

Nichtlineare thermomechanische Spannungen und zugehörige Formänderungen in thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlbau-Profilstäben

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen
der Bergischen Universität-Gesamthochschule Wuppertal

genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor Ingenieur

vorgelegt von

Dr.-Ing. Karl Hellmann

Dorsten, im September 2003

Nichtlineare thermomechanische Spannungen und zugehörige Formänderungen in thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlbau-Profilstäben

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen
der Bergischen Universität-Gesamthochschule Wuppertal

genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor Ingenieur

vorgelegt von

Dr.-Ing. Karl Hellmann

Tag der Einreichung der Dissertation: 10.10.2002
Tag der mündlichen Prüfung: 23.07.2003

Berichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Hanswille
Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Harte
em.Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. W. B. Krätzig,
Ruhr-Universität Bochum

Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine analytische Berechnungsmethode entwickelt, die es gestattet, thermomechanische Spannungen und zugehörige Formänderungen in thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlbau-Profilen mit quasi-stationären Temperaturfeldern zu berechnen. Ausgehend vom thermisch spannungslosen linearen Temperaturverlauf wird mit Hilfe einer Differentialgleichung der durch die temperatur-abhängige Wärmeleitfähigkeit „ λ “ hervorgerufene nichtlineare Temperaturverlauf in ferritischen und austenitischen Stählen bei konstanter Wärmestromdichte beschrieben.

Den Übergang zu realen Temperaturfeldern bildet die Beschreibung der Temperaturverteilung mit Hilfe einer weiteren Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Flachstahl-Profil bei nicht konstanter Wärmestromdichte und nicht konstanter Wärmeübergangszahl. Die natürliche, unvermeidbare seitliche Wärmeabströmung an thermisch vertikal beanspruchten Profilen ruft nichtlinear begrenzte Temperaturfelder hervor, die durch Versuche und Temperaturfeldmessungen an ausgeführten Stahlkonstruktionen ermittelt und dargestellt werden. Die Auswertung dieser nichtlinearen Temperaturfelder unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen und der Temperaturabhängigkeit der physikalischen Werkstoffkennwerte führt zur Berechnung von thermomechanischen Spannungen und zugehörigen Formänderungen. Dies wurde ermöglicht durch exakte Aufspaltung eines nichtlinearen Temperaturfeldes mit Hilfe des so genannten linearen resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufs.

Zwecks Überprüfung der Genauigkeit der erarbeiteten Berechnungsmethode wurden die auf ein Hundertstel Millimeter genau am Versuchs-Flachstahl gemessenen Faserlängenänderungen und Durchbiegungen des Versuchs 19/IV abschließend nachgerechnet. Die zugehörige Zeichnung spiegelt die Genauigkeit der Methode und das Faserverhalten wider.

Summary

In the scope of the present work, an algorithm is developed which enables the determination of thermomechanical stresses and strains in arbitrarily thermally demanded steel profiles.

Starting from the thermally stress-free linear temperature demand, the temperature curve in ferritic and austenitic steels is described for a constant heat flow density under use of a differential equation. The transition to real temperature fields is realized by the description of temperature curves in flat steels with variable heat flow density using a second differential equation.

The natural, unavoidable lateral heat emission of thermally demanded profiles causes nonlinear temperature fields which have been determined and described by measurement of temperature fields and tests of real steel constructions. The analysis of the nonlinear temperature fields under consideration of equilibrium conditions and the temperature dependence of the material properties leads to the determination of thermomechanical stresses and strains. Therefore the exact decomposition of the nonlinear temperature field by use of the thermally stress-free linear temperature is needed.

In view of testing the exactness of the achieved determination method, the longitudinal strain of the layers and the lateral deformations of the test 19/IV have been calculated. Compared to the measured results (exactness: 0.01 mm), the accompanying figure reflects the exactness of the method.

Résumé

Dans le cadre de ce travail, une méthode analytique permettant de calculer les contraintes thermomécaniques et les déformations correspondantes dans les barres profilées, inégalement sollicitées thermiquement, avec des champs de température quasi-stationnaires, est développée. Partant d'un gradient de température linéaire qui n'est pas connu, le gradient de température curviligne, engendré par la conductibilité thermique variable avec la température dans les aciers ferritiques et austénitiques sous densité de courant thermique constante, est décrit à l'aide d'une équation différentielle.

La description de la distribution de température dans un profil en acier plat sous densité de courant thermique variable et coefficient de conductibilité calorifique variable, à l'aide d'une équation différentielle de second ordre, constitue un passage aux champs de température réels. L'émission de chaleur naturelle et inévitable en direction latérale par des profils thermiquement et verticalement sollicités provoque des champs de température non-linéaires limités qui ont été déterminés et décrits par des essais et des mesures de champs de température sur des constructions métalliques réelles. L'analyse des champs de température non-linéaires, en tenant compte des conditions d'équilibre et de la dépendance de la température des valeurs caractéristiques physiques du matériau conduit à la détermination des contraintes thermomécaniques et des déformations correspondantes. Ceci a été réalisé grâce à la séparation exacte d'un champ de température curviligne à l'aide du gradient de température linéaire à contraintes nulles qui en résulte.

Dans le but de contrôler l'exactitude de cette méthode de calcul, les déformations longitudinales d'une fibre mesurées à un centième de millimètre près sur un acier plat et les flèches de l'essai 19/IV ont été vérifiées par le calcul. Le diagramme obtenu reflète l'exactitude de la méthode ainsi que le comportement de la fibre.

DANKSAGUNG

Die vorliegende Arbeit entstand nach meiner Pensionierung. Anregungen zu dieser Arbeit ergaben sich aus meiner langjährigen Tätigkeit als Ingenieur im Deutschen Steinkohlenbergbau, insbesondere auf der damaligen Kokerei Zollverein in Essen und in Zechenkraftwerken. Die Arbeit wurde von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal als Dissertation anerkannt.

Meinem Doktorvater Herrn Professor G. Hanswille, Lehrstuhl Stahlbau und Verbundkonstruktion, danke ich für die vielen Bemühungen und für die viele Zeit, die er während der Betreuung meiner Arbeit mir opferte.

Herrn Professor R. Harte, Lehrstuhl für Statik und Dynamik der Tragwerke, danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates sowie dafür, dass er Zeit und Interesse für meine Arbeit aufgebracht hat und mir zudem wertvolle inhaltliche Anregungen gab.

Ein besonderer Dank gilt Herrn em. Professor W.B. Krätzig, Lehrstuhl für Statik und Dynamik an der Ruhr-Universität Bochum, für seine Initiative, dieses Thema anzugehen sowie für seine langjährige, fortwährende fachliche und auch persönliche Unterstützung.

Ferner danke ich der Deutschen Steinkohle AG, Herne, die mir die Temperaturmessungen an Ankerständern der Kokerei Prosper in Bottrop ermöglichte.

Weiterhin gilt mein Dank Frau Annegret Weber, Bochum, für die viele, unermüdliche Arbeit mit der Erstellung des Schriftsatzes und Herrn Werner Drilling, Bochum, für die Gestaltung der Abbildungen und Tabellen.

September 2003

Widmung

Meiner Frau Hildegard in Liebe und tiefer Dankbarkeit gewidmet.

Sie hat mit ihren stets motivierenden Worten und mit viel Verständnis zum Gelingen dieser Arbeit wesentlich beigetragen.

**Auch bei meinen drei Söhnen, Karlfred, Joachim und Georg
„Die drei Musketiere“**

möchte ich mich für ihre stets freundliche Unterstützung und Begleitung während der Erstellung dieser Arbeit herzlich bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1 Problemstellung und Zielsetzung	1
1.2 Thermomechanische Spannungen und Wärmespannungen	5
1.3 Stand von Wissenschaft und Technik.....	6
1.4 Motivation	8
1.5 Problemlösung mit FEM	9
1.6 Gliederung und Lösungsweg	12
2. Das Wärmefluß-/ Temperaturproblem	16
2.1 Physikalische Grundlagen	17
2.1.1 Entkopplung in das mechanische und das thermische Problem	18
2.1.2 Das stationäre (zeitunabhängige) thermomechanische Problem	19
2.2 Wärmeleitung in Stahlprofilen	20
2.3 Temperaturfelder	21
2.4 Fouriersche Differentialgleichung der Wärmeleitung	25
2.5 Randbedingungen	25
2.6 Dimensionsreduktion	28
2.6.1 Nichtstationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen	28
2.6.2 Stationäre Wärmeleitung in einer ebenen Wand.....	29
2.6.3 Eindimensionale stationäre Wärmeleitung durch einen Stahl-Profilstab mit $b \neq \text{const}$	32
2.7 Einflüsse auf die Temperaturverteilungen	33
2.7.1 Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit “ λ ”, DGL	34
2.7.2 Einfluß der seitlichen Wärmeabströmung. Berechnung der Temperatur- verteilung durch Kopplung zweier Differentialgleichungen.....	39
2.7.2.1 Geschlossene Lösung der homogenen Differentialgleichung	41
2.8 Lösungen/Versuche/lineare und gemessene Temperaturfelder.....	44
2.8.1 Lösungen	44
2.8.2 Versuche und Temperaturmessungen an ausgeführten Stahlbau-Konstruktionen	50
2.8.3 Lineare Temperaturfelder	53
2.8.4 Gemessene Temperaturfelder	55
2.8.5 Analytische Berechnung des globalen Wärmeübergangskoeffizienten “ $\alpha_{(y)}$ ” aus einem gemessenen Temperaturfeld	61
3. Das thermoelastische Problem – Grundgleichungen.....	64
3.1 Allgemeines	64
3.2 Thermoelastische Grundgleichungen: Dreidimensionale Formulierungen	64
3.2.1 Gleichgewichtsbedingungen.....	64
3.2.2 Spannungsdehnungsbeziehungen: Erweitertes Formänderungsgesetz von Hooke, Cauchy und de St. Venant	64
3.2.3 Dehnungsverschiebungsbeziehungen.....	65
3.2.4 Verträglichkeitsbedingungen = Kompatibilitätsbedingungen.....	66
3.3 Thermoelastische Gleichungen für den ebenen Fall. Die Scheibe als ebener Spannungszustand (ESZ)	66
3.4 Reduktion der thermoelastischen Gleichungen auf den eindimensionalen Fall.....	68

3.5 Die Verschiebungen $u_{(x)}$, $v_{(y)}$ und $w_{(z)}$	69
3.6 Erweiterung der Differentialgleichung der elastischen Linie.....	71
3.6.1 Berechnung der maximalen Durchbiegung beim Vorliegen eines über die Stablänge konstanten mechanischen Momentes.....	72
3.7. Berechnung der Biegelinie und der maximalen Durchbiegung jeder Faser eines thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stabes bei freier Lagerung	76
4. Thermomechanische Sonderprobleme	80
4.1 Wärmespannungen	80
4.2 Thermomechanische Spannungen aus Dehnungsdifferenzen, allgemeiner Ansatz ..	81
4.3 Spannungslosigkeit bei linearer Temperaturverteilung.....	83
4.4 Elastische Energie/Innere spezifische Verschiebekräfte, thermodynamische Kräfte, thermodynamische Konstante und thermisches Moment	88
4.5 Korrespondierendes thermisches Moment	90
4.6 Thermische Formänderungsarbeit " W_{th} "	93
4.7 Kopplung des mechanischen und thermischen Problems	98
4.7.1 Gründe für das Auftreten und Einflüsse auf die Zustandsgrösse: Thermomechanischer Spannungen	98
4.7.2 Temperaturabhängige physikalische Werkstoffkennwerte für allgemeine Baustähle.....	101
4.7.3 Bauteilabhängige Werkstoffkennwerte/Thermische Dauerstandfestigkeit	101
4.7.4 Einfluss der Temperaturabhängigkeit des Wärmeausdehnungskoeffizienten " α_t " und des Elastizitätsmoduls " E " bei allgemeinen Baustählen.....	103
5. Berechnung thermomechanischer Spannungen nach Auswertung nichtlineare begrenzter Temperaturdifferenzen-Felder	105
5.1 Zusammenhänge in einem realen Temperaturdifferenzen-Feld.....	105
5.2 Ableitung thermomechanischer Spannungen Lösung für einen Balken mit konstanter Breite " b_r "	108
5.2.1 Ausgangszustand, Einwirkungen, gegebenes Temperaturdifferenzenfeld und berechnetes Polynom 4. Grades für die Temperaturverteilung.....	108
5.2.2 Linearisierung einer nichtlinear berandeten symmetrischen oder unsymmetrischen Temperaturverteilung durch den sogenannten resultierenden "Nullspannungstemperaturverlauf"	109
5.2.3 Ansatz für spannungswirksame Dehnungen und für thermomechanische Spannungen. Schnittgrößen und Gleichgewichtsformulierungen.....	114
5.2.4 Berechnung des Spannungsverlaufes über die Stabhöhe für unsymmetrische und symmetrische Temperaturverteilungen.....	117
5.3 Lösung für ein Stahlbau-Profil mit nicht konstanter Breite ($b_r \neq \text{const}$) und einfach- oder doppelsymmetrischem Querschnitt. Die wichtigsten Ableitungsgleichungen.....	120
5.3.1 Die wichtigsten Ableitungsgleichungen und zugehörige Formänderungsgrößen.....	123
5.4 Der Einfluss unterschiedlicher Stahlprofile auf die Größe und die Verteilung thermomechanischer Spannungen bei gleicher Temperaturverteilung	125
5.5 Durchschnittstemperaturfeld und Formänderungen Maximales Temperaturfeld und Maximalspannungen.....	127
5.6 Scheibengleichung und Airysche Spannungsfunktion.....	129

5.7 Berechnung der Verschiebungen u_x , w_z und v_y nach Auswertung (Aufspaltung) eines gegebenen Temperaturfeldes	131
6. Darstellung der Genauigkeit der vorgestellten Berechnungsmethode am Versuchs- beispiel 19/IV	141
7. Zusammenfassung, Ausblick, Anhang, Literaturverzeichnis und Lebenslauf.....	142
7.1 Zusammenfassung	142
7.2 Ausblick	144
7.3 Anhang A – H, Inhaltsverzeichnis	146
Literaturverzeichnis	276
Lebenslauf.....	283

Symbolverzeichnis

Symbolzeichen				
E	=	Elastizitätsmodul [N/mm ²]	σ	= Spannung [N/mm ²]
E _m	=	Gemittelter -“ -	σ _{th}	= Thermomechanische Spannung
G	=	G - Modul		
α	=	Globale Wärmeübergangszahl	σ _m	= Mechanische Spannung
α _t	=	Ausdehnungskoeffizient	σ _w	= Wärmespannung
α _{tm}	=	Gemittelter Koeffizient	σ _{res}	= Resul. Spannung
ϑ	=	Temperatur [°C]	σ _{th(y)}	= Spannungsfunktion
Δϑ	=	Temperaturdifferenz	φ	= Verkrümmungswinkel
Δϑ _(y)	=	Funktion einer Temperaturdifferenz	α, α ₁ , α _{ges}	= Winkel
Θ	=	Umgebungstemperatur	μ	= Querkontraktionszahl
ϑ _(y)	=	Funktion einer Temperatur	S _{A1} S _{A2} S _{A3}	= Flächenschwerpunkte
T	=	Absolute Temperatur T = 273,15 + ϑ [K] [1 K ≙ 1 °C]		
A, A ₁ , A ₂ A _{ges} , A _ϑ , A _S	=	Temperaturfeldanteile	R ₁ R ₂ R ₃	= Flächen-Schwerpunktabstände
a	=	Temperaturleitfähigkeit	κ _{th}	= Thermische Verkrümmung
grad ϑ	=	Temperaturgradient	W	= Energie, Arbeit
l ₀ , l ₁ , l _(y) l _a , l _m , l _i	=	Stabfaserlängen	M _{th}	= Thermisches Moment
Δl, Δl _a , Δl _m , Δl _i	=	Faserlängenänderungen	Q	= Wärmemenge
A _Q	=	Querschnittsfläche	• Q̇, q	= Wärmestrom und Wärmestromdichte
f _{th}	=	Thermische Stabdurchbiegung	λ	= Wärmeleitfähigkeit
σ _{b/Sch/t/ϑ}	=	Dauer-Biege-Schwellfestigkeit	W _{th}	= Thermische Formänderungsarbeit
σ _{Z/Sch/t/ϑ}	=	Dauer-Zug-Schwellfestigkeit		
K _T = E _m · α _{tm}	=	Thermodynamische Proportionalitäts Konstante	ϑ _{(y)1r}	= Lineare resultierende Temperaturfunktion

$\Delta\vartheta_{(y)r}$	=	Resultierende spannungsbehaftete Temperaturdifferenz	C_p^w	=	Wahre spezifische Wärmekapazität [J/kg K]
ρ	=	Spezifischer elektr. Widerstand	d	=	Dichte
Nebenzeichen					
—	=	Mittelwert	Zahlen } Striche }	=	Einzelne Temperaturbezeichnungen
a, m, i	=	außen, mittig, innen	th	=	thermisch
l, g	=	linear, gemessen	m	=	mechanisch
r, res	=	resultierend	D	=	Drehpunkt
l_r	=	linear resultierend	N	=	Normalspannungen
ges	=	gesamt			

Dimensionen einiger Größen der Wärmeleitung

Kurzzeichen	Bezeichnung	Dimension
T	Thermodynamische Temperatur	K
$\vartheta, \Delta\vartheta$	Celsius Temperatur	$1\text{ }^\circ\text{C} = 1\text{K}$
Q	Wärmemenge	$1\text{J} = 1\text{W} \cdot \text{s} = 1\text{N} \cdot \text{m}$
W	Arbeit; $Q = W$: Wärme = Arbeit	$1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m} = 1\text{W} \cdot \text{s} = 1\text{kg m}^2 / \text{s}^2$
\dot{Q}	Wärmestrom	$\dot{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
\dot{q}	Wärmestromdichte = Heizflächenbelastung	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
R_w	Wärmeleitwiderstand	$\frac{\text{K}}{\text{W}}$
λ	Wärmeleitfähigkeit	$\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$
α	Wärmeübergangskoeffizient	$\frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2}$
a	Temperaturleitfähigkeit	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
c_p^w	Wahre spezifische Wärme je kg und Kelvin	$\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
ζ	Spezifischer elektrischer Widerstand	$\Omega \cdot \text{m}$
d	Dichte = m / V	Kg / m^3
t	Zeit	s
A	Fläche	m^2
V	Volumen	m^3
$c_p^w \cdot d$	Spezifische Wärme je m^3 und Kelvin	$\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} = \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}}$
<p>Verbindende Gleichungen</p> $a = \frac{\lambda}{c_p^w \cdot d} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]; \quad c_p^w \cdot d = \frac{\lambda}{a} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} = \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$		

1. Einleitung

1.1 Problemstellung und Zielsetzung unter ökonomischem Standpunkt

Anlass der nachfolgenden Überlegungen ist das in der Praxis häufig beobachtete Versagen von thermisch und mechanisch beanspruchten Stahlkonstruktionen an Industrieöfen, in Kraftwerken und an Wärmereaktoren. Obgleich nach bestem Stand der Technik dimensioniert, nahmen ofennahe und damit mechanisch und thermisch hochbeanspruchte Profilträger nach kurzer technischer Lebensdauer, im Kokereibetrieb auch „Reisezeit“ genannt, derart unkontrollierbare Verkrümmungen an, dass sie ausgetauscht werden mussten, ohne dass eine Lösung zur dauerhaften Schadensbeseitigung erkannt werden konnte. Zusätzlich wurden in Stahlbau-Profilträgern an Kraftwerks-Kesselanlagen unerklärliche Risse vorgefunden.

Besonders angesprochen werden hierbei die für die Lebenszeit eines Industrieofens besonders wichtigen Ofenständer (Ankermasten, Wölbständer) und Hängedeckenträger. Am Herzstück einer Kokerei, den Koksöfen, sind es die so genannten Ankerständer. Das Problem dieser Arbeit ist angeregt durch dauernde: **“Schwierigkeiten mit Ankerständern“**.

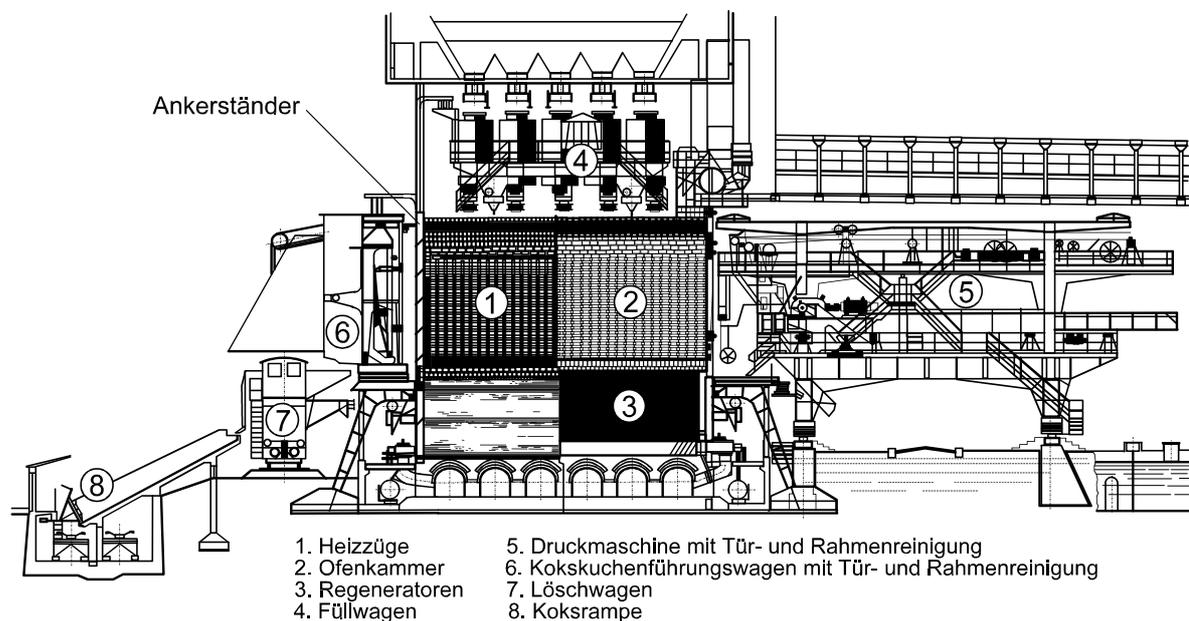


Bild 1.1: Schnitt durch die Koksöfen einer Kokerei mit Anordnung der zugehörigen Ofenmaschinen

Ofenständer und Ankerständer haben neben der Aufgabe, Lasten aus Ofenarmaturen, Zusatzmaschinen, Rohrleitungen, begehbaren Bühnen, Mannschafts- und Transportbrücken aufzunehmen, die Hauptaufgabe, den gemauerten Ofenteil zusammenzuhalten und ihn, über die Ofenhöhe gesehen, mit einer bestimmten Flächenandruckkraft vorzuspannen. Die Vorspannung soll bewirken, dass nach jedem Ofenspiel, verbunden mit Aufheizung und Abkühlung, jeder einzelne Ofenstein seine alte Lage wieder exakt einnimmt, damit Undichtigkeiten im Fugenbereich viele Jahre vermieden werden können.

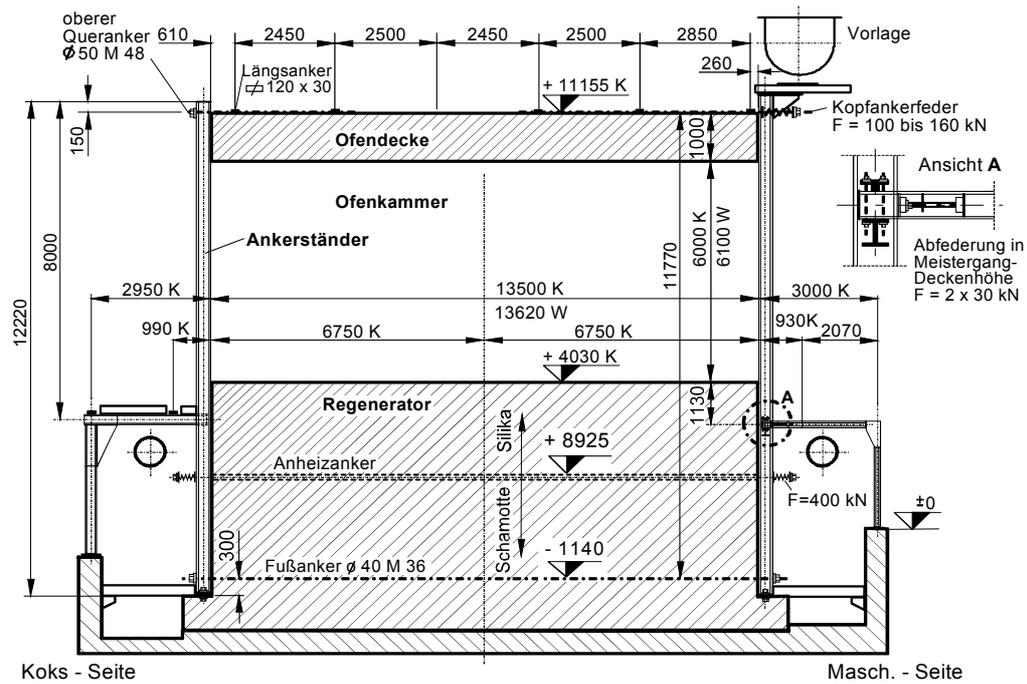


Bild 1.2: Batteriequerschnitt

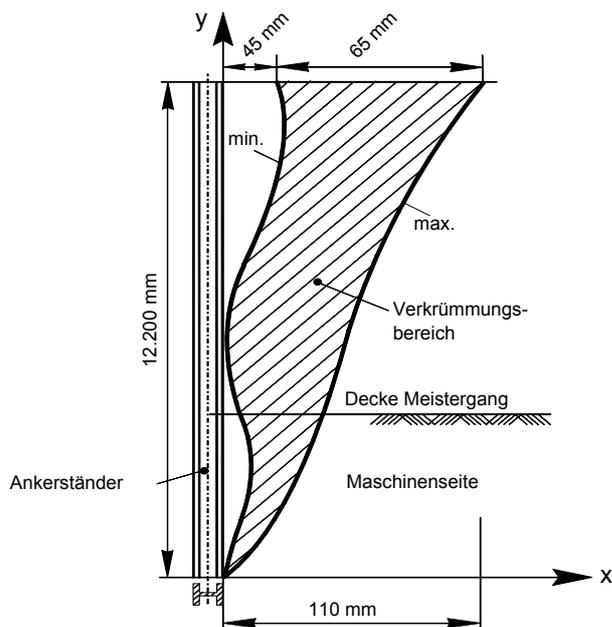


Bild 1.3: Verformungen der Ankerständer einer Koksofenbatterie

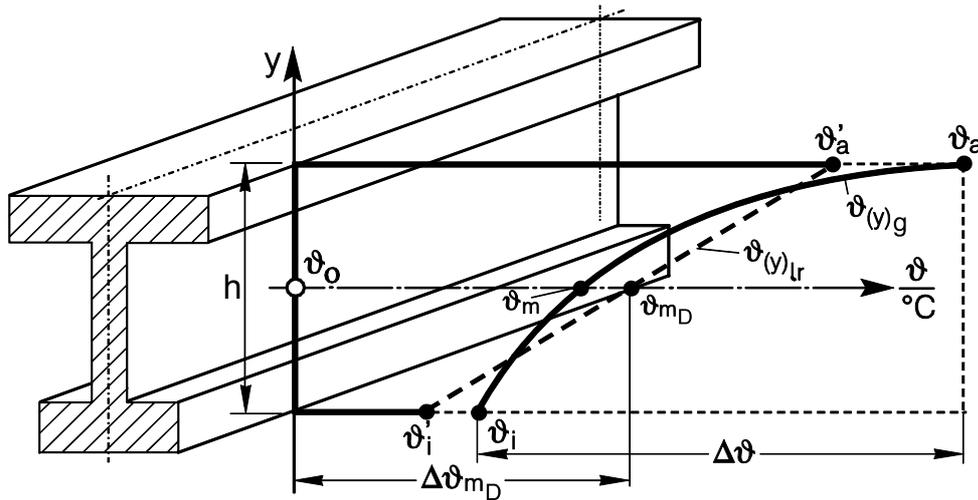


Bild 1.4: Breitflanschträger mit verkrümmter und linearisierter Temperaturverteilung

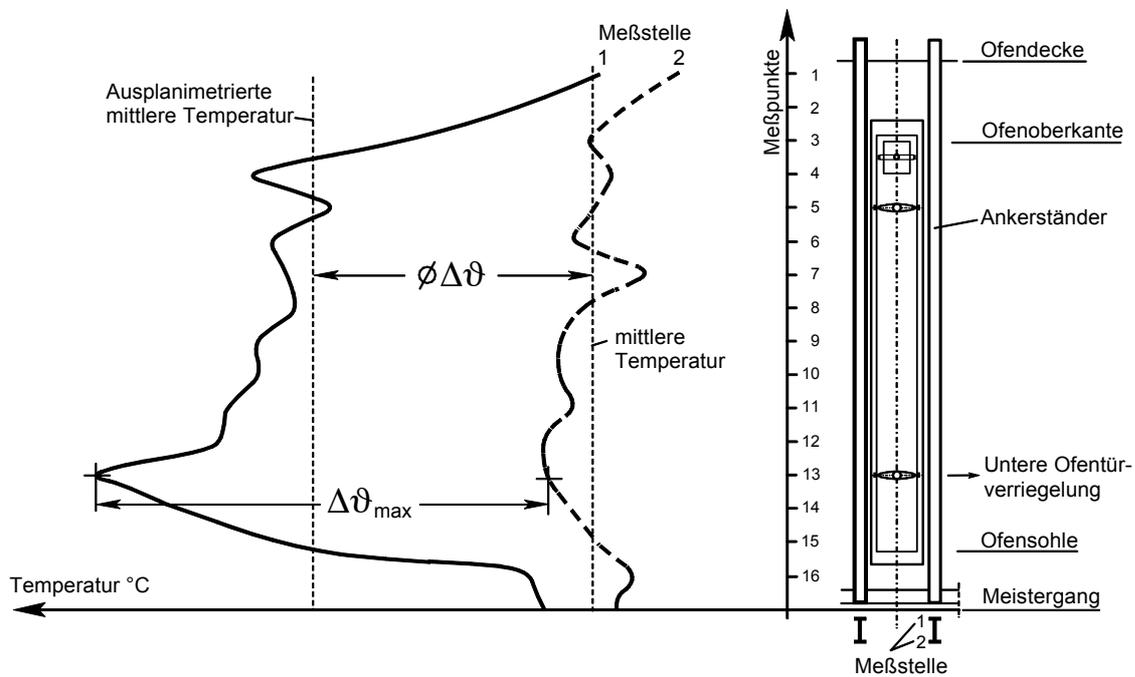


Bild 1.5: Temperaturdifferenzen zwischen den Stabaußenfasern über die Stablänge

Trotz des Wissens um die große Bedeutung einzelner Stahlbauelemente und Kenntnis der Folgeschäden verbunden mit hohen Kosten, die in keinem Zusammenhang mit dem Wert der Stahlkonstruktionen standen, boten sich keine technisch besseren und auf Dauer haltbareren Lösungen an. Die Lösung des aufgezeigten Problems besteht aus konstruktiven Verbesserungen und der Verbesserung der Zugänglichkeit der Berechnung thermomechanischer Spannungen mit zugehörigen Formänderungsgrößen in Stahlbau-Profilstäben mit über dem Querschnitt und über die Stablänge nicht konstanten Temperaturen (siehe Bild 1.4 und Bild 1.5).

Erst im letzten Jahrzehnt führten konstruktive Verbesserungen der Fachfirmen, angeregt durch ehemalige Patente* des Verfassers, zu wesentlich besseren Ankerständerkonstruktionen.

Einige Merkmale dieser Konstruktion sind:

1. Ausbildung des Ankerständers als Einfeld-Träger.
2. Wahl eines stärkeren Breitflansch-Profiles mit wesentlich größerer Trägerhöhe „h“.
3. Berechnung und Vorgabe (durch Punkt 4) einer definierten, resultierenden Biegelinie aus erforderlichen mechanischen Lasten und der zu erwartenden thermischen Belastung.
4. Anordnung geeigneter Lastübertragungselemente (z.B.: Federpakete) zwischen Ankerständer und Ofenkopf-Panzerplatten zwecks exakter Einstellung der unter Punkt 3 genannten Biegelinie.
5. Verbesserung der Wärmedämmung des Ofenkopfes.
6. Verbesserung der Wärmedämmung der Ankerständer durch Anordnung eines Luftspaltes zwischen Ankerständer und Ofenkopf-Panzerplatten je nach Ofenhöhe in der Größe von 30 bis 60 mm.

Bei einer Ankerständer-Neukonstruktion der RAG-Kokerei-Prosper, Bottrop, findet man als Wärmedämmung einen Luftspalt von 30 mm an 7.500 mm hohen Öfen zwischen Ankerständer und Ofenpanzer vor. Offensichtlich reicht dieses gewählte Maß nicht aus, die zu erwartende resultierende Stabdurchbiegung aus thermischer und mechanischer Beanspruchung voll aufzufangen, weil nach einer bestimmten Betriebszeit der Koksofenbatterien Berührungspunkte zwischen Ankerständern und Panzerplatten beobachtet werden konnten. Diese Stellen (punktförmige Einleitung der gesamten Federkräfte, siehe Bild 1.3) führen zwangsläufig zu unzulässig hohen Druckbeanspruchungen des Ofenkopf-Panzers, der Wärmedämmschicht und des Ofenkopf-Silika-Mauerwerks. Hierbei zerspringen zunächst die Gusseisenplatten des Ofenpanzers. Sie können dadurch die eingeleiteten Kräfte nicht mehr gleichmäßig auf das Ofenmauerwerk übertragen, das anschließend zerdrückt wird. Dieser Schadensverlauf bedingt entgegen der Lebensdauerplanung einer Ofenbatterie wesentlich kürzere Betriebszeiten und damit Kapitalverlust. Die Berechnung mechanischer Spannungen aus äußeren Lasten und

* **Ehemalige Patente**

1. P 27 09 6 31.7
2. P 27 11 4 45.0
 1. Wärmedämmung und / oder Kühlung von Ankerständern
 2. Geteilte Ankerständer mit beidseitiger Abfederung des oberen Querankers.

zugehöriger Verformungen ist hinreichend bekannt. Folglich müssen an den mechanisch und thermisch beanspruchten Stahlbau-Profil-Stäben bisher nicht allgemein bekannte und daher auch nicht berücksichtigte Spannungen und Formänderungen auftreten. Die gesuchten Spannungen werden "Thermomechanische Spannungen" benannt. Das kombinierte Wort soll anzeigen, dass es sich hier um eine Verschmelzung von thermischen und mechanischen Erscheinungen handelt, die im Auftreten thermomechanischer Spannungen ihr Gleichgewicht gefunden haben.

1.2 Thermomechanische Spannungen und Wärmespannungen

Unter thermomechanischen Spannungen werden solche nichtlinearen, im Koksofenbau (Industrieofenbau, Kraftwerks-Kesselbau) schwellenden Primärspannungen verstanden, die durch einen ungleichmässigen Wärmestrom in einem räumlich thermisch ungleichmäßig ($\vartheta_{(y)} \neq \text{const}$) beanspruchten Körper entstehen und dieser thermischen Lastgröße das Gleichgewicht halten. Hierbei werden die Auswirkungen der durch die unterschiedliche Wärmestromdichte hervorgerufenen, vom geradlinigen Temperaturverlauf zwischen den Außenfasertemperaturen abweichenden Temperaturdifferenzen im aufgebauten Temperaturfeld, durch die Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte verstärkt. Nach einer thermischen Überbeanspruchung nehmen die Verformungen wesentlich zu, ohne sich hierbei selbst zu begrenzen.

Thermomechanische Spannungen stellen eine eigene Spannungsart dar und bleiben in ihrer Größe als Lastspannungen aus äußeren thermischen Lasten so lange bestehen, wie der von außen eingetragene oder abgezogene Wärmestrom anhält. Sie sind mit mechanischen Primärspannungen vergleichbar, die auch so lange anhalten, wie äußere Lasten bestehen. **Unter thermomechanischen Spannungen werden keine linear verteilten Wärmespannungen oder Spannungsanteile verstanden, die sich aus behinderter Wärmedehnung, aus Materialunverträglichkeiten wie bei Bi-Metallen oder infolge geometrischer Unverträglichkeit z.B. in rotationssymmetrischen Körpern durch thermische Beanspruchung ergeben.**

1.3 Stand von Wissenschaft und Technik

Wärmespannungen sind z.B. in DIN 2413 Teil 1, Stahlrohre und im Stahlbau Brandschutz Handbuch [39 und 94] beschrieben. Sie werden in die Spannungskategorie von Sekundärspannungen eingestuft, können sich im Falle der Überbeanspruchung durch plastisches Verformen abbauen und führen somit nicht unmittelbar zum Bruch. Wärmespannungen werden in statisch unbestimmten Systemen durch „Zwänge“ (Zwangskraftsysteme), die die Wärmedehnung und Krümmungen behindern, und somit nur indirekt durch äußere thermische Lasten hervorgerufen. Die durch Nachbarbauteile behinderten thermischen Verdrehungen und Verlängerungen (eingeprägte Weggrößen) führen zur Ausbildung von Zwangsmomenten und Zwangskräften (als Reaktionen), die das Tragverhalten der Einzelbauelemente, insbesondere aber auch das Verhalten des Gesamttragwerks bestimmen. Wärmespannungen sind getrennt zu berechnen und überlagern sich bei elastischem Verhalten mit den übrigen Spannungen. Bei behinderter Wärmedehnung in thermisch beanspruchten Profilstäben (Zwangskraftsystem) erfolgt die Berechnung von Wärmespannungen meist mit Hilfe von idealisierten Federkonstanten (Federraten, Federsteifigkeiten), weil jedes Bauelement als Feder bei einer Beanspruchung aufgefasst werden kann und somit für jede Beanspruchungsart über eine eigene Federkonstante verfügt. Liegen keine Materialunverträglichkeiten und keine geometrischen Unverträglichkeiten vor, z.B. durch unterschiedliche Faserlängen, so kann es bei statisch bestimmten Systemen nicht zur Ausbildung von Wärmespannungen kommen, da sich die durch Temperaturänderungen ergebenden Verformungen ungehindert einstellen können. Voraussetzungen hierzu sind allerdings: Konstante Wärmestromdichte, linearer Temperatur- und Dehnungsverlauf, elastisches Werkstoffverhalten, temperaturunabhängige physikalische Werkstoffkennwerte und freie Dehnungen jeder Faser entsprechend der in ihr auftretenden Temperaturdifferenz. Nur in statisch unbestimmten Systemen kann es zu Wärmespannungen kommen. Zur Berechnung dieser Spannungen stehen die Gleichgewichtsbedingungen und Verformungsbedingungen zur Verfügung. Außerdem sind die geometrischen Bedingungen unter Berücksichtigung der elastischen und thermischen Dehnung zu erfüllen. Es gilt die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte. Wird ein geradlinig begrenztes Temperaturfeld mit gleichmäßigem oder ungleichmäßigem Temperaturverlauf und eine Körperform ohne geometrische Unverträglichkeiten bei freier Lagerung angenommen, so können Wärmespannungen nur unter äußeren Zwängen auftreten. In jedem dieser Fälle werden Wärmespannungen dadurch gefunden, dass zunächst die Form und die Abmessungen bestimmt werden, die der Körper unter thermischem Einfluss ohne Zwänge annehmen würde. Danach werden die

Spannungen berechnet, die die zwangsweise Rückführung zur vorliegenden Form mit sich bringt (Kraftgrößenverfahren der Baustatik). Thermomechanische Spannungen dagegen treten unabhängig vom statischen System in allen real thermisch ungleichmäßig beanspruchten Körpern, hier Stahlbauprofilen auf. Sie bauen sich nicht ab, solange ein Wärmestrom fließt. Es handelt sich meist um schwellende Spannungen, deren Spielzahl während der geplanten Lebensdauer von Ofenspielen, Kessel - An- und Abfahrvorgängen oder bei ungeschütztem Stahlbau von der täglichen Sonneneinstrahlung abhängt. Zeichnerische Darstellungen von thermomechanischen Spannungen, Wärmespannungen und resultierenden Wärmespannungen siehe Anhang G.

Hohe thermische Beanspruchungen von Stahlbauteilen sind Bauingenieuren natürlich aus dem Brandfall bekannt. Ab 100°C aufwärts spricht man im Stahlbau vom **Hochtemperaturbereich**. Bei der Bemessung von Stahltragwerken für den Brandfall [101], für die Feuerwiderstandsklassen F30 bis F240, arbeitet man mit der so genannten, definierten Einheits-temperatur – Zeitkurve (ETK) als Temperatureinwirkung. Bereits nach 15 Minuten erreicht die Temperatur der Kurve den Wert von $\approx 722^{\circ}\text{C}$ und nach 180 Minuten den Wert von $\approx 1090^{\circ}\text{C}$. Jedes ungeschützte Stahlbauelement versagt nach etwa 12 Minuten unter Einwirkung der Temperaturen der ETK. Die DIN 4102-Teil 1 bis Teil 16, die so genannten „Heißen Teile“ der Eurocodes 1 bis 6 sowie die vier Brandschutz-Handbücher für Stahl, Beton, Verbundbau und Holz sowie neuere Veröffentlichungen [105, 110], enthalten die notwendigen Dimensionierungsvorschriften für den Hochtemperaturbereich. Für die brandschutztechnische Bemessung von Trägern, Stützen und beliebig geformten Bauteilen liegen auf der höchsten Nachweisstufe (Ebene 3) exakte Rechenverfahren (Simulationsverfahren) analog zu den Standsicherheitsnachweisen der statischen Berechnung vor. Diese sind beispielsweise:

- BOFIRE – Universität Hannover, Ruhr-Universität Bochum
- CEFICOSS, ARBED – Luxembourg
- ENSA – T – Bergische Universität Wuppertal
- STABA – F – Technische Universität Braunschweig.

Im Gegensatz zu der Tragwerksbemessung im Brandfall werden in dieser Arbeit nur Temperaturbelastungen an Stahlbau-Profilstäben maximal bis zur „Kriechgrenze“, also maximal bis 450°C , betrachtet. Es kommen somit nur die Spannungs-Dehnungsbeziehungen im linear-elastischen Hooke'schen Bereich infrage. Der plastische Bereich wird nicht berührt. Eigenspannungen aus dem Herstellungsverfahren und aus dem Schweißen werden vernachlässigt,

weil sie sich bei Überbeanspruchung abbauen. Zudem sollen die vorgestellten Berechnungen helfen, ein Bauelement auf Dauer zu dimensionieren. Dazu wird die Dauerstandfestigkeit (Zeitstandfestigkeit) des Baustahls in Abhängigkeit von der Temperatur und schwellender Temperaturbeanspruchung benötigt. Ankerständler von Koksofenbatterien haben etwa 740 000 thermischen Laständerungen standzuhalten. Nach Dimensionsreduktion vom 3- Dimensionalen auf das Eindimensionale basiert das erarbeitete Berechnungsmodell auf der eindimensionalen Beschreibung des Wärmeflusses, der zugehörigen Temperaturverteilung (Temperaturfeld) über die Stabhöhe und der Auswertung des Temperaturfeldes für Profilstäbe mit konstanter und nicht konstanter Breite. Im **Niedrigtemperaturbereich** gibt es vielfältige numerische Simulationsverfahren für klimatische Temperaturbeanspruchungen von Stahl- und Stahlverbundbrücken. Mit diesen Verfahren können u.a. Verdrehungen und Verschiebungen einer Brücke und damit auch Lagerverdrehungen und Lagerverschiebungen berechnet werden. Derartige Rechenverfahren sind Grundlage der „Wärmewirkungen“ in DIN 1072, Straßen- und Wegbrücken und im Eurocode 1. Hier sind es die Teile ENV 1991-1: 1994; ENV 1991-2-2: 1997 sowie ENV 1991-2-5: 1999.

Die Anwendung geeigneter Computerprogramme für thermische Lastfälle im Hochtemperaturbereich des Stahlbaus ist heute noch auf einige spezialisierte Hochschulinstitute oder Ingenieurbüros begrenzt, aber keineswegs Allgemeingut der Industrie.

1.4 Motivation

Angeregt durch dauernde Schwierigkeiten mit Ankerständlern liegen der Motivation zu dieser Arbeit folgende Kerngedanken zugrunde:

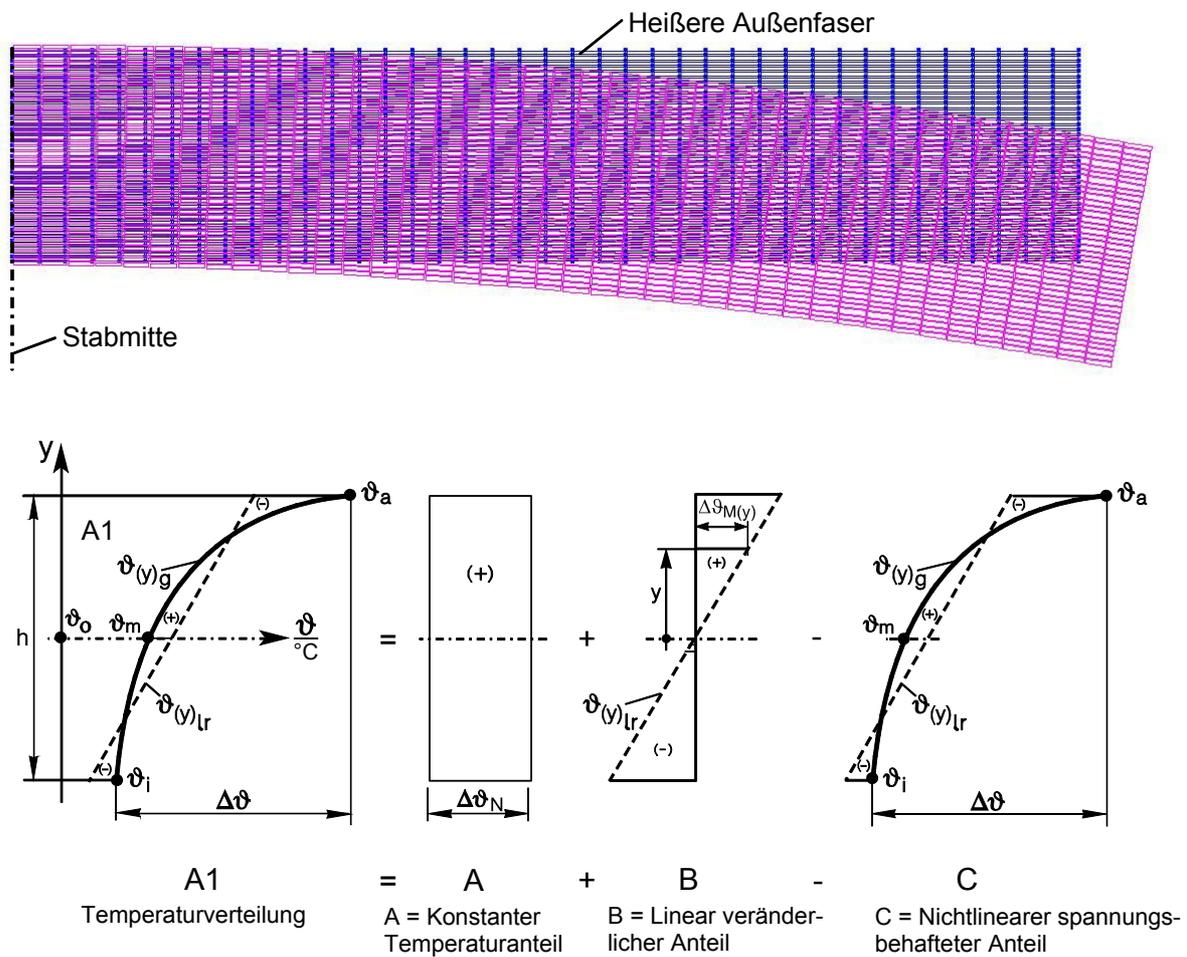
1. Die Existenz thermomechanischer Spannungen in Scheiben ist seit 1934 durch S. Timoshenko bekannt. Siehe: [4, 10, 12, 24 und 51].
2. Ihre Berechnung ist heute im Zeitalter der FEM kein grundsätzliches Problem mehr, wie das nachfolgende Berechnungsbeispiel des Versuches 19/IV aus dem Anhang A zeigt. Voraussetzungen sind allerdings, dass Erfahrungen bei FEM-Berechnungen beim Vorliegen von Temperaturbeanspruchung in statisch bestimmt und in statisch unbestimmt gelagerten Tragwerkselementen vorliegen. Weiterhin müssen die Temperaturverteilung im Bauelement (Querschnittstemperaturfelder, Durchschnittstemperaturfeld, maximales Temperaturfeld und Längstemperaturfeld) und die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls, des linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten, der Wärmeleitfähigkeit, der Wärmeübergangszahl und der Materialfestigkeit bekannt sein.

3. Auch experimentell lässt sich ihre Existenz gut nachweisen, s. Versuche Anhang A.
4. Das Problem der vorliegenden Dissertation wird darin gesehen, dass in dem zu betrachtenden Hochtemperaturbereich (100 °C bis 450 °C) die lineare Balkenstatik allein nicht ausreicht, die relativ komplexen Zusammenhänge bei der Berechnung von Spannungen und Formänderungen bei Temperaturlast zu beschreiben. In der Balkenstatik werden nichtlineare Spannungsverläufe nicht berücksichtigt, sie stellen Nebenspannungen dar, lassen sich also im Rahmen einer Balkentheorie (ebene Querschnitte) nicht berechnen. Daher sollten sie vernachlässigbar klein sein, was sie aber bei hohen Temperaturen nicht sind. Das Ziel besteht darin, die Zusammenhänge auf die gebräuchliche Stabtheorie zu reduzieren.
5. Andererseits gibt es Schäden an Stahlbaukonstruktionen, die sich durch thermomechanische Spannungen gut erklären lassen.
6. Daher soll die Arbeit ein analytisches Berechnungskonzept liefern, welches die klassische Balkenstatik um diese Spannungen ergänzt und auch für thermisch belastete Stahlbauprofile gilt, bei denen die Stabbreite nicht konstant ist.
7. Viele Ingenieure begegnen den von ihnen mittels Computeranalysen gewonnenen Ergebnissen mit erstaunlicher Kritiklosigkeit, als würde die Zuverlässigkeit Computerbasierter Berechnungen automatisch diejenige manueller Berechnungen übertreffen. Auch Berechnungsprozesse in Computern können fehlerbehaftet sein, wobei sich Fehler im Berechnungsverlauf (Eingabefehler), während der eigentlichen Berechnungsphase sowie in der Ergebnisaufbereitung einschleichen können. Jeder Programmierer sollte daher als Endkontrolle geeignete Verifikationsstrategien beherrschen, siehe [89]. So soll die vorliegende Arbeit auch als Plausibilitätskontrolle von Ergebnissen aus Computeranalysen thermischer Probleme dienen.

1.5 Problemlösung mit FEM

Das mit FEM nachfolgend berechnete Beispiel soll die Übereinstimmung mit dem analytischen Berechnungskonzept dieser Arbeit dokumentieren. Das Beispiel ist im Anhang A als Versuch 19/IV beschrieben und berechnet worden. Es handelt sich um einen thermisch ungleichmäßig belasteten, an den Enden frei aufliegenden Rechteck-Profilstab, $b_0 \cdot h_0 \cdot l_0 = 30 \times 120 \times 1200$ mm, aus dem Material R St 37-2 bzw. nach DIN EN 10025 mit der Bezeichnung S 235 IR G2 und der Werkstoffnummer 1.0038.

Aufgrund der gemessenen Versuchstemperaturen wurde für die Durchschnıts-Temperaturverteilung über die Stabhöhe ein Polynom 4. Grades berechnet. Mit den gegebenen Durchschnıts-Werkstoffkennwerten E_m und α_{tm} , dem Polynom und den Ausgangsabmessungen des Versuchsstabes konnte jetzt für einen Einfeldträger mit Hilfe der FEM die Berechnung der thermomechanischen Durchschnıts-Spannungen mit zugehörigen Formänderungen nach Modellgenerierung durchgeführt und den Ergebnissen aus Anhang A mit guter Genauigkeit gegenübergestellt werden, siehe: Vergleich der Spannungsverteilung, Anhang H, Punkt 1.



**Bild 1.6: FE-Diskretisierung und Verformung der Scheibe mit Temperaturlast (Versuch 19/IV)
Aufspaltung des zugehörigen Temperaturfeldes A1**

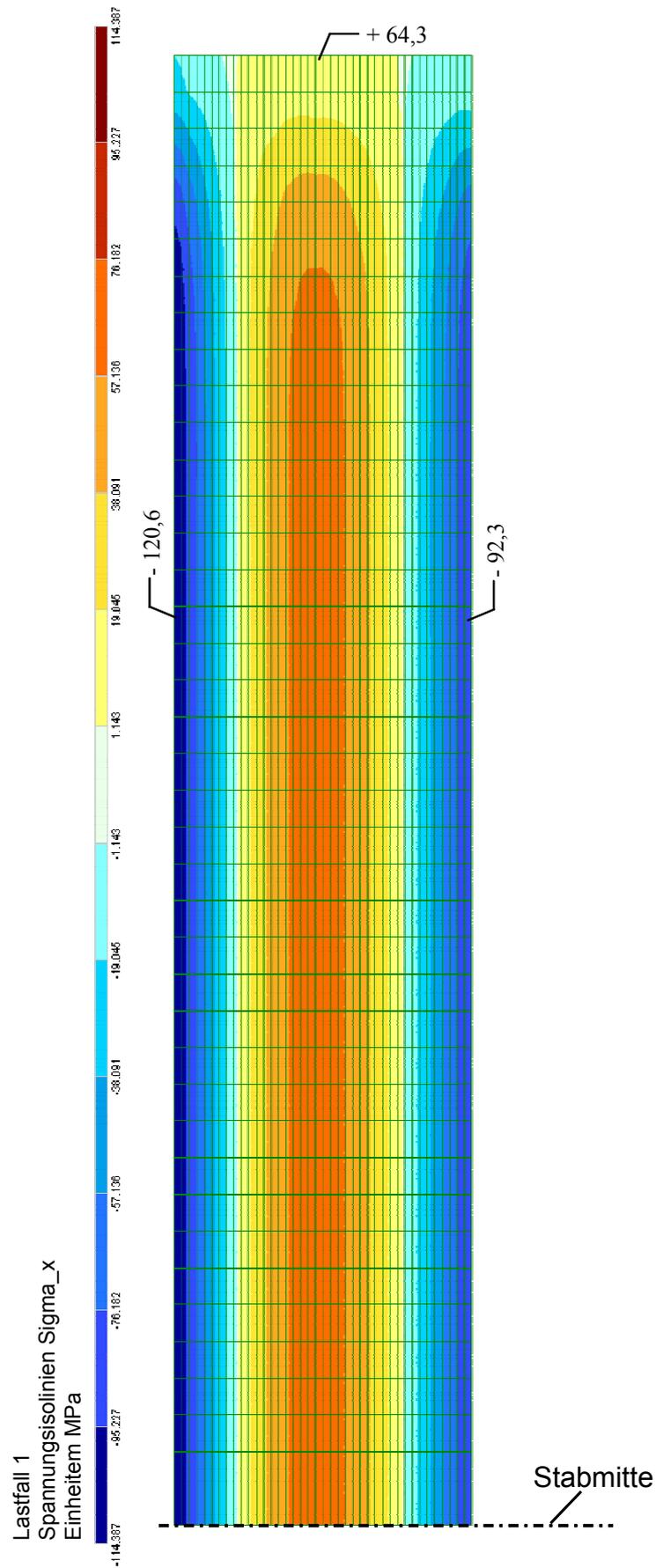


Bild 1.7: Mit FEM berechnete Spannungen σ_x unter Temperaturlast in der Scheibe (Versuch 19/IV)
 Unsymmetrische Spannungsverteilung

1.6 Gliederung und Lösungsweg

Die Arbeit wird gegliedert in einen theoretischen Teil, Kapitel 2 bis 7, und einen mehr praktischen Teil als Anhang „A“ bis „H“. Kapitel 2.: „Das Wärmefluss-/Temperaturproblem“, beschreibt vom dreidimensionalen Wärmefluss ausgehend nach Dimensionsreduktion die eindimensionale Wärmeleitung durch eine ebene Wand und durch ein Stahlprofil mit nicht konstanter Breite. Temperaturverteilungen unterliegen mehreren Einflüssen. Im Kapitel 2.7 werden die wesentlichen Einflüsse aus dem Werkstoffkennwert λ und aus der seitlichen Wärmeabströmung mit Hilfe von geschlossenen Lösungen zweier Differentialgleichungen aufgezeigt. Das mit Hilfe der zweiten Differentialgleichung berechnete Temperaturfeld bei seitlicher Wärmeabströmung, lineare theoretische Temperaturfelder und gemessene Temperaturfelder werden gegenübergestellt. Es ist ersichtlich, dass die Temperaturdifferenzen zwischen der nichtlinearen, kurvenförmigen Berandung eines realen Temperaturfeldes und der Geraden zwischen den Außenfasertemperaturen der Grund für das Auftreten thermomechanischer Spannungen sind. Weitere Einflüsse auf die Temperaturverteilungen werden durch die starke Temperaturabhängigkeit des globalen Wärmeübergangskoeffizienten „ α “ ausgeübt. Dieser Einfluss wird im Kapitel 2.8 beschrieben. Im Kapitel 2.8.5 wird „ α “ analytisch aus einer gemessenen Temperaturverteilung an einem Versuchsstab berechnet. Einflüsse auf die Spannungsverteilungen und die rechnerischen Temperaturdifferenzen durch die temperaturabhängigen Werkstoffkennwerte „ E “ (Elastizitätsmodul) und „ α_t “ (linearer Ausdehnungskoeffizient) werden im Kapitel 4.7.4 und in den Anhängen E und F beschrieben.

Das Kapitel 3. mit dem Titel: „Das thermomechanische Problem - Grundgleichungen“, zeigt von der dreidimensionalen Formulierung der thermoelastischen Grundgleichungen ausgehend, über die thermoelastischen Gleichungen für den ebenen Spannungszustand (ESZ), den eindimensionalen Fall an einem Balken. Für diesen Fall werden die Berechnungsgleichungen der Verschiebungen und ihrer Anteile aufgestellt. Damit die Durchbiegungen aus mechanischen und thermischen Lasten jeder Faser über die Stabhöhe exakt addiert werden können, wurde die bekannte Differentialgleichung der natürlichen, elastischen Linie um einen Term erweitert und für beide Beanspruchungsarten gelöst. Im Kapitel 4: „Thermomechanische Sonderprobleme“, werden vorbereitend auf die Berechnung thermomechanischer Spannungen einige Sonderprobleme aufgezeigt, besprochen und gelöst. Beispiele hierfür sind: Wärmespannungen, Spannungslosigkeit bei linearem Temperaturverlauf, das korrespondierende thermomechanische Moment, thermische Formänderungsarbeit, thermomechanische Span-

nungen aus Dehnungsdifferenzen und Kopplung des mechanischen und thermischen Problems. Das Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Berechnung thermomechanischer Spannungen und der ausführlichen Beschreibung der Auswertung nichtlinear begrenzter Temperaturdifferenzfelder. Temperaturfeldformen aus dem Industrieofenbau werden technisch dargestellt. Andere Konstruktionsgebiete, wie der Kran- und Brückenbau, der Kraftwerkskesselbau und das Gebiet des Brandschutzes, verfügen über eigene, typische Temperaturfeldformen bzw. typische Isothermendarstellungen, aus denen sich durch geeignete vertikale Schnittführung die zugehörigen Temperaturfelder gewinnen lassen. Die für alle Temperaturfeldformen geltende Auswertung führt zu einem so genannten linearen, resultierenden Nullspannungstemperaturverlauf durch ein solches Temperaturfeld, der spannungslos die gleichen Formänderungen (Faserlängenänderungen, Verschiebungen über die Stabhöhe und Stabbreite sowie die Durchbiegung) wie die Temperaturdifferenzen des Temperaturfeldes verursacht. Danach werden aufgrund der gefundenen Temperaturdifferenzen zwischen der nichtlinearen Berandung des Temperaturfeldes und der Gleichgewichtsgeraden (Nullspannungstemperaturverlauf) die Berechnungsgleichungen aufgestellt, die notwendig sind, auftretende thermomechanische Spannungen über die Stabhöhe nach Größe und Art sowohl für Flachstahl als auch für doppelt-symmetrische und einfach-symmetrische Stahlbauprofile zu berechnen. Nach Erklärung der Zusammenhänge in einem realen Temperaturdifferenzfeld werden thermomechanische Spannungen und zugehörige Formänderungen einschließlich der Verschiebungen abgeleitet. Die Auswertung berechneter oder gemessener Temperaturfelder an thermisch beanspruchten Tragwerkselementen führt zu Spannungen verursachenden Temperaturdifferenzen und letztlich mit Hilfe des Stoffgesetzes (Lineares Elastizitätsgesetz, Hooke'scher Bereich) und des eindimensionalen Spannungszustandes zu spannungsverursachenden Dehnungen und damit zu thermomechanischen Spannungen. Die Lösungen werden für Stäbe mit konstanter und nicht konstanter Breite erarbeitet. Dabei wird gezeigt, dass zur Berechnung von Formänderungen (Faserlängenänderungen) das so genannte Durchschnittstemperaturfeld, zur Berechnung der Biegelinie der Verlauf der resultierenden Temperaturdifferenz über die Stablänge und zur Berechnung von Spannungen das maximale Temperaturfeld benötigt wird. Die Anwendungsbeispiele im Anhang „H“ dienen der Kontrolle der theoretisch erarbeiteten Berechnungsgleichungen. Anschließend wird auf den Einfluss unterschiedlicher Stahlprofile bei gleicher Temperaturverteilung und auf Maximalspannungen im thermisch höchst beanspruchten Stabquerschnitt hingewiesen. Das Kapitel 5 schließt mit der gleichwertigen Lösung des Problems mittels Scheibengleichung und Airyscher Spannungsfunktion sowie der Berechnung der Verschiebungen. Nach der Darstellung der Genauigkeit der vorgestellten Berechnungsme-

thode im Kapitel 6 und der Zusammenfassung mit Ausblick im Kapitel 7 als letztem Kapitel des theoretischen Teiles, folgt der Anhang mit reproduzierbaren Versuchen an ungleichmäßig erwärmten Flacheisenstäben und wiederholbaren Temperaturfeldmessungen an zehn Ankerständen der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop als Anhang „A“ und Anhang „B“. Hierzu gehören auch die Berechnungen der Polynome (mindestens dritten Grades) der Temperaturverteilungen sowie die Berechnung der Spannungen und der zugehörigen Formänderungsgrößen. Während Anhang „C“ die notwendigen temperaturabhängigen physikalischen und bauteilabhängigen Werkstoffkennwerte für den Stahl S 235 JR G2 enthält, werden im Anhang „D“ Ableitungen und Erläuterungen zu acht Einzelproblemen einschließlich der rechnerischen Ermittlung der thermischen Durchbiegung eines Stabes in Anlehnung an Mohr, vorgestellt, die in ihrer Ausführlichkeit im theoretischen Teil der Arbeit nicht untergebracht werden konnten. Dann folgen in den Anhängen „E“ und „F“ die Berechnung und Darstellung der Einflüsse aus der Temperaturabhängigkeit des Wärmeausdehnungskoeffizienten und des Elastizitätsmoduls einzeln und zusammenwirkend auf die Größe der thermomechanischen Spannungen und auf die Größe der zugehörigen Formänderungen. Die zeichnerischen Darstellungen des Anhangs „G“ sollen ein Verbindungsglied zwischen thermomechanischen Spannungen, Wärmespannungen und resultierenden Wärmespannungen sein. Letztlich enthält der Anhang „H“ das Kapitel „Anwendungsbeispiele“. Diese Zahlenbeispiele sollen der Verifikation der zuvor hergeleiteten theoretischen Zusammenhänge dienen. Der Punkt 8, Neudimensionierung der Ankerstände der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop, ist als Rückschluss zur Aufgabenstellung der Arbeit zu sehen. Unter Punkt 5 wird mit einem modernen numerischen Berechnungsverfahren (FEM-Verfahren, SOFiSTiK-Programm) näherungsweise ein analytisch vorgerechnetes Beispiel eines HEB-120-Breitflanschträgers mit guter Übereinstimmung nachgerechnet. So kann diese Arbeit auch eine Hilfe und ein Kontrollorgan (Verifikationsstrategie) im Umgang mit modernen Programmen der Methode der Finiten Elemente sein.

Das nachfolgende Bild 1.8 soll schematisch zeigen, welche Disziplinen in der vorliegenden Arbeit angesprochen werden.

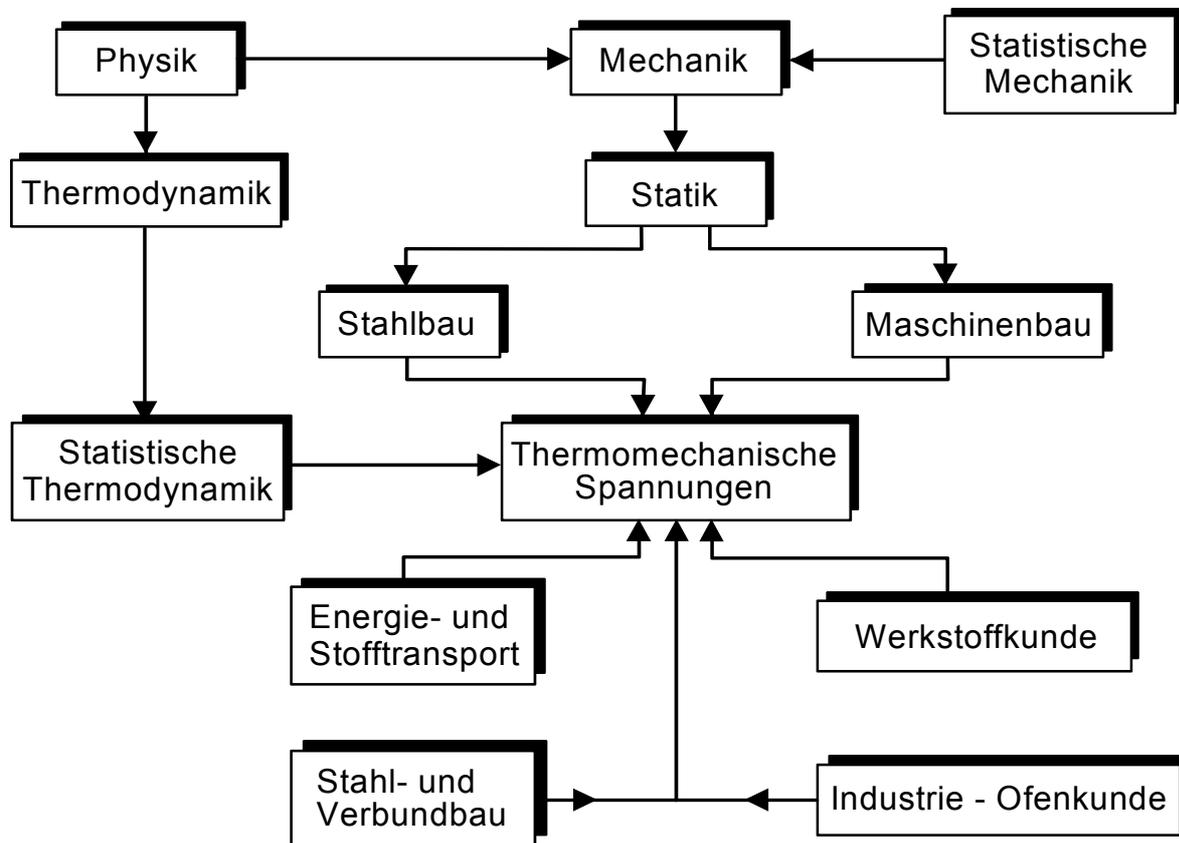


Bild 1.8: „Thermomechanische Spannungen“. Ein interdisziplinäres Gebiet.

2. Das Wärmefluss-/Temperaturproblem

Wärme ist eine Sinnesempfindung, die durch äußere Reize physikalischer Art hervorgerufen wird. Sie wird in der Physik als spezielle Energieform (Wärmeenergie, thermische Energie, Formelzeichen Q) neben den Energieformen Arbeit und Innere Energie beschrieben. Die gesamte Energie E eines Systems der Masse m besteht aus innerer Energie, Kinetischer Energie E_{kin} und potentieller Energie E_{pot} .

$$E = U + E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad (2.1)$$

Die ohne Verrichtung von Arbeit zwischen einem System und seiner Umgebung ausgetauschte Energie bezeichnet man als Wärme. Sie wird als Bewegungsenergie der ungeordneten Wärmebewegung der Atome oder Moleküle eines Körpers erklärt. Der Begriff der Wärme steht in enger Beziehung zu dem der Temperatur; verschiedene Wärmezustände desselben Körpers lassen sich u.a. anhand der Temperatur unterscheiden. Wärme breitet sich immer von Orten höherer Temperatur zu Orten tieferer Temperatur aus (Wärmeübertragung). Bei Wärmezufuhr oder Wärmeabfuhr dehnen sich Körper im Allgemeinen aus bzw. ziehen sich zusammen (Wärmeausdehnung). Eine phänomenologische Wärmelehre liefert die Thermodynamik; eine atomistisch-statistische Theorie der Wärme ist die statistische Mechanik mit der mechanischen Wärmetheorie und der kinetischen Gastheorie [56, 59]. Im Gegensatz zur Kinetischen Gastheorie betrachtet die Thermodynamik Körper endlicher Ausdehnung. Sie befasst sich mit den verschiedenen Erscheinungsformen der Energie und deren Umwandlung ineinander. Die thermische Energie weist jedem Körper (jedem System) aufgrund seiner Temperatur einen „inneren Energiezustand“ zu. In der technischen Wärmelehre wird dieser innere Energiezustand auch als Wärmeinhalt bezeichnet. Er ist der absoluten Temperatur des Körpers – gemessen in Grad Kelvin – proportional.

$$Q = c_p^w \cdot m \cdot T \quad \text{bzw.} \\ Q = c_p^w \cdot m \cdot \Delta\vartheta \quad \text{mit} \quad \Delta\vartheta = T_2 - T_1 \quad \text{als Differenz zwischen zwei Energiezuständen} \quad (2.2)$$

In Gleichung (2.2) gibt die wahre spezifische Wärmekapazität c_p^w die Wärmeenergie Q an, die aufgewendet werden muss, um die Temperatur eines Körpers der Masse 1 kg um ein Grad zu erhöhen [30]. Bei der spezifischen Wärmekapazität c_p^w (vereinfacht „ c “ geschrieben) handelt es sich um einen reinen Stoffwert, der mit der Temperatur und dem Druck ver-

änderlich ist. Betrachtet man nun ein thermodynamisches System aus mehreren Körpern unterschiedlicher Temperatur, die in einem beliebigen thermischen Kontakt zueinander stehen, so sind diese Körper bestrebt, ihre Temperaturen auszugleichen. Durch die unterschiedlichen Temperaturpotentiale wird ein Energieaustausch eingeleitet, der nach hinreichend langer Zeit erst mit Erreichen des thermischen Gleichgewichts zum Stillstand kommt. Der thermische Gleichgewichtszustand ist dem Gleichgewichtszustand der Mechanik äquivalent. Im Gegensatz zur Mechanik interessiert in der technischen Wärmelehre aber nicht nur der Gleichgewichtszustand, sondern hier wird den Zwischenzuständen ebenfalls Bedeutung zugemessen, so dass zur analytischen Beschreibung der Wärmeaustauschvorgänge neben den Ortsveränderungen x, y, z als zusätzliche Variable die Zeit t einzuführen ist.

2.1 Physikalische Grundlagen

Wir betrachten einen beliebigen Körper mit dem Volumen V und der gesamten Oberfläche A . Dann lauten der 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik (in Form einer Leistungsaussage):

Energieerhaltung als Leistungsaussage, rate of energy equation:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(U + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \rho \, dV = \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \rho \, dV + \int_A (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} - h) \, dA \quad (2.1.1)$$

Entropie-Produktions Ungleichung, entropy production inequality:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, S \, dV - \int_V \frac{\rho \mathbf{r}}{T} \, dV + \int_A \frac{h}{T} \, dA \geq 0 \quad (2.1.2)$$

Hierin bedeuten:

- dV differentielles materielles Volumen von V zum Zeitpunkt t
- dA differentielles Oberflächenvolumen des Körpers zum Zeitpunkt t
- ρ Massendichte
- U innere Energie (einschließlich Wärme) pro Masseneinheit
- S Entropiedichte pro Masseneinheit
- \mathbf{v} Vektorfeld der Geschwindigkeiten des Körpers
- \mathbf{f} Massenkräfte des Körpers pro Einheit der Masse ρ , z.B. Eigenlast
- \mathbf{t} Spannungsfeld auf der Oberfläche, vektorielle Größe
- r skalare Wärmequelle im Körper pro Masseneinheit pro Zeiteinheit

h skalarer Wärmefluss über die Oberfläche pro Zeiteinheit

T Absolute Temperatur in Kelvin

ρ bis T: Alle Variablen sind Funktionen der Zeit t

und gelten hier zu einem festen Beobachtungszeitpunkt $t = t^*$

Dieses sind, gemeinsam mit dem Prinzip der Invarianz von U gegen infinitesimal kleine Translationen und Rotationen, die physikalischen Grundlagen des **thermomechanischen Problems** [113, 114, 115, 9]. Alles andere sind empirische Ergänzungen, beispielsweise die verschiedenen Stoffgesetze. Das Problem ist hochgradig gekoppelt durch U , T und die Stoffgesetzparameter, die von der Temperatur ϑ (in ° Celsius), von den Dehnungen, von den Spannungen (Gasdruck!) abhängig sind.

2.1.1 Entkopplung in das mechanische und das thermische Problem

Die Entkopplung in die beiden Teilprobleme ist sehr logisch möglich, aber physikalisch-mathematisch äußerst kompliziert.

Wir treffen nun folgende Annahmen:

- Es existiert eine **freie Helmholtz'sche Energie** $A(\varepsilon_{ij}, T)$, $A = U - ST$, deren Ableitung nach den Verzerrungen die mechanischen Spannungen σ_{ij} liefert:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}$$
- Wir **lokalisieren** (beziehen auf den Raumpunkt x_i des Körpers) die beiden **globalen** (Integralaussagen) Hauptsätze. Dies erfordert die Annahme der Stetigkeit der einzelnen Integranden! Dabei setzen wir die erwähnte **Starrkörperinvarianz** von U voraus.
- Wir beschreiben unseren Körper durch ein System **gradliniger, orthogonaler (Kartesischer) Koordinaten**: Beliebiger Punkt P somit:

$$x_i = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}, \quad i = 1, 2, 3$$
- Wir setzen **infinitesimal kleine** Verzerrungen und Verschiebungen voraus: $\varepsilon_{ij} \ll 1$

$$u_i \ll l_i$$
- Wir setzen **kleine Temperaturveränderungen** ϑ um eine Referenztemperatur T voraus, z.B. $T = 273,15 + \vartheta \rightarrow \vartheta$ (in ° Celsius).

Mit diesen Annahmen (und vielen Herleitungen) erhält man:

Lokale Grundgleichungen des „mechanischen“ Teilproblems:

$$u_i = u_i(t), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t) \quad : \quad i, j = 1, 2, 3$$

- Bewegungsgleichungen: $\sigma_{ij,i} + \rho \left(f_i - \dot{v}_i \right) = 0$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
- Kinematische Beziehungen: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, Symmetriebedingung
bereits eingebaut
- Linear-elastisches Stoffgesetz: $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \alpha_T \frac{E}{1-2\nu} \delta_{ij} \vartheta$
- + Rand- und Anfangsbedingungen

Lokale Grundgleichungen des Teilproblems „Wärmeleitung“: $h_i = h_i(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$

- Wärmebilanz nach Fourier: $\frac{c\rho}{\lambda} \dot{\vartheta} - \Delta \vartheta - r = 0$

siehe auch Gleichung (2.4.4)

$$\text{räumlicher Laplace Operator} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Hier ist wie bei α_T schon die Annahme „thermischer Isotropie“ gemacht worden, sonst wären c und λ richtungsabhängig!

2.1.2 Das stationäre (zeitunabhängige) thermomechanische Problem

Das stationäre mechanische Teilproblem:

Annahmen: Keine der Zustandsfunktionen $f_i, u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ sind Funktionen der Zeit, es gilt:

$$\ddot{u}_i = 0 \quad (\text{keine Beschleunigung}).$$

Das Steifigkeitsverhalten sei isotrop (richtungsunabhängig)

- Gleichgewichtsbedingungen: $\sigma_{ij,i} + \rho f_i = 0$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
- Kinematische Beziehungen: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$
- Linear-elastisches Stoffgesetz: $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E \cdot \alpha_T}{1-2\nu} \vartheta \delta_{ij}$

Siehe auch lineare Spannungsdehnungsgleichungen (3.4) bis (3.9).

- Randbedingungen: Auf jeder k -Fläche (die k -Koordinatenachse, $k = 1, 2, 3$, steht senkrecht auf ihr) gilt:

$$u_i|_k = u_i^o|_k \quad \text{oder} \quad t_{ki}|_k = t_{ki}^o|_k$$

Das stationäre Wärmeübertragungsproblem:

Annahmen: Keine der Zustandsfunktionen h_i, ϑ ist zeitabhängig

Das Stoffverhalten ist thermisch isotrop

- Allgemeine Form des Wärmeleitungsgesetzes nach Fourier:

$$\dot{q} = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot e_x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot e_y + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot e_z \right); \quad \text{siehe auch Gleichung (2.6.4)}$$

2.2 Wärmeleitung in Stahlprofilen

Der Wärmeaustausch zwischen den einzelnen Körpern – in der technischen Wärmelehre als Wärmeübertragung bezeichnet – kann grundsätzlich auf 3 verschiedenen Wegen erfolgen [51].

Die erste Art der Wärmeübertragung ist die an Materie gebundene Wärmeleitung, bei der ein Wärmeaustausch mit den unmittelbar benachbarten Körperelementen stattfindet. In festen Körpern erfolgt die Wärmeübertragung ausschließlich durch Wärmeleitung. In Gasen trägt die Wärmeleitung nur in geringem Maße zur Wärmeübertragung bei.

Die zweite Art der Wärmeübertragung ist die Konvektion. Sie tritt auf, wenn Elemente eines Körpers ihre Stellung im Raum verändern und so die an diese Körperelemente gebundene Wärme eine Ortsveränderung erfährt. Diese Art der Wärmeübertragung findet hauptsächlich in strömenden Gasen und Flüssigkeiten statt. Bezieht man in die Betrachtung der Konvektion auch die Begrenzungsflächen – die durch feste Körper gebildet sein sollen – mit ein, so gelangt man zum Begriff des Wärmeübergangs.

Die an den Begrenzungsflächen ausgetauschte Wärme führt zu Dichteänderungen, die im gasförmigen bzw. flüssigen Körper eine Strömung hervorruft. Diese Form des Wärmeübergangs bezeichnet man mit freier Konvektion. Die Strömung kann durch äußere Einwirkungen (wie z.B. Wind) verstärkt werden. Man spricht dann von erzwungener Konvektion.

Die dritte Art der Wärmeübertragung ist die Strahlung. Im Unterschied zur Wärmeleitung und zur Konvektion ist die Wärmeübertragung durch Strahlung nicht an ein Übertragungsmedium gebunden. Die Wärmeübertragung infolge Strahlung ist deshalb durch Vakuum (Welt-

raum) wie auch durch strahlungsdurchlässige Körper (Luft) möglich. Die Wärmestrahlung entsteht an den Oberflächen der Körper durch Umwandlung der an den Körper gebundenen thermischen Energie in Strahlungsenergie und wird beim Auftreffen auf Körper wieder in thermische Energie umgewandelt. Diese verschiedenen Arten der Wärmeübertragung, die in physiologischem Sinne den Eindruck einer durchaus einheitlichen Erscheinung machen, treten selten alleine auf, sondern sind meist miteinander kombiniert. So wird der Austausch von Wärmeenergie innerhalb fester Körper ausschließlich durch Wärmeleitung gewährleistet, während an den Rändern fester Körper der Wärmeaustausch mit der Umgebung durch Konvektion und Strahlung erfolgt. Betrachtet man im Industrieofenbau einen Ofenständer, so stellt das Tragwerk in thermophysikalischem Sinne einen festen Körper dar, der über seine Umgrenzungsflächen mit dem Ofen und der Umwelt in thermischem Kontakt steht. Die Ermittlung der instationären Temperaturfelder in den Stabquerschnitten, die aus den Wärmeübertragungsvorgängen resultieren, kann in die Lösung zweier Teilprobleme der Wärmeleitung unterteilt werden. Die Lösung des **ersten Teilproblems** erfordert die mathematische Beschreibung der Wärmeleitung im Stabquerschnitt unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit „ λ “. Das **zweite Teilproblem** besteht in der Beschreibung der Temperaturverteilung im Stabquerschnitt unter Berücksichtigung der Wärmeabströmung in die Umgebung und der Temperaturabhängigkeit der globalen Wärmeübergangszahl „ α “.

2.3 Temperaturfelder

Versteht man unter den Körpern, die miteinander in thermischem Kontakt stehen, die differentiell kleinen Elemente von festen Körpern in einem Koordinatensystem x, y, z und weist jedem Element als Zustandsgröße seine Temperatur zu, so gelangt man zur mathematischen Darstellung der in einem Körper zum Zeitpunkt t vorliegenden Temperaturverteilung. Diese Art der Darstellung von Zustandsgrößen bezeichnet die Vektoranalysis als skalares Feld, dessen Verlauf durch Niveaulinien abgebildet werden kann [10, 14, 111]. Handelt es sich um Temperaturfelder, so bezeichnet man die Niveaulinien als Isothermen, Linien gleicher Temperatur. Wird im einfachsten Fall ein Flachstahlprofil nur eindimensional ungleichmäßig erwärmt ($\vartheta = \vartheta(y)$) und nimmt man zunächst eine theoretische lineare Temperaturverteilung über die Stabhöhe an, können die unterschiedlichen Temperaturen wie folgt aufgetragen werden. Das Formänderungsgesetz (Stoffgesetz) ist jedoch für die drei Achsen zu betrachten.

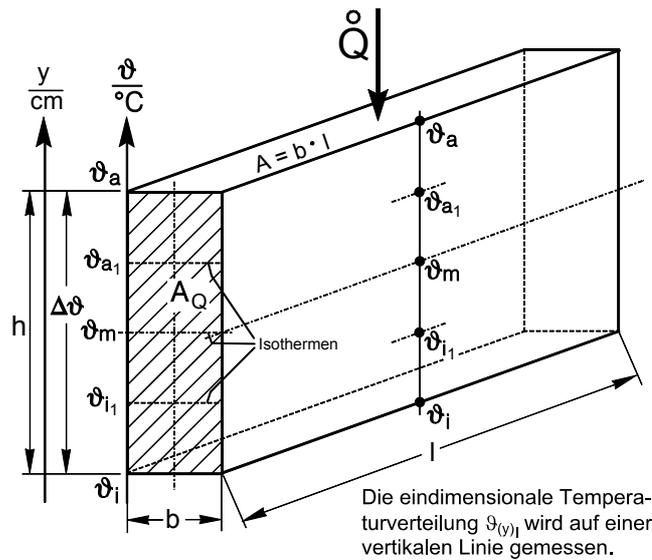


Bild 2.1: Flachstahlprofil thermisch ungleichmäßig belastet. Linearer Temperaturverlauf. Flachstahl gestreckt gezeichnet ohne Längenänderung.

Das Bild 2.1 ist wenig aussagefähig, deshalb klappt man das Temperaturfeld in die Zeichnungsebene, um die Temperaturen und die Temperaturdifferenzen über die Stabhöhe sichtbar zu machen.

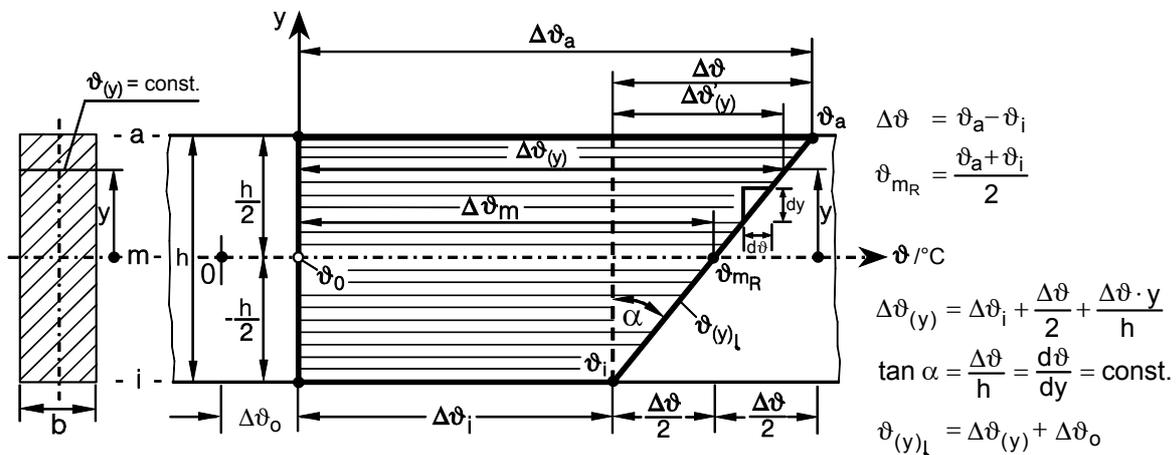


Bild 2.2: Temperaturdifferenzen-Feld oder kurz: Temperaturfeld

Für die Betrachtung des Wärmestromes nach Fourier: $\dot{Q} = \frac{Q}{t} = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \cdot A$ bzw. der Wärme-

stromdichte $\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} = -\lambda \cdot \tan \alpha = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$ ist nur der ungleichmäßige Teil des Temperatur-Feldes maßgebend. Wegen $\tan \alpha = \text{const}$ ist bei linearer Temperaturverteilung auch

Hierin bedeuten x , y und z die Raumkoordinaten, t die Zeit und ϑ die Temperatur in Grad Celsius. Zu jedem Punkt des Temperaturfeldes kann nun ein Vektor angegeben werden, der sich aus der Ableitung des Temperaturfeldes in Richtung der Normalen ergibt. In kartesischen Koordinaten lautet dieser Vektor:

$$\text{grad } \vartheta = e_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + e_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + e_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \quad (2.3.2)$$

mit den Basisvektoren e_1 bis e_3 .

Der Vektor $\text{grad } \vartheta$ wird analog zum Temperaturfeld als Temperaturgradient bezeichnet. Er ist positiv, wenn er in Richtung ansteigender Temperatur zeigt. Die Gesamtheit des Gradientenfeldes ist durch Wärmestromlinien darstellbar. Da die Wärmestromlinien die „Fließrichtung“ der Wärmeenergie angeben, kann konform zum Gradientenfeld ein zusätzliches Vektorfeld definiert werden, das den Wärmefluss in einem Körper beschreibt.

Über die Beziehung

$$\dot{q} = -\lambda \text{ grad } \vartheta \quad (2.3.3)$$

kann dieses Vektorfeld des Wärmestromes aus dem Temperaturgradientenfeld bestimmt werden. Der absolute Betrag von \dot{q} in Gleichung (2.3.3) gibt die Wärmestromdichte an; der Proportionalitätsfaktor λ steht für die Wärmeleitfähigkeit des Stoffes. Er ist, wie alle Stoffparameter, mit Druck und Temperatur veränderlich. Mit Gleichung (2.3.3) kann Gleichung (2.3.2) auch in Komponentendarstellung ausgedrückt werden. Die Wärmestromdichten in Richtung der einzelnen Koordinatenachsen lauten dann:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad (2.3.4)$$

$$\dot{q}_y = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad (2.3.5)$$

$$\dot{q}_z = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \quad (2.3.6)$$

2.4 Fouriersche Differentialgleichung der Wärmeleitung [58]

Die Veränderung des Temperaturfeldes in der Zeiteinheit dt folgt nun aus einer Bilanz der Wärmeströme am Volumenelement dV . Mit Gleichung (2.3.4) bis (2.3.6) folgt für die Differenz der an einem Volumenelement in der Zeiteinheit dt ein- und austretenden Wärmeströme:

$$dQ = \lambda \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] dx dy dz dt. \quad (2.4.1)$$

Die in der Zeiteinheit dt im Volumenelement dV zur Veränderung der Temperatur benötigte Wärmemenge folgt aus Gleichung (2.2) zu

$$dQ = c \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (2.4.2)$$

Befindet sich im Volumenelement dV eine Wärmequelle der bezogenen Intensität \dot{W} , so ist die in Gleichung (2.4.2) zur Temperaturerhöhung benötigte Wärmemenge um die von der Wärmequelle in der Zeiteinheit dt erzeugte Wärmemenge zu vermindern

$$dQ = \left[c \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \dot{W} \right] dx dy dz dt. \quad (2.4.3)$$

Die Forderung nach einer ausgeglichenen Wärmebilanz am Volumenelement dV , die sich unmittelbar aus dem Energieerhaltungssatz ableiten lässt, ergibt durch Gleichsetzen der Gleichungen (2.4.1) und (2.4.3) die Fouriersche Differentialgleichung der Wärmeleitung [10].

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \dot{W} - \frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0. \quad (2.4.4)$$

Mit Hilfe dieser linearen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom parabolischen Typ kann der instationäre Wärmeleitungsprozess in festen Körpern orts- und zeitabhängig beschrieben werden. Die im Allgemeinen mit der Temperatur und dem Druck veränderlichen Stoffparameter werden für das weitere zunächst als konstant angesehen.

2.5 Randbedingungen

Zur eindeutigen Lösung der Wärmeleitgleichung muss die gesuchte Lösungsfunktion sowohl die Differentialgleichung als auch die Anfangs- und Randbedingungen erfüllen. Die zu lösende Randwertaufgabe stellt mathematisch ein Raum-Zeit-Gebiet dar, so dass neben der räumlichen auch die zeitliche Randbedingung vorzugeben ist [111]. Die zeitliche Randbedingung

wird durch die Vorgabe des Temperaturfeldes zum Zeitpunkt $t = 0$ erfüllt. Hinsichtlich der räumlichen Randbedingungen sind nach [111] drei Arten von Randbedingungen zu unterscheiden. Die erste Art der Randbedingungen gibt für jeden Punkt der Oberfläche die Temperatur als Funktion des Ortes und der Zeit vor:

$$\vartheta = \vartheta [x, y, z, t]. \quad (2.4.5)$$

Die zweite Art der Randbedingungen schreibt den Wärmestrom durch die Oberfläche des Körpers als Funktion des Ortes und der Zeit vor.

$$\dot{q} = \dot{q} [x, y, z, t]. \quad (2.4.6)$$

Die dritte Art der Randbedingungen gibt die Lufttemperatur außerhalb des betrachteten Körpers vor, mit der über ein entsprechendes physikalisches Gesetz der Wärme fluß zur Oberfläche des festen Körpers zu bestimmen ist. Die Gesetzmäßigkeiten zur Wärmeübertragung von strömenden zu festen Körpern sind aufgrund der komplexen Strömungsverhältnisse in der Grenzschicht äußerst kompliziert. Die Bestimmung der Wärmeübertragung unter Berücksichtigung des funktionalen Zusammenwirkens aller relevanten Größen gelingt mit dem Newtonschen Abkühlungsgesetz in der Form der Gleichung (2.4.7). Diese Form wird auch als Definitionsgleichung für den globalen Wärmeübergangskoeffizienten „ α “ bezeichnet. Mit dem globalen Wärmeübergangskoeffizienten ergibt sich die Wärmestromdichte an der Oberfläche des festen Körpers mit einer Oberflächentemperatur ϑ_R und der Lufttemperatur ϑ_L zu:

$$\dot{q}_a = \alpha [\vartheta_R - \vartheta_L]. \quad (2.4.7)$$

In Kapitel 2.8.5 wird die große Temperaturabhängigkeit der globalen Wärmeübergangszahl gezeigt, indem „ α “ analytisch aus einem gemessenen Temperaturfeld berechnet wird. Die an der Körperoberfläche abgegebene bzw. zugeführte Wärmestromdichte muss der vom Körper normal zu seiner Begrenzungsfläche durch Wärmeleitung zuströmenden bzw. abfließenden Wärmestromdichte

$$\dot{q}_L = -\lambda [\text{grad}_n \vartheta]_{\text{RAND}} \quad (2.4.8)$$

entsprechen. Durch Gleichsetzen der beiden Wärmestromdichten folgt dann für den Temperaturgradienten am Rand des festen Körpers:

$$[\text{grad}_n \vartheta]_{\text{RAND}} = -\frac{\alpha}{\lambda} [\vartheta_R - \vartheta_L]. \quad (2.4.9)$$

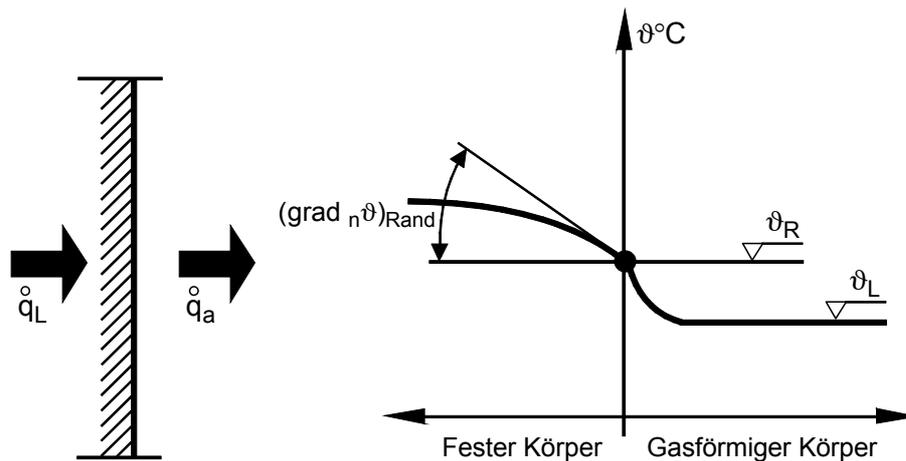


Bild 2.5: Randbedingung dritter Art

Mit der Randbedingung dritter Art ist es nun möglich, das Temperaturfeld eines festen Körpers mit einer außerhalb des Körpers existenten Temperaturfunktion zu verknüpfen. Zum Beispiel erfolgt eine derartige Verknüpfung zwecks Beschreibung der instationären Temperaturerhöhung „ $\Delta\vartheta_a$ “ eines Stahlprofils bei Brandbeanspruchung durch Gleichsetzen der Wärmemengengleichungen (zweite Randbedingung dritter Art). Hierzu werden die Gleichungen (2.2) und (2.4.7) benötigt, wie folgt erweitert und dann gleichgesetzt:

1. Wärmehalt eines Körpers

$$Q = c_p^w \cdot m \cdot \Delta\vartheta \quad ; \text{ siehe (2.2)}$$

$$\Rightarrow Q = d \cdot V \cdot c_p^w \cdot \Delta\vartheta_a$$

mit $m = d \cdot V = \text{Dichte} \cdot \text{Volumen}$

$$c_p^w = \text{wahre spez. Wärme und mit } \Delta\vartheta_a = (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

= spezifische Wärme je kg und Kelvin

Die einzelnen Größen der Wärmeleitung werden verbunden durch die Gleichung:

$$c_p^w \cdot d = \frac{\lambda}{a} = \frac{\text{Wärmeleitfähigkeit}}{\text{Temperaturleitfähigkeit}}$$

= spezifische Wärme

$$\text{je m}^3 \text{ und Kelvin } \left[\frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{K} \cdot \text{m}^3} \right]$$

2. Wärmestromdichte an der Oberfläche

$$\dot{q}_a = \alpha (\vartheta_t - \vartheta_s) \quad ; \text{ (siehe 2.4.7)} \quad Q = \dot{q}_a \cdot \Delta t \cdot A_m$$

$$\Rightarrow Q = \Delta t \cdot A_m \cdot \alpha (\vartheta_t - \vartheta_s) \quad ; \quad [1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m} = 1\text{W} \cdot \text{s}]$$

mit $\Delta t = \text{Zeitintervall}$

$A_m = \text{Beflammte Oberfläche}$

$\alpha = \text{Globaler Wärmeübergangskoeffizient}$

ϑ_t = Mittlere Heißgastemperatur

ϑ_s = Mittlere Stahltemperatur

$$1. = 2. : \Delta\vartheta_a \cdot d \cdot V \cdot c_p^w = A_m \cdot \alpha \cdot (\vartheta_t - \vartheta_s) \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta\vartheta_a = \frac{\alpha}{c_p^w \cdot d} \cdot \frac{A_m}{V} \cdot (\vartheta_t - \vartheta_s) \cdot \Delta t$$

Diese Beziehung findet sich auch in [94].

In dieser Arbeit wird eine Verknüpfung [siehe Gleichung (2.7.2.0)] durch Kopplung zweier Differentialgleichungen hergestellt, um bei seitlicher Wärmeabströmung die Temperaturverteilung in einem Flacheisen-Profilstab bei nicht konstanter Wärmeübergangszahl „ α “ und nicht konstanter Wärmeleitfähigkeit „ λ “ über die Stabhöhe zu berechnen.

2.6 Dimensionsreduktion

2.6.1 Nichtstationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen und Wärmesenken [10]

Bei mehrdimensionaler Wärmeleitung ohne Wärmequellen und Wärmesenken lautet die Foursche Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \quad (2.6.1)$$

und für ebene Wände mit einem Wärmestrom in Richtung der y-Achse

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} . \quad (2.6.2)$$

Beide Gleichungen setzen in dieser Form konstante Wärmeleitfähigkeit λ und konstante Wärmekapazität c voraus. Die Größe

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (2.6.3)$$

ist die Temperaturleitfähigkeit $[m^2 / s]$.

2.6.2 Stationäre Wärmeleitung in einer ebenen Wand

Bei **dreidimensionaler Wärmeleitung** ist die Wärmestromdichte in Richtung der drei Koordinaten x, y, z ein Vektor

$$\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \mathbf{e}_x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_y + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_z \right) \quad (2.6.4)$$

mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ (siehe auch Gleichung 2.3.2). Gleichung (2.6.4) ist zugleich die allgemeine Form des Fourierschen Gesetzes für isotrope Körper.

Eindimensionale stationäre Wärmeleitung durch eine ebene Wand ($\delta = \text{const}$):

Werden die beiden Oberflächen einer ebenen Wand der Dicke δ auf verschiedenen Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 gehalten, so strömt durch die Fläche A in der Zeit t nach dem Fourierschen Gesetz die Wärme

$$Q = \lambda \cdot A \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} \cdot t. \quad [\text{J}] \quad (\text{zunächst : } \lambda, A = \text{const}) \quad (2.6.5)$$

Darin gibt die Wärmeleitfähigkeit λ [$\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$] die Wärmemenge an, die im stationären Zustand je Sekunde durch eine Fläche von 1m^2 fließt, wenn senkrecht dazu ein Temperaturgefälle von 1K pro Meter herrscht. Man bezeichnet $\dot{Q} = \frac{Q}{t}$ als Wärmestrom [W] und

$\dot{q} = \frac{Q}{t \cdot A}$ als Wärmestromdichte [W/m^2]. Ähnlich wie bei der Elektrizitätsleitung ein Strom

I nur fließt, wenn man eine Spannung U anlegt, um den Widerstand R zu überwinden ($I = U/R$), fließt ein Wärmestrom \dot{Q} nur dann, wenn eine Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ vorhanden ist:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda \cdot A}{\delta} \cdot \Delta\vartheta. \quad (2.6.6)$$

In Analogie zum Ohmschen Gesetz nennt man $R_w = \delta/(\lambda \cdot A)$ einen Wärmeleitwiderstand [K/W]. Betrachtet man statt einer Wand mit der endlichen Dicke δ eine aus ihr senkrecht zum Wärmestrom herausgeschnittene Scheibe der Dicke dx , so erhält man das Fouriersche Gesetz in der Form

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad \text{und} \quad \dot{q} = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (\text{Wärmestromdichte} = \text{Heizflächenbelastung})$$

$$\lambda = \text{const} \quad (2.6.7)$$

wobei das negative Vorzeichen ausdrückt, dass die Wärme in Richtung abnehmender Temperatur strömt. \dot{Q} ist hierbei der Wärmestrom in Richtung der x-Achse, der senkrecht durch eine gegebene Fläche A hindurch tritt. Liegt eine lineare Temperaturverteilung mit $\vartheta_{(x)} = \vartheta_m + \frac{\Delta\vartheta \cdot x}{h}$ und mit $\vartheta_{(x)}' = \frac{\Delta\vartheta}{h}$ vor, dann lautet die Wärmestromdichte

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = \text{const und allg.} \quad \dot{q}_{(y)} = -\lambda_{(y)} \cdot \frac{d\vartheta}{dy}(y) \quad (2.6.8)$$

Hierbei ist „ $\Delta\vartheta$ “ die Temperaturdifferenz zwischen den Außenfasern im Abstand „h“.

Zu Wärmeleitfähigkeiten und Wärmestromdichten siehe Kapitel 2.8.4.

**Dimensionsreduktion vom räumlichen, instationären Temperaturfeld
(die Wärme flutet!) $\vartheta = \vartheta [x, y, z, t]$ (siehe (2.4.5))
zum eindimensionalen, scheinbar stationären Temperaturfeld**

In den Anhängen A, B, H 6 und H 8 werden für thermisch ungleichmäßig beanspruchte Stahlbauelemente thermomechanische Spannungen und zugehörigen Formänderungen mit Hilfe eines eindimensionalen, gemessenen Temperaturfeldes berechnet.

Diese analytischen Berechnungen sind durch drei Dimensionsreduktionen ermöglicht. Diese sind:

1. Die Zeit „t“

Die Zeit „t“ kann beim Vorliegen folgender Messergebnisse (Temperaturprofile) eliminiert werden:

- 1.1 Über die Stabhöhe gesehen liegt eine ausreichende Anzahl von scheinbar stationären Temperaturfeldern, die aus der Überlagerung beliebiger instationärer Temperaturverteilungen entstanden sind, mindestens minutenlang vor.
- 1.2 Die Temperaturprofile weisen ein maximales Profil zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort „x“ aus. Hierbei können der Zeitpunkt und der Ort aus der Erfahrung bekannt sein oder aus zeitabhängigen Temperaturmessungen über die Länge des Bauteils in Abhängigkeit vom Arbeitsablafrhythmus, von Lastspielzahlen oder von Klimawechseln stammen.

2. Einfluss der x-Achse

Der Einfluss der x-Achse auf die Temperaturverteilung kann dadurch berücksichtigt werden und aus den Berechnungen ausscheiden, wenn der Ort „x“ des maximalen Temperaturfeldes $\vartheta = \vartheta_{(y) \max}$ zur Ermittlung der thermomechanischen Spannungen bekannt ist, wenn das Durchschnittstemperaturfeld über die Stablänge aus den gemittelten Werten der zu den einzelnen Querschnittstemperaturprofilen gehörenden Temperaturfelder zwecks Ermittlung der durchschnittlichen Formänderungen bekannt ist und wenn zwecks Ermittlung der Biegelinie der Verlauf der Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_1(x)$ “ (siehe Anhang D9.) bekannt ist.

3. Einfluss der z-Achse

Der Einfluss der z-Achse scheidet aus den Berechnungen aus, wenn die Temperaturen konstant über die Stabdicken verlaufen oder nur kleine, vernachlässigbare Temperaturdifferenzen vorhanden sind. Die Auswirkungen dieser Temperaturdifferenzen werden durch die Querkontraktionszahl $\mu = 0,3$ bei Stahl ohnehin gemindert.

Liegen die Voraussetzungen der Punkte 1. bis 3. vor, so scheidet aus den Berechnungen die Größen x, z und t aus. Es liegt nur noch die eindimensionale Temperaturverteilung

$$\vartheta = \vartheta_{(y)} \text{ vor.}$$

2.6.3 Eindimensionale stationäre Wärmeleitung durch einen Stahl-Profilstab mit $b \neq \text{const}$

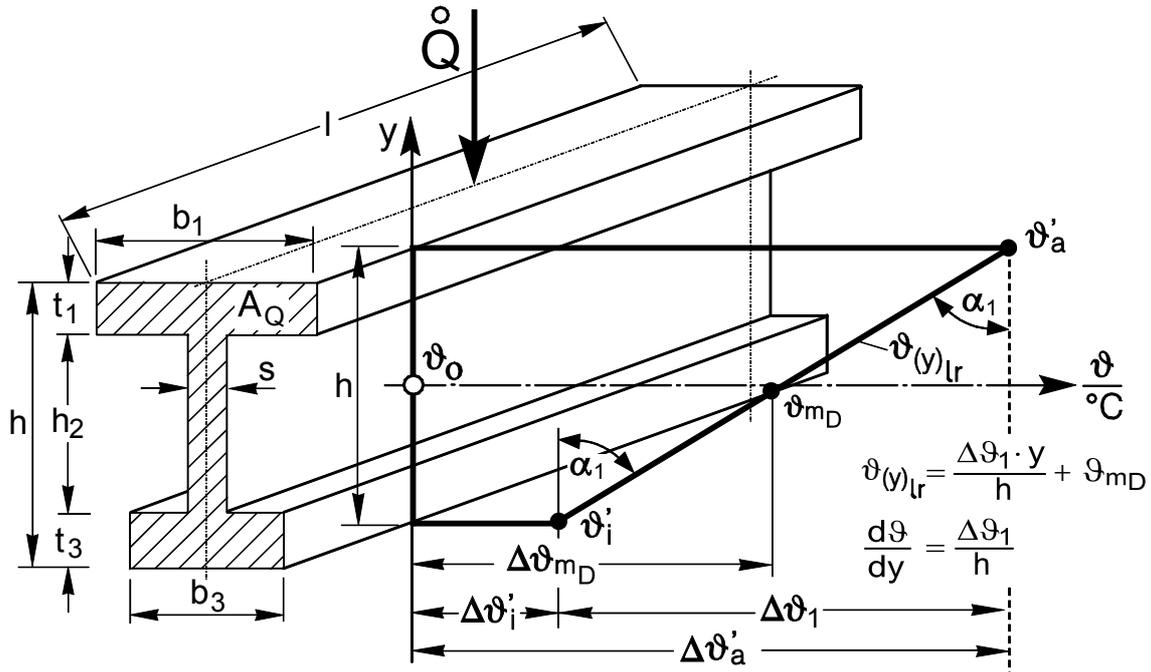


Bild 2.6: Breitflanschträger mit linearisierter Temperaturverteilung $\vartheta(y)_{lr}$

Nach Fourier gilt für eindimensionalen Temperaturverlauf und $b = \text{const}$

Wärmestromdichte:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} = -\lambda \cdot \tan \alpha_1 = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h}$$

Wärmestrom:

$$\dot{Q} = -\dot{q} \cdot b \cdot \ell = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h} \cdot b \cdot \ell = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h} \cdot A = -\frac{\Delta\vartheta_1}{R_w}$$

mit dem Wärmeleitwiderstand $R_w = \frac{h}{\lambda \cdot b \cdot \ell}$.

Ferner gilt für $b \neq \text{const}$:

Ein Profilstab ist aus Teilprofilen zusammengesetzt. Soll der Wärmestrom berechnet werden, der alle Teilprofile durchfließt, so sind der resultierende Wärmeleitwiderstand und die resultierende, rechnerische Stabbreite „ b_w “ zunächst zu berechnen.

Analog dem Ohmschen Gesetz: $I = \frac{U}{R}$; $R = \frac{\ell}{\gamma \cdot s}$; $\gamma \hat{=} \lambda$

$$\ell \hat{=} h$$

gilt für den Wärmestrom: $\dot{Q} = \frac{\Delta\vartheta}{R_w}$; $R_w = \frac{1}{\lambda \cdot \ell} \cdot \frac{h}{b}$; $s \hat{=} \ell \cdot b$.

Bei mehreren Teil-Wärmeleitwiderständen, wie hier beim Breitflanschträger, ist der resultierende Wärmeleitwiderstand analog wie bei der Reihenschaltung in der Elektrotechnik zu berechnen:

$$R_W = R_{W1} + R_{W2} + R_{W3} + \dots = \frac{h}{\lambda \cdot b_w \cdot \ell}$$

$$R_W = \frac{t_1}{\lambda \cdot b_1 \cdot \ell} + \frac{h_2}{\lambda \cdot s \cdot \ell} + \frac{t_3}{\lambda \cdot b_3 \cdot \ell} + \dots$$

$$R_W = \frac{1}{\lambda \cdot \ell} \cdot \left(\frac{t_1}{b_1} + \frac{h_2}{s} + \frac{t_3}{b_3} + \dots \right) = \frac{1}{\lambda \cdot \ell} \cdot \frac{h}{b_W}$$

$$Q = -\frac{\Delta\vartheta_1}{R_W} = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h} \cdot b_W \cdot \ell = -\frac{\lambda \cdot \ell \cdot \Delta\vartheta_1}{\left(\frac{t_1}{b_1} + \frac{h_2}{s} + \frac{t_3}{b_3} + \dots \right)}$$

$$= -\dot{q} \cdot b_w \cdot \ell$$

$$\Rightarrow b_W = \frac{h}{\left(\frac{t_1}{b_1} + \frac{h_2}{s} + \frac{t_3}{b_3} + \dots \right)} = \text{Resultierende, rechnerische Stabbreite} \quad (2.6.9)$$

(Je nach Profil ist b_w etwa 10% bis 20% größer als s)

2.7. Einflüsse auf die Temperaturverteilungen

Temperaturverteilungen unterliegen vielfältigen Einflüssen. Die wichtigsten Einflüsse werden durch die Temperaturabhängigkeit des Werkstoffkennwertes λ , der seitlichen Wärmeabströmung sowie durch die starke Temperaturabhängigkeit des globalen Wärmeübergangskoeffizienten „ α “ hervorgerufen. Nachfolgend werden in Kapitel 2.7.1 und Kapitel 2.7.2 die Einflüsse aus „ λ “ und der seitlichen Wärmeabströmung beschrieben. Die Beschreibung des Einflusses der Wärmeübergangszahl „ α “ erfolgt im Kapitel 2.8 mit einer analytischen Berechnung von „ α “ aus einem gemessenen Temperaturfeld in Kapitel 2.8.5. Die Schilderung der Einflüsse der Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte „ E “ und „ α_t “ auf rein rechnerische Temperaturdifferenzen bei der Auswertung eines Temperaturfeldes und auf Spannungsverteilungen erfolgt im Kapitel 4.7.4 und in den Anhängen E und F.

2.7.1 Einfluss der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit „ λ “, DGL Mittelwerte von Temperaturen und Werkstoffkennzahlen

Nachstehend erfolgt die Beschreibung des Temperaturverlaufes $\vartheta(x)$ in einer Stahlwand bei stationärem Wärmefluss, wobei die Wärmeleitfähigkeit eine Funktion der Temperatur ist: $\lambda = \lambda(\vartheta)$. Die Berechnungen sollen zeigen, dass in Stählen wegen der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit „ λ “, kein linearer Temperaturverlauf möglich ist. Es ist im Allgemeinfall nach Fourier mit $\lambda = \text{const}$:

$$Q = -\lambda \cdot A \cdot t \cdot \text{grad } \vartheta;$$

$$Q = -\lambda \cdot A \cdot t \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (\text{eindimensional})$$

$$Q = -\lambda \cdot A \cdot t \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (\text{Wärmemenge in „t“ Stunden}); \quad \frac{d\vartheta}{dx} = \text{grad } \vartheta \left[\frac{\text{K}}{\text{m}} \right]$$

$$\dot{Q} = \frac{Q}{t} = -\lambda \cdot A \cdot \text{grad } \vartheta \quad (\text{Wärmestrom, Wärmefluss}) \quad \left[\text{W} = \frac{\text{J}}{\text{S}} \right]$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = -\lambda \cdot \text{grad } \vartheta = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad (\text{Wärmestromdichte, Wärmeflussdichte}) \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.7.1)$$

(Geradliniger Temperaturverlauf)

Für $\lambda \neq \text{const}$. gilt nach Fourier $\lambda \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$

$$\dot{q} = -\lambda(\vartheta) \cdot \text{grad } \vartheta \quad (\text{Wärmestromdichte bzw. Wärmeflussdichte}), \quad (2.7.2)$$

$$\text{d.h. eindimensional: } \dot{q}(x) = -\lambda(\vartheta) \cdot \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (2.7.3)$$

Im stationären Fall („Beharrungszustand“) muss die mittlere **Wärmestromdichte** \dot{q} an allen Stellen x die gleiche, d.h. unabhängig von x sein:

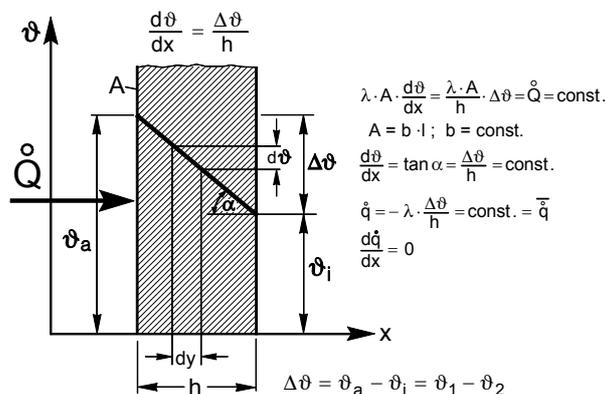


Bild 2.7.1.1: Theoretische, eindimensionale lineare Temperaturverteilung

„stationär“ $\Rightarrow \dot{q}(x) = \text{const.} = \bar{q}$,

$$\text{d.h.} \quad \frac{d\dot{q}}{dx} = 0 \quad (2.7.4)$$

(2.7.3) in (2.7.4) gesetzt, liefert

$$\frac{d}{dx} \left[-\lambda(\vartheta) \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \right] = 0 ,$$

woraus folgt:

$$-\left(\frac{d\lambda}{dx} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + \lambda \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \right) = 0 . \quad (2.7.5)$$

Es ist λ gegeben als Funktion von ϑ ($\lambda_{(\vartheta)} = a - b \cdot \vartheta$; $\lambda_{(x)} = a - b \cdot \vartheta_{(x)}$) und ϑ ist eine Funktion von x , folglich auch λ „implizit“ über $\vartheta(x)$ eine Funktion von x , weshalb man für

$$\frac{d\lambda}{dx} \lambda [\vartheta(x)] \quad \text{erhält:} \quad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\lambda}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} . \quad (2.7.6)$$

(2.7.6) für $\frac{d\lambda}{dx}$ in (2.7.5) eingesetzt, gibt

$$\frac{d\lambda}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + \lambda \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0 ,$$

wonach die den Temperaturverlauf $\vartheta = \vartheta(x)$ bei stationärem eindimensionalen Wärmestrom beschreibende nichtlineare Differentialgleichung (DGL) lautet:

$$\frac{d\lambda}{d\vartheta} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 + \lambda \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda(\vartheta) . \quad (2.7.7)$$

Geschlossene Lösung der den Temperaturverlauf in einem Flacheisenstab beschreibenden nichtlinearen Differentialgleichung

Um die DGL lösen zu können, muss zunächst die Funktion der Temperaturabhängigkeit von „ λ “ bekannt sein. Das ist z.B. in nachfolgendem Bild dargestellt. Abschnittsweise darf der Verlauf von „ λ “ über die Temperatur linear betrachtet werden.

Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \lambda(\vartheta)$

$$\bar{q} = \frac{b}{2 \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_2 \right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_1 \right)^2 \right] \quad \text{bzw.} \quad \bar{q} = \bar{\lambda}_{(\vartheta)} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = \bar{\lambda}_{(\vartheta)} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

(2.7.10)

$$\vartheta_2 \hat{=} \vartheta_i \quad ; \quad \vartheta_1 \hat{=} \vartheta_a \quad .$$

Mittelwerte von Temperaturen und Werkstoffkennzahlen

Bei den Problemen der Thermomechanik muss mit Temperaturen, bestimmten maximalen Temperaturdifferenzen, temperaturabhängigen Werkstoffkennwerten und sehr häufig mit ihren Mittelwerten gerechnet werden. Siehe z.B. Gleichung (2.7.10). Hierbei ist es von entscheidender Bedeutung, welche Temperaturen bzw. welche Temperaturdifferenzen bzw. deren Mittelwerte in den angegebenen Berechnungsformeln gemeint sind, ermittelt und eingesetzt werden müssen. Bei der thermischen Beanspruchung von Bauelementen und deren Wechselbeziehungen mit der Umgebung wird außer der Beschreibung von Temperaturfeldern in Hauptachsenrichtung ($\Delta\vartheta_{(x)}$, $\Delta\vartheta_{(y)}$ und $\Delta\vartheta_{(z)}$) auch der rechnerisch zu ermittelnde durchschnittliche, resultierende Temperaturdifferenzenverlauf in Achsenrichtung „ $\overline{\Delta\vartheta_1}$ “ und die durchschnittliche mittlere Körper – bzw. Oberflächentemperatur „ $\overline{\Delta\vartheta_{mD}}$ “ benötigt. Zur Berechnung von „ $\overline{\Delta\vartheta_1}$ “ und „ $\overline{\Delta\vartheta_{mD}}$ “ siehe Kapitel 5. Ihre Durchschnittswerte „ $\overline{\Delta\vartheta_1}$ “ und „ $\overline{\Delta\vartheta_{mD}}$ “ werden aus mehreren, über die Stablänge „ x “ möglichst gleichmäßig verteilten Temperaturfeldern gewonnen. Die Temperaturfelder entstehen wiederum aus Temperaturprofilen, siehe z.B. Anhang B. Aus der Temperaturdifferenzenverteilung zwischen den Außenfasern über die Stablänge (siehe Bild 1.5) kann die Stelle „ x “ mit dem maximalen Temperaturfeld ermittelt werden. Die erforderlichen Mittelwerte wie auch die Mittelwerte der temperaturabhängigen Werkstoffkennzahlen und des globalen Wärmeübergangskoeffizienten müssen entsprechend dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a) \quad \text{oder} \quad f(c) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

beim vorliegenden Temperaturproblem in der Form

$$\overline{\Delta\vartheta_1} = \frac{1}{\ell_0} \cdot \int_0^{\ell_0} \Delta\vartheta_1(x) \cdot dx$$

berechnet werden. Das heißt, dass bei der analytischen Berechnung von thermomechanischen Spannungen und Formänderungen in thermisch beanspruchten Tragwerksstäben, gegebene Temperaturfelder zwecks Bestimmung der erforderlichen Temperaturdifferenzen und des

erforderlichen Mittelwertes vor Nutzung erst ausgewertet werden müssen. Hierbei erfolgt die Ermittlung der mittleren Körpertemperatur „ $\overline{\vartheta_{(y)_g}}$ “ = „ ϑ_{mD} “ aus dem zuvor berechneten Polynom „ $\vartheta_{(y)_g}$ “ der Temperaturverteilung für jedes Temperaturfeld. Dann werden die Mittelwerte für alle vorliegenden Temperaturfelder bestimmt. Sind über die Stablänge „ ℓ “ an den Stellen x_1 bis x_n in gleichen Abständen Temperaturprofile aufgenommen worden und liegt für die einzelnen Höhenlinien kein Polynom für den Temperaturverlauf über die Stablänge vor, so kann zur Berechnung des Temperaturmittelwertes einer Höhenlinie die so genannte „Trapezformel“ als Vereinfachung des Mittelwertsatzes benutzt werden (siehe auch Anhang A):

$$\overline{\Delta\vartheta_1} = \frac{\Delta\vartheta_{x_1} + 2 \cdot \Delta\vartheta_{x_2} + \dots + 2 \cdot \Delta\vartheta_{x_{(n-1)}} + \Delta\vartheta_{x_n}}{2 \cdot (n-1)} .$$

Aus diesen Mittelwerten entsteht dann das so genannte „Durchschnittstemperaturfeld“, über die zur Verfügung stehenden Flächen unter dem Temperaturlinienzug „ $\Delta\vartheta_1(x)$ “ bei „ n “ Einzeltemperaturprofilen über die Stablänge ausgedrückt (siehe auch Kapitel D 9.):

$$\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot \ell = \sum A_{(n-1)} \quad (\text{Ursprung der Trapezformel}) .$$

Der gesuchte Temperaturmittelwert mal der Stablänge ist gleich der Summe der Einzeltemperaturflächen über die Stablänge gesehen. Bei linearen Funktionen zwischen zwei Punkten ($n = 2$) geht der angesprochene Mittelwertsatz wie auch die Trapezformel in den arithmetischen Mittelwert (Durchschnitt) über:

$$\overline{x_a} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad \text{z.B.} \quad \overline{\vartheta} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \quad \text{bei } n = 2 .$$

Das Auffinden der häufig benötigten Mittelwerte der Werkstoffkennzahlen „ α_t “ und „ E “ wird nachfolgend nach Linearisierung der Angaben im Anhang „C“ und nach Berechnung der mittleren Körpertemperatur „ ϑ_{mD} “ für Baustähle gezeigt:

1. Aus Anhang „C“:

$$\alpha_{t(\vartheta)} = (a + b \cdot \vartheta) \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$E_{(\vartheta)} = (c - d \cdot \vartheta) \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

2. Mittlere Körpertemperatur:

$$\vartheta_{mD} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \vartheta_{(y)g} \cdot dy = \overline{\vartheta_{(y)g}} \quad (\text{hierbei ist } \vartheta_{(y)g} \text{ „} \vartheta_{(y)g} \text{“}$$

z.B. in Form eines Polynoms bekannt)

3. Aus 1. und 2. folgt:

$$\alpha_{tm} = \sim (11,9 + 0,0055 \cdot \vartheta_{mD}) \cdot 10^{-6} / \text{K} \quad (2.7.11)$$

$$E_m = \sim (2,17 - 0,00158 \cdot \vartheta_{mD}) \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad (2.7.12)$$

Vereinfacht werden die Mittelwerte der Werkstoffkennzahlen ausreichend genau aus der Halbierung der zugehörigen Werte der Außenfasern (entsprechend ϑ_a und ϑ_i) gewonnen oder direkt als dem rechnerischen Temperaturmittelwert „ ϑ_{mR} “ zugeordnete Werkstoffkennzahl berechnet.

Die Verwendung zugehöriger Temperaturdifferenzen und Mittelwerte von Werkstoffkennzahlen für Spannungsberechnungen, Formänderungen und zur Berechnung der thermischen Biegelinie siehe Kapitel 5.3.1, Anhang A und B, Anhang D 9, H 6 und Anhang H 8.

2.7.2. Einfluss der seitlichen Wärmeabströmung Berechnung der Temperaturverteilung durch Kopplung zweier Differentialgleichungen

Es folgt die Beschreibung des symmetrischen Temperaturdifferenzenverlaufes $\Delta\vartheta'_{(y)}$ in einem Flacheisenstab bei nicht konstanter Wärmestromdichte (seitliche Wärmeabströmung). Die globale Wärmeübergangszahl „ α “ und die Wärmeleitfähigkeit „ λ “ sind zunächst konstant über die Stabhöhe.

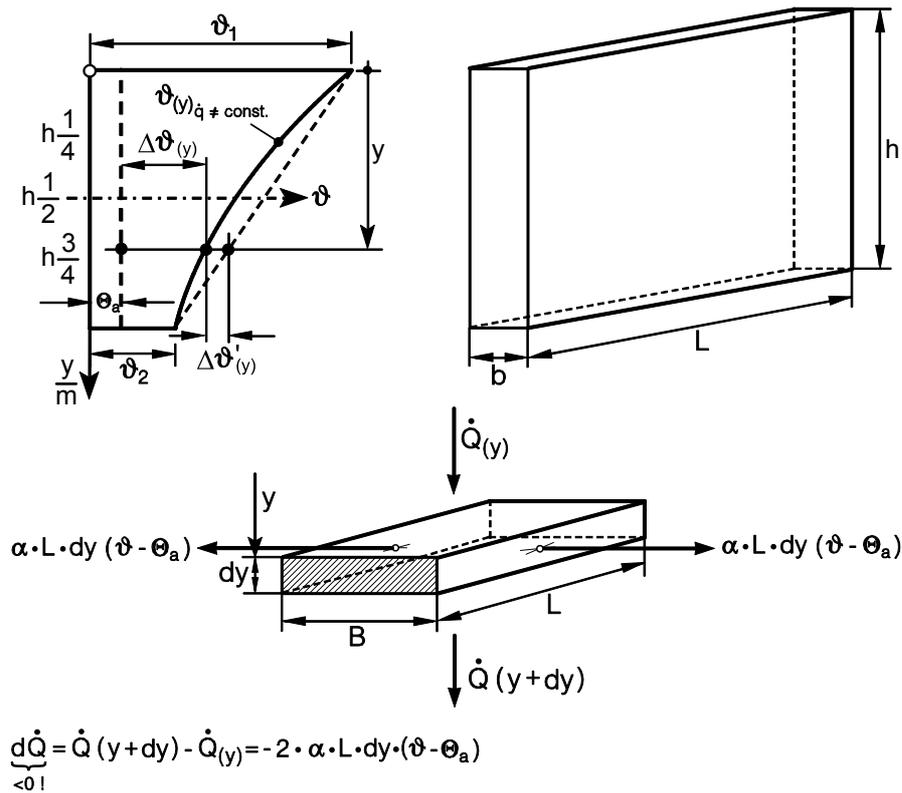


Bild 2.7.2.1: Seitliche Wärmeabströmung

Wegen „Seitenabströmung“ der Wärme längs der Flacheisen-Flanken $L \times h$ ist $d\dot{Q} < 0$, also werden aufgrund der Randbedingungen dritter Art (siehe Kap. 2.5) folgende zwei Differentialgleichungen gekoppelt:

1. Vertikaler Wärmestrom durch die Fläche $A_{\text{ein}} = L \cdot b$ und zugehörige Wärmestromdichte im Körper selbst:

$$\begin{aligned}
 -d\dot{Q} &= -d\dot{q} \cdot A_{\text{ein}} \quad ; \quad \dot{q} = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \\
 -d\dot{Q} &= -d \left(-\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \right) \cdot A_{\text{ein}} \\
 -d\dot{Q} &= -\frac{d}{dy} \left(-\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \right) \cdot dy \cdot \underbrace{L \cdot b}_{A_{\text{ein}}} .
 \end{aligned}$$

2. Beidseitig abfließender Wärmestrom in die Umgebung mit der Temperatur „ Θ_a “ (zunächst konstante globale Wärmeübergangszahl „ α “ über die Stabhöhe!):

$$-d\dot{Q} = 2 \cdot \alpha \cdot A_{\text{aus}} \cdot \Delta\vartheta_{(y)} .$$

Hier: $A_{\text{aus}} = dA = L \cdot dy$, $\Delta\vartheta_{(y)} = (\vartheta_{(y)} - \Theta_{\alpha})$

$$-d\dot{Q} = 2 \cdot \alpha \cdot L \cdot dy \cdot (\vartheta_{(y)} - \Theta_{\alpha}) .$$

Nachfolgende Gleichung zeigt nach Gleichsetzung die Verknüpfung der beiden Differentialgleichungen.

$$-d\dot{Q} = -\frac{d}{dy} \left(-\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \right) \cdot dy \cdot L \cdot b = 2 \cdot \alpha \cdot \underbrace{L \cdot dy}_{dA!} \cdot (\vartheta_{(y)} - \Theta_a) , \quad (2.7.2.0)$$

für die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \text{const.}$ über die Stabhöhe wird

$$\lambda \cdot \frac{d^2\vartheta}{dy^2} \cdot b - 2 \cdot \alpha \cdot (\vartheta - \Theta_a) = 0 \quad | : \lambda \cdot b$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} - \frac{2\alpha}{\lambda \cdot b} \cdot (\vartheta - \Theta_a) = 0 \quad ; \quad \vartheta = \vartheta_{(y)} \quad (2.7.2.1)$$

(2.7.2.1) ist die DGL für den Temperatur-Verlauf über die Höhe y im Intervall $0 \leq y \leq h$ des Flacheisens (bei $\lambda = \text{const.}$), dessen eine Stirnfläche (stationär!) auf ϑ_1 und dessen andere Stirnfläche $b \times L$ auf $\vartheta_2 < \vartheta_1$ gehalten wird ($\alpha =$ Globale Wärmeübergangszahl in

$\frac{W}{m^2 \cdot K}$ und $\Theta_a =$ Umgebungstemperatur in $^{\circ}\text{C}$):

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} - \frac{2\alpha}{\lambda \cdot b} \cdot \vartheta = -\frac{2\alpha}{\lambda \cdot b} \cdot \Theta_a \quad (2.7.2.2)$$

$\vartheta_{\text{part}} = \Theta_a$ ist partikuläres Integral von (2.7.2.2) bzw. (2.7.2.1).

Es verbleibt somit die zu lösende homogene DGL

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} - \frac{2\alpha}{\lambda \cdot b} \cdot \vartheta = 0 . \quad (2.7.2.3)$$

2.7.2.1 Geschlossene Lösung der homogenen Differentialgleichung

Gleichung (2.7.2.3) ist eine Wärmeleitungsgleichung in der Form einer Fourierschen Differentialgleichung ohne Wärmequellen für ein zeitlich konstantes Temperaturfeld das nur von einer Koordinate abhängig ist. Für das Aufsuchen von partikulären Integralen und die allge-

meine Lösung einer derartigen Gleichung schlägt Gröber [111, Seite 112] als Ansatz für das Integral der Differentialgleichung die Wahl einer Exponentialfunktion in der Form $\vartheta = C \cdot e^{-m \cdot y}$, das Newtonsche Abkühlungsgesetz [48] bei Abkühlung, vor. Voraussetzung ist, dass die Gleichung homogen ist und dass die Koeffizienten α, λ und b konstante Größen sind. In dem Fall führt der Ansatz immer auf ein partikuläres Integral [111, Seite 26]. Da beim vorliegenden Problem zusätzlich zur Stababkühlung durch seitliche Wärmeabfuhr zunächst eine Erwärmung vorliegt, wird hierfür ergänzend eine Exponentialfunktion mit positivem Exponenten gewählt. Die Addition dieser beiden Exponentialgleichungen in der Form

$$\vartheta_{(y)} = A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y} \quad (\text{Ansatz})$$

sei eine Lösung der Differentialgleichung (2.7.2.3).

Die 1. Differentiation ergibt: $\frac{d\vartheta}{dy} = \omega \cdot A \cdot e^{\omega \cdot y} - \omega \cdot B \cdot e^{-\omega \cdot y}$ (2.7.2.4)

Die 2. Differentiation ergibt $\frac{d^2\vartheta}{dy^2} = \omega^2 \cdot A \cdot e^{\omega \cdot y} + \omega^2 \cdot B \cdot e^{-\omega \cdot y}$ (2.7.2.5)

Die Gleichung (2.7.2.5) wird gemeinsam mit dem Ansatz in Gleichung (2.7.2.3) eingesetzt und liefert:

$$(A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y}) \cdot \omega^2 - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot b} \cdot (A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y}) = 0 .$$

Daraus folgt: $\underbrace{(A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y})}_{=\vartheta \neq 0} \cdot \left(\omega^2 - \frac{2\alpha}{\lambda \cdot b} \right) = 0 .$

Da $\vartheta \neq 0$ ist, muss gelten: $\omega^2 - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot b} = 0 .$

Hieraus folgt: $\underbrace{\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot b}}}_{\text{Systemkonstante}} \text{ in m}^{-1} \left. \vphantom{\omega} \right\} \alpha, \lambda \text{ und } b \text{ sind zunächst konstant. (2.7.2.6)}$

Mithin ist:

$$\vartheta_{(y)} = A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y} + \Theta_a , \quad (2.7.2.7)$$

die **allgemeine Lösung** von (2.7.2.1) .

Bestimmung der Integrationskonstanten A und B:

Bei $\ln y = 0$ muss $\vartheta_{(y=0)} = \vartheta_1$ sein, liefert:

$$\vartheta_1 - \Theta_a = A + B. \quad (2.7.2.8)$$

Bei $\ln y = h$ muss $\vartheta_{(y=h)} = \vartheta_2$ sein, liefert:

$$\vartheta_2 - \Theta_a = A \cdot e^{\omega \cdot h} + B \cdot e^{-\omega \cdot h}. \quad (2.7.2.9)$$

Die beiden Gleichungen (2.7.2.8) und (2.7.2.9) bilden ein lineares Gleichungssystem für die beiden Unbekannten A und B. Die Lösungen für A und B lauten:

$$A = \frac{(\vartheta_1 - \Theta_a) \cdot e^{-\omega \cdot h} - (\vartheta_2 - \Theta_a)}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}} \quad (2.7.2.10)$$

$$B = \frac{(\vartheta_2 - \Theta_a) - (\vartheta_1 - \Theta_a) \cdot e^{\omega \cdot h}}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}}.$$

Damit lautet die vollständige Exponentialgleichung:

mit $\dot{q} \neq \text{const!}$ und $\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot b}} \quad [\text{m}^{-1}]$

$$\vartheta_{(y)} = A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y} + \Theta_a \quad \text{bzw.} \quad \Delta \vartheta_{(y)} = A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y}$$

$$\vartheta_{(y)} = \underbrace{\left[\frac{(\vartheta_a - \Theta_a) \cdot e^{-\omega \cdot h} - (\vartheta_i - \Theta_a)}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}} \right]}_A \cdot e^{\omega \cdot y} + \underbrace{\left[\frac{(\vartheta_i - \Theta_a) - (\vartheta_a - \Theta_a) \cdot e^{\omega \cdot h}}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}} \right]}_B \cdot e^{-\omega \cdot y} + \Theta_a. \quad (2.7.2.11)$$

$\vartheta_{(y)} = \vartheta_{(y)\text{ber}}$ setzt sich somit aus der Überlagerung zweier Exponentialfunktionen (Hyperbeln) zusammen. Setzt man in die Gleichung (2.7.2.11) die Werte des Beispiels Bild 2.8.4 mit $b=0,03\text{m} = \text{Stabdicke}$, $h = 0,12\text{m} = \text{Stabhöhe}$, $\vartheta_a = 281^\circ\text{C}$, $\vartheta_i = 150^\circ\text{C}$, $\Theta_a = \Delta\vartheta_0 = 18^\circ\text{C}$ und mit den zunächst konstanten, abgeschätzten Parametern $\alpha = 130\text{W/K} \cdot \text{m}^2$ [79] und

$\lambda = 52\text{W/m} \cdot \text{K}$ [109] auch $\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot b}} = 12,91\text{m}^{-1}$ ein, so erhält man nachfolgendes, ma-

thematisch eindeutiges Temperaturfeld. Ausführliche Berechnung siehe Anhang H 2.

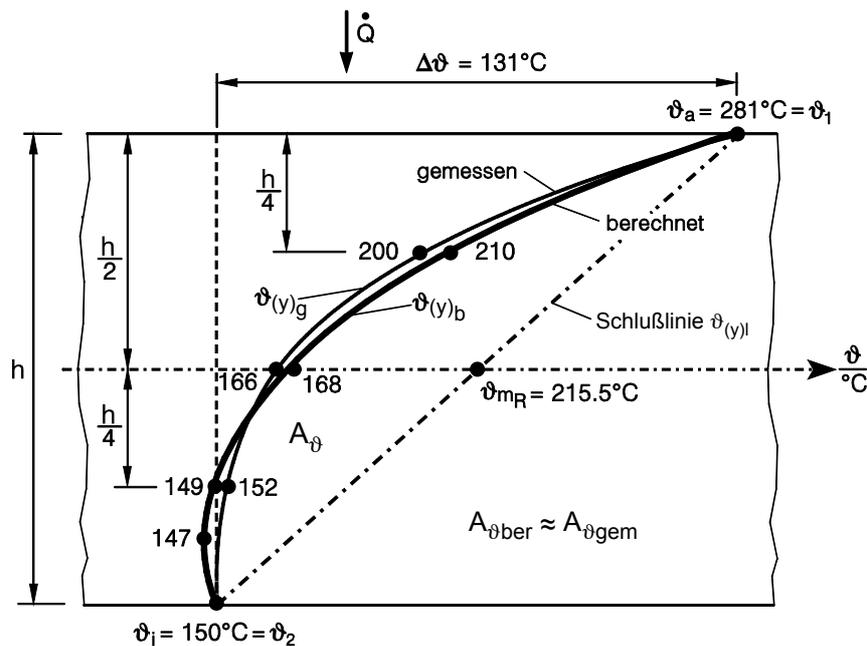
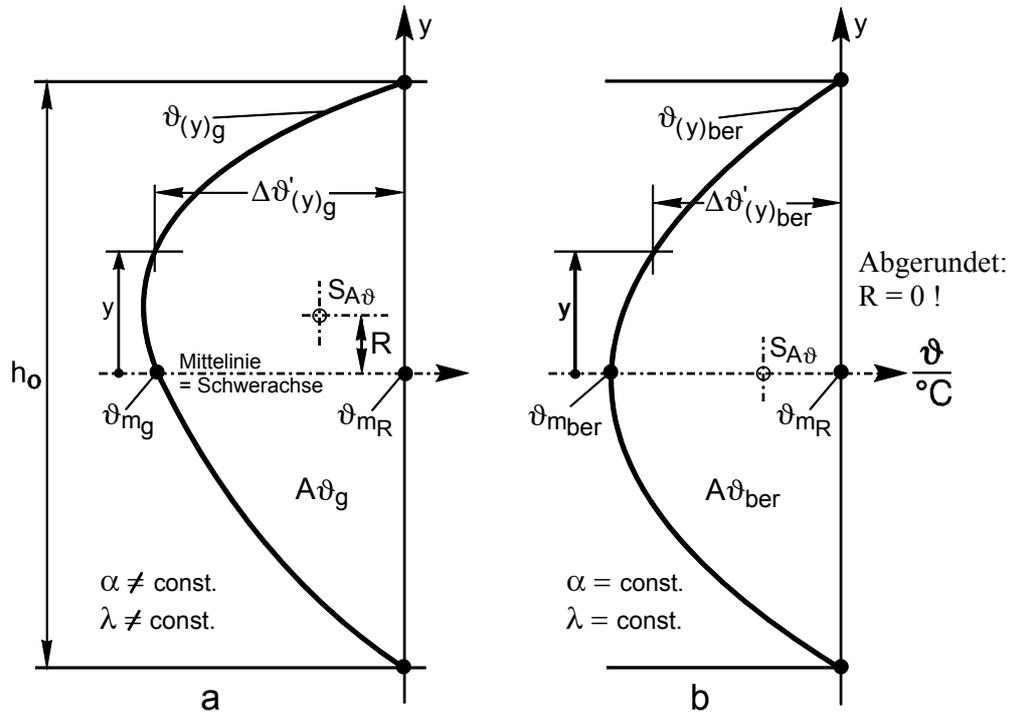


Bild 2.8.1.1: Gemessene und berechnete Temperaturkurve bei gleichen Außenfasertemperaturen

Die nachfolgenden Überlegungen sollen die Ursache für die Unsymmetrie des gemessenen, realen Temperaturfeldes aufzeigen. Damit soll gleichzeitig das Auftreten des negativen, zweiten thermomechanischen Momentes (Ableitung siehe Anhang D2) erklärt und die Berechnungsgleichung (2.7.2.7) soweit verbessert werden, dass der analytisch berechnete Temperaturverlauf dem gemessenen hinreichend genau entspricht.

Das berechnete Temperaturteilstück „ $A_{\vartheta_{ber}}$ “ soll dem gemessenen Temperaturteilstück „ A_{ϑ_g} “ gegenübergestellt werden. Dazu wird eine Darstellungsart gewählt (vertikal aufgestellte Gerade „ $\vartheta_{(y)1}$ “ als y-Achse!), die es gestattet, den Kurvenverlauf der betrachteten Temperaturverteilungen sofort auf symmetrischen- oder unsymmetrischen Verlauf beurteilen zu können. (Siehe Bild 2.8.1.2, Teilbilder „a“ und „b“). In beiden dargestellten Fällen a und b entspricht die y-Achse der vertikal gestellten Geraden „ $\vartheta_{(y)1}$ “ (Nullspannungstemperaturverlauf) zwischen den Außenfasertemperaturen „ ϑ_a “ und „ ϑ_i “.



$$\Delta\vartheta'_{(y)_g} = \vartheta_{(y)_1} - \vartheta_{(y)_g}$$

Unsymmetrisches Temperaturteilfeld „ $A\vartheta_g$ “

$\vartheta_{(y)_g}$: Gemessen

$$M_{th2} = -E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta'_{(y)_g} \cdot y \cdot dy$$

$$M_{th2} = -E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A\vartheta_g \cdot R$$

$$\Delta\vartheta'_{(y)_{ber}} = \vartheta_{(y)_1} - \vartheta_{(y)_{ber}}$$

Berechnetes symmetrisches Temperaturteilfeld „ $A\vartheta_{ber}$ “ bei seitlicher Wärmeabströmung

$$R = 0 \Rightarrow M_{th2} = 0$$

Bild 2.8.1.2: Gegenüberstellung der Temperaturteilfelder „ $A\vartheta_g$ und $A\vartheta_{ber}$ “

Das Ergebnis der Gleichung:

$$\vartheta_{(y)_{ber}} = A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y} + \Theta_a \quad [^\circ\text{C}] \quad \text{siehe} \quad (2.7.2.7)$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot b}}$ siehe (2.7.2.6)

wird maßgeblich von den Variablen α, λ und von der Umgebungstemperatur Θ_a bestimmt. Der globale Wärmeübergangskoeffizient α , der die Anteile aus Strahlung und Konvektion beinhaltet, bewegt sich in einem weiten Bereich zwischen

$$\alpha=3 \quad \text{bis} \quad \alpha=300 \quad \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2}$$

d.h. α bewegt sich in seiner Größe von freier Konvektion in Gasen bis hin zum Gesamt-Wärmeübergangskoeffizienten bei erzwungener Konvektion durch Pressluftkühlung [15, 48, 79, 111].

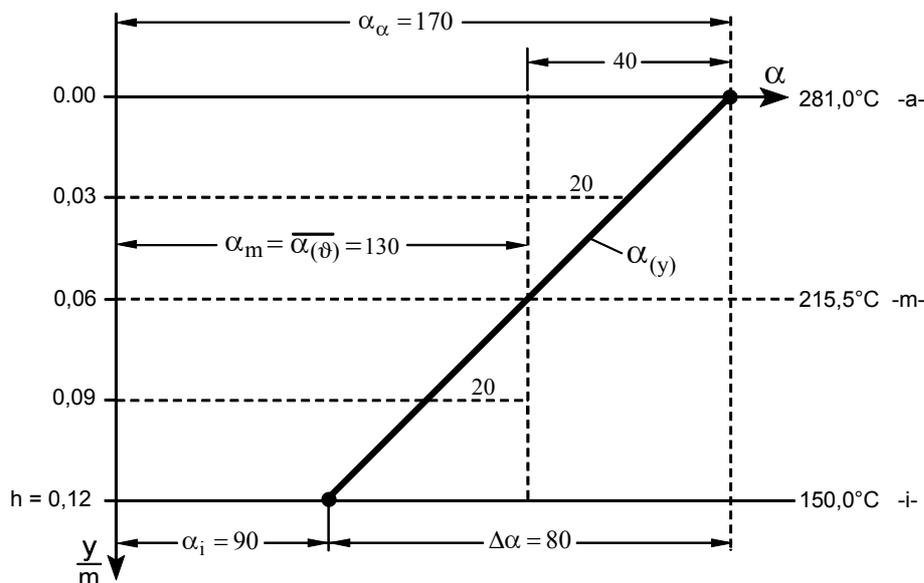
die nicht konstante Wärmestromdichte „ \dot{q} “ sein! Für die vorgegebenen Außenfasertemperaturen „ ϑ_a “ und „ ϑ_i “ wird der Verlauf von „ $\alpha_{(y)}$ “ über die Stabhöhe „ h “ abgeschätzt [79] dargestellt. Die analytische Berechnung des Gesamt-Wärmeübergangskoeffizienten „ $\alpha_{(y)}$ “ erfolgt im Kapitel 2.8.5. Mit dieser Wärmeübergangszahl „ $\alpha_{(y)}$ “ und einer zunächst konstanten Wärmeleitzahl $\lambda = 52 \text{ W/K} \cdot \text{m}$ [109] werden die bekannten Kurvenstützpunkte (Anhang H 2., Bild H 2.2.1) bei $y = 0,03 \text{ m}$, $y = 0,06 \text{ m}$ und $y = 0,09 \text{ m}$ unter Nutzung der abgeleiteten Gleichung (2.7.2.7) nachgerechnet.

$$\text{Mit } \alpha_{(y)} = \alpha_a - \frac{\Delta\alpha \cdot y}{h} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (2.8.1.1)$$

wird auch „ ω “ über die Stabhöhe veränderlich:

$$\omega_{(y)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_{(y)}}{\lambda \cdot b}} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (2.8.1.2)$$

Das nachstehende Bild zeigt die Darstellung der zunächst abgeschätzten Gesamt-Wärmeübergangszahl „ $\alpha_{(y)}$ “.



$$\alpha_{(y)} = \alpha_a - \frac{\Delta\alpha \cdot y}{h} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2} \right] \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{(y)} = \overline{\alpha_{(\vartheta)}} + \frac{\Delta\alpha \cdot y}{h}$$

$$\alpha_{(y)} = 170 - \frac{80 \cdot y}{h}$$

Bild 2.8.1.4: Globale Wärmeübergangszahl „ α “ in Abhängigkeit von der Temperatur und der Stabhöhe

Es folgt die Addition der Temperaturverteilungen aus nicht-konstanter Wärmeübergangszahl „ α “ und nicht-konstanter Wärmeleitfähigkeit „ λ “ bei gleichen Außenfasertemperaturen $\vartheta_a = 281\text{ °C}$ und $\vartheta_i = 150\text{ °C}$ unter Nutzung der tabellarischen Berechnung und der Bilder des Anhanges H 2.

1	2	3	4	5 = 3-4	6
y m	$\vartheta (y)_{\text{geg}}$ °C	$\vartheta (y)_{\alpha}$ °C	$\Delta\vartheta (y)_{\lambda}$ °C	$\vartheta (y)_{\text{R ber}}$ °C	$\vartheta (y)_{\text{g}}$ °C
0,00	281,0 = ϑ_a	(281,0)	0	281,0	281,0
0,03		205,3	-1,36	203,94	200,0
0,06		168,2	-1,8	166,4	166,0
0,09		153,36	-1,26	152,1	152,0
0,12	150,0 = ϑ_i	(150,0)	0	150,0	150,0

Tabelle 2.8: Fünf Wertepaare (Spalte 1 und 5 und Spalte 1 und 6) als Kurvenstützpunkte der berechneten, resultierenden und der gemessenen Temperaturverteilung

Erläuterung zu den Spalten der Tabelle 2.8:

Spalte 2: Gegebene Außenfasertemperaturen

Spalte 3: Temperaturverteilung durch den Einfluss der globalen Wärmeübergangszahl „ α “.
Die Außenfasertemperaturen „ ϑ_a “ und „ ϑ_i “ bleiben bestehen.

Spalte 4: Korrektur der Temperaturverteilung durch den Einfluss der Wärmeleitfähigkeit „ λ “

Spalte 5: Berechnete, resultierende Temperaturverteilung ; Spalte 5 = Spalte 3 – Spalte 4

Spalte 6: Gemessene Temperaturverteilung

Als Endergebnis der Berechnung einer Temperaturverteilung (Spalte 3) in einem thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlbau-Profilstab bei gegebenen Außenfasertemperaturen, zeigt obenstehende Tabelle eine gute Übereinstimmung der betreffenden Kurvenstützpunkte mit den Versuchs-Messwerten, Spalte 6. Der in der Tabelle 2.8 dargestellte Berechnungsgang kann als Korrektur der zuvor mit Gleichung (2.7.2.11) berechneten symmetrischen Temperaturverteilung Bild 2.7.2.2 verstanden werden. Die Korrektur beinhaltet die analytische Berechnung des globalen Wärmeübergangskoeffizienten „ $\alpha_{(y)}$ “ im Kapitel 2.8.5 und die Berechnung der Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_{(y)\lambda}$ “ im Anhang H 2. Für den konstruktiv tätigen Ingenieur liegt die Schwierigkeit jetzt in der Abschätzung der hier vorgegebenen Randbedingungen und in der Erarbeitung der temperaturabhängigen Kennwerte „ α “ und „ λ “. Unter

diesen Voraussetzungen lautet jetzt die Berechnungsgleichung des Temperaturverlaufes in einem thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlprofil bei bekannten Außenfasertemperaturen:

$$\vartheta_{(y) \text{ ber}} = A \cdot e^{\omega_{(y)} \cdot y} + B \cdot e^{-\omega_{(y)} \cdot y} + \Theta_a - \Delta\vartheta_{(y)\lambda} \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (2.8.1.3)$$

$$\text{mit: } \omega_{(y)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_{(y)}}{\bar{\lambda} \cdot b}} \quad ; \quad \alpha_{(y)} = \alpha_a - \frac{\Delta\alpha \cdot y}{h}$$

$$\Delta\vartheta_{(y)\lambda} = \vartheta_{(y)1} - \vartheta_{(y)\lambda}$$

$$0 < y < h$$

$$\text{und } A = \frac{(\vartheta_1 - \Theta_a) \cdot e^{-\bar{\omega} \cdot h} - (\vartheta_2 - \Theta_a)}{e^{-\bar{\omega} \cdot h} - e^{\bar{\omega} \cdot h}} \quad ; \quad B = \frac{(\vartheta_2 - \Theta_a) - (\vartheta_1 - \Theta_a) \cdot e^{\bar{\omega} \cdot h}}{e^{-\bar{\omega} \cdot h} - e^{\bar{\omega} \cdot h}} \quad (2.8.1.4)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_a \quad (\text{Wärmere Faser}), \quad \vartheta_2 = \vartheta_i \quad (\text{Kältere Faser})$$

$$a = \text{außen}, \quad m = \text{Mitte}, \quad i = \text{innen},$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_m}{\bar{\lambda} \cdot b}} = \text{Mittelwert}, \quad \bar{\lambda} = \text{Mittelwert}$$

2.8.2 Versuche und Temperaturmessungen an ausgeführten Stahlbau-Konstruktionen

Basis für das Erarbeiten von Berechnungsunterlagen zur Ermittlung von Spannungen und zugehörigen Formänderungsgrößen in thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlprofilstäben im linearen elastischen Bereich ist die Kenntnis über den Temperaturverlauf (Temperaturverteilung) im vorliegenden Bauelement.

Alle realen Temperaturverläufe $\vartheta(x, y, z, t)$ sind instationär. Hilfsweise stellt man sich für ein ausreichendes Zeitintervall eine Temperaturverteilung als „quasistationär“ vor. Besser formuliert man, dass sich die betreffende gemessene oder berechnete Temperaturverteilung aus der Überlagerung beliebiger instationärer Temperaturverteilungen zusammensetzt. In Versuchen an Flacheisen-Profilstäben sollten möglichst eindimensionale Temperaturverteilungen ($\vartheta = \vartheta_{(y)}$) bei steigender thermischer Beanspruchung erzeugt und gleichzeitig mit den zugehörigen Formänderungen gemessen werden. Die Ergebnisse von neunzehn Versuchen der Versuchsreihe IV sind im Anhang „A“ dokumentiert. Der Versuch 19/IV wurde ausgewertet und begleitet die Rechenbeispiele. Nachstehend wird der zeitliche Ablauf des Abküh-

lungsvorganges nach Wegnahme der Brenner im Flacheisenstab wiedergegeben, wie er sich mit den Messstellen 4, 5, 6, 7 und 8, über die Stabhöhe angeordnet, auf dem verwandten Prozessschreiber nach Abschluss der Versuchsserie IV darstellte.

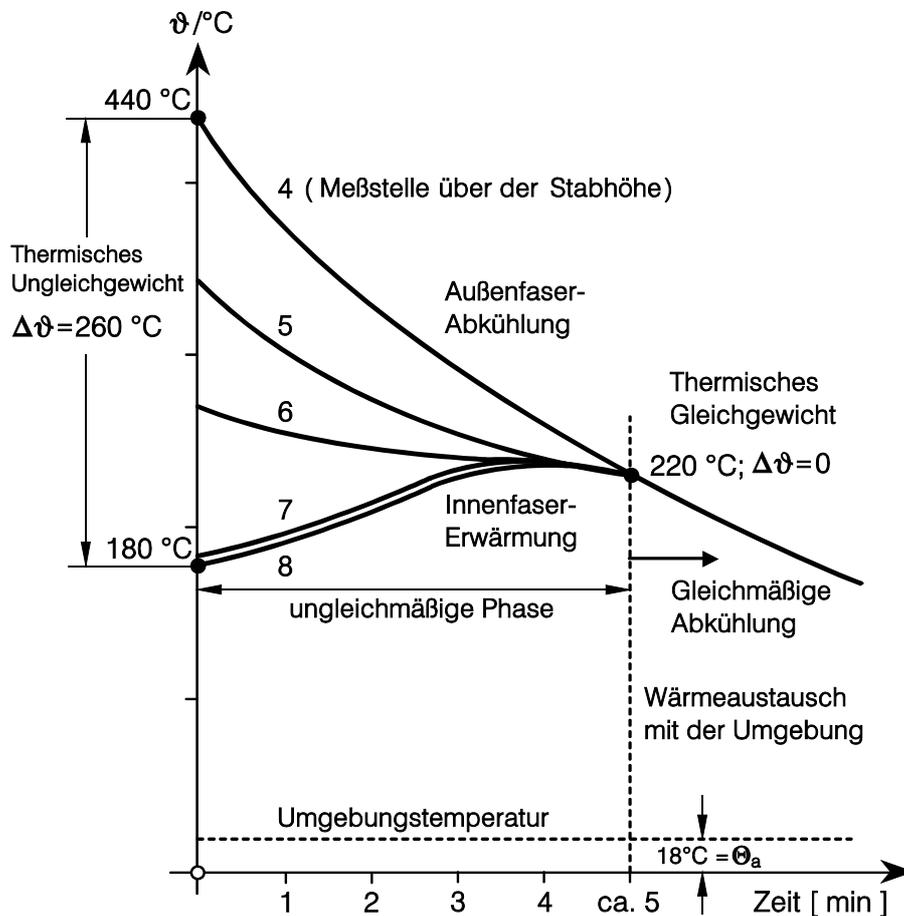


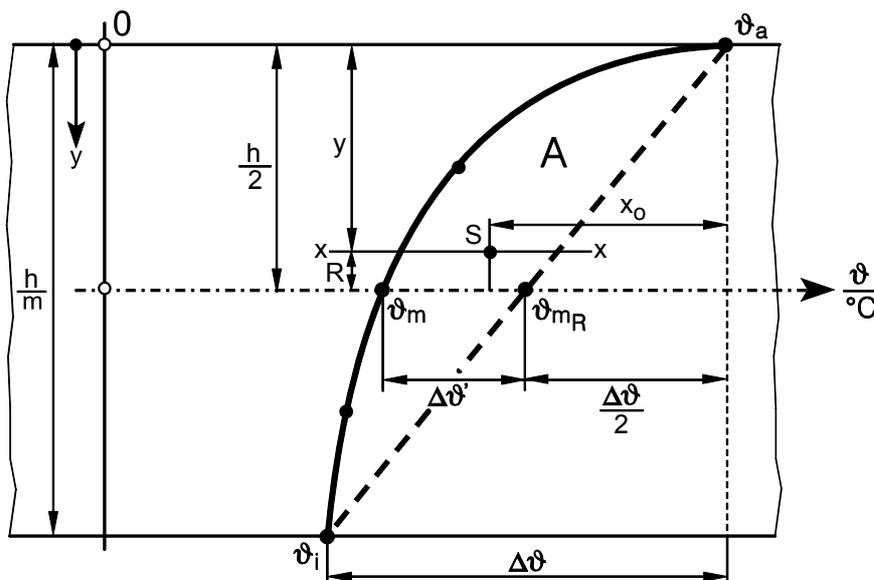
Bild 2.8.2: Freie Abkühlung an Umgebungsluft ($\Delta\vartheta_0 = 18^{\circ}\text{C} = \Theta_a$) nach ungleichmäßiger Erwärmung eines Flachstahls. „Die Temperaturunterschiede streben einem Ausgleich zu“ [111]

Aus dem Bild 2.8.2 ist ersichtlich, dass nach dem versuchsmässig aufgebrauchten thermischen Ungleichgewicht mit einer Temperaturdifferenz von 260°C zwischen den Außenfasern sofort nach Wegnahme der Brenner von allen Stabfasern das thermische Gleichgewicht mit der Bedingung: „ $\vartheta = \text{const}$ “ angestrebt und nach etwas 5 Minuten bei 220°C erreicht wird. Zwischen diesem thermischen Gleichgewicht im Versuchsstab und dem Gleichgewicht der Umgebung mit einer Temperatur von 18°C findet anschließend ein Wärmeaustausch bei gleichmäßiger Abkühlung der überall gleichen Stabtemperatur über einen Zeitraum von einigen Stunden statt.

Es ist auffallend, wie schnell nach Brennerwegnahme sich die kälteren Fasern ohne Zugabe von Wärme von außen von selbst erwärmen und wie sich die wärmeren Fasern abkühlen.

Deshalb lassen sich versuchsmäßig ungleichmäßige Temperaturverteilungen auch im Allgemeinen nur bei steigenden Außentemperaturen, d.h. steigenden Heißgastemperaturen, messen und darstellen.

Ein typisches Beispiel für scheinbar stationäre Temperaturverteilungen sind die Temperaturmessungen an Ankerständern von Kokerei-Koksöfen im Anhang B. Obgleich die Koksöfen intermittierend mit Kokskohle beschickt werden und etwa 20 Std. garen, zeigen die Temperaturen der Ankerstände (vor den Heizzügen angeordnet, siehe Bild 1.5) keine großen Schwankungen. Nachfolgend zeigt das Bild 2.8.2.1 schematisch eine signifikante Temperaturverteilung an einem derartigen Breitflanschträger, die über einen längeren Zeitraum (1/2 Stunde bis 1 Stunde) konstant erscheint und sich aus der Überlagerung beliebiger instationärer Temperaturverteilungen zusammensetzt. Die y-Achse zeigt hier nach unten, um mit dem Excel-Rechenprogramm passend zur Ableitung, Anhang D1 und passend zum Beispiel Anhang H2 rechnen zu können.



Meßebene: Unterer Ofentürverschluß

Bild 2.8.2.1: Scheinbar stationäre Temperaturverteilung in einem Breitflanschträger

Der Anhang „B“ beinhaltet die Dokumentation über Temperaturmessungen vor Ort an ausgeführten Stahl-Ankerständern der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop, NRW. An zehn Breitflanschträgern IPB-650 wurden Temperaturprofilmessungen sowie die Auswertung der Messergebnisse vorgenommen. Aufgrund der maximalen Temperaturdifferenzen erfolgte für den

Ankerständer Nr. 142 L die Ermittlung des angenäherten Polynoms 10. Grades und der zugehörigen thermomechanischen Spannungen.

2.8.3 Lineare Temperaturfelder

Beschreibung und Bezeichnungen eines ungleichmäßigen, linearen, eindimensionalen, theoretischen Temperaturfeldes

$$\vartheta = \vartheta(y)$$

Ungleichmäßige theoretische Temperaturfelder (Bild 2.8.3) sind dadurch geprägt, dass ein linearer Temperaturverlauf zwischen zwei unterschiedlichen Außenfasertemperaturen besteht. Der Temperaturunterschied wird mit „ $\Delta\vartheta$ “ bezeichnet.

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta &= \vartheta_a - \vartheta_i &&= \text{Temperaturdifferenz zwischen den Außenfasern} \\ \vartheta_0 &&&= \text{Aufstelltemperatur} \\ \vartheta_a &&&= \text{Temperatur der wärmeren Faser (Außenfaser)} \\ \vartheta_i &&&= \text{Temperatur der kälteren Faser (Innenfaser)} \\ \Delta\vartheta_i &= \vartheta_i - \vartheta_0 &&= \text{Temperaturerhöhung der Innenfaser} \\ \Delta\vartheta_a &= \vartheta_a - \vartheta_0 = \Delta\vartheta_i + \Delta\vartheta &&= \text{Ungleichmäßige Temperaturerhöhung der Außenfaser} \\ \Delta\vartheta_{(y)} &= \Delta\vartheta_m + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h}, \Delta\vartheta_m = \frac{\Delta\vartheta_a + \Delta\vartheta_i}{2}; \Delta\vartheta'_{(y)} = \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} = \tan \alpha \cdot y \\ \vartheta_{(y)l} &= \vartheta_{mR} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h}, \vartheta_{mR} = \frac{\vartheta_a + \vartheta_i}{2}; \Delta\vartheta_{(y)} = \Delta\vartheta_i + \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \\ &&&= \Delta\vartheta_m + \Delta\vartheta'_{(y)} \end{aligned}$$

Das Temperaturfeld (die Temperaturverteilung) steht senkrecht über der Stabhöhe. Die Temperaturen „ $\vartheta_{(y)l}$ “ verlaufen über die Stabbreite „ b “, also in Dickenrichtung, konstant.

Ist die Temperaturdifferenz in der Innenfaser

$$\Delta\vartheta_i = 0 \text{ d.h.: } \vartheta_i = \vartheta_0$$

so liegt ein Sonderfall des gleichmäßigen Faserdehnungsanteils der Innenfaser „ i “ vor:

$$\varepsilon_i = \alpha_i \cdot \Delta\vartheta_i = 0 \Rightarrow \Delta l_i = 0, l_i = l_0 \text{ und } \varepsilon_{(y)} = \alpha_t \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \right).$$

Durch die ungleichmäßige Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta$ “ verursacht, tritt lediglich eine Stabverkrümmung, verbunden mit unterschiedlicher Stabfaserdehnung entsprechend dem ungleichmäßigen Temperaturverlauf auf. Während in einem durch ein allgemeines Temperaturfeld beanspruchten Stab das Zusammenwirken der Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_i$ “ und „ $\Delta\vartheta$ “ Einfluss auf das Faserverhalten und damit auf die Verkrümmung ausübt, fehlt in dem ange-

sprochenen Sonderfall der Einfluss von „ $\Delta\vartheta_i$ “. Damit behält die Innenfaserlänge ihre ursprüngliche Länge „ l_0 “ und ein betrachtetes Stabelement seine Ursprungslänge „ dx_0 “ bei.

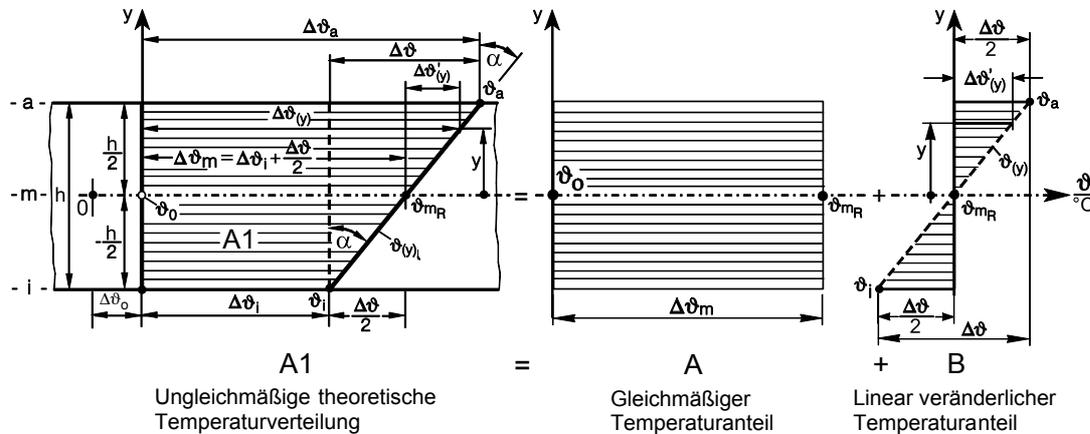


Bild 2.8.3: Aufspaltung eines ungleichmäßigen linearen Temperaturfeldes

Zur Berechnung von Formänderungen wird ein derartiges lineares Temperaturfeld zweckmäßig gemäß Bild 2.8.3 aufgespalten. Der Temperaturverlauf (Temperaturverteilung)

$$\Delta\vartheta_{(y)} = \Delta\vartheta_m + \Delta\vartheta'_{(y)} \quad ; \quad \Delta\vartheta_{(y)} = \Delta\vartheta_i + \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h}$$

wird hierbei in den gleichmäßigen Temperaturanteil (für gleichmäßige Faserlängenänderung)

$\Delta\vartheta_m = \Delta\vartheta_i + \frac{\Delta\vartheta}{2}$ und in den ungleichmäßigen Temperaturanteil (für ungleichmäßige Faser-

längenänderungen bei Biegung) $\Delta\vartheta'_{(y)} = \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h}$ aufgespalten. Ein derartiges Temperaturdif-

ferenzen-Feld existiert in der Wirklichkeit nicht, weil die Werkstoffkennwerte temperaturabhängig sind und immer eine seitliche Wärmeabstrahlung besteht. Es ist nur eine theoretische Berechnungsgrundlage. Man kann dieses Temperaturfeld als ungleichmäßiges, lineares, ein-dimensionales, theoretisches, stationäres Temperaturfeld bezeichnen, das aus der Überlage-rung beliebiger instationärer Temperaturfelder entstanden ist. Durch die ungleichmäßige Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta$ “ verursacht, tritt aus der Beobachtung heraus eine Stabverkrüm-mung ein. Bei konstanter Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta$ “ zwischen den Außenfasern über die Stablänge ist auch die Verkrümmung „ κ_{th} “ konstant, d.h., es tritt eine Stabverkrümmung zu einem Kreisringausschnitt ein, denn nur hierbei ist die Verkrümmung über die Länge kon-stant. Die Stabfasern dehnen sich bei konstanten Materialkennwerten entsprechend dem un-gleichmäßigen Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)l}$ “ d.h., entsprechend der in ihnen auftretenden Tem-peraturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_{(y)}$ “. Die Faserlängen, dargestellt am gestreckten Stab, sind mit denje-

nigen, dargestellt am Kreisringausschnitt, gleich lang. Die letzteren Merkmale deuten auf einen spannungslosen Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)l}$ “ hin.

2.8.4 Gemessene Temperaturfelder

Das nachfolgende Bild 2.8.4 zeigt eine gemessene Temperaturverteilung aus durchgeführten Versuchen an Flachstäben $b_0 \cdot h_0 \cdot l_0 = 30 \cdot 120 \cdot 1200$ mm entsprechend Anhang A. Zur Unterscheidung werden Querschnittsflächen und Temperaturdifferenzen-Flächen A_Q bzw. A_ϑ benannt. Der nichtlineare Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)g}$ “ gibt den gemessenen und „ $\vartheta_{(y)l}$ “ den linearen Temperaturverlauf zwischen den Außenfasertemperaturen „ ϑ_a “ und „ ϑ_1 “ wieder. Die dazwischen fehlenden Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta'_{(y)}$ “ verursachen zunächst thermische Zugspannungen. „ ϑ_0 “ ist die Ausgangs- bzw. Umgebungstemperatur.

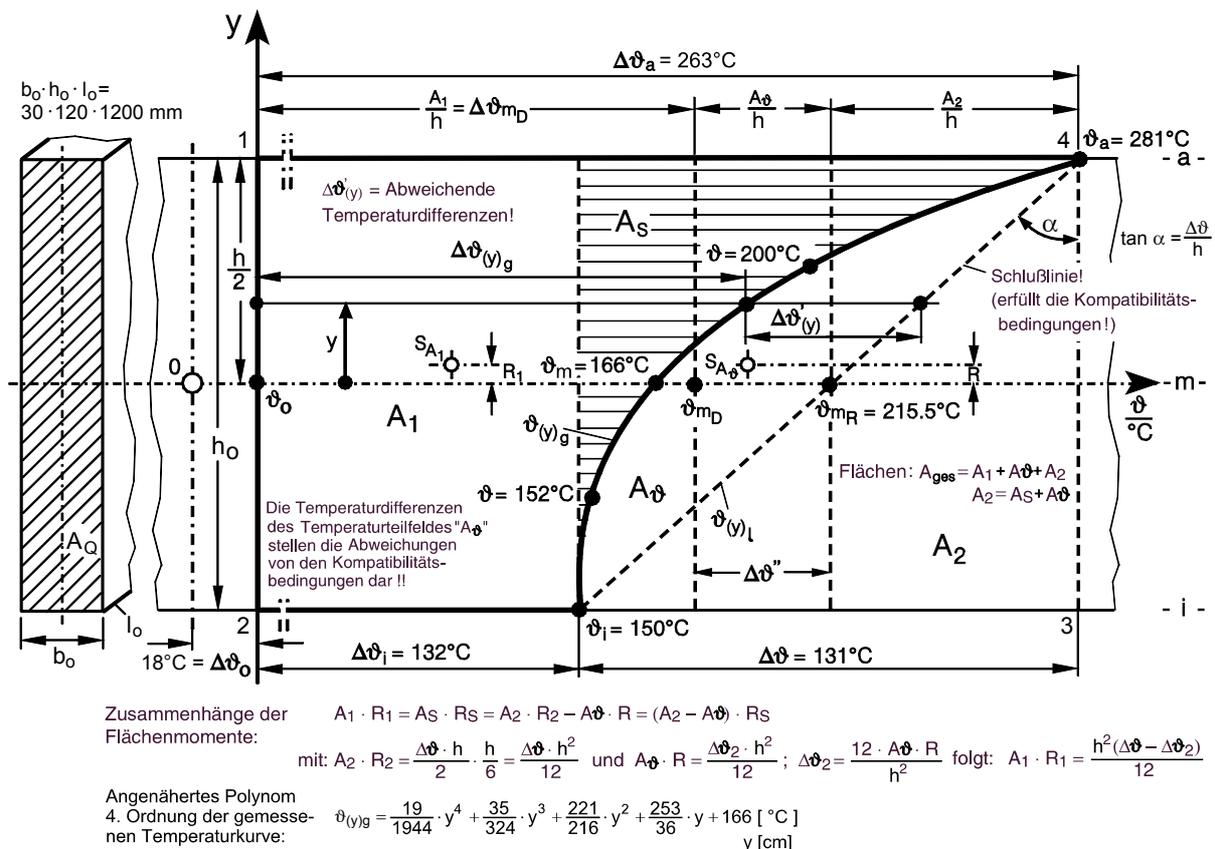


Bild 2.8.4: Gemessenes Temperaturfeld als Beispiel

Das angegebene Polynom wurde mit dem Rechenprogramm „DERIVE“ [112] aus den fünf Kurvenstützpunkten und ihren zugehörigen Wertepaaren ϑ und y berechnet. Das Bild 2.8.4 gibt zusätzlich einige geometrische Zusammenhänge bei der Betrachtung einer Temperaturkurve in der ϑ - y Ebene an. So ist das gesamte Temperaturfeld A (1-2-3-4) in die drei Teilflächen A_1 , A_ϑ und A_2 aufgeteilt:

$$A = A_1 + A_\vartheta + A_2 .$$

Die Lage der eingetragenen Flächenschwerpunkte S_{A_1} und S_{A_ϑ} mit ihren Schwerpunktabständen R_1 und R sowie die Größe der Einzel- und der Gesamtfläche wurde ebenfalls mit [112] berechnet. Zusammenhänge der einzelnen Flächenmomente $[^\circ\text{C} \cdot \text{mm}^2]$ und Temperaturdifferenzen $[^\circ\text{C}]$, wie sie für die Arbeit von Belang sind finden sich unter dem Bild wieder. Um eine derartige Temperaturverteilung versuchsmäßig zu erzeugen, muss zuvor die Gas-Brennerleistung für die Versuche des Anhangs A ermittelt werden.

Ermittlung der Gas-Brennerleistung für die Versuchsreihen des Anhangs A

Nach Fourier (Gleichung 2.6.7) gilt für den Wärmestrom allgemein

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \cdot A \quad \text{und für die Wärmestromdichte} \\ \dot{q} &= \lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \end{aligned}$$

In Bild 2.8.4 ist eine Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)g}$ “ mit hohem Temperaturniveau als Beispiel einschließlich zugehörigem Polynom gegeben. Damit ist auch die 1. Ableitung „ $\vartheta'_{(y)g}$ “ bekannt. Für die Größe der Wärmeleitfähigkeit „ λ “ und des eintretenden Wärmestromes

„ $\dot{Q}_a = \dot{Q}_{\text{Ein}}$ “ ist vor allem die Außenfasertemperatur „ ϑ_a “ maßgebend.

$$\lambda_{(\vartheta)} = \lambda_a = a - b \cdot \vartheta_a \quad (\text{siehe Anhang C}) \quad (2.8.4.1)$$

$$\dot{Q}_a = \dot{q}_a \cdot A$$

$$= \lambda_a \cdot \vartheta'_{(y)g} \cdot A \quad ; \quad y = \frac{h}{2}$$

$$\dot{Q}_a = (a - b \cdot \vartheta_a) \cdot \frac{d(\vartheta_{(y)g})_a}{dy} \cdot A \quad ; \quad A = b_0 \cdot l_0 \quad (2.8.4.2)$$

Beim Umgang mit Gas-Schweißbrennern (Propan/Butan), hier als Wämbrenner, treten große Energieverluste auf. Daher wird ein Wirkungsgrad von nur 25% gewählt. Damit ergibt sich die erforderliche Brennerleistung zu:

$$\dot{Q}_{\text{erf}} = \frac{\dot{Q}_a}{\eta} \quad (2.8.4.3)$$

und mit den Werten des Beispiels: $\dot{Q}_{\text{erf}} = \sim 25 \text{ KW}$. Gewählt wurden für die Versuche 2 Gasbrenner mit je 25 KW. Bild 2.8.4.1 zeigt als Ergänzung zum Bild 2.8.4 die Querschnittsfläche des Flachstahls mit Isothermen und den Verlauf der Wärmestromdichte bei seitlicher Wärmeabströmung. Somit ist Bild 2.8.4 als Darstellung einer eindimensionalen Temperaturverteilung durch vertikalen Schnitt der Isothermen entstanden.

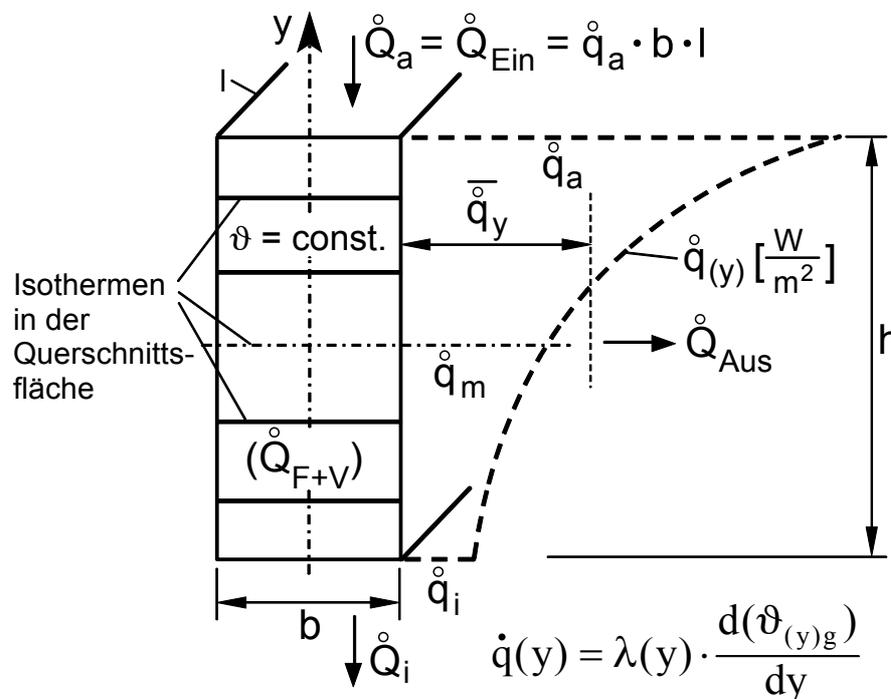


Bild 2.8.4.1: Isothermen und Wärmestromdichte bei seitlicher Wärmeabströmung

Um die Wärmeströme bei einer Wärmestrombilanz am prismatischen Körper berechnen zu können, müssen über die Stabhöhe „ h “ gesehen zunächst die Wärmeleitfähigkeiten „ $\lambda(\vartheta)$ “,

die Wärmestromdichten „ $\dot{q}(y)$ “ und beider Mittelwerte bekannt sein.

Wärmeleitfähigkeiten:

Allgemein:

$$\lambda_{(\vartheta)} = a - b \cdot \vartheta \quad [\text{W} / \text{m} \cdot \text{K}] \quad [94] \quad (2.8.4.4)$$

$$\overline{\lambda_{(\vartheta)}} = \frac{1}{\Delta\vartheta} \cdot \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_a} \lambda_{(\vartheta)} \cdot d\vartheta \quad (2.8.4.5)$$

Linearer Temperaturverlauf:

$$\lambda_{(\vartheta_{(y)l})} = a - b \cdot \vartheta_{(y)l} \quad (2.8.4.6)$$

$$\begin{aligned} \overline{\lambda_{(\vartheta_{(y)l})}} &= a - \frac{b}{2} (\vartheta_a + \vartheta_i) \\ &= a - b \cdot \vartheta_{mR} \end{aligned} \quad (2.8.4.7)$$

 ϑ_{mR} = mittlere Körpertemperatur

$$= \frac{1}{2} (\lambda_a + \lambda_i)$$

Nichtlinearer Temperaturverlauf:

$$\lambda_{(\vartheta_{(y)g})} = a - b \cdot \vartheta_{(y)g} \quad (2.8.4.8)$$

$$\begin{aligned} \overline{\lambda_{(\vartheta_{(y)g})}} &= a - b \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \vartheta_{(y)g} \cdot dy = \lambda_{(\vartheta_{mD})} \\ &= a - b \cdot \vartheta_{mD} \end{aligned} \quad (2.8.4.9)$$

 ϑ_{mD} = mittlere Körpertemperatur**Wärmestromdichten:**

Allgemein:

$$\dot{q} = \lambda_{(\vartheta)} \text{grad}_n \vartheta = \lambda_{(\vartheta)} \tan \alpha = \lambda_{(\vartheta)} \frac{d\vartheta}{dy} ; \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] ; \text{ Heizflächenbelastung}$$

$$\dot{q}_{(y)} = \lambda_{(\vartheta_{(y)})} \cdot \frac{d\vartheta_{(y)}}{dy} = \lambda_{(\vartheta_{(y)g})} \cdot \frac{d(\vartheta_{(y)g})}{dy} = \lambda_{(y)} \cdot \frac{d(\vartheta_{(y)g})}{dy} \quad (y) \quad (2.8.4.10)$$

$$\overline{\dot{q}_{(y)}} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \dot{q}_{(y)} \cdot dy = \text{Mittelwert}$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (a - b \cdot \vartheta_{(y)g}) \frac{d(\vartheta_{(y)g})}{dy} \cdot dy$$

$$\overline{\dot{q}_{(y)}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\vartheta'_{(y)g}}$$

$$\overline{\dot{q}_{(y)}} = \overline{\lambda_{(\vartheta_{(y)g})}} \cdot \overline{\frac{d(\vartheta_{(y)g})}{dy}} = \lambda_{\vartheta_{mD}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = \lambda_{\vartheta_{mD}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad (2.8.4.11)$$

mit $\sum d(\vartheta_{(y)g}) = \Delta\vartheta$ und $\sum dy = h$

$$\overline{\frac{d(\vartheta_{(y)g})}{dy}} = \overline{\text{grad } n \vartheta} = \tan \alpha = \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

mit α als Winkel der Schlusslinie $(\vartheta_{(y)l})$ der gekrümmten Temperaturverteilung $(\vartheta_{(y)g})$ zur Normalen (hier: y-Richtung) und $\Delta\vartheta =$ Temperaturdifferenz zwischen den Außenfasern a und i.

$$\Rightarrow \dot{q}_{(y)} = (a - b \cdot \vartheta_{mD}) \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad (\text{absoluter Betrag}), \quad (2.8.4.12)$$

bei linearem Temperaturverlauf: $\vartheta_{mD} \hat{=} \vartheta_{mR}$.

Zur Berechnung der Wärmestromdichten „ $\dot{q}_{(y)}$ “.

Die Berechnungsgleichung der Wärmestromdichte

$$\dot{q}_{(y)} = \lambda_{(\vartheta(y))} \cdot \frac{d\vartheta}{dy}(y) = \lambda_{(\vartheta(y))} \cdot \vartheta'_{(y)g}(y) = \lambda_{(\vartheta(y))} \cdot \tan \alpha(y)$$

bringt zum Ausdruck, dass „ $\dot{q}_{(y)}$ “ von der temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit „ λ “ und dem Tangens des Winkels „ $\alpha(y)$ “ abhängig ist. Hierbei ist „ α “ der Winkel zwischen der „Normalen“ und der Tangente im Punkt „y“ an die Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)g}$ “, siehe Bild 2.8.4.2.

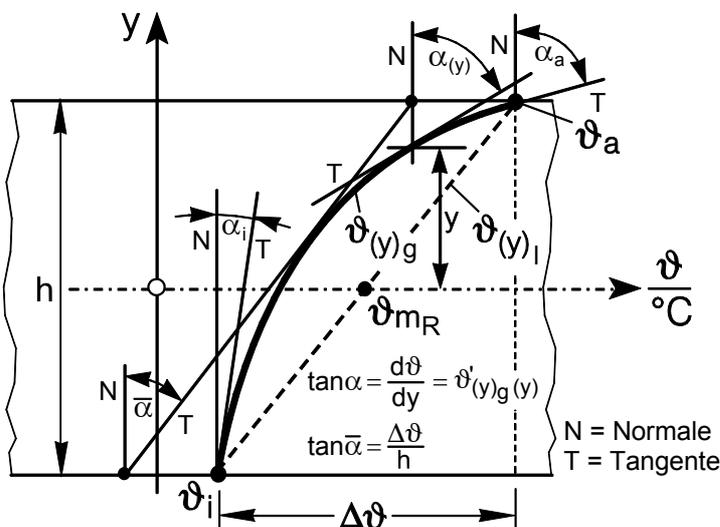


Bild 2.8.4.2: Winkel „ $\alpha(y)$ “ zur Berechnung der Wärmestromdichten „ $\dot{q}_{(y)}$ “

Im Bild 2.8.4.2 erkennt man die verschiedenen Größen von „ $\alpha_{(y)}$ “, die von „ α_a “ bis „ α_i “ ständig abnehmen und zu „ $\dot{q}_{(y)}$ “ führen, wie im Bild 2.8.4.1 bereits dargestellt.

An Besonderheiten seien erwähnt:

1. Außenfaser

In der wärmeren Außenfaser ist „ α_a “ im Punkt „ ϑ_a “ sehr groß. Grenzwert:

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha = \infty \Rightarrow \dot{q} = \infty!$$

2. Innenfaser

In der kälteren Innenfaser ist „ α_i “ im Punkt „ ϑ_i “ sehr klein.

$$\text{Grenzwert: } \alpha = 0^\circ \Rightarrow \tan \alpha = 0 \Rightarrow \dot{q} = 0!$$

Das heißt: Trifft die Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)g}$ “ senkrecht auf die Horizontale „i“ dann fließt keine Wärme mehr. $\dot{q}_i = 0$ und damit auch $\dot{Q}_i = 0$. Mit $\dot{q}_i = 0$ kann bis etwa $\alpha \approx 1/30$ $\alpha = 1/30$ d.h. bis etwa $\alpha \approx 2^\circ$ gerechnet werden.

3. Mittelwert

Der Mittelwert der Wärmestromdichte

$$\dot{q}_{(y)} = \lambda_{\vartheta_{mD}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

wobei $\tan \bar{\alpha} = \frac{\Delta\vartheta}{h}$ der Tangens des Mittelwertes aller Tangentenwinkel ist, ist dadurch gekennzeichnet, dass „ $\lambda_{\vartheta_{mD}}$ “ die zur mittleren Körpertemperatur „ λ_{mD} “ gehörende Wärmeleitfähigkeit ist und dass $\Delta\vartheta/h = \tan \bar{\alpha}$ der Tangens des Winkels der Schlusslinie „ $\lambda_{(y)l}$ “ ist. Man stellt sich vor, das die Schlusslinie durch Parallelverschiebung eine Tangente an die Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)g}$ “ geworden ist.

4. Ähnlichkeiten der „ $\dot{q}_{(y)}$ “ und der „ $\vartheta_{(y)}$ g“ Verteilung

Die Tangentenwinkel „ $\tan \alpha = \frac{d\vartheta}{dy}$ “ mit ihren Tangenten stellen die „Umhüllende“ der Temperaturverteilung dar.

Da der Rechenwert von „ $\lambda_{(y)}$ “ (siehe Anhang C) keinen großen linearen Veränderungen unterworfen ist, kann er in diesem Zusammenhang als konstant aufgefasst werden. Bei 180° C beträgt „ $\lambda_{(\vartheta_{mD})}$ “ etwa 48,3 W/m · K .

Damit entsprechen sich die Verteilungen in ihrem nichtlinearen Verlauf. „ $\dot{q}_{(y)}$ “ und „ $\lambda_{(y)}$ g“ werden nur durch die für „ ϑ “ bzw. „ \dot{q} “ gewählten Maßstäbe beeinflusst.

2.8.5 Analytische Berechnung des globalen Wärmeübergangskoeffizienten „ $\alpha_{(y)}$ “ aus einem gemessenen Temperaturfeld

Das Bild 2.8.4 zeigt eine gemessene Temperaturverteilung in einem Flachstahlprofil $b_0 \cdot h_0 \cdot l_0$. Wie im Kapitel 5 beschrieben, lautet nach Linearisierung der gekrümmten Temperaturkurve die mittlere Stabtemperatur

$$\overline{\vartheta}_m = \vartheta_{mD} = \Delta\vartheta_{mD} + \Delta\vartheta_0 \quad (2.8.5.1)$$

Der Wärmestrom „ \dot{Q}_a “ tritt durch die Fläche $b_0 \cdot l_0 = A_{\text{ein}}$ ein und vereinfachend durch die Fläche $2 \cdot h_0 (b_0 + l_0) = A_{\text{aus}}$ wieder aus. Die Wärmestromanteile für die Formänderung und für innere Verluste „ \dot{Q}_F “ und „ \dot{Q}_V “ sowie der aus der Grundfläche austretende Wärmestrom „ \dot{Q}_i “ sind sehr klein. Begleitrechnungen zu „ \dot{Q}_{F+V} “ zeigen, dass dieser Anteil etwa 0,2% des eintretenden Wärmestromes ausmacht und somit praktisch nicht messbar ist. Der Wärmestrom „ \dot{Q}_i “ beträgt im Beispiel etwa 2% und wird deshalb auch vernachlässigt. Der zugeführte Wärmestrom

$$\dot{Q}_a = \dot{Q}_{\text{ein}} = \dot{q}_a \cdot b_0 \cdot l_0 \quad [\text{W}]$$

$$\dot{q}_a = \dot{q}_{\text{ein}} = \text{Wärmestromdichte in der Außenfläche}$$

sowie der Verlauf der Wärmestromdichte über die Stabhöhe bei seitlicher Wärmeabströmung ist in Bild 2.8.4.1 dargestellt. Der globale Wärmeübergangskoeffizient „ $\alpha_{(y)}$ “ setzt sich aus den Anteilen der Konvektion und der Strahlung zusammen:

$$\alpha_{(y)} = \alpha_c (y) + \alpha_r (y) \quad (2.8.5.2)$$

Er ist u.a. von der Temperatur, den Strömungsverhältnissen, dem Oberflächenverhältnis, der Art der Oberfläche und den Umgebungstemperaturen abhängig. Die Berechnung teilt sich in zwei Abschnitte auf:

1. Berechnung des Mittelwertes des Wärmeübergangskoeffizienten durch vereinfachendes Gleichsetzen des ein- und austretenden Wärmestromes

$$\dot{Q}_{\text{Aus}} = \overline{\alpha_{(\vartheta)}} \cdot \Delta\vartheta_{\text{mD}} \cdot A_{\text{aus}} = \overline{\dot{q}_{\text{aus}}} \cdot A_{\text{aus}} \quad [\text{W}] \quad (2.8.5.3)$$

$$\dot{Q}_{\text{Ein}} = \lambda_{(\vartheta_a)} \cdot \frac{d(\vartheta_{(y)g})_a}{dy} \cdot A_{\text{ein}} = \dot{q}_a \cdot A_{\text{ein}} \quad [\text{W}] \quad (2.8.5.4)$$

$$\Delta\vartheta_{\text{mD}} = \text{mittlere Körpertemperatur} - \text{Umgebungstemperatur } \Theta_a$$

(Ableitung siehe Kapitel 5)

$\vartheta_{(y)g}$ = gegebene Temperaturverteilung

$$\vartheta'_{(y)g} = \frac{d\vartheta}{dy} = \text{grad}_n \vartheta = \tan \alpha = \text{Tangens des jeweiligen}$$

Tangentenwinkels α gegen die Normale

$$\dot{Q}_{\text{Aus}} \stackrel{!}{=} \dot{Q}_{\text{Ein}} \quad ; \quad \lambda_{(\vartheta)} = a - b \cdot \vartheta \quad [\text{W/K} \cdot \text{m}]$$

Über die Stabhöhe lautet der globale Wärmeübergangskoeffizient:

$$\alpha_{(y)} = \overline{\alpha_{(\vartheta)}} + \Delta\alpha \cdot \frac{y}{h} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right] \quad (2.8.5.5)$$

und als Mittelwert:

$$\Rightarrow \overline{\alpha_{(\vartheta)}} = \frac{\dot{q}_a}{\Delta\vartheta_{\text{mD}}} \cdot \frac{A_{\text{ein}}}{A_{\text{aus}}} \quad ; \quad \text{mit } \dot{q}_a = \lambda_{(\vartheta_a)} \cdot \frac{d(\vartheta_{(y)g})_a}{dy} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.8.5.6)$$

$$\frac{d\vartheta}{dy} \left[\frac{\text{K}}{\text{m}} \right]$$

$$\alpha_m = \overline{\alpha_{(\vartheta)}} = \frac{\lambda_{(\vartheta_a)}}{\Delta\vartheta_{\text{mD}}} \cdot \frac{d(\vartheta_{(y)g})_a}{dy} \cdot \frac{b_0 \cdot l_0}{2 \cdot h_0 \cdot (b_0 + l_0)} \quad (2.8.5.7)$$

2. Berechnung der Funktion des Wärmeübergangskoeffizienten über die Stabhöhe in Abhängigkeit von dem linearen, resultierenden Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)}|_r$ “ (Ableitung siehe Kapitel 5, Bild 5.4) mit der wärmeren Außenfasertemperatur „ ϑ_a “.

$$\begin{aligned}\alpha_{(y)} &= \overline{\alpha_{(\vartheta)}} + \Delta\alpha \cdot \frac{y}{h} \\ &= \overline{\alpha_{(\vartheta)}} + 2(\alpha_a - \overline{\alpha_{(\vartheta)}}) \cdot \frac{y}{h} \quad ; \quad \text{mit } \Delta\alpha = 2(\alpha_a - \overline{\alpha_{(\vartheta)}}) .\end{aligned}$$

Bei linearem Verlauf von α über h verhalten sich die Wärmeübergangskoeffizienten wie die zugehörigen Temperaturen des resultierenden Nullspannungsverlaufes $\vartheta_{(y)}|_r = \vartheta_{mD} + \Delta\vartheta_1 \cdot y/h$ (siehe Bild 5.4).

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\alpha_{(\vartheta)}}}{\vartheta_{mD}} &= \frac{\alpha_a}{\vartheta_a'} \Rightarrow \alpha_a = \frac{\overline{\alpha_{(\vartheta)}} \cdot \vartheta_a'}{\vartheta_{mD}} \\ \Rightarrow \alpha_{(y)} &= \overline{\alpha_{(\vartheta)}} + 2 \left(\frac{\overline{\alpha_{(\vartheta)}} \cdot \vartheta_a'}{\vartheta_{mD}} - \overline{\alpha_{(\vartheta)}} \right) \cdot \frac{y}{h} = \alpha_m + 2 (\alpha_a - \alpha_m) \cdot \frac{y}{h} \quad (2.8.5.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha_{(y)} &= \overline{\alpha_{(\vartheta)}} + \overline{\alpha_{(\vartheta)}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\vartheta_a'}{\vartheta_{mD}} - 1 \right) \cdot \frac{y}{h} = \alpha_m + 2 \cdot \alpha_m \left(\frac{\vartheta_a'}{\vartheta_{mD}} - 1 \right) \cdot \frac{y}{h} . \\ &= \alpha_m + \alpha_m \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{\vartheta_{mD}} \cdot \frac{y}{h} \quad (2.8.5.9)\end{aligned}$$

3. Mit den Werten des in Bild 2.8.4 dargestellten Beispiels ergibt sich in guter Übereinstimmung mit der in Bild 2.8.1.4 dargestellten, abgeschätzten $\left(\alpha_{(y)} = 170 - \frac{80 \cdot y}{h} \right)$ globalen Wärmeübergangszahl:

$$\alpha_{(y)} = 132 + 82 \cdot \frac{y}{h} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right] . \quad (2.8.5.10)$$

$$\text{und bei } y = \frac{h}{2} : \alpha_a = 173 \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$$

3. Das thermomechanische Problem – Grundgleichungen

3.1 Allgemeines

Ausgehend von den nach Kapitel 2.7.2 berechneten und den in den Anhängen A und B gemessenen Temperaturfeldern in Stahlbau-Profilstäben, sind die zugehörigen Spannungen und Verformungen zu bestimmen. Da die Lösung des Problems der Temperaturverteilung vom Problem der Spannungs- und Verformungszustände entkoppelt wurde, können die Spannungs- und Verformungszustände aus quasi stationären Temperaturfeldern, entstanden aus der Überlagerung beliebiger instationärer Temperaturfelder, ermittelt werden. Eine Zeitabhängigkeit aufgrund der Wärmeleitung ist somit nicht mehr zu berücksichtigen.

3.2 Thermoelastische Grundgleichungen: Dreidimensionale Formulierungen

Unter der Voraussetzung, dass die Temperatur von den Verformungen unabhängig ist, die Verformungen klein bleiben und das elastische Materialverhalten uneingeschränkt Gültigkeit besitzt, lassen sich die Dehnungen, die Spannungen und die Verschiebungen eines Körpers unter Einbeziehung des Temperatureinflusses wie folgt bestimmen [10].

3.2.1 Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

3.2.2 Spannungsdehnungsbeziehungen: Erweitertes Formänderungsgesetz von Hooke, Cauchy und de St. Venant

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \mu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] + \alpha_t \cdot \Delta \vartheta_{xx}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] + \alpha_t \cdot \Delta \vartheta_{yy}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] + \alpha_t \cdot \Delta \vartheta_{zz}. \quad (3.6)$$

In Worten: „Die gesamten resultierenden Dehnungen in Achsrichtung setzen sich aus dem spannungsbehafteten Dehnungsanteil und aus dem Dehnungsanteil durch rein thermische Beanspruchung zusammen!“ Die Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta_{xx}, \Delta\vartheta_{yy}, \Delta\vartheta_{zz}$ sind die in Achsrichtung wirksamen, gemessenen oder berechneten Temperaturdifferenzen.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2 [1 + \mu]}{E} \tau_{xy}, \quad (3.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2 [1 + \mu]}{E} \tau_{yz}, \quad (3.8)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2 [1 + \mu]}{E} \tau_{zx}. \quad (3.9)$$

Die Beziehungen (3.4) bis (3.6) sind nach einigen Umformungen zum spannungsbehafteten Dehnungsanteil Basis zur Berechnung thermomechanischer Spannungen. Weiterhin sind diese resultierenden Gesamtdehnungen in Richtung der drei Achsen eines thermisch beanspruchten Bauelements nach Multiplikation mit dem E-Modul und damit nach Ermittlung der thermodynamischen, spezifischen, inneren, resultierenden Verschiebekräfte, Ausgangspunkt zur Berechnung der Volumen-Formänderungsarbeit. Z.B. für die x-Achse:

$$\begin{aligned} \sigma_{i\ xx} &= E_m \cdot \varepsilon_{xx} \\ &= E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\Delta\vartheta_{(y)lr}$ die lineare, resultierende Temperaturdifferenz, siehe Kapitel 5.

3.2.3 Dehnungsverschiebungsbeziehungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial w}, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.13)$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (3.14)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} . \quad (3.15)$$

mit der aktuellen Temperatur $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$, der Ausgangstemperatur im spannungsfreien Zustand $\vartheta_0 = \vartheta_0(x, y, z)$ und dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α_t . Darüber hinaus ist die Spannungsfreiheit auf den Oberflächen der Körper einzuhalten. Der hier dargestellte Fall des dreidimensionalen Temperaturfeldes liegt bei den im Rahmen dieser Arbeit zu lösenden Problemen nicht vor. Es treten nur Temperaturfelder $\vartheta = \vartheta(y)$ auf. Die Spannungs- und Verformungsberechnung bleibt demnach auf den eindimensionalen Fall beschränkt.

3.2.4 Verträglichkeitsbedingungen = Kompatibilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} , \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.16, 3.17)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} , \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.18, 3.19)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} , \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) . \quad (3.20, 3.21)$$

Es bestehen sechs Differential-Beziehungen zwischen den Dehnungskomponenten, die zu den thermisch-elastischen Grundgleichungen gehören und erfüllt werden müssen.

3.3 Thermoelastische Gleichungen für den ebenen Fall ; $\vartheta = \vartheta(x, y)$

Die Scheibe als ebener Spannungszustand (ESZ)

Für die Spannungskomponenten gilt im ebenen Fall: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ und die folgenden Gleichungen definieren somit den Beanspruchungszustand der Scheibe.

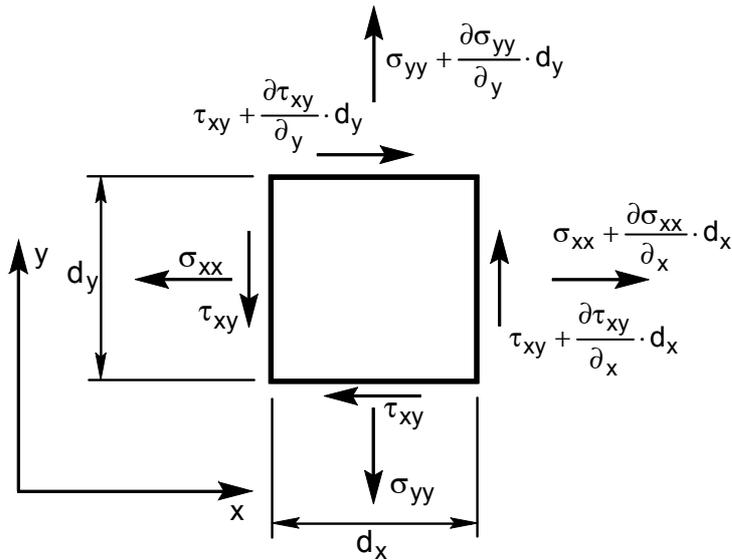


Bild 3.1: Scheibenspannungen

<p>1. Gleichgewichtsbeziehungen</p> $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.22)$ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$ <p>2. Spannungsdehnungsbeziehungen</p> $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}] + \alpha_t \cdot \Delta \vartheta_{xx} \quad (3.24)$ $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}] + \alpha_t \cdot \Delta \vartheta_{yy} \quad (3.25)$ $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2[1+\mu]}{E} \tau_{xy} \quad (3.26)$	<p>3. Dehnungsverschiebungsbeziehungen</p> $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.27)$ $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.28)$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.29)$ <p>4. Verträglichkeitsbedingung</p> $\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.30)$
--	---

Tab. 3.1: Thermoelastische Gleichungen für den ebenen Fall

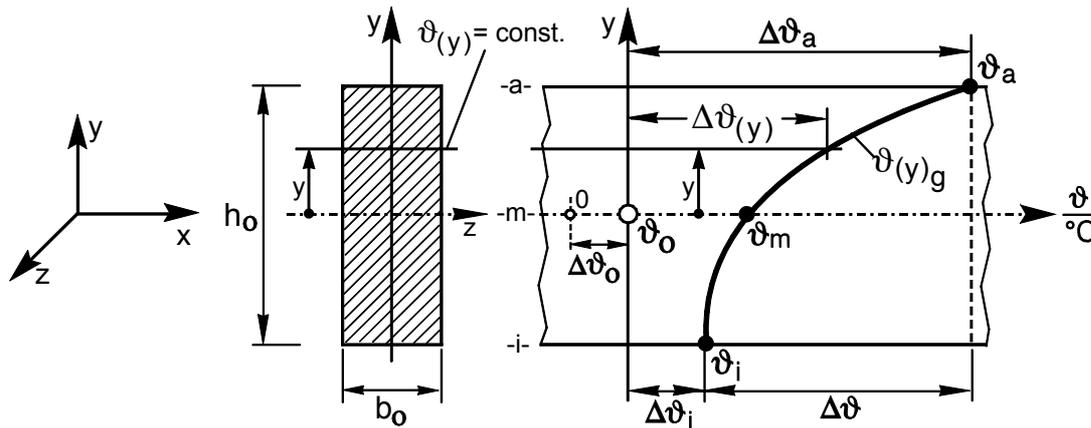
Zusätzlich treten in Dickenrichtung Dehnungen

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] + \alpha_t \cdot \Delta \vartheta_{zz} \quad (3.31)$$

auf, die jedoch für die Lösung des Problems nicht von Bedeutung sind.

3.4 Reduktion der thermoelastischen Gleichungen auf den eindimensionalen Fall

1. Die Temperaturverteilung ist nur von y abhängig $\Rightarrow \vartheta = \vartheta(y)$. Der ebene Spannungszustand (ESZ) der Scheibe vereinfacht sich auf den nur thermisch eindimensional beanspruchten Balken: $b_0 \cdot h_0 \cdot l_0$



$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Bild 3.2: Thermisch eindimensional beanspruchter Balken

2. Gleichgewichtsbeziehungen

$$2.1 \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0, \quad (3.32)$$

$$2.2 \quad \int_A \sigma_{xx} \cdot dA = \int_A \sigma_{xx} \cdot y \cdot dA = 0. \quad (3.33)$$

Es treten keine Schnittgrößen, Resultierende der Spannungen, auf. Die Spannungen bilden ein Gleichgewichtssystem.

3. Kompatibilitätsbedingung = Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0 = \frac{d^2 \left(\frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta(y) g \right)}{d y^2}. \quad (3.34)$$

4. Spannungsdehnungsbeziehungen

Die lineare Gesamtdehnung beträgt:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} = \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} \quad (3.35)$$

Querkontraktion und thermische Dehnung:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\mu \cdot \sigma_{xx}}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} \quad (3.36)$$

l_r = linear resultierend

μ = Querkontraktionszahl = 0,3 bei Stahl

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\mu \cdot \sigma_{xx}}{E} \cdot dy = 0 \quad (3.37)$$

5. Dehnungsverschiebungsbeziehungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.38)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.39)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (3.40)$$

3.5 Die Verschiebungen u_x ; v_y und w_z

Grundsätzlich setzen sich die Verschiebungen (ohne Torsion) aus drei Anteilen zusammen:

1. Anteil aus Spannungen
2. Anteil aus thermischer Beanspruchung (1. und 2. sind Verschiebungen aus den Dehnungen)
3. Anteil aus der Stabverkrümmung durch ein mechanisches Moment und / oder durch ein thermisches korrespondierendes Moment

Bei eindimensionaler Temperaturverteilung $\vartheta = \vartheta_{(y)}$ und rein thermischer Beanspruchung setzen sich die Verschiebungen wie folgt zusammen:

Zu u_x :
$$u_x = \int_0^x \epsilon_{xx \text{ ges}} \cdot dx = x \cdot \epsilon_{xx \text{ ges}}$$

$$\epsilon_{xx \text{ ges}} = \epsilon_{\sigma(y)} + \epsilon_{th(y)}$$

$$x = l_0 \Rightarrow u_x = u_{x \text{ max}} = \Delta l(y)$$

$$\Delta l(y) = \int_0^{l_0} \epsilon_{xx \text{ ges}} \cdot dx = l_0 \cdot \epsilon_{xx \text{ ges}}$$

$$\Delta l(y) = l_0 \cdot \epsilon_{th(y)lr} \quad , \quad (3.5.1)$$

mit $\epsilon_{th(y)lr}$ = lineare, resultierende Dehnung

Zu v_y : v_y setzt sich aus drei Anteilen, den zwei Anteilen aus den Dehnungen und dem Anteil aus der Stabverkrümmung zusammen. Die zur Berechnung der Anteile benötigten Mittelwerte werden mit Hilfe von Flächenintegralen berechnet.

$$v_{y \text{ ges}} = \int_0^y \left(-\mu \cdot \epsilon_{\sigma(y)} + \epsilon_{th(y)lr} \right) \cdot dy$$

$$- \frac{M_{th}}{E_m \cdot I} \cdot \frac{l_0^2}{8} \cdot (1 + \epsilon_{th(y)}) \quad (\text{Ausführlich siehe 5.7 und D 6}) \quad (3.5.2)$$

Zum Beispiel beträgt der Verschiebungsanteil aus thermischer Beanspruchung für die Höhe „ y “:

$$v_{y \text{ th}} = y \cdot \overline{\epsilon_{th(y)lr}}$$

$$= y \cdot \frac{1}{y} \cdot \int_0^y \epsilon_{th(y)lr} \cdot dy$$

$$v_{y \text{ th}} = \int_0^y \epsilon_{th(y)lr} \cdot dy$$

$$\overline{\epsilon_{th(y)lr}} = \text{Mittelwert} .$$

Zu beachten ist, dass aus den Spannungen, über die Stabhöhe „ h “ integriert, keine Verschiebungen entstehen.

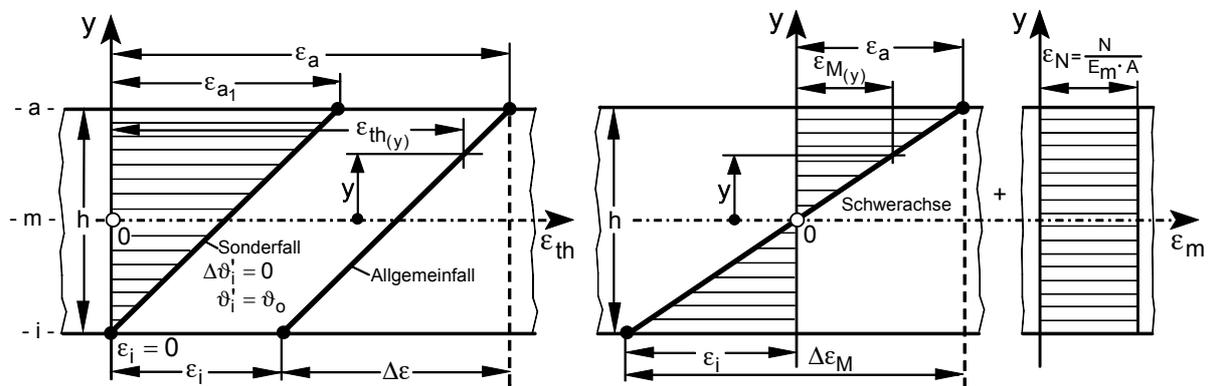
$$\int_{-h/2}^{h/2} -\mu \cdot \epsilon_{\sigma(y)} \cdot dy = 0 .$$

Zu w_z : Analog zu u_x lautet die Verschiebung in z -Richtung

$$\Delta b_{(y)} = b_0 \cdot \varepsilon_{th(y)lr} \tag{3.5.3}$$

3.6 Erweiterung der Differentialgleichung der elastischen Linie

Annahmen: Gerade Biegung eines zur y -Achse symmetrischen Querschnittes. Über die Stablänge sind sowohl das thermische als auch das mechanische Moment konstant ; m = mechanisch, th = thermisch, Schwerachse = Mittellinie ; $\kappa = const$



$$\varepsilon_{th(y)} = \alpha_{tm} \left(\Delta\vartheta'_i + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$y = 0: \varepsilon_{th(y)} = \alpha_{tm} \left(\Delta\vartheta'_i + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} \right)$$

$$\varepsilon_{m(y)} = \varepsilon_{M(y)} + \varepsilon_N$$

$$\varepsilon_{M(y)} = \frac{M_m \cdot y}{E \cdot I} = y \cdot \kappa_m = \frac{2 \cdot \varepsilon_a \cdot y}{h} = \frac{\Delta\varepsilon_m \cdot y}{h} = \frac{\sigma_a}{E} \cdot \frac{2 \cdot y}{h}$$

$$\varepsilon_{m(y)} = \frac{M_m \cdot y}{E \cdot I} + \frac{N}{E_m \cdot A} ; \quad E \stackrel{!}{=} E_m$$

Bild 3.3: Dehnungsfelder bei thermischer und bei mechanischer Beanspruchung

Es soll gezeigt werden, dass bei Verwendung der bisherigen Differentialgleichung der elastischen Linie [15]

$$E \cdot I \cdot y'' = - (M_m + M_{th})$$

bzw.
$$y'' = - \frac{M_m + M_{th}}{E \cdot I} . \quad (\text{Krümmung})$$

Krümmungen und Durchbiegungen **verschiedener Fasern** addiert wurden, denn der mechanische Teil der Gleichung gilt nur für die Schwerachse mit $l = l_0$ und $\varepsilon_{m(y)} = 0$. Der thermische Teil der Gleichung gilt sogar nur für einen Sonderfall, denn $l = l_0$ und $\varepsilon_{th(y)} = 0$ treffen nur bei

$$y = -\frac{h}{2} \quad \text{und} \quad \Delta\vartheta'_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vartheta'_i = \vartheta_0 \quad \text{zu.}$$

3.6.1 Berechnung der maximalen Durchbiegung beim Vorliegen eines über die Stablänge konstanten mechanischen Momentes ($\kappa_m = \text{const}$ und $I = \text{const}$)

$$y'' = \kappa_{m0} = \frac{M_m}{E \cdot I}$$

1. Integration

$$y' = \int \frac{M_m}{E \cdot I} \cdot dx = \frac{M_m \cdot x}{E \cdot I} + c_1$$

2. Integration

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{M_m \cdot x}{E \cdot I} \cdot dx + \int c_1 \cdot dx \\ &= \frac{M_m \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I} + c_1 \cdot x + c_2 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

1. $x = 0 \Rightarrow y = 0 ; c_2 = 0$
2. $x = l_0 \Rightarrow y = 0 ; l_0 =$ Länge der Schwerachse
hier : Länge der Mittellinie

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = 0 &= \frac{M_m \cdot l_0^2}{2 \cdot E \cdot I} + c_1 \cdot l_0 \\ c_1 &= -\frac{M_m \cdot l_0}{2 \cdot E \cdot I} \end{aligned}$$

Damit wird:

$$y = \frac{M_m \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{M_m \cdot l_0}{2 \cdot E \cdot I} \cdot x \quad (3.6.0)$$

und für $y_{\max} = f_m$ bei $x = \frac{l_0}{2}$ gilt

$$f_m = -\frac{M_m \cdot l_0^2}{E \cdot I \cdot 8} \quad (3.6.1)$$

Diese bekannte Gleichung gilt nur für die Schwerachse mit der Ursprungslänge $l = l_0$ und damit ohne Dehnung: $\varepsilon_m = 0$.

Setzt man beim Berechnungsgang für das thermische Moment (siehe Punkt 3.6.2) bei der 2. Randbedingung auch $x = l_0$ ein, erhält man analog:

$$f_{th} = - \frac{M_{th} \cdot l_0^2}{E \cdot I \cdot 8} \text{ als Durchbiegung der Innenfaser beim Sonderfall}$$

$$(\varepsilon_i = 0, \vartheta_0 = \vartheta_i; \Delta\vartheta_i = 0 \text{ und } l_i = l_0)$$

und als Summe:

$$f_{ges} = f_m + f_{th} = - \frac{(M_m + M_{th}) \cdot l_0^2}{E \cdot I \cdot 8} \quad (3.6.2)$$

In diesem Fall wurde die Durchbiegung der Schwerachse, denn nur sie behält die Ausgangslänge „ l_0 “ bei, mit der Durchbiegung der Innenfaser eines thermisch ungleichmäßig erwärmten Stabes für den beschriebenen Sonderfall addiert. Da im Allgemeinfall sowohl bei mechanischer als auch bei thermischer Stabbeanspruchung keine Faser ihre Ausgangslänge „ l_0 “ beibehält und damit eindeutig die mechanisch bzw. thermisch verursachten Durchbiegungsanteile für jede beliebige Faser über die Stabhöhe berechnet und addiert werden können, muss die Differentialgleichung der elastischen Linie in beiden Beanspruchungsfällen um den Einfluss der über die Stabhöhe veränderlichen Dehnungsanteile ergänzt werden.

Bezeichnet man mit

$$\kappa_{m0} = \frac{M_m}{E_m \cdot I} \quad (3.6.3)$$

die Verkrümmung der Schwerachse bei reiner mechanischer Biegung und mit

$$\kappa_{th0} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \quad (3.6.4)$$

die Verkrümmung der Stabinnenfaser beim erwähnten Sonderfall, dann lauten die Krümmungen aller Fasern allgemeingültig über die Stabhöhe bei mechanischer Beanspruchung

$$y_m'' = -\kappa_{m(y)} = - \frac{1}{R_{m(y)}} = - \frac{\kappa_{m0}}{1 + \varepsilon_{m(y)}} = - \frac{M_m}{E_m \cdot I \cdot (1 + \varepsilon_{m(y)})} \quad (3.6.5)$$

Mit

$$l_{m(y)} = l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{m(y)}) \text{ und } \varepsilon_{m(y)} = \varepsilon_N + \varepsilon_{M(y)} \text{ bzw.}$$

$$\varepsilon_{m(y)} = \frac{N}{A \cdot E_m} + \kappa_{m0} \cdot y = \varepsilon_N + \varepsilon_{M(y)}$$

wird die Gleichung (3.6.0) zu

$$y = -\frac{M_m \cdot x^2}{2 \cdot E_m \cdot I} + \frac{M_m \cdot l_{m(y)}}{2 \cdot E_m \cdot I} \cdot x \quad (3.6.6)$$

und als maximale Durchbiegung an der Stelle $x = \frac{l_{m(y)}}{2}$

$$\begin{aligned} y_{\max} = f_m &= \frac{M_m \cdot l_{m(y)}^2}{E_m \cdot I \cdot 8} \\ &= \frac{M_m \cdot l_0^2 \cdot (1 + \varepsilon_{m(y)})}{E_m \cdot I \cdot 8} \\ &= \kappa_{m0} \cdot \frac{l_0^2}{8} \cdot (1 + \varepsilon_{m(y)}) ; \kappa_{m0} = \overline{\kappa_m} = \text{const} \\ &= \frac{M_m \cdot l_0^2}{E_m \cdot I \cdot 8} + \frac{M_m \cdot l_0^2}{E_m \cdot I \cdot 8} \cdot \varepsilon_{m(y)} \\ f_m &= \frac{M_m \cdot l_0^2}{E_m \cdot I \cdot 8} + \frac{M_m \cdot l_0^2}{E_m \cdot I \cdot 8} \cdot \left(\frac{N}{A \cdot E} + \kappa_{m0} \cdot y \right) \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Bisher genutzte Gleichung
für die Schwerachse

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Neue, ergänzte Berechnungsgleichung für alle Stabfasern über die Stabhöhe „h“.

Letztere Gleichung wird wieder zur bisher genutzten Form, wenn $y = 0$ und $\varepsilon_N = 0$ werden, also reine Biegung bei alleiniger Betrachtung der Schwerachse vorliegt! Bei thermischer Beanspruchung lauten die Verkrümmungen über die Stabhöhe aller Fasern

$$y''_{\text{th}} = -\kappa_{\text{th}(y)} = -\frac{1}{R_{\text{th}(y)}} = -\frac{\kappa_{\text{th0}}}{1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}} = -\frac{M_{\text{th}}}{E_m \cdot I \cdot (1 + \varepsilon_{m(y)})} \quad (3.6.8)$$

so gelangt man, zwecks Vergleichbarkeit, zu nachfolgender erweiterter Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$y'' = -\kappa_{\text{ges}}(y) = -\frac{M_m}{E_m \cdot I} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon_{m(y)})} - \frac{M_{\text{th}}}{E_m \cdot I} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})} \quad (3.6.9)$$

Mit der Vorgabe von y ist jetzt eindeutig in beiden Fällen die gleiche Faser angesprochen.

Für ein reales Temperaturfeld mit

$$\varepsilon_{\text{th}}(y) = \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\vartheta_i' + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \quad (3.6.10)$$

$$\text{bzw.} \quad \varepsilon_{\text{th}}(y) = \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\vartheta_{\text{mD}} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \quad (3.6.11)$$

(Ableitungen siehe Kapitel 5!)

lautet gemäß Kapitel 3.6.2 die Lösung für den thermischen Anteil:

$$f_{\text{th}}(y) = - \frac{M_{\text{th}} \cdot l_0^2}{E_m \cdot I \cdot 8} \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}}(y)) \quad (3.6.12)$$

oder mit $\frac{M_{\text{th}}}{E_m \cdot I} = \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} = \kappa_{\text{th}0}$

$$f_{\text{th}}(y) = - \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{h \cdot 8} \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}}(y)) \quad (3.6.13)$$

als maximale Durchbiegung der kälteren Innenfaser

und für $y = -\frac{h}{2}$:

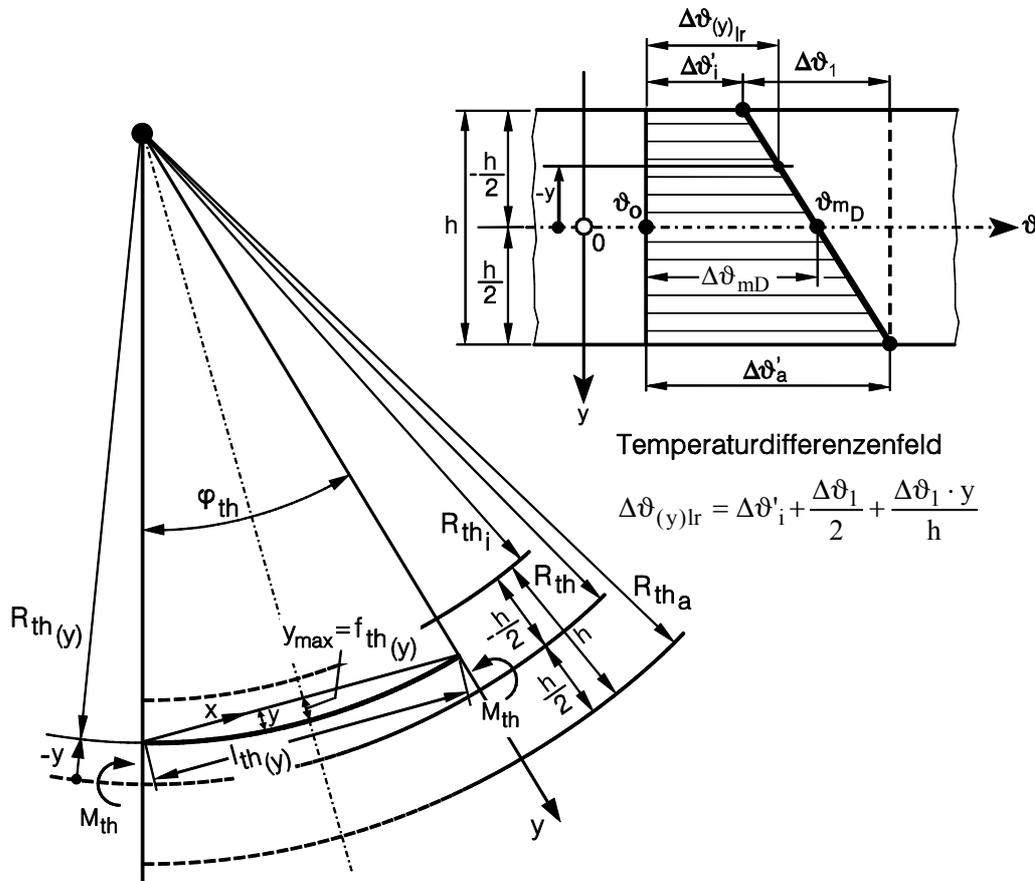
$$f_{\text{thi}} = \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0 \cdot l_i}{h \cdot 8} \quad [\text{mm}] \quad (3.6.14)$$

mit $l_i = l_0 \cdot (1 + \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_i')$

($\Delta\vartheta_i', \Delta\vartheta_1$ und $\Delta\vartheta_{\text{mD}}$ siehe Kap. 5) Analog lautet die Lösung für den mechanischen Anteil:

$$f_{\text{m}(y)} = - \frac{M_{\text{m}}}{E_m \cdot I} \cdot \frac{l_0^2}{8} \cdot (1 + \varepsilon_{\text{m}(y)}) \quad [\text{mm}] . \quad (3.6.15)$$

3.7 Berechnung der Biegelinie und der maximalen Durchbiegung jeder Faser eines thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stabes bei freier Lagerung. $\kappa_{th} = \text{const}$



Mit den Bezeichnungen aus Kap. 3.6.1 wird die Verkrümmung jeder Faser (Stab nach unten gebogen !):

$$y'' = \kappa_{th(y)} = \frac{M_{th}}{E_m \cdot I} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon(y))} = \frac{\kappa_{th0}}{1 + \varepsilon(y)} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h \cdot (1 + \varepsilon(y))} = \frac{1}{R_{th(y)}}$$

Bild 3.5: Durchbiegung jeder Faser eines freigelagerten Stabes

I. Einzelgleichungen nach Auswertung eines realen Temperaturfeldes (Kapitel 5)

1. $\Delta\vartheta'_i = \Delta\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{2}$
2. $\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2$
3. $\varepsilon(y) = \varepsilon_{th(y)} = \alpha_{tm} \left(\Delta\vartheta'_i + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$
4. $\kappa_{th0} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h}$

II. Lösungsweg

Die erweiterte Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$y'' = \kappa_{th(y)} = \frac{1}{R_{th(y)}} = \frac{\kappa_{th0}}{1 + \varepsilon_{th(y)}} = \frac{M_{th}}{E_m \cdot I \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} \quad (3.7.1)$$

1. Integration

$$y' = \int \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} \cdot dx = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} \cdot x + C_1 = \text{Stabdrehwinkel an jeder Stelle}$$

Verkrümmungswinkel jeder Faser bereits mit der später unter Punkt 2. berechneten Konstanten „ C_1 “:

$$y' = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} \cdot \left(x - \frac{\ell_{th(y)}}{2} \right)$$

$$x = 0 : y' = - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} \cdot \frac{l_{th(y)}}{2} = \widehat{\varphi}_{th1(y)}$$

= Stabenddrehwinkel jeder Faser.

Bei $\Delta\vartheta_i' = 0$; $y = -\frac{h}{2}$ und $l_{th(y)} = l_0$ wird

$$\widehat{\varphi}_{th1} = - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \frac{l_0}{2} = - \kappa_{th0} \cdot \frac{l_0}{2}$$

= Stabenddrehwinkel, Sonderfall

2. Integration

$$y = \int \left(\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot x}{h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} + C_1 \right) \cdot dx$$

$$y = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot x^2}{2 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} + C_1 \cdot x + C_2$$

Bestimmung der Integrationskonstanten mit Hilfe der Randbedingungen:

$$1. \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$2. \quad x = l_{th(y)} \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_{th(y)}^2}{2 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} + C_1 \cdot l_{th(y)}$$

$$\Rightarrow C_1 = - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_{th(y)}}{2 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})}$$

Nach zwei Integrationen und Bestimmung der Integrationskonstanten wird:

$$y = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot x^2}{2 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_{th(y)}}{2 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} \cdot x ; \quad \kappa_{th} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \quad (3.7.2)$$

$$\text{oder: } y_{th(x,y)} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell_0 \cdot x}{2} \right) \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})$$

Die maximale Durchbiegung tritt auf bei $x = \frac{l_{th(y)}}{2}$.

$$\text{Dort ist } y = y_{max} = f_{th(y)} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_{th(y)}^2}{8 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})} - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_{th(y)}^2}{4 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})},$$

$$\text{mit } l_{th(y)} = l_0(1 + \varepsilon_{(y)}) \text{ wird } f_{th(y)} = \left(\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{8 \cdot h} - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{4 \cdot h} \right) \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})$$

$$f_{th(y)} = -\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \frac{l_0^2 \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})}{8} \quad \text{und allgemein mit} \quad \kappa_{th} = \kappa_{th0} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} : \quad (3.7.3)$$

$$f_{th(y)} = -\frac{\kappa_{th} \cdot l_0^2}{8} - \frac{\kappa_{th}^2 \cdot l_0^2}{8} \cdot \left(h \cdot \frac{\Delta\vartheta_i'}{\Delta\vartheta_1} + \frac{h}{2} + y \right) \quad (3.7.4)$$

Zu dieser allgemeinen Lösung gehört nachfolgende spezielle Lösung für $y = -\frac{h}{2}$; also für

die **Kältere Innenfaser:**

$$f_{th(i)} = -\frac{\kappa_{th} \cdot l_0 \cdot l_i}{8} \approx -\frac{\kappa_{th} \cdot l_0^2}{8} \quad \text{mit} \quad l_i = l_0 + l_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_i' \quad (3.7.5)$$

Hierin stellen „ κ_{th} “ und „ M_{th} “ jeweils den über die Stablänge gefundenen Durchschnittswert dar.

Zusammenstellung der Verkrümmungen:

1. Verkrümmung der Schwerachse bei rein mechanischer Biegung

$$y_m'' = \kappa_{m0} = -\frac{\overline{M_m}}{E_m \cdot I} \quad (3.7.6)$$

2. Verkrümmung der kälteren Stabinnenfaser beim Sonderfall

($\Delta\vartheta_i = 0$, $y = -h/2$, $\varepsilon_i = 0$ und $l = l_0$) bei rein thermischer Beanspruchung

$$y_m'' = -\kappa_{th0} = -\frac{\overline{M_{th}}}{E_m \cdot I} = -\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \quad (3.7.7)$$

3. Verkrümmung jeder Faser über die Stabhöhe bei rein mechanischer Beanspruchung

$$\text{mit } \varepsilon_m(y) = \frac{N}{E_m \cdot A} = - \frac{\overline{M_m} \cdot y}{E_m \cdot I} \quad (3.7.8)$$

$$\text{wird } \kappa_{m(y)} = \frac{1}{R_{m(y)}} = \frac{\kappa_{m0}}{1 + \varepsilon_{m(y)}} = \frac{\overline{M_m}}{E_m \cdot I \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})} \quad (3.7.9)$$

4. Verkrümmung jeder Faser über die Stabhöhe bei rein thermischer Beanspruchung

$$\text{mit } \varepsilon_{th(y)} = \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_i' + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \quad (3.7.10)$$

$$= \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

(Ableitung siehe Kapitel 5)

$$\text{wird } \kappa_{th(y)} = \frac{1}{R_{th(y)}} = \frac{\kappa_{th0}}{1 + \varepsilon_{th(y)}} = \frac{\overline{M_{th}}}{E_m \cdot I \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})} \quad (3.7.11)$$

Bisher war im Kapitel 3.6 die Verkrümmung als konstant über die Stablänge angenommen worden. Mit $\kappa = \text{const}$ ergab sich die thermische Biegelinie eines frei aufliegenden Stabes als Kreisbogen. Verlaufen jedoch die Temperaturdifferenzen zwischen den Stabaußenfasern über die Stablänge wie in Bild 1.5 dargestellt nicht konstant, dann ist auch $\kappa_{th} \neq \text{const}$ und die Biegelinie nimmt die Form einer unsymmetrischen Parabel an. Hierzu ist ein Berechnungsverfahren im Anhang D9, in Anlehnung an das Analogieverfahren von Mohr angegeben. Ändert sich (wechselt) über die Stablänge auch das Trägheitsmoment, so tritt bei jedem Wechsel ein Sprung in die Biegelinie ein. Hierzu siehe [82].

4. Thermomechanische Sonderprobleme

4.1 Wärmespannungen

Wärmespannungen sind Spannungen aus der Behinderung der Wärmedehnung bei gleichmäßiger oder ungleichmäßiger thermischer Beanspruchung eines Körpers. (Zur Spannungskategorisierung siehe Anhang D8.)

Man unterscheidet drei Arten:

1. Wärmespannungen in statisch unbestimmten Systemen bei thermischer Beanspruchung eines oder mehrerer Elemente des Tragwerks. Die behinderten Wärmedehnungen rufen aufgrund der eingepprägten Weggrößen, die zunächst bei freier Dehnung (freier Lagerung) berechnet werden, ein Zwangskraftsystem (Zwängungen) hervor. Die Zwängungen bewirken Schnittgrößen (Reaktionskräfte in Normalenrichtung und Reaktionsmomente gegen die Verkrümmung). Ein „Zwang“ kann nur in statisch unbestimmten Tragwerks-Systemen auftreten. Es ist das federelastische Gegenwirken von beteiligten Systemstäben und Widerlagern auf eingepprägte Weggrößen die z.B. aus thermischer Beanspruchung eines oder mehrerer Stäbe des betrachteten Systems entstanden sind. Bei Wärmespannungen handelt es sich grundsätzlich um lineare, unsymmetrisch verteilte Spannungen (siehe Anhang G).
2. Lineare tangentielle und radiale Wärmespannungen aus behinderter Wärmedehnung infolge geometrischer Unverträglichkeiten z.B. in rotationssymmetrischen Körpern wie Rohre, Scheiben, Ringe, Schalen, Rippen, Zylinder und Kugeln.
3. Lineare Wärmespannungen infolge von Materialunverträglichkeiten (unterschiedliche Elastizitätsmodule, unterschiedliches Dehnungsverhalten), wie z. B. bei Bimetallen oder bei Betonüberbauten auf Stahlträgern (siehe Anhang H 7).

Bei Stäben unter reinem eindimensionalem Temperatureinfluss (ϑ nur von "y" abhängig!) nimmt das erweiterte Formänderungsgesetz von Hooke, Cauchy und de St. Venant:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \mu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta \quad \text{(Welches „}\Delta\vartheta\text{“ eingesetzt werden muss wird in Kapitel 5 definiert!)} \quad (4.1.1)$$

die Form

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta \quad \text{an.} \quad (4.1.2)$$

Hieraus : $u(x) = \int \varepsilon(x) dx$

bzw. für $\sigma = \text{const.} : u(l) = \Delta l = \left(\frac{\sigma(y)}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta \right) \cdot l .$

Wird die **Längsausdehnung** z.B. bei Einspannung zwischen zwei starren Wänden **behindert**, so ergibt sich aus

$$u(l) = 0$$

die zugehörige Spannung.

Ist $\sigma = \text{const.}$ längs des Stabes, so folgt aus $\Delta l = 0$ die Wärmespannung:

$$0 = \frac{\sigma}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta$$

$$\sigma = -E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta.$$

Beachtet man die Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte E und α_t , so nimmt der Ausdruck für jede Faser eines Stabes der Höhe „h“, aufgetragen über „y“, die Form an:

$$\sigma_{(y,\vartheta)} = -E_{(\vartheta)} \cdot \alpha_{t(\vartheta)} \cdot \Delta\vartheta_{(y)} = \text{Wärmespannungen} \quad (4.1.3)$$

(„Rein theoretisch“. Real werden bei Zwangskraftsystemen die auftretenden Wärmespannungen in Tragwerken durch die „Federraten“ (Federkonstanten) der beteiligten Stäbe und der Auflager stark gemindert!)

4.2 Thermomechanische Spannungen aus Dehnungsdifferenzen, allgemeiner Ansatz

Entsprechend Gleichung (4.1.2) lautet das Stoffgesetz bei reiner Temperaturbeanspruchung:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}$$

↓
Gesamtdehnung

↓
Dehnungsanteil
aus Spannungen

↓
Gesamte thermische
Dehnung

daraus folgt zunächst allgemein:

$$\sigma_{xx} = E \cdot (\varepsilon_{xx} - \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}) \quad (4.2.1)$$

↓

↓

Gesamt-
Dehnung

–

Gesamte thermische
Dehnung

⏟
Differenz = Spannungen verursachender Dehnungsanteil

Spannungen treten also nur auf, wenn es Dehnungsdifferenzen zur theoretischen, gesamten thermischen Dehnung: $\varepsilon_{\text{theoretisch}} = \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}$ gibt. Angewandt auf eine lineare Temperaturverteilung mit $\varepsilon_{xx} = \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}$ bedeutet das:

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = E (\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)} - \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}) = 0.$$

Mit $\varepsilon_{xx} = 0$ entstehen Wärmespannungen aus äußeren Zwängungen bei Volleinspannung wie Gleichung (4.1.3):

$$\sigma_{xx} = -E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}.$$

Bei rein thermischer Belastung sind die Dehnungen und die Temperaturdifferenzen nur von „y“ abhängig. Daher können die thermischen Dehnungen wie folgt beschrieben werden:

$$\varepsilon_{\text{th}}(y)_{\text{ges}} = \frac{\sigma_{\text{th}}(y)}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}$$

(th = thermisch, ges = gesamt, g = gemessen)

Bei thermischen Dehnungen besteht folgender grundsätzlicher Zusammenhang:

$$\varepsilon_{\text{th}}(y)_{\text{ges}} = \varepsilon_{\text{th}}(y) + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \quad (4.2.2)$$

↙	↘	↘		
Gesamt- Dehnung	=	Dehnungsanteil aus Spannungen	+	Gesamte thermische Dehnung

Daraus allgemeiner Ansatz für thermomechanische Spannungen:

$$\sigma_{\text{th}}(y) = E \cdot (\varepsilon_{\text{th}}(y)_{\text{ges}} - \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}) \quad (4.2.3)$$

$$= E \cdot (\text{Gesamtdehnung} - \text{gesamter therm. Dehnung})$$

$$\sigma_{\text{th}}(y) = E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$$

mit „ $\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$ “ als **Spannungen verursachende resultierende Dehnungsdifferenz**

4.3 Spannungslosigkeit bei linearer Temperaturverteilung

Es wird zunächst ein thermisch ungleichmäßig belasteter Stahlbau-Profilstab, statisch bestimmt gelagert, mit theoretischem linearem Temperaturverlauf gemäß Bild 4.3.1 betrachtet.

Es soll Spannungslosigkeit bei linearem Temperaturverlauf gezeigt werden. Hierzu bestehen u.a. drei Möglichkeiten:

- I. Nachweis mit dem Stoffgesetz
- II. Nachweis mit den Zusammenhängen der Faserlängen am gestreckt dargestellten Stab und am Kreisring-Ausschnitt
- III. Nachweis mit Hilfe der geometrischen Verträglichkeitsbedingungen von S. Timoshenko [4].

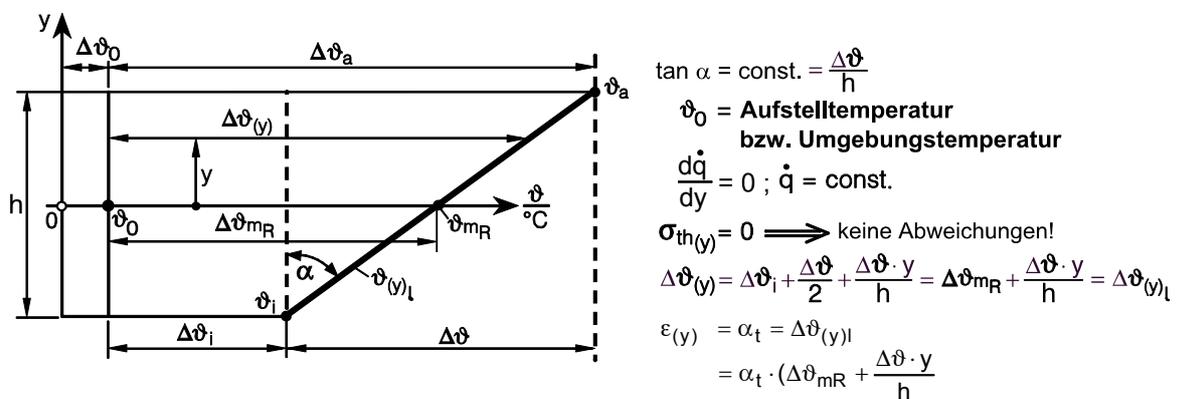


Bild 4.3.1: Lineares theoretisches Temperaturfeld

I. Nachweis mit dem Stoffgesetz

Auf der Basis des Stoffgesetzes wurde der allgemeine Ansatz für thermomechanische Spannungen

$$\begin{aligned}\sigma_{th(y)} &= E \cdot \left(\varepsilon_{th(y)_{ges}} - \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \right) \\ &= E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}\end{aligned}$$

entwickelt. Bei linearem Temperaturverlauf sind keine Dehnungsdifferenzen vorhanden.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{th(y)_{ges}} &= \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \\ \Delta\vartheta_{(y)r} &= 0 \Rightarrow \sigma_{th(y)} = 0\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Ein lineares Temperaturfeld ruft somit keine Spannungen hervor. Aufgrund der zugehörigen Gleichung der linearen Temperaturverteilung

$$\Delta\vartheta_{(y)l} = \Delta\vartheta_i + \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h}$$

und ihrer 1. Ableitung

$$\frac{d\vartheta}{dy} = \tan \alpha = \frac{\Delta\vartheta}{h} = \text{const} \quad (4.3.2)$$

kann als **Bedingung** für eine spannungslose Temperaturverteilung genannt werden, dass die 1. Ableitung ihrer Funktion eine Konstante liefern muss.

Bezieht man die nach Fourier gegebene Wärmeflussdichte (stationär-eindimensional):

$$\dot{q} = -\lambda_{(\vartheta)} \cdot \frac{d\vartheta}{dy}$$

auf einen linearen Temperaturverlauf:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\lambda_{(\vartheta)} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{H} = -\lambda_{(\vartheta)} \cdot \tan \alpha \\ \dot{q} &= \text{const} \end{aligned}$$

mit in die Überlegungen ein, so ist ersichtlich, dass neben der **ersten Bedingung** eines linearen Temperaturverlaufes für Spannungslosigkeit eine weitere **zweite Bedingung** gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{q}}{dy} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\vartheta}{dy} = \text{const} \quad \text{und somit auch} \quad \frac{d\varepsilon_{(y)}}{dy} = \text{const} \\ = \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = \kappa. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Hieraus ergibt sich die **dritte Bedingung**: $\kappa = \text{const} =$ Konstante Stabverkrümmung über die Stablänge.

Nichtlinearer spannungsbehafteter Temperaturverlauf

Im Gegensatz zu einem linearem Temperaturverlauf (zu einer linearen Temperaturverteilung) ist ein nichtlinearer Temperaturverlauf (nichtlineare Temperaturverteilung) mit Spannungen behaftet.

$$\frac{d\varepsilon_{xx}}{dy} \neq \text{const} \quad (4.3.4)$$

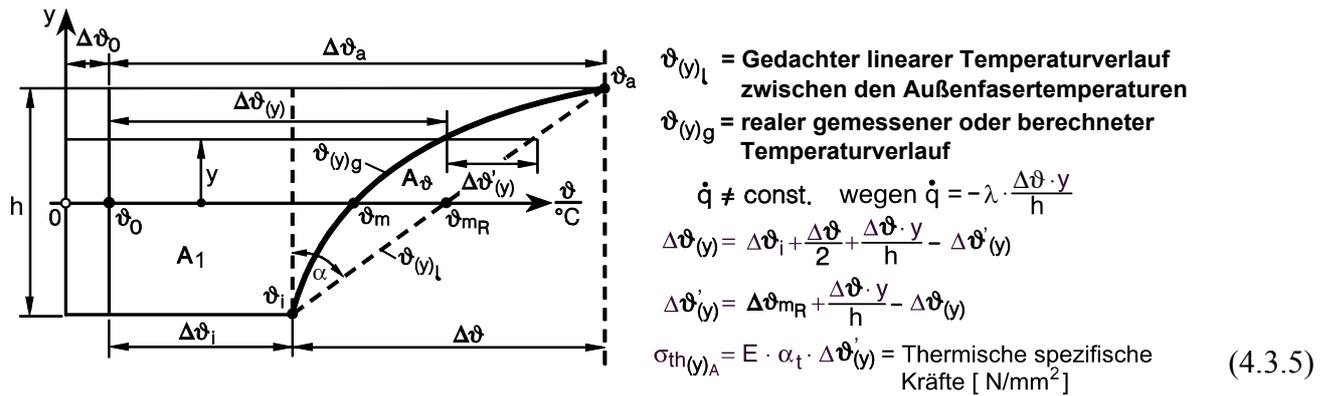


Bild 4.3.2: Nichtlineares reales Temperaturfeld. Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta^{(y)}$ “ als Ursache thermomechanischer Spannungen.

Anmerkung zu Bild 4.3.2

Die Bezeichnung einer Temperatur oder einer Temperaturdifferenz mit Strichen z.B. $\Delta\vartheta^{(y)}$, $\Delta\vartheta''^{(y)}$ oder $\Delta\vartheta'''^{(y)}$ bedeutet keine Ableitung, sondern dient nur der Kennzeichnung verschiedener Temperaturdifferenzen.

II. Nachweis der Spannungslosigkeit bei linearem Temperaturverlauf mit den Zusammenhängen der Faserlängen am gestreckt dargestellten Stab und am Kreisring-Ausschnitt

Der spannungslose Temperaturverlauf, Dehnungs- und/oder Längenänderungsverlauf über die Höhe eines Stabes in der x-y Ebene wird am gestreckt dargestellten Stab durch eine Gerade zwischen den Außenfaserwerten dargestellt („y“ entspricht „z“ im dreidimensionalen Achsenkreuz).

Soll Spannungslosigkeit bestehen, so muss die genannte gerade Linie (über die Stabtiefe gesehen bildet sie eine ebene Fläche) bei der thermischen Stabverkrümmung bestehen bleiben d.h., dass die Faserlängen am verkrümmten Stab müssen denjenigen Faserlängen am theoretisch gestreckt dargestellten Stab entsprechen.

Diese **dritte Bedingung** ist als Nachweis in Bild 4.3.3 angegeben.

Die Bedingung von Navier und Bernoulli vom Ebenbleiben der Querschnitte setzt weiter in diesem Fall voraus, dass der thermisch ungleichmäßig belastete Stab sich zu einem Kreisring-Ausschnitt verkrümmt, denn nur dann trifft es zu, dass die Faserlänge am gestreckten Stab der Faserlänge am verkrümmten Stab entspricht.

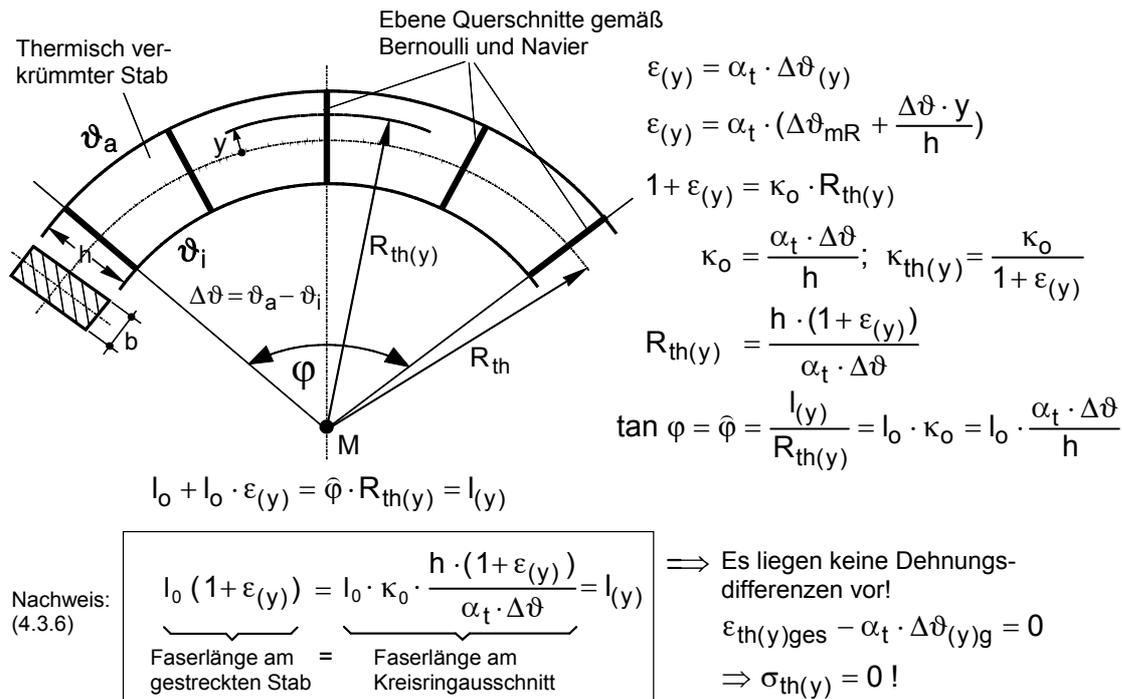


Bild 4.3.3: Zusammenhänge am Kreisring-Ausschnitt

III. Nachweis der Spannungslosigkeit bei linearem Temperaturverlauf mit Hilfe der geometrischen Verträglichkeitsbedingungen

Einen anderen Weg, Spannungslosigkeit bei linearem Temperaturverlauf und freier Stablagerung nachzuweisen, zeigt S. Timoshenko [4, S. 196] auf, indem er die geometrischen Verträglichkeits-Bedingungen, auch Kompatibilitätsbedingungen genannt, unter Pkt. 3.2.4, Formeln (3.16) bis (3.21) aufgeführt, definiert. Es bestehen sechs Differential-Beziehungen zwischen den Dehnungskomponenten. Diese Kompatibilitätsgleichungen, die zu den thermisch-elastischen Grundgleichungen gehören, müssen erfüllt werden.

Es ist leicht einzusehen, dass die Kompatibilitäts-Gleichungen nur dann erfüllt werden, falls alle zweiten Ableitungen des Dehnungsverlaufes bezogen auf x , y und z verschwinden, d.h., falls die Dehnung konstant ist oder nach einer linearen Funktion verläuft.

Die sechs Differential-Gleichungen reduzieren sich für die x - y -Ebene auf nur eine Differentialbeziehung

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{siehe Gleichung (3.30)})$$

und bei $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = 0$ auf nur eine einfache Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{siehe Gleichung (3.34)})$$

Diese Verträglichkeitsbedingung wird erfüllt

z.B. durch: $\varepsilon_{xx} = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)} = \text{const}$ oder

$$\varepsilon_{xx} = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)} = \alpha_{tm} \left(\Delta\vartheta_i + \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \right) \text{ als gradlinige Dehnungsverteilungen.}$$

Anders ausgedrückt, geht aus den Kompatibilitäts-Gleichungen eindeutig hervor, dass alle realen, kurvenförmigen Temperaturfelder thermomechanische Spannungen verursachen! Die zugehörigen Funktionen der Temperaturverteilungen sind wenigstens von 3. Ordnung, d.h. zunächst ist:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} \neq 0! \quad (4.3.7)$$

In Bild 4.3.2 ist ein reales Temperaturdifferenzen-Feld dargestellt, das senkrecht über der Stabhöhe „h“ steht und aus beliebigen instationären Temperaturverläufen entstanden ist. Die Schlusslinie $\vartheta_i - \vartheta_a$ des Kurvenzuges $\vartheta_{(y)g}$ ist die **einzige** spannungslose Temperaturverteilung zwischen den Außenfasertemperaturen ϑ_a und ϑ_i . Darüber hinaus ist der Tangens des Winkels α (Temperaturgradient) ein Maß für die Stab-Krümmung und ein Maß für die mittlere Wärmestromdichte. Die Fläche „A₁“ umfasst das eigentliche Temperaturfeld. Die nicht mehr zum Temperaturfeld gehörende Teilfläche „A_ϑ“ zeigt mit „ $\Delta\vartheta'_{(y)}$ “ die Temperaturdifferenzen auf, die als „Abweichungen“ vom linearen Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)l}$ “ Ursache thermomechanischer Spannungen sind. Multipliziert man die Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta_{(y)g}$ mit den Werkstoffkennwerten E und α_t zu $\sigma_{th(y)} = E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}$, so erhält man thermische spezifische Verschiebekräfte [N / mm²], denen die Größe

$$\sigma_{th(y)A} = E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta'_{(y)} \quad (4.3.8)$$

fehlt, um einen spannungslosen Zustand zu erreichen. Die fehlenden thermischen spezifischen Verschiebekräfte $\sigma_{th(y)A} = E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta'_{(y)}$ machen sich zunächst im Ausgangszustand vor einer Gleichgewichtsfindung als Spannungen bemerkbar.

Aus der Gleichung zur Ursache thermomechanischer Spannungen (4.3.8) kann abgeleitet werden: „Ursache thermomechanischer Spannungen sind in erster Linie Temperaturdifferenzen zwischen dem gemessenen oder berechneten realen Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)g}$ “

und dem spannungsfreien linearen Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)l}$ “ der die Außenfasertemperaturen „ ϑ_a “ und „ ϑ_i “ als Gerade verbindet.

Der Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)l}$ “, der die Schlusslinie des Kurvenzuges „ $\vartheta_{(y)g}$ “ bildet, ist gleichzeitig der wichtigste, so genannte **„1. Nullspannungstemperaturverlauf“**. Weiterhin geht aus der Gleichung (4.3.8) eine grundlegende Aussage hervor. Sie beantwortet nämlich die Frage nach dem Auftreten von thermomechanischen Zugspannungen und thermomechanischen Druckspannungen

$$\vartheta_{(y)l} > \vartheta_{(y)g} \Rightarrow \text{Zugspannungen}$$

$$\vartheta_{(y)l} < \vartheta_{(y)g} \Rightarrow \text{Druckspannungen}$$

4.4 Elastische Energie, Innere spezifische Verschiebekräfte, thermodynamische Kräfte, thermodynamische Konstante und thermisches Moment

Vorgänge, die in einem thermisch ungleichmäßig belasteten Stab ablaufen, lassen sich zweckmäßig zunächst aus der Sicht der Physik [68] und dann erweiternd unter Nutzung der Erkenntnisse der Thermodynamik [59], der statistischen Thermodynamik [56] und der Werkstoffkunde [15] erklären. Bei einem von außen eingeleiteten Wärmestrom bewirkt die entstandene Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta$ “ zwischen den Außenfasern das Fließen eines Wärmestromes „ \dot{Q} “ gegen den Wärmeleitwiderstand „ R_w “. Die zugeführte Wärme bewirkt entsprechend den Vorstellungen über die metallische Atombindung und die Gitterstruktur der Metallkristalle einen verstärkten Elektronenfluss und verstärkte Gitterschwingungen. Die so genannten „Anharmonizitäten“ der Gitterschwingungen führen zur thermischen Ausdehnung eines Festkörpers. Hierbei wird die Längenänderung mit

$$\Delta l_{(y)} = l_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}$$

angegeben, zu der der mittlere lineare Wärmeausdehnungskoeffizient „ α_t “ gehört.

Im Hookeschen Bereich wird von Demtröder [68] die zugeführte Wärme der „Elastischen Energie“ und der „Deformationsarbeit“ gleichgesetzt

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\Delta l} F \cdot dL = \int_0^{\Delta l} A \cdot \sigma_{thA} \cdot dL \\ &= \int_0^{\varepsilon} A \cdot \sigma_{th} \cdot l_0 \cdot d\varepsilon = V \cdot \int_0^{\varepsilon} \sigma_{thA} \cdot d\varepsilon \end{aligned}$$

mit den inneren **spezifischen Verschiebekräften**

$$dN_i = \sigma_{thA} \cdot dA$$

und $\sigma_{th(y)A} = E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}$

ergibt sich dann für die thermische **Deformationsarbeit der Längenänderung**

$$W_{\text{elast.th}} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot l_0 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_m)^2 \quad [J = N \cdot m] \quad ; \quad A \cdot l_0 = V_0 .$$

Aus der Summe der Deformationsarbeitsanteile für Längenänderung und Stabverkrümmung folgt dann die Gesamtsumme der **elastischen Energie**, die in Verbindung mit den inneren Verschiebekräften Ausgangsbasis zur Ermittlung des so genannten korrespondierenden thermischen Momentes und der thermischen Spannungen ist.

Wird die Gleichung in einer anderen Form geschrieben

$$W_{\text{elast.th}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_m \cdot A}_{N_i} \cdot \underbrace{l_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_m}_{\Delta l_m}$$

mit „ N_i “ als innerer Kraft und „ Δl_m “ als mittlerem Verschiebeweg, so kann gezeigt werden, dass das angegebene Produkt sich aus der thermodynamischen Proportionalitätskonstanten

$$\text{„} E \cdot \alpha_t \text{“}$$

der **thermodynamischen Kraft** (Abweichungen vom thermischen Gleichgewichtszustand)

[48]

$$\text{„} \Delta\vartheta_m \cdot A \text{“}$$

und dem mittleren Verschiebeweg zusammensetzt.

Bezeichnet man das Produkt „ $E \cdot \alpha_t$ “ z.B. mit dem Formelzeichen „ K_T “

$$K_T = E \cdot \alpha_t = E_{(\vartheta)} \cdot \alpha_{t(\vartheta)} \left[\frac{N}{\text{mm}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right] ,$$

so gibt diese **thermodynamische Proportionalitätskonstante** „ K_T “ die Verschiebekraft pro Flächeneinheit an, die bei einem Unterschied von 1°C erforderlich ist.

Damit kann die elastische Energie auch beschrieben werden mit

$$W_{\text{elast.th}} = \frac{1}{2} \cdot K_T \cdot \Delta\vartheta_m \cdot A \cdot \Delta l_m$$

für den Formänderungsarbeitsanteil bei Längenänderung.

Das Produkt besteht jetzt im Wesentlichen aus drei Faktoren

1. K_T = Thermodynamische Proportionalitätskonstante mit der Größe für Baustahl von
 $K_T \approx 2,60 \text{ N/mm}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ im Bereich bei $100 \text{ }^\circ\text{C}$
 $K_T \approx 2,50 \text{ N/mm}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ im Bereich bei $200 \text{ }^\circ\text{C}$ und
 $K_T \approx 2,30 \text{ N/mm}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ im Bereich bei $300 \text{ }^\circ\text{C}$ siehe Anhang C.
2. $\Delta\vartheta_m \cdot A$ = Thermische Querschnittsbeanspruchung = Thermodynamische Kraft
3. Δl_m = Mittlerer Verschiebeweg.

Bei der Berechnung thermodynamischer Vorgänge spielen die so genannten thermodynamischen Kräfte eine besondere Rolle. Sie geben nämlich die Abweichungen vom thermischen Gleichgewichtszustand an und treten in der Thermodynamik der Feststoffe (hier: Stahl) als thermodynamische Kräfte mit den Größen

$\Delta\vartheta_{(y)}$ als Temperaturdifferenz

$$\frac{d\vartheta}{dy} = \frac{\Delta\vartheta}{h} = \frac{\dot{q}}{\lambda} = \tan \alpha \text{ als Temperaturgradient (Hier bei linearer Temperaturverteilung)}$$

$\Delta\vartheta_{(y)} \cdot dA$ als thermische Flächenbelastung und $\Delta\vartheta_{(y)} \cdot y \cdot dA$ als thermodynamisches Moment auf.

Ihre Kombination mit dem thermodynamischen Proportionalitätsfaktor „ K_T “ führt über thermische spezifische Kräfte zum korrespondierenden thermischen Moment.

4.5. Korrespondierendes thermisches Moment

Aus der Sicht der Thermodynamik [59] ist ein thermisch ungleichmäßig belasteter, frei aufliegender Stab (Einfeldträger), ein offenes, stationäres, thermodynamisches Energiesystem, in dem Energietransport in Form von Wärme und in Form von Formänderungsarbeit stattfindet. Innerhalb des Kontrollraumes ändert sich der Zustand des Wärmestromes kontinuierlich vom Eintrittsquerschnitt bis zum Austrittsquerschnitt. Der anfangs vorhandene thermische Gleichgewichtszustand mit $\vartheta_0 = \text{const.}$ (ϑ_0 = Ausgangs- oder Aufstelltemperatur) wird durch den ungleichmäßigen Wärmestrom in einen Zustand mit thermischem Ungleichgewicht überführt. Diese Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht werden in der Thermodynamik durch die so genannten „Thermodynamischen Kräfte“ beschrieben. Sie verursachen u.a. das korrespondierende thermische Moment. Daher findet sich in thermomechanischen Berechnungs-

gleichungen neben der Beschreibung vorhandener Körpermerkmale (z.B.: b_0, h_0, l_0, A, I und φ) und den zugehörigen Proportionalitätsfaktoren (α_t, E bzw. $K_T = E \cdot \alpha_t$) immer eine thermodynamische Kraft wieder!

Thermodynamische Kräfte als Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht

Nachfolgendes Bild zeigt visuell einprägsam die „Thermischen Gleichgewichtslinien G_{th} “ mit zugehörigen „Abweichungen“ zu den drei signifikanten Fällen:

1. Gleichmäßig erwärmter Stab (z.B. im Wärmofen).
2. Theoretisch gradlinig ungleichmäßig erwärmter Stab.
3. Real ungleichmäßig thermisch belasteter Stab.

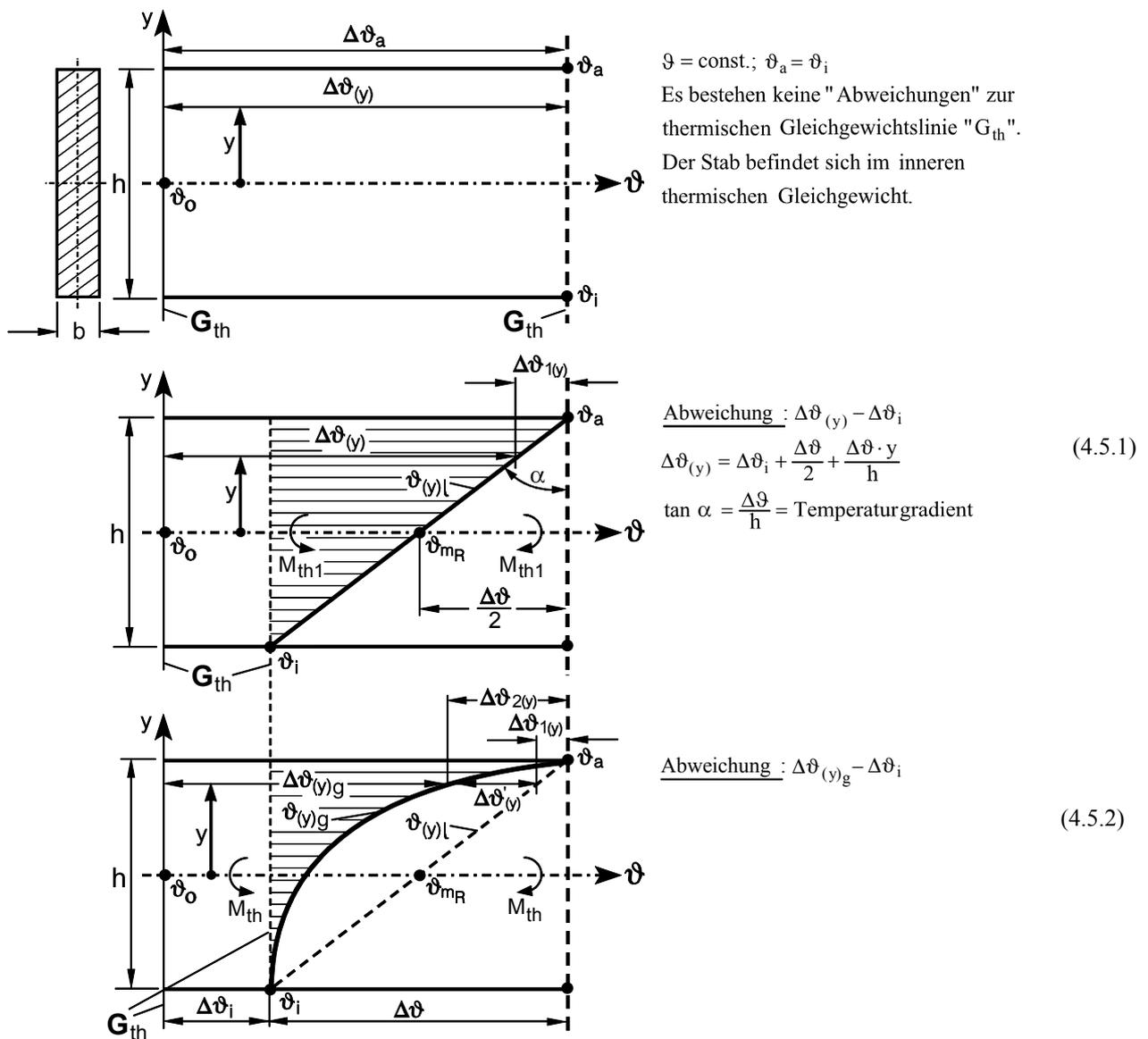


Bild 4.5: Die thermische Gleichgewichtslinie „ G_{th} “ und zugehörige Abweichungen

Ableitung des korrespondierenden thermischen Momentes bei linearer Temperaturverteilung

Für die beiden Fälle mit konstantem und nicht konstantem Stabquerschnitt soll das thermische Moment aus der linearen Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)}$ “ abgeleitet werden. Bei Wärmezufuhr entsteht die „Innere Kraft“ auf ein Querschnittsflächenelement

$$dN_{\text{ith}(y)} = K_T \cdot \Delta\vartheta_{(y)} \cdot dA \quad (4.5.3)$$

Diese Schreibweise spiegelt jetzt deutlich die reine Abhängigkeit der Teilkraft von dem Proportionalitätsfaktor „ K_T “ und von der thermodynamischen Kraft „ $\Delta\vartheta_{(y)} \cdot dA$ “ wider. Beim Lastfall: Ungleichmäßiger theoretischer Temperaturverlauf ohne äußere und innere Zwänge, lautet die Funktion des ungleichmäßigen Temperaturdifferenzenverlaufes

$$\Delta\vartheta_{(y)} = \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \quad (4.5.4)$$

Dementsprechend sind die inneren Teilkräfte „ dN_{ith} “ über die Stabhöhe unterschiedlich groß. Dieser Unterschied führt u.a. zu einer sichtbaren, kreisbogenförmigen Verkrümmung, die z.B. auch ein konstant über der Stablänge verlaufendes mechanisches Moment gleichen Energieinhaltes verursacht haben könnte, wie z.B. beim frei aufliegenden Einfeldträger mit Kragstücken und symmetrischer Belastung.

Verformt sich ein thermisch belasteter, frei auf zwei Stützen aufliegender Stab, so unterliegt er einem thermischen Moment, das sich als Integral der mit ihrem Hebelarm multiplizierten „Inneren Teilkräfte“ über den gesamten Querschnitt ergibt.

$$M_{\text{th}} = \int_A \underbrace{\text{Innere Teilkräfte}}_{dN_{\text{ith}}} \cdot \underbrace{\text{Hebelarm}}_y = \int_A dN_{\text{ith}} \cdot y \quad (4.5.5)$$

$$= \int_A K_T \cdot \Delta\vartheta_{(y)} \cdot dA \cdot y$$

$$M_{\text{th}} = \int_A \sigma_{\text{th}} \cdot y \cdot dA = \int_A E \cdot \varepsilon_{\text{th}} \cdot y \cdot dA = \int_A E \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta\vartheta}{h} \cdot y \cdot y \cdot dA = E \cdot \kappa_0 \cdot \int_A y^2 \cdot dA$$

$$\left(\text{mit } \varepsilon_{\text{th}} = \kappa_0 \cdot y = \frac{\alpha_t \cdot \Delta\vartheta}{h} \cdot y = \varepsilon_{\text{th}(y)} \right)$$

bei gleichzeitiger Erwärmung und Abkühlung der Außenfasern „a“ und „i“.

$$M_{\text{th}} = E \cdot I \cdot \kappa_0 \quad (4.5.6)$$

(Bis zu diesem Punkt der Arbeit ist die Bezeichnung „ σ_{th} “ anhand eines geradlinigen theoretischen Temperaturfeldes nur eine Hilfsgröße, die innere spezifische Verschiebekräfte aber noch keine Spannungen im Sinne der Statik beschreibt!)

Das beschriebene thermische Moment wird zwecks Unterscheidung von mechanischen Momenten als so genanntes „Korrespondierendes thermisches Moment“ bezeichnet. Diese Bezeichnung soll zum Ausdruck bringen, dass das thermische Moment mit dem ungleichmäßigen Anteil des Temperaturfeldes korrespondiert und mit den daraus entstehenden inneren Kräften im Gleichgewicht steht. In einem statisch bestimmten System verursacht das thermische Moment keine Schnittgröße. Es existiert keine äußere Spannungserzeugende. Der thermisch verformte Stab kann gedanklich in beliebige Stücke zerschnitten werden, ohne dass sich Schnittgrößen zeigen würden. Allerdings müsste der von außen eingeleitete Wärmestrom „ \dot{Q} “ als ungleichmäßige Belastung des Stabes aufrechterhalten werden.

4.6 Thermische Formänderungsarbeit „ W_{th} “

Unter der Annahme, dass eine eindimensionale Temperaturbeanspruchung ($\vartheta = \vartheta_{(y)}$) eines Stahlbau-Profilstabes vorliegt, werden die Formänderungsarbeitsgleichungen mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik aufgestellt. Siehe auch „Physikalische Grundlagen“ Kapitel 2.1. Der erste Hauptsatz ist ein Erfahrungssatz. Er kann nicht bewiesen werden und gilt nur deshalb, weil alle Schlussfolgerungen, die man aus ihm zieht, mit der Erfahrung im Einklang stehen. Eine seiner Formulierungen lautet: In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Energieänderungen gleich null [15].

In der Thermodynamik übernimmt man den Begriff der Arbeit aus der Mechanik und definiert die verschiedenen Formen der Arbeit [1]:

1. Formänderungsarbeit bei linearer elastischer Verschiebung

$$dW_{Nth} = \int_A \sigma_{i(y)N} \cdot dA \cdot du_{(y)} \quad [N \cdot m] \quad (4.6.1)$$

2. Formänderungsarbeit bei Biegung

$$dW_{Mth} = \int_A \sigma_{i(y)M} \cdot dA \cdot du_{(y)l} \quad [N \cdot m] \quad (4.6.2)$$

Formänderungsarbeit bei Torsion liegt nicht vor. Mit der Bezeichnung „ $\sigma_{i(y)}$ “ sind keine mechanischen Spannungen sondern vergleichbare thermodynamische, spezifische, innere, resultierende Verschiebekräfte der Größe

$$\sigma_{i(y)N} = E \cdot \varepsilon_{xx}$$

$$\text{Mittelwert: } \overline{\sigma_{i(y)N}} = \overline{E \cdot \varepsilon_{xx}} = E_m \cdot \overline{\varepsilon_{xx}} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (4.6.3)$$

$$\text{und} \quad \sigma_{i(y)M} = E \cdot \kappa \cdot y$$

$$\text{Mittelwert: } \overline{\sigma_{i(y)M}} = E_m \cdot \overline{\kappa} \cdot y = E_m \cdot \kappa_{th} \cdot y \quad [\text{N/mm}^2] \quad (4.6.4)$$

gemeint.

Die thermische Formänderungsarbeit setzt sich aus den drei Arbeitsanteilen bei mittlerer Stabachsenverschiebung und aus dem Anteil bei Stabverkrümmung zusammen.

$$W_{th} = W_{Nth(x,y,z)} + W_{Mth} \quad (4.6.5)$$

Um die Gleichungen der Formänderungsarbeit analytisch und nicht nur iterativ lösen zu können, müssen die Integrale

$$\int_A \sigma_{i(y)N} \cdot dA \quad \text{und} \quad \int_A \sigma_{i(y)M} \cdot dA$$

berechnet und die mittleren Verschiebungswege $\overline{du_{(y)}}$ bei linearer Verschiebung und $\overline{du_{(y)1}}$ bei Biegung auf einem Kreisbogen bekannt sein. Für die Berechnung der Integrale und der mittleren, linearen Verschiebung muss die mittlere Dehnung bekannt sein.

Berechnung der mittleren Dehnungen in Richtung der drei Achsen eines thermisch ein-dimensional ($\vartheta = \vartheta_{(y)}$) beanspruchten Stahlbau-Profilstabes aus den Spannungsdehnungsbeziehungen des Kapitels 3.2 mit den Gleichungen (3.4) bis (3.6) der resultierenden Gesamtdehnungen

$$(\sigma_{yy} \text{ und } \sigma_{zz} = 0) .$$

$$1. \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{xx} = \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$\overline{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{xx} \cdot dy = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}$$

$$2. \quad \varepsilon_{yy} = -\mu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{yy}$$

$$\overline{\varepsilon_{yy}} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\mu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{yy} \right) \cdot dy$$

$$\overline{\varepsilon_{yy}} = 0 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} .$$

Siehe auch Kapitel Anhang D 6: Eine Ableitungsvariante zu den thermischen Verschiebungen.

$$3. \quad \varepsilon_{zz} = -\mu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{zz}$$

$$\overline{\varepsilon_{zz}} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\mu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{zz} \right) \cdot dy$$

$$\overline{\varepsilon_{zz}} = 0 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}$$

Damit wird: $\overline{\varepsilon_{xx}} = \overline{\varepsilon_{yy}} = \overline{\varepsilon_{zz}} = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}$ (4.6.6)

und $dW_{N\ th} = dW_{N\ thx} + dW_{N\ thy} + dW_{N\ thz} = 3 \cdot dW_{N\ thx}$ (4.6.7)

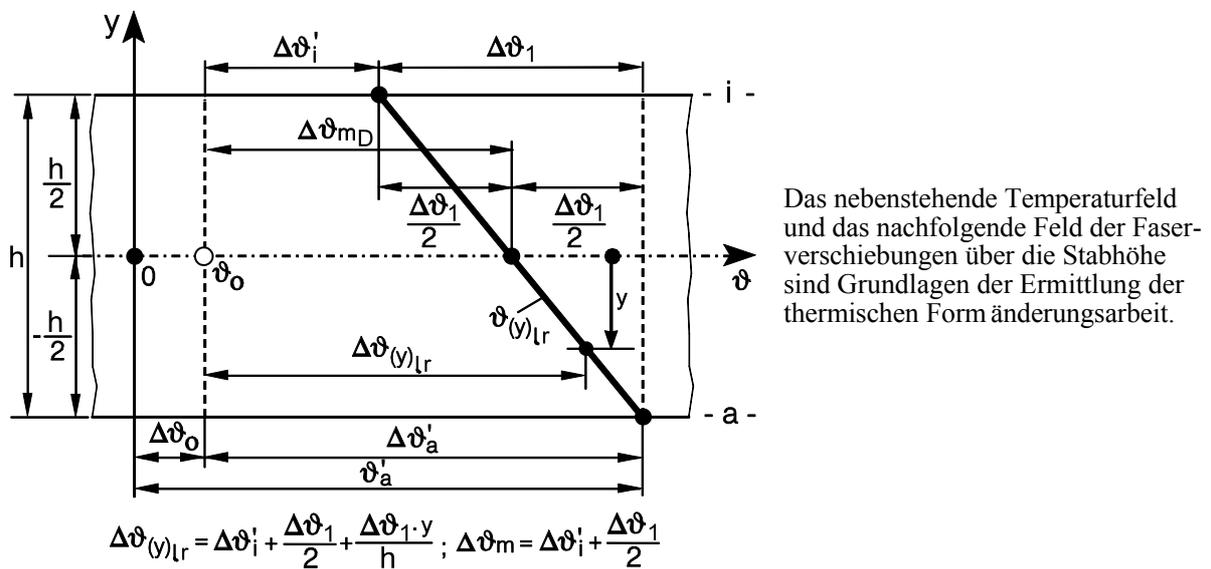


Bild 4.6.1: Resultierendes, lineares Temperaturdifferenzenfeld nach Auswertung eines gegebenen verkrümmten Temperaturfeldes

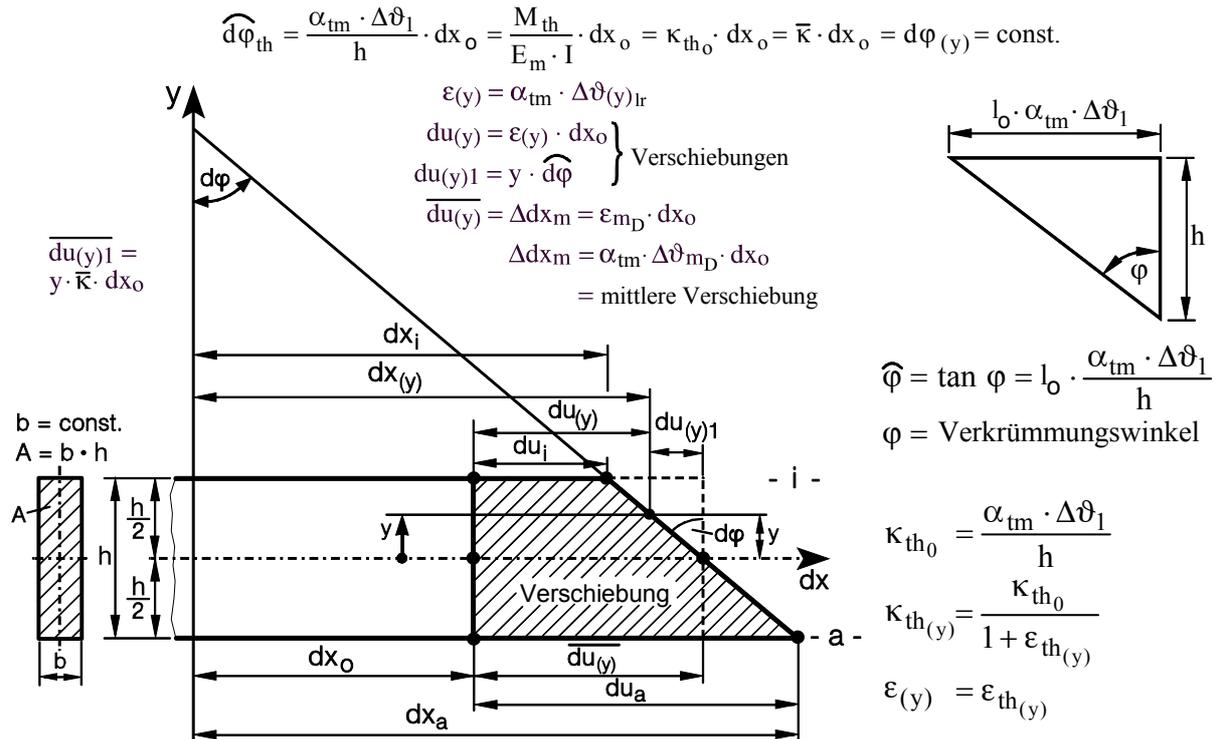


Bild 4.6.2: Formänderung und Faserverschiebungen „ $du_{(y)}$ “ und „ $du_{(y)_l}$ “

eines thermisch gleichmäßig beanspruchten Stabelementes, dargestellt als gestrecktes Element

In Bild 4.6.2 wurden zweckmäßiger Weise die Verschiebungen „ du “ und ihre maßgeblichen Anteile „ $du_{(y)}$ “ und „ $du_{(y)_l}$ “ am gestreckten Stabelement dargestellt.

Berechnung der thermischen Formänderungsarbeit

$$\begin{aligned} dW &= dW_{N_{th}} + dW_{M_{th}} \\ &= 3 \cdot dW_{N_{thx}} + dW_{M_{th}} \\ &= 3 \cdot \int_A \sigma_{i(y)N} \cdot dA \cdot du_{(y)lr} + \int_A \sigma_{i(y)M} \cdot dA \cdot du_{(y)_l} \\ \sigma_{i(y)M} &= E_m \cdot \bar{\kappa} \cdot y = E_m \cdot \kappa_{th} \cdot y \\ dW &= 3 \cdot \int_A E_m \cdot \varepsilon_{xx} \cdot b \cdot dy \cdot \overline{du_{(y)lr}} + \int_A \frac{M_{th} \cdot y}{I} \cdot dA \cdot y \cdot d\widehat{\varphi} \\ \int_A y^2 \cdot dA &= I \\ dW &= 3 \cdot E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} \cdot b \cdot h \cdot \overline{du_{(y)lr}} + M_{th} \cdot d\widehat{\varphi} \\ \overline{d\widehat{\varphi}} &= \bar{\kappa} \cdot dx_o = \kappa_{th} \cdot dx_o \\ \overline{du_{(y)lr}} &= \varepsilon_{xx} \cdot dx_o = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} \cdot dx_o \end{aligned}$$

$$dW = 3 \cdot \underbrace{\left(E_m \cdot \underbrace{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}}_{\varepsilon_{XX}} \cdot A_Q \right)}_{N_i} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}}_{\varepsilon_{XX}} \cdot dx_0 \right)}_{dx_m} + M_{th} \cdot \kappa_{th} \cdot dx_0$$

Nehmen auf ihrem Weg die innere thermodynamische Kraft N_i von null auf N_i und das korrespondierende thermische Moment M_{th} von null auf M_{th} zu, so ergibt sich die thermische Formänderungsarbeit zu

$$W_{th} = \frac{3}{2} \int_0^{l_0} N_i \cdot \varepsilon_{XX} \cdot dx_0 + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} M_{th} \cdot \kappa_{th} \cdot dx_0$$

$$\varepsilon_{XX} = \varepsilon_{mD}$$

Da „ N_i “ eine feste Größe und $M_{th} = E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h}$ konstant über die Stablänge ist, ergibt sich als Endgleichung

$$W_{th} = \frac{3}{2} \cdot (E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} \cdot A_Q) \cdot (\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} \cdot l_0) + \frac{1}{2} M_{th} \cdot \bar{\varphi}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot N_i \cdot \Delta l_{mD} + \frac{1}{2} M_{th} \cdot \kappa_{th} \cdot l_0$$

$$W_{th} = \frac{3}{2} \cdot E_m \cdot \varepsilon_{mD} \cdot A_Q \cdot \varepsilon_{mD} \cdot l_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{th}^2}{E_m \cdot I} \cdot l_0 \quad [N \cdot m = J]$$

$$W_{th} = \frac{3}{2} \cdot E_m \cdot \varepsilon_{mD}^2 \cdot V_0 + \frac{1}{2} \cdot M_{th} \cdot \bar{\varphi} \quad (4.6.8)$$

= Volumenformänderungsarbeit

+ Formänderungsarbeitsanteil bei Biegung

$$\Delta\vartheta_{mD} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta(y)_g \cdot dy = \overline{\Delta\vartheta(y)_g} = \vartheta_{mD} - \Delta\vartheta_0$$

= mittlere Körpertemperaturdifferenz.

Mit Hilfe obenstehender Formänderungsarbeits-Gleichungen können alle Berechnungsgleichungen zur Ermittlung thermomechanischer Spannungen und zugehöriger Formänderungen überprüft werden.

4.7 Kopplung des mechanischen und thermischen Problems

Im gesamten thermomechanischen Problem treten folgende **Zustandsgrößen** auf: Spannungen, Verzerrungen, Lastgrößen, Verschiebungen, Temperaturen, Wärmeströme sowie folgende **Werkstoffparameter**: Dichte d , Elastizitätsmodul E , mittlerer linearer Wärmeausdehnungskoeffizient α_t , Wärmeleitfähigkeit λ , Querdehnzahl μ , wahre spezifische Wärmekapazität c_p^w , spezifischer elektrischer Widerstand ρ , Temperaturleitfähigkeit a und globale Wärmeübergangszahl α .

Im allgemeinen Fall muss man wohl davon ausgehen, dass sämtliche Werkstoffparameter Funktionen einer Vielzahl von Zustandsgrößen, mindestens der inneren Energie sind. Diese Kopplungen sind aber noch weitgehend unbekannt, selbst für technisch eingesetzte Materialien.

4.7.1 Gründe für das Auftreten und Einflüsse auf die Zustandsgröße: „Thermomechanische Spannungen“

Gründe:

- ⇒ 1. Jedes praktisch vorkommende Temperaturfeld ist nichtlinear begrenzt.
- ⇒ 2. Die zwischen dem geradlinigen (Schlusslinie = Einziger Nullspannungstemperaturverlauf zwischen den Außenfasertemperaturen) und dem kurvenförmigen Temperaturverlauf auftretenden Temperaturdifferenzen sind der Grund für das Auftreten thermomechanischer Spannungen. ⇒ Abweichungen vom geradlinigen Temperaturverlauf.
- ⇒ 3. Wegen der kurvenförmigen seitlichen Wärmeabströmung sind reale Temperaturfelder bei Erwärmung zur Achse über die Stabhöhe hin verkrümmt.
- ⇒ 4. Ein nicht linear begrenztes Temperaturfeld, und damit thermomechanische Spannungen, existiert so lange, wie der von außen eingetragene Wärmestrom „ \dot{Q} “ andauert. Daher kann die Größe thermomechanischer Spannungen (Primärspannungen !) nach einer unzulässig großen Steigerung der äußeren Lasten (Wärmestrom „ \dot{Q} “ verbunden mit der damit verursachten nichtlinearen Temperaturverteilung) auch nicht durch Plastizierung abgebaut werden, weil keine Temperaturdifferenzen abgebaut werden können. Wie mechanische Primärspannungen sind thermomechanische Spannungen auch Primärspannungen, weil sie das Gleichgewicht mit äußeren Lastgrößen

herstellen. Hinsichtlich des Festigkeitsverhaltens ist ihr wesentliches Merkmal, dass bei einer zu großen Steigerung des von außen eingeleiteten Wärmestromes, die Verformungen nach vollständiger Plastizierung des Querschnitts wesentlich zunehmen, ohne sich hierbei selbst zu begrenzen. Thermomechanische Spannungen können auch nicht als „Spannungsspitzen“ bezeichnet werden, weil Spannungsspitzen gemäß der sicherheitstechnischen Regel KTA 3201.2 (Auslegung, Konstruktion und Berechnung von Komponenten des Primärkreises von Leichtwasserreaktoren) solche Spannungen sind, die keine merklichen Verformungen zur Folge haben [21, 39, 116, 117]. Durch Plastizierung können nur Spannungen in Zwangskraftsystemen (Wärmespannungen, Sekundarspannungen!) bei denen eingeprägte Weggrößen vorgegeben sind und Eigenspannungen abgebaut werden. Durch die Plastizierung verschwinden die eingepägten Weggrößen (Faserlängen- und Verdrehungswinkel-Differenzen). Eigenspannungen in Stahlbauelementen können z.B. durch Vorrecken oder durch Spannungsfreiglühen beseitigt werden. Genauere Spezifizierung siehe Anhang D 8. „Spannungskategorisierung; Abgrenzung der Spannungsarten“.

- ⇒ 5. In allen real thermisch ungleichmäßig belasteten Stäben entstehen thermomechanische Spannungen. Sie entstehen unabhängig davon, ob der Stab in einem bestimmten oder in einem statisch unbestimmten System angeordnet ist.
- ⇒ 6. Bei ungleichmäßiger Erwärmung oder Abkühlung befindet sich ein Körper in einem thermischen Ungleichgewicht. Entsprechend den Gesetzen der Thermodynamik nimmt der Körper danach sehr schnell den thermischen Gleichgewichtszustand (gleichmäßige Temperatur aller Fasern) ein und tauscht dann mit der Umgebung überschüssige oder fehlende Wärme aus. Siehe auch Bild 2.8.2.

Einflüsse auf die Größe thermomechanischer Spannungen:

1. Die kurvenförmige Berandung eines Temperaturfeldes bedingt, dass sich die einstellenden Spannungen nicht linear über den Querschnitt verteilen.
2. Die Größe der Spannungen wird im Wesentlichen von der Größe der resultierenden Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_{(y)r}$ “ bestimmt (Ableitung siehe Kapitel 5). Diese sind wiederum abhängig vom allgemeinen Temperaturniveau der Außenfasern und dem Krümmungsverlauf der Temperaturkurve „ $\Delta\vartheta_{(y)g}$ “ zwischen den Außenfasertempe-

raturen „ ϑ_a “ und „ ϑ_i “. Also abhängig von der Größe und der Unsymmetrie der Temperaturdifferenzen zwischen der nichtlinearen, realen Temperaturverteilung und der theoretischen, linearen, spannungsfreien Temperaturverteilung zwischen den Außenfasern.

3. Die Temperaturkurve wiederum wird vom in den Körper eintretenden Wärmestrom \dot{Q} , der Wärmeabströmung in verschiedene Richtungen und damit von der nicht konstanten Wärmestromdichte „ \dot{q} “ geprägt (siehe auch Formel (2.8.4.10))

$$\dot{q} \neq \text{const} \quad ; \quad \dot{q}_{(y)} = -\lambda_{(\vartheta_{(y)g})} \frac{d(\vartheta_{(y)g})}{dy} \quad (4.7.1)$$

Linearer Temperaturverlauf, $\lambda \neq \text{const}$:

$$\vartheta_{(y)} = \Delta\vartheta_i + \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \quad ; \quad \frac{d\vartheta}{dy} = \vartheta'_{(y)} = \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

mit der Temperaturabhängigkeit von „ λ “ aus Anhang C wird

$$\dot{q}_{(y)} = -(a - b \cdot \vartheta_{(y)}) \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad \text{und}$$

$$\overline{\dot{q}_{(y)}} = -(a - b \cdot \vartheta_{mR}) \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = -\bar{\lambda} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} .$$

Nichtlinearer Temperaturverlauf, $\lambda \neq \text{const}$:

$$\lambda_{(\vartheta_{(y)g})} = a - b \cdot \vartheta_{(y)g} \quad (\text{Anhang C})$$

$$\bar{\lambda} = a - b \cdot \vartheta_{mD}$$

alternative zur Gleichung (4.7.1):

$$\dot{q}_{(y)} = -\lambda_{(y)} \cdot \frac{d\vartheta}{dy} \quad \text{und}$$

$$\overline{\dot{q}_{(y)}} = -(a - b \cdot \vartheta_{mD}) \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = -\bar{\lambda} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = -\bar{\lambda} \cdot \frac{d\vartheta}{dy} .$$

Hier wird der Einfluss der Temperaturverteilung sichtbar. Wegen des erforderlichen, von außen einzuleitenden Wärmestromes (äußere thermische Lasten) können thermomechanische Spannungen nicht als Eigenspannungen bezeichnet werden.

4. In der **technischen Wärmelehre** und in der **Thermoelastizität** beschränkt man sich immer auf die Abhängigkeit der Materialparameter von der Temperatur „ ϑ “, d.h.

$$(E, \alpha_i, \lambda, c_p^w, d, \mu, \rho, a, \alpha) = f(\vartheta)$$

5. Die Einflüsse aus der Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte λ, α_t und E sowie der Einfluss auf die Größe thermomechanischer Spannungen durch seitliche Wärmeabströmung werden in dieser Arbeit in Sonderkapiteln aufgezeigt.

4.7.2 Temperaturabhängige physikalische Werkstoffkennwerte für allgemeine Baustähle

Für die meisten technischen Berechnungen genügt es, vom betreffenden Werkstoff den auf 20°C bezogenen Elastizitätsmodul "E" und den mittleren linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten " α_t " zu kennen. Für allgemeine Baustähle betragen diese Werte

$$E = 2,14 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} / \text{K}.$$

Bei höheren Temperaturen oder in Kältebereichen zeigt sich jedoch, dass die Werkstoffkennwerte stark temperaturabhängig und nicht konstant sind. Wird die Temperaturabhängigkeit in Diagrammen dargestellt, so verläuft sie nicht linear und weist bei einigen Kennwerten, z.B. dem linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten und der Dichte, Sprünge auf. Diese Sprünge beruhen auf Phasenumwandlungen im Zustandsschaubild Eisen-Zementit, verbunden mit Veränderungen der Kristallgitterstruktur (Umwandlung der α - in γ Mischkristalle bei 723°C). Beschäftigt man sich mit technischen Problemen in hohen oder niedrigen Temperaturbereichen, müssen für alle beteiligten Werkstoffe die temperaturabhängigen Kennwerte bekannt sein. Beispielhaft zeigen die beiden Diagramme in Bild 4.7 den Verlauf der physikalischen Kennwerte von α_t und E einiger wichtiger Stähle [30, 32, 33,94, 104, Eurocode 1 ./ 6].

4.7.3 Bauteilabhängige Werkstoffkennwerte / Thermische Dauerstandfestigkeit

Im Gegensatz zu physikalischen Werkstoffkennwerten sind bauteilabhängige Werkstoffkennwerte nicht nur von der Temperatur sondern auch von der Materialdicke, der Beanspruchungsart (Zug, Druck, Biegung) und der Zeit bzw. der Lastwechsel abhängig. So gelten z.B. für die Baustähle (alte Bezeichnungen in Klammern) S 235 JR G2 (R St 37-2), S 275 JR (St 44) und S 355 JR (St 52) nach DIN EN 10025, S.14 bzw. nach DIN 17100 die Streckgrenzen $R_{eH} = 225 \text{ N/mm}^2$, $R_{eH} = 265 \text{ N/mm}^2$ und $R_{eH} = 345 \text{ N/mm}^2$ nur für Materialdicken

unter 40 mm. Diese Werte werden in Zugversuchen nach DIN EN 10002 T1, EN 10025 und DIN 50125 ermittelt. Weiterhin werden in Zugversuchen die Dehngrenzen gemessen.

$$R_{p\ 0,01} = \text{Technische Dehngrenze} \quad ; \quad R_{p\ 0,2} = 0,2 \text{ Dehngrenze}$$

mit $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100 = 0,2\%$ als bleibender Dehnung. Diese Dehngrenzwerte können aus Werkstoffblättern der Zulieferindustrie in Abhängigkeit von der Temperatur und der Materialdicke entnommen werden.

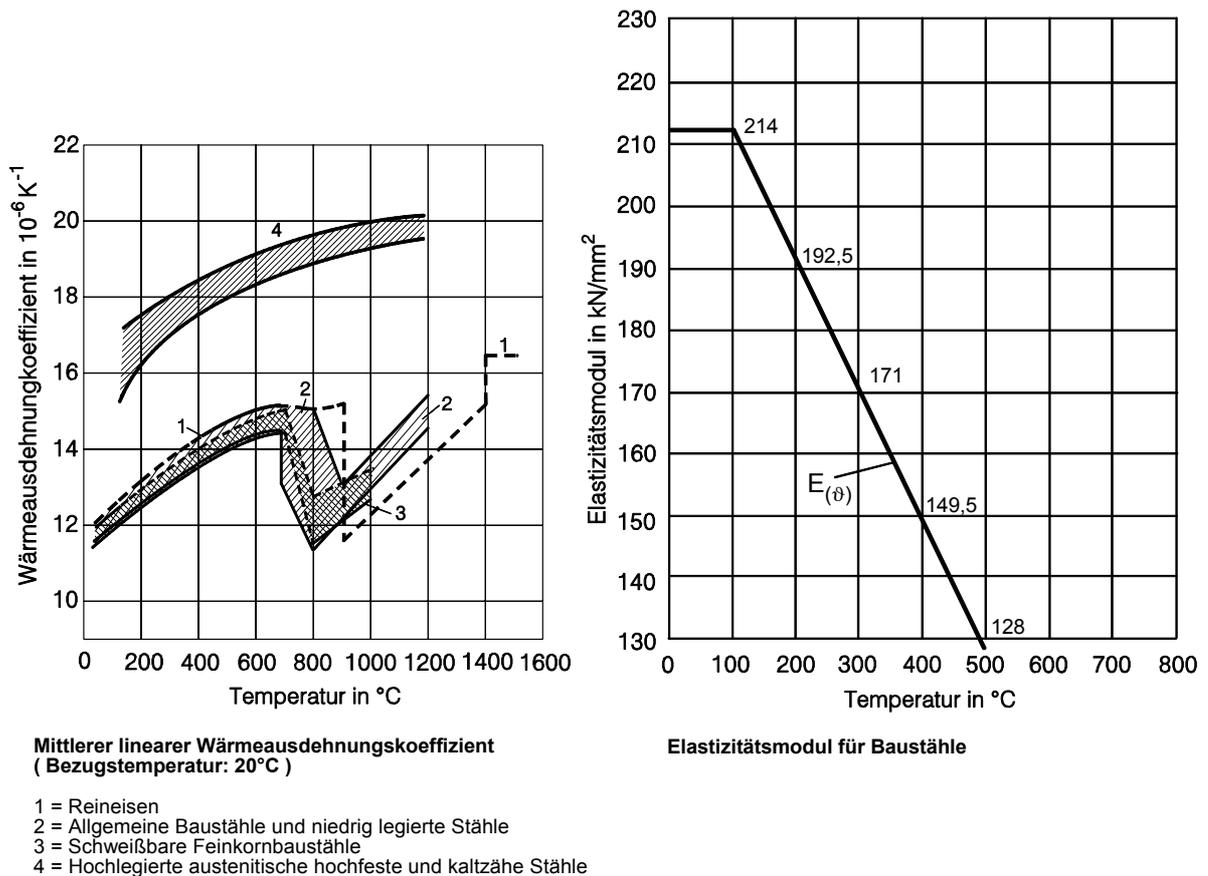


Bild 4.7: Diagramme von Werkstoffkennwerten für Stähle
 [Quellen: 30, 32, 33, 94, Eurocode 1 ./ 6]

Thermische Dauerstandfestigkeit

Zulässige Spannungen werden für jeden Stahl in einem Dauerfestigkeitsschaubild für die Beanspruchungsarten z.B. Zug, Druck und Biegung und für die Belastungsarten statisch, schwelend und wechselnd festgehalten. Für wiederkehrende praktische Anwendungsfälle werden darüber hinaus bei sicherheitlich relevanten Stahlkonstruktionen in DIN-Normen über Festigkeitsnachweise zulässige Spannungen benannt. Für thermisch beanspruchte Spezial-Stähle im Hoch- und Niedrigtemperaturbereich liegen in Form von Werkstoffblättern oder AD-Merkblättern meist ausreichende Informationen über E , α_t und $R_{p0,2}$ in Abhängigkeit von der

Temperatur vor. Sucht man für allgemeine Baustähle nach temperaturabhängigen Festigkeitswerten, so ist man auf Unterlagen (Werkstoffblätter 010R, 012R und 400R) des Mannesmann Forschungslabors [33], dem Stahleisen Werkstoffblatt SEW 310 und den Eurocodes 1 ./ 4 angewiesen. Die zulässigen Biege-, Druck- und Zugspannungen bei schwellender Belastung in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur werden als thermische Dauerstandfestigkeit bezeichnet.

$$\sigma_{bSch/t/\vartheta} \quad \text{und} \quad \sigma_{d,zSch/t/\vartheta} = \text{Thermische Dauerstandfestigkeit.}$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden häufig Werkstoffkennwerte des Stahls R St 37-2 für eine Erzeugnisdicke von 16 bis 40 mm benötigt. Das im Anhang C aufzufindende Arbeitsblatt leistete dabei wertvolle Hilfe.

4.7.4 Einfluss der Temperaturabhängigkeit des Wärmeausdehnungskoeffizienten „ α_t “ und des Elastizitätsmoduls „E“ bei allgemeinen Baustählen

Für den Stahl R St 37-2 steigt „ α_t “ im Bereich 0 bis 400°C von $\alpha_t = 11,7 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ auf $\alpha_t = 14,1 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ an, d.h. $\Delta\alpha_t = 2,4 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$. „E“ hingegen fällt von $E = 2,14 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ um $\Delta E = 0,64 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ auf $E = 1,50 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$. Diese Differenzen ($\Delta\alpha_t$ und ΔE) sind Ursachen zusätzlicher Faserdehnungen, Spannungen und Momente (Siehe Anhang E und F). Bei niedrigem Temperaturniveau und geringer Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta$ “ zwischen den Außenfasern, stößt man an die technische Genauigkeitsgrenze, d.h., dass in einem Temperaturbereich von etwa -35°C bis +75°C und Temperaturdifferenzen bis zu 30°C, zwischen den Außenfasern eines Profilstabes mit konstanten Werkstoffkennwerten

$$E_m = 2,14 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2,$$

$$\alpha_{tm} = 12,0 \cdot 10^{-6} / \text{K},$$

$$\lambda_m = 53 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad \text{und mit}$$

$$K_t = E_m \cdot \alpha_{tm} = \approx 2,50 \text{ N/mm}^2 \cdot \text{K}$$

gerechnet werden darf. Bei höheren Temperaturen sind die Mittelwerte (siehe Kapitel 2.7.1) zu berücksichtigen. Wie in den Anlagen „E“ und „F“ näher erläutert und berechnet, verursachen die Differenzen „ $\Delta\alpha_t$ “ und „ ΔE “ der Werkstoffkennwerte, aufgrund unterschiedlicher Außenfasertemperaturen, eine zusätzliche Verschiebung und Verdrehung des in Kapitel

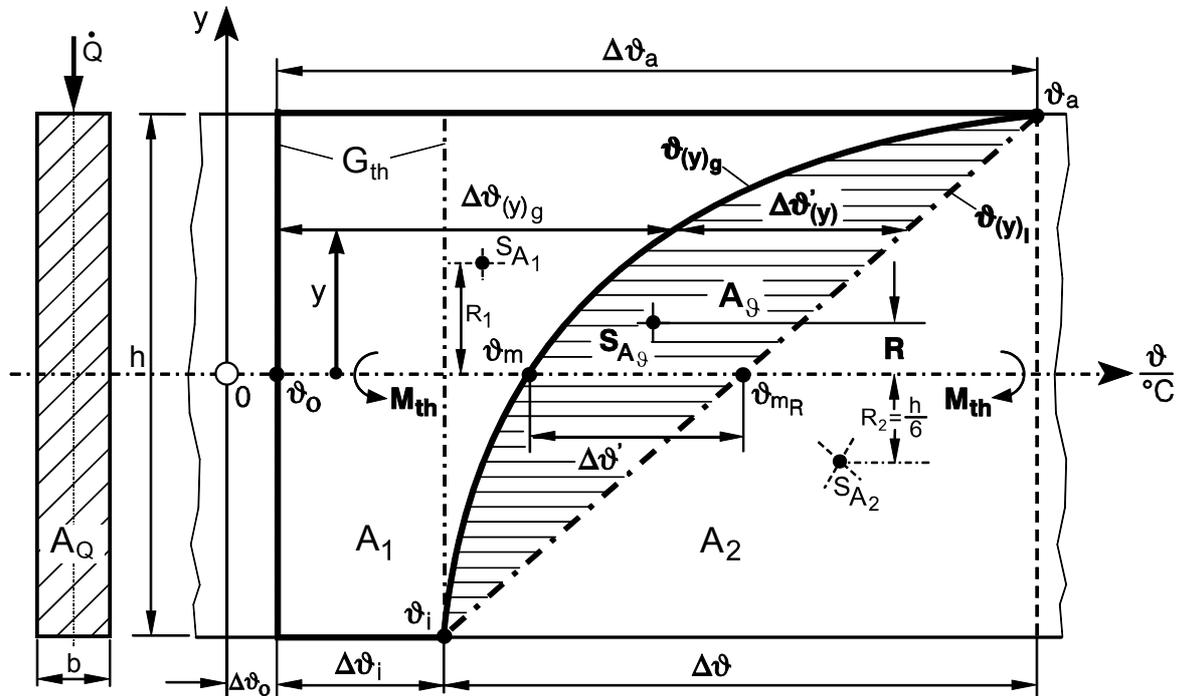
5 angegebenen, rechnerisch resultierenden Nullspannungs-Temperaturverlaufes. Die dadurch verursachten Spannungen und Formänderungen sind im Hochtemperaturbereich (hier: 100 °C bis 450 °C) von Fall zu Fall nachzurechnen.

5. Berechnung thermomechanischer Spannungen und zugehöriger Formänderungen nach Auswertung nichtlinear begrenzter Temperaturdifferenzfelder
5.1 Zusammenhänge in einem realen Temperaturdifferenzfeld

Als Übersicht zu diesem Kapitel zeigt nachfolgende Skizze plakativ gegebene oder zu berechnende Größen aus der realen thermischen Belastung eines Profilleisenstabes aus dem Industrieofenbau. Weil das Temperaturdifferenzen-Teilfeld „A_ϑ“ gegenüber einem linearen, theoretischen Temperaturdifferenzfeld (kurz: Temperaturfeld) in diesem Fall fehlt, ist in der Regel das thermische Moment „M_{th}“ kleiner als das theoretische Moment „M_{th1}“

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A_1 \cdot R_1$$

$$M_{th} = M_{th1} - M_{th2} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A_2 \cdot R_2 - E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A_{\vartheta} \cdot R$$



$\vartheta(y)_g$ = Realer Temperaturverlauf $\vartheta(y)_l = \vartheta_{mR} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h}$ G_{th} = Thermische Gleichgewichtslinie
 = Spannungsloser Temperaturverlauf
 = Schlußlinie
 = 1. Nullspannungstemperaturverlauf

$$A_g = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \Delta\vartheta'(y) \cdot dy \quad A_g = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\vartheta(y)_l - \vartheta(y)_g) \cdot dy \quad R = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \Delta\vartheta'(y) \cdot y \cdot dy}{A_{\vartheta}} \quad (5.1 - 5.3)$$

$$A_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \Delta\vartheta(y)_g \cdot dy \quad R_1 = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \Delta\vartheta(y)_g \cdot y \cdot dy}{A_1} \quad A_{ges} = A_1 + A_{\vartheta} + A_2 \quad (5.4 - 5.7)$$

$$= \Delta\vartheta_a \cdot h \text{ [} ^\circ\text{C} \cdot \text{mm]} \quad A_2 = \frac{\Delta\vartheta \cdot h}{2}$$

**Bild 5.1: Temperaturfeld mit gemessener Temperaturverteilung
 Einzelflächen und Schwerpunkte**

Die nachfolgenden Überlegungen werden unter den Annahmen getroffen:

1. Es gilt die Bernoullische Hypothese, die besagt, dass ebene Querschnitte bei der Formänderung eben bleiben.
2. Es gilt das Hookesche Gesetz, wonach die Spannungen proportional den spannungsverursachenden Dehnungen sind.
3. Die Verformungen müssen klein sein im Verhältnis zu den Systemmaßen.
4. Es liegen keine äußeren mechanischen Lasten vor.
5. Mit Punkt 4 existieren keine Schnittgrößen (= Resultierende der Spannungen).
6. Als mechanisches System liegt ein statisch bestimmt gelagerter Stab vor, der von einem von außen eingeleiteten, ungleichmäßigen Wärmestrom „ \dot{Q} “ beansprucht wird, d.h., es liegen äußere thermische Lasten vor.
7. Die Temperaturen werden über die Stabbreite als konstant angesehen (Mittelwert).
8. Der Stabprofil-Querschnitt ist doppelsymmetrisch bzw. symmetrisch.
9. Bei der dargestellten Temperaturverteilung handelt es sich um eine eindimensionale Verteilung mit $\vartheta = \vartheta(y)$, die aus der Überlagerung beliebiger instationärer Temperaturverteilungen entstanden ist.

Wie in Bild 5.1 dargestellt, muss die gegebene Temperaturkurve „ $\vartheta_{(y)g}$ “ aus theoretischen Berechnungen, Erfahrungswerten oder nach Auswertung von Temperaturprofilmessungen bekannt sein, um die zugehörigen Integrale zu lösen. Liegt keine mathematische Beschreibung der Temperaturkurve, jedoch eine Zeichnung mit mindestens fünf Kurvenstützpunkten vor, so bieten sich u.a. zwecks Ermittlung der Flächen „ A_1 bzw. A_ϑ “ und ihrer Schwerpunktabstände „ R_1 bzw. R “, entweder eine instrumentelle Auswertung mit technischer Darstellung anhand des Programms „CAD-400“ der Fa. H.A.N. Dataport oder eine Approximation durch Polynom und anschließender mathematischer Berechnung z.B. mit dem Programm DERIVE [112], dem Programm „Excel“ oder dem Programm „MATH-CAD“ an.

Bevor in diesem Kapitel die Berechnung Thermomechanischer Spannungen dargelegt wird, soll die allgemeine Vorgehensweise aus der Sicht des Konstrukteurs beschrieben werden. Für jede Dimensionierungsaufgabe ist eine bestimmte Anzahl technischer Daten und eine Beschreibung örtlicher Gegebenheiten erforderlich. Es wird hierzu beispielhaft angenommen, dass ein 12 m langer Träger einer Ofen-Hängedecke (Wärmeofen) dimensioniert werden soll.

Sind die mechanischen Lasten bekannt, so kann der Träger vordimensioniert werden. Im Industrieofenbau gibt es für Träger mit großen Spannweiten, die sowohl mechanisch als auch thermisch belastet werden, die Erfahrungsregel, dass die zulässige maximale Durchbiegung des mechanisch oder thermisch belasteten Trägers ein Siebenhundertfünfzigstel der Trägerlänge nicht überschreiten soll.

$$f_{\max \text{ zul}} = \frac{l_0}{750} \text{ [mm]} ,$$

das heißt, es würde eine Durchbiegung von

$$\frac{12000}{750} = 16 \text{ mm}$$

zugelassen. Aus der Erfahrung ist ein auf diesem Weg vordimensionierter Träger meist auch den zusätzlichen thermischen Lasten gewachsen, wenn die mechanischen und thermischen Durchbiegungen gegenläufig sind.

Welche technischen Daten benötigt der Konstrukteur neben Werkstoffkennwerten zur Berechnung von thermomechanischen Spannungen mit zugehörigen Formänderungen? Bisher war angenommen worden, dass eine gegebene Temperaturverteilung konstant über die Stablänge verläuft und damit auch M_{th} konstant ist. Das ist im Industrieofenbau nicht der Fall. Über die Stablänge verläuft die Temperaturdifferenz zwischen den Stabaußenfasern wie bereits in Bild 1.5 beispielhaft gezeigt. Das heißt, der Konstrukteur benötigt neben diesem Temperaturdifferenzen-Verlauf mehrere Temperaturprofile (Temperaturverteilungen), aus denen einzelne Temperaturfelder gewonnen werden um daraus 1. das Durchschnittstemperaturfeld über die Stablänge zu erstellen, 2. das Temperaturfeld mit maximaler Temperaturdifferenz zu erhalten und 3. wie im Anhang D 9. beschrieben, den Temperaturdifferenzenverlauf „ $\Delta\vartheta_{1(x)}$ “ zur Berechnung der Biegelinie. Das Durchschnittstemperaturfeld muss durch eine ausreichende Anzahl von Einzelfeldern abgesichert sein und ist die Grundlage zur Ermittlung der Faserlängenänderungen und der Verschiebungen in x-, y und z – Richtung (hier im Wesentlichen der mittleren Faserdurchbiegung), die den mechanischen Verschiebungen zu überlagern sind. Spannungen sind hieraus nur als Durchschnittsspannungen zu ermitteln. Das Temperaturfeld mit den maximalen Temperaturdifferenzen liefert an der Messstelle die maximalen thermomechanischen Spannungen, die mit den mechanischen Spannungen zu überlagern sind. Gibt es mehrere gefährdete Querschnitte, so sind für jeden Querschnitt aus der zugehörigen Temperaturverteilung die thermomechanischen Spannungen zu bestimmen. Die Auswertungsvorgehensweise ist für alle Temperaturdifferenzenfelder, symmetrische oder unsymmetrische, gleich.

5.2 Ableitung thermomechanischer Spannungen

Lösung für einen Balken mit konstanter Breite „ b_r “

5.2.1 Ausgangszustand, Einwirkungen, gegebenes Temperaturdifferenzenfeld und berechnetes Polynom 4. Grades für die Temperaturverteilung

Ausgangszustand

Mechanisch unbelasteter Profileisenstab mit doppelsymmetrischem Querschnitt,

$$b_0 \cdot h_0 \cdot l_0 = 30 \cdot 120 \cdot 1200 \text{ mm},$$

statisch bestimmt gelagert. Material R St 37-2. Werkstoffkennwerte bei 215,5 °C:

$$\alpha_{tm} = 13,15 \cdot 10^{-6} / \text{K} ,$$

$$E_m = 1,9 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 , \quad (\text{siehe Anhang C})$$

$$\alpha_{tm} \cdot E_m = K_T = 2,5 \frac{\text{N}}{\text{K} \cdot \text{mm}^2}$$

Einwirkungen

Einseitig von außen in die Staboberkantenfläche „ $b \cdot l$ “ eingetragener Wärmestrom „ \dot{Q} “ .

Wegen der natürlichen seitlichen Wärmeabströmung erfolgt im Stab ein ungleichmäßiger Wärmestrom und eine nichtlineare Temperaturverteilung über die Stabhöhe „ h “, deren Auswirkungen zu einer Stabverkrümmung, zu unterschiedlichen Stabfaserverlängerungen und zu thermomechanischen Spannungen führen.

Temperaturdifferenzenfeld und berechnetes Polynom

4. Grades der Temperaturverteilung

Gegeben sei ein reales Temperaturdifferenzenfeld gemäß Bild 5.2. Die angenäherte Funktion der beispielhaft gegebenen Temperaturverteilung über die Stabhöhe infolge ungleichmäßigen

Wärmestroms „ \dot{Q} “ lautet für die Temperaturkurve „ $\vartheta_{(y)g}$ “ mit einem Polynom 4. Grades aus fünf gegebenen Kurvenstützpunkten berechnet:

$$\vartheta_{(y)g} = \frac{19}{1944} \cdot y^4 + \frac{35}{324} \cdot y^3 + \frac{221}{216} \cdot y^2 + \frac{253}{36} \cdot y + 166 \quad \begin{matrix} [^{\circ}\text{C}] \\ y [\text{cm}] \end{matrix} \quad (5.8)$$

ist der geometrisch und rechnerisch „**Resultierende Nullspannungstemperaturverlauf**“ und wird mit

$$\vartheta_{(y)1r} \text{ bzw. } \Delta\vartheta_{(y)1r} \text{ beschrieben.}$$

Der resultierende Nullspannungstemperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)1r}$ “ stellt einen spannungslosen, gradlinigen Temperaturverlauf dar, der exakt die durch den nichtlinearen Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)g}$ “ verursachten Faserlängenänderungen und die Stabdurchbiegung durch seine Anordnung zur y-Achse und durch seine Neigung widerspiegelt. Jede Diagonale durch ein Temperaturdifferenzenfeld ist ein Nullspannungstemperaturverlauf. Nur das Einhalten der geometrisch-mathematischen Bedingungen macht eine Diagonale zum resultierenden Nullspannungstemperaturverlauf. Auch die Schlusslinie eines Temperaturfeldes ist ein wichtiger Nullspannungstemperaturverlauf (1. Nullspannungstemperaturverlauf).

Die vorhandene Schlusslinie wird beschrieben mit:

$$\begin{aligned} \vartheta_{(y)l} &= \vartheta_{mR} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \\ \vartheta_{(y)l} &= \Delta\vartheta_{mR} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} + \Delta\vartheta_0 \\ &= \Delta\vartheta_{mR} + \tan \alpha \cdot y + \Delta\vartheta_0 \\ \text{mit } \tan \alpha &= \frac{\Delta\vartheta}{h} \end{aligned} \quad (5.11)$$

sie ist der **einzige** Nullspannungs-Verlauf zwischen den Außenfasertemperaturen „ ϑ_a und ϑ_i “, der spannungslos, die von S. Timoshenko (siehe [4] Seite 196) angegebenen Kompatibilitätsbedingungen (Verträglichkeitsbedingungen) erfüllt.

Linearisierung

Die thermomechanischen Spannungen und damit auch die Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta'_{(y)}$ “ bzw. „ $\Delta\vartheta_{(y)g}$ “ (siehe Bild 5.2) müssen sich über die Stabhöhe ausgleichen. **Die Kurve** „ $\Delta\vartheta_{(y)g}$ “ **wird „Linearisiert“!** Die Bedingung bei diesem rechnerischen Vorgang ist, dass sich die entstehenden positiven und negativen Teilflächen aufheben. Unter der Voraussetzung, dass die Temperaturkurve „ $\vartheta_{(y)g}$ “ **symmetrisch** zur y-Achse verläuft, wird nachfolgend die Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)g}$ “ linearisiert.

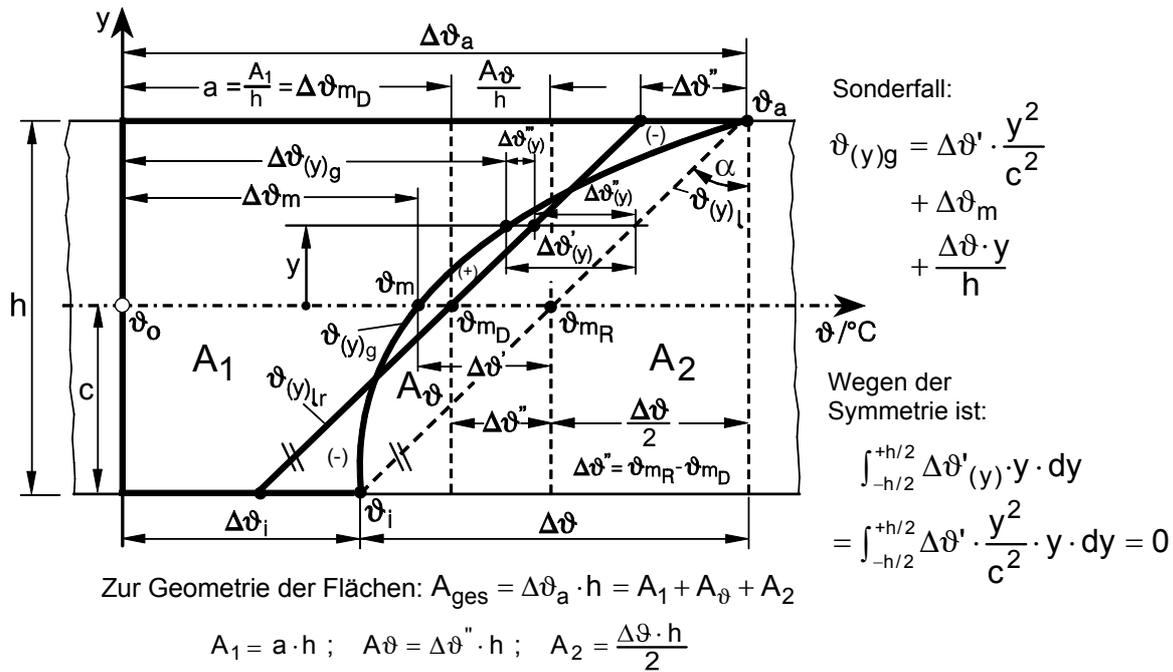


Bild 5.3: Linearisierung der Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)g}$ “ für den Sonderfall einer symmetrischen Temperaturverteilung und konstanter Breite „ b_r “

Die Summe der Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta''$ “ über die Stabhöhe muss gleich Null sein. Die Gleichgewichtslinie „ $\vartheta_{(y)lr}$ “ verläuft parallel zur Schlusslinie „ $\vartheta_{(y)l}$ “, weil wegen der Symmetrie die Schlusslinie als Nullspannungstemperaturverlauf mit ihrem Neigungswinkel „ α “ allein die Größe des thermischen Momentes bestimmt.

$$M_{th1} = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = E \cdot \alpha_t \cdot b_r \cdot A_1 \cdot R_1$$

denn $M_{th2} = E \cdot \alpha_t \cdot b_r \cdot A_\vartheta \cdot R = 0$ wegen $R = 0 \Rightarrow$ Symmetrie. Die Parallelverschiebung „ $\Delta\vartheta''$ “ kann aus der Fläche A_ϑ oder aus der Fläche A_1 berechnet werden.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta''(y) \cdot dy = 0 \quad ; \quad \Delta\vartheta''(y) = \Delta\vartheta'(y) - \Delta\vartheta''(y)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\Delta\vartheta'(y) - \Delta\vartheta''(y)) \cdot dy = 0 \quad ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta'(y) \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta''(y) \cdot dy = A_\vartheta$$

$$A_\vartheta = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta''(y) \cdot dy \quad ; \quad \Delta\vartheta''(y) = \Delta\vartheta'' = \text{const als Parallelenabstand}$$

$$\Rightarrow A_\vartheta = \Delta\vartheta'' \cdot \int_{-h/2}^{h/2} dy \quad ; \quad A_\vartheta = \Delta\vartheta''(y) \cdot h$$

$$\Rightarrow \Delta\vartheta'' = \frac{A_\vartheta}{h} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\vartheta_{mD} = \frac{A_1}{h} = a \tag{5.12}$$

und mit $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1$ wird $\Delta\vartheta(y)_{lr} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h}$

Linearisierung einer unsymmetrischen Temperaturverteilung

In Bild 5.4 ist ein unsymmetrisches Temperaturdifferenzenfeld mit dem „Resultierenden Nullspannungstemperaturverlauf „ $\vartheta(y)_{lr}$ “ als Diagonale gegeben. Lage und Neigung dieser Geraden wird durch den Abstand „a“ von der y-Achse und durch den Tangens des Neigungswinkels α_1 festgelegt.

$$b = \tan \alpha_1 = \frac{\Delta\vartheta_1}{h} ; (\Delta\vartheta_1 \text{ ist zunächst eine beliebige Temperaturdifferenz!}) \quad (5.13)$$

Die Größen „a“ und „b“ unterliegen den geometrisch-rechnerischen Bedingungen. Diese sind dadurch gegeben, dass der Abstand „a“ durch die Größe der Fläche A_1 bzw. durch die Größe der Fläche „ A_ϑ “ bestimmt wird, dass sich die entstandenen Teilflächen (+) und (-) aufheben müssen und dass die Größe „b“ das thermische Moment aus der Teilfläche „ A_1 “ widerspiegelt. Die allgemeine Gleichung der zugehörigen Temperaturdifferenzen lautet (siehe Bild 5.4)

$$\Delta\vartheta(y)_{lr} = a + b \cdot y = a + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \quad (5.14)$$

sie beschreibt die Lage und Neigung des gesuchten resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufes. Durch die auftretenden Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta(y)_r$ “ zwischen dem Nullspannungstemperaturverlauf und der Temperaturkurve wird darüber hinaus mit dem Zusammenhang

$$\sigma_{th}(y) = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta(y)_r \quad (5.15)$$

die Größe der thermomechanischen Spannungen über die Stabhöhe „h“ angegeben. Die geschilderten Zusammenhänge sind im Bild 5.4 dargestellt. Außer den Unbekannten „a“ und „b“ sollen auch die mit einem Fragezeichen versehenen Größen ermittelt werden. Aus Bild 5.4 geht der Zusammenhang

$$\Delta\vartheta(y)_r = \vartheta(y)_{lr} - \vartheta(y)_g \quad (5.16)$$

hervor.

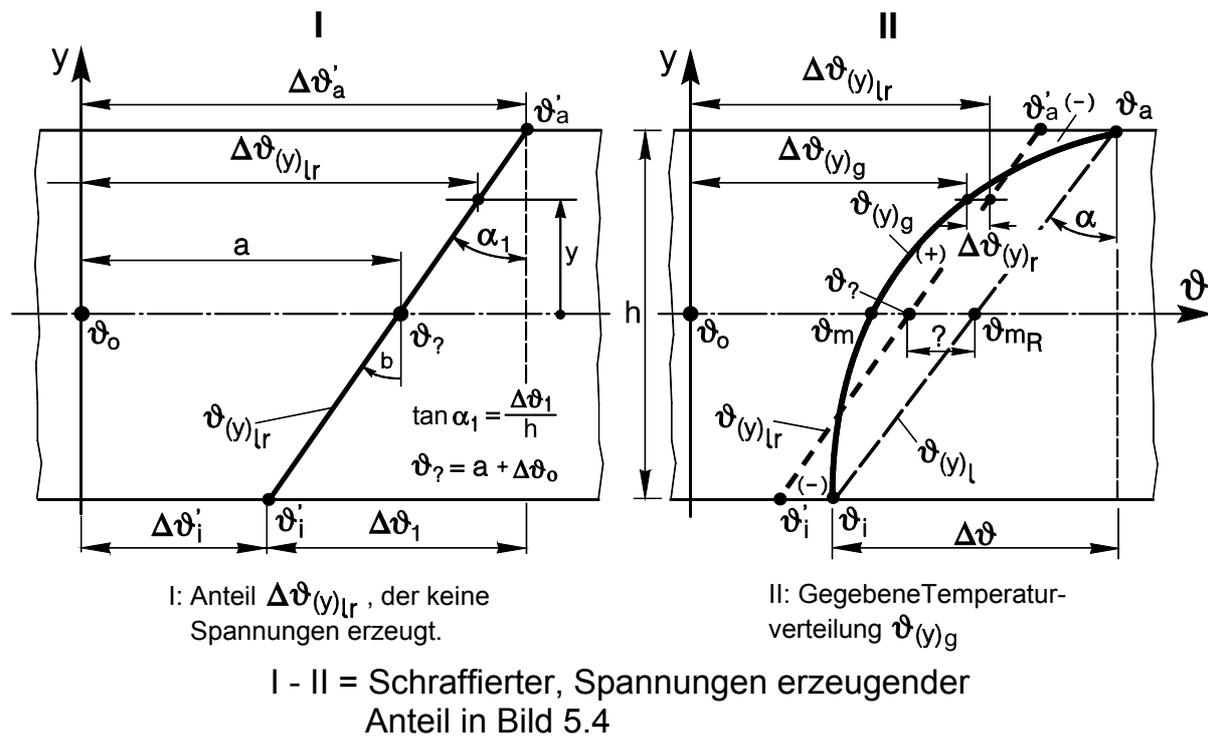


Bild 5.5: Rechnerisch, konstruktive Aufteilung eines gegebenen Temperaturdifferenzfeldes mit Hilfe des resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufes „ $\vartheta(y)_{lr}$ “

Anmerkung:

Ein reales Temperaturdifferenzfeld kann nur mit Hilfe eines so genannten Nullspannungstemperaturverlaufes (Diagonale des Temperaturdifferenzen-Feldanteils „ A_ϑ “), der bestimmten geometrisch - mathematischen Bedingungen unterliegt, in zwei Anteile aufgespalten werden. Hierbei soll gelten:

Anteil I - Spannungen verursachender Anteil = Ursprüngliches Temperaturdifferenzfeld. Weitere Aufspaltungsvarianten eines realen eindimensionalen Temperaturfeldes in drei Anteile siehe Anhang D 4 und D 5.

5.2.3 Ansatz für spannungswirksame Dehnungen und für thermomechanische Spannungen. Schnittgrößen und Gleichgewichtsformulierungen

I. Dehnungen zu I Bild 5.5: Gesamtdehnung

$$\varepsilon(y)_{ges} = \varepsilon_I(y) = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta(y)_{lr} = \alpha_{tm} \cdot \left(a + \frac{\Delta\vartheta_? \cdot y}{h} \right) = \alpha_{tm} (a + b \cdot y) \quad (5.17)$$

II. Dehnungen zu II Bild 5.5: Gesamte thermische Dehnungen

$$\varepsilon_{(y)g} = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} = \alpha_{tm} \cdot \left(a + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \quad (5.18)$$

III. Dehnungsdifferenz zu II siehe auch Bild 5.4:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{II(y)} &= \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} = \varepsilon_{(y)ges} - \varepsilon_{(y)g} \\ &= \varepsilon_{I(y)} - \varepsilon_{(y)g} \\ \varepsilon_{II(y)} &= \alpha_{tm} \cdot (\Delta\vartheta_{(y)lr} - \Delta\vartheta_{(y)g}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

4. Für $\varepsilon_{I(y)}$ wird, wie allgemein üblich, das Ebenbleiben der Querschnitte angenommen!

Ansatz der Gesamtdehnung:

$$\varepsilon_{I(y)} = \alpha_{tm}(a + b \cdot y) \quad (5.20)$$

Dabei sind „a“ und „b“ Unbekannte, die später bestimmt werden.

5. „Spannungen erzeugende Dehnungen“:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{II(y)} &= \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \\ &= \alpha_{tm} \cdot (\vartheta_{(y)lr} - \vartheta_{(y)g}) \\ &= \alpha_{tm} \cdot (\Delta\vartheta_{(y)lr} - \Delta\vartheta_{(y)g}) \\ &= \varepsilon_{I(y)} - \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \\ \varepsilon_{II(y)} &= \alpha_{tm}(a + b \cdot y) - \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch, wenn man das verallgemeinerte Formänderungsgesetz von Hooke, Cauchy und de St. Venant für rein thermische Stabbelastung nutzt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{xx} + \mu \cdot (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \right] + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{xx} \\ \sigma_{yy} &= 0 ; \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{xx} &\hat{=} \sigma_{th(y)} \\ \Delta\vartheta_{xx} &\hat{=} \Delta\vartheta_{(y)g} \\ \varepsilon_{xx} &\hat{=} \varepsilon_{thges} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{thges}} &= \frac{\sigma_{\text{th}}(y)}{E} + \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \\ \sigma_{\text{th}}(y) &= E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \\ E &\hat{=} E_m \\ \alpha_t &\hat{=} \alpha_{tm} \quad (m = \text{Mittelachse}) \\ \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{thges}} &= \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \\ \varepsilon_{\text{thges}} &\hat{=} \alpha_{tm} \cdot (a + b \cdot y) \end{aligned}$$

$\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \hat{=} \varepsilon_{\text{II}}(y) = \text{spannungswirksame Dehnungen}$
mit $\Delta\vartheta_{(y)r} = \text{spannungswirksame Temperaturdifferenz}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{II}(y)} = \alpha_{tm} \cdot (a + b \cdot y) - \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \quad \text{siehe (5.21)}$$

„Thermomechanische Spannungen“

Annahme: Die Elastizitätstheorie gilt uneingeschränkt ($\sigma = E \cdot \varepsilon$).

Es ergeben sich Thermomechanische Spannungen infolge „ $\varepsilon_{\text{II}}(y)$ “.

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{th}}(y) &= E_m \cdot \varepsilon_{\text{II}}(y) \\ &= E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (a + b \cdot y) - E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{th}}(y) = E_m \cdot \alpha_{tm} \left[(a + b \cdot y) - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] \quad (5.22)$$

Schnittgrößen

Es sind keine Schnittgrößen (Resultierende der Spannungen) vorhanden. Die Spannungen bilden ein Gleichgewichtssystem.

Gleichgewichtsformulierungen:

$$N_x = \int_A \sigma_{\text{th}} \cdot dA = M_z = \int_A \sigma_{\text{th}} \cdot y \cdot dA = 0 \quad (5.23)$$

5.2.4 Berechnung des Spannungsverlaufes über die Stabhöhe für unsymmetrische und symmetrische Temperaturverteilungen

Bedingungen

$$1. \quad N_x = \int_A \sigma_{th} \cdot dA = 0 \quad (5.24)$$

$$2. \quad M_z = \int_A \sigma_{th} \cdot y \cdot dA = 0 \quad (5.25)$$

Allgemein gegebene Berechnungsgleichung thermomechanischer Spannungen aus (5.22)

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g})$$

Erste Integration gemäß 1. Bedingung:

$$\int_A \left[E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g}) \right] \cdot dA = 0$$

$$A = b_r \cdot h \quad ; \quad b_r = \text{const}$$

$$dA = b_r \cdot dy$$

$$E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot b_r \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} (a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g}) \cdot dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-h/2}^{+h/2} a \cdot dy + \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot y \cdot dy = \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy$$

$$a \cdot h \quad + \quad 0 \quad = \quad A_1$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{A_1}{h} = \Delta\vartheta_{mD} \quad (5.26)$$

(Diese Beziehung gilt nur für $b = \text{const!}$)

Zweite Integration gemäß 2. Bedingung:

$$\int_A \left[E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g}) \right] \cdot y \cdot dA = 0$$

$$A = b_r \cdot h$$

$$dA = b_r \cdot dy$$

$$E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot b_r \cdot \left[\int_{-h/2}^{+h/2} (a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g}) \cdot y \cdot dy \right] = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-h/2}^{+h/2} a \cdot y \cdot dy + \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot y \cdot y \cdot dy = \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy$$

$$0 \quad + \quad b \cdot \frac{h^3}{12} \quad = \quad A_1 \cdot R_1$$

$$\Rightarrow b = \frac{12 \cdot A_1 \cdot R_1}{h^3} \quad (5.27)$$

Mit „a“ und „b“ lautet jetzt die Berechnungsgleichung thermomechanischer Spannungen:

$$\sigma_{th}(y) = E_m \cdot \alpha_{tm} \left(\underbrace{\frac{A_1}{h} + \frac{12 \cdot A_1 \cdot R_1}{h^3} \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g}}_b \right) \quad (5.28)$$

Die Größe „b“ soll mit Hilfe einer Temperaturdifferenz ausgedrückt werden:

Zwischen den einzelnen Flächenmomenten des Temperaturdifferenzenfeldes besteht gemäß Bild 5.2 die Beziehung:

$$A_1 \cdot R_1 = A_2 \cdot R_2 - A_\vartheta \cdot R$$

(Sonderfall: Symmetrische Temperaturverteilung, $A_\vartheta \cdot R = 0$ und $\Delta\vartheta_2 = 0$ weil $R = 0$!)

$$\Rightarrow b = \frac{12}{h^3} \cdot (A_2 \cdot R_2 - A_\vartheta \cdot R) ; \quad \text{mit den Einzelgrößen:} \quad (5.29)$$

$$A_2 \cdot R_2 = \frac{\Delta\vartheta \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{12}$$

$$\text{und analog: } A_\vartheta \cdot R = \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot h^2}{12} \Rightarrow \Delta\vartheta_2 = \frac{12 \cdot A_\vartheta \cdot R}{h^2} = \frac{M_{th2} \cdot h}{E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm}} \quad (5.30)$$

$$\text{mit } M_{th2} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_A \Delta\vartheta_{2(y)} \cdot y \cdot dA$$

$$\Delta\vartheta_{2(y)} = \Delta\vartheta_2 \cdot \frac{y}{h} .$$

$$\text{Zusammengefasst: } A_1 \cdot R_1 = A_2 \cdot R_2 - A_\vartheta \cdot R = \frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{12} - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot h^2}{12} = \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot h^2}{12} .$$

Hierbei ist „ $\Delta\vartheta_2$ “ eine rechnerische Temperaturdifferenz aus der Unsymmetrie des Feldanteils „ A_ϑ “ und gibt die Verdrehung des resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufes „ $\vartheta_{(y)lr}$ “ gegenüber der parallel verschobenen Schlusslinie „ $\vartheta_{(y)l}$ “ an. Die Schlusslinie „ $\vartheta_{(y)l}$ “ verläuft unter dem Winkel α , dessen Tangens

$$\tan \alpha = \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad \text{lautet.}$$

Es folgt weiter:

$$b = \frac{12}{h^3} \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{12} - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot h^2}{12} \right)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2}{h} = \frac{\Delta\vartheta_1}{h} = \frac{12 \cdot A_1 \cdot R_1}{h^3} = \tan \alpha_1 \quad ; \quad (5.31)$$

$$\Delta\vartheta_1 = \frac{12}{h^2} \cdot A_1 \cdot R_1 \quad ; \quad A_1 \cdot R_1 = \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot h^2}{12} = \frac{M_{th}}{E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot b_r} = \frac{M_{th} \cdot h^3}{12 \cdot E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot I} .$$

Mit dieser Umformung für die Größe „b“ lautet die Gleichung zur Berechnung thermomechanischer Spannungen für ein Stahlprofil mit konstanter Breite und unsymmetrischer Temperaturverteilung

$$\sigma_{th}(y) = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{A_1}{h} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta(y)_g \right) \quad (5.32)$$

$$b_r = \text{const}$$

mit $\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2$ und $M_{th} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot I \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h}$

und für eine symmetrische Temperaturverteilung:

$$\sigma_{th}(y) = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{A_1}{h} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} - \Delta\vartheta(y)_g \right) \quad (5.33)$$

mit $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1$ wegen $\Delta\vartheta_2 = 0$.

Hier verläuft der resultierende Nullspannungstemperaturverlauf „ $\vartheta(y)_1$ “ parallel zur Schlusslinie „ $\vartheta(y)_1$ “.

Die vier Fragezeichen aus Bild 5.4 und 5.5 können somit wie folgt beantwortet werden:

1. Fragezeichen: $\vartheta?$ (Temperatur) ; Bild 5.5 I

$$\vartheta = \vartheta_{mD} = a + \Delta\vartheta_0$$

2. Fragezeichen: (Temperaturdifferenz) nur Fragezeichen! ; Bild 5.4

$$? = \Delta\vartheta = \vartheta'' = \Delta\vartheta_{mR} - \Delta\vartheta_{mD} = \frac{A\vartheta}{H}$$

3. Fragezeichen: $\alpha?$; Bild 5.4

$$\alpha? = \alpha_1$$

$$b = \tan \alpha_1 = \frac{\Delta\vartheta_1}{h} = \frac{\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2}{h}$$

4. Fragezeichen: $\Delta\vartheta?$; Bild 5.4

$$\Delta\vartheta? = \Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2$$

5.3 Lösung für ein Stahlbau-Profil mit nicht konstanter Breite ($b_r \neq \text{const}$) und ein- oder doppelsymmetrischem Querschnitt. Die wichtigsten Ableitungsgleichungen

In das berechnete oder gemessene Temperaturdifferenzenfeld A_1 (siehe Bild 5.6) werden als horizontale Linien die einzelnen Höhen des Stahlbauprofilstabes eingezeichnet. Für jede Teilhöhe „ h_i “ mit der zugehörigen Breite „ b_{ri} “ entsteht ein Teil-Temperaturdifferenzenfeld „ A_{1i} “. Diese Teilfelder mit ihren jeweiligen Flächenverhältnissen und ihren Schwerpunktabständen „ SA_{1i} “ mussten deshalb gebildet werden, weil ihr Einfluss (ihre Wichtung) bei den noch durchzuführenden Gleichgewichtsbetrachtungen durch die unterschiedlichen zugehörigen Stabbreiten wesentlich mitbestimmt wird. Neben dem Profilquerschnitt muss also die Funktion „ $\vartheta(y)_g$ “ und die Aufstelltemperatur (Umgebungstemperatur) „ ϑ_0 “ bekannt sein.

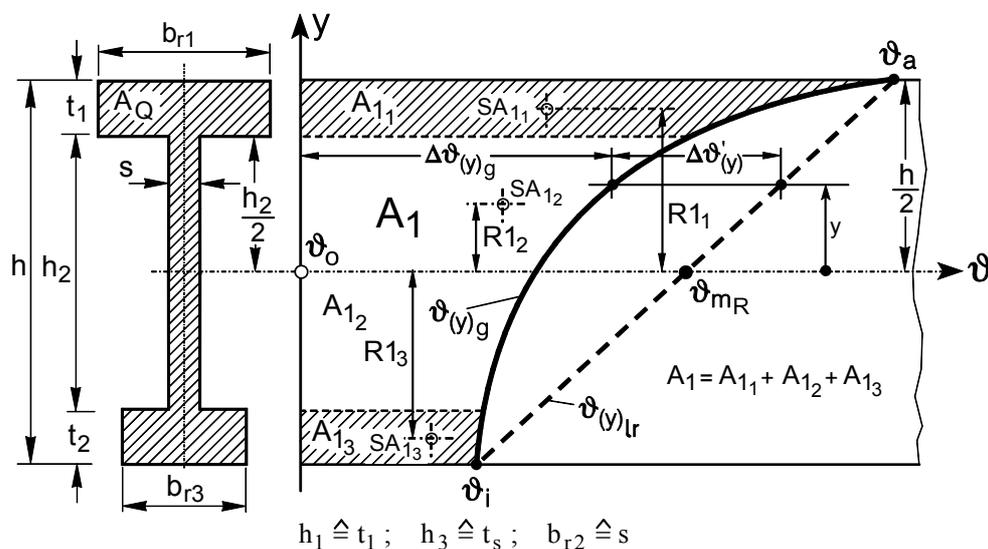


Bild 5.6: Aufteilung des Temperaturdifferenzen-Teilfeldes „ A_1 “ nach unterschiedlichen Stabbreiten „ b_r “ mit unterschiedlichen Höhen „ h_i “

1. Erste Integration gemäß 1. Bedingung (Kapitel 5.2.4):

$$\begin{aligned}
 E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} b_r(y) \left(a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g} \right) dy &= 0 \\
 \Rightarrow \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b_r(y) \cdot a \cdot dy}_{\frac{a \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot h_i}{a \cdot A_Q}} + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b_r(y) \cdot b \cdot y \cdot dy}_0 &= \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b_r(y) \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy}_{= \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}} \\
 \Rightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}}{A_Q} &= \Delta\vartheta_{mD} \quad \text{z.B. } A_{1i} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy
 \end{aligned}$$

2. Zweite Integration gemäß 2. Bedingung (Kapitel 5.2.4):

$$\begin{aligned}
 E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\int_{-h/2}^{+h/2} b_r(y) \cdot \left(a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g} \right) \cdot y \cdot dy \right] &= 0 \\
 \Rightarrow \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b_r(y) \cdot a \cdot y \cdot dy}_0 + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b_r(y) \cdot b \cdot y \cdot y \cdot dy}_{b \cdot I} &= \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b_r(y) \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy}_{= \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i}} \\
 \Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i}}{I} &= \frac{\Delta\vartheta_1}{h} \quad \begin{array}{l} I = \int_A y^2 \cdot dA \\ b_i = b_{ri} \end{array}
 \end{aligned}$$

3. aus 1. und 2. folgt die Größe thermomechanischer Spannungen für Profile mit $b \neq \text{const}$

$$\sigma_{th}(y) = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}}{A_Q} + \frac{y}{I} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] \quad (5.34)$$

zum Beispiel mit den Einzelberechnungsgleichungen für Flächeninhalte und Schwerpunktsabstände:

$$A_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \quad ;$$

$$R_1 = \frac{1}{A_1} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy \quad ;$$

$$A I_1 = \int_{h_{2/2}}^{h/2} \Delta \vartheta_{(y)g} \cdot dy \quad \text{und}$$

$$R I_1 = \frac{1}{A I_1} \cdot \int_{h_{2/2}}^{h/2} \Delta \vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy .$$

Das nachfolgende Bild 5.7 zeigt den prinzipiellen Verlauf der thermomechanischen Spannungen über die Höhe eines Stahl-Profilstabes. Am Schluss dieses Kapitels sind die wichtigsten Formeln der Ableitung und Formeln der zugehörigen Formänderungsgrößen zusammengestellt. Das Bild 5.8 dient hierbei als Erläuterungsskizze. Wird eine derartige Zeichnung maßstäblich angefertigt, so können die Spannungen verursachenden Temperaturdifferenzen „ $\Delta \vartheta_{(y)T}$ “ abgegriffen werden. Die Größe der Spannungen ergibt sich nach Multiplikation mit dem thermodynamischen Proportionalitätsfaktor $K_T = E_m \cdot \alpha_{tm}$. Der Anhang A zeigt die Auswertung des Versuches 19/IV und der Anhang H5 zeigt die Auswertung eines Beispiels (Tabellarische Berechnung der thermomechanischen Spannungen über die Stabhöhe eines Flachstahls bei gegebener Temperaturverteilung und Spannungsdiagramm).

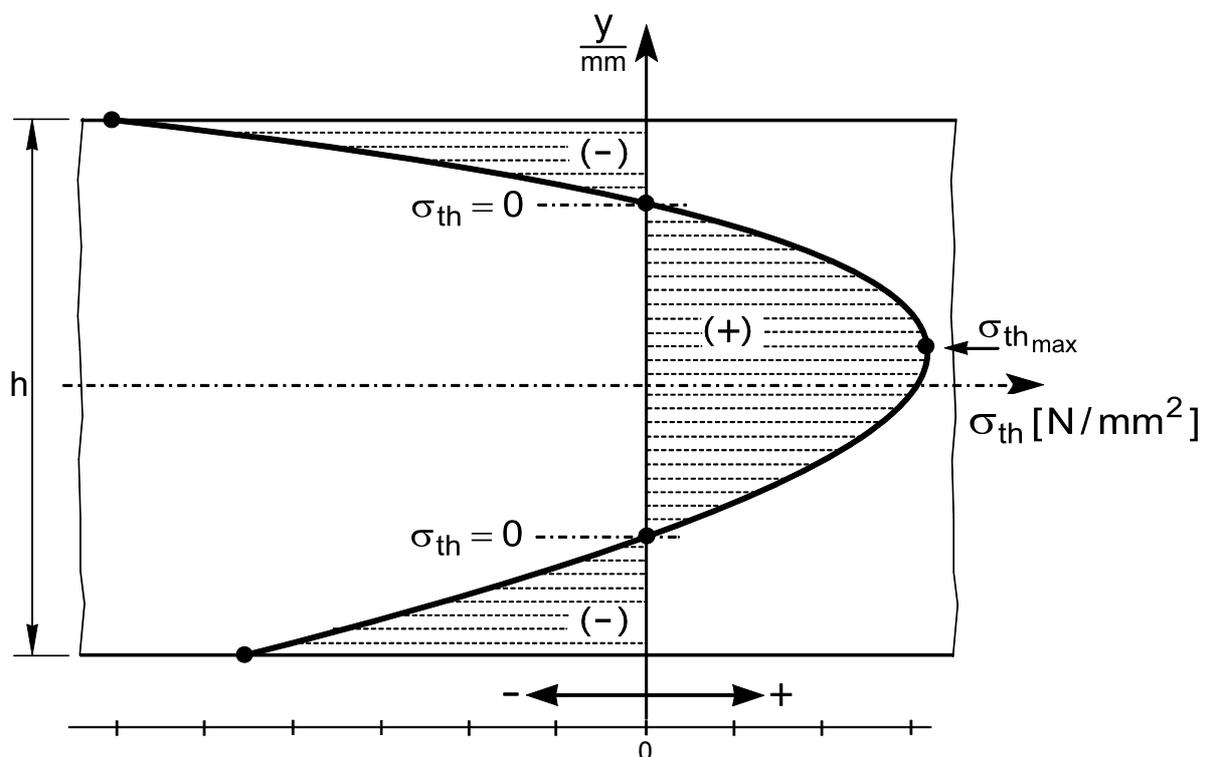


Bild 5.7: Prinzipieller Verlauf der thermomechanischen Spannungen „ $\sigma_{th}(y)$ “ über die Stabhöhe
Eine andere Art der Darstellung des Spannungsverlaufes zeigt Bild A.8 des Anhangs A.

5.3.1 Die wichtigsten Ableitungsgleichungen und zugehörige Formänderungsgrößen

1. Spannungsberechnung

$$\sigma_{th(y)} = \frac{F_{th}}{A} + \frac{M_{th} \cdot y}{I_x} - E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}$$

$$\sigma_{th(y)} = \frac{\int_A E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dA}{A_Q} + \frac{\int_A E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dA}{I_x} \cdot y - E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{\int_A b(y) \cdot dy \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}}{A} + \frac{\int_A b(y) \cdot dy \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y}{I_x} \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{\int_A dA(y) \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}}{A} + \frac{\int_A dA(y) \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y}{I_x} \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (\Delta\vartheta_{(y)r} - \Delta\vartheta_{(y)g})$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}}{A} + \frac{y}{I_x} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right]; b \neq \text{const.}$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g} \right)$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right) = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (\Delta\vartheta'_{(y)} - \Delta\vartheta'' - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot y}{h})$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{A1}{h} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right); b = \text{const.}$$

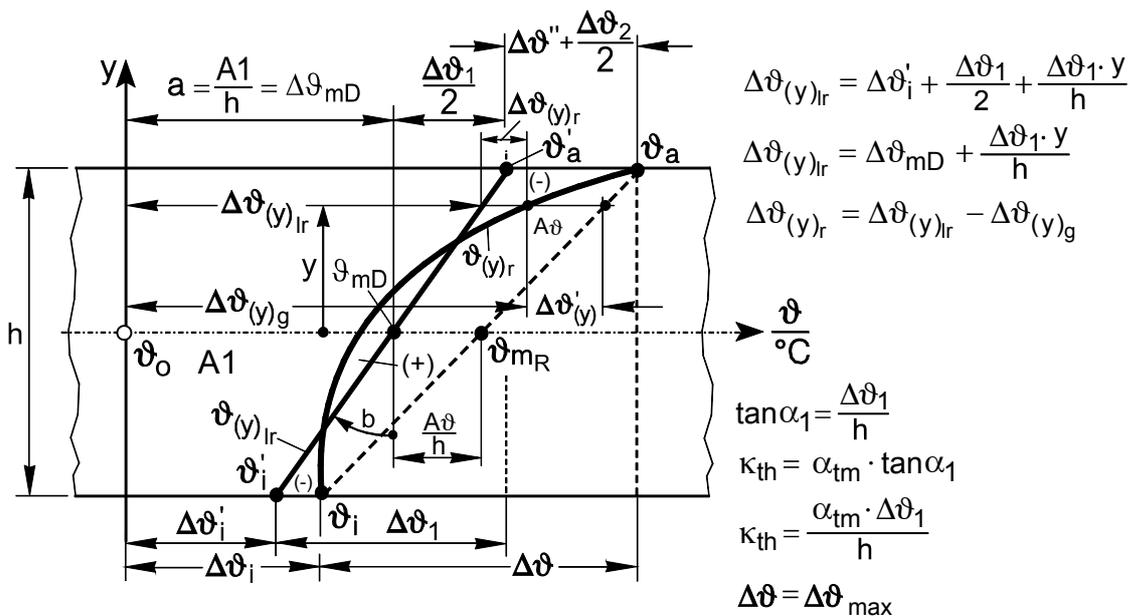


Bild 5.8: Erläuterungsskizze zu den Formeln (b = const)

2. Formänderungsberechnung

Zugehörige Formänderungsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\text{th}(y)l_r} &= \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_{(y)l_r} = \text{Gesamtdehnung} = \varepsilon_{\text{th}}(y) \\
 &= \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\vartheta_i' + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \\
 &= \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\vartheta_{\text{mD}} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) = \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\frac{A_1}{h} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)
 \end{aligned}$$

Die lineare Berechnungsgleichung der gesamten resultierenden thermischen Dehnungen über die Stabhöhe besteht aus dem Produkt des mittleren linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten „ α_{tm} “ und der Gleichung der wirksamen Temperaturdifferenzen des resultierenden Nullspannungsverlaufes „ $\Delta\vartheta_{(y)l_r}$ “. Sie erfüllt die mit Gleichung (4.3.7) genannten Kompatibilitätsbedingungen.

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\text{th}0} &= \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} = \frac{M_{\text{th}}}{E_m \cdot I} = \frac{\widehat{\varphi}_{\text{th}}}{l_0} = \frac{\Delta\varepsilon_{\text{th}}}{h} \\
 \kappa_{\text{th}(y)} &= \frac{\kappa_{\text{th}0}}{1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}} = \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})} = y'' \\
 l_{\text{th}(y)} &= l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}}(y)) \\
 &= \widehat{\varphi}_{\text{th}} \cdot R_{\text{th}(y)} \\
 l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}) &= \kappa_{\text{th}0} \cdot l_0 \cdot R_{\text{th}(y)} \\
 \widehat{\varphi}_{\text{th}} &= \tan \varphi = \frac{l_a - l_i}{h} = \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot l_0 = \kappa_{\text{th}0} \cdot l_0 \\
 &= \frac{M_{\text{th}}}{E_m \cdot I} \cdot l_0 = \frac{l_{\text{th}(y)}}{R_{\text{th}(y)}} \\
 R_{\text{th}(y)} &= \frac{l_{\text{th}(y)}}{\kappa_{\text{th}0} \cdot l_0} = \frac{(1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})}{\kappa_{\text{th}0}} = \frac{h \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})}{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1} = \frac{1}{\kappa_{\text{th}(y)}} \\
 f_{\text{th}(y)} &= f_{\text{max}} = - \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{h \cdot 8} \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}) \\
 &\quad \text{bei } x = l_{\text{th}(y)} / 2
 \end{aligned}$$

Die hier angesprochenen Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta_{(y)l_r}$, $\Delta\vartheta_i'$, $\Delta\vartheta_1$ und $\Delta\vartheta_{\text{mD}}$ sowie die Temperaturfeldgröße A_1 sind der gemittelten Temperaturverteilung, über die Stablänge gese-

hen, zu entnehmen oder aus einzelnen Temperaturfeldern, gleichmäßig über die Stablänge verteilt, mit Hilfe der Trapezformel zu berechnen.

Alle Größen stellen also Mittelwerte dar. Die als angenähertem Kreisbogen mit dem Radius „ R_{th} “ berechnete Biegelinie ist als Mittelwert nur eine angenäherte Größe. Ist die Temperaturverteilung über die Stablänge nicht konstant, so ist für genauere Berechnungen wie im Anhang D9. beschrieben „ $\Delta\vartheta_1(x)$ “ zu ermitteln und die thermische Biegelinie als unsymmetrische Parabel zu berechnen.

Zur Verwendung maximaler Temperaturdifferenzen, Mittelwerten von Temperaturdifferenzen und Mittelwerten von Werkstoffkennzahlen, siehe Kapitel 5.5

5.4 Der Einfluss unterschiedlicher Stahlprofile auf die Größe und die Verteilung thermomechanischer Spannungen bei gleicher Temperaturverteilung

Es soll gezeigt werden, welche signifikanten Spannungsänderungen sich ergeben, wenn bei gleichem Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)g}$ “ und gleicher Stabhöhe „ h “ an Stelle eines Flachstahlprofils mit $b = \text{const}$ ein Breitflanschträgerprofil mit $b \neq \text{const}$ verwandt wird.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sigma_{th(y)} &= E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}}{A_Q}}_a + \underbrace{\frac{y}{I} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i}}_{b \cdot y} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] \\ \textcircled{2} \quad \sigma_{th(y)} &= E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[a + b \cdot y - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] \end{aligned}$$

Die Gleichungen 1 und 2 beschreiben thermomechanische Spannungen über die Stabhöhe „ h “. Behält man die Stabhöhe „ h “ und das Temperaturdifferenzenfeld bei und geht von einem Stabquerschnitt mit $b = \text{const}$ auf einen Stabquerschnitt mit $b \neq \text{const}$, z.B. einen Breitflanschträger, über, so kann man mit Hilfe der Gleichung 1 signifikante Veränderungen in der leicht überschaubaren Gleichung 2 aufzeigen.

Diese sind:

1. Der Wert von „ $a = \Delta\vartheta_{mD}$ “ wird größer, d.h. die Zugspannungen im Bereich der Stabmitte nehmen stark zu. Dies wäre eine Erklärung für vorgefundene Risse im Steg von thermisch und mechanisch beanspruchten Stahlträgern an Kesselanlagen.
2. Der Wert von „ b “ wird wegen des großen Trägheitsmomentes etwas größer.

3. Die Veränderungen der Punkte 1. und 2. führen zu wesentlich kleineren Druckspannungen in den Außenfasern.

Nachfolgend ist für den Fall: $b = \text{const}$ (Bild 5.9) und für den Fall: $b \neq \text{const}$ (Bild 5.10) bei Beibehaltung von „ h “ und der Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)g}$ “ das zugehörige Temperaturdifferenzenfeld dargestellt.

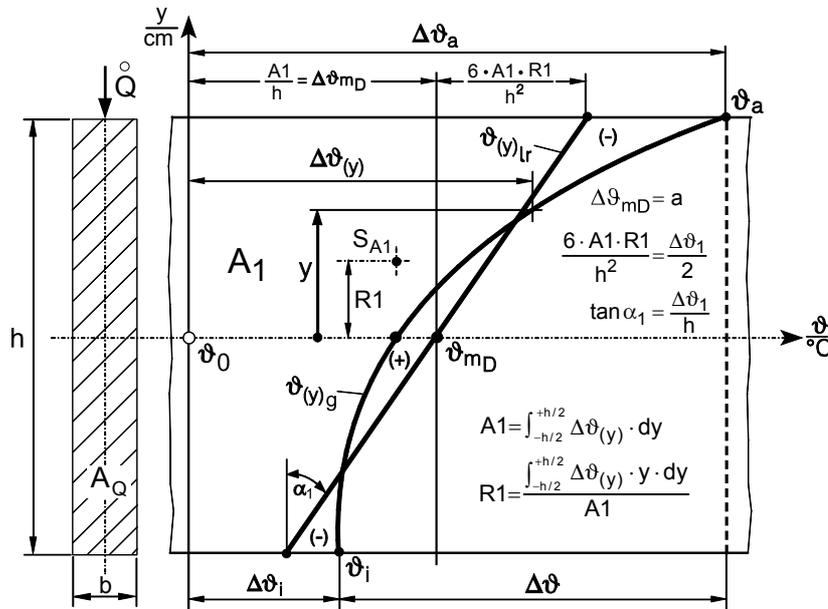


Bild 5.9: Stabbreite $b = \text{const}$

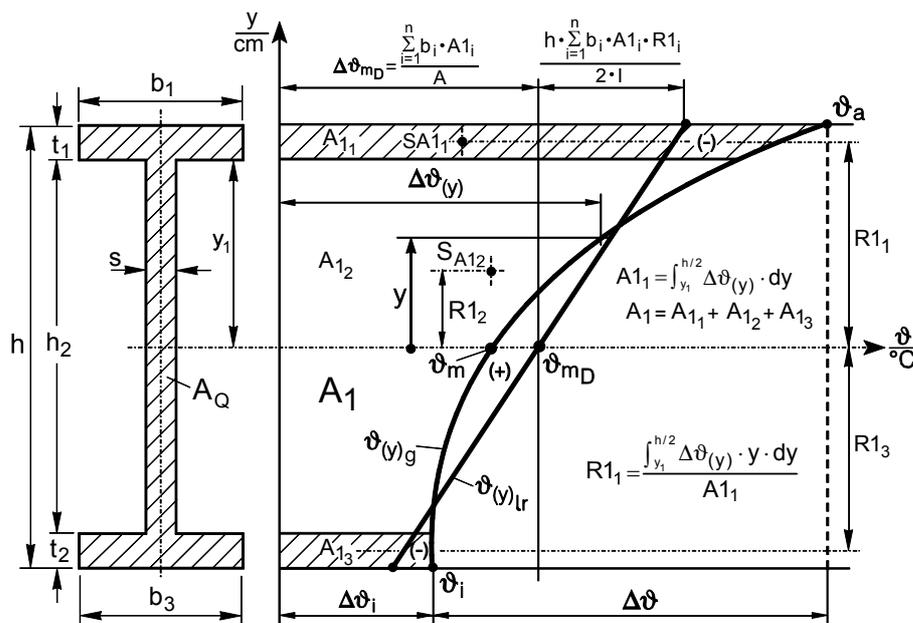


Bild 5.10: Stabbreite $b \neq \text{const}$

Gleiche Temperaturverteilung $\vartheta_{(y)g}$

Gleiche Stabhöhe h , aber unterschiedliche Spannungsverteilung

Wenn außen viel Material und innen wenig Material angeordnet ist, z.B. bei einem I-Träger mit $b \neq \text{const}$, dann ist es einsichtig, dass gegenüber einem Flachstahlprofil gleichen Querschnittes mit $b = \text{const}$ die Spannungen in den Außenfasern geringer werden und in Stabmitte stark zunehmen! Der Anhang „H 5“ beinhaltet die Berechnung eines Beispiels in Tabellenform (Tabelle H 5) mit einer Zusammenfassungs-Zeichnung (Bild H 5.1) der sich ergebenden Veränderungen zwischen zwei Stahlprofilen. In diesem Vergleich der sich ergebenden Spannungen in zwei unterschiedlichen Stahl-Profilen bei gleicher Temperaturverteilung zeigt sich als Auswirkung beim Breitflanschträger, dass die Spannungen in den Außenfasern (Druckspannungen) halbiert werden und dass die Spannung in Stabmitte (Zugspannung) sich verdoppelt. Außerdem ist im Anhang „H 5“ als Vergleich und als Kontrolle der analytischen Berechnung der Breitflanschträger mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) bei guter Übereinstimmung nachgerechnet worden.

5.5 Durchschnittstemperaturfeld und Formänderungen Maximales Temperaturfeld und Maximalspannungen

Bis zu diesem Punkt der Arbeit wurde mit Temperaturdurchschnittswerten der einzelnen Stabfasern eines thermisch ungleichmäßig belasteten Stahlbau-Profilstabes über die Stablänge gerechnet. Das über die Stablänge als konstant verlaufend angenommene Durchschnittstemperaturdifferenzen-Feld mit $\kappa_{\text{th}} = \text{const}$ ermöglichte die Berechnung von Formänderungen wie Durchbiegungen aller Fasern und aller Faserlängenänderungen. Die Ermittlung von Formänderungen thermisch ungleichmäßig sowohl in Stabquerschnitten als auch über die Stablänge beanspruchter Profilstäbe setzt jedoch die Kenntnis weiterer, nachfolgend aufgeführter Mittelwerte, Temperaturdifferenzen und Maximalwerte voraus:

1. Mittlerer resultierender, linearer Nullspannungstemperaturverlauf:

$$\overline{\Delta\vartheta_{(y)_{\text{lr}}}} = \overline{\Delta\vartheta_{\text{mD}}} + \frac{\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot y}{h} \quad \text{mit} \quad \overline{\Delta\vartheta_{\text{mD}}} = \frac{1}{\ell_0} \cdot \int_0^{\ell_0} \Delta\vartheta_{\text{mD}(x)} \cdot dx \quad \text{und}$$

$$\overline{\Delta\vartheta_1} = \frac{1}{\ell_0} \cdot \int_0^{\ell_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot dx$$

2. Mittlere Verkrümmung:

$$\overline{\kappa_{th}} = \frac{\overline{M_{th}}}{E_m \cdot I} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \overline{\Delta\vartheta_1}}{h} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\kappa_{th}}(y) = \frac{\overline{\kappa_{th}}}{(1 + \varepsilon_{th}(y))}$$

mit den Mittelwerten „ E_m “ und „ α_{tm} “.

3. Verlauf der Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_{1(x)}$ “ bzw. der thermischen Verkrümmung

$$\kappa_{th(x)} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{1(x)}}{h} = \frac{M_{th(x)}}{E_m \cdot I} \quad \text{bzw.} \quad \kappa_{th(x,y)} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{1(x)}}{h \cdot (1 + \varepsilon_{th}(y))}; \quad I = \text{const}$$

$$\Delta\vartheta_{1(x)} = \vartheta_{a'(x)} - \vartheta_{i'(x)}$$

über die Stablänge.

Die Mittelwerte werden zur Berechnung der Stabfaserlängenänderungen und der überschlägigen Berechnung der Durchbiegung unter der Annahme $\overline{\kappa_{th}} = \text{const}$ benötigt. Der Verlauf der thermischen Verkrümmung „ $\kappa_{th(x)}$ “ über die Stablänge erlaubt die genaue Berechnung der Biegelinie in Anlehnung an Mohr (siehe Anhang D9.). Die zu den Formänderungen gehörenden aufgezeigten thermomechanischen Spannungen sind somit auch nur Durchschnittswerte! Zu Mittelwerten von Temperaturen und Werkstoffzahlen siehe Kapitel 2.7.1 und die Anhänge A, B, D 9. und H8..

Im Industrieofen- und Hochleistungskesselbau ist gegenüber anderen Stahlbau-Konstruktionsgebieten der Temperaturdifferenzenverlauf über die Stablänge nicht konstant. Es existiert also zwischen den Außenfasern eine maximale Temperaturdifferenz an einer bestimmten Stelle. Mit den im Anhang A ermittelten Werten der Formänderungen konnten die Messergebnisse des Versuchs 19/IV widerspiegelt werden. Soll jedoch ein Stahlbaustab **dimensioniert** werden, so müssen zusätzlich 4. maximale Temperaturdifferenzen bekannt sein und „Thermo-mechanische Maximalspannungen im thermisch höchst beanspruchten Stabquerschnitt“

$$\sigma_{th}(y) = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD \max} + \frac{\Delta\vartheta_{1 \max} \cdot y}{h} - \Delta\vartheta(y)_{g \max} \right)$$

berechnet werden (siehe Anhang H 6).

Übersicht zur Verwendung maximaler Temperaturdifferenzen, Mittelwerten von Temperaturdifferenzen und Mittelwerten von Werkstoffkennzahlen in Berechnungen:

1. Spannungsberechnungen:

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD \max} + \frac{\Delta\vartheta_{1 \max} \cdot y}{h} - \Delta\vartheta(y)_{g \max} \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} (E_{\vartheta a} + E_{\vartheta i}); \quad \alpha_{tm} = \frac{1}{2} (\alpha_{t \vartheta a} + \alpha_{t \vartheta i})$$

$$= E_{\vartheta mR} = \alpha_{t mR}$$

2. Formänderungen: $\Delta l(y)$, $\Delta b(y)$, $v(y)$ und Δh

$$\text{z.B.} \quad \Delta l(y) = \ell_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\overline{\Delta\vartheta_{mD}} + \frac{\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot y}{h} \right)$$

3. Durchbiegung:

3.1 Annahme: $\bar{\kappa} = \text{const}$

$$\bar{\kappa} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \overline{\Delta\vartheta_1}}{h}; \quad f_{thi \max} = \bar{\kappa} \cdot \frac{\ell_0 \cdot \ell_i}{8}$$

Wegen $\bar{\kappa} = \text{const}$ ist die Biegelinie ein Kreisbogen. Die Berechnung erfolgt jedoch nur angenähert mit der Gleichung einer quadratischen Parabel.

3.2 Thermische Durchbiegung in Anlehnung an Mohr

Berechnung an Hand des zu erstellenden Diagramms „ $\Delta\vartheta_1(x)$ “

(siehe Anhang Kapitel D9).

$$f_{th(x,y)} = -\frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot (A' \cdot x_0 - Ax \cdot (x_0 - x_s)) \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})$$

Die Übersicht kann auch eine Kontrollfunktion bei FEM-Analysen ausüben.

5.6 Scheibengleichung und Airysche Spannungsfunktion

Zum gleichen Ergebnis, wie bisher in Kapitel 5 abgeleitet, gelangt man durch Nutzung der Scheibengleichung unter eindimensionaler thermischer Beanspruchung und der übergeordneten, zugehörigen Airyschen Spannungsfunktion „F“ [10, 51, 24, 80, 81, 82].

Die Scheibengleichung lautet:

$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 = -\alpha_{tm} \cdot E_m \cdot \Delta(\Delta\vartheta_{(y)r})$$

Es ist eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, auch Bipotentialgleichung genannt. Zur Scheibengleichung passend, ist die übergeordnete Airysche Spannungsfunktion „ $F_{(y)}$ “ aufzufinden, deren zweite Ableitung die gesuchten Thermomechanischen Spannungen ergibt.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{th(y)} = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\Delta\sigma_{xx} = 0 = \frac{\partial^2 \sigma_{th(y)}}{\partial y^2} = \Delta\Delta F$$

Der Lösungsansatz der Airyschen Spannungsfunktion „ F “, die lediglich von y abhängig sein darf, lautet:

$$F = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{y^2}{2 \cdot h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy + \frac{2 \cdot y^3}{h^3} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy - \iint \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \cdot dy \right]$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion F ergeben die Spannungen. Die Spannungen bilden ein Gleichgewichtssystem, sie besitzen keine Resultierende.

Damit wird die zweite Ableitung zu:

$$\Delta F = \sigma_{xx} = \sigma_{th(y)} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy + \frac{12 \cdot y}{h^3} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy - \Delta\vartheta_{(y)g} \right]$$

und führt, wie bereits gezeigt, zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{th(y)} &= E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right) \\ &= E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \end{aligned}$$

$$\text{d.h.: } \Delta F = \sigma_{xx} = \sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Hierbei ist „ $\Delta\vartheta_{(y)r}$ “ die spannungsverursachende Temperaturdifferenz. Siehe Bild 5.4.

Weiter gilt:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{th(y)} \cdot dy = 0$$

$$\sigma_{th(x)} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

$$\sigma_{th(x,y)} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

Letztlich wird

$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^2 \sigma_{th}(y)}{\partial y^2} = 0 = \Delta\sigma_{th}(y) = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}$$

5.7 Berechnung der Verschiebungen u_x , w_z und v_y nach Auswertung (Aufspaltung) eines gegebenen Temperaturfeldes

Vor der Beschreibung der Dehnungs- und Verschiebungsbeziehungen wird in Bild 5.11 die allgemeine Temperaturfeld-Auswertung dargestellt und kurz erläutert. $\kappa_{th} = \text{const} = \overline{\kappa_{th}}$.

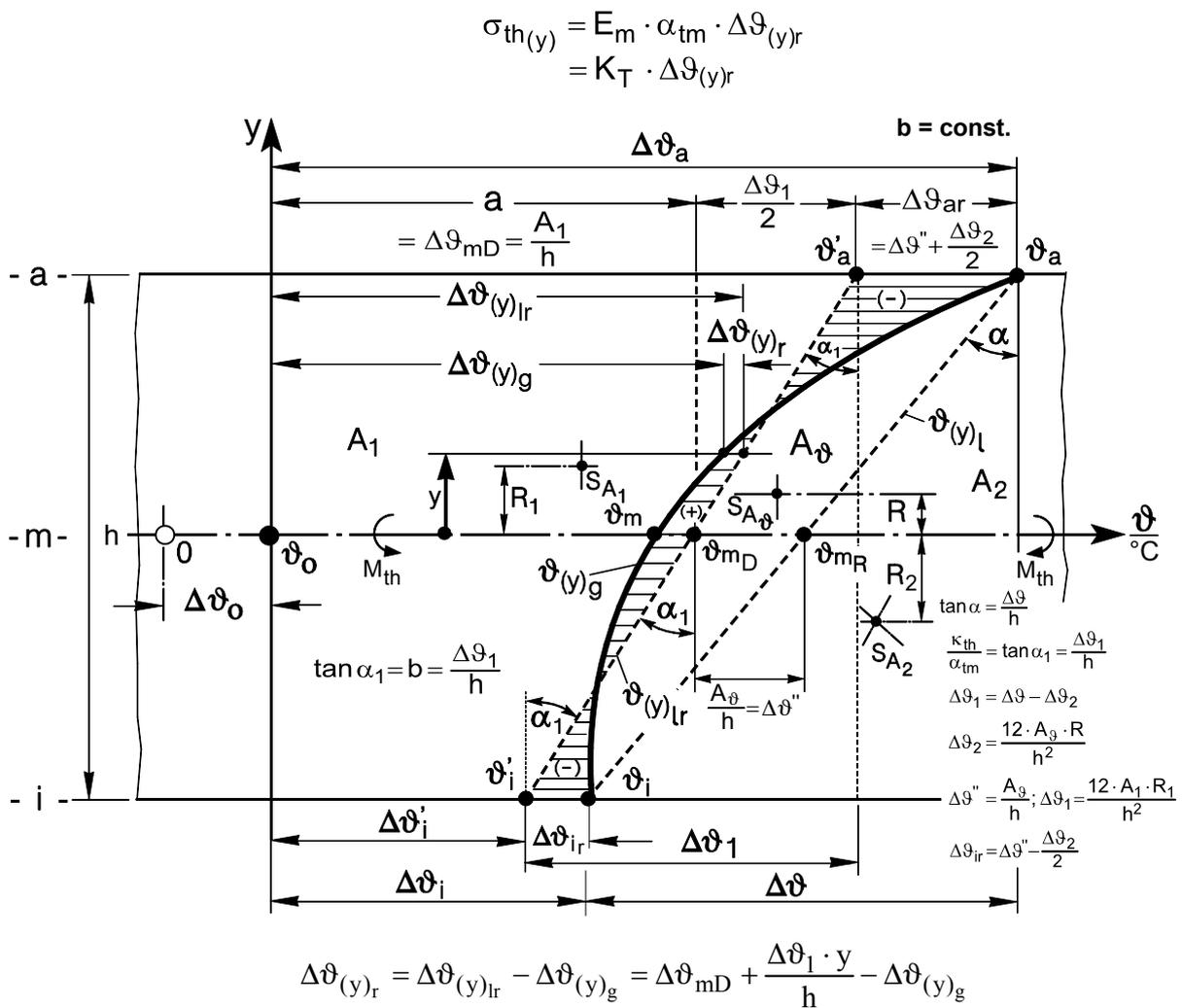


Bild 5.11: Allgemeine Temperaturfeld-Auswertung (Aufspaltung)
 Die Verteilung der Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta_{(y)r}$ entspricht der Spannungsverteilung

Kurzbeschreibung zur Auswertung:

Das Temperatur-Teilfeld „A₁“ ruft eine Längskraft und durch die ungleichmäßige Temperaturverteilung zusätzlich ein Moment hervor. Diese Größen lassen sich in Form von Temperaturdifferenzen mit Hilfe des resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufes als Diagonale „ $\vartheta_{(y)lr}$ “ durch das Temperaturfeld darstellen. Der lineare Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)lr}$ “ bewirkt spannungslos die gleiche Stabverkrümmung und die gleichen Faserlängenänderungen wie der gegebene nichtlineare Temperaturverlauf „ $\vartheta_{(y)g}$ “.

Der lineare, resultierende Nullspannungstemperaturverlauf

$$\Delta\vartheta_{(y)lr} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h}$$

spaltet das Temperaturfeld in seine drei Anteile (siehe Anhang D 4.) auf.

Die Dehnungs- und Verschiebungsbeziehungen [10, 51]:

$$1. \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad 2. \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 3. \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Die Dehnungen:

$$1. \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_m} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g} = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}$$

$$= \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$2. \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E_m} \cdot \sigma_{xx} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}$$

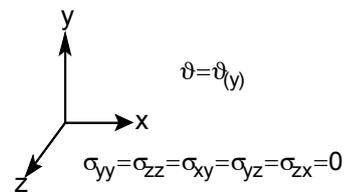
$$= -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}$$

$$3. \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\mu}{E_m} \cdot \sigma_{xx} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}$$

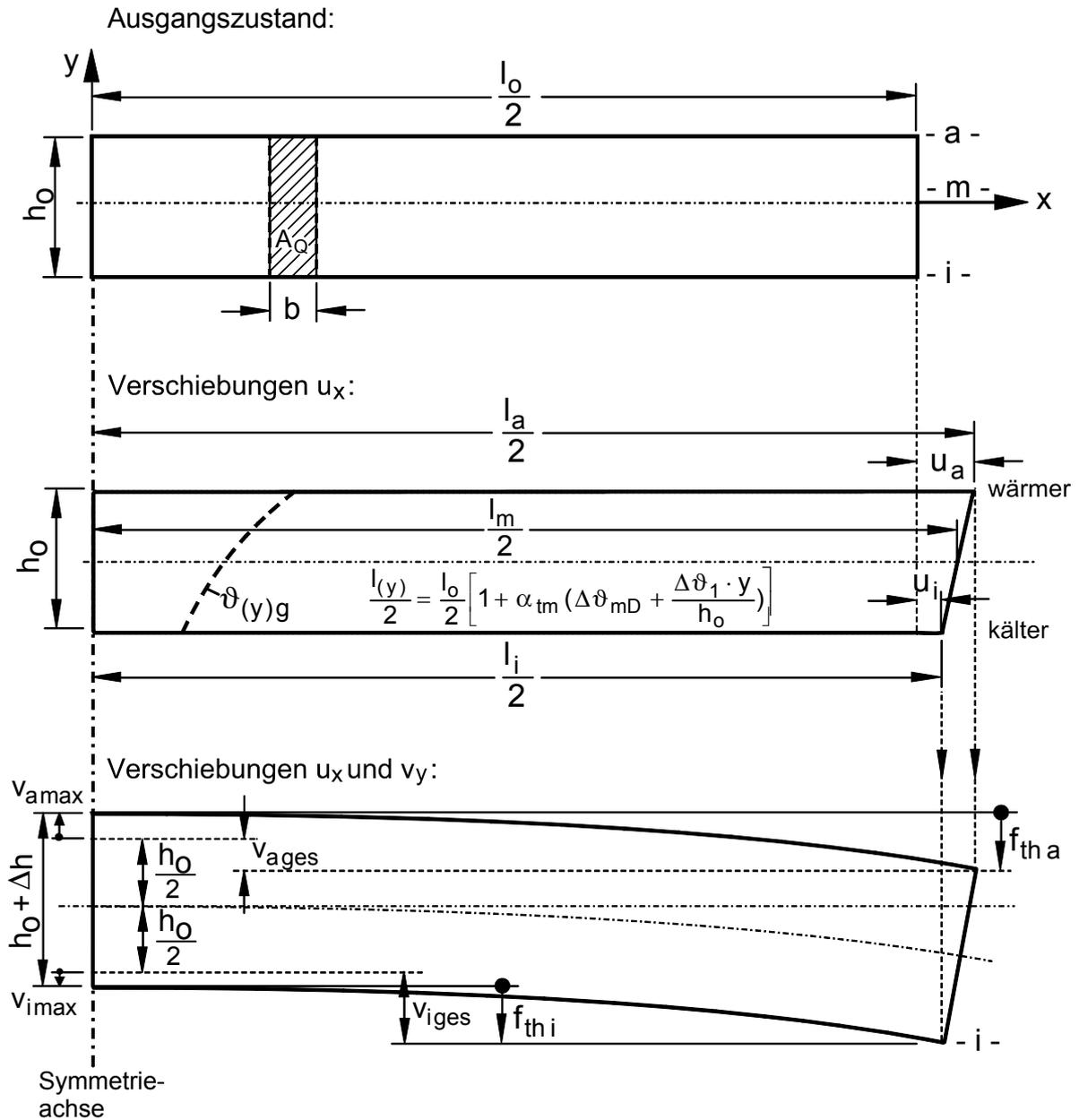
$$= -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}$$

Die Dehnungen in z-Richtung und die Dehnungen in y-Richtung setzen sich aus dem linearthermisch-resultierenden Anteil „ $\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}$ “ und dem Dehnungsanteil aus den Spannungen „ $-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$ “ (Querkontraktion) zusammen.

Achsenkreuz:



Nachfolgend werden die Verschiebungen in Bild 5.12 und in Bild 5.13 dargestellt. Im x-y-Achsenkreuz wird die Ausgangsmittellinie festgehalten. Die y-Achse ist Symmetrieachse.



$$\Delta h = v_{amax} + v_{imax} = v_{thamax} + v_{thimax} = h_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta \vartheta_{mD}$$

$$v_{ages} = -f_{tha} + v_{amax}; \quad v_{(y)} = v_{th(y)} + v_{\sigma(y)}$$

$$v_{iges} = -f_{thi} - v_{imax}; \quad f_{th(y)} = -\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta \vartheta_1 \cdot l_0^2}{h_0 \cdot 8} \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})$$

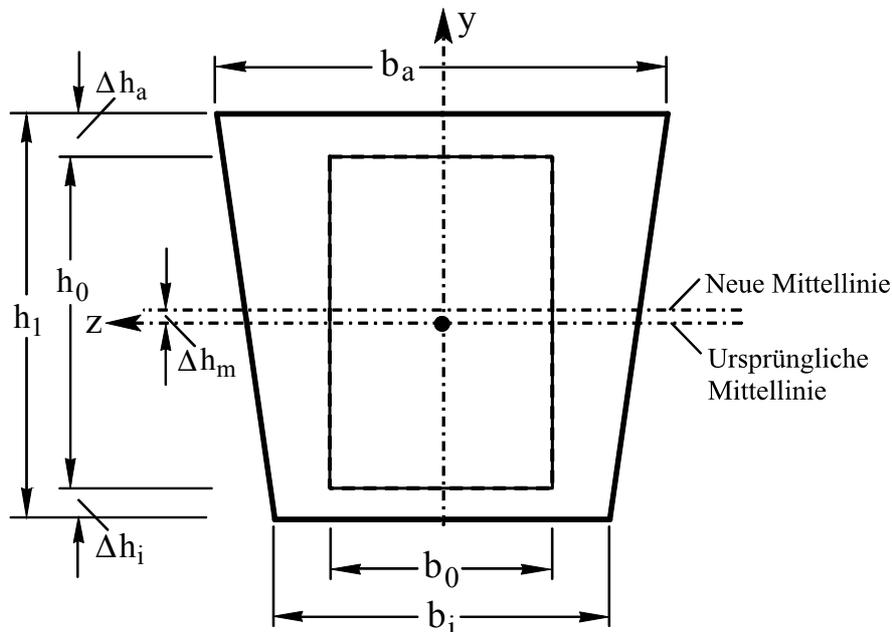
Bild 5.12: Verschiebung u_x und v_y

$$\Delta b_{(y)} = b_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta \vartheta_{mD} + \frac{\Delta \vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$b_a = b_0 + \Delta b_a$$

$$b_m = b_0 + b_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta \vartheta_{mD}$$

$$b_i = b_0 + \Delta b_i$$



$$h_1 = h_0 + \Delta h = h_0 + h_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta \vartheta_{mD}$$

$$\Delta h = \Delta h_a + \Delta h_i = v_{a \max} + v_{i \max} = v_{tha \max} + v_{thi \max}$$

$$\Delta h_a \hat{=} v_{a \max}$$

$$\Delta h_i \hat{=} v_{i \max}$$

$$\Delta h_m = \frac{\Delta h_a - \Delta h_i}{2} = \text{Verschiebung der Mittellinie}$$

Bild 5.13: Verschiebung w_z und v_y ohne Verkrümmungsanteil

Flachstahlquerschnitt $b_0 \cdot h_0$ nach ungleichmäßiger thermischer Beanspruchung

Berechnung der Verschiebungen aus den Dehnungen und den Systemmaßen

1. zu u_x : $\partial_u = \partial_x \cdot \varepsilon_{xx}$

$$u_x = \int_0^x \varepsilon_{xx} \cdot dx = x \cdot \varepsilon_{xx}$$

$$\Delta l_{(y)} = u_{x \max} = \int_0^{l_0} \varepsilon_{xx} \cdot dx = l_0 \cdot \varepsilon_{xx}$$

$$u_x = x \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta \vartheta_{(y)g} \cdot dy + \frac{12 \cdot y}{h^3} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta \vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy \right]$$

$$\begin{aligned}
u_x &= x \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \quad \text{mit} \quad \Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 \\
u_x &= x \cdot \varepsilon_{thxx} = x \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} \\
u_{x \max} &= \Delta l_{(y)} = l_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

In Bild 5.12: $u_x = \frac{\Delta l_{(y)}}{2}$ (wegen Symmetrieachse)

$$\begin{aligned}
\mathbf{2. zu w_z:} \quad \partial_w &= \varepsilon_{zz} \cdot \partial_z \\
&= \left(-\mu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E_m} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} \right) \cdot \partial_z \\
w &= \int_0^z \left(-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} \right) \cdot dz \\
w &= z \left(-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} \right)
\end{aligned}$$

Der Term $-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$ ist sehr klein und wird daher vernachlässigt. Es verbleibt:

$$\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} = \alpha_{tm} \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$z = b_0 \Rightarrow w_{\max} = b_0 \cdot \varepsilon_{zz} = \Delta b_{(y)}$$

$$\text{Damit wird:} \quad \Delta b_{(y)} = b_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \tag{5.36}$$

Dass der Term $-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$ vernachlässigt werden darf, geht auch aus der durchschnittlichen Breitenzunahme $\overline{\Delta b_{(y)}}$ zwecks Querschnittsberechnung hervor:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta b_{(y)}} &= b_0 \left[\frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy \right) + \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \cdot dy \right] \\
\overline{\Delta b_{(y)}} &= b_0 \left[0 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} \right] .
\end{aligned}$$

Nach thermischer Beanspruchung beträgt die Größe des neuen Querschnitts unter Beachtung, dass die neue Stabhöhe um „ Δh “ gewachsen ist mit $h_1 = h_0 + \Delta h = h_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD})$ und mit $b_1 = b_0 + \overline{\Delta b_{(y)}} = b_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD})$

$$A_{Q1} = (b_0 + b_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}) \cdot h_1$$

$$A_{Q1} = b_0 (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}) \cdot h_1 = b_0 \cdot h_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD})^2 \quad (5.37)$$

Die Größenzunahme des vertikalen mittleren Längsquerschnitts und des horizontalen mittleren Längsquerschnitts lässt sich analog zeigen. In allen Fällen ergibt sich zwecks Volumenberechnung eines Profilstabes nach thermischer Beanspruchung das Produkt

$$V_1 = b_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}) \cdot h_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}) \cdot l_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD})$$

$$V_1 = b_0 \cdot h_0 \cdot l_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD})^3 \quad \text{und mit } V_0 = b_0 \cdot h_0 \cdot l_0 : \quad (5.38)$$

$$V_1 = V_0 \cdot (1 + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD})^3$$

3. zu v_y : $\partial_v = \varepsilon_{yy} \cdot \partial_y$

$$= \left(-\mu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E_m} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)l r} \right) \cdot \partial_y$$

$$\partial_v = (-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}) \cdot \partial_y$$

Diese beiden Anteile beschreiben nur die Verschiebungen aus den Dehnungen über die Stabhöhe. Es sind dies die Verschiebungen aus den Spannungen und aus dem thermischen Anteil. Zu „ v_y “ muss noch als dritter Anteil der Durchbiegungsanteil „ $f_{th(y)}$ “ aus der Stabverkrümmung mit

$$f_{th(y)} = -\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \frac{l_0^2}{8} \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})$$

(siehe Kapitel 4) hinzuaddiert werden.

Die Verschiebung „ $V_{(y)ges}$ “ setzt sich somit aus drei Anteilen zusammen:

a) Anteil aus der jeweiligen Faserdurchbiegung „ $f_{th(y)}$ “ an der Stelle: $x = l_{th}(y)/2$

als Hauptanteil

b) sehr geringer Anteil aus den Spannungen: „ $v_{\sigma(y)}$ “ durch Querkontraktion und

Querkompression

c) geringer Anteil aus der thermischen Änderung der Stabhöhe: „ $v_{th(y)}$ “

Allgemein:

$$v_{(y)} = v_{\sigma(y)} + v_{th(y)} \quad (\text{ohne Durchbiegung})$$

$$v_{(y) ges} = f_{th(y)} + v_{(y)} \quad (\text{mit Durchbiegung})$$

Da die Verschiebungen der einzelnen Höhenlinien mit dem Abstand „y“ von der Ausgangssymmetrieachse (ursprüngliche Mittellinie) berechnet werden sollen und „y“ einen Bereich mit vielen Isothermen über die Stabhöhe kennzeichnet, muss der integrale Mittelwert dieser Isothermenanteile zur Berechnung der Verschiebungen gefunden werden. Für die letzten beiden Dehnungsanteile sind folgende Mittelwert-Integrale zu lösen:

$$v_y = y \cdot \left(-\mu \cdot \overline{\varepsilon_{(y)r}} + \overline{\varepsilon_{(y)lr}} \right)$$

$$v_y = y \cdot \left(-\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \overline{\Delta\vartheta_{(y)r}} + \alpha_{tm} \cdot \overline{\Delta\vartheta_{(y)lr}} \right)$$

$$v_y = y \cdot \left[\frac{1}{y} \cdot \int_0^y -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy + \frac{1}{y} \cdot \int_0^y \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy \right]$$

damit wird

$$v_y = -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy + \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy$$

und

$$v_{y\text{ ges}} = -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy + \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy + f_{th(y)} \quad (5.39)$$

mit
$$\Delta\vartheta_{(y)lr} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h}$$

Die Verschiebung im Stab selbst wird zweckmäßig getrennt für die wärmere Stabhälfte mit $v_{a(y)}$ und für die kältere Stabhälfte mit $v_{i(y)}$ bezeichnet und berechnet. Im x-y-Koordinatensystem biegen sich die Stabenden bei einem von oben erwärmten Stab nach unten, d.h. die Faserdurchbiegungen sind negativ zu bezeichnen. In der oberen, wärmeren Stabhälfte wächst der Stab nach oben, $v_{tha(y)}$ ist somit positiv. In der unteren, kälteren Stabhälfte dehnt sich jedoch der Stab nach unten, $v_{thi(y)}$ ist somit negativ. $v_{\sigma a}(y) + v_{\sigma i}(y) = 0$. Die Addition der Verschiebungen aus den Spannungen über die Stabhöhe ist gleich null. Damit ergeben sich für die Gesamtverschiebungen der Fasern in den beiden Stabhälften folgende Berechnungsgleichungen:

$$v_a(y)_{\text{ges}} = -f_{\text{th}}(y) + v_a(y) = -f_{\text{th}}(y) + v_{\text{tha}}(y) + v_{\sigma a}(y)$$

$$\begin{aligned} v_a(y)_{\text{ges}} = & -\frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \frac{l_0^2}{8} \cdot (1 + \varepsilon(y)) \\ & + \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta(y)_{\text{lr}} \cdot dy \\ & - \mu \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta(y)_{\text{r}} \cdot dy \quad \mu = \text{Querkontraktionszahl} = 0.3 \text{ f\u00fcr Stahl) (5.40)} \end{aligned}$$

oder vereinfacht mit Hilfe des Bildes D 6. im Anhang:

$$v_a(y)_{\text{ges}} = -f_{\text{th}(y)} + \alpha_{\text{tm}} \cdot A_{\text{th}} - \mu \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot A_{\sigma}$$

$$v_i(y)_{\text{ges}} = -f_{\text{th}(y)} - v_i(y) = -f_{\text{th}(y)} - v_{\text{thi}}(y) + v_{\sigma i}(y)$$

$$\begin{aligned} v_i(y)_{\text{ges}} = & -\frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \frac{l_0^2}{8} \cdot (1 + \varepsilon(y)) \\ & - \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-y}^0 \Delta\vartheta(y)_{\text{lr}} \cdot dy \\ & + \mu \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-y}^0 \Delta\vartheta(y)_{\text{r}} \cdot dy \end{aligned} \quad (5.41)$$

oder vereinfacht mit Hilfe des Bildes D 6. im Anhang:

$$v_i(y)_{\text{ges}} = -f_{\text{th}(y)} - \alpha_{\text{tm}} \cdot A_{\text{th}} + \mu \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot A_{\sigma}$$

Will man nur die Verschiebung \u00fcber die Stabh\u00f6he ($\Delta h =$ Stabh\u00f6hen\u00e4nderung) ohne Durchbiegungsanteil wissen, so reduzieren sich die Gleichungen (5.40) und (5.41) wie folgt:

$$\Delta h = v_{a \text{ max}} + v_{i \text{ max}} \quad (5.42)$$

(Eine Ableitungsvariante zu den thermischen Verschiebungen „ u_x “ und „ v_y “ siehe Anhang D 6).

$$v_{a \text{ max}} = \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta(y)_{\text{lr}} \cdot dy - \mu \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta(y)_{\text{r}} \cdot dy \quad (5.43)$$

$$-v_{i \text{ max}} = -\alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta(y)_{\text{lr}} \cdot dy + \mu \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta(y)_{\text{r}} \cdot dy \quad (5.44)$$

wegen $\mu \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta(y)_{\text{r}} \cdot dy = 0 = v_{\sigma a}(y) - v_{\sigma i}(y) \quad ; \quad \Delta\vartheta(y)_{\text{r}} = \Delta\vartheta(y)_{\text{lr}} - \Delta\vartheta(y)_{\text{g}}$

denn $\int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta(y)_{\text{r}} \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta(y)_{\text{lr}} \cdot dy - \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta(y)_{\text{g}} \cdot dy$
 $= A_1 - A_1 = 0$

wird
$$\Delta h = \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \vartheta_{(y)\text{lr}} \cdot dy = \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \vartheta_{(y)\text{g}} \cdot dy = \alpha_{\text{tm}} \cdot A_1 \quad (5.45)$$

$$\Rightarrow \Delta h = h_0 \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{mD}} \quad \text{und} \quad h_1 = h_0 (1 + \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{mD}}) . \quad (5.46)$$

Man erkennt, dass sich auf die Stabhöhenänderung „ Δh “ nur der thermische Anteil auswirkt.

$$\Delta h = v_{\text{tha max}} + v_{\text{thi max}} = v_{\text{th ges}}$$

Über die ganze Stabhöhe integriert ergibt sich die Verschiebung aus dem thermischen Anteil zu:

$$v_{\text{th ges}} = \alpha_{\text{tm}} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(\Delta \vartheta_{\text{mD}} + \frac{\Delta \vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \cdot dy = h \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{mD}} = \Delta h. \quad (5.47)$$

6. Darstellung der Genauigkeit der vorgestellten Berechnungsmethode am Versuchsbeispiel 19 / IV

Der Nachrechnung des Versuchs 19/IV (Anhang A Bild A7) werden die Faserlängenänderungen Δl_a , Δl_m und Δl_i entnommen und im nachfolgenden Diagramm den gemessenen, gemittelten Werten gegenübergestellt. Bei einer Stablänge von 1200 mm betrug die mittlere Längenänderung 2,865 mm. Die größte Differenz zwischen Messung und Berechnung liegt in der Außenfaser mit 0,065 mm; das entspricht, auf die Längenänderung der Mittelfaser bezogen,

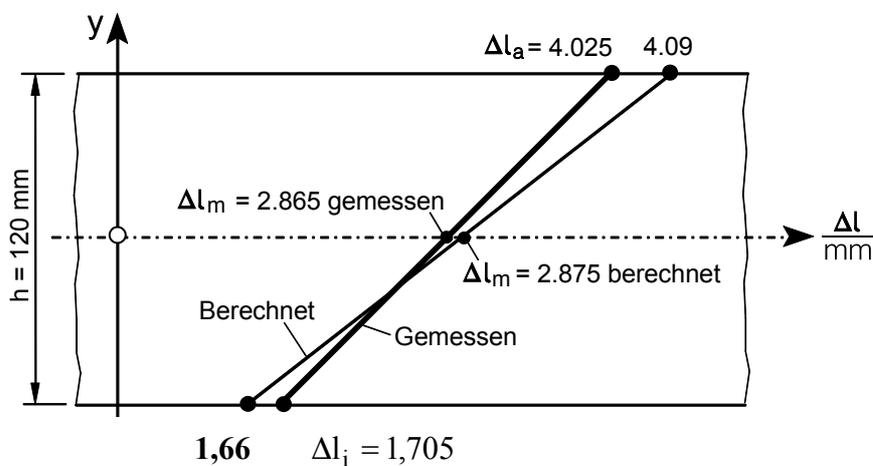


Bild 6.1: Diagramm der gemessenen und berechneten Faserlängen - Änderungen des Versuchs 19/IV

einem Fehler von $\approx 2,3\%$. Messung und Berechnung sind somit im Rahmen der technischen Fehlergrenze deckungsgleich.

7. Zusammenfassung, Ausblick, Anhang, Literaturverzeichnis und Lebenslauf

7.1 Zusammenfassung

Die Gründe für das beobachtete Versagen von thermisch hochbeanspruchten Stahl-Konstruktionen als Abschlussysteme an Industrieöfen werden darin gesehen, dass thermomechanische Spannungen und zugehörige Formänderungen nicht bekannt und damit bei der Dimensionierung nicht berücksichtigt werden. Im Gegensatz zur wohlausgebauten, aber schwer zugänglichen „Thermo-Kontinuumsmechanik“ besteht bei der Berechnung von thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlbau-Profilstäben eine Wissenslücke. Die zunächst nicht erklärbare tulpenförmige Verkrümmung von Ankerständern an Koksöfen und das Auftreten von un-symmetrischen Rissen quer durch Ofenständern und sonstigen tragenden Stahlbauprofilen an Kesselanlagen, konnte nur durch Konstruktionsfehler oder durch bisher nicht bekannte „Thermomechanische Spannungen“ verursacht worden sein. Auf der Suche nach Ursachen, Gründen und Berechnungsgrundlagen zu „Thermomechanischen Spannungen“, wurde zunächst das Formänderungsgesetz mit seinen Faktoren betrachtet. Es zeigte sich, dass Temperaturdifferenzen, die vom spannungslosen geradlinigen Verlauf zwischen den Außenfasertemperaturen abweichen, die Ursache für das Auftreten thermomechanischer Spannungen sind. Die Spannungsgröße wird durch das temperaturabhängige Verhalten der physikalischen Werkstoffkennwerte noch verstärkt. Das Faserverhalten in mechanisch oder thermisch beanspruchten Stäben ist unterschiedlich. Zur Vermeidung von Verwechslungen bei der Berechnung mechanisch bzw. thermisch hervorgerufener Formänderungsgrößen und um den Zusammenhang zwischen den Faserlängenänderungen am gestreckten und am verkrümmten Stab zu erklären, wurden die bekannten Formänderungsgrößen zusammengetragen, allgemeingültig erweitert und um eine verbindende Gleichung zwischen Dehnungen, Verkrümmungen und Radien ergänzt. Hieraus entsprang für eine ungleichmäßige thermische Beanspruchung eines Stabes die Gleichung aller verschiedenen Faserkrümmungen über die Stabhöhe als Ansatz zu einer neuen Differentialgleichung der elastischen Linie. Nach Integration wurde so die Gleichung der Biegelinie aller Fasern gefunden. Damit war die Berechnung der maximalen Durchbiegung jeder Faser und deren Zuordnung zu mechanisch hervorgerufenen Durchbiegungen möglich.

Bei der zu den Formänderungsgrößen gehörigen thermischen Formänderungsarbeitsgleichung wurde gezeigt, dass sich die thermische Formänderungsarbeit aus den Anteilen der Arbeit bei mittlerer Stabverlängerung bzw. Kontraktion und bei Stabverkrümmung zusammensetzt. Letztlich bilden bei allen Vergleichen zwischen mechanischen und thermischen Größen die Energieinhaltsbetrachtungen der Systeme, und dabei vorrangig die Berechnungsgleichungen

der Formänderungsarbeit, gedankliche Brücken. Nach geschlossener Lösung zweier Differentialgleichungen, die den gekrümmten Temperaturverlauf in Stählen bei konstanter und nicht konstanter Wärmestromdichte beschreiben, konnte ein theoretisches Temperaturfeld bei seitlicher Wärmeabströmung berechnet und mit praktischen Temperaturfeldern verglichen werden. Hiermit lagen die spannungsverursachenden Temperaturdifferenzen über die Stabhöhe vor. Die wirkliche Größe dieser Temperaturdifferenzen in jeder Faser konnte unter Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen durch Verschiebung und Verdrehung der Schlusslinie der gemessenen Temperaturverteilung zu einem spannungslosen resultierenden Nullspannungstemperaturverlauf durch das Temperaturfeld, als Differenz zwischen der nichtlinearen Berandung des Feldes und dieser resultierenden Geraden ermittelt werden. Mit Hilfe dieser Temperaturdifferenzen konnten die nichtlinearen Endgleichungen für thermomechanische Spannungen mit zugehörigen Formänderungs-Gleichungen vorgestellt werden. Ihre Aussagefähigkeit wurde mit guter Übereinstimmung zu Versuchsergebnissen (Praktischer Teil, Anhang A) bestätigt. Hiernach kann in thermisch hochbeanspruchten Stahlbauträgern bzw. zusammengesetzten Profilen, durch Druckspannungen in der wärmeren Außenfaser und durch Zugspannungen im mittleren Profilbereich, ein Großteil der zulässigen thermischen Dauerstandfestigkeit blockiert sein. Bei dem Versuch 19/IV (Anhang A) wurde für den thermisch stärksten beanspruchten Querschnitt gezeigt, dass der Versuchsstab, frei aufliegend, allein ohne mechanische Lasten in den Fließbereich geraten ist. Temperaturfeldmessungen rund um Stabquerschnitte und über die Stablänge an ausgeführten thermisch und mechanisch beanspruchten Stahlbau-Konstruktionen zeigten, dass jeder derartig beanspruchte Stab über nichtlineare Temperaturfelder verfügt und dass solange thermomechanische Spannungen auftreten, wie der von außen eingetragene Wärmestrom anhält. Die vorliegende Arbeit liefert dem Konstrukteur ein Berechnungs-Konzept zur Lösung von Problemen an thermisch und mechanisch belasteten, statisch bestimmt gelagerten Stahlbau-Profilstäben. Bei statisch unbestimmten Systemen müssen neben den beschriebenen thermomechanischen Spannungen zusätzlich die Spannungen aus den Zwängungen und danach die so genannten resultierenden Wärmespannungen berechnet werden. Das aus der Mechanik vorhandene Wissen wurde aufbereitet und allgemeinverständlich dargelegt. Insbesondere für den Bau und Betrieb von Industrieöfen stellt die Arbeit eine Bereicherung dar, weil die Ofenkonstrukteure jetzt das Ganze sicherer bauen können. Auch können bestehende Computerprogramme der FEM zur Berechnung statischer Probleme bei Temperaturbelastung mit Hilfe der analytisch erarbeiteten Ergebnisse dieser Arbeit auf Genauigkeit und Anwendungsfreundlichkeit in Bezug auf Berechnung thermomechanischer Spannungen und zugehöriger Verschiebungen überprüft werden. Hierbei ist

sorgfältig die Temperaturverteilung und die Ausgangstemperatur (Aufstelltemperatur) einzugeben und die Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte durch Mittelwerte zu berücksichtigen. Auch ist das Gleichgewicht am verkrümmten Stab nachzurechnen. Die Kenntnis der Stabform (eingeprägte Weggrößen) des thermisch belasteten, statisch bestimmt gelagerten Stahlbauprofilstabes (Faserdurchbiegungen, Verschiebungen aller Fasern, Verkrümmungs- und Stabenddrehwinkel) ist Voraussetzung zur Berechnung von Wärmespannungen aus Zwängungen in einem statisch unbestimmten System. Im Anhang G werden resultierende Wärmespannungen nach Superponierung von thermomechanischen Spannungen und Wärmespannungen dargestellt.

7.2 Ausblick

7.2.1 Zur Beurteilung der Größe auftretender thermomechanischer Spannungen und der Größe auftretender Wärmespannungen in thermisch beanspruchten Stahlbau-Konstruktionen, erscheint eine Dokumentation gemessener Temperaturdifferenzen-Felder im Hochtemperaturbereich bis zur Materialkriechgrenze getrennt nach Stahlbau-Konstruktionsgebieten als Grundlage erforderlich. Dies umsomehr, weil sich die Temperaturfelder theoretisch nur schwer wirklichkeitsnah berechnen lassen und kein Temperaturfeld genau einem anderen entspricht, weil die scheinbar zeitweilig stationären Temperaturverteilungen in thermisch ungleichmäßig beanspruchten Tragwerkselementen durch die Überlagerung beliebiger instationärer Temperatur-Verteilungen entstanden sind und vielen äußeren Einflüssen unterliegen. Meist sind Temperaturverteilungen und Einflüsse nur unzureichend bekannt. Empfehlenswert ist es, bei Temperaturmessungen nach Möglichkeit gleichzeitig auch Formänderungs-Messungen (z.B. wichtige Faserlängenänderungen und Durchbiegungen der Innenfaser oder der Außenfaser) mit durchzuführen. Gelingt ein derartiges, kombiniertes Messprogramm an thermisch ungleichmäßig beanspruchten Konstruktionen, so ist es möglich, die durchschnittliche wirksame Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_w = \Delta\vartheta_{ges}$ “ über die Länge zu berechnen. Jeder Stahlbaubereich, wie z.B. Industrieofenbau, Kraftwerksbau, Reaktorbau, Brücken- und Kranbau, Hüttenindustrie, Hochbau, ja selbst der Fassadenbau, verfügt über eigene, signifikante, zeitabhängige Temperaturverteilungen. Die Auswertung dieser Temperaturfelder ist überall im Prinzip gleich.

- 7.2.2 Zwischen der Behandlung von primären thermomechanischen Spannungen und von sekundären Wärmespannungen ist ein Unterschied zu machen. Nicht nur insofern, als dass beide Spannungsarten unterschiedlich berechnet werden müssen, sondern auch in ihrer unterschiedlichen Gewichtung in einem Sicherheitskonzept. Die Unterscheidung zwischen thermomechanischen Spannungen und Wärmespannungen aus Behinderung der Dehnungen, durch Materialunverträglichkeiten und durch geometrische Unverträglichkeiten erscheint u.a. auch deshalb angebracht, weil Wärmespannungen nicht unmittelbar zum Versagen eines Bauteils führen, jedoch eine schnelle Alterung, Kornzerfall und Materialermüdung herbeiführen können.
- 7.2.3 Die sicherste Methode, thermomechanische Spannungen und Wärmespannungen in Hochtemperaturbereichen zu beherrschen, liegt in der vorbeugenden Anwendung moderner Wärmedämmtechniken und in der Wahl von Konstruktionen, bei denen möglichst wenig „Zwänge“ auf thermisch beanspruchte Konstruktionen ausgeübt werden. So ist es z.B. sinnvoll, komplette Kesselanlagen frei in hohen Gebäuden aufzuhängen oder Spannungen durch den Einbau von Dehnungskompensatoren zu vermeiden. Erfahrungen aus betrieblichen Abläufen sollen sich bei Berechnungen in der Wahl der Sicherheitsfaktoren widerspiegeln.

7.3 Anhang – Inhaltsverzeichnis

Anhang A: Versuche mit ungleichmäßig erwärmten Flacheisenstäben	148
Anhang B: Temperaturprofilmessungen an zehn Ankerständern der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop	172
Anhang C: Arbeitsblatt für den Stahl R St 37-2 nach DIN 17100 bzw. S 235 IR G2 nach EN 10027, Werkstoff Nr. 1.0038	179
Anhang D: Ableitungen und Erläuterungen.....	180
D 1. Geschlossene Lösung der den Temperaturverlauf in einem Flacheisenstab beschreibenden nichtlinearen Differentialgleichung	181
D 1.1 Berechnung der mittleren Wärmestromdichte „ \bar{q} “	185
D 2. Ableitung der beiden ersten korrespondierenden thermomechanischen Momente und Beschreibung der zugehörigen rechnerischen Temperaturdifferenzen	188
D 3. Formelzusammenstellung thermomechanischer Spannungen und zugehöriger Formänderungen (siehe Bild 5.11)	194
D 4. Aufspaltung eines realen eindimensionalen ($\vartheta = \vartheta_{(y)}$) Temperaturfeldes	200
D 5. Rechnerisch konstruktive Einzelschritte vom gegebenen Temperaturteufeld „ A_{ϑ} “ zum resultierenden Temperaturdifferenzen-Feld „ $A_{\vartheta r}$ “	201
D 6. Eine Ableitungsvariante zu den thermischen Verschiebungen „ u_x “ und „ v_y “	202
D 7. Eine Ableitungsvariante des thermomechanischen Momentes	207
D 8. Spannungskategorisierung ; Abgrenzung der Spannungsarten	210
D 9. Thermische Durchbiegung eines Stabes bei konstanter und nicht konstanter Verkrümmung. Rechnerisches Analogieverfahren in Anlehnung an Mohr. Vorzeichenkonvention bei thermischer Beanspruchung..	213
Anhang E: Einfluss der Temperaturabhängigkeit des linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten „α_t“	225
Anhang F: Einfluss der Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls „E“.....	231
Anhang G: Zeichnerische Darstellung von thermomechanischen Spannungen, Wärmespannungen und resultierenden Wärmespannungen	237
Anhang H: Anwendungsbeispiele	241
H 1: Tabellarischer Vergleich der Spannungsverteilung über die Stabhöhe zum Versuch 19/IV aus dem Anhang A und der FEM-Berechnung, Seite 10 ...	242
H 2.: Berechnungsbeispiele zum Einfluss der Wärmeleitfähigkeit „ λ “ und der Gesamt-Wärmeübergangszahl „ α “ (bei seitlicher Wärmeabströmung) auf die Temperaturverteilung bei gegebenen Außenfasertemperaturen des gemessenen Beispiels, Anhang H 4.	243
2.1 Einfluss aus: $\lambda \neq \text{const}$	
2.2 Einfluss aus: $\alpha = \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$	
2.3 Einfluss aus: $\alpha \neq \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$	

H 3. Verschiebungen und Stabhöhenänderung zum Versuch 19/IV.	250
H 4. Auswertung eines Beispiels. Tabellarische Berechnung der thermomechanischen Spannungen über die Stabhöhe eines Flachstahls bei gegebener Temperaturverteilung und Spannungsdiagramm.	253
H 5. Der Einfluss unterschiedlicher Stahlprofile auf die Größe und die Verteilung thermomechanischer Spannungen mit Berechnungstabelle und Nachrechnung mittels FEM.	256
H 6. Thermomechanische Maximalspannungen im Beispiel 19/IV, Anhang A.	262
H 7. Bimetalle. Wärmespannungen und Formänderungen bei gleichmäßiger Temperaturverteilung ($\vartheta_{(y)} = \text{const}$)	263
H 8. Neudimensionierung der Ankerständer der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop	268

Anhang A (Praktischer Teil A)

Versuche mit ungleichmäßig erwärmten Flacheisenstäben

$$b \cdot H \cdot l_0 = 30 \cdot 120 \cdot 1200 \text{ mm, RSt 37-2}$$

1. Beschreibung des Versuchsziels und des Versuchsaufbaus Einige Erfahrungen aus den Versuchen

Aus Kapitel 2 darf entnommen werden, dass in jedem thermisch ungleichmäßig belasteten Körper ein instationäres räumliches Temperaturfeld vorliegt, das von den drei Achsenrichtungen und der Zeit abhängig ist.

$$\vartheta = \vartheta(x, y, z, t) .$$

Geht man davon aus, dass bei dem in dieser Arbeit beschriebenen Problem mit Ankerstäben einer Koksofenbatterie Temperaturverteilungen messbar sind, die etwa eine halbe Stunde Bestand haben, so kann man den Einfluss der Zeit aus den Berechnungen herausnehmen. Damit sind die scheinbar konstanten (stationären) Temperaturverteilungen als Temperaturverteilungen anzusprechen, die aus der Überlagerung beliebiger instationärer Temperaturverteilungen entstanden sind. Wegen der einhalbstündigen, quasi konstanten Temperaturverteilung, liegt bei 1,2 Ofenspielen/Tag und einer Lebensdauer von rd. 35 Jahren die schwelende Beanspruchungszahl bei etwa 740 000. Jetzt sind die Temperaturverteilungen noch von x , y und z abhängig. Wird mit z die Achse in Richtung der Stabdicke bezeichnet, so kann diese Achse aus der Berechnung ausgekammert werden, weil bei den Versuchen mit dünnem Flachstahl die Temperaturen über die Dicke „b“ konstant verlaufen bzw. wie bei den Messungen im Anhang B an ausgeführten Breitflanschprofilen gezeigt, der Einfluss der z -Achse vernachlässigbar klein ist. Die Dimensionsreduzierung (siehe Kapitel 2.6.2) auf die eindimensionale Abhängigkeit „ $\vartheta = \vartheta(y)$ “ ist dadurch möglich, dass das maximale Temperaturfeld über die Stablänge „ x “ gesehen, für die Berechnung der Spannungen ausgewertet wird, dass zur Berechnung von Formänderungen das über die Stablänge gemittelte Temperaturfeld benutzt wird und dass zur Berechnung der genauen Durchbiegungen und der Biegelinie wie in den Kapiteln 5.3.1 und D 9. beschrieben der Verlauf der Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_{1(x)}$ “ benutzt wird. Als nach den ersten theoretischen Überlegungen feststand, dass nur ein geradliniger Temperaturverlauf zwischen den Außenfasertemperaturen spannungslos ist, entstand sofort die Frage nach dem Temperaturverlauf in ungleichmäßig erwärmten Stahl unter realen Bedingungen. Es war zunächst das erste Ziel, Temperaturdifferenzen aufzufinden, die für das Auftreten thermomechanischer Spannungen verantwortlich waren. Danach floss in die Überlegungen das zweite Ziel ein, die mit der ungleichmäßigen Erwärmung verbundene Formänderung kennen zu lernen und mit den theoretischen Gleichungen der Formänderungsgrößen zu vergleichen. So

wurde das geplante Temperaturmessverfahren um die Messungen der Faserlängenänderungen und der Stabdurchbiegung erweitert. Diese zunächst intuitive Planung ergab später die Möglichkeit, das erarbeitete Berechnungsmodell exakt zu überprüfen, weil neben den gesuchten Temperaturdifferenzen auch die Stabform bekannt war. Bei der Auswertung der Versuchsergebnisse ermöglichte darüber hinaus die Kenntnis der Profil-Stab-Durchbiegung sowie die der Stabinnenfaserlänge (Länge der Kälteren Außenfaser), die Berechnung der so genannten

„Wirksamen durchschnittlichen Gesamttemperaturdifferenz“.

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta_w &= \Delta\vartheta_{\text{ges}} = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_{3/4} \\ &= \Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_{3/4}\end{aligned}$$

Diese **wirksame Temperaturdifferenz** „ $\Delta\vartheta_w$ “ (siehe z.B. Tabelle A 2, Fortführung) beinhaltet selbstverständlich alle Einflüsse aus der Temperaturverteilung als auch aus den temperaturabhängigen Werkstoffwerten und stellte sich im Nachhinein als **wichtigste Kontrollgröße** heraus. Bei der weiteren Auswertung der Versuchsergebnisse zeigte es sich, dass zur Nachrechnung von Temperaturverteilungen in Stahlprofilen mindestens fünf Kurvenstützpunkte erforderlich sind. Temperaturkurven sind Kurven höherer Ordnung. Zur exakten Beschreibung einer kubischen Parabel sind vier Kurvenstützpunkte erforderlich. Da Temperaturkurven von höherer Ordnung sind, müssen mindestens fünf Wertepaare zur Verfügung stehen. Damit lässt sich als Näherung mit einem Polynom 4. Grades die Funktion der vorliegenden Temperaturkurve berechnen. Diese fünf Messstellen über die Höhe eines Stahlprofils reichen jedoch nur bei einfachen Profilen und einachsigen Spannungszustand aus. Bei größeren Profilen, zusammengesetzten oder Kastenprofilen ist, wie im Anhang B gezeigt, rund um den Querschnitt zu messen und damit ein Temperaturprofil zu erstellen. Die Anzahl dieser Temperaturprofile (Temperaturmessungen in einer Querschnittsebene) richtet sich nach der Konstruktionslänge. Auch hier sollten mindestens fünf Querschnittstemperaturmessungen über die Konstruktionslänge (Profilstablänge) durchgeführt werden. Die Temperaturprofile sollten gleiche Abstände über die Stablänge haben. Aus den Temperaturprofilen wird dann das zugehörige Temperaturfeld $\vartheta = \vartheta_{(y)}$ aufgezeichnet. Besitzen die gezeichneten fünf Temperaturfelder jeweils fünf gleich hohe Messpunkte über die Stabhöhe y , so können jetzt für fünf Messebenen über die Stablänge die zugehörigen Mittelwerte als Durchschnittstemperaturen jeder Messebene bestimmt werden. Aus diesen fünf Durchschnittstemperaturen entsteht dann das so genannte „Durchschnittstemperaturfeld“. Auf diese Art und Weise wird aus den ursprünglichen fünf Temperaturprofilen das Durchschnittstemperaturfeld über die Stablänge ermittelt. Bei den Versuchen konnten nur drei Messebenen mit Temperaturfühlern (PT 100) besetzt werden. Daher wurden die Mittelwerte mit Hilfe der Trapezformel bestimmt (die An-

wendung der Durchschnittsrechnung, Summe der Messergebnisse dividiert durch die Anzahl der Messungen, hätte zu niedrige Werte ergeben!) Bei drei Temperaturprofilen über die Stabhöhe ($n = 3$) lautet z.B. die Trapezformel für die Auswertung des Temperaturverlaufes in der Längsmessebene 1:

$$\overline{\vartheta}_{y1} = \frac{1}{\ell} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \frac{\vartheta_{Ix} + 2 \cdot \vartheta_{IIx} + \vartheta_{IIIx}}{4}$$

ℓ = Stablänge

A_i = Temperaturteilstück des Temperaturverlaufes der jeweiligen Messebene über die Stablänge.

Liegen z.B. fünf Temperaturverteilungen ($n = 5$) über die Stabhöhe bei gleichen Abständen über die Stablänge vor, so lautet die Trapezformel zur Berechnung der mittleren Temperatur in einer Längsmessebene, z.B. Messebene 1:

$$\overline{\vartheta}_{y1} = \frac{1}{\ell} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \frac{\vartheta_{Ix} + 2 \cdot \vartheta_{IIx} + 2 \cdot \vartheta_{IIIx} + 2 \cdot \vartheta_{IVx} + \vartheta_{Vx}}{8}$$

Ist der kurvenmäßige Verlauf der Temperatur über die Stablänge in einer Längsmessebene z.B. durch ein Polynom 4. Ordnung bekannt, so kann die Berechnung des Mittelwertes mit dem Mittelwertintegral bestimmt werden:

$$\overline{\vartheta}_{y1} = \frac{1}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} \vartheta(x) \cdot dx \quad (\text{siehe auch Kapitel 2.7.1})$$

Bei langen Konstruktionen (Profilen) können etwa 17 bis 21 Querschnitts-Messebenen erforderlich sein (Wärmestromeintrag über einer längeren Strecke; Wendepunkte). Zusätzlich ist als 1. Messprogramm über die Stablänge in möglichst kurzen Abständen zunächst die Temperaturdifferenz zwischen den Außenfasern zu messen und darzustellen. Man erhält das Diagramm der Temperaturdifferenzen zwischen den Stabaußenfasern über die Stablänge (Temperaturverteilung über der Stablänge!). Dadurch wird die Stelle mit der maximalen Temperaturdifferenz zwischen den Außenfasern gefunden (siehe Kapitel 5.6 und Anhang B). Das zu erstellende Temperaturprofil an dieser Querschnitts-Stelle ist für die Berechnung der thermomechanischen Maximalspannungen erforderlich. Im Zusammenhang mit dem Verlauf der Mechanischen Spannungen über die Stablänge, gibt das Längstemperaturprofil Hinweise über weitere gefährdete Stabquerschnittsstellen. Das Durchschnitts-Temperaturprofil über die Stablänge liefert nur die Werte zur Berechnung der Durchschnittsspannungen, der Stabdurchbiegung, der Faserlängenänderungen und der Stabenddrehwinkel. Als einfachste Form eines Stahlbau-Profiles wurde blanker Flachstahl

$$b \cdot h_0 \cdot l_0 = 30 \cdot 120 \cdot 1200 \text{ mm, RSt37 - 2 nach DIN 17 100 ausgewählt.}$$

Diese Abmessungen erschienen versuchsmäßig beherrschbar und gleichzeitig praxisnah. Die Stabhöhe von 120 mm wurde gewählt, weil sich damit mehrere Temperaturmessstellen übereinander anordnen ließen. Im Zuge der Planung geeigneter Wärmequellen für die ungleichmäßige Staberwärmung fiel bei Überschlagsrechnungen auf, dass eine hohe Wärmeleistung notwendig war. So wurden zwei Gasbrenner mit je bis zu 25 KW Wärmeleistung ausgesucht. Im Zusammenhang mit den zu erwartenden hohen Temperaturen kamen nur in Bohrungen unterzubringende Thermofühler PT 100 infrage. Gleichzeitig mit den hohen Temperaturen ergaben sich die Bedingungen einer guten Isolation der Messleitungen und des Einsatzes von Hitzeschutzschilden zum Schutz der Messeinrichtungen und zum Schutz der Staboberkante vor direktem Flammenkontakt. Nach Versuchen mit Temperaturschreibern bot sich als endgültige Lösung nur der allerdings aufwendige 12-Kanal-Prozeßschreiber „Chessel“ 4250 M an. Die Kombination „Chessel“ plus PT 100 erfüllte die Aufgaben der gleichzeitigen Messung und Dokumentation von 11 Temperaturmessstellen mit der Möglichkeit, die einzelnen Temperaturverläufe kurvenmäßig genau zu verfolgen. Zum Messen der Längenänderungen der Haupt-Stabfasern und der maximalen thermischen Stabdurchbiegung boten sich aus dem Werkzeugbau bekannte so genannte Schlagmessuhren an, die über ihren Fühlerkonus Längenänderungen auf 1/100stel mm genau erfassen und anzeigen. Die Vorüberlegungen führten zu folgendem, schematisch dargestellten, Versuchsaufbau:

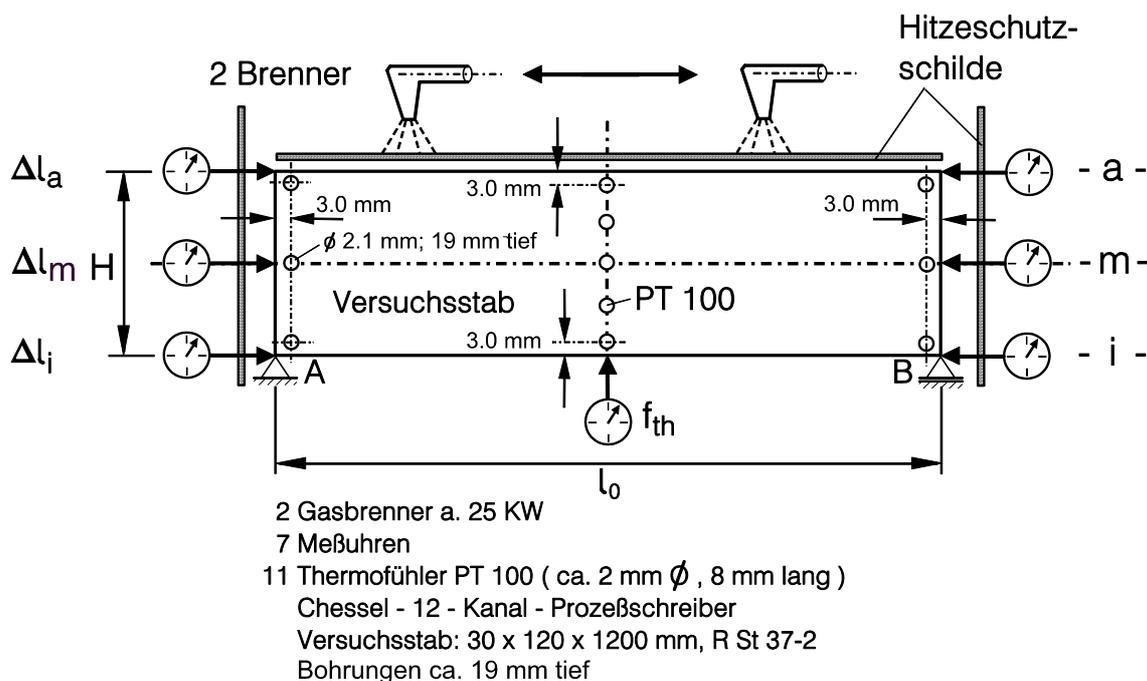


Bild A 1: Versuchsaufbau

2. Versuchsergebnisse von 19 Teilversuchen der Serie IV. Temperaturen über die Stabhöhe, Faserlängenänderungen, Durchbiegungen

Mit Aufnahme der Versuche stellte sich heraus, dass drei Versuchsreihen notwendig waren um zu lernen, die vierte Versuchsreihe mit genauem Ablauf durchzuführen. Die nachfolgenden Tabellen geben die Messergebnisse, gemittelte Temperaturen, Gesamtlängendifferenzen und Durchbiegungen wieder.

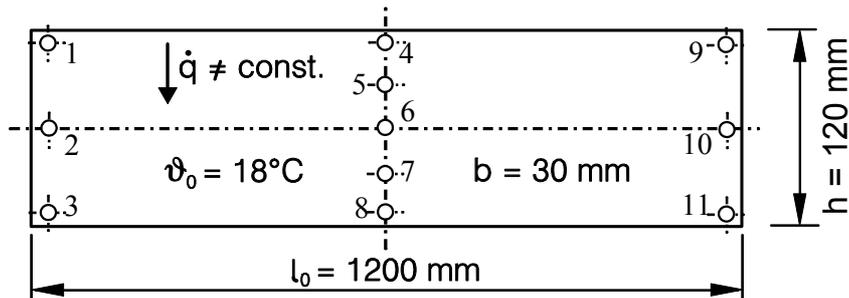


Bild A 2: Versuchsstab aus: S 235 JR G2 bzw.: R St 37-2

Teil- vers. Nr.	Temperaturmeßpunkte /°C										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	71	30	25	62	32	26	24	24	72	35	29
2	76	33	26	82	37	28	25	25	76	36	30
3	82	37	29	103	50	32	27	27	86	40	34
4	90	42	33	121	58	38	31	30	95	45	40
5	95	48	37	139	70	45	37	35	100	50	43
6	105	53	42	158	82	55	43	42	113	55	50
7	109	59	47	181	94	64	51	50	123	63	58
8	115	65	51	200	105	71	57	56	124	65	62
9	135	73	58	220	120	84	70	68	132	73	70
10	134	84	68	236	140	97	83	81	145	80	80
11	146	93	76	258	162	108	96	94	148	85	88
12	152	103	85	282	182	123	110	108	147	92	95
13	183	114	94	302	198	132	125	123	170	102	106
14	195	123	101	323	211	147	135	133	177	109	113
15	207	133	109	348	218	159	147	145	185	118	122
16	206	138	113	366	230	165	153	151	186	121	127
17	215	142	117	383	248	173	158	157	189	125	130
18	218	156	129	398	245	189	176	175	197	136	143
19	210	161	130	438	260	198	183	178	195	139	142

Versuchsserie IV

Meß- und Schreibgerät: " Chessel Prozeßschreiber 4250 M "

Temperaturfühler: " Widerstandsthermofühler PT 100 "

Tabelle A 1: Temperaturmesswerte

Teil- vers. Nr.	Spalten	Spalten	Spalten			$\Delta\vartheta_{\max}$		
	$\vartheta_a = \frac{1+2 \cdot 4+9}{4}$ °C	$\vartheta_m = \frac{2+2 \cdot 6+10}{4}$ °C	$\vartheta_i = \frac{3+2 \cdot 8+11}{4}$ °C	$\vartheta_{mR} = \frac{\vartheta_a + \vartheta_i}{2}$ °C	$\Delta\vartheta^\phi = \vartheta_a - \vartheta_i$ °C	$\Delta\vartheta = \vartheta_4 - \vartheta_8$ °C	ϑ_5	ϑ_7
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	67,00	29,00	26,00	46,500	41,00	38,00	26,30	42,0
2	79,00	31,25	26,50	52,500	52,50	57,00	27,00	48,7
3	93,50	35,25	29,25	61,375	64,25	76,00	29,85	49,3
4	107,00	41,00	33,00	70,000	74,00	91,00	33,70	53,4
5	118,25	47,00	37,50	77,875	80,75	104,00	38,30	65,3
6	133,50	54,50	44,00	88,750	89,50	116,00	44,90	76,6
7	148,50	62,50	51,25	99,875	97,25	131,00	52,10	84,5
8	159,75	68,00	56,25	108,000	103,50	144,00	57,30	94,2
9	176,75	78,50	66,00	121,375	110,75	152,00	67,00	109,1
10	187,25	89,50	77,50	132,625	110,25	155,00	78,50	124,2
11	202,50	98,50	88,00	145,250	114,50	164,00	88,90	140,9
12	216,00	110,00	99,00	157,500	117,00	174,00	99,90	152,1
13	239,00	120,00	112,00	175,500	127,00	179,00	112,70	163,7
14	255,00	132,00	120,00	187,500	135,00	190,00	121,00	175,7
15	272,00	142,00	130,00	201,000	142,00	203,00	131,00	193,3
16	281,00	147,00	136,00	208,500	145,00	215,00	136,90	201,3
17	293,00	153,00	140,00	216,500	153,00	226,00	141,10	207,3
18	303,00	168,00	156,00	229,500	147,00	223,00	157,00	219,0
19	320,00	174,00	157,00	238,500	163,00	260,00	158,40	229,8

Tabelle A 2: Gemittelte Temperaturen nach der Trapezmethode ($\vartheta_0 = 18 \text{ }^\circ\text{C}$)

Teil- vers. Nr.	E_m [10^5 N/mm^2]	α_{tm} [$10^{-6}/^\circ\text{C}$]	$\Delta\vartheta_{3/4}$ abgeschätzt °C	f_{thi} mm	Δl_g mm	$\Delta\vartheta_w$ °C	$\Delta\vartheta_1$ °C	$\Delta\vartheta_2$ °C	$\frac{\Delta l}{H} = a$ $= \Delta\vartheta_{mD}$ °C
	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2,108	12,12	0,10	0,80	0,020	44,0	43,9	-2,90	17,20
2	2,110	12,15	0,20	0,88	0,030	48,3	48,1	4,40	21,10
3	2,100	12,21	0,34	0,93	0,065	50,8	50,5	13,75	24,50
4	2,098	12,27	0,47	1,02	0,130	55,4	54,9	19,10	29,60
5	2,090	12,32	0,60	1,23	0,180	66,5	65,9	14,85	37,40
6	2,087	12,39	0,76	1,41	0,220	75,9	75,1	14,40	46,40
7	2,080	12,46	0,94	1,50	0,330	80,2	79,3	17,95	54,70
8	2,074	12,51	1,06	1,65	0,390	88,3	77,2	26,30	61,90
9	2,060	12,59	1,28	1,84	0,460	97,4	96,1	14,65	74,10
10	2,050	12,62	1,46	1,93	0,610	101,9	100,4	9,85	86,60
11	2,040	12,69	1,65	2,12	0,760	111,3	109,7	4,80	99,20
12	2,040	12,82	1,84	2,17	0,910	112,8	111,0	6,00	110,50
13	2,030	13,00	2,10	2,28	1,000	116,6	115,0	12,00	123,30
14	2,020	13,03	2,28	2,42	1,130	124,0	121,7	13,30	134,10
15	2,010	13,08	2,49	2,67	1,250	136,0	133,5	8,50	147,20
16	2,010	13,13	2,61	2,76	1,300	140,0	137,4	7,60	153,80
17	2,000	13,18	2,73	2,88	1,400	145,5	142,8	10,20	159,60
18	1,990	13,20	2,93	3,03	1,630	153,0	150,1	-3,10	173,50
19	1,990	13,29	3,06	3,10	1,720	155,3	152,2	10,80	180,25

$$E_m = \frac{E_{\vartheta a} + E_{\vartheta i}}{2} \quad ; \quad \Delta\vartheta_{mD} = \frac{\Delta l}{h} = a \quad (b = \text{const.})$$

$$\alpha_{tm} = \frac{\alpha_{t\vartheta a} + \alpha_{t\vartheta i}}{2} \quad ; \quad \Delta\vartheta_{mD} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\vartheta(y)_g - \Delta\vartheta_0) \cdot dy$$

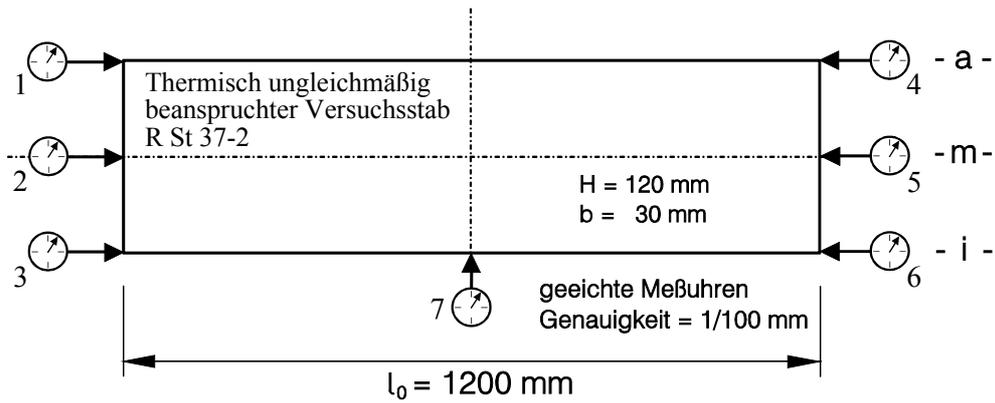
$$\Delta\vartheta_{3/4} = \Delta\vartheta_{mD} \left(\frac{\Delta\alpha_t}{\alpha_{tm}} - \frac{\Delta E}{E_m} \right) \quad \Delta\vartheta_w = \frac{f_{thi} \cdot h \cdot 8}{\alpha_{tm} \cdot l_0 \cdot l_i}$$

$$\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta_w - \Delta\vartheta_{3/4}$$

$$\Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta\phi - \Delta\vartheta_1$$

Tabelle A 2: Fortführung und Auswertung

Die Fortführung der Tabelle A 2 enthält bereits Auswertungsergebnisse, die für die Berechnung thermomechanischer Spannungen erforderlich sind. Die Berechnung ist deshalb schon aus Tabelle A 2 (Fortführung) überschlägig möglich, weil die wirksame Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_w$ “ aus der gemessenen Durchbiegung der Innenfaser, „ $\Delta\vartheta_1$ “ nach Abschätzung von „ $\Delta\vartheta_{3/4}$ “ aus „ $\Delta\vartheta_w$ “ und „ $\Delta\vartheta_{mD}$ “ aus der Fläche „ A_1 “ bzw. aus der Fläche „ A_ϑ “ nach Umrechnung mit dem Programm H.A.N. Dataport, CAD-400, berechnet werden konnte, siehe Bild A 4.



Teil- vers. Nr.	Meßpunkte - der Faseränderungen: Spalte 1 bis Spalte 6, - der Durchbiegung : Spalte 7. Angaben in mm						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0.36	0.18	0.03	0.35	0.17	-0.01	0.80
2	0.39	0.20	0.04	0.38	0.18	0.00	0.88
3	0.43	0.22	0.045	0.43	0.23	0.02	0.93
4	0.47	0.24	0.05	0.50	0.30	0.08	1.02
5	0.54	0.27	0.06	0.63	0.39	0.12	1.23
6	0.66	0.34	0.07	0.77	0.47	0.15	1.41
7	0.69	0.36	0.08	0.90	0.58	0.25	1.50
8	0.76	0.40	0.10	0.96	0.63	0.29	1.65
9	0.85	0.45	0.10	1.14	0.75	0.36	1.84
10	0.95	0.52	0.14	1.28	0.88	0.47	1.93
11	1.04	0.59	0.18	1.42	1.00	0.58	2.12
12	1.10	0.60	0.21	1.55	1.15	0.715	2.17
13	1.19	0.62	0.17	1.78	1.30	0.83	2.28
14	1.27	0.68	0.22	1.92	1.44	0.915	2.42
15	1.35	0.73	0.22	2.10	1.58	1.03	2.67
16	1.39	0.74	0.21	2.22	1.68	1.09	2.76
17	1.42	0.76	0.22	2.28	1.76	1.18	2.88
18	1.38	0.73	0.17	2.61	2.03	1.46	3.03
19	1.41	0.74	0.19	2.63	2.11	1.53	3.10

Versuchsserie IV

Tabelle A 3: Messwerte der Faserlängenänderungen und der Durchbiegung

R = Rechnerisch ; g = gemessen

Teil- vers. Nr.	Δl_{ag} mm	Δl_{ig} mm	Δl_{mg} mm	f_{thg} mm	$\frac{\Delta l_a + \Delta l_i}{2} =$ Δl_{mR} mm
	1	2	3	4	5
1	0.71	0.02	0.35	0.80	0.365
2	0.76	0.03	0.38	0.88	0.395
3	0.86	0.065	0.45	0.93	0.463
4	0.97	0.13	0.54	1.02	0.550
5	1.17	0.18	0.66	1.23	0.675
6	1.43	0.22	0.81	1.41	0.825
7	1.59	0.33	0.94	1.50	0.960
8	1.72	0.39	1.03	1.65	1.055
9	1.99	0.46	1.20	1.84	1.225
10	2.23	0.61	1.40	1.93	1.420
11	2.46	0.76	1.59	2.12	1.610
12	2.65	0.91	1.75	2.17	1.780
13	2.91	1.00	1.92	2.28	1.955
14	3.18	1.13	2.12	2.42	2.155
15	3.45	1.25	2.31	2.67	2.350
16	3.61	1.30	2.42	2.76	2.455
17	3.70	1.40	2.52	2.88	2.550
18	3.99	1.63	2.76	3.03	2.810
19	4.04	1.72	2.85	3.10	2.880

Zum Versuch 19:
Gemittelte Faserlängen-
änderungen:

Größe	gemessen	gemittelt
Δl_a	4,04 mm	4,025 mm
Δl_m	2,85 mm	2,865 mm
Δl_i	1,72 mm	1,705 mm

Tabelle A 4: Addierte Faserlängenänderungen, rechnerischer Mittelwert und Durchbiegung der inneren Stabfaser

Approximation durch Polynom:

Nr.:	
1	$\vartheta_{(y)g} = -0,001678368298 \cdot y^4 + 0,027519783937 \cdot y^3 + 0,541373363595 \cdot y^2 + 2,431416922149 \cdot y + 29,16$
2	$\vartheta_{(y)g} = -0,003648089254 \cdot y^4 + 0,025833598767 \cdot y^3 + 0,723558016404 \cdot y^2 + 3,450279711511 \cdot y + 31,41$
3	$\vartheta_{(y)g} = 0,008317494601 \cdot y^4 + 0,079394862041 \cdot y^3 + 0,428935763935 \cdot y^2 + 2,493123383050 \cdot y + 35,17$
4	$\vartheta_{(y)g} = 0,016918864039 \cdot y^4 + 0,109901767556 \cdot y^3 + 0,204537875184 \cdot y^2 + 2,201667408151 \cdot y + 40,74$
5	$\vartheta_{(y)g} = 0,009939150334 \cdot y^4 + 0,085455274444 \cdot y^3 + 0,506904791533 \cdot y^2 + 3,645285277051 \cdot y + 46,78$
6	$\vartheta_{(y)g} = 0,007997598617 \cdot y^4 + 0,082947856742 \cdot y^3 + 0,668872190801 \cdot y^2 + 4,466496176582 \cdot y + 54,33$
7	$\vartheta_{(y)g} = 0,012314152658 \cdot y^4 + 0,103322974980 \cdot y^3 + 0,602632958847 \cdot y^2 + 4,376335791979 \cdot y + 62,25$
8	$\vartheta_{(y)g} = 0,007803399989 \cdot y^4 + 0,093428227465 \cdot y^3 + 0,834948905466 \cdot y^2 + 5,256543605906 \cdot y + 67,85$
9	$\vartheta_{(y)g} = 0,003473110536 \cdot y^4 + 0,084082181463 \cdot y^3 + 1,070714633384 \cdot y^2 + 6,197152897076 \cdot y + 78,35$
10	$\vartheta_{(y)g} = -0,004415371556 \cdot y^4 + 0,056391160654 \cdot y^3 + 1,349176460137 \cdot y^2 + 7,116544754840 \cdot y + 89,52$
11	$\vartheta_{(y)g} = -0,016688783425 \cdot y^4 + 0,028477486192 \cdot y^3 + 1,890054445164 \cdot y^2 + 8,526380201772 \cdot y + 98,80$
12	$\vartheta_{(y)g} = -0,014710916865 \cdot y^4 + 0,035356033450 \cdot y^3 + 1,841017742407 \cdot y^2 + 8,485674252569 \cdot y + 110,25$
13	$\vartheta_{(y)g} = -0,014676012269 \cdot y^4 + 0,072465702759 \cdot y^3 + 2,059082072442 \cdot y^2 + 7,986128243812 \cdot y + 120,35$
14	$\vartheta_{(y)g} = -0,008462163848 \cdot y^4 + 0,076696802023 \cdot y^3 + 1,840491646551 \cdot y^2 + 8,495069982204 \cdot y + 132,18$
15	$\vartheta_{(y)g} = -0,018853663350 \cdot y^4 + 0,049162721626 \cdot y^3 + 2,306245445742 \cdot y^2 + 10,075519815260 \cdot y + 142,36$
16	$\vartheta_{(y)g} = -0,023425595194 \cdot y^4 + 0,044283436309 \cdot y^3 + 2,537314334807 \cdot y^2 + 10,504313606170 \cdot y + 147,46$
17	$\vartheta_{(y)g} = -0,018694509987 \cdot y^4 + 0,059085179622 \cdot y^3 + 2,425899885253 \cdot y^2 + 10,634571447554 \cdot y + 153,35$
18	$\vartheta_{(y)g} = -0,016152869383 \cdot y^4 + 0,066965987062 \cdot y^3 + 2,280002828287 \cdot y^2 + 9,849636727571 \cdot y + 168,31$
19	$\vartheta_{(y)g} = -0,015641242381 \cdot y^4 + 0,061622487786 \cdot y^3 + 2,352519659695 \cdot y^2 + 11,367286784100 \cdot y + 174,00$

Tabelle A 5: Temperaturverteilungen der Versuchsreihe IV
Berechnete Polynome mit den Kurvenstützpunkten der Tabelle A2 (Excel Programm)

3. Temperaturdifferenzenfeld, signifikante Temperaturen und Temperaturdifferenzen des Versuchs 19/IV

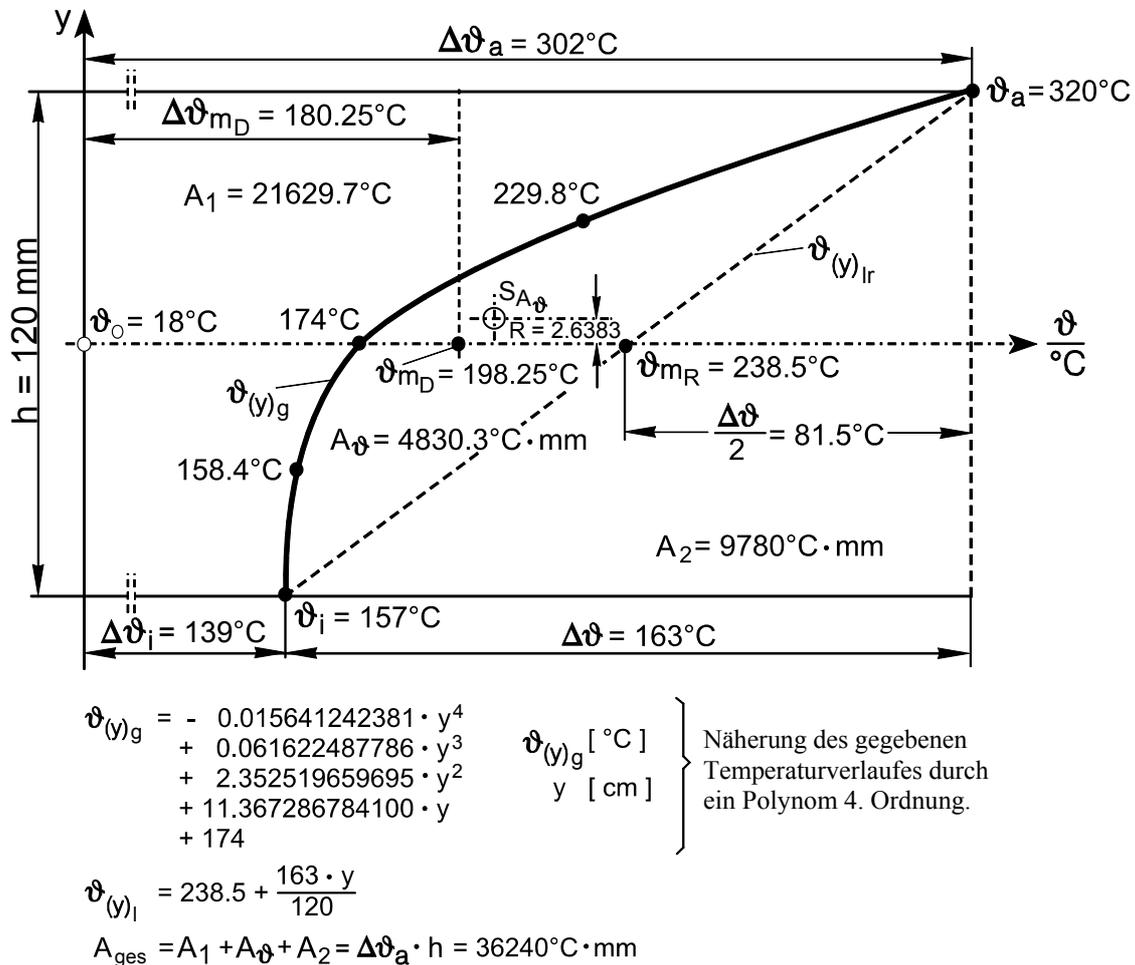


Bild A 3: Temperaturdifferenzen-Feld des Versuchs 19/IV

Gemessen wurden die fünf Temperaturen der Kurvenstützpunkte und die Ausgangstemperatur ϑ_0 am Eisen nach Entnahme aus dem Lager. Für einen thermisch ungleichmäßig beanspruchten Flachstahl mit konstanter Breite lautet die Berechnungsgleichung thermomechanischer Spannungen: $\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$ (Berechnungsformeln siehe Anhang D 3)

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{A_1}{h} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right)$$

$$\text{mit } \frac{A_1}{h} = \Delta\vartheta_{mD} = a = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy ; \Delta\vartheta_{(y)g} = \vartheta_{(y)g} - \Delta\vartheta_0$$

$$\text{und } \Delta\vartheta_1 = \frac{12}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy = \frac{12}{h^2} \cdot A_1 \cdot R_1$$

$\vartheta_{(y)g}$ ist durch angenähertes Polynom (Tabelle A 5) bekannt.

Bevor nachstehend unter Punkt 7. und 8. thermomechanische Spannungen und Formänderungen beispielhaft zum Versuch 19/IV berechnet werden, müssen vorab folgende Auswertungen und vorbereitende Ermittlungen durchgeführt werden.

Unter Punkt 4: Instrumentelle Auswertung der gegebenen

Temperaturdifferenzen-Fläche „ A_ϑ “.

Unter Punkt 5: Allgemeine Temperaturfeldauswertung (Bild A 5)

Unter Punkt 6: Ermittlung der „Wirksamen Temperaturdifferenz“, des

„Wirksamen thermomechanischen Momentes“, der temperaturabhängigen Werkstoffkennwerte und der für die weitere Berechnung erforderlichen Temperaturdifferenzen.

Abschließend erfolgt unter Punkt 9. die Nachrechnung der gemessenen Faserlängen-Änderungen an Hand des ausgewerteten Temperaturfeldes (Bild A 8) zu Versuch 19/IV und unter Punkt 10 werden die Maximalspannungen aufgezeigt.

4. Instrumentelle Auswertung der Temperaturdifferenzen-Fläche „ A_ϑ “

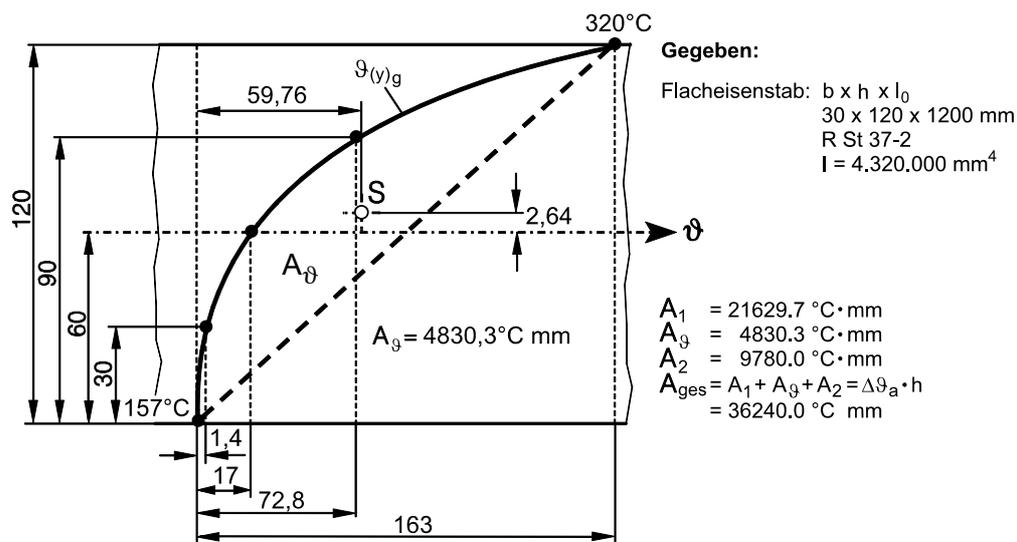


Bild A 4: Instrumentelle Auswertung der Temperaturdifferenzen Fläche „ A_ϑ “ mit den Programmen H.A.N. Dataport, CAD-400

a) Die wirksame Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_w$ “ wird gewonnen

$$\text{aus } f_{thi} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_w \cdot l_0 \cdot l_i}{h \cdot 8}$$

$$\text{es folgt } \Delta\vartheta_w = \frac{f_{thi} \cdot h \cdot 8}{\alpha_{tm} \cdot l_0 \cdot l_i} = \frac{3,1 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 8}{13,29 \cdot 1200 \cdot 1201,72} = 155,5^\circ \text{C} \quad (\text{A 6.1})$$

$$\Delta\vartheta_w = 155,5^\circ \text{C}$$

berechnet später unter Temperaturdifferenzen Punkt d):

$$\Delta\vartheta_w = 155,3^\circ \text{C} \quad \text{also Übereinstimmung!}$$

b) Wirksames Moment „ M_{thw} “

$$\text{aus } f_{th} = \frac{M_{thw} \cdot l_0 \cdot l_i}{E_m \cdot I \cdot 8}$$

$$\text{folgt } M_{thw} = \frac{f_{th} \cdot E_m \cdot I \cdot 8}{l_0 \cdot l_i} = \frac{3,1 \cdot 1,99 \cdot 10^5 \cdot 4320000 \cdot 8}{1200 \cdot 1201,72 \cdot 10^6} = 14,78 \quad (\text{A 6.2})$$

$$M_{thw} = 14,78 \text{ kNm}$$

c) Berechnungsergebnis:

$$M_{th} = M_{th1} - M_{th2}$$

$$= E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{(\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_{3/4})}{h}$$

$$= \frac{1,99 \cdot 10^5 \cdot 4.320.000 \cdot 13,29 \cdot (163 - 10,62 + 2,92)}{10^6 \cdot 120 \cdot 10^6}$$

$$M_{th} = \sim 14,79 \text{ kNm} \quad \text{also Übereinstimmung!}$$

Ermittlung der Werkstoffkennwerte gemäß Anhang „C“ für $\vartheta_{mR} = 238,5^\circ\text{C}$:

$$\alpha_{tm} = 13,29 \cdot 10^{-6} / \text{K} = \frac{\alpha_{(\vartheta a)} + \alpha_{(\vartheta i)}}{2} \quad E_m = 1,99 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 = \frac{E_{(\vartheta a)} + E_{(\vartheta i)}}{2}$$

$$\Delta\alpha_t = \alpha_{(\vartheta a)} - \alpha_{(\vartheta i)} = 0,96 \cdot 10^{-6} / \text{K} \quad \Delta E = E_{(\vartheta i)} - E_{(\vartheta a)} = 0,112 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$K_T = E_m \cdot \alpha_{tm} = 2,6 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\vartheta = \vartheta_{mR} = 238,5^\circ\text{C} \rightarrow \sigma_{z\text{Sch}/t/\vartheta\text{zul}} = 167,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{gewählt: } v = 1,5 \rightarrow \sigma_{th\text{zul}} = 111,5 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der notwendigen Temperaturdifferenzen:

$$\text{a) } \Delta\vartheta'' = \frac{A_\vartheta}{h} = \frac{4830,3}{120} = \sigma_{\text{th zul}} = 40,25 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{b) } \Delta\vartheta_2 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A_\vartheta \cdot R = \frac{120 \cdot 30 \cdot 4830,3 \cdot 2,6383}{4320000} = 10,62 \text{ } ^\circ\text{C} ; \quad \frac{A_\vartheta}{h} = \Delta\vartheta''$$

$$\text{c) } \Delta\vartheta_{\text{mD}} = \vartheta_{\text{mR}} - \vartheta_0 - \Delta\vartheta'' = 238,5 - 18 - 40,25 = 180,25 \text{ } ^\circ\text{C} = \Delta\vartheta_{\text{mR}} - \frac{A_\vartheta}{h} = \frac{A1}{h} = a$$

$$\vartheta_{\text{mD}} = \Delta\vartheta_{\text{mD}} + \vartheta_0 = 180,25 + 18 = 198,25 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{d) } \Delta\vartheta_{\text{W}} = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_{3/4} = 163 - 10,62 + 2,92 = 155,3 \text{ } ^\circ\text{C}; \text{ zum Vergleich siehe (A 6.1)}$$

$$\Delta\vartheta_{3/4} = \Delta\vartheta_{\text{mD}} \cdot \left(\frac{\Delta\alpha_t}{\alpha_{\text{tm}}} - \frac{\Delta E}{E_m} \right) = 2,92 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{e) } \Delta\vartheta_{\text{ar}} = -\frac{A_\vartheta}{h} - \frac{\Delta\vartheta_2}{2} = -40,25 - \frac{10,62}{2} = -45,56 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{f) } \Delta\vartheta_{\text{mr}} = \Delta\vartheta_{\text{mD}} - \Delta\vartheta_{\text{m}} = 180,25 - 156 = 24,25 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{g) } \Delta\vartheta_{\text{ir}} = -\frac{A_\vartheta}{h} + \frac{\Delta\vartheta_2}{2} = -40,25 + 5,31 = -34,94 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{h) } \Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 = 163 - 10,62 = 152,38 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{k) } \Delta\vartheta_1' = \Delta\vartheta_1 - \Delta\vartheta_{\text{ir}} = 139 - 34,94 = 104,06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

7. Tabellarische Auswertung des Versuchs 19/IV mit Spannungsdiagramm

Auswertung des Versuchs 19/IV							
Nr.	y[cm]	$\vartheta_{(y)g}$ [°C]	$\vartheta_{(y)l}$ [°C]	$\vartheta_{(y)r}$ [°C]	$\Delta\vartheta_{(y)r}$ [°C]	$\varepsilon_{(y)th}$ [10 ⁻³]	$\sigma_{(y)th}$ [N/mm ²]
1	6.0	320.0	320.0	274.4	-45.6	-0.606	-120.6
2	5.5	303.6	313.2	268.1	-35.5	-0.472	-93.9
3	5.0	287.6	306.4	261.7	-25.9	-0.344	-68.5
4	4.5	272.0	299.6	255.4	-16.6	-0.221	-43.9
5	4.0	257.0	292.8	249.0	-8.0	-0.106	-21.1
6	3.5	242.9	286.0	242.7	-0.2	0.027	-5.4
7	3.0	229.7	279.2	236.3	6.6	0.088	17.5
8	2.5	217.5	272.5	230.0	12.5	0.166	33.0
9	2.0	206.4	265.7	223.6	17.2	0.229	45.6
10	1.5	196.5	258.9	217.3	20.8	0.276	54.9
11	1.0	187.8	252.1	210.9	23.1	0.307	61.1
12	0.5	180.3	245.3	204.6	24.3	0.323	64.3
13	0.0	174.0	238.5	198.3	24.3	0.323	64.3
14	-0.5	168.9	231.7	191.9	23.0	0.306	60.9
15	-1.0	164.9	224.9	185.6	20.7	0.275	54.7
16	-1.5	162.0	218.1	179.2	17.2	0.229	45.6
17	-2.0	159.9	211.3	172.9	13.0	0.173	34.4
18	-2.5	158.7	204.5	166.5	7.8	0.104	20.7
19	-3.0	158.1	197.8	160.2	2.1	0.028	5.6
20	-3.5	158.0	191.0	153.8	-4.2	-0.056	-11.1
21	-4.0	158.2	184.2	147.5	-10.7	-0.142	-28.3
22	-4.5	158.5	177.4	141.1	-17.4	-0.231	-45.9
23	-5.0	158.5	170.6	134.8	-23.7	-0.315	-62.7
24	-5.5	158.1	163.8	129.4	-28.7	-0.381	-75.8
25	-6.0	157.0	157.0	122.1	-34.9	-0.464	-92.3

Nr.	Fasernummer
y[cm]	Faserkoordinate: y = 6.0... -6.0
$\vartheta_{(y)g}$	gegebenen Temperaturverlauf: $\vartheta_{(y)g} = -0.0156412 \cdot y^4 + 0.0616225 \cdot y^3 + 2.3525197 \cdot y^2 + 11.367287 \cdot y + 174$ [°C]; y[cm]
$\vartheta_{(y)l}$	linearer Temperaturverlauf: $\vartheta_{(y)l} = 238.5 + 163 \cdot y / 12$ [°C]
$\vartheta_{(y)r}$	rechnerischer Nullspannungs-Temperaturverlauf: $\vartheta_{(y)r} = \vartheta_{mD} + \Delta\vartheta_1 \cdot y/h$ [°C] $= 198.25 + 152.38 \cdot y / 12$ [°C]
$\Delta\vartheta_{(y)r}$	nichtlineare Temperaturdifferenzen: $\Delta\vartheta_{(y)r} = \vartheta_{(y)r} - \vartheta_{(y)g}$
$\varepsilon_{(y)th}$	nichtlinearer Dehnungsverlauf: $\varepsilon_{(y)th} = 0.00001329 \cdot \Delta\vartheta_{(y)r}$
$\sigma_{(y)th}$	Thermomechanischer Spannungsverlauf: $\sigma_{(y)th} = 199000 \cdot \varepsilon_{(y)th}$ [N/mm ²]

Tabelle A 6: Auswertung des Versuchs 19/IV

$$\sigma_{th(y)max} = -121 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{tha} \gg \sigma_{th zul} = 111,5 \text{ N/mm}^2, \text{ also unzulässig!}$$

D.h.: Die thermische Belastung ist bereits ohne mechanische Lasten unzulässig! (Nachweisverfahren 1 nach DIN 18 800, Spannungsnachweis, $\sigma_v / f_{y,d} \leq 1$, hier $\sigma_{th(y)} / \sigma_{th zul} \leq 1$)

Diagramm des Spannungsverlaufes

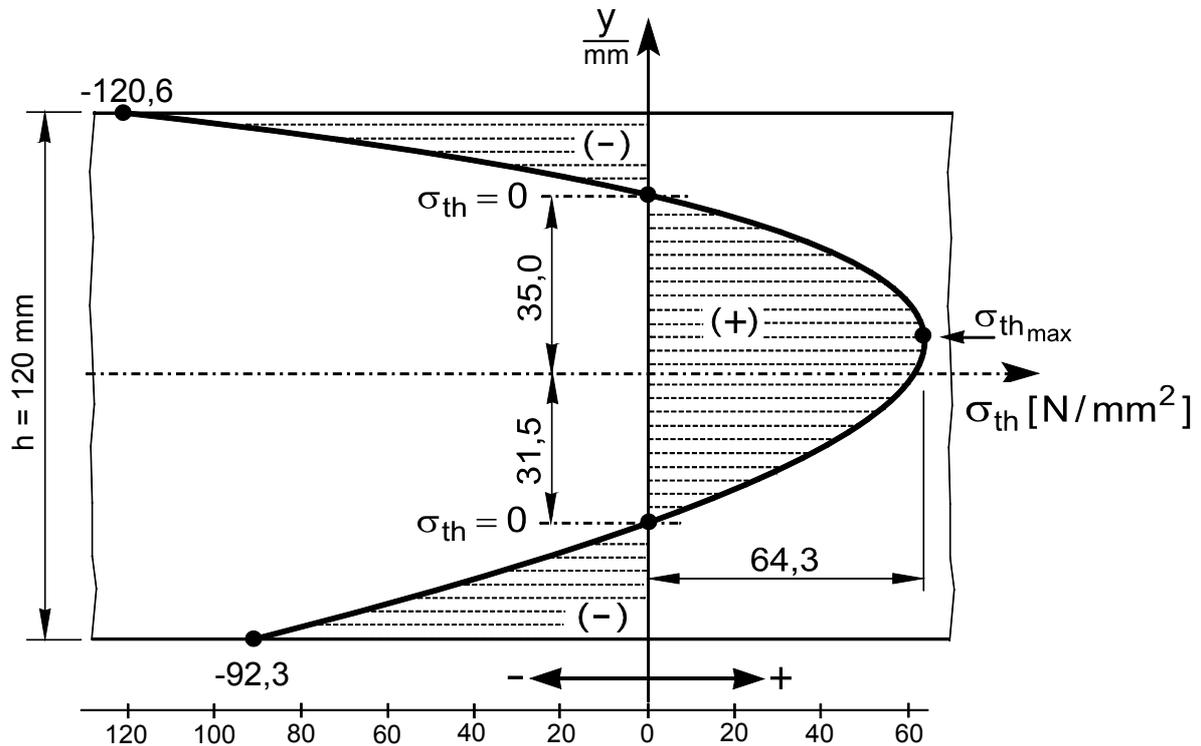


Bild A 6: Versuch 19/IV Durchschnittsspannungsverlauf über die Stabhöhe

8. Nachrechnung der Durchbiegung der Innenfaser

Allgemein ohne Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte (ohne $\Delta\vartheta_{3/4}$)

$$f_{th(y)} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{h \cdot 8} + \frac{\alpha_{tm}^2 \cdot \Delta\vartheta_1^2 \cdot l_0^2}{h^2 \cdot 8} \cdot \left(h \cdot \frac{\Delta\vartheta_1'}{\Delta\vartheta_1} + \frac{h}{2} + y \right) ; \Delta\vartheta_1 \hat{=} \overline{\Delta\vartheta_1}$$

über die Stablänge.

$$\begin{aligned} y = -\frac{h}{2} &\Rightarrow f_{thi} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{h \cdot 8} + \frac{\alpha_{tm}^2 \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2 \cdot \Delta\vartheta_1'}{h \cdot 8} \\ &= \frac{13,29 \cdot 152,38 \cdot 1200^2}{10^6 \cdot 120 \cdot 8} + \frac{13,29 \cdot 152,38 \cdot 1200^2 \cdot 104,06}{10^{12} \cdot 120 \cdot 8} \\ &= 3,0377 + 0,0042 = 3,04 = \text{Durchschnittswert} \end{aligned}$$

$$f_{thi} = \sim 3,04 \text{ mm} ; \text{ gemessen: } 3,1 \text{ mm}$$

Also Übereinstimmung!

Kurzform für die thermische Durchbiegung der Innenfaser:

$$f_{\text{thi}} = \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0 \cdot l_i}{h \cdot 8} \quad \text{mit } l_i = l_0 + l_0 \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta'_i$$

Überschlagsrechnung : $f_{\text{thi}} \cong \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta \cdot l_0^2}{h \cdot 8}$

Anmerkung zur Durchbiegungsgleichung:

Bei technischen Berechnungen kann zur Ermittlung der Durchbiegung der Innenfaser die Gleichung der Überschlagsrechnung benutzt werden. Die Ergebnisse liegen um etwa 5 % zu hoch im sicheren Bereich.

9. Nachrechnung der gemessenen Faserlängen-Änderungen

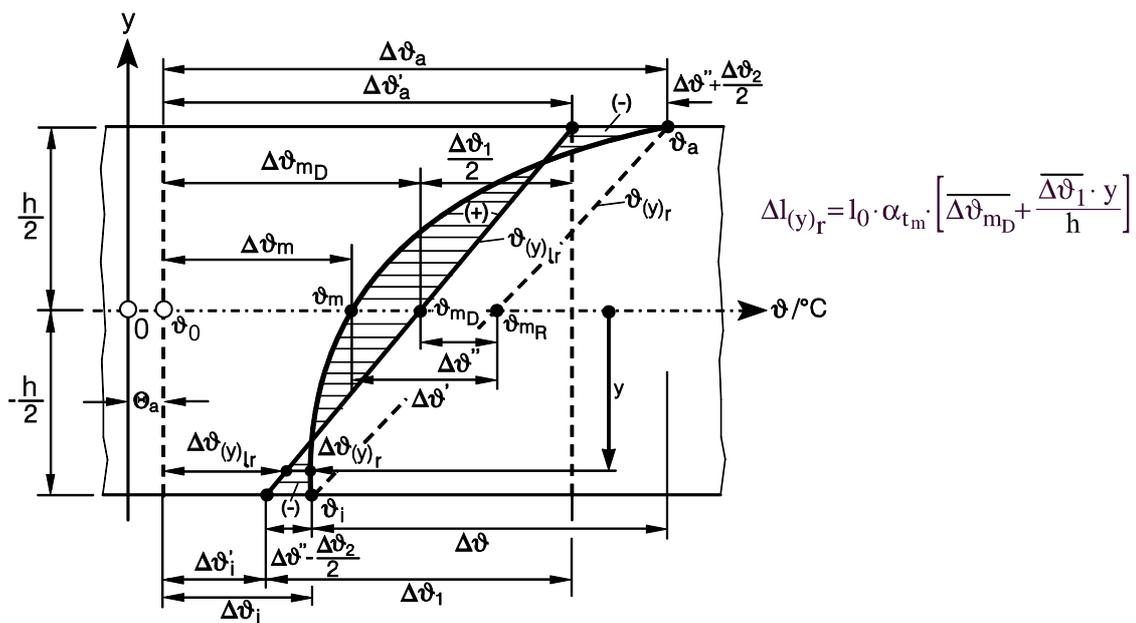


Bild A 7: Zugehöriges Temperaturfeld mit resultierendem Nullspannungstemperaturverlauf, $\vartheta_{(y)lr}$ nach Auswertung der Temperaturdifferenzen-Fläche

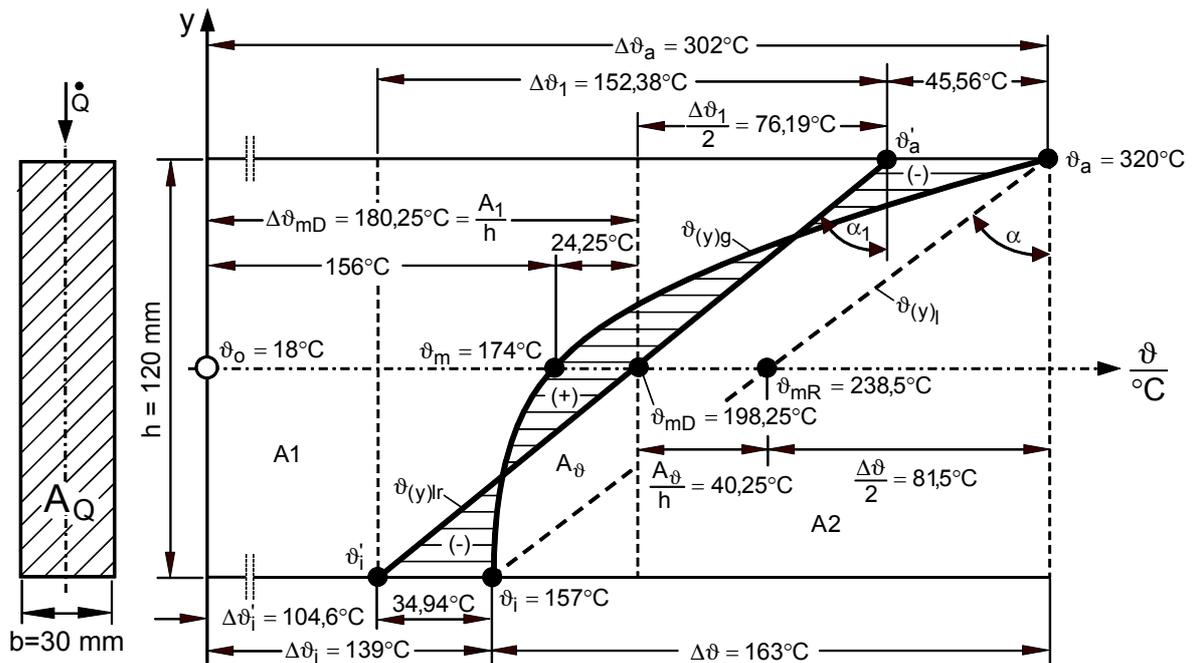


Bild A 8: Temperaturfeld des Versuches 19/IV nach Auswertung mit berechneten Zahlenwerten

a) Gemessene, gemittelte Faserlängenänderungen:

$$\Delta l_{ag} = 4,025 \text{ mm} ; \Delta l_m = 2,865 \text{ mm} ; \Delta l_{ig} = 1,705 \text{ mm}$$

Rechnerischer Mittelwert

$$\Delta l_{mR} = \frac{\Delta l_{ag} + \Delta l_{ig}}{2} = \frac{4,025 + 1,705}{2} = 2,865 \text{ mm}$$

b) Berechnung der Faserlängenänderungen

$$\Delta l_{(y)r} = l_0 \cdot \alpha_{tm} \left[\overline{\Delta \vartheta_{mD}} + \frac{\overline{\Delta \vartheta_1} \cdot y}{h} \right] ;$$

$$y = 0 :$$

$$\Delta l_{(y)r} = 1200 \cdot \frac{13,29}{10^6} \cdot 180,25 = 2,8746$$

$$\Delta l_{(y)r} = 2,87 \text{ mm} = \Delta l_m$$

$\overline{\Delta \vartheta_{mD}}$ und $\overline{\Delta \vartheta_1}$ sind über die Stablängen aus mehreren Querschnittstemperaturfeldern gemittelte Werte

$$y = \frac{h}{2} : \Delta l_{(y)r} = l_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta \vartheta_{mD} + \frac{\Delta \vartheta_1}{2} \right) = 1200 \cdot \frac{13,29}{10^6} \left(180,25 + \frac{152,38}{2} \right) = 4,0896$$

$$\Delta l_{(y)r} = 4,09 \text{ mm} = \Delta l_a$$

$$y = -\frac{h}{2} : \Delta l_{(y)r} = l_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta \vartheta_{mD} - \frac{\Delta \vartheta_1}{2} \right) = 1200 \cdot \frac{13,29}{10^6} \cdot \left(180,25 - \frac{152,38}{2} \right) = 1,6595$$

$$\Delta l_{(y)r} = 1,66 \text{ mm} = \Delta l_i \quad \Rightarrow \quad \text{Also Übereinstimmung}$$

Das Beispiel 19/IV liefert noch einige weitere Werte:

1. Verkrümmungsradius

$$R_{thi} = \frac{h \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})}{\alpha_t \cdot \Delta \vartheta_1} ; y = -\frac{h}{2} : \varepsilon_{(y)} = \alpha_t \cdot \Delta \vartheta'_i = \frac{13,29 \cdot 104,06}{10^6}$$

$$h = 120 \text{ mm} ; \Delta \vartheta_1 = 152,38 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$R_{thi} = 59337,394 \text{ mm}$$

$$R_{thi} = 59,337 \text{ m} = \text{Verkrümmungsradius}$$

2. Verkrümmungswinkel:

$$2.1 \quad \widehat{\varphi}_{th} = \frac{M_{th} \cdot l_0}{E_m \cdot I} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta \vartheta_1}{h} \cdot l_0$$

$$= \frac{13,29 \cdot 152,38}{10^6 \cdot 120} \cdot 1200$$

$$\widehat{\varphi}_{th} = 0,0202513$$

oder

$$2.2 \quad \widehat{\varphi}_{th} = \tan \alpha_1 = \frac{\Delta l_a - \Delta l_i}{h} = \frac{4,0896 - 1,6595}{120}$$

$$\widehat{\varphi}_{th} = \frac{2,4301}{120} = 0,0202508$$

d.h., mit Punkt 2.1 gute Übereinstimmung

$$2.3 \quad \varphi^\circ = \widehat{\varphi} \cdot 57,29578 = 1,1601^\circ$$

2.4 Stabenddrehwinkel

$$\widehat{\varphi}_{th1} = \frac{1}{2} \widehat{\varphi}_{th} = 0,0101256$$

Anmerkung: Für Übersichtsrechnungen bei $b = \text{const}$ ergaben sich aus dem Versuch 19/IV folgende Berechnungsformeln:

$\Delta\vartheta_w = \sim 0,95 \cdot \Delta\vartheta$	Wirksame Temperaturdifferenz
$M_{th} = \sim 0,95 \cdot E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$	Wirksames thermisches Moment
$f_{thi} = \sim 0,95 \cdot \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta}{h} \cdot \frac{l_0^2}{8}$	Reale Stabdurchbiegung der Innenfaser
$\Delta l_m = \sim l_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot 1,1 \cdot \Delta\vartheta$	Verlängerung der Mittelfaser
$\sigma_{tha} = \sim -K_T \cdot 0,28 \cdot \Delta\vartheta$	Spannungen in der wärmeren Faser
$\sigma_{thm} = \sim K_T \cdot 0,15 \cdot \Delta\vartheta$	Spannungen in der Mittelfaser
$\sigma_{thi} = \sim -K_T \cdot 0,21 \cdot \Delta\vartheta$	Spannungen in der kälteren Faser

10. Berechnung der Maximalspannungen in den drei Hauptfasern

Im Normalfall werden die Durchschnittsspannungen nach Punkt 7. nicht ermittelt. Stattdessen wird das zugehörige maximale Temperaturdifferenzen-Feld ausgewertet und die Maximalspannungen in den drei Hauptfasern berechnet. Das positive Spannungs-Maximum liegt etwas außerhalb der Stabmitte und ist etwa 2,5% größer als in der Stabmitte. In diesem Fall wird auf eine Spannungsberechnung nach Auswertung des nachfolgenden maximalen Temperaturdifferenzen-Feldes des Versuchs 19/IV verzichtet, weil gemäß Tabelle A 6. bereits die Durchschnittsspannung in der wärmeren Außenfaser [Nr. 1] den zulässigen Wert der Dauerstandfestigkeit überschritten hat.

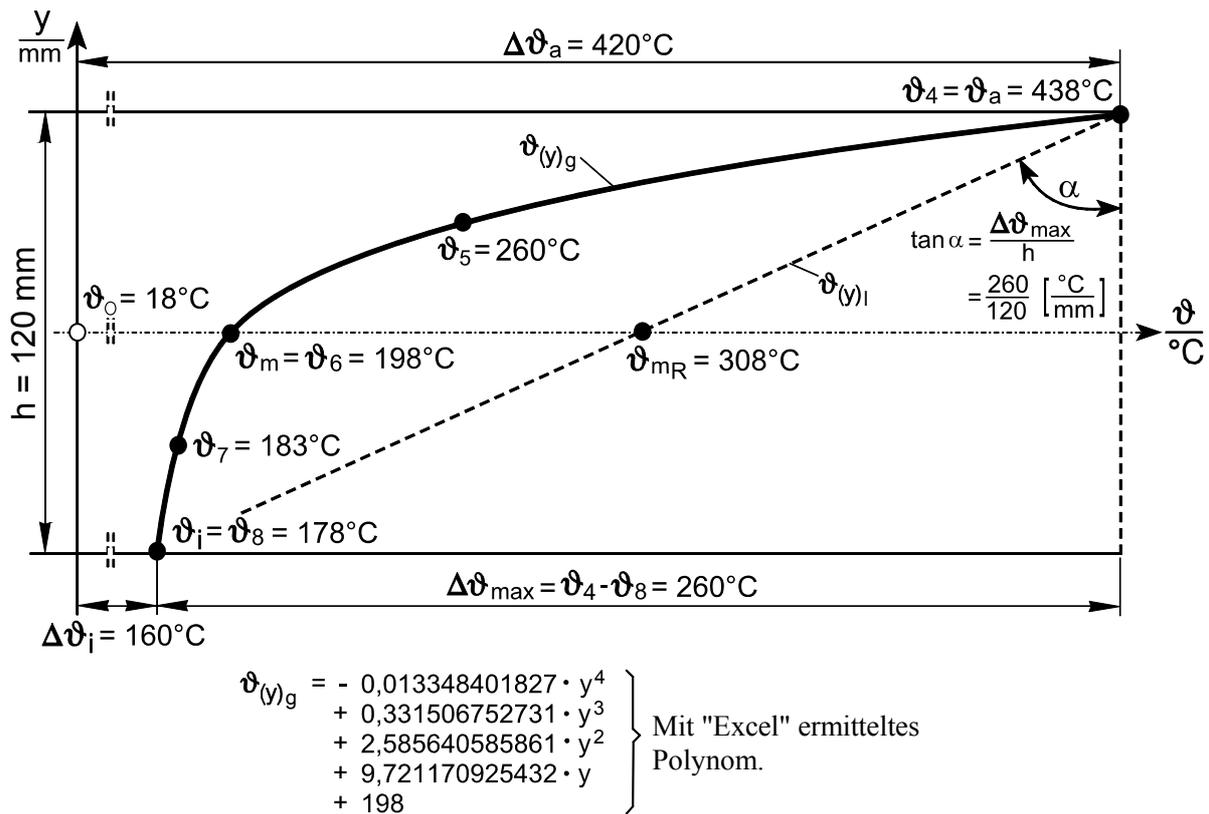


Bild A 9: Maximales Temperaturdifferenzen-Feld zum Versuch 19/IV

Auswertung des maximalen Temperaturdifferenzenfeldes

$$A_{\text{ges}} = 52560 \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{mm} \quad ; \quad A_1 = 27858,002 \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{mm}$$

$$\frac{A_1}{h} - \Delta\vartheta_0 = \Delta\vartheta_{\text{mD}} = 214,15 \text{ } ^\circ\text{C} \quad ; \quad R_1 = 8,72628 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} A\vartheta = 9101,998 \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{mm} \\ R = 7,57 \text{ mm} \end{array} \right\} A\vartheta \cdot R = 68903,278 \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{mm}^2$$

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_{\text{max}} = 260 \text{ } ^\circ\text{C} \quad ; \quad \Delta\vartheta' = \frac{A\vartheta}{h} = \frac{9101,998}{120} = 75,85 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta\vartheta_1 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A_1 \cdot R_1 = \frac{120 \cdot 30 \cdot 27858,002 \cdot 8,72628}{4320000} = 202,581 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta\vartheta_2 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A\vartheta \cdot R = \frac{120 \cdot 30 \cdot 9101,998 \cdot 7,57013}{4320000} = 57,42 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 = 260 - 57,42 = 202,58 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (\text{Kontrollrechnung})$$

Anhang B (Praktischer Teil B)

Temperaturprofilmessungen an zehn Ankerständern der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop

1. Messergebnisse und maximales Temperaturfeld des Ankerständers 142 L sowie das Durchschnittslängstemperaturfeld

Auf der RAG-Kokerei Prosper (Baujahr 1983/84) werden an jeder Koksofenbatterie die 7m hohen Öfen durch vor Kopf angeordnete Breitflansch-Träger HE 650-B, DIN 17100, aus Baustahl R St 44-2 zusammengehalten und durch Federpakete vorgespannt. Diese Ankerständer sind ca. 12 m lang und besitzen aus wärmedämmtechnischen Gründen zwischen der Ofenpanzerung und dem Ankerständer im unbelasteten Zustand einen Luftspalt von 30mm. Dass auch diese moderne Stahlkonstruktion noch thermisch sehr stark beansprucht wird und beachtliche Temperaturdifferenzen-Felder vorhanden sind, sollte durch Messungen aufgezeigt werden. Für zukünftige Konstruktionen wird ein Luftspalt von ≥ 60 mm als geeignet angesehen, da einige Ankerständer, nach Beobachtung vor Ort, den Ofenpanzer berührten. Der Ofenbetrieb ist intermittierend d.h., beim Füllen der Öfen mit Kokskohle finden eine Abkühlung und danach eine Erwärmung statt. Im Ofen selbst herrschen Temperaturen unter Luftabschluss bis 1250 °C. Nach außen hin sind die Öfen stark wärmegeädämmt. Trotzdem flutet eine große Wärmeleistung nach außen und beansprucht thermisch auch die Ankerständer. Es liegt eine schwellende thermische Beanspruchung während der Koks-Garungszeiten vor. Zur Ermittlung der thermomechanischen Spannungen in diesen Ankerständern wurden zehn Temperaturprofilmessungen an der aus der Erfahrung wärmsten Stelle in Höhe des unteren Ofentürverschlusses rund um das Breitflansch-Profil (Bild B 1 und Tabelle B 1) durchgeführt. Für die Berechnung der Stabdurchbiegung waren zusätzliche Temperaturprofilmessungen am Ankerständer 142 L erforderlich. Das Bild B 4 stellt nach Auswertung der Profile die gemittelte Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_1$ “ über die Stablänge dar. Dargestellt wird zuvor nur das in Längsrichtung des Stabes wirkende Durchschnittstemperaturdifferenzen-Feld aus den zehn Temperaturprofilen und das maximale Temperaturfeld (Bild B 2 und Bild B 3). Wegen Geringfügigkeit kann auf eine Darstellung und Berechnung des auf die Querachse bezogenen Temperaturfeldes verzichtet werden. Es wurden Koksöfen ausgesucht, die kurz vor dem Ende der Garungszeit standen und in Kürze gedrückt werden sollten.

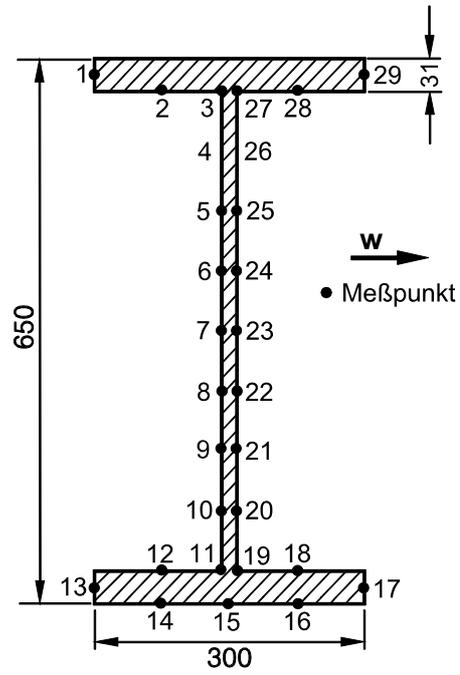


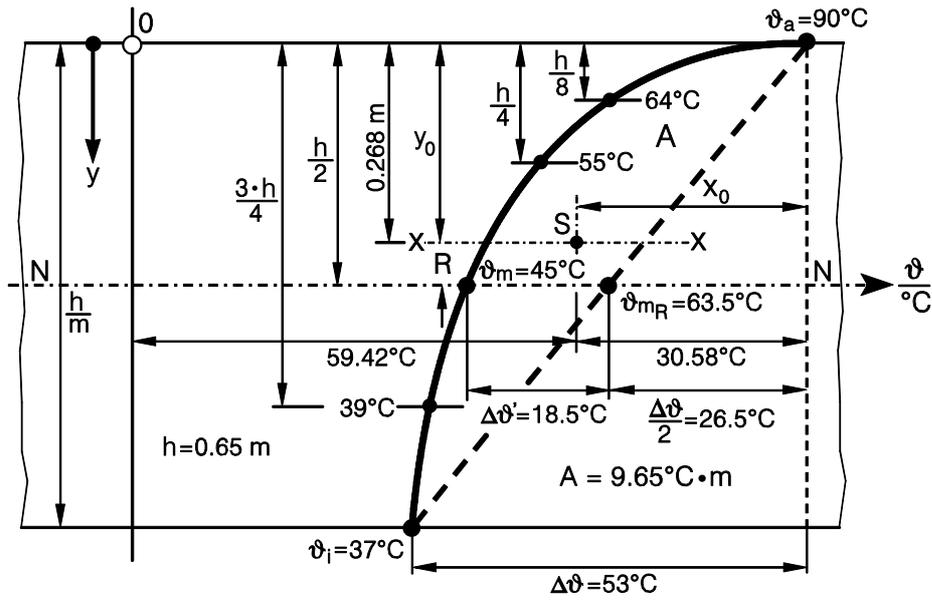
Bild B 1: Querschnitt Ankerständer HE 650-B mit den Messpunkten 1 bis 29 als Temperaturprofil

Temperaturmessung Ankerständer

Datum: 19.06.1996
 Messgerät: Technoterm 3600
 Fe - CuNi (7)
 (Fe - Konst.) Messbereich: -20 ... + 500°C
 Wetterdaten: Windrichtung: West
 Windstärke: 3m/s
 Lufttemperatur: +21°C

Messpunkt Ofen NR.: Nr.:	MS Ankerständer				Bereich untere Türverriegelung					
	128 R	128 L	132 R	132 L	136 R	136 L	140 R	140 L	142 R	142 L
29	81	63	82	77	61	88	62	80	60	103
1	94	65	73	100	90	100	100	79	93	100
2	77	61	72	85	80	81	92	75	88	92
3	76	61	71	74	78	75	86	70	87	90
4	72	64	72	80	76	70	80	69	75	80
5	68	61	66	65	71	60	74	68	70	71
6	53	58	61	56	64	55	70	60	66	63
7	51	56	56	55	59	50	66	55	61	58
8	48	53	54	55	58	48	61	51	57	52
9	46	51	52	52	57	47	58	48	55	49
10	44	48	79	49	55	47	54	47	52	47
11	42	44	47	47	51	45	50	48	50	42
12	38	44	45	45	48	43	48	47	48	38
13	33	41	42	43	46	41	46	44	45	37
14	32	36	41	40	40	39	36	42	43	35
15	32	34	41	39	38	37	35	34	42	35
16	32	31	35	37	37	35	32	32	40	35
17	27	26	32	34	32	31	31	31	38	35
18	31	30	34	35	32	33	33	32	36	34
19	34	30	34	38	32	33	34	33	35	37
20	33	30	33	40	33	33	35	35	35	37
21	34	31	32	43	33	35	36	39	35	39
22	37	34	34	45	33	35	37	42	37	42
23	43	36	37	48	35	37	40	45	39	45
24	47	40	40	54	37	39	45	48	40	48
25	55	42	44	62	41	42	54	51	45	53
26	69	52	53	64	47	50	59	54	51	60
27	63	57	55	73	56	58	62	61	58	68
28	53	55	57	69	55	56	60	62	62	70

Tabelle B 1: Temperaturmessung Ankerständer



Meßebene: Unterer Ofentürverschluß

Bild B 2: Durchschnittstemperaturfeld aus den zehn gemessenen Temperaturprofilen

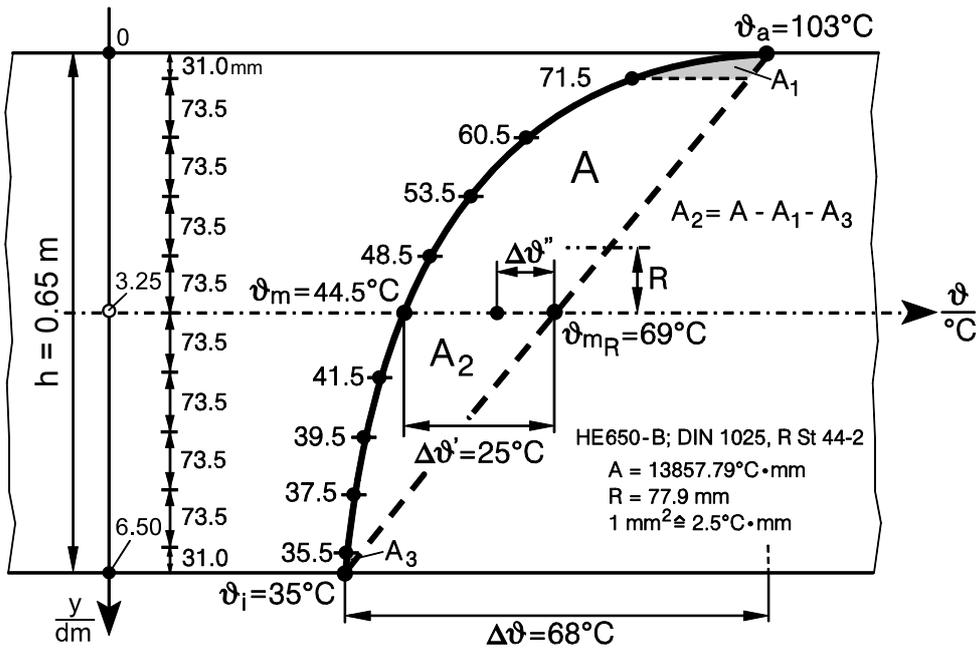


Bild B 3: Maximales Temperaturfeld aus dem maximalen Temperaturprofil des Ankerständers 142 L. Messebene: Unterer Türverschluß

Approximation der Temperaturverteilung Bild B 3 durch Polynom:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{(y)} = & 0,0012099 \cdot y^{10} - 0,043744 \cdot y^9 \\
 & + 0,68539 \cdot y^8 - 6,0956 \cdot y^7 \\
 & + 33,8531 \cdot y^6 - 121,6864 \cdot y^5 \\
 & + 283,8147 \cdot y^4 - 418,7568 \cdot y^3 \\
 & + 369,4296 \cdot y^2 - 183,3157 \cdot y \\
 & + 103,0 \quad [^{\circ}\text{C}] \\
 & y \text{ [dm]}
 \end{aligned}$$

Gemittelte Temperaturverteilung über die Stablänge

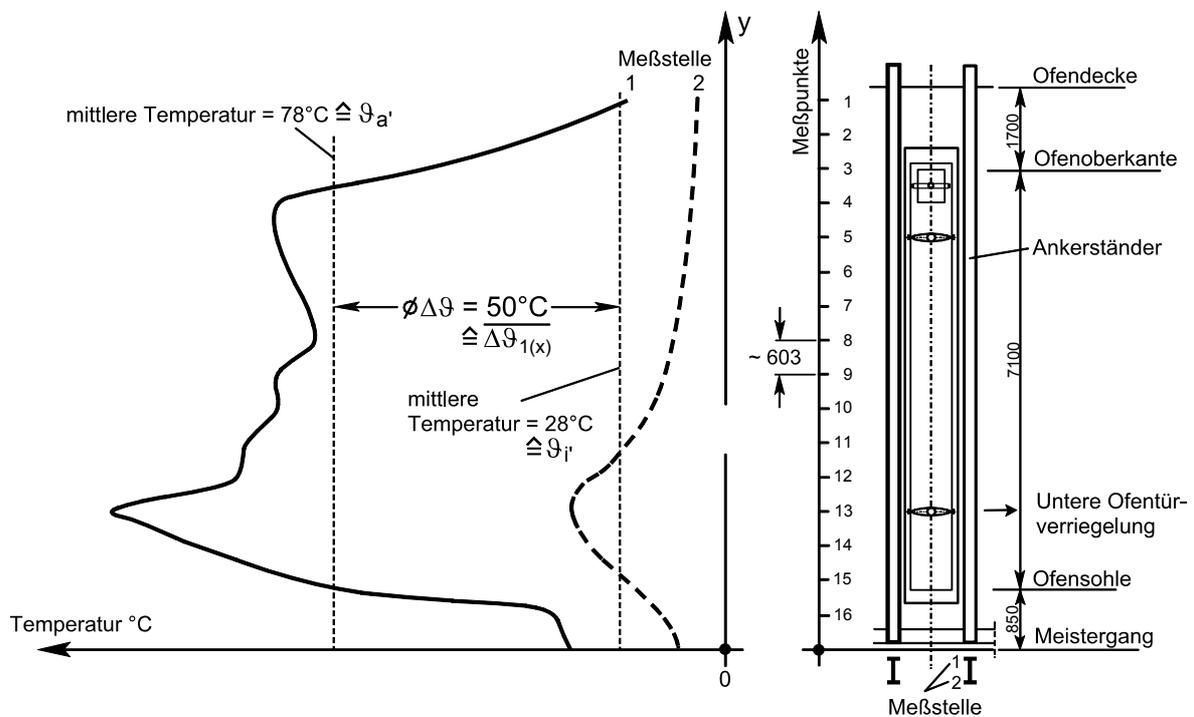


Bild B 4: Gemittelte Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_1(x)$ “ des Ankerständers 142 L über die Stablänge

2. Auswertung der Messergebnisse des Ankerständers 142 L.

Vergleicht man das Durchschnittstemperaturfeld Bild B 2 mit dem maximalen Temperaturfeld Bild B 3 des Ankerständers 142 L, so ist sofort ersichtlich, dass zur Ermittlung thermo-

mechanischer Spannungen nur das Temperaturfeld 142 L mit maximalen Temperaturdifferenzen herangezogen werden kann.

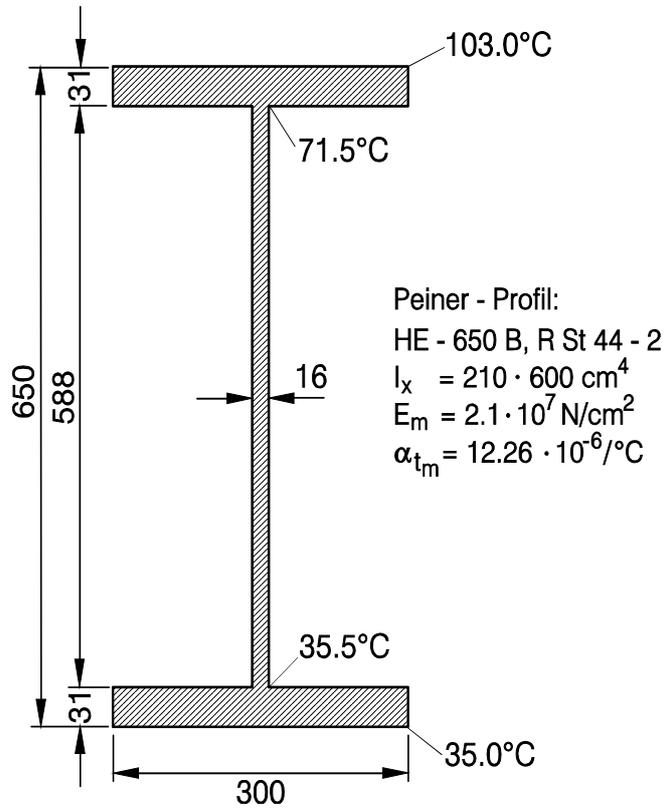


Bild B 5: Ankerständerprofil 142 L mit maximalen Temperaturen

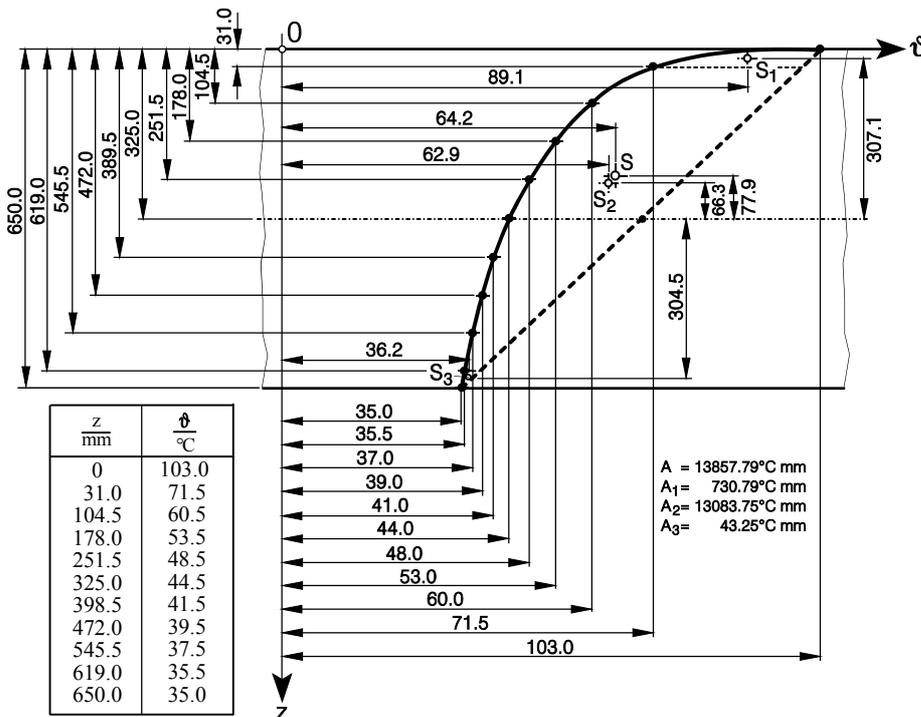


Bild B 6: Instrumentelle Auswertung des maximalen Temperaturdifferenzen-Feldes des Ankerständers 142 L mit H.A.N. Dataport, CAD-400

Daten aus Bild B 6:

$$\Delta\vartheta = 68^\circ\text{C} = \Delta\vartheta_{\max} \quad \vartheta_{\text{mR}} = 69^\circ\text{C}$$

$$A_1 = 730,79^\circ\text{C} \cdot \text{mm} \quad R_1 = 307,1\text{mm}$$

$$A_2 = 13.083,75^\circ\text{C} \cdot \text{mm} \quad R_2 = 66,3\text{mm}$$

$$A_3 = 43,25^\circ\text{C} \cdot \text{mm} \quad R_3 = -304,5\text{mm}$$

Berechnung der erforderlichen Temperaturdifferenzen ; $b \neq \text{const}$:

$$\begin{aligned} 1. \quad \Delta\vartheta_2 &= \frac{H}{I} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_i \cdot R_i = \frac{H}{I} [b_1 \cdot A_1 \cdot R_1 + b_2 \cdot A_2 \cdot R_2 - b_3 \cdot A_3 \cdot R_3] \\ &= \frac{65}{210600} [30 \cdot 73,079 \cdot 30,71 + 1,6 \cdot 1308,375 \cdot 6,63 - 30 \cdot 4,325 \cdot 30,45] \\ &= \frac{65}{210600} \cdot 77256,036 \end{aligned}$$

$$\Delta\vartheta_2 = 23,84^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \Delta\vartheta'' &= \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n b_i \cdot h_i} \\ &= \frac{(b_1 \cdot A_1 + b_2 \cdot A_2 + b_3 \cdot A_3)}{(b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3)} \\ &= \frac{(30 \cdot 73,079 + 1,6 \cdot 1308,375 + 30 \cdot 4,325)}{(30 \cdot 3,1 + 1,6 \cdot 58,8 + 30 \cdot 3,1)} \end{aligned}$$

$$\Delta\vartheta'' = 15,8^\circ\text{C}$$

$$3. \quad \Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 = 68 - 23,84 = 44,16^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_{\text{mD}} = \vartheta_{\text{mR}} - \Delta\vartheta'' = 69 - 15,8 = 53,2^\circ\text{C}$$

Spannungs- und Durchbiegungsberechnung siehe Anhang H 8.

Anhang C: Arbeitsblatt für den Baustahl R St 37-2 nach DIN 17100 bzw. S 235 JR G2 nach DIN EN 10027, Werkstoffnummer 1.0038

Temperatur	Alle Baustähle SEW – 310	Alle Baustähle EC 3 Teil 1.2	Alle Baustähle EC 4 Teil 1.2	Thermodynamischer Proportionalitätsfaktor	EC 4 Teil 1.2 und Mannesmann WB 400 R 1995 (R St 37-2) S 235 JR G2 >16 ≤ 40 mm
ϑ	α_t	λ ¹⁾	E	$K_T = E \cdot \alpha_t$	$\sigma_{Z, Sch/t/\vartheta}$ ²⁾
$^{\circ}\text{C}$	$10^{-6} / \text{K}$	$\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$	G Pa	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2 \cdot \text{K}}$	N / mm^2
-100	10,8		217	2,344	
0	11,7	54	214	2,504	
20	11,9	53,3	214	2,547	225
100	12,5	50,7	208	2,600	216
200	13,0	47,3	193	2,509	175
250					155
300	13,6	44,0	171	2,326	135
350					120
400	14,1	40,7	150	2,115	95
³⁾ 450	Kriechgrenze				49
500	14,5	37,4	128	1,856	
600	14,9	34,0	66	0,983	

1) $\lambda = 54 - 3,33 \cdot 10^{-2} \cdot \vartheta$ (EC 3, Teil 1.2) ; 2) Dauerstandfestigkeit = Zeitstandfestigkeit aus Zugversuchen (Sch = schwellend)

3) 450 $^{\circ}\text{C}$ = Kriechgrenze ; 4) Maximal zulässige resultierende Temperaturdifferenz:

$$\Delta\vartheta_{(y)r \max} = \frac{\sigma_{Z, Sch/t/\vartheta_{zul}}}{E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot v}$$

Tabelle C: Temperaturabhängige Werkstoffkennwerte für den Hochtemperaturbereich bis zur Kriechgrenze

Anhang D

Ableitungen und Erläuterungen

- D 1. Geschlossene Lösung der den Temperaturverlauf in einem Flacheisenstab beschreibenden nichtlinearen Differentialgleichung
 - D 1.1 Berechnung der mittleren Wärmestromdichte „ \bar{q} “
- D 2. Ableitung der beiden ersten korrespondierenden thermomechanischen Momente und Beschreibung der zugehörigen rechnerischen Temperaturdifferenzen
- D 3. Formelzusammenstellung thermomechanischer Spannungen und zugehöriger Formänderungen (siehe Bild 5.11)
- D 4. Aufspaltung eines realen eindimensionalen ($\vartheta = \vartheta_{(y)}$) Temperaturfeldes
- D 5. Rechnerisch konstruktive Einzelschritte vom gegebenen Temperaturteufeld „ A_{ϑ} “ zum resultierenden Temperaturdifferenzen-Feld „ $A_{\vartheta r}$ “
- D 6. Eine Ableitungsvariante zu den thermischen Verschiebungen „ u_x “ und „ v_y “
- D 7. Eine Ableitungsvariante des thermomechanischen Momentes
- D 8. Abgrenzung der Spannungsarten
- D 9. Thermische Durchbiegung eines Stabes bei konstanter und nichtkonstanter Verkrümmung. Rechnerisches Analogieverfahren in Anlehnung an Mohr. Vorzeichenkonvention bei thermischer Beanspruchung.

Anhang D

D 1. Geschlossene Lösung der den Temperaturverlauf in einem Flacheisenstab beschreibenden nichtlinearen Differentialgleichung

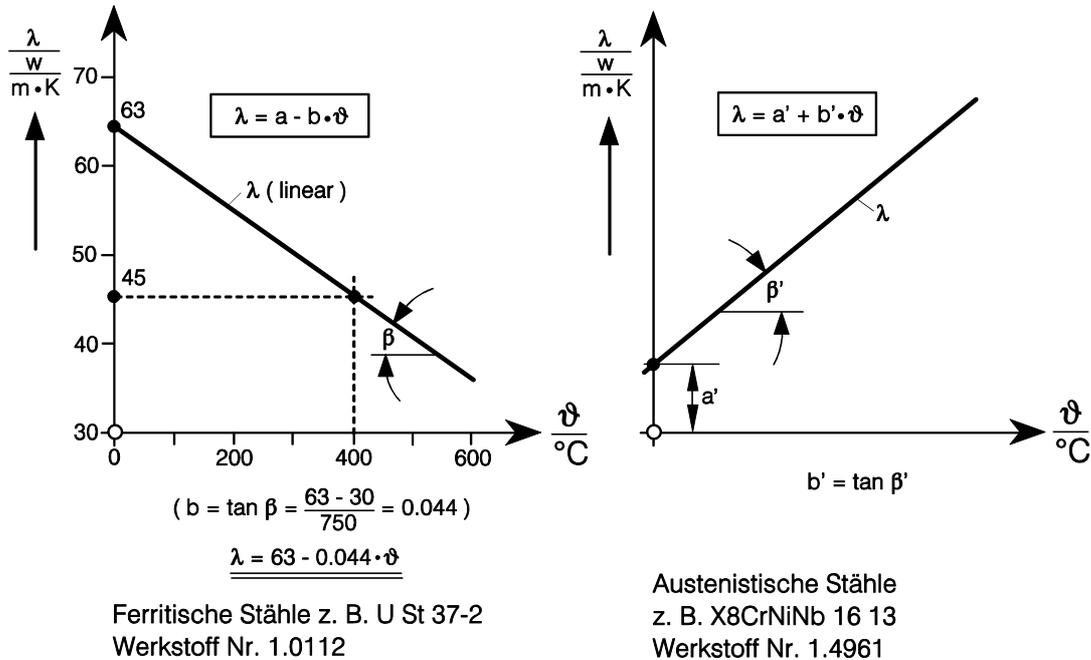
Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \lambda(\vartheta)$ 

Bild D 1.1: Wärmeleitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur [30, 94, 109]

In Kapitel 2.7.1 ist mit Formel (2.7.7) die zugehörige Differentialgleichung abgeleitet worden.

Die DGL lautet:

$$\frac{d\lambda}{d\vartheta} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 + \lambda \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0$$

setzt man $\frac{d\lambda}{d\vartheta} = \varphi(\vartheta)$ und $\frac{d\vartheta}{dx} = p$, dann wird

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = p \cdot \frac{dp}{d\vartheta}$$

Aus obenstehender DGL folgt dann:

$$\varphi(\vartheta)p^2 + \lambda(\vartheta) \cdot p \cdot \frac{dp}{d\vartheta} = 0$$

$$\text{oder } p \cdot \left(\varphi \cdot p + \lambda \cdot \frac{dp}{d\vartheta} \right) = 0 .$$

1. Fall:

In jedem Punkt X zum betrachteten Intervall $0 \leq X \leq H$ gilt $p = 0$.

Dann ist im Intervall $p = \frac{d\vartheta}{dx} = 0$; d.h. ϑ ist unabhängig von x und im Intervall $0 \leq X \leq H$ konstant.

2. Fall:

In keinem Punkt X des Intervalls ist $p = 0$, d.h. es gilt überall $p \neq 0$, dann muss gelten

$$\varphi \cdot p + \lambda \cdot \frac{dp}{d\vartheta} = 0 .$$

Andere Fälle können im stationären Fall $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ und wenn im Innern des Intervalls weder Wärmequellen noch Wärmesenken vorhanden sind, nicht eintreten.

Aus der Gleichung

$$\varphi \cdot p + \lambda \cdot \frac{dp}{d\vartheta} = 0$$

$$\text{folgt mit } \varphi = \frac{d\lambda}{d\vartheta} \quad \text{sofort} \quad \lambda \cdot \frac{dp}{d\vartheta} = -p \cdot \frac{d\lambda}{d\vartheta}$$

$$\text{oder } \frac{dp}{p} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\text{d.h.: } \ln p = -\ln \lambda + \ln c_1 ,$$

c_1 willkürliche Konstante, $c_1 > 0$

$$\text{oder } p = \frac{c_1}{\lambda} ; \quad \text{also } \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{c_1}{\lambda} ,$$

$$\lambda(\vartheta) \cdot d\vartheta = c_1 \cdot dx$$

$$\text{und damit } \int \lambda(\vartheta) \cdot d\vartheta = c_1 \cdot x + c_2 ; \quad c_2 \text{ willkürliche Konstante.} \quad (\text{D 1.1})$$

Betrachtet man nun einen Stoff, bei dem in einem gewissen Temperaturbereich \underline{B} λ eine lineare Funktion der Temperatur ϑ ist

$$\lambda = a - b \cdot \vartheta , \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

Wegen $\lambda > 0$ folgt dann $a - b \cdot \vartheta > 0$

oder $\frac{a}{b} > \vartheta$,

d.h. für jedes Teil B gilt: $\frac{a}{b} > \vartheta$ (D 1.2)

Aus (D 1.1) ergibt sich dann $\int (a - b \cdot \vartheta) \cdot d\vartheta = c_1 \cdot x + c_2$ oder

$$a \cdot \vartheta - \frac{b}{2} \cdot \vartheta^2 = c_1 x + c_2 \quad (\text{D 1.3})$$

(Die Integrationskonstante ist bereits in (D 1.1) als c_2 aufgeschrieben).

Aus der quadratischen Gleichung (D 1.3) für ϑ folgt dann

$$\begin{aligned} a \cdot \vartheta - \frac{b}{2} \cdot \vartheta^2 &= c_1 \cdot x + c_2 & \left| \cdot \frac{2}{b} \right. \\ \frac{2a \cdot \vartheta}{b} - \vartheta^2 &= \frac{2 \cdot c_1 \cdot x}{b} + \frac{2c_2}{b} & \left| - \frac{a^2}{b^2} \right. \\ \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta}{b} - \vartheta^2 - \frac{a^2}{b^2} &= \frac{2 \cdot c_1 \cdot x}{b} + \frac{2 \cdot c_2}{b} - \frac{a^2}{b^2} \\ \vartheta^2 - \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta}{b} + \frac{a^2}{b^2} &= \frac{a^2}{b^2} - \frac{2 \cdot c_1 \cdot x}{b} - \frac{2 \cdot c_2}{b} \\ \left(\vartheta - \frac{a}{b} \right)^2 &= \frac{a^2}{b^2} - \frac{2 \cdot c_1 \cdot b \cdot x}{b^2} - \frac{2 \cdot c_2 \cdot b}{b^2} \\ \vartheta &= \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2 \cdot c_1 \cdot b \cdot x - 2 \cdot c_2 \cdot b}{b^2}} \end{aligned}$$

Aus (D 1.2) folgt dann, weil eine Quadratwurzel im Bereich der reellen Zahlen nicht negativ ist, dass die Lösung mit dem Pluszeichen entfällt:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2 - 2 \cdot c_1 \cdot b \cdot x - 2 \cdot c_2 \cdot b}{b^2}} & (\text{D 1.4}) \\ \vartheta &= \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \frac{2 \cdot c_1 \cdot x}{b} - \frac{2 \cdot c_2}{b}} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Konstanten verwendet man (aus den Randbedingungen) zweckmäßig:

(D1.3) in der Gestalt:

$$-\frac{2 \cdot c_1 \cdot x}{b} - \frac{2 \cdot c_2}{b} = \vartheta^2 - \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta}{b}$$

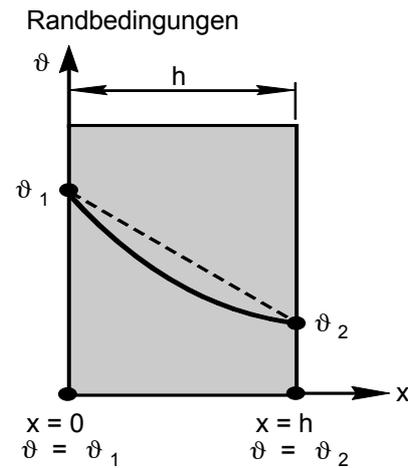
Für $x = 0$ sei $\vartheta = \vartheta_1$:

$$-\frac{2 \cdot c_2}{b} = \vartheta_1^2 - \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_1}{b}$$

Für $x = h$ sei $\vartheta = \vartheta_2$:

$$-\frac{2 \cdot c_1 \cdot h}{b} + \vartheta_1^2 - \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_1}{b} = \vartheta_2^2 - \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_2}{b}$$

$$-\frac{2 \cdot c_1}{b} = \frac{1}{h} \left(\vartheta_2^2 - \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_2}{b} - \vartheta_1^2 + \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_1}{b} \right)$$



Damit ergibt sich für den Radikant aus (D 1.4):

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{h} \left(\vartheta_2^2 - \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_2}{b} - \vartheta_1^2 + \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_1}{b} \right) \cdot x + \vartheta_1^2 + \frac{2 \cdot a \cdot \vartheta_1}{b} \\ &= \frac{a^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \vartheta_1 + \vartheta_1^2 + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{a}{b} \cdot \vartheta_2 + \vartheta_2^2 \right) - \left(\frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{a}{b} \cdot \vartheta_1 + \vartheta_1^2 \right) \right] \cdot x \\ &= \left(\frac{a}{b} - \vartheta_1 \right)^2 + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_2 \right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_1 \right)^2 \right] \cdot x \end{aligned}$$

und damit:

$$\vartheta = \frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b} - \vartheta_1 \right)^2 + \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_2 \right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_1 \right)^2 \right] \cdot \frac{x}{h}} \quad (D 1.5)$$

Liegt bei einem Material, z.B. austenitischem Stahl, mit zunehmender Temperatur ein Anstieg der Wärmeleitfähigkeit λ und in einem bestimmten Temperaturbereich ein linearer Verlauf der Kurve $\lambda = \lambda(\vartheta)$ mit

$$\lambda = a' + b' \cdot \vartheta$$

vor, so lautet die Lösung der DGL für eindimensionalen Temperaturverlauf

$$\vartheta = -\frac{a'}{b'} + \sqrt{\left(\frac{a'}{b'} + \vartheta_1\right)^2 + \left[\left(\frac{a'}{b'} + \vartheta_2\right)^2 - \left(\frac{a'}{b'} + \vartheta_1\right)^2\right] \cdot \frac{x}{h}} \quad (\text{D 1.6})$$

Selbst unter der Voraussetzung $\dot{q} = \text{const}$ verläuft somit die Temperatur in einem Bauelement kurvenförmig. Die Temperaturdifferenzen zwischen der geraden Linie, die die Außenfasertemperaturen verbindet und der berechneten, nichtlinearen Kurve verursachen Spannungen.

D 1.1 Berechnung der mittleren Wärmestromdichte „ \bar{q} “

Die den Temperaturverlauf $\vartheta = \vartheta_{(x)}$ bei stationärem eindimensionalem Wärmefluss beschreibende nichtlineare Differentialgleichung lautet

$$\frac{d\lambda}{d\vartheta} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 + \lambda \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0$$

$$\text{mit } \lambda = \lambda(\vartheta)$$

Verläuft „ λ “ entsprechend $\lambda = a - b \cdot \vartheta$ (1) ergibt sich als geschlossene Lösung wie gezeigt

$$\vartheta_{(x)} = \frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b} - \vartheta_a\right)^2 + \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i\right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a\right)^2\right] \cdot \frac{x}{h}}$$

Mit den Integrationskonstanten

$$c_1 = \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a\right)^2 \quad \text{und}$$

$$c_2 = \frac{1}{h} \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i\right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a\right)^2\right]$$

lautet die individuelle Lösung der Differentialgleichung

$$\vartheta_{(x)} = \frac{a}{b} - \sqrt{c_1 + c_2 \cdot x} \quad (2)$$

$$\text{differenziert: } \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{c_1 + c_2 \cdot x}} \cdot c_2 \quad (3)$$

Diese Lösung soll zur Berechnung der Wärmestromdichte „ \dot{q} “ benutzt werden:

$$\text{Fourier: } \dot{q}_{(x)} = -\lambda_{(\vartheta)} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (4)$$

$$(1) \text{ und } (2) \text{ in } (4): \dot{q}_{(x)} = -\left[a - b \cdot \left(\frac{a}{b} - \sqrt{c_1 + c_2 \cdot x} \right) \right] \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (5)$$

(3) in (5) eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{(x)} &= -\underbrace{\left[a - b \left(\frac{a}{b} - \sqrt{c_1 + c_2 \cdot x} \right) \right]}_{\lambda_{(\vartheta)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{c_1 + c_2 \cdot x}} \cdot c_2}_{\frac{d\vartheta}{dx}} \\ &= -\left(a - a + b \cdot \sqrt{c_1 + c_2 \cdot x} \right) \cdot \frac{c_2}{2 \cdot \sqrt{c_1 + c_2 \cdot x}} \\ \dot{q}_{(x)} &= -\frac{1}{2} \cdot b \cdot c_2 = \text{const} \end{aligned}$$

und mit c_2 wird die mittlere Wärmestromdichte:

$$\bar{\dot{q}}_{(x)} = -\frac{b}{2 \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i \right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a \right)^2 \right] \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (\text{D1.1.1})$$

Dies muss auch universell nachweisbar sein:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= (\lambda_{\vartheta_i} + \lambda_{\vartheta_a}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a - b \cdot \vartheta_i + a - b \cdot \vartheta_a) \\ &= \frac{1}{2} \cdot [2a - b(\vartheta_i + \vartheta_a)] \\ \overline{-\text{grad}\vartheta} &= \frac{\vartheta_a - \vartheta_i}{h} = \frac{\Delta\vartheta}{h} \\ \bar{\dot{q}} &= \bar{\lambda} \cdot \overline{-\text{grad}\vartheta} = \frac{1}{2 \cdot h} \cdot (\vartheta_a - \vartheta_i) \cdot [2a - b(\vartheta_i + \vartheta_a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{2 \cdot h} (\vartheta_a - \vartheta_i) \cdot \left[2 \frac{a}{b} - (\vartheta_i + \vartheta_a) \right] \\
&= \frac{b}{2 \cdot h} \left[2 \cdot \frac{a}{b} \cdot (\vartheta_a - \vartheta_i) - \vartheta_a^2 + \vartheta_i^2 \right] \\
\bar{q} &= \frac{b}{2 \cdot h} \cdot \left[\vartheta_i^2 - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \vartheta_i + \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \vartheta_a^2 + 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \vartheta_a - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

hinzugefügt

Daraus folgt die mittlere Wärmestromdichte wie in (D 1.1.1) angegeben zu:

$$\bar{q} = \frac{b}{2 \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i \right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a \right)^2 \right] \quad \left[\text{W} / \text{m}^2 \right]$$

Es soll gezeigt werden, dass dieser Ausdruck für die durchschnittliche Wärmestromdichte dem Ausdruck

$$\bar{q} = \overline{\lambda_{(\vartheta)}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad (\text{D1.1.2})$$

entspricht:

$$\bar{q} = \overline{\lambda_{(\vartheta)}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad ; \quad \overline{\lambda_{(\vartheta)}} = \frac{\lambda_{(\vartheta_a)} + \lambda_{(\vartheta_i)}}{2}$$

$$\bar{q} = \frac{\Delta\vartheta}{h} \cdot \frac{\lambda_{(\vartheta_a)} + \lambda_{(\vartheta_i)}}{2} \quad ; \quad \lambda_{(\vartheta)} = a - b \cdot \vartheta$$

$$= \frac{\Delta\vartheta}{h} \cdot \left[\frac{(a - b \cdot \vartheta_a) + (a - b \cdot \vartheta_i)}{2} \right]$$

$$= \frac{\Delta\vartheta}{h} \cdot \left[\frac{(a - b \cdot \vartheta_a)}{2} + \frac{a - b \cdot \vartheta_i}{2} \right]$$

$$= \frac{\Delta\vartheta}{h} \cdot \left[\frac{a}{2} - \frac{b \cdot \vartheta_i}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b \cdot \vartheta_a}{2} \right]$$

$$= \frac{\Delta\vartheta}{h} \cdot \left[a - \frac{b \cdot \vartheta_i}{2} - \frac{b \cdot \vartheta_a}{2} \right]$$

$$= \frac{\Delta\vartheta}{h} \cdot \left[\frac{b}{2} \left(\frac{2 \cdot a}{b} - \vartheta_i - \vartheta_a \right) \right] \quad ; \quad \Delta\vartheta = \vartheta_a - \vartheta_i$$

$$= \frac{b}{2 \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{2 \cdot a}{b} - \vartheta_i - \vartheta_a \right) \cdot (\vartheta_a - \vartheta_i) \right]$$

Kurzform:

$$\bar{q} = \overline{\lambda_{(\vartheta)}} \cdot \frac{d\vartheta}{dy}$$

$$= \overline{\lambda_{\vartheta}} \cdot \frac{d(\vartheta_{(y)})}{dy}$$

$$= \overline{\lambda_{(\vartheta)}} \cdot \frac{d\left(\vartheta_m + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \right)}{dy}$$

$$= \overline{\lambda_{(\vartheta)}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{2 \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i \right) + \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i \right) - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a \right) \right] \\
&\hat{=} \frac{b}{2 \cdot h} \cdot (A + B) \cdot (A - B) \\
&\hat{=} \frac{b}{2 \cdot h} \cdot (A^2 - B^2) \\
\bar{q} &= \frac{b}{2 \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i \right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

D 2. Ableitung der beiden ersten korrespondierenden thermomechanischen Momente und Beschreibung der zugehörigen rechnerischen Temperaturdifferenzen

Da man allgemein mit der Bezeichnung „Moment“ in der Statik das Wirken einer Schnittgröße assoziiert, wird allgemein und um Irreführungen zu vermeiden, definiert: Ein korrespondierendes thermomechanische Moment (kurz: Thermisches Moment) entsteht durch äußere ungleichmäßige thermische Belastung eines Stabes. Seine Größe entspricht dem eingetragenen Wärmeanteil (Energieanteil) der in der Formänderungsarbeit bei Biegung umgesetzt wurde. Für theoretische Betrachtungen wirkt es konstant über der Stablänge. Real ist ein thermomechanisches Moment über der Stablänge nicht konstant, weil die Temperaturverteilungen nicht konstant sind. Für Berechnungszwecke wird daher das Durchschnittsmoment über der Stablänge **und** das maximale Moment benötigt. Mit den folgenden Bezeichnungen M_{th} ; M_{th1} und M_{th2} sind Durchschnittsmomente gemeint. Die maximalen thermomechanischen Spannungen werden nach Auswertung der maximalen Temperaturverteilung berechnet.

Der von außen eingetragene Wärmestrom „ \dot{Q} “ verursacht thermische Querschnittsbeanspruchungen der Größe „ $\Delta\vartheta_{(y)} \cdot dA$ “ deren Gesamtwirkung den Stab verlängert und sichtbar, kreisbogenförmig verkrümmt. Das hierzu notwendige thermische Moment korrespondiert mit dem ungleichmäßigen Temperaturfeldanteil und mit inneren Weggrößen, die aus dem inneren thermischen Gleichgewicht hervorgehen. In einem statisch bestimmten System ruft ein thermisches Moment keine Schnittgrößen hervor. Wie unter einem mechanischen Moment versteht man unter einem thermischen Moment den Ausdruck, der sich als Integral der mit ihrem Hebelarm multiplizierten Teilkräfte über den gesamten Querschnitt ergibt.

$$\begin{aligned}
 M_{\text{th}} &= \int_A \sigma_{\text{th}} \cdot dA \cdot y && \overbrace{M = \int_A \Delta\vartheta(y) \cdot y \cdot dA}^{\text{Thermodynamisches Moment}} && \text{(D 2.0)} \\
 &= \int_A \underbrace{E \cdot \alpha_t}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\Delta\vartheta(y) \cdot dA}_{\downarrow} \cdot \underbrace{y}_{\downarrow} \\
 M_{\text{th}} &= \int_A \frac{\text{N}}{\text{Krafteinheit}} \cdot \text{Thermodynamische Kraft} \cdot \text{Hebelarm} && && [\text{N} \cdot \text{mm}] \\
 &\downarrow && \downarrow && \downarrow \\
 \text{Dimensionen:} &= \frac{\text{N}}{\text{K} \cdot \text{mm}^2} && \text{°C} \cdot \text{mm}^2 && \text{mm}
 \end{aligned}$$

Hierin stellt die thermodynamische Kraft $\Delta\vartheta(y) \cdot dA$ [$\text{°C} \cdot \text{mm}^2$] die thermische Querschnittsbeanspruchung dar. Wird das Produkt „ $E \cdot \alpha_t$ “ als eine thermodynamische Konstante, z.B. mit der Bezeichnung „ K_T “ aufgefasst, so beträgt K_T bei 20 °C für Stahl

$$K_T = E \cdot \alpha_t \cong 2,55 \frac{\text{N}}{\text{K} \cdot \text{mm}^2} \quad (\text{siehe Anhang C})$$

und das thermische Moment erhält für eine lineare Temperaturverteilung die Form

$$M_{\text{th1}} = K_T \cdot \int_A \Delta\vartheta(y) \cdot dA \cdot y = K_T \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta(y) \cdot y \cdot dy = K_T \cdot b \cdot A \cdot R = K_T \cdot b \cdot \frac{\Delta\vartheta \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{6} \quad \text{(D 2.1)}$$

mit dem Ergebnis

$$M_{\text{th1}} = K_T \cdot I \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \cong \frac{1}{1000} \cdot \text{J} \quad \text{(D 2.2)}$$

Wie gezeigt (siehe Kapitel 4.5), beschreibt der nachfolgende Ausdruck ein thermisches Moment

$$M_{\text{th1}} = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad [\text{J}] \quad \text{(D 2.3)}$$

das dem Einfluss eines theoretischen linearen Temperaturfeldes entspricht. Hierbei verläuft der so genannte „1. Nullspannungstemperaturverlauf“ als gerade Linie zwischen den Außenfasertemperaturen „ ϑ_a “ und „ ϑ_i “. Der Absolutbetrag dieses Ausdrucks beschreibt mit seiner Energiemenge in Joule die Größe eines konstanten mechanischen Momentes [$\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$],

das mit entgegengesetzter Drehrichtung erforderlich wäre, das thermische Moment und damit die Verkrümmung aufzuheben. An einem real thermisch beanspruchten Stahlbau-Profil-Stab entsteht durch nichtlineare **seitliche Wärmeabfuhr** eine **ungleichmäßige Wärmestromdichte** und ein **unsymmetrisches Temperaturfeld**, so dass neben der durch die konstante Wärmestromdichte „ \dot{q} “ hervorgerufenen thermodynamischen Kraft „ $\frac{\Delta\vartheta}{h}$ “ eine weitere entgegengesetzt drehende thermodynamische Kraft „ $\frac{\Delta\vartheta_2}{h}$ “ entsteht. Diese Kraft bewirkt ein zweites thermisches Moment. Ursache ist die Temperaturabhängigkeit des globalen (gesamten) Wärmeübergangskoeffizienten „ α “. Bei einer ungleichmäßigen Temperaturverteilung ($\vartheta = \vartheta(y)$) ist „ α “ auch von „ y “ und damit von der Stabhöhe „ h “ abhängig

$$\alpha_{(y)} = \overline{\alpha_{(\vartheta)}} + \frac{\Delta\alpha \cdot y}{h} .$$

Dieser Einfluss bewirkt eine Unsymmetrie der Temperaturkurve und damit das 2. thermische Moment „ M_{th2} “.

$$M_{th2} = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta_2}{h} \quad [J] \quad (D 2.4)$$

das durch seine Energie [J] zusätzliche Dehnungen und Kontraktionen hervorruft und damit die Stabverkrümmung in den hier geschilderten Fällen vermindert. Für ein reales Temperaturfeld lautet die Summe der ersten beiden korrespondierenden thermomechanischen Momente

$$M_{th} = M_{th1} - M_{th2} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{12} - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot h^2}{12} \right) \quad (D 2.5)$$

$$= E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h} - E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta_2}{h} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot (A_2 \cdot R_2 - A\vartheta \cdot R) \quad (D 2.6)$$

↓

Neigung der Schlusslinie
des Temperaturfeldes
 $\tan \alpha = \Delta\vartheta / h$

↓

Verdrehung des Nullspannungstemperaturverlaufes
durch die Unsymmetrie des Temperaturfeldes
 $\tan \alpha_2 = \Delta\vartheta_2 / h$

$$M_{th} = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{(\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2)}{h} = E \cdot I \cdot \kappa_{th} = E \cdot I \cdot \frac{\widehat{\varphi}_{th}}{l_0} ; \tan \alpha_1 = \frac{\Delta\vartheta_1}{h} = \frac{(\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2)}{h}$$

$$M_{th} = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h} \quad (D 2.7)$$

oder mit den Bezeichnungen aus Bild D 2.2

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \cdot y \cdot dy \quad (D 2.8)$$

mit $b = \text{const}$

Im Anhang E und F werden zwei weitere thermische Momente M_{th3} und M_{th4} mit ihren Auswirkungen gezeigt.

Ermittlung des 2. thermomechanischen Momentes und der zugehörigen Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_2$ “ bei einfach und doppelsymmetrischen Profilstäben

Auch hier ist zwischen einer Scheibe und einem zusammengesetzten Profil zu unterscheiden:

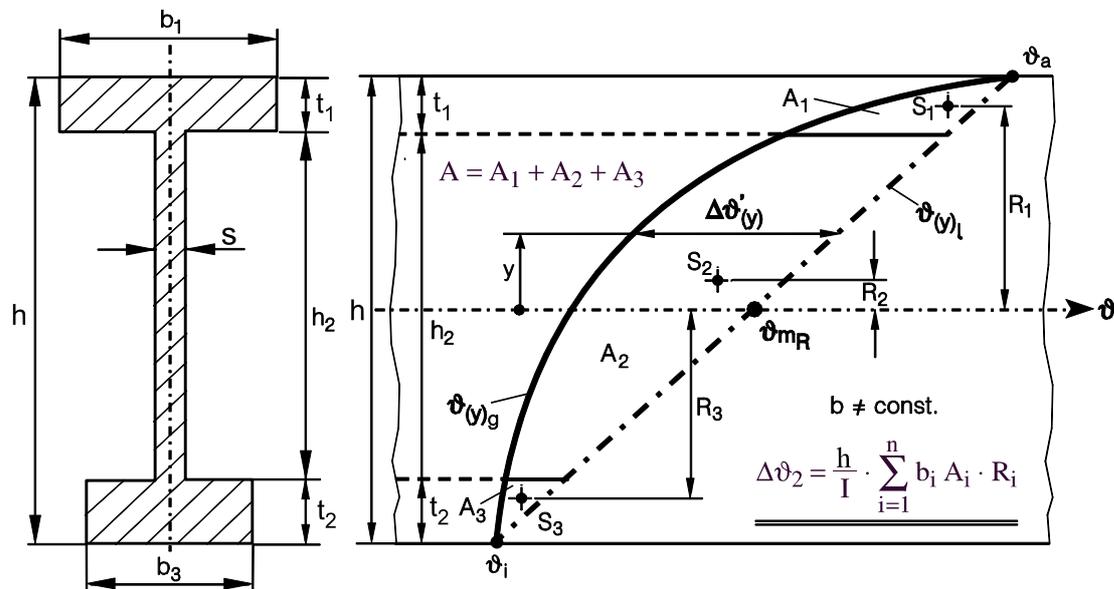


Bild D 2.1: Ermittlung der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_2$ bei unterschiedlichen Stabbreiten

Im Gegensatz zur Ableitung von „ $\Delta\vartheta_1$ “ ist hier mit der Fläche „ A “ die Größe der Fläche „ A_ϑ “ unterhalb der Temperaturverteilung „ $\vartheta(y)_g$ “ bis zur Schlusslinie „ $\vartheta(y)_l$ “ gemeint.

Zu Bild D 2.1 gehört mit $b \neq \text{const}$ die Momentengleichung:

$$M_{th2} = E \cdot \alpha_t \cdot \left[b_1 \cdot \int_{y_1}^{h/2} \Delta\vartheta'(y) \cdot y \cdot dy + s \cdot \int_{-y_2}^{y_1} \Delta\vartheta'(y) \cdot y \cdot dy + b_3 \cdot \int_{-h/2}^{-y_2} \Delta\vartheta'(y) \cdot y \cdot dy \right]$$

und daraus als geeignete Gleichung für eine instrumentell / rechnerische Lösung:

$$M_{th2} = E \cdot \alpha_t \cdot [b_1 \cdot A_1 \cdot R_1 + s \cdot A_2 \cdot R_2 + b_3 \cdot A_3 \cdot R_3]$$

$$\text{Allgemein:} \quad M_{\text{th}2} = E \cdot \alpha_t \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_i \cdot R_i \quad A_i \hat{=} A \vartheta_i \quad (\text{D 2.9})$$

$$\begin{aligned} M_{\text{th}} &= M_{\text{th}1} - M_{\text{th}2} \\ \text{Zusammenhang:} \quad M_{\text{th}} &= E \cdot \alpha_t \cdot I \cdot \frac{\Delta \vartheta}{h} - M_{\text{th}2} \end{aligned}$$

b = const:	$M_{\text{th}2} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A_\vartheta \cdot R$	(D 2.10)
b ≠ const:	$M_{\text{th}2} = E \cdot \alpha_t \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_i \cdot R_i$	

Die Temperaturdifferenz $\Delta \vartheta_2$ und damit die negative Verdrehung des Nullspannungstemperaturverlaufes „ $\Delta \vartheta_{(y)1r}$ “ berechnet sich, wenn $M_{\text{th}2}$ bekannt ist, wie folgt:

$$\text{Allgemein:} \quad \Delta \vartheta_2 = \frac{M_{\text{th}2} \cdot h}{E_m \cdot I \cdot \alpha_{\text{tm}}} \quad ; \quad \tan \alpha_2 = \frac{\Delta \vartheta_2}{h} \quad ; \quad \alpha_1 = \alpha - \alpha_2 \quad (\text{D 2.11})$$

Visuelle Vorstellung des resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufes „ $\vartheta_{(y)1r}$ “ als „Spannungsanzeiger“:

Im folgenden Bild D 2.2 können die Temperaturdifferenzen zwischen der Temperaturkurve „ $\Delta \vartheta_{(y)g}$ “ und der Geraden „ $\Delta \vartheta_{(y)1r}$ “ auch als Spannungen angesehen werden, wenn man sie gedanklich mit dem thermodynamischen Proportionalitätsfaktor $K_T = E_m \cdot \alpha_{\text{tm}}$ multipliziert

$$\left(K_T = \sim 2,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2 \cdot \text{K}} \quad ; \quad \text{bei } 200 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ für Baustähle} \right).$$

Zwecks Einprägung eines Bildes der Spannungsgrößen und der Einflüsse auf die Spannungen, stellt man sich zweckmäßig zunächst den gegebenen Temperaturverlauf und als Abschluss (Schlusslinie) einen beweglichen, verschiebbaren Zeiger mit Pfeilen an beiden Enden und Lagerung im Punkt „ ϑ_{mR} “ vor. Dieser Zeiger „ $\vartheta_{(y)1}$ “ verschiebt sich aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen, zunächst parallel bis zum neuen Drehpunkt „ ϑ_{mD} “ und verdreht sich dann gegen den Uhrzeigersinn entsprechend der Größe des zweiten thermomechanischen Momentes. Damit hat der Zeiger die Lage und Richtung des resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufes „ $\vartheta_{(y)1r}$ “ angenommen.

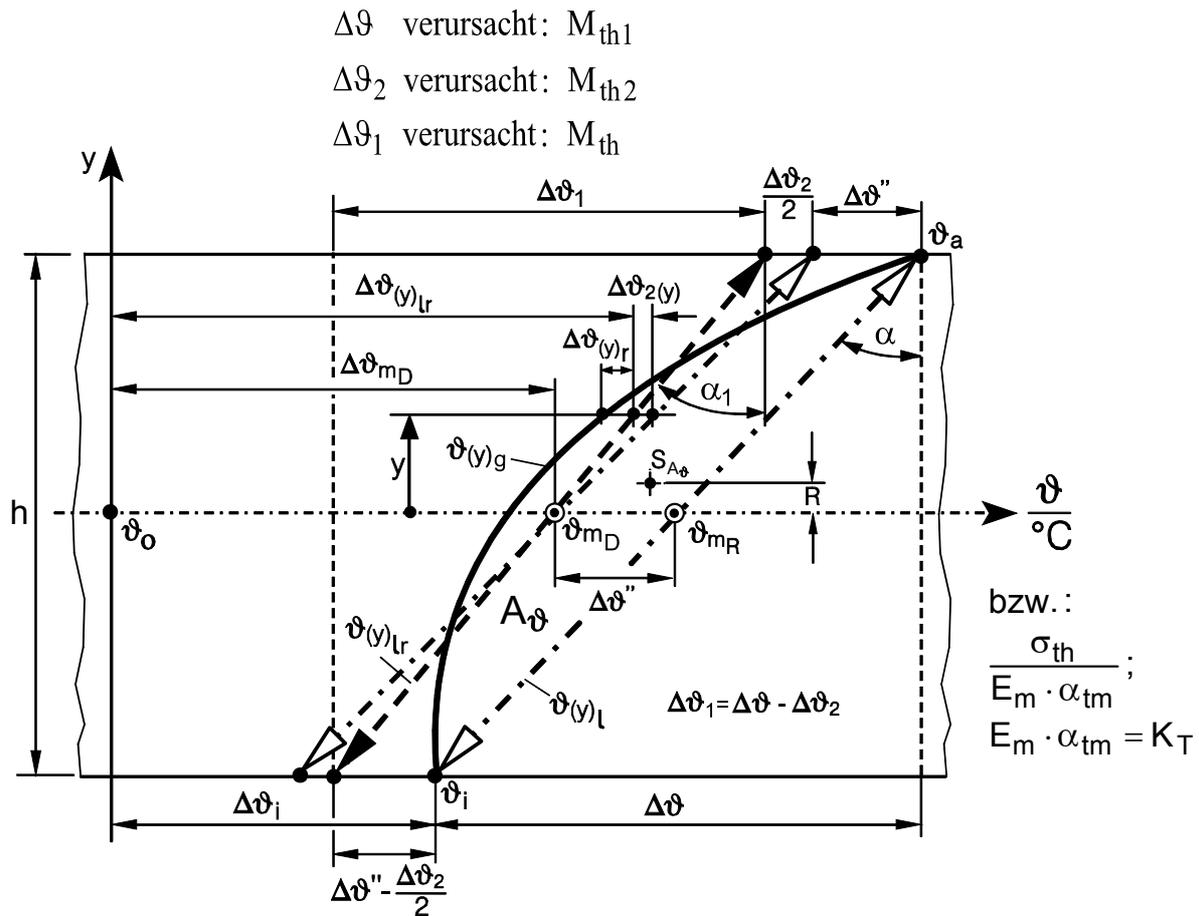


Bild D 2.2: Die zu den thermischen Momenten gehörenden Temperaturdifferenzen.
 Die Gerade „ $\vartheta(y)_{lr}$ “ als Spannungszeiger.

Die Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_2$ “ für Stahlprofile mit konstanter und nicht konstanter Breite

$$\Delta\vartheta_2 = \frac{12 \cdot A_\vartheta \cdot R}{h^2} \tag{D 2.12}$$

(ohne Einfluss der Breite „b“!)

$$\Rightarrow \Delta\vartheta_{2(y)} = \frac{12 \cdot y \cdot A_\vartheta \cdot R}{h^3} \Rightarrow \sigma_{th\ 2(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{12 \cdot y \cdot A_\vartheta \cdot R}{h^3} \tag{D2.13 u. D 2.14}$$

oder
$$\Delta\vartheta_2 = \frac{12}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta'_{(y)} \cdot y \cdot dy \quad \hat{=} \Delta\vartheta_{2(y)} = \frac{12 \cdot y}{h^3} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta'_{(y)} \cdot y \cdot dy \tag{D 2.15}$$

mit
$$\Delta\vartheta'_{(y)} = \vartheta_{(y)l} - \vartheta_{(y)g}$$

$b = \text{const} \rightarrow$ Flachstahlprofil:
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{h^2} = \frac{h}{I} \cdot b$$

$$\text{damit wird} \quad \Delta\vartheta_2 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A_\vartheta \cdot R \quad \Rightarrow \quad \Delta\vartheta_{2(y)} = \frac{y}{I} \cdot b \cdot A_\vartheta \cdot R \quad (\text{D 2.16})$$

$$\text{oder} \quad \Delta\vartheta_2 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta'(y) \cdot y \cdot dy \quad (\text{D 2.17})$$

$$\text{Zusammengefasst gilt:} \quad \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot h^2}{12} = A_\vartheta \cdot R \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot h^2}{12} = A_1 \cdot R_1$$

b = const	$\Delta\vartheta_2 = \frac{12 \cdot A_\vartheta \cdot R}{h^2}$	$\Delta\vartheta_2 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A_\vartheta \cdot R$	$\Delta\vartheta_{2(y)} = \frac{y}{I} \cdot b \cdot A_\vartheta \cdot R$
b ≠ const		$\Delta\vartheta_2 = \frac{h}{I} \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_i \cdot R_i$	$\Delta\vartheta_{2(y)} = \frac{y}{I} \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_i \cdot R_i$

(D 2.18)

b = const	$\Delta\vartheta_1 = \frac{12 \cdot A_1 \cdot R_1}{h^2}$	$\Delta\vartheta_1 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A_1 \cdot R_1$	$\Delta\vartheta_{1(y)} = \frac{y}{I} \cdot b \cdot A_1 \cdot R_1$
b ≠ const		$\Delta\vartheta_1 = \frac{h}{I} \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i}$	$\Delta\vartheta_{1(y)} = \frac{y}{I} \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i}$

Zwischen dem Verkrümmungswinkel „ $\widehat{\varphi}_{\text{th}}$ “ und dem Winkel „ α_1 “ gemäß Bild D 2.2 besteht die Beziehung:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{\text{th}} &= \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot l_0 \quad ; \quad h, l_0 \quad [\text{mm}] \\ &= \alpha_{\text{tm}} \cdot \tan \alpha_1 \cdot l_0 \end{aligned} \quad (\text{D 2.19})$$

$$\widehat{\varphi}_{\text{th}} = \tan \varphi = \frac{\Delta l_a - \Delta l_i}{h} = \frac{\Delta l}{h}$$

$$\varphi^\circ_{\text{th}} = \widehat{\varphi}_{\text{th}} \cdot \frac{180}{\Pi} = \widehat{\varphi}_{\text{th}} \cdot 57,29578$$

D 3. Formelzusammenstellung thermomechanischer Spannungen und zugehöriger Formänderungen (siehe Bild 5.11, allgemeine Temperaturfeldauswertung)

Temperaturdifferenzen allgemein:

$$\Delta\vartheta_{(y)r} = \Delta\vartheta_{(y)1r} - \Delta\vartheta_{(y)g} = \text{Resultierende, spannungswirksame Temperaturdifferenz} \quad (\text{D 3.1})$$

$$\begin{aligned}
\Delta\vartheta_{(y)r} &= \Delta\vartheta_{(y)l} - \Delta\vartheta'' - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \\
&= \Delta\vartheta'_{(y)} - \Delta\vartheta'' - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot y}{h} \\
\Delta\vartheta_{(y)lr} &= \Delta\vartheta'_i + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \\
&= \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h}
\end{aligned} \tag{D 3.2}$$

$$\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 \tag{D 3.3}$$

Temperaturdifferenzen (b = const):

$$\begin{aligned}
\Delta\vartheta_2 &= \frac{12 \cdot A_\vartheta \cdot R}{h^2} ; \Delta\vartheta_2 = \frac{12}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta'_{(y)} \cdot y \cdot dy ; \Delta\vartheta_2 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A_\vartheta \cdot R \\
\Delta\vartheta_1 &= \frac{12 \cdot A_1 \cdot R_1}{h^2} ; \Delta\vartheta_1 = \frac{12}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy ; \Delta\vartheta_1 = \frac{h}{I} \cdot b \cdot A_1 \cdot R_1 \\
\Delta\vartheta_{mD} &= \frac{A_1}{h} = a = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \\
\Delta\vartheta'' &= \frac{A_\vartheta}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta'_{(y)} \cdot dy \\
A_\vartheta &= \int_{-h/2}^{h/2} (\vartheta_{(y)l} - \vartheta_{(y)g}) \cdot dy \\
R &= \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta'_{(y)} \cdot y \cdot dy}{A_\vartheta} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} (\Delta\vartheta_{(y)l} - \Delta\vartheta_{(y)g}) \cdot y \cdot dy}{A_\vartheta} = \text{Schwerpunktabstand}
\end{aligned} \tag{D 3.4}$$

Temperaturdifferenzen (b ≠ const):

$$\begin{aligned}
\Delta\vartheta_2 &= \frac{h}{I} \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{\vartheta i} \cdot R_i \\
\Delta\vartheta_1 &= \frac{h}{I} \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i} \\
\Delta\vartheta_{mD} &= \frac{1}{A_Q} \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}
\end{aligned} \tag{D 3.5}$$

Resultierende Thermomechanische Spannungen (b = const):

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} = E_m \cdot \alpha_{tm} (\Delta\vartheta_{(y)l} - \Delta\vartheta_{(y)g}) \quad (D 3.6)$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{A_1}{h} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right) \quad (D 3.7)$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right) \quad \text{oder} \quad (D 3.8)$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta'_{(y)} - \Delta\vartheta'' - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot y}{h} \right) \quad [N/mm^2] \quad (D 3.9)$$

als alternative Berechnungsgleichung

Zur Berechnung der Spannungen ist das Maximaltemperaturfeld auszuwerten „ $\Rightarrow \Delta\vartheta_{max}$ “

Form mit zu lösenden Integralen:

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[(\vartheta_{(y)l} - \vartheta_{(y)g}) - \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} (\vartheta_{(y)l} - \vartheta_{(y)g}) \cdot dy - \frac{12 \cdot y}{h^3} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} (\vartheta_{(y)l} - \vartheta_{(y)g}) \cdot y \cdot dy \right] \quad (D 3.10)$$

oder

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy + \frac{12 \cdot y}{h^3} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] \quad (D3.11)$$

$$E_m \cdot \alpha_{tm} = K_T = \approx 2,5 \text{ N/mm}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad (\text{siehe Anhang C}) \quad (D 3.12)$$

Resultierende thermomechanische Spannungen (b \neq const):

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}}{A_Q} + \frac{y}{I} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right] \quad (D 3.13)$$

oder identisch:

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left[\Delta\vartheta'_{(y)} - \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A\vartheta_i}{A_Q} - \frac{y}{I_x} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A\vartheta_i \cdot R_i \right] \quad (D 3.14)$$

Formänderungsgrößen (siehe Bild D 3):

Verkrümmung jeder Faser über die Stabhöhe „h“

$$\kappa_{th(y)} = \frac{M_{th}}{E_m \cdot I} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon_{th(y)})} = \frac{1}{R_{th(y)}} = \frac{\kappa_{th0}}{(1 + \varepsilon_{th(y)})} \quad (D 3.15)$$

$$= \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon_{th(y)})}$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_{th(y)} = \alpha_{tm} \left(\Delta\vartheta'_i + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \quad (D 3.16)$$

Verkrümmungsradius

$$R_{th(y)} = \frac{1}{\kappa_{th(y)}} = \frac{l_{th(y)}}{l_0 \cdot \kappa_{th0}} = \frac{1 + \varepsilon_{th(y)}}{\kappa_{th0}} \quad (D 3.17)$$

Verkrümmungswinkel

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{th} = \tan \varphi_{th} &= \frac{l_{th(y)}}{R_{th(y)}} = l_{th(y)} \cdot \kappa_{th(y)} = \frac{l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})}{R_{th(y)}} \\ &= \kappa_{th0} \cdot l_0 = \frac{M_{th}}{E_m \cdot I} \cdot l_0 = \kappa_0 \cdot l_0 = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot l_0 = \alpha_{tm} \cdot \tan \alpha \cdot l_0 \end{aligned} \quad (D 3.18)$$

Stabenddrehwinkel

$$\widehat{\varphi}_{th1} = \frac{\widehat{\varphi}_{th}}{2} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{h} \cdot \frac{l_0}{2} = \frac{\kappa_{th(y)} \cdot l_{th(y)}}{2} \quad (D 3.19)$$

Gesamtdurchbiegung

$$f_{th(y)} = \frac{M_{th} \cdot l_0^2}{E_m \cdot I \cdot 8} \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)}) \quad (\text{Plus } \approx 2\% \text{ aus der Temperaturabhängigkeit von } E \text{ und } \alpha_t, \text{ siehe Anhang F})$$

$$= \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{h \cdot 8} \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)}) \quad (D 3.20)$$

$$y = -\frac{h}{2} \Rightarrow f_{thi} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0 \cdot l_i}{h \cdot 8}$$

$$\text{oder: } f_{\text{th}(y)} = \frac{\kappa_{\text{th}0} \cdot l_0^2}{8} + \frac{\kappa_{\text{th}0}^2 \cdot l_0^2}{8} \cdot \left(h \cdot \frac{\Delta\vartheta'_i}{\Delta\vartheta_1} + \frac{h}{2} + y \right) \quad [\text{mm}]$$

$$\text{mit } \kappa_{\text{th}0} = \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_1}{h}$$

Gesamte Faserlängenänderung

$$\Delta l_{(y)} = l_0 \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\vartheta_{\text{mD}} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) = l_0 \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_{(y)1r} = l_0 \cdot \varepsilon_{\text{th}(y)} \quad [\text{mm}] \quad (\text{D 3.21})$$

Gesamte Faserlänge

$$l_{\text{th}(y)} = l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}) = l_0 \cdot \kappa_{\text{th}0} \cdot R_{\text{th}(y)} \quad (\text{D 3.22})$$

(Verbindende Gleichung zwischen Dehnungen, Faserlängen, Verkrümmung und Biegegraden)

Korrespondierendes thermomechanisches Gesamtmoment

$$M_{\text{th}} = M_{\text{th}1} - M_{\text{th}2} \quad (\text{D 3.23})$$

$$M_{\text{th}} = E_m \cdot I \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h} = K_T \cdot I \cdot \frac{\Delta\vartheta_1}{h} \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (\text{D 3.24})$$

Thermische Formänderungsarbeit

$$W_{\text{th}} = \frac{3}{2} \cdot N_i \cdot \Delta l_{\text{mD}} + \frac{1}{2} \cdot M_{\text{th}} \cdot \varphi_{\text{th}} \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (\text{D 3.25})$$

Überschlägige Gebrauchsgleichungen aus dem Versuch 19/IV:

$$M_{\text{th}} = \sim 0,95 \cdot E_m \cdot I \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \frac{\Delta\vartheta\phi}{h} \quad (\text{D 3.26})$$

$$f_{\text{th}i} = \sim 0,95 \cdot \frac{l_0^2}{h \cdot 8} \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta\phi \quad (\text{Kältere Außenfaser = Innenfaser}) \quad (\text{D 3.27})$$

$$\sigma_{\text{th}(a)} = \sim -K_T \cdot 0,28 \cdot \Delta\vartheta\phi \quad (\text{Wärmere Außenfaser}) \quad (\text{D 3.28})$$

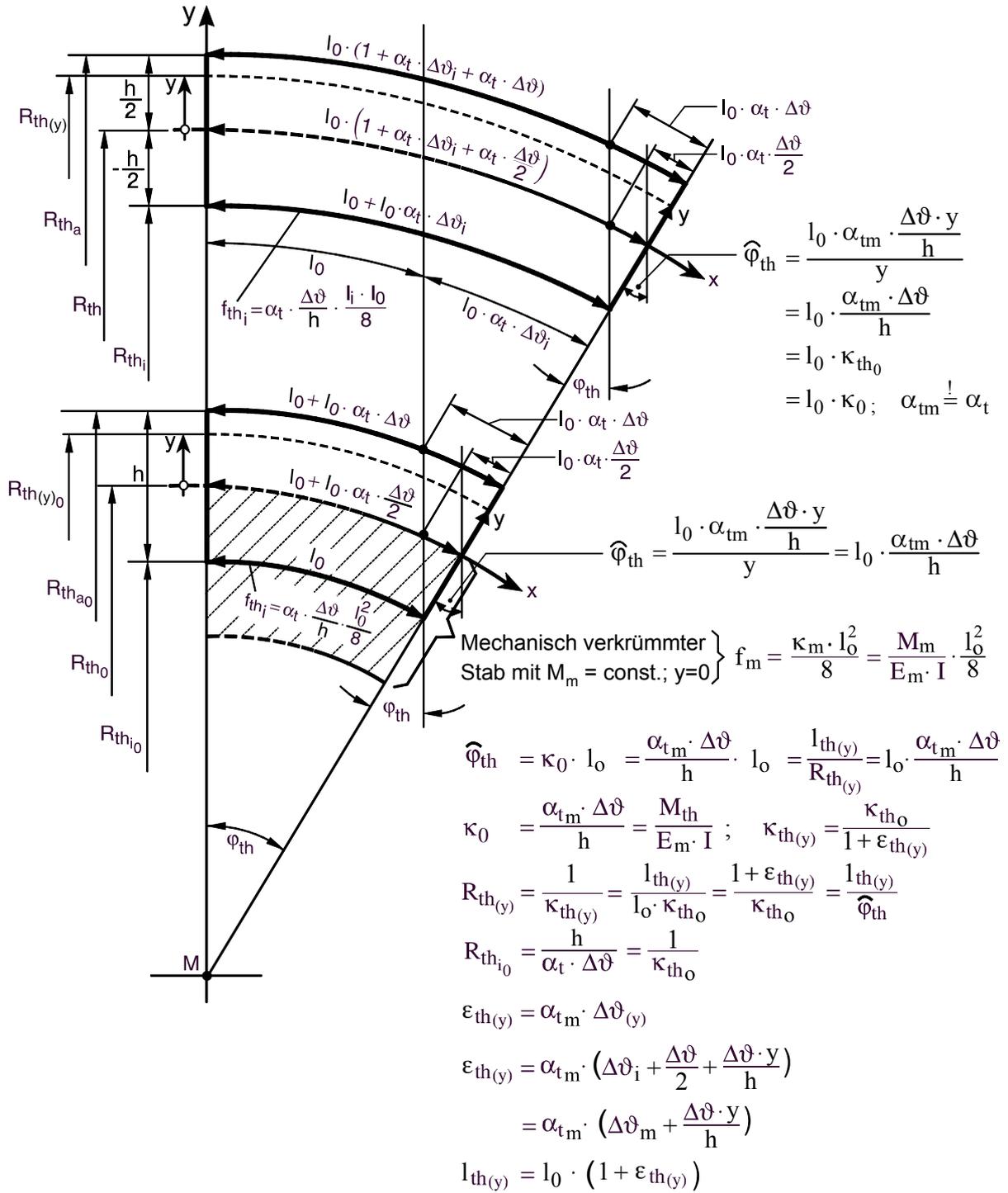


Bild D 3: Zusammenhänge an Kreisringausschnitten eines Stahlprofilstabes bei linearer Temperaturbeanspruchung für den Allgemeinfall mit $\Delta \vartheta_i \neq 0$ und für den Sonderfall $\Delta \vartheta_i = 0$

D 4. Aufspaltung eines realen eindimensionalen ($\vartheta = \vartheta(y)$) Temperaturfeldes

In Kapitel 5, Bild 5.11, ist die allgemeine Temperaturfeld-Auswertung mit dem resultierenden Nullspannungstemperaturverlauf „ $\vartheta(y)_{lr}$ “ als Diagonale durch das Temperaturfeld „A1“ dargestellt. Die wichtigsten zugehörigen Berechnungsformeln der Temperaturdifferenzen sind in Bild 5.8 angegeben. Aus den dort angeführten Gleichungen

$$\Delta\vartheta_{(y)r} = \Delta\vartheta_{(y)lr} - \Delta\vartheta_{(y)g} \quad \text{und}$$

$$\Delta\vartheta_{(y)lr} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h}$$

folgt die Gleichung der gemessenen Temperaturdifferenz über die Stabhöhe in der Form

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_{(y)g} &= \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)r} \quad (D 4.1) \\ &= \Delta\vartheta_{(y)lr} - \Delta\vartheta_{(y)r} \end{aligned}$$

bzw. $\Delta\vartheta_{(y)g} = \Delta\vartheta_N + \Delta\vartheta_{M(y)} - \Delta\vartheta_{\sigma(y)}$

das heißt, die gemessene Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_{(y)g}$ “ setzt sich aus drei Anteilen zusammen. Dem Anteil „ $\Delta\vartheta_N$ “ für eine gleichmäßige Faserlängenänderung, dem ungleichmäßigen, linearen Anteil „ $\Delta\vartheta_{M(y)}$ “ des thermomechanischen Momentes und dem nichtlinearen spannungsbehafteten Anteil „ $\Delta\vartheta_{\sigma(y)}$ “, der abgezogen werden muss. Dieser Zusammenhang ist im folgenden Bild D 4. dargestellt.

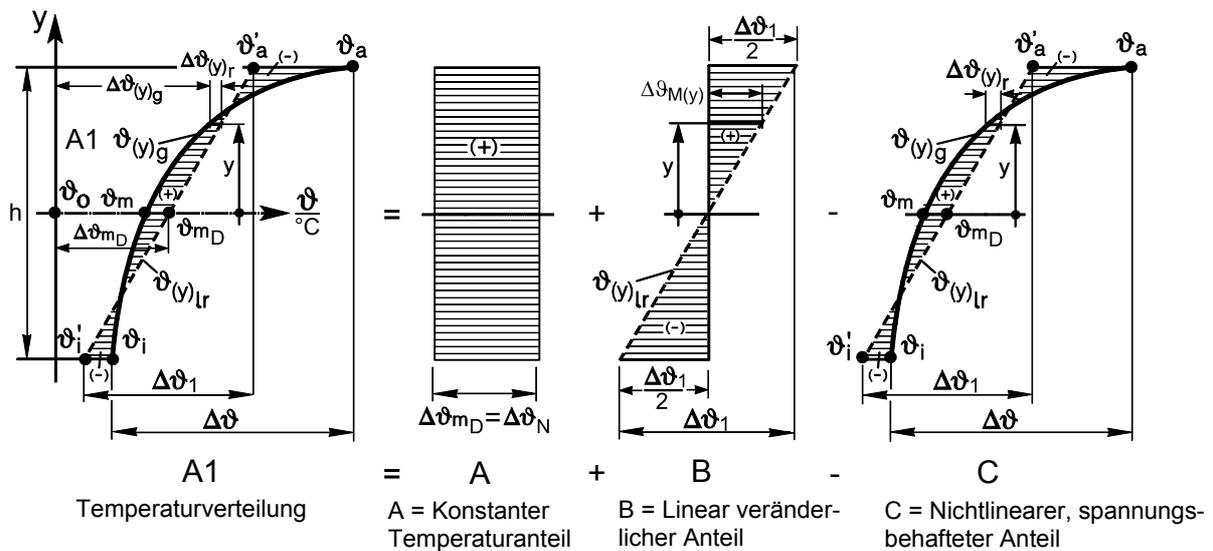


Bild D 4: Aufspaltung eines realen eindimensionalen ($\vartheta = \vartheta(y)$) Temperaturfeldes

Er erlaubt die exakte Aufspaltung eines eindimensionalen, nichtlinearen Temperaturfeldes, eines einzelnen Bauteils, hier Feld A 1, in seine drei Anteile.

$$\begin{array}{rcccc}
 A_1 & = & A & + & B & - & C \\
 \text{Gemessenes} & & \text{Konstanter} & \text{Tempera-} & \text{Linear veränderlicher} & & \text{Nichtlinearer, span-} \\
 \text{Temperaturfeld} & & \text{turanteil} & & \text{Temperaturanteil} & & \text{nungsbehafteter Tem-} \\
 & & & & & & \text{peraturanteil} \\
 & & & & & & \text{(D 4.2)}
 \end{array}$$

Hierbei berechnen sich die wichtigsten Größen wie folgt:

1. $b = \text{const}$

$$\begin{aligned}
 \Delta\vartheta_{\text{mD}} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \\
 \Delta\vartheta_1 &= \frac{12 \cdot A_1 \cdot R_1}{h^2} = \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot y \cdot dy
 \end{aligned}$$

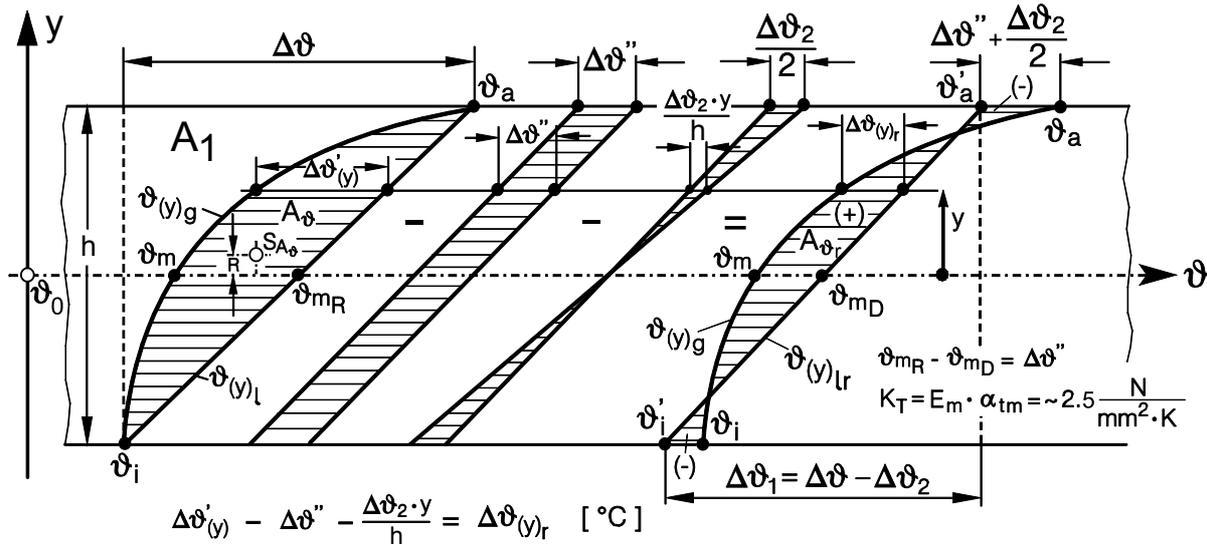
2. $b \neq \text{const}$

$$\begin{aligned}
 \Delta\vartheta_{\text{mD}} &= \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i}}{A_Q} \\
 \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} &= \frac{y}{I} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{1i} \cdot R_{1i}
 \end{aligned}$$

eine Variante der Aufspaltung eines nichtlinearen Temperaturfeldes ist im folgenden Abschnitt D 5. angegeben.

D 5. Rechnerisch konstruktive Einzelschritte vom gegebenen Temperaturteilstückfeld „ A_ϑ “ zum resultierenden Temperaturdifferenzen-Feld „ A_{ϑ_r} “

Das nachfolgende Bild D 5 soll anschaulich in Einzelschritten alternativ zu Bild D 4 die Auswertung eines gegebenen Teil-Temperaturdifferenzen-Feldes darstellen und den rechnerisch konstruktiven Lösungsweg vom Temperaturfeld „ A_ϑ “ zum spannungswirksamen, rechnerisch resultierenden Temperaturfeld „ A_{ϑ_r} “ angeben.



$$\Delta\vartheta'_{(y)} - \Delta\vartheta'' - \frac{\Delta\vartheta_2 \cdot y}{h} = \Delta\vartheta_{(y)r} \text{ [}^\circ\text{C]}$$

$$\sigma_{th(y)} = K_T \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

$$\Delta\vartheta_{(y)r} = \text{Spannungen verursachende resultierende Temperaturdifferenz} \quad (D 5.1)$$

$$\text{bzw.: } \sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (\Delta\vartheta_{(y)lr} - \Delta\vartheta_{(y)g})$$

$$\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g} \right)$$

Bild D 5: Darstellung des Lösungsweges vom Temperaturfeld A_0 zum rechnerisch resultierenden Temperaturfeld A_{0r}

D 6. Eine Ableitungsvariante zu den thermischen Verschiebungen „ u_x “ und „ v_y “

Die thermischen Verschiebungen an einem thermisch ungleichmäßig belasteten Stahlbau-Profilstab sind in Bild 5.11 dargestellt. Das Bild A4 zeigt dazu Zusammenhänge nach einer Temperaturfeld Auswertung.

I. Zur Verschiebung „ u_x “ :

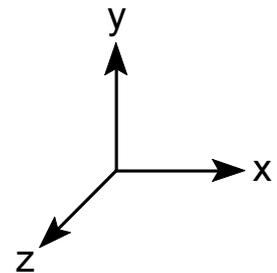
Das Stoffgesetz von Hooke, Cauchy und de St. Venant lautet:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}$$

$$\mu = 0,3 \quad \text{für Stahl = Querkontraktionszahl}$$

Mit $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0$ und $\sigma_{xx} = \sigma_{th(y)}$ (rein thermische Belastung) v

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)g}$$



Aus der Fläche „ A_{σ} “ (3-4-5-6) wird der Mittelwert der Temperaturdifferenzen „ $\overline{\Delta\vartheta_{(y)r}}$ “ zur Berechnung von „ $v_{\sigma a}$ “ bzw. „ $v_{\sigma i}$ “ benötigt.

$$v_{\sigma a \max} + v_{\sigma i \max} = 0 \text{ wegen } \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy = 0 !$$

Aus der Fläche „ A_{th} “ (1-2-4-5) wird der Mittelwert der Temperaturdifferenzen „ $\overline{\Delta\vartheta_{(y)r}}$ “ zur Berechnung von „ v_{tha} “ bzw. „ v_{thi} “ benötigt. Die maximale Stabdurchbiegung wird gemäß Gleichung (D3.20), Anhang D 3, berechnet zu:

$$f_{th(y)} = -\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot l_0^2}{h_0 \cdot 8} \cdot (1 + \varepsilon_{(y)})$$

$$\text{mit } \varepsilon_{(y)} = \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_1' + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$\text{Allgemein gilt: } v_{(y) \text{ ges}} = f_{th(y)} + v_{\sigma(y)} + v_{th(y)} \quad (\text{D 6.0})$$

Da „ $f_{th(y)}$ “ bekannt ist, soll das Verhalten der beiden anderen Anteile beschrieben werden.

Allgemein: $v_{(y)} = v_{\sigma(y)} + v_{th(y)}$. Die Stabmittellinie ist Bezugslinie für alle Verschiebungen „ $v_{(y)}$ “ daher:

$$v_{(y) a} = v_{\sigma(y) a} + v_{th(y) a}$$

$$v_{(y) i} = v_{\sigma(y) i} + v_{th(y) i}$$

Bei $y = h/2$ bzw. $y = -h/2$ erreichen die Werte jeweils ihr Maximum.

I. Zu $v_{(y) a}$:

$$1. v_{\sigma(y) a} = -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot y \cdot \overline{\Delta\vartheta_{(y)r}} \quad ; \quad \overline{\Delta\vartheta_{(y)r}} = \frac{1}{y} \cdot \underbrace{\int_0^y \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy}_{= \text{Fläche "A}_{\sigma}\text{"}}$$

$$v_{\sigma(y) a} = -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy \quad ; \quad \mu = 0,3$$

$$\Delta\vartheta_{(y)r} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \Delta\vartheta_{(y)g}$$

$$v_{\sigma(y) a} = -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} \cdot y + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y^2}{2 \cdot h} - \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \right) = -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy$$

$$2. \quad v_{th(y) a} = \alpha_{tm} \cdot y \cdot \overline{\Delta\vartheta_{(y)lr}} = y \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{1}{y} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy$$

$$\begin{aligned} v_{th(y) a} &= \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy \\ &= \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \cdot dy \quad ; \quad \overline{\Delta\vartheta_{(y)lr}} = \frac{1}{y} \cdot \underbrace{\int_0^y \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy}_{= \text{Fläche "A}_{th}"} \end{aligned}$$

$$v_{th(y) a} = \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} \cdot y + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y^2}{2 \cdot h} \right)$$

$$y = h/2 : v_{th(y)a} = h \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta_{mD}}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1}{8} \right)$$

$$y = -h/2 : v_{th(y)i} = h \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta_{mD}}{2} - \frac{\Delta\vartheta_1}{8} \right)$$

$$\Rightarrow v_{th ges} = \Delta h = v_{th(y)a max} + v_{th(y)i max} = h \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} v_{(y) a} &= -\mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} \cdot y + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y^2}{2 \cdot h} - \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \right) \\ &\quad + \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} \cdot y + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y^2}{2 \cdot h} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{(y) a} &= (1 - \mu) \cdot \alpha_{tm} \cdot y \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{2 \cdot h} \right) \\ &\quad + \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^y \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \end{aligned}$$

und bei $y = h/2$:

$$\begin{aligned} v_{a max} &= (1 - \mu) \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \\ &\quad + \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \end{aligned} \tag{D 6.1}$$

II. Analog wird:

$$\begin{aligned}
v_{i \max} = & - (1 - \mu) \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \\
& - \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy
\end{aligned} \tag{D 6.2}$$

III. Gezeigt werden soll:

$$\begin{aligned}
v_{a \max} + v_{i \max} = \Delta h = v_{tha \max} + v_{thi \max} \\
\Delta h = h \cdot \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD}
\end{aligned} \tag{D 6.3}$$

$$\Delta h = v_{a \max} + v_{i \max}$$

$$\begin{aligned}
\Delta h = & (1 - \mu) \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \\
& + \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \\
& + (1 - \mu) \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \\
& + \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy
\end{aligned}
\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_{a \max} \\ \\ v_{i \max} \end{array}$$

$$\Delta h = \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \quad 1$$

$$- \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \quad 2$$

$$+ \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \quad 3$$

$$+ \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \quad 4$$

$$- \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right) \quad 5$$

$$+ \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy \quad 6$$

$$1+4: = \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1}{4} + \Delta\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right)$$

$$= \alpha_{tm} \cdot h \cdot \Delta\vartheta_{mD}$$

$$2+5: = - \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1}{4} + \Delta\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{4} \right)$$

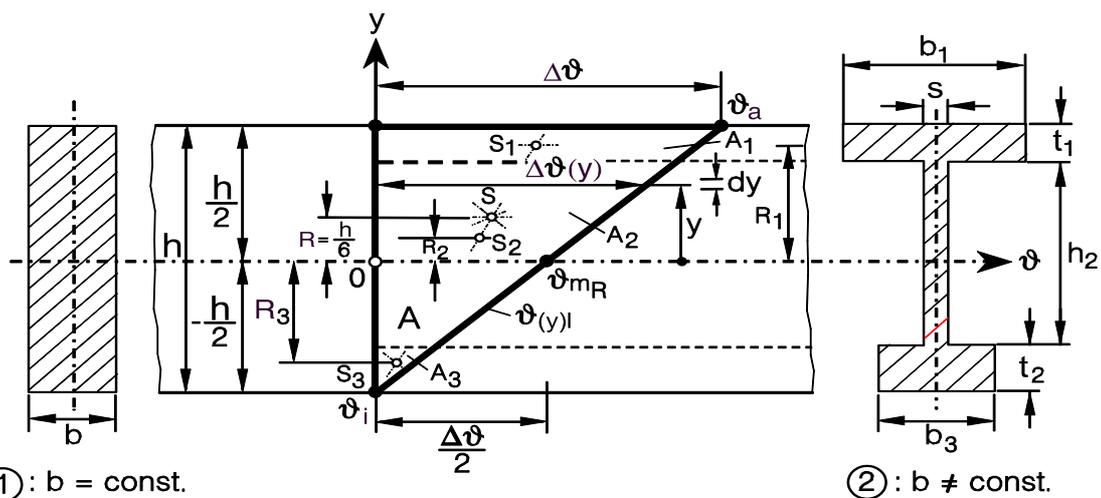
$$= - \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot h \cdot \Delta\vartheta_{mD}$$

$$\begin{aligned}
3+6: &= \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta(y) g \cdot dy \\
&+ \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta(y) g \cdot dy \\
&= \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\vartheta(y) g \cdot dy \\
&= \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot h \cdot \Delta\vartheta_{mD}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta h = \alpha_{tm} \cdot h \cdot \Delta\vartheta_{mD}$$

Was gezeigt werden sollte!

D 7. Eine Ableitungsvariante des thermomechanischen Momentes



① : $b = \text{const.}$

② : $b \neq \text{const.}$

1 = Doppelsymmetrischer Querschnitt

2 = Symmetrischer Querschnitt

$$\frac{d\vartheta}{dy} = \tan \alpha = \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

$$\varepsilon_{(y)} = \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)} = \alpha_t \left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \right)$$

$$A \hat{=} A_2 = \frac{\Delta\vartheta \cdot h}{2}; \quad R_2 = \frac{h}{6}; \quad A_2 \cdot R_2 = \frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{12} \quad (\text{D 7.1})$$

Die Größe des thermischen Momentes wird allein vom ungleichmäßigen Anteil des Temperaturdifferenzen-Feldes bestimmt.

Bild D 7: Zur Ableitung des thermischen Momentes

$$\text{Fall 1 : } \mathbf{b = const} \quad M_{th} = \int_A \sigma_{th}(y) \cdot y \cdot dA \quad ; \quad dA = b \cdot dy \quad *)$$

$$\Delta\vartheta_{(y)} = \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \quad ; \quad A = \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta_{(y)} \cdot dy = \frac{\Delta\vartheta \cdot h}{2} \quad ; \quad R = \frac{h}{6}$$

$$\sigma_{th(y)} = E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)}$$

$$M_{th} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{th} \cdot b \cdot y \cdot dy = b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} E \cdot \alpha_t \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \right) \cdot y \cdot dy = M_{th1}$$

$$= E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \right) \cdot y \cdot dy = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta_{(y)} \cdot y \cdot dy$$

$$= E \cdot \alpha_t \cdot b \left[\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot y \cdot dy + \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\Delta\vartheta \cdot y^2}{h} \cdot dy \right]$$

$$= E \cdot \alpha_t \cdot b \left[\frac{\Delta\vartheta \cdot y^2}{4} \Big|_{-h/2}^{+h/2} + \frac{\Delta\vartheta \cdot y^3}{h \cdot 3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} \right]$$

$$= E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \left[\frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{4 \cdot 4} - \frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{4 \cdot 4} + \frac{\Delta\vartheta \cdot h^3}{h \cdot 3 \cdot 8} + \frac{\Delta\vartheta \cdot h^3}{h \cdot 3 \cdot 8} \right]$$

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \frac{\Delta\vartheta \cdot h^2}{12} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A \cdot R$$

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \underbrace{\frac{\Delta\vartheta \cdot h}{2}}_A \cdot \underbrace{\frac{h}{6}}_R$$

$$M_{th1} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A \cdot R \quad ; \quad M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot (\text{Breite} \times \text{Fläche des Temperaturdifferenzen-Feldes} \times \text{Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von der Mittellinie}) \quad (\text{D 7.2})$$

*) **Anmerkung zu $\sigma_{th}(y) \cdot dA$:**

In der thermischen Teilkraft

$$\sigma_{th(y)} \cdot dA = E \cdot \alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{(y)} \cdot dA$$

ist die thermodynamische Kraft

$$\Delta\vartheta_{(y)} \cdot dA \quad [^\circ\text{C} \cdot \text{mm}^2]$$

(thermische Querschnittsbeanspruchung) zu erkennen.

oder mit $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$ und $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot W \cdot \frac{\Delta\vartheta}{2} = M_{th1} \quad [N \cdot m = J] \quad (D 7.3)$$

$$M_{th} = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

oder: $M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot I \cdot \frac{\dot{q}}{\lambda}$; $\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$ (D 7.4)

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot I \cdot \frac{\dot{Q}}{A \cdot \lambda} \quad M_{th} = K_T \cdot I \cdot \frac{\Delta\vartheta}{h}$$

Fall 2 : $b \neq \text{const}$

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_i \cdot R_i \quad (D 7.5)$$

und für das eingezeichnete Beispiel (ungleichmäßig breiter Breitflanschträger):

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot (b_1 \cdot A_1 \cdot R_1 + b_2 \cdot A_2 \cdot R_2 + b_3 \cdot A_3 \cdot R_3) \quad (D 7.6)$$

mit $A_1 = \int_{h/2-t_1}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)} \cdot dy$ usw. (D 7.7)

und mit $R_1 = \frac{\int_{h/2-t_1}^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)} \cdot y \cdot dy}{A_1}$ usw.. (D 7.8)

Anmerkung:

Die vorgestellte Gleichung

$$M_{th} = E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta\vartheta_{(y)} \cdot y \cdot dy$$

($b = \text{const}$)

$$= E \cdot \alpha_t \cdot b \cdot A \cdot R = M_{th1}$$

kehrt vom Grundaufbau her bei der Auswertung aller nichtlinear begrenzten Temperaturfelder immer wieder. Ihre Lösung ist eine Voraussetzung zur Ermittlung thermomechanischer Spannungen. Da reale Temperaturfelder schwer berechenbar aber häufig zeichnerisch dargestellt werden können, eignet sich diese Gleichungsform für eine instrumentell / rechnerische Auswertung eines Temperaturfeldes mit guter Genauigkeit. Z.B. zeichnerische Darstellung und danach Berechnung nach Eingabe der Koordinaten (y und $\vartheta_{(y)}$) in das Programm CAD-400 der Fa. H.A.N. Dataport.

D 8. Spannungskategorisierung Abgrenzung der Spannungsarten

Um mit den Begriffen „Thermomechanische Spannungen“ und „Thermomechanisches Moment“ die nahe liegende Assoziation äußerer mechanischer Lasten und Schnittgrößen zu vermeiden, soll folgende Übersicht über die Herkunft von Spannungen dienen.

Spannungsarten

Nr.	Bezeichnung		System		
			Statisch bestimmt	Statisch unbestimmt	
1.	σ_{th}	=	Thermomechanische Spannungen	X	X
2.	σ_w	=	Wärmespannungen		X
3.	σ_e	=	Eigenspannungen	X	X
4.	$\sigma_{w\ res} = \sigma_{WR}$	=	Resultierende Wärmespannungen aus der Addition von Zeile 1 und Zeile 2		X
5.	σ_m	=	Mechanische Spannungen	X	X

Abgrenzungen der Begriffe

1. Thermomechanische Spannungen	σ_{th}
2. Wärmespannungen	σ_w
3. Eigenspannungen	σ_e
4. Resultierende Wärmespannungen	$\sigma_{w\ res}$
5. Mechanische Spannungen	σ_m

Unabhängig von allen bisher vorgenommenen Spannungskategorisierungen [15, 20, 21, 39, 52, 53, 55, 72, 77,79,81, 116, 117] und Definitionen von Einzelgrößen und ihren Berechnungsverfahren, soll allgemein zutreffend, eine Abgrenzung zwischen den fünf Begriffen mit folgender Definition getroffen werden:

Zu 1: Thermomechanische Spannungen „ σ_{th} “

Es handelt sich um **eine eigene Art von nichtlinearen Lastspannungen**, die das Fließen eines von außen eingeleiteten ungleichmäßigen Wärmestromes „ \dot{Q} “ (ungleichmäßige thermische Beanspruchung) durch ein statisch bestimmt oder ein statisch unbestimmt gelagertes Bauelement voraussetzen und nur so lange vorhanden sind, wie der Wärmestrom fließt. Sie entstehen ohne äußere Zwänge, ohne geometrische Unverträglichkeiten und ohne Materialunverträglichkeiten. Wie Punkt 5 gehören sie zu den Primärspannungen und unterliegen einem eigenen besonderen Berechnungsverfahren. Die Größe thermomechanischer Spannungen kann nach Aufbringen unzulässig hoher äußerer thermischer Lasten nicht durch Plastizierung abgebaut werden! In diesem Fall nehmen die Verformungen nach vollständiger Plastizierung des Querschnitts wesentlich zu, ohne sich hierbei selbst zu begrenzen. Es handelt sich nicht um so genannte Spannungsspitzen. D.h.: **Thermomechanische Spannungen können unmittelbar zum Versagen eines Bauteils führen!** Die 1. Ableitung der zugehörigen Funktion der Temperaturverteilung $d\vartheta/dy$ ist nicht konstant, d.h. $\dot{q} \neq \text{const.}$ Es bestehen keine Schnittgrößen (Resultierende der Spannungen). Die Spannungen bilden ein Gleichgewichtssystem.

Zu 2: Wärmespannungen [8, 39] „ σ_w “

Wärmespannungen sind lineare, unsymmetrische Spannungen aus der Behinderung der thermischen Dehnungen (äußere Zwänge) in statisch unbestimmten Tragwerken (Zwangskraftsysteme). Wärmespannungen setzen wie Punkt 1. das Fließen eines Wärmestromes „ \dot{Q} “ voraus. Weiter setzen sie voraus, dass a) äußere Zwänge oder b) geometrische Unverträglichkeiten, wie z.B. in rotationssymmetrischen Bauelementen, wie Rohren, Schalen und Übergängen bzw. c) stoffliche Unverträglichkeiten (verschiedene Materialeigenschaften z.B. E und α_t , wie z.B. bei Bi-Metallen) bestehen. Sie bauen sich bei Plastizierung ab! D.h.: **Sie führen nicht unmittelbar zum Versagen eines Bauteils!** Wärmespannungen unterliegen auch einem eigenen besonderen Berechnungsverfahren. Sie zählen zu den Sekundärspannungen.

Zu 3: Eigenspannungen [54] „ σ_e “

Eigenspannungen im allgemeinsten Sinn sind Spannungen in einem abgeschlossenen System, auf das keine äußeren Kräfte und Momente einwirken. Die mit den Eigenspannungen verbundenen inneren Kräfte und Momente befinden sich im mechanischen Gleichgewicht. Das bedeutet, dass die Summe der inneren Kräfte bezüglich jeder Schnittfläche durch das abge-

geschlossene System Null ist und ebenso die Summe der inneren Momente bezüglich jeder Achse verschwindet. Auch hinsichtlich der nichtmechanischen Zustandsgrößen, die mechanische Wirkungen hervorbringen können, soll das betrachtete System abgeschlossen und im Gleichgewicht sein. **Spannungen**, die durch nichtmechanische Einwirkung **von außen** erzeugt werden (z.B. durch **Temperaturunterschiede**), werden hier ebenso als **Lastspannungen** angesehen wie Spannungen, die auf äußere Kräfte zurückgehen. Sie werden auch dann nicht den Eigenspannungen zugeordnet, wenn sie etwa durch die Einstellung stationärer Bedingungen über lange Zeiten konstant gehalten werden! Der Begriff „**Eigenspannungen**“ setzt voraus, dass **kein** Wärmestrom „ \dot{Q} “ fließt! Es werden nur Eigenspannungen I. Art angesprochen, die aus unterschiedlichen Herstellungs-, Verarbeitungs- und Abkühlprozessen (Umwandlungseigenspannungen), auch vom Schweißen und von mechanischen oder thermischen Formänderungen bis hin zum Fließen des Materials, herrühren [55].

Zu 4.: Resultierende Wärmespannungen „ $\sigma_{w \text{ res}}$ “

Resultierende, nichtlineare unsymmetrische Wärmespannungen treten in statisch unbestimmten thermisch belasteten Systemen auf. Sie entstehen darstellungsmäßig aus der Superponierung der Spannungen gemäß Punkt 1. und Punkt 2.

$$\sigma_{w \text{ res}} = \sigma_{\text{th}} + \sigma_w = \sigma_{\text{WR}} \quad (\text{siehe Anhang G})$$

Zu 5.: Mechanische Spannungen „ σ_m “ (Primärspannungen)

Mechanische Spannungen treten in statisch bestimmten und in statisch unbestimmten Tragwerken auf. Es handelt sich um Lastspannungen aus äußeren Lasten. Es liegen die Schnittgrößen N , M und Q vor. Schrumpf-, Schwind- und Kriechspannungen werden nicht angesprochen, obgleich bei Stahlbauelementen und hohen Temperaturen ($> 450 \text{ }^\circ\text{C}$) sowie bei Förderseilen das Kriechen zur Last hin bekannt ist. Der Spannungsanteil aus Zwangskraftsystemen in statisch unbestimmten Systemen zählt, aus eingprägten Weggrößen stammend, zu den Sekundärspannungen.

**D9. Thermische Durchbiegung eines Stabes bei konstanter und nicht konstanter Verkrümmung.
Rechnerisches Analogieverfahren in Anlehnung an Mohr.
Vorzeichenkonvention bei thermischer Beanspruchung.**

Im Kapitel 3.6 werden die Biegelinie und die maximale Durchbiegung jeder Faser eines thermisch ungleichmäßig beanspruchten Profilstabes bei freier Lagerung berechnet. Es lagen folgende Annahmen zugrunde:

$$M_{th} = \text{const} \quad , \quad \kappa_{th} = \text{const} \quad \text{und} \quad I = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad h = \text{const}$$

Das ist häufig, besonders bei längeren Bauelementen z.B. im Industrieofen- und Kraftwerksbau nicht der Fall (siehe Bild 1.5). Auch ist es nicht der Fall bei Durchbiegungsberechnungen von Trägern mit unterschiedlicher Biegesteifigkeit. Hier weist die Biegelinie Sprünge auf [15, 82]. In diesem Kapitel soll nur der rechnerische Durchbiegungsnachweis bei nicht konstantem thermischen Moment „ M_{th} “ und damit nicht konstanter thermischer Verkrümmung „ κ_{th} “ bei konstantem Trägheitsmoment „ I “ bzw. konstanter Stabhöhe „ h “ aufgezeigt werden. Es wird in Anlehnung an Mohr die rechnerische Ermittlung der Durchbiegung und der Biegelinie abgeleitet und vorgestellt. Auf das zeichnerische Verfahren nach Mohr wird nicht eingegangen. Im Kapitel 3.6 konnte bei $\kappa = \text{const}$ die Biegelinie als angenäherter Kreisbogen aufgefasst werden. Hingegen wird die Biegelinie bei $\kappa \neq \text{const}$ zu einer Parabel mindestens 3. Grades. Die Durchbiegungen sind etwas größer als mit dem Durchschnittswert „ $\overline{\kappa_{th}}$ “ berechnet.

Man unterscheidet zwei Fälle:

„Symmetrische Parabel“

Hierbei ist die Verkrümmung „ κ_{th} “ ungleichmäßig aber symmetrisch über die Stablänge verteilt.

„Unsymmetrische Parabel“

Hierbei ist die Verkrümmung unsymmetrisch über die Stablänge verteilt. Die Biegelinie weist eine außermittige maximale Durchbiegung auf. Diese Stelle liegt unter dem Nulldurchgang der virtuellen $F^*_{Q(x)}$ -Linie, (siehe Bild D 9.2).

Das Mohrsche Verfahren bewährt sich besonders für Träger mit veränderlichem Querschnitt oder beliebiger komplizierter Belastung. Es beruht auf der Analogie der gegenübergestellten Gleichungen bei Biegung:

$$M''_{b(x)} = -q_{(x)} \quad \text{und} \quad y''_{(x)} = -\frac{M_{b(x)}}{E \cdot I_0} \cdot \frac{I_0}{I_{z(x)}} \quad [15]$$

hier: $I = \text{const}$

und ihrer Integration.

Nachfolgende Gegenüberstellung zeigt die drei Ebenen der erforderlichen Berechnungsschritte. Die linke Spalte enthält die mechanischen Größen des Biegemomentes und seiner Ableitungen. Die rechte Spalte enthält die analogen Größen bei rein thermischer Beanspruchung. Es handelt sich um die thermische Durchbiegung und ihre Ableitungen mit den hinzugefügten fiktiven Größen, die mit einem Sternchen gekennzeichnet sind.

	Mechanische Größen	Thermische Größen
1.	$M_b''(x) = -q(x)$	$\frac{h}{\alpha_{tm}} \cdot y_{th}''(x) = -\Delta\vartheta_1(x) = -q^*(x)$
2.	$M_b'(x) = F_Q(x) = -\int q(x) \cdot dx$	$\frac{h}{\alpha_{tm}} \cdot y_{th}'(x) = F_Q^*(x) = -\int q^*(x) \cdot dx$
3.	$M_b(x) = \int F_Q(x) = -\iint q(x) \cdot dx$	$\frac{h}{\alpha_{tm}} \cdot y_{th}(x) = M_{th}^*(x) = -\iint q^*(x) \cdot dx$

Tabelle D 9.1: Analoge Berechnungsgleichungen in Anlehnung an Mohr

Die drei gegenübergestellten Berechnungsschritte im Einzelnen. Zuerst folgt die mechanische Form, dann die thermische Form:

$$\begin{aligned}
 1. \quad M_b''(x) &= -q(x) \\
 E \cdot I \cdot y_{th}''(x) &= -M_{th}(x) = -E \cdot I \cdot \frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot \Delta\vartheta_1(x) \\
 \frac{h}{\alpha_{tm}} \cdot y_{th}''(x) &= -\Delta\vartheta_1(x) = -q^*(x) \\
 y_{th}''(x) &= -\frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot \Delta\vartheta_1(x) = -\kappa_{th}(x)
 \end{aligned}$$

Letztere Gleichung ist die linearisierte Differentialgleichung der Biegelinie eines thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stabes für kleine Durchbiegungen und $\varepsilon_{th} = 0$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad M'_{b(x)} &= F_{Q(x)} = -\int q_{(x)} \cdot dx \\
 \frac{h}{\alpha_{tm}} \cdot y'_{th(x)} &= F^*_{Q(x)} = \frac{h}{\alpha_{tm}} \cdot \hat{\alpha}_{(x)} = -\int q^*_{(x)} \cdot dx \\
 y'_{th(x)} &= \frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot F^*_{Q(x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad M_{b(x)} &= \int F_{Q(x)} = -\iint q_{(x)} \cdot dx \\
 \frac{h}{\alpha_{tm}} \cdot y_{th(x)} &= M^*_{th(x)} = -\iint q^*_{(x)} \cdot dx \\
 y_{th(x)} &= \frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot M^*_{th(x)}
 \end{aligned}$$

Belastet man also einen Träger mit der fiktiven Belastung $q^*_{(x)} = \Delta\vartheta_{1(x)}$, so ist die zugehörige fiktive Querkraft $F^*_{Q(x)}$ gleich dem $\frac{h}{\alpha_{tm}}$ -fachen Neigungswinkel $\hat{\alpha}_{(x)} \approx \tan \alpha = y'_{th}$ und das zugehörige fiktive Biegemoment $M^*_{th(x)}$ gleich der $\frac{h}{\alpha_{tm}}$ -fachen Durchbiegung.

Rechnerische Ermittlung der thermischen Durchbiegung für die Fälle $\kappa = \text{const}$ und $\kappa \neq \text{const}$:

D 9.1 Berechnung bei $\kappa = \text{const}$

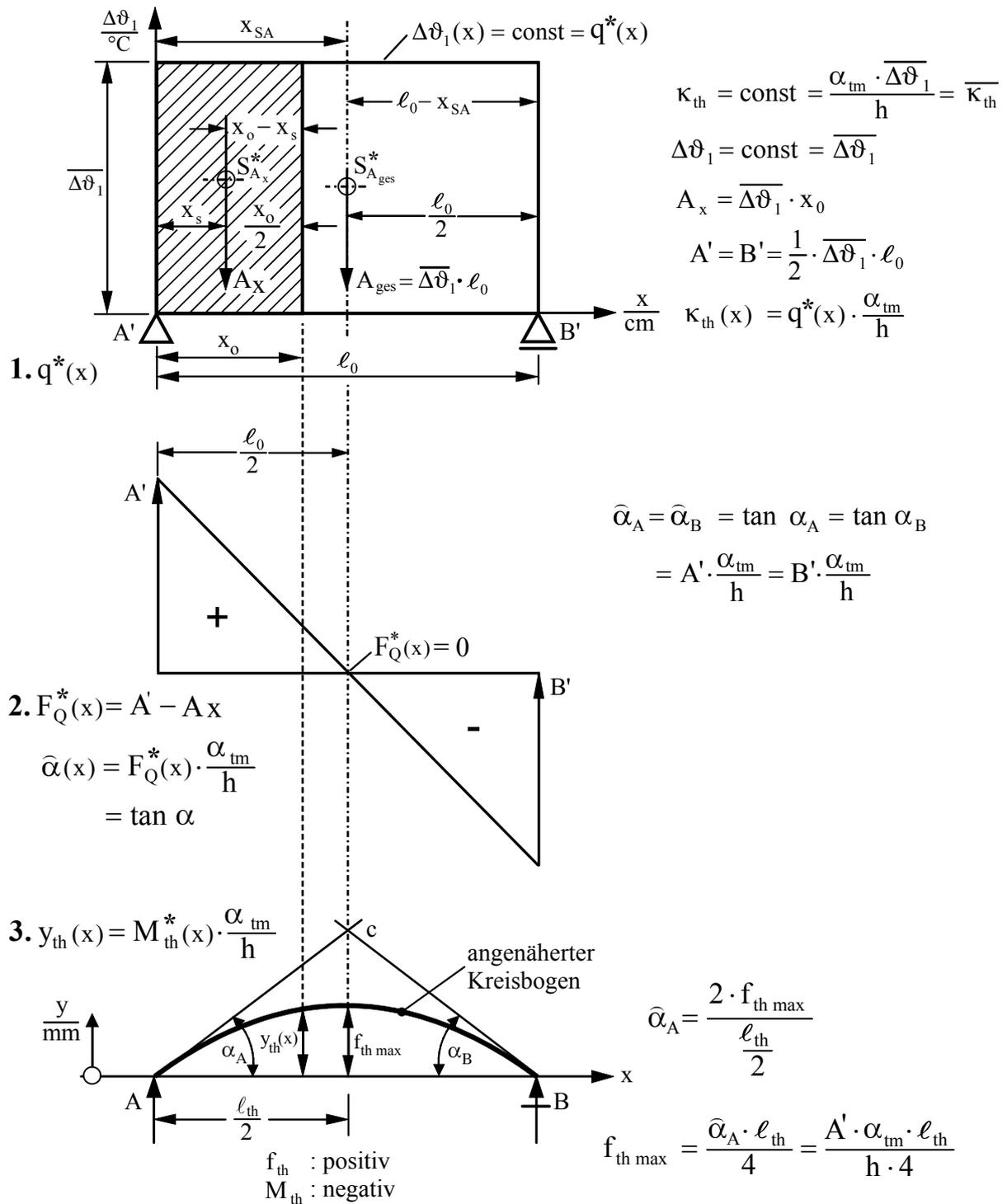


Bild D9.1: Fiktive Belastung und thermische Durchbiegung bei $\kappa = \text{const}$

Unter Beachtung der Durchbiegungsrichtung lautet die Gleichung der Biegelinie gemäß abgeleiteter Formel (3.6.17):

$$y_{\text{th}(x)} = \left(\frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot l_{\text{th}(y)}}{2 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})} \cdot x - \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot x^2}{2 \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})} \right)$$

$$\text{mit } l_{\text{th}(y)} = l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})$$

$$x = x_0 \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})$$

$$\text{und } \varepsilon_{\text{th}(y)} = \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\vartheta'_i + \frac{\overline{\Delta\vartheta_1}}{2} + \frac{\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot y}{h} \right) \text{ wird nach 1. Umformung}$$

$$y_{\text{th}(x)} = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot \left(\frac{\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot l_0}{2} \cdot x_0 - \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} \right) \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})$$

(Für $x_0 = \frac{\ell_0}{2}$ ergibt sich hieraus die bekannte maximale Durchbiegung mit

$$y_{\text{th max}} = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot \frac{\ell_0^2}{8} \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})$$

für jede Faser).

Formt man vorstehende Gleichung weiter wie folgt um

$$y_{\text{th}(x)} \cdot \frac{h}{\alpha_{\text{tm}}} = \left(\underbrace{\frac{\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot l_0}{2}}_{A'} \cdot x_0 - \underbrace{\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot x_0}_{A_x} \cdot \frac{x_0}{2} \right) \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})$$

so erkennt man an Bild D 9.1

$$\text{mit } A' = \frac{\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot l_0}{2}$$

$$\text{und } A_x = \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot x_0,$$

dass man zur Berechnung der Durchbiegung eines rein thermisch beanspruchten Trägers (zunächst mit $h = \text{const}$ und $\kappa = \text{const}$!) an der Stelle „ x_0 “, die Formel zur rechnerischen Ermittlung der Biegelinie in Anlehnung an das Analogieverfahren von Mohr erhalten hat.

$$y_{\text{th}(x)} = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot \left(A' \cdot x_0 - A_x \cdot \frac{x_0}{2} \right) \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}) \quad (\text{D 9.1.1})$$

und allgemein mit $\frac{x_0}{2} = x_0 - x_s$ (siehe Bild D 9.1)

$$y_{th(x)} \cdot \frac{h}{\alpha_{tm}} = (A' \cdot x_0 - A_x(x_0 - x_s)) \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)}) \quad \text{bzw.}$$

$$y_{th(x)} = \frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot (A' \cdot x_0 - A_x(x_0 - x_s)) \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)}) \quad (\text{D 9.1.2})$$

Die Ableitung der Gleichung (D 9.1.2) für $\kappa = \text{const}$ kann in Anlehnung an Mohr entsprechend den drei Berechnungsschritten der Tabelle D 9.1 analog der nachfolgend beschriebenen Ableitung für $\kappa \neq \text{const}$ durchgeführt werden. Bild D 9.2 zeigt die drei prinzipiellen Berechnungsschritte des Mohrschen Analogieverfahrens. Mit einem Sternchen sind die fiktiven Größen $q^*_{(x)}$, $F^*_{Q(x)}$ und $M^*_{Q(x)}$ gekennzeichnet.

Bei rein thermischer Beanspruchung kann der Morsche Satz wie folgt formuliert werden: „Die mit dem Quotienten aus Trägerhöhe dividiert durch den mittleren linearen Ausdehnungsquotienten multiplizierten Durchbiegungen eines Trägers sind gleich den Biegemomenten des mit der M^* -Fläche (Verlauf der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_1$ über die Stablänge!) belasteten Trägers. Und die mit dem gleichen Quotienten multiplizierten Neigungen der elastischen Linie in den Auflagern sind gleich den Auflagerkräften A' bzw. B' des gleicherweise belasteten Trägers“.

Die Berechnung der thermischen Durchbiegung in Anlehnung an Mohr wird zweckmäßig genutzt, wenn wie nachfolgend dargestellt, nur der Linienzug „ $\Delta\vartheta_{1(x)}$ “ nach Auswertung mehrerer Querschnittstemperaturfelder (hier $n = 7$), welche gleichmäßig über die Trägerlänge verteilt sind, bekannt ist.

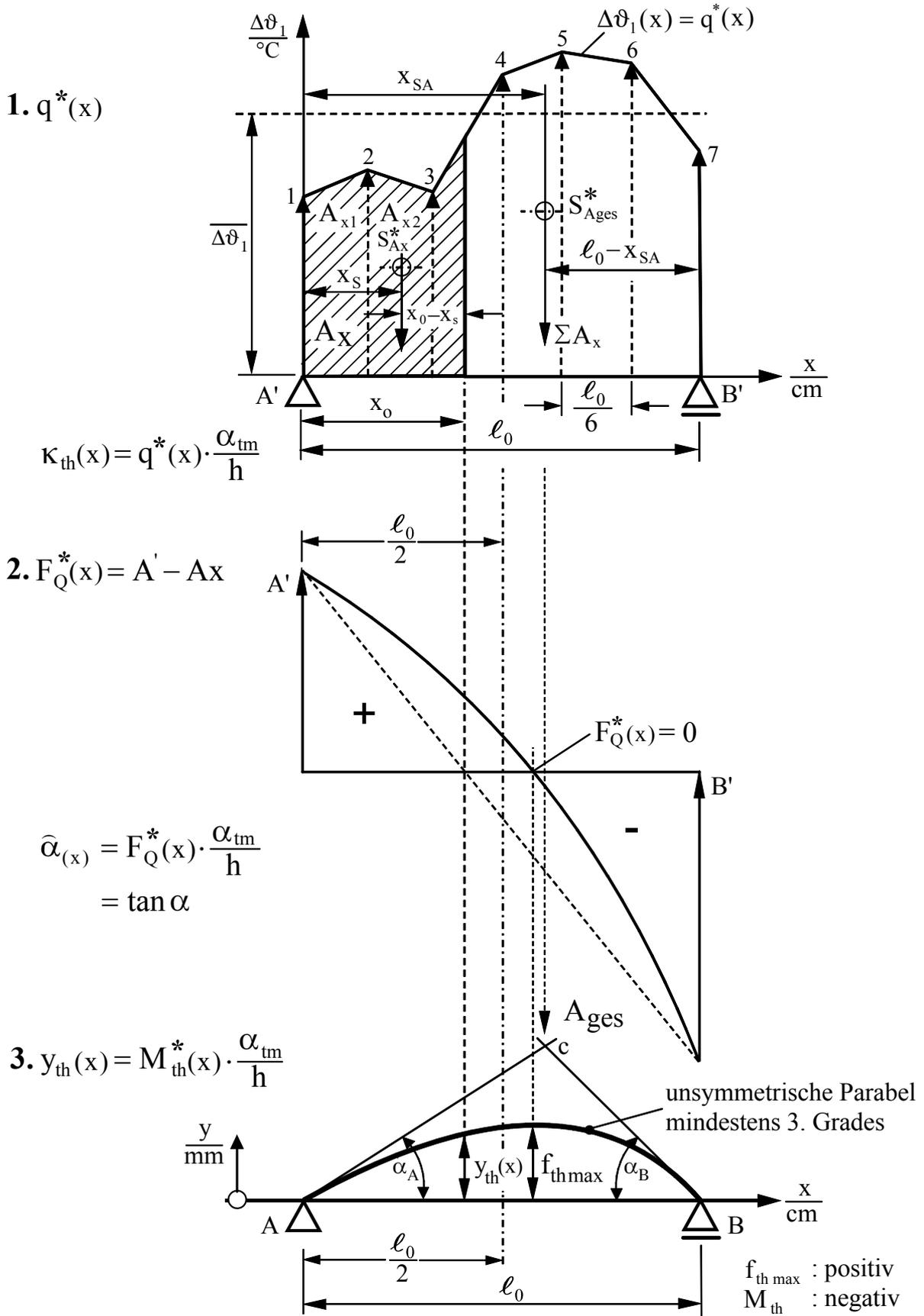


Bild D 9.2: Fiktive Belastung und thermische Durchbiegung bei $\kappa \neq \text{const}$

D 9.2 Berechnung bei $\kappa \neq \text{const}$

Die Differentialgleichung der thermischen Biegelinie lautet:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Schritt} \quad y''_{\text{th}(x)} &= -\frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot \Delta\vartheta_{1(x)} = -\frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot q^*_{(x)} & (D 9.2.1) \\ &= -\kappa_{\text{th}(x)} \end{aligned}$$

$$\text{allgemein: } y''_{\text{th}(x,y)} = -\frac{\kappa_{\text{th}(x)}}{(1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})} = -\frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta_{1(x)}}{h \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Schritt} \quad y'_{\text{th}(x)} &= -\frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot \int_0^{x_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot dx = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot F^*_{Q(x_0)} \\ &= -\frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot A_{x_0} + C_1 = \tan \alpha & (D 9.2.2) \end{aligned}$$

Berechnung der Konstanten „ C_1 “ aus der Randbedingung bei $x = 0$:

$$F^*_{Q(x=0)} = A' \text{ und } A_{x_0} = 0$$

$$\frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot F^*_{Q(x=0)} = -\frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot A_{x_0} + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot A' = C_1 = \bar{\alpha}_A \quad (D 9.2.3)$$

Die Größe „ A' “ berechnet sich aus:

$$A' \cdot \ell_0 = A_{\text{ges}} \cdot (\ell_0 - x_{\text{SA}}) \quad (D 9.2.4)$$

$$A' = \frac{A_{\text{ges}}}{\ell_0} \cdot (\ell_0 - x_{\text{SA}}) \text{ bzw.}$$

$$A' = \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot (\ell_0 - x_{\text{SA}})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'_{\text{th}(x)} &= \bar{\alpha}_{(x)} = \tan \alpha = -\frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot A_{x_0} + \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot A' \\ &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' - A_{x_0}) = F_{Q^*}(x) \cdot \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} = \text{Verkrümmungswinkel an der Stelle „}x\text{“} \end{aligned}$$

$$(D 9.2.5)$$

Setzt man $\widehat{\alpha}_{(x)} = 0$ so erhält man aus $A' = A_x$ die Stelle „x“ des Nulldurchganges der $F_{Q(x)}^*$ -Linie bzw. die Stelle des maximalen fiktiven Biegemomentes $M_{th,max}^*$ und damit die Stelle der maximalen Durchbiegung „ $f_{th,max}$ “.

Und allgemein für alle Fasern mit $F_{Q(x)}^* = A' - A_{x_0}$:

$$y'_{th(x,y)} = \widehat{\alpha}_{(x,y)} = \frac{\alpha_{tm}}{h \cdot (1 + \varepsilon_{th(y)})} \cdot (A' - A_{x_0}) \quad (D 9.2.6)$$

$$\alpha^\circ_{(x)} = \widehat{\alpha}_{(x)} \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$A' = \frac{A_{ges}}{\ell_0} \cdot (\ell_0 - x_{SA}) = \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot (\ell_0 - x_{SA})$$

$$\text{und } F_{Q(x)}^* = \widehat{\alpha}_{(x)} \cdot \frac{h}{\alpha_{tm}} = A' - A_{x_0} \quad (D 9.2.7)$$

$$\text{mit } A_{x_0} = 0 \text{ ergibt sich der Auflagerwinkel } \widehat{\alpha}_A = \frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot A' \text{ und} \quad (D 9.2.8)$$

$$\widehat{\alpha}_B = \frac{\alpha_{tm}}{h} \cdot B' ;$$

$$A' = A_{ges} - B'$$

$$\text{mit } B' = \frac{A_{ges}}{\ell_0} \cdot x_{SA} = \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot x_{SA}$$

In Bild D 9.2 sind die Schwerpunkte S_{Ax}^* und S_{Ages}^* als Schwerpunkte in Trapezen beim angegebenen Linienzug zu bestimmen. Die zugehörigen Flächen- und Schwerpunktintegrale lauten:

$$A_{ges} = \int_0^{\ell_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot dx \quad (D 9.2.9)$$

$$A_{x_0} = \int_0^{x_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot dx \quad (D 9.2.10)$$

$$x_S = \frac{A_{x_0} \cdot x_S}{A_{x_0}} = \frac{\int_0^{x_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot x \cdot dx}{\int_0^{x_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot dx} \quad (D 9.2.11)$$

$$x_{SA} = \frac{A_{ges} \cdot x_{SA}}{A_{ges}} = \frac{\int_0^{\ell_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot x \cdot dx}{\int_0^{\ell_0} \Delta\vartheta_{1(x)} \cdot dx} \quad (D 9.2.12)$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ Schritt} \quad y_{\text{th}(x)} &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' - A_{x_0}) \cdot \int_0^{x_0} dx = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot M^*_{\text{th}(x)} \\
 &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' - A_{x_0}) \cdot x_0 + C_2
 \end{aligned} \tag{D 9.2.13}$$

Berechnung der Integrationskonstanten „ C_2 “ aus der Randbedingung bei $x = x_0$:

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot M^*_{\text{th}(x=x_0)} &= 0 \\
 \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot M^*_{\text{th}(x_0)} &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' \cdot x_0 - A_{x_0} \cdot (x_0 - x_s)) \\
 &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' - A_{x_0} \cdot x_0) + C_2 \\
 \Rightarrow C_2 &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot A_{x_0} \cdot x_s
 \end{aligned} \tag{D 9.2.14}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow y_{\text{th}(x)} &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' - A_{x_0}) \cdot x_0 + \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot A_{x_0} \cdot x_s \\
 y_{\text{th}(x)} &= \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' \cdot x_0 - A_{x_0} \cdot (x_0 - x_s))
 \end{aligned} \tag{D 9.2.15}$$

$$\text{und mit } \ell_{\text{th}(y)} = \ell_0 \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})$$

$$x_{\text{th}(y)} = x_0 \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)})$$

$$\varepsilon_{\text{th}(y)} = \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\vartheta'_1 + \frac{\Delta\vartheta}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

erhält man die Endgleichung der thermischen Biegelinie für alle Fasern über die Stabhöhe, wenn „ $\Delta\vartheta_{1(x)}$ “ bekannt ist, in der Form:

$$y_{\text{th}(x,y)} = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (A' \cdot x_0 - A_{x_0} \cdot (x_0 - x_s)) \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}) \tag{D 9.2.16}$$

$$\text{oder } y_{\text{th}(x,y)} = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot \left(\frac{A_{\text{ges}}}{\ell_0} \cdot (\ell_0 - x_{sA}) \cdot x_0 - A_x \cdot (x_0 - x_s) \right) \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}) \tag{D 9.2.17}$$

$$\text{oder } y_{\text{th}(x,y)} = \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} \cdot (\overline{\Delta\vartheta_1} \cdot (\ell_0 - x_{sA}) \cdot x_0 - A_x \cdot (x_0 - x_s)) \cdot (1 + \varepsilon_{\text{th}(y)}) \tag{D 9.2.18}$$

Die Berechnung von $\overline{\Delta\vartheta_1} = \frac{A_{\text{ges}}}{\ell_0}$ kann bei einem Linienzug mit gleichmäßigen Abständen der

Messstellen wie in Bild D 9.2 dargestellt, mit der Trapezformel, hier $n = 7$, erfolgen:

$$\overline{\Delta\vartheta_1} = \frac{\Delta\vartheta_{1/1} + 2 \cdot \Delta\vartheta_{1/2} + \dots + 2 \cdot \Delta\vartheta_{1/(n-1)} + \Delta\vartheta_{1/n}}{2 \cdot (n-1)}$$

Beispielrechnung

(Anhang A, Versuch 19/IV)

Gegeben: $\overline{\Delta\vartheta_1} = 152,38^\circ \text{C}$; $\alpha_{\text{tm}} = 13,29 \cdot 10^{-6} / \text{K}$

$$l_0 = 1200 \text{ mm}$$

$$h = 120 \text{ mm}$$

$$f_{\text{thg}} = 3,1 \text{ mm}$$

Gesucht: 1. Der Neigungswinkel α° in den Auflagern
2. Die maximale thermische Durchbiegung

$$\text{Zu 1.: } \hat{\alpha} = \tan \alpha = A' \cdot \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\Delta\vartheta_1} \cdot l_0 \cdot \frac{\alpha_{\text{tm}}}{h}$$

$$= \frac{152,38 \cdot 1200 \cdot 13,29}{2 \cdot 10^6 \cdot 120}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1,01256}{100} ; \alpha^\circ = \hat{\alpha} \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\alpha^\circ = \hat{\alpha} \cdot 57,29578$$

$$\alpha^\circ = 0,580^\circ$$

$$\text{Zu 2.: } f_{\text{th max}} \cong \frac{\hat{\alpha} \cdot l_0}{4} = \frac{1,01256 \cdot 1200}{100 \cdot 4} = 3,04 \text{ mm}$$

also in Ordnung!

D 9.3: Vorzeichenkonvention bei thermischer Beanspruchung: $\vartheta = \vartheta(y)$

Das Biegemoment wird als positiv bezeichnet, wenn sich der Träger infolge des Momentes nach unten durchbiegt, als negativ, wenn er sich nach oben durchbiegt.

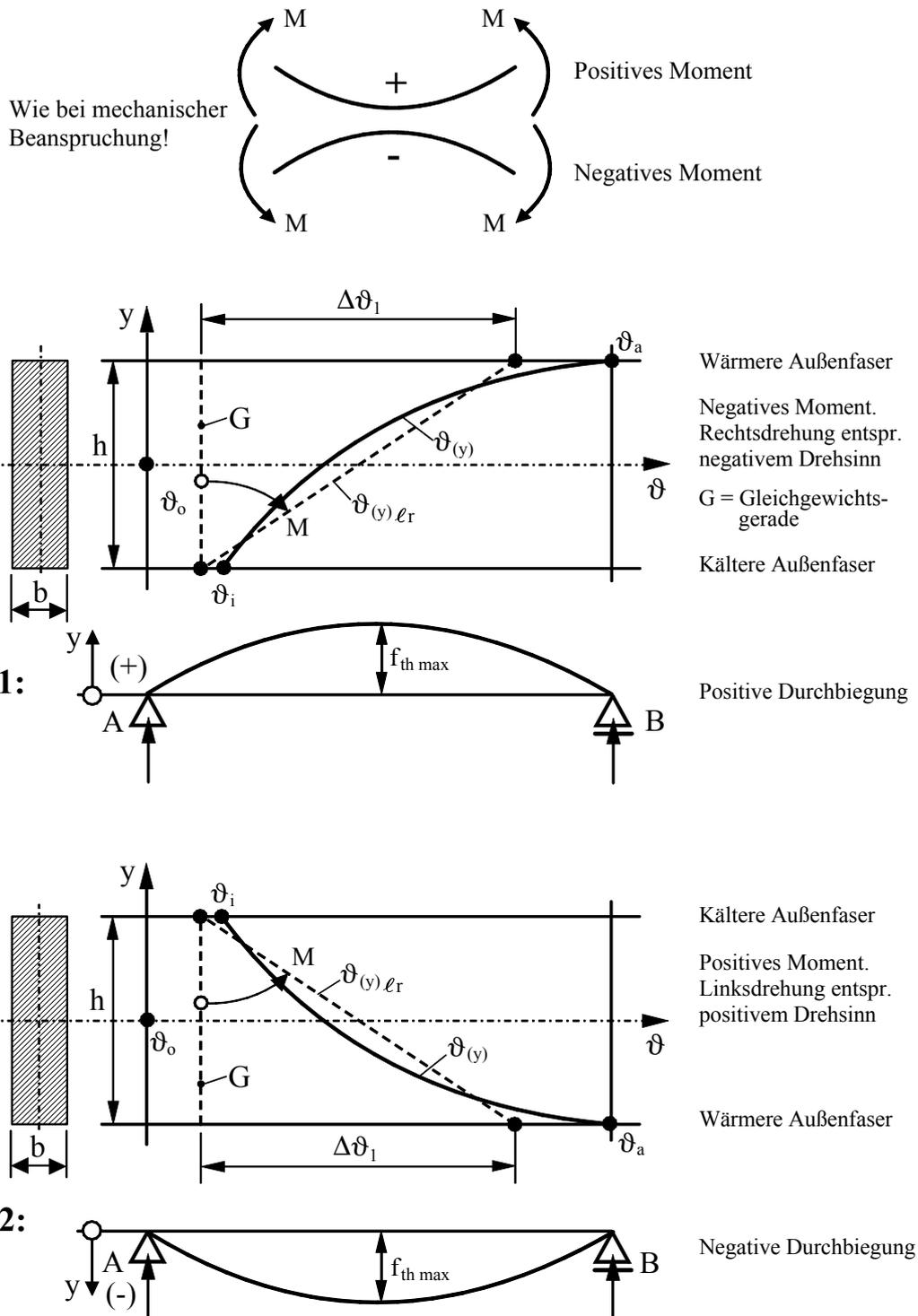


Bild D 9.3: Vorzeichen und Richtungen von thermischen Biegemomenten und Durchbiegungen

Anhang E

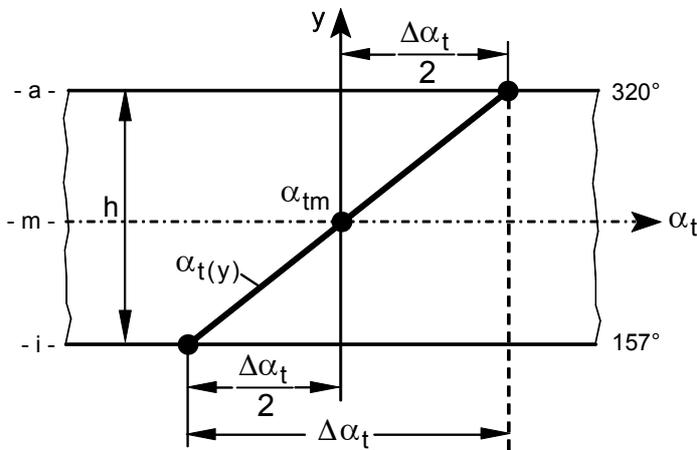
Einfluss der Temperaturabhängigkeit des linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten „ α_t “

1. Der Verlauf von α_t über die Temperatur und über die Stabhöhe

Der Wärmeausdehnungskoeffizient verläuft im Temperaturbereich von 20 °C bis 450 °C (Kriechgrenze) in einer leicht gekrümmten Kurve von $\alpha_t = 11,90 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ bis $\alpha_t = 14,30 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ [30, 94, 101, 109]. Abschnittsweise darf der Verlauf von α_t als linear angesehen werden (siehe Anhang C). Dann gilt:

$$\alpha_{tm} = \frac{\alpha_t(\vartheta_a) + \alpha_t(\vartheta_i)}{2} = \text{Mittelwert} = \alpha_t(\vartheta_{mR})$$

$$\Delta\alpha_t = \alpha_t(\vartheta_a) - \alpha_t(\vartheta_i) = \text{Differenz zwischen den zugehörigen Außenfaserwerten}$$



Zum Versuch 19/IV:

$$\Delta\vartheta_{mD} = 180,25^\circ\text{C}$$

$$\Delta\vartheta_l = 152,38^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_{mR} = 238,50^\circ\text{C} \rightarrow \alpha_{tm} = 13,29 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$\Delta\vartheta_a = 320^\circ\text{C} \rightarrow \alpha_{ta} = 13,77 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$\Delta\vartheta_i = 157^\circ\text{C} \rightarrow \alpha_{ti} = 12,81 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$h = 120\text{mm}$$

$$\Delta\alpha_t = \alpha_{ta} - \alpha_{ti} = 0,96 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$\alpha_{t(y)} = \alpha_{tm} + \frac{\Delta\alpha_t \cdot y}{h}$$

(E1)

Bild E 1: Verlauf von $\alpha_t(y)$

2. Dehnungsgleichung und Dehnungsdiagramm Einfluss der Temperaturabhängigkeit von „ α_t “ auf die Faserdehnungen

Allgemein: $\varepsilon_{(y)} = \alpha_{t(y)} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}$

mit $\alpha_{t(y)} = \alpha_{tm} + \frac{\Delta\alpha_t \cdot y}{h}$

und $\Delta\vartheta_{(y)lr} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h}$ (aus Kapitel 5)

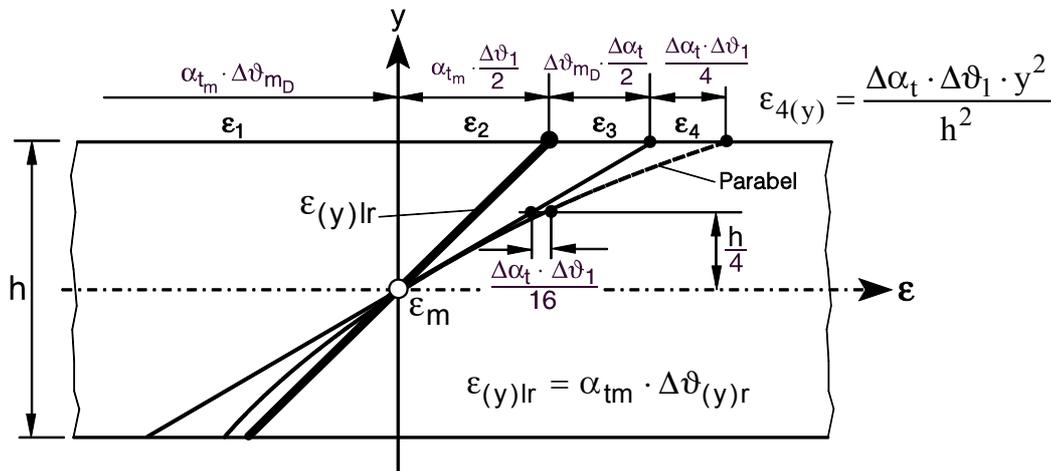
wird: $\varepsilon_{(y)} = \left(\alpha_{tm} + \frac{\Delta\alpha_t \cdot y}{h} \right) \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) = \text{Gesamtdehnung der Fasern}$
über die Stabhöhe (E 2)

$$\varepsilon_{(y)} = \underbrace{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}}_{\text{= } \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr}} + \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} + \Delta\vartheta_{mD} \cdot \frac{\Delta\alpha_t \cdot y}{h} + \frac{\Delta\alpha_t \cdot y}{h} \cdot \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \quad (\text{E 3})$$

Aufteilung der Gesamtdehnung in Dehnungsanteile:

$$\varepsilon_{(y)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \quad ; \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_{(y)lr}$$

$$\varepsilon_{(y)} = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)lr} + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$



ε_1 und ε_2 sind berücksichtigt durch die dick ausgezogene Gerade durch ε_m .

Diese Linie " $\varepsilon_{(y)lr}$ " stellt den resultierenden Dehnungsverlauf über die Stabhöhe nach Auswertung eines Temperaturfeldes gemäß Kapitel 5 dar.

Es verbleiben ε_3 und ε_4 als Einfluß aus $\Delta\alpha_t$.

Bild E 2: Dehnungsdiagramm

$$= E_m \cdot \Delta\vartheta_{mD} \cdot \Delta\alpha_t \cdot \frac{W}{2} ; \frac{I}{h}$$

$$M_{th3} = E_m \cdot I \cdot \frac{\Delta\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{mD}}{h} \quad (E 5)$$

Mit der rechnerischen Temperaturdifferenz „ $\Delta\vartheta_3$ “ lautet das Moment „ M_{th3} “ allgemein:

$$M_{th3} = E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta\vartheta_3}{h}$$

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke $\frac{M_{th3}}{E_m \cdot I} = \frac{\Delta\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{mD}}{h} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_3}{h}$

ergibt sich dann die für die zusätzliche Verkrümmung gesuchte rechnerische Temperaturdifferenz zu:

$$\Delta\vartheta_3 = \frac{\Delta\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{mD}}{\alpha_{tm}} \quad (E 6)$$

5. Linearisierung der Dehnungskurve „ $\epsilon(y)_g$ “ und Ermittlung der zusätzlichen Verschiebung $\Delta u_x = l_0 \cdot \epsilon_{N\alpha_t}$ durch Berechnung der Dehnung $\Delta \epsilon_m = \epsilon_{N\alpha_t}$

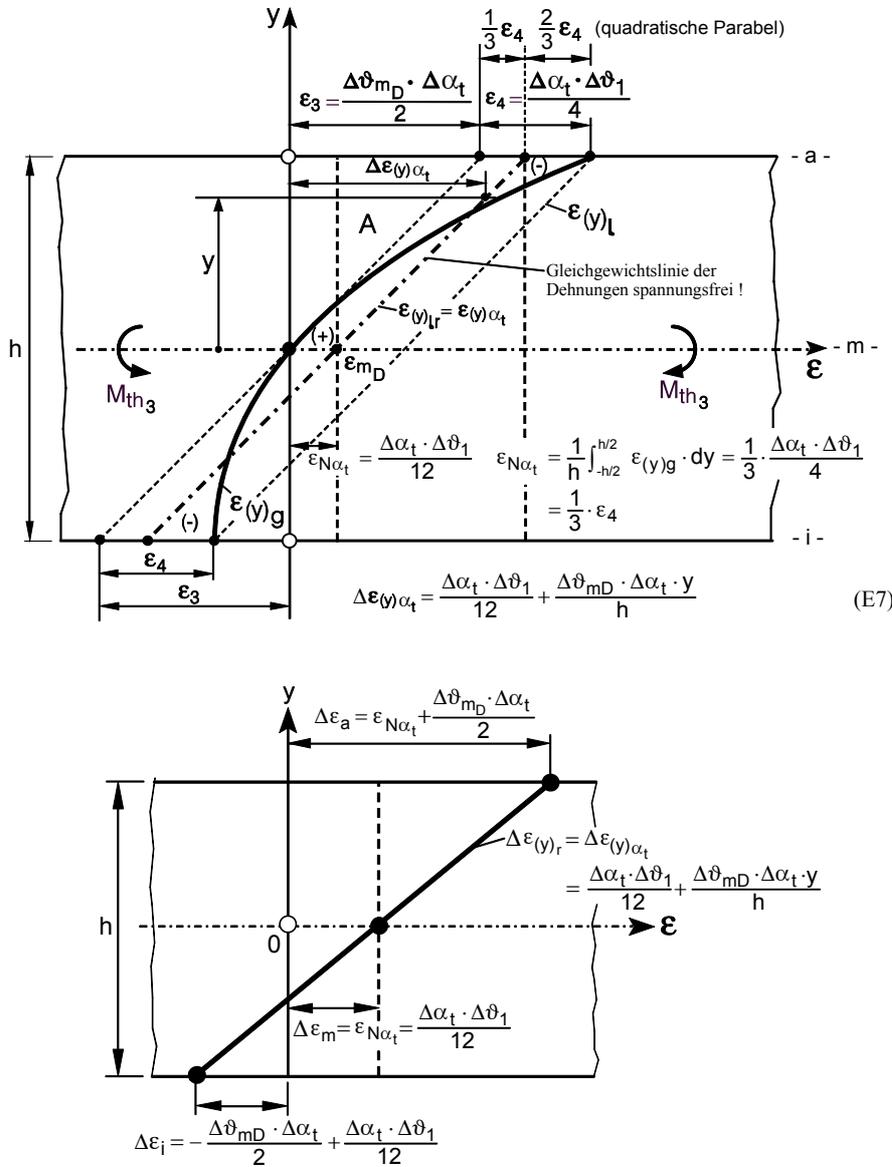


Bild E 4: Auswertung des kurvenförmigen Verlaufes der durch „ $\Delta \alpha_t$ “ bedingten Dehnungsanteile ϵ_3 und ϵ_4

Aus Bild E 4 geht die zusätzliche Verschiebung mit

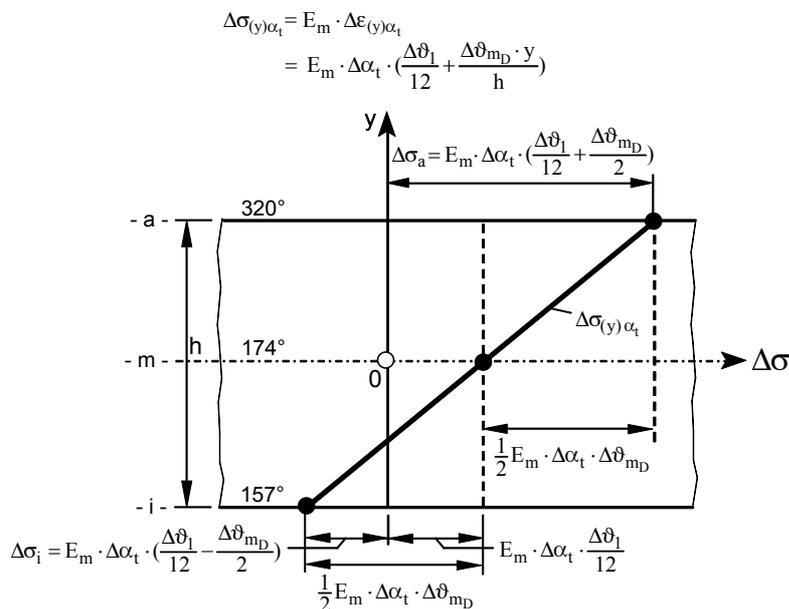
$$\Delta u_x = l_0 \cdot \Delta \epsilon_m = l_0 \cdot \frac{\Delta \alpha_t \cdot \Delta \vartheta_1}{12}$$

hervor. Die Ergebnisse aus Bild E 3, der Berechnung von „ M_{th3} “ und aus Bild E 4, also der zusätzlichen Verdrehung und Verschiebung als Einfluss von „ $\Delta \alpha_t$ “, sind in nachfolgender Tabelle zusammengefasst.

1.	$\Delta\varepsilon_{(y)\alpha_t} = \frac{\Delta\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_1}{12} + \frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot \Delta\alpha_t \cdot y}{h}$	Gesamte Dehnungs- differenzen	
2.	$\Delta\sigma_{(y)\alpha_t} = E_m \cdot \Delta\varepsilon_{(y)\alpha_t} = E_m \cdot \left(\frac{\Delta\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_1}{12} + \frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot \Delta\alpha_t \cdot y}{h} \right)$ $= E_m \cdot \Delta\alpha_t \left(\frac{\Delta\vartheta_1}{12} + \frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot y}{h} \right)$	Gesamte Spannungen	
3.	$\Delta l_{(y)\alpha_t} = l_o \cdot \Delta\varepsilon_{(y)\alpha_t}$	Gesamte Faserlängen - Änderungen	(E 8)
4.	$M_{th3} = E_m \cdot I \cdot \frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot \Delta\alpha_t}{h} = E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta\vartheta_3}{h}$	3. Korrespondierendes therm. Moment	
5.	$\Delta\vartheta_3 = \frac{\Delta\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{mD}}{\alpha_{tm}}$	Rechnerische Temperaturdifferenz zu Pkt. 4	

Tabelle E 1: Zusammenfassung der Einflüsse aus „ $\Delta\alpha_t$ “

6. Darstellung der Spannungsdifferenzen hervorgerufen durch „ $\Delta\alpha_t$ “ gemäß Punkt 2. der Tabelle E 1

Bild E 5: Spannungsdifferenzen aus „ $\Delta\alpha_t$ “ als „ $\Delta\sigma_{(y)\alpha_t}$ “

Anhang F

Einfluss der Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls „E“

Mit zunehmender Temperatur fällt der Wert des Elastizitätsmoduls „E“ (siehe Eurocode 4).

Zum Versuch 19/IV:

$$\left(\begin{array}{l} \Delta\vartheta_{mD} = 180,25^\circ\text{C} \quad ; \quad \Delta\vartheta_1 = 152,38^\circ\text{C} \\ \vartheta_{mR} = 238,5^\circ\text{C} \quad ; \quad \Delta\vartheta = 163^\circ\text{C} \\ \vartheta_a = 320^\circ\text{C} \quad ; \quad \Delta\vartheta_2 = 10,62^\circ\text{C} \\ \vartheta_i = 157^\circ\text{C} \\ h = 120\text{ mm} \end{array} \right)$$

gehören z.B. folgende, den jeweiligen Temperaturen zugeordnete Werkstoffkennwerte:

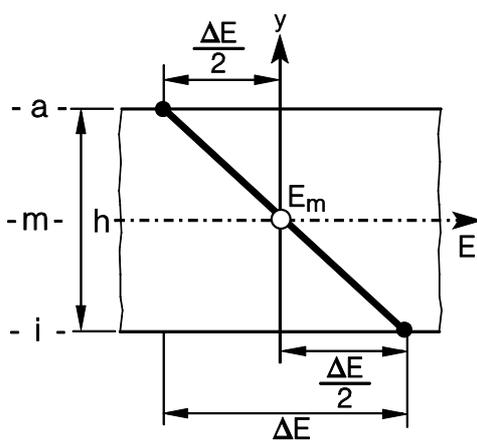
$$320^\circ\text{C} \rightarrow E_a = 1.924 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad 320^\circ\text{C} \rightarrow \alpha_{ta} = 13,77 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$238,5^\circ\text{C} \rightarrow E_m = 1,99 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad 238,5^\circ\text{C} \rightarrow \alpha_{tm} = 13,29 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$157^\circ\text{C} \rightarrow E_i = 2.036 \cdot 10^5 \cdot \text{N/mm}^2 \quad ; \quad 157^\circ\text{C} \rightarrow \alpha_{ti} = 12,81 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$\Delta E = 0.112 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad \Delta\alpha_t = 0,96 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

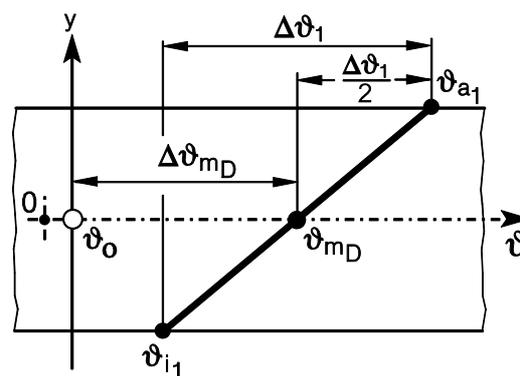
$$= E(\vartheta_i) - E(\vartheta_a)$$



$$E_{(y)} = E_m - \frac{\Delta E \cdot y}{h}$$

$$E_m = \frac{E_{(\vartheta_a)} + E_{(\vartheta_i)}}{2}$$

Bild F 1: Verlauf von $E_{(y)}$



$$\begin{aligned} \vartheta'_a = \vartheta_{a1} = \vartheta_a - \Delta\vartheta'' - \frac{\Delta\vartheta_2}{2} & \quad \vartheta_o = 18^\circ\text{C} \\ \vartheta'_i = \vartheta_{i1} = \vartheta_i - \Delta\vartheta'' + \frac{\Delta\vartheta_2}{2} & \quad \Delta\vartheta'' = \frac{\Delta\vartheta}{h} = 40,25^\circ\text{C} \\ \Delta\vartheta_{(y)lr} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} & \quad \Delta\vartheta_2 = 10,62^\circ\text{C} \\ & \quad \Delta\vartheta_{mD} = 180,25^\circ\text{C} \\ & \quad \Delta\vartheta_1 = 152,38^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Bild F 2: Gleichgewichtsgerade aus der Temperaturfeldauswertung

1. Spannungsgleichung und Spannungsdiagramm

Betrachtet man zunächst alle Dehnungen als mit Spannungen behaftet, so erhält man mit

$$\sigma_{(y)} = E_{(y)} \cdot \varepsilon_{(y)|r} = \left[E_m - \frac{\Delta E \cdot y}{h} \right] \cdot \varepsilon_{(y)|r}$$

$$\text{und } \varepsilon_{(y)|r} = \alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{(y)|r} = \alpha_{tm} \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$\sigma_{(y)} = \left(E_m - \frac{\Delta E \cdot y}{h} \right) \cdot \left(\Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right) \cdot \alpha_{tm} \quad (\text{F 1})$$

$$\sigma_{(y)} = \alpha_{tm} \cdot E_m \cdot \Delta\vartheta_{mD} + \alpha_{tm} \cdot E_m \cdot \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta E \cdot y}{h} \cdot \Delta\vartheta_{mD} - \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta E \cdot y}{h} \cdot \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \quad (\text{F 2})$$

$$\sigma_{(y)} = \underbrace{\sigma_1}_{\sigma_{th(y)}} + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4$$

$$\sigma_{(y)} = \sigma_{th(y)} - \sigma_3 - \sigma_4$$

σ_1 und σ_2 entfallen wegen spannungsloser Dehnungsanteile der Gleichgewichtsgeraden bei dieser Art von Betrachtung (hier: y-Achse).

Es verbleibt der Ausdruck:

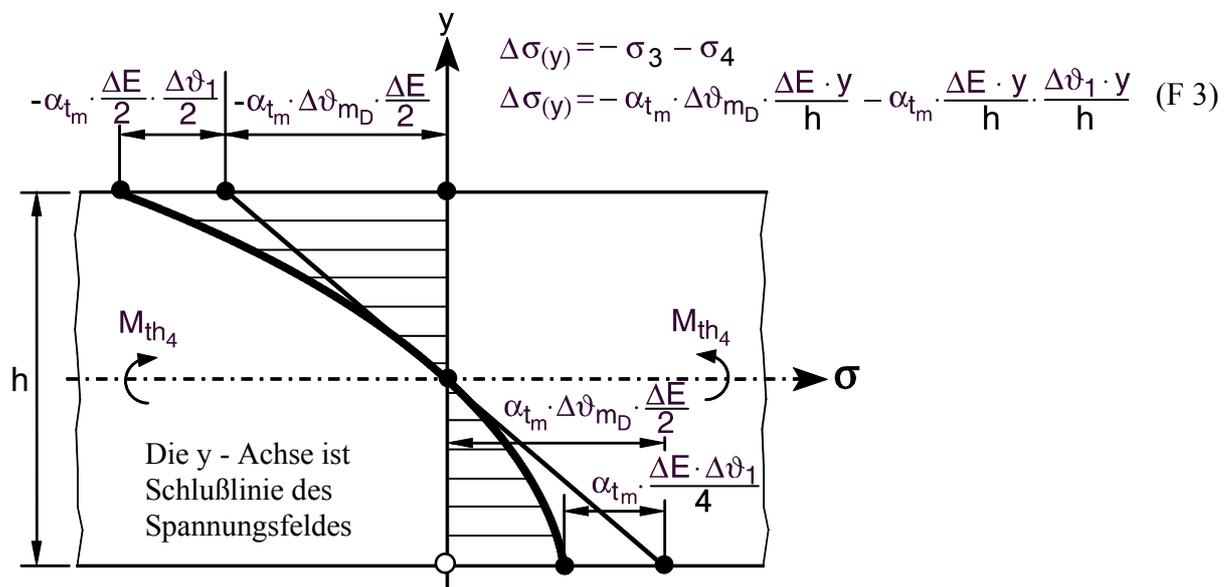


Bild F 3: Kurvenförmiger Verlauf der Spannungen hervorgerufen durch „ ΔE “

Aus den Bedingungen " $\Sigma N = 0$ " und " $\Sigma M = 0$ " erfolgt analog zu den Auswertungen eines Temperaturdifferenzen - Feldes eine Verschiebung und Verdrehung der Schlußlinie " $\Delta\sigma_{(y)l}$ " zur Gleichgewichtslinie " $\Delta\sigma_{(y)r}$ ".

1.	$\Delta\sigma_{(y)\Delta E} = -\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta E \cdot \Delta\vartheta_1}{12} - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} \cdot \Delta E \cdot y}{h}$	Spannungen
2.	$\Delta l_{(y)\Delta E} = l_0 \cdot \frac{\Delta\sigma_{(y)\Delta E}}{E_m} = -\alpha_{tm} \cdot \Delta E \cdot \frac{l_0}{E_m} \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta_1}{12} + \frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot y}{h}\right)$	
3.	$M_{th4} = -\Delta E \cdot I \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta\vartheta_{mD}}{h}$	4. Korrespondierendes therm. Moment
4.	$M_{th4} = E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm} \cdot \frac{\Delta\vartheta_4}{h}$	
5.	$\Delta\vartheta_4 = -\frac{\Delta E \cdot \Delta\vartheta_{mD}}{E_m}$	Rechnerische Temperaturdifferenz

Tabelle F 1: Berechnungsgleichungen zum Diagramm $\sigma = f(\Delta E)$

4. Darstellung der Spannungsdifferenzen aus „ ΔE “

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{(y)\Delta E} &= -\Delta E \cdot \Delta\varepsilon_{(y)\Delta E} \\ &= -\Delta E \cdot \left(\frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_1}{12} + \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{mD} \cdot y}{h}\right) \\ \Delta\sigma_{(y)\Delta E} &= -\Delta E \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta_1}{12} + \frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot y}{h}\right) \end{aligned} \quad (F 7)$$

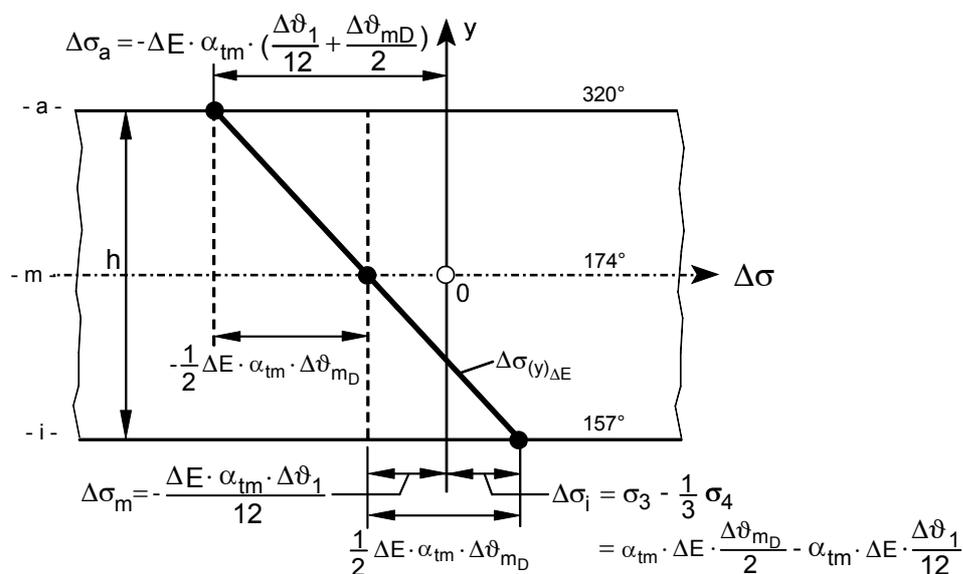


Bild F 5: Funktion der Spannungsdifferenzen über die Stabhöhe verursacht durch „ ΔE “

5. Zusammenfassung der Einflüsse von „ $\Delta\alpha_t$ “ und „ ΔE “.

5.1 Tabellarische Übersicht

1.	$\Delta\sigma_{(y)} = \Delta\sigma_{(y)\Delta E} + E_m \cdot \Delta\varepsilon_{(y)\alpha_t} = \Delta\sigma_r$
	$\Delta\sigma_{(y)} = \left(\frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot y}{h} + \frac{\Delta\vartheta_1}{12} \right) (E_m \cdot \Delta\alpha_t - \alpha_{tm} \cdot \Delta E)$
2.	$\Delta l_{(y)} = \Delta l_{(y)\Delta E} + \Delta l_{(y)\alpha_t} = l_o \left(\Delta\varepsilon_{(y)\alpha_t} + \frac{\Delta\sigma_{(y)\Delta E}}{E_m} \right)$
	$\Delta l_{(y)} = \frac{l_o}{E_m} \cdot \Delta\sigma_{(y)}$
3.	$M_{th_{3/4}} = M_{th_3} + M_{th_4}$
	$M_{th_{3/4}} = \frac{\Delta\vartheta_{mD} \cdot I}{h} \cdot (E_m \cdot \Delta\alpha_t - \Delta E \cdot \alpha_{tm})$
	$M_{th_{3/4}} = E_m \cdot I \cdot \alpha_{tm} \left(\frac{\Delta\vartheta_3 + \Delta\vartheta_4}{h} \right)$
4.	$\Delta\vartheta_3 = \frac{\Delta\alpha_t \cdot \Delta\vartheta_{mD}}{\alpha_{tm}}$
	$\Delta\vartheta_4 = \frac{\Delta E \cdot \Delta\vartheta_{mD}}{E_m}$ $\Delta\vartheta_{3/4} = \Delta\vartheta_{mD} \cdot \left(\frac{\Delta\alpha_t}{\alpha_{tm}} - \frac{\Delta E}{E_m} \right)$
5.	$\Delta\vartheta_{ges} = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_{3/4}$
6.	$f_{th_{ges}} = - \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{ges} \cdot l_o \cdot l_i}{h \cdot 8}$ (Kältere Innenfaser)

(F 8)

Anmerkung:

Nach Auswertung eines Temperaturfeldes gibt die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_{3/4}$ die zusätzliche Verdrehung des resultierenden Nullspannungstemperaturverlaufes und

$$\Delta\vartheta_{m_{ges}} = \frac{\Delta\vartheta_1}{12} (E_m \cdot \Delta\alpha_t - \alpha_{tm} \cdot \Delta E)$$

gibt die zusätzliche Verschiebung als rechnerische Temperaturdifferenz an.

Tabelle F 2: Einflüsse durch „ $\Delta\alpha_t$ “ und „ ΔE “ auf Spannungen, Faserlängenänderungen, korrespondierende thermomechanische Momente, rechnerische Temperaturdifferenzen und auf die Durchbiegung

5.2 Zusammenfassung und Beurteilung der Einflüsse aus der Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte

Mit den Kennwerten des Versuchs 19/IV und der Tabelle F 2 kann gezeigt werden, dass durch die Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte „ E “ und „ α_t “ eine zusätzliche Verschiebung und eine zusätzliche Verdrehung der Stabkanten stattfindet. Dies wird hervorgerufen durch die auftretenden Spannungen „ $\Delta\sigma_{(y)}$ “ und durch die zusätzlichen Momente „ M_{th_3} “ und „ M_{th_4} “ mit den zugehörigen rechnerischen Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_3$ “ und „ $\Delta\vartheta_4$ “. Die wirksame Gesamttemperaturdifferenz ist in Zeile 5 und die Gesamtdurchbiegung der kälteren Innenfaser ist in Zeile 6 angegeben.

Kennwerte aus dem Versuch 19/IV:

$$\begin{aligned} \alpha_{tm} &= 13,29 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} & ; & \quad l_0 = 1200 \text{ mm} & \quad ; & \quad h/2 = 60 \text{ mm} \\ \Delta\alpha_t &= 0,96 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \\ E_m &= 1,99 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 & ; & & & -\Delta E \cdot \alpha_{tm} = -0,148848 \\ \Delta E &= 0,112 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 & ; & & & E_m \cdot \Delta\alpha_t = \underline{0,19104} \\ \Delta\vartheta_1 &= \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 = 163 - 10,62 = 152,38 \text{ } ^\circ\text{C} & & & & 0,042192 \\ \Delta\vartheta_{mD} &= 180,25 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

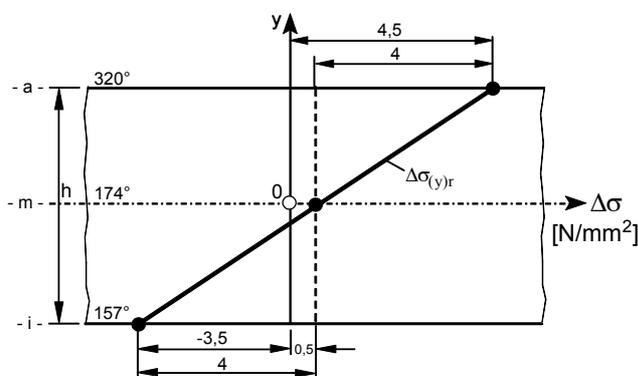
Berechnungsergebnisse zum Versuch 19/IV:

$$\Delta\vartheta_{3/4} = 2,9 \text{ } ^\circ\text{C} ; \Delta\vartheta_{ges} = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_{3/4} = \Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_{3/4} = 155,28 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\sigma_{thares} = \sigma_{tha} + 4,5 \text{ N/mm}^2 (\approx -4 \%) ; \sigma_{tha} = -120,6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{thmres} = \sigma_{thm} + 0,5 \text{ N/mm}^2 (\approx +1 \%) ; \sigma_{thm} = 64,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{thires} = \sigma_{thi} - 3,5 \text{ N/mm}^2 (\approx +4 \%) ; \sigma_{thi} = -92,3 \text{ N/mm}^2$$

**Bild F 5.2: Resultierende Spannungsdifferenzen über die Stabhöhe aus „ $\Delta\alpha_t$ “ und „ ΔE “**

Gegenüber Anhang A ergibt die Nachrechnung der Durchbiegung mit

$$K_{thges} = \frac{\alpha_{tm} \cdot \Delta\vartheta_{ges}}{h} = \frac{\alpha_{tm} \cdot (\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_{3/4})}{h} \text{ einen um etwa } 2 \% \text{ größeren Wert}$$

während die Spannungen in der wärmeren Außenfaser um etwa 4 % abnehmen. Im Niedrigtemperaturbereich genügt es, mit den Durchschnittswerten „ E_m “ und „ α_{tm} “ zu rechnen. Im Hochtemperaturbereich ist jedoch die Temperaturabhängigkeit dieser Werkstoffkennwerte von Fall zu Fall zu berücksichtigen.

Anhang G

Zeichnerische Darstellung von thermomechanischen Spannungen, Wärmespannungen und resultierenden Wärmespannungen.

Die resultierenden Wärmespannungen sind aus der geometrischen Addition von thermomechanischen Spannungen und Wärmespannungen entstanden und werden in nachfolgenden Bildern G 1, G 2 und G 3 dargestellt.

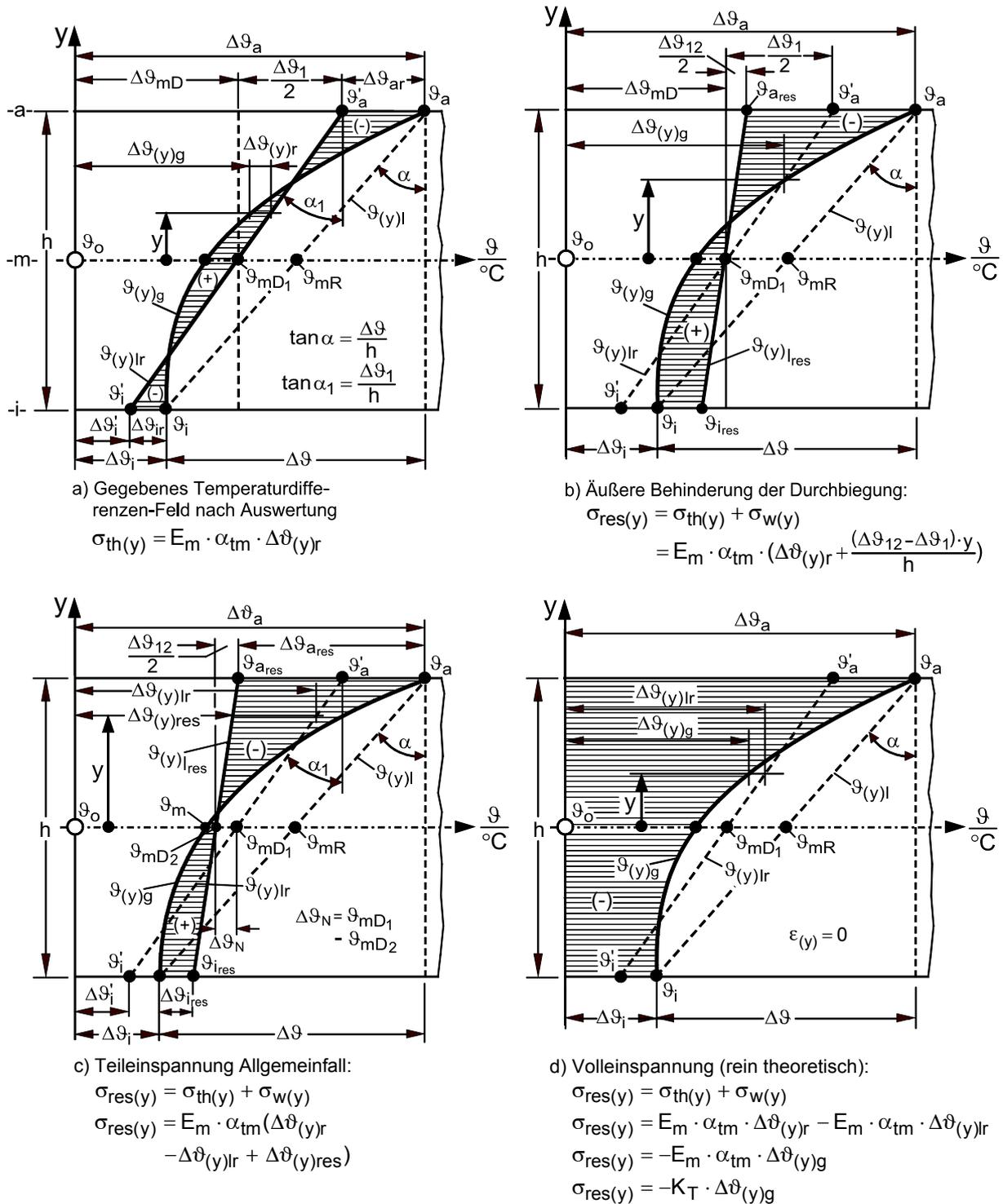


Bild G 1: Thermomechanische Spannungen $\sigma_{th}(y)$, Wärmespannungen $\sigma_w(y)$ und resultierende Wärmespannungen $\sigma_{w res}(y) = \sigma_{res}(y)$

Zum Bild d):

Es handelt sich um eine rein theoretische Darstellung einer Volleinspannung zwischen zwei starren Wänden (Zwangskraftsystem) mit der durch thermische Beanspruchung hervorgerufenen, eingepprägten Weggröße

$$\overline{\Delta l_{\text{th}}} = l_0 \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{mD}}$$

In der Praxis trifft diese Darstellung nicht zu, da jedes Tragwerkselement und jedes Widerlager als eine Feder aufgefasst werden kann. Die durch das Zwangskraftsystem hervorgerufene theoretische, maximale Normalkraft (Reaktionskraft)

$$N_{\text{max}} = E_m \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{mD}} \cdot A_Q$$

wird durch die vorhandenen Federraten der Stäbe und Auflager abgemindert. **Die Summe der Einzelfederwege ist gleich der eingepprägten Weggröße $\overline{\Delta l_{\text{th}}}$.**

Daraus folgt für die Reaktionskraft:

$$N_{\text{res}} = \frac{\overline{\Delta l_{\text{th}}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_{\text{Ni}}}} \quad [\text{N}] \quad \text{mit } C_{\text{Ni}} = \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

= Federrate bei Zug-/Druckspannung
= Federkonstante
= Federsteifigkeit

Analog gilt für das Reaktionsmoment:

$$M_{\text{res}} = \frac{\widehat{\varphi}_{\text{res}} \cdot 2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_{\text{Mi}}}} \quad [\text{N} \cdot \text{mm} \cdot \text{rad}] \quad \text{mit } C_{\text{Mi}} = \frac{E_i \cdot I_i}{l_i} \quad [\text{N} \cdot \text{mm}]$$

= Federrate bei Biegung

und $\widehat{\varphi}_{\text{res}} = \text{Resultierender Stabenddrehwinkel} \quad [\text{rad}]$

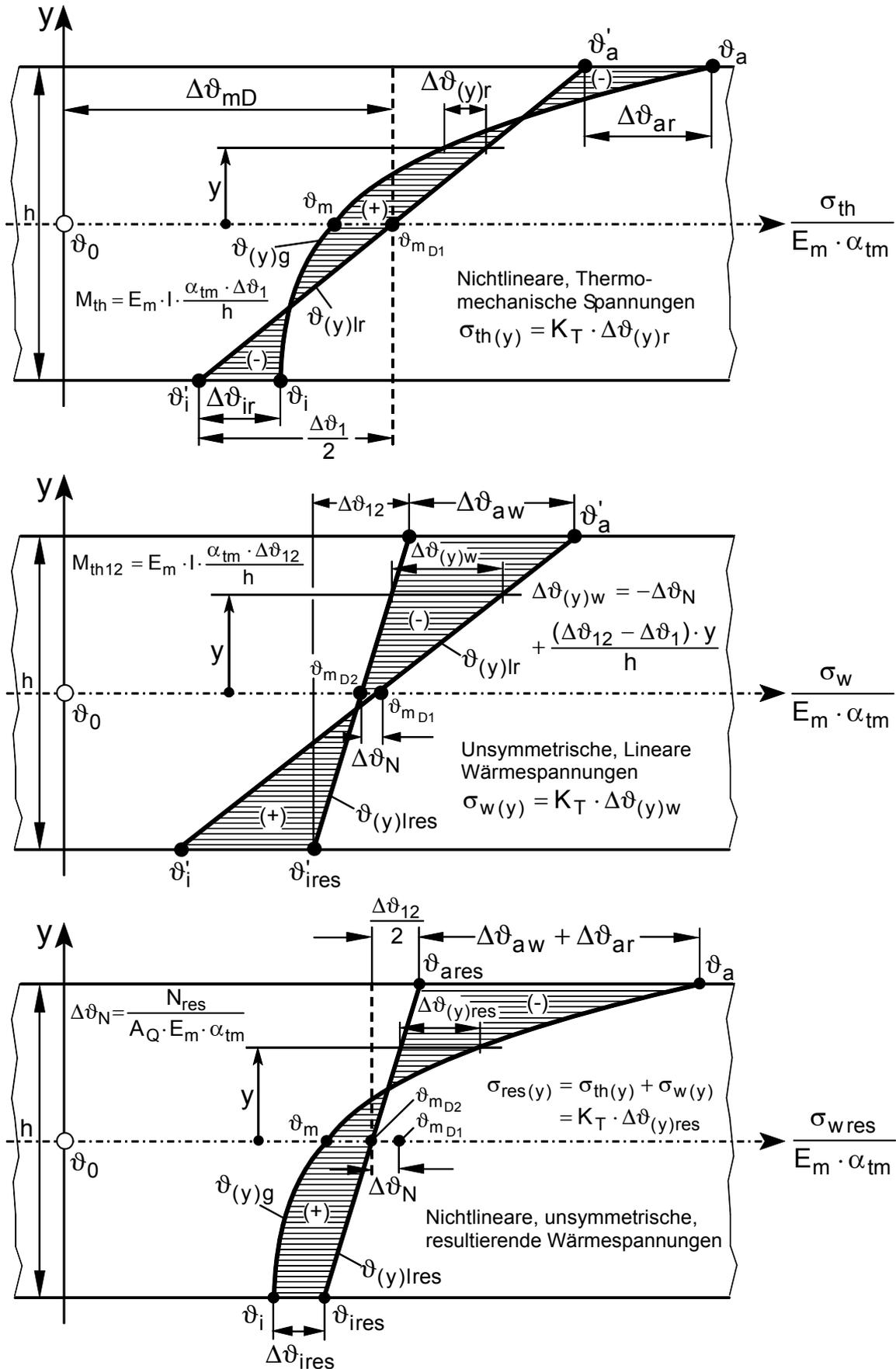


Bild G2: Addition von thermomechanischen Spannungen und Wärmespannungen zu resultierenden Wärmespannungen

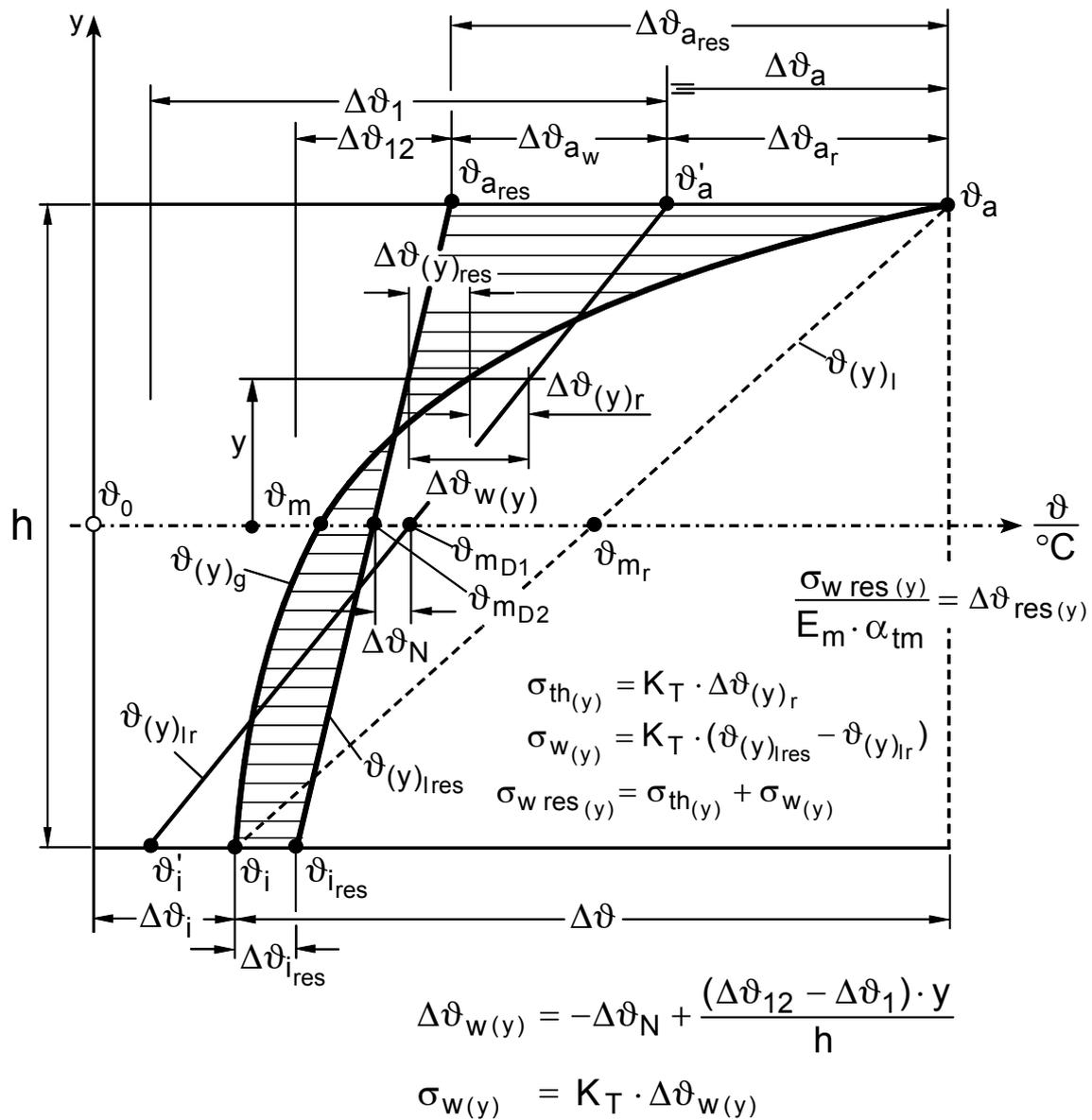


Bild G 3: Ausführliche Darstellung der Resultierenden Wärmespannungen „ $\sigma_{w \text{ res } (y)}$ “ aus der Addition von thermomechanischen Spannungen und von Wärmespannungen in Form von Temperaturdifferenzen „ $\Delta\vartheta_{\text{res } (y)}$ “ über die Stabhöhe

Anhang H Anwendungsbeispiele

- H 1. Tabellarischer Vergleich der Spannungsverteilung über die Stabhöhe zum Versuch 19/IV aus dem Anhang A und der FEM-Berechnung, Seite 10

- H 2. Berechnungsbeispiele zum Einfluss der Wärmeleitfähigkeit „ λ “ und der Gesamt-Wärmeübergangszahl „ α “ (bei seitlicher Wärmeabströmung) auf die Temperaturverteilung bei gegebenen Außenfasertemperaturen des gemessenen Beispiels, Anhang H 4.
 - 2.1 Einfluss aus: $\lambda \neq \text{const}$
 - 2.2 Einfluss aus: $\alpha = \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$
 - 2.3 Einfluss aus: $\alpha \neq \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$

- H 3. Verschiebungen und Stabhöhenänderung zum Versuch 19/IV.

- H 4. Auswertung eines Beispiels. Tabellarische Berechnung der thermomechanischen Spannungen über die Stabhöhe eines Flachstahls bei gegebener Temperaturverteilung und Spannungsdiagramm.

- H 5. Der Einfluss unterschiedlicher Stahlprofile auf die Größe und die Verteilung thermomechanischer Spannungen mit Berechnungstabelle und Nachrechnung mittels FEM.

- H 6. Thermomechanische Maximalspannungen im Beispiel 19/IV, Anhang A.

- H 7. Bimetalle. Wärmespannungen und Formänderungen bei gleichmäßiger Temperaturverteilung ($\vartheta_{(y)} = \text{const}$)

- H 8. Neudimensionierung der Ankerständer der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop

H 1. Tabellarischer Vergleich der Spannungsverteilung über die Stabhöhe zum Versuch 19/IV aus dem Anhang A und der FEM-Berechnung, Seite 10

Temperatur		Verformung FEM		Spannung	Spannung FEM
y, cm	T, K	u _x , mm	u _y , mm	σ _{th} , MPa	σ _x , MPa
-6,0	157	0,990	-3,261	-92,3	-93,3365
-5,7	158	1,019	-3,254	-84,4	-85,4955
-5,4	158	1,048	-3,248	-75,6	-76,332
-5,1	158	1,078	-3,242	-66,2	-65,848
-4,8	159	1,107	-3,235	-56,3	-55,3675
-4,5	158	1,136	-3,229	-46,1	-44,8905
-4,2	158	1,165	-3,223	-35,6	-34,4180
-3,9	158	1,194	-3,217	-25,2	-23,9505
-3,6	158	1,223	-3,211	-14,8	-13,488
-3,3	158	1,252	-3,205	-4,6	-3,0300
-3,0	158	1,282	-3,199	5,2	7,4240
-2,7	158	1,311	-3,194	14,5	16,5505
-2,4	159	1,340	-3,188	23,3	24,3495
-2,1	160	1,370	-3,183	31,5	32,1450
-1,8	161	1,400	-3,177	38,9	39,9375
-1,5	162	1,430	-3,171	45,5	46,4040
-1,2	164	1,460	-3,166	51,2	51,5450
-0,9	166	1,490	-3,160	55,9	56,6840
-0,6	168	1,521	-3,155	59,7	60,4975
-0,3	171	1,552	-3,149	62,4	62,9860
0,0	174	1,583	-3,144	64,0	64,1500
0,3	178	1,614	-3,138	64,5	63,9890
0,6	182	1,646	-3,132	63,8	63,8280
0,9	186	1,678	-3,125	62,0	62,3380
1,2	191	1,710	-3,119	59,1	59,5250
1,5	196	1,743	-3,112	54,9	55,3870
1,8	202	1,776	-3,105	49,7	48,6000
2,1	209	1,809	-3,098	43,2	41,8100
2,4	215	1,842	-3,090	35,7	35,0170
2,7	222	1,876	-3,082	27,1	25,5735
3,0	230	1,909	-3,074	17,5	16,1260
3,3	237	1,943	-3,065	6,9	5,3515
3,6	246	1,977	-3,056	-4,6	-6,7505
3,9	254	2,011	-3,046	-17,0	-18,8575
4,2	263	2,045	-3,036	-30,2	-32,2935
4,5	272	2,079	-3,025	-44,0	-45,7320
4,8	281	2,113	-3,014	-58,5	-60,4990
5,1	291	2,147	-3,003	-73,5	-75,2700
5,4	300	2,181	-2,991	-88,9	-90,0445
5,7	310	2,215	-2,978	-104,6	106,1450
6,0	320	2,249	-2,966	-120,4	122,2470

Tab. I: Vergleich der Spannungsverteilung über die Stabhöhe aus der Arbeit und der FEM-Berechnung (Versuch 19/IV)

H 2. Berechnungsbeispiele zum Einfluss der Wärmeleitfähigkeit „ λ “ und der Gesamt-Wärmeübergangszahl „ α “ (bei seitlicher Wärmeabströmung) auf die Temperaturverteilung bei gegebenen Außenfasertemperaturen des gemessenen Beispiels, Anhang H 4.

- 2.1 Einfluss aus: $\lambda \neq \text{const}$
- 2.2 Einfluss aus: $\alpha = \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$
- 2.3 Einfluss aus: $\alpha \neq \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$

2.1 Einfluss aus: $\lambda \neq \text{const}$

Aus dem Beispiel Anhang H 4 (Tabelle H 4) wird der Verlauf der 1. Nullspannungstemperatur im Flachstahlprofil entnommen mit:

$$\vartheta_{(y)1} = 215,5 + \frac{131 \cdot y}{h} \quad [^{\circ}\text{C}] \quad ; \quad \text{in Bild H 2.1: } \vartheta_{(y)1} = 281 - \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h}$$

$$\Delta\vartheta = 131 \quad [^{\circ}\text{C}] \quad ; \quad h = 0,12 \text{ m}$$

Für Bild H. 2.1 lautet die entsprechende Gleichung:

$$\vartheta_{(y)1} = 281 - \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \quad \text{mit } \Delta\vartheta = 131^{\circ}\text{C} \quad \text{und } h = 0,12 \text{ m} = \text{Stabhöhe}$$

Weitere Daten des Beispiels sind die Außenfasertemperaturen:

$$\vartheta_a = \vartheta_1 = 281 \quad ^{\circ}\text{C} \quad \text{und}$$

$$\vartheta_i = \vartheta_2 = 150 \quad ^{\circ}\text{C} \quad ; \quad \vartheta_{mR} = 215,5 \quad ^{\circ}\text{C} = \text{Mittelwert}$$

Berechnung der nichtlinearen Temperaturverteilung für den ferritischen Baustahl U St 37-2

Für den Bereich von 0 bis 400 °C gilt [30, 32]:

$$\lambda_{(\vartheta)} = a - b \cdot \vartheta = 63 - 0,044 \cdot \vartheta \quad [\text{W} / \text{m} \cdot \text{K}]$$

Gesucht für $y = \frac{h}{2}$: $\vartheta_{(y)\lambda}$ und $\Delta\vartheta_{(y)\lambda}$ als Differenztemperatur zwischen dem 1. Nullspannungstemperaturverlauf (Schlusslinie) und der berechneten nichtlinearen Temperaturverteilung. Entsprechend Anhang D 1. (Geschlossene Lösung der den Temperaturverlauf in einem Flacheisenstab beschreibenden nichtlinearen Differentialgleichung) gilt:

$$\vartheta_{(y)\lambda} = \frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b} - \vartheta_a\right)^2 + \left[\left(\frac{a}{b} - \vartheta_i\right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \vartheta_a\right)^2\right] \cdot \frac{y}{h}} \quad (\text{siehe auch Gleichung 2.7.8})$$

$$\frac{a}{b} = \frac{63}{0,044} = 1431,8181 \quad ; \quad \frac{y}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{\left(y=\frac{h}{2}\right)} &= \frac{a}{b} - \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{b} - \vartheta_a\right)^2 + \left(\frac{a}{b} - \vartheta_i\right)^2} \right] = \vartheta_{(y)\lambda} \\ &= 1431,8181 - 0,7071067 \cdot 1722,6258 \\ &= 1431,8181 - 1218,0802 \end{aligned}$$

$$\vartheta_{\left(y=\frac{h}{2}\right)} = 213,7 \text{ } ^\circ \text{C}$$

$$\Delta\vartheta_{(y)\lambda} = \vartheta_{(y)1} - \vartheta_{(y)\lambda} = \left(\vartheta_a - \frac{\Delta\vartheta \cdot y}{h} \right) - \vartheta_{(y)\lambda} \quad \text{siehe Bild H 2.1} \quad (\text{H 2.1.1})$$

$$y = \frac{h}{2} : \Delta\vartheta_{(y)\lambda} = \vartheta_{mR} - \vartheta_{(y)\lambda}$$

$$\Delta\vartheta_{(y)\lambda} = 215,5 - 213,7 = 1,8 \text{ } ^\circ \text{C}$$

Entsprechend ergeben sich:

$$\Delta\vartheta_{(y)\lambda} \text{ (y=0,03m)} : 1,36 \text{ } ^\circ \text{C} \quad \text{und}$$

$$\Delta\vartheta_{(y)\lambda} \text{ (y=0,09m)} : 1,26 \text{ } ^\circ \text{C}$$

Im nachfolgenden Bild H 2.1 sind die Temperaturverläufe über die Stabhöhe für $\lambda(\vartheta) = 63 - 0,044 \cdot \vartheta$ als $(\vartheta_{(y)\lambda})$ und $\lambda = \text{const}$ als $(\vartheta_{(y)1})$ dargestellt.

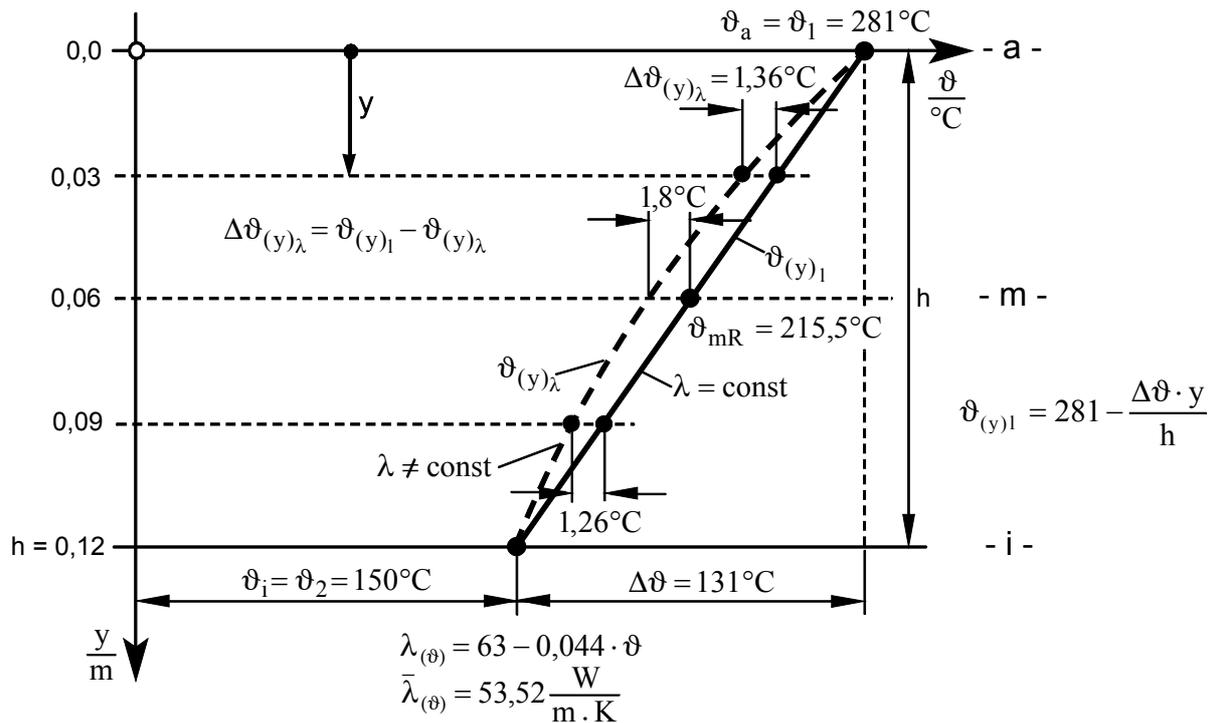


Bild H 2.1: Linearer und natürlicher Temperaturverlauf im Stahl U St 37-2 bei

$\dot{q} = \text{const}$ und gegebenen Außenfasertemperaturen

Obenstehendem Bild kann der Einfluss von $\lambda \neq \text{const}$ auf die Temperaturverteilung im Flachstahlprofil $30 \times 120 \times 1200 \text{ mm} = b_o \times h_o \times l_o$ (U St 37-2, Werkstoff Nr. 1.0112) bei gegebenen Außenfasertemperaturen ϑ_a und ϑ_i entnommen werden.

2.2 Einfluss aus: $\alpha = \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$

Mit Hilfe der Berechnungsgleichungen (2.7.2.7; 2.7.2.6 und 2.7.2.10) sowie den konstanten

Werten: $\alpha = 130 \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2}$; $\lambda = 52 \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}}$; $b = 0,03 \text{ m}$; $\omega = 12,91 \text{ m}^{-1}$; $\Theta_a = 18^\circ\text{C}$;

$\omega \cdot h = 1,5492$ wird für die gegebenen Außenfasertemperaturen (aus dem Beispiel Anhang H 4.) $\vartheta_a = \vartheta_1 = 281^\circ\text{C}$ und $\vartheta_i = \vartheta_2 = 150^\circ\text{C}$ über die Höhe $h = 0,12 \text{ m}$ der Temperaturverlauf als Exponentialfunktion „ $\vartheta_{(y)}$ “ tabellarisch berechnet, dem gemessenen Temperaturverlauf gegenübergestellt und in Einzelexponentialfunktionen dargestellt.

Für die einzelnen Höhenlinien von $y = 0$ bis $y = h = 0,12 \text{ m}$ ergibt sich folgender tabellarischer Berechnungsgang:

y	$\omega = 12,91$	$\omega \cdot y$	$e^{\omega \cdot y}$	$e^{-\omega \cdot y}$
0,01		0,1291	1,1378	0,8789
0,02		0,2582	1,2946	0,7724
0,03		0,3873	1,4730	0,6789
0,04		0,5164	1,6760	0,5967
0,05		0,6455	1,9069	0,5244
0,06		0,7746	2,1687	0,4609
0,07		0,9037	2,4687	0,4051
0,08		1,0328	2,8089	0,3560
0,09		1,1619	3,1960	0,3129
0,10		1,291	3,6364	0,2750
0,11		1,4201	4,1375	0,2417
h = 0,12		1,5492	4,7077	0,2124

Tabelle H 2.2.1: Einzelwerte der Exponentialfunktionen

Bestimmung der Integrationskonstanten A und B:

$$A = \frac{(\vartheta_1 - \Theta_a) \cdot e^{-\omega \cdot h} - (\vartheta_2 - \Theta_a)}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}}$$

$$= \frac{(281 - 18) \cdot 0,2124 - (150 - 18)}{0,2124 - 4,7077}$$

$$A = 17 \text{ } ^\circ \text{C}$$

$$B = \frac{(\vartheta_2 - \Theta_a) - (\vartheta_1 - \Theta_a) \cdot e^{\omega \cdot h}}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}}$$

$$= \frac{(150 - 18) - (281 - 18) \cdot 4,7077}{0,2124 - 4,7077}$$

$$B = 246 \text{ } ^\circ \text{C}$$

Mit den Werten für „A“ und „B“ wird nachfolgend tabellarisch der theoretische Temperaturverlauf über die Stabhöhe „h“ berechnet.

y	$A \cdot e^{\omega \cdot y}$	$B \cdot e^{-\omega \cdot y}$	$\vartheta_{(y)} = A \cdot e^{\omega \cdot y} + B \cdot e^{-\omega \cdot y} + \Theta_a$
0	17	246	$17+246+18 = 281$
0,01	19,271	216,30	253,57
0,02	21,926	190,09	230,02
0,03	24,948	167,08	210,03
0,04	28,386	146,84	193,23
0,05	32,297	129,05	179,34
0,06	36,748	113,43	168,18
0,07	41,812	99,70	159,18
0,08	47,578	87,61	153,18
0,19	54,131	77,00	149,13
0,10	61,590	67,68	147,23
0,11	70,077	59,48	147,55
$h = 0,12$	79,734	52,27	150,00

Tabelle H 2.2.2: Tabellarische Berechnung des Temperaturverlaufes „ $\vartheta_{(y)}$ “ bei seitlicher Wärmeabströmung

Das nachfolgende Diagramm beinhaltet den gemessenen und den berechneten Temperaturverlauf aufgetragen über die Stabhöhe.

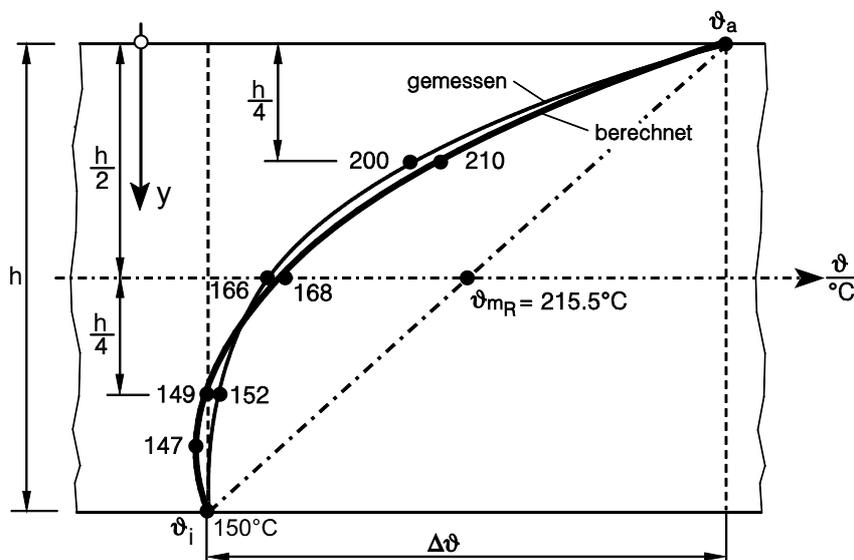


Bild H 2.2.1: Berechneter und gemessener Temperaturverlauf

Zwecks Erläuterungen werden nachfolgend die Einzelkurven

1. $\Theta_a = \text{const} = \text{Umgebungstemperatur}$
2. $\vartheta'(y) = B \cdot e^{-\omega \cdot y} = \text{Abkühlungskurve}$
3. $\vartheta''(y) = A \cdot e^{\omega \cdot y} = \text{Erwärmungskurve}$

durch die Summenkurve $\vartheta(y) = \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta_a$ dargestellt, um den Einfluss der Einzelkurven zu erkennen.

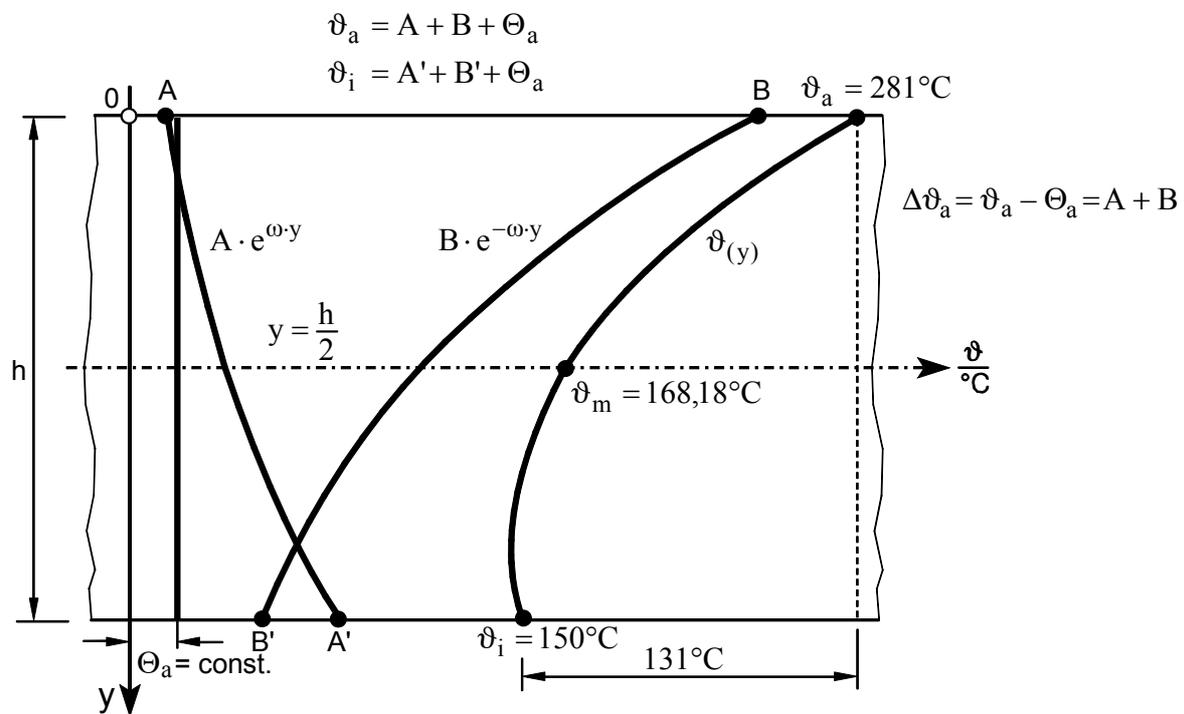


Bild H 2.2.2: Temperaturverteilung „ $\vartheta(y)$ “ bei seitlicher Wärmeströmung und Einzelkurven

2.3 Einfluss aus: $\alpha \neq \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$

Der Einfluss von $\alpha \neq \text{const}$ soll durch Berechnung der neuen Temperaturen bei $y = \frac{h}{4}$; $y = \frac{h}{2}$ und $y = \frac{3}{4}h$ unter Verwendung der Funktion der globalen Wärmeübergangszahl über die Stabhöhe berechnet werden. Berechnungsgleichungen siehe Kapitel 2.8, Gleichungen (2.8.1.1) bis (2.8.1.4).

Gegeben aus Beispiel H 4.:

$$h = 0,12 \text{ m} \quad ; \quad b = 0,03 \text{ m} \quad ; \quad \lambda = 52 \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}} = \text{const}$$

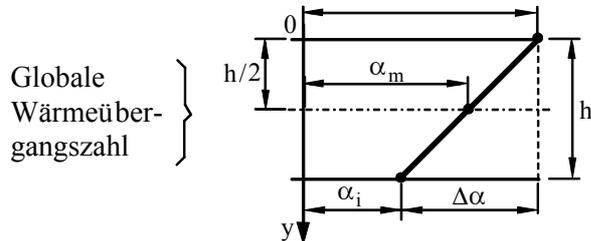
$$\vartheta_1 = 281^\circ \text{C} \quad ; \quad \vartheta_2 = 150^\circ \text{C} \quad ; \quad \Theta_a = 18^\circ \text{C}$$

$$\vartheta_1 - \Theta_a = 263^\circ \text{C} \quad ; \quad \vartheta_2 - \Theta_a = 132^\circ \text{C}$$

$$1.: y = 0,03 \text{ mit } \alpha_{(y)} = 150 \text{ W/K} \cdot \text{m}^2$$

$$2.: y = 0,06 \text{ mit } \alpha_{(y)} = 130 \text{ W/K} \cdot \text{m}^2$$

$$3.: y = 0,09 \text{ mit } \alpha_{(y)} = 110 \text{ W/K} \cdot \text{m}^2$$



$$\alpha_{(y)} = \alpha_a - \frac{\Delta\alpha \cdot y}{h} = 170 - \frac{80 \cdot y}{h}$$

$$\text{oder: } \alpha_{(y)} = \alpha_m + \frac{\Delta\alpha \cdot y}{h} = 130 + \frac{80 \cdot y}{h}$$

Nr.:	y m	$\omega_{(y)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_{(y)}}{\lambda \cdot b}}$	$\omega \cdot y$	$e^{\omega \cdot y}$	$e^{-\omega \cdot y}$	$\omega \cdot h$	$e^{\omega \cdot h}$	$e^{-\omega \cdot h}$	Θ_a
1	0,03	13,87	0,4161	1,5160	0,6596	1,6644	5,2825	0,1893	18
2	0,06	12,91	0,7746	2,1697	0,4609	1,5492	4,7077	0,2124	18
3	0,09	11,88	1,0688	2,9119	0,3434	1,4256	4,1604	0,2404	18

Tabelle 2.3.1: Einzelwerte der Exponentialfunktionen

Nachfolgend wird die Berechnung der Integrationskonstanten „A“ und „B“ durchgeführt.

$$A = \frac{(\vartheta_1 - \Theta_a) \cdot e^{-\omega \cdot h} - (\vartheta_2 - \Theta_a)}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}}$$

$$\text{zu 1: } A = \frac{263 \cdot 0,1893 - 132}{0,1893 - 5,2825} = \frac{49,7859 - 132}{-5,0932} = \frac{-82,2141}{-5,0932} = 16,14 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{zu 2: } A = \frac{263 \cdot 0,2124 - 132}{0,2124 - 4,7077} = \frac{76,1388}{4,4953} = 16,94 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{zu 3: } A = \frac{263 \cdot 0,2404 - 132}{0,2404 - 4,1604} = \frac{-68,7748}{-3,92} = 17,54 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$B = \frac{(\vartheta_2 - \Theta_a) - (\vartheta_1 - \Theta_a)}{e^{-\omega \cdot h} - e^{\omega \cdot h}}$$

$$\text{zu 1: } B = \frac{132 - 263 \cdot 5,2825}{0,1893 - 5,2825} = \frac{-1257,2975}{-5,0932} = 246,86 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{zu 2: } B = \frac{132 - 263 \cdot 4,7077}{0,2124 - 4,7077} = \frac{1106,1251}{4,4953} = 246,06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{zu 3: } B = \frac{132 - 263 \cdot 4,1604}{0,2404 - 4,1604} = \frac{962,1852}{-3,92} = 245,46 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Nr.:	y m	A °C	B °C	A · e ^{ω·y} °C	B · e ^{-ω·y} °C	ϑ _{(y)ber} = A · e ^{ω·y} + B · e ^{-ω·y} + Θ _a °C
1	0,03	16,14	246,86	24,47	162,83	205,3
2	0,06	16,94	246,06	36,75	113,41	168,2
3	0,09	17,54	245,46	51,07	84,29	153,36

Tabelle 2.3.2: Berechnung der Temperaturverteilung bei seitlicher Wärmeabströmung und nicht konstanter Gesamtwärmeübergangszahl „α“

$$y = 0: \vartheta_{(y)\text{ber}} = A + B + \Theta_a = 281^\circ\text{C} = \vartheta_a = \vartheta_1$$

$$y = h: \vartheta_{(y)\text{ber}} = A \cdot e^{\omega \cdot h} + B \cdot e^{-\omega \cdot h} + \Theta_a = 150^\circ\text{C} = \vartheta_i = \vartheta_2$$

Das heißt: Die Außenfasertemperaturen wurden beibehalten!

Zusammenfassung der Ergebnisse siehe Kapitel 2.8.1

H 3. Verschiebungen und Stabhöhenänderung zum Versuch 19/IV

Im Anschluss an die Ableitungsvariante zu den thermischen Verschiebungen „u_x“ und „v_y“ des Kapitels Anhang D 6. erfolgt nachstehend die Berechnung am Beispiel 19/IV:

Berechnung der Verschiebungen am Beispiel 19/IV aus Anhang A

Zur Berechnung werden aus Kapitel 5.7 folgende Gleichungen benötigt:

Gleichung (5.43)

$$v_{a \max} = \alpha_{tm} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy - \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_0^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy$$

und Gleichung (5.44):

$$-v_{i \max} = -\alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy + \mu \cdot \alpha_{tm} \cdot \int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta_{(y)r} \cdot dy \quad (\text{siehe Bild D 6})$$

$$\text{mit} \quad \Delta\vartheta_{(y)r} = \Delta\vartheta_{(y)lr} - \Delta\vartheta_{(y)g} \quad \text{und} \quad \Delta\vartheta_{(y)\ell r} = \Delta\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h}$$

Hierzu gehören folgende Einzelwerte aus dem Versuch 19/IV:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{tm} = 13,29 \cdot 10^{-6} / \text{K} \quad ; \quad \Delta\vartheta_1 = 152,38^\circ \text{C} \\ \Delta\vartheta_{mD} = 180,25^\circ \text{C} \quad ; \quad \Delta\vartheta_1' = 104,06^\circ \text{C} \\ l_0 = 1200 \text{ mm} \quad ; \quad h_0 = 120 \text{ mm} \end{array} \right\} \text{Durchschnittswerte}$$

$$\int_0^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy = 13100,7^\circ \text{C}$$

$$\int_0^{h/2} \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy = 13189^\circ \text{C}$$

$$\varepsilon_{(y)} = \alpha_{tm} \cdot \left(\Delta\vartheta_1' + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} \right)$$

$$\int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta_{(y)lr} \cdot dy = 8529,3^\circ \text{C}$$

$$\int_{-h/2}^0 \Delta\vartheta_{(y)g} \cdot dy = 8441^\circ \text{C}$$

1. Faserlängenänderungen „ u_x “

$$u_{x \max} = \Delta\ell_{(y)} = \ell_0 \cdot \alpha_{tm} \cdot \left(\overline{\Delta\vartheta_{mD}} + \frac{\overline{\Delta\vartheta_1 \cdot y}}{h} \right) \quad \text{siehe Gleichung} \quad (5.3.5)$$

$$\Delta\ell_a = 4,09 \text{ mm}$$

$$\Delta\ell_m = 2,87 \text{ mm}$$

$$\Delta\ell_i = 1,66 \text{ mm}$$

2. Verschiebungen der wärmeren, oberen Stabaußenfaser bei $y = h/2$:

$$v_{a \text{ ges}} = -f_{tha} + v_{a \max}$$

$$v_{a \max} = \frac{13,29}{10^6} \cdot 13100,7 - 0,3 \cdot \frac{13,29}{10^6} \cdot (13100,7 - 13189) = v_{tha \max} + v_{\sigma a \max}$$

$$v_{a \max} = 0,1741 + 0,0004 = 0,1745 \text{ mm} .$$

$$f_{\text{tha}} = 3,0479 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow v_{\text{ages}} = -f_{\text{tha}} + v_{\text{amax}} = -3,0479 + 0,1745$$

$$v_{\text{ages}} = -2,8734 \text{ mm}$$

3. Verschiebung der Mittelfaser bei Temperaturbeanspruchung; $y = 0$:

$$v_{\text{m}} = -f_{\text{thm}} = -3,045 \text{ mm} \quad ; \quad v(y) = 0$$

4. Verschiebungen der kälteren Stabinnenfaser bei $y = -h/2$:

$$-v_{\text{imax}} = -\frac{13,29}{10^6} \cdot 8529,3 + 0,3 \cdot \frac{13,29}{10^6} \cdot (8529,3 - 8441) = v_{\text{thimax}} + v_{\text{sigmaimax}}$$

$$-v_{\text{imax}} = -0,1134 + 0,0004 = -0,1130 \text{ mm}$$

$$f_{\text{thi}} = 3,0420 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow v_{\text{iges}} = -f_{\text{thi}} - v_{\text{imax}} = -3,0420 - 0,1130$$

$$v_{\text{iges}} = -3,1550 \text{ mm}$$

5. Δh : Verschiebung über die Stabhöhe:

$$\Delta h = v_{\text{amax}} + v_{\text{imax}} = 0,1745 + 0,1130 = 0,2875 \text{ mm} \quad ; \quad \text{ebenso gilt:}$$

$$\Delta h = v_{\text{thamax}} + v_{\text{thimax}} = 0,1741 + 0,1134 = 0,2875 \text{ mm} .$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch direkt zeigen durch.

$$\Delta h = h_0 \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{mD}}$$

siehe Gleichung: (5.46)

$$= 120 \cdot \frac{13,29}{10^6} \cdot 180,25$$

$$\Delta h = 0,2875 \text{ mm}$$

Gegeben ist ein Versuchs-Flachprofilstab der Abmessungen $b_0 \times h_0 \times l_0 = 30 \times 120 \times 1200$ mm aus dem Material R St 37-2: bzw. S 235 JR G2, das berechnete Polynom 4. Grades der gemessenen Temperaturverteilung „ $\vartheta_{(y)_g}$ “ über die Stabhöhe „ h “ sowie die Mittelwerte der Materialkennwerte „ α_{tm} “ und „ E_m “. In nachfolgender Tabelle H 4. erfolgt die tabellarische Berechnung der thermomechanischen Spannungen über die Stabhöhe.

Auswertung des Beispiels

Nr.	y[cm]	$\vartheta_{(y)g}$ [°C]	$\vartheta_{(y)l}$ [°C]	$\vartheta_{(y)lr}$ [°C]	$\Delta\vartheta_{(y)r}$ [°C]	$\varepsilon_{(y)th}$ [10 ²]	$\sigma_{(y)th}$ [N/mm ²]
1	6.0	281.0	281.0	237.0	-44.0	-0.579	-115.80
2	5.5	262.5	275.5	232.3	-30.2	-0.397	-79.40
3	5.0	246.3	270.1	227.6	-18.7	-0.246	-49.20
4	4.5	232.2	264.6	222.9	-9.3	-0.122	-24.40
5	4.0	219.9	259.2	218.3	-1.6	-0.021	-4.20
6	3.5	209.2	253.7	213.6	4.4	0.058	11.60
7	3.0	200.0	248.3	208.9	8.9	0.117	23.40
8	2.5	192.0	242.8	204.2	12.2	0.160	32.00
9	2.0	185.2	237.3	199.5	14.3	0.188	37.60
10	1.5	179.3	231.9	194.9	15.6	0.205	41.00
11	1.0	174.2	226.4	190.2	16.0	0.210	42.00
12	0.5	169.8	221.0	185.5	15.7	0.206	41.20
13	0.0	166.0	215.5	180.8	14.8	0.195	39.00
14	-0.5	162.7	210.0	176.2	13.5	0.178	35.60
15	-1.0	159.9	204.6	171.4	11.5	0.151	30.20
16	-1.5	157.4	199.1	166.8	9.4	0.124	24.80
17	-2.0	155.3	193.7	162.1	6.8	0.089	17.80
18	-2.5	153.5	188.2	157.4	3.9	0.051	10.20
19	-3.0	152.0	182.8	152.7	0.7	0.009	1.80
20	-3.5	150.8	177.3	148.0	-2.8	-0.037	-7.40
21	-4.0	149.8	171.8	143.4	-6.4	-0.084	-16.80
22	-4.5	149.3	166.4	138.7	-10.6	-0.139	-27.80
23	-5.0	149.0	160.9	134.0	-15.0	-0.197	-39.40
24	-5.5	149.3	155.5	129.3	-20.0	-0.263	-52.60
25	-6.0	150.0	150.0	124.6	-25.4	-0.334	-66.80

Nr. Fasernummer

y[cm] Faserkoordinate: y = 6.0... - 6.0

$\vartheta_{(y)g}$ gegebener Temperaturverlauf:

$$\vartheta_{(y)g} = 19 \cdot y^4 / 1944 + 35 \cdot y^3 / 324 + 221 \cdot y^2 / 216 + 253 \cdot y / 36 + 166 \text{ [°C]; } y[\text{cm}]$$

$\vartheta_{(y)l}$ linearer Temperaturverlauf:

$$\vartheta_{(y)l} = 215.5 + 131 \cdot y / h \text{ [°C]}$$

$\vartheta_{(y)lr}$ rechnerischer Nullspannungs-Temperaturverlauf:

$$\begin{aligned} \vartheta_{(y)lr} &= \vartheta_{mD} + \Delta\vartheta_1 \cdot y / h \text{ [°C]} \\ &= 180.81 + 112.33 \cdot y / h \text{ [°C]} \end{aligned}$$

$\Delta\vartheta_{(y)r}$ nichtlineare Temperaturdifferenzen:

$$\Delta\vartheta_{(y)r} = \vartheta_{(y)lr} - \vartheta_{(y)g}$$

$\varepsilon_{(y)th}$ nichtlinearer Dehnungsverlauf:

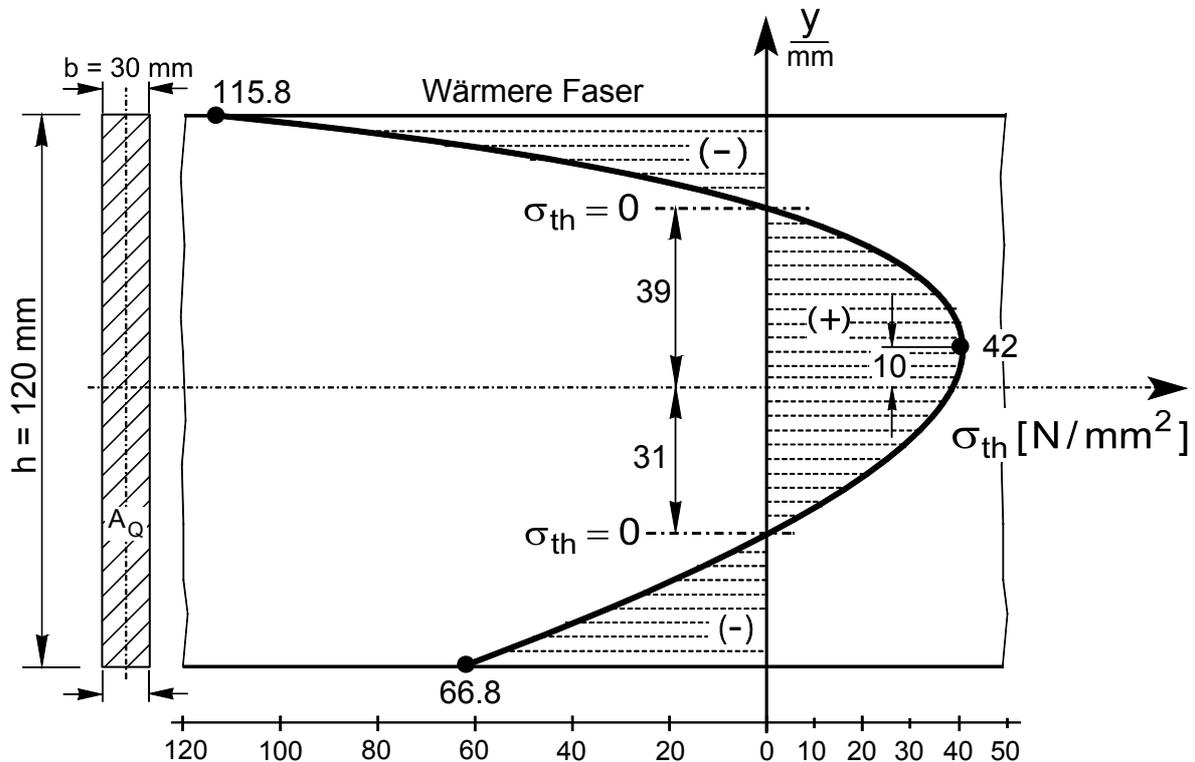
$$\varepsilon_{(y)th} = 0.00001315 \cdot \Delta\vartheta_{(y)r} \text{ [-]}$$

$\sigma_{(y)th}$ Thermomechanischer Spannungsverlauf:

$$\sigma_{(y)th} = 200000 \cdot \varepsilon_{(y)th} \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

Tabelle H 4: Auswertung des Beispiels

Nachfolgend werden die thermomechanischen Spannungen „ $\sigma_{th(y)}$ “ der Tabelle H 4 in einem Diagramm dargestellt.



**Bild H 4.2: Beispiel für den Verlauf thermomechanischer Spannungen
Verteilung über die Stabhöhe**

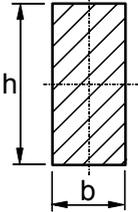
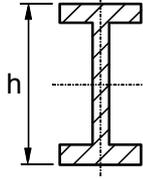
H 5. Der Einfluss unterschiedlicher Stahlprofile auf die Größe und die Verteilung thermomechanischer Spannungen mit Berechnungstabelle und Nachrechnung mittel FEM

Die analytisch erarbeiteten Ergebnisse dieser Arbeit wurden mit Hilfe der Finite-Element-Methode nachgerechnet. Siehe Beispiel 19/IV in der Einleitung. Bei der Berechnung Thermomechanischer Spannungen ergaben sich nach Interpolation gute Übereinstimmungen. Eine weitere Finite-Element-Analyse ($b \neq \text{const}$) über die Nachrechnung des thermisch belasteten Breitflanschträgers HEB-120 (siehe vergleichende Tabelle H 5) als Vergleich zum Beispiel 19/IV, Anhang A, unter Beibehaltung der Temperaturverteilung, ist nachfolgend beigefügt. Hierzu wurde das „SOFISTIK“ Computerprogramm und für die Ermittlung der Temperaturverteilungen (Polynome) das „Excel“ bzw. „Derive“ Programm benutzt. Die nachfolgende Tabelle H 5 enthält die analytischen Berechnungsergebnisse für den Fall 1 aus dem Anhang A

und zusätzlich als Fall 2 bei gleicher Temperaturverteilung die ebenfalls analytisch berechneten thermomechanischen Spannungen in einem modifizierten Breitflanschträger mit $h = b_1 = 120$ mm. Dann folgt die zeichnerische Darstellung der sich ergebenden Veränderungen in Bild H 5.1. Danach folgt als Vergleich zur analytischen Berechnung die FEM-Berechnung (Bild H 5.2 und Tabelle H 5.2) mit gegebener Temperaturverteilung nach Bild H 5.3 und Darstellung der berechneten Spannungsverteilung in Bild H 5.4

Analytische Berechnung der thermomechanischen Spannungen:

Es liegt in beiden Fällen die gleiche Temperaturverteilung vor.
Gleiche Höhe, gleicher Querschnitt aber unterschiedliche Trägheitsmomente.

 <p>① $b = \text{const.}$</p>	 <p>② $b \neq \text{const.}$</p> <p>$b_1 = 120.00$ mm $s_2 = 8.54$ mm $t = 1.2$ cm</p>	<p>Anmerkung: Das analytisch berechnete Beispiel 2 wird anschließend mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) nachgerechnet.</p>
<p>Flachstahl: 30 x 120 x 1200</p> <p>$A_Q = 36$ cm²</p> <p>$I_x = 432$ cm⁴</p> <p>$h = 120$ mm</p> <p>$\sigma_{\text{tha}} = -120.5$ N/mm²</p> <p>$\sigma_{\text{thm}} = 64.0$ N/mm²</p> <p>$\sigma_{\text{thi}} = 93.0$ N/mm²</p>	<p>Modifizierter IPB - 120 Steg um 2.04 mm verbreitert</p> <p>$A_Q = 37$ cm²</p> <p>$I_x = 907$ cm⁴</p> <p>$h = 120$ mm</p> <p>$\sigma_{\text{tha}} = -54.1$ N/mm²</p> <p>$\sigma_{\text{thm}} = 123.4$ N/mm²</p> <p>$\sigma_{\text{thi}} = -39.8$ N/mm²</p>	<p>Vergleich zum Flacheisen: Die Spannungen müssen in den Flanschen geringer sein, weil dort mehr Material-Masse ist als am Flacheisen. Dementsprechend müssen sie im Steg höher sein.</p>
<p>$a = \frac{A1}{h} = \Delta\vartheta_{\text{mD}} = 180.25$ °C</p> <p>$\Delta\vartheta_1 = \frac{h}{l} \cdot b \cdot A1 \cdot R1 = 152.38$ °C</p>	<p>$a = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot A1_i}{A_Q} = 202.72$ °C</p> <p>$\Delta\vartheta_1 = \frac{h}{l} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot A1_i \cdot R1_i = 157.68$ °C</p>	

Auswirkungen:

Die Druckspannungen in den Außenfasern nehmen ab.
Die Zugspannungen in der Höhe der Mittelfaser nehmen um fast 100% zu.
Da sich die Temperaturdifferenz " $\Delta\vartheta_1$ " nicht wesentlich ändert, findet eine Parallelverschiebung der Spannungsverteilungen um etwa 60 N/mm² statt.

Tabelle H 5: Gegenüberstellung der Berechnungsergebnisse

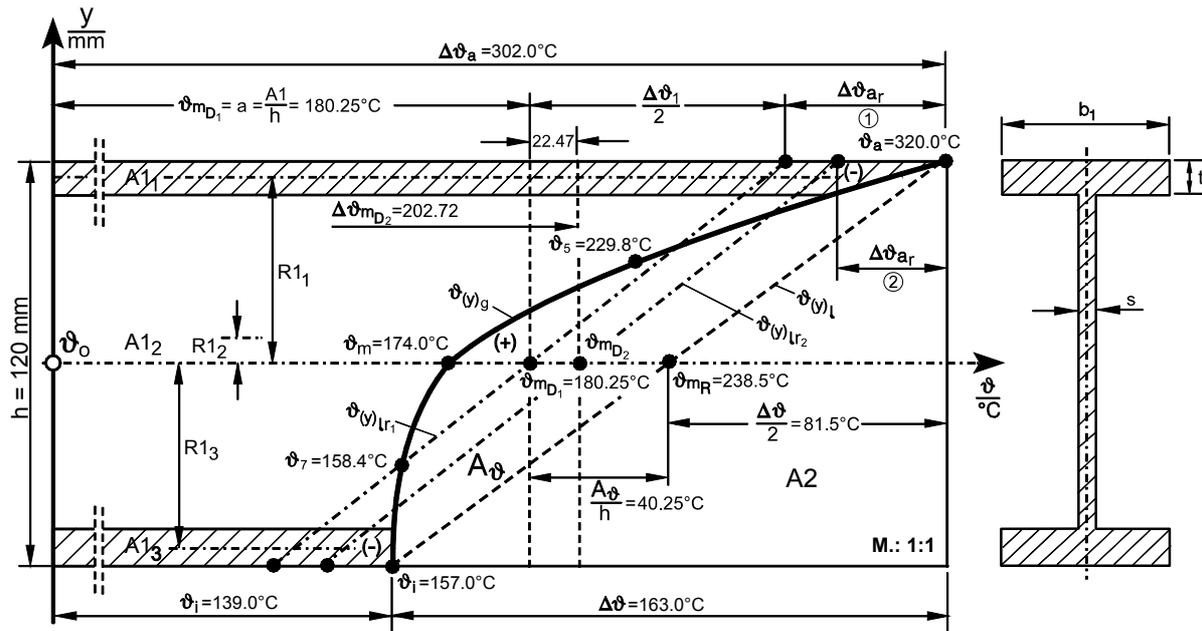


Bild H 5.1: Zusammenfassung der Veränderungen

Es folgt die Berechnung mit FEM.

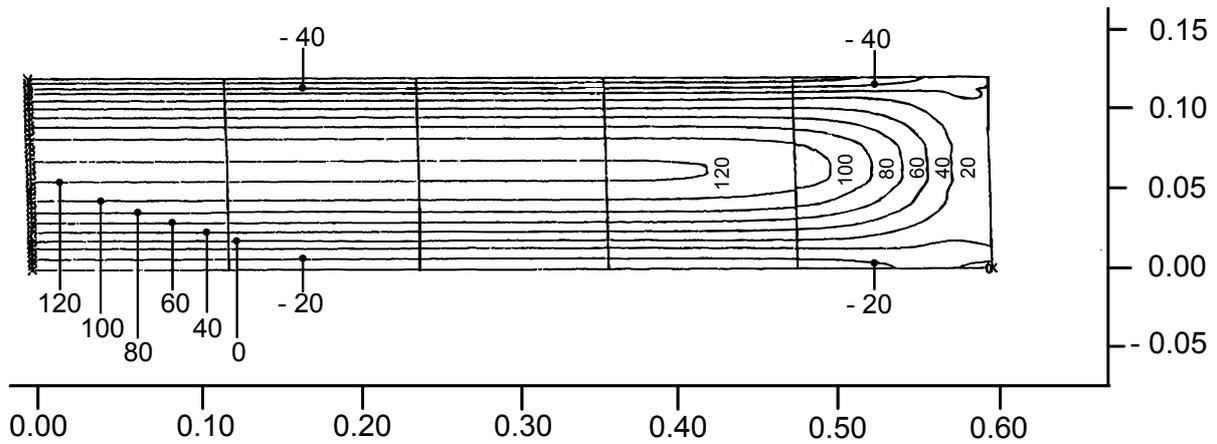


Bild H 5.2: Einfeldträger HEB mit Temperaturbelastung
Linien gleicher Spannung in Stufen von 20,0 MPa in einer Stabhälfte

HEB-Querschnitt mit Temperaturverlauf:

Querschnitt

$h = 12 \text{ cm}$ $t_g = 1,20 \text{ cm}$
 $b = 12 \text{ cm}$ $t_s = 0,85 \text{ cm}$
 $A = 37 \text{ cm}^2$ $I_{yy} = 906 \text{ cm}^4$
 $E_m = 19900 \text{ kN/cm}^2$
 $\alpha_{tm} = 1,33\text{E-}05 \text{ 1/K}$

Polynom-Konstanten für Temperatur

$c_0 = 174,0$
 $c_1 = 11,36728678$
 $c_2 = 2,352519666$
 $c_3 = 0,061622488$
 $c_4 = -0,015641242$

Allg.: $\sigma_{th(y)} = E_m \cdot \alpha_{tm} \cdot (a + \Delta\theta_1 \cdot y/h - \Delta\theta_{(y)g})$

Temp.		Breite	Höhe	Fläche	Ermittlung der Konst.		Temp.	Spann.	Sofistik-Elemente		
y	$\theta_{(y)g}$	b	dh	dA	Int1	Int2	$a + \Delta\theta_1 \cdot y/h$	$\sigma_{th(y)}$	y	Nx	$\sigma = Nx/b$
cm	°C	cm	cm	cm ²			°C	Mpa	cm	kN/m	MPa
-6	157	12					141,9	-39,8			
-5,7	158	12	0,3	3,6	15,32	-3,68	145,8	-31,5	-5,9	-4181,1	-34,8
-5,4	158	12	0,3	3,6	15,39	-3,48	149,7	-22,4	-5,6	-3247,5	-27,1
-5,1	158	12	0,3	3,6	15,42	-3,30	153,7	-12,6	-5,3	-1996,5	-16,6
-4,8	159	12	0,3	3,6	15,44	-3,12	157,6	-2,4	-5,0	-1063,0	-8,9
-4,8	159	0,85	0,0	0,0	0,00	0,00	157,6	-2,4			
-4,5	158	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,21	161,6	8,2	-4,7	13,31	1,6
-4,2	158	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,19	165,5	19,0	-4,4	124,4	14,6
-3,9	158	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,18	169,5	29,8	-4,1	213,0	25,1
-3,6	158	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,17	173,4	40,5	3,8	301,6	35,5
-3,3	158	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,15	177,3	51,0	-3,5	390,2	45,9
-3	158	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,14	181,3	61,2	-3,2	478,8	56,3
-2,7	158	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,13	185,2	70,9	-2,9	567,5	66,8
-2,4	195	0,85	0,3	0,3	1,09	-0,11	189,2	80,0	-2,6	633,6	74,5
-2,1	160	0,85	0,3	0,3	1,10	-0,10	193,1	88,5	-2,3	722,2	85,0
-1,8	161	0,85	0,3	0,3	1,10	-0,09	197,0	96,3	-2,0	788,3	92,7
-1,5	162	0,85	0,3	0,3	1,11	-0,07	201,0	103,2	-1,7	854,4	100,5
-1,2	164	0,85	0,3	0,3	1,12	-0,06	204,9	109,2	-1,4	898,1	105,7
-0,9	166	0,85	0,3	0,3	1,14	-0,05	208,9	114,3	-1,1	941,7	110,8
-0,6	168	0,85	0,3	0,3	1,15	-0,04	212,8	118,4	-0,8	985,4	115,9
-0,3	171	0,85	0,3	0,3	1,17	-0,02	216,7	121,5	-0,5	1029,0	121,1
0	174	0,85	0,3	0,3	1,19	-0,01	220,7	123,4	-0,2	1050,2	123,6
0,3	178	0,85	0,3	0,3	1,21	0,01	224,6	124,3	0,2	1048,9	123,4
0,6	182	0,85	0,3	0,3	1,24	0,02	228,6	124,0	0,5	1047,6	123,2
0,9	186	0,85	0,3	0,3	1,27	0,04	232,5	122,5	0,8	1046,3	123,1
1,2	191	0,85	0,3	0,3	1,30	0,06	236,4	119,9	1,1	1022,5	120,3
1,5	196	0,85	0,3	0,3	1,34	0,07	240,4	116,1	1,4	998,7	117,5
1,8	202	0,85	0,3	0,3	1,38	0,09	244,3	111,2	1,7	974,9	114,7
2,1	209	0,85	0,3	0,3	1,42	0,11	248,3	105,1	2,0	928,6	109,2
2,4	215	0,85	0,3	0,3	1,46	0,13	252,2	98,0	2,3	859,9	101,2
2,7	222	0,85	0,3	0,3	1,51	0,16	256,1	89,7	2,6	791,1	93,1
3	230	0,85	0,3	0,3	1,56	0,18	260,1	80,4	2,9	722,4	85,0
3,3	237	0,86	0,3	0,3	1,61	0,21	264,0	70,2	3,2	631,1	74,3
3,6	246	0,85	0,3	0,3	1,67	0,23	268,0	59,0	3,5	539,9	63,5
3,9	254	0,85	0,3	0,3	1,72	0,26	271,9	47,0	3,8	448,7	52,8
4,2	263	0,85	0,3	0,3	1,78	0,29	275,8	34,1	4,1	335,0	39,4
4,5	272	0,85	0,3	0,3	1,85	0,33	279,8	20,6	4,4	243,7	28,7
4,8	281	0,85	0,3	0,3	1,91	0,36	283,7	6,5	4,7	107,5	12,7
4,8	281	12	0,0	0,0	0,00	0,00	283,7	6,5			
5,1	291	12	0,3	3,6	27,86	5,63	287,7	-8,2	5,0	-87,2	-0,7
5,4	300	12	0,3	3,6	28,79	6,17	291,6	-23,2	5,3	-2009,9	-16,7
5,7	310	12	0,3	3,6	29,73	6,73	295,5	-38,6	5,6	-3615,3	-30,1
6	320	12	0,3	3,6	30,68	7,33	299,5	-54,1	5,9	-5538,0	-46,2
				AQ =	$a + \Delta\theta_0 =$	$\Delta\theta_0/h$					
				37,01	220,68	13,14					

Tabelle H 5.2: Temperaturverlauf und Spannungen

Temperaturverlauf

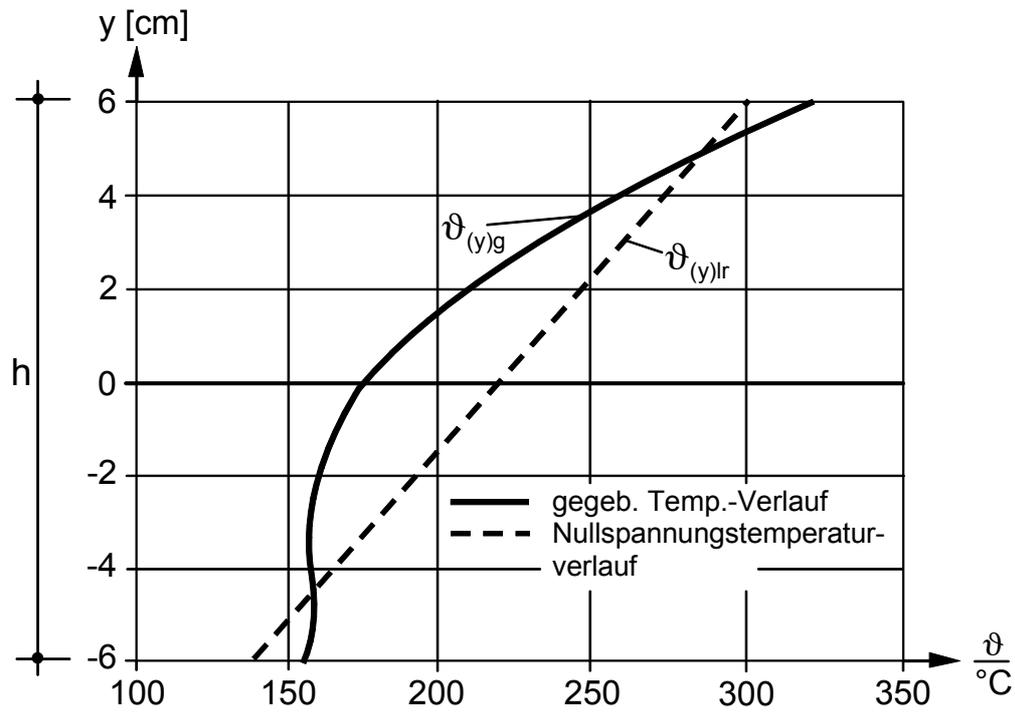


Bild H 5.3: Gegebene Temperaturverteilung über die Stabhöhe

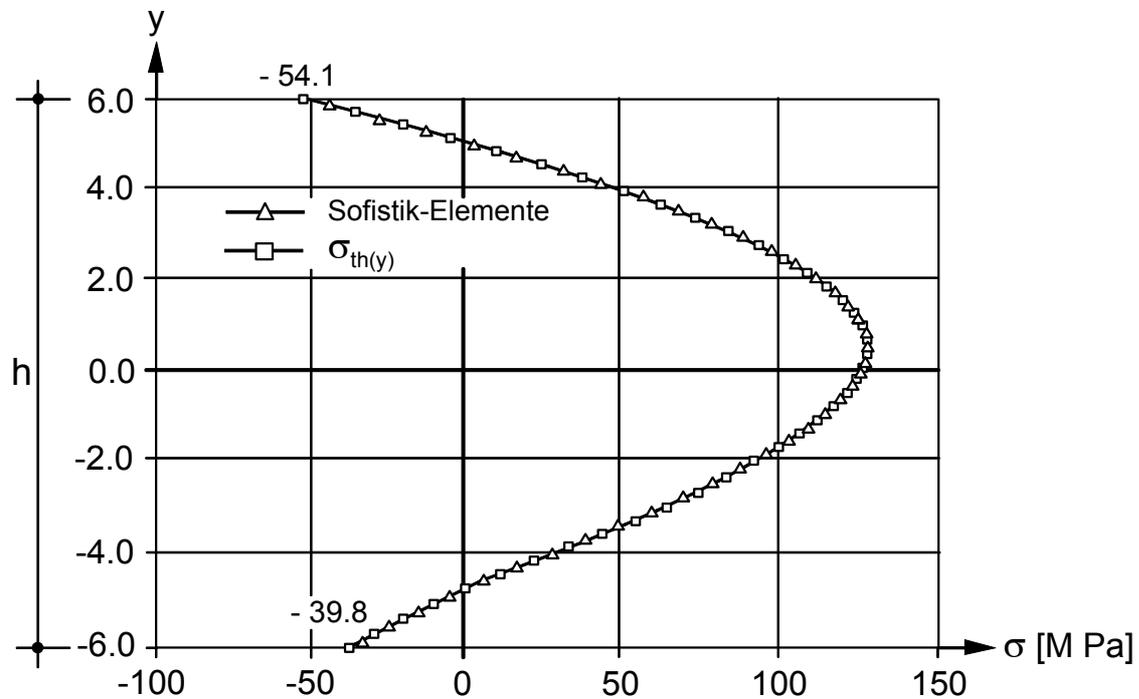


Bild H 5.4: Spannungsverteilung „ $\sigma_{th(y)}$ “

Wichtig ist für die Anwendung der FEM die Kenntnis des Einflusses der temperaturabhängigen Werkstoffkennwerte „ E “ und „ α_t “, die Aufstelltemperatur „ ϑ_0 “, das Vorliegen einer abgesicherten Temperaturkurve als Durchschnittswert (aus verschiedenen Temperaturkurven an Stellen der Stablänge) über die Stabhöhe und/oder über die Stabbreite und das Vorliegen einer Temperaturkurve (an einer bestimmten Stelle der Stablänge) mit maximalen Temperaturdifferenzen. Erst wenn zu diesen Temperaturkurven als Näherung je ein Polynom die Funktion der jeweiligen Temperaturverteilung beschreibt, kann mit Hilfe dieser Polynome nach dem Spannen eines Netzes über das zu berechnende thermisch belastete Bauteil, die thermische Belastung für jedes Element der Stabhöhe eingegeben werden. (Das Polynom der Durchschnittswerte der Temperaturverteilungen wird zur Ermittlung der Verschiebungen benötigt). Hierbei ist die Maschenweite nur so eng zu wählen wie Werte vorliegen, damit jedes Element mit seiner zugehörigen Temperatur besetzt werden kann. Danach ist zunächst der Profilstab als statisch bestimmt gelagert anzusehen (Einfeldträger). Der 1. Berechnungsweg liefert vom System unabhängige thermomechanische Spannungen und Formänderungsgrößen. Die vorliegende Arbeit kann mit ihren analytischen Berechnungsergebnissen bei der Berechnung von thermischen Problemen in Stahlprofilstäben mit der Methode der Finiten Elemente eine Hilfe und ein Kontrollorgan sein, denn die modernen numerischen Berechnungsmethoden sind Näherungsverfahren, die das Problem der Fehlerabschätzung beinhalten! Beim Vorkommen äußerer Behinderungen (Zwängungen in statisch unbestimmten Systemen) werden diese in einem zweiten Berechnungsgang berücksichtigt. Dieser zweite Berechnungsgang (immer noch ohne äußere mechanische Lasten) führt (siehe Anhang G) zu den gesuchten resultierenden Wärmespannungen, die sich aus der algebraischen Summe von thermomechanischen Spannungen und Wärmespannungen zusammensetzen und weiter führt er zu den resultierenden Verschiebungen.

H 6. Thermomechanische Maximalspannungen im Beispiel 19/IV, Anhang A

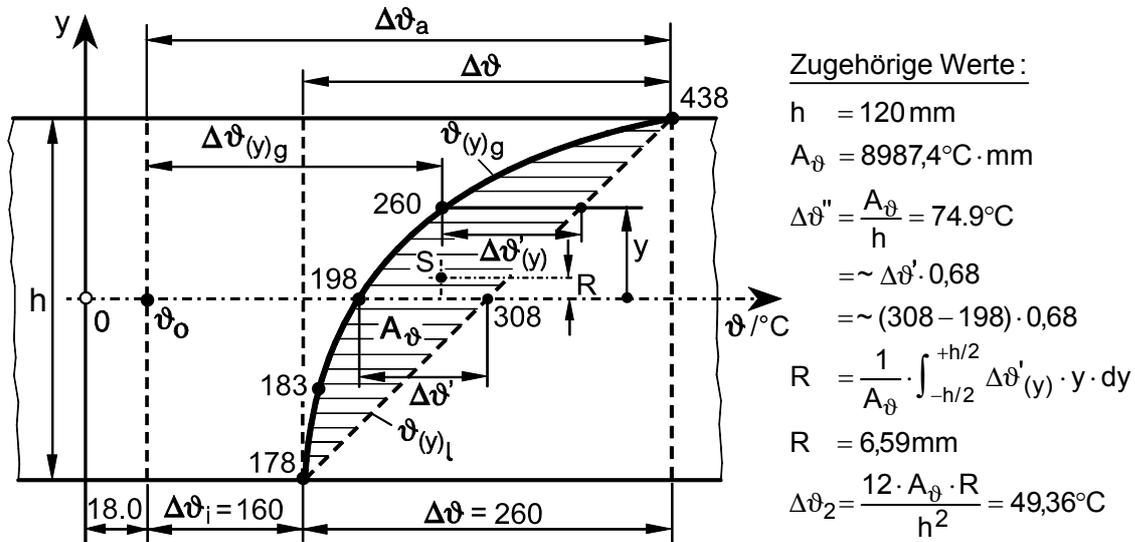


Bild H 6: Gemessenes Temperaturfeld des Versuches 19/IV in Stabmitte (Anhang A)

Mit der Spannungsfunktion

$$\sigma_{\text{th}}(y)_r = E_m \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\Delta\theta'(y) - \Delta\theta'' - \frac{\Delta\theta_2 \cdot y}{h} \right)$$

und $\alpha_{\text{tm}(308^\circ\text{C})} = 13,7 \cdot 10^{-6} / \text{K}$

$$E_m(308^\circ\text{C}) = 1,69 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow K_T = \approx 2,32 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\sigma_{\text{bSch}/t/\vartheta_{\text{zul}}} = 133 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{siehe Anhang C}) ; \nu = 2 \quad (\text{Sicherheitsbeiwert})$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{th zul}} = \frac{133}{2} = 66,5 \text{ N/mm}^2$$

berechnen sich die **thermomechanischen Maximalspannungen** in der Stabmitte beim Versuch 19/IV wie folgt:

1. Außenfaser - a - (Wärmere Faser):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{th}(a)} &= \approx K_T \cdot \left(-\Delta\theta'' - \frac{\Delta\theta_2}{2} \right) \\ &= \approx 2,32 \cdot \left(-74,9 - \frac{49,36}{2} \right) \\ &= \approx -231 \text{ N/mm}^2 \gg \sigma_{\text{th zul}} \end{aligned}$$

2. Mittelfaser - m -

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{th}(m)} &= \approx K_T \cdot (110 - 74,9) \\ &= \approx 81,4 \text{ N/mm}^2 \gg \sigma_{\text{th zul}}\end{aligned}$$

3. Innenfaser - i - (Kältere Faser):

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{th}(i)} &= \approx K_T \cdot \left(-\Delta\vartheta'' + \frac{\Delta\vartheta_2}{2} \right) \\ &= \approx 2,32 \cdot (-74,9 + 24,68) \\ &= \approx -116,5 \text{ N/mm}^2 \gg \sigma_{\text{th zul}}\end{aligned}$$

D.h., nur mit den vorhandenen äußeren thermischen Lasten, ohne mechanische Lasten, befindet sich der Stab bereits im Fließbereich da $\sigma_{\text{th}} > \sigma_{\text{th zul}}$!

H 7. Bimetalle

Wärmespannungen und Formänderungen bei gleichmäßiger Temperaturbeanspruchung ($\vartheta_1 = \text{const}$)

Im nachfolgenden Bild H 7.1 sind zwei Bimetallstäbe mit unterschiedlichem Elastizitätsmodul E_1 und E_2 und unterschiedlichem linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_{t1} und α_{t2} nach gleichmäßiger Temperaturbeanspruchung um $\Delta\vartheta^\circ\text{C}$ bei freier Lagerung dargestellt. Die Ursprungsmaße beider Stäbe lauten $b \cdot h \cdot l_0$. Es soll gezeigt werden, dass im Gegensatz zu nichtlinearen thermomechanischen Spannungen Wärmespannungen aus einem Zwangskraftsystem linear, unsymmetrisch verlaufen.

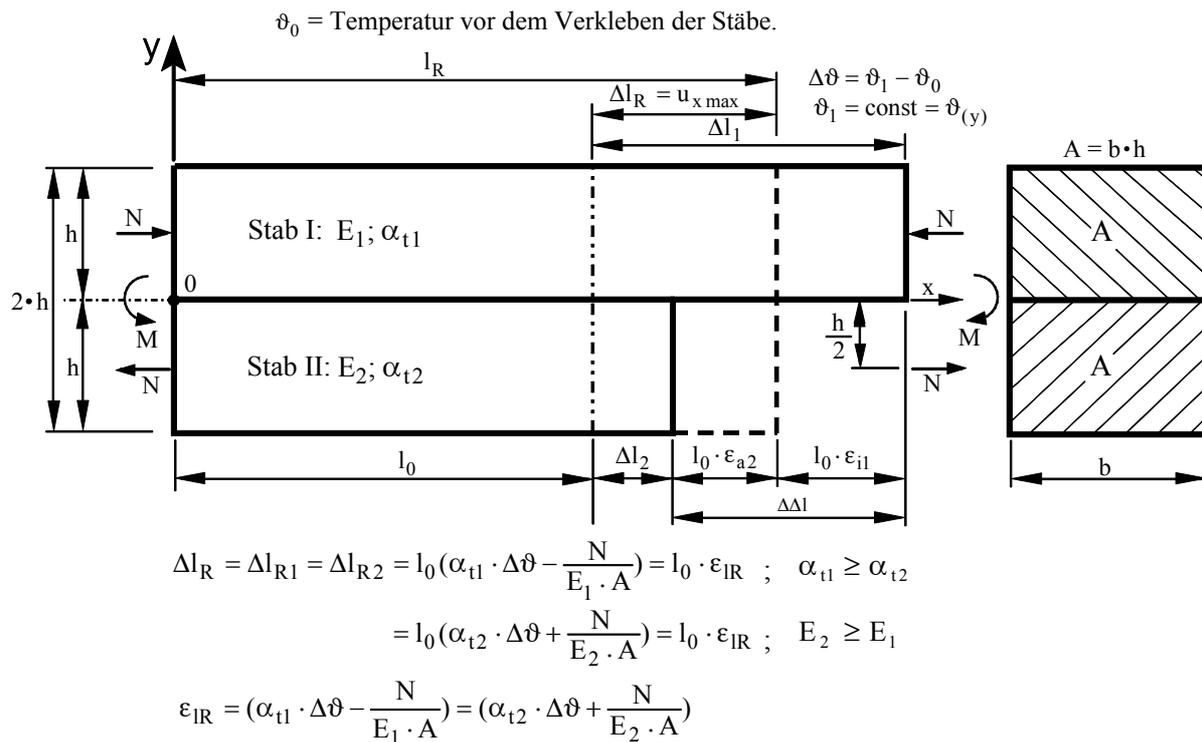


Bild H 7.1: Gestreckte Darstellung der Längenänderungen bei gleichmäßiger thermischer Beanspruchung zweier Bimetallstäbe bei freier Lagerung ohne Momenteinwirkung

Berechnung der Zwangskraft „N“ (Reaktionskraft) mit Hilfe der Federraten (Federkonstanten, Federsteifigkeiten):

In einem Zwangskraftsystem entspricht die Summe der Einzelfederwege (Stäbe und Widerlager) der eingprägten Wegegröße „ $\Delta \Delta l$ “ (siehe Bild H 7.1).

$$N \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_{Ni}} = \Delta \Delta l$$

$$\Rightarrow N = \frac{\Delta \Delta l}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_{Ni}}} \quad [\text{N}] ; \quad \frac{1}{C_{Ni}} = \frac{l_i}{E_i \cdot A_i}$$

$$= \frac{1}{\text{Federrate}}$$

Gemäß Bild H 7.1 ist $\Delta \Delta l = l_0 \cdot \Delta \vartheta \cdot (\alpha_{t1} - \alpha_{t2})$ damit wird

$$N = \frac{l_0 \cdot \Delta \vartheta \cdot (\alpha_{t1} - \alpha_{t2})}{\frac{l_0}{E_1 \cdot A} + \frac{l_0}{E_2 \cdot A}} ; \quad A = b \cdot h$$

$$N = \Delta\vartheta \cdot (\alpha_{t1} - \alpha_{t2}) \cdot \frac{A}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \quad [\text{N}]$$

Spannungen in den Stäben I und II aus der Zwangskraft „N“:

Im Stab I entstehen an der Trennschicht Druckspannungen und im Stab II entstehen Zugspannungen

$$\sigma_{w1} = -\Delta\vartheta \cdot (\alpha_{t1} - \alpha_{t2}) \cdot \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

$$\sigma_{w2} = -\sigma_{w1}$$

Biegespannungen und Dehnungen nach Linearisierung wegen $E_2 > E_1$:

$$\sigma_{M(y)} = \frac{M \cdot y}{I} \quad ; \quad I = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h^3 \quad ; \quad A = b \cdot h$$

$$\bar{E} = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

$$M = N \cdot h$$

$$y = h : \sigma_{M(y)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{A} = \bar{E} \cdot \overline{\epsilon_{M(y)}}$$

$$\text{mit} \quad \overline{\epsilon_{M(y)}} = \frac{M}{\left(\frac{E_1 + E_2}{2} \right) \cdot I} \cdot y = \bar{k} \cdot y \quad .$$

Die Spannungen aus der Zwangskraft „N“ und dem Zwangsmoment „M“ sind einschließlich der daraus resultierenden Wärmespannungen über die Gesamthöhe „ $2 \cdot h$ “ dargestellt.

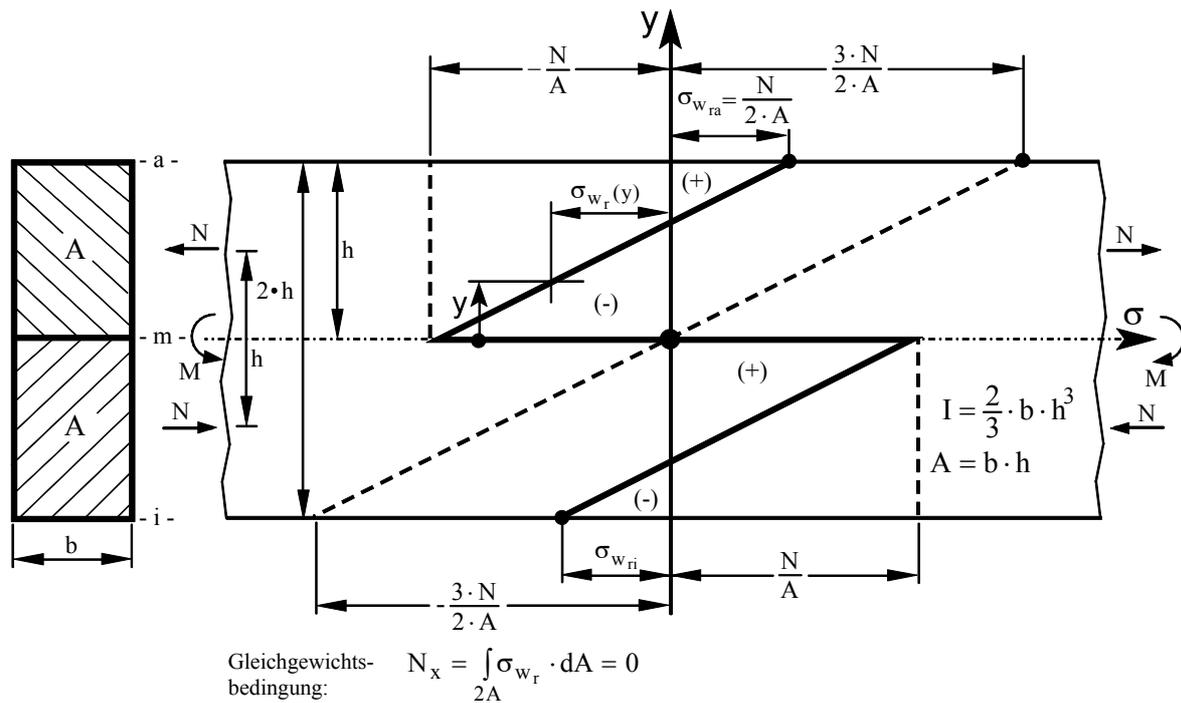


Bild H 7.2: Resultierende Wärmespannungen in einem Bimetal

Verkrümmungsradien:

$$R_{(y)} = \frac{1}{\kappa_{(y)}} = \frac{\left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right) \cdot I \cdot \left(1 + \overline{\varepsilon_{M(y)}}\right)}{M} \quad [\text{mm}]$$

$$\text{mit} \quad \overline{\varepsilon_{M(y)}} = \frac{N \cdot h}{\left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right) \cdot I} \cdot y = \overline{\kappa_0} \cdot y$$

Bei $y = 0$ gilt: $R_{1i} = R_{2a}$. Der Innenradius des Stabes I ist gleich dem Außenradius des Stabes II!

Durchbiegung

$$f_{(y)} = \frac{M}{\left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right) \cdot I} \cdot \frac{l_R^2}{8} \cdot \left(1 + \overline{\varepsilon_{M(y)}}\right) \quad [\text{mm}]$$

$$\text{mit} \quad l_R = l_0 + \Delta l_R$$

Faserlängenänderungen über die Stabhöhe:

$$\Delta l_{(y)} = \Delta l_R + l_0 \cdot \overline{\varepsilon_{M(y)}}$$

$$\text{mit } \Delta l_R = l_0 \left(\alpha_{t1} \cdot \Delta \vartheta - \frac{N}{E_1 \cdot A} \right)$$

$$\text{oder } \Delta l_R = l_0 \left(\alpha_{t2} \cdot \Delta \vartheta + \frac{N}{E_2 \cdot A} \right)$$

$$\text{und } \overline{\varepsilon_{M(y)}} = \frac{N \cdot h}{\left(\frac{E_1 + E_2}{2} \right) \cdot I} \cdot y = \overline{\kappa_0} \cdot y$$

$$N \cdot h = M \quad ; \quad (y_{\max} = \pm h)$$

Zusammenfassung zu Spannungen und Momente:**1. Spannungen aus der Zwangskraft:**

$$\sigma_{w1} = - \frac{N}{A} \quad (\text{Stab I})$$

$$\sigma_{w2} = \frac{N}{A} \quad (\text{Stab II})$$

2. Spannungen aus dem Zwangsmoment:

$$\sigma_{M(y)} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{N \cdot h \cdot y}{\frac{2}{3} \cdot b \cdot h^3} \quad ; \quad A = b \cdot h$$

$$\sigma_{M(y)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{N \cdot y}{A \cdot h}$$

3. Resultierende Wärmespannungen aus der Addition von Punkt 1 und Punkt 2:**3.1 Stab I:**

$$\sigma_{wr(y)} = - \frac{N}{A} + \frac{3}{2} \cdot \frac{N \cdot y}{A \cdot h}$$

$$y = 0 : \sigma_{wr(y)} = - \frac{N}{A}$$

3.2 Stab II:

$$\sigma_{wr(y)} = \frac{N}{A} - \frac{3}{2} \cdot \frac{N \cdot y}{A \cdot h}$$

$$y=0 : \sigma_{wr(y)} = -\frac{N}{A}$$

4. Resultierende der Normalspannungen über die Gesamthöhe $2 \cdot h$:

$$N_x = \int_{2A} \sigma_{wr} \cdot dA = b \cdot \int_{-h}^{+h} \sigma_{wr(y)} \cdot dy = 0$$

5. Resultierendes Moment über $2 \cdot h$:

$$M_z = \int_{2A} \sigma_{M(y)} \cdot y \cdot dA \quad ; \quad dA = b \cdot dy$$

$$= b \cdot \int_{-h}^{+h} \frac{3}{2} \cdot \frac{N \cdot y}{A \cdot h} \cdot y \cdot dy$$

$$M_z = N \cdot h$$

H 8. Neudimensionierung der Ankerständer der RAG-Kokerei Prosper in Bottrop

System: Statisch bestimmt gelagerter Träger auf zwei Stützen. Die notwendige An-
druckkraft auf den Ofenpanzer, die Ofendecke und auf den Unterofen wird mittels abgefede-
rten Druckbolzen übertragen (siehe Bild H 8.1)

Systemlänge: $l_0 = 1200 \text{ cm}$

Vorhandenes Ankerständerprofil und Materialkennwerte:

Profil: HE – 650 - B ; $h = 65 \text{ cm}$

Kennwerte: R St 44 – 2

$$I_x = 210600 \text{ cm}^4 ; \sigma_{z\text{Sch}/t/\vartheta} = 220 \text{ N/mm}^2 \text{ (Anhang C bei } \vartheta_{mR} = 69^\circ \text{C)}$$

$$W_x = 6480 \text{ cm}^3 ; \nu = 2,0$$

$$E_m = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\alpha_{tm} = 12,3 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$\sigma_{th\text{zul}} = \frac{\sigma_{z\text{Sch}/t/\vartheta}}{\nu} = \frac{220}{2,0} = 110 \text{ N/mm}^2$$

Belastung: 1. Gleichmäßige mechanische Belastung mit $q = 27 \text{ KN/m}$ ohne Zusatzlasten aus der Teervorlage, Bühnen und Gasleitungen

2. Die thermische Belastung geht aus der Auswertung der Temperaturmessungen des Ankerständers 142 L (Anhang B) hervor. Es werden daraus folgende thermische Größen benötigt:

a) $\Delta\vartheta_{\max} = \Delta\vartheta = 68^\circ \text{C}$

b) $\Delta\vartheta\varphi = 50^\circ \text{C}$ siehe Bild B4

c) $\Delta\vartheta_2 = 23,84^\circ \text{C}$

d) $\frac{\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2}{2} = 22,08^\circ \text{C} = \frac{\Delta\vartheta_1}{2}$

e) $\Delta\vartheta'' = 15,8^\circ \text{C}$

f) $\vartheta_a = 103^\circ \text{C}$

g) $\vartheta_i = 35^\circ \text{C}$

h) $\vartheta_m = 44^\circ \text{C} ; \vartheta_{mR} = 69^\circ \text{C}$

i) $\vartheta_{mD} = \vartheta_{mR} - \Delta\vartheta'' = 53,2^\circ \text{C}$

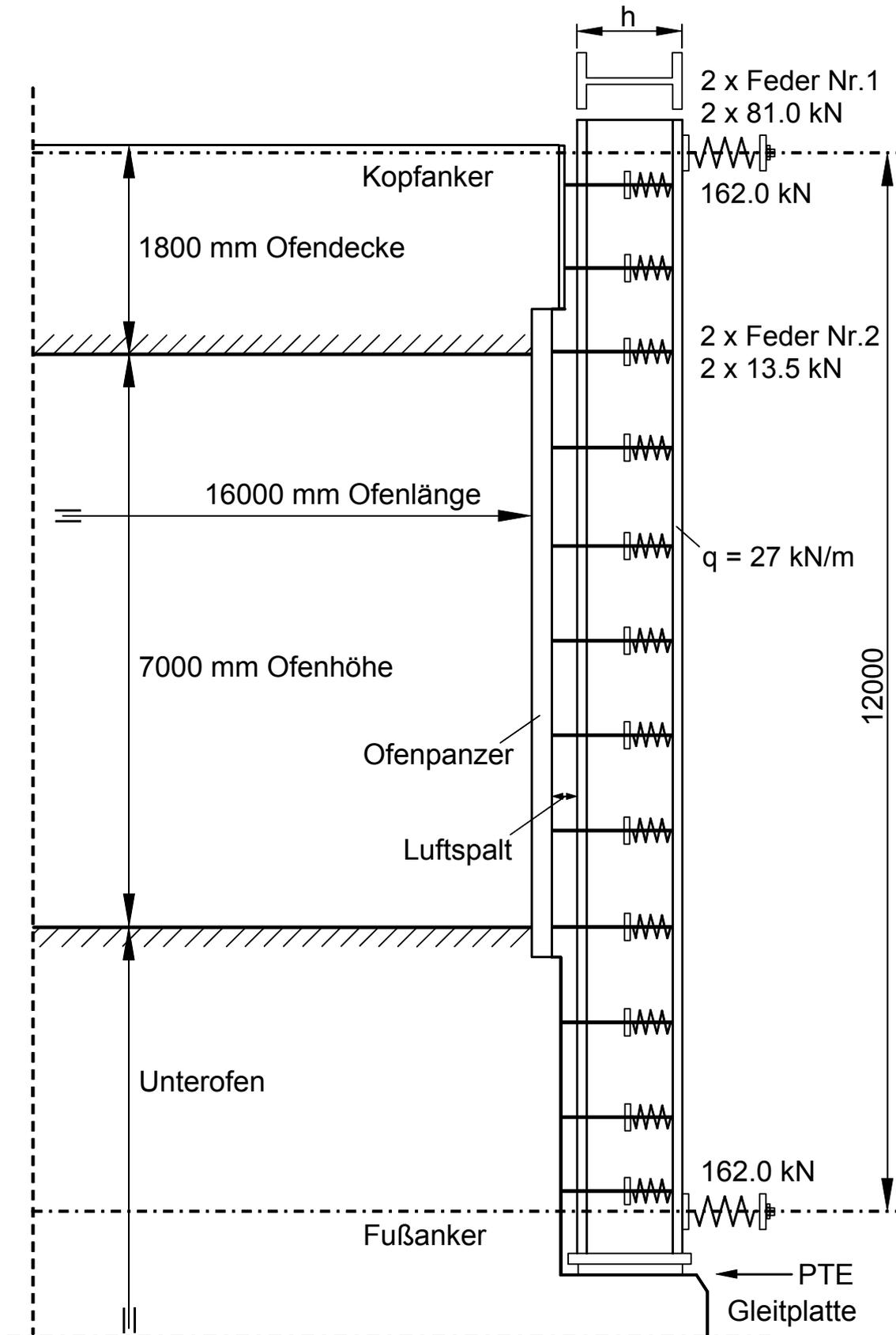


Bild H 8.1: Abgefederte Ankerständer Konstruktion an einem 7 m Koksofen

Feder Nr.	Federabmessungen								Federbelastung		Federrate R
	F _C N	D mm	d mm	n _t	n	l ₀ mm	l _C mm	s _C mm	F kN	L mm	R = tan α = $\frac{F_C}{s_C} \frac{N}{mm}$
1	236227	150	50	6,5	5,0	375	310,0	65,0	81,0	352,7	3634
2	25787	104	21	5,5	4,0	170	109,2	60,8	13,5	138,1	424

D = Mittlerer Durchmesser

d = Drahtdurchmesser

n_t = Gesamtzahl der Windungen

n = Anzahl der wirksamen Windungen

l₀ = Länge der unbelasteten Feder

l_C = Blocklänge

s_C = Federweg, zugeordnet L_C

F = Federkraft

L = Federlänge

F_C = Federkraft, zugeordnet L_C

R = Federrate

$$\text{zu 1: } R = \tan \alpha = \frac{F_C}{s_C} = \frac{236227}{65} = 3634 \frac{N}{mm}$$

$$\text{zu 2: } R = \tan \alpha = \frac{F_C}{s_C} = \frac{25787}{60,8} = 424 \frac{N}{mm}$$

Tabelle H 8.1: Federn für die Ofenverankerung

Berechnung:

I. Thermische maximale Durchbiegung der Innenfaser:

$$f_{\text{thi}} \approx \frac{\alpha_{\text{tm}} \cdot \Delta\vartheta\phi \cdot l_0^2}{h \cdot 8} ; \Delta\vartheta\phi = \overline{\Delta\vartheta_1}$$

$$\approx \frac{12,3 \cdot 50 \cdot 1200^2}{10^6 \cdot 65 \cdot 8} = 1,7 \text{ cm}$$

$$f_{\text{thi}} \approx 17 \text{ mm}$$

Die tatsächliche Durchbiegung wird etwas größer sein und kann, wenn der Verlauf $\Delta\vartheta_1(x)$ genauer bekannt ist, gemäß Anhang D 9. berechnet werden. Die zulässige Durchbiegung im Industrieofenbau beträgt bei diesem Ofenständer:

$$f_{\text{zul}} = \frac{l_0}{750} = \frac{12000}{750} = 16 \text{ mm}$$

d.h. $f_{\text{thi}} > f_{\text{zul}}$.

Die Überschreitung der zulässigen Durchbiegung deutet eine zu geringe Dimensionierung des Ankerständers an.

II. Sicherheitsbeiwert und Durchbiegung

Bei denkbaren Gefahren für Menschen wird an Schächten und Seilbahnen ein Sicherheitsbeiwert von $\nu = 10$ angesetzt. Im betrachteten Fall handelt es sich um den Einsatz großer Investitionen in einem störungsanfälligen Betrieb. Daher wird ein Sicherheitsbeiwert von

$$\nu = 4$$

für angemessen gehalten.

Beim Betrieb einer Kokerei können Betriebsstörungen nicht ausgeschlossen werden. Hierzu gehören in Bezug auf Ankerständer länger als geplant offen stehende Koksöfen und zeitweilig brennende Ofentüren.

Damit beträgt die maximal zu berücksichtigende thermische Durchbiegung

$$f_{\text{thi max}} = \nu \cdot f_{\text{thi}} = 4 \cdot 17 = 68 \text{ mm}$$

III. Mechanische Durchbiegung

$$\begin{aligned} f_{\text{m}} &= \frac{5 \cdot q \cdot l_0 \cdot l_0^3}{384 \cdot E \cdot I} \\ &\approx \frac{5 \cdot 270 \text{ N} \cdot 1200 \text{ cm} \cdot 1200^3 \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{cm}^2}{384 \cdot \text{cm} \cdot 2,1 \cdot 10^7 \cdot \text{N} \cdot 210600 \text{ cm}^4} \\ f_{\text{m}} &\approx 1,66 \text{ cm} \end{aligned}$$

IV. Resultierende Durchbiegung

1. Im Normalbetrieb ist die resultierende Durchbiegung ausgeglichen

$$f_{\text{Res}} = f_{\text{th}} - f_{\text{m}} \approx 0$$

2. Im Fall einer Betriebsstörung soll der Ankerständer die Ofenpanzerung nicht berühren.

f_{Res} ergibt hier den Mindestabstand des Ankerständers vom Ofenpanzer (= Tiefe des erforderlichen Luftspaltes).

$$f_{\text{Res}} = f_{\text{th max}} - f_{\text{m max}} = 68 - 17 \approx 51 \text{ mm}$$

$$f_{\text{Res}} = 51 \text{ mm}$$

V. Aufgrund Punkt IV:

Bewertung des vorhandenen Luftspaltes von 30 mm Tiefe an den Öfen der Kokei Prosper: Aus Sicherheitsgründen sollte der konstruktive Luftspalt 60 mm betragen!

Hinweis: Der größere Luftspalt soll mit Sicherheit verhindern, dass ein Ankerständer die Ofenpanzerplatte berührt und dabei punktförmig die gesamte Last aus der Ankerständerabfederung einleitet.. Würde dies auf halber Ankerständerlänge geschehen, entstünde ein Belastungssystem mit mittiger Einzellast, das trotz der Ofenpanzerung (die gusseisernen Ofenpanzerplatten zerspringen!) das Ofenmauerwerk zerdrücken würde. Die mechanischen Spannungen nähmen dazu den doppelten Wert an.

VI. Mechanische Spannungen (Biegung):

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \pm \frac{\max M}{W} = \pm \frac{q \cdot l_0^2}{8 \cdot W} \\ &= \pm \frac{270 \text{ N} \cdot 1200^2 \cdot \text{cm}^2}{\text{cm} \cdot 8 \cdot 6480 \text{ cm}^3}\end{aligned}$$

$$\sigma_m = \pm 7500 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_m = \pm 75 \text{ N/mm}^2$$

VII: Thermomechanische Spannungen

Es müssen die Spannungen im thermisch stärkst beanspruchten Stabquerschnitt betrachtet werden. $\Rightarrow \Delta\vartheta = \Delta\vartheta_{\max}$! Da es sich um ein Breitflansch-Träger-Profil mit $b \neq \text{const}$ handelt, wird als Berechnungsgleichung gewählt:

$$\sigma_{\text{th}(y)} = E_m \cdot \alpha_{\text{tm}} \cdot \left(\vartheta_{\text{mD}} + \frac{(\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2) \cdot y}{h} - \vartheta(y)_{\text{g}} \right) \quad [\text{N/mm}^2]$$

$$\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta_1$$

$$\text{bzw.} \quad \sigma_{\text{th}(y)} = K_T \left(\vartheta_{\text{mD}} + \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} - \vartheta(y)_{\text{g}} \right)$$

1. Die größte Maximalspannung (Druckspannung) tritt in der wärmeren Außenfaser - a - auf.

$$y = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{(\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2) \cdot y}{h} = \frac{\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_2}{2} = \frac{\Delta\vartheta_1}{2} = 22,08 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_{(y)g} = \vartheta_a = 103 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$E_m \cdot \alpha_{tm} = K_T = 2,583 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{th \max} &= K_T \cdot \left(\vartheta_{mD} + \frac{\Delta\vartheta_1}{2} - \vartheta_a \right) = K_T \cdot \Delta\vartheta_{ar} \\ &= 2,583 \cdot (53,2 + 22,08 - 103) \end{aligned}$$

$$\sigma_{th \max} = -72 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{tha}$$

2. Zugspannungen in Höhe der Mittelfaser:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} = 0$$

$$\vartheta_{(y)g} = \vartheta_m = 44 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{th(y)} &= K_T \cdot (\vartheta_{mD} - \vartheta_m) \\ &= 2,583(53,2 - 44) \end{aligned}$$

$$\sigma_{th(y)} = 24 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{thm}$$

3. Spannungen in der Kälteren Innenfaser „i“:

$$y = -\frac{h}{2} \Rightarrow \frac{\Delta\vartheta_1 \cdot y}{h} = -\frac{\Delta\vartheta_1}{2}$$

$$\vartheta_{(y)g} = \vartheta_i = 35 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{th(y)} &= K_T \cdot \left(\vartheta_{mD} - \frac{\Delta\vartheta_1}{2} - \vartheta_i \right) = K_T \cdot \Delta\vartheta_{ir} \\ &= 2,583 \cdot (53,2 - 22,08 - 35) \end{aligned}$$

$$\sigma_{th(y)} = -10 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{thi}$$

VIII. Resultierende Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{Res} &= \sigma_{\max} = \sigma_{th \max} + \sigma_m \\ &= -72 - 75 \end{aligned}$$

$$\sigma_{Res} = -147 \text{ N/mm}^2$$

IX. Sicherheitsnachweis:

$$\sigma_{th \text{ zul}} = 110 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{Res} > \sigma_{th \text{ zul}} : \text{Also nicht zulässig!}$$

X. Neudimensionierung:

Es wird wegen Punkt I und IX für den Neubau von ca. 7 m hohen Koksöfen empfohlen:

1. Einsatz des Peiner-Breitflanschprofils

HE – 800 - B ; h = 800 mm

Material: R St 37 – 2 bzw.: S 235 IR G2 ; $I_x = 359100 \text{ cm}^4$

$$W_x = 8980 \text{ cm}^3$$

2. Ein Luftspalt von 60 mm Konstruktionstiefe zwischen Ankerständer und Ofenpanzerung bei Mindestbeibehaltung der bisher durchgeführten Ofenkopfwärmedämmung.

Literaturverzeichnis

- [1] Krätzig, W.B.; Wittek, U.: Tragwerke 1 und 2, Springer, 1993/1990
- [2] Bruhns, O. und Lehmann, Th., Elemente der Mechanik I bis III, Vieweg, Braunschweig 1993/1994/1994
- [3] Hirschfeld, K., Baustatik 1 und 2, Springer, 1969
- [4] Timoshenko, S., Theory of Elasticity, Mc Graw-Hill, 1934
- [5] Timoshenko, S. P. und Goodier, I. N., Theory of Elasticity, 3. Ed., Mc Graw-Hill, 1970
- [6] Timoshenko, S. und S., Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, 2. Ed. 1987
- [7] Nowacki, W., Thermoelasticity 2d ed., Pergamon Press, 1986
- [8] Warren C. Young, Roark's Formulas for Stress & Strain, Mc Graw-Hill, 6. Ed., 1989
- [9] Carlson, D.E., Linear Thermoelasticity, in Handbuch der Physik, Bd. VI a/2, S. 297ff. Springer, 1972
- [10] B.A. Boley, I. H. Weiner, Theory of Thermal Stresses, N.Y. Wiley & Sons, 1960
- [11] Parkus, H., Thermoelasticity, Blaisdell, 1968
- [12] E. Melan, H. Parkus, Wärmespannungen, Wien, Springer, 1953
- [13] Parkus, H., Instationäre Wärmespannungen, Wien, Springer, 1959
- [14] H. S. Carslaw, I. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Oxford, Clarendo, 2. Ed., 1993
- [15] Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 17. Auflage, Springer, 1990
- [16] Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, 25. Auflage, B. G. Teubner, 1991
- [17] D'Ans, Lax, Taschenbuch für Chemiker und Physiker, 3. Auflage, Band I, Springer, 1967
- [18] Günther, R., Verbrennung und Feuerungen, Springer, 1974
- [19] Hofmann, G., Industrieöfen, Band II, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1970
- [20] Schwaigerer, S., Festigkeitsberechnung im Dampfkessel-, Behälter- und Rohrleitungsbau, 4. Auflage, Springer 1980

- [21] Hampel, H., Rohrleitungsstatik, Springer, 1972
- [22] Dorin Lesan, Saint-Venant's Problem, Springer, 1987
- [23] Day, W. A., Heat Conduction Within Linear Thermoelasticity, Springer, 1985
- [24] Göldner, H., Holzweißig, F., Leitfaden der Technischen Mechanik, Dr. D. Steinkopf, Darmstadt, 1976
- [25] Kabus, K., Mechanik und Festigkeitslehre, 4. Auflage, Hanser, 1992
- [26] Wagner/Erlhof, Praktische Baustatik, Teil 1 bis Teil 3, B. G. Teubner, Stuttgart, 1986/1991/1984
- [27] Decker/Kabus, Maschinenelemente-Aufgaben, 3. Auflage, Carl Hanser, München, 1973
- [28] Friedrich, Tabellenbuch Metall- und Maschinentechnik, Dümmler, Bonn, 1992
- [29] Tabellenbuch Metall, 39. Auflage, Europa Lehrmittel, Nourney, 1994
- [30] Richter, F., Mannesmann Forschungsberichte. Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen, Stahleisen-Sonderberichte, Heft 8, Stahleisen - Düsseldorf, 1973
- [31] Malisius, R., Schrumpfungen, Spannungen und Risse beim Schweißen, 4. Aufl., Deutscher Verlag für Schweißtechnik - Düsseldorf, 1977
- [32] Richter, F., Physikalische Eigenschaften von Stählen und ihre Temperaturabhängigkeit, Polynome und graphische Darstellungen, Mitteilung aus dem Mannesmann Forschungsinstitut, Stahleisen - Sonderberichte, Heft 10, Stahleisen, Düsseldorf, 1983
- [33] Mannesmannröhren-Werke AG, Mannesmann-Forschungsinstitut, Werkstoffblätter, Ehingerstr. 200, 47259 Duisburg-Huckingen. (Abteilung Werbung: 45466 Mülheim)
- [34] Europäische Norm EN 10025 und EN 10027-1, Warmgewalzte Erzeugnisse aus unlegierten Baustählen, Beuth-Verlag, Berlin, März 1994
- [35] Deutsche Norm, DIN 17280, Kaltzähe Stähle, Beuth-Verlag, Berlin, Juli 1985
- [36] Deutsche Norm, DIN 17440, Nichtrostende Stähle (Ferritische- und Austenitische Stähle) Beuth, Berlin, Juli 1985
- [37] AD-Merkblatt W 2, Austenitische Stähle, Werkstoffe für Druckbehälter, Beuth-Berlin, Ausgabe Januar 1994
- [38] Krupp-Hoesch Werke Dortmund, Untersuchungsbericht Nr. 43/75, Warmdehngrenzen R_p 0, 2, Stahl nach DIN 17100: U St 37-2, Werkstoff-Nr. 1.0036, Stahl nach Euronorm EN 10027-1: S 235 IRG1
- [39] Deutsche Norm, DIN 2413 Teil 1, Stahlrohre, Berechnung der Wanddicke von Stahlrohren gegen Innendruck, Beuth-Verlag, Berlin, Oktober 1993

- [40] Vor - TRD 301, Anlage 1, Berechnung, Technische Regeln für Dampfkessel (TRD). Berechnung auf Wechselbeanspruchung durch schwellende Innendruck- und Temperaturänderungen, Beuth-Verlag, Berlin, Fassung Juli 1991
- [41] AD-Merkblatt B10, Berechnung von Druckbehältern, Dickwandige zylindrische Mäntel unter innerem Überdruck, Beuth-Berlin, Ausgabe Juni 1986
- [42] AD-Merkblatt BO, Berechnung von Druckbehältern, Beuth-Verlag, Berlin, Ausgabe März 1990
- [43] AD-Merkblatt W 10, Werkstoffe für Druckbehälter, Werkstoffe für tiefe Temperaturen, Eisenwerkstoffe, Beuth-Berlin, Ausgabe November 1987
- [44] Keppler, U., Die Wärmeausdehnung metallischer Werkstücke, Materialprüfung, Band 28 (1986), Nr. 12 - Dezember
- [45] Stäblein, F., Spannungsmessungen an einseitig abgelöschten Knüppeln, Kruppsche Monatshefte 12 (1931), S. 93 bis S. 98
- [46] Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, 23. Aufl., Band III, S. 73 und S. 78, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1919
- [47] Wegst, C., „Stahlschlüssel“, 17. Aufl., Verlag Stahlschlüssel Wegst GmbH, 71672 Marbach, 1995
- [48] Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden, 19. Aufl., Brockhaus, Mannheim, 1993
- [49] Márkus, G., Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke, S. 218 und 219, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1967
- [50] Deutsche Norm, DIN 1072, Straßen- und Wegbrücken, Beuth-Berlin, Dezember 1985, Beiblatt 1, Mai 1988
- [51] Mangerig, I., Klimatische Temperaturbeanspruchung von Stahl- und Stahlverbundbrücken. Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 86-4, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Dissertation, 1986
- [52] Roik, Karlheinz: Vorlesungen über Stahlbau, Grundlagen, 2. Aufl., W. Ernst & Sohn, Berlin, München, 1983.
- [53] Peiter, A.: Eigenspannungen I. Art, Michael Triltsch-Verlag, Düsseldorf, 1966, S. 14
- [54] Petersen, Christian: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, 2. Aufl., Vieweg 1982, Nachdruck 1992.
- [55] Macherauch, E.; Wohlfahrt, H.; Wolfstieg, U.: Zur zweckmäßigen Definition von Eigenspannungen. Härtereitechn. Mitt. 28 (1973), Heft 3, S. 200-211.
- [56] Reif, Frederick: Statistische Physik und Theorie der Wärme, 3. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 1987, ISBN 3-11-011383-X.

- [57] Becker, Richard: Theorie der Wärme, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1985 ISBN 3-540-15383.
- [58] Fourier, J.-B.J.: Théorie Analytique de la Chaleur, Paris, Didot, 1822.
- [59] Baehr, H.D.: Thermodynamik, Springer, 1996.
- [60] Bosnjakovic, F.: Technische Thermodynamik, Bd. I (1972), Bd. II (1988), Steinkopff Dresden
- [61] Elsner, N.: Grundlagen der Techn. Thermodynamik, Bertelsmann 1973
- [62] Hahne, E.: Tech. Thermodynamik, Eddison-Wessley, 1992
- [63] Knoche, K.F.: Tech. Thermodynamik, Vieweg, 1972
- [64] Puschmann, G. und Drath, R.: Die Grundzüge der Technischen Wärmelehre, Hanser, 1971.
- [65] Schmidt, E., Stephan, K. und Mayinger, F.: Techn. Thermodynamik Bd I (1986), Bd. II (1988), Springer.
- [66] Thiem, M.: Einführung in die Technische Wärmelehre, Hanser, 1971
- [67] Winter, F.W.: Techn. Wärmelehre, Giradet, 1979
- [68] Demtröder, W.: Experimental Physik I, Mechanik und Wärme, Springer, 1994
- [69] Steimle, F.: Thermodynamik I und II, Vorlesungsskript, Universität/GHS-Essen, WS 1997/98
- [70] Brandsicherheit im Stahlbau. Ergebnisse und Schlussfolgerungen einer europäischen Forschungsarbeit, EKS-III-74-2-D. Bongard, W.: Teil V: Unverkleidete Stahlkonstruktionen, Brandverhalten und Verwendungsbereich. Herausgegeben von der Europäischen Konvention für Stahlbau (EKS), Rotterdam, 1974, Auslieferung der Deutschen Ausgabe: Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln.
- [71] Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft Nr. 689, Schwiete, H.-E.; Westmark, H.: Die Wärmeleitfähigkeit feuerfester Steine im Spiegel der Literatur. Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1959. DK 016:536.2.022:666.76.
- [72] Siebert, D., Verfahren zum Messen von Eigenspannungen in I-Trägern, Meßtechnische Briefe 13, Heft 2, 1977
- [73] VDI-Wärmeatlas, 2. Auflage, Kapitel Eb2, Verlag des Vereins Deutscher Ingenieure, Düsseldorf, 1974
- [74] Köhne, H., Theoretische und experimentelle Lösungen für spezielle Fälle zweidimensionaler, stationärer Wärmevorgänge, Gaswärme 15, S. 50/56, 1966

- [75] Eurocode 3, Kurzfassung DIN V ENV 1993-1-1, Bemessungsregeln für den Hochbau, 1. Auflage 1997, Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH, Köln.
- [76] Feuerwiderstand von Bauteilen aus Stahl (auf der Grundlage der ENV 1993, Teil 1-2, „Eurocode 3, Teil Brandschutz“), EKS Nr. 89, EKS-Technischer Ausschuss TC3-Brandsicherheit von Stahlbauteilen, Brussels, 1996.
- [77] Dietzel, G., Beitrag zur Frage der Eigenspannungen in Gußeisen mit Lamellengraphit, Diss. 1965, D 82, RWTH-Aachen
- [78] Traupel, W., Temperaturfelder und Wärmespannungen, 1. Auflage, Verlag des Akademischen Maschinen-Ingenieur-Vereins an der ETH-Zürich, Zürich, 1968
- [79] Heiligenstaedt, W.; Wärmetechnische Rechnungen für Industrieöfen, 4. Auflage, Stahleisen-Verlag, Düsseldorf, 1966.
- [80] Gross, Hauger, Schnell, Wriggers; Technische Mechanik Bd. 1 bis 4, Springer, Berlin-Heidelberg, 1993.
- [81] Göldner, H., Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Bd. 1, 3. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1991.
- [82] Petersen, Christian: Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten, 3. Auflage, Nachdruck 1997, Vieweg, Braunschweig, 1993. ISBN 3-528-28837-X.
- [83] Brunklaus, J. Henri; Stepanek F.J.: Industrieöfen, Bau- und Betrieb, 6. Aufl., Vulkan-Verlag, Essen, 1994, ISBN 3-8027-2906-4.
- [84] Senkara, Tadeusz: Wärmetechnische Rechnung für Gas- und Oelbeheizte Wärmöfen. Essen, Vulkan-Verlag, 1977.
- [85] Feuerfestbau, Stoffe-Konstruktion-Ausführung, 2. Aufl., Vulkan-Verlag, Essen, 1994, ISBN 3-8027-3143-3.
- [86] Routschka, Gerald: Taschenbuch Feuerfeste Werkstoffe, 2. Aufl., Vulkan-Verlag, Essen, 1997, ISBN 3-8027-3146-8.
- [87] Steinhardt, Rolf; Krivandin, Vladimir: Grundlagen der Industrieofentechnik, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [88] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer, Berlin 1986
- [89] Krätzig, W.B., Basar, Y.: Tragwerke 3, Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente, Springer, Berlin, 1997.
- [90] Meissner, U., Menzel, A.: Die Methode der Finiten-Elemente, Springer, Berlin, 1989.
- [91] Thieme, D.: Einführung in die Finite-Elemente-Methode für Bauingenieure, 2. Auflage, Verlag für Bauwesen, Berlin, 1996.

- [92] Schwarz, H. R.: Numerische Mathematik, 3. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [93] Kordina/Meyer-Ottens: Beton-Brandschutz-Handbuch. Verlag Bau und Technik GmbH, Düsseldorf-Erkrath, 2. Auflage, 1999.
- [94] Stahlbau Brandschutz Handbuch. Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 1993.
- [95] Verbundbau Brandschutz Handbuch. Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin 1989.
- [96] Deutsche Norm, DIN 4102 Teil 4, März 1994, Brandschutzverhalten von Baustoffen und Bauteilen. Zusammenstellung und Anwendung klassifizierter Baustoffe, Bauteile und Sonderbauteile. Beuth, Berlin.
- [97] Tabellenbuch Bautechnik, Kapitel 5.5, Brandschutz, Verlag Europa-Lehrmittel, 5. Auflage, Haan-Gruiten, 1999.
- [98] Eurocode 1: Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 2-2, Einwirkungen auf Tragwerke – Einwirkungen im Brandfall. DIN V ENV 1991-2-2, 1997-05, Beuth, Berlin. ISBN: 3-410-14710-1.
- [99] Eurocode 1: Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke, Teil 2-5: Einwirkungen auf Tragwerke, Temperatureinwirkungen. DIN V ENV 1991-2-5, Januar 1999.
- [100] Eurocode 2: Planung von Stahlbau- und Spannbetonwerken. Teil 1-2: Allgemeine Regeln-Tragwerksbemessung für den Brandfall. DIN V ENV 1992-1-2, Mai 1997.
- [101] Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten, Teil 1-2: Allgemeine Regeln-Tragwerksbemessung für den Brandfall, DIN V ENV 1993-1-2, 1995, Beuth-Berlin.
- [102] Eurocode 4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton. Teil 1-2: Allgemeine Regeln-Tragwerksbemessung für den Brandfall. DIN V ENV 1994-1-2, Juni 1997.
- [103] Hanswille, G.: Eurocode 4, Teil 2, Verbundbrücken, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 778, 1999. Herausgegeben vom Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen, Abteilung Straßenbau, Straßenverkehr, Bonn.
- [104] Eurocode 4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton. Teil 2: Verbundbrücken, DIN ENV 1994-2, Juni 2000.
- [105] Schaumann, P.: Upmeyer, J., (Institut für Stahlbau, Universität Hannover): Brandschutz Fachseminar und Workshop, Fachhochschule München – Bauen mit Stahl e.V., München, 13. und 14. April 2000.
- [106] Stein, Alfred: Fassaden aus Natur- und Betonwerkstein, Konstruktion und Bemessung nach DIN 18516, Callwey Verlag, München, 2000, ISBN 3-7667-1407-4.
- [107] Lohmeyer, Gottfried: Praktische Bauphysik, 3. Auflage, Teubner Stuttgart, 1995, ISBN 3-519-25013-6.

- [108] Wendehorst: Bautechnische Zahlentafeln, 29. Auflage, Teubner Stuttgart, 2000, ISBN 3-519-35002-5.
- [109] Stahleisen-Werkstoffblatt SEW 310, 1. Ausgabe, August 1992, Verlag Stahleisen, Düsseldorf.
- [110] Schaumann, P.: Bemessung von Stahltragwerken für den Brandfall. Neue Entwicklungen. Das Bauzentrum 5/2000, S. 120 bis S. 124.
- [111] Gröber, H.; Erk, S.; Grigull, U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963.
- [112] DERIVE: A Mathematical Assistant Version 1.20; Soft Warehouse, Inc.; Honolulu, Hawaii, USA.
- [113] Truesdell, C.; Toupin, R.: The Classical Field Theories, in S. Flügge (ed.): Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, 226-790, Springer Verlag, Berlin 1960.
- [114] Green, A.E.; Naghdi, P.M.: Non-isothermal Theory of Rods, Plates and Shells. Int. Journ. Solids & Structures, 6 (1970), 209-240.
- [115] Krätzig, W.B.: Thermodynamics of Deformation and Shell Theory. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum. Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 71-3 (1971).
- [116] Markus, Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke, 2. berichtigte Auflage, Düsseldorf 1976.
- [117] KTA 3201.2, Sicherheitstechnische Regel des kerntechnischen Ausschusses (KTA), Komponenten des Primärkreises von Leichtwasserreaktoren, Teil 2: Auslegung, Konstruktion, Berechnung, Fassung 6/96, Webseite: <http://www.kta-gs.de> oder Carl Heymanns Verlag, Köln