiedene Gruppen erhaltet ihr am Ende?

Es wird eine weitere, nun engere Klassifizierung vorgenommen, bei der aber die Strukturmerkmale, nach denen geordnet wird, frei wählbar sind. Die Schüler sollen sich (diskursiv) mit den unterschiedlichen Viereckarten auseinandersetzen und eigene, für sie individuell bedeutsame Unterscheidungsmerkmale auswählen. Mit dieser Forscheraufgabe wird der Heurismus der Strukturnutzung explizit angesprochen, bei dem das Auffinden von Strukturen im Zentrum der Betrachtung steht (vgl. Kap. 5.5.2). Gleichzeitig erfolgt eine Differenzierung, da die Anzahl der zugrunde gelegten Merkmale von den Schülern selbst gewählt wird. Durch die Arbeit mit losen und auch unbeschrifteten Viereck-Kärtchen wird verhindert, dass den Vierecken eine bestimmte Lage vorgegeben wird. Stattdessen lassen sich die Vierecke drehen, so dass ein umfassender, multiperspektivischer Vergleich möglich wird. Durch den Begriff der Ähnlichkeit wird der Heurismus der Affinität implizit angesprochen und der Blick erneut auf strukturelle Gemeinsamkeiten und Unterschiede gelenkt. Je nachdem, welches Strukturmerkmal für die Schüler in seiner Bedeutung hervorsticht, kann eine Klassifikation nach der Länge der Seiten, ihrer Lage zueinander oder nach der Größe der Winkel erfolgen.

[394] Hier steht die nicht-mathematische, intuitive und der Lebenswelt der Schüler entlehnte Sichtweise im Vordergrund.

Es spielt an dieser Stelle noch keine Rolle, nach welchen Kriterien diese Einteilung erfolgt, da hier zunächst die strukturellen Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Vordergrund stehen sollen und nicht die charakterisierenden Eigenschaften der definierten Viereck-typen.

Schreibt die Gemeinsamkeiten, nach denen ihr die Vierecke sortiert habt, in die nachfolgende Tabelle

Gemeinsamkeiten	*Gruppe 1:* *Karten Nr.:*	*Gruppe 2:* *Karten Nr.:*	*...*
Zwei gleich lange Seiten[395]			
Vier gleich lange Seiten			
...			

Tab. 30 Leertabelle zur Dokumentation der ersten, freien Gruppierung verschiedener Vierecke.

Mit dieser Forscheraufgabe wird der Blick auf die strukturellen Gemeinsamkeiten der Vierecke gelenkt, die mit Hilfe von Fachbegriffen beschrieben werden. So wird an vorhandenes Wissen angeknüpft und es erfolgt eine erneute, genauere Klassifizierung, die sich an den Gemeinsamkeiten orientiert. Gleichzeitig wird durch diese Vorgehensweise der *Heurismus des systematischen Probierens* angesprochen, der sich in der planmäßigen Suche nach gleich langen oder parallelen Seiten, nach senkrecht aufeinander stehenden Seiten oder der Anzahl rechter Winkel zeigt. Die Tabelle dient als Strukturierungshilfe und unterstützt das systematische Vorgehen, so dass der *Heurismus des systematischen Probierens* sowie die *Tabelle* als hilfreich und zielführend erfahren werden.

Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass alle Schüler die Gemeinsamkeiten vollständig und unter Verwendung der Fachbegriffe erfasst haben, schließt die folgende Aufgabe an:

Nehmt für die weitere Bearbeitung eure Problemlösebox zur Hilfe.[396]

[395] Welche Inhalte in dieser Tabelle bereits eingetragen sind, oder ob auf Vorgaben verzichtet werden kann, hängt von der Art der Lerngruppe ab und kann außerdem gezielt als weiteres differenzierendes Instrument verwendet werden.

Findet weitere gemeinsame Eigenschaften zwischen den Figuren und ergänzt eure Tabellen. Wie geht ihr vor?

Lassen sich die Vierecke in andere Gruppen einteilen?

Tipp: Nehmt das Geodreieck als Winkelmesser oder zum Finden paralleler oder senkrechter Seiten zu Hilfe.

Mit Hilfe dieser Aufgabe sollen die obige Tabelle bezüglich der strukturellen Merkmale von Vierecken vervollständigt und weitere charakteristische Eigenschaften der einzelnen Vierecke herausgearbeitet werden.

Durch den Einsatz der Problemlösebox werden die bis zu diesem Zeitpunkt darin enthaltenen Heurismen, allen voran der Heurismus der Strukturnutzung und der des systematischen Probierens, reaktiviert, vertieft und erweitert (vgl. Kap. 7.3.2). Gleichzeitig soll damit die Nützlichkeit und Anwendbarkeit der dort festgehaltenen Vorgehensweisen für die Bearbeitung neuer Problemstellungen vermittelt werden. Die Problemlösebox enthält zu diesem Zeitpunkt Handlungsschritte, die unter anderem dem *Heurismus der Strukturnutzung* zugeordnet sind und die auf die vorliegende Problemstellung übertragen werden können. Hierzu zählen neben dem allgemeinen Auffinden oder Erzeugen von Strukturen das Einführen von Bezeichnungen, das Einzeichnen von besonderen Punkten, die Abstandsbestimmung zwischen zwei Punkten, die Lage von Geraden beziehungsweise Seiten zueinander und das Verhältnis der Winkel untereinander. Mit Hilfe der Box lassen sich nun die Vierecke nach weiteren Strukturmerkmalen analysieren und ordnen. Der Hinweis, das Geodreieck zu nutzen, kann insbesondere für schwächere Schüler hilfreich sein, da auf diese Weise bestimmte Strukturmerkmale indirekt vorgegeben werden und so eine Entlastung stattfindet.

Die Schüler haben zu diesem Zeitpunkt die verschiedenen strukturellen Merkmale der Vierecke Schritt für Schritt selbständig erarbeitet sowie erste eigene Klassifizierungen vorgenommen und Zusammenhänge hergestellt. In einem weiteren Schritt werden die gewonnenen Erkenntnisse unter Verwendung der mathematischen Fachsprache präzisiert und systematisiert, um darauf aufbauend tragfähige Definitionen formulieren zu können.

[396] Je nachdem, wie umfassend die Problemlösebox zu diesem Zeitpunkt bereits ist, kann zusätzlich der Hinweis gegeben werden, dass die Einträge, die in Zusammenhang mit der Analyse von Bildern und Figuren (Thema Symmetrie) angelegt wurden, für die weitere Bearbeitung nützlich sein können.

Lies dir die nachfolgende Tabelle sorgfältig durch und überlege, welche Vierecke die dort beschriebenen Merkmale besitzen. Trage dazu die entsprechenden Zahlen auf den Karten in die freie Spalte ein.

Strukturmerkmale	***Karten Nr.***
Alle Seiten sind gleich lang.	
Jeweils gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.	
Genau zwei Seiten sind gleich lang.	
Je zwei (Paar) benachbarte(r) Seiten sind gleich lang.	
Jeweils gegenüberliegende Seiten sind parallel.	
Genau zwei Seiten sind parallel.	
Alle benachbarten Seiten stehen senkrecht aufeinander.	
Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.	
.....	

Tab. 31 Tabelle zur Dokumentation der Merkmal-geleiteten Gruppierung verschiedener Vierecke.

Auch hier tritt die Tabelle als Werkzeug in Erscheinung, durch das die maßgeblichen Informationen vollständig, übersichtlich und nach bestimmten Kriterien angeordnet werden können. Darüber hinaus wird so erneut ein systematisches Vorgehen gewährleistet, da alle Viereck-Kärtchen mit den aufgeführten Merkmalen nacheinander abgeglichen werden können. Zudem erhalten die Schüler auf diese Weise einen Überblick über die Vielzahl charakteristischer Merkmale auf deren Grundlage (weitere) konkrete Aussagen getroffen werden können. So belegt die Tabelle beispielsweise, dass ein Viereck über mehrere charakteristische Merkmale verfügt und dass unterschiedliche Vierecke einzelne gleiche Strukturmerkmale aufweisen können.

Ein weiterer Vorteil dieser Darstellungsform ist die problemlose Erweiterungsmöglichkeit der Tabelle um weitere Eigenschaften. Mit Hilfe der Tabelle lassen sich die Vierecke nach unterschiedlichen Gesichtspunkten wie nach der Länge der Seiten, der Lage der Seiten, nach der Winkelgröße oder nach ihren Symmetrieeigenschaften gruppieren und schließlich im Haus der Vierecke anordnen. Darüber hinaus können mit Hilfe der Informationen aus der Problemlöse- sowie der Merksatzbox die dort bereits erarbeiteten und dokumentierten Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren auf die Vierecke übertragen werden, so dass die Symmetrieeigenschaften von Vierecken als eine weitere Merkmal-eigenschaft in der Tabelle berücksichtigt werden können.

Zur weiterführenden Differenzierung und besonders auch zur Förderung begabter Schülerinnen und Schüler könnten zusätzliche Begriffe wie der der Diagonalen, des In- oder Umkreises ergänzt werden, auf deren Grundlage sich die Vierecke nach weiteren Merkmalen analysieren und ordnen lassen.

Mit der nächsten Forscheraufgabe werden schließlich die Fachbegriffe eingeführt und Definitionen formuliert.

Ordne die Viereck-Kärtchen der passenden Definitionen zu. Trage dazu die jeweiligen Karten-Nummern in die freie Spalte ein.

Definition	***Karten Nr.***
Ein Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind und benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen, nennt man Quadrat.	
Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten nennt man Raute.	
Ein Viereck, bei dem benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen nennt man Rechteck.	
Ein Viereck, bei dem benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen und gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind nennt man Rechteck.	
Ein Viereck, bei dem benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen und gegenüberliegende Seiten parallel zueinander und gleich lang sind, nennt man Rechteck.	
…	

Tab. 32 Tabelle zur reduzierenden Gruppierung verschiedener Vierecke.

Nachdem die Strukturmerkmale untersucht und erfasst, die Zusammenhänge zwischen den Figuren hergestellt und charakteristische Eigenschaften abgeleitet wurden, werden auf dieser Basis die geometrischen Fachbegriffe eingeführt und tragfähige Definitionen formuliert. Die Schüler erfahren, dass geometrische Termini durch exakt beschreibbare

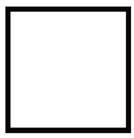
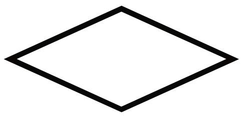
Merkmale charakterisiert werden, *nachdem* sie die Beziehungen und Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Begriffen bereits selbst hergestellt haben.

Die ausgefüllte Tabelle zeigt, dass es je nach zugrunde gelegtem Merkmal verschiedene Definitionen gibt, durch die ein Viereck mehr oder weniger eindeutig bestimmt wird. Gleichzeitig werden die Beziehungen zwischen den Begriffen noch einmal verdeutlicht, insbesondere dann, wenn eine Definition so formuliert wurde, dass sie verschiedene Vierecke unter sich vereint. Fasst man hingegen bestimmte Strukturmerkmale zusammen, kann jedes Viereck eindeutig bestimmt werden, wie die nachfolgende Aufgabe zeigt:

> *Konstruiere ein Viereck a) bei dem alle vier Seiten gleich lang sind und benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen b) bei dem alle vier Seiten gleich lang sind. Vergleiche deine Ergebnisse mit deinem Nachbarn. Was fällt euch auf?*

Bevor abschließend eindeutige Definitionen formuliert werden, sollen die Schüler noch einmal dafür sensibilisiert werden, dass die Wahl bestimmender Merkmale entscheidend für die Tragfähigkeit und Eindeutigkeit einer Definition ist. Je weniger (eindeutige) Merkmale zur Beschreibung herangezogen werden, desto mehr Lösungsmöglichkeiten gibt es.

> *Finde eine passende und möglichst genaue Definition zu den abgebildeten Vierecken. Überprüfe die Genauigkeit deiner Definition, indem du deinen Nachbarn ein Viereck nach deinen Angaben zeichnen lässt. Tipp: Nutze die Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabe.*

Eigene (eindeutige) Definition	***Viereck***
Ein Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind und benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen, nennt man Quadrat.[397]	*Quadrat* 
Ein Viereck, bei dem alle Seiten gleich lang und jeweils gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind, nennt man Raute.	*Raute* 

[397] Die in der Tabelle aufgeführten Definitionen sind nur exemplarisch zu sehen. Ein derart „minimalistisches" Vorgehen ist jedoch keineswegs erforderlich. Art und Umfang richten sich nach den im Unterricht erworbenen Inhalten.

Ein Viereck, bei dem benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen, jeweils gegenüberliegende Seiten parallel zueinander und gleich lang sind, nennt man Rechteck.	*Rechteck* 
…	…

Tab. 33 Formulierungsbeispiele eindeutiger Definitionen verschiedener Vierecke.

Mit der Formulierung eigener und „eindeutiger“ Definitionen soll verdeutlicht werden, dass eine Definition von der Wahl ihrer Strukturmerkmale abhängig ist und ein Viereck unterschiedlich definiert werden kann. Je mehr Strukturmerkmale berücksichtig werden, desto eindeutiger ist die Definition.

In diesem Zusammenhang kann der *Heurismus der Affinität* explizit angesprochen, eingeführt oder reaktiviert werden, bei dem bereits gelöste Probleme auf ihre Ähnlichkeit oder strukturelle Vergleichbarkeit zu einem neuen Problem hin untersucht werden, die schließlich zu einer systematischen Planung und Durchführung der Problemlösung herangezogen werden (vgl. Kap. 5.5.2). Durch die Tabellen als immer wiederkehrende Darstellungsform wurde innerhalb dieses Themenbereiches ein systematisches und strukturiertes Arbeiten gefördert, so dass dieses Vorgehen auch auf die vorliegende Aufgabe übertragen werden kann. Darüber hinaus wurden Kenntnisse über die Strukturmerkmale von Vierecken erworben, Beziehungen zwischen diesen hergestellt und Zusammenhänge in Form von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen den Vierecken erkannt und beschrieben.

Auf diesen Kenntnissen aufbauend kann nun der strukturelle Vergleich vorliegender Abbildungen Lösungsideen liefern. Durch das Herausarbeiten struktureller Gemeinsamkeiten und Unterschiede der abgebildeten Figuren können die fehlenden Definitionen aus bereits vorliegenden abgeleitet werden. Durch den zusätzlich konstruktiven Aspekt wird nicht nur die Eindeutigkeit der Definitionen überprüft, sondern auch die „augenscheinliche“ Ähnlichkeit zwischen den Figuren noch einmal herausgearbeitet.

Merksatzbox

In der Merksatzbox werden die erarbeiteten mathematischen Inhalte in Form von Definitionen, Sätzen oder Eigenschaften festgehalten, so dass auf diese zu einem späteren Zeitpunkt bzw. in anderen Sachkontexten zurückgegriffen und die Inhalte entsprechend ergänzt werden können. Welche Eigenschaften und Definitionen tatsächlich am Ende in der Merksatzbox dokumentiert werden, richtet sich nach der jeweiligen Schwerpunktsetzung und den innerhalb einer Unterrichtseinheit erarbeiteten Inhalte und kann somit in der

Umsetzung von diesem Beispiel abweichen. Die nachfolgend aufgeführten Inhalte sind somit keinesfalls bindend, sondern sollen vielmehr einige der möglichen Formulierungen für die Merksatzbox zeigen:

- Ein Viereck, bei dem alle Seiten gleich lang sind und benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen, nennt man Quadrat.
- Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten und einem rechten Winkel nennt man Quadrat.
- Ein Viereck mit drei rechten Winkeln und zwei gleich langen Diagonalen nennt man Quadrat.
- Ein Viereck mit gleich langen sich rechtwinklig halbierenden Diagonalen nennt man Quadrat.
- Ein Quadrat ist ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten.
- …

Parallel zu den fachmathematischen Inhalten wurden auch verschiedene Heurismen und heuristische Techniken thematisiert, deren Kernelemente in der Problemlösebox festgehalten werden.

Problemlösebox

Vierecke besitzen verschiedene Strukturmerkmale, nach denen sie charakterisiert und klassifiziert werden können. Man kann Vierecke voneinander unterscheiden und eindeutig benennen, indem man

- die Lage der Seiten, Diagonalen oder Symmetrieachsen beschreibt (parallel / senkrecht zueinander),
- die Länge der Seiten bestimmt und miteinander vergleicht,
- die Anzahl gleicher Lagebeziehungen (wie viele Seiten sind gleich lang / parallel / senkrecht) bestimmt und miteinander vergleicht,
- die Anzahl und Lage gleicher Winkel bestimmt,[398]
- systematisch vorgeht, um Fehler zu vermeiden und
- Tabellen nutzt, um das Vorgehen zu strukturieren.

[398] Wie bei der Merksatzbox handelt es sich auch hier um eine Auswahl möglicher Formulierungen, die in der Problemlösebox notiert werden könnten. Die Auflistung hat somit exemplarischen Charakter und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Es wurde gezeigt, dass und wie mit Hilfe von Forscheraufgaben Vierecke in ihrer Struktur erfasst, miteinander verglichen und nach individuellen Gesichtspunkten hierarchisch angeordnet werden können. Darüber hinaus wurde ein Weg aufgezeigt, mit dem Fachbegriffe eingeführt und gebildet, die hinter den Begriffen stehenden Eigenschaften, Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften sowie Beziehungen zwischen verschiedenen Begriffen hergestellt und Definitionen eigenständig formuliert werden können. Auch wurden Möglichkeiten vorgestellt, den *Heurismus der Strukturnutzung*, den *Heurismus des systematischen Probierens*, den *Heurismus der Affinität* sowie die *heuristische Technik Anfertigen einer Tabelle* einzuführen oder zu vertiefen. Um das Wissen über Vierecke und zugleich die hier erworbenen heuristischen Fähigkeiten weiter auszubauen, können auf dieselbe Weise andere Figurenklassen wie Dreiecke oder auch geometrische Körper thematisiert werden.

Ausblick: Dreiecke

Dreiecke spielen in der ebenen (euklidischen) Geometrie eine besondere Rolle, da mit Hilfe von Dreiecken als einfachstem Polygon, zahlreiche geometrische Definitionen und Sätze hergeleitet werden können und sich zudem jedes beliebige Vieleck in Dreiecke zerlegen lässt. Trotz dieser Sonderrolle und der Tatsache, dass Dreiecke laut Lehrplan Nordrhein-Westfalen bereits für die Orientierungsstufe vorgesehen sind, werden sie in den untersuchten Schulbüchern nicht explizit erwähnt oder nur am Rande behandelt. Dass Dreiecke sich bereits in der Orientierungsstufe thematisieren lassen und ebenso wie die ebenen Vierecke Anknüpfungspunkte zur Heuristik liefern, soll im Folgenden nur kurz gezeigt werden.

Das hier vorgestellte IHiMU-Arrangement zum Thema Vierecke lässt sich problemlos auf Dreiecke übertragen, indem das gleiche unterrichtskonzeptionelle Vorgehen wie bei den Vierecken angewandt wird: eine Strukturanalyse der Dreiecke, die sich in dem Vergleich der Länge der Seiten, der Lage und Größe der Winkel sowie in der Anzahl gleich langer Seiten zeigt. Analog zu den Forscheraufgaben zu den Vierecken kann auch hier mit der Ergänzung fehlender Dreiecksseiten zu vollständigen Dreiecken begonnen werden, die anschließend miteinander verglichen und nach verschiedenen Strukturmerkmalen geordnet und schrittweise klassifiziert werden, so dass abschließend darauf aufbauend tragfähige Definitionen für gleichschenklige, gleichseitige, rechtwinklige und beliebige Dreiecke formuliert werden können.

Neben dem Aufbau angemessener Begriffsvorstellungen, dem Erwerb von Kenntnissen über die charakteristischen Eigenschaften von Dreiecken, den Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften und den Beziehungen zwischen gleichschenkligen, gleichseitigen, rechtwinkligen und beliebigen Dreiecken sowie der Aneignung von Fähigkeiten, Probleme zu lösen und Konstruktionen durchzuführen, können auch hier die *Heurismen der Strukturnutzung, des systematischen Probierens, der Affinität* sowie die heuristische Technik der *Tabelle* vielfache Anwendung finden. Im Anschluss an die nun erworbenen Kenntnisse kann gezeigt werden, dass sich jedes Viereck aus zwei Dreiecken zusammensetzt und der Begriff der Diagonalen kann auf dieser Grundlage als weiteres Strukturmerkmal ebener Vierecke eingeführt werden.

Ausblick: Körper

Überall in unserer dreidimensionalen Welt begegnen wir Figuren und geometrischen Körpern, die sich in ihrer Funktion, Farbe, Form, Größe und in ihrer materiellen Beschaffenheit voneinander unterscheiden. Um Körper in der Umwelt als solche zu erkennen und zu identifizieren, müssen wir sie abstrahieren, indem wir die geometrischen Eigenschaften der Objekte erfassen. So ist es unter anderem Aufgabe des Geometrieunterrichts, den dreidimensionalen Anschauungsraum zu erschließen, um Objekte aus der Umwelt beschreiben, charakterisieren und nach bestimmten Eigenschaften klassifizieren zu können.

Gemäß dem Lehrplan für Mathematik in Nordrhein-Westfalen sollen die Schüler bis zum Ende der Jahrgangsstufe 6 neben den oben beschriebenen Kenntnissen und Fertigkeiten im Umgang mit ebenen Figuren auch die Fähigkeit erwerben, Grundkörper zu benennen, zu charakterisieren und diese in ihrer Umwelt zu identifizieren. Darüber hinaus sollen sie Körper herstellen und Oberflächeninhalte schätzen und bestimmen können.

Die beiden Themenbereiche *Flächen* und *Körper* weisen viele Parallelen auf und sind eng miteinander verknüpft, so dass es durchaus sinnvoll ist, beide Inhalte gemeinsam oder unmittelbar aufeinander folgend im Unterricht zu behandeln. Die nachfolgende kurze Schulbuchanalyse zeigt, inwieweit und in welcher Form diese Idee bereits in den Schulbüchern verankert ist:

In *Elemente der Mathematik 5* bilden Körper und Figuren augenscheinlich eine in sich geschlossene Einheit. Tatsächlich werden beide Themenbereiche nur an einer Stelle in einen direkten Zusammenhang gebracht, indem den geometrischen Grundkörpern die

Begrenzungsflächen zugeordnet werden. Im Anschluss an die Körper werden die Vierecke behandelt, wobei es keine weiteren Anknüpfungspunkte zu den Körpern gibt.[399]

Im *Fokus Mathematik 5* werden zunächst die ebenen Figuren unter dem Stichwort „Flächen“ und darauf aufbauend die geometrischen Grundkörper kurz eingeführt, denen Netze von Quadern und Würfel folgen. In Jahrgang 6 wird das Thema Körper erneut aufgegriffen und in Auseinandersetzung mit der Volumenberechnung erweitert und vertieft.[400]

In *MatheNetz 5* werden die Körper thematisch noch vor den ebenen Figuren eingeordnet. Ausgehend von den geometrischen Grundkörpern werden deren Netze erstellt, aus denen die ebenen Figuren zwar hervorgehen, diese jedoch nicht weiter behandelt werden. So steht hier die Anzahl der Ecken und Kanten im Vordergrund, nicht aber die Figuren, aus denen sich ein Körper zusammensetzt.[401]

In *Mathe Live 5* werden zunächst Körper und Körpernetze thematisiert und im Anschluss an diese Einheit werden die Vierecke behandelt. Ein am Rande gegebenen Hinweise mit den Worten „Diese Figuren kennst du sicherlich schon“ (Mathe live 5 2006: 78), worunter Quadrat, Rechteck, Dreieck, Kreis und Sechsecke abgebildet sind, lässt darauf schließen, dass die ebenen Figuren dem Thema vorausgegangen sein sollten oder als bekannt vorausgesetzt werden.

Im *Lambacher Schweizer 5* werden die Körper in Verbindung mit den Körpernetzen, den Schrägbildern und dem Rauminhalt thematisiert. Die Einheit schießt an die Flächeninhalte an.[402]

In *Mathe Neue Wege* werden in der Jahrgangsstufe 5 einfache geometrische Körper und Flächen in einer gemeinsamen Einheit behandelt. Dabei werden mit Hilfe von Körpernetzen die ebenen Figuren thematisiert, ohne dass ihre spezifischen Eigenschaften herausgearbeitet werden. Im Anschluss werden Kantenmodelle sowohl von Körpern als auch von ebenen Figuren dargestellt.[403]

Auch wenn die Analogien zwischen ebenen Figuren und geometrischen Körpern offensichtlich sind und diese auch durch die Anordnung der Themen in den untersuchten Schulbüchern hergestellt werden, so zeigt sich dennoch, dass der Behandlung von Körpern

---

[399] Vgl. Elemente der Mathematik 5, 2006: 136-139.
[400] Vgl. Fokus Mathematik 6, 2006: 158-182.
[401] Vgl. MatheNetz 5, 2005: 90-98.
[402] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 148-175.
[403] Vgl. Mathe Neue Wege 5, 2005: 134-148.

insgesamt eine eher geringe Bedeutung beigemessen wird. Dabei können Körper, ähnlich wie die ebenen Figuren, nach unterschiedlichen Strukturmerkmalen wie Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen und nach der Art ihrer Begrenzungsflächen klassifiziert und geordnet werden. Der *Heurismus der Affinität* spielt dabei eine zentrale Rolle, der unter anderem als Suche nach strukturellen Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Aufgaben in Erscheinung tritt, so dass sich die im IHiMU-Arrangement beschriebenen Vorgehensweisen zur mathematischen Erschließung ebener Figuren auf die der Körper übertragen lässt.

Der *Heurismus der Affinität* (teils im Verbund mit der *heuristischen Technik der De- und Rekonstruktion*) findet weiterhin Anwendung, wenn Lösungsideen über die strukturierte Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen gefunden werden, so dass konkrete Aussagen über den Sachverhalt getroffen werden können. So etwa, wenn die ermittelten Eigenschaften eines Quadrats auf den Würfel übertragen werden und damit ein Zusammenhang zwischen der ebenen Figur und dem geometrischen Körper hergestellt wird. Diese Einsicht kann an späterer Stelle auf die Flächen- und Volumenberechnung übertragen werden: Dass die geometrischen Körper in einem direkten Zusammenhang mit den ebenen Figuren stehen, zeigt sich insbesondere bei der Oberflächenbestimmung, bei der die Grund-, Deck-, Seiten- und Mantelflächen der Körper als ebenen Figuren identifiziert werden, aus denen die Körpernetze gebildet werden. So kann zu einem späteren Zeitpunkt die Flächeninhaltsberechnung in Beziehung zur Oberflächeninhaltsberechnung geometrischer Körper gesetzt werden und diese ermöglichen.[404]

Es ist erkennbar, dass durch die hier umrissene Verknüpfung der beiden mathematischen Inhaltsbereiche nicht nur Wissen erworben, miteinander vernetzt und damit ein tragfähiges Begriffswissen aufgebaut wird, das auf weitere Inhalte übertragen werden kann, sondern dass auch die zuvor erworbenen *Heurismen der Strukturnutzung*, *der Affinität* und *des systematischen Probierens* sowie die *heuristische Technik Anfertigen einer Tabelle* reaktiviert bzw. vertieft werden können. Wird dies im Unterricht tatsächlich umgesetzt, treten der Nutzen und die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten sowie die übergeordnete Bedeutung heuristischer Arbeitsweisen– auch in den Augen der Schüler – deutlich hervor und die heuristische Perspektive auf mathematisches Handeln rückt allzeit weiter in den Mittelpunkt.

[404] Die hier kurz angerissenen Beispiele beziehen sich nach wie vor auf die Inhalte der Orientierungsstufe bzw. durchaus auf die Inhalte auch der höheren Jahrgangsstufen, zumindest der Sekundarstufe I.

7.3.4 Flächenberechnung von Vierecken

Nachdem ebene Figuren wie Rechteck, Quadrat, Parallelogramm, Raute, Trapez und Dreiecke eingeführt, charakterisiert, klassifiziert und definiert wurden, werden darauf aufbauend Methoden zur Bestimmung von Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren entwickelt. Laut Lehrplan NRW sollen bis zum Ende der Orientierungsstufe Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken, Dreiecken, Parallelogrammen und daraus zusammengesetzten Figuren geschätzt und bestimmt werden können.[405]

Da der Schwerpunkt der unterrichtlichen Behandlung auf den Flächeninhalten liegt (siehe Tab. 23) und die Umfangsberechnung in der Regel keine Schwierigkeit darstellt, sollen an dieser Stelle die Flächeninhalte näher beleuchtet werden.

1. Geometrische Inhalte

Das Thema *Flächeninhalt (und Umfang)* ist ein Themenkomplex, der das Curriculum von der Grundschule, über die Sekundarstufe I bis zur Oberstufe spiralförmig durchzieht. Beginnend bei den in der Grundschule gemachten Erfahrungen zum qualitativen und quantitativen Flächenvergleich werden die bereits erworbenen Verfahren weiter ausgebaut und in der Sekundarstufe I mit Hilfe arithmetischer und algebraischer Kenntnisse ausgeweitet und vertieft, bevor sie in der Sekundarstufe II schließlich in die Integralrechnung münden.[406] Während in der Grundschule lediglich komparative Flächeninhaltsbestimmungen aber noch keine Berechnungen durchgeführt werden, findet in der Orientierungsstufe die für die Flächeninhaltsberechnung notwendige Verknüpfung von Geometrie und Arithmetik statt, indem der Fläche einer geometrischen Figur eine Maßzahl zugeordnet wird, so dass eine Beziehung zwischen den Zahlen einerseits und den geometrischen Objekten andererseits hergestellt wird. Bevor in der Konzeptdarstellung (Abschnitt 4) ein Weg aufgezeigt wird, wie Flächeninhaltsvergleich sowie Herleitung der Flächeninhaltsformeln für Rechtecke, Parallelogramme und Dreiecke unter heuristischen Gesichtspunkten vollzogen werden können, werden nun die hierfür grundlegenden fachmathematischen Aspekte kurz erläutert.

Die Figurenklasse der Polygone erhält man, indem mindestens drei nicht kollineare Punkte durch einen Streckenzug miteinander verbunden werden, dessen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, wodurch ein geschlossener Streckenzug entsteht. Das

[405] Vgl. NORDRHEIN-WESTFALEN 2007a.
[406] Vgl. FRANKE 2007: 267.

umschlossene Gebiet, einschließlich des Polygonzugs selbst, nennt man Polygon. Die Strecken zwischen zwei benachbarten Punkten werden als Seiten bezeichnet und die Punkte sind die Ecken des Polygons.

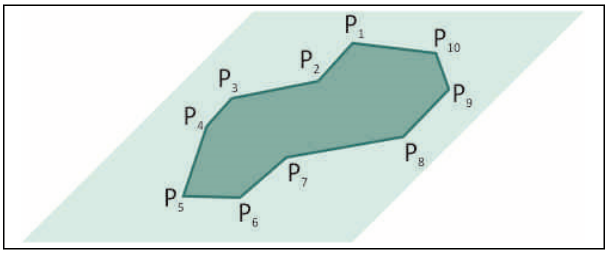


Abb. 43 Polygon mit eingezeichnetem geschlossenem Polygonzug.

Der Umfang eines Polygons ist durch die Summe der Längen seiner Seiten gegeben. Sind alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß, spricht man von einem regelmäßigen Polygon (vgl. Kap. 7.3.3). Die Anzahl der Ecken bestimmt den Namen des Polygons (Dreieck, Viereck, Fünfeck,...). Dreiecke stellen die Polygonform mit geringstmöglicher Eckenanzahl dar. Durch iteratives Einfügen von Diagonalen lässt sich jedes Polygon vollständig triangulieren. Der Flächeninhalt eines Polygons kann aus der Summe der Flächeninhalte seiner durch Triangulation erzeugten Dreiecke bestimmt werden. Der Flächeninhalt A[407] eines allgemeinen Dreiecks, von dem eine Seite und die Höhe h_a bekannt sind, berechnet sich nach der Formel $A=\frac{1}{2}a\cdot h_a$.[408]

Der Flächeninhalt ist das Maß für die Größe einer Fläche und ist durch eine positive, reelle Maßzahl und Maßeinheit gegeben. Bevor der Flächeninhalt eines Polygons durch eine Maßzahl angegeben wird, erfolgt eine stufenweise Erschließung des Flächeninhaltsbegriffs durch den direkten und indirekten Flächenvergleich.

Ausgangspunkt bildet der *unmittelbare Flächenvergleich*, bei dem Flächen durch Aufeinanderlegen verglichen werden, wobei das Prinzip einer Ordnungsrelation unter Beachtung der Transitivität[409] und der Antisymmetrie[410] zur Anwendung gebracht wird. Lassen sich Flächen nicht unmittelbar durch Aufeinanderlegen vergleichen, werden sie zur Überprüfung ihrer Flächeninhaltsgleichheit in paarweise kongruente Teilfiguren zerlegt (Zerlegungsgleichheit) oder durch ihrerseits kongruente Figuren zu zerlegungsgleichen Figuren ergänzt (Ergänzungsgleichheit). Zerlegungsgleiche und ergänzungsgleiche Figuren besitzen den gleichen Flächeninhalt, gehorchen damit dem Prinzip der Flächeninvarianz

[407] Diese allgemein übliche Abkürzung des Flächeninhalts ist von dem lateinischen Wort *area* abgeleitet.
[408] a ist die Grundseite des Dreiecks und h_a ist die Höhe h auf die Grundseite a.
[409] Wenn Fläche 1 Fläche 2 überdeckt und Fläche 2 Fläche 3, dann überdeckt auch Fläche 1 Fläche 3.
[410] Wenn Fläche 1 Fläche 2 überdeckt, dann überdeckt Fläche 2 nicht die Fläche 1, es sei denn, Fläche 1 und Fläche 2 sind kongruent.

und werden als inhaltsgleich oder flächeninhaltsgleich bezeichnet. Das Prinzip der Flächeninvarianz ist für die Herleitung der Flächeninhaltsformeln von Vielecken von elementarer Bedeutung.

In einem nächsten Schritt wird durch das Auslegen zweier Figuren mit gleichartigen (kongruenten), *ungenormten Repräsentanten* ein indirekter, nicht maßeinheitsgebundener, aber quantitativer Flächenvergleich durchgeführt. Abschließend wird durch den indirekten Vergleich mit nunmehr *standardisierten Repräsentanten* der Begriff des Flächeninhalts als Maß für eine Größe etabliert und ein genormter Repräsentant festgelegt. Für den genormten Repräsentanten wird ein Quadrat mit der Seitenlänge 1LE und einem Flächeninhalt von 1LE^2 zugrunde gelegt und als *Einheitsquadrat* bezeichnet. Durch das Auslegen einer Figur mit Einheitsquadraten wird der Flächeninhalt durch die Anzahl der in ihr enthaltenen Einheitsquadrate bestimmt. Die Maßzahl gibt die Anzahl der Einheitsquadrate an, die zum Auslegen der Figur benötigt werden. Die Flächenmaßeinheit richtet sich nach der Längeneinheit des jeweils verwendeten Einheitsquadrats: Je nach Kontext werden sinnvollerweise größere oder kleinere Flächenmaßeinheiten[411] wie Quadratkilometer, Hektar, Ar, Quadratdezimeter, Quadratzentimeter oder Quadratmillimeter verwendet. Sämtliche Flächenmaßeinheiten lassen sich ineinander umrechnen.

Flächeninhaltsformel von Rechteck und Parallelogramm

Die Flächeninhaltsformel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks leitet sich aus dem Auslegen (Parkettieren) der Rechteckfläche mit Einheitsquadraten ab.

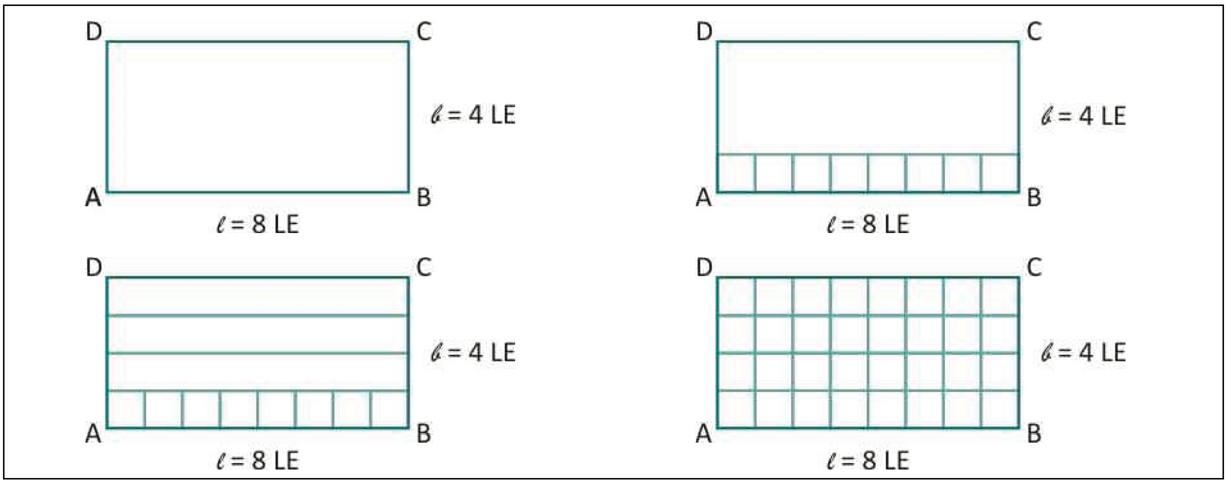


Abb. 44 Herleitung der Flächeninhaltsformel für Rechtecke durch Auslegen mit Einheitsquadraten.

[411] Im schulischen Kontext wird in der Regel der Zentimeter als Maßeinheit zugrunde gelegt. Auf das Rechnen mit Flächeneinheiten soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Dieser ergibt sich aus der Gesamtzahl aller Einheitsquadrate und berechnet sich aus der Multiplikation der Anzahl der Einheitsquadrate in der Länge l mit der Anzahl der Reihen in der Breite b[412] multipliziert mit dem Flächeninhalt des Einheitsquadrates. Für den vorliegenden Fall also: $A = 8 \cdot 4 \cdot 1LE^2$ (siehe Abb. 44).

Die Flächeninhaltsformel für Rechtecke ist allgemein (sofern bei der Längeneinheit LE der Zentimeter gewählt wurde) gegeben durch die Formel: $A = l \cdot b \cdot 1cm^2$.

Um den Flächeninhalt eines Parallelogramms zu bestimmen, wird diese Figur auf die bereits bekannte Rechteckfigur durch eine einfache Zerlegung und Zusammensetzung zurückgeführt, so dass die Flächeninhaltsformel für Parallelogramme hergeleitet werden kann.

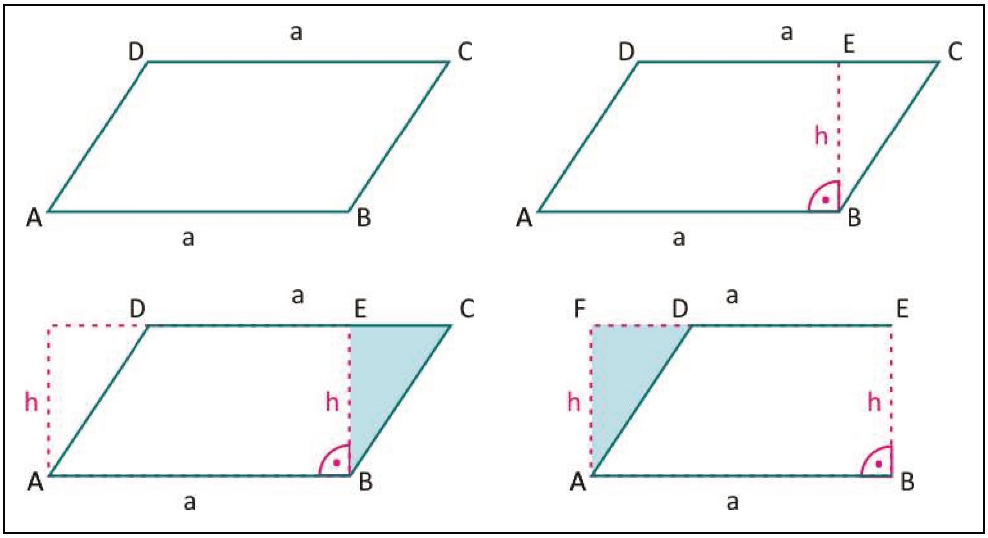


Abb. 45 Herleitung der Flächeninhaltsformel für Parallelogramme durch Zerlegen und Zusammensetzen zu einem Rechteck.

Jedes Parallelogramm, dessen Höhe innerhalb des Parallelogramms liegt[413], lässt sich in ein flächengleiches Rechteck transformieren, indem die Höhe h des Parallelogramms durch Fällen des Lotes von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite (in Abb. 45 von Punkt B auf die Seite a) eingezeichnet wird, so dass ein Dreieck (hier ΔBCE) entsteht. Durch Abtrennen des Dreiecks (ΔBCE) und Wiederanfügen auf der gegenüberliegenden Seite entsteht ein zum Parallelogramm flächeninhaltsgleiches Rechteck, bei dem die Länge l der Grundseite a und die Breite b der Höhe h des Parallelogramms entspricht. Der Flächeninhalt A des Parallelogramms ist somit gegeben durch: $A = a \cdot h_a$.

[412] Dies gilt, sofern die Seitenlängen des Rechtecks kommensurabel zur Einheitsstrecke sind.
[413] Da die anderen Fälle für die Orientierungsstufe nicht von Relevanz sind, wird darauf nicht näher eingegangen.

Flächeninhalt von Dreiecken

Ähnlich wie die Flächeninhaltsformel für Parallelogramme mit Hilfe des Zerlegens und Zusammensetzens auf die Flächeninhaltsformel für Rechtecke zurückgeführt und dadurch bestimmt werden kann, kann über das Ergänzen die Flächeninhaltsformel für Dreiecke hergeleitet werden. Da in einem Rechteck jede Diagonale dieses in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke zerlegt (vgl. Kap. 7.3.3, Abschnitt 1), folgt im Umkehrschluss, dass sich zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke stets zu einem Rechteck ergänzen (siehe Abb. 46). Dabei entsprechen die beiden Katheten des Dreiecks der Länge l beziehungsweise Breite b des Rechtecks und die Hypotenuse entspricht der Rechteckdiagonalen d. Der Flächeninhalt des so entstandenen Rechtecks ist doppelt so groß wie der des Dreiecks, den es zu ermitteln gilt. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist somit gegeben durch: $A=\frac{1}{2}l\cdot b$.

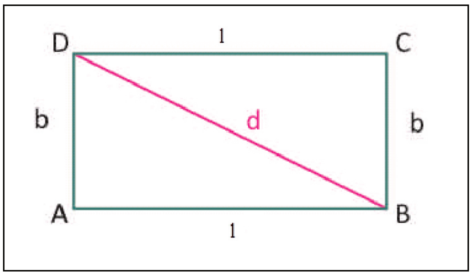


Abb. 46 Rechteck mit eingezeichneter Diagonale.

Der Flächeninhalt nicht rechtwinkliger Dreiecke kann ebenfalls über die Ergänzung auf den eines Rechtecks zurückgeführt werden.

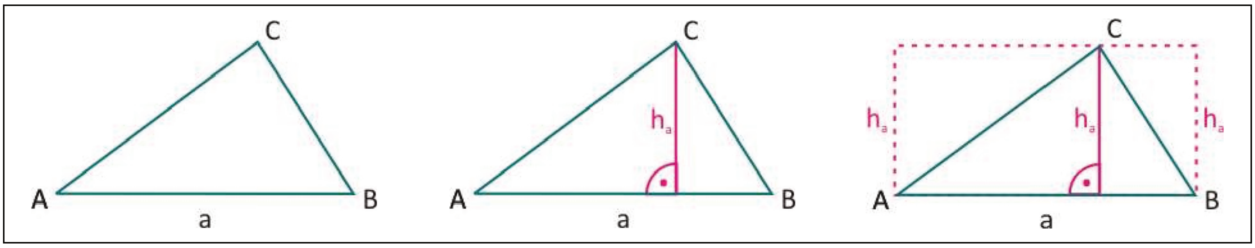


Abb. 47 Herleitung der Flächeninhaltsformel für beliebige Dreiecke durch Ergänzung zu einem Rechteck.

Dazu wird eine Höhe h des Dreiecks eingezeichnet, durch die das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt wird. Damit kann das oben erläuterte Prinzip für rechtwinklige Dreiecke erneut angewandt werden: Durch Anfügen (identischer) Teildreiecke an das ursprüngliche Dreieck kann dieses zu einem Rechteck ergänzt werden (siehe Abb. 47). Der Flächeninhalt des so entstandenen Rechtecks ist doppelt so groß, wie der des zu bestimmenden Dreiecks. Dabei entspricht die Grundseite a des Dreiecks der Länge l des zugehörigen Rechtecks und die Höhe h_a des Dreiecks der Breite b des Rechtecks, so dass der Flächeninhalt des Dreiecks durch die Formel $A=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ gegeben ist.

2. Darstellung in Schulbüchern

Auch das Thema *Flächeninhalt und Umfang* folgt keiner einheitlichen unterrichtlichen Behandlung und variiert je nach Schulbuch und Jahrgangsstufe bezüglich seines Umfangs, seiner Einführung und Durchführung.

In *Elemente der Mathematik 5* wird der Begriff des Flächeninhaltes über den Größenvergleich einerseits durch das Ergänzen von Figuren zu zerlegungsgleichen sowie andererseits durch Zerlegen von Figuren in paarweise kongruente Teilfiguren eingeführt und vom Umfangsbegriff abgegrenzt. Daran schließt das Messen des Flächeninhaltes durch Auslegen mit Einheitsquadraten an, wobei auch die Maßzahl und Maßeinheit eingeführt werden. Im Anschluss werden weitere Maßeinheiten und deren Umrechnung thematisiert. Auf dieser Grundlage werden die Formeln zur Flächeninhalts- und Umfangsberechnung von Rechtecken hergeleitet und der Umgang mit den Formeln sowie das Rechnen mit Einheiten geübt. In diesem Zusammenhang wird explizit auf die Strategie des Zerlegens und Ergänzens zur Berechnung von Flächeninhalten zusammengesetzter Figuren hingewiesen[414], der dann Anwendungsaufgaben folgen. Den Abschluss dieser Themeneinheit bildet ein Exkurs zum Thema „Flächeninhalt nicht rechteckiger Flächen“, deren Inhalte durch das Auslegen mit einer Rasterfolie annähernd bestimmt werden.[415] Aufbauend auf diesen Kenntnissen werden in der Jahrgangsstufe 6 die Flächeninhalte sowie die Umfänge von Dreiecken, Parallelogrammen und Trapezen sowie von zusammengesetzten Figuren behandelt. Die Flächeninhaltsformeln für Dreiecke und Parallelogramme werden anschaulich und schrittweise über das Zurückführen (durch Ergänzen und Zerlegen) auf Rechtecke hergeleitet, während die Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes eigenständig erarbeitet werden soll. Zahlreiche Anwendungsaufgaben, bei denen Bezug auf die Umfangsberechnung sowie das Rechnen mit Einheiten genommen wird, schließen sich an. Vertieft werden die so gewonnenen Kenntnisse bei der Flächen- und Umfangsberechnung von Vielecken. Den Abschluss bildet auch hier die näherungsweise Bestimmung der Flächeninhalte und der Umfänge krummlinig begrenzter Flächen.[416]

In *Fokus Mathematik* wird das Thema *Flächenberechnung* bereits in der Jahrgangsstufe 5 recht ausführlich behandelt. Ausgangspunkt bildet der Flächenvergleich durch

[414] Vgl. Elemente der Mathematik 5, 2006: 201.
[415] Vgl. Elemente der Mathematik 5, 2006: 184-205.
[416] Vgl. Elemente der Mathematik 6, 2013: 152-166.

Parkettierung, dem die Methode des Messens mit Hilfe von Einheitsquadraten folgt,[417] auf deren Grundlage schließlich das Flächenmaß eingeführt wird. Der *Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken* wird anhand von Beispielaufgaben thematisiert und darauf aufbauend werden die Formeln für *Umfang* und *Flächeninhalt* hergeleitet. Der Umfang wird dabei als die

Länge des Randes einer Figur und der Flächeninhalt als die Anzahl der Einheitsquadrate, mit der eine Figur ausgelegt wurde, definiert. Darüber hinaus wird die Ergänzungsmethode zur Flächeninhaltsberechnung zusammengesetzter Figuren vorgestellt.[418] Es folgen zahlreiche Aufgaben, bei denen nicht nur die Formeln zur Umfangs- und Flächeninhaltsberechnung einfacher wie zusammengesetzter ebener Figuren Anwendung finden, sondern auch das Rechnen mit Einheiten berücksichtigt wird. Die Berechnung der *Flächeninhalte von Parallelogrammen und Dreiecken* bildet den Kapitelabschluss. Hier wird das Zerlegen von Parallelogrammen beziehungsweise das Ergänzen von Dreiecken zu den bereits bekannten Rechtecken ausführlich thematisiert und durch Abbildungen sowie durch ergänzende und umfangreiche Texte erläutert.[419]

In *MatheNetz 5* werden auf einer Seite drei „Methoden zur Bestimmung von Flächeninhalten“ (MatheNetz 5 2005: 196) vorgestellt; das Schätzen durch den Vergleich mit bekannten Flächeninhalten, das Auszählen von "Kästchen" sowie das Wiegen von Pappstücken mit bekanntem und unbekanntem Flächeninhalt zum Flächenvergleich. Die in diesem Zusammenhang wichtigen Bergriffe wie Einheitsquadrat, Maßzahl und Maßeinheit finden Anwendung, werden jedoch nicht näher erläutert oder definiert. Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird abschließend als „Länge mal Breite“ festgelegt. Es folgte eine ebenso knappe Einführung der Flächeneinheiten und deren Umrechnung, bevor mit dem Schätzen fortgefahren wird. Der Schwerpunkt der Anwendungsaufgaben liegt auf dem Rechnen mit Einheiten.[420]

In der Jahrgangsstufe 6 werden die drei Methoden aus der Jahrgangsstufe 5 noch einmal in einer Tabelle aufgeführt und um die Rauminhalte sowie um den Punkt „Rechnen mit Größen“ (MatheNetz 6 2006: 25) ergänzt. Dabei beschränken sich diese Angaben auf die des Rechtecks beziehungsweise des Quaders und umfassen eine Schulbuchseite.

[417] Vgl. Fokus Mathematik 5, 2013: 183-185.
[418] Vgl. Fokus Mathematik 5, 2013: 193.
[419] Vgl. Fokus Mathematik 5, 2013: 199-205.
[420] Der Umfang wird in MatheNetz 6 lediglich in Zusammenhang mit den Dezimalzahlen kurz aufgegriffen (vgl. MatheNetz 6, 2006: 163). Eine weitere Vertiefung ist in der Orientierungsstufe nicht vorgesehen.

In *Zahlen und Größen* liegt der Fokus in der Jahrgangsstufe 5 zunächst nur auf dem Erkennen und Beschreiben von Vielecken.[421] In *Zahlen und Größen 6* wird das Thema erneut aufgegriffen und vertieft. Der Einstieg erfolgt über den Flächenvergleich durch Zerlegung der Figuren in paarweise kongruente Teilfiguren.[422] Es folgt eine Einführung in das Thema *Flächenmaße*, der *Flächeninhalte von Rechtecken und Quadraten* und schließlich die *Umfangsberechnung* folgen. Die Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken und Quadraten wird über Beispielaufgaben veranschaulicht, aus denen die allgemeine Formel abgeleitet wird. Dabei werden die Einheitsquadrate zur Visualisierung der Flächeninhaltsformel von Rechtecken und Quadraten herangezogen, ohne dass diese in ihrer Funktion und Bedeutung näher erläutert werden. Aufgaben, bei denen der Umgang mit den Formeln und Einheiten im Vordergrund stehen, schließen sich an.[423] In analoger Weise wird das Thema *Umfang* daran anschließend behandelt. Abschluss dieser Einheit bildet das systematische Abschätzen von (allgemeinen) geometrischen Figuren über das Auslegen mit Einheitsquadraten.[424]

In *Mathe live 6* werden unter dem Stichwort „Wie wir wohnen" (Mathe live 6, 2007: 111) zunächst Grundrisse von Wohnungen miteinander verglichen und der Maßstab eingeführt.[425] Daran anschließend wird der Flächenvergleich zusammengesetzter Figuren über das Zerlegen und Zusammensetzen sowie über das Auslegen mit Einheitsquadraten vorgestellt und anhand von Anwendungsaufgaben vertieft. Bevor der Flächeninhalt für Rechtecke behandelt wird, werden die Flächeneinheiten eingeführt und anhand weniger Aufgaben eingeübt. Auf den Begriff des Einheitsquadrates selbst wird dabei verzichtet. Darauf aufbauend wird schließlich die Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken behandelt. Die daran anschließenden Aufgaben befassen sich in erster Linie mit der Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken und daraus zusammengesetzten Figuren sowie mit der Bestimmung fehlender Seitenlängen. Dem Rechnen mit Einheiten kommt dabei eine besondere Bedeutung zu. Die Flächeninhaltsberechnung von Parallelogrammen, Dreiecken, Trapezen oder daraus zusammengesetzten Figuren wird nicht thematisiert, so dass sich auch die Umfangsberechnung auf Rechtecke beschränkt.[426]

[421] Vgl. Zahlen und Größen 5, 2008: 110.
[422] Vgl. Zahlen und Größen 6, 2006: 75 f.
[423] Vgl. Zahlen und Größen 6, 2006: 85-93.
[424] Vgl. Zahlen und Größen 6, 2006: 94 f.
[425] Vgl. Mathe live 6, 2007: 114-117.
[426] Vgl. Mathe live 6, 2007: 118-130.

Im *Lambacher Schweizer* wird das Thema rund um Flächen, Flächeneinheiten, Flächeninhalte verschiedener Figuren und deren Umfänge bereits in Jahrgangsstufe 5 ausführlich und anschaulich erläutert. In einem ersten Erkundungsteil werden die Eigenschaften von Dreiecken und besonderen Vierecken zunächst wiederholt, und verschiedene ebene Figuren werden unter intuitiven Gesichtspunkten nach der Größe ihrer Flächeninhalte geordnet. Die Ergebnisse werden über den Flächenvergleich durch das Zerlegen in kongruente Teilfiguren überprüft. Aufbauend darauf wird die Flächengleichheit von Figuren durch Zerlegen und Zusammensetzen sowie durch das Auslegen mit gleich großen Plättchen thematisiert und anhand konkreter Aufgaben vertieft.[427] Es folgt die Einführung der Flächeneinheiten sowie deren Umrechnung und der Quadratmeter wird als Einheitsmaß festgelegt. Durch zahlreiche Anwendungsaufgaben werden das Wissen vertieft und der Umgang eingeübt. Unter Verwendung der Längeneinheiten wird die Flächeninhaltsformel für Rechtecke eingeführt, indem eine Rechteckfläche mit Zentimeterquadraten ausgelegt und der Inhalt nach der Formel „Länge mal Breite“ bestimmt wird.[428]

Neben dem Schätzen der Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen mit der Gitter- und Rechteckmethode, werden weitere Anwendungs- sowie Knobelaufgaben gestellt. Außerdem werden Fermi-Aufgaben[429] herangezogen, um ein angemessenes Größenverständnis für den Längen- und Flächeninhaltsbegriff aufzubauen.[430] Danach werden die Flächeninhaltsformeln für Parallelogramme und Dreiecke über die „Strategie“ (Lambacher Schweizer 5, 2009: 134) des Zerlegens und Ergänzens sowie der Umfang von Figuren thematisiert. Die sich anschließenden Aufgaben sind umfassend und vielseitig und reichen von Anwendungs- und Übungsaufgaben über Knobelaufgaben bis hin zu Problemlöseaufgaben.[431]

Unter dem Thema *Flächeninhalt* werden im Lehrwerk *Mathe Neue Wege 5* gleich zu Beginn die Begriffe Umfang und Flächeninhalt anhand eines Beispiels beschrieben und voneinander abgegrenzt und außerdem wird das Messen des Flächeninhaltes durch Auslegen mit Einheitsquadraten anhand eines Anschauungsbeispiels eingeführt. Direkt im

[427] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 118-122.
[428] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 123-127.
[429] Unter einer Fermi-Aufgabe (auch Fermi-Problem oder Fermi-Frage) wird eine i. d. R. alltags-/realweltbezogene Problemstellung verstanden, für deren Beantwortung bzw. Abschätzung zu wenige Daten vorliegen. Für die Bearbeitung von Fermi-Aufgaben ist generell Allgemeinwissen und vor allem eine gute Schätzfähigkeit mindestens genauso wichtig wie fachmathematische Kenntnisse und Kompetenzen.
[430] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 128-133.
[431] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 139-145.

Anschluss und ohne weitere Anwendungsaufgaben wird die Flächeninhaltsbestimmung durch Auslegen mit „Flächeneinheiten" thematisiert und die Begriffe Maßzahl und Maßeinheit werden eingeführt. Der Begriff des Einheitsquadrats wird in diesem Zusammenhang weder genannt noch in seiner Funktion erläutert. Bei den Anwendungsaufgaben wird der Flächenvergleich durch Zerlegen in kongruente Teilfiguren eher am Rande angesprochen.[432] Es folgt eine Übersicht über die Flächeneinheiten und die Flächeninhaltsformeln für Rechtecke und Quadrate, die unter Einbeziehung der Einheitsquadrate (ohne diese explizit zu benennen) hergeleitet werden. Aufgaben zur Berechnung des Umfangs, des Flächeninhaltes und das Rechnen mit Einheiten schließen sich an.[433] Den Abschluss bildet das Schätzen der Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen mit Hilfe der Gitter- und Rechteckmethode[434].

In Jahrgangsstufe 6 schließt das Thema *Umfang und Flächeninhalt von Quadraten und Rechtecken* unmittelbar an die besonderen Dreiecke und Vierecke und deren charakteristische Eigenschaften an. Nach einer Einführungsseite, auf der das Zerlegen und Ergänzen beliebiger Dreiecke durch Schneiden und Falten vorgestellt wird, werden die Flächeninhaltsformeln für allgemeine Dreiecke, Parallelogramme und Trapeze auf Basis der Flächeninhaltsformel für Rechtecke anhand von Musteraufgaben vorgestellt. Nach einer knappen Erläuterung der Umfangsbestimmung für Dreiecke und allgemeine Viereck folgt eine Sammlung von Aufgaben zur Flächeninhaltsbestimmung von Dreiecken, Vierecken und daraus zusammengesetzten Figuren durch Zerlegen und Ergänzen (umwandeln in bekannte Figuren) sowie ein Exkurs zu der Oberflächenbestimmung von Körpern und Anwendungsaufgaben. Einen weiteren Schwerpunkt bilden Höhen im Dreieck.[435]

Der Blick in die Schulbücher zeigt, dass diese bei den zu vermittelnden Themenbereichen *Flächeninhalt und Umfang* nicht nur umfangsmäßig stark voneinander abweichen. Auch Art der Einführung, Definition und Genauigkeitsgrad der Fachbegriffe weisen große Diskrepanzen auf. Nicht selten werden Begriffe gebraucht, ohne dass diese nachvollziehbar erläutert oder von anderen Begriffen abgegrenzt werden.

[432] Vgl. Mathe Neue Wege 5, 2006: 188-190.
[433] Vgl. Mathe Neue Wege 5, 2005: 192-195.
[434] Die Gittermethode beinhaltet das Auslegen einer Fläche mit Einheitsquadraten, während bei der Rechteckmethode ein Rechteck gewählt wird, das die Fläche, deren Inhalt es zu bestimmen gilt, umschreibt, so dass auf dieser Grundlage der Flächeninhalt näherungsweise bestimmt werden kann.
[435] Vgl. Mathe Neue Wege 6, 2007: 248-257.

	Flächenvergleich			Flächeninhaltsberechnung					Zerlegen/Ergänzen als Methode zur Flächeninhaltsberechnung[436]	
	Zerlegen	Ergänzen	Auslegen	Quadrat	Rechteck	Parallelogramm	Dreieck	Trapez	Zerlegen	Ergänzen
Elemente der Mathematik 5	x		x		x				x	x
Elemente der Mathematik 6						x	x	x	x	x
Fokus Mathematik 5	x		x	x	x	x	x		x	
MatheNetz 5			x		x					
Zahlen und Größen 6			x	x	x					
Mathe live 6	x		x		x					
Lambacher Schweizer 5	x		x		x	x	x		(x)[437]	
Mathe Neue Wege 5	x		x	x	x					
Mathe Neue Wege 6	x	x				x	x	x	x	

Tab. 34 Übersicht über Inhalte ausgewählter Schulbücher bei der Einführung des Flächeninhaltsbegriffs und der Flächeninhaltsbestimmung/-berechnung.

3. Heuristische Analyse

Ob Wände streichen oder tapezieren, Fliesen oder Teppich legen, das Dach decken, den Garten einzäunen oder einen See umrunden – überall im täglichen Leben werden wir direkt oder indirekt mit Flächen und Umfängen konfrontiert. Dabei genügt es oftmals nicht, die Flächen nach bestimmten Eigenschaften miteinander zu vergleichen oder zu klassifizieren, sondern es gilt, bestimmte Eigenschaften durch ein Maß, quantitativ absolut zu beschreiben[438], um mit ihnen operieren zu können.

Ziel des Mathematikunterrichts sollte es sein, die verschiedenen Verfahren zum Flächeninhaltsvergleich, deren Nutzen, Anwendbarkeit, aber auch deren Grenzen herauszuarbeiten, um daraus die Notwendigkeit der Flächeninhaltsberechnung zu begründen und auf diese Einsicht gründend die Formeln herzuleiten. Des Weiteren muss ein tragfähiges Begriffswissen aufgebaut werden, indem Einsichten in die hinter den Begriffen stehenden

[436] Die Kreuze geben an, in welchen Schulbüchern die Methode des Zerlegens/Ergänzens explizit zur Flächeninhaltsberechnung angewandt wird.
[437] Hier werden die Begriffe des Abschneidens und Anfügens verwendet (vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 134).
[438] Vgl. WEIGAND et al. 2009: 158.

Merkmale und Strukturen gewonnen und Beziehungen zwischen den Begriffen und ihren Eigenschaften hergestellt werden (vgl. Kap. 7.3.1).

Bereits in der Grundschule werden Flächen mit Blick auf ihre „Größe" direkt (durch direktes Aufeinanderlegen oder durch Zerlegen und Zusammensetzen) oder auch indirekt (durch das Auslegen mit Einheitsformen) miteinander verglichen.[439] Diese Verfahren werden in der Orientierungsstufe aufgegriffen, vertieft und um die Flächeninhaltsberechnung erweitert. Die Handlung an konkreten Objekten spielt dabei eine wichtige Rolle, da durch sie eine angemessene, zunächst intuitive Vorstellung des Flächeninhaltsbegriffs entscheidend unterstützt wird, indem die wesentlichen Eigenschaften des Begriffs auf enaktiver Ebene erfasst und der Begriff aus der Handlung heraus entwickelt wird (vgl. Kap. 7.3.1).

Zerlegt man zum Zwecke des Flächeninhaltsvergleichs zwei (oder mehr) Flächen in paarweise kongruente Teilflächen wird nicht nur der Flächeninhaltsvergleich ermöglicht, sondern es wird auch einer der Grundgedanken der heuristischen Technik *De- und Rekonstruktion* nach Krichel/Stiller angesprochen (vgl. Kap. 5.5.1). Mit Hilfe dieser heuristischen Technik wird allgemein eine komplexe Problemstellung mittels Dekonstruktion in mehrere Teilprobleme zerlegt, so dass das Gesamtproblem überschaubarer wird oder strukturelle Gemeinsamkeiten zu bekannten und bereits gelösten Problemen sichtbar werden.

Das Zerlegen einer Figur in kongruente Teilfiguren kann als die einfachste Form der Dekonstruktion gesehen werden, durch die ein direkter und quantitativer Flächeninhaltsvergleich ermöglicht wird. Im Rahmen der Flächeninhaltsberechnung und der Herleitung entsprechender Formeln wird diese Technik erneut aufgegriffen, um die Rekonstruktion erweitert und führt auf den *Heurismus der Affinität*. Während die Rekonstruktion in dem vorliegenden Zusammenhang als das Zusammenfügen von Teilfiguren zu einem Ganzen gesehen werden kann, manifestiert sich der *Heurismus der Affinität* in der strukturierten Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen oder nach strukturellen Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Aufgaben. Die strukturellen Gemeinsamkeiten können sich auf die Vorgehensweise, die Darstellungsform, die Fragestellung oder andere strukturelle Merkmale einer Aufgabe beziehen. Ein solcher Perspektivwechsel ermöglicht mitunter, die vorliegenden Daten in einen anderen Repräsentationsmodus zu transformieren, der weitere Lösungsideen eröffnet (siehe Kap. 5.5.2). Der *Heurismus der Affinität* kann im Zusam-

[439] Vgl. Franke 2007: 268 f.

menhang mit dem Themenfeld der Flächeninhaltsberechnung besonders effektiv eingesetzt werden, da mit seiner Hilfe Einsichten in die hinter den Formeln stehenden Zusammenhänge gewonnen und Beziehungen zwischen den ebenen Figuren einerseits und den zugehörigen Flächeninhaltsformeln andererseits hergestellt werden können. So lässt sich die Flächeninhaltsformel für Parallelogramme (durch Zerlegung und Zusammensetzen) auf die eines Rechtecks zurückführen.

Die *heuristische Technik der De- und Rekonstruktion* spielt in diesem Themenfeld eine besonders große Rolle, da sie hier enaktiv durch das aktive Schneiden (dekonstruieren) und Zusammensetzen (rekonstruieren), ikonisch durch die zeichnerische Darstellung derselben Handlungen und symbolisch durch die entsprechenden Berechnungen ganzer Flächen- oder Teilflächeninhalte eingesetzt und vollzogen werden kann, ohne dabei den Sinnzusammenhang im wahrsten Sinne des Wortes aus den Augen zu verlieren.

Das Wechselspiel zwischen heuristischer Technik *De- und Rekonstruktion* und *Heurismus der Affinität* kann bei der Flächeninhaltsberechnung zusammengesetzter Figuren vielfach zu einer erfolgreichen Problemlösung beitragen (vgl. Abschnitt 1). Dabei wird die komplexe Ausgangsfigur mittels Dekonstruktion in bereits bekannte Teilfiguren zerlegt, so dass der Flächeninhalt jeder dieser Teilfiguren berechnet werden kann. Die auf diese Weise gewonnenen Teilergebnisse werden anschließend mit Hilfe der Rekonstruktion wieder zusammengefügt. Der Flächeninhalt der Ausgangsfigur entspricht der Summe der Flächeninhalte aller Teilflächen. Alternativ kann die Ausgangsfigur auch zerlegt und zu einer Figur, deren Flächeninhaltsformel bereits bekannt ist, zusammengefügt werden.

Obwohl die Idee des Zerlegens und Ergänzens im Schulunterricht durchaus Anwendung findet, fehlt der Hinweis, dass es sich nicht um ein nur auf den Flächeninhaltsvergleich oder die Flächeninhaltsberechnung anzuwendendes Verfahren handelt, sondern um eine heuristische, allgemein anwendbare problemlösende Vorgehensweise, die auf eine Vielzahl von Problemsituationen, auch außerhalb der Geometrie, zielführend übertragen werden kann.

Bei der Flächen- und Umfangsberechnung können neben der heuristischen Technik *De- und Rekonstruktion* auch die heuristische Technik *Anfertigen einer Tabelle* in Kombination mit dem *Heurismus des systematischen Probierens* reaktiviert werden. Mit Hilfe von Tabellen lassen sich komplexe Sachverhalte strukturieren, auf die Kernaussagen reduzieren und übersichtlich darstellen, so dass bestimmte Aspekte in den Vordergrund rücken, auf deren Grundlage Beziehungen erkannt, Zusammenhänge hergestellt und schließlich

Aussagen getroffen werden können. Gleichzeitig wird durch diese Darstellungsweise ein systematisches Vorgehen gefördert, bei dem alle relevanten Informationen berücksichtigt werden. Wie in Abschnitt 4 zu sehen sein wird, lassen sich Tabellen auf vielfältige Weise in Auseinandersetzung mit der hier vorliegenden Thematik sinnvoll und sinnstiftend einsetzen.

Während der Flächeninhaltsvergleich auch in der Orientierungsstufe meist umfassend und auch auf enaktiver Ebene behandelt wird, erfolgt die Einführung der Flächeninhaltsberechnung meist auf der Grundlage von Abbildungen, Definitionen, Erläuterungen und Musteraufgaben, wodurch das Lernen durch Nachahmen im Vordergrund steht. Statt die hinter den Formeln stehenden Zusammenhänge erarbeiten zu lassen oder diese zumindest aufzuzeigen, stehen oftmals die mechanische Anwendung der Flächeninhaltsformeln und der richtige Umgang mit den Flächeneinheiten im Fokus (vgl. voriger Abschnitt 2). Damit aber die Schüler den Flächeninhalt als Eigenschaft ebener Figuren einerseits und die Formeln in ihrer Entstehung andererseits durchdringen können, sollten sie die Formel zur Berechnung der Flächeninhalte von Rechteck, Parallelogramm, Trapez oder auch von zusammengesetzten Figuren eigenständig herleiten (lernen).

Hier kann der *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* eingesetzt werden, der das Forschen und Entdecken in den Mittelpunkt rückt, so dass selbständig Verknüpfungen hergestellt und Zusammenhänge erkannt werden; so wird der Ausbau eines umfassenden und tragfähigen Begriffswissens gefördert, das wiederum zu einem tieferen Verständnis für den Aufbau von Formeln beitragen kann. Ausgehend vom Gegebenen vollzieht sich dabei der Weg durch Rückwärtsschreiten und über bereits gewonnene Teilergebnisse bis zur Ausgangssituation oder zu bereits bekannten Aussagen, wodurch das Problem gelöst wird (vgl. Kap. 5.5.3).

Für den Aufbau eines tragfähigen und soliden Begriffswissens ist entscheidend, dass die hinter den Begriffen stehenden Eigenschaften verstanden, Beziehungen zwischen den Eigenschaften hergestellt, Begriffe voneinander abgegrenzt und zueinander in Beziehung gesetzt werden (vgl. Kap. 7.3.1). Mit Hilfe des *Heurismus der Strukturnutzung* können die Begriffe *Fläche, Umfang* und *Flächeninhalt* erfasst und voneinander abgegrenzt werden, so dass Zusammenhänge zwischen Umfang und Flächeninhalt einer Figur hergestellt, Gesetzmäßigkeiten zwischen Figuren und deren Flächeninhalten erkannt und Formeln und Definitionen hergeleitet werden können. Durch die strukturelle Erfassung des Flächeninhaltes einer Figur kann zudem der Flächeninhalt als weitere Eigenschaft einer Figur herausgearbeitet werden. Da die Anwendungsmöglichkeiten und die Vorgehensweise des *Heurismus der Strukturnutzung* bereits mehrfach und umfassend thematisiert wurden, sei hier für eine ausführliche Erläuterung auf die entsprechenden Ausführungen verwiesen (vgl. Kap. 7.3.2 und 7.3.3).

4. IHIMU-Arrangement

In dem hier vorgestellten IHiMU-Arrangement sollen der *Heurismus der Affinität*, des *Rückwärtsarbeitens*, des *systematischen Probierens* sowie die *heuristischen Techniken der De- und Rekonstruktion* und der *Tabelle* anhand beispielhaft ausgewählter mathematischer Inhalte aus dem Themenfeld Flächen- und Umfangsberechnung vorgestellt beziehungsweise reaktiviert werden und als gleichberechtigt und ebenso wichtig neben den zu vermittelnden mathematischen Inhalten eingeordnet werden.[440] Ausgangspunkt bildet eine aus dem Lehrwerk Lambacher Schweizer 5 stammende Aufgabe, die sich aufgrund ihres forschend-entdeckenden Ansatzes eignet, um im Verbund mit den vorgesehenen mathematischen Inhalten auch verschiedene heuristische Vorgehensweisen zu lehren und zu lernen. Es wird vorausgesetzt, dass die Grundlagen ebener Figuren zu diesem Zeitpunkt bereits unterrichtlich behandelt wurden.

278 *Forscheraufgaben*

Betrachte den abgebildeten Flickenteppich.

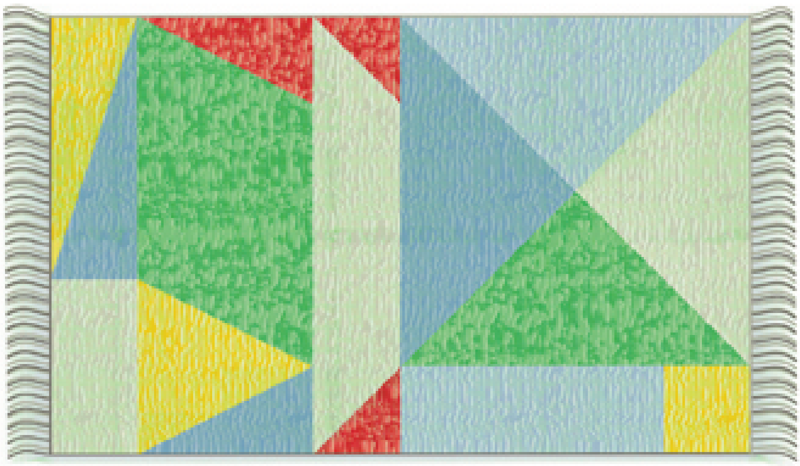


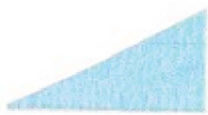
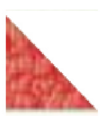
Abb. 48 geometrischer Flickenteppich entnommen (Lambacher Schweizer 5, 2009:118).

[440] Da es um die Entwicklung eines Konzeptes geht, können nicht alle Inhalte, die mit der Flächen- und Umfangsberechnung in Zusammenhang stehen, im Detail behandelt werden. So wird das Rechnen mit Einheiten an dieser Stelle nicht vertieft, da dieses Thema mehr Anknüpfungspunkte zur Arithmetik aufweist während die vorliegende Arbeit ihren Fokus auf die Geometrie legt.

Für welche der abgebildeten Flicken wurde am wenigsten, für welche am meisten Wolle benötigt? Schneide die einzelnen Flicken aus und ordne sie nach dem Verbrauch von Wolle. Beginne mit dem Flicken, für den am wenigsten Wolle benötigt wurde. Wie gehst du vor?

Die als Forscheraufgabe ausgewiesene Aufgabenstellung soll zunächst deutlich machen, dass Ausprobieren und Experimentieren ausdrücklich erwünscht und dass verschiedene Lösungswege möglich sind, wodurch auch dem Grundgedanken des Problemlösens allgemein entsprochen wird. Um den Schülern von Beginn an die richtige Vorstellung des Flächeninhaltsbegriffs zu vermitteln, wird hier bewusst nach dem Verbrauch der Wolle gefragt. Durch das aktive Schneiden wird einerseits der direkte Flächeninhaltsvergleich durch Aufeinanderlegen der Figuren ermöglicht, andererseits die Dekonstruktion der Gesamtfigur herbeigeführt und damit die *heuristische Technik der De- und Rekonstruktion* angesprochen. Da der Flickenteppich nicht nur Rechtecke, sondern auch Quadrate, Dreiecke und Parallelogramme enthält, ist ein direkter Flächenvergleich aller Figuren nicht ohne weiteres möglich, so dass die folgende Aufgabenstellung anschließen kann:

Nimm die Figur, für deren Herstellung am wenigsten Wolle benötigt wurde (die Figur mit dem kleinsten Flächeninhalt), und überprüfe, wie oft sie in die anderen Figuren hineinpasst. Notiere deine Ergebnisse in der nachfolgenden Tabelle.

Ebene geometrische Figur				....
So viele Male passt das kleinste Dreieck in die Figur 	*2*	*2*	....	

Tab. 35 Tabelle zum indirekten Flächeninhaltsvergleich mit Hilfe eines ungenormten Repräsentanten.

Vervollständige mit Hilfe der Tabelle die folgenden Sätze:

Das rote Dreieck passt ______________________ *in das gelbe Quadrat hinein.*

Zur Herstellung des gelben Quadrats wurde _______________ *so viel Wolle benötigt, wie zur Herstellung des roten Dreiecks.*

Damit ist der Flächeninhalt des gelben Quadrats _________________ *so groß wie der Flächeninhalt des roten Dreiecks.*

Kannst du weitere Beziehungen zwischen den Flächeninhalten der Figuren herstellen? Formuliere mit Hilfe der Tabelle vier weitere Sätze, in denen du vergleichst.

Der Umstand, dass den Schülern die ebenen Figuren in der Regel als Linienfiguren und nicht als Flächenstücke präsentiert werden, führt nicht selten dazu, dass diese die (Länge der) gezeichneten Randlinie für den Flächeninhalt einer Figur halten. Um die Entstehung solcher Fehlvorstellungen zu vermeiden, wird bereits in dieser ersten Aufgabenstellung der Flächeninhalt mit dem Verbrauch von Wolle in Beziehung gesetzt, wodurch eine konkrete Vorstellung des Flächeninhaltsbegriffs angelegt wird, die keinesfalls dem Umfang ähnelt.

Mit dieser Forscheraufgabe wird zum einen der indirekte Flächeninhaltsvergleich mit Hilfe eines ungenormten Repräsentanten eingeführt; darüber hinaus können wichtige Sätze zum Flächeninhalt erarbeitet werden. Zu Beginn wird ein geeignetes Instrument, ein "Flächenmessgerät" eingeführt, durch das die Flächen miteinander verglichen werden können. Dazu werden die aus dem Teppich isolierten Teilfiguren mit der flächeninhaltlich kleinsten Teilfigur (hier: das rote Dreieck) als ungenormtem Repräsentanten verglichen. Durch das Auszählen der zur vollständigen Parkettierung der jeweiligen Teilfiguren notwendigen Dreiecke wird ein quantitativer Flächeninhaltsvergleich ermöglicht. Das Dreieck erfüllt dabei die Funktion eines Flächenmessgeräts und dem Flächeninhalt wird eine positive, reelle Zahl zugeordnet. Durch dieses Vorgehen wird deutlich, dass es Alternativen zu der vorherrschenden Anwendung von Formeln gibt, womit grundsätzlich eine "heuristischere", das heißt flexiblere, von der konkreten Problemstellung inspirierte Vorgehensweise ins Bewusstsein gerückt wird.

Der so gewonnenen Tabelle – die hier erneut als Strukturierungshilfe dient, um ein systematisches Vorgehen zu unterstützen – lässt sich entnehmen, dass zwei Figuren flächeninhaltsgleich sind, wenn sie sich in dieselbe Anzahl von deckungsgleichen Teilfiguren (hier: rote Dreiecke) zerlegen bzw. sich durch dieselbe Anzahl an kongruenten Teilfiguren zu neuen deckungsgleichen Figuren ergänzen lassen. Daraus lassen sich Sätze herleiten wie der, dass zerlegungsgleiche Figuren flächeninhaltsgleich sind, oder Definitionen wie die, dass zwei Figuren zerlegungsgleich heißen, wenn sie sich in paarweise kongruente Figuren zerlegen lassen. Diese und ähnliche Entdeckungen können zu einem späteren Zeitpunkt in der Merksatzbox dokumentiert werden.

Während zu Beginn die Dekonstruktion in Form des aktiven Schneidens und damit der direkte und qualitative Flächenvergleich im Vordergrund stehen, rückt nun die Rekonstruktion in den Mittelpunkt der Betrachtung, die sich in dem Auslegen der Figuren mit kongruenten Teilfiguren manifestiert, das einen indirekten und zugleich quantitativen Flächeninhaltsvergleich ermöglicht. Durch das Vervollständigen der vorgegebenen Sätze sowie die Möglichkeit, eigene Sätze zu formulieren, können Beziehungen zwischen den Flächeninhalten hergestellt und erste Rechenoperationen durchgeführt werden. Gleichzeitig tritt der Kongruenzaspekt in den Vordergrund, wonach kongruenten Figuren die gleiche Flächeninhalts-Maßzahl zugeordnet wird.

Um schließlich das Einheitsmaß als universell geeignetes Flächenmessgerät zur Flächeninhaltsbestimmung einzuführen, schließt die folgende Forscheraufgabe an:

Finde heraus, welche Figur den größeren Flächeninhalt hat. Wie gehst du vor?

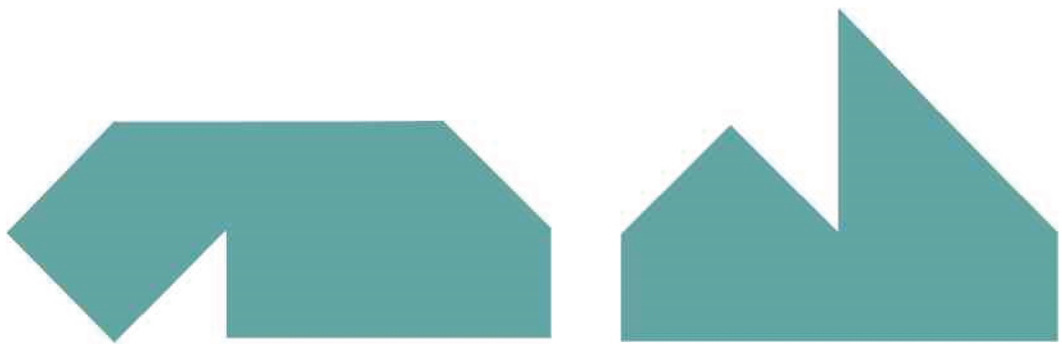


Abb. 49 Zusammengesetzte Figuren, die auf ihre Flächeninhaltsgleichheit zu überprüfen sind.

An dieser Stelle kann der *Heurismus der Strukturnutzung* aus der Problemlösebox reaktiviert werden, der in Zusammenhang mit den ebenen Figuren bereits ausführlich thematisiert wurde und bei der vorliegenden Problemstellung erneut angewandt werden kann.

Anders als bei dem Flickenteppich sind in den abgebildeten Figuren keine Teilfiguren erkennbar, so dass zunächst Strukturen sichtbar gemacht werden müssen, um die Flächeninhalte miteinander vergleichen zu können (ausführlich hierzu siehe Kap. 7.3.2 und 7.3.3). Wie in der Aufgaben zuvor können die Figuren dann mittels Dekonstruktion zerlegt und die Teilfiguren auf Kongruenz überprüft und miteinander verglichen werden, wodurch allerdings nach wie vor nur ein quantitativer Flächenvergleich gelingt.

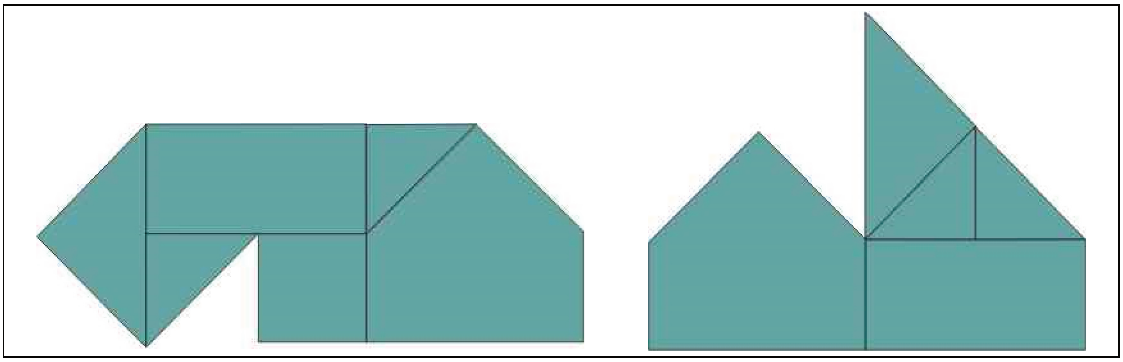


Abb. 50 Freie Zerlegung in kongruente Teilfiguren zum indirekten Flächeninhaltsvergleich.

Um ein Maß für die Größe einer ebenen Fläche angeben zu können, wird anschließend das Einheitsquadrat als Referenzgröße und Werkzeug zur Flächeninhaltsmessung eingeführt. Die Schüler erhalten dazu folgenden Forscherauftrag:

Überlege dir, wie du mit Hilfe des Rasters den Flächeninhalt beider Figuren miteinander vergleichen kannst. Notiere, wie du vorgegangen bist.

Kommst du zu dem gleichen Ergebnis wie in der Aufgabe zuvor? Siehst du Vor- oder Nachteile bei der Verwendung des Rasters?

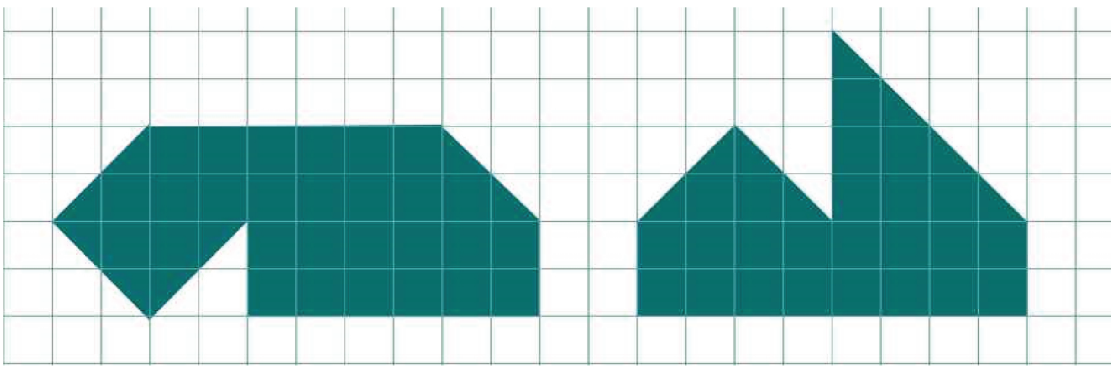


Abb. 51 Zusammengesetzte Figuren, die mittels eines hinzugefügten Rasters erneut auf ihre Flächeninhaltsgleichheit zu überprüfen sind.

Statt, wie bisher üblich, die Figuren in kongruente Teilfiguren zu zerlegen, kann der zu messende Flächeninhalt nun durch Abzählen von Einheitsquadraten (und ohne Verwendung einer vorgegebenen Formel) ermittelt und die Flächeninhalte indirekt über die ermittelten Anzahlen miteinander verglichen werden, wodurch der erste Schritt auf dem Weg zur Flächeninhaltsberechnung getan ist.

Während Flächeninhalte zunächst also durch direktes Aufeinanderlegen oder durch Auslegen mit kongruenten Teilfiguren verglichen und dann durch das Abzählen von Einheitsquadraten gemessen werden, folgt schließlich die konkrete Flächeninhaltsberechnung und mit ihr verschränkt die Einführung konventioneller Maßeinheiten. Um ein Verständnis für die hinter den Formeln stehenden Zusammenhänge aufzubauen und die Formel zur Flächeninhaltsberechnung nicht als einzigen, sondern als alternativen Lösungsweg zu anderen Verfahren zu präsentieren, ist es notwendig, die Flächeninhaltsberechnung durch die Schüler selbständig erarbeiten zu lassen. So wird erreicht, dass nicht der rein formale Aspekt und die unter Umständen verständnisleere rechnerische Anwendung der Formeln im Vordergrund stehen. Erst wenn eine Formel in ihrer Entstehung durchdrungen wird, können weitere Formeln eigenständig hergeleitet und Zusammenhänge zwischen anderen Figuren sowie die auf diese anwendbaren Formeln hergestellt werden, wie durch die folgende Aufgabe verdeutlicht wird:

Du erhältst 30 gleiche (gleich große) Quadrate[441]*.*

1. *Lege mit den Quadraten möglichst viele verschiedene Rechtecke. Benutze dabei immer <u>alle</u> Quadrate. Zeichne die Rechtecke mit dem Lineal/Geodreieck in dein Heft.*
2. *Wie viele verschiedene Rechtecke kannst du so finden?*
3. *Haben alle Rechtecke den gleichen Flächeninhalt? Begründe deine Antwort.*
4. *Kannst du die Größe der Flächeninhalte der Rechtecke durch eine (Maß-) Zahl angeben?*

Durch das Legen verschiedener Rechtecke mit immer der gleichen Anzahl Einheitsquadrate rückt die Flächeninvarianz in den Fokus. Zudem findet durch das Legen verschiedener Rechtecke die *heuristische Technik der De- und Rekonstruktion* erneut Anwendung, und es wird unmittelbar ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Einheitsquadrate

[441] Hierbei handelt es sich im Einheitsquadrate mit dem Flächeninhalt 1cm².

und dem Flächeninhalt hergestellt, der für die Herleitung der Flächeninhaltsformel von entscheidender Bedeutung ist, wie nachfolgend zu sehen:

Schau dir jedes Rechteck noch einmal an und notiere für jedes einzelne, wie viele Quadrate sich in einer Spalte und wie viele Quadrate sich in einer Zeile befinden. Trage die Ergebnisse in die nachfolgende Tabelle ein:

Anzahl Quadrate in einer Zeile	*1*	*2*	*3*	*5*	*6*	*...*	*...*
Anzahl der Quadrate in einer Spalte	*30*	*15*	*10*	*6*	*5*	*...*	*...*
Anzahl aller Quadrate	*30*	*30*	*30*	*30*	*30*	*...*	*...*

Tab. 36 Tabelle zur Herleitung der Flächeninhaltsformel für Rechtecke auf Basis der verwendeten Einheitsquadrate.

Findest du eine Regel, wie sich die Anzahl aller Quadrate ergänzen lässt?

Statt wie allgemein üblich die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts vorzugeben, kann diese hier auf Basis der Tabelle selbständig und unter Verwendung des *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* erarbeitet werden (vgl. Kap. 5.5.3). Ausgehend von dem gegebenen Endzustand wird durch Rückwärtsschreiten versucht, zur Ausgangssituation zu gelangen. Der gegebene Endzustand ist im vorliegenden Fall der jeweilige Flächeninhalt aller Rechtecke, der durch die Anzahl der verwendeten Einheitsquadrate von Anfang an bekannt ist. Während bislang die Gesamtzahl der Einheitsquadrate durch Abzählen ermittelt wurde, soll dieses potenziell aufwendige Vorgehen durch ein einfacheres Verfahren abgelöst werden, indem die Gesamtzahl der Einheitsquadrate als Produkt der "Anzahl der Einheitsquadrate in der Länge" und "Anzahl der Einheitsquadrate in der Breite" erkannt und dann rechnerisch bestimmt wird.

Auf Grundlage der normierten Flächeninhaltsmaße kann so der Flächeninhalt rechnerisch bestimmt und die Flächeninhaltsformel für Rechtecke begründend hergeleitet werden. Die Tabelle zeigt sich damit erneut als nützliche und zielführende Darstellungsform, die ein systematisches und strukturiertes Arbeiten fördert, weil aus ihr besonders leicht relevante Informationen wie die Flächeninvarianz abgelesen werden können. Durch eine Erweiterung der Tabelle können weitere Zusammenhänge untersucht werden. So kann durch das Hinzufügung einer weiteren Zeile, in welcher die Umfänge eingetragen werden, gezeigt werden, dass flächeninhaltsgleiche Figuren keineswegs umfangsgleich sein müssen.

Die Schüler verfügen zu diesem Zeitpunkt nunmehr über ein Repertoire an heuristischen Arbeitsweisen, haben eine konkrete Vorstellung des Flächeninhaltsbegriffs, können Flächeninhalte auf verschiedene Weisen miteinander vergleichen und den Flächeninhalt von Rechtecken durch eine Maßzahl ausdrücken. Die Heuristik wurde dabei als zielführendes, handlungsleitendes Instrument und die Anwendung von Formeln als eine alternative Lösungsmöglichkeit kennengelernt. Aufbauend auf diesen Kenntnissen kann die Flächeninhaltsformel für Parallelogramme entwickelt werden, mit dem Ziel, erneut die hinter den Formeln stehenden Zusammenhänge zu erkennen und diese zu nutzen, Beziehungen zwischen der Figur und der Formel herzustellen und die Bedeutung der Heuristik auf dem Weg zur Problemlösung hervorzuheben. Die Schüler erhalten dazu ein auf Karopapier gezeichnetes Rechteck sowie ein flächengleiches Parallelogramm und den folgenden Forscherauftrag:

Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks und den des Parallelogramms.

Wie gehst du vor? Was fällt dir auf?

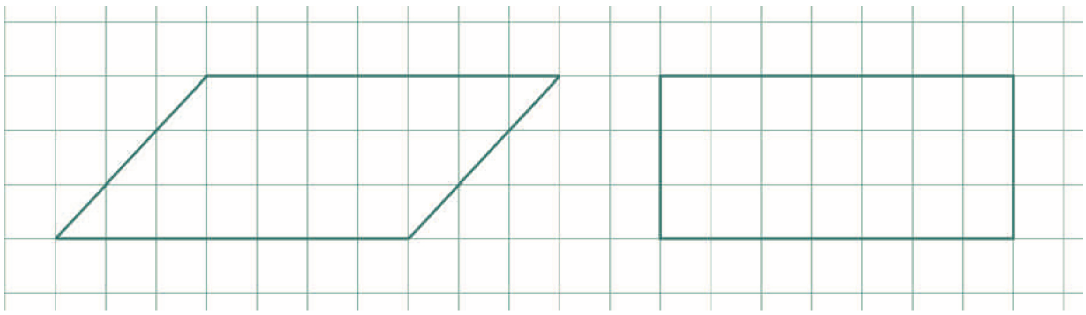


Abb. 52 Flächeninhaltsgleiches Parallelogramm und Rechteck auf Karopapier.

Aufgrund der gewählten Darstellungsweise kann davon ausgegangen werden, dass die meisten Schüler den Flächeninhalt des Parallelogramms durch Abzählen der Einheitsquadrate ermitteln werden, während der Flächeninhalt des Rechtecks über die nun bekannte Flächeninhaltsformel berechnet wird. Da beide Figuren denselben Flächeninhalt haben schließt die folgende Frage an:

Überlege, mit welcher dir bekannten Methode du dein Ergebnis überprüfen kannst. Nutze dazu deine Problemlösebox.

Überlege, wie man den Flächeninhalt des Parallelogramms durch eine Rechnung herausfinden könnte. Nutze dazu die Erkenntnisse aus der vorangegangenen Aufgabe sowie deine Problemlösebox.

Durch das Führen des Forscherheftes und der Dokumentation der gewonnenen Erkenntnisse in der Merksatz- sowie Problemlösebox kann an vorhandenes Wissen sowie an Aufgaben angeknüpft werden, bei denen sich heuristische Arbeitsweisen als zielführend erwiesen haben. Die Aufforderung, das Ergebnis auf Grundlage bereits erworbener Kenntnisse zu überprüfen, spricht explizit die strukturierte Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen oder nach strukturellen Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Aufgaben an, also den *Heurismus der Affinität*. Die strukturellen Gemeinsamkeiten beziehen sich in diesem Fall auf die Vorgehensweise bei vorangegangenen Forscheraufgaben, bei denen der Flächeninhaltsvergleich durch das Zerlegen durchgeführt wurde. Dieses Vorgehen kann auf die neue Aufgabe übertragen werden, indem das Parallelogramm mittels der *heuristischen Technik der De- und Rekonstruktion* in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck überführt wird, so dass die Flächeninvarianz deckungsgleicher beziehungsweise auslegungsgleicher Figuren genutzt und das durch Abzählen der Einheitsquadrate erhaltene Ergebnis bestätigt werden kann. Neben dem *Heurismus der Affinität* findet auch der *Heurismus der Strukturnutzung* Anwendung, da die verschieden Strukturmerkmale des Parallelogramms zunächst erkannt und sichtbar gemacht werden müssen, um die De- und anschließende Rekonstruktion sinnvoll einzusetzen.[442]

Um die Grenzen der bislang so praktischen Methode des Abzählens aufzuzeigen, schließt die folgende Aufgabe an:

Bestimme den Flächeninhalt des abgebildeten Dreiecks. Wie gehst du vor?

Überlege, wie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks aussehen könnte.

Nutze dazu dein Wissen aus den vorangegangenen Aufgaben.

[442] Denkbar wäre auch, dass das Parallelogramm und das Rechteck durch kongruente Teilfiguren zu flächeninhaltsgleichen Rechtecken ergänzt werden. Durch dieses Vorgehen würde der *Heurismus der Affinität* stärker in den Vordergrund rücken.

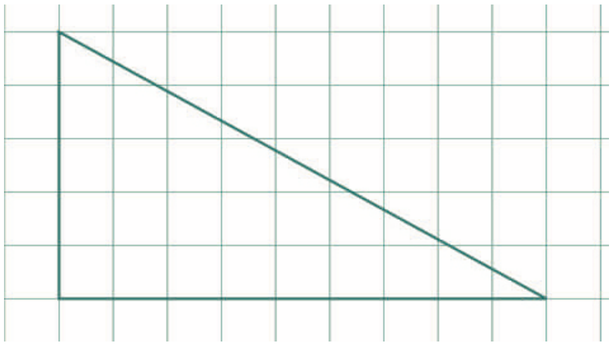


Abb. 53 Rechtwinkliges Dreieck auf Karopapier.

Bei dieser Aufgabe zeigt sich rasch, dass der Flächeninhalt bei nicht genau anzugebenden Bruchteilen der Einheitsquadrate nicht mehr ohne weiteres durch Abzählen ermittelt werden kann. Die Notwendigkeit einer alternativen Vorgehensweise tritt deutlich hervor. Durch den Hinweis in der Aufgabestellung, dass das Vorgehen bei bereits gelösten Aufgaben auf die neue Aufgabe übertragen werden kann, wird der Heurismus der Affinität explizit angesprochen und zur Problemlösung herangezogen. Wird das Dreieck zu einem Rechteck ergänzt, kann der Flächeninhalt des Dreiecks als der halbe Flächeninhalt des Rechtecks angegeben werden. Ist dieser Zusammenhang erkannt, kann die Formel für Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken formuliert werden.

Die Schüler haben inzwischen verschiedene Verfahren kennengelernt mit denen Flächeninhalte von Figuren bestimmt werden können und erfahren, dass die Nutzung von Formeln ein alternatives und in manchen Fällen einfacheres Vorgehen darstellt. Mit den durchgängig eingebundenen heuristischen Handlungsweisen wurde zudem vermittelt, dass für eine erfolgreiche Bestimmung von Flächeninhalten nicht die Kenntnis einer (den Schülern nicht selten willkürlich erscheinenden) Formel entscheidend ist, sondern die Fähigkeit, eine vorliegende Figur durch Zerlegen, Ergänzen oder durch Anwendung eines zu bereits gelösten Aufgaben analogen Vorgehens auf bekannte Figuren zurückzuführen, über die Aussagen getroffen werden können, die schließlich zu einer erfolgreichen Problemlösung führen. Dieses Wissen kann prinzipiell bei der Flächeninhaltsbestimmung jeder beliebigen Figur angewandt werden, wie nachfolgende Forscheraufgabe deutlich macht:

Ergänze das abgebildete Dreieck so, dass eine Figur entsteht, deren Flächeninhalt du bereits berechnen kannst.

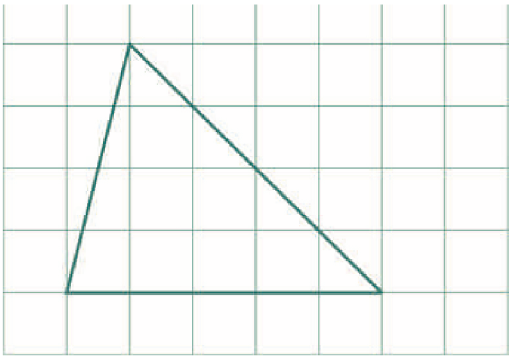


Abb. 54 Beliebiges Dreieck auf Karopapier.

Unter Anwendung des Heurismus der Affinität und der heuristischen Technik der De- und Rekonstruktion kann das Dreieck auf das bereits bekannte Rechteck oder alternativ auf das Parallelogramm zurückgeführt werden (siehe Abb. 55).

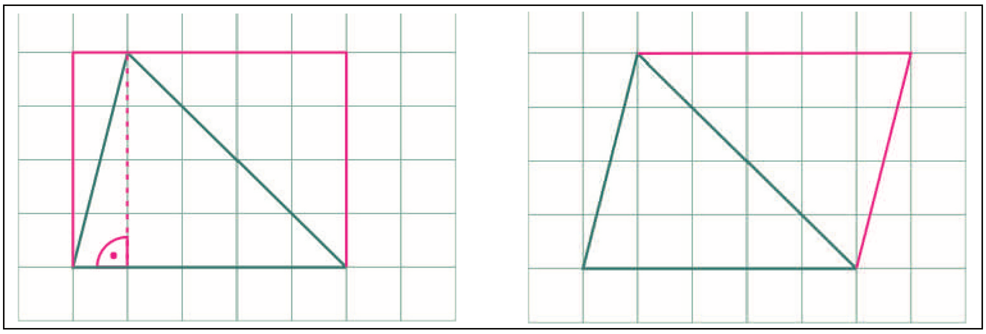


Abb. 55 Beliebiges Dreieck zu Rechteck bzw. Parallelogramm ergänzt.

Wie Abb. 55 zu entnehmen ist, kann der Flächeninhalt des beliebigen Dreiecks aufgrund der Bruchteile der Einheitsquadrate nicht eindeutig bestimmt bzw. durch eine unmittelbar ersichtliche Formel angegeben werden. Durch die gezielte Suche nach strukturellen Gemeinsamkeiten zu bereits gelösten Problemen können diese Kenntnisse auf das neue Problem übertragen und Lösungsideen entwickelt werde, womit der *Heurismus der Affinität* auf dem Weg zur Problemlösung erneut eine entscheidende Rolle spielt. Durch Offenlegen weiterer Strukturen kann das Dreieck auf bereits bekannte Figuren zurückgeführt und eine entsprechende Formel aufgestellt werden.

Egal, ob es um den Flächeninhaltsvergleich, die Flächeninhaltsberechnung oder das Lösen komplexerer Problemstellungen geht: entscheidend für eine erfolgreiche Problemlösung ist es, die Ausgangssituation so zu verändern, dass bereits bekannte Elemente zum Vorschein kommen, für die eine Teillösung gefunden werden und auf deren Grundlage schrittweise das Ausgangsproblem gelöst werden kann.

Am Ende dieser Einheit werden die gewonnenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten wieder in der Merksatzbox sowie der Problemlösebox festgehalten, um sie für künftige Sachverhalte und Problemaufgaben nutzen zu können.

Merksatzbox

Die Merksatzbox sammelt folgende Erkenntnisse, die aus oben skizzierten Forscheraufgaben bezüglich des Flächeninhaltsvergleichs und der Flächeninhaltsberechnung gewonnen werden konnten:

- Zwei Figuren sind flächeninhaltsgleich, wenn sie deckungsgleich, zerlegungsgleich oder auslegungsgleich sind.
- Der Flächeninhalt einer zusammengesetzten Figur ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte der jeweiligen Teilfiguren.
- Der Flächeninhalt einer Figur wird durch eine positive Maßzahl angegeben.
- …

Verschränkt mit den fachmathematischen Inhalten wurden verschiedene Heurismen und heuristische Techniken eingeführt oder reaktiviert, deren Anwendbarkeit und Nutzen als gleichberechtigt neben dem Gebrauch von Formeln herausgearbeitet wurden. Um auch künftig bei Problemstellungen auf die heuristischen Vorgehensweisen zurückgreifen zu können, werden diese in der Problemlösebox festgehalten. Damit der universelle Charakter der heuristischen Techniken und der Heurismen gewahrt bleibt, sollte darauf geachtet werden, dass die Sätze für die Problemlösebox nicht ausschließlich auf die Inhalte bezogen werden.

Problemlösebox

Um die Flächeninhalte ebener Figuren miteinander zu vergleichen oder um allgemeine Aussagen über komplexe Figuren oder einen komplexen Sachverhalt zu treffen, können folgende Vorgehensweisen zielführend sein:

- Figuren oder Problemstellungen lassen sich durch Dekonstruktion und anschließende Rekonstruktion auf bekannte Figuren oder Sachverhalte zurückführen, so dass darauf aufbauend Lösungsideen entwickelt werden können.
- Durch die Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen oder nach (strukturellen) Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Aufgaben können diese auf die neue Problemsituation übertragen werden und Lösungsideen abgeleitet werden.
- Durch ein systematisches Vorgehen können Fehler vermieden werden.

- Tabellen strukturieren das Vorgehen, setzen die Daten zueinander in Beziehung und zeigen Zusammenhänge auf.
- Ausgehend vom Gesuchten bzw. vom Endzustand kann man durch Rückwärtsschreiten die Zusammenhänge zwischen den Objekten und ihren Eigenschaften herstellen und Einsichten in die Beziehungen zwischen diesen gewinnen.

Mit dem vorgestellten IHiMU-Arrangement konnte gezeigt werden, welch vielfältige Möglichkeiten es gibt, heuristische Fähigkeiten und Fertigkeiten in Auseinandersetzung mit dem Themenbereich des Flächeninhaltes zu erwerben, anzuwenden und zu vertiefen, und sie gleichberechtigt neben den so oft dominanten Formalismus treten zu lassen. Besonders die *heuristische Technik der De- und Rekonstruktion* zeigt sich im Rahmen der Flächeninhaltsbestimmung und -berechnung als immer wiederkehrendes Element und rückt als zielführende Handlungsweise ins Bewusstsein. Ebenso hat sich der *Heurismus der Affinität* bei den unterschiedlichsten Problemstellungen als richtungsweisend auf dem Weg zu einer erfolgreichen Problemlösung erwiesen. Durch Anwendung des *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* konnte ein tieferes Verständnis für die hinter den Formeln stehenden Zusammenhänge gewonnen, Wissen reaktiviert und neues Wissen aufgebaut werden.

290 Ausblick: Rauminhalte

So wie uns Flächen, deren Inhalte und Umfänge überall im täglichen Leben begegnen, werden wir auf dieselbe Weise mit Rauminhalten konfrontiert: *Wie viel Wasser passt in eine Badewanne? Wie viel Regen fällt bei einem Wolkenbruch pro Quadratmeter? Wie viele Liter soll ein Mensch pro Tag trinken? Wie viele Liter Benzin passen in den Tank eines Autos?* sind nur einige Fragen, die uns im Alltag beschäftigen mögen.

Betrachtet man die beiden Themenbereiche *Flächeninhalt* und *Rauminhalt* genauer, so weisen sie – wenigstens bezogen auf die in der Orientierungsstufe infrage stehenden Flächeninhalts- und Volumenberechnungen - viele Parallelen auf, so dass es naheliegt, beide nicht getrennt voneinander zu betrachten, sondern sie möglichst zeitgleich oder zumindest zeitnah zu behandeln. In den meisten der untersuchten Schulbücher werden solche Analogien zwischen den beiden Teilgebieten berücksichtigt und die Inhalte in der Regel in einer gemeinsamen oder in aufeinanderfolgenden Einheiten thematisiert, wie die nachfolgende kurze Zusammenfassung zeigt:

In *Elemente der Mathematik 5* bilden Flächen- und Rauminhalte ein gemeinsames Großthema. Unter der Überschrift *Wie groß?* werden Flächen miteinander verglichen, Formeln hergeleitet und mit Einheiten gerechnet. Analog hierzu werden unter der Überschrift

Wie viel passt in…? die Volumen von Körpern miteinander verglichen, Volumen gemessen, berechnet und die zugehörigen Formeln hergeleitet.[443]

Im *Fokus Mathematik* werden die Flächeninhalte in Jahrgangsstufe 5 eingeführt, während die Volumenberechnung zusammen mit Körpern und deren Oberfläche erst für die Jahrgangsstufe 6 vorgesehen sind.[444]

In *Zahlen und Größen 6* bilden die Flächeninhalte und Flächeninhaltseinheiten sowie die Körper, deren Oberflächeninhalte und Volumen jeweils einen eigenen Schwerpunkt. Nachdem die Flächen und die Flächeninhalte thematisiert werden, werden in einer neuen Einheit die Körpernetze und die Oberflächen und besprochen, denen die Rauminhalte und schließlich die Volumenberechnung folgen.[445]

In *Mathe live* werden in Jahrgangsstufe 6 die Flächen- und Rauminhalte am Beispiel des Themenkreises "Wohnen" aufeinanderfolgend thematisiert. Neben dem Flächenvergleich, dem Rechnen mit Einheiten und der Herleitung der Flächeninhaltsformel werden im Anschluss der Rauminhalt, die Raumeinheiten sowie die Oberfläche von Quadern bestimmt.[446]

Im *Lambacher Schweizer 5* bilden Flächen und Körper zwei umfassende und eigenständige Inhaltsbereiche. Unter der Überschrift *Flächen* werden Flächen miteinander verglichen, mit Flächeneinheiten gerechnet, der Flächeninhalt von Rechtecken bestimmt und die Flächeninhaltsformeln von Parallelogrammen und Dreiecken hergeleitet.[447] Unter dem Stichwort *Körper* werden in der darauffolgenden Einheit zunächst Körper und Körpernetze sowie Quader und Schrägbilder behandelt. Es folgt das Messen von Rauminhalten, welches auf Quader übertragen wird.[448]

Ausnahmen bilden die Schulbücher *MatheNetz 5* und *Mathe Neue Wege 5*, in denen die Flächeninhalte ebenso wie die Rauminhalte dem Themenbereich *Größen* und damit der Leitidee *Messen* zugeordnet werden, so dass hier der Schwerpunkt auf dem Rechnen mit Einheiten liegt und damit kaum geometrische Anknüpfungspunkte zu finden sind.[449, 450]

---

[443] Vgl. Elemente der Mathematik 5, 2006: 182-204.
[444] Vgl. Fokus Mathematik 6, 2006: 159-181.
[445] Vgl. Zahlen und Größen 6, 2006: 74-93; 100-116.
[446] Vgl. Mathe live 6, 2007: 112-130; 131-137.
[447] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 120-137.
[448] Vgl. Lambacher Schweizer 5, 2009: 148-158; 161; 166.
[449] Vgl. MatheNetz 5, 2005: 196-202, 204-210.
[450] Vgl. Mathe Neue Wege 5, 2005: 188-195; 198-205.

Nachstehende Tabelle zeigt, welche Flächeninhaltsberechnungen und Volumenberechnungen konkret für die Orientierungsstufe vorgesehen sind:

	Flächeninhaltsberechnung					Volumenberechnung		
	Rechteck	Quadrat	Parallelogramm	Dreieck	Trapez	Quader	Würfel	Prisma
Elemente der Mathematik 5	x					x		
Elemente der Mathematik 6			x	x	x	x		
Fokus Mathematik 5	x	x	x	x				
Fokus Mathematik 6						x	x	x
MatheNetz 5	x					x		
MatheNetz 6						x		
Zahlen u. Größen 6	x	x				x	x	
Mathe live 6	x					x		
Lambacher Schweizer 5	x		x	x		x		
Mathe Neue Wege 5	x	x				x	x	
Mathe Neue Wege 6			x	x	x			

Tab. 37 Übersicht der in der Orientierungsstufe in den Schulbüchern vorgesehenen Flächeninhalts- und Volumenberechnung.

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass in der Orientierungsstufe die Flächeninhaltsberechnung nur für Rechtecke in allen untersuchten Schulbüchern vorgesehen ist. In manchen wird diese auf Quadrate, Parallelogramme und Dreiecke und in seltenen Fällen auf Trapeze ausgeweitet. Die Volumenberechnung ist in der Orientierungsstufe auf die des Quaders und des Würfels beschränkt, wodurch sich die in der Orientierungsstufe behandelten theoretischen Grundlagen des Flächeninhaltsbegriffs auf den Volumenbegriff übertragen lassen. So kann die Vorgehensweise zur Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken durch das Auslegen mit Einheitsquadraten in analoger Weise durch das Auffüllen von Quadern mit Einheitswürfeln durchgeführt werden, um sich der rechnerischen Bestimmung des Quadervolumens zu nähern. Darüber hinaus erfordert die Oberflächeninhaltsberechnung dreidimensionaler Körper lediglich eine Dekonstruktion der Gesamtoberfläche in Teilflächen, also eine Rückführung auf Bekanntes und die anschließende Rekonstruktion – heuristische Handlungsweisen, die den Schülern mittlerweile gut vertraut sind.

Durch eine derart gestaltete Verknüpfung beider Inhalte werden nicht nur Wissen miteinander vernetzt und Analogien deutlich, es werden darüber hinaus auch die bei den Flächeninhalten eingesetzten heuristischen Techniken und Heurismen, allen voran der *Heurismus der Affinität*, reaktiviert und vertieft. Gleichzeitig wird erneut deutlich, dass Heuristik nicht an bestimmte mathematische Inhalte geknüpft ist – ihre Funktion und Bedeutung gerade als universelle und überfachliche Handlungsweise auf dem Weg zur Problemlösung tritt auch für den Lerner deutlich hervor.

8 Schlusswort und Überleitung

Das IHiMU-Konzept soll einen ersten Schritt auf einem zweifellos längeren Weg hin zu einem neuen Mathematikunterricht aufzeigen. Der Wunsch nach einer Veränderung der Unterrichts- und Aufgabenkultur besteht in Deutschland nicht erst in der jüngeren Vergangenheit wie Reformbestrebungen und immer wieder vorgetragene Vorstöße verschiedener Forscher aus unterschiedlichsten didaktischen und pädagogischen Disziplinen belegen. Nur fehlte es lange Zeit an einer entweder gesellschaftlichen oder politischen Reaktion, am Diskurs. Dies kann nach den gemischten Erfahrungen mit den Reformversuchen der Sechziger- und Siebzigerjahre des vergangenen Jahrhunderts nicht wirklich verwundern, hat aber in den letzten Jahrzehnten – im Grunde in einer ähnlichen Gesamtdynamik wie im vergangenen Jahrhundert – zur Bildung eines reformerischen Staus in der Unterrichtsdidaktik geführt.

Die fundamentalen Erkenntnisse, auf denen die vielzitierte und für Deutschland letztlich katalysatorisch wirksame PISA-Studie aufbaut, sind weder neu noch in Forscherkreisen umstritten. Die Grundlagen in den Bereichen Psychologie, Lehr-Lernforschung sowie allgemeiner und fachbezogener Unterrichtsforschung haben sich über das zwanzigste Jahrhundert sukzessive entwickelt und in anderen Ländern und Teilen der Welt Reformen und politisch-gesellschaftliche Diskurse und Umwälzungen bewirkt. Auch in der deutschen Forschung zur Mathematikdidaktik wurden schon frühzeitig Stimmen laut, die sich für das einsetzten, was inzwischen weitestgehend unangefochten als Prinzipien modernen Unterrichts gelten kann: offene und flexible Unterrichtsformen, Schülerorientierung, eine grundsätzliche fächerübergreifende Unterrichts- und Aufgabenkultur, Kompetenzorientierung und dadurch die Stärkung prozessbezogener Kompetenzen und auch kreativer Aspekte des Umgangs mit fachbezogenen Inhalten. Es gab auch erste Bemühungen, diesen schon damals nicht mehr neuen Erkenntnissen im deutschen Schulsystem Raum zu geben und ihre Integration zu befördern, wie Arbeiten der Bund-Länder-Kommission und auch die Schrift der Bildungskommission des Landes Nordrhein-Westfalen (1995) bezeugen. Dennoch bedurfte es der ersten PISA-Studie, um hierzulande eine bundesweite Reform nicht nur in Ganz zu setzen, sondern vor allem das Thema in die breite Bevölkerung zu tragen und ihren Blick auf Problemfelder schulischer Bildung zu richten.

Heute sind die Vorgaben der Bildungspolitik ganz eindeutig an den leitenden Prinzipien modernen Unterrichts (im oben genanntem Sinne) ausgerichtet, und zwar in Gestalt der

Bildungsstandards, die als unmittelbare Reaktion auf die Ergebnisse der PISA-Studie entwickelt und durch die Konferenz der Kultusminister für das gesamte Bundesgebiet als verbindlich beschlossen wurden. In der Folge wurden die Lehrplanschriften in den Bundesländern überarbeitet und teilweise radikal modernisiert – Erfolg und Angemessenheit dieser Umgestaltung fielen jedoch sehr unterschiedlich aus, wie in dieser Arbeit mit Hauptaugenmerk auf die nach dem Willen der Kultusministerkonferenz zu verankernde Kompetenz des Problemlösens detailliert aufgezeigt werden konnte. Diese Unzulänglichkeiten ergeben sich zu einem ganz wesentlichen Teil aus der Unschärfe, mit der die Bildungsstandards operieren und ihre Vorgaben präsentieren, und im Falle der Problemlösekompetenz (und keineswegs nur bezogen auf das Fach Mathematik) insbesondere aus dem Fehlen eines klaren fachdidaktischen Referenzrahmens zur Heuristik. Es fehlt den Vorgaben an innerer Stringenz, an didaktischer ebenso wie fachlicher Überzeugungskraft.

Dennoch ist es möglich, auf den geltenden Grundlagen basierend – und auch mit aktuell zugelassenen Schulbüchern - im Unterricht kompetenzorientiert Problemlöseverhalten zu vermitteln. In den meisten Bundesländern bedarf es dazu allerdings mehr als der Anwendung der Lehrplanschriften. Das IHiMU-Konzept hat eine Möglichkeit aufgezeigt, wie dies durch einen veränderten Blick auf Lehrpläne und Aufgaben aus Schulbüchern oder auch anderen Aufgabensammlungen gelingen kann, ohne dass Konflikte mit den vorgegebenen Fachinhalten oder anderen prozessbezogenen Kompetenzen entstehen. Und ebenso ohne zusätzliche Belastungen materieller oder zeitlicher Natur: Durch den gezielten Einsatz eines überschaubaren, aber effektiven Bündels unterrichtspraktischer Maßnahmen und Elemente kann der Mathematikunterricht insgesamt strukturiert und heuristikaffin um- und ausgestaltet werden. IHiMU bietet Praktikern einen unmittelbaren und anwendbaren Zugang zur Umgestaltung und ist zugleich so formuliert, dass ein rezepthafter Charakter bewusst ausgeschlossen ist. Jeder Fachlehrer ist in der Lage, die hier explizierten Verfahren auf weitere Unterrichtsgegenstände und Themenkreise zu transferieren und eigene Schwerpunkte zu setzen. Auch die zentralen Elemente wie Forscherheft und Merksatzbox sind ausgesprochen wandlungsfähig und können frei an materielle ebenso wie technische, personelle und andere Notwendigkeiten angepasst werden.

Was hier für die geometrischen Inhalte der Orientierungsstufe ausgeführt wurde, lässt sich nicht nur auf die verbleibenden Jahrgangsstufen des Sekundarschulbereichs ausweiten, sondern kann perspektivisch ohne jede Schwierigkeit auch auf andere Leitideen bzw. mathematische Teilgebiete erweitert werden. Das Problemlösenlernen würde dadurch einen stetig größeren Stellenwert im Mathematikunterricht einnehmen und letztlich als zentrales Anliegen hervortreten können.

In diesem Sinne schließt nun Band B der in zwei Bänden vorliegenden Arbeit an. Dort soll der Blick auf das Fernziel eines heuristischen Mathematikunterrichts gerichtet werden. Ohne die heutige Schulrealität gänzlich aus dem Blick zu verlieren, geht es vertiefend um historische Prozesse, die zu der aktuellen Situation geführt haben, aber auch um visionäre Konzepte von einer anderen Art von Unterricht, die in den letzten gut einhundert Jahren entworfen und erprobt wurden. Dabei stehen weiterhin das Problem und seine Lösung im Lauf der Bildungs- und Mathematikgeschichte im Mittelpunkt, um eine neue Antwort auf die Frage nach einem *anderen* Mathematikunterricht zu geben.

Das *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education*-Konzept (CHIME), das am Ende dieser Untersuchungen steht, schlägt den Bogen zwischen den historischen Wurzeln des Problemlösens als Ursprung allen Mathematiktreibens und den Ansprüchen der Welt des einundzwanzigsten Jahrhunderts; es vereint die Ideale einer Vielzahl einflussreicher reformpädagogischer Unterrichtskonzepte mit den Erfahrungen besonders erfolgreicher Teilnehmerstaaten der internationalen Vergleichsstudien. CHIME bricht radikal mit traditionellen Vorstellungen und Überzeugungen und entwirft einen schulischen Mathematikunterricht, der buchstäblich überall stattfindet, der eine ganz andere, transzendente Rolle einnimmt

So richtet Band B den Blick weit zurück in die Vergangenheit, um einen speziellen Blick auf das Wesen der Mathematik und insbesondere der Geometrie zu gewinnen und auch ihrer Rolle in den Bildungsvorstellungen vergangener Zeiten nachzuspüren – und ebenso richtet er den Blick in eine Zukunft, die es erlaubt, überkommene Praktiken und Strukturen der Bildungseinrichtungen zu überwinden. Daher trägt Band B in Ergänzung zu dem vorliegenden Band den Titel *Gestern und Übermorgen*.

Quellenverzeichnis

Lehrplanschriften

BADEN-WÜRTTEMBERG (2004a): Bildungsstandards für Mathematik. Gymnasium – Klassen 6, 8, 10, Kursstufe, [online] http://www.bildung-staerkt-meschen.de/service/downloads/Bildungsstandards/Gym/Gym_M_bs.pdf [24.02.2013].

BADEN-WÜRTTEMBERG (2004b): Hinweise zur Umsetzung des Bildungsplans 2004 Gymnasium – Mathematik, hrsg. von: Ministerium für Kultur, Jugend und Sport des Landes Baden-Württemberg, [online] www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/kmkhinweise [01.03.2013].

BERLIN (2004): Rahmenlehrplan Mathematik. Grundschule – Klasse 1-6, hrsg. von: Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin, Senator für Bildung und Wissenschaft Bremen, Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern, Berlin: Wissenschaft und Technik Verlag.

BERLIN (2006): Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I - Mathematik, Jahrgangsstufe 7-10, Hauptschule, Realschule, Gesamtschule, Gymnasium, hrsg. von: Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin, [online] https://www.google.de/url?url=https://www.berlin.de/sen/bildung/unterricht/faecher-rahmenlehrplaene/rahmenlehrplaene/mdb-sen-bildung-schulorganisation-lehrplaene-sek1_mathematik.pdf&rct=j&q=&esrc=s&sa=U&ved=0ahUKEwiut8rS9ZvRAhWBWSwKHZHxC3cQFggUMAA&usg=AFQjCNGh-ve67j1gmuxJYxneUQ0tS48AnA [20.03.2013].

BRANDENBURG (2008): Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Jahrgangsstufen 7-10, Mathematik, hrsg. von: Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, [online] https://www.google.de/url?url=https://www.berlin.de/sen/bildung/unterricht/faecher-rahmenlehrplaene/rahmenlehrplaene/mdb-sen-bildung-schulorganisation-lehrplaene-sek1_mathematik.pdf&rct=j&q=&esrc=s&sa=U&ved=0ahUKEwiWhJOZ7r7RAhUJD8AKHe_PApsQFggpMAQ&usg=AFQjCNGh-ve67j1gmuxJYxneUQ0tS48AnA [27.03.2013].

BREMEN (2006): Bildungsplan für das Gymnasium Mathematik Jahrgangsstufe 5-10, hrsg. von: Senator für Bildung und Wissenschaft, [online] http://www.lis.bremen.de/schulqualitaet/curriculumentwicklung/bildungsplaene/sekundarbereich_i-15226 [08.03.2013].

HAMBURG (2011): Bildungsplan - Gymnasium Sekundarstufe I. Mathematik, hrsg. von: Freie und Hansestadt Hamburg Behörde für Schule und Berufsbildung, [online] http://www.hamburg.de/contentblob/2373292/52869afc9cec1b7f2e11cb24ae54b741/data/mathematik-gym-seki.pdf [04.04.2013].

HESSEN (2011a): Bildungsstandards und Inhaltsfelder – Das neue Kerncurriculum für Hessen, Sekundarstufe I – Gymnasium. Mathematik, hrsg. von: Hessisches Kultusministerium, [online] https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kerncurriculum_mathematik_gymnasium.pdf [12.04.2013].

HESSEN (2011b): Leitfaden. Maßgebliche Orientierungstexte zum Kerncurriculum. Sekundarstufe I, Institut für Qualitätssicherung (IQ) (Hrsg.), [online] https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/leitfaden_mathematik_sekundarstufe_i.pdf [12.04.2013].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (2004a): Lehrplan für das Gymnasium in Bayern, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26378 [06.04.2012].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (2004b): Mathematik. Lehrplan Jahrgangsstufe 5, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26333 [06.04.2012].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (2004c): Mathematik. Lehrplan Jahrgangsstufe 6, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26318 [06.04.2012].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (2004d): Mathematik. Lehrplan Jahrgangsstufe 7, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26298 [09.04.2012].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (2004e): Mathematik. Lehrplan Jahrgangsstufe 8, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26279 [09.04.2012].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (Hrsg.) (2004f): Mathematik. Lehrplan Jahrgangsstufe 9, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26254 [09.04.2012].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (Hrsg.) (2004g): Mathematik. Lehrplan Jahrgangsstufe 10, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=1 [09.04.2012].

ISB (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München) (Hrsg.) (2004h): Erläuterungen und Beispielaufgaben zu „einfachen Termen“, [online] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26528 [09.04.2012].

MECKLENBURG-VORPOMMERN (2002): Rahmenplan Mathematik für das Gymnasium und Integrierte Gesamtschule Jahrgang 7-10. Erprobungsfassung 2002, hrsg. von: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern, [online] http://www.bildung-mv.de/export/sites/bildungsserver/downloads/unterricht/Rahmenplaene/Rahmenplaene_allgemeinbildende_Schulen/Mathematik/rp-mathe-7-10-gym-02.pdf [30.04.2013].

MECKLENBURG-VORPOMMERN (2010): Rahmenplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 5 und 6 an der Regionalen Schule sowie an der integrierten Gesamtschule. Erprobungsfassung 2010, hrsg. von: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern, [online] http://www.bildung-mv.de/export/sites/bildungsserver/downloads/unterricht/Rahmenplaene/Rahmenplaene_allgemeinbildende_Schulen/Mathematik/rp_mathe_OS_5-6_2010.pdf [28. 09. 2013].

MECKLENBURG-VORPOMMERN (2011): Rahmenplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 des nicht-gymnasialen Bildungsgangs. Erprobungsfassung 2011, hrsg. von: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern, [online] https://www.bildung-mv.de/export/sites/bildungsserver/downloads/unterricht/Rahmenplaene/Rahmenplaene_allgemeinbildende_Schulen/Mathematik/rahmenplan_mathematil_7_10_reg_schule.pdf [30.04.2013].

NIEDERSACHSEN (2006): Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5 – 10. Mathematik, hrsg. von: Niedersächsisches Kultusministerium, [online] http://www.google.de/url?url=http://www.gymnasium-wildeshausen.de/mathematik.html%3Ffile%3Dtl_files/gymnasiumwildeshausen/ down-loads/fachgruppe_mathematik/kc_mathe_gymsek1_2006-08.pdf&rct=j&q=&esrc=s&sa=U&ved=0ahUKEwiKmqqcgZzRAhVDXiwKHRSPDQsQFggUMAA&usg=AFQjCNHKp3tMWKdGOwL_nBhYExLpgQOM_g [05.05.2013].

NORDRHEIN-WESTFALEN (2007a): Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik, hrsg. von: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, Frechen: Ritterbach Verlag. [10.09.2013].

NORDRHEIN-WESTFALEN (2007b): Muster- und Modellaufgaben zum Kernlehrplan Mathematik für das achtjährige Gymnasium (G8), hrsg. von: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, [online] http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/m-g8-musteraufgaben-070913.pdf [29. 09. 2013].

RHEINLAND-PFALZ (2007a): Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5- 9/10), hrsg. von: Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz, [online] http://lehrplaene.bildung-rp.de/gehezu/startseite.html [05.10.2013].

RHEINLAND-PFALZ (2007b): Anregungen zur Umsetzung des Rahmenlehrplans Mathematik Rheinland-Pfalz, Möglichkeiten der Gestaltung in den Jahrgangsstufen 5 und 6, hrsg. von: Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, [online] http://lehrplaene.bildung-rp.de/gehezu/startseite.html [13.10.2013].

RHEINLAND-PFALZ (2007c): Anregungen zur Umsetzung des Rahmenlehrplans Mathematik Rheinland-Pfalz, Möglichkeiten der Gestaltung in den Jahrgangsstufen 7 und 8, hrsg. von: Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, [online] http://lehrplaene.bildung-rp.de/gehezu/startseite.html [13.10.2013].

RHEINLAND-PFALZ (2007d): Anregungen zur Umsetzung des Rahmenlehrplans Mathematik Rheinland-Pfalz, Möglichkeiten der Gestaltung in den Jahrgangsstufen 9 und 10, hrsg. von: Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, [online] http://lehrplaene.bildung-rp.de/gehezu/startseite.html [13.10.2013].

SAARLAND (2011a): Lehrplan Mathematik achtjähriges Gymnasium für die Klassenstufe 7 (Februar 2003), hrsg. von: Ministerium für Bildung und Kultur Saarland, [online] http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/MA_7_2011.pdf [08.05.2014].

SAARLAND (2011b): Lehrplan Mathematik achtjähriges Gymnasium für die Klassenstufe 8 (Februar 2004), hrsg. von: Ministerium für Bildung und Kultur Saarland, [online] http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/LP_Ma_Gym_8_2015.pdf [08.05.2014].

SAARLAND (2014): Lehrplan Mathematik Gymnasium für die Klassenstufen 5, 6 und 7 ab Schuljahr 2012/2013, Erprobungsphase, hrsg. von: Ministerium für Bildung und Kultur Saarland, [online] http://www.saarland.de/7050.htm [07.05.2014].

SACHSEN (2004/2009/2011/2013): Lehrplan Gymnasium. Mathematik, hrsg. von: Sächsisches Staatsministerium für Kultus, [online] http://www.schule.sachsen.de/lpdb/web/downloads/1530_lp_gy_mathematik_2013.pdf?v2 [29.11.2013].

SACHSEN-ANHALT (2003): Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik. Schuljahrgänge 5 – 12, hrsg. von: Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt, [online] http://www.bildung-lsa.de/pool/RRL_Lehrplaene/mathegyma.pdf [29. 09. 2013].

SACHSEN-ANHALT (2012a): Lehrplan Sekundarschule. Kompetenzentwicklung und Unterrichtsqualität. Grundsatzband, hrsg. von: Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt, [online] http://www.bildung-lsa.de/lehrplaene___rahmenrichtlinien/gymnasium/grundsatzband.html [29.09.2013].

SACHSEN-ANHALT (2012b): Fachlehrplan Sekundarschule. Mathematik, hrsg. von: Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt, [online] https://www.bildung-lsa.de/pool/RRL_Lehrplaene/Endfassungen/lp_sks_mathe.pdf [30.09.2013].

Sachsen-Anhalt (2012c): Niveaubestimmende Aufgaben für die Sekundschule Mathematik, [online] https://www.bildung-lsa.de/pool/RRL_Lehrplaene/Niveaubestimmende_Aufgaben_SKS/2012/pdf/nba_mathe_lbs_s.pdf [30.09.2013].

SACHSEN-ANHALT (2015): Fachlehrplan Gymnasium/Fachgymnasium Mathematik, hrsg. von: Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt, [online] http://www.bildung-lsa.de/pool/RRL_Lehrplaene/Erprobung/Gymnasium/FLP_Mathematik_Gym_LT.pdf [04.05.2016].

SCHLESWIG-HOLSTEIN (1997): Lehrplan für die Sekundarstufe I der weiterführenden allgemeinbildenden Schulen. Hauptschule, Realschule, Gymnasium, Gesamtschule. Mathematik, [online] http://www.math.uni.wroc.pl/~hinz/lehrplan1.pdf [02.01.2014].

SCHLESWIG-HOLSTEIN (2014): Fachanforderungen Mathematik Gymnasium Sekundarstufe I, hrsg. von: Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein, [online] http://lehrplan.lernnetz.de/index.php?wahl=199 [09.10.2014].

SCHLESWIG-HOLSTEIN (2015): Leitfaden zu den Fachanforderungen Mathematik. Allgemein bildende Schulen Sekundarstufe I, hrsg. von: Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein, [online] http://lehrplan.lernnetz.de/index.php?wahl=199 [17.05.2015].

Thüringen (2011): Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife Mathematik, hrsg. von: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Thüringen, [online] https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392 [02.02.2014].

Monographien, Sammelwerke und Zeitschriften

ABELS, Lydia (2002): Mathe-Welt – Ich hab's – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen, in: *Mathematik lehren*, 2002, Heft 115, Beilage.

ARTELT, Cordula, Jürgen BAUMERT, Eckhard KLIEME, Michael NEUBRAND, Manfred PRENZEL, Ulrich SCHIEFELE, Wolfgang SCHNEIDER, Klaus-Jürgen TILLMANN und Manfred WEIß (Hrsg.) (2001): *PISA 2000. Zusammenfassung zentraler Befunde*. *Programme for International Student Assessment. Schülerleistungen im internationalen Vergleich*, Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

BARDY, Peter (2007): *Mathematisch begabte Grundschulkinder, Diagnostik und Förderung,* München: Spektrum Verlag.

BARZEL, Bärbel, Andreas BÜCHTER und Timo LEUDERS (2007): *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II*, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

BAUMERT, Jürgen, Rainer LEHMANN, Manfred LEHRKE, Bernd SCHMITZ, Marten CLAUSEN, Ingmar HOSENFELD, Olaf KÖLLER und Johanna NEUBRAND (1997): *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. *Deskriptive Befunde*, Opladen: Leske + Budrich Verlag.

BECKER, Rolf (2012): Bildung. Die wichtigste Investition in die Zukunft, in: Stefan Hradil (Hrsg.), *Deutsche Verhältnisse. Eine Sozialkunde,* Bonn: Bundeszentrale für politische Bildung, S. 121-149.

BEZOLD, Angela (2009): *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote*. *Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*, Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

BILDUNGSKOMMISSION NRW (1995): *Zukunft der Bildung. Schule der Zukunft*, Denkschrift der Kommission „Zukunft der Bildung – Schule der Zukunft" beim Ministerpräsidenten des Landes Nordrhein-Westfalen. Neuwied: Luchterhand Verlag.

BLUM, Werner und Bernd WIEGAND (2000): Offene Aufgaben – wie und wozu? in: *Mathematik lehren*, 2000, Heft 100, S.52-53.

BLUM, Werner, Christina DRÜKE-NOE, Ralph HARTUNG und Olaf KÖLLER (Hrsg.) (2006): *Bildungsstandards Mathematik*: *konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*, Berlin: Cornelsen Scriptor Verlag.

BROCKHAUS (Hrsg.) (2006): *Enzyklopädie in 30 Bänden,* Band 22 POT-RENS, 21. Aufl., Leipzig F. A. Brockhaus Verlag, S. 129.

BRUDER, Regina und Christina COLLET (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

BRÜNING, Ludger und Tobias SAUM (2008*): Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen. Strategien zur Schüleraktivierung*, 4. Aufl., Mülheim a.d. Ruhr: Neue Deutsche Schule Verlagsgesellschaft mbh.

BRUNS, Kai und Paul KLIMA (Hrsg.) (2001): *Informatik für Ingenieure kompakt*, Braunschweig: Vieweg Verlag.

BÜCHTER, Andreas und Timo LEUDERS (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. *Lernen fördern – Leistungen überprüfen*, Berlin: Cornelsen Scriptor Verlag.

COLLET, Christina und Regina BRUDER (2008): Langzeitstudie zu einer Lehrerfortbildung zum Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation, in: Eva Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hildesheim: Franzbecker, S. 87-90.

DEVLIN, Keith (2002): *Muster der Mathematik*. *Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*, Heidelberg: Spektrum Verlag.

DEWEY, John (1910): *How we think*, Boston: Heath & Co.

DOCKHORN, Christian (2000): Schulbuchaufgaben öffnen, in: *Mathematik lehren*, 2000, Heft 100, S. 58-59.

DÖRNER, Dietrich (1979): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, 2. Aufl., Stuttgart: Kohlhammer Verlag.

DUDENREDAKTION (Hrsg.) (2004): *Duden das Synonymwörterbuch*. *Ein Wörterbuch sinnverwandter Wörter*, 3. Aufl., Mannheim: Dudenverlag, S. 684.

DÜRINGER, Lara (2014): *Fermi-Aufgaben – Mathematik kompetenzorientiert 5/6: Modellieren und abschätzen, Probleme lösen, Ergebnisse präsentieren*, Donauwörth: Auer Verlag.

FABRICIUS, Sandra (2009): Lerntagebücher im Mathematikunterricht. Wie Kinder in der Grundschule auf eigenen Wegen lernen, in: Elisabeth Rathgeb-Schnierer und Sybille Schütte (Hrsg.), *Oldenbourg Fortbildung*, München: Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH.

FRANKE, Marianne (2007): *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*, München: Springer Verlag.

FREUDENTHAL, Hans (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Bd. 2, Stuttgart: Klett Verlag.

FREY-EILING, Angela und Karl FREY (2006): Das Gruppenpuzzle, in: Jürgen Wiechmann (Hrsg.), *12 Unterrichtsmethoden - Vielfalt für die Praxis. Basis-Bibliothek Unterricht*, Weinheim: Beltz Verlag, S. 50-57.

GLATFELD, Martin (Hrsg.) (1977): *Mathematik lernen: Probleme und Möglichkeiten*, Braunschweig: Vieweg Verlag.

GLATFELD, Martin (Hrsg.) (1990): *Finden, Erfinden, Lernen – Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt*, Frankfurt am Main: Verlag Peter Lang.

GREEFRATH, Gilbert (2006): M*odellieren lernen - mit offenen realitätsnahen Aufgaben*, Köln: Aulis Verlag Deubner.

GRIESER, Daniel (2013): *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*. *Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*, Wiesbaden: Springer Verlag.

HECKMANN, Kirsten und Friedhelm PADBERG (2012): *Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I*, Berlin: Springer Spektrum Verlag.

HEINZE, Astrid (2005): Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder - aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen, in: Christina Fischer und Franz J. Mönks (Hrsg.), *Begabtenforschung*. *Schriftreihe des ICBF Münster*, Bd. 3, Münster: LIT Verlag.

HEPP, Ralph und Kirstin MIEHE (2006): Kooperatives Lernen, in: *Mathematik lehren*, 2006, Heft 139, S. 4-8.

HERGET, Wilfried (2000): Rechnen können reicht… ebene nicht! in: *Mathematik lehren*, 2000, Heft 100, S. 4-10.

HERMES, Christa und Paul VAßEN (2012): *Entwicklung kompetenzorientierter Aufgaben für den Mathematikunterricht*. *Handreichung für den Unterricht an berufsbildenden Schulen FHR und AHR*, Berlin: Cornelsen Verlag.

HERR, Ted, Ken JOHNSON und Judy KYSH (1994): *Crossing the River with Dogs*. *Problem Solving for College Students*, Berkeley/CA: Key College Publishing.

HERSH, Reuben (2014): *Experiencing Mathematics*: *What Do We Do, when We Do Mathematics? Providence*, Rhode Island: American Mathematical Society.

HUßMANN, Stephan (2003): Lerntagebücher – Mathematik in der Sprache verstehen, in: Timo Leuders (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, Berlin: Cornelsen Verlag, S. 75-92.

JANK, Werner und Hilbert MEYER (1991): *Didaktische Modelle*, Berlin: Cornelsen Verlag.

KLUSMANN, Uta, Mareike KUNTER, Ulrich TRAUTWEIN und Jürgen BAUMERT (2006): Lehrerbelastung und Unterrichtsqualität aus der Perspektive von Lehrenden und Lernenden, in: *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, Heft 20, S. 131-173.

KMK (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland) (Hrsg.) (2004a): *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung*, München: Luchterhand Verlag.

KMK (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland) (Hrsg.) (2004b): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*, München: Luchterhand Verlag.

KMK (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland) (Hrsg.) (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*, München: Luchterhand Verlag.

KÖCK, Peter (2013): *Handbuch der Schulpädagogik für Studium – Praxis – Prüfung*, 3. Aufl., Donauwörth: Auer Verlag.

KOLOSOW, Aleksej A. (1963): *Kreuz und quer durch die Mathematik*, Leipzig: Volkseigener Verlag Berlin.

KOMOREK, Evelyn, Regina BRUDER, Christina COLLET und Bernhard SCHMITZ (2006): Inhalte und Ergebnisse einer Intervention im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I mit einem Unterrichtskonzept zur Förderung mathematischen Problemlösens und von Selbstregulationskompetenzen, in: Manfred Prenzel und Lars Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule*. *Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*, Münster: Waxmann, S. 240-267.

KORDOS, Marek (2003): *Streifzüge durch die Mathematikgeschichte*, Stuttgart: Klett Verlag.

KUNTZE, Sebastian (2013): Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht, in: JASMIN SPRENGER, ANKE WAGNER UND MARC ZIMMERMANN (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen*. *Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule*, Heidelberg: Springer Verlag, S. 17-33.

LANGE, Diemut (2013): *Inhaltsanalytische Untersuchung zur Kooperation beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben*. *Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik*, Bd. 17, Münster: Waxmann Verlag.

LEUDERS, Timo (Hrsg.) (2003): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, Berlin: Cornelsen Verlag.

LEUDERS, Timo (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistungen prüfen*, Berlin: Cornelsen Verlag.

LEUDERS, Timo, Lisa HEFENDEHL-HEBEKER und Hans-Georg WEIGAND (Hrsg.) (2009). *Mathe Magische Momente*, Berlin: Cornelsen Verlag.

LEUDERS, Timo und Kathleen PHILIPP (2010): Problemlösestunde planen. Strategisch die „Primafaktorzerlegung“ erarbeiten, in: *Mathematik lehren*, 2010, Heft 158, S. 14-17.

LEUDERS, Timo (2016): *Erlebnis Algebra: zum aktiven Entdecken und Selbständigen Arbeiten*, Heidelberg: Spektrum Verlag.

LÜKEN, Miriam (2012): *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. *Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern. Eine empirische Studie zur Didaktik der Mathematik*, Bd. 9, Münster: Waxmann Verlag.

MASON, John, Leone BURTON und Kaye STACEY (2006): *Mathematisches Denken*. *Mathematik ist keine Hexerei*, 4. Aufl., München: Oldenburg Verlag.

MEYER, Hilbert (1994): *Unterrichtsmethoden I: Theorieband*, 6. Aufl., Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor Verlag.

MEYER, Hilbert (2006): *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung*, Berlin: Cornelsen Verlag.

MÜLLER-PHILIPP, Susanne und Hans-Joachim GORSKI (2012): *Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter*, 5. Aufl., Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

NOACK, Monika, Alexander UNGER, Robert GERETSCHLÄGER und Hansjürg STOCKER (2015): *Mathe mit dem Känguru. Die schönsten Aufgaben von 2012 bis 2014*, München: Carls Hanser Verlag.

OECD (Hrsg.) (2014): *PISA 2012 Ergebnisse*: *Was Schülerinnen und Schüler wissen und können. Schülerleistungen in Lesekompetenz, Mathematik und Naturwissenschaften*, Band I, Bielefeld: W. Bertelsmann Verlag.

PÓLYA, George (1966*): Vom Lösen mathematischer Aufgaben*. *Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*, Bd. 1, Basel: Birkenhäuser Verlag.

PÓLYA, George (1980): Wie lehren wir Problemlösen? in: *Mathematik lehren,* 1980, Heft 1, S. 3-5.

PÓLYA, George (1995): *Schule des Denkens*. Vom Lösen mathematischer Probleme, 4. Aufl., Tübingen: Francke Verlag.

PRENZEL, Manfred (2000*):* Steigerung der Effizient des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Ein Modellversuchsprogramm von Bund und Ländern, in: *Unterrichtswissenschaft*, 2000, Nr. 28, S. 103-126.

RAIDT, Tabea (2009): Bildungsreformen nach PISA – Paradigmenwandel und Wertewandel, Dissertation im Fach Soziologie und Biologie an der Heinrich-Heine Universität Düsseldorf.

REZAT, Sebastian (2009): *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers: Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen*, Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

ROTHLAND, Martin (Hrsg.) (2013*): Belastung und Beanspruchung im Lehrerberuf. Modelle, Befunde, Interventionen,* 2. Aufl., Wiesbaden: Springer Verlag.

ROTT, Benjamin (2013): Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie, in: Torsten Fritzlar, Frank Heinrich und Bernd Zimmermann (Hrsg.), *Ars inveniendi et dejudicandi,* Bd. 2, Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

SCHEID, Harald und Wolfgang SCHWARZ (2017): *Elemente der Geometrie*, 5. Aufl., Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

SCHMIDT, Günter (2000): Welchen Beitrag kann das Schulbuch leisten, in: *Mathematik lehren*, 2000, Heft 100, S. 17-22.

SCHMIT, Stefan (2014): Schulbücher als Lehr- und Lernmaterial: Das Thema „Bewegungsbeschreibung“ in Physikschulbüchern der Sekundarstufe I, Dissertation im Fach Mathematik und Naturwissenschaften an der Carl-von-Ossietzky Universität Oldenburg.

SCHNABEL, Joachim, Anja TRAPP (2014): *Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen – Musteraufgaben – Materialien für die Klasse 1-4*, Donauwörth: Auer Verlag.

SCHOENFELD, Alan H. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Orland: Academic Press.

SCHWARZ, Wolfgang (2006): *Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik*, Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

SCHWEDA, Ruth (2014): *Warum Mathematik schön ist. Mustern und Strukturen auf der Spur*, Hamburg: Diplomica Verlag.

SCHWILL, Andreas (1993): Fundamentale Ideen der Informatik, in: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1993, Nr. 1, S. 20-31.

SCRIBA, Christoph J. und Peter SCHREIBER (2005): *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Berlin: Springer Verlag.

SEREBRYAKOVA, Kateryna (2016): *Zur Geschichte von Heuristiken. Ein asymmetrischer Vergleich zentriert um Altschuller und TRIZ*, in: Stuttgarter Beiträge *zur* Wissenschafts- und Technikgeschichte, Bd. 8, Berlin: Logos Verlag.

STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (KMK) (Hrsg.) (1995): *Richtungsentscheid zur Reform der gymnasialen Oberstufe*. Neuwied: Luchterhand.

STEINWEG, Anna Susanne (2013): *Algebra in der Grundschule: Muster und Strukturen – Gleichungen - funktionale Beziehungen*, Berlin: Springer Verlag.

STILLER, Daniela (2017*): Problemlösen, Heuristik und Geometrie: Zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe*, Bd. B, Gestern und Übermorgen, Dissertation im Fach Didaktik der Mathematik an der Bergischen Universität Wuppertal.

STRAUCH, Anna, Stefanie JÜTTER und Ewelina MANIA (2009): *Kompetenzerfassung in der Weiterbildung*. *Instrumente und Methoden situativ anwenden*, Bielefeld: W. Bertelsmann Verlag GmbH.

STRUVE, Horst (1998): Geometrie aus Schülersicht: Charakteristika und Probleme, in: Urs Kirchgraber (Hrsg.), *Berichte über Mathematik und Unterricht*, Bericht 03, Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.

UFLIG, Frauke (2013): *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben*. *Triangulation quantitativer und qualitativer Zugänge*, Wiesbaden: Springer Verlag.

VÁSÁRHELYI, Eva (Hrsg.) (2008): *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hildesheim: Franzbecker Verlag.

VOLLRATH, Hans-Joachim (1984): *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*, Stuttgart: Klett Verlag.

VOLLRATH, Hans-Joachim und Jürgen ROTH (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*, Heidelberg Spektrum Verlag.

WEIDNER, Margit (2006): *Kooperatives Lernen im Unterricht. Das Arbeitsbuch*, 3. Aufl., Seelze: Kallmeyer / Klett Verlag.

WESSELLS, Michael G. (1990): *Kognitive Psychologie*, München: Ernst Reinhardt Verlag.

WEIGAND, Hans-Georg, Anderas FILLER, Reinhard HÖLZL, Sebastian KUNTZE, Matthias LUDWIG, Jürgen ROTH, Barbara SCHMIDT-THIEME und Gerald WITTMANN (2009): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*, 2. Aufl., Heidelberg: Springer Verlag.

WINTER, Heinrich (1976): Was soll Geometrie in der Grundschule? in: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1976, Nr. 8, S. 14-18.

WINTER, Heinrich (1988): Lernen durch Entdecken, in: *Mathematik lehren*, 1988, Heft 28, S. 6-13.

WINTER, Heinrich (1991): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. *Einblicke in die Ideen-geschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, 2. Aufl., Braunschweig: Vieweg Verlag.

WINTER, Heinrich (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, in: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 1995, Nr. 61,S. 37-46.

ZECH, Friedrich (1996): *Grundkurs Mathematikdidaktik*. *Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, Weinheim: Beltz Verlag.

ZIMMERMANN, Bernd (1990): Heuristische Strategin in der Geschichte der Mathematik. Entstehung Entwicklung, Einflüsse, in: Martin Glatfeld (Hrsg.), F*inden, Erfinden, Lernen – Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt*, Frankfurt am Main: Verlag Peter Lang, S. 130 - 164.

Schulbücher

BAUM, Manfred, Martin BELLSTEDT, Heidi BUCK, Rolf DÜRR, Hans FREUDIGMANN, Frieder HAUG, Stephan HUßMANN, Thomas JÖRGENS, Thorsten JÜRGENSEN-ENGL, Timo LEUDERS, Kathrin RICHTER, Wolfgang RIEMER, Hartmut SCHERMULY, Raphaela SONNTAG und Inga SURREY (2009*): Lambacher Schweizer 5*, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

BAUM, Manfred, Martin BELLSTEDT, Heidi BUCK, Rolf DÜRR, Hans FREUDIGMANN, Frieder HAUG, Stephan HUßMANN, Thomas JÖRGENS, Thorsten JÜRGENSEN-ENGL, Timo LEUDERS, Kathrin RICHTER, Wolfgang RIEMER, Reinhard SCHMITT-HARTMANN, Raphaela SONNTAG und Inga SURREY (2009*): Lambacher Schweizer 6*, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen, Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

CUKROWICZ, Jutta, Joachim THEILENBERG und Bernd ZIMMERMANN (Hrsg.) (2005): *MatheNetz 5* Gymnasium, Braunschweig: Westermann Verlag.

CUKROWICZ, Jutta und Joachim THEILENBERG (Hrsg.) (2006): *MatheNetz 6* Gymnasium, Braunschweig: Westermann Verlag.

ESPER, Norbert und Johannes SCHORNSTEIN (Hrsg.) (2009): *Fokus Mathematik 6,* Nordrhein-Westfalen Gymnasium. Berlin: Cornelsen Verlag.

GRIESEL, Heinz, Helmut POSTEL und Friedrich SUHR (Hrsg.) (2006): *Elemente der Mathematik 5*, Braunschweig: Schroedel Verlag.

GRIESEL, Heinz, Helmut POSTEL, Friedrich SUHR und Werner LADENTHIN (Hrsg.) (2013): *Elemente der Mathematik Nordrhein-Westfalen 6*, Braunschweig: Schroedel Verlag.

KLIEMANN, Sabina, Regina PUSCHER, Sabine SEGELKEN, Wolfram SCHMIDT und Rüdiger VERNAY (2006): *Mathematik live 5* – Mathematik für die Sekundarstufe I, Stuttgart: Klett Verlag.

KLIEMANN, Sabine, Carmen MALLON, Regina PUSCHER, Sabina SEGELKEN, Wolfram SCHMIDT, Michael TRAPP und Rüdiger VERBAY (2007): *Mathematik live 6* – Mathematik für die Sekundarstufe, Stuttgart: Klett Verlag.

KOULLEN, Reinhold und Udo WENNEKERS (Hrsg.) (2008): *Zahlen und Größen 5*. Gesamtschule Nordrhein-Westfalen, Berlin: Cornelsen Verlag.

KOULLEN, Reinhold und Udo WENNEKERS (Hrsg.) (2009*): Zahlen und Größen 6*. Gesamtschule Nordrhein-Westfalen, Berlin: Cornelsen Verlag.

LERGENMÜLLER, Arno und Günter SCHMIDT (2006): *Mathe Neue Wege 5*. Arbeitsbuch für Gymnasien, Braunschweig: Schroedel Verlag.

LERGENMÜLLER, Arno und Günter SCHMIDT (2007): *Mathe Neue Wege 6*. Ausgabe 2007 G8 Arbeitsbuch für Gymnasien, Braunschweig: Schroedel Verlag.

LÜTTICKEN, Renatus und Claudia UHL (Hrsg.) (2013): *Fokus Mathematik 5*. Nordrhein-Westfalen Gymnasium, Berlin: Cornelsen Verlag.

Internetquellen und Online-Ressourcen

AMTSBLATT DER EUROPÄISCHEN UNION (2009): Schlussfolgerungen des Rates vom 12. Mai 2009 zu einem strategischen Rahmen für die europäische Zusammenarbeit auf dem Gebiet der allgemeinen und beruflichen Bildung („ET 2020"), [online] http://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/HTML/?uri=CELEX:52009XG0528%2801%29&from=EN [06.01.2016].

ARTELT, Cordula, Jürgen BAUMERT, Eckhard KLIEME, Michael NEUBRAND, Manfred PRENZEL, Ulrich SCHIEFELE, Wolfgang SCHNEIDER, Klaus-Jürgen TILLMANN und Manfred WEIß (Hrsg.) (2001): PISA 2000. Zusammenfassung zentraler Befunde. Programme for International Student Assessment. Schülerleistungen im internationalen Vergleich, Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, [online] https://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/ergebnisse.pdf [25.08.2013].

BUNDESZENTRALE FÜR POLITISCHE BILDUNG (Hrsg.) (2012): Notwendigkeit von Bildungsreformen und Ausblicke in die Zukunft, [online] http://www.bpb.de/politik/grundfragen/deutsche-verhaeltnisse-eine-sozialkunde/138435/notwendigkeit-von-bildungsreformen-und-ausblick-in-die-zukunft [01.03.2014].

BUND-LÄNDER-KOMMISSION (Hrsg.) (2000 – 2003): Programm zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, [online] http://blk.mat. unibaruth.de/indexblk.html [21.10.2012].

EUROPEAN COMMISSION EDUCATION & CULTURE, [online] http://ec.europa.eu/dgs/education_culture/index_en.htm [06.01.2016].

EUROPEAN COMMISSION ET 2020. Stratetgic framework – Educatin & Training 2020, [online] http://ec.europa.eu/education/policy/strategic-framework/index_en.htm [06.01.2016].

IQB (Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen) (Hrsg.) (2004), [online] https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/iqb.html [25.07.2013].

IQB (Hrsg.) (2009): Konzeption der Kultusministerkonferenz zur Nutzung der Bildungsstandards für die Unterrichtsentwicklung, [online] https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2009/2009_12_10-Konzeption-Bildungsstandards.pdf [15.02.2014].

KMK (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland) (Hrsg.) (2004c): Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften, Beschluss der Kultusministerkonferenz , [online] http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung.pdf [26.09.2015].

KMK (Hrsg.) (2006): Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring, [online] http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2015/2015_06_11-Gesamtstrategie-Bildungsmonitoring.pdf [12.02.2014].

KMK (Hrsg.) (2009):Strategischer Rahmen „ET 2020“, [online] https://www.kmk.org/themen/ internati-onales/eu-zusammenarbeit/strategischer-rahmen-et-2020.html [06.01.2016].

MBWWK (Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur Rheinland-Pfalz/SchuleWirtschaft Rheinland-Pfalz) (Hrsg.) (2014): Grundbildung sichern – Abbrüche vermeiden. Mathematik in Schule, Ausbildung und Studium, [online] http://mathematik.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/mathematik.bildung-rp.de/Fortbildungsmaterial/Broschuere_Grundwissen_sichern_-_Abbrueche_vermeiden.pdf [12.10.2014].

OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) (Hrsg.) (2001): Knowledge and Skills for Life - First Results from PISA 2000, [online] http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternational studentassessmentpi-sa/knowledgeandskillsforlifefirstresultsfrompisa2000-publications2000.htm [10.03.2013].

OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) (Hrsg.) (2004a): Learning for Tomor-row's World – First Results from PISA 2003, [online] http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/learningfortomorrowsworldfirstresultsfrompisa2003.htm [15.03.2013].

OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) (Hrsg.) (2004b): Problem Solving for Tomorrow's World – First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003, [online] https://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/34009000.pdf [23.03.2013].

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE FREIBURG (Hrsg.) (2010): Projekt PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe). Internationales Projekt für eine Veränderung der Unterrichtskultur in Mathematik und Naturwissenschaften, [online] http://primas.ph-freiburg.de [14.04.2014].

PISA Internationale Schulleistungsstudie der OECD, [online] http://oecd.org/pisa

SCHMOOK, Heike (2007): Kultusminister verteidigen ihre Schulbücher, in: Frankfurter Allgemeine Zeitung online, [online] http://www.faz.net/aktuell/politik/inland/schavans-vorschlag-kultusminister-verteidigen-ihre-schulbuecher-1463848.html [03.05.2015].

SCHREIBER, Alfred (2014): Heuristik: Die Kunst des Problemlösens, Fachdidaktische Vorlesung zu den Grundzügen der Mathematikdidaktik an der Universität Flensburg, [online] http://www.alfred-schreiber.de/g-mathematik/materialien/didmath-5.pdf [15.04.2014].

STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (KMK), [online] http://www.kmk.org

TU DARMSTADT (Technische Universität Darmstadt), Fachbereich Mathematik, Arbeitsgruppe Fachdidaktik (Hrsg.) (o.J.): Material Mathe + X: problemloesenlernen.de, Informationen und Material zum Themenbereich Problemlösen & Selbstregulation, [online] http://www.problemloesenlernen.dvlp.de [30.04.2014].

TU DARMSTADT (Technische Universität Darmstadt), Fachbereich Mathematik, Arbeitsgruppe Fachdidaktik (Hrsg.) (2003): madaba - Aufgabendatenbank für den Mathematikunterricht, [online] http://www.madaba.de [27.04.2015].

TU DORTMUND (Technische Universität Dortmund). Institut für Entwicklung und Forschung des Mathematikunterrichts (Hrsg.) (2009): Projekt PIKAS (Prozessbezogene und Inhaltsbezogene Kompetenzen Anregung von fachbezogener Schulentwicklung). Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, [online] http://pikas.dzlm.de [23.05.2015].

WESTERMANN GRUPPE (Hrsg.) (2013): *Mathematik Neue Wege für Nordrhein-Westfalen*. Stoffverteilungsplan Mathematik Neue Weg 5 und 6, [online] http://f.sbzo.de/onlineanhaenge/files/onlineshop_934525_stv_neue_wege_5_6_nrw_0.pdf [18.07.2013].

ZIB (Zentrum für Internationale Bildungsvergleichsstudien) (2010), [online] http://zib.education/startseite.html [25.07.2013].

ZENTRUM ZUR FÖRDERUNG DES MATEHMATISCH – NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS (Hrsg.) (2003): SINUS-Transfer. Programm zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, [online] http://www.sinus-transfer.de/startseite.html [03.05.2015].

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1 Von internationalen Vergleichsstudien zu Bildungsstandards und Lehrplänen. 1

Abb. 2 Zum Zusammenhang zwischen Problemlösen und den anderen prozessbezogenen Kompetenzen. 17

Abb. 3 Veröffentlichungsjahre der aktuellen Lehrplanschriften in der Bundesrepublik Deutschland (Stand Februar 2014). 28

Abb. 4 Übersicht zur Anzahl der prozessbezogenen Kompetenzen in den Bundesländern. 33

Abb. 5 Übersicht über Kombinationen, Umsortierung, Umformulierung und Neuschöpfung der in den Bildungsstandards als „allgemein mathematisch" bezeichneten Kompetenzen in den sechzehn Bundesländern. 34

Abb. 6 Relative Berücksichtigung der in der Analyse erfassten Kategorien heuristischer Tätigkeiten in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Bundesländer, zusammengefasst nach den an Pólyas 4-Phasenmodell gebildeten Gruppen III bis VI (unter Auslassung Schleswig-Holsteins und Bayerns). 101

Abb. 7 Summenbildung (anteilig) über Phasen und Doppeljahrgangsstufen in allen Bundesländern hinweg. 102

Abb. 8 Hierarchische Gliederung der Heurismen nach Bruder/Collet (2011). 122

Abb. 9 Die Einteilung heuristischer Techniken und Heurismen für die Sekundarstufe I in drei Kategorien nach Krichel/Stiller. 152

Abb. 10 Rahmen für die Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht. 154

Abb. 11 Aufgabenbeispiel aus der Aufgabesammlung der Bildungsstandards (2004b: 19). 165

Abb. 12 Übersicht über mögliche Ursachen und negative Folgen der Belastung und Beanspruchung im Lehrerberuf (zusammengestellt nach ROTHLAND 2013). 170

Abb. 13 Auszug aus dem Stoffverteilungsplan Mathematik Neue Wege 5 und 6. 182

Abb. 14 Die drei Säulen des IHiMU-Konzepts. 203

Abb. 15 Auszug aus einer Schulbuchseite zur Einführung der Grundbegriffe *senkrecht* und *parallel* (Zahlen und Größen 5, 2008:64). 209

Abb. 16 Auszug aus einer Schulbuchseite zum Umgang mit dem Geodreieck (Lambacher Schweizer 5, 2009:54). 209

Abb. 17 Auszug aus einer Schulbuchseite zur Einführung des Grundbegriffs Abstand (Fokus Mathematik 5, 2013: 108). 210

Abb. 18 Schulbuchseite zur Einführung des Grundbegriffes Abstand (Zahlen und Größe 5, 2008: 64). 213

Abb. 19 Fußballfeld mit den wichtigsten Bezeichnungen als Arbeitsgrundlage. 214

Abb. 20 Graphische Darstellung der aus der Schussbahnlinie s_i resultierenden Winkelfeldern mit den Scheitel S_1 und S_2 und den Schenkeln *st* und s_1 bzw. s_2. 217

Abb. 21 Graphische Darstellung der Lotgeraden ℓ von T auf st mit dem Lotfußpunkt $L = S_i$. 217

Abb. 22 Graphische Darstellung der Lotgeraden ℓ von S_i auf *ta* mit dem Lotfußpunkt L_i. 218

Abb. 23 Achsenspiegelung an der Spiegelachse g. 222

Abb. 24 Verkettung zweier Achsenspiegelungen an den zueinander parallelen Spiegelachsen g und h. 222

Abb. 25 Verkettung zweier Achsenspiegelungen an den Spiegelachsen g und h, die im Winkel σ aufeinander treffen. 223

Abb. 26 Verkettung zweier Achsenspiegelungen zu 180°-Drehung. 223

Abb. 27 Fotografie einer sich spiegelnden Stadtsilhouette, von Kim Hansen/Slaunger. 230

Abb. 28 Figuren mit eingezeichneten Ur- und Bildpunkten sowie Spiegelachse g. 233

Abb. 29 Fotografie einer sich spiegelnden Wasserburg von Martin Toedtling. Achsensymmetrische Figur mit einigen eingezeichneten Punkten und Bildpunkten. 234

Abb. 30 Auswahl symmetrischer Figuren zur Untersuchung. 235

Abb. 31 Echte und nur scheinbar korrekte Achsenspiegelungen verschiedener Figuren. 235

Abb. 32 An vorgegebenen Achsen zu spiegelnde Figuren. 236

Abb. 33 Urbild und ein vorgegebener Bildpunkt, die zu einer vollständigen Achsenspiegelung ergänzt werden sollen. 237

Abb. 34 Sechseck und Fünfeck mit eingezeichneten Symmetrieachsen. 240

Abb. 35 Diagonalen im Sechseck und Fünfeck. 241

Abb. 36 Beispiel für ein gleichseitiges Dreieck mit eingezeichnetem Schwerpunkt S, Winkelhalbierenden, Symmetrieachsen, Höhe und Mittelsenkrechte (1) und ein gleichschenkliges Dreieck mit eingezeichneter Symmetrieasche, die zugleich eine Winkelhalbierende und Höhe ist (2), sowie ein unregelmäßiges Dreieck mit drei verschiedenen Winkelgrößen und Seitenlängen (3). 242

Abb. 37 Beispiele für ein rechtwinkliges (1), spitzwinkliges (2) und stumpfwinkliges (3) Dreieck. 242

Abb. 38 Quadrat mit eingezeichneten Symmetrieachsen. 243

Abb. 39 Rechteck mit eingezeichneten Diagonalen, Mittelsenkrechten und Symmetrieachsen. 244

Abb. 40 Parallelogramm mit eingezeichneten Diagonalen. 244

Abb. 41 Raute mit eingezeichneten Diagonalen. 244

Abb. 42 Mögliche Abbildungen auf den Karten, die zu Vierecken ergänzt werden sollen. 251

Abb. 43 Polygon mit eingezeichnetem geschlossenem Polygonzug. 265

Abb. 44 Herleitung der Flächeninhaltsformel für Rechtecke durch Auslegen mit Einheitsquadraten. 266

Abb. 45 Herleitung der Flächeninhaltsformel für Parallelogramme durch Zerlegen und Zusammensetzen zu einem Rechteck. 267

Abb. 46 Rechteck mit eingezeichneter Diagonale. 268

Abb. 47 Herleitung der Flächeninhaltsformel für beliebige Dreiecke durch Ergänzung zu einem Rechteck. 268

Abb. 48 geometrischer Flickenteppich entnommen (Lambacher Schweizer 5, 2009:118). 278

Abb. 49 Zusammengesetzte Figuren, die auf ihre Flächeninhaltsgleichheit zu überprüfen sind. 281

Abb. 50 Freie Zerlegung in kongruente Teilfiguren zum indirekten Flächeninhaltsvergleich. 282

Abb. 51 Zusammengesetzte Figuren, die mittels eines hinzugefügten Rasters erneut auf ihre Flächeninhaltsgleichheit zu überprüfen sind. 282

Abb. 52 Flächeninhaltsgleiches Parallelogramm und Rechteck auf Karopapier. 285

Abb. 53 Rechtwinkliges Dreieck auf Karopapier. 287

Abb. 54 Beliebiges Dreieck auf Karopapier. 288

Abb. 55 Beliebiges Dreieck zu Rechteck bzw. Parallelogramm ergänzt. 288

Tabellenverzeichnis

Tab. 1 Übersicht der wesentlichen Unterscheidungsmerkmale von Routine- und Problemaufgabe (in Anlehnung an BARDY 2007: 138 und LANGE 2013: 28 - 36). 18

Tab. 2 Tabellarische Übersicht über mögliche Schritte beim Lösen einer Routineaufgabe. 19

Tab. 3 Tabellarische Übersicht über mögliche Schritte beim Lösen einer Problemaufgabe. 21

Tab. 4 Acht Aufgabenklassen nach Kategorien „Anfangszustand“, „Transformation“ und „Zielzustand“ 23

Tab. 5 Übersicht über die Bezeichnung für Lehrplandokumente, supplementäre Schriften und Einteilung der allgemein mathematischen Kompetenzen in den deutschen Bundesländern (Stand Februar 2014). 32

Tab. 6 Formulierungen betreffend der Problemlösekompetenz in den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts, geclustert nach Häufigkeit der Erwähnung. 74

Tab. 7 Allgemeine Aussagen zu den Problemlösefähigkeiten in den nicht-jahrgangsstufenspezifischen Teilen der Lehrplanschriften, geclustert nach Häufigkeit. 77

Tab. 8 Übersicht zur logischen Stringenz der Lehrplanschriften bezüglich ihrer Forderungen nach Problemlösefähigkeiten, Definition von Problemlösen und inhaltlicher Konkretisierung. 78

Tab. 9 Konkrete Nennung heuristischer Vorgehens-/Verhaltensweisen im allgemeinen Teil der Lehrplanschriften. 79

Tab. 10 Gruppe I heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder. 82

Tab. 11 Gruppe II heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder. 84

Tab. 12 Gruppe III heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 1. 87

Tab. 13 Gruppe IV heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 2. 89

Tab. 14 Gruppe V heuristischer Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 3. 92

Tab. 15 Gruppe VI Überprüfung, Bewertung und Reflektion der Ergebnisse und Wege in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: Pólya Phase 4. 94

Tab. 16 Gruppe VII heuristikbezogener Vorgehens- und Verhaltensweisen in den stufenspezifischen Kompetenzerwartungen der Länder: zusätzliche Nennungen ohne echten heuristischen Inhalt. 97

Tab. 17 Verknüpfung von mathematischen Teilgebieten mit Problemlösefähigkeiten in den Lehrplänen. 103

Tab. 18 Verknüpfung von mathematischen Teilgebieten mit Problemlösefähigkeiten in den Lehrplänen. 104

Tab. 19 Fachmethodische Systematik der heuristischen Strategien nach Schwarz (2006). 119

Tab. 20 Heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien nach Bruder/Collet (2011). 121

Tab. 21 Synopse des vier Phasenmodells nach Pólya (links) und der heuristischen Kategorien nach Krichel/Stiller (rechts). 125

Tab. 22 Übersicht über die zu erwerbenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen und Leitideen aus der Aufgabensammlung der Bildungsstandards (KMK 2004b:16-36). 164

Tab. 23 Inhaltlicher Erwartungshorizont für den Geometrieunterricht der Orientierungsstufe und verknüpf-bare Heurismen. 166

Tab. 24 Übersicht über die Verankerung des Problemlösens in einer Auswahl aktueller Mathematik-Schulbuchreihen für die Jahrgangsstufe 6.......177

Tab. 25 Aufbau und - gemäß der Anforderungsbereiche I- bis-III differenzierte - Leitfragen des Verlaufsprotokolls zur Dokumentation von Forscheraufgaben.......194

Tab. 26 Inhalte, die in Problemlösebox und Merksatzbox gesammelt und systematisiert werden. 202

Tab. 27 Übersicht über Inhalte ausgewählter Schulbücher über die Einführung der Grundbegriffe *senkrecht*, *parallel* und *Abstand.* 211

Tab. 28 Übersicht über Inhalte ausgewählter Schulbücher bei der Einführung des Symmetriebegriffs. 228

Tab. 29 Tabellarische Übersicht der Schulbuchanalyse zu den ebenen Figuren.......248

Tab. 30 Leertabelle zur Dokumentation der ersten, freien Gruppierung verschiedener Vierecke.......253

Tab. 31 Tabelle zur Dokumentation der Merkmal-geleiteten Gruppierung verschiedener Vierecke.......255

Tab. 32 Tabelle zur reduzierenden Gruppierung verschiedener Vierecke. 256

Tab. 33 Formulierungsbeispiele eindeutiger Definitionen verschiedener Vierecke. 258

Tab. 34 Übersicht über Inhalte ausgewählter Schulbücher bei der Einführung des Flächeninhaltsbegriffs und der Flächeninhaltsbestimmung/-berechnung. 274

Tab. 35 Tabelle zum indirekten Flächeninhaltsvergleich mit Hilfe eines ungenormten Repräsentanten.......279

Tab. 36 Tabelle zur Herleitung der Flächeninhaltsformel für Rechtecke auf Basis der verwendeten Einheitsquadrate. 284

Tab. 37 Übersicht der in der Orientierungsstufe in den Schulbüchern vorgesehenen Flächeninhalts- und Volumenberechnung.......292

2017, Universität Wuppertal