Daniela Stiller

Problemlösen, Heuristik und Geometrie: Zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe

Problemlösen, Heuristik und Geometrie: Zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe

Inauguraldissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Erziehungswissenschaften (Dr. paed.)

an der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Daniela Martina Rodica Ursula Stiller

Wuppertal, im Mai 2017

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20180108-140804-7
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%
3A468-20180108-140804-7]

"Mathematics, you see, is not a spectator sport. To understand mathematics means to be able to do mathematics. And what does it mean [to be] doing mathematics? In the first place, it means to be able to solve mathematical problems."

G. Pólya

„Da ***konkretes Denken*** *sich auf Handlungen bezieht, die den Zweck verfolgen, Schwierigkeiten in praktischen Angelegenheiten erfolgreich zu begegnen, so bedeutet ‚mit dem Konkreten beginnen' das* ***Tun*** *in den Vordergrund stellen und jene Beschäftigungen besonders zu pflegen, die nicht-mechanisch und nicht-routinemäßig ausgeführt werden, die daher ein intelligentes Auswählen und große Anpassung an Mittel und Material verlangen."*

J. Dewey

Einführung in Band B

Von Gestern nach Übermorgen soll keineswegs das Heute ins Abseits stellen. Der Blick zurück jedoch kann entscheidende Impulse für die Zukunft liefern. Um hierfür eine ausreichende Grundlage zu schaffen, ist es jedoch erforderlich, die didaktische und mathematik-historische Sachlage genauer zu erkunden, was im ersten Teil der Arbeit geschehen soll.

Der Gedanke, das Problem in den Mittelpunkt zu stellen, ist keineswegs ein neuer, sondern findet sich unter der Bezeichnung „entdeckenlassendes Lernen“ oder „problem-orientiertes Lernen“ seit Jahrzehnten in der mathematikdidaktischen Diskussion wieder und fokussiert dabei auf jeweils verschiedene *Phasen* des Problemlöseprozesses. Ein sehr viel grundlegender an eben diesem Problemlöse*prozess* interessierter und orientierter Mathematikunterricht – selbstverständlich in steter Auseinandersetzung mit mathematischen Fachinhalten – stellt angesichts der in Band A dargestellten Ergebnisse den nächsten logischen Schritt in der Entwicklung des Mathematikunterrichts dar[1]; ein solcher Perspektivwechsel würde neben der Orientierung am Problem auch die selbstverständliche Integration der *Metaebene* des Problemlösens, also der **Heuristik**, bedingen, um nachhaltige Lernzuwächse und den bewusst reflektierten Umgang mit Problemen zu erzielen.

Anders als in Band A soll der Begrenzungsfaktor Schulrealität hier auf den Prüfstand kommen – nicht in dem Sinne, dass seine Anforderungen an den Mathematikunterricht in Frage gestellt werden. Ganz im Gegenteil: Die Frage soll sein, ob zur Erreichung der in den aktuellen Lehrplanschriften formulierten Anforderungen nicht grundsätzlich ein Umdenken stattfinden muss, das das strukturelle Korsett des real existierenden Fachunterrichts im Fünfundvierzig- oder Neunzig-Minuten-Takt sprengt. Auch dieser Gedanke wird in verschiedenen Didaktiken und Unterrichtstheorien seit über einhundert Jahren immer wieder aufgegriffen und entwickelt: **Fächerverbindender und fächerübergreifender Unterricht** sind Schlagworte, die regelmäßig in der bildungspolitischen Diskussion in Erscheinung treten, und an deutschen Regelschulen doch meist ihren Ausdruck nur in so genannten „Projektwochen“ finden, oder gelegentlich vor allem dann realisiert werden, wenn ein Lehrer seine eigenen Unterrichtsfächer für eine Lerngruppe koppelt.

Freudenthal hat mit seinem Programm *Realistic Mathematics Education* gleichfalls die Rückkehr der Mathematik zu ihren Wurzeln gefordert, nämlich zu Fragestellungen der

[1] Im deutschsprachigen Raum repräsentieren die Arbeiten von Bruder und Collet derzeit maßgeblich diese Entwicklung.

realen Welt, wie sie Schüler umgibt. In den Niederlanden wird dieser Ansatz nach wie vor produktiv in der Bildungsforschung verfolgt. Auch sein Prinzip der *Guided Reinvention* wird betrachtet und diskutiert.

Das *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education*-Konzept (kurz: CHIME), das am Ende dieses Bandes steht, strebt exemplarisch die Vereinigung dieser verschiedenen Ansprüche an einen Mathematikunterricht der Zukunft am Beispiel der Geometrie an: ein Strukturmodell für einen Mathematikunterricht, der seine Lernanlässe nicht künstlich erzeugt – also in den Augen der Lerner Probleme nicht erst selbst schafft – sondern sich der **Herausbildung der Problemlösefähigkeit in einem transcurricularen Unterricht** verschreibt. Es wird die Position eingenommen, dass es grundsätzlich möglich wäre, auch die anderen mathematischen Fachinhalte in Auseinandersetzung mit echten Problemen eingebettet in schulische Sachfächer zu unterrichten. Auch ermöglicht die Orientierung am Problemlöseprozess die Vermittlung der anderen prozessorientierten Kompetenzen, wie sie in den deutschen Bildungsstandards festgeschrieben sind, wie in Band A (Krichel 2017: Kap. 6.1) bezüglich Interdependenz und Hierarchie der prozessbezogenen Kompetenzen dargelegt.

ii Der vorliegende Band B wirft das Netz in drei Dimensionen weiter aus, als dies in Band A geschehen ist:

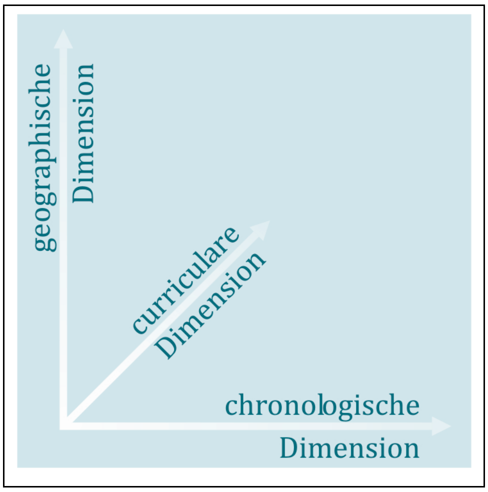


Abb. 1 Dimensionen der in Vergleich zu Band A erweiterten Betrachtung.

Chronologisch wird Begründungszusammenhängen nachgegangen, die weit vor den Beginn des 21. Jahrhunderts zurückreichen, um den dialogischen bzw. dialektischen Zusammenhang zwischen Problemlöseverhalten/-prozessen und der Entstehung der Mathematik – besonders aber der Geometrie – nachzuverfolgen und so mit Toeplitz und anderen Fürsprechern eines genetischen Lernansatzes die Bedeutung der Problemlösefähigkeit für die Beschäftigung mit Mathematik (sowohl didaktisch als auch mathematisch) zu begründen. *Geographisch* wird den Ursprüngen der aktuellen Anforderungsformulierungen aus PISA in Richtung der Vereinigten Staaten nachgegangen, wo das NCTM[2] seit den 1980er Jahren einen bildungspolitischen Prozess in Gang gesetzt hat, der sich nun vermittels der Bildungsstandards in

[2] National Council of Teachers of Mathematics

deutschen Lehrplänen wiederfindet und, wie Band A zeigte, wenig überraschend als Fremdkörper erscheint. Gleichfalls geographisch richtet sich der Blick aber auch auf weit entfernt von Deutschland praktizierte Unterrichtskulturen, die sich von der deutschen Unterrichtskultur maßgeblich unterscheiden und deren „modale Unterrichtsskripte" deutlich andere Problemlösefähigkeiten zeitigen. *Curricular* öffnet sich Band B hin zu einer Fächergrenzen auflösenden Betrachtung heuristischer Themenfelder, die sich zum ganzheitlichen Erwerb von Problemlösefähigkeiten vermittels der *Geometrie* eignen. Eine transcurriculare, durch die mathematische Betrachtungsweise getragene, systematische Integration des Heuristikerwerbs in den Sachfachunterricht stellt das Ziel der abschließenden Konzeptentwicklung dar.

In Teil I des vorliegenden Bandes wird das terminologisch-didaktische Fundament des Unterrichtskonzepts gelegt. Nachdem in Kapitel 1 zunächst Grundbegriffe definiert und expliziert, teilweise auch mit Beispielen illustriert werden folgt in Kapitel 2 eine historische Einführung zu Alternativen zum heute in der deutschen Schulrealität dominanten Fachunterricht; Kapitel 3 untersucht dann die Bedeutung, die dem Problemlösen für die allgemeine Bildung und besonders im Mathematik*unterricht* im Lauf der Zeit beigemessen wurde. Damit werden zwei Kerncharakteristika des CHIME-Konzepts – nicht-fachgebundener Unterricht und die Betonung/Zentralstellung der heuristischen Kompetenzen – historisch eingeordnet und evolutiv begründet.

In Teil II wird innermathematisch der engen Verbindung von Geometrie und Problemlösestrategien nachgegangen, was die Begründung dafür darstellt, Heuristik bevorzugt an geometrischen Problemstellungen zu entwickeln – das dritte Kernmerkmal des CHIME-Konzepts.

Nach dieser doppelten Grundlegung, didaktisch-methodisch in Teil I und fachinhaltlich in Teil II, wird in Teil III das Konzept der *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education* selbst entworfen. Einerseits als Strukturmodell, das die Elemente des Konzepts allgemein vorstellt, und andererseits konkret ausgearbeitet für zwei Module (synchron) und eine Sequenz (diachron). Abschließend folgt ein kritischer Kommentar und Ausblick auf weitere Entwicklungsmöglichkeiten des vorgestellten Unterrichtskonzepts.

Band B – Gestern und Übermorgen

Inhaltsverzeichnis

Teil I – Didaktisch-methodische Fundamentierung: Begrifflichkeiten und Entwicklungslinien

Zunächst werden in diesem Teil in drei Kapiteln die terminologischen und didaktisch-methodischen Grundlagen für das zu entwickelnde Unterrichtskonzept erforscht und erörtert. Auch unter Rückbezug auf Band A[3] steht dabei die Rolle, die dem Problemlösen in den Didaktiken der Vergangenheit und Gegenwart zugewiesen wurde, im Mittelpunkt des Interesses, um ein tragfähiges ebenso historisch wie aktuell begründetes Fundament zu erhalten. In Erweiterung zu den Ausführungen und Überlegungen in Band A soll außerdem gezeigt werden, dass aus didaktischer Sicht die Juxtaposition des Problemlösens neben andere prozessbezogene Kompetenzen in den deutschen Lehrplänen bzw. den zugrundeliegenden Bildungsstandards irreführend ist: Die Fähigkeit, Probleme zu lösen kann als vornehmstes Ziel eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts gelten.

1 Begriffe und Konzepte

Zur Sicherung des terminologischen Fundaments werden im ersten Kapitel einige sehr grundlegende Begriffe definiert oder erklärt und, wo dies sinnvoll erscheint, mit Beispielen konkretisiert. Viele von ihnen finden im weiteren Verlauf der Arbeit ohne zusätzliche Erläuterungen Verwendung, einige werden jedoch an späterer Stelle noch in ihrer historischen Entwicklung oder ausführlicher in ihren gegenwärtigen Ausprägungen beleuchtet, wenn sich daraus Erkenntnisse für das Unterrichtskonzept CHIME ergeben. Es wird an entsprechender Stelle auf weiterführende Literatur bzw. auf spätere Kapitel der Arbeit verwiesen.

1.1 Aus Didaktik und Lehr-Lerntheorie

1.1.1 Didaktik

Didaktik bezeichnet die Theorie des Lehrens, also der Vermittlung von Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Didaktik als Wissenschaft basiert auf zwei Konzepten: Wissensgefälle zwischen den Akteuren (bei denen es sich auch um Gruppen handeln kann) und der Möglichkeit, dieses Gefälle planmäßig abzubauen. Didaktik setzt außerdem das Vorhandensein und die – nicht zwingend direkte – Interaktion beider Akteure voraus. Der Einfachheit halber, und da

[3] Krichel 2017

beide Begriffe etabliert und intuitiv sind, werden sie in dieser Arbeit als „Lerner“ und „Lehrender“ bezeichnet. Diese neutrale Begriffswahl, die eine Ableitung aus dem Wort und dem Bedeutungsumfeld „Schule“ meidet, ist eine bewusste, da es sich nicht um eine auf den schulischen Kontext eingeschränkte Definition handeln soll, die außerdem zahllose zusätzliche Assoziationen enthält, die nichts mit dem eigentlichen Lehr-Lern-Akt zu tun haben.

Didaktik ist insbesondere durch die Notwendigkeit gekennzeichnet, diejenigen Elemente eines Wissensgebietes zu selektieren, die gelehrt werden.

Im Hinblick auf schulische mathematische Bildung und Didaktik stellt sich bei der schier unüberschaubaren Vielfalt mathematischer Teilgebiete ebenfalls die Frage der Auswahl. Leuders (2003: 16 f.) nennt folgende Ansätze, die diesbezüglich verfolgt wurden und werden:

- Orientierung am historischen Prozess bzw. an historischen Kernideen
- Integration aktuell wichtiger Forschungsgebiete der Mathematik
- Traditionalistische Auswahl des schulischen Lehrstoffes
- Fokus auf die formale Bildung, die durch Mathematik grundsätzlich möglich ist
- Auswahl anhand der abstrakten Strukturen, wie in der „Neuen Mathematik“
- Ausrichtung an zentralen/fundamentalen Ideen der Mathematik[4]
- Ausrichtung am Lerner durch Auswahl mathematischer Inhalte innerhalb von Themenfeldern und Kontexten[5]

1.1.2 Mathetik

Mathetik bezeichnet die Theorie des Lernens. Der Begriff fokussiert auf die aktive, konstruktive Rolle des Lerners und bildet das logische Komplement zum Didaktik-Begriff.

Comenius entwickelte den Mathetik-Begriff gemeinsam mit dem der Didaktik; er stellt damit die Befähigung zum Lernen und Selbstorganisation der Lerner auf eine Stufe mit der Lehre. Der Begriff wurde durch Hartmut von Hentig in den 1980er Jahren wieder in die Bildungsforschung eingebracht, der prägnant formulierte: „Mathetik ist eine notwendige Korrektur des gedankenlos verabsolutierten Prinzips der Didaktik: dass Lernen auf Belehrung geschähe.“ Aktuell ist der Begriff selten anzutreffen, auch weil viele mit ihm

[4] Diese Art und Weise der Stoffauswahl deckt sich natürlich zu nicht unbedeutenden Teilen mit der Orientierung an historischen Kernideen.
[5] Leuders weist zu recht darauf hin, dass dieser Ansatz in den Naturwissenschaften zunehmend praktiziert wird, in der Mathematik jedoch wenig Beachtung findet.

verknüpfte Ideen im Milieu konstruktivistisch geprägter, auch neurowissenschaftlicher, „Lerntheorien“ aufgegangen sind.[6]

1.1.3 Lehrender

Lehrender ist, wer in einer gewissen, umgrenzten Lehr-Lern-Situation einen Wissensvorsprung besitzt und diesen verringern möchte, indem er das Wissensniveau des Lerners seinem eigenen anzugleichen sucht. Der Lehrende existiert nur in Relation zum Lerner, also als dessen Komplement.

In dieser allgemeinen Form spielen weder äußere noch zeitliche Umstände oder die Dauer des Lehrender-Lerner-Verhältnisses eine Rolle. Dauerhaftigkeit und Stabilität der Rolleneinnahme hängen von verschiedenen Faktoren ab, besonders Alters- oder Erfahrungsgefällen und den gesellschaftlichen bzw. notwendigkeitsgeleiteten Umständen.

> Das Lehr-Lernverhältnis im schulischen Umfeld gehört sicherlich zu den stabilsten und dauerhaftesten Manifestationen, da ein sehr klares Wissens- und Erfahrungsgefälle zwischen Lehrendem und Lerner vorliegt, das meist auch mit einem Altersgefälle korrespondiert. Dieses Gefälle ist, mit Ausnahme bestimmter Teilbereiche, die in aller Regel nicht als zum Bildungsauftrag der Schule gehörig betrachtet werden[7], beträchtlich und ganz bewusst im Bildungssystem verankert, da es an weiterführenden Schulen in aller Regel das Ziel ist, die Rolle für sechs, acht bzw. neun Jahre fest zu etablieren.
>
> Eine hingegen recht kurzlebige Rolleneinnahme kann sich ergeben, wenn äußere Zwänge ganz spezifische Kenntnisse oder Fertigkeiten erforderlich machen. So könnte es auf einem Campingausflug darauf ankommen, die Zelte sinnvoll aufzustellen. Altersunabhängig zählt hier nur die Erfahrung mit dieser Art von Situation, die es dem Erfahrenen erlaubt, die Neucamper die wichtigsten Kriterien für eine gute Platzwahl zu lehren.

Eher sachbezogen komplementäre Wissens- und Fertigkeitsstrukturen können hingegen zu rasch wechselnden bis hin zu quasi-simultan eingenommenen Rollen führen.

> Zwei Personen, die in Erfahrung und Wissen als gleichrangig angesehen werden können, etwa zwei gleich alte Professoren für Geschichte bzw. Mathematik, könnten sich leicht vorstellbar in eine

[6] Und zwar in einem bemerkenswerten Maße. Im aktuellen Beltz Lexikon Pädagogik (TENORTH/TIPPELT 2007) fehlt der Begriff.

[7] Es gibt selbstverständlich Felder außerhalb der spezifischen Fachkompetenzen, in denen Lerner in der Schule den Lehrenden überlegen sind; besonders deutlich wird dies oft im Umgang mit modernen Kommunikations- und Unterhaltungsmedien. Selbst Neue Medien für den Unterricht werden oft von Lernern mit größerer Selbstverständlichkeit beherrscht als von den Lehrenden.

> Lehr-Lernsituation begeben, in der die Rollen – je nach genauem Inhaltsbereich – praktisch permanent wechseln bzw. simultan eingenommen würden. Besonders leicht vorstellbar wäre dieses Szenario bei einem mathematikhistorischen Thema, zu dem beide Seiten (der Mathematiker und der Historiker) ganz spezifisches Wissen ihrer Disziplin beitragen könnten.

Solche Konstellationen machen aus verschiedenen, sozio-kulturellen Gegebenheiten sicherlich den geringeren Teil der alltäglich stattfindenden Lehr-Lernsituationen aus.

1.1.4 Lerner

Der Begriff des *Lerners* geht über die reine Feststellung eines „fehlenden Wissens“ hinaus, da ein aktiver Aspekt in der Bezeichnung bereits vorausgesetzt ist. Der Lerner *lernt*. Er ist derjenige, der seine Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten vermehrt. Dabei setzt der Begriff nicht die Existenz eines Komplements (Lehrer) voraus; ein Lerner kann autark operieren, d.h. ist von anderen Personen weitgehend unabhängig – heutzutage auch durch mediale Lernumgebungen.

1.1.5 Deklaratives Wissen

Im Englischen als *knowledge about* bezeichnet, umfasst der Begriff Kenntnisse über bestimmte Inhalte, die sich oft in Form von einfachen, wahren Aussagen festhalten lassen. Deklaratives Wissen ist in gewisser Weise unabhängig von dem Wissenden bzw. erfordert keine aktive Auseinandersetzung, ja im Grunde oft nicht einmal die geistige Durchdringung oder die eigene Einsicht.

> Beispiele für deklaratives Wissen sind mathematische Sätze wie etwa der Satz des Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.
>
> In den Geschichts- oder Sozialwissenschaften spielt ein umfangreiches deklaratives Wissen eine große Rolle, da nur über detaillierte Kenntnisse einer großen, rein faktischen Datenmenge (historische Persönlichkeiten, Ereignisse, genaue zeitliche Abläufe usw.) ein tiefergehender wissenschaftlicher Diskurs möglich ist.

Dieses Wissen kann in mehr oder wenig verstandener Form von Lernern reproduziert und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt werden (vgl. Algorithmus, Kap. 1.1.9). Deklaratives Wissen ist aber auch Grundlage für eine transferierende Anwendung oder produktive Weiterentwicklung (vgl. Problemlösen/Heurismus, Kap. 1.1.10).

1.1.6 Prozedurales Wissen

Im Englischen als *knowledge of* bezeichnet, umschreibt prozedurales Wissen Kenntnisse zum aktiven Umgang mit deklarativem Wissen, oder Kenntnisse, die sich mit dem deutschen Wort *Fertigkeiten* beschreiben lassen. Damit wird einerseits der Handlungsaspekt betont, zugleich aber auch die Tatsache, dass deklaratives Wissen allein nicht (immer) auch die Fähigkeit zu dessen Verwendung einschließt.

Ein Beispiel für prozedurales Wissen im Sinne eines kreativen, transferierenden Umgangs mit deklarativen Wissen ist die Fähigkeit zum Problemlösen.

Beim Lösen (echter) Probleme ist deklaratives Wissen nie ausreichend; der Problemlöser muss stets unbekannte Operationen durchführen, neue Denkmuster entwickeln. Ohne ein Fundament deklarativen Wissens ist dies nicht möglich, aber nur prozedurales Wissen bezüglich problemlösender Handlungsweisen (Heurismen, Kap. 1.1.10) ist letztlich zielführend.

Beispiele für prozedurales Wissen im Sinne einer *Fertigkeit* ist das Wissen, wie das Gaußverfahren praktisch durchgeführt werden muss, um die gesuchten Ergebnissen zu erhalten, oder die Anwendung des Satzes des Pythagoras, bei der die korrekte Identifizierung bekannter Seiten und gegebenenfalls einfache Gleichungsumformungen zu leisten sind.

Obwohl es sich bei beiden Verfahren selbst um Algorithmen (s. Kap. 1.1.9) handelt, gibt es verschiedene, mehr oder weniger effiziente Möglichkeiten, das Verfahren durchzuführen. Fehlerquelle ist meist nicht mangelndes deklaratives Wissen, sondern Unkenntnis über die mit ihm verknüpften prozeduralen Aspekte.

Nur der praktische Umgang kann prozedurales Wissen effektiv herausbilden.

1.1.7 Aufgabe

Eine Aufgabe ist eine, unter Umständen implizite oder auch nur subjektiv empfundene, Handlungsaufforderung, die zu erfüllen der Aufgeforderte in der Lage ist, oder ein unerwünschter innerer oder äußerer Zustand eines Individuums, den es in einen wünschenswerten Zustand überführen kann. Das heißt, dass ihm die kognitiven und/oder auch materiellen Mittel zur Verfügung stehen, um den geforderten oder gewünschten Zielzustand zu erreichen.

Die Transformation zwischen den Zuständen kann dabei mehr oder weniger Komplex sein und durchaus auch eine Vielzahl einzelner Handlungsschritte erfordern, was in Abb. 2 durch den unterbrochenen Pfeil angedeutet sei.

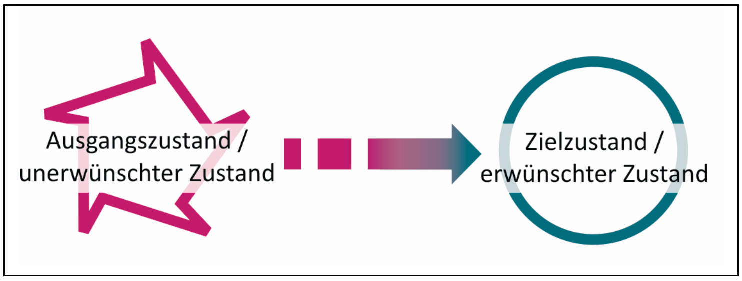


Abb. 2 Schematische Darstellung einer Aufgabe.

1.1.8 Problem

Ein Problem ist eine, unter Umständen implizite oder auch nur subjektiv empfundene, Handlungsaufforderung, die zu erfüllen der Aufgeforderte nicht in der Lage ist, oder ein unerwünschter innerer oder äußerer Zustand eines Individuums, den es nicht in einen wünschenswerten Zustand überführen kann.[8] Das heißt, dass ihm die kognitiven oder auch materiellen Mittel fehlen, um den geforderten oder erwünschten Endzustand zu erreichen. Es besteht eine Barriere zwischen dem Ausgangszustand und dem Zielzustand.

Probleme sind keinem Lebensbereich, spezifischen Wissensgebiet oder wissenschaftlicher Richtung zuzuordnen. Sie treten überall auf und sind – in ihrer kognitiven Ausprägung – nur subjektiv definierbar, da kognitive Barrieren nicht unabhängig vom von der Handlungsaufforderung betroffenen Subjekt existieren.[9]

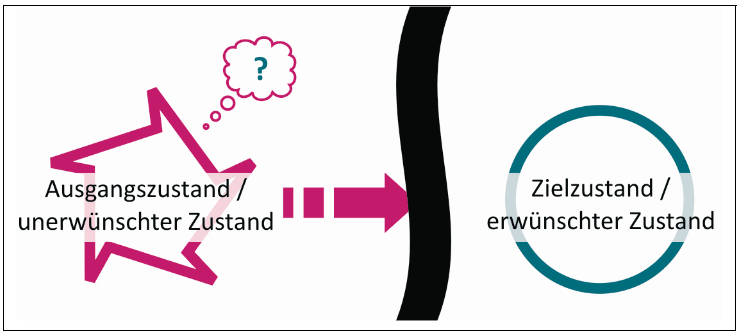


Abb. 3 Schematische Darstellung einer Problemsituation.

[8] Vgl. hierzu auch die Problemdefinition nach Dörner 1979: 10.
[9] Eine kurze Begriffsherleitung und einige andere gängige Definitionen s. Band A (Krichel 2017, Kap. 2).

Abb. 3 veranschaulicht neben den definitorischen Aspekten noch einen weiteren, der nicht selten eine Rolle spielt: Die Barriere zwischen Ausgangs- und Zielzustand kann so hoch sein, dass sie den „Blick" auf das Ziel verstellt und dem Individuum daher der Zielzustand gar nicht bewusst ist, was hier durch das gedachte Fragezeichen angedeutet wird.

In der Allgemeinen Psychologie werden Problemsituationen nach folgenden Kriterien kategorisiert[10]:

- Anzahl der Elemente (einfache vs. komplexe Probleme) – Komplexität
- Anzahl und Dichte der Verknüpfung zwischen den Elementen (gering vs. hoch vernetzte Probleme) – Vernetztheit
- Anzahl der Ziele (Probleme mit einem und Probleme mit mehreren evtl. konfligierenden Zielen) – Polytelie
- Bekanntheit der Verknüpfungen und der Wirkungsbeziehungen (transparente vs. intransparente Probleme) – Transparenz
- Ausmaß der Eingriffsabhängigkeit des Systems (statische vs. dynamische Probleme) – Dynamik

Bezogen auf das Lösen der Probleme lassen sich die Situationen äußerlich nach folgenden Merkmalen unterscheiden:

- Systemrepräsentation (graphisch, numerisch, sprachlich)
- Anzahl der beteiligten Personen (individuelles vs. kollektives Problemlösen)
- Anwesenheit eines Unterstützers
- Verfügbare Zeit (Probleme ohne vs. mit Zeitdruck)

Neben diese Aspekte treten dann noch Personenmerkmale, die Einfluss auf die Schwierigkeit eines Problems haben, so dass sich die Gesamtschwierigkeit wie in Abb. 4 veranschaulichen lässt.

[10] Die folgenden Ideen aus der psychologischen Problemlöseforschung sind angelehnt an Frensch/Funke 1995. Die Liste erhebt keinesfalls Anspruch auf Vollständigkeit, sondern greift die im Unterrichtskontext und für die Konzeptentwicklung relevantesten Aspekte heraus.

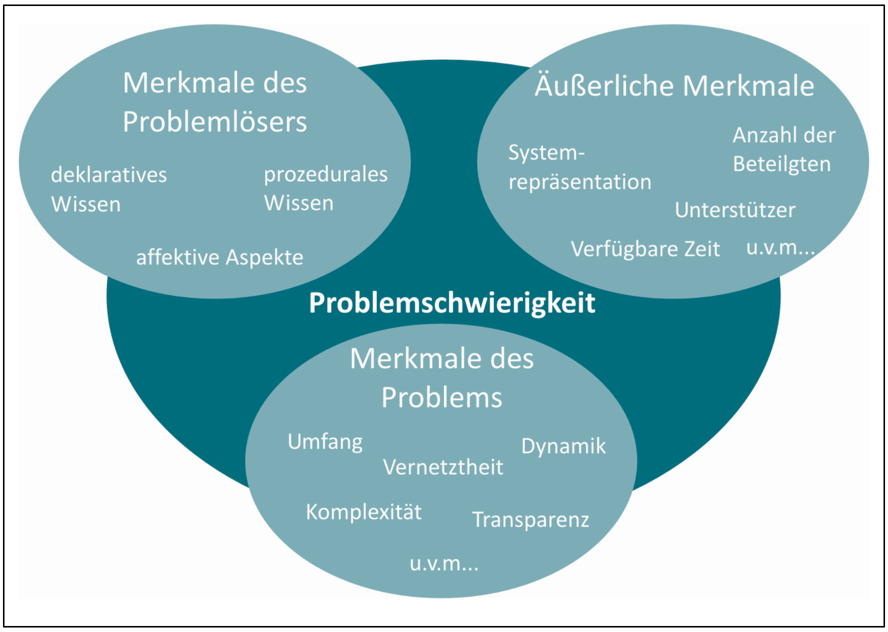


Abb. 4 Einflussgrößen bei der Problemschwierigkeit.[11]

1.1.9 Algorithmus

> Ein Algorithmus ist eine Handlungsvorschrift, die bei einem Set definierter Umgebungs- bzw. Problemvariablen zu einer Lösung führt.

Ein Algorithmus kann sehr einfach strukturiert und einschrittig oder auch sehr komplex sein. Entscheidend ist, dass nach erfolgreicher Analyse des vorliegenden Ausgangszustandes ein bereits bekannter Weg zur Erreichung des Zielzustandes lediglich ausgewählt und korrekt ausgeführt werden muss. Sowohl deklaratives wie auch prozedurales Wissen ist hierzu in aller Regel notwendig, aber auch ausreichend.

Ein Beispiel für einen Algorithmus ist das Lösen quadratischer Gleichungen durch die so genannte p-q-Formel. Erkennt der zur Lösung der Gleichung Aufgeforderte die Natur der vorliegenden Gleichung und besitzt er bereits Kenntnis der Formel (beides benötigt bestimmte Elemente in seinem deklarativen Wissensschatz), kann er durch Einsetzen der Koeffizienten und Berechnen (beides erfordert prozedurales Wissen zum praktischen Umgang mit dem Algorithmus) die Lösung(en) der quadratischen Gleichung ermitteln. Damit ist nicht gesagt, dass ein Verständnis der Bedeutung der Lösung(en) ebenfalls vorliegt, oder dass der Anwender des Algorithmus den Aussagewert seines Ergebnisses interpretieren kann.

[11] Die Darstellung vereint Hussy (1984) mit Frensch/Funke (1995, Kap. 1) und ergänzt sie.

1.1.10 Heurismus

Der Begriff Heurismus bezeichnet ein wiederkehrendes spezifisches, planmäßiges Vorgehen zum Auffinden eines Weges zur Lösung eines Problems und wird oft mit dem Ausdruck Problemlösestrategie synonym verwendet.

Innerhalb der (bei Pólya vier) verschiedenen Abschnitte des Problemlöseprozesses („Phasen“) kommt – bei aller Variabilität – eine große Anzahl wiederkehrender, abstrakter Handlungsroutinen zum Einsatz, die von den verschiedenen Forschern des Problemlösens unterschiedlich kategorisiert, klassifiziert und hierarchisiert werden. Gängige Klassifikationen und Bezeichnungen sowie eigene Arbeitsdefinitionen folgen in Kapitel 5.5 und 5.6.

1.2 Aus Schule und Unterricht

1.2.1 (Allgemein-)Bildung

Der Begriff der Bildung ist ein fast ausschließlich deutscher[12] und sowohl in der aktuellen Bildungsdebatte als auch wissenschaftlich (philosophisch und erziehungswissenschaftlich) hoch problematischer Begriff. Er ist für „die spezifische Tradition des wissenschaftlichen und öffentlichen Denkens über Erziehung in Deutschland in besonderer Weise“ (Tenorth/Tippelt 2007: 92) charakteristisch. Mit Blick auf die vorliegende Arbeit genügt es, daran zu erinnern, dass der Bildungsbegriff ein theoretisches Konstrukt ist, und dass „Bildungsdebatten in der Pädagogik stark normativ bestimmt und dann, affirmativ oder kritisch, primär in der Konstruktion von Idealen des Menschen oder in Entwürfen als legitim geltender Welten engagiert“ sind (ibid.). Der Begriff Bildung verweist dabei sowohl auf die Prozesse, das Produkt, die Ziele und Normen, auf die Theorie und die Analyse von (im gesellschaftlichen Diskurs legitimierter) Erziehung, sowohl im Bildungssystem als auch in Gestalt nicht-institutionalisierten und nicht-geplanten Lernens.[13] Bedeutsam ist vor allem jedoch die normative und legitimierende Funktion bzw. Instrumentalisierung des Bildungsbegriffs, der zur Begründung und Ausgestaltung von bildungspolitischen Vorgaben und zur inkludierenden oder exkludierenden Festschreibung von „Bildungsgruppen“ benutzt wird.[14]

[12] Wobei Tenorth darauf verweist, dass der Begriff auch in der russischen Sprache praktisch äquivalent existiert.
[13] Eine knappe Zusammestellung der wichtigsten Aspekte und historischen Entwicklung des Bildungsbegriff findet sich im Beltz Lexikon Pädagogik (Tenorth/Tippelt 2007).
[14] Der Begriff wird in Kap. 2 unter historischer Perspektive auf mathematische Bildung in seiner Problematik erneut aufgegriffen.

Der scheinbare Grundbegriff Bildung ist heute in zahllosen unterschiedlichen Varianten Grundlage für zahllose erziehungswissenschaftlichen Konzeptionen und Didaktiken und dort jeweils völlig unterschiedlich definiert. Als Konzept (wenn auch nicht als begrifflich eigenständige Kategorie) ist der Bildungsbegriff global fassbar und so liegt seine aktuell größte Bedeutung wohl darin, dass er die vergleichende Untersuchung von Fähigkeiten und Fertigkeiten zu einer Aussage über die Bildungswirksamkeit von verschiedenen Systemen (z.B. PISA-Studien) ermöglicht.[15]

1.2.2 Unterricht

Unterricht ist eine „didaktisch geplante und deshalb sowohl thematisch abgrenzbare wie auch zeitlich hinreichend umfassende Sequenz des Lehrens und Lernens im Kontext pädagogischer Institutionen."[16]

Damit schließt das Wort Unterricht auch jegliche dieser Definition genügenden Lehr-Lern-Situationen außerhalb der Schule ein, wenngleich diese sicherlich die am häufigsten auftretende und am weitesten verbreitete Realisationsform darstellt. Die an Allgemeinbildenden Schulen dominierende Form von Unterricht wird von einem Lehrenden, in diesem Kontext *Lehrer* genannt, als Lernangebot an eine Gruppe von bis zu dreißig Lernern, genannt *Schüler*, gerichtet.[17]

1.2.3 Sozialformen

Der Begriff *Sozialform* bezeichnet verschiedene Arten und Grade – oftmals extrinsisch induzierter und durch klare Regeln strukturierter – sozialer Interaktion; der Begriff findet besonders auch bei der Beschreibung von Unterrichtsprozessen Verwendung.

Im Unterricht wird mit verschiedenen Sozialformen operiert, die sich recht einfach und eindeutig nach der Art der Interaktion zwischen den Schülern bzw. zwischen Schülern und Lehrern einteilen lassen:

- Einzelarbeit
- Partnerarbeit
- Gruppenarbeit, wobei Gruppengrößen von drei bis etwa sechs Lernern dominieren
- Plenumsunterricht

[15] Vgl. Tenorth/Tippelt 2007: 94 f.
[16] Vgl. Arnold/Bach 2011: 2.
[17] Vgl. Arnold 2011: 3.

Diese grundlegenden sozial-interaktiven Bausteine prägen auch verschiedene Unterrichtsmethoden und auch ganze Unterrichtskonzepte, sind mit diesen aber keineswegs gleichzusetzen, da sich oft verschiedene Sozialformen optional einsetzen lassen, die Methode also die Sozialform nicht determiniert.

1.2.4 Unterrichtsmethoden

Unter Unterrichtsmethoden werden die verschiedenen, im Unterricht eingesetzten materialen und räumlichen Arrangements, thematischen Strukturierungen und die Interaktionsformen zusammengefasst, die zur Strukturierung des Unterrichts eingesetzt werden.[18]

Oft wird auch von methodischen Groß- und Kleinformen gesprochen, die sich durch die Menge und Komplexität der enthaltenen definitorischen Elemente unterscheiden. Während Kleinformen in begrenzten Phasen des Unterrichts eingesetzt werden, um ganz bestimmte Abläufe in der einen oder anderen Weise zu gestalten, strukturieren Großformen ganze Unterrichtsstunden oder sogar längere Einheiten und beinhalten oft eine ganze Reihe von Kleinformen. Es ist wichtig zu beachten, dass nur durch Methodenkompetenz auf Seiten des Lehrers *und* der Schüler Methoden mit Erfolg eingesetzt werden können.

Beispiele für verbreitete methodische Kleinformen (auch „Mikromethoden“) sind:[19]

- Lehrervortrag
- Four Corners /Vier-Ecken-Spiel
- Partner-Check
- Lerntempoduett
- Unterrichtsgespräch
- Themenzentrierte Interaktion
- ...

Neben solchen Kleinmethoden gibt es zahllose „Kleinstmethoden“, die oft für bestimmte Fächer die Arbeit mit ganz bestimmten Medien abwechslungsreich zu strukturieren helfen.[20]

---

[18] Der Begriff selbst wurde durch Comenius in seiner „Großen Didaktik" geprägt und ist seither in der didaktischen Terminologie etabliert, vgl. Tenorth/Tippelt 2007:739.
[19] Für Erläuterungen und detaillierte Beschreibungen sei hier auf Klippert (2002), Wiechmann (2006), Esslinger-Hinz et al. (2007), Meyer (1987) verwiesen. Es gibt eine unüberschaubare Vielzahl von Publikationen zum Thema, die sich ohne Probleme über den Suchbegriff „Unterrichtsmethoden“ auffinden lassen.
[20] Einen Eindruck von der Bandbreite und Vielzahl solcher Kleinstformen gibt Gugel 2006: 76 ff., 90 ff. und 200 ff.

Beispiele für methodische Großformen sind: [21]

- Frontalunterricht
- Stationenarbeit
- Think-Pair-Share

1.2.5 Unterrichtskonzepte

Ein Unterrichtskonzept ist eine auf Basis didaktischer und allgemeinpädagogischer Gründe selektierte Auswahl an Unterrichtsmethoden, Sozialformen und medialen Unterrichtsmitteln, die flexibel, aber leitenden Grundregeln folgend, eine charakteristische Unterrichtschoereographie ergeben, und die zur Erreichung definierter Unterrichtsziele (verschiedenster Dimensionen) eingesetzt werden.

Es bildet ein didaktisch und pädagogisch begründetes Ganzes, das die Gestaltung des Unterrichts insgesamt oder eines bestimmten Schulfaches auf Basis eines didaktischen Modells so regelt, dass Lernprozesse optimiert ablaufen können.

Unterrichtskonzepte integrieren methodische Groß- und Kleinformen bis hin zur Sozialform sowie mediale Rahmenbedingungen und Mittel. Dabei unterscheiden sich Unterrichtskonzepte stark in der Detailliertheit ihrer Ausgestaltung mit Blick auf diese Dimensionen und damit in ihrem präskriptiven Charakter für die reale Unterrichtsgestaltung.

Wichtige Beispiele für Unterrichtskonzepte in diesem Sinne sind der Direkte Unterricht, das Handlungsorientierte Lernen, das Kooperative Lernen und das Problemorientierte Lernen. Unterrichtskonzepte bilden die Grundlage pädagogischer Entscheidungen, lassen jedoch stets Raum zur Ausgestaltung innerhalb des von ihnen gesetzten Rahmens.

1.2.6 Didaktische Modelle

Didaktische Modelle sind auf Vollständigkeit zielende didaktisch-pädagogische Rahmentheorien, die auf spezifischen Lehr-Lerntheorien fußen bzw. sich über diese legitimieren; sie formulieren jeweils eigene Bildungsvorstellungen und -absichten und liegen Unterrichtskonzepten zugrunde, welche solche didaktischen Modelle in die konkrete (Unterrichts-)Praxis umsetzen.

Die Unterscheidung bzw. klare Trennung zwischen didaktischen Modellen und den ihnen zuordenbaren Unterrichtskonzepten (die nicht selten auch als didaktische Konzepte

[21] Für Überblicksdarstellungen zu Unterrichtsmethoden s. WIECHMANN (Hrsg.) 2006. Einen umfangreichen und phasenorientierten Überblick über neuere methodische Kleinformen bietet auch das Methoden-Manual „Neues Lernen" (GUGEL 2006: 45 ff.), auch wenn es sich auf die Arbeit mit erwachsenen Teilnehmern bezieht.

bezeichnet werden, was zur Verwirrung beiträgt) ist nicht immer ganz einfach[22], wird aber über folgende Aufstellung einiger bedeutender didaktischer Modelle möglicherweise deutlicher:

- bildungstheoretische Didaktik (kritisch-konstruktive Didaktik)
- lerntheoretische Didaktik
- konstruktivistische Didaktik
- entwicklungslogische Didaktik
- kommunikative Didaktik[23]

Das folgende Schaubild mag die Zusammenhänge der in den Kapiteln 1.2.3, 1.2.4, 1.2.5 und 1.2.6 vorgestellten Begriffe verdeutlichen.

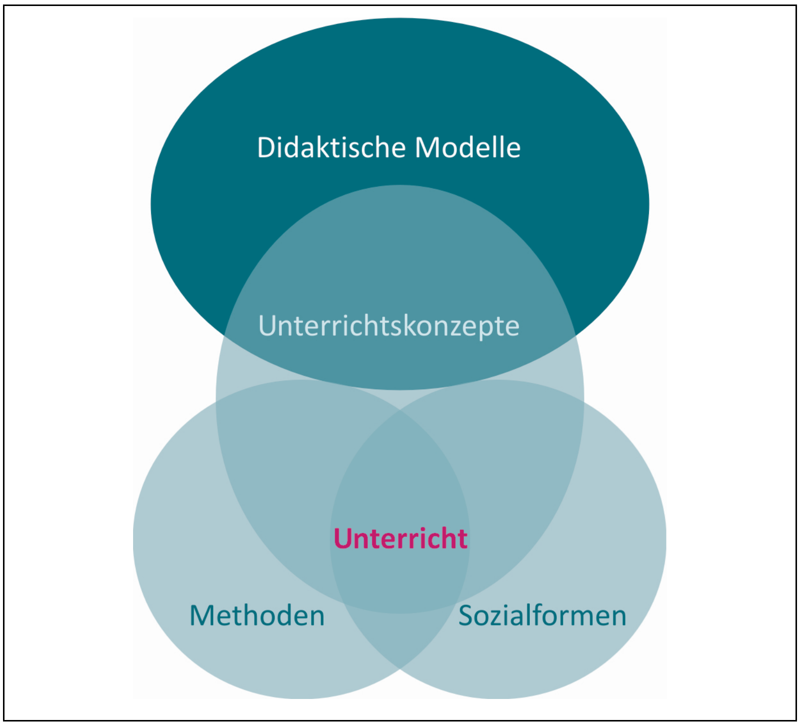


Abb. 5 Unterricht als Produkt didaktischer Modelle, Unterrichtskonzepte, Methoden und Sozialformen.

1.2.7 Didaktische Prinzipien

Es gibt eine Reihe von Gestaltungsprinzipien, die mehr oder weniger eng mit bestimmten didaktischen Modellen oder Unterrichtskonzepten verbunden sind. Hierzu gehören[24]:

---

[22] Zur Verringerung der Verwechselungsgefahr aufgrund von Wortähnlichkeiten – und der inhaltlichen Assoziativität – werden in dieser Arbeit die Begriffe „Unterrichtskonzepte“ und „Didaktische Modelle“ verwendet.
[23] Auf einige dieser Didaktiken wird in Kap. 3 im Zusammenhang mit der Bedeutung des Problemlösens in historisch-evolutiver Hinsicht näher eingegangen. Liste nach JANK/MEYER 1994.

- das Prinzip der Altersgerechtigkeit (vgl. Kap. 3.9.3)
- das Prinzip der Ganzheit
- das Prinzip der Anschaulichkeit
- das Prinzip der Vorbildwirkung
- das Prinzip der Strukturierung und Progression
- das Prinzip der Wiederholung und Variation (Spiralprinzip)
- das Prinzip der Selbsttätigkeit (vgl. Kap. 3.11.1)
- das Prinzip der Sicherheit
- das Prinzip der Systematik und Konsequenz
- das Prinzip der Aktualität
- das Prinzip der Individuation und Sozialisation

Bei der CHIME-Konzeptentwicklung (Kap. 10) wird explizit auf diese Prinzipien rekurriert werden.

1.2.8 Lernstrategien

Lernstrategien bezeichnen „kognitive und metakognitive Prozesse, die von Lernern bei dem Versuch eingesetzt werden, etwas Neues zu lernen.“[25]

Lernstrategien können in drei Gruppen unterteilt werden:

1. Auswendiglernen
2. Elaborationsstrategien: Bewusste Verknüpfung von Problemstellungen, Vorwissen und lebensweltlichen Erfahrungen. Hierzu gehören Analogiebetrachtungen und Beispiele, Brainstorming und Mindmaps sowie die Suche nach alternativen Lösungen. Verknüpft sind diese Strategien u. a. mit (echten) Problemstellungen, kreativen Lösungsansätzen, Schülerzentrierung und konstruktivistischer Sicht auf das Lernen.
3. Steuerungsstrategien: Lerner steuern ihr Lernen, indem sie sich klare Ziele setzen und ihren Fortschritt überwachen. Hierzu gehören Informationszusammenfassung, Identifizierung wichtiger Informationen, Klarifizierung, Organisation von Material, Planung der Lernzeit, die Überwachung und Evaluation des eigenen Fortschritts,

[24] Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie basiert auf WARWITZ 2009: 69 ff. Unter Berücksichtigung abweichender Bezeichnungen beinhalten die hier gesammelten elf die meisten konsensfähigen didaktischen Prinzipien der aktuellen Unterrichtsforschung. Auf eine Erläuterung der im Grunde selbsterklärenden Termini soll hier verzichtet werden, da sie im Folgenden wiederholt aufgegriffen und im Zusammenhang mit der Fragestellung der Arbeit ohnehin ausgeführt werden.
[25] Vgl. OECD 2010, zitiert nach ECHAZARRA et al. 2016: 11 f.; eigene Übersetzung.

sowie das Reflektieren dieser Strategien. Verknüpft sind diese Steuerungsstrategien mit strategischem Lernen, Zeitmanagement, Selbststeuerung und metakognitiver Bewusstheit.[26]

1.2.9 Gefächerter und ungefächerter Unterricht

Gefächerter Unterricht in Form von Fachunterricht, Fachleistungskursen, Facharbeit oder Epochalunterricht bezeichnet eine bestimmte Gliederung sowohl der Lerninhalte als auch der Lehr-Lern-Situation innerhalb der Stundentafel. Bezogen auf die Inhalte bedeutet er eine relativ fest umrissene Aufteilung des gesamten Wissensbestandes (oder desjenigen Teiles davon, der als zur schulischen Bildung gehörig betrachtet wird) einer Kultur nach Kriterien, die sich auf wissenschaftliche Disziplinen beziehen; wissenschaftliche Disziplinen sind historisch gewachsene, variable und permanent in Veränderung befindliche Gebilde, die sich durch Auswahl und Art ihrer Beschäftigung mit jeweils spezifischen Phänomenen der Umwelt oder der menschlichen Kultur definieren. Die Verknüpfung zwischen schulischen Fächern und wissenschaftlichen Disziplinen ist dabei – teils auch durch Verschiebungen und Umdeutungen im geschichtlichen Zusammenhang – eine lose. Bezogen auf die Organisationsform bedeutet Fachunterricht eine zeitliche und räumliche Aufgliederung des schulischen Lernens in meist feste und vorher zugeordnete Einheiten, in denen die Lerner sich mit bestimmten schulischen Fächern auseinandersetzen (müssen). Unterstützt wird diese Form der Organisation durch Fachlehrer, die auf bestimmte Gebiete spezialisiert sind und den Lernern in den festgelegten Fachunterrichtszeiten und –räumen zur Verfügung stehen bzw. sie ihre Fächer (inhaltlich) lehren (müssen).

Dem gegenüber steht das Extrem des ungefächerten Unterrichts in Gestalt von freiem oder gebundenem Gesamtunterricht (vgl. Kap. 2.2) und Projektunterricht. Hier werden die oben zusammengefassten Organisationsmerkmale in ihr Gegenteil verkehrt. Was Stoffauswahl und Legitimation anbetrifft stellen sich hier besondere Anforderungen, da ein eindeutiger Bezug auf einzelne wissenschaftliche Disziplinen entfällt (mehr in Kap. 2.3).

Unterschieden werden können die Dimensionen der Inhalte auf der einen Seite und die Organisationsform auf der anderen.

[26] Diese Beschreibungen folgen denen der OECD (Echazarra et al. 2016: 70 f.).

1.2.10 Nicht-fachgebundener Unterricht

Differenzierung auf der inhaltlichen Ebene

Zwischen den beiden Extrempositionen finden sich verschieden konzeptionierte Formen nicht-fachgebundenen (synonym hierzu wird von vielen Autoren der Ausdruck „fächerübergreifend“ als Oberbegriff verwendet), aber nicht ungefächerten Unterrichts; Peterßen nennt dies zusammenfassend „mittleres Organisationsprinzip von Unterricht“ (PETERßEN 2000), da sie sich auf der inhaltlichen Ebene zwischen gefächerten Unterricht und ungefächerten Unterrichts eingeordnet lassen (Abb. 6).

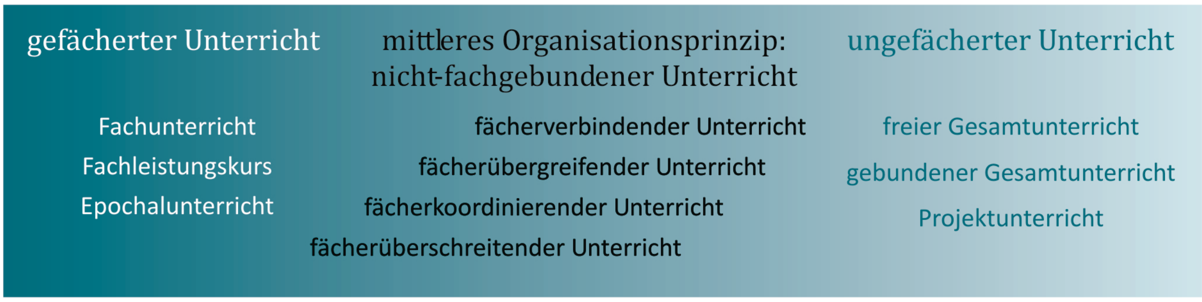


Abb. 6 Gefächerter Unterricht, ungefächerter Unterricht und das „mittlere Organisationsprinzip“ als Varianten von Unterricht auf der inhaltlichen Ebene (nach PETERßEN 2000).

Es ist darauf hinzuweisen, dass für die hier beispielhaft benannten Varianten des mittleren Organisationsprinzips sehr verschiedene Bezeichnungen verwendet wurden und werden, deren Entstehungsgeschichte, autorenabhängige Bedeutung und Bedeutungsnuancen hier nicht erörtert werden sollen; es genügt zu sagen, dass praktisch jeder Didaktiker oder Autor zum Thema eine eigene Bezeichnung vergeben hat. Dies führte zu einer schwer überschaubaren Begriffsvielfalt[27]. Zur Orientierung diene hier die Übersicht nach Labudde:

Tab. 1 Gegenüberstellung der Begriffe verschiedener Autoren

Autor	Huber (1994)	Mögling (1998)	Labudde (dieser Artikel)	Maingain et al. (2002)	BBT (2001)
Oberbegriff	*Fächerübergreifend*	*Fächerübergreifend*	*Fächerübergreifend*	*Interdiscipl. au sens large*	*Interdisziplinär*
Unterbegriffe	Fachüberschreitend	Fächerintegrierend	Fachüberschreitend	Transdisciplinaire	Intradisziplinär
	Fächerverbindend	Fächerkoordinierend	Fächerverbindend	Multi-/pluridisciplinaire	Multi-/Pluridisziplinär
	Fächerkoordinierend		Fächerkoordinierend	Interdiscipl. au sens strict	Interdisziplinär

Abb. 7 Begriffsvielfalt bei der wissenschaftlichen Untersuchung nicht-fachgebundener Unterrichtsformen auf der Ebene der Unterrichtsinhalte (LABUDDE 2014: 15).

[27] Zu nennen wären hier etwa weiterhin der fächerkoordinierende, fächerüberschreitende, interdisziplinärer, überfachlicher, fachübergreifender, mehrperspektivischer, vielseitig aspektiert Unterricht sowie Gesamtunterricht oder Syntheseunterricht (vgl. PETERßEN 2000: 11). Auch Gudjons verwendet eine eigene Benennungssystematik mit teils gleichlautenden Termini, die aber mit anderen definitorischen Merkmalen versehen sind (vgl. THOMAS 2009: 394).

Weitgehend in Anlehnung an die Terminologie nach Peterßen (2000) werden die Begriffe in dieser Arbeit wie folgt definiert verwendet[28]:

Fächerüberschreitender Unterricht[29] bezeichnet einen von einem einzelnen Fach verantworteten und ausgehenden, zeitlich und inhaltlich eng umgrenzt im Verbund mit einem anderen oder mehreren anderen Fächern stattfindenden Unterricht.

Im Englischunterricht wird die Einfache Vergangenheit eingeführt. Um Synergieeffekte mit der muttersprachlichen grammatikalischen Kompetenz nutzen zu können, werden einige Unterrichtsstunden gemeinsam mit dem Deutsch-Fachkollegen gestaltet, in denen Gemeinsamkeiten und Unterschiede der jeweiligen Zeiten-Bildungsregeln und der Zeiten-Verwendungsregeln in den beiden linguistischen Systemen erarbeitet werden.

Fächerkoordinierender Unterricht[30] bezeichnet einen von mehreren Fächern ausgehenden, zeitlich und inhaltlich eng umgrenzt aufeinander abgestimmten Unterricht.

Im Englisch- und Deutschunterricht der Jahrgangsstufe 5 werden die Besitzanzeigenden Fürwörter gelernt bzw. grammatikalisch aufgearbeitet. Die Fachkollegen legen ihre Schuljahresplanung so an, dass beide Fächer das Thema zur selben Zeit bearbeiten. So können zeitnah sinnstiftende Parallelen zwischen Mutter- und Fremdsprache aufgezeigt und unterrichtlich genutzt werden.

Fächerübergreifender Unterricht[31] bezeichnet eine Konzeption von Unterricht, der auf Inhalte verweist oder sich um Inhalte strukturiert, die in verschiedenen Fächern als zentrales Thema behandelt werden. Eine Auflösung der Fächergrenzen im eigentlichen Sinne ist hier nicht vorgesehen. Fächerübergreifender Unterricht ist additiv.

In der Sekundarstufe II soll fächerübergreifend zum Thema „Demokratie“ gearbeitet werden. Jedes der beteiligten Fächer betrachtet das Thema aus seiner spezifischen Perspektive mit den ihm eigenen Fragestellungen, Arbeitsweisen und Erkenntnispotenzialen. So könnte der Deutschunterricht Heinrich Manns „Der Untertan“ lesen, um durch Kontrastbetrachtung das Wesen einer demokratischen Grundgesinnung herauszuarbeiten; der Geschichtsunterricht fokussiert sich auf historische

[28] Die Definitionen folgen im Kern den von PETERßEN (2000) vorgetragenen, mit Ausnahme des Überfachlichen (transcurricularen) Unterrichts, den der Autor selbst definiert.
[29] Auch als intradisziplinärer Unterricht bezeichnet (LABUDDE 2014: 14)
[30] Auch als multi- oder pluridisziplinär bezeichnet (LABUDDE 2014: 14). Es ist anzumerken, dass in LABUDDE 2014 und HUBER 1994 völlig abweichend von Peterßen diese Art von Unterricht als fächerverbindend bezeichnet wird.
[31] Bei Labudde und Huber entfällt die Trennung zwischen diesem und den vorherigen, fächerkoordinierenden Unterricht. Beide gemeinsam werden als fächerverbindend (bzw. multi- oder pluridisziplinär) bezeichnet (LABUDDE 2014:14). Allerdings wechselt Labudde auch selbst seine Terminologie, wenn man seine neueren Arbeiten mit älteren vergleicht, z. B. LABUDDE 2009: 333 f.

Ursprünge der Demokratie oder auf deren Verfall in verschiedenen historischen Phasen; der Politikunterricht untersucht die ganz konkreten Mechanismen einer demokratisch organisierten Staatsform, wie etwa in der Schweiz, und kontrastiert zum eigenen System; der Englischunterricht liest politische Texte oder Reden, die ein gegebenenfalls abweichendes demokratisches Verständnis im angloamerikanischen Kulturraum erkennen lassen; der Erdkundeunterricht führt eine globale spatiale Analyse zur Verbreitung demokratischer Staatsformen durch.[32]

Fächerverbindender Unterricht[33] unterbricht die Grenzen der bestehenden Fächer zeitweise, um diese miteinander zu verschmelzen. Ziel ist eine „zeitweilige Verbindung mehrerer Fächer zu einem gemeinsam verantworteten Unterricht, der unter Beibehaltung des Fachunterrichts diesem ergänzend an die Seite gestellt wird“ (PETERßEN 2000: 15). Fächerverbindender Unterricht ist notwendig themenzentriert. Entscheidend bei der Gestaltung ist die Vermeidung „additiven Unterrichts“ und das Erreichen „integrativen Unterrichts“[34].

Peterßen stellt fächerverbindenden Unterricht am Beispiel des Themas Deichbau an der Nordsee vor. Die Fächer Geographie, Geschichte, Physik, Biologie, Deutsch, Kunst und Mathematik sind dergestalt beteiligt, dass nicht nebeneinander her gearbeitet wird, sondern in einem gemeinsam geplanten Rahmen alle diese Fächer an demselben Inhalt arbeiten. Es könnte also eine Projektwoche oder Projekttage abgehalten werden, in denen unter Beteiligung und gemeinsame Planung aller Fachkollegen ein Gesamtprodukt erarbeitet wird, das Komponenten aus allen (bzw. möglichst vielen) Fächern beinhaltet, z.B. eine Kampagne für den Bau eines neuen Deiches an einem vorgegebenen Ort. Die Lerner müssten sich mit der geographischen Situation, mit der Gefahrenanalyse, mit politischen Dimensionen wie Finanzierung und Rechtsgrundlagen, ökologischen Streifragen u. v. m. auseinandersetzen, wenn sie die gesamte Situation realitätsnah und umfassend bearbeiten wollen.

Duncker und Popp weisen darauf hin, dass gerade bei diesem mittleren Organisationsprinzip zu beachten ist, dass eine zeitliche und inhaltliche Parallelisierung allein nicht ausreicht, um von nicht-fachgebundenem Unterricht sprechen zu können. Gemeinsame Konzepte, die Wege und Ziele des Unterrichts umschreiben und festlegen, sind zwingend erforderlich.[35] Sind diese Voraussetzungen gegeben, führt echter fächerverbindender

[32] Dass Fächerübergreifender Unterricht dieser Art keineswegs von allen Fachwissenschaftlern als sinnstiftend und damit auch mittel- bis langfristig pädagogisch zielführend betrachtet wird, ist bei REKUS (1996) nachzulesen.
[33] Diese am stärksten nicht-fachgebundene Form von Unterricht heißt bei Labudde fächerkoordinierend, oder auch interdisziplinär und problemorientiert (LABUDDE 2014:14f.).
[34] PETERßEN 2000: 56 f.
[35] Vgl. DUNCKER/POPP 1998: 11.

Unterricht zu einer „Neukonstitution von Unterrichtsthemen, die erst durch die Verknüpfung fachlicher Perspektiven entstehen“, indem er „sensibel jene „Leerstellen“ aufspürt, die im Geflecht der Fächerlandschaft unbearbeitet bleiben“ (DUNCKER/POPP 1998: 11). Es ist also damit zu rechnen, dass bislang gänzlich unbekannte Themenfelder in den notwendigen Freiräumen Fuß fassen und möglicherweise dauerhaft Teil einer Schule mit nicht-fachgebundenem Unterrichtskonzept werden.

Differenzierung auf der organisatorischen Ebene

Neben den oben umrissenen inhaltlichen Gestaltungsvarianten ist in den schulischen Organisationen grundlegend zwischen einer fächerergänzenden Gestaltung und einer integrierten Umsetzung nicht-fachgebundenen Unterrichts zu unterscheiden.[36]

Fächerergänzender nicht-fachgebundener Unterricht bedeutet, dass die Stundentafel regulär Anteile enthält, die für nicht-fachgebundenen Unterricht vorgesehen sind.

Zu dieser Organisationsform gehören beispielsweise Projekte, die regelmäßig neben dem Fachunterricht stattfinden. Auch Fächer wie ein "Naturwissenschaftliches Labor", das die im regulären Fachunterricht erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten unter einer nicht-fachgebundenen Perspektive vereint, fällt in diese Kategorie.

Integrierter nicht-fachgebundener Unterricht bedeutet, dass in der Stundentafel statt einzelner Fächer ein Verbundfach ausgewiesen ist, das den nicht-fachgebundenen Unterricht (für die zusammengefassten Teilbereiche) als grundsätzliche Unterrichtsform festlegt.

Diese Organisationsform ist in vielen Gesamtschulen in Form zweier Fächer zumindest für einen Teil der Sekundarstufe I realisiert: "Naturwissenschaften", das grundsätzlich nicht fachgebunden die klassischen Unterrichtsfächer Biologie, Chemie und Physik vereint, und „Gesellschaftslehre“, in der Geschichte, Erdkunde und Politik zusammengeführt sind.

1.2.11 Transcurricularer Unterricht

Als ein zentraler Beitrag für das am Ende der Arbeit stehende Unterrichtskonzept CHIME soll der transcurriculare Unterricht an dieser Stelle definiert werden.

Transcurricularer Unterricht bezeichnet einen Unterricht, in dem klar umgrenzte, nach didaktischen Prinzipien festgelegte Bildungsinhalte *regulär* im Verbund mehrerer Fächer, also integriert, unterrichtet

[36] Vgl. LABUDDE 2014: 15.

werden.[37] Transcurricularer Unterricht ist damit auf der inhaltlichen Ebene dem mittleren Organisationsprinzip zuzuordnen, da die Inhalte bewusst und systematisch im Verbund mit nahezu allen bestehenden Schulfächern unterrichtet werden. Transcurricularer Unterricht ist auf der organisatorischen Ebene grundsätzlich integriert angelegt, kann aber um fächerergänzende Elemente erweitert werden.

Im engeren Sinne transcurricularer Unterricht ist derzeit nicht in den Lehrplänen verankert, es gibt jedoch einzelne Inhalte, die sich dieser Idee annähern (von einem systematischen Unterricht zu sprechen entspräche allerdings nicht den Tatsachen): Die aktuellen Lehrpläne legen als einen über alle Fächer hinweg zu unterrichtenden Inhalt die deutsche Sprache fest: „Deutsch in allen Fächern", so die griffige Forderung. Damit ist mehr gemeint als die reflektiertere und bewusstere Anwendung der Unterrichtssprache, die bis auf wenige Ausnahmen selbstverständlich Deutsch war und ist. Vielmehr müssen auch in Nicht-Sprachfächern sämtliche schriftlichen Überprüfungen neben der fachlichen Berichtigung und Bewertung auch sprachlich korrigiert werden.[38] Dies erfordert aber auch einen veränderten Umgang mit der Sprache und ihrem fachspezifischen Einsatz[39] im Unterricht selbst, was besonders in traditionell „argumentationsarmen" Fächern und hier vielleicht besonders in Mathematik, für einen allmählichen, aber merklichen Wandel gesorgt hat.

Einen detaillierten Entwurf eines transcurricularen (Mathematik-)Unterrichts zeichnet das Unterrichtskonzept CHIME in Kapitel 10.

1.2.12 Unterrichtliche Differenzierung

Die Differenzierung ist eines der zentralen Schlagworte der aktuellen Bildungsreform. Im unmittelbar unterrichtlichen Kontext lautet der Anspruch, individuelle Förderung durch differenzierten Unterricht[40] zu gewährleisten. Die Wege, die dabei gegangen werden, sind vielfältig und betreffen alle Schulformen und Jahrgangsstufen, wenn auch in unterschiedlichem Maße.

Klassengebundener Unterricht bezeichnet die stets gemeinsame und grundsätzlich zielgleiche angelegte Teilnahme einer für einen längeren Zeitraum zusammengestellten Gruppe von Lernern an Unterricht.

[37] Die Unterschiede sowohl zum fächerübergreifenden wie auch zum fächerverbindenen Unterricht nach Peterßen liegen einmal in der fehlenden Einschränkung auf ein oder mehrere Einzelthemen und zum anderen in der fehlenden zeitlichen Begrenzung.

[38] Auch wenn nicht wenige Lehrer, die das Fach Deutsch nicht unterrichten, sich über diese Forderung ärgern und sich teilweise sicherlich auch überfordert fühlen.

[39] Die kompetenzorientierten Lehrpläne der Schulreform mit ihren Allgemeinen oder Prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren und Kommunizieren legen diese Anforderung ganz klar fest.

[40] Vgl. hierzu sehr ausführlich und auf unterschiedlichste Unterrichtskonzepte bezogen Paradies/Linser 2001.

Klassenunterricht entsprach dem Grundgedanken der operationalisierten Lehr-Lern-Prozesse und damit korrespondierenden Unterrichtsgestaltung, die bis in die 80er und 90er Jahre als vorherrschend bezeichnet werden darf. Festgelegte Ziele sollten von allen Lernern erreicht werden, die didaktische Gestaltung versuchte, individuelle Unterschiede möglichst auszugleichen.

Kursunterricht bedeutet die nicht-zielgleiche Unterrichtung von Lernern in Untergruppen, die zeitlich begrenzt nach Leistungsvermögen oder Neigung[41] gebildet werden. Dabei können diese Untergruppen entweder in äußerer Differenzierung oder binnendifferenziert (innerer Differenzierung) unterrichtet werden; Kursunterricht ist daher nicht zwingend mit einer räumlichen Trennung der Schüler verbunden, auch wenn dies die weit vorherrschende Form der Umsetzung darstellt.[42]

An rheinland-pfälzischen Gesamtschulen werden nach der Orientierungsstufe mit Englisch und Mathematik zunächst zwei der drei Hauptfächer in zwei verschiedenen Kursen unterrichtet: dem Grundniveau, das sich an den Kompetenzformulierungen für die Berufsreife orientiert, und dem Erweiterungsniveau, das die Zielvorgaben des Mittleren Schulabschlusses verfolgt. In der Jahrgangsstufe 8 tritt dieser Kursunterricht auch für das Fach Deutsch sowie die Fächer Chemie, Physik bzw. Biologie in Kraft, so dass ein Gesamtschüler in jedem Schuljahr in wenigstens vier Fächern Kursunterricht anstelle des traditionellen Klassengebundenen Unterrichts erhält.

1.2.13 Lehrerzentrierung

Häufig wird im Deutschen im Zusammenhang mit Lehr-Lern-Situationen der Ausdruck „jemanden etwas beibringen“ benutzt. Hier wird folgende Vorstellung sehr treffend zum Ausdruck gebracht: Der Lehrer handelt aktiv, um das bestehende Wissensgefälle abzubauen. Der Lerner empfängt „etwas“ vom Lehrer, von einer erforderlichen Handlung des Lerners ist nicht die Rede. Auch ist festzustellen, dass die Phrase ambige Konnotationen trägt und positiv wie negativ gebraucht werden kann. Lehrerzentrierung bedeutet in der praktischen Unterrichtsgestaltung oft die Verwendung eines sehr eng umgrenzten methodischen Repertoires einerseits und legt den Fokus in gewisser Weise auf die kognitiven Vorgänge des Lehrers – selbst wenn der Unterricht auch im lehrerzentrierten Unterricht fraglos *für* den Lerner konzipiert wird.

Für den lehrerzentrierten Unterricht sind einige Sozialformen und Methoden typisch, so etwa der Frontalunterricht, die Einzelarbeit und das Unterrichtsgespräch; meist tritt der

[41] Es gibt durchaus auch weitere Kriterien, nach denen sich Gruppen differenzieren lassen, die aber in der aktuellen Bildungslandschaft nur (noch) eine sehr untergeordnete Rollespielen, wie die nach Geschlecht und Konfession.
[42] Vgl. hierzu auch Arnold 2011: 5.

lehrerzentrierte Unterricht jedoch bewusst durchmischt mit Phasen der Lernerorientierung auf, die zu größerer Methodenvielfalt führen.

1.2.14 Lernerzentrierung

Der Aufbau von Lehr-Lern-Situationen um den Lerner herum entspricht den gängigen Vorstellungen zeitgemäßer Unterrichtsgestaltung, da hier dem Gedanken moderner konstruktivistischer Lehr-Lerntheorien im Idealfall stärker Rechnung getragen wird:[43] Da das Lernen als aktiver und letztlich autonomer Prozess des Lerners aufgefasst wird, führt nur die eigene, aktive Auseinandersetzung des Lerners mit den Inhalten zu Lernfortschritten, die über das Anhäufen deklarativen Wissens hinausgehen. Eine solche Involvierung des Lerners soll durch einen Unterricht, der den Lerner selbst in den Mittelpunkt stellt, wahrscheinlicher und vereinfacht werden.

Im lernerzentrierten Unterricht spielen solche Sozialformen und Methoden eine verstärkte Rolle, die für die Aktivierung des Lerners als wirksam betrachtet werden wie Partner- und Gruppenarbeit, kooperative Lernarrangements, Wochenplanarbeiten, Stationenlernen und Lerntheken, um nur einige Beispiele zu nennen.

1.2.15 Curriculum/Lehrplan

Der Begriff Curriculum bezeichnet die schriftlich fixierte Beschreibung, und in der Regel auch verbindliche Festlegung, eines planvollen Lehr-Lernprozesses; er umfasst Fachinhalte ebenso wie lehr-lerntheoretischer Grundüberzeugungen und reale Rahmenbedingungen schulischen oder universitären Unterrichts. Heute wird er oft synonym mit dem Begriff Lehrplan verwendet.[44]

Der Begriff des Curriculums war historisch einigen Bedeutungsverschiebungen unterworfen; sein ihn ursprünglich vom deutschen Begriff Lehrplan unterscheidendes Merkmal, der Einbezug methodischer und didaktischer Kategorien, hat in der jüngsten Vergangenheit an Bedeutung verloren, da diese Elemente während der Schulreform der letzten Jahre dem Lehrplanbegriff hinzugefügt wurden. Im englischen Sprachraum entspricht dem fachbezogenen Curriculum der Begriff des *syllabus*, da dort *curriculum* zur Bezeichnung des gesamten Studienverlaufsplans oder schulischen Bildungsgangs benutzt wird.

[43] Ob diese beiden Aspekte in jedem Fall eine solch enge Verbindung eingehen darf bezweifelt werden, da hierzu mehr als reine Handlungsorientierung und Aktivierung des Lerners gehört, was aber für inen lernerorientierten Unterricht jedoch oft ausreicht.

[44] Vgl. Tenorth/Tippelt 2007: 137 f.

1.3 Aus der Mathematik

1.3.1 System Mathematik

Mathematik als System umfasst eine Vielzahl verschiedener Fachgebiete und ist durch die Summe der Definitionen der in ihnen betrachteten Inhalte umschrieben; eine Definition des Systems insgesamt wurde von verschiedenen Autoren im Lauf der Geschichte versucht. Zwei aktuelle, und einander nicht widersprechende, Definitionen lauten:

„Mathematik ist die Wissenschaft von Quantität und Raum. [Sie hat] auch mit der symbolischen Darstellung von Quantität uns Raum zu tun.“ (DAVIS/HERSH 1994: 2)

„Wir leben in einem Universum voller Muster. Mathematik ist eine systematische Art und Weise, die Regeln und Strukturen hinter diesen Mustern zu erhellen.“ (STEWART 2001: 24)

Die seit dem Ende des 19. Jahrhunderts in ihrer Anzahl immens gestiegenen mathematischen Fachgebiete befassen sich mit je einer spezifischen Auswahl solcher Muster, wodurch sich beispielsweise Zahlentheorie, Geometrie, Logik usw. voneinander abgrenzen. Auch wiederkehrende Muster *innerhalb der Mathematik*, in ihren Grundlagen und Verfahren, sind Untersuchungsgegenstand mathematischen Arbeitens.[45] Wenn sich diese selbstreflektierende Betrachtung auf das Lösen von Problemen richtet, spricht man von *Heuristik* (vgl. 1.3.5).

1.3.2 Prozess Mathematik

Über die reine Beschreibung des Systems Mathematik hinaus kann Mathematik als Prozess aufgefasst werden, über den sich ontologisch sowie epistemologisch nachdenken lässt: Die ontologische Perspektive stellt die Frage, wie die Objekte der Mathematik beschaffen sind, also auf welcher Grundlage die Beschreibung der wahrgenommenen (und konfundierenden) Muster beruht. Unter dem epistemologischen Gesichtspunkt wird betrachtet, auf welche Art und Weise mathematisches Wissen entsteht, und daraus folgend auch, wie absolut und von äußeren Einflüssen unabhängig dieses Wissen wirklich ist.

Die Beantwortung dieser Fragen war im Lauf der Zeit deutlichen Veränderungen unterworfen, die den Prozesscharakter der Mathematik selbst belegen, auch wenn sie sich im Vergleich zu anderen Wissenschaften sicherlich über weit längere Zeiträume hinweg

[45] Vgl. DEVLIN 2000: 11; LEUDERS 2003: 16.

entwickelt hat. Die wichtigsten Positionen, die als mathematikphilosophische Standpunkte unterschieden werden können, sind[46]:

- Platonismus:
  Mathematische Objekte existieren als Ideen, d.h. abseits der Realität, außerhalb und unabhängig von der menschlichen Wahrnehmung. Mathematiker entdecken lediglich existierende Muster und Strukturen.
- Physikalismus:
  Der Physikalismus als Weiterführung des Platonismus definiert mathematische Objekte als menschliche Ableitungen aus der wahrgenommenen Wirklichkeit und damit als aus der „physikalischen Raumzeit abstrahierte Strukturen und Objekte" (LEUDERS 2003: 21). Damit wird die Mathematik als in die Physik integriert betrachtet, und alle ihre Inhalte beziehen sich letztlich stets auf physikalische Objekte.
- Formalismus:
  Die Verbindung zur realen Welt spielt im Formalismus keine Rolle. Mathematische Objekte, repräsentiert als Kette von Zeichen und Symbolen, werden sämtlich als Produkte rein logischer Deduktionen aus einer willkürlichen Liste von Grundannahmen (Axiomen) definiert. Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit der Axiome sind die drei fundamentalen Anforderungen des Formalismus.
- Konstruktivismus:
  Mathematische Objekte sind Konstruktionen des menschlichen Geistes, wenn auch auf Grundlage der wahrgenommenen Realität. Nicht präexistente mathematische Strukturen und Muster führen zu der vorherrschenden Kongruenz in der Mathematik, sondern die aufgestellten Regeln des mathematischen Austausches und der evolutionär bedingte und allgemein-menschliche Erkenntnisapparat.

Diese Kurzbeschreibungen sollen hier und für das allgemeine Verständnis genügen. In Kapitel 3 wird diesen unterschiedlichen Sichtweisen auf Mathematik in Auseinandersetzung mit dem Problemlösen und der Frage nach dem Bildungsbegriff vertiefend nachgegangen.

[46] Vgl. LEUDERS 2003: 19 ff.

1.3.3 Prozesse in der Mathematik: Problemlöseprozess

Bei der Bearbeitung eines Problems fehlt ein bekannter Weg zum Zielzustand (vgl. Kap. 1.1.8), so dass kein fester Handlungsablauf die Lösung garantiert. Immer dann, wenn kein Algorithmus (vgl. Kap. 1.1.9) verfängt, also ein Problem anstelle einer Aufgabe vorliegt, sind flexible, oft komplexe Denk- und Handlungsabläufe gefragt, um den erwünschten Zielzustand zu erreichen.

Bei aller Unterschiedlichkeit der Terminologie herrscht inhaltlich Einigkeit darüber, dass sich der Prozess des Problemlösens in verschiedene Abschnitte einteilen lässt, deren Anzahl und genaue Umschreibung variiert. Hier wird das vierstufige Modell nach Pólya[47] mit den im Original beigegebenen Kurzerklärungen wiedergegeben:

1. Understanding the Problem – Das Problem verstehen: Du musst das Problem verstehen.
2. Devising a Plan – Einen Plan machen: Finde die Verbindung zwischen den gegebenen Informationen und dem Gesuchten. Es kann notwendig sein, dass du Hilfsprobleme betrachtest, wenn eine unmittelbare Verbindung nicht zu finden ist. Am Ende solltest du einen Plan zum Auffinden der Lösung entwickelt haben.
3. Carrying out the Plan – Den Plan ausführen: Führe deinen Plan aus.
4. Looking Back – Rückschau halten: Untersuche die gewonnene Lösung.

1.3.4 Prozesse in der Mathematik: Auffinden und Beweisen mathematischer Erkenntnisse

Auch wenn die Darstellung nach außen anderes nahelegt, so gilt das obige Phasenmodell oftmals auch für die Bearbeitung der „ureigensten“ Gattung mathematischer Probleme: den Beweis. Erfolgreiche Beweise, die zur Begutachtung der Wissenschaftlergemeinschaft vorgelegt werden, erscheinen nicht selten auf den ersten Blick unerklärlich, losgelöst, vollkommen frei von jeglicher Prozesshaftigkeit: man sieht einen polierten, Schritt für Schritt logischen, ja zwingenden Ablauf, der (im Idealfall) keine Zweifel an seiner Richtigkeit aufkommen lässt.

Es wird allerdings von nicht wenigen Mathematikern mehr oder weniger kritisch kommentiert, dass diese Präsentationsform fertiger Beweise, gleich ob in wissenschaftlichen Zeitschriften oder im Schulunterricht, den Blick auf die in Wahrheit ablaufenden Vorgänge

[47] Die englischen Originalbezeichnungen wie auch die Leitfragen sind Pólya 2004: xvi entnommen (eigene Übersetzung).

vollkommen, und zwar bewusst, verstellt. Denn der mathematische Beweis entsteht in aller Regel genau so wie jede andere Problemlösung, wie folgendes Zitat treffend zusammenfasst:

> *Mathematiker denken nicht über Mathematik, als hätten sie keine konkreten Repräsentationen. Sie zeichnen Diagramme, stellen sich Beispiele vor. Erst danach wird die formalistische Methode angewandt, um die Ergebnisse in eine Reihe abstrakter Deduktionen zu bringen, aus denen jegliche Information über den Gedankengang, der zu ihrer Entdeckung führte, getilgt ist. (BARROW 1999: 142)*

Es wäre im didaktischen Sinne mit Blick auf Transparenz, problemlösender Grundhaltung und Nachvollziehbarkeit vorzuziehen, wenn nicht so sehr das fertige Produkt Mathematik im Vordergrund stünde, sondern auch der zugrundeliegende Prozess Beachtung fände.

1.3.5 Heuristik

Heuristik bezeichnet die Theorie und Praxis des Problemlösens. Sie beschäftigt sich mit der Analyse von Problemlöseprozessen, der Systematisierung von erfolgreich eingesetzten Mitteln des Problemlösens und strebt eine Steigerung der Problemlöseeffizienz durch Kenntnisse auf der *Metaebene des Problemlösens* an.[48]

Heuristik ist die Wissenschaft von den Heurismen (vgl. Kap. 1.1.10), die übergeordnete Ebene, auf der die Auswahl und Anwendung von Problemlösestrategien reflektiert und erforscht wird.

Verschiedene aktuelle heuristische Systematiken sind in Band A (KRICHEL 2017: 119 ff.) vorgestellt, und in Kapitel 5.6 wird die schulbezogene Systematik nach Krichel/Stiller entwickelt (vgl. auch ausführlich und mit Beispielen KRICHEL 2017: 128 ff.), auf der das CHIME-Konzept basiert.

[48] Mit Bezug auf Pólya ist es oft der Mathematikunterricht, der als „natürlicher" Ort der Vermittlung dieses Wissens betrachtet wird. Dies darf man durchaus kritisch auch als Versuch anderer Fachgebiete sehen, sich ihrerseits nicht mit der Systematisierung nicht-mathematischer Probleme befassen zu müssen. Das am Ende der Arbeit stehende Konzept strebt eine Nutzbarmachung der mathematischen Errungenschaften auf dem Gebiet der Heuristik für *alle* Fächer im Sinne einer transcurricularen Heuristikbildung der Lerner an.

2 Die Organisation schulischen Unterrichts: Spiegel oder Korrektiv

In einer Zeit, in der die seit Beginn der Kulturgeschichte immer weiter fortschreitende Diversifizierung und Entkoppelung praktisch aller menschlichen Tätigkeitsbereiche rasanter denn je voranschreitet, sind viele Bereiche des menschlichen Lebens inzwischen durch solch klare, tradierte und gewachsene Grenzen getrennt, dass man von einer Zersplitterung sprechen kann. Dies ist auch in einer Schul- und Unterrichtskultur evident, die gesamtgesellschaftliche Rahmenbedingungen abbildet, und in einer Fachgliederung, die kaum mehr als Wissenschaftsorientierung begründet werden kann. Die gesamthistorische Genese des Fachunterrichts, seine Institutionalisierung und Entwicklung innerhalb des Systems Schule mit all seinen geschichtlichen Wechselfällen kann und soll hier nicht dargestellt werden; einerseits würde dieser Versuch die Grenzen dieser Arbeit sprengen, zum anderen ist für das zu entwickelnde transcurriculare Konzept vor allem die Frage nach der *Gegenbewegung*, also der pädagogischen Forderung nach und Theoriebildung zu nicht-fachgebundenem Unterricht, von Bedeutung. Nach einer sehr kurzen Rückschau auf die Entstehung und Legitimation des Fachunterrichts werden daher einige historische Konzepte vorgestellt, die ab etwa Ende des 19. Jahrhunderts die etablierte schulische Fachorganisation in Frage zu stellen begannen. Dabei sind sowohl ihre Legitimationsansätze wie auch ihre konkrete Ausgestaltung eines alternativen Unterrichts relevant und werden in ihren Kernaussagen dargestellt.

2.1 Konträre Positionen

Wie in Kapitel 1.2.9 und 1.2.10 angesprochen wird in der Didaktik und Unterrichtsforschung eine große Bandbreite unterschiedlicher Organisationsformen von (schulischem) Unterricht unterschieden und auch anerkannt. Dennoch dominiert der Fachunterricht den Alltag an deutschen weiterführenden Schulen.

2.1.1 Fachunterricht – Was sonst?

> *Dass gegliedert gelernt werden sollte und dass die Gliederung dabei am besten in Fächern mit Wissenschaftsorientierung erfolgen sollte, gehört auch heute noch zu den in der Gesellschaft weitgehend nicht hinterfragten Auffassungen über Schule und Unterricht. (Peterßen 2000: 18)*

Die Aufteilung der Lerninhalte in Fächer scheint oft vollkommen selbstverständlich, ja geradezu naturgegeben und keine echte Legitimation zu erfordern.[49] Verlangt man bildungstheoretische Begründungen für diese Einteilung, so geben Verfechter vorwiegend folgende Punkte als Vorteile des Fachunterrichts an[50], die anschließend kurz kritisch beleuchtet werden:

- Fachunterricht ist eine historisch gewachsene Unterrichtsform und hat sich über so lange Zeit bewährt, dass seine Qualität grundsätzlich außer Frage steht.
- Fachunterricht bildet den Rahmen für systematisches Lernen.
- Fachunterricht sorgt für einen kontinuierlichen Wissenstransfer in der Gesellschaft.
- Fachunterricht ist bildungswirksam.

Fachunterricht ist eine historisch gewachsene Unterrichtsform und hat sich über so lange Zeit bewährt, dass seine Qualität grundsätzlich außer Frage steht

Es ist richtig, dass Fachunterricht sich aus geschichtlichen Umständen heraus entwickelt hat – die allerdings weder zwingend noch pädagogischer oder didaktischer Natur waren: das grundsätzliche Prinzip einer Fachgliederung, wie sie bis heute an allgemeinbildenden Schulen praktiziert wird, ist der Struktur der Universitäten entlehnt, die sich seit dem Mittelalter in Deutschland etablierten. Dort waren insgesamt sieben freie Künste vorgesehen: Grammatik, Rhetorik, Dialektik (als Teile des Triviums) und Geometrie, Astronomie, Arithmetik und Musik (als Teile des Quadriviums).[51] Die zentrale und höchste Disziplin, um die herum diese Fächer in dienender Funktion konzipiert waren, war die Theologie. Unterhalb dieser universitären Ebene fand die Bildung angehender Kleriker, und später auch wohlhabender Laien, in kirchlichen Schulen statt, an denen das System einer Fachgliederung mithin bloß als Vorbereitung auf und Zugangsregulativ für die universitäre Laufbahn eingeführt wurde.

Obwohl sich im Laufe der früheren und späteren Neuzeit der Fächerkanon als Reaktion auf sich stets verändernde politische und kulturelle Situationen geändert und in Auseinandersetzung mit wissenschaftlichen Entwicklungen und neu entstandenen Fachgebieten auch erweitert hat, wurde das grundsätzliche Organisationsprinzip niemals ernsthaft in

[49] Zu der inzwischen oft selbstverständlich gewordenen „Ordnungsmacht“ Schulfächer s. DUNCKER/POPP 2998: 7 ff.
[50] Die folgende Listung ist inhaltlich an die Ausführungen von PETERßEN (2000: 16 ff.) angelehnt, findet sich aber inhaltlich entsprechend auch in den Ausführungen von DUNCKER/POPP 1998: 7.
[51] Interessant ist auch die sich verschiebende Schwerpunktsetzung, die sichtbar wird, wenn man bedenkt, dass sich im klassischen griechischen System alle Wissensgebiete um die Philosophie als zentrale Disziplin definierten; vgl. hierzu auch Kap. 3.3.

Frage gestellt, sondern „gelangte bis ins 19. Jahrhundert über das Höhere und dann das Mittlere Schulwesen, Bürgerschulen, auch in das Volksschulwesen hinein“ (PETERßEN 2000: 18). Nach der Einführung der Schulpflicht im 19. Jahrhundert entfaltete außerdem „Herbarts Formalstufentheorie [weitreichende Wirkung], in deren restringierter Schematisierung sich eine methodisierte Unterrichtswissenschaft herausbildete, die das Unterrichten im Rahmen eines starr gestuften Frontalunterrichts bis in das 20. Jahrhundert prägte“ (ARNOLD 2011: 6). Hinzugefügt werden muss, dass das deutsche Bildungssystem – nach einer relativ kurzen Phase reformpädagogischer Bestrebungen – nach dem Zweiten Weltkrieg in West- wie in Ostdeutschland in verschiedenen Geprägen im Wesentlichen zu diesem lang etablierten System aus Fach-Frontalunterricht zurückgekehrt ist.[52]

Fachunterricht sorgt für einen kontinuierlichen Wissenstransfer in der Gesellschaft

Dieses Argument zielt darauf ab, dass durch die festgelegte Einteilung des schulisch zu vermittelnden bzw. zu erwerbenden Wissens eine diachrone Homogenität entstehen soll, die es erlaubt, für die gesamte Gesellschaft einen Wissenskanon nicht nur einmal zu etablieren, sondern auch langfristig zu implementieren. Ein etabliertes Fach mit seinen – postulierten – Bezügen zu einer Fachwissenschaft hat es einerseits sicherlich einfacher, einmal festgelegte Inhalte zu legitimieren und auf immanente Zusammenhänge zu verweisen. Andererseits besteht die Gefahr der Stagnation. Die schulischen Fächer weisen nur noch vage Bezüge zu den Wissenschaften auf, deren Namen sie oft tragen, so dass die Frage nach der Selektion des Wissens, das hier seit lange Zeit transferiert wird, kritisch reflektiert werden sollte.

Fachunterricht ist bildungswirksam

Dass es möglich ist, im System des Fachunterrichts zu lernen haben zahllose Generationen in dieser Art unterrichteter Schüler bewiesen. Als Argument in der skizzierten Diskussion ist es jedoch ein schwaches, da eine solche Aussage nur im Vergleich mit den Ergebnissen einer anderen Art des Unterrichts qualitativen Wert und Überzeugungskraft besitzt.

2.1.2 Nicht-fachgebundener Unterricht – Was soll das?

Obige kurze Betrachtung zeigt, dass die meist genannten und wahrgenommenen Vorteile des Fachunterrichts möglicherweise weniger objektiv und einer empirisch nachweisbaren

[52] Vgl. ARNOLD 2011: 6 f.

Sachlage entspringen als einer allseitigen Vertrautheit und Allgegenwärtigkeit des Prinzips, die zu einem monopolistisch anmutenden Richtigkeitsanspruch dieser Organisationsform geführt haben.[53] Die Verfechter des Fachunterrichts wenden sich oft gezielt *gegen* nicht-fachgebundene Unterrichtsformen, um das Primat des Fachunterrichts zu rechtfertigen. Auf solche Kritikpunkte wird unter 2.3.2 umfassend eingegangen.

Auf der anderen Seite sehen auch Duncker und Popp nicht-fachgebundene Unterrichtsformen zum Teil in der Kritik am Fachunterricht begründet, wenn sie feststellen, dass „heute ein gefächerter Unterricht allein nicht mehr ausreicht für eine tragfähige Vorbereitung auf den Eintritt in und die Teilnahme am gesellschaftlichen Leben" (DUNCKER/POPP 1998: 8). Etwas konkreter formulieren Kritiker des Fachunterrichts im Wesentlichen folgende Thesen:

- Fachunterricht schränkt den Blick auf die Wirklichkeit als Ganzes ein.
- Fachunterricht beschneidet das Leistungsvermögen der Lerner.
- Fachunterricht richtet sich – und zwar bewusst – nicht an Interessen und Bedürfnissen der Lerner aus.
- Fachunterricht bildet keine Handlungsfähigkeit aus.

Wie die nun anschließenden Kurzdarstellungen zu früheren und aktuellen Konzeptionen nicht-fachgebundenen Unterrichts zeigen werden, bilden diese Nachteilsformulierungen in ihrer Umkehrung gleichsam programmatische Kernpunkte für die verschiedenen Konzepte nicht-fachgebundenen Unterrichts.

2.2 Historische Konzepte nicht-fachgebundenen Unterrichts

Seit gut einhundertfünfzig Jahren wird, mit Beginn reformpädagogischer Bestrebungen, auch eine Auflösung der fachlichen Zersplitterung von schulischen Bildungsinhalten postuliert. Die einflussreichsten Konzepte nicht-fachgebundenen[54] Unterrichts werden im Folgenden nun kurz vorgestellt, wobei im Rahmen dieser Arbeit weder der soziokulturelle noch der pädagogisch-historische Kontext erschöpfend dargestellt werden kann und soll; das Augenmerk liegt auf den *legitimatorischen Aspekten*, zugrundeliegenden *Vorstellungen von gutem Unterricht* und den sich entwickelnden *methodischen Formaten* solcher nicht-

[53] Merzyn (2013) kommt zu dem Ergebnis, dass es insbesondere die Struktur des deutschen Lehramtsstudiums sei, die zum Erhalt des etablierten gefächerten Systems an Schulen führt.
[54] Es sei hier letztmalig darauf hingewiesen, dass die pädagogische Literatur bis heute nicht zu einer einheitlichen Terminologie gelangt ist, die die Trennung der Begriffe *fächerübergreifend, fächerverbindend, fächerkoordinierend, überfachlich, transcurricular, intercurricular,…* klar regelt. Zu der in dieser Arbeit verwendeten Sprachregelung s. Kap. 1.2.10.

fachgebundener Unterrichtskonzepte, um eine grundlegende Einführung in die historische Genese dessen zu liefern, was Grundlage für das zu CHIME-Konzept ist.

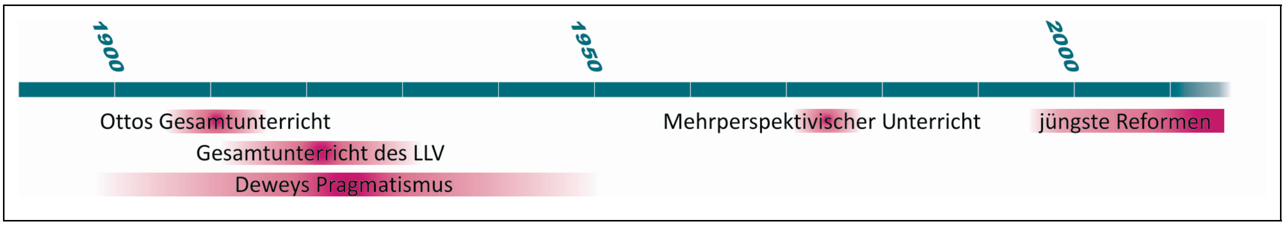


Abb. 8 Chronologische Übersicht zu den besprochenen historischen und aktuellen Konzepten nicht-fachgebundenen Unterrichts.

Das Kapitel zu aktuellen Konzepten (Kap. 2.3) geht im Anschluss ausführlicher auf die Begründungszusammenhänge, Kernmerkmale usw. nicht-fachgebundener Ideen in der jüngsten deutschen Bildungsreform ein.

2.2.1 Ottos Gesamtunterricht

Erste Ansätze, den Unterricht aus den schulischen Grenzen herauszulösen finden sich bei Otto[55], der seine ganzheitlich Unterrichtsform basierend auf eigenen Erfahrungen und Lehrpraxis als Hauslehrer an seinen eigenen Kindern entwickelte. Kernpunkt ist der Unterricht als dialogisch erwachsender, spontaner und aus den Lernenden erwachsender Prozess, der während des Tischgesprächs ebenso gut wie während eines Spazierganges abläuft. Ottos Ansatz ist vor der kritischen Haltung seiner Zeit am traditionellen Schulwesen zu verstehen, in dem es nicht um individuelles Lernen und Verstehen geht, sondern das die „Zucht des Stilldenkens in vorgeschriebenen Bahnen" (OTTO 1914: 49) anstrebte. Diese Kritik wird besonders gegenüber dem Gymnasium erhoben, dem Otto unterstellt, das eigenständige Denken geradezu zu verunmöglichen.

Dem gegenüber ist Ottos Konzept von fächerübergreifendem Charakter, da es sich auf den Umgang der Eltern mit ihren Kindern und die instinktive Ausgestaltung des kindlichen Weltbildes zurückführt, in dem keine Fächergrenzen existieren. Für Otto steht fest, dass „die Unsumme von Fächern, aus denen man formale Bildung zusammenrezeptieren will, eine Sache für sich sind und mit wirklicher Geistesbildung nur wenig zu tun haben" (OTTO 1965: 27 f.).

Mit Blick auf den erst später wirksamen Konstruktivismus und die daraus hervorgegangenen pädagogischen und didaktischen Konzepte, ist die Feststellung interessant, dass

[55] Berthold Otto, *1859 in Schlesien, † 1933 in Berlin, war deutscher Reformpädagoge und gründete 1906 die eine Hauslehrerschule in Berlin-Lichterfelde.

Ottos Ideen – bei aller Unterschiedlichkeit der Begründungszusammenhänge[56] – auf das vergleichbare grundlegende Prinzip hinführen: Sein Unterricht zielt auf das Neubilden, nicht das Nachbilden ab.

Wirksame Aspekte:

- Ausgestaltung eines holistischen Weltbildes (findet sich heute wieder in den Zielformulierungen der Bildungsstandards)

2.2.2 Der (gebundene) Gesamtunterricht des Leipziger Lehrervereins

Pragmatisch und am regulären Schulalltag ausgerichtet waren die Reformbemühungen des Leipziger Lehrervereins (LLV), der sich in der Mitte des 19. Jahrhunderts formierte, aber erst gegen Ende des Jahrhunderts durch die Begründung seiner Methodischen Abteilung auf effektive Unterrichtsveränderungen hinzuwirken begann. Erklärtes Ziel war die Verbesserung des Volksschulunterrichts durch die Idee der *Arbeitsschule*, die der Verein in Pilotstudien vor dem Ersten Weltkrieg als *fächerübergreifenden Gesamtunterricht* im ersten und zweiten Schuljahr an über zwanzig Schulen realisierte. Die hier gewonnenen Erkenntnisse und Erfahrungen flossen nach dem Ende des Krieges auch in die *Richtlinien des Reiches* für Grundschulen ein, die allerdings mit der Machtergreifung der Nationalsozialisten außer Kraft gesetzt wurden.

Kernpunkt des vom LLV vertretenen Gesamtunterrichts ist die Orientierung an der Entwicklung des Kindes. Die Qualität aller pädagogischen und didaktischen Entscheidungen wird an ihrer *Entwicklungsgemäßheit* gemessen. Besondere Kritik erfährt dabei die als völlig verfrüht empfundene Einführung der Kulturtechniken. Der Unterricht als Arbeitsunterricht soll den „Kenntniserwerb durch Sehen, Beobachten und Experimentieren aktiv im Sinne einer Verbindung von geistiger und körperlicher Arbeit" (GEIGLE 2005: 58) vorantreiben. Die Organisation des Unterrichts um eine *Sacheinheit*, „in die das Üben formaler Fähigkeiten wie z.B. das Lesen, Schreiben, Rechnen und Zeichnen organische integriert werden kann, hat dabei die Fachgliederung zu ersetzen" (ibid.).[57] Auch dieses Postulat wird mit dem kindlichen Entwicklungsstand begründet, denn bis zu ihrem dreizehnten Lebensjahr, so die Position des LLV, befassten Kinder sich stets mit Einzelphäno-

[56] Bei Otto steht das Konzept eines „volksorganischen Denkens" im Hintergrund, das sich mit esoterischen Zügen heute schwer nachvollziehen lässt, das aber die so individuell scheinende Ausrichtung relativiert. Für eine tiefergehende Darstellung sei hier auf Ottos Schriften verwiesen.

[57] Als nicht ausschlaggebend, aber durchaus unterstützend, wird darauf hingewiesen, dass die Integration formaler Übungsfächer in den Sachunterricht auch den Interessen des Kindes entgegenkomme, und darüber hinaus auch noch zeitsparend sei (vgl. GEIGLE 2005: 60).

menen und hätten „weder die Fähigkeit zur Zusammenfassung und Ordnung noch das Bedürfnis danach“ (GEIGLE 2005: 59). Zugleich besteht eine Stärke des über die üblichen Fächer hinausreichenden Gesamtunterrichts darin, dass Zusammenhänge in der Lebensumwelt aufgezeigt werden können, die bei fachlich getrennte Betrachtung keine Rolle spielen bzw. keine Beachtung erfahren. Ziel des Gesamtunterrichts ist sind Erkenntnis, Verständnis und Einsicht, nicht das Anhäufen von (Fakten-)Wissen. [58]

Zu erwähnen ist, dass sich die Arbeitsschule zwar der gleichberechtigten Bildung von kognitiven und praktischen Fähigkeiten und Fertigkeiten verschreibt (und dies in Opposition zu den „Lernschulen“ ihrer Zeit tut), dass sie sich aber eben so gegen den utilitaristischen Bildungsbegriff im Sinne einer späteren „Brauchbarkeit“ des Lerners verwahrt: die Entfaltung der individuellen Möglichkeiten, aber sehr wohl mit Blick auf die Teilhabe an der Kulturgemeinschaft, ist es, was Ziel des Gesamtunterrichts sein soll – und das auf jeder Stufe der Entwicklung, also nicht als „Hypothek“ auf die Zukunft.

Kritisch angemerkt sei die Problematik der praktischen Gestaltung der „Sacheinheiten“ und besonders ihrer innerlogischen Abhängigkeiten: es besteht die Gefahr, dass sprachliche oder mathematische Einsichten nicht systematisch entwickelt werden, wenn tatsächlich auf die Sacheinheit konzentriert gearbeitet wird – werden hingegen sprachliche und mathematische Einsichten gefördert, so leidet die inhaltliche Erarbeitung der Sacheinheit.[59]

Wirksame Aspekte:

- Integration verschiedenster Fächer im Sinne der Konzentration um Sacheinheiten
- Handlungsorientierung als eines der zentralen Prinzipien
- Produktorientierung
- Förderung kommunikativer und sozialer Kompetenzen durch die Arbeit in Schülergruppen, in denen zum Austausch angeregt wird
- Erziehung zur Selbständigkeit durch Selbsttätigkeit im Unterricht (handelnde Erarbeitung der Unterrichtsgegenstände)
- Arbeitsschule (wurde im Schulsystem der DDR als integraler Bestandteil allerdings nur der polytechnischen Schulen realisiert)

[58] Vgl. TAUBERT-STRIESE 1996: 208.
[59] Vgl. GEIGLE 2005:79.

2.2.3 John Deweys Erziehungskonzeption

Dewey[60] wird oft schlagwortartig mit dem fächerverbindenden Projektunterricht in Zusammenhang gebracht, was allerdings eine krasse Verkürzung seines philosophischen und pädagogischen Werks darstellt. Als maßgeblicher Vertreter des philosophischen *Pragmatismus* mit seiner Fokussierung auf die Prozesshaftigkeit der Realität übte Dewey nach Gründung seiner Laborschule in Chicago (1896) durch seine pädagogischen Schriften großen Einfluss auf die Bewegung der *Progressive Education* aus. Dewey selbst sah die konkrete Implementierung der „neuen" didaktischen Prinzipien in den schulischen Kontext durchaus kritisch, wie folgendes Zitat nachdrücklich belegt:

> *Hiermit ist bereits angedeutet, daß die allgemeinen Prinzipien der neuen Erziehung aus sich selbst heraus die Probleme der Struktur und Organisation der fortschrittlichsten Schulen nicht zu lösen vermögen. Vielmehr stellen sie uns vor Fragen, die wir auf der Grundlage einer neuen Philosophie der Erfahrung bearbeiten müssen. Die Probleme werden nicht einmal erkannt, ganz zu schweigen von ihrer Lösung, wenn angenommen wird, es genüge, die Ideen und Praktiken der alten Erziehung abzulehnen und dann zum anderen Extrem weiterzugehen. (DEWEY 1963: 36)*

Deweys Kritik richtet sich, wie die anderer Reformer, gegen den grundsätzlich und in den verschiedensten Hinsichten lebensfernen Charakter schulischen Lehrens und Lernens. Bezug zur Lebenserfahrung vermisst er ebenso wie die Bedeutung des Lernstoffs für die Gesellschaft, und er beklagt das Anhäufen von Wissen wie in einem Speicher, ohne dass damit Erkenntnis verbunden ist. Dabei fasst Dewey auch die institutionellen Rahmenbedingungen als Gründe ins Auge, wenn er die hohen Schülerzahlen in den Klassen ebenso wie die fehlende Ausstattung für praktische Arbeiten anführt.

Diesen Problemen will Dewey durch die Auflösung der Fächergrenzen begegnen, da die Schule „es im Unterschied zu den Wissenschaften nicht vermag, Zusammenhänge zwischen den einzelnen Fächern aufzuzeigen" (GEIGLE 2005: 85), und er verweist dabei auf die bereits erfolgreich praktizierten „'Projekt-', ‚Problem-' oder ‚Situations'methode" (DEWEY 1935: 96 f.). Zentral sind dabei die Prozesshaftigkeit, die Einflüsse des bereits erworbenen Wissens und die Kombination aus geistiger und körperlicher Aktivität.

Die zentralen Kategorien in Deweys philosophischer ebenso wie pädagogischer Arbeit sind die *Erfahrung*, die er explizit als Prozess definiert, und darauf aufbauend die

[60] John Dewey, *1859 in Burlington, VT, †1952 in New York City, war US-amerikanischer Philosoph, Pädagoge und Psychologe und lehrte an zahlreichen Institutionen, darunter an den Universitäten Michigan, Chicago, Columbia-University New York und Burlington.

Erziehung, die sicherstellt, dass experimentelle Erfahrungen gegenüber empirischen Erfahrungen überwiegen, und so den Entwicklungsprozess optimiert. Die Kategorie der Erfahrung liegt auch der Forderung nach fächerübergreifendem Arbeiten in der Schule zugrunde: Die Diskrepanz zwischen den lebensweltlichen Erfahrungen der Schüler und den Erfahrungen, die sie im (klassischen) Unterricht machen, ist so groß, dass praktisch keinerlei Transfer zwischen diesen beiden Räumen gelingt – doch nur wenn Schul- und Lebenserfahrungen systematisch und konsequent verknüpft werden, können nach Deweys Konzeption die Erfahrungen in ihrer Gesamtheit und für die Gesamtheit des Lebens der Schüler wirken. Und eine solche Verknüpfung lässt gar keine Gliederung in Fächer zu, da alle Bereiche der Lebens- (und dann auch der Schul-) Welt unentwirrbar miteinander verbunden sind. Besonders auch die Trennung zwischen Fächern, die als „allgemein-kulturell" und „technisch-naturwissenschaftlich" gelten, verwirft Dewey und fordert ihre Überwindung (GEIGLE 2005: 91). Erfahrungen müssen, in Deweys Konzeption, praktisches Tun mit intellektueller Durchdringung und somit einer aktiven, experimentierenden Auseinandersetzung mit den Lerngegenständen verbinden.

Dewey lehnt ebenfalls „absolute" oder „höchste" Ziele als rein intellektuelle Konstrukte ab, die den Situationsbezug vermissen lassen und so letztlich als Symbole einer trügerischen Gewissheit von „Wahrheit" nur als Mittel zur Kontrolle dienen. Ziele müssten immer aus der aktuellen Situation erwachsen und praktisch sein.[61] Als sachbezogene Ziele schulischer Bildung definiert Dewey Kenntnisse (gespeicherter, geistiger Besitz) und Wissen („geistiges Gut, das die Kräfte im Sinne einer besseren Lebensgestaltung lenkt", vgl. GEIGLE 2005: 99). Er diagnostiziert in der Schule ein massives Ungleichgewicht zugunsten der Kenntnisse, die zwar als Grundlage geistiger Tätigkeit ihre Relevanz haben, jedoch keine eigenständigen Ziele darstellen (ibid.).

Wenngleich Dewey Lehrpläne im gängigen Sinn ablehnt, wendet er sich gleichermaßen gegen den radikalen Subjektivismus: die Lerngegenstände müssen, um pädagogisch, erzieherisch wirksam zu sein zwar vom Kind her ausgewählt werden, es gibt aber sehr wohl bestimmte Zielvorstellungen, was am Ende des Prozesses als Idealzustand erreicht werden kann. Die von Dewey bevorzugten bzw. entwickelten Methoden erwachsen aus seiner grundlegenden Zielsetzung, der „Entwicklung gründlicher Denkgewohnheiten" mit folgenden Kernaspekten:

[61] Vgl. DEWEY 1998: 10, 40, 130.

- Reine Reproduktionen von Kenntnissen laufen diesem Ziel völlig zuwider und so fordert er, dass bei der – natürlich notwendigen – Vermittlung von Kenntnissen die kritische Reflexion allzeit mitgeschult werden muss; das neue geistige Material muss sich außerdem in die bestehenden Kenntnisse oder Erfahrungen einfügen.
- Außerdem verweist Dewey darauf, dass es völlig falsch sei, von Kindern die Logik Erwachsener einzufordern; diese könnte nur imitiert, nicht aber real erreicht werden, da das psychologische und logische Denken sich „als aufeinander folgende Stadien eines einzigen zusammenhängenden Wachstumsprozesses“ (DEWEY 1951: 65) entwickle.
- Schließlich kritisiert Dewey die einseitige Überbetonung entweder des praktischen oder des theoretischen Denkens im Unterricht. Die Verschränkung beider Bereiche ist für Deweys Konzeption eines guten Unterrichts entscheidend, und ebenso damit verknüpft die Arbeit von Konkreten hin zum Abstrakten:

> *Da **konkretes Denken** sich auf Handlungen bezieht, die den Zweck verfolgen, Schwierigkeiten in praktischen Angelegenheiten erfolgreich zu begegnen, so bedeutet ‚mit dem Konkreten beginnen' das **Tun** in den Vordergrund stellen und jene Beschäftigungen besonders zu pflegen, die nicht-mechanisch und nicht-routinemäßig ausgeführt werden, die daher ein intelligentes Auswählen und große Anpassung an Mittel und Material verlangen. (DEWEY 1951: 147 f.)*

Zwischen diesen Eckpunkten identifiziert Dewey die Projekt-, Problem- oder Situationsmethode, für die die gleichzeitige praktische und geistige Aktivität der Schüler typisch ist, als eine mögliche Lösung für die oben skizzierten Probleme des Schulunterrichts.

Wirksame Aspekte:

- Schulische Fachzergliederung verhindert den Erwerb von Fähigkeiten und Fertigkeiten mit tatsächlicher Einsetzbarkeit (totes Wissen entsteht).
- Betonung der flexiblen Anwendbarkeit des Wissens
- Betonung des kritischen und reflektierenden Denkens als Voraussetzung für einen demokratischen Menschentyp[62]
- Ausgewogenes Verhältnis zwischen Schüler- und Fach- bzw. Sachorientierung wird angestrebt.

[62] Mit Demokratie ist bei Dewey nicht eine konkret ausgestaltete Staatsform oder politische Organisation bezeichnet, sondern „eine Form des Zusammenlebens, der gemeinsamen und miteinander geteilten Erfahrung“, die „Schranken zwischen Klassen, Rassen und nationalen Gebieten [aufhebt]“ (DEWEY 2000: 121).

- Ablehnung einer wertenden Klassifikation schulischer Fächer bzw. von Fachgebieten
- Ausgewogenes, komplementäres und gleichberechtigtes Verhältnis von Natur- und Kulturwissenschaften

2.2.4 Der Mehrperspektivische Unterricht

Für das Grundschulcurriculum wurde ab 1971 durch die Arbeitsgruppe CIEL[63] der Mehrperspektivische Unterricht (MPU) konzipiert, der „an konkrete Unterrichtsverhältnisse anpaßbare Vorschläge für Lehr- und Lernmaterialien und darauf bezogene Unterrichtspläne und –entwürfe“ (FLITNER et la. 1974: 6) umfassen sollte und so den Abstand zwischen hochfliegenden Curriculumstheorien und der Unterrichtswirklichkeit verringern wollte. Vor dem Hintergrund der so genannten „deutschen Bildungskatastrophe“ der Sechzigerjahre waren zentrale Diskussionspunkte in der Bildungsdiskussion eine Verstärkung der Wissenschaftsorientierung und eine grundsätzliche Weiterentwicklung der Curricula. Die CIEL-Gruppe setzte diese Gedanken allerdings nicht – wie vielleicht zu erwarten, und von anderen Reformströmungen der Zeit auch praktiziert – durch eine Stärkung der Fächertrennung im Grundschulunterricht um, sondern basierte den MPU nicht auf Fächern, sondern vielmehr auf Handlungsfeldern und zugehörigen Kompetenzen.

Die Kritik an einem wissenschaftsorientierten Unterricht richtete sich unter anderem auch gegen die Ausrichtung an einer „zukünftigen Verwendung“ der Schüler, wodurch zum einen die Grundschule ihre Eigenständigkeit verlieren müsste und zum Zulieferer degradiert werde, zum anderen würde dadurch die Gegenwart der Schüler gegen eine hypothetische Zukunft ausgespielt. Eine „Aufspaltung des Unterrichts in Fächer“ weist die CIEL-Gruppe generell zurück und bemüht sich „um die Verwirklichung eines integrativen Konzepts, das sowohl die Schwächen des traditionellen Gesamtunterrichts zu meiden versucht und zugleich die Abbildung der Wirklichkeit in Schulfächern, die durch nichts anderes als durch eine fragwürdige Tradition zu rechtfertigen sind, ablehnt“ (DANNENBERG et al. 1974: 43 f.). Der MPU will dagegen eine Rekonstruktion der Wirklichkeit im Unterricht ermöglichen, der „über die gesellschaftlichen Verhältnisse aufklärt und – in Abgrenzung vom fachspezifischen wissenschaftsorientierten Unterricht – nicht in einzelnen Fächern, sondern in Projekten und Kursen in die Wirklichkeit“ (vgl. DANNENBERG et al. 1974: 50 f.) einführt.

[63] Kurz für *Curriculum für institutionalisierte Elementarerziehung*.

Die Parallelen zur Dewey'schen Philosophie in den Kernzielen des MPU sind auffällig: die Trennung zwischen naturwissenschaftlich-technischem und gesellschaftswissenschaftlich-kommunikativem Bereich lehnt auch die CIEL-Gruppe mit Blick auf die außerschulische Realität zum einen und eine potenzielle gesellschaftliche Fortentwicklung zum anderen ab[64]; das Ziel, schulische Bildung zur Basis einer gerechteren Gesellschaftsordnung zu machen; die Befähigung zu kritisch-reflektiertem Lernen, zur selbständigen Unterscheidung von Wichtigem und Unwichtigem, was eine Übersimplifizierung der Unterrichtsinhalte verbietet und ein „variables System von Projekten und Kursen" (HAHN/HILLER 1975: 191) erfordert, um die Vielschichtigkeit der Realität für Schüler erlebbar zu und sie selbst so „langfristig zu kompetenten Partnern des gesellschaftlichen Diskurses" (HAHN/HILLER 1975: 190) zu machen. Diese Parallelen setzen sich auch bei der konkreten Ausgestaltung fort, wenn die CIEL-Gruppe die Handlung als konstitutiv für die Wirklichkeit betrachten, wobei auch hier in keiner Weise ein Aktionismus gemeint ist, sondern die Handlung immer gerade die kognitive Partizipation am Wechselspiel zwischen Lebewesen und Umwelt beinhaltet. Handlungsfähigkeit ist zentrale Intention des MPU.

Der MPU war von Anfang an nicht als geschlossene, vollständige didaktische Theorie angelegt und blieb so über die Jahre seiner Erarbeitung fragmentarisch und prozessbedingt uneinheitlich: Das Ergebnis der engen und ständig fortgesetzten Arbeit mit Praktikern aus der Schule waren halbfertige Medienvorgaben, die erst durch den konkreten Einsatz im Unterricht, durch die Verwendung durch die Schüler und durch den Lehrer ein „Curriculum" ergaben. Diese Offenheit der Strukturen und Inhalte sollte den Unterricht aus der Starre tradierter Formen befreien und ermöglichen, Riten und Rituale kritisch zu hinterfragen und so den Unterricht in die gesellschaftliche Gegenwart zu holen. Der MPU gründet sich auf einer diskursiven Rechtfertigung, da absolute legitimierende Bezugspunkte – wie in der Dewey'schen Konzeption – nicht anerkannt werden: Der Diskurs der Schule mit der Gesellschaft und innerhalb des Systems Schule kreiert die Legitimität des MPU. Als Konsequenz sind Unterrichtsinhalte nur durch ihre realweltbezogene Bedeutsamkeit begründbar – damit fehlt der künstlichen, außerschulisch nicht realisierten rigiden Fächertrennung im MPU jedwede Rechtfertigung, weswegen der MPU in drei

[64] „Ein naturwissenschaftlich-technischer Unterricht mehrperspektivischen Zuschnitts, der dieses Verstrickungsverhältnis von Naturwissenschaft und Technik in gesellschaftliche Zusammenhänge (Institutionen) aufklärt und die entsprechenden Konsequenzen […] demonstriert, könne insofern zur Verschärfung des kritischen Potentials beitragen, als er die Machbarkeit der konkreten Utopie unvergleichlich eindrücklich hervorkehren und zeigen könne, daß gesellschaftliche und nicht technische Bedingungen ihre Verwirklichung verhindern." (HAHN/HILLER 1975: 185)

durchaus inkrementell zu verstehenden methodischen Großformen erfolgt: dem Projektunterricht, dem Kursunterricht und dem Metaunterricht. Der MPU scheiterte aus verschiedenen Gründen, interessant ist aber besonders der Aspekt des „Relativismus“: Dem MPU gelang es nicht, bzw. er strebte es gar nicht an, den Schülern Kriterien zur Bewertung der verschiedenen Produkte der mehrperspektivischen Rekonstruktion an die Hand zu geben; keinem wurde eine höhere Aussagekraft oder eine stärkere objektive Gültigkeit zugesprochen, so dass keinerlei verbindliche Ergebnisse gewonnen wurden, was viele Schüler besonders im Grundschulalter stark verunsicherte oder überforderte.

Wirksame Aspekte:

- Der MPU folgt in weiten Teilen den Ideen Deweys (vgl. Kap. 2.2.3).
- Die Perspektivität eines Lerninhaltes soll bewusst gemacht werden.

2.2.5 Zusammenfassung

Die frühen und späteren reformpädagogischen Konzeptionen nicht-fachgebundenen Unterrichts lassen eine recht klare Entwicklungslinie erkennen, was zunehmende Komplexität, Bezug zur Schulwirklichkeit und Begründungszusammenhänge betrifft. Aus einer kleinen, recht oberflächlich legitimierten und in ihren realen Auswirkungen zunächst folgenlosen Idee eines Hauslehrers wuchs im Laufe der Zeit durch lebhaften Austausch in einer stetig wachsenden Gruppe von Kritikern des vorherrschenden Bildungsapparates ein komplexes, philosophisch, pädagogisch und lehr-lerntheoretisch[65] fundiertes Gerüst für verschiedene, aber doch eng verwandte Konzepte nicht-fachgebundenen bzw. ungefächerten Unterrichts. Bezeichnend ist dabei, dass dabei der Schwerpunkt dieser Entwicklung während eines größeren Teils des 20. Jahrhunderts in den Vereinigten Staaten lag, während in Deutschland die Nationalsozialisten an der Macht waren und man im Nachkriegsdeutschland dann zu den vertrauten und bewährten Bildungsstrukturen der Weimarer Republik, wenn nicht gar des Kaiserreichs zurückzukehren versuchte. Diese Reaktion auf den ideologischen Missbrauch der Institution Schule in Deutschland unterbrach die angestoßene Entwicklung noch einmal ebenso sehr wie die Instrumentalisierung durch die Nationalsozialisten selbst. Erst die erste Bildungskrise der Nachkriegszeit in Folge des Sputnik-Schocks brachte andere Ideen von Unterricht wieder in die deutsche Bildungslandschaft ein.

[65] Vgl. hierzu die Stadientheorie Piagets, Aeblis operative Methode, Bruners Arbeiten und auch Galperin und Lompscher (s. Literaturverzeichnis); vgl. auch Kap. 3.9.

2.3 Aktuelle Konzepte nicht-fachgebundenen Unterrichts

Das Hinterfragen der etablierten unterrichtlichen Strukturen hat, wie eben gesehen, gerade im deutschen Sprachraum durchaus Tradition. In den sechziger und siebziger Jahren bemühte man sich allerdings vor allem darum, die Schule durch eine *äußere* Schulreform weiterzuentwickeln, die in Deutschland etwa durch die Schaffung von Gesamtschulen ihren Ausdruck fand. Bei späteren Reformbemühungen ab den achtziger Jahren lag der Schwerpunkt dann auf einer inneren Reform der Schule, als immer mehr Lehrer in einer „Reform von unten" (BASTIAN 1996: 7) erfolgreich Freinet-Gruppen, offenen Unterricht oder Projektunterricht praktizieren. Aus dieser Zeit stammt eine Vielzahl der bis heute rezipierten Beiträge zum nicht-fachgebundenen Unterricht, die auch die aktuelle Reformdiskussion beeinflussen. Erst mit dem Einsetzen des reformfreundlichen Milieu der 1990er Jahre wurde der nicht-fachgebundene Unterricht wieder in weiten pädagogischen Kreisen aktuell: als Herzstück einer neuen Unterrichtskultur, als Bezugsrahmen für die Schulreform oder als ein Beitrag zur inneren Reform der deutschen Schule. Die Gewichtungen unterscheiden sich deutlich, Klafki[66] weist aber zu Recht daraufhin, dass fächerübergreifender[67] Unterricht in praktisch allen Schulentwicklungs- und -reformkonzepten eine Rolle spielt.[68] Dabei lassen sich die verschiedenen Erscheinungsformen nicht-fachgebundenen Unterrichts als „Suchbewegungen, in denen die Gliederungen und Ordnungen schulischen Lernens neu erprobt [...] werden" und dadurch eine Reform der Schule ermöglichen, „die sich auf Inhalte und Formen des Lernens besinnt und dabei bislang unbeachtete oder vernachlässigte Fragestellungen entdeckt und für Bildungsprozesse zurückgewinnt" (DUNCKER/POPP 1998: 7).

Labudde (2014) weist darauf hin, dass bei nicht-fachgebundenen Gestaltung von Unterricht zwei Dimensionen grundsätzlich unterschieden werden können: die inhaltliche Ebene und die organisatorische Ebene. Im Diskurs werden diese beiden Ebenen häufig miteinander vermischt und auch unrichtigerweise verallgemeinernd miteinander verknüpft. Während sich inhaltlich die „Fächerverbundenheit" graduell verschieben kann (hierfür ist eine Vielzahl verschiedener Bezeichnungen geprägt worden, vgl. Kap. 1.2.10), lässt sich im

[66] Wolfgang Klafki, *1927 in Angerburg, ist ein deutscher Erziehungswissenschaftler, dessen didaktische Arbeiten großen Einfluss auf die deutsche Bildungslandschaft der Nachkriegszeit ausübten; die von ihm entwickelte Didaktische Analyse (1958) ist bis heute fester Bestandteil der praktischen Unterrichtsplanung, und seine Kritisch-konstruktive Didaktik (1963, 1976, 2007) fasst viele didaktisch-pädagogische Gedanken aus der Zeit der kognitiven Wende zu einem Gesamtkonzept zusammen.
[67] Der Begriff ist hier Klafkis Sprachgebrauch folgend verwendet.
[68] Vgl. KLAFKI 1998a: 41.

schulischen Kontext praktisch-organisatorisch nur zwischen den Modi „ergänzend“ und „integriert“ unterscheiden.

Spätestens mit dem Beginn der jüngsten Bildungsreform, auch wegen deren Internationalität und kompetitiven Aspekten, sind das Interesse an nicht-fachgebundenen Unterrichtsformen und die Anzahl an Konzepten und Publikationen zum Thema explosionsartig gestiegen, so dass im Folgenden nicht einzelne Konzepte (die sich oft ohnehin wenig unterscheiden) und ihre Vertreter im Vordergrund stehen, sondern gemeinsame, übergeordnete Aspekte (Funktion, Gefahren, Ideologische Basis, Legitimation usw. nicht-fachgebundenen Unterrichts) in einer Zusammenschau dargestellt werden.

2.3.1 Funktionen

Wie die Bildungskommission NRW (1995) beschreibt, ist das Anliegen eine Neuaufstellung des fachlichen Lernens, das fachorientierte Strukturen einerseits und übergreifende Sachzusammenhänge andererseits gleichwertig integriert vermittelt. Baumert verweist darauf, dass auch Fachunterricht in letzter Konsequenz, und selbstreflektiert vermittelt, über seine eigenen engen Grenzen hinaus weist. Ein grundlegender Widerspruch zwischen Fach- und nicht-fachgebundenem Unterricht wird hier nicht aufgebaut. Vielmehr geht es darum zu prüfen, ob „Verkrustungen einer schulischen Fächerlandschaft, die sich in einer langjährigen Tradition unvermeidlich herausgebildet haben und die vielleicht […] zu einer fast unhinterfragten Größe geworden sind, aufgebrochen und überwunden werden können“ (DUNCKER/POPP 1998: 7).

So betrachtet die weit überwiegende Zahl der einschlägigen Beiträge nicht-fachgebundenes Arbeiten grundsätzlich als Ergänzung zum klassischen Fachunterricht. Popp (1997: 144) umreißt in diesem Sinne drei zentrale Funktionen und Ausrichtungen des nicht-fachgebundenen Unterrichts:

1. Basis für den Fachunterricht
2. Integrationsraum für fachliche Kenntnisse
3. Projektunterricht

Befürworter des (reinen) Fachunterrichts wenden hingegen ein, dass Bildungswissen nur im Fachunterricht vermittelt werden könne, welcher „der zentrale Auftrag jeder ernsthaften Bildungsschule“ (GIESECKE 1998: 290) sei.[69] Dem halten Duncker und Popp entgegen:

> *Fächerübergreifend zu unterrichten bedeutet keineswegs den Verzicht auf fachliche Inhalte, Denkmodelle, Einsichten und Methoden, sondern deren Integration in Lebenszusammenhänge und Problemlöseprozesse, die aus einer oder wenigen Fachperspektiven allein nicht angegangen werden können. (DUNCKER/POPP 1998: 9)*

2.3.2 Gefahren

Dass das Prinzip der nicht-fachgebundenen, integrierten Vermittlung keineswegs automatisch zu gutem Unterricht führt, ist steter kritischer Diskussionspunkt. Die Gefahren liegen vor allem in einer zu starken Verkürzung der fachlichen Inhalte, wenn der Anspruch erhoben wird, zwei, drei oder gar vier verschiedene Fachgebiete permanent simultan zu behandeln. Auch bedeuten ein paar oberflächliche Anleihen aus bestimmten Fächern nicht, dass diese Fächer übergreifend unterrichtet werden: wenn etwa das Ausmalen einer Abbildung Teil eines Biologieforschungsauftrages ist, dann wird hier noch lange kein Kunstunterricht erteilt. Außerdem darf der systematische Wissensaufbau nicht unter der facettenreichen Lernkultur leiden, sondern muss möglich und ihr klares Ziel sein. Die größte Gefahr allerdings liegt in der drohenden Intransparenz der Verknüpfung zwischen den verschiedenen Wissensgebieten und Fertigkeitsarten, die in der Wahrnehmung der Lerner den Eindruck der Beliebigkeit hinterlassen könnte. Auch darf, wenn Projekt immer wieder auf Projekt folgt, keinesfalls der Eindruck einer bloßen Aneinanderreihung entstehen.[70] Diese Schwierigkeiten scheinen nur durch eine systematische Reflexion und eine grundsätzliche Erziehung zur Eigenständigkeit, zum eigenverantwortlichen Lernmanagement umgehbar zu sein.

Die größte Befürchtung vieler Lehrkräfte jedoch liegt in dem Überschreiten der individuellen professionellen Komfortzone, das „notwendig zu unverbindlichem Gerede führen“ (DUNCKER/POPP 1998: 9) müsse, anstelle des systematischen und sinnstiftenden Fachunterrichts. Duncker und Popp weisen nachdrücklich darauf hin, dass diese

[69] Für eine ausführliche Begründung, den Fachunterricht beizubehalten s. GIESECKE 1998: 292-298. Vgl. hierzu auch Kap. 2.1.1.

[70] Für eine kritische Auseinandersetzung mit den Gefahren des fächerübergreifenden Unterrichts als scheinbares „Allheilmittel“ vgl. DUNCKER 1997.

befürchteten Probleme und das „Abgleiten […] in Unprofessionalität bei jeder Art von Unterricht gegeben sein kann“ (DUNCKER/POPP 1998: 9).

2.3.3 Idee von Schule und Unterricht

Wie bei den historischen Vorläufern steht auch bei den neuen Konzepten zum nicht-fachgebundenen Unterricht die Kritik an schulunterrichtlicher Lebensweltferne im Vordergrund. Dies drückt wiederum die Vorstellung aus, dass Schule primärer Erfahrungsraum ist und nicht mehr, wie einst, das Leben ergänzend fachliche Spezialkenntnisse vermittelt. Aus dieser reformpädagogischen Tradition und Grundhaltung leiten sich die Ideen ab, die eine Schule als „Haus des Lernens“ definieren. Keine dieser heute propagierten Ideen ist sachinhaltlich wirklich neu, sie führen im Grunde die Ideen fort, die von Beginn an zur Legitimation des nicht-fachgebundenen Lernens ins Felde geführt wurden – denn letztlich ist die Befürwortung nicht-fachgebundenen Lernens schon immer, und auch heute wieder, an die Idee einer Umgestaltung der Schule insgesamt geknüpft: Das Streben nach nicht-fachgebundenen Unterrichtsformen bedeutet immer das Streben nach Freiräumen innerhalb der Institution Schule, die es erlauben, solche Inhalte zu berücksichtigen, „die komplexere gesellschaftliche, soziale, ethische, ökonomische, technologische und ökologisch Probleme und Zusammenhänge erhellen“ (DUNCKER/POPP 1998: 9 f.).

2.3.4 Legitimationsdimensionen

Gesellschaftlicher Wandel

Es fällt heute möglicherweise leichter einen Ansatz zu rechtfertigen, der der Schule den Charakter eines Lebensraumes zuweist, als je zuvor. Rasante und drastische Veränderungen in der Lebenswelt, im privaten wie technischen Bereich, führen nicht selten zu einem Gefühl der Überforderung – auch bei Eltern, die gern vermehrt Erziehungs- wie basale Bildungsaufgaben an öffentliche Institutionen abgeben. Gesamtgesellschaftlich lässt sich außerdem beobachten, dass der Zerfall in einen kulturell-geisteswissenschaftlichen Bereich und einen technisch-naturwissenschaftlichen Bereich stark fortschreitet und auch, und gerade, auf hohem Bildungsniveau eine regelrechte Spaltung droht, die der Gesamtkultur abträglich ist. Diese Zersplitterung wird de facto bereits in der Schule vorbereitet und gefestigt und kann, wenn sie für Jugendliche den Zugang zur Wirklichkeit einzuschränken beginnt, zu einer Entfremdung führen, die sowohl individuell als auch gesamtgesellschaftlich höchst bedenkliche Konsequenzen nach sich ziehen kann; Moegling spricht von „einer zunehmenden Tendenz zur Verhäuslichung, Verinselung, Mediatisierung, Entleiblichung, Entsinnlichung“ (1998: 14) als Folgen, gerade bei Jugendlichen.

Auch die zunehmende Komplexität der Welt als Folge der „Wissensexplosion“ und fortschreitenden technischen Entwicklung einerseits und der fortschreitenden Globalisierung mit allen Arten ökonomischer und kultureller Verflechtungen andererseits wird ebenfalls zur Begründung fächerübergreifenden Lernens herangezogen[71]: soll Schule in diesen verschiedenen Belangen integrierend, orientierend und sinnstiftend sein, muss sie diesen Prozessen wenn nicht entgegenwirken, so doch regulativ auf sie einwirken, indem vernetztes Denken angebahnt und eingeübt wird – und hierfür scheint das nicht-fachgebundene Lernen bessere Möglichkeiten zu bieten, wenn auch in unterschiedlichem Maße. Klafki fordert aus dieser unumkehrbaren Komplizierung heraus, dass Erziehung und Pädagogik eine globale Perspektive einnehmen müssen, von der aus überfachliche, epochaltypische Schlüsselprobleme als Unterrichtskern betrachtet werden.[72] Frommer fasst die Lage folgendermaßen zusammen:

> *In dieser Situation holt das einzelne Fach als Grundlage von Erziehung die Schüler nicht mehr dort ab, wo sie sich tatsächlich befinden. Schule war und ist eine notwendige Ergänzung zum ‚natürlichen' Hineinwachsen in eine bestehende Gesellschaft. Was Kindern und Jugendlichen heute fehlt, ist die Möglichkeit eigener Aktivität, des gemeinsamen Vorgehens, des Erlebnisses der Sinnhaltigkeit eigenen Lernens und des Gefühls, tatsächlich gebraucht zu werden, etwas zu leisten, was nicht durch Noten allgemeine Anerkennung findet. (Frommer 1997: 119)*

Bildungsbegriff

Auch der Bildungsbegriff wird in unterschiedlicher Art und Weise zur Legitimation nicht-fachgebundenen Unterrichts herangezogen. Dabei ist die Argumentationsstruktur mehr oder weniger komplex, je nachdem, ob das Prinzip eines nicht-fachgebundenen Unterrichts als solches oder ein vollständiges didaktisches Konzept, das den nicht-fachgebundenen Unterricht als eine Facette beinhaltet, in Bezug zum Bildungsbegriff gesetzt wird. Sicher steht kein *einheitlicher* Bildungsbegriff hinter all diesen Bemühungen, aber gewisse Grundgedanken treten wiederholt hervor:

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der oben skizzierten gesellschaftlichen Entwicklung, dem Bildungsverständnis und fächerübergreifendem Unterricht, weshalb

[71] Hier sei auch der von Beck für diese Entwicklung geprägte Begriff der „Risikogesellschaft“ erwähnt, der im Zusammenhang mit der Legitimation fächerübergreifenden Unterrichts häufig zitiert wird. Vgl. Beck 1986.
[72] Vgl. Klafki 1996: 79-81, Klafki 2007: 29.

Rommel fordert, dass moderne Bildung die aktuellen Problemstellungen umfassen und jungen Menschen die Grundstrukturen der „zweiten Moderne“, ihre Risiken und Lösungspotenziale transparent machen müsse[73]. Auch Krause-Isermann (1994: 2) und Rebel (1995) argumentieren in ähnlicher Weise, dass ein Wissenskanon im klassischen Sinne nicht mehr die Basis des Bildungsbegriffs darstellen könne, dass Fachwissen additiv keine Bildung mehr bedeute. Rebel betont aus diesen Gründen die Aspekte Strukturierung und Zusammenhang von Wissen und darüber hinausgehend die individuelle Wissensverarbeitung und Verantwortung als Wesen der postmodernen Bildung. Rommel[74] untersucht diese Legitimationsdimension näher und kommt zu dem Schluss, dass der subjektivitätsorientierte Ansatz der einzig haltbare ist, wenn eine dogmatisierende Engführung sicher ausgeschlossen werden soll. „Die ‚allgemeinste’ Zielorientierung fächerverbindenden Lernens stellt [...] das *integrierende Subjekt* selbst dar“ (ROMMEL 2001: 370), womit Rommel die Pluralität seines Bildungsbegriffes begründet, in dem Bildung allenfalls noch eine Art regulative Idee darstellt – die konkrete Definition des Bildungsbegriffes hängt dagegen ganz vom Individuum ab.

Für die Begründung von Schulreformkonzepten, die nicht-fachgebundenen Unterricht beinhalten, wird der Bildungsbegriff ebenfalls herangezogen. Exemplarisch lässt sich dies an der Denkschrift der Bildungskommission NRW nachvollziehen: Hier wird eine vollständige Subjektivierung, wie Rommel sie sieht, zwar umgangen, obschon die Formulierungen zeigen, dass auch hier Bildung keine absolute Kategorie mehr darstellt.

Klafkis kritisch-konstruktive Didaktik (vgl. Kap. 3.9.9) fußt gleichfalls auf einem Allgemeinbildungskonzept (auch er behält also einen normativen, oder zumindest regulativen Bildungsbegriff bei[75]), das er folgendermaßen umreißt: Allgemeinbildung ist „Bildung *für alle* zur Selbstbestimmungs-, Mitbestimmungs- und Solidaritätsfähigkeit“, beinhaltet die „kritische Auseinandersetzung mit einem neu zu durchdenkenden Gefüge *des Allgemeinen als des uns alle Angehenden*“ und bezeichnet die „Bildung *aller* uns heute erkennbaren *humanen Fähigkeits*dimensionen des Menschen“ (KLAFKI 1996: 40). Für Klafki bedeutet dies in der konkreten Umsetzung die Auseinandersetzung mit „epochaltypischen Schlüsselproblemen“, die nicht anders als nicht-fachgebundenen unterrichtbar sind.[76]

---

[73] Vgl. ROMMEL 2001.
[74] Rommel unterscheidet drei Begründungsansätze: ontologisch, kausal und subjektivitätsorientiert. Seine Argumentation, die zum Verwerfen der ersten beiden Ansätze führt, kann hier nicht nachgezeichnet werden. Vgl. hierzu ROMMEL 2001.
[75] Er rechtfertigt und begründet dies in KLAFKI 2007: 44 ff.
[76] Vgl. zu Klafkis historisch abgeleiteten Bildungsbegriff und der Rolle von Schlüsselproblemen KLAFKI 2007: 16 ff.

Ob und inwiefern die traditionellen Fächer grundsätzlich bildungswirksam sind, ist eine strittige Frage. Einige Didaktiker bejahen sie und treten ein für eine Integration gefächerten Unterrichts in das, was häufig als *fächerverbindender* Unterricht bezeichnet wird.[77] Andere sehen Bildung stets nur in nicht-fachgebundenen Lernräumen verwirklicht.[78,79] Gegen die Behauptung, dass Fachunterricht völlig wirkungs- und bedeutungslos sei, wendet sich Schilmöller mit seinem Kommentar:

> *Bildender Unterricht muß fachbezogen und fachüberschreitend zugleich sein: fachbezogen deshalb, weil sich nur im Rückbezug auf das Fach und auf den Erkenntnisstand der korrespondierenden Wissenschaftsdisziplin ein zutreffendes, intersubjektiv nachprüfbares Wissen über die Welt und ihre Phänomene erwerben läßt, fächerüberschreitend deshalb, weil sich die Frage nach der ethischen Relevanz dieses Wissens nur im Fach überschreitenden Rückbezug und Ausgriff auf das Handeln im Leben stellt und stellen lässt. (Schilmöller 1997: 108)*

Ganzheit(lichkeit)

Der Ganzheits- bzw. Ganzheitlichkeitsbegriff ist nicht trennscharf definiert und rekurriert als Begründung nicht-fachgebundenen Unterrichts weitgehend auf eher intuitiv zu bezeichnende Aspekte, die zu den historischen Ausgangspunkten der reformpädagogischen Bewegungen in Abgrenzung zu den traditionellen Schulfächern zu zählen sind. So wendet sich der Ganzheitlichkeitsgedanke in seinem Kern gegen das, was Moegling (1998) als „Atomisierung" der Lebenswelt bezeichnet[80] und der er als Kategorie die ‚Ganzheitlichkeit' entgegenstellt und warnt:

> *Eine ausschließlich fachspezialisierte Sichtweise der Wirklichkeit trägt zur Einengung der Wahrnehmung bei und verhindert die kritische De- und Neukonstruktion von Welt im Rahmen einer Konzeption, die an der Erziehung zur Mündigkeit orientiert ist. (Moegling 1998: 41)*

Aufgrund der fehlenden Definition ist der Ganzheitsbegriff allerdings umstritten und wird von vielen Forschern – teils mit eher polemisch anmutenden Begründungen – abgelehnt.[81] Dabei geht es aber nicht selten weniger um eine bestrittene sachliche Relevanz als Wort-

[77] Zur Problematik der Terminologie siehe Kap. 1.2.10.
[78] Vgl. z. B. Baltz-Otto 2000.
[79] Diesem Gedanken folgt auch Labudde mit Verweis auf die belgische Arbeitsgruppe um Fourez (vgl. Labudde 2014: 13).
[80] Eine Kategorie, die wenn auch nicht unter diesem Terminus, auch bei soziologischen Legitimationen (s. Legitimation: Gesellschaftlicher Wandel oder Legitimation: Bildungsbegriff) mitspielt.
[81] Hier spielt wohl auch die ideologische Ausbeutung des Ganzheitsbegriffs im Nationalsozialismus eine Rolle (vgl. Moegling 1998: 14 ff.).

klauberei: So schlägt Kahlert vor, den Begriff durch „Vielseitigkeit des Weltzugangs" (KAHLERT 1997: 115) zu ersetzen.

Forscher wie Rekus andererseits befürchten, dass der Ganzheitsbegriff und das mit ihm traditionell verbundene Konzept „Lernen mit Kopf, Herz und Hand" zugunsten der individuellen Persönlichkeitsentfaltung die wissenschaftliche Aufklärung der Welt hintanstellt. Er äußert den Verdacht, dass „Kinder und Jugendliche bewußt von wissenschaftlichen Erklärungsweisen der Welt ferngehalten werden sollen, um sie für dieses oder jenes politische Weltbild offen zu halten" (REKUS 1996: 211). Er verweist schließlich drauf, dass der Begriff der Ganzheit nur als Konstruktion des Subjekts in der modernen Pädagogik vertretbar sei, da keine objektive Einheit oder Ganzheit der Welt existiert.

Lern- und Entwicklungspsychologie

Motivationspsychologische Gründe bilden den Kern dieses Legitimationsansatzes, der die Bereitschaft zu lebenslangem Lernen in den Mittelpunkt stellt. Die bereits zu den Eigenschaften der modernen, globalisierten Informationsgesellschaft getroffenen Feststellungen müssen nämlich noch um die Tatsache ergänzt werden, dass sich die technologischen Möglichkeiten in den vergangenen Jahrzehnten dramatisch beschleunigt fortentwickelt haben. Und auch wenn sich natürlich nicht vorhersagen lässt, ob diese Beschleunigung sich noch länger fortsetzt oder sich stabilisiert, so ist doch klar, dass sich die Bedingungen der realen Lebenswelt innerhalb einer einzigen Generation so sehr verändern, dass jedes einzelne gesellschaftlich eingebundene Individuum zu radikalen lebenslangen Weiterlernleistungen in der Lage sein muss – vorausgesetzt, es will sich der Gesamtgesellschaft nicht entziehen, sondern in ihr selbstbestimmt und selbstverantwortlich bestehen.[82]

Hier setzt die lernpsychologische Betrachtung an, wenn festgestellt wird, dass die (individuell empfundene!) Sinnhaftigkeit des Lernens Voraussetzung dafür ist, dass sich intrinsische Motivation und als Folge aus ihr sowohl Fähigkeit wie auch Bereitschaft zu lebenslangem Lernen entwickelt. Und die Sinnhaftigkeit erschließt sich eben nur aus einer subjektiven Position, wenn an Erfahrungen und Lebensinteressen der Lerner angeknüpft wird. Dass diese in aller Regel „nicht-fachgebunden" sein, liegt auf der Hand.[83]

Die Kognitionspsychologie wird insofern als Legitimationsgrundlage für die nicht-fachgebundene Unterrichtung herangezogen, als sie die subjektive (Re-)Konstruktion der

---

[82] Vgl. hierzu auch die Zusammenfassung in FROMMER 1997.

[83] Schilmöller (1997: 109) stellt hier außerdem einen unmittelbaren Bezug zum Problemorientierten Unterricht her, da eine rein thematische Ausrichtung zu kurz greifen und didaktisch-logisch auch nicht funktionieren würde.

Wirklichkeit im Lerner durch aktive Auseinandersetzung zwischen Lerner und Umwelt betont, und somit eine mehrperspektivisch, lernbereichsübergreifende und auch handlungsorientierte Ausrichtung des Unterrichts postuliert (vgl. GEIGLE 2005: 166 f.). Einige Forscher sind konstruktivistischen Überlegungen folgend überzeugt: „Wird das Vorverständnis der Schülerinnen und Schüler konsequent in den Unterricht einbezogen, kommt es quasi von selbst zu fächerübergreifendem Unterricht" (LABUDDE 2014: 13).

Nachteile des Fachunterrichts

Der Fachunterricht wird in erster Linie deshalb kritisiert, weil er den Bezug zur Lebensrealität der Lerner vermissen lässt, die nicht in einzelne Schulfächer untergliedert ist:

> *Unsere Erfahrungswirklichkeit [...] stellt sich uns, wenngleich in unterschiedlichen Komplexitätsgraden, meistens in komplexen Lebenszusammenhängen dar, die wir zwar oft situationsbedingt unter bestimmten dominanten Perspektiven wahrnehmen oder handelnd akzentuieren – z.B. unter ökonomischen, politischen, zwischenmenschlichen, ästhetischen, technischen Aspekten u.s.w. –, aber nicht säuberlich nach Abgrenzungskriterien einzelner Wissenschaften oder Schulfächer getrennt. (KLAFKI 1998a: 47)*

Neben unmittelbar alltagsbezogenen Fähigkeiten und Kenntnissen fehlen im strikt getrennten Fachunterricht auch solche Gegenstandsbereiche, die diese Fachgrenzen überschreiten; Schlüsselprobleme können in einem solche Unterricht nicht adäquat integriert bearbeitet werden.[84]

Die im Fachunterricht praktizierte Überbetonung des kognitiv-wissenschaftlichen Arbeitens zu Lasten der eigenaktiven Auseinandersetzung mit den Lerninhalten einerseits und der ästhetisch-musischen Bildung andererseits wird als ein großer Schwachpunkt des traditionellen Fachunterrichts wahrgenommen, dem mit nicht-fachgebundenen Strukturen (möglicherweise) ebenfalls Abhilfe geschaffen werden könnte.

Außerdem macht die Einhaltung von Fächern organisatorisch die Einteilung des Schulalltags in Einheiten erforderlich. Inzwischen sind viele Schulen von der 45-Minuten-Taktung abgerückt, haben diese in aller Regel jedoch lediglich durch längere Perioden wie 60 Minuten oder 90 Minuten ersetzt, so dass die Kernkritik – die Zersplitterung des Lernprozesses – nicht an Gültigkeit verliert. Gerade begonnene Lernerfahrungen werden durch das Stundenende abrupt beendet, ohne dass man davon ausgehen kann, dass hier später nahtlos eine Anknüpfung gelingt. Auf der anderen Seite stehen Lerner, die einen Sachver-

[84] Vgl. zu diesem Problem WIATER 1995: 11 f.

halt bereits erfasst und für sich zu einem sinnvollen Abschluss verarbeitet haben und nun bis zum Stundenende ausharren, ehe sie sich ganz anderen oder weiterführenden Aufgaben zuwenden können.

Ein weiterer Kritikpunkt am Fachunterricht betrifft einen Mangel an Werturteilsfähigkeit, der durch den strengen Fachunterricht begünstigt werde. Durch fachliches Wissen allein ist noch lange nicht die richtige Anwendung dieses Wissens gelernt. Dies kann nur durch die praktische und realitätsnahe Anwendung fachlicher Kenntnisse erprobt und schließlich erlernt werden – aber hierfür ist der Fachunterricht weder inhaltlich noch durch seine Organisationsform geeignet.[85]

2.3.5 Interpersonelle Aspekte

In aktuellen Konzepten zum fächerübergreifenden Unterricht wird häufig auf die allgemein viel zitierte, und keineswegs spezifisch mit dem fächerübergreifenden Unterricht verbundene, Veränderung der Lehrerrolle verwiesen. Dass hier verschiedene didaktische und unterrichtsmethodische Ebenen vermischt werden, verunklart aber nur die Gemengelage. Es sei daher an dieser Stelle auf die zusammenfassende Darstellung der an Lehrer aktuell gestellten Ansprüche in Band A (KRICHEL 2017: 177 ff.) verwiesen.

Ein interessanterer Aspekt, der gerade mit Blick auf das hier zur Rede stehende Fach Mathematik Erwähnung verdient, ist dagegen die Genderproblematik. Von einem nicht-fachgebundenen Unterricht erwarten sich viele Befürworter einen positiven Effekt auf die Lernbereitschaft der weiblichen Lerner, die von einer Neuausrichtung an den Lernerinteressen besonders profitieren könnten. Ein solcher Effekt konnte in der Studie zum naturwissenschaftlichen Unterricht von Klos (2007; WALPUSKI/SUMFLETH 2012) tatsächlich nachgewiesen werden; es ist aber kritisch anzumerken, dass die empirische Forschung zu nicht-fachgebundenen Unterrichtsformen stark ausbaufähig ist.

2.3.6 Intentionale Aspekte

Die mit nicht-fachgebundenem Unterricht verknüpften Erwartungen und Ziele sind im Wesentlichen bereits in der Darstellung der Legitimationsaspekte hervorgetreten. Um einen abschließenden Überblick über den aktuellen Stand der Diskussion zu bieten, seien

[85] Vgl. hierzu SCHILMÖLLER 1997:92.

hier die wichtigsten als Schlüsselqualifikationen[86] benannten Ziele lediglich alphabetisch zusammengestellt:[87]

- Argumentationsfähigkeit*[88]
- Eigenverantwortung
- Empathie
- Entscheidungskompetenz
- Fantasie*
- Flexibilität*
- Kommunikationsfähigkeit*
- Kooperationsfähigkeit*
- Kreativität*
- Kritikfähigkeit*
- Lernkompetenz*
- Methodenkompetenz
- Planungskompetenz
- Problemerkenntnisfähigkeit*
- Reflexionsfähigkeit*
- Selbständigkeit*
- Sozialkompetenz*
- Teamfähigkeit*
- Transferfähigkeit*
- Vernetztes Denken*[89]

Außerdem werden auf personaler Ebene die „Handlungsfähigkeit", „Verantwortlichkeit" und die „Werturteilsfähigkeit" (SCHILMÖLLER 1997) angeführt, die sich im Rahmen eines nicht-fachgebundenen Unterrichts erwerben und entwickeln ließen. Auf Ebene der sozialen Kompetenzen wird regelmäßig, aber keineswegs mit derselben Durchgängigkeit, „kooperatives Lernen" mit all seinen beigeordneten Dimensionen als Bestandteil eines nicht-fachgebundenen Unterrichts genannt, außerdem die „gesellschaftliche Teilhabe" und

[86] Unter der Bezeichnung "Überfachliche Kompetenzen" tauchen ganz ähnliche Nennungen auch bei Labudde (nach GROB/MAAG MERKI 2001) auf (2014: 13 f.)
[87] Liste entnommen aus GEIGLE (2005: 174 f.). Dort sind auch die Verweise auf die Autoren zu finden, die die jeweiligen Ziele formuliert haben.
[88] Die hier mit einem Asterisk markierten Qualifikationen finden in Teil III bei der Entwicklung des CHIME-Konzepts (Kap. 9 und 10) besondere Berücksichtigung; es wird später an gegebener Stelle auf diese Liste zurückverwiesen.
[89] Die mit einem Asterisk markierten Ziele sind schwerpunktmäßig auch Bestandteile des CHIME-Konzeptes.

„interkulturelles Verstehen" (GEIGLE 2005: 177). Auf der Inhaltsebene geht es in erster Linie um das Herstellen von Lebensweltbezug durch näher an der Realität orientierte Inhalte, die in der nicht-fachgebundenen Unterrichtsorganisation verwirklicht werden können. Außerdem bietet die Aufhebung der Fachgrenzen die Möglichkeit, diese und *andere etablierte Ordnungssysteme* grundsätzlich kritisch hinterfragen zu lernen:

> *Fächer repräsentieren Ordnungen des Wissens und der Erfahrung, die von Zeit zu Zeit überprüft, revidiert und korrigiert werden müssen, deren Struktur und Inhalt durchschaubar und der Reflexion zugänglich gemacht werden muss. (DUNCKER 1997: 123)*

Und nur wenn Unterricht die Möglichkeiten dazu bietet, ergibt sich auch der „Gewinn einer Metaebene in der Erkenntnis" (ibid.) – eine Idee, auf die zurückzukommen sein wird.

2.3.7 Inhaltliche Aspekte: Realität vs. Schulfächer?

Das Verhältnis zwischen der Lebenswirklichkeit der Lerner auf der einen Seite und den traditionellen Schulfachinhalten auf der anderen Seite bestimmt in weiten Teilen die Diskussion der möglichen Inhalte und Vorgaben nicht-fachgebundenen Unterrichts. Peterßen vertritt den Standpunkt, dass dieser Unterricht sein Potential gerade aus einer fruchtbaren Rekombination und Verschränkung der Fächergliederung und der Alltagswirklichkeit schöpft.[90] So können Themen von beträchtlicher Komplexität im Unterricht Platz finden, die den Horizont eines einzelnen Schulfaches übersteigen. Doch nicht nur Fachgrenzen allgemein werden so aufgelöst – auch der Abstand zwischen den Lernbereichen der Natur- und der Geistes-/Kulturwissenschaft soll so deutlich verringert werden[91]. Da die „Vernetzungsstrukturen der modernen Wirklichkeit […] aus empirischen und wertbezogenen Komponenten zusammengesetzt" sind, muss auch die Schule die (real längst existierende) Kooperation und Interdisziplinarität der natur- und geisteswissenschaftlichen Forschung abbilden.[92] Kahlert konzipiert den Lebenswelt- und Fachbezug als so genannte „didaktische Netze", über die er schreibt:

> *Der zentrale Gedanke dieses Modells ist es, die für die Erschließung von Umweltbeziehungen didaktisch ergiebigen Erfahrungsbereiche des Alltagslebens mit dazu korrespondierenden fachlichen Perspektiven zu jeweils bipolaren Betrachtungsweisen auf den Unterrichtsinhalt zu verknüpfen. (KAHLERT 2001: 48)*

[90] Vgl. PETERßEN 2000: 55.
[91] Eines der zentralen Anliegen Deweys, dessen Einfluss auch im aktuellen wissenschaftlichen Diskurs zu nicht-fachgebundenen Organisationsformen hier erneut besonders deutlich hervortritt, vgl. Kap. 2.2.3.
[92] Vgl. zu dieser Thematik ROMMEL 1999:221f.

Auch die Denkschrift des Landes NRW (1995) benennt in diesem Sinne überfachliche Dimensionen[93] des Lernens, die als Reflexionsrahmen verschiedene Perspektiven auf die Wirklichkeit (und auch Lernordnungen) anregen und ermöglichen sollen.[94]

Schlüsselprobleme

In den vergangenen Jahren ist die Frage nach der Qualität der herzustellenden Verbindungen laut geworden. Eine bloße Aneinanderreihung von Inhaltsaspekten ist nicht zielführend; die Verknüpfungen zwischen den fächerübergreifenden Aspekten müssen integrativ sein, d.h. es muss eine gemeinsame, didaktisch-pädagogische Zielsetzung vorliegen.[95] Verschiedene Autoren äußern diesen Gedanken in leicht abweichenden Formulierungen und mit den ihnen eigenen Schwerpunktsetzungen, ohne sich jedoch inhaltlich zu widersprechen (vgl. hierzu u. a. KLAUTKE 2000: 65, DUNCKER 1997: 127 und MOEGLING 1998: 19).

Aus diesen Grundgedanken haben sich in vielen Publikationen zum Thema die *Schlüsselprobleme* als wichtiger Kern nicht-fachgebundenen Unterrichtens etabliert. Zunächst ist die Feststellung wichtig, dass diese Schlüsselprobleme, auf Basis von Klafkis grundlegenden Arbeiten, keineswegs als einmal Absoluta betrachtet werden können, sondern stets Gegenstand des didaktischen bzw. des gesellschaftlichen Diskurses über Bildung sein müssen, um zur Allgemeinbildung zu führen.

> *Allgemeinbildung bedeutet in dieser Hinsicht, ein geschichtlich vermitteltes Bewußtsein von zentralen Problemen der Gegenwart und – soweit voraussehbar – der Zukunft zu gewinnen, Einsicht in die Mitverantwortlichkeit aller angesichts solcher Probleme und Bereitschaft, an ihrer Bewältigung mitzuwirken. Abkürzend kann man von der Konzentration auf epochaltypische Schlüsselprobleme unserer Gegenwart und der vermutlichen Zukunft sprechen. (KLAFKI 1996: 56)*

[93] Vorgeschlagen werden konkret: 1) Identität und soziale Beziehungen, 2) kulturelle Tradition, 3) Natur, Kunst, Medien, 4) Sprache, Kommunikation, 5) Arbeit, Wirtschaft, Beruflichkeit, 6) Demokratie, 7) Ökologie

[94] Diese Gedanken haben in die aktuellen Lehrplanschriften der deutschen Bundesländer – vermittels der Bildungsstandards – in Form von sogenannten Allgemeinen Kompetenzen Eingang gefunden. Zur Frage der Umsetzung in den Lehrplanschriften, speziell des Faches Mathematik, siehe die Darstellung in Band A (KRICHEL 2017, Kap. 3 und 4).

[95] Zur Unterscheidung nach Peterßen zwischen „integrativ“ arbeitendem, fächerverbindenden Unterricht und additivem fächerübergreifendem Unterricht vgl. Kap. 1.2.10.

Die folgende, exemplarische Liste von Schlüsselproblemen nach Klafki diene hier zur Veranschaulichung und Verdeutlichung:[96]

- Friedensfrage
- Umweltfrage
- gesellschaftlich produzierte Ungleichheit
- Gefahren und Möglichkeiten der technischen Steuerungs-, Informations- und Kommunikationsmedien
- Subjektivität des Einzelnen
- Ich-Du-Beziehungen
- rapides Bevölkerungswachstum
- Problematik des Nationalitätsprinzips
- weltweite Vernetzung und Abhängigkeit
- Verhältnis von Industrie- und Entwicklungsnationen

Sind solche Schlüsselprobleme Inhaltsgrundlage für schulischen Unterricht, so ist offenkundig, dass nicht das „Beibringen“ eines Lösungswegs Ziel sein kann, sondern gerade das Herausbilden von Bewertungskriterien für verschiedene Lösungen und mithin die Fähigkeit zur Reflexion. Dass ein solcher Unterricht das Problembewusstsein ganz allgemein (besonders im Vergleich zum traditionellen „Lehrgangsunterricht“) fordert und fördert, liegt auf der Hand.

Anmerkungen zur Unterrichtsstruktur

Dass der oben skizzierte Problemunterricht hohe, ja höchste, Anforderungen an die Lerner stellt, wird klar, wenn man ein solches Vorhaben mit den kleinen, übersichtlichen, eng umgrenzten, klar fokussierten, wenig kreativen[97] und oft enggeführten Inhaltsfeldern des traditionellen Unterrichts vergleicht. Klafki selbst fordert daher eine Balance durch *fakultative* Angebote, die auf vielfältigste Art und Weise die Interessen und Fähigkeiten der Lerner entwickeln. Der Problemunterricht hingegen soll, nach seiner Konzeption, *obligatorisch* sein.[98]

[96] Entnommen aus Geigle 2005:185f., wo auf Klafki 1995a: 12, 1996: 56-60, 1998a: 48 f., 1998b: 150 f., 1999: 34-40 verwiesen wird.
[97] In dem Sinne, dass selten „thinking outside of the box“ gefordert wird.
[98] Auf diese Idee einer abgewogenen Mischung aus obligatorischen und fakultativen Bildungsinhalten wird auch im CHIME-Konzept Bezug genommen (Kap. 10.1 und 10.2).

Klafki weist im Übrigen darauf hin, dass ein an Schlüsselproblemen ausgerichteter Unterricht nicht die Auflösung der (wissenschaftsgebundenen) Fachunterrichte zur Folge hat, sondern dass er als ergänzendes Prinzip sogar dringend notwendig ist.

> *In diesem Sinne wird auch der Unterricht, der auf die durchgehend fachübergreifend strukturierten Schlüsselprobleme gerichtet ist, immer auch fachlich bestimmte Unterrichtsphasen erfordern. Aber Umfang und Aufbau solcher Phasen müssen dann konsequent didaktisch unter der Fragstellung durchdacht werden: Welche Erkenntnisse, Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sind unverzichtbar notwendig, um die fachspezifischen Elemente des jeweils anstehenden, fächerübergreifenden schlüsselproblem-orientierten Themas zugänglich zu machen? Damit ist ein neuartiges Verständnis fachlich akzentuierter Phasen in fächerübergreifenden Unterrichtszusammenhängen angezeigt. (KLAFKI 1995b: 38)*

2.3.8 Empirische Befunde - Funktioniert das?

Im Zusammenhang mit der Mathematikdidaktik, die in dieser Arbeit von Interesse ist, soll hier kurz auf einige Studien und ihre Resultate hingewiesen werden, die sich mit naturwissenschaftlichem Unterricht befassen. Die Metastudie von Benett et al. (2007) zeigt nach Auswertung von siebzehn Einzelstudien aus dem englischsprachigen Raum, dass nicht-fachgebundener Unterricht sich in der affektiven Dimension auswirkt, und dass sich diese positivere Haltung besonders deutlich bei weiblichen Lernern zeigt.[99]

Ein Experiment, das Klos (2007) in der Orientierungsstufe in Nordrhein-Westfalen durchführte, zeigte, dass das Fachinteresse der weiblichen Lerner durch integrierten naturwissenschaftlichen Unterricht auf das gleiche Niveau wie das der männlichen Lerner stieg. Ein fachlicher Vor- oder Nachteil durch zwei Jahre integrierten Unterricht war nicht feststellbar; dafür wurden Unterschiede in der methodischen Gestaltung hin zu mehr Handlungsorientierung sichtbar.

Eine ähnliche Grundidee trägt die Studie von Åström (2008), die das Abschneiden bei der PISA-Studie untersuchte, in Abhängigkeit von der Art des naturwissenschaftlichen Unterrichts (integriert oder gefächert). Åström konnte praktisch keinerlei Unterschiede zwischen beiden Gruppen fassen. Damit lassen sich folgende Aussagen zum nicht-fachgebundenen Unterricht (im Bereich des naturwissenschaftlichen Unterrichts) derzeit empirisch belegen:

---

[99] Vgl. LABUDDE 2014: 16.

- Er erhöht das Interesse der Lerner.
- Er verringert die Genderproblematik.
- Er begünstigt eine andere Unterrichtskultur.
- Er baut dieselben Kompetenzen auf wie gefächerter Unterricht.

2.4 Zusammenfassung und Kommentar

Die verschiedenen, hier kurz umrissenen Aspekte der aktuellen Konzepte und besonders die Legitimationsansätze für einen nicht-fachgebundenen Unterricht beziehen sich zwar auf unterschiedliche Dimensionen menschlichen Lebens und wissenschaftliche Traditionen, sie widersprechen einander jedoch kaum. Vielmehr liegt der Fokus nur auf einem jeweils anderen Aspekt einer Gesamtlegitimation, die man – wie bei allen reformpädagogischen Bestrebungen – aus ihrer kritischen Haltung zu bestehenden Strukturen und Prozessen heraus verstehen muss. Dort identifizierte Mängel und ihre Auswirkungen auf alle am Bildungsprozess beteiligten Akteure (Schüler, Lehrer, Eltern, Schule als Institution und die übergeordnete Bildungspolitik in all ihren hierarchischen Teilebenen) bilden die Grundlage für alle diese Legitimationsfacetten.

Bei aller Verschiedenheit und teils auch widersprüchlichen Haltungen zu bestimmten Teilaspekten und Begründungsgrundlagen, ist der Grundtenor der aktuellen Diskussion recht eindeutig: fächerübergreifendes Lernen ist kein umstrittenes pädagogisch-didaktisches Experiment, sondern aus verschiedensten Gründen und Grundbedingungen der postmodernen Lebenswirklichkeit dringend geboten. Dass die Ansichten über das Wie, Wann, Wo und Was genau dabei weit auseinander gehen, ist nicht überraschend. Seine Ziele jedoch scheinen konsensfähig:

- Schule soll Kindern und Jugendlichen aus einer zunehmend spezialisierten, entkörperlichten Welt den Raum zu umfassenden Grunderfahrungen bieten, ja sie bewusst damit konfrontieren.
- Er soll sie auf die Herausforderungen einer universell interdependenten Risikogesellschaft vorbereiten, indem die kognitiven ebenso wie die sozialen und emotionalen Fähigkeiten und Fertigkeiten entwickelt werden.
- Die umfassenden Abhängigkeiten zwischen den verschiedensten Lebens- und Wissensbereichen machen eine Fähigkeit zur Metakognition unabdingbar, die die reinen Fachkenntnisse vernetzbar und zugleich in ihrer – individuellen wie gesellschaftlichen – Bedeutung bewertbar machen.

Selbstreflexion, Steuerungsfähigkeit der eigenen Impulse und Selbstverantwortung stellen für die Befähigung zur Entwicklung eines wahrhaft aufgeklärten Individuums oder, um es mit Deweys zu sagen, des demokratischen Menschen notwendige Grundlagen dar, die das traditionelle System Schule nicht in ausreichendem Maße herausbildet.

Stolperstein Schulrealität

Arnolds Analyse (2011: 6) ergibt, dass „trotz seiner Bedeutung in neueren Lehrplänen [...] fächerübergreifender[100] Unterricht in Deutschland vergleichsweise selten durchgeführt wird; Schwerpunkte liegen im Bereich des Sachunterrichts der Grundschule sowie im Gesamt- und Projektunterricht." Dass trotz aller erhobener Forderungen nach der Stärkung nicht-fachgebundener Unterrichtsformen und auch deren Festschreibung in Lehrplanschriften immer noch wenig solcher Unterricht real stattfindet, liegt wohl vorwiegend in verschiedenen organisatorischen Aspekten begründet, die es kaum erlauben, die starren schulischen Strukturen zu lösen: Schulen sind fast ausschließlich am traditionellen Fächerkanon orientiert und das ausdifferenzierte Fachlehrersystem mit der zugehörigen Ausbildungsstruktur führt dazu, dass sich Lehrer als Fachspezialisten für ein, zwei, oder in Ausnahmefällen drei, Fächer wahrnehmen. Die rein praktische Umsetzung steht damit potenziell in einem gewissen Widerspruch sowohl zu geltendem Recht, zum Leistungsvermögen der Lehrkräfte als auch zum tradierten Bild von Schule und Unterricht.[101]

Duncker und Popp, die auch das Entstehen neuer, nicht-fachgebundener Schuldisziplinen als eine mögliche künftige Entwicklungsrichtung ins Auge fassen (s. u. unter 5.), weisen zudem auf die Gefahr hin, die eine dauerhafte, curriculare Festschreibung nicht-fachgebundenen Unterrichts in der Organisation Schule in sich birgt: Das „neue Schulfach" könnte sich nach einer gewissen Zeit zwischen den traditionellen Fächern einreihen und damit seine eigene Wirksamkeit verlieren – und zugleich noch den Anspruch der Anschließbarkeit der Wissensinhalte der anderen Fächer reduzieren. [102]

Die strukturellen Möglichkeiten zur sukzessiven Etablierung nicht-fachgebundener Unterrichtsformen fassen Duncker und Popp in ihren fünf Formen (bzw. Stufen) fächerübergreifenden Lehrens und Lernens wie folgt zusammen (1998: 10ff.):

[100] Arnold gehört zu den Autoren, die anstelle des von Peterßen und der Autorin der vorliegenden Arbeit favorisierten Begriffs „nicht-fachgebunden" den Ausdruck „fächerübergreifend" als Sammelbegriff verwenden. Er beschreibt hier also allgemein die Umsetzungspraxis aller in Frage kommenden nicht-fachlichen Unterrichtsformen.

[101] Vgl. hierzu DUNCKER/POPP 1998: 8 ff.

[102] Vgl. zu dieser Möglichkeit und den damit verbundenen Risiken DUNCKER/POPP 1998: 16.

1. Die Erweiterung schulfachbezogener Arbeitsformen[103]
2. Die Verknüpfung fachlicher Perspektiven zu einem Thema
3. Die Ausgestaltung fächerverbindender Lehrpläne und Curricula
4. Die Entwicklung von Schulprofilen
5. Die Konzipierung neuer Schuldisziplinen

Nur die ersten beiden Punkte beziehen sich dabei auf eine unmittelbare unterrichtliche Umsetzung, die anderen drei Aspekte verweisen auf makro-organisatorische Gestaltungsmöglichkeiten, die außerhalb des Einflusses der einzelnen Lehrpersonen oder Schulen liegen.

Der Ansatz des CHIME-Konzepts

Beide aufgeworfenen Schwierigkeiten will das am Ende der vorliegenden Arbeit stehende Konzept berücksichtigen. Um die Professionalität der zuständigen Lehrenden auch in nicht-fachgebundenen Unterrichtsformen zu gewährleisten, müssen flexiblere Arbeitseinheiten geschaffen werden, die die regelmäßige Kooperation zwischen Fachspezialisten real ermöglichen. Solche Einheiten entwirft das CHIME-Konzept unter der Bezeichnung „Modul" in Kapitel 9.3. Der zweiten Gefahr von sich abkapselnden und langfristig neuen Fächern anstelle nicht-fachgebundener Fächer wirken die genannten Module bereits entgegen, da sie ihren Platz als eingebundene, zeitlich umgrenzte Einheiten innerhalb anderer Unterrichte haben und eine Verselbständigung kaum möglich erscheint. Zum anderen steht aber auch die Idee der „Heuristischen Sequenzen" des CHIME-Konzepts einer solchen Entwicklung entgegen.

[103] Hierzu zählen die beschriebenen nicht-fachgebundenen Unterrichtsformen des fächerüberschreitenden, fächerkoordinierenden und fächerübergreifenden Unterrichts nach Peterßen.

3 Problemlösen in Mathematikunterricht, Didaktik und Bildung

In Band A (KRICHEL 2017) wurde herausgearbeitet, dass dem Problemlösen in den Lehrplänen der jüngsten deutschen Bildungsreform didaktisch-konzeptuell eine zentrale Stellung zugewiesen wird. *Wie* groß diese Bedeutung eingeschätzt wird, lässt sich zweifelsfrei bereits dem Stufenmodell des Deutschen Bildungsrates (Abb. 9) entnehmen, wenngleich die fachbezogenen Lehrplanschriften dieser Grundanforderung in vielen Fällen nur unzureichend gerecht werden, wie die genaue Analyse der erhobenen Forderungen zum Problemlösen einerseits und die strukturellen und inhaltlichen Defizite andererseits gezeigt haben.[104]

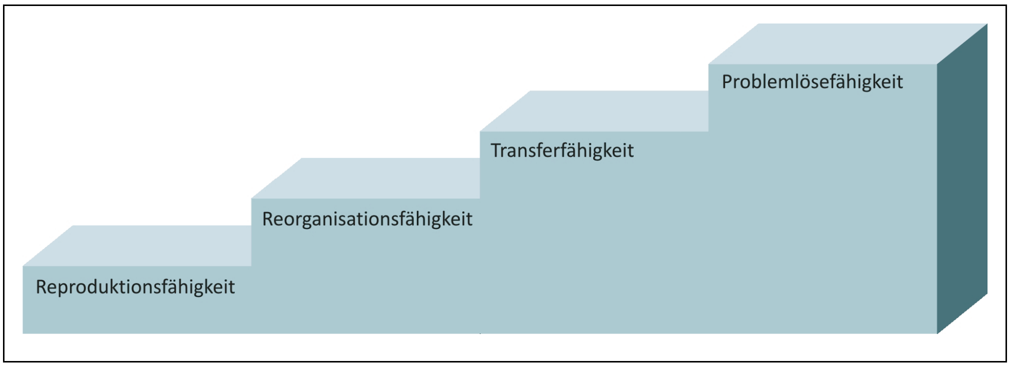


Abb. 9 Stufenmodell des Verhaltens aufgrund von Informationen (gemäß Deutscher Bildungsrat[105]).

Bemerkenswert ist, dass die Frage nach der Legitimität dieser Forderung weitgehend offen bleibt: Weder die Bildungsstandards noch die Lehrplanschriften legen umfassend und überzeugend dar, wie sie zu der Festlegung ihrer prozessbezogenen Kompetenzen kommen, oder woraus sich ihre Gewichtung respektive Bedeutung für den Mathematikunterricht ergibt – gleichwohl sie den Status geltender, verpflichtender Grundlagen für den Mathematikunterricht an deutschen allgemeinbildenden Schulen besitzen. Haug (2012) erklärt, wie viele andere Autoren, das aktuell große Forschungsinteresse an und die curriculare Betonung der Problemlösefähigkeiten aus dem schlechten Abschneiden deutscher Schüler bei TIMSS und PISA (vgl. hierzu Band A, KRICHEL 2017: 1 ff.); dies ist fraglos richtig, liefert aber keine sachlogischen Argumente für die Bedeutung des Problemlösens.

Zwei Punkte springen ins Auge: Der Deutsche Bildungsrat, und im Übrigen auch die OECD, unter deren Ägide die PISA-Studien entstanden, bezeichnen die Fähigkeit zum Problemlösen als oberstes Bildungsziel – dennoch erscheint das Problemlösen nur als eine

---

[104] Diese Ergebnisse sind Band A (KRICHEL 2017, Kap. 3 und 4) zu entnehmen.
[105] Vgl. PETERßEN 2000: 54.

gleichrangig beigeordnete Kompetenz neben anderen prozessbezogenen bzw. allgemeinen Kompetenzen in den *Bildungsstandards*, die wiederum die geltenden Lehrplanschriften bestimmen. Krichel/Stiller – mit Pólya und anderen Mathematikdidaktikern – sehen das Problemlösen hingegen keineswegs als eine unter mehreren gleichrangigen prozessbezogenen Kompetenzen an. Wie kommt es zu dieser veränderten Gewichtung in den Lehrplanschriften? Und welche kulturellen Konzepte stecken hinter den eigentlichen Ansprüchen der OECD?

Die Geschichte des Mathematiklehrens und -lernens ist im Abendland hochkomplex und vielfältig. Brüche und Wissensverlust spielen eine ebenso große Rolle wie über Jahrhunderte, ja Jahrtausende, überlebende Traditionen und plötzliche „Wiedergeburten" längst vergessener Erkenntnisse. Da nur aus den Wurzeln des Mathematikunterrichts und dieser Vielfalt der Wechselfälle seiner Geschichte die bis heute so polemisch, teils verbittert, geführten „Glaubenskriege" zur Didaktik der Mathematik verständlich werden, soll in diesem Kapitel den Grundüberzeugungen und historischen Hintergründen der Mathematikdidaktik in ihren Grundzügen und Hauptentwicklungen nachzeichnet werden[106]. Es gibt viele mathematikhistorische Abhandlungen, die sich eingehend mit der Entwicklung der Didaktik insgesamt befassen, auf die an gegebener Stelle verwiesen wird. Für die vorliegende Arbeit interessiert jedoch die Frage nach der Rolle, die Probleme jeweils in der Vermittlung mathematischer Kenntnisse einnehmen, so dass wie in allen Teilen dieser Arbeit der Zusammenhang mit der überfachlichen Fähigkeit des Problemlösens herausgearbeitet und dem *Problemlösen als Teil mathematischen Unterrichts und allgemeiner Bildung* nachgegangen wird.

Dieses Kapitel gibt also in einer Art Klammer einen Überblick über die Bedeutung des *Problems in der Mathematikdidaktik*. Wegen der vielfältigen Abhängigkeiten und historischen wie auch logischen Verquickungen ist es nicht immer möglich oder sinnvoll, dies unabhängig von dem Bildungsbegriff oder der Didaktik im Allgemeinen zu tun, so dass an einigen Stellen auch Ausführungen zu der zugrundeliegenden Idee von Bildung zu finden sind, die die Einordnung des Problems bzw. des Problemlösens ermöglichen. In seiner Vielschichtigkeit tritt der Problembegriff außerdem natürlich nicht nur in der Mathematik in

[106] Eine ausgesprochen umfangreiche und in dieser Form bisher einzigartige Überblicksdarstellung zur europäischen ebenso wie außereuropäischen Geschichte des Mathematikunterrichts haben KARP/SCHUBRING (Hrsg.) 2014 vorgelegt. Angesichts der Vielzahl der beteiligten Spezialisten und der außerdem höchst umfassenden Bibliographie des Werks stützt sich der folgende Überblick im Wesentlichen auf Karp/Schubring anstelle älterer, weniger systematischer und auf das hier interessierende Moment, die Mathematik*didaktik*, ausgerichteter Arbeiten.

Erscheinung; Auslassungen und Überschneidungen sind mithin unumgänglich. Was dieses Kapitel *nicht* beabsichtigt, ist die Darstellung der Bedeutung des Problemlösens für die Mathematik und ihre Entstehung. Dies soll klar eingegrenzt auf das Teilgebiet der Geometrie und (weitgehend auch die Inhalte der Orientierungsstufe) anschließend in Teil II geschehen. Nicht immer lassen sich Überschneidungen jedoch gänzlich vermeiden.

Es stellen sich im Spannungsfeld mit Mathematikdidaktik und Bildung folgende Kernfragen, denen in diesem Kapitel abrissartig nachgegangen werden soll, um die historische Dimension des Problemlösebegriffs in der (mathematischen) Allgemeinbildung einordnen zu können:

- Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?
- Welche Bedeutung hat und hatte das Lösen von Problemen für den Bildungsbegriff?
- Welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

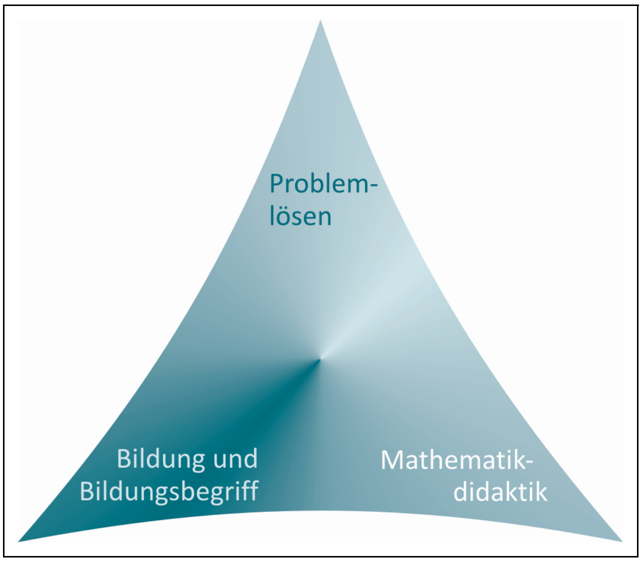


Abb. 10 Spannungsfeld Bildung – Mathematikdidaktik – Problemlösen.

Zudem werden der historische Zusammenhang und die Quellensituation kurz beleuchtet. Außereuropäische Entwicklungen werden nur dort aufgegriffen, wo sie für den europäischen Kontext erhellend sind. In Kapitel 1 werden im Zusammenhang mit der aktuellen Internationalisierung des Mathematikunterrichts darüber hinaus notwendige oder interessante Informationen ergänzend nachgeliefert.

3.1 Prähistorische Indizien: Steinkreise und Mnemotechniken

Aus einer Reihe von Gründen ist es schwierig, Aussagen über die Vermittlung von Mathematik in prähistorischer Zeit zu machen. Wenig ist über die mathematischen Kenntnisse aus der Zeit vor Beginn der schriftlichen Aufzeichnungen überhaupt bekannt, da ist die Frage, *wie* dieses Wissen weitergegeben und vermittelt oder welcher Stellenwert welcher Art von Wissen beigemessen wurde kaum zu beantworten. Einige hypothetische

Betrachtungen sollen an dieser Stelle jedoch angestellt werden, die sich auf Informationen zu anderen kulturellen Bereichen beziehen.

Dass mathematisches Wissen als bekannt vorausgesetzt werden darf auch in einer Zeit, in der es noch keine schriftlichen Aufzeichnungen gab, kann als gesichert gelten, schon allein deswegen, weil die prähistorische Zeit in einigen Gegenden wie Mitteleuropa erst spät endete und durch kulturelle Kontakte zu den schriftführenden Mittelmeerzivilisationen Informationen überliefert sind, die einen Eindruck davon vermitteln, welches kulturelle Niveau auch in illiteraten Gesellschaften erreicht wurde. Geht man jedoch weiter zurück, so kann man sich nur auf indirekte Hinweise stützen.

Quellenlage

Mathematisches Material in seiner frühesten Form ist vielgestaltig und wegen der fehlenden Begleitung durch Schriftquellen weder eindeutig zu identifizieren noch zu interpretieren.[107] Regelmäßig gekerbte Objekte oder solche mit teils gruppierten „Strichmustern" spätestens aus dem Jungpaläolithikum werden allerdings heute von vielen Forschern als Belege erster numerischer Versuche und Fertigkeiten betrachtet.[108] Spätestens mit dem Neolithikum setzt der Beginn erster Handelstätigkeit ein und wird die erste Mathematik notwendig, um die Warenmengen erfassen zu können. Erst Objekte, dann nur noch ikonische Darstellungen dienten als Repräsentanten der zu erfassenden realen Waren. Es ist sehr wohl möglich, dass diese ikonischen Darstellungen, die bald mit Zahlsymbolen kombiniert wurden, zur Entwicklung der Schrift für menschliche Sprache führten. Die ersten geometrischen Kenntnisse fanden ihren Niederschlag insbesondere in Ornamenten auf Gegenständen unterschiedlichster Art und in architektonischen Konstruktionen. Intensiv wurden die zahlreichen Steinsetzungen auf den Britischen Inseln untersucht, die alle in das späte Neolithikum datieren.[109]

Eine Reihe von Forschern sieht den Ursprung der Geometrie grundsätzlich in einem rituellen Kontext. Fassbar wird dies freilich erst durch schriftliche Aufzeichnungen, die diese Idee für die frühgriechische Zeit und auch im indischen Kulturraum stützen (vgl. VAN DER WAERDEN 1983: 10 ff., SEIDENBERG 1960, 1965, 1977). Die Anfänge dieser Vorstellungen und damit auch die geometrische Bearbeitung liegen jedoch in vorhistorischen Phasen dieser

[107] VAN DER WAERDEN entwickelt seine Vorstellung von prähistorischer Mathematik in *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (1983).
[108] Vgl. GERICKE 1996: 1.
[109] Maßgeblich für diese umfassenden Untersuchungen waren Alexander und Archibald S. Thom (1987), deren weitreichende geometrische Interpretationen allerdings keineswegs unumstritten sind.

Hochkulturen und Van der Waerden vertritt die These eines gemeinsamen Ursprungs in der Donauregion (VAN DER WAERDEN 1983: 14). Aufgrund der großen Parallelitäten – speziell auch mit Blick auf die Kenntnis des sogenannten „Satz des Pythagoras“ bzw. pythagoreischer Tripel – zwischen frühhistorischer Mathematik (vgl. Kap. 3.2) in Europa und Asien wird eine gemeinsame Vorläufer-Mathematik postuliert, die „in der Jungsteinzeit, etwa zwischen 3000 und 2500 v. Chr. existiert haben muss, und sich von Mitteleuropa aus nach Großbritannien, in den Nahen Osten, nach Indien und nach China ausgebreitet haben muss“ (VAN DER WAERDEN 1983: xi; eigene Übersetzung). Auf Mathews’ Rekonstruktionsvorschläge zu dieser Geometrie wird in Kapitel 6.1 eingegangen.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Man darf annehmen, dass sich Kenntnisse der Zahlensymbole und -systeme rasch unter den Personen verbreitete, die miteinander in Handelskontakt standen und dass sich ein gemeinsamer Code entwickelte, der das System praktikabel und effizient für die Benutzer machte. Eine Unterweisung, so kann man vermuten, fand während des praktischen Tuns statt und erforderte auf dieser Entwicklungsstufe wohl wenig formelle Instruktion. Der große problemlösende Wert dieser „Mathematisierung“ einer bis dahin weitgehend unmathematischen Welt ist allerdings kaum zu überschätzen.[110]

> *Wenn z.B. ein Händler mit 3 Kühen und 5 Schafen [...] über Land geschickt wurde, so bekam er ein solches Gefäß mit 3 Kegeln und 5 Scheibchen mit, das zur Kontrolle dem Empfänger verschlossen abgeliefert werden mußte. Zu noch größerer Sicherheit wurden manchmal die in dem Gefäß enthaltenen Körper auf der Außenseite aufgezeichnet. (GERICKE 1996: 1)*

Die architektonischen Hinterlassenschaften seit dem Neolithikum geben vielfach Hinweise darauf, dass die Erbauer geometrische Kenntnisse und vor allem ein hohes Interesse an komplexen geometrischen Gestaltungsgrundsätzen hatten. Verschiedentlich wurden pythagoreische Zahlentripel in schon sehr alten Bauwerken identifiziert und als Beleg zitiert. Isoliert betrachtet sind solche Befunde stets angreifbar, zusammen mit den wenig späteren schriftlichen Aufzeichnungen scheint es dagegen durchaus plausibel, eine intensive Beschäftigung mit geometrischen Konstruktionen zu vermuten, die ihre Berechtigung aus den rituellen Wertzuschreibungen erhielt.

[110] Vgl. GERICKE 1996: 1.

Im besondere Maße war es wohl die Suche nach astronomischem Wissen, teils aus rituell-religiösen, teils aus praktischen Motiven heraus, die die Entwicklung der Mathematik und Geometrie vorantrieb, was zahllose Bauwerke mit astronomisch begründeten Eigenschaften belegen. Die Spekulationen, die sich hieraus ergeben, weisen dahin, dass mathematisches Wissen in dieser Zeit eng mit den religiösen Vorstellungen verknüpft gewesen sein könnten und sich eine ganz bestimmte Gruppe von Personen mit solch numinosen Inhalten beschäftigen durfte oder konnte. Da die Schrift in dieser Zeit nicht existierte, müssen notwendigerweise die beträchtlichen Kenntnisse oral tradiert worden sein (vgl. MATHEWS 1985). Über Umfang und Art der Unterweisung können keine fundierten Aussagen gemacht werden, aber es sei auf spätere Kulturen verwiesen, die sich bewusst gegen eine schriftliche Niederlegung ihres kulturellen Wissensschatzes entschieden; das wohl am besten dokumentierte und bekannteste Beispiel hierfür ist die keltische Zivilisation Mitteleuropas.

Während für ökonomische Zwecke bald nach dem Erstkontakt mit der griechischen Kultur, um 600 v. Chr., das griechische Alphabet gebräuchlich wurde, wurden weder theologisches noch historisches oder wissenschaftliches Wissens in dieser Form niedergelegt – eine bewusste Entscheidung der für die Tradierung kulturellen Wissens zuständige Bevölkerungsgruppe (der so genannten Druiden). Diese beharrten auf einer rein mnemonischen Überlieferungsweise, bis zu dem allmählichen Ende ihrer Kultur, durch eine Kombination aus Aufgehen in einer romanisierten Gesamtbevölkerung, internen kriegerischen Auseinandersetzungen, Verdrängung durch die germanischen Völker in der Völkerwanderungszeit und schließlich der Verbreitung des Christentums. Auch wenn die archäologisch-historische Quellenlage keine genauen Aussagen über den Grad mathematischer Kenntnisse erlaubt, so ist doch eines klar: Unterweisungen waren nicht anders denkbar als in verbaler Form. Und das wenige, was über die Ausbildung keltischer Druiden, aus der Spätzeit, bekannt ist, lässt es sehr wahrscheinlich erscheinen, dass das Auswendiglernen einen hohen Stellenwert besaß. Möglicherweise wirft dies ein Schlaglicht auf die Art des Unterrichts, wie sie in nicht-schriftführenden Kulturen (zu früherer Zeit) praktiziert wurde, ehe man zur schriftlichen Niederlegung und Unterweisung überging. In Kapitel 6.1 wird auf potenzielle geometrische Kenntnisse aus dieser Epoche näher eingegangen.

3.2 Alt- und frühhistorische Zeugnisse: Listen, Tabellen und Rezepte

Über den Unterricht in den frühen Hochkulturen ist im Vergleich zu den vorausgehenden Zeiten sehr viel mehr bekannt, was sich durch die Verschriftlichung – wenn auch nicht unbedingt didaktisch-pädagogischer Gedanken – durch die Zielkulturen selbst erklärt.

Quellenlage

Die mesopotamischen Quellen reichen bis in das dritte vorchristliche Jahrtausend zurück und gewähren in ihrer Fülle nicht nur einen Einblick in die Art des Mathematikunterrichts der ersten Hochkulturen, sondern sogar in den damaligen „Lehrplan".[111] Zudem ist hier archäologisch der pädagogische Zusammenhang der Quellen gesichert.

Dagegen ist die Überlieferung aus dem altägyptischen[112] Kulturraum weniger gut; in seiner Gesamtheit entspricht der Corpus ägyptischer Texte gerade einmal der Menge an mesopotamischen mathematischen Schriftzeugnissen. Und nur bei einem kleinen Teil dieser Texte wiederum handelt es sich um mathematische Schriften aus der Zeit zwischen etwa 2000 v. Chr. und 200 n. Chr.[113] Es gibt keine archäologischen Beweise dafür, dass die Papyri (auch wenn es sich um Lehrtexte handeln dürfte) aus einem Unterrichts- oder schulischen Kontext stammen.[114]

Ein ebenfalls interessantes Schlaglicht auf die Frage nach den kulturellen Zusammenhänge, in denen mathematisches (und speziell geometrisches) Wissen entstand, benutzt und unterrichtet wurde, werfen indische Quellen. Neben den archäologischen Primärquellen, also vorwiegend architektonischen Befunden, sind hier religiös orientierte Schriften wie die Sulbasutras[115] zu nennen.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Basis der mathematischen Ausbildung der mesopotamischen Schreiber[116] war das Auswendiglernen verschiedener standardisierter „Texte", die die Keilschriftsymbole, Fachvokabular, Maßsysteme und numerische Tabellen umfassten. Durch umfassende Studien können Inhalte einschließlich ihrer Position im Lehrplan wie folgt rekonstruiert werden:

---

[111] Vgl. BERNARD et al. 2014: 27, 29 f.

[112] Der Begriff „ägyptisch" wird im Folgenden abkürzend für „altägyptisch" verwendet. In der Arbeit sind alle Verweise auf Ägypten als Verweise auf das Alte Ägypten, also die Zeit der pharaonischen Reiche, der Zwischenzeiten und der hellenistischen Epoche, zu verstehen.

[113] Es gibt siebzehn bekannte mathematische Papyri, vgl. Kap. 6.3 für eine detaillierte Aufstellung.

[114] Anders als in Mesopotamien, wo die Tontafeln vielfach in Schulgebäuden gefunden wurden, führte die Geschichte der Ägyptologie als Wissenschaft dazu, dass zahllose Papyri ohne Fundzusammenhang in den Handel kamen bzw. ohne adäquate Dokumentation des Fundzusammenhangs geborgen wurden.

[115] Die Sulbasutras, engl. Sulvasutras, oder auch Shulba Sutras befassen sich mit indischer Altararchitektur und werden ins frühe 1. Jtsd. v. Chr. datiert.

[116] Die dichtesten und umfassendsten Informationen liegen für die Stadt Nippur vor, die das Verwaltungs- und kulturelle zentrum der altbabylonischen Ära war; es darf angenommen werden, dass die Befunde den damaligen Kenntnisstand gut repräsentieren, dieser aber keineswegs im gesamten mesopotamischen Raum gleichwertig vorhanden war.

Listen, die Maßeinheiten für Rauminhalte, Gewicht, Flächen und Längen aufzählen; Tabellen zu dem Zusammenhang zwischen den verschiedenen Maßeinheiten und Zahlen im sexagesimalen Stellenwertsystem; numerische Tabellen (Tabellen zu Kehrwerten, Multiplikation, Quadraten, Quadratwurzeln and Kubikwurzeln). (BERNARD et al. 2014: 31)

Die sichere, und auswendige, Beherrschung dieses Grundwissens musste in schriftlichen Prüfungen nachgewiesen werden.[117]

Wer diese Grundlagen der babylonischen Mathematik gemeistert hatte, befasste sich auf einem mittleren Niveau deutlich weniger formalisiert mit Rechenoperationen im sexagesimalen Stellenwertsystem, vor allem der freien Multiplikation (das heißt Rechentechniken für beliebige Zahlen anstelle eines formelhaft auswendiggelernten Katalogs von Multiplikationsergebnissen) und der Bestimmung von Kehrwerten großer Zahlen. Diese Fertigkeiten wurden zur Flächeninhaltsberechnung von Quadraten und anderen Figuren angewandt (vgl. Kap. 6.2.1). Aus den wenigen überlieferten ägyptischen Quellen lassen sich vergleichbare Kenntnisse ablesen, wobei auffällt, dass hier die freien Berechnungen möglicherweise stärker vertreten sind.

Fortgeschrittener Mathematikunterricht bestand in der Anwendung der erworbenen Kenntnisse zur Lösung konkreter Probleme, wie die Tafel YBC 4663#1[118] beispielhaft belegt (zur Aufgabe mehr in Kap. 6.2.6), bei der es um den rechnerischen Zusammenhang von nicht weniger als neun Parametern geht. Wichtig ist dabei, dass die Art der Problemstellung und das folgende „Rezept“[119] klar einen Rückbezug auf die zuvor gelehrten Inhalte herstellen, so dass der didaktische Charakter dieser Tafel feststeht. Auch die Quelle ST V[120] ist eine didaktisierte Aufgabensammlung, bei der der Schwierigkeitsgrad ansteigt und zudem „schwerere Aufgaben als Umkehrungen von einfacheren behandelt werden“ (GERICKE 1996: 32); ein eindeutiges Indiz für konzeptuell entwickelte Didaktik.

Eine vergleichbare lehrplanähnliche Abfolge von Inhalten lässt sich für das alte Ägypten hingegen nicht begründet identifizieren. Die wenigen, umfangreicheren Papyri ähneln den babylonischen Tafeln stark in ihrer Struktur, weshalb sie in der Forschung ebenfalls zumeist als pädagogische Texte interpretiert werden.[121] Dabei ist die Sachlage insgesamt sehr viel weniger klar: Die Existenz von Schulen ist zwar auch für Ägypten durch einzelne

[117] Vgl. BERNARD et al. 2014, Kap. 2.2.
[118] Diese Inventarnummer bezeichnet eine an der Universität Yale verwahrte Tafel.
[119] Im englischen Sprachgebrauch neutraler als „Pozedur“ bezeichnet.
[120] Susa-Text V, zitiert nach GERICKE 1996: 29 ff., der verweist auf: BRUINS/RUTTEN 1961.
[121] Vgl. BERNARD et al. 2014: 36.

schriftliche Zeugnisse belegt, tragfähige, archäologische Befunde[122] sind jedoch rar.[123] Es gibt auch keine klaren Belege, dass die Mathematik im ägyptischen Bildungswesen vergleichbar stark verankert war wie im mesopotamischen; ob die überlieferten mathematischen Papyri tatsächlich schulisch genutzte Unterrichtsmaterialien darstellen, ob sie in diesem Falle für die Ausbildung von Spezialisten oder für alle Schreiber gedacht waren, oder ob es sich gar um „private" Aufzeichnungen von Experten handelt, ist wissenschaftlich nicht gesichert.[124]

Während sich Unterrichtsmaterial für das Grund- und das mittlere Niveau babylonischen Mathematikunterrichts klar und auch eindeutig als solches identifizieren lässt, ist die Situation bei höheren mathematischen Inhalten etwas anders, und die Frage stellt sich: „Wie kann man Tafeln, die für den fortgeschrittenen Unterricht genutzt wurden (geschrieben von Schülern oder Lehrern), von denen unterscheiden, die Untersuchungen der reinen Forschung widerspiegeln?" (BERNARD et al. 2014: 32) Diese Problematik, die aus der archäologischen und historiographischen Sachlage erwächst, war es, die zu einer lang andauernden Debatte über das „Wesen" früher Mathematik und ihres Unterrichts und zu zwei konträren Auffassungen führte:

Auf der einen Seite vertreten Forscher die Auffassung, dass die babylonische, und auch die ägyptische, Mathematik als reine „Rezeptmathematik" den auszubildenden Mathematikern algorithmische Vorschriften an die Hand gab; diese Mathematik wird als wenig abstrakt, nicht an allgemeinen Beweisen interessiert und unkreativ charakterisiert[125], was eine strikt repetitive Form des Unterrichts bedinge.

Auf der anderen Seite stehen Forscher, die zu bedenken geben, dass Rückschlüsse auf den mit den mathematischen Texten verbundenen Unterricht hoch spekulativ sind. Ob und inwieweit die Lehrer die eigenständige Auseinandersetzung der Lerner mit den gestellten Sachproblemen gefordert und befördert haben, ist nicht festzustellen. Die „Rezepte"

[122] Unter Funden versteht man in den Altertumswissenschaften physische Hinterlassenschaften, die geborgen werden können (z. B. Schmuck, Nägel, Geschirr, Textilreste u.s.w.). Unter Befunden versteht man entweder solche physischen Hinterlassenschaften, die nicht geborgen werden können (z. B. Verfärbungen des Erdreichs, Grabenanlagen usw.), oder Ensembles aus mehreren Funden (und/oder Befunden), die in signifikanter Relation zueinander stehen.

[123] An dieser Stelle kann die Diskussion um Funktion und Bedeutung der sogenannten „Häuser des Lebens" in ägyptischen Tempelkomplexen nicht, auch nicht im Ansatz, wiedergegeben werden. Für eine einführende Darstellung in das Problem s. STROUHAL 1992: 235 ff.

[124] Vgl. BERNARD et al. 2014: 37.

[125] Diese Einschätzung ist natürlich einer kontrastiven Betrachtungsweise geschuldet, die die moderne Mathematik, wie sie sich aus der griechischen Mathematiktradition entwickelt hat, als (positiven) Bezugsrahmen setzt.

können ebenso gut als Wissensspeicher[126] gedient haben, ohne dass sich unmittelbar eine Verbindung zur Didaktik des damaligen Unterrichts ziehen ließe.

Einige Indizien weisen darauf hin, dass der ägyptische Mathematikunterricht mit nur einem Lehrer und einem Lerner abgehalten wurde; auch eine direkte unterrichtliche Verknüpfung zwischen geometrischen Problemlösungen und Rechtstexten kann vermutet werden.[127]

Dass die babylonische (und altägyptische) Mathematik wenig formalisiert war und sich – abseits der Frage der praktischen Unterweisung – nicht auf dem Abstraktionsniveau späterer Mathematik (speziell der griechischen) bewegte, ist wohl richtig. Andererseits gilt es zu bedenken, dass die teils ausgesprochen aufwendigen und vielschrittigen „Rezepte" weder zufällige Erscheinungen sein können, noch ist es denkbar, dass die Spezialisten der damaligen Zeit nicht in der Lage gewesen wären, die einzelnen Schritte innerhalb ihres eigenen mathematischen und allgemeinen kulturellen, vielleicht auch religiösen, Gesamtkonzeptes zu reflektieren und zu begründen. Ob diese Betrachtungen aber Kerninhalte des *Unterrichts* gewesen sind, inwieweit sie als alleinige Lösungswege akzeptiert wurden oder ob auch hier die keineswegs ungewöhnliche Diskrepanz zwischen schriftlich Fixiertem und lebenspraktischen Alltagshandlungen im alten Ägypten wirkte und individuelle Problemlösungen sehr wohl gewünscht oder gar gefordert wurden, bleibt reine Spekulation. Bei aller gebotenen Vorsicht angesichts der Quellenlage lässt die Analyse der mathematischen Texte keinen Zweifel daran, dass die Unterweisung in fortgeschrittener Mathematik anhand konkreter Probleme stattfand: Die Texte gehen von einer, oft detailliert beschriebenen, Problemsituation aus, die in der Folge mithilfe eines Rezepts Schritt für Schritt gelöst wird.

Beispiel: Problem aus YBC 4663#1[128]

1. A trench. 5 ninda is the length, 1½ ninda (the width), ½ ninda its depth, 10 (gin) the volume of assignment (for each worker), 6 še (silver) [the wages of a hired man].

[126] Ein Konzept, das sich bei Kenntnis der sozio-historischen Kernmerkmale der altägyptischen Kultur aufdrängt. Hier sei auf das Konzept der „heißen" und „kalten" Kulturen verwiesen und auf Jan Assmanns Ausarbeitungen zum Kulturellen Gedächtnis und speziell den Techniken und rituellen Konzepten der altägyptischen Hochkultur (vgl z. B. ASSMANN 2007)

[127] Der Papyrus Rhind besteht neben den mathematischen Schrittanteilen aus einem umfangreichen Handbuch von Rechtsformeln. Dies kann als Zufall betrachtet werden, als Zeichen dafür, dass derselbe Schreiber beide Fächer erlernen oder in beiden Bereichen arbeiten musste, oder aber als didaktische Entscheidung zu einem verknüpfenden Unterricht in Geometrie und Eigentumsrecht interpretiert werden.

[128] Englische Übersetzung der Transkription und Übersetzung nach BERNARD et al. 2014:35. Zur Bedeutung der hier verwendeten Phrasen und weitere Beispiele vgl. Kap. 6.2.

2. The area, the volume, the number of workers, and the (total expenses in) silver what? You, in your procedure,
3. the length and the width multiply each other. This will give you 7.30.
4. 7.30 to its depth raise. This will give you 45.
5. The reciprocal of the assignment detach. This will give you 6. To 45 raise. This will give you 4.30.
6. 4.30 to the wages raise. This will give you 9. Such is the procedure.

Spezifische Probleme waren Ausgangspunkt des Unterrichts (und der mathematischen Forschung) jenseits der mathematischen Grundausbildung (wenn nicht der Beschäftigung mit Mathematik insgesamt, wie in Kapitel 6 zu sehen sein wird). Ob und inwieweit aber das *eigenständige* Auffinden von Lösungen ebenfalls Ziel des Unterrichts war, bleibt im Dunkeln. Dass der Kern des mathematischen Interesses der frühen Hochkulturen im Lösen vielfältiger Probleme aus den Bereichen Architektur, Ingenieurswissenschaften, Astronomie und Wirtschaft lag, lässt sich jedoch angesichts der vielen tausend mathematischen Textzeugnisse nicht leugnen, so dass das Problemlösen als ein zentrales Bildungsziel des Mathematikunterrichts für die staatstragenden Bildungselite der damaligen Zeit postuliert werden kann.

Welche Bedeutung hatte das Lösen von Problemen für den Bildungsbegriff und welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

Diese Fragen lassen sich für die frühen Hochkulturen in Mesopotamien und Ägypten nur indirekt und hypothetisch erwägen. Tatsache ist, dass die Schreiber als ausführende Verwaltungsorgane und Bildungselite der frühen Hochkulturen einen stark standardisierten Wissens- und Fertigkeitskanon besaßen. Dies allein zeigt schon, dass ein Begriff davon und ein Stück weit auch ein Konsens existierte, was zur Bildung gehörte; und mathematisches Wissen war ein grundlegender Bestandteil dieser Bildung. Betrachtet man die Aufgaben, mit denen sich die Mathematiker abseits der Grundfertigkeiten befassten, so lässt sich begründet spekulieren, dass die Mathematik ein überlebenswichtiges (astronomische Berechnungen zur Bestimmung von Überflutungen), juristisch (Vermessung von Grundeigentum bzw. Lehen) und auch wirtschaftlich (Optimierung von Arbeiterversorgung und -entlohnung sowie der Planung von Baumaßnahmen) bedeutsames Instrument der Staatsführung war.

Ein kurzer Blick nach Asien

Mit Gewinn lässt sich bei dieser Frage der Blick noch einmal nach Indien und China richten und auf die Thesen einiger bedeutender Mathematikhistoriker wie Van der Waerden und Seidenberg: sie postulieren religiös-rituelle Konzepte als Ausgangspunkt für das Entstehen der Geometrie[129], was abseits der (möglicherweise sekundären) praktisch-zivilisatorischen Bedeutung den Blick für die immense Wichtigkeit mathematischen Wissens im Selbstkonzept dieser Kulturen öffnet. Aus heutiger, stark griechisch-rational geprägter Sicht auf Mathematik mögen diese Anlässe weniger „praktische" Bedeutung besitzen – kulturimmanent und aus der historischen Perspektive dagegen kann man davon ausgehen, dass in so stark rituell orientierten Zivilisationen wie der babylonischen, alt-ägyptischen und auch frühen indischen die Frage nach der „richtigen" Konstruktion von Altären, Kultbauten und Grabmälern, oder die Bestimmung der „günstigen" Zeitpunkte für Opfer, Aussaat und Ernte mithilfe der Mathematik allerhöchste Bildungsrelevanz besaßen.

Geometrische Gematrie[130] war es, die möglicherweise die immense Bedeutung des „Satzes des Pythagoras" in der indischen Mathematik begründet: Wurde jede Gottheit mit einer bestimmten Quadratzahl identifiziert, verlangt die Vereinigung zweier Gottheiten, das Auffinden eines Quadrats, das flächeninhaltsgleich mit der Summe zweier anderer war, bzw. zeigte die Tatsache, dass dies in einem rechtwinkligen Dreieck der Fall war, dass hier theologische Schlüsse zu ziehen waren. Derselbe Gedanke ist übrigens nach Plutarch in der ägyptischen Theologie enthalten, wo den Seiten (3, 4, 5)-Dreiecks gleichfalls Gottheiten zugeordnet werden (3 Osiris, 4 Isis und 5 Horus), und zwar so, dass die der Hypotenuse zugeordnete Gottheit aus der Vereinigung der beiden anderen hervorgeht.[131]

Mathews' Arbeiten zum chinesischen Chiu Chang Suan Shu (kurz: Chiu Chang) sind für unsere Betrachtungen aus zweierlei Gründen interessant. Zum einen plausibilisiert er die Ableitung der dort festgehaltenen Inhalte aus dem prähistorischen Wissen, zum anderen identifiziert er klare didaktische Absichten hinter der Darstellung, worin er Vogel (1968: 120) widerspricht. Das Chiu Chang bietet in seinem 9. Kapitel mathematische Probleme. Mathews' Analyse nach lassen sich die Probleme gruppieren und zeigen innerhalb dieser Gruppen aber auch über fast das gesamte 9. Buch hinweg eine fortschreitende Komplexität, was eine didaktische Strukturierung nahelegt. Nach einigen Einführungsaufgaben folgen

[129] SEIDENBERG 1960.
[130] Gematrie bezeichnet die Zuordnung von Zahlwerten zu den Zeichen eines Schriftsystems (CANTOR 1894: 96 ff.); für einen unterhaltsamen Blick in die Gematrie vgl. DUDLEY 1995.
[131] Vgl. SEIDENBERG 1960: 492.

Aufgaben, die man heutzutage als „eingekleidete Aufgaben" klassifizieren würde, die sie fachinhaltlich nicht wesentlich mehr erwarten, aber der Kontext variiert und somit das mathematische Modell selbständig gebildet werden muss. Auch werden „schwierigere" Zahlwerte als Lösungen gesucht. Problem 12 der Sammlung interpretiert Mathews als Verallgemeinerung des vorangegangenen Problems, was wiederum auf eine didaktisierte Darstellung verweisen mag.

Während Vogel die Interpretation als „Lehrwerk" ablehnte, ziehen Mathews und Wang/Needham andere Schlüsse:

> *The extreme brevity of the text is presumably due to the custom of oral teaching by qualified mathematicians, and to the literary desire of avoiding undue repetition. (Wang/Needham 1955: 351)*

Gerade die scheinbar fehlende Didaktisierung der Probleme wird hier als Indiz für die unterrichtliche Verwendung betrachtet; nur durch mündliche Unterweisung anhand der mathematischen Texte scheint eine sinnvolle Verwendung plausibel.

3.3 Griechisch-römische Mathematik: Die Väter der Pädagogik und das Volk der Ingenieure

Mit der griechischen Zivilisation änderte sich für ganz Mitteleuropa der Lauf der Kulturgeschichte nachhaltig, in den verschiedensten Bereichen. Gerade für die Mathematik als Wissenschaft und ihre heutige Existenzform ist die Bedeutung der griechischen Kultur kaum zu überschätzen. Und auch die Griechen selbst waren von der großen Wichtigkeit der Mathematik (in dem einen oder anderen Sinne) überzeugt (s. u.): Platon,[132] auch einer der einflussreichsten Pädagogen der Geschichte, war überzeugt, dass nur sie wahres Wissen ermögliche, die Logik und ganz allgemein die Denkfähigkeit schule, die auch in anderen Bereichen nützlich und notwendig ist.[133]

Ein anderer stark griechisch geprägter Kulturaspekt spielt ebenfalls bis heute eine Rolle: Die Griechen waren das Volk, das die Pädagogik erfand. Im Bewusstsein vieler, auch aktueller, Bildungsforscher waren die Griechen, die ja den bis heute gültigen Begriff prägten, die ersten, die sich „Gedanken über die Schwierigkeiten der Vermittlung von Erkenntnissen machten und die Frage stellten, welche Art und welches Maß von Wissen einerseits und

---

[132] Platon, *427 †347 v. Chr., war Schüler Sokrates' und einer der bedeutendsten Philosophen der Antike. Seine grundlegenden Theorien beeinflussen Philosophie und Pädagogik bis heute.
[133] Nach Kuhlmann 2013: 15 ff.

welche „Tugenden" (Haltungen, Werte, Charaktervorzüge) der Mensch andererseits benötigt, um ein „gutes" Gemeinwesen mitgestalten zu können" (KUHLMANN 2013: 13).[134]

Quellenlage

Trotz der immensen Bedeutung der griechischen Tradition, ist die Primär-Quellenlage für den griechisch-römischen Mathematikunterricht deutlich schlechter, als dies für die mesopotamischen Hochkulturen der Fall ist.[135] Es lassen sich fünf Klassen von Quellenmaterial unterscheiden:

1. Mathematische Texte
2. Metamathematische Texte
3. Indirekte textliche Überlieferungen
4. Archäologische Funde und Befunde
5. Fragmente

Mathematische Texte dieser Kulturperiode wurden nicht in ihrer Originalversion tradiert; sie wurden „Klassiker", die im Lauf der langen griechisch-römischen Geschichte wieder und wieder kopiert, ergänzt, mit Kommentaren versehen wurden und auch mit ihnen verschmolzen. Dies betrifft auch eine Vielzahl der ganz und gar mathematischen, teils mathematik-didaktischen, Texte wie die Schriften Euklids, Archimedes' oder Ptolemaios'.[136]

Das gleiche Überlieferungsproblem zeigt sich auch bei der zweiten Klasse von Quellen: Neben den Fachschriften sind auch Texte erhalten, in denen die Bedeutung der Mathematik aus einer Außenperspektive heraus sichtbar bzw. aktiv reflektiert wird; hierzu gehören Platos *Republik*, Vitruvs Standardwerk *De Architectura* und Quintilianus' *Institutio Oratoria*, was bereits die Bandbreite der mathematischen Anwendungen und die umfassende Wertschätzung andeutet, die man ihr entgegenbrachte.

In einer Art mittleren Position zwischen diesen beiden Enden des Textartenkontinuums gibt es zahlreiche schriftstellerische und philosophische Texte, die mathematische Inhalte mittelbar als Zitate überliefern oder Kommentare zu ihnen darstellen.

[134] Bei aller Bedeutung, die die Griechen ganz sicher bis heute für unser Verständnis der Pädagogogik besitzen, muss hier kritisch angemerkt werden, dass die Griechen selbst hierbei sehr wohl auf Vorläufer und Vorbilder zurückgriffen und dies auch wussten. Zudem ist die Behauptung, dass bei den nicht-schriftführenden Kulturen Mitteleuropas zuvor keinerlei pädagogisches Bewusstsein existiert habe, weder zu beweisen noch zu widerlegen.
[135] Die ältesten erhaltenen Kopien griechischer Originale stammen aus dem 8./9. Jahrhundert n. Chr., diejenigen römischer Originale aus dem 5. Jahrhundert (vgl. BERNARD et al. 2014: 39 f.)
[136] Die hier vorgetragene Einteilung der Primärquellen folgt BERNARD et al. 2014: 38 ff.

Neben diese drei Quellentypen treten zwei weitere: archäologische Funde und Befunde zum Lehren und Lernen von Mathematik sowie isolierte Fragmente, die keinerlei pädagogische oder fachwissenschaftliche Einordnung erlauben.

Während die Klassen 1 bis 3 der vorgestellten Quellen gut vertreten und erforscht sind, beschränken sich unmittelbare, archäologische Beweise auf eine vergleichsweise geringe Datenmenge. Die Problematik, die hierdurch entsteht, ist die Folgende: Die Art der Überlieferung der ersten drei Quellentypen durch einen (bewussten) Filter hat über Jahrtausende nur einen Teil der ursprünglichen Informationen auf uns kommen lassen. So können zwar bestimmte Schlüsse über den Mathematikunterricht der griechisch-römischen Antike gezogen werden – es bleiben jedoch immer Schlüsse auf Grundlage eingeschränkten, selektierten Quellenmaterials. Das Bild, das sich ergibt, ist nicht nur unvollständig, sondern verzerrt. Neben diesen „polierten" und über Jahrtausende weiter verarbeiteten Texten wären dringend Beweise des Typs 4 notwendig, um zu verstehen, wie der ursprüngliche Lehr- und Lernkontext der Lerner aussah, bevor oder während sie sich beispielsweise mit den Texten Euklids befassen konnten. So wie die Sachlage sich darstellt, ziehen Bernard et al. (2014: 40 f.) aus den *textlichen Quellen* die folgenden indirekten Schlüsse zum Mathematikunterricht:

Die reiche Kultur des Kommentierens und Annotierens kanonischer Texte spricht für eine Entstehung in einem Bildungszusammenhang höheren Niveaus. Nur mathematische Praxis aus der obersten Schicht der Bevölkerung hatte überhaupt eine Möglichkeit in die Überlieferungstradition einzufließen – wie viele „niedere" mathematische Tätigkeiten und damit verbundener mathematischer Unterricht zeitgleich existiert haben mögen, ist nicht rekonstruierbar und höchstens einmal in Spuren zu erahnen. Euklids Elemente müssen nicht zwingend als Unterrichtstext interpretiert werden, wie häufig behauptet wird;[137] erst Proklus hat dem Text diese Dimension durch seinen Kommentar (nicht weniger als achthundert Jahre nach dessen Entstehung) zugeschrieben, möglicherweise weil er selbst als Lehrer in dem Werk eine didaktische Natur zu erkennen meinte oder sie bewusst als weitere einbezog (BERNARD et al. 2014: 41).

[137] Da es aus der hellenistischen Periode keine Primärquellen mit diesbezüglichen Aussagen gibt, sind Euklids Ziele beim Verfassen der Elemente reine Spekulation (vgl. VITRAC 1990: 13-18).

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Zwar beschreiben einige, auch relativ frühe, Texte Vorstellungen von Mathematikunterricht (Platons *Menon*, *Republik*, *Gesetze*; Isokrates' *Antidosis*; Quintilianus' *Institutio Oratoria*). Sie behandeln die Frage, welche Rolle mathematischer Unterricht innerhalb des gesamten Bildungsrahmens hat und welcher Natur er sein sollte. Es ist aber zu bedenken, dass es sich um idealtypische, literarische und dazu noch auf die höchste Bildungselite verweisende Beschreibungen handelt. Aufgrund dessen und der oben geschilderten Quellenproblematik sind die nun skizzierten Unterrichtsszenarien nur als plausible Rekonstruktionen zu verstehen. Ein Schlaglicht auf die Vorstellungen vom Lernen, die wohl für die längste Phase der Menschheitsgeschichte angenommen werden können, wirft Sokrates' berühmtes Bild des Lehrens als Maieutik[138], also „Hebammenkunst". Hier tritt der Gedanke, dass etwas bereits im Lerner Vorhandenes zu Tage gefördert werden müsse, deutlich hervor. Fragt man, woher das vorausgesetzte Wissen stammt, so würden die frühen Lehrer um Plato wohl mit dem Reich der Ideen antworten, andere wohl mit der aus Imitation und Auswendiglernen angesammeltem Faktenwissen. Dass das Auswendiglernen lange eine große Rolle im Rahmen institutionalisierten Lernens gespielt hat, wird in Kapitel 3.1 bis 3.7 verschiedentlich klar.

Der agonistische Diskurs stand im Mittelpunkt griechischer Bildung, unabhängig von dem unterrichteten Fachinhalt. Verschiedene Anekdoten belegen diese kulturelle Praxis auch für mathematische, insbesondere geometrische, Themen.[139] Dass bei diesen Streitgesprächen visuelle Hilfsmittel eine Rolle spielten, lässt sich den Überlieferungen zwar entnehmen, aber es sind keine originalen Beispiele bekannt. Ob und wie sie im eigentlichen Unterrichtskontext Verwendung fanden, ist vollkommen unklar. Keine physischen Überreste irgendeines didaktischen Hilfsmittels sind gefunden worden, die Rückschlüsse auf den Geometrieunterricht erlauben.[140]

Der Unterricht, den Proklos[141] genoss und den er selbst als Lehrer erteilte, ist in seiner Biographie[142] in Umrissen beschrieben: Als Sohn wohlhabender Eltern erhielt Proklos seine Bildung bei wechselnden Lehrern, die er während einer mehrjährigen Wanderschaft

[138] Griech. μαιευτική.
[139] Als Beispiel sie hier Pappos' Anekdote in *Mathematicae Collectiones III* genannt.
[140] Vgl. BERNARD et al. 2014: 42.
[141] Proklos (Πρόκλος ὁ Διάδοχος), *412, †485 in Athen, spätantiker Philosoph aus wohlhabender lykischer Familie, leitete jahrzehntelang die neuplatonische Schule in Athen.
[142] Unter dem Titel *Vita Procli* von Marinus von Neapolis (das heutige Nablus in Palästina), *ca. 440, †nach 485, verfasst.

aufsuchte. Dabei wurden ihm Kenntnisse aus verschiedensten Bereichen vermittelt, unter anderem auch aus der Mathematik. Diese soll er bei dem Alexandrinischen Philosophen Hero gelernt haben, und zwar die neupythagoreische[143] Mathematik, wie sie zum Verständnis Platons *Timaeus* notwendig ist. Die Vermittlung mathematischen Wissens erfolgte also nicht als eigenständiges Fach, sondern vielmehr im Zusammenhang mit und in Abhängigkeit von philosophischen Texten und einer gesamtphilosophischen Ausbildung. Zudem war es übliche Praxis, dass Schüler bei ihren Lehrern wohnten und mit diesen während ihrer Ausbildungszeit lebten. Für die Elite, zu der Proklos gehörte, lässt sich begründet vermuten, dass der grundbildende Unterricht, der der eigentlichen Ausbildung vorausging, im Elternhaus und durch Privatlehrer abgehalten wurde. Als Lehrer unterrichtete Proklos seine Schüler in Gruppen, indem er „kritische Diskussionen zu einem traditionellen und vielfältigen Material anleitete" (BERNARD et al. 2014: 43; eigene Übersetzung). Die Ergebnisse dieser Diskussionen hat er möglicherweise in seinen Euklidkommentaren verwendet.

Archäologisch lässt sich nichts von diesen möglichen und literarisch beschriebenen Szenarien nachweisen. Die erhaltenen baulichen Strukturen lassen keine spezielle „didaktische" Architektur erkennen[144], und die Unterbringung einzelner Schüler bei Lehrern hinterlässt ebenso wenig greifbare Spuren. Es scheint, dass das Studium klassischer Texte den Kern des fortgeschrittenen Lehrprogramms ausmachte, das seinen Wissensrahmen weiter spannte als die uns heute vertrauten Fächer; so wurde auch die Mathematik anhand nicht im engeren Sinne mathematischer Texte gelehrt, wie solchen von Aristoteles oder Platon.

Mit diesen wenigen Absätzen ist unser Wissen zur griechischen Unterrichtspraxis (der Spätantike) bereits weitgehend beschrieben. Es existieren zwar fragmentarische Hinweise auf elementare mathematische Bildung, die sich aber nicht einordnen lassen, so dass ein „Lehrplan" vergleichbar dem mesopotamischen nicht einmal vermutet, geschweige denn rekonstruiert werden kann. Die Orte, an denen Unterricht stattfand, lassen sich gleichfalls nicht fassen – und die wenigen Beispiele, wo dies gelingt, zeigen große geographische und zeitliche Unterschiede. Das uniforme Standardmodell der antiken griechisch-römischen

[143] Neupythagoreisch verweist auf die durch den römischen Senator und Gelehrten Nigidus Figilus im 1. Jhdt. n. Chr. wiederbelebte pythagoreische Schule

[144] Typischerweise fand der Unterricht der großen griechischen Lehrer wie Platon unter freiem Himmel oder in den überdachten Vorhallen anderweitig genutzter Gebäude statt.

Bildung, das von vielen Forschern (MARROU 1965, CLARKE 1971, BONNER 1977, CRIBIORE 2001) gut ein Jahrhundert lang vertreten wurde, lässt sich so zusammenfassen:[145]

	Inhalte	**Lehrer**
Primarniveau: ludus litterarius	Erwerb kultureller Grundfähigkeiten	magister ludi
Sekundarniveau: schola grammatici	Literatur und Poesie, höhere Mathematik	grammaticus, professores (für besondere Disziplinen)
Tertiärniveau: schola rhetoris / oratoris	Rhetorik und andere spezialisierte Felder wie Philosophie, Medizin, Recht.	Rhetor, Philosoph, Lehrer der Medizin, Rechtswissenschaft

Tab. 1 Die traditionelle Struktur des Bildungswesens der griechisch-römischen Antike (nach BERNARD et al. 2014: 44).

Vergleichsweise neuere Studien[146] lassen jedoch begründete Zweifel an der Ubiquität dieses Modells aufkommen, ohne dass bestritten wird, dass es zu bestimmten Zeiten und an bestimmten Orten der griechisch-römischen Zivilisationsgeschichte in dieser Form tatsächlich existierte. Unter Beachtung neuerer Forschungsergebnisse muss aber festgestellt werden: „Es gab im gesamten [römischen] Reich Schulen aller möglichen Arten und Formen, abhängig von den lokalen Notwendigkeiten, Erwartungen und Ressourcen“ (BERNARD et al. 2014: 45; eigene Übersetzung). Und dieser Befund kann in einem System ohne zentrale bildungspolitische Steuerung auch kaum überraschen. Die Hauptfaktoren, die die „Bildungsbiographien“ der damaligen Zeit von unseren heutigen Vorstellungen so klar abweichen lassen, waren[147]:

- Bildung und ihre Inhalte hingen von Herkunft und dem daraus folgenden sozialen Status ab.
- Lehrer ließen sich nicht notwendigerweise einer der „Bildungsstufen“ zuordnen, d.h. dass dieselben Personen auf unterschiedlichen Stufen und darüber hinaus auch in verschiedenen Gebieten lehrten.
- Schüler verschiedener Niveaustufen wurden gemeinsam unterrichtet, ohne dass uns die genaue Lokalisierung des Unterrichts möglich wäre.
- Abseits der großstädtischen Zentren muss man mit einer abweichenden Form und Art „schulischer“ Bildung rechnen, da hier personell völlig andere Voraussetzungen herrschten und außerdem der Rezipientenkreis stark eingeschränkt sein konnte.

[145] Vgl. auch GEMEINHARDT 2007: 28 ff.
[146] Vor allem durchgeführt von Booth (1979); vgl. hierzu auch die Arbeit von Kaster (1983).
[147] Listung nach BERNARD et al. 2014: 45 f. Zu vergleichbaren Ergebnissen kommt auch Gemeinhardt (2007: 29 ff.).

Philosophie

Das scholastische Quadrivium (vgl. Kap. 2.1.1), das in der Folgezeit eine solche Bedeutung erlangen sollte, basiert auf der neopythagoreischen Einteilung der mathematischen Wissenschaften in Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. Mathematik in Gestalt von Arithmetik und Geometrie war Bestandteil der philosophischen Bildung, wie zahllose Quellen belegen.[148] Die Mathematik, und hier besonders die astronomische Mathematik, wurde in der Ptolemäischen Philosophie in den Mittelpunkt des Studiums und des Lebenswandels gesetzt; bemerkenswert ist, ist dass das Studium der Mathematik hier nicht als anderen Studienrichtungen untergeordnet betrachtet wird, sondern ganz im Gegenteil als höchste philosophische Disziplin.

Daneben standen Philosophen wie Isokrates, die die mathematischen Inhalte als weniger relevant ansahen, dafür jedoch das allgemeinbildende Moment der Mathematik betonten: das Studium der Mathematik bildet den Geist strukturiert vor, damit er zu vergleichbar strukturierten Leistungen in anderen Gebieten befähigt wird.[149]

Astronomie

Für das Gebiet der Astronomie war mathematisches Können unbedingt notwendig, und dank Ptolemäus' Schriften und den hierzu erhaltenen Kommentaren steht fest, dass hier verschiedene Formen und Stufen mathematischer Fertigkeiten abverlangt wurden. Besonders die Kommentare lassen durch die Verwendung geometrischer Diagramme (informative Zeichnungen/Visualisierungen, wie man heute sagen würde), Erläuterungen zum Rechnen im Sexagesimalsystem[150] sowie die Hinweise auf Mnemotechniken vermuten, dass sie didaktisiert während des Unterrichts eingesetzt wurden, um die Beherrschung der Texte Ptolemäus' zu erreichen.

Landvermessung, Ingenieure und Architekten

Die Bildung in diesem Bereich war vermutlich abhängig von der Zugehörigkeit zu einer der vier Gruppen von Landvermessern: diejenigen der römischen Armee, solche im Dienste

[148] Hier sei nur auszugsweise auf Platon, Iamblichus, Syrianus und Proklus verwiesen; vgl. hierzu BERNARD et al. 2014: 47.
[149] Antidosis: 258-269; Diesem Gedanken schließt sich das CHIME-Konzept in Übereinstimmung mit der Idee überfachlicher Kompetenzen, wie sie in den Bildungsstandards und die aktuelle internationale Bildungsdebatte beschrieben werden, an.
[150] Auch lange nach dem Niedergang der babylonischen Reiche wurden astronomische Berechnungen in ihrer Tradition auf Basis des Sexagesimalsystems durchgeführt.

des Kaisers[151], Angestellte oder Sklaven der staatlichen Verwaltungseinrichtungen und Freischaffende. Abseits aller Spekulation ist über die Art ihrer jeweiligen Ausbildung sehr wenig bekannt, auch wenn die Inhalte des *Corpus Agrimensorum*[152] für die beiden letztgenannten Gruppen sicher als Inhalte angenommen werden können. Dieser *Corpus Agrimensorum* lässt die Bedeutung des Problemlösens als didaktisches Element zumindest in der Ausbildung dieser Berufsgruppen erstmals in seiner vollen Breite erkennen:

> *[…] significant parts of these sources are organized as series of problems often arranged in order of growing complexity. This organization bridges from simple, practical motivations to more theoretical or didactic concerns. Problems such as measurement are typically accompanied by algorithms for calculation generally associated with pedagogical activities or purposes, even though the exact connection may not be obvious at the elementary level of teaching. (BERNARD et al. 2014: 50)*

Auch sind zahlreiche Illustration im *Corpus Agrimensorum* enthalten, die sich aber nicht eindeutig als didaktisch identifizieren lassen, da der möglicherweise im Unterrichtskontext durchaus enthaltene Prozesscharakter nicht nachweisbar ist.

Arithmetisches Problemlösen/Heuristiklehre

Diophantus'[153] A*rithmetika* ist der erste Text der Geschichte, der als gezielt „heuristisches“ (wobei dieser Terminus als „heuresis“ sogar auftritt) und darüber hinaus explizit didaktisches Werk hervortritt. Von den ursprünglich dreizehn Büchern sind insgesamt zehn in griechischer Sprache und vier in arabischer Übersetzung erhalten geblieben, einschließlich des aufschlussreichen Vorworts. Hier erklärt der Verfasser, das Ziel sei es, „den Leser der Abhandlung dazu zu befähigen, die Fähigkeit zur Lösungsauffindung (εὕρεσις) bei arithmetischen Problemen[154] zu entwickeln“ (BERNARD et al. 2014: 50; eigene Übersetzung). Und es folgen didaktisch geordnete und aufbereitete Problemstellungen und ihre Lösungen, die den Erwerb einer Reihe von Problemlösetechniken ermöglichen (vgl. BERNARD/CHRISTIANIDIS 2011). Unter Berücksichtigung der gesamten Überlieferungs-

---

[151] Dies bezieht sich natürlich nur auf die römische Kaiserzeit, aus der allerdings das Gros der überlieferten Quellen zum Thema stammen (BERNARD et al. 2014: 49).

[152] Bei dem *Corpus Agrimensorum* ist die Sammelbezeichnung für eine Vielzahl römischer Schriften, die sich mit Verfahren zur Landvermessung befassen; die Einzeltexte stammen aus der römischen Kaiserzeit bis weit hinein ins frühe Mittelalter, abr auch Teile aus Euklid und vielen anderen nützlichen Texten wurden in den Corpus Agrimensorum einbezogen.

[153] Diophantus von Alexandria ist als historische Person bis heute nicht fassbar. Nicht einmal seine ungefähren Lebensdaten sind bekannt. Den Überlegungen von Schappacher (1998) folgend steht durch Verweise in anderen Quellen lediglich fest, dass seine *Arithmetika* zwischen 150 v. Chr. und 350 n. Chr. entstanden sein muss.

[154] Dieser Ausdruck stellt die Übersetzung des englischsprachigen Originalausdrucks „invention in arithmetic problems“ dar.

situation und verschiedener textlicher Hinweise fassen Bernard, Proust und Ross die Möglichkeit ins Auge, dass in der griechisch-römischen Tradition eine weit verbreiteten Praxis des Arithmetikunterrichts in Gestalt des Lösens von Problemen existierte, die für uns durch die *Arithmetika* nur noch zu erahnen ist (vgl. BERNARD et al. 2014: 50 f.).

Welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

Es ist sicher aussagekräftig, dass in den zentralen Bildungsfeldern der griechisch-römischen Antike, in der Philosophie, der Astronomie (und Astrologie), den militärischen wie zivilen Ingenieurswissenschaften und der Architektur die Mathematik integraler Teil der Bildung war[155]. Mit Blick auf den sogenannten *Corpus Agrimensorum* kommen Bernard, Proust und Ross zu folgender Einschätzung:

> *These texts significantly characterize mathematical skills as being basically dependent on the wider culture of the architect and useful for that culture. Such discussions about the utility of mathematical training within a larger intellectual framework are also characteristic of the introductory material contained in the Greek metrological corpus and in some prefaces in the CA [corpus agrimensorum, Anmerkung des Verfassers]. Vitruvius and Pappus/Hero also insist on the importance of developing creative skills which combine theoretical prerequisites with practical skills. (BERNARD et al. 2014: 49 f).*

3.4 Das Mittelalter: Niedergang und Wiedererstehung der Wissenschaft

Die Quellenlage ist für den europäischen Raum dieser Zeit noch dürftiger als zuvor, besonders in der Völkerwanderungszeit[156]: Der Zerfall römischer, dann west- und oströmischer Machtstrukturen im Verlauf der Völkerwanderungszeit und die nur langsame Reorganisation der kulturellen Einheiten des mittelalterlichen Europa bedingen eine lange Phase fehlender Quellen, aber auch Entwicklungen und Fortschritte auf dem Gebiet der Bildung selbst. Das heißt natürlich nicht, dass in dieser Zeit keinerlei Unterricht und Bildung stattfanden. Während des Frühmittelalters (etwa ab 750 v. Chr.) wurden erste neue Bildungsinstitutionen begründet. Die Verbreitung und der „öffentliche" Diskurs jedoch waren auf das Engste begrenzt und spielten sich – bezogen auf Mitteleuropa – fast ausschließlich auf klerikaler Ebene ab, und das sowohl personell als auch inhaltlich. Im

[155] Wie u.a. in den grundlegenden und jahrhundertelang einflussreichen Schriften Platos, Vitruvs und Quintilius' fassbar ist.

[156] Für Mitteleuropa wird die Zeit unmittelbar nach dem Zerfall des römischen Reichs üblicherweise als Völkerwanderungszeit (bis ca. 750 n. Chr.) bezeichnet; daran schließen sich das Frühmittelalter (bis ca. 1050 n. Chr.). das Hochmittelalter (bis ca. 1300 n. Chr.) und das Spätmittelalter (bis ca. 1500 n. Chr.) an.

Hoch- und Spätmittelalter mit dem Aufstieg der Städte und städtischen Kultur folgten dann die ersten Universitäten und begann auch die Institutionalisierung der Laienbildung.

Dies ist auch die wichtigste Grundunterscheidung bei der Frage nach der Entwicklung des Mathematikunterrichts: die kirchlich-theologische Unterrichtskultur ist von der Bildung der „Praktiker" zu trennen, von der leider nur die kaufmännische Richtung gut dokumentiert ist. Dass auch handwerkliche Berufe mathematische Bildung erforderten, steht außer Frage, ist aber in den Quellen nicht fassbar.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Die Spätantike und Völkerwanderungszeit war für die Mathematik(didaktik) wie die Unterrichtskultur insgesamt eine schwierige Zeit. Für Augustinus' Zeit, also das späte 4. Jahrhundert n. Chr., ist belegt, dass die Bildung bereits auf Grammatik und Rhetorik zusammengeschmolzen war. Das Quadrivium (vgl. Kap. 3.3) existierte nicht mehr, und Augustinus[157] selbst sah keinen Wert in der Beschäftigung mit der Mathematik, die über eine Verwendung für das Bibelstudium hinausginge. Zwar betrachtet er die mathematischen Erkenntnisse als göttlichen Ursprungs – einen Grund, sie zu erforschen und zu verstehen, sieht er darin jedoch nicht (vgl. HØYRUP 2014: 110). Es gibt keine Hinweise, dass in Europa in der Folgezeit Mathematik unterrichtet oder in irgendeiner Form weiterhin betrieben wurde. Die Aufzeichnungen des Isidor von Sevilla[158] belegen ganz im Gegenteil, welch dramatischer Verfall sich bis zum 7. Jahrhundert ereignet hat. Systematischer, gar didaktisierter Unterricht, fand nicht mehr statt, und die Bevölkerungsgruppen, die auf grundlegende mathematische Kenntnisse angewiesen waren, bezogen ihre Kenntnisse mit großer Wahrscheinlichkeit allein aus praktischer Unterweisung während ihrer Ausbildung.

Mit Karl dem Großen begann eine Wiederbelebung des Bildungswesens. Mathematisches Wissen stand jedoch auf Karls Liste notwendiger Bildungsinhalte sehr weit unten; nur als *calculus*, also zur Kalenderberechnung, tritt die Mathematik indirekt in Erscheinung. Dabei ist klar, dass grundlegende Rechenfertigkeiten an verschiedenen Stellen vorausgesetzt wurden, ohne dass erkennbar wäre, wo und auf welche Weise diese Kenntnisse erworben

[157] Augustinus, *354 n. Chr. in Thagaste, †430 n. Chr. in Hippo Regius (beides Nordafrika), war ein bedeutender spätantiker und frühchristlicher Philosoph, Theologe und Schriftsteller, dessen Schriften über Jahrhunderte die Geisteswelt und die Bildungsideen des Abendlandes prägten (vgl. TENORTH/TIPPELT 2007).

[158] Isidor von Sevilla, *ca. 560 n. Chr. in Carthago Nova, †636 n. Chr. in Sevilla (beides Spanien), stammte aus der gebildeten provinzialrömischen Oberschicht und kompilierte als einer der bedeutendsten Schriftsteller am Übergang von Spätantike zu Frühmittelalter das um 600 n. Chr. noch verfügbare antike Wissen in seiner Enzyklopädie *Etymologiarum sive originum libri XX*

wurden. Eine oftmals Alkuin von York zugeschriebene Sammlung von mathematischen Problemen,[159,160] die älteste erhaltene auf Latein, verweist eindeutig auf das Vorhandensein mathematischen Unterrichts. Sie behandelt sechsundfünfzig Problemstellungen aus verschiedenen Themenkreisen (Probleme des täglichen Lebens, Probleme unterschiedlicher Art aus der Unterhaltungsmathematik und Aufgaben der rechnenden Geometrie), setzt jedoch wiederum bereits Grundkenntnisse voraus. [161]

Zwar dauerte es noch lange Zeit, bis sich das von Karl dem Großen avisierte Schulwesen auch nur im Ansatz etablieren konnte, seine Ideen führten jedoch wenigstens zu einem wachsenden Interesse der Klöster an antiken Schriften. So begannen in der Zeit nach Karls Tod wieder vermehrt Übersetzungen und Abschriften griechischer und römischer Werke über die mathematischen Wissenschaften zu zirkulieren. Bis ins 12. Jahrhundert hinein waren Boethius'[162] *Arithmetica* und die lateinischen Quellen zur Landvermessung in der *Geometria Practica*[163], in Kombination mit einer Auswahl aus Euklid, Grundlage allen Arithmetik- und Geometrieunterrichts, sofern man wirklich von einem solchen sprechen kann. An den Domschulen Lothringens wurde, möglicherweise unter arabischem Einfluss, ein neuer Abakus eingeführt, der anscheinend vorwiegend zu didaktischen Zwecken eingesetzt wurde, ebenso wie ein Brettspiel namens *rhitmomachia*, das die Beherrschung der Arithmetik nach Boethius erforderte. Aus dem Bereich der Astronomie – immerhin wurde das Astrolab in dieser Epoche erfunden – lässt sich kein Hinweis für eine systematische Unterweisung finden. Mit Blick auf die Geometrie kommt Høyrup zu dem ernüchternden Schluss, „dass jedweder weitergehende Unterricht in landvermesserischer Geometrie, so er denn existierte, völlig vergeblich gewesen war."[164] Die überlieferten Briefwechsel „gehören nicht in zur Geschichte der Wissenschaft, sondern zu der der Unkenntnis"[165] (nach TANNERY 1922: 79; eigene Übersetzung). Für Høyrup steht fest, dass die Defizite nur auf fehlende

[159] Oftmals Alkuin von York, *735 n. Chr. nahe York, †804 c. Chr. wohl in Tours, einer der zentralen Figuren der karolingischen „Palastschule", zugeschrieben.
[160] Eine Analyse zu Inhalt und Bedeutung liefert SPRINGSFELD 2002, für eine annotierte Sammlung in englischer Sprache s. HADLEY/SINGMASTER 1992.
[161] Für eine ausführliche Beschreibung und Quellenanalyse s. FOLKERTS 1978.
[162] Anicius Manlius Severinus Boethius, *475/480 n. Chr. in Rom, †524 n. Chr. in Pavia, stammte aus römischer Senatorenfamilie und war ein christlicher, neuplatonischer Philosoph der Spätantike; als Ratgeber am Hof Theoderichs wichtiger Vermittler der antiken Kulturtradition, insbesondere ihrer Artes-Tradition (nach TENORTH/TIPPELT 2007).
[163] Auch *Practica Geometriae.* Es handelt sich um eine mittlelaterliche Sammlung unterschiedlicher Traktake zur Vermessungstechnik, die Hugo von St. Victor zugeschrieben wird. Eine ins Englische übersetzte Gesamtausgabe mit Einführung, Kommentaren und Anhang hat HOMANN 1991 vorgelegt.
[164] Originalzitat: „[…]that any further teaching of agrimensorial geometry, if existing, had been in vain" (HØYRUP 2014: 113; eigene Übersetzung).
[165] „[…] they belong not to the history of science but to that of ignorance" wird Tannery zitiert in HØYRUP 2014: 113.

Ausbildung im mathematischen Bereich zurückzuführen sein können, da die Autoren über andere Inhalte einen intelligenten und sachkundigen Austausch pflegen.[166]

In Verbindung mit einem Wandel der städtischen Kultur entstehen im Hochmittelalter[167] Schulen in zuvor nicht bekannter Größe und Verbreitung; auch tritt der freie Gelehrte und Lehrer in Erscheinung, der gegen Geld seine Schüler unterweist. In Paris, einer der auch bildungspolitisch bedeutendsten Städte des Mittelalters, lassen sich für diese Zeit eindeutige Informationen über Mathematikdidaktik finden. Die Klosterschulen boten auch den Söhnen reicher Bürger Bildung an, über die lange Zeit einflussreiche didaktische Texte erhalten sind, insbesondere das *Didascalion* und die *Practica Geometriae* des Hugo von St. Victor.[168] Während das *Didascalion* sich um eine Rechtfertigung der Lerninhalte und einen Einblick in ihre Struktur bemüht, handelt es sich bei der *Practica Geometriae* im echten Wortsinne um eine didaktisierte Geometrielehre: Die Geometrie dürfte tatsächlich von der praktischen Art gewesen sein, wie der Titel und auch die Ausführungen im *Didascelion* besagen. Ab welchem Alter die Unterweisung erfolgen sollte, oder an welche Zielgruppen sich Hugo richtete, geht aus dem Text nicht hervor. Bemerkenswert aber ist die gründliche, durchdachte Struktur der Inhalte, die auf gutem sub-euklidischem Material[169] basieren. Evans (1976) geht davon aus, dass dieses Material im Hochmittelalter einen größeren, unmittelbaren Einfluss auf das Wiederaufleben der Mathematik ausübte, da es von einer viel größeren und vielfältigeren Leserschaft rezipiert wurde, als die – sehr wichtiger – Übersetzungen Euklids, die im 12. Jahrhundert entstanden.

Für den wieder erstarkenden Unterricht in Mathematik waren die Übersetzungen[170] der *Elemente* von Euklid einerseits und der Import der sogenannten indisch-arabischen Ziffern von größter Bedeutung. Dabei sind zwei Dinge die zweite „Generation" der Euklidübersetzungen (angefertigt von Adelards Schülern) betreffend interessant zu beobachten: Erstens zeigen diese Texte bereits klare didaktische Überarbeitungen. Zweitens hat sich die inhaltliche Ausrichtung klar von der Anwendung in astronomischen Zusammenhängen

[166] Vgl. Høyrup 2014: 113.
[167] Als Hochmittelalter bezeichnet die Mediävistik die Epoche etwa von der Mitte des 11. Jahrhunderts bis zur Mitte des 13. Jahrhunderts, insbesondere in Bezug auf den christlich und durch die lateinische Sprache geprägten Kulturraum Mitteleuropas.
[168] Hugo von St. Victor war Leiter einer der renommiertesten Pariser Schulen für Nichtkleriker. Beide ihm zugeschriebenen Texte werden etwa auf die Jahre 1120-1129 datiert, vgl. Høyrup 2014: 113.
[169] Bei sogenannten sub-euklidischen Quellen handelt es sich um mathematische Texte mittelalterlicher Autoren, die sehr einfaches Grundwissen in Geometrie schriftlich niederlegten, vielfach ohne selbst Euklid gelesen zu haben.
[170] Verschiedene, etwa gleichzeitig entstandene Übersetzungen sind bekannt, sowohl aus dem Arabischen (Adelard von Bath und Gerard von Cremona) wie aus dem Griechischen (anonymer Übersetzer). Für eine Gesamtübersicht über Handschriften und die verschiedenen, bis ins 20. Jahrhundert erschienenen Editionen Euklids vgl. Streck 1981.

wegbewegt; die Mathematik selbst ist vorrangiges Ziel des Studiums der Schriften geworden. Auch wenn die Ausbreitung sowohl der Elemente, des *Almagest* als auch der indisch-arabischen Ziffern im Bildungskontext des Hochmittelalters sich wieder nicht historisch klar fassen lässt, so sind ihre Auswirkungen eindeutig und umfassend. Am Ende des 12. Jahrhunderts steht – mit einer Vielzahl anderer (neu) auflebender wissenschaftlicher Disziplinen – auch die Mathematik für den Beginn einer neuen Bildungsepoche.

Universitäten

Die florierenden Städte und die in ihnen ablaufenden kulturellen und sozialen Transformationsprozesse führten im 13. Jahrhundert zur Entstehung einer der wichtigsten Bildungsinstitutionen der europäischen Geschichte: der Universität.[171] Die im Norden Europas entstehenden Universitäten, etwa in Paris, Oxford, später auch Cambridge und Heidelberg erwuchsen dabei unmittelbar aus dem Kathedralschulwesen der karolingischen Epoche, und fußten daher auf den Freien Künsten, einschließlich der Mathematik. Über den (Mathematik-)Unterricht an den Universitäten[172] lässt sich historisch einiges mit Sicherheit sagen. Die Ausbildung an Artistenfakultät (später in Philosophische Fakultät umbenannt) begann im Alter von etwa vierzehn Jahren und dauerte sechs Jahre, wobei nach vier Jahren der Grad des *Baccalaureus* erreicht wurde. Wer die vollen sechs Jahre erfolgreich abschloss, führte seine Studien üblicherweise an den prestigeträchtigen Medizinischen Fakultäten oder den Fakultäten des Kanonischen Rechts, gegebenenfalls auch an der Theologischen Fakultät fort. Mathematik wurde lediglich in den ersten sechs Jahren an der Philosophischen Fakultät gelehrt, und es war kein Pflichtfach.

Es gibt auch aufschlussreiche Hinweise, dass und wie Mathematik im voruniversitären und universitären Umfeld gelehrt wurde; hier sind besonders einige Einführungen in die Arbeit mit den arabischen Ziffern zu nennen, und auch Euklids Elemente wurden an den Universitäten gelehrt, wie besonders eindrücklich durch eine Sammlung von *Quaestiones* (GRABMANN 1934) zu allen 15 Büchern der Elemente belegt ist. Es scheint allerdings wahrscheinlicher, dass lediglich die ersten vier Bücher regulär im Mathematikunterricht dieser Zeit behandelt wurden.[173]

---

[171] Es sei an dieser Stelle auf die Kurzdarstellung in KARP/SCHUBRING 2014: 115 ff. und auf das ausführliche Werk von Pedersen (1998).
[172] Die Universität in Paris diente vielen späteren europäischen Universitäten als Vorlage, weswegen Høyrup (2014: 116 f.) die hierzu verfügbaren Informationen als exemplarisch annimmt.
[173] Hierfür wird ein Euklidkommentar, der möglicherweise von Albert dem Großen stammt, als Argument angeführt. Vgl. HØYRUP 2014: 117.

Eine didaktisierende Gestaltung mathematischer Texte bzw. ihrer Neuübersetzungen bleibt weiterhin fassbar, so etwa in der von Campanus von Novara[174] angefertigten Fassung der Elemente, die gut dreihundert Jahre, bis ins späte 16. Jahrhundert, als Standardausgabe verwendet wurde. Bis zum Ende des Mittelalters gibt es wenige Änderungen an der skizzierten Situation der mathematischen Lehre an der Pariser Universität. Obwohl es immer wieder Universitätsgelehrte gab, die auf dem Gebiet der Mathematik arbeiteten und forschten und auch bedeutende Beiträge lieferten[175], wurde von den Studenten zur Abschlussprüfung nicht mehr verlangt, als dass sie überhaupt „etwas Mathematik gehört haben sollten“ (vgl. HØYRUP 2014: 117). Andererseits werden in Paris gegen Mitte des 14. Jahrhunderts Lehrstühle für Astrologie eingerichtet, die mathematische Ausbildungsteile an ihre Fakultät ziehen und binden. Wie viele der als Fundament der Astrologie betrachteten Werke allerdings tatsächlich und in welcher Tiefe gelehrt wurden, ist historisch nicht nachvollziehbar (daher in Tab. 2 kursiv eingetragen). Für die Universität von Oxford steht ein Kanon von Texten fest, der die universitäre Mindestbildung in Mathematik umschreibt[176]: Nach vier Jahren an der Artistenfakultät mussten die Studenten sechs Bücher von Euklid, die *Arithmetica* von Boethius, sowie Sacroboscos *Tractatus de Algorismo* und *De Sphaera* kennen; zu jedem dieser Inhalte sind sogar Zeitkontingente fest vorgeschrieben. Dass darüber hinaus fortgeschrittene Mathematik[177] gelehrt wurde, darf für Oxford als sicher gelten.

Für die Universitäten Wien und Heidelberg, die beide dem Pariser Modell folgten, sind die erforderlichen Kenntnisse in Mathematik zur Erlangung des Baccalaureat bzw. der Licentia recht detailliert überliefert. Die Inhalte sind der Übersichtstabelle (Tab. 2) zu entnehmen.

Zumindest für Wien gibt es schriftliche Hinweise, die darauf hindeuten, dass Mathematik insgesamt eher als nicht ernsthafte Wissenschaft betrachtet wurde; und überhaupt verwundert aus heutiger Sicht die Tatsache, dass trotz des großen Interesses an Logik und Naturphilosophie aristotelischen Zuschnitts der Unterricht in Mathematik an den mittelalterlichen Universitäten so wenig entwickelt und rudimentär blieb.

---

[174] Campano da Novara, lat. Campanus Nauariensis, *ca. 1220 wohl in Novara, †1296 in Viterbo, war italienischer Gelehrter und einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, wie der Zeitgenosse Roger Bacon befand. Seine lateinische Euklidübersetzung bzw. -bearbeitung in fünfzehn Büchern wurde fast dreihundert Jahre später als erste in gedruckter Form aufgelegt.

[175] Als Beispiel sei hier Nikolaus von Oresme genannt, *vor 1330, †1382 in Lisieux, der in mancher Hinsicht als früher Vordenker des modernen Wissenschaftsbegriffs gilt.

[176] Zu entnehmen den Statuten der Universität aus dem Jahre 1340, vgl. GIBSON 1931: 33.

[177] Høyrup weist auf die Mathematikergruppe des Merton Colleges hin und vermutet daher Inhalte aus der Proportionstheorie und ihre Bezüge zu Naturphilosophie und Theologie (2014: 118).

	Artistenfakultät	Höhere Fakultäten
Paris	Sacroboscos (oder anderer) Algorism Sacroboscos De sphaera Computus Boethius’ Arithmetica Boethius’ De musica Euklids Geometria Ptolemaeus’ Astrolab Almagest Theodosius’ und Menelaus’ Traktake zur sphärischen Geometrie Jābir ibn Aflah’s und al-Bitrujī’s Arbeiten zur planetaren Astronomie weitere astrologische Schriften	
Oxford	sechs Bücher von Euklid (5 Wochen) Boethius’ Arithmetica (3 Wochen) Sacroboscos Algorism (8 Tage) Sacroboscos De sphaera (8 Tage) computus (8 Tage)	
Bologna	ein Algorismo für ganze Zahlen und Brüche (sexagesimale Brüche für astronomische Berechnungen) die astronmischen Tafeln Alfonsos X Campanus’ Fassung von Euklids Elementen I–III Traktake über die Verwendung des Astrolabiums und des Quadranten Theorica planetarum Buch III des Almagest (Theorie der Sonne)	
Wien	De sphaera Algorismo Euklid Buch I (oder vergleichbar)	Theorica planetarum fünf Bücher Euklid (Pecham’s) Perspectiva communis Traktate zu Proportionen eines zu den latitude of forms etwas Musik etwas Arithmetik
Heidelberg	De perspectiva Euklids Elemente I–IV Algorismo Computus Theorica planetarum	
		verschiedene mathematische Ganzschriften De sphaera

Tab. 2 Mathematische Bildungsinhalte der wichtigsten mittelalterlichen Universitäten Nordeuropas im Überblick (basierend auf Høyrup 2014: 118 ff.).

Høyrup schlägt als Grund hierfür – überzeugend – die vorherrschende methodische Gestaltung der Lehre vor. Da in der Zeit vor der Erfindung des Buchdrucks mit beweglichen Lettern nur wenige Werke und in geringer Anzahl von Kopien schriftlich vorlagen bzw. sich im Eigentum der Studenten befanden, waren Vorlesungen die Hauptinformationsquelle.

Während sich in Kombination mit intensiven Diskussionen philosophische (und das heißt auch mathematikphilosophische) Fertigkeiten und Kenntnisse gut vertiefen lassen, ist dies für das, was wir unter Mathematik verstehen, schwer vermittelbar. Um hier Fortschritte zu erzielen, muss praktische Anwendung geübt werden, was in der damaligen universitären Lehre nur an einigen wenigen Stellen möglich war: Computus, Rhithmomachia und das Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern – und eben diese mathematischen Nischenfertigkeiten blieben bis in die Neuzeit bedeutsam.

Laienschulwesen

Erstmals in Norditalien lassen sich nicht-klerikale Schulen fassen, die mathematische Grundbildung (für Jungen) sicherten. Dass dies zuerst im kommerziell aufstrebenden und hochinnovativen Raum Norditalien geschah, kann kaum überraschen.[178] Der „Lehrplan“ ist durch die überlieferten Rechenbücher (auch Abbacus-Bücher genannt) gut bekannt und lässt sich wie folgt zusammenfassen: [179, 180]

1. Zahlen in der indisch-arabischen Ziffernschreibweise notieren
2. Multiplikationstabellen und ihre Anwendung
3. Division, durch Umkehrung der Multiplikationstabellen, dann auch durch mehrstellige Divisoren
4. Bruchrechnung
5. Kommerzielle Mathematik verschiedenster Art, ohne erkennbare Reihenfolge.

Für die Frage problemorientiertem Unterricht in Mathematik ist von besonderem Interesse, dass fast von Beginn an die schulische Unterweisung durch Problemstellungen ergänzt wurden, die die Schüler zu Hause zu bearbeiten und zu lösen hatten. Auch gab es weiterführende Inhalte, die in Lehrbüchern ausführlich, scheinbar aber nicht in der Schule behandelt wurden. Die genaue Funktion der Rechenbücher ist nicht gänzlich klar. Es scheint plausibel, dass sie als Sammlung von Aufgaben für den Lehrer dienten und nicht im Besitz der Lerner waren. Ebenfalls erwähnenswert ist, dass viele Techniken, die in den Handelshäusern in der Buchhaltung nachweislich angewendet wurden, keineswegs Schulstoff waren, sondern erst während der praktischen Ausbildung, aber auf Grundlage der schulischen Basiskenntnisse, erworben wurden. Hinzu traten spezielle Rechenschulen, wie

[178] Vgl. Filloy et al. 2008: 69 ff. Die Autoren sprechen von einer Kommerziellen Revolution in Norditalien ab dem späten 13. Jahrhundert.
[179] Vgl. Høyrup 2014: 120 für die folgende Listung.
[180] Etwas ausführlicher geht Bjarnadóttir (2014: 433) auf die Inhalte ein.

die von Adam Ries in Erfurt und Annaberg geleiteten. Für Flandern, das ab dem 12. Jahrhundert ebenfalls einen substanziellen wirtschaftlichen Aufstieg erlebte, lassen sich gewisse Parallelentwicklungen beobachten. Auch hier wurden in Bürgerschulen Lese- und Schreibfertigkeiten zusammen mit mathematischen Grundkenntnissen vermittelt, aber die erhaltenen schriftlichen Quellen lassen vermuten, dass sich keine vergleichbare kaufmännische Rechentradition und darauf aufbauend schulische Mathematiklehre wie in Norditalien entwickelte. In Deutschland wurde Handelsrechnen durch private Rechenmeister gelehrt, deren Anzahl stetig zunahm (vgl. Bjarnadóttir 2014: 433).

Ingenieure und Kunsthandwerker

Ein weiteres Feld mathematischer Bildung lässt sich für das späte Mittelalter fassen; es existierte autonom, ohne festen Bezug zu universitären Traditionen oder den Laienschulen. Möglicherweise ununterbrochen seit der Antike wurde mathematisches Wissen innerhalb von spezialisierten Berufsgruppen weitergegeben, das weder der wissenschaftlichen Tradition noch der „praktischen Geometrie" angehört. Heute würde man von ingenieurswissenschaftlicher Mathematik sprechen, wie sie von Baumeistern, Schiffbauern und anderen exakt arbeitenden Ingenieurswissenschaften benötigt, aber stets nur im Rahmen der Ausbildung vermittelt wurde – nie in einer eigens dafür eingerichteten Schule. Die Unterweisung geschah, so darf man annehmen, weitgehend mündlich und war außerdem sehr stark auf die einzelnen Professionen beschränkt.

Welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

Es zeigt sich eine deutliche Diskrepanz zwischen der theoretischen Bildung der Universitäten und dem Rechenschulwesen italienischen Zuschnitts. Die Handelshäuser mit ihren vormodernen Buchhaltungssystemen und wirtschaftlichen Großeinflusszonen waren auf kreative Lösungen angewiesen, die ein fundiertes Wissen in Arithmetik verlangten. Die Lehrinhalte der Rechenschulen waren mit Blick auf die zukünftige Anwendung strukturiert, und auch eine klare methodische Grundausrichtung war erkennbar. In Nordeuropa dagegen behalf man sich auch in Handelskreisen mit wenigen Grundkenntnissen, und das Rechenschulwesen, wo man seine Existenz sicher belegen kann, beschränkte sich fachinhaltlich – und so kann man argwöhnen auch didaktisch – auf ein absolutes Minimum.

Die für konkrete Problemlösungen eingesetzte Mathematik der mittelalterlichen „Ingenieure" ist durch die Art ihrer Vermittlung nicht mehr eindeutig zu rekonstruieren. Dass hier eine stumme Tradition existiert haben muss, steht jedoch außer Frage, und die

Tatsache, dass hier spezialisiertes Wissen wohl über eintausend Jahre weitergegeben wurde, lässt den Stellenwert, den dieses Wissen innerhalb der Professionen besaß, erahnen.[181]

3.5 Renaissance, Frühe Neuzeit und Vormoderne: Das Bürgertum, die Antike und die Reformation

Mit dem Beginn der Renaissance setzte ein kultureller, letztlich gesamteuropäischer Wandel in allen Domänen der Gesellschaft und damit auch der Bildung ein. Der Bedeutungsverlust der katholischen Kirche zugunsten einer zunehmend an humanistischen Idealen orientierten und nationalstaatlich organisierten Feudalelite und ebenso der aufsteigenden Klasse des Bürgertums führte zu einer Neuausrichtung der lehrenden und wissenschaftlichen Institutionen. Der Staat gewann maßgeblich an Einfluss auf die Bildungseinrichtungen, und die Mathematik wurde (zumindest zeitweise) im Rahmen dieser nationalen und humanistischen Reformbewegungen aus ihrem Schattendasein als Sekundär- oder Hilfswissenschaft im Quadrivium und der Medizin befreit.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Es ist interessant, dass sich die Rückbesinnung auf die antike Kulturtradition nicht nur inhaltlich und philosophisch nachvollziehen lässt, sondern auch auf der Ebene der Bildungspolitik in gewisser Weise eine Rückkehr zu den ersten Anfängen von schulischer Bildung erfolgt: Wie schon die frühen Zivilisationen setzen die staatlichen Gebilde der beginnenden Neuzeit auf die Kontrolle der Bildungsinhalte, um ihre Interessen zu wahren, ihre Bürger zu kontrollieren und die eigene Macht zu fundamentieren. Es liegt nahe anzunehmen, dass dieses Ziel mit den nun zur Verfügung stehenden technischen Mitteln und der größeren politischen und ökonomischen Einflusssphäre noch besser als in vorchristlichen Zeiten erreicht werden konnte. Mit der wachsenden Bedeutung der Ökonomie sowohl in kultureller wie in regierungspolitischer Hinsicht nahmen dabei insbesondere die Bedeutung der mathematischen Bildung und der Bedarf an mathematisch geschulten Personen zu; dabei spielten auch religiöse Einflüsse und Konflikte – in Folge der Reformation – noch lange eine wichtige Rolle in dieser Entwicklung. Alle diese Umwälzungen der beginnenden Neuzeit gemeinsam etablierten einen neuen organisatorischen und didaktisch-methodischen Rahmen für (mathematische) Bildung.

[181] Als bekanntes Beispiel für den Wert dieser Art von Spezialwissen sei hier an das Gebiet der Alchimie erinnert; der Herstellungsprozess für das berühmte Chartresblau der Kirchenfenster der gotischen Kathedrale zu Chartres unterlag strengster Geheimhaltung und sicherte Generationen von Glasbläsern Wohlstand und Ansehen.

Eine bis heute bestehende Innovation war die Einführung des Sekundarschulwesens, das nun den „voruniversitären" Stoff vermittelte. Diese neue Schulform war durch eine ganze Reihe voneinander unabhängiger Entwicklungen in den städtischen Zentren und auf Drängen vor allem des Bürgertums[182], aber auch durch Veränderungen an den Universitäten selbst[183], am Ende des Mittelalters vorbereitet worden (vgl. Kap. 3.4). Nun jedoch bildete sich eine relativ einheitliche Struktur für eine solche voruniversitäre Ausbildungsinstitution, die sich vor allem durch drei Merkmale von der Ausbildung an der Artistenfakultät der Universitäten unterschied:

Der Unterricht wurde in *jahrgangsgestuften* Lerngruppen, anstelle einer Vorlesung in Form eines *lenkenden und didaktisierten* Unterrichts und von *einem* verantwortlichen Lehrer abgehalten. Im Zuge dieser Neuerfindung bewirkte Melanchthon[184], selbst mathematisch gebildet, mit den von ihm verfassten Schulordnungen eine erste Neubewertung und, zunächst noch zögerliche, Stärkung des Mathematikunterrichts; gleichwohl blieb Arithmetik vor allem Inhalt der Hochschulen. Andererseits etablierte das protestantische Universitätssystem den mathematischen Lehrstuhl erstmals fest an der Artistenfakultät.

Auf katholischer Seite beförderten die Jesuiten die Ausbreitung der Bildungsinstitutionen – die sich allerdings sehr viel stärker an theologische Aspiranten richtete – und prägten ihre Inhalte maßgeblich. In der ersten standardisierten *Ratio Studiorum*[185] von 1599 war die der Mathematik zugedachte Rolle minimal; auch, weil nach jesuitischem Verständnis des Lernprozesses eine Vermischung verschiedener Lerninhalte ungünstig war und so jedes Schuljahr auf einen einzigen Themenbereich fokussierte. Die Mathematik wurde daher nach dem Aristotelischen System erst im letzten Schuljahr in philosophische Inhalte integriert in die Lehre einbezogen. Die konsensfähigen und in der *Ratio Studiorum* enthaltenen Vorschriften umreißen den als notwendig erachteten Mathematikunterricht folgen-

[182] An vielen vor allem deutschen und niederländischen städtischen Schulen ersetzten Jahrgangsklassen die Unterweisung in „Haufen"; an den ersten Gymnasien wurde die bis heute vorherrschende Benennung und neunjährige Gliederung eingeführt und neben der Vermittlung grundlegender Kulturfertigkeiten ein Kanon von Griechisch, Latein und Sprecherziehung. Das Vorreitergymnasium in Strasbourg vermittelte aber darüber hinaus auch Logik und Geometrie (vgl. KARP/SCHUBRING 2014: 131 f.).

[183] Um die Disziplin der sehr jungen Studenten der Artistenfakultät zu verbessern und das Lernen zu systematisieren und zu effektivieren, wurde die Unterweisung zunehmend weniger in Form von Vorlesungen, sondern eher in Form ‚schulischen Unterrichts' im heutigen Sinne abgehalten, es wurde eine Einteilung der Studenten etwa nach ihrem Alter vorgenommen, die jeweils von nur einem Lehrer unterwiesen wurden (ibid.).

[184] Philipp Schwarzerdt (gräzisierter Name Melanchthon), *1497 in Bretten, †1560 in Wittenberg, war ein bedeutender Philosoph, Philologe und Lehrbuchautor sowie Wegbereiter von Gymnasien protestantischer Prägung. Er war neben Martin Luther einer der wichtigsten deutschen Reformatoren.

[185] Das Curriculum an den Schulen der Jesuiten ist diesem Dokument klar zu entnehmen und sah, mit von Europa bis Südamerika reichender Geltung, folgende Inhalte für die sieben Ausbildungsjahre vor: drei Jahre für verschiedene Bereiche der Grammatik, zwei Jahre für Poesie und Rhetorik, zwei Jahre Philosophie.

dermaßen: Im letzten Studienjahr sollten Studenten etwa vier Monate lang eine Dreiviertelstunde Mathematik hören. Der Lehrer sollte die Elemente des Euklid behandeln und nach etwa zwei Monaten auch Inhalte aus der Geographie und *De Sphaera* parallel unterrichten. Die einzigen pädagogischen Hinweise besagen, dass – und dies ist für uns sicher bemerkenswert – wechselnde Studenten ihren Klassenkameraden mathematische Probleme erläutern sollten, und dass regelmäßige Wiederholungen sinnvoll seien (vgl. SCHUBRING 2014: 135). Bedenkt man, dass viele Studenten das letzte Studienjahr nicht absolvierten und dass der mathematische Schwerpunkt hier auf astronomischen Themen lag, so wird klar, wie gering die Bedeutung der Mathematik für die Ausbildung geeigneter Kirchendiener in den Augen des Jesuitenordens war.

Welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

In der Zeit der frühen Nationalstaaten und vor allem religiöser Konflikte und Kämpfe um eine kulturelle wie geistige Vorherrschaft in Europa spielte die Mathematik insgesamt und auch ihre praktische Anwendung in der höheren Bildung[186] keine erwähnenswerte Rolle. Gerade auch die Rückbesinnung auf antike Vorbilder im Zuge der Renaissance und der anschließenden Humanismusbewegung lenkte den Blick nach der langen Phase des Mittelalters viel stärker in Richtung (natur)philosophischer Fragen und Bezugssysteme.

Dass sich parallel dazu in der merkantilen Mittelschicht ein eigenes System praktischen Unterrichts fortsetzte, ist nachweisbar etwa in einer doch beträchtlichen Anzahl von Rechenbüchern und später auch anspruchsvolleren mathematischen Sammlungen, wie der *Arithmetica Historica* von Suevus. Gerade dieses war zwar auch als Lehrwerk zur Verwendung an Schulen gedacht, ist aber den Kaufleuten gewidmet und grundsätzlich ebenso oder sogar primär für ein Selbststudium konzipiert (vgl. BJARNADÓTTIR 2014: 437).

Ab 1628 legte Comenius[187] mit seiner Großen Didaktik ein nachhaltig bedeutsames pädagogisches Werk vor, das eine erste allgemeine Erziehungstheorie schuf. Er definiert den Begriff der Allgemeinbildung erstmals in der Neuzeit, und zwar als Bildung, die „für irdisches und ewiges Leben nützlich ist, damit Kinder das lernen, was ihnen im späteren Leben begegnen wird und vorausschauend lernen, klug damit umzugehen“ (KUHLMANN 2013: 23). Er beschrieb auch einige didaktische Grundprinzipien, die bis heute in der Päda-

[186] Darunter sind hier wie im Folgenden die weiterführenden, entweder der geistlichen und/oder politischen Elite vorbehaltenen Bildungsinstitutionen wie Sekundarschulen und Universitäten und deren Lehrinahlte gemeint.
[187] Jan Amos Komensky (latinisierter Name: Comenius), *1592, †1670, war der einflussreichste Didaktiker der frühen Neuzeit; er verfasste das grundlegende Werk *Didacta Magna* (Die Große Didaktik) und weitere Lehrbücher und war an den Reformprozessen im Bildungswesen der beginnenden Neuzeit maßgeblich beteiligt.

gogik und Didaktikforschung Einfluss ausüben und inzwischen wissenschaftlich belegt sind: So sollten immer möglichst viele Sinneskanäle am Lernprozess beteiligt werden und außerdem vom Allgemeinen zum Speziellen, vom Leichten zum Schwierigen, vom Beispiel zur Regel usw. gearbeitet werden (vgl. Kap. 1.2.7).[188] Speziell über die Mathematik sagte er, dass „Arithmetik und Geometrie zum Teil wegen ihrer Notwendigkeit für das Leben und zum Teil wegen ihrer Bildungswichtigkeit, die den Geist anregen und schärfen" (BJARNADÓTTIR 2014: 438) gelehrt werde. Arithmetische Kenntnisse staffelte er wie folgt:

1. Lernjahr: Zahlenverständnis
2. Lernjahr: Addition und Subtraktion
3. Lernjahr: Multiplikation und Division
4. Lernjahr: Proportionen und Dreisatz
5. Lernjahr: Variationen von Proportionen
6. Lernjahr: Logistik
7. Lernjahr: die heiligen und mystische Zahlen der Bibel

Im weiteren Verlauf des 17. Jahrhundert stagnierten allerdings viele Entwicklungen, die sich bereits seit dem 16. Jahrhundert in Richtung der Moderne bewegt hatten. Neben dem Dreißigjährigen Krieg waren auch Seuchen Gründe, warum den Belangen der Bildung weniger Aufmerksamkeit geschenkt wurde als in der Phase zuvor. Im späteren Verlauf des Jahrhunderts kamen jedoch neue Entwicklungen in Gang, die auch und insbesondere die Lehre von Mathematik betrafen, und zwar aus bemerkenswerten Gründen. Offenbar führte mangelndes mathematisches Wissen in bestimmten Berufsgruppen zu existenziellen bzw. wirtschaftlich bedenklichen Missständen: Französische Schiffe sanken aufgrund fehlender navigatorischer Kenntnisse[189] und in bestimmten Regionen Italiens, die regelmäßig von Überschwemmungsereignissen betroffen waren, führten fehlende Kenntnisse in Wasserbautechnologie zu katastrophalen Zuständen.[190] Der besonders in Frankreich, Italien[191] und Portugal[192] erstarkende Mathematikunterricht verlangte nach einer professionelleren Lehrerschaft, und so waren es nur noch einzelne, spezialisierte Lehrer, die diese Mathematikkurse – im Übrigen additiv zum laufenden Unterricht – erteilten. Neben den lang etablieren Schulen entstanden an der Schwelle zur Aufklärung besonders in Frankreich

[188] Vgl. KUHLMANN 2013:24 f. auch für Übersetzungen der Originalzitate.
[189] Vgl. RUSSO 1986: 423.
[190] Nach KARP/SCHUBRING 2014: 136.
[191] Vgl. FIOCCA/PEPE 1985a und 1985b.
[192] Vgl. LEITÃO 2007.

zahlreiche neue Schulen auch in Städten mittlerer Größe, die sich unter Leitung des französischen *Oratoriums*[193] deutlich stärker der Wissenschaft und besonders auch der Mathematik verschrieben. Lehrpläne selbst sind nicht erhalten; die von Mitgliedern des *Oratoriums* verfassten Lehrwerke, die alle grundlegenden Gebiete der Mathematik systematisch abdecken, belegen dies jedoch nachdrücklich.[194]

3.6 Die Sattelzeit: Das pädagogische Jahrhundert und der Weg in die Moderne

Etwa von der Mitte des 17. bis zur zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erstreckt sich eine Phase des massiven gesellschaftlichen Umbruchs, die die Zeit der *Aufklärung* (1650/1700-1800) und die *Sattelzeit*[195] (1750-1850/70) umfasst.[196] Im deutschsprachigen Raum wird besonders das 18. Jahrhundert auch als *pädagogisches Jahrhunderts* charakterisiert, da sich Bildung und Erziehung erstmals als gesamtgesellschaftliche Projekte definierten, was zu einer Blüte einerseits der wissenschaftlichen Behandlung dieser Themen und andererseits der staatlichen bzw. zentralistischen Einflussnahme führte. Natürlich gab es auch zuvor pädagogisches Denken und Handeln, Theorien zum Lernen und Unterrichten, auch Bemühungen um eine Zentralisierung von Bildungsmaßnahmen – aber erst jetzt entsteht aus einer Vielzahl von pädagogisch-didaktischen Einzelkonzeptionen und parallel existierenden Institutionstraditionen allmählich, in einem echten öffentlichen Diskurs, wie er erst in der Zeit der Aufklärung möglich wird, ein festes Element staatsbürgerlichen Bewusstseins. Nach der ökonomischen folgte nun die philosophisch-weltanschauliche Selbstfindung der noch jungen europäischen Nationalstaaten. Und die Mathematik spielte in den auch bildungspolitischen Umwälzungen dieser Zeit, die in der Französischen Revolution gipfelte, eine Schlüsselrolle (SCHUBRING 2014: 137).

Für den deutschen Sprachraum zeichnet Klafki[197] von dieser prägenden Zeit der zweiten Hälfte des 18. und den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts, in der der Bildungsbegriff entwickelt und im modernen Sinne geprägt wurde, das Bild einer Epoche, in der eine

[193] Es handelt sich bei den *Oratorianern* um eine vom römischen Vorbild Filippo Neris abgeleitete französische Kongregation, die sich auf Seite der katholischen Gegenreformation um Seelsorge und Wissenschaftspflege bemühte.
[194] Für eine Liste der Lehrwerke und Angaben zu ihrer wiederholten Neuauflagewird auf KARP/SCHUBRING 2014: 137 verwiesen.
[195] Der Begriff wurde von dem deutschen Historiker Reinhart Koselleck, *1923 in Görlitz, †2006 in Bad Oeynhausen, geprägt, der das Bild des „Bergsattels“ auf die Phase zwischen Früher Neuzeit und Moderne übertrug (KOSELLECK 1979: xv).
[196] Da beide Begriffe auf unterschiedliche, wenn auch verknüpfte, gesellschaftliche Systeme (philosophisch-ideologischer Diskurs und Bildungsdiskurs) beziehen, sind diese Überschenidungen nur logisch; im Zuge der Aufklärung veränderte sich auch das Verständnis von und das Interesse an Bildung und Erziehung, so dass zeitverzögert auch hier eine Reformbewegung entstand.
[197] Vgl. KLAFKI 2007: 16-41.

Bildungstheorie auf dem höchstem wissenschaftlichen, philosophischen und moralischem Niveau entworfen, entwickelt, diskutiert und verbreitet wurde. Neben den drei Hauptdimensionen *moralische Bildung, kognitive Bildung, ästhetische Bildung* ist auch die praktische, d.h. tätige Auseinandersetzung mit der Umwelt[198] durchgängiger Bestandteil des klassischen Bildungskonzepts, da „dem Anspruch einer umfassenden, allgemeinen Menschenbildung nur entsprochen werden kann, wenn von den frühesten Phasen an [...] die Perspektive künftiger beruflicher Tätigkeiten und Bewährungen im Bildungsgang selbst repräsentiert ist" (KLAFKI 2007: 35). Dass die praktischen Folgen dieser theoretischen Fortschritte aus den verschiedensten historischen Gründen und Umständen der deutschsprachigen Länder der damaligen Zeit weit hinter dem zurückblieben, was an intellektuellem Potenzial zur Verfügung stand, ist richtig und zeigt sich im folgend Dargestellten.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Neue Schularten entstanden, bestehende Schulen änderten ihre Ausrichtung ebenso rasch und radikal, wie es für diese Zeit als Epoche der – europäischen – Geschichte insgesamt kennzeichnend ist. Aus den oben angesprochenen Entwicklungen des späteren 17. Jahrhunderts heraus entstanden überall in Europa[199] Adels- und Militärschulen[200], die sich, unter anderem, besonders der Ausbildung von (Militär-)Ingenieuren widmeten: Mathematik war hier neben Naturwissenschaften und modernen Fremdsprachen ein integraler Bestandteil der Lehrpläne (und sogar Zugangsvoraussetzung), insbesondere für Artillerie- und Marineoffiziere. Aber auch an weniger anspruchsvollen Schulen für Offiziere der Kavallerie und Infanterie wurde Mathematik bald als Pflichtfach verlangt. Diese Art von Schulen war allerdings zunächst nur Angehörigen des Adels zugänglich, die den gehobenen Militärdienst anstrebten. Die herausgehobene Stellung, die die Mathematik an diesen Schulen sowohl in den Eingangs- als auch den Abschlussprüfungen besaß, wurde später, nach der Französischen Revolution, zum Modell für das Staatliche Schulwesen (SCHUBRING 2014: 138).

[198] Am bekanntesten sicherlich in der Formel „Kopf – Herz – Hand" von Pestalozzi gefasst. Johann Heinrich Pestalozzi, *1746 in Zürich, †1827 in Brugg, war ein schweizerischer Pädagoge, Schriftsteller und Schulreformer, der wegweisende Werke zu moralischer Erziehung und Bildungspraxis verfasste, die besonders im deutschen Sprachraum große Wirkung entfalteten.

[199] Besonders bemerkenswert ist die Unterschiedslosigkeit, mit der dies für katholisch wie protestantische Staaten gilt – ein Hinweis darauf, dass *beide* teils doch recht unterschiedlich wirkenden Bildungssysteme auf vergleichbare Problemsituationen fehlender mathematisch-ingenieurswissenschaftlicher Kenntnisse und Fertigkeiten hingeführt hatten.

[200] Die in den verschiedenen europäischen Ländern als Adelsschulen und Ritterschulen bezeichnet wurden.

In Deutschland wurde das Sekundarschulwesen durch die Gründung der (pietistisch geprägten) *Realschulen*[201] nachhaltig beeinflusst. Diese Schulen wandten sich erstmals in institutionalisierter Form ganz bewusst gegen eine Bildung „für die Universitäten" und versuchten nicht eine Weiterentwicklung oder Verbesserung gymnasialer Schulpraxis, sondern strebten eine ganz neue Art von Bildung an, die sich im Geiste des Philanthropismus der Vermittlung „nützlichen Wissens" verpflichtet fühlte (vgl. SCHUBRING 2014: 439). An diesen *Realschulen* mit meist ökonomischer und/oder technischer Ausrichtung spielte Mathematik eine ganz entscheidende Rolle. Eine analoge Entwicklung ist auch für die Niederlande festzustellen. Die Lehrpläne umfassten dort je nach Ausrichtung vor allem Geometrie, Trigonometrie und Logarithmen bzw. Arithmetik und Buchhaltungsrechnung. Durch den immensen reformerischen Druck, den diese Konkurrenzschulen ausübten, waren bald auch die alteingesessenen Gymnasien gezwungen, ihre strikt humanistisch-philologische Ausrichtung zu überdenken. Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts hatten viele protestantische Gymnasien Mathematik zum Hauptfach erhoben, und bei der Einführung der Abiturprüfung im Jahr 1788 in Preußen war Mathematik eines der obligatorischen Prüfungsfächer (vgl. SCHUBRING 2014: 140), was den Aufstieg des Faches auch innerhalb der Gymnasien belegt.

Auch an den katholischen Gymnasien und Kollegs wurden Realfächer sukzessive in den Fächerkanon aufgenommen. Für Österreich, das seine Reformen früh und koordiniert vorantrieb, lässt sich eine stete Aufwertung des Deutsch- und Mathematikunterrichts beobachten, die mit einer fortschreitenden Trennung zwischen Staat und Kirche auch in den Bildungsinstitutionen[202] Hand in Hand ging. Aber auch in den deutschsprachigen katholischen Kleinstaaten fanden teils radikale, auf den Ideen der Aufklärung basierende Reformen dieser Art statt, die die Mathematik auch an katholischen Schulen stark aufwerteten.

Maßgeblicher, und visionärer, Didaktiker der Zeit war Pestalozzi, der um 1800 begann, seine Erziehungs- und Unterrichtstheorien zu entwickeln, die sowohl in Europa als auch den Vereinigten Staaten profunden Einfluss ausübten. Seine Kernidee war die genau Ordnung des Lehr- bzw. Lernprozesses, der auch methodisch bereits viele heute wieder aktuelle Ideen aufweisen sollte: Der aktive, tätige Umgang mit Zahlen sollte zur Entdeckung

[201] Die damaligen Realschulen sind nicht zu verwechseln mit den Schulen, die heute unter dieser Bezeichnung existieren.
[202] Kaiserin Maria Theresia und Kaiser Joseph II säkularisierten vormals jesuitische Schulen und verboten die Lehre nach der *Ratio Studiorum*.

über Sinneswahrnehmungen[203] führen, und das Lernen in Gruppen und das gegenseitige Erklären wurde gefördert. Der Umgang mit dem konkreten Objekt und erst spätere Übertragung in die ikonische und dann symbolische Form waren Grundlage des Arithmetikunterrichts nach Pestalozzi'schem Zuschnitt (auch wenn dieser selbst keinen Mathematikunterricht entwickelte[204]). In der Folge wurde an vielen Grundschulen mit Rechenbüchern und nach Pestalozzis Prinzipien gearbeitet, und das allgemeine Bestreben war es, sinnloses Auswendiglernen durch lebensweltlich orientiertes, propädeutisches und für das Denken als solches wertvolles Verstehen zu ersetzen.

Ein Blick nach Neuengland

Angesichts der heutigen Bedeutung der Vereinigten Staaten von Amerika im Kontext der neuesten Bildungsreformen sei kurz erwähnt, wie die Situation des Mathematikunterrichts in den englischen Kolonien aussah. Wenig überraschend ist in Übersee ein längeres Verharren in den Strukturen der frühen Neuzeit zu beobachten; das öffentliche Schulwesen war kaum an der Vermittlung mathematischer Bildung beteiligt, sie erfolgte innerhalb der Ausbildung im Handwerk oder Gewerbe. Dort waren beträchtliche Spezialkenntnisse auf auch hohem Niveau vorhanden, die aber wegen dieser fortbestehenden Trennung von der allgemeinen Bildung nicht zum gesamtgesellschaftlichen Wissensbestand zählte. In den (nicht sehr zahlreichen und sehr ungleichmäßig verbreiteten) Sekundarschulen fand im 17. und auch noch im 18. Jahrhundert „Rechenunterricht" oft auf der Basis von Rechenbüchern statt, die dem Schüler mathematische Probleme stellten, die dieser zu lösen versuchte und dann – gemeinsam mit dem Lehrer – mit den ebenfalls abgedruckten Musterlösungen verglich. Das Abschreiben der Problemstellungen und der Musterlösungen ergab im Lauf der Zeit ein persönliches Rechenbuch jedes Schülers, der in dieser Weise unterrichtet wurde. Die verwendeten Bücher waren dem eigenen Bekunden nach graduiert und ermöglichten so den Aufbau arithmetischer Kenntnisse durch die Bearbeitung der gestellten Probleme. Höchst interessant ist folgendes Zitat zur Zielsetzung dieser Arbeitsweise:

> *It was assumed that the act of writing down correct solutions to problems compelled students to 'reflect' on the structures of the problems, and made them more likely, in the future, to be able to identify problems embodying such structures. (ELLERTON/CLEMETS 2012: 33)*

[203] Wegen der Wichtigkeit dieser Sinneseindrücke wurde Pestalozzis Lehre auch kurz *Anschauungslehre* genannt.
[204] Tillich erweiterte die Anschauungslehre speziell für den Mathematikunterricht.

De facto blieben mathematische Kenntnisse, die über die grundlegendsten Rechenfertigkeiten hinausgingen, Privileg einiger weniger, die an den berufsspezifischen Bildungszentren ihre Unterweisung erhielten. Erst in der Folge der Amerikanischen Revolution kam es auch hier zu einem Umlenken, aber bis zum Ende des 18. Jahrhunderts war lediglich eine Schulpflicht für Jungen zwischen 11 und 14 Jahren eingeführt worden, in deren Rahmen auch ein gewisses arithmetisches Grundwissen vermittelt wurde (vgl. Dauben 2014: 176 f.). Selbst an der Universität Harvard wurde zunächst nur Grundwissen gelehrt, das die Studenten aus ihrer schulischen Vorbildung nicht mitbrachten. Etwa ab der Mitte des 18. Jahrhunderts aber begann man dort, die Lehrgebiete auf Geometrie, Algebra und insbesondere auf die Newton'sche „Fluxionsmethode“ (Differentialrechnung) auszudehnen. Dies geschah mit Blick auf die Behandlung von Newtons mechanischen und physikalischen Entdeckungen.

Welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

In Deutschland waren die Begründungszusammenhänge für die Bewertung dieser Frage auf Seiten der beiden Konfessionen vollkommen verschieden. Während in der protestantischen Philosophie utilitaristische Überzeugungen im weitesten Sinne den Ausschlag für die Neubewertung der Mathematik gaben, waren die katholischen Bildungsreformer eher von der geistesbildenden, disziplinierenden Kraft der Mathematik überzeugt.

Die Französische Revolution in Frankreich als dramatischer Höhepunkt der Epoche ist es, die am aufschlussreichsten für die Wahrnehmung des damaligen Bildungssystems in den Augen der Zeitgenossen ist. An die Macht gelangt strebten die Revolutionäre in Frankreich nach einer vollständigen Neuordnung des Bildungswesens. Und hier trat nun die Mathematik im Verbund mit Naturwissenschaften als Disziplin der Aufklärung und der Revolution in Erscheinung, von denen Guillaume (1889: 197 f.) sagt:

- „Selbst grundlegende Studien dieser Wissenschaften sind der sicherste Weg, die intellektuellen Kapazitäten der Lerner zu entwickeln“, wohingegen das Grundwissen anderer Disziplinen „den Geist anwendet, aber nicht entwickelt.“
- „Die Literatur hat Grenzen, aber die Wissenschaften der Beobachtung und Berechnung haben keine.“
- Sie stellen bevorzugte Mittel zur Verbreitung der Aufklärung dar, als Heilmittel „gegen Vorurteile, gegen Engstirnigkeit.“

- „Um die soziale Ordnung zur Perfektion zu bringen", um soziale Gleichheit zu erreichen: um „das Streben, Menschen zu beherrschen, durch das Streben, Menschen aufzuklären, zu ersetzen."[205]

In und nach der Französischen Revolution war die Mathematik ein „Kernaspekt einer intellektuellen Erziehung[206], die Theorie und Praxis miteinander kombinierte" (GISPERT 2014: 230; eigene Übersetzung), und insgesamt wurden zum ersten Mal staatliche Maßnahmen für eine Volksbildung ergriffen, die über die beruflich-funktionalen Erfordernisse hinausging. Mit dem Scheitern der Revolution waren jedoch auch diese Anliegen und Pläne zu großen Teilen zum Scheitern verurteilt. Die systematische Neugliederung des Schulwesens in einen Primar- und einen Sekundarsektor mit einem darauf aufbauenden Tertiärschulwesen und akademischen Einrichtungen wurde nicht umgesetzt. Zunächst konnte die Mathematik in der Phase der napoleonischen Zentralisierung des Schulwesens ihren Stellenwert behaupten: Neben Latein war sie nun das zweite Hauptfach zunächst aller französischen *Lycées*, und in der Folge auch der vielen europäischen Staaten, die dieses Modell übernahmen.

Ein Blick nach Neuengland

In den Vereinigten Staaten lässt sich die anfangs ebenfalls geringe Bedeutung der Mathematik leicht an den Vorschriften ablesen, die am Harvard College galten. Allerdings führte hier die Einrichtung eines mathematischen Lehrstuhles im Jahr 1727[207] zu einer ersten, zaghaften Etablierung der Mathematik als Wissenschaft in den britischen Kolonien. Harvard und Yale waren die einzigen Bildungsstätten des amerikanischen Kontinents im 18. Jahrhundert, die tatsächlich „höhere Mathematik" lehrten.[208,209] Verpflichtend war das Fach in Harvard nicht, und abschlussrelevant ebenso wenig. Erst im Jahr 1802 wurden Grundkenntnisse in Arithmetik Bedingung für die Zulassung zum Besuch des Colleges.

In Yale, das in seiner Ausrichtung stark an den calvinistischen Glauben gebunden war, leitete Thomas Clap ab 1740 die Stärkung der Mathematik und der Newton'schen Welt-

---

[205] Übersetzt nach der Übersetzung ins Englische von KARP/SCHUBRING 2014: 143.
[206] Mit intellektueller Erziehung ist hier nichts anderes als „Bildung" gemeint, für das es keine exakte englischsprachige Übersetzung gibt.
[207] Der wohlhabende englische Kaufmann Thomas Hollis (*1659, †1731) stiftete mit £1200 den nach ihm benannten Lehrstuhl für Mathematik und Naturphilosophie, den bis heute existierenden *Hollis Chair of Mathematics and Natural Philosophy* der Harvard Universität.
[208] Vgl. DAUBEN 2014: 180.
[209] 1801 veröffentlichte der vierte Inhaber der Hollis Chair of Mathematics and Natural Philosophy, Samuel Webber, ein mathematischen Kompendium auf universitärem Niveau, das folgende Inhalte umfasste: Algebra, Geometrie der Ebene und des Raums, Vermessung, Navigation, Kegelschnitte, sowie sphärische Geometrie und Trigonometrie (vgl. DAUBEN 2014: 181).

anschauung ein. Was aus heutiger Sicht kurios erscheinen mag, war die von Clap realisierte, strikte Anbindung der Naturwissenschaften an den christlichen Glauben, so dass auch mit dem Studium der Mathematik die Suche nach (religiöser) Wahrheit verbunden wurde, keineswegs ein Weg hin zum Atheismus (vgl. DAUBEN 2014: 184).

Mit der Einrichtung des ersten Lehrstuhls für Mathematik auch in Yale im Jahr 1770 verschwanden Teile der Lehre, die sich auf Newtons Infinitesimalrechnung bezogen, wieder aus dem Lehrplan. Dennoch entsprachen die Inhalte, die in Yale und Harvard im Fach Mathematik um 1800 gelehrt wurden, dem, was auch im englischen (ehemaligen) Mutterland üblich war.

3.7 Das spätere 19. Jahrhundert: Niedergang

Klafki kommt zu dem Schluss, dass im Lauf der 19. Jahrhundert und sicherlich bis zum Ende des Nationalsozialismus in Deutschland der Begriff der höheren Bildung aus der deutschen Klassik stetig an Bedeutung verlor (vgl. KLAFKI 2007: 29). Auch die frühen reformpädagogischen Bewegungen konnten hier nur wenig korrigierenden Einfluss nehmen. Klafkis Kritik richtet sich vor allem gegen folgende Merkmale des „Bildungsverfalls“[210]:

- Bildung wurde auf die kognitive Dimension verengt, wobei außerdem das kritische Moment entfernt wurde.
- Wissenschaft wurde zunehmend von moralischen Erwägungen entleert und so auf ihre instrumentelle Ebene reduziert.
- die ästhetische Dimension der Bildung ging zunehmend verloren.
- „Berufsbildung“ und „Allgemeinbildung“ existieren sowohl ideell-konzeptuell als auch organisatorisch so gut wie vollständig getrennt voneinander.[211]

Kuhlmann beschreibt die pädagogische Situation für weite Teile des 19. Jahrhunderts noch drastischer, wenn sie von „Schwarzer Pädagogik“ spricht, die maßgeblich auf Züchtigung und emotionalem Missbrauch der Heranwachsenden basiert habe.[212] Inhaltlich trug diese Zeit nichts bei, was für unsere Betrachtung an dieser Stelle von Interesse sein könnte – außer, dass sie Stein des Anstoßes für die Reformpädagogiken wurde (vgl. Kap. 2).

[210] KLAFKI 2007: 30 ff.
[211] Listung nach KLAFKI 2007: 36.
[212] Vgl. hierzu KUHLMANN 2013: Kap. 6.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Für Frankreich sind Art und Inhalte des Mathematikunterrichts maßgeblich durch die neu geordneten (d. h. nachrevolutionären) Bildungseinrichtungen bestimmt. In der napoleonischen Zeit, in der Teile des heutigen Deutschland unter französischem Einfluss standen, setzte Frankreich seine nachrevolutionären Bildungsreformen auch dort um. Die staatlichen *Lycées* (in den Staaten des Rheinlands die Gymnasien) waren die Orte, an denen die Verwaltungselite des Landes ausgebildet wurden, und diese klare Zielvorstellung prägte alle Unterrichtsfächer, und eben auch den Mathematikunterricht. Gispert macht einen Bedeutungsverfall der mathematischen Bildung im Verlauf des 19. Jahrhunderts aus, der sich in mehreren Schritten vollzog.

In den ersten 50 Jahren drängten Latein und die humanistischen Disziplinen nach und nach die Mathematik zurück, die zunehmend weniger als „allgemeines" Fach angesehen wurde. Dahinter steckte die klare Trennung zwischen „allgemeinbildenden" Fächern und beruflicher Bildung. Wegen ihrer unmittelbaren professionellen Bedeutung für die Ausbildung der (Militär-)Ingenieure wurde die Mathematik für ungeeignet gehalten, zum Fächerkanon der klassisch bildenden *Lycées* und *Colléges* zu gehören. Dort wurde Mathematik (wie auch die Physik und die anderen Naturwissenschaften) dann nur noch in den letzten zwei Jahren als Beifach gelehrt und zwar (programmatisch nachvollziehbar) losgelöst von jeder praktischen Anwendung, also rein abstrakt und formal-logisch.

An den (oft privaten) Vorbereitungsschulen für die staatliche *École Polytechnique* hingegen wurde Mathematik – mit klarer Ausrichtung auf die Aufnahmeprüfung – gelehrt. In drei Jahren wurden hier vorwiegend Geometrie und Algebra, insbesondere Gleichungstheorie, unterrichtet. Im Primarschulwesen Frankreichs, das tatsächlich auch von breiteren Bevölkerungsschichten besucht wurde, tritt der Begriff Mathematik selbst nicht in Erscheinung. Im ersten Abschnitt der Primarschule ist nur von Arithmetik, Rechnen und dem metrischen System die Rede. Geometrie wurde im zweiten Abschnitt der Primarschule gelehrt. Dabei waren die Unterschiede zwischen dem Geometrieunterricht hier und im Sekundarschulwesen der Eliten eklatant: in den „Volksschulen" wurde Geometrie rein praktisch und ohne theoretischen Unter- oder Oberbau gelehrt. Der bemerkenswerte Effekt dieser strikten Trennung zwischen „niederer" und „höherer" Bildung in Frankreich war, dass praktisch anwendbares mathematisches Wissen in der weniger gebildeten Bevölkerungsgruppe stärker vertreten war als in der Oberschicht. Offenbar zum Schutz der gesellschaftlichen Ordnung wurde den Primarschulen 1843 untersagt, etwas anderes als Elementarmathematik zu unterrichten und beispielsweise Algebra oder Logarithmen im Unterricht zu behandeln.[213]

Grandes Écoles: École Polytechnique / Colléges	Colléges Modernes
Lycées	Special Secondary Schools
Upper Primary School	
Lower Primary School	

Tab. 3 Schematische Übersicht zu den Schulformen in Frankreich des ausgehenden 19. Jahrhunderts (zusammengestellt nach GISPERT 2014: 229 ff.).

Im Verlauf der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde ein Versuch unternommen, das Schulwesen und gerade auch den Mathematikunterricht an den *Lycées* und *Colléges* zu reformieren, mehr anwendungsbezogene und praktische Elemente einzuführen und den rein formallogischen Charakter der Instruktionen aufzugeben. Die Reform scheiterte. In ihrer Nachfolge entstand aber das Spezielle Sekundarschulwesen, dessen Mathematikunterricht in enger Verzahnung mit praktischer Anwendung erfolgte, und bei den die Einbeziehung berufsbezogener, lebensweltlicher Beispiele methodisch-didaktischer Standard war (vgl. GISPERT 2014: 232).

In den deutschen Staaten entfielen einige der in Frankreich markanten Phasen schwankender Bedeutung des Mathematikunterrichts. Besonders Bayern, das dem Rheinbund vorstand, behielt das zweigliedrige System der mit Gymnasium und Realschule bei, Mathematikunterricht fand jedoch in beiden Schularten in beträchtlichem Umfang statt. Das dominante Preußen[214] arbeitete bei seinen Bildungsreformen nach einem neohumanistischen Konzept, das explizit die integrierte Unterrichtung aller drei Hauptdisziplinen propagierte: (Klassische) Sprachen, Geschichte und Geographie, Mathematik und Naturwissenschaften. Anders als in Frankreich waren alle Fächer grundsätzlich für jedes Schuljahr vorgesehen, inhaltlich waren die Anforderungen wesentlich höher, methodisch jedoch orientierte man sich auch hier an den formal-analytischen Prinzipien der *Lycées*. In der Vision Humboldts sollte das Gymnasium eine Brücke schlagen zwischen der Vermittlung des Triviums (die klassischen Fächer), das zum universitären Studium befähigte, und des Quadriviums (die praktisch ausgerichteten Fächer), das Inhalte für die Berufe der Mittelschicht vermittelte. Das Gymnasium hätte damit die Funktion einer modernen Gesamtschule eingenommen.

Dieser Gedanke konnte sich im deutschsprachigen Raum aus denselben Gründen nicht durchsetzen, die in Frankreich zum steten Konflikt und dauernden neuen Regelungen für

[213] Vgl. GISPERT 2014: 230 ff.
[214] Auf andere Staaten soll nicht eingegangen werden. Mittel- und langfristig waren die Beiträge Preußens bestimmend.

die weiterführenden Schulformen sorgte. Die Realschulen wandten sich ebenso gegen die Idee wie die klassischen Gymnasien, und in der Folge entstanden neue Schularten wie das Realgymnasium, die ihre Entsprechung wiederum in den Entwicklungen in Frankreich hatten. Es ist zu betonen, dass an den Realschulen keineswegs eine grundsätzlich andere Art von Mathematik gelehrt wurde, was diese von ihren französischen Gegenstücken (Special Secondary Schools) klar unterschied. Der Grund hierfür lag in dem vereinheitlichten System der Lehrerausbildung: In Preußen waren alle Lehrer selbst Absolventen von Gymnasien und Universitäten und lehrten daher auf dieser gemeinsamen Basis sowohl an Realschulen als auch Gymnasien. Die ursprünglich avisierte Bedeutung der Mathematik an neo-humanistischen Gymnasien schwand im Laufe der Zeit wieder beträchtlich.

Welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

Die Vorstellungen von Bildung dieser Zeit waren sowohl in Frankreich als auch in den deutschen Staaten weitgehend in zwei getrennte Bereiche zerrissen, die Gispert[215] als „Ausbildung für die Praxis" einerseits und „Lehre von Kultur und die intellektuelle Bildung des Geistes" andererseits bezeichnet. Für die höhere, „klassische" Bildung waren praktische Gesichtspunkte geradezu ein Ausschlusskriterium. In der berufsbezogenen Bildung, die jedoch nichts mit dem eigentlichen gesellschaftlichen Bildungsideal zu tun hatte, hingegen war sie von großer Bedeutung. Gerade die Geometrie wurde in Frankreich zeitweise sogar aus dem Unterricht der Primarschulen verbannt, da man ihr als theoretischer Wissenschaft das Potenzial unterstellte, die soziale Ordnung zu gefährden. Es ergibt sich sowohl für Frankreich als auch für die meisten deutschen Staaten in dieser Zeit das Bild, dass man sich des Problemlösepotenzials der Mathematik (und der Naturwissenschaften) sehr wohl bewusst war, das Bildungsideal aber so klar auf die humanistischen Wissenschaften fokussierte, dass dieses Potenzial schlicht als geringwertig betrachtet wurde – akzeptiert wurde es als wertvolles Wissen nur für einige Spezialisten und in geringerem Umfang für die praktischen (und dadurch per se minderwertigen) beruflichen Tätigkeiten der Mittel- und Unterschicht. In vielen deutschen Staaten wurden die mathematischen Unterrichtsinhalte nach und nach und oft nur teilweise an das neo-humanistische Gymnasialmodell Preußens angepasst, oft gegen lang andauernde Widerstände. Mit der Reichsgründung 1871 wurden die Bildungsvorschriften unter der Führung Preußens vereinheitlicht. Der zuständige Konferenzvorsitzende war dem Mathematikunterricht gegenüber

[215] Er beschreibt dies speziell für Frankreich am Beginn des 19. Jahrhunderts. Schubring beschreibt ähnliches auch für einige deutsche Staaten (KARP/SCHUBRING 2014: 244 ff).

kritisch eingestellt und hatte bereits seit 1850 in Preußen dessen Bedeutung für die Abiturprüfungen (und damit effektiv für den gesamten Unterricht) konsequent reduziert. So einigte man sich nun auf einen niedrigen gemeinsamen Nenner, nach dem im neuen deutschen Reich Mathematik an den Gymnasien zu unterrichten war: „Elementarmathematik“[216] wurde Schulmathematik. Den Wert dieser stark eingeschränkten (und keinesfalls anwendungsorientierten) Mathematik sah man in der Herausbildung logisch-schließender Fähigkeiten.

3.8 Das frühe 20. Jahrhundert: neue Ziele, Fortschritte und Rückschritte

In Mitteleuropa[217] fand mit der fortschreitenden Industrialisierung und dem Beginn der Moderne ein tiefgreifender Wandel statt. Die etablierten, tradierten Bildungsinhalte der Bildungselite standen immer weniger im Einklang mit den Erfordernissen der umgebenden Welt – und damit auch den Interessen der Bildungsrezipienten selbst. Die Mathematik übernahm eine besondere Rolle im Kanon der neu aufgewerteten Fächer einer modernen humanistischen Bildung. Es ging darum „mehr Lebenswirklichkeit und mehr Realitätssinn in den Mathematikunterricht einzubringen“, damit die Lerner „für sich selbst erfahren, dass Mathematik nicht reine Abstraktion ist“ (Borel 1904). In Deutschland führte dies ab 1900 zur reichseinheitlichen Schaffung dreier Schularten (humanistisches Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule), die zum Abitur führten, und sich inhaltlich auf der einen Seite durch die obligatorischen Sprachkenntnisse, auf der anderen durch ihren Unterricht in Mathematik (jetzt überall ein Hauptfach) voneinander abgrenzten. In der Folge gab es weitere Umwälzungen, die besonders den Übergang vom Sekundarschulbereich zum tertiären Bildungsbereich betrafen. Die Unzulänglichkeiten und Unstimmigkeiten in den verschiedenen Arten und inhaltlichen Schwerpunkten des Mathematikunterrichts und die Ressentiments, die horizontal wie vertikal die Bildungslandschaft zerrissen, führten zunächst zu anti-mathematischen Strömungen, die die Notwendigkeit einer grundsätzlichen Reform mathematischer Lehre deutlich machte.

[216] Dies war definiert als die Beschäftigung mit gegebenen, beschränkten und endlichen Mengen und synthetischer (Euklidischer) Geometrie (Schubring 2014: 247).

[217] Für die Ziele dieser Kurzdarstellung ist es nicht möglich oder sinnvoll, zu sehr auf Details und besonders die große Anzahl deutscher Staaten dieser Zeit einzeln einzugehen. Frankreich dient hier weitgehend als Modell, um die Umbrüche besonders des Mathematikunterrichts im Überblick zu veranschaulichen.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Die französischen Mathematik-Curricula wandelten sich mit Beginn des 20. Jahrhunderts dramatisch und waren besonders durch einen viel früheren und umfangreicheren Unterricht in Geometrie geprägt, die durch die neu definierten Bildungsziele und die neuen geometrischen Konzepte der Mathematiker jener Zeit legitimiert wurden. Auch didaktisch-methodisch wandelte sich der Unterricht: das Vorgehen vom Konkreten zum Abstrakten, von der Induktion zur Deduktion etablierte sich, und die Anknüpfung fachlicher Inhalte an naturwissenschaftliche Disziplinen wie die Physik führte zur Einbeziehung auch gänzlich neuer Inhalte unter dem besonderen Augenmerk des Bezugs zu einem konkreten Sachverhalt oder experimentell gewonnenen Daten. Damit wurden pädagogische Prinzipien, die zuvor im nur Primarschulwesen, mit dem Ziel praxisorientierter (Aus)Bildung, eingesetzt wurden, erstmals in der höheren Bildung angewandt – und es zeigte sich, dass dieses Bezug auf das Konkrete keinen limitierenden Faktor darstellte, der die Entwicklungsmöglichkeiten der Lerner auf die reine Anwendung beschränkte, sondern als Unterrichtsprinzip die theoretisch-abstrakte Unterweisung ideal ergänzen konnte (vgl. Gispert 2014: 233 f.).

In Deutschland waren es die (unter anderem) von Felix Klein[218] angestoßenen Reformen, die neue Mathematik- und Naturwissenschaftscurricula hervorbrachten. Die Einführung des „Funktionalen" (Analysis) als zentrales Thema des Mathematikunterrichts war eines der wichtigsten Anliegen, und letztlich wurden die erhobenen Forderungen im Meraner Programm (1905) verbindlich für alle deutschen Sekundarschularten[219] festgeschrieben. Zu betonen ist die internationale Kooperation, die zu dieser Zeit die Reformbestrebungen in einer ganzen Reihe europäischer Staaten in der IMUK (Internationale Mathematische Unterrichtskommission) vereinte.

In Deutschland wurde eine „Demokratisierung" des Schulsystems angestoßen, die die Loslösung von sozialem Status und Bildungsgang /-einrichtung durch eine Stärkung eines einzigen, gemeinsamen Primarschulbereichs anstrebte; eine Professionalisierung der Primarschullehrer durch eine Ausbildung an Pädagogischen Akademien war hier ein entscheidendes Instrument. Die Mathematiklehre dort befasste sich auch mit der Methodik für Rechenlehre und Geometrie, was in der Folge zur ersten ernsthaften Auseinandersetzung

---

[218] Felix Klein, *1849 in Düsseldorf, †1925 in Göttingen, war einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker seiner Zeit. Seine Hauptarbeitsgebiete waren Geometrie und Anwendungen der Mathematik, außerdem war er Mathematikdidaktik interessiert.
[219] Eine Ausnahme bildet die Differenzialrechnung, die für die humanistischen Gymnasien fakultativ war (Schubring 2014: 249).

mit dem Akt des Lernens und Lehrens führte und der erste Schritt auf dem Weg zur Entstehung der Mathematikdidaktik in Westdeutschland war.

3.9 Einschub: Lernpsychologie und Didaktiken im 20. und 21. Jahrhundert

Bevor fortführend auf die Entwicklung des Mathematikunterrichts im 20. und frühen 21. Jahrhunderts und sein Verhältnis zu Problemen und Problemlösefähigkeiten eingegangen wird, soll in diesem Einschub ein kurzer Überblick über maßgebliche lehr-lerntheoretische Ansätze aus der Psychologie und die damit oftmals eng verschränkten philosophischen Vorstellungen und die wiederum aus beiden erwachsenden didaktisch-pädagogischen Konzepte des 20. Jahrhunderts gegeben. Dabei ist es im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich oder sinnvoll, Strömungen und Begrifflichkeiten umfassend differenziert darzustellen; es geht darum, den große Entwicklungsbogen mit Blick auf die Bedeutung des Problemlösens für den Mathematikunterricht aufzuzeigen, wie er im Verlauf des vergangenen Jahrhunderts fassbar wird. Im 20. Jahrhundert entwickelten sich das Forschungsinteresse am Akt des Lernens (und Denkens im Allgemeinen) in all seinen Facetten und damit einhergehend der schulische Unterricht rasant fort. Dies geschah auf der Grundlage der Erkenntnisse des späten 19. Jahrhunderts in den Bereichen der naturwissenschaftlichen Forschungen, die nun auch den physiologischen Ursachen und Abläufen menschlichen Denkens und Lernens auf den Grund gehen wollten, aber ebenso auch auf sowohl philosophischen als auch psychologischen Neukonzeptionen des Individuums insgesamt. Es ist nicht ganz einfach, sich dieser komplexen Materie überblicksartig zu nähern, weshalb die folgende graphische Übersicht (Abb. 11) die zeitliche Einordnung der hier kurz vorzustellenden entwicklungspsychologischen Theorien und den ihnen zugrundeliegenden philosophischen Modellen veranschaulichen soll.

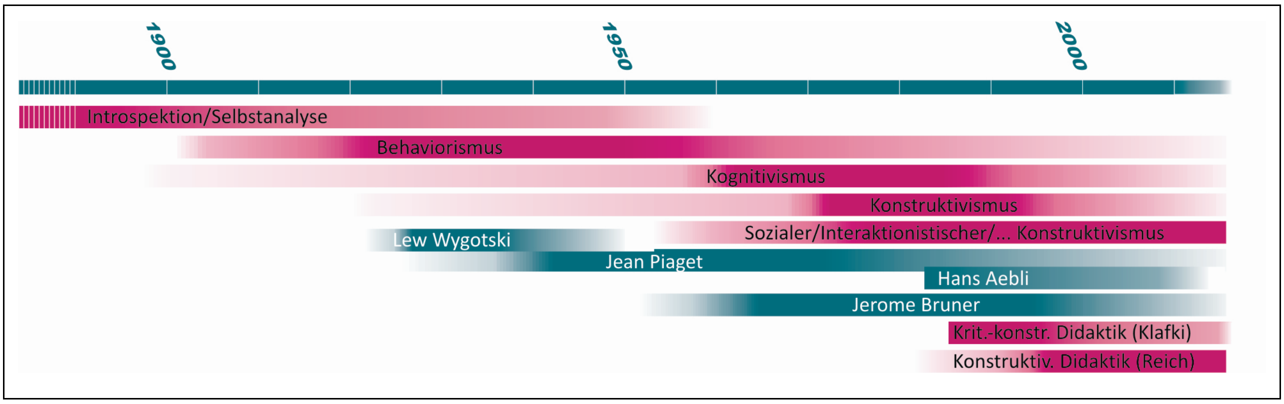


Abb. 11 Überblick über einige maßgebliche psychologische Strömungen und didaktischen Konzepten des 20. Jahrhunderts bis in die Gegenwart.

3.9.1 Anfänge: Introspektion/Selbstanalyse

Lange Zeit war die Epistemologie eine philosophische Wissenschaft. Sie befasste sich allein auf Basis persönlicher bzw. geteilter Weltanschauungen mit der Frage, wie Erkenntnisgewinn möglich war; dabei spielten auch religiöse Grundüberzeugungen eine wechselnd große Rolle. Am konkreten Lernakt im bescheidenen Rahmen konkreten Sachlernens waren diese an sehr viel höheren Erkenntnissen (wie der Gotteserkenntnis) orientierten philosophischen Theorien nur bedingt interessiert, wie sich durch die oft wenig didaktisierte Darbietung des Lernstoffs begründet vermuten lässt.[220]

Die Introspektion fußt auf einer geisteswissenschaftlichen Grundhaltung in der Psychologie und ist systembedingt hoch subjektiv; der wissenschaftliche Wert ihrer Erkenntnisse wurde daher bereits von griechischen Philosophen infrage gestellt. Auch Kant lehnte sie als Instrument der Psychologie ab. Nichtsdestotrotz ist der Ansatz bis heute in Teilgebieten der Psychologie aktuell, und Dörner erklärt das besonders gegen Mitte des 20. Jahrhunderts auflebende Interesse an der Selbstanalyse bzw. dem geisteswissenschaftlichen Ansatz allgemein als eine Form der Romantisierung. Die Psychologie verschließt sich hier bewusst bestimmten naturwissenschaftlichen Grundsätzen.

3.9.2 Konzeptionen: Behaviorismus

Seit dem frühen 20. Jahrhundert versuchten andere Forscher, sich dem Problem des Lernens, also des Erkenntnisgewinns, objektiv-wissenschaftlich zu nähern. Einen ersten Höhepunkt radikaler Abkehr von geisteswissenschaftlichen (introspektiven) Betrachtungen des Lernakts stellt der Behaviorismus dar, der bis in die 1930er Jahre in den Vereinigten Staaten und später auch in Europa die psychologische Forschung zeitweise dominierte und bis heute fortentwickelt wird. Vorläufer war Thorndike[221], der *Instruktionalismus* bzw. *Direkten Unterricht*, zur gezielten Konditionierung des Lerners nach dem Reiz-Reaktionsschema durch Anwendung positiver und negativer Verstärker propagierte. Eine typische Variante des Instruktionalismus ist die Vier-Stufen-Methode:

1. Vorbereiten und erklären,
2. Vormachen und erklären,

[220] Natürlich stellt die Quellenlage für große Teile der menschlichen Kulturgeschichte durchaus einen Faktor dar, der die Gültigkeit dieser Aussage einschränkt, wie auch in Kap. 3 ausgeführt wurde. Es darf jedoch als sicher gelten, dass im eigentlichen Sinne, umfassendere und systematische didaktische Überlegungen erst am Beginn der Neuzeit angestellt oder zumindest schriftlich niedergelegt wurden.

[221] Edward L. Thorndike, *1874 in Williamsburg, MA, †1949 in Montrose, NY, war amerikanischer Psychologe und lieferte mit seiner Theorie des Konnektionismus eine Grundlage für den Behaviorismus.

3. Nachmachen und erklären lassen,
4. Vertiefen durch Üben.

Der Behaviorismus betrachtet den menschliches Handeln, den menschlichen Geist, und damit auch den Lernakt, in einem Black Box-Modell mit Reiz-Reaktions-Schemata. Die einzigen wissenschaftlich haltbaren, da beobachtbaren und messbaren, psychologischen Komponenten sind nach diesem Ansatz der Reiz und die dadurch ausgelöste Reaktion. Die Mechanismen, mit denen der Behaviorismus das Lernen fasst, sind die Konditionierung und die Habituation. Konditionierung ist dabei die Automatisierung eines (positiven) Verhaltensmusters auf der Basis von gezielter Verstärkung, Habituation hingegen geschieht nicht-assoziativ, also ohne gekoppelten (positiven oder negativen) Reiz und umschreibt die abnehmende Reaktion auf regelmäßig wiederkehrende Reize, also die „Gewöhnung".

Bekanntester Vertreter des Radikalen Behaviorismus ist B. F. Skinner[222]. Der Radikale Behaviorismus berücksichtigt auch interne Prozesse wie Gedanken und Gefühle bei der Verhaltensanalyse und Theoriebildung.

3.9.3 Modelle: Piaget

Piaget[223] publizierte seine bis heute einflussreiche Theorie zu den Stadien der Entwicklung des menschlichen Denkens erstmals 1947[224]. Auf Basis langjähriger psychologischer Versuche unterscheidet er verschiedene solcher Stadien, die durch ansteigende Fähigkeit zu Denkleistungen bestimmt und gekennzeichnet sind. Im schulischen Kontext sind folgende Stadien von Bedeutung[225]:

- Das präoperatorische Stadium, ca. 2. bis 6. Lebensjahr:
  Denkleistungen sind an konkretes Handeln gebunden, nicht kompositionsfähig und nicht reversibel.
- Das Stadium der konkreten Operationen, ca. 7. bis 11. Lebensjahr:
  Denkleistungen sind an konkrete Vorstellungen gebunden, kompositionsfähig und reversibel.

---

[222] Burrhus Frederic Skinner, *1904 in Susquehanna Depot, PA, †2000 in Cambridge, MA, war ein amerikanischer Psychologe, maßgeblicher Denker des Behaviorismus und vertrat einer empirisch fundierten Verhaltenstheorie.

[223] Jean Piaget, *1896 in Neuenburg, †1980 in Genf, war schweizerischer Entwicklungspsychologe und Erkenntnistheoretiker; er beeinflusste mit seinen Versuchen und darauf basierenden Modellen zur kindlichen Kognitionsentwicklung grundlegend die pädagogische Psychologie.

[224] Dt. Titel „Psychologie der Intelligenz"

[225] Nach ZECH 1996: 89 ff.

- Das Stadium der formalen Operationen, ab ca. dem 12. Lebensjahr:
  Denkleistungen sind nicht mehr an konkrete Vorstellungen gebunden, sondern formal-abstrakt und deduktiv; hypothetisches Denken ist möglich.

Besonders die Alterseinteilung der Stadien hat in den vergangenen Jahrzehnten zu Widerspruch angeregt; festzuhalten ist jedoch, dass sich grundsätzlich die *Abfolge* der Stadien bestätigen lässt, bereichsspezifisch jedoch deutlich divergieren kann. *Assimilation*, *Akkommodieren*, *Adaptation* sind die drei von Piaget beschriebenen Reaktionsmuster des Geistes. Das Ziel von Bildung beschrieb er folgendermaßen:

> *The principal goal of education in the schools should be creating men and women who are capable of doing new things, not simply repeating what other generations have done. (PIAGET 1953)*

Piaget war mit seinen Ideen von Lernen ein Pionier der Abkehr vom dominanten behavioristischen Modell und Wegbereiter der kognitivistisch-konstruktivistischen Lerntheorie; allerdings wurden seine Arbeiten erst in den Sechziger Jahren einem breiteren Publikum bekannt.

3.9.4 Modelle: Aeblis operative Methode

Piagets Schüler Aebli[226] entwickelte die Theorien weiter, indem er das (biologische) Alter weniger stark betonte und stattdessen auf andere Variablen, die *Erziehungsbedingungen*, fokussierte, bei denen er drei Variablen für maßgeblich hielt:

- Komplexität und Anschaulichkeit des Gegenstandes
- Lernprozess (aufgrund unterschiedlicher Zeitdauer und Wiederholungen)
- Motivation

Aebli deutet die Stadien der Entwicklung als eine innerhalb von Lernprozessen wirksame Abfolge, die jedoch vom Lebensalter weitgehend unabhängig abläuft.[227] (Neue) Operationen müssen *verinnerlicht* werden, was sich in drei Stufen vollzieht: der konkreten Stufe, der figuralen Stufe und der symbolischen Stufe[228]. Von entscheidender Bedeutung ist jedoch die *Verbalisierung* der Operationen (nicht ein exaktes Abarbeiten der drei Stufen),

[226] Hans Aebli, *1923 in Zürich, †1990 in Burgdorf, war Schüler Piagets und einflussreicher pädagogischer Schriftsteller und Unterrichtsdidaktiker. Sein wohl bekanntestes Werk ist *Zwölf Grundformen des Lehrens* (1983).

[227] Das heißt, dass Erwachsene, nach Aebli, für radikal neue Denkinhalte ebenso sehr die Anschauung brauchen wie Kinder dies tun.

[228] Diese Stufen entsprechen exakt denjenigen Bruners, der jedoch für diese Einteilung weit bekannter ist als Aebli. Die Stufen werden im nächsten Abschnitt genauer erläutert.

da es so „zu einem *Prozess innerhalb des Lernenden* kommt, der ihn *durch ständige eigene Reflexion* über seine Handlungen [...] zu einer Vorstellung führt, die die gleichzeitige Anwesenheit anschaulicher Stützen nicht mehr braucht“ (ZECH 1996: 95). Als Konsequenz für den Unterricht ergibt sich aus Aeblis Modell, dass zur Beförderung dieser schrittweisen Verinnerlichung verschiedene Darstellungsformen möglichst dich zusammenzubringen und einander deutlich zuzuordnen, um die symbolischen Darstellungen oder auch nur die Erinnerung an diese mit der gleichen Bedeutsamkeit „aufzuladen“, wie sie die konkrete Operation besaß. Für Aebli spielt das echte Verständnis der konkreten Operationen eine Schlüsselrolle beim Erwerb und Aufbau flexiblen Wissens. Er fordert, die ursprüngliche Situation in verschiedenen Dimensionen zu verändern, um zu verhindern, dass (verfrüht) eine Automatisierung der Operationen einsetzt. Nur so erhält zw. behält die gelernte „Operation“ Beweglichkeit, und bleibt damit flexibel einsetzbar.

3.9.5 Modelle: Darstellungsebenen nach Bruner

Auch Bruners[229] Theorie der menschlichen Denkentwicklung stützt sich auf Piaget, und seine Position ist nicht weit von der Aeblis entfernt. Im englischen Sprachraum dürfen Bruners Arbeiten dennoch als weit stärker rezipiert und daher einflussreicher gelten. Die berühmtesten Elemente aus Bruners Arbeiten, die bis heute in pädagogischen Zusammenhängen verwendet werden, sind seine drei Darstellungsebenen:

- *enaktiv*: Der konkrete Lerngegenstand wird physisch erfasst; Operationen werden real manipulierend durchgeführt.
- *ikonisch*: Der Lerngegenstand wird bildhaft dargestellt; alle Operationen, die mit ihm durchzuführen sind, erfolgen nunmehr lediglich mit seinem Abbild.
- *symbolisch*: An die Stelle des Bildes vom Gegenstand tritt das bloße Kürzel, das mehr oder weniger weit von der Realität entfernt sein kann; Operationen werden auf dieser Ebene formalisiert und ohne unmittelbar erkennbaren Bezug zur Realwelt durchgeführt, Ergebnisse der Operationen müssen in den ursprünglichen Sinnzusammenhang zurückübersetzt werden.[230]

Bruner postuliert eine inkrementelle Funktionsweise dieser drei möglichen Repräsentationsmodi des menschlichen Geistes, d. h. in seiner Theorie müssen alle drei Ebenen im

[229] Jerome Seymour Bruner,*1915 in New York, ist amerikanischer Kognitions- und Entwicklungspsychologe, mit Schwerpunkt auch auf Lernpsychologie. Er ist einer der bedeutendsten und meistzitierten Psychologen des 20. Jahrhunderts.
[230] Oft wird kurz vom „EIS-Prinzip“ gesprochen.

Verlauf des Lernaktes durchlaufen werden, um echtes Lernen zu erzielen. Dabei sind allerdings nicht unbedingt alle Einzelstadien klar zu identifizieren, und je nach Situation oder Lernerpersönlichkeit können bestimmte Schritte scheinbar[231] wegfallen.

Ein weiterer von ihm eingeführter Terminus ist das „scaffolding", das die Unterstützung bezeichnet, mit dem man den Lerner den Wechsel auf die nächst höhere Darstellungsebene ermöglicht – ein Gedanke, der seine Nähe zu den Ideen auch Lev Wygotskis zeigt (s. Kap. 3.9.8). Bruner trat auf Grundlage seines Modells für Spiralcurricula und Entdeckendes Lernen ein.

3.9.6 Konzeptionen: Kognitivismus

Als Gegenpol zu dem ausschließlich an beobachtbaren Phänomenen des menschlichen Verhaltens interessierten Ansatz des Behaviorismus, will der Kognitivismus die inneren, geistigen Vorgänge untersuchen, die dieses Verhalten bedingen. Menschliches Verhalten und insbesondere auch das Lernen sind hier also nicht Produkt eines Reiz-Reaktions-Schemas, sondern Ergebnis kognitiver Prozesse der Informationsaufnahme und -verarbeitung.[232] Der menschliche Geist wird quasi als Computer modelliert. Eine *kognitive Wende* fand ab den späten Fünfziger und in den Sechziger Jahren statt, stark motiviert durch die Arbeiten Noam Chomskys[233] und auch John Deweys, der den „Reflexbogen" der Behavioristen bereits 1896 in Fachartikeln kritisierte[234]. Auf der Grundlagenforschung und Modellbildung Piagets und Bruners werden komplexe Vorgänge im menschlichen Geist gerade beim Lernakt postuliert, unter anderem besonders das Akkomodieren und Assimilieren von Informationen, also die Anpassung bestehender Strukturen an neue Inhalte und die Erweiterung der Strukturen.

Der Instruktionismus[235] ist eine kognitive Lerntheorie, die die rezeptive Aufnahme und Verarbeitung durch den Lerner in den Mittelpunkt stellt und sich mit dem allgemeinen Kommunikationsmodell fassen lässt. Zugrunde liegt die Idee, dass eine für das Lernen günstigste Art und Weise des Lehrens gibt, die auf genauere Kenntnisse kognitiver

[231] Tatsächlich werden diese Schritte mental durchlaufen, ohne realisiert werden zu müssen.
[232] Beispiele für solche Prozesse sind Begriffsbildung, Wahrnehmung, Wiedererkennung und schlussfolgerndes Denken (HOLZINGER 2000: 133).
[233] Avram Noam Chomsky, *1928 in Philadelphia, PA, ist einer der bedeutendsten amerikanischen Linguisten, Philosophen und Kognitionsforscher des 20. und 21. Jahrhunderts.
[234] In *The Reflex Arc Concept in Psychology* (1896). Vollständige bibliographische Angabe im Literaturverzeichnis.
[235] Zu unterscheiden sind die ähnlich klingenden Begriffe Instruktionismus und Instruktionalismus. Instruktionismus bezeichnet im Gegensatz zum Konstruktivismus die Theorie des Lernens als Akt der Rezeption. Instruktionalismus ist eine spezifische Lehrkonzeption des Behaviorismus (vgl. Kap. 3.9.2).

Prozesse und besonders der Vorkenntnisse beruht. In diesem Rahmen kommen Frontalunterricht oder auch Pattern Drills bevorzugt zum Einsatz. Die beobachtbaren Unterschiede in den Ergebnissen solcher Lernprozesse erklären sich im Kognitivismus zum einen durch Abweichungen in den vorhandenen Informationsverarbeitungseinheiten, zum anderen durch die möglichen Störungen im Kommunikationsakt während der Vermittlung.

3.9.7 Konzeptionen: Konstruktivismus

Der Konstruktivismus kann als radikalere Weiterführung des Kognitivismus verstanden werden, mit dem er eine Reihe seiner Grundannahmen teilt. So steht auch im Konstruktivismus das Individuum mit seinen geistigen Prozessen im Fokus. Der große Unterschied zwischen beiden Theorien liegt in der angenommenen Verbindung zwischen Außenwelt und Individuum. Im Konstruktivismus bedeutet jedwedes Lernen eine Neuschöpfung, die erneute Erkenntnis im Lerner; Wissenstransfer ist grundsätzlich nicht möglich, so die Kernaussage der Konstruktivisten. Eine konstruktivistische Grundhaltung hat sich im Lauf des 20. Jahrhunderts in den verschiedensten Wissenschaftszweigen verbreitet und durchgesetzt; dies gilt für die (epistemologische) Philosophie ebenso wie für die Pädagogik und Psychologie – welche sich zunehmend auch auf Erkenntnisse der Neurowissenschaften stützt.

Die Grundidee wurde von verschiedenen Forschern in unterschiedlichen Richtungen weiterentwickelt, die jeweils bestimmte Aspekte stärker betonen und die Grundtheorie damit je spezifisch ausgestaltet haben.

3.9.8 Modelle: Wygotski und der Sozialkonstruktivismus

Wygotski[236], der als konstruktivistischer Psychologe gilt, entwickelte seine eigene Theorie aus einer kritischen Haltung zu den von Piaget postulierten genetischen Entwicklungsstadien; er vermisste die Einbeziehung des soziokulturellen Umfelds. Bis heute wirken Wygotskis Ideen auf die psychologische Forschung ein, da er als Wegbereiter einer besonderen Form des Konstruktivismus gelten kann, des Sozialkonstruktivismus, der nicht den individuellen Akt der Wirklichkeitskonstruktion in den Mittelpunkt stellt, sondern den durch soziale Interaktion vermittelten Akt der Konstruktion. Für ihn war die

[236] Lev Semjonowitsch Wygotski, *1896 in Orscha, †1934 in Moskau, war ein russischer Psychologe. Am bekanntesten sind seine Arbeiten zur kindlichen Entwicklungspsychologie. Im Westen wurde er erst nach der Veröffentlichung in deutscher Übersetzung (Denken und Sprechen) und einem durch andere Autoren zusammengestellten und redigierten Werk *Mind in Society* (1978) bekannt, ist aber bis heute einflussreich.

geistige Entwicklung ein durch praktische soziale Interaktion getragener Prozess, weshalb Sprache und kulturelle Praktiken in seinen Augen ganz maßgeblich die Abfolge der Entwicklungsschritte mitbestimmten. In diesem theoretischen Rahmen ist die Begriffsentwicklung der Spiegel der kognitiven Entwicklungsprozesse.

Wygotski teilte einige grundlegende Annahmen mit Piaget, wie etwa die schrittweise, altersdeterminierte Entwicklung. Die Unterschiede, die er auf diesen Stufen in der Begriffsbildung vorfindet, lassen ihn eine Abfolge von „Pseudobegriffen", über „Alltagsbegriffe" zu „wissenschaftlichen Begriffen" identifizieren, bei der der Abstraktionsgrad stetig zunimmt.[237] Mit Blick auf das Lernen prägte Wygotski den wichtigen Begriff der *Zone der nächsten Entwicklung (zone of proximal development)*. Das Lernen unterscheidet sich je nach Art der sozialen Interaktion innerhalb der Zone: Bei symmetrischer Interaktion, also unter annähernd gleich entwickelten Individuen, schreitet das Lernen allmählich durch die aktuelle Zone der nächsten Entwicklung fort; bei asymmetrischer Interaktion kann ein Lerner von einer Position am „unteren Ende" der Zone mithilfe der fähigeren Person bis an den äußersten Rand der Zone gelangen.

3.9.9 Kritisch-konstruktive Didaktik: Klafki

Klafkis lange Zeit sehr einflussreicher Entwurf einer kritisch-konstruktiven Didaktik (vgl. Kap. 2.3) ist keineswegs als Einzelleistung zu verstehen oder als die einzige Didaktik ihrer Art, die auf den oben dargelegten großen Strömungen des 20. Jahrhunderts in den Bereichen Psychologie, Entwicklung und Lernen beruht. Sie wurde für die vorliegende Arbeit *exemplarisch* ausgewählt, weil sie besonders im deutschsprachigen Raum einflussreich ist und außerdem wie eine Klammer die oben ausgeführten Erkenntnisse und Ideen integriert zu einem Gesamtkonzept vereint und als theoretische Basis für eine Vielzahl spezifisch mathematischer Didaktiken gelten kann.

Klafkis Didaktik baut auf so genannten *Schlüsselproblemen* auf, und so stellt als erster Probleme grundsätzlich in den Mittelpunkt des Unterrichts. Sie dienen in seiner Theorie als Ausgangspunkt für *alle* allgemeine Bildung, die Schüler in komplexen und fordernden Unterrichtsprozessen konstruieren. Dieses Prinzip ist auf kein Fach beschränkt, sondern verbindendes Element allen allgemeinbildenden Unterrichts. Schlüsselprobleme sind Kristallisationspunkte für *alle* Dimensionen von Bildung.[238] Klafki wurde vor allem kriti-

[237] Damit lassen sich seine Ideen ohne Probleme mit Bruners Dreischritt *enaktiv, ikonisch, symbolisch* relieren.

[238] Der Bildungsbegriff selbst ist durchaus nicht unumstritten, wird aber in den aktuellen Lehrplanschriften nach wie vor als Kategorie vorausgesetzt. Klafki selbst verteidigt die Notwendigkeit der Kategorie und ihre Bezeichnung

siert, weil viele seiner Didaktik die Alltagstauglichkeit absprachen. Die Arbeit allein anhand seiner *Schlüsselprobleme* sei nicht realisierbar.

3.9.10 (Interaktionistisch-)Konstruktivistische Didaktik: Reich

Reich[239] steht hier repräsentativ für die jüngste Generation von Didaktikern, die sich als konstruktivistisch charakterisieren lassen. Dabei ist auf die Unterscheidung zwischen Radikalem Konstruktivismus[240] und Interaktionistischem Konstruktivismus hinzuweisen. Für die Zwecke dieser Arbeit, soll der sozial-konstruktivistische Ansatz kurz vorgestellt werden. Reich selbst stellt enge Bezüge zu Deweys Arbeiten her (vgl. Kap. 2.2.3) und versteht die interaktionistisch-konstruktivistische Didaktik als Weiterentwicklung des pragmatischen Ansatzes. Reich benennt sieben zentrale konstruktivistische Grundannahmen über Lernprozesse und erläutert diese ausführlich. Im Folgenden können nur die wichtigsten Aspekte kurz herausgegriffen werden.

1. Konstruktives Lernen:
   „Lernvorgänge sind grundsätzlich konstruktiver Art. Je mehr das Lernen als Learning by doing erfolgt, desto viabler wird es für den Lerner sein, da er in seinem Tun abschätzen kann, was er Lernen muss und was überflüssig ist. Lerner entfalten hierbei reflektierte Sichtweisen über ihr Beobachten, über ihre Teilnahme und ihre Aktionen.“ (REICH 2012: 192)
2. Re- und dekonstruktives Lernen:
   „Lernen als Rekonstruktion ist kein Prozess bloßer Nachahmung oder Wiedergabe, sondern ein aktiver Aneignungsvorgang, der das Angeeignete immer aus der Sicht des Lerners modifiziert, bricht, verändert – insgesamt re-konstruiert, aber dabei auch im Blick auf das Individuum notwendig neu konstruiert. Mitunter treten auch Verwerfungen bisher Gelernten auf, so dass dekonstruktives Lernen ermöglicht wird. Sowohl für re- als auch dekonstruktives Lernen gelten die Grundsätze des konstruktiven Lernens.“ (REICH 2012: 195)

und unterscheidet mit den Bildungstheoretikern der deutschen Klassik die drei Hauptdimensionen: moralisch, kognitiv, ästhetisch (KLAFKI 2007).

[239] Kersten Reich, *1948 in Hamburg, ist deutscher Pädagoge und Kulturtheoretiker und Begründer des Interaktionistischen Konstruktivismus; er leitet seit 2007 das *Dewey-Center* für Internationale Lehr-und Lernforschung an der Universität zu Köln.

[240] Der Radikale Konstruktivismus kann an dieser Stelle nicht ausführlicher beleuchtet werden; seine Bedeutung für die konkrete pädagogische Praxis ist umstritten und sein Einfluss auf die aktuelle Bildungstheorie ist zumindest für Deutschland und Europa nicht mit der des interaktionistisch-konstruktivistischen Ansatzes vergleichbar. Für eine ausführliche Kritik vgl. DIEBERGEN 1998.

3. Kreatives Lernen:

   „Die Neugierde ist ein grundlegendes Motiv des kreativen Lernens. [...]Das kreative Denken er- scheint aus konstruktivistischer Sicht als besonders wichtig in Lernprozessen, weil es mindestens vier Bereiche der Konstruktion von Wirklichkeiten berührt und fördern kann“ (REICH 2012: 197), nämlich divergentes Denken, produktives Denken, Nonkonformität und das Staunen (vgl. ibid.).
4. Soziales Lernen:

   „Auch Konstruktionen über das Lernen sind immer schon in soziale Verhältnisse eingebettet. [...]Da soziales Lernen Zeit kostet, das von der übrigen vorhandenen Lernzeit abgeht, wird oft darauf verwiesen, dass Lernsysteme zu wenige Leistungen erbringen, wenn sie fachliches Lernen durch weniger kontrollierbares und evaluierbares soziales Lernen einschränken. Nun zeigt aber auch hier die Pisa-Studie, dass diese Einschätzung falsch ist.“ (REICH 2012: 202 ff.)
5. Situiertes Lernen:

   „Menschliche Kognitionen entstehen zwischen intelligenten Individuen in sozialhistorisch definierten Kontexten, in denen sie miteinander interagieren. Die Situationen, in denen wir als Lerner stehen, werden damit sehr wichtig. [...]Lernende sollen untersuchungsähnliche Beobachtungen, Explorationen, gegenseitigen Austausch, Evaluationen durchführen; sie sollen in einer motivierenden Lernumgebung entdeckendes Lernen praktizieren, wobei der Erwerb neuen Wissens dominant sein soll; ein diskursives Verständnis und eine gemeinsame Wissensaneignung sind erwünscht; Partizipation ist ein Schlüssel zum erfolgreichen Lernen; bei geleiteter Instruktionspraxis muss Anschluss an bisheriges Lernen gehalten werden, und neue Situationen müssen neues Lernen provozieren.“ (REICH 2012: 207 ff.)
6. Emotionales Lernen:

   „Lernen ist ein aktiver und interaktiver Prozess und beeinflusst das, was wir als Gelerntes festhalten. [...]Lernen impliziert immer die Anerkennung, den Dialog, die Auseinandersetzung mit anderen auf einer symbolischen und der imaginären Ebene [...], wie bereits thematisiert wurde. Das emotionale Lernen greift sehr stark in den imaginären Bereich ein.“ (REICH 2012: 210)
7. Individuelles Lernen:

   „Lernen ist ein lebenslanger Prozess, der für alle Altersgruppen Gemeinsamkeiten als

> auch Unterschiede aufweist. [...]Die Unterschiede liegen vor allem in den Fähigkeiten, die je nach Alter als bereits erlernte Assimilationsschemata oder Muster (z.B. des Denkens, Fühlens) in individuellen Eigenschaften vorliegen, die für die Bewältigung des Lernens bereitstehen und realisiert werden können." (Reich 2012: 221)

Vieles von dem, was Reich in seiner konstruktivistischen Didaktik ausführt und umfassend und auf Grundlage zahlreicher aktueller Forschung und Literatur begründet, kann als weitgehender Konsens in aktuellen Unterrichtstheorien betrachtet werden; dabei realisieren verschiedene Theorien oder Konzepte nicht gleichumfänglich die Idealvorstellungen bzw. es werden unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt.

3.10 Das spätere 20. Jahrhundert: Die Neuentdeckung des Problems

Vor dem Hintergrund der oben genannten psychologischen und lehr-lernpsychologischen Theoriebildungen, die das 20. Jahrhundert prägten, fanden im Verständnis von Denken und Lernen massive Umwälzungen statt. Die Geschichte der Pädagogik und ihre Entwicklung sind nur vor dem Hintergrund der – implizit oder explizit – zugrundeliegenden Vorstellung des Individuums als Realität (re-)konstruierende Einheit nachvollziehbar, auf der alle heute relevanten Didaktiken und Unterrichtskonzepte beruhen. Dass es trotzdem keine unmittelbare Korrelation zwischen den wissenschaftlichen Erkenntnissen und den realen Bildungsangeboten gab, wird aus den nun folgenden Betrachtungen zur Entwicklung des Mathematik*unterrichts* im 20. Jahrhundert deutlich.

Was lässt sich über die kulturgeschichtliche Entwicklung der Unterweisung in Mathematik, möglichst unter Bezug auf das Lösen von Problemen, aussagen?

Nach dem Ersten Weltkrieg wurden Reformen in Frankreich (teils aus nationalistischen Gründen) an den *Lycées* in weiten Teilen wieder zurückgenommen und eine Phase der Restauration setzte ein, die zu einer erneuten Zurücksetzung der mathematischen Bildung führte. Die (Selbst-)Legitimierung der Mathematik veränderte sich in dieser Phase. Sie erklärte, dass sie „das Ziel verfolge, die Geisteskultur zu bilden und zu formen", also keine praktischen und konkreten Ziele zu verfolgen.[241]

> *Mathematics teachers in the lycées stood against any sign of applied studies and links to the real world, which were identified with the primary system, and therefore wanted to reject anything that could resemble a "primarization" of secondary education. (Gispert 2014: 235)*

[241] Diese Selbstdarstellung dominierte an den Gymnasien in Deutschland wesentlich länger als in Frankreich.

In Deutschland drängten das Trauma des Ersten Weltkrieges und nachfolgende Wirtschaftskrisen die Wissenschaften in ihrer wahrgenommenen Bedeutung in eine randständige Position.[242] Nationalistische Tendenzen breiteten sich in zunehmendem Maße und mit immer größerem Einfluss in der Bildungspolitik aus. Zugleich gewannen reformpädagogische Ideen in dieser Zeit an Einfluss (vgl. auch Kap. 2.2). In den Zeiten des Dritten Reichs wurde der Mathematikunterricht in den Dienst der Machthaber gestellt.[243] Seine Inhalte wurden an das Programm angepasst, etwa mithilfe von Lehrbüchern wie „Mathematik im Dienste der nationalpolitischen Erziehung mit Anwendungsbeispielen aus Volkswissenschaft, Geländekunde und Naturwissenschaften“ (AHRENS/DORNER 1935). Neben einer Strukturreform der Sekundarschulen, die kaum praktische Veränderungen gegenüber der Weimarer Republik bedeutete. Weiterreichende Reformideen der nationalsozialistischen Partei wurden nie umgesetzt.[244]

Die Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg ist durch zahlreiche, keineswegs klar gerichtete Umwälzungen in der (europäischen) Bildungslandschaft geprägt. In West-Deutschland kehrte man in reaktionärem Konservatismus zu dem Zustand vor dem ersten Weltkrieg zurück und gab damit auch erzielte Fortschritte der Weimarer Republik auf. Die Bildungspolitik in Deutschland stagnierte. Als der Sputnik-Schock in den meisten westlichen Staaten einen lebhaften Diskurs und die OEEC[245] (Organisation for European Economic Cooperation) die Stärkung mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts auslöste, wurden in Deutschland im Gegenteil die obligatorischen Mathematikstunden nochmals reduziert. Erst in der zweiten Hälfte der 1960er Jahre löste der immense Druck eine Reformwelle in Westdeutschland aus, die zu institutioneller Neuordnung und Ausbau der Bildungslandschaft führte (vgl. auch Kap. 2.3). Die Mathematikdidaktik wurde im Zuge dieser Umgestaltung gestärkt und die Annäherung von Primar- und Sekundarschulwesen im Bereich der Lehrerausbildung weitergeführt. Auf curricularer Ebene wurden radikale Veränderungen von oben, durch die KMK, und aufgrund fehlender Reformbereitschaft von „unten“ vor allem auf Basis *ausländischer Vorschläge und Erfahrungen* durchgesetzt.

[242] Gleichwohl gab es zumindest formal den Fortschritt, dass die Klein’schen Reformen (vgl. Kap. 3.8) auch für das humanistische Gymnasium verbindlich in Kraft gesetzt wurden.
[243] Schubring (2014: 250 ff.) präsentiert die Sachlage so, dass sich der Mathematikunterricht selbst in den Dienst der neuen Machthaber und ihrer Ideologie stellte. Ohne Zugang zu den Primärquellen möchte der Autor auf diese Einordnung hier verzichten.
[244] Vgl. SCHUBRING 2014: 251.
[245] Es handelt sich um die 1948 gegründete Vorläuferorganisation der heute noch bestehenden OECD.

Diese Erfahrungen stammen vorwiegend aus den Vereinigten Staaten. Und es ist durchaus kein Zufall, dass eine allgemeine Reformbewegung in den USA begann. Waren vor dem zweiten Weltkrieg dort die Standards des Mathematikunterrichts noch stetig gesenkt worden, so stieg nach dem Krieg das Interesse an der Bildungsqualität allgemein und der mathematischen Bildung drastisch, aus einem einfachen Grund: Konkurrenzdruck. Die USA fürchteten, von der Sowjetunion technisch-militärisch überflügelt zu werden. Die sogenannte Neue Mathematik war die unmittelbare Folge. Die Ideen der Neuen Mathematik, die eine engere Angliederung des der schulischen an die universitäre Mathematik anstrebte, wurden oft stark auf ihren Aspekt der Mengenlehre verkürzt, brachten aber auch eine stärkere Betonung der Abbildungsgeometrie und eine verständnisorientierte Analysis.[246]

In Deutschland lag die Hauptschwierigkeit in der (mangelhaften) Umsetzung, die de facto vor allem durch die Lehrwerke geleistet wurde. Relevant ist die Feststellung, dass in diesem Reformversuch die „praktische" Tradition erneut zugunsten des theoretisch geprägten Vorgehens an den Sekundarschulen zurücktreten sollte – was sich als nicht realisierbar erwies. Auch wenn diese Reform nur wenige Jahre später aufgehoben wurde[247], blieben bestimmte Rudimente erhalten, die bis heute wirksam sind. Obwohl die Mengenlehre wieder aus den Curricula verschwand, so gab es nun doch ein länderübergreifendes Grundgerüst des Mathematikunterrichts: Fundamentale Ideen, die für Primar- und Sekundarschulbereich bestimmend sein sollten. In der *reformierten Oberstufe* an dem neugeschaffenen Gymnasium[248] blieb Mathematik Pflichtfach.

In der Deutschen Demokratischen Republik (DDR) ging man andere Wege. Eine zentralistische Struktur der Bildung beförderte unmittelbar nach dem Krieg reformpädagogische Ansätze und Arbeitsunterricht. Auch wenn dies bald wegen sowjetischer Einflussnahme teilweise aufgegeben werden musste[249], löste sich die DDR schon in den fünfziger Jahren von solcher Bevormundung und gestaltete sein Schulsystem weitgehend selbständig. Mathematik war das stundenstärkste Schulfach und genoss zusammen mit den Naturwissenschaften das höchste gesellschaftliche Ansehen. Es gab spezielle Fachschulen für Mathematik, teils im Verbund mit Technik, und der Staat schrieb ab Anfang der 1960er

[246] Vieles hiervon stellt einen klaren Rückbezug auf die von Felix Klein geforderten Veränderungen dar.
[247] Die Neue Mathematik scheiterte in Frankreich in vergleichbarer Weise.
[248] Hierin wurden nun das humanistische Gymnasium, das Realgymnasium und die Oberrealschule, die alle drei das Abitur erteilen konnten, zusammengeführt.
[249] Eine stark individualistische Grundhaltung, wie die Reformpädagogik sie vertritt, verträgt sich schlecht mit sozialistischen Idealen, die die Gemeinschaft in den Mittelpunkt stellen.

Jahre dezidiert den gesamten Mathematikunterricht, seine Ausgestaltung und die Ausbildung der Lehrkräfte fest, schuf Leistungswettbewerbe und förderte Begabungen im mathematisch-technischen Bereich von oberster politischer Ebene. Durch konsequente Evaluationen und Weiterentwicklungen der Lehrpläne wurde das System fortwährend verbessert und verfeinert. Mit dem Beitritt der DDR zur Bundesrepublik Deutschland wurde das System an das westdeutsche Modell angepasst – das weniger hohe Standards in der mathematischen Bildung setzte.

Welchen Stellenwert weist der Bildungsbegriff dem Problemlösepotenzial der Mathematik zu?

Bereits in den Vierziger Jahren des 20. Jahrhunderts erschien Pólyas epochemachendes Werk des mathematischen Problemlösens als eigenem Teilgebiet, der Heuristik: „How to Solve It". Pólya befasste sich unter klar didaktischer Perspektive mit dem Prozess des Problemlösens und schuf eine erste, und bis heute in weiten Teilen geltende Terminologie und sachfachliche Grundstruktur. Von ihm stammt der Vier-Schritt, mit dem sich problemlösendes Vorgehen gliedern lässt (s. Kap. 1.3.3). Mit Pólya wurde der Begriff des „Problems" nachdrücklich in den Bildungsdiskurs eingebracht. Verschiedene Autoren verarbeiteten Pólyas Ideen produktiv weiter, bezogen Teile aus seinen Arbeiten mehr oder minder intensiv in ihre Unterrichtskonzepte ein, und über den Verlauf des 20. Jahrhunderts hinweg lässt sich feststellen: *Das Problem rückte mehr und mehr in den Mittelpunkt der Betrachtungen der geistigen Konstruktionstätigkeit.*

Bildungspolitisch wurde dieser Entwicklung allerdings erst mit großer Verzögerung Rechnung getragen. Es macht den Anschein, dass die Mathematik zwar weithin als entscheidende Kompetenz für das Lösen von Problemen erkannt und anerkannt wurde – nur hatte dies lange keine klaren Konsequenzen für den Mathematikunterricht. Vielmehr stellten in den achtziger Jahren verschiedene amerikanische Forscher fest:

> *While students displayed a fairly high level of skill in the whole-number computation in the assessment of their abilities to apply these skills to the solution of realistic problems were significantly lower.*[250] *(HILL 1980: 427)*

Diese und ähnliche Befunde wurde 1983 in einer pessimistischen Studie, dem „A Nation at Risk"-Report, publiziert. Ähnlich wie der PISA-Schock in Deutschland rief er in den Vereinigten Staaten eine breite öffentliche Debatte und eine Reformbewegung hervor, die

[250] Dieses Phänomen ist auch als Wagenschein-Effekt bekannt. Es beschreibt allgemein die Unfähigkeit vorhandenes Fachwissen auf konkrete Problemstellungen anzuwenden.

die bis heute andauernde „Standards Era“[251] einläutete. Das US-amerikanische *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) erarbeitete in der unmittelbaren Folgezeit, also bereits in den achtziger Jahren, eine Konzeption des Mathematikunterrichts, in dem *das Problemlösen die zentrale Leitidee des Unterrichts* ist[252]. Heurismen wurden als Schlüssel zur Verknüpfung disjunkter Inhalte und Themenfelder betrachtet, und die Beschäftigung mit Heuristik sollte Transfermöglichkeiten in andere Fachgebiete ermöglichen und die zuvor mangelhafte Fähigkeit fördern, realitäts- und anwendungsbezogene Probleme zu bewältigen. Über diese Bemühungen schreibt Baumert:

> *Eine in mancher Hinsicht vorbildliche Konkretisierung dieser Kompetenzvorstellungen hat der "National Council of Teachers of Mathematics" (NCTM) mit zwei Publikationen "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics" (1989) und "Professional Standards for Teaching Mathematics" (1991) vorgelegt.[253] (BAUMERT/LEHMANN 1997: 60)*

Auch in Europa war das Problemlösen vor diesem Hintergrund bereits in den achtziger Jahren ein Thema unter Mathematikdidaktikern. In Frankreich etablierte sich etwa ab dem Anfang der 1980er Jahre eine „Lehrmethode, die – die Mathematik in der Bandbreite ihrer Anwendungsbereiche betrachtend – das Hauptaugenmerk auf das Problemlösen legte und „angewandte“ Teilgebiete des Fach bevorzugte“ (GISPERT 2014: 239). Anders als im angelsächsischen Raum waren es aber Einzeltheorien, die sich unter unterschiedlichen Namen etablierten, aber (zunächst) nicht einmal im Ansatz eine vergleichbare Wirkung für den Mathematikunterricht entfalteten. Erst mit dem Beginn der „Standards Era“ um die Jahrtausendwende lässt sich auch in Europa ein grundsätzlicher Wandel hin zum Problemlösen als Kernanliegen des Mathematikunterrichts erkennen.

3.11 Einschub: Unterrichtskonzepte des 20. Jahrhunderts

In der Folge der oben umrissenen kognitiven und dann konstruktivistischen Wende (Kap. 3.9) und vor dem Hintergrund der geschichtlichen Wechselfälle der Bildungssysteme und damit verbundenen Umsetzungen von Mathematikunterricht lassen sich Änderungen in der Didaktik und besonders auch in der Mathematikdidaktik verfolgen, die sich unmittelbar aus dem veränderten Verständnis des Lernakts und auch des Lerners als Individuum ergeben. Herrschte noch zur Blütezeit des Behaviorismus die Vorstellung vor, dass das

[251] Eben jene Art von Standards, die mit einigen Jahrzehnten Verzögerung Eingang in die europäische Bildungsreform gefunden haben und nun in den deutschen Bildungsstandards verankert sind.
[252] Hiervon und den aktuellen Weiterentwicklungen wird noch in Kap. 1 die Rede sein.
[253] Baumert nennt folgende (weitere) Belege für diese Einschätzung der Leistungen des NCTM: Heymann (1996a, 1996b), Hiebert (1986), NCTM (1989, 1991), Schoenfeld (1986, 1992).

mechanische Einüben mathematischer Verfahren zu mathematischer Kompetenz führen würde, so postulierten viele Forscher nun einen ganz anderen Blick auf das Entstehen mathematischen Wissens, der sich auch auf die Ergebnisse und Theorien der Entwicklungspsychologen stützte.

> *The new mathematics and its structures were recognized not only by mathematicians but even by scholars in other fields, in particular in the humanities, as a language and scientific tool that were essential for having access to any knowledge. In the area of education, one of the consequences was the convergence between mathematicians agreeing with Bourbaki and psychologists and philosophers such as Piaget and Gonseth. (GISPERT 2014: 236)*

Es ist nur folgerichtig, dass die veränderte Sicht auf das Lernen auch neue gestalterische Grundsätze für den Unterricht notwendig machte. Um das Lernen in diesem kognitivistischen/konstruktivistischen Sinne zu ermöglichen, wurde immer weniger das fertige Wissen zur Grundlage des Unterrichts; das eigene Handeln und der prozesshafte Charakter der Bedeutungsaushandlung und damit Inhalts(re)konstruktion im Geist des Lerners traten in den Vordergrund.[254] Es entstanden sukzessive verschiedene didaktische Theorien und ihnen zugehörige Unterrichtskonzepte, in denen verschiedene Anlässe zum mathematischen Lernen erprobt und der Fokus des Unterrichts variiert wurden. Einige der so entstandenen Konzepte unterscheiden sich eher in Details und ihrer methodischen Ausgestaltung als in grundlegenden Fragen. Es handelt sich außerdem um ein sich stetig fortentwickelndes Kontinuum und nicht eine klar umgrenzbare Abfolge von Einzelkonzepten. Da sich für das späte 20. Jahrhundert (und bis heute) die Entwicklungen in den Industrienationen einander zunehmend annähern, wurde und wird auf eine geographische Unterteilung weitgehend verzichtet.[255]

Es sollen nun einige der besonders für den Mathematikunterricht fruchtbaren Unterrichtskonzepte und ihre explizite oder implizite Haltung zur Rolle des Problemlösens im (Mathematik-)Unterricht kurz vorgestellt werden. Außerdem wird jeweils die Verbindung zum CHIME-Konzept schlaglichtartig aufgezeigt.

[254] Vgl. auch GISPERT 2014: 236 zu dem komplementären Charakter der Neuen Mathematik und anderer epistemologischer und bspw. linguistischer Disziplinen.

[255] Insgesamt gab es im 20. Jahrhunderts vielfältige Parallelen zwischen amerikanischem und europäischem Bildungsdiskurs mit seinen Bestrebungen zu Bildungsreformen (Kap. 2.2.3, 3.8 und 3.10). Vgl. HAUG 2012: 68 f.

3.11.1 Handlungsorientierter Unterricht

Hentig[256] folgte in seinen Grundüberzeugungen in weiten Teilen Dewey (siehe auch Kap. 2.2.3) und engagierte sich maßgeblich in der Bielefelder Laborschule (gegr. 1974), die im Wesentlichen Deweys Laborschule in Chicago nachempfunden war. Hentig und Gudjons stehen im deutschsprachigen Raum für den Handlungsorientierten Unterricht.

Handlungsorientierter Unterricht betont, wie so häufig in Abgrenzung zum vorherrschenden pädagogischen Vorgehen der Zeit, die Wichtigkeit des unmittelbaren Erfahrens. Damit ist die Erwartung verbunden, dass handelnd erworbenes Wissen kein totes Wissen sein kann, sondern in verwandten (Problem-)Situationen abgerufen und produktiv eingesetzt werden kann. Die Nähe zu Deweys pragmatischem Ansatz mit seiner Betonung des Erfahrens ist deutlich. Die konkrete Unterrichtsgestaltung ist dabei von den Ideen und Ergebnissen Aeblis und Bruners beeinflusst.

Für das CHIME-Konzept relevant ist die große Bedeutung, die der Verknüpfung zwischen (motorischer) Handlung und Erkenntnisgewinn zugeschrieben wird. Mathematisch-problemlösendes Wissen konkret handelnd aufzubauen ist eines der zentralen Ziele.

3.11.2 Genetischer Unterricht und das genetische Prinzip

Der genetische Unterricht (nach Wagenschein[257]), der besonders in der Mathematik und den Naturwissenschaften wirksam wurde, weist einige Elemente auf, die auf den später entstandenen *Problemorientierten Unterricht* weisen. Auch für den genetischen Unterricht bedarf es „herausfordernder, aufschließender Probleme“ und die Auswahl des Stoffes muss exemplarisch, nicht fachsystematisch erfolgen. *Genetisch – sokratisch – exemplarisch.* So lautete Wagenscheins Motto.

Was ist unter dem genetischen Prinzip zu verstehen? Warum sollte man sich als heutiger Lerner mit der Geschichte einer Wissenschaft befassen, die auch Irrwege und Sackgassen enthielt? Diese meist in Ablehnung des genetischen Ansatzes gestellte Frage basiert auf dem Missverständnis, dass *Historie* und *Genesis* identisch sind.

[256] Hartmut von Hentig, *1925 in Posen, Polen, ist einflussreicher Vertreter der Reformpädagogik in westlichen Nachkriegsdeutschland.

[257] Martin Wagenschein, *1896 in Gießen, †1988 in Trautheim, war deutscher Physiker und Pädagoge, der einflussreiche Beiträge zur Mathematikdidaktik und Fachdidaktik der Naturwissenschaften (insb. der Physik) lieferte; am wichtigsten war das von ihm entwickelte genetische Prinzip, zu dem auch das exemplarische Lernen gehört. Hauptwerke sind *Die pädagogische Dimension der Physik* (1962), *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken* (in zwei Bänden, erschienen 1965 und 1967) und *Verstehen lehren* (1968).

Schon Toeplitz[258] hielt dem entgegen:

> *Der Historiker […] hat die Aufgabe, alles Gewesene zu registrieren, ob es gut war oder schlecht. Ich will aus der Historie nur die Motive für die Dinge, die sich hernach bewährt haben, herausgreifen und will sie direkt oder indirekt verwerten. […] Nicht um die Geschichte handelt es sich, sondern um die Genesis der Probleme, der Tatsachen und Beweise, um die entscheidenden Wendepunkte dieser Genesis. (*TOEPLITZ *1927: 94)*

Das schmale Buch *Problemgeschichte der Mathematik* von Herbert Meschkowski (1979) befasst sich tiefergehend mit einer solchen, im Toeplitz'schen Sinne „genetischen" Darstellung der Mathematik.

Für das CHIME-Konzept ist der Standpunkt des genetischen Lernens insofern fundamental, da es die historisch gewachsenen Bezüge zwischen fachmathematischem Wissen auf der einen Seite und dem Akt des Problemlösens auf der anderen Seite wann immer möglich nutzbar macht.

3.11.3 Entdeckendes und Forschendes Lernen

Die Grundidee des *Entdeckenden Lernens* spielte schon in der Reformpädagogik eine große Rolle. Der Wissenserwerb soll auf der Grundlage von Neugier und Eigenaktivität des Lerners erfolgen. Der Gedanke wurde in der Didaktik immer wieder und von einer Vielzahl von Fachgebieten aufgegriffen und in der Nachkriegszeit auch früh in offizielle Bildungsschriften aufgenommen (vgl. HAMEYER 2006: 114 f). Wissenschaftlich begründet wurde der Ansatz durch die Ergebnisse der Lehr-Lernforschung (vgl. Kap. 3.9), und auch die bereits vorgestellten Theoretiker (besonders Bruner) wiesen auf die Bedeutung des *Entdeckens* hin, die sich aus ihren psychologischen Forschungen bzw. ihren Lerntheorien ergaben.

Im deutschsprachigen Raum hat Winter[259] diese Grundidee ab dem Ende der 1980er Jahre maßgeblich für das Fach Mathematik ausgearbeitet (1989). Er leitet das Entdeckende Lernen direkt aus konstruktivistischen Grundüberzeugungen her und beschreibt dabei immer wieder die enge Verbindung von Entdecken und Problemlösen, bezieht sich auch auf die Heuristik, und fügt sich damit nahtlos an das, was für das CHIME-Konzept ausführt wird (vgl. Kap. 9.1). Darüber hinaus analysiert er treffend die Hürden, die bei der

[258] Otto Toeplitz, *1881 in Breslau, †1940 in Jerusalem, war deutscher Mathematiker, der sich für die „historische Methode", die die Genese einer Entdeckung nachvollzieht, im Mathematikunterricht aussprach. Für eine kritische Besprechung des Begriffs „genetisch" vgl. HISCHER 2012: 28.

[259] Heinrich Winter, *1928 in Buttlar (Thüringen), ist ein einflussreicher deutscher Mathemtikdidaktiker, der vor allem für seine Arbeiten zum Entdeckenden Lernen bekannt ist. Er formulierte die drei (allgemeinbildenden) Grunderfahrungen der Mathematik, die auch aktuell zu den wichtigsten und wirksamsten Thesen der Mathematikdidaktik und der Bildungsreformen zählen dürfen. Grunderfahrung 3 ist die Entwicklung von allgemeinen heuristischen Fähigkeiten durch die Beschäftigung mit Mathematik (vgl. Band A, KRICHEL 2017: 166).

Umsetzung des Entdeckenden Lernens auftreten und auf die später bei der Darstellung des CHIME-Konzepts zurückzukommen sein wird.

Als eine spezialisierte Form des *Entdeckenden Lernens* kann das *Forschende Lernen* gelten. Hier tritt der Gedanke hinzu, dass der Prozess der Entdeckung sich an wissenschaftlich-forschenden Prinzipien orientiert (vgl. TENORTH/TIPPELT 2007: 185).

Das CHIME-Konzept ist im Kern konstruktivistisch angelegt. Die eigenaktive Konstruktion mathematischen Wissens setzt in diesem Sinne gleichsam das Entdeckende Lernen als Prinzip der Unterrichtsgestaltung voraus. Auch das Forschende Lernen kann im CHIME-Konzept angebahnt und entwickelt werden. Das Konzept des Entdeckenden Lernens wird wesentliche inhaltliche Bausteine wie auch konkrete Unterrichtselemente zum CHIME-Konzept beisteuern.

3.11.4 Problemorientierter Mathematikunterricht / Problem-Based Learning

Problemorientierung als Unterrichtsprinzip, also problemorientierter oder auch problemlösender Unterricht entwickelte sich gleichfalls aus reformpädagogischen Ansätzen und basiert auf der, auch von John Dewey vertretenen Konzeption, „dass das Lösen von Problemen lernmotivierend wirkt und so die Effektivität des Lehrens und Lernens steigert“ (TENORTH/TIPPELT 2007: 578). Entscheidend ist dabei, dass die vorgelegten Probleme „für die Lernenden relevant sind, weil sie eine gewisse Aktualität haben, als authentisch wahrgenommen werden oder aus anderen Gründen das Interesse der Schüler wecken“ (ibid.). Mit einem Problem ist in diesem Zusammenhang aber keineswegs zwingend ein lebensweltliches Realproblem gemeint. Stowasser[260] und Zimmermann[261] sind zwei prominente deutsche Verfechter dieses Ansatzes für den Mathematikunterricht. In der Deutschen Demokratischen Republik wurde dieser Ansatz unter der Bezeichnung *problemhafter Mathematikunterricht* ebenfalls entwickelt.[262]

Es ist zu betonen, dass nicht eine Erhöhung des „Problemanteils“ in den Übungsphasen des Unterrichts genügt, um einen problemorientierte Mathematikunterricht zu realisieren, sondern Probleme die Ausgangspunkte für sämtliche unterrichtlichen Phasen darstellen.[263]

---

[260] Roland Stowasser lehrte an der Technischen Universität Berlin im Bereich der Zahlentheorie, Algebra, Geometrie und Topologie.

[261] Bernd Zimmermann, *1946 in Hamburg, arbeitete als Mathematik- und Physiklehrer, promovierte 1977 zur Analyse mathematischen Problemlöseverhaltens bei Schülern und habilitierte 1992 zur Heuristik in Mathematik und Mathematikgeschichte; von 1993 bis 2011 war er Professor für Mathematik und Computerwissenschaften an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. (Vollständige bibliographische Angaben s. Literaturverzeichnis.)

[262] Vgl. hierzu VOLLRATH 2000: 41, der sich bei diesen Ausführungen auf Pietzsch (o. J.) bezieht..

[263] Ibid.

Diese Umgestaltung der Didaktik zur anwendungsbezogenen Kompetenzentwicklung fand keineswegs nur in der Mathematik und verwandten Fächern statt. In der Fremdsprachendidaktik lassen sich parallele Entwicklungen beobachten: Dort ist das *Task Based Learning*[264] eines der derzeit produktivsten didaktischen Konzepte, dessen Kern ist es, das Lernen und Anwenden der fremden Sprache in konkreten „Problemsituationen" oder bezogen auf praktische „Aufgaben" zu realisieren – an die Stelle eines mathematischen Problems tritt hier also das kommunikative Problem; konzeptuell sind beide Ansätze sonst eng verwandt.

Für das CHIME-Konzept spielen die Ideen des Problem Based Learning eine wichtige Rolle, da die Vermittlung heuristischer Kompetenzen Hauptziel des Konzepts ist. Daher müssen Probleme Ausgangspunkt des didaktischen Planungshandelns sein, wie es von den Vertretern des PBL herausgearbeitet wurde.

3.11.5 Realistic Mathematics Education

Die in den Niederlanden maßgeblich von Freudenthal[265] entwickelte *Realistic Mathematics Education* (RME) vereint viele Elemente der bis hier vorgestellten Konzepte. Die zwei wichtigsten Grundsätze besagen, dass

1. Mathematik mit der Realität verknüpft sein müsse. Damit ist nicht zwingend eine Anbindung an einen konkreten Sachgegenstand oder eine Realsituation gemeint, sondern es kann auch um die „geistige Realität" in den Köpfen der Lerner gehen.[266]
2. Mathematik eine menschliche Aktivität ist. Dies hebt den prozessualen Charakter von Mathematik hervor.

Daraus ergibt sich in der RME die Gestaltung des Unterrichts nach dem Prinzip der *Guided Reinvention*, das dem genetischen Prinzip nahesteht. Treffers (1987) fasst die Hauptmerkmale der RME wie folgt zusammen:

- Kontextualisierung
- Gebrauch von Modellen

[264] Als wichtige aktuelle Autoren sei hier auf NUNAN (2009), ELLIS (2008), WILLIS (2007) und MÜLLER-HARTMANN (2005) verwiesen.
[265] Hans Freudenthal, *1905 in Luckenwalde, †1990 in Utrecht, war ein niederländischer Mathematiker und Didaktiker. Er übte durch seine Schule der RME nachhaltigen Einfluss auf die Mathematikdidaktik aus und verhinderte in den Niederlanden die Einführung der Neuen Mathematik.
[266] De LANGE (1996) betont, dass „realistische" Probleme auch beispielsweise Anwendungen oder Modellierungen sein können. da es oft Missverständnise bezüglich dem Wesen von Problemen gibt, sei hier noch einmal an die sehr allgemeine Definition in Kap. 1.1.8 erinnert.

- Verwendung der Produkte und Konstrukte der Lerner
- Interaktivität des Lehrprozesses
- Verknüpfung mehrerer Lernprozesse

Für das CHIME-Konzept liegt die Bedeutung der RME in geteilten Überzeugungen, die sich aus den Ideen des Situierten Lernens speisen, und praktischen Aspekten, die in dieser Theorie herausgearbeitet wurden.

Situated Learning / Situiertes Lernen

Das Situated Learning richtet sein Hauptaugenmerk auf die Qualität der Problemsituationen, in deren Rahmen Lernen stattfindet. Lernen ist dann am effektivsten, d.h. es bewirkt den größten und nachhaltigsten Kompetenzzuwachs, wenn die Situationen zu ihrem Erwerb geeignet gewählt sind. Damit ist es ein Prinzip der Unterrichtsgestaltung, das praktisch alle hier angesprochenen Unterrichtskonzepte berührt (vgl. Kap. 3.9.10).

Für das CHIME-Konzept spielen ist die Idee des Situated Learning maßgeblich für die Gestaltung als integrierter Bestandteil von Sachfächern, die die Situiertheit der Problemstellungen gewährleisten sollen.

3.12 Fazit und Kommentar

Schon die knapp gehaltene Übersicht über die ausgewählten Unterrichtskonzepte lässt erkennen, dass sie sich einander nicht grundsätzlich widersprechen oder gar ausschließen. Mit Blick auf ihre Entstehungszeiten und –zusammenhänge zeigt sich vielmehr, dass es sich um teils parallele, aber geographisch getrennte, Entwicklungen handelt, die auf der Grundlage konstruktivistischer Erkenntnistheorie eine Effektivierung des (mathematischen) Lernens anstreben. Die verschiedenen Ansätze, die dabei im Rahmen des Handlungsorientierten, des Entdeckenden, des problembasierten oder des situierten Lernens bzw. Unterrichts entwickelt wurden, lassen sich als ein großes Kontinuum sich gegenseitig bedingender, ermöglichender und ergänzender Perspektiven verstehen, die im Laufe des vergangenen Jahrhunderts global[267] konvergierten – und zwar mit einer zunehmend Fokussierung auf das Problem als Kernbegriff, Kernanliegen und gleichzeitig vielleicht wichtigstes Instrument.

[267] Der Begriff ist mit Einschränkungen zu verstehen. Nicht alle Länder sind an dem wissenschaftlichen Austausch auf diesem Gebiet beteiligt; gemeint ist vielmehr die sehr umfassende, nicht auf einen bestimmten geographischen Raum beschränkte Verbreitung der dargestellten Ideen.

Betrachtet man die Entstehungszusammenhänge institutionalisierter Bildung, und insbesondere mathematischer Bildung, so treten global ähnliche Phänomene in Erscheinung. Die frühen Hochkulturen schufen ein Bildungswesen im Interesse ihrer Selbsterhaltung, Legitimierung und Machtkonsolidierung; und mathematisches Wissen trug entscheidend hierzu bei. Daneben wurde die Mathematik frühzeitig als Hilfswissenschaft der Astronomie und Astrologie etabliert. Während der klassischen Antike trat der Aspekt der freien Bildung in den Vordergrund. Staatliche Einflüsse auf die Bildung schwanden, und Mathematik wurde nun als eine der philosophischen Künste vor allem im Hinblick auf ihren Beitrag zu Logik und agonisch-rhetorischen Fähigkeiten geschätzt. Aber die wissenschaftliche Tradition mittelalterlicher Prägung befähigt nicht zum Betreiben von Mathematik!

Die heutige Schulmathematik bezieht sich aber immer noch mitunter gern auf diese Tradition, und im Lauf der Zeit hat sich eine seltsam schizophrene Situation ergeben. Heute durchzieht im schulischen Kontext eine pseudo-wissenschaftliche Grundhaltung das Verständnis von Mathematik: auf der einen Seite werden mechanisch Verfahren gepaukt, ohne dass ein Verständnis wenigstens der innermathematischen Zusammenhänge besteht, auf der anderen Seite lehnen viele Lehrende eine echte Anbindung der mathematischen Fachinhalte an praktische Anwendungen ab, weil sie die „Eigenständigkeit" der Mathematik gewahrt wissen wollen – eine Eigenständigkeit, die man historisch infrage stellen darf und die außerdem durch das Lernen von Algorithmen und Rezepten wohl kaum etabliert werden kann.

Die mathematische Metaebene, auf der es *nur* um die logische Durchdringung mathematischer Ideen und Konzepte geht (und die mit dem praktischen – oft unreflektierten – Rechnen, wie es in der Schule weit überwiegt, nichts zu tun hat), wird allerdings ebenfalls weitgehend ausgeklammert, mit dem Argument, dass Mathematik eine Naturwissenschaft und keine Geisteswissenschaft sei. [An dieser Stelle sei die Anmerkung gestattet, dass es definitorisch überhaupt keinen Zweifel geben kann, dass es sich bei einer Wissenschaft, die sich auf eine Handvoll durch den menschlichen Geist definierter Axiome stützt und diese zu einem hochkomplexen, rein theoretischen, in sich geschlossenen Logikkonstrukt ausbaut, um eine *Geisteswissenschaft* handelt.]

So hat sich die Mathematik als schulische Disziplin über viele Jahre, Jahrzehnte, vielleicht sogar Jahrhunderte, hinweg in eine Ecke bewegt, aus der ihre eigenen vorgeblich an (überlegener) Geistesbildung orientierten Ansprüche keinen Ausweg mehr bieten. Polemische Attacken begleiten jede echte innere Reformanstrengung des schulischen

Mathematikunterrichts: Wer sich gegen das stupide Pauken mathematischer Rechenverfahren wendet, gilt als Feind notwendiger mathematischer Grundkenntnisse. Wer eine klare Anbindung an Sachfachinhalte fordert, verrät das Ideal der Mathematik als unabhängige Wissenschaft. Wer den ästhetischen oder „Spaßfaktor“ der Mathematik im Unterricht stärken will, bekommt den Vorwurf zu hören, dass er der vermeintlichen Entertainmentkultur der Schüler hinterherliefe und keine ernsthafte Mathematik betreiben wolle. Wer die Ideen- und Problemgeschichte der Mathematik in den Mittelpunkt des Unterrichts rücken möchte, der ist ein philosophischer Träumer, der aus der schönen exakten Wissenschaft ein geisteswissenschaftliches Schwatzfach machen möchte.

Was bei all diesen Vorwürfen übersehen wird, ist die Tatsache, dass die Schulmathematik an einem Scheideweg steht – oder sich möglicherweise bereits für den Weg auf den Abgrund zu entschieden hat. Denn kein polemischer Vorwurf oben skizzierten Zuschnitts kann darüber hinwegtäuschen, dass die Mathematik für viele Schüler Sinnhaftigkeit und Relevanz vermissen lässt, und man muss sagen: oft aus gutem Grund. Es ist inzwischen gute deutsche Gymnasialtradition, Mathematik ganz bewusst als nicht-nützliche Wissenschaft zu präsentieren (denn schließlich ist Bildung ja mehr als praktisches Wissen für den Beruf, oder?) – nur dass hier ein Missverständnis vorliegt: Nicht-unmittelbar-nützlich und unnütz sind zwei sehr verschiedene Dinge. Und ein Unterricht, der sich starrsinnig in einer vorgeblich traditionellen Haltung der bewussten Weltabgewandtheit ergeht, ist nicht etwa „überzeitlich“ und „von aktuellen Moden unabhängig“, sondern schlichtweg unnütz und auf dem Weg in die Bedeutungslosigkeit. Nicht die Mathematik, wohlgemerkt, als geistiges Gut und ihre Beiträge zum wissenschaftlichen und ingenieurswissenschaftlichen Denken stehen hier in der Kritik, sondern die Art und Weise, wie sie in der schulischen Bildung interpretiert, dargestellt und vertreten wurde und teils noch immer wird. Dabei sind es möglicherweise gerade das (mathematische) Problemlösen und der Erwerb heuristischer Fähigkeiten und Fertigkeiten, die helfen können, den Abgrund überwindbar zu machen, der sich zwischen der technisierten, unüberschaubaren und überwältigenden Lebensumwelt und dem Individuum aufgetan hat.

4 Mathematikunterricht der jüngsten Geschichte und Gegenwart

Die letzten Kapitel haben gezeigt, dass sich viele Entwicklungen, die heute tiefgreifende Veränderungen im deutschen Bildungssystem bewirken, international vollzogen haben und schon seit mehreren Jahrzehnten virulent waren. Im Zuge der stetig fortschreitenden Globalisierung in den unterschiedlichsten Bereichen menschlicher Kultur war es wohl nur folgerichtig, dass der allgemeine Bildungsbegriff und damit auch die Idee von mathematischer Bildung Teil eines internationalen Diskurses wurde. Ihren bislang wichtigsten und folgenreichsten Niederschlag fand und findet dieser Diskurs in den PISA-Studien der OECD und den nationalen und internationalen Reaktionen auf deren dreijährliche Ergebnisse.[268]

	2000	**2003**	**2006**	**2009**	**2012**
Punkte / Rang M	490 / 20	503 / 19	504 / 20	513 / 16	514 / 18
Punkte / Rang LK	484 / 21	491 / 21	495 / 18	497 / 20	508 / 20
Punkte / Rang NW	487 / 20	502 / 18	516 / 13	520 / 13	524 / 12
Punkte / Rang PL		513 / 16			509 / 17
Korr M-PL		0,89			0,81
Korr Lk-PL		0,82			
Korr Nawi-PL		0,80			

Tab. 4 Übersicht der von Deutschland erzielten Punkte / Rangplatzierungen in den PISA-Studien. (M: Mathematik, LK: Lesekompetenz, NW: Naturwissenschaften, PL: Problemlösen, Korr: Korrelation).

Obige Aufstellung (Tab. 4) zeigt einige Kernergebnisse für Deutschland aus den PISA-Studien der Jahre 2000, 2003, 2006 und 2012. In den Jahren 2003 und 2012 lag der Schwerpunkt der Studie auf Mathematik, und das Problemlösen wurde gesondert und unabhängig überprüft. Leider wurde für das Jahr 2012 der Zusammenhang zwischen den drei Hauptkompetenzbereichen und dem Abschneiden im Problemlösen nicht ermittelt.

Deutschland gehört zu einer Gruppe von OECD- und Nicht-OECD-Staaten, die einen stetig steigenden, positiven Trend in der Kompetenzentwicklung im Bereich Mathematische Grundbildung (Mathematical Literacy) vorweisen können (s. Abb. 12). Dies ist zunächst sicherlich erfreulich, wenn auch der relative Rang innerhalb der Teilnehmerstaaten kaum verbessert wurde (vgl. Tab. 4), was darauf schließen lässt, dass eine in etwa vergleichbare Steigerung der Kompetenzen in (allen) anderen Ländern stattgefunden hat.

[268] Zum Überblick vgl. Band A, Krichel 2017: 2-6. Die Ergebnisse der bisherigen PISA-Studien wurden von der OECD veröffentlicht und finden sich vollständig zitiert im anhängenden Literaturverzeichnis.

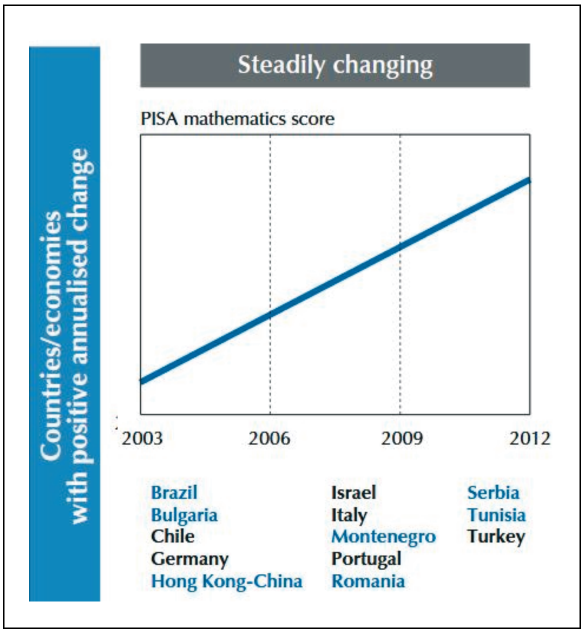


Abb. 12 PISA-Teilnehmer mit stetig positiver Entwicklung im Bereich Mathematische Grundbildung (OECD 2014a: 55).

Für das Anliegen dieser Arbeit weiterhin interessant ist der Vergleich dieser Ergebnisse zur Mathematik in Korrelation zu den allgemeinen Problemlösefähigkeiten, wie sie in der PISA-Studie 2012 erhoben wurden. Es zeigt sich eine statistisch signifikante negative Abweichung, und zwar sowohl bei Lernern, die im mathematischen Testteil gut oder sehr gut abgeschnitten haben, als auch bei denjenigen im Mittelfeld und im unteren Leistungsbereich. Im Durchschnitt werden die erwarteten Werte um 12 Punkte unterschritten (vgl. Abb. 13).

Die PISA-Studien und das stets auch enthaltene „Ranking" der Teilnehmerstaaten haben neben einem global-gesellschaftlichen[269] Diskurs auch für eine Welle der Kritik bis hin zur Empörung gesorgt; wenig überraschend besonders in denjenigen Ländern, die mit ihrem Abschneiden nicht zufrieden waren. Doch es würde zu kurz greifen, hier nur eine Art „Selbstverteidigung durch Angriff" zu vermuten. Die Kritik betrifft besonders zwei Punkte: Zum einen wird das Testdesign nicht allgemein als valide akzeptiert, zum anderen werden sehr oft die Auswirkungen auf den Unterricht kritisiert, wo die Vorbereitung auf standardisierte Tests (keineswegs nur PISA, da sich seither und in ihrer Folge auf nationaler Ebene weitere Standardisierungen und Zentraltests verbreitet haben) dominante(re) Elemente wurden. Speziell in Deutschland gibt es darüber hinaus nach wie vor viele Stimmen, die sich kritisch mit den Reformabläufen in Deutschland und den konkreten Umsetzungen der Vorgaben der Bildungsstandards

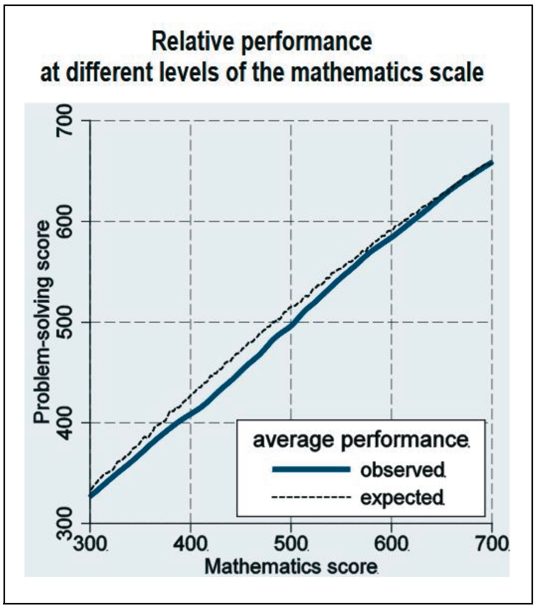


Abb. 13 Korrelation der Problemlösefähigkeiten und mathematischen Kompetenzen (OECD 2014b: 2f.).

[269] Der Begriff „global" ist in diesem Zusammenhang nicht wortwörtlich zu verstehen, da natürlich nicht alle Länder der Welt an den PISA-Studien teilgenommen haben oder Interesse an einer solchen kompetitiven Überprüfung ihrer Leistungsfähigkeit haben.

auseinandersetzen.[270] Interessant ist jedoch, dass bezüglich der von der OECD formulierten Ansprüche Baumert[271] die Lage insgesamt so beschreibt:

> *Im einzelnen gibt es unterschiedliche Ansichten darüber, was zur mathematischen Grundbildung zu rechnen sei. In den Basisvorstellungen über die erforderlichen mathematischen Kompetenzen und über generelle Prinzipien der Stoffauswahl besteht jedoch weitgehend Konsens. Es zählen dazu vor allem mathematisches Problemlösen, der verständige Umgang mit mathematischen Symbolen, Begriffen und Modellen sowie mathematisches Denken, und zwar – das ist entscheidend – sowohl in inner- als auch außermathematischen Kontexten. [...] Eine ähnliche internationale Übereinstimmung belegen auch die Befunde der TIMSS-Curriculum-Studie für die Grundlinien der Stoffauswahl. Bei aller Variabilität innerhalb und zwischen Ländern gibt es so etwas wie ein internationales Kerncurriculum des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe, das in sehr unterschiedlicher Form im Lehrplan, im Lehrbuch oder im professionellen Selbstverständnis von Mathematiklehrern verankert sein kann.[272] (Baumert/Lehmann 1997: 60)*

Dass sich diese von Baumert beschriebenen Konvergenzen durch die nun regelmäßigen gemeinsamen Überprüfungen noch verstärkt haben, und dass sich – ganz sicher – auch die Sprachregelung in Folge dessen weltweit vereinheitlich hat, ist nur eine logische Folge. Auch dass die Teilnehmerstaaten sich nun bewusst bildungspolitisch an das anlehnen, was als Ergebnis internationaler Forschungen und Diskussionen in das Testdesign der OECD eingegangen ist, ist wenig überraschend.

So ist festzustellen, dass die Lehrpläne einander immer ähnlicher werden – ob man dies eher kritisch als *Gleichschaltung* des Lernens und Lehrens, neutraler als *Vereinheitlichung* oder gar positiv als *Globalisierungsprozess* betrachten kann oder muss, ist aus der aktuellen Situation heraus nicht abschließend zu beurteilen. In dem nun folgenden kurzen Überblick soll vielmehr deskriptiv der Frage nachgegangen werden, welche Vorstellungen von gutem Mathematikunterricht sich auf internationaler Ebene identifizieren lassen.

---

[270] Kritisch zu PISA und seiner Aufgabenqualität hat u. a. Peter Bender von der Universität Paderborn gearbeitet. Seine diesbezüglichen Artikel und Beiträge sind alle digital zugänglich unter: https://fddm.uni-paderborn.de/personen/arbeitsgruppen/ag-bender/personen/bender-peter/veroeffentlichungen/ (*Zu empirischen Untersuchungen von Bildungsfragen*) [07.04.2017].

[271] Jürgen Baumert, *1941 in Schöningen, ist einer der führenden deutschen Bildungsforscher. Er verfasste Analysen zu den Ergebnissen der TIMS- sowie der PISA-Studien. Vgl. Baumert/Lehmann 1997: 200.

[272] Hier ausgelassen wurde folgende Zitatangabe Baumerts am Ende dieses Satzes: Schmidt et al. 1996.

4.1 Vorstellungen von gutem Mathematikunterricht

Die von der OECD vertretenen Zielformulierungen für den Mathematikunterricht fußen auf einer Tradition, deren Anfänge bis in die Mitte des vergangenen Jahrhunderts zurückreichen.

> *The strategic importance given to such mathematics, and the need of a consequent reform of mathematics teaching, was similarly recognized by the agents of economic development. The OEEC (which became OECD in 1961) took a series of initiatives starting with the end of the 1950s. In 1958, it opened an office in Paris to "improve the efficiency of teaching mathematics and the sciences" and promoted a reform of the content and the methods of teaching mathematics for students 12–19 years old. (GISPERT 2014: 236)*

Was aber versteht die OECD eigentlich unter Mathematik, und was macht ihre „strategische Bedeutung" aus?

> *When thinking about what mathematics might mean for individuals, one must consider both the extent to which they possess mathematical knowledge and understanding, and the extent to which they can activate their mathematical competencies to solve problems they encounter in life. PISA therefore presents students with problems mainly set in real-world situations. These are crafted in such a way that aspects of mathematics would be of genuine benefit in solving the problem. (PISA 2004: 37 f.)*

Der Unterschied zwischen mathematischem Wissen und mathematischen Kenntnissen auf der einen Seite und der Fähigkeit, diese auch für die eigentliche Aufgabe, das Lösen von Problemen des Lebens anzuwenden, auf der anderen Seite, wird hier aufgezeigt und das *Problemlösen als das eminente Ziel des Mathematikunterrichts* formuliert.

Was genau versteht die OECD unter dieser Problemlösefähigkeit, die es zu erwerben und zu entwickeln gilt?

> *… an individual's capacity to use cognitive processes to confront and resolve real, cross-disciplinary situations where the solution path is not immediately obvious and where the content areas or curricular areas that might be applicable are not within a single subject area of mathematics, science or reading. (OECD 2005: 26)*

Der grundsätzlich nicht-fachgebundene Charakter der Problemlösefähigkeit wird hier markant herausgestellt: Echtes Problemlösen findet dann statt, wenn das Problem gerade nicht auf ein inhaltliches Feld eingrenzt ist oder sich einem einzelnen Bereich zuordnen lässt. Auf diesen Grundüberzeugungen ruhend treten „Problemlösen" und „Anwendung" als die Kernaspekte eines guten Mathematikunterrichts im Sinne der OECD hervor. Welche Auswirkungen hat dies nun für die Mathematikdidaktik?

> *The intention is to encourage an approach to teaching and learning mathematics that gives strong emphasis to the processes associated with confronting problems in real-world contexts, making these problems amenable to mathematical treatment, using the relevant mathematical knowledge to solve problems, and evaluating the solution in the original problem context. If students can learn to do these things, they will be better equipped to make use of their mathematical knowledge and skills throughout life. They will be mathematically literate. (OECD 2005: 26)*

Mathematics Teaching Practices
Establish mathematics goals to focus learning. Effective teaching of mathematics establishes clear goals for the mathematics that students are learning, situates goals within learning progressions, and uses the goals to guide instructional decisions.
Implement tasks that promote reasoning and problem solving. Effective teaching of mathematics engages students in solving and discussing tasks that promote mathematical reasoning and problem solving and allow multiple entry points and varied solution strategies.
Use and connect mathematical representations. Effective teaching of mathematics engages students in making connections among mathematical representations to deepen understanding of mathematics concepts and procedures and as tools for problem solving.
Facilitate meaningful mathematical discourse. Effective teaching of mathematics facilitates discourse among students to build shared understanding of mathematical ideas by analyzing and comparing student approaches and arguments.
Pose purposeful questions. Effective teaching of mathematics uses purposeful questions to assess and advance students' reasoning and sense making about important mathematical ideas and relationships.
Build procedural fluency from conceptual understanding. Effective teaching of mathematics builds fluency with procedures on a foundation of conceptual understanding so that students, over time, become skillful in using procedures flexibly as they solve contextual and mathematical problems.
Support productive struggle in learning mathematics. Effective teaching of mathematics consistently provides students, individually and collectively, with opportunities and supports to engage in productive struggle as they grapple with mathematical ideas and relationships.
Elicit and use evidence of student thinking. Effective teaching of mathematics uses evidence of student thinking to assess progress toward mathematical understanding and to adjust instruction continually in ways that support and extend learning.

Abb. 14 Acht Regeln für guten Mathematikunterricht gemäß den Richtlinien des National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2014: 3).

Ganz in diesem Geiste startete das NCTM bereits im Jahr 1989 den standardbasierten Umbau des US-amerikanischen Mathematikunterrichts (vgl. Kap. 3.10). Heute gelten in fünfundvierzig der fünfzig Bundesstaaten die *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM) als verbindliche Abschlussziele für Berufs- und Studienreife. Jüngst hat das NCTM das Programmpapier „Principles to Actions" (2013) publiziert, in dem das Erste Leitprinzip: Lehren und Lernen (*First Guiding Principle: Teaching and Learning*) durch acht *Mathematics Teaching Practices* konkretisiert und illustriert wird (Abb. 14). Praktisch alle betonen die Bedeutung prozessbezogener Kompetenzen für einen guten Mathematikunterricht, und die erstgenannte ist die Fähigkeit zum Problemlösen (im engen Verbund mit dem mathematischen Schließen).[273] Das NCTM weist an anderer Stelle explizit auf die doppelte Bedeutung des Ausdrucks *Problem Solving* hin, die sich im Deutschen durch die getrennten Begriffe *Problemlösen* und *Heuristik*[274] besser differenzieren lässt:

> *Problemlösen heißt nicht, nur ein bestimmtes Problem zu lösen, sondern bedeutet auch, das eigene mathematische Wissen und Können zu erweitern, indem man Probleme löst.*[275]

In Deutschland waren es, wie nun schon mehrfach beschrieben, die PISA-Resultate aus dem Jahr 2000, die letztlich umfassend Reformen auslösten. Unter dem Druck der ersten PISA-Ergebnisse versucht die Mathematik auch in Deutschland bzw. im europäischen Raum zunehmend zu einem Fach zu werden, das den Lernern Raum für echte eigene Forschung lässt und ihnen erlaubt, ihre Begründungs- und Argumentationsfähigkeiten zu entwickeln, aber auch auszuprobieren und kreativ zu arbeiten. Wie Gellert (2009: 351) feststellt: „Die internationalen Leistungsvergleiche Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) und Programme for international Student Assessment (PISA) klärten zwar nicht die Frage der curricularen Ausrichtung der Schulmathematik, führten aber zu einer weiteren konzeptionellen Verlagerung und Verdichtung. Dem Verhältnis von Struktur und Anwendung übergeordnet gilt nunmehr *Problemorientierung* als Leitbegriff für die Gestaltung von Mathematikunterricht." In Band A (Krichel 2017) ist ausführlich dargestellt, dass in der Mehrheit der aktuellen deutschen Lehrplanschriften für das Fach Mathematik in dem oben beschriebenen Sinne die Anknüpfung an realitätsnahe Problemstellungen gefordert wird; in einigen wird auch auf konkrete Verbindungsmöglichkeiten zu anderen Fachinhalten hingewiesen. Bedauerlicherweise ist es aus der Blickrichtung der anderen Fächer jedoch so, dass eine Verknüpfung mit der Mathematik nicht stattfindet.[276] Eine systematische Verschränkung zwischen Mathematik und verschiedensten anderen schulischen Fächern steht damit in der deutschen Lehrplanrealität aus.

---

[273] Die erste Regel bezieht sich auf den Transparenzgedanken, der allgemeindidaktischer Natur ist.

[274] Im Englischen wird der Ausdruck *heuristics* nicht regulär im Zusammenhang mit mathematischen Problemlösetechniken gebraucht, sondern ist vorallem in informationstechnologischen und wirtschaftsmathematischen Kontexten verankert. *Problem Solving* wird daher in der konkreten Bedeutung auch für die Metaebene der Heuristik verwendet.

[275] Eigene Übersetzung, entnommen der Website des amerikanischen *National Council of Teachers of Mathematics* http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26860 [07.04.2017].

[276] Prägnantes Beispiel hierfür sind die unlängst erschienenen Lehrpläne für die naturwissenschaftlichen Fächer für die weiterführenden Schulen in Rheinland-Pfalz, die mit ihren Themenfeldern und in ihrer Gesamtanlage in durchaus vorbildlicher Weise einen bildungsstandardgemäßen, kompetenzorientierten und zumindest potentiell fächerverbindenden Unterricht fundamentieren können. Während Verweise innerhalb der Fächergruppe und zum Naturwissenschaftlichen Unterricht der Orientierungsstufe stets ausgewiesen werden, fehlen solche Hinweise auf jegliche anderen Fächer, selbst auf das affine Fachgebiet der Mathematik.

Es geht hier nicht um eine quasi-moralische Wertung dieser Anspruchsformulierung. Tatsache ist, dass sich die durch die OECD etablierten Vorstellungen und Ansprüche als normative Größen in der internationalen Bildungsforschung und –politik etabliert, wenn nicht längst durchgesetzt haben. Und wie Kapitel 2 und 3 gezeigt haben, greift die OECD mit ihren Standards auf die lerntheoretischen, fachdidaktischen und unterrichtsmethodischen Entwicklungen der vergangenen Jahrzehnte zurück, wenn sie sich in dieser Klarheit für die Bedeutung des Problemlösens ausspricht. Die Frage nach Qualität der Umsetzung und Prüfpraxis sowie der Legitimität einer so gearteten Einflussnahme durch die OECD stehen auf einem völlig anderen, bildungspolitischen und gesellschaftsdiskursivem Blatt. Schließt man sich den durch die OECD erhobenen Forderungen jedoch an, dann liegt auf der Hand, dass gerade für die transcurriculare Fähigkeit des Problemlösens nur darauf angepasste Formen von Unterricht Erfolg versprechen können: Unterricht, der selbst nicht in engen Fachgrenzen verharrt, der das eigenaktive Lösen von Problemen nicht nur ermöglicht, sondern fordert, und der auf einem überzeugenden Gesamtkonzept aufbaut, das der Heuristik den gebührenden Stellenwert einräumt.

> *What this suggests is that exposure to formal mathematics can improve students' performance, but only to a point. Just being familiar with mathematical concepts might not be enough to solve problems that require in-depth thinking and reasoning skills.*
>
> *Several other skills are central to mathematics proficiency. These include the ability to use a wide range of mathematics strategies; the ability to reason using mathematical ideas and to communicate one's reasoning effectively; the ability to use the knowledge and time at one's disposal efficiently; and the disposition to see mathematics as useful and worthwhile, coupled with a belief in one's own abilities. (OECD 2016: 71)*

Da in Band A (Krichel 2017) bereits umfassen auf die deutschen Lehrplanschriften und die Bildungsstandards eingegangen wurde, soll an dieser Stelle der Blick auf den „guten“ Mathematikunterricht einmal von einer anderen Seite geworfen werden. Jüngst hat die OECD eine Schrift unter dem Titel „Ten Questions for Mathematics Teachers... and how PISA can help answer them“ (OECD 2016) herausgegeben, in der auf Grundlage der bisherigen PISA-Ergebnisse zehn zentrale Fragen zur Unterrichtsgestaltung exploriert werden. Am Ende jedes fragebezogenen Abschnitts steht unter dem Titel „What can teachers do?“ eine Zusammenfassung, auf die im Folgenden Bezug genommen wird.[277]

[277] OECD 2016:17. Alle dort präsentierten Zahlen und Diagramme beziehen sich auf die in allen Teilnehmerstaaten erhobenen Daten.

Frage 1: Wie (stark) sollten die Lernprozesse der Lerner im Unterricht gelenkt werden?

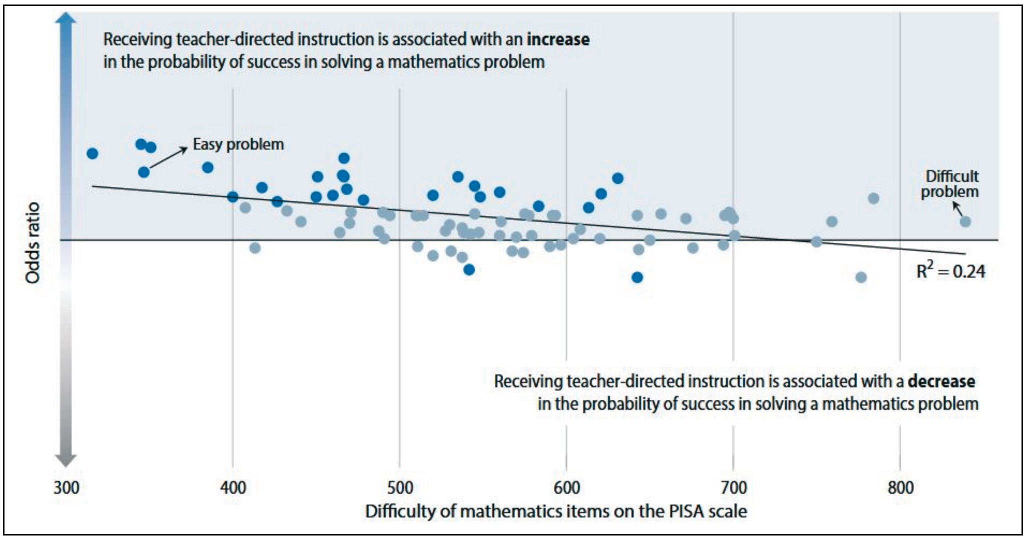


Abb. 15 Lehrerzentrierter Unterricht und Erfolg beim Problemlösen (OECD 2016: 14).

Mathematikunterricht soll versuchen, Lerner aller Kompetenzstufen zu erreichen

Dies spricht den Grundsatz einer differenzierten und individualisierten Unterrichtsplanung an, die die Heterogenität der Lerngruppe ins Kalkül zieht und daran angepasst Sozialformen, Aufgaben und Probleme auswählt, Förder- und Fordermaterial bereitstellt.

Lehrer- und schülerzentrierte Lehrmethoden sollen gemischt eingesetzt werden

Um die effektive Lernzeit zu erhöhen, sollten Phasen hoher Eigenaktivität in den Mathematikunterricht integriert werden. Solche Schülerzentrierung erlaubt zugleich eine Individualisierung des Lernprozesses.

Der Schwierigkeitsgrad des mathematischen Problems soll die Unterrichtsmethode bestimmen

Wie Abb. 15 zeigt, scheinen sich lehrerzentrierte Methoden eher positiv (oder neutral) auf die Fähigkeit auszuwirken, einfache Probleme zu lösen. Für komplexe Problemstellungen dagegen sind sie hinderlich. Dies sollte man bei der Unterrichtsgestaltung berücksichtigen.

Frage 2: Sind bestimmte Lehrmethoden im Fach Mathematik effektiver als andere?

Techniken zur kognitiven Aktivierung im Unterricht steigern die Problemlösekompetenz

Unter diese Techniken fallen beispielsweise das Zusammenfassen, Hinterfragen oder Vorhersagen; es sind Handlungsmuster, die bei der Bearbeitung mathematischer Frage- oder Problemstellungen hilfreich sein können. Sie bringen den Lerner dazu, sich tiefergehend mit dem Prozess des Problemlösens zu befassen, anstatt nur die konkrete Lösung herauszufinden. Im weiteren Sinne gehören diese Techniken bereits zur Heuristik.

Diese Techniken zur kognitiven Aktivierung sollten möglichst häufig eingesetzt werden

Unabhängig von Sozialstruktur und Kompetenzniveau der Lerngruppe können Techniken zur kognitiven Aktivierung nutzbringend umgesetzt werden. In Kombination mit schülerzentrierten Methoden und abseits des Frontalunterrichts können sie die Entstehung positiver und effektiver Lernräume bewirken.

Kollaboration mit Kollegen verbessert die kognitive Aktivierung

Die PISA-Resultate in Verbindung mit der Lehrerstudie TALIS[278] zeigen, dass eine deutliche Korrelation zwischen Schüleraktivierung und der regelmäßigen Kollaboration zwischen Kollegen (sei es in Form von Team-Teaching, Peer-Reviews etc.) besteht. Eine engere Zusammenarbeit steigert also kognitiv aktivierende Techniken im Mathematikunterricht (Abb. 16).

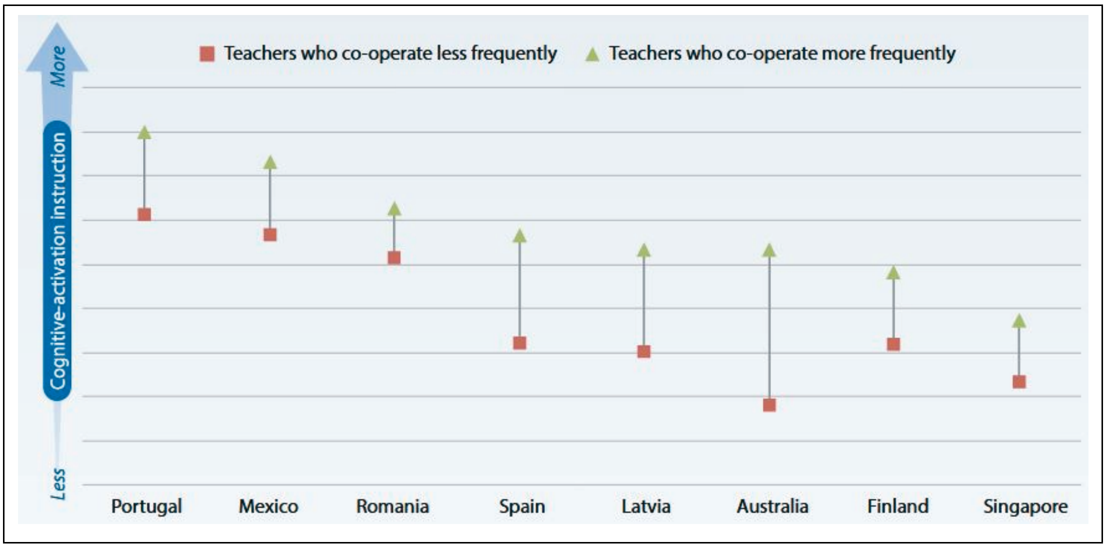


Abb. 16 Einsatz kognitiv aktivierender Unterrichtstechniken in Abhängigkeit von der regelmäßigen kollegialen Kooperation (OECD 2016: 24).

Frage 3: Wie groß ist die Bedeutung der persönlichen Beziehung zwischen Lehrer und Lerner?

Es lohnt, Zeit und Energie in ein positives Unterrichtsklima zu investieren

Disziplinarische Schwierigkeiten mit einzelnen Lernern einer Gruppe können das Lernklima insgesamt beeinträchtigen. Ein belastetes Klima beeinflusst nicht nur die Lernprozesse unmittelbar, sondern kann auch negative Auswirkungen auf das Lehrerselbstbild haben und dadurch weitreichende Konsequenzen auf die Unterrichtsgestaltung ausüben. Ein positives Unterrichtsklima ist daher eine wichtige Grundvoraussetzung für guten Unterricht.

---

[278] *Teaching and Learning International Survey.* In diesem Fall geht es um Ergebnisse aus der Studie von 2013.

Es lohnt, stabile persönliche Beziehungen zu Lernern aufzubauen

Die persönliche Beziehung zum Lehrer kann entscheidenden Einfluss auf Lernbereitschaft, Motivation und auch das Verhalten der Lerner haben. Verlässlichkeit, Fairness und Geduld sind drei der wichtigsten Erwartungen, die Lerner üblicherweise an Lehrer richten. Diese zu erfüllen und gegebenenfalls auch über bestimmte außerschulische Lebensumstände informiert zu sein, kann für den Lehrer der Schlüssel zu einer guten Beziehung zu seinen Lernern und dadurch auch zu einem positiven Unterrichtsklima sein.

Frage 4: Was ist über das Auswendiglernen beim Lernen von Mathematik zu sagen?

Das Auswendiglernen soll unbedingt durch andere Lernstrategien ergänzt werden

Auswendiglernen allein ist kein angemessener Schlüssel für echten Kompetenzerwerb im Fach Mathematik. Die PISA-Resultate zeigen, dass es nur bei der Lösung sehr einfacher Problemstellungen einen positiven Einfluss ausüben kann. Je schwieriger die gestellten Probleme sind, desto weniger hilfreich ist das Auswendiglernen als Lerntechnik (Abb. 17).

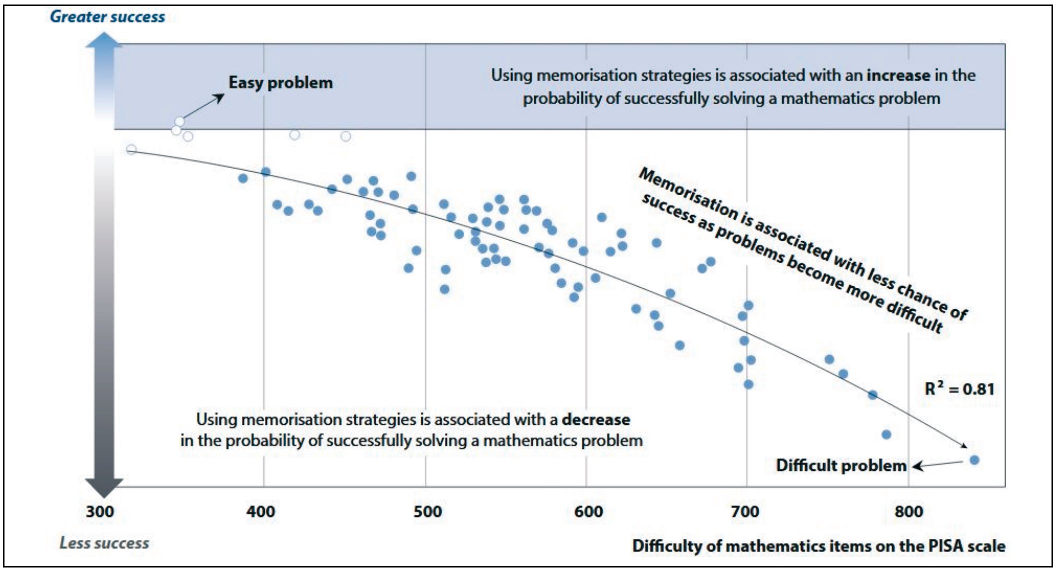


Abb. 17 Auswendiglernen als Lerntechnik und Erfolg beim Problemlösen (OECD 2016: 38).

Für einiges deklaratives Wissen kann es natürlich zeitsparend eingesetzt werden, etwa für den raschen Zugriff auf basale Formeln oder das kleine Einmaleins. Lerner sollten ganz gezielt andere Strategien erwerben, wenn sie Mathematik begreifen und komplexe Probleme lösen wollen.

Üben, um Vertrautheit und Selbstvertrauen zu steigern

Üben durch mehrfache Wiederholung eigentlich identischer Abläufe ist dann nützlich, wenn es den Lernern hilft, grundlegende mathematische Konzepte zu begreifen oder den Prozess des Problemlösens zu internalisieren.

Die Unterschiede der Lerner im Blick

Je vertrauter Lerner mit mathematischen Inhalten sind, je positiver ihre Grundhaltung, je größer ihr Interesse am Problemlösen und je mehr Selbstvertrauen sie im Fach haben, desto weniger wir das Auswendiglernen als Lernstrategie eingesetzt. Gerade Lerner mit geringem Selbstvertrauen verlassen sich also vergleichsweise stark auf das Auswendiglernen. Diese Lerner sollten zu einer Verknüpfung realweltlicher Probleme mit mathematischen Konzepten angeregt und in die Nutzung anderer Strategien eingeführt werden.

Frage 5: Kann man den Lernern helfen, Mathematiklernen zu lernen?

Lernstrategien sollten im Unterricht gefordert und aufgebaut werden

Das Lernen selbst zu lernen gehört zu den wichtigsten Zielen des allgemeinbildenden Unterrichts. Die Strategien, die es dem Lerner ermöglichen, seinen eigenen Lernprozess zu regulieren umfassen z.B. Organisation von Lernmaterial, das selbständige Aufstellen eines Lernplans oder der Evaluation der benutzten Lerntechniken. Lerner, die solche Metastrategien regelmäßig einsetzen, profitieren von ihnen bis zu einem gewissen Grad auch beim Problemlösen (s. Abb. 18). Tatsächlich sind bei den komplexesten Problemen diese Strategien nicht (mehr) zielführend, weil hier mehr Kreativität und Flexibilität erforderlich sind. An dieser Stelle kommen spezifisch heuristische Strategien ins Spiel.

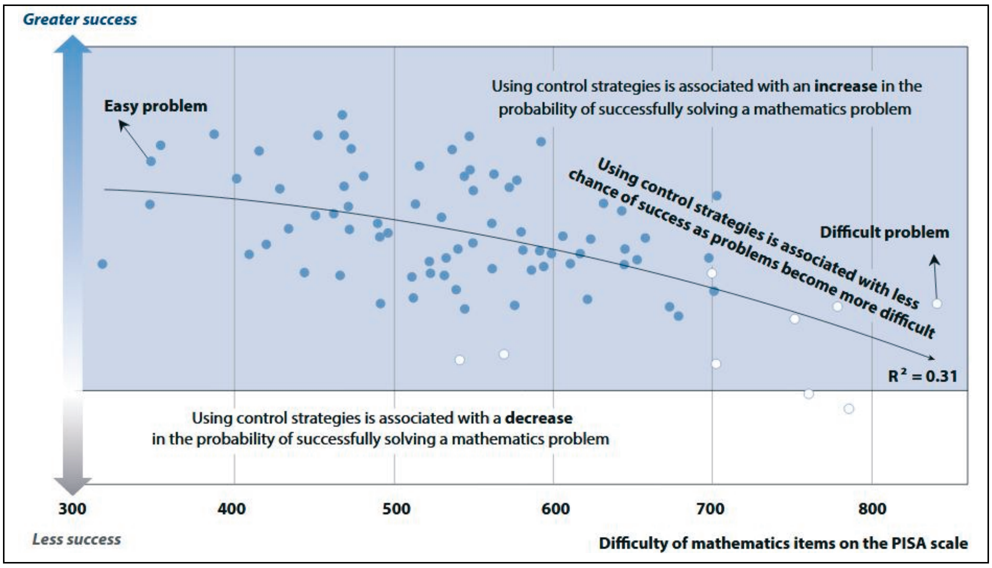


Abb. 18 Lernstrategie und Erfolg beim Problemlösen (OECD 2016: 44).

Lerner sollen ihren Lernprozess reflektieren

Die Metaebene hilft Lernern, ihre eigenen Fortschritte zu bewerten und Problemfelder zu identifizieren. Einüben lässt sich dies durch regelmäßige Kommunikation im Klassenraum, indem falsche Ergebnisse untersucht oder verschiedene Problemlösungswege verglichen und evaluiert werden.

Frage 6: (Wie) Sollte man die Kreativität der Lerner im Umgang mit Mathematik unterstützen?

Die Bedeutung kreativen Denkens und elaborativer Strategien herausstellen

Auch das Problemlösen profitiert nicht selten vom Einsatz freier, kreativer Techniken wie Assoziieren, Brainstorming und allgemeiner Ideensammlungen. Elaborationsstrategien (vgl. Kap. 1.2.8), die sich gezielt an das Vorwissen der Lerner richten und eine vernetzende, intensive Lerntätigkeit anstreben, können im Mathematikunterricht vielfach genutzt werden – insbesondere auch beim Problemlösen.

Vielseitigkeit und Flexibilität der Lerner fördern

Die Fähigkeit, verschiedenste Lerntechniken, Lernstrategien und Elaborationsstrategien situationsangemessen und zielführend auszuwählen und einzusetzen, zeichnen gute Lerner aus. Diejenigen, die sich diese Fähigkeit im Laufe der Zeit aneignen und sie entwickeln werden auch befähigt, sich komplexesten Problemen zu stellen.

Tieferes Verständnis einfordern

Nur wenn das tiefere Verständnis und der hier angesprochene flexibel-kreative Umgang mit Mathematik auch im Unterrichtsalltag oder den üblichen Leistungsüberprüfungen eingefordert wird, werden Lerner sich der Herausforderung stellen.

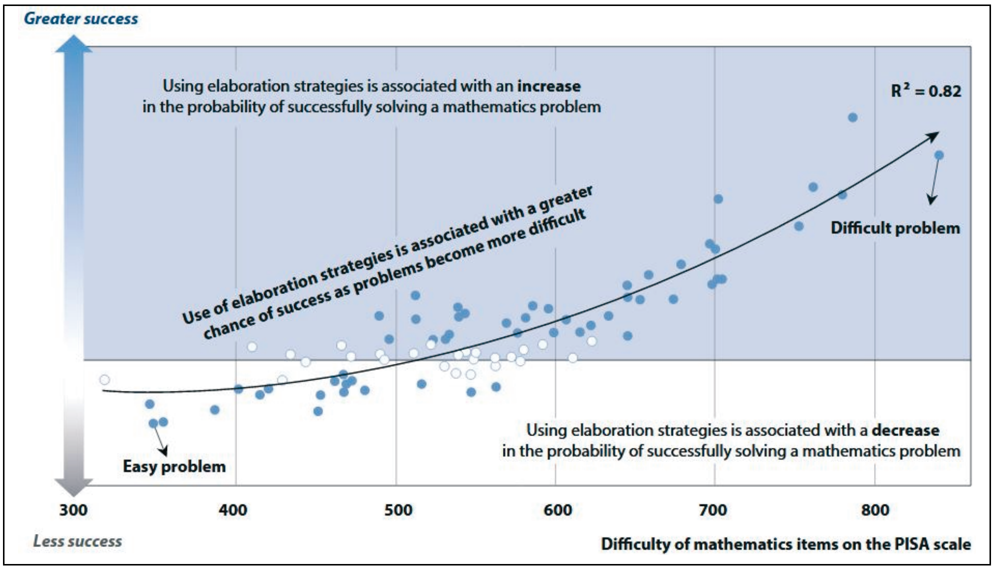


Abb. 19 Elaborationsstrategie und Erfolg beim Problemlösen (OECD 2016: 44).

Frage 7: Wie kann dem Hintergrund der Lerner Rechnung getragen werden?

Intensive Planung

Nur durch dezidierte Planung kann ein vollständig differenzierter und damit potenziell jedem Lerner gerechter Unterricht über ein Schuljahr hinweg realisiert werden. Eine Analyse der Vorgaben, des bereits Gelernten und vielleicht auch der Besonderheit der Lerngruppe können es ermöglichen, den heterogenen Voraussetzungen gerecht zu werden.

Die OECD stellte fest, dass die Beschäftigung sowohl mit Anwendungs- als auch innermathematischen Problemen stark vom sozioökonomischen Hintergrund der Lerner abhängt. Diese fehlende Auseinandersetzung bedingt aber unmittelbar auch schlechtere Leistungen in Mathematik.

Keine Angst vor anspruchsvollen mathematischen Themen

Auch wenn Lerner aus benachteiligten Milieus größere Schwierigkeiten bei anspruchsvolleren Themen haben, beispielsweise weil ihr Selbstvertrauen geringer ausgeprägt ist, sollten Problemlöseaufgaben unbedingt Teil ihres Mathematikunterrichts sein. Denn nur durch die aktive Auseinandersetzung können hier langfristig die derzeit fassbaren Folgen sozialer Ungleichheiten abgebaut werden.

Klare Informationen über die Bedeutung mathematischen Wissens für das spätere Leben

Die klare und ehrliche Ansprache der Lerner spielt ebenfalls eine Rolle. Da berufliche Biographien auch auf mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten basieren, sollte gerade unmotivierten Lernern, die die Nützlichkeit der Problemlösefähigkeiten aus dem Mathematikunterricht nicht erkennen, klar und im Detail erläutert werden, wo für sie die Relevanz liegt.

Frage 8: Sollten innermathematische Konzepte oder Anwendungen im Vordergrund des Mathematikunterrichts stehen?

Fundamentale Ideen der Mathematik intensiv behandeln und ihr Verhältnis zueinander zeigen

Die OECD sieht eine Lücke zwischen den unterrichtlichen Inhalten und einer für die Lerner fassbaren Relevanz. Nur eine konsequente Anbindung an den Erfahrungshorizont der Lerner und insbesondere auch die Sichtbarmachung der inneren Struktur des Gelernten kann die Sinnhaftigkeit für (alle) Lerner fassbar machen. Daher wird eine enge Zusammenarbeit über Fachgrenzen hinaus empfohlen.

Sich nicht auf die Mindestanforderungen beschränken

Auch wenn die Lehrpläne oftmals (wie auch in Deutschland) das Problemlösen nicht dezidiert im Lernstoff verorten, sollte der Mathematikunterricht Räume finden, in denen die Lerner kognitiv herausgefordert werden. Es wird empfohlen, das Problemlösen als Unterrichtsmethode verstärkt einzusetzen, da sich so auch grundlegende Konzepte integriert vermitteln lassen.

Vielfältige Probleme durch die Lerner lösen lassen

Die Vielfalt der (regelmäßig) angebotenen Probleme ist es, die einen Aufbau umfassender heuristischer Fähigkeiten ermöglicht. Unterschiedliche Darstellungsformen und Grade der Kontextualisierung sprechen unterschiedliche Lerner an und machen außerdem auch wechselnde Sozialformen und unterrichtliche Gestaltungen möglich, die wiederum einen positiven Einfluss auf die Schüleraktivität ausüben können.

Frage 9: Sollte man die Einstellung der Lerner zur Mathematik berücksichtigen?

Lerner und Unterrichtsmethode nicht aus dem Blick verlieren

Nur mit einem genauen Blick auf die Lerngruppe lassen sich Ängste und Selbstwertverlust vermeiden. Dies ist besonders bei benachteiligten Lernern und nicht selten auch bei Mädchen von Bedeutung und sollte gegebenenfalls zu einer angepassten didaktisch-methodisch angepassten Gestaltung des Mathematikunterrichts führen. Der geschlechtsspezifische Unterschied bei Berufswahl und Selbstkonzept ist gerade im Bereich Mathematik und Naturwissenschaften so groß, dass hier eine genaue Beobachtung angezeigt scheint.

Wichtige Prüfungen simulieren

Es kann helfen, Ängste abzubauen und „realistischere" Prüfungsergebnisse zu ermitteln, wenn Lerner die Möglichkeit bekommen, die Prüfungssituation vorher möglichst genau kennenzulernen. Auch transparente Erwartungen und konstantes Feedback über die im Schuljahr erbrachten Leistungen können hier helfen.

Innovative Lehrmittel erproben

Zur Visualisierung mathematischer Sachverhalte oder Problemstellungen lassen sich auch die Neuen Medien oft gewinnbringend und zugleich motivierend einsetzen. TALIS deutet allerdings an, dass hier ein aktuelles Entwicklungsfeld zunächst für die Lehrenden vorliegt.

Frage 10: Was können Lehrer aus PISA lernen?

Die Schrift schließt mit fünf klaren Empfehlungen an Lehrer.

1. Balance in Unterricht und Leistungsmessung:
   Es ist anzustreben, dass die Lerner alle Fähigkeiten und Fertigkeiten erwerben können, die sie für zukünftiges Lernern benötigen. Dazu sollten alle möglichen verschiedenen Methoden auch bei der Leistungsmessung eingesetzt werden, wie mündliche Prüfungen, Problemlöseaufgaben in Gruppen und Langzeitprojekte.
2. Konzentration auf Wissen und Fähigkeiten der Lerner:
   Auch wenn nationale Lehrplanschriften die Freiheit des Lehrer einschränken, kann es helfen, den Unterricht nach der Frage „Was müssen Bürger in Situationen mit Bezug zur Mathematik wissen und tun können?“
3. Fairness:
   Unterricht sollte danach streben, soziale, ethnische, physiologische etc. Ungleichheiten auszugleichen oder zumindest keine der Gruppen zu bevorteilen.
4. Kooperation:
   In einem unterstützenden System kann der Bildungs- und Erziehungsauftrag gemeinsam durch die verschiedenen Beteiligten wahrgenommen und so besser und umfassender gestaltet werden. Für den Lehrer bietet insbesondere die Zusammenarbeit mit Kollegen ein großes Potenzial.
5. Innovationen!
   Die OECD spricht sich ganz direkt gegen eine zu große Hörigkeit gegenüber aktuellen Lehrplänen oder zentralen Prüfungen aus. Sie stellt klar, dass sich nur durch Offenheit für neue Unterrichtsformen und -konzepte und ein gewisses Maß an Experimentierfreude der unterrichtenden Lehrkräfte die Schulrealität an das annähern wird, was in Didaktik und Bildungsforschung teilweise schon lange als Ideal propagiert wird.

4.2 Zusammenfassung und Kommentar

Wie deutlich wurde, ist die Rolle des Problems in der (mathematischen) Bildungsgeschichte *direkt* nicht einfach nachzuverfolgen. Aus langen Phasen menschlicher Kultur fehlen didaktisch-pädagogische Quellen, das europäische Mittelalter unterbrach die nicht primär religiös motivierte Entwicklung der Wissensvermittlung und erst mit der frühen Neuzeit können unmittelbare Einblicke in das pädagogische Denken genommen werden. Probleme treten als Gegenstand des Mathematikunterrichts jedoch immer wieder in Erscheinung, selbst dort, wo die Datenmenge gering ist, was an sich einen Hinweis auf die Verbreitung und Bedeutung geben mag. Aber wie lässt sich nun das Verhältnis von Problemlösen auf der einen Seite und den drei Kategorien Bildung, Lernen und Mathematik auf der anderen denken?

Problemlösen ⊂ Bildung

Für weite Teile der Geschichte lässt sich der Wert, den die Gesellschaft bzw. die maßgeblichen gesellschaftlichen Schichten dem Problemlösen zuschrieben, nicht zweifelsfrei feststellen, sondern nur indirekt erkennen. Viele Überreste früher, hochentwickelte Kulturen legen Zeugnis davon ab, dass das Lösen von Problemen Teil der Bildung gewesen sein muss – für welche und wie umfangreiche Teile der Bevölkerung sie galt und in welcher Form diese Bildungsidee formuliert und tradiert wurde, ist dabei weitgehend ungewiss. Doch lassen die Jahrhunderte, teils Jahrtausende lang bestehenden Leistungen auf ingenieurswissenschaftlichem, astronomischem oder auch mathematischem Gebiet keinen grundsätzlichen Zweifel an der Feststellung zu. Mit dem Beginn der frühen Neuzeit wird das Bild klarer. Es entwickelt sich ein Klima, in dem technologische Entwicklung und wissenschaftliche Forschung Hand in Hand immer rascher voranschreitet und das Lösen technischer Probleme im Zuge dessen stark in den Vordergrund des Bildungsbegriffes rückt – zumindest in einer bestimmte Ausprägung dieses Begriffes. (Bildungsbürgertum hielt an den „Klassikern“ lange fest, während naturwissenschaftliche Forschung lange oft von „Laien“ vorangetrieben wurde!)

Aus deutscher Perspektive wurde erst mit der Internationalisierung des Bildungsbegriffes, wie sie noch immer und mit nicht wenigen Schwierigkeiten und gegen zahlreiche Widerstände abläuft, das Problemlösen klar als zentrales Bildungsziel formuliert. Dies spiegelt eine sehr traditionelle Haltung zur Bildung und ihrer Funktion wider, die nun durch Einflüsse aus den verschiedensten Teilen der Welt, maßgeblich jedoch aus den

Vereinigten Staaten, recht unsanft einem Transformierungsprozess unterzogen wird. Das Problemlösen steht mit einem Mal als zentrales Bildungsziel fest, und wie dieses Kapitel dargelegt hat, fußt diese Haltung auf historischen und erziehungsphilosophischen Fundamenten der abendländischen Tradition. Die Definition des Problembegriffs selbst ist dabei oft Anstoß für Debatten, in denen es eigentlich um etwas ganz anderes geht: nämlich die Frage nach der „Wichtigkeit“ und Eigenständigkeit der Fachwissenschaften und besonders der Mathematik. Im Grunde ist diese Scheindebatte schon gut zweitausend Jahre alt. Sie wurde schon von Pseusippos und Menaichmos geführt und erledigt sich durch eine saubere Definition fast von selbst.

Problemlösen ⊆ Lernen?

Mit der Erforschung des Lernprozesses, zunächst als philosophisch-pädagogische Disziplin, dann unter Federführung der Psychologie und nun unter zunehmend dominantem Einbezug der Neurowissenschaften, setzte ein Wandel in der Wahrnehmung des Problems und seiner Bedeutung für das Lernen insgesamt ein. Mit allen es umgebenden Parametern tritt das Problem zunehmend als ein fundamentaler Aspekt des Lernprozesses heraus. Durch die nachweisbare Verbindung zwischen aktivem, geistigem Tun und Wissens- und Kompetenzaufbau einerseits und die Suche nach sinnstiftenden Handlungsfeldern andererseits rückte das Lösen (komplexer) Problemaufgaben im Lauf der Zeit immer mehr in den Mittelpunkt didaktischer Modelle und der ihnen angegliederten Unterrichtskonzepte.

Problemlösen = Mathematiktreiben?

Im Selbstverständnis der spätantiken Mathematik, und ebenso im agonischen Diskurs, der als fortgeschrittenes Stadium des Unterrichts aufgefasst werden muss (vgl. Kap. 3.3), spielt das Lösen von Problemen eine – wenn nicht *die* – zentrale Rolle. Dabei ist der oben bereits angesprochene Konflikt zwischen Anhängern des Pseusippos und des Menaichmos zwar insofern interessant, als dass hier zwei abweichende Auffassungen des Problembegriffs aufeinandertreffen[279] – er lässt aber in seiner Gesamtheit erkennen, dass für die mathematische Bildung der Antike die Formel *Mathematik betreiben = Problemlösen* bejaht werden kann.

[279] Diese Debatte wird im Grunde bis auf den heutigen Tag gerade in Bezug auf das Verständnis von Mathematik und Mathematikunterricht geführt.

So schließt sich heute ein Kreis, wenn im aktuellen Denken über Mathematik als schulisches Unterrichtsfach das Problem als *das* konstituierende Merkmal hervortritt. Der aktuelle Lehrplan Singapurs – eines der erfolgreichsten Länder im internationalen Vergleich – zeigt die vielleicht klarste und radikalste Anpassung an die Standards, Best Practices und Ergebnisse der OECD-Studien wie PISA oder auch TALIS. Er stellt das mathematische Problemlösen einfach ins Zentrum seines gesamten Mathematiklehrplans. Eine Vorstellung, die sich mit der hier und in Band A (Krichel 2017) entwickelten deckt.

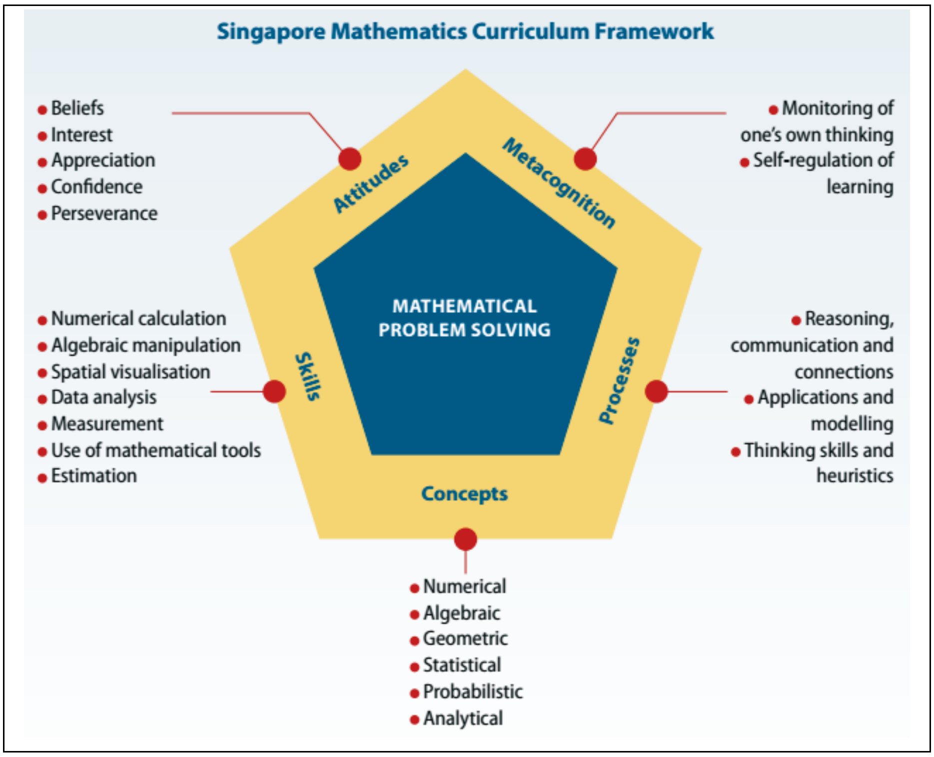


Abb. 20 Der Rahmenlehrplan Mathematik in Singapur (OECD 2016: 16).

Teil II – Heuristik, Geometrie und Problemlösen (Sachfachliche Fundamentierung)

Dieser Teil dient im Wesentlichen dazu, einen Ausschnitt der Mathematikgeschichte zu explorieren, der einen Blick auf die Entstehungszusammenhänge zwischen Mathematik und Heuristik gewährt. Zwei Gründe sind dabei für die Beschränkung auf die Geometrie (bzw. ausgewählte Teile) ausschlaggebend: Eine vollständige Untersuchung der Geschichte des Problemlösens würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, ohne die Erreichung des eigentlichen Ziels zu befördern. Zum anderen sprechen im Sinne des genetischen Ansatzes didaktische Gründe dafür, sich mit dem Teilgebiet der Geometrie zu befassen: Wie zu sehen sein wird, besteht zwischen Geometrie und Problemlösen eine enge Verbindung, die den gemeinsamen Erwerb *beider* Kompetenzbereiche nahelegt, und die Geometrie bietet aus lernpsychologischer Sicht gute Möglichkeiten, problemlösendes Verhalten schon früh in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I einzubinden.[280] So folgt die Auswahl der geometrischen Inhalte im Folgenden außerdem ihrer Relevanz im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I.

Ziel dieser Betrachtung ist es mithin zu zeigen, dass

1. konkrete Problemstellungen Anlass zur Entwicklung von Geometrie bzw. Mathematik gegeben haben, was die in Teil I herausgearbeitete Bedeutung des Problemlösens für einen sinnstiftenden Mathematikunterricht historisch untermauert.
2. die unterrichtlich umsetzbaren Inhalte aus dieser Exploration hinreichend Anknüpfungspunkte für den Erwerb einer Vielzahl von heuristischen Techniken und Heurismen[281] bieten.

5 Die Systematisierung des Problems: Heuristik und Terminologie

Um die angestrebten Betrachtungen auch terminologisch auf ein Fundament zu stellen, soll in diesem ersten Kapitel kurz die Heuristik als Metaebene problemlösender Verhaltensweisen in ihrem Ursprung und ihrer historischen Entwicklung skizziert werden, bevor neben aktuellen Systematisierungen insbesondere die von Krichel/Stiller für diese Arbeit entwickelte vorgestellt wird.

[280] Es folgt also keineswegs, dass sich heuristische Kompetenzen nur oder in jedem individuellen Fall effizienter an der Geometrie lernen lassen; ähnliche Betrachtungen zur Problemgeschichte lassen sich auch für andere Teilgebiete der Mathematik durchführen und dann unterrichtlich auswerten und didaktisch verarbeiten.

[281] Zur Unterscheidung zwischen beiden Begriffen und der hier verwandten Terminologie vgl. Kap. 5.5 und insbesondere 5.6.

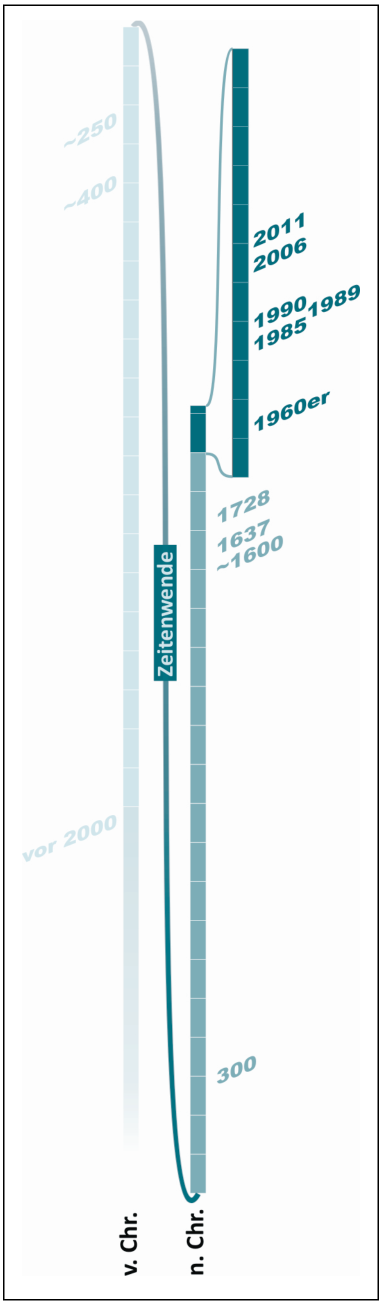


Abb. 21 Chronologischer Überblick zu wichtigen Entwicklungsphasen/-schritten in der Heuristik.

Spätestens seit der Antike – und möglicherweise schon viel früher – waren die Menschen bemüht, Mittel und Wege zu finden, um Probleme des täglichen Lebens mathematisch zu lösen. Dabei hielten sie neben der Lösung auch ihre Vorgehensweise und die auf dem Weg zur Problemlösung gemachten Entdeckungen fest, so dass auf dieser Grundlage künftige Probleme gelöst werden konnten. Dies mündete schließlich in die bewusste und zielgerichtete Formulierung methodischer Vorgehensweisen, die nicht nur einer Ergebnisfindung diente, sondern auch zu neuen Erkenntnissen und damit zu neuen Fortschritten verhalf. Diese Form der Erkenntnisgewinnung sowie die Untersuchung der Mittel und Methoden des Aufgabenlösens wurden im Laufe der Jahrhunderte immer weiter ausdifferenziert und perfektioniert und schließlich unter dem Begriff „Heuristik" zusammengefasst, so dass Heuristik heute allgemein als „die Lehre oder Wissenschaft von den Verfahren, Probleme zu lösen" oder auch als „methodische Anleitung, Anweisung zur Gewinnung neuer Erkenntnisse"[282] beschrieben wird (vgl. hierzu auch die Definitionen in Kap. 1.3).

Das erste Auftreten solcher im engeren Sinne heuristischer Tätigkeit lässt sich nicht ermitteln, doch lassen sich wichtige Entwicklungsschritte der Heuristik[283] an bestimmten Stellen begründet vermuten und spätestens ab der Zeit der griechischen Klassik auch belegen, deren chronologische Verteilung Abb. 21 veranschaulicht.

Es sei noch einmal betont, dass hier die Entwicklung des Bewusstseins der Existenz heuristischer Strategien und der Versuche ihrer systematischen Gestaltung und Nutzung betrachtet wird, nicht die Entwicklung der Strategien selbst – erst im nächsten Kapitel werden (ausschnittsweise) historische Problemstellungen und ihre Verbindungen zu den hier ermittelten heuristischen Hilfsmitteln und Heurismen näher beleuchtet.

[282] Diese ganz allgemeine Versuch einer Definition ist dem Brockhaus entnommen.
[283] Zu betonen ist, dass der Begriff der Heuristik/Heuretik selbst erst relativ spät geprägt und genutzt wurde, so dass sich frühe Entwicklungen in diesem Bereich niemals selbst explizit diesem Gebiet zuordnen.

5.1 Heuristische Strategien in Frühgeschichte und Antike

Spätestens die Ägypter und Babylonier besaßen elementare geometrische Kenntnisse, deren Zielrichtung es war, Probleme aus dem täglichen Leben zu lösen. Wie zahlreiche Quellen belegen war man in beiden Hochkulturen in der Lage, Flächeninhalte zu berechnen, indem unbekannte, auch krummlinig berandete, Flächen auf bekannte Flächen zurückgeführt wurden. Dabei wurde die Quadratur als ideale Form angesehen, krummlinig begrenzte Flächen – unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal – in Rechtecke zu überführen. In der Regel konnten so nur Näherungswerte als Lösungen ermittelt werden, ohne dass sie als solche erkannt wurden.[284] Während den Ägyptern und Babyloniern solche Näherungslösungen für ihre Praxis genügten, forderten die Griechen – als die unmittelbaren Vorfahren unserer heutigen modernen Naturwissenschaft (und Mathematik)[285] – *Beweise* für Konstruktionen und allgemeine Sätze und auch theoretisch *exakte* Lösungen, was einen Bruch mit der praxisnahen Aufgabenkultur der Ägypter und Babylonier bedeutete (mehr dazu in Kap. 6). Dabei behielten die griechischen Mathematiker Geraden und Kreise als axiomatische Grundelemente – gleichbedeutend mit den natürlichen Zahlen im Bereich der Arithmetik – bei[286], so dass sie die zur Lösung geometrischer Probleme benutzten Konstruktionen unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal durchführten, mit dem Ziel, Flächeninhalte nicht zu berechnen, sondern beliebige Flächen in flächengleiche Quadrate zu überführen (MAINZER 1980: 32). Dieses Streben nach einer beweisenden, axiomatischen Geometrie bei gleichzeitiger Beibehaltung der strengen Konstruktionsforderung, führte schließlich zu einer Klasse von Aufgaben, deren Lösung nicht möglich war. Die Würfelverdopplung, die Winkeldreiteilung und die Quadratur des Kreises zählten dabei zu den bedeutendsten Problemen und gingen als die drei klassischen Probleme der Antike in die Geschichte ein.[287]

Die Bemühungen um eine Lösung dieser Probleme dauerten mehrere Jahrhunderte an und brachten lange Zeit keine zufriedenstellenden Ergebnisse[288], verhalfen aber auf der anderen Seite zu Beobachtungen und Entdeckungen, die zum Nachdenken über das Vorgehen beim Lösen von Problemen selbst führten; im Laufe der Zeit wurde eine Erfindungsmethode herausgearbeitet, die schließlich zu produktiv zu neuen Problemlösungen

[284] Vgl. SCRIBA/SCHREIBER 2005: 12 ff.
[285] Vgl. LEHMANN 1994b: 9.
[286] Vgl. ZIMMERMANN 1990: 137.
[287] Vgl. MAINZER 1980: 26.
[288] Der Beweis für die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal konnte erst im Jahre 1892 von dem deutschen Mathematiker Ferdinand von Lindemann erbracht werden. Vgl. SCRIBA/SCHREIBER 2005: 406.

führte. Und somit ist es vermutlich der festgelegten Konstruktionsvorgabe und der ‚Unlösbarkeit' der genannten Aufgaben zu verdanken, dass neue mathematische Methoden und Beweisverfahren entwickelt wurden, die zum Grundstein für die „Urform heuristischer Strategien" (ZIMMERMANN 1990: 139) wurden.[289]

Antiphon

Der Sophist Antiphon[290] beeinflusste mit seinem Lösungsansatz maßgeblich das Quadraturproblem und damit die historische Entwicklung und die Entstehung der Heuristik. Seine Idee: die „Ausschöpfung" des Kreises durch immer besser angepasste Polygone. Dazu schrieb er in einen Kreis regelmäßige Vielecke ein und verdoppelte deren Seitenzahl solange, bis sich die Seiten der Polygone wegen ihrer „Kleinheit" mit dem Kreisumfang deckten. Da bekannt war, dass aus jedem Polygon ein flächengleiches Quadrat konstruiert werden konnte musste sich, nach Antiphons Meinung, auch aus den Polygonen ein flächengleicher Kreis konstruieren lassen.[291]

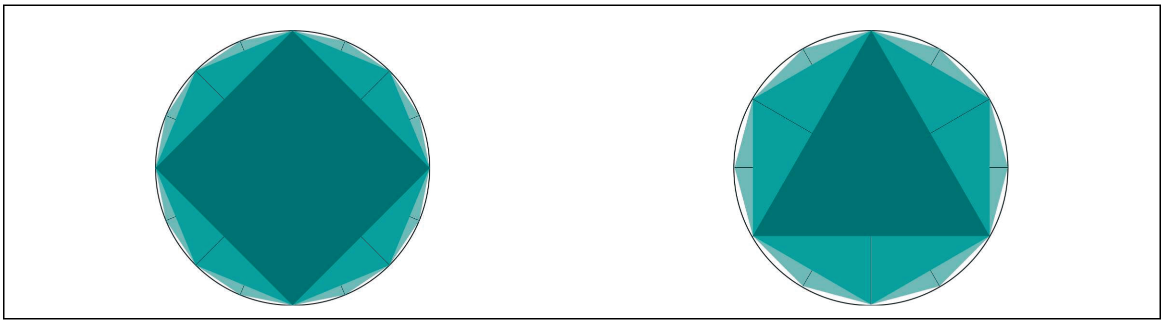


Abb. 22 Illustration zu Antiphons Vorgehen zur Quadratur des Kreises durch eingeschriebene Polygone bei schrittweiser Verdoppelung der Seitenzahl.

Auch wenn Antiphons Gedankengängen den strengen Ansprüchen seiner Zeitgenossen nicht genügten, da „sich Krummes niemals mit Geradem decken und deshalb sich kein Polygon der Kreisperipherie vollständig anschmiegen könnte […]", entwickelte er die erste Form der „Ausschöpfung" (daher die später gängige Bezeichnung „Exhaustion") und schuf damit eine für das Finden von Ergebnissen bedeutende Vorgehensweise, die sich als Ausgangsform heuristischer Strategien nämlich der der „sukzessiven Approximation" auffassen lässt.[292] In Anlehnung an die Erkenntnisgewinnung nach Antiphon entwickelte

[289] Vgl. KOLOSOW 1963: 108.
[290] Antiphon (Ἀντιφῶν), vermutlich identisch mit dem Sophisten Antiphon, auch Antiphon von Athen genannt, verfasste Ende des 5. Jahrhunderts v. Chr. mathematische Schriften.
[291] Vgl. BECKER 1964: 44.
[292] Vgl. ZIMMERMANN 1990: 139.

Eudoxos von Knidos[293] die Exhaustionsmethode (von *exhaurire*, lat. „herausnehmen", „erschöpfen", „vollenden"), die die Basis für die Inhaltsbestimmung gekrümmter Flächen und Volumina durch Ausschöpfung[294] legte. Zwar entwickelte sich die Exhaustionsmethode schließlich zu einem Algorithmus (vgl. Kap. 1.1.9), dennoch war sie ein bedeutendes Instrument mathematischer Entdeckung. Darüber hinaus festigte sie die Wissenschaft und ermöglichte weitere Fortschritte. Die Exhaustionsmethode stellt ein antikes Verfahren zur Berechnung von Flächeninhalten dar und gilt als älteste bekannte heuristische Strategie.[295]

Heuristische Vorgehensweise nach Platon

An dieser Stelle soll auf ein Beispiel aus der griechischen Antike hingewiesen werden, aus dem hervorgeht, dass bereits Platon die Bedeutung heuristischer Vorgehensweisen bei der Lösung geometrischer Probleme zu schätzen wusste. In der Überlieferung heißt es, dass Sokrates einem Sklaven Menons die folgende Aufgabe stellte:

> *Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 Einheiten, welches in ein Quadrat mit doppeltem Flächeninhalt verwandelt werden soll. Gesucht wird die Länge der Seiten des neuen Quadrats.*

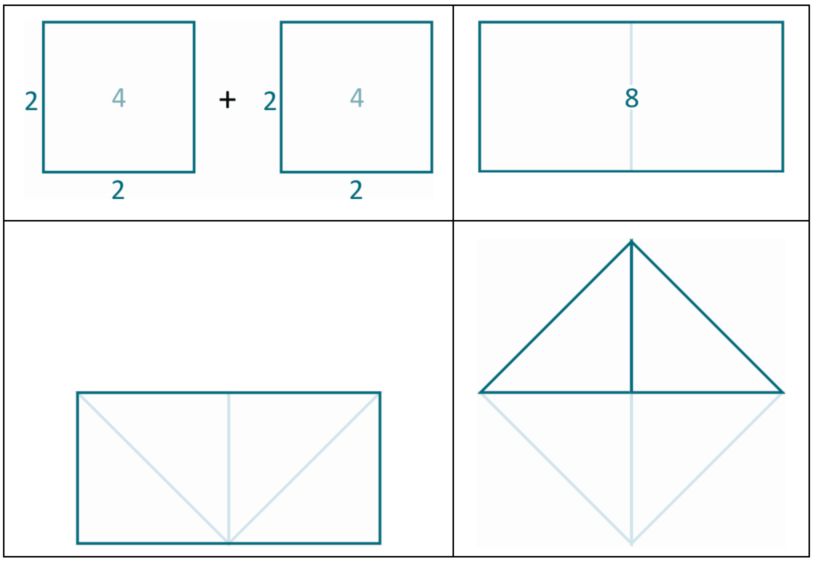


Abb. 23 Illustration zur Quadratverdoppelung in Platons Menon.

Der Sklave stellte zunächst Vermutungen über die Länge der Seiten auf, die jedoch nicht zum gewünschten Ergebnis führten. Durch gezielte Fragen des Sokrates fand der Sklave schließlich die Lösung des Problems (s. Abb. 23). Platon bezeichnete den anfänglichen

[293] Eudoxos (Εὔδοξος) von Knidos, *397-390, †345-338 v. Chr., war ein griechischer Mathematiker, Astronom, Geograph, Arzt, Philosoph und Gesetzgeber. Bedeutend waren besonders seine Theorie des Irrationalen und seine Exhaustionsmethode (Scriba/Schreiber 2005: 38).
[294] Vgl. Borys 2011: 172.
[295] Vgl. Zimmermann 1990: 157.

Misserfolg als „Zustand des bewußten Nicht-Wissens“ (MAINZER 1980: 42), welcher die Grundlage für neue konstruktive Ideen schafft.

Dass ein einfacher Sklave in der Lage war, diese Aufgabe zu lösen, führte Platon darauf zurück, dass sich der Schüler an ähnliche und bereits gelöste Probleme zurückerinnert hat, die ihn schließlich auf die richtige Lösung brachten. Für Platon war dies ein Beweis dafür, dass jeder Mensch nach entsprechender Unterweisung in der Lage ist, (derartige) Problemstellungen zu lösen.[296]

Methodenlehre des Archimedes

„Heureka“ soll Archimedes[297] der Legende nach durch die Straßen von Syrakus gerufen haben, als er endlich die Lösung für ein schwieriges physikalisches Problem und damit das Auftriebsgesetz gefunden hatte. „Heureka“ bedeutet „ich habe es gefunden“ – ein Satz, der als erstes Zeugnis heuristischen Vorgehens in der Geschichte gesehen werden kann.[298] Aber nicht nur der Ausspruch stammt von Archimedes, sondern auch das früheste Werk mathematischer Heuristik. In einem Brief, den Archimedes zusammen mit seiner Arbeit an den Gelehrten Eratosthenes sandte, schrieb er:

> *[…] habe ich es für gut befunden … und in dieses selbe Buch niederzulegen eine eigentümliche Methode, wodurch durch die Möglichkeit geboten wird, eine Anleitung herzunehmen, um mathematischen Fragen durch die Mechanik zu untersuchen. Und dies ist nach meiner Überzeugung ebenso nützlich auch um Lehrsätze selbst zu beweisen; denn manches, was mir vorher durch die Mechanik klar geworden, wurde nachher bewiesen durch die Geometrie, weil die Behandlung durch jene Methode vorher eine Vorstellung von den Fragen gewonnen hat, den Beweis herzustellen als ihn ohne eine vorläufige Vorstellung zu finden. […] Wir […] fühlen uns jetzt genötigt, die Methode bekannt zu machen, […] teils in der Überzeugung, dadurch nicht geringen Nutzen für die Mathematik zu stiften; ich nehme nämlich an, daß jemand von den jetzigen oder künftigen Forschern durch die hier dargelegte Methode auch andere Lehrsätze finden wird, die uns noch nicht eingefallen sind. (zit. nach WINTER 1991: 33)*

Mit seiner „mechanischen Methode“ entwickelte Archimedes also nicht nur eine auf mechanischen Überlegungen basierende „heuristische Methode“ (KROPP 1969a: 41), um Flächeninhalte und Volumina geometrischer Objekte zu berechnen; er gab auch – ganz

[296] Vgl. MAINZER 1980: 42.
[297] Archimedes von Syrakus, *ca. 287, †212 v. Chr., Mathematiker, Physiker und Ingenieur. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der griechischen Antike.
[298] Vgl. WINTER 1991: 35.

bewusst – eine genaue Beschreibung seiner heuristischen Vorgehensweise an, mit dem Ziel, die Darstellung und Weitergabe von Methoden zum Finden weiterer mathematischer Ergebnisse zu ermöglichen.[299] „Die Methodenlehre von Archimedes […] dürfte das früheste Werk der mathematischen Heuristik sein, der Kunde also vom Gewinnen, Finden, Entdecken, Entwickeln neuen Wissens und vom methodischen Lösen von Problemen" (WINTER 1991: 35) und ist Zeugnis für den ersten expliziten Gebrauch heuristischer Strategien in der Antike.

Das Pappos-Prinzip

Pappos'[300] Hauptwerk waren die „Collectiones", eine mathematische Sammlung in acht Bänden, in denen er Auszüge aus den Schriften namhafter Mathematiker wie Euklid, Apollonios und Archimedes aufgriff, erweiterte und teils kritisch kommentierte.[301] Im siebten Buch bezieht sich Pappus auf ausgewählte Schriften von Euklid, Apollonios und Aristäus und erkennt, dass die dort behandelten mathematischen Aufgaben alle nach dem gleichen Schema gelöst wurden. Pappos schrieb in diesem Zusammenhang von „Der Kunst des Aufgabenlösens" (nach einer freien Übersetzung von Pólya[302]) und er entwickelte auf dieser Grundlage eine Methode zur Lösung mathematischer Probleme, die als das Pappos-Prinzip in die Geschichte einging.

Das Prinzip beruht auf der Analyse als „rückläufige Lösung" und der Synthese als „fortschreitendes Schließen"[303], die heute als Heurismen des Rückwärtsarbeitens bzw. des Vorwärtsarbeitens allgemein bekannt sind.[304] Pappos' Werk kann damit als erster Versuch angesehen werden, das Problemlöseverhalten systematisch zu erfassen, also im eigentlichen Sinne eine Heuristik zu schaffen.[305]

Erster produktiver Einsatz heuristischer Verfahren nach Proklos

Proklos[306] verfasste einflussreiche Kommentare zum ersten Buch von Euklids Elementen und erstellte ein Mathematikverzeichnis, das die Hauptquelle für unsere Kenntnis der

---

[299] Vgl. ZIMMERMANN 1990: 143.
[300] Pappos von Alexandrien (Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς, latinisiert auch Pappus Alexandrinus), um 300 n. Chr. war einer der letzten bedeutenden Mathematiker und Astronomen der Antike.
[301] Vgl. SCRIBA 2005: 77.
[302] Vgl. PÓLYA 1995: 163.
[303] Vgl. PÓLYA 1995: 163.
[304] Vgl. HESSE 2010: 305.
[305] Vgl. ZIMMERMANN 1990: 149.
[306] Proklos (Πρόκλος ὁ διάδοχος, latinisiert auch Proclus), *412 in Konstantinopel, †485 n. Chr. in Athen, war ein spätantiker griechischer Philosoph und Gelehrter. Als prominenter Vertreter des Neuplatonismus leitete er die neuplatonisch Schule von Athen.

Geometrie in der Antike darstellt.[307] Proklos stellte außerdem einige allgemeine Überlegungen zum euklidischen Konstruktionsverfahren an und formulierte für all jene, deren „Geschicklichkeit des Geistes nicht ausreicht, um Lösungen ohne Methode zu entwickeln" (ZIMMERMANN 1990: 150), eine Vorgehensweise zur Ergebnisfindung. Er schrieb in diesem Zusammenhang:

> *[…] Gleichwohl werden verschiedene Methoden hierfür empfohlen. Die beste ist jene, die das gesuchte Problem auf analytischem Wege zurückführt auf ein anerkanntes Prinzip […] Die zweite ist die trennende, die den vorliegenden allgemeinen Komplex in Teilglieder auflöst und dem Beweis die Möglichkeit zur Erhärtung des betreffenden Problems erschließt … Die dritte Methode bedient sich der Zurückführung auf eine Unmöglichkeit… Der Fall… unterrichtet über die bescheidenen Arten der Konstruktion und den Lagewechsel durch Umstellung der Punkte, Linien, Ebenen oder Körper… Die Zurückführung… ist der Übergang von einem Problem oder Lehrsatz zu einem anderen, dessen Erkenntnis oder Lösung auch die vorliegende Aufgabe klärt. (zit. nach ZIMMERMANN 1990: 1950).*

In seinen Ausführungen sprach Proklos somit erstmals von einem „produktiven Einsatz heuristischer Verfahren" (ZIMMERMANN 1990: 151) und schrieb von den uns heute bekannten heuristischen Techniken und Heurismen *Rückwärtsarbeiten*, *Anfertigung einer Zeichnung* und vom *Rückführung auf eine bekanntes Problem*. Man kann daraus schließen, dass es Proklos primär um eine Systematisierung und ein Verständnis der euklidischen Mathematik ging.[308]

5.2 Stagnation im Mittelalter

Das römische Reich war zu Beginn des Mittelalters von zahllosen Kriegen zerrüttet, innerpolitischen Machtkämpfen geschwächt und dem Aufstieg der christlichen Kirche geprägt, infolge dessen die Wirtschaft und der Handel zerfielen, der Feudalismus herrschte und das hellenistische Kulturgut abgelehnt und verurteilt wurde.[309] Zur gleichen Zeit erlebten die islamisch geprägten Länder eine beispiellose Entfaltung ihres Kulturgutes und der mathematischen Entwicklungen. Während in den europäischen Ländern das griechisch-hellenistische Erbe abgelehnt wurde, sammelte man in den islamischen Ländern die mathematischen Schriften, übersetzte sie ins Arabische und verfasste einflussreiche Kommentare. Auf diese Weise wurden Werke namhafter griechisch-antiker Mathematiker wie

[307] Vgl. KROPP 1969b: 29.
[308] Vgl. ZIMMERMANN 1990: 151.
[309] Vgl. WUßING 2008: 276 und auch die Ausführungen in Kap. 3.4.

Euklid, Archimedes, Apollonios und Heron[310] wiederentdeckt, darin beschriebene Methoden und Beweise übernommen und aus den gewonnenen Erkenntnissen und nach dem Vorbild der hellenistischen Mathematik neues mathematisches Kulturgut entwickelt.[311] So können den Arabern Verdienste in den Bereichen Arithmetik, Zahlentheorie, Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Näherungsrechnung und erste Ansätze im Bereich der Analysis und darüber hinaus dem Erhalt wertvoller griechischer Schriften zugeschrieben werden.[312]

Nach der Eroberung Toledos – Zentrum der Übersetzungen arabischer Schriften ins Lateinische[313] – im Jahr 1085 durch die Christen, gelangte schließlich das Erbe der griechischen Mathematik in großer Anzahl ins Abendland und konnte so diesem zugänglich gemacht werden.[314] Inzwischen war das christliche Europa wieder erstarkt und Wissenschaft und Bildung fanden neben der christlichen Theologie und Philosophie ihren Platz in der Gesellschaft. Trotz einiger Errungenschaften im Bereich der Mathematik, können auf dem Gebiet der Heuristik erst in der Renaissance Fortschritte nachgewiesen werden.

5.3 Wiederentdeckung in der Renaissance und der frühen Neuzeit

Descartes' Methode zur Problemlösung

152 Descartes[315] veröffentlichte im Jahre 1637 die Schrift „Von der Methode des richtigen Vernunftgebrauchs und der wissenschaftlichen Forschung“[316], in der er – unter anderem auf den Kenntnissen der geometrischen Analysis von Pappos und der Arithmetik des Diophant basierend – eine analytische Methode zur Problemlösung entwickelte.[317] Er gilt damit als der Erfinder der analytischen Geometrie, die Algebra und Geometrie unter heuristischen Aspekten miteinander verbindet.[318] Sein heuristisches Vorgehen führt Descartes dabei auf die Befolgung von vier Vorschriften zurück:

1. Versuche das gegebene mit vorhandenem Wissen zu vernetzen/Die Problemlösung nur auf Basis von absolut gesicherten Erkenntnissen suchen.
2. Zerlege das Problem in Teilprobleme.

[310] Vgl. Kropp 1969: 53.
[311] Vgl. Wußing 2008: 233 ff.
[312] Vgl. Wußing 2008: 242.
[313] Vgl. Wußing 2008: 228.
[314] Vgl. Kropp 1969: 58.
[315] Poitou René Decartes, *1596 in La Haye en Touraine, † 1650 in Stockholm, französischer Philosoph und Mathematiker, gilt als der Begründer des modernen frühneuzeitlichen Rationalismus.
[316] Frz. Original: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences* (1637).
[317] Vgl. Perler 1998: 63.
[318] Vgl. Winter 1989: 96.

3. Gehe systematisch vor, vom Einfachen zum Komplexen.
4. Schaue zurück und reflektiere die Lösung.[319]

In seinen „Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft“[320] entwickelte Descartes darüber hinaus die Idee, Probleme aus ihrer Wortfassung in eine Gleichung zu übersetzen; so hat er einen, gelegentlich nach Pólya „Descartes’sches Schema“ genannten, Heurismus gewonnen, der für die Mathematik und zahlreiche Anwendungen eine große Bedeutung besitzt:

1. Reduziere die Aufgabe auf die Bestimmung unbekannter Größen.
2. Beschreibe die Beziehungen, die der Bedingung entsprechend zwischen den Unbekannten und den Daten bestehen müssen.
3. Trenne von der Bedingung einen Teil ab, demzufolge man dies selbe Größe auf zwei verschiedene Arten ausdrücken kann (was eine Gleichung ergibt oder – bei Fortsetzung dieses Verfahrens – ein Gleichungssystem).[321]

Als Erfinder der Analytischen Geometrie hat Descartes zudem den Heurismus des Rückwärtsarbeitens und denjenigen der Variation der Darstellung produktiv zur arithmetischen Lösung geometrischer Probleme genutzt.[322] „Diese algebraisierte Analysis des Descartes ist in seinen Augen für geometrisches Problemlösen ein überaus leistungsfähiger und jedem zugänglicher Heurismus“, fasst Winter (1991: 97) zusammen.

Cavalieri

Nach der Phase der mittelalterlichen Stagnation kann Cavalieri[323] als „Neuentdecker“ der Approximation/Exhaustionsmethode angesehen werden, die später zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung maßgeblich weitergenutzt wurde.[324]

Jungius

Jungius[325] hat zu Beginn des 17. Jahrhunderts vermutlich als einer der ersten den Begriff „Heuretik“ genutzt und ihn als Synonym für die Begriffe „Analysis“ und „Zetetik“ verwendete. Jungius sah in der Heuretik ein analytisches Verfahren innerhalb der Mathematik, auf dessen Grundlage jede Wissenschaft sowie die Philosophie ihre Erkenntnisse aufbauen

[319] Vgl. Descartes 1637: 15 f.
[320] Lat. Original: *Regulae ad directionem ingenii.* Deutsche Übersetzung von Gäbe (1977).
[321] Vgl. Schreiber 2011: 99.
[322] Vgl. Winter 1991: 97.
[323] Bonaventura Francesco Cavalieri, *1598, †1647, war italienischer Mathematiker und Astronom; er nahm in seinen Überlegungen Gedanken der Infinitesimalrechnung vorweg.
[324] Vgl. Zimmermann 1990: 152 ff.
[325] Joachim Jungius (Joachim Junge)*1587 in Lübeck, †1657 in Hamburg, war deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph.

sollte. Für ihn stellte die Heuretik die höchste Stufe der (nicht nur mathematischen) Erkenntnisgewinnung – den „summum Mathematicarum disciplinarum apicem" (VOGELIUS 1677: 269) – dar, mit deren Unterstützung Probleme nicht nur gefunden, aufgestellt und gelöst, sondern auch neue Sätze gefunden, Regeln erschaffen und Zweifel ausgeräumt werden konnten. Damit betrachtet Jungius diese Disziplin als eine Bereicherung für den Menschen, die weit über die Mathematik hinausging und in allen Lebensbereichen Anwendung finden konnte.[326] Jungius war der Ansicht, dass „für die mathematische Wissenschaften speziell die Geometrie [...] den Wert wirklicher Wissenschaft beanspruchen [...]" (MATUSCHKA 1974: 12) könne, und er fordert daher, dass die Philosophie zur Erkenntnisgewinnung die Geometrie mehr in den Fokus rücken solle.[327]

Hansch

Hansch[328] ersetzt in seinem 1728 verfassten Buch den Titel *Ars inveniendi* durch *Heuretik*, womit er den neuen Weg der Erkenntnisgewinnung und Forschung zum Ausdruck bringt.[329] Er definiert die Heuretik als „ein System von Regeln, die aus dem Bereich der Logik und aus dem Gebiet der Geometrie stammen und mit deren Hilfe natürliche Denkordnung unterschiedlich entfaltet wird; Heuretik ist die Kunst des Denkens, Überlegens, Schlußfolgerns, Erfindens, die vernünftige Philosophie, welche die angeborene Logik ergänzt bzw. vervollständigt" (MATUSCHKA 1974: 13). Auch Hansch hebt die Bedeutung der Geometrie hervor, wenn er postuliert, dass die „Heuretik [...] einen Weg zur Erkenntnis unbekannter Wahrheiten aufzeigen [soll], welcher „more geometrico" beschritten werden soll" (MATUSCHKA 1974: 44).

5.4 Heuristik in der Moderne

Ab Mitte des 20. Jahrhunderts nahm das Forschungsinteresse am Problemlöseverhalten im Zuge einer Neuorientierung verschiedener wissenschaftlicher Disziplinen deutlich zu (vgl. hierzu auch Kap. 3.8 bis 3.10). Dass dies auch zu einer Wiederentdeckung und Weiterentwicklung der dazugehörigen Metadisziplin, der Heuristik, führte, ist nur folgerichtig. Für eine umfangreichere Darstellung der folgenden, maßgeblichen Forscher der jüngeren und jüngsten Vergangenheit sei auf Band A (KRICHEL 2017: 152-212) verwiesen.

---

[326] Vgl. MATUSCHKA 1974: 9 ff., 29 ff.
[327] Vgl. MATUSCHKA 1974: 12.
[328] Michael Gottlieb Hansch, *1683 in Müggenhahl (Westpreußen), †1752 in Wien, war Theologe und Schüler Leibniz', der sich seinerseits mit der Heuretik und einer möglichen Verknüpfung mit der allgemeinen Logik befasste.
[329] Vgl. MATUSCHKA 1974: 4.

Pólya

Pólya leitete mit seinen Hauptwerken „Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme“ und „Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsichten und Entdeckung, Lernen und Lehren“ die Wiederentdeckung der Heuristik insbesondere unter pädagogischem Gesichtspunkt und in der Mathematikdidaktik ein. Unmittelbares und bis heute allgegenwärtiges Ergebnis sind seine „Vier Phasen der Problemlösung“ (vgl. auch Kap. 1.3.3), die auch in der modernen Terminologie Referenzgrößen darstellen und in Kapitel 5.5 entsprechend herangezogen werden.

Glatfeld

Im deutschsprachigen Raum war Martin Glatfeld – in direkter Anlehnung an Pólyas Arbeiten – Ende der 1970er Jahre einer der frühen Verfechter einer Stärkung heuristischer Aspekte im Mathematikunterricht.[330] Er beschreibt dabei den prozessualen Charakter der Mathematik als Wechselspiel von problemlösendem und beweisführendem Verhalten, das es offenzulegen gelte.[331] Bis in die 1990er Jahre hinein publizierte Glatfeld weiter zum Thema Heuristik und Mathematiklernen, in dem er einen entscheidend wichtigen Entwicklungsbereich der Mathematikdidaktik sah.[332] Glatfelds Arbeiten enthalten neben Analysen der Bedeutung und Möglichkeiten heuristischer Arbeitsweisen beim Lernen von Mathematik auch zahlreiche Umsetzungsbeispiele, bei denen Mathematiklernen als aktiver, entdeckender Prozess ausgestaltet ist.

Schoenfeld

Schoenfelds spezifische Bedeutung für die Heuristik im Mathematikunterricht ergibt sich aus seinem Bemühen, die Wirksamkeit systematischer Unterweisung in Heuristik kritisch zu hinterfragen und durch Studien (in den 1980er Jahren) empirisch zu belegen.[333] Dabei unterschied und analysierte er vier grundlegende Bereiche, die den Problemlöseprozess beeinflussen: *Resources, Heuristics, Control* und *Belief System*. Diese Unterscheidung ist bis heute in der US-amerikanischen Mathematikdidaktik aktuell und im Zusammenspiel für die Problemlösefähigkeit entscheidend sind: Innerhalb ihrer mathematischen „Glaubensvorstellungen“ (*Belief System)* bearbeiten Lerner auf Basis ihres Fachwissens (*Resources)* und mittels problemlösender Kenntnisse und Fertigkeiten (*Heuristics)* ein Problem und evaluieren ihre Lösung (*Control)*.

[330] Vgl. GLATFELD 1977: 76 ff.
[331] Damit spricht Glatfeld dieselben Aspekte an wie BARROW 1999: 142, vgl. auch Kap. 1.3.4.
[332] Vgl. GLATFELD 1990: 7.
[333] Bzgl. Reformen im US-amerikanischen Mathematikunterricht ab den 1980er Jahren vgl. Kap. 3.10 und Kap. 4.

Winter

Obwohl Heinrich Winter keine Innovationen im Bereich der Heuristik oder ihrer didaktischen Systematisierung zugeschrieben werden können, hat er auf die deutsche Mathematikdidaktik der Gegenwart diesbezüglich profunden Einfluss genommen. Die von ihm formulierten drei Grunderfahrungen (vgl. Band A, KRICHEL 2017: 157-159) haben in die Bildungsstandards Mathematik und in ihrer Folge auch in die Lehrplanschriften der Bundesländer Eingang gefunden. Die dritte dieser Grunderfahrungen besteht darin,

> *[...] in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben. (WINTER 1995: 37)*

Für Winter ist diese Forderung kein Selbstzweck, da er sich in seinen didaktischen Grundüberzeugungen dem Entdeckenden Lernen (vgl. Kap. 3.11.3) zuordnen lässt und für ihn heuristische Fähigkeiten und Fertigkeiten unbedingte Voraussetzung für das Lernen durch Entdeckungen darstellt.

Etwa ab Mitte der 1990er Jahre wurde eine Formalisierung heuristischer Tätigkeiten – im schulischen Kontext – begonnen, etwa durch Fischer (1996) oder auch Zech (1996), der in seinem *Grundkurs Mathematikdidaktik* konkrete Vorschläge zum Unterricht in Problem-

lösen macht. Allerdings, so stellt Vollrath (2000: 34) fest, bezieht sich Problemlösen „dabei auf Aufgaben, bei denen der Problemcharakter in Vordergrund steht und die Inhalte von untergeordnetem Interesse sind.“ Dass dies in einem Widerspruch zu den Grundideen eines verschränkten Aufbaus fach- und prozessbezogener Kompetenzen steht. oder diese Kluft zumindest nicht abzubauen hilft, liegt auf der Hand – und die Folgen dieses losgelösten Problemlöseunterrichts sind bis heute vielfach, insbesondere auch in den Schulbüchern sehr deutlich fassbar (vgl. Band A, KRICHEL 2017: 181).

5.5 Aktueller Forschungsstand

Mit der in Teil I umrissenen Neuorientierung der Mathematikdidaktik auch in Deutschland (und Europa) spätestens ab der Jahrtausendwende rückte das Problemlöseverhalten als Teil des Mathematikunterrichts zunächst allmählich und dann mit PISA nochmals ruckartig ins öffentliche Bewusstsein, denn es war eben dieser Bereich, der sich als besondere „Problemzone“ der deutschen Schülerschaft erwies. Die zuvor weitgehend fachwissenschaftlich intern geführte Diskussion wurde plötzlich zum Politikum – und das Problemlösen zu einem anerkannten, expliziten Unterrichtsinhalt bzw. sogar zu dessen leitendem

Prinzip.[334] Die in den Vereinigten Staaten erprobten Ansätze, Pólyas Modell und Unterrichtsideen europäischer Didaktiker wurden nun aufgegriffen und besonders im Umfeld der durch die KMK angestoßene und maßgeblich koordinierte Bildungsreform in den deutschen Bundesländern zu verbindlichen Unterrichtszielen ausgearbeitet. Dass dies auf einer wohl unzureichenden diskursiven Grundlage und in erster Linie auf Schnelligkeit bedacht geschah, zeigt sich sowohl in den Bildungsstandards als auch, in der Folge, in vielen der daraus hervorgegangene Lehrplanschriften (vgl. Band A, KRICHEL 2017, Kap. 3). Insbesondere fehlt – im Grunde bis heute – eine didaktisch tragfähige, konsensfähige Terminologie zum (schulischen) Problemlösen als Grundlage für eine koordinierte Umsetzung der in den Bildungsstandards erhobenen Forderungen der KMK.

Es muss erstaunen, dass trotz der Bedeutung des Problemlösebegriffs ein derart geringes Augenmerk nicht nur auf die terminologische und fachdidaktische Aufschlüsselung des Begriffs selbst, sondern auch auf die übergeordnete Disziplin der Heuristik gelegt wurde und noch immer wird. Die deutschen Bildungsstandards nehmen trotz ihrer grundsätzlichen Betonung der Vermittlung problemlösender Fähigkeiten (vgl. Band A, KRICHEL 2017; vgl. Kap. 3 und 4) keine klare Position ein, auf welches fachwissenschaftliche Modell sie sich beziehen. Es fallen lediglich die wiederholend gleich gewählten Bezeichnungen *heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien* auf, die sich mit den von Bruder verwendeten Termini decken.[335] Wie in Band A gezeigt werden konnte, hat dieser nur vage hergestellte Bezug zu einer Terminologie und Systematik nicht vereinheitlichend auf die in den Lehrplanschriften der Bundesländer niedergelegten Vorgaben zu den Kompetenzerwartungen im Bereich Problemlösen gewirkt.[336] Begrifflichkeiten dort sind willkürlich, ohne jeden erkennbaren Bezug auf die fachwissenschaftliche Debatte und Forschung, gewählt und damit oft intransparent bis inhaltsleer. In den Lehrplanschriften der Bundesländer ihrerseits fehlt weiterhin auffällig eine Bezugnahme auf Fachsystematiken; gelegentlich lassen sich Bezüge zu Pólya oder Anleihen der von Winter beschriebenen Grunderfahrung 3 erkennen.

In der Mathematikdidaktik werden aktuell drei Systematiken der Heuristik vertreten, die für eine Bezugnahme und Adaption für den Kontext der Primar- und Sekundarschul-

[334] Vgl. GELLERT 2009, der die Situation des Mathematikunterrichts nach der Lehrplanreform der Jahrtausendwende perspektivisch darstellt.
[335] In Band A (KRICHEL 2017) wird die Kategorisierung nach Bruder in Kap. 5.4.2 in Zusammenhang mit der Kategorisierung dargestellt. Die Vermutung, dass sich die Lehrplanschriften an Bruder orientieren, wurde verworfen, da die meisten Lehrpläne vor Bruders Arbeit (2011) erschienen sind.
[336] Vgl. KRICHEL 2017, Kap. 3 und 4.

ausbildung zur Verfügung stünden und diese terminologische und didaktische Lücke füllen helfen könnten; es sind dies die sehr aktuellen Systematiken nach Schwarz, Schreiber und Bruder. Die drei modernen Systematiken unterscheiden sich nicht nur durch die in ihnen erfassten heuristischen „Vorgehensweisen“, wie sie hier neutral bezeichnet werden sollen, sondern besonders hinsichtlich ihrer strukturellen Ordnung (horizontal wie vertikal) einerseits und sicherlich auch hinsichtlich der intendierten Rezipienten. Eine ausführlichere Darstellung dieser in Deutschland aktuell relevanten Systematiken findet sich in Band A (KRICHEL 2017, Kap. 5.2). Die nachfolgende Tabelle stellt die verwendeten Begriffe und Kategorisierungen einander gegenüber und setzt sie in *ungefähre* Relation zu den von Pólya identifizierten vier Phasen des Problemlösens, die nach wie vor von grundlegender Bedeutung für die didaktische Diskussion sind.

Pólya (1949)	**Schwarz (2006)**	**Schreiber (2011[337])**	**Bruder (2011)**
4 Phasen des Problemlösens, innerhalb derer heuristische „Vorgehensweisen“ beschrieben werden.	3 Gruppen von Heurismen: Variation Induktion Reduktion	4 Gruppen von Heurismen[338]: Induktion Variation Interpretation Reduktion	3 hierarchische Klassen von Heurismen: Hilfsmittel Strategien Prinzipien
Phase I Verstehe das Problem	Variation: Variation der Darstellung (Interpretation): Systemwechsel zwischen Umgangssprache und formaler Sprache Systemwechsel zwischen Geometrie und Algebra Systemwechsel zwischen diversen mathematischen Gebieten und Linearer Algebra	Interpretation: Übersetze in einen anderen Kontext Verfertige ein Modell Suche ein Analogon	Hilfsmittel: Informative Figuren Tabellen Gleichungen Wissensspeicher Lösungsgraph
Phase II Mache einen Lösungsplan	Variation der Problemstellung: Umformulierung/Analogie Reorganisation Invarianz und Symmetrie Generalisierung, Spezialisierung, Extremalprinzip Sonderformen in der enumerativen Kombinatorik	Variation: Variiere das Gegebene Variiere den Allgemeinheitsgrad Variiere die Exaktheitsstufe	Strategien: Vorwärtsarbeiten Rückwärtsarbeiten Systematisches Probieren Rückführend auf Bekanntes Analogieschluss

[337] Die 2011 erschienene Systematik nach Schreiber basiert auf dessen Vorlesungstätigkeiten bis 2007/2008.
[338] Schreiber (2011) selbst deutet keinerlei Anbindung zu Pólyas Phasen an. Er stellt seine Heurismen allerdings in der hier gegebenen Reihenfolge vor, in der sie sich an die Pólya’schen Phasen anlehnen lassen.

Phase III Führe den Plan aus	Induktion: Unvollendete Induktion: Systematisches Probieren Vorwärtsarbeiten Approximation Vollendete Induktion	Induktion: Probiere systematisch Arbeite vorwärts Versuche zu verallgemeinern	Prinzipien: Symmetrieprinzip Zerlegungsprinzip und Ergänzungsprinzip Invarianzprinzip Extremalprinzip Fallunterscheidung
	Reduktion: La Descente Infinie Rückwärtsarbeiten/Pappos-Prinzip Modularisierung	Reduktion: Unterscheide Fälle Arbeite rückwärts Argumentiere durch Widerspruch	
Phase IV Halte Rückschau			

Tab. 5 Tabellarische Synopse der aktuellen heuristischen Kategoriebildungen nach Pólya (1949), Schwarz (2006), Bruder (2011) und Schreiber (2011).

Einige Punkte seien hier kurz angesprochen, die aus dieser Zusammenschau und beim genaueren Studium dieser Systematiken auffallen. Zunächst ist die Nähe zwischen den von Schwarz und Schreiber gewählten Begrifflichkeiten und auch Inhalten zu nennen. Beide Systematiken unterscheiden sich vor allem in der Art ihrer Formulierungen, dem Grad ihrer Ausarbeitung und in der Wahl ihrer konkretisierenden Beispiele. Schwarz richtet sich gezielt an universitäre Lerner, Schreiber bezieht sich häufiger auf die schulische Relevanz seiner Beispiele. Beide Autoren haben ihre Kategorisierungen klar nach strukturellen bzw. prozessualen Aspekten der von ihnen beobachteten und untersuchten heuristischen Vorgehensweisen vorgenommen – es liegt also, wie oben bereits angedeutet, keine unmittelbare Relation zu den Pólya'schen Phasen des Problemlöseprozesses vor.

Die Nomenklatur nach Bruder ist demgegenüber teils ungeschickt und irreführend: Die von ihr gewählte Bezeichnung der *Hilfsmittel* als Heurismen ist nicht treffend, wie insbesondere der Unterpunkt *Wissensspeicher und umstrukturierte Wissensspeicher* (BRUDER 2011: 37) klar erkennen lässt.[339] Auch ist die Unterscheidung in *Strategien* und *Prinzipien* nicht gänzlich plausibel, es ist aber offenbar, dass sie diese Einteilung – anders als Schwarz und Schreiber – nicht auf immanente Eigenschaften der Heurismen stützt, sondern sie auf den Anwendungskontext zurückführt.

[339] Der von Bruder beschriebene Wissenspeicher gehört zur Klasse des Deklarativen Wissens (vgl. Kap. 1.1.5) und darf bei aller erkenntnistheoretischen Relevanz auch für das Lösen von Problemen nicht mit der Klasse Prozeduralen Wissens (Kap. 1.1.6) vermischt werden.

Englischsprachige Literatur zum Thema – exemplarisch seien hier die Arbeiten von Cofman (1990), Herr/Johnson (1994) und Engel (1998) genannt – bietet interessante Aspekte und Anregungen für die Beschäftigung mit mathematischen Problemen und auch den Aufbau von Problemlösefertigkeiten, stellt aber vor allen Dingen eine Fundgrube an kreativen Fragestellungen und Problemen dar, die sich für eine Bearbeitung bereits in der Sekundarstufe I eignen.[340] Einen expliziten fachlichen/fachdidaktischen Rahmen für die dort genutzten und benannten heuristischen Techniken und Heurismen sucht man in allen drei Fällen vergeblich. Cofman selbst nennt sie zunächst „Techniken und Methoden zur Entdeckung“[341] (1990: 89), spricht jedoch gleich darauf davon, „eine Auswahl von Herangehensweisen an das Problemlösen“ zu präsentieren. Ein vergleichbares terminologisches Verwirrspiel findet sich auch bei Herr/Johnson und Engel.

Auf dieser Grundlage kann nun nur eine übersichtsartige Listung (Tab. 6) der dort benannten „Herangehensweisen“ gegeben werden, die zur besseren Vergleichbarkeit in etwa den Pólya'schen Phasen entsprechend geordnet wurden.

Pólya-Phasen	Cofman (1990)	Herr/Johnson (1994)	Engel (1998)
	keine explizite Phasierung oder Kategorisierung der Herangehensweisen		
I	Expressing the problem in a different language	Draw a diagram Systematic lists Eliminate possibilities Matrix logic Venn diagrams Algebra Use a graph Scale drawings Change your point of view Change the representation	Number theory Inequalities Sequences Polynomials Functional equations Geometry Games
II	Extending the field of investigation The use of invariants of transformations The use of extremal elements	Look for a pattern Subproblems Unit analysis Solve an easier related problem Solve the complementary problem	The invariance principle The extremal principle The box principle

[340] Für diese Arbeit besonders interessant ist Cofmans (1990: 145 ff.) Sammlung solcher Probleme, die an Beispiele aus der Mathematikgeschichte angelehnt ist – bedauerlicherweise ist dem Bereich der Geometrie jedoch nur ein Abschnitt von gerade vier Seiten (einschließlich projektiver Geometrie) gewidmet.
[341] Im englischen Original: „techniques and methods of discovery”.

III	The method of infinite descent Mathematical induction Proof by contradiction Employing physics	Guess and check Physical representations (Act it out, Make a model, Use manipulatives) Work backwards Finite differences	Coloring proofs Enumerative combinatorics The induction principle

Tab. 6 Heuristische „Herangehensweisen“ in englischsprachiger Literatur zum Problemlösenlernen von Cofman (1990), Herr/Johnson (1994) und Engel (1998).

Eine unterrichtsbezogene Gesamtkonzeption oder Einordnung ist von allen vier Autoren eindeutig nicht beabsichtigt, auch wenn der Einsatz innerhalb des schulischen Rahmens (mit) angedacht ist. Die Einführungen und Erläuterungen kennzeichnen die hier vorgestellten Werke von Cofman und Herr/Johnson primär als Selbstlernbücher, mit denen Schüler eigenständig ihre Fähigkeiten im Problemlösen ausbauen können sollen; das Buch von Engel versteht sich als Fundgrube für Lehrende, die mathematisch besonders interessierte und/oder begabte Jugendliche auf Wettbewerbe vorbereiten wollen.

5.6 Sekundarschulorientierte Kategorisierung nach Krichel/Stiller

Die Frage nach der Legitimation einer neuerlichen Einteilung problemlösender Vorgehensweisen ist naheliegend. Zwei Gründe sind in der vorliegenden Arbeit für diesen Schritt ausschlaggebend: Die Terminologie, sowohl im englischsprachigen als auch im deutschsprachigen Diskurs – sofern sie überhaupt systematisch aufgebaut ist[342] – ist nicht an das Verständnispotential von Sekundarschülern angepasst. Eine solche Anpassung darf keine Simplifizierung oder unzulässige Verkürzung der Sachinhalte verursachen, aber bei der Neusystematisierung wird bewusst darauf geachtet, eine pädagogisch wie fachlich sinnvolle Balance zwischen (auch intuitiver) Nachvollziehbarkeit und Differenziertheit der Kategoriebildung problemlösenden Verhaltens zu finden. Zum zweiten erscheint eine Definition, die zugleich auch den Erwartungsrahmen für die schulische Vermittlung steckt, angesichts der nach wie vor großen Schwierigkeiten bei der Implementierung der Bildungsstandards wünschenswert, wenn nicht dringend angezeigt. So sollen die hier explizierten heuristischen Techniken und Heurismen einen realistischen Erwartungshorizont für die Arbeit in der Sekundarstufe liefern.

[342] Eine Forderung, die man mit Blick auf große Teile der Literatur zum Thema Problemlösen keineswegs als selbstverständlich voraussetzen kann.

Die Neueinteilung erfolgt in drei Kategorien, die heuristische Vorgehensweisen grundsätzlich unterschiedlichen Charakters erfassen: Kategorie I umfasst *heuristische Techniken*, die Kategorien II und III hingegen *Heurismen*, die sich aber – mit oben genanntem Ziel – klar gegeneinander abgrenzen lassen. Für eine ausführliche Beschreibung und konkrete Problembeispiele wird an dieser Stelle auf Band A verwiesen (KRICHEL 2017, Kap. 5.5).

Kategorie I	**Kategorie II**	**Kategorie III**
Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismen der konkreten Handlung
Tabellen und Listen Gleichungen Graphische Repräsentationsformen De- und Rekonstruktion	Heurismus der Affinität - Rückführen auf Bekanntes - Analogie Heurismus der Strukturnutzung	Vorwärtsarbeiten Rückwärtsarbeiten Systematisches Probieren

Tab. 7 Einteilung und Bezeichnung heuristischer Techniken und Heurismen nach Krichel/Stiller (2017).

Wenn man diese noch immer fachsprachlich geprägte Übersicht weiter didaktisch reduzieren und an das linguistische und kognitive Vermögen jüngerer Schüler, etwa in der Orientierungsstufe, anpassen möchte, lässt sich dies vergleichsweise leicht realisieren:

Kategorie I	**Kategorie II**	**Kategorie III**
Werkzeugkasten: Vereinfachen, verbildlichen und sortieren	Heurismen der Untersuchung und Anpassung	Heurismen der Handlung
Tabellen und Listen anlegen als Gleichungen schreiben Bildlich darstellen Auseinanderbauen und zusammensetzen	Heurismus der Verwandtschaft - Rückführen auf Bekanntes - Vergleichen mit anderen Problemlösungen Heurismus der Strukturnutzung	Vorwärtsarbeiten Rückwärtsarbeiten Gezieltes Probieren

Tab. 8 Vorschlag zur sprachlich entlasteten Bezeichnung heuristischer Techniken und Heurismen in der Orientierungsstufe und ggf. Mittelstufe nach Krichel/Stiller (2017).

5.6.1 Kategorie I: Heuristische Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung

Heuristische Techniken zeichnen sich dadurch aus, dass sie ausgesprochen oft verwendet werden und auch aus anderen Lebenszusammenhängen oftmals vertraut sind, aber in aller Regel nicht den vollständigen Problemlöseprozess tragen können; vielmehr bilden die Ergebnisse, die man durch die Anwendung *heuristischer Techniken* gewinnt, die Grundlage für weiteres Vorgehen, so dass eine lose Zuordnung zur ersten von Pólyas Phasen erfolgen kann. *Heuristische Techniken* werden auch bei der Nutzung von *Heurismen* der Kategorien II und III in dienender Funktion verwendet.

Unter *heuristische Techniken* werden alle Vorgehensweisen zusammengefasst, die dazu beitragen, die Daten und Informationen einer vorliegenden Problemsituation zu strukturieren, zu abstrahieren und auf die wesentlichen Kernaussagen zu reduzieren, so dass der Mathematisierungsprozess in Gang gesetzt und die Anwendung zielführender Heurismen eröffnet wird.

Die benannten *heuristischen Techniken Tabellen und Listen, graphische Repräsentationsformen* und *Gleichungen* bedürfen an dieser Stelle keiner weitergehenden Erläuterung; sie gehören allgemein zum anerkannten heuristischen Instrumentarium. [343, 344] Die letztgenannte *heuristische Technik der De- und Rekonstruktion* sticht demgegenüber hervor[345] und sei hier kurz definiert.

Die heuristische Technik der *De- und Rekonstruktion* bezeichnet das systematische Zergliedern eines gegebenen Problems in überschaubare Teilprobleme und die entweder abschließende oder zwischenphasige Wiederzusammenführung in der Absicht, das Ausgangsproblem zu lösen.

De- und Rekonstruktion können auf unterschiedlichen Abstraktionsstufen realisiert werden, beginnend bei geometrischer Zerlegung von Figuren in Teilfiguren als einfachste Form.

5.6.2 Kategorie II: Heurismen der Analyse und Adaption

Kategorie II umfasst (für den Sekundarschulbereich) zwei Arten von Heurismen, den *Heurismus der Affinität* und den *Heurismus der Strukturnutzung*. Gemeinsames, definierendes Merkmal der Heurismen der Analyse und Adaption ist die Notwendigkeit, ein vorliegendes Problem hinsichtlich seiner strukturellen Merkmale zu betrachten. Diese Merkmale können dabei die heuristische Ebene unmittelbar betreffen (was auf Heurismen der Affinität hinführen würde) oder aber problemimmanenter Natur sein (was dann auf den Heurismus der Strukturnutzung zuleitet). Der Begriff der Adaption wurde der Kategoriebezeichnung hinzugestellt, um zweierlei zu verdeutlichen: erstens handelt es sich um ein bidirektionales Konstrukt, zweitens sind auch Manipulationen des Ausgangsproblems potenziell Bestandteil der Heurismen.

---

[343] Selbstverständlich werden ähnliche oder identische Techniken auch in anderen Sachsituationen verwendet, in denen es nicht im engeren Sinnen um das Problemlösen geht.
[344] Beispiele sind in Band A (Krichel 2017, Kap. 5.5.1) ausgeführt.
[345] Andere Autoren führen einen verwandten Heurismus unter der Bezeichnung „Zerlegen und Ergänzen“. Dieser wird in der Systematik nach Krichel/Stiller nicht geführt, da er sich unter der heuristischen Technik der De- und Rekonstruktion einerseits und dem Heurismus der Affinität andererseits subsumieren lässt.

Der *Heurismus der Affinität* beschreibt eine problemlösende Vorgehensweise, bei der bereits gelöste Probleme auf ihre Ähnlichkeit oder strukturelle Vergleichbarkeit zu einem neuen Problem hin untersucht und dann zur systematischen Planung und Durchführung der Problemlösung genutzt werden.

Angesichts dieser offenen Definition soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass unter Heurismen eine *Klasse* von Vorgehensweisen zu verstehen ist und nicht eine einzige schematische Handlungsfolge gemeint ist (was einen Algorithmus bedeuten würde). So gibt es verschiedene konkrete Vorgehensweisen, die obiger Definition genügen, und die den *Heurismus der Affinität* bilden. Insbesondere zu nennen sind hier die Heurismen *Rückführen auf Bekanntes* und *Analogie*.[346]

Der *Heurismus der Strukturnutzung* bezeichnet die vorbereitende, auf einer Analyse beruhende, Bearbeitung eines Problems, die durch Identifizierung oder gezielte Generierung von Mustern und Strukturen den Weg zur Problemlösung öffnen kann.

5.6.3 Kategorie III: Heurismen der konkreten Handlung

Heurismen der konkreten Handlung teilen Eigenschaften mit beiden vorher definierten Kategorien. Sie erfordern bzw. beinhalten im Unterschied dazu jedoch die aktive Durchführung konkreter Handlungsschritte; in gewisser Weise könnte man von einem algorithmischen Aspekt dieser Heurismenklasse sprechen. Da die Variation in Abhängigkeit von den jeweils zu bearbeitenden Problemstellungen und die Vielfalt der tatsächlich in Kombination mit den heuristischen Techniken einzusetzenden Handlungsvarianten jedoch unüberschaubar sind, handelt es sich nichtsdestotrotz um Heurismen.

Das *systematische Probieren* bezeichnet das planvolle Variieren der im gegebenen Problem enthaltenen Variablen, mit dem Ziel, durch das beobachtete Verhalten (die Ergebnisse) Schlüsse auf die zugrundeliegende Struktur des Problems („deep structure“) zu ziehen; diese werden unmittelbar zur Lösung des Problems genutzt.

Das systematische Probieren tritt besonders häufig in enger Verknüpfung mit *heuristischen Techniken* in Erscheinung; sowohl bei der Planung als auch der Sicherung der durch das systematische Pobieren gewonnenen (Roh-)Daten, sind bei komplexeren Problemstellungen Tabellen, Listen oder allgemeinere graphische Darstellungsformen oft unerlässlich.

[346] Die in Band A (KRICHEL 2017: Kap. 5.5.2) dargestellte Herleitung der Formel zur Berechnung des Kugeloberflächeninhalts ist ein Beispiel für den Heurismus der Analogie.

Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten basieren auf der Möglichkeit, ein vorliegendes Problem linear, von einem Ausgangs- bis zu einem Endzustand oder von seinem End- zum Ausgangszustand hin, zu betrachten. Gelingt dies, so kann durch logisches, schrittweises Bearbeiten (wobei die Richtung prinzipiell keine Rolle spielt) der Problemsituation – oftmals auch über Zwischenziele – der gesuchte End- oder Ausgangszustand erreicht und damit das Problem gelöst werden.

Das Vorwärtsarbeiten erschließt sich als heuristisches Handeln eher durch seine zum Rückwärtsarbeiten komplementäre Funktion und Vorgehensweise. Besonders in Verschränkung mit dem *Heurismus der Affinität* – und hier der Analogie – tritt jedoch das Vorwärtsarbeiten entlang eines so entworfenen Plans oder einer auf Analogie beruhenden Grundidee auch allein in Erscheinung.

5.6.4 Heuristische Prinzipien?

Im Gegensatz zu anderen, wie den oben vorgestellten, Heurismuskategorisierungen verzichten Krichel/Stiller auf die Berücksichtigung von „Prinzipien" als konstituierende Teile ihrer Heuristik. Prinzipien sind fundamental geltende Regeln, die sich nach Ansicht von Krichel/Stiller jedoch nicht als Heurismen klassifizieren lasen. Im Grunde sind sie viel mehr, nämlich das quasi-axiomatische Fundament, auf dem Probleme gelöst werden können. Ohne das Invarianzprinzip (das oft noch durch das Symmetrieprinzip sowie das Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip erweitert wird) sind viele heuristische Techniken und Heurismen nicht denkbar, insbesondere die *De- und Rekonstruktion* oder *systematisches Probieren*. Das Extremalprinzip in seiner allgemeinen Lesart[347] bildet die Grundlage für Anwendungen des *Heurismus der Strukturnutzung* oder der *Affinität* und kann sicher auch mit Fällen des *Systematischen Probierens* in Verbindung gebracht werden.

Die Bedeutung dieser Prinzipien wird mithin keineswegs in Abrede gestellt, sie werden vielmehr vorausgesetzt und nicht als Teil heuristischer Handlungsmuster im *engeren* Sinne aufgefasst; daher werden sie nicht einer Zuordnung in das hier vorgeschlagene sekundarschulbezogene Klassifikationssystem unterworfen.

Kommentar

Die hier und in Band A (KRICHEL 2017, Kap. 5.5) beschriebenen heuristischen Techniken, Heurismen(klassen) und zugrundegelegten kategorialen Merkmale sind in Teilen weniger konkret ausgearbeitet, als dies etwa bei Schwarz (2006) erfolgt ist. Diese „Unschärfe" ist

[347] Wir folgen hier SCHWARZ 2006: 97, der sich auf HAAS 2000 bezieht.

eine bewusst gewählte; sie erlaubt auf pädagogischer Ebene ein flexibles Aushandeln der konkreten Bedeutungsinhalte für prinzipiell jedes Problem. Dieser Ansatz ist insofern nicht problematisch, als es im wissenschaftlichen Diskurs unstrittig ist, dass die Grenzen zwischen verschiedenen Arten und ebenso auch Phasen problemlösenden Handelns, gleich welcher terminologischen und inhaltlichen Systematik man folgt, fließend sind und sein müssen.[348] Gerade diese vom Mathematiker gelegentlich als unbequem und vielleicht auch unwissenschaftlich empfundene – relative! – Unschärfe der Heuristik unterscheidet sie jedoch von anderen Teilgebieten der Mathematik. Es wäre letztlich irreführend, ein vollständiges, absolut trennscharfes, einheitlich „korrektes" terminologisches und kategoriales System der Heuristik behaupten zu wollen, da dies im Widerspruch zum Wesen des Problemlösens selbst stünde.

Um mit anderen, aber ebenso mit sich selbst, sinnvoll über das Lösen von Problemen kommunizieren zu können, ist es trotzdem unabdingbar notwendig, die Metaebene einnehmen und also heuristische Strukturen und Muster benennen zu können – zugleich ist es natürlich eben dieses Begriffswissen, dass es dem Menschen auch erst ermöglicht, Muster und Strukturen (wieder) zu erkennen. Konkrete Beispiele für die Arbeit mit diesen drei Kategorien werden in Teil III bei der Vorstellung des Unterrichtskonzepts CHIME dargestellt und kommentiert.

[348] Vgl. hierzu SCHWARZ 2006: iii.

6 Problemlösen und die Genese der Geometrie

In der Entwicklungsgeschichte der Mathematik zeigt sich ein Wechselspiel zwischen Theoriebildung und Problemstellungen. Über die enge Verbindung zwischen Sätzen und Problemen schrieb bereits Proklos in seinem Euklid-Kommentar[349]:

> *Jede Wissenschaft ist zweifacher Art: Entweder bemüht sie sich um die unmittelbaren Sätze, oder sie liefert, gestützt auf diese, Beweise und Konstruktionen, zieht überhaupt Folgerungen aus den Prinzipien und entwickelt so ihr System. Die unsere scheidet sich bei der Behandlung der Geometrie in die Erledigung der Probleme und die Gewinnung von Lehrsätzen. Sie bezeichnet als Probleme Aufgaben, bei denen sie sich zum Ziele setzt, nicht Vorhandenes ausfindig zu machen, ans Licht zu bringen und zu beschaffen, als Theoreme aber Sätze, durch die sie das, was zutrifft oder nicht zutrifft, sehen, erkennen und beweisen will. (zit. nach VOLLRATH 2000: 37)*

In der folgenden historischen Zusammenschau wird es primär um geometrische Probleme gehen, deren Inhalte für das sekundarschulorientierte CHIME-Konzept eine Rolle spielen oder grundsätzlich spielen könnten. Dennoch wird an geeigneter Stelle auch auf prägnante Beispiele fortgeschrittener Art eingegangen, da es hier um den grundsätzlichen Zusammenhang zwischen (prä-)historischen Problemlösungen und der Geometrie geht. Es gilt aufzuzeigen, welche enge Verzahnung zwischen der Entstehung der Geometrie (und allgemein der Mathematik) und zu lösenden Problemen historisch vorliegt. Prominente und weniger bekannte Aufgabenstellungen aus der Frühzeit der uns bekannten Mathematikgeschichte verschiedener Kulturen werden zu diesem Zweck vorgestellt und im folgenden Kapitel hinsichtlich ihres heuristischen Potenzials betrachtet. Um welche Art von Problemen wird es dabei vorrangig gehen? Bei Euklid sind es häufig Konstruktionsaufgaben, die als Probleme präsentiert werden.[350] Unter anderem Vollrath (2000: 37) weist darauf hin, dass sich „die Bestimmung des Flächeninhaltes [...] wie ein roter Faden als *grundlegendes* Problem durch die Mathematikgeschichte zieht." Und weiter stellt er fest: „Beim Entstehen von Mathematik geht die Dynamik jedoch von den Problemen aus." Die Vorstellung oder der Eindruck, dass Mathematik und/oder Geometrie stets als (voll ausgebildetes) System von Begriffen, Axiomen und Sätzen existiert hat, ist demnach schlicht falsch. Vielmehr steht ein iterativer Prozess dahinter:

---

[349] PROKLUS DIADOCHUS 1945: 307.
[350] Vgl. VOLLRATH 2000: 37.

> *Wenn man Mathematik treibt, dann ergeben sich Begriffsbildungen als Lösungen von Problemen. Die Begriffe erweisen sich dann als Quellen neuer Probleme. Die Lösungsidee kann zu neuen Sätzen oder neuen Begriffen führen. Bei der Durchführung des Lösungsweges sind Begriffe, Sätze und bereits gelöste Probleme die entscheidenden Hilfsmittel. (VOLLRATH 2000: 7)*

Ganz im Sinne eines genetischen, entdeckenden bzw. forschenden Unterrichts ist es dieser Weg, der es den Schülern ermöglicht, Mathematik nicht als fertiges, oftmals und für viele sinnleeres Konstrukt zu erleben, sondern im Gegenteil Mathematik in ihrem eigentlichen Sinne als problemlösendes Abenteuer selbst zu erschaffen. Das Problem ist damit in allen Phasen und in umfassendstem Sinne Ausgangspunkt des Mathematiktreibens – und sollte genau so auch den Unterricht charakterisieren (vgl. Kap. 3.11.4). Die Auswahl der Problemstellungen erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern dient dazu, a) zu plausibilisieren, dass heuristisches Handeln bereits sehr früh für mathematisches Handeln postuliert – wenn auch nicht bewiesen – werden kann und b) aufzuzeigen, dass sich im Rahmen vergleichsweise einfacher geometrischer Problemstellungen alle für das Anliegen dieser Arbeit relevanten heuristischen Techniken und Heurismen in Anwendung bringen lassen. Außerdem sollen Doppelungen möglichst vermieden werden, weshalb chronologisch fortschreitend stets nur erweiternde mathematische Kenntnisse aufgeführt werden.

6.1 Gedanken zu einer neolithischen Ur-Geometrie

Die Anfänge der Geometrie zu ergründen ist letztlich nicht möglich, da geistige Konstrukte hinter den sichtbaren Manifestationen archäologisch nicht fassbar sind (vgl. auch Kap. 3.1 und 3.2). Spätestens im Jungpaläolithikum (ab ca. 40000 v. Chr.) lassen sich zwar nach geometrischen Prinzipien gestaltete Malereien und Ritzungen identifizieren[351], und aus archäologischer Sicht ist davon auszugehen, dass noch früher solche Darstellungen auf nicht erhaltenen Materialien angefertigt wurden. Für die Zeit des Neolithikums mit der einsetzenden Verwendung von Keramik werden die Quellen zahlreicher, die Belegdichte wesentlich größer. Sehr viele Keramiken zeichnen sich durch eine regelmäßige, ornamentale Verzierung mit parallel angeordneten Punkt- und Strichmustern oder mit Reihen von Dreiecken und Rechtecken aus.[352] Es ist erwähnenswert, dass diese Gestaltung von Gebrauchskeramik in der Archäologie als Äquivalent eines Leitfossils, und damit als (oftmals wichtigstes) Merkmal für die Zuordnung von Bevölkerungen zu bestimmten

[351] Geometrisch gestaltete Ornamente sind ab der Zeit um 40.000 v. Chr. nachweisbar (SCRIBA/SCHREIBER 2005: 6).
[352] Vgl. HAUSER 1955: 12.

Kulturkreisen dient. Ob allerdings das bloße Vorhandensein regelmäßiger, gezeichneter oder gravierter Strukturen bereits Geometrie in unserem Sinne war, darüber lässt sich trefflich, und fruchtlos, streiten. Auch wenn die Ästhetik bei der Entstehung der Geometrie eine Rolle gespielt haben mag und erste geometrische Strukturen bereits in der Urgesellschaft auftreten, richtet die vorliegende Arbeit ihren Fokus auf jene Kulturen und Zeiten, für die historisch, d.h. schriftlich belegt ist, dass Probleme des (praktischen) Lebens den Ausgangspunkt für die Entwicklung in unseren Sinne und bis heute gültiger geometrischer Kenntnisse bildeten. Trotz dieser Problematik gibt es einige Arbeiten[353], die sich mit diesem Feld mathematikhistorischer Forschung auseinandersetzen. Hier werden schlaglichtartig Beispiele herausgegriffen, die dem Zweck des Kapitels dienen, wie es oben umrissen wurde.

Mathews arbeitete im engen Austausch mit den Arbeiten besonders Van der Waerdens[354] und Seidenbergs einen Kern geometrischen Wissens heraus, das im Neolithikum entdeckt, konsolidiert und tradiert worden zu sein scheint[355]. Hierzu gehören „Rechtecke und ihre Teile, einschließlich rechtwinkliger Dreiecke über ihren Diagonalen und die Gnomone an den Eckpunkten“ (MATHEWS 1985: 194; eigene Übersetzung). Dass schon früh bei der Untersuchung dieser geometrischen Objekte algebraische Vorstellungen entwickelt wurden, ist angesichts der später fassbaren mathematischen Kenntnisse plausibel, und Mathews sagt:

> *One may conjecture that an algebraic tradition, including viewpoint, technique, and notation, arose out of attempts to codify the active parts of those numerical algorithms which began as geometric relations. (MATHEWS 1985: 194)*

Aus dieser Perspektive wäre alle spätere Mathematik letztlich also auf die mündliche geometrische Tradition der Jungsteinzeit zurückzuführen.[356] Aber zu welchem Zweck wurden diese frühen mathematischen Kenntnisse entwickelt? Um Ideen hierzu zu entwickeln, seien zunächst die hypothetischen (rekonstruierten) Kenntnisse nach Mathews

[353] Vollständige Literaturangaben sind im Literaturverzeichnis zu finden, genannt seien hier nur folgende Werke: VAN DER WAERDEN 1963 und 1983, THOM 1987.

[354] Bartel Leendert van der Waerden, *1903 in Amsterdam, †1996 in Zürich, war ein bekannter Mathematikhistoriker und Algebraiker, befasste sich im Lauf seines Lebens aber mit einer Vielzahl von Themen, so dass er als einer der letzten Generalisten gilt.

[355] Grundannahme dieser drei Forscher ist eine gemeinsame Quelle der historischen mathematischen Traditionen Babylons (und Ägyptens), Indiens und Chinas.

[356] Diesen Gedanken hat jüngst Høyrup aufgegriffen und eine neue Lesart der babylonischen Mathematik vorgeschlagen, auf die in Kap. 6.2 eingegangen wird.

kurz dargestellt.[357] Mathews identifiziert einen Kern jungsteinzeitlicher Mathematik, der sich ganz wesentlich auf die Kenntnisse von Gnomonen stützt.

I.1 Wenn die längere Seite eines Rechtecks in beliebige Abschnitte aufgeteilt wird, so entspricht der Flächeninhalt des ursprünglichen Rechtecks der Summe der Rechtecke, deren eine Seite der kurzen Seite des Ausgangsrechtecks und deren andere Seiten jeweils den Abschnitten der längeren Seite des Ausgangsrechtecks entsprechen.

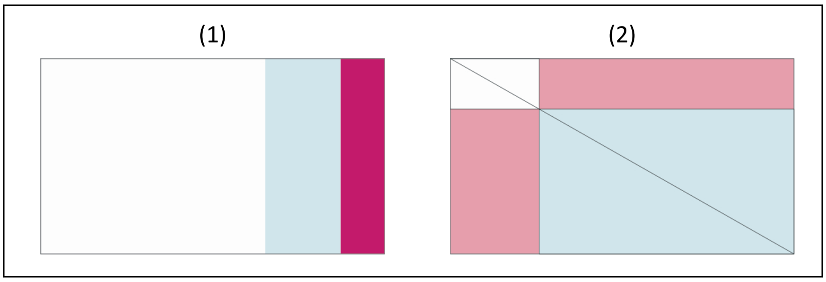


Abb. 24 Aufteilung eines Rechtecks in Teilrechtecke bei gleichbleibendem Gesamtflächeninhalt.

Wählt man auf der Diagonalen eines Rechtecks einen beliebigen Punkt I, sind zwei Rechtecke eindeutig bestimmt (Abb. 24 (2), weiß und hellblau). Sie stellen innerhalb des Ausgangsrechtsecks komplementäre Gnomonecken zweier Gnomone mit identischen Gnomonarmen dar.

I.2 Die Gnomonkomplemente sind flächeninhaltsgleich.

I.3 Die Gnomonbasen sind flächeninhaltsgleich.

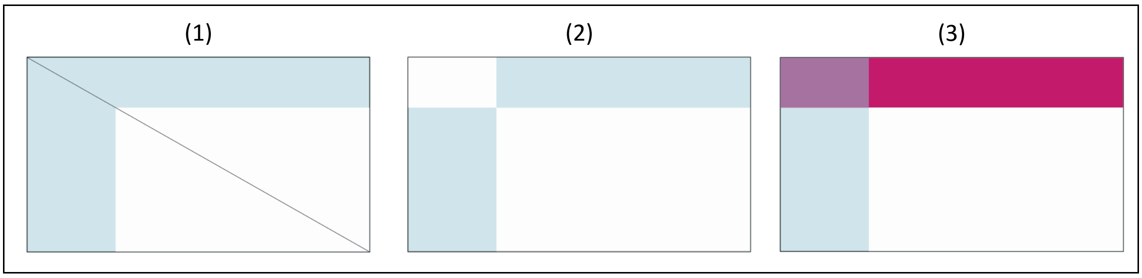


Abb. 25 Gnomon in einem Rechteck (1), Gnomonkomplemente (2) und Gnomonbasen (3).

Auf diesen Feststellungen über die Gnomone aufbauend lassen sich weitere Fragestellungen untersuchen, so die Frage nach der Differenz zwischen zwei Quadraten (als speziellen Rechtecken). Die erste Möglichkeit besteht darin, mithilfe des „Satzes des Pythagoras“ ein Quadrat zu konstruieren, das der gesuchten Differenz entspricht. Die zweite Möglichkeit ist die geschachtelte Anordnung beider Quadrate, so dass die gesuchte

[357] Für die Begründung dieser Rekonstruktionen sei auf den Originalaufsatz von Mathews (1985) verwiesen.

Differenz innerhalb des größeren und außerhalb des kleineren vorgegebenen Quadrats als Fläche erkennbar wird.

II.1 (Gnomon) Die Differenz zwischen äußerem und innerem Quadrat ist gleich dem Flächeninhalt der Summe aus Eckkomplement und der beiden (kongruenten) Gnomonkomplementen. Durch Umarrangieren lässt sich diese Fläche auch als Rechteck darstellen.

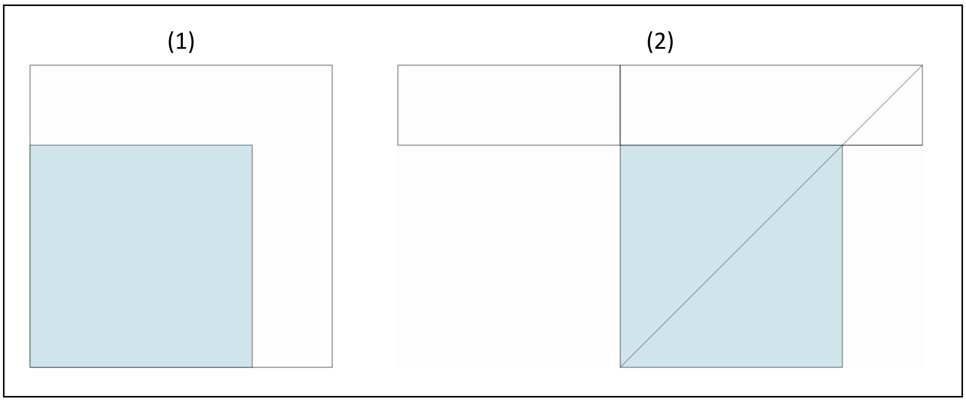


Abb. 26 Differenz zweier Quadrate: Darstellung als Gnomon (1) und gerichtetes (engl. „aligned") Gnomon (2) (nach MATHEWS 1985: 197).

II.2 Die Differenz lässt sich auch als viermal das Rechteck aus dem arithmetischen Mittel und der halben Differenz der Seitenlängen beider Quadrate auffassen. Oder, durch eine andere Aufteilung, als viermal das Rechteck aus der Seitenlänge des kleineren Quadrats und der halben Differenz der Seitenlängen beider Quadrate zusammen mit viermal das Quadrat über der halben Differenz der Seitenlängen beider Quadrate.

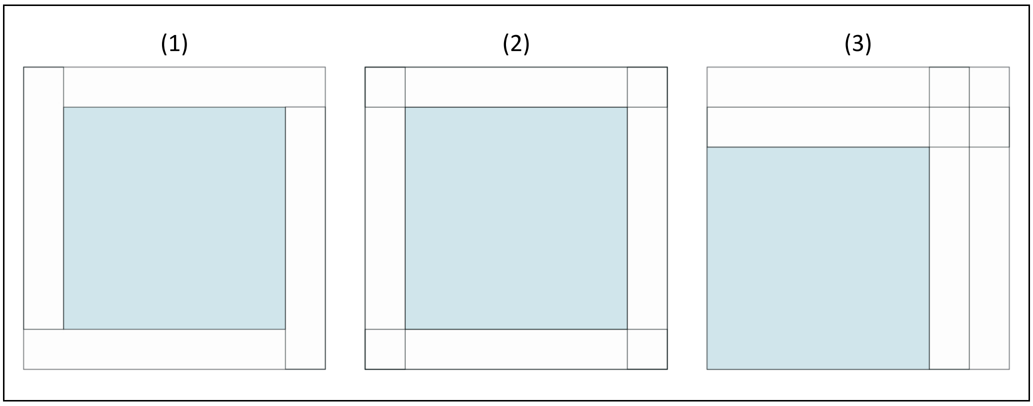


Abb. 27 Differenz zweier Quadrate: Aufteilungsvarianten (1) und (2) und Verschiebung zum Quasi-Gnomon (3) (nach MATHEWS 1985: 197).

Diese Überlegungen und Kenntnisse lassen sich nun zur Addition zweier Quadrate weiternutzen und –entwickeln.

II.3 Die Summe der Flächeninhalte zweier Quadrate entspricht der Summe des Doppelten Flächeninhalts des Quadrats über dem arithmetischen Mittel ihrer Seitenlängen und des doppelten Flächeninhalts des Quadrats über der Hälfte der Differenz ihrer Seitenlängen.

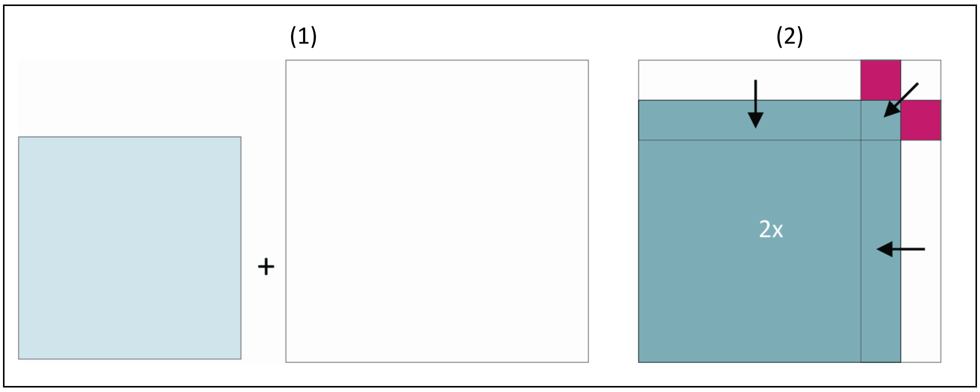


Abb. 28 Die Summe zweier Quadrate (1) entspricht dem Doppelten des Quadrats ihres arithmetischen Mittels und zweimal dem Quadrat der Hälfte ihrer Differenz (2), wie einfaches Abzählen zeigt (nach MATHEWS 1985: 198).

Die Abzähltechnik der Teilflächen funktioniert auch dann, wenn das Gnomon nicht hälftig zerlegt ist, also nicht vier gleichgroße Quadrate durch die Teilung entstehen, sondern zwei verschieden große und zwei gleichgroße Rechtecke. Unter diesen Umständen folgt die komplexere Identität:

Die Summe beider Quadrate ist gleich der Summe der beiden Quadrate mit den Seitenlängen, die sich als Summen der Seitenlänge des kleineren Quadrats und den Abschnitten des unterteilten Gnomons ergeben. Hinzuzufügen sind dann noch die beiden (in Abb. 29 in Magenta markierten) Rechtecke.

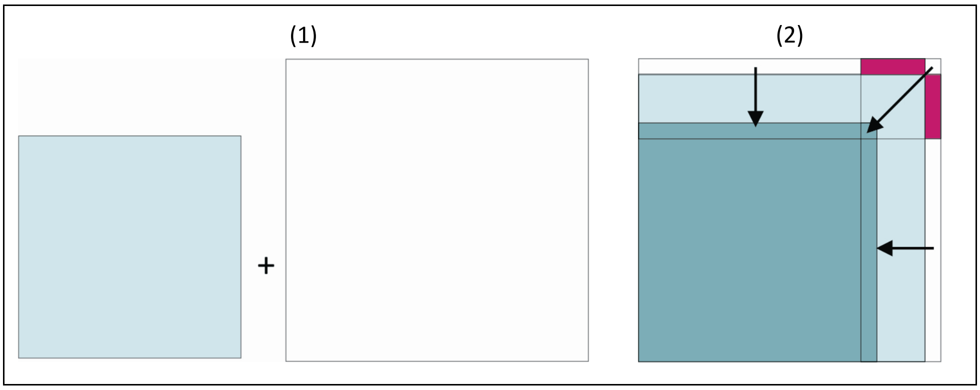


Abb. 29 Bestimmung der Summe zweier Quadrate (1) bei nicht hälftiger Teilung ihres Gnomons durch Umarrangieren und Abzählen (2) (nach MATHEWS 1985: 199).

II.4 Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich der Differenz der Flächeninhalte der Quadrate über dem arithmetischen Mittel und der halben Differenz seiner Seitenlängen.

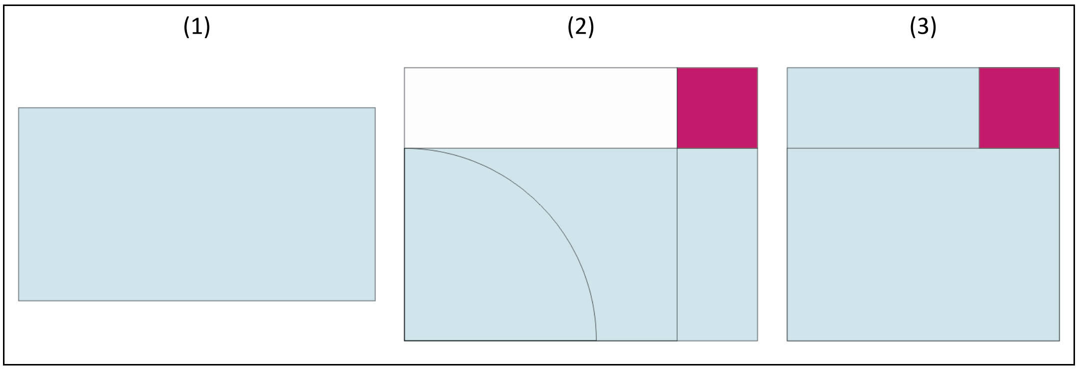


Abb. 30 Der Flächeninhalt eines beliebigen Rechtecks (1) lässt sich als Differenz zweiter Quadrate konstruieren ((2) und (3)) (nach MATHEWS 1985: 199).

Schließlich lässt sich aus diesen flächenvergleichenden Zerlegungen von Quadraten und Rechtecken auch der sogenannte „Satz des Pythagoras", den Mathews neutral als „Diagonal Square Theorem" (DST) bezeichnet, schließen.

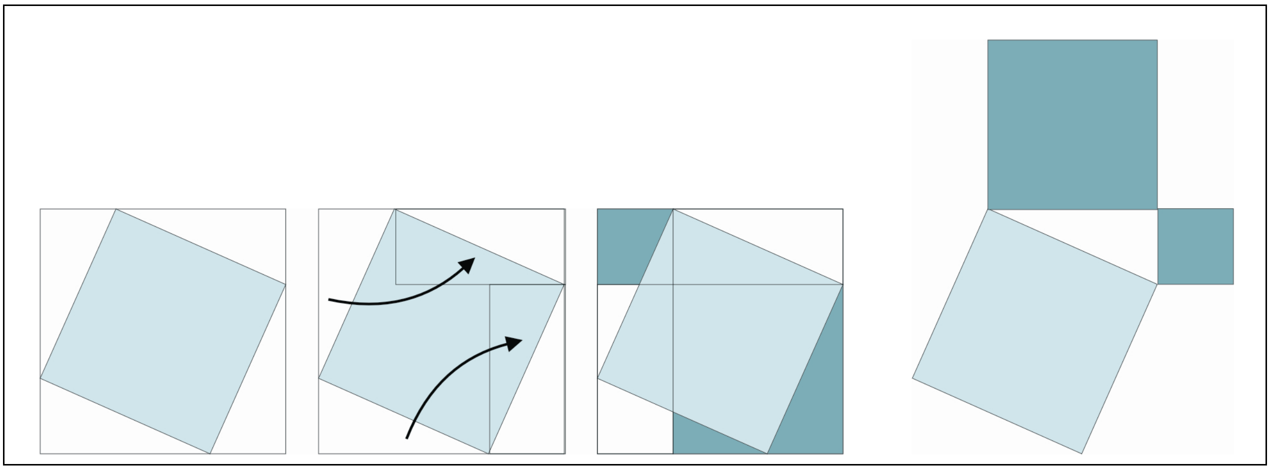


Abb. 31 Das „Diagonal Square Theorem" (Satz des Pythagoras) ergibt sich unmittelbar aus vergleichenden Zerlegungsbetrachtungen (nach MATHEWS 1985: 202).

Ein beliebiges Quadrat (in Abb. 31 weiß hinterlegt), in das ein weiteres Quadrat eingeschrieben ist, lässt sich auf zwei Arten zerlegen. Man kann es entweder als Summe des eingeschrieben Quadrats und zweier Rechteckflächen (die durch paarweises Zusammenlegen der dreieckigen Flächen entstehen und durch die Berührungspunkte des eingeschriebenen Quadrats mit dem äußeren Quadrat eindeutig festgelegt sind) auffassen, oder man zerlegt in zwei Quadrate und zwei Rechtecke, deren Seitenlängen durch die Berührungspunkte des eingeschriebenen Quadrats mit dem äußeren Quadrat eindeutig festgelegt sind. Aufgrund des Prinzips der Invarianz und der Kongruenz der in beiden Fällen entstehenden Rechteckflächen ergibt sich, dass der Flächeninhalt des eingeschrieben Quadrats identisch ist mit der Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate, die bei der anderen Zerlegung entstehen. Es ergibt sich unmittelbar:

III.1 Das Quadrat über der Diagonalen eines beliebigen Rechtecks ist flächeninhaltsgleich mit der Summe der Quadrate über seinen beiden Seiten.

Mathews' setzt die von ihm rekonstruierten Inhalte einer vorgeschichtlichen Geometrie in Bezug zu Euklids Elementen und kommt zu dem Schluss, dass sie Buch II und einem Teil der in Buch I präsentierten Sätze entsprechen:[358]

Ancient Core	Euklid
I.1	EII.1
I.2	EI.43
I.3	EI.43
II.1A	EII.4, EII,7
II.1B	EII.6
II.2	EII.8
II.3	EII.9, EII.10
II.4	EII.6, EII.14
III.1	EI.47

Abb. 32 Korrelation der von Mathews rekonstruierten neolithischen geometrischen Sätze zu Euklid (MATHEWS 1985: 199).

Die postulierten Problemstellungen

Es stellt sich die Frage nach dem Grund für das fassbare geometrische Interesse in der frühen menschlichen Kulturgeschichte. In Kapitel 3.1 wurden bereits einige allgemeinere Kontexte für die Entstehung von Mathematik benannt: Eine sichere Antwort ist nicht möglich, aber die Zusammenhänge, aus denen uns diese Kenntnisse am deutlichsten entgegentreten, lassen doch die Vermutung zu, dass dabei rituelle Gedanken eine Rolle gespielt haben mögen. So finden wir die frühesten Belege für geometrisches Wissen in den Steinkreisen des nördlichen Europas und in den indischen Altarbauten.[359] Im Falle vedischer Tradition lässt sich das theologisch begründete Bestreben erkennen, Altäre zu konstruieren, deren Oberflächen gleichgroß waren oder anderen spezifischen Erfordernissen genügten, wie etwa einen doppelt so großen Flächeninhalt o. ä. Daneben waren es

[358] Vgl. MATHEWS 1985: 199.

[359] Van der Waerden, Mathews und Seidenberg vertraten die Hypothese eines gemeinsamen, neolithischen Ursprungs der Mathematik im Allgemeinen und der Geometrie im Besonderen. Van der Waerdens wichtigstes hier zitiertes Werk ist sein *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (1983).

Bedürfnisse, die durch astronomische Beobachtungen und den daraus entwickelten Möglichkeiten zur Vorhersage von Ereignissen, befriedigt werden konnten, die die Entwicklung der Geometrie zu dieser Zeit vorantrieben – ob dies primär unter praktischen, wie etwa ackerbaulichen oder theologisch-astrologischen Gesichtspunkten geschah, ist nach wie vor Gegenstand der wissenschaftlichen Diskussion. Plausibel erscheint jedoch, dass die Sesshaftwerdung der Menschheit als maßgebliche Triebfeder dieser kulturellen Entwicklung angesehen werden kann, wie spätere Hauptanwendungsgebiete geometrischer und allgemein mathematischer Kenntnisse und spätere Überlieferungspraktiken nahelegen.

6.2 Geometrie der Babylonier

Das mathematische Wissen der Babylonier wurde uns auf zahlreichen Tontafeln überliefert (vgl. Kap. 3.2). Viele der heutigen Kenntnisse über die mathematischen Fähigkeiten der Babylonier verdanken wir dem deutschen Sprachwissenschaftler Georg Friedrich Grotefend, dem es zu Beginn des 19. Jahrhunderts erstmals gelang, die Keilschrift zu entziffern.[360] Bei den gefundenen Tontafeln handelt es sich um wirtschaftliche Aufzeichnungen, Zahlensysteme, arithmetische Tabellen, Felderpläne und mathematische Texte. Ähnlich wie bei den Ägyptern zeugen auch die Funde aus dem Reich der Babylonier davon, dass die zu lösenden Aufgaben praktischer Natur waren. Und so enthalten die Texte nicht nur Berechnungsvorschriften, sondern auch Pläne von Feldern und Grundrisse von Häusern oder von technischen Bauten wie Dämmen und Kanälen.[361] Die mathematische Fachsprache der Babylonier lässt keinen Zweifel zu, dass der Ursprung der Mathematik im täglichen Leben lag. So wird das Trapez als „Kopf eines Ochsen", die Waagerechte als „das Hinaufsteigen" und die Senkrechte als „das Hinabsteigen", das Volumen als „Erdmasse" oder „Ziegel" und das Rechteck als „Feld" bezeichnet. Es gibt einige gute Darstellungen zur Mathematik und Geometrie der Babylonier, die auch eine kulturhistorische Einordnung in den archäologischen Kontext bieten und die sich zur vertiefenden Lektüre eignen. Für die Analyse mit Blick auf die algebraische Interpretation und Analyse ist besonders auf die teils sehr aktuellen Arbeiten Høyrups zu verweisen.

Auch wenn die Aufgabensammlungen überwiegend Lösungen zu praktischen Realproblemen lieferten, besaßen die Babylonier durchaus auch abstrakte, elementargeometrische Kenntnisse. Besondere Aufmerksamkeit wurde den mathematischen Texten

[360] Vgl. Vogel 1959: 12.
[361] Vgl. Scriba/Schreiber 2005: 16-17.

geschenkt, nachdem im Jahre 1916 der pythagoreische Lehrsatz sowie ein Rechenverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel in den Schriften nachgewiesen werden konnten; Kenntnisse, die bis dato den Griechen zugeschrieben worden war.[362] Babylonische mathematische Texte lassen sich in zwei Kategorien einteilen: Tabellentexte einerseits und Aufgabetexte andererseits.

Die *Tabellentexte* enthalten neben Rechenhilfen, Hinweise zur Multiplikation und Division, Tabellen über Potenzen, Wurzeln und Exponenten, auch Informationen über das Verhältnis von Körpergewicht und Volumen sowie Koeffizienten (oftmals, besonders im englischen Sprachgebrauch, als „Konstanten" bezeichnet) in geometrischen Formeln.[363] Sie bilden einen Wissensspeicher, der bei der Lösung der eigentlichen Aufgaben bzw. Problemstellungen herangezogen werden kann.

Die *Aufgabentexte* hingegen führen die Lösungswege für unterschiedliche Problemstellungen vor; in einigen Fällen wird auch nur das Problem mit der zugehörigen Lösung gezeigt. Den Lösungsmethoden wurde seitens der Wissenschaftler im Rahmen der Entzifferung der Keilschriften besondere Aufmerksamkeit geschenkt, da sie tiefergehenden Aufschluss über das mathematische Denken der Babylonier beim Lösen mathematischer Probleme geben. Bemerkungen wie „Dies behalt im Kopf" als Hinweis auf ein Zwischenergebnis oder „Nimmst du an" (VOGEL 1959: 41) als Zeichen der Wiederholung der Zahlenwerte, zeigen, wie die Babylonier beim Lösen komplexer Aufgaben vorgingen. Die immer wieder auftauchende Schlussbemerkung „So ist das Verfahren" gefolgt von einer Probe oder gar einem logischen Gedankenschluss[364] am Ende einer Aufgabe, lassen die Folgerung zu, dass die Babylonier Mathematik nicht nur zur Lösung von Alltagsproblemen herangezogen, sondern bereits über weitreichende theoretische Kenntnisse verfügten.[365] Auch Gericke kommt zu Schluss, dass angesichts dessen, was in manchen Problemaufgaben als bekannt vorausgesetzt wird, der reine Praxisbezug auszuschließen ist (GERICKE 1996: 24 f.). Die babylonische Mathematik basierte auf dem Sexagesimalsystem.

[362] Vgl. VOGEL 1959: 12.
[363] Vgl. VOGEL 1959: 13.
[364] Neugebauer (1934: 203) ist sich sicher, dass die Babylonier ihre Mathematik auf einem „bewiesenen" Fundament betrieben haben, in dem Sinne, „daß man gewisse mathematische Sachverhalte durch logische Schlußketten aus anderen Sachverhalten herleitet, ohne daß diese selbst in irgendeinem Sinne die letztmöglichen zu sein brauchen und ohne daß die Schlußverfahren selbst genau formalisiert und als solche empfunden werden müssen. Die Existenz eines solchen Beweisverfahrens muß man aber der babylonischen Algebra unter allen Umständen zubilligen."
[365] Vgl. VOGEL 1959: 13,41.

Um nicht den eigentlichen Zweck des Kapitels aus dem Blick zu verlieren, werden im Folgenden nicht alle Aufgaben im Originalwortlaut wiedergegeben – in einigen, Fällen soll dies jedoch geschehen, um die ursprüngliche Arbeits- und vielleicht auch Denkweise der babylonischen Mathematiker ein Stück weit mit zu berücksichtigen. Die Transkription ist dabei wegen der unterschiedlichen in Benutzung befindlichen Transkriptionssysteme nicht einheitlich, um keine Veränderungen an den Zitaten vornehmen zu müssen. Folgende zwei Schreibweisen finden sich daher in den folgenden Originalbeispielen gleichberechtigt nebeneinander:

1. Bei der von Gericke und anderen bevorzugten Notation werden Potenzen mit positiven Exponenten im Sexagesimalsystem (Stellen vor unserem Komma) mit Kommata voneinander abgetrennt. Ein Semikolon trennt diese Stellen von denen mit negativem Exponenten (Stellen hinter unserem Komma).
   Beispiel: $1{,}50;30 = 1 \cdot 60^1 + 50 \cdot 60^0 + \frac{30}{60}$
2. Høyrup und andere Autoren markieren Sechzigerpotenzen mit positivem Exponenten mit dem Zeichen \`, wobei die Anzahl der Symbole auch den Exponenten angibt. Negative Exponenten werden in entsprechenden Weise mit ´ markiert. Das Zeichen ° wird für den Exponenten 0 benutzt, aber nur geschrieben, wenn danach noch Stellen folgen.
   Beispiel: $1`50°30´ = 1 \cdot 60^1 + 50 \cdot 60^0 + \frac{30}{60}$

Ein Teil der Aufgaben wird jedoch nur in moderner Schreibweise vorgestellt und ins Dezimalsystem transponiert vorgestellt und besprochen. Für eine gute und aktuelle Einführung in die verwendeten babylonischen Ausdrücke und ihr Verständnis sei auf Høyrup (2002) verwiesen. Die Aufgaben stammen aus verschiedenen Sammlungen und es ist zu erwähnen, dass die Bezeichnungen sich mehrheitlich auf den heutigen Aufbewahrungsort beziehen und weder mit Fundort noch Entstehungszeit in einem unmittelbaren Zusammenhang stehen.[366]

[366] Die wichtigsten im Folgenden benutzten Abkürzungen sind:
AO: Antiquités Origientales. Louvre, Paris / BM: British Museum, London / IM: Iraq Museum, Bagdad / MLC Morgan Library Collection, New Haven / VAT: Vorderasiatische Abteilung. Tontafeln. Staatliche Museen, Berlin / YBC: Yale Babylonian Collection, New Haven / MKT/MCT: Mathematische Keilschrifttexte/Mathematical Cuneiform Texts / ST: Susa-Texte / TMB: Textes Mathématiques Babyloniens

Außerdem ist anzumerken und in den folgenden ausgewählten Beispielen auch zu sehen, dass die babylonische Mathematik/Geometrie stark verbal geprägt war, obwohl durchaus auch graphische Darstellungen auf den Tontafeln enthalten sind. Um exakte Konstruktionen handelt es sich dabei jedoch nicht, sondern um erläuternde Skizzen, anhand derer die sprachlich gegebenen Problemlösungen visuell nachvollzogen werden können. Eine bekannte Darstellung (vgl. MCT: 42) zeigt beispielsweise ein Quadrat mit der Seitenlänge 30, einer Angabe eines Wertes für $\sqrt{2}$ und der errechneten Länge der Diagonalen. Solche Grundkenntnisse können für die babylonische Geometrie als bekannt vorausgesetzt werden.[367]

Die Frage nach dem Wesen der babylonischen Mathematik

Bereits Vogel weist in seinem Werk darauf hin, dass Probleme zwar vornehmlich auf algebraische Weise gelöst wurden, die verwendeten Fachwörter wie „Länge", „Breite" und „Quadrate" aber darauf schließen lassen, dass die Geometrie eine zentrale Rolle bei der Bewältigung der Aufgabe spielte. Høyrup hat eine alte mathematikhistorische Debatte wiederbelebt, die auch für unsere Diskussion und Bewertung der Nützlichkeit der Geometrie von Bedeutung sein mag, oder diese zumindest weiter anregt und in eine neue Richtung zu lenken vermag: Er sieht in der babylonischen Mathematik eine auf *geometrischen Grundvorstellungen basierende* und mit ihnen operierende Mathematik verwirklicht, die sich grundlegend von unserer *grundsätzlich algebraisch formulierten eigenen* Mathematik unterscheidet. Dabei vertritt er die Hypothese, dass es sich bei der babylonischen Mathematik bzw. Geometrie letztlich um Algebra, in einer heute fremden und schwer zugänglichen Ausdrucksform, und *nicht* lediglich um einen algebraischen Ansatz für die Lösung geometrischer Probleme gehandelt hat. Høyrup (2014: 11 f.) beschreibt diese geometrische Algebra wie folgt:

> *For the Babylonians, the fundamental representation was geometric. Most of their "algebraic" problems concern rectangles with length, width and area, or squares with side and area. We [...] encounter a problem below (YBC 6967 [...]) that asks about two unknown numbers, but since their product is spoken of as a "surface" it is evident that these numbers are represented by the sides of a rectangle.*

Die babylonische Denkweise über Mathematik war damit im Kern geometrisch. Dass die babylonischen Mathematiker ihre so formulierten Problemstellungen in ein anderes

[367] Vgl. Gericke 1996: 12.

Darstellungssystem übertrugen, um (auf algebraischem Wege) zu Lösungen zu gelangen, zeigt an, wie selbstverständlich und zugleich fundamental wichtig der Wechsel zwischen diesen Systemen war.

Andere Autoren sehen in der babylonischen Mathematik keine Algebra verwirklicht, sondern betrachten sie als reine Rezeptmathematik, in die nachträglich komplexeres Wissen – und vor allem auch Erkenntnis*interesse* – seitens der Babylonier hineininterpretiert wurde uns wird. So faszinierend die mathematikhistorische Debatte zu diesem Thema ist, berührt sie das Anliegen dieser Arbeit nur am Rande und soll daher nicht detailliert ausgeführt werden. Mit Blick auf die Komplexität und die Natur der im Folgenden präsentierten (ausschnittartigen) Auswahl der erhaltenen Problemstellungen und ihrer Lösungsvorschriften scheint Høyrups Hypothese in den Augen des Verfassers jedoch völlig plausibel.[368] Für die vorliegende Arbeit ist es nicht entscheidend, welche Perspektive letztlich eingenommen wird, oder welche sich möglicherweise im Laufe weiterer Forschungen als die plausiblere durchsetzen kann.

6.2.1 Quadrat und Rechteck

Ähnlich wie die Ägypter berechneten auch die Babylonier die Flächeninhalte von Quadraten, Rechtecken, Dreiecken, Trapezen und Volumina von Würfeln, Quadern und Prismen. Die Lösungsmethoden zeigen jedoch deutlich, dass die Babylonier geschickte – und den Ägyptern überlegene – Mathematiker waren. So erfolgte die Flächenberechnung von Quadraten und Rechtecken zwar einerseits über die Längen gegebener Seiten, andererseits waren die Babylonier auch in der Lage, bei gegebenem Flächeninhalt und bestimmten Bedingungen die beiden Seitenlängen durch das Aufstellen einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten zu bestimmen.[369]

Das erste hier ausgewählte Problem weist zahlreiche Anknüpfungspunkte zu den oben präsentierten Ideen zu einer neolithischen Geometrietradition auf. Der Text AO 8862 #3 lautet:

> *Länge, Breite. Ich habe die Länge und Breite multipliziert und so eine Fläche gebildet. Zweitens habe ich das, was die Länge über die Breite hinausgeht, mit der Summe aus der Länge und meiner Breite multipliziert; ich habe (es) zu meiner Fläche addiert; es ist 4400. Schließlich habe ich die Länge und die Breite addiert; es ist 100.* (LEHMANN *1994a: 93)*

[368] Sammlung und detaillierte Darlegung seiner Argumente findet sich u.a. in HØYRUP 2002: 277 ff.; 2013: 103 ff.
[369] Vgl. VOGEL 1959: 67.

In unserer heutigen algebraischen Schreibweise würde sich dieses Problem als Gleichungssystem folgendermaßen darstellen lassen:

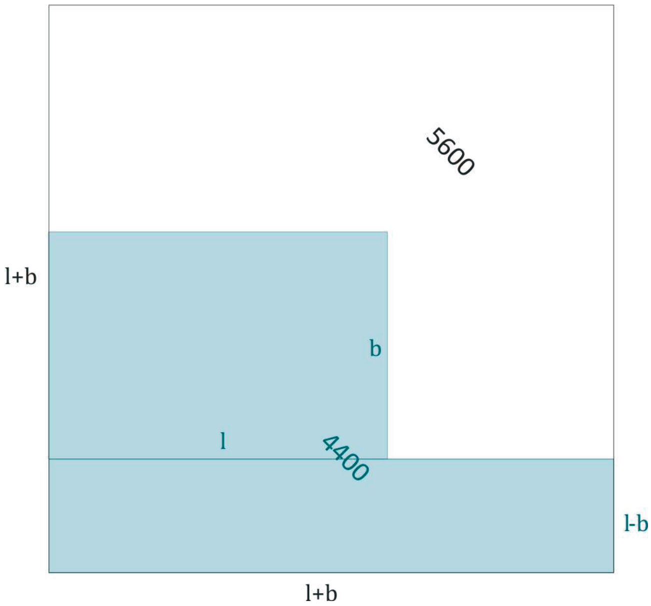
$$xy + (x-y)\cdot(x+y) = 4400$$
$$x + y = 100$$

Die folgende Tabelle enthält links die Übersetzung des Originaltexts und rechts die Übersetzung in die moderne algebraische Schreibweise.

Du, zur Berechnung, 100 die Summe von Länge und Breite, 100 mal 100 10000.	$(x+y)^2 = 10000$
Von 10000 4400 das Feld subtrahieren, 5600	$(x+y)^2 - (xy + x^2 - y^2) = 2y^2 + xy$
Es geht nicht mehr weiter.	$= 10000 - 4400 = 5600$
Seine Hälfte, von 100 bricht ab, (gibt) 50,	$\left(\frac{x+y}{2}\right) = 50$
mal 50 2500,	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 2500$
zu 5600 addierst du 2500	$2y^2 + xy + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+3y}{2}\right)^2$ $= 5600 + 2500 = 8100$
davon (ist) 90 Quadratwurzel	$\frac{x+3y}{2} = \sqrt{8100} = 90$
100 über 90, um wieviel geht es hinaus? (Um) 10 geht es hinaus.	$x + y - \frac{x+3y}{2} = \frac{x-y}{2} = 10$
10 zu 50 addiere, 60 ist die Länge,	$\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2} = x = 10 + 50 = 60$
10 von 50 subtrahiere und so ist 40 die Breite.	$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y = 50 - 10 = 40$

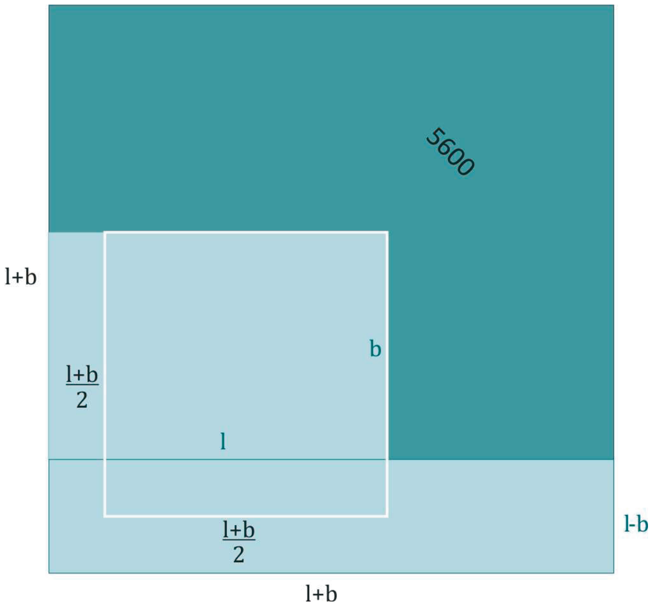
Tab. 9 Moderne Notation (rechte Spalte) zu Problem #3 im Text AO 8862 (linke Spalte, zitiert nach VOGEL 1959: 55 f.).

Wie die zugrundeliegende geometrische Bearbeitung ausgesehen haben mag, ist aus folgendem Konstruktionsvorschlag ersichtlich:



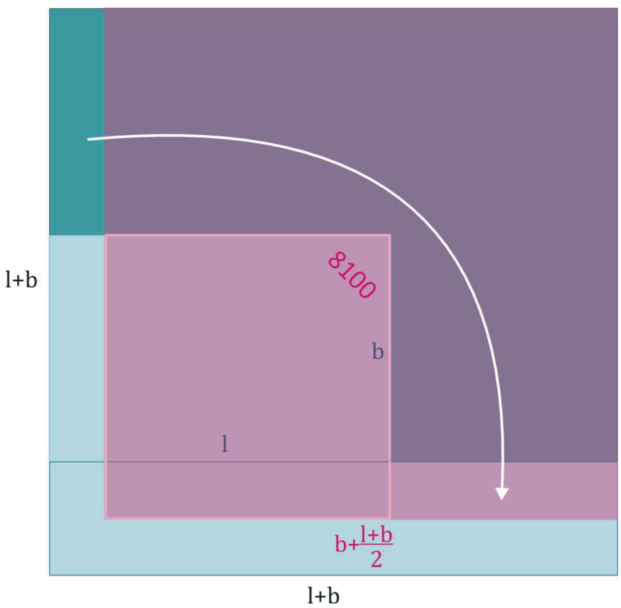
$$(l+b)^2 = 10000$$

$$(l+b)^2 - (lb + l^2 - b^2)$$
$$= 10000 - 4400$$
$$= 5600$$



$$\left(\frac{l+b}{2}\right) = 50$$

$$\left(\frac{l+b}{2}\right)^2 = 2500$$



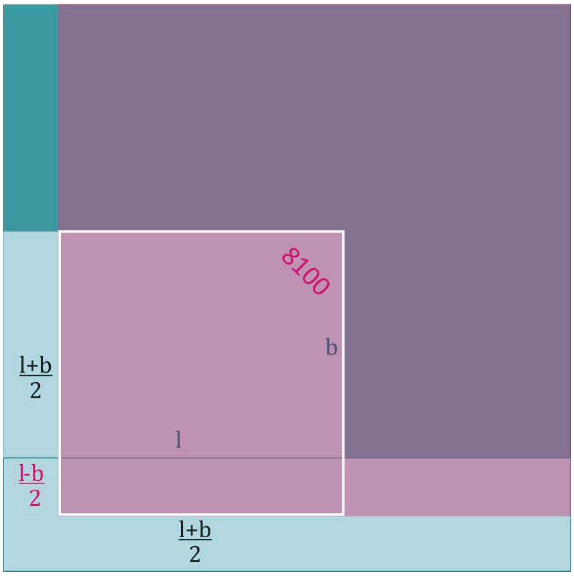
$$(l+b)^2 - (lb + l^2 - b^2) + \left(\frac{l+b}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{l+b}{2}\right)^2$$

$$5600 + 2500 = \left(\frac{l+3b}{2}\right)^2$$

$$8100 = \left(\frac{l+3b}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{8100} = \frac{l+3b}{2}$$

$$90 = \frac{l+3b}{2}$$

	$l+b-\frac{l+3b}{2}=\frac{l-b}{2}=10$ $\frac{l+b}{2}+\frac{l-b}{2}=l$ $50+10=l$ $60=l$ $\frac{l+b}{2}-\frac{l-b}{2}=b$ $50-10=b$ $40=b$

Tab. 10 Geometrische Deutung der Aufgabe aus AO 8862 #3 in Gegenüberstellung mit einer adaptierten Fassung von Vogels Umsetzung in algebraische Schreibung.

Nun tritt die Verzahnung zwischen Geometrie und Mathematik im Allgemeinen in babylonischer Zeit besonders deutlich hervor, was auch durch ihre spezifische verbale Notation begründet ist. Es ist nach wie vor ein wissenschaftlicher Streitpunkt, wo die Grenze zwischen Algebra und Geometrie wirklich verlief. War Vogel noch der Ansicht, die Babylonier hätten einen Weg gefunden, verschiedenste geometrische Probleme auf algebraische Weise zu lösen, so steht beispielsweise Høyrup heute auf dem Standpunkt, dass die Geometrie lediglich die algebraische Notation der Babylonier war – er stellt damit in Abrede, dass immer ein echtes geometrisches Interesse im Mittelpunkt stand. Obiges Beispiel scheint für diese Sichtweise zu sprechen.

6.2.2 Polygone

Wie der Flächeninhalt unregelmäßiger Vielecke von den Babyloniern bestimmt wurde, ist aus Felderplänen ersichtlich. Das Beispiel in Abb. 33 zeigt, wie die systematische Aufteilung in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke einer durch ein Polygon angenäherten Ackerfläche erfolgte.

Selbstverständlich war die Berechnung des Flächeninhaltes von Quadrat, Rechteck und Dreieck den Babyloniern bekannt. Eine nähere Betrachtung scheint wenig lohnenswert. Die intensive Beschäftigung mit Polygonen aller Arten ist letztlich wohl dem Bestreben geschuldet, Flächen bewirtschaftbaren Landes zu erfassen und in der Folge aufzuteilen.

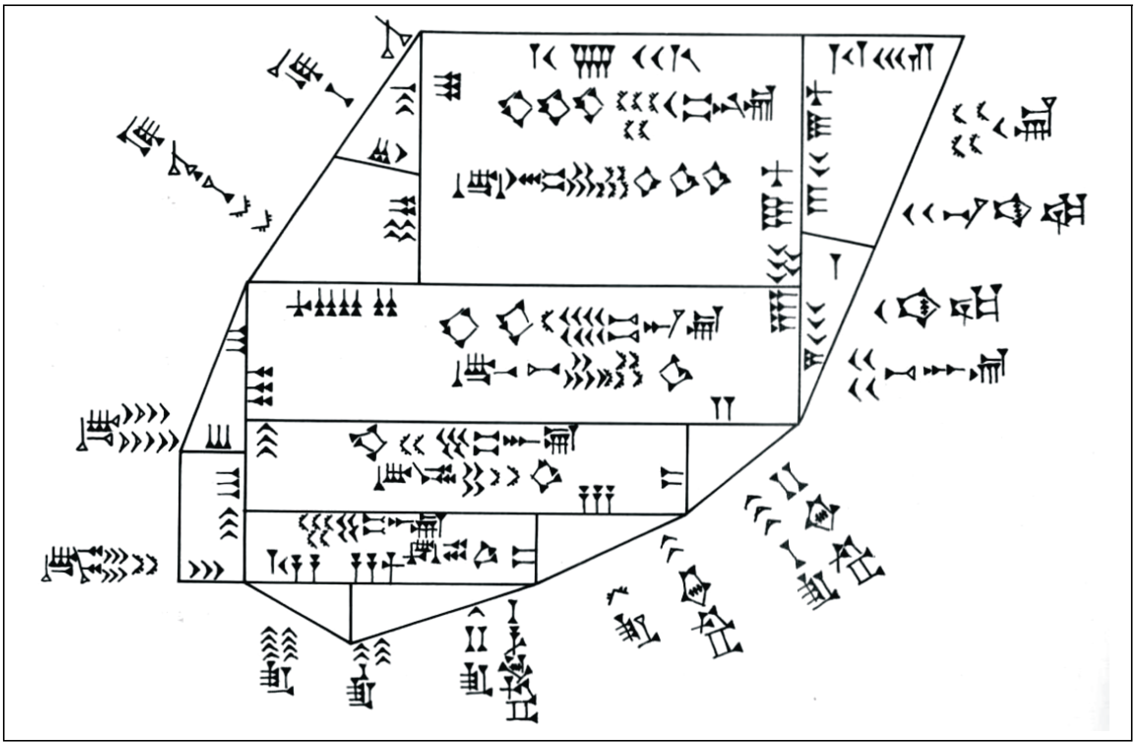


Abb. 33 Umzeichnung eines Felderplans[370], der die Zerlegung eines unregelmäßigen Stückes Land in Rechtecke und Dreiecke zeigt (LEHMANN 1994a: 106, s. auch HØYRUP 2014: 102).

Daneben wurden allerdings auch regelmäßige Polygone wie Sechs- und Siebenecke behandelt (deren praktischer Nutzen sich nicht recht erschließt) und ihre „Konstanten“ ermittelt und zur Bestimmung ihrer Flächeninhalte genutzt. Auf ST II (Vorderseite) ist ein Sechseck abgebildet, an dem lediglich drei Zahlwerte angebracht sind. Die Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke beträgt [0;]30 (sie ist als 30 an einer innerhalb des Sechseckes liegenden Dreiecksseite und an einer Außenseite des Sechsecks vermerkt) und eine innerhalb des gleichseitigen Dreiecks notierte Zahl [0;]6,33,45. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass diese den Flächeninhalt des Dreiecks angibt.[371]

Die in den Konstantentabellen wie ST III[372] gesammelten Werte werden in verschiedensten Berechnungen immer wieder herangezogen und mittels Proportionalitätsfaktoren auf die jeweiligen Problemstellungen angepasst verwendet. Dies ist eines der Argumente, die die Annahme stützen, dass das Konzept der Ähnlichkeit bei den Babyloniern sehr wohl eine Rolle gespielt hat. Auch wird in der Betrachtung dieser Figuren wohl das erwachende Interesse der Babylonier an nicht unmittelbar praktischen

[370] Die beiden hier genannten Autoren widersprechen einannder hinsichtlich der Datierung. Lehmann gibt als Entstehungszeit 1900 v. Cht. an, während Høyrup von von 2000 v. Chr. ausgeht.

[371] In der Konstantentabelle ST III, Zeile 27) 2,37,30 als Konstante des Sechsecks. Diese Zahl entspricht genau dem Flächeninhalt des gesamten Sechsecks bei einer Dreiecksseitenlänge von 1;0 anstelle der 0;30 aus ST II (Vorderseite).

[372] Eine Listung samt Kommentar ist in GERICKE 1996: 39 ff. zu finden.

Trapeze und Transversalen

Auch die Länge der flächenhalbierenden Transversalen in Trapezen war für die Babylonier von Interesse, und wird u. a. in den Texten YBC 4675 behandelt. Es ließen sich analog zu obigen Ausführungen geometrische Herleitungen oder Interpretationen des babylonischen Vorgehens angeben (vgl. HØYRUP 2002: 235 ff.). In moderner Notation bestimmen die Rechenvorschriften die Transversalenlänge im Trapez als:

$$A_1 = A_2 \quad und \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{x-c}{a-x}$$

$$\frac{a+x}{2} h_1 = \frac{x+c}{2} h_2$$

$$\frac{a+x}{2} h_1 \frac{h_2}{h_1} = \frac{x+c}{2} h_2 \frac{x-c}{a-x}$$

$$\frac{a+x}{2} = \frac{x^2-c^2}{2(a-x)}$$

$$(a+x)(a-x) = x^2 - c^2$$

$$a^2 - x^2 = x^2 - c^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2-c^2}{2}}$$

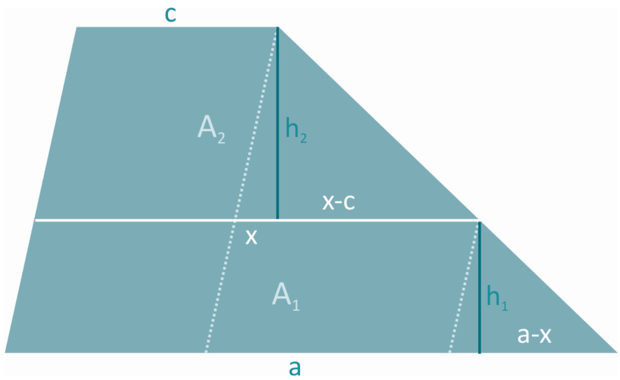


Abb. 34 Berechnung der Transversalenlänge im beliebigen Trapez in moderner Schreibweise, linke Spalte (nach VOGEL 1959: 70) und Illustration, rechte Spalte.

Ein weiterführendes Beispiel dieser Art der Berechnung am Trapez gibt Lehmann an (1994a: 103). Das Trapez (s. Abb. 35) beinhaltet einen rechten Winkel. Bekannt ist außerdem die Länge einer zur Grundseite $\overline{AB}$ parallelen Strecke $\overline{EF}$ mit $y = 52\frac{1}{2}$, die das Trapez in zwei Teiltrapeze ABFE und EFCD mit den Flächeninhalten $A_1 = 2531\frac{1}{4}$ und $A_2 = 843\frac{3}{4}$ unterteilt. Die Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{ED}$ stehen dabei in einem Verhältnis von 5:1. Gesucht werden die Länge der beiden Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{ED}$.

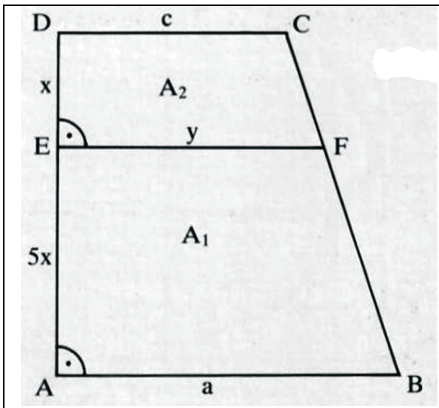


Abb. 35 Illustration zur Problemstellung im rechtwinkligen Trapez (nach LEHMANN 1994a: 103).

An dieser Stelle soll der Rechenansatz in moderner Schreibung genügen:

$$\frac{c+y}{2}\cdot x = A_2$$

$$\frac{a+y}{2}\cdot 5x = A_1$$

$$\frac{a+c}{2}\cdot 6x = A_1 + A_2$$

Daraus folgt:

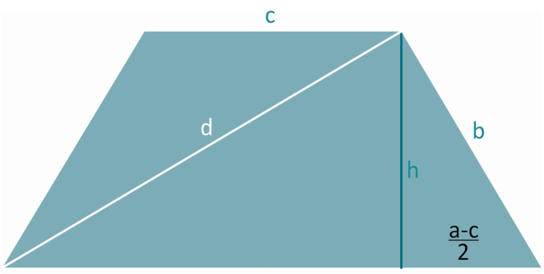
$$x = \frac{2A_2}{c+y} = \frac{1687\frac{1}{2}}{c+52\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{2A_1}{a+y} = \frac{5062\frac{1}{2}}{a+52\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{2(A_1 + A_2)}{6(a+c)} = \frac{13500}{6(a+c)}$$

Damit beträgt die Seite $\overline{ED} = x = 15$ und $\overline{AE} = 5x = 75$.

Die Berechnung der Länge der Diagonalen in einem gleichschenkligen Trapez beschäftigte die Babylonier ebenfalls. Ein letztes Beispiel sei hier als Beleg für die Vielseitigkeit der mit trapezförmigen (Land-)Flächen befassten Problemstellungen genannt. Gegeben sind die beiden Schenkel a und die Parallelseiten b und c.



$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

$$d^2 = h^2 + \left(a - \frac{a-c}{2}\right)^2$$

$$d^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a-c}{2}\right)^2$$

$$d^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + a^2 - 2a\left(\frac{a-c}{2}\right) + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

$$d^2 = b^2 + ac$$

Abb. 36 Berechnung der Diagonalenlänge im gleichschenkligen Trapez in moderner Schreibweise, rechte Spalte (nach LEHMANN 1994a: 102) und Illustration, linke Spalte.

Die möglicher geometrische Herleitung erschließt sich unmittelbar mit Blick auf die Verwendung der Quadrate über den beteiligten Seiten und der wiederholten Differenz- bzw. Summenbildung, die auf die Länge der Diagonalen hinführen.

Näherung für allgemeine Vierecke

Der Keilschrifttext BM 85194, aufbewahrt im Britischen Museum in London und unter dem Namen „Ringwall“ bekannt, beinhaltet Aufgaben rund um die Themen Dämme, Fundamente von Tempelanlagen, Wassergräben und Brunnenziegeln oder in Verbindung mit Problemstellungen rund um Grund und Boden.[373] Insbesondere die gerechte Aufteilung von Ackerflächen beschäftigte die babylonischen Geometer bei ihren Berechnungen rund um Vierecke und andere Polygone.

Zur Flächenberechnung allgemeiner Vierecke nutzten die Babylonier die auch bei den Ägyptern gebräuchliche Methode, die im Englischen als *Surveyors' Formula* bekannt ist und sich in moderner Schreibung wie folgt fassen lässt:

$$A = \frac{(a+c)}{2} \cdot \frac{(b+c)}{2}$$

Diese ergibt über die Verwendung der arithmetischen Mittelwerte der gegenüberliegenden Seitenpaare natürlich nur einen mehr oder weniger groben Näherungswert des Flächeninhalts und wurde nur für weniger kritische Fälle oder bei annähernd rechteckigen Landflächen angewandt (HØYRUP 2002: 230). Für Rechtecke ist die Lösung korrekt, auf Trapeze bezogen liefert diese Methode der Berechnung recht gute Werte, bei allgemeinen Vierecken nur eine mehr oder weniger grobe Näherungslösung.[374] Eine genaue(re) Bestimmung war den Babyloniern grundsätzlich sehr wohl möglich, wie Kapitel 6.2.2 zeigt. Dennoch gab es viele lebensalltägliche Problemsituationen, in denen den Babyloniern solche Näherungslösungen offensichtlich ausreichten.

6.2.3 Dreiecke und Ähnlichkeit

In Text BM 85194 #26[375] ist ein Rampe Gegenstand des Problems. Diese wurden errichtet, um Stadtmauern oder ummauerte Festungsanlagen einnehmen zu können, indem Fußtruppen über die Rampe die Mauerkrone erreichen konnten.

---

[373] Vgl. POPP 1968: 103.

[374] Høyrup (2002: 249) erläutert die trotz der mathematischen Ungenauigkeit im praktischen Umgang nützliche Rechenmethode folgendermaßen: „...if computations are approximate, only approximate additivity can be expected, and if blatantly wrong formulae are employed, additivity need not result at all. In the present case, however, where the surveyors' formula is quite off the point [...], additivity holds good. How is that to be explained? [...] the average lengths of the two partial areas are in the same proportion as the consecutive decreases of width.“

[375] Auf die verschiedenen Problemaufgaben wird bei unterschiedlichen Autoren unter Nutzung unterschiedlicher Symbole (§, # oder auch ,) verwiesen. in diesem Teil soll einheitlich das #-Symbol zur Kennzeichnung verwendet werden.

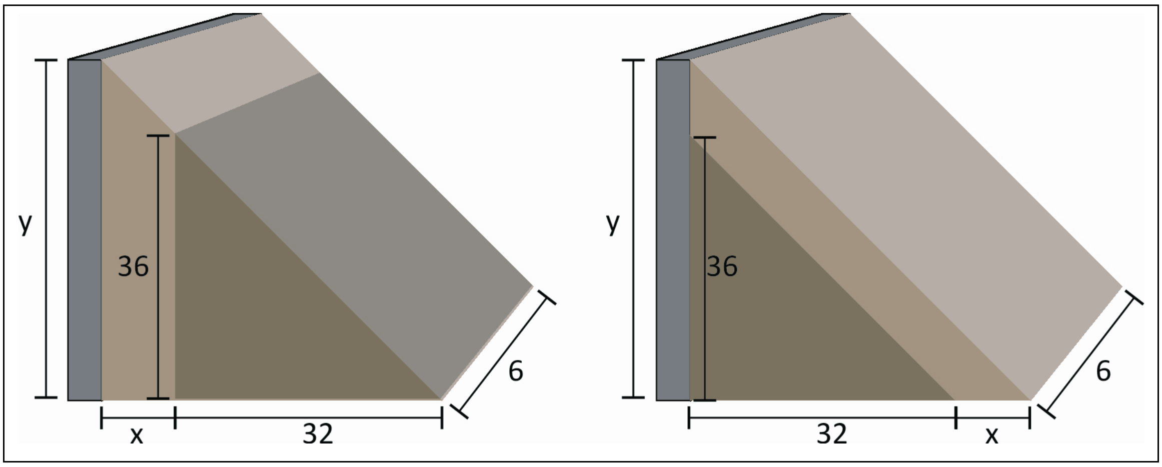


Abb. 37 Zwei mögliche Lesarten des in BM 85194 enthaltenen Problems zum Belagerungsdamm.[376]

Gegeben sind das Volumen der fertigen Rampe mit 5400 Volumeneinheiten sowie die Breite von 6 Einheiten. Außerdem ist die Länge (auf Bodenniveau) der bereits errichteten Rampe von 32 Einheiten und deren Höhe von 36 Einheiten bekannt. Eigentliches Ziel der Problemstellung ist es zu ermitteln, um wieviele Einheiten die Rampe noch zu verlängern ist, damit sie die Mauerkrone erreicht. Die meisten Autoren (Vogel, Høyrup, Lehmann) stellen die Aufgabe wie in Abb. 37 links dar; auf der rechten Seite ist ein Gegenvorschlag zu sehen, der den realen Erfordernissen eher entsprechen dürfte. Im Folgenden wird die Originalaufgabe gezeigt, kommentiert, graphisch verdeutlicht und im Dezimalsystem nachgerechnet.[377]

Of earth, 1`` 30`. A city inimical to Marduk I shall seize.	Angabe des Gesamtvolumens von 5400 Volumeneinheiten.
Away from the fundament of the earth a length of 32 in front of me I have gone.	Länge der bereits fertiggestellten Rampe beträgt 32 Einheiten.
36 the height of the earth.	Die bereits fertiggestellte Höhe liegt bei 36 Einheiten.
The length what I must stamp, so that the city I may seize? The length in front of the ḫurḫurum (the vertical back front reached so far) what?	Welche Länge ist noch zu „stampfen“, um die Stadt zu erobern? Wie groß ist die noch fehlende Höhe?

[376] Die linke Darstellung entspricht der Interpretation Vogels (1959: 57) und findet sich auch in den Arbeiten von Høyrup und anderen; zugefügt wurde eine weitere, aus technischer Sicht möglicherweise relevantere Lesarten der Problemsituation.
[377] Die Darstellung in Vogel (1959: 57) ist um die Berechnung des Flächeninhalts des Rampenquerschnitts verkürzt.

You, igi 32 detach, 1’ 52’’ 30’’’ you see. 1’52’’30’’’ to 36, the height, raise, 1°7’ 30’’ you see.	Über den Kehrwert (igi) wird der Proportionalitätsfaktor von Länge zur Höhe der Rampe bestimmt $\frac{36}{32}=1\frac{1}{8}$
Igi 6, the fundament of the earth, detach, 10’ you see.	Der Kehrwert der Rampenbreite von 6 Einheiten wird bestimmt.
1’’30’, the earth, to 10’ raise, 15’ you see.	Multiplikation dieses Wertes mit dem Gesamtvolumen liefert den Flächeninhalt des Rampenquerschnitts $5400 \cdot \frac{10}{60} = 900$.
15 to <2> repeat, 30’ you see.	Verdoppelung des Querschnitts (der fertigen Rampe) zu einem Rechteck.
30’ to 1°7’ 30’’ raise. 33’45 you see.	Das Rechteck wird mittels des Proportionalitätsfaktors der Seitenlängen zu einem Quadrat vergrößert.
33’4<5>, what is equalside? 45 is equalside, 45 the height of the city wall.	Gesucht wird die Seitenlänge dieses Quadrats, also $\sqrt{2025}=45$. Dies entspricht der Höhe der Stadtmauer.
4<5>, the height of the city wall, over 36, the height of the earth, what goes beyond? 9 it goes beyond.	Die Differenz zwischen Höhe der Stadtmauer und der bereits errichteten Rampe beträgt 9 Einheiten.
Igi 1°7’ 30’’ detach, 53’ 20’’ you see, *53’ 20’’ to 9 raise, 8 you see,* *8 the length in front of you to stamp.*	Durch Multiplikation des umgekehrten Proportionalitätsfaktors mit diesem Wert ergibt sich die noch fehlende Länge der Rampe von 8 Einheiten.

Tab. 11 Kommentar (rechte Spalte) zu Problem #26 im Text BM 85194 (linke Spalte, zitiert nach Høyrup 2002: 218 ff.).

Nun ist diese Problemaufgabe ein gutes Beispiel für die Doppelgesichtigkeit babylonischer Mathematik, denn auch wenn die Errichtung einer solchen Belagerungsrampe ganz sicher ein relevantes, praktisches Problem der damaligen Zeit war, ist hier der kultur- und wissenschaftshistorische Aspekt viel interessanter, den Melville/Melville (2008: 147 f.) folgendermaßen beschreiben:

> *What is interesting to us in terms of social transmission is how the practical problem of building a siege ramp was transformed when it was pressed into the service of scribal mathematics. [...] What clearly caught the eye of the original deviser of these problems was the complications that arise from assuming that the ramp is only partially built and numbers of parameters that result from this assumption. [...] For each problem some of these are assumed known, and others must be computed. The difficulty of each problem depends on what is assumed and what must be computed. That is, the structure of each problem is driven by mathematical concerns, not practical ones.*

Dies zeigt sich insbesondere in dem Umstand, dass in allen Rampen-Problemen das Volumen der fertigen Rampe als bekannte Größe in die Berechnungen einfließt und nicht etwa (Teil-)Ergebnis ist, was aus der Perspektive des Ingenieurs wesentlich mehr Sinn ergäbe.[378]

Methode des falschen Ansatzes

Die Methode des falschen Ansatzes ist eine der Vorgehensweisen, die das große Können babylonischer Mathematiker belegt. Grundidee ist es, einen geeigneten aber beliebigen Wert als Lösung anzunehmen und dann davon auszugehen, dass „der richtige Wert der gesuchten Größe [...] sich zu dem angenommenen wie das richtige Ergebnis zu dem erhaltenen falschen [verhält]“ (VOGEL 1959: 62). Das nachfolgende Beispiel (TMS XIX #1) soll diese Methode verdeutlichen:

Gegeben ist ein Rechteck dessen Diagonale 40 Einheiten beträgt und die Breite drei Viertel der Länge misst, in unserer Schreibung also $d = 40$ und $b = \frac{3}{4} l$.

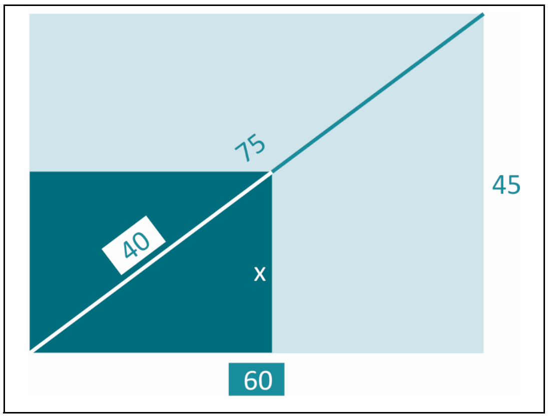


Abb. 38 Bestimmung der Seitenlängen eines Rechtecks bei gegebener Diagonale und Seitenverhältnis.

Statt etwa durch systematisches Probieren die richtigen Lösungen für Länge und Breite zu bestimmen, wird für die Länge der im Grunde beliebige Wert 60 angenommen – der aber sehr wohl mit Blick auf die durchzuführende Rechnung und das bekannte Seitenverhältnis gewählt ist. Auf dieser Grundlage wird eine Breite von 45 Einheiten und eine Diagonale von 75 Einheiten Länge errechnet. Dieses Ergebnis wird nun mit der geforderten Diagonallänge ins Verhältnis gesetzt und der so ermittelte Faktor zur Berechnung der gesuchten Länge des Rechtecks verwendet:

[378] MELVILLE/MELVILLE 2008: 148.

$$\frac{40}{75}=\frac{l}{60}$$

$$60\cdot\frac{40}{75}=l$$

$$32=l$$

Über das gegebene Verhältnis von Länge zur Breite, wird anschließend die Breite von 24 Einheiten berechnet[379]:

$$b=\tfrac{3}{4}l$$

$$b=24$$

Ähnlichkeit

Der Umstand, dass die Babylonier mit größter Wahrscheinlichkeit kein mit dem unseren vergleichbares Verständnis des Winkelbegriffs besaßen (vgl. HØYRUP 2002: 227 f.; ROMANO 2010: 237), wird immer wieder als Argument für eine ebenfalls fehlende Vorstellung von Ähnlichkeit (im mathematischen Sinne) bemüht; dieser Schluss basiert auf der Herleitung der Ähnlichkeit von konstanten Winkelgrößen. Nach aktueller Forschungslage kann jedoch davon ausgegangen werden, dass die Babylonier sehr wohl ein Konzept von Ähnlichkeit besaßen, woraif u. a. die soeben beschriebene Nutzung der Methode des falschen Ansatzes hinweist. Ebenso zeigen die oben dargestellte Rechnung zur Höhe des Belagerungsdammes und die Rechnungen mit Kreissegmenten in Kapitel 6.2.5, dass auch dort das Konzept der Ähnlichkeit benutzt wurde. Deutlich tritt dies auch bei den sogenannten „Konstanten“ hervor, durch die babylonische Mathematiker unterschiedlichste Werte regelmäßiger Figuren angaben, indem sie einen (linearen) Parameter der betreffenden Figur auf den Wert 1 setzten: Für konkrete Fälle wurden nämlich diese „Konstanten“ dann mittels eines Faktors p an die erforderliche Größe angepasst bzw. p^2 bei Flächenberechnungen (vgl. HØYRUP 2002: 228, s. auch Kap. 6.2.2).

Das klarste Beispiel für das babylonische Verständnis der Ähnlichkeit ist die folgende Problemstellung (s. Abb. 39): Es ist eine Mauer von der Höhe $h_1=10$ und der Breite $b_1=1$ gegeben. Auf der Mauer (an der vom Betrachter entfernten Kante) steht senkrecht eine Stange der Länge $h_2=1$. Die Frage ist, wie weit man sich von der Mauer entfernen muss, um die Spitze der Stange sehen zu können.[380]

[379] Für Originaltext, Transkription und englische Übersetzung sowie eine der Vogels sehr ähnliche Analyse der Lösungsmethode s. HØYRUP 2002: 195 ff.
[380] Text singengemäß LEHMANN 1994a: 99 entnommen.

Die sehr kurze Berechnung nutzt den Kehrwert (*igi*) der Länge der Stange und multipliziert diesen mit der Höhe der Mauer, also $x = \frac{1}{h_2} \cdot h_1$.[381]

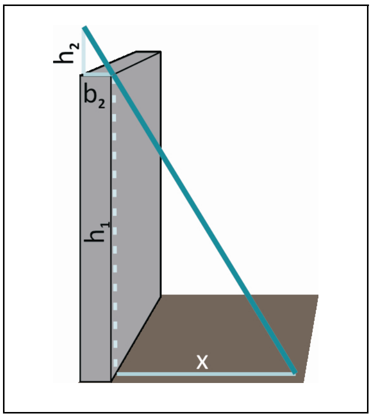


Abb. 39 Veranschaulichung des Problems der Stange auf der Mauer.

Was daran mit Blick auf die Frage nach der Ähnlichkeit in der babylonischen Mathematik auffällt, ist die allgemeine – und hier wegen der Länge 1 eigentlich unnötige – Berechnung mithilfe des Kehrwerts. Für andere Zahlenwerte als Länge der Stange hingegen ist dieser Rechenschritt hingegen zwingend erforderlich, und zwar um das Verhältnis zwischen den „Höhen" in beiden ähnlichen Dreiecken rechnerisch zu nutzen.

6.2.4 Pythagoreischer Lehrsatz und Quadratwurzeln

Im Jahre 1916 konnte in Keilschrifttexten erstmals die Verwendung des pythagoreischen Lehrsatzes nachgewiesen werden – Wissen, das man bis dato den Griechen zugeschrieben hatte (Vogel 1959: 12). Aktuell sprechen die bekannten archäologischen und epigraphischen Zeugnisse dafür, dass die Regel im 19. Jahrhundert v. Chr. in die babylonische Mathematik eingebracht oder von ihr entdeckt wurde. Es ist eine ganze Reihe von Texten bekannt[382], die sich mit – teils deutlich komplexeren – Varianten nachstehender, einfacher Problemstellung (BM 85196 #9) befassen:

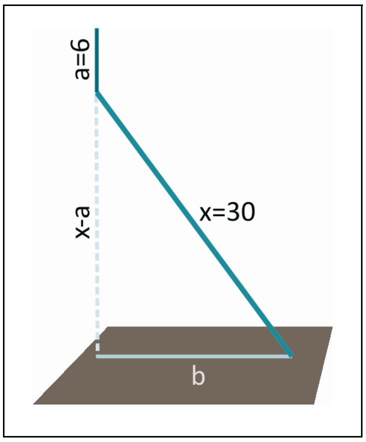


Abb. 40 Veranschaulichung des von den Babyloniern mithilfe des Satzes des Pythagoras gelösten Problems BM 85196 #9.

> *Ein Balken, [0;]30 [GAR]*[383]
> *Von oben ist er 6 herabgekommen.*
> *Von unten was hat er sich entfernt?*

Dass die Babylonier zur Lösung dieser Aufgabe den „Satz des Pythagoras" anwandten, lässt sich an ihrer Rechenvorschrift ablesen:

[381] Lösungsmethode nach Vogel 1959: 76.
[382] Eine Übersicht und Analyse findet sich in Høyrup 2002: 385 f.
[383] Die durch Neugebauer vergenommenen Ergänzungen an dieser Stelle sind sachlich falsch, wie die weiteren Rechnungen zeigen.

30 quadriere, 15[,0] sieht du.	$x^2 = 30^2 = 15{,}0$
6 von 30 abgezogen, 24 siehst du.	$x - a = 24$
24 quadriere, 9,36 siehst du.	$(x-a)^2 = 24^2 = 9{,}36$
9,36 von 15[,0] ziehe ab. 5,24 siehst du.	$x^2 - (x-a)^2 = b^2 = 5{,}24$
5,24 hat was als Quadratwurzel? 18.	$\sqrt{5{,}24} = 18$
18 am Boden hat er sich entfernt.	

Tab. 12 Rechenvorschrift, linke Spalte (nach GERICKE 1996: 33) und Notation in moderner Schreibweise, rechte Spalte.

Im Text BM 34568 finden sich eine Reihe interessanter Probleme, die möglicherweise mehrheitlich jenseits reiner Nützlichkeit[384] zu sehen sind. Problemaufgabe #12 lautet in der Transkription nach Høyrup (2002: 394):

> *One reed together with a wall I have erected. 3 kus as I have gone down 9 kus it has moved away. What the reed? What the wall?*

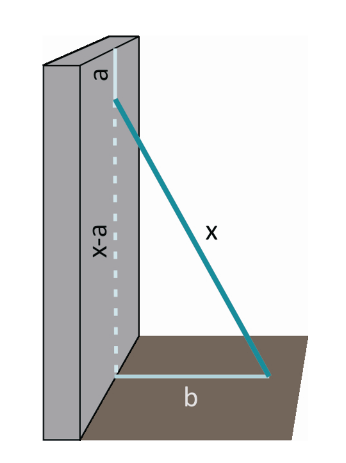


Abb. 41 Veranschaulichung des von den Babyloniern mithilfe des Satzes des Pythagoras gelösten Problems BM 34568 #12.

Der erste Teil der Rechnung ist in moderner algebraischer Umsetzung leicht folgendermaßen zu lösen:

$$x^2 = (x-a)^2 + b^2$$

$$x^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

$$x = \frac{3^2 + 9^2}{2 \cdot 3}$$

$$x = 15$$

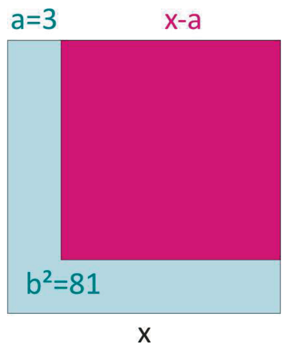
Ein Blick in die Transkription der Rechenvorschrift zeigt, dass die Babylonier eine dem genau entsprechende Rechnung durchführten:[385]

[384] Originalzitat: „By far the most onteresting Seleucid text is the theme text BM 34568, which derseves a treatment of its own; most of what it contains ist certainly supra-utilitarian." (HØYRUP 2002: 391)
[385] Was die dahinter stehenden geometrischen Überlegungen anbetrifft sei auf Høyrup (2002: 398 f.) verwiesen, wo diese ausfürhlich dargelegt sind.

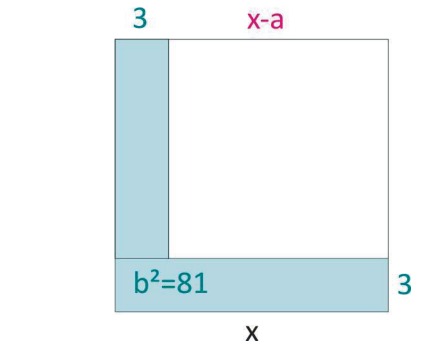
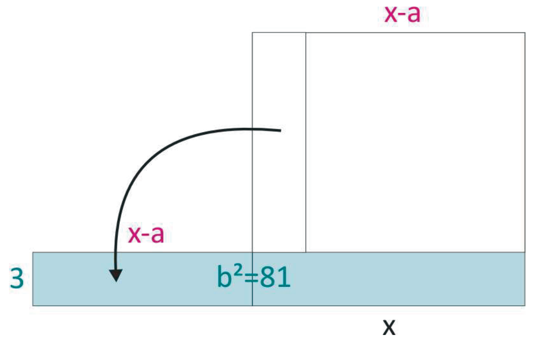
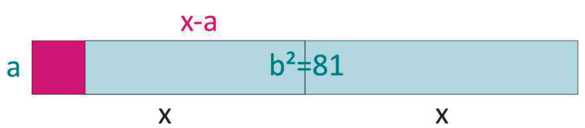
3 steps of 3, 9. *9 steps of 9, 1` 21.* *9 to 1` 21 y[ou jo]in[:]*	$3 \cdot 3 = 9$ $9 \cdot 9 = 1{,}21$ $9 + 1`21 = 1`30$ Diese Rechenvorschrift führt auf den Zähler a^2+b^2.
1` 3[0 steps of 3]0´ you go: 45. *Igi 3, 20´. 20´ [steps of 45 you go:]* *15 the reed.*	Dieser wird nun halbiert und das Ergebnis anschließend mit dem Kehrwert von a multipliziert, es wird also durch $2a$ dividiert, um die Länge des Rohrs von 15 Einheiten zu bestimmen.
Wh[at the wa]ll? 15 steps of 15, 3` 45.* *9 [steps of 9],* *1` 21. 1` 21 from 3` 45 you lift. remaining [2` 24].* *What steps of what may I go so that 2`[24?] *12 steps of 12, 2` 24.* *12 the wall.*	$15 \cdot 15 = 3`45$ $9 \cdot 9 = 1{,}21$ $3`45 - 1`21 = 2`24$ $h \cdot h = 2`24$ $12 \cdot 12 = 2`24$ $h = 12$

Tab. 13 Rechenvorschrift, linke Spalte (nach HØYRUP 2002: 394) und kommentierte Umsetzung in moderne Schreibweise, rechte Spalte.

Aber wie sind die Babylonier auf diese Division durch 2a gekommen? Hier soll kurz ein Blick auf die mögliche geometrische Herleitung für die babylonische Rechenvorschrift geworfen werden.



Die Differenz der Quadrate mit der gesuchten Länge des Rohres x und der ebenfalls unbekannten Länge (x-a) ist gleich dem Gnomon mit dem bekannten Flächeninhalt $b^2 = 81$.

	Das Gnomon kann durch Zerlegung auf zwei Rechtecke $A_1 = x \cdot a$ und $A_2 = (x - a) \cdot a$ zurückgeführt werden.
	Diese können zu einem einzigen Rechteck ausgerichtet werden: $b^2 = (x + x - a) \cdot a$ $b^2 = (2x - a) \cdot a$ Was wiederum hinführt auf: $b^2 = 2ax - a^2$
	Hier ist nun klar zu sehen, dass eine Division des Flächeninhaltes durch 2 auf ein einzelnes der Rechtecke $A_1 = x \cdot a$ führt, und die Länge des Rechteckes anschließend mittels Division durch die Länge a bestimmt werden kann.

Tab. 14 Überlegung zur geometrischen Bedeutung der Rechenvorschrift in BM 34568 #12.

Die Babylonier rechneten auch mit Näherungswerten. Einen interessanten Hinweis auf eine mögliche „Intervallschachtelung“ geben zwei Rechenvorschriften, die es den Babyloniern erlaubten, Näherungswerte für eine Quadratwurzel zu ermitteln, die nicht aus einer Tabelle abzulesen ist. In VAT 6598 #1 und #2[386] wird nach folgenden Vorschriften die Diagonale eines Tores von bekannter Höhe und Breite (im Beispiel 10 und 40 Einheiten) bestimmt:

#1 $D = H + \frac{W^2}{2H}$

#2 $D = H + W^2 \cdot 2H$

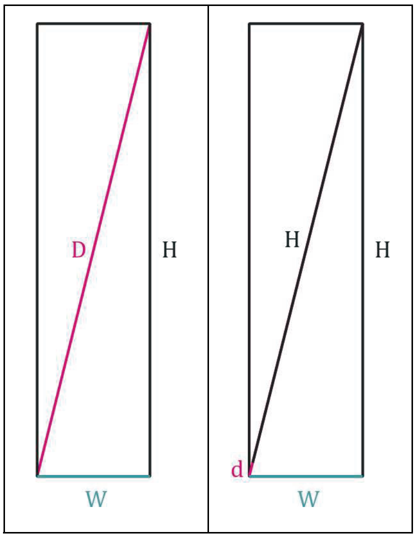


Abb. 42 Illustration zur Bestimmung der Diagonale eines Tores nach babylonischer Rechenvorschrift.

Tatsächlich liefert insbesondere Vorschrift #1 eine gute Näherung, wie folgende Überlegungen zeigen. Die folgende Darstellung ist an Gericke (1996: 34 f.) angelehnt, bedient sich jedoch anderer Bezeichnungen, die auf die skizzierte Sachsituation angepasst wurden.[387]

$D^2 = H^2 + W^2$ $(H+d)^2 = H^2 + W^2$ $H^2 + 2Hd + d^2 = H^2 + W^2$	Unter Nutzung des Satzes des Pythagoras lässt sich die gesuchte Diagonale (Wurzel der Summe aus Breite und Höhe des Tores) als Summe der Höhe und einer kleinen Abweichung d darstellen.
$H^2 + 2Hd \approx H^2 + W^2$ $2Hd \approx W^2$ $d \approx \frac{W^2}{2H}$	Da d klein ist, wird der Summand d^2 vernachlässigt, wodurch sich d annähern lässt als Quotient aus dem Quadrat der Breite des Tores und der doppelten Höhe.
$D \approx H + \frac{W^2}{2H}$	Die Diagonale (Wurzel) lässt sich daher als Summe dieses Näherungswertes und der Höhe des Tores annähern.

Tab. 15 Berechnung eines Näherungswertes für eine Quadratwurzel, die nicht als Hilfswert in den Tabellen enthalten war.

[386] Høyrup bezeichnet dieselben Problenstellungen hingegen als #6 und #7.
[387] Lehmann (1994a: 96) führt eine allgemeine geometrische Darstellung dieser Überlegung vor.

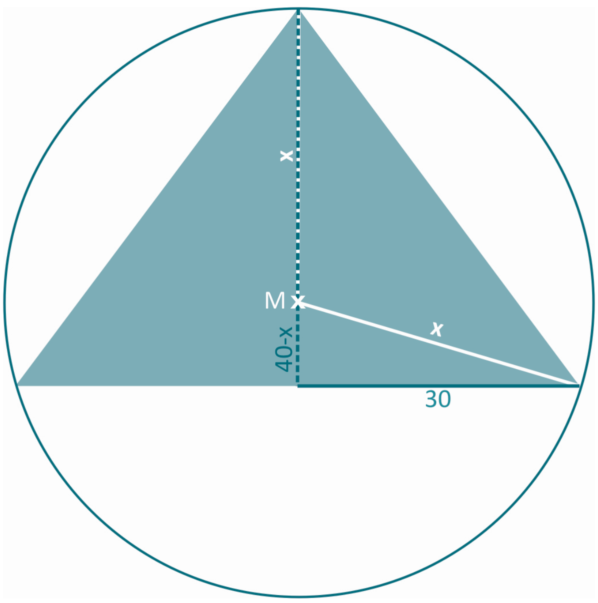
Es kann begründet spekuliert werden, dass nicht nur eine solche „einschrittige“ Annäherung den Babyloniern ein bekanntes Verfahren darstellte, sondern auch mehr-, zumindest aber zweischrittige Annäherungen dieser Art verwendet wurden. Gericke erklärt so den guten Näherungswert für $\sqrt{2} = 1{,}4142128...$, von dem oben bereits die Rede war. Denn dieses Ergebnis ergibt sich bei Anwendung der Näherungsformel, wie sie oben für die Tordiagonale vorgeschlagen wurde, auf den gröberen Näherungswert 1;25, der aus einer Quadratzahltabelle zu entnehmen ist.[388] Auch Høyrup (2002: 262 f.) unterstützt die Idee einer mehrschrittigen Näherungsrechnung.

6.2.5 Berechnungen am Kreis

Umkreis

Auf TMS I ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben, dessen Grundseite 60 Einheiten und dessen Schenkel 50 Einheiten lang sind. Gesucht wird der Umkreisradius des Dreiecks.

Die Lösung weist neben der Rechnung auch eine sehr akkurate Zeichnung, durchgeführt mit dem Zirkel[389], auf und geht in folgenden Schritten vor sich: Zunächst wurde die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks mit 40 Einheiten – über Anwendung des Satzes des Pythagoras – bestimmt. Die restliche Rechnung ist in moderner Schreibweise angegeben:



Die Rechnung kann analog zu dem Verfahren erfolgen, wie es oben für BM 34568 #12 gezeigt wurde.

$$x^2 = (40 - x)^2 + 30^2$$

$$x^2 = 40^2 - 2 \cdot 40x + x^2 + 30^2$$

$$x = \frac{40^2 + 30^2}{2 \cdot 40}$$

$$x = 31\tfrac{1}{4}$$

Abb. 43 Berechnung der Radiuslänge in moderner Schreibweise, rechte Spalte (nach Gericke 1996: 37 f.; Vogel 1959: 69; Lehmann 1994a: 131) und Illustration, linke Spalte.

[388] Vgl. Gericke 1996: 35.
[389] Vgl. Høyrup 2002: 265.

Sehnen/Thaleskreis

In BM 85194 #20 und #21 finden sich Problemstellungen, die rechtwinklige Dreiecke im Halbkreis, also den „Thaleskreis", zum Gegenstand haben. Problem #20 lautet im übersetzten Original wie folgt:

> *1\` the circle. 2 nindan I have descended,*
> *the crossbeam what?*

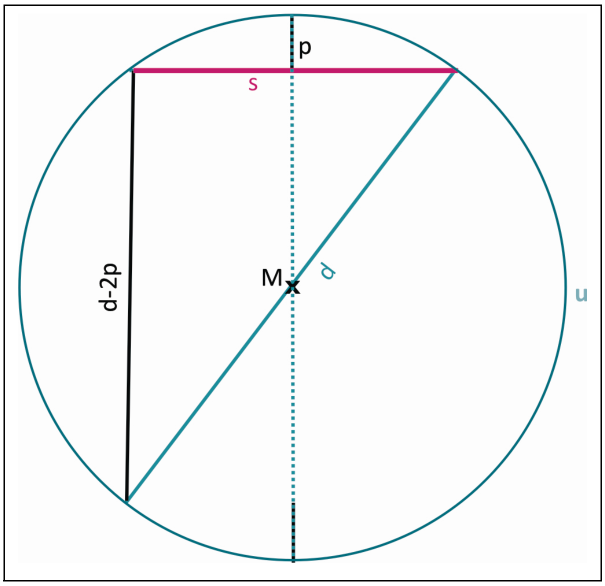


Abb. 44 Berechnung der Sehnenlänge s mithilfe des Satzes des Pythagoras und Thales-kreises, wenn p und u bekannt sind.

Es geht also um einen Kreis mit einem Umfang von 60 (im Sexagesimalsystem 1\`) Einheiten, p (auch „Pfeil" genannt, größter Abstand der Sehne zum kleineren der beiden Kreisbögen, s. Abb. 44) mit der Länge 2 Einheiten und die Sehne s. Wichtig ist, dass der Durchmesser d des Kreises $d = \frac{1}{3}u = 20$, durch die babylonische Standardnäherung $\pi = 3$, gleichfalls vorausgesetzt war (vgl. VOGEL 1959: 74; LEHMANN 1994a: 113). Auch auf beigefügte Zeichnungen gestützt lässt sich die Vorgehensweise wie folgt rekonstruieren:

{...} 2 make hold[390], 4 you see. 4 from 20, the crossbeam, tear out, 16 you see.	Die Sehnenlänge wird verdoppelt und vom Durchmesser $d = 20$ subtrahiert: $2p = 4$ $d - 2p = 20 - 4$ $= 16$
20, the crossbeam, make hold, 6\`40 you see.	Der Durchmesser wird quadriert: $d^2 = 6\`40$
16 make hold, 4\`16 you see.	Die zuvor ermittelte Länge der Sehne $d - 2p = 16$ wird quadriert: $(d-2p)^2 = 4\`16$

[390] Høyrup (2002: 274) weist zu Recht darauf hin, dass hier statt „make hold" die Anweisung „repeated" stehen müsste, da es singgemäß um eine Verdoppelung, nicht um eine Quadratur geht, auch wenn dies im vorliegenden Falle zum selben Ergebnis führt.

4`16 from 6`40 tear out, 2`24 you see.	Der Flächeninhalt des Quadrats über der gesuchten Sekante s wird als Differenz des Hypotenusen- und des zweiten Kathetenquadrats ermittelt. $6`40 - 4`16 = 2`24$
(By) 2`24, what is equalside? 12 is equalside, the crossbeam. Thus the procedure.	Schließlich wird die Wurzel gezogen, um s zu bestimmen: $\sqrt{2`24} = 12$ $s = 12$

Tab. 16 Rechenvorschrift, linke Spalte (nach Høyrup 2002: 273) und kommentierte Umsetzung in moderne Schreibweise, rechte Spalte.

In Problem #22 ist die Länge der Sekante s mit 12 Einheiten bereits bekannt, die Länge der Sehne p wird gesucht. Auf eine ausführliche Darstellung sei hier verzichtet.

Kreissektoren

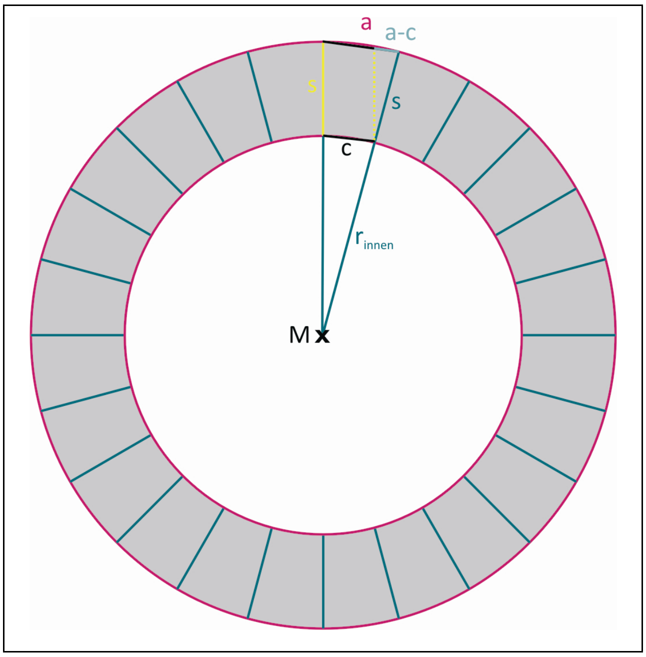


Abb. 45 Das Brunnenproblem: Bekannt sind die Maße der gleichschenklig trapezförmigen Ziegel, gesucht die Maße des fertigen Brunnens und die Anzahl der benötigten Ziegel pro Lage.

198 Gegenstand der Aufgabe BM 85194 #16 ist ein Brunnen, dessen äußere Umrandung aus vielen kleinen Ziegelsteinen in Form gleichschenkliger Trapeze zusammengesetzt ist. Jedes bildet einen Kreisringausschnitt.[391] Gegeben sind die Grundlinien mit $a = \frac{1}{24}$ und $c = \frac{1}{36}$ Einheiten und der Schenkel mit der Länge $s = \frac{1}{18}$ Einheiten. Gesucht werden die Anzahl der benötigten Ziegelsteine sowie der Durchmesser $d_{innen} = 2 \cdot r_{innen}$ des Innenkreises und dessen Umfang u_{innen}.

In einem ersten Schritt wird der Proportionalitätsfaktor $\frac{c}{a-c}$ bestimmt; es

[391] Beispiel entnommen Vogel 1959: 75.

kann angenommen werden, dass der Proportionalitätsfaktor über die Ähnlichkeit der Dreiecke ermittelt wird.

$$\frac{c}{a-c}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{24}-\frac{1}{36}}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{72}-\frac{2}{72}}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{72}}=\frac{72}{36}=2$$

Aufgrund der Ähnlichkeit ergibt sich unmittelbar, dass $r_{innen}=s\cdot 2$ gilt. Damit beträgt der Innendurchmesser des Brunnens:

$$d_{innen}=s\cdot 4=\frac{1}{18}\cdot 4=\frac{2}{9}$$

Wie bereits angesprochen arbeiteten die praktisch orientierten babylonischen Mathematiker mit der, für unser Empfinden recht groben, Näherung $\pi=3$, so dass sich der Umfang des Innenkreises als

$$u_{innen}=\pi\cdot d=3\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

ergibt. Abschließend die Anzahl der benötigten Ziegel zu ermitteln, erfordert nun nicht mehr als eine einfache Division:

$$\frac{u_{innen}}{c}=\frac{2}{3}:\frac{1}{36}=24$$

6.2.6 Volumenberechnungen

Die Babylonier kannten, ähnlich wie die Ägypter, die Volumenformeln für Würfel und Quader, entwickelten aber darauf aufbauend die Formeln für Prismen mit rechteckigem, dreieckigem oder trapezförmigem Querschnitt. Auch das Volumen des Zylinders als Spezialvariante des Prismas wurde (zumindest näherungsweise) von den Babyloniern berechnet.

Die Babylonier waren jedoch nicht nur in der Lage oder daran interessiert, das Volumen von Tempelfundamenten, Brückenpfeilern, Mauern, Dämmen und Kanälen unterschiedlichster Formen zu bestimmen, sondern auch alle anderen Einflussgrößen wie Tagesleistung eines Arbeiters, Tageslohn, Arbeitsdauer, Anzahl der Arbeiter, Anzahl der benötigten Tagewerke sowie die Gesamtkosten eines geplanten Bauvorhabens zu bestimmen. Die Volumenbestimmung beantwortete dabei die alltäglich aufkommenden Fragen nach vorhandenem Gewicht, Preisen, Materialbedarf, Arbeitskräften und Kosten. Dabei arbeiteten die Babylonier mit Aufgabensammlungen, bei denen systematisch jeweils bestimmte Parameter bekannt bzw. gesucht waren (vgl. auch die Anmerkungen hierzu in der Einleitung zu Kap. 6.2 und in Kap. 6.2.3). Gute Beispiele hierfür stellt Gericke (1996: 29 f.) aus den Tafeln YBC 4657 (Aufgabensammlung) und YBC 4663 und YBC 4662 (enthalten Lösungen zu dem Großteil der Aufgabensammlung) vor, die dort nachzulesen sind.

Problemstellung BM 85210 #C2 handelt von einem Ziegelbau in Form eines Pyramidenstumpfes. Gegeben ist die Grundfläche mit 20 GAR und einer Höhe h von 6 kuš. Die Neigung der Seitenflächen beträgt 1:1.[392] Zunächst wird über den Rücksprung die Kantenlänge der quadratischen Deckfläche als 19 GAR bestimmt (da 12 kuš = 1 GAR).

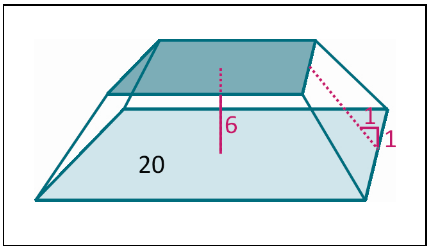


Abb. 46 Veranschaulichung des Pyramidenstumpfes aus BM 85210 #C2.

Eine sehr ähnliche Problemstellung (BM 85194 #14) befasst sich mit einem Kegelstumpf, von dem ebenfalls die Höhe 6 Ellen, jedoch jeweils die Umfänge der kreisförmigen Grund- und Deckfläche bekannt sind[393], so dass die Berechnung der Flächeninhalte vorgeschaltet wird.[394]

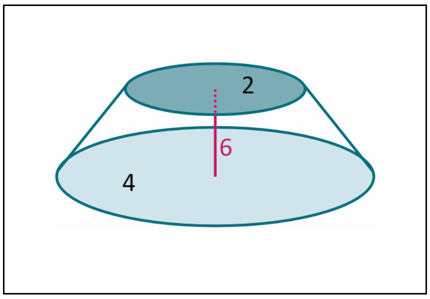


Abb. 47 Veranschaulichung des Kegelstumpfes aus BM 85194 #14.

Für beide Volumenberechnungen führen die Rechenvorschriften auf die (hier in moderner Schreibweise gegebene) Näherungsformel $V = \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot h$ hin.

Es gibt verschiedene Vorstellungen, wie diese – nicht korrekte – Formel zustande kam (Vogel 1959: 81; Popp 1968: 42); die Mittelwertnutzung ist jedoch ein beliebtes Instrument der babylonischen Mathematik, wie schon die sogenannte *Surveyors' Formula* (vgl. Kap. 6.2.2) für allgemeine Vierecke erkennen lässt. Es sei noch erwähnt, dass es eine beschädigte Quelle gibt, die die Interpretation zulässt, dass die Babylonier auch die richtige Vorschrift zur Berechnung des Volumens von Pyramiden- und Kegelstumpf kannten.[395] Da dies für die Ägypter gesichert ist, erscheint eine solche Rekonstruktion nicht gänzlich unplausibel.

[392] Den Babyloniern war das Konzept der Winkelgröße im Allgemeinen wenn nicht unbekannt so doch zumindest fremd. Abseits der rechten Winkel spielte es in ihrer Mathematik praktisch keine Rolle (vgl. Høyrup 2002: xx). Über den „Rücksprung", mit dem nicht nur die Babylonier die Neigung architektonischer Konstruktionen angaben, mehr in Kap. 6.3.2.

[393] In Kap. 6.2.5 wurde bereits erwähnt, dass die Babylonier den Umfang des Kreises als dessen primär definierendes Merkmal ansahen, nicht Radius oder Durchmesser.

[394] Zu finden u. a. in Vogel 1959: 81 f.; Gericke 1996: 36 f.

[395] Vgl. Gericke 1996: 37.

6.3 Geometrie der Ägypter

Die altägyptischen Kenntnisse in Mathematik sind durch eine Vielzahl vor allem indirekter Quellen belegt, wie Pyramiden, Grabbauten und Tempelanlagen sowie anderen technologischen Erzeugnissen; der Textkorpus, auf den sich die mathematikhistorische Forschung für das alte Ägypten beziehen kann, ist verglichen mit dem babylonischen jedoch klein und überschaubar. Unmittelbaren Aufschluss über mathematisches Wissen geben uns nur eine Handvoll Texte, alle aus der Zeit des Mittleren Reiches (2055-1650 v. Chr.): fünf Papyri, eine Pergamentrolle und zwei Holztafeln. Davon gelten der Papyrus Rhind (künftig: pRhind) und der Moskauer Papyrus (künftig: pMoskau) bis heute als die wichtigsten Dokumente zur ägyptischen Mathematik.[396] Bei beiden Dokumenten handelt es sich um Aufgabensammlungen mit Lösungshinweisen, die von Schreibern in den Beamtenschulen als Unterrichtshandbücher verfasst wurden und beide aus der Zeit um 1650 v. Chr. bzw. 1850 v. Chr. stammen.

pRhind[397] beinhaltet die vollständigste und vielseitigste Sammlung mathematischer Probleme, und sie lassen eine strukturierte Anordnung erkennen;[398] so sind die dort behandelten Probleme nicht nur nach inhaltlichen Gesichtspunkten zusammengefasst, es ist auch eine zunehmende Komplexität in den Anforderungen erkennbar. Interessanterweise unterscheiden sich die aufgeführten geometrischen Probleme von denjenigen, die sich nicht mit der Geometrie befassen, (meist) durch eine angefügte Skizze, die abschließend (!) zur Darstellung des Problems in graphischer Form herangezogen wird. Des Weiteren findet man in diesem Zusammenhang auch kleinere Skizzen, aus denen die zu entnehmende Größe entnommen werden kann.[399] Geht man davon aus, dass die aus späterer Zeit belegten Verfahren zur Feldvermessung mithilfe eines asteriskon[400] schon zur Entstehungszeit des pRhind bekannt waren, so „würde der Pap. Rh. genau die Geometrie gelehrt haben, die der Praktiker brauchte“ (GERICKE 1996: 60).

Im pMoskau[401] werden weiterführende Aufgaben behandelt wie die Körperberechnungen von quaderförmigen und zylinderförmigen Behältnissen, die unter Zugrundelegung der Kreisflächenformel ermittelt werden. Auch hierbei handelt es sich um Anwendungsgebiete

---

[396] Vgl. IMHAUSEN 2003: 7.
[397] Ursprünglich 5,34 m lang und 0,33 m breit, enthält vierundachtzig Aufgaben (vgl. SCRIBA/SCHREIBER 2005: 12).
[398] Vgl. ROSSI 2010: 407.
[399] Vgl. IMHAUSEN 2003: 21.
[400] Zu Herons Zeit war dieses mit der römischen *groma* identische Gerät gesichert bekannt und in Benutzung (vgl. GERICKE 1996: 60).
[401] Ursprünglich 5,44 m lang und 0,08 m breit, enthält fünfundzwanzig Aufgaben (vgl. SCRIBA/SCHREIBER 2005: 12).

des täglichen Lebens und somit entsprechen die hier angesprochenen Quader und Zylinder den viereckigen und runden Getreidesilos, deren Inhalte berechnet werden sollen (VOGEL 1958: 67). Verglichen mit der babylonischen Mathematik erschließt sich die ägyptische unmittelbarer, da sie auf dem Dezimalsystem basiert; allerdings finden sich insbesondere bezogen auf die Messung und Vorstellung von Flächen- und Rauminhalten gravierende Abweichungen. Die Ägypter arbeiteten häufig mit kleineren Einheiten, die sich nicht quadratisch bzw. kubisch zu den größeren Grundeinheiten verhielten, sondern vielmehr Streifen bzw. Schichten der größeren Maßeinheiten bildeten.[402]

Zum Wesen der ägyptischen Mathematik

Die Quellen lassen den Eindruck entstehen, dass die Mathematik in der ägyptischen Kultur „tief mit einer Vielzahl praktischer Aktivitäten verwoben" (ROSSI 2010: 407) war. Dieser Schluss ergibt sich auch mit Blick auf die nicht eigentlich mathematischen Texte, die in großer Anzahl in Ägypten gefunden wurden, und die sich zu einem großen Teil mit buchhalterischen, bautechnischen und anderen administrativen Vorgängen in dem komplexen Staatsapparat befassten. Auch die medizinischen Texte lassen immer wieder klar die Anwendung mathematischer Kenntnisse erkennen, wenn die Verfahren auch nicht ausgeführt werden.[403]

> *Mathematics was deeply embedded in the seasonal and daily activities of measuring fields, assessing harvest, calculating taxes, storing agricultural products, and producing staple foods. (ROSSI 2010: 417)*

Infolge der jährlich wiederkehrenden Nilschwemme hatten besonders die ägyptischen Bauern großes Interesse, den Flächeninhalt gradlinig begrenzter Flächen zu berechnen, denn durch die verloren gegangenen Begrenzungen musste der Grund und Boden immer wieder neu abgesteckt und rechtmäßigen zugewiesen werden.[404] Rossi (2010: 423) schreibt diesbezüglich:

> *The huge task of re-organizing the land after the annual inundation, the repeated necessity of measuring the fields, the ability to forecast the productivity of the land and to calculate the consequent ‚taxes' and the storage of the products, were all activities that required simple, efficient, and flexible mathematical management.*

[402] Vgl. Rossi 2010: 408 f. Da dieser Umstand für den Fokus der vorliegenden Arbeit nicht weiter von Belang ist, wird er hier nicht vertieft und auch im Folgenden nicht problematisiert.
[403] Vgl. ROSSI 2010: 408.
[404] Die Ägypter verwendeten dabei ein ausgeklügeltes und auf Gerechtigkeit zielendes System von Steuerberechnungsfaktoren, die auch die Güte des Landes für die Bestimmung der Steuerlast mit einbezogen (vgl. ROSSI 2010: 421).

Trotz dieser offensichtlichen und sicherlich nicht zufälligen Häufung bestimmter Problemfelder, die sich in der ägyptischen Mathematik erkennen lassen, und von denen Rossi selbst schreibt, dass „die Dominanz bestimmter Problemtypen [...] höchst wahrscheinlich die häufigsten Anwendungszusammenhänge“ (2010: 423, eigene Übersetzung) widerspiegeln, sollte nicht außer acht gelassen werden, dass- gerade mit Blick auf die geringzahligen Primärquellen – der praktische Charakter nicht darüber hinwegtäuschen sollte, dass die beschriebenen Lösungsverfahren sehr wohl auch, indirekt, auf ganz andere Probleme angewandt werden können, die (in den erhaltenen Schriften) nicht erwähnt werden. Hinweise auch auf weitere Spezialistentexte, die die Zeiten nicht überdauert haben, gibt etwa pRhind, wo es um den Bereich der Metallverarbeitung geht. Dass aus diversen technischen Feldern keine schriftlichen Aufzeichnungen erhalten sind, kann verschiedene Ursachen haben – die archäologischen und kulturhistorischen Untersuchungen lassen jedoch kaum einen Zweifel daran zu, dass auch in diesen Feldern mathematisches Spezialistenwissen existiert haben muss.[405]

6.3.1 Flächeninhaltsberechnungen

Viele der oben umschriebenen, lebensnotwendigen Tätigkeiten basierten auf der korrekten Bestimmung der landwirtschaftlichen Flächen. Die von den Ägyptern entwickelten Flächeninhaltsformeln für Quadrate, Rechtecke, gleichschenklige Dreiecke und gleichschenklige Trapeze bildeten die Grundlage für die Berechnung jeder beliebigen Figur mit geradlinig begrenzen Seiten.[406] In pRhind Nr. 49 ist ein Rechteck Gegenstand des vorliegenden Problems. Gesucht wird die Hälfte des Flächeninhaltes einer rechteckigen Fläche mit den Seitenlängen 10 *ḫt* und 2 *ḫt*, wobei 1 *ḫt* = 100 *mḥ* (Ellen) entspricht.

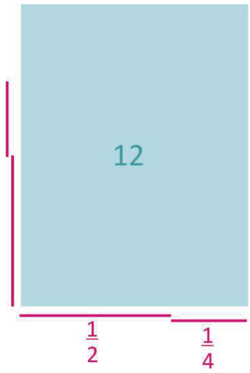
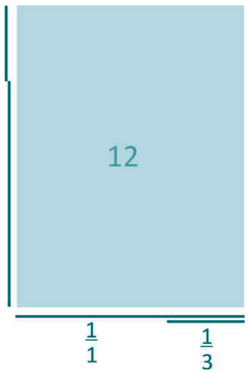
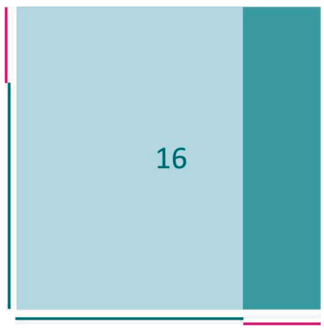
$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$	Zunächst wird die 2 *ḫt* lange Seite des Rechtecks halbiert. Wie aus anderen Aufgaben zur Flächenberechnung zu entnehmen ist, handelt es sich dabei in der Regel um die kleinere, als zweite genannte Seite.
$1 \cdot 100 mh = 100 mh$	Nun wird die Seitenlänge in Ellen umgerechnet.
$10 \cdot 100 mh = 1000 mh$	Dann wird auch die andere Seite des Rechtecks in Ellen umgerechnet.

405 Vgl. Rossi 2010: 423 ff.
406 Vgl. Hauser 1955: 21.

$100mh \cdot 1000mh = 100.000mh \cdot mh$	Schließlich folgt die Berechnung des Flächeninhaltes durch Multiplikation der Seitenlängen.

Tab. 17 Bestimmung des halben Flächeninhalts eines Rechteckes, linke Spalte (in moderner Schreibweise nach IMHAUSEN 2003: 70) mit Kommentar, rechte Spalte.

Eine ebenfalls auf den Flächeninhalt des Rechtecks bezogene Aufgabe findet sich in pMoskau Nr. 6. Gegeben sind der Flächeninhalt eines Rechteckes mit 12 Flächeneinheiten und das Seitenverhältnis $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ zwischen Breite und Länge. Gesucht wird die Länge der beiden Seiten.

<table>
<tr>
<td>$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ der Länge für die Breite.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dividiere 1 durch $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, es gibt $1\frac{1}{3}$.</td>
<td>Zunächst wird der Kehrwert des Seitenverhältnisses gebildet.
$1 \div (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = 1\frac{1}{3}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Multipliziere 12 mit $1\frac{1}{3}$, es gibt 16.</td>
<td>Durch die Multiplikation dieses Kehrwerts mit dem gegebenen Flächeninhalt erhält man den Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seitenlängen mit der längeren Seite des gegebenen Rechtecks übereinstimmt.
$12 \cdot 1\frac{1}{3} = 16$

</td>
</tr>
</table>

Berechne seinen Winkel, es gibt 4 für die Länge. *Sein* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ *als 3 für die Breite.*	Durch das Ziehen der Wurzel wird die Länge dieser Seite bestimmt.[407] $\sqrt{16}=4$ Schließlich wird über das Seitenverhältnis die fehlende Seitenlänge bestimmt. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\cdot 4=3$

Tab. 18 Bestimmung der Seitenlängen eines Rechteckes mit bekanntem, linke Spalte (in moderner Schreibweise nach VOGEL 1958: 64) mit Kommentar, rechte Spalte (moderne Schreibung nach IMHAUSEN 2003: 78).

Die etwas umständliche Bildung des Kehrwertes im ersten Schritt dieser Rechenvorschrift ist aus mathematischer Sicht vollkommen unnötig. Die Methode funktioniert ebenso, wenn ein Quadrat auf Grundlage der kürzeren Seite gebildet wird. Möglicherweise arbeiteten die ägyptischen Mathematiker grundsätzlich bevorzugt mit dem Quadrat über der längeren Seite (was in pMoskau Nr. 7 zu sehen ist, wo auf eine vergleichbare Kehrwertbildung verzichtet wird, s. unten).

6.3.2 Dreiecke und Ähnlichkeit

Die Problemstellungen pRhind Nr. 51 und pMoskau Nr. 4 befassen sich mit der Flächenberechnung eines gleichschenkligen Dreiecks. Gesucht wird die Dreiecksfläche bei gegebener Grundseite (4 Einheiten) und Höhe (10 Einheiten). Zunächst wird die Grundseite halbiert und das Ergebnis mit der Höhe multipliziert. Welche praktische Vorstellung die Ägypter mit dieser Vorschrift verbunden haben, lässt sich aus der Bemerkung „um es rechteckig zu machen“[408] ablesen.

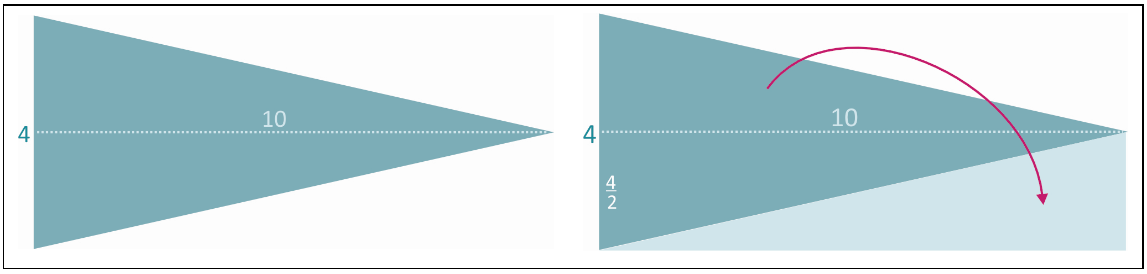


Abb. 48 Der Berechnung der Dreiecksfläche in pRhind Nr. 51 zugrundeliegende geometrische Überlegung nach Vogel.

pRhind enthält an dieser Stelle eine Skizze, die Vogels Interpretation (1958: 65), das Dreieck werde in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die sich so zu einem Rechteck

[407] Dasselbe Verfahren nutzten auch die Babylonier, wie ein identischer Bearbeitungsschritt in der Aufgabe zum Belagerungsdamm in Kap. 6.2.3 zeigt.
[408] So gibt Gericke (1996: 58) die Übersetzung wieder.

zusammensetzten lassen (s. Abb. 48), infrage stellt und andeutet, dass es sich zumindest in diesem Fall nicht um die geeignete Lesart handelt. Vielmehr scheint es sich um ein rechtwinkliges Dreieck zu handeln, dessen Zerlegung dann entsprechend Abb. 49 vorzustellen wäre.

Die von den Ägyptern durchgeführte Berechnung[409]

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$10 \cdot 2 = 20$$

entspricht jedenfalls der uns heute bekannten Formel $A_{Dreieck} = \frac{Grundseite \cdot Höhe}{2}$.

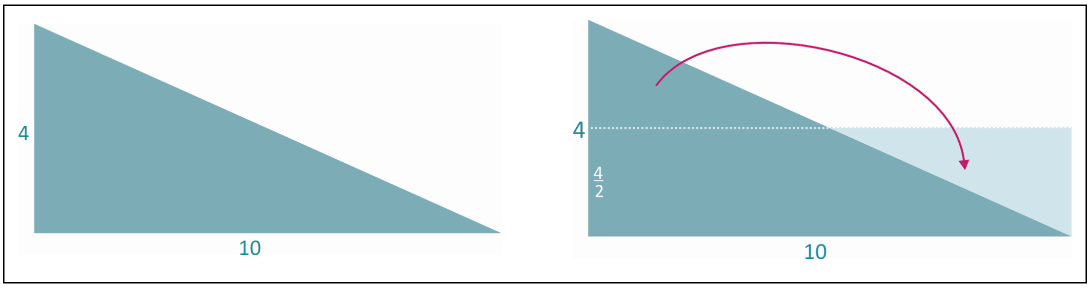
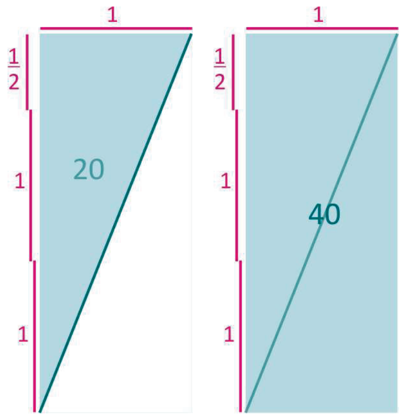
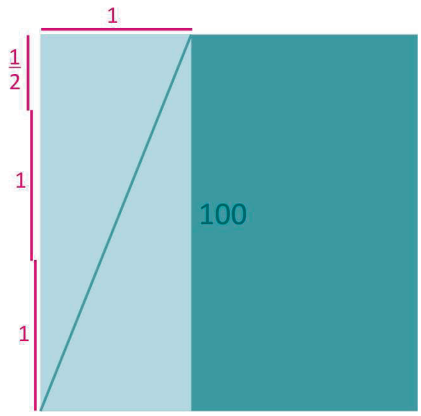
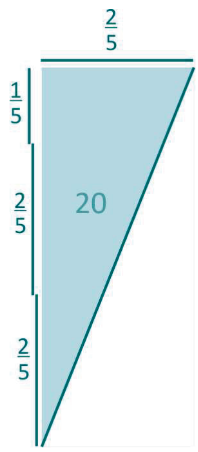


Abb. 49 Der Berechnung der Dreiecksfläche in pRhind Nr. 51 zugrundeliegende geometrische Überlegung nach Gericke (1996: 58).

Die Ägypter haben sich auch weiterführend mit rechtwinkligen Dreiecken befasst, wie in Problem Nr.7 im pMoskau dargestellt. Diese Aufgabe kombiniert die Methoden, die oben bereits bei den Flächeninhaltsberechnungen bei Rechtecken zur Sprache kamen, mit Berechnungen am Dreieck.

Ausgehend von einem rechtwinkligen Dreieck, mit gegebenem Flächeninhalt von 20 Einheiten und einem Seitenverhältnis von $2 + \frac{1}{2}$, der den rechten Winkel einschließenden Seiten, wird die Länge der beiden Seiten gesucht. Die rechnerische Bearbeitung sowie die geometrische Umsetzung der einzelnen Schritte sind in folgender Tabelle einander gegenübergestellt.

[409] U. a. nach Gericke 1996: 58; Imhausen 2003: 74.

$2\cdot 20=40$	Im ersten Schritt wird die Fläche eines Rechtecks berechnet. Die Hypotenuse entspricht der Diagonale des Rechtecks. Seine Seitenlängen entsprechen dabei den Seitenlängen des Dreiecks, deren Verhältnis zueinander gegeben ist. 
$2+\frac{1}{2}\cdot 40=100$	Die Multiplikation der Rechteckfläche mit dem Seitenverhältnis führt auf ein Quadrat dessen Seite der längeren Seite des Rechtecks entspricht. 
$\sqrt{100}=10$	Durch das Ziehen der Wurzel ist damit die längere Seite des Rechtecks bzw. des Ausgangsdreiecks gefunden.
$\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}\cdot 10=4$	Der Kehrwert des Seitenverhältnisses wird gebildet. Durch Multiplikation des Kehrwertes mit der längeren Seite des Dreiecks wird die Länge der kürzeren Seite berechnet. 

Tab. 19 Bestimmung der Seitenlängen eines Rechteckes mit bekanntem, linke Spalte (in moderner Schreibweise nach IMHAUSEN 2003: 78) mit Kommentar, rechte Spalte.

Ähnlichkeit und *seqet*

Eine herausragende Rolle in der Geschichte der Ägypter spielte der Pyramidenbau. So lassen sich die Aufgaben pRhind Nr. 56-59 als so genannte „Pyramidenaufgaben" zusammenfassen, deren Texte um Skizzen ergänzt sind, die den Aufriss einer Pyramide zeigen und konkrete Zahlenangaben enthalten. Diese Aufgaben befassen sich mit der Beziehung zwischen der Länge der Grundkante, der Höhe und dem sogenannten Rücksprung (*seqet*), wobei stets eine der drei Größen aus den beiden anderen berechnet wird. Der Rücksprung gibt an, wie weit die Böschung bei einer vertikalen Höhe von einer Elle zurückspringt und liefert damit – im modernen Verständnis – ein Maß für den Neigungswinkel[410] der Seitenfläche einer Pyramide.[411]

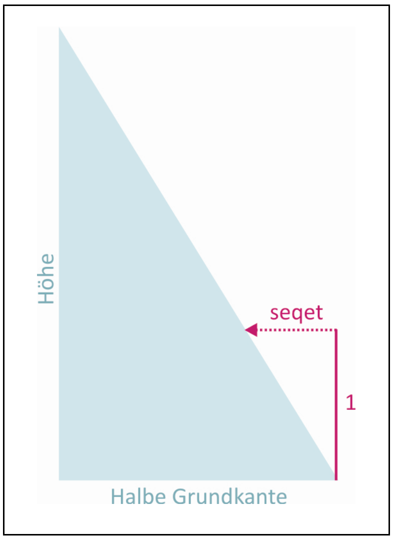
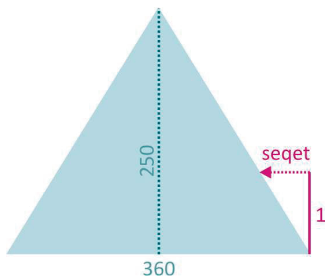
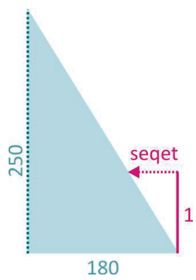


Abb. 50 Illustration des Pyramidenrücksprungs (Seqet).

Dass diese Frage für die praktische Bauplanung von größter Bedeutung war, liegt auf der Hand, wenn man sich den schrittweisen Bau vor Augen führt, an dessen Ende ein möglichst perfekter geometrischer Körper stehen sollte.

pRhind Nr. 56 zeigt die Berechnungsgrundlage des Rücksprungs einer quadratischen Pyramide bei gegebener Grundkante von 360 Ellen und einer Höhe von 250 Ellen. Der zugehörige Aufgabentext lautet:

<table>
<tr><td>Beispiel der Berechnung einer Pyramide, 360 Ellen in der Länge der Seite, 250 Ellen in der Höhe.
Laß mich wissen ihren Rücksprung.</td><td>Der Rücksprung in der Illustration stark vergrößert dargestellt.

</td></tr>
<tr><td>Nimm $\frac{1}{2}$ von 360, es ist 180.</td><td>Die Grundkante wird halbiert, da nur der halbe Pyramidenquerschnitt für die Beantwortung der Frage relevant ist.

</td></tr>
</table>

[410] Der Winkelbegriff selbst war den Ägyptern ebenso fremd wie den Babyloniern; vgl. die Anmerkungen dazu in Kap. 6.2.3, Abschnitt Ähnlichkeit.
[411] Das Verfahren ist mit dem babylonischen identisch (vgl. Kap. 6.2.6).

Rechne mit 250 um 180 zu erhalten. {Nimm 250 so oft bis es 180 ergibt, d.h. dividiere 180 durch 250.}	Das Seitenverhältnis $\frac{\textit{halbe Breite}}{\textit{Höhe}} = \frac{180}{250}$ wird aufgestellt.
Es ist $\overline{2}\,\overline{5}\,\overline{50}$ *Elle.*	Die Berechnung ergibt $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}=\frac{18}{25}$. Dass hier im Original gleich die Einheit (*mḫ*) mitgeschrieben wird, zeigt an, dass der Wert sofort als *seqet* gelesen wurde, also als Maß des auf 1 *mḫ* bezogenen Rücksprungs.
1 Elle hat 7 Handbreiten. Multipliziere mit 7. Der Rücksprung ist $5+\frac{1}{25}=5\frac{1}{25}$ *Handbreiten.*	Abschließend wird durch einfache Multiplikation in eine kleinere und bei diesem Ergebnis praktikablere Maßeinheit umgerechnet.

Tab. 20 Illustrierter Kommentar (rechte Spalte) zu pRind Nr. 56 (linke Spalte, zitiert nach GERICKE 1996: 61).

Die Ägypter ermittelten also den Rücksprung durch das Verhältnis von halber Grundseite zur Höhe, was sich in moderner Notation folgendermaßen fassen lässt:

$$seqet = \frac{\frac{\frac{1}{2}Grundkante}{Höhe}}{1}$$

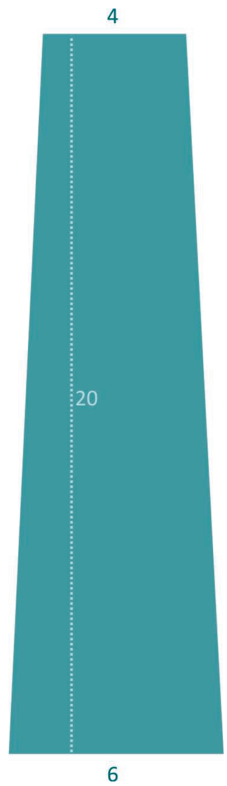
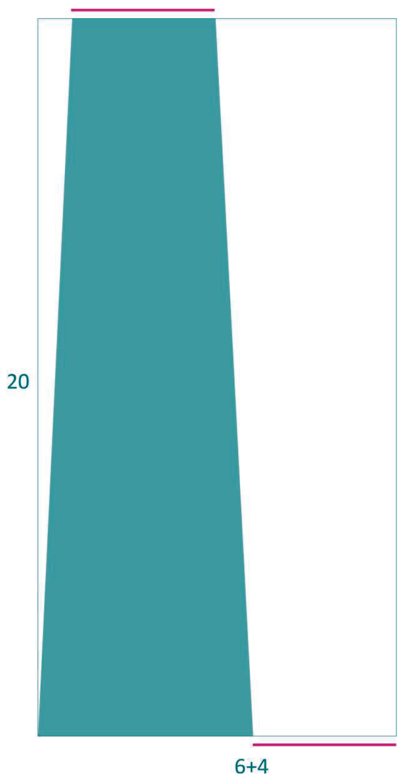
Dabei nutzten sie – ob und bis zu welchem Grade bewusst – die Ähnlichkeit der beiden beteiligten Dreiecke, des halben Pyramidenquerschnitts sowie des „seqet-Dreiecks“ mit seiner genormten vertikalen Seitenlänge.

6.3.3 Trapezfläche

Auf ähnliche Weise wird auch das gleichschenklige Trapez berechnet. Dieses ist nach Ansicht der Ägypter dem „abgeschnittenen Stück einer Fläche [gleichzusetzen], das durch die Höhe und die oberen und unteren Kanten charakterisiert wird“ (IMHAUSEN 2003: 75). Die Problemstellung pRhind Nr. 52 zeigt, wie die Ägypter zu der (hier in moderner Schreibweise als Gleichung gegebenen) Rechenvorschrift

$$A_{Trapez} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

gelangt sind.

	Gegeben sind die Höhe mit 20 *ḫt* Einheiten und die Seiten mit den Längen 6 *ḫt* und 4 *ḫt*.	
$6+4=10$	Im ersten Schritt werden die bekannten Seitenlängen addiert. Geometrisch lässt sich dies als eine Ergänzung des Trapezes zu einem Rechteck mit den Seitenlängen $6+4=10$ und der Trapezhöhe 20 *ḫt* deuten, auf die der Originaltext auch selbst hinweist (vgl. IMHAUSEN 2003: 75).	

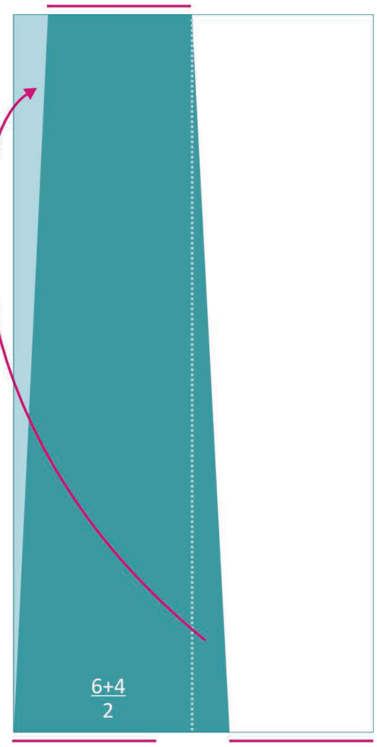
$\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$	Durch Zerlegen und Umarrangieren des Trapezes – wie beim Dreieck ebenfalls üblich – zeigt sich, dass die kürzere Seitenlänge des so entstandenen Rechtecks der Hälfte der eben durch Addition ermittelten Seitenlänge $6 + 4 = 10$ *ḫt* entspricht. 
$20 \cdot 5 = 100$	Damit ist die Berechnung auf die eines Rechteckflächeninhaltes zurückgeführt, die sich als Multiplikation der Seitenlängen darstellt.

Abb. 51 Berechnung des Trapezflächeninhalts, linke Spalte (in moderner Schreibweise nach IMHAUSEN 2003: 78) mit Kommentar und Illustrationen, rechte Spalte.

Dass das Verfahren in dieser Einfachheit nur bei gleichschenkligen Trapezen funktioniert, ist offensichtlich. Die reine Rechenvorschrift gibt keinen Hinweis darauf, dass eine „beidseitige" Zerlegung gedacht wurde – sie widerspricht dieser Idee jedoch auch nicht, und man darf annehmen, dass die ägyptischen Mathematiker, wohl von diesem einfachsten Falle ausgehend, die Verallgemeinerbarkeit auf alle Trapeze erkannt und die Rechenvorschrift in der Folge unterschiedslos angewandt haben.

6.3.4 Berechnungen am Kreis

Die Problemstellung pRhind Nr. 50 zeigt, wie der Flächeninhalt eines runden Feldes mit gegebenem Durchmesser d bestimmt wird. Der Text lautet:

> *Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9 hat. Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm $\frac{1}{9}$ von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64. (GERICKE 1996: 57)*

Es fällt zunächst auf, dass die Ägypter den Kreis offenbar anders verstanden als die babylonischen Mathematiker. War dort der Umfang stets das definierende Moment, ist es in der ägyptischen Mathematik der Durchmesser. Die Rechnung der Ägypter zur Bestimmung der Kreisfläche bei einem Durchmesser $d = 9$ Einheiten lautet in moderner Notation also:

(1) $\frac{1}{9} \cdot 9 = 1$

(2) $9 - 1 = 8$

(3) $8 \cdot 8 = 64$

Die überlieferten mathematischen Texte geben in ihrer Gesamtheit Aufschluss darüber, dass die Ägypter die Kreisfläche stets nach derselben Vorgehensweise bestimmt haben, die sich verallgemeinernd wie folgt fassen lässt:

(1) $\frac{1}{9} \cdot d$

(2) $d - (\frac{1}{9} \cdot d)$

(3) $[d - (\frac{1}{9} \cdot d)] \cdot [d - (\frac{1}{9} \cdot d)]$

In moderner algebraischer Schreibweise lässt sich diese Verminderung des Durchmessers um $\frac{1}{9}$ seiner Länge mit anschließender Quadratur verkürzt angeben durch:

$$A_{Kreis} = (\frac{8}{9}d)^2$$

Die Ägypter gingen also davon aus, dass der Flächeninhalt eines Kreises mit einem Durchmesser von 9 Einheiten so groß ist wie der eines Quadrats mit einer Seitenlänge von 8 Einheiten.[412] Der Überlieferung zufolge erbrachten die Ägypter den Nachweis für die oben angegebene Formel, indem sie Quadrate und Kreise, bei denen die Länge der Quadratseite mit dem Durchmesser des Kreises überein stimmten, mit Getreidekörnern bedeckten. Die Auszählung der Körner ergab, dass die Quadratfläche mehr Körner enthielt und damit größer war als die Kreisfläche. Durch schrittweise Verkleinerung der Quadratfläche wurde die Anzahl der Körner denen der Kreisfläche angeglichen. Dabei fanden sie heraus, dass die Anzahl der Körner beider Flächen übereinstimmte, wenn die Seite des Quadrates $\frac{8}{9}$ der Länge des Kreisdurchmessers entsprach.[413]

[412] Vgl. Scriba/Schreiber 2005: 13.
[413] Vgl. Kolosow 1963: 108.

Kreiszahl

Wie gut ist diese Näherung (der Kreiszahl, die wir heute mit π angeben), die die Ägypter nutzten? Aus heutiger Sicht und mit heutigem Kenntnisstand kann auf Grundlage der Kreisformel $A_{Kreis} = \pi \cdot (\frac{d}{2})^2$ ein Näherungswert für die „Kreiszahl" der Ägypter berechnet werden:[414]

$$\pi \cdot (\frac{d}{2})^2 = (\frac{8}{9} \cdot d)^2$$

$$\pi = \frac{\frac{64}{81} \cdot d^2}{\frac{1}{4} \cdot d^2}$$

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}16049$$

Im Vergleich zu den Babyloniern, die stets mit der sehr groben Näherung von $\pi = 3$ arbeiteten, stellt die ägyptische „Kreiszahl" damit eine deutliche Verbesserung der Rechengenauigkeit dar. Oben wurde eine mögliche Herleitung über den praktischen Vergleich des Kreisflächeninhaltes mit verschiedenen Quadratflächen geschildert. Es findet sich jedoch auch ein Rechenbeispiel, das an eine geometrische Plausibilisierung, wenn nicht Herleitung, des Wertes $\frac{8}{9}$ denken lässt.

Im Gegensatz zu den meisten anderen Problemstellungen beginnt pRhind Nr. 48 mit einer Skizze, der zwei Rechnungen beigefügt sind. Eine Rekonstruktion dieser Angaben zeigt, dass es sich bei der Skizze um die Aufgabenstellung handelt und bei den beiden Rechnungen um Anweisungen zur Berechnung zweier Flächen. Die Skizze zeigt ein Quadrat, das durch Abtrennung der Ecken in ein Achteck umgewandelt und einem Kreis einbeschrieben wird.[415]

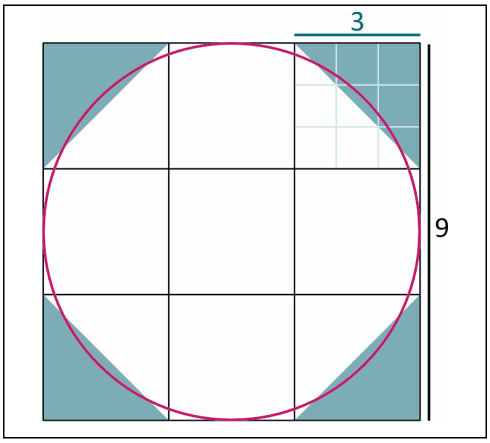


Abb. 52 Einschreibung eines Kreises in ein regelmäßiges Vieleck, pRhind Nr. 48.

Abb. 52 zeigt das im Papyrus skizzierte Quadrat mit der Seitenlänge 9 Einheiten. Durch Abtrennen der 4 Ecken (auf je $\frac{1}{3}$ der Seiten) ergibt sich für das entstandene Achteck eine Fläche von:

$$A = 9^2 - 4 \cdot \frac{3^2}{2} = 63 \textit{ Flächeneinheiten}$$

[414] Vgl. auch Imhausen 2003: 71.
[415] Vgl. Imhausen 2003: 72.

Ein hierzu flächeninhaltsgleiches Quadrat hat mithin die Seitenlänge $\sqrt{63}$ Einheiten, was einem Quadrat mit der Seitenlänge von $\sqrt{64} = 8$ Einheiten angenähert werden kann. So erklärt sich möglicherweise die Verwendung von $\frac{8}{9}d$ als Seitenlänge eines annähernd flächeninhaltsgleichen Quadrats.[416]

6.3.5 Volumenberechnung

Die Berechnung von Rauminhalten beschäftigte die ägyptische Mathematik aus zwei Hauptgründen. Zum einen zur Planung von Hoch- und Tiefbauprojekten wie Tempeln, Palästen, Gräbern oder Pyramiden. Wichtige Kenngrößen ließen sich nur auf Grundlage genauer Kenntnisse der zu errichtenden bzw. zu entfernenden Mengen an Stein, Erde und/oder Sand kalkulieren: dies konnte die erforderliche Menge an Arbeitern sein, oder der zu erwartende Tagesarbeitsfortschritt jedes einzelnen Arbeiters, der wiederum vor Ort genauestens überprüft und zur (gerechten) Entlohnung herangezogen wurde.[417]

Die Aufgaben pRhind Nr. 41-46 befassen sich mit der Volumenberechnung von zylindrischen und kubischen Getreidespeichern. pRhind Nr. 41 zeigt die Vorgehensweise zur Berechnung eines zylindrischen Getreidespeichers mit einem gegeben Durchmesser von 9 *mḫ* und einer Höhe von 10 *mḫ*.

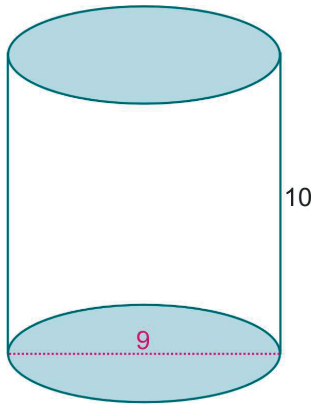
$\frac{1}{9} \cdot 9 = 1$ $9 - 1 = 8$ $8 \cdot 8 = 64$	Die Rechenvorschrift folgt zunächst den oben beschriebenen Schritten zur Berechnung der kreisförmigen Grundfläche. Das Ergebnis von 8 *mḫ* wird mit sich selbst multipliziert und ergibt so eine Grundfläche von 64 (*mḫ*^{2}). 
$64 \cdot 10 = 640$	Anschließend wird die Grundfläche mit der Höhe des Getreidespeichers von 10 Einheiten multipliziert und liefert ein Gesamtvolumen von 640 (*mḫ*^{3}).

Abb. 53 Berechnung des Trapezflächeninhalts, linke Spalte (in moderner Schreibweise nach Imhausen 2003: 78) mit Kommentar und Illustrationen, rechte Spalte.

[416] Vgl. Vogel 1958: 66; Imhausen 2003: 73.
[417] Vgl. Rossi 2010: 414 f.

Es fällt auf, dass in dieser Problemstellung mit exakt denselben Zahlwerten gearbeitet wird wie bei der Kreisaufgabe pRhind Nr. 48. Man darf davon ausgehen, dass dies zur Vereinfachung der exemplarischen Darstellung des Rechenverfahrens diente. Ein didaktisches Interesse lässt sich also postulieren.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit demjenigen, das die heute gebräuchliche Volumenformel für Zylinder liefert ($V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (\frac{9}{2})^2 \cdot 10 \approx 636{,}17$), ergibt sich eine Abweichung von 0,6%.

Analog hierzu wird in pRhind Nr. 44 die Volumenberechnung eines Würfels mit einer Länge, einer Breite und einer Höhe von je 10 Einheiten durchgeführt[418], die wie folgt aussieht:

(1) $10 \cdot 10 = 100$

(2) $100 \cdot 10 = 1000$

Die durchgeführten Schritte zeigen die Volumenberechnung nach der Formel

$V = Grundfläche \cdot Höhe$.

6.3.6 Volumen Pyramidenstumpf

Bis heute fehlen epigraphischen Nachweise auf die Kenntnis der allgemeinen Volumenformel für die Pyramide, doch ist die Volumenberechnung eines quadratischen Pyramidenstumpfes in pMoskau Nr. 14 belegt.[419] Wie auch die nachfolgende Darstellung nahelegt, ist davon auszugehen, dass die vergleichsweise einfachere Volumenberechnung einer vollständigen Pyramide den Ägyptern als bekannt angenommen werden kann (vgl. ROSSI 2010: 415).

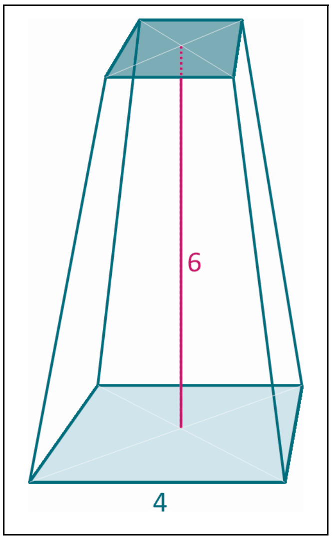


Abb. 54 Illustration des Pyramidenstumpfes aus pMoskau Nr.14.

Die Berechnungen des (immensen) Pyramidenvolumens dienten beispielsweise zur Abschätzung, ob ein gewählter Steinbruch für das gesamte Bauvolumen zu ausreichen würde,[420] und die Berechnung eines Pyramidenstumpfes könnte – da die Ägypter im Gegensatz zu anderen Hochkulturen keine Pyramidenstümpfe um ihrer selbst willen zu errichten pflegten – möglicherweise dazu genutzt worden sein, um zu

[418] Nach IMHAUSEN 2003: 143.
[419] Vgl. GERICKE 1996: 63.
[420] Vgl. ROSSI 2010: 416.

ermitteln, bei Erreichen welcher Bauphase der Zuliefersteinbruch möglicherweise würde gewechselt werden müssen, was wiederum zur besseren Planung der daraus folgenden praktischen, z.B. logistischen, Veränderungen gedient haben mag.

Im vorgestellten Problem geht es um die Berechnung eines quadratischen Pyramidenstumpfes mit der Höhe von 6 Einheiten, einer oberen Kantenlänge von 2 Einheiten und einer unteren Kantenlänge von 4 Einheiten.

Rechne du mit dieser 4 quadriert. Es entsteht 16.	Zunächst wird mit $4^2 = 16$ der Flächeninhalt der Grundfläche bestimmt.
Verdopple du 4. Es entsteht 8.	Der Rechenschritt $2 \cdot 4 = 8$ erklärt sich nicht unmittelbar und wird unten erläutert. Es ist bemerkenswert, dass der Text hier von einer Verdoppelung spricht, diesen Schritt also nicht erkennbar (!) mit der Kantenlänge der Deckfläche in Zusammenhang bringt.
Rechne du mit dieser 2 quadriert. Es entsteht 4.	Nun wird der Flächeninhalt der Deckfläche mit $2^2 = 4$ berechnet.
Addiere du diese 16 und diese 8 und diese 4. Es entsteht 28.	Die drei Einzelergebnisse werden addiert, was einen Hinweis darauf gibt, dass die „Verdoppelung“ doch als Flächenberechnung zu verstehen sein muss. $16 + 8 + 4 = 28$
Berechne $\overline{3}$ *von 6. Es entsteht 2.*	Nun wir die Höhe des Pyramidenstumpfes durch $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ gedrittelt.
Rechne du mit 28 2mal. Es entsteht 56.	Schließlich wird die so verminderte Höhe mit der Summe der drei Flächeninhalte zum Gesamtvolumen multipliziert: $28 \cdot 2 = 56$.

Abb. 55 Berechnung des Volumens des Pyramidenstumpfes pMoskau Nr.14, linke Spalte (nach GERICKE 1996: 63) mit Kommentar und in moderner Notation, rechte Spalte.

Das als Rechenvorschrift gefasste Vorgehen entspricht exakt der heute gebräuchlichen Formel:

$$V_{\text{qPyramidenstumpf}} = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}$$

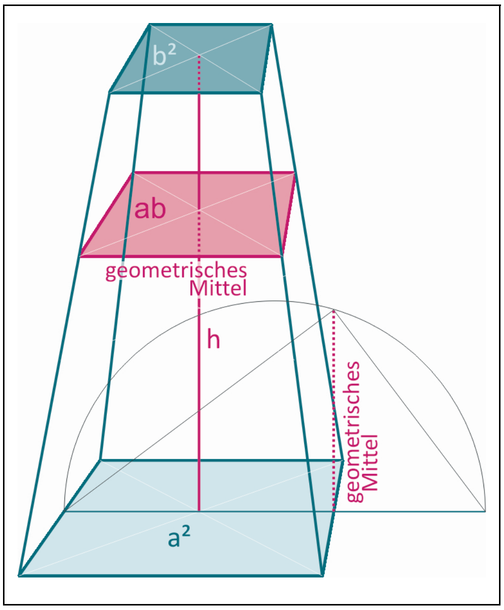


Abb. 56 Berechnung des Volumens eines quadratischen Pyramidenstumpfs mithilfe des geometrischen Mittels von Grund und Deckfläche.

Es gibt verschiedene Erklärungsansätze, auf Grundlage welcher geometrischen Idee die Ägypter zu dieser (korrekten) Berechnung kamen. Es gibt keine Beweise, dass sie die allgemeine Pyramidenformel kannten, dennoch rechneten sie im Zusammenhang mit dem Pyramidenstumpf mit dem Faktor $\frac{1}{3}$. Eine Interpretation lautet, dass die Ägypter zur Berechnung solcher Problemstellungen die Flächen und Volumina in einfachere und bereits bekannte Größen wie Dreiecke, Prismen und Pyramiden zerlegt und dann zu den gesuchten Körpern wieder zusammen gesetzt haben. Vogel dagegen mutmaßt, dass die Ägypter ausgehend von einer Näherung als Quader über die Mittelwertbildung der Flächen a^2 und b^2 mit der Höhe h bei der Suche nach einer Verbesserung „auf den Gedanken gekommen sein [könnten], zu a^2+b^2 noch ein drittes Flächenstück $a \cdot b$ dazu zunehmen und hieraus das Mittel zu bilden, das dann ein besseres Ergebnis bei einer experimentellen Kontrolle zeigte“ (VOGEL 1958: 72). Diese dritte, in die Mittlung einbezogene Fläche wird damit nicht hinreichend erklärt. Es sei an dieser Stelle vorgeschlagen, dass die Ägypter tatsächlich nicht willkürlich oder rein experimentell die Fläche $a \cdot b$ einbezogen haben, sondern bewusst das geometrische Mittel als Seitenlänge zugrunde legten.

6.4 Exkurs: Chinesische Geometrie

Auf die chinesische Mathematik soll an dieser Stelle nur kurz hingewiesen werden, da auch sie einige eindrückliche Problemaufgaben liefert, die das Verhältnis zwischen Geometrie und Methoden zur Problemlösung beleuchten. Cullen umreißt die wenig detaillierten Kenntnisse, die aus der Frühzeit der chinesischen Kulturgeschichte über das Gebiet der Mathematik überliefert und erforscht sind. Das Hauptinteresse an Zahlen scheint lange Zeit mystischer bzw. weissagender, vielleicht noch musikalischer Natur gewesen zu sein. Erst später wird eine systematische, umfassendere mathematische Bildung als relevant fassbar. Das primär interessante Werk, als *Chiu Chang Suan Shu* (nach Mathews) oder *Suan Shu Shu* (nach Cullen) bekannt, stammt aus dem 2. Jahrhundert v. Chr. und wurde im Grab eines mittleren Beamten gefunden. Der Text legt nahe, dass das in ihm enthaltene Wissen in erster Linie in schriftlicher Form weitergegeben wurde;[421] die Probleme werden einheitlich, klar gegliedert strukturiert präsentiert und folgen typischerweise dem Dreischritt *Problemstellung – Lösung – Beschreibung der Prozedur/Methode*. Es gibt auch Problemstellungen, für die mehrere unterschiedliche Lösungsmethoden dargestellt sind, was aus heuristischer Sicht interessant ist. Die geometrischen Problemstellungen befassen sich mit Fragen nach Längenmaßen, Flächen- und Rauminhalten unterschiedlichster Art.

Im Vergleich sowohl zu den babylonischen und ägyptischen Traditionen (Kap. 6.2 und 6.3) sowie der noch zu beschreibenden griechischen Tradition liefert das *Suan Shu Shu* für den chinesischen Kulturraum zwar Hinweise, dass es mathematische Spezialisten gegeben haben muss, aber es ist im Grunde nichts über ihre genaue Funktion oder ihren gesellschaftlichen Rang mit Sicherheit überliefert. Dass grundlegende Kenntnisse aber für wichtig erachtet und als Grundvoraussetzung für eine Karriere in der chinesischen Beamtenhierarchie betrachtet wurden, scheint hingegen unstrittig.[422] Diese Fähigkeiten waren beispielsweise für die Planung staatlicher Baumaßnahmen und Verwaltungsaufgaben relevant, ebenso wie für wirtschaftliche Kalkulationen.

<table>
<tr>
<td>

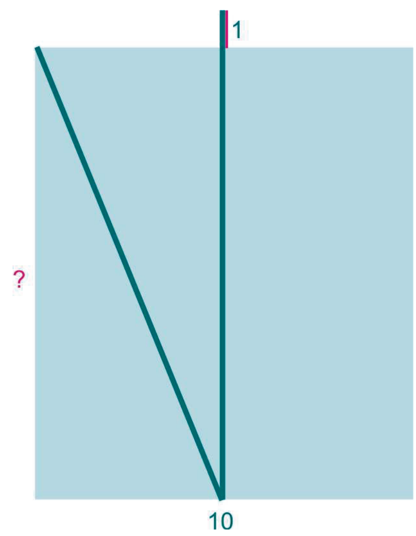
Problem 6. We now have a square reservoir, with side 1 chang [1 chang = 10 ch'ih; these are length units]. A reed is growing in the center and its top is 1 ch'ih out of the water. If the reed is inclined towards the shore, the top just reaches the water of the shore.

Question: What are the depth of the water and the length of the reed?

Answer: The water is 1 chang, 2 ch'ih and the reed is 1 chang, 3 ch'ih.

Rule: Multiply half of the side of the reservoir by itself; decrease this by the product of the length of the reed above the water with itself;

</td>
<td>

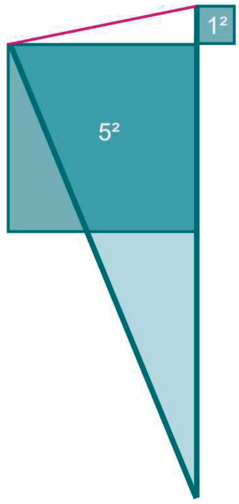


Die Vorschrift bezieht sich auf die Kathetenlängen 5 *ch'ih* und 1 *ch'ih* des rechtwinkligen Dreiecks oberhalb der Wasseroberfläche.

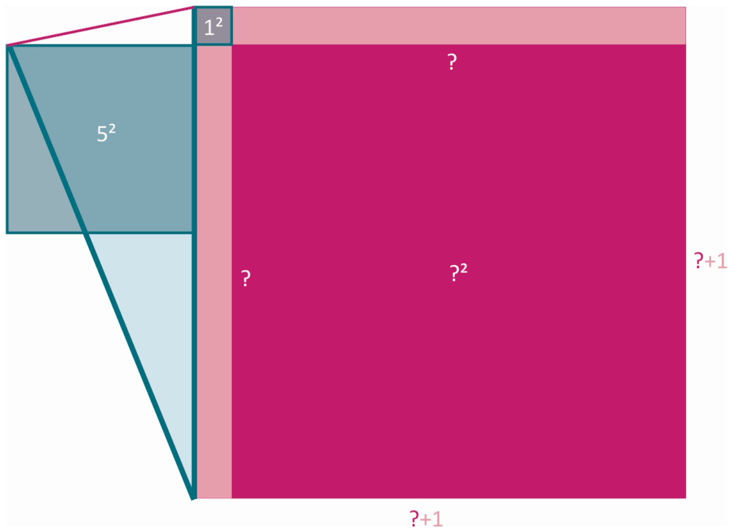
</td>
</tr>
</table>

[421] Vgl. Cullen 2010: 599 f.
[422] Vgl. Cullen 2010: 600.

Es macht den Eindruck, dass der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse in diesem Dreieck mit $5^2 - 1^2 = 24$ berechnet wird.



Dies ist aber wohl nur scheinbar der Fall. Tatsächlich dürfte es sich vielmehr um eine Zwischen-rechnung handeln, die sich erklärt, wenn die Figur unter Beachtung der ebenfalls vorliegenden Identität (in dem rechtwinkligen Dreieck „unter Wasser“) $5^2 = (? + 1)^2 - ?^2$ ergänzt wird zu:



divide the difference by twice the length of the reed above the water. This gives the depth of the water.

Der Rechenschritt $24 : 2 \cdot 1 = 12$ erschließt sich nun unmittelbar aus der Flächeninhaltsgleichheit des bereits bestimmten Wertes von 24 *ch'ih*^{2} mit dem Gesamtflächeninhalt $2 \cdot \textit{Länge über Wasser} \cdot ?$ der Gnomonkomplemente. Damit ist die Wassertiefe mit 12 *ch'ih* bestimmt.

Add to this the length of the reed above the water. This gives the length of the reed.

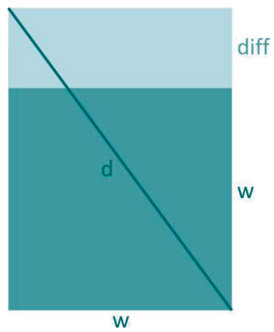
Dass schließlich zur Bestimmung der Gesamtlänge noch einmal das Stück oberhalb des Wassers addiert werden muss, ist trivial. Es ergibt sich eine Länge von 13 *ch'ih* des Halmes.

Abb. 57 Suan Shi Shi Problem 6., linke Spalte (nach Mathews 1985: 205) mit Kommentar, in moderner Notation und Illustration, rechte Spalte.

Diese Aufgaben lassen sich also ohne algebraische Schreibweise, durch den geschickten Vergleich von Flächen und gleichzeitiger Kenntnis weniger geometrischer Grundsätze (darunter auch Mathews' DST, vgl. Kap 6.1) lösen. In moderner Schreibung unter Nutzung der binomischen Formeln ist sie leicht nachvollziehbar als:

$$5^2 = (? + 1)^2 - ?^2$$
$$25 = ?^2 + 2 \cdot 1 \cdot ? + 1^2 - ?^2$$
$$25 - 1^2 = 2 \cdot 1 \cdot ?$$
$$\frac{25 - 1}{2 \cdot 1} = ?$$

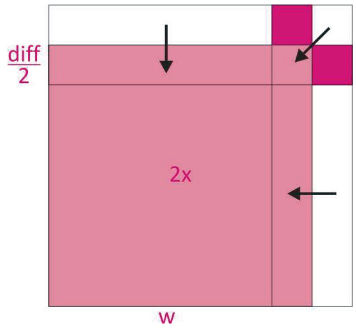
Durch die flexible Anwendung dieser Prinzipien lassen sich auch viele weitere Probleme erfolgreich bearbeiten, und vor allem lässt sich gut erkennen, wie die „Rezepte" sich aus solchen Überlegungen ableiten lassen. Da Problem 11 besonders deutlich auf die postulierte neolithische Tradition (Kap. 6.1) verweist, sei es hier kurz vorgestellt.

Problem 11. We now have a door whose height is 6 ch'ih, 8 ts'un [10 ts'un = 1 ch'ih] more than its width. The distance between the [diagonal] corners is 1 chang. *Question: What are the height and width of the door?* *Answer: The width is 2 ch'ih, 8 ts'un and the height is 9 ch'ih, 6 ts'un.* *Rule: Multiply 1 chang by itself; this is the beginning amount.*	Bekannt sind die Länge der Diagonalen *d* und *diff*, die Differenz zwischen Breite w und Höhe der Tür.  Zunächst wird der Flächeninhalt des Quadrats über den bekannten Länge d errechnet. Um den Rest der Rechnung nachzuvollziehen, ist zunächst zu vergegenwärtigen, dass $d^2 = w^2 + (w + diff)^2$. Nun entspricht diese Situation der in Kap. 6.1, zu Abb. 28 dargestellten Überlegung zur Addition zweier Quadrate, wonach in vorliegendem Fall gilt:

<table>
<tr><td></td><td>

$$d^2 = w^2 + (w + diff)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{w + w + diff}{2} + 2 \cdot (\frac{diff}{2})^2$$



</td></tr>
<tr><td>Multiply half of the difference by itself, double the result and subtract this from the beginning amount.</td><td>Nun wird nichts anderes getan, als $(\frac{diff}{2})^2 \cdot 2$ zu bestimmen und von d^2 zu subtrahieren.</td></tr>
<tr><td>Halve the remainder and take the square root.</td><td>Der so ermittelte Wert wird halbiert, womit wir geometrisch nunmehr die (einfache) Größe des oben rosa eingefärbten Quadrats über dem arithmetischen Mittel von w^2 und $(w + diff)^2$ bestimmen.

Durch das anschließende Ziehen der Wurzel ist also die Länge $\frac{w+diff}{2}$ ermittelt.</td></tr>
<tr><td>Decrease this result by half of the difference – this is the width of the door.</td><td>Reduziert man diesen Wert um $\frac{diff}{2}$ ergibt sich die Breite der Tür.</td></tr>
<tr><td>Increase the result by half the difference-this is the height of the door.</td><td>Vergrößert man um denselben Wert, so hat man die Höhe der Tür gefunden.</td></tr>
</table>

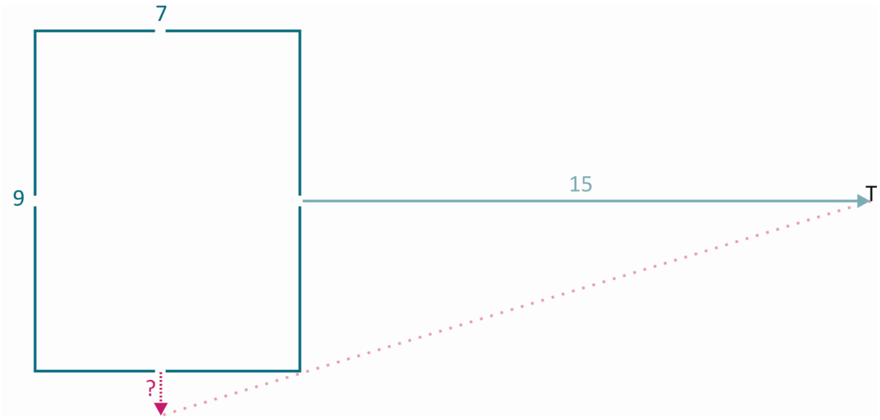
Abb. 58 Suan Shi Shi Problem 11., linke Spalte (nach MATHEWS 1985: 206 f.) mit Kommentar, in moderner Notation und Illustration, rechte Spalte.

Abschließend soll hier noch ein Beispiel aus dem *Suan Shu Shu* präsentiert werden, da es einen deutlich abweichenden Lösungsansatz für eine Art von Problem bietet, die bei Ägyptern und Babyloniern (von den Griechen ganz zu schweigen) gewiss mit der ihnen je eigenen Variante von *Ähnlichkeit* bearbeitet worden wäre. Die Chinesen wählen hier hingegen einen anderen Weg, der nicht den rechnerischen Aspekt, sondern durch erneute Nutzung der Kenntnisse über Gnomone den im ursprünglichen Sinne des Wortes geometrischen Aspekt der Problemsituation in den Mittelpunkt stellt.

Problem 18. Now we have a city with a rectangular boundary. From east to west it measures 7 li and from north to south 9 li. In the middle of each side is an open door. If we go out the east door 15 li we come to a tree.

Question: How many steps out the south door must we go to see the tree?

Answer: 315 pu.

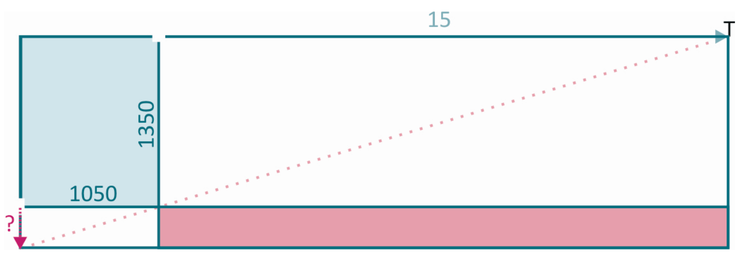


Rule: Multiply the number of steps from the east door towards the south, just up to the corner, by the number of steps from the south door east, just up to the corner. The product is the dividend.

Wegen 1 *li* = 300 *pu* berechnen wir also den gekennzeichneten Flächeninhalt als:

$3{,}5\ li \cdot 4{,}5\ li = 1050\ pu \cdot 1350\ pu = 1417500\ pu^2$

Da Gnomonkomplemente flächeninhaltsgleich sind, ist auch die rosa eingefärbte Fläche 1417500 pu^2 groß.



Take the number of steps the tree is from the door as divisor. Divide the dividend by the divisor.

Da die Länge des zweiten Gnomonkomplements mit 15 *li* = 4500 *pu* jedoch gegeben ist, lässt sich die gesuchte Entfernung, also die Breite des Gnomonkomplements, als $1417500\ pu^2 : 4500\ pu = 315\ pu$ bestimmen.

Abb. 59 Suan Shi Shi Problem 18, linke Spalte (nach MATHEWS 1985: 212) mit Kommentar, in moderner Notation und Illustration, rechte Spalte.

6.5 Geometrie der Griechen

Mit den Griechen erfolgt ein tiefer Bruch in der Geschichte der Mathematik, die zu diesem Zeitpunkt (ab etwa 600 v. Chr.) bereits auf eine sehr lange Tradition zurückblickte. Die Griechen gingen von Rechenvorschriften zu allgemeinen, definierenden Sätzen über, strafften die Inhalte dadurch, „so daß Kräfte für neue Entdeckungen frei werden" (GERICKE 1996: 111). Diese Einschätzung mag ein Stück weit außer Acht lassen, dass es primär „Entdeckungen" in der selbst geschaffenen neuen, axiomatischen Mathematik waren – nicht solche, die in direktem Bezug zu den früheren „Forschungsfragen"[423] standen. Die große Wertschätzung[424] dürfte zu einem großen Teil ihrer bis heute dominierenden Stellung im gesamten wissenschaftlichen Diskurs geschuldet sein.

Obwohl die griechische Mathematik bis auf den heutigen Tag so nachhaltigen Einfluss ausübt, gibt es nur sehr wenige Überlieferungen aus der frühesten Entstehungszeit dieses mathematischen Wissens, so dass die Rekonstruktion der genauen Anfänge dieses Wandels schwierig zu fassen sind. Originales Quellenmaterial gibt es gar keines, mehr oder weniger originalgetreue Abschriften stammen frühestens aus dem 9. Jahrhundert n. Chr., wobei viele dieser Abschriften auch nur Fragmente der ursprünglichen Ganzschriften umfassen. Durch die vielfachen Kommentierungen und Bearbeitungen, Editionen und Zusammenstellungen vorhandenen Materials verkompliziert sich die Datenlage noch weiter (vgl. auch Kap. 3.3). Tatsächlich gibt es an dieser Stelle nicht viel, was die griechische Geometrie im Sinne der vorliegenden Arbeit beitragen kann, da die bis heute überlieferten Problemstellungen nur in wenigen Einzelfällen noch Rückschlüsse auf ihre Entstehungszusammenhänge zulassen. Dieser Umstand ist durch die doppelgesichtige Natur der griechischen Mathematik begründet, um die es im Folgenden kurz gehen soll.

Zur Natur der griechischen Mathematik

Die griechische Tradition hat die Mathematik fraglos geprägt wie keine andere. War man lange Zeit weder an den Entstehungshintergründen noch am Kontext interessiert, setzt sich in der jüngeren Vergangenheit die Erkenntnis durch, dass „die berühmten [griechischen] Mathematiker nur die Spitze eines Eisberges sind, der aus mehreren neben einander

[423] Der Begriff der Forschungsfrage mag kontrovers sein; der Autor folgt jedoch Høyrups Hauptthese, dass insebsondere die babylonische Mathematik sehr wohl fundamentale Fragen an ihr eigenes Handeln stellte und ihren Erkenntnisbereich systematisch zu erweitern suchte.

[424] Die in ihrem Ausmaß und ihrem mittelrweile erlangten Totalitätsanspruch durchaus an Überhöhung grenzt und Traditionen anderer Kulturräume oder Epochen nicht selten grundsätzlich infrage stellt.

existierenden und sich teilweise überschneidenden mathematischen Praktiken[425] bestanden haben muss“ [426] (ASPER 2010: 107).

Das Zerrbild basiert auf der problematischen Überlieferungskultur und der von den Griechen selbst betriebene Überbetonung der einen von zwei komplett getrennten *mathematischen Kulturen.*[427] Auch wenn dies ein lange Zeit weitgehend ignorierter Aspekt der (antiken) Historiographie war, so häufen sich inzwischen Belege, die zeigen, dass diese neue Mathematik der Griechen mit ihrem rein axiomatischen Aufbau letztlich nicht ohne Kontext und gedacht werden kann und es auch im griechischen Kulturraum eine uralte Tradition der Praktiker gab, die sich mit ganz vergleichbaren Problemstellungen wie die in den vorhergehenden Kapiteln geschilderten befasste und mit einiger Wahrscheinlichkeit auf genau dieser teils jahrtausendealten Überlieferung aus babylonischer und ägyptischer Zeit beruhte, möglicherweise nicht nur durch Wissenstransfer, sondern auch durch unmittelbare Migrationsbewegungen in der griechischen Frühzeit.[428] Asper benennt als die zwei wichtigsten Spezialistengruppen die *pebble arithmeticians* und die Geometer (zu denen die *harpedonaptai*, die Landvermesser, gehörten) und kommt mit Blick auf zeitgenössische Quellen zu dem Schluss:

> *[...] these sub-literary texts Greek texts were written in the first and second century AD, mostly in Egypt. The problems they solve are so basic that one can hardly imagine that these methods were not also used much earlier in Greece. They provide, however, a glimpse at a remarkably strong tradition, of which they are probably only a local, rather late branch. Another, older part of this tradition is much better known, by thousands of texts preserved on clay tablets found in the Near East. (ASPER 2010: 111 f.)*

Die dominierende und langfristig, d.h. bis heute, primär in Erscheinung tretende mathematische Kultur jedoch ist die „euklidische“, die axiomatisch aufgebaute, rein logisch-deduktiv operierende, die nach sehr unklaren Anfängen maßgeblich durch Platon und seine Schule in der athenischen Periode geprägt wurde.[429] Sie entstand in einem kleinen, elitären Kreis einer Bildungs- und auch politischen Elite – wenn man Asper folgt wahrscheinlich zunächst als Erweiterung oder Nebenprodukt der bereits uralten praktischen Mathematik (vgl. ASPER 2010: 122). In der damaligen Zeit dürfte sie kaum gesamtgesell-

[425] Das englische Wort „pratices“ lässt sich schwierig vollumfänglich übersetzen, es umfasst in diesem Zusammenhang mathematische Handlungsfelder aber auch berufliche Zweige, die sich mit Mathematik befasst haben.
[426] Original auf Englisch, eigene Übersetzung.
[427] Der Ausdruck ist von Asper übernommen, der seine Überlegungen sehr überzeugend verargumentiert (2010).
[428] Vgl. ASPER 2010: 113.
[429] Vgl. SCRIBA/SCHREIBER 2005: 38.

schaftliche Relevanz besessen haben, abseits eines gewissen quasi-sportlichen Messens der Geisteskräfte. Die ungleiche Überlieferung der beiden *mathematischen Kulturen* ist in erster Linie sozial bedingt.

> *Despite the astonishing prominence of theoretical mathematics in modern times, which invites anachronistic re-projections, in ancient Greece theoretical mathematics must always have been an epiphenomenon, or rather, a marginal differentiation, of strong practical traditions. (ASPER 2010: 128)*

Der letztlich entscheidende Impuls zur Axiomatisierung ging von Aristoteles[430] aus, der eine Wissenschaft durch Definition ihrer Elemente definiert hat: Grundsätze, Lehrsätze, Grundbegriffe und abgeleitete Begriffe.[431] Als problematisch erweist sich der Evidenzbegriff[432] des Aristoteles, der in der modernen Mathematik durch das Postulat der Widerspruchsfreiheit abgelöst wurde. Diese Ablösung von dem Wahrheitsbegriff ist es jedoch, die (bis heute) Gefahr birgt, Mathematik nur als leeres Spiel mit Symbolen zu sehen (vgl. MESCHKOWSKI 1979: 63). Das nach Aristoteles konstruierte System hatte Schwächen und die „platonisch-aristotelische" Art von Mathematik, die ihre höchste Form in der Abkehr von jedem Praxis-, vielleicht auch Realitätsbezug fand, wurde auch durchaus nicht allseits als einzig wahre oder überlegene Variante wahrgenommen. Besonders Archimedes bildete mit seiner „angewandten Mathematik" ein gewisses Gegengewicht und hielt sich in seinen mathematischen Arbeiten auch keineswegs an die Reinheit der logischen Deduktion, da er sich auch physikalischer Argumente in der Beweisführung bediente und allgemein die Ebene der Anschaulichkeit nutzte, die von den „Puristen" nicht akzeptiert wurde.[433]

Mit Blick auf die reiche mathematische Tradition der vorgriechischen Kulturen ist also festzustellen, dass die Geometrie der Griechen nicht durch neue Entdeckungen und Erfindungen überzeugt, sondern vielmehr als neuartige, eine von grundauf logisch-deduzierende Wissenschaft in Erscheinung tritt.

> *Hier vollzog sich der in der Geschichte einmalige Wandel von einer auf Rezepten und vagen Begriffen beruhenden Praxis zu einer aus Definitionen, Axiomen und streng logisch*

[430] Aristoteles (Ἀριστοτέλης), *384 in Stageira (Makedonien), †322 auf Euböa, einer der bis heute bekanntesten und bedeutendsten Philosophen; er war Schüler Platons und lange Zeit Mitglied dessen Akademie, wurde später Lehrer des makedonischen Thronfolgers Alexander (genannt *der Große*) und gründete schließlich eine eigene Schule (ebenfalls in Athen), genannt Lykeion Peripatos.
[431] Eine knappe Übersichtsdarstellung findet sich in MESCHKOWSKI 1979: 61.
[432] Evident im Sinne von unmittelbar ersichtlich *wahr*. Evidenz ist mit dem Gedanken der *Wahrheit* von Erkenntnis und Einsicht untrennbar verknüpft.
[433] Was insofern ein wenig befremden muss, als Aristoteles selbst die Mathematik im Kern als Abstraktion physikalischer Anschauungen betrachtete (SCRIBA/SCHREIBER 2005: 40).

> *bewiesenen Lehrsätzen bestehenden Theorie. Das hiermit begründete Erbe war mehr als 2000 Jahre lang so mächtig, daß der Mathematiker meist als Geometer und die von den Griechen am Beispiel geometrischen Stoffes begründete axiomatisch-deduktive Methode der Erkenntnissicherung als „mos geometricus" bezeichnet wurde. (SCRIBA/SCHREIBER 2005: 1)*

Wie dieser Schritt vollzogen wurde, bleibt spekulativ. Sehr frühe Hinweise lassen sich bei zwei lange, möglicherweise seit der Jungsteinzeit (vgl. Kap. 6.1), bekannten Sätzen finden: Der „Satz des Thales" kann mit einiger Sicherheit als der erste bewiesene Satz der griechischen Mathematik gelten, auch wenn Thales selbst wohl eher eine Plausibilitätsbetrachtung gelungen sein dürfte – der Weg in Richtung des späteren, „euklidisch" genannten Systems war dennoch eingeschlagen. Auch den sogenannten „Satz des Pythagoras" stellten erst die Griechen auf ein bewiesenes Fundament, auch wenn gezeigt wurde, wie virtuos und vielfältig das Wissen um diesen Satz bereits lange eingesetzt wurde. Im Übrigen schreibt Proklos nicht nur, Thales[434] sei der erste Mathematiker gewesen, sondern, dass er die Mathematik aus Ägypten nach Griechenland gebracht habe.[435]

6.5.1 Pyramidenhöhe

Wie schon die Ägypter und Babylonier, beschäftigten sich die Griechen, und der Überlieferung zufolge bereits Thales von Milet, mit dem Problem, die Höhe von Gegenständen, speziell der Pyramiden, zu bestimmen. Während die Ägypter die Höhe aus dem Rücksprung (*seqet,* vgl. Kap. 6.3.2) und der Kantenlänge der Grundfläche der Pyramide selbst bestimmten,[436] scheint Thales' Lösung auf den Haupteigenschaften des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks (HAUSER 1955: 47) und den daraus resultierenden unmittelbar identischen Seitenlängen basiert zu haben (s. Abb. 60).[437]

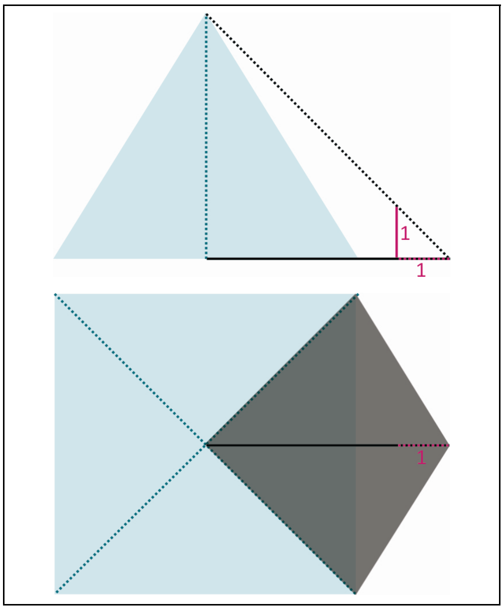


Abb. 60 Illustration der Bestimmung der Pyramidenhöhe bei einem Verhältnis von Schattenlänge zu Körperhöhe von 1:1.

[434] Thales von Milet, ca. 600 v. Chr. gilt als erster griechischer (Natur-)Philosoph und früher Mathematiker. Ihm wird die Formulierung einiger grundlegender mathematischer Sätze zugeschrieben.
[435] Vgl. SCRIBA/SCHREIBER 2005: 28.
[436] Vgl. GERICKE 1996: 60 f.
[437] Diogenes Laertios (I, 1,27) schreibt dazu: „Hieronymus berichtet, er habe die Höhe der Pyramiden gemessen vermittelst ihres Schattens, den er genau in dem Zeitpunkt abmaß, wo unser Schatten und unser Leib die gleiche

Andere Autoren sind der Ansicht, dass Thales die (beliebige) Länge des Pyramidenschattens benutzt und diesen ins Verhältnis zu der Schattenlänge eines Stabes mit bekannter Länge setzte, [der an der Schattenspitze der Pyramide senkrecht im Boden stand].[438] Daraus ergab sich, dass sich die Länge des Stabes zur Höhe der Pyramide verhält, wie der Schatten des Stabes zum Pyramidenschatten (s. Abb. 61 (1)). Doch selbst wenn man also annimmt, dass Thales mit anderen Seitenverhältnissen als dem 1:1 gearbeitet hat, besteht – zur Vermeidung einer zusätzlichen Rechnung (s. Abb. 61 (3), Draufsicht) – weiterhin die Notwendigkeit, die Messung genau dann vorzunehmen, wenn der Schatten der Pyramidenspitze senkrecht zu einer ihrer Grundkanten fällt (s. Abb. 61 (2), Draufsicht).

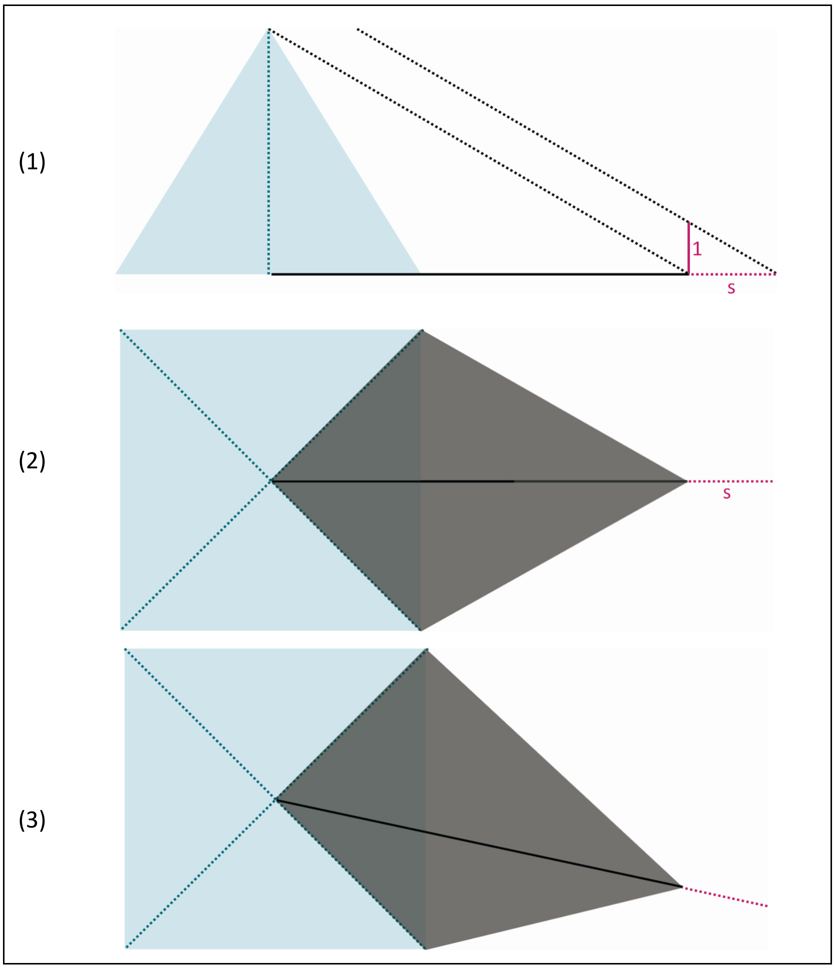


Abb. 61 Illustration der Bestimmung der Pyramidenhöhe bei einem beliebigen Verhältnis von Schattenlänge s zur Körperhöhe.

Thales werden darüber hinaus – basierend auf den von den Ägyptern und Babyloniern entwickelten geometrische Erkenntnissen – sechs grundlegende Theoreme der Geo-

Länge haben." (zit. nach GERICKE 1996: 75) Dass dieses Verfahren nur bei einem Böschungswinkel >45° funktionieren kann, ist offensichtlich.

[438] Vgl. BECKER 1966: 37.

metrie[439] zugeschrieben; er soll erste Beweisversuche unternommen haben, womit er als Erster grundlegende geometrische Sätze in eine abstrakt-theoretische Form gebracht und damit die abstrakte lineare Geometrie eingeführt hätte.[440] Auch war er es möglicherweise, der den Winkelbegriff erstmals in die Geometrie einbrachte.[441]

6.5.2 Entfernungsbestimmung

Thales wurde auch eine (nicht genau überlieferte) Methode zur Bestimmung der Entfernung von Schiffen auf dem Meer zugeschrieben, zu der ebenfalls die geometrischen Erkenntnisse der Ägypter und Babylonier herangezogen wurden.[442] Es gibt verschiedene Hypothesen, nach denen ein der *groma* verwandtes Werkzeug benutzt wurde, um beispielsweise auf ein Schiff zu peilen, den Winkel zu fixieren und die Apparatur dann so zu drehen, dass landseitig in einem kongruenten Dreiecks ein Punkt in identischer Entfernung angepeilt werden konnte, dessen Entfernung vom Fußpunkt des Turms (Länge a' in Abb. 62) sich ohne Schwierigkeiten durch Messung feststellen ließ.

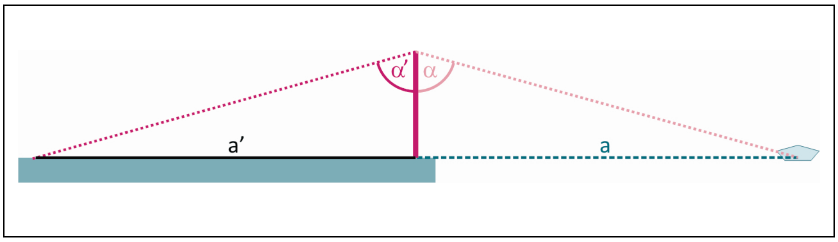


Abb. 62 Illustration der Bestimmung der Entfernung eines Schiffes durch Nutzung eines kongruenten Dreiecks auf Land.

Diese Methode steht in direktem Zusammenhang mit Thales' viertem Theorem, wonach ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel vollständig bestimmt wird. In dem vorliegenden Fall ist das Primärdreieck gebildet aus Turmspitze und Fußpunkt und Schiff sowie der bekannten Höhe des Turms, des durch Messung erhaltenen Winkels an der Turmspitze und dem rechten Winkel am Fußpunkt des Turms.[443]

---

[439] 1. Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich (Euklid, Elemente I,5). 2. Die Scheitelwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind gleich (Euklid I,15). 3. Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt, oder anders: Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen in allen Stücken überein (Euklid I, 26). 5. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbieren einander. 6. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter. (nach Scriba/Schreiber 2005: 31 f.)

[440] Vgl. Hauser 1955: 45-46, 47.

[441] Vgl. Gericke 1996: 79; Scriba/Schreiber 2005: 33.

[442] Vgl. Scriba/Schreiber 2005: 33.

[443] Vgl. Becker 1966: 37.

6.5.3 Die geometrische Arithmetik

Mit Blick auf den Zusammenhang zwischen Geometrie und der Entstehung allgemeinerer Problemlösefähigkeiten ist auch die Methode geometrische Arithmetik der frühen griechischen Mathematiker (besonders der Pythagoreer) von Interesse; die Vereinigung von arithmetischen Grundbegriffen mit geometrischen Kenntnissen ermöglichte es, Zahlen zu „figurieren". Auf diese Weise ließen sich Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Rechteckzahlen oder Kubikzahlen geometrisch darstellen, so dass ihre Eigenschaften erforscht und Zusammenhänge veranschaulicht werden konnten. Auch wenn die geometrischen Eigenschaften hier in erster Linie für zahlentheoretische Erkenntnisse genutzt wurden, wird die argumentative Kraft der Geometrie auch für die „reine" Mathematik hier besonders deutlich. Mit Blick auf die oben dargestellten Aufgaben liefern die figurierten Quadratzahlen ein eindrückliches Beispiel (s. Abb. 63).

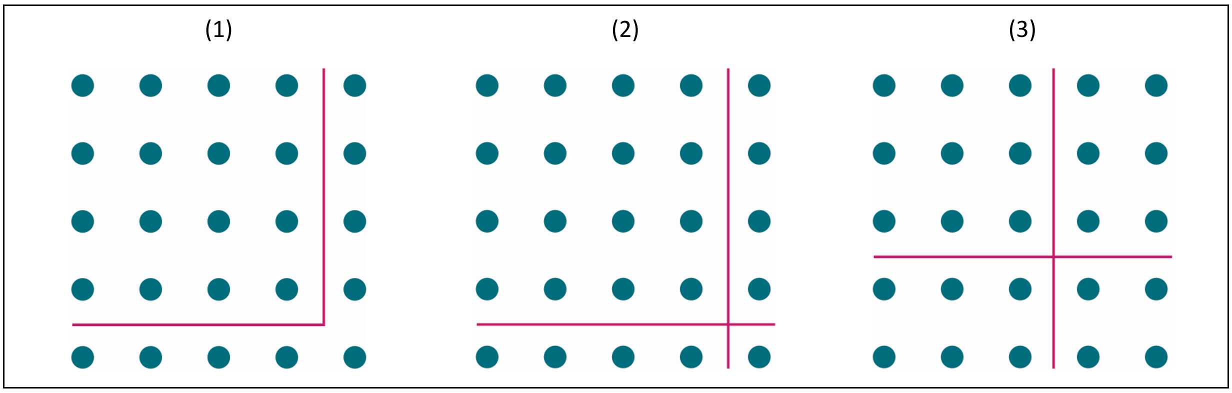


Abb. 63 Geometrische Arithmetik: Beispiel für die Untersuchung der Quadratzahlen.

Um von einer Quadratzahl n^2 ausgehend die nächstgrößere Quadratzahl $(n+1)^2$ zu bestimmen, muss offen-sichtlich $2n+1$ addiert werden. Es gilt also $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, oder auch ebenso einsichtig $(n+2)^2 = n^2 + 2 \cdot 2n + 2^2$, was wiederum unmittelbar mit den zeichnerisch-geometrischen Kenntnissen und Verfahren der Flächenzerlegung (und Flächeninhaltsberechnung) von Quadraten, wie sie bereits spätestens seit babylonischer Zeit verwendet wurden, in Einklang steht. Diese Darstellungsweise kann außerdem praktisch für alle folgenden Beispiele der geometrischen Bearbeitung ebenfalls benutzt werden und für natürliche Zahlen unmittelbar rechnerische Lösungen liefern.

6.5.4 Inkommensurabilität

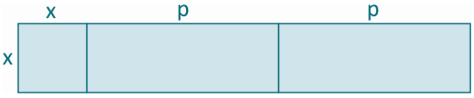
Die Entdeckung der Inkommensurabilität von Strecken – bei der Untersuchung von $\sqrt{2}$ – stürzte die griechische, oder zumindest pythagoreische, Mathematik[444] zunächst in eine Krise, zerstörte sie doch ihr Bild von der Arithmetik als „die Lehre von der allgemeinen Eigenschaft der ganzen Zahl" (HAUSER 1955: 74), die „das Wesen aller wahrnehmbaren Dinge sei" (HAUSER 1955: 78). Der Entdeckung der Inkommensurabilität ging die Frage voraus, welche Länge die Diagonale im Einheitsquadrat besitzt. Die Pythagoreer mussten erkennen, dass sie zwar in der Lage waren, jedes beliebige rationale Zahlenverhältnis geometrisch abzubilden, sich aber umgekehrt nicht jedes geometrisch auftretende Streckenverhältnis als (ganzzahliges) Zahlenverhältnis darstellen ließ.[445]

Die Entdeckung inkommensurabler Strecken führte jedoch auch dazu, dass die Geometrie in den Augen der griechischen Mathematiker klar über der Arithmetik stand, war sie doch als einzige in der Lage, Lösungen für Zahlwerte zu liefern, die sich der arithmetischen Behandlung letztlich entzogen. Vor diesem Hintergrund erklärt sich wohl die geometrische Gesamtausrichtung der (klassischen) griechischen logisch-deduktiven Mathematik, die sich insbesondere auch beim Lösen von Gleichungen manifestiert. Es war Eudoxos von Knidos (vgl. Kap. 5.1), der die Proportionenlehre umformulierte und „die Geometrie von den pythagoreischen Fesseln, der Beschränkung auf rationale Größen [befreite]" (SCRIBA/SCHREIBER 2005: 39). Es entwickelte sich eine geometrische Algebra[446], für die nun ein Beispiel angeführt sei, das sich unschwer mit den Ausführungen zur aktuell insbesondere von Høyrup postulierten babylonischen Algebra in Kapitel 6.2 in Verbindung bringen lässt.

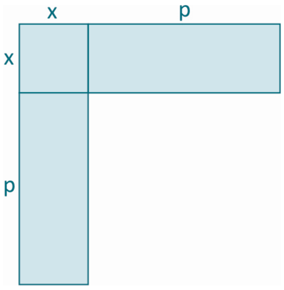
6.5.5 Quadratur von Polygonen

Die Griechen waren mittels geometrischer Konstruktion in der Lage, Flächen verschiedener Form unter Wahrung der Flächeninhaltsgleichheit ineinander zu überführen. Der sogenannte „Satz des Pythagoras" erlaubte es, zwei Quadrate in ein einziges flächeninhaltsgleiches Quadrat zu überführen. Die Lösung der Gleichung $x^2 + 2px = a^2$ stellt sich geometrisch als Problem zur Umwandlung eines beliebigen Rechtecks in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat (oder umgekehrt) dar.

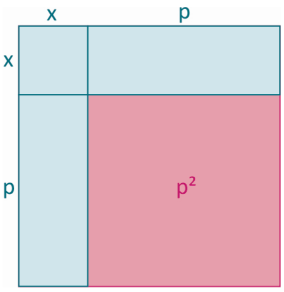
[444] Insbesondere die wichtige Schule (und religiöse Gemeinschaft) der Pythagoreer, die sich auf die historisch kaum fassbare Person des Pythagoras von Samos zurückführten, waren von dieser Entdeckung betroffen.
[445] Vgl. HAUSER 1955: 61.
[446] So schreibt HAUSER 1955: 81.



Das gegebene Rechteck kann in ein Quadrat über der kürzeren Seitenlänge x und zwei kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen x und p (mit $p = \frac{Gesamtlänge - x}{2}$) zerlegt werden. Sein Flächeninhalt wäre damit $A_{Rechteck} = x^2 + 2px$

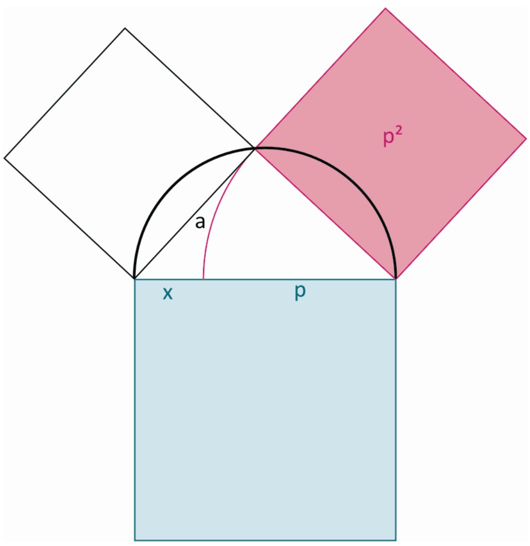


Durch Umarrangieren, lässt sich das Rechteck in ein Gnomon des Quadrats mit der Seitenlänge x+p transformieren.



Eine Ergänzung der Fläche p^2 zeigt, dass der Flächeninhalt des Gnomons mit der Differenz $(x+p)^2 - p^2$ identisch ist.

Geometrisch die Differenz zweier Quadrate zu bilden, ist durch Nutzung des „Satzes des Pythagoras“ und des Thaleskreis trivial.



Das Ausgangsrechteck ist mit dem so gefundenen Quadrat über der Strecke a flächeninhaltsgleich.

Algebraisch lässt sich der Vorgang (in moderner Schreibung) fassen als:

$$x^2 + 2px = (x+p)^2 - p^2$$

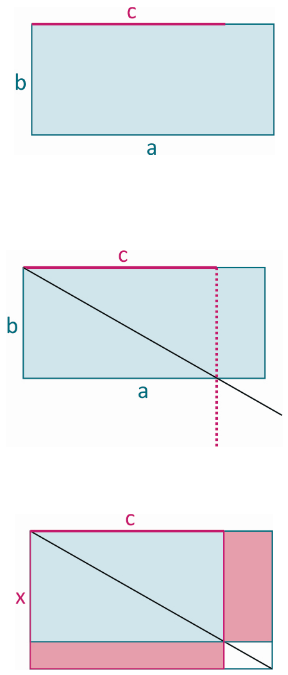
$$x^2 + 2px + p^2 = (x+p)^2$$

$$a^2 + p^2 = (x+p)^2$$

Dieses Verfahren ist heute als quadratische Ergänzung bekannt.

Abb. 64 Umwandlung eines beliebigen Rechtecks in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat. Geometrische Lösung (links), Kommentar und algebraische Lösung in moderner Schreibweise (rechts).

Außerdem war es auf Grundkenntnisse zu kongruenten Dreiecken und dem Prinzip der Flächeninvarianz aufbauend in Kombination unproblematisch, ein Rechteck durch die „Flächenanlegung" (GERICKE 1996: 87) in ein beliebiges andere Rechteck (oder eben ein Quadrat, s. o.) zu transformieren. Eine solche geometrische Bearbeitung kann für folgendes Problem angewandt werden:



Ein Rechteck, von dem die Längen der Seiten a und b (und damit sein Flächeninhalt) bekannt sind, soll in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seitenlänge c überführt werden. Algebraisch entspricht dies der Gleichung: $cx = ab$.

Unter Nutzung der vorgegebenen Seite c wird die Diagonale des Rechtecks $c \cdot b$ konstruiert und auf dieser Grundlage anschließend ein Rechteck mit derselben Diagonale, aber der Seitenlänge a.

Das so gewonnene Rechteck $x \cdot a$ bildet bei Subtraktion des Rechtecks $c \cdot b$ ein Gnomon. Da das Gnomonkomplement $(a - c) \cdot b$ flächeninhaltsgleich mit $(c - b) \cdot c$ ist, gilt unmittelbar $c \cdot x = a \cdot b$.

Abb. 65 Umwandlung eines beliebigen Rechtecks in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seitenlänge (c). Geometrische Lösung (links), Kommentar und algebraische Lösung in moderner Schreibweise (rechts).

Da sich ein beliebiges Vieleck stets in Dreiecke zerlegen lässt, die sich ihrerseits zu Rechtecken ergänzen lassen, ist die Berechnung des Flächeninhalts jedes Polygons durch Addition (und anschließende Halbierung) aller so entstandener Rechtecke möglich. Gericke weist darauf hin, dass es für die Zusammenfassung der Rechtecke zwei grundsätzliche Optionen gibt:

1. Alle Rechtecke werden in Quadrate transformiert, die sich dann nacheinander mittels des „Satzes des Pythagoras" addieren lassen.
2. Eine Seitenlänge wird festgelegt und alle Rechtecke zu solchen mit dieser gemeinsamen Seitenlänge durch Flächenanlegung umgewandelt.

Aus diesen zwei kleinen Beispielen ist erkennbar, dass fortan das Problem, das es zu lösen gilt, im Grunde nur noch ein der wissenschaftlichen Exploration und der Mathematik inhärentes ist. Praktische Bezüge lassen sich nur gelegentlich als treibende Kräfte hinter der formal aufgebauten Gesamtkonstruktion erkennen. Dass auch (und auch gerade) die Suche nach Problemlösungen in diesem Umfeld das Nachdenken über die Metaebene der Heuristik befördert hat, ist unstrittig, und sicher lässt sich die weitere Problemgeschichte dahingehend untersuchen. Für das Anliegen dieser Arbeit sind sie nicht unmittelbar interessant und werden nicht vertieft.

6.5.6 Würfelverdopplung

Die Würfelverdopplung ist als eines der „drei klassischen Probleme der [antiken] Geometrie“ in die Geschichte eingegangen. Die Würfelverdopplung, auch unter dem Namen „delisches Problem“ bekannt, beschäftigte seinerzeit nicht nur die Griechen, sondern auch die Inder. Ausgangspunkt bildete bei den Griechen das würfelförmige Grabmal des Königs Glaukos bzw. ein Altar bei den Indern, deren Volumen – unter Beibehaltung seiner Form – verdoppelt werden sollte.[447] Versuche, das Problem durch die Verdopplung der Seiten oder mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu lösen, schlugen fehl.

Die geometrische Lösung dieses Problems gelang erstmals Archytas von Tarent. „Die Konstruktion des Archytas ist ein typisches Beispiel für die Art, wie in der Antike ein Problem angegangen wurde: Aus der Annahme, das Problem sei gelöst, werden möglichst viele Folgerungen hergeleitet“ (KORDOS 2003: 56). An diesem Beispiel lässt sich also möglicherweise ein heuristisches Verhalten erkennen, das wir heute dem Rückwärtsarbeiten zuordnen würden.

[447] Vgl. SCRIBA/SCHREIBER 2005: 40.

6.6 Übersicht

Die folgende Tabelle bietet abschließend eine knappe Zusammenschau der in diesem Kapitel dargestellten Aufgaben. In Klammern gesetzte Markierungen zeigen an, dass der Bezug zu dem genannten mathematischen Inhalt nur am Rande, indirekt oder nicht gesichert hergestellt wird.

Thema		Babylonier	Ägypter	Chinesen	Griechen
Längenberechnungen	(Flächenhalbierende) Transversalen	x			
	Sehne/Pfeil	x			
	Ähnlichkeitsbeziehungen nutzen	x	x		x
	(Näherung für irrationale) Quadratwurzeln	x	x	x	
Flächeninhalts-berechnungen	Näherungsformel für allgemeine Vierecke	x	x		
	Quadrat und Rechteck	x	x	x	x
	Gleichschenkliges Dreieck		x		
	Rechtwinkliges Dreieck	x	x		
	Gleichschenkliges Trapez	x	x		
	Allgemeines Trapez	x	(x)		
	Kreis	(x)	x		
	Ähnlichkeit/Proportionalität nutzen	x	x		
	regelmäßige Polygone mit n>4	x			
Volumenberechnung	Zylinder		x		
	Würfel		x		x
	Pyramidenstumpf	(x)	x		
	Pyramide		(x)		
	Prismen	x			
Anwendung des DST[448]/“Satz des Pythagoras“		x		(x)	x
Kreiszahl π		(x)	x		
Geometrische Lösung algebraischer/arithmetischer Probleme[449]		x			x
Methode des falschen Ansatzes		x			

Tab. 21 Übersicht zu den in Kap. 6 vorgestellten geometrischen Fragestellungen.

[448] „Diagonal Square Theorem“, Alternativbegriff für die irreführende, aber so gebräuchliche Bezeichnung „Satz des Pythagoras“, nach MATHEWS 1985, s. auch Kap. 6.1.

[449] Diese Charakterisierung ist sicherlich kontrovers. Mit Blick auf einige babylonische Problemstellungen (etwa AO 8862) ist aber kein rein praktisches Interesse ernsthaft anzunehmen, weshalb hier mit Høyrup die Anwendung einer geometrischen Algebra durch die Babylonier gemeint sein soll.

Die Verflechtung der Entstehung von Mathematik und Geometrie im Speziellen wurde durch die Beispiele ausschnittartig illustriert. Es ist nicht möglich in diesem Rahmen eine umfassende und allen Aspekten gerecht werdende Darstellung zu bieten. Kernanliegen dieses Kapitels war es vor Augen zu führen, dass es schon sehr früh teils rein praktische, teils aber auch schon innermathematische Problemstellungen waren, die die Entwicklung der Mathematik vorangetrieben haben – und dass die Geometrie dabei eine mindestens ebenso wichtige Rolle gespielt habe mag wie die Arithmetik, die meist als früheste Ausdrucksform mathematischen Denkens gilt. Gleich, welches Teilgebiet der Mathematik man in den Fokus rückt, gilt:

> *Die Entstehung dieses „Eigenbereichs der Mathematik" geschah [...] in enger Beziehung zur äußeren Wirklichkeit. [...] Die wechselseitige Verflechtung von empirischer Beobachtung und wissenschaftlicher Theoriebildung ist ein Charakteristikum nicht nur der Naturwissenschaften, sondern auch der geschichtlichen Entwicklung des mathematischen Denkens. Damit soll nicht geleugnet werden, daß es immer wieder Phasen gab, in denen die Anstöße zum Ausbau der mathematischen Theorien aus der Mathematik selbst kamen, innermathematische Impulse also bestimmend waren, während in anderen Fällen externe Anforderungen zu Neuentwicklungen Anlaß gaben. (SCRIBA/SCHREIBER 2005: 29)*

7 Geometrie und systematisches Problemlösen

Dieses Kapitel versteht sich als Komplement des vorherigen. Es soll um die Umkehrbeziehung zwischen Geometrie und problemlösendem Verhalten gehen, also darum, wie die Entwicklung der Geometrie aus Problemen heraus ihrerseits Grundlage für heuristische Erkenntnisprozesse geworden sein *mag*. Vor allem die nun mehrfach dargestellte Quellenlage, aber sicher auch Unterschiede in der Geisteshaltung vergangener Epochen verweisen dieses Kapitel in den Bereich der begründeten Spekulation. Es handelt sich bei der vorliegenden Arbeit nicht um eine primär mathematikhistorische Abhandlung und die folgenden Überlegungen werden nicht mit den Ziel angestellt, eine Neuinterpretation des epigraphischen Materials vorzulegen, sondern mit dem klaren Blick, die mögliche und oftmals unterschätzte potenzielle Bedeutung der Geometrie beim Aufbau heuristischer Fähigkeiten und Fertigkeiten früher Zeugnisse zu plausibilisieren; dabei schwingt durchaus der Grundgedanke des genetischen Lernens mit.

Kapitel 6 hat einige der kulturhistorischen Zusammenhänge beleuchtet und insbesondere den Problemen nachgespürt, die die frühen Mathematiker der Geschichte beschäftigt haben. Dabei war der Blick klar auf die Geometrie, auf die „Erdvermessung", und ihr Entstehen und ihre Anwendungen gerichtet. Wie die Bespiele deutlich zeigen, war die früheste Geometrie eine praktische, an den Problemen des Alltags ausgerichtete Geometrie, die für tägliche Arbeiten und Tätigkeiten von elementarer Bedeutung war; sie durchzog das Leben der Gemeinschaft auf vielen Ebenen und war zur Sicherung des Überlebens notwendig.[450] Wenngleich die archäologischen und frühhistorischen Zeugnisse also belegen, dass die frühe Geometrie sehr eng an ihren Verwendungskontext gebunden war, finden sich auch Beispiele, die zumindest begründet vermuten lassen, dass der fortgesetzte Umgang mit geometrischen Fragestellungen, Verfahren und den bereits gefundenen Ergebnissen immer wieder dazu geführt hat, ein tieferes Verständnis, ein System, eine übergeordnete Struktur zu vermuten und in Teilen auch zu untersuchen.

Es sind insbesondere die babylonischen Texte, die in ihrer Fülle einige grundlegende, wiederkehrende Methoden erkennen lassen, die Høyrup (2002: 96 f.) folgendermaßen zusammenfasst und die den Blick deutlich auf die große Nähe zwischen Geometrie und heuristischem Handeln lenken helfen:

---

[450] Vgl. Vogel 1958: 59.

1. „Naives“ Ausschneiden und Zusammenfügen
2. Skalierung
3. Änderung anderer Eigenschaften[451]
4. Zähltechniken, Koeffizienten und „contributions“[452]
5. Falscher Ansatz/Bündelung[453]
6. Skizzen

Obschon es Høyrup nicht um eine systematische Anbindung seiner epigraphischen Analyse babylonischer Mathematik an Heuristik ging, sind seine Befunde doch mit Blick auf problemlösende Systematiken von größtem Interesse. Die Nähe zu einigen der wichtigsten Heurismen ist nicht zu übersehen. Die Analyse der auf uns gekommenen Beispiele vor- und frühgeschichtlicher, problemlösender Mathematik lassen aus heutiger Sicht also eine – mehr oder weniger bewusste – Anwendung verschiedener heuristischer Techniken und Heurismen postulieren. Die Analyse der oben vorgestellten Problemstellungen gibt einen Eindruck davon, welche von diesen zumindest implizit schon bekannt waren, und wie sie sich aus der praktischen Beschäftigung mit der Geometrie heraus entwickelt haben *könnten*.

Die fettgedruckten Nennungen in der folgenden Tab. 22 sind evident Bestandteil des in den Quellen dokumentierten Vorgehens, alle anderen Einträge sind hypothetisch, aber plausibel. Da einige Aufgaben als illustrierende Beispiele für den problemlöserischen Kontext gewählt und nur in moderner Fassung gezeigt wurden (in den nachfolgenden Tabellen kursiv gedruckt), werden für diese nur potenziell verwendete bzw. verwendbare heuristische Techniken und Heurismen (s. Kap. 5.6; Band A Krichel 2017: 123 ff.) benannt.

[451] Die Methoden 2 und 3 dieser Listung sind bei Høyrup (2002) zusammengefasst.
[452] *Contributions* sind nach Høyrup als Teilsummanden eines Polynoms zu verstehen.
[453] Høyrup bietet neben der Lesart des falschen Ansatzes die des „Bundling“ an (2002: 101 ff.).

Aufgabe	Kategorien nach Krichel/Stiller	**evident** oder hypothetisch eingesetzte Techniken oder Heurismen
gegeben: halber Rechtecksumfang, Summe der Flächeninhalte des Rechtecks und des Rechtecks, dessen Seiten Summe und Differenz der Seitenlängen des Ausgangsrechtecks entsprechen gesucht: beide Seitenlängen	Heuristische Techniken	**Gleichungen** Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Rückführen auf Bekanntes **Heurismus der Strukturnutzung**
	Heurismen der konkreten Handlung	**Vorwärtsarbeiten** Rückwärtsarbeiten
gegeben: Trapez, Flächeninhalte der Teiltrapeze, parallele Seiten *gesucht: Länge der Transversalen*	Heuristische Techniken	**Gleichungen** De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität** Heurismus der Strukturnutzung
	Heurismen der konkreten Handlung	**Vorwärtsarbeiten**
gegeben: rechtwinkliges Trapez, zur Grundseite parallele Transversale, Flächeninhalte der Teiltrapeze, Seitenverhältnis der Abschnitte auf orthogonaler Seite *gesucht: Länge der Abschnitte auf orthogonaler Seite*	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: gleichschenkliges Trapez, Länge aller Seiten *gesucht: Länge der Diagonalen*	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: Belagerungsrampe (dreieckiger Querschnitt), errichtete Rampenhöhe, Volumen der fertigen Rampe, geplante Rampenhöhe gesucht: Dicke des fertigen Teilstücks und Enddicke des Damms	Heuristische Techniken	Gleichung
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität Heurismus der Strukturnutzung
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: zwei rechtwinklige Dreiecke, drei Kathetenlängen gesucht: die vierte Kathetenlänge	Heuristische Techniken	Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	
gegeben: rechtwinkliges Dreieck, eine Kathetenlänge (indirekt), Hypotenusenlänge gesucht: die Länge der zweiten Kathete	Heuristische Techniken	Gleichungen
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	

gegeben: rechtwinkliges Dreieck, gesucht: Hypotenuse	Heuristische Techniken	
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: Breite und Höhe eines Rechtecks *gesucht: Diagonale*	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Strukturnutzung
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: gleichschenkliges Dreieck mit gegebener Grund- und Schenkellänge gesucht: Umkreisradius des Dreiecks	Heuristische Techniken	Gleichungen **Graphische Repräsentationsformen** De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten Rückwärtsarbeiten
gegeben: rechtwinkliges Dreieck im Kreis, Kreisumfang, Kreisdurchmesser (indirekt) „Pfeil“länge gesucht: Länge der Sehne	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: gleichschenklige Trapez (Ziegelsteine) die Kreisring bilden (Brunnen), bogenförmige Grundlinie, Schenkellänge *gesucht: Anzahl der benötigten Ziegelsteine, Durchmesser Inkreis und Umfang*	Heuristische Techniken	De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität Heurismus der Strukturnutzung
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: quadratischer Pyramidenstumpf, Höhe, Grundfläche, Rücksprung der Seitenflächen, Deckfläche (indirekt) *gesucht: Volumen*	Heuristische Techniken	Gleichungen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: Kegelstumpf, Höhe, Umfang von Grund- und Deckfläche *gesucht: Volumen*	Heuristische Techniken	Gleichungen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten

Tab. 22 Babylonische Mathematik: Verknüpfungsvorschläge geometrischer Problemstellungen mit heuristischen Techniken und Heurismen (nach Krichel/Stiller).

Aufgabe	Kategorien nach Krichel/Stiller	**evident** oder hypothetisch eingesetzte Techniken oder Heurismen
gegeben: Rechteck, Seitenlängen gesucht: Hälfte des Flächeninhaltes	Heuristische Techniken	**Gleichungen** De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	**Vorwärtsarbeiten**
gegeben: Rechteck, Flächeninhalt, Verhältnis zwischen den Seitenlängen gesucht: Seitenlängen	Heuristische Techniken	Graphische Repräsentationsformen **De- und Rekonstruktion**
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	**Vorwärtsarbeiten**
gegeben: gleichschenkliges Dreieck, Grundseite, Höhe gesucht: Flächeninhalt	Heuristische Techniken	Gleichungen **De- und Rekonstruktion**
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	
gegeben: rechtwinkliges Dreieck, Flächeninhalt und Seitenverhältnis gesucht: Länge der beiden Seiten	Heuristische Techniken	Gleichung Graphische Repräsentationsformen **De- und Rekonstruktion**
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: quadratische Pyramide, Grundkante, Höhe gesucht: Rücksprung	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Strukturnutzung
	Heurismen der konkreten Handlung	
gegeben: gleichschenkliges Trapez, Höhe und obere und untere Kantenlänge gesucht: Flächeninhalt	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: Kreis und Durchmesser gesucht: Flächeninhalt	Heuristische Techniken	Graphische Repräsentationsformen De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität

	Heurismen der konkreten Handlung	Rückwärtsarbeiten Systematisches Probieren
gegeben: Zylinder, Durchmesser, Höhe gesucht: Volumen	Heuristische Techniken	Gleichungen
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: quadratischer Pyramidenstumpf, Höhe, obere und untere Kantenlänge gesucht: Volumen	Heuristische Techniken	Gleichungen De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Rückführen auf Bekanntes
	Heurismen der konkreten Handlung	Systematisches Probieren

Tab. 23 Ägyptische Mathematik: Verknüpfungsvorschläge geometrischer Problemstellungen mit heuristischen Techniken und Heurismen (nach Krichel/Stiller).

Aufgabe	Kategorien nach Krichel/Stiller	**evident** oder hypothetisch eingesetzte Techniken oder Heurismen
gegeben: rechtwinklige Dreiecke, Hypotenusenlänge, eine Kathetenlänge bzw. zwei Kathetenlängen gesucht: die fehlende Kathetenlänge des einen Dreiecks	Heuristische Techniken	**Gleichungen** Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	**Vorwärtsarbeiten**
gegeben: Rechteck, Differenz der Seitenlängen, Diagonallänge gesucht: Seitenlängen	Heuristische Techniken	De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	**Heurismus der Affinität**
	Heurismen der konkreten Handlung	**Vorwärtsarbeiten**
gegeben: rechtwinkliges Dreieck (Rechteck mit zwei ähnlichen Dreiecken, die ein großes rechtwinkliges Dreieck formen), Kathetenlänge, Verhältnis der Kathetenlängen (indirekt). Flächeninhalt des Rechtecks gesucht: Kathetenlänge in einem Teildreieck	Heuristische Techniken	Gleichungen **De- und Rekonstruktion**
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität **Heurismus der Strukturnutzung**
	Heurismen der konkreten Handlung	

Tab. 24 Chinesische Mathematik: Verknüpfungsvorschläge geometrischer Problemstellungen mit heuristischen Techniken und Heurismen (nach Krichel/Stiller).

Aufgabe	Kategorien nach Krichel/Stiller	**evident** oder hypothetisch eingesetzte Techniken oder Heurismen
gegeben: Schatten einer Pyramide, Stab bekannter Länge, (...)	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	
gegeben: Rechtwinkliges Dreieck durch Peilung auf ein Schiff, einer der nicht rechten Winkel *gesucht: Kathetenlänge*	Heuristische Techniken	Graphische Repräsentationsformen
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität Heurismus der Strukturnutzung
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: Rechteck *gesucht: flächeninhaltsgleiches Quadrat*	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten
gegeben: Rechteck gesucht: flächeninhaltsgleiches Rechteck mit vorgegebener Seitenlänge	Heuristische Techniken	Gleichungen Graphische Repräsentationsformen De- und Rekonstruktion
	Heurismen der Analyse und Adaption	Rückführen auf Bekanntes Heurismus der Affinität
	Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten

Tab. 25 Griechische Mathematik: Verknüpfungsvorschläge geometrischer Problemstellungen mit heuristischen Techniken und Heurismen (nach Krichel/Stiller).

Diese Zusammenschau, die sich ganz klar auf die Inhalte derjenigen geometrischen Fragestellungen beschränkt hat, die für den Unterricht in der Sekundarstufe I und insbesondere in der Orientierungsstufe nutzbar gemacht werden könnten, vermittelt einen guten Eindruck von der Vielfältigkeit der Anknüpfungspunkte. Die hier gebotene Aufschlüsselung und vorgeschlagene Zuordnung zu heuristischen Techniken und Heurismen ist nicht ins Detail ausgeführt. Bei eigener Bearbeitung der vorgestellten und vieler anderer solcher Aufgaben werden sich die unterschiedlichsten problemlösenden Verhaltensweisen umsetzen lassen.

Die tabellarische Zusammenstellung soll keineswegs den Eindruck erwecken, die Babylonier (oder Ägypter und Chinesen) hätten bereits eine systematische Problemlösetechnik entwickelt oder gar bewusst eingesetzt – es sollte aber sehr wohl deutlich machen, dass sich wiederkehrende Muster bei der Bearbeitung (mehr oder weniger ausschließlich) geometrischer Problemstellungen zu einem Verhalten verdichten lassen, das man möglicherweise als proto-heuristisch bezeichnen muss. Die Verfahren, die noch immer oft geringschätzig als „Rezeptmathematik" bezeichnet werden, wurden mit Konsequenz, einer guten Portion theoretischen Interesses an den „inneren Vorgängen" der Mathematik und in verschiedenen Bereichen so systematisch betrieben, dass ein gewisses Maß an Reflexion des eigenen Handelns vorausgesetzt werden muss.

Ein weiterer Faktor spricht für diese Sichtweise, nämlich der spezifische kulturelle Zusammenhang aus dem viele der babylonischen Texte stammen, die Høyrup (2002: 363) folgendermaßen beschreibt:

> *The larger part of the practitioners' fund of knowledge* is *evidently applicable in practice, at least according to the convictions of the environment within which they function. As far as this part is concerned,* problems – viz.*, the problems which the craft or profession is supposed to deal with – are fundamental, and appropriate techniques have been developed which allow it to handle these problems. But the* training *of future practitioners, whether effected in a school or done on the job, will have to start from simpler tasks than those taken care of by the master – in part from tasks which have been prepared with the special purpose of training the techniques which the apprentice should learn but which have no direct practical relevance; here,* techniques *or* methods *are thus primary, and problems are secondary, derived from the techniques which are to be trained.*

Gerade die Tatsache, dass sich die babylonische Mathematik in absolut fundamentaler Weise – viel grundlegender als dies bei der heute allgemein vorherrschenden Mathematikkultur der Fall ist – der geometrischen (Be-)Deutung ihres Tuns bewusst war, ist für uns von Interesse, da es eben doch ein Schlaglicht auf die Bedeutung der Geometrie für erste systematische Problemlöseversuche werfen mag. Auch wenn die historischen Aufzeichnungen gerade für die Zeit der prägenden griechischen Antike lückenhaft und tendenziös sind (vgl. Kap. 6.5, Einleitung), lässt sich ein Eindruck gewinnen von der engen Verbindung und fruchtbaren Wechselbeziehung zwischen praktischen Problemen, dem Entstehen der Geometrie und einer systematischen Problemlösekultur. Vor dem jahrtausendelangen Erfahrungshintergrund operierten auch später noch viele Praktiker, von deren heuristischen Taten keine Spuren geblieben sind.

Und doch ist es sicherlich kein Zufall, dass es in Zeiten einer zunehmend theoretisch geprägten Mathematik gerade Archimedes von Syrakus, Heron von Alexandria mit seiner *geometria practica* und Pappos von Alexandria sind, die bis heute als geniale Problemlöser hervortreten, die sich des heuristischen Potentials der Geometrie bewusst bedient haben, ohne die praktische Anwendung und Bedeutung aus den Augen zu verlieren, und eben dadurch Zusammenhänge und Lösungen erkannten, die sich weder aus der Perspektive des reinen Praktikers noch aus der des rein axiomatisch arbeitenden Aristotelianers erschließen lassen.

Teil III – Content and Heuristics Integrated Mathematics Education

Konzept für einen transcurricularen[454] heuristisch-mathematischen Unterricht

Auf Grundlage der vorausgegangenen Untersuchungen und Überlegungen gilt es, nun einen schlüssigen und überzeugenden Entwurf zu entwickeln, wie ein Mathematikunterricht der Zukunft aussehen könnte, der viele Fallstricke vermeidet und den hohen Ansprüchen, die an ihn gestellt werden, genügen kann. Auch wenn Teil I und II sich in einiger Tiefe aus ganz unterschiedlichen Blickwinkeln (didaktisch und fachlich) mit der historischen Dimension befasst haben, ist gleich zu Beginn festzustellen, dass es sich bei der *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education* (im Folgenden mit CHIME abgekürzt) keinesfalls um eine Variante des „genetischen" Unterrichts handelt.

Mathematikkonzepte, die Entwicklungslinien mathematischer Ideen nachverfolgen, gab und gibt es schon, sind aber an den innermathematischen Anknüpfungspunkten und strukturellen Zusammenhängen orientiert. Anlässe und Gründe für die Vermehrung mathematischen Wissens spielen dabei höchstens eine untergeordnete Rolle. Ein solcher, oftmals als „genetisch" bezeichneter Unterrichtsansatz steht nach Auffassung des Verfassers in eklatantem Widerspruch zur historischen Realität, da es den frühen Mathematikern gerade nicht um eine Erweiterung und Akkumulation mathematischer Kenntnisse um ihrer selbst willen ging, sondern das *Problem* Ausgangspunkt war, auch wenn seine Lösung zur Erweiterung der Kenntnisse, auch theoretischer Natur, führte. So muss „genetisch" betrachtet nicht das Ansammeln von mathematischen Sätzen und Definitionen Ergebnis eines historisch orientierten Mathematikunterrichts sein, sondern im Gegenteil der Erwerb von heuristischen Strategien. Dass sich verschränkt damit mathematische Fähigkeiten und Einsichten vergrößern und an Komplexität gewinnen, scheint mit Blick auf die Geschichte der Disziplin geradezu zwangsläufig. An die Überlegungen des letzten Kapitels anknüpfend greift das CHIME-Konzept die „Archimedische Tradition" als vermittelnden Entwurf zwischen logischer Deduktion und problemlösungsorientiertem Anwendungsaspekt auf.

Zu diesem Gedanken tritt ein weiterer, ganz aktueller Aspekt, der ebenfalls die Frage nach der wahren Natur mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten stellt, und den Tan (2003: 6) sehr prägnant beschreibt:

[454] Der Begriff wird in Kap. 8.2 begründet und erläutert.

The Internet era has implications far beyond the realm of instructional technology. Information access and retrieval is at the click of a mouse. There is a serious need to relook at our assumptions of knowledge acquisition and participation in learning. The role of teachers as authority in specific fields of knowledge has been eroded. The dissemination of knowledge may no longer be of primary importance at some stages of education as the World Wide Web provides ready information anytime anywhere. The role of teachers will have to change dramatically if it is to remain relevant to a new generation of students. In fact, the Internet revolution calls for a revamp in curriculum content, delivery and assessment. How should education address the issues of knowledge management and prepare our students for this knowledge era?[455]

In dem letzten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Grundideen der *Content*[456] *and Heuristics Integrated Mathematics Education* vorgestellt, das Konzept methodisch-didaktisch begründet und für das Teilgebiet der Geometrie in der Orientierungsstufe ausgestaltet. Nach einer allgemeinen Einführung zu Ausgangspunkten und Grundüberlegungen in Kapitel 8 – auf Grundlage der Betrachtungen zu der historischen Genese fächerübergreifender Unterrichtskonzepte (Kapitel 2.2) und ihrer Darstellung und Bedeutung in der aktuellen deutschen Schulreform (Kapitel 2.3) – stellt Kapitel 9 das Konzept in seiner Gesamtheit und Grundstruktur dar. Kapitel 10 beschreibt dann die didaktisch-methodische Konzeption und die unterrichtszentralen Bestandteile von CHIME aus Sicht des Lehrers wie auch des Lerners, bevor schließlich in Kapitel 11 der CHIME-basierte Heuristikunterricht am Beispiel der Geometrie für die Orientierungsstufe ausführlich und mit Analysen zum heuristischen Potenzial verschiedener schulischer Themenfelder expliziert wird.

[455] Tan ist durch seine (mit Preisen ausgezeichneten) Forschungsprojekte zum *Problem-Based Learning* an den Umgestaltungen des Schulsystems in Singapur maßgeblich beteiligt. In Kap. 3.10 und 4.1 wurde bereits auf die Ausrichtung des Mathematiklehrplans auf das Lösen von Problemen hin eingegangen, das in Singapur (und darüber hinaus) als notwendige Grundlage der „knowledge-based economy“ angesehen wird (vgl. TAN 2003: 1 ff.).

[456] „Content“, also der „Inhalt“ referenziert hier sowohl den mathematischen Fachinhalt als auch den Inhalt des beteiligten Sachfachs, das in der englischsprachigen Literatur oftmals als „subject matter“ bezeichnet wird.

8 Konzeptdimensionen und -dimensionierung

CHIME ist ein Konzept eines neuen, transcurricularen Unterrichts in Heuristik in Auseinandersetzung mit mathematischen Fachinhalten eingebettet in sachfachliche Bedeutungszusammenhänge und Problemstellungen. Die Schüler bauen ihr mathematisches Wissen *und* ihre heuristischen Kenntnisse eingebettet in Sachsituationen auf und aus. Das bedeutet nicht, dass zusätzlicher „autonomer" Mathematikunterricht ausgeschlossen ist (vgl. Kap. 10.1).

Die in Kapitel 11 vorgenommene Beschränkung auf das Teilgebiet der Geometrie ist dem Umfang der Arbeit und der besonderen Eignung dieses Teilgebiets für das Erlernen der Heuristik geschuldet. Es wurde vor allem aus drei Gründen für die exemplarische Entwicklung eines neuen Mathematikunterrichts gewählt:

- Mit Blick auf die enge historische Verzahnung: Die Geometrie eine gleichberechtigte Disziplin neben Arithmetik und Algebra; wie das vorherige Kapitel gezeigt hat, ist sie mit Blick auf das Problemlösen möglicherweise sogar als bedeutender als die anderen beiden Großthemen anzusehen, da viele der primären, klassischen Probleme, die es zu lösen galt und die zur Entwicklung der Mathematik in unserem heutigen Sinne entscheidenden Anteil hatten, der Geometrie entstammen.
- Aufgrund der besonderen Eigenschaften ihrer Objekte: Wie Schwarz (2006: 5) feststellt, besitzen „manche symbolischen Darstellungen in der Mathematik (Geometrie, Graphentheorie) *zusätzlich* ikonischen Charakter [...], was sie für Klärungen von Problemsituationen besonders leistungsfähig macht." Schwarz beschreibt die Situation hier aus der Warte der graphischen Repräsentationsformen – aber natürlich folgt, dass die Geometrie, nicht als heuristische Technik eingesetzt, sondern als eigentlicher Inhalt, dieselbe ikonische Kraft besitzt. Da die Graphentheorie für eine Vermittlung in der Sekundarstufe oder gar Orientierungsstufe weniger in Frage kommt, bleibt die Geometrie, um diese Fähigkeit mit Blick auf heuristische Prozesse in der Schule nutzbar zu machen.
- Außerdem lassen sich potenziell alle wichtigen heuristischen Techniken und Heurismen am Gegenstand der Geometrie erlernen, weshalb eine exemplarische Demonstration beschränkt auf geometrische Inhalte grundsätzlich erfolgversprechend ist.

Es gibt keine sachlogischen Gründe, die andere mathematische Teilgebiete von einer analogen unterrichtlichen Umstrukturierung ausschlössen.

Aus vergleichbaren Gründen wird der besondere Augenmerk auf die Orientierungsstufe gelegt; eine Ausweitung auf die verbleibenden drei bzw. vier Schuljahre der Sekundarstufe I und darüber hinaus der Sekundarstufe II ist ohne Weiteres denkbar und würde den nächsten logischen Schritt für den Ausbau des Konzepts darstellen.

Um den Begründungszusammenhang für die Erarbeitung des vorliegenden Konzepts transparent zu machen, werden folgende drei Dimensionen nun im Vorfeld diskutiert:

1. Legitimatorisches
   Darstellung der Ansatzpunkte und Grundideen für ein Konzept, das sich teils radikal von der aktuellen Bildungsrealität abgrenzt, in Form von Fragen und Antworten.
2. Transcurricularität: Das Missing Link
   Erläuterung des Begriffs mit Blick auf das CHIME-Konzept und die künftige Bedeutung schulischer Fächer, besonders der Mathematik.
3. Personen
   Überlegungen zur veränderten Rolle der am schulischen Lehr-Lernprozess primär beteiligen Personen Schüler und Lehrer.

Während sich Kapitel 9 auf die Kernelemente des Konzepts beziehen und diese immanent entwickeln wird, steht dieses Kapitel im Dialog mit der aktuellen wie mittelfristig zu erwartenden Realität an öffentlichen Schulen. Daher finden sich hier im weiteren Verlauf auch Überlegungen zur Implementierbarkeit, zu erwartbaren Schwierigkeiten, zu notwendigen Umgestaltungen des Schulapparates, zu voraussichtlichen affektiven Problemen bei den Beteiligten usw.

8.1 Legitimatorisches

Ein Unterrichtskonzept entsteht in der Regel aufgrund von Defiziten in der Unterrichtspraxis und beinhaltet keine umfassende Theoriebildung, sondern stellt eine Veränderung der Lehr-Lernstruktur in den Mittelpunkt der Betrachtung, wie Köck (2000: 206) definiert:

> Ein Unterrichtskonzept bezeichnet die theoriegeleitete Grundeinstellung des Lehrers […] bezüglich Zweck, Anlage und Durchführung des Unterrichts.

Folgende Beobachtungen beziehungsweise Überzeugungen sind für die Begründung des neuen Konzepts konstituierend:

1. Jegliches mathematische Handeln dient – und jede Weiterentwicklung der eigenen mathematischen Fähigkeiten vollzieht sich letztlich an – der Lösung von Problemen. Dabei kann es sich um direkt lebensweltbezogene, fachimmanente ebenso wie transzendente Beweisprobleme handeln.[457]
2. Der Mathematiklehrer steht immer wieder vor der Herausforderung, für die Inhalte, die er zu unterrichten verpflichtet ist, geeignete, d.h. motivierende, sinnstiftende und aus Schülersicht relevante, Lernkontexte zu (er)finden.[458]
3. Wo diese Kernaspekte – Sinnhaftigkeit und Problemorientierung – vergessen oder ignoriert werden, entsteht „totes Wissen", das kein Wissen im echten Sinne, sondern unproduktiver Ballast im geistigen Gesamtkonstrukt der Lerner ist.

Es existieren bereits eine Reihe von Unterrichtskonzepten, die vom entdeckenden oder genetischen Lernen über den offenen oder problemorientierten und -lösenden Unterricht bis zum projektorientierten, schülerorientierten, handlungsorientierten oder auch wissenschaftsorientierten Unterricht reichen (vgl. Kap. 3.11; MEYER 1994: 210ff.); einige dieser Konzepte fußen auf ähnlichen Grundsätzen und versuchen ihrerseits, die festgestellten Defizite des (Mathematik-)Unterrichts zu beheben. Das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte CHIME-Konzept integriert ausgewählte Aspekte aus verschiedenen, bereits bestehenden Unterrichtskonzepten und ergänzt sie durch weitere, für das CHIME-Konzept spezifische Aspekte.

So wird ein Mathematikunterricht entwickelt, der sich von demjenigen in der bestehenden Form grundlegend unterscheidet, indem es mathematisches heuristisches Wissen durchgängig an die Inhalte anderer Fächer anbindet, die entdeckende und forschende Eigenaktivität des Schülers konsequent einfordert und damit die Mathematik als vielfach verknüpftes, praktisches und problemlösendes Konstrukt im Lerner wachsen lässt. Totes Wissen, leere Formeln und vage Erinnerungen an rezeptartiges Abarbeiten von Handlungsanweisungen sollen so weitgehend ausgeschlossen werden.[459]

---

[457] Eine Einschränkung auf ein mathematisches Teilgebiet wie die Geometrie ist nicht impliziert.

[458] Dass diese Kontextualisierung erforderlich ist, ergibt sich aus den lehr-lernpsychologischen Erkenntnissen. Vgl. u. a. die Ausführungen in Kap. 1.1.5, 1.1.6, 3.9.10.

[459] Aus den hier ausgeführten Überlegungen heraus liegt es nahe, das Konzept keineswegs nur für die prozessbezogene Kompetenz des Problemlösens auszuarbeiten, sondern vielmehr eine prozessuale Gesamtumgestaltung des Mathematikunterrichts zu denken. Die Umsetzung dessen sprengt jedoch den Rahmen dieser Arbeit – eine spätere Ausarbeitung ist geplant.

8.1.1 Problemlösen und Heuristik sind Kern allen Mathematikunterrichts

In Teil I und dort besonders in den Kapiteln 3 und 4.1 wurde ausführlich herausgearbeitet, welche Bedeutung im Bildungsdiskurs dem Lösen von Problemen im Mathematikunterricht zugeschrieben wurde und aktuell wird. In Verbindung mit den in Teil II explizierten Zusammenhängen zwischen Problemlösen und Mathematik (Geometrie) ist festzuhalten, dass das Problemlösen und seine übergeordnete Ebene, die Heuristik, in dieser Arbeit als Kern des Mathematikunterrichts verstanden werden.[460] Diese Auffassung folgt im Kern der durch die OECD formulierten definitorischen Beschreibungen mathematischer Kompetenzen, wie sie in Kapitel 4 dargestellt sind. Der Umstand, dass eine klare Unterscheidung zwischen Problemlösen und Heuristik nicht nur in weiten Teilen der aktuell gültigen Lehrplanschriften, sondern bereits in den zugrundeliegenden Bildungsstandards fehlt, scheint auf die linguistische Problematik der englischsprachigen Bezugsschriften zurückzuführen sein sowie auf die fehlende inhaltliche Aufarbeitung, die intensiv kritisch in Band A (KRICHEL 2017, Kap. 3 und 4) besprochen wird. Gellert (2009: 351; vgl. auch Kap. 4.1) beschreibt das aktuelle curriculare Postulat (!) folgendermaßen:

> *Im Vordergrund steht die aktive, gemeinsame, strategische, argumentative mathematische Auseinandersetzung der Lernenden. Kerntätigkeiten im Mathematikunterricht sind das Suchen und Erzeugen von Mustern, das Äußern und Überprüfen von Vermutungen, Generalisieren und Stellen von Warum-Fragen, Systematisieren und Klassifizieren, das Suchen nach Methoden und Aufstellen von Regeln sowie das Definieren, Begründen und Beweisen. Im Zentrum der curricularen Konzeption stehen nicht die mathematischen Lerninhalte (der „Stoff"), sondern die mathematischen Tätigkeiten der Lernenden gleichsam als das Äquivalent mathematische Lernprozesse. Ausdruck dieser Dynamisierung ist der Anspruch einer neuen Aufgaben*kultur.

Wenn das Problemlösen eine nicht-fachspezifische Fähigkeit ist, warum sollte die Mathematik die Aufgabe seiner Vermittlung maßgeblich übernehmen?

Diese Frage ist durchaus gerechtfertigt, denn wenn Probleme in allen Fächern auftreten und zur Beschäftigung anregen[461], kann sich der Mathematikunterricht dann nicht gerade aus diesem Bereich zurückziehen? Die Antwort ist ein klares Nein: die Relevanz des Problemlösens in anderen Schulfächern kann die inhaltliche Problematik reduzieren, aber gerade wenn es um die strategische, langfristige Entwicklung von Problemlösefähigkeiten

[460] Eine ausführlichere Erläuterung zu dieser Haltung der Autoren ist in Band A (KRICHEL 2017: 15 ff.) nachzulesen.
[461] Dieser Grundansatz ist ausführlich in Klafkis Kritisch-konstruktiver Didaktik entwickelt (vgl. Kap. 3.9.9; KLAFKI 1996).

geht (um den Aufbau *heuristischer Kompetenzen*), spielt das mathematische Verständnis eine herausragende Rolle, wie schon die PISA-Studie 2003 zeigen konnte:

Der statistische Zusammenhang zwischen der Fähigkeit, Probleme zu lösen, und den allgemeinen mathematischen Fähigkeiten liegt bei 0,89 (zwischen Problemlösen und Lesekompetenz bei 0,82 und der zwischen Problemlösen und Naturwissenschaftlicher Grundbildung 0,80). Der Zusammenhang zwischen Problemlösen und Mathematischer Grundbildung ist außerdem der signifikanteste, der zwischen allen drei getesteten Kompetenzfeldern festgestellt werden konnte. Er entspricht dem ermittelten Zusammenhang zwischen den vier Fachbereichen (*Space and Shape*, *Change and Relationship*, *Quantity* und *Uncertainty*) innerhalb der Mathematischen Grundbildung. Zugleich zeigen diese Zahlen, dass sehr wohl signifikante interdisziplinäre Einflüsse auch der anderen beiden Fachgruppen bestehen: ein Potenzial, das die Schule bislang kaum ausschöpft.[462]

Der in sich geschlossene und vollständig logische Aufbau des mathematischen Wissens begünstigt und unterstützt außerdem eine systematische Erfassung und Aufarbeitung der durchlaufenen Problemlöseprozesse und gewährt so auf besonders klare, transparente Weise den Blick auf das eigene Handeln. Für den Erwerb metastrategischen, d. h. in diesem Falle heuristischen, Wissens ist das ein unschätzbarer Vorteil. Selbstverständlich lassen sich problemlösende Verhaltensweisen auch an nicht-mathematischen Problemstellungen erwerben und studieren – doch mathematische Objekte, Operationen und Modelle sind in ihrer Prägnanz und Eindrücklichkeit von anderer Qualität und Überzeugungskraft. Hinzu kommt, dass auch in anderen Disziplinen oftmals Problemstellungen für eine erfolgreiche Bearbeitung letztlich auf mathematische Modelle reduziert werden.[463]

> *Mathematik ist [...] [d]as Skelett des Geistes sozusagen. Kein anderes Fach vermag derart tief in die Abstraktion vorzudringen wie die Mathematik. (Kramer 2010: 11)*

Ist Unterricht in Heuristik überhaupt möglich?

Eine Zeit lang wurde die Relevanz einer Heuristiklehre bezweifelt, da Schoenfeld in einer Studie aus den Achtzigerjahren des 20. Jahrhunderts Hinweise gefunden hatte, dass eine solche Unterweisung ohne Effekt sei. Neuere Untersuchungen Bruders (2011) haben jedoch eindeutig belegt, dass sich die Sinnfrage einer unterrichtlichen Heuristiklehre positiv beantworten lässt, und dies bestätigt auch die explorativen Studie von Rott (2013),

[462] Vgl. OECD 2005: 55.
[463] Auf diesen ganz wesentlichen Aspekt wird in Kap. 8.2 zurückzukommen sein.

in der das mathematische Problemlöseverhalten sowie die zugrundeliegenden Problemlöseprozesse von Schülern einer fünften Klasse untersucht wurden.[464]

Die Heuristik nimmt die Metaebene der systematisch übergeordneten Betrachtung von Problemlöseprozessen ein, um wiederkehrende Strukturen und Muster zu erkennen, die dann induktiv zur Optimierung von Lösungsprozessen neuer Problemstellungen nutzbar gemacht werden. Dass eine Unterweisung in „geistiger Flexibilität" weder nach demselben Muster noch mit derselben unmittelbaren Nachweisbarkeit ihrer Effekte gelingen kann, liegt im Grunde auf der Hand. Da das Lösen von (mathematischen) Problemen sich nur im aktiven Tun, im tatsächlichen problemlösenden Handeln vollziehen kann, und der Ausbau des metakognitiven Überbaus letztlich nur auf dieser Grundlage und im evaluierenden Rückblick geschieht, gibt es keine einheitliche, einfache Möglichkeit, eine erfolgreiche Herausbildung heuristischer Fähigkeiten und Fertigkeiten zu „programmieren" – die Faktoren, von denen der Fortschritt abhängt, sind zu vielfältig und zahlreich.

Aus praktischer Sicht ist zu bedenken, dass wie bei allen anderen Lernfeldern auch motivationale Faktoren eine, hier vielleicht sogar besonders große, Rolle spielen. Es erscheint plausibel, dass es einer umfassenden und langfristigen Veränderung der Unterrichts- und Aufgabenkultur bedarf, um das Verständnis (und auch die Akzeptanz) für diese Art von Lerninhalten aufzubauen. Dies gilt für alle am Bildungsprozess beteiligten Parteien:

- Lerner, die erst nach mehreren Jahren traditionellen, fragend-entwickelnden Unterrichts mit dieser Art von Lernen und Problemlösekontexten konfrontiert werden, werden zu einem beträchtlichen Anteil weder fachlich noch methodisch damit umzugehen wissen, und es wird wie immer auch Personen geben, die sich einer solchen Umstellung verweigern. Selbst Lerner, die von Beginn ihrer Bildungskarriere an Problemkontexte und heuristische Praktiken herangeführt werden, werden möglicherweise nicht sämtlich zu fähigen Problemlösern und kompetenten Nutzern heuristischer Techniken und Heurismen werden, wenn Grundanlagen oder Interessenslagen dem entgegenstehen.
- Lehrer, die nicht gewohnt sind, ihren Unterricht an Problemstellungen auszurichten und die eigenaktive Auseinandersetzung ihrer Lerner in den Mittelpunkt der unterrichtlichen Aktivitäten zu stellen, werden Schwierigkeiten unterschiedlicher Art bei der Umsetzung eines solchen andersartigen Unterrichtskonzepts erfahren. Bei nicht wenigen sind Ressentiments gegen jeglichen Unterricht zu erwarten, der

[464] Vgl. Rott 2013: iii.

kompetenzorientiert formuliert ist und damit nicht operationalisierte Lernschritte vorgibt. Speziell mit Blick auf den problemorientierten Schwerpunkt bzw. eine explizite Ausrichtung an heuristischen Leitfragen werden Lehrer Wirksamkeit oder Umsetzbarkeit infrage stellen. Die fachlichen Kenntnisse zu Problemlöseprozessen sind nicht bei allen Lehrern in gleichem Maße vorhanden, und die Bereitschaft zu einer solch umfassenden Umorientierung wird nicht von jedem erfolgreich einzufordern sein.

- Eltern, die zumindest für die Zeit der schulischen Bildung ihrer Kinder entscheidenden Einfluss ausüben können, beziehen sich in aller Regel auf ihre eigenen Bildungserfahrungen; Unterschiede zu teils Jahrzehnte zurückliegenden Unterrichtspraktiken und -anforderungen sind aus ihrer Warte oft eklatant, nicht erklärlich und erscheinen nicht selten negativ. Vergleiche zur (angeblich herrschenden) Disziplin und Arbeitsatmosphäre in „früheren Zeiten“ werden auch heute noch immer wieder gezogen. Abgesehen von den meist dahinter stehenden allgemeinen erzieherischen Schieflagen drücken solche Äußerungen ein Unbehagen aus, wann immer Schule sich ernsthaft um eine Öffnung und eine Orientierung am Lerner bemüht. In Augen von didaktischen und pädagogischen Laien ist der Unterschied zu einer Hinwendung zur „Spaßkultur“ nicht immer klar ersichtlich. Nun üben Eltern mit ihren Einstellungen aber unbestreitbar einen Einfluss auf Lernerperformanz aus, der in den frühen Schuljahren besonders groß sein dürfte.

Aus diesen Überlegungen wird bereits deutlich, dass ein guter Teil der Frage nach der Machbarkeit eines erfolgreichen Heuristikunterrichts sich vielleicht gar nicht unter Bezug auf diesen Unterricht selbst beantworten lässt. Ein planvoller und wohl durchdachter Umbau des Gesamtsystems muss vielmehr alle Beteiligten – und eben nicht nur die Lerner – in die Lage versetzen, erfolgreichen Heuristikunterricht zu ermöglichen oder zuzulassen.

An welchen mathematischen Inhalten sollte Heuristik gelernt werden?

Wie in Teil II dargestellt bilden die Begriffe Problem, Heuristik und Geometrie ein enges historisches und kausales Gefüge. In der Einleitung dieses Kapitels (Kap. 8.1) wurden bereits die entscheidenden Gründe genannt, weshalb diese Arbeit sich auf das Gebiet der Geometrie fokussiert. Es sind dieselben Gründe, die für eine Wahl dieses Teilgebiets beim Einstieg in einen Unterricht in Heuristik sprechen. Das bedeutet keineswegs, dass andere Fachinhalte grundsätzlich geringeres Potenzial für eine Heuristiklehre besitzen. Dennoch spricht zumindest in der Orientierungsstufe für die Wahl der Geometrie, dass mit ihr die enaktive und ikonische Ebene (Bruner) besonders gut und nutzbringend angesprochen werden können. Im Prinzip gilt aber, dass Problemlösekompetenzen an allen mathematischen Inhalten erworben und vertieft werden können – und vor allem auch sollten. Die Frage nach der fachimmanenten Kontextualisierung ist gewissermaßen zweitrangig hinter der Feststellung, dass das Lösen von Problemen den Kern des mathematischen Handelns bilden soll.

8.1.2 Problemlösen und Heuristik sind nicht fachgebunden

Alle Lehrplanschriften, die nach der verbindlichen Einführung der Bildungsstandards der KMK im Jahr 2004 eingeführt worden sind, folgen dem grundlegenden Prinzip der Kompetenzorientierung – dies betrifft die modernen Fremdsprachen ebenso wie die naturwissenschaftlichen Fächer, oder auch das Fach Latein, das sich ähnlich schwer mit dieser Umstrukturierung tut wie das Fach Mathematik. Hier hat die vergleichende Untersuchung der Forderungen und Kompetenzformulierungen der aktuellen deutschen Lehrpläne in Bezug auf die Kompetenz des Problemlösens in Band A (Krichel 2017, Kap. 4) Folgendes klar gezeigt:

- Die deutschen Lehrpläne weisen dem Problemlösen mehrheitlich, in Anlehnung an die Bildungsstandards, eine herausragende Bedeutung für den Mathematikunterricht und den allgemeinbildenden Unterricht insgesamt zu.
- Die Mehrheit der Lehrplanschriften sieht eine (vorrangige) Verbindung zwischen der Problemlösefähigkeit und dem Teilgebiet der Geometrie.[465]
- Die Verknüpfung mit mathematischen Fachinhalten erfolgt nicht konsequent und nachvollziehbar.
- Eine Progression im Sinne eines sukzessiven Kompetenzaufbaus lässt sich nicht feststellen.

Dieser negative Befund der letztgenannten beiden Aspekte muss insofern erstaunen, als die Bund-Länder-Kommission bereits in dem Konzeptpapier[466] zu ihrem Programm zur *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (SINUS)*, das ab 2000 durchgeführt wurde, diagnostizierte:

---

[465] Eine Verbindung, die in Teil II der vorliegenden Arbeit auch fachhistorisch nachvollzogen werden konnte.

[466] Einzusehen unter http://blk.mat.uni-bayreuth.de/programm/konzeption.html [25.02.2017]. Ein genaueres Erscheinungsdatum dieser Konzeptschrift ist nicht zu ermitteln. Es ist von einer Veröffentlichung vor 2000 auszugehen, da das Programm ab diesem Jahr in fünfzehn Bundesländern lief.

> *Curriculare Problemzonen betreffen [...] die unzureichende vertikale Vernetzung und Kohärenz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts und die mangelnde Abstimmung zwischen den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern. Das in Deutschland vorherrschende Muster eines fragend-entwickelnden Unterrichts bedingt eine Engführung auf das Erarbeiten einer einzigen richtigen Lösung. Dieses Skript des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts vermischt Lern- mit Leistungssituationen, es legt den Schwerpunkt auf einfache Routinisierungen und relativ kurzfristige Behaltensleistungen. Die geringe Kumulativität des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts behindert zudem das Erleben von Kompetenzzuwachs und beeinträchtigt die Entwicklung von sachbezogener Lernmotivation und Interesse.*

Die im Rahmen des Programms entworfenen Entwicklungs-Module (s. Abb. 66) zeichnen den Weg vor, der zur Verbesserung der Situation nach dem Willen der SINUS-Verantwortlichen und der BLK gegangen werden sollte. Sie geben einen guten Eindruck von den Zielvorstellungen. Der Schlüssel zur einer „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" wird ganz wesentlich in der Stärkung der nicht-fachgebundenen Unterrichts- und Erziehungsziele (Modul 1, Modul 6, Modul 7, Modul 8, Modul 9) und speziell im Aufbau von Kompetenzen (Modul 3, Modul 4, Modul 5, Modul 9, Modul 10) im oben umrissenen Sinne gesehen. Damit weist das SINUS-Programm in dieselbe Richtung, die auch das CHIME-Konzept anvisiert.

Modul 1:	Weiterentwicklung der Aufgabenkultur
Modul 2:	Naturwissenschaftliches Arbeiten
Modul 3:	Aus Fehlern lernen
Modul 4:	Sicherung von Basiswissen - verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus
Modul 5:	Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen: kumulatives Lernen
Modul 6:	Fächergrenzen erfahrbar machen - fachübergreifendes und fächerverbindendes Arbeiten
Modul 7:	Förderung von Mädchen und Jungen
Modul 8:	Entwicklung von Aufgaben für die Kooperation von Schülern
Modul 9:	Verantwortung für das eigene Lernen stärken
Modul 10:	Prüfen: Erfassen und Rückmelden von Kompetenzzuwachs
Modul 11:	Qualitätssicherung innerhalb der Schule und Entwicklung schulübergreifender Standards

Abb. 66 Module des SINUS-Projekts, 2000-2003 (BLK 2003: 8).

Mit Blick auf die auch im Programm der Bund-Länder-Kommission noch explizit benannte „Förderung von Mädchen und Jungen"[467] ist anzumerken, dass sich viele der im

[467] Dieser Punkt ist durchaus nachvollziehbar so benannt, dass eine einseitige Betonung der Förderung einer Geschlechtergruppe vermieden wird. An der Tatsache, dass bis heute Leistungen und Einstellungen von Mädchen

naturwissenschaftlich-mathematischen Bereich immer wieder gemessenen geschlechtsspezifischen Leistungs-unterschiede für das Problemlösen nicht nachweisen lassen oder so gering (und zwar in *beide* Richtungen) ausfallen, dass sie statistisch nicht signifikant sind. Wie die OECD schreibt, „mag dies darauf hinweisen, dass geschlechtsspezifische Stärken in oder Vorlieben für bestimmte Fächer kompensiert werden können, wenn es um das Lösen von interdisziplinären Problemen geht" (OECD 2005: 119; eigene Übersetzung).

Wie lassen sich nicht-fachgebundene, allgemeine Kompetenzen unterrichten?

Auf diese Frage wurde in Kapitel 2.3 bereits in einiger Tiefe eingegangen. Es sind, auch nach bildungspolitischem Willen, die Öffnung des Unterrichts und der Gedanke der Fächerverbindung, die hier die größte Rolle spielen. In einigen Fächern, besonders im Bereich der Fremdsprachendidaktik, wurden diese Gedanken in den letzten zehn Jahren besonders intensiv (weiter-)entwickelt und erfolgreich umgesetzt, weshalb nun ein Beispiel aus der Fremdsprachendidaktik eine aktuelle und praktisch erprobte Umsetzung nicht-fachgebundenen schulischen Unterrichts verdeutlichen soll. Als Umsetzungsbeispiel soll hier das Konzept eines *Content and Language Integrated Learning* genannt werden.[468] Doyle, Hood und Marsh (2010, Kap. 1.1) fassen die wichtigsten Merkmale von CLIL folgendermaßen zusammen:

> *Content and Language Integrated Learning (CLIL) is a dual-focused educational approach in which an additional language is used for the learning and teaching of both content and language. That is, in the teaching and learning process, there is a focus not only on content, and not only on language. Each is interwoven, even if the emphasis is greater on one or the other at a given time. CLIL is not a new form of language education. It is not a new form of subject education. It is an innovative fusion of both. [...]*
>
> *CLIL is content-driven, and this is where it both extends the experience of learning a language, and where it becomes different to existing language-teaching approaches. [...]*
>
> *CLIL is flexible and can be adapted to different contexts, nonetheless, for the approach to be justifiable and sustainable, its theoretical basis must be rigorous and transparent in practice. [...] It involves a range of models which can be applied in a variety of ways with diverse types of learner. Good CLIL practice is realized through methods which provide a*

bezogen auf mathematisch-naturwissenschaftliche Fächer unter denen ihrer männlichen Altersgenossen liegen, ändert dies freilich nichts.

[468] Eine ganze Reihe aktueller Publikationen entwickelt und evaluiert den Ansatz. Als Auswahl sei hier genannt: Coyle/Hood/Marsh 2010; Breeze 2014; Rüschoff et al. 2015; Nikuta et al. 2016.

more holistic educational experience for the learner than may otherwise be commonly achievable. [...]

The operational success of CLIL has been in transferability, not only across countries and continents, but also across types of school. The educational success of CLIL is in the content- and language-learning outcomes realized in classrooms. CLIL provides pathways to learning which complement insights now emerging from interdisciplinary research within the neurosciences and education (see, for example, CERI[469] 2007).

Auf viele der hier angesprochenen Aspekte wird im folgenden Unterkapitel 8.2 in Zusammenhang mit CHIME zurückzukommen sein. Die Bedeutung und Verbreitung des Konzepts zeigt sich beispielhaft auch in der Arbeit des Goethe-Instituts, das in seinem FüDAF[470]-Unterricht mittlerweile CLIL speziell mit den sogenannten MINT-Fächern kombiniert.[471]

In der Fremdsprachendidaktik gilt *Content and Language Integrated Learning* als Königsweg des (schulischen) Sprachenlernens und das aus einem entscheidenden Grund: Das echte Kommunikationsbedürfnis der Schüler trägt im CLIL den schwierigen Prozess des Spracherwerbs, und auf dieser Grundlage gelingt der Aufbau situativ verankerten, vielfach vernetzten und gerade dadurch transferierbaren Wissens und *Könnens.*

Was authentisches Kommunikationsbedürfnis für den Erwerb der Fremdsprache, ist das Lösen relevanter Probleme für den Erwerb der Problemlösefähigkeit.

Eine analoge Unterrichtung auch innermathematischer Fachinhalte, besonders aber der in den meisten Bundesländern so treffend als „überfachlich“ oder „allgemein“ bezeichneten Kompetenz Problemlösen ist aus den gleichen Gründen didaktisch sinnvoll und methodisch geboten. Bezüge zwischen scheinbar so fremden Disziplinen herzustellen, ist gerade einer der Motoren, die die Evolution der Bildung derzeit antreiben: Die strengen Fächergrenzen werden in vielen sowohl älteren reformpädagogischen Bewegungen als auch neueren Unterrichtskonzepten als lebensfremd und damit lernerunfreundlich und lernpsychologisch ungünstig kritisiert (vgl. u. a. Kap. 2, 3.9). Wie bereits festgestellt haben außerdem in der jüngsten deutschen Lehrplanreform in *allen* Fächern Kompetenzformulierungen die operationalisierten Lernziele abgelöst, so dass es folgerichtig ist, für alle Fächer analoge

[469] CERI steht für das *Centre for Educational Research and Innovation* der OECD.

[470] Abkürzung für Fächerübergreifender Deutsch-als-Fremdsprache-Unterricht. Eine ausführliche fachdidaktische Erläuterung, auch zur Umsetzung, ist zu finden unter https://www.goethe.de/de/spr/unt/kum/clg/20900691.html. [07.04.2017]

[471] EIne umfangreiche konzeptuelle Begründung und Erklärung ist auf der offiziellen Homepage des Goethe-Instituts nachzulesen. Der vollständige Link findet sich im Verzeichnis der Internetquellen und Online-Resourcen am Ende der Arbeit.

didaktisch-methodische Umstrukturierungen zu entwickeln. Was wäre darunter für den Mathematikunterricht zu verstehen?

8.2 Transcurricularität: Das Missing Link

Gellert (2009: 351) stellt fest:

> *Die gescheiterte curriculare Reform hinterließ ein weitgehend ungeklärtes Verhältnis von Anwendungs- und Strukturorientierung. Noch im heutigen Unterricht spiegelt sich dies wider. Zwar dienen Praxisbezüge als Anknüpfungspunkte für mathematische Begriffsbildung, doch fungieren die außermathematischen Situationen hierbei lediglich als Motivationsversuche. Auch werden nach der Erarbeitung eines mathematischen Theoriestücks oder Algorithmus so genannte Sach- oder Anwendungsaufgaben formuliert, doch sind die Sachkontexte beliebig, austauschbar und die Aufgaben dienen meist nur der Einübung erarbeiteter Inhalte.*

Treffender kann man das noch immer herrschende Defizit nicht beschreiben. Das CHIME-Konzept möchte einen Vorschlag machen, wie der letzte Schritt zur Überbrückung zwischen nicht-fachgebundenen Unterrichtskonzepten und den letztlich auf *Task-Based* und *Situated Learning* zurückgehenden Weiterentwicklungen der Fremdsprachendidaktik mit Bezug auf den Sachfach-Unterricht gelingen kann. Auf dieser Grundlage und der aktuell fortschreitenden Ausgestaltung nicht-fachgebundener Unterrichtskonzepte soll hier eine andere Antwort auf diese alte, reformpädagogische Frage gegeben werden:

Was, wenn man nach anderen leitenden Prinzipien als einer bloßen Auflösung von Fächergrenzen eine Neustrukturierung schulischen Lernens denkt?

Das CHIME-Konzept nimmt diesbezüglich folgende Grundhaltung ein: Kenntnisse und Fertigkeiten mit nicht-fachgebundenem Charakter[472] sollten nicht-fachgebunden unterrichtet werden. Zurzeit werden viele solche Kompetenzen wenig koordiniert und so oft wenig effizient in den verschiedensten Fachunterrichten vermittelt. Das Problem liegt in einer fehlenden curricularen Verankerung und didaktischen Gestaltung solcher Inhalte, die *transcurricular* gedacht und geplant werden müssten.[473] CHIME wendet sich damit

[472] Viele von diesen werden in den Lehrplanschriften entweder in den allgemeinen Unterrichtszielen oder bereits fachbezogen als sogenannte „allgemeine Kompetenzen“ benannt und unterschiedliche detailliert ausgearbeitet.

[473] Die hier implizierte Kritik gilt keineswegs den Lehrkräften, denen man kaum abverlangen kann, dass sie die Lehrpläne und didaktisch-pädagogischen Grundlegungen aller Fächer aller Jahrgangsstufen, in denen die Lehrkräfte schuljahresweise eingesetzt werden, detailgenau kennen bzw. die an den Schulen durch die Fachkonferenzen beschlossenen Vereinbarungen. Die Kritik gilt den Lehrplänen, die sowohl immanent (vgl. Band A, Krichel 2017) als auch transcurricular so aufgebaut sind, dass eine effektive Vermittlung vieler „allgemeiner Unterrichtsziele“ verunmöglicht wird.

nicht grundsätzlich gegen die Existenz von Fachunterricht – es vertritt aber die Position, dass es Kompetenzen gibt, die sich (auch wenn sie schwerpunktmäßig in gewissen Fachgebieten angesiedelt sind oder in bestimmten wissenschaftlichen Zusammenhängen eine Rolle spielen) im Rahmen des klassischen Fachunterrichts minder gut lernen und unterrichten lassen, und dass eine der Kompetenzen, die dies ganz besonders betrifft, die Problemlösefähigkeit ist. Folgende Liste, die sich durch die Problemlösefähigkeit nahtlos ergänzen ließe, soll diesen Gedanken veranschaulichen:

- Lesen und Schreiben
  Im Fach *Deutsch* sind diese grundlegenden Kulturfertigkeiten natürlich Kerninhalte des Unterrichts. Dennoch wird niemand in Abrede stellen, dass sie in allen schulischen Fächern benutzt – aber auch, und das ist vielleicht weniger allgemeiner Konsens, gelernt und (weiter-)entwickelt – werden.
- Hörverstehen
  In der Muttersprache bereitet diese Fähigkeit oft keine großen Probleme (allerdings oft doch größere, als der Fachlehrer dies zu Beginn annehmen mag, wenn es um Detailverstehen und zielgerichtetes Zuhören geht). In der *Fremdsprachendidaktik* dagegen ist das „Hörenlernen“ explizit Unterrichtsinhalt, weswegen nicht selten erst in der ersten Fremdsprache systematisch Techniken erlernt werden, die das Hörverstehen erleichtern und verbessern. Das Hörverstehen spielt, fachunabhängig, im fragend-entwickelnden Unterricht fraglos eine zentrale Rolle, so dass man auch hier von einer fächerübergreifenden Anwendung und Fortentwicklung sprechen kann.
- Räumliche Wahrnehmung und Vorstellung
  Geometrische Objekte auch in drei Dimensionen sind in unserer Lebenswelt allgegenwärtig. Dennoch lassen sich signifikante Unterschiede in den Fähigkeiten beim (gedanklichen und realen) Umgang mit Räumlichkeit beobachten. Im Fach *Mathematik* werden räumliche Objekte sehr genau untersucht, systematisiert und definiert. Im Fach Technik spielt vor allem der realpraktische, in der Physik oft auch der abstrakte Umgang mit Objekten eine große Rolle. Dabei sind geistige Beweglichkeit und das „räumliche Vorstellungsvermögen“ notwendig, um bestimmte Manipulationen zielgerichtet planen und durchführen zu können. Auch das Fach Kunst kann durchaus intensiv das Verständnis für den Raum einfordern und ausbilden, wenn entsprechende Impulse gesetzt werden.

- Hand-Augen-Koordination
  Auch dies ist eine Fertigkeit, die aufgrund ihrer allgegenwärtigen Bedeutung oft übersehen wird. Doch nicht nur in der Primarstufe, sondern durchaus auch in der Sekundarstufe I befindet sich diese Grundfähigkeit noch in der Entwicklung; und sie spielt in sämtlichen schulischen Fächern eine Rolle, aktiv gefördert wird sie jedoch nur in einer kleineren Auswahl, so im Sportunterricht, im Werken oder Bildender Kunst, möglicherweise auch noch im Mathematikunterricht, wenn der Umgang mit Zeichengeräten vertieft wird und die zeitlichen Rahmenbedingungen es zulassen, das Zeichnen auch wirklich gemeinsam zu üben.
- Argumentationsfähigkeit
  Die Fähigkeit, die eigenen Gedanken in einer Form zu präsentieren, die es nicht nur erlaubt, sich auf emotionaler Ebene anderen Menschen mitzuteilen, sondern sich über sachliche Fragen und komplizierte Sachverhalte gewinnbringend auszutauschen und möglicherweise die eigenen Erkenntnisse so zu präsentieren, dass andere die Richtigkeit der eigenen Überlegungen nachvollziehen können, ist eine weitere Kompetenz, die sich in den unterschiedlichsten fachlichen Zusammenhängen realisiert. In den Sprachfächern wird die Fähigkeit zur Argumentation unterschiedlich stark betont, spielt aber sicher, wenn auch auf unterschiedlichen qualitativen Ebenen, eine wichtige Rolle. Auch in Fächern wie Philosophie, Religion oder Ethik ist diese Kompetenz aber von überragender Bedeutung und zentrales Unterrichtsziel.

Die Bedeutung solcher allgemeinen Kompetenzen liegt gerade darin, dass sie als Bindeglieder zwischen den verschiedenen Fachgebieten fungieren könnten – nur steht dem in der schulischen Realität oft Einiges entgegen. Mit Blick auf die oben ausgeführten Argumente (Kap. 8.1.1 und 8.1.2) bietet sich Heuristik, und damit ist die strukturierte Problemlösefähigkeit als eigentliche Zielkompetenz allen Mathematikbetreibens gemeint, hier als Schlüsseldisziplin geradezu an. Als Schlüssel zum Erwerb tieferer Einsichten in Sachfächer *und* mathematisches Grundwissen.

Unter direkter Bezugnahme auf die von Coyle, Hood und Marsh (2010) benannten Aspekte von CLIL weist ein mathematisch-heuristischer Sachfachunterricht, wie ihn CHIME entwirft, folgende Merkmale auf:

- CHIME hat einen doppelten bzw. dreifachen Fokus in einer innovativen Fusion: Sachinhalte – Problemlösen – Mathematik.

- CHIME ist inhaltsbestimmt.
- CHIME ist flexibel und an unterschiedlichste Kontexte anpassbar. Es integriert potenziell eine Reihe von Unterrichtsmodellen, so dass ein ganzheitlicheres Lernen möglich wird.
- CHIME ist für alle Schularten und Niveaustufen eine Möglichkeit, echte Kompetenzorientierung umzusetzen und dadurch Lernergebnisse und Kompetenzzuwächse zu realisieren, die sich in einem getrennten heuristisch-mathematischen Unterricht nicht erzielen lassen.[474]

Hier sei noch einmal an den von Klafki entwickelten Unterricht an Schlüsselproblemen erinnert (vgl. Kap. 2.3.4 und 2.3.7), der ebenfalls heuristische Fähigkeiten und Fertigkeiten berücksichtigt, die sich gerade in Verbindung mit mathematischen Problemlösefähigkeiten exemplarisch betrachten und erlernen lassen – durch die mathematische Perspektive können Probleme eingegrenzt und etwa im Teilgebiet Geometrie auch anschaulich aufgearbeitet werden. Das CHIME-Konzept fügt sich so nicht nur grundsätzlich in Klafkis Idee des Unterrichts durch Schlüsselprobleme ein, sondern füllt auch eine theoretische Lücke, wenn es um einen geistigen „Ort“ geht, an dem die praktisch gewonnenen Eindrücke und Erkenntnisse systematisiert und reflektiert werden können: die Metaebene des Problemlösens – die Heuristik.[475]

Leuders, einer der meistrezipierten deutschsprachigen Mathematikdidaktiker der Gegenwart, führt zwei Strukturmodelle an, das „diktatorische“ und das „demokratische“ (LEUDERS 2003: 165 f.), die hier jedoch um eine weitere Möglichkeit ergänzt werden sollen, die weder eine Projektarbeit im Sinne einer koordinierten, zeitlich begrenzten Zusammenarbeit meint noch einen Transport vereinzelter mathematischer Inhalte in ein andere Schulfach, sondern eine Integration der prozessbezogenen Kompetenz „Problemlösen“ bzw. der Heuristik über Fachgrenzen hinweg, aber in steter Einbettung in den fachlichen, curricularen Sachzusammenhang. Hierfür soll der Begriff *transcurricular* stehen, der zum einen die Existenz sachfachlicher Curricula voraussetzt, zum anderen aber diese Curricula überschreitende und zugleich zwischen diesen vermittelnde Kompetenzen anerkennt.

[474] Da das Konzept in dieser Form noch nicht schulisch erprobt wurde, ist dieser Punkt als Postulat auf Grundlage der Erfahrungen in anderen Fächern wie der Fremdsprachenbildung, den Erfahrungen mit problemorientiertem Mathematikunterricht und den Ergebnissen der Lehr-Lernforschung zu Vernetzung und Kompetenzerwerb zu verstehen.

[475] International werden solche und ähnliche Ansätze wenn auch ohne gemeinsamen systematischen, konzeptionellen Überbau verfolgt, z.B. an der Universitatea de Ştiinţe Agricole şi Medicină Veterinară Iaşi (BREZULEANU, Educational Project Approaching Teaching-Learning Transcurricular Modern Method) http://www.revagrois.ro/PDF/2010_1_322.pdf [07.04.2017]

Anstelle des Begriffs *transcurricular* wäre auch die Verwendung des Begriffs *transdisziplinär* denkbar, der jedoch weniger gut den Gedanken transportiert, dass sich diese Kompetenzen auf einer *übergeordneten* Ebene der didaktischen Inhalte, Strukturen und Planung befinden.[476] Dass die Problemlösefähigkeit als eine dieser *transcurricularen Kompetenzen* nichtsdestotrotz eine besondere Verbindung zu mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten aufweist, ergibt sich aus den Ergebnissen der OECD-Studien (vgl. Kap. 4).

8.2.1 Transcurriculare Module als Alternative zur Unterrichtseinheit

Was unterscheidet CHIME von anderen Unterrichtkonzepten, die sich entweder als nicht-fachgebunden oder als „problemorientiert" verstehen? Grundsätzlich liegt der Gedanke nahe, mathematische Grundbildung und prozessbezogene Kompetenzen in Verknüpfung mit Sachinhalten zu vermitteln – das Konzept des Problemorientierten Mathematikunterrichts (oder noch allgemeiner des PBL: Problem-Based Learning) wendet sich in dieselbe Richtung. Es bedeutet jedoch einen immensen Aufwand stets „passende" Probleme in den Mathematikunterricht zu transportieren. Dem Praktiker ist das Phänomen bekannt, dass die „Probleme", die zur Erarbeitung von Fachwissen herangezogen werden sollen, den Schülern oft entweder (inklusive ihrer Lösung) bereits bekannt sind oder im Gegenteil so weit von ihrem Erfahrungshorizont entfernt liegen, dass sie losgelöst aus einem größeren Sachzusammenhang keinerlei subjektive Relevanz besitzen.

Anstatt also Probleme als Lernanlässe künstlich in den Mathematikunterricht hineinzutragen, sollen die Fächergrenzen nicht nur zeitweise aufgehoben werden – wie es bereits der fächerverbindende Unterricht[477] fordert – sondern diejenigen Teile der Mathematik, die sich unmittelbar aus den Fragestellungen anderer Fächer ergeben oder an diesen entwickeln lassen, in mathematischen Moduleinheiten *innerhalb* dieser Fächer erarbeitet werden. Ein Modul ist in diesem Zusammenhang ein Baustein, der eine Brücke zwischen der Mathematik und grundsätzlich allen anderen Disziplinen schlägt. Das CHIME-Konzept beschränkt sich zunächst auf die Ausarbeitung dieses Ansatzes für das Teilgebiet Problemlösefähigkeit am Beispiel geometrischer Problemstellungen.[478] Mit diesem Ansatz wird – zumindest auf den Erwerb und den Aufbau mathematischen Wissens bezogen – der

[476] „Inter-curricular" ist im englischen Sprachgebrauch ein gut etablierter Fachbegriff, der hier im Bemühen um die Vermeidung noch weiterer Terminologie übernommen werden soll.
[477] Der Definition Peterßens folgend, vgl. Kap.1.2.9 und 1.2.10.
[478] Die beiden wichtigsten Gründe hierfür sind die überragende Bedeutung der Problemlösefähigkeit innerhalb wie außerhalb des Fachs Mathematik und die dem gegenüber mangelnde Aktualisierung im gegenwärtigen schulischen Unterricht, wie in verschiedenen Vergleichsstudien diagnostiziert wurde.

rein additive „fächerübergreifende“ Unterricht im Stil des Rechenblattes in Pferdeform[479] verunmöglicht. Module in Sachfächer zu integrieren würde an konventionell arbeitenden Schulen zunächst einmal ein rein organisatorisches Problem darstellen. Diese Module inhaltlich, also didaktisch und methodisch zu gestalten und Umsetzungsmöglichkeiten im realen Umfeld Schule institutionalisiert zu entwerfen bleibt den Folgekapiteln vorbehalten.

8.2.2 Grad der Integration

Das CHIME-Konzept erlaubt bzw. postuliert seinem Ansatz nach eine Weiterentwicklung in Richtung einer vollständigen Umgestaltung des Mathematiklernens und -ehrens in der Schule. Folgt man dem Grundgedanken, das Problemlösen als Kern allen Mathematiktreibens zu definieren, dann wird klar, dass sich nicht nur die Geometrie in Gestalt des hier entwickelten modularen, transcurricularen Unterrichtsmodells vermitteln lässt, sondern dies in der vollständig integrierten Entwicklungsstufe für alle mathematischen Inhalte gilt. Erforderlich ist eine solche Vollintegration jedoch nicht. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen soll in Kapitel 10 und 11 ein Mittelweg eingeschlagen werden, der das CHIME-Konzept einerseits aussagekräftig darstellt, andererseits aber noch nicht die völlige Integration des *gesamten* Mathematikunterrichts in andere Sachfächer in den Blick nimmt: die geometrischen Fachinhalte der Orientierungsstufe werden verschränkt mit den zu erwerbenden heuristischen Techniken und Heurismen modellhaft integriert in Sachfächer entwickelt, nicht-geometrische Fachinhalte dagegen könnten sowohl parallel in separaten Mathematikstunden erworben werden (CHIME Integrationsstufe II, s. u.) als auch ebenfalls modular umgesetzt werden.

Folgende Grade der Integration lassen sich unterscheiden:

- Additive Heuristiklehre im Mathematikunterricht
- Integrierte Heuristiklehre im MU (IHiMU)[480]
- Teilintegration durch nicht-fachgebundene Heuristiklehre in Sachfächern (CHIME Grad I)
- Teilintegration durch heuristisch-mathematische Module in Sachfächern (CHIME Grad II)
- Vollintegration durch modularen heuristisch-mathematischen Unterricht in Sachfächern (CHIME Grad III)

---

[479] Rekus kritisiert überspitzt, dass Rechenaufgaben, die in Form eines Pferdes angeordnet sind, noch lange keinen Beitrag zu einer fächerübergreifenden Unterrichtseinheit zum Thema „Pferd“ liefern (vgl. REKUS 1996: 27).
[480] Für eine ausführliche Darstellung des IHiMU-Konzepts s. Band A (KRICHEL 2017).

Auf den drei Teilintegrationsstufen sind dabei folgende Parameter denkbar (nicht vollständige Listung):

- auf einzelne Sachfächer beschränkt
- auf bestimmte mathematische Teilgebiete beschränkt
- auf bestimmte Jahrgangsstufen beschränkt

<table>
<tr><td rowspan="8">Fortschreitender Integrationsgrad</td><td colspan="3">Vollintegration durch modularen heuristisch-mathematischen Unterricht in Sachfächern
(CHIME Grad III)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Teilintegration durch heuristisch-mathematische Module in Sachfächern
(CHIME Grad II)</td></tr>
<tr><td>auf einzelne Sachfächer beschränkt</td><td>auf bestimmte mathematische Teilgebiete beschränkt</td><td>auf bestimmte Jahrgangsstufen beschränkt</td></tr>
<tr><td colspan="3">Teilintegration durch nicht-fachgebundene Heuristiklehre in Sachfächern
(CHIME Grad I)</td></tr>
<tr><td>auf einzelne Sachfächer beschränkt</td><td>auf bestimmte mathematische Teilgebiete beschränkt</td><td>auf bestimmte Jahrgangsstufen beschränkt</td></tr>
<tr><td colspan="3">integrierte Heuristiklehre im MU (IHiMU)</td></tr>
<tr><td colspan="3">additive Heuristiklehre im Mathematikunterricht</td></tr>
</table>

Tab. 26 Integrationsgrade von CHIME und Parameter für Teilintegrationen.

Um es noch einmal ganz klar zu sagen: Die Beschränkung auf das Teilgebiet der Geometrie ist dem Umfang der Arbeit und der besonderen Eignung dieses Teilgebiets für das Erlernen der Heuristik geschuldet. Es gibt keine sachlogischen Gründe, die andere mathematische Teilgebiete von einer analogen unterrichtlichen Umstrukturierung ausschließen würden. Aus vergleichbaren Gründen wurde hier der besondere Augenmerk auf die Orientierungsstufe gelegt; eine Ausweitung auf die verbleibenden drei bzw. vier Schuljahre der Sekundarstufe I und darüber hinaus der Sekundarstufe II ist ohne Weiteres denkbar und würde den nächsten logischen Schritt für den Ausbau des Konzepts darstellen. Und: Die Schüler bauen ihr geometrisches Wissen *und* ihre heuristischen Kenntnisse eingebettet in Sachsituationen aus. Das bedeutet keineswegs, dass damit zusätzlicher „autonomer“ Mathematikunterricht ausgeschlossen ist (vgl. Kap. 10.1)

8.2.3 Kommentar: Mathematik als Geisteswissenschaft, Kulturleistung und eigenständige Disziplin

Mathematik ist eine Geisteswissenschaft besonderer Güte. Es ist nun sicherlich mehr eine persönliche Interpretationssache, ob man in der hier vorgetragenen Konzeption zur Integration der Mathematik in Sachfächer eine Degradierung oder eine Adelung sieht: Beabsichtigt ist im Grunde genommen keines von beidem, da sachlogische Gründe für eine solche Umgestaltung des traditionellen Mathematikunterrichts vorliegen. Es soll jedoch betont sein, dass keinesfalls eine Herabsetzung der Mathematik, sei es in ihrer kulturellen, ihrer wissenschaftlichen, ihrer hermeneutischen oder epistemologischen Bedeutung, intendiert ist: Die Mathematik ist gerade *wegen* ihrer Qualitäten in all diesen Bereichen prädestiniert, transcurricular zu agieren. Sie bewegt sich – und dies sicher besonders in ihrer höchsten Ausprägung, dem Problemlösen – gleichsam außerhalb und innerhalb vieler wissenschaftlicher Disziplinen, in denen sie als quasi-apodiktische Kontrollinstanz dient, liefert theoretische Fundamentierung und zukunftsweisende Spekulationsmodelle.

Dem Aufschrei von Fachkollegen, die hier eine Reduzierung, ja Degradierung, des Faches zur ‚Hilfswissenschaft' argwöhnen und dementsprechend vehement betonen, dass die Mathematik (vor allem) eine Wissenschaft mit transzendenteren Zielen als dem schnöden Lösen von Alltagsproblemen sei, soll hier entgegengehalten werden, dass unter dem Begriff des ‚Problems' keineswegs lediglich zu lösende Sachverhalte aus Lebensweltbereichen, sondern ebenso gut das Führen eines schlüssigen Beweises verstanden werden kann; der Verfasser gibt aber gern zu, dass mit Blick auf die hier zu betrachtende Orientierungsstufe und die dort zu vermittelnden Grundfähigkeiten in der Heuristik (sowie aus didaktischen Gründen) wann immer möglich der Betrachtung solcher Problemstellungen der Vorzug gegeben werden soll, die sich für Schüler in ihrer Bedeutung erschließen. Es mag sicherlich Lerngruppen geben, denen ein Zugang auch zu abstrakten Problemen bereits frühzeitig möglich ist, und ganz sicher stellt sich die Auswahl der Probleme zur Weiterentwicklung heuristischer Fähigkeiten für spätere Jahrgangsstufen anders dar, als es die Auswahl historischer Aufgabenbeispiele in Teil II sowie die Überlegungen zur Entwicklung eines Unterrichtskonzepts für die Klassen 5 und 6 im Folgenden möglicherweise zu suggerieren scheinen.

8.3 Personen

Wie für eine Öffnung des Systems Schule im Allgemeinen und für offene Unterrichtsformen in der Fachliteratur beschrieben verlangt auch das CHIME-Konzept ein verändertes Verständnis der Rollen von Lerner und Lehrendem – und zwar in dieser Reihenfolge, wie sich unmittelbar aus den konstruktivistischen Grundüberzeugungen ergibt. Auf die unterrichtspraktischen Konsequenzen dieser Rollenänderung wird bei der Konzeptexplikation an verschiedenen Stellen einzugehen sein, nun soll es um zwei zentrale Aspekte gehen, die sich durch die Grundidee con CHIME besonders tiefgreifend verändern und langfristig weiterentwickeln lassen.

8.3.1 Lernerautonomie

Die Autonomie der Lerner (in dem hier betrachteten schulischen Rahmen also der Schüler) umfasst sowohl den Aspekt einer größeren Freiheit als auch den der damit unmittelbar verknüpften größeren Verantwortung für das eigene Lernen. Die Anforderungen an die Schüler, die im Rahmen eines transcurricularen heuristisch-mathematischen Unterrichts zu erwarten sind, unterscheiden sich nicht von denen, die für andere Formen des offenen und nicht-fachgebundenen Unterrichts bereits vielfach beschrieben wurden. Die tatsächlichen Auswirkungen hängen vom Grad der Integration (vgl. Kap. 8.2.2) und den damit unmittelbar verbundenen Unterschieden in der möglichen didaktischen und methodischen Gestaltung des Lernprozesses zusammen. Entscheidend ist, dass den Lernern Strukturierungsmittel an die Hand gegeben werden müssen, die ihnen helfen, transcurricular erworbenes Wissen und Können adäquat zu sammeln, zu sichern und zu entwickeln. Auf dieses Thema wird in Kapitel 10.4 vertiefend eingegangen.

Die Möglichkeiten, die sich auf der anderen Achse „Freiheit“ ergeben, sind ebenso abhängig von der Ausgestaltung und sehr viel größer, als dies im traditionellen Mathematikunterricht möglich wäre. Die für Projektunterricht und nicht-fachgebundene Unterrichtsformen herausgestellten Vorteile bezüglich einer Orientierung an individuellen Interessen und Stärken der Schüler gelten hier in Teilen ebenfalls, wenn bei der (Neu-) Gestaltung eines solchen transcurricularen Unterrichts entsprechend methodisch flexibel geplant wird. Hinzu tritt ein Spezifikum des Problemlösens als Aktivität: Schüler werden automatisch unterschiedliche Zugänge zu Problemen finden, sie werden Probleme verschieden angehen, untersuchen und lösen. Die ernsthafte Beschäftigung mit der Problemstellung vorausgesetzt ist so ein individualisierter Lernprozess unvermeidlich. Diese Freiheit mag auch eine Gefahrenquelle darstellen, wenn sie nicht verantwortungsvoll genutzt und wertgeschätzt wird. Es ist daher keineswegs so, dass der Schüler sich selbst überlassen bleiben kann oder darf – denn zur Eroberung der Metaebene der Heuristik bedarf es der kommunikativen Auseinandersetzung mit den Mitschülern und möglicherweise verschiedentlich der Unterstützung durch den moderierenden und die Lernumwelt vorbereitenden Lehrer.

8.3.2 Lehrerprofessionalität

Der Anspruch, heuristisch-mathematische Inhalte transcurricular zu unterrichten, stellt also neue Anforderungen an die beteiligten Lerner, aber eben auch an die Lehrenden (in dem hier betrachteten schulischen Rahmen also die Lehrer). Der Lehrer tritt in dem oben umrissenen Szenario in der Rolle des Mentors, Organisators, Gesprächsleiters, Beobachter usw. auf, jedoch sicherlich sehr viel weniger als belehrende Instanz des traditionellen fragend-entwickelnden Unterrichts. Damit soll hier kein methodisches Absolutum gesetzt sein (dass auch fragend-entwickelnde Elemente ihren Platz haben, wird noch zur Sprache kommen), aber es liegt auf der Hand, dass sich Erwerb und Aufbau heuristischer Kompetenzen einer Bearbeitung und Erklärung im Gleichschritt ihrem Wesen nach entziehen.

Dieses Umdenken betrifft keineswegs nur die Mathematiklehrer, denn das Gelingen transcurricularen Unterrichts hängt fundamental von der Kooperationsbereitschaft sowie von der Kooperations*fähigkeit* aller beteiligten Lehrer ab. Gemeint ist die Kompetenz, transcurricularen Unterricht fachinhaltlich (inhaltliche Dimension) und didaktisch-methodisch (didaktische Dimension) *gemeinsam* zu gestalten. Selbst wenn die Bereitschaft zu einer solchen gemeinsamen Gestaltung der Lernumgebung[481] gegeben ist, wäre eine neue, kooperative Kultur der Unterrichtsplanung und -gestaltung eine letztlich notwendige Professionalisierungsmaßnahme in der Aus- und Weiterbildung von Lehrern.[482]

Um erwartbare Schwierigkeiten zu verdeutlichen[483] – und bei der Konzeptentwicklung Lösungen mitzudenken – sollen hier einige Gründe angesprochen werden, aus denen derzeit außermathematische Kontexte selten einbezogen werden, obwohl „die meisten Lehrer eine stärkere Einbeziehung [...] für sinnvoll halten" (WESTERMANN 2003: 151).[484]

- Lehrer sind nicht ausgebildet
  Dieser Einwand wird insbesondere mit Blick auf die Sachfachinhalte erhoben, die in den Mathematikunterricht hereingeholt werden sollen. Bei CHIME wird dieses Problem (es geht nicht um das oben angesprochene Kooperations- und Koordinationsproblem und darf nicht damit verwechselt werden) durch die Beteiligung mehrerer, in den jeweils beteiligten Fächern ausgebildeter Lehrkräfte verringert oder vermieden.

[481] Dieses Wort wird hier anstelle des Begriffs „Unterricht" verwendet, um zu verdeutlichen, dass es in einem umfassenderen Sinne um die Gestaltung der schulischen Lernumgebung geht.
[482] Zu möglichen Rollenverteilungen zwischen Mathematiklehrer und dem Lehrer des Sachfaches wird in Kap. 10.1 Stellung bezogen.
[483] Eine Darstellung der aktuell (im Zuge der Bildungsreform) bereits an Mathematiklehrer gestellten Anforderungen findet sich in Band A (KRICHEL 2017: 169 ff.).
[484] Eine solche Einbeziehung außermathematischer Kontexte ist einer der ersten Schritte, um eine Öffnung des Mathematikunterrichts durch nicht-fachgebundene Elemente zu erreichen. Eine sehr viel engere Anbindung an Sachfächer, wie das CHIME-Konzept sie beabsichtigt, müsste mit ähnlichen Schwierigkeiten oder Vorbehalten bei den Lehrern rechnen. Die nun folgenden erwarteten Schwierigkeiten sind WESTERMANN 2003: 151 entnommen.

- Es stehen keine geeigneten Materialien zur Verfügung
  Das in aller Regel zur Verfügung stehende Material, meist Schulbuch, Arbeitsheft und gelegentlich noch einige Zusatzmaterialien im Besitz der Schule (wie Demonstrationskoffer mit geometrischen Körpern u. ä.), weist zu selten Bezüge zu außermathematischen Kontexten auf.[485] Bei CHIME ist dieses Problem durch die Arbeit an den Sachfachinhalten und -materialien bereits deutlich reduziert.
- Es entsteht ein großer Vorbereitungsaufwand
  Wegen der beiden genannten Schwierigkeiten ist der Vorbereitungsaufwand groß. CHIME setzt auf Synergieeffekte, die nicht nur den Lernprozess und die Steigerung der Effizienz des Unterrichts (Kompetenzzuwachs) betreffen, sondern auch und gerade den Lehrern neue Möglichkeiten zur Nutzung gemeinsamer Ressourcen und Entlastung durch Kooperation bieten.
- Anwendungen kosten Unterrichtszeit
  Eine zusätzlich zur innermathematischen „Behandlung“ durchgeführte Arbeit anhand kontextualisierter Anwendungen lässt sich schon aus Zeitgründen oft nicht realisieren. Hier greifen wieder die bereits angesprochenen Synergieeffekte von CHIME. Da die Probleme nicht zusätzlich in den Mathematikunterricht getragen werden, sondern „reale“ Probleme der Sachfächer zum Lernanlass genommen werden, steht Zeit sozusagen aus beiden Stundentafeln zur Verfügung.
- Außermathematische Kontexte bringen Unsicherheiten in den Unterricht
  Dies dürfte in Wahrheit der Kern des Unbehagens der meisten Lehrer sein, die sich mit der Umsetzung eines offeneren Mathematikunterrichts befassen (müssen). Tatsächlich ist die Prozessorientierung nunmehr[486] aber kein *Kann* mehr, sondern längst ein *Muss*, weshalb das Argument im Grunde keines mehr ist. CHIME versteht diese sogenannten „Unsicherheiten“ (etwa bezüglich Operationalisierbarkeit des Lernprozesses, nicht vorhersehbare Fragen aus dem sachfachlichen Kontext heraus, mehrere Lösungswege oder sogar Lösungen, Fragen der Leistungsbewertung usw.) gerade als bereichernden Aspekt, der die Prozessorientierung und den damit verbundenen sinnstiftenden Realitätsbezug für die Lerner ausmacht und begreifbar macht.

[485] Wo sich Lehrwerke darum bemühen, ist oft festzustellen, dass es letztlich nur eingekleidete Aufgaben sind, die die Schüler ansprechen und motivieren sollen, aber keine realitätsnahen Bezüge herstellen.
[486] Es ist zu bedenken, dass die Befragungen, auf die Westermann sich hier bezieht, vornehmlich vor der Implementierung der neuen kompetenzorientierten und an den sonstigen Vorgaben der Bildungsstandards ausgerichteten Lehrplanschriften durchgeführt wurden.

9 Allgemeines Strukturmodell CHIME

Aus den historischen Betrachtungen sowie unter Beachtung der aktuellen fachdidaktischen Bewegungen zu einem anwendungsorientierten und auf die Lebenswelt bezogenen Mathematikunterricht und unter Berücksichtigung einer zukünftigen schulischen Unterrichtsrealität entwickelt CHIME eine regelmäßige, implizite und mit geeigneten Aufgaben durchgeführte Heuristikschulung. Der Unterricht in Heuristik spielt sich bei gleichzeitigem Erwerb der mathematischen Kenntnisse ab, die von den Lehrplänen gemeinhin gefordert werden und die man als „globales mathematisches Curriculum" auch für die Zukunft als Inhalte voraussetzen kann. Dass sich die so erworbenen heuristischen Techniken und Heurismen grundsätzlich auch auf andere Sachzusammenhänge übertragen lassen und dort produktiv angewandt werden können, wird vorausgesetzt, da dies durch die PISA-Ergebnisse zumindest empirisch gesichert erscheint. Das Ziel ist damit „funktionale mathematische Bildung" (LEUDERS 2003: 52).

Welche Eigenschaften muss eine Form des Unterrichts aufweisen, der anstrebt, bestimmte übergreifende Inhalte in verschiedene Sachfächer zu integrieren?

9.1 Konzeptbeschreibung

Dem Konzept zur *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education* liegen folgende Überlegungen und Überzeugungen zugrunde, die sich aus den bisherigen Betrachtungen herleiten:

- Das Problemlösen als prozessbezogene Kompetenz kann nur im Wechselspiel mit fachlichen Inhalten erworben und aufgebaut werden. Mathematische Inhalte sind dazu in besonderer Weise geeignet.
- Das Problemlösen im weiteren Sinne stellt eine übergeordnete Kompetenz zu den anderen prozessbezogenen Kompetenzen dar und vereinigt diese potenziell in sich.
- Nur die Reflexion problemlösender Tätigkeit erlaubt den Aufbau heuristischer Kompetenz. Mathematisches Problemlösen ist dazu in besonderer Weise geeignet.

Es geht um eine kontinuierliche, stringente Integration einer mathematischen oder mathematikaffinen Heuristiklehre in möglichst viele Unterrichtsfächer, um die Anknüpfungspunkte im Wissensnetz der Schüler von Anfang an zu mehren und außerdem dem grundsätzlich transcurricularen Charakter dieser Fähigkeit Rechnung zu tragen.

Dass dabei auch mathematische Fachinhalte transportiert werden ist ein Nebeneffekt, der ganz sicher Anlass gibt nachzudenken, inwieweit eine Umgestaltung des *gesamten* Mathematikunterrichts in dieser Weise möglich und geboten wäre. An einigen Stellen werden solche weiterführenden transcurricularen Anwendungen der gewonnen heuristischen Fähigkeiten der Schüler aufgezeigt – den Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit müssen allerdings solche Beispiele und Erarbeitungszusammenhänge bilden, bei denen die Mathematik (und hier speziell die Geometrie) als Grundlage in anderen Fächern dienen und an ihr das Problemlöseverhalten (in Auseinandersetzung mit geometrisch-mathematischen Inhalten) entwickelt wird.

CHIME als Unterrichtskonzept beinhaltet verschiedene Methoden und Lernarrangements, die situationsbedingt und mit Blick auf das jeweilige Zielbündel eingesetzt werden.

CHIME ist ein an Problemen, die im sachfachlichen Unterricht in Erscheinung treten, orientierter und durch den verschränkten Aufbau prozessualer und fachlicher Kompetenzen charakterisierter, modular angelegter Mathematik- und Heuristikunterricht, bei dem Sachfach- und Mathematiklehrer kooperativ den Lernprozess begleiten und in dem das Finden von Problemlösungen die Gestaltung des Unterrichtsprozesses bestimmt; die Schüler sollen durch von Beginn an hochfrequentes sowohl mathematisch als auch sachfachlich situiertes und reflektierendes Problemlösen tragfähige heuristische Kompetenzen aufbauen.

CHIME basiert auf folgenden grundlegenden Annahmen über den Lerner:

Wissen wird grundsätzlich in Verbindung mit allen Vorerfahrungen und Vorkenntnissen durch den Lerner konstruiert (konstruktivistische Perspektive); der Erfolg einer solchen Konstruktion hängt maßgeblich von der Eigenaktivität und affektiven Faktoren ab, also davon, als wie subjektiv bedeutsam die neu zu gewinnenden Kenntnisse oder Fertigkeiten empfunden werden.

Weder die Nähe des Namens zum in der Fremdsprachendidaktik geprägten CLIL (*Content and Language Integrated Learning*) noch der gewählte Anglizismus sind zufällig: In einer Zeit stetig zunehmender Globalisierung wird auch Bildung im Zusammenspiel und im Diskurs internationaler Körperschaften ausgehandelt. Als kulturelles Konstrukt unterliegt der Bildungsbegriff ebenso vielen Anpassungen und Anforderungen wie so viele andere längst nicht mehr national gebundene gesellschaftliche Erscheinungen.[487] Der Anglizismus verweist so einerseits auf den engen Zusammenhang der Bildungsreformen mit Vorläuferbewegungen in den Vereinigten Staaten von Amerika, zum anderen auf eine grundlegende

[487] Vgl. hierzu auch Kap. 3.10 und Kap. 4, Einleitung.

didaktische Ausrichtung, die zwischen den Begriffen *Fach* für die Sachinhaltsbereiche und *Fach* als schulische Organisationsform als losgelöst, im 45-Minuten-Takt operierende Einheit scharf trennt. Die inhaltlichen Parallelen und fruchtbaren Erfahrungen des Fremdsprachenlernens wurden in Kapitel 8.1.2 angerissen.

Ziele von CHIME

Das übergeordnete Ziel von CHIME ist funktionale, zum Problemlösen befähigende heuristisch-mathematische Bildung.

Als konstituierende Unterziele will CHIME[488]

- aktives Lernen initiieren,
- konstruktivistischen Wissensaufbau realisieren,
- das Lösen von Problemen in unterschiedlichsten Kontexten mit mathematischen Mitteln kultivieren,
- durch Reflexion erfolgreicher Problemlösungen auf einem schülerangemessenen Niveau heuristische Kompetenzen aufbauen,
- zum effektiven Argumentieren und Kommunizieren sowohl in schriftlicher als auch mündlicher Form befähigen,
- allgemeine Kritikfähigkeit fördern,
- Neugier und kreatives Denken befördern und entwickeln,
- anwendungsbezogenes, verknüpftes Wissen aufbauen,
- Schüler für Neues und für die Multiperspektivität der Realität sensibilisieren,
- einen auf allen Ebenen (material, methodisch, thematisch) vielseitigen und offenen Unterricht schaffen, der auch Schülerwünsche einbezieht, und
- Lernstrategien vermitteln.

Merkmale von CHIME[489]

1. CHIME ist grundsätzlich ganzheitlich angelegt und folgt damit mit Blick auf den Lerner Bruners EIS-Prinzip (vgl. Kap. 3.9.5), mit Blick auf den enthaltenen unterrichtlichen Stoff ist CHIME transcurricular (vgl. Kap. 1.2.10, 8.1.2), und die methodische Gestaltung vermeidet in diesem Sinne jegliche Engführung.

---

[488] Es handelt sich nicht um eine vollständige Listung. Weitere Unter- oder Teilziele innerhalb der bereits benannten Unterziele lassen sich festlegen und können von äußeren Faktoren, Lerngruppenspezifika oder materialen Zwängen beeinflusst werden.
[489] Die Art der Darstellung ist in groben Zügen an die von JANK/MEYER (1991:354 ff.) gewählte angelehnt.

2. CHIME ist schüleraktiv und selbsttätig: nur durch eigene Aktivität kann Problemlösefähigkeit wachsen.
3. Im Mittelpunkt des CHIME-Konzepts steht der verschränkte Aufbau von Sachkenntnissen und Problemlösefähigkeiten, der durch Entdeckung, Erprobung und Reflexion von Lösungswegen zu wachsender heuristischer Kompetenz führt; diese Kompetenz muss durch kommunizierbare Ergebnisse in Form von konkreten Lösungswegen fassbar sein. Die kritische Reflexion dieser Ergebnisse ist integraler Bestandteil der weiteren unterrichtlichen und individuellen Arbeit.
4. CHIME ist darum bemüht, subjektiv relevante Problemstellungen zu finden, die außerdem Raum für individuelle Ausgestaltungen lassen: diese Freiräume bewegen sich innerhalb der weit gesteckten Themenfelder, die moderne Lehrpläne den Sachfächern im Allgemeinen einräumen, es bindet sich nicht an das Prinzip der Projektarbeit.
5. Die Situiertheit in unterschiedlichen Sachfachgebieten bietet CHIME stets verschiedene Zusammenhänge zu Erwerb, Wiederholung und Vertiefung von Kenntnissen und Fertigkeiten.
6. CHIME verlangt und befördert zugleich eine größere Offenheit schulischer und pädagogischer Strukturen. Mit Blick auf den Unterricht stehen die Individualisierung des Lernprozesses und die Aufbrechung von Fächergrenzen im Vordergrund. Mit Blick auf die Position von Unterricht und Schule in der Lebenswelt der Lerner wird durch die transcurriculare Arbeitsweise eine realistische(re) Perspektive auf die Interdependenzen von Wissensgebieten eröffnet und konsequent beibehalten.
7. Der Lehrer nimmt im CHIME-Konzept eine organisierende und vorstrukturierende Rolle ein und zieht sich aus den aktiven Denkvorgängen so weit wie möglich zurück; als Moderator bei der Aushandlung der Arbeitsergebnisse ist er maßgeblich für den mittel- und langfristigen Kompetenzaufbau mitverantwortlich.

Mögliche Vorteile von CHIME

- Bessere Identifikation der Lerner mit mathematischen und heuristischen Fragestellungen durch unmittelbare und stete Anbindung an verschiedene Sachfächer.
- Lerner übernehmen durch die grundsätzlich individualisiert angelegte Unterrichtsgestaltung entscheidend Mitverantwortung für Verlauf und Erfolg des Unterrichts.

- Ergebnisse werden von den Lernern auch selbst bewertet. Demokratische Kritik und Kontrolle der Unterrichtsarbeit wird möglich.
- Methodische, soziale und personale Kompetenzen können gezielt gefördert werden.
- Disziplinprobleme reduzieren sich in der Regel durch offenere Unterrichtsformen.
- Durch Synergieeffekte können materiale und zeitliche Ressourcen effektiver ausgeschöpft werden.

Mögliche Nachteile von CHIME

- Abhängig von der institutionellen Entwicklung des Systems Schule können sich Probleme bei der inhaltlichen wie organisatorischen Abstimmung mit anderen Lehrkräften ergeben.
- Die modulare Arbeit erfordert eine enge und verlässliche Abstimmung und Planung über Fachgrenzen hinaus.
- Mangelnde Orientierung könnte bei Lernern eintreten, vor allem in der individuellen bzw. institutionellen Einführungsphase.
- Bei Schulwechseln könnten sich negative Auswirkungen durch die abweichende Gewöhnung zeigen.

9.2 Ziele und Indikatoren

Die moderne Bildungsforschung verlangt neben der Formulierung klarer Ziele eine damit korrespondierende Listung von Indikatoren, die eine Überprüfung und Evaluation ermöglichen. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben soll daher an dieser Stelle zusammenfassend eine solche Liste vorgestellt werden:

Unterziele	Indikatoren
Aktives Lernen wird initiiert.	Jeder einzelne Schüler ist aktiv.
Konstruktivistischer Wissensaufbau erfolgt.	Schüler erweitern ihre Kompetenzen durch eigenes Handeln, nicht durch das Befolgen von Handlungsschritten.
Das Lösen von Problemen wird in unterschiedlichsten Kontexten mit mathematischen Mitteln kultiviert.	Problemorientierung ist in den beteiligten Sachfächern konsequent und planvoll integriert.
Durch Reflexion erfolgreicher Problemlösungen auf einem schülerangemessenen Niveau werden heuristische Kompetenzen aufgebaut.	Es gibt einen fest institutionaliserten unterrichtlichen Raum für die Evaluation erfolgreicher und gescheiterter Problemlösungen.
Die Lerner werden zum effektiven Argumentieren und Kommunizieren sowohl in schriftlicher als auch mündlicher Form befähigt.	Kooperative Lernformen dominieren, gemeinsame Lernprodukte stehen im Vordergrund.
Allgemeine Kritikfähigkeit wird gefördert.	Der reflektierende, sachlich-wertende Austausch ist regelmäßig Teil des Unterrichts.

Neugier und kreatives Denken werden befördert und entwickelt.	Schüler bringen eigene Vorschläge und Ideen ein und tragen eigene Interpretationen vor.
Anwendungsbezogenes, verknüpftes Wissen wird aufgebaut.	Das Lernen findet in echten Kontexten statt und lehnt sich möglichst eng an die Lebensrealität der Schüler an.
Schüler werden für Neues und für die Multiperspektivität der Realität sensibilisiert.	Entdeckendes Lernen unter besonderer Berücksichtigung mehrerer möglicher Zugänge oder Lösungen wird realisiert.
Ein auf allen Ebenen (material, methodisch, thematisch) vielseitiger und offener Unterricht wird geschaffen, der auch Schülerwünsche einbezieht.	Der Unterricht wird nicht durch eine einzige Methode, einen einzigen Zugang, vorgegebene Themen oder Lernzugänge dominiert.
Lernstrategien werden vermittelt.	Schüler reflektieren ihr Lernhandeln und entwickeln individuelle, flexible Lernstrategien.

Tab. 27 Ziele des CHIME-Konzepts und ihre Indikatoren (nicht vollständige Listung).

Die Liste lässt erneut erkennen, warum sich das Teilgebiet *Problemlösen* besonders gut für das Anliegen des gesamten Konzepts eignet. Problemlösenlernen ist stets mit individueller aktiver Teilhabe verbunden. Der Aufbau von Wissen in einer solchen aktiven Auseinandersetzung mit fachlichen und überfachlichen Inhalten folgt den Prinzipien eines konstruktivistischen Lernverständnisses. Durch die unvermeidliche Pluralität der Zugänge und Lösungen während des Problemlösens ist eine kommunikative Auseinandersetzung praktisch nicht vermeidbar – die Divergenzen verlangen, ja erzwingen, von den Vertretern unterschiedlicher Positionen eine Untersuchung, ein Aushandeln und letztlich eine Einigung; dass die allgemeine Kritikfähigkeit davon profitiert, wenn solche Aushandlungsprozesse selbstverständlicher Teil des Unterrichts sind, liegt auf der Hand, da die Fähigkeit zur sachlichen Kritik ebenso wie die Argumentationsfähigkeit allgemein in nicht unerheblichem Maße kulturelle und damit konventionengebundene menschliche Fähigkeit ist, die es in einem sozialen Raum zu erlernen und einzuüben gilt.

Auf Rätsel, Hindernisse, Probleme zu stoßen, die man lösen und überwinden kann, stellt sicherlich eine der potenziell wirkmächtigsten Erfahrungen des Lernens dar; die Neugier auf bislang Unbekanntes ist die Triebfeder eines geradezu unerschöpflichen Arbeitseifers, den man bei kleinen Kindern und auch im Grundschulalter noch sehr oft beobachten kann. Jahrelange Routinen und ewig gleiche Handlungsmuster im Unterricht setzen dem meist ein Ende. Doch gerade das Lösen von Problemen kann diese Neugier wieder wecken und durch das explizite Zulassen neuer, eigener Ideen (und nicht die perfekte Durchführung zuvor vorgeführter Handlungsmuster) den Stellenwert des kreativen Denkens wieder heben.

Problemlösen lässt sich sowohl auf abstrakter, innermathematischer Ebene als auch anwendungsbezogen umsetzen und ist in praktisch alle Kontexte integrierbar, wie mit Blick auf die schulische Lernumgebung noch im Detail dargestellt wird; insbesondere aufgrund dieser letztgenannten beiden Aspekte kann Unterricht im Problemlösen auch effektiv die Aufmerksamkeit auf Neues lenken, da sich Denkmuster bei der Suche nach Unbekanntem und dem Bearbeiten von Rätseln über die Zeit einschleifen.

9.3 Heuristische Module und Sequenzen

CHIME bekennt sich zu einer Abkehr von den traditionellen unterrichtlichen Handlungsmustern ebenso wie traditionsbedingten organisatorischen didaktisch-methodischen Festschreibungen. Wie weit diese Auflösung reicht, hängt von dem Grad der Integration ab, wie in Kapitel 8.2.2 erläutert. Da sich eine willkürliche, allzeitige Vermischung heuristisch-mathematischen Unterrichts mit den Sachfächern aber verbietet, um die zu Recht kritisierten Effekte eines Gesamtunterrichts zu vermeiden und den in Kapitel 2.1 benannten Kritikpunkten der Gegner jeglichen nicht-fachgebundenen Unterrichts zu begegnen, ist CHIME modular konzipiert. Diese Gestaltung in Modulen verbindet planerische Klarheit mit Flexibilität in der Verortung in verschiedenen Sachfächern und im Gesamtjahresplan einer Jahrgangsstufe.

Ein Heuristisches Modul ist eine zeitlich umgrenzte Unterrichtseinheit, in der eine Problemstellung eines Sachfachs im Mittelpunkt steht. Das Problem erfordert den planmäßigen Einsatz unterschiedlicher problemlösender Handlungen und befördert durch die (parallele oder nachgestellte) Einnahme der Metaperspektive systematisch den Aufbau heuristischer Kompetenzen; heuristische Module in diesem Sinne verbinden mathematische Inhalte mit Problemstellungen anderer Fächer und können so nicht eindeutig einem Fachgebiet zugeordnet werden.

Heuristische Module können verschiedene Grade kategorialer Offenheit aufweisen, das heißt ihr Fokus kann auf Erwerb und Anwendung ganz spezifischer heuristischer Techniken oder Heurismen liegen, oder sie können mit größeren Freiheitsgraden konzipiert werden, bis hin zur gänzlich freien Auswahl und (Re-)Kombination von eigenen oder bereits bekannten heuristischen Techniken und Heurismen.

Heuristische Module stellen die unterrichtliche Grundeinheit dar, in der heuristische Kompetenzen erworben oder in neuen sachfachlichen Zusammenhängen eingesetzt werden. Erst durch Vernetzung mehrerer Module zu einer Sequenz wird jedoch im Sinne unterrichtlicher Prinzipien – wie dem Spiralprinzip – sichergestellt, dass der Kompetenzerwerb langfristig und nachhaltig gelingt.

Eine Heuristische Sequenz ist eine akkumulativ und spiralförmig angelegte Folge heuristischer Tätigkeit, die den Erwerb einer oder mehrerer spezifischer Strategien zum Ziel hat; eine solche Sequenz erstreckt sich typischerweise über mehrere Schuljahre und dient dem sukzessiven Ausbau heuristischer Kompetenz und insbesondere auch Metakognition.

Die Vernetzung (s. Abb. 67) ist dabei sowohl *horizontal* (in verschiedenen Sachfächern bzw. auch innerhalb eines Sachfachs über mehrere Themen hinweg) als auch *vertikal* (über Jahrgangsstufen hinweg) oder *diagonal* (in verschiedenen Sachfächern über Jahrgangsstufen hinweg) möglich, jedoch bei der Planung jeweils auf ihren didaktischen Wert im Gesamtzusammenhang der geplanten CHIME zu überprüfen. Das heißt, nur mit Blick auf das gesamte Kontinuum der geplanten *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education* lässt sich entscheiden, welche heuristischen Techniken und Heurismen wann und in welchem sachfachlichen Problemzusammenhang eingeführt, wieder aufgegriffen und weiterent-wickelt werden sollen.

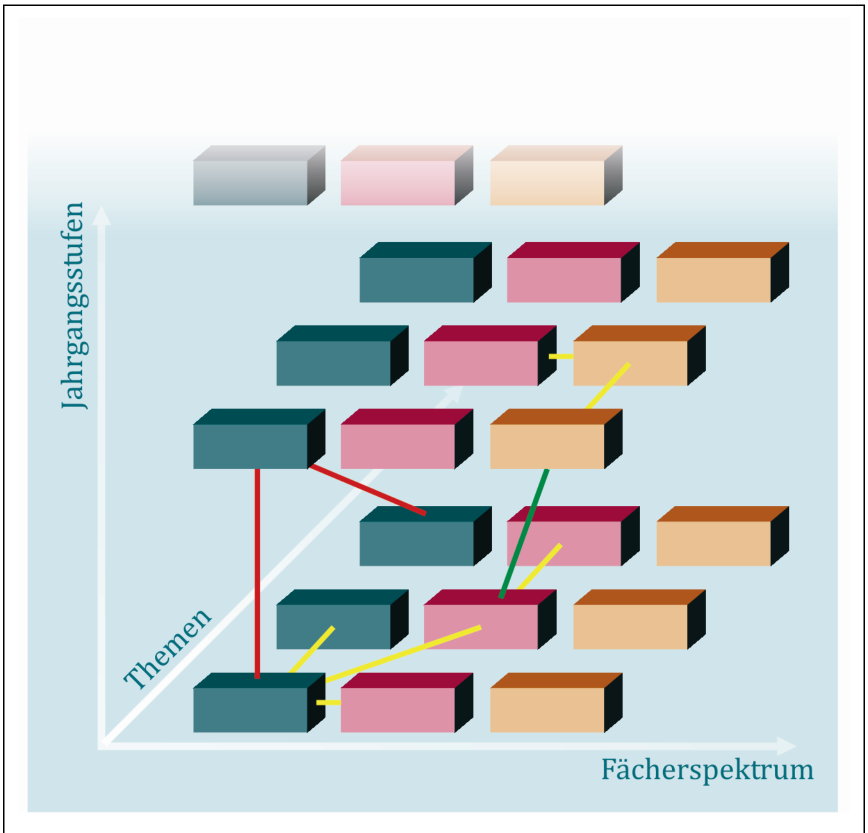


Abb. 67 Veranschaulichung von vertikaler (rot), horizontaler (gelb) und diagonaler (grün) Vernetzung heuristischer Module zu heuristischen Sequenzen (schematisch).

9.4 Beteiligte Fachgebiete und ihre Themenfelder – eine Auswahl

Die konkreten Möglichkeiten für die Verortung der beschriebenen Module in den Sachfächern sollen nun aufgezeigt werden, indem aktuelle Lehrplanvorgaben auf Anknüpfungspunkte hin gesichtet werden. Auch wenn CHIME sich nicht innerhalb des existierenden Bildungssystems ohne weitergehende Umgestaltungen realisieren lässt, soll hier doch der Rahmen der geltenden Schulrealität mit ins Auge gefasst sein. Es ist zu erwarten, dass diejenigen Themenfelder, die in den Sachfächern nach der Bildungsreform als zentral angesehen werden, auch in der mittleren Zukunft der nächsten Jahrzehnte noch als konstituierend gelten werden; ein Blick in die geltenden Vorgaben erlaubt daher eine ungefähre Orientierung, um den Bezugsrahmen einer schulischen Sachfachunterrichtung nicht gänzlich aufzugeben.

Für die Fächer Deutsch, Mathematik[490], erste Fremdsprache, Biologie, Chemie und Physik liegen bundesweit geltende Standards vor, die die gemeinsame Grundlage aller aktuell geltenden Lehrplanschriften der deutschen Bundesländer bilden. Für die übrigen Fächer, insbesondere die gesellschaftswissenschaftlichen Fächer Erdkunde und Geschichte (an Gesamtschulen als Gesellschaftslehre im Fächerverbund vertreten), sowie Sport und Kunst existieren solche Standards bis heute nicht. In Ermangelung eines bundeseinheitlichen Rahmens wurden die Lehrpläne des Landes Rheinland-Pfalz – und zwar für die Integrierten Gesamtschulen – für die folgende Zusammenstellung gewählt,[491] um dennoch über alle Bereiche hinweg einen Überblick über Themen und mögliche Anknüpfungspunkte für einen transcurricularen Unterricht geben zu können. Rheinland-Pfalz hat erst kürzlich neue Lehrpläne für die naturwissenschaftlichen Fächer[492] (mit Ausnahme der Mathematik) und für das Fach Gesellschaftslehre an Gesamtschulen[493] herausgegeben, die sich vollständig an Themenkreisen/Projekten orientieren und sich daher gut für das Anliegen dieser Arbeit eignen. Die Wahl der Schulform Integrierte Gesamtschule hängt mit ihrer traditionell offeneren Gesamtstruktur, größeren Flexibilität hinsichtlich fächerübergreifender Arbeitsformen und der heterogenen Schülerschaft zusammen, die dem Grundgedanken der Gesamtschule entsprechend auf allen Niveaus und auf alle Abschlüsse allgemeinbildender Schulen hin gemeinsam unterrichtet werden.

[490] Sämtliche geltenden Lehrplanschriften für das Fach Mathematik wurden in Band A (Krichel 2017) mit Blick auf das Problemlösen ausführlich analysiert und besprochen.
[491] Gegebenenfalls abweichende Lehrplanvorgaben anderer Bundesländer lassen sich angesichts der allseits zugrundeliegenden Bildungsstandards ohne größeren Aufwand in das Modell einarbeiten.
[492] Die Lehrpläne erschienen in einem gemeinsamen Band im Jahr 2014.
[493] Erschienen in Jahr 2016.

Prinzipiell könnten so gut wie alle Fächer, die an allgemeinbildenden Schulen unterrichtet werden, an der *Contents and Heuristics Mathematics Education* beteiligt werden. Dass einige Paarungen offensichtlicher sind, häufiger und / oder tiefergehende Verknüpfungspunkte bieten als andere, soll nun anhand einiger auch weniger augenfälliger Beispiele erläutert werden. Bewusst werden an dieser Stelle auch Themen angesprochen, die nicht zum Teilgebiet Geometrie gehören, um einerseits Redundanzen mit Kapitel 11 zu vermeiden und zum anderen die Position, dass auch Arithmetik und Algebra im CHIME-Konzept umgesetzt werden können, zu untermauern. Die folgenden Darstellungen bieten einen Überblick über Themenfelder in den Fachgebieten, innerhalb derer CHIME angesiedelt werden kann. Die Darstellungen sind knapp gehalten, da Details in Kapitel 11 bei Bedarf ausgeführt werden. Es wird keinesfalls Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, und es werden nur die wichtigsten und am weitesten verbreiteten Fächer[494] berücksichtigt. Um ein nicht zielführendes Zuviel an Informationen zu vermeiden, wird beispielsweise auf Sprachfächer an dieser Stelle nicht eingegangen, auch wenn später punktuell Bezüge zu diesen hergestellt werden.

9.4.1 Gesellschaftslehre: Erdkunde, Geschichte und Politik in der Orientierungsstufe

Das Fach Gesellschaftslehre versteht sich in besonderem Maße dem „integrativen und inklusiven Bildungsauftrag“ (RHEINLAND-PFALZ 2013: 4) verbunden und orientiert sich nach eigenem Bekunden an Klafkis Prinzip der Schlüsselfragen (vgl. Kap. 2.3.4). Dabei wird auf die Bedeutung der Vernetzung unterschiedlicher Perspektiven explizit hingewiesen – auch wenn der Gedanke nicht-fachgebundener Arbeitsweisen nicht eigens genannt wird.[495] Die *Schlüsselfragen*, um die der Rahmenlehrplan konzipiert ist, lauten:[496]

1. Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext?
2. Wie kann ein emanzipatorisches Geschlechter- und Generationenverhältnis gewährleistet werden?
3. Welche Möglichkeiten und Grenzen einer selbstbestimmten Lebensgestaltung im Spannungsfeld ökonomischer, gesellschaftlicher und privater Interessen gibt es?
4. Wie gehen Gesellschaften mit Heterogenität um?
5. Wie können Gesellschaften demokratisch gestaltet werden?

---

[494] Dies bezieht sich insbesondere auf Wahlpflichtfächer, die in verschiedener Form an Gesamtschulen umgesetzt werden und an anderen Schulformen teils gar nicht erteilt werden.
[495] Klafkis Schlüsselfragen selbst sind ihrem Wesen nach jedoch bereits nicht-fachgebunden.
[496] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 2013: 7 ff.

6. Wie erhalten wir die Lebensgrundlagen für zukünftige Generationen?
7. Wie können universelle Menschenrechte verwirklicht werden?
8. Wie kann man Globalisierung nachhaltig und solidarisch gestalten?
9. Wie entstehen internationale Konflikte und wie gehen Gesellschaften damit um?

Die Darstellungen der an Schlüsselfragen entwickelten Inhalte für die Orientierungsstufe sind im Rahmenlehrplan Rheinland-Pfalz als *Tableaus* angelegt; diese vereinen in einer vereinheitlichten graphischen Form rund um die *Schlüsselfragen* Informationen wie zu erwerbende Kompetenzen und praktische Daten wie Stundenumfang und Festlegung der Doppeljahrgangsstufe. Neben diesen verbindlichen Angaben sind auch inhaltliche Vorschläge und Anregungen für die Unterrichtsgestaltung enthalten, die jedoch ausdrücklich nicht verbindlichen Charakter haben. Die Methodenbereiche, die im Anschluss an die *Tableaus* allgemein für die gesamte Sekundarstufe I gezeigt werden, belegen, welch methodisch-didaktische Nähe zu einer *Content and Heuristics Mathematics Education* potenziell bereits besteht (s. Abb. 68).

Methodenbereiche

Graphische Darstellungen ebenso wie Tabellen und Statistiken verweisen unmittelbar auf mathematische Bezüge und Bearbeitungsmöglichkeiten. Ebenso unmittelbar sind Karte und Gradnetz, aber auch Luft- und Satellitenbilder anknüpfbar und inhaltlich mathematisch aufgeladen. Wenn auch weniger augenfällig, so lassen sich viele weitere der aufgelisteten Methoden sehr gut mit heuristisch-mathematischen Ansätzen koppeln. Dies betrifft synchrone und diachrone Vergleiche, wenn die erhobenen Daten numerischer Natur sind oder überhaupt statistisch erfasst und dargestellt werden können. Ebenso betrifft dies Modelle unterschiedlichster Art, bei denen Umsetzung und Validität oftmals maßgeblich von ihrer mathematischen Qualität und der gelungenen heuristischen Planung im Vorfeld abhängen. Experimente, Simulationen und Planspiele sind als Bestandteile vieler Problemlöseprozesse ebenso heuristisch und auch mathematisch vernetzbar.

Selbst Erkundungen im realen Raum oder die Befragung von Zeitzeugen oder Experten bieten durchaus Möglichkeiten, problemlösendes Handeln zu erfahren, zu planen und zu evaluieren. Die stärksten Bezüge finden sich somit wohl im Bereich „Gewinnen, analysieren und interpretieren von Daten, Aussagen und Zusammenhängen“, aber mit Blick auf die Grundausrichtung von CHIME (vgl. Kap. 9.1 und 10) finden sich auch Anknüpfungspunkte, was „Produktorientiertes Gestalten und Präsentieren“ und „Reales und außerschulisches

Handeln und Erfahren“ anbetrifft. „Simulatives Handeln und Erfahren“ weist außerdem zwangsläufig enge Bezüge zu problemlösendem und oftmals modellierendem Handeln auf.

Methodenbereiche der Gesellschaftslehre – Klassen 5-10			
Gewinnen, analysieren und interpretieren von Daten, Aussagen und Zusammenhängen	Produktorientier-tes Gestalten und Präsentieren	Simulatives Handeln und Erfahren	Reales bzw. außerschulisches Handeln und Erfahren
Grafische Darstellung: Schaubilder Diagramme Zeitstrahl Skizzen	Grafische Darstellung: Schaubilder Diagramme Zeitstrahl Skizzen	Experimentelle Archäologie	Erkundung
Tabellen Statistiken	Tabellen Statistiken	Experimente	Spurensuche
Zeitzeugen-/ Expertenbefragung	Modelle	Simulation	Zeitzeugen/Experten: Befragung Gespräch
Vergleich: synchron diachron	Vergleich: synchron diachron	Planspiel	Umfrage
Texte: Primärquellen Sekundärquellen	Texte: appellative argumentative informative narrative	Rollenspiel	Öffentliche Meinungsäußerung: Leserbrief Blog soziale Netzwerke
Karte Gradnetz	Karte	Debatte/Diskussion	
Visuelle Medien: Luft- und Satellitenbilder Karikaturen Fotos Gemälde	Statement/Rede		
Auditive und audiovisuelle Medien			
Fall-, Konflikt- oder Problemanalyse			

Abb. 68 Beispiele für die vier Methodenbereiche im Rahmenlehrplan Gesellschaftslehre Sekundarstufe I (RHEINLAND-PFALZ 2013: 29).

Tableaus

Die folgenden Übersichten zeigen die sieben Tableaus der Orientierungsstufe. Ein Blick auf diese lohnt, da in Kapitel 11 immer wieder Rückbezüge hergestellt werden und um außerdem einen Gesamteindruck von den Anknüpfungsoptionen moderner Lehrplanschriften mit einer *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education* zu gewinnen. Farbig hinterlegt sind unmittelbare Anknüpfungspunkte und Hinweise; es wurde keine Einschränkung auf das Teilgebiet der Geometrie vorgenommen.

Thema 1: Wir in unserer neuen Schule	**Klassenstufe 5/6**
Schlüsselfragen Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext? (1) Wie kann ein emanzipatorisches Geschlechter- und Generationenverhältnis gewährleistet werden? (2) Wie gehen Gesellschaften mit Heterogenität um? (4) Wie können Gesellschaften demokratisch gestaltet werden? (5)	
Kompetenzen a) Wissen erwerben b) Mit Wissen handeln c) (Mit) Wissen bewerten/beurteilen/reflektieren	**Inhaltliche Vorschläge** Zurechtfinden in der Schule ■ Schulgelände und Schulweg ■ Aufgaben/Tätigkeitsbereiche Wir in unserer Klasse ■ Lernumgebung ■ Lernatmosphäre ■ Sitzordnung ■ Rollenverhalten ■ Ausgrenzung
Schülerinnen und Schüler a) … beschreiben Wege im Realraum (1) … geben die Aufgabenverteilung in einer öffentlichen Einrichtung wieder (5) … skizzieren mögliche Konflikte und Regelungen für das Zusammenleben in einer Gruppe (4) … benennen unterschiedliche demokratische Entscheidungsverfahren (5) … beschreiben das Zusammenleben in verschiedenen Zeiten (1) b) … orientieren sich im Realraum (1) … entwickeln eigene Regeln für das Zusammenleben und Konfliktlösungsmöglichkeiten (4) … wenden selbstständig demokratische Entscheidungsverfahren an (5)	Regeln gestalten das Zusammenleben ■ Klassenrat/Jahrgangsstufenversammlung ■ die Rolle der SV ■ Klassenämter ■ Klassenregeln ■ Hausordnung Schule früher – Schule heute ■ Schulerfahrungen von Eltern und Großeltern ■ eigene Erfahrungen
… vergleichen das Zusammenleben in verschiedenen Zeiten (2) c) … erörtern die Bedeutung demokratischer Partizipation und bewerten deren Möglichkeiten (5) … diskutieren die Notwendigkeit, Eigenschaften und Wirksamkeit von Regeln für das Zusammenleben in einer Gruppe (5) … wägen die Subjektivität erlebter Geschichte ab (1)	
Anregungen für die Unterrichtsgestaltung ■ Angeleitete **Rollenspiele** zu Notenkonflikten, Konflikten mit Mitschülerinnen/Mitschülern, Verhalten im Schulbus ■ **Spurensuche** im örtlichen Heimatmuseum ■ **Erkundung** durch Schulrallye zum Kennenlernen des Schulgebäudes und des Schulortes ■ **Zeitzeugenbefragung** von Großeltern, ehemaligen Lehrern, Schülern usw. anhand eines Leitfadens ■ **Kartierung** des Schulgeländes ■ Planung von Wandertag, Elternabend, Klassenfeier, Integrationsfahrt ■ Anfertigung einer Wandzeitung über Schule, Schulort, Verlauf des ersten Wandertags ■ Artikel für die Schülerzeitung über Erfahrungen in der Eingewöhnungszeit ■ Einrichtung eines Klassenmuseums ■ Projekt „Unsere neue Schule" und Präsentation der Ergebnisse auf einem Elternabend ■ Projekt Streitschlichtung	

Abb. 69 Thema 1: Wir in unserer neuen Schule (Rheinland-Pfalz 2013: 14 f.), gelb markiert unmittelbare Anknüpfungspunkte für CHIME.

Thema 2: Leben in der Gemeinde	**Klassenstufe 5/6**
Schlüsselfragen Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext? (1) Welche Möglichkeiten und Grenzen einer selbstbestimmten Lebensgestaltung im Spannungsfeld ökonomischer, gesellschaftlicher und privater Interessen gibt es? (3) Wie können Gesellschaften demokratisch gestaltet werden? (5) Wie erhalten wir die Lebensgrundlagen für zukünftige Generationen? (6)	
Kompetenzen a) Wissen erwerben b) Mit Wissen handeln c) (Mit) Wissen bewerten/beurteilen/reflektieren	**Inhaltliche Vorschläge** Gliederung der Gemeinde/des Stadtteils ■ Wohnviertel und ihre Geschichte ■ soziale Gruppen ■ Freizeit- und Kulturangebot ■ Dienstleistungs- und Warenangebot Der politische Raum ■ Stadt- bzw. Gemeinderat ■ Bürgermeister ■ Wahlen ■ Jugendparlament ■ Spielleitplanung
Schülerinnen und Schüler a) … bestimmen wesentliche Aufgabenbereiche, Einrichtungen, Ämter und Angebote in der Gemeinde (5) … unterscheiden öffentliche und private Haushaltsführung (3) … ermitteln Beteiligungsmöglichkeiten (5) b) … orientieren sich im Realraum (1) … stellen einfache Haushaltspläne auf (3) … untersuchen die historische Entwicklung ihrer Gemeinde (1) … erkunden die Versorgungslage in der Gemeinde (3)	Verwaltung der Gemeinde ■ verpflichtende und freiwillige Aufgaben ■ Einnahmen und Ausgaben
c) … diskutieren politische Entscheidungen in der Gemeinde (5) … reflektieren ihre Rolle als Jugendliche in der Gemeinde (1) … schätzen die wirtschaftlichen Möglichkeiten ihrer Gemeinde ein (6)	
Anregungen für die Unterrichtsgestaltung ■ **Vergleich** Straße/Stadtviertel früher/heute ■ **Erkundung** der Gemeinde aus verschiedenen Perspektiven ■ **Interview** zu einer kommunalpolitischen Fragestellung ■ **Erstellen** einer **Infobroschüre** Kinderstadtführer, historischer oder geographischer Rundweg ■ **Untersuchung** des ÖPNV-Angebots ■ Sammlung von Zeitungsmeldungen: „Unsere Gemeinde in der Zeitung" ■ Fotoreportage ■ Meine Gemeinde im Internet	

Abb. 70 Thema 2: Leben in der Gemeinde (Rheinland-Pfalz 2013: 16 f.), gelb markiert unmittelbare Anknüpfungspunkte für CHIME.

Thema 3: Reisen und Erholung	Klassenstufe 5/6
Schlüsselfragen Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext? (1) Welche Möglichkeiten und Grenzen einer selbstbestimmten Lebensgestaltung im Spannungsfeld ökonomischer, gesellschaftlicher und privater Interessen gibt es? (3) Wie erhalten wir die Lebensgrundlagen für zukünftige Generationen? (6)	
Kompetenzen a) Wissen erwerben b) Mit Wissen handeln c) (Mit) Wissen bewerten/beurteilen/reflektieren	**Inhaltliche Vorschläge** Reisen früher und heute ■ Verkehrswege ■ Verkehrsmittel ■ Reisewege ■ Reiseziele ■ Zahlungsverkehr ■ Reisemotive
Schülerinnen und Schüler a) … beschreiben Reise- und Erholungsmöglichkeiten (3) … orientieren sich in regionalen, nationalen und internationalen Räumen (1) … skizzieren infrastrukturelle und technische Voraussetzungen des Reisens früher und heute (3) … zählen soziale, ökonomische und ökologische Aspekte des Reisens in verschiedenen Zeiten auf (6) b) … vergleichen historisches und aktuelles Reiseverhalten und dessen Auswirkungen (3) … untersuchen die ökonomische Bedeutung des Reisens (6)	Reisen als Abenteuer und Welterfahrung ■ Alexander von Humboldt ■ Herodot ■ Marco Polo ■ Ibn Battuta ■ Christoph Kolumbus ■ Georg Forster Entstehung des modernen Reiseverhaltens ■ Arbeit und Freizeit ■ Massenkonsum als Wirtschafts- und Prestigefaktor ■ Tourismus als Wirtschaftsfaktor ■ Tourismusbranche ■ nachhaltiger Tourismus
c) … reflektieren Reisemotive, -erfahrungen und -wünsche in verschiedenen Zeiten (3) … beurteilen Reise- und Urlaubsverhalten vor dem Hintergrund ökonomischer, ökologischer und sozialer Bedingungen (6) … diskutieren die Folgen des Reisens (6)	
Anregungen für die Unterrichtsgestaltung ■ **Historischer Vergleich** von Reisewegen und Transportmitteln ■ **Erstellen von Informationsmappen** für Reiseziele, Länder, Adressaten ■ **Expertenbefragung** im Reisebüro ■ **Erstellen eines Reiseführers** für die eigene Region/für nachhaltigen Tourismus ■ Orientierungsspiele zum **Gradnetz** ■ **Recherche** zur Historie von Frauen auf Reisen ■ Projekt: Planung einer (Klassen-) Reise ■ Sammlung von Reisefotos aus der eigenen Familie, aus bestimmten Regionen oder Generationen ■ Erträumte Reisen beschreiben/bebildern ■ Lektüre von Reiseberichten/Reisetagebüchern	

Abb. 71 Thema 3: Reisen und Erholung (Rheinland-Pfalz 2013: 18 f.), gelb markiert unmittelbare Anknüpfungspunkte für CHIME.

Thema 4: Leben und Wirtschaften in verschiedenen Zeiten und Räumen	Klassenstufe 5/6
Schlüsselfragen Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext? (1) Wie kann ein emanzipatorisches Geschlechter- und Generationenverhältnis gewährleistet werden? (2) Welche Möglichkeiten und Grenzen einer selbstbestimmten Lebensgestaltung im Spannungsfeld ökonomischer, gesellschaftlicher und privater Interessen gibt es? (3) Wie erhalten wir die Lebensgrundlagen für zukünftige Generationen? (6) Wie kann man Globalisierung nachhaltig und solidarisch gestalten? (8)	
Kompetenzen a) Wissen erwerben b) Mit Wissen handeln c) (Mit) Wissen bewerten/beurteilen/reflektieren	**Inhaltliche Vorschläge** Natur- und Lebensräume in Deutschland ■ Norddeutsches Tiefland, Mittelgebirge, Alpenvorland, Alpen ■ Nahrung, Kleidung, Wohnung ■ Berufe ■ Naturschutz und Nachhaltigkeit ■ Industrie, Handel und Tourismus ■ Energieversorgung ■ Produktions- und Arbeitsbedingungen ■ Aspekte nachhaltiger Entwicklung
Schülerinnen und Schüler a) … beschreiben das Leben und Arbeiten des Menschen in verschiedenen Naturräumen (3) … skizzieren Veränderungen von Naturräumen (6) … ermitteln die Bedeutung von Erfindungen und Entdeckungen für Arbeitswelt und Handel (3) … benennen Zusammenhänge der Lebensmittelversorgung (3) … beschreiben Maßnahmen des Landschaftsschutzes (6)	Entwicklung von Lebens- und Arbeitsformen ■ vor- und frühzeitliche Waffen, Werkzeuge und Feuernutzung ■ Kultur: Kunst, Religion, Sprache ■ Leben in nomadischen und sesshaften Gemeinschaften ■ Spezialisierung in der Arbeitswelt ■ „Naturvölker" der Inuit, Aborigines, Papuas, Yanomami
b) … untersuchen den Einfluss von Naturräumen auf die Lebens- und Arbeitsweise des Menschen (8) … erarbeiten grundlegende Voraussetzungen für die menschliche Entwicklung (3) … ermitteln Gründe und Ausprägungen von Arbeitsteilung und Geschlechterrollen (2) … stellen Möglichkeiten verantwortlichen Konsumierens dar (6) c) … reflektieren die Notwendigkeit des Zusammenlebens in Gruppen (1) … erörtern die Eingriffe des Menschen in den Naturraum und deren Folgen (8) … hinterfragen die Auswirkungen konsumorientierter Lebensgewohnheiten (6)	Nahrungsversorgung ■ Herkunft landwirtschaftlicher Erzeugnisse unter regionalen und saisonalen Aspekten ■ Entwicklung und Formen landwirtschaftlicher Produktion ■ Land- und Forstwirtschaft, Fischerei und Jagd
Anregungen für die Unterrichtsgestaltung ■ **Simulationsspiele** zur Arbeitsteilung, zum Tauschhandel, zur Preisentwicklung ■ **Exkursion** zu einem frühgeschichtlichen Museum/zu einer archäologischen Grabung ■ **Debatte** zu Infrastrukturprojekten ■ Erstellen von **Profilskizzen** ■ **Befragung** eines Umweltexperten zum Gewässerschutz ■ **Exkursion** zu einem Bauernhof ■ **Dokumentation**: artgerechter Umgang mit Nutz- und Wildtieren ■ **Funde und Bilder**: beschreiben, zeichnen, interpretieren, rekonstruieren, **Modelle** bauen	

Abb. 72 Thema 4: Leben und Wirtschaften in verschiedenen Zeiten und Räumen (Rheinland-Pfalz 2013: 20 f.), gelb markiert unmittelbare Anknüpfungspunkte für CHIME.

Thema 5: Ägypten – ein Beispiel für frühe Hochkulturen	Klassenstufe 5/6
Schlüsselfragen Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext? (1) Welche Möglichkeiten und Grenzen einer selbstbestimmten Lebensgestaltung im Spannungsfeld ökonomischer, gesellschaftlicher und privater Interessen gibt es? (3) Wie können Gesellschaften demokratisch gestaltet werden? (5) Wie erhalten wir die Lebensgrundlagen für zukünftige Generationen? (6)	
Kompetenzen a) Wissen erwerben b) Mit Wissen handeln c) (Mit) Wissen bewerten/beurteilen/reflektieren	**Inhaltliche Vorschläge** Merkmale einer frühen Hochkultur ■ Staatswesen und Rechtsordnung ■ Hierarchie, Patriarchat ■ Religion ■ Wissenschaft ■ Schrift und Kunst ■ Arbeitsteilung
Schülerinnen und Schüler a) … beschreiben den Einfluss geografischer Faktoren auf die Entwicklung menschlicher Gemeinschaften (3) … listen die Vor- und Nachteile von Eingriffen in den Naturhaushalt auf (6) … beschreiben die Sozialstruktur einer Gesellschaft (5) b) … vergleichen Merkmale früher Hochkulturen mit heutigen Kulturen (1) … stellen Gesellschaftsordnungen dar (5) … untersuchen religiöse Vorstellungen und deren Bedeutung für die Herrschaftsordnung (5) … erarbeiten die Auswirkungen der geografischen Faktoren auf die Arbeits- und Lebenswelt (3)	Die Flussoase Nil ■ Nilschwemme: klimatische Voraussetzungen ■ Auswirkungen auf die Lebens- und Arbeitsweise ■ Staudammprojekte Hochkultur als kulturelles Erbe ■ Tourismus ■ Lebenswelten ■ Archäologie
c) … diskutieren die Eingriffe des Menschen in den Naturhaushalt (6) … hinterfragen verschiedene Legitimationsformen von Herrschaft (5) … bewerten die Arbeits- und Lebensbedingungen in einer starren Gesellschaftsordnung (3)	
Anregungen für die Unterrichtsgestaltung ■ **Modellbau**: Pyramide, Schaduf, Bewässerungsanlagen, Niloase ■ **Rollenspiele** zum Gesellschaftsaufbau von Hochkulturen ■ **Ausstellungsbesuche** ■ **Auswertung von Satellitenbildern** des Nildeltas ■ **Vergleich** der Bedeutung des Nils **früher und heute** ■ Multimediale **Recherche** zur Bedeutung des kulturellen Erbes für Forscher, Einheimische und Touristen ■ **Vergleich** verschiedener Hochkulturen ■ Entschlüsselung von Symbolsprachen	

Abb. 73 Thema 5: Ägypten – ein Beispiel für eine frühe Hochkultur (Rheinland-Pfalz 2013: 22 f.), gelb markiert unmittelbare Anknüpfungspunkte für CHIME.

Thema 6: Kinderwelten	Klassenstufe 5/6
Schlüsselfragen Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext? (1) Wie kann ein emanzipatorisches Geschlechter- und Generationenverhältnis gewährleistet werden? (2) Wie gehen Gesellschaften mit Heterogenität um? (4) Wie können universelle Menschenrechte verwirklicht werden? (7) Wie kann man Globalisierung nachhaltig und solidarisch gestalten? (8)	
Kompetenzen a) Wissen erwerben b) Mit Wissen handeln c) (Mit) Wissen bewerten/beurteilen/reflektieren	**Inhaltliche Vorschläge** Kinderwelten ■ universelle Grundbedürfnisse ■ Stadt/Land ■ arm/reich ■ Industrieland/Entwicklungsland ■ Spannungsfeld Kinderarbeit ■ in Deutschland früher und heute
Schülerinnen und Schüler a) … kennzeichnen die Lebensbedingungen von Kindern in unterschiedlichen Räumen, Zeiten und Gesellschaften (1) … bestimmen Notsituationen von Kindern und mögliche Hilfsmaßnahmen (4) b) … untersuchen unterschiedliche Einflussfaktoren auf die Lebensverhältnisse von Kindern (1) … vergleichen die familiäre Situation von Kindern in unterschiedlichen Räumen und Zeiten (2) … beleuchten Ursachen, Formen und Folgen von Kinderarbeit (8)	Leben in der Familie ■ Formen des Zusammenlebens ■ Erziehung ■ Geschlechterrolle ■ Konflikte und Gewalt ■ Schutz und Geborgenheit Kinder in Not ■ Flüchtlingselend ■ Kinder im Krieg ■ Gewalt gegen Kinder ■ Verwahrlosung ■ Kinderprostitution
c) … bewerten die Lebenssituation von Kindern in unterschiedlichen Zeiten und Räumen (7) … diskutieren die Möglichkeiten der Einflussnahme auf die Lebenssituationen von Kindern (8)	Kinderrechte und Kinderschutz ■ Gesetzliche Vorgaben ■ Organisationen und Projekte ■ Möglichkeiten und Grenzen der Umsetzung
Anregungen für die Unterrichtsgestaltung ■ **Erkundung** eines Weltladens ■ **Expertenbefragung**: Kinderhilfswerk, Jugendamt, Kinderschutzbund, Schulpsychologe ■ **Debatte** Kinderarbeit ■ **Erlebnisberichte, Bildbriefe** und **Rollenspiele** über Kinderalltag in verschiedenen Kulturen ■ **Vergleich** von Tagesabläufen ■ Digitale Partnerschaft mit einer Schulklasse in einem anderen Land ■ Planung und Durchführung eines interkulturellen Klassenfestes ■ Planung und Durchführung der „Aktion Tagwerk" oder „Aktion LebensLäufe" ■ Kinderspiele und Spielzeuge aus aller Welt/von früher	

Abb. 74 Thema 6: Kinderwelten (Rheinland-Pfalz 2013: 24 f.), gelb markiert unmittelbare Anknüpfungspunkte für CHIME.

Thema 7: Römisches Reich und Romanisierung	Klassenstufe 5/6
Schlüsselfragen Wie gelingt Persönlichkeitsentwicklung im gesellschaftlichen Kontext? (1) Wie gehen Gesellschaften mit Heterogenität um? (4) Wie können Gesellschaften demokratisch gestaltet werden? (5)	
Kompetenzen a) Wissen erwerben b) Mit Wissen handeln c) (Mit) Wissen bewerten/beurteilen/reflektieren	**Inhaltliche Vorschläge** Vom Stadtstaat zum Imperium ■ Verkehrswesen ■ Grenzsicherung ■ Militär ■ Herrschaftsformen Alltag im Römischen Reich ■ Weltstadt Rom ■ Provinzen (Romanisierung) ■ Infrastruktur ■ Familie, Schule, Freizeit
Schülerinnen und Schüler a) ... beschreiben unterschiedliche Lebens- und Herrschaftsformen (5) ... bestimmen die Sozialstruktur einer Gesellschaft (4) b) ... orientieren sich in historischen Räumen (1) ... untersuchen unterschiedliche Spuren einer Kultur (1) ... erarbeiten Ursachen sowie soziale und wirtschaftliche Folgen von Expansion (4) ... erläutern die Zusammenhänge zwischen Herrschaft und Religion (5)	Wirtschaft im Römischen Reich ■ Handel ■ Zahlungsverkehr ■ Sklaverei Weiterwirken antiker Kultur ■ Sprache ■ Schrift ■ Kalender ■ Wissenschaft ■ Architektur ■ Christentum als Staatsreligion ■ Spuren im Heimatraum
c) ... nehmen Stellung zu unterschiedlichen Lebens- und Herrschaftsformen (5) ... schätzen den Einfluss von Traditionen ein (1)	

Anregungen für die Unterrichtsgestaltung
- **Spurensuche**
- **Besuch von Museen und Ausgrabungsorten**, Teilnahme an Ausgrabungen
- **Modellbau**: Limes, Gutshof, Kastell, Wasserleitung
- **Aktuelle Darstellungen** der Römerzeit (z. B. Kinderbücher, Film, Spielzeug) untersuchen
- **Rollenspiele**: Auf dem Sklavenmarkt, Am Limes, In der Schule, In der Familie
- **Kartenarbeit** zur Ausdehnung des Imperium Romanum und zum Handel

Abb. 75 Thema 7: Römisches Reich und Romanisierung (RHEINLAND-PFALZ 2013: 26 f.), gelb markiert unmittelbare Anknüpfungspunkte für CHIME.

Schon diese Zusammenschau zeigt eindrücklich, an wie vielen Stellen der Rahmenlehrplan Inhalte verbindlich oder vorschlagsweise beinhaltet, die sich für eine heuristisch-mathematische Behandlung eignen oder anbieten. Obwohl ganz augenfällig heuristische Techniken überall in den Anforderungen und Schlüsselproblemen des Faches Gesellschaftslehre eine Rolle spielen, scheint mit Blick auf die personelle und stundenplanerische Situation ausgeschlossen, dass in der aktuellen Schulrealität das erkennbare transcurriculare Potenzial ausgeschöpft wird oder werden kann.

9.4.2 Naturwissenschaften: Physik, Biologie, Chemie in der Orientierungsstufe

Naturwissenschaften als Unterrichtsfach der Jahrgangsstufen 5 und 6 an Integrierten Gesamtschulen zeichnet sich durch eine „Auswahl der verbindlichen Fachinhalte aus, die den Anschluss an den fächerspezifischen Unterricht der Mittelstufe vorbereiten und fächerspezifische Aspekte in den Blick nehmen, ohne die Fachzuordnung explizit zu thematisieren“ (RHEINLAND-PFALZ 2010: 7). Damit ist der nicht-fachgebundene Anspruch innerhalb der Gruppe naturwissenschaftlicher Fächer Biologie, Chemie und Physik umrissen. Didaktisch wird der Grundanspruch formuliert, „ein an Phänomenen und den Erfahrungen der Kinder orientierter Unterricht“ (RHEINLAND-PFALZ 2010: 7) zu sein. Eine Nähe zu den in CHIME formulierten Zielvorstellungen lässt sich aus der folgenden Feststellung herauslesen: „Ausgangspunkte des Unterrichtsgeschehens sind lebensweltliche Kontexte, die zur Beschäftigung mit Komplexität herausfordern. Durch die interdisziplinäre und ganzheitliche Herangehensweise können natürliche und technische Phänomene vom Kontext ausgehend in fachliche Zusammenhänge gebracht werden“ (RHEINLAND-PFALZ 2010: 7). Innerhalb der drei beteiligten Fächer werden also genau diejenigen Synergieeffekte und didaktischen Ansätze herausgestellt, die CHIME auch für das Problemlösen und den mathematischen Unterricht nutzbar machen möchte. Dass dem Bindeglied Mathematik und noch viel mehr dem Problemlösen dabei im Rahmenlehrplan Naturwissenschaften nicht ausdrücklich Raum geboten wird, muss geradezu erstaunen.

Der Lehrplan benennt viele der für CHIME als zentral herausgearbeiteten Aspekte ebenfalls als seine zentralen Anliegen. So stehen der Erwerb „handelnden Umgangs mit Wissen“ und dabei nochmals die sogenannten *Lebenskompetenzen* ganz klar im Vordergrund. Das Kompetenzgefüge stellt der Lehrplan im Gegensatz zu vielen anderen solcher Schriften als zweidimensionales Kontinuum zwischen Wissen und Handeln dar und wendet sich damit gegen den dominierenden einfach-hierarchischen Dreischritt.[497] Auf diese Weise wird deutlich hervorgehoben, dass ein Zuwachs im handelnden Umgang mit Wissen nur durch die aktive Anwendung selbst hervorgehen kann – einer der Grundgedanken auch von CHIME mit seiner Forderung nach verschränktem Aufbau sachfachlicher und heuristischer Kompetenzen.

Fachinhaltlich bilden nach dem Willen der Bildungsstandards die *Basiskonzepte*[498] (sie gelten also in allen Bundesländern) die Grundlage des Faches Naturwissenschaften, die unterrichtsdidaktische Strukturierungsgrundlage des Unterrichts sind die *Kontexte* (sie sind in ihrer Funktion mit den Schlüsselproblemen des Rahmenlehrplans Gesellschaftslehre vergleichbar), die in Form von acht *Themenfeldern* den Unterricht durchziehen. Diese *Themenfelder* sind:

1. Von den Sinnen zum Messen
2. Vom ganz Kleinen und ganz Großen
3. Bewegung zu Wasser, zu Lande und in der Luft

[497] Dieser Dreischritt findet sich beispielsweise für das Fach Mathematik in der Definition dreier Anforderungsbereiche I bis III oder in vergleichbarer Form im Rahmenlehrplan Gesellschaftslehre.
[498] Die sieben Basiskonzepte sind: System, Struktur – Eigenschaft – Funktion, Stoff – Teilchen – Materie, Chemische Reaktion, Wechselwirkung, Energiekonzept und Entwicklung.

4. Pflanzen – Tiere – Lebensräume
5. Sonne – Wetter – Jahreszeiten
6. Geräte und Maschinen im Alltag
7. Stoffe im Alltag
8. Körper und Gesundheit

Für die fachinhaltlichen Vorgaben im engeren Sinne sei an dieser Stelle auf den Rahmenlehrplan selbst verwiesen, in dem jedes der acht Themenfelder detailliert und mit Bezug auf die sieben Basiskonzepte vorgestellt und erläutert wird. Für CHIME ist insbesondere das für jedes Themenfeld entworfene Element „Struktur und Anregung für Kontexte“ von Interesse, da hier Anschlussmöglichkeiten gut zu erkennen sind.

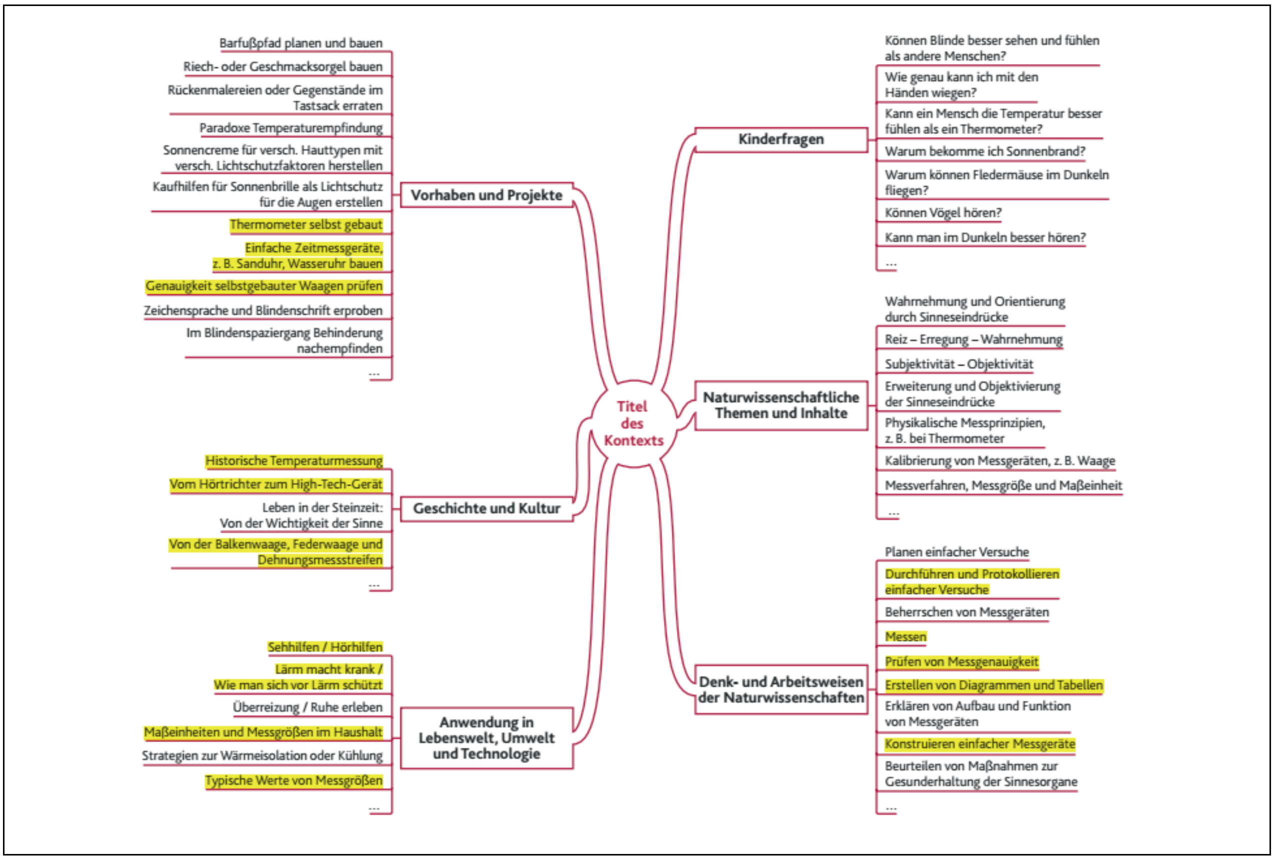


Abb. 76 Von den Sinnen zum Messen: Struktur und Anregung für Kontexte (RHEINLAND-PFALZ 2010: 20).

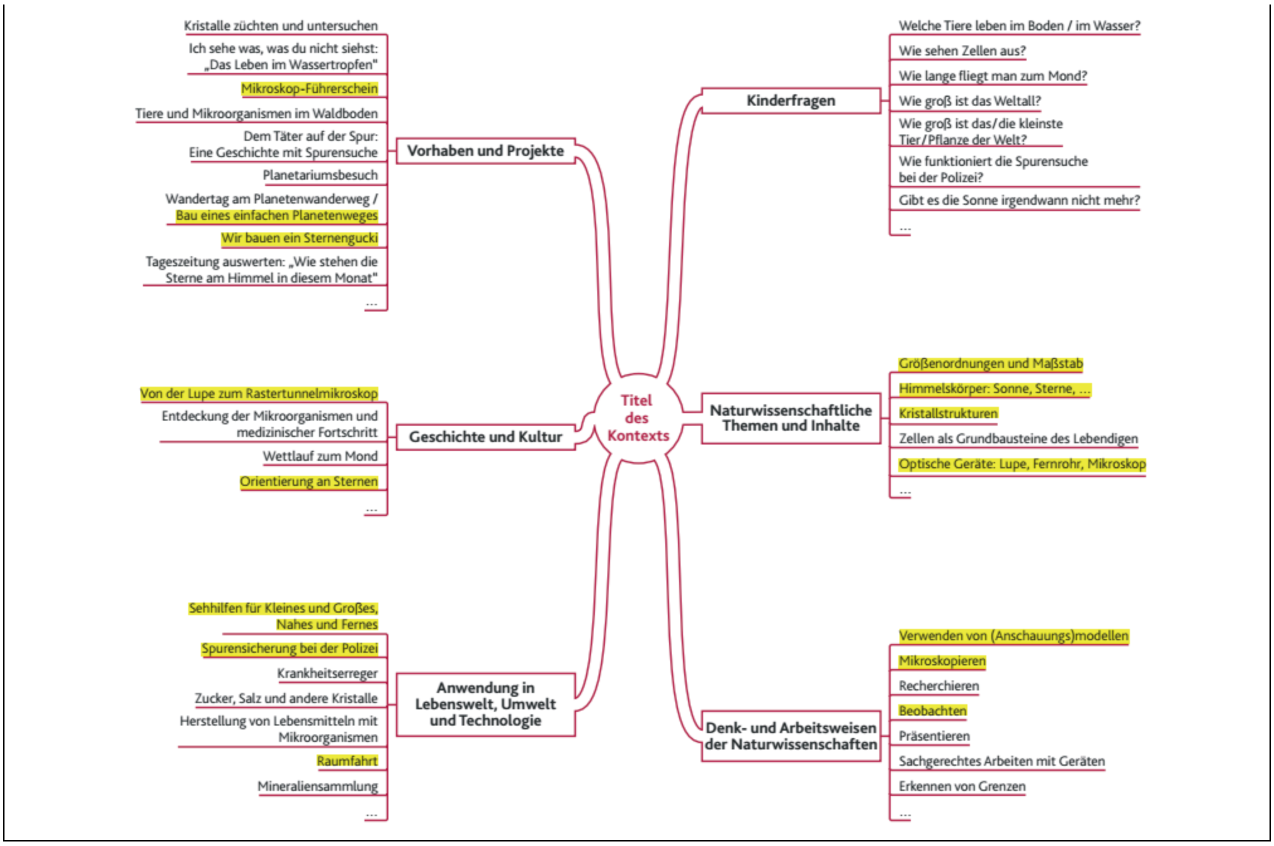


Abb. 77 Vom ganz Kleinen und ganz Großen: Struktur und Anregung für Kontexte (RHEINLAND-PFALZ 2010: 24).

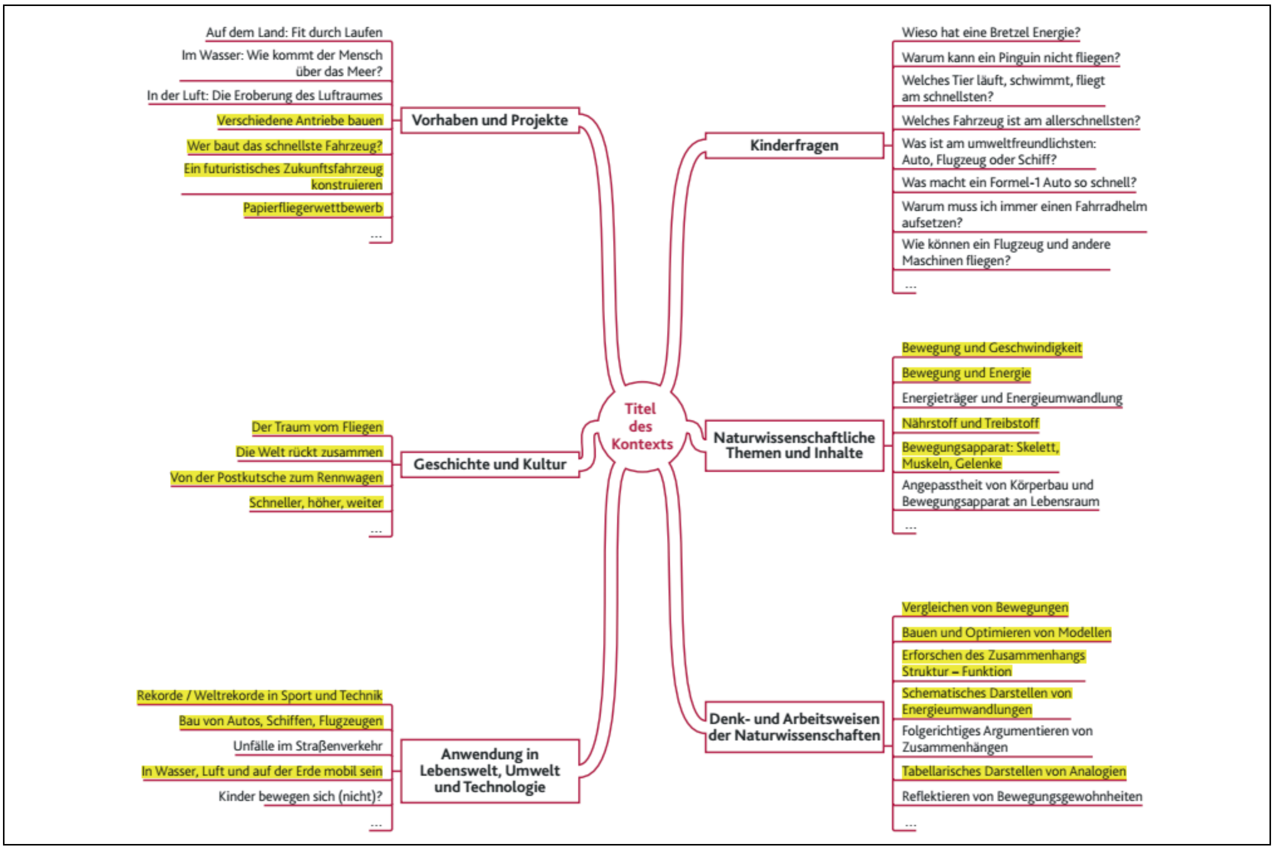


Abb. 78 Bewegung zu Wasser, zu Lande und in der Luft: Struktur und Anregung (RHEINLAND-PFALZ 2010: 28).

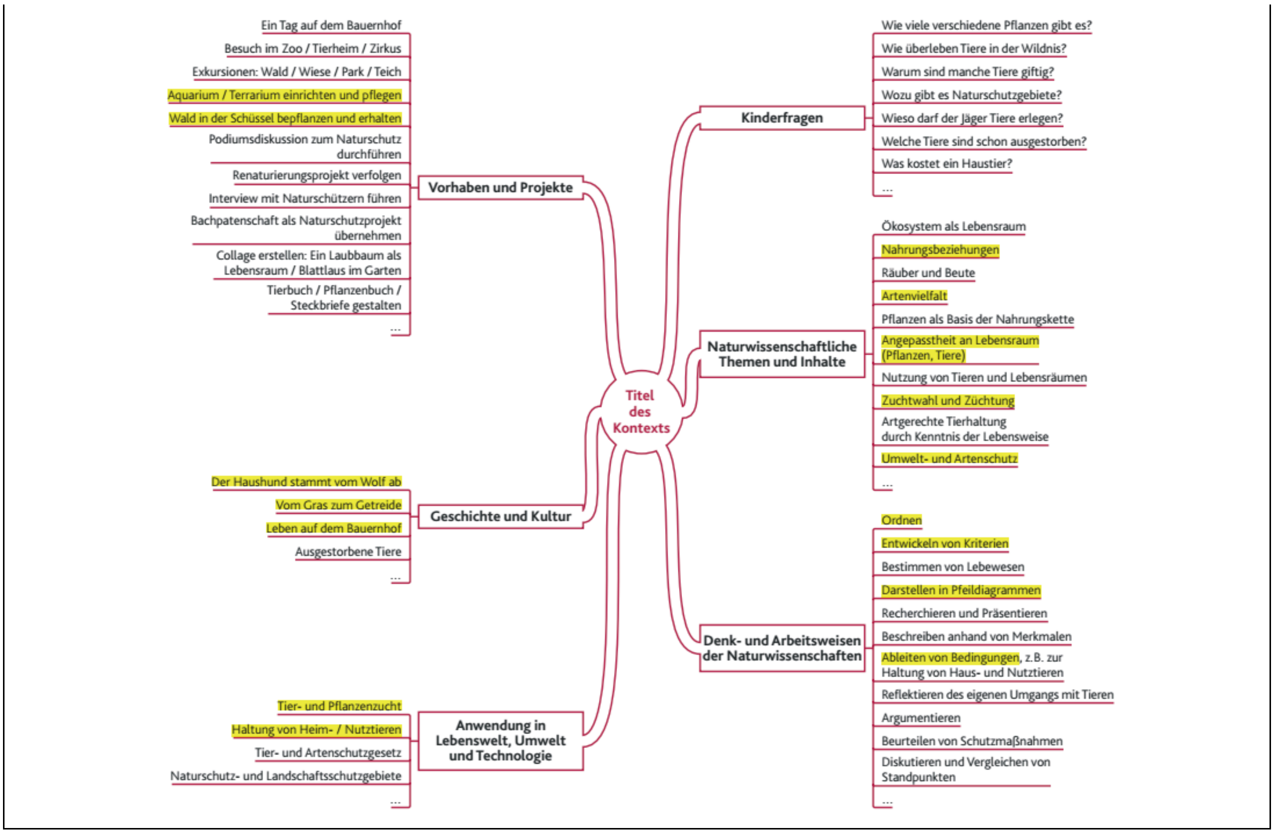


Abb. 79 Pflanzen – Tiere – Lebensräume: Struktur und Anregung für Kontexte (RHEINLAND-PFALZ 2010: 32).

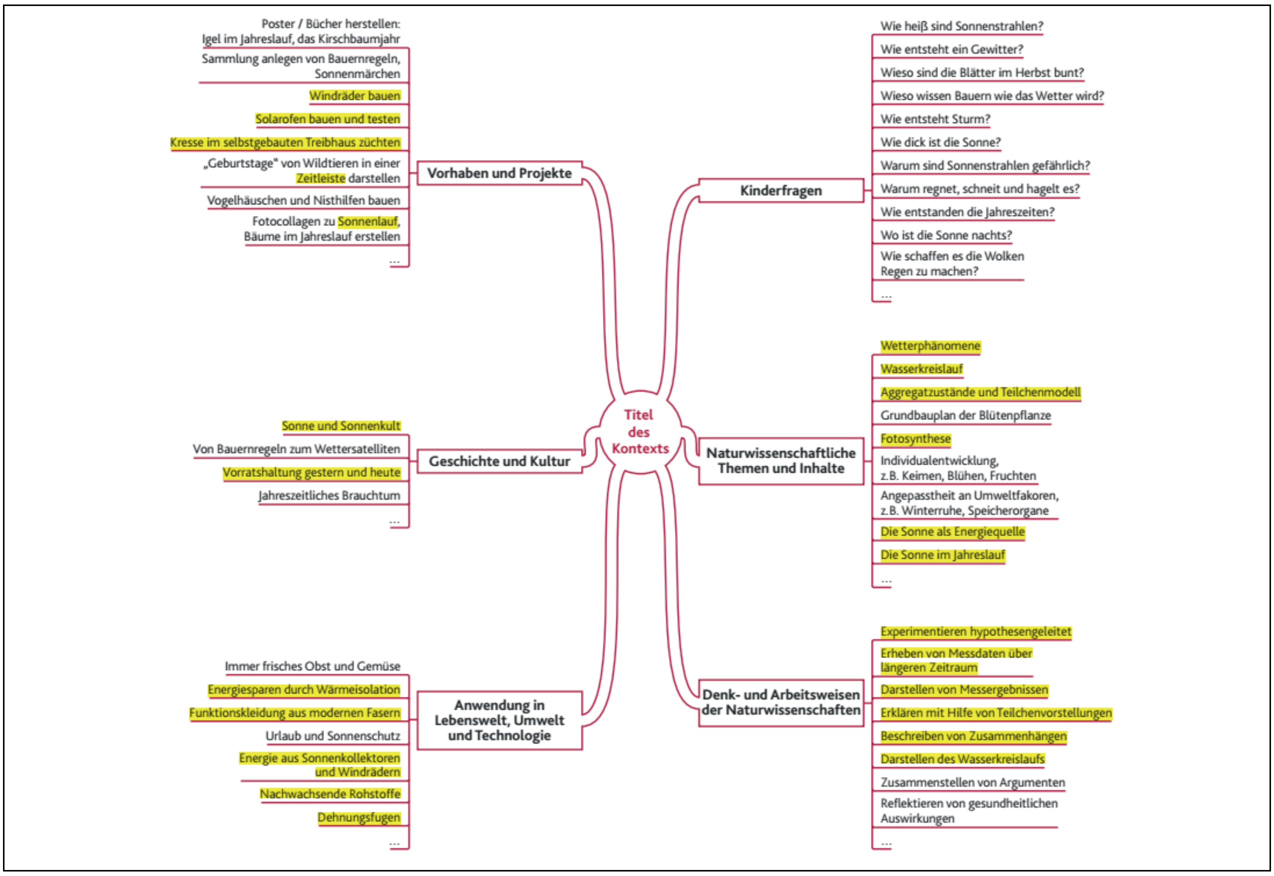


Abb. 80 Sonne – Wetter – Jahreszeiten: Struktur und Anregung für Kontexte (RHEINLAND-PFALZ 2010: 36).

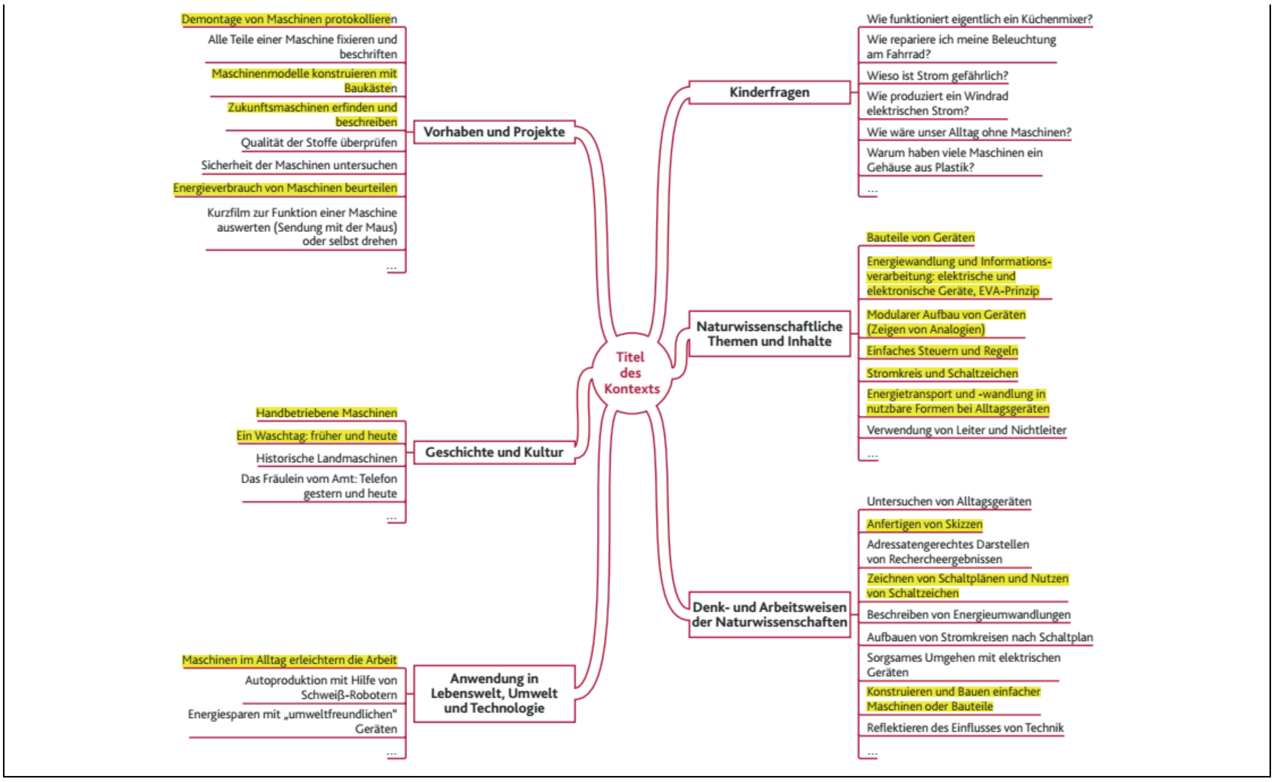


Abb. 81 Geräte und Maschinen im Alltag: Struktur und Anregung für Kontexte (RHEINLAND-PFALZ 2010: 40).

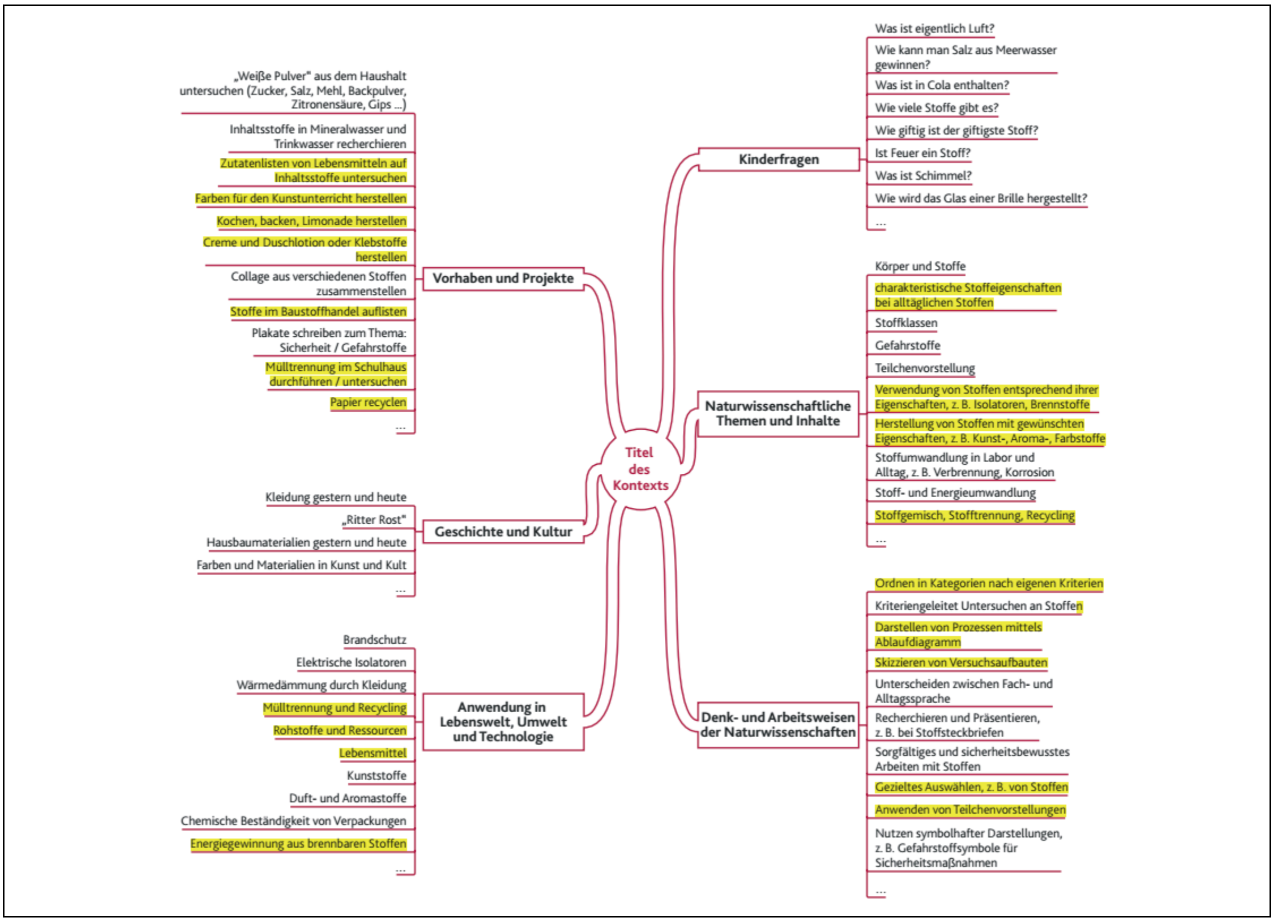


Abb. 82 Stoffe im Alltag: Struktur und Anregung für Kontexte (RHEINLAND-PFALZ 2010: 44).

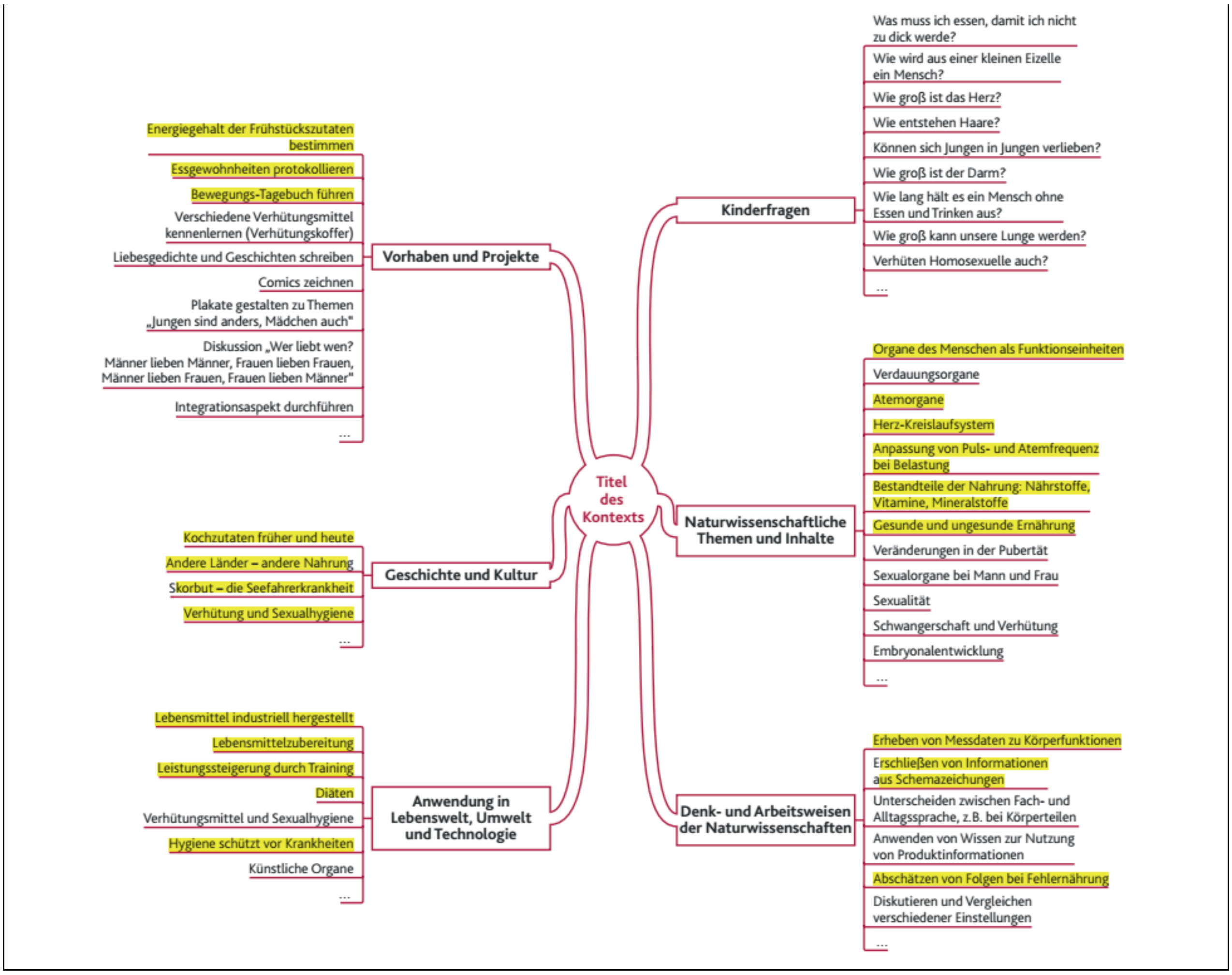


Abb. 83 Körper und Gesundheit: Struktur und Anregung für Kontexte (Rheinland-Pfalz 2010: 48).

Der Überblick über die Kontexte gibt einen Eindruck, über mögliche Anknüpfungspunkte mit mathematisch-heuristischen Modulen und Sequenzen. Weder ist die Markierung hier als zwingend vollständig zu verstehen noch soll dies ausdrücken, dass an allen diesen Punkten eine solche Anbindung im Sinne von CHIME wünschenswert wäre. Dass sich aber gerade im Verbundfach Naturwissenschaften mathematisch-heuristische Inhalte an zahllosen Stellen bereits nach den aktuellen Vorgaben, hier beispielhaft des Rahmenlehrplans Rheinland-Pfalz, in den Unterricht einfügen würden, wird hier offensichtlich.

Im Vergleich zu den gesellschaftswissenschaftlichen Fächern fühlen sich die Naturwissenschaften traditionell enger mit dem Fach Mathematik verbunden und nutzen bestimmte Teile als Werkzeug, weshalb vermutet werden darf, dass zumindest die fachmathematischen Inhalte auch jetzt schon immer wieder in den Unterricht Naturwissenschaften einfließen. Eine strukturierte und damit im Sinne eines nicht-fachgebunden auf Synergieeffekte setzenden Unterrichts effiziente Nutzung dieser Überschneidungen und

„natürlichen“ Verbindungen ist hingegen auch hier nicht zu erwarten – und sicher nicht bezogen auf die Problemlösefähigkeiten der Lerner.

Der Rahmenlehrplan selbst sieht das Problemlösen lediglich in den Themenfeldern 1, 5 und 6 verwirklicht (vgl. Abb. 84), was auf ein sehr enges Begriffsverständnis hindeutet. Der Blick auf andere Kompetenzen, die mit CHIME in Zusammenhang gebracht werden, zeigt jedoch, dass bei einem weiter gefassten Verständnis von Problemlösefähigkeiten und mit der Idee einer heuristischen Metaebene auch in anderen Themenfeldern Aspekte aufgegriffen werden, die sich in CHIME integrieren ließen. Hier sind insbesondere die unter „Erkenntnisgewinnung“ aufgeführten Kompetenzen zu nennen und die Kompetenzen „Multiperspektivisches Denken“ und „Eigene Meinung bilden“ in der Kategorie „Bewertung“.

Themenfelder	1	2	3	4	5	6	7	8
Erkenntnisgewinnung								
Fragen geleitet forschen und experimentieren	■				■		■	
beobachten, messen, testen, untersuchen	■	■				■	■	■
vergleichen, ordnen, bestimmen	■	■	■	■			■	■
Daten auffinden und auswerten		■				■		
modellieren		■	■					■
Wissen nutzen								
Umgang mit Geräten, Stoffen, Verfahren	■	■				■	■	■
Modelle nutzen		■	■		■		■	
Erklärungszusammenhänge herstellen				■	■			■
Probleme (z. B. technische) lösen	■					■	■	
Bewertung								
Folgen abschätzen	■		■	■	■	■	■	■
Multiperspektivisches Denken		■		■	■	■		■
Ethische Relevanz erkennen				■	■	■		■
Eigene Meinung bilden			■	■	■	■		■

Abb. 84 Kompetenzentwicklung in den Themenfeldern (Auszug) (Rheinland-Pfalz 2010: 59).

9.4.3 Bildende Kunst in der Orientierungsstufe

Der Lehrplan für Bildende Kunst des Landes Rheinland-Pfalz stammt aus dem Jahr 1998 und wurde bis heute nicht überarbeitet. Er benennt als sein Kernziel die „auf eine persönliche Entfaltung gerichtete umfassende ästhetische Bildung [...], die Wahrnehmungs- und Urteilskompetenzen in ästhetischen Zusammenhängen vermittelt" (RHEINLAND-PFALZ 1998a: 3). Neben diese rezeptiven Kompetenzen treten „die produktiven und reflexiven Arbeitsprozesse" (ibid.), die zur lebensweltlichen Anbindung in sogenannte „Erfahrungsfelder" eingebettet werden.

Die Besonderheiten des Faches sind in seinem Individualisierungsanspruch, der Betonung des handelnden Aspektes und der Produktorientierung zu sehen, die es auch für eine Verknüpfung mit CHIME besonders interessant machen. Die Erfahrungsfelder, die es einzubeziehen und in Verschränkung mit den künstlerischen „Arbeitsbereichen" zu vermitteln gilt, lauten: [499]

- Miteinander leben
- Natur entdecken und erleben
- Spielen und Freizeit
- Mensch und Tier
- Geschlechterdifferenz
- Verantwortlicher Umgang mit der Welt
- Multikulturelle Gesellschaft
- Not und Elend in der Welt
- Individualisierung
- Grundkenntnisse einer Geschichte der Kunst

Die Liste lässt bereits die grundsätzliche Offenheit und Anschließbarkeit an einige andere Sachfächer erkennen, und so heißt es explizit, dass das Fach Bildende Kunst „in seinen unterrichtlichen Intentionen in langer Tradition auf ein Denken gerichtet [ist], das die Grenzen des eigenen Faches übergreift" (RHEINLAND-PFALZ 1998a: 11).

3.1 Arbeitsbereiche/Orientierungsstufe

individuelle Entfaltung	ästhetisch geprägtes kulturelles Umfeld	
Zeichnung **Malerei** **Plastik /Werken**	**Textil** Architektur Design/Werken	Fotomontage **Bildfolgen** Schrift Druckgrafik

Abb. 85 Die Arbeitsbereiche im Fach Bildende Kunst der Orientierungsstufe (RHEINLAND-PFALZ 1998a: 17).

[499] Listung entnommen RHEINLAND-PFALZ 1998a: 11.

Die Arbeitsbereiche sind in Abb. 85 zuammengefasst. Die hier fett gedruckten Arbeitsbereiche sind in der exemplarischen Verknüpfungstabelle enthalten (s. Abb. 86). Hier werden Erfahrungsfelder und (einige) Arbeitsbereiche für die Orientierungsstufe zusammenführt und außerdem auch Pflicht- und Fakultativinhalte dargestellt. Sie ist im Lehrplan folgendermaßen gefasst:

Orientierungsstufe 50 Dpl.stdn. verplanbar:

Erfahrungsfelder	**Arbeitsbereiche**	**Objektanalyse/-interpretation**
• Natur entdecken und erleben	Zeichnung	
	Textil	
• Miteinander leben	Malerei	„Bilder erzählen“
• Spielen und Freizeit	Plastik/Werken	
• Mensch und Tier	Bildfolgen	
	verpflichtend	
	24 Dpl.stdn.	**8 Einz.stdn.**

Abb. 86 Beispielhafte Verknüpfung und Verteilung der Erfahrungsfelder und Arbeitsbereiche in der Orientierungsstufe (RHEINLAND-PFALZ 1998a: 17).

Für die Arbeitsbereiche der Orientierungsstufe werden Lernziele[500] formuliert (gelbe Markierungen verweisen auch hier auf Anknüpfungsmöglichkeiten für eine *Content and Heuristics Integrated Mathematics Education*, vgl. auch Kap. 11), die in den folgenden Abbildungen nur in Auszügen wiedergegeben sind.

Arbeitsbereich: **Bildfolgen**
- Comic Orientierungsstufe

Lernziele:	**Hinweise:**
Fähigkeit, - einen Handlungsablauf in Einzelbildern darzustellen - einen Bewegungsablauf in einer Bilder**folge** grafisch umzusetzen oder - der Gestaltung einer Bewegung in **einem** Bild durch Phasenverschiebung	siehe den Arbeitsbereich Zeichnung

Abb. 87 Auszug aus dem Lehrplan Bildende Kunst, Arbeitsbereich Bildfolgen - Comic (RHEINLAND-PFALZ 1998a: 24).

500 Insbesondere die Art der Formulierungen als Lernziele zeigt an, dass es sich um eine Lehrplanschrift handelt, die vor dem kompetenzorientierten Umbau des deutschen Schulsystems entstanden ist.

Arbeitsbereich: **Architektur - Wohn-/Raumformen** Orientierungsstufe

Lernziele:	**Hinweise:**
Kenntnis unterschiedlicher Wohn-/Raumformen und deren Einrichtungen aus Gegenwart und Vergangenheit	Grundformen des sesshaften und nomadischen Wohnens Sammeln, Ausschneiden und Fotodokumentation von z.B. Mehrzweckräumen, Appartements, Zelt, Höhle, ...
Kenntnis, dass - wirtschaftliche - soziale - geografische Bedingungen die Wohnformen bestimmen	Analyse von Innenraumbildern Dokumentation über sesshafte und nomadische Gruppen, über Dorf, Stadt und klimaabhängige Wohnformen Expedition und Reise
Kenntnis elementarer Symbole des Grundrisses	
Einsicht, dass die Trennung von Vorgängen des Kochens, Schlafens, Arbeitens und Wohnens zur Aufteilung des ursprünglichen "Herdraumes" und damit zu Einzelräumen unterschiedlicher Nutzung führte	Analyse z.B. verschiedener Fertighausgrundrisse (Standardisierung)

Abb. 88 Auszug aus dem Lehrplan Bildende Kunst, Arbeitsbereich Architektur – Wohn-/Raumformen (RHEINLAND-PFALZ 1998a: 22).

Arbeitsbereich: **Druckgrafik** Orientierungsstufe

Lernziele:	**Hinweise:**
Kenntnis unterschiedlicher Vervielfältigungsverfahren - Abschreiben, Kopieren, Drucken, Stempeln, ...	Problematik Einzelstück - Auflage Objektbetrachtung, z.B. handgeschriebene, kopierte, gedruckte, ... Einladungskarten alte Handschriften, Inkunabeln, Grafiken
Kenntnis unterschiedlicher Materialien und Arbeitsverfahren für die Herstellung eines Druckstempels - Kartoffel, Kork, Kordel, ...	Sammeln von unterschiedlichen Materialien und experimentieren in bezug auf - Oberfläche - Festigkeit - Tonwerte - Strukturen - Abnutzung - ....
Kenntnis, dass sich mit Hilfe eines einzigen Formzeichens neue Zusammenhänge herstellen lassen durch - Wiederholen - Anordnen - Variieren - Kombinieren gleicher/verschiedener Formzeichen - Streuung, Reihung, Ballung	

Abb. 89 Auszug aus dem Lehrplan Bildende Kunst, Arbeitsbereich Architektur – Wohn-/Raumformen (RHEINLAND-PFALZ 1998a: 27).

9.4.4 Sport in der Orientierungsstufe

Für den Lehrplan Sport des Landes Rheinland-Pfalz gilt dasselbe wie für den des Faches Bildende Kunst, er ist 1998 letztmalig überarbeitet worden und daher ebenfalls nicht kompetenz-, sondern lernzielorientiert formuliert. Für das Anliegen der Arbeit ist die Zielformulierung wichtig, „dass der Sportunterricht zukünftig einen mehrperspektivischen Zugang zum Phänomen „Sport“ zulässt und fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen verstärkt angeregt werden muss“ (RHEINLAND-PFALZ 1998b: 3). Es werden drei Dimensionen als zentral für den Sportunterricht betrachtet: die motorische, die soziale und die kognitive Dimension; weiterhin sind die Perspektiven, unter denen der Schulsport betrachtet, entwickelt und pädagogisch gestaltet werden soll, die folgenden:[501]

1. Leistung (Wettkampf, Erfolg)
2. Spannung / Spiel (Risiko, Abenteuer)
3. Eindruck (Körpererfahrung)
4. Gesundheit (Fitness, Wohlbefinden)
5. Ausdruck (Darstellung, Gestaltung)
6. Miteinander (soziales Lernen, Umwelt)

Die Zusammenschau dieser Perspektiven mit den Inhalten des Sportunterrichts ist Abb. 90 zu entnehmen.

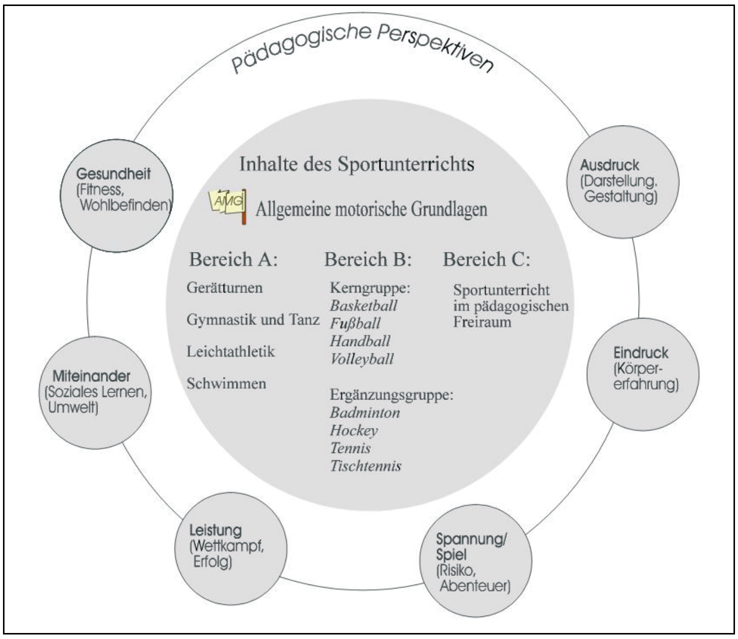


Abb. 90 Zusammenschau der pädagogischen Perspektiven und Inhalte des Sportunterrichts (RHEINLAND-PFALZ 1998b: 10).

[501] nach RHEINLAND-PFALZ 1998b: 7.

Es wird im Lehrplan darüber hinaus zwischen Sach-, Methoden- und Sozialkompetenzen unterschieden, die alle im Sportunterricht in fachspezifi-scher Weise zum Tragen kommen, aber mit Blick auf die allgemeine Bildung der Schüler formuliert sind (vgl. RHEINLAND-PFALZ 1998b: 7 f.). Im Unterschied beispielsweise zum (aktuelleren!) Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalen werden im rheinland-pfälzischen Lehrplan die Möglichkeiten zum nicht-fachgebundenen Arbeiten nicht nur als Ziel benannt, sondern er enthält ein eigenes Kapitel zum Thema (RHEINLAND-PFALZ 1998b, Kap. 5). Hier werden die Bedeutung des nicht-fachgebundenn Arbeitens grundsätzlich herausgearbeitet und auch ganz konkrete Vorschläge für kleinere übergreifende Projekte gemacht, die die Kombina-tionen Sport – Biologie, Sport – Informatik, Sport – Erdkunde und Sport – Musik betreffen. Bei der Darstellung sogenannter „parallelisierter Inhalte“ wird das Beispiel *Umwelterziehung* (Sport, Erdkunde, Biologie und Sozialkunde) genannt, bei einer Art übergeordneter Projektarbeit ist das Beispiel das Thema *Europäische Identität.*

Die Mathematik tritt in diesen Überlegungen nur – ungenannt – als eines von „allen Fächern“ in Erscheinung, die an bestimmten Projekten mitwirken könnten. Daher soll an dieser Stelle auf eine Wiedergabe der „Stoffsammlung zum fachübergreifenden und fächer-verbindenden Lernen aus der Sicht des Faches „Sport““[502] verzichtet werden. Es ist darauf hinzuweisen, dass diese fehlende Sichtbarkeit der Verknüpfbarkeit nicht mit dem tatsächlichen Potenzial zu verwechseln ist. Wie in Kapitel 11 zu sehen sein wird, lassen sich aus Sicht des Problemlösens und der Geometrie gerade in der Orientierungsstufe zahlreiche Verbindungen zum Fach Sport zielführend herstellen.[503]

9.4.5 WPF: Technik, Werken, Wirtschaft, Verwaltung u. v. m. in der Orientierungsstufe

Neben den oben dargestellten Fächern und den aus eingangs erklärten Gründen an dieser Stelle nicht näher erläuterten Sprachfächern gibt es insbesondere an den Gesamtschulen unterschiedlicher Ausprägung eine große Bandbreite von Wahlpflichtfächern, die (vor allem im Bereich der Neigungsdifferenzierung) hoch variabel sind. An den Integrierten Gesamtschulen in Rheinland-Pfalz beginnt ab Jahrgangsstufe 7 bzw. frühbeginnend ab Jahrgangsstufe 6 das Wahlpflichtfach, das in den Jahrgangsstufen 7 und 8 dann durch ein Neigungsfach begleitet wird. Auch wenn es im Rahmen dieser Arbeit in erster Linie um die

[502] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 1998b: 59 f.
[503] Über die Gründe für die auffällig fehlende Vernetzung in Richtung der Mathematik lässt sich auch mit Blick auf die namentlich benannte fachdidaktische Kommission nur spekulieren, da keine Fachkombinationen bzw. Funktionen der Mitglieder ersichtlich sind.

Möglichkeiten zur CHIME-Umsetzung in der Orientierungsstufe geht, muss hier kurz auf das besondere, große Potenzial der Neigungsfächer hingewiesen werden, die – wenigstens im Land Rheinland-Pfalz derzeit – an Integrierten Gesamtschulen durch keine inhaltlichen Rahmenvorgaben des Landes vorbestimmt sind und so auch im schulischen Umfeld sehr ungewöhnliche Angebote beinhalten können.[504] Es sprengt Rahmen und Zielsetzung dieser Arbeit, die Möglichkeiten in diesem Bereich vollumfänglich darzustellen. Die Vorgaben und Möglichkeiten sind in den Bundesländern so vielfältig, dass eine eigene Untersuchung notwendig wäre.

Die folgende Liste gibt lediglich einen groben Überblick über weit verbreitete Wahlpflichtfachangebote in der Orientierungsstufe (Jahrgangsstufe 6) an Gesamtschulen unterschiedlichen Typs. Neben den zweiten Fremdsprachen (in der Regel Französisch und Latein) bieten diese Schularten beispielsweise folgende als Hauptwahlpflichtfächer (nicht Neigungsfächer) an:

- Arbeitslehre
- Informatik
- Wahlpflichtfach Naturwissenschaften

- *Hauswirtschaft und Sozialwesen*
- *Technik und Naturwissenschaften*
- *Wirtschaft und Verwaltung*
- Darstellendes Spiel
- Sport (und Gesundheit)
- Handwerk und Künste
- ...

Die erste Gruppe bezieht sich auf die aktuellen Vorgaben des Landes Nordrhein-Westfalen, die zweite Gruppe auf diejenigen des Landes Rheinland-Pfalz (sowohl für *Realschulen plus*[505] als auch Integrierte Gesamtschulen).

[504] Die Handreichung zu Wahlpflichtfächern an Integrierten Gesamtschulen des Landes Rheinland-Pfalz findet sich hier: http://igs.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/igs.bildung-rp.de/WPF_IGS_Stand_05-16.pdf [07.04.2017]

[505] Die Vorgaben für die Realschulen plus sind enger gefasst und machen verbindliche Angaben für Wahlpflichtfachangebote, die von vielen Integrierten Gesamtschulen aufgegriffen und ebenfalls zur Grundlage ihrer eigenen Wahlpflichtfächer gemacht werden, auch wenn – wie oben erwähnt – keine einheitlichen Vorgaben durch das Land für die Wahlpflichtfachangebote an Integrierten Gesamtschulen existieren.

10 Didaktisch-methodische Konzeption

Während sich eine Reihe grundlegender Eigenschaften eines Unterrichts auf Basis des CHIME-Konzepts aus den oben dargestellten Annahmen ergeben, bleibt wie bei allen Unterrichtskonzepten die konkrete Ausgestaltung des Unterrichts in großen Teilen offen – und dies ist für ein Konzept mit dem Ziel realer Umsetzbarkeit auch erforderlich. Daher werden in diesem Kapitel zur didaktisch-methodischen Konzeption wichtige Fragestellungen von verschiedenen Perspektiven beleuchtet und eine Bandbreite möglicher Umsetzungen vorgestellt und kritisch evaluiert. Eine eindeutige Handlungsanweisung oder gar ein Rezept zur idealen Gestaltung hingegen wird es nicht geben, weil es sie nicht geben kann. Die Realität in Gestalt von allen am Bildungsprozess beteiligten Akteuren, Ausstattungsmerkmalen und gesellschaftlich-politischen Faktoren ist viel zu komplex und variabel, als dass eine Festschreibung in diesem Sinne irgendeinen Effekt hätte – außer das Konzept insgesamt zum Scheitern zu verurteilen, sobald der interessierte Pädagoge feststellen muss, dass ihm dieses oder jenes „integrale" Instrument des Konzepts nicht zur Verfügung steht.

Die Problematik in der Darstellung dieses Kapitels liegt in den drei verschiedenen Integrationsstufen begründet, auf denen CHIME durchgeführt werden kann (vgl. Kap. 8.2.2). Damit das Konzept in seiner Gesamtheit didaktisch-methodisch expliziert werden kann, werden die Unterthemen jeweils für alle drei Stufen, beginnend mit Stufe III, der Vollintegration, dargelegt

10.1 Mathematik im Modul und als Unterrichtsfach

Die Frage, ob der Stundenplan neben heuristisch-mathematischen Modulen (vgl. Kap. 8.2.1) in Sachfächern wie Sport, Technik, Naturwissenschaften usw. auch einen Fachunterricht Mathematik beinhalten sollte, stellt sich insbesondere bei einer Vollintegration (für alle mathematischen Teilgebiete) von CHIME. Ist es erforderlich, neben den heuristischen Modulen – und Sequenzen – Mathematik als separaten Unterricht in der Stundentafel zu verankern?

10.1.1 Vollintegration Stufe III

Vorausgesetzt, dass alle mathematischen Teilgebiete heuristikzentriert didaktisiert und für die transcurriculare Vermittlung in Sachfächern aufbereitet werden und eine klare, verbindliche Organisationsstruktur die Abfolge aller heuristischen Module und Sequenzen auch über Jahrgangsgrenzen hinweg koordiniert, gibt es keinen Grund, darüber hinausgehenden Mathematikunterricht für *alle* Schüler zu erteilen.

Vollintegration durch modularen heuristisch-mathematischen Unterricht in Sachfächern (CHIME Grad III)

Bei diesem Szenario würden potenziell sämtliche in der Stundentafel für den Mathematikunterricht vorgesehenen Stunden (als Beispiel 5 Wochenstunden in der Jahrgangsstufe 5 und 4 Wochenstunden in der Jahrgangsstufe 6 der Integrierten Gesamtschulen in Rheinland-Pfalz) auf die Sachfächer umgelegt werden, so dass diesen – gerade im Falle solcher Nebenfächer wie Bildende Kunst oder Sport – ein deutlich erweiterter Stundenrahmen zur Verfügung gestellt würde. Die Fachkollegen, die die heuristisch-mathematische Bildung im Sinne des CHIME-Konzepts zu verantworten haben, würden die Klassen während der heuristischen Module in den Sachfächern führen, die Module gemeinsam mit den Sachfachkollegen planen und durch ihre mathematisch-heuristischen Fachkenntnisse die Schüler im Gesamtzusammenhang des Sachfachs unterrichten. Die Motivation, sich mit den mathematischen Sachverhalten und den Problemstellungen kreativ und produktiv auseinanderzusetzen, erwächst dabei aus der unmittelbaren Einsichtigkeit der Bedeutung einer Problemlösung.

Lehrer

Es liegt auf der Hand, dass ein heuristisch-mathematischer Unterricht, der vollständig in modularisiert in Sachfächern stattfindet, nur von qualifizierten Fachkollegen erteilt werden kann. In enger Abstimmung mit dem jeweiligen Sachfachkollegen und bei genauer Planung durch die Fachkonferenzen werden die durch die Kernlehrpläne verbindlich vorgegebenen Inhalte nicht in eigenständigen Mathematikstunden, sondern in Auseinandersetzung mit den Sachfachinhalten unter besonderer Berücksichtigung des Problemlösens erworben. Die fachliche sowie didaktische Planung der heuristischen Module und insbesondere auch der heuristischen Sequenzen setzt intensive Zusammenarbeit zwischen den Beteiligten voraus.

Mathematische Stunde, Seminarphasen und Förderangebote

Eine „Mathematische Stunde“ kann in der Orientierungsstufe durchaus eine sinnvolle Ergänzung zum sonst vollintegrierten Unterricht innerhalb der Sachfächer sein, wenn andernfalls eine Kontinuität der heuristischen Reflexion nicht sichergestellt werden kann oder wenn große Lücken in Grundtechniken bestehen; eine solche Stunde könnte einmal in der Woche oder auch nur phasenweise eingerichtet werden.

Ebenfalls denkbar wären „Seminarphasen", in denen zwischen den regulären heuristischen Modulen einige Stunden in Folge für explizite Heuristiklehre oder mathematische Projekte eingeplant werden. Inwieweit solche Seminarphasen auch einmal für Mathematikunterricht im klassischen Sinne genutzt werden dürften, müsste kritisch in der Fachkonferenz diskutiert und einheitlich vereinbart werden. Zielführender und mit den Zielen des Konzepts in Einklang stünden Projekte, die sich mathematisch-vertiefend mit Inhalten befassen, die möglicherweise zuvor in den Sachfächern gestreift aber noch nicht auf ihr mathematisch-problemlösendes Gesamtpotenzial hin erschöpfend behandelt wurden.

Es erscheint grundsätzlich durchaus bedenkenswert, auch ein kontinuierliches Angebot zu machen, in dem Grundfertigkeiten wie Rechentechniken oder der Umgang mit geometrischen Werkzeugen fortlaufend trainiert werden können. Dies ließe sich am sinnvollsten in (nachmittäglicher) Angebotsform umsetzen und sollte stets nur dort von Schülern verlangt werden, wo tatsächliche Defizite im Rahmen des Problemlösevermögens diagnostiziert wurden. Keinesfalls sollte der Besuch eines solchen Angebots zwingend sein für solche Schüler, deren aus der Grundschule vorhandenen basalen Fähigkeiten und Fertigkeiten gut entwickelt und für die erfolgreiche Teilnahme am modularisierten Unterricht nach dem CHIME-Konzept hinreichend sind. Zu schnell würden Schüler sonst durch ewig gleiche Übungen bereits bekannter Verfahren demotiviert und verlören letztlich die Lust, sich mit dem eigentlichen, dem heuristischen Teil der Mathematik zu beschäftigen, wie sie ihnen im Sachfachunterricht an den unterschiedlichsten Stellen begegnet.

Schwerpunktmodule als Differenzierung an Gesamtschulen

Gerade an Schulformen, die auf mehrere Bildungsabschlüsse hinführen, ist auch jetzt ein leistungsdifferenzierter Unterricht bereits Realität. Dabei wird zwischen einer äußeren und einer inneren Differenzierung unterschieden, die in der Regel als Erweiterungskurse und Grundkurse[506] oder mit vergleichbaren Begrifflichkeiten bezeichnet werden. CHIME böte neben der an den Kompetenzerwartungen der Bildungsstandards ausgerichteten vollintegrierten heuristisch-mathematischen Bildung in Sachfächern auch die Möglichkeit, in den oben beschriebenen mathematischen Stunden und Seminarphasen eine solche Differenzierung vorzunehmen. Der Vorteil gegenüber dem derzeit vorherrschenden System von getrennten Erweiterungs- und Grundkursen bestünde darin, dass die Schüler die grundlegenden Inhalte anhand relevanter Problemsituationen binnendifferenziert innerhalb der

[506] Meist werden in der Praxis die Kurzformen E-Kurs und G-Kurs verwendet.

Sachfächer erwerben könnten und nur in Schwerpunktmodulen eine äußere Differenzierung notwendig würde. Auch könnten für die verschiedenen Schullaufbahnprognosen angepasste „Schwerpunktmodule“ angeboten bzw. verpflichtend gemacht werden. Für Schüler, die beispielsweise den Sekundarabschluss I anstreben, könnten so gezieltere und gegebenenfalls auch stundenmäßig reduzierte Module außerhalb der integrierten Module eingerichtet werden, wohingegen für Schüler mit einer Prognose auf die Allgemeine Hochschulreife entsprechend andere Schwerpunkte gesetzt würden.

Schwerpunktmodule könnten die verschiedenen Abschlussprofile insbesondere dann sinnvoll stützen, wenn sie in der Stundentafel so geblockt würden, dass für Schüler mit Prognose auf Allgemeine Hochschulreife ihr Schwerpunktmodul stattfindet, während Schüler mit dem Ziel der Berufsreife entweder praktische, vielleicht sogar (je nach Jahrgangsstufe) konkret anwendungs- oder ausbildungsbezogene Schwerpunktmodule oder andere bildungsgangbezogene Fachangebote in derselben Zeit erhalten.

10.1.2 Integrationsstufe II

Etwas weniger klar stellt sich die Situation bei einer nicht vollständigen Integration des heuristisch-mathematischen Unterrichts dar. Erfolgt die Umstellung auf Module nur teilweise, so wird das Fach Mathematik in den meisten Szenarien weiterhin als eigenständiges Unterrichtsfach erhalten bleiben.

Teilintegration durch heuristisch-mathematische Module in Sachfächern (CHIME Grad II)		
auf einzelne Sachfächer beschränkt	*auf bestimmte mathematische Teilgebiete beschränkt*	*auf bestimmte Jahrgangsstufen beschränkt*

Beschränkung auf Teilgebiete

Beschränkt sich die modularisierte Lehre auf bestimmte Teilgebiete des Faches – beispielsweise auf die Geometrie – so müssen die verbleibenden Bereiche an anderer Stelle verortet werden, im Regelfall also in einem eigenen Unterrichtsfach Mathematik. In der Praxis kann eine solche gebietsweise Einschränkung grundsätzlich auf zwei Arten durchgeführt werden. Entweder wird das gesamt Schuljahr in einem oder mehreren Sachfächern das Teilgebiet Geometrie parallel modularisiert und an Problemkontexten gelehrt. Das würde in der Stundentafel eine Umverteilung eines Teils der Stunden für das eigenständige Fach erfordern; es könnte also etwa eine der fünf Wochenstunden in Jahrgangsstufe 5 für eine begleitende heuristikzentrierte Geometrielehre in Sachfächern verwendet werden. Der Fachkollege würde die Klasse dann in einer Wochenstunde regelmäßig in einem um diese Stunde erweiterten Sachfachunterricht an geometrische Problemstellungen heranführen. Dass in der Praxis auch abweichende Organisationsformen sinnvoll sein können, also etwa eine Zusammenfassung dieser Einzelstunden zu Blöcken, liegt auf der Hand.

Beschränkung auf Sachfächer

Gut denkbar ist, dass sich nicht alle Sachfächer an einer Umstellung auf CHIME beteiligen. Solange diese Einschränkung keine Einschränkung der Unterrichtbarkeit aller heuristischen Techniken und Heurismen in Modulen nach sich zieht, wäre immer noch von einer Vollintegration zu sprechen. Allerdings ist diese etwa bei Ausschluss eines der Fächer Naturwissenschaften oder Gesellschaftslehre bzw. der hierin vereinten Fächer kaum realisierbar. Bei Ausschluss zu vieler oder ganz bestimmter Fächer würde vielmehr die Tragfähigkeit des Ganzen heuristisch-mathematischen Unterrichts auf Integrationsstufe II reduziert. Ein zusätzliches, wenn auch wie oben bereits geschildert stundenreduziertes, Unterrichtsfach Mathematik wäre damit in der Stundentafel weiterhin erforderlich.

Beschränkung auf Jahrgangsstufen

Eine weitere Variante wäre eine jahrgangsstufenbezogene Umstellung auf modularen CHIME-Unterricht. Sachzwänge (personaler oder planerischer Natur) könnten dazu führen, dass CHIME in einer Jahrgangsstufe realisiert werden kann und in der nächsten Jahrgangsstufe nicht. Solche äußeren Zwänge können hier nicht planerisch berücksichtigt und auch nicht methodisch-didaktisch sinnvoll kommentiert werden.

Aus didaktischer Perspektive wäre allerdings denkbar, dass eine sukzessive Einführung von CHIME im Verlauf der Orientierungsstufe beschlossen würde. So könnte ein gleitender Übergang von der Grundschule mit traditioneller Fächerung über eine Jahrgangsstufe 5, in der Mathematikunterricht nach dem IHiMU-Konzept[507] durchgeführt wird, und eine Jahrgangsstufe 6 mit CHIME auf Integrationsstufe I und / oder II bis zu einer Vollintegration ab Jahrgangsstufe 7 stattfinden. Für dieses Vorgehen könnte in der Praxis Einiges sprechen, wenn beispielsweise eine Schule den Wechsel zu einem heuristikzentrierten Mathematikunterricht aufsteigend plant und eine schrittweise Hinführung aller Beteiligten beabsichtigt. Die Veränderungen, die dies für die Arbeit der Lehrer und das Lernen der Schüler bedeutet, sind beträchtlich. Und auch die Rolle, die die Erwartungshaltung der Eltern an einen „richtigen“ Mathematikunterricht spielt, ist nicht zu unterschätzen; eine behutsame und transparente Einführung einer so gänzlich neuen Art des Mathematikunterrichts wäre

[507] Das IHiMU-Konzept wird in Band A (Krichel 2017) entwickelt.

sicher angeraten und könnte durch eine solche fortschreitende Implementierung möglicherweise Schwierigkeiten auf unterschiedlichen Ebenen reduzieren und mittelfristig zum Erfolg des Wechsels beitragen.

10.1.3 Integrationsstufe I

Bei der Integrationsstufe I handelt es sich im Grunde um eine besondere Variante eines fächerüberschreitenden Unterrichts nach Peterßen (vgl. Kap. 1.2.10). Zwar werden hier geplant und regelmäßig Teile des Mathematikunterrichts als heuristisch-mathematische Module umgesetzt, diese Einbindung in Sachfächer ist jedoch zeitlich klar umgrenzt und strebt nicht die kontinuierliche Einbettung in den Sachfachkontext an.

Teilintegration durch nicht-fachgebundene Heuristiklehre in Sachfächern (CHIME Grad I)		
auf einzelne Sachfächer beschränkt	*auf bestimmte mathematische Teilgebiete beschränkt*	*auf bestimmte Jahrgangsstufen beschränkt*

Auch auf dieser Stufe kann nach denselben Parametern unterschieden werden, also ob die fächerverbindenden Anteile auf einzelne Sachfächer beschränkt sind, ob nur bestimmte mathematische Teilgebiete in dieser Weise integriert werden und ob eine Einschränkung auf bestimmte Jahrgangsstufen besteht. Die obigen Ausführungen gelten entsprechend. Auf dieser Stufe stellt sich die Frage, wie groß der modularisierte Anteil effektiv ist. Wenn nur bestimmte Teile eines einzelnen mathematischen Teilgebiets (beispielsweise bestimmte Themen aus dem Gebiet der Geometrie) in Form von heuristisch-mathematischen Modulen etwa im Fach Naturwissenschaften integriert unterrichtet werden, wird sicherlich das Kernziel des CHIME-Konzepts nicht erreicht. Dennoch gilt, wie für Integrationsstufe II geschildert, dass eine solche teilweise Implementierung sehr wohl ihre Berechtigung als Schritt auf dem Weg zur Umgestaltung des Mathematikunterrichts haben kann. Wenn dauerhaft nur einige wenige Bereiche des Mathematikunterrichts auf diese Weise ausgegliedert werden, wird das Kernanliegen des CHIME-Konzepts, der Aufbau echt funktionaler mathematische Bildung voraussichtlich nicht erreicht werden, da der Grad des Anwendungsbezugs vergleichsweise gering ausfällt und die Module den Charakter losgelöster „Problem-Projekteinheiten“ besitzen.

Auf dieser Integrationsstufe lassen sich zwei Fälle organisatorisch, aber auch mit didaktischen Implikationen unterscheiden.

Mathematische Module werden eingebettet von einem Fachkollegen geleitet

Dies wäre eine Variante, die klar auf eine weitergehende Integration hinführen könnte. Durch die zentrale Koordination des Unterrichts in Mathematik und Heuristik durch eine Person, würden die lerngruppenbezogene Kohärenz und Kontinuität optimiert; der parallel stattfindende Mathematikunterricht könnte gezielt auf die geplanten Module in den verschiedenen Sachfächern angepasst werden, diese vorbereiten, nachbereiten und reflektieren. In der stundenplanerischen Umsetzung wäre diese Variante eine Herausforderung, weil eine gewisse Flexibilität notwendig wäre, um den Kollegen tatsächlich passgenau für die erforderlichen Stunden – und das auch nur in bestimmten Phasen des Schuljahres – des Sachfachunterrichts (oder den Sprachunterricht) freizuhalten.

Eine denkbare Alternative wäre ein Modul-Lehrer, der in einer oder zwei gesamten Jahrgangsstufen für die Durchführung aller heuristisch-mathematischen Module verantwortlich ist. In Abstimmung mit den Fachkollegen Mathematik und den Sachfachlehrern der Jahrgangsstufe(n) könnte so noch immer eine gute Passung zu den eigenständigen Mathematikstunden erzielt werden, und eine Stärke dieses Modells bestünde in der lerngruppenübergreifenden Übereinstimmung in der Heuristiklehre; auch eine Entlastung der unterrichtenden Kollegen ist zu erwarten, da die erstellten Module mehrfach, wenn auch in angepasster Form, durch dieselbe Person verwendet werden können – anders als bei der Variante des Modulunterrichts durch den jeweiligen Fachlehrer oder auf den anderen beiden Integrationsstufen. Ein Nachteil dieser Umsetzung könnte darin bestehen, dass Schüler den inneren Zusammenhang zwischen den mathematischen Fachinhalten, die sie im Rahmen der Module erwerben, und denen in den regulären Mathematikstunden durch einen personellen Wechsel weniger bewusst wahrnehmen und die kognitive Verknüpfung der Bereiche „Problemlösen mit mathematischen Werkzeugen in Sachfächern" auf der einen Seite und anderen mathematischen Inhalten aus dem eher traditionell gestalteten, selbständigen Mathematikunterricht auf der anderen erschwert wird. So würde möglicherweise der positive Effekt der Einbettung ein Stück weit negiert werden.

Mathematische Module werden teilweise oder gänzlich von den Sachfachlehrern in Absprache mit der Fachschaft Mathematik erteilt

Die zweite Umsetzungsvariante wäre eine Verankerung heuristisch-mathematischer Module und Sequenzen innerhalb der Sachfächer mit Implementierung durch die Sachfachkollegen. Dies wäre vom stundenplanerischen Standpunkt sicher die einfachste Variante, denn es wäre nur eine wechselnde Ausweitung der Fachstunden erforderlich.

Man könnte dies recht einfach durch ein ein- oder zweistündiges Band umsetzen, das im Verlauf des Schuljahres wechselnd beispielsweise dem Fach Gesellschaftslehre, Naturwissenschaften, Sport oder auch dem Mathematikunterricht zugegeben würde.

Bedenken bei dieser Variante müssen eher Belastung und Qualifikation der Kollegen hervorrufen. Selbst wenn die mathematisch-heuristischen Module sehr sorgfältig und mit viel didaktischem Gespür für die Lerngruppen der jeweiligen Schule und Schulform gestaltet werden, wäre es doch für im Bereich Mathematik fachfremde Kollegen eine große Herausforderung, die fachlichen Inhalte adäquat zu vertreten – und vor allen Dingen auf unvorhersehbare Entwicklungen angemessen zu reagieren, wie sie offenere, problemorientierte Unterrichtsformen ja gerade herausfordern. Es scheint daher, von wenigen möglichen Ausnahmen abgesehen, nicht zielführend, die heuristisch-mathematischen Module in fachfremde Hände zu legen.

Umgekehrt ist an dieser Stelle aber auch zu erkennen, dass der Erfolg der Module ebenso mit der Einbindung und kooperativen Auseinandersetzung mit den Sachfachkollegen steht oder fällt, denn Mathematiklehrer sind ebenso nicht in der Lage, auf sämtliche möglichen sachfachlichen Fragen angemessen zu reagieren. Daher muss im Idealfall und so oft wie möglich ein Teamteaching angestrebt werden, bei dem Fachkollegen beider an CHIME beteiligten Fächer den Unterricht gemeinsam durchführen. Dass sich dies in der aktuellen Schulrealität nur in Ausnahmefällen an einigen Gesamtschulen realisieren ließe, ist richtig; es weist jedoch unmittelbar in eine weitere wichtige Entwicklungszone der Schule der Zukunft.

10.2 Mathematik als Wahlpflichtfach

Sehr sinnvoll lässt sich bei einer Vollintegration die Idee eines Wahlpflichtfaches Mathematik ins Spiel bringen. Auf den ersten Blick erscheint dieser Gedanke möglicherweise paradox – sollte die Mathematik nicht gerade vollständig in andere Fächer eingebunden werden und damit praktisch aus der Stundentafel „verschwinden“? Bedenkt man die Begründungszusammenhänge für das CHIME-Konzept wird jedoch klar, dass es ja nicht um eine Auflösung des traditionellen Mathematikunterrichts „aus Prinzip“ geht, sondern um Legitimationsprobleme für Vieles, was in diesem Rahmen unterrichtet wird und nach den bildungspolitischen Vorgaben werden muss.

Es ist zu bedenken, dass es eine erfahrungsgemäß vergleichbar kleine Anzahl von Schülern gibt, die sich nicht nur mit der im Sinne der Bildungsstandard „erforderlichen“

Mathematik befassen möchten, sondern vielmehr eine Neigung zu dem Fach verspüren und gerade an den inner-mathematischen Strukturen und abstrakten Möglichkeiten der Geisteswissenschaft Mathematik interessiert sind. Es wäre eine verpasste Chance zur Förderung besonderer Neigungen und gegebenenfalls auch Begabungen, kein Angebot zu machen, das über die eng gesteckten Vorgaben der Bildungsstandards bzw. der auf ihnen basierenden Lehrplanschriften hinausgeht. Durch eine solche Neigungsdifferenzierung ab Jahrgangsstufe 7 bzw. 6 gewänne man enorme Freiheiten bei der Auswahl der Inhalte, die Möglichkeit, auf die jeweiligen Lerngruppen einzugehen, und auch das Niveau fast beliebig weit zu erhöhen, wo dies mit Blick auf die Lerngruppe möglich ist. Ein Luxus, den sich kein Mathematiklehrer in einer Regelklasse erlauben kann oder darf, sind doch die Kompetenzerwartungen für das Ende der Sekundarstufe I klar festgelegt.

10.3 Strukturierung eines transcurricularen Unterrichts: Lehrer

Die nun folgenden Ausführungen nehmen den höchsten Grad der Integration des CHIME-Konzepts an, also die vollständige Umgestaltung des Mathematikunterrichts zu einer transcurricularen, auf heuristisch-mathematischen in Sachfächer integrierten Modulen basierenden Bildung. Eine Umsetzung auf niedrigerem Niveau erfordert unter Berücksichtigung der in Kapitel 10.1 dargestellten Ideen lediglich eine Reduzierung und Vereinfachung der komplexen Planungsanforderungen für die Vollintegration.

10.3.1 Planungsanforderungen

Vor dem Einsatz transcurricularer Module[508] muss eine genaue Planung der beabsichtigten Inhalten und ihrer Einbettung in inner- und außermathematische Fachinhalte angelegt werden. Für die Arbeit innerhalb eines Schuljahres mag folgende Planungstabelle als Muster dienen (vgl. Abb. 92). Hier könnte wochenweise in Abstimmung mit den Sach- und Sprachfächern festgestellt und in einem nächsten Schritt verbindlich festgelegt werden, wann und wo welche heuristischen Techniken und Heurismen in Verbindung mit welchen mathematischen Inhalten angebunden werden.

Die Zeile für die mathematische Stunde und Seminarphasen wäre fakultativ, falls und wenn solche vorgesehen sind. In der Zeile Förderangebote können diese parallel auf die sonstigen Inhalte angepasst oder komplementär dazu festgeschrieben werden. Sämtliche

[508] Hier und im Folgenden wird abkürzend von Modulen, transcurricularen Modulen oder heuristisch-mathematischen Modulen gesprochen, wenn transcurriculare heuristisch-mathematische Module im Sinne des CHIME-Konzepts gemeint sind.

hier vorgenommenen Eintragungen sind nur als Beispiele und nicht als konkrete Vorschläge zu verstehen.

Die Farbcodierung (Abb. 91) zeigt an, in welchem Fach die in der linken Spalte genannte heuristische Technik oder der genannte Heurismus verankert werden soll. In der jeweiligen wochenbezogenen Zelle werden die mathematischen Inhalte *und* die sachfachlichen Inhalte eingetragen, die das mathematisch-heuristische Modul tragen.

Naturwissenschaften
Gesellschaftslehre
Sport
Kunst
Deutsch/Englisch

Abb. 91 Farbcodierung der Schulfächer.

		...Teilgebiet/Leitidee ...				
Lernjahr / Schulwoche		x	x+1	x+2	x+3	...
Mathematische Stunde / Seminarphase Förderangebot		Arbeit an der Forschermappe		Problemlöse-box		
		Grundrechenarten				
Heuristische Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung	Graphische Repräsentationsformen	math. Inhalt / sachfach. Inhalt				
	Tabellen und Listen	math. Inhalt / sachfach. Inhalt	math. Inhalt / sachfach. Inhalt math. Inhalt / sachfach. Inhalt	math. Inhalt / sachfach. Inhalt math. Inhalt / sachfach. Inhalt		
	Gleichungen					
	De- und Rekonstruktion			math. Inhalt / sachfach. Inhalt	math. Inhalt / sachfach. Inhalt	
Heurismen der Analyse und Adaption	Affinität				math. Inhalt / sachfach. Inhalt	
	Strukturnutzung					
Heurismen der konkreten Handlung	Vorwärtsarbeiten				math. Inhalt / sachfach. Inhalt	
	Rückwärtsarbeiten					
	Systematisches Probieren	math. Inhalt / sachfach. Inhalt	math. Inhalt / sachfach. Inhalt			

Abb. 92 Beispiel: Teil eines Planungsrasters für ein Lernjahr mit CHIME.

Bei der Vollintegration wären entweder separate Planungsraster für jedes Teilgebiet bzw. für jede Leitidee anzulegen, oder ein gemeinsames, damit aber noch komplexeres Raster. Beide Vorgehensweisen hätten Vor- und Nachteile. Wie schon das Schema (Abb. 92) erkennen lässt, gewährt diese Art der Planungshilfe einen guten Überblick sowohl über die Verteilung der heuristischen Techniken und Heurismen im Verlauf eines Lernjahres als auch die Beteiligungsgrade der verschiedenen Sachfächer; außerdem kann das „heuristische Pensum" jeder gegebenen Woche leicht abgelesen werden, um sicherzustellen, dass es keine ungünstigen Häufungen gibt, wobei für die heuristischen Techniken gilt, dass sie eher kontinuierlich möglichst häufig – gegebenenfalls auch nur durch die Sachfachlehrer – aufgegriffen werden sollten, nachdem sie jeweils im Rahmen eines CHIME-Moduls eingeführt worden sind.

Auch wenn Teilgebiete / Leitideen bei CHIME weniger deutlich voneinander getrennt würden, als dies im traditionellen, stark reihenorientierten Mathematikunterricht der Fall ist, ist es natürlich eine Option, die Planung so anzulegen, dass eine Abfolge von Schwerpunkten bezüglich der Teilgebiete / Leitideen entsteht, das also ein Cluster (zeitlich zusammenhängende Gruppe innerhalb des Kontinuums) von Modulen vorrangig der Leitidee *Raum und Form* oder *Zahl* oder *funktionaler Zusammenhang*[509] zugeordnet wird. Ist dies der Fall, ergibt sich im Planungsraster ein fortlaufendes Kontinuum, das mit weichen Übergängen zwischen den Leitideen wechselt und dabei die kontinuierliche Entwicklung der Problemlösekompetenzen und der heuristischen Metakompetenzen in den Vordergrund stellt. Von größter Wichtigkeit ist die Festlegung der zeitlichen Abfolge (und damit ggf. der Ersteinführung eines bestimmten heuristischen oder fachlichen Elements) und des erwarteten Zeitbedarfs. Außerdem kann erfasst werden, wann die Anwesenheit des Mathematiklehrers erforderlich ist, und wann Wiederholungen heuristischer Techniken oder Heurismen in Sachfachzusammenhängen durch die Fachkollegen sinnvoll sind. Eine Planung dieses Zuschnitts sollte natürlich, wann immer möglich, die Synergieeffekte der beteiligten Fächer ausschöpfen.

Im Zuge der Schulreform und Bemühungen, nicht-fachgebundene Lerninhalte zu stärken, hat das Land NRW mit dem *QUA-LiS-Partiturtool* jüngst ein Computerprogramm für die digitale Erstellung und anpassbare Darstellung sogenannter „Jahrgangspartituren" entwickelt, das kostenlos zur Verfügung gestellt wird.[510] Dieses Werkzeug stellt die Planungen eines gesamten Schuljahres über alle Fächer hinweg dar und vereinfacht dadurch die Koordinierung über Fachgrenzen hinweg. Es könnte ohne Schwierigkeiten auch als technische Planungshilfe für CHIME verwendet werden (s. Abb. 93 und Abb. 94).

[509] Diese Leitideen sind den Bildungsstandards Mathematik entnommen und finden sich in praktisch allen aktuell geltenden Lehrplanschriften wieder.
[510] Unter http://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/jahrgangspartitur/jahrgangspartitur/index.html [07.04.2017]

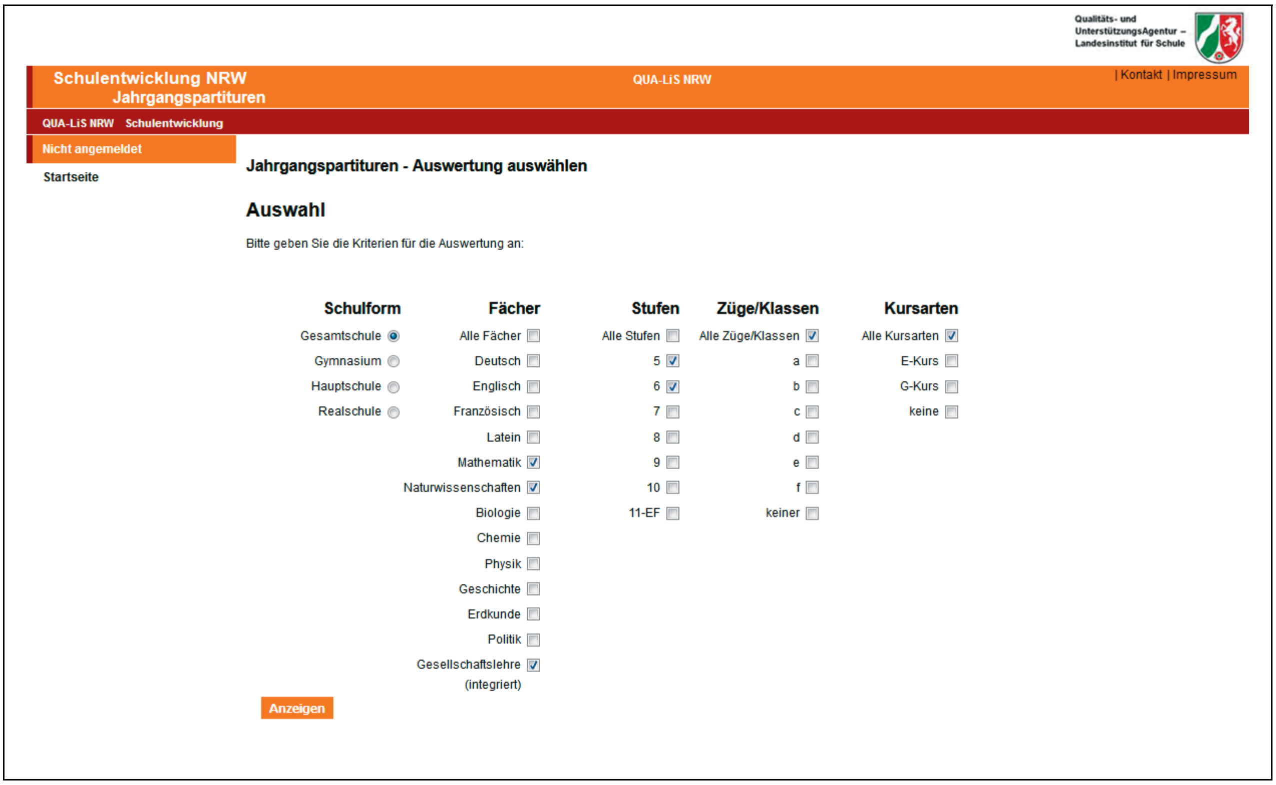


Abb. 93 Filtermaske (Beispiel) für die Erstellung von Jahrgangspartituren mit dem QUA-Lis-Partiturtool.

Abb. 94 Ausgabebeispiel des QUA-LiS-Partiturtools bei Filter über drei Fächer in einer Jahrgangsstufe.

10.3.2 Methodische Gestaltung

Wie andere moderne Unterrichtskonzepte schreibt auch CHIME keine Methoden vor, allein schon um jeglicher Methodenmonokultur entgegenzutreten und den Eindruck zu vermeiden, dass ein „Verknüpfungszwang“ vorliegen könnte. Im Sinne eines vieldimensional bildenden Unterrichts werden jedoch kooperative Lernformen und freies Arbeiten in vielen Fällen dem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch vorzuziehen sein. Da die Individualisierung des Lernprozesses integraler Bestandteil jedes problemlösenden Unterrichts sein muss, ergibt sich der Einsatz bestimmter Methoden an bestimmten Stellen der heuristisch-mathematischen Module schlicht als logische Notwendigkeit. Sollen beispielsweise ins Fach Naturwissenschaften eingebettet geometrische Zusammenhänge selbständig erkannt werden, so müssen Phasen der eigenständigen Beschäftigung mit dem vorliegenden Sachverhalt Teil der Unterrichtsplanung sein; ob diese Phasen im konkreten Fall als erste Phase einer kooperativen *Think-Pair-Share*-Sequenz, als Teil eines groß angelegten Gruppenpuzzles oder als arbeitsteilige Partnerarbeit realisiert wird, liegt im Ermessen des unterrichtenden Lehrers bzw. der Fachkonferenz, die methodische Schwerpunktsetzungen nach den jeweiligen Erfordernissen vornimmt. In Band A (KRICHEL 2017, Kap. 7.2.3) werden die wesentlichen Unterrichtsmethoden dargestellt und erläutert, die sich für einen heuristikzentrierten Unterricht eignen. Auf die dort angestellten Überlegungen sei hier verwiesen.

10.4 Strukturierung eines transcurricularen Unterrichts: Schüler

In der Praxis begegnet man sehr oft Lernern, die (mathematischen) Problemsituationen – und zwar im doppelten Sinne sowohl der realweltlichen Erscheinungsformen um sie herum als auch den Strukturen innerhalb der Mathematik – hilflos gegenüberstehen. CHIME arbeiten mit drei auf unterschiedlichen personalen und affektiven Ebenen operierenden Instrumenten (die des IHiMU-Konzepts aufgreifend und erweiternd, vgl. Band A, KRICHEL 2017: 191 ff.):

Fortschreitender Individualisierungs-grad ↓	lerngruppenbezogen	Problemlösenetz
	lerngruppenbezogen / kleingruppenbezogen / individuell	Forscherheft
	individuell	Methodenbox

Tab. 28 Steuerung- und Sicherungsinstrumente beim inkrementellen, individualisierten Aufbau heuristischer Kompetenz über Jahrgangsstufen hinweg.

10.4.1 Die Methodenbox als individuelles Strukturierungsinstrument

Es ist unbestritten, dass transcurriculares Lernen von den Lernern wie auch Lehrern das Vermögen zu vernetztem Denken einfordert – dieses aber, so die zugrunde liegende Erwartung, auch ganz besonders fördert und wachsen lässt. Wie lassen sich jedoch Wissen, Erfahrungen, Fähigkeiten und Fertigkeiten strukturiert festhalten, die zum einen aus so vollkommen unterschiedlichen Erfahrungswelten wie Kunst, Sport und Technik stammen und zum anderen auch zeitlich nicht in dem engen Zusammenhang stehen, wie dies im traditionellen Fachunterricht Mathematik die Regel ist? Auf der individuellen Ebene ist hier die *Heuristische Methodenbox*[511] als zentrales Mittel zu nennen, das verschiedene Aspekte in sich vereint bzw. vereinen kann:

1. Sammlung besonderer Erfahrungen aus dem Bereich der Problembearbeitung:
   Hier können gelöste Probleme archiviert werden und solche verweilen, die (noch) nicht gelöst werden konnten.
2. Dokumentation von Problemlösevorgängen:
   In Schritten können erfolgreiche Problemlöseprozesse aufgezeichnet und aufbewahrt werden; außerdem können bei noch nicht gelösten Problemen bisherige Fortschritte nachvollzogen werden.
3. Strukturerfassung wiederkehrend angewandter heuristischer Techniken und Heurismen beim Problemlösen:
   Eine Sortierung der vorigen zwei Kategorien kann genügen, um Gemeinsamkeiten sichtbar zu machen; zusätzliches Niederlegen von reflektierenden oder analysierenden Überlegungen zu der Sortierung führt zu einer ggf. individuellen Strukturierung heuristischen Handelns.

10.4.2 Das Forscherheft als Mittler zwischen Individuum, Kleingruppe und Lerngruppe

Die Idee des *Forscherhefts*[512] folgt einer Reihe ähnlich konzipierter Hilfsmittel aus dem Bereich der allgemeinen Pädagogik der vergangenen Jahrzehnte, mit denen eine Individualisierung des Unterrichts verfolgt wurde und wird. Wichtige Beispiele, die ähnlich dem Forscherheft arbeiten, sind „Lerntagebuch“, „Logbuch“, „Journal“ usw.[513]

---

[511] Vgl. hierzu auch die Ausführungen in Band A (KRICHEL 2017: 201 f.).

[512] Der affektiv günstigere Begriff des „Forscherhefts“ meidet den Ausdruck „Problem“, der intuitiv ungünstige Reaktionen auslösen kann. Eine spätere Korrektur einer solchen negativen Erstreaktion entfällt so.

[513] Einen guten Überblick und eine allgemeine Einführung in die Arbeit mit solchen Dokumentationsformen bietet HUßMANN 2003: 75 ff.

Das Forscherheft kann flexibel mit unterschiedlichen Sozialformen kombiniert eingesetzt werden, ist aber immer dann von besonderer Bedeutung, wenn konkrete Problemlöseaufgaben zu bearbeiten sind. Dabei wird die Arbeit häufig dem kooperativen Dreischritt (vgl. Kap. 1.2.4.) folgen, das heißt, dass die Problemstellung zunächst individuell erfasst und bedacht werden soll, bevor eine Arbeit mit anderen Lernern eingeleitet wird. Das Forscherheft wird also einerseits als individuelles Strukturierungsmittel die Sammlung der Ideen der einzelnen Lerner erfassen, sollte aber andererseits auch die daran anschließende gemeinsame Phase widerspiegeln. Für eine genauere Beschreibung des Forscherheftes vgl. Band A (Krichel 2017, Kap. 7.2.2).

10.4.3 Das Problemlösenetz als kommunes Strukturierungsinstrument

Wenn das Problemlösen heuristisch, also explizit reflektiert als Teil der mathematischen Allgemeinbildung betrieben wird, stellt sich die Frage nach einer Möglichkeit, bisher gewonnene Eindrücke, Einsichten und Erkenntnisse (wobei ganz klar festzuhalten ist, dass sich die beteiligten Lerner zu jedem Zeitpunkt auf diese drei Stufen verteilen werden) auch für die Lerngruppe festzuhalten und zu visualisieren. Hier soll das *Problemlösenetz* als eine Möglichkeit entwickelt werden, die sich für die Verwendung im Rahmen des CHIME-Konzepts eignet; dieses *Problemlösenetz* stellt ganz eigene, erweiterte Anforderungen:

- Die Vielzahl der einbezogenen Fachgebiete muss darstellbar sein.
- Die Darstellung muss auf Jahre hin erweiterungsfähig sein.
- Die Notwendigkeit einer Endgültigkeit beispielsweise der Benennungen sollte vermieden werden, da dann Entwicklungen bei der Begriffsbildung Rechnung getragen werden kann.
- Verbindende Elemente müssen klar hervortreten.
- Die Visualisierung sollte in den Phasen der heuristischen Reflexion möglichst gegenwärtig sein, damit ein Rückgriff sowohl durch Lerner als auch Lehrer erfolgen kann; nur so wäre das Instrument wirklich optimal nutzbar und für alle Beteiligten als real transcurricular fassbar.

Insbesondere der letzte Punkt stellt sich in der Realität zunächst als schwer umsetzbar dar. Es ist unwahrscheinlich und durch die Erfordernisse mancher Sachfächer (insbesondere Sport, Kunst und Chemie) auch nicht möglich, durchgehend denselben Unterrichtsraum zu nutzen. Ein Problemlösenetz wächst im Verlauf der Zeit zu einer Größe heran, die es wenig transportabel machen dürfte. Mit Blick auf die aktuelle Situation der fortschreitenden Digitalisierung allerdings sollte es in der nahen Zukunft ein gangbarer Weg sein, neben einem physischen Modell des lerngruppeninternen Problemlösenetzes, das an dem Ort verbleibt, an dem die mathematischen Stunden oder Seminarphasen stattfinden, eine digitale Version zu erstellen. Es gibt bereits viele gute Programme zur Erstellung von Mindmaps oder Flussdiagrammen, die zur Sicherung des Problemlösenetzes eingesetzt werden könnten, eine fortlaufende Pflege durch das Ergänzen neuer Elemente erlauben und außerdem in allen Fachräumen über das Schulnetzwerk aufgerufen und genutzt werden können. So würde der „heuristische Klassenraum" mit der Lerngruppe wandern und wäre außerdem beispielsweise während der Wahlpflichtfächer auch mehrfach verfügbar.

Hinweise zur Gestaltung und Pflege eines (digitalen) Problemlösenetzes

Bei der Gestaltung des Problemlösenetzes ist bei der Grundstruktur auf eine möglichst klare Einteilung zu achten. Die Begrifflichkeiten sollten von den Schülern selbst gewählt werden dürfen, um die Aneignung auch affektiv zu erleichtern. Besonders typische, erfolgreich gelöste Probleme sollten in sehr kurzer Darstellung Teil des Netzes sein, um Assoziation und Erinnerungsvermögen zu unterstützen. Ein Zuviel an Beispielen und Erläuterungen hingegen sollte vermieden werden, um die Anwendbarkeit zu erhalten – für umfassende Erklärungen und eigene Notizen besitzen alle Schüler ihre Problemlösebox bzw. ihr Forscherheft.

Die digitale Version des Netzes bietet ihrerseits Möglichkeiten zur didaktischen bis hin zur heuristischen Nutzung. Zum einen können wechselnde Schüler mit der Erweiterung und Aktualisierung beauftragt werden, so dass die Umsetzung selbst zur Reflexion mit der heuristischen Metaebene anregen kann, zum anderen bietet die so wachsende Struktur ihrerseits Erweiterungsmöglichkeiten: Perspektivisch könnten in einer digitalen Fassung eines Problemlösenetzes auch alle Probleme hinterlegt werden, denen die Lerngruppe im Lauf der Zeit begegnet. Wenn die klare Grundstruktur erhalten bleibt, können die im Unterricht bearbeiteten Probleme einfach an einer Stelle oder an mehreren Punkten des Netzes als *Links* eingearbeitet werden, ohne dass eine visuelle Überflutung droht.

Eine solche erweiterte Ausgestaltung würde letztlich auf eine lerngruppenbezogene digitale „Problemlösebox" hinführen, die in ihrem Charakter einer *Wiki*[514] entspräche. Mit

[514] Der Begriff „wiki" stammt ursprünglich aus dem Hawaiianischen und bedeutet „schnell". Die Bezeichnung wird heute vorrangig für Online-Foren benutzt, auf denen meist zu klar umgrenzten Themen Informationen in Form eines digitalen Lexikons zusammengestellt werden. Das Besondere an Wikis ist die Einbindung aller Nutzer auch als

fortschreitendem Alter der Schüler könnte eine solche Umsetzung ein eigenes herausforderndes Projekt darstellen, das unter gleichzeitigem Lernen mit und an den Neuen Medien die heuristischen Kenntnisse vertiefen könnte.

Autoren von Inhalten. Das qualitative Regulativ ist die Nutzergruppe selbst, da Beiträge auch durch jeden anderen Nutzer verändert werden können (vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Wiki).

11 Konkretisierung: CHIME für die Geometrie in der Orientierungsstufe

Die unbedingte Verschränkung der prozessbezogenen und fachlichen Kompetenzen zieht nach sich, dass im Folgenden keine isolierte Darstellung der Heuristik als Unterrichtsinhalt bzw. -ziel möglich ist. Die Heuristik als zentrales Thema des Modells ist jedoch allgegenwärtig. Die Eingrenzung erfolgt über die inhaltliche Konzentration auf die geometrischen Leitideen *Raum und Form* und *Messen*, wie sie in der Orientierungsstufe vorgesehen sind.

Es wird gezeigt, dass und wo sich alle heuristischen Techniken und Heurismen (nach Krichel/Stiller) in verschiedene sachfachliche Kontexte einbetten lassen, indem die fachlichen mathematischen Inhalte einerseits und die Themenfelder weiterer klassischer Schulfächer andererseits einer heuristischen Analyse unterzogen werden. Diese demonstriert exemplarisch, wie an zentralen Inhalten und Themenfeldern der Orientierungsstufe – gleich Kristallisationspunkten der heuristischen Grundlagenbildung – die wichtigsten heuristischen Techniken und Heurismen besonders gut durch den Mathematiklehrer eingeführt und reflektiert werden können. Dass im Folgenden die aktuellen Fachbezeichnungen verwendet werden, ist im Übrigen nicht als Hinweis darauf zu verstehen, dass diese Fächer in ihrer traditionellen Gestalt unterrichtet werden müssen. Eine alle Fachgebiete betreffende Umstrukturierung des Systems Schule kann, muss aber nicht, vor der Arbeit mit dem CHIME-Konzept stattgefunden haben. An geeigneter Stelle wird auch auf die Möglichkeit der Weiternutzung in späteren Lernzusammenhängen verwiesen.

Zur Verdeutlichung der (möglichen) Verschränkung zwischen mathematischem (geometrischem), heuristischem und sachfachlichem Inhalt werden die Kernpunkte am Ende jedes Abschnitts in Form des „CHIME-Dreiecks“ zusammengefasst wiedergegeben:

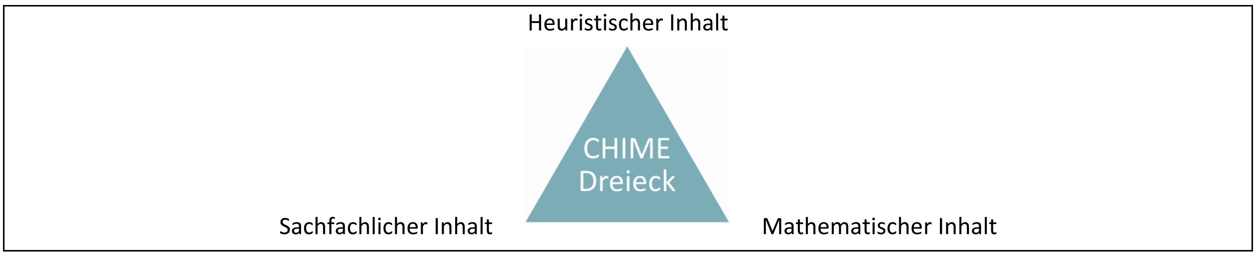


Abb. 95 Das CHIME-Dreieck stellt die in gekoppelten heuristischen, mathematischen und sachfachlichen Inhalte eines Moduls zusammenfassend dar.

11.1 Heuristische Techniken: Graphische Repräsentationsformen, Tabellen und Gleichungen

Die heuristischen Techniken in ihrer Gesamtheit tragen dazu bei, ein Problem innerhalb eines gegebenen Sachverhalts zu identifizieren, zu verstehen und den Problemlöseprozess in Gang zu setzen, so dass die Vermittlung bzw. fortgesetzte Anwendung heuristischer Techniken in fast allen Sachfächern und auch weniger naheliegenden Fächern wie Sport und Kunst durchgängig möglich ist, wie in den folgenden Analysen in Ausschnitten zu sehen sein wird. Da heuristische Techniken wie graphische Repräsentationsformen und Tabellen weniger umfassende heuristische Kenntnisse erfordern als Heurismen der Analyse und Adaption oder Heurismen der konkreten Handlung, ist eine kontinuierliche Integration im Sachfachunterricht auch durch Nichtmathematiker denkbar und dann wünschenswert, wenn die entsprechenden Verknüpfungen durch die Fachkonferenzen verbindlich festgelegt und übergreifend didaktisiert sind.

In der Orientierungsstufe spielen Gleichungen mit ihrem vergleichsweise abstrakten Modellcharakter noch nicht die bedeutende Rolle, die ihnen später bei der Lösung (rechnerisch) komplexerer Problemsituationen zukommt. Sie treten daher in den folgenden Beispielen sehr viel weniger stark in Erscheinung, als dies bei einer entsprechenden Aufbereitung späterer Jahrgangsstufen der Fall wäre. Dennoch werden sich immer wieder auch Möglichkeiten bieten, bei der Lösung konkreter Problemsituationen Gleichungen oder Vorläufer von Gleichungen (etwa systematische Listungen oder Tabellen) zur Problemlösung zu verwenden. Beim CHIME-Konzept mit seinen offenen und individuellen Räumen zur eigenständigen Problembearbeitung muss damit gerechnet werden, dass einzelne Schüler schon früh zu solchen Mitteln greifen möchten und dann auch in der Reflexion ihres Lösungsweges gehört werden sollten. Ausgangspunkt der folgenden Ausführungen sind die Lehrplanschriften des Landes Rheinland-Pfalz (vgl. Kap. 9.4.1), die jedoch frei im Sinne einer CHIME ergänzt werden.[515]

11.1.1 Gesellschaftslehre

Das Land Rheinland-Pfalz formuliert in seinem Rahmenlehrplan für Gesellschaftslehre (vgl. Kap. 9.4.1) neben einem Kompetenzmodell auch einen Methodenkatalog, in dem den Themenbereichen verschiedene Methodenkompetenzen zugeordnet werden, die es verbindlich zu erwerben gilt. Der erste dieser Methodenbereiche, das *Gewinnen,*

---

[515] Die Lehrplanschriften dienen als thematische „Steinbrüche“, um Sachthemenbezüge herzustellen. Dass CHIME perspektivisch nicht innerhalb der Lehrplanschriften, so wie sie heute gelten, umgesetzt würde, liegt auf der Hand.

Analysieren und Interpretieren von Daten, Aussagen und Zusammenhängen, beinhaltet das Vergleichen, die Untersuchung graphischer Darstellungen wie Schaubilder, Diagramme, Zahlenstrahl und Skizzen sowie das Untersuchen von Tabellen und Statistiken. Mit dieser verbindlichen Forderung eröffnet der Rahmenplan eine Vielzahl an Möglichkeiten, die heuristischen Techniken *Anfertigen von Tabellen* und *Nutzen graphischer Repräsentationsformen* in der Gesellschaftslehre einzuführen und zu vertiefen.

Die Vermessung der Welt – Längen- und Flächeneinheiten

Wir in unserer Schule ist einer der Themenschwerpunkte des Gesellschaftsunterrichts in der Orientierungsstufe, der unter anderem die Beschreibung von (Schul-)Wegen, des Schulgeländes und die Orientierung im realen Raum zum Gegenstand hat. Die geometrischen Aspekte dieses Kernanliegens sind offensichtlich. Die Schüler sollen erkennen, dass Karten vereinfachte und verkleinerte Abbildungen der Landschaft und ihrer Ausstattung sind, und mithilfe der Legende den Inhalt eines Kartenausschnittes grob erfassen und beschreiben können. Hier lässt sich die graphische Repräsentationsform erstmals auch unter heuristischer Perspektive thematisieren, deren Ziel es ist, einen gegebenen Sachverhalt zu abstrahieren und auf die wesentlichen Informationen zu reduzieren.

Darüber hinaus sollen die Schüler die Karte nutzen lernen, um sich in der Landschaft zu orientieren, Orte zu identifizieren, ihren eigenen Wohnort zu lokalisieren sowie ihren Schulweg zu protokollieren, diesen in die Karte einzuzeichnen und schließlich eine eigene Karte (in Form eines Kinderstadtführers oder eines geographischen Rundweges[516]) anzufertigen. Beim Anfertigen einer solchen (Karten-)Skizze werden räumliche Strukturen vereinfacht dargestellt, ohne dass die maßstäbliche Genauigkeit und inhaltliche Vielfalt im Mittelpunkt stehen, sondern ausgewählte Gegebenheiten und Eigenschaften hervorgehoben werden, so dass die heuristische Technik Erstellen einer graphischen Repräsentationsform explizit gefordert wird. Das Problem, das es an dieser Stelle zu lösen gilt, ist nämlich zunächst und auf dieser Ebene keines der maßstäblich korrekten Wiedergabe, sondern das einer Karte, die Relevantes und Notwendiges deutlich herausstellt und die Orientierung sicher gewährleistet.

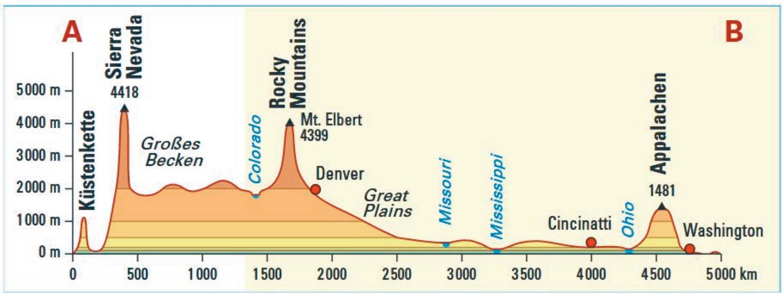
[516] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 2013: 17.

Erweitern und vertiefen lassen sich diese heuristischen Fähigkeiten und Fertigkeiten in Zusammenhang mit den Themenbereichen *Reisen und Erholung*, *Natur- und Lebensräume Deutschland*[517], bei dem die Orientierung auf regionale, nationale und internationale Räume ausgeweitet wird. Durch das Erstellen von Profilskizzen[518] können zudem explizit Anknüpfungspunkte sowohl zu graphischen Repräsentationsformen als auch zum Unterrichtsfach Mathematik hergestellt werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

Um die Oberflächenform einer Landschaft beschreiben zu können, wird ein sogenannter Querschnitt, auch als Profil bezeichnet, erstellt. Soll das Relief einer Landschaft dargestellt werden, wird ein sogenanntes Höhenprofil angefertigt. Grundlage bildet der Ausschnitt einer Höhenschnittkarte des Landstriches, von dem das Höhenprofil erstellt werden soll.

Höhenschichtenkarte Nordamerikas (Ausschnitt)

Zwei Punkte A und B, die den Anfangs- und Endpunkt des Profils darstellen, werden in die Karte eingezeichnet. Anschließend wird in ein Koordinatensystem erstellt, in das die Profilskizze eingetragen wird. Die Länge der x-Achse wird durch die Punkte A und B bestimmt und gibt den Längenmaßstab an, die y-Achse den Höhenmaßstab.[519]



...

Auf dieser Stufe der Kartenarbeit lassen sich der Bogen zur mathematischen Dimension von Maßstäblichkeit schlagen und die geometrische Ähnlichkeit vorbreitend thematisieren.

[517] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 2013: 18, 20, 26.
[518] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 2013: 21.
[519] Entnommen: http://www2.klett.de/sixcms/media.php/82/02_Angloamerika_044_045_26650.pdf [07.04.2017]

Graphische Repräsentationsformen: Kartenmaterial

Orientierung und Kartenlesen, Profile

Längeneinheiten und Maßstab, Koordinatensysteme nutzen, Skalierungen der Achsen verstehen und sinnvoll wählen

Kartographie – Koordinatensystem

Das Gradnetz der Erde ist ein imaginäres, über die gesamte Erdkugel gezogenes Liniennetz, das aus sich senkrecht schneidenden Breiten- und Längenkreisen besteht und der Bestimmung der geographischen Lage und der Orientierung auf der Erde dient. Mit Hilfe der Längen- und Breitengrade kann die geographische Lage eines Ortes eindeutig bestimmt werden. Von dieser Idee ausgehend bzw. perspektivisch darauf hinführend kann das rechtwinklige Koordinatensystem als Möglichkeit zur Ortsbestimmung eingeführt werden. Die Schüler lernen, dass in Atlanten Koordinaten zur Ortsbeschreibung verwendet werden und also eine mathematische Beschreibung von Punkten in der Ebene möglich ist.

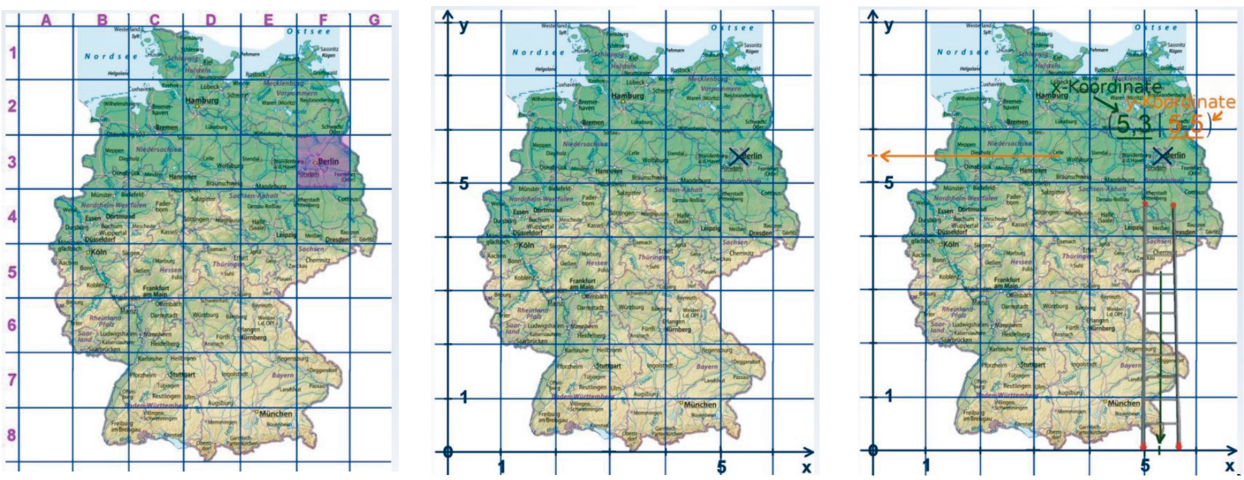


Abb. 96 Orte genau bestimmen – vom Atlas zu Koordinaten.[520]

Die Beschriftungshinweise für die Achsen (Buchstabe-Zahl) können als Merkhilfe für die Einhaltung der Reihenfolge beim Zeichnen der Punkte herangezogen werden. Abb. 96 zeigt, dass die Arbeit in realitätsnahen Kontexten wie diesen jedoch auch eine kritisch-reflektierende Dimension umfassen muss. Zum einen muss der Unterschied zwischen dem globalen Orientierungssystem mit seinen Längen- und Breitengraden und dem (zusätzlichen)

[520] Entnommen: http://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/raum/koordinaten/koordinatenpdf.pdf [07.04.2017]

einfachen Orientierungsraster auf Teilkarten (s. Abb. 96) herausgearbeitet werden. Beide lassen sich mit der Idee des Koordinatensystems vernetzten; entscheidet man sich jedoch für das für Schüler in der Orientierungsstufe zugänglichere, da überschaubarere, Orientierungsraster, müssen dafür mehr Unterschiede in der Benennungslogik herausgearbeitet werden, denn bei Landkarten werden die Spalten von links nach rechts mit den Buchstaben des Alphabets versehen und die Zeilen von oben nach unten nummeriert. Im kartesischen Koordinatensystem der Mathematik werden hingegen beide Achsen nummeriert. Der Schnittpunkt der Abszisse mit der Ordinate ist der Nullpunkt.

Menschheitsgeschichte – Ganze Zahlen und Längenverhältnisse

Um sich allgemein in Raum und Zeit orientieren zu können und die Großchronologie für die Schüler zu einer fassbaren Größe werden zu lassen, wird die Zeitleiste oder die Zeittafel eingeführt. Die Zeitleiste ermöglicht es, historisches Lernen strukturierend zu begleiten und beinhaltet zwei korrespondierende Dimensionen, die eine Erschließung von Zeit und Gesellschaft/geographischen Räumen ermöglichen.

Neben dem Zeitbewusstsein, bei dem die Unterscheidung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft im Vordergrund steht, werden auch das Wirklichkeitsbewusstsein sowie das Historizitätsbewusstsein geschult. Die Zeitleiste fungiert als optische Chronologie und verankert die innerhalb der Großchronologie ausgewählten Themenschwerpunkte, die exemplarisch über den wissenschaftlich-kulturhistorischen Ansatz aufgearbeitet werden.

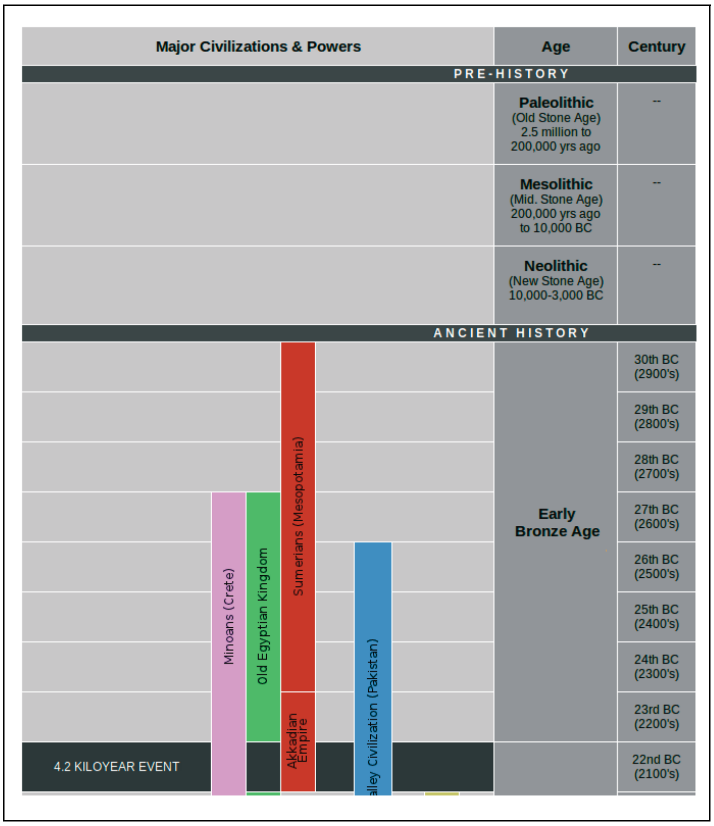


Abb. 97 Ausschnitt aus einer Zeitleiste zur Alten Geschichte mit vertikaler Zeitachse (in Jahrhunderten).[521]

Die Zeitleiste ist eine graphische Darstellungsform, bei der Zeitabläufe in Form einer Geraden beschrieben werden, die sowohl vertikal als auch

[521] Usefulcharts - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15277815 [07.04.2017].

horizontal angelegt sein kann. Die Gerade wird in gleichmäßige Zeitabstände unterteilt (das Thema Skalierung kann hier aufgegriffen werden), sie verhält sich symmetrisch zum Zeitpunkt 0 unserer Zeitrechnung, und wichtige Ereignisse werden durch eine die Gerade kreuzende Markierung kenntlich gemacht. Phasen und Zeiträume werden als Strecken oder Rechtecke (s. Abb. 97) parallel zur Zeitleiste selbst dargestellt. Propädeutisch eignen sich entsprechend gestaltete Zeitleisten auch als Vorbereitung des Koordinatensystems; sollte dieses bereits an anderer Stelle eingeführt worden sein, lassen sich hier Rückgriffe und Vergleiche anstellen. Darüber hinaus bietet die Arbeit mit einer den Zeitpunkt 0 beinhaltenden Zeitleiste unmittelbar die Möglichkeit, nicht nur die ganzen Zahlen anschaulich begründet einzuführen, sondern auch ihre Symmetrieeigenschaften hervorzuheben.

Graphische Repräsentationsformen: Zeitleiste

Zeitvorstellung, chronologisches Orientierungswissen		Symmetrieeigenschaften (positiver und negativer Zahlen), Skalierung

Darüber hinaus lassen sich auch Zeiträume wie z. B. Epochen graphisch darstellen, indem der Abschnitt zwischen zwei Ereignissen farblich hervorgehoben wird (hier ist eine Verknüpfung mit dem mathematischen Konzept des Betrags möglich). Werden verschiedene Zeitleisten über- oder nebeneinander dargestellt, lassen sich die parallel ablaufenden Prozesse gegenüberstellen und miteinander vergleichen. Die besondere ikonische Stärke der heuristischen Technik lässt sich hier gewinnbringend einsetzen und auch herausarbeiten: werden Zeitspannen maßstäblich als Längen repräsentiert, treten die Verhältnisse zwischen ihnen klar hervor und lassen sich visuell sofort erfassen: so könnte die Bestehensdauer der altägyptischen Kultur mit der der Bundesrepublik Deutschlands verglichen werden, nachdem diese in einer Zeitleiste in ihrer Länge markiert wurden. Durch anleitende Forscheraufgaben (vgl. Band A, KRICHEL 2017, Kap. 7.2.1) und mit gestuften Entlastungen wie einer vorbereiteten oder selbst zu erstellenden Zeitleiste kann hier der Frage entdeckend und eigenaktiv auf Grundlage von unterschiedlichen textlichen Quellen nachgegangen werden, deren Bearbeitung eine der Grundsäulen des Geschichtsunterrichts (und damit dieses Teils der Gesellschaftslehre) darstellt.

Graphische Repräsentationsformen: Zeitleiste

Zeitvorstellung, chronologisches Orientierungswissen

Maßstäbliche Darstellung abstrakter Größen (Zeit), Bedeutung von Längenverhältnissen

Menschheitsgeschichte – Statistische Sammlungen und Darstellungen

Zeittafeln erfassen Daten oder Zeiträume in tabellarischer Form und listen diese in chronologischer Reihenfolge auf. Somit lässt sich in diesem Zusammenhang auch die heuristische Technik *Anfertigen einer Tabelle* aufgreifen oder vertiefen. Mit Hilfe von Tabellen können vorliegende Texte oder Daten strukturiert, auf die wesentlichen Aussagen reduziert, nach bestimmten Kriterien geordnet und übersichtlich dargestellt werden, so dass Tabellen sich sehr häufig gut eignen, um einen Überblick über eine Vielzahl von gesammelten Daten und Informationen zu gewinnen.

Graphische Repräsentationsformen: Zeittafel

Erfassung von verschiedenen statistischen Daten

Zeitpunkte und Zeitspannen nach verschiedenen Kriterien ordnen

Neben der Zeittafel lassen sich zahlreiche allgemeinere Anwendungsfelder für die heuristische Technik *Anfertigen einer Tabelle* finden wie beispielsweise bei den Themen *Schule früher – Schule heute*, *Reisen früher und heute*, *Vergleich früher Hochkulturen*, *Vergleich der Bedeutung des Nils früher und heute* oder bei dem Vergleich von Tagesabläufen.[522] Nicht alle diese Beispiele führen gleichermaßen zwingend auf eine nachfolgende geometrische Behandlung hin, allerdings lassen sich diese auch bewusst mit einbeziehen; so können gezielt (auch) geometrische Objekte selbst diachron verglichen werden (z. B. Größen von Herrschaftsgebieten) oder es kann eine geometrische Umsetzung von erfassten statistischen Größen verlangt werden, um das Verständnis – wie oben für Zeitspannen geschildert – auch für andere Größen auf enaktiver und ikonischer Ebene zu festigen (z. B. maßstabsgerechte, graphische Darstellungen sich verändernder Bevölkerungsgrößen oder zurückgelegter Wegstrecken bei Eroberungsfeldzügen usw.).

[522] Vgl. Rheinland-Pfalz 2013: 17, 18, 22, 23, 25.

Tabelle

Erfassung von verschiedenen statistischen Daten		Größen (Zeitspannen, Längen, Flächen etc.) vergleichen, ordnen, systematisieren und ggf. unter Beachtung geometrischer Aspekte graphisch umsetzen

11.1.2 Kunst und Textiles Gestalten

Der visuelle Schwerpunkt des Faches erlaubt eine besonders enge Verzahnung mit geometrischen Inhalten, bietet aber auch mathematisch-heuristisch viele Möglichkeiten der Vernetzung. Die Problemstellungen, die sich aus gestalterischen Zusammenhängen ergeben, sind sehr vielfältig und bieten oftmals affektiv hohe Anreize für die Schüler, eine zufriedenstellende Lösung zu erarbeiten. Dabei spielt auch die Ästhetik eine besondere Rolle, die im traditionellen Mathematikunterricht oft weniger Beachtung findet.

Architektur – Merkmale erfassen, beschreiben, systematisieren

Gemäß dem Lehrplan für Bildende Kunst des Landes Rheinland-Pfalz sollen die Schüler das Thema *Gebäudegliederung* in der Orientierungsstufe als einen Arbeitsbereich kennenlernen. Neben Wissen über unterschiedliche Gebäudearten wie Häuser, Schlösser, Türme usw. sollen sie Kenntnisse über deren Gliederungsmöglichkeiten durch ihre Innen- und Außengestaltung wie Stockwerkhöhen, Dachformen, Fenster, Treppenformen usw. gewinnen.[523]

Hier kann die heuristische Technik *Anfertigen einer Tabelle* sinnvoll eingesetzt werden, indem die Gebäudearten und die Gliederungsmöglichkeiten tabellarisch erfasst werden, so dass eine übersichtliche Darstellung der charakteristischen Merkmale entsteht. Auch Flussdiagramme, die über Abfrage unterschiedlicher Kriterien die Zuordnung zu einem Gebäudetypus erlauben, wären denkbar und ließen sich von Schülern selbst entwickeln.

Tabelle/Flussdiagramm

Erfassung und Vergleich architektonisch-gestalterischer Merkmale		Unter Beachtung geometrischer Aspekte graphisch umsetzen

[523] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 1998a: 21.

Wohnraum und Raumform – Geometrische Grundelemente und Orientierung

Weiterhin werden der *Wohnraum* sowie die *Raumform* verschiedener Epochen thematisiert. Bei diesem Thema sollen die Schüler die unterschiedlichen Wohn- und Raumformen des sesshaften sowie nomadischen Wohnens sowie verschiedene Grundrisse kennenlernen. Auch hier kann die Tabelle zur Einordnung historischer wie gegenwärtiger Wohnsituationen herangezogen werden.[524]

Das Thema Grundrisse ist eine spezielle Ausprägung des so wichtigen Maßstabs (vgl. Kap. 11.1.1), welcher mathematisch wiederum auf die Ähnlichkeit mit ihren vielfältigen Verbindungen zu weiteren geometrischen und heuristischen Inhalten verweist. Der Gedanke eines abstrahierten „Blicks von oben“ auf geometrische Objekte wie Zimmereinrichtung oder die Gebäude selbst in Verbindung mit Manipulationen und planerischen Überlegungen erlaubt detaillierte Untersuchungen geometrischer Bedingungen in Wohn-, Arbeits- oder Produktionsräumen, die sich nicht nur in Tabellen, sondern auch in Flussdiagrammen systematisieren lassen. Stumme Grundrisse könnten anhand solch sukzessiver Merkmalsabfragen plausibel gefüllt werden und zur Grundlage sachlicher Argumentations- und Kommunikationsübungen unter Nutzung zahlreicher fachlicher Termini werden.

Tabelle/Flussdiagramm

Erfassung und Vergleich architektonisch-gestalterischer Merkmale

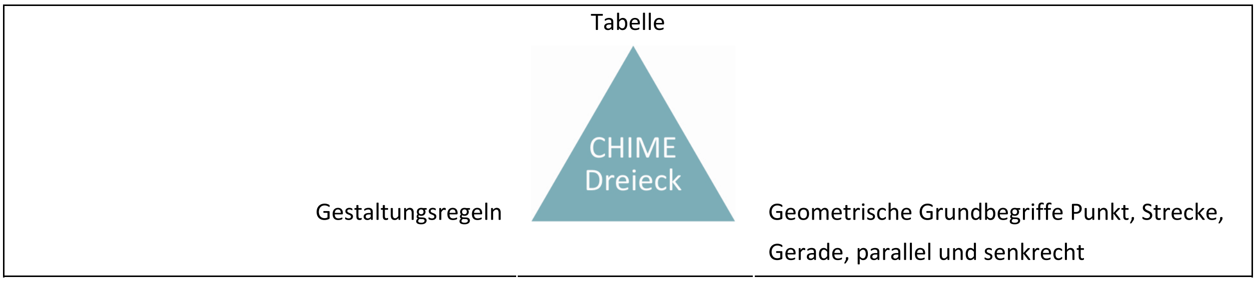
Unter Beachtung geometrischer Aspekte Informationen erfassen und systematisieren

Druckgrafik – geometrische Grundbegriffe

Auch beim Thema *Druckgrafik* kann die Tabelle verwendet werden, um zu veranschaulichen, „[…] dass sich mit Hilfe eines einzigen Formzeichens neue Zusammenhänge […] [durch] Wiederholen, Anordnen, Variieren, Kombinieren gleicher / verschiedener Formzeichen [und] Streuung, Reihung [und] Ballung [herstellen lassen]“ (Rheinland-Pfalz 1998a: 27) oder auch, um die verschiedenen Materialien experimentell auf ihre Oberflächenstruktur, Festigkeit, Strukturen und ähnliche Merkmale hin zu überprüfen.[525] In beiden Fällen trägt die Tabelle dazu bei, nach bestimmten Merkmalen kriteriengeleitet zu ordnen und sich so einen Überblick über die zugrundeliegenden Daten zu verschaffen.

[524] Vgl. Rheinland-Pfalz 1998a: 22.
[525] Vgl. Rheinland-Pfalz 1998a: 27.

Ähnliche Möglichkeiten für den Einsatz von Tabellen findet man auch in Verbindung mit dem Thema *Malerei, Textil* und *Werken*.[526]



Farben und Materialien – Merkmale numerisch, geometrisch und qualitativ erfassen

Der Farbton bildet zusammen mit der Helligkeit und der Farbsättigung die Eigenschaften einer Farbe, die durch diese drei Merkmale eindeutig beschrieben werden kann. Farben können daher nach diesen Merkmalen auch (tabellarisch) eingeordnet und klassifiziert werden. Die Angaben, die dazu notwendig sind, sind teils (bzw. je nach fortgeschrittener Kenntnis zur Klassifikation von Farbtönen über das RGB- oder das CMYK-Modell sämtlich) numerischer Natur und können so auch unter mathematischen Gesichtspunkten betrachtet werden. Diese Möglichkeit bietet sich ganz praktisch bei der Farbmischung, die neben den bruchrechnerischen Aspekten auch mit dem ebenfalls geometrisch zugänglichen Farbkreis zusammen betrachtet werden kann.

Beim Themenfeld *Textil* sollen die Schüler Kenntnisse über die gebräuchlichsten textilen Materialien, deren Herkunft, Eigenschaft und Verarbeitung gewinnen. Auch diese Merkmale können teilweise mathematisch bzw. geometrisch erfasst werden (Webdichte, Gewicht bezogen auf Flächenmaße, Materialbedarfe für bestimmte Produktionsmengen usw.). Ähnliche Anwendungsmöglichkeiten eröffnen sich beim Thema *Werken* wo die Schüler unter anderem verschiede Materialien wie Ton, Papier, Metall, Holz, Kunststoffe usw. kennenlernen. Diese lassen sich hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Beschaffenheit, Funktion oder Gestaltungsmöglichkeiten in Tabellen ordnen, sortieren und klassifizieren.[527] Abb. 98 zeigt ein Beispiel aus dem Werkunterricht zum Thema Holzarten, bei dem relevante Daten beispielhaft tabellarisch dargestellt sind.

---

[526] Vgl. Rheinland-Pfalz 1998a: 29, 32, 33.

[527] Diese Zusammenschau zum Einsatz von Tabellen mit Kunstunterricht erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Holzarten im Vergleich			
Bezeichnung	**Fichtenholz**	**Eschenholz**	**Teakholz**
Holzart	heimisches Nadelholz	heimisches Laubholz	Exotenholz
Farbe	fast weiß, hellbraun	blassrosa bis hellbraun	goldbraun
Kontrast Jahresringe	lebhaft	deutlich erkennbar	wenig Kontrast
Struktur	feine Harzkanäle	grob ringporig	grobporig
Fasern	langfaserig	langfaserig	sehr kurzfaserig
Härte	weich	hart	weich - mittelhart
Festigkeit	weniger fest	zäh, sehr stabil	mittlere Stabilität
Bearbeitung	sehr leicht	gut	gut, Schärfe stumpfend
Außenanwendung	nur imprägniert	ungeeignet	sehr gut geeignet
Verwendung	Bauholz,	Werkzeugstiele	Gartenmöbel
	Dachstühle,	Sportgeräte	Terassendielen
	Tischlerarbeiten	Möbel	Schiffsbau

Abb. 98 Die fertige Tabelle[528] als Beispiel für kriteriengeleitete Informations-darstellung.

Eigene Materialprüfungen durch die Schüler erfordern nun entweder vorgefertigte oder selbst zu erstellende Blankotabellen, in denen die Beobachtungen und Untersuchungs-ergebnisse systematisch erfasst werden können. Solche Tabellen müssen den jeweiligen Anforderungen der konkreten Problemsituation bzw. dem spezifischen Ziel sowohl kategorial als auch visuell angepasst werden. Zwei Beispiele sind in Abb. 99 zu sehen.

	Struktur des Holzes	techn. Eigenschaften	Verwendung
Hartholz (z. B. Esche, Buche, Eiche) ________			
Weichholz (z. B. Linde, Pappel, Erle, Weide) ________			

	Papyrus	Pergament
Ausgangs-material		
Herstellung des Beschreib-stoffes		

Abb. 99 Die teils vorgegebene Tabelle[529] als Strukturierungshilfe zur Informationserfassung durch die Schüler.

Tabelle

Merkmale von Medien und Werkstoffen nach funktional selbst gewählten oder vorgegebenen Kriterien erkunden und dokumentieren	Informationen sammeln, darstellen und analysieren; problemorientierte Messverfahren und Kriterien ersinnen, entwickeln und auswählen

[528] Tabelle entnommen: https://www.isb.bayern.de/download/2185/arbeitsheft-holz-8.pdf [07.04.2017]
[529] Tabelle entnommen: http://www.isb.bayern.de/download/1817/papier7-schuelerarbeitsheft.pdf [07.04.2017]

Architektur – Maßstäbliche Darstellungen

Der oben bereits angesprochene Themenbereich *Gebäudegliederung* ermöglicht bei der Behandlung von Grundrissen die Einführung oder Vertiefung einer weiteren heuristischen Technik, um Analysen und Vergleiche durchzuführen. Die maßstäbliche Darstellung ist in diesem Zusammenhang (wie weiter unten für das Werken beschrieben) ein Kerninstrument, um Raumkonfigurationen darzustellen. Die mathematischen Bezüge sind dabei allgegenwärtig und lassen sich über die maßstäbliche Darstellung in Grundrissen sehr gut auf das Thema der geometrischen Grundelemente in der Ebene (geometrische Figuren) ausweiten. Werden auch dreidimensionale Modelle der besprochenen Architekturen zeitgleich oder zu einem späteren Zeitpunkt miteinbezogen, sind auch die Grundelemente des Raums (geometrische Körper) sofort zugänglich. Eine mathematisch-heuristische Behandlung ergibt sich aus den unterschiedlichsten verwandten Problemstellungen.

Graphische Repräsentationsform: maßstäbliche Zeichnung

Abbildung architektonischer Verhältnisse nach Konventionen

Maßstäbliche Wiedergabe realer oder fiktiver räumlicher Sachverhalte

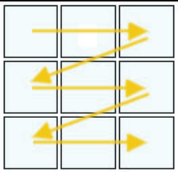
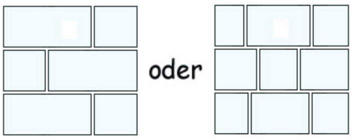
Piktogramme und Comics – Informationen (anders) darstellen

Die grundsätzliche Bedeutung graphischer Repräsentationsformen kann darüber hinaus bei dem Arbeitsbereich *Design – Piktogramme* erneut aufgegriffen und vertieft werden, wenn den Schülern vermittelt wird, dass Sprachinhalte nonverbal durch Bild- oder Schriftzeichen oder eben durch eine graphische Repräsentationsform zum Beispiel in Form einer Skizze übermittelt werden können (vgl. RHEINLAND-PFALZ 1998a:25). Dieser Gedanke ist in seinem Kern von außerordentlicher Tragweise für die Idee graphischer Darstellungsformen als heuristisches Instrument insgesamt und sollte deutlich herausgearbeitet werden. Schließlich ist es oft der Wechsel der Darstellungsform, der einen anderen Blick auf einen Sachverhalt oder einen Zusammenhang erlaubt, welcher letztlich auf neue Ideen bei einer Problemlösung hinführen kann.

Auch beim Thema *Bildfolgen – Comic*[530] kann die heuristische Technik vielfach eingesetzt werden. Comics bieten die Möglichkeit und verlangen es, zeitliche Abläufe mit den Mitteln der Bild- und Seitengestaltung darzustellen. Um einen Comic lesen und nachvollziehen zu können, muss die Kontinuität von Zeit, Raum oder Logik gewahrt bleiben. Dabei spielen die

[530] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 1998a:23.

Leserichtung, die den chronologischen Ablauf einer Handlung bestimmt, die Bildgestaltung (je nach eingesetztem Gestaltungselement kann sie den Leser in seiner Leserichtung und Interpretation des Gesehenen maßgeblich beeinflussen) und das Seitenlayout eine entscheidende Rolle. Eine kleine Auswahl von Seitenlayouts wird in Tab. 29 gezeigt.

Seitenlayout	Informationen
	Diese Anordnung ist das Grundleseraster mit gegebener Leserichtung. Natürlich können bewusst Störungen dieser gewohnten Leseweise erzeugt werden, um Monotonie beim Lesen des Comics zu vermeiden und auch inhaltlich wichtige Stellen hervorzuheben.
	Die sogenannte Ziegelmauer-Anordnung der Panels lenkt den Blick des Betrachters noch stärker zum zeilenweisen Lesen als das Grundraster; die durchgehenden horizontalen Trennungen führen dazu, dass die Bilder in „Streifen“ wahrgenommen werden.
	Zwei (oder mehr) Panels können durch übergreifende Schriftzüge oder graphische Elemente unmittelbar zueinander in chronologische oder kausale Beziehung gesetzt werden.

Tab. 29 Seitengestaltung[531] lenkt Wahrnehmung.

Bei der Beschäftigung mit Comics wird unmittelbar deutlich, welche Bedeutung der graphischen Darstellung zukommt. Je nach Anordnung und Gestaltung der Panels werden die Leserichtung, Bedeutung und Sinnzusammenhang maßgeblich beeinflusst. Solche Strategien des Zusammenfassens von visuellen Objekten spielen auch bei mathematischen Überlegungen eine Rolle. Was bei Betrachtung obiger Beispiele der Seitengestaltung unter heuristischem Aspekt sogleich auffällt, sind die Anbindungsmöglichkeiten zur heuristischen Technik *De- und Rekonstruktion*, auf die in Kapitel 11.2.2 einzugehen sein wird.

Graphische Repräsentationsform: Piktogramme, visuelle Grundtechniken

Gestaltung informationstragender Bildkürzel, visuelle Lenkung durch Nutzung gestaltpsychologischer Grundsätze

Wirkung eines Wechsels der Darstellung, Wirkung des optischen Zusammenfassens und Trennens von Objekten

531 Alle drei Graphiken von Hati, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15386811, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15386834 und https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15386837 [07.04.2017.].

Zeichnen als Kunstform – Zeichnen in Technik und Geometrie

Außerdem kann die heuristische Technik *Erstellen graphischer Repräsentationsformen* beim Arbeitsbereich *Zeichnen* aufgegriffen werden, indem z. B. das Zeichnen in verschiedenen Kontexten als gängige Dokumentationsform (Skizze, Entwurf) thematisiert, verglichen und kritisch hinterfragt wird. Eine Anbindung an technisches Zeichnen und geometrische Zeichenkonventionen wie für Schrägbilder ließe sich leicht realisieren und könnte durch die gemeinsame Einführung besonders effektiv Synergieeffekte nutzen, die die Verwendung der Zeichenmaterialien einerseits und die Einübung der zeichnerischen Praxis (Zeichnen des 45°-Winkels, des rechten Winkels und ggf. auch Einhaltung eines gewählten Maßstabs, Handhabung des Geodreiecks) anhand gestalterisch herausfordernder und motivierender Kontexte umfasst.

Graphische Repräsentationsform: Zeichnungen/Skizzen anfertigen

Realität frei oder nach bestimmten Konventionen zweidimensional wiedergeben, Perspektive	Schrägbilder, maßstäbliches Zeichnen, einfache Konstruktionen

11.1.3 Technik und Werken

Der Werkunterricht bietet in vielen Teilen vergleichbare Möglichkeiten zur Integration heuristisch-mathematischer Module wie Kunst und Textiles Gestalten, nur dass andere Materialien eine Rolle spielen und technische Aspekte oft stärker in den Vorgrund rücken. Auf die Nennung solch wiederholender Ansatzpunkte wird im Folgenden verzichtet.

Materialnutzung – Anteile verstehen

Beim *Werken* lernen die Schüler verschiedene Materialien kennen, die nicht nur nach verschiedenen Merkmalen geordnet und nach bestimmten Kriterien klassifiziert werden können (vgl. Kap. 11.1.2); sie lassen sich auch nach ihren Einsatz- bzw. Verwendungsmöglichkeiten in einem Diagramm graphisch darstellen, wie nachfolgendes Beispiel zeigt:

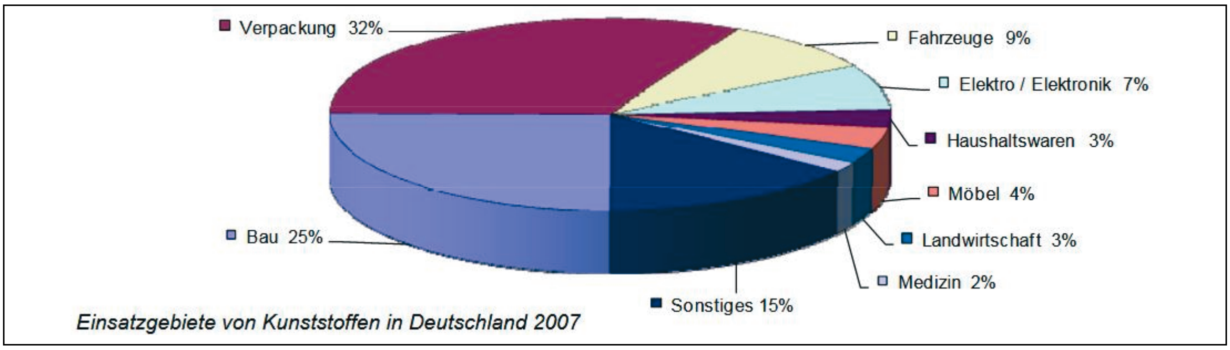


Abb. 100 Verwendung von Materialien, die auch im Fach Werken eingesetzt werden (Beispiel Kunststoff[532]).

Durch solche Darstellungen werden (prozentuale) Anteile am Konkreten fassbar (sie könnten nun zur Einführung des Prozentbegriffs entwickelt werden), und die Art der visuellen Darstellung bietet zahlreiche Möglichkeiten zur Weiterarbeit mit Blick auf verschiedene Diagrammtypen, deren Stärken, Schwächen und daraus folgend passenden Einsatzgebieten. Wenn dann noch die ökologische Dimension in die Betrachtung einfließt, lässt sich an diesem kleinen Beispiel bereits erkennen, wie ein allseitig sinnstiftender und multiperspektivisch gestalteter Unterricht aussehen könnte.

Graphische Repräsentationsform: unterschiedliche Diagrammtypen lesen und erstellen

Verwendungsbereiche unterschiedlicher technischer Materialien		Prozentangaben, Anteile in verschiedenen Diagrammtypen darstellen, Winkel messen

Technische Zeichnungen – räumliche Orientierung und Projektionen

Ebenfalls kann im Rahmen des Werkunterrichts das Anfertigen einer technischen Zeichnung zur Herstellung eigener Produkte erarbeitet oder eine fertige Zeichnung als Grundlage zum Nachbau vorgelegt werden. Neben dem Zeichnen (auch von Teilschritten, Einzelelementen und verschiedenen Ansichten) wird dabei insbesondere die Leitidee Messen vertieft, und die Schüler erhalten Einblicke in die notwendigen Materialien, den Materialverbrauch sowie über das Endprodukt.

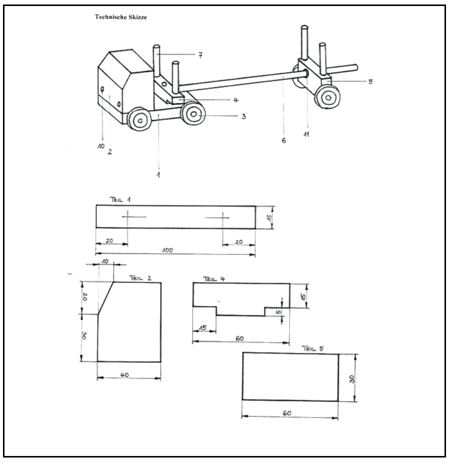


Abb. 101 Beispiel einer Bauskizze.[533]

[532] Diagramm entnommen: https://www.isb.bayern.de/download/14039/arbeitsheft_werken_8_kunststoff_.pdf [07.04.2017]
[533] http://www.werken-online.de/images/langholzgr.gif [07.04.2017]

Mit Blick auf das heuristische Potenzial ist das technische Zeichnen einerseits bei den heuristischen Techniken zu verorten, da es sich eindeutig der Gruppe graphischer Repräsentationsformen zuordnen und für die Lösung verschiedenster Problemzusammenhänge nutzen lässt und auch bei der *De- und Rekonstruktion* eine Rolle spielen kann, andererseits können auch komplexere Heurismen wie der *Heurismus der Affinität* oder der *Strukturnutzung* mit dem technischen Zeichnen verknüpft werden, was es zu einem außerordentlich fruchtbaren Integrationsfeld im Sinne der CHIME macht. Es wäre in dieser Hinsicht wünschenswert, wenn zukünftig derartiger Unterricht für alle Schüler verpflichtend wäre – alternativ sollten Wege überlegt werden, wie solche praktisch-konstruktiven Fertigkeiten systematisch in anderen Zusammenhängen ebenfalls unterrichtet werden könnten (beispielsweise über eine Stärkung produktionstechnischer Aspekte auch im Bereich Kunst und textile Gestaltung oder in den Wahlpflichtfächern).

Graphische Repräsentationsform: technische Zeichnungen

Technische Zeichnungen (unterschiedliche Ansichten) maßstabgerecht erstellen		Maßstabsgerechtes, exaktes Zeichnen und konstruieren, mit verschiedenen Maßeinheiten arbeiten

11.1.4 Naturwissenschaften

Von den Sinnen zum Messen lautet der erste Themenschwerpunkt im Fach Naturwissenschaften des Landes Rheinland-Pfalz, in dem „[d]ie Schülerinnen und Schüler […] den Umgang mit Geräten, Messgrößen und Maßeinheiten [lernen]“ und die „selbst aufgenommenen Messdaten [...] [mit] den daraus angefertigten Grafiken und Wertetabellen“ vergleichen (RHEINLAND-PFALZ 2010: 17). Damit werden bereits die heuristischen Techniken *Anfertigen einer Tabelle* und *Erstellen graphischer Repräsentationsformen* direkt verlangt, die in unterschiedlichen Sachkontexten eingebettet werden können.

Bewegung – Längen, Zeit und Geschwindigkeit

Im Themenfeld *Bewegung zu Wasser, zu Land und in der Luft* wird die Tabelle erneut explizit mit den Worten gefordert: „Ein Vergleich von Lebewesen zeigt die Angepasstheiten des Bewegungsapparates an verschiedene Lebensräume […] [und] Analogien in Natur und Technik fordern Schülerinnen und Schüler zum Vergleichen auf. Die Entwicklung von Vergleichskriterien bildet einen Schwerpunkt im Kompetenzbereich Erkenntnisgewinnung. Grundlage von Vergleichen ist unter anderem die Entnahme von Informationen aus altersgemäßen Materialien […]. Die Ergebnisse, die sich aus kriteriengeleitetem Vergleichen und Recherchieren ergeben, lassen sich besonders gut in Tabellen darstellen“ (vgl. RHEINLAND-PFALZ 20: 25). Über die Wahl der Vergleichskriterien können aus mathematischer Perspektive viele weitere Aspekte in das Thema eingebracht werden, wie Bewegungsgeschwindigkeit oder Energieverbrauch u. v. m.

Vergleichbare Anknüpfungspunkte findet man auch in Zusammenhang mit dem Themenkomplex *Pflanzen – Tiere – Lebensräume*, innerhalb dessen die Schüler „[b]eim Sammeln und Ordnen von Lebewesen […] wiederkehrende Muster […] [finden] und […] [beschreiben]“ (RHEINLAND-PFALZ 20: 29). Das Sammeln und Ordnen von Daten in den unterschiedlichsten Zusammenhängen hebt den universalen Charakter von Tabellen als heuristische Technik deutlich hervor.

	Tabellen	
Messdaten erheben und darstellen, kriteriengeleitet vergleichen und recherchieren		Numerische und andere Daten erheben, vergleichen und mit verschiedenen Mitteln darstellen

332 Mikro- und Makrokosmos – große und kleine Einheiten

Innerhalb des Themenfeldes *Vom ganz Kleinen und ganz Großen* findet man Anknüpfungspunkte, um neben der Tabelle auch graphische Repräsentationsformen zu vertiefen. Neben dem Aufbau des Sonnensystems und der Orientierung am Sternenhimmel werden auch Kristalle und Zellen thematisiert. Hier sollen die Schüler „[…] Zellstrukturen mit Hilfe eines Mikroskops [erkennen] und […] sie zeichnerisch dar[stellen]“ (RHEINLAND-PFALZ 2010: 22). In diesem Zusammenhang wird (erneut) deutlich, dass graphische Repräsentationsformen reale Gegebenheiten vereinfacht darstellen und dabei (unterschiedlichen!) wissenschaftlichen Konventionen genügen müssen. Bei der Protokollierung biologischer Beobachtungen durch graphische Repräsentationsformen wird außerdem die Bedeutung der Beschriftung hervorgehoben.

	graphische Repräsentationsformen	
Mikroskopische Beobachtungen nach wissenschaftlichen Kriterien in Zeichnungen erfassen		Maßstäbliche Darstellungen zeichnerisch erstellen, Beachtung fachwissenschaftlicher Besonderheiten

Prozesse im Bild festhalten – Eigenschaften geometrisch untersuchen

Das Anfertigen von Skizzen wird im Rahmen von *Geräte und Maschinen im Alltag* explizit gefordert, wenn es heißt, dass die Schüler „[…] Skizzen an[fertigen], um die funktionalen Beziehungen der Bauteile eines Alltagsgeräts zu erkennen [und] [...] Schaltpläne mit Schaltzeichen zu einfachen Stromkreisen [zeichnen“] (RHEINLAND-PFALZ 20: 38). Beim Thema *Stoffe im Alltag* wird gefordert, dass die Schüler „[…] Prozesse (z. B. Herstellung von Creme, Salzgewinnung) in einem Ablaufdiagramm […] [und] Versuchsaufbauten in Skizzen dar[stellen]“ (RHEINLAND-PFALZ 20: 42). Um die Stoffe nach Eigenschaften oder Klassen zu ordnen, kann erneut die Tabelle als Strukturierungsmittel herangezogen werden.

Doch die zeichnerische Bearbeitung erstreckt sich gerade im Fach Naturwissenschaften noch auf viele weitere Themenfelder, bei denen nicht nur Versuchsaufbau und Zusammensetzung komplexerer Systeme veranschaulicht, sondern die zugrundeliegenden physikalischen Prozesse und Gesetzmäßig-keiten graphisch erfasst und dadurch begreifbar werden (vgl. Abb. 102). Ein gutes Beispiel hierfür sind auch Brechungsversuche an unterschiedlichen Materialien, die geometrisch zahlreiche Möglichkeiten eröffnen, die weit über die Nutzung heuristischer Techniken hinausgehen und auf die an späterer Stelle einzugehen sein wird.

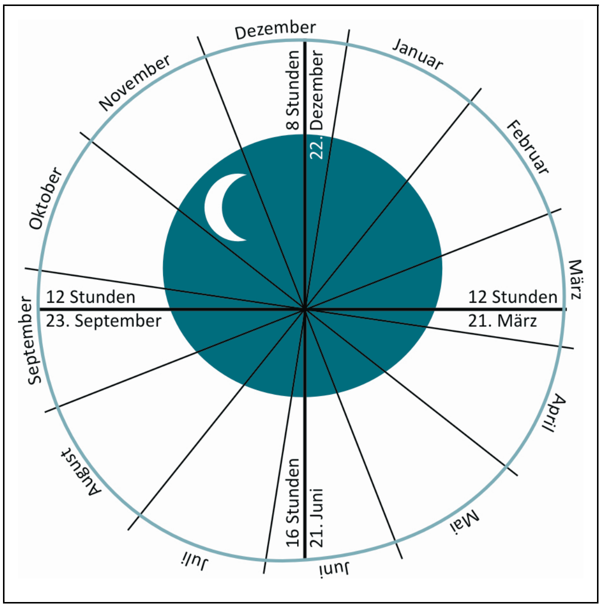


Abb. 102 Beispiel für eine Jahresuhr, die Tages- und Nachtlängen im Wechsel der Jahreszeiten zeigt.

graphische Repräsentationsformen:
Skizzen und Zeichnungen

Versuchsaufbauten festhalten, Systeme analysieren, physikalische Prozesse zeichnerisch erfassen

Abhängigkeiten zwischen Einzelelementen erkennen, geometrische Eigenschaften physikalischer Prozesse untersuchen

Das Auge als Organ – Punktsymmetrie

Im Themenfeld *Körper und Gesundheit* lassen sich weiterhin besonders viele Ansatzpunkte für heuristisch-mathematische Module finden. Wenn der menschliche Körper auf seine unterschiedlichen Organe als Funktionseinheiten hin untersucht wird, lässt sich beispielsweise das Auge mit seiner besonderen Bedeutung für unsere Wahrnehmung herausgreifen und intensiv erforschen. Dass sich dabei die Frage nach der genauen Funktionsweise auch für die Schüler unmittelbar stellt, liegt auf der Hand. Über die technische Umsetzung in einem Modell als *Camera Obscura* können vielfältige Einsichten gewonnen werden, die sich wiederum nahtlos an geometrische Kenntnisse anschließen lassen. Eine geistige Durchdringung des Themas wird so auf verschiedene Ebenen und durch unterschiedliche Zugänge (enaktiv durch den Bau eines Funktionsmodells, ikonisch durch eine zeichnerische Umsetzung der Beobachtungen, symbolisch durch eine reduziert mathematische Darstellung und ggf. auch eine rechnerische Behandlung) ermöglicht.

graphische Repräsentationsformen:
Zeichnungen

Funktionsweise von Teilen des menschlichen Körpers modellieren, physikalische Gesetzmäßigkeiten erforschen

Punktsymmetrie als realweltliche Erscheinung ins mathematische Modell übertragen und geometrisch untersuchen und erzeugen

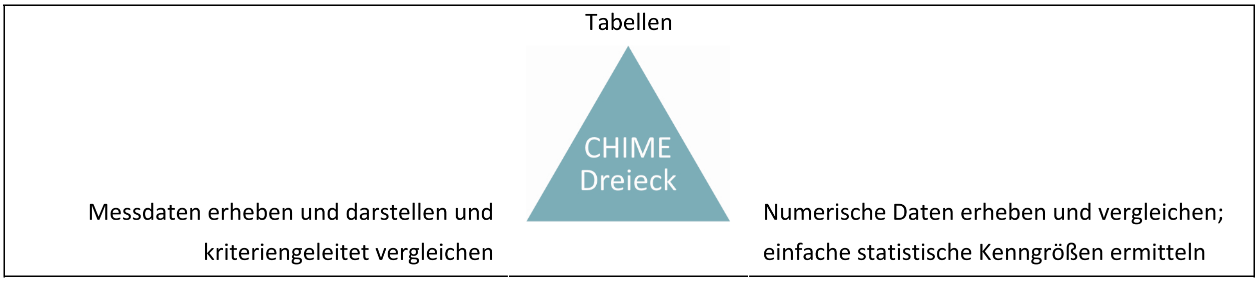
11.1.5 Sport

Tabellen und graphische Repräsentationsformen können insbesondere in Kombination mit dem Fach Sport, unabhängig von den derzeitigen Lehrplanrichtlinien, vielfach zum Einsatz kommen. Wie bereits erläutert lassen sich mit Hilfe von Tabellen Daten strukturieren, nach bestimmten Kriterien ordnen und übersichtlich darstellen, so dass sie auch bei Wettkämpfen wie den Bundesjugendspielen eingesetzt werden.

Daten sammeln – Statistische Grundgrößen

Neben einer Übersicht über die verschiedenen Disziplinen können die von den Schülern erreichten Zeiten und Entfernungen erfasst, nach verschiedenen Kriterien wie Jahrgang oder Geschlecht geordnet und die so gewonnenen Daten verglichen und analysiert werden. Auf diese Weise kann die Bedeutung von Tabellen als Strukturierungshilfe alltagsrelevant herausgearbeitet werden, und die Schüler vertiefen ihre Fähigkeiten, Tabellen zu lesen, die Daten zu interpretieren und Aussagen über die dargestellten Zusammenhänge zu treffen.

Das Thema eignet sich darüber hinaus gut, um statistische Grundbegriffe (Minimum, Maximum, Mittelwert, Quartile...) situativ zu erarbeiten.



Strategie im Bild – Schaubilder nutzen

Darüber hinaus lassen sich graphische Repräsentationsformen auch in anderen Kontexten einbinden. So können beispielsweise das Basketball- oder Fußballfeld graphisch dargestellt und die Standardpositionen der Spieler darin eingezeichnet werden (vgl. Abb. 103).

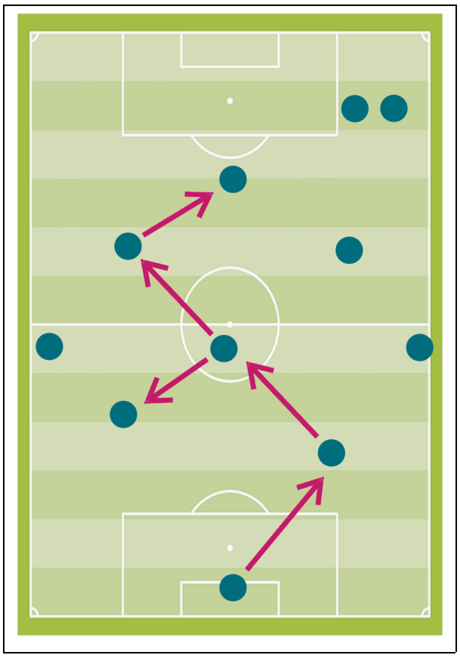


Abb. 103 Beispiel für den Einsatz von Diagrammen im Sportunterricht.

Neben der Nutzung als strategischem und erklärendem Instrument des Trainers oder Sportlehrers kann mit diesen Schaubildern auch ein Blick auf geometrische Bedingungen und Kenngrößen beliebter Sportarten geworfen werden. Diese lassen sich direkt an den Gedanken der Grundrissdarstellung in Kunst und Textiles Gestalten anschließen und ermöglichen die Vermittlung des Maßstabes in einem ganz anderen Zusammenhang.

Auch Konstruieren, Messen und der Umgang mit Größen können über erweiterte Fragestellungen eingebracht werden: Gegeben sind ein Fußballfeld und die Positionen der Spieler (Abb. 104). Anhand dieser graphischen Darstellung können wichtige geometrische Begriffe eingeführt und thematisiert werden. So kann beispielsweise der Spieler mit der kürzesten Verbindung zum Torwart, der Abstand zwischen verschiedenen Spielern bestimmt oder die ideale Spielerposition ermittelt und damit die Begriffe Abstand und senkrecht thematisiert werden. Die Schüler werden so dazu angeleitet, die Sachsituation in der Zeichnung darzustellen und diese damit zu abstrahieren. Zugleich werden auf der fachinhaltlichen Ebene erste einfache Konstruktionen mit dem Lineal durchgeführt, und an die bekannten Begriffe von Punkt, Gerade und Strecke wird produktiv angeknüpft (vgl. Band A, Krichel 2017: 214 ff.).

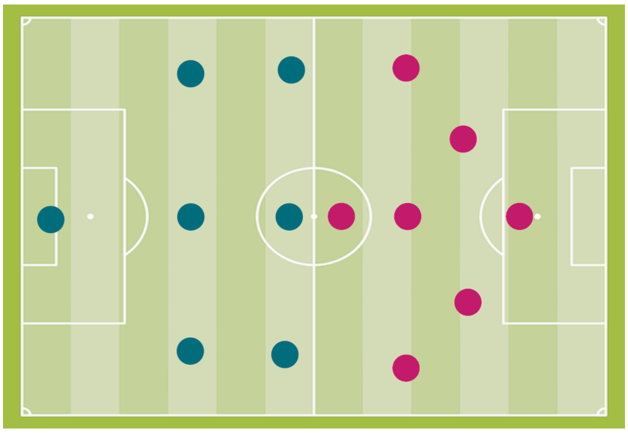


Abb. 104 Beispiel für ein taktisches Schaubild mit zwei verschiedenen Spielsystemen.

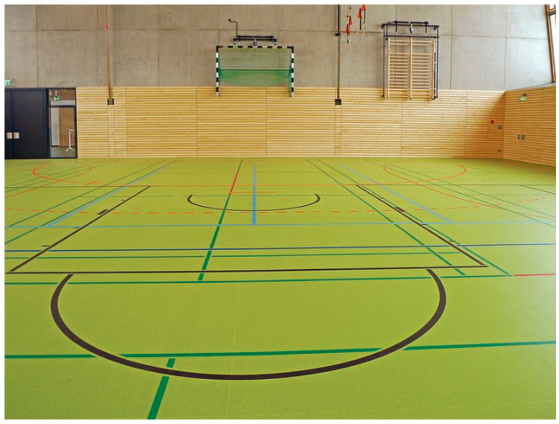


Abb. 105 Übliche Markierungen auf dem Boden einer Sporthalle.[534]

Des Weiteren können die Schüler, auch unter Bezug auf die Spielfeldmarkierungen in der Sporthalle (Abb. 105), eigene maßstabsgerechte Skizzen anfertigen, um darauf aufbauend Spielverläufe zu planen, einzuzeichnen, zu diskutieren oder Choreographien für Tanzstücke zu entwickeln und einzustudieren.

Graphische Repräsentationsformen:
Schaubilder

Räumlich orientieren und Handlungsabläufe weisungsgemäß realisieren

Informationen aus Zeichnungen entnehmen und in der Realität umsetzen, räumliches Vorstellungsvermögen schulen, Bewusstheit von Größenverhältnissen entwickeln, sachbezogen Konstruktionen durchführen und geometrische Grundelemente (kreativ) verwenden

Daten präsentieren – Möglichkeiten statistischer Darstellungen

Um ein erweitertes Verständnis für die so gewonnenen Daten zu erzielen, kann auf dieser Grundlage die heuristische Technik *Erstellen graphischer Repräsentationsformen* in Form von Linien-, Säulen- oder Kreisdiagrammen sinnvoll thematisiert werden. Dabei lernen die Schüler, dass die Daten aus den Tabellen einerseits die Grundlage für graphische Darstellungsformen liefern, und andererseits, dass die Daten visualisiert werden können. Dabei entscheidet die Darstellungsform über den Aussagegehalt der Graphik. Während bei einem Liniendiagramm der Verlauf der Werte mit gleichen Einheiten wiedergegeben wird, wird in

[534] Public Domain, https://pixabay.com/de/sporthalle-mehrzweckhalle-turnhalle-1948912/ [07.04.2017].

einem Säulendiagramm (Stab-, Balkendiagramm) die Häufigkeiten von Merkmalen erfasst und im Kreisdiagramm kann der prozentuale Anteil abgelesen werden. Über Boxplots können die Verteilung der oben genannten Kenngrößen graphisch dargestellt werden. Darüber hinaus lässt sich mit Hilfe eines Boxplots visuell leicht erfassen, in welchem Wertebereich die Daten liegen und wie sie sich über diesen Bereich verteilen.

Tabellen

Messdaten erheben und darstellen und kriteriengeleitet vergleichen

Numerische Daten erheben, vergleichen und mit verschiedenen Mitteln darstellen

11.1.6 Andere Fächer

Klassenleiterunterricht

Die Erfassung statistischer Daten kann in der Orientierungsstufe besonders gut auch in den Klassenleiterunterrichts integriert werden. Soziale Aspekte der neuen Klassengemeinschaft, das Lernen lernen und organisatorische Elemente stehen hier im Vordergrund, wobei sich häufig Anknüpfungspunkte zum Problemlösen ergeben. Vom Erstellen eines Sitzplanes, über die Planung einer Exkursion bis hin zur Analyse des eigenen Tagesablaufs mit Lern- und Ruhephasen sind hier unzählige Felder denkbar, in denen heuristische Techniken ausgesprochen alltagsbezogen und schülerrelevant umgesetzt werden könnten.

Sprachfächer

In sämtlichen Sprachfächern, aber insbesondere in den Fremdsprachen, stellt die Kategorie- und Begriffsbildung einen wichtigen Teil des Unterrichts dar. Vokabeln werden nach Wortarten systematisiert, Funktionen im Satz müssen erfasst, definiert und produktiv zum Einsatz gebracht werden. Die Einsatzmöglichkeiten von Strukturierungshilfen sind hier zahlreich, und ihre Einführung gerade im beginnenden Fremdsprachenunterricht von großer Wichtigkeit. Darüber hinaus lassen sich zur Zeitleiste (Kap. 11.1.1) Bezüge herstellen, wenn es um die Funktion verschiedener Zeitformen geht.

11.2 Heuristische Technik: De- und Rekonstruktion

Anknüpfungspunkte für Einführung und Wiederaufgriff der *De- und Rekonstruktion* finden sich an vielen Stellen und in unterschiedlichsten unterrichtlichen Zusammenhängen. Die Idee einer Dekonstruktion, also einer immer wieder unterschiedlich gearteten Zerlegung eines Problems, einer Aufgabe oder eines konkreten „Gegenstandes“ mit dem Ziel der besseren Fassbarkeit und Bearbeitbarkeit gehört wohl zu den heuristischen Techniken mit dem größten (propädeutischen) Potenzial im Rahmen von CHIME in der Orientierungsstufe.

11.2.1 Gesellschaftslehre

Die ägyptische (aber prinzipiell auch jede andere frühe) Hochkultur bietet vielfältigste Möglichkeiten, in Verbindung mit der *Technik der De- und Rekonstruktion* konkrete Sachprobleme eigenständig erforschen und lösen zu lassen. Es sind insbesondere die sehr eindrucksvollen architektonischen Hinterlassenschaften, die Anlässe zum geometrischen Arbeiten bieten.

Das Alte Ägypten – Geometrische Körper und Rauminhalte

In den Steinbrüchen des Alten Ägypten finden sich einfache geometrische Körper, insbesondere Sandsteinquader, die geometrisch aufgearbeitet werden können, um in der Folge – im wahrsten Sinne des Wortes – als Grundbausteine für weiterführende Untersuchungen und Fragestellungen zu dienen. Eingebettet in die Frage „Wie schwer waren die Steinblöcke (für die Cheopspyramide, den Edfu-Tempel usw.)?“ kann in einem thematischen Feld der Rauminhalt gemeinsam mit der Idee der Dichte und der als beider Produkt resultierenden Masse mit ihren Einheiten heuristisch zusammenhängend erarbeitet und erfasst werden.

Gerade in Auseinandersetzung mit den verschiedenen Baustrukturen sind dabei zahllose arbeitsteilige Forschungsaufgaben denkbar, die physikalische Aspekte (Dichte, s. o.) ebenso in den Fokus nehmen können wie bautechnische (wenn beispielsweise der Grabbau im Tal der Könige aufgegriffen wird, wo Bauvolumina nicht errichtet, sondern aus bestehendem Gestein entfernt werden mussten). Durch geschickte gewählte Progression kann so die Idee einer zunächst willkürlichen (Raum-)Maßeinheit hin zu vereinheitlichten (Raum-)Maßeinheiten[535] an unterschiedlichen Untersuchungsobjekten entwickelt werden. Bei diesem absolut grundlegenden Gedanken der verschiedenen Raummaßeinheiten spielt das De- und Rekonstruieren in einfachster Form bereits eine tragende Rolle:

---

[535] Vgl. hierzu auch die analogen Ausführungen zu den Flächenmaßeinheiten in Band A (Krichel 2017, Kap. 7.3.4).

Die Cheops-Pyramide ist die größte der ägyptischen Pyramiden. Mit einer ursprünglichen Höhe von rund 147 m und einer Grundfläche von 230,4 m x 230,4 m betragen die Längen ihrer Grundkanten heute aufgrund von Abtragungen nur noch rund 137 m. Insgesamt wurden 2,3 Millionen Steinblöcke verbaut. Die sichtbaren Steinblöcke sind quaderförmig mit einer Länge von 1 m und einem durchschnittlichen Gewicht von 2,5 Tonnen je Block. Das ursprüngliche Gesamtvolumen ohne Abzug der Hohlräume betrug 2,58 Millionen m^3 und nach Abzug aller bekannten Hohlräume 2,5 Millionen m^3.

Auf Grundlage dieser in Textform gegebenen Sachinformationen können viele Fragestellungen und die *Technik der De- und Rekonstruktion* explizit entwickelt werden.

De- und Rekonstruktion

Bauliche Leistungen früher Hochkulturen kennenlernen und begreifen, Techniken und Hilfsmittel erforschen

Grundkörper mit ihren verschiedenen Eigenschaften erforschen, Zusammenhänge zwischen Grundkörpern herstellen und zusammengesetzte Körper analysieren

Historische Maßeinheiten – Vergleichen und umrechnen

Für einen vertieften und verständigen Aufbau von Orientierungswissen ebenso wie geometrischen Kernkompetenzen eignen sich auch historische Maßeinheiten. Die Willkür von Konventionen wird den Schülern bewusst gemacht und über den (praktischen, graphischen und symbolisch-numerischen) Vergleich von Längen-, Flächen- und Raummaßeinheiten werden Zusammenhänge diachron aber auch synchron sichtbar. Über eine kritische Untersuchung lassen sich sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede in den Messtechniken herausarbeiten und reflektieren. Die Bedeutung der heute meistgebrauchten Bezeichnungen mit den Präfixen Quadrat- und Kubik- tritt klarer hervor, wenn sie in Relation zu sehr alten Flächenmaß- und Raummaßeinheiten gesetzt werden (bereits die Bezeichnungen Ar und Hektar erlauben hier Einsichten in die – durchbrochene – Systematik). Die *Technik der De- und Rekonstruktion* kann eingesetzt werden, um die Zerlegung von Einheiten in kleinere Untereinheiten (maßeinheitimmanent) zu erfassen, oder aber um Vergleiche zwischen unterschiedlichen Systemen anzustellen. Hier spielt der Gedanke von Verhältnisbildungen ebenfalls eine Rolle. Außerdem regen insbesondere nicht-quadratisch bzw. nicht-kubisch angelegte Maßsysteme, wie das ägyptische Streifen-Flächenmaß bzw. Schicht-Raummaß (bei denen nicht alle Dimensionen einheitlich sind) weiterführende Überlegungen zu Vorteilen und Nachteilen unterschiedlicher solcher Grundstrukturen an.

Altägyptische Maßeinheiten sind durch Grabungsfunde (Ellenmaßstäbe, Messstricke) sowie aus Abbildungen und in Schriftstücken überliefert. Im alten Ägypten wurde die Elle als Längenmaß verwendet. Als Standard diente die sogenannte königliche Elle, die vom Ellebogen bis zur Spitze des Mittelfingers reichte und umgerechnet 52,5 cm lang war. Die Elle wurde in sieben Handbreiten und diese wiederum in je vier Fingerbreiten unterteilt:

Eine Elle entspricht 52,5 cm und ist gleich 7 Handbreiten. Somit entspricht 1 Handbreite 7,5 cm beziehungsweise 28 Fingerbreiten. 1 Handbreite entspricht 4 Fingerbreiten. Somit misst eine Fingerbreite 1,875 cm. Für die Vermessung längerer Strecken wurden genormte Messstricke von 100 Ellen verwendet.

Mit diesen Angaben können heute gängige Maßeinheiten in die alten ägyptischen Maße umgerechnet werden.

Gegeben sind jeweils die Höhe (h) und die Breite (b) der Grundfläche zweier Pyramiden. Rechne diese Werte zunächst in die Maßeinheit der alten Ägypter (Ellen) um.

Pyramide 1: h = 123 m = _______________ Ellen / b = 189 m = _________________ Ellen.

Pyramide 2: H = 117 m = _______________ Ellen / b = 220 m = _________________ Ellen.[536]

...

De- und Rekonstruktion

Unterschiedliche historische Längen-, Flächen- und Raummaßeinheiten kennenlernen und mit Blick auf ihre Vor- und Nachteile vergleichen	Längeneinheiten rechnerisch vergleichen und Umrechnungen innerhalb von Maßeinheitssystemen und zwischen diesen verstehen, durchführen und kritisch reflektieren

Das Alte Ägypten – Pyramidenforschung

Die Lernanlässe, die sich rund um Pyramiden ergeben, sind ausgesprochen vielfältig, so dass in der unterrichtlichen Umsetzung des Themenkomplexes eine Auswahl getroffen werden muss. Die nicht aufgegriffenen Punkte lassen sich an späterer Stelle auch in

[536] Beispiel von der Internetseite des Deutschen Archäologischen Instituts: https://www.dainst.org/documents/10180/64826/Mathematik+im+alten+%C3%84gypten/ [07.04.2017]

anderen Kontexten verwirklichen. Die Frage nach dem Volumen der Pyramide (oder der Anzahl der verbauten Steinquader) führt unmittelbar auf die Idee einer Dekonstruktion hin, da den Schülern der Gedanke einer einfachen Pyramidenvolumenformel in der Orientierungsstufe mehrheitlich noch ausgesprochen fremd sein dürfte. Über exemplarische Überlegungen an kleinen Modellen kann diese Dekonstruktion auf interessante Ideen zum systematischen Abzählen bis hin zu figurierten Zahlen führen, um ein Muster in dem lagenweise aufgebauten Pyramiden-Gesamtkörper zu ermitteln. Insbesondere die „fehlenden“, also umbauten Hohlräume innerhalb der Pyramide können gezielt dazu genutzt werden, auch den Gedanken der Differenzbildung zwischen Vollkörper und ausgesparten Teilvolumina zu entwickeln (die im Sinne des *Heurismus der Affinität* auf zweidimensionale entsprechende Problemsituationen übertragen werden können, vgl. hierzu obiges Beispiel aus Das Alte Ägypten – Geometrische Körper und Rauminhalte).

Dass sich weitere, nicht primär geometrische Modellierungsfragen nach Nahrungsbedarfen, der Abhängigkeit von Anzahl der Arbeiter und Bauzeiten oder Transportmethoden etc. anschließen lassen, ist offensichtlich und deutet an, wie weit der heuristische Bogen ist, der an einem einzelnen historischen Thema gespannt werden mag.

Ein weiterer Aspekt desselben Themas, bei dem die De- und Rekonstruktion als heuristische Technik eingesetzt kann, ist die Mantelfläche der Pyramide – ebenso wie die Frage nach der Form der Grundfläche. Untersuchungen der dreieckigen Einzelflächen führen zu verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, leiten auf das Thema Netze über, die als Vereinigung aller Seitenflächen, aber auch Dekonstruktion von Körpern immer wieder eine Rolle bei geometrischen Problemsituationen spielen.

De- und Rekonstruktion

Bauliche Leistungen früher Hochkulturen kennenlernen und begreifen, Techniken und Hilfsmittel erforschen	Grundkörper mit ihren verschiedenen Eigenschaften erforschen, Zusammenhänge zwischen Grundkörpern herstellen und zusammengesetzte Körper analysieren

Landgrößen vergleichen und messen – Flächeninhalte unregelmäßiger Flächen

In den verschiedensten Kontexten tritt die Frage nach der Größe ungleichmäßiger (also nicht gradlinig-regelmäßig umgrenzter) Flächen in der Gesellschaftslehre auf. Ein Beispiel ist das Römische Reich, das durch Expansion lange Zeit immer weiter an Größe zunahm.

Die Arbeit mit historischen Karten erlaubt unmittelbar anschließende Fragen nach der Bedeutung des dort Dargestellten zunächst im direkt vergleichenden Sinne: Wie hat sich die Größe des von den Römern beherrschten Gebiets in der angegebenen Zeitspanne geändert? Von solchen Fragen ausgehend lässt sich über praktische Zerlegungen (als einfachster Ausprägung der Dekonstruktion) der Ausgangsfläche das ungefähre Verhältnis zur späteren Größe des Herrschaftsgebiet ermitteln, ohne dass zunächst Standardflächenmaßeinheiten notwendig sind (vgl. hierzu auch Band A, KRICHEL 2017: 278 ff.).

Abb. 106 Ungefähre Ausdehnung des Römischen Reiches um 270 v. Chr, 40 v. Chr. und 230 n. Chr.[537]

Abb. 106 gibt einen Eindruck von der Entwicklung des Römischen Reiches von 270 v. Chr. bis zum 3. Jahrhundert n. Chr. Mit Hilfe der De- und Rekonstruktion können die Größe und Ausdehnung des Römischen Reiches im Laufe der Zeit oder auch einzelner Provinzen (nicht in dieser Karte dargestellt) in ihrer Flächenausdehnung bestimmt werden. Neben dem Auslegen mit Einheitsquadraten können die Flächen enaktiv durch Zerlegen und Ergänzen verglichen werden. Je nach Zeitpunkt der Vermittlung kann diese heuristische Verfahrensweise verschränkt mit solchen historisch-geographischen Problemstellungen erarbeitet werden, oder es handelt sich um eine Zusammenführung bereits erworbener Kenntnisse aus anderen Sachkontexten, nämlich Kenntnissen zum Kartenlesen und dem zugrundeliegenden Maßstab und der Annäherung nicht regelmäßiger Flächen durch eingeschriebene geometrische Figuren, die man bereits genauer mathematisch bearbeiten kann. Dies wäre der eigentliche de- und rekonstruktive Anteil. Diese wirkmächtige Idee ist in abstrakter Form auch im *Heurismus der Affinität* enthalten.

[537] Teilwiedergabe aus einer Animationsgrafik, By Roke (d) - English: Background map based on Image: BlankMap-Europe-v3.png, Data from: Colin McEvedy, Penguin Atlas of Ancient History, John Haywood, Atlas of Past Times, DK Atlas of world history, detailed Roman empire Expansion map at Uni of Texas. See also maps at external links, four stage animated map of the roman empire, more detailed animated map of roman empire, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=844877 [07.04.2017].

	De- und Rekonstruktion	
Größenvorstellungen und Orientierungswissen anhand von Kartenmaterial entwickeln, geographische Größen abschätzen, erfassen und vergleichen können		Unregelmäßige Flächen durch geometrische Figuren annähren und so Flächeninhalte näherungsweise ermitteln; maßstäbliche Darstellungen zum direkten wie indirekten Flächenvergleich in sehr großen Skalierungen nutzen

11.2.2 Kunst und Textiles Gestalten

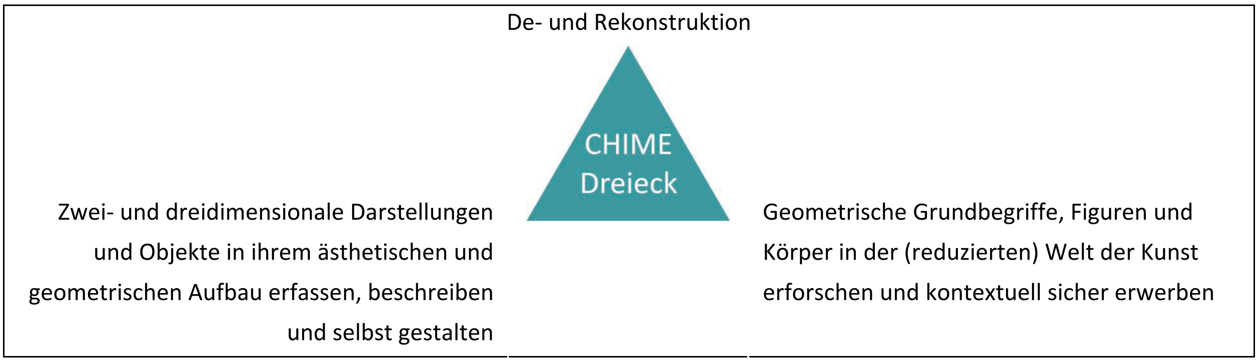
Im Bereich von Kunst und textilem Gestalten spielt die *Technik der De- und Rekonstruktion* fast dauernd eine, wenn auch oftmals subtile, Rolle. Schließlich liegt der analytischen Wahrnehmung aller Objekte die neuropsychologische Fähigkeit zugrunde, Formen voneinander zu trennen, merkmalgeleitet Kategorien zu bilden und so die Realwelt in wiederkehrende, verständliche Teile zu zerlegen. Ohne diese Fähigkeit zur Abstraktion wären visuell weder ästhetische noch überhaupt sinnstiftende Wahrnehmungen möglich.

Bilder lesen – Formen und geometrische Figuren

Schon bei den einfachsten Bildbesprechungen hängt das Gelingen der Kommunikation von geometrischen Grundkenntnissen ab. Bei der Orientierung im Bildraum ebenso wie bei der Beschreibung dargestellter „Objekte" – die letztlich stets nur Farb- oder Strukturflächen sind, die das menschliche Gehirn als Repräsentanten realgegenständlicher visueller Eindrücke interpretiert – muss die Gesamtheit des Bildes also dekonstruiert werden.

Dieser Prozess kann nun im Rahmen des Kunstunterrichts auf verschiedene Arten sichtbar gemacht und mit den zugrundeliegenden geometrischen Begriffen und Definitionen verknüpft werden. Der besondere Reiz für die Schüler liegt in dem immer wieder möglichen Wechsel zwischen Rezeption und Analyse (vorgegebener oder selbst erstellter Bilder) und der aktiven, kreativen Umsetzung neu erlernter oder genau definierter geometrischer Einheiten. Die Problemsituationen können dabei rein zweidimensional beispielsweise das Füllen der Blattfläche nach ganz bestimmten Kriterien umfassen oder die Erzeugung eines dreidimensionalen Effekts. Die Beschäftigung mit Kunst, insbesondere unter Einbezug der bereits genannten Architektur oder plastischer Arbeiten, ermöglicht die heuristische Erschließung sämtlicher im Orientierungsstufenunterricht üblicherweise verankerten geometrischen Figuren und Körper, die im Regelfall erst durch den gerade als heuristische Technik bewusst zu machenden Akt der Dekonstruktion aus ihrem Gesamtzusammenhang herausgelöst werden müssen.

Zur Betonung des rekonstruktiven Aspekts können Bilder auf verschiedene Arten erzeugt werden, am einfachsten in Form eines Mosaiks oder einer Rasterumsetzung, bei der nicht die Formen (Figuren) die Endwirkung des Bildes bestimmen, sondern deren Farb- bzw. Helligkeitswerte. So tritt die Bedeutung kleiner oder kleinster Teileinheiten zur gezielten, absichtsvollen Herstellung größerer Wahrnehmungseinheiten besonders deutlich hervor.



Patchwork – Materialnutzung planen, Materialmengen bestimmen

Anschließen lässt sich an solche Grundkenntnisse beispielsweise im Rahmen des textilen Gestaltens. Eine besonders intensive und vertiefende Auseinandersetzung nicht nur mit den Eigenschaften geometrischer Figuren, sondern auch ihrer exakten Konstruktion und nachfolgenden Herstellung aus verschiedenen Materialen ist eingebettet in das Thema Patchwork[538] möglich. Beim Patchworken spielen auch die *Heurismen des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens* eine große Rolle, auf die jedoch an späterer Stelle eingegangen wird (vgl. Kap. 11.6 und 11.7). Die De- und Rekonstruktion wird bei Planung und Durchführung eines Patchworkprojekts auf besonders fassbare und umfassende Weise deutlich. Beginnend mit dem Entwurf eines eigenen Designs (meist aus Polygonen), das sehr genau in eine technische Planungszeichnung überführt werden muss, über die auch technisch herausfordernde Übertragung auf das Arbeitsmaterial Stoff bis hin zur Planung der notwendigen Nahtzugaben (Parallelen mit festgelegtem Abstand) und darüber letztlich materialsparende Zuschnittpläne, treffen die Schüler bei der Durchführung eines solchen Projekts auf die unterschiedlichsten Herausforderungen, die sich zu einem heuristisch-mathematischen Modul besonders enger Kohärenz verbinden lassen.

[538] eine entsprechende Umsetzung ist auch im Thema Mosaikarbeiten oder Intarsien aus Holz herstellen in Technik und Werken möglich.

Abb. 107 Beispiele für einfache (links[539]) und komplexere (rechts oben) polygonale sowie kurvilineare (rechts unten[540]) Patchworkdesigns.

Eine Differenzierung ist hier ausgesprochen gut zu realisieren, da der Schwierigkeitsgrad maßgeblich von den im Muster verwendeten Polygonen (oder auch kurvilinearen Formen) abhängt. Der haptisch-motorische Aspekt spielt, wie häufig im Bereich Kunst und Textiles Gestalten, ebenfalls eine wichtige Rolle, was zu einer ganzheitlichen Entwicklung auch des geometrischen bzw. räumlichen Denkvermögens beiträgt.

De- und Rekonstruktion

Flächen vollständig polygonal gestalten, technische Umsetzung im Patchwork planen, Umgang mit verschiedenen Werkzeugen wie Patchworklineal, Rollschneider und Nähmaschine mit Abstandhalter

Geometrische Figuren zur Parkettierung einsetzen, saubere Konstruktionen durchführen, Parallele Hilfsgeraden mit vorgegebenen Abständen verwenden und Flächeninhaltsberechnungen nutzen

539 Gemeinfrei, https://pixabay.com/de/patchworkdecke-patchwork-100160 [07.04.2017]
539 Gemeinfrei, https://pixabay.com/de/preisgekr%C3%B6nten-quilt-dreieck-design-958633 [07.04.2017]
540 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Patchwork_-_Curvas_Conc%C3%A9ntricas.jpg [07.04.2017]

Architektur – Wohn-/Raumformen

Wie bereits erwähnt sieht der Lehrplan Kunst des Landes Rheinland-Pfalz für die Orientierungsstufe das Thema *Wohn- und Raumformen* vor, worunter auch verschiedene Grundrisse gefasst werden, die es zu vergleichen gilt.[541] Ähnlich wie bei den geographischen Problemstellungen (vgl. Kap. 11.2.1) können auch im Fach Kunst und Textiles Gestalten mit Hilfe der De- und Rekonstruktion verschiedene Grundrisse ineinander überführt und dadurch die Flächen direkt als auch indirekt verglichen werden.

	De- und Rekonstruktion  	
Bauliche Strukturen in zweidimensionalen Plänen wiedergeben, Raumgrößen und spatiale Strukturen nach Nutzungsarten bestimmen und planen		Bauliche Strukturen unterschiedlicher geometrischer Gestalt auf Grundkörper zurückführen und so mathematisieren, Zusammensetzungen und Aussparungen in verschiedenen architektonischen Kontexten und Funktionen geometrisch erfassen

Typographie – Buchstaben erfinden

Als letztes Beispiel aus dem Bereich Kunst soll hier ein Blick auf die Typographie und das Erfinden eigener Schriftarten geworfen werden. Druckschrift lässt sich als ein allgegenwärtiges Beispiel (unter anderem) für die *Technik der De- und Rekonstruktion* sehr schülernah und anschaulich in den Mittelpunkt kreativer Problemlöseprozesse rücken, die erneut ästhetische mit technischen und geometrischen Fragestellungen verknüpfen. Die Analyse verschiedener Schriften lässt schnell wiederkehrende Elemente erkennen, insbesondere wenn aus den heute jederzeit millionenfach verfügbaren Computerschriftarten zielgerichtet ausgewählt wird.

Schüler identifizieren die Grundbausteine einzelner Buchstaben und können diese auf geometrische Grundfiguren (insbesondere Rechtecke, Quadrate, Trapez und Parallelogramme) zurückführen, deren jeweilige Eigenschaften in unterschiedlicher Tiefe untersucht werden können. Soll eine eigene durch eine Drucktechniken wie Stempelungen erzeugbare Schriftart entwickelt werden, müssen die gewonnenen Erkenntnisse praktisch konstruktiv und je nach Ausstattung der Schule und Zielsetzung des Unterrichts entweder mit einfachen zeichnerischen Werkzeugen oder gegebenenfalls mit digitalen Geometrieprogrammen rekonstruierend umgesetzt werden.

---

[541] Vgl. Rheinland-Pfalz 1998a: 22.

Typographie bietet darüber hinaus viele Vertiefungsmöglichkeiten, die auch in andere Teilgebiete der Mathematik verweisen, wenn etwa die Laufweite von Buchstaben (die Abstände zwischen unterschiedlichen Buchstaben einer Schriftart ist nicht einheitlich, sondern richten sich nach der Breite der Letter) betrachtet wird.

De- und Rekonstruktion

Schriften untersuchen, zergliedern und gestalterische Merkmale und Gesetzmäßigkeiten herausarbeiten. Eigene Schriften gestalten.		(Block-)Lettern dekonstruieren und die geometrischen Figuren bearbeiten, eigene zusammengesetzte Lettern oder Schriften (kriteriengeleitet) erzeugen

11.2.3 Technik und Werken

Dass der Heurismus des De- und Rekonstruierens sich in technischen und handwerklichen Zusammenhängern ausgesprochen häufig und in vielfältiger Weise zum Einsatz kommt, liegt auf der Hand. Der Bau komplexer Objekte ist immer wieder Anlass, strategische Entscheidungen zu treffen, die die Gesamtkonstruktion aus möglichst wenigen oder möglichst einfach zu produzierenden Teilen erlauben. Welche Teile einfach herzustellen sind, hängt maßgeblich auch von der technischen Ausstattung ab. Das folgende Beispiel Bienenhotel ist rein exemplarisch als eines von vielen auf dem Niveau der Orientierungsstufe möglichen Bauvorhaben gewählt worden.

Insektenhotel bauen – Materialzurichtung und –bedarfe bestimmen

Das Bienenhotel bietet neben den augenfälligen Bezügen zur De- und Rekonstruktion auf planerischer und manueller Ebene auch besondere Möglichkeiten, den Gedanken, dass eine (geometrische) Gesamteinheit auf grundsätzlich verschiedene Weisen, nämlich additiv oder subtraktiv, hergestellt werden kann, zu etablieren. Abb. 108 zeigt verschiedene Arten, auf die die Räume für Insekten geeignet gestaltet werden können. Dabei geht es in allen Fällen um die Schaffung von Schlupfen: in den oberen beiden „Etagen“ wurden diese durch lose arrangierte Voll- und Hohlobjekte erzeugt – in der unteren „Etage“ hingegen wurde der Effekt durch das Ausbohren eines

Abb. 108 Beispiel für ein Insektenhotel mit unterschiedlicher Raumgestaltung.

massiven Holzblocks erzielt. Hier können unterschiedlichste Untersuchungen anschließen, die sich mit dem den Insekten zur Verfügung gestellten Raum, mit Vor- und Nachteilen hinsichtlich der genauen geometrischen Form und Einheitlichkeit der Schlupflöcher oder mit ökologischen Aspekten und Verhaltensbeobachtungen befassen (die wiederum Verknüpfungen zur Statistik bieten).

Außerdem lässt sich die *Technik der De- und Rekonstruktion* an der Ermittlung erforderlicher Baustoffmengen entwickeln, und zwar auf individuell verschiedene Arten, was zugleich den Blick auf die Flexibilität heuristischer Vorgehensweisen lenkt. Auch lässt sich dies gut mit dem Einsatz einer originalgroßen oder maßstäblich verkleinerten Bauzeichnung verbinden, die der Idee des Zerlegens auf ikonischer Ebene einen konkreten Sinn verleiht, bevor die rechnerische Bestimmung des Materialbedarfs thematisiert wird.

De- und Rekonstruktion

Technische Zeichnungen erstellen und/oder nach vorgegebenen technischen Zeichnungen handwerklich arbeiten, Gestaltungskriterien durch Vorplanung einhalten, Materialbedarfe planen, Kosten berechnen

Komplexe Baukörper zeichnerisch (maßstäblich) planen und in geometrische Teileinheiten zerlegen, Volumina bestimmter Form auf unterschiedliche Weise erzeugen

Verpackungen planen – Netze konstruieren

Der Bereich Technik und Werken bietet den praktischen Rahmen auch für einen weiteren geometrischen Inhalt, der die De- und Rekonstruktion als Handlungsprinzip bzw. heuristische Technik in den Mittelpunkt rücken kann. Bei der Gestaltung attraktiver und ungewöhnlicher Verpackungen (vgl. auch Kap. 11.1.3) werden nicht nur die als Seiten der Schachtel benötigten Teilfiguren wichtig, sondern durch die Dreidimensionalität des Zielprodukts spielt auch die Rekonstruktion eine funktionstragende Rolle. Die Gestaltung einer eigenen Verpackungslösung kann über unterschiedliche Zugänge erfolgen, durch experimentelles Gestalten mit Resten, die nur grob im Prozess der Lösungssuche angepasst werden, über die Verwendung von Modellsoftware oder durch Abwandlung existierender Verpackungen. Bei jeder Herangehensweise werden andere Schwerpunkte gesetzt, die mal den de-, mal den rekonstruierenden Aspekt des zu lösenden Problems betonen und außerdem differenzierend eingesetzt werden können. Letztlich führen die Bemühungen auf eine detaillierte und vor allem exakte Planung in Form einer geometrischen Gesamtkonstruktion (Netz) hin, die sich aus allen benötigten Seitenflächen ergibt.

Im Sinne der kritischen Reflexion der Arbeitsergebnisse ist eine solche Auseinandersetzung mit Verpackungen als besonders selbstevident einzustufen, weil jede Ungenauigkeit oder jeder Fehler in der Planung im Gesamtprodukt unweigerlich erkennbar wird. Da die Materialkosten vergleichsweise gering sind, können solche fehlerhaften Ergebnisse ohne Probleme durch eine neue, verbesserte Arbeit ersetzt werden.

De- und Rekonstruktion

Verpackungen untersuchen, Netze zu eigenen Verpackungen erarbeiten und technisch zeichnend umsetzen, Fehler selbst erkennen und beheben	Netze als Dekonstruktion dreidimensionaler Körper erfahren und untersuchen, ungewöhnliche dreidimensionale Körper auf verschiedene Arten erzeugen und ihre Netze approximieren, dann konstruieren

11.2.4 Naturwissenschaften

Das Fernglas – Licht lenken

Das Fernglas bietet einen guten Kontext, um die Wirksamkeit geometrischer Modelle im Zusammenspiel mit der De- und Rekonstruktion komplexer Systeme auszuleuchten. Die Untersuchung verschiedener Linsenformen kann dann zur experimentellen und anschließenden bzw. begleitenden auch geometrischen Erschließung und Konstruktion eines (einfachen) Fernglases führen. In einigen Lehrwerken sind derartige Bauprojekte enthalten.

Fernglas: Seeleute, Vogelbeobachter und Sternfreunde benötigen tragbare Fernrohre, mit denen sie entfernte Gegenstände vergrößert betrachten können. Ein solches handliches Fernrohr wird Fernglas, genauer Prismenfernglas, oder Feldstecher genannt. Durch die Verwendung bestimmter Linsen erhält man ein vergrößertes, aufrechtes Bild. Weil Ferngläser ein eigenes Linsensystem für jedes Auge haben, kann man mit beiden Augen beobachten. Durch astronomische Fernrohre schaut man wie beim Mikroskop nur mit einem Auge.

Abb. 109 Das Fernglas als praktische Umsetzung der Eigenschaften von Sammellinsen.[542]

Der abstraktere Sinn der heuristischen Technik kommt hier insofern vertiefend ins Spiel, als aus den Erkenntnissen über Einzellinsen eine Gesamtlösung für das Problem eines (möglichst kleinräumigen) Vergrößerungsgeräts erarbeitet werden kann, und dabei schrittweise die Ergebnisse der

[542] Beispiel entnommen aus Netzwerk Naturwissenschaften 5/6 (Rheinland-Pfalz), Schroedel 2010: 129.

Lichtbrechungen in allen beteiligten Linsen als eine einzige Kausalkette betrachtet werden muss – die darüber hinaus auch noch weitere geometrische Gestaltungen erlaubt, die aus dem einst langen, ausziehbaren Fernrohr das kompakte und noch heute gebräuchliche Fernglas machten (s. Abb. 109).

De- und Rekonstruktion

Funktionsweise eines Fernglases verstehen, Lichtbrechung untersuchen, beschreiben und geometrisch deuten und erfassen

Lichtbrechung im geometrischen Modell verstehen und produktiv zur gezielten Lichtlenkung einsetzen

Technische Geräte – Bauteile und geometrische Aspekte

Die Geometrie technischer Bauteile bietet zahlreiche Möglichkeiten, ihre Gestaltung in Abhängigkeit von ihrer Funktion zu untersuchen und zu verstehen. Dass ein Ventilator, eine Pumpe oder Turbine als Rotationsobjekte einen (in einer Ebene) runden Querschnitt besitzen muss, leitet zu Überlegungen über, wie Bauteile und Baugruppen mit ihren technischen Notwendigkeiten sinnvoll angeordnet werden können. Dabei können ästhetische Kriterien entscheiden, technische oder auch praktische Nutzungsüberlegungen. Durch das Zerlegen von Alltagsprodukten kann auf Grundlage der erarbeiteten Einsichten eine Umgestaltung von existierenden Geräten durchgeführt werden. Hier wird der erfinderische ebenso wie der kreativ-künstlerische Teil der Schüler angesprochen.

De- und Rekonstruktion

Elektrische Alltagsgeräte zerlegen und ihre Baugruppen identifizieren, beschreiben und ihre Konfiguration nachvollziehen und reflektieren

Geometrische Eigenschaften technischer Bauteile und Baugruppen erfassen und mit ihrer Funktion korrelieren, technische Planungen selbst durchführen

11.2.5 Sport

Im Sportunterricht finden sich erneut zahlreiche Möglichkeiten, die *Technik der De- und Rekonstruktion* zu thematisieren – viele liegen jedoch weniger im Teilgebiet der Geometrie. Beim Strategietraining, also bei der Planung und Optimierung von Spielzügen in praktisch allen Sportarten, geht es in der Regel letztlich darum, zwei- und dreidimensional Flächen bzw. Räume zu überwinden, um den Ball (oder ein vergleichbares Spielgerät) an eine beabsichtigte Stelle des Spielfelds zu bewegen. Die Fläche bzw. der Raum wird dabei planmäßig zergliedert. Die Bewegungsabläufe können dann in Abschnitten trainiert und automatisiert werden. Im selben Rahmen können auch viele andere geometrische Fragestellungen betrachtet werden wie die Verteilung der eigenen und der Gegenspieler auf dem Feld bei Einhaltung bestimmter möglicher Schussweiten (Kreisbetrachtungen), oder die Gesamtstrecke, die ein Spieler während eines Durchgangs zurücklegt.

Gerade auch im (durchaus verwandten) Bereich der Choreographie spielen Planung und Rhythmisierung von Bewegungen durch sich wiederholende Elemente eine große Rolle. Auch diese führen auf die *Technik der De- und Rekonstruktion* hin und können besonders anschaulich in Verbindung mit *graphischen Repräsentationsformen* erarbeitet und vermittelt werden.

De- und Rekonstruktion

Flächen und Räume in Form von physischer Aktion (ästhetisch, zielorientiert, regelkonform) überwinden und gestalten	Den zwei- und dreidimensionalen Raum physisch erfahren (räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln) und in Teilfiguren bzw. Teilräume untergliedern

Doch auch in zahllosen einfacheren Situationen im Sportunterricht kann diese heuristische Technik in Form von Flächenaufteilungen und -manipulationen zur Anwendung kommen. Abb. 110 zeigt ein Handballfeld mit den internationalen Standardmaßen. In den meisten Vereins- und Schulsporthallen sind die Felder jedoch bis zu 2 m schmaler und 3 m kürzer. Mit Hilfe der Skizze kann die Größe des regulären Spielfeldes bestimmt und durch einfache De- und Rekonstruktion die kleinere Spielfeldvariante erzeugt werden. Dabei treten unmittelbar diskussionsanregende Fragestellungen auf: Müssen alle Maße verkleinert werden, um sie auf die kleinere Halle anzupassen (in diesem Falle ginge es primär um eine maßstäbliche Verkleinerung)? Oder sollten einige Abstände erhalten bleiben, wie etwa die 7m-Linie, da auch die Größe des Tors gleich bleibt? Wenn ja, welche möglichen Konsequenzen ergeben sich daraus für das Spiel?

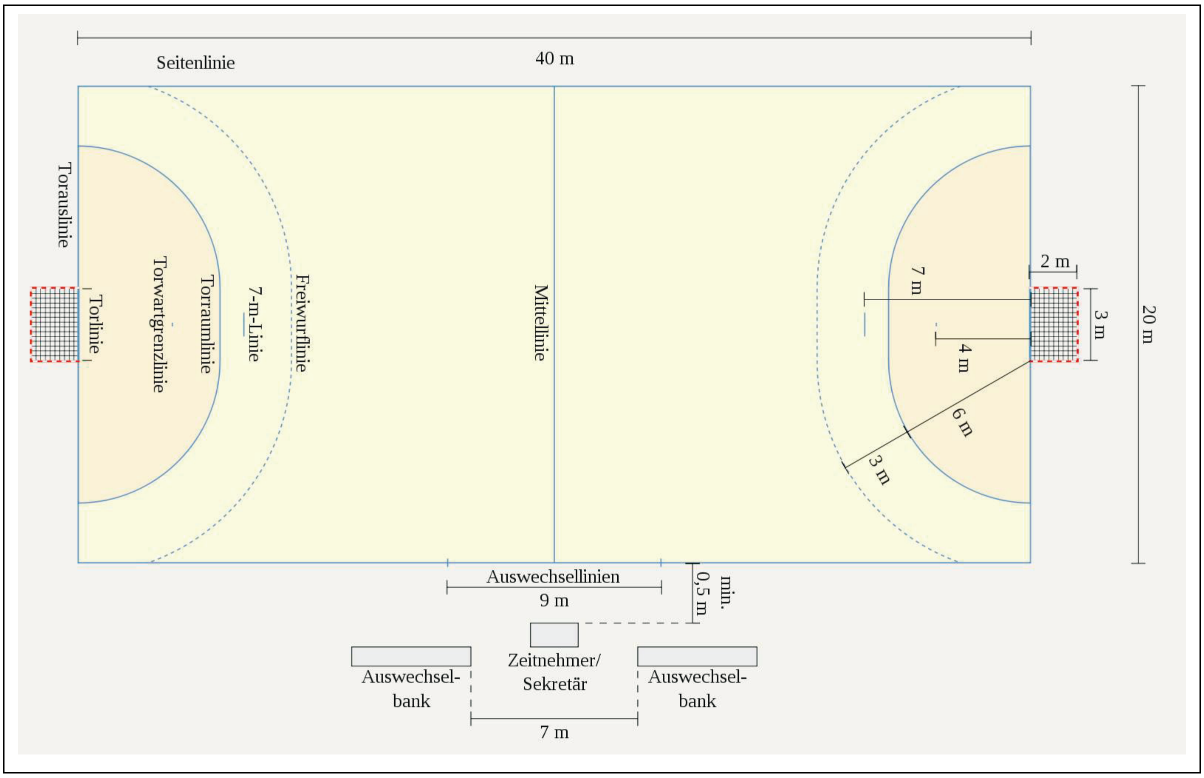


Abb. 110 Standardspielfeld Handball mit Maßangaben.[543]

11.3 Heurismen der Analyse und Adaption: Heurismus der Affinität

Unter dem *Heurismus der Affinität* sollen Vorgehensweisen verstanden werden, bei denen die Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen im Mittelpunkt steht. Die Affinität kann sich dabei auf die Vorgehensweise, die Darstellungsform, die Fragestellung oder andere strukturelle Merkmale einer Aufgabe beziehen.[544] Mit Blick auf die Orientierungsstufe besteht die Hauptaufgabe einer heuristischen Grundlagenbildung darin, den Schülern das Konzept einer solchen analytischen (und in der Folge adaptierenden) Herangehensweise nahezubringen und ins Bewusstsein zu rücken, also durch gezielte Reflexion als Strategie erkennbar und nutzbar zu machen.

11.3.1 Gesellschaftslehre

Im Fach Gesellschaftslehre kann der *Heurismus der Affinität* in den unterschiedlichsten Zusammenhängen eingeführt und thematisiert werde. Dabei stehen oft mathematische, wenn auch nicht unbedingt geometrische Aspekte im Mittelpunkt.

[543] Handballfeld.svg: User: Pumbaa80derivative work: White r - Handballfeld.svg, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=36198385 [07.04.2017]
[544] Vgl. hierzu Kap. 5.6.2 und ausführlich Band A, Kap. 5.5.2 (Krichel 2017).

Befragungen zu verschiedenen Themen – statistische Daten erheben und darstellen

Der Rahmenlehrplan Gesellschaftslehre Rheinland-Pfalz sieht für die Orientierungsstufe in verschiedenen Themenbereichen vor, dass die Schüler Umfragen durchführen. Diese reichen von der Zeitzeugenbefragung, über Interviews mit Kommunalpolitikern, Expertenbefragungen im Reisebüro, bei Kinderhilfswerken oder dem Jugendamt bis zur Befragung von Umweltexperten.[545] Dieses Themenfeld bietet reichlich Raum zur Auseinandersetzung mit ganz grundsätzlichen Fragestellungen statistischen Arbeitens.

Die Schüler müssen sich zunächst darüber verständigen, wer mit welchem Ziel befragt werden soll. Des Weiteren müssen der Ablauf und der zeitliche Rahmen festgelegt werden, die Fragen in eine sinnvolle Reihenfolge gebracht und die Art der Fragestellung (offen oder geschlossen) festgelegt werden. Auch muss entschieden werden, in welcher Form geschlossene Fragen formuliert werden (Tabellen, Matrizen, Skala) und wie der Fragebogen ausgewertet und die Ergebnisse dargestellt werden sollen. In diesem Gesamtzusammenhang kann der *Heurismus der Affinität* mit dem Fokus auf die Vorgehensweise thematisiert werden, indem die Planung, Organisation und Durchführung von bereits durchgeführten Befragungen auf künftige übertragen, kritisch reflektiert und gegebenenfalls modifiziert wird. Der geometrische Aspekt spielt in diesem Zusammenhang sicher nicht die größte Rolle, kann jedoch über die graphische Darstellung bzw. über die anschaulich vergleichende Auswertung erhobener Daten eingebunden werden.

	Heurismus der Affinität	
Daten durch Befragungen und schriftliche Abfragen erheben, auswerten und darstellen		Geometrische Darstellungen nutzen, um Aussagen erhobener Datenmengen besser erfassen und präsentieren zu können

Orte finden, Wege aufzeichnen, Werte vergleichen – Koordinaten universell anwenden

Ein besonders fruchtbares Themenfeld, das in den Gesellschaftswissenschaften immer wieder eine zentrale Rolle spielt, sind zunächst maßstäbliche Darstellungen in unterschiedlichsten Zusammenhängen (vgl. Kap. 11.1.1). Daran anschließend und erweiternd lässt sich aber auch der Einsatz von (kartesischen) Koordinaten erkunden und bei der Bearbeitung verschiedener Problemsituationen oder Fragestellungen einsetzen, wobei der *Heurismus der Affinität* herausgearbeitet werden kann:

[545] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 2013: 15, 17, 19, 21, 25.

Koordinatendarstellungen werden bei der Kartenarbeit eingesetzt. Es können Land- und Seewegsrouten durch Koordinatenketten eindeutig festgelegt und auf dieser Grundlage weitere mathematische Behandlungen durchgeführt werden, um beispielsweise die Länge der Gesamtstrecke rechnerisch zu ermitteln. Bei einem Rundkurs kann außerdem auf die Betrachtung als Polygon und damit zu abstrahierenden Überlegungen übergeleitet werden.

Eine Schatzsuche kann als Kombination aus Himmelsrichtungsangaben (Winkelmaßen) und Entfernungen präsentiert und durchlaufen werden, um dann durch Überführung in die Koordinatenschreibweise vergleichbar und verifizierbar gemacht zu werden.

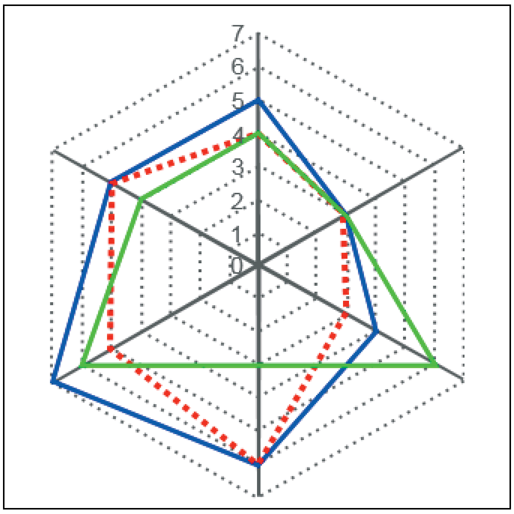


Abb. 111 Beispiel für ein Netzdiagramm mit sechs Kategorieachsen.[546]

Koordinaten können außerdem zur simultanen Erfassung und Darstellung mehrerer Kategorien genutzt werden, wie dies bei (zwei- oder dreidimensionalen) Datenclustern der Fall ist. In einer direkten Abwandlung können Netzdiagramme zur verknüpfenden Darstellung zahlreicher (mindestens jedoch dreier) numerisch erfassbarer, gleichwertiger Kategorien genutzt werden (Abb. 111). Bei diesen Diagrammen tritt der visuell gestützte Interpretationsvorteil besonders klar hervor, denn Unterschiede können nicht nur schnell erfasst, sondern auch quantifiziert werden, indem der eingeschlossene Flächeninhalt betrachtet wird.

Heurismus der Affinität

Geographische Angaben eindeutig auslesen und auffinden, Folgegrößen ermitteln, im Sachkontext analysieren und interpretieren

Punkte und darüber definierte geometrische Objekte aus Daten erzeugen, untersuchen und systematisch zur Problemlösung nutzen

Vergleichende Kulturwissenschaft – Verfahren wiederverwenden und übertragen

Mit fortschreitenden historischen und geographischen Kenntnissen bieten sich vermehrt Möglichkeiten zur bewussten Wiedernutzung und Anpassung bereits zielführend eingesetzter Methoden, Techniken und Verfahren. In den unterschiedlichsten Kulturkreisen stellen sich immer wieder ähnliche Fragen, erlauben solche gleichen Fragestellungen doch

[546] Von Tubas, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5950236 [07.04.2017]

erst den komparativen Blick auf verschiedene Kulturen, ob diese nun zeitlich oder räumlich voneinander getrennt sind.

Ein Beispiel für eine solche Problemstellung, die sich (zunächst) geometrisch lösen lässt, könnte die Ermittlung der Besiedlungsdichte zu verschiedenen Zeiten in demselben Gebiet oder zur selben Zeit in verschiedenen Teilen der Erde sein. Um solche diachronen oder synchronen Vergleiche durchzuführen, könnten die Schüler beispielsweise flächenbezogene Abzählverfahren, wie sie oft zur Abschätzung schwer erfassbarer Mengen benutzt werden, erinnern und auf das vorliegende Problem übertragen. Der Dichtebegriff wird durch diese Technik anschaulich begreifbar und zugleich auf eine geometrische Bezugsgröße (zwei oder dreidimensional) hin geprägt.

Abb. 112 Beispiel für eine durch Rasternutzung gut abschätzbare Menge von Gegenständen.

Heurismus der Affinität

Bevölkerungsdichte erfassen, untersuchen, vergleichen

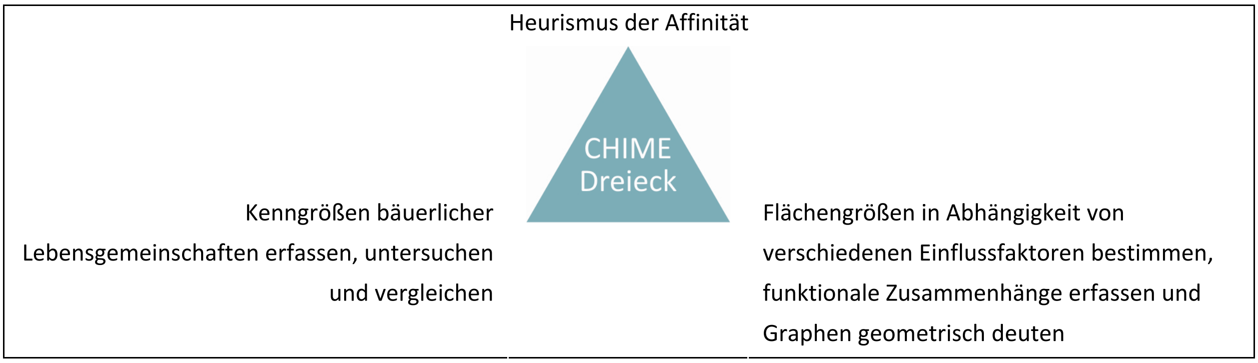
Dichtebetrachtungen aus anderen Kontexten wie der Mengenabschätzung auf gesellschaftswissenschaftliche Fragestellungen übertragen

Vergleichende Kulturwissenschaft – komplexe Zusammenhänge betrachten

In eine ähnliche Richtung weisen Betrachtungen zum Bodenertrag (bezogen auf bestimmte Flächeninhaltsmaße) und daraus abgeleitete weitere Fragestellungen nach der benötigten landwirtschaftlichen Fläche, um beispielsweise ein jungsteinzeitliches Dorf zu versorgen. Hier lassen sich geometrische Problemlösungen durch Affinitätsbetrachtungen unmittelbar mit graphischen Repräsentationsformen vernetzt einsetzen und vertiefen. Bleibt man bei dem Beispiel der Nahrungsversorgung eines neolithischen Dorfes, können ebenso die individuellen Bedarfe in die Untersuchung mit einbezogen und schließlich alle ermittelten Ergebnisse einer (diachronen) historischen Betrachtung ihrer Veränderung unterzogen werden: Neben den Gesamtbedarfen (in Abhängigkeit von der Einwohneranzahl) ändert sich auch die Energiedichte-Ausbeute[547] bezogen auf die landwirtschaft-

[547] Der Anspruch potenzieller Untersuchungen in diesem Forschungskontext ist relativ hoch und bietet damit auch gute Möglichkeiten zum Fördern starker Schüler.

lichen Flächen (durch Zucht verbesserter Nutzpflanzen und technische Bodenbearbeitung usw.). Diese Veränderungen können bei präziser und an den Horizont der Lerner angepasster Auswahl der Kategorien nahtlos zur Leitidee des funktionalen Zusammenhangs überleiten, wenn etwa Dorfgröße und Gesamtverbrauch zueinander in Beziehung gesetzt werden.



11.3.2 Kunst und Textiles Gestalten

Das Fach Kunst und Textiles Gestalten ist für eine Verknüpfung von Affinitätsbetrachtungen mit geometrischen Inhalten besonders geeignet, da hier – wie bereits erläutert – die Geometrie fundamental vertreten ist, außerdem aber auch der Affinitätsgedanke ein zentraler Gedanke künstlerischen Schaffens ist: über weite Teile der Kunstgeschichte war die Umsetzung der realen Welt (aus der spezifischen Sicht des Künstlers) in eine affine Raum-/Farbrepräsentation auf Holz, Leinwand und andere Materialien (bzw. plastisch) Hauptanliegen der Künstler: nicht das quasi-fotorealistische Abbild, sondern eine klar und oft nach epochen- und kulturspezifischen Regeln gestaltete „Anspielung“ auf die Realität, die von den zeitgenössischen Betrachtern ohne großen Übersetzungsaufwand verstanden wurde.

Die Geometrie mit ihren mathematischen Bezügen spielt gerade auch in der modernen (mehr noch als in der postmodernen) Malerei, auf der hier das Hauptaugenmerk liegen soll, eine große Rolle. Beginnend mit dem späteren 19. Jahrhundert nahmen Kunststile zu, die den ursprünglichen Affinitätsbezug zur Realität mehr und mehr verloren bzw. sich bewusst von diesem lösten und stattdessen künstlerischen Ausdruck in Form und Farbe selbst suchten. Vom geometrischen Standpunkt aus betrachtet, traten damit an die Stelle beispielsweise der korrekten Perspektive Fragen nach den Möglichkeiten abstrakter Flächengestaltungen. Hier schließen sich nun zahlreiche Möglichkeiten nicht nur für den Einsatz des *Heurismus der Affinität*, sondern auch der Strukturnutzung (Kap. 11.4) an, von denen einige vorgestellt werden sollen.

Kandinsky – Strukturierung abstrakter Malerei

Ein sehr früh im Unterricht einsetzbares, abstraktes Kunstwerk ist Kandinskys „Farbstudie – Quadrate mit konzentrischen Ringen“ aus dem Jahr 1913 (Abb. 113). Es bietet sehr gute Möglichkeiten, mathematische Bezüge in der Kunst aufzudecken und zu untersuchen. Ausgehend vom Titel werden zunächst die grundlegenden Begriffe „Quadrat“ und „konzentrisch“ geklärt und die Begriffe „Ring“ und „Kreis“ korreliert. Bei der näheren Betrachtung wird den Schülern schnell auffallen, dass die künstlerische Darstellung jedoch ungenau ist, und es sich im mathematischen Sinne weder um „echte“ Kreise (Ringe) noch Quadrate handelt. Das Verhältnis von Konstruktion zu Freihandzeichnung (Skizze) kann herausgearbeitet und auch mathematisch durchleuchtet werden.

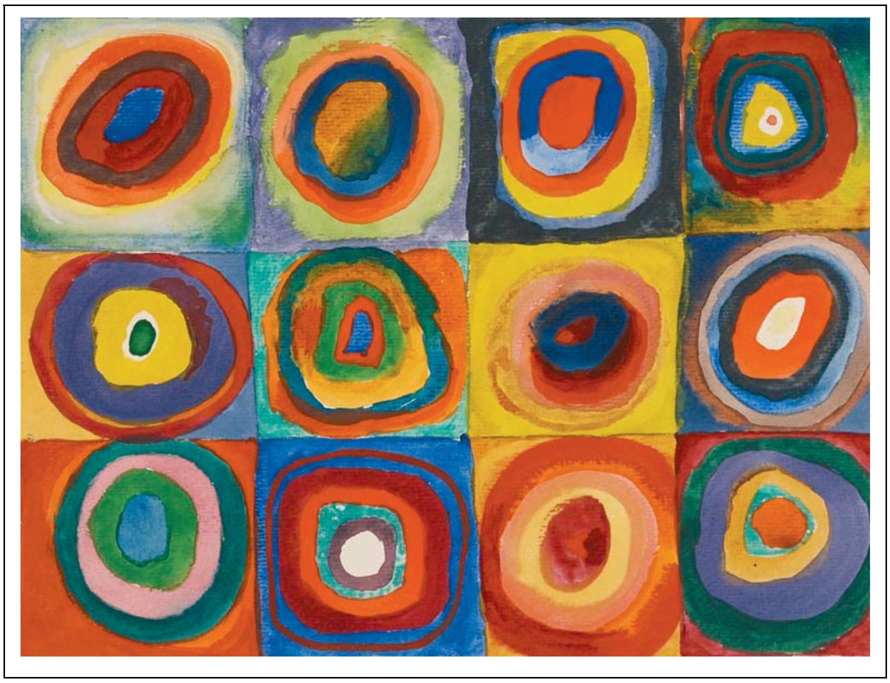


Abb. 113 Farbstudie – Quadrate mit konzentrischen Ringen[548] von Vassily Kandinsky, 1913.

In der aktiven Auseinandersetzung durch eine mehr oder weniger eng geführte eigene Umsetzung geometrischer Figuren als künstlerische Gestaltungselemente können Freihandzeichnungen erprobt und geübt werden. Natürlich lassen sich auch über die Formen hinausgehende Untersuchungen anstellen, die sich auf die Farbgebung und die Verteilung ähnlicher Farben über die Gesamtfläche des Bildes hinweg beziehen – auch hier spielen potenziell geometrische Aspekte eine Rolle. Im Unterrichtszusammenhang lassen sich bei Diskussionen in der Gruppe sämtliche prozessbezogenen Kompetenzen ausgezeichnet integrieren.

[548] Gemeinfrei, http://www.eternels-eclairs.fr/tableaux-kandinsky.php [07.04.2017]

Das Kunstwerk bietet außerdem einen geeigneten Anlass, um über das Wesen der Geometrie und ihrer Objekte zu sprechen. Denn obwohl es sich hier ganz klar nicht um „echte“ Kreise oder Quadrate handelte, wird kaum ein Schüler sich weigern, die Bezeichnung zu akzeptieren. Wie kommt es also, dass wir solche ungenauen Darstellungen – gleichsam Abkürzungen in der Schriftsprache – trotzdem problemlos als Repräsentanten geometrischer Figuren erkennen? Hier lässt sich ein weitreichender Diskurs anschließen, in welchen Fällen die genaue Konstruktion von Figuren notwendig ist, und wann „Kürzel“, also freihändige Skizzen verwendet werden können oder vielleicht sogar sollten. Gerade in problemlösenden Fragestellungen und problemorientierten Kontexten spielt auch die Effizienz beim Auffinden einer Lösungsstrategie eine große Rolle. Und wo eine Freihandskizze auf die richtige Spur führt, kann sie einer aufwendig ausgeführten Konstruktion ohne Vorteil für das heuristische Kernanliegen überlegen sein.

Heurismus der Affinität

Analyse von Bildaufbau und anderen Gestaltungsmerkmalen wie Farbverteilung

Geometrie als Grundbaustein von Kunstwerken erkennen, Bedeutung und Besonderheiten von Freihandzeichnungen

Epochenanalyse – Entwicklung der Formensprache

Wie in der Einleitung bereits angedeutet weisen Kunststile definierende Merkmale auf, die eine Zuordnung von Kunstwerken erlauben. Stile werden meist durch einen Künstler oder eine kontemporäre Gruppe von Künstlern geprägt und verändern sich dann in unterschiedlicher Geschwindigkeit – manche werden innerhalb weniger Jahre oder Jahrzehnte von den Begründern selbst weiterentwickelt, andere existieren weit über die Lebensspanne des prägenden Künstlers, oder der Künstler, hinaus, weil sie von anderen aufgegriffen und fortgeführt werden. Die Affinität, die zwischen Kunstwerken eines Stils und damit einer Epoche besteht, erlaubt es der Kunstgeschichte, aus den Merkmalen von unbekannten Kunstwerken Rückschlüsse auf deren Entstehungszeit und Authentizität zu ziehen. Als Beispiel werden hier vier paarige Frauendarstellungen unterschiedlicher Zeitstellungen gezeigt.

Abb. 114 Frauendarstellung aus Gönnersdorf (geritzt in Schiefer), ca. 13000-9500 v. Chr.[549]

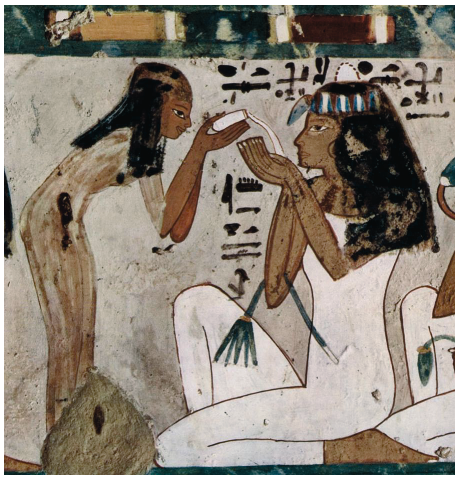


Abb. 115 Ägyptische Frauendarstellung aus dem Grab des Thot (Ausschnitt), Theben, ca. 1450-1420 v. Chr. [550]

Abb. 116 Attische rotfigurige Vase, ca. 400 v. Chr.[551]

Abb. 117 Blatt aus dem Codex Manesse (Cod. Pal. germ. 848, fol. 217r), ca. 1305-1315 n. Chr.[552]

549 Von José-Manuel Benito, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=702000 [07.04.2017]
550 Vom Maler der Grabkammer des Thot, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=154350
551 Cadmus painter - Attic red figure vase, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9395626 [07.04.2017]
552 Von Meister des Codex Manesse (Grundstockmaler) - http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/cpg848/0421, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=194144 [07.04.2017]

Eine Analyse offenbart schnell Gemeinsamkeiten, aber auch Unterschiede, die sich unter anderem geometrisch beschreiben lassen. Unterschiede in der Verwendung von Grundelementen wie Linien und Flächen lassen sich hier nachvollziehen, ebenso wie die Modellierung oder Nichtmodellierung von Volumina und die unterschiedlichen hierzu eingesetzten Techniken. Dass sich gleichzeitig auch historisch-vergleichende Fragestellungen zur Lebensweise, Mode und zum Rollenverständnis anschließen lassen, wird schon aus den vier hier gewählten Beispielen ersichtlich.

Noch deutlicher und für einige Schüler möglicherweise einfacher zugänglich sind Beispiele aus der einfachen Ornamentik, die mit weniger komplexen Beschreibungen zu erfassen sind. Abb. 118 bis Abb. 121 zeigen Beispiele von der Jungsteinzeit bis ins Hochmittelalter.

Abb. 118 Stichbandkeramik-Ornament, ca. 4000 v. Chr.[553]

Abb. 119 Beispiele ägyptischer Ornamente.[554]

[553] Wolfgang Sauber, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17501068 [07.04.2017]
[554] L. Prang & Co. (publisher) - Examples of Historical Ornament, Egyptian, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15993975 [07.04.2017]

Abb. 120 Beispiele griechischer Ornamente.[555]

Abb. 121 Beispiele gotischer Ornamente.[556]

Diese Reihe ließe sich noch beliebig weit fortsetzen und geographisch erweitern, doch schon dieser knappe Überblick vermittelt einen Eindruck von der Fülle an geometrischen Untersuchungen und kreativen Auseinandersetzungen, die mit dem Material möglich sind. Der Vergleich solcher Muster führt auf Affinitäten in ihrer Erzeugung hin. Die Problemstellung einer Rekonstruktion der Erzeugung von mitunter sehr komplexer Ornamentik ist darüber hinaus reizvoll und verweist auf den *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* (Kap. 11.7).

Heurismus der Affinität		
Entwicklung der künstlerischen Formensprache erfassen und beschreiben		Wiederkehrende geometrische Elemente identifizieren, benennen und ihre Komposition mit Fachbegriffen beschreiben; Muster vergleichen

[555] L. Prang & Co. (publisher) - Examples of Historical Ornament, Greek, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15993881 [07.04.2017]
[556] L. Prang & Co. (publisher) - Parallel of Historical Ornament, Gothic II, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15993749 [07.04.2017]

11.3.3 Naturwissenschaften

Der *Heurismus der Affinität*, bei dem die Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen im Mittelpunkt steht, kann auch im naturwissenschaftlichen Unterricht vielfach eingesetzt werden.

Natur inspiriert Technik – Bionik

Die Bionik, die sich mit dem Übertragen von Phänomenen der Natur auf die Technik befasst, weist viele Anknüpfungspunkte zum *Heurismus der Affinität* auf, wie sich unmittelbar aus der Definition dieser Disziplin ergibt:

> *Bionik als Wissenschaftsdisziplin befasst sich systematisch mit der technischen Umsetzung und Anwendung von Konstruktionen, Verfahren und Entwicklungsprinzipien biologischer Systeme. Dazu gehören auch Aspekte des Zusammenwirkens belebter und unbelebter Teile und Systeme sowie die wirtschaftlich-technische Anwendung biologischer Organisationskriterien. (NACHTIGALL 2013: 3)*

So bilden beispielsweise Entenfüße und Schwimmflossen ein Analogiepaar. Beide eignen sich aufgrund ihrer großen Wasserverdrängung zum Schwimmen und erfüllen vergleichbare Funktionen. Der Rahmenlehrplan knüpft an diese Idee an, wenn dort steht,

dass die Schüler in Verbindung mit dem Themenfeld *Bewegung zu Wasser, zu Lande und in der Luft* „Analogien (z. B. Fisch – U-Boot, Treibstoff – Nährstoff, Modell – Realität, …) in geeigneter Weise dar[stellen](z. B. durch vergleichende Tabellen)" (Rheinland-Pfalz 2010: 25). So wird „die Energie der Nährstoffe und Treibstoffe […] in Bewegungsenergie und Wärme umgewandelt. Der Energieinhalt von Stoffen kann z. B. in Form des Brennwerts angegeben werden" (RHEINLAND-PFALZ 2010: 27).

Sehr aktuelle Beispiele, die Schülern das Potenzial von naturwissenschaftlichen Erkenntnissen für technische Neuentwicklungen vor Augen führen, sind neue Haftmaterialien, die nicht mittels Klebstoffen, sondern nach dem Vorbild kletterfähiger Insekten, Spinnen und Reptilien mit Kontakthärchen an unterschiedlichen Untergründen haften. Für die geometrische Anbindung noch interessanter ist die Nutzung von biologischen „Konstruktionsplänen" wie Ast- und Wurzelstrukturen oder des skeletalen Knochenaufbaus bei ingenieurstechnischen Problemstellungen wie leichten Bauformen, optimaler Materialnutzung und Belastbarkeit. Ebenfalls unmittelbar aus geometrischer Perspektive lassen sich Untersuchungen aus dem Bereich der Aero- und Hydrodynamik betrachten, die durch die Beobachtung an Tieren die Bauformen von Schiffen, Flugzeugen oder Automobilen optimieren helfen. Ein sehr bekanntes Beispiel aus dem Bereich der Hydrodynamik ist die seit einigen Jahren im Schwimmsport eingesetzte Oberfläche, die der Haifischhaut nachgebildet wurde und den Wasserwiderstand mindert. Dieselbe Technik wird heute auch an Schiffen und Flugzeugen verwendet.[557]

Heurismus der Affinität

Beispiele für durch die Natur inspirierte technische Entwicklungen kennenlernen; technische Modelle biologischer Vorbilder in ihrer Funktion nachvollziehen

Geometrisches Modellieren biologischer Strukturen zur Lösung technischer Probleme

Analogiepaare – Form follows function

Beim Thema *Körper und Gesundheit* lernen die Schüler den menschlichen Körper und seine Funktionen kennen,[558] und in einem weiteren Themenbereich erfahren sie etwas über verschiedene Tierarten und deren Lebensräume.[559] Darüber hinaus wird in Zusammenhang mit dem Themenbereich *Pflanzen – Tiere - Lebensräume* unter anderem „der Entwicklungsprozess vom Wildtier zum Haustier nachvollzogen (z. B. vom Wolf zum Hund)“ (Rheinland-Pfalz 2010: 31). Um diesen Prozess zu beschreiben, kann der *Heurismus der Affinität* (in Kombination mit der heuristischen Technik Anfertigen einer Tabelle) herangezogen werden, durch den sich Analogien wie auch Unterschiede bezüglich Anatomie, Aussehen und Verhaltensweisen von Wolf und Hund herausarbeiten lassen. Auf diesen Befunden aufbauend lässt sich die Entwicklung vom Wolf zum Haushund skizzieren – was im Übrigen weitere Möglichkeiten zur geometrischen Bearbeitung bietet, da sich die Veränderungen etwa des Knochenbaus diskret vollzogen haben dürften und so die Zwischenschritte von Wolfsanatomie bis zur Anatomie eines Haushundes interpoliert werden können.

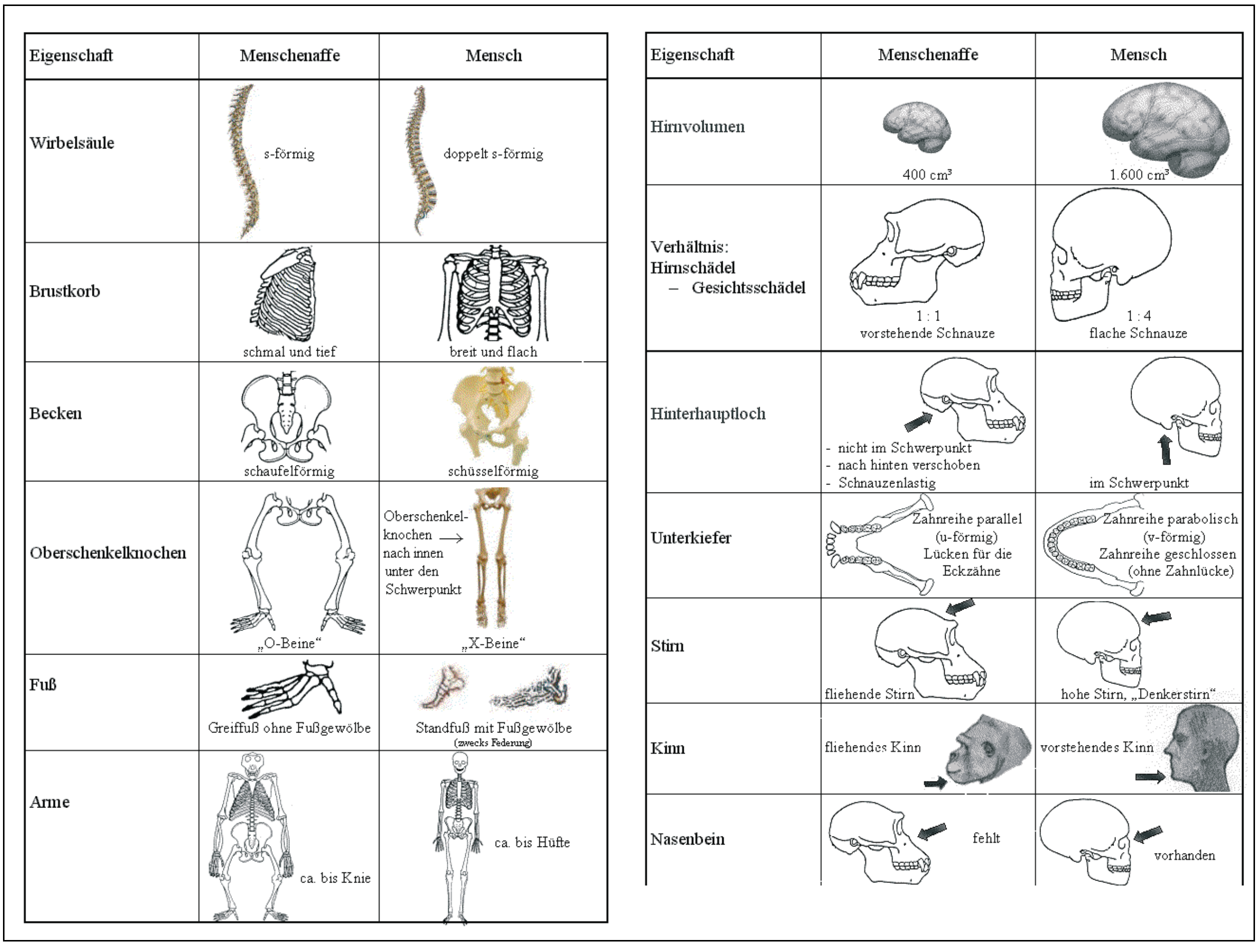
Dieser evolutionäre Prozess betrifft gleichermaßen die Primaten. Durch Analogiebetrachtungen zwischen dem menschlichen Körperbau und dem eines Menschenaffen lassen sich sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede detailliert herausarbeiten.

---

[557] Diese und weitere aktuelle Beispiele aus der bionischen Forschung finden sich in der Broschüre zum Thema, die der Förderkreis für das Museum Wald und Unwelt und die Umweltstation Ebersberger Forst e.V. herausgegeben hat und die auf dessen Website zum kostenlosen Download zur Verfügung steht: http://www.foek-ebe.de/news/news/downloads/46_dwl2.pdf [01.04.2017]

[558] Vgl. Rheinland-Pfalz 2010: 45-47.

[559] Vgl. Rheinland-Pfalz 2010: 31.



Eigenschaft	Menschenaffe	Mensch
Wirbelsäule	s-förmig	doppelt s-förmig
Brustkorb	schmal und tief	breit und flach
Becken	schaufelförmig	schüsselförmig
Oberschenkelknochen	„O-Beine“	Oberschenkelknochen nach innen unter den Schwerpunkt „X-Beine“
Fuß	Greiffuß ohne Fußgewölbe	Standfuß mit Fußgewölbe (zwecks Federung)
Arme	ca. bis Knie	ca. bis Hüfte

Eigenschaft	Menschenaffe	Mensch
Hirnvolumen	400 cm³	1.600 cm³
Verhältnis: Hirnschädel – Gesichtsschädel	1 : 1 vorstehende Schnauze	1 : 4 flache Schnauze
Hinterhauptloch	- nicht im Schwerpunkt - nach hinten verschoben - Schnauzenlastig	im Schwerpunkt
Unterkiefer	Zahnreihe parallel (u-förmig) Lücken für die Eckzähne	Zahnreihe parabolisch (v-förmig) Zahnreihe geschlossen (ohne Zahnlücke)
Stirn	fliehende Stirn	hohe Stirn, „Denkerstirn“
Kinn	fliehendes Kinn	vorstehendes Kinn
Nasenbein	fehlt	vorhanden

Abb. 122 Vergleichende Übersicht zu anatomischen Merkmalen von Mensch und Menschenaffe.[560]

Die gesammelten Vergleichsaspekte (Abb. 122) können unter geometrischer Perspektive untersucht und auch quantifiziert werden. Sie erlauben Rückschlüsse auf die Fähigkeiten, Fertigkeiten sowie auf die Lebensweisen beider Arten und bilden die Grundlage für die evolutionsbiologischen Theorien zur Entstehung des homo sapiens vor etwa 2,5 Millionen Jahren.

Heurismus der Affinität

Anatomie verschiedener Unterarten (Hund und Wolf) oder Triben (Menschenaffen und Menschen) durch Analogiebetrachtungen untersuchen und funktional vergleichen	Unterschiede zwischen Analogietupeln geometrisch beschreiben und untersuchen, Zwischenschritte von Evolutionsstufen geometrisch rekonstruieren

[560] http://www.scheffel.og.bw.schule.de/faecher/science/biologie/humanevolution/1ordnung/humanevo.htm [07.04.2017]

11.3.4 Sport

Es gibt zahlreiche Sportarten wie Handball, Basketball, Rudern, Schwimmen, Radfahren, Tennis, Fußball, Karate, Leichtathletik Hockey usw. Sportarten lassen sich nach verschiedenen Kriterien klassifizieren, die sich zum Beispiel auf den Umfang und das Ziel beziehen können, mit dem der Sport betrieben wird; Digel und Burk[561] unterscheiden so Berufssport, Hochleistungssport, Leistungssport und Breitensport. Auch lassen sich Sportarten nach immanenten Kriterien, also Analogien gruppieren. Entscheidend können z. B. die Anforderungen (Kraft, Ausdauer etc.), die notwendigen Sportgerät (Ball, Schläger etc.), die Anzahl der Spieler oder die Zielsetzung der jeweiligen Sportart sein (s. Tab. 30).

Sportart	Anforderung und Zielsetzung	Beispiele
Ausdauersportarten	- lange Belastungsdauer - kontinuierliche Belastung - Ausdauerfähigkeit	- Marathon, Triathlon - Langstreckenlauf
Kraftsportarten	- Maximalkraftentwicklung - erhöhte Muskelmasse - Schnellkraft, Koordination	- Gewichtheben - Kraftdreikampf - Bodybuilding
Ausdauersportarten mit hohem Krafteinsatz	- Kombination von Kraft, Ausdauer - kontinuierliche Ausdauer	- Kanu - Radfahren - Skilanglauf
Schnellkraftsportarten	- Kombination Kraft, Schnelligkeit - Maximalkraft, Kraftausdauer - Koordination	- Stoßdisziplinen - Sprungdisziplinen - Kurzstreckenläufe - Turnen
Spielsportarten	- intervallartige Dauerbelastungen - Schnelligkeit, Schnellkraft - Koordination	- Fußball, Handball - Tennis
Kampfsportarten	- Schnelligkeit, Schnellkraft - Maximalkraft, Ausdauer - Beweglichkeit - intervallartige Dauerbelastungen	- Ringen, Judo - Karate - Boxen
Nicht klassifizierte Sportarten	- wenig ausgeprägtes Profil (Koordination, Motorik)	- Bogenschießen - Segeln - Motorsport - Reiten

Tab. 30 Einteilung und Charakteristik der Sportartengruppen (nach WEINECK 2010).

[561] Prof. Helmut Digel ist ehemaliger deutscher Sportfunktionär und Sportwissenschaftler. Von 2002 bis 2010 war er Direktor des Institutes für Sportwissenschaft der Eberhard Karls Universität Tübingen.
Dr. Verena Burk ist Akademische Oberrätin im Arbeitsbereich Sportökonomik, Sportmanagement und Sportpublizistik am Institut für Sportwissenschaft.

Veränderte Spielfelder – Skalierung und Adaption

Der *Heurismus der Affinität* spielt im Sportunterricht auch eine Rolle, wenn strategische Aufstellungen von einer auf eine andere Sportart übertragen werden sollen. In Abhängigkeit von den spezifischen Anforderungen des jeweiligen Sports müssen Umstellungen oder Anpassungen vorgenommen werden. Auch können veränderte Spieleranzahlen eine Adaption notwendig machen.

Gerade im Schulsport, der in Hallen stattfindet, die nicht immer den Standardmaßen der Sportarten entsprechen, werden außerdem häufig reduzierte Varianten gespielt, von denen sich manche zu eigenständigen Sportarten entwickelt haben, wie etwa Streetball (eine Variante des Basketballs). Hier müssen Aufstellungen überdacht und auf die veränderten Rahmenbedingungen angepasst werden, ohne erwünschte Eigenschaften des Sports in Mitleidenschaft zu ziehen.

Heurismus der Affinität

Trainierte Strategien auf verwandte Sportarten oder verkleinerte Spielfelder anpassen	Raumaufteilungen skalieren und an andere veränderte Umgebungsvariablen wie Geschwindigkeit oder Spieleranzahl anpassen

11.4 Heurismen der Analyse und Adaption: Heurismus der Strukturnutzung

Der *Heurismus der Strukturnutzung* beinhaltet die vorbereitende, auf einer Analyse beruhende Bearbeitung eines Problems, die durch Identifizierung von Mustern und Strukturen oder deren gezielte Generierung den Weg zur Problemlösung öffnen will. Der Heurismus zeigt Überschneidungen mit dem der Affinität, da Strukturnutzungen auch einen Rückbezug auf ein verwandtes Problem beinhalten können. Dennoch liegt der Schwerpunkt bei dieser Art der Vorgehensweise auf problem*immanenten* Verbindungen, die den Lösungsweg weisen.

11.4.1 Gesellschaftslehre

Der Unterricht in Gesellschaftslehre bietet viele Möglichkeiten, auch den *Heurismus der Strukturnutzung* einzuführen und in unterschiedlichen Kontexten vertiefend aufzugreifen. So können die eigene Klassenstruktur, regionale, gesellschaftliche, wirtschaftliche, demographische bis hin zu geographischen Strukturen betrachtet, analysiert und interpretiert werden. Nicht alle dieser Sachkontexte eignen sich für eine geometrische, sehr viele jedoch für eine allgemein mathematische Bearbeitung und den Erwerb gerade auch statistischer Kenntnisse und Fertigkeiten.

Urbane Lebensräume – Vom Menschen geschaffene Strukturen

Der Lebensraum Stadt bietet unzählige Möglichkeiten, die Bedeutung und Allgegenwärtigkeit struktureller Merkmale und wiederkehrender Muster in der Raum- und Flächengestaltung zu erkunden. Die europäische Stadtgeschichte lässt sich bis in antike Zeiten zurück untersuchen, dabei treten Veränderungen in Grund- und Aufriss hervor, die sich geometrisch erfassen, beschreiben, aber auch im Zusammenhang gesellschaftlicher und historischer Prozesse interpretieren lassen. Siedlungsstrukturen spiegeln immer Aufbau und Veränderungen im societalen Gefüge wider, weshalb nicht nur auf der anschaulichen Ebene der Bauforschung (vgl. auch Kap. 11.4.2) Strukturen analysiert, sondern auch Gesellschaftsstrukturen dazu in Beziehung gesetzt werden können.

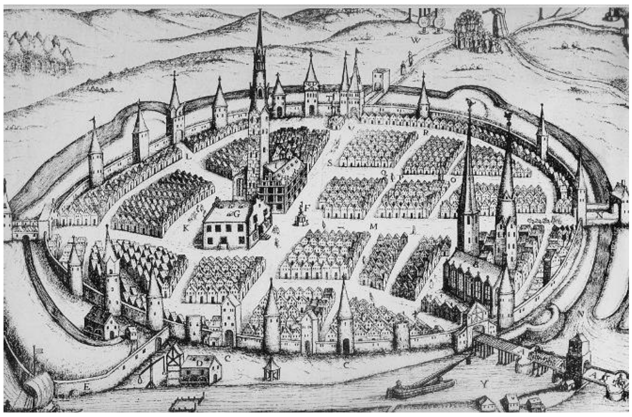


Abb. 123 Das römische Trier (links[562]) und das spätmittelalterlich/frühneuzeitliche Hameln (rechts[563]) im Modell bzw. im Stich.

Wie in der Bildenden Kunst lässt sich auch in der Baugeschichte eine „stilistische" Entwicklung identifizieren. Klassische Beispiele sind der Rastergrundriss römischer und die ringförmige Anlage mittelalterlicher Stadtgründungen. Diese Unterschiede sind nicht auf den ästhetischen Aspekt beschränkt, sondern betreffen insbesondere funktionale (militärische, wirtschaftliche usw.) Einheiten. Ebenso lösen herrschaftsbezogene Bauformen einander ab, wenn beispielsweise das feudalistische System des Mittelalters in der frühen Neuzeit einer zunehmend durch bürgerliche Gruppen und die aufstrebenden Städte bestimmten Ordnung weicht. Viele Städte lassen sich in kulturhistorische Stadttypen

[562] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augusta_Treverorum.jpg [07.04.2017]
[563] http://www.hameln.com/_images/608.jpg[07.04.2017]

einordnen.[564] Anhand von Kartenmaterial oder bei Erforschungen im realen Umfeld der Schüler können strukturelle Merkmale von Städte (unterschiedlichen Typus') aus verschiedenen Epochen beschrieben und analysiert werden. Dabei können vielfältige Bezüge zur Geometrie hergestellt werden. Römische Städte zeichnen sich durch ihren schachbrettartigen Grundriss aus. Den Mittelpunkt bildete entweder das Forum (bei Zivilgründungen) oder (bei militärischen Lagern) die *Principia*, das Stabsgebäude, von dem aus die Hauptachsen im rechten Winkel zueinander verliefen. Noch heute kann diese Struktur in Römerstädten wie Köln, Mainz oder Trier identifiziert werden. Es lassen sich Überlegungen zur *Insula*-Größe, den planerischen und technischen Erfordernissen bei der Anlage einer neuen römischen Stadt und viele weitere anschließen, die mithilfe geometrischer Kenntnisse untersucht und beantwortet werden können.

Lange nach dem Zerfall des Römischen Reiches begann die Entwicklung eines mitteleuropäischen Städtesystems; im Zentrum standen die mittelalterliche Burg, die kaiserliche Pfalz oder ein Kloster, und die umgebende Ansiedlung legte sich in Ringen um diesen Mittelpunkt, ohne dass in den meisten Fällen ein Bebauungsplan eingehalten wurde, so dass sich diese Städte oftmals durch extrem enge Bebauung und einen willkürlichen, krummlinigen Straßenverlauf auszeichnen. Auch für solche Ringstrukturen kann Köln als Beispiel genutzt werden; neben den römischen Ursprungsstrukturen im Zentrum zeigt sie auch die spätere Ringstruktur noch immer besonders deutlich.

Heurismus der Strukturnutzung

Bauliche Merkmale von Städten kulturhistorisch erfassen, begreifen und interpretieren; Veränderungen untersuchen und den eigenen Lebensraum unter neuem Blickwinkel betrachten

Großstrukturen im eigenen Umfeld geometrisch beschreiben, funktionale Einheiten erkennen und auf ihre geometrische Gestaltung hin untersuchen; Rückschlüsse ziehen

Doch nicht nur der Blick in die ferne Vergangenheit unserer Städte kann den Blick auf die große Bedeutung der Strukturnutzung in Problemlösekontexten eröffnen: Die vertikale Nutzung von begrenzten Flächen ist eines der großen Themen des aktuellen Städtebaus. In asiatischen Großstädten spielen solche Vorstöße gerade auch mit Blick nicht nur auf eine

[564] Der Klett-Verlag berücksichtigt solche Perspektiven und gerade auch Raumanalysen in seinem Lehrwerk Terra und den begleitenden digitalen Materialien (https://www.klett.de/alias/1004616 [07.04.2017]).

effizientere Raumnutzung für Wohnraum, sondern auch für die Begrünung von Städten eine große Rolle. Hier verbinden sich ökologische mit architektonischen und geometrischen Fragestellungen und können unter unterschiedlichsten Gesichtspunkten für den problemlösenden Unterricht fruchtbar gemacht werden, etwa in Gestalt von Planung und Bau technisch realisierbarer Hochhausmodelle, die eine ganze Dorfgemeinschaft inklusive Grünanlagen und landwirtschaftlicher Nutzflächen (im Sinne des *Urban Gardening*) in sich vereinen.

Heurismus der Strukturnutzung

Entwicklungen in modernen Städten besonders mit Blick auf vertikale Nutzung bei begrenztem Flächenangebot	Dreidimensionale Städteplanung und Raumnutzung untersuchen und experimentell im Modell erkunden, Strukturelemente in neue Kontexte übertragen und geometrisch-mathematisch bearbeiten

Bevölkerungsstruktur – demographische Kenngrößen untersuchen

Ähnlich wie Städte kann auch die Bevölkerung nach unterschiedlichen demographischen Aspekten wie Alter, Geschlecht, Familienstand, Religion, oder Staatsangehörigkeit betrachtet und die jeweilige Verteilung graphisch dargestellt werden. Auch ist ein Vergleich der Bevölkerungsstruktur in verschiedenen Epochen oder Ländern möglich, so dass Ursachen für ein Wachstum oder einen Rückgang der Bevölkerung diskutiert werden können.

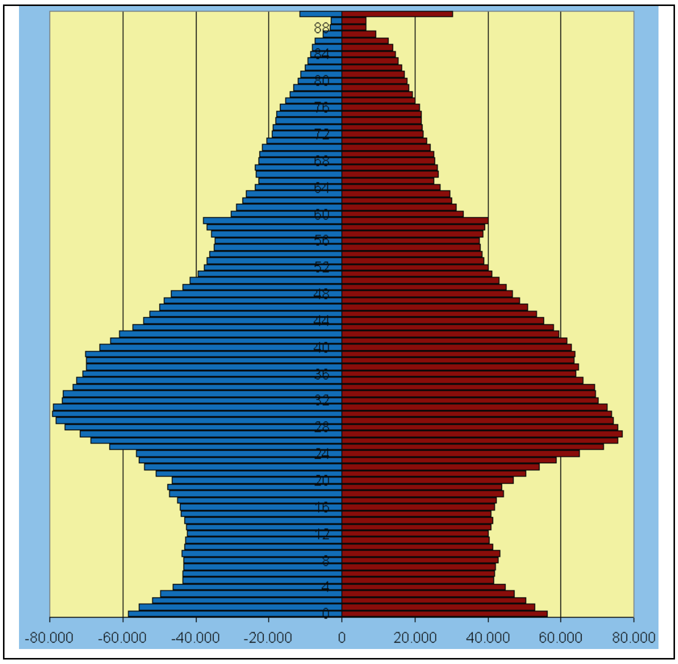


Abb. 124 Die Bevölkerungsstruktur Londons als Beispiel für eine Bevölkerungspyramide.[565]

Dabei übernehmen graphische Repräsentationsformen wie die Bevölkerungspyramide, Kreis- oder Balkendiagramm eine wichtig Funktion, da durch sie die Bevölkerungsstrukturen visuell erfasst werden können. Eine Nutzung von Flächeninhalten bzw. Längen als

[565] Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=55409247 [07.04.2017]

Repräsentanten ganz anderer Größen wird außerdem angebahnt oder vertiefend aufgegriffen. Gerade im Zusammenhang mit der Bevölkerungspyramide kann der strukturelle Aufbau untersucht und die Erkenntnis gewonnen werden, dass die Summe der dargestellten Balken (oder präziser aller dargestellten Längen/Flächeninhalte) der Gesamtbevölkerung entspricht. Hier ist ein Bezug zu Näherungsverfahren zur Flächeninhaltsbestimmung herstellbar.

Heurismus der Strukturnutzung

Merkmalsverteilungen in verschiedenen Bevölkerungen betrachten, untersuchen und interpretieren

Verfahren zur Merkmalserfassung und Darstellung ihrer Verteilung kennenlernen oder wieder einsetzen, Strukturen in herausarbeiten und interpretieren, Bezüge zu anderen mathematischen Teilgebieten herstellen

11.4.2 Kunst und Textiles Gestalten

Im Kunstunterricht an Schulen in Rheinland-Pfalz kann der *Heurismus der Strukturnutzung* auch in Verbindung mit dem Arbeitsbereich *Architektur – Gebäudegliederung*, vielfach zur Anwendung gebracht werden; Schüler sollen hier Einblicke in die Gebäudearten wie Häuser, Türme, Schlösser, Fabriken, Kirchen und Villen aus Gegenwart und Vergangenheit einerseits und in ihre Gliederungsmöglichkeiten durch Gestaltungselemente wie Treppenformen, Balkone, Fenster, Türen, Dachformen etc.[566] andererseits erhalten.

Ästhetik durch wiederkehrende Strukturen – Geometrie und Schönheit

Das Auffinden von strukturellen (architektonischen) Merkmalen ist hier der Schlüssel, um Zusammenhänge zwischen Gebäuden, Stilen und der ästhetischen Wirkung herzustellen und Gesetzmäßigkeiten innerhalb der Architektur zu erkennen. Diese regelhaft wiederkehrenden Strukturen können anschließend zur Beschreibung und Klassifizierung verschiedener Gebäudearten herangezogen werden (vgl. auch die Ausführungen zur städtebaulichen Strukturen in Kap. 11.4.1). Werden die Gebäudearten nicht nur nach einzelnen Gestaltungselementen, sondern in ihrer Gesamtheit untersucht, kann insbesondere die Symmetrie als Struktureigenschaften thematisiert werden (s. Abb. 125).

[566] Vgl. RHEINLAND-PFALZ 1998a: 21.


Abb. 125 Zwei Beispiele für Symmetrie in herrschaftlicher Architektur: Villa Hammerschmidt (links[567]), Schloss Schönbrunn (rechts [568]).

Die Beispiele lassen leicht erkennen, wie durch die Komposition einzelner geometrischer Elemente (Rundbögen, Säulen, verschiedene Fensterformen usw.) charakteristische Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten achsensymmetrischer Figuren bzw. Körper entstehen. die im Kunstunterricht im Zusammenhang vermittelt und auch produktiv angewandt werden können, wobei neben vielen anderen insbesondere die Fachbegriffe Spiegelachse, Achsensymmetrie und achsensymmetrisch gemäß der Leitidee *Raum und Form*[569] vollständig situiert erarbeitet werden können.

Heurismus der Strukturnutzung

Repräsentationsarchitektur aus verschiedenen Epochen und Stilen untersuchen, Gemeinsamkeiten feststellen; Symmetrie als wesentliches Gestaltungsmittel der Architektur erfahren	Symmetrieeigenschaften erfassen, erkunden und konstruktiv umsetzen, ästhetische Aspekte geometrischer Regelmäßigkeiten erkennen und nutzen

Piktogramme – Strukturvereinfachungen gezielt einsetzen

Der *Heurismus der Strukturnutzung* kann in analoger Weise im Arbeitsbereich *Design – Piktogramme*[570] sowohl bei der Beschreibung und Interpretation als auch bei der Entwicklung eigener Piktogramme thematisiert werden. Piktogramme sind bildhafte Darstellungen, die Objekte, Funktionen, Aktionen oder Prozesse abstrahieren und reprä-

---

567 Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Villa_Hammerschmidt_Bonn_Seite_Adenauerallee_20080831.jpg [07.04.2017]

568 Thomas Wolf, www.Foto-tw.de, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Schloss_Sch%C3%B6nbrunn_Wien_2014_(Zuschnitt_2).jpg [07.04.2017]

569 Vgl. RHEINLAND-PFALZ 2007: 32.

570 Vgl. RHEINLAND-PFALZ 1998a: 25.

sentieren, manchmal auch nur *pars pro toto*. Viele Piktogramme sind symmetrisch gestaltet und bieten einen möglicherweise vereinfachten Zugang zu Symmetriebetrachtungen für jüngere Schüler.

Abb. 126 Warnsymbol Funkwellen.

Andererseits ist die Bedeutungsdimension von Piktogrammen in ihrer Problematik nicht zu unterschätzen, wie Erfahrungen mit den Gefahrensymbolen in den naturwissenschaftlichen Fächern immer wieder zeigen. Missverständnisse sind bei Gebrauch von bildlichen Kürzeln immer möglich, und zum Einstieg sollten Beispiele aus dem unmittelbaren Lebensumfeld der Schüler gewählt werden. Abb. 126 zeigt exemplarisch das symmetrisch gestaltete Warnsymbol vor Radiowellen – ein Symbol, das möglicherweise viele Schüler zunächst (unter Nichtbeachtung der vereinheitlichten Warnfarbgebung) auch für einen Hinweis auf ein freies Wlan-Netzwerk halten könnten.

Viele solche gebräuchlichen Piktogramme weichen mehr oder weniger deutlich von einer vollständigen Symmetrie ab (Abb. 127). Sie lassen sich erweiternd zur Erforschung und Definition der Achsensymmetrie einsetzen, indem die Unterschiede erkannt und beschrieben werden. Im Anschluss können eigene Piktogramme zu verschiedenen Themenkreisen als Halbzeichnungen angelegt und dann zunächst durch eine praktische Spiegelung mithilfe eines realen Spiegels und anschließend durch einen geometrischen Konstruktionsvorgang vervollständigt werden.

Abb. 127 Warnsymbol brandfördernde Substanz.

Heurismus der Strukturnutzung

Symmetrieeigenschaften erforschen und zur Gestaltung einfacher und wiedererkennbarer Piktogramme einsetzen; die Abstraktion hinter Piktogrammen erfassen	Strukturen in abstrakten Darstellungen erkennen, und erforschen; Symmetrien auf Grundlage von Beispielen und Gegenbeispielen definieren und mit geometrischem Fachvokabular verknüpfen

Grafik – Die Geometrie des M. C. Escher

Auch der Bereich *Druckgrafik* bietet Möglichkeiten, den *Heurismus der Strukturnutzung* unter dem Blickwinkel der Symmetrie zu thematisieren. So sieht der rheinland-pfälzische

Lehrplan für die Orientierungsstufe die ornamentale Gestaltung von Flächen- oder Bandmusterungen mit Hilfe von Druck- und Stempeltechniken vor.[571] Hier kann der Symmetriebegriff erneut aufgegriffen und vertieft werden, indem verschiedene Flächen- und Bandmusterungen analysiert oder nach bestimmten (symmetrischen) Gesichtspunkten eigenständig erstellt werden.

Im Themenbereich Grafik eignen sich die Bilder des niederländischen Künstlers und Graphikers Maurits Cornelis Escher[572] besonders gut auch mit Blick auf die Punktsymmetrie (die bei architektonischen Kontexten sehr viel seltener in Erscheinung tritt). Escher schuf auf einfachen Spiegelungskonstruktionen beruhende, ausgesprochen komplexe Strukturen und ist für seine geometrisch-künstlerische Methode der Parkettierung und außerdem seine optischen Täuschungen bekannt. Hier bieten sich unzählige Anknüpfungspunkte für eine geometrisch-analytische Bearbeitung und Thematisierung struktureller Merkmale, die sich insbesondere bei seinen Flächengestaltungen gut untersuchen lassen. Schüler können durch eine angeleitete Untersuchung oder aber selbständig mit Hilfe der Schritt-für-Schritt-Darstellungen von Eschers Vorgehensweise bei der Entwicklung neuer Flächenornamente entdecken, welcher Zusammenhang zwischen verketteten Spiegelungen und der Verschiebung bzw. Punktspiegelung besteht (vgl. hierzu ausführlich Band A, Kap. 7.3.2) Durch enaktive und ikonische eigene Spiegelungen auf Ausschnitten von Eschers Werken lassen sich ebenfalls Einsichten gewinnen oder Vermutungen untermauern.

Der hohe ästhetische Wert und das Erstaunen, das seine Graphiken nicht nur bei der ersten Betrachtung auslösen, machen Eschers Arbeiten zu einem im unterrichtlichen Kontext besonders gut geeigneten und motivierenden Ansatzpunkt auch für mathematische Untersuchungen, die mit dem Ziel angestellt werden können, selbst vergleichbare Kunst zu schaffen.

Heurismus der Strukturnutzung

Graphik als Kunstform kennenlernen und beschreiben, verschiedene ornamentale Gestaltungsvarianten benennen und Umsetzungstechniken erproben		Symmetrien unterschiedlicher Art in Parkettierungen erkunden, beschreiben und ihre Herstellung rekonstruieren

[571] Vgl. Rheinland-Pfalz 1998a: 27.
[572] Meist M. C. Escher abgekürzt, *1898 in Leeuwarden, †1972 in Hilversum, war ein niederländischer Grafiker, der vor allem durch seine Flächenfüllungen und seine unmöglichen Figuren bekannt wurde.

11.4.3 Naturwissenschaften

Der Rahmenplan für Naturwissenschaft in Rheinland-Pfalz greift an mehreren Stellen den Begriff der Struktur auf, so dass der *Heurismus der Strukturnutzung* vielfach zum Einsatz kommen kann. Die Schüler sollen unter anderem Kristallstrukturen unterscheiden können, Strukturen im Weltall[573] erkennen und Modelle wie Papierflieger, Schwimmkörper, Beuger- und Strecker entwickeln, bauen und optimieren, um dabei Zusammenhänge zwischen Struktur und Funktion zu erforschen und darzustellen.[574] Auch Lebewesen, die sich in Körperbau und Bewegung an ihren Lebensraum angepasst haben (wie Vögel oder Fische), können auf ihre Strukturen hin miteinander verglichen oder die Zellstruktur von Pflanzen analysiert werden. Vergleicht man beispielsweise die Blätter von Schatten- und Sonnengewächsen miteinander, können die unterschiedlichen Blattstrukturen herausgearbeitet werden, die die Funktionsweise der Pflanze maßgeblich beeinflussen. Beim Thema *Stoffe* lernen die Schüler, dass sich Stoffe strukturell voneinander unterscheiden und dass Stoffe ihre Struktur verändern können (Aggregatzustand), wobei der Strukturbegriff auf vielfältige Weise eine Rolle spielt.

Das menschliche Skelett – Anatomische Strukturen und Raumorientierung

Struktureigenschaften lassen sich in der Orientierungsstufe sehr gut am menschlichen Körper erforschen. Der Skelettapparat ist symmetrisch angelegt und erfüllt dadurch bestimmte Funktionen (Abb. 128, links). Die Lage- und Richtungsbezeichnungen des Körpers dienen in der Anatomie zur Beschreibung der Position, der Lage und des Verlaufs einzelner Strukturen.

Das Fachgebiet der Anatomie erfordert die eindeutige Beschreibung von Positionen und Bewegungen des menschlichen Körpers. Während sich die standardsprachlichen Bezeichnungen (wie oben/unten) je nach Körperposition ändern können, sind die fachanatomischen Lagebezeichnungen relativ zum Körper und damit unabhängig von seiner Position definiert. Die Beschreibung erfolgt dabei durch Referenzierung dreier orthogonal angeordnete Ebenen, deren Schnittpunkt im Körperschwerpunkt liegt (s. Abb. 128, rechts). In der Anatomie tragen diese drei Ebenen die Bezeichnungen Frontalebene, Sagittalebene und Transversalebene, deren paarweise Schnittgeraden die drei Körperachsen (Körperbreitenachse, Körpertiefenachse und Körperlängsachse) definieren – sie entsprechen dem Konzept der mathematischen Raumbeschreibung der analytischen Geometrie.

[573] Vgl. Rheinland-Pfalz 2010: 23.
[574] Vgl. Rheinland-Pfalz 2010: 26

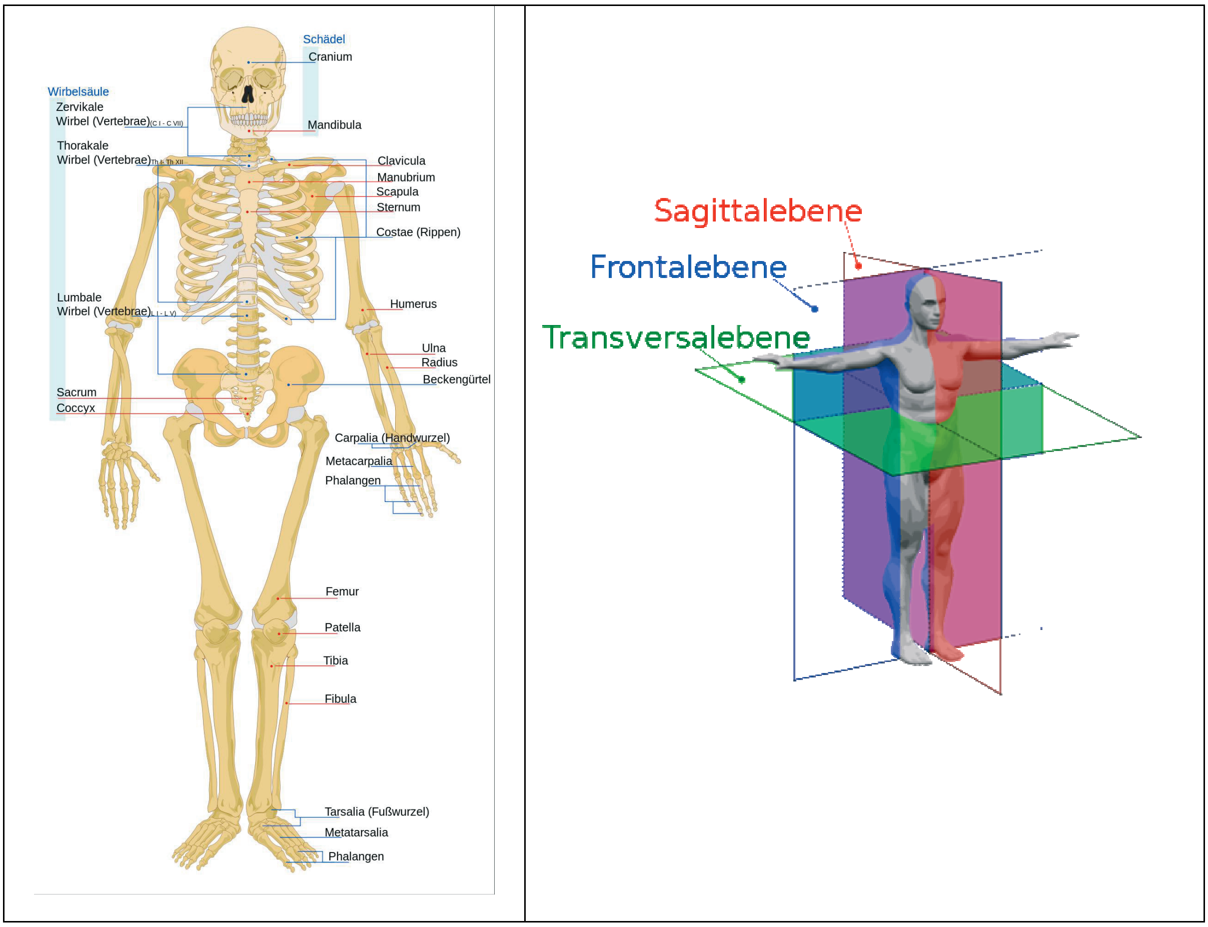


Abb. 128 Menschliches Skelett (links[575]) und anatomische Grundposition (rechts[576]).

Von anatomischen Untersuchungen ausgehend lassen sich mithin die analogen Verfahren der dreidimensionalen Beschreibung und Darstellung in der Geometrie erarbeiten und auch zu den auf Koordinaten basierende Repräsentationsformen Verbindungen herstellen.

Heurismus der Strukturnutzung

Anatomische Grundbegriffe kennenlernen und die Orientierung am (menschlichen) Körper durch drei Ebenen bzw. Achsen als wirksames Instrument erfahren	Räumliche Orientierung und genaue Positionsbeschreibungen im anatomischen Kontext erkunden und kennenlernen, Transfer auf den geometrischen Raum

Botanische Systematik – Identifizierung durch Strukturmerkmale

Systematiken spielen in der Biologie ebenso wie in anderen natur- und geisteswissenschaftlichen Fächern eine große auch wissenschaftsgeschichtliche Rolle. Die hier nur exemplarisch ausgeführten Ideen lassen sich insbesondere auch auf geologische Frage-

575 Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Human_skeleton_front_de.svg [07.04.2017]
576 Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Human_anatomy_Koerperebenen.svg [07.04.2017]

stellungen übertragen. Als Beispiel soll hier die systematische Betrachtung von einheimischen Bäumen dienen, die sich in den naturwissenschaftlichen Unterricht der Orientierungsstufe mit ihren lebensnahen Themenfeldern nahtlos einfügt.

Die Bestimmung heimischer wie auch exotischer Laubbäume kann durch die genaue Untersuchung verschiedener Bestandteile wie Blätter, Blüten, Früchte, Rinde bzw. Borke oder Knospen erfolgen. Um die Blattmerkmale zu erfassen, ist eine genaue Analyse der Blattstellung, der Blattform, des Blattrands und der Blattanordnung am Zweig erforderlich. Bei der Stellung der Blätter wird zwischen gegenständig und wechselständig unterschieden. Die Blattform reicht von gelappt über gebuchtet, herzförmig, eiförmig, rundlich, dreieckig, lanzettlich bis hin zu fächerförmig. Der Rand wird danach unterschieden, ob er ganzrandig, gesägt, gekerbt, gezähnt oder gelappt ist. Darüber hinaus können Blätter nach Merkmalen wie einfach oder zusammengesetzt sowie als unsymmetrisch oder symmetrisch unterschieden werden. Auf diese Weise kann eine Hierarchie, analog zu der im Haus der Vierecke (vgl. Band A, Kap. 7.3.3), aufgebaut werden. Viele Lehrwerke für den naturwissenschaftlichen Unterricht bieten zur strukturierten Durchführung einer solchen Untersuchung Flussdiagramme an, die schrittweise die oben beispielhaft genannten und noch viele weitere Merkmale abfragen, um so letztlich botanisch präzise die vorliegende Art zu bestimmen.

Hier wird nicht nur der *Heurismus der Strukturnutzung* explizit angesprochen, sondern auch die heuristische Technik *Erstellen graphischer Repräsentationsformen* sowie der *Heurismus des systematischen Probierens*. Außerdem spielen gute geometrische Kenntnisse bei der Beschreibung eine ganz entscheidende Rolle, denn nur mit einem gut entwickelten Vokabular und der Fähigkeit, Merkmale mit Blick auf Symmetrien und räumliche Verteilungen klar zu identifizieren, können die Herausforderungen der botanischen Bestimmung erfolgreich bewältigt werden.

	Heurismus der Strukturnutzung	
Erwerb eines grundlegenden Verständnisses für strukturbezogene Analyse zur kriteriengeleiteten Identifizierung im Sinne der botanischen Systematik; Durchführung praktischer Pflanzenbestimmungen		Einsatz geometrischer Fachkenntnisse zur kriteriengeleitete Strukturanalyse, geometrische Merkmale als definitorische Merkmale in unterschiedlichen Kontexten begreifen

11.4.4 Sport

Dem Sportunterricht kommt eine besondere Rolle in der Erfahrenswelt der Schüler zu, da hier eine deutlich andere Gruppe von Fertigkeiten und Fähigkeiten zum Tragen kommt als in den meisten anderen Schulfächern. Dass sich trotzdem auch hier (ungewöhnlichere) Anlässe für das Lösen geometrischer Problemstellungen ergeben, ist in den vorstehenden Kapiteln bereits deutlich geworden. Wenngleich das räumliche Vorstellungsvermögen bereits sehr früh vorgeprägt wird und maßgeblich von den physischen Erfahrungen im Kleinkindalter abhängt, kann der Sportunterricht der Sekundarstufe I durch gezielte Verknüpfung mit mathematisch-geometrischen Aspekten eine Verbesserung der räumlichen Orientierung und des grundlegenden Verständnis räumlicher Strukturen anstreben.

Raum und Körper – Symmetrien mit Körpern erzeugen

Die Symmetrie spielt im Sportunterricht in Bezug auf verschiedene Funktionen der Bewegung (beispielsweise expressive und soziale Funktion[577]) eine Rolle. Die physische Auseinandersetzung mit dem Thema Symmetrie kann Bewusstsein für die Funktionen des eigenen Körpers schaffen, und „ein vertieftes mathematisches Verständnis von Symmetrie unterstützt die Beidseitigkeit der Gliedmassen und deren Bewegungsvielfalt, verbessert die Wahrnehmung des eigenen Körpers und eigenen Körperschemas, trägt dazu bei, den eigenen Körper gleichsam von aussen im Verhältnis zum Raum wahrzunehmen, und sich der eigenen Position im Spielfeld bewusst zu werden“ (VALSANGIACOMO et al. 2015: 3).

Neben dieser individuellen Anwendung kann der *Heurismus der Strukturnutzung* auch zum Tragen kommen, indem Schüler in Gruppen einfache oder auch mehrfache achsen- oder drehsymmetrische Figuren mit ihren eigenen Körper darstellen, die von anderen Schülern identifiziert und benannt werden. Für das Anfertigen einer (Planungs-)Skizze aus verschiedenen Perspektiven ist nicht nur ein ausreichendes Abstraktionsvermögen notwendig, sondern auch die Fähigkeit, dreidimensionale Sachverhalte zweidimensional und in vereinfachter Form darzustellen. Durch die so erzeugten graphischen Darstellungsformen können weitere Aussagen zu Symmetrieeigenschaften und Strukturen gemacht oder Fragestellungen untersucht werden. Unmittelbar um die dynamische Komponente erweiternd kann der *Heurismus der Strukturnutzung* auch beim Thema *Tanz* zum Einsatz kommen, wenn Choreographien erarbeitet werden, die nach bestimmten Mustern

[577] Die expressive Funktion von Bewegung umfasst die Möglichkeit, Gefühle durch Bewegungen auszudrücken und auszuleben, die soziale Funktion von Bewegung meint die Möglichkeit, seinen eigenen Körper in seinen Möglichkeiten und Grenzen kennenzulernen, ein Selbstbild zu entwickeln, aber auch sich mit anderen in körperlicher Weise auseinanderzusetzen.

ablaufen. Hierbei lassen sich kurze Sequenzen in Form eines (abstrakten) Musters in körperliche Bewegungen umsetzen, so dass infolge dessen Bandornamente erzeugt werden, womit erneut an den Symmetriebegriff angeknüpft werden kann.[578]

Heurismus der Strukturnutzung

Funktionen von Bewegung und die Symmetrie als eine Ausdrucksmöglichkeit des menschlichen Körpers erkunden

Unterschiedliche physische Umsetzung von Symmetrien erproben, symmetrische Gruppenstellungen – auch mit dynamischen Elementen – planen und durchführen

Fußball und Strategie – Optimierungsfragen beim Fußball

Und auch beim Fußballspielen (und vielen weiteren Ballsportarten) kann der *Heurismus der Strukturnutzung* sinnvoll thematisiert werden, beispielsweise wenn es darum geht, das optimale Stellungsspiel und insbesondere die beste Schussposition zu bestimmen. Durch Experimente auf dem Spielfeld können die Schüler ermitteln, dass die Schussposition dann am günstigsten ist, wenn das Tor unter einem möglichst großen Winkel gesehen wird. Die Güte der Position (also die Größe des Winkels) wird durch die zwei Einflussgrößen Entfernung von der Torlinie und Abweichung von der Längssymmetrieachse des Spielfelds bestimmt. Während der Torschütze den zur Verfügung stehenden Winkelbereich optimieren möchte, versucht der Torwart dies zu verhindern, indem er dem Schützen entgegenläuft und so den Torschusswinkel beeinflusst.[579]

Auch Fragstellungen rund um die beste Anzahl von Spielern in einem Team können durch strukturelle Analysen des zur Verfügung stehenden Spielfeldflächeninhaltes mathematisch und geometrisch untersucht werden, wobei der Aktionsradius eine Rolle spielt, der wiederum von einer Vielzahl von Faktoren abhängt. Auf die Möglichkeiten, die sich mit Blick auf Strategieüberlegungen ergeben, wurde bereits hingewiesen.

Heurismus der Strukturnutzung

Strategieverbesserung durch Einsichten in die mathematischen Hintergründe optimaler Positionswahl

Untersuchung der räumlichen Strukturierungsvarianten eines Spielfeldes mit Blick auf Schusswinkeloptimierung / Spielerverteilung

[578] Vgl. Valgiacomo et al. 2015.
[579] Idee nach FWU Institut, http://dbbm.fwu.de/fwu-db/presto-image/beihefte/55/016/5501635.pdf [07.04.2017]

11.5 Heurismen der konkreten Handlung: systematisches Probieren

Das systematische Probieren bezeichnet ein zielgerichtetes, planvolles und strukturiertes Vorgehen, bei dem die einer Problemstellung zugrundeliegenden Variablen ausgewählt, abgeändert oder ausgeschlossen werden, so dass die sich dadurch ergebenden Veränderungen Rückschlüsse auf die Struktur des Problems ermöglichen, die schließlich zur Problemlösung genutzt wird.

11.5.1 Gesellschaftslehre

Der Rahmenlehrplan Rheinland-Pfalz für Gesellschaftslehre führt neben den Kompetenzen die vier Methodenbereiche

1. Gewinnen, Analysieren und Interpretieren von Daten, Aussagen und Zusammenhängen
2. die produktorientierte Gestaltung und Präsentation
3. das simulative Handeln und Erfahren sowie
4. das reale und außerschulische Handeln und Erfahren

an, denen verschiedene verbindlich zu erwerbende Methoden zugeordnet werden.[580] Viele der dort benannten Methoden setzten ein systematisches Vorgehen voraus, so dass der *Heurismus des systematischen Probierens* als ein zielgerichtetes, planvolles und strukturierten Vorgehen in praktisch allen diesen Zusammenhängen begründet eingeführt werden kann. Die in Kapitel 11.1.1 bereits angesprochene Zeitzeugenbefragung, das Durchführen eines Interviews, einer allgemeine Befragung, Umfrage oder Debatte erfordern eine gute Vorbereitung, um repräsentative Ergebnisse zu erzielen, und auch das Durchführen von Experimenten oder Simulationen sollte im Vorfeld planerisch durchdacht und logisch aufgebaut sein.

Wege planen – mit System zum Ziel

Ein ergiebiges Thema zur Vermittlung und Vertiefung des systematischen Probierens ist das Themenfeld *Reisen und Erholung*, das zudem auch viele geometrische Vernetzungspunkte bietet. Reisewege und Transportlinien können nach verschiedenen Kriterien verglichen werden; durch Forscheraufgaben kann beispielsweise die kürzeste oder schnellste Verbindung zwischen verschiedenen Orten unter Einbezug der Tabelle als Strukturierungshilfe ermittelt werden. Gesamtlängen oder -fahrzeiten von (angenäherten)

[580] Rheinland-Pfalz 2013: 28.

Streckenzügen spielen hier ebenso eine Rolle wie die planmäßige Variation unterschiedlicher abzufahrender Zwischenhalte.

Stilisierte Pläne wie die von U-Bahnen oder Fernverkehrsverbindungen eignen sich gut für eine erste solche (auf Fahrzeiten oder Anzahl der Zwischenhalte bezogene) Untersuchungen, da sie visuell entlastet sind. In einem nächsten Schritt können diese schematischen Kartendarstellungen maßstäblichen Stadtplänen gegenübergestellt und auf Vor- und Nachteile hin verglichen werden. Auf solche maßstäblichen, aber komplexeren Darstellungen bezogen kann das systematische Probieren dann beim Erkunden der dargestellten Stadt und beim Auffinden von Einrichtungen und Sehenswürdigkeiten eingesetzt werden. Hier lässt sich der Bezug zur Schülerrealität ausgezeichnet herstellen, und es lassen sich schüleraktive Szenarien für die Gestaltung eines Rundgangs einsetzen, der im Idealfall im Rahmen eines Wandertages dann auch realisiert wird.

Die Beschäftigung mit Fragestellungen dieser Art eröffnet außerdem Wege in wirtschaftliche und ökologische Diskussionen, wenn es um Energie- und Zeiteffizienz durch optimierte Streckenwahl geht. Die Möglichkeiten, hier weitere Einflussgrößen einzubinden, die erneut durch systematische Veränderungen in ihrer Auswirkung auf das Gesamtproblem untersucht werden können, sind ausgesprochen vielfältig und erlauben Bezüge zu Kontexten vieler weiterer Sachfächer.

Heurismus des systematischen Probierens

Fahrten mit unterschiedlichen Verkehrsmitteln nach bestimmten Kriterien wie Reisezeit, Gesamtstrecke, Zwischenhalte, Energiebedarf, Kosten usw. planen, untersuchen und optimieren	Schematische und maßstäbliche Darstellungen zur Optimierung von Streckenplanungen nutzen; systematische Veränderungen auf ihre Auswirkungen hin überprüfen und geeignete Notationsformen finden

11.5.2 Kunst und Textiles Gestalten

Im Rahmen des Arbeitsbereiches *Werken* lernen die Schüler früh verschiedene Materialien wie Ton, Papier, Karton, Metall, Holz, Naturstein und Kunststoffe kennen. Dass alle diese Werkstoffe unterschiedliche Eigenschaften besitzen, dürfte den meisten Schülern zwar bewusst sein, eine systematische Untersuchung haben sie aber in der Regel noch nicht vorgenommen.

Materialprüfung – Merkmale systematisch erkunden

Als erster Zugang nicht nur zum Heurismus, sondern auch zu grundlegenden naturwissenschaftlichen Arbeitsweisen werden die Materialien in einer Reihenuntersuchung nach vorgegebenen und gegebenenfalls durch die Schüler ergänzten Methoden untersucht. Forschungsfragen können sich auf die Eignung für verschiedene Einsatzgebiete, aber auch Gestaltungs- oder Veränderungsmöglichkeiten beziehen; die Ergebnisse lassen sich am besten tabellarisch sammeln, so dass beispielsweise folgende Übersicht entsteht:

	kneten	**Falten**	**schneiden**	**biegen**	**schnitzen**	**reißen**	**ritzen**	**….**
Ton	x		x				x	
Papier		X	x			x		
Karton		X	x			x		
Holz					x		x	
…								

Tab. 31 Beispiel zur Erfassung von Merkmalen verschiedener Werkstoffe durch systematisches Probieren.

Auf diese Weise können (mittelfristig) Einsichten in den Zusammenhang von Form, Funktion, Material und anwendbare Werkzeuge gewonnen werden, wie sie dem Lehrplan nach gefordert werden.[581] Außerdem ist die Wiederverwendbarkeit dieser Vorgehensweise einsichtig und unkompliziert möglich, etwa wenn in anderen Fächern andere Arten von Objekten erforscht werden sollen. Auch wenn in diesem Beispiel nicht primär ein geometrischer Bezug angelegt ist, kann dieser etwa bei der Untersuchung von verschiedenen Werkzeugen einfließen, deren geometrische Gestaltung (Form des Querschnitts) unmittelbaren Einfluss auf ihre technischen Eigenschaften hat.

Heurismus des systematischen Probierens

Werkstoffe (oder beliebige andere fachbezogene Objekte) systematisch – möglichst mit Blick auf eine zu bewältigende Problemstellung – hin untersuchen

Einfache Variationen erproben und systematische Notation einüben, geometrische Eigenschaften von Objekten erfassen und ihre Auswirkungen untersuchen

Farbmischungen – Verhältnisse systematisch variieren

In Zusammenhang mit der Malerei lernen die Schüler, „dass Farben durch Beimischen von Schwarz, Weiß und ihrer Nachbarfarben differenziert werden können“ (RHEINLAND-

[581] RHEINLAND-PFALZ 1998a: 33.

PFALZ 1998a: 29). Mit Hilfe des systematischen Probierens lassen sich verschiedene Farbtöne erstellen, gemäß ihrer Farbanteile klassifizieren und notieren bzw. in einem Raster sammeln.

Die Bilder Richard Paul Lohses[582] zeichnen sich durch ihre konstruktivistischen Gestaltungsregeln aus, die einer strengen Ordnung sowohl der Farbverteilung als auch der Gleichwertigkeit der einzelnen Farbtöne folgen. Grundlage sind meist quadratische Basismodule, die die Bilder strukturieren. So zeichnete Lohse ein Quadrat, das er in neun kleinere Quadrate unterteilte. Dabei benutzte er drei verschiedene Farben nach der Regel, dass nie zwei Quadrate der gleichen Farbe in einer Zeile oder einer Spalte vorkommen. Unter Nutzung des systematischen Probierens können Bilder nach denselben Gestaltungsregeln von den Schülern angefertigt werden. Darauf aufbauend können weitere Fragestellungen wie die nach der Anzahl der Möglichkeiten, wenn vier oder fünf verschiedene Farben verwendet werden dürfen, formuliert und als Forscheraufgaben an die Schüler gegeben werden. Außerdem erlaubt die Beschäftigung mit solchen formal sehr einfachen, klar zu beschreibenden und relativ schnell zu erstellenden Kunstwerken auch eine interessante Untersuchung der Farbwirkungen: systematische farbliche Variationen bei gleichbleibender Grundstrukturierung können auf ihre Wirkung auf den Betrachter hin untersucht werden; Ergebnisse können wiederum mit den bereits bekannten Mitteln und Methoden der statistischen Datenerfassung und -analyse erzielt und ausgewertet werden, um ein tiefgreifendes Verständnis von der Wirkung bestimmter Mischtöne zu erhalten – und zu erfahren, dass es intersubjektive Assoziationen zu bestimmten Farbtönen gibt, was zu einer Beschäftigung auch mit wahrnehmungspsychologischen Themen anregen mag.

Heurismus des systematischen Probierens

Gezieltes Mischen von Farbtönen einüben, Zusammenstellungen von Farben in ihrer Wirkung untersuchen, gestalterische Vorgaben einhalten

Farbmischungen planvoll erproben und in einem Farbraster systematisieren, Farbwirkungen statistisch erfassen und darstellen

11.5.3 Naturwissenschaften

Wie eingangs gesagt spielt das systematische Probieren in vielen Wissenschaften eine fundamentale Rolle bei der Erkundung neuer Bereiche oder bei der Suche nach Optimie-

[582] Richard Paul Lohse, *1902 , †1988 in Zürich, wichtiger Vertreter der konkreten und konstruktiven Kunst.

rungsmöglichkeiten. Dies gilt insbesondere, wenn sich der allgemeintheoretische Zugang, beispielsweise in Form rechnerischer Modellierung, noch nicht offenbart hat oder aufgrund fehlender Kenntnisse gar nicht zur Verfügung steht. Das erste der folgenden Beispiele könnte auch rechnerisch bearbeitet werden, würde dabei jedoch viel von seiner Eindrücklichkeit einbüßen.

Ernährungsvarianten – Nährstoffzusammensetzung und –menge untersuchen

Die in den Lebensmitteln enthaltenen Nährstoffe Kohlenhydrate, Proteine und Fette sind für den Körper unentbehrlich. Kohlenhydrate bilden die wichtigste Energiequelle für den Körper, während Proteine als Baustoff für die Zellen notwendig sind. Fette sind die energiereichsten Nährstoffe und für den Erhalt lebenswichtiger Organfunktionen unentbehrlich. Eine Ernährung gilt als ausgewogen, wenn sie alle notwendigen Nährstoffe (und andere funktionale Inhaltsstoffe) in einem bestimmten Mengenverhältnis enthält und außerdem die Energiezufuhr dem Bedarf angepasst ist. Steigende Zahlen übergewichtiger Kinder und Jugendlicher sprechen für eine frühe, intensivierte und umfassende Gesundheitserziehung (die grundsätzlich nicht fachgebunden gedacht werden sollte).

Um den Schülern ein angemessenes Gefühl für eine ausgewogene Ernährung zu vermitteln, kann der Heurismus des systematischen Probierens sinnstiftend eingesetzt werden. Wird der Kalorienverbrauch eines Teenagers individuell in Form eines Rechtecks und die Kaloriengehalte (gegebenenfalls ergänzt durch die Darstellung der Nährstoffanteile und des Gewichts der Portion) der in der Ernährungspyramide enthaltenen Lebensmittel als rechteckige Karten dargestellt, können mögliche Nahrungsmittelkonstellationen systematisch erschlossen und überprüft werden. Eine besondere Stärke dieser Untersuchung liegt darin, dass die Schüler ganz unmittelbar und sehr anschaulich den Zusammenhang zwischen Kalorien, Nährstoffen und der Menge an Nahrung erfahren.

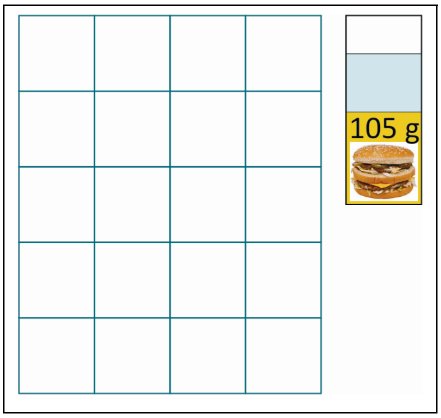


Abb. 129 Schematische Darstellung des Tagesenergiebedarfs und des Energie-/Nährstoffgehalts eines Lebensmittels.

Eine Zwölfjährige mit einem Gewicht von 45 kg bei einer Körpergröße von 1,50 m und einem mäßig aktiven Tagesablauf einen Kalorienbedarf von ca. 2000 kcal,[583] der sich gut als Rechteck mit einem Flächeninhalt von 20 cm^2

[583] Ermittelt mit dem Berechnungswerkzeug der TK-Krankenkasse, der unter https://www.tk.de/tk/essen-und-wissen/bausteine-der-ernaehrung/tagesbedarfsrechner/67782 [07.04.2017] kostenfrei genutzt werden kann.

darstellen lässt (Abb. 129). Nun können häufig konsumierte Lebensmittel untersucht und entsprechende Kärtchen gestaltet werden, deren Flächeninhalt ihrem jeweiligen Gesamtenergiegehalt entspricht, wie etwa ein Hamburger mit 250 kcal (Flächeninhalt 2,5 cm^2). Neben dem reinen Energiegehalt dieser Lebensmittel kann auch die Zusammensetzung der enthaltenen Energie durch farbige Markierungen dargestellt werden. Der Hamburger besteht zu 30 g aus Kohlenhydraten, was ungefähr 120 kcal entspricht, die gelb markiert wurden, die 8,5 g Fett liefern 80 kcal (hellblau) und die restlichen 50 kcal (weiß) stammen aus 13 g Proteinen. Das Kärtchen liefert schriftlich außerdem die Information, dass die Portion 105 g wiegt.

Wurden individuell repräsentative Lebensmittel auf diese Weise graphisch aufbereitet, lässt sich durch Auslegen und systematische Variation lebensnah und mit vielen möglichen weiterführenden Fragestellungen das Essverhalten untersuchen. Es ist zu betonen, dass schon die Vorbereitungen eine intensive inhaltliche wie mathematische Auseinandersetzung mit Lebensmitteln, Energiegehalt und der geometrischen Darstellung sowie mit den eigenen Essgewohnheiten befördern.

Gerade wenn die möglichen Zusammenstellungen von Lebensmitteln in einer Tabelle

protokolliert werden, fällt bald auf, dass bei geschickter Nahrungsauswahl weitaus mehr (im Sinne der zugeführten Masse) gegessen werden kann, wohingegen Lebensmittel mit hoher Energiedichte (großer Flächeninhalt bei geringem Gewicht) nur geringe Verzehrmengen erlauben, will man den Tagesenergiebedarf nicht überschreiten.

Heurismus des systematischen Probierens

Physiologische Grundlagen der Ernährung verstehen, das eigene Essverhalten untersuchen und reflektieren, Kenntnisse über Nährstoffe und deren Bedeutung gewinnen, verschiedene Ernährungsmodelle miteinander vergleichen und auf Vor- und Nachteile hin überprüfen

Verschiedene Größen (Energiegehalt, Nährstoffe, Masse) graphisch darstellen und zueinander in Beziehung setzen; durch systematisches Probieren verschiedene Konfigurationen ermitteln, die bestimmten Anforderungen genügen, diese einschätzen und kritisch reflektieren

Elektrizität – Logik des Stroms

Auch in ganz anderen Zusammenhängen spielt im naturwissenschaftlichen Unterricht das systematische Probieren eine Rolle. In der Orientierungsstufe erforschen die Schüler in der Elektrizitätslehre einfache Stromkreise, stellen eigene her und zeichnen entsprechende

Schaltpläne. Der Schaltplan ist eine abstrahierte Darstellung einer elektrischen Schaltung in Form definierter Symbole für die einzelnen Bauelemente und deren elektrische Verschaltung. Der *Heurismus des systematischen Probierens* lässt sich hier auf verschiedene Weise nutzen. Ausgehend von einem Stromkreis können unterschiedliche Festkörper wie Kupfer, Glas, Aluminium, Eisen, Holz, Kohle und Kunststoffe oder Flüssigkeiten wie Wasser, Öl, Säure, Laugen und Salzwasser systematisch auf ihre Leitfähigkeit hin untersucht und in Leiter und Nichtleiter eingeteilt werden (vgl. Kap. 11.5.2).

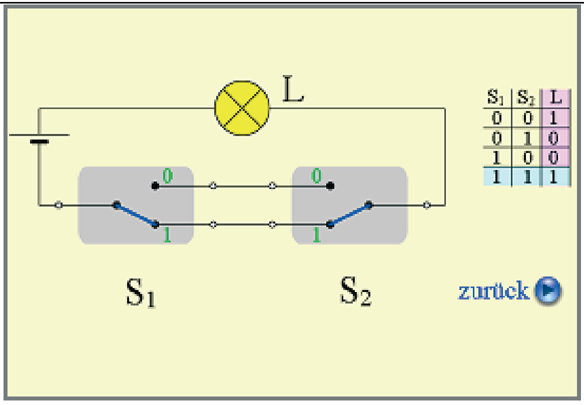


Abb. 130 Schaltplan zur Funktionsweise eines Schaltkreises mit Wechsel-Schalter-System.[584]

Schaltpläne können aufgrund ihres statischen Moments nur eine bestimmte Situation darstellen. Auf dieser Grundlage und unter Verwendung des systematischen Probierens können Schaltpositionen getestet und ihre Auswirkungen festgehalten werden. Um die Schaltzustände eines Stromkreises zu dokumentieren, werden Schalttabellen eingeführt, in denen die Schaltpositionen aller verbauten Schalter und der daraus jeweils folgende Status der Lampe durch genormte Einträge[585] festgehalten werden (Abb. 130, rechter Rand). Die Informationskodierung durch 0 und 1 kann zu einem späteren Zeitpunkt aufgegriffen und mit Blick auf die digitale Technik vertiefend behandelt werden.

Insgesamt bietet das Thema Stromkreise und Schaltungen sowohl in technisch-praktischer wie in zeichnerischer Umsetzung ein reizvolles Umfeld, logische und systematisierende Denkweisen zu schulen und Dokumentationskonventionen einzuüben, die auch in anderen Zusammenhängen genutzt werden können.

Heurismus des systematischen Probierens

Verschiedene Materialien auf Leitfähigkeit überprüfen; unterschiedliche elektrische Schaltungen untersuchen und unterscheiden

Systematisch Bedingungen in Systemen variieren und Ergebnisse festhalten; logische Schlüsse aus den Beobachtungen nutzen, um Vorhersagen zu machen

[584] Frei zum Download verfügbar: http://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/einfache-stromkreise/downloads [07.04.2017]

[585] Geöffneter Schalter erhält den Wert 1, ein geschlossene den Wert 0. Eine leuchtende Lampe erhält den Wert 1 und eine nichtleuchtende den Wert 0.

11.5.4 Sport

Der Sportunterricht bietet auch für das systematische Probieren ein interessantes und vielfältiges Anwendungsgebiet. Ein reguläres Fußballfeld misst zwischen 45 und 90 Meter in der Breite und zwischen 90 und 120 Meter in der Länge. Eine rechteckige Form ist zudem Pflicht. Mit diesen Angaben können Fragen nach dem kleinstmöglichen oder größtmöglichen Umfang und Flächeninhalt eines regelkonformen Fußballfelds gestellt werden, für die der *Heurismus des systematischen Probierens* unter Verwendung einer Tabelle oder Liste als Strukturierungshilfe Lösungen liefert.

Teams wählen – Kombinatorik im Sport

Doch auch anspruchsvollere und weniger augenfällig auf geometrische Grundformen bezogene Problemstellungen können Teil des Sportunterrichts sein. So lassen sich hier auch erste kombinatorische Aufgaben über das systematische Probieren lösen. Für praktisch alle Teamsportarten kann die Frage nach möglichen Gruppen- oder Mannschaftszusammensetzungen gestellt werden: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus vierundzwanzig Schülern sechs Teams mit je vier Spielern zusammenzustellen? Wieviele Aufstellungsvarianten gibt es für elf (gesetzte) Fußballfeldspieler? Solche Überlegungen können im Sportunterricht angestellt und diskutiert werden.

Neben den reinen Ergebnissen regen solche Fragestellungen insbesondere auch zur kritischen Auseinandersetzung mit Problemszenarien insgesamt an. Schließlich ist die Aufstellung bestimmter Spieler auf bestimmten strategischen Positionen keine rein zufällige Entscheidung, und auch die Zusammensetzung von Mannschaften erfolgt nach bestimmten Gesichtspunkten, die oft wenig mit dem Zufall zu tun haben (sondern ebenso sehr von sozialen Faktoren abhängen wie von den spielerischen Fähigkeiten). Die Reflexion der heuristischen Vorgehensweise fällt hier leichter, da die Problematik der mathematischen Bearbeitung aus dem Erfahrungsschatz der Schüler unmittelbar einsichtig ist.

Heurismus des systematischen Probierens

Unterschiedliche Teamzusammenstellungen erproben und der Frage nach der Anzahl möglicher Teams (unter vorgegebenen Rahmenbedingungen) nachgehen	Systematisch Kombinationen nach vorgegebenen Regeln bilden, Strukturen erkennen und dokumentieren; kritisch die Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse hinterfragen und die Bedingtheit mathematischer Modellbildung erfassen und verbalisieren

Sportgeräte untersuchen – zusammengesetzte geometrische Körper erkunden

Abb. 131 Aus achtzehn Streifen zusammengesetzter, genähter Beachvolleyball.[586]

Darüber hinaus können auch sportbezogene Fragen wie *Kann ein Fußball nur aus Drei-, Vier-, Fünf- oder Sechsecken bestehen?* oder *Aus welchen geometrischen Formen kann ein Fußball zusammengesetzt werden?* in Verbindung auch mit technisch-handwerklichen Fächern unter Einsatz des *Heurismus des systematischen Probierens* untersucht und beantwortet werden. Allgemeinere Fragestellungen zu platonischen und anderen geometrischen Körpern, deren Beschreibung und Klassifizierung lassen sich dabei ebenso integrieren wie die Nutzung unterschiedlicher heuristischer Hilfsmittel zur Dokumentation oder der *Heurismus des Vorwärtsarbeitens* (vgl. Kap. 11.6).

Auch der Vergleich mehrer Ballarten wie (Beach-)Volleybälle und Basketbälle führt zu interessanten Einsichten; so ist ein Beachvolleyball üblicherweise aus sechs Teilflächen aufgebaut, die jeweils aus zwei annähernd trapezförmigen äußeren Streifen und einem an den Enden beschnittenen, länglich-ovalen Element in der Mitte bestehen. So werden sehr unterschiedliche Herangehensweisen an die Kugelapproximation deutlich, was zu einem vertieften Verständnis für die Eigenschaften der Kugel als geometrischem Körper führen kann. Auch andere Geräte, die bei unterschiedlichen Sportarten eingesetzt werden, können in ihrer Eigenschaft als zusammengesetzte geometrische Körper untersucht werden, liefern in der Mehrheit allerdings keine so klar mathematisch fassbaren Ergebnisse.

Heurismus des systematischen Probierens

Sportgeräte auf Aufbau und Merkmale hin untersuchen, Herstellungsweisen unterschiedlicher Ballarten erkunden und vergleichen		Aufbau verschiedener Polyeder aus Teilflächen untersuchen, erforschen und systematisieren; Grundbegriffe der ebenen und räumlichen Geometrie erwerben und vertiefen

11.6 Heurismen der konkreten Handlung: Vorwärtsarbeiten

Der *Heurismus des Vorwärtsarbeitens* ist vielleicht *der* fundamentale Heurismus. Wann immer kein Lösungsweg offensichtlich ist, beginnen viele Problemlöser mit dem, was ihnen

[586] Beach_volleyball_ball.jpg, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17864534 [07.04.2017]

an Informationen vorliegt und versuchen, durch Voranschreiten dem Ziel ein Stück näherzukommen. In den bisher erläuterten Beispielen kam auch der *Heurismus des Vorwärtsarbeitens* immer wieder als selbstverständlicher Bestandteil allen problemlösenden Handelns vor.

An dieser Stelle soll auf eine ausführlichere Darstellung verzichtet werden, da sich letztlich praktisch jede offenere Fragestellung und jedes Problemszenario potenziell durch Vorwärtsarbeiten bearbeiten lässt – wenn dies auch nicht immer erfolgreich bis zur Problemlösung führt. Es wäre jedoch schwierig, eine sinnvolle Auswahl zu treffen, die einen Überblick wie in den vorherigen Kapiteln ermöglicht. Daher sollen hier nur drei Beispiele genannt sein, die die Universalität dieses heuristischen Vorgehens verdeutlichen:

- Bei der Untersuchung des Sehsinns kann die Weite des individuellen Sehwinkels mithilfe des Vorwärtsarbeitens ermittelt werden. Ein Schüler richtet den Blick auf eine vor ihm liegende Markierung; zwei Schüler bewegen beidseitig Marker in Richtung des Sichtfeldes. In dem Moment, wenn der Proband die Marker wahrnimmt, ist sein maximales Sichtfeld eingegrenzt. Es muss nur noch der Winkel zwischen Markern und Position der Testperson ausgemessen werden.

  Im Übrigen ist je nach Untersuchungsabsicht gegebenenfalls darauf zu achten, dass der Proband während der Veränderung der Markerpositionen die Augen schließt, da die Bewegungswahrnehmung früher einsetzt.
- Das in Kapitel 11.2.2 verwendete Beispiel Patchwork erfordert ebenfalls den *Heurismus des Vorwärtsarbeitens*. Bei den sogenannten *freien* Patchworktechniken werden Stoffstücke fortschreitend um ein zentrales Element herum angefügt. Gute Materialauswahl und die passgenaue Verarbeitung sind dabei entscheidend, damit weder Lücken entstehen noch problematische Stufen, die zu allzu großen Überlappungen führen.
- Unter Bezug auf die Grafiken M. C. Eschers, um die es in Kapitel 11.4.2 ging, ist die sogenannte „Knabbermethode“ ebenfalls ein Beispiel für den *Heurismus des Vorwärtsarbeitens*. Das Problem, eine Fläche vollständig zu parkettieren, kann sukzessive durch die Veränderung einer einfachen Ausgangsfigur wie eines Quadrates gelöst werden. Dazu werden Veränderungen an einer Seite der Ausgangsfigur negativ auf die gegenüberliegende Seite übertragen, so dass die Passung bei der Parkettierung erhalten bleibt. Durch schrittweises Bearbeiten und Verändern können auf diese Weise komplexe Parkettierungen erzeugt werden.

11.7 Heurismen der konkreten Handlung: Rückwärtsarbeiten

Im Unterschied zum *Heurismus des Vorwärtsarbeitens* erfordert das Rückwärtsarbeiten eine tiefergehende Planung und Auseinandersetzung mit einem vorliegenden Problemszenario. Zunächst ist zu entscheiden, ob die Situation den Einsatz des Rückwärtsarbeitens zulässt, ob es sich also im weitesten Sinne um einen „Endzustand" handelt oder sich als solcher interpretieren lässt. Die lineare Betrachtung und Bearbeitung des Problems muss grundsätzlich möglich sein (oder zumindest erscheinen), um den Heurismus sinnvoll einsetzen zu können (vgl. Kap. 5.6.3). Es gibt nicht wenige Problemszenarien, bei denen die Betrachtungsrichtung prinzipiell vertauschbar und daher der *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* anwendbar ist, und sie finden sich in unterschiedlichsten Sachkontexten, wie folgende Beispiele zeigen.

11.7.1 Gesellschaftslehre

Das Relief[587] Deutschlands zeichnet sich durch seine regionalen Unterschiede zwischen Nord-, Mittel- und Süddeutschland aus. Eines der Ziele des Unterrichts der Orientierungsstufe in Gesellschaftslehre ist es, die Natur- und Lebensräume vom Norddeutschen Tiefland, über die Mittelgebirge und das Alpenvorland bis hin zu den Alpen zu betrachten.

Höhenschichten lesen – Rückwärts von der Karte zum Modell

In erster Linie ermöglichen es Höhenschichtenkarten, eine Unterteilung in die genannten geographischen Großräume vorzunehmen. Um die Höhenunterschiede in einer physischen Karte darzustellen, werden unterschiedliche Höhenbereiche, die Höhenschichten, durch verschiedene Farbabstufungen gekennzeichnet: Tieflandzonen werden grün, mittlere Höhen gelblich und Gebirge sowie das Hochland durch abgestufte Brauntöne markiert. Der Verlauf der Höhengrenzen wird zudem durch Höhenlinien dargestellt, die je nach Karte mit variierender Genauigkeit anzeigen, welche Höhe (ü. NN) wo erreicht wird. Unabhängig von der spezifischen Genauigkeit der verwendeten Karte gilt, dass das reale Gelände umso steiler ist, je enger die Höhenlinien beieinander liegen.

Um eine adäquate Vorstellung von den (tatsächlichen) Geländeformen zu entwickeln, die in der zweidimensionalen Darstellung gerade für Schüler nur schwer erfassbar sind, lassen sich – ausgehend von den Farbabstufungen und den Höhenlinien – dreidimensionale Bergmodelle anfertigen. Mit Hilfe des *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* kann der umge-

[587] Auch als Gelände oder Topographie bezeichnet.

kehrte Weg von einer auf der physischen Karte erkennbaren Erhöhung eines Berges oder Gebirges hin zu einem (nicht unbedingt in allen drei Dimensionen gleich-maßstäblichen) Bergmodell gegangen werden.

Dieses Beispiel erlaubt es außerdem, die Arbeit von Vermessungstechnikern praktisch und/oder modellhaft zu erforschen, da schließlich die zugrundeliegenden Daten für die vorliegende Karte erst gesammelt, ausgewertet und dann in die zweidimensionale Darstellung übersetzt worden sein müssen. Für die Schüler wird hier durch das Wechselspiel zwischen der durch Vorwärtsarbeiten entwickelter Karte und ihrem eigenen Rückwärtsabschreiten desselben Prozesses das Prinzip des *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* besonders eindrücklich erfahr- und nachvollziehbar.

Heurismus des Rückwärtsarbeitens

Höhenschichtenkarten lesen, verstehen und realistische Anschauungen der kodierten Informationen entwickeln, Relationen zwischen Höhen und Entfernungen erfassen

Zweidimensionale Repräsentationen in dreidimensionale Modelle zurückübersetzen, Maßstäbe dabei dimensionsbezogen variieren

Schatzsuche planen – Vom Ziel zum Start

Ein weniger anspruchsvolles und für jüngere Schüler sehr motivierendes Beispiel, bei dem der *Heurismus des (Vorwärts- und) Rückwärtsarbeitens* genutzt werden kann, sind eigenständige Planungen von Schatzsuchen unterschiedlicher Art. Ob die Orientierung und Beschreibung innerhalb des Schulgebäudes, auf dem erweiterten Schulgelände oder in einer Stadt erfolgen soll, spielt dabei eine untergeordnete Rolle. In jedem Falle wird der Ort, an dem der Schatz gefunden werden kann, sicherlich zuerst festgelegt; von dort rückschreitend gilt es nun, eine Anleitung (Schatzkarte oder Wegbeschreibung) zu formulieren, die es realistisch ermöglicht, den Schatz ohne Gebrauch zusätzlicher Marker (wie bei einer Schnitzeljagd) zu finden.

Die mathematisch-geometrischen und anderen Kenntnisse, die dabei eingesetzt werden können, sind vielfältig. Ob Winkel oder Himmelsrichtungen, ob Meterangaben oder ganz andere Längenmaße, ob Orientierungspunkte, Peillinien, rein verbale oder gemischt verbale und graphische Hinweise verwendet werden und noch vieles mehr, hängt von dem Kenntnisstand der Lerngruppe ab – oder kann im Rahmen des Unterrichts natürlich auch reglementiert werden, um die Konzentration auf bestimmte neue Möglichkeiten zu lenken, wie etwa gerade die Verwendung des Kompass' und damit verbundener Winkelvorstellungen.

Ungeachtet der genauen Gestaltung erfordert die Planung einer solchen Schatzsuche, die davon lebt, dass sie auf Grundlage der gegebenen Informationen tatsächlich gelingen kann, ein sehr präzises Rückwärtskonstruieren. Die Angaben müssen abschließend außerdem auf Plausibilität, Eindeutigkeit und Machbarkeit überprüft werden – auch dies Arbeitsschritte, die bei der Lösung anderer Problemsituationen von großer Bedeutung sein können und die Verschränkung von Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten als heuristischen Komplementen beispielhaft vor Augen führen.

Heurismus des Rückwärtsarbeitens

Entfernungs- und Richtungsangaben zur Orientierung mit verschiedenen Hilfsmitteln nutzen, vom Ziel ausgehend Wege zu einem Startpunkt finden und beschreiben	Geometrische Kenntnisse und Fertigkeiten zur Formulierung eindeutiger Beschreibungen zur Orientierung im Raum anwenden; umgekehrte Konstruktion eines Streckenzuges

11.7.2 Naturwissenschaften

Die Naturwissenschaften sind reich an Szenarien, in denen der Gedanke der Umkehrbarkeit und Berechenbarkeit von Ereignissen und Ergebnissen eine entscheidende Rolle spielt. Jedes Experiment basiert letztlich auf der Grundannahme, dass die Naturgesetze ihre Wiederholbarkeit garantieren und so letztlich entdeckt und verstanden werden können. Somit ist der Gedanke, von einem beobachteten Verhalten auf Ursachen schließen zu können, Kern des naturwissenschaftlichen Erkenntnisgewinns.

Optik – Verhalten des Lichts erforschen

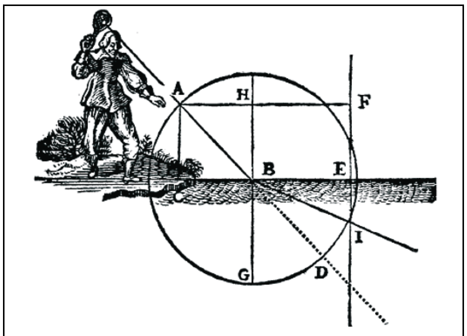


Abb. 132 Lichtbrechung im Wasser.[588]

Einfache Brechungsversuche sind bereits in der Orientierungsstufe für den naturwissenschaftlichen Unterricht vorgesehen. Die Beobachtungen, die sich dabei ergeben, können durch Umkehrung auf Hypothesen zu den zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten führen, die sich auch weiter ausdifferenzieren lassen, wenn die Brechung des Lichts durch verschiedene Medien verglichen wird.

[588] René Descartes, gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11619793 [07.04.2017]

Vergleichbare Vorgehensweisen des Rückwärtsarbeitens lassen sich (ganz im Sinne des *Heurismus der Affinität*, vgl. Kap. 11.3) bei anderen physikalischen und ebenso biologischen oder chemischen Effekten einsetzen. Durch Manipulation bestimmter Umgebungsvariablen kann erforscht werden, worauf die betreffende Beobachtung zurückzuführen sein muss. Hier spielt das systematische Probieren ebenfalls eine wichtige Rolle.

	Heurismus des Rückwärtsarbeitens	
Versuche durchführen und aus den Beobachtungen Schlüsse ziehen, systematisieren und (geometrische) Regelhaftigkeiten erkunden		Aus beobachteten Effekten (durch systematisches Probieren) rückwärts Ursachen erschließen bzw. Gesetzmäßigkeiten des Prozesses erkennen

Erfinder sein – eigene Maschinen entwerfen

Die Erfindung eigener Maschinen, sei es nur in planerischer Ausführung oder im realen Bau (gegebenenfalls als Modell), weist ebenfalls starke Bezüge zum *Heurismus des Rückwärtsarbeitens* auf. Schließlich steht am Anfang das Konzept eines Geräts mit einer ganz bestimmten Funktion. Die Frage, wie sich diese Anforderungen technisch tatsächlich umsetzen lassen, erfordert eine vielschrittige, rückwärts ablaufende Annäherung. Das Rückwärtsarbeiten ist hier besonders gut fassbar, wenn das Gerät zu Beginn als Designstudie entwickelt und seine Aufgabe klar benannt werden muss.

Im Übrigen können solche planerischen Aufgaben in ähnlicher Weise, wenn auch nicht mit dem Anspruch technischer Machbarkeit – was wiederum einen ganz eigenen Reiz ausmachen mag – auch im künstlerischen Bereich gestellt werden. Selbst wenn bestimmte Mechanismen, die die Schüler einplanen und vorsehen, in der Realität so vielleicht nicht funktionieren würden, schulen auch zeichnerische Planungen „magischer“ Maschinen sehr wohl das Grundverständnis für unterschiedliche Arten technischer Zeichnungen und logische Abfolgen, sowie das vom gewünschten Produkt ausgehende Planungsvermögen.

	Heurismus des Rückwärtsarbeitens	
Geräte und Maschinen mit bestimmten Funktionen ersinnen und (technisch) planen		Von erwünschten Ergebnissen rückwärts reale Umsetzungsmöglichkeiten erschließen, logische und technische Aspekte dabei Schritt für Schritt erkunden und integrieren

11.7.3 Kunst und Textiles Gestalten

Ein besonders prägnantes Beispiel für die Wirkkraft des Rückwärtsarbeitens findet sich auch in der Bildenden Kunst, da es nicht nur das Nachempfinden eines großen Kunstwerkes erlaubt, sondern auch noch tiefergehende Erkenntnisse geometrischer Natur gewährt. Da oben bereits M. C. Eschers Werke genutzt wurden, soll hier erneut Bezug auf ihn genommen werden. Vergleichbare Untersuchungen und Nachbauten lassen sich jedoch selbstverständlich auch mit anderen auf (scheinbaren) optischen Täuschungen basierenden Kunstwerken anderer Künstler durchführen. Eschers sehr bekannte Grafik mit dem Titel „Relativität“ (1953) zeigt einen durch Treppen zergliederten Raum, der von den meisten Betrachtern als Unmöglichkeit angesehen wird, also in der Realität so nicht existieren könnte. Aber ist das wirklich der Fall?

Durch die Übertragung des zweidimensionalen Bildes in den dreidimensionalen Raum (z.B. mit Legosteinen) lässt sich nachweisen, dass alle geometrischen Details des Bildes nachgebaut werden können, die Raumstruktur als solche also sehr wohl möglich ist. Das einzige unmögliche Element der Grafik besteht in der Positionierung der menschlichen Figuren – sie gehorchen drei unterschiedlich gerichteten Gravitationen.

Heurismus des Rückwärtsarbeitens

(Irreführende) Perspektivische Darstellungen in Bildern untersuchen und beschreiben, Widersprüche zur Erfahrungswelt aufdecken, die gestalterischen Mechanismen beschreiben und produktiv anwenden	Von zweidimensionalen Abbildungen ausgehend dargestellte Räume plastisch modellieren und dadurch auf Plausibilität überprüfen

11.8 Ausblick

Der Mathematikunterricht in Deutschland hat sich in den letzten Jahren fraglos verändert. Viele dieser Innovationen sind dabei weniger neu, als es zunächst erscheinen mag; spätestens seit den 1980er Jahren begann die Entwicklung eines Mathematikunterrichts, der sich nicht nur in Fragen der Inhalte neu positionierte, wie die Neue Mathematik der 1960er und 1970er Jahre, sondern an ganz anderen Prinzipien und Kernanliegen orientierte. Das grundsätzliche Umdenken, das sich vollzog, lässt sich durch die grundlegenden Fragen fassen, die die Mathematikdidaktik beantworten wollte:

Aus *Welche mathematischen Inhalte sollen und können auf welche Weise gelehrt werden?* wurde *In welchen Situationen entsteht Mathematik in den Lernern (und wozu befähigt sie)?*

Dieser Wandel, der schon in den frühen Reformpädagogiken angelegt ist, berührt damit verschiedene Ebenen didaktischen und pädagogischen Handelns, aber auch fachwissenschaftlicher Grundhaltung:

Die Mathematik ist Produkt kognitiver, kreativer Prozesse im Geist des Menschen, nicht eine gegebene, fertige Größe, die „serviert" und aufgenommen wird (konstruktivistischer Aspekt).

Ausgangspunkt didaktischen Handelns ist nicht das Lehren, sondern das Lernen. Folglich steht der Lerner und nicht der Lehrende im Mittelpunkt der Entscheidungen.

Der Aspekt der individuellen wie gesellschaftlichen (mit all ihren beigeordneten Facetten) Sinnhaftigkeit der ausgehandelten Bildungsinhalte tritt vor die fachimmanente und fachwissenschaftliche Legitimation.

In einer Welt beschleunigter – insbesondere technischer – Entwicklungen treten fundamentales Verstehen und Anschlussfähigkeit vor situationsspezifisches Detailwissen; das Lösen von Problemen wird *die* zentrale Kompetenz.

Historisch schließt sich damit ein Bogen. Der Ursprung technisch-mathematischer und naturwissenschaftlicher Fortschritte lag in einer den Menschen überwältigenden Umwelt, die er begreifen, kontrollieren und gestalten wollte. Die Probleme, denen sich die frühen Menschen und dann die ersten Astronomen, Architekten, Ingenieure usw. gegenüber sahen, hatten maßgeblichen Einfluss auf die Entstehung der Geometrie und Mathematik. Heute ist das System (nicht nur) vom technischen Standpunkt aus betrachtet komplexer und sehr viel schnelllebiger, und die Fähigkeit, flexibel zu reagieren, ist erneut entscheidend für die Bewältigung der Realität – wenn auch in einem anderen Sinne als in den Anfängen der kulturellen Evolution.

Die Mathematik als Sprache praktisch aller wissenschaftlichen Disziplinen, insbesondere aber als prägende Kraft für das Verständnis von Zusammenhängen, Mechanismen und Handlungsmustern, die zu Problemlösungen führen, tritt in diesem Kontext als universelles Instrument hervor, stiftet Ordnung und verbindet Bereiche, die sich zunehmend durch Spezialisierung voneinander zu entfremden drohen. Diese Relevanz mathematischen und insbesondere geometrischen Denkens in allen Lebenszusammenhängen ist es, die CHIME gezielt auch für die schulische Bildung der Zukunft nutzbar machen will.

Trotz der Reformbemühungen der vergangenen Jahre und Jahrzehnte und der kompetenzorientierten Neukonzeption der Lehrplanschriften der Bundesländer auf der gemeinsamen Basis der Bildungsstandards, ist die aktuelle Situation in Deutschland noch von diesem Ziel entfernt. Nicht nur die Implementierung der geforderten Kompetenzen, sondern die formulierten Ziele selbst stehen einem erfolgreichen Aufbau problemlösender, heuristischer Kompetenzen in nicht unwesentlichem Maße im Weg, wie die Analyse der geltenden Lehrplanschriften ergab (vgl. Band A, KRICHEL 2017). Fehlende Stringenz, mangelnde Kumulativität und unklare Definitionen auf unterschiedlichen Ebenen behindern eine systematische Stärkung problemlösender Kompetenzen im Mathematikunterricht. Dennoch kann jeder einzelne Mathematiklehrer, ohne mit den geltenden Vorgaben in Konflikt zu geraten, mit dem IHiMU-Konzept (Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht) erste, ganz entscheidende Schritte für eine Umgestaltung seines Unterrichts gehen. Wie in Kapitel 10.1 erläutert können IHiMU und CHIME als gemeinsames Kontinuum einer Evolution des Mathematikunterrichts aufgefasst werden, an deren Ende der rein transcurriculare heuristisch-mathematische Unterricht steht. Es liegt auf der Hand, dass sich die oben explizierte Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht auf das Gebiet der Geometrie (bzw. der Leitideen Raum und Form und Messen) und ebenso wenig auf die Kompetenz des Problemlösens in einem engeren Sinne beschränken muss. Eine Ausarbeitung für weitere Themen/Leitideen und auch weitere Jahrgangsstufen ist geplant und wird die Kohärenz und Umsetzbarkeit eines solchen transcurricularen heuristisch-mathematischen Unterrichts noch deutlicher hervortreten lassen, da sich dann heuristische „Lücken“ innerhalb von Schuljahren schließen und Kompetenzentwicklungen über mehrere Jahrgangsstufen hinweg nachvollziehen lassen.

Unter der Bedingung, dass sich künftig nicht nur die Anforderungen an Schüler und Lehrer weiterentwickeln, sondern dass auch der Frage nachgegangen wird, in welchem materiellen, organisatorischen, didaktischen und sozialen Rahmen die Schule der Zukunft Schüler zu den von ihnen verlangten Fähigkeiten hinführt, wird eine heute noch so fremdartig erscheinende Art von Mathematikunterricht, wie CHIME ihn vorschlägt, keine exotische Idee mehr sein; vielmehr ist eine solche echte Reform des mathematischen Lernens und Lehrens in der Schule dann die logische Konsequenz aus Erfahrungen und Erfolgen mit nicht-fachgebundenen, situierten und problemorientierten Konzepten anderer Fächer und Länder in einer globalisierten Gegenwart und Zukunft.

Literaturverzeichnis

ABELS, LYDIA (2002): Mathe-Welt – Ich hab's – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen, in: *Mathematik lehren*, Heft 115, Beilage.

AEBLI, Hans (1983): *Zwölf Grundformen des Lehrens*, Stuttgart: Klett Cotta.

AHRENS, Christian UND Adolf DORNER (1935): *Mathematik im Dienste nationalpolitischer Erziehung mit Anwendungsbeispielen aus Volkswissenschaft, Geländekunde und Naturwissenschaften.* Frankfurt a. M.: Diesterweg.

ISOKRATES (2003): Sur l'échange, in: Georges MATHIEU (Hrsg.), *Isocrates, Discours*, Tome III. Paris: Belles Lettres.

ARNOLD, Karl-Heinz (2009): Unterricht als zentrales Konzept der didaktischen Theoriebildung und der Lehr-Lern-Forschung, in: Karl-Heinz ARNOLD, Uwe SANDFUCHS und Jürgen WIECHMANN (Hrsg.), *Handbuch Unterricht*, 2. Aufl., Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt, S. 15-22.

ARNOLD, Karl-Heinz und Andreas BACH (2011): Theorie des Unterrichts. In: *Enzyklopädie Erziehungswissenschaft Online.* Juventa Verlag: Weinheim/München. [online] http://www.beltz.de/fachmedien/erziehungs_und_sozialwissenschaften/enzyklopaedie_erziehungswissenschaft_online_eeo.html [06.04.2017]

ASPER, Markus (2010): The Two Cultures of Mathematics in Ancient Greece, in: Eleanor ROBSON und Jacqueline STEDALL (Hrsg.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, S. 107-132.

ASSMANN, Jan (2007): *Das kulturelle Gedächtnis*. *Schrift, Erinnerung und politische Identität in frühen Hochkulturen*, München: Beck Verlag.

ÅSTRÖM, M. (2008): Defining integrated science education and putting it to test, Norrköping: Universität Linköping.

BALTZ-OTTO, Ursula (1988): Öffnungen von Fächern und Fachgrenzen in Richtung „Bildung", in: *Bildung – Die Menschen stärken, die Sachen klären.* Friedrich-Jahresheft VI, S. 20-23.

BAPTIST, Peter (Hrsg.) (2000): *Mathematikunterricht im Wandel - Bausteine für den Unterricht*, Bamberg: Buchner.

BARROW, John D. (1999): *Ein Himmel voller Zahlen: auf den Spuren mathematischer Wahrheit*, Reinbek/Hamburg: Rowohlt Verlag.

BAUMERT, Jürgen und Rainer LEHMANN (Hrsg.) (1997): *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. *Deskriptive Befunde*, Opladen: Leske + Budrich.

BBT (Bundesamt für Berufsbildung und Technologie (Hrsg.) (2001): *Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität*: *technische Richtung, gestalterische Richtung, gewerbliche Richtung*, Bern: BBT.

BECK, Ulrich (1986): *Risikogesellschaft. Auf dem Weg in eine andere Moderne*, Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

BECKER, Oskar (1964): *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg: Verlag Karl Albert GmbH.

BECKER, Oskar (1966): *Das mathematische Denken der Antike*, 2. Aufl., Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht Verlag.

BECKER, Rolf (2012): Notwendigkeit von Bildungsreformen und Ausblick in die Zukunft, in: BUNDESZENTRALE FÜR POLITISCHE BILDUNG (Hrsg.), *Deutsche Verhältnisse. Eine Sozialkunde*. http://www.bpb.de/politik/grundfragen/deutsche-verhaeltnisse-eine-sozialkunde/138435/notwendigkeit-von-bildungsreformen-und-ausblick-in-die-zukunft [07.04.2017]

BENNETT, Judit, Fred LUBBEN und HOGARTH, S. (2007). Bringing science to life: A synthesis of the research evidence on the effects of context-based and STS approaches to science teaching, in: *Science Education,* 91, S. 347–370.

BERNARD, Alain und Jean CHRISTIANIDIS, Jean (2011): A new analytical framework for the understanding of Diophantus's Arithmetica I-III, in: *Archive for History of Exact Sciences 66*, 2011, S. 1-69.

BERNARD, Alain, Christine PROUST und Micah ROSS (2014): Mathematics Education in Antiquity, in: Alexander KARP und Gert SCHUBRING (Hrsg.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York: Springer Verlag, S. 27-53.

BILDUNGSKOMMISSION NRW (1995). *Zukunft der Bildung. Schule der Zukunft. Denkschrift der Kommission „Zukunft der Bildung – Schule der Zukunft" beim Ministerpräsidenten des Landes Nordrhein-Westfalen.* Neuwied: Luchterhand.

BONNER, Stanley F. (1977): *Education in ancient Rome: From the elder Cato to the younger Pliny*, Berkeley: University of California Press.

BOOTH, Alain D. (1979): Elementary and secondary education in the Roman Empire, in: *Florilegium 1*, 1979, S. 1-14.

BORYS, Thomas (2011): *Codierung und Kryptologie*. *Facetten einer anwendungsorientierten Mathematik im Bildungsprozess*, Wiesbaden: Vieweg + Teuber Verlag.

BREEZE, Ruth (Hrsg.) (2014): *Integration of theory and practice in CLIL,* Amsterdam: Rodopi.

BREZULEANU, Carmen Olguţa (2010). Educational Project Approaching Teaching-Learning Transcurricular Modern Method, in: *Revista Lucrări ştiinţifice*, 53 (2010) 1, Universitatea de Ştiinţe Agricole şi Medicină Veterinară din Iaşi, S. 320-322.

BRUDER, Regina und Christina COLLET (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

BRUINS, Evert Marie und Maggie RUTTEN. (1961): Textes mathématique de Suse, in: *Mémoires de la Mission Archéologique an Iran,* Tome XXXIV, Paris: Librairie Orientaliste Paul Geuthner.

BUND-LÄNDER-KOMMISSION (2000 – 2003). *Programm zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.* http://blk.mat. uni-bayreuth.de/indexblk.html [07.04.2017]

BUND-LÄNDER-KOMMISSION (2003): *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Abschlussbericht des BLK-Modellversuchsprogramms,* Kiel: IPN 2003, 85 S. - URN: urn:nbn:de:0111-opus-4393

CANTOR, Moritz (1894): *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig: B. G. Teubner.

CERI (2007): *Understanding the Brain: The Birth of a Learning Science,* Paris: OECD.

CLARKE, Martin L. (1971): *Higher education in the ancient world*, London: Routledge and Kegan Paul.

COFMAN, Judita (1990): *What to solve? Problems for Young Mathematicians*, Oxford: Clarendon Press.

COYLE, Do, Philipp HOOD und David MARSH (2010): *CLIL – Language and Language Integrated Learning,* Cambridge: Cambridge University Press.

CRIBIORE, Raffaella (2001): *Gymnastics of the mind: Greek education in Hellenistic and Roman Egypt*, Princeton: Princeton University Press.

CULLEN, Christopher (2010): People and Numbers in Early Imperial China, in: Eleanor ROBSON und Jacqueline STEDALL (Hrsg.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, S. 591-618.

DANNENBERG, Hartmut et al. (1974): Vorveröffentlichung Grundschulkongreß ´73 Baden-Württemberg, in: Klaus GIEL, Gotthilf Gerhard HILLER und Hermann KRÄMER (Hrsg.), *Stücke zu einem mehrperspektivischen Unterricht. Aufsätze zur Konzeption 1,* Stuttgart: Klett S. 41-53.

DAUBEN, Joseph W. (2014): Mathematics Education in North America to 1800, in: Alexander KARP und Gert Schubring (Hrsg.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York: Springer Verlag, S. 175-185.

DAVIS, Philip J. und Reuben HERSH (1994): *Erfahrung Mathematik*, Basel: Birkhäuser Verlag.

DESCARTES, René (1637) : *Discours de la méthode… dt. Von der Methode des richtigen Vernunftgebrauchs und der wissenschaftlichen Forschung,* übers. und hg. von Lüder Gäbe (1960), Meiner: Hamburg.

DEVLIN, Keith (2000). *The Maths Gene*. *How Mathematical Thinking Evolved And Why Numbers Are Like Gossip*, London: Basic Books.

DEWEY, John (1896): The Reflex Arc Concept in Psychology, in: *Psychological Review 3*, (1896): 357-370.

DEWEY, John (1910): *How we think*, Boston: Heath & Co.

DEWEY, John (1935): Der Ausweg aus dem pädagogischen Wirrwarr, in: John DEWEY und William Heard KILPATRICK (Hrsg.), *Der Projekt Plan: Grundlegung und Praxis*, Weimar: Hermann Böhlaus Nachfolger, S. 85-101.

DEWEY, John (1951): *Wie wir denken*. *Eine Untersuchung über die Beziehung des reflektiven Denkens zum Prozeß der Erziehung*, Zürich: Morgarten Verlag Conzett & Huber.

DEWEY, John (1963): Erfahrung und Erziehung, In: John DEWEY, Oscar HANDLIN und Werner CORRELL (Hrsg.), *Reform des Erziehungsdenkens. Eine Einführung in John Deweys Gedanken zur Schulreform*, Weinheim: Beltz Verlag, S. 27-99.

DEWEY, John (1998): *Die Suche nach Gewissheit*. E*ine Untersuchung des Verhältnisses von Erkenntnis und Handeln*, Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

DEWEY, John (2000): *Demokratie und Erziehung. Eine Einleitung in die philosophische Pädagogik*, Weinheim: Beltz Verlag.

DEWEY, John und William Heard KILPATRICK (1935): *Der Projekt-Plan. Grundlegung und Praxis*, Weimar: H. Böhlaus Nachfolger.

DIEBERGEN, Clemens (1998): *Radikal-konstruktivistische Pädagogik als problematische Konstruktion: eine Studie zum radikalen Konstruktivismus und seiner Anwendung in der Pädagogik*, Bern: Verlag Peter Lang.

DÖRNER, Dietrich (1979): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, 2. Auflage, Stuttgart: Kohlhammer Verlag.

DUDLEY, Underwood (1995): *Mathematik zwischen Wahn und Witz: Trugschlüsse, falsche Beweise und die Bedeutung der Zahl 57 für die amerikanische Geschichte*, Basel: Birkhäuser Verlag.

DUNCKER, Ludwig (1997): Vom Sinn des Ordnens. Zur Rekonstruktion der Wirklichkeit in und zwischen den Schulfächern. in: Ludwig DUNCKER und Walter POPP (Hrsg.), *Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten eines fächerübergreifenden Lehrens und Lernens*, Bd. I, Grundlagen und Begründungen, Heinsberg: Dieck, S.119-134.

DUNCKER, Ludwig und Walter POPP (Hrsg.) (1997): *Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten eines fächerübergreifenden Lehrens und Lernens*, Bd. I, Grundlagen und Begründungen, Heinsberg: Dieck.

DUNCKER, Ludwig und Walter POPP (Hrsg.) (1998): *Fächerübergreifender Unterricht in der Sekundarstufe I und II. Prinzipien, Perspektiven, Beispiele*, Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

ECHAZARRA, Alfonso, Daniela SALINAS, Ildefonso MÉNDEZ, Vanessa DENIS und Giannina RECH (2016): How Teachers teach and Students learn: Successful Strategies for School, in: OECD (Hrsg.), *OECD Education Working Paper No. 130*, Paris: OECD Publishing.

ELLERTON, Nerida und Ken CLEMENTS (2012*): Rewriting the History of School Mathematics in North America 1607–1861: The Central Role of Ciphering Books*, New York: Springer Verlag.

ELLIS, Rod (2008): *Task Based Language Learning and Teaching*, Oxford: Oxford University Press.

ESSLINGER-HINZ, Ilona, Georg UNSELD, Petra REINHARD-HAUCK, Edeltraud RÖBE, Hans-Joachim FISCHER, Tilmann KUST und Siegfried DÄSCHLER-SEILER (2007): *Guter Unterricht als Planungsaufgabe*. *Ein Studien- und Arbeitsbuch zur Grundlegung unterrichtlicher Basiskompetenzen*, Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

EVANS, Gillian, R. (1976): The „Sub-Euclidean“ Geometry of the Earlier Middle Ages, up to the Mid-Twelfth Century, in: *Archive for History of Exact Sciences,* 16 (1976) 2, 8. XII., S. 105-118.

FILLOY, Eugenio, Luis PUIG und Teresa ROJANO (2008*): Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*, New York: Springer.

FIOCCA, Alessandra und Luigi PEPE (1985a): La lettura di matematica nell'Università di Ferrara dal 1602 al 1771, *Annali dell'Università di Ferrara, Sezione VII – Scienze Matematiche,* 31 (1985) 1, S. 125–167.

FIOCCA, Alessandra und Luigi PEPE (1985b): *L'Università e le scuole per gli Ingegneri a Ferrara.* Annali dell'Università di Ferrara, Sezione VII – Scienze Matematiche, 32 (1986) 1, S. 125–166.

FISCHER, Walther Leonhard (1996): *Mathematikdidaktik zwischen Forschung und Lehre*, Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

FOLKERTS, Menso (1978): *Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad Acuendos Iuvenes. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition*, Wien: Springer Verlag.

FRENSCH, Peter und Joachim FUNKE (Hrsg.) (1995): *Complex Problem Solving: The European Perspective*, New York: Psychology Press.

FROMMER, Helmut (1997): Über das Fach hinaus. Perspektiven fächerübergreifenden Unterrichts, in: Josef KEUFFER und Meinert A. MEYER (Hrsg.), *Didaktik und kultureller Wandel: Aktuelle Problemlagen und Veränderungsperspektiven*, Weinheim: Deutscher Studienverlag, S. 115-127.

GÄBE, Lüder (Hrsg.) (1977): *René Descartes Meditationes de prima philosophia/Meditationen über die Grundlagen der Philosophie*: [lateinisch-deutsch], Hamburg: Meiner Verlag.

GEIGLE, Martina (2005): Konzepte zum fächerübergreifenden Unterricht. Eine historisch-systematische Analyse ihrer Theorie, *Studien zur Schulpädagogik,* Bd. 46, Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

GELLERT, Uwe (2009): Mathematik, in: Karl-Heinz ARNOLD, Uwe SANDFUCHS und Jürgen WIECHMANN (Hrsg.), *Handbuch Unterricht*, 2. Aufl., Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt, S.350-353.

GEMEINHARDT, Peter (2007): *Das lateinische Christentum und die antike pagane Bildung. Studien und Texte zu Antike und Christentum*, Tübingen: Mohr Siebeck.

GERICKE, Helmut (1996). *Mathematik in Antike und Orient. Mathematik im Abendland. Sonderausgabe in einem Band.* Wiesbaden: Fourier Verlag.

GIBSON, Strickland (Hrsg.) (1931): *Statuta antiqua Universitatis Oxoniensis*, Oxford: The Clarendon Press.

GIEL, Klaus, Gotthilf G. HILLER und Hermann KRÄMER (1974): *Stücke zu einem mehrperspektivischen Unterricht*, Bd. 1, Aufsätze zur Konzeption 1, Stuttgart: Klett Verlag.

GIESECKE, Hermann (1998): *Pädagogische Illusionen. Lehren aus 30 Jahren Bildungspolitik*, Stuttgart: Klett-Cotta.

GISPERT, Hélène (2014): Mathematics Education in France: 1800-1980, in: Alexander KARP und Gert SCHUBRING (Hrsg.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York: Springer Verlag, S. 229-240.

GLATFELD, Martin (Hrsg.) (1977): *Mathematik lernen. Probleme und Möglichkeiten*. Braunschweig: Verlag Friedr. Vieweg & Sohn.

GLATFELD, Martin (Hrsg.) (1990): *Finden, Erfinden, Lernen – Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt*, Frankfurt a. M.: Verlag Peter Lang.

GOETHE-INSTITUT. MINT – Lernen mit CLIL. Deutsch integriert in den Sach- und Fachunterricht. https://www.goethe.de/de/spr/unt/kum/clg.html [07.04.2017]

GOETHE-INSTITUT. Fächerübergreifender DAF-Unterricht als eine Variante von CLIL. https://www.goethe.de/de/spr/unt/kum/clg/20900691.html. [07.04.2017]

GRABMANN, Martin (1934): Eine für Examinazwecke abgefaßte Quaestionensammlung der Pariser Artistenfakultät aus der ersten Hälfte des XIII. Jahrhunderts, in: *Revue néo-scolastique de philosophie*, Jg. 36, Deuxième série, 41, 1934. S. 211-229.

GROB, Urs und Katharina MAAG MERKI (2001): *Überfachliche Kompetenzen.Theoretische Grundlegung und empirische Erprobung eines Indikatorensystems.* Bern: Peter Lang.

GUILLAUME, James (1889): *Procès-verbaux du Comité d'Instruction Publique de l'Assemblée Législative, publiés et annotés*, Paris: Imprimerie Nationale.

HAAS, Nicola (2000): *Das Extremalprinzip als Element mathematischer Denk- und Problemlöseprozesse – Untersuchungen zur deskriptiven, konstruktiven und systematischen Heuristik*, Hildesheim: Franzbecker Verlag.

HAHN, Walter und Gotthilf G HILLER (1975): Mehrperspektivischer Sachunterricht – Vier Aspekte eines Begründungszusammenhangs. In: Klaus GIEL, Gotthilf Gerhard HILLER und Hermann KRÄMER (Hrsg.): *Stücke zu einem mehrperspektivischen Unterricht*, Bd. 2, Aufsätze zur Konzeption 2. Stuttgart: Klett Verlag., S-182-185.

HADLEY, John und David SINGMASTER (1992): Problems to Sharpen the Young, in: *The Mathematical Gazette,* 76, No. 475, S. 102-126.

HAMEYER, Uwe (2006): Entdeckendes Lernen, in: Jürgen WIECHMANN,(Hrsg.), *Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis*, Weinheim: Beltz, S. 114-129.

HAUSER, Gaston (1955): *Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid*, Schüpfheim: E. Haag Verlag: Luzern.

HERR, Ted und Ken JOHNSON (1994): *Problem-Solving Strategies. Crossing the River With Dogs.* Berkeley, CA: Curriculum Press.

HESSE, Christiane (2010): *Das kleine Einmaleins des klaren Denkens. 22 Denkwerkzeuge für ein besseres Leben*, 2. Aufl., München: C.H. Beck Verlag.

HEYMANN, Hans Werner (1996a): *Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik,* Weinheim: Beltz.

HEYMANN, Hans Werner (1996b): Mathematikunterricht in der Gymnasialen Oberstufe, in: *Zeitschrift für Pädagogik,* 42 (1996) 4, S. 541-556.

HIEBERT, James (1986): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, Hillsdale/New Jersey: Erlbaum.

HISCHER, Horst (2012*): Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl, Wiesbaden*: Vieweg + Teubner Verlag.

HOBSBAWM, Eric (1962): *The Age of Revolution: Europe 1789-1848*, London: Vintage Books.

HOBSBAWM, Eric (1975): *The Age of Capital: 1848-1875*, London: Vintage Books.

HOBSBAWM, Eric (1987): *The Age of Empire: 1875-1914*, London: Vintage Books.

HOLZINGER, Andreas (2000): *Basiswissen Multimedia*, Bd. 2, Lernen: kognitive Grundlagen multimedialer Informationssysteme, Würzburg: Vogel.

HOMANN, Frederick A. (1991): Practical Geometry = Practica Geometriae. *Mediaeval Philosophical Texts in Translation 29.* Milwaukee: Marquette University Press.

HØYRUP, Jens (2002). *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences.* New York: Springer.

HØYRUP, JENS (2013). *Algebra in Cuneiform: Introduction to an Old Babylonian Geometrical Technique.* Berlin: Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte.

HØYRUP, Jens (2014): Mathematics Education in the European Middle Ages, in: Karp, Alexander und Gerd Schubring (Hrsg.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York: Springer Verlag, S. 109-124.

HUBER, Ludwig (1994): Wissenschaftspropädeutik und Fächerübergreifender Unterricht – Eine unerledigte Hausaufgabe der allgemeinen Didaktik, in: Meinert A. Meyer und Winfried Plöger (Hrsg.), *Allgemeine Didaktik, Fachdidaktik und Fachunterricht*, Weinheim: Beltz Verlag, S. 243–253.

HUßMANN, Stephan (2003): Lerntagebücher – Mathematik in der Sprache des Verstehens, in: Timo Leuders (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, Berlin: Cornelsen Verlag: Berlin. S. 75 – 92.

IMHAUSEN, Annette (2003). Ägyptische Algorithmen. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten, in: *Ägyptologische Abhandlungen,* 65. Wiesbaden: Harrassowitz Verlag.

JANK, Werner und Hilbert MEYER (1994): Didaktische Modelle, 3. Aufl., Frankfurt a. M.: Cornelsen Scriptor.

KAHLERT, Joachim (1997): Vielseitigkeit statt Ganzheit. Zur erkenntnistheoretischen Kritik an einer pädagogischen Illusion, in: Ludwig DUNCKER und Walter POPP (Hrsg.), *Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten des fächerübergreifenden Lehrens und Lernens*, Bd. 1, Grundlagen und Begründungen, Heinsberg: Dieck, S. 92-118.

KARP, Alexander und Gert SCHUBRING (Hrsg.) (2014): *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York: Springer Verlag.

KASTER, Robert A. (1983). Notes on „Primary“ and „Secondary“ schools in Late Antiquity, in: *Transactions of the American Philological Association,* 113, S. 323-346.

KEUFFER, Josef und Meinert A. MEYER (Hrsg.) (1997): *Didaktik und kultureller Wandel*. *Aktuelle Problemlagen und Veränderungsperspektiven*, Weinheim: Deutscher Studienverlag.

KLAFKI, Wolfgang (1958): Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung, in: *Die deutsche Schule*, 1958, Heft 10, S. 450-471.

KLAFKI, Wolfgang (1963): *Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*, Weinheim: Beltz Verlag.

KLAFKI, Wolfgang (1976): *Aspekte kritisch-konstruktiver Erziehungswissenschaft*, Weinheim: Beltz Verlag.

KLAFKI, Wolfgang (1995a): *„*Schlüsselprobleme“ als thematische Dimension einer zukunftsbezogenen „Allgemeinbildung“ – Zwölf Thesen, in: *Die Deutsche Schule*, 1995, 3. Beiheft, S. 9-14.

KLAFKI, Wolfgang (1995b): Schlüsselprobleme und fachbezogener Unterricht. Kommentare aus bildungstheoretischer und didaktischer Sicht, in: *Die Deutsche Schule*, 1995, 3. Beiheft, S. 32-46.

KLAFKI, Wolfgang (1996): *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik*, Weinheim: Beltz Verlag.

KLAFKI, Wolfgang (1998a): Fächerübergreifender Unterricht – Begründungsargumente und Verwirklichungsstufen, in: Susanne POPP (Hrsg.), *Grundrisse einer humanen Schule*, Innsbruck: Studien Verlag, S. 41-57.

KLAFKI, Wolfgang (1998b): Schlüsselqualifikationen/Allgemeinbildung – Konsequenzen für Schulstrukturen, in: Karl-Heinz BRAUN, Heinz-Hermann KRÜGER, Jan-Hendrik OLBERTZ, Christoph HOFFMANN und Hans-Georg HOFMANN (Hrsg.), *Schule mit Zukunft. Bildungspolitische Empfehlungen und Expertisen der Enquete-Kommission des Landtages von Sachsen-Anhalt*, Opladen: Leske + Budrich, S. 41-57.

KLAFKI, Wolfgang (2007). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik.* 6. Aufl., Weinheim: Beltz Verlag.

KLIPPERT, Heinz (2002). *Methoden-Training. Übungsbausteine für den Unterricht.* 12. Auflage. Weinheim: Beltz Verlag.

KLOS, Silke (2008): Kompetenzförderung im naturwissenschaftlichen Anfangsunterricht – Der Einfluss eines Integrierten Unterrichtskonzepts (Dissertation). Studien zum Physik- und Chemielernen*, Bd. 89*, Berlin: Logos.

KMK, s. Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland

KÖCK, Peter (2000): *Handbuch der Schulpädagogik: für Studium, Praxis, Prüfung,* Donauswörth: Auer Verlag.

KOLOSOW, Aleksey A. (1963): *Kreuz und quer durch die Mathematik*, Berlin: Volkseigener Verlag.

KORDOS, Marek (2003): *Streifzüge durch die Mathematikgeschichte.* Stuttgart: Klett Verlag.

KOSELLECK, Reinhart (1979). *Einleitung*, in: Otto BRUNNER, Werner CONZE und Reinhart KOSELLECK (Hrsg.), *Geschichtliche Grundbegriffe,* Bd. 1, Stuttgart: Klett Cotta, S. xiii.

KRAMER, Martin (2010): *Mathematik als Abenteuer,* Köln: Aulis Verlag.

KRAUSE-ISERMANN, Ursula (Hrsg.) (1994): Perspektivenwechsel: Beiträge zum fächerübergreifenden Unterricht für junge Erwachsene, in: *Arbeitsmaterialien aus dem Bielefelder Oberstufen-Kolleg*, 38.

KRICHEL, Katharina (2017). *Problemlösen, Heuristik und Geometrie: Zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe*, Bd. A, Heute und Morgen, Dissertation im Fach Didaktik der Mathematik an der Bergischen Universität Wuppertal.

KROPP, Gerhard (1969a): *Geschichte der Mathematik: Probleme und Gestalten*, Heidelberg: Quelle & Meyer Verlag.

KROPP, Gerhard (1969b): *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Hochschultaschenbücher, Mannheim: Zürich Verlag.

KUHLMANN, Carola (2013): *Erziehung und Bildung. Einführung in die Geschichte und Aktualität pädagogischer Theorien*, Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

LABUDDE, Peter (2009): *Fachunterricht und fächerübergreifender Unterricht: Grundlagen,* in: Karl-Heinz ARNOLD, Uwe SANDFUCHS und Jürgen WIECHMANN (Hrsg.), *Handbuch Unterricht*, 2. Aufl., Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt, S. 331-336.

LABUDDE, Peter (2014): Fächerübergreifender naturwissenschaftlicher Unterricht – Mythen, Definitionen, Fakten, in: *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 20 (2014) 1, S. 11-19.

LANGE, Jan de (1996). Using and Applying Mathematics in Education, in: Alan J. BISHOP (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education*, Part One. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, S. 49-97.

LEHMANN, Johannes (1994a): *So rechneten Ägypter und Babylonier. 4000 Jahre Mathematik in Aufgaben*, Leipzig: Urania-Verlag.

LEHMANN, Johannes (1994b): *So rechneten Griechen und Römer. 4000 Jahre Mathematik in Aufgaben*, Leipzig: Urania-Verlag.

LEITÃO, Henrique (2007): Azuleios que testemunham uma tradicão de ensino científico, in: Carlota SIMÕES, (Hrsg.), *Azulejos que ensinam*, Coimbra: Universidade de Coimbra, S. 16–33

LEUDERS, Timo (2003): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, Berlin: Cornelsen Verlag.

MAINGAIN, Alain, Barbara DUFOUR UND FOUREZ, Gérard (2002): *Approches didactiques de l'interdisciplinarité*, Bruxelles: De Boeck Université.

MAINZER, Klaus (1980): *Geschichte der Geometrie*, Mannheim: Bibliographisches Institut.

MARROU, Henri-Irénée (1965): *Histoire de l'éducation dans l'Antiquité*, 6th ed, Paris: Seuil.

MATHEWS, Jerold (1985): A Neolithic Oral Tradition for the van der Waerden/Seidenberg Origin of Mathematics, in: *Archive für the History of Exact Sciences,* 34 (1985) 3, S.193-210.

MATUSCHKA, Michael Graf von (1974): *Heuristik. Geschichte des Wortes und der Versuch der Entwicklung allgemeiner und spezieller Theorien von der Antike bis Kant*, Düsseldorf: Philosophische Fakultät der Universität Düsseldorf.

MELVILLE, Sarah C. und Duncan J. MELVILLE (2008): Observations on The Diffusion of Military Technology: Siege Warfare in the Near East and Greece, in: Micah ROSS (Hrsg.), *From the Banks of the Euphrates*, Winona Lake: Eisenbrauns, S. 145-168.

MERZYN, Gottfried (2013): Fachsystematischer Unterricht Eine umstrittene Konzeption., in: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 2013, Nr. 66 (5), S. 265–269.

MESCHKOWSKI, Herbert (1979): *Problemgeschichte der Mathematik 1.*, Mannheim: BI Wissenschafts-verlag.

MEYER, Hilbert (1987): *Unterrichts-Methoden I: Theorieband*, Berlin: Cornelsen Scriptor.

MOEGLING, Klaus (1998): *Fächerübergreifender Unterricht – Wege ganzheitlichen Lernens in der Schule*, Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

MÜLLER-HARTMANN, Andreas (Hrsg.) (2005): *Aufgabenorientierung im Fremdsprachenunterricht*, Tübingen: Narr.

NACHTIGALL, Werner (2013): *Bionik: Grundlagen und Beispiele für Ingenieure und Naturwissenschaftler, .* Heidelberg: Springer Verlag.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston/VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM (1991): *Professional standards for teaching mathematics*, Reston/VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM (2013): *Supporting the Common Core State Standards for Mathematics*, Reston/VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM (2014): *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*, Reston/VA: NCTM.

NEUGEBAUER, Otto (1934): *Vorlesungen über Geschichte der antiken Mathematischen Wissenschaften*, Berlin: Julius Springer Verlag.

NIKUTA, Tarija, Emma DAFOUZ, Pat MOORE und Ute SMIT (Hrsg.) (2016): *Conceptualising integration in CLIUL and multilingual education,* Bristol: Multilungual Matter.

NORDRHEIN-WESTFALEN. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2012a): *Rahmenvorgabe für den Schulsport in Nordrhein-Westfalen.* Düsseldorf.

NORDRHEIN-WESTFALEN. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2012b): *Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Sport.* Düsseldorf.

NUNAN, David (2009): *Task Based Language Teaching*, Cambridge. Cambridge University Press.

OECD (2001): *Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000.* Paris: OECD Publishing.

OECD (2004): *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003.* Paris: OECD Publishing.

OECD (2005): *Problem Solving for Tomorrow's World: First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003*, Paris: OECD Publishing.

OECD (2010): *Mathematics Teaching and Learning Strategies in PISA*, Paris: OECD Publishing.

OECD (2014a). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do (Volume I): Student Performance in Mathematics, Reading and Science*, Paris: OECD Publishing.

OECD (2014b). Germany. In: OECD, *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving (Volume V): Students' Skills in Tackling Real-Life Problems*, Paris: OECD Publishing.

OECD (2016): *Ten Questions for Mathematics Teachers... and how PISA can help answer them,* Paris: OECD Publishing.

OTTO, Berthold (1914): *Volksorganische Einrichtungen der Zukunftsschule*, Berlin-Lichterfelde: Verlag des Hauslehrers.

OTTO, Berthold (1965): *Ratschläge für den häuslichen Unterricht. Besorgt und eingeleitet von Hermann Holstein*, Heidelberg: Quelle & Meyer.

PARADIES, Liane und Hans Jürgen LINSER (2001): *Differenzieren im Unterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

PEDERSEN, Olaf (1998): *The first universities: Studium generale and the origins of university education in Europe*, Cambridge: Cambridge University Press.

PERLER, Dominik (1998): *René Descartes*. Beck'sche Reihe Bd. 542, München: Verlag C.H. Beck.

PETERßEN, Wilhelm H. (2000): *Fächerverbindender Unterricht. Begriff – Konzept – Planung – Beispiele*, München: Oldenbourg.

PIAGET, Jean (1953): *The Origins of Intelligence in Children*, London: Routledge and Kegan Paul.

PÓLYA, George (1995): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*, 4. Aufl., Tübingen: Francke Verlag.

POPP, Susanne (Hrsg.) (1998): *Grundrisse einer humanen Schule*, Innsbruck: Studien-Verlag.

POPP, Walter (1997): Die Spezialisierung auf Zusammenhänge als regulatives Prinzip der Didaktik, in: Ludwig DUNCKER und Walter POPP (Hrsg.), *Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten des fächerübergreifenden Lehrens und Lernens*, Bd. 1,. Grundlagen und Begründungen,Heinsberg: Agentur DIECK, S. 135-154.

POPP, WALTER (1968): *Geschichte der Mathematik im Unterricht. Beiträge für den mathematischen Unterricht,* Bd. 1, München: Bayerischer-Schulbuch-Verlag.

PROKLUS DIADOCHUS (1945): *Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen"*, M. Steck (Hrsg.), Leopoldina: Halle.

REBEL, Karlheinz (1995): Lehrerqualifikation und Unterrichtsqualität mit besonderem Blick auf fächerverbindendes Arbeiten, in: *Lehren & lernen*, 21 (1995) 7, S. 3-17.

REICH, Kersten (2012): *Konstruktivistische Didaktik. Lehr- und Studienbuch mit Online-Methodenpool.* Weinheim: Beltz Verlag.

REKUS, Jürgen (1996): Zur Einheit von fachlichen und fachüberschreitenden Bildungsaufgaben im Unterricht, in: *engagement: Zeitschrift für Erziehung und Schule*, 1996, Heft 3, S.205-219.

RHEINLAND-PFALZ. Ministerium für Bildungs, Wissenschaft und Weiterbildung (Hrsg.) (1998a): *Lehrplan Bildende Kunst (Klassen 5-9/10). Hauptschule, Realschule, Gymnasium, Regionale Schule, Gesamtschule.* Mainz.

RHEINLAND-PFALZ. Ministerium für Bildungs, Wissenschaft und Weiterbildung (Hrsg.) (1998b): *Lehrplan Sport. Sekundarstufe I (Klassen 5-9/10). Hauptschule, Realschule, Gymnasium, Regionale Schule, Gesamtschule.* Mainz.

RHEINLAND-PFALZ. Ministerium für Bildungs, Wissenschaft, Jugend und Kultur (Hrsg.) (2007): *Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5-9/10).* Mainz.

RHEINLAND-PFALZ. Ministerium für Bildungs, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur (Hrsg.) (2010): *Rahmenlehrplan Naturwissenschaften für die weiterführenden Schulen in Rheinland-Pfalz. Klassenstufen 5 und 6.* Mainz.

RHEINLAND-PFALZ. Ministerium für Bildungs, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur (Hrsg.) (2013): *Rahmenlehrplan Gesellschaftslehre für die Intergrierten Gesamtschulen und die Realschulen plus in Rheinland-Pfalz. Klassenstufen 5 und 6.* Mainz.

RHEINLAND-PFALZ. Beispielhafte Arbeitspläne zu vier der sieben Tableaus in Gesellschaftslehre in der Orientierungsstufe. [Online] http://gesellschaftslehre.bildung-rp.de/rahmenlehrplan/arbeitsplaene.html [07.04.2017]

ROBSON, Eleanor und Jacqueline STEDALL (Hrsg.) (2010): *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxfor: Oxford University Press.

ROMANO, David Gilman (2010): The archaeology of mathematics in an acient Greek city, in: Eleanor ROBSON und Jacqueline STEDALL (Hrsg.) (2010), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, S. 229-252.

ROMMEL, Herbert (2001): Wozu fächerübergreifend unterrichten? Eine kritische Grundlagenreflexion zur „Einheit der Bildung", in: *Pädagogische Rundschau,* 55 (2001) 3, S. 357-373.

ROSSI, Corinna (2010): Mixing, Building, and Feeding: Mathematics and Technology in Ancient Egypt, in: Eleanor Robson und Jacqueline Stedall (Hrsg.) (2010): *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, S. 407-428.

RÜSCHOFF, Bernd, Julian-Thorben SUDHOFF und Dieter WOLFF (Hrsg.) (2015): *CLIL Revisited: eine kritische Analyse zum gegenwärtigen Stand des bilingualen Sachfachunterrichts, Frankfurt a. M.:* Lang Ed.

RUSSO, François (1986): L'hydrographie en France aux XVIIe et XVIIIe siècles: écoles et ouvrages d'enseignement, in: René TATON (Hrsg.), *Enseignement et Diffusion des Sciences en France*, 39 (1986) 4, Paris: Hermann.

SCHAPPACHER, Norbert (1998). Wer war Diophant? In: *Mathematische Semesterberichte*, 45 (1998) 2, S. 141-156.

SCHAPPACHER, Norbert (2005). Diophantus of Alexandria: a Text and its History. Nicht publizierter, überarbeiteter Vortragstext. [Online] http://www-irma.u-strasbg.fr/~schappa/NSch/Publications_files/1998cBis_Dioph.pdf [06.04.2017]

SCHILMÖLLER, Reinhard (1997): „Fächerübergreifender Unterricht" – Recht und Grenzen einer bildungspolitischen Forderung, in: *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Pädagogik 73*, 1997, Heft 1, S. 90-115.

SCHMIDT, William H., Curtis C. MCKNIGHT, Gilbert A. VALVERDE, Richard T. HOUANG und David E. WILEY (1996): *Many visions, many aims. A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics*, Dordrecht: Kluwer.

SCHOENFELD, Alan H. (1986): MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING, New York: Academic Press.

SCHOENFELD, Alan H. (1992): Learning to Think Mathematically: Problem solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, in: Douglas A. GROUWS (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning (NCTM)*, New York: Macmillan, S. 334-370.

SCHREIBER, Alfred (2011): *Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung*, Berlin: Logos Verlag.

SCHREIBER, Alfred (2014). Heuristik: Kunst des Problemlösens. [Online] http://www.alfred-schreiber.de/g-mathematik/materialien/didmath-5.pdf [07.04.2017]

SCHUBRING, Gert (2014): Mathematics Education in Catholic and Protestant Europe, in: Alexander KARP und Gert SCHUBRING (Hrsg.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York: Springer Verlag S. 130-143.

SCHWARZ, Wolfgang (2006): *Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik.*, Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

SCRIBA, Christoph. J. und Peter SCHREIBER (2005): *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Berlin: Springer Verlag.

SEIDENBERG, Abraham (1960): The Ritual Origin of Geometry, in: *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960) 5, S. 488-527.

SEIDENBERG, A. (1965). The Sixty System of Sumer, in: *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1965) 5, S. 436-440.

SEIDENBERG, A. (1977). The Origin of Mathematics, in: *Archive for History of Exact Sciences*, 18 (1977) 4, S. 301-342.

SPRINGSFELD, Kerstin (2002). *Alkuins Einfluss auf die Komputistik zur Zeit Karls des Großen.* Steiner Verlag: Stuttgart.

STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (KMK) (Hrsg.) (1995): *Richtungsentscheid zur Reform der gymnasialen Oberstufe*, Neuwied: Luchterhand.

STEWART, Ian (1990): *Mathematik. Probleme – Fragen – Antworten*, Basel: Birkhäuser Verlag.

STEWART, Ian (2001): *Die Zahlen der Natur*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

STECK, Max (1981): *Bibliographia Euclediana*, Hildesheim: Gerstenberg.

STROUHAL, Eugen (1992): *Life of the ancient Egyptians.* Norman: University of Oklahoma Press.

TAN, Oon-Seng (2003): *Problem-Based Learning Innovation. Using problems to power learning in the 21st century*, Singapore: Cengage Learning.

TANNERY, Paul (1922): Mémoires scientifiques, Tome V: *Sciences exactes au Moyen Age, 1887–1921*, Toulouse/Paris: Édouard Privat/Gauthier-Villars.

TAUBERT-STRIESE, Annett (1996): *Der Leipziger Lehrerverein, ein bedeutender Vertreter der Reformpädagogik: eine Studie zu seiner geschichtlichen Entwicklung, seinen pädagogischen Leistungen und seinen praktischen Erfolgen*, Frankfurt a. M.: Verlag Peter Lang.

TENORTH, Heinz-Elmar und Rudolf TIPPELT.(Hrsg.) (2007): *Beltz Lexikon Pädagogik*, Weinheim: Beltz Verlag.

THOM, Alexander und Achibald S. THOM (1987): *Megalithic Remains in Britain and Brittany*, Oxford: Oxford University Press.

TREFFERS, Adrain (1987): *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

VALGIACOMO, Federica, Nathalie BREA, CHRISTINE KÜNZLI DAVID, ROLAND MESSMER UND CHRISTINE STREIT (2015): Fächervernetzender Unterricht – Sport und Mathematik. [Online] https://www.mobilesport.ch/aktuell/faechervernetzender-unterricht-sport-und-mathematik [07.04.2017]

VAN DER WAERDEN, Bartel L. (1963): *Science Awakening.* Science Editions, New York: John Wiley & Sons.

VAN DER WAERDEN, Bartel L. (1983): *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlin: Springer Verlag.

VOGEL, Kurt (1958): Vorgriechische Mathematik I. Vorgeschichte und Ägypten, in: *Mathematische Studienhefte für den mathematischen Unterricht an Höheren Schulen*, Heft 1, Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.

VOGEL, Kurt (1959): Vorgriechische Mathematik II. Die Mathematik der Babylonier, in: *Mathematische Studienhefte für den mathematischen Unterricht an Höheren Schulen*, Heft 2, Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.

VOGEL, KURT (1968): Neun Bücher Arithmetischer Technik (Chiu Chang Suan Shu), in: *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften*, Bd. 4, Braunschweig: Vieweg & Sohn.

VOGELIUS, Martinus (1677): Historia Vitae et Mortis Ioachimi Iungii, Mathematici Summi, cetera que incomparabilis Philosophi, in: Henning WITTE (Hrsg.), *Memoriae philosophorum, oratorum, poetarum, historicorum et philologorum nostri seculi clarissimorum renovatae decas prima (- nona)*, Königsberg: Hallervord, S. 261-280.

VOLLRATH, Hans-Joachim (2000): Problemorientierung als didaktisches Prinzip, in: Peter BAPTIST (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Wandel - Bausteine für den Unterricht*, Bamberg: Buchner, S. 31-45.

WAGENSCHEIN, Martin (2010): *Verstehen lernen*, Weinheim: Beltz Verlag.

WALPUSKI, Silke und Elke SUMFLETH (2012): Kompetenzen und Interesse fördern: Das Unterrichtskonzept Naturwissenschaft in NRW, in: *Unterricht Chemie*, 23(130/131), S. 88–91.

WANG, Ling und Joseph NEEDHAM (1955): Homer's method in Chinese Mathematics: its Origins in the Root-Extraction Procedures of the Han Dynasty, in: *Toung Pao,* 43 (1955), S. 345-401.

WARWITZ, Siegbert A. (2009): Didaktische Prinzipien, in: *Verkehrserkehrserziehung vom Kinde aus. Wahrnehmen-Spielen-Denken-Handeln*, Verlag Schneider, 6. Auflage, Baltmannsweiler 2009, S. 69–72

WEIGAND, Hans-Georg (2014): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* , 2. Aufl., Heidelberg: Springer Verlag: Heidelberg.

WEINECK, Jürgen (2010): *Sportbiologie*. Balingen: Spitta-Verlag.

WESTERMANN, Bernd (2003): Anwendungen und Modellbildung, in: Timo LEUDERS (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II,* Berlin: Cornelsen Verlag, S. 148 – 162.

WIATER, Werner (1995): Didaktische Überlegungen zum fächerübergreifenden Unterricht, in: Katholische Erziehergemeinschaft (Hrsg.), *Vernetztes Lernen: Didaktische Überlegungen. Psychologische Voraussetzungen. Vernetzter Unterricht. Lernen in Zusammenhängen. Anregungen für jeden Lehrer*, Donauwörth: Auer Verlag, S. 10-16.

WIECHMANN, Jürgen (Hrsg.) (2006): *Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis*, Weinheim: Beltz.

WILLIS, Dave (2007): *Doing Task Based Teaching*, Oxford: Oxford University Press.

WINTER, Heinrich (1989): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht; Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, Braunschweig: Vieweg Verlag.

WINTER, Heinrich (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, in: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, S. 37-46

WUßING, Hans (2008): *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*, Berlin: Springer Verlag.

ZECH, Friedrich (1996): *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, Weinheim: Beltz Verlag.

ZIMMERMANN, Bernd (1990): Heuristische Strategin in der Geschichte der Mathematik. Entstehung Entwicklung, Einflüsse, in: Martin GLATFELD (Hrsg.), F*inden, Erfinden, Lernen – Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt*, Frankfurt am Main: Verlag Peter Lang, S. 130 - 164.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

2017, Universität Wuppertal