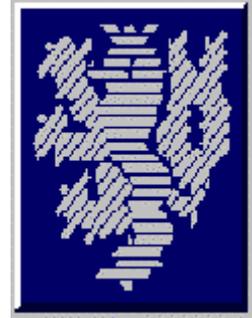


**Bergische Universität
GH Wuppertal**



**Zur nichtlinearen Zeitbereichssimulation
flüssigkeitsgefüllter Tankbauwerke
unter Erdbebenanregung**

Dissertation zur Erlangung des Grades Dr.-Ing.
des Fachbereichs Bauingenieurwesen an der
Bergischen Universität GH Wuppertal

Dipl.-Ing. Marion Brüggemann aus Stadtlohn
Wuppertal, im April 2002

ZUSAMMENFASSUNG

Aufgrund der häufigen fatalen Schäden an flüssigkeitsgefüllten Tankbauwerken infolge Erdbebenbelastungen, scheinen die bestehenden Berechnungsmöglichkeiten zur Bemessung dieser Tragwerke nicht ausreichend. Insbesondere die Interaktion zwischen Flüssigkeit und Bauwerk ist im Stand der Technik nur unzureichend berücksichtigt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird auf Grundlage der Finiten-Element-Methode ein isoparametrisches Flüssigkeitselement für kompressible, inviskose Flüssigkeiten auf Grundlage der LAGRANGESchen Beschreibung entwickelt. Mit diesem Element kann das dynamische Verhalten der Flüssigkeit und somit auch die Interaktion mit dem Behälterbauwerk wirklichkeitsnah abgebildet werden. Die unter dynamischen Belastungen auftretenden nichtlinearen Ablöseerscheinungen der Flüssigkeit von der Tankwand werden durch ein speziell für dieses Problem hergeleitetes Kontakt-Element simuliert. Das physikalisch und geometrisch nichtlineare Materialverhalten der Tankwand wird mit Hilfe eines schubweichen Schalenelementes, bzw. bei mehrschaligen Tankwänden durch ein Makroelement, bestehend aus Schalen- und Volumenelement, abgebildet.

Die Verifikation der hergeleiteten finiten Elemente erfolgt durch Vergleich der numerischen Berechnungen mit analytischen und experimentellen Daten, die zum großen Teil sehr gute Übereinstimmungen zeigen. Anhand von Beispielrechnungen werden die Auswirkungen der verschiedenen nichtlinearen Einflüsse auf das Tragverhalten der Tankstruktur untersucht.

ABSTRACT

Because of consistently re-occurring severe damages of liquid-filled storage tanks under earthquake loading, the available methods for calculating these buildings turn up to be unsatisfactory. Especially the problem of fluid-structure-interaction is considered to be significant for the stability of liquid-filled tanks. To investigate the influence of the fluid-structure interaction, advanced numerical studies are essential. In the present work, a fluid element based on the LAGRANGIAN formulation for compressible inviscid fluids is developed. In combination with a contact element (simulating the non-linear contact behaviour between fluid and tank wall) and shell elements with physical and geometrical non-linear properties, it is possible to perform a non-linear FE-simulation of a complete 3D-model of tank-fluid-systems. The developed numerical simulation tools are verified by comparison with analytical and experimental data from literature and show good agreement. On the basis of sample tanks, the influence of different non-linear effects are investigated.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1996 bis 2002 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Baustatik und Baudynamik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen und der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal und wurde von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal als Dissertation angenommen.

Besonders herzlich danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Zahlten für die Anregung zu dieser Arbeit, für die zahlreichen Diskussionen, für die fortwährend gute Betreuung, sowie die in jeder Hinsicht gewährte Unterstützung.

In gleicher Weise danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Harte für die Übernahme des Koreferates und für die Anregungen, die sich bei der Durchsicht und der Diskussion der Arbeit ergaben.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei dem Vorsitzenden der Prüfungskommission Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. B. Walz und bei Herrn Dr.-Ing. T. Schlurmann als Vertreter der wissenschaftlichen Mitarbeiter in der Prüfungskommission, welche einen zügigen und reibungsfreien Ablauf des Promotionsverfahrens ermöglichten.

Weiterhin bedanke ich mich ganz herzlich bei allen Freunden, Kollegen, den studentischen Hilfskräften und den nichtwissenschaftlichen Mitarbeitern für die große Hilfsbereitschaft und die tolle Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit.

Wuppertal, im Juli 2002

Marion Brüggemann

Inhalt

Symbolverzeichnis	V
1. Einführung	1
1.1 Problemstellung und Motivation	1
1.2 Ziel der Arbeit	4
1.3 Gliederung der Arbeit	5
2. Kritische Analyse relevanter Normen im Vergleich zum Stand der Forschung	7
2.1 Stand der Forschung	7
2.1.1 Modellierung der Flüssigkeit durch Zusatzmassen	7
2.1.2 Modellierung der Flüssigkeit durch finite Flüssigkeitselemente	8
2.1.3 Kontaktelement	10
2.1.4 Behälterschale	11
2.2 Grundlagen der Normen	17
2.2.1 Horizontale Bebenanregung	17
2.2.2 Vertikale Bebenanregung	19
2.3 Flüssigkeitsbehälter im internationalen Normenwesen	20
2.3.1 Eurocode 8	20
2.3.2 API Standard 650	21
2.4 Beurteilung	21
3. Baudynamische und konstruktive Grundlagen erdbebenbelasteter Tankbauwerke	23
3.1 Tankbauwerke	23
3.1.1 Funktionen von Flüssigkeitstanks	23
3.1.2 Behälterausbildung	25
3.2 Schadensfälle	27
3.3 Erdbebenbeanspruchung	31
3.4 Dynamische Berechnungsverfahren	35
3.4.1 Direkte Zeitintegration der Bewegungsgleichung	36
3.4.2 Modale Analyse (Superpositionsprinzip)	37
3.4.3 Antwortspektrenmethode	38
3.4.4 Lösung im Frequenzbereich	38
3.4.5 Berücksichtigung von Dämpfung	39
4. Grundlagen der Kontinuumsmechanik und der Thermodynamik	41
4.1 Kinematische Grundlagen	41
4.1.1 Darstellung der Konfiguration	41
4.1.2 Bezugssysteme der Bewegung	42
4.1.3 Kontinuumsmechanische Grundbegriffe	43
4.1.4 Verformungszustand	45
4.2 Kinetische Grundlagen	47
4.2.1 Externe Kraftgrößen und Spannungen	47

4.2.2	Massenerhaltungssatz - Kontinuitätsgleichung	49
4.2.3	Impulserhaltungssatz - 1. CAUCHY-Bewegungsgleichung	49
4.2.4	Drehimpulserhaltungssatz - 2. CAUCHY-Bewegungsgleichung	49
4.2.5	Arbeitsprinzip	50
4.3	Thermodynamische Grundlagen	51
4.3.1	Mechanische Energie	51
4.3.2	1. Hauptsatz der Thermodynamik	52
4.3.3	2. Hauptsatz der Thermodynamik	52
4.4	Konstitutive Grundlagen	53
4.4.1	Konstitutive Gleichungen einer idealen Flüssigkeit	53
4.4.2	Konstitutive Gleichungen für die elastomere Zwischenschicht	54
4.4.3	Konstitutive Gleichungen für Stahlbeton und Stahl	54
5.	Flüssigkeit	59
5.1	Beschreibung der Flüssigkeit	59
5.1.1	Bewegungsgleichung für nicht viskose Flüssigkeiten	59
5.1.2	EULER-Formulierung	61
5.1.3	LAGRANGE-Formulierung	62
5.1.4	Arbitrary LAGRANGIAN-EULERIAN-Formulierung – ALE	63
5.1.5	EULER versus LAGRANGE	64
5.2	Entwicklung eines Finiten Flüssigkeitselementes auf Basis der LAGRANGESchen Formulierung	64
5.2.1	Problembeschreibung	64
5.2.2	Beschreibung der Grundgleichungen in konvektiven Koordinaten	67
5.2.3	Diskretisierung und Implementierung	68
5.2.4	Locking-Effekte und Zero-Energy-Modes	71
5.3	Verifikation des entwickelten Finiten Elementes	71
5.3.1	Eigenwertanalyse	71
5.3.2	Statische Tests	77
5.3.3	Eigenfrequenzanalyse	83
6.	Behälterstruktur	87
6.1	Allgemeines zum Makroelement	87
6.2	Innen- und Außenschale des Makroelementes	88
6.3	Volumenschicht des Makroelementes	90
6.3.1	Grundgleichungen des Volumenelementes	90
6.3.2	Inkrementierung des Prinzips der virtuellen Verrückung	93
6.3.3	Diskretisierung und Implementierung des Volumenelementes	95
6.4	Überprüfung des entwickelten Makroelementes	97
6.4.1	Zwischenschicht des Makroelementes	97
6.4.2	Werkstoffgesetz der Betontankwand	101
7.	Kontaktelement	103
7.1	Beschreibung des Kontaktproblems	103
7.1.1	Allgemeines	103
7.1.2	Grundgleichungen des Koppellementes	105
7.2	Umsetzung in ein isoparametrisches Finites Element	107
8.	Beispielrechnungen	109
8.1	Beispiel 1: Untersuchung eines zylindrischen Tankmodells	109

8.1.1 Problembeschreibung	109
8.1.2 Eigenfrequenzanalyse	111
8.1.3 Linear statische Untersuchung	112
8.1.4 Dynamische Untersuchung	113
8.2 Beispiel 2: Eigenfrequenzuntersuchung eines Modelltanks	116
8.2.1 Auswertung der Eigenwertanalyse	117
8.2.2 Ergebnis der dynamischen Berechnung	117
8.3 Beispiel 3: Berechnung eines schlanken Wassertanks	118
8.4 Beispiel 4: Untersuchung eines mehrschaligen Rechteckbehälters	120
8.4.1 Problembeschreibung	120
8.4.2 Berechnung nach HOSNER und Bemessung der Betonschale	122
8.4.3 Modellbildung und Eigenfrequenzanalyse	124
8.4.4 Statische Berechnung	125
8.4.5 Linear dynamische Berechnung	126
8.4.6 Nichtlinear dynamische Berechnung: Kontaktproblem	128
8.4.7 Nichtlinear dynamische Berechnung: Betonverhalten	129
9. Zusammenfassung und Ausblick	133
9.1 Zusammenfassung	133
9.2 Ausblick	134
Literatur	135
Anhang A	145
Anhang B	147
Anhang C	148
Anhang D	151

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

A	Querschnittsfläche
A_S	Schubfläche
a_{sl}	Längsbewehrung
a_{sq}	Querbewehrung
B	Biegesteifigkeit
c_a	Betondeckung
D	Dehnsteifigkeit
E	Elastizitätsmodul
E_T	tangentiale Steifigkeit
F	Fließfläche
F_D	Schädigungsfläche
G	Schubmodul
H	Tankhöhe bzw. Flüssigkeitshöhe
I	Flächenträgheitsmoment
K	Kompressionsmodul
K_f	Kompressionsmodul Flüssigkeit
K_{rot}	Rotationsparameter
L	halbe Breite eines rechteckigen Tankbauwerks
m_v	Schalenbiegemoment eines Zylinders
n_v	vertikale Schalennormalkraft eines Zylinders
n_φ	Ringkraft der Schale
p_i	hydrodynamischer, impulsiver Druck infolge horizontaler Bewegung
p_k	hydrodynamischer, konvektiver Druck infolge horizontaler Bewegung
p_v	hydrodynamischer Druck infolge vertikaler Bewegung
R	Tankradius
h	Schalendicke

W	Widerstandsmoment
α_k, α_D	interne Variablen
β_{BZ}	Zugfestigkeit des Betons
β_{WN}	Nennfestigkeit des Betons
β_S	Streckgrenze des Stahls
ε_b	Bruchdehnung des Betons
ε_S	Bruchdehnung des Stahls
γ	Wichte
μ	Massenbelegung pro Länge
ν	Querkontraktion
ρ	Dichte
g	Index für die Richtung der Erdschwere

Dynamik

f	Frequenz
S_a	spektrale Beschleunigung
S_d	spektrale Verformung
S_v	spektrale Geschwindigkeit
T	Schwingzeit
Y_N	modale Freiheitsgrade
ξ	LEHRsches Dämpfungsmaß
Φ	Eigenformen
ω	Eigenkreisfrequenz des Systems
ν_{dyn}	dynamischer Überhöhungsfaktor
ρ_p	Phasenverschiebungswinkel
η	Frequenzverhältnis
Ω	Kreisfrequenz der Last
t	Zeit
Δt	Zeitinkrement, Zeitschritt
α_M, α_K	RAYLEIGHparameter

Finite-Element-Formulierung

\underline{B}	Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix
$\underline{B}^+, \underline{B}^{++}$	Verschiebungs-Verzerrungsmatrizen, linear und quadratisch abhängig von den Grundzustandsverschiebungen
\underline{C}	Dämpfungsmatrix
\underline{K}	Steifigkeitsmatrix
\underline{M}	Massenmatrix
\underline{P}	Lastvektor

$\underline{\mathbf{R}}$	Steifigkeitsmatrix, Rotationsanteil
r, s, t	Einheitskoordinaten der FE-Herleitung
$\underline{\mathbf{S}}$	Steifigkeitsmatrix, Oberflächenanteil
$\underline{\mathbf{u}}$	Verformungsvektor
$\dot{\underline{\mathbf{u}}}$	Geschwindigkeitsvektor
$\ddot{\underline{\mathbf{u}}}$	Beschleunigungsvektor
$\Delta \underline{\mathbf{u}}$	Vektor der relativen Verschiebungen
$\underline{\mathbf{V}}$	diskrete Knotenvariablen
$\underline{\mathbf{\Omega}}$	Formfunktionen
$\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{T}}$	tangentiale Steifigkeitsmatrix
$\underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{T}}$	tangentiale Massenmatrix
$\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}$	tangentiale Dämpfungsmatrix
$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{I}}$	Vektor der inneren Kräfte
$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{M}}$	Vektor der Massenträgheitskräfte
$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{C}}$	Vektor der Dämpfungskräfte
$\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}}$	geometrische Steifigkeitsmatrix
$\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{u}}$	Anfangsverformungsmatrix

Operatoren

$\mathbf{A}_{m i}$	kovariante Ableitung
$\text{grad } \underline{\mathbf{A}}$	Gradient eines Tensors
$\text{div } \underline{\mathbf{A}}$	Divergenz eines Tensors
$\text{rot } \underline{\mathbf{A}}$	Rotation eines Tensors
$\text{skew } \underline{\mathbf{A}}$	antimetrischer Anteil eines Tensors
$\text{sym } \underline{\mathbf{A}}$	symmetrischer Anteil eines Tensors
$\delta \underline{\mathbf{A}}$	varierte Größe
$\frac{D \underline{\mathbf{A}}}{Dt} = \dot{\underline{\mathbf{A}}}$	materielle Zeitableitung
$\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t}$	partielle Zeitableitung
$\underline{\mathbf{A}}_{,i} = \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial \theta^i}$	kovariante Ableitung

Kontinuumsmechanik

Γ_{mi}^r	Christoffelsymbol zweiter Art
$\partial \mathcal{B}$	Rand eines materiellen Körpers in der Momentankonfiguration
$\partial \mathcal{B}_0$	Rand eines materiellen Körpers in der Referenzkonfiguration
\mathbf{A}	Leistung der eingepägten Oberflächen- und Volumenkräfte
\mathbf{a}	Beschleunigungsvektor

$\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$	materieller Körper in der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{d}}$	Direktor
$\underline{\mathbf{D}}$	Materialtensor
$\underline{\mathbf{E}}$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
$\underline{\mathbf{e}}$	EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor
e	Dilatation
$\underline{\mathbf{F}}$	Deformationsgradient
$\underline{\mathbf{f}}$	Volumenkraft pro Masseneinheit
$\underline{\mathbf{G}}$	Metriktensor der Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{g}}$	Metriktensor der Momentankonfiguration
G	Metrikdeterminante der Referenzkonfiguration
g	Metrikdeterminante der Momentankonfiguration
g	plastisches Potential (in Kapitel 4.4.3)
$\underline{\mathbf{g}}_i$	kovariante Basisvektoren der Momentankonfiguration
$\underline{\mathbf{G}}_i$	kovariante Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{g}}^i$	kontravariante Basisvektoren der Momentankonfiguration
$\underline{\mathbf{G}}^i$	kontravariante Basisvektoren der Referenzkonfiguration
g_{ij}, g^{ij}	Komponenten des Metriktensors der Momentankonfiguration
G_{ij}, G^{ij}	Komponenten des Metriktensors der Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{I}}$	Einheitstensor
$\underline{\mathbf{I}}$	Bewegungsgröße (in Kapitel 4.2.3)
Γ_1	erste Invariante des Verzerrungstensors
I_1	erste Invariante des Spannungstensors
J	JACOBI-determinante
J_2	zweite Invariante des Verzerrungsdeviators
J_2	zweite Invariante des Spannungsdeviators
K	kinetische Energie
$\underline{\mathbf{L}}$	Drehimpuls
\mathcal{M}	materieller Punkt
$\underline{\mathbf{n}}$	Normalenvektor der Momentankonfiguration
$\underline{\mathbf{N}}$	Normalenvektor der Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{P}}$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
p	Druck
$\underline{\mathbf{P}}_A$	Oberflächenkräfte
P_i	innere Spannungsleistung
$\underline{\mathbf{P}}_V$	Volumenkräfte
Q	zugeführte Wärme
$\underline{\mathbf{q}}$	Wärmefluss
$\underline{\mathbf{r}}$	Ortsvektor der Momentankonfiguration
$\underline{\mathbf{R}}$	Ortsvektor der Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{S}}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
s	Entropiedichte (in Kapitel 4.3.3)
s	schädigendes Potential (in Kapitel 4.4.3)
$\underline{\mathbf{t}}$	Spannungsvektor

T	Temperatur
U	innere Energie
\underline{u}	Verschiebungsvektor
\underline{v}	Geschwindigkeitsvektor
δW	virtuelle Arbeit
$\delta W_{\text{dämp}}$	virtuelle Arbeit der Dämpfungskräfte
δW_{ext}	äußere virtuelle Arbeit
δW_i	innere virtuelle Arbeit
$\delta W_{\text{träg}}$	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte
$\underline{\varepsilon}$	klassischer Verzerrungstensor
θ^i	krummlinige Koordinaten
$\underline{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
ψ_α	EULERWinkel
$\underline{\omega}$	Rotationstensor
X^i	LAGRANGE Koordinaten
x^i	EULER Koordinaten
f_D	Dämpfungskraft pro Volumeneinheit
c	Dämpfungskonstante
\underline{D}_T	tangentiale Materialtensor

Nichtlineare Theorie

$\underline{\underline{S}}$	Spannungen im Grundzustand
$\underline{\underline{E}}$	Verzerrungen im Grundzustand
$\underline{\underline{F}}$	Federkraft im Grundzustand
$\Delta \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^+$	inkrementelle Spannungsgröße
$\Delta \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^+$	inkrementelle Verzerrungsgröße, linear abhängig von den Grundzustandsverformungen
$\Delta \delta \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^{++}$	inkrementelle Verzerrungsgröße, quadratisch abhängig von den Grundzustandsverformungen
$\underline{\underline{F}}^+$	inkrementelle Federkraft
$\underline{\underline{u}}$	Grundzustandsverformungen
$\Delta \underline{\underline{u}}$	relative Grundzustandsverschiebungen
$\underline{\underline{x}}$	Ortsvektor des Grundzustandes
$\delta \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^+ = \delta \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}^+$	inkrementelle Verformungen
$\Delta \underline{\underline{u}}^+$	inkrementelle relative Verschiebungen

Einführung

1.1 Problemstellung und Motivation

Die schweren Erdbeben der letzten Jahre sind der Öffentlichkeit noch gut in Erinnerung, da sie verheerende Schäden anrichteten. Bei dem starken Beben in der Türkei mit Epizentrum in Izmit am 17. August 1999 verloren innerhalb weniger Minuten über 17000 Menschen ihr Leben, weitere 500000 Menschen wurden obdachlos. Zahlreiche Gebäude stürzten während des Bebens ein, und viele Anlagen der Industrie und der Versorgung wurden in Mitleidenschaft gezogen. Ebenso verheerend waren 1995 die Folgen des Erdbebens in Kobe, Japan, bei dem ca. 5500 Menschen ihr Leben verloren, sowie 1990 das Beben im westlichen Iran, bei dem 40000 Menschen starben.

Nicht das Erdbeben an sich stellt eine direkte Gefährdung für Mensch und Umwelt dar, es sind vielmehr die Auswirkungen der Bodenbewegungen auf die Bauwerke, die zu weitreichenden Konsequenzen führen. Auch in großer Entfernung vom Epizentrum können die seismischen Wellen noch gewaltige Schäden anrichten.

Die infolge von Erdbeben entstandenen finanziellen Schäden stiegen im Laufe der letzten 80 Jahre kontinuierlich an. Dies liegt jedoch nicht in einer Zunahme von Erdbebenstärke und Erdbebenhäufigkeit begründet, sondern in dem wachsenden monetären Wert der Bausubstanz. Der stetige Anstieg des Schadenspotentials wird durch steigende Bevölkerungsdichte und Urbanisierung, sowie der damit verbundenen wachsenden Infrastruktur und Industrialisierung verstärkt. Einen Überblick der, im Hinblick ihrer ökonomischen Auswirkungen, schwersten Beben der letzten 50 Jahren ist in Tabelle 1.1 in Form einer Schadensbilanz dargestellt.

Datum	Ort / Epizentrum	Stärke (Richter-Skala)	Tote / Schaden
21.7.1952	Kalifornien (Kern County)	7.5	12 Tote / 50 Millionen US\$
28.3.1964	Alaska (Prince William Sound)	8.4	137 Tote / 350-500 Millionen US\$
9.2.1971	Kalifornien (San Fernando)	6.7	66 Tote / 0.5-1 Milliarden US\$

2.5.1983	Kalifornien (Coalinga)	6.7	0 Tote / 31 Millionen US\$
19.9.1985	Mexico (350 km west. von Mexico City)	8.1	10000 Tote / 5 Milliarden US\$
21.6.1990	Iran	7.7	40000 Tote / 7 Millionen US\$
17.1.1994	USA (Northridge, LA)	6.8	61 Tote / 30 Milliarden US\$
16.1.1995	Japan (Kobe)	7.2	5500 Tote / 150 Milliarden US\$
17.8.1999	Türkei (Izmit)	7.4	17100 Tote / 100 Milliarden US\$
28.2.2001	Washington (Seattle)	6.8	1 Toter / 2 Milliarden US\$

Tabelle 1.1: Ausgewählte Erdbeben mit Angabe der entstandenen Schäden

Die Höhe des wirtschaftlichen Schadens, der durch Erdbeben entsteht, wird an einem Vergleich mit dem Haushalt des bevölkerungsreichsten Bundeslandes Deutschlands für das Jahr 2001 deutlich. Nach Angaben des Finanzministeriums des Landes Nordrhein-Westfalen beträgt das Haushaltsvolumen 2001 nach der zweiten Ergänzungsvorlage rund 96 Mrd. DM [NRWF]. Diese Summe, mit der das Land NRW ein ganzes Jahr lang wirtschaften muss, entspricht dem ökonomischen Schaden des Bebens im Januar 1995 in Kobe.

Erdbebenkatastrophen führen jedoch nicht nur zu unmittelbaren Schäden, wie zum Beispiel dem Verlust von Menschenleben und der Zerstörung von Infrastruktur und Eigentum. Auch die Beeinträchtigung der industriellen und gewerblichen Produktivität aufgrund der Zerstörung der Energieversorgung einer gesamten Region führen zu weitreichenden Konsequenzen bei dem Wiederaufbau und erschweren die Rückkehr zur Normalität.

Durch die Einführung von nationalen und internationalen Normen werden große Anstrengungen unternommen, erdbebensichere Bauwerke zu konzipieren, die auch bei extremen Beben den Kollaps eines Tragwerks abwenden. Das Erdbeben in Seattle vom 28.2.2001 hat gezeigt, dass die heutigen Bauvorschriften für Gebäude des Hochbaus in der Lage sind, diese Sicherheit in hohem Maße zu garantieren. Dagegen treten bei Bauwerken zur Speicherung von Flüssigkeiten im Falle stärkerer Erdbeben immer wieder Schadensfälle auf, obwohl die Berechnung und Konstruktion dieser Tanks unter Berücksichtigung aller gängigen Normen durchgeführt wurden. Der wirtschaftliche Wert des Tanks samt Inhalt ist dabei nicht der Maßstab für die Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanforderungen. Die Folgeschäden sind oftmals erheblich schwerwiegender, da die Zerstörung der Speicherbauwerke je nach Funktion der betroffenen Anlage eine starke Gefährdung für Mensch und Umwelt nach sich ziehen kann. Die bedeutsamsten Folgeschäden sind im Folgenden aufgeführt:

- Die Zerstörung von Speicherbauwerken für Energieträger ist fast immer mit einer Brandkatastrophe verbunden, im Rahmen derer eine hohe Konzentration von Giftstoffen freigesetzt wird. Die Luftverschmutzung zieht dabei nicht nur die Umwelt, sondern auch die Bevölkerung der umliegenden Region in Mitleidenschaft. In der Türkei brannten nach dem Beben 1999 weite Teile der größten Ölraffinerie des Landes nieder. In Bild 1.1 bis Bild 1.4 sind diese verheerenden Brände der Erdölraffinerie in Tupras (Türkei) dargestellt.



Bild 1.1: Brand der Tupras Ö raffinerie [KOER]

- Bei der Speicherung von Flüssiggas kann das Versagen von Behälterelementen zum Austritt des verflüssigten Gases führen, was eine sofortige Entzündung und Explosion zur Folge haben kann. Durch ein Übergreifen des Brandes werden auch benachbarte Behälter zerstört, die durch das Erdbeben selbst unversehrt geblieben sind.



Bild 1.2: Ausgebrannter Tank in der Türkei 1999 [EERC]



Bild 1.3: Ausgebrannter Tank in der Türkei 1999 [EERC]

- Neben der Zerstörung der Tankbauwerke können angrenzende Flüsse und Böden durch Energieträger, chemisch aggressive oder radioaktive Flüssigkeiten verunreinigt werden. 1978 wurden in Japan durch die Zerstörung mehrerer Erdöltanks die lokalen Wasserwege kontaminiert. Auch in Tupras (Türkei) erfolgte eine erhebliche Verunreinigung der angrenzenden „Izmit Bay“ aufgrund des Versagens einiger Erdöltanks.



Bild 1.4: Brand der Tupras Ö raffinerie [KOER]

- In der Folge eines Erdbebenereignisses kann es im Katastrophengebiet zum Ausfall der Wasser- oder Energieversorgung kommen, wodurch Brandbekämpfung, Katastrophenhilfe und Wiederaufbau stark erschwert werden. Nach dem Erdbeben von Kobe im Jahre 1995 konnte die Feuerwehr zahlreiche Brände nicht löschen, da die lokale Wasserversorgung ausgefallen war. Im Fall der Ö raffinerie aus Bild 1.5 brannten die Anlagen fünf Tage lang, da aufgrund der zerstörten Wasserversorgung im Bereich der Industrieanlage der Brand nicht eingedämmt werden konnte.



Bild 1.5: Tupras Ö raffinerie fünf Tage nach dem Beben [KOER]

Die gezeigten Bilder stellen nur einige wenige Schadensszenarien dar, die durch Erdbeben an flüssigkeitsgefüllten Tankbauwerken in der Vergangenheit eingetreten und in der Zukunft zu erwarten sind.

Die gegenseitige Beeinflussung von Behälterbauwerk und eingelagerter Flüssigkeit unter dynamischer Beanspruchung stellt offensichtlich ein Problem dar, das bei der Dimensionierung von Tankbauwerken selbst bei modernen Anlagen als nur unzureichend gelöst angesehen werden muss. Es ist daher die Motivation der vorliegenden Arbeit, durch geeignete numerische Hilfsmittel eine realitätsnahe Untersuchung des Verhaltens flüssigkeitsgefüllter Tanks unter Erdbebeneinwirkungen zu ermöglichen.

1.2 Ziel der Arbeit

Die Berechnung des Einflusses der Bewegung einer Flüssigkeit auf die Behälterwand unter dynamischer Belastung stellt eine komplexe Problemstellung dar. Um eine zuverlässige Aussage über das Verformungsverhalten des Gesamtsystems zu erhalten, sind aufwendige Computersimulationen notwendig. Angesichts der vielfältigen Einflussgrößen, die sich auf das Verformungsverhalten und die Versagensart auswirken, scheint es fast unmöglich, ein realitätsnahes Berechnungsmodell zu erstellen. Die umfangreichen Idealisierungen, die ein numerisch umsetzbares Rechenmodell in den Bereichen Geometrie, mechanische Beschreibung und Materialgesetze erfordert, müssen der Problemstellung angemessen sein, so dass sich unter der Fülle der Annahmen und Vereinfachungen die wesentlichen Einflüsse in den Berechnungsergebnissen widerspiegeln. Ebenso müssen die Voraussetzungen und Anwendungsgrenzen der numerischen Werkzeuge, die zur Lösung des Problems verwendet werden, bekannt sein.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein isoparametrisches Fluidelement auf Grundlage der LAGRANGESchen Bewegungsgleichung hergeleitet und zur Berechnung flüssigkeitsgefüllter Tankbauwerke eingesetzt. Die Implementierung erfolgte im Rahmen des Programmsystems FEMAS2000 (Finite Element Moduln Allgemeiner Strukturen), das als gemeinsame Weiterentwicklung des Lehrstuhls für Baumechanik und Numerische Methoden sowie des Lehrstuhls für Statik und Dynamik der Tragwerke an der BUGH Wuppertal zur Verfügung steht und gegenwärtig rein implizite Programmroutinen zur Lösung symmetrischer Differentialgleichungssysteme bereitstellt. Die Plattform erfüllt alle Anforderungen, die bei der Simulation von Tankbauwerken unter Erdbebenbeanspruchungen bei Verwendung eines isoparametrischen Flüssigkeitselementes von Bedeutung sind. Um eine möglichst realitätsnahe Abbildung des nichtlinearen Kontaktes zwischen Flüssigkeit und Tankwand zu erreichen, wird ein speziell für dieses Problem hergeleitetes Kontakt-Element eingesetzt. Das nichtlineare Materialverhalten der Tankwand wird durch ein schubweiches Schalenelement bzw. im Falle einer mehrschaligen Behälterwand durch ein Makroelement, bestehend aus Schalen- und Volumenelementen, eingesetzt. Insbesondere die Abbildung des Materialverhaltens von Beton stellt durch sein komplexes Schädigungs- und Bruchverhalten hohe Anforderungen an die numerische Simulationsumgebung.

Nach erfolgreicher Verifikation der implementierten finiten Elemente werden die Einsatzmöglichkeiten des geschaffenen numerischen Simulationswerkzeugs anhand von Beispielrechnungen vorgestellt. Die Ergebnisse der Finiten-Element-Berechnungen werden anschließend mit

- analytischen Ergebnissen aus Näherungsverfahren,
- Daten aus experimentellen Versuchen und
- Lösungsvorschlägen gängiger Normen und Vorschriften

verglichen. Die Beispielrechnungen beinhalten neben einer Darstellung der Ergebnisse auch eine Interpretation und Analyse möglicher Abweichungen. Die Beispiele dienen dem Nachweis, dass der erhebliche Aufwand einer numerischen Simulation im Vergleich zu herkömmlichen Ersatzmodellen gerechtfertigt ist, da die erzielten Ergebnisse einen deutlich höheren Informationsgehalt aufweisen und das Tragverhalten eines Behälterbauwerks realitätsnäher abbilden als vereinfachte Berechnungsverfahren.

1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in drei übergeordnete Abschnitte unterteilt. Im ersten Teil sind die mechanischen und konstruktiven Grundlagen zusammengestellt, die zum Verständnis der durchgeführten Herleitungen und Berechnungen erforderlich sind. Im mittleren Abschnitt erfolgt die Herleitung und Verifikation eines isoparametrischen finiten Fluidelementes. Im dritten Teil der Arbeit wird das Verhalten verschiedener Tankbauwerke unter Erdbebenbelastung berechnet. Die Ergebnisse werden mit denen der gängigen Normen verglichen, um eventuelle Abweichungen zu diskutieren. Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit wie folgt:

In **Kapitel 2** ist der Stand der Forschung zusammengestellt, unterteilt in die Kategorien Flüssigkeit, Kontaktprobleme, Behälterbauwerk und Interaktion. Anschließend erfolgt eine kurze Zusammenfassung des im internationalen Normenwesen verankerten Näherungsverfahrens, sowie der darin enthaltenen Vereinfachungen. Eine kurze Erläuterung der wichtigsten internationalen Vorschriften sowie deren kritische Beurteilung folgt am Ende des Kapitels.

Kapitel 3 enthält einen Überblick über die Anforderungen, die an ein Tankbauwerk gestellt werden. Anschließend erfolgt eine Zusammenstellung unterschiedlicher Versagensarten, die zum Kollaps eines Tanks unter seismischer Beanspruchung führen. Im Anschluss daran werden die wichtigsten Verfahren zur Charakterisierung eines Erdbebens vorgestellt, und verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung eines Tragwerks unter dynamischen Lasten erläutert.

In **Kapitel 4** werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen zur Herleitung der entwickelten finiten Elemente sowie eine Beschreibung der zugehörigen Materialformulierung gegeben. Aufgrund des allgemeinen Charakters und der vielfältigen Literatur zu diesem Thema sind die Ausführungen auf die notwendigen Angaben beschränkt und werden durch Hinweise auf gängige Literaturstellen ergänzt.

In **Kapitel 5** erfolgt die Herleitung und Erläuterung des Flüssigkeitselementes, wobei auf die in Kapitel 4 vorgestellten mechanischen Grundlagen zurückgegriffen wird. Neben der isoparametrischen Umsetzung nach der LAGRANGESchen Beschreibung wird zusätzlich eine Abgrenzung zu den Beschreibungen nach EULER und ALE gegeben, um die Möglichkeiten der gewählten Formulierung sowie deren Vor- und Nachteile aufzuzeigen.

In **Kapitel 6** wird das im benutzten FE-Code vorhandene Schalenelement zur Abbildung des Wandaufbaus eines Flüssigkeitsbehälters beschrieben, das um ein nichtlineares Materialgesetz zur Beschreibung des Betons erweitert wird. Weiterhin wird für die Modellierung eines mehrschaligen Wandaufbaus ein Makroelement für den kombinierten Einsatz der Materialien Beton/Stahl entwickelt.

Kapitel 7 beschäftigt sich mit der Herleitung eines Kontaktelementes, das in der Lage ist, das nichtlineare Kontaktproblem zwischen Flüssigkeit und Schale unter dynamischen Einwirkungen abzubilden.

Zu Beginn des **Kapitels 8** erfolgt die Verifikation des entwickelten Flüssigkeitselementes anhand experimenteller Untersuchungen aus der Literatur sowie anhand der in Kapitel 2 vorgestellten analytischen Lösungen. Weiterhin werden an einem Beispiel die Möglichkeiten einer physikalisch nichtlinearen Tragwerksberechnung unter Verwendung der hergeleiteten numerischen Werkzeuge aufgezeigt. Die Ergebnisse werden mit den Resultaten einer analytischen Berechnung verglichen.

In **Kapitel 9** erfolgt eine Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit unter Berücksichtigung der in den vorangegangenen Kapiteln erzielten Ergebnisse. Abschließend erfolgt ein Ausblick auf mögliche zukünftige Verfeinerungen des vorgestellten Ansatzes.

Kritische Analyse relevanter Normen im Vergleich zum Stand der Forschung

Aufgrund des häufigen Auftretens von Schäden an erdbebenbelasteten Tankbauwerken ist eine kritische Betrachtung der bemessungsrelevanten internationalen Normen erforderlich. Im folgenden Kapitel wird zunächst ein Überblick über den Stand der Forschung gegeben, um den Stand der Normen im Vergleich zu den heutigen technischen Möglichkeiten einordnen zu können. Anschließend erfolgt eine Beschreibung des im internationalen Normenwesen verankerten Berechnungskonzeptes. Die Beurteilung der genannten Rechenvorschriften zeigt, dass viele der aufgetretenen Schäden an Behältern auf eine unzureichende Berücksichtigung des Standes der Forschung zurückzuführen sind.

2.1 Stand der Forschung

2.1.1 Modellierung der Flüssigkeit durch Zusatzmassen

Erste Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Wassertanks unter horizontaler Erdbebenbewegung fanden bereits 1934 statt, als [HOSKINS&JACOBSEN34] Ergebnisse für den dynamischen Flüssigkeitsdruck bei rechteckigen Tanks veröffentlichten. Unter der Annahme einer starren Behälterwand wurde die hydrodynamische Druckverteilung experimentell und numerisch studiert. Die Berücksichtigung der Flüssigkeit erfolgte bei der numerischen Analyse durch Zusatzmassen, die an die Behälterwand bzw. an ein äquivalentes Stabmodell aufgebracht wurden. Dieses Konzept der „Added Masses“ ersetzt die Flüssigkeit durch einen reinen Masseanteil und wird 1949 durch [JACOBSEN49] auf zylindrische Behälter übertragen. Auf Grundlage des Verfahrens von [HOUSNER57] stellt [EPSTEIN76] ein Berechnungsverfahren für die Bewegung der Behälterflüssigkeit und [YAMAMOTO.ET.AL76] Formeln zur Berechnung der Eigenfrequenzen starrer Behälterwände unter horizontalen Beschleunigungen zur Verfügung. Die Veränderung des hydrodynamischen Druckes durch die Flexibilität der elastischen Tankwand findet erstmals 1957 in der Arbeit von [HOUSNER57]

Beachtung. Diese Arbeit bildet die Grundlage für weitere Veröffentlichungen zu diesem Thema. So schlägt [VELETSOS74] ein analytisches Rechenverfahren vor, das zusätzliche Flüssigkeitsmassen auf Grundlage einer angenommenen Tankwandverformung berücksichtigt. Dieses Verfahren wird unter anderem von [FISCHER79] weiterentwickelt, der eine Interaktion zwischen Flüssigkeit und Tankverformung durch die iterative Verbesserung von Tankwandverformung und Flüssigkeitsmassenverteilung einbezieht.

Weitere Einflüsse auf das Flüssigkeitsverhalten stellen zum Beispiel die Art der Verankerung des Tankbauwerks, die Belastung durch vertikale Erdbebenkomponenten oder die Boden-Bauwerks-Interaktion dar. Hierzu liegen Untersuchungen unter anderem von [NIWA78], [FISCHER81], [HAROUN&HOUSNER81], [MANOS&CLOUGH82], [HAROUN&HOUSNER82A/B], [LUFT84], [RAMMERSDORFER.ET.AL87] und [RAMMERSDORFER.ET.AL88] vor.

Das Verfahren der Zusatzmassen stellt die Basis der internationalen Normen dar und wird daher in Kapitel 2.2 nochmals aufgegriffen. Doch auch trotz der intensiven Untersuchungen auf diesem Gebiet bleibt dieses Verfahren ein Näherungsverfahren, das die Flüssigkeit nur durch ihre Massenverteilung berücksichtigt.

Die fortschreitende Entwicklung leistungsstarker Rechenanlagen erlaubt heute eine immer aufwendigere Abbildung der Flüssigkeitsfüllung, wie im folgenden Abschnitt dargestellt.

2.1.2 Modellierung der Flüssigkeit durch finite Flüssigkeitselemente

Für die Herleitung von Flüssigkeitselementen nach der FE-Methode stehen grundsätzlich drei Verfahren zur Verfügung:

- die EULERSche Betrachtungsweise,
- die LAGRANGESche Betrachtungsweise,
- die Arbitrary-LAGRANGIAN-EULERIAN (ALE) Betrachtungsweise.

Die EULERSche Betrachtungsweise hat sich in der Strömungsmechanik durchgesetzt und zeichnet sich durch eine Beschreibung mit Hilfe der Zustandsvariablen Geschwindigkeit und/oder hydrodynamischer Druck aus. Der Druck wird in [ZIENKIEWICZ&NEWTON69] zur Beschreibung von Flüssigkeiten vorgestellt und zum Beispiel von [CRAGGS71] zur Beschreibung von elasto-akustischen Problemen eingesetzt. Die Verwendung des Geschwindigkeitspotentials erfolgt in den Arbeiten von [SHAABAN&NASH76], [ZIENKIEWICZ&BETTES78], [ODEN.ET.AL75], [CRAMER83], [GOEBEL.ET.AL88], und [LADEWIG94]. Die numerische Umsetzung ist aufwendig, da die Beschreibung der Bewegungsgleichung zu unsymmetrischen Matrizen führt. Weiterhin treten häufig numerische Probleme und Instabilitäten auf, da die Anwendung der klassischen GALERKIN Finite-Element-Methode durch ihre schwache Form der Differentialgleichungen nicht dieselben Stabilitätseigenschaften wie das kontinuierliche Problem aufweisen. Zur Beseitigung dieser numerischen Probleme wurden in den letzten 10 Jahren zum Teil recht aufwendige Stabilisierungsverfahren entwickelt. Eine Übersicht über diese verschiedenen Stabilisierungsmöglichkeiten findet sich bei [WALL99]. Für eine Verbindung der Flüssigkeit mit der sie umgebenden Struktur, deren Beschreibung vorwiegend durch die Zustandsgröße der Verschiebungen erfolgt, sind Übergangselemente nötig.

Die LAGRANGESche Betrachtungsweise ermöglicht eine einfache Kopplung von Struktur und Flüssigkeit, da beide Komponenten über ihre Knotenverschiebungen beschrieben werden. Die Darstellung großer Verschiebungen, wie sie zum Beispiel durch Strömungseffekte auftreten, ist nur schwer umsetzbar. Allerdings sind bei Tankbauwerken, wie sie in dieser Arbeit betrachtet werden, große Verformungen nicht zu erwarten, wie unter anderem [EL-AIDI & HALL89] zeigen. Auf Grundlage der Verschiebungsvariablen kann die Herleitung eines kompressiblen, viskosen Flüssigkeitselementes aus der Herleitung eines Festkörperelementes

abgeleitet werden. Allerdings führt die Vernachlässigung der Schubsteifigkeit zu Singularitäten, die durch eine künstliche Schubsteifigkeit oder der Forderung nach einer drehungsfreien Bewegung numerisch beseitigt werden können.

[SHUGAR&KATONA75] stellen 1975 ein vierknotiges, ebenes Element auf Grundlage eines Scheibenelementes ohne Schubmodul vor. Der lineare Elementansatz benötigt für eine volle Integration ein 2×2 GAUßpunktnetz. Da der lineare Weggrößenansatz nicht nur einen Widerstand gegen die konstante Volumendeformation (Dilatation), sondern auch fälschlicherweise einen linearen Dehnanteil hervorruft, bildet das Element die Steifigkeit der Flüssigkeit viel zu hoch ab und eliminiert niedere Eigenformen, wie die so genannte Schwappeigenform der Oberfläche. Eine wirkungsvolle Möglichkeit zur Unterdrückung dieses Effektes liegt in der von [SHUGAR&KATONA75] verwendeten reduzierten Integration. Für die numerische Integration wird anstelle der zwei GAUßpunkte nur noch einer verwendet, wodurch der konstante Mode noch exakt dargestellt werden kann, die linearen Moden allerdings unterdrückt werden. Durch die Einführung der reduzierten Integration bilden sich nun aber so genannte HOURGLASSmoden oder auch Zirkulationsmoden genannte Eigenformen. Ein solcher HOURGLASSmode ist in Bild 2.1 dargestellt. Seine Bezeichnung leitet sich von der „Eieruhrförmigen“-Verformung der finiten Elemente ab. Diese falschen Moden treten nicht nur als Zero-Energy-Moden mit Eigenwerten identisch Null auf, sondern können auch mit Eigenwerten ungleich Null belegt sein, wodurch die Identifikation dieser Modi erschwert wird.

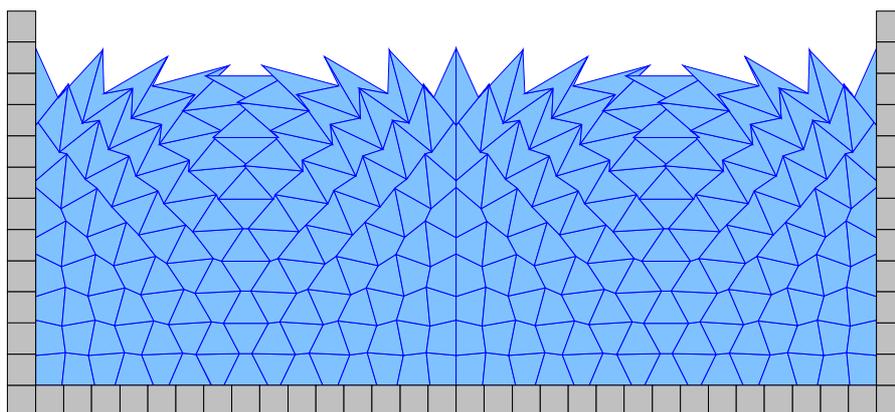


Bild 2.1: Hourglassmode

Hourglassmodes treten auf, da das einzelne Fluidelement in seiner Rotation keinerlei Beschränkung unterliegt. Je feiner die Diskretisierung, desto eher treten diese falschen Eigenformen auf. Aus diesem Grund führen [HAMDI.ET.AL78], [ZIENKIEWICZ&BETTES78] und [WILSON&KHALVATI83] eine Rotationsbeschränkung als Nebenbedingung ein. Diese Beschränkung verhindert die "innere" Rotation der Flüssigkeitselemente, erfordert jedoch eine Kalibrierung des Systems.

[STEMPNIEVSKI90] hat aufbauend auf diesen Arbeiten ein räumliches Fluidelement hergeleitet, das, wie seine ebenen Vorgänger, in kartesischen Koordinaten entwickelt wurde. Alternativ zur Rotationsbeschränkung führen [CHEN&TAYLOR90] eine „projizierte Massenmatrix“ ein, die nach Ermittlung der Zero-Energy-Modes die Massenmatrix so verändern, dass die Zero-Energy-Formen auf Nullspalten/-zeilen projiziert werden. [KIM&YUN97] kombinieren die oben genannte Rotationsbeschränkung mit der „projizierten Massenmatrix“, was aber zu keinen nennenswerten Vorteilen führt.

Auf diesen Grundlagen sind die Fluid-Elemente von [GREEVES90] und [DOĞANGÜN.ET.AL96] für viskose und nichtviskose Flüssigkeiten hergeleitet. Der Anwendungsbereich dieser Elemente beschränkt sich jedoch zumeist auf rechteckige Tankbauwerke. Weitere Geometrien lassen jedoch nach eigenen Berechnungen keine korrekte statische Analyse zu, da dort ein

verzerrtes Elementraster in Bezug auf das Einheitskoordinatensystem vorliegt, was zu einer Verfälschung der Steifigkeitsmatrix führt. Alleine die dynamische Eigenfrequenzanalyse ergibt aufgrund der Dominanz der Massenmatrix (zumindest im Bereich der ersten Eigenform) korrekte Ergebnisse.

Die **Arbitrary-LAGRANGIAN-EULERIAN** Betrachtungsweise (ALE) verfügt über einen gleichzeitigen Ansatz von Geschwindigkeits- bzw. Druckvariablen und Verschiebungsvariablen. Sie wurde entwickelt, um die jeweiligen Vorteile der beiden klassischen Formulierungen nach EULER und LAGRANGE zu kombinieren. Erste Formulierungsversuche wurden in der Literatur bereits in den 60er und 70er Jahren unter den Bezeichnungen „Quasi-EULERIAN“, „Coupled-EULERIAN-LAGRANGIAN“ oder „Mixed-EULERIAN-LAGRANGIAN“ vorgestellt und sind in den Arbeiten von [NOH64] oder [HIRTH.ET.AL74] zu finden. Erste Finite-Elemente auf Grundlage der ALE-Betrachtungsweise wurden Ende der 70er Jahre von [BELYTSCHKO.ET.AL80] und [HUGHES.ET.AL81] vorgestellt. Das ALE-Verfahren ist in der Lage, große Strukturverformungen mit großen Flüssigkeitsverformungen zu kombinieren, was allerdings zu einer extrem komplexeren Formulierung und einem hohen numerischen Aufwand führt. [WALL99] unterscheidet hierbei zwischen „Raum-Zeit-Ansätzen“ und „eingebetteten Netzen“ und weist darauf hin, dass genauere Untersuchungen der unterschiedlichen Verfahren zur Simulation von Strömungen mit beweglichen Rändern noch nicht zur Verfügung stehen. Daher können über Aufwand, Effizienz und Komplexität des Verfahrens noch keine weitreichenden Aussagen getroffen werden.

Generell ist diese Formulierung aber anwendbar in Bereichen der Aeroelastizität (Wechselwirkung zwischen Luftströmungen und Flugkörpern; Windumströmung von Brücken; membranartige Strukturen im Wind; pneumatische Strukturen unter Gas- und Flüssigkeitswirkung), der Biofluidmechanik physiologischer Strömungen (Wechselwirkung von Fluiden und Gewebe im Körper) oder bei akustischen Problemstellungen, wobei festzustellen ist, dass in diesem Bereich noch sehr großer Forschungsbedarf besteht.

Eine Alternative zur numerischen Berücksichtigung des Fluides stellt die Randelementmethode (REM) dar, welche die Zustandsgrößen des Problems nur noch auf dem Rand beschreibt und damit den Diskretisierungsaufwand deutlich verringert. Somit lassen sich unendliche Gebiete und Abstrahldämpfung gut erfassen. Allerdings wird eine frequenzabhängige Fundamentallösung benötigt, die zu einer Frequenzabhängigkeit der Systemmatrizen und damit zu einer sehr rechenzeitintensiven Lösungen führt. Auf die REM wird im Folgenden nicht weiter eingegangen, für weitere Informationen wird auf [LATZ93] verwiesen.

2.1.3 Kontaktelement

Wird eine Tankstruktur einer dynamischen Belastung ausgesetzt, muss die numerische Simulation in der Lage sein, die sich einstellende Deformation wirklichkeitsnah abzubilden. Hier kommt es in erster Linie darauf an, sowohl die impulsiven als auch die konvektiven Effekte der Flüssigkeit zu simulieren. Zusätzlich zur Modellierung der eingelagerten Flüssigkeit muss auch der Kontakt zwischen Fluid und Tankschale nach Bild 2.2 durch ein Kontaktelement wirklichkeitsnah wiedergegeben werden. Der Kontakt zwischen Flüssigkeit und Struktur stellt ein nichtlineares Problem dar, weil einerseits impulsive Flüssigkeitsbewegungen Druck auf die Behälterwand ausüben, andererseits ein Abreißen des Kontaktes ohne Übertragung von Zugkräften zu ermöglichen ist. Dieses Verhalten kann durch die Angabe von Doppelknoten an den Kontaktstellen von Tankstruktur und Flüssigkeit simuliert werden. Zur Abbildung der Kontaktzone führen [SHANTARAM.ET.AL76] und [AKKAS.ET.AL79] horizontale Steifigkeiten normal zur Tankwand ein, die die Flüssigkeits- und Tankknoten koppeln. [EL-AIDI&HALL89] verwenden eindimensionale Federelemente, während [LIU81] ein Gleitelement aus zwei Knoten entwickelt, das später unter anderem von [HAMDAN99] zu

einem 4-Knoten Gleitelement erweitert wird. Ein 8-knotiges Federelement mit einer nullwertigen Dickenausdehnung wird von [HEINEN00] entwickelt.

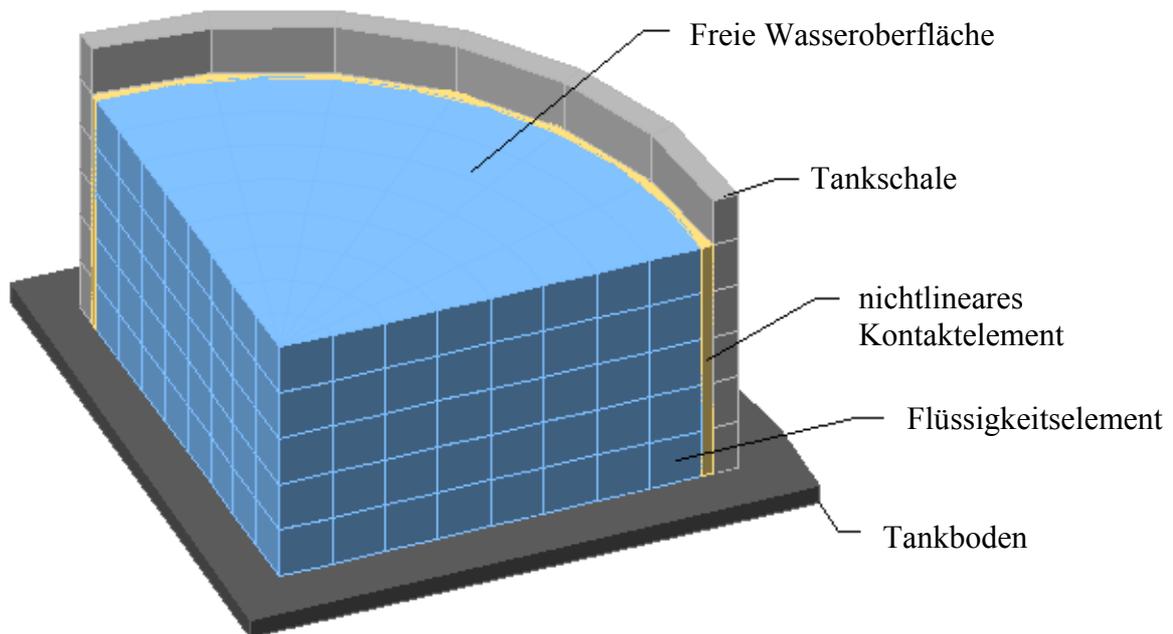


Bild 2.2: Darstellung der Kopplung zwischen Flüssigkeit und Tankwand

2.1.4 Behälterschale

Die konstruktive Ausbildung von Behälterbauwerken wird nicht nur durch den Stand der Bautechnik, sondern auch durch die Flüssigkeitseigenschaften, die Nutzungsanforderungen und, zunehmend in den letzten Jahren, durch Umweltauflagen beeinflusst. Die zu lagernden Flüssigkeiten reichen von Wasser, Abwässern, Mineralölen und Mineralölprodukten über verflüssigte Erdgase bis hin zu flüssigem radioaktivem Abfall. Für die verschiedenen technischen Anforderungen sind die Baustoffe Beton und Stahl unterschiedlich gut geeignet. Teilweise ist ihr kombinierter Einsatz zweckmäßig, teilweise werden bestimmte Funktionen von anderen Baustoffen übernommen.

Bei Behälterbauwerken handelt es sich um Flächentragwerke, die zumeist als rotations-symmetrische Bauwerke ausgeführt werden. Bevor die FE-Methode größere Anwendungsgebiete erschlossen hatte, wurden für die wichtigsten rotationssymmetrischen statischen Lastfälle Berechnungsformeln und Hilfstafeln bereitgestellt. Für das Verhalten der Behälter unter dynamischen Einwirkungen ist aber neben der Größe und der zeitlich-räumlichen Verteilung der Einwirkungen besonders das Schwingungsverhalten von Bedeutung, das durch die Eigenschwingformen und die zugeordneten Eigenfrequenzen beschrieben wird. Untersuchungen hierzu in Abhängigkeit von Behälterhöhe, Behälterradius und Stich des Kugelschalendaches werden zum Beispiel von [SCHAUERTE98] durchgeführt. Alternativ kann eine genäherte Berechnung der Grundeigenfrequenz durch die Abbildung des zylindrischen Behälters durch ein Stabmodell erfolgen. Die genäherte Grundeigenfrequenz der Zylinderschale ergibt sich hierbei durch eine Überlagerung der in Bild 2.3 dargestellten Modellierungen nach [HAMPE80]. Die Auswirkung der Flüssigkeitsfüllung auf das Eigenschwingverhalten infolge der Interaktion kann auf diese Art und Weise jedoch nicht erfasst werden. Weiterhin sind einfache, überschaubare FE-Modelle zur Abbildung der Behälterschale entwickelt worden, wie die in der Literatur unter den Begriffen „Stimmgabelmodell“ und „Vier-Massen-Modell“ bekannten Verfahren von [LIEBICH&BÖHLER81]. Das Stimmgabelmodell basiert auf dem so genannten „cantilever beam model“, bei dem die räumliche

Behälterstruktur durch finite Stabmodelle idealisiert wird. Solche Näherungsmodelle bilden den Flüssigkeitseinfluss mit Hilfe der Zusatzmassen nach Kapitel 2.1.1 ab.

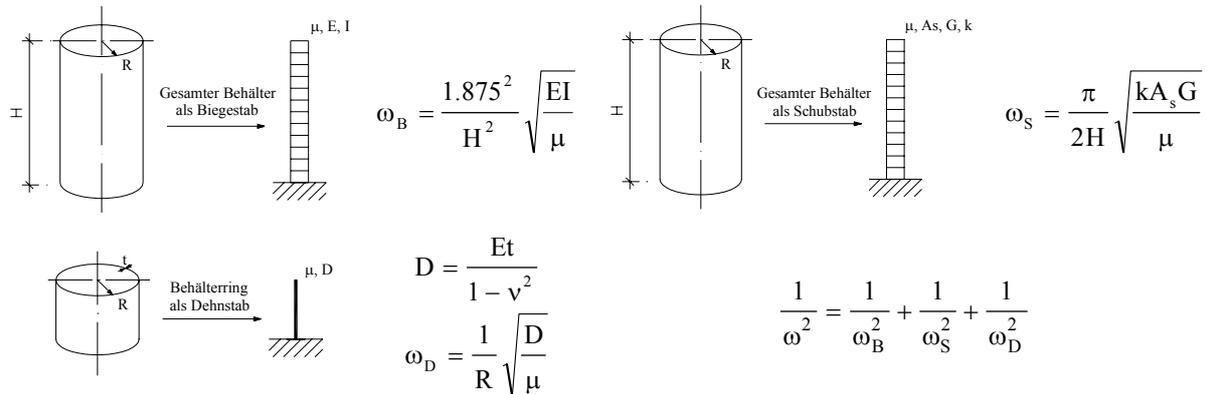
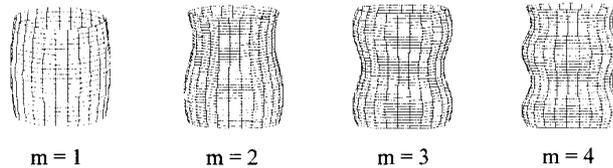


Bild 2.3: Modellierung der Behälterschale zur Erfassung der Grundfrequenz

Die genannten Modelle sind geeignet, die wesentlichen Einflussfaktoren für die dynamische Bemessung von Tankbauwerken abzuschätzen, ersetzen aber nicht die Notwendigkeit umfangreicherer dynamischer Analysen. So zeigen Untersuchungen von [BETTIN.ET.AL00], dass Behälterbauwerke unter horizontaler Erdbebenanregung keineswegs ihre Grundrissform beibehalten, sondern dazu tendieren, wie in Bild 2.4 dargestellt, sowohl in axialer, wie auch in Umfangsrichtung mehrwellige Schwingungsformen auszubilden. Der Ersatz des räumlichen Schalentragswerks durch ein Balkenmodell führt zu einer Vernachlässigung der niedrigen Schaleneigenfrequenzen. Weiterhin sind bei den Balkenmodellen weder die Erfassung von geometrischen Nichtlinearitäten noch die Möglichkeit der Plastifizierungs- und Umlagerungsvorgänge gegeben, die sich nur durch geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnungen ermitteln lassen.

Axial wave numbers:



Circumferential wave numbers:

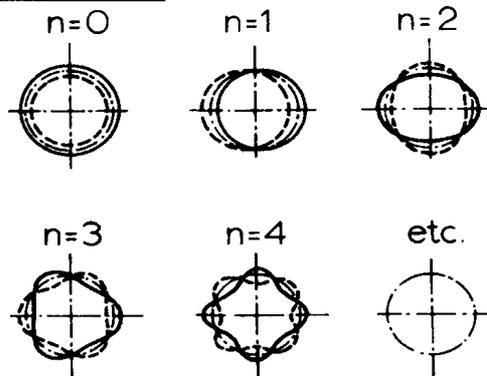


Bild 2.4: Grundeigenformen für Kreiszyylinderbehälter [BETTIN.ET.AL00]

Im Rahmen einer räumlichen Abbildung des Tankbauwerks unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente kann die Behälterwand als dreidimensionales Kontinuum oder als zweidimensionale Tragwerksidealisierung mit Hilfe der Schalenmittelfläche modelliert werden. Bei der kontinuumsmechanischen Darstellung werden die mechanischen Variablen nach

Kapitel 4 in Abhängigkeit von drei Freiheitsgraden eines Materialpunktes definiert. Bei der flächenhaften Abbildung werden die mechanischen Variablen durch eine zweidimensionale Beschreibung der Mittelfläche ersetzt. Eine zweidimensionale Modelltheorie kann nach [BAŞAR&KRÄTZIG85] grundsätzlich auf zwei verschiedenen Wegen entwickelt werden. Das direkte Modell, auch COSSERAT-Fläche genannt, formuliert die zweidimensionale Kinematik der Flächenpunkte exakt als Funktion der Mittelflächenkoordinaten. Alternativ hierzu können Schalenmodelle beliebiger Ordnung aus den Gleichungen der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik hergeleitet werden. Hierbei können durch einen Potenzreihenansatz bezüglich der Dickenkoordinate θ^3 die Gleichgewichtsbedingung, die kinematische und die konstitutive Beziehung eines klassischen Kontinuums in die entsprechenden Grundgleichungen eines flächenhaften Modells überführt werden, deren Variablen wiederum ausschließlich Funktionen der Mittelflächenkoordinaten θ^α sind. Ein polynomialer Ansatz¹ des Ortsvektor \underline{x}

$$\underline{x}(\theta^i) = \sum_I [\theta^3]^I \underline{x}^{(I)}(\theta^\alpha) = \underline{x}^{(0)}(\theta^\alpha) + [\theta^3] \underline{x}^{(1)}(\theta^\alpha) + [\theta^3]^2 \underline{x}^{(2)}(\theta^\alpha) + \dots \quad (2.1)$$

führt mit unendlich vielen Termen zu einem vollständig dreidimensionalen Modell (Multi-direktormodell). Der Vektor $\underline{x}^{(0)}$ beschreibt die Schalenmittelfläche, $\underline{x}^{(1)}$ und $\underline{x}^{(2)}$ werden im Allgemeinen als Direktoren bezeichnet und bestimmen nach [ECKSTEIN99] die transversalen Deformationsanteile bezüglich der Schalenmittelfläche.

Durch die gezielte Vernachlässigung von Termen untergeordneter Bedeutung lässt sich eine beliebig genaue Schalentheorie herleiten. Bei einer linearen Approximation in Dickenrichtung wird der Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte entsprochen. Die Annahme der Undehnbarkeit in Dickenrichtung entspricht einer konstanten Approximation in θ^3 -Richtung. Die allgemeinen Direktoren $\underline{x}^{(1)}$ und $\underline{x}^{(2)}$ in ingenieurmäßig interpretierbare Größen zu parametrisieren ist Gegenstand der Forschungsbemühungen der letzten 20 Jahre. Dabei sind verschiedenste Lösungsansätze verfolgt worden, die bei [BISCHOFF99] und [ECKSTEIN99] vorgestellt werden. Zu den schon erfolgreich eingesetzten Ansätzen, bei denen die Parametrisierung mit Hilfe von Rotationsvariablen $\underline{d}^{(i)}$ erfolgt, gehören:

$$\begin{aligned} \text{5-parametrischer Ansatz:} & \quad \underline{x} = \underline{x}^{(0)} + \theta^3 \underline{d}^{(1)} \\ \text{6-parametrischer Ansatz:} & \quad \underline{x} = \underline{x}^{(0)} + \theta^3 \lambda \underline{d}^{(1)} \\ \text{7-parametrischer Ansatz:} & \quad \underline{x} = \underline{x}^{(0)} + \theta^3 \lambda \underline{d}^{(1)} + [\theta^3]^2 \kappa \underline{d}^{(1)} \\ \text{9-parametrischer Ansatz:} & \quad \underline{x} = \underline{x}^{(0)} + \theta^3 \lambda \underline{d}^{(1)} + [\theta^3]^2 \underline{d}^{(2)}. \end{aligned}$$

Hiervon ist der 5-parametrische Ansatz als MINDLIN–REISSNER-Ansatz das bekannteste Modell. Die Parameterordnung entspricht der Freiheitsgradanzahl, wobei $\underline{x}^{(0)}$ und $\underline{d}^{(2)}$ jeweils drei Freiheitsgrade besitzen, $\underline{d}^{(1)}$ zwei Freiheitsgrade und die Parameter λ und κ über je einen Freiheitsgrad verfügen. Einen ausführlichen Überblick über die historische Entwicklung der Schalentheorien, der unterschiedlichen Herleitungsmöglichkeiten für verschiedene Schalenmodelle, sowie eine Erläuterung ihrer Fähigkeiten und Einsatzmöglichkeiten bietet die Arbeit von [BISCHOFF99].

Die Wahl des Geometriemodells hat neben seiner offensichtlich geometrischen Bedeutung auch direkten Einfluss auf das Materialmodell. Während sowohl bei der kontinuumsmechanischen 3D-Abbildung, als auch bei den Schalenmodellen mit mehr als 6 Parametern ein realitätsnahes 3D-Materialmodell eingesetzt werden kann, muss bei dem 5-Parameter-Modell für die Simulation des physikalisch nichtlinearen Verhaltens eine Modifikation der

¹ Neben der polynomialen Approximation in Dickenrichtung, die auch hierarchische Modelle, Modelle nach der p-Methode oder Modelle mit C^∞ -kontinuierlichen Ansätzen genannt werden, gibt es auch die Möglichkeit der Mehrschicht-Modelle, bei denen diese Ansätze schichtenweise erfolgen. Diese werden auch Modelle nach der h-Methode oder Modelle mit C^0 -kontinuierlichen Ansätzen genannt [BISCHOFF99].

Materialgesetze erfolgen. Hierzu kann entweder ein nichtlineares Materialmodell auf Schnittgrößenebene gefunden werden, oder alternativ eine Simulation des nichtlinearen Materialverhaltens auf der Ebene des Materialpunktes infolge Dickendiskretisierung durchgeführt werden. Eine Gegenüberstellung und Beschreibung dieser beiden Möglichkeiten bieten [SIMO&KENNEDY92]. Zusammenfassend kann festgehalten werden:

- Die direkte Kopplung zweidimensionaler Schalenchnittgrößen mit den zugehörigen Schalenverzerrungen erlaubt eine relativ einfache Umsetzung in einen FE-Code. Das zugehörige Materialgesetz enthält aber weitreichende Vereinfachungen, die keine detaillierte Aussage über Spannungen und plastische Zonen außerhalb der Mittelfläche zulässt.
- Die Simulation des nichtlinearen Materialverhaltens auf der Ebene eines Materialpunktes erfordert eine zusätzliche Dickendiskretisierung, was einen hohen numerischen Aufwand erfordert, dafür aber Aussagen des Materialverhaltens über die Schalendicke zulässt.

Den Übergang von der Schalenmittelfläche zum Materialpunktmodell zeigt Bild 2.5. Die Schale wird mit einer vom Anwender vorgegebenen Anzahl von Layern L über die Dicke diskretisiert, an denen jeweils die Spannungen für jeden GAUß-Integrationspunkt der Schalenmittelfläche berechnet werden.

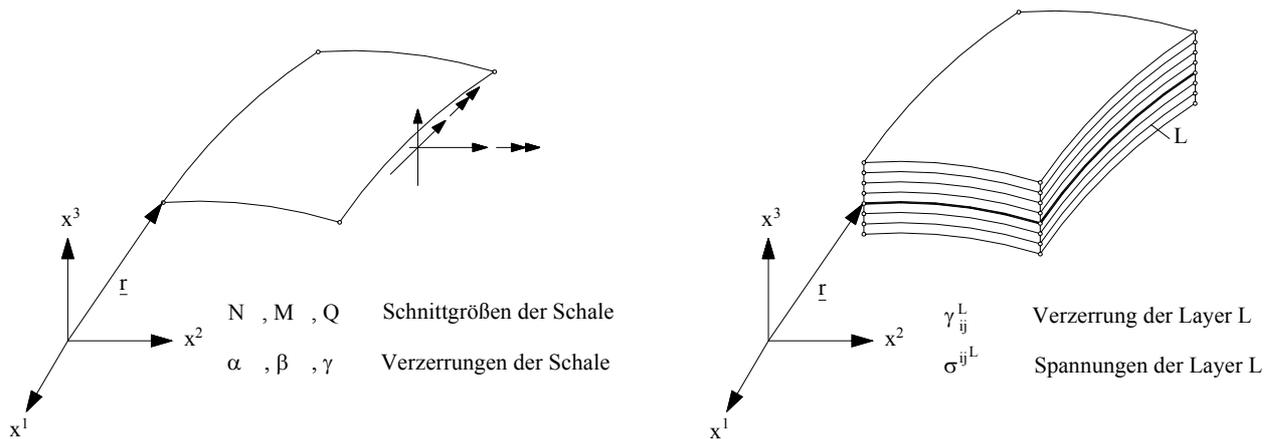


Bild 2.5: Darstellung der Schalenmittelfläche und der Materialpunktebene

Die diesen Spannungen zugeordneten Verzerrungsgrößen der Layer L lassen sich aus den bekannten zweidimensionalen Schalenverzerrungen der Mittelfläche ermitteln.

$$\gamma_{ij}^L = \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} + \theta^{3L} \cdot \beta_{\alpha\beta} & \frac{1}{2} \gamma_{\alpha} \\ \frac{1}{2} \gamma_{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Aus den Verzerrungen der Layer ergeben sich die Spannungen der Layer.

$$\sigma_{ij}^L = D^{ijkl} \gamma_{kl}^L \quad (2.3)$$

Die Integration der Spannungen über die Dicke zu Schnittgrößen der Schalenmittelfläche

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \int_{\text{Dicke}} \sigma^{\alpha\beta} d\theta^3 \\ M^{\alpha\beta} &= \int_{\text{Dicke}} \theta^3 \cdot \sigma^{\alpha\beta} d\theta^3 \\ Q^{\alpha} &= \int_{\text{Dicke}} \sigma^{\alpha 3} d\theta^3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

erfolgt zum Beispiel mit dem Verfahren der NEWTON-COTES-Quadratur multi-linear oder multi-quadratisch². Die Simulation auf Materialpunktebene ist sowohl bei [ZAHLTEN90] für die physikalisch nichtlineare Beschreibung des Betonverhaltens, als auch bei [MONTAG97] für eine Berechnung unter Verwendung physikalisch nichtlinearer Plastizitätsgesetze zur Simulation des Werkstoffs Stahl angewendet worden.

Für die Beschreibung der Werkstoffe Stahl und Beton sind in den letzten Jahren eine vielfältige Auswahl an Materialgesetzen entstanden. Das Verhalten von Stahl ist durch sein duktileres Verhalten sowohl im Zug- als auch im Druckbereich als relativ einfach zu bezeichnen und kann sehr gut durch die klassische Plastizitätstheorie abgebildet werden. Diese geht nach [LEMAITRE&CHABOCHE90] zurück auf die Arbeit von TRESCA im Jahre 1864, der mit einem Schubkriterium das Fließen des Stahls zu deuten versuchte. In den folgenden Jahren wurden verbesserte Fließbedingungen und Fließgesetze, die auch die Verfestigung des Stahls im Fließbereich mit einbeziehen, unter anderem von VONMISES, ST.VENANT, LEVY, DRUCKER und PRAGER entwickelt, die bis heute Gültigkeit haben. Durch die Computerentwicklung in den 70er Jahren wurden diese Theorien auf praktische Probleme anwendbar. Die nichtlineare Simulation des Materials Stahl kann damit durch die zur Verfügung stehenden Theorien sehr gut abgebildet werden.

Dagegen ist die Beschreibung des Werkstoffs Beton immer noch Gegenstand intensiver Forschung. Erste Versuche, Stahlbeton numerisch mit Hilfe der Finiten-Element-Methode zu beschreiben, unternahm 1967 [NGO&SCORDELIS67]. Seitdem wurden immer neue Materialmodelle für Beton, Stahlbeton und die Verbundwirkung von Beton und Stahl entwickelt. Es existieren bereits viele publizierte wissenschaftliche Arbeiten zur nichtlinearen Modellierung von Beton, die aufgrund des hochgradig nichtlinearen physikalischen Verhaltens des Werkstoffs entweder eine extrem hohe, und damit praktisch kaum anwendbare Anzahl von Materialparametern aufweisen, oder sich auf bestimmte, wenige Eigenschaften reduzieren und damit nur unter restriktiven Voraussetzungen anwendbar sind. Im Folgenden werden verschiedene kontinuumbasierte Modelle aufgezählt, die auf dem Konzept der verschmierten Eigenschaften basieren. Damit werden Inhomogenitäten in Bezug auf ein charakteristisches Volumenelement als klein genug betrachtet, so dass experimentelle Ergebnisse als Durchschnitt des makroskopischen Verhaltens angesehen werden. Neben diesem Konzept der verschmierten Eigenschaften hat das Konzept der diskreten Risse, bei dem Risse entlang der finiten Elementgrenzen beschrieben werden, eine besondere Bedeutung. Hierbei ist eine automatische, adaptive Netzverfeinerung vonnöten, um die Rissevolution beschreiben zu können. Außerdem wird die genaue Kenntnis einer Risswurzel benötigt.

Zu den verbreitetsten kontinuumbasierten Materialmodellen zählen:

- Nichtlineare Elastizitätstheorie [BETTEN86],
- Plastizitätstheorie [CHEN&HAN88],
- Endochronic Theory of Plasticity [BAŽANT&BHAT76],
- Kontinuumschädigungstheorie [PÖLLING00],
- Elasto-plastisches Materialmodell mit Schädigungsanteil [ZAHLTEN90].

Zur Simulation des Rissverhaltens werden primär folgende Modelle eingesetzt:

- Smearred Crack Models (Fixed Orthogonal or Non-orthogonal Crack Models, Rotating Crack Models) [JIRÁSEK00],
- Continuum Damage Models [BAŽANT&PLANAS98],
- Microplane Models [BAŽANT&PLANAS98],
- Embedded Crack Models [DVORKIN.ET.AL90].

² Mit diesem Verfahren werden Punkte in äquidistanten Abständen festgelegt, was der Abbildung der konstanten Layerdicken entspricht. Die genauere Integration nach GAUß wird aufgrund der vorher nicht festgelegten Stützstellen, welche damit nicht genau auf den Layern liegen, nicht eingesetzt.

Materialformulierungen auf Grundlage der **Elastizitätstheorie** besitzen einen direkten funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen. Ist die Verzerrung gegeben, so gibt es nur einen einzigen zugehörigen Spannungszustand, den die Auswertung des Materialgesetzes liefert. Nach der Entlastung auf Null verschwinden die Verzerrungen vollständig bei elastischem Verhalten, d.h. die Verformungen sind reversibel. Gerade im Bereich des Versagens ist die rein elastische Theorie weder für Stahl noch für Beton geeignet, realistische Aussagen zu treffen.

Materialformulierungen auf Grundlage der **Plastizitätstheorie** sind in der Lage, inelastisches Verhalten in Form von plastischen Verzerrungen zu erfassen, indem sie die Spannungs-Verzerrungsgeschichte in Form von internen Variablen erfassen. Diese internen Variablen sind zeitabhängige Parameter, deren Anzahl je nach verwendetem Materialmodell unterschiedlich ist. Da der direkte funktionale Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen verloren geht, können nichtlineare Materialgesetze im Allgemeinen nur als inkrementelle Werkstoffgesetze formuliert werden, bei denen ein differentieller Spannungszuwachs mit einem differentiellen Verzerrungszuwachs verknüpft ist [BETTEN86]. Plastisches Materialverhalten ist dadurch gekennzeichnet, dass bei einer Entlastung auf Null die plastischen Verzerrungen bestehen bleiben. Weiterhin wird bei einer elasto-plastischen Formulierung angenommen, dass das Material während der Plastifizierung keiner Schädigung unterworfen wird. Für Metalle ist diese Formulierung sehr gut geeignet, da die irreversiblen Verformungen zum großen Teil aus der Versetzung des Kristallgitters herrühren und keine viskosen Phänomene oder Schädigung durch Steifigkeitsabnahme erfolgt. (Dies gilt nicht mehr bei sehr hohen Temperaturen, oder bei zyklischer Beanspruchung im Bereich häufiger Lastwechsel). Für Betone dagegen sind die Schädigungen zum überwiegenden Teil auf Mikrorisse und Schädigung des Materials zurückzuführen, so dass die Plastizitätstheorie keine ausreichende Beschreibung darstellt.

Die **endochrone Theorie** kann nach [HOFSTETTER&MANG95] als ein „besonders komplizierter Sonderfall“ der Viskoplastizität angesehen werden. Die Theorie ist besonders für nicht proportionale Belastung geeignet, für die allerdings kaum experimentelle Daten zur Verifikation zur Verfügung stehen. Diese Formulierung führt zu inkrementell nichtlinearen Materialgesetzen, wodurch ein Iterationszyklus auf Materialebene benötigt wird. Wird die Theorie linearisiert, so entspricht sie nach [ZAHLTEN90] einer Kombination aus Plastizität und Mikrorissbildung. Die endochrone Theorie findet Anwendung bei Geomaterialien wie Sand, Lehm und Beton.

Die **Kontinuumschädigungstheorie** beschreibt die Steifigkeitsabnahme des Materials durch die Evolution von Mikrorissen und Mikrofehlstellen. Diese Veränderungen in der Mikrostruktur führen zu einer reinen Materialschädigung, die eine Abnahme der Steifigkeit, aber keine bleibenden Verformungen nach sich zieht. Das Endstadium der Schädigung ist der Bruch des Elementes durch einen Makroriss. Für Metalle entspricht ein Makroriss ca. 0.1-1.0 mm, während im Beton deutlich größere Risse auftreten. Die Schädigungstheorie beschreibt somit die Evolution zwischen Erstzustand und Zustand eines makroskopischen Risses. Eine vollständige Entlastung führt zu einem spannungs- und verzerrungsfreien Zustand.

Ein adäquates Modell zur Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens von Beton basiert auf der Kopplung verschiedener inelastischer Prozesse. Das **elasto-plastische Materialmodell mit Schädigungsanteil** beschreibt die permanenten Verzerrungen mit Hilfe der Plastizitätstheorie und den Verlust an Steifigkeit durch die Schädigungstheorie. Das Entlastungsverhalten von Beton liegt im Allgemeinen zwischen diesen beiden Extremen.

Für die Modellierung der Rissentwicklung im Beton werden häufig **Smeared Crack Modelle** eingesetzt. Orthogonal zur Richtung der maximalen Hauptzugspannungen wird die Entstehung von Rissen ermöglicht, sobald die Hauptzugspannungen die Zugfestigkeit überschreiten. Bei der Bildung von Sekundärrissen unterscheidet man in „Rotating Crack“, „Fixed Orthogonal Crack“ oder „Fixed Nonorthogonal Crack“ Modelle. Bei dem „Rotating

Crack“ Modell hat das Material kein Gedächtnis, der Riss schließt sich und erhält seine Ausgangssteifigkeit zurück. Diese Annahme ist in der Realität zwar nicht gegeben, hat sich aber bei der numerischen Analyse als brauchbares Modell für die Beschreibung des Betons unter Zug erwiesen. Bei den „Fixed Crack“ Modellen wird die Information des Primärrisses gespeichert. Sekundärrisse sind bei den orthogonalen Modellen allerdings auf die Richtung senkrecht zu den Primärrissen beschränkt. Nach der Rissinitiierung wird die Restzugfestigkeit entsprechend einem vorgegebenen Spannungs-Dehnungsgesetz vermindert, wobei die freigesetzte Bruchenergie des Risskontinuums der des diskreten Risses gleichgesetzt wird.

Die **Continuum Damage Modelle** beschreiben die Schädigung durch Rissbildung über eine Reduktion der Steifigkeitsmatrix. Im einfachsten Fall wird die Schädigung nur durch einen skalaren Parameter ausgedrückt, der durch Multiplikation mit der elastischen Matrix die Reduktion der Steifigkeit bewirkt. Bei anisotropen Modellen kann die Schädigung aber auch durch ein Feld von Vektoren oder durch höherwertige Tensoren beschrieben werden.

Microplane Modelle definieren den Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung auf Mikroebene und geben keinen direkten tensoriellen Zusammenhang wie in konventionellen Modellen an. Daher müssen die Beziehungen zuerst auf die Materialpunktebene transformiert werden.

Die **Embedded Crack Modelle** simulieren das Reißen von Beton, indem sie die Vorteile der kontinuierlichen und der diskreten Abbildung kombinieren. Hierzu werden Diskontinuitäten auf der Verschiebungs- oder Verzerrungsebene in das Finite-Element integriert. Studien der letzten 10 Jahren haben gezeigt, dass das finite Elementverhalten durch diesen Ansatz stark verbessert werden kann.

Während die Plastizitätstheorie für den Baustoff Stahl eine ausreichend gute Beschreibung des Materialverhaltens ermöglicht, verfügen die vorgestellten Beschreibungen für den Baustoff Beton je nach Anwendung über Vor- und Nachteile. Es muss daher ein adäquates Modell gewählt werden, das für die numerische Simulation der Behälterschale eine realitätsnahe Abbildung des physikalischen Verhaltens gewährleistet.

2.2 Grundlagen der Normen

Die Berechnung von Flüssigkeitsbehältern wird international maßgebend durch den amerikanischen API Standard 650 [API650], herausgegeben von dem American Petroleum Institute, sowie den noch relativ jungen Eurocode 8 [EC8] geregelt. Beide Regelwerke basieren auf dem Konzept der Zusatzmassen, sowie der Unterteilung des hydrodynamischen Druckes in verschiedene Komponenten. Dieser vereinfachende Rechenansatz wird im Folgenden erläutert, wobei die genannten Normen nur einige der vorgestellten Anteile umgesetzt haben.

2.2.1 Horizontale Bebenanregung

Der sich unter horizontaler Bebenanregung einstellende horizontale hydrodynamische Druck wird in eine impulsive und eine konvektive Komponente unterteilt. Der impulsive Druck p_i wird durch die Trägheit der Flüssigkeit verursacht, mit der sie sich den Bewegungen der Behälterwand widersetzt. Der konvektive Druck p_k wird durch die Schwingung der Flüssigkeitsoberfläche verursacht (auch als „Schwappen“ oder „sloshing“ bezeichnet) und ist von der Bewegung der Tankwand unabhängig. Der impulsive Druck p_i wiederum wird in zwei weitere Anteile unterteilt: einem impulsiven Druck p_{i1} , der durch die horizontale Starrkörperverschiebung des Behälters hervorgerufen wird, und einen impulsiven Druck p_{i2} , der aus der Verformung des Behälters (also der relativen Bewegung der Wand) resultiert.

In Bild 2.6 sind die qualitativen Verläufe dieser drei Druckkomponenten in Zusammenhang mit der Tankbewegung über die Höhe der Behälterwand dargestellt. Die Druckverteilung über den Umfang des Behälters entspricht einer Kosinusfunktion nach Bild 2.8.

Je steifer die Behälterwand, desto geringer ist der impulsive Druckanteil aus der Verformung des Behälters p_{i2} . Unter der Annahme einer starren Behälterwand verschwindet dieser Anteil völlig. Das Verhältnis von impulsivem zu konvektivem Druck wird mit zunehmender Schlankheit des Behälters immer größer. Die Maximalwerte des impulsiven Drucks liegen in der Nähe des Tankbodens, während die Maxima des konvektiven Anteils an der freien Flüssigkeitsoberfläche auftreten.

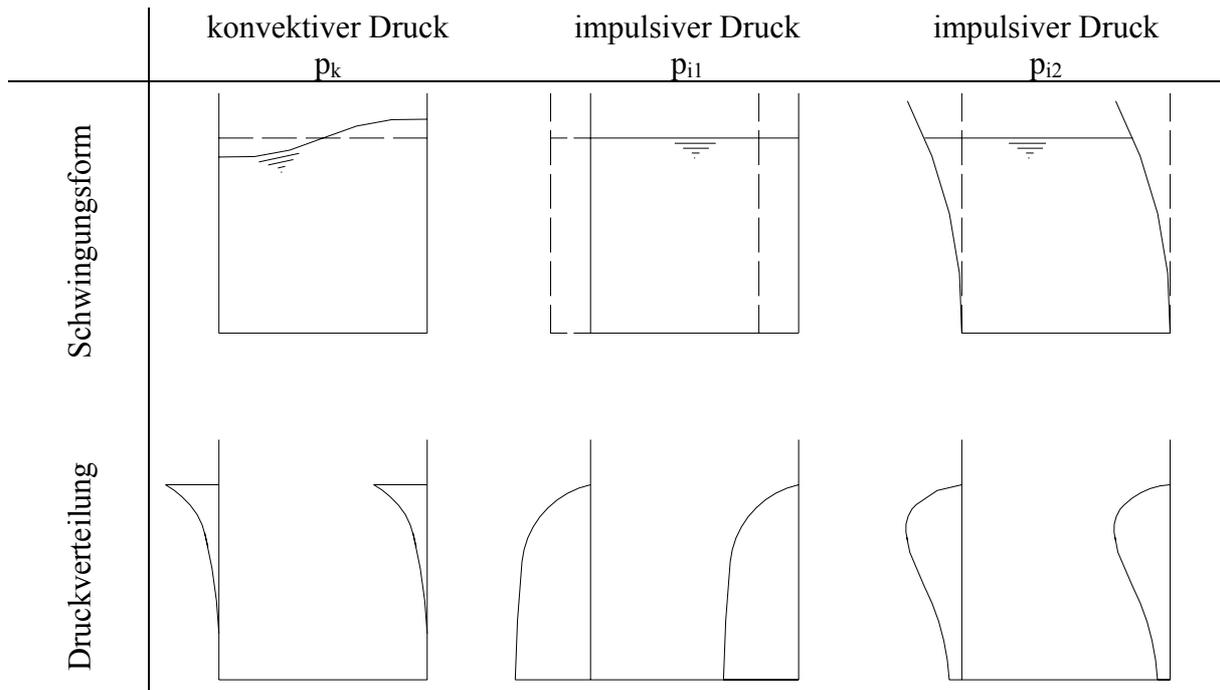


Bild 2.6: Hydrodynamische Druckverteilung infolge horizontaler Beschleunigung

In Abhängigkeit der in Bild 2.6 dargestellten Druckverteilungen wird die Flüssigkeitsmasse in einzelne Massenanteile umgerechnet, die nach Bild 2.7 an unterschiedlichen Höhen der Behälterwand wirken. Dabei ist der konvektive und der verformungsabhängige impulsive Anteil durch eine Feder mit der Behälterwand gekoppelt, während der starrkörperabhängige impulsive Anteil starr mit der Tankwand verknüpft ist.

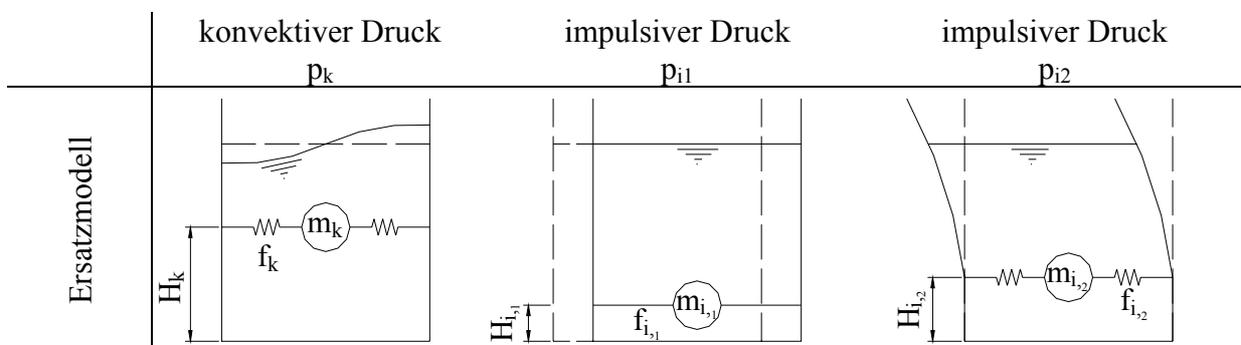


Bild 2.7: Darstellung des 3-Massen-Modelles

Die benötigten Parameter für Masse, Federsteifigkeit und Hebelarm des Ersatzsystems werden aufgrund der Annahme bestimmt, dass das durch eine horizontale Bodenbeschleunigung hervorgerufene Moment am Tankboden dieselbe Größe ergibt, wie bei einer Rechnung

mit der realen Flüssigkeit. Hierbei wird eine Idealisierung des Tankbauwerks durch einen Kragträger verwendet, der schon in Kapitel 2.1.4 als „cantilever beam model“ vorgestellt wurde. Mit Hilfe spektraler Kennwerte des untersuchten Erdbebens ergeben sich Schnittgrößen, die dem Kragmoment und der Querkraft an der Einspannstelle des Ersatzsystems entsprechen. Für das eigentliche Flächentragwerk Tank liegen keine Schnittgrößenzustände vor.

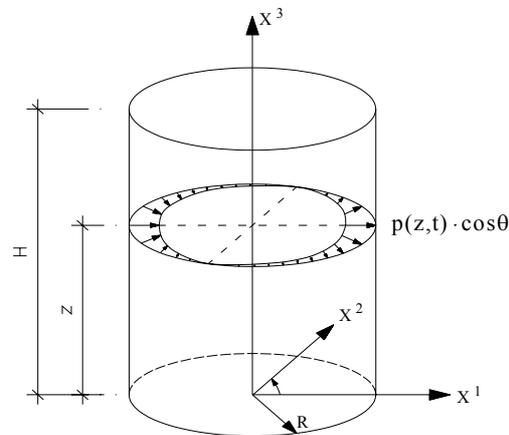


Bild 2.8: Darstellung der horizontalen Druckverteilung über die Umfangsrichtung

[HOUSNER57] hat ein vereinfachtes Berechnungsverfahren für eine starre Behälterwand vorgestellt. Aufgrund der Unabhängigkeit des impulsiven Druckes von der Behälterverformung wird der Druckanteil p_{i2} vernachlässigt und es ergeben sich einfache Berechnungsformeln für

- Eigenfrequenz,
- maximale horizontale Bewegung,
- maximale Wellenhöhe der schwappenden Flüssigkeit,
- maximale horizontale Ersatzlast am Tankboden,
- maximales Moment in der Tankwand oberhalb der Bodenplatte und
- maximales Kippmoment.

Die einzelnen Rechenschritte sind bei [MESKOURIS99] für Tankbauwerke mit gleichmäßigem, rechteckigem oder rundem Querschnitt unter horizontaler Bebenanregung angegeben.

2.2.2 Vertikale Bebenanregung

Der Einfluss vertikaler Erdbebenkomponenten wird von [TEMME95] in zwei Komponenten aufgeteilt. Der Druckverlauf p_{v1} entsteht aus der vertikalen Bewegung der Flüssigkeit relativ zur starren Behälterwand. Er entspricht, analog zum statischen Druck, einer linear zunehmenden Funktion über die Behälterhöhe. Die zweite Druckkomponente p_{v2} verläuft kosinusförmig über die Behälterhöhe und entsteht aus der Verformbarkeit der Tankwand, also aus der gemeinsamen Schwingung von Behälterwand und Flüssigkeit. In Bild 2.9 ist die Druckverteilung über die Behälterhöhe dargestellt.

Der durch vertikale seismische Anregung aktivierte Druck ist axialsymmetrisch und erzeugt daher kein Umsturz- oder Kippmoment, beeinflusst aber das Beulverhalten der Struktur. Vielfach werden die Druckkomponenten aus vertikaler Anregung als vernachlässigbar angesehen. Doch schon bei vertikalen Bebenbeschleunigungen von ca. 0.33g kann nach [VELETSOS&TANG88] insbesondere bei flexiblen Behältern eine Beanspruchung der Tankwand in der Größenordnung des hydrostatischen Druckes erreicht werden.

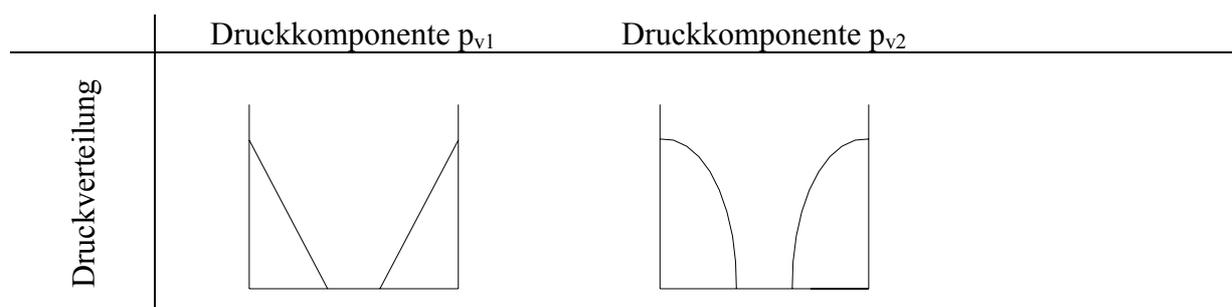


Bild 2.9: Hydrodynamische Druckverteilung infolge vertikaler Beschleunigung

2.3 Flüssigkeitsbehälter im internationalen Normenwesen

Das im internationalen Normenwesen verankerte Vorgehen zur Berechnung der infolge Erdbeben auf ein Tankbauwerk einwirkenden Lasten basiert auf den oben erläuterten Grundlagen. Aufgrund des vereinfachenden Charakters der in den jeweiligen Normen angegebenen Rechenvorschriften ist der direkte Vergleich der einzelnen Gleichungen nicht immer möglich.

2.3.1 Eurocode 8

Die Berechnung von Tankbauwerken unter seismischer Belastung wird im europäischen Raum durch den Eurocode 8, Teil 4 „Tanks, Silos and Pipelines“, Appendix B geregelt, der in Deutschland momentan noch als Vornorm ENV 1998-4 auf seine Einführung wartet. Er bezieht sich nur auf zylindrische, verankerte Tankbauwerke, obwohl erfahrungsgemäß eine Verankerung nur selten ausgeführt wird. Mit Hilfe der Beschleunigungszeitreihen des untersuchten Erdbebens in horizontaler und vertikaler Richtung kann der Verlauf der hydrodynamischen Druckverteilungen nach Kapitel 2.2.1 und 2.2.2 angegeben werden.

Für die beiden Druckverteilungen aus vertikaler Anregung werden die Maximalwerte durch die SSRS-Methode (Square Root of the Sum of Squares) überlagert. Die drei Anteile der Druckverteilungen aus horizontaler Anregung werden dagegen für das Ersatzsystem „cantilever beam model“ in entsprechende Balkenschnittgrößen umgerechnet, die sich aus den Massenanteilen und Hebelarmen nach Kapitel 2.2.1 ergeben. Erst diese Schnittgrößen werden dann nach der SRSS-Methode überlagert.

Als Ergebnisse stehen dann

- die horizontale Scherspannung in der Tankwand,
- die vertikale Druckspannung im unteren Bereich der Wand,
- die Sicherheit gegen Kippen und
- die Höhe der Schwappwelle, als Relativbewegung zum ruhenden Flüssigkeitsniveau

zur Verfügung. Die Höhe der Schwappwelle bestimmt bei nicht schwimmend gelagerten Dächern die Höhe des einzuplanenden freien Raumes zwischen Dach und Tankfüllung, um Schäden am Tankdach zu verhindern.

Bei der Ermittlung der Schnittgrößen infolge der horizontalen Bebenanregung werden die Eigenfrequenzen der impulsiven und konvektiven Teilsysteme benötigt, für die im EC 8 empirisch ermittelte Formeln angegeben sind. Diese Eigenfrequenzermittlung gilt ausschließlich für den Sonderfall des steifen Bodens als gesichert. Für andere Bodenarten sind daher ungenau ermittelte Eigenfrequenzen zu erwarten, die sich als Eingangswerte für die bebenspezifischen Antwortspektren direkt auf die Belastungskomponenten auswirken, die wiederum für die Ermittlung der Schnittgrößen herangezogen werden.

2.3.2 API Standard 650

Im Gegensatz zum EC 8 ist der API Standard 650 („Steel Tanks For Oil Storage“) bereits seit vielen Jahren in der Anwendung. Er ist die derzeit am häufigsten benutzte Norm zur Bemessung von Tankbauwerken in den USA und vielen Ländern Mittel- und Südamerikas. Der API 650 behandelt nur die horizontale Bebenanregung. Der Appendix E („Seismic Design Of Storage Tanks“) enthält (ebenso wie der Appendix B des Eurocode 8) ein vereinfachtes Berechnungsverfahren, das leicht durchzuführen ist, ohne den empirischen Charakter der Formeln inhaltlich nachvollziehen zu können.

Obwohl die Grundlage des Codes auf die von [HOUSNER57] entwickelte Modellbildung zurückgeht, werden keinerlei Anhaltspunkte über die verschiedenen Druckverteilungen nach Kapitel 2.2.1 gegeben. Der API betrachtet nur den konvektiven Anteil und den impulsiven Anteil p_{i1} . Der impulsive Anteil aus der Relativbewegung wird vernachlässigt. Die zugehörigen effektiven Massen und Hebelarme nach Bild 2.7 sind ohne Angabe der Zusammenhänge in Diagrammen als Funktion der Behältergeometrie und Füllhöhe gegeben. Im Gegensatz zum EC 8, dem ein Antwortspektrum als Grundlage der Beschleunigungs-ermittlung dient, wird im API 650 ein seismischer Zonenfaktor benutzt, der die Erdbeben-gefährdung aus geographischen Übersichtskarten bestimmt, nach denen jeder Ort einer bestimmten Erdbebenzone zugeordnet werden kann. Alternativ lässt der API nach Absprache mit dem Bauherrn allerdings auch die Benutzung von Antwortspektren zu.

Das angegebene Rechenverfahren erlaubt die Berechnung

- des Kippmomentes am Tankboden,
- der maximalen Druckkräfte in der (Wand-)Schale und
- die minimal erforderliche Verankerung des Tanks.

Bei Behältern zur Lagerung besonders gefährlicher Stoffe wird ein Sicherheitsfaktor eingeführt, der je nach Wichtigkeit des Bauwerks und Gefahrenklasse der Flüssigkeit zwischen 1.0 und 1.25 liegt.

Zusätzlich findet eine Unterscheidung zwischen verankerten und unverankerten Bauwerken statt, da bei unverankerten Tankbauwerken durch die Möglichkeit des Abhebens mit erhöhten Schnittgrößen in der Tankwand zu rechnen ist. Es folgen einige konstruktive Hinweise zur Ausbildung von Verankerungssystemen und zur Ausführung von angeschlossenen Leitungen.

2.4 Beurteilung

Grundlage der gängigen Normen wie dem EC 8 und dem API Standard 650 bilden bis heute die 1957 von [HOUSNER57] getroffenen Annahmen. Eine Verbesserung der Vorschriften aufgrund weiterführender Arbeiten findet, wenn überhaupt, nur durch vereinfachende Ansätze und pauschale Faktoren Einfluss. Die daraus resultierende relativ leichte Anwendbarkeit der Normen bedingt aber einen empirischen Charakter, dem keine weitere analytische Herleitung zugrunde liegt.

Umfangreiche Analysen infolge Erdbebeneinwirkung zerstörter flüssigkeitsgefüllter Tankbauwerke durch [MANOS&CLOUGH85] und [MANOS91] zeigen, dass eine Bemessung auf Grundlage der internationalen Normen zu einer unzureichenden Dimensionierung des Behälters führen kann. Aber auch eine Gegenüberstellung von theoretischen und experimentellen Untersuchungen von Flüssigkeitstanks unter Erdbebenwirkung ergeben prinzipielle Unterschiede des auf die Tankwand einwirkenden Druckverlaufs. Einen wesentlichen Unterschied zwischen experimentellen und theoretischen Untersuchungen sehen [BETTIN.ET.AL00] und [HAMDAN95] im Ansatz des „cantilever beam models“. Allerdings scheinen die Druckverläufe für den konvektiven und den impulsiven Anteil unter Annahme

einer starren Tankwand hinreichend genau, während der impulsive Druckverlauf infolge der Tankwandflexibilität als sehr unzureichend abgebildet angesehen wird.

Der Ersatz des räumlichen Schalentragswerks durch ein Balkenmodell setzt voraus, dass flüssigkeitsgefüllte Kreiszylinderbehälter sich unter Erdbebenlast wie stabförmige, vertikale Kragträger verhalten. Dabei wird die Ovalisierung des Querschnittes als nicht maßgebend vernachlässigt, obwohl die Tankverformung einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf die Flüssigkeitsbewegung darstellt.

Ein weiterer Schwachpunkt der Modellierungen ist die ungenaue bzw. nicht vorhandene Kopplung zwischen Behälter und Baugrund. Nach [WUNDERLICH.ET.AL96] darf der Einfluss des Bodens, der bisher nur global über (konstante) Faktoren erfasst wird, speziell bei weichem Untergrund und gedrungenen Tanks nicht vernachlässigt werden, da er die Eigenfrequenz des Systems umso mehr beeinflusst, je nachgiebiger er ist. Dabei ist der Einfluss des Bodens bei steifen Systemen größer als bei dünnwandigen Stahltanks, die ihrerseits selbst eine nachgiebige Struktur darstellen.

Ferner bleibt nach [HAMPE80] bei doppelwandigen Behältern die gegenseitige Beeinflussung des Schwingungsverhaltens der Behälter durch die Dämmschicht völlig unberücksichtigt.

Aufgrund der genannten Mängel ergibt sich je nach Ausbildung des Tanks eine zum Teil erhebliche Diskrepanz zwischen dem tatsächlichen Bauwerksverhalten und dem Verhalten des vereinfachten Ersatzmodells. Diese Abweichung kann neben dem direkten Einfluss auf die Schnittgrößen auch zu einem indirekten Einfluss auf die Belastung führen. Denn eine ungenaue Ermittlung der Eigenfrequenz der Struktur führt bei der Durchführung der Antwortspektrenmethode zu einer Über- oder Unterschätzung der dynamischen Belastung.

Auch wenn die Bemessung nach EC 8 und API 650 häufig auf der sicheren Seite liegt, sind sowohl die ermittelten Lasten als auch die Ergebnisse der einzelnen Teilschritte einer kritischen Betrachtung zu unterziehen.

Baudynamische und konstruktive Grundlagen erdbebenbelasteter Tankbauwerke

Im ersten Teil dieses Kapitels wird ein Überblick über Aufbau und Belastung von Tankbauwerken gegeben. Im zweiten Teil folgt eine Zusammenstellung typischer Schäden an flüssigkeitsgefüllten Behältern, die infolge vergangener Erdbeben aufgetreten sind. Die entstandenen Schäden zeigen, dass die in Kapitel 2 vorgestellten und in der Praxis angewendeten Näherungsverfahren oft nicht ausreichend sind. Im dritten Teil wird die Charakterisierung eines Bebens anhand üblicher Bewertungsskalen beschrieben, die allerdings für ingenieurmäßige Anwendungen nicht ausreichend sind. Es folgt eine Erläuterung der für die Tragwerksberechnung in dieser Arbeit benötigten Erdbebencharakteristika wie zum Beispiel das Akzelerogramm oder das Antwortspektrum. Abschließend werden die für eine dynamische Berechnung infolge Erdbeben notwendigen numerischen Berechnungsmöglichkeiten vorgestellt.

3.1 Tankbauwerke

3.1.1 Funktionen von Flüssigkeitstanks

Behälter zur Speicherung von Flüssigkeiten nehmen sowohl in ihrer Bedeutung, als auch bezüglich Anzahl und Größe stetig zu. Die zur Zeit größten oberirdischen Flüssigkeitstanks haben ein Fassungsvermögen von etwa 150000 m³, die Planung befasst sich laut [DYWI] bereits mit Größen von 200000 m³. In Bild 3.1 und Bild 3.2 sind Behälter für verflüssigte Gase dargestellt, an denen die riesigen Abmessungen der Bauwerke erahnt werden können. Die eingelagerten Flüssigkeiten reichen von Wasser und Abwasser über Mineralöle und Flüssigerdgas bis hin zu chemischen und radioaktiven Abwässern. Die Speicheraufgabe beeinflusst maßgeblich Bauweise, Form und Größe des Tankbauwerks sowie die verwendeten Baustoffe.



Bild 3.1: Flüssiggastank in Brunei mit einem Fassungsvermögen von 65000 m³ [DyWI]



Bild 3.2: Zwei Flüssiggasbehälter im Bauzustand in Oman, Fassungsvermögen je 120000 m³ [DyWI]

Die Aufgaben eines Tankbauwerks lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Tragen	Aufnahme der Belastungen aus ständigen, veränderlichen und außergewöhnlichen Einwirkungen.
Dichten	Schutz der gespeicherten Flüssigkeit gegen äußere Einwirkungen sowie Schutz der Umwelt gegen Entweichen des Speichermediums (Vermeidung von Verunreinigungen des Grundwassers; Feuer- und Explosionsgefahr).
Dämmen	Flüssigkeiten, die bei tiefen Temperaturen gelagert werden, erfordern für eine wirtschaftliche Lagerung eine effektive Wärmedämmung. Weiterhin wird durch die Dämmung der Tankinhalt vor äußeren Temperatureinflüssen geschützt.

Aufgrund der in jüngster Zeit vermehrten Speicherung von gefährlichen Gütern haben die Funktionen Dämmen und Dichten immer größere Bedeutung erlangt, die im Folgenden aber nicht weiter berücksichtigt werden. Die Funktion Tragen erfordert den Nachweis der Standsicherheit unter Berücksichtigung folgender Einwirkungen:

Eigengewicht	Lasten aus Behälterstruktur inklusive Dach und Anbauten.
Flüssigkeitsdruck	ergibt sich aus der Füllhöhe und des spezifischen Gewichtes der eingespeicherten Flüssigkeit.
Gasinnendruck	tritt im flüssigkeitsfreien Raum bei der Speicherung von Flüssigerdgas, leichten Mineralölen und bei einigen radioaktiven Flüssigkeiten auf und liegt bei etwa 0.04 at.
Windbelastung	da Tankbauwerke in der Regel nicht schwingungsanfällig sind, kann auf geltende Vorschriften für Windbelastungen zurückgegriffen werden.
Temperaturbelastung	tritt sowohl im Betriebszustand als auch im Havariezustand auf. Die Beanspruchungen im Havariezustand können nur überschlägig abgeschätzt werden.
Vorspannung	Die Vorspannfunktion ist von der Behälterbelastung abhängig, wobei zumeist die Ringzugkräfte aus Flüssigkeitsfüllung maßgeblich sind.
Kriechen und Schwinden	stellen zeitveränderliche Vorgänge der Baustoffe dar. Als Schwinden wird der Effekt der zeitabhängigen Verformungen aus Umwelteinflüssen wie zum Beispiel Temperatur oder Feuchtigkeit bezeichnet. Kriechen stellt den Effekt der zeitabhängigen Verformungen aus Langzeitbelastungen dar, die bei Entlastung nur zum Teil zurückgehen.
Erdbeben, Explosion	stellen außergewöhnliche Belastungen dar, die zum Nachweis der Standsicherheit des Tragwerks im Katastrophenfall dienen.

3.1.2 Behälterausbildung

Als Baustoffe für Tankbauwerke kommen in erster Linie Stahlbeton (oft auch Spannbeton) und Stahl zur Anwendung. Während Stahl sehr gute Dichtungseigenschaften besitzt, verfügt Beton über sehr gute Trag- und Dämmeigenschaften. Vielfach wird eine Kombination beider Werkstoffe für ein Behältersystem gewählt, um die Vorteile beider Baustoffe zu kombinieren. Gleichzeitig werden zur Verbesserung der Funktionen Dämmen und Dichten weitere Materialien eingesetzt, zum Beispiel Schüttungen, Elast- oder Plastbaustoffe, die wiederum die Steifigkeiten und damit die Lastabtragung beeinflussen können. So werden zum Beispiel bei Flüssiggasbehältern Verflüssigungstemperaturen der Erdgase von bis zu -162 °C erreicht. Für diese Temperaturen reicht der alleinige Einsatz von Beton oder Stahl nicht aus. Insgesamt hat sich bei Behältern für Flüssigerdgas sowie im Mineralölbehälterbau der mehrschichtige Wandaufbau durchgesetzt. Für Wasserbehälter wird zumeist der einschalige Wandaufbau genutzt, da die allgemeinen Anforderungen bezüglich der Dämm- und Dichteigenschaften von der einschaligen Stahl- oder Betonwand normalerweise übernommen werden.

Exemplarisch ist in Bild 3.3 ein Ethylentank zur Lagerung von ca. 4000 t tiefkaltem (-104 °C) Flüssigethylen dargestellt. Er besteht aus einem vorgespannten Betonaußentank und zwei inneren Stahltanks mit Wärmeisolierung. Die Dichtigkeit des Tanks wird durch die Stahlbehälter garantiert, während der Spannbetonbehälter als äußere Sicherheitshülle zum Schutz vor externen Einwirkungen dient. Die Wanddämmung besteht aus 90 cm Perlite, die Bodendämmung aus 30 cm Foamglas. Die Dachkonstruktion ist mit abgehängter Dämmung ausgeführt, wie im Allgemeinen für Flüssigerdgasbehälter bevorzugt.

Eine genauere Beschreibung ist den Arbeiten [HARTE94&95] zu entnehmen, in denen Berechnung und Bemessung des Lagertanks infolge Gaswolkenexplosion, Bränden und weiteren außergewöhnlichen Ereignissen erläutert ist.

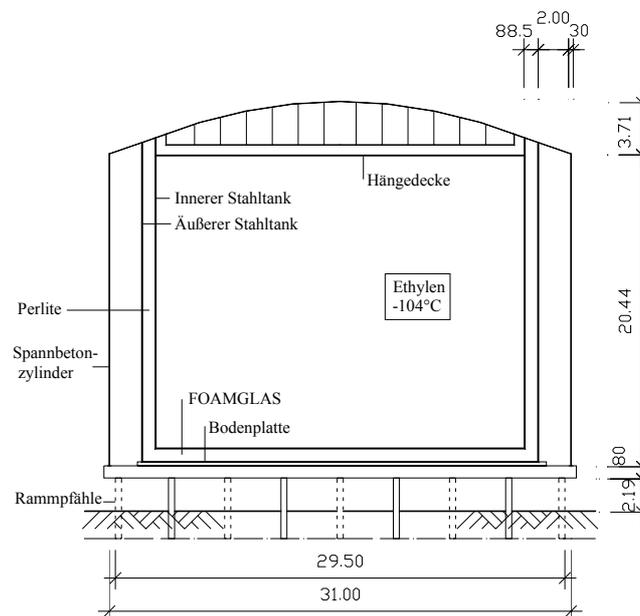


Bild 3.3: Ethylentank [HARTE95]

Eine ausführliche Zusammenstellung der Materialeigenschaften, der Anforderungen an die Baustoffe, sowie eine detaillierte Übersicht verschiedener Behälterausbildungen ist in [HAMPE80] gegeben. Eine Zusammenfassung der häufigsten Konstruktionsformen ist Anhang A zu entnehmen.

Der Unterkonstruktion eines Behälterbauwerks kommt eine besondere Bedeutung zu. Die Unterkonstruktion aus Bild 3.3 bildet eine auf Pfählen gegründete 80 cm dicke Stahlbetonfundamentplatte mit außenliegender Ringvorspannung. Bei Flüssiggastanks verhindert eine

Aufständerung das Auffrieren des Bodens und ermöglicht zusätzlich eine Inspektion der Unterkonstruktion durch die Begehbarkeit des Raumes unter der Bodenplatte. Diese Art der Lagerung ermöglicht auch den Einsatz von Dämpfern und Isolatoren zur Erdbebensicherung des Bauwerks. Der Einsatz von Isolatoren wird häufig auch als Sanierungsmaßnahme bestehender Bauwerke genutzt, um ihre Erdbebensicherheit zu erhöhen. Bild 3.4 zeigt einen Behälter, bei dem die Abschirmung durch den Einbau von Isolatoren zwischen Aufständerung und Bodenplatte erfolgt, wie in Bild 3.5 schematisch dargestellt ist. [BACHMANN99] beschreibt den sanierten Zustand als „schwimmende Lagerung“ mit den Worten: „Wenn sich der Boden horizontal rasch hin und her bewegt, bleiben dank der horizontal weichen Lagerung die bestehende Stahlbetonplatte und der Tank mit Inhalt infolge ihrer Massenträgheit mehr oder weniger etwa dort, wo sie vor dem Erdbeben schon waren. Die auf die Stützen wirkenden horizontalen Kräfte sind nur noch die relativ kleinen Rückstellkräfte in den Lagern. Dabei bleibt dank der hohen Dämpfung die Amplifikation gering.“

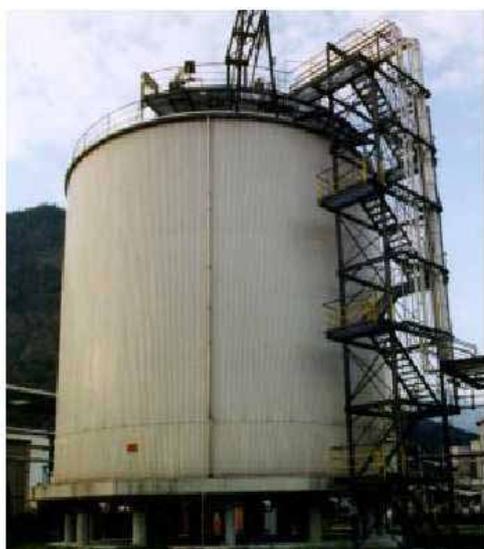


Bild 3.4: Großtank zur Lagerung von 1000 t Flüssiggas [BACHMANN99]

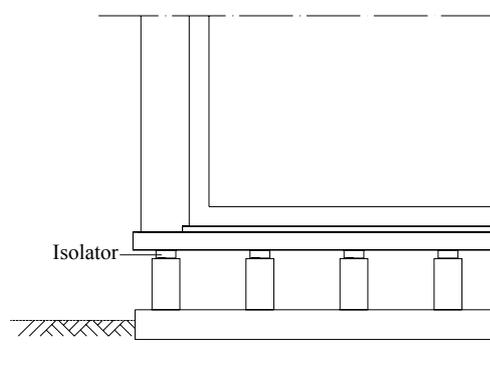


Bild 3.5: Anordnung von Isolatoren bei einer Erdbebenabschirmung

Isolatoren entkoppeln die horizontale Bewegung der Struktur vom Boden, indem sie hohe vertikale, aber geringe horizontale Steifigkeiten aufweisen. Durch den Einbau von Isolatoren kann das Bauwerk soweit „geschwächt“ werden, das sich nach [BAUMANN&BÖHLER97] eine Frequenzverschiebung in den niederspektralen Bereich des Antwortspektrums einstellt. Dies bedeutet eine drastische Reduktion der Erdbebenkräfte, denen die Struktur widerstehen muss, und gleichzeitig eine Vergrößerung der relativen Verschiebungen zwischen Boden und Bauwerk. Um eine horizontale Verformung im Normalzustand zu verhindern, werden Stabilisatoren eingesetzt, die eine „schwimmende Lagerung“ des Bauwerks erst bei Beben bestimmter Intensität aktivieren. Isolatoren sind zumeist elastomere (Gummi-)Lager, wie z. B. das in Bild 3.6 dargestellte „Rubber Bearing“ und das in Bild 3.7 dargestellte „Sliding Bearing“.

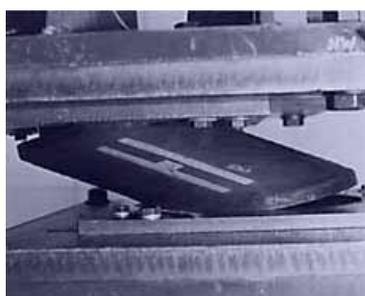


Bild 3.6: Rubber Bearing



Bild 3.7: Sliding Bearing

Das „Rubber Bearing“ ist fest mit Boden und Gebäude verbunden, und seine maximale relative horizontale Bewegung ist abhängig von seiner Bauhöhe. Es kehrt von alleine in die ursprüngliche Ausgangslage zurück. Das „Sliding Bearing“ kann sich in dem für ihn geschaffenen Raum beliebig hin und her bewegen. Um es wieder in die ursprüngliche Form zu bringen, müssen Federelemente oder schiefe Ebenen verwendet werden. Als besonders wirksam erweisen sich Lager mit zusätzlich dämpfender Wirkung. Dämpfungssysteme wie viskose Dämpfer, Reibungsdämpfer oder Hysteresedämpfer bewirken eine Schwingungsreduktion aufgrund der Energie-Dissipation in Form von Reibungs- oder Verformungsarbeit. Ein Beispiel eines komplexen viskosen Dämpfers ist in Bild 3.8 dargestellt. Aber auch einfache Systeme wie das in Bild 3.9 dargestellte Federelement können laut [NAWROTZKI01] zur Erdbebensicherung eingesetzt werden.



Bild 3.8: Viskoser Dämpfer [NAWROTZKI01]



Bild 3.9: Federelement [NAWROTZKI01]

Alternativ zum Einsatz von Isolatoren, die eine „Schwächung“ des Bauwerks hervorrufen, kann auch eine Versteifung des Bauwerks in Betracht gezogen werden. Hierbei wird die maßgebende Eigenfrequenz des Bauwerks in den hochfrequenten niedrigspektren Bereich des Antwortspektrums verschoben. Dies führt zu einer deutlichen Reduktion der Erdbebenkräfte und zu einer Verringerung der Verformungen. Die steife Bauweise ist jedoch extrem kostenintensiv und mit vertretbarem Aufwand häufig nicht zu erreichen.

3.2 Schadensfälle

Die in der Vergangenheit infolge Erdbebeneinwirkung aufgetretenen Schäden an Tankbauwerken sind vielfältig und reichen von lokalen Versagensformen bis hin zum Kollaps des gesamten Behälterbauwerks. In Bild 3.10 ist ein infolge des Alaska-Bebens im Jahr 1964 völlig zerstörter Tank abgebildet. Der in Bild 3.11 gezeigte Tank ist nach seiner Zerstörung zusätzlich ausgebrannt.



Bild 3.10: Durch Erdbeben zerstörter Tank [EERC]



Bild 3.11: Zerstörung durch Erdbeben und Brand [EERC]

Neben der totalen Zerstörung eines Tankbauwerks sind häufig Schäden an Teilbereichen des Behälters zu beobachten, wie die folgende Beschreibung typischer Versagensarten an Behälterbauwerken zeigt.

Unter dem Begriff „**Elephant Foot Buckling**“ versteht man das Ausbeulen der Tankwand kurz oberhalb des Tankbodens, wie in Bild 3.12 und Bild 3.13 zu erkennen ist. Die Versagenszone erstreckt sich über einen großen Teil des Umfangs und tritt insbesondere bei gedrungeneren Tanks auf.

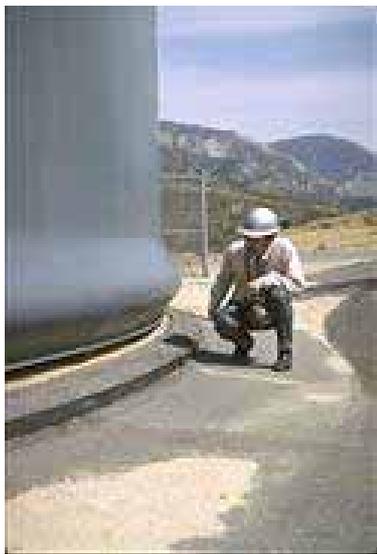


Bild 3.12: Elephant Foot Buckling [EERC]



Bild 3.13: Elephant Foot Buckling [EERC]

Eine ebenfalls häufig zu beobachtende Schädigung des Tanks kann durch **lokales Beulen der Tankwand** auftreten, das oft an Stellen unterschiedlicher Wandstärke auftritt, wie in Bild 3.14 dargestellt.

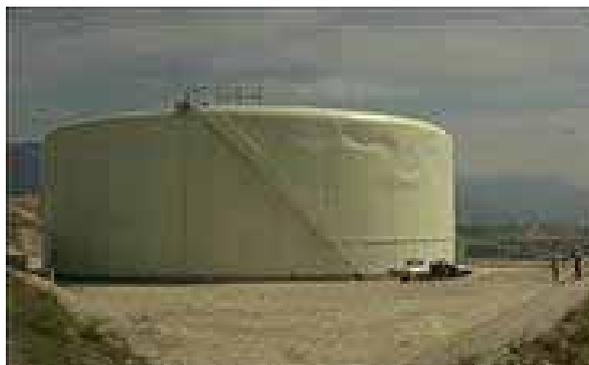


Bild 3.14: Lokales Beulen der Tankwand [EERC]

Bei unverankerten Tankbauwerken führt ein **Abheben des Tanks** infolge des sich aus dem hydrodynamischen Druck einstellenden Kippmomentes neben der Beschädigung des Tankbauwerkes selbst meist auch zur Zerstörung der Anbauten und der angeschlossenen Leitungen, die für die zum Teil recht großen Bewegungen nicht ausgelegt sind. In Bild 3.15 ist ein Tank abgebildet, der sich infolge Erdbebeneinwirkung auf seinem Fundament um 25 cm zur Seite bewegt hat. Bild 3.16 zeigt durch Erdbebeneinfluss abgetrennte Zuleitungen. Dieses Abreißen kann zum Entweichen des Tankinhaltes führen, was speziell bei Flüssiggas-, Erdöl- und chemischen Flüssigkeitsbehältern zu einer katastrophalen Zerstörung der gesamten Anlage führen kann.

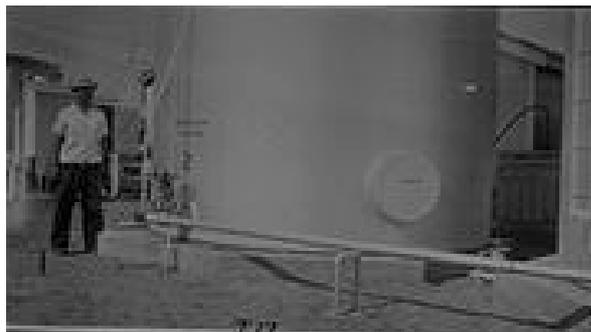


Bild 3.15: Tankverschiebung durch Erdbeben [EERC]

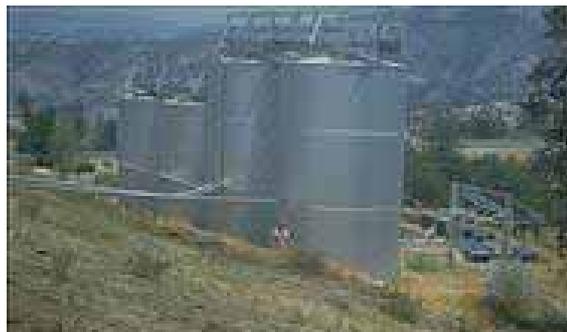


Bild 3.16: Tankverschiebung durch Erdbeben [EERC]

Infolge des Schwappens der Flüssigkeit, dem so genannten „Sloshing“, kann es zum **Versagen des Tankdaches** kommen, wenn zwischen Flüssigkeitsspiegel und Dach nicht genug Freiraum vorhanden ist. Weiterhin kann es zum Tankdachbeulen kommen.

Ein Aufreißen der Struktur wie in Bild 3.17 und Bild 3.18 erkennbar wird als **Versagen der Wandschale** bezeichnet. Das Aufreißen kann sich über die gesamte Höhe des Tankbauwerks erstrecken oder sich nur auf Teilbereiche des Behälters beschränken.



Bild 3.17: Aufreißen der Tankwand [EERC]



Bild 3.18: Aufreißen der Tankwand [EERC]

Einen relativ selten auftretenden Versagensfall stellt das **Beulen der Bodenplatte** dar, das nur bei nicht ausreichend gelagerten Bodenplatten auftritt.

Die Art des Versagens hängt von der Geometrie des Tanks, seiner Verankerung, Art und Höhe der Flüssigkeitsfüllung, Art des Bodens unter dem Tank sowie der Charakteristik des einwirkenden Erdbebens ab. Dass die Versagenswahrscheinlichkeit mit zunehmendem Füllgrad des Behälters (und somit auch zunehmenden hydrodynamischen Kräften) steigt, lässt sich anhand Bild 3.19 verdeutlichen. Auf dem Bild sind drei Tanks zur Speicherung von Flüssiggas zu sehen, die durch das Kocaeli-Erdbeben 1999 zum Teil beschädigt wurden. Alle drei Tanks sind auf Pfählen gegründet und identisch konstruiert. Der linke Tank, der zu 100% mit verflüssigtem Sauerstoff gefüllt war, stürzte um und bei dem mittleren Tank, der teilweise gefüllt war, versagten die Lagerungen. Der rechte Tank war zum Zeitpunkt des Erdbebens fast leer und überstand das Beben unbeschadet.



Bild 3.19: Drei Gastanks aus der Kocaeli-Region nach dem Erdbeben vom 17.8.1999 [EQES]

Eine Beschreibung und Auswertung der Schädigung von über 40 Tankbauwerken infolge Erdbeben wird in der Arbeit von [HAUSER01] gegeben. Alle dort untersuchten Behälter zeigen die oben beschriebenen Schäden, obwohl sie nach den aktuellen Normen dimensioniert wurden. Bei einem Vergleich mit unbeschädigten Behältern unter Berücksichtigung von Einflussgrößen wie Tankgeometrie, Art der Verankerung und Füllgrad konnte eine Abhängigkeit zur Versagenswahrscheinlichkeit allerdings nicht eindeutig festgestellt werden. Dennoch haben [BETTIN.ET.AL00] einen Verformbarkeitsparameter K in Abhängigkeit der Tankhöhe H , der Wanddicke h und des Radius R eingeführt, mit dessen Hilfe eine grobe Abschätzung der Versagenswahrscheinlichkeit vorgenommen werden kann. Mit steigenden Werten von K nimmt die Versagenswahrscheinlichkeit zu.

$$K = \sqrt{\frac{H}{R}} \cdot \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (3.1)$$

Im Rahmen eines Forschungsprojektes wurden von [NIWA&CLOUGH82] an der Universität in Berkeley zylindrische Weintanks untersucht, nachdem bei einem Beben der Stärke 5.5 in Kalifornien am 24.1.1980 eine Vielzahl solcher Tanks (Nutzinhalt: je 41000 Liter) einer Winzerei beschädigt bzw. zerstört wurden.

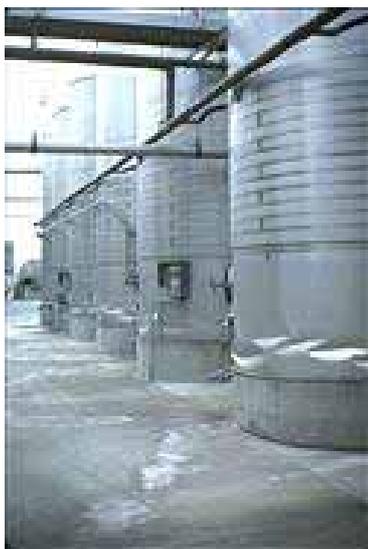


Bild 3.20: Im Jahr 1980 durch das Erdbeben in Kalifornien beschädigte Weintanks [EERC]



Bild 3.21: Im Jahr 1980 durch das Erdbeben in Kalifornien beschädigte Weintanks [EERC]

In Bild 3.20 und Bild 3.21 sind einige dieser Weintanks nach dem Beben dargestellt, die durch „Elephant Foot Buckling“ zerstört wurden. Die aufgetretenen Schäden konnten im Rahmen von Experimenten auf einem Rütteltisch simuliert werden.

3.3 Erdbebenbeanspruchung

Bei Erdbeben handelt es sich um natürliche Erschütterungen der Erdoberfläche durch räumliche Wellen, die in den meisten Fällen durch plötzliche Bruchereignisse bzw. Entspannungsvorgänge zwischen den kontinentalen Platten, aus denen die Erdkruste besteht, hervorgerufen werden. Aus wissenschaftlicher Sicht ist noch nicht abschließend geklärt, aus wie vielen Platten die Erdkruste besteht: man geht heute von 15 größeren Gesteinsschollen aus. Die Kontinentalplatten bewegen sich ständig, was für den Menschen kaum wahrnehmbar ist, und zu einem Aufstauen von Reibenergie führt. Die plötzliche Entladung der Energie als ruckartige Bewegung wird als Beben wahrgenommen. Diese Beben werden tektonische Beben genannt und finden meistens an den Rändern der tektonischen Platten statt. Circa 90% aller Erdbeben sind tektonischen Beben, etwa 3% sind Einsturzbeben, die durch den Zusammenbruch unterirdischer Hohlräume entstehen, und ca. 7% sind auf Vulkanausbrüche zurückzuführen. In Bild 3.22 sind die tektonischen Platten der Erdkruste dargestellt. Bild 3.23 gibt eine Übersicht über die Verteilung der Erdbebenzentren bezogen auf die Kontinente. Ein Vergleich der beiden Abbildungen zeigt, dass die Kontaktflächen der einzelnen tektonischen Platten mit den Gebieten erhöhter seismischer Aktivität übereinstimmen.

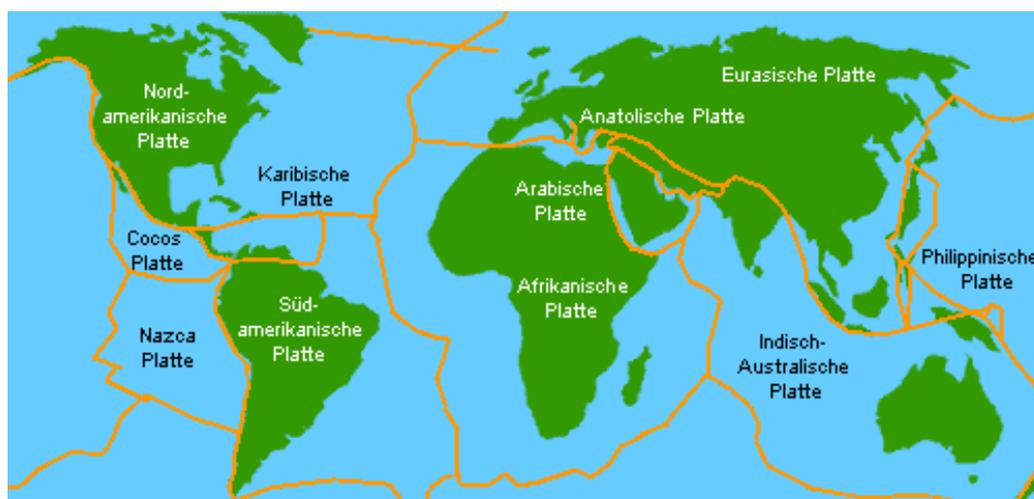


Bild 3.22: Tektonische Platten [GRUE]

Durch Erdbeben kann es zu meterweiten Versetzungen zwischen den Platten kommen, wobei benachbarte Gesteinsmassen in Schwingungen versetzt werden und sich in Form von seismischen Raumwellen vom Hypozentrum in alle Richtungen ausbreiten. Das Hypozentrum bezeichnet den Erdbebenherd. Der häufiger verwendete Begriff Epizentrum bezeichnet den lotrecht über dem Hypozentrum liegenden Punkt auf der Erdoberfläche. Die Hypozentren liegen im Allgemeinen auf der bruchfähigen oberen Erdkruste (mit einer Dicke von 6 bis ca. 60 km), können aber auch Tiefen von bis zu 700 km erreichen.

Sobald die vom Hypozentrum ausgehenden transversalen und longitudinalen Raumwellen die Erdoberfläche (oder Schichtgrenzen) erreichen, entstehen an der Erdoberfläche laufende Oberflächenwellen, so genannte RAYLEIGH- und LOVE-Wellen, die in Anhang B näher erläutert sind.

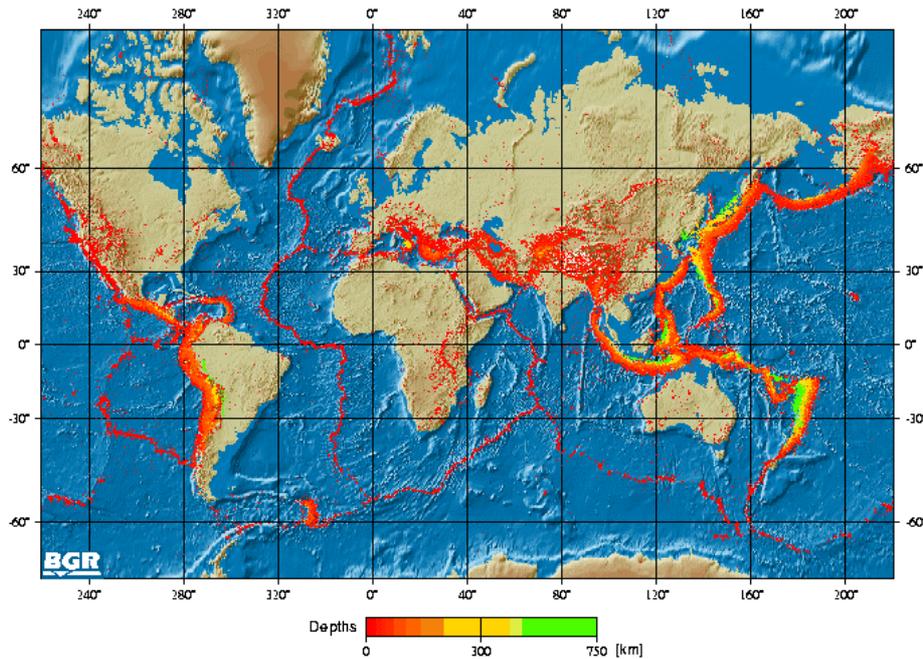


Bild 3.23: Erdbebenereignisse [SEIS]

Die unterschiedlichen Wellen verfügen über verschiedenartige Bewegungsrichtungen und Amplituden, wobei die horizontalen Bewegungskomponenten wesentlich größer sind als die Vertikalkomponenten. Die beiden horizontalen Richtungen sind meistens von gleicher Größenordnung, so dass es nach [MESKOURIS99] nicht sinnvoll ist, von einer besonderen Erdbebenrichtung zu sprechen. Die räumliche Ausbreitung der Wellen erstreckt sich über den gesamten Erdball, wobei in großer Entfernung die Auswirkungen nicht mehr spürbar sind. Die Intensität des Bebens ist zumeist am Epizentrum am größten. Die zeitliche Ausdehnung eines Bebens liegt in der Regel bei einer Dauer von Sekunden bis wenigen Minuten. Zur Charakterisierung eines Bebens wurden verschiedene Skalen entwickelt. Die in der Öffentlichkeit bekannteste Skala ist die 1935 entwickelte RICHTER-Skala, die zur Messung der Stärke oder Magnitude M eines Bebens herangezogen wird. Sie stellt das Maß für die im Erdbebenherd freigesetzte Energie E dar, durch die sie mit der Formel

$$\log E = 11.8 + 1.5 M \quad (3.2)$$

verknüpft ist. Die Richter-Magnitude basiert auf dem Ansatz, als Maß für die Stärke eines Bebens den dekadischen Logarithmus der Amplitude einer registrierten Welle in 100 km Entfernung heranzuziehen. Theoretisch wären hiernach beliebig große positive Werte möglich, aber es wurde bis zur Gegenwart kein Erdbeben über der Stärke 9 gemessen.

Die Stärke eines Bebens gibt jedoch keine Auskunft über seine Intensität. Die Intensität als Maß des Schadenspotentials der Erschütterungen an einem bestimmten Standort hängt, neben der Stärke des Bebens am Ursprung, ebenfalls von der Dauer des Bebens, dem Abstand zum Epizentrum, der Beschaffenheit des Untergrundes sowie der Bauweise an dem untersuchten Standort ab. Dass erdbebensichere Bauweisen, der größere Abstand zum Epizentrum sowie die begrenzte Dauer sich positiv auf das Verhalten der Bauwerke auswirken, ist leicht vorstellbar. Die Auswirkung des Untergrundes auf die strukturelle Zerstörung wird deutlich an dem Beben der Stärke 7.8 von Mexiko City 1985, als die Stadtteile, die auf festem Untergrund gegründet waren, kaum beschädigt wurden, während ein auf einem ehemaligen Seegrund errichtetes Viertel fast völlig zerstört wurde.

Die deutsche DIN 4149 Teil 1 verwendet die 12-teilige MSK-Skala (MEDVEDEW-SPONHEUER-KARNIK-Skala) aus Tabelle 3.1 als Intensitätsmaß.

Intensität	Kennzeichen	Erdbebenzone n. DIN 4149 Teil 1
1	Nur von Erdbebeninstrumenten registriert	A
2	Nur ganz vereinzelt von ruhenden Personen wahrgenommen	A
3	Nur von wenigen verspürt	A
4	Von vielen wahrgenommen; Geschirr und Fenster klirren	A
5	Hängende Gegenstände pendeln; viele Schlafende erwachen	A
6	Leichte Schäden an Gebäuden; feine Risse im Verputz	0
7	Risse im Verputz; Spalten in den Wänden und Schornsteinen	1 - 2
8	Große Spalten im Mauerwerk; Giebelteile stürzen ein	3
9	An einigen Bauten stürzen Wände und Dächer ein; Erdrutsche	4
10	Einstürze von vielen Bauten; Spalten im Boden bis 1 m Breite	
11	Viele Spalten im Boden; Erdrutsche in den Bergen	
12	Starke Veränderungen an der Erdoberfläche	

Tabelle 3.1: MSK-Skala

Diese Daten werden in isoseismischen Karten (Linien gleicher Intensität) eingetragen, in denen dann Erdbebenzonen festgelegt werden. Weitere bekannte Intensitätsskalen sind die EMS-98 (Europäische Makroseismische Skala), die MERCALLI-SIEBERG-Skala oder die ROSSI-FOREL-Skala. In den USA ist die Standard-Skala die Modified-MERCALLI-Skala (MM). Die ermittelten Daten aus den Skalen nach RICHTER oder den Intensitätsskalen sind zwar einfach zu handhaben, zur Berechnung von Tragwerksbeanspruchungen durch Erdbeben jedoch nicht geeignet. Um Bebenkennwerte für die Tragwerksberechnung zu gewinnen, werden Zeitverläufe der Bodenbeschleunigung des Bebens (drei Komponenten: zwei horizontale und eine vertikale), so genannte Akzelerogramme, gemessen. Diese stellen eine genaue Beschreibung eines konkreten Bebens an dem Standort der Messstation dar. Von dem Beben am 17. August 1999 in der Türkei sind aus der Kocaeli-Region die Akzelerogramme der beiden horizontalen (EastWest und NorthSouth) und der vertikalen (UpDown) Bodenbeschleunigung der Messstation Yarimca in Bild 3.24 wiedergegeben. Ähnliche Schriebe können auch für die Bodengeschwindigkeit und Bodenverschiebung gemessen oder alternativ aus den Beschleunigungsschrieben berechnet werden.

Die Akzelerogramme liefern verschiedene Kennwerte, wie beispielsweise die maximale Bodenbeschleunigung, lassen jedoch keine unmittelbare Aussage über den Frequenzgehalt des Bebens oder die Bebenantwort zu. Die Kenntnis des Antwortspektrums eines Bebens ist sinnvoll, da es die maximale Bebenantwort eines Ein-Massen-Schwingers in Abhängigkeit seiner Eigenfrequenz und Dämpfung liefert.

Lineare Antwortspektren für ein bestimmtes Akzelerogramm werden gewonnen, indem der betreffende Beschleunigungszeitverlauf als Fußpunkterregung an einem viskos gedämpften Einmassenschwinger mit variabler Eigenkreisfrequenz ω_i aufgebracht wird. Die maximalen Antworten des Einmassenschwingers, gewonnen im Zeitbereich z.B. mit Hilfe des DUHAMEL-Integrals, werden über den zugehörigen Eigenkreisfrequenzen ω_i , Eigenfrequenzen f_i oder ihrer zugehörigen Schwingzeit T_i aufgetragen.

Der Zusammenhang zwischen der Schwingzeit T , der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω ist durch folgende Formel gegeben:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (3.3)$$

Als Antwort ergeben sich die Verschiebungs-Spektralwerte S_d , die Geschwindigkeits-Spektralwerte S_v oder die Beschleunigungs-Spektralwerte S_a . Für verschiedene Dämpfungen ergeben sich unterschiedliche Antwortspektren, da die maximale Auslenkung durch die Dämpfung maßgeblich beeinflusst wird.

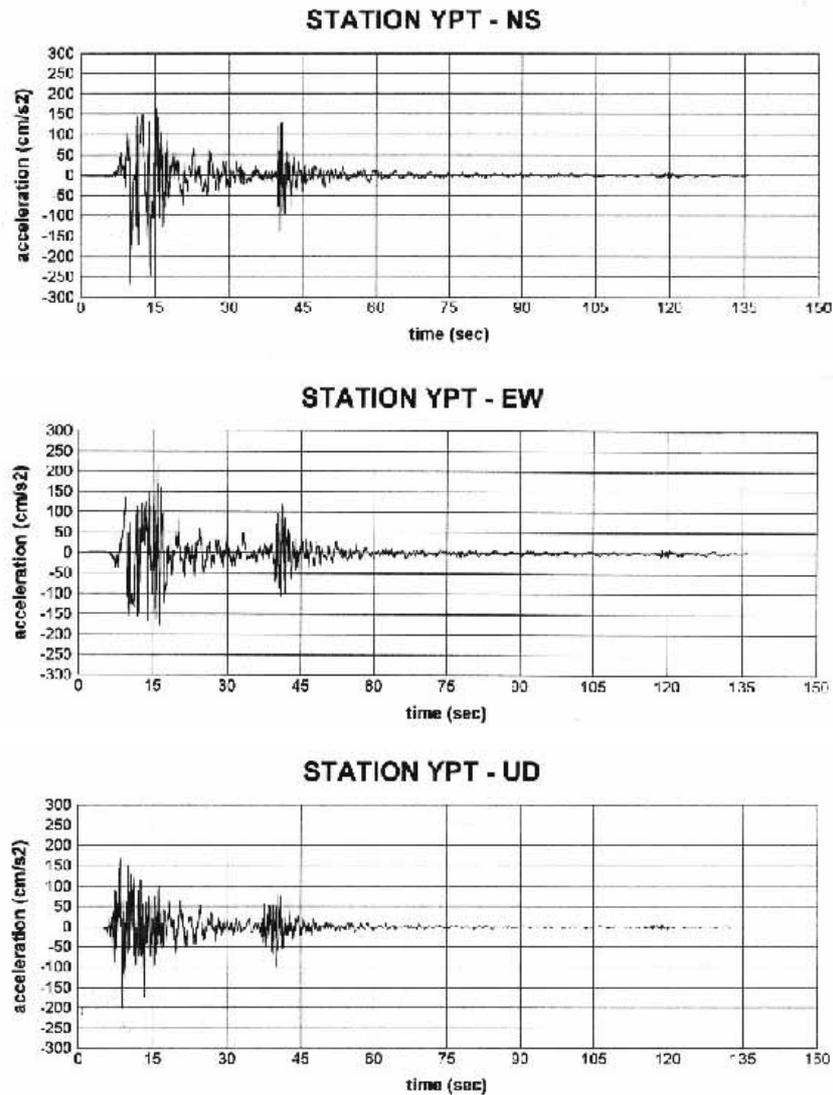


Bild 3.24: Akzelerogramme des Kocaeli Bebens vom 17.8.99 in der Türkei; Messstation: Yarimca (YPT) [KOER]

Für eine LEHRsche Dämpfung ξ bis zu 20 % [$0 \leq \xi \leq 0.20$] werden Pseudo-Spektral-Werte für die Geschwindigkeit S_{pv} und die Beschleunigung S_{pa} eingeführt (der Index (...)p wird in der Literatur oft vernachlässigt):

$$S_d(\omega, \xi) = \frac{1}{\omega} S_{pv}(\omega, \xi) \quad (3.4)$$

$$S_{pa}(\omega, \xi) = \omega S_{pv}(\omega, \xi)$$

deren zugehörige Spektren respektiv als Pseudo-Geschwindigkeits-Antwortspektrum und Pseudo-Beschleunigungs-Antwortspektrum bezeichnet werden. Aufgrund des einfachen Zusammenhanges der drei Spektren werden sie häufig in einer logarithmischen Grafik zusammengefasst, wie in Bild 3.25 schematisch gezeigt.

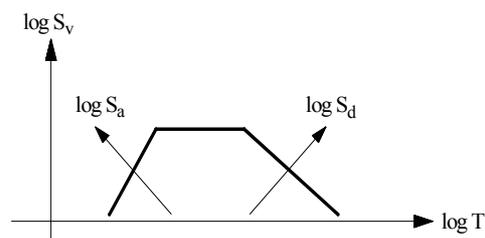


Bild 3.25: Schematische Darstellung eines vierfach logarithmischen Antwortspektrums

In Bild 3.26 sind die zu verschiedenen Dämpfungsgraden zugehörigen Antwortspektren der NS-Richtung des Kocaeli Bebens vom 17. August 1999 in der Türkei dargestellt.

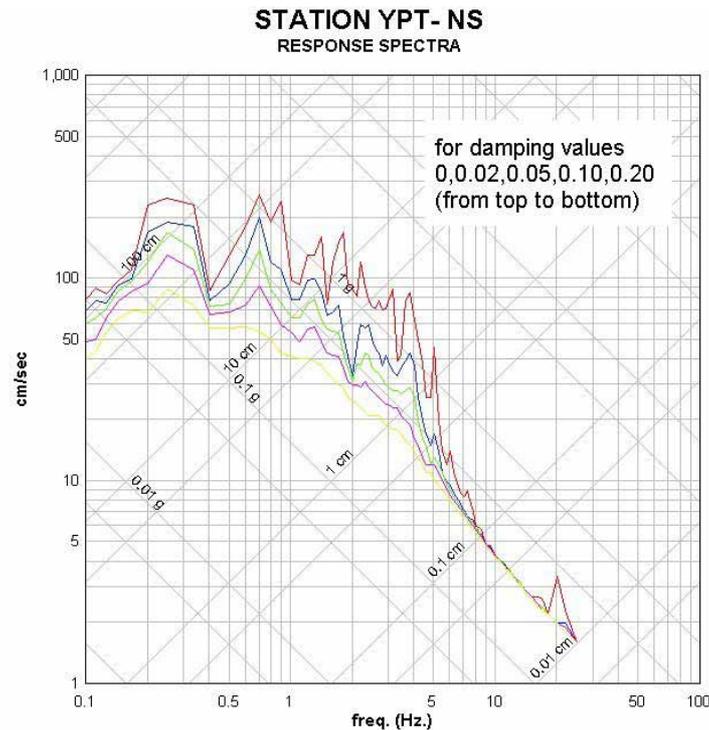


Bild 3.26: Antwortspektrum der NS-Richtung des Kocaeli Bebens ; Messstation: Yarimca (YPT) [KOER]

Alle Antwortspektren, die in einer solchen vierfach-logarithmischen Darstellung abgebildet sind, erreichen asymptotisch folgende Grenzwerte:

- Für sehr steife Systeme ($\omega \rightarrow \infty$) wird als Grenzbedingung asymptotisch die maximale Bodenbeschleunigung erreicht.
- Für sehr weiche Systeme ($\omega \rightarrow 0$) wird als Grenzbedingung asymptotisch die maximal auftretende Bodenverschiebung erreicht.

Die Messwerte eines einzelnen Erdbebens stellen jedoch keine geeignete Grundlage zur Bemessung eines Bauwerks dar, da sie lediglich ein zurückliegendes Beben beschreiben, aber keine Aussage über zukünftige Ereignisse zulassen. In den internationalen Normen werden daher auf Grundlage probabilistischer Untersuchungen Bemessungsspektren definiert, deren Verlauf als Umhüllende aller an einem bestimmten Standort zu erwartenden Beben zu verstehen ist. Diese Spektren werden nur mit einer vorab definierten Wahrscheinlichkeit (zum Beispiel 100 Jahre) überschritten.

3.4 Dynamische Berechnungsverfahren

Die lineare dynamische Berechnung von Mehrmassensystemen entspricht der Lösung der dynamischen Bewegungsgleichung

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{P}(t) \quad (3.5)$$

die sich von der bekannten statischen Bewegungsgleichung $\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{P}$ durch den beschleunigungsbehafteten Massenanteil $\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}$ und den geschwindigkeitsabhängigen Dämpfungsanteil $\underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}$ unterscheidet. Bei der dynamischen Berechnung von Tragwerken unter Erdbeben liegt eine Fußpunktanregung des Tragwerks aufgrund der Bodenbewegung, aber kein expliziter

Lastvektor $\underline{P}(t)$ für das Tragwerk vor. Mit Hilfe der zeitveränderlichen skalaren Bodenbeschleunigung $\ddot{u}_{\text{Boden}} = a(t)$, deren Verlauf als Akzelerogramm einer Bebenkomponente vorliegt, kann eine fiktive zeitabhängige Erdbebenlast $\underline{F}_{\text{Beben}}$ ermittelt werden:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}_{\text{rel}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}_{\text{rel}} + \underline{K} \cdot \underline{u}_{\text{rel}} = \underline{F}_{\text{Beben}}(t) = -\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}_{\text{Boden}} \quad (3.6)$$

Da durch eine Erdbebenkomponente nur Freiheitsgrade in der jeweiligen Bebenrichtung aktiviert werden, muss eine diskretisierungsabhängige Vektorgröße $\ddot{\underline{u}}_{\text{Boden}}$ aus dem gegebenen skalaren Beschleunigungszeitverlauf \ddot{u}_{Boden} ermittelt werden. Als Ergebnis erhält man die relative Bewegung des Bauwerks $\underline{u}_{\text{rel}}$, (respektive relative Geschwindigkeit $\dot{\underline{u}}_{\text{rel}}$, relative Beschleunigung $\ddot{\underline{u}}_{\text{rel}}$) in Bezug auf die Bodenbewegung.

Für die Ermittlung dieser unbekanntenen Verschiebungskomponenten \underline{u} bzw. $\underline{u}_{\text{rel}}$ stehen verschiedene Lösungsmethoden zur Verfügung. Die zur Lösung von Erdbebenproblemen wichtigsten Rechenverfahren werden in den folgenden Kapiteln kurz erläutert.

3.4.1 Direkte Zeitintegration der Bewegungsgleichung

Bei den Zeitverlaufverfahren werden alle zeitabhängigen Größen der zu lösenden Bewegungsdifferentialgleichung zum diskreten Zeitpunkt $t+\Delta t$ aus den Werten zum Zeitpunkt t berechnet. Ausgehend von den Anfangsbedingungen $t=0$ werden so die Bewegungsgrößen Zeitschritt für Zeitschritt berechnet. Als Belastungsgrößen werden zeitabhängige Lastfunktionen $P(t)$ oder, im Falle einer Erdbebenbeanspruchung, gemessene oder künstlich generierte Akzelerogramme benötigt. Im Rahmen der FEM wird bei der Lösung der Differentialgleichung auf numerische Verfahren zurückgegriffen. Die zur Berechnung eines solchen Anfangswertproblems zur Verfügung stehenden Algorithmen unterscheiden sich durch Stabilität, Genauigkeit und Schnelligkeit. Eine Klassifizierung der Algorithmen erfolgt in:

- explizit/implizit: explizit bedeutet, dass der Zustand zum Zeitpunkt t ausschließlich von Werten der vorangehenden Zeitpunkte abhängt, während eine implizite Berechnung zusätzlich Werte des Zustandes selbst benötigt.
- Einschnitt-/Mehrschrittverfahren: Beim Einschnittverfahren werden nur die Werte des zuletzt vorangegangenen Zustandes benötigt, es ist damit selbststartend. Beim Mehrschrittverfahren wird eine besondere Initialrechnung nötig, da Werte aus mehreren vorangegangenen Zuständen benötigt werden.

Zu den expliziten Verfahren zählen die Verfahren von HEUN; EULER-CAUCHY; RUNGE-KUTTA; MILNE und HAMMING sowie das Zentrale Differenzenverfahren. Zu den impliziten Verfahren gehören die Verfahren von HOUBOLT, PARK, NEWMARK und WILSON- θ .

Eine Übersicht der verschiedenen Rechenverfahren bieten [PETERSEN96], [CHOPRA95] und [CLOUGH&PENZIEN93]. Alle Verfahren unterstützen neben der Berechnung im Gesamtschritt auch die inkrementelle Berechnung für nichtlineare Probleme.

In Rahmen der vorliegenden Arbeit wird das implizite Einschnittverfahren von NEWMARK benutzt, das die Möglichkeit einer Wichtung von Stabilität und Genauigkeit durch die Parameter α und β zulässt und somit eine unbedingte Stabilität ermöglicht. Die Bewegungsgleichung wird für die Berechnung des Gesamtschrittes in die Form von Gleichung (3.7) transformiert,

$$\left[\underline{K} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{M} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \underline{C} \right] \underline{u}_1 = \underline{P}_1 + \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{M} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \underline{C} \right] \underline{u}_0 + \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \underline{M} + \frac{\alpha - \beta}{\beta} \underline{C} \right] \dot{\underline{u}}_0 + \left[\frac{1 - 2\beta}{2\beta} \underline{M} + \frac{\alpha - 2\beta}{2\beta} \Delta t \underline{C} \right] \ddot{\underline{u}}_0$$

wobei der Index $(\dots)_0$ den bekannten Ausgangszustand und der Index $(\dots)_1$ den unbekanntenen Nachbarzustand nach Bild 3.27 kennzeichnet.

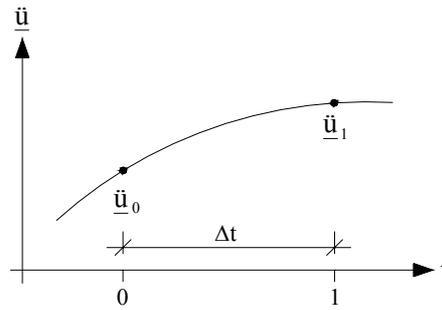


Bild 3.27: Ausgangszustand und Nachbarzustand

Nach der Ermittlung der Verformungen im Nachbarzustand \underline{u}_1 ergeben sich die zugehörigen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten aus

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\underline{u}_1 - \underline{u}_0) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_0 - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{u}_0 \\ \dot{u}_1 &= \frac{\alpha}{\beta \Delta t} (\underline{u}_1 - \underline{u}_0) - \frac{\alpha-\beta}{\beta} \dot{u}_0 - \frac{\alpha-2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{u}_0\end{aligned}\quad (3.8)$$

Von den hier vorgestellten Verfahren kann zur Berechnung nichtlinearer Systeme nur das Verfahren der direkten Zeitintegration eingesetzt werden. Die nichtlineare Bewegungsgleichung wird analog zu (3.5) in inkrementeller Form aufgestellt, wie in Kapitel 6.3.1 vorgestellt. Der Berechnungsalgorithmus zerfällt nun in zwei getrennte Bereiche:

- der Zeitschrittberechnung, bei denen die Bewegungsgrößen ausgehend von dem Anfangszeitwert $t = 0$ um das Zeitintervall Δt fortschreitend berechnet werden, und
- dem Iterationsprozess, bei dem innerhalb jedes Zeitschrittes ein Gleichgewichtszustand für das vorliegende Lastniveau gefunden werden muss.

Der Iterationszyklus zur Berechnung der tangentialen Gleichgewichtsbeziehung pro Zeitschritt entspricht dem Lösungskonzept von nichtlinearen statischen Problemen. Als Lösungsverfahren kann zum Beispiel das NEWTON-RAPHSON-Verfahren zur Anwendung kommen. Weitere Informationen hierzu finden sich in der Standardliteratur wie [BATHE96] oder [ZIENKIEWICZ&TAYLOR89], aber auch bei [KMIECIK.ET.AL93].

3.4.2 Modale Analyse (Superpositionsprinzip)

Bei linear-elastischen Systemen kann alternativ zur direkten Zeitintegration auch die Modalanalyse angewendet werden. Durch die Transformation der N diskreten Verschiebungsfreiheitsgrade auf N modale Freiheitsgrade wird das Gesamtsystem auf N entkoppelte Einmassenschwinger reduziert. Die Schwingungsantwort jedes Einmassenschwingers erfolgt dabei durch eine Zeitbereichsberechnung. Voraussetzung hierfür ist die Kenntnis der Eigenfrequenzen ω_N und Eigenformen $\underline{\Phi}_N$ des Systems, die in einer Vorlaufrechnung bestimmt werden müssen.

Die auf die modalen Freiheitsgrade Y_N transformierte Bewegungsgleichung eines linear viskos gedämpften Systems lautet

$$\ddot{Y}_N + 2\xi_N \omega_N \dot{Y}_N + \omega_N^2 Y_N = P_N(t), \quad (3.9)$$

mit ξ_N als der LEHRschen Dämpfung. Die modalen Lasten P_N werden aus dem Lastvektor $\underline{P}(t)$ und den Eigenformen $\underline{\Phi}_N$ bestimmt:

$$P_N(t) = \underline{\Phi}_N^T \underline{P}(t). \quad (3.10)$$

Nach Ermittlung aller modalen Lösungen $Y_N(t)$ ergeben sich die gesuchten Verschiebungsfreiheitsgrade durch Rücktransformation.

$$\underline{u} = \sum_N \underline{\Phi}_N Y_N \quad (3.11)$$

Die Ergebnisse des modalanalytischen Vorgehens und der Zeitbereichsintegration stimmen exakt überein, wenn bei der Modalanalyse alle N Eigenformen bei der Überlagerung verwendet werden. (Voraussetzung hierfür ist natürlich die Verwendung von identischen Dämpfungswerten bei dem modalanalytischen und dem Zeitbereichs-Verfahren.)

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der Tatsache, dass bei den meisten Belastungsarten nur die ersten Eigenformen angeregt werden und alle höheren Eigenformen bei der Überlagerung vernachlässigt werden dürfen.

3.4.3 Antwortspektrenmethode

Die Antwortspektrenmethode ist ein modalanalytisches Verfahren zur Berechnung von Bauwerksantworten unter Erdbebenbelastung. Grundlage dieses Verfahrens ist das in Kapitel 3.3 eingeführte Antwortspektrum, das die Schwingungsantwort eines linearen Einmassenschwingers mit beliebiger Eigenkreisfrequenz ω darstellt. Bei dieser Methode wird, wie in Kapitel 3.4.2, aus der gekoppelten Bewegungsgleichung ein entkoppeltes modales System in den Freiheitsgraden Y_N erstellt. Für jeden modalen Freiheitsgrad wird mit Hilfe der zugehörigen Eigenfrequenzen ω_N aus dem Antwortspektrum der zugehörige Spektralwert abgelesen. Mit Hilfe des modalen Lastvektors nach (3.10) und dem Übergang zur fiktiven Erdbebenersatzlast nach (3.6) ergeben sich aus den spektralen Bebenkennwerten des Antwortspektrums die maximalen Antworten für jede Modalform. Die Überlagerung der Modalanteile ergeben die Größtwerte der Verschiebungen und Schnittgrößen. Die bekannteste Überlagerungsmethode ist die SRSS-Methode (Square Root of the Sum of Squares), aufwendiger, aber realistischer, ist die CQC-Methode (Complete Quadratic Combination).

Da das Vorgehen auf der Modalanalyse basiert, ist dieses Verfahren nur für lineare Berechnungen geeignet. Weiterhin muss beachtet werden, dass über den zeitlichen Verlauf der Zustandsgrößen keine weiteren Information vorliegen, da als Ergebnisse nur die maximalen Beanspruchungen berechnet werden, die nicht mehr die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Dennoch ist dieses Verfahren weit verbreitet und hat große baupraktische Bedeutung, da es schnell und einfach die Größtwerte der Bauwerksantwort liefert.

3.4.4 Lösung im Frequenzbereich

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle die Möglichkeit der Berechnung im Frequenzbereich erwähnt. Bei den Frequenzbereichsverfahren werden alle zeitabhängigen Größen der zu lösenden Bewegungsdifferentialgleichung aus dem Zeitbereich durch eine FOURIER- oder LAPLACEtransformation in den Frequenzbereich überführt [PETERSEN96]. Diese Vorgehensweise ist zunächst nur für lineare Systeme anwendbar, es gibt aber auch hybride Frequenz-Zeitbereichs-Prozeduren, mit denen Nichtlinearitäten behandelt werden können.

Eine Besonderheit der Frequenzbereichsverfahren stellen die probabilistischen Verfahren dar, bei denen Belastungen mit stochastischen Eigenschaften¹, wie z.B. Wind, durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen und statistische Parameter beschrieben werden. Da die stochastischen Eigenschaften zeitunabhängig sind, lassen sich die Belastungsprozesse durch so genannte Autokovarianzfunktionen und durch Autospektren darstellen. Der Rechenaufwand ist extrem hoch und im Bereich der Erdbebenberechnung haben diese Verfahren kaum Bedeutung.

¹ Prozesse, die nicht vollständig, also nur in gewissen Eigenschaften vorhersehbar (deterministisch) sind, nennt man stochastisch. Prozesse, bei denen man auch keine Eigenschaften vorhersehen kann, nennt man chaotisch.

3.4.5 Berücksichtigung von Dämpfung

Die Dämpfungseinflüsse baulastdynamischer Aufgaben realitätsnah zu erfassen und gleichzeitig in der Anwendung nicht übermäßig komplizierte Dämpfungstheorien anzusetzen ist ein zentrales Problem bei der Lösung dynamischer Probleme.

In der Praxis ist das linear viskose Dämpfungsmodell allgemein akzeptiert, da es das globale Verhalten einer Struktur recht gut wiedergibt und gleichzeitig mathematisch einfach zu beschreiben ist. In (3.5) ist das viskose Dämpfungsmodell mit Hilfe der Dämpfungsmatrix \underline{C} angegeben. Diese Dämpfungsmatrix \underline{C} setzt sich aus einer verteilten Strukturdämpfung \underline{C}_s und einem Anteil \underline{C}_e aus Einzeldämpfern zusammen.

$$\underline{C} = \underline{C}_s + \underline{C}_e \quad (3.12)$$

Der Dämpfungsanteil \underline{C}_e enthält Einzelterme auf der Diagonalen entsprechend den eingesetzten Einzeldämpfern. Die Strukturdämpfungsmatrix \underline{C}_s soll den Energieverlust des Systems während der dynamischen Systemantwort näherungsweise erfassen. Sie kann im Allgemeinen nicht aus den einzelnen Element-Dämpfungsmatrizen konstruiert werden, wie es das Vorgehen für den Aufbau der Steifigkeits- und Massenmatrix erlaubt.

Zur Berechnung der Dämpfungsmatrix wird zumeist auf die sogenannte RAYLEIGH-Methode zurückgegriffen, welche die Dämpfungsmatrix \underline{C}_s über die Systemmassenmatrix \underline{M} und die Systemsteifigkeitsmatrix \underline{K} mit Hilfe der RAYLEIGHparameter α_M und α_K bestimmt.

$$\underline{C}_s = \alpha_M \cdot \underline{M} + \alpha_K \cdot \underline{K} \quad (3.13)$$

Die RAYLEIGHparameter α_M und α_K werden aus den ersten beiden relevanten Eigenfrequenzen ω_i des Systems, sowie den zugehörigen LEHRschen Dämpfungswerten ξ_i berechnet.

$$\begin{aligned} \alpha_M &= 2 \cdot \frac{\omega_2 \xi_1 - \omega_1 \xi_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \omega_1 \omega_2 \\ \alpha_K &= 2 \cdot \frac{\omega_2 \xi_2 - \omega_1 \xi_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

In der Praxis werden geeignete Dämpfungswerte für die Berechnung einer spezifischen Struktur häufig aus der Kenntnis des Dämpfungsverhaltens einer typischen, ähnlichen Struktur festgelegt. Für flüssigkeitsgefüllte Tankbauwerke liegen die Dämpfungswerte in der gängigen Literatur nach [HAROUN83], [API650], [PETERSEN96], [MESKOURIS99] zumeist zwischen den Werten von 0.5% und 5% .

Damit wird automatisch angenommen, dass sowohl in einem direkten Integrationsverfahren, als auch bei einer Berechnung mit Modenüberlagerung, die Dämpfungseigenschaften der Struktur durch eine proportionale Dämpfung erfasst wird. In vielen Berechnungen trifft diese Annahme hinreichend zu. Jedoch für die Berechnung von Strukturen mit stark unterschiedlichen Materialeigenschaften kann es nach [BATHE86] erforderlich werden, eine nichtproportionale Dämpfung zu verwenden, wenn Anteile eine stark unterschiedliche Dämpfung aufweisen. Dieses Problem kann bei der Berechnung von Systemen mit großen Fundamenten oder bei der Untersuchung der Wechselwirkung von Flüssigkeit und Tankwand auftreten. In diesem Fällen könnte bei der Aufstellung der Dämpfungsmatrix den verschiedenen Teilen der Struktur unterschiedliche RAYLEIGH-Koeffizienten zugeordnet werden. Dies führt zu einer nichtproportionalen Dämpfung. Nichtproportionale Dämpfung tritt auch auf, wenn konzentrierte Dämpfer nach (3.12) erfasst werden.

Nach [CHOPRA95] ist ein Nachteil der RAYLEIGHschen Dämpfung, dass die höheren Moden beträchtlich stärker gedämpft werden als die tieferen Moden, für die die RAYLEIGH-Parameter bestimmt worden sind. Dieser Nachteil kann mit Hilfe der CAUGHEYschen Reihe umgangen werden. Mit dieser Methode wird eine Dämpfungsmatrix erstellt, unter der Voraussetzung, dass Dämpfungsmaße für mehr als zwei Frequenzen bekannt sind.

Die größte praktische Bedeutung besitzt aber die RAYLEIGH-Dämpfung. Als Sonderfälle können hier noch die steifigkeitsproportionale Dämpfung mit

$$\begin{aligned}\alpha_M &= 0 \\ \alpha_K &= \frac{2 \cdot \xi_1}{\omega_1}\end{aligned}\quad (3.15)$$

und die massenproportionale Dämpfung mit

$$\begin{aligned}\alpha_M &= 2 \cdot \xi_1 \cdot \omega_1 \\ \alpha_K &= 0\end{aligned}\quad (3.16)$$

genannt werden, für die nur noch die Angabe eines Dämpfungswertes benötigt wird.

Grundlagen der Kontinuumsmechanik und der Thermodynamik

Um das physikalische Verhalten von festen oder flüssigen Strukturen mathematisch zu erfassen, werden Methoden benötigt, die den Zustand der Struktur bzw. ihrer repräsentativen Zustandsgrößen möglichst exakt beschreiben. Die hierfür nötigen kontinuumsmechanischen und thermodynamischen Grundlagen können nach [ODEN72] in kinematische, kinetische, thermodynamische und konstitutive Gleichungen unterteilt werden. Die kinematischen Gleichungen geben Aufschluss über die Bewegung des Körpers in Abhängigkeit der Zeit ohne den Grund der Bewegung zu analysieren, d.h. es wird die Lage und die Bewegung eines materiellen Körpers definiert. Die kinetischen Gleichungen untersuchen den Einfluss innerer oder äußerer Kräfte auf die Bewegung. Sie sind aus den mechanischen Grundprinzipien hergeleitet und ergeben unter anderem die Gleichgewichtsbedingung. Ausgehend von den Hauptsätzen der Thermodynamik können allgemeine Werkstoffe mit nichtreversiblen, zeitabhängigen, dissipativen Eigenschaften berücksichtigt werden, indem mit Hilfe der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung die Grundlage der materialspezifischen (stoffabhängigen), also konstitutiven Gleichungen gelegt wird.

4.1 Kinematische Grundlagen

Die kinematischen Beziehungen legen die geometrischen und mathematischen Annahmen zur Beschreibung eines Kontinuums fest. Um die Geometrie und Bewegung eines materiellen Körperpunktes zu beschreiben, müssen ein zugehöriges Bezugssystem und ein geeignetes Koordinatensystem definiert werden.

4.1.1 Darstellung der Konfiguration

Die Konfiguration eines materiellen Körpers \mathcal{B} erfolgt über seine Position im dreidimensionalen EUKLIDISCHEN Raum. Der materielle Körper \mathcal{B} der Kontinuumsmechanik (Kontinuum)

stellt laut [STEIN&BARTHOLD97] eine zusammenhängende Menge materieller Punkte \mathcal{M} dar, die zu jedem Zeitpunkt t eindeutig identifizierbar sein muss. Neben der Einführung des materiellen Körpers \mathcal{B} wird für den Rand des Körpers die Bezeichnung $\partial\mathcal{B}$ gewählt. Die Beschreibung von aufeinanderfolgenden Positionen eines Materialpunktes \mathcal{M} in Abhängigkeit von der Zeit entspricht seiner Bewegung. Die Position eines Materialpunktes \mathcal{M} zum Zeitpunkt t wird durch seinen Ortsvektor

$$\underline{r} = \underline{x}(\theta^j, t) = x^i(\theta^j, t)\underline{i}_i \quad (4.1)$$

beschrieben, wobei seine Komponenten x^i bezüglich eines rechtwinkligen kartesischen Basissystems \underline{i}_i definiert sind. Die Verwendung weiterer Basissysteme \underline{G}_j und \underline{g}_j ist nötig, denen nach Bild 4.1 die allgemeinen, krummlinigen Koordinaten θ^j als Komponenten zugeordnet werden.

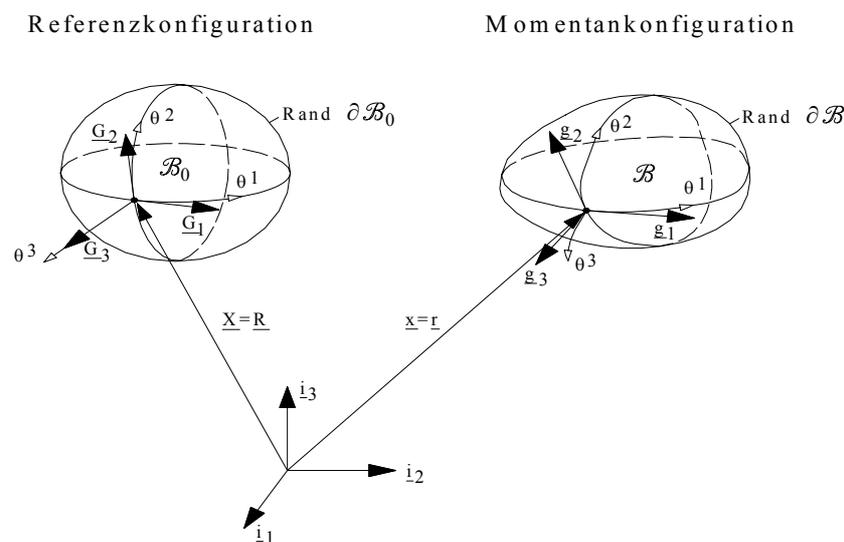


Bild 4.1: Darstellung der Referenz- und Momentankonfiguration

Die Konfiguration bezüglich eines ausgezeichneten Zeitpunktes t_0 bezeichnet man als Referenz- oder materielle Konfiguration. Sie wird durch einen Großbuchstaben oder den Index (...) ₀ gekennzeichnet.

$$\underline{R} = \underline{x}(\theta^j, t_0) = \underline{X}(\theta^j) = X^i(\theta^j)\underline{i}_i \quad (4.2)$$

Die Variablen x^i werden räumliche Koordinaten oder EULER-Koordinaten genannt, da die Beschreibung durch einen räumlichen Punkt erfolgt. Die Variablen X^i werden materielle oder LAGRANGE-Koordinaten genannt, da die Beschreibung durch einen materiellen Punkt erfolgt. Die tensoriellen Eigenschaften \underline{A} eines Materialpunktes \mathcal{M} können entweder in EULER-Variablen oder in LAGRANGE-Variablen beschrieben werden.

$$\underline{A}(\mathcal{M}) = \underline{A}(\underline{x}, t) = \underline{A}(\underline{X}, t_0, t) \quad (4.3)$$

4.1.2 Bezugssysteme der Bewegung

Die Beschreibung einer Bewegung ist abhängig von der Wahl des Bezugssystems. Hierzu stehen verschiedene Betrachtungsweisen zur Verfügung, von denen vorrangig die LAGRANGEsche und die EULERSche Darstellungsweisen angewendet werden. Die Betrachtungsweisen unterscheiden sich in erster Linie durch den Standpunkt des Beobachters des kinematischen Vorgangs. Die LAGRANGESche Betrachtungsweise der Bewegung eines materiellen Punktes kann mit Hilfe eines Beobachters beschrieben werden, der jeden einzelnen materiellen Punkt

\mathcal{M} auf seiner Bahn durch den Raum verfolgt und der zu jedem Zeitpunkt dessen Eigenschaften und dessen Position im Raum misst. Er sitzt nach [STEIN&BARTHOLD97] sozusagen im „Rucksack des materiellen Punktes“. Dieses Bezugssystem entspricht der in der Festkörpermechanik üblichen Darstellung.

Bei der Beschreibung von endlichen Deformationen und im Bereich der Strömungsmechanik wird oft die EULERSche Darstellung angewendet. Hier befindet sich der Beobachter an einem festen Raumpunkt und misst die Eigenschaften der materiellen Punkte, die im Laufe der Zeit diesen Ort einnehmen. Er steht laut [WALL99] „gewissermaßen auf einer Brücke“ und beobachtet die vorbeifließenden Materieteilchen. Diese Zusammenhänge lassen sich mit den Begriffen Stromlinie und Bahnlinie assoziieren, wie in Bild 4.2 dargestellt: Als Bahnlinie bezeichnet man eine Aneinanderreihung der geometrischen Orte aller Raumpunkte, die ein materieller Punkt während seiner Bewegung durchläuft. Sie stellt die Verbindungslinie aller räumlichen Punkte dar, an denen sich ein spezieller Punkt der Materie zu unterschiedlichen Zeiten befindet. Somit ist die LAGRANGESche Betrachtungsweise dem Begriff der Bahnlinie zuzuordnen. Am Konzept der Stromlinie, die als Integralkurve des Geschwindigkeitsfeldes zu einem bestimmten Zeitpunkt definiert ist, lässt sich die EULERSche Betrachtungsweise verdeutlichen. Die Stromlinie ist die Verbindungslinie aller Orte, an denen sich zur gleichen Zeit unterschiedliche materielle Punkte befinden, die bei einem entsprechenden Strömungszustand die gleiche Bahnlinie hätten.

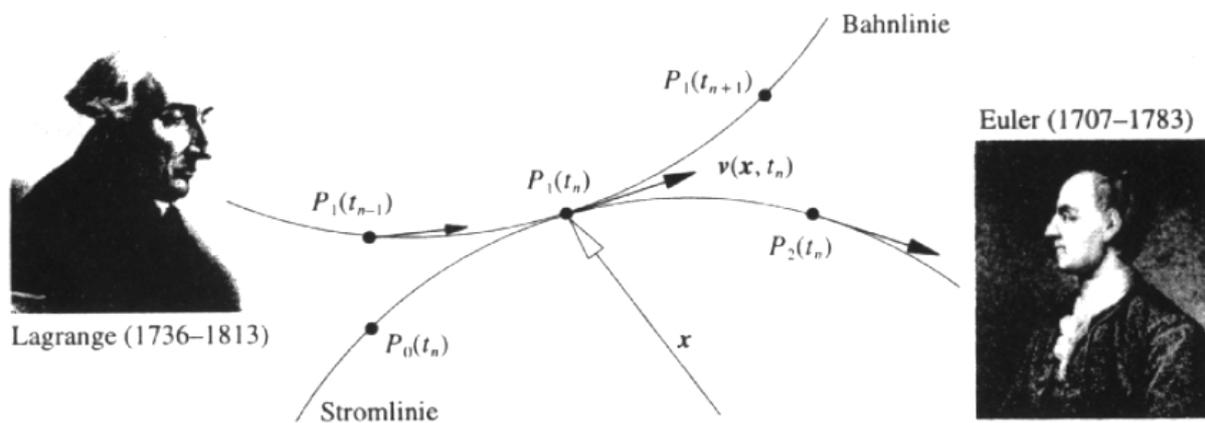


Bild 4.2: Bahnlinie und Stromlinie [WALL99]

Vom theoretischen Standpunkt aus sind beide Betrachtungsweisen äquivalent. Der Einsatz in bestimmten Aufgabengebieten erweist sich aber unterschiedlich kompliziert. Für die Strömungsmechanik wird zumeist die EULER-Darstellung, in der Strukturmechanik zumeist die LAGRANGE-Darstellung gewählt.

4.1.3 Kontinuumsmechanische Grundbegriffe

Zur Beschreibung des Verformungszustandes eines Körpers werden die kovarianten Basisvektoren als Tangentenvektoren des krummlinigen Koordinatensystem θ^i

$$\underline{\underline{g}}_i = \frac{\partial \underline{\underline{x}}}{\partial \theta^i} \quad \underline{\underline{G}}_i = \frac{\partial \underline{\underline{X}}}{\partial \theta^i} \quad (4.4)$$

benötigt, die in Bild 4.1 für die Referenz- und Momentankonfiguration dargestellt sind. Weiterhin werden die kontravarianten Basisvektoren der beiden Konfigurationen benötigt.

$$\underline{\underline{g}}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \underline{\underline{x}}} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} \underline{\underline{i}}^k \quad \underline{\underline{G}}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \underline{\underline{X}}} = \frac{\partial \theta^i}{\partial X^k} \underline{\underline{i}}^k \quad (4.5)$$

Eine weitere wichtige Größe stellt der Metriktensor der Momentankonfiguration

$$\underline{g} = g_{ij} \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j = g^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j = \underline{g}_i \otimes \underline{g}^i = \underline{I} \quad (4.6)$$

bzw. der Metriktenor der Referenzkonfiguration

$$\underline{G} = G_{ij} \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j = G^{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j = \underline{G}_i \otimes \underline{G}^i = \underline{I} \quad (4.7)$$

dar, mit den kovarianten bzw. kontravarianten Metrikkoeffizienten

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j & G_{ij} &= \underline{G}_i \cdot \underline{G}_j \\ g^{ij} &= \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j & G^{ij} &= \underline{G}^i \cdot \underline{G}^j \end{aligned} \quad (4.8)$$

und den Determinanten der Metriktensoren

$$g = \det \underline{g} \quad G = \det \underline{G}. \quad (4.9)$$

Die Größe eines differentiellen Volumenelementes in der verformten und der unverformten Konfiguration ergibt sich über die Metrikdeterminanten

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ dV_0 &= \sqrt{G} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

und die Volumenänderung wird durch die Jacobideterminante J beschrieben.

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\frac{g}{G}} \quad (4.11)$$

Für die kinematischen Gleichungen wird die partielle Ableitung eines Tensors 1. Stufe \underline{u} und eines Tensors 2. Stufe \underline{A} benötigt, deren Komponenten mit der kovarianten Ableitung übereinstimmen.

$$\underline{u}_{,i} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta^i} = \underline{u}_m \Big|_i \underline{g}^m = (\underline{u}_{m,i} - \Gamma_{mi}^r \underline{u}_r) \underline{g}^m \quad (4.12)$$

$$\underline{A}_{,i} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial \theta^i} = \underline{A}^{mn} \Big|_i \underline{g}_m \otimes \underline{g}_n = (\underline{A}^{mn,i} + \Gamma_{ir}^m \underline{A}^{rn} + \Gamma_{ir}^n \underline{A}^{mr}) \underline{g}_m \otimes \underline{g}_n \quad (4.13)$$

Hierzu sind die Christoffelsymbole der zweiten Art erforderlich.

$$\Gamma_{ir}^m = \underline{g}^m \cdot \underline{g}_{i,r} \quad (4.14)$$

Weiterhin wird die Definition der differentiellen Operatoren Gradient und Divergenz benötigt.

$$\text{grad} \underline{u} = \underline{u}_{,k} \otimes \underline{g}^k = \underline{u}_i \Big|_k \underline{g}^i \otimes \underline{g}^k \quad (4.15)$$

$$\text{grad} \underline{A} = \underline{A}_{,k} \otimes \underline{g}^k = \underline{A}_{ij} \Big|_k \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j \otimes \underline{g}^k$$

$$\text{div} \underline{u} = \text{grad} \underline{u} : \underline{I} = \underline{u}_{,k} \cdot \underline{g}^k = \underline{u}^k \Big|_k \quad (4.16)$$

$$\text{div} \underline{A} = \text{grad} \underline{A} : \underline{I} = \underline{A}_{,k} \cdot \underline{g}^k = \underline{A}^{ij} \Big|_j \underline{g}_i$$

Bei den Gleichungen (4.12) bis (4.16) ist nur eine Form der räumliche Darstellung gewählt worden. Weitere Darstellungen sind bei [BAŞAR&WEICHERT00] nachzulesen.

Werden zusätzlich zeitabhängige Größen betrachtet, so müssen die Ableitungen der kinematischen Größen nach der Zeit betrachtet werden. Für die physikalische Größe \underline{A} eines materiellen Körperpunktes \mathcal{M} muss zwischen der partiellen Zeitableitung

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \quad (4.17)$$

und der materiellen Zeitableitung

$$\frac{D\underline{A}}{Dt} = \dot{\underline{A}} \quad (4.18)$$

unterschieden werden. Bei der Darstellung in materiellen Koordinaten sind die beiden Ableitungen identisch.

$$\frac{D\underline{A}}{Dt} = \dot{\underline{A}} = \frac{\partial \underline{A}(\underline{X}, t, t_0)}{\partial t} \quad (4.19)$$

Für die Darstellung in räumlichen Koordinaten ergibt die materielle Zeitableitung neben dem lokalen partiellen Anteil einen zusätzlichen konvektiven Anteil,

$$\frac{D\underline{A}}{Dt} = \dot{\underline{A}} = \frac{\partial \underline{A}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{A}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + (\text{grad} \underline{A}) \underline{v} \quad (4.20)$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor \underline{v} . Die Aufteilung der materiellen Zeitableitung in einen partiellen und einen konvektiven Anteil wird in Bild 4.3 anhand eines Vektors \underline{u} illustriert.

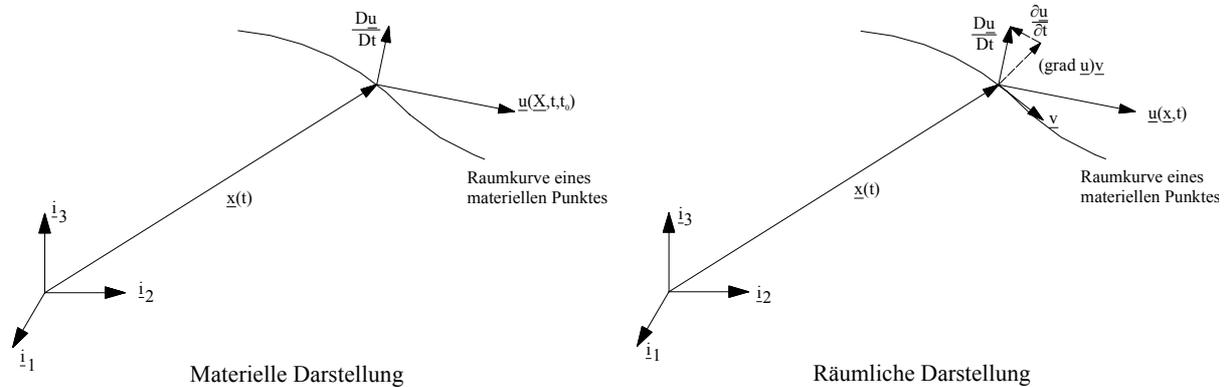


Bild 4.3: Materielle Zeitableitung eines Vektors \underline{u}

Mit Hilfe der eingeführten Verschiebung \underline{u} nach (4.23) kann die Geschwindigkeit \underline{v} als materielle Zeitableitung der Verschiebungen eingeführt werden.

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{u}} = \frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}(\underline{X}, t, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t} + (\text{grad} \underline{u}(\underline{x}, t)) \underline{v} \quad (4.21)$$

Aus der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit ergibt sich die Beschleunigung

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}(\underline{X}, t, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + (\text{grad} \underline{v}(\underline{x}, t)) \underline{v}. \quad (4.22)$$

4.1.4 Verformungszustand

Die kinematische Zustandsänderung eines Körperelementes lässt sich durch die Überlagerung einer Starrkörperbewegung, bestehend aus Translation und Rotation, und einer Verzerrung der Körperelemente darstellen. Die translatorische Bewegung der Körperpunkte beschreibt der Verschiebungsvektor \underline{u} .

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} = U_i \underline{G}^i = u_i \underline{g}^i \quad (4.23)$$

Die relativen Verschiebungen gibt der Gradient des Verschiebungsvektors an:

$$\text{grad} \underline{u} = \underline{u}_{,k} \otimes \underline{g}^k = u_{j|k} \underline{g}^j \otimes \underline{g}^k. \quad (4.24)$$

Da die Gradientenbildung und eine kovariante Ableitung $\underline{u}_{,i}$ identische Aussagen darstellen, werden die relativen Verschiebungen häufig durch die kovarianten Ableitungen ausgedrückt.

$$\underline{u}_{,i} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta^i} = U_{j|i} \underline{G}^j = u_{j|i} \underline{g}^j \quad (4.25)$$

Der Gradient ermöglicht auch eine Verknüpfung der Basisvektoren von Referenz- und Momentankonfiguration.

$$\underline{g}_i = \underline{u}_{,i} + \underline{G}_i = \underline{F} \underline{G}_i \quad (4.26)$$

In der Literatur ist dieser Zusammenhang meist durch den (nicht objektiven) Deformationsgradienten \underline{F} beschrieben, der aus dem materiellen Verschiebungsgradienten berechnet wird.

$$\underline{F} = \underline{I} + \text{GRAD} \underline{u} \quad (4.27)$$

Bei der Gradientenbildung wird der Starrkörper-Translationsanteil eliminiert. Die Information über den Starrkörper-Rotationsanteil ist jedoch immer noch Teil des Verschiebungsgradienten. Um die Verzerrungen zu separieren, wird der Gradient nun in Drehung und Verzerrung aufgespalten. Damit erhält man einen reinen Verzerrungs- und einen reinen Rotationszustand. In der Theorie endlicher Verformungen erfolgt eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten. In der infinitesimalen Theorie ist eine additive Zerlegung in reine Streckung (Verzerrung) und reine Drehung möglich. Dieser Vorgang wird in [BAŞAR&WEICHERT00] auch als „Polare Zerlegung des Deformationsgradienten“ bezeichnet. Aus dem reinen Verzerrungsanteil des Deformationsgradienten \underline{F} folgt in der EULERSchen Darstellung die Herleitung des EULER-ALMANSI-Verzerrungstensors \underline{e} . In der LAGRANGESchen Betrachtungsweise ergibt sich der materielle, objektive, symmetrische GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{G}) = E_{ij} \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j, \quad (4.28)$$

der in Abhängigkeit von den Verschiebungen \underline{u} auch wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (\underline{G}_i \cdot \underline{u}_{,j} + \underline{G}_j \cdot \underline{u}_{,i} + \underline{u}_{,i} \cdot \underline{u}_{,j}) \\ &= \frac{1}{2} (U_{i|j} + U_{j|i} + U^m{}_{|i} U_{m|j}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die geometrische Nichtlinearität des Verzerrungstensors darf bei endlichen Verzerrungen nicht vernachlässigt werden. Dagegen ist unter der Annahme infinitesimaler Formänderungen der Verschiebungsgradient $|\underline{u}_{,i}| \ll 1$. Damit ergibt sich der linearisierte Verzerrungstensor zu

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{G}_i \cdot \underline{u}_{,j} + \underline{G}_j \cdot \underline{u}_{,i}) \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j. \quad (4.30)$$

Geht man zusätzlich von kleinen Verschiebungen aus, so ist der Unterschied zwischen der LAGRANGESchen und der EULERSchen Betrachtungsweise vernachlässigbar.

$$U_{i|j} = u_{i|j} \quad (4.31)$$

Für den Verzerrungstensor \underline{E} gilt dann:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i|j} + U_{j|i}) = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}). \quad (4.32)$$

Unter diesen Voraussetzungen wird \underline{E} auch als infinitesimaler oder klassischer Verzerrungstensor $\underline{\varepsilon}$ bezeichnet.

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad} \underline{u} + (\text{grad} \underline{u})^T] \quad (4.33)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|i) \quad (4.34)$$

In dieser Darstellung wird deutlich, dass der klassische Verzerrungstensor dem symmetrischen Anteil der additiven Zerlegung des Verschiebungsgradienten entspricht.

$$\begin{aligned} \text{gradu} &= \frac{1}{2}[\text{gradu} + (\text{gradu})^T] + \frac{1}{2}[\text{gradu} - (\text{gradu})^T] \\ &= \text{sym}(\text{gradu}) + \text{skew}(\text{gradu}) = \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Der antimetrische Teil wird Rotationstensor $\underline{\omega}$ genannt.

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2}[\text{gradu} - (\text{gradu})^T] \quad (4.36)$$

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2}(u_i|_j - u_j|i). \quad (4.37)$$

4.2 Kinetische Grundlagen

Die kinetischen Beziehungen beschreiben den Einfluss innerer und äußerer Kräfte auf die Bewegungen und lassen sich aus den fundamentalen Prinzipien der Mechanik herleiten. Im folgenden Kapitel werden die Erhaltungssätze von Masse, Impuls und Drehimpuls erläutert. Die Erhaltungssätze der Energie und Entropie werden in Kapitel 4.3 vorgestellt. Die Aussagen des Impulserhaltungssatzes lassen sich in die Form des Prinzips der virtuellen Arbeit transformieren. Neben ihrer globalen Formulierung lassen sich die fundamentalen Sätze auch lokal formulieren, da sie für jedes Teilvolumen gelten und somit für jeden materiellen Punkt aufzustellen sind.

4.2.1 Externe Kraftgrößen und Spannungen

Den in Kapitel 4.1.4 eingeführten Verzerrungs- und Verschiebungsgrößen müssen energetisch äquivalente Spannungs- und Kraftgrößen zugeordnet werden. Die zu den äußeren Verschiebungsgrößen korrespondierenden äußeren Kraftgrößen können in Volumenkräfte

$$\underline{P}_V = \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \underline{f}_0 dV_0 \quad (4.38)$$

und Oberflächenkräfte

$$\underline{P}_A = \int_{\partial\mathcal{B}} \bar{\underline{t}} dA = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \bar{\underline{t}}_0 dA_0 \quad (4.39)$$

eingeteilt werden, mit \underline{f} als Volumenkraft pro Masseneinheit, $\bar{\underline{t}}$ als Oberflächenkraft pro Flächeneinheit und der Dichte ρ . Der Index (...)₀ kennzeichnet auch hier wieder die Referenzkonfiguration.

Zur Beschreibung des Spannungszustandes eines Körpers können verschiedene Spannungstensoren definiert werden, die sich entweder auf die Konfiguration des verformten Körpers oder die der unverformten Ausgangslage beziehen. Die dem GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor \underline{E} energetisch zugeordnete Größe ist der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$$\underline{S} = \underline{S}^T = S^{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j. \quad (4.40)$$

Er ist ein materieller, symmetrischer Tensor 2. Stufe, der sich auf die unverformte Konfiguration bezieht und daher keine physikalisch interpretierbare Größe darstellt. Eine physikalisch

interpretierbare Größe dagegen ist der dem ALMANSI-Verzerrungstensor \underline{e} energetisch zugeordnete CAUCHY-Spannungstensor

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T = \sigma^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j, \quad (4.41)$$

der sich als räumlicher Tensor auf die verformte Konfiguration bezieht und sich als lokale Beanspruchung nach dem EULERSCHEN Schnittprinzip durch gedachte Schnitte am materiellen Körper ergibt. In Bild 4.4 sind diese Schnitte in der Referenz- und Momentankonfiguration dargestellt. Man erkennt den in einem Flächenelement wirkenden wahren Spannungsvektor \underline{t} , der durch das CAUCHY-Theorem mit Hilfe der Flächennormalen \underline{n} den physikalisch sinnvollen CAUCHY-Spannungstensor $\underline{\sigma}$ ergibt

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}. \quad (4.42)$$

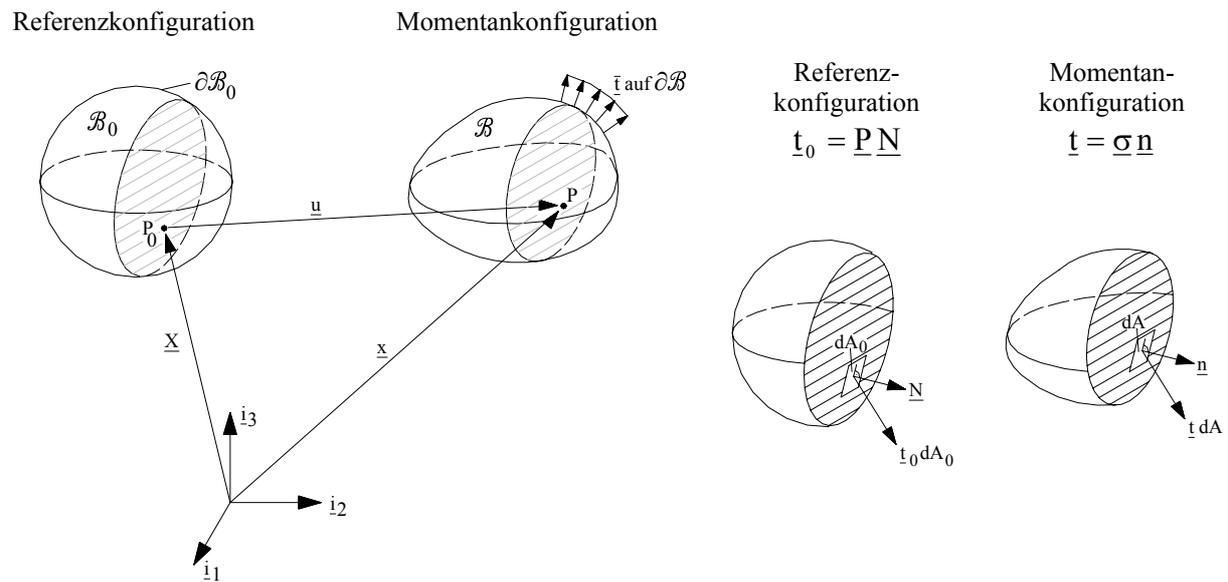


Bild 4.4: Darstellung der mechanischen Spannungen

Die äquivalente Beziehung in der Referenzkonfiguration benötigt die Einführung des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors

$$\underline{P} = P^{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j. \quad (4.43)$$

Er ist als materieller Tensor 2. Stufe dem Deformationsgradienten energetisch zugeordnet und im Allgemeinen nicht symmetrisch. Der Zusammenhang zwischen dem verwendeten materiellen 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \underline{S} und dem für die Interpretation der Ergebnisse notwendigen CAUCHY-Spannungstensor $\underline{\sigma}$ lautet

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{J} \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \\ \underline{P} &= \underline{J} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \end{aligned} \quad (4.44)$$

mit der Jacobideterminante

$$\underline{J} = \det \underline{F} \quad (4.45)$$

als Determinante des Deformationsgradienten. Sie darf laut [ECKSTEIN99] während eines Deformationsprozesses nicht singular werden, um eine eindeutige physikalische Abbildung zu ermöglichen.

4.2.2 Massenerhaltungssatz - Kontinuitätsgleichung

Das Gesetz von der Erhaltung der Masse besagt, dass die Gesamtmasse M der an physikalischen oder chemischen Vorgängen beteiligten Stoffe unveränderlich ist.

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}} \rho dV = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \dot{\rho}_0 dV_0 = 0 \quad (4.46)$$

Den lokalen Massenerhaltungssatz, der auch Kontinuitätsbedingung genannt wird, erhält man mit Hilfe der Transformation der Volumenelemente aus Gleichung (4.11) und (4.45) zu

$$\rho_0 = \rho \det \underline{F}. \quad (4.47)$$

Eine alternative Form der Kontinuitätsgleichung in räumlicher Form lautet:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0. \quad (4.48)$$

4.2.3 Impulserhaltungssatz - 1. Cauchy-Bewegungsgleichung

Das 1. Axiom der Mechanik, der Impulssatz, besagt, dass in einem abgeschlossenen System die erste materielle Zeitableitung des Impulses \underline{I} (Bewegungsgröße) gleich der Summe der äußeren Kräfte eines beliebigen Körpers ist.

$$\underline{P}_V + \underline{P}_A = \frac{D\underline{I}}{Dt} \quad (4.49)$$

In der integralen, räumlichen Form wird dabei auf die Volumen- und Oberflächenlasten nach Gleichung (4.38) und (4.39) sowie der Definition des Impulses als Massenintegral der Geschwindigkeit \underline{v} zurückgegriffen.

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\underline{t}} dA = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{v} dV \quad (4.50)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (4.48) ergibt sich

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\underline{t}} dA = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\underline{v}} dV. \quad (4.51)$$

Über die Kräfte randbedingung

$$\underline{t} = \bar{\underline{t}} \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B} \quad (4.52)$$

und das CAUCHY-Theorem (4.42) in Kombination mit dem GREEN-GAUSS-Integralsatz (der ein Oberflächenintegral in ein Volumenintegral konvertiert)

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \underline{t} dA = \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\sigma} \underline{n} dA = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \underline{\sigma} dV \quad (4.53)$$

ergibt sich die lokale Form des Impulserhaltungssatzes, auch 1. CAUCHY-Bewegungsgleichung genannt.

$$\rho \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma} = \rho \dot{\underline{v}} \quad (4.54)$$

Unter Vernachlässigung des Beschleunigungsterms entspricht die Bewegungsgleichung der statischen Gleichgewichtsbedingung.

4.2.4 Drehimpulserhaltungssatz - 2. CAUCHY-Bewegungsgleichung

Aus dem 2. Axiom der Mechanik, dem Drallsatz, geht hervor, dass in einem abgeschlossenen System die erste materielle Zeitableitung des Drehimpulses (oder Drall) \underline{L} gleich der Summe der äußeren Momente eines beliebigen Körpers ist.

$$\underline{M}_V + \underline{M}_A = \frac{D\underline{L}}{Dt} \quad (4.55)$$

Der Drehimpuls \underline{L} spielt für die Rotationsbewegung die gleiche Rolle wie der Impuls für die Translationsbewegung und ist definiert als das Massenintegral aus dem vektoriellen Produkt der Geschwindigkeit und dem von der Drehachse zum Körperelement weisenden Vektor \underline{r}_L .

$$\underline{L} = \int_m \underline{r}_L \times \underline{v} \, dm = \int_{\mathcal{B}} \underline{r}_L \times \underline{v} \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{r}_L \times \underline{v} \rho_0 \, dV_0 \quad (4.56)$$

Werden auch die Volumen- und Oberflächenmomente durch ihre integrale Form in räumlicher Darstellung ersetzt, lautet der Drehimpulserhaltungssatz

$$\int_{\mathcal{B}} \underline{r}_L \times \rho \underline{f} \, dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \underline{r}_L \times \underline{t} \, dA = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}} \underline{r}_L \times \rho \underline{v} \, dV. \quad (4.57)$$

Der lokale Drehimpulserhaltungssatz, der auch 2. CAUCHY-Bewegungsgleichung genannt wird, ergibt sich aus der lokalen Impulserhaltung in räumlicher Form (4.54) zusammen mit dem CAUCHY-Theorem (4.53), und der Kräfte- und Randbedingung (4.52). Die räumliche Form wird mit Hilfe des Permutationstensors ε_{ijk} ausgedrückt

$$\varepsilon_{ijk} \sigma^{ij} \underline{g}^k = 0. \quad (4.58)$$

Diese Aussage ist gleichbedeutend mit der als BOLTZMANN-Gesetz bekannten Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T. \quad (4.59)$$

In materieller Darstellung bedeutet dies die Symmetrie des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Tensors

$$\underline{S} = \underline{S}^T, \quad (4.60)$$

aber nicht die Symmetrie des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Tensors.

$$\underline{P} \neq \underline{P}^T \quad (4.61)$$

4.2.5 Arbeitsprinzip

Die Arbeitsprinzipien stellen die Gleichgewichtsbedingungen in schwacher Form dar und sind den Bilanzsätzen über den Impuls und den Drehimpuls nach Kapitel 4.2.3 und 4.2.4 äquivalent. Schwache Form bedeutet, dass die Gleichungen nicht mehr punktweise, sondern im Integral über das Gebiet erfüllt sein müssen. Besonders das Prinzip der virtuellen Arbeit, auch Prinzip der virtuellen Verformungen genannt, spielt in der Finiten-Element-Methode als Basis der so genannten finiten Weggrößenmodelle eine wichtige Rolle. Die schwache Form der Bewegungsgleichung ergibt sich mit Hilfe einer virtuellen, infinitesimal kleinen, geometrisch möglichen aber beliebigen Verformung $\delta \underline{u}$. Für die notwendige und hinreichende Erfüllung der lokalen Impuls- und Drehimpulserhaltungssätze muss ein Körper \mathcal{B} zu jeder Zeit t die Gleichgewichtsbedingungen (4.54) mit der Kräfte- und Randbedingung (4.52) auf dem Gebietsrand $\partial\mathcal{B}$ in der schwachen Form erfüllen, so dass sich die folgende Integraldarstellung ergibt.

$$\int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} - \rho \dot{\underline{v}}) \cdot \delta \underline{u} \, dV + \int_{\partial\mathcal{B}} (\underline{\bar{t}} - \underline{t}) \cdot \delta \underline{u} \, dA = 0 \quad (4.62)$$

Aus dem CAUCHY-Theorem (4.42) und der Beziehung

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \delta \underline{u} = \operatorname{div}(\underline{\sigma}^T \delta \underline{u}) - \underline{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \underline{u} \quad (4.63)$$

liefert der GAUßsche Integralsatz

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\underline{\sigma}^T \delta \underline{u}) dV = \int_{\partial \mathcal{B}} (\underline{\sigma}^T \delta \underline{u}) \cdot \underline{n} dA = \int_{\partial \mathcal{B}} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \delta \underline{u} dA \quad (4.64)$$

das Variationsprinzip

$$-\int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \underline{u} dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} \cdot \delta \underline{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\underline{t}} \cdot \delta \underline{u} dA = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\underline{v}} \cdot \delta \underline{u} dV \quad (4.65)$$

Hierbei können die Arbeitsanteile aufgeteilt werden in die virtuelle äußere Arbeit

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} \cdot \delta \underline{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\underline{t}} \cdot \delta \underline{u} dA \quad (4.66)$$

die virtuelle Arbeit der Beschleunigungsgröße

$$\delta W_{\text{traeg}} = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\underline{v}} \cdot \delta \underline{u} dV \quad (4.67)$$

und die virtuelle innere Arbeit

$$\delta W_i = \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \underline{u} dV \quad (4.68)$$

Hieraus ergibt sich die bekannte Form des Prinzips der virtuellen Arbeit

$$-\delta W_i + \delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{traeg}} \quad (4.69)$$

Die Arbeitsanteile können auch in die Referenzkonfiguration übertragen werden:

$$\delta W_i = \int_{\mathcal{R}_0} \underline{P} : \operatorname{GRAD} \delta \underline{u} dV_0 = \int_{\mathcal{R}_0} \underline{P} : \delta \underline{F} dV_0 = \int_{\mathcal{R}_0} \underline{S} : \delta \underline{E} dV_0 \quad (4.70)$$

$$\delta W_{\text{traeg}} = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \dot{\underline{v}} \cdot \delta \underline{u} dV_0 \quad (4.71)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underline{f}_0 \cdot \delta \underline{u} dV_0 + \int_{\partial \mathcal{R}_0} \bar{\underline{t}}_0 \cdot \delta \underline{u} dA_0 \quad (4.72)$$

Die Aussagen des Arbeitsprinzips sind allgemeingütig und auch inkrementell auf inelastische Materialien anzuwenden.

4.3 Thermodynamische Grundlagen

Die Thermodynamik definiert eine allgemein gültige Energielehre. Im 1. Hauptsatz, dem Energiesatz, werden die unterschiedlichen Energieformen verknüpft. Der 2. Hauptsatz, der Entropiesatz, erläutert die Bedingungen für die Umwandlung der verschiedenen Energieformen. Auf Grundlage dieser beiden Hauptsätze ergibt sich für reversible, isotherme Prozesse und mit Hilfe der HELMHOLTZSCHEN Energie Ψ ein vollständiges Potential, aus welchem die Spannungs- und Materialtensoren hergeleitet werden können. Ausgehend von diesem Potential ist gesichert, dass die fundamentalen physikalischen Gesetze (Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung, Energieerhaltung) automatisch erfüllt sind. Da die Thermodynamik nur allgemeine, für alle Systeme gültige Beziehungen aufstellt, sind Aussagen über ein spezielles System ohne weitere Informationen, zum Beispiel die Zustandsgleichungen, nicht möglich.

4.3.1 Mechanische Energie

Der Bilanzsatz der mechanischen Energie (Bilanzsatz der kinetischen Energie oder Arbeitsatz der Mechanik) stellt eine globale Gleichgewichtsbedingung äquivalent zum Impuls-

erhaltungssatz dar. Seine Herleitung erfolgt durch das Integral über das Volumen \mathcal{B} , indem die Gleichgewichtsbedingung (4.54) mit dem Geschwindigkeitsvektor des aktuellen Bewegungszustandes multipliziert wird. Durch Umformen erhält man die Bilanzgleichung der mechanischen Energie

$$-\int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} : \text{grad} \underline{v} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\bar{t}} \cdot \underline{v} \, dA = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\underline{v}} \cdot \underline{v} \, dV \quad (4.73)$$

$$- P_i \quad + \quad A \quad = \quad \dot{K}$$

mit P_i als innere Spannungsleistung, der Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräfte A und der gesamten kinetischen Energie K eines mechanischen Systems. Die kinetische Energie des Massenpunktes ändert sich durch Zufuhr oder Abgabe von Energie in Form von Arbeit. Arbeit und kinetische Energie haben dieselbe Dimension, sie sind Variablen derselben Größenart „Energie“.

Dieser Satz besitzt, neben den äquivalenten Arbeitsprinzipen, in der Mechanik als Ausgangspunkt vieler Herleitungen eine besondere Bedeutung. Er ist aber kein unabhängiger Fundamentalsatz sondern nur eine spezielle Form des allgemeingültigen Energiesatzes, des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik.

4.3.2 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Die Anwendung dieses Grundsatzes verknüpft die Energieformen innere Energie, Wärmeenergie und mechanische Energien. Der Bilanzsatz der inneren Energie besagt, dass in einem abgeschlossenen System die zeitliche Änderung der inneren Energie U identisch ist mit der Summe der inneren Spannungsleistung P_i und der zugeführten Wärme Q

$$\frac{DU}{Dt} = P_i + Q \quad \forall \mathcal{B} \quad , \quad (4.74)$$

wobei die thermischen Einflüsse in Form des Wärmeflusses \underline{q} über die Oberfläche des materiellen Körpers und der Wärmequelle r im materiellen Körper erfasst werden. In räumlicher integraler Form bedeutet dies

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}} \rho u \, dV = \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} : \text{grad} \underline{v} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \rho r \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{q} \cdot \underline{n} \, dA \quad , \quad (4.75)$$

mit u als massenspezifischer innerer Energiedichte. Mit Hilfe des GAUßschen Integralsatzes (4.53), bezogen auf den Wärmefluss und die Kontinuitätsgleichung in seiner räumlichen Darstellung (4.48), wird daraus

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \dot{u} \, dV = \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} : \text{grad} \underline{v} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \rho r - \text{div} \underline{q} \, dV \quad . \quad (4.76)$$

Da auch diese Gleichung für jedes Teilvolumen des materiellen Körpers gilt, kann der lokale Hauptsatz in der materiellen Form geschrieben werden zu

$$\rho \dot{u} = \underline{\sigma} : \text{grad} \underline{v} + \rho r - \text{div} \underline{q} \quad . \quad (4.77)$$

4.3.3 2. Hauptsatz der Thermodynamik - CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung

Für den 2. Satz der Thermodynamik wird als Maß der Prozessrichtung die Entropie S eingeführt. Diese besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Entropie S niemals abnehmen kann, sondern sie bleibt bei reversiblen Vorgängen konstant und nimmt bei irreversiblen Vorgängen zu. Der deutsche Physiker CLAUSIUS hat dies mit dem Satz ausgedrückt: „Es kann niemals Wärme von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen. Ein derartiger Vorgang kann vielmehr nur unter Zufuhr mechanischer Arbeit erreicht werden“.

Unter Einführung der massenspezifischen Entropiedichte s und der Temperatur T bedeutet dies in räumlicher integraler Form

$$\frac{DS}{Dt} = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{s} dV \geq \int_{\mathcal{B}} \rho \frac{r}{T} dV - \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} dV \quad \forall \mathcal{B} . \quad (4.78)$$

Die lokale Form des 2. Hauptsatzes wird auch CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung genannt und lautet

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} - \rho \frac{r}{T} \geq 0 . \quad (4.79)$$

Geht man von isothermen Prozessen ($T = \text{const}$; $\dot{T} = 0$) aus, so vereinfacht sich diese Gleichung mit Hilfe der Beziehung

$$T \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} = \operatorname{div} \underline{q} - \frac{\underline{q}}{T} \operatorname{grad} T \quad (4.80)$$

laut [STEIN&BARTHOLD97] zu

$$T \rho \dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} - \rho r \geq 0 . \quad (4.81)$$

Wenn die lokalen Aussagen des 1. und 2. Hauptsatzes (4.77) und (4.81) kombiniert werden, ergibt sich

$$\rho(T\dot{s} - \dot{u}) + \underline{\sigma} : \operatorname{grad} \underline{v} \geq 0 . \quad (4.82)$$

4.4 Konstitutive Grundlagen

In den Kapiteln 4.1 bis 4.3 sind die stoffunabhängigen Gleichungen der Kontinuumsmechanik und der Thermodynamik erläutert. Zur eindeutigen strukturmechanischen Beschreibung werden stoffabhängige Gleichungen benötigt, die die eingeführten, energetisch zugeordneten inneren Kraft- und Weggrößen miteinander verknüpfen und konsistent zu den Aussagen der stoffunabhängigen Gleichungen sein müssen. Diese konstitutiven Gleichungen, auch Materialgesetze oder Stoffgleichungen genannt, werden für ein ideales Material definiert und stellen Funktionale dar, die von den äußeren Einwirkungen (äußere Lasten und Wärmeflüsse) und ihren resultierenden Reaktionen (Bewegungen des materiellen Punktes, Spannungen, Temperatur, Dichte, innere Energie, spezifische Entropie) abhängen. Die Wahl des Funktionals sowie der unabhängigen Variablen hat direkten Einfluss auf die Formulierung der konstitutiven Gleichung. Durch eine systematische Wahl der unabhängigen Variablen wird die allgemeine Darstellung der Materialgesetze auf die bekannten Formen reduziert, wie in der Arbeit von [NOLL74] gezeigt wird.

4.4.1 Konstitutive Gleichungen einer idealen Flüssigkeit

Um die theoretischen Grundlagen der Thermodynamik praktisch anwenden zu können, ist eine genaue Kenntnis der physikalischen Eigenschaften der Stoffe erforderlich. Die Materialparameter können durch Messung der Zustandsgrößen Druck, Dichte und Temperatur bestimmt werden. Der Zusammenhang dieser Parameter wird durch die thermische Zustandsgleichung eines Fluides beschrieben

$$F(p, \rho, T) = 0 . \quad (4.83)$$

Diese Gleichung ist nur für wenige fluide Phasen bekannt. Ist der Druck sehr gering, so gilt für ideale, also nicht-viskose, Fluide

$$p = \rho RT , \quad (4.84)$$

mit der speziellen Gaskonstante R . Reale Fluide weichen nach [BAEHR92] unter hohem Druck zum Teil beträchtlich von dieser Gleichung ab. Für Flüssigkeiten wird daher häufig die Zustandsgleichung (4.85) verwendet, die unter isothermen Bedingungen sowie der Annahme einer geringen Kompressibilität gültig ist und von dem Kompressionsmodul K abhängt.

$$\dot{p} = -\dot{\rho} \frac{K}{\rho} \quad (4.85)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (4.48) wird dieser Zusammenhang in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes formuliert.

$$\dot{p} \frac{1}{K} = \text{div} \underline{v} \quad (4.86)$$

Weiterhin zeichnen sich ideale Flüssigkeiten dadurch aus, dass an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt keine Tangentialspannungen (keine inneren Reibungen) auftreten und somit der Spannungstensor $\underline{\sigma}$ durch den hydrostatischen Spannungszustand $p = p(\underline{x}, t, \rho)$ ersetzt werden kann.

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} \quad (4.87)$$

Viele Flüssigkeiten leisten der Gestaltänderung kaum (im idealen Fall gar keinen) Widerstand und lassen sich somit gut durch die Gleichungen (4.85-87) beschreiben. Gemäß dem PASCALSchen Gesetz über die Isotropie des Druckes ist der Druck p in einem idealen Flüssigkeitspunkt in allen Richtungen gleich groß. Das negative Vorzeichen in Gleichung (4.87) liegt in der Tatsache begründet, dass Flüssigkeiten nur Druckspannungen aufnehmen können. Für die weitere Verwendung in Kapitel 5.1.1 wird Gleichung (4.87) in folgende Form transformiert:

$$\text{div} \underline{\sigma} = \text{div}(-p \underline{I}) = -\text{grad} p . \quad (4.88)$$

4.4.2 Konstitutive Gleichungen für die elastomere Zwischenschicht

Die Gruppe der Elastomere zeichnet sich durch ein nahezu vollständig elastisches Verhalten mit hoher Bruchdehnung und relativ großer Verformung aus. Allerdings können nennenswerte Verformungsanteile elastisch-verzögert auftreten. Auch der starke Einfluss der Temperatur auf die mechanischen Eigenschaften erschwert die Angabe einfacher Kennwerte.

Unter kurzfristiger Belastung kann das Verformungsverhalten des für tragende Bauteile verwendeten Materials linear elastisch nach dem HOOKESchen Materialgesetz beschrieben werden. Auch bei sehr hohen Belastungen treten nach [WESCHE88] nur in geringem Maße plastische Verformungen auf. Daher wird im Folgenden zur Beschreibung der elastomeren Zwischenschicht der Tankschale das in Kapitel 6.3.1 eingesetzte konstitutive Gesetz eines homogenen, isotropen, linear elastischen Materials

$$\underline{S} = \underline{D} : \underline{E} \quad (4.89)$$

benutzt, mit den Komponenten des Werkstoffensors

$$D^{ijkl} = G(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{kl}) \quad (4.90)$$

in Abhängigkeit des Schubmoduls G und der Querkontraktion ν .

Materialgesetze für isotrope, elastische nichtlineare Materialien auf Grundlage von hyperelastischen Stoffgleichungen finden sich in [STEIN&BARTHOLD97]. Unter Vorgabe von Potentialfunktionen (skalarwertige Tensorfunktionen) werden dort das OGDEN-Modell für kompressible Materialien und das MOONEY-RIVLIN-Modell sowie das NEO-HOOKE-Modell

für inkompressible Materialien vorgestellt. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit die elastomere Schicht nur in Kombination mit der Beton- und Stahlschale des Behälters eingesetzt wird, um die gegenseitige Beeinflussung des mehrschaligen Wandaufbaus zu beschreiben, wird auf die Abbildung der Nichtlinearitäten verzichtet.

4.4.3 Konstitutive Gleichungen für Stahlbeton und Stahl

Für die verwendeten Werkstoffe Stahl und Beton sind in Kapitel 2.1.4 verschiedene, aus der Literatur bekannte Möglichkeiten zur Materialbeschreibungen zusammengestellt. In der vorliegenden Arbeit wird das nichtlineare Materialverhalten des Stahls durch die Plastizitätstheorie abgebildet, wie von [MONTAG97] beschrieben. Für den Werkstoff Beton werden die von [ZAHLTEN90] gegebenen Modellierungen nach einer reinen elasto-plastischen Theorie sowie der elasto-plastischen Theorie in Kombination mit der Mikrorissstheorie verwendet. Für die Abbildung im Zugbereich kommt das „Fixed Crack Model“ nach [ZAHLTEN90] zum Einsatz.

Im Folgenden werden die Plastizitätstheorie und die Schädigungstheorie kurz vorgestellt; für weitergehende Informationen wird auf die oben genannten Arbeiten verwiesen.

Grundlagen der Elasto-Plastizitätstheorie

In der klassischen Plastizitätstheorie wird das Materialverhalten in einen elastischen Bereich, innerhalb dessen rein linear-elastisches Verhalten vorliegt, und einen durch plastisches Verhalten geprägten Bereich unterteilt. Der Übergang zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich ist durch die **Fließbedingung** (Fließfläche) definiert.

$$F(\underline{\sigma}, \alpha_k) = 0 \quad (4.91)$$

Diese skalarwertige Funktion ist im isothermen Fall abhängig von dem Spannungszustand $\underline{\sigma}$ und den gewählten internen Variablen α_k .

Die Auswertung der Fließbedingung ermöglicht eine Entscheidung, ob das Materialverhalten unter einem bestimmten Spannungszustand elastisch bleibt, oder ob ein plastisches Verhalten vorliegt:

- $F < 0$: elastisches Materialverhalten, keine plastischen Verzerrungen,
- $F = 0$: plastisches Materialverhalten,
- $F > 0$: kein zulässiger Zustand bei zeitunabhängiger Theorie, da der Spannungspunkt die Fließfläche nicht in Richtung $F > 0$ verlassen kann.

Bei vielen Materialien kann die Spannung nach Überschreiten der Fließgrenze weiter ansteigen. Die Beschreibung dieser Verfestigung erfolgt auf Grundlage von **Verfestigungshypothesen** (kinematische, isotrope, anisotrope Verfestigung), die die Evolution der Fließfläche beschreiben, welche sich aufgrund der plastischen Deformationen verändert. Von ideal-plastischem Verhalten wird gesprochen, wenn keine Verfestigung vorliegt. Zur Beschreibung des Materialverhaltens des Stahls wird die VON-MISES Fließbedingung mit isotroper und kinematischer Verfestigung eingesetzt.

$$F = \sqrt{3 \cdot J_2(\underline{\sigma} - \underline{\rho})} - (\sigma_F + K \varepsilon^{pl}) = 0 \quad (4.92)$$

Die interne, skalare Variable ε^{pl} entspricht einer äquivalenten plastischen Verzerrungsgröße, die mit dem Parameter K die Vergrößerung der Fließfläche infolge isotroper Verfestigung definiert. Die ursprüngliche Fließfläche wird durch die einaxiale Fließspannung σ_F beschrieben. $\underline{\rho}$ wird auch als „Back-Stress“-Tensor bezeichnet, da er den durch die kinematische Verfestigung verschobenen Mittelpunkt der Fließfläche beschreibt.

Für die Beschreibung des Materialverhaltens des Betons wird im Folgenden die DRUCKER-PRAGER Fließbedingung mit kinematischer Verfestigung verwendet:

$$F = \sqrt{J_2(\underline{\sigma} - \underline{\rho})} + \alpha I_1(\underline{\sigma} - \underline{\rho}) - k = 0. \quad (4.93)$$

Hierbei ist J_2 die zweite Invariante des deviatorischen Spannungsanteils und I_1 stellt die erste Invariante des Spannungstensors dar.

In der Theorie der kleinen Verzerrungen setzt sich der Verzerrungstensor, und damit auch sein Inkrement, additiv aus einem elastischen, reversiblen Anteil und einem inelastischen, plastischen Bestandteil zusammen.

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}^{\text{el}} + d\underline{\varepsilon}^{\text{pl}} \quad (4.94)$$

Das Tragverhalten im elastischen Bereich wird von den bekannten elastischen Materialgesetzen beschrieben. Zur Bestimmung des Tragverhaltens im plastischen Bereich wird zusätzlich ein plastisches Materialgesetz, das so genannte **Fließgesetz**, benötigt, das auf der Definition eines plastischen Potentials g basiert. Als plastisches Potential wird die Fließbedingung F gewählt, was zu der als **Normalenregel** bezeichneten assoziierten Fließregel in Gleichung (4.95) führt

$$d\underline{\varepsilon}^{\text{pl}} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}. \quad (4.95)$$

Diese Fließregel gibt Richtung und Größe der inkrementellen plastischen Verzerrung an. Zur Bestimmung ihrer Größe wird die Konsistenzbedingung benötigt, zur Bestimmung der Richtung werden die Belastungs-/Entlastungsbedingungen herangezogen.

Die **Konsistenzbedingung**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} d\alpha_k = 0 \quad (4.96)$$

sagt aus, dass während der plastischen Belastungsphase der Spannungs- und Verzerrungszustand auf der Fließfläche bleiben. Da die Bedingung $F = 0$ während der plastischen Belastung erhalten bleiben muss, gilt auch $F + dF = 0$, wodurch das Differential dF verschwindet. Mit Hilfe dieser Gleichung wird der skalare Konsistenzparameter $d\lambda$ bestimmt. Er entspricht null, solange sich das Werkstoffverhalten im elastischen Bereich befindet und wird erst dann ungleich (größer) null, wenn plastische Verformungen auftreten.

Die Auswertung der **Belastungs-** und **Entlastungsbedingungen** erlaubt eine Unterscheidung, ob sich der Materialpunkt gerade im elastischen oder plastischen Bereich befindet, und ob ein Belastungs- oder Entlastungsvorgang vorliegt.

	Fließfläche	Belastungs- Entlastungsbedingung	Konsistenzparameter
Elastischer Bereich	$F < 0$	$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} < 0$	$d\lambda = 0$
Neutrale Spannungsänderung	$F = 0$	$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} = 0$	$d\lambda = 0$
Plastische Belastung	$F = 0$	$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} > 0$	$d\lambda > 0$

Tabelle 4.1: Unterteilung des Materialverhaltens bei der Plastizitätstheorie

Für den Sonderfall der ideal-plastischen Materialien lässt sich die Konsistenzbedingung durch

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} = 0 \quad (4.97)$$

ausdrücken, so dass nun der Fall einer „Neutralen Spannungsänderung“ dem plastischen Belastungsfall entspricht, da $dF > 0$ nicht auftreten darf.

Schädigungstheorie

Im Rahmen der Schädigungstheorie wird das Materialverhalten in einen elastischen Bereich und einen Schädigungsbereich unterteilt. Der Schädigungsbereich beschreibt die Evolution der Mikrorisse. Dies hat im Gegensatz zur Plastizitätstheorie eine Steifigkeitsabnahme zur Folge, führt aber zu keinen bleibenden Verformungen. Trotz der Diskontinuitäten wird der Werkstoff weiterhin als Kontinuum betrachtet, der Einfluss von Mikrodefekten wie zum Beispiel Mikroporen und Mikrorissen auf die mechanischen Materialeigenschaften wird durch interne Variablen beschrieben. Der Übergang zwischen dem elastischen und dem Schädigungsbereich ist durch die **Schädigungsbedingung** oder Schädigungsfläche definiert.

$$F_D(\underline{\varepsilon}, \alpha_D) = 0 \quad (4.98)$$

Diese skalarwertige Funktion ist vergleichbar mit der Fließbedingung in der Plastizitätstheorie und kennzeichnet auf ähnliche Weise das Materialverhalten:

- $F_D < 0$: elastisches Materialverhalten, keine Schädigung,
- $F_D = 0$: schädigendes Materialverhalten, Mikrorissevolution,
- $F_D > 0$: nicht zulässig bei zeitunabhängiger Theorie.

Die von [ZAHLTEN90] angegebene Schädigungsbedingung mit kinematischer Verfestigung lautet

$$F = \sqrt{J'_2(\underline{\varepsilon} - \underline{\rho}_e)} + \alpha I'_1(\underline{\varepsilon} - \underline{\rho}_e) - k_D = 0 \quad (4.99)$$

wobei $\underline{\rho}_e$ den durch die kinematische Verfestigung verschobenen Mittelpunkt der Schädigungsfläche beschreibt. J'_2 ist die zweite Invariante des deviatorischen Verzerrungsanteils und I'_1 stellt die erste Invariante des Verzerrungstensors dar.

Während die Plastizitätstheorie den Materialzustand durch die Spannungen beschreibt, formuliert die Schädigungstheorie den Materialzustand traditionell durch die Verzerrungen. Daher wird nun ein Schädigungsgesetz zur Bestimmung der inkrementellen Spannungsabnahme benötigt, das analog zur Plastizitätstheorie auf der Basis eines Schädigungspotentials s beruht. Das Schädigungspotential wird durch die Bruchbedingung F_D beschrieben.

$$d\underline{\sigma}^{da} = d\lambda_D \frac{\partial s}{\partial \underline{\varepsilon}} = d\lambda_D \frac{\partial F_D}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (4.100)$$

Diese Schädigungsregel gibt Richtung und Größe der inkrementellen Schädigungsspannung an, für die ähnlich zur Plastizitätstheorie die Konsistenzbedingung sowie Belastungs- und Entlastungsbedingungen benötigt werden.

[ZAHLTEN90] kombiniert für den Werkstoff Beton die Schädigungstheorie mit der Plastizitätstheorie, indem er die Größen der spannungsbasierten Plastizitätstheorie in Abhängigkeit von den Verzerrungen ausdrückt, so dass sich die Spannungsinkremente wie folgt ergeben:

$$d\underline{\sigma} = d\underline{\sigma}^{el} - d\underline{\sigma}^{pl} - d\underline{\sigma}^{da} .$$

Beton unter Zugbelastung

Für die Rissbildung des Betons im Zugbereich verwendet [ZAHLTEN90] das orthogonale „Fixed Crack Model“. Die Rissbildung wird hierbei in Abhängigkeit von den Hauptzugspannungen beschrieben. Sobald die maximale Hauptzugspannung die Zugfestigkeit des Betons erreicht, öffnet sich senkrecht zu dieser Hauptzugspannungsrichtung ein Primärriss. Senkrecht zu diesem Riss kann sich ein weiterer Riss ausbilden. Das Rissmodell erlaubt ein sich wieder Schließen eines Risses, so dass der Beton erneut in die Lage versetzt wird, Druckspannungen aufzunehmen. Die Rissinformationen werden abgespeichert, so dass im weiteren Belastungsverlauf eine eventuell erneut auftretende Zugspannung nicht mehr aufgenommen werden kann.

Für weitere Informationen zu den Materialmodellen wird auf [ZAHLTEN90] und [MONTAG97] verwiesen.

Flüssigkeit

Die Auswirkungen durch Erdbeben hervorgerufener Flüssigkeitsbewegungen auf die Standsicherheit einer Tankstruktur müssen aufgrund der gegenseitigen Beeinflussung durch komplexe Berechnungsverfahren ermittelt werden. Die in Kapitel 2 vorgestellten Näherungsverfahren ersetzen die Flüssigkeit durch reine Massenanteile und sind für eine grobe Abschätzung der Interaktionsbeziehung geeignet. Genauere Untersuchungen erfordern jedoch die Verwendung aufwendigerer Rechenmodelle. Mit Hilfe der Finiten-Element-Methode kann eine realitätsnahe Abbildung der Flüssigkeit durch finite Flüssigkeitselemente erfolgen, wodurch Näherungsverfahren überflüssig werden. Im Verlauf der letzten 20 Jahre sind unterschiedliche Ansätze für finite Fluidelemente entstanden, die aufgrund ihres komplexen Verhaltens häufig nur wenige Einsatzmöglichkeiten unter begrenzten Randbedingungen erlauben. Im folgenden Kapitel wird ein finites Flüssigkeitselement unter Verwendung des LAGRANGESchen Ansatzes hergeleitet, wobei die zugrundeliegenden Ansätze und die mit ihnen verbundenen Beschränkungen diskutiert werden. Anschließend erfolgt eine Verifikation des entwickelten Elementes.

5.1 Beschreibung der Flüssigkeit

5.1.1 Bewegungsgleichung für nicht viskose Flüssigkeiten

Die Beschreibung von Fluidbewegungen kann anhand der EULERSchen oder der LAGRANGESchen Formulierung erfolgen. Wie in Kapitel 4.1.2 erläutert, unterscheiden sich die EULERSche und die LAGRANGESche Darstellung in erster Linie durch die Definition des Standpunktes des Beobachters. Unter theoretischen Gesichtspunkten sind beide Betrachtungsweisen äquivalent. Prinzipiell ist die Beschreibung der Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit nach EULER den Problemen der Strömungsmechanik besser angepasst. Im Bereich der nicht-linearen Theorie turbulenter Strömungen erfordert die LAGRANGESche Darstellung laut [GERSTEN74] einen sehr viel höheren mathematischen Aufwand und wird daher in diesem Sektor kaum eingesetzt. Treten dagegen nur geringe Flüssigkeitsverformungen und -geschwindigkeiten auf, so kann die Bewegungsgleichung nach EULER einfach in ihr LAGRANGESches Pendant überführt werden. Damit lässt die Wahl der Darstellungsart beim

Einsatz eines entsprechenden finiten Fluidelementes unter dynamischer Belastung von Tankbauwerken keine Unterschiede in den Ergebnissen erwarten. Auch durch die großen Amplituden der freien Oberfläche bei Schwappbewegungen erfahren die finiten Elemente keine großen Volumen- oder Dichteänderungen, so dass die Annahme kleiner Verzerrungen gerechtfertigt ist.

Mit der Wahl der LAGRANGESchen Beschreibung eines Flüssigkeitselementes ergeben sich gegenüber der EULERSchen Formulierung große Vorteile bei der Kopplung der Flüssigkeit mit der Tankstruktur, da Strukturelemente im Allgemeinen ebenfalls in der LAGRANGESchen Darstellung formuliert sind.

Im Folgenden wird die Bewegungsgleichung für eine ideale, kompressible, nicht-viskose Flüssigkeit unter isothermen Bedingungen aufgestellt. Ausgangspunkt hierfür bilden die in Kapitel 4 hergeleiteten kinetischen, thermodynamischen und konstitutiven Grundlagen in räumlicher Form, die in Tabelle 5.1 zusammengefasst sind.

Bezeichnung	Gleichung	Kapitel
Kontinuitätsgleichung	$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$	4.2.2
1. CAUCHY-Bewegungsgleichung	$\rho \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma} = \rho \underline{a}$	4.2.3
2. CAUCHY-Bewegungsgleichung	$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$	4.2.4
1. Hauptsatz der Thermodynamik (Energieerhaltung)	$\rho \dot{u} = \underline{\sigma} : \operatorname{grad} \underline{v} + \rho r - \operatorname{div} \underline{q}$	4.3.2
Stoffgesetz (konstitutive Gleichung)	$\underline{\sigma} = -p \underline{I}$ $\operatorname{div} \underline{\sigma} = -\operatorname{grad} p$	4.4.1
Zustandsgleichung für isentrope und barotrope Flüssigkeiten	$\dot{p} = -\dot{\rho} \frac{K}{\rho}$	4.4.1

Tabelle 5.1: Grundgleichungen einer idealen, kompressiblen, nicht-viskosen Flüssigkeit

Durch die Verknüpfung der 1. CAUCHY-Bewegungsgleichung mit dem Stoffgesetz ergibt sich die EULERSche Bewegungsgleichung eines reibungsfreien Fluides

$$\rho \underline{f} - \operatorname{grad} p = \rho \underline{a} \quad , \quad (5.1)$$

die einen Sonderfall der NAVIER-STOKES-Bewegungsgleichung für viskose Fluide darstellt. Wird die Beschleunigung \underline{a} nach (4.22) als materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit \underline{v} dargestellt, so können für Flüssigkeitsbewegungen mit geringen Verzerrungsveränderungen die höherwertigen konvektiven Anteile der Geschwindigkeitsableitung vernachlässigt werden, so dass die materielle Zeitableitung der partiellen Ableitung entspricht:

$$\rho \underline{f} - \operatorname{grad} p = \rho \left[(\operatorname{grad} \underline{v}) \underline{v} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \right] \approx \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \quad . \quad (5.2)$$

Mit der Substitution der Geschwindigkeit durch die Verschiebung \underline{u} nach Gleichung (4.2.1) unter der Voraussetzung geringer Flüssigkeitsbewegungen wird die EULER-Bewegungsgleichung nochmals transformiert:

$$\rho \underline{f} - \operatorname{grad} p = \rho \underline{\ddot{u}} \quad . \quad (5.3)$$

In der Kontinuitätsgleichung wird mit Hilfe der Zustandsgleichung die Dichte eliminiert. Die sich ergebende Gleichung

$$\operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{div} \underline{\dot{u}} = \frac{1}{K} \dot{p} \quad (5.4)$$

wird in Kombination mit der Bewegungsgleichung (5.3) in den Kapiteln 5.1.2 und 5.1.3 benötigt.

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik aus Tabelle 5.1 bringt als Fundamentalsatz das Prinzip von der Erhaltung der Energie zum Ausdruck, er wird zur Lösung des vorliegenden Anfangs-Randwertproblems mit Hilfe der Finiten-Element-Methode aber nicht direkt benötigt. FE-Formulierungen werden aus der Integraldarstellung der Bewegungsgleichungen, also der schwachen Form, abgeleitet. Hierzu werden häufig Energie- bzw. Variationsprinzipie benutzt, wie zum Beispiel das Prinzip der virtuellen Verrückungen aus Kapitel 4.2.5, das zumeist bei der LAGRANGESchen Beschreibung als Grundlage der Integraldarstellung verwendet wird. Für die EULER-Darstellung erfolgt die Formulierung der schwachen Form über die GALERKIN-Formulierung, also der Methode der gewichteten Residuen, die hier nicht weiter verfolgt wird. Eine nähere Betrachtung der 2. CAUCHY-Bewegungsgleichung entfällt, da die Symmetriebedingung des Spannungstensors automatisch durch das konstitutive Gesetz erfüllt wird.

5.1.2 EULER-Formulierung

Die EULER-Formulierung beschreibt den Zustand der Flüssigkeit durch den Druck oder ein Geschwindigkeitspotential. Die Anzahl der Freiheitsgrade bei einer FE-Umsetzung ist gering, was für die numerische Bearbeitung einen großen Vorteil darstellt. Für die Kopplung des Fluidelementes mit Elementen aus der Strukturmechanik werden jedoch Übergangselemente benötigt, da letztere im Allgemeinen über die Verschiebungsgrößen definiert sind. Nach [KIM&YUN97] kann eine Berechnung einerseits über das Gesamtsystem erfolgen, was zu unsymmetrischen Matrizen führt, oder über die einzelne Lösung beider Teilprobleme, wobei die Berücksichtigung der Interaktion iterativ erfolgt und zu extrem großen Bandbreiten führt. Oftmals ist der Einsatz eines speziellen FE-Codes nötig, um derartige Probleme zu bewältigen.

Aufgrund der Fixierung auf einen festen Raumpunkt eignet sich die EULER-Formulierung für die Beschreibung großer Fluiddeformationen. Die umgebende Struktur darf dabei allerdings keinen großen Verformungen unterliegen, da dies eine aufwendige Beschreibung der sich ändernden Gebietsränder nach sich ziehen würde. Numerische Instabilitäten und eine ungenügende numerische Approximation durch die verwendete GALERKIN-Formulierung erfordern ein zusätzliches Stabilisierungsverfahren bei der numerischen Umsetzung. Diese Probleme sind nach [WALL99] unter anderem auf die konvektiven Anteile und auf die kombinierte Geschwindigkeits-Druck-Formulierung zurückzuführen.

Die Bewegungsgleichung (5.3), bei der eine Vernachlässigung der konvektiven Anteile schon erfolgt ist, kann nun, in Abhängigkeit der unabhängigen Druckvariablen p , in ihre diskrete Form der Finiten-Element-Methode überführt werden. Die Elimination der Verschiebungen \underline{u} erfolgt dabei mit Hilfe der Gleichung (5.4).

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho \underline{f} - \operatorname{grad} p}{\rho}\right) = \frac{1}{K} \ddot{p} \quad (5.5)$$

Diese Gleichung wird in der Form

$$\rho \operatorname{div} \underline{f} - \operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \frac{\rho}{K} \ddot{p} \quad (5.6)$$

zusammen mit der Nebenbedingung an der freien Oberfläche auf dem Rand A_S

$$\mathbf{n}^i \cdot \ddot{u}_i = \ddot{u}_g = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^g} \quad (5.7)$$

und mit der Randbedingung Fluid-Struktur auf dem Rand A_I

$$\mathbf{n}^i \cdot \ddot{\mathbf{u}}_i = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \quad (5.8)$$

für das Verfahren von GALERKIN als Residuum benutzt, das mit Hilfe der Gewichtungsfunktionen $\underline{\Omega}$ die Grundlage für die Ableitung einer FE-Formulierung bildet.

$$\int_{\mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \cdot (-\rho \operatorname{div} \underline{f} + \operatorname{div}(\operatorname{grad} p) + \frac{\rho}{K} \ddot{p}) dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \frac{\ddot{p}}{g} dA_S + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \mathbf{n} \ddot{u} \rho dA_I = 0 \quad (5.9)$$

Hierbei ist der Zusammenhang

$$\mathbf{p} = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_g \quad (5.10)$$

verwendet worden, so dass sich die Randbedingung an der freien Oberfläche A_S zu

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^g} = \frac{\ddot{p}}{\rho g} \quad (5.11)$$

ergibt. Der Index (...) ^g zeigt die Bewegung der Flüssigkeitsoberfläche in Richtung der Erdschwere an, da nur diese Richtung als Randbedingung der freien Oberfläche zu beachten ist. Gleichung (5.9) stellt die Grundlage der Finiten-Element-Formulierung für ein Flüssigkeitselement nach der EULER-Formulierung dar. Mit Hilfe des Integralsatzes von GAUß-GREEN und aufgrund der Diskretisierung der unabhängigen kontinuierlichen Druckvariablen p durch die diskreten Knotenvariablen \underline{p}_d und die Formfunktionenmatrix $\underline{\Omega}$

$$\mathbf{p} = \underline{\Omega} \underline{p}_d \quad (5.12)$$

erhält man die diskrete ungedämpfte Bewegungsgleichung.

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \underline{\Omega}^T \nabla \underline{\Omega} dV \underline{p}_d + \left[\int_{\mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \frac{\rho}{K} \underline{\Omega} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \frac{1}{g} \underline{\Omega} dA_S \right] \ddot{\underline{p}}_d + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \mathbf{n} \ddot{u} \rho dA_I = \int_{\mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \rho \operatorname{div} \underline{f} dV \quad (5.13)$$

In Matrixschreibweise ergeben sich so die druckbehaftete Massenmatrix \underline{H} , die steifigkeitsbezogene Matrix \underline{E} , in die auch die Anteile der Steifigkeit aus der freien Oberfläche eingehen, der Vektor der Interaktionskräfte \underline{q}_I und der äußere Lastvektor \underline{q} .

$$\underline{H} \underline{p}_d + \underline{E} \ddot{\underline{p}}_d + \underline{q}_I = \underline{q} \quad (5.14)$$

5.1.3 LAGRANGE-Formulierung

Die LAGRANGESche Formulierung dient im Allgemeinen der Beschreibung von Bewegungen in der Strukturmechanik. Damit bietet diese Formulierungsweise große Vorteile für die Kopplung der Flüssigkeit mit der Tankwand. Große Strukturverformungen stellen kein Problem bei der Beschreibung dar. Auch die Schwappbewegungen der freien Flüssigkeitsoberfläche entsprechen großen, aber möglichen Randbewegungen, da diese Verformungen zu keinen extremen Netzverzerrungen führen. Eine Beschreibung von großen Fluiddeformationen, wie die Partikelbewegung in Strömungen und Verwirbelungen, ist allerdings nur mit hohem Aufwand möglich. Darum muss der Einsatz von LAGRANGE-Elementen auf kleine Elementverzerrungen beschränkt bleiben.

Durch den Einsatz der Verschiebungsvariablen wird die Anzahl der Freiheitsgrade eines FE-Systems im Gegensatz zur Potentialbeschreibung in EULERform stark erhöht. Dieser Nachteil wird durch die Symmetrie des Gleichungssystems und eine mögliche Bandbreitenoptimierung teilweise wieder aufgehoben. Analog zu Kapitel 5.1.2 kann mit Hilfe der Bewegungsgleichung (5.3) und der Kontinuitätsgleichung (5.4) die diskrete Bewegungsgleichung für die Finite-Element-Methode angegeben werden. In der LAGRANGESchen Darstellung erfolgt dabei die Elimination der Druckvariablen p in Abhängigkeit der Verschiebungsgröße \underline{u} .

$$\rho \underline{f} - \text{grad}(K \text{div} \underline{u}) = \rho \ddot{\underline{u}} \tag{5.15}$$

Die Nebenbedingung der freien Oberfläche nach (5.7) wird nun direkt in der Form (5.10)

$$\underline{t} = \underline{n} p = -p \underline{g} = -\rho g \underline{u}_g \tag{5.16}$$

in Abhängigkeit der Druckvariablen aufgestellt, wobei \underline{t} die Oberflächenspannungen beschreibt. Als Grundlage der FE-Entwicklung wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (4.65) als schwache Form benötigt, welches sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.15), (5.16) und der konstitutiven Gleichung aus Tabelle 5.1 ergibt.

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} \cdot \delta \underline{u} dV - \int_{\mathcal{B}} p \underline{I} : \text{grad} \delta \underline{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{t} \cdot \delta \underline{u} dA = \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV \tag{5.17}$$

Wird die Dilatation e als Divergenz des Verschiebungsvektors formuliert

$$e = \text{div} \underline{u} = \text{grad} \underline{u} : \underline{I} , \tag{5.18}$$

so ergibt sich das Prinzip der virtuellen Verrückungen angewendet auf ein kompressibles, unviskoses Fluid:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} \cdot \delta \underline{u} dV - \int_{\mathcal{B}} p \delta e dV - \int_{\partial \mathcal{B}} \rho g \underline{u}_g \cdot \delta \underline{u} dA = \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV . \tag{5.19}$$

Äquivalent zu den in Gleichungen (5.12) bis (5.14) vorgestellten Zusammenhänge kann die diskrete Form der Bewegungsgleichung für ein finites Flüssigkeitselement nach der LAGRANGESchen Formulierung angegeben werden. Da diese Punkte aber in Kapitel 5.2 ausführlich hergeleitet und erläutert werden, wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

5.1.4 Arbitrary-LAGRANGIAN-EULERIAN-Formulierung – ALE

Da die beiden klassischen Formulierungen nach EULER und LAGRANGE Unzulänglichkeiten bezüglich der Finiten-Element-Beschreibung der Flüssigkeit aufweisen, wurde mit der Arbitrary-LAGRANGIAN-EULERIAN-Formulierung (ALE) eine Beschreibung entwickelt, die die Vorteile der beiden klassischen Formulierungen koppelt. Grundidee der ALE-Formulierung ist eine beliebige (arbitrary) Bewegung der Flüssigkeit, so dass sich der Beobachter weder mit dem Materiepunkt (LAGRANGE) bewegt, noch an einen Raumpunkt (EULER) gebunden ist. Daher wird zusätzlich zum Raumgebiet und dem Materialgebiet ein drittes Gebiet, das so genannte Referenzgebiet eingeführt. Dieses Referenzgebiet ist beliebig bewegbar und beschreibt den kinematischen Vorgang. Somit befinden sich das Raum- und das Materialgebiet bezüglich des Referenzgebietes in Bewegung.

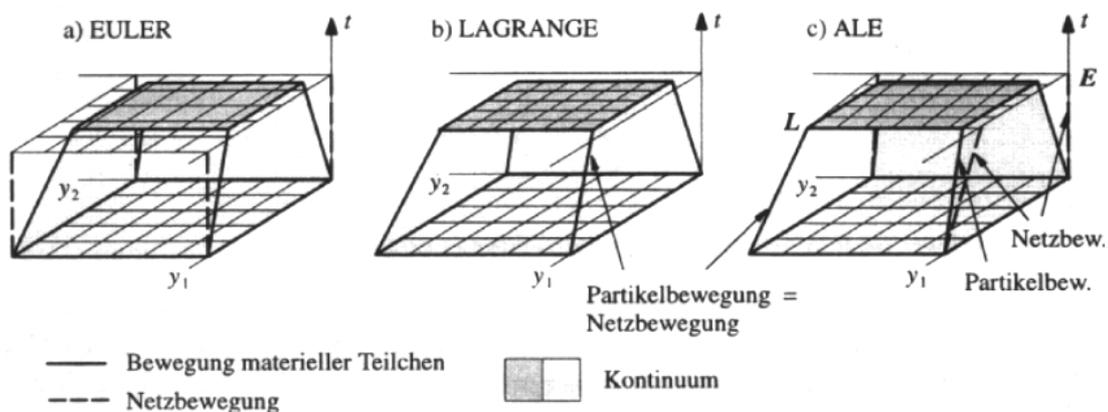


Bild 5.1: Graphische Interpretation der Formulierungen für ein FE-Netz [WALL99]

[WALL99] interpretiert dies graphisch durch Bild 5.1, indem das Finite-Element-Netz bei der numerischen Umsetzung den Beobachter ersetzt. Hierbei kann sich das FE-Netz im Laufe der

Zeit entweder unveränderlich im räumlichen Koordinatensystem (EULER), in Bewegung mit der Materie (LAGRANGE) oder aber in einer beliebigen Bewegung (ALE) befinden. Bei der ALE-Betrachtungsweise können einzelne Punkte auch ein reines EULERverhalten (Knoten E) oder reines LAGRANGEverhalten (Knoten L) aufweisen. Durch die Beschreibung von drei Gebieten (Material-, Raum- und Referenzgebiet) wird der numerische Aufwand extrem hoch und nach [LADEWIG94] werden dabei die Grenzen des technisch Möglichen sehr schnell überschritten. Die ALE-Formulierung bietet sowohl auf dem Gebiet der Flüssigkeitstanks wie auch auf dem Gebiet der Strömungsberechnung große Möglichkeiten, ist aber durch seine extrem aufwendige Beschreibung und Umsetzung für den Einsatz in der vorliegenden Arbeit nicht verwendbar. Aus diesem Grund wurde diese Betrachtungsweise frühzeitig ausgeschlossen. Für weitere Informationen wird auf [WALL99] verwiesen, der ein stabilisiertes ALE-Element für die Fluid-Struktur-Interaktion hergeleitet hat. Die klassischen Ansätze nach EULER und LAGRANGE ergeben sich nach [WALL99] als Sonderfälle der ALE-Formulierung.

5.1.5 EULER versus LAGRANGE

Die Wahl der Notation für die Beschreibung der Flüssigkeit muss sich nach der Einsatzmöglichkeit richten. In der vorliegenden Arbeit werden Tankbauwerke unter Erdbebenbeanspruchung untersucht, wobei in erster Linie der hydrodynamische Druck auf die Behälterwand, nicht aber die genaue Druckverteilung innerhalb des Fluids von Interesse ist. Während relativ große Schalenverformungen, und an der Flüssigkeitsoberfläche große Flüssigkeitsbewegungen zu erwarten sind, erscheinen Strömungszustände wie Verwirbelungen eher unwahrscheinlich. Es werden also Systeme mit beweglichen Rändern betrachtet, so dass eine Formulierung mit einer einfachen Beschreibung der Gebietsränder vorteilhaft ist. Genau diesen Vorteil bietet die materialpunktorientierte LAGRANGESche Sichtweise, da selbst bei großen Strukturdeformationen die Definition der Randbedingungen keine Schwierigkeit bereitet. Durch Erweiterung der Ansätze lassen sich Probleme mit bewegten Rändern zwar auch auf Grundlage der EULER-Formulierung lösen, dies ist aber mit einem zusätzlichen entwicklungs-technischen und numerischen Aufwand verbunden, der teilweise mit nachteiligen Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften einhergeht. Die Möglichkeit der EULER-Schreibweise, auf relativ einfache Weise große Flüssigkeitsdeformationen bei inkompressiblen Strömungen zu beschreiben, ist für die Anwendung bei Flüssigkeitstanks unter Erdbebenbelastung nicht erforderlich. Die linearisierte Beschreibung der Bewegungsgleichung ist damit ausreichend und lässt sich am einfachsten durch die Darstellung nach LAGRANGE realisieren.

Daher wird für die Simulation der Flüssigkeit zur Berechnung von Tankbauwerken die LAGRANGESche Betrachtungsweise zur Umsetzung der linearisierten Bewegungsgleichung nach Kapitel 5.1.3 gewählt, um ein entsprechendes finites Flüssigkeitselement herzuleiten.

5.2 Entwicklung eines Finiten Flüssigkeitselementes auf Basis der LAGRANGESchen Formulierung

5.2.1 Problembeschreibung

Bei der Umsetzung der kontinuierlichen LAGRANGE-Gleichung einer kompressiblen, inviskosen Flüssigkeit auf Grundlage des Arbeitsprinzips nach (5.19) in ein finites Flüssigkeitselement sind im Vergleich zur Strukturmechanik weitergehende Überlegungen nötig. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass Flüssigkeiten über keine bestimmte Gestalt verfügen und somit bei Flüssigkeiten, im Gegensatz zu Festkörpern, keine gestaltelastischen

Verformungen wie Dehnung, Torsion, Scherung oder Biegung auftreten. Flüssigkeiten unterliegen nur volumenelastischen Verformungen, die, ähnlich wie bei Festkörpern, zu großen Druckspannungen führen. Das Materialgesetz als Bindeglied zwischen dem Flüssigkeitsdruck p und der Volumenänderung der Flüssigkeit, der Dilatation e , kann mit Hilfe des Kompressionsmoduls K ausgedrückt werden:

$$p = K \cdot e \quad (5.20)$$

Das Flüssigkeitselement verhält sich ähnlich wie ein entsprechendes Volumenelement ohne Schubmodul. Durch den vernachlässigten Schubmodul wird die Elastizitätsmatrix jedoch singular und es müssen nach [ZIENKIEWICZ&BETTES78] sogenannte Zero-Energy-Moden erwartet werden. Bei der Entwicklung von Flüssigkeitselementen mit linearem Weggrößenansatz fällt dies nicht weiter auf, da der lineare Weggrößenansatz nicht nur einen Widerstand gegen die konstante Volumendeformation, sondern auch fälschlicherweise gegen einen linearen Dehnanteil hervorruft. Dadurch bildet das Element die Steifigkeit der Flüssigkeit viel zu hoch ab und eliminiert so niedere Eigenformen, wie etwa die Schwappeigenform der Oberfläche. Durch die Möglichkeit der „reduzierten Integration“ lässt sich dieser Effekt unterdrücken. Damit wird die volle Integration eines 2×2 GAUßpunktnetzes für ebene, bzw. eines $2 \times 2 \times 2$ GAUßpunktnetzes für räumliche Elemente auf einen einzigen GAUßpunkt reduziert. Nachteil der reduzierten Integration ist die Entstehung sogenannter Hourglassmoden, oder auch Zirkulationsmoden genannter Eigenformen, die auftreten, da das einzelne Flüssigkeitselement keinerlei Beschränkung in seiner Rotation mehr unterliegt.

Ein solcher Hourglassmode ist in Bild 5.2 dargestellt. Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, wurde der Name Hourglass wegen der eieruhrähnlichen Verformung der Finiten Elemente gewählt. Bei diesen falschen Moden handelt es sich nicht nur um Zero-Energy-Moden, sondern häufig auch um Moden mit Eigenwerte ungleich Null.

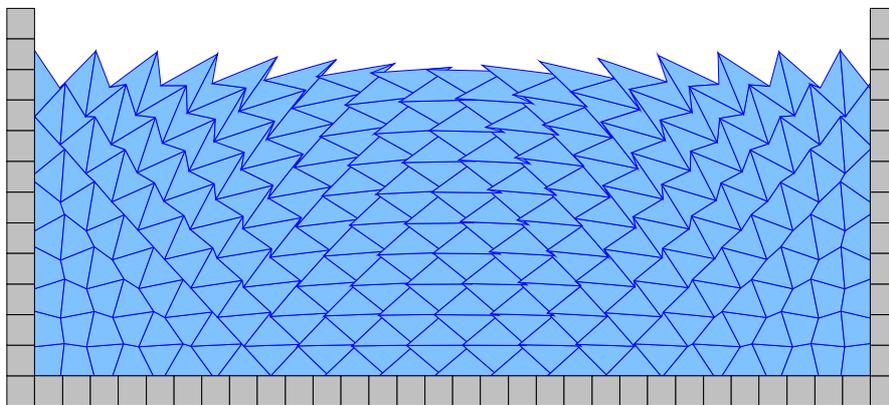


Bild 5.2: Hourglassmode

Je feiner die Diskretisierung gewählt wird, desto eher treten diese falschen Eigenformen auf. Bei unviskosen Flüssigkeiten kann zur Behebung der unerwünschten Moden auf die Bedingung der Rotationsfreiheit

$$\frac{d}{dt} \underline{\omega} = \underline{0} \quad (5.21)$$

mit dem Rotationsvektor

$$\underline{\omega} = \text{rot} \underline{u} = \underline{0} \quad (5.22)$$

zurückgegriffen werden. Diese Bedingung wird mit Hilfe eines mathematischen Strafparameters α in die Energiebilanz (5.19) aufgenommen.

$$\delta W^* = \delta W + \alpha \cdot \delta W_{\text{rot}} \quad (5.23)$$

Dieser Arbeitsanteil der Rotationen ist definiert durch

$$\alpha \cdot \delta W_{\text{rot}} = \alpha \cdot \int_{\mathcal{B}} \underline{\omega} \cdot \delta \underline{\omega} \, dV \tag{5.24}$$

und kann als Arbeit zwischen den Rotationen $\underline{\omega}$ und den ihnen energetisch zugeordneten, aber imaginären Kräften $\underline{\sigma}_{\text{rot}}$ interpretiert werden. Hierzu wird ein imaginäres Materialgesetz mit Hilfe des Strafparameters α eingeführt. Der Strafparameter α kann in diesem Zusammenhang auch als Rotationssteifigkeitsparameter oder als Rotationsstrafparameter $K_{\text{rot}} = \alpha$ interpretiert werden:

$$\underline{\sigma}_{\text{rot}} = K_{\text{rot}} \underline{\omega} \tag{5.25}$$

Durch die Wahl eines hohen Rotationsparameters nähern sich die Rotationen, und damit die assoziierte Rotationsenergie, dem Wert Null. Die Arbeitsgleichung (5.16) lautet unter Berücksichtigung des Rotationsanteils wie folgt:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \underline{\ddot{u}} \cdot \delta \underline{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \delta \underline{e} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma}_{\text{rot}} \cdot \delta \underline{\omega} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{t} \cdot \delta \underline{u} \, dA = \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{f} \cdot \delta \underline{u} \, dV \tag{5.26}$$

Den einzelnen Anteilen der Arbeitsbilanz kann folgende Bedeutung zugewiesen werden:

- Energie der Massenkräfte,
- Dehnungsenergie,
- Energie aus Rotationsbeschränkung,
- Potentielle Energie der Oberfläche und
- Energie der äußeren Lasten.

Mit Hilfe des Rotationsstrafparameters K_{rot} werden die Fluidelemente so kalibriert, dass ausreichend viele Steifigkeitsanteile addiert werden, um eine "innere" Rotation der Flüssigkeitselemente zu verhindern, aber gerade so wenig, dass sie sich nicht negativ versteifend auf die Berechnungen auswirken. Der Rotationsanteil der Steifigkeitsmatrix wird voll, der Dehnanteil reduziert integriert, so dass eine selektiv-reduzierte Integration vorliegt.

[WILSON&KHALVATI83] stellen in ihrer Arbeit ein ebenes Fluidelement auf Grundlage dieser Formulierung vor, das von [STEMPNIEVSKI90] zu einem räumlichen Element erweitert wird. Die Formulierungen wurden jeweils in kartesischen Koordinaten durchgeführt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführte Berechnungen zeigen jedoch, dass die Elemente bei einer verzerrten Elementgeometrie für die statische Berechnung ungeeignet sind, während bei einer dynamischen Berechnung der Einfluss der Masse so groß wird, dass das Ergebnis der ersten Eigenform hinreichend genau bleibt. Bild 5.3 zeigt die Verformungsfigur eines flüssigkeitsgefüllten Tanks unter Eigengewicht. Selbst eine kleine, kaum sichtbare Verzerrung der Elementgeometrie zerstört die korrekte Lösung vollständig.

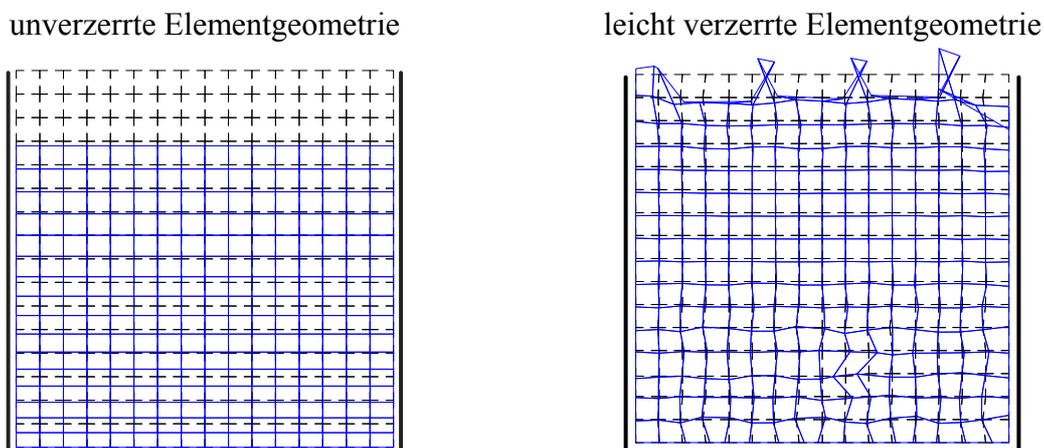


Bild 5.3: Verformungsfigur unter Eigengewicht

Um ein Element zu entwickeln, das für statische und dynamische Berechnungen gleichermaßen Verwendung finden kann, wird in der vorliegenden Arbeit eine Herleitung auf Grundlage konvektiver Koordinaten nach [BAŞAR&KRÄTZIG85] gewählt. Dadurch werden die Verformungsvariablen der jeweiligen Tankgeometrie angepasst, so dass die Elemente zwar im globalen kartesischen Referenzsystem verzerrt erscheinen, jedoch im Parameterraum eine Quaderform besitzen. Neben einer fehlerfreien statischen Berechnung liegt ein weiterer Vorteil in der für eine Diskretisierung erforderlichen geringeren Elementanzahl. Selbst bei dem heutigen Stand der Computerentwicklung ist dies ein nicht zu unterschätzender Faktor, da volumenartige Strukturen extrem rechnerintensiv sind.

Als Grundlage für das zu entwickelnde Element in konvektiven Koordinaten werden im folgenden Abschnitt die Grundgleichungen in allgemeinen, konvektiven Variablen abgeleitet.

5.2.2 Beschreibung der Grundgleichungen in konvektiven Koordinaten

Die ungedämpfte Bewegungsgleichung lautet

$$\underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{u}}_g = \underline{\mathbf{P}}(t) \quad (5.27)$$

und enthält die Anteile

- $\underline{\mathbf{M}}$ = Massenmatrix,
- $\underline{\mathbf{K}}$ = Steifigkeitsmatrix, Anteil aus Volumenänderung,
- $\underline{\mathbf{R}}$ = Steifigkeitsmatrix, Anteil aus Rotationsbeschränkung,
- $\underline{\mathbf{S}}$ = Steifigkeitsmatrix, Anteil aus Oberflächenbewegung und
- $\underline{\mathbf{P}}$ = Lastvektor aus z.B. Eigengewicht, Wind oder schwimmenden Objekten.

Die Massenmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ entsteht aus den Arbeitsanteilen der Trägheitskräfte F^i (pro Volumen) an den Verschiebungen u_i .

$$F^i = \rho a^{ij} \ddot{u}_j \quad (5.28)$$

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ enthält Anteile aus der Volumenänderung und der Rotationsbeschränkung, die eingeführt werden muss, um Starrkörperrotationen der Elemente zu unterdrücken. Grundlage hierfür ist der Deformationsgradient nach (4.25)

$$u_i|_j = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i) + \frac{1}{2}(u_i|_j - u_j|_i). \quad (5.29)$$

Der symmetrische Anteil entspricht dem klassischen Verzerrungstensor (4.33)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i), \quad (5.30)$$

aus dem sich die koordinateninvariante Dilatation

$$e = g^{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5.31)$$

ergibt. Der antimetrische Anteil entspricht einer reinen Starrkörperrotation nach (4.36) und wird für die Rotationsbeschränkung benötigt.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j - u_j|_i) \quad (5.32)$$

An der Dilatation e leistet der koordinateninvariante Flüssigkeitsdruck p Arbeit, der mittels eines linearen Materialgesetzes über den Kompressionsmodul K mit der Dilatation verknüpft ist:

$$p = K e. \quad (5.33)$$

Als zur Rotation ω_{ij} korrespondierende innere Kraftgröße wird die physikalisch nicht interpretierbare Spannungsgröße σ_{rot}^{ij} eingeführt. Hierbei wird in Analogie zur kontinuums-

mechanischen Spannungsberechnung auf die Berechnung des Elastizitätstensors für den Fall isotropen Werkstoffverhaltens zurückgegriffen und auf das hiesige Problem übertragen.

$$\sigma^{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[g^{ir} g^{js} + g^{is} g^{jr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{rs} \right] \varepsilon_{rs} \quad (5.34)$$

Für den Sonderfall unviskoser Flüssigkeiten verschwindet die Querkontraktion ν , und der Rotationsstrafparameter K_{rot} ersetzt den Elastizitätsmodul E . Unter Berücksichtigung der antimetrischen Starrkörperrotation ω_{ij} , der nur an dem antimetrischen Spannungsanteil Arbeit leistet, erhält man

$$\sigma_{\text{rot}}^{ij} = K_{\text{rot}} g^{ir} g^{js} \omega_{rs}. \quad (5.35)$$

Eine besondere Eigenschaft von Flüssigkeiten stellt die volumentreue Formänderung in Form vertikaler Wellenbewegungen dar. Hierzu müssen Energieanteile berücksichtigt werden, die aus dem Heben bzw. Senken des Flüssigkeitsspiegels resultieren. Für eine genaue Beschreibung dieses Phänomens wird auf [WILSON&KHALVATI83] verwiesen. Als Ergebnis ist festzuhalten, dass der entstehende Term als Arbeit von vertikalen Oberflächenkräften p_g^i an der vertikalen Oberflächenverschiebung u_{gi} interpretiert werden kann.

$$p_g^i = \gamma g^{ij} u_{gj} \quad (5.36)$$

Abschließend sind noch die äußeren Lasten p^i zu berücksichtigen, die eine äußere Arbeit an den Verformungen u_i leisten. Diese Arbeitsanteile treten sowohl flächenbezogen als auch volumenbezogen auf, wobei hier nur das Eigengewicht der Flüssigkeit betrachtet werden soll. Für die virtuelle Arbeit in Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen ergibt sich damit in Analogie zu (5.26) folgender Ausdruck:

$$\int_{\mathcal{B}} \delta u_i F^i dV + \int_{\mathcal{B}} \delta e p dV + \int_{\mathcal{B}} \delta \omega_{ij} \sigma_{\text{rot}}^{ij} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \delta u_{gi} p_g^i dA = \int_{\mathcal{B}} \delta u_i p^i dV. \quad (5.37)$$

5.2.3 Diskretisierung und Implementierung

Entwickelt wird ein isoparametrisches räumliches 8-Knoten Element mit je drei Freiheitsgraden pro Knoten. Neben diesem linearen Ansatz pro Richtung ist in einer vorhergehenden ebenen Elementformulierung auch ein biquadratischer Ansatz getestet worden. Es ergaben sich aber bei gleichzeitiger Erhöhung des Rechenaufwandes keine wesentlichen Verbesserungen, so dass für die räumliche Formulierung der trilineare Ansatz als ausreichend erachtet wird. Die Diskretisierung der unabhängigen kontinuierlichen Verschiebungsvariablen \underline{u} erfolgt mit den in Bild 5.4 gegebenen Formfunktionen $\underline{\Omega}$ und den diskreten Knotenvariablen $\hat{\underline{u}}$.

$$\underline{u} = \underline{\Omega} \hat{\underline{u}} \quad (5.38)$$

Die Diskretisierung der Beschleunigungen wird ebenfalls mit Hilfe der Formfunktionenmatrix $\underline{\Omega}$ durchgeführt:

$$\ddot{\underline{u}} = \underline{\Omega} \ddot{\hat{\underline{u}}}. \quad (5.39)$$

Die Diskretisierung der Oberflächenverschiebungen in Gravitationsrichtung benötigt dagegen eine eigene Formfunktionenmatrix $\underline{\Omega}_g$. Hier werden die in krummlinigen Koordinatenrichtungen definierten Verschiebungen in die Gravitationsrichtung umgerechnet:

$$\underline{u}_g = \underline{\Omega}_g \hat{\underline{u}}. \quad (5.40)$$

Dies ist an dem Beispiel der Zylinderkoordinaten in Anhang C erläutert. Ebenfalls in Anhang C sind alle in Kapitel 5.2.3 vorgestellten matriziellen Größen durch ihre indizierte Schreibweise angegeben, um die Belegung dieser Größen zu verdeutlichen.

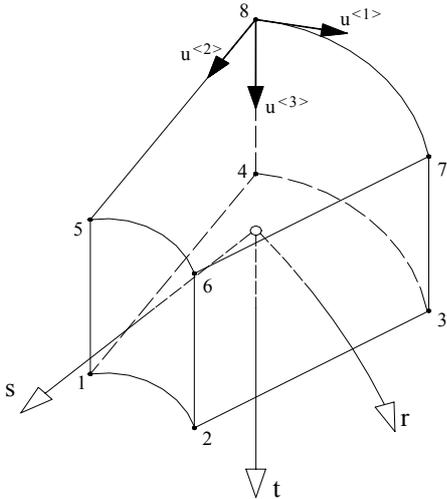
Isoparametrisches finites Element mit 8 Knoten	Ansatzfunktionen
	$\Omega_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$ $\Omega_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$ $\Omega_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$ $\Omega_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$ $\Omega_5 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$ $\Omega_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$ $\Omega_7 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$ $\Omega_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$

Bild 5.4: Räumliches Flüssigkeitselement, Darstellung in Zylinderkoordinaten

Die Ansätze erfolgen zunächst für die kovarianten Verschiebungskomponenten u_i . Für eine spätere Kopplung des Fluids mit Strukturelementen der Tank- und Unterkonstruktion werden die kovarianten tensoriellen Knotenfreiheitsgrade \hat{u}_i in kontravariante physikalische Komponenten $\hat{u}^{<i>}$ transformiert. Für die Zylindergeometrie ist beispielhaft in Bild 5.5 die Darstellung des Ortsvektors in Zylinderkoordinaten angegeben.

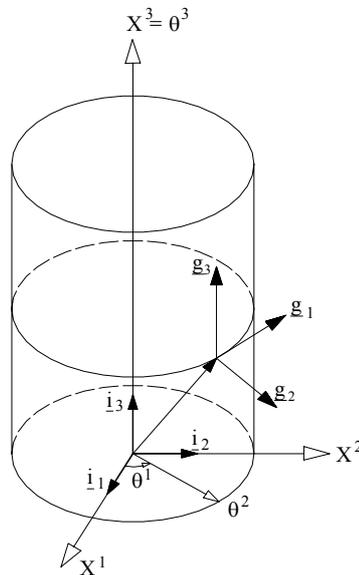


Bild 5.5: Ortsvektor in Zylinderkoordinaten

Für die Berechnung des Deformationsgradienten nach (5.29) wird aufgrund der tensoriellen Herleitung die kovariante Ableitung der Verschiebungsansätze benötigt, die auf die Christoffelsymbole nach (4.14) zurückgreift.

$$u_i|_j = u_{i,j} - u_m \Gamma_{ij}^m \tag{5.41}$$

Die Indizes beziehen sich auf die krummlinigen Koordinaten θ^i . Bei dem Übergang auf diskrete Variablen durch die Formfunktionen werden die Terme der inversen Jacobimatrix \underline{J}

benötigt, da die Elementansätze auf den Einheitskoordinaten (r,s,t) basieren, die Kinematik jedoch Ableitungen bezüglich der krummlinigen Koordinaten θ^i erfordert.

$$\underline{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta^1} & \frac{\partial s}{\partial \theta^1} & \frac{\partial t}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial r}{\partial \theta^2} & \frac{\partial s}{\partial \theta^2} & \frac{\partial t}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial r}{\partial \theta^3} & \frac{\partial s}{\partial \theta^3} & \frac{\partial t}{\partial \theta^3} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Der Übergang der Gleichung (5.41) von der kontinuierlichen zur diskreten Beschreibung lautet somit

$$\underline{u}_i|_j = \sum_{\text{Knoten } k} [\Omega_{k,j} \hat{u}_i^k - \Omega_k \hat{u}_m^k \Gamma_{ij}^m] , \quad (5.43)$$

unter Berücksichtigung der Kettenregel

$$\Omega_{k,j} = \frac{\partial \Omega_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \Omega_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \Omega_k}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta^j} . \quad (5.44)$$

Für die matrizielle, diskrete Form des Deformationsgradienten (5.43) muss die Verschiebungs-Verzerrungsmatrix $\underline{\mathbf{B}}$ eingeführt werden, die die kovariante Ableitung der Formfunktionen nach (5.44) und die Anteile der Christoffelsymbole nach (5.43) enthält.

$$\underline{u}_{,j} = \underline{u}|_j = \underline{\mathbf{B}} \hat{\underline{u}} \quad (5.45)$$

Durch die Teilung der Verschiebungs-Verzerrungsmatrix aus (5.45) nach Anhang C erfolgt die Darstellung der Dilatation und des Rotationsanteils

$$\underline{e} = \underline{\mathbf{B}} \hat{\underline{u}} \quad (5.46)$$

$$\underline{\omega} = \underline{\mathbf{B}}_{\text{rot}} \hat{\underline{u}} , \quad (5.47)$$

sowie der energetisch zugehörigen Druckanteile

$$\underline{p} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{B}} \hat{\underline{u}} \quad (5.48)$$

$$\underline{\sigma}_{\text{rot}} = \underline{\mathbf{K}}_{\text{rot}} \underline{\mathbf{B}}_{\text{rot}} \hat{\underline{u}} . \quad (5.49)$$

Die Trägheitskräfte nach (5.28) werden in ihrer matriziellen diskrete Form mit Hilfe einer Matrix $\underline{\rho}$ beschrieben

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\rho} \underline{\Omega} \ddot{\underline{u}} , \quad (5.50)$$

und die Oberflächenspannungsanteile nach (5.36) werden mit Hilfe einer Matrix $\underline{\gamma}$ bestimmt

$$\underline{p}_g = \underline{\gamma} \underline{\Omega}_g \hat{\underline{u}} , \quad (5.51)$$

deren Belegung in Anhang C verdeutlicht wird.

Zusammenfassend kann mit den in Kapitel (5.2.3) aufgestellten Größen das kontinuierliche Arbeitsprinzip (5.37) in seine diskrete Form überführt werden:

$$\delta \hat{\underline{u}}^T \left[\int_{\mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \underline{\rho} \underline{\Omega} dV \ddot{\underline{u}} + \left[\int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{B}} dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{B}}_{\text{rot}}^T \underline{\mathbf{K}}_{\text{rot}} \underline{\mathbf{B}}_{\text{rot}} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\Omega}_g^T \underline{\gamma} \underline{\Omega}_g dA \right] \hat{\underline{u}} - \int_{\mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \underline{p} dV \right] = 0 . \quad (5.52)$$

Dies entspricht den Finite-Element-Matrizen der ungedämpften Bewegungsgleichung:

$$\underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{u}} + (\underline{\mathbf{K}} + \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{S}}) \hat{\underline{u}} = \underline{\mathbf{P}}(t) . \quad (5.53)$$

5.2.4 Locking-Effekte und Zero-Energy-Modes

FE-Verschiebungsansätze sollen einerseits eine möglichst gute Approximation des tatsächlichen Verhaltens darstellen, andererseits über einen möglichst niedrigen Ansatzgrad verfügen, um den numerischen Rechenaufwand gering zu halten. Reine Verschiebungselemente mit linearem oder quadratischem Ansatz können bei bestimmten Beanspruchungen ein zu steifes Elementverhalten, ein so genanntes Locking, aufweisen. Dadurch treten bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrizen Fehler auf, die sich fatal oder gutmütig auswirken können. Im Falle eines fatalen Verhaltens muss entweder ein anderer Ansatz, wie zum Beispiel Assumed-Strain oder Assumed-Stress, gewählt werden, oder das Fehlverhalten wird durch „Tricks“, wie etwa der reduzierten Integration beseitigt. [ZIENKIEWICZ&TAYLOR89] empfehlen, bei der Benutzung der in dieser Arbeit eingesetzten Penalty-Methode, auf eine reduzierte numerische Integration zurückzugreifen. Bei der numerischen Umsetzung der Bewegungsgleichung (5.19) für ein kompressibles, unviskoses Flüssigkeitselement mit der Möglichkeit der Oberflächenschwappung wird für die Beseitigung des Fehlverhaltens die selektiv-reduzierte Integration der Steifigkeitsmatrizen gewählt, um die parasitären Moden zu eliminieren. Aufgrund der eingeführten Unterintegration entstehen jedoch zusätzliche energiefreie Eigenformen, sogenannte Zero-Energy-Modes, die wiederum durch die Rotationsbeschränkung (5.21) zu nicht-relevanten, hochfrequenten Moden umgeformt werden. Die einzelnen Entwicklungsschritte bis zur Bewegungsgleichung (5.26) werden in Kapitel 5.3.1 anhand der Eigenwertanalyse

$$(\underline{K} - \lambda \underline{I}) \cdot \underline{V} = \underline{0} \quad (5.54)$$

verdeutlicht.

5.3 Verifikation des entwickelten Finiten Elementes

5.3.1 Eigenwertanalyse

Durch eine Eigenwertanalyse des entwickelten Flüssigkeitselementes mit Hilfe der Gleichung (5.54) werden die Starrkörperbewegungen eines einzelnen Elementes überprüft und in Starrkörpermoden und Verzerrungsmoden unterteilt. Für ein Flüssigkeitselement muss der Begriff des Starrkörpermoden erweitert werden. Als Starrkörpermoden gelten in der Regel diejenigen Verschiebungsmoden, die das Element als starrer Körper ausführen kann, ohne dass in ihm Spannungen entstehen. Die Anzahl der Starrkörpermoden ergibt sich gewöhnlich durch Abzählen der notwendigen Lagerbedingungen und ist identisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade eines Elementes vermindert um die Zahl der Verzerrungsmoden. Das hier untersuchte räumliche 8-knotige Flüssigkeitselement besitzt 24 Freiheitsgrade und somit 24 Eigenformen. Zur Lagerung des Elementes werden 20 Auflagerbedingungen benötigt, somit besitzt das Element 20 Starrkörpermoden. Da ein Fluid aber kein starrer Körper ist, führt das Element diese Moden nicht als starrer Körper aus. Die Starrkörpermoden eines Fluid-elementes sind dadurch gekennzeichnet, dass die Elemente Verschiebungen ausführen ohne dass in ihnen Spannungen entstehen. Sie unterscheiden sich somit von den Starrkörpermoden eines soliden Körpers.

Zur besseren Verständlichkeit werden zusätzlich einige Ergebnisse des ebenen 4-knotigen Flüssigkeitselementes mit 8 Freiheitsgraden (und damit 8 Eigenformen) angegeben. Dieses Element benötigt sechs Lagerbedingungen und sollte daher sechs „fluide“ Starrkörpermoden aufweisen.

Die Eigenwertanalyse erfolgt in den unterschiedlichen Entwicklungsstadien des Elementes, die zur besseren Erkennung in die 4 Varianten nach Tabelle 5.2 unterteilt werden.

Variante	elastische Steifigkeitsmatrix	Rotationsmatrix	Oberflächenmatrix
1	volle Integration	keine	keine
2	reduzierte Integration	keine	keine
3	reduzierte Integration	reduzierte Integration	keine
4	reduzierte Integration	volle Integration	keine

Tabelle 5.2: Einteilung in die Varianten der Entwicklungsstufen

Diese vier Varianten werden in den folgenden Kapiteln getrennt erläutert. Einen zusammenfassenden Überblick über die gesamten Ergebnisse gibt Abschnitt 5.3.1.4.

Die Steifigkeitsanteile aus der Oberflächenmatrix bleiben bei der Eigenwertuntersuchung unberücksichtigt, obwohl sich natürlich Eigenformen einstellen, die der Oberflächenverformung zuzuordnen sind, wie in Bild 5.6 dargestellt. Für das räumliche Element gibt es drei Oberflächen-Eigenformen, für das ebene Element besteht entsprechend nur ein Oberflächenmode.

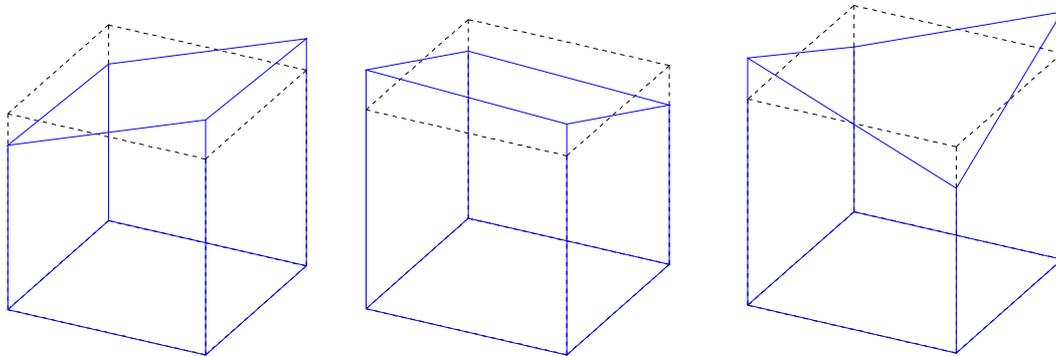


Bild 5.6: Oberflächenmoden für das trilineare Element

Diese Eigenformen sind bezüglich ihrer Versteifungseffekte an Oberflächenelementen untersucht worden. Es hat sich dabei herausgestellt, dass die Berücksichtigung der Oberflächensteifigkeit nur geringen Einfluss auf das globale Elementverhalten hat. Bei der folgenden Analyse werden diese Anteile aber nicht wegen ihres gutmütigen Verhaltens außen vorgelassen, sondern weil sich diese Anteile bei der Eigenwertanalyse in Kapitel 5.3.1.2 in den „Nicht-Oberflächenelementen“ fälschlicherweise positiv auswirken würden, indem sie zur Verringerung der Zero-Energy-Moden führen. Damit würden Elemente, die sich unter Berücksichtigung der Oberflächensteifigkeit in der Eigenwertanalyse als korrekt erweisen, bei einer Diskretisierung nach Bild 5.7 versagen, da nur die gekennzeichneten Elemente wirkliche Oberflächenelemente sind, denen der besagte Steifigkeitsanteil zugeordnet werden darf. Als Versagensform würde sich ein Hourglassmode entsprechend Bild 5.2 einstellen.

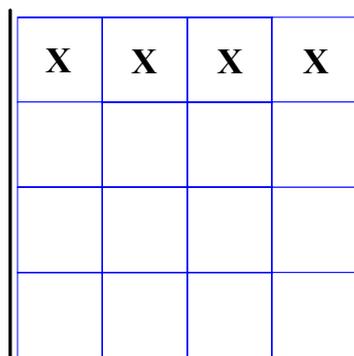


Bild 5.7: Kennzeichnung der Oberflächenelemente

5.3.1.1 Variante 1

Bei einer Eigenwertuntersuchung des 8-knotigen Flüssigkeitselementes ohne Rotationsbeschränkung mit voller Integration ergeben sich von den möglichen 24 Eigenformen sieben als Verzerrungsmoden, obwohl nur eine Verzerrungseigenform, die konstante Volumenveränderung nach Bild 5.8, möglich ist. (Durch eine Aktivierung der Oberflächen würden sich weitere mögliche Verzerrungsmodi nach Bild 5.6 einstellen.)

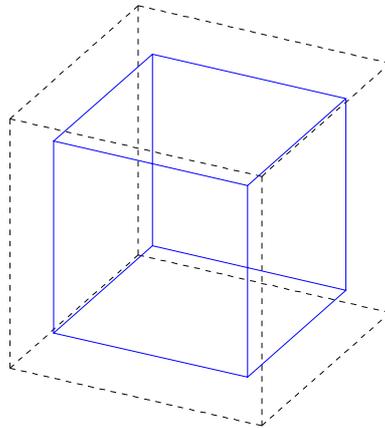


Bild 5.8: Konstanter Verzerrungsmodus

3 der insgesamt 6 unerwünschten linearen Verzerrungsmoden sind in Bild 5.9 wiedergegeben. Diese unerwünschten Eigenformen wirken sich fatal auf die Berechnungen aus, so dass das Element in dieser Version nicht verwendbar ist. Das Element würde sich zu steif verhalten.

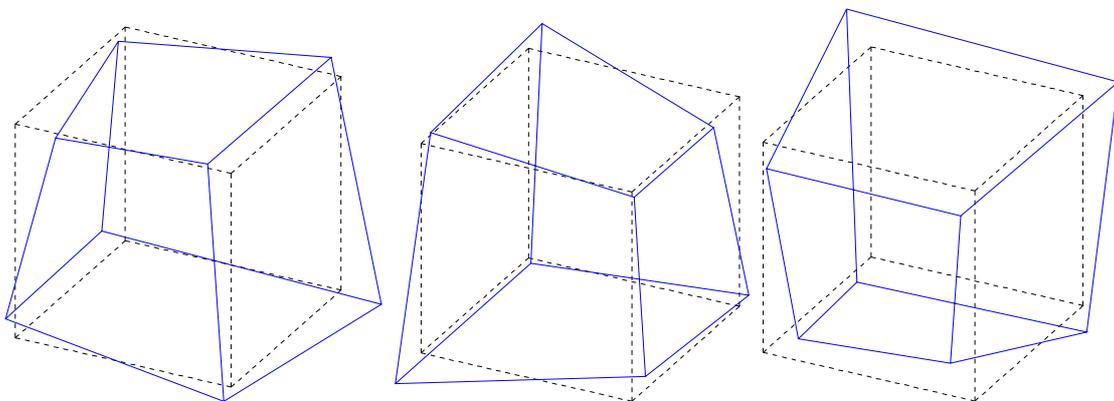


Bild 5.9: Drei der sechs linearen Verzerrungsmodi

Erläutern lassen sich diese zusätzlichen Verzerrungsmoden aus dem trilinearen Verschiebungsansatz des Elementes, der in Gleichung (5.55) als Polynom in generalisierten Freiwerten angegeben ist.

$$u_i = A_i + B_i \theta^1 + C_i \theta^2 + D_i \theta^3 + E_i \theta^1 \theta^2 + F_i \theta^1 \theta^3 + G_i \theta^2 \theta^3 + H_i \theta^1 \theta^2 \theta^3 \quad (5.55)$$

Im Falle orthogonal kartesischer Koordinaten lässt sich leicht erkennen, wie sich diese überflüssigen Verzerrungsmoden aus dem Ansatz (5.55) mit Hilfe der Dilatation

$$e = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} \quad (5.56)$$

entwickeln. Aus den einzelnen Anteilen der Dilatation

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= B_x + E_x y + F_x z + H_x yz \\ u_{y,y} &= C_y + E_y x + G_y z + H_y xz \\ u_{z,z} &= D_z + F_z x + G_z y + H_z xy \end{aligned} \quad (5.57)$$

kann der Bild 5.8 zugehörige konstante Anteil

$$e_{\text{konst.}} = B_x + C_y + D_z \tag{5.58}$$

und die sechs sich fatal auswirkenden linearen Modi nach (5.59) separiert werden:

$$e_{\text{linear}} = (E_y + F_z)x + (E_x + G_z)y + (F_x + G_y)z + H_x yz + H_y xz + H_z xy. \tag{5.59}$$

Natürlich ist auch jede Linearkombination aus diesen Moden möglich, was bei der numerischen Eigenwertanalyse des Elementes zu den drei dargestellten Eigenformen aus Bild 5.9 führt, von denen keine direkt der Gleichung (5.59) zugeordnet werden kann.

Einfacher sind die Moden bei dem äquivalenten ebenen bilinearen Fluidelement zu erkennen. Hier ergeben sich bei der numerischen Analyse eindeutig der gewünschte konstante Mode zuzüglich der zwei parasitären linearen Moden nach Bild 5.10.

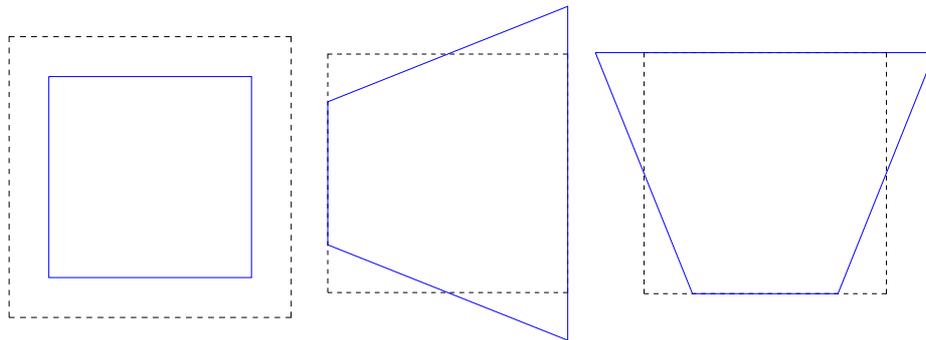


Bild 5.10: Konstanter Verzerrungsmoden und versteifende lineare Moden des ebenen bilinearen Elementes

Aus dem bilinearen Verschiebungsansatz des ebenen Elementes

$$u_\alpha = A_\alpha + B_\alpha \theta^1 + C_\alpha \theta^2 + D_\alpha \theta^1 \theta^2 \tag{5.60}$$

lassen sich im Fall der kartesischen Koordinaten der konstante und die zwei parasitären linearen Modi separieren:

$$e = u_{x,x} + u_{y,y} = (B_x + C_y) + D_x y + D_y x. \tag{5.61}$$

5.3.1.2 Variante 2

Durch die reduzierte Integration wird die Steifigkeitsmatrix nicht mit der theoretisch korrekten Anzahl von im trilinearen Fall (2x2x2), also acht (im bilinearen Fall (2x2)) GAUßpunkten integriert, sondern mit nur noch einem GAUßpunkt, wie in Bild 5.11 dargestellt.

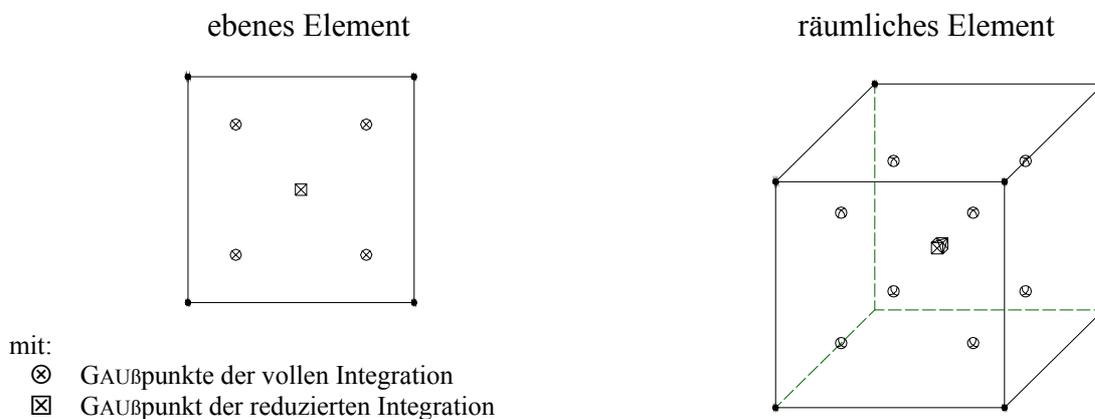


Bild 5.11: Darstellung der GAUßpunkte

Die reduzierte Integration hat auf den konstanten Verzerrungsverlauf keinen Einfluss, während die sich fatal auswirkenden parasitären Modi unterdrückt werden. Dadurch stellt sich bei der Eigenwertanalyse nur noch der zulässige Verzerrungsmodus nach Bild 5.8 ein. Allerdings wirkt sich der durch die zusätzlichen Null-Energie-Moden entstandene Rangabfall der Steifigkeitsmatrix nun fatal auf die Berechnung aus. Erwartet werden, entsprechend den zugeordneten Lagerbedingungen, 20 Starrkörpermoden für das trilineare räumliche Element bzw. 6 Starrkörpermoden für das bilineare ebene Element. Bei der Eigenwertanalyse werden aber 23 bzw. 7 Starrkörpermoden ermittelt. Eine zusätzliche Berücksichtigung der Oberflächenmoden nach Bild 5.6 würde hier die korrekte Anzahl an Starrkörperbewegungen bedingen. Damit wäre eine Diskretisierung aus reinen Oberflächenelementen „rechenbar“, aber aufgrund der an Bild 5.7 erläuterten Umstände nicht sinnvoll.

5.3.1.3 Variante 3

Durch Einführung einer Rotationsbeschränkung nach Gleichung (5.21) werden nun hochfrequente Moden angestrebt. Die Rotationsbeschränkung verhindert die Rotation des Elementes und eliminiert damit die in Kapitel 5.3.1.2 erwähnten Zero-Energy-Moden. Im Fall von kartesischen Koordinaten lässt sich diese Bewegung, analog zur Dilatation e , wieder aus dem Ansatz (5.60) für das ebene Problem in generalisierten Freiwerten darstellen.

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} - u_{y,x}) = \frac{1}{2}(C_x - B_y + D_x x - D_y y) \quad (5.62)$$

Dem Ansatz der Dilatation nach Gleichung (5.61) entsprechend, erhält die Rotation ω_{xy} einen konstanten und zwei lineare Anteile. In Bild 5.12 sind diese Rotationsmoden dargestellt.

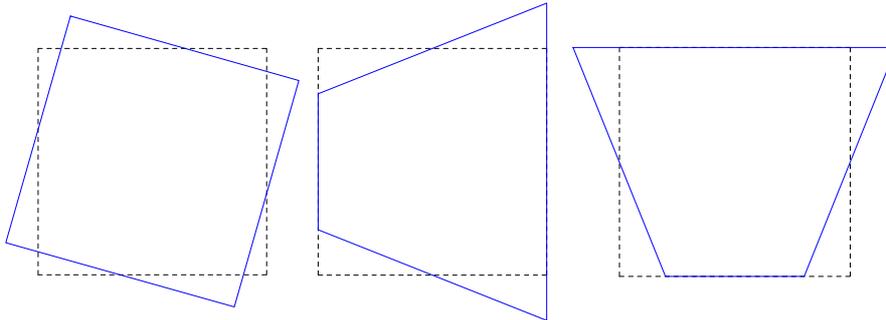


Bild 5.12: Konstanter und lineare Rotationsmoden des ebenen bilinearen Elementes

Für das räumliche Problem ergeben sich drei Rotationen im Raum,

$$\begin{aligned} \omega_{xy} &= \frac{1}{2}((C_x - B_y) + E_x x - E_y y + (G_x - F_y)z + H_x xz - H_y yz) \\ \omega_{xz} &= \frac{1}{2}((D_x - B_z) + F_x x + (G_x - E_z)y - F_z z + H_x xy - H_z yz) \\ \omega_{yz} &= \frac{1}{2}((D_y - C_z) + (F_y - E_z)x + G_y y - G_z z + H_y xy - H_z xz) \end{aligned} \quad (5.63)$$

von denen 5 Anteile in Bild 5.13 dargestellt sind.

Aufgrund der reduzierten Integration dieser Anteile werden die linearen Bestandteile der Rotationen nicht erfasst, so dass sich im räumlichen Fall nur die drei konstanten Rotationsmoden als Starrkörperdrehungen im Raum, und im ebenen Fall nur der eine konstante Rotationsmodus einstellt. Dies führt bei der Berechnung zu folgenden Eigenschaften:

- dem 3D-Element werden seinen 24 Freiheitsgraden insgesamt 20 Lagerbedingungen, ein Steifigkeitsanteil aus der reduzierten Integration der elastischen Steifigkeitsmatrix und drei Steifigkeitsanteile aus der reduzierten Integration der Rotationssteifigkeitsmatrix gegenübergestellt,

- dem 2D-Element stehen seinen 8 Freiheitsgraden insgesamt 6 Lagerbedingungen, die Steifigkeit aus der reduzierten Integration der elastischen Steifigkeitsmatrix und ein Steifigkeitsanteil aus der reduzierten Integration der Rotationsmatrix gegenüber.

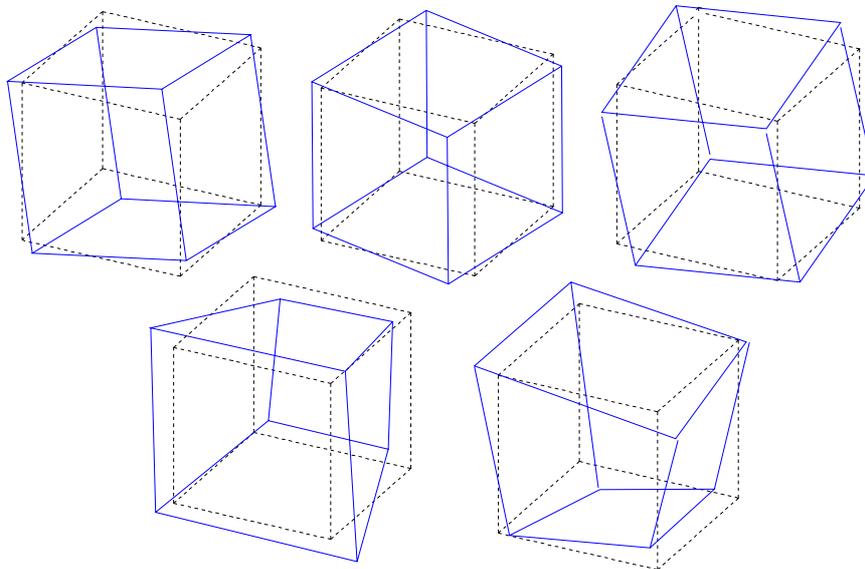


Bild 5.13: Auswahl der Rotationsmoden nach Gleichung (5.63)

Die Überprüfung der Elemente bezüglich ihrer Eigenwertanalyse hat somit den gewählten Ansatz bestätigt, da der Anzahl der Freiheitsgrade jeweils die gleiche Anzahl Bedingungen bzw. Steifigkeitsanteilen gegenübersteht.

Die Frage nach der Größe des Rotationsstrafparameters löst [HAMDI.ET.AL78] mit dem Hinweis, dass alle ungewollten Zirkulations-Moden verschwinden, wenn der Rotationsparameter K_{rot} die Größe

$$K_{rot} = \rho_f c^2 \quad (5.64)$$

erreicht, wobei c die akustische Wellengeschwindigkeit, oder auch Schallgeschwindigkeit, mit $c = 340$ m/s darstellt. Geht man von der Flüssigkeit Wasser mit der Dichte $\rho_f = 1.0$ t/m³ aus, so ergibt sich ein Rotationsparameter von $K_{rot} = 1.156 \cdot 10^5$ kN/m². Wird der Rotationsparameter dagegen zu Null gewählt, so ergeben sich nach [HAMDI.ET.AL78] „unendlich viele“ Rotationsmoden, wobei die maximale Anzahl der Moden natürlich von der Anzahl der Systemfreiheitsgrade abhängt. Bei der Berechnung von ebenen Systemen hat sich herausgestellt, dass der Einfluss der Größe des Strafparameters relativ unerheblich auf die Berechnung ist, da auch schon bei erheblich kleinerer Größe des Strafparameters die Zero-Energy-Moden auf unerhebliche, hochfrequente Moden transformiert werden. Bei räumlichen Systemen dagegen sind in diesem Fall trotz der bestandenen Eigenwertprüfung Berechnungen mit mehreren Elementen nicht möglich, da die drei konstanten Rotationsmoden eine kinematische Verschieblichkeit des Gesamtsystems zulassen.

5.3.1.4 Variante 4

Bei einer Untersuchung des Elementes hat sich herausgestellt, dass die selektiv-reduzierte Integration, also die reduzierte Integration der elastischen Steifigkeitsmatrix und die volle Integration der Rotationsmatrix, bei Wahl eines geeigneten Rotationsstrafparameters eine exakte Berechnung zulässt. Es werden nun die linearen Rotationsmoden aus Gleichung (5.63) aktiviert, allerdings wird durch eine geeignete Kalibrierung der Elemente anhand des Rotationsstrafparameters K_{rot} die Anzahl dieser Rotationsformen gewollt begrenzt.

Die selektiv-reduzierte Integration hat sich auch bei den ebenen Elementen positiv auf die Berechnung ausgewirkt. Allerdings ist die Wahl des Rotationsstrafparameters im Gegensatz

zum Kapitel 5.3.1.3 sensitiver auf die Ergebnisse geworden, so dass eine Parameterstudie erforderlich ist. Bei bisherigen Berechnungen, die unter anderem in Kapitel 8 vorgestellt werden, hat sich herausgestellt, dass sich bei genügend feiner Diskretisierung des zu untersuchenden Systems der Strafparameter dem Wert $K_{rot} = 100.0 \text{ kN/m}^2$ nähert.

In Tabelle 5.3 sind alle Ergebnisse der Eigenwertuntersuchung aus dem Kapitel 5.3.1 zusammengefasst. Die insgesamt 24 Eigenformen des räumlichen bzw. 8 Eigenformen des ebenen Elementes werden den Verzerrungs-, Rotations- und Starrkörpermoden zugeordnet, und den gewollten idealen Voraussetzungen gegenübergestellt.

	ideal		Variante 1		Variante 2		Variante 3		Variante 4	
	3D	2D	3D	2D	3D	2D	3D	2D	3D	2D
Verzerrungsmoden aus elastischer Verformung	1	1	7	3	1	1	1	1	1	1
Starrkörpermoden	20	6	17	5	23	7	20	6	20 (9)	6 (4)
Verzerrungsmoden aus Rotation	3	1	n.v. ¹	n.v.	n.v.	n.v.	3	1	3 (14)	1 (3)

Tabelle 5.3: Anzahl der Verzerrungs- und Starrkörpermoden infolge unterschiedlicher Ansätze zur Integration

Bei den Berechnungen nach Variante 4 sind je zwei Angaben über die Anzahl der einzelnen Moden gegeben. Der eingeklammerte Wert entspricht dem Ergebnis einer Berechnung mit dem Rotationsparameter aus Variante 3, bei dem nicht eingeklammerten Wert wurde der Rotationsparameter durch eine Parameterstudie angepasst. Man erkennt, dass bei einer selektiv-reduzierten Berechnung mit dem Strafparameter aus Variante 3 zu viele Rotationsmoden berücksichtigt werden. Durch eine geeignete Wahl des Rotationsparameters ergeben sich für die selektiv-reduzierte Integration korrekte Ergebnisse, die ein gutes Elementverhalten erwarten lassen.

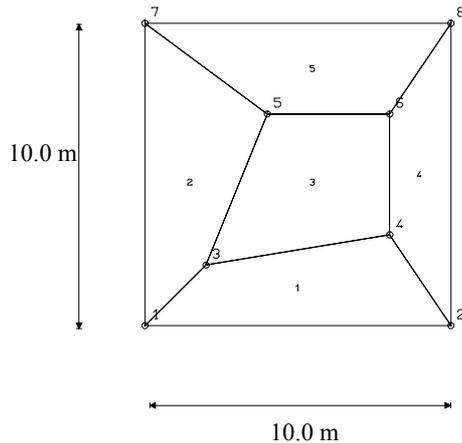
Die für Oberflächenelemente erwähnten zusätzlichen Eigenformen nach Bild 5.6 versteifen die Elemente auf eine gutmütige Art. Weiterhin trifft dieser Effekt nur eine sehr geringe Anzahl von Elementen, nämlich nur die Oberflächenelemente nach Bild 5.7, wodurch der mögliche Einfluss weiter verringert wird.

5.3.2 Statische Tests

5.3.2.1 Patch-Test

Mit einem Patch-Test wird überprüft, ob das Element in der Lage ist, konstante Verzerrungszustände exakt abzubilden. Er dient der Erkennung möglicher Elementschwächen und ist nach [KRÄTZIG&BAŞAR97] weder eine notwendige, noch eine hinreichende Bedingung für monotone Konvergenz gegen die exakte Lösung bei zunehmender Netzverfeinerung. Unter der Einprägung äußerer Knotenverschiebungen, die konstante Verformungszustände hervorrufen, wird eine Kontrolle der sich daraus ergebenden Schnittgrößen durchgeführt. Bei den in diesem Kapitel untersuchten Beispielen werden Verformungsgrößen aufgebracht, die einen zugehörigen Schnittgrößenzustand der Größe -10.0 kN/m^2 erwarten lassen. Eine in den Berechnungen eventuell auftretende Abweichung von diesem Soll-Wert kann als mögliche Fehlerquelle bei dem Elementeneinsatz angesehen werden. Zuerst wird der Patch-Test an dem ebenen 4-knotigen Flüssigkeitselement für das in Bild 5.14 dargestellte Elementraster durchgeführt.

¹ Da die Rotationsmatrix nicht beachtet wurde, sind in Variante 1 und 2 Verzerrungsmoden aus der Rotation nicht vorhanden (n.v.).



$$K_f = 20.6 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$$

$$K_{rot} = 20.6 \cdot 10^1 \text{ kN/m}^2$$

Bild 5.14: Patch-Test – untersuchtes ebenes Elementfeld

Mit diesem Elementfeld werden zwei Berechnungen durchgeführt, die einer Überprüfung

- der konstanten Volumenänderung und
- der konstanten Rotation

entsprechen. Die eingepprägten Verformungen mit ihren zugehörigen Verformungsfiguren sind in Bild 5.15 angegeben. Nach den Gleichungen (5.33) und (5.35) stellen der Druck p und die fiktive Rotationsgröße p_{rot12} die korrespondierenden Kraftgrößen dar, die sich auch den Erwartungen entsprechend einstellen.

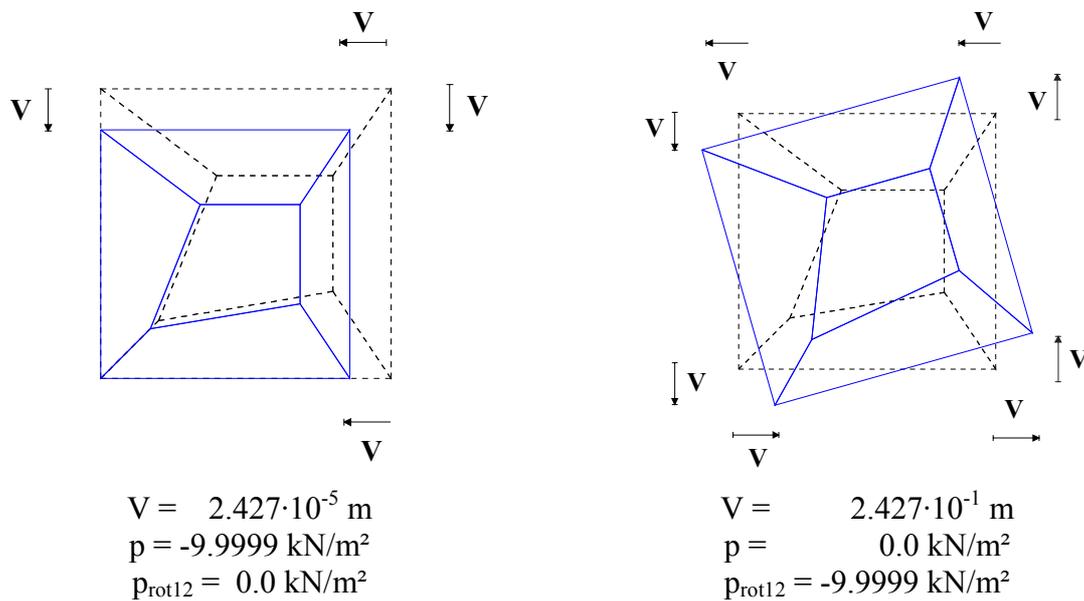


Bild 5.15: Patch-Test – ebene Verformungsfiguren

Für das ebene Element gilt der Patch-Test damit als bestanden. In analoger Weise wird nun ein Patch-Test für das Volumenelement durchgeführt. Das getestete Elementtraster bestehend aus 7 Elementen ist in Bild 5.16 dargestellt. Die Einprägungen der äußeren Knotenverschiebungen entsprechen

- einer konstanten Volumenänderung,
- einer konstanten Rotation um die x-Achse,
- einer konstanten Rotation um die y-Achse und
- einer konstanten Rotation um die z-Achse,

und sind wiederum so gewählt, dass zugehörige Schnittgrößenzustände der Größe -10.0 kN/m^2 zu erwarten sind.

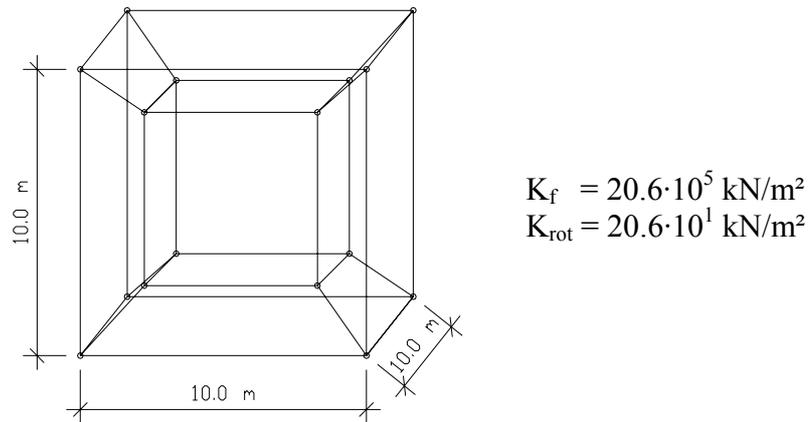


Bild 5.16: Patch-Test – untersuchtes räumliches Elementfeld

Korrespondierend zu den in Gleichung (5.33) und (5.35) eingeführten Größen des Drucks p und der drei fiktiven Rotationsgrößen $p_{\text{rot}12}$, $p_{\text{rot}13}$, $p_{\text{rot}23}$ werden vier Berechnungen durchgeführt, deren Ergebnisse in Bild 5.17 dargestellt sind.

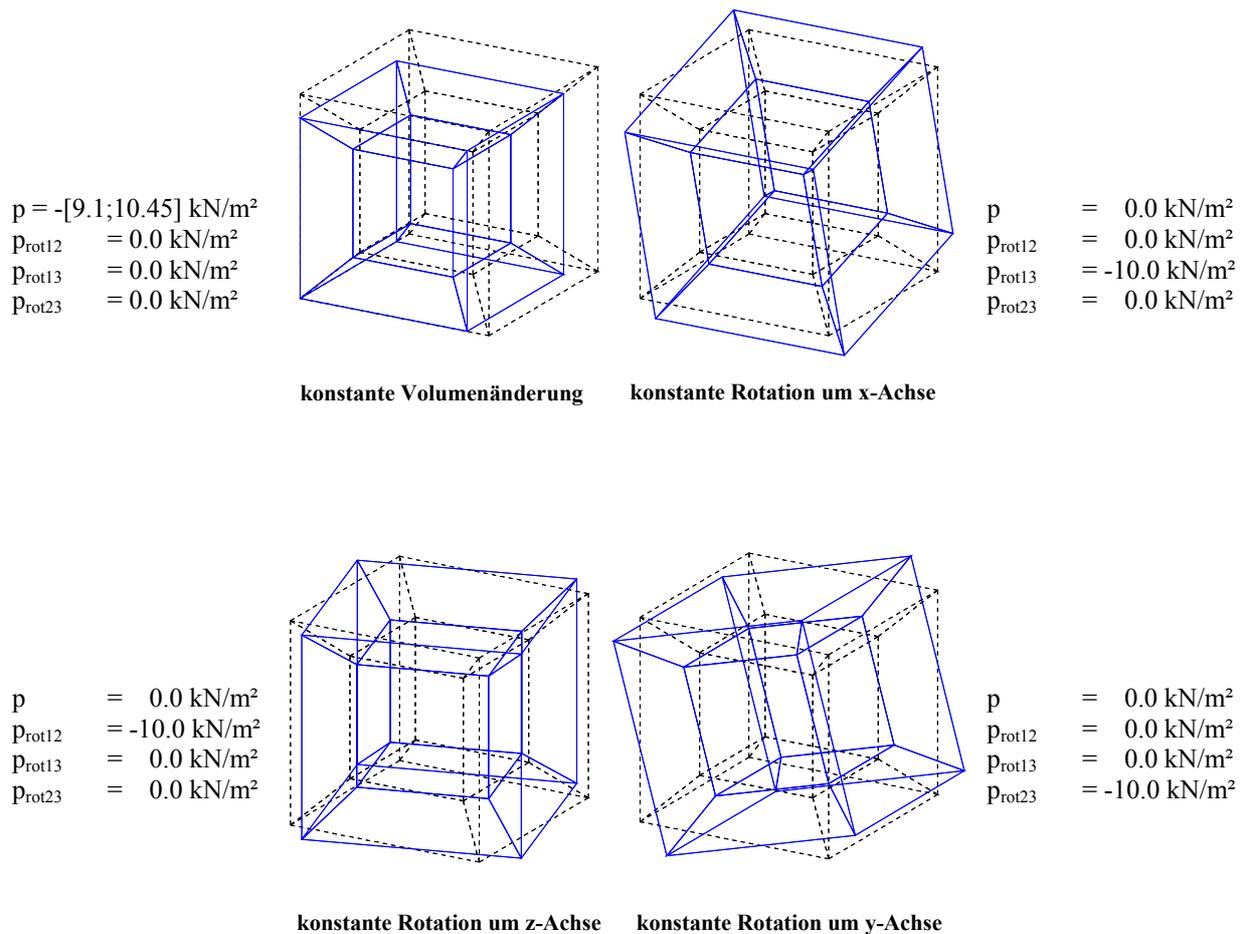


Bild 5.17: Patch-Test – räumliche Verformungsfiguren

Während sich bei den Berechnungen der Rotationsbewegungen die gewünschten Schnittgrößenzustände einstellen, sind bei der Berechnung der konstanten Volumenänderung leichte Abweichungen zu erkennen. Für den konstanten Verformungsfall ergibt sich nicht wie

erwartet in allen 7 Elementen eine Druckspannung von exakt $p = -10.0 \text{ kN/m}^2$, sondern es stellt sich in den einzelnen Elementen ein unterschiedlicher Druckzustand ein, der zwischen den Werten $p = -9.1 \text{ kN/m}^2$ und $p = -10.45 \text{ kN/m}^2$ schwankt und damit eine maximale Abweichung von ca. 9 % vom Soll-Wert besitzt.

Diese Abweichung kann als mögliche Fehlerquelle bei dem Elementeinsatz des Elementes in kartesischen Koordinaten interpretiert werden, das bei der statischen Berechnung einer zylindrischen Flüssigkeit versagt, wie in Kapitel 5.3.2.2 gezeigt wird. Um diese These zu überprüfen, wird daher ein weiterer Patch-Test durchgeführt. Es erfolgt nun ein Test ohne den Einsatz verzerrter Elementgeometrien. Dies bedeutet, dass das auf der Herleitung basierende Elementkoordinatensystem mit dem Geometriekoordinatensystem übereinstimmt. Um einen Vergleich mit dem vorherigen Beispiel zu ermöglichen, wird ein kartesisches Elementtraster von $(3 \times 3) = 9$ Elementen nach Bild 5.18 eingesetzt. Die Einprägung der äußeren Knotenverschiebungen ist mit dem oben genannten Beispiel identisch, wodurch wiederum Schnittgrößenzustände von der Größe -10.0 kN/m^2 zu erwarten sind.

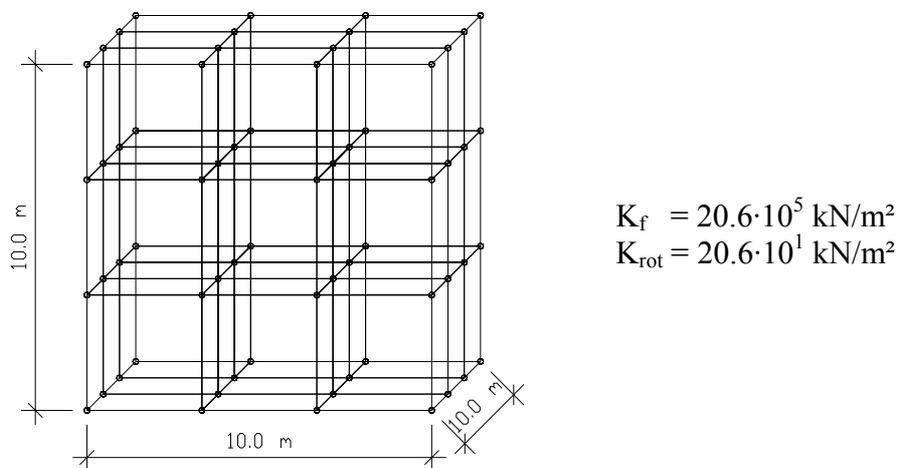


Bild 5.18: Patch-Test – untersuchtes Elementfeld

Die vier Berechnungen korrespondieren erneut zu der Größe Druck p und den drei fiktiven Rotationsgrößen $p_{\text{rot}12}$, $p_{\text{rot}13}$, $p_{\text{rot}23}$. Die Ergebnisse sind in Bild 5.19 zusammengestellt.

Neben den korrekten Ergebnissen der Rotationsbewegungen ergibt sich nun auch bei der Berechnung „Einprägung einer konstanten Volumenänderung“ das gewünschte Ergebnis von $p = -10.0 \text{ kN/m}^2$ in allen Elementen.

Damit gilt also der Patch-Test bei der Anwendung unverzerrter Elemente, also Elemente, bei denen das lokale Elementkoordinatensystem mit dem Geometriekoordinatensystem übereinstimmt, als bestanden.

Auch wenn [KRÄTZIG&BAŞAR97] darauf hinweisen, dass die Aussagekraft des Patch-Testes nicht überbewertet werden darf, so bestätigt der für unverzerrte Elementgeometrien bestandene Patch-Test das Konzept der gewählten Elementherleitung in konvektiven Koordinaten, die Elementgeometrie der Systemgeometrie anzupassen.

Die Auswirkung des nicht bestandenen Patch-Testes der verzerrten Elementgeometrie nach Bild 5.16 wird im folgenden Beispiel deutlich. Daher können mit dem entwickelten Element nur Systeme berechnet werden, die eine vorgegebene Geometriefunktion zur Ermittlung des Ortsvektors auf Basis krummliniger Koordinaten θ^i nach Kapitel 4.1.1 aufweisen. Als Beispiel ist der Ortsvektor für die Zylindergeometrie nach Bild 5.5 gegeben:

$$\underline{r} = \theta^2 \cdot \cos \theta^1 \underline{i}_1 + \theta^2 \cdot \sin \theta^1 \underline{i}_2 + \theta^3 \underline{i}_3 \quad (5.65)$$

Die Darstellung des Ortsvektors weiterer Geometrien findet man bei [BAŞAR&WEICHERT00].

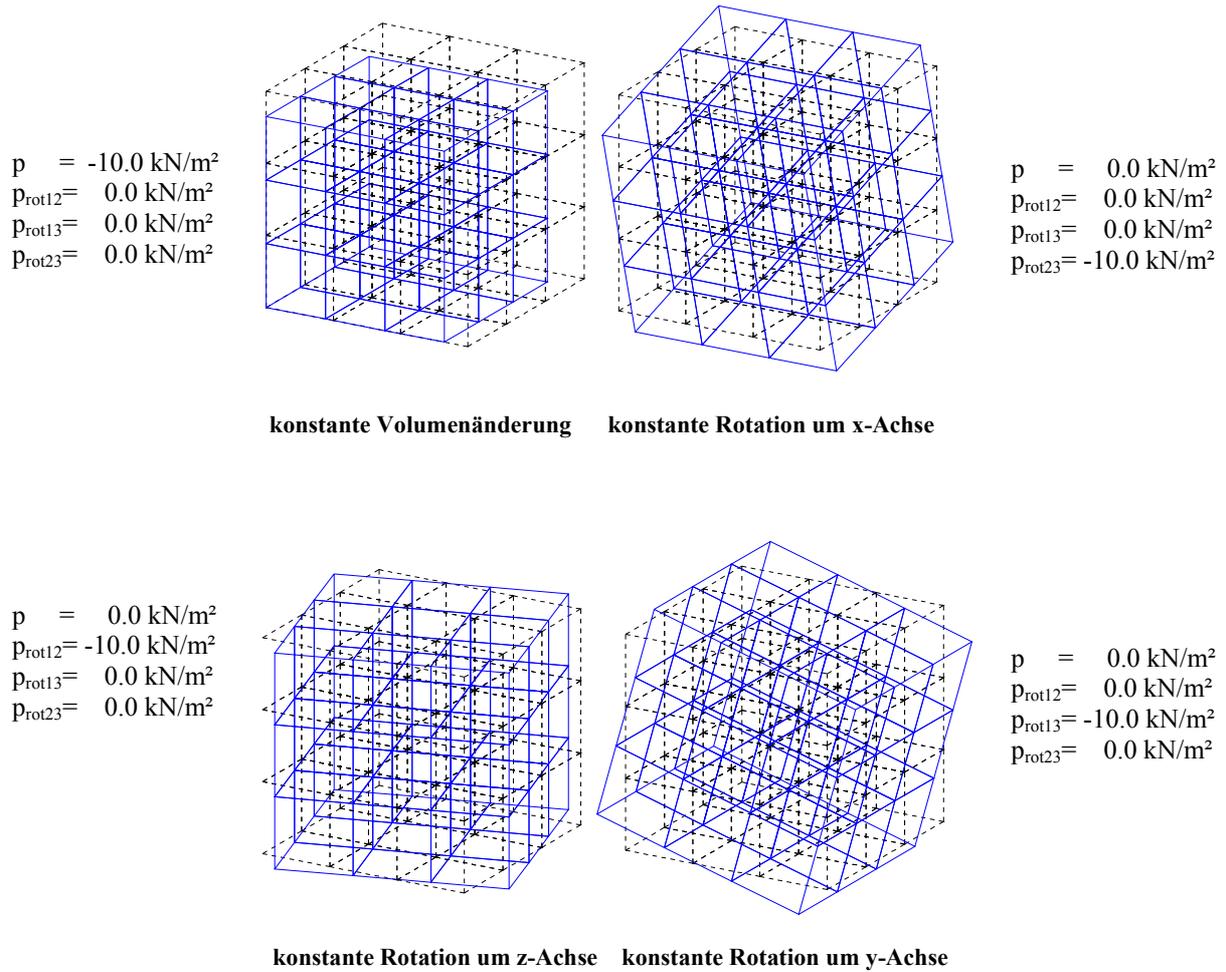


Bild 5.19: Patch-Test – Verformungsfiguren

5.3.2.2 Belastung Eigengewicht

Im Folgenden wird der in Bild 5.20 dargestellte, mit Wasser gefüllte zylindrische Behälter unter Eigengewicht getestet.

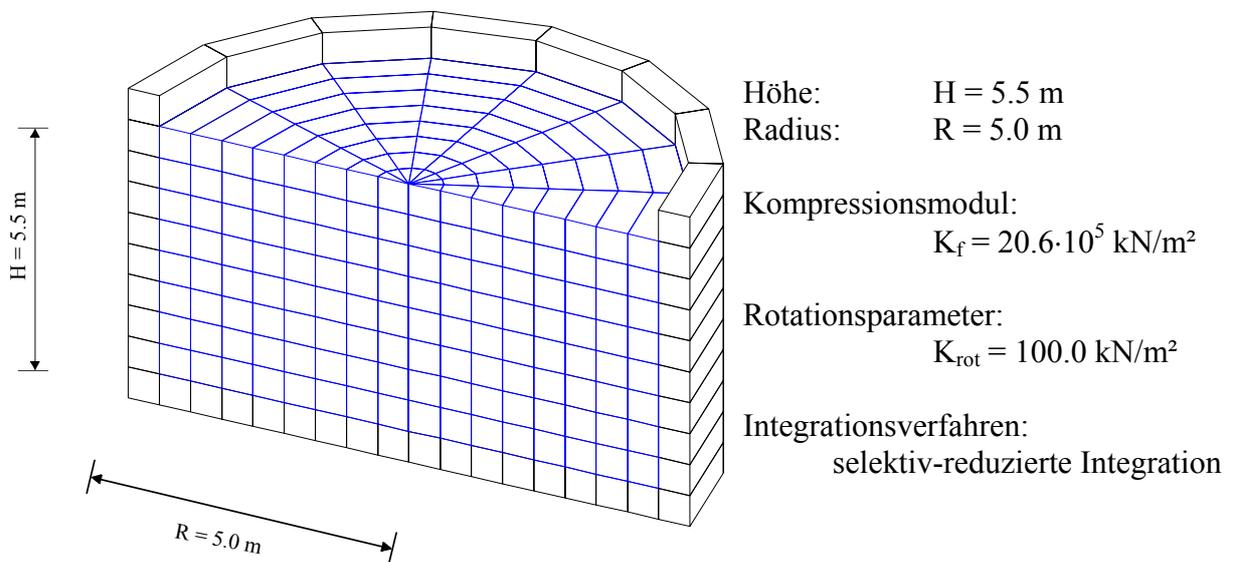


Bild 5.20: Struktur des Flüssigkeitstanks

Das in konvektiven Komponenten hergeleitete Flüssigkeitselement ermöglicht aufgrund der Beschreibung des Zylindervolumens durch Zylinderkoordinaten nach Bild 5.5 eine FE-Berechnung mit unverzerrter Elementgeometrie. Bei einem Einsatz des Flüssigkeitselementes in kartesischen Koordinaten liegt bei diesem Beispiel offensichtlich eine verzerrte Elementgeometrie vor, da das Einheitskoordinatensystem nicht mit dem Koordinatensystem der Geometrie übereinstimmt.

Das statische Ergebnis unter Eigengewicht wird mit Elementen sowohl nach kartesischer als auch nach konvektiver Beschreibung mit einem Flüssigkeitsraster von $8 \times 8 \times 8$ Elementen diskretisiert und berechnet.

Bild 5.21 zeigt die Verformungsfigur, die sich bei der Berechnung mit dem kartesisch formulierten Element ergibt. Die statische Berechnung liefert eine völlig unsinnige Verformungsfigur, bei der besonders der Bereich am Mittelpunkt der Flüssigkeitsoberfläche auffällt. Um eine Singularität im Mittelpunkt der Flüssigkeitsfüllung auszuschließen wird eine Kontrollrechnung mit einer Aussparung der an der Rotationsachse liegenden Fluidelemente durchgeführt. Die statische Verformungsfigur dieser Kontrollrechnung unter Eigengewicht ist in Bild 5.22 dargestellt. Man erkennt, dass sich auch durch die Elimination der kritischen Mittelachse kein zufriedenstellender Verformungszustand einstellt.

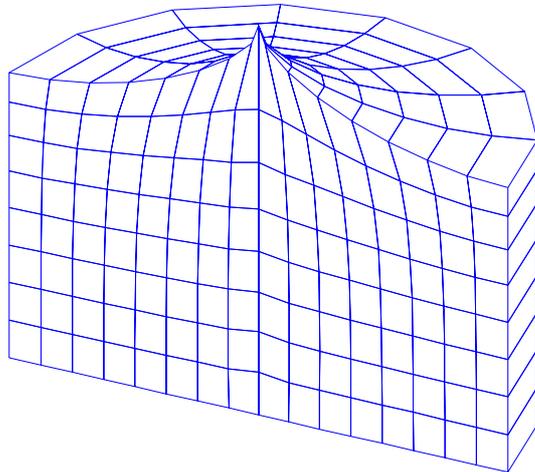


Bild 5.21: Darstellung der Verformungsfigur unter Eigengewicht; kartesische Formulierung

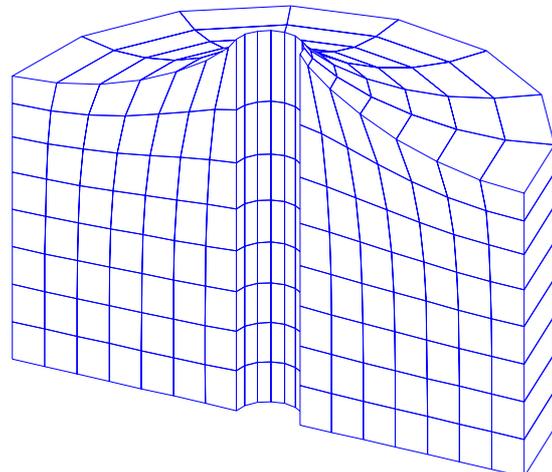


Bild 5.22: Verformungsfigur bei zusätzlicher Aussparung der Fluidelemente an der Mittelachse

Dagegen zeigt die Berechnung des in krummlinigen Koordinaten formulierten Elementes die in Bild 5.23 dargestellte korrekte Verformungsfigur.

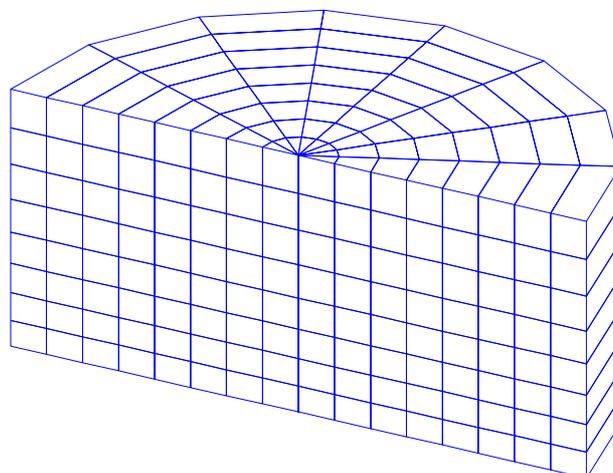


Bild 5.23: Darstellung der Verformungsfigur unter Eigengewicht, konvektive Beschreibung

Dieses unterschiedliche Verhalten der beiden verschiedenen Elementansätze hat sich schon beim Patch-Test angedeutet. Bei der Berechnung eines rechteckigen Tankes sind beide Formulierungen identisch, dagegen lässt sich eine völlig unregelmäßige Struktur mit keiner der beiden Alternativen fehlerfrei berechnen. Dies kann am Beispiel des ebenen Modells in Bild 5.3 erkannt werden. Hier wird der Querschnitt eines Tankbehälters sowohl mit einem kartesischen Raster als auch mit einem leicht verzerrten und damit regellosen Raster berechnet. Die Verformungsfigur unter Eigengewicht zeigt für das kartesische Raster die korrekte Lösung, während für das unregelmäßige Raster eine unsinnige Verformung berechnet wird.

In Bild 5.24 wird für das konvektiv hergeleitete Element die Berechnung der Druckspannungen infolge Eigengewicht angegeben. Die konstante Abbildung der Elementspannungen gibt als diskretes Modell die rechnerisch lineare Lösung korrekt wieder, die als Referenzlösung ebenfalls dargestellt ist.

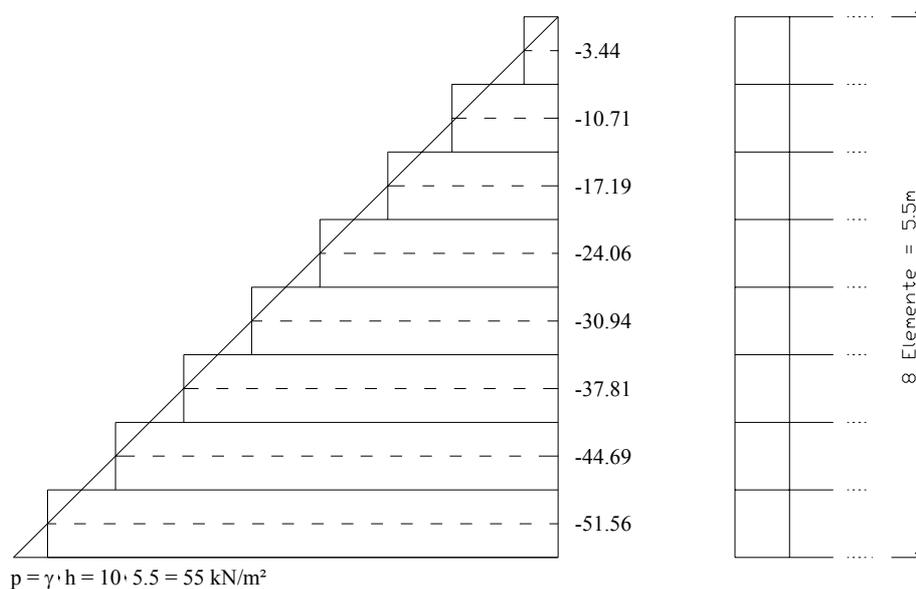


Bild 5.24: Darstellung der Druckspannungen unter Eigengewicht, konvektive Beschreibung

Die statischen Tests des zylindrischen Behälters zeigen korrekte Ergebnisse für das konvektiv hergeleitete Element. Da das kartesisch formulierte Element schon bei den statischen Tests versagt, wird es im Folgenden nicht weiter betrachtet.

5.3.3 Eigenfrequenzanalyse

In diesem Kapitel wird eine Eigenfrequenzanalyse nach

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \cdot \underline{V} = \underline{0} \quad (5.66)$$

unter Einsatz des konvektiv hergeleiteten Flüssigkeitselementes durchgeführt. Eine Überprüfung der Grundeigenkreisfrequenz ω_1 erfolgt durch die analytische Formel für zylindrische Tanks nach HOUSNER aus [MESKOURIS99].

$$\omega^2 = \frac{1.84 \cdot g}{R} \cdot \tanh(1.84 \cdot \frac{H}{R}) \quad (5.67)$$

In gleicher Weise kann die Grundeigenfrequenz ω_1 für rechteckige Tankbauwerke überprüft werden, bei der anstelle des Tankradius R die halbe Tanklänge L eingeht.

$$\omega^2 = \frac{1.58 \cdot g}{L} \cdot \tanh(1.58 \cdot \frac{H}{L}) \quad (5.68)$$

5.3.3.1 Zylindrischer Tank

Für die Eigenfrequenzanalyse eines zylindrischen Tankbauwerks wird die Geometrie der statischen Berechnung nach Bild 5.20 gewählt. Bei den gegebenen Abmessungen ergibt sich nach Gleichung (5.67) eine Grundeigenfrequenz von $\omega_1 = 1.87 \text{ rad/s}$, mit der der Rotationsstrafparameter von $K_{\text{rot}} = 100 \text{ kN/m}^2$ bestätigt wird. In Bild 5.25 sind die ersten beiden Eigenformen mit Angabe der Eigenfrequenzen wiedergegeben.

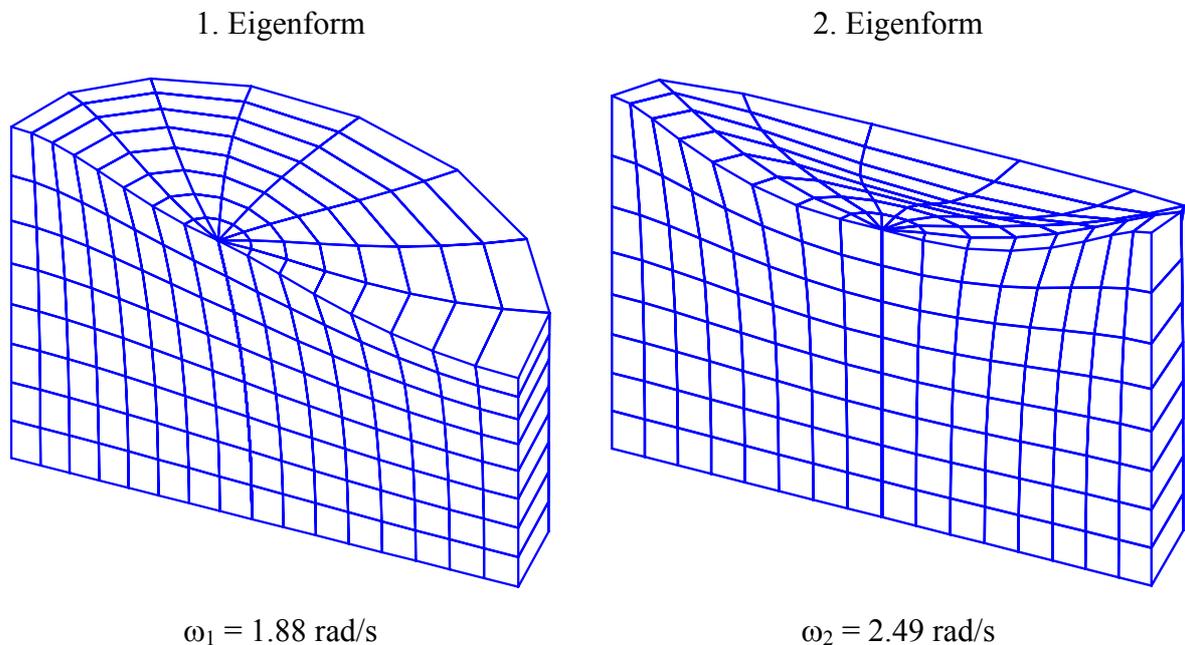


Bild 5.25: Darstellung der ersten und zweiten Eigenform

5.3.3.2 Test eines entarteten Elementes

In einer weiteren Kontrollrechnung wird überprüft, ob sich das in konvektiven Koordinaten hergeleitete Element auch gutmütig verhält, wenn eine der drei Ausdehnungen sehr klein gegenüber den zwei anderen Abmessungen wird. Getestet wird die in Bild 5.26 dargestellte Scheibe mit den Abmessungen $H = 5.0 \text{ m}$, $L = 5.0 \text{ m}$ und einer Dicke von $d = 0.1 \text{ m}$. Diese Geometrie kann als rechteckige Tankstruktur interpretiert werden, so dass auf die Gleichung (5.68) zur Eigenfrequenzberechnung zurückgegriffen wird.

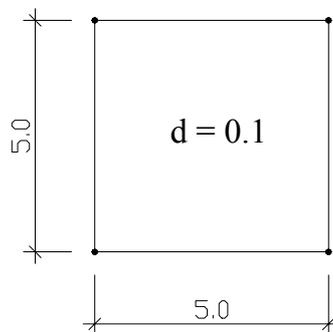


Bild 5.26: Beispiel einer flächenhaften Struktur; Angaben in [m]

Diese Geometrie kann durch ein ebenes Element in kartesischen Koordinaten beschrieben werden oder es wird als räumliches Element in Zylinderkoordinaten nach Bild 5.27 diskretisiert,

- indem die Dicke von 0.1 m über einen konstanten Winkel abgebildet wird. Die Dicke ist also nicht exakt konstant über das Element. Der Fehler in Bezug auf das Ursprungssystem ist aufgrund des radialen Abstandes zum Ursprung von 5.0 m und dem geringen Winkel von 1° jedoch sehr gering.
- indem die Länge des Elementes über einen konstanten Radius abgebildet wird. Die Mittelfläche hat daher eine leichte Krümmung, die aufgrund des kleinen Winkels von 1° und des großen radialen Abstandes zum Ursprung von 286.5 m aber sehr gering ausfällt.

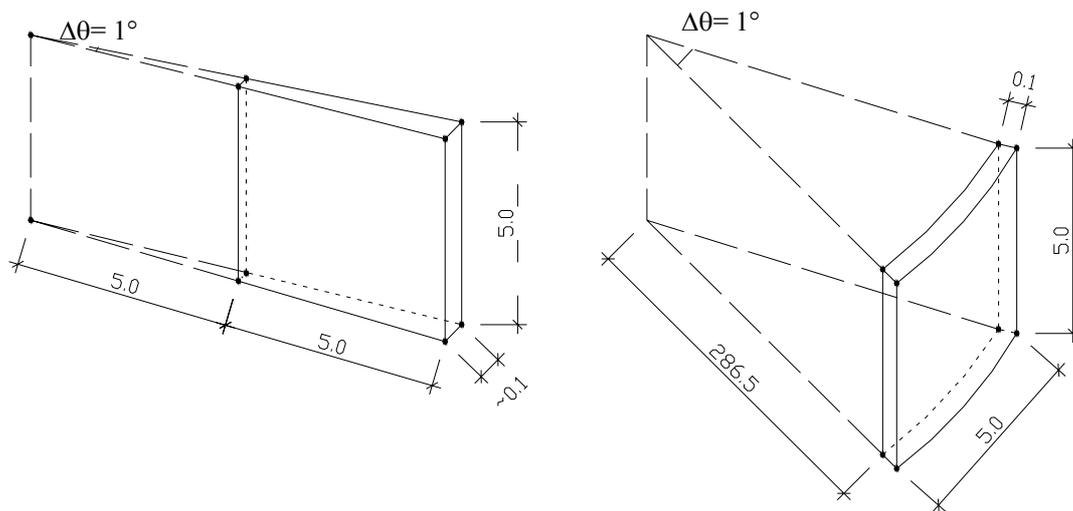


Bild 5.27: Zwei räumliche Modellierungen der flächenhaften Struktur; Angaben in [m]

Die drei getesteten Diskretisierungsstufen des Systems sind in Tabelle 5.4 zusammengefasst.

	ebenes Modell	räumliches Modell $\Delta\theta = \text{const.}$	räumliches Modell $\Delta r = \text{const.}$
Flüssigkeitselement	4-knotig eben 0.1 m Dicke	8-knotig räumlich konvektiv	8-knotig räumlich konvektiv
Diskretisierung	Höhe x Länge: 8x8 Elemente	Umfang x Radius x Höhe: 1x8x8 Elemente	Umfang x Radius x Höhe: 8x1x8 Elemente

Tabelle 5.4: Diskretisierungsstufen

Nach HOUSNER ergibt sich durch die analytische Eigenfrequenzberechnung nach (5.68)

$$\omega^2 = \frac{1.58 \cdot 9.81}{5.0/2} \cdot \tanh(1.58 \cdot \frac{5.0}{5.0/2}) = 6.181 \text{ (rad/s)}^2 \quad (5.69)$$

die Grundeigenfrequenz zu $\omega_1 = 2.5 \text{ rad/s}$.

Die Ergebnisse der statischen Verformung unter Flüssigkeitseigengewicht, sowie die ersten beiden Eigenformen mit den zugehörigen Eigenfrequenzen sind in Bild 5.28 für die drei Diskretisierungen wiedergegeben. Alle Modellierungen zeigen sehr gute Übereinstimmung mit den erwarteten Ergebnissen. Durch die geringen Ungenauigkeiten der Geometrie in Bezug auf die Originalgeometrie sind die Ergebnisse der räumlichen Diskretisierungen etwas schlechter als das Ergebnis der ebenen Modellierung. Der geringe Fehler von circa 3% ist ausschließlich auf die Geometrieabbildung zurückzuführen. Auch der letzte Test des entwickelten Elementes ist damit sehr gut bestanden.

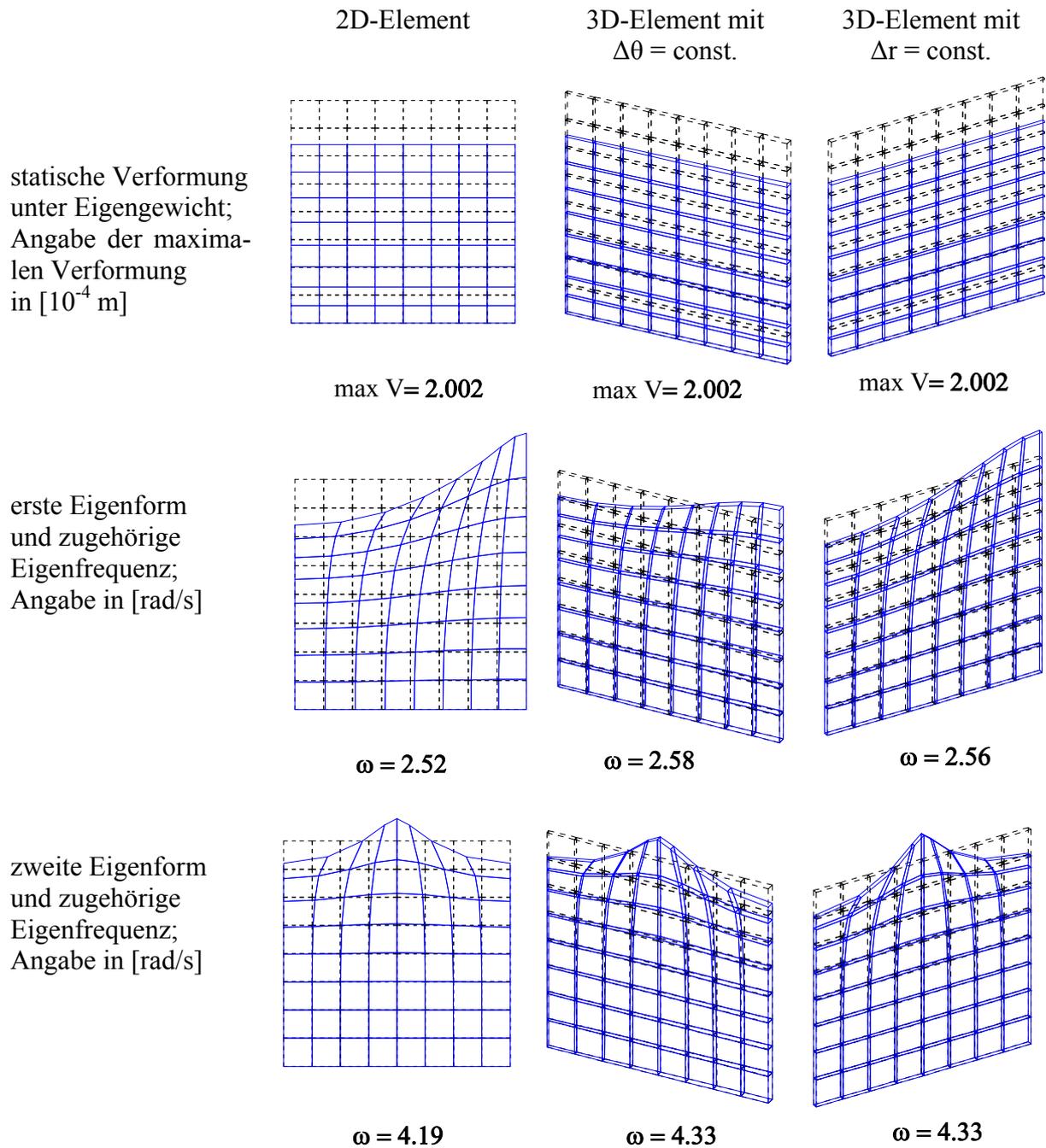


Bild 5.28: Modellierung eines Querschnittes eines Rechtecktanks

Die in diesem Kapitel durchgeführten Verifikationsrechnungen haben Funktionsweise und Einsatzfähigkeit des im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten finiten Flüssigkeitselementes unter selektiv-reduzierter Integration bestätigt. Alle weiteren Berechnungen werden daher mit dem räumlichen konvektiven Fluidelement unter eben dieser selektiv-reduzierten Integration durchgeführt. Alle die Bauwerksstruktur abbildenden Elemente werden ihrer Herleitung entsprechend einer vollständigen Integration unterzogen.

Behälterstruktur

Die unterschiedlichen Eigenschaften der zu lagernden Flüssigkeiten erfordern ein weites Spektrum verschiedener Ausbildungen der Behälterstrukturen, die sich sowohl in der Materialwahl als auch im Wandaufbau unterscheiden. Bei der dynamischen Berechnung von Flüssigkeitstanks unter Erdbebenlasten muss eine Vielzahl auftretender Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. Zur numerischen Umsetzung wird ein Makro-Wand-Element erstellt, das die Simulation einer Wandschale mit maximal drei Schichten, bestehend aus zwei Schalenelementen (wahlweise Stahl oder Beton) und einer volumenartigen Zwischenschicht für den Einsatz tragender Dämmmaterialien erlaubt. Das hierzu verwendete FE-Schalenelement wurde von [MONTAG97] in isoparametrischer Formulierung nach einer exakten Schalentheorie finiter Rotationen entwickelt. Nichtlineare Materialgesetze für das Material Stahl liegen für das Element vor. Um das Verhalten des Betons wirklichkeitsnah abbilden zu können, werden die von [ZAHLTEN90] vorgestellten Betongesetze implementiert. Die Dämmschicht wird als nichtlineares Volumenelement mit linear-viskoser Elementdämpfung hergeleitet.

6.1 Allgemeines zum Makroelement

Die bei der Ausführung mehrschaliger Behälterausbildungen hauptsächlich verwendeten Materialien sind Stahl und Beton für die Haupttragelemente sowie Elast- und Plastbaustoffe für tragende oder nichttragende Zwischenschichten. Um bei der Berechnung mehrschaliger Behälterschalen eine verwaltungstechnisch einfache Lösung zu gewährleisten, wird ein Makro-Schalenelement entwickelt, das aus drei Schichten zusammengesetzt ist: einer äußeren Tankschale, einer Dämmschicht und einer inneren Tankschale. Das Materialverhalten der jeweiligen Schichten kann je nach Bedarf individuell angesetzt werden.

Das verwendete FE-Schalenelement wurde von [MONTAG97] in isoparametrischer Formulierung nach einer exakten Schalentheorie finiter Rotationen entwickelt. Nichtlineare Materialgesetze für den Stahl liegen für das Element vor. Um das Verhalten des Betons wirklichkeitsnah abbilden zu können, werden die von [ZAHLTEN90] vorgestellten und in der Praxis schon mit Erfolg angewendeten Betongesetze implementiert.

Die Zwischenschicht bildet die gegenseitige Beeinflussung des doppelwandigen Behälters durch die zwischen ihnen eingebaute Dämmschicht ab. Hier scheint der Einsatz von flächhaften bzw. volumenhaften Federelementen, oder der kontinuumsbasierte Ansatz eines Volumenelementes sinnvoll. In der vorliegenden Arbeit wird für die Simulation der Zwischenschicht ein nichtlineares Volumenelement auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen des Kapitels 4 hergeleitet. Neben dem isotropen Materialverhalten wird der Sonderfall eines transversal-isotropen Verhaltens, also einer unterschiedlichen Abbildung des Materialverhaltens transversal und normal zu den angrenzenden Schalen, berücksichtigt.

Einen für das dynamische Verhalten der Struktur wichtigen Faktor stellt die Dämpfung dar. Die Dämpfungsursachen sind sehr komplex, so dass in der Regel stark vereinfachende Modelle verwendet werden. Für die Materialdämpfung wird im Allgemeinen ein hysteretisches Dämpfungsmodell bevorzugt, das in Abhängigkeit von der Verschiebungs- bzw. Verzerrungsamplitude formuliert wird. Dieses materialspezifische Dämpfungsverhalten benötigt aufwendige Experimente zur Ermittlung der Dämpfungsgesetze. Hierfür stehen bislang jedoch nur geringe Informationen zur Verfügung, so dass als Alternative die linear-viskose Dämpfung eingesetzt wird. In der Praxis wird dieses Dämpfungsverhalten fast ausschließlich benutzt, da sich die Zusammenhänge mathematisch einfach darstellen lassen, und nach [PETERSEN96] dennoch eine gute Approximation des globalen Systemverhaltens bieten. Die linear viskose Dämpfung kann über spezielle viskose Dämpfungskoeffizienten c oder die RAYLEIGH-Methode berücksichtigt werden. Bei der RAYLEIGH-Methode werden in Abhängigkeit der ersten beiden Eigenfrequenzen die so genannten RAYLEIGH-Koeffizienten bestimmt, mit deren Hilfe sich aus der Gesamtsteifigkeits- und Gesamtmassenmatrix die Gesamtdämpfungsmatrix berechnen lässt. Bei der dynamischen Berechnung flüssigkeitsgefüllter Tanks würde nach diesem Vorgehen automatisch die Flüssigkeit in die Dämpfung des Behälters miteinbezogen. Um dies auszuschließen, werden Elementdämpfungsmatrizen für die Zwischenschicht des Makroelementes verwendet, die das linear-viskose Dämpfungsverhalten des Behälters ohne Beteiligung der Flüssigkeit durch den Ansatz der RAYLEIGH-Dämpfung auf Elementebene ermöglichen.

6.2 Innen- und Außenschale des Makroelementes

Für die Abbildung der tragenden Innen- und Außenwand der Tankschale wird ein nicht-lineares schubweiches Schalelement mit einem 5-parametrischen Ansatz, dem so genannten MINDLIN-REISSNER-Ansatz, gewählt

$$\underline{x} = \underline{x}^{(0)} + \theta^3 \underline{d}, \quad (6.1)$$

bei dem der Ortsvektor der Referenzfläche $\underline{x}^{(0)}$ durch drei unabhängige Variablen x^i beschrieben wird. Eine Beschreibung des Deformationsverhaltens des Schalendirektors \underline{d} erfolgt mit Hilfe der zwei in Bild 6.1 dargestellten EULER-Winkel Ψ_α .

$$\underline{d} = d^i(\Psi_\alpha) \underline{i}_i \quad (6.2)$$

$$d^1 = \sin \psi_1 \cos \psi_2$$

$$d^2 = \sin \psi_1 \sin \psi_2 \quad (6.3)$$

$$d^3 = \cos \psi_1$$

Diese Darstellung hat sich als vorteilhaft für das Konvergenzverhalten erwiesen und ist unter anderem von [MONTAG92] umgesetzt worden. Für eine Berechnung zusammengesetzter

Strukturen wurden die zwei EULER-Winkel von [ZAHLTEN99] auf die drei globalen Richtungen transformiert.

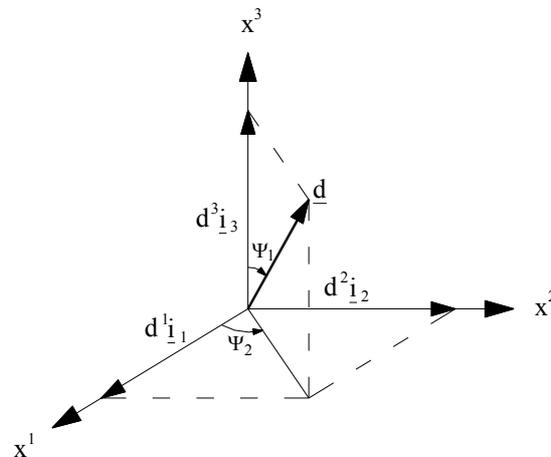


Bild 6.1: Definition der Rotationsvariablen Ψ_α

Vergleichsrechnungen mit Elementen, bei denen eine Ergänzung dieses Ansatzes um einen Dickenparameter λ auf 6 Parameter vorgenommen wurde, führen zu keinen wesentlichen Vorteilen. Im Gegenteil, der dabei gewählte Ansatz des Mittelflächen-Direktors (die Beschreibung des Schalenraumes bezieht sich auf die Schalenmittelfläche) führt bei zusammengesetzten Strukturen zu Schalenverschneidungen und Problemen bei der Kopplung des Dickenfreiheitsgrades λ . Daher wird auf das isoparametrische vier-knotige Schalenelement nach Bild 6.2 von [MONTAG92] zurückgegriffen.

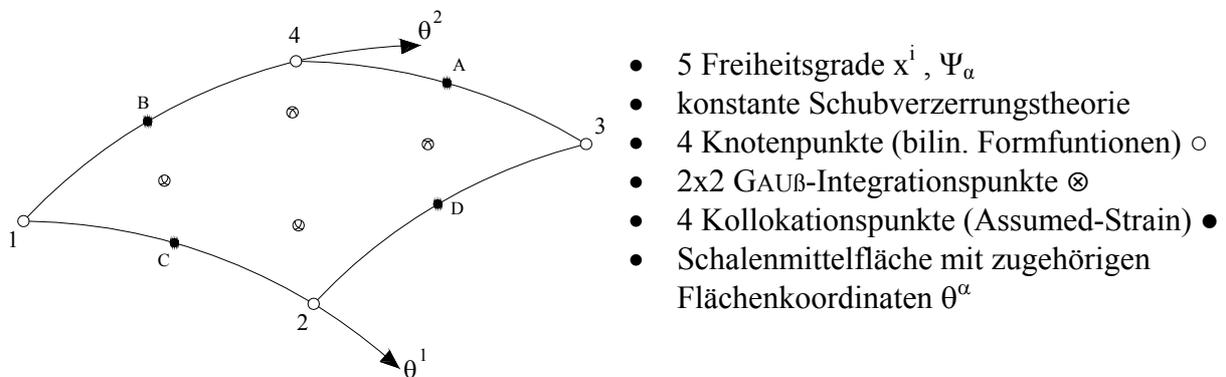


Bild 6.2: Isoparametrisches Assumed-Strain-Schalenelement finiter Rotationen

Für die Stahl-Behälterschale wird ein elasto-plastisches Materialmodell mit isotroper und kinematischer Verfestigung verwendet, das von [MONTAG97] in das verwendete Schalenmodell eingearbeitet wurde. Die Idealisierung des Betons erfolgt nach [ZAHLTEN90] durch eine elastisch-idealplastische Theorie, sowie einer plastischen Bruchtheorie jeweils mit Rissbildung. Die Rissbildung im Zugbereich erfolgt durch das orthogonale „Fixed-Crack-Model“. Diese Betonmodellierungen sind in Kombination mit doppelt gekrümmten Schalenelementen aus einer von [HARTE82] entwickelten Schalenelementfamilie schon erfolgreich bei der Berechnung von Kühltürmen zum Beispiel bei [HARTE99] eingesetzt worden. Die Simulation des nichtlinearen Materialverhaltens für Beton und Stahl wird auf der Ebene eines Materialpunktes durchgeführt, wie in Kapitel 2.1.4 vorgestellt. Die Grundlagen der Materialtheorie sind in Kapitel 4.4.3 erläutert; Einzelheiten zur Materialformulierung sind den Arbeiten von [MONTAG97] und [ZAHLTEN90] zu entnehmen.

6.3 Volumenschicht des Makroelementes

6.3.1 Grundgleichungen des Volumenelementes

Die Grundlagen und Herleitungen der kontinuumsmechanischen und thermodynamischen Beschreibung des Volumens sind in Kapitel 4 aufgeführt. Hiervon werden als Basis der Finiten-Element-Formulierung das Prinzip der virtuellen Verrückung nach (4.69)

$$-\int_{\mathcal{R}_0} \underline{S} : \delta \underline{E} dV_0 + \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underline{f}_0 \cdot \delta \underline{u} dV_0 + \int_{\partial \mathcal{R}_0} \underline{\bar{t}}_0 \cdot \delta \underline{u} dA_0 = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underline{\ddot{u}} \cdot \delta \underline{u} dV_0, \quad (6.4)$$

die kinematische Beziehung nach (4.28)

$$\underline{E} = E_{ij} \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j = \frac{1}{2} (\underline{g}_{ij} - G_{ij}) \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j, \quad (6.5)$$

und das konstitutive Gesetz nach Kapitel 4.4.2

$$\underline{S} = \underline{D} : \underline{E} \quad (6.6)$$

als maßgebliche Beziehungen übernommen. Aufgrund der vielfältigen Materialgesetze ist als konstitutives Gesetz in (6.6) nur der linear-elastische Fall als einfachst mögliche Beziehung angegeben.

Die geometrische Nichtlinearität nach (6.5) wird durch den GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor in den kovarianten Komponenten

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{G}_i \cdot \underline{u}_{,j} + \underline{G}_j \cdot \underline{u}_{,i} + \underline{u}_{,i} \cdot \underline{u}_{,j}) \quad (6.7)$$

beschrieben. Gleichung (6.4) entspricht der ungedämpften Arbeitsgleichung. Diese wird aufgrund der Berücksichtigung einer linear viskosen Dämpfung um den geschwindigkeitsabhängigen Anteil

$$\delta W_{\text{dämp}} = \int_{\mathcal{R}_0} \underline{f}_D \cdot \delta \underline{u} dV_0 = \int_{\mathcal{R}_0} \underline{c} \dot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV_0 \quad (6.8)$$

erweitert, wobei \underline{f}_D die Dämpfungskraft pro Volumeneinheit darstellt. Hierfür wurde das linear viskose Dämpfungsgesetz

$$\underline{F}_D = \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}} \quad (6.9)$$

verwendet, das den linearen Zusammenhang zwischen der Dämpfungskraft \underline{F}_D und der Geschwindigkeit $\dot{\underline{u}}$ mit Hilfe der Dämpfungskonstanten \underline{c} angibt.

Für die FE-Umsetzung wird eine Linearisierung der Variationsformulierung benötigt. Da die Dämpfung und die Masse als über den Belastungsverlauf konstant angenommen werden dürfen und weiterhin nur die Berücksichtigung rein konservativer Lasten zugelassen wird, betrifft die Linearisierung nur die innere virtuelle Arbeit. Diese linearisierte virtuelle innere Arbeit ergibt sich zu

$$L\delta W_i(\underline{u}, \delta \underline{u}, \Delta \underline{u}) = \int_{\mathcal{R}_0} \bar{\underline{S}} : \delta \bar{\underline{E}} dV_0 + \int_{\mathcal{R}_0} \Delta \underline{S} : \delta \underline{E} dV_0 + \int_{\mathcal{R}_0} \bar{\underline{S}} : \Delta \delta \underline{E} dV_0. \quad (6.10)$$

Die Grundzustandsspannungen $\bar{\underline{S}}$ ergeben sich in Abhängigkeit des gewählten Materialgesetzes nicht mehr unmittelbar aus den Grundzustandsverzerrungen $\bar{\underline{E}}$, sondern durch die Integration des inkrementellen Werkstoffgesetzes längs des Verzerrungspfades. Ebenfalls in Abhängigkeit der gewählten Materialroutinen ergibt sich die tangentielle Werkstoffmatrix \underline{D}_T ,

mit deren Hilfe sich die erste Variation der Spannungen $\Delta \underline{S}$ aus der ersten Variation der Verzerrungsgröße $\Delta \underline{E}$ bestimmen lässt.

$$\Delta \underline{S} = \underline{D}_T : \Delta \underline{E} \quad (6.11)$$

Die Linearisierung stellt die Grundlage der Finiten-Element-Herleitung dar. Sie ist ein rein mathematisches Werkzeug, das sich unter dem Begriff der Inkrementierung auf anschauliche Art ingenieurmäßig anhand dreier Verformungszustände beschreiben lässt. Diese sind in Bild 6.3 dargestellt.

- Ausgangszustand (AZ): unverformter, spannungsfreier Ausgangszustand der Struktur
- Grundzustand (GZ): approximierter Gleichgewichtszustand unter vorgegebenen Lasten mit bekannten Verzerrungen und Spannungen
- Nachbarzustand (NZ): zu ermittelnder Gleichgewichtszustand unter dem aufgebracht Lastinkrement

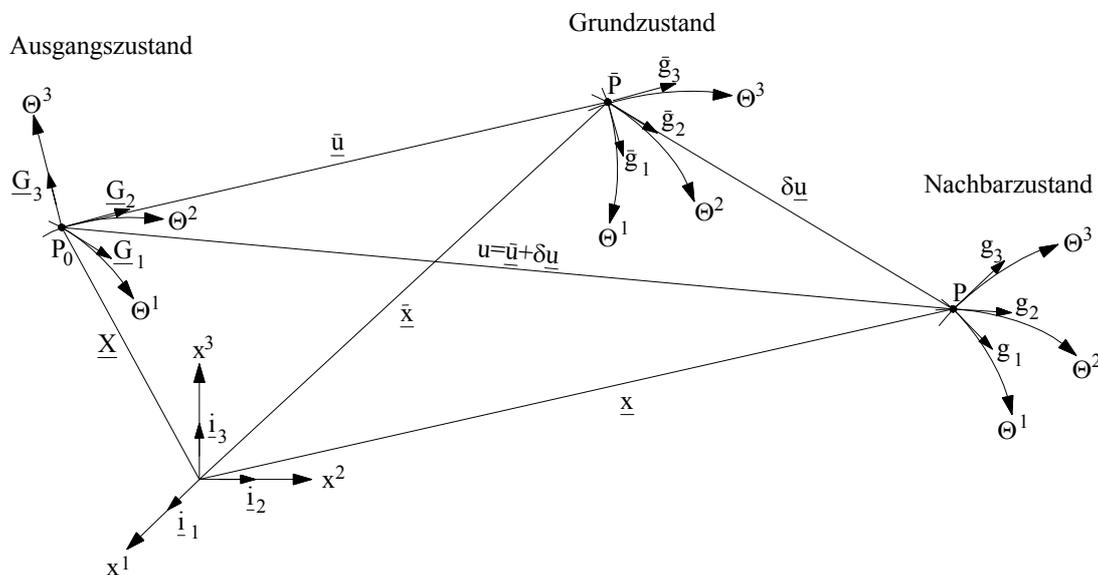


Bild 6.3: Darstellung der Verformungszustände

Die Verformung des Nachbarzustandes \underline{u} ergibt sich aus dem (bekannten) Grundzustand $\bar{\underline{u}}$ und dem (unbekannten) inkrementellen Verformungsschritt $\delta \underline{u}$:

$$\underline{u} = \bar{\underline{u}} + \delta \underline{u} . \quad (6.12)$$

Der Ortsvektor wird äquivalent aufgestellt.

$$\underline{x} = \bar{\underline{x}} + \delta \underline{x} \quad (6.13)$$

Bei dem Verzerrungstensor liegt aufgrund der nichtlinearen Kinematik ein Verzerrungsinkrement vor, das sich in eine Reihe von Anteilen aufspalten lässt, deren unterschiedliche Glieder eine aufsteigende Potenz der Verformung besitzen. Durch die Linearisierung werden von dieser Reihe nur der linear und der quadratisch abhängige Anteil, also die erste und die zweite Variation, benötigt.

$$\underline{E} = \bar{\underline{E}} + \delta \underline{E} + \Delta \delta \underline{E} \quad (6.14)$$

Dies lässt sich auch als Abbruch einer TAYLORreihenentwicklung nach dem quadratischen Glied interpretieren. Für die inkrementelle Darstellung der Spannung wird nur die lineare Approximation der TAYLORreihenentwicklung benötigt:

$$\underline{S} = \bar{\underline{S}} + \Delta \underline{S} . \quad (6.15)$$

Oftmals werden die Inkremente nicht als Variationen dargestellt, sondern durch Indizes gekennzeichnet.

$$\underline{\underline{x}}^+ = \delta \underline{\underline{x}} \qquad \underline{\underline{x}}^{++} = \delta \Delta \underline{\underline{x}} \quad (6.16)$$

Damit wird eine Verwechslung mit der Variablen δ als Beschreibung von virtuellen Größen, wie sie im Prinzip der virtuellen Verrückung nach (6.4) benötigt werden, vermieden. Diese Darstellung wird im Folgenden übernommen, so dass sich die inkrementierten Größen wie folgt schreiben lassen:

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}}^+ \qquad \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{x}}^+ \quad (6.17)$$

bzw.

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}}^+ + \underline{\underline{E}}^{++} \qquad \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}}^+ \quad (6.18)$$

Mit den kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors ergeben sich nun die Gleichungen, die in einer diskreten Form als FE-Code zu implementieren sind. Im linearen Fall ergibt sich

$$E_{ij} = \bar{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{g}}_i \cdot \underline{\underline{g}}_j - \underline{\underline{G}}_i \cdot \underline{\underline{G}}_j) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{X}}_{,i} \cdot \underline{\underline{u}}_{,j} + \underline{\underline{u}}_{,i} \cdot \underline{\underline{X}}_{,j}) \quad (6.19)$$

Für die nichtlineare Berechnung wird im Grundzustand die Beschreibung

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij}|_{GZ} = \frac{1}{2}(\bar{\underline{\underline{g}}}_i \cdot \bar{\underline{\underline{g}}}_j - \bar{\underline{\underline{G}}}_i \cdot \bar{\underline{\underline{G}}}_j) = \frac{1}{2}(\bar{\underline{\underline{x}}}_{,i} \cdot \bar{\underline{\underline{x}}}_{,j} - \bar{\underline{\underline{X}}}_{,i} \cdot \bar{\underline{\underline{X}}}_{,j}) \quad (6.20)$$

verwendet, und die Berechnung der Inkremente erfolgt durch:

$$\underline{\underline{E}}_{ij}^+ = \frac{1}{2} \frac{\partial E_{ij}}{\partial \underline{\underline{x}}} \Big|_{GZ} \cdot \underline{\underline{x}}^+ = \frac{1}{2}(\bar{\underline{\underline{x}}}_{,i} \cdot \underline{\underline{x}}_{,j}^+ + \bar{\underline{\underline{x}}}_{,j} \cdot \underline{\underline{x}}_{,i}^+) \quad (6.21)$$

$$\underline{\underline{E}}_{ij}^{++} = \frac{1}{2} \underline{\underline{x}}^+ \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial \underline{\underline{x}}^2} \Big|_{GZ} \cdot \underline{\underline{x}}^+ = \frac{1}{2}(\underline{\underline{x}}_{,i}^+ \cdot \underline{\underline{x}}_{,j}^+ + \underline{\underline{x}}_{,j}^+ \cdot \underline{\underline{x}}_{,i}^+) \quad (6.22)$$

Die Ortsvektorableitungen des Grundzustandes $\bar{\underline{\underline{x}}}_{,i}$ lassen sich aus der Ableitung des Verschiebungsansatzes im Grundzustand $\underline{\underline{u}}_{,i}$ und der Ortsvektorableitungen des Ausgangszustandes $\underline{\underline{X}}_{,i}$ ermitteln.

$$\bar{\underline{\underline{x}}}_{,i} = \underline{\underline{X}}_{,i} + \underline{\underline{u}}_{,i} \quad (6.23)$$

Die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors ergeben sich im linearen Fall zu

$$S^{ij} = \bar{S}^{ij} = D^{ijkl} E_{kl} \quad (6.24)$$

mit dem linear-elastischen Materialtensor D^{ijkl} . Seine Komponenten sind im allgemeinen anisotropen Fall durch 21 unabhängige Elastizitätskonstanten gegeben. Die unabhängigen Konstanten können reduziert werden, wenn eine Charakterisierung des Materials in orthotrop (9 unabhängige Konstanten), transversal isotrop (5 unabhängige Konstanten) oder isotrop (2 unabhängige Konstanten) erfolgen kann. Isotropes Material verhält sich nach allen Richtungen gleich. Es ist die gebräuchlichste Form Materialien zu beschreiben. Die Komponenten des Materialtensors ergeben sich in diesem Fall zu

$$D^{ijkl} = G(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{kl}) \quad (6.25)$$

mit dem Schubmodul G und der Querkontraktion ν . Neben dem isotropen Materialverhalten soll für die Zwischenschicht auch ein Sonderfall der transversalen Isotropie verwendet werden. Allgemein bedeutet transversal isotrop, dass ein Material eine ausgezeichnete Richtung besitzt und die Richtungen senkrecht dazu gleichberechtigt sind. Im Fall des hier

formulierten Volumenelementes wird die θ^3 Richtung als bevorzugte Richtung definiert, die senkrecht zu den angrenzenden Schalenelementen des Makroelementes Kräfte übertragen soll, während die transversalen Richtungen der Isotropie-Ebene $\theta^1\theta^2$ unbelastet bleiben. Damit ergibt sich nur die Materialkomponente D^{3333} des Materialtensors mit dem Elastizitätsmodul für die ausgezeichnete Richtung $E_{||}$ ungleich Null.

$$D^{3333} = E_{||} \cdot g^{33} \cdot g^{33} \quad (6.26)$$

Die allgemeine Darstellung des transversal isotropen Materialtensors sowie die Darstellung für orthotropes Material, das durch drei senkrecht aufeinander stehende Vorzugsrichtungen gekennzeichnet ist, kann bei [GROß97] in kartesischen Koordinatenrichtungen nachgeschlagen werden.

Im physikalisch nichtlinearen Fall ergeben sich die Grundzustandsspannungen \bar{S}^{ij} und die nichtlineare (tangente) Werkstoffmatrix D_T^{ijkl} aus den materialspezifischen Gleichungen.

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} &= f(\text{Materialgesetze}) \\ D_T^{ijkl} &= f(\text{Materialgesetze}) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Elastomere verhalten sich nach [WESCHE88] fast vollständig elastisch isotrop. Allerdings können nennenswerte Anteile elastisch-verzögerter Verformungen auftreten, und auch die Beeinflussung des Materialverhaltens durch Temperaturveränderungen kann beachtlich werden. Diese Einflüsse werden in dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt.

Das transversal isotrope Gesetz ist ideal zur Abbildung einer Schüttung als Zwischenschicht und wird daher um die physikalisch nichtlineare Möglichkeit des Zugausfalls erweitert.

Weitere elastische oder plastische Gesetze können je nach Beschaffenheit der eingesetzten Materialien zusätzlich implementiert werden.

Neben den Grundzustandsspannungen werden die Spannungsinkremente benötigt, die sich aus der tangentialen Werkstoffmatrix und den inkrementellen Verzerrungen ergeben.

$$\bar{S}^{ij+} = D_T^{ijkl+} \cdot \bar{E}_{kl} \quad (6.28)$$

Im physikalisch linearen Fall entspricht die tangente Werkstoffmatrix der linearen Materialmatrix nach (6.25).

6.3.2 Inkrementierung des Prinzips der virtuellen Verrückung

Neben der gedämpften linearen Bewegungsgleichung

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{P}(t) \quad (6.29)$$

wird die gedämpfte tangente Bewegungsgleichung benötigt

$$\underline{M}_T \ddot{\underline{u}} + \underline{C}_T \dot{\underline{u}} + \underline{K}_T \underline{u} = \underline{P} - (\underline{F}_I + \underline{F}_M + \underline{F}_C). \quad (6.30)$$

Die Bedeutung der einzelnen Matrizen sind der folgenden Auflistung zu entnehmen:

\underline{M}	= Massenmatrix
\underline{C}	= Dämpfungsmatrix
\underline{K}	= Steifigkeitsmatrix
\underline{M}_T	= tangente Massenmatrix, im vorliegenden Fall identisch mit \underline{M}
\underline{C}_T	= tangente Dämpfungsmatrix, im vorliegenden Fall identisch mit \underline{C}
\underline{K}_T	= tangente Steifigkeitsmatrix
\underline{P}	= Vektor der äußeren Lasten
\underline{F}_I	= Vektor der inneren Kräfte
\underline{F}_M	= Vektor der Massenträgheitskräfte
\underline{F}_C	= Vektor der Dämpfungskräfte

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix wird im Allgemeinen in eine Anfangsspannungsmatrix \underline{K}_g und eine Anfangsverformungsmatrix \underline{K}_u aufgeteilt, wobei diese oftmals noch in linear (l), linear abhängig (ul) und quadratisch abhängig (un) von den Verformungen \underline{u} aufgespalten wird.

$$\underline{K}_T = \underline{K}_u + \underline{K}_g = (\underline{K}_l + \underline{K}_{ul} + \underline{K}_{un}) + \underline{K}_g \quad (6.31)$$

Eine Erläuterung dieser Größen ergibt sich durch ihre Herleitung, bei der die inkrementierten Größen aus Kapitel 6.3.1 in das Prinzip der virtuellen Verrückung nach (6.4) und (6.8)

$$-\int_{\mathcal{B}_0} \underline{S} : \delta \underline{E} dV_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \underline{f}_0 \cdot \delta \underline{u} dV_0 + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \underline{t}_0 \cdot \delta \underline{u} dA_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \underline{c} \dot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV_0 \quad (6.32)$$

eingesetzt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die entsprechenden Ausdrücke für die einzelnen Arbeitsanteile getrennt und ohne den Index (...)₀ der Referenzkonfiguration dargestellt. Unter Beachtung, dass der virtuelle Grundzustand einer Größe entfällt

$$\delta \underline{u} = \delta(\bar{\underline{u}} + \underline{u}^+) = \delta \underline{u}^+ \quad (6.33)$$

$$\delta \underline{E} = \delta(\bar{\underline{E}} + \underline{E}^+ + \underline{E}^{++}) = \delta \underline{E}^+ + \delta \underline{E}^{++} \quad (6.34)$$

ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

Virtuelle Arbeit der äußeren Lasten

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{t} \cdot \delta \underline{u} dA = \int_{\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{t} \cdot \delta \underline{u} dA \quad (6.35)$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $\underline{P} \qquad \qquad \underline{P}$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\delta W_{\text{träg}} = \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV = \int_{\mathcal{B}} \rho (\bar{\underline{u}} + \underline{u}^+) \cdot \delta (\bar{\underline{u}} + \underline{u}^+) dV = \int_{\mathcal{B}} \rho \bar{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{u}^+ \cdot \delta \underline{u} dV \quad (6.36)$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $\underline{F}_M \qquad \qquad \underline{M}_T$

Virtuelle Arbeit der Dämpfungskräfte

$$\delta W_{\text{dämp}} = \int_{\mathcal{B}} \underline{c} \dot{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV = \int_{\mathcal{B}} \underline{c} (\bar{\underline{u}} + \underline{u}^+) \cdot \delta (\bar{\underline{u}} + \underline{u}^+) dV = \int_{\mathcal{B}} \underline{c} \bar{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{c} \underline{u}^+ \cdot \delta \underline{u} dV \quad (6.37)$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $\underline{F}_C \qquad \qquad \underline{C}_T$

Innere Virtuelle Arbeit

$$\delta W_i = \int_{\mathcal{B}} \underline{S} : \delta \underline{E} dV = \int_{\mathcal{B}} (\bar{\underline{S}} + \underline{S}^+) : \delta (\bar{\underline{E}} + \underline{E}^+ + \underline{E}^{++}) dV =$$

$$\int_{\mathcal{B}} \bar{\underline{S}} : \delta \underline{E} dV + \int_{\mathcal{B}} \bar{\underline{S}} : \delta \underline{E}^{++} dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{S}^+ : \delta \underline{E} dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{S}^+ : \delta \underline{E}^{++} dV \quad (6.38)$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $\underline{F}_l \qquad \qquad \underline{K}_g \qquad \qquad \underline{K}_u \qquad \qquad \text{vernachlässigt}$

6.3.3 Diskretisierung und Implementierung des Volumenelementes

Die Umsetzung der genannten Gleichungen erfolgt an einem isoparametrischen räumlichen 8-Knoten-Element mit je drei Freiheitsgraden pro Knoten. Die Verschiebungsansätze werden für die globalen Verschiebungskomponenten u_i aufgestellt. Um eine Kopplung mit anderen Strukturelementen zu gestatten, wird die Möglichkeit gegeben, die Knotenfreiheitsgrade \hat{u}_i in Komponenten der jeweils gewünschten Geometrie (zum Beispiel Zylinderkoordinaten) zu transformieren.

Im Sinne der Weggrößenformulierung erfolgt die Diskretisierung der kontinuierlichen Verschiebungsvariablen \underline{u} mit den in Bild 6.4 dargestellten trilinearen Formfunktionen Ω_k mit Hilfe der diskreten Knotenvariablen \hat{u}_i^k .

$$\underline{u} = u_i(r, s, t)\underline{i}^i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_k(r, s, t) \hat{u}_i^k \underline{i}^i \quad (6.39)$$

Diese Formulierung gilt für die inkrementellen Größen \underline{u}^+ und die Grundzustandsgrößen \underline{u} . Aufgrund der isoparametrischen Darstellung werden die Geometrieansätze mit Hilfe derselben Formfunktionen Ω_k durch globale Knotenkoordinaten \hat{x}_i^k aufgestellt.

$$\underline{x} = x^i(r, s, t)\underline{i}^i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_k(r, s, t) \hat{x}_i^k \underline{i}^i \quad (6.40)$$

Diese Formulierung gilt für die inkrementelle Darstellung \underline{x}^+ , die Grundzustandsgrößen \underline{x} und für die Darstellung des Ausgangszustandes \underline{X} . Für die Diskretisierung der Beschleunigungen und Geschwindigkeiten wird ebenfalls auf die Formfunktionen Ω_k zurückgegriffen.

$$\underline{\ddot{u}} = \ddot{u}_i(r, s, t)\underline{i}^i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_k(r, s, t) \ddot{\hat{u}}_i^k \underline{i}^i \quad (6.41)$$

$$\underline{\dot{u}} = \dot{u}_i(r, s, t)\underline{i}^i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_k(r, s, t) \dot{\hat{u}}_i^k \underline{i}^i \quad (6.42)$$

Auch Gleichungen (6.41) und (6.42) gelten sowohl für die Grundzustandsgrößen, als auch für die inkrementellen Größen.

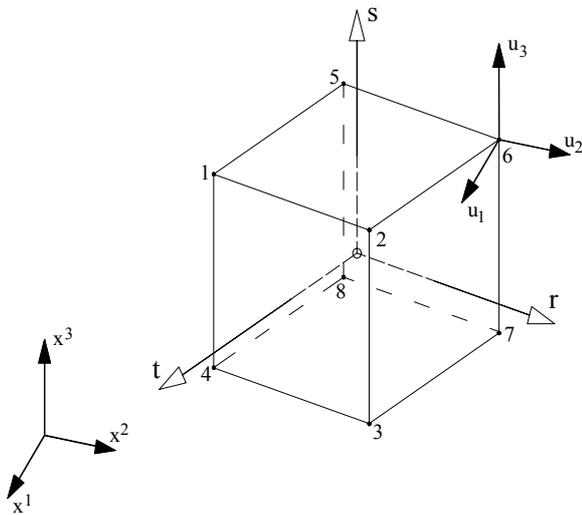
Isoparametrisches Finites Element mit 8 Knoten	Ansatzfunktionen
	$\Omega_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$ $\Omega_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$ $\Omega_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$ $\Omega_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$ $\Omega_5 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$ $\Omega_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$ $\Omega_7 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$ $\Omega_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$

Bild 6.4: Ansatzfunktionen des Volumenelementes

Mit der Berechnung der kovarianten Basisvektoren in Richtung der Einheitskoordinaten r, s, t nach Bild 6.4

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{g}}_r &= x_{,r}^i(r, s, t)\underline{\mathbf{i}}_i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_{k,r}(r, s, t) \hat{x}_k^i \underline{\mathbf{i}}_i \\ \underline{\mathbf{g}}_s &= x_{,s}^i(r, s, t)\underline{\mathbf{i}}_i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_{k,s}(r, s, t) \hat{x}_k^i \underline{\mathbf{i}}_i \\ \underline{\mathbf{g}}_t &= x_{,t}^i(r, s, t)\underline{\mathbf{i}}_i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_{k,t}(r, s, t) \hat{x}_k^i \underline{\mathbf{i}}_i\end{aligned}\quad (6.43)$$

können die kovariante Metrik, die kontravariante Metrik und die kontravarianten Basisvektoren mit den in Kapitel 4.1.3 gegebenen Formeln ermittelt werden. Die Auswertung dieser Formeln erfolgt für den Ausgangszustand, die Basisvektoren des Grundzustandes können alternativ nach (6.23) ermittelt werden. Hierfür ist die Ermittlung des Verschiebungsgrundzustandes $\underline{\mathbf{u}}$ nach (6.39) nötig.

Für die Berechnung der inkrementellen Verzerrungen $\underline{\mathbf{E}}^+$ und $\underline{\mathbf{E}}^{++}$ sowie der Grundzustandsverzerrungen $\underline{\mathbf{E}}$ nach (6.20-22) werden die Ableitungen der inkrementellen Freiheitsgrade nach (6.40) benötigt. Die Ableitung erfolgt, äquivalent zu (6.43), bezüglich der Einheitskoordinaten r, s und t . Die so berechneten Verzerrungsgrößen sind auf die Richtung der Einheitskoordinaten bezogen. Dies gilt auch für die daraus zu berechnenden Spannungsgrößen und den Werkstofftensor nach Gleichungen (6.24-28). Für das diskrete Prinzip der virtuellen Verformung ist eine Separation der inkrementellen Verzerrungsgrößen bezüglich der inkrementellen Freiheitsgrade nach (6.46) erforderlich.

$$\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \mathbf{E}_{ij}|_{\text{GZ}} \quad \mathbf{E}_{ij}^+ = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E}_{ij}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \Big|_{\text{GZ}} \cdot \underline{\mathbf{x}} \quad \mathbf{E}_{ij}^{++} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{x}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{ij}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^2} \Big|_{\text{GZ}} \cdot \underline{\mathbf{x}} \quad (6.44)$$

Werden die diskreten Gleichungen in das kontinuierliche Arbeitsprinzip (6.32) eingesetzt, lassen sich die virtuellen inkrementellen Größen separieren, so dass sich die benötigten Elementmatrizen für die gedämpfte Bewegungsgleichung ergeben.

$$\delta W = \delta \underline{\mathbf{u}}^T (\underline{\mathbf{M}}_T \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{C}}_T \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}}_T \underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{F}}_I + \underline{\mathbf{F}}_M + \underline{\mathbf{F}}_C) - \underline{\mathbf{P}}) = 0 \quad (6.45)$$

Hierbei ist zu beachten, dass nach Bild 6.3 gilt:

$$\underline{\mathbf{x}} = \bar{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\mathbf{x}} = \bar{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\mathbf{u}} \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{\mathbf{x}} = \delta \underline{\mathbf{u}}. \quad (6.46)$$

Die Elementmatrizen werden, äquivalent zu Kapitel 6.3.2, unterteilt in ihre Arbeitsanteile dargestellt. Zur besseren Übersichtlichkeit erfolgt die Darstellung in matrizieller Schreibweise. Dabei entspricht $\underline{\mathbf{Q}}$ der Formfunktionenmatrix und $\underline{\mathbf{B}}$ enthält als Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix die Ableitungen der Formfunktionen. Die Indizes „+“ und „++“ kennzeichnen nach (6.44) die Abhängigkeit der Anteile von den aktuellen Grundzustandsverschiebungen.

Virtuelle Arbeit der äußeren Lasten

$$\underline{\mathbf{P}} = \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{p}} dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{t}} dA \quad (6.47)$$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\underline{\mathbf{F}}_M = \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{Q}}^T \rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} dV \quad (6.48)$$

$$\underline{\underline{M}}_T = \int_{\mathcal{B}} \underline{\underline{\Omega}}^T \rho \underline{\underline{\Omega}} dV \quad (6.49)$$

Virtuelle Arbeit der Dämpfungskräfte

$$\underline{\underline{F}}_C = \int_{\mathcal{B}} \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{u}} dV \quad (6.50)$$

$$\underline{\underline{C}}_T = \int_{\mathcal{B}} \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{\Omega}} dV \quad (6.51)$$

Innere Virtuelle Arbeit

$$\underline{\underline{F}}_I = \int_{\mathcal{B}} \underline{\underline{B}}^{+T} \underline{\underline{S}} dV \quad (6.52)$$

$$\underline{\underline{K}}_g = \int_{\mathcal{B}} (\underline{\underline{B}}^{++T} + \underline{\underline{B}}^{++}) \underline{\underline{S}} dV \quad (6.53)$$

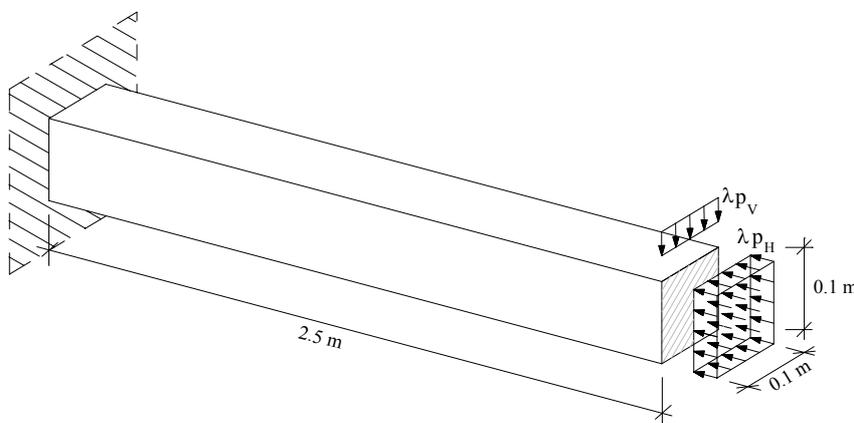
$$\underline{\underline{K}}_u = \int_{\mathcal{B}} \underline{\underline{B}}^{+T} \underline{\underline{D}}_T \underline{\underline{B}}^+ dV \quad (6.54)$$

6.4 Überprüfung des entwickelten Makroelementes

Zur Überprüfung des Makroelementes werden die einzelnen Anteile des Elementes unabhängig voneinander getestet. In Kapitel 6.4.1 erfolgt zunächst die Überprüfung der volumenartigen Zwischenschicht und in Kapitel 6.4.2 wird die Implementierung der Betonroutinen aus [ZAHLTEN90] in das vier-knotige Schalenelement kontrolliert.

6.4.1 Zwischenschicht des Makroelementes

Zur Überprüfung der Zwischenschicht des Makroelementes wird der in Bild 6.5 dargestellte eingespannte Balken untersucht. Der Balken ist durch eine vertikale Last p_v und eine horizontale Last p_h am Kragarmende belastet, die im Rahmen einer nichtlinearen Analyse durch den Lastfaktor λ gesteigert werden. Die resultierende vertikale Last P_v beträgt 3.0 kN und die resultierende horizontale Last P_h beträgt 30.0 kN.



Materialdaten:

$$E = 3.0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0.0$$

$$\rho = 2.5 \text{ to/m}^3$$

Bild 6.5: Testbeispiel

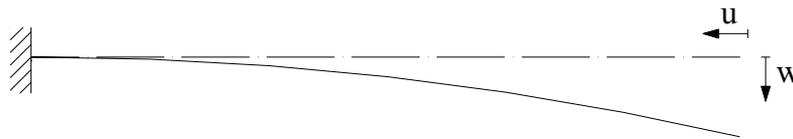


Bild 6.7: Verformungsdarstellung

Ergebnisse der linear statischen Berechnung

Das lineare Balkenelement liefert schon bei einer Diskretisierung mit einem einzigen Element den korrekten Verformungswert von $w = 6.25$ cm. Die Berechnungsergebnisse aus der Diskretisierung mit Hilfe der Schalenelemente und des Volumenelementes liefern erwartungsgemäß identische Ergebnisse. In Bild 6.8 ist dargestellt, wie mit steigender Elementanzahl das Verformungsergebnis aus der Berechnung mit Hilfe der Volumen- bzw. der Flächenelemente gegen die exakte Lösung des Balkenelementes konvergiert.

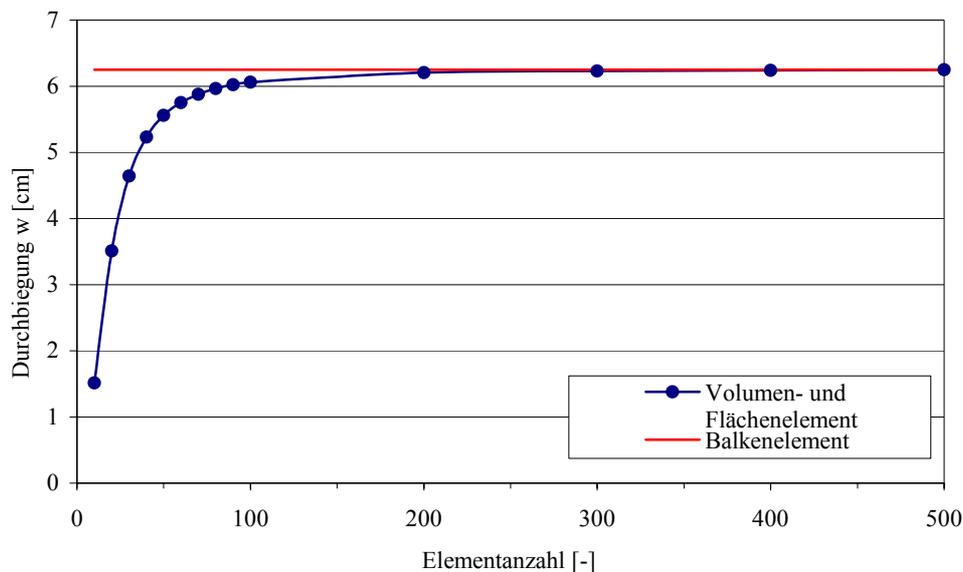


Bild 6.8: Lineare Berechnung: Darstellung der Durchbiegung

Für die axiale Verformung u ergibt sich für alle drei Diskretisierungen bereits bei der Verwendung von nur einem Element die exakte Lösung von 0.025 cm.

Ergebnisse der nichtlinear statischen Berechnung

Für die nichtlineare Berechnung wird aufgrund der linearen Ergebnisse bei den Diskretisierungen A und B eine Unterteilung in 200 Volumen- bzw. Flächenelemente gewählt. Für die Referenzlösung durch das Balkenelement wird bei einer Elementanzahl von 25 eine asymptotische Lösung erzielt. Die nichtlinearen Berechnungen zeigen wiederum identische Lösungen für das Volumenelement und das Flächenelement. Ein Vergleich der sich unter steigendem Lastfaktor λ einstellenden axialen Verformung u und Durchbiegung w der unterschiedlichen Diskretisierungen ist in Bild 6.9 wiedergegeben.

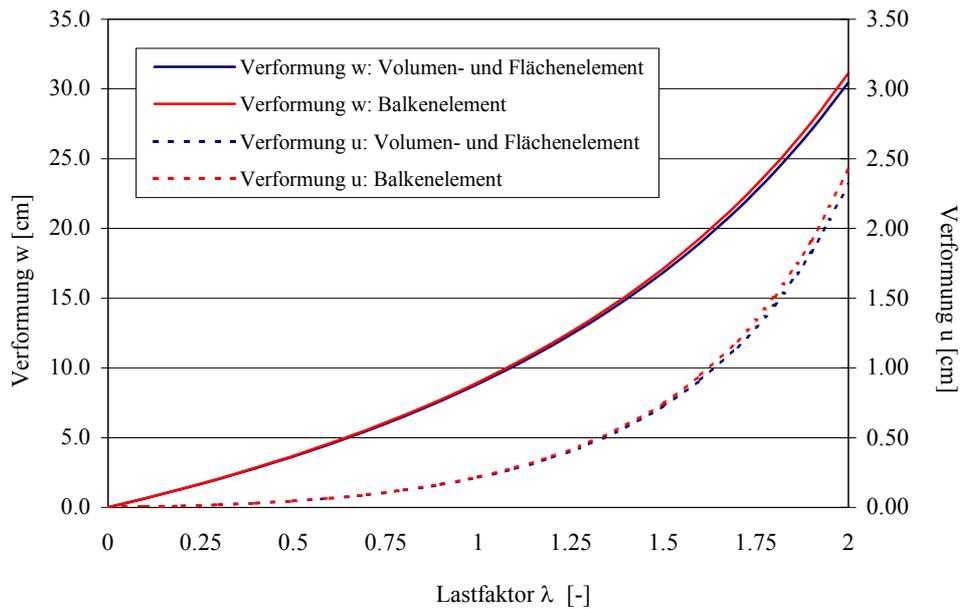


Bild 6.9: Nichtlineare Berechnung: Verformungsgrößen u und w

Eigenfrequenzberechnung

Die Eigenfrequenzberechnung ergibt für alle drei Diskretisierungen identische Eigenkreisfrequenzen und zugehörige Eigenformen, wovon die ersten beiden schematisch in Bild 6.10 dargestellt sind.

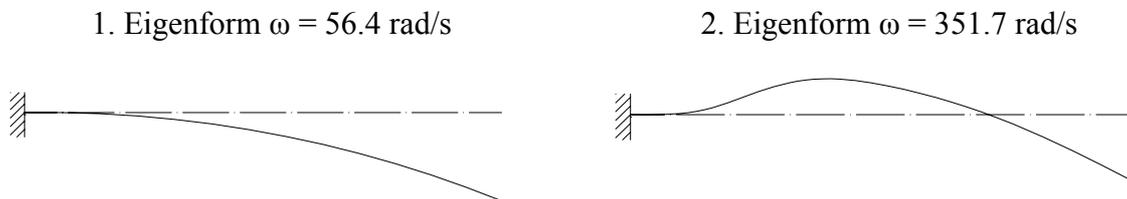


Bild 6.10: Eigenformen des Testbeispiels

Dynamische Untersuchung

Um die Dämpfungseigenschaft des entwickelten Volumenelementes auszutesten wird das durch Volumenelemente abgebildete Testbeispiel einer harmonischen Belastung unterworfen. Als dynamische Belastung wird ein sinusförmiger Lastverlauf

$$P(t) = P_v \cdot \lambda \cdot \sin(31.42 \cdot t) \tag{6.55}$$

mit der Amplitude der vertikalen statischen Last P_v und dem Lastfaktor $\lambda = 1.0$ gewählt. Der Lastverlauf ist in Bild 6.11 wiedergegeben. Als Strukturantwort wird die Verschiebung w an der Kragarmspitze ausgewertet, wobei die folgenden Berechnungsvarianten verwendet werden:

- lineare Berechnung Elementdämpfung konstant linear-viskos,
- nichtlineare Berechnung Elementdämpfung konstant linear-viskos,
- lineare Berechnung Systemdämpfung RAYLEIGH-Dämpfung.

Als Dämpfung wird die LEHRsche Dämpfung von $\xi_1 = 2\%$ und $\xi_2 = 5\%$ den ersten beiden Eigenfrequenzen des Systems zugeordnet, aus denen sich die RAYLEIGH-Parameter zur Ermittlung der Dämpfungsmatrix bestimmen lassen.

Alle drei Berechnungen führen erwartungsgemäß zu dem in Bild 6.11 dargestellten Verlauf der Durchbiegung der Kragarmspitze.

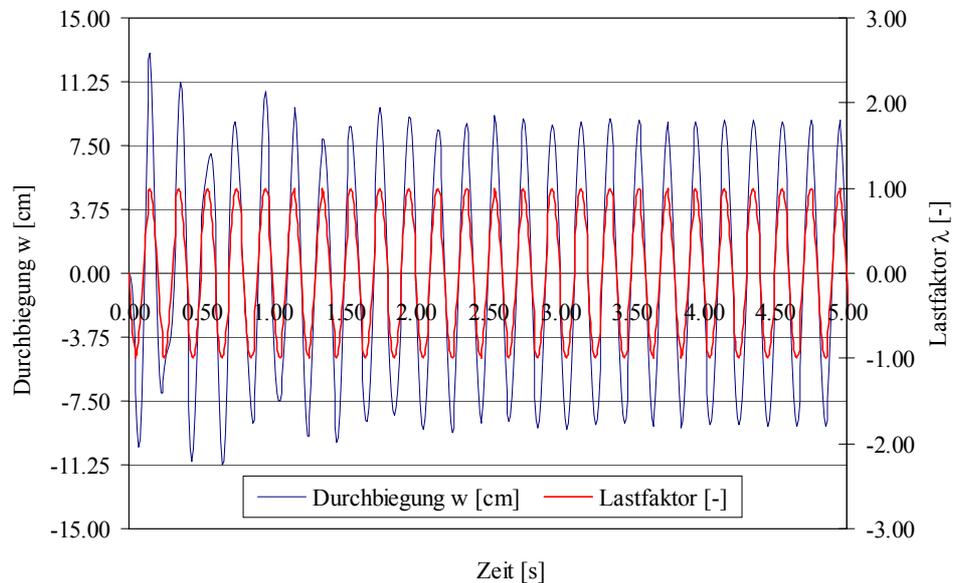


Bild 6.11: Sinusförmige Belastungsfunktion und Strukturantwort

Nach einem Einschwingvorgang stellt sich ab ungefähr 3 Sekunden eine stationäre harmonische Schwingungsantwort ein, die mit der Lastfrequenz schwingt. Aufgrund der vorhandenen Belastung, die der ersten Eigenform entspricht, kann über das Frequenzverhältnis

$$\eta = \frac{31.42}{56.4} = 0.56 \quad (6.56)$$

aus den Gleichungen eines Einfreiheitsgradschwingers die dynamische Überhöhung der Verschiebungsantwort

$$v_{\text{dyn}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.56^2)^2 + (2 \cdot 0.02 \cdot 0.56)^2}} = 1.45 \quad (6.57)$$

und die Phasenverschiebung zwischen Strukturantwort und Lastverlauf

$$\varphi_p = \arctan\left(\frac{2 \cdot 0.02 \cdot 0.56}{1 - 0.56^2}\right) = 1.8^\circ \quad (6.58)$$

berechnet werden. Die Werte bestätigen die in Bild 6.11 dargestellten Verläufe.

6.4.2 Werkstoffgesetz der Betontankwand

Um die Implementierung der Betonroutinen in das vorhandene Schalenelement zu überprüfen, wird auf das Beispiel „BRESLER-Balken“ aus [ZAHLTEN90] zurückgegriffen. Bei diesem in Bild 6.12 dargestellten Testbeispiel handelt es sich um einen Einfeldbalken, der in Feldmitte durch eine Einzellast belastet ist. Die Länge des Einfeldbalkens beträgt 6.40 m, Breite und Höhe des Querschnitts messen 22.86 cm und 55.25 cm. Der Balken ist mit einer oberen und einer unteren Stahllage bewehrt, die über eine Gesamtfläche von 5.0 cm² bzw. 32.9 cm² verfügen. Weitere Angaben zu den Materialdaten sind der Arbeit von [ZAHLTEN90] zu entnehmen.

Im Rahmen einer nichtlinearen statischen Berechnung wird die Belastung mit dem Lastfaktor λ bis zum Systemversagen gesteigert. Die Überprüfung des implementierten Materialgesetzes erfolgt durch einen Vergleich der Lastverformungskurve mit dem von [ZAHLTEN90] ermittelten Verlauf.



Bild 6.12: „BRESLER-Balken“

Der Verlauf der Mittendurchbiegung des Balkens infolge einer Abbildung mit den im Rahmen der vorliegenden Arbeit implementierten Materialgesetze ist in Bild 6.13 dargestellt. Der als Referenzlösung verwendete Verlauf aus [ZAHLTEN90] basiert auf der Verwendung eines finiten Schalenelementes aus der von [HARTE82] entwickelten Familie der so genannten NACS-Elemente. Beide Systeme besitzen die gleiche Anzahl von Elementen.

Bild 6.13 zeigt, dass beide Systeme über einen Traglastfaktor von $\lambda = 1.21$ verfügen. Die Übereinstimmung beider Kurven ist sehr gut. Vergleichsrechnungen zeigen, dass sich die Kurven bei einer feineren Diskretisierung weiter aneinander annähern.

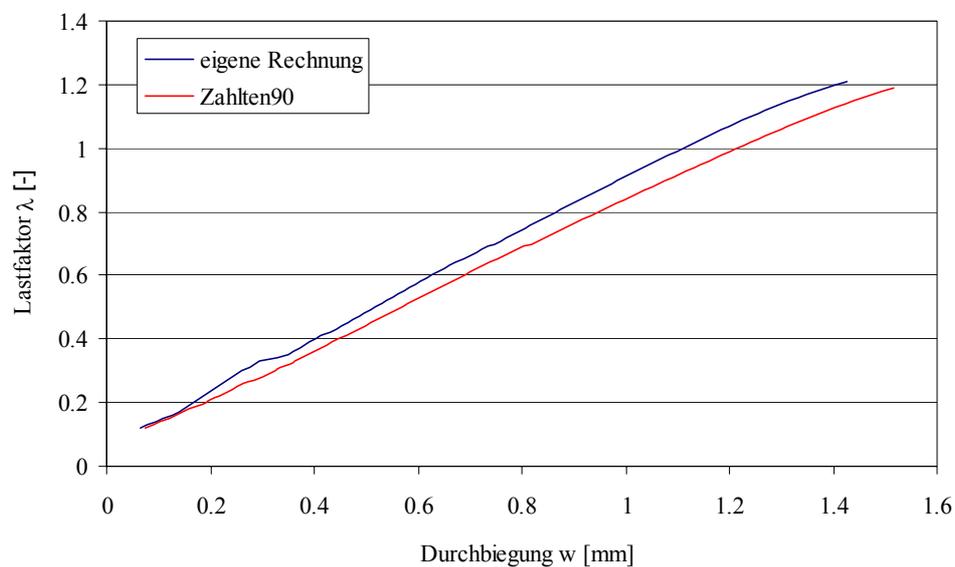


Bild 6.13: Mittendurchbiegung des Balkens

Kontaktelement

Zur Simulation des Tragverhaltens flüssigkeitsgefüllter Tankbauwerke unter dynamischer Belastung wird ein 3D-Kontaktelement benötigt, das in der Lage ist, die nichtlinearen Ablöseerscheinungen der schwappenden Flüssigkeit von der Tankwand abbilden zu können. Das Kontaktelement simuliert den Kontakt der Flüssigkeit normal zur Schale durch die physikalische Eigenschaft, Druckkräfte, aber keine Zugkräfte übertragen zu können. Im Hinblick auf eventuelle Reibwiderstände zwischen Flüssigkeit und Tankwand ist es mit Hilfe des Kontaktelementes möglich, auch die transversalen Freiheitsgrade zu koppeln.

7.1 Beschreibung des Kontaktproblems

7.1.1 Allgemeines

Kontaktelemente werden zur Simulation von Diskontinuitäten, Rissfortpflanzung, Separation, Verbund im Stahlbeton oder Gleitverhalten eingesetzt. Die Diskontinuitäten werden hierzu durch die Angabe von Doppelknoten an den Kontaktseiten abgebildet. Laut [TEMME95] können Kontaktelemente in die fünf Klassen nach Tabelle 7.1 eingeteilt werden.

Klasse	Kontaktelemente
I	Einzelfeder mit einem Doppelknoten als reines Punktelement
II	Federelement mit linearem Verschiebungsansatz in absoluten Verschiebungsfreiheitsgraden z.B. <i>flächenhafte Feder mit 4 Doppelknoten</i>
III	Federelement mit quadratischem Verschiebungsansatz in absoluten Verschiebungsfreiheitsgraden z.B. <i>Linienfeder mit 3 Doppelknoten</i>
IV	Kontaktelemente mit Nulldicke in relativen Verschiebungsfreiheitsgraden
V	Kontaktelement mit endlicher Dickenausdehnung in absoluten Verschiebungs-FG

Tabelle 7.1: Einteilung von Kontaktelementen

Die ersten drei Klassen beinhalten die so genannten „Null-Dicken-Elemente“ und können auch als Sonderfall der Klasse V, also als degeneriertes Kontinuums-element interpretiert

werden. Die Klassen I, II, III und V arbeiten mit absoluten Verschiebungsfreiheitsgraden, während das Materialgesetz in relativen Verschiebungen erstellt wird. Klasse IV-Kontaktelemente kommen selten zum Einsatz, da diese durch relative Knotenverschiebungsfreiheitsgrade definiert sind, was zu Problemen mit den angrenzenden, in absoluten Verschiebungen formulierten, Strukturelementen führt.

Für die Abbildung des Kontaktes zwischen Flüssigkeit und Tankwand wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein flächenhaftes Element der Klasse II nach Bild 7.1 gewählt. Die nullwertige Ausdehnung dieses Elementes entspricht der nichtlinearen Kontaktfuge zwischen Flüssigkeit und Tankwand. Der lineare Ansatz ist den angrenzenden Fluid- und Schalenelementen angepasst.

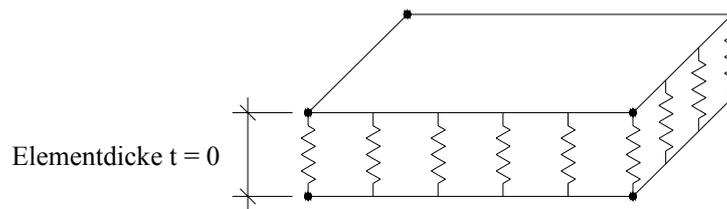


Bild 7.1: Nulldicken-Element

Das Kontaktelement muss die Übertragung von Druckkräften normal zur Tankschale gewährleisten, während Zugbeanspruchungen normal zur Tankwand zu unterbinden sind. In tangentialer Richtung findet bei Reibungsfreiheit Gleiten statt.

Sowohl der Ablösevorgang als auch das „Wieder-in-Kontakt-Treten“ ist an den Kontaktstellen mit großen Laständerungen in sehr kurzer Zeit verbunden. Dabei verläuft die Grenze zwischen „Kontakt“ und „nicht-Kontakt“ bei der diskreten Abbildung einer FE-Berechnung innerhalb eines Finiten Elementes. Das Element kann diese in Bild 7.2 dargestellte Unstetigkeit im Spannungsverlauf jedoch nicht abbilden. Es kommt daher zu einer Art Mittelwertbildung über die Elementfläche, deren Genauigkeit von der Anzahl der verwendeten GAUßpunkte abhängig ist.

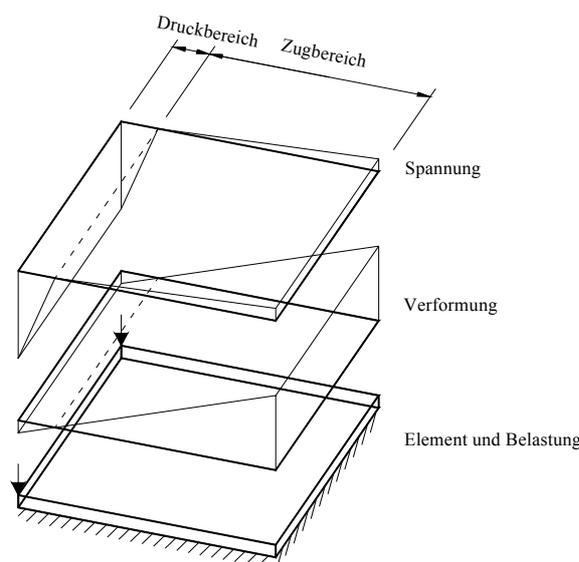


Bild 7.2: Darstellung der Druck- und Zugzone innerhalb eines Elementes [Heinen00]

Um eine hohe Anzahl von Gaußpunkten zu vermeiden, ist es möglich, mit kleineren Elementgrößen zu arbeiten, was aber einen ähnlich hohen Rechenaufwand nach sich zieht. Eine alternative Lösung mit geringem Mehraufwand bei relativ genauer Mittelwertbildung wurde im Rahmen der Diplomarbeit von [HEINEN00] erarbeitet, in der das betroffene Element nach

Bild 7.3 in drei Teilflächen zerlegt wird. Zwei der drei Teilflächen liegen entweder völlig im Druck- oder ausschließlich im Zugbereich. Diese Gebiete können nun exakt mit jeweils zwei Stützstellen pro Richtung integriert werden

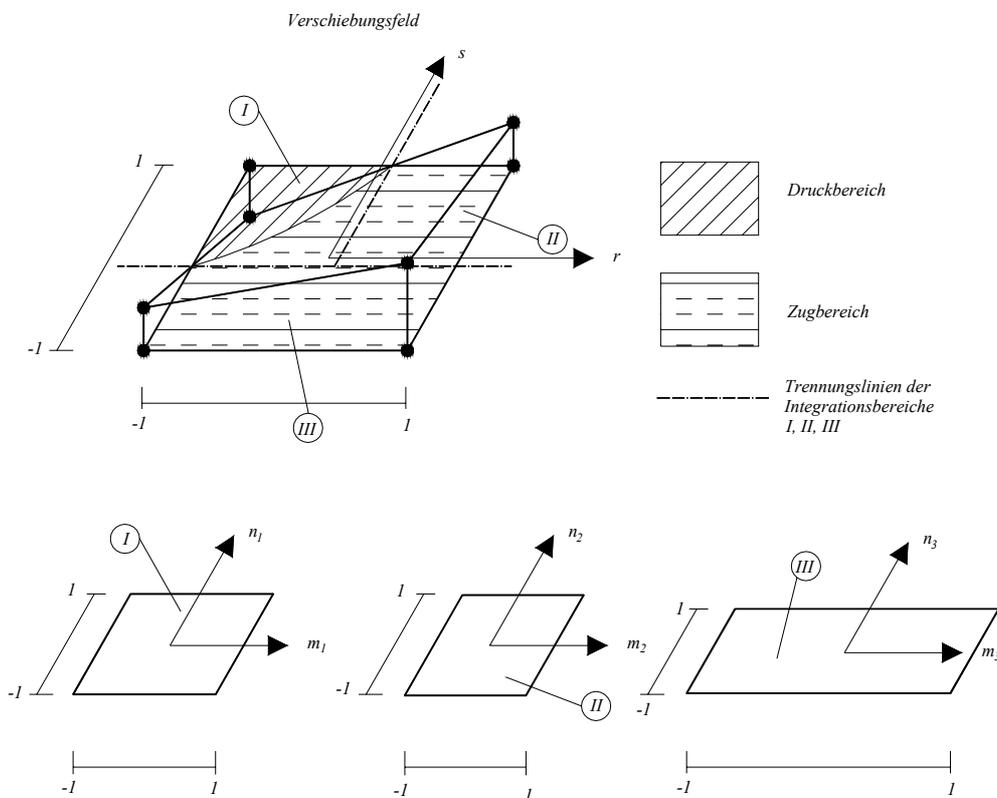


Bild 7.3: Unterteilung des Kontaktelementes in drei Integrationsbereiche [HEINEN00]

In der dritten Teilfläche wird das oben beschriebene Problem nun auf einen kleinen Teilbereich beschränkt. Eine weitere Unterteilung dieses Bereiches wäre möglich, ist aber nicht weiter untersucht worden. Die Aufteilung des Elementes in Zug und Druckbereich erfolgt über die Bestimmung der Knotenverformungen.

7.1.2 Grundgleichungen des Koppелеlementes

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der FE-Formulierung dient das in Kapitel 4.2.5 hergeleitete Prinzip der virtuellen Verrückung. Aufgrund des Federcharakters des „Null-Dicken-Elementes“ wird die innere Arbeit nicht durch Spannungen und Dehnungen formuliert, sondern durch die Federkraft (pro Fläche) F^i und den relativen Verschiebungen Δu_i .

$$\delta W_i = \int_B \delta(\Delta \underline{u}) \underline{F} dA \tag{7.1}$$

Das Koppелеlement wird für die Übertragung von Kräften zwischen zwei Kontaktflächen eingesetzt und besitzt aufgrund seiner „Null-Ausdehnung“ weder eine Masse, noch die Möglichkeit, eine äußere Belastung aufzunehmen. Daher werden die Arbeitsanteile der äußeren Lasten und der Trägheit nicht aktiviert.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= 0 \\ \delta W_{\text{traeg}} &= 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Das Element besitzt nach Bild 7.4 drei Federkräfte, die in der Normalenrichtung und in den zugehörigen tangentialen Richtungen definiert sind.

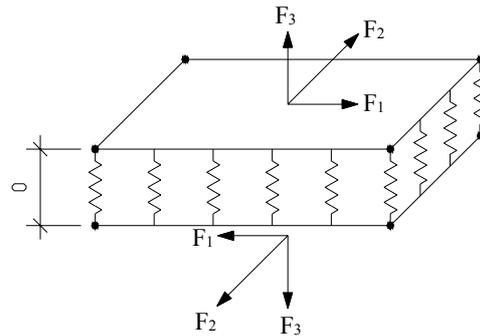


Bild 7.4: Darstellung der Kontaktkräfte

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{bmatrix} = F^i \underline{g}_i \tag{7.3}$$

Die nichtlinearen konstitutiven Beziehungen des in den drei Richtungen entkoppelten Kontaktverhaltens sind durch die nichtlineare Bettungsmatrix \underline{B}_k gekennzeichnet:

$$F^i = B_k^{ij} \Delta u_j \quad \text{mit } B_k^{ij} = 0 \quad i \neq j. \tag{7.4}$$

Die Kontaktbettung \underline{B}_k wird in lokaler Richtung angegeben. Im Fall nicht-viskoser Flüssigkeiten werden die tangentialen Richtungen im Allgemeinen nicht aktiviert, da die auftretende Reibkraft vernachlässigbar klein ist. In Normalenrichtung ist ein Steifigkeitssprung zwischen „Kontakt“ und „nicht-Kontakt“ entsprechend Bild 7.5 erforderlich.

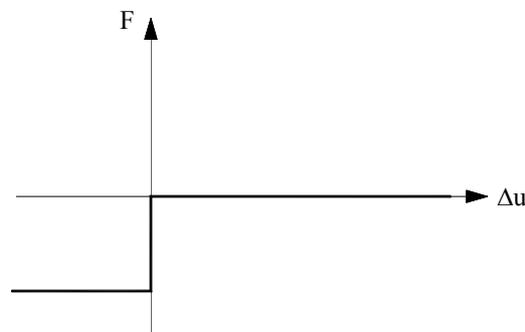


Bild 7.5: Flüssigkeitskontakt in Normalenrichtung

Um Probleme bei der numerischen Umsetzung dieser Unstetigkeitsstelle zu vermeiden, wird im Zugbereich eine minimale Zugfestigkeit nach Bild 7.6 angesetzt.

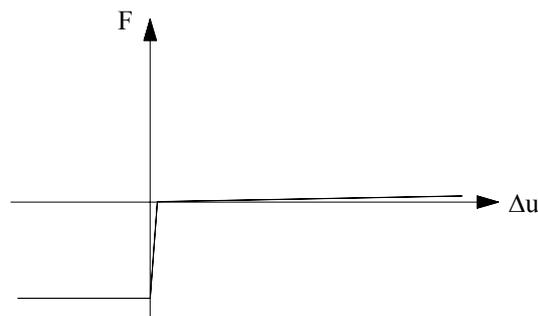


Bild 7.6: Numerische Umsetzung des nichtlinearen Materialverhaltens der Normalenkomponente

7.2 Umsetzung in ein isoparametrisches Finites Element

Der Anteil des Kontaktelementes an der ungedämpften nichtlinearen Bewegungsgleichung

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K}_T \dot{\underline{u}} = \underline{P}(t) - \underline{F}_i - \underline{F}_M \tag{7.5}$$

beschränkt sich auf den tangentialen Steifigkeitsanteil \underline{K}_T und den Vektor der inneren Kräfte \underline{F}_i . Diese Anteile werden nach (7.1) aus der virtuellen Arbeit der Federkräfte (pro Fläche) \underline{F}^i an den virtuellen relativen Verschiebungen $\delta(\Delta \underline{u}_i)$ hergeleitet. Hierzu werden die Verschiebungsgrößen inkrementiert:

$$\delta(\Delta \underline{u}) = \delta(\Delta \underline{u}^- + \Delta \underline{u}^+) = \delta(\Delta \underline{u}^+) \tag{7.6}$$

Aus Gleichung (7.6) kann mit Hilfe der nichtlinearen Materialbeziehung (7.4) über eine TAYLORreihenentwicklung die Federkraft im unbekanntem Nachbarzustand \underline{F} berechnet werden, die sich aus der bekannten Grundzustandsfederkraft und der inkrementellen Federkraft zusammensetzt:

$$\underline{F} = \underline{F}^- + \underline{F}^+ = \underline{F}|_{GZ} + \frac{1}{2} \frac{\partial \underline{F}}{\partial (\Delta \underline{u})} \Big|_{GZ} \cdot \Delta \underline{u}^+ = \underline{F}|_{GZ} + \underline{D}_B \cdot \Delta \underline{u}^+ \tag{7.7}$$

Für eine genauere Erläuterung der Inkrementierung wird auf Kapitel 6.3.1 verwiesen. Aus der inneren Arbeitsgleichung (7.1) lassen sich nun die Ausdrücke für die tangentiale Steifigkeit \underline{K}_T und den Vektor der inneren Kräfte \underline{F}_i herleiten.

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{\mathcal{B}} \delta(\Delta \underline{u}^+) \underline{F} dA \rightarrow \underline{F}_i \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \delta(\Delta \underline{u}^+) \underline{F} dA \rightarrow \underline{K}_T \end{aligned} \tag{7.8}$$

Das Kontaktelement besteht aus acht Knoten mit je drei Freiheitsgraden. Das Element wird dabei in zwei Flächen mit jeweils vier Knoten aufgeteilt, so dass sich nur vier Formfunktionen nach Bild 7.7 ergeben.

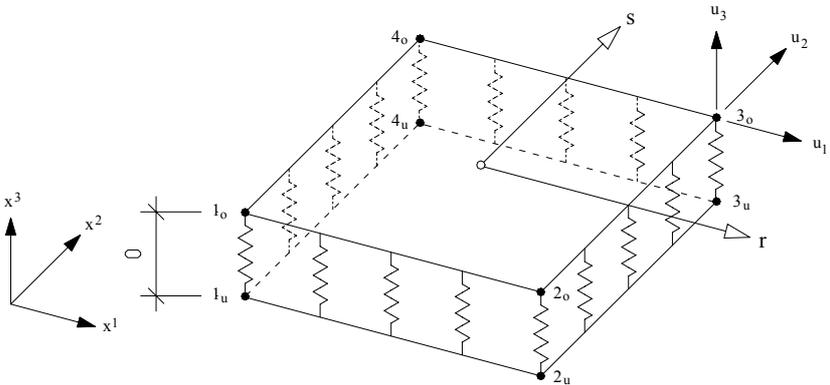
Isoparametrisches finites Element mit 2 x 4 Knoten	Ansatzfunktionen
	$\Omega_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$ $\Omega_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$ $\Omega_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$ $\Omega_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$

Bild 7.7: Diskretisierung des flächenhaften Kontaktelementes

Mit Hilfe der Formfunktionsmatrix $\underline{\Omega}$ und der diskreten absoluten Knotenvariablen $\hat{\underline{u}}$ erfolgt nun die Diskretisierung des kontinuierlichen relativen Verschiebungsvektors $\Delta \underline{u}$.

$$\Delta \underline{u} = \underline{u}^{\text{oben}} - \underline{u}^{\text{unten}} = \underline{\Omega} \hat{\underline{u}} \tag{7.9}$$

Die Inkremente werden äquivalent diskretisiert:

$$\Delta \underline{u} = \overset{+}{\underline{u}} - \overset{+ \text{ oben}}{\underline{u}} - \overset{+ \text{ unten}}{\underline{u}} = \underline{\Omega} \hat{\underline{u}}^+ . \quad (7.10)$$

Damit folgt die diskrete Form der inkrementellen Federkräfte

$$\bar{\underline{F}} = \underline{D}_B \underline{\Omega} \hat{\underline{u}}^+ , \quad (7.11)$$

die zu der Darstellung der tangentialen Steifigkeitsmatrix \underline{K}_T und dem Vektor der inneren Kräfte \underline{F}_I nach (7.8) führt.

$$\underline{K}_T = \int_{\mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \underline{D}_B \underline{\Omega} dA \quad (7.12)$$

$$\underline{F}_I = \int_{\mathcal{B}} \underline{\Omega}^T \bar{\underline{F}} dA \quad (7.13)$$

Für weitere Informationen zum Kontaktelement wird auf die Diplomarbeit von [HEINEN00] verwiesen.

Beispielrechnungen

Das folgende Kapitel befasst sich mit numerischen Simulationen von Tankbauwerken unter Erdbebenbelastung. In den beiden ersten Abschnitten erfolgt ein Vergleich der Ergebnisse aus den Simulationsrechnungen unter Verwendung der hergeleiteten Elemente mit experimentell ermittelten Daten aus der Literatur. Die umfangreichsten experimentellen Untersuchungen von Tanks unter Erdbebeneinwirkung fanden in den 70er und 80er Jahren an der University of California in Berkeley statt. Für die Versuche wurden von [CLOUGH77], [MANOS&CLOUGH82], [NIWA&CLOUGH82] und [MANOS&CLOUGH85] unterschiedliche, an einen Rütteltisch montierte Modelltanks einem gemessenen Beschleunigungsverlauf ausgesetzt. Eine weitere Überprüfung der numerischen Untersuchung erfolgt durch den Vergleich der numerischen Resultate mit den in Kapitel 2 vorgestellten analytischen Berechnungsvorschlägen nach HOUSNER. Den Abschluss bildet eine Parameterstudie zur dynamischen Berechnung eines wassergefüllten Betontanks, an dem der Einfluss des Wassers auf die Dimensionierung der Betonwand durch nichtlineare Simulationsrechnungen verdeutlicht wird.

8.1 Beispiel 1: Untersuchung eines zylindrischen Tankmodells

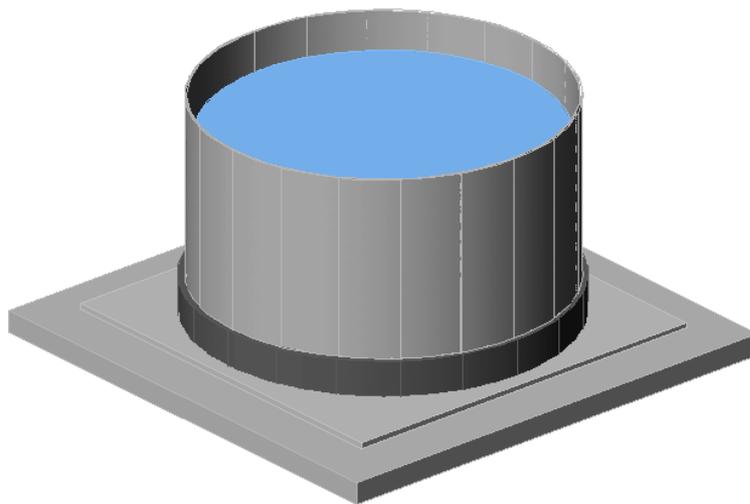
8.1.1 Problembeschreibung

Ausgiebige experimentelle Untersuchungen zum Verhalten von flüssigkeitsgefüllten zylindrischen Tanks unter Erdbebeneinwirkungen wurden von [MANOS&CLOUGH82] durchgeführt. Hierzu wurde das in Bild 8.1 skizzierte Tankmodell auf einen Rütteltisch montiert und den gemessenen Beschleunigungsverläufen der Erdbeben von El Centro (1940), Parkfield (1966) und Pacoima Dam (1971) ausgesetzt, um die maximale vertikale Flüssigkeitsbewegung sowie ausgesuchte Tankschnittgrößen aufzuzeichnen. Alle Beschleunigungsverläufe wurden auf eine maximale Beschleunigung von $0.5g$ normiert, die Zeitachse wurde um den Faktor $3 \cdot 10^{-0.5}$ gestaucht.

Die umfangreichen, fast siebenjährigen Versuche an diesem Tankmodell sind, zusammen mit einer Erläuterung der Testverfahren und Messinstrumente, in der oben genannten Literatur detailliert vorgestellt.

Im Folgenden werden die wichtigsten Parameter des Versuchsaufbaus zusammengefasst:

- Die Schwappbewegungen der Flüssigkeitsoberfläche wurden durch „wave gages“ gemessen, die in radialer Richtung ungefähr 12.5 cm von der Tankwand entfernt angebracht wurden.
- Die Messpunkte der Dehnungsmessstreifen an der Tankwand lagen unter anderem in einer Höhe von ungefähr 2.5 cm und 5.0 cm über der Bodenplatte.
- Der Tank war auf einer starren Bodenplatte verankert.



Abmessungen:

Radius:	$R = 1.83 \text{ m}$
Tankwandhöhe:	$H_T = 1.83 \text{ m}$
Wanddicke:	$h_u = 2.03 \text{ mm}$ (unten)
	$h_o = 1.27 \text{ mm}$ (oben)

Materialeigenschaften:

$E = 6.9 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$
$\nu = 0.32$
$\rho = 2.75 \text{ to/m}^3$
$\gamma_{\text{aluminium}} = 27.0 \text{ kN/m}^3$

Wasserfüllung:

Flüssigkeitswichte:	$\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$
Füllhöhe:	$H = 1.525 \text{ m}$
Wassermasse:	$m_w = V \cdot \gamma / g = 16.3 \text{ to}$

Bild 8.1: Eigenschaften des Wassertanks aus Beispiel 8.1

Mit einer Höhe von 2.5 cm und 5.0 cm oberhalb der Einspannung liegen die Messpunkte der Dehnungsmessstreifen im Randstörungsbereich, der sich über eine Länge von ca. 29.6 cm erstreckt.

$$x = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{R \cdot h}}{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - \nu^2)}} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{1.83 \cdot 0.002}}{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - 0.32^2)}} = 29.6 \text{ cm}$$

Um die gemessenen Größen, die durch die Randstörung beeinflusst werden, mit den Ergebnissen einer numerischen Simulation zu vergleichen, ist in dem Randstörungsbereich eine sehr feine Diskretisierung des FE-Modells erforderlich. Eine zufriedenstellende Abbildung ist aufgrund der sich daraus ergebenden hohen Anzahl von Freiheitsgraden des Gesamtmodells von den im Augenblick zur Verfügung stehenden Rechnern nicht zu bewältigen. Bei den von der Randstörung beeinflussten Größen ist daher eine gewisse Abweichung zwischen Messung und Simulationsrechnung zu erwarten.

Die Dickenänderung im mittleren Bereich der Tankwand wird bei der Diskretisierung nicht weiter berücksichtigt, da zu erwarten ist, dass dieser Störbereich keinen Einfluss auf die zu überprüfenden Größen im Bereich der Einspannung hat. Gleiches gilt für die kleine Randstörung infolge des Beginns der Flüssigkeitslast auf Höhe der Wasseroberfläche.

Die Abbildung der Tankstruktur erfolgt unter Verwendung des in Kapitel 6 vorgestellten vier-knotigen isoparametrischen Schalelementes. Die Flüssigkeitsfüllung wird durch die in Kapitel 5 hergeleiteten acht-knotigen isoparametrischen Fluidelemente modelliert.

Durch einen Vergleich der Ergebnisse einer statischen Analyse verschiedener FE-Diskretisierungen nach Tabelle 8.1 wird zunächst untersucht, inwieweit sich die gewählte Diskretisierung auf die Ergebnisse der Simulationsrechnung auswirkt. Die größtmögliche

Elementanzahl wird dabei durch die rechnerbedingte maximale Anzahl von Freiheitsgraden begrenzt.

Diskretisierung	Radius	Umfang	Höhe
A	12	16	12
B	15	18	12
C	12	16	19
D	12	16	20

Tabelle 8.1: Anzahl der Elemente verschiedener Diskretisierungsstufen

Testrechnungen zeigen, dass die Ergebnisse durch die Erhöhung der Elementanzahl in radialer und Umfangsrichtung, also ein Vergleich von Modell A und Modell B, nur geringfügig verbessert werden können. Eine Verfeinerung des Elementnetzes in Höhenrichtung nach Modell C stellt dagegen für die Abbildung eine merkliche Verbesserung dar. Die weiteren Berechnungen basieren daher auf diesem Modell. Bei Modell D kann aufgrund des großen Speicherbedarfs keine dynamische Berechnung mehr durchgeführt werden.

Bei konstanter Elementlänge über die Tankhöhe ergibt sich somit eine Elementabmessung von 0.085 m. Um die maximal mögliche Anzahl von Freiheitsgraden möglichst effektiv einzusetzen, wird jedoch nicht mit einer konstanten Elementhöhe, sondern einer Verfeinerung der Diskretisierung im Einspannungsbereich nach Bild 8.2 gerechnet.

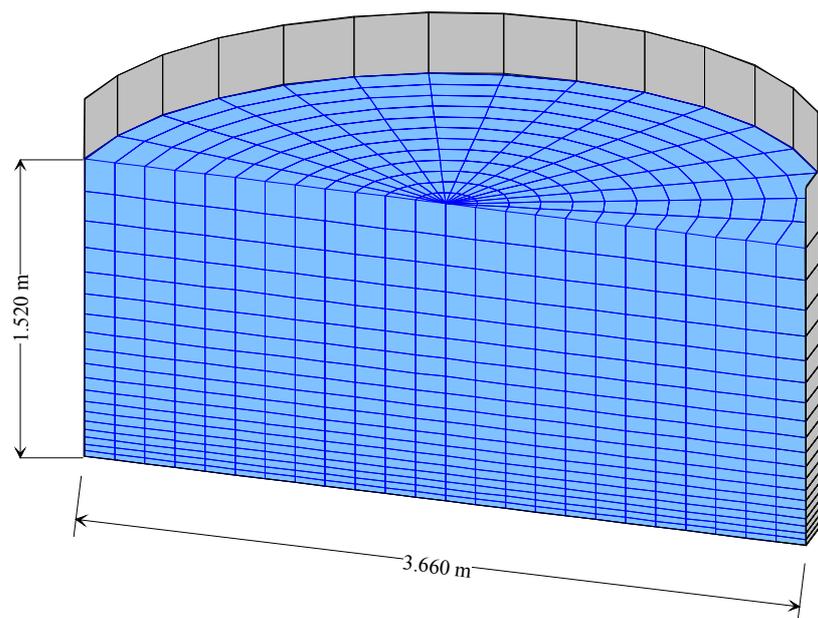


Bild 8.2: Gewählte Diskretisierung des Wassertanks

Weitere Vergleichsrechnungen mit Modell C und noch feinerer Abbildung im Einspannungsbereich beeinflussen die Ergebnisse der Flüssigkeitsoberflächenbewegung negativ, so dass für die weiteren Berechnungen daher die in Bild 8.2 dargestellte, modifizierte Diskretisierung nach Modell C verwendet wird.

8.1.2 Eigenfrequenzanalyse

Die Berechnung der ersten Schwappeigenfrequenz auf Grundlage der analytischen Formeln von HOUSNER ergibt:

$$\omega^2 = \frac{1.84 \cdot g}{R} \cdot \tanh\left(1.84 \frac{H}{R}\right) = 8.98 \text{ (rad/s)}^2 \Rightarrow \omega = 3.00 \text{ rad/s.}$$

Für das numerische Modell ergibt sich unter Annahme des in Kapitel 5 erläuterten Strafparameters $K_{rot} = 100.0 \text{ kN/m}^2$ die erste Schwappeigenfrequenz zu $\omega_1 = 3.02 \text{ rad/s}$. Die zugehörige Eigenform ist zusammen mit der zweiten Schwappform, die der Frequenz von $\omega_2 = 4.13 \text{ rad/s}$ zugeordnet ist, in Bild 8.3 dargestellt.

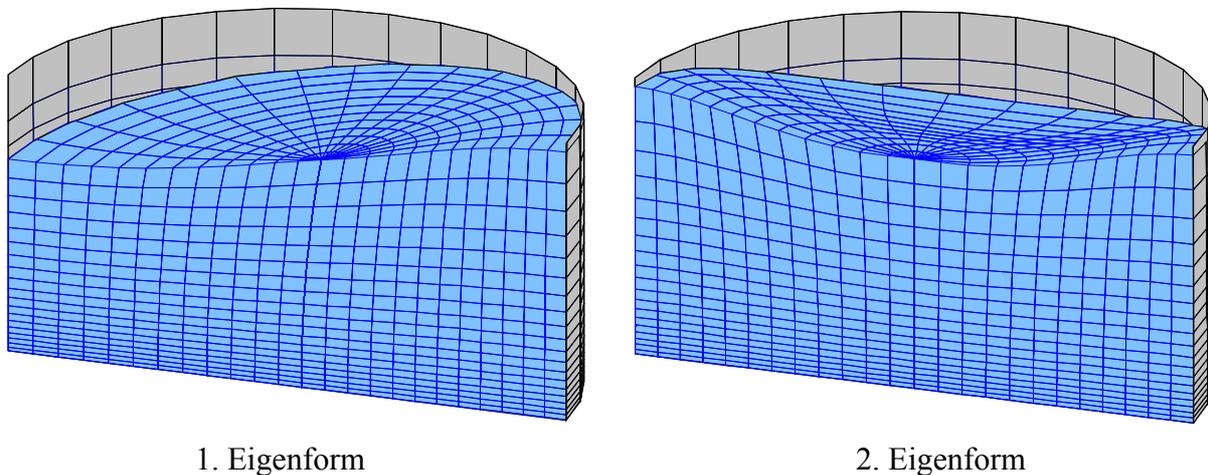


Bild 8.3: 1. und 2. Schwappform

8.1.3 Linear statische Untersuchung

Bei der linear statischen Untersuchung des Tanks werden die Verformungen und Schnittgrößen der Tankschale unter dem Lastfall Eigengewicht (Eigengewicht von Schale und Flüssigkeit) berechnet. Die Ergebnisse werden mit denen eines Tanks ohne Flüssigkeitselemente unter Lastfall Eigengewicht Schale und der Annahme einer hydrostatischen äußeren Belastung der Schalelemente verglichen. Tabelle 8.2 zeigt, dass das Fluidelement bei gleicher Diskretisierung nahezu identische Schalenschnittgrößen bzw. -verformungen liefert wie die Berechnung ohne Fluidelemente unter dem Lastfall Flüssigkeitsdruck. Der Lastfall Flüssigkeitsfüllung (I) und der Lastfall Schaleneigengewicht (II) sind dabei getrennt betrachtet worden. Um die Güte der Diskretisierung abzuschätzen, sind in Tabelle 8.2 zusätzlich die entsprechenden Ergebnisse einer analytischen Berechnung angegeben, deren vollständige Berechnung in Anhang D wiedergegeben ist.

Lastfall		Diskretisierung mit Fluidelementen	Diskretisierung ohne Fluidelemente	analytische Berechnung
I	max w_v [m]	$4.27 \cdot 10^{-5}$	$4.25 \cdot 10^{-5}$	-
	max w_r [m]	$2.96 \cdot 10^{-4}$	$2.95 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$
	max n_φ [kN/m]	22.4	22.4	25.9
	max. pos. m_v [kNm/m]	0.002	0.002	0.003
	max. neg. m_v [kNm/m]	-0.007	-0.007	-0.016
II	max n_v [kN/m]	-0.084	-0.084	-0.084

Tabelle 8.2: Statische Analyse

Es zeigt sich, dass die randstörungsbehafteten Größen aufgrund der gewählten Diskretisierung eine geringe Abweichung zu den analytischen Ergebnissen aufweisen, wobei die Abweichung erwartungsgemäß für das maximale Biegemoment am Tankboden am größten ist. Das globale Tragverhalten kann durch die gewählte Diskretisierung dennoch sehr gut abgebildet werden. Weiterhin ist festzustellen, dass das Flüssigkeitselement unter Eigengewicht die korrekten Ergebnisse des hydrostatischen Belastungsfalls liefert. Die verformte Struktur der FE-Berechnung mit Flüssigkeitselementen ist in Bild 8.4 dargestellt.

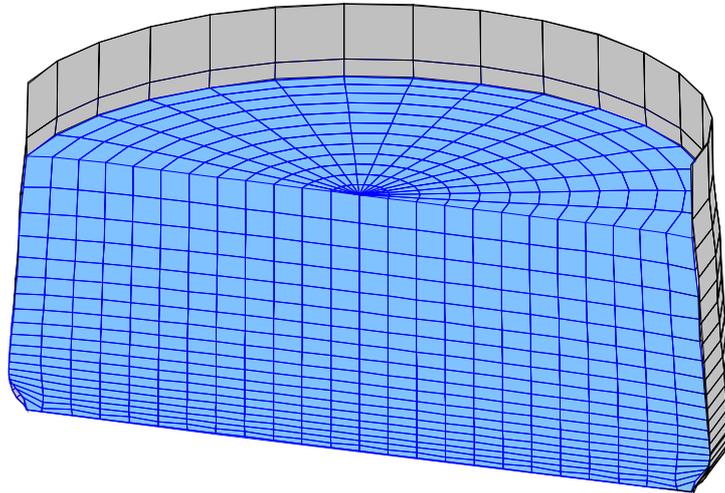


Bild 8.4: Statische Verformung unter Flüssigkeitsfüllung (200fach überhöht)

8.1.4 Dynamische Untersuchung

Für die dynamische Analyse des Tanks wird auf die Arbeit von [MANOS&CLOUGH82] zurückgegriffen. Bei den dort beschriebenen Rütteltischversuchen konnte nur eine horizontale Richtung angeregt werden. Die vertikale Komponente der Beben bleibt unberücksichtigt, da vorhergehende Experimente von [MANOS&CLOUGH84] zeigen, dass diese Komponente einen nur geringen Einfluss auf die axialen Spannungen der Tankwand hat.

Für die numerische Simulationsrechnung werden die gemessenen Beschleunigungsverläufe aus [NGDC] verwendet. Die Zeitreihen geben die Bodenbeschleunigungen über eine Dauer von etwa 30.0 s in Zeitschritten von 0.02 s wieder. Diese Daten werden auf eine maximale Beschleunigung von 0.5g normiert und die Zeitachse wird um den Faktor $3.0^{-0.5}$ gestaucht, um die Daten den Eingangsgrößen des Experimentes anzupassen. In Tabelle 8.3 sind die wesentlichen Kennwerte der Beben zusammengefasst.

	Original Zeitschrieb		Daten für Simulation und Experiment	
	max a	Δt	max a	Δt
Imperial Valley Beben vom 19.5.40 Station: El Centro	0.348g	0.02 s	0.5g	0.0115 s
Parkfield Beben vom 28.6.66 Station: Cholame Shandon	0.343g	0.02 s	0.5g	0.0115 s
San Fernando Beben vom 9.2.71 Station: Pacoima Dam	1.170g	0.02 s	0.5g	0.0115 s

Tabelle 8.3: Kennwerte der Beschleunigungszeitreihen

Die Erdbebenverläufe sowie die zugehörigen Antwortspektren für die skalierten Beben sind in Anhang D gegeben. Die Ermittlung der Antwortspektren erfolgt unter Verwendung der Programme von [MESKOURIS99], wobei in Anlehnung an [MANOS&CLOUGH82] eine LEHRsche Dämpfung von 1% angenommen wird.

Für die FE-Simulation wird eine RAYLEIGH-Dämpfung gemäß

$$\underline{C} = \alpha_M \cdot \underline{M} + \alpha_K \cdot \underline{K}$$

angesetzt. Die RAYLEIGH-Parameter α_M und α_K werden aus den ersten beiden relevanten Eigenfrequenzen nach Bild 8.3, in diesem Beispiel $\omega_1 = 3.02$ rad/s und $\omega_2 = 4.13$ rad/s, sowie den zugehörigen LEHRschen Dämpfungswerten berechnet, die hier zu $\xi_1 = 1\%$ und $\xi_2 = 2\%$ gewählt werden. Die Dämpfungswerte liegen damit zwischen den von [HAROUN83] vorgeschlagenen 2% und 5% und den vom [API650] genannten Werten von 0.5% und 2% .

$$\alpha_M = 2 \cdot \frac{\omega_2 \xi_1 - \omega_1 \xi_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \omega_1 \omega_2 = -0.0604$$

$$\alpha_K = 2 \cdot \frac{\omega_2 \xi_2 - \omega_1 \xi_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0.013205$$

Die Überprüfung des Rechenmodells erfolgt durch einen Vergleich der Ergebnisse einer Simulationsrechnung mit den von [MANOS&CLOUGH82] experimentell ermittelten Maximalwerten, die in den folgenden Tabellen zusammen mit den Ergebnissen einer analytischen Berechnung nach HOUSNER und einer Berechnung nach dem [API650] und [EC8] aufgeführt sind. Für die analytischen Rechnungen werden die spektrale Pseudogeschwindigkeit S_v und die spektrale Pseudobeschleunigung S_a der ersten Schwappeigenfrequenz von 3.0 rad/s benötigt, die durch das oben erwähnte Programm von [MESKOURIS99] bestimmt werden. Eine ausführliche Erläuterung der analytischen Berechnung erfolgt in Anhang D.

In Tabelle 8.4 werden die Schwappfrequenz und die Höhe der vertikalen Oberflächenflüssigkeitsbewegung verglichen.

	ω_1	El Centro ($S_v = 0.80$ m/s)	Parkfield ($S_v = 0.09$ m/s)	Pacoima Dam ($S_v = 0.22$ m/s)
Experimentelle Untersuchung nach MANOS	n.v.	13.4 cm	3.1 cm	15.5 cm
Simulationsrechnung mit Fluidelementen	3.02 rad/s	38.6 cm	4.4 cm	11.4 cm
Analytische Berechnung nach HOUSNER	3.00 rad/s	42.4 cm	3.3 cm	8.5 cm
Berechnung nach EC8	3.00 rad/s	55.0 cm	55.0 cm	55.0 cm
Berechnung nach API650	3.02 rad/s	n.v.	n.v.	n.v.

Tabelle 8.4: Gegenüberstellung der ersten Schwappfrequenz und der vertikalen Wellenbewegung

Der Vergleich der vertikalen Flüssigkeitsbewegung zeigt eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse der Simulationsrechnung mit den Ergebnissen der experimentellen und der analytischen Untersuchungen. Lediglich für das El Centro Beben weicht der experimentelle Wert deutlich ab. Aufgrund der hohen spektralen Geschwindigkeit des El Centro Bebens für die Schwappfrequenz von 3.0 rad/s, die einen direkten Indikator für die vertikale Flüssigkeitsbewegung darstellt, ist dieser experimentelle Wert jedoch fragwürdig. Während der [API650] keine Angaben zur Berechnung der Schwappwelle macht, erfolgt die Berechnung der

Schwappwelle im [EC8] auf Basis eines durch die maximale Bebenbeschleunigung geeichten Normspektrums und nicht durch ein spezifisches Bebenspektrum. Aufgrund der Normierung der drei Bebenverläufe auf eine identische Maximalbeschleunigung von 0.5g ergeben sich für die Schwappwelle identische Werte. Da alle weiteren Berechnungen ebenfalls auf dieses Normspektrum zurückgehen, wird im Folgenden der [EC8] nicht weiter beachtet.

Zur weiteren Überprüfung werden die in Tabelle 8.5 zusammengestellten axialen Membranspannungen berechnet. Der Vergleich der Ergebnisse der numerischen Finite-Element-Berechnung erfolgt wiederum mit den experimentellen Untersuchungen, den analytischen Berechnungen nach HOUSNER und dem Berechnungsvorschlag nach API650.

	El Centro ($S_a = 2.40 \text{ m/s}^2$)	Parkfield ($S_a = 0.27 \text{ m/s}^2$)	Pacoima Dam ($S_a = 0.66 \text{ m/s}^2$)
Experimentelle Untersuchung nach MANOS	4.90 N/mm ²	4.15 N/mm ²	4.61 N/mm ²
Simulationsrechnung mit Fluidelementen	1.11 N/mm ²	0.9 N/mm ²	0.8 N/mm ²
Analytische Berechnung nach HOUSNER	1.9 N/mm ²	1.1 N/mm ²	1.2 N/mm ²
Berechnung nach API650	2.0 N/mm ²	1.3 N/mm ²	1.4 N/mm ²

Tabelle 8.5: Gegenüberstellung der axialen Membranspannungen

Der Vergleich der axialen Membranspannungen zeigt einen großen Unterschied zwischen den Ergebnissen der Experimente und den weiteren Ergebnissen. Die experimentellen Ergebnisse weichen bis zu einem fünffachen von den übrigen Ergebnissen ab. Dagegen sind die Ergebnisse der Simulationsrechnung, der analytischen Berechnung nach HOUSNER und der Berechnung nach API650 von gleicher Größenordnung. Gründe für dieses Missverhältnis können in der Abweichung der idealisierten Behälterstruktur von der tatsächlichen Struktur liegen, da lokale Einflüsse (kurzfristiges Abheben des Behälters vom Rütteltisch, Versteifungen durch Schweißnähte etc.) unberücksichtigt bleiben. Da die experimentellen Daten auf der Auswertung eines einzigen Versuchs beruhen, sind keine Informationen über die Reproduzierbarkeit der experimentellen Ergebnisse bekannt, wie sie zum Beispiel durch Angabe von Mittelwert und Standardabweichung einer größeren Versuchsreihe wünschenswert wären.

Weiterhin werden von [MANOS&CLOUGH82] die dynamischen Anteile der durch die Randstörung beeinflussten Größen der Ringspannung und der Biegespannung gegeben. Für diese Werte liegen keine analytischen Berechnungsformeln vor, so dass in Tabelle 8.6 und Tabelle 8.7 nur ein Vergleich zwischen experimentellen und simulierten Daten geführt wird.

	El Centro	Parkfield	Pacoima Dam
Experimentelle Untersuchung nach MANOS	4.9 N/mm ²	4.97 N/mm ²	5.12 N/mm ²
Simulationsrechnung mit Fluidelementen	4.83 N/mm ²	4.55 N/mm ²	3.85 N/mm ²

Tabelle 8.6: Gegenüberstellung der Ringspannungen

	El Centro	Parkfield	Pacoima Dam
Experimentelle Untersuchung nach MANOS	5.87 N/mm ²	6.44 N/mm ²	6.74 N/mm ²
Simulationsrechnung mit Fluidelementen	5.6 N/mm ²	5.15 N/mm ²	4.42 N/mm ²

Tabelle 8.7: Gegenüberstellung der Biegespannungen

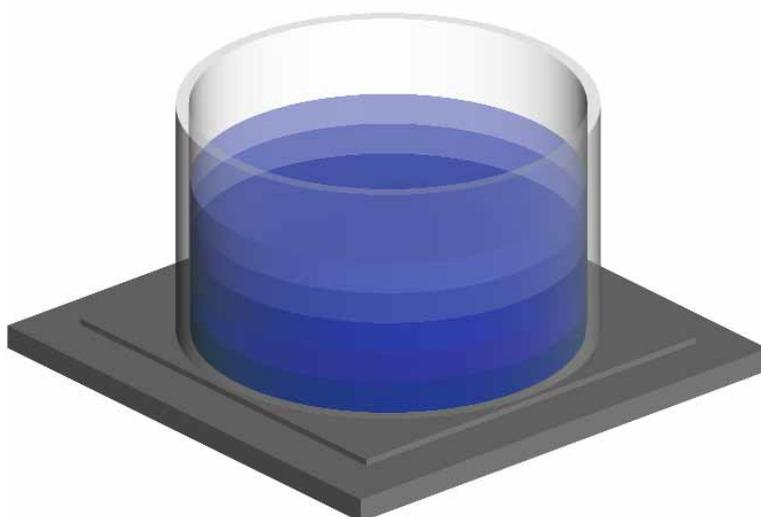
Die experimentellen und numerischen Werte des El Centro und Parkfield Bebens stimmen gut überein, obwohl aufgrund der nur wenig zufriedenstellenden Abbildung der Randstörung, eine geringe Abweichung der von der Randstörung beeinflussten Werte zu erwarten ist.

Auch die experimentellen Werte aus Tabelle 8.6 und Tabelle 8.7 beruhen auf einem einzigen Versuch und beinhalten keinerlei Informationen über die Reproduzierbarkeit dieser Ergebnisse. Weiterhin unterliegen diese Werte einer gewissen Messungenauigkeit, da bereits eine nur geringfügige Abweichung der tatsächlichen Höhe der Messstelle von der Soll-Messstelle im Randstörungsbereich zu einer überproportional starken Beeinflussung des Messwertes führt.

Abschließend ist festzustellen, dass die globalen Struktureigenschaften (Eigenfrequenzen, statische Ergebnisse) eine sehr gute Übereinstimmung mit den Vergleichswerten zeigt. Die dynamische Untersuchung liefert relativ gute Übereinstimmung, wobei einzelne Werte zum Teil erhebliche Abweichungen aufweisen. Hierbei ist anzumerken, dass die Differenz zwischen der analytischen und der numerischen Lösung stets geringer ist, als die Abweichung zwischen experimentell und analytisch ermittelten Werten.

8.2 Beispiel 2: Eigenfrequenzuntersuchung eines Modelltanks

Für den in Bild 8.5 dargestellten transparenten zylindrischen Modelltank aus Plexiglas führen [PAL.ET.AL01] experimentelle Untersuchungen zur Ermittlung der Eigenfrequenzen für fünf unterschiedliche Wasserhöhen durch. Die Wasserhöhen sind in Bild 8.5 durch verschiedene Farbtöne dargestellt.



Abmessungen:

Radius: $R = 9.6 \text{ cm}$
 Tankwandhöhe: $H_T = 22.5 \text{ cm}$
 Wanddicke: $h = 0.6 \text{ cm}$

Materialeigenschaften:

$E = 3.3 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$
 $\nu = 0.3$
 $\rho = 1.5 \text{ to/m}^3$
 $\gamma_{\text{Perspex}} = 14.72 \text{ kN/m}^3$

Wasserfüllung:

Flüssigkeitswichte: $\gamma = 10.0 \text{ kN/m}^3$
 Füllhöhe: H variabel nach Tabelle 8.8

Bild 8.5: Eigenschaften des Wassertanks aus Beispiel 8.2

Neben dem Eigengewicht wird der Plexiglastank durch eine sinusförmige horizontale Bodenbewegung mit einer Frequenz von 1.2 Hz und einer Verschiebungsamplitude von 0.005 m belastet. Unter der dynamischen Belastung wurde für den Fall einer Wasserhöhe von 9 cm der Verlauf der vertikalen Flüssigkeitsoberflächenbewegung ermittelt.

Der untersuchte Tank stellt mit einem Radius von nur 9.6 cm und einer Tankhöhe von 22.5 cm ein extrem kleines Modell dar. Mit seiner relativ starken Dicke von 0.6cm kann der Tank als starr angesehen werden. Das Modell besitzt kein Dach und die Lagerung des Versuchskörpers erfolgt biegesteif auf einer starren Bodenplatte.

Die Generierung des Finite-Element Netzes erfolgt unter Verwendung der Diskretisierung aus Beispiel 8.1. Die FE-Analyse wird mit einem Strafparameter von 1.0 kN/m² und einer RAYLEIGH-Dämpfung unter Annahme einer LEHRSchen Dämpfung von je 0.1% bezogen auf die ersten beiden Eigenfrequenzen, durchgeführt.

8.2.1 Auswertung der Eigenwertanalyse

Im Rahmen der von [PAL.ET.AL01] durchgeführten Untersuchungen wird unter Annahme verschiedener Füllhöhen experimentell die erste Schwappfrequenz ermittelt. Die analytische Berechnung der Schwappfrequenz erfolgt auf Grundlage der Formel von HOUSNER.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.84 \cdot 9.81}{0.096} \cdot \tanh\left(1.84 \frac{H}{0.096}\right)}$$

In Tabelle 8.8 sind die experimentellen Ergebnisse den numerischen Ergebnissen und den analytischen Ergebnissen nach HOUSNER gegenübergestellt. Da sich die der ersten Schwappfrequenz zugehörige Eigenform entsprechend Beispiel 8.1 einstellt, wird auf die erneute Darstellung verzichtet.

Füllhöhe H	Experiment	Simulation	Analytische Ber.
3 cm	1.513 Hz	1.580 Hz	1.573 Hz
6 cm	1.873 Hz	1.978 Hz	1.974 Hz
9 cm	1.916 Hz	2.116 Hz	2.117 Hz
12 cm	1.969 Hz	2.159 Hz	2.161 Hz
15 cm	2.078 Hz	2.171 Hz	2.176 Hz

Tabelle 8.8: Gegenüberstellung der experimentellen, simulierten und analytischen Eigenfrequenzen

8.2.2 Ergebnis der dynamischen Berechnung

Bei einer Füllhöhe von 9 cm wird der Plexiglastank durch eine sinusförmige horizontale Bodenbewegung mit der Frequenz von 1.2 Hz und einer Verschiebungsamplitude von 0.005 m angeregt. Gemessen wird das Profil der vertikalen Oberflächenbewegung über die Zeit, wobei sich nach einem Einschwingvorgang ein stationärer Schwingungszustand einstellt. Aus dem von [PAL.ET.AL01] gegebenen Verformungs-Zeitverlauf der vertikalen Oberflächenbewegung der Wasseroberfläche kann ein maximaler Wert von ca. 6 mm abgelesen werden. Diese Angabe kann durch eine analytische Berechnung der vertikalen Oberflächenbewegung von 6.2 mm verifiziert werden. Bei der Simulation stellt sich ein Wert von 6.1 mm ein. Alle Ergebnisse sind in Tabelle 8.9 zusammengestellt.

	f_1	d_{\max}
Experimentell	1.92 Hz	6.0 mm
Simulation	2.12 Hz	6.1 mm
Analytisch	2.12 Hz	6.2 mm

Tabelle 8.9: Vergleich der vertikalen Flüssigkeitsbewegung

Der Verformungs-Zeitverlauf für die vertikale Bewegung der Wasseroberfläche als Ergebnis der numerischen Berechnung ist in Bild 8.6 dargestellt. Der gezeigte Ausschnitt beschränkt sich auf den Zeitbereich zwischen 100 und 150 Sekunden. Aufgrund der geringen Dämpfung benötigt das System eine lange Einschwingzeit um in einen stationären Zustand zu gelangen.

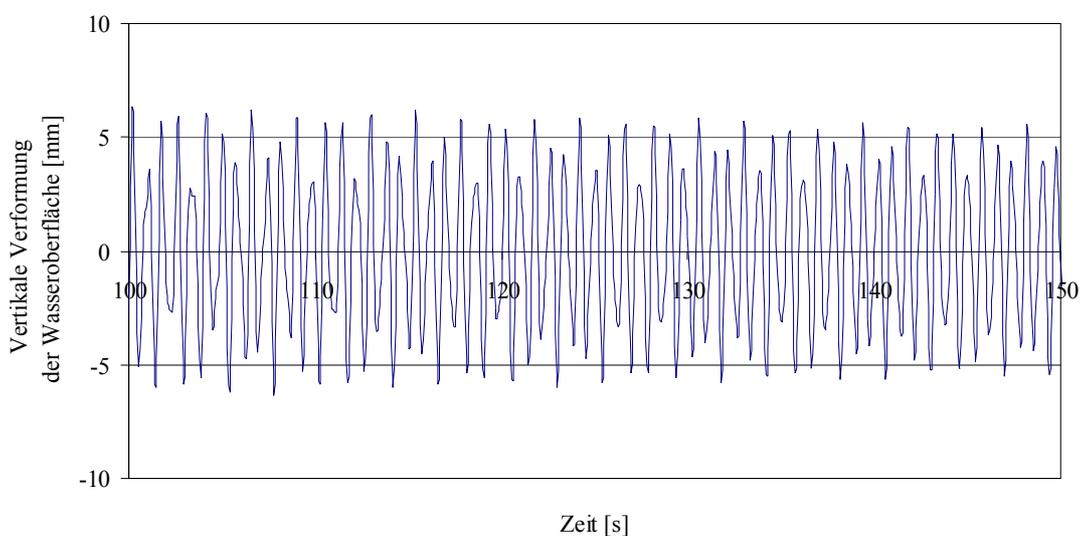
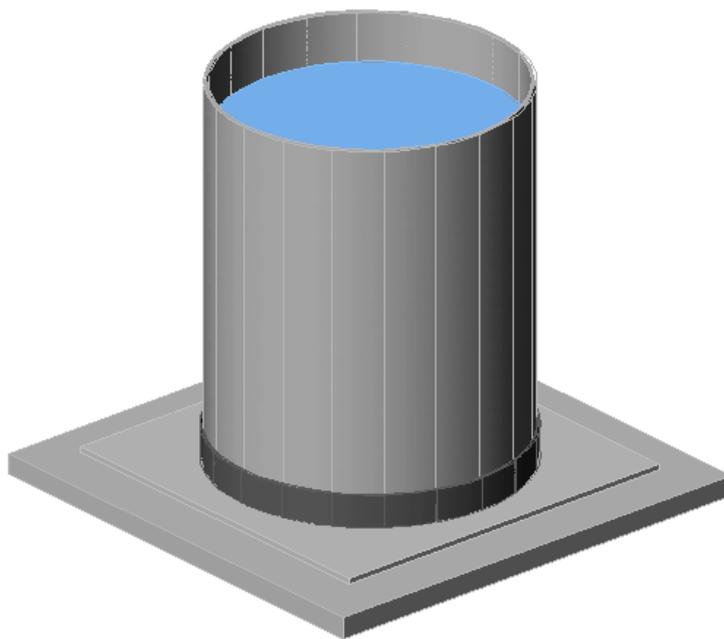


Bild 8.6: Verformungs-Zeitverlauf der vertikalen Wasseroberflächenbewegung

8.3 Beispiel 3: Berechnung eines schlanken Wassertanks

Bei der analytischen Berechnung von flüssigkeitsgefüllten Tankbauwerken unter Erdbebenbelastung unterscheidet Housner zwischen gedrunenen und schlanken Tanks über das Verhältnis der Füllhöhe zum Radius H/R . Mit dem Verhältnis $H/R \leq 1.5$ gelten die vorangegangenen Beispiele als gedrunen. Für schlanke Tanks mit einem Verhältnis $H/R > 1.5$ wird ein größerer Teil der Wassermasse dem impulsiven Anteil zugerechnet, so dass sich die analytischen Berechnungen dieser zwei Fälle unterscheiden. Aus diesem Grund wird nun eine Untersuchung schlanker Stahltanks unter Erdbebenbelastung mit dem von Housner gegebenen Berechnungsverfahren für schlanke Tanks verglichen, das in [MESKOURIS99] detailliert angegeben ist. Als Belastung wird der in Beispiel 8.1 verwendete Bebenzeitschrieb des El Centro Bebens (1940) verwendet. Für Untersuchungen unterschiedlicher Wasserhöhen werden in Tabelle 8.10 die erste Eigenfrequenz, die maximale vertikale Bewegung der Wasseroberfläche und die maximale axiale Spannung infolge der simulierten und der analytischen Ergebnisse verglichen.

Die Lagerungsbedingungen werden als starr und verankert angenommen.



Abmessungen:

Radius: $R = 1.83 \text{ m}$
 Tankwandhöhe: $H_T = 5.50 \text{ m}$
 Wanddicke: $h = 2.00 \text{ mm}$

Materialeigenschaften:

$E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$
 $\nu = 0.3$
 $\rho = 8.00 \text{ to/m}^3$
 $\gamma_{\text{Stahl}} = 78.5 \text{ kN/m}^3$

Wasserfüllung:

Flüssigkeitswichte: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$
 Füllhöhe: H variabel nach Tabelle 8.10

Bild 8.7: Eigenschaften des Wassertanks aus Beispiel 8.3

Die Generierung des Finite-Element-Netzes erfolgt unter Verwendung der Diskretisierung aus Beispiel 8.1. Hinsichtlich Genauigkeit und Abbildung der Randstörung gelten somit dieselben Einschränkungen und Überlegungen. Die FE-Analyse wird mit einem Strafparameter von 100.0 kN/m^2 und einer RAYLEIGH-Dämpfung unter Annahme einer LEHRschen Dämpfung von 1% und 2%, bezogen auf die ersten beiden Eigenformen, durchgeführt.

Für die analytische Berechnung wird in Abhängigkeit der Eigenfrequenz von 3.14 rad/s und für eine Dämpfung von 1% aus dem Spektrum nach [MESKOURIS99] der spektrale Wert der Geschwindigkeit $S_v = 0.81 \text{ m/s}$ ermittelt. Die maximale Bodenbewegung beträgt $0.5g$.

Füllhöhe H	Berechnung	ω_1 [rad/s]	d_{max} [m]	n_v [N/mm ²]
3.0 m	Simulation	3.16	0.40	6.55
	Analytisch	3.13	0.48	7.70
3.5 m	Simulation	3.17	0.39	9.57
	Analytisch	3.14	0.48	11.05
4.0 m	Simulation	3.17	0.39	13.34
	Analytisch	3.14	0.48	14.95
4.5 m	Simulation	3.17	0.38	17.78
	Analytisch	3.14	0.48	19.62
5.0 m	Simulation	3.17	0.38	22.80
	Analytisch	3.14	0.48	24.45

Tabelle 8.10: Gegenüberstellung der Ergebnisse

Es ist zu erkennen, dass sich die erste Schwappeigenfrequenz ω_1 mit zunehmender Flüssigkeitshöhe nicht verändert. Dies ist durch die Tatsache zu erklären, dass die Größe der konvektiven Wassermasse nach Bild 2.7 bei schlanken Tanks unabhängig vom Füllgrad

ermittelt wird. Bei zunehmender Wasserhöhe werden die zusätzlichen Wasseranteile der impulsiven Wassermasse zugeordnet. Durch die konstante Größe des konvektiven Anteils lässt sich ebenfalls die Konstanz der vertikalen Wasserbewegung d_{\max} erklären. Dagegen ist der impulsive Anteil der Flüssigkeit maßgebend für die Bestimmung der vertikalen Membrankraft n_v . Bei zunehmender Wasserhöhe vergrößert sich dieser impulsive Flüssigkeitsanteil, was zu den ansteigenden Spannungsgrößen führt. Im Vergleich der simulierten und analytischen Ergebnisse ist eine gute Übereinstimmung zu erkennen. Aus der dynamischen Berechnung infolge des El Centro Bebens sind für die Diskretisierung mit der Wasserhöhe von 4.5 m drei Verformungsbilder in Bild 8.8 angegeben.

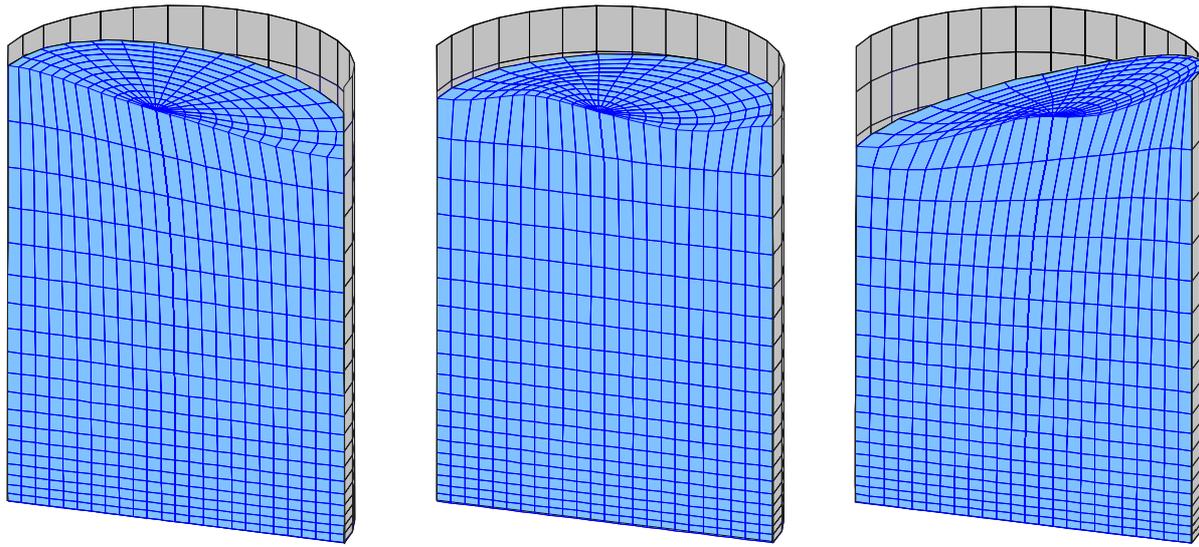


Bild 8.8: Momentanaufnahmen der Flüssigkeitsbewegung infolge des Bebens El Centro

8.4 Beispiel 4: Untersuchung eines mehrschaligen Rechteckbehälters

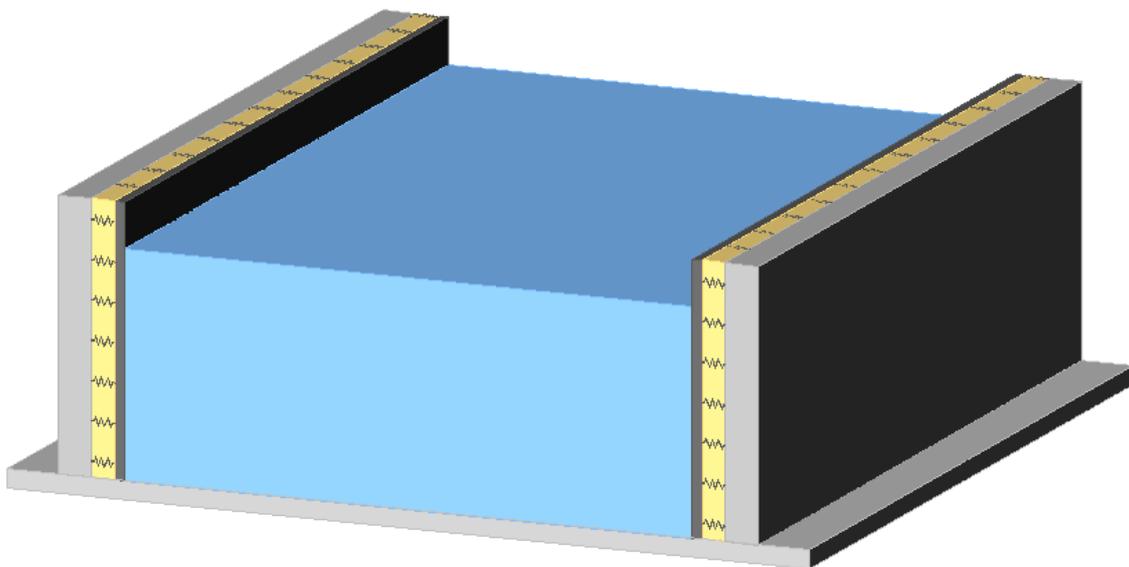
8.4.1 Problembeschreibung

Im Behälterbau kommt die in Kapitel 2 angesprochene mehrschalige Bauweise immer häufiger zum Einsatz, da sie infolge des innenliegenden Stahlmantels gute Dichtungseigenschaften besitzt und gleichzeitig aufgrund der Dämmschicht über eine gute Wärmeisolierung verfügt. Im folgenden Kapitel wird ein solcher Wandaufbau, bestehend aus einer Stahlbetonaußenschale, einer Stahlinnenschale und einer elastomeren Zwischenschicht untersucht. Für die Zwischenschicht wird ein linear elastisches, transversal-isotropes Materialgesetz verwendet, das lediglich Kräfte normal zur Wandebene überträgt.

Die in den vorangegangenen Kapiteln untersuchten rotationssymmetrischen Tankbauwerke erfordern bereits für die lineare Berechnung einen Rechenaufwand, der mit den zur Verfügung stehenden Workstations bereits an die Grenzen des Möglichen stößt. Dies liegt zum Großteil in der hohen Anzahl von Freiheitsgraden begründet, die zur Abbildung des Randstörungsbereichs erforderlich sind. Eine physikalisch nichtlineare Berechnung eines rotationssymmetrischen mehrschaligen Behälters führt daher zwangsweise zu einem erforderlichen

Speicherplatz, der nicht mehr bereitgestellt werden kann. Weiterhin erfordert eine physikalisch nichtlineare Rechnung extrem hohe Rechenzeiten.

Um dennoch den prinzipiellen Verlauf der nichtlinearen Berechnungen vorzustellen, ohne die immensen Rechenzeiten und Abstriche in der Diskretisierung in Kauf zu nehmen, erfolgt die Berechnung an einem Behälterabschnitt eines rechteckigen Tanks. Der Behälterstreifen nach Bild 8.9 hat eine Tiefe von einem Meter und setzt sich aus einer äußeren Stahlbetonschale, einer Stahlinnenschale und einer elastomeren Zwischenschicht zusammen. Die Materialdaten sind in Bild 8.9 zusammengestellt. Die Bemessung der Stahlbetonschale erfolgt unter Berücksichtigung der statischen Schnittgrößen sowie der analytisch ermittelten dynamischen Schnittgrößen nach HOUSNER.



Abmessungen:

Breite: $2L = 5.00 \text{ m}$

Tankwandhöhe: $H_T = 3.00 \text{ m}$

Wanddicke: $h_{\text{Beton}} = 0.30 \text{ m}$

$h_{\text{Stahl}} = 6.00 \text{ mm}$

$h_{\text{Zwischenschicht}} = 5.00 \text{ cm}$

Materialeigenschaften:

Beton B35:

$E = 3.4 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

$\beta_{\text{WN}} = 3.5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$

$\beta_{\text{bt}} = 3.5 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$

$\varepsilon_b = 0.0 \text{ ‰}$

$\nu = 0.2$

$\rho = 2.54 \text{ to/m}^3$

$\gamma_{\text{Beton}} = 25.0 \text{ kN/m}^3$

Bewehrungsstahl nach Kapitel 8.4.2

Stahl:

$E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$

$\nu = 0.3$

$\rho = 8.00 \text{ to/m}^3$

$\gamma_{\text{Stahl}} = 78.5 \text{ kN/m}^3$

Zwischenschicht:

$E_{\parallel} = 0.0 \text{ kN/m}^2$

$E_{\perp} = 3.0 \cdot 10^9 \text{ kN/m}^2$

$\rho = 1.5 \text{ to/m}^3$

$\gamma_{\text{Schicht}} = 14.72 \text{ kN/m}^3$

Wasserfüllung:

Wichte: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$

Füllhöhe: $H = 2.57 \text{ m}$

Wassermasse: $m_w = V \cdot \gamma / g = 13.1 \text{ to/m}$

Bild 8.9: Eigenschaften des untersuchten Wassertanks

Zunächst erfolgt eine statische Berechnung für den Lastfall Eigengewicht sowie eine dynamische Berechnung des Tanks auf Grundlage des analytischen Verfahrens nach HOUSNER. Auf Basis dieser Schnittgrößen findet eine Bemessung der Stahlbetonaußenwand für die Lastfälle Eigengewicht (inkl. Flüssigkeitsfüllung) und Erdbeben statt.

Zur numerischen Berechnung des Tanks erfolgt zunächst eine Eigenfrequenzanalyse. Anschließend wird der Tank im Rahmen einer linearen Zeitverlaufsrechnung mit dem Original-Zeitschrieb des El Centro Bebens aus Tabelle 8.3 belastet, um die maximal auftretende Systemantwort zu ermitteln.

Abschließend erfolgt eine nichtlineare dynamische Berechnung des Tankbauwerks, wobei zunächst nur das physikalisch nichtlineare Materialgesetz des Betons berücksichtigt wird. In einer weiteren Berechnung wird dann zusätzlich das nichtlineare Kontaktverhalten zwischen Fluid und Tankwand untersucht, um ein Abreißen der Flüssigkeit zu ermöglichen.

8.4.2 Berechnung nach HOUSNER und Bemessung der Betonschale

[MITZEL.ET.AL70] weist darauf hin, dass in den Wänden von rechteckigen Behältern beträchtliche Biegemomente auftreten und schlägt vor, dass die Wände offener, rechteckiger Stahlbetonbehälter als Stützmauern bemessen werden. Aufgrund der einfachen Ausführung wird bei niedrigen Behältern die Wandstärke als konstant angenommen und sollte 10.0 cm nicht unterschreiten. Dünne Wände werden oft einseitig bewehrt, stärkere sollten eine Bewehrung auf beiden Seiten erhalten.

Die Berechnung der Schnittgrößen infolge Erdbebenbelastung erfolgt unter Verwendung der analytischen Formeln für Rechtecktanks nach HOUSNER. Grundlage der Berechnung ist die erste Schwappeigenfrequenz, die sich aus der analytischen Formel für Rechtecktanks bestimmt:

$$\omega^2 = \frac{1.58 \cdot 9.81}{L} \cdot \tanh\left(1.58 \frac{H}{L}\right) = 5.74 \text{ (rad/s)}^2 \Rightarrow \omega = 2.40 \text{ rad/s.}$$

Der Behälterausschnitt entspricht nach HOUSNER aufgrund des Geometrieverhältnisses

$$\frac{H}{L} = \frac{2.57}{2.5} = 1.03 < 1.5$$

einem gedrungenen Tank. Für die analytische Berechnung werden die maximale Bodenbeschleunigung des El Centro Bebens aus Tabelle 8.3 und die spektrale Geschwindigkeit S_v benötigt. S_v wird in Abhängigkeit der Schwappgrundfrequenz und einer Dämpfung von 1% aus dem zugehörigen Antwortspektrum ermittelt. Die Berechnung nach HOUSNER liefert die in Tabelle 8.11 zusammengestellten Werte für das Umsturzmoment am Boden des äquivalenten Ersatzstabes sowie die Größe der vertikalen Wellenbewegung.

Daten für die analytische Berechnung	Werte
Schwappeigenfrequenz	2.4 rad/s
maximale Bodenbeschleunigung	0.348g
Spektrale Geschwindigkeit	0.787 m/s ²
maximale vertikale Wasseroberflächenbewegung	0.55 m
Umsturzmoment	39.94 kNm

Tabelle 8.11: Zusammenstellung der analytischen Werte

Mit Hilfe des berechneten Umsturzmomentes kann die dynamische Belastung der Tankwände infolge Erdbeben abgeschätzt werden. Da es sich bei der Behälterwand um zwei unabhängige Stützmauern handelt, die die Belastung vorwiegend über Biegemomente abtragen, wird das Moment von 39.94 kNm den beiden Stützmauern zu gleichen Teilen zugewiesen. Für den

untersuchten Meterstreifen ergibt sich somit infolge Erdbebenbelastung ein Bemessungsmoment M_{dyn} von 20 kNm/m.

Aus einer statischen Analyse werden diesem dynamischen Anteil noch der hydrostatische Anteil von

$$M_{\text{stat}} = 10.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot \frac{(2.57\text{m})^3}{2 \cdot 3} = 28.3 \text{ kNm/m}$$

und aus dem Eigengewicht eine Normalkraft von

$$N = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 0.3\text{m} \cdot 3.0\text{m} = 22.5 \text{ kN/m}$$

überlagert, so dass eine Normalkraft von -22.5 kN/m und ein Biegemoment von 49.0 kNm/m als Bemessungsgrößen entstehen. Aufgrund der dynamischen Belastung wird der Querschnitt gemäß Bild 8.10 symmetrisch bewehrt.

Unter Annahme einer Betondeckung c_1 von 3.0 cm ergibt sich eine erforderliche Längsbewehrung von $a_{\text{sl}} = 7.0 \text{ cm}^2/\text{m}$. Die Querbewehrung a_{sq} wird mit 20% der Längsbewehrung zu $1.4 \text{ cm}^2/\text{m}$ angenommen. Diese Bewehrung ist für den Behälterfuß ermittelt worden, und kann über die Behälterhöhe abgemindert werden, worauf hier verzichtet wird.

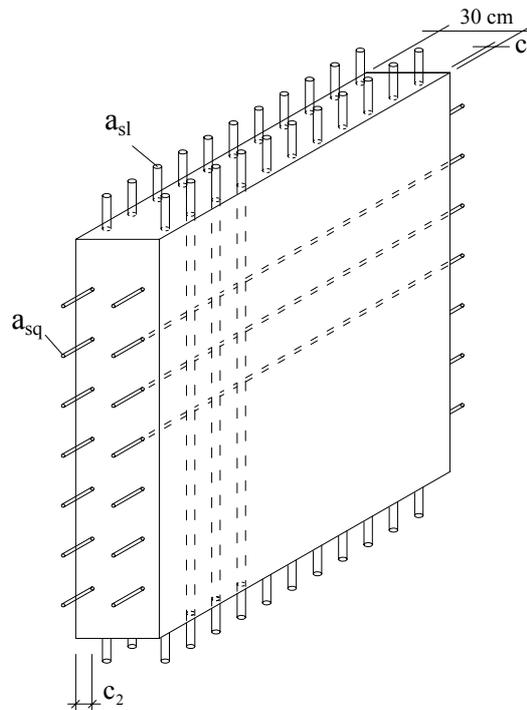


Bild 8.10: Bewehrungsskizze

Es wird ein Bewehrungsstahl BSt500 mit den folgenden Werkstoffeigenschaften gewählt:

- Elastizitätsmodul $E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$
- Tangentenmodul $E_T = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$
- Streckgrenze $\beta_S = 5.0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$
- Bruchdehnung $\varepsilon_S = 5.0 \text{ ‰}$

8.4.3 Modellbildung und Eigenfrequenzanalyse

Die folgenden numerischen Simulationsrechnungen werden mit dem Modell aus Bild 8.11 durchgeführt. Die Wände werden als eingespannt angenommen, eine Ausdehnung der Struktur senkrecht zur Systemebene wird durch Lagerbedingungen unterbunden, so dass es sich bei dem Modell um einen 1.0 m tiefen Behälterabschnitt als Teil einer „unendlich“ langen Behälterwand handelt. In Bild 8.11 ist der dreiteilige Aufbau des Makrowandelementes farbig dargestellt.

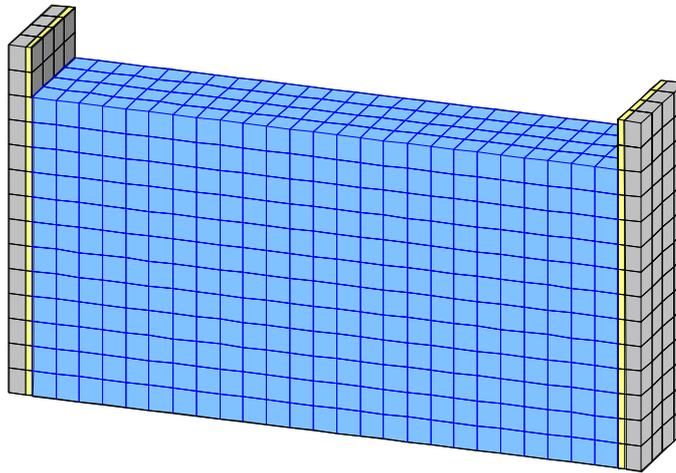


Bild 8.11: Strukturplot des Tankmodells

Für das numerische Modell ergibt sich unter Annahme des in Kapitel 5 erläuterten Strafparameters von $K_{\text{rot}} = 100.0 \text{ kN/m}^2$ die erste Schwappeigenfrequenz zu $\omega_1 = 2.39 \text{ rad/s}$ und ist damit identisch zu der analytisch ermittelten Frequenz aus Kapitel 8.4.2.

Die zugehörige Eigenform ist zusammen mit der zweiten Schwappform, die eine Frequenz von $\omega_2 = 3.53 \text{ rad/s}$ aufweist, in Bild 8.12 dargestellt.

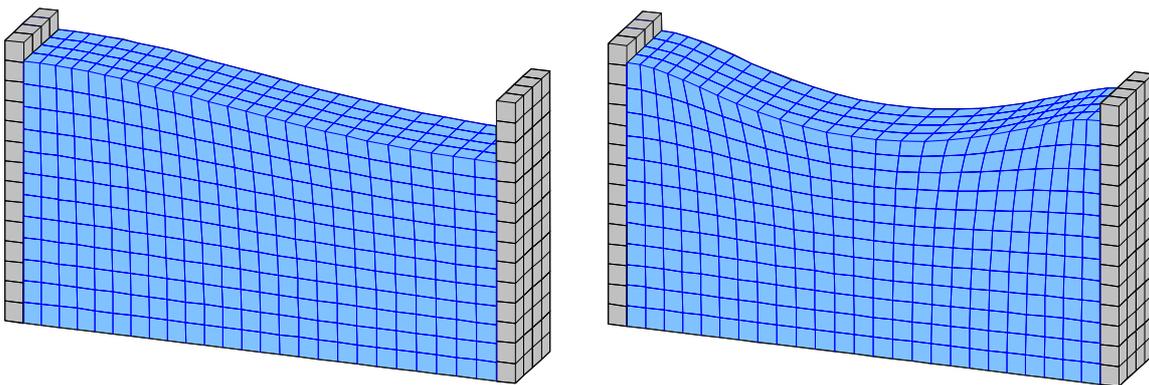


Bild 8.12: 1. und 2. Schwappform

8.4.4 Statische Berechnung

Die statische Berechnung des Systems liefert die in Tabelle 8.12 zusammengestellten Schnittgrößen. Die Werte stimmen erwartungsgemäß mit den in Kapitel 8.4.3 bestimmten Werten überein.

Schnittgrößen	Betrag
Biegemoment	25 kNm/m
Querkraft	-30 kN/m
Normalkraft	-22 kN/m

Tabelle 8.12: Schnittgrößen infolge Eigengewicht

Die sich einstellenden Verformungen sind in Tabelle 8.13 wiedergegeben. Infolge der Belastung durch Eigengewicht kommt es neben der horizontalen Verformung der Behälterwände zusätzlich zu einer geringfügigen Absenkung der Oberfläche der eingespeicherten Flüssigkeit.

Ort	Richtung	Betrag
Wasseroberfläche	vertikal	1.47 mm
Kopfpunkt der Betonwand	horizontal	5.60 mm
Kopfpunkt der Betonwand	vertikal	0.05 mm

Tabelle 8.13: Verformungen infolge Eigengewicht

Die vollständige Verformungsfigur ist in Bild 8.13 wiedergegeben. Zur Veranschaulichung des Verformungszustandes sind die Verformungen 200fach überhöht dargestellt.

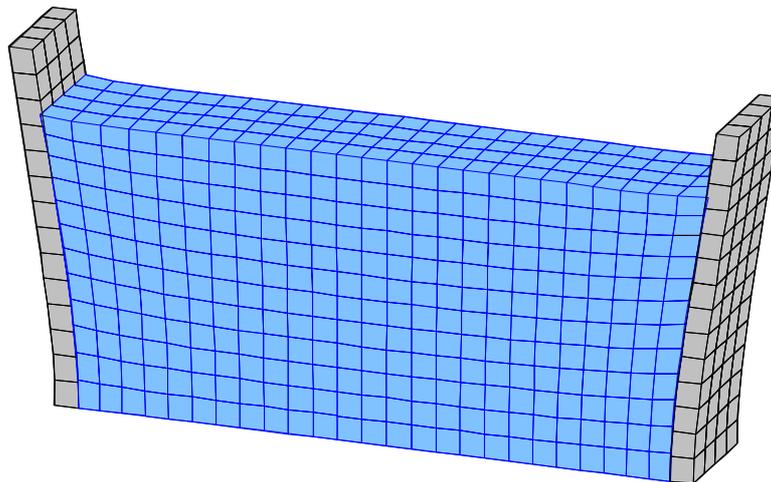


Bild 8.13: Verformungsfigur unter Eigengewicht (200fach überhöht)

Vergleichsrechnungen haben gezeigt, dass eine nichtlineare Berechnung zu den gleichen Ergebnissen führt.

8.4.5 Linear dynamische Berechnung

Zur Ermittlung des Tragwerkverhaltens unter seismischer Belastung wird die Struktur mit dem Original-Beschleunigungsverlauf des El Centro Bebens aus Tabelle 8.3 belastet. Die Ergebnisse der statischen Analyse aus Lastfall Eigengewicht werden zu Beginn der dynamischen Berechnung als Vorverformung eingelesen. Die Verformungsfiguren einiger ausgewählter Zeitpunkte der dynamischen Berechnung unter Erdbeben sind in Bild 8.14 dargestellt.

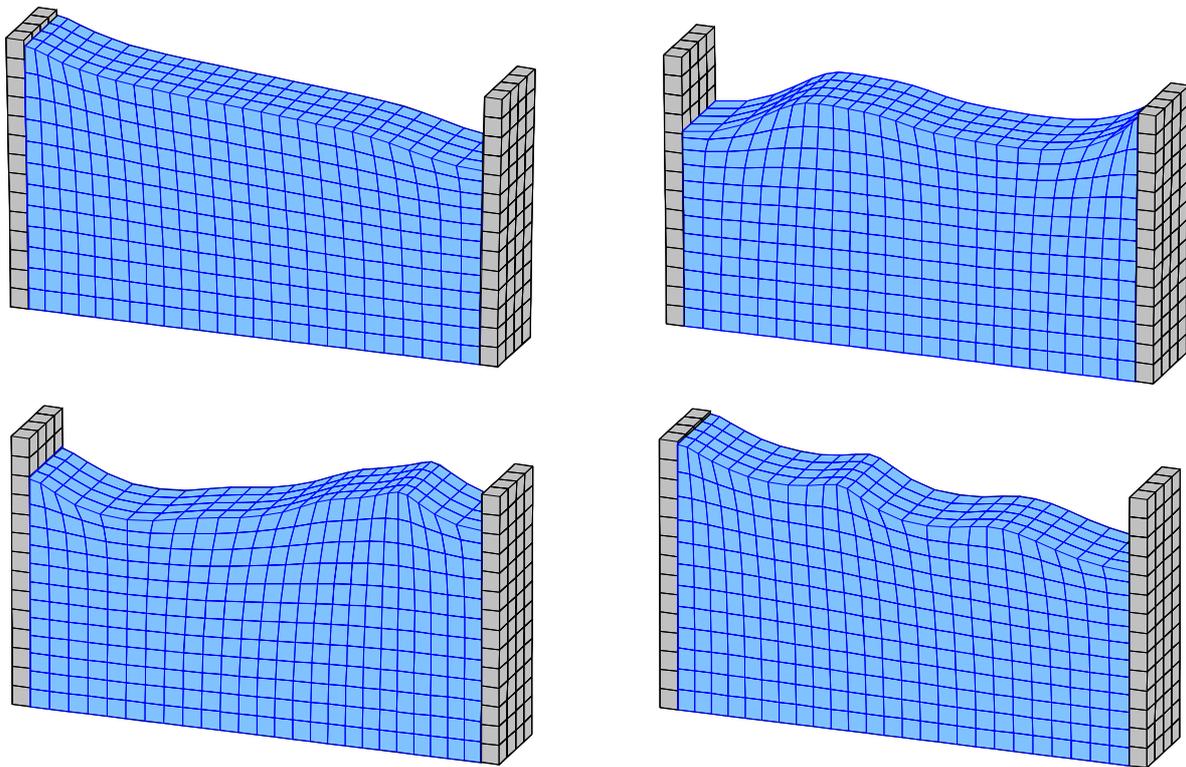


Bild 8.14: Verformung der Tankstruktur infolge Erdbeben zu ausgewählten Zeitpunkten

Bild 8.14 zeigt deutlich, dass die Verformungen der Tankwand im Verhältnis zu den Bewegungen der Flüssigkeit vernachlässigbar klein sind. Der Anzahl an Wendepunkten im Verlauf der Flüssigkeitsoberfläche ist zu entnehmen, dass durch das zugrundeliegende Erdbeben über die erste Eigenform hinaus mehrere Modalbeiträge angeregt werden.

Die wichtigsten Kennwerte der linearen dynamischen Berechnung sind in Tabelle 8.14 zusammengefasst.

Maximale Höhe der Schwappwelle	43.9 cm
Maximale horizontale Verformung der Tankwand	1.3 mm
Maximales Biegemoment in der Tankwand	50.4 kNm/m

Tabelle 8.14: Ergebnisse der linearen dynamischen Berechnung

In Bild 8.15 ist der Beschleunigungsverlauf des El Centro Bebens zusammen mit dem Verlauf der Vertikalbewegung der Flüssigkeitsoberfläche, der Verformung der Behälterwand und des Biegemomentes wiedergegeben.

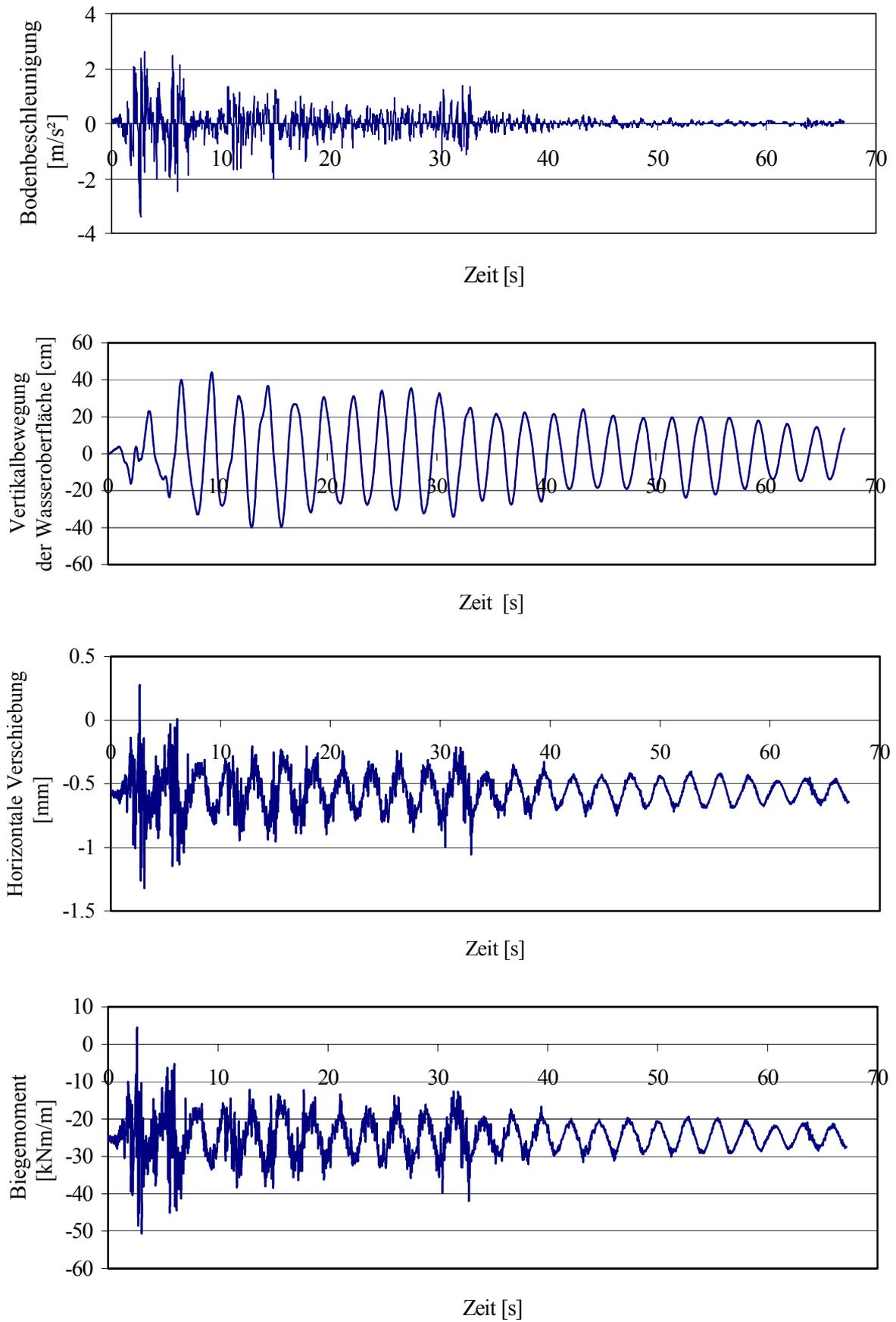


Bild 8.15: Zeitverlauf des El Centro Bebens mit zugehörigen Tragwerksantworten

Die Zeitverläufe aus Bild 8.15 zeigen, dass die Systemantwort in zwei Phasen zu unterteilen ist. In der ersten Phase, die etwa bis zur Hälfte der Bebedauer verläuft, werden das Biegemoment und die horizontale Auslenkung der Betonwand durch einzelne impulsartige Einflüsse der Bodenbeschleunigung angeregt, die zu einem sehr unruhigen Verlauf dieser Zustandsgrößen führen. In der zweiten Phase des Bebens nimmt die Intensität der Bodenbeschleunigung deutlich ab. Der Verlauf der Vertikalbewegung der Flüssigkeitsoberfläche schwingt aufgrund der geringen Dämpfung der Schwappbewegung jedoch weiter. Die Bewegung der Tankwand wird nun von der Flüssigkeitsbewegung dominiert und weist einen nahezu ungestörten harmonischen Verlauf auf, der in nur geringem Maße von der weiteren Bodenbeschleunigung beeinflusst wird.

8.4.6 Nichtlinear dynamische Berechnung: Kontaktproblem

Um den Einfluss des Kontaktes zwischen Flüssigkeit und Tankwand unter seismischer Belastung zu untersuchen, wird ein Ablösen der Flüssigkeit von der Behälterwand als nichtlineares Kontaktverhalten ermöglicht. Das Materialverhalten der Behälterstruktur wird weiterhin linear elastisch angenommen. Als Anregung dient wiederum das im vorherigen Abschnitt verwendete El Centro Beben.

Die sich einstellenden Verläufe des Biegemomentes in der Tankwand sowie die vertikale Höhe der Schwappwelle sind in Bild 8.16 dargestellt.

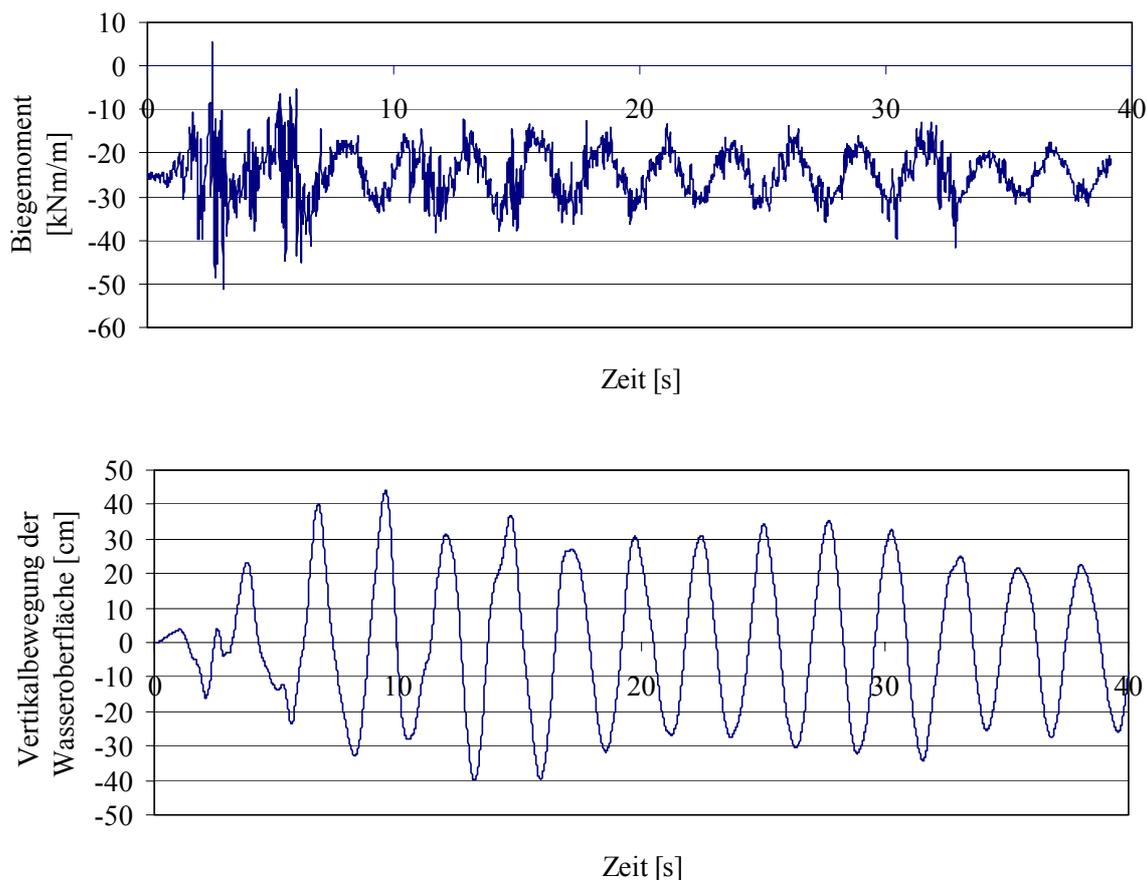


Bild 8.16: Verlauf von Biegemoment und Schwappwelle unter Berücksichtigung des Kontaktverhaltens

Die Maximalwerte des auftretenden Biegemomentes und der vertikalen Verformung der Flüssigkeitsoberfläche sind zusammen mit den rein linearen Ergebnissen der Untersuchung aus Abschnitt 8.4.5 in Tabelle 8.15 zusammengestellt.

Modell	lineare Berechnung	nichtlineare Berechnung mit Kontaktverhalten
maximales Biegemoment	50.4 kNm/m	51.0 kNm/m
maximale Höhe der Schwappwelle	43.9 cm	44.0 cm

Tabelle 8.15: Ergebnisse der nichtlinearen Berechnung unter Berücksichtigung des Kontaktproblems

Es lässt sich feststellen, dass die Berücksichtigung des nichtlinearen Kontaktproblems keinen nennenswerten Einfluss auf die Berechnung hat. Aufgrund des hydrostatischen Druckes ist die Kontaktstelle zwischen Flüssigkeit und Tankwand einer ständigen Druckbeanspruchung unterworfen. Durch die horizontale Beschleunigung des Tragwerks kommt es zwar zu einer Reduktion des Druckes auf die Tankwand, jedoch nicht, oder nur selten, zu einem Aufheben der Druckbeanspruchung. Bei der weiteren Berechnung wird dieser Aspekt daher nicht weiter berücksichtigt.

8.4.7 Nichtlinear dynamische Berechnung: Betonverhalten

Im Rahmen einer nichtlinearen Tragwerksanalyse wird der gefüllte Tank mit dem Original-Zeitschrieb des El Centro Bebens belastet. Aufgrund der Veränderlichkeit der tangentialen Steifigkeit im Verlauf der Berechnung wird zur Vermeidung numerischer Instabilitäten eine rein massenproportionale Dämpfung verwendet.

Um den Einfluss des physikalisch nichtlinearen Materialverhaltens von Beton auf die Systemantwort zu untersuchen, wird das Akzelerogramm des Erdbebens in einer Parameterstudie mit unterschiedlichen Skalierungsfaktoren multipliziert. Die Beschleunigungen des angenommenen Erdbebens werden so auf 10 bis 110 Prozent der tatsächlichen Werte normiert. Die maximalen Beschleunigungen der verschiedenen Erdbeben sind zusammen mit den sich einstellenden Maximalwerten der Schwappwelle und der horizontalen Verformung der Tankwand in Tabelle 8.16 zusammengestellt.

Skalierungsfaktor	maximale Beschleunigung	Maximale Schwappwelle	Maximale Verformung der Tankwand
[%]	[m/s ²]	[m]	[cm]
0	0.000	0.000	0.056
10	0.035	0.038	0.090
20	0.070	0.077	0.125
30	0.104	0.115	0.159
40	0.139	0.153	0.193
50	0.174	0.192	0.222
60	0.209	0.230	0.260
70	0.244	0.268	0.294
75	0.261	0.287	0.313
80	0.278	0.307	0.333
85	0.296	0.326	0.349
90	0.313	0.345	0.740
95	0.331	0.364	0.780
100	0.348	0.383	0.834
110	0.383	0.2543*	1.110*

Tabelle 8.16: Nichtlineare Tragwerksanalyse unter Annahme verschiedener Erdbebenintensitäten

Die mit einem Sternchen (*) gekennzeichneten Werte stellen die Ergebnisse einer Zeitverlaufsberechnung dar, die vor dem Ende des Erdbebenverlaufes abbricht, da aufgrund der Schädigung des Betons kein Gleichgewichtszustand mehr gefunden werden kann. Die in Tabelle 8.16 dargestellten Maximalwerte der Schwappwelle steigen mit zunehmender Maximalbeschleunigung des Erdbebens linear an. Wird die Beschleunigung zu Null gesetzt, bildet sich keine Schwappwelle aus. In Bild 8.17 ist der Verlauf der maximalen Höhe der Schwappwelle dargestellt. Der lineare Zusammenhang zwischen der bezogenen Erdbebenbeschleunigung und der Höhe der Oberflächenverformung ist deutlich zu erkennen.

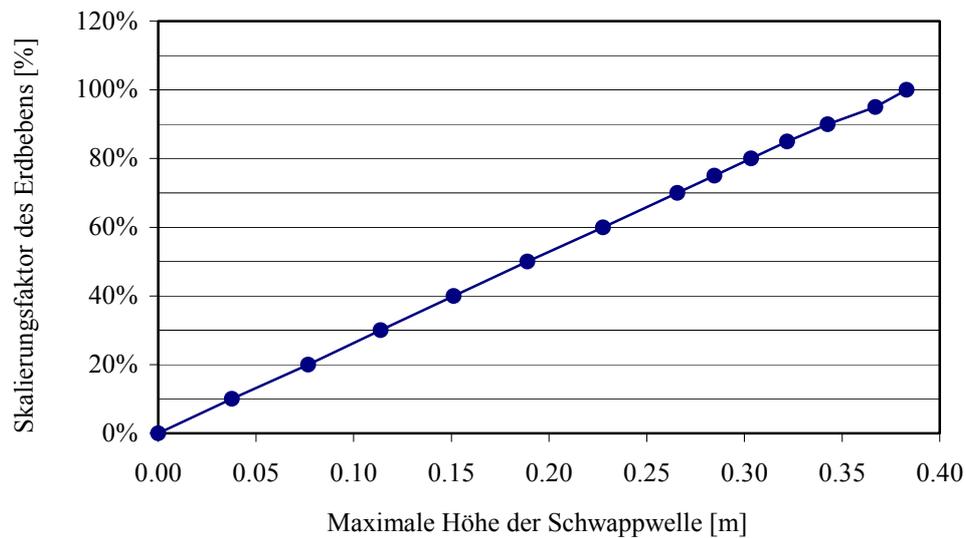


Bild 8.17: Zusammenhang zwischen Bodenbeschleunigung und Schwappwelle

Die maximal auftretende horizontale Auslenkung des Kopfpunktes der Tankwand steigt mit ansteigender Erdbebenintensität zunächst ebenfalls linear an, ist jedoch ab einer Intensität von 85% durch einen überproportionalen Anstieg gekennzeichnet. Der Verlauf der maximalen horizontalen Auslenkung der Behälterwand über den Anstieg der maximalen Bodenbeschleunigung ist in Bild 8.18 dargestellt.

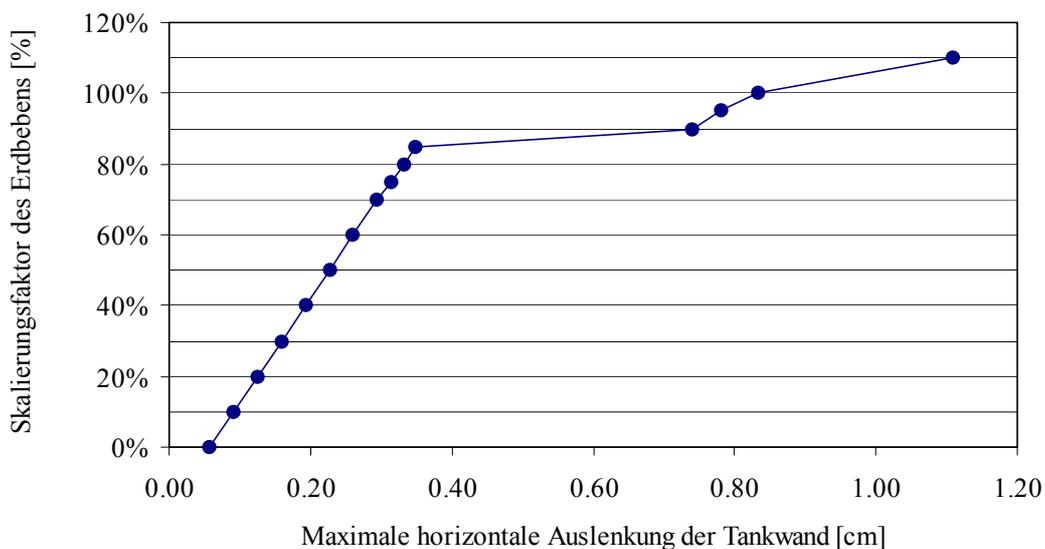


Bild 8.18: Zusammenhang zwischen der Bodenbeschleunigung und der Auslenkung der Tankwand

Der progressive Anstieg der Verformung ist ein Indiz für die Abnahme der Steifigkeit der Betonwand, die nach Überschreitung eines bestimmten Lastniveaus durch die zunehmende Anzahl von Rissen einsetzt. Für eine Intensität von 0% entspricht die maximale Verformung der statischen Vorverformung von 0.056 cm. Der Steifigkeitsabfall ab einer maximalen Bodenbeschleunigung von 85% des Originalschriebes ist deutlich zu erkennen.

Die Berechnungen zeigen, dass bei einer Belastung von 100% des El Centro Bebens die maximale Höhe der Schwappwelle für die lineare und die nichtlineare Berechnung ähnliche Werte liefern. Dieses Ergebnis bestätigt die Zuverlässigkeit der nichtlinearen Berechnung, da die im Vergleich zur Flüssigkeitsbewegung geringe Verformung der Tankwand einen nur geringen Einfluss auf das Gesamtsystem verfügt.

Die maximale horizontale Auslenkung der Tankwand ist unter Berücksichtigung des nichtlinearen Betonverhaltens deutlich größer als im Fall der linearen Berechnung. Dieses Ergebnis ist aufgrund der mit steigendem Lastniveau zunehmenden Schädigung der Behälterstruktur und dem damit verbundenen Steifigkeitsverlust zu erwarten.

Zur Illustration der Versagensart des Behälters sind in Bild 8.19 drei Rissbilder dargestellt, die unter der Belastung der Struktur durch das auf 110% gesteigerte Beben auftreten.

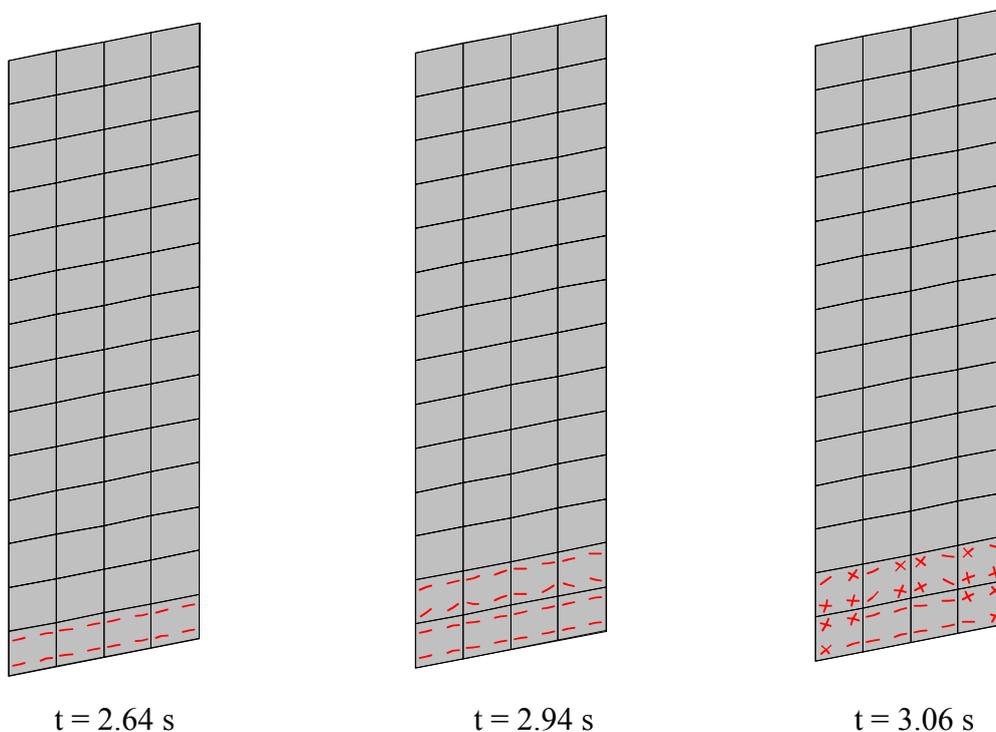


Bild 8.19: Rissbildung in der Betonschale zu verschiedenen Zeitpunkten

Die Darstellung zeigt, dass die ersten Risse im unteren Bereich der Wand an der Stelle der größten Momentenbelastung entstehen. Im weiteren Verlauf des Erdbebens weitet sich die Risszone nach oben aus. Im dritten Bild ist die Bildung von Sekundärrissen zu erkennen, die aufgrund fehlender Möglichkeiten zur Lastumlagerung zum Kollaps des Tragwerks führen.

Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Die infolge Erdbebeneinwirkung in den letzten Jahren an Tankbauwerken aufgetretenen Schadensfälle zeigen, dass die im Stand der Technik verankerten Näherungsverfahren zur Bemessung derartiger Bauwerke nicht immer zu einer ausreichenden Standsicherheit führen. Als grundlegende Schwierigkeit stellt sich bei der Berechnung die Interaktion zwischen der eingelagerten Flüssigkeit und der Behälterwand dar.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde auf Grundlage einer LAGRANGESchen Beschreibung der Bewegungsdifferentialgleichung ein finites Flüssigkeitselement entwickelt, das in der Lage ist, das Verformungsverhalten einer eingelagerten Flüssigkeit realitätsnah abzubilden. Die Richtigkeit des Konzeptes, der Vernachlässigung der konvektiven Anteile in der Bewegungsgleichung bei der Herleitung des finiten Flüssigkeitselementes, konnte durch die Beispielrechnungen bestätigt werden.

Neben der Beschreibung der Flüssigkeit durch ein finites Element wurde in der vorliegenden Arbeit auch das Problem der nichtlinearen Kopplung von Flüssigkeit und Tankwand untersucht. Hierzu wurde ein Kontaktelement entwickelt, das in der Lage ist, die Kraftübertragung zwischen Fluid und Tankwand unter Druckbelastung zu ermöglichen, während es unter Zugbeanspruchung zu einem Ablösen der Flüssigkeit von der Behälterwand kommt. Testrechnungen haben jedoch gezeigt, dass dieser Einfluss als unwesentlich angesehen werden kann, da die Ablöseerscheinungen lediglich in einem kleinen Bereich in Höhe der Wasseroberfläche eintreten.

Weiterhin werden in der vorliegenden Arbeit geometrisch und physikalisch nichtlineare Untersuchungen durchgeführt, um deren Einfluss auf das Tragwerks- und Flüssigkeitsverhalten auszutesten. Insbesondere die physikalisch nichtlineare Abbildung von Beton stellt durch sein Schädigungs- und Bruchverhalten in Kombination mit lokalen Phänomenen eine hohe Anforderung an die numerische Simulation.

Im Rahmen der durchgeführten Beispielrechnungen wird der Ansatz der RAYLEIGHDämpfung bevorzugt, da sich die Berechnung mit reiner Elementdämpfung auf Seite der Tankschale und keiner Dämpfung der Flüssigkeitselemente als nicht geeignet erwiesen hat. Bei der Rayleigh-Dämpfung hat sich für Stahltanks eine LEHRSchen Dämpfung zwischen 1% und 2% als realitätsnah erwiesen, für Betonbehälter Werte von bis zu 3%.

Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den analytischen Berechnungen nach HOUSNER zeigt, dass, solange die Voraussetzung eines linearen Tragwerkverhaltens eingehalten wird, diese Grundlagen aus den 50er Jahren eine sehr gute Näherung für die Berechnung von Tankbauwerken darstellen. Im Falle eines nichtlinearen Verhaltens führen die Vereinfachungen der Näherungsverfahren jedoch zu Ergebnissen, die von denen einer nichtlinearen Tragwerksanalyse abweichen.

Die durchgeführten numerischen Simulationen von aus der Literatur bekannten Versuchsaufbauten zeigen im Allgemeinen eine gute Übereinstimmung, wengleich Informationen über Reproduzierbarkeit und Zuverlässigkeit der Experimente fehlen.

Aufgrund der im Rahmen der Beispielrechnungen gewonnenen Ergebnisse scheint der Mehraufwand, der bei einer numerischen Simulation im Vergleich zu herkömmlichen Ersatzmodellen anfällt, gerechtfertigt, da die erzielten Ergebnisse im Informationsgehalt deutlich umfassender sind und fundiertere Aussagen über die Standsicherheit seismisch belasteter Tankbauwerke ermöglichen.

9.2 Ausblick

Während sich die vorliegende Arbeit mit dem Problem der Interaktion zwischen Flüssigkeit und Behälterwand beschäftigt, besteht bei der Abbildung der Boden-Bauwerks-Interaktion weiterer Forschungsbedarf. Insbesondere das Zusammenspiel aller drei Einflussgrößen, also der Boden-Bauwerks-Flüssigkeits-Interaktion, kann erhebliche Auswirkungen auf die Standsicherheit des Behälters unter Erdbebenlast haben. In diesem Zusammenhang scheint auch der Einsatz von Isolatoren sinnvoll, da durch die Lagerung von Tankbauwerken auf Federn oder Feder-Dämpfersystemen die Erdbebensicherheit stark erhöht werden kann. Unter Berücksichtigung dieser Aspekte sollten weitere numerische Untersuchungen von flüssigkeitsgefüllten Tankbauwerken unter Erdbebenbelastung durchgeführt werden, um Versagensmechanismen und Schädigungsstrukturen, wie sie zu Beginn der Arbeit vorgestellt wurden, zu simulieren und, möglichenfalls, in Zukunft zu verhindern.

Ein weiterer Ansatzpunkt für weitergehende Forschungsaktivitäten stellt die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität der Flüssigkeit dar. Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Fluidelement basiert auf einem geometrisch linearen Ansatz, so dass es unter großen Verformungen aufgrund von Verzerrungen des FE-Netzes zu ungenauen Ergebnissen kommen kann.

Weiterhin hat sich gezeigt, dass die hohe Anzahl der Freiheitsgrade, die ein realistisches Tankmodell benötigt, um alle möglichen nichtlinearen Effekte zu berücksichtigen, eine Größe erreicht, die dazu führt, dass das Modell auf den zur Verfügung stehenden Workstations nicht mehr rechenbar ist. Es erscheint daher sinnvoll, über parallele Rechenarchitekturen nachzudenken, die die Struktur in einzelne Substrukturen unterteilen und mit Hilfe mehrerer Prozessoren gleichzeitig bearbeiten.

Literatur

- AKKAS, N.; AKAY, H.U.; YILMAZ C. (1979): Applicability of General Purpose Finite Element Programs in Solid-Fluid Interaction Problems; Computers & Structures; Vol.10; pp773-783
- API STANDARD 650 (1993): Welded Steel Tanks for Oil Storage, Manufacturing, Distribution and Marketing Department; Appendix E: Seismic Design of Storage Tanks; ANSI 9th Edition
- ARMENIO, V.; LARocca, M. (1996): On the Analysis of Sloshing of Water in Rectangular Containers: Numerical Study and Experimental Validation; Ocean Engng.; Vol.23(8); pp705-739
- ASLAM, M.; GODDEN, W.G.; SCALISE D.T. (1979): Earthquake Sloshing in Annular and Cylindrical Tanks; Jour. of the Engng. Mechanics Division; Vol.105(EM3); pp371-389
- BACHMANN, H. (1995): Erdbebensicherung von Bauwerken; Birkhäuser Verlag; Basel/Boston/Berlin
- BACHMANN, H.; WENK, T. (1999): Schwächen statt Verstärken. Die Erdbebensanierung eines Flüssiggas-Großtanks; IBK Publikation SP-007; Zürich
- BAEHR, H.D. (1992): Thermodynamik; Springer Verlag; Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo
- BAŞAR, Y.; KRÄTZIG, W.B. (1985): Mechanik der Flächentragwerke; Verlagsgesellschaft Vieweg&Sohn; Braunschweig/Wiesbaden
- BAŞAR, Y.; WEICHERT, D. (2000): Nonlinear Continuum Mechanics of Solids; Springer Verlag; Berlin
- BATHE, K.J. (1986): Finite-Elemente-Methoden; Springer Verlag; Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo

- BAUMANN, T.; BÖHLER, J. (1997): Erdbebenisolierung von Bauwerken aus Beton; Vorträge auf dem Deutschen Betontag 1997; pp242-257
- BAŽANT, Z.P.; BHAT, P.D. (1976): Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete; Jour. of the Engng. Mechanics Division; Vol.102(EM4); pp701-722
- BAŽANT, Z.P. (1983): Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials; Jour. of Engng. Mechanics; Vol.109(3); pp849-865
- BAŽANT, Z.P.; PLANAS, J. (1998): Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials; CRC Press LLC, Boca Raton/Boston/London/New York/Washington D.C.
- BELYTSCHKO, T.; KENNEDY, J.M.; SCHOEBERLE, D.F. (1980): Quasi-Eulerian Finite Element Formulation for Fluid Structure Interaction; Jour. of Pressure Vessel Technology; Vol.102; pp62-69
- BETTEN, J. (1986): Elastizitäts- und Plastizitätslehre; Verlagsgesellschaft Vieweg&Sohn; Braunschweig/Wiesbaden
- BETTEN, J. (1987): Tensorrechnung für Ingenieure; Teubner Verlag; Stuttgart
- BETTEN, J. (1993): Kontinuumsmechanik; Springer Verlag, Berlin/Heidelberg
- BETTIN, I.; URRUTIA-GALICIA, J.C.; GEBBEKEN, N. (2000): On the Analysis of Vertical Circular Cylindrical Tanks under Earthquake Excitation at its Base; Berichte KUB Nr.00/2; Universität der Bundeswehr München
- BISCHOFF, M. (1999): Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung; Dissertation, Bericht Nr. 30 des Institutes für Baustatik Universität Stuttgart
- BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K.A. (1989): Taschenbuch der Mathematik; 24. Auflage; Verlag Harri Deutsch; Zürich/Frankfurt a. Main
- CHEN, W.F.; HAN, D.J. (1988): Plasticity for Structural Engineers; Springer Verlag; New York
- CHEN, H.C.; TAYLOR, R.L. (1990): Vibration Analysis of Fluid-Solid Systems using a Finite Element Displacement Formulation; Int. Jour. Num. Meth. Engng.; Vol.29; pp683-698
- CHOPRA, A.C. (1995): Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering; Prentice Hall Int. Inc.
- CLOUGH, D.P. (1977): Experimental Evaluation of Seismic Design Methods for Broad Cylindrical Tanks; University of California, Berkeley; EERC Report UCB/EERC-77/10
- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. (1993): Dynamics of Structures; 2nd edition; McGraw-Hill Int.
- CRAGGS, A. (1971): The Transient Response of a Coupled Plate-Acoustic System using Plate and Acoustic Finite Elements; Jour. Sound and Vibration; Vol.15; pp509-528
- CRAMER, H. (1983): Lineare Finite Element Berechnung der Bauwerk-Flüssigkeit-Wechselwirkung bei dynamischer Belastung; GAMM-Workshop, Bad Honnef

- DE BORST, R. (1997): Computational Modelling of Reinforced Concrete; Materialmodelle und Methoden zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen; Blaschke, Günther, Kolleger (eds.), Kassel; pp90-96
- DOĞANGÜN, A.; DURMUŞ, A.; AYVAS, Y. (1996): Static and Dynamic Analysis of Rectangular Tanks by using the Lagrangian Fluid Finite Element; Computers & Structures; Vol.59(3); pp547-552
- DVORKIN, E.N.; CUITIÑO, A.M.; GIOIA, G. (1990): Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distortion; Computer Methods in Applied Mechanics and Engng.; Vol.90; pp829-844
- ECKSTEIN, A. (1999): Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen; Dissertation, TWM 99-3 der RUB; Bochum
- EIBL, J., STEMPNIEWSKI, L. (1987): Nonlinear Analysis of Liquid Storage Tanks; Proc. 9th SMIRT, Rotterdam, Vol.8; pp415-420
- EUROCODE 8 (1993): Design Provisions for Earthquake Resistance of Structures, Part 4: Tanks, Silos and Pipelines, Appendix B: Seismic Analysis Procedure for Anchored Cylindrical Tanks; European Committee for Standardisation (CEN); 2nd draft
- EL-AIDI, B.; HALL, J.F. (1989): Nonlinear Earthquake Response of Concrete Gravity Dams Parts 1&2; Earthquake Engng. and Structural Dynamics; Vol.18(6); pp837-865
- EPSTEIN, H.I. (1976): Seismic Design of Liquid Storage Tanks; Jour. of Structural Division; Vol.102(9); pp1659-1673
- FERZINGER, J.H.; PERIĆ, M. (1996): Computational Methods for Fluid Dynamics; Springer Verlag; Berlin/Heidelberg/NewYork/Tokyo
- FISCHER, D. (1979): Dynamic Fluid Effect in Liquid Filled Flexible Cylindrical Tanks; Earthquake Engng. and Structural Dynamics; Vol.7; pp587-601
- FISCHER, D. (1981): Ein Vorschlag zur erdbebensicheren Bemessung von flüssigkeitsgefüllten zylindrischen Tankbauwerken; Der Stahlbau 50, Vol.1; pp13-20
- FISCHER, F.D.; MEINL, H.; SPRUNGALA, H. (1979): Zum dynamischen Verhalten von Rotationsschalen in Flüssigkeiten; WZ der HAB Weimar; p23
- GERSTEN, K. (1974): Einführung in die Strömungsmechanik; Bertelsmann Universitätsverlag; Düsseldorf
- GOEBEL, W.; SPRINGER, H.; WUNDERLICH, W. (1988): Berechnungsmodelle für dynamisch beanspruchte Rotationsschalen; Technischer Bericht der RUB, SFB 151 - Tragwerksdynamik; Bochum
- GREEVES, E.J. (1990): The Investigation and Calibration of a Novel Lagrangian Fluid Finite Element with Particular Reference to Dynamic Fluid-Structure Interaction; University of Bristol; Report UBCE-EE-90-05

- GROB, E. (1997): Werkstoffe; Der Ingenieurbau, Grundwissen; Mehlhorn(Hrsg.), Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- HAMDAN, F.H. (1995): An Assessment of Eurocode 8 - Part 4: Design of Liquid Storage Tanks; Proc. 5th Seced Conf., Chester; Balkema; pp521-529
- HAMDAN, F.H. (1999): Near-field Fluid-Structure Interaction using Lagrangian Fluid Finite Elements; Computers & Structures; Vol.71; pp123-141
- HAMDAN, F.H. (2000): Seismic Behaviour of Cylindrical Steel Liquid Storage Tanks; Jour. of Constructional Steel Research; Vol.53; pp307-333
- HAMDI, M.A.; OUSSET, Y.; VERCHERY, G. (1978): A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems; Int. Jour. for Num. Meth. in Engng; Vol.13; pp139-150
- HAMPE, E. (1980): Flüssigkeitsbehälter Band 1; Ernst&Sohn, Berlin
- HAMPE, E. (1982): Flüssigkeitsbehälter Band 2; Ernst&Sohn, Berlin
- HAMPE, E. (1985): Bemerkungen zum Tragverhalten von Behälterbauwerken unter außergewöhnlichen dynamischen Einwirkungen; Beton- und Stahlbetonbau; Vol.5; pp123-128
- HAROUN, M.A.; HOUSNER, G.W. (1981): Earthquake Response of Deformable Liquid Storage Tanks; Jour. of Applied Mechanics, Vol.48(2); pp411-418
- HAROUN, M.A.; HOUSNER, G.W. (1982A): Dynamic Characteristics of Liquid Storage Tanks; Jour. of Engng. Mechanics; Vol.108(EM5); pp783-800
- HAROUN, M.A.; HOUSNER, G.W. (1982B): Complications in Free Vibration Analysis of Tanks; Jour. of Engng. Mechanics; Vol.108(EM5); pp801-818
- HAROUN, M.A. (1983): Vibration Studies and Tests of Liquid Storage Tanks; Earthquake Engng. and Structural Dynamics; Vol.11; pp179-206
- HARTE, R. (1982): Doppelt gekrümmte Finite Dreieckelemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke; Tech.-wiss. Mittlg. Nr.82-10; RUB Bochum
- HARTE, R. (1994): Spannbetonbehälter als Sicherheitshülle für einen kryogenen Ethylen-Lagertank; Beton- und Stahlbetonbau; Vol.89(2); pp29-34
- HARTE, R. (1995): Störfalleinwirkungen auf den Spannbetonbehälter eines kryogenen Ethylen-Lagertanks; VDI-Tagung Großbehälterbau, VDI Bericht 1202; VDI Verlag, Stuttgart; pp455-465
- HARTE, R. (1999): Nichtlineare Analysen von Stahlbetonschalen als Schädigungsprävention; Baustatik-Baupraxis 7; Meskouris (Hrsg.), Balkema; pp313-321

- HAUSER, C. (2001): Dynamische Untersuchung von Tankbauwerken - Schadensfälle und ihre Simulation; Diplomarbeit am Lehrstuhl für Baumechanik und Numerische Methoden der BUGH Wuppertal
- HEINEN, L. (2000): Entwicklung und Untersuchung eines finiten Kontaktelementes zur Simulation von Flüssigkeits-Bauwerks-Interaktion; Diplomarbeit am Lehrstuhl für Baumechanik und Numerische Methoden der BUGH Wuppertal
- HIRTH, C.W.; AMSDEN, A.A.; COOK, J.L. (1974): An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all Flow Speeds; Jour. of Comp. Phys.; Vol.14; pp227-253
- HOFSTETTER, G.; MANG, H.A. (1995): Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures; Verlagsgesellschaft Vieweg&Sohn; Braunschweig/Wiesbaden
- HOSKINS, M.A.; JACOBSEN, L.S. (1934): Water Pressure in a Tank caused by a Simulated Earthquake; Bull. of the Seism. Soc. of Am.; Vol.24; pp1-32
- HOUSNER, G.W. (1957): Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers; Bull. of the Seism. Soc. of Am.; Vol.47; pp15-35
- HOUSNER, G.W. (1959): Behaviour Of Structures during Earthquakes; Jour. of Applied Mechanics Division; Vol.85(EM4); pp 109-129
- HOUSNER, G.W. (1963): The Dynamic Behaviour of Water Tanks; Bull. of the Seism. Soc. of Am.; Vol.53; pp381-387
- HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; ZIMMERMANN, T.K. (1981): Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows; Computer Methods in Applied Mechanics and Engng.; Vol. 54; pp341-355
- JACOBSEN, L.S. (1949): Impulsive Hydrodynamics of Fluids inside a Cylindrical Tank and a Fluid surrounding a Cylindrical Pier; Bull. of the Seism. Soc. of Am.; Vol.40; pp189-204
- JIRÁSEK, M. (2000): Numerical Modelling of Failure; Lecture Notes, Short course given at the University of the Armed Forces Munich
- KIM, Y.S.; YUN, C.B. (1997): A Spurious Free Four-Node Displacement-based Fluid Element for Fluid-Structure Interaction Analysis; Engng. Structures; Vol.19(8); pp665-678
- KMIECIK, M.; PFAU, H.; WIEBECK, E.; WIZMUR, M. (1993): Nichtlineare Berechnung ebener Flächentragwerke; Verlag für Bauwesen; Berlin
- KRÄTZIG, W.B.; BAŞAR, Y. (1997): Tragwerke 3 - Theorie und Anwendungen der Methode der Finiten Elemente; Springer Verlag; Berlin/Heidelberg/NewYork
- LADEWIG, D. (1994): Beitrag zur statischen und dynamischen Berechnung liegender Flüssigkeitsbehälter; Dissertation, Mitteilungen aus dem Lehr- und Forschungsgebiet für Festigkeitsfragen des konstruktiven Ingenieurbauwesens, RWTH Aachen

- LATZ, K. (1993): Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern und Baugrund; Dissertation an der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina, Braunschweig
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. (1990): Mechanics of Solid Materials; Cambridge University Press; Cambridge
- LIEBICH, G.; BÖHLER, J. (1981): FE- Berechnungen als Entwurfsgrundlage von LNG-Lagertanks bei dynamischen Berechnungen; Dyckerhoff & Widmann AG München; pp531-540
- LIU, W.K. (1981): Finite Element Procedures for Fluid-Structure Interactions and Applications to Liquid Storage Tanks; Jour. of Nuclear Engng. and Design; Vol.65; pp221-238
- LUFT, R.W. (1984): Vertical Accelerations in Prestressed Concrete Tanks; ASCE Vol.110(ST4); pp706-714
- MANOS, G.C.; CLOUGH, R.W. (1982): Further Study of the Earthquake Response of a Broad Cylindrical Liquid-Storage Tank Model; University of California, Berkeley; EERC Report UCB/EERC-82/07
- MANOS, G.C.; CLOUGH, R.W. (1984): Dynamic Response Correlation of Cylindrical Tanks; Proceeding of a Symposium sponsored by Technical Council on Lifeline Earthquake Engineering; ASCE National Convention; San Francisco; pp190-211
- MANOS, G.C.; CLOUGH, R.W. (1985): Tank Damage during the May 1983 Coalinga Earthquake; Jour. of Earthquake Engng. and Structural Dynamics; Vol.13; pp449-466
- MANOS, G.C. (1991): Evaluation of the Earthquake Performance of Anchored Wine Tanks during the San Juan, Argentina, 1977 Earthquake; Jour. of Earthquake Engng. and Structural Dynamics; Vol.20(12); pp1099-1114
- MARSDEN, J.E.; HUGHES, T.J.R. (1983): Mathematical Foundations of Elasticity; Dover Publications Inc.; New York
- MESKOURIS, K. (1999): Baudynamik: Modelle, Methoden, Praxisbeispiele; Verlag Ernst&Sohn; Berlin
- MITZEL, A.; CIESIELSKI, R.; STACHURSKI, W.; SUWALSKI, J.; ŻMUDZIŃSKI, Z. (1970): Behälter, Bunker, Silos, Schornsteine, Fernsehtürme und Freileitungsmaste; Verlag Ernst&Sohn; Berlin/München/Düsseldorf
- MONTAG, U. (1992): Die Entwicklung eines isoparametrischen Finite-Element Berechnungsmodelles für die nichtlineare Analyse faserverstärkter Laminat; Diplomarbeit am Institut für Statik und Dynamik der RUB, Bochum
- MONTAG, U. (1997): Konzepte zur Effizienzsteigerung numerischer Simulationsalgorithmen für elastoplastische Deformationsprozesse; Dissertation, TWM 97-6 der RUB, Bochum
- NAWROTZKI, P. (2001): Passive Control Systems for Buildings in Seismically Active Regions; ECCM2001; Krakow

- NIWA, A. (1978): Seismic Behaviour of Tall Liquid Storage Tanks; University of California, Berkeley; EERC Report UCB/EERC-78/04
- NIWA, A.; CLOUGH, R.W. (1982): Buckling of Cylindrical Liquid Storage Tanks under Earthquake Loading; Jour. of Earthquake Engng. and Structural Dynamics; Vol.10; pp107-122
- NGO, D.; SCORDELIS, A.C. (1967): Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams; Jour. of the American Concrete Institute; Vol.65(9); pp757-766
- NOH, W.F. (1964): A Time-Dependent Two-Space-Dimensional Coupled Eulerian-Lagrange Code; Methods in Comp. Phys.; Vol.3; pp117-179
- NOLL, W. (1974): The Foundations of Mechanics and Thermodynamics; Selected Papers; Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/NewYork
- ODEN, J.T. (1972): Finite Elements of Nonlinear Continua; McGraw-Hill Book Inc.
- ODEN, J.T.; ZIENKIEWICZ, O.C.; GALLAGHER, R.H.; TAYLOR, C. (1975): Finite Elements in Fluids; Vol.1&2; John Wiley&Sons; NewYork
- OHMENHÄUSER, F.; WEIHE, S.; KRÖPLIN, B. (1998): Classification and Algorithmic Implementation of Smearred Crack Models; Computational Modelling of Concrete Structures; de Borst et al. (eds.); Bagdastein (Austria); Balkema; pp173-182
- PAL, N.C.; BHATTACHARYYA, S.K.; SIHNA, P.K. (2001): Experimental Investigation of Slosh Dynamics of Liquid-filled Containers; Experimental Mechanics; Vol.41(1); pp63-69
- PETERSEN, C. (1996): Dynamik der Baukonstruktionen; Verlagsgesellschaft Vieweg&Sohn; Braunschweig/Wiesbaden
- PÖLLING, R. (2000): Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen; Dissertation der RUB; Bochum
- RAMMERSDORFER, F.G.; FISCHER F.D.; NAHLER, F. (1987): Wissenschaftliche Grundlage für eine Richtlinie zur Bemessung erdbebenbeanspruchter Tankbauwerke; Zehn Jahre Fortschritt im Erdbebeningenieurwesen und in der Baudynamik; Österreichische Gesellschaft für Erdbebeningenieurwesen
- RAMMERSDORFER, F.G.; SCHARF, K.; FISCHER F.D.; SEEGER, R. (1988): Collapse of Earthquake Excited Tanks; Res Mechanica; Vol.25; pp129-143
- SCAWTHORN, C.; JOHNSON, G.S. (2000): Preliminary Report - Kocaeli (Izmit) Earthquake of 17. August 1999; Engng. Structures; Vol.22; pp727-744
- SCHAUERTE, J. (1998): Raffineriedruckbehälter unter Erdbebenlast - Vergleichende Untersuchungen numerischer Modellbildung unterschiedlicher Komplexität; Diplomarbeit am Lehrstuhl für Baustatik und Baudynamik der RWTH Aachen

- SHAABAN, S.H.; NASH, W.A. (1976): Finite Element Analysis of a Seismically Excited Cylindrical Storage Tanks, Ground supported and Partially Filled with Liquid; University of Massachusetts; Report NSF/RA-760261
- SHANTARAM, D.; OWEN, D.R.J.; ZIENKIEWICZ, O.C. (1976): Dynamic Transient Behaviour of two and three Dimensional Structures including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction; Int. Jour. of Earthquake Engng. and Structural Dynamics; Vol.4; pp561-578
- SHUGAR, T.A.; KATONA, M.G. (1975): Development of Finite Element Head Injury Model; Jour. of the Engng. Mechanics Division, Vol.101, pp223-239
- SIMO, J.C.; KENNEDY, J.G. (1992): On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model - Part V - Nonlinear Plasticity: Formulation and Integration Algorithms; Computer Methods in Applied Mechanics Engng., Vol.96, pp133-171
- SPURK, J.H. (1978): Strömungslehre; Springer Verlag; Berlin
- STEIN, E.; BARTHOLD, F.J. (1997): Elastizitätstheorie; Der Ingenieurbau, Grundwissen; Mehlhorn(Hrsg.); Ernst&Sohn Verlag; Berlin
- STEMPNIEVSKI, L. (1990): Flüssigkeitsgefüllte Stahlbetonbehälter unter Erdbebeneinwirkung; Dissertation, Schriftreihe des IMB; Karlsruhe
- TEMME, C. (1995): Numerische Behandlung der Interaktionseffekte von erdbebenerregten, unverankerten Flüssigkeitsbehältern; Dissertation, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 5/95; Technische Universität München
- VELETSOS, A.S. (1974): Seismic Effects in Flexible Liquid Storage Tanks; Proc. 5th World Conf. Earth. Engng., Rome; Vol. 1; pp630-639
- VELETSOS, A.S.; TANG, Y. (1988): Soil-Structure Interaction Effects for Vertically Excited Tanks; Proc. 9th World Conf. on Earth. Engng., Tokyo; Vol.6; pp631-636
- WALL, W.A. (1999): Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen; Dissertation, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
- WESCHE, K. (1988): Baustoffe für tragende Bauteile Band 4; 2. Auflage; Bauverlag GmbH; Wiesbaden/Berlin
- WILSON, E.L.; KHALVATI, M. (1983): Finite Elements for the Dynamic Analysis of Fluid-Solid Systems; Int. Jour. of Num. Methods in Engng.; Vol.19, pp1657-1668
- WUNDERLICH, W.; SCHÄPERTÖNS, B.; TEMME, C. (1995): Dynamic Response of Liquid Storage Tanks Interacting with Fluid and Soil; 10th European Conf. on Earth. Engng.; Duma (ed.), Balkema; pp2163-2172
- WUNDERLICH, W.; SEILER, C.; HAMPE, E.; SCHWARZ, J.; KABALAN, B. (1996): Einfluss des Bodens auf das Tragverhalten erdbebenerregter Flüssigkeitstanks; Baustatik und Baupraxis 6; HAB-U Weimar; pp16.1-16.18

- YAMAMOTO, S.; KAWANO, K.; SHIMIZU, N. (1976): Earthquake-Proof Design of Oil Storage Tanks; IASS-Symposium, San Diego
- ZAHLTEN, W. (1990): Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computer-analyse allgemeiner Stahlbetonschalen; Dissertation, TWM 90-2 der RUB; Bochum
- ZAHLTEN, W. (1999): Berechnung zusammengesetzter Schalen mit dem Elementtyp ASE4; interner Bericht, Lehrstuhl für Baumechanik und Numerische Methoden der BUGH Wuppertal
- ZIENKIEWICZ, O.C.; NEWTON, R.E. (1969): Coupled Vibration of a Structure Submerged in a Compressible Fluid; Proc. Int. Symp. of Finite Element Techniques; Stuttgart
- ZIENKIEWICZ, O.C.; BETTES, P. (1978): Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment; Int. Jour. of Num. Methods in Engng.; Vol.13; pp1-16
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (1989): The Finite Element Methods; Volume 1&2; 4th Edition; McGraw-Hill Book Company; London

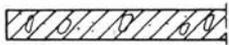
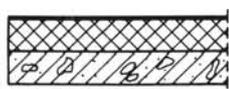
Online-Literatur

DYWI	http://www.dywidag.de/dy_deuts/technik/technik_html/tec_2.htm#LNG
EERC	http://www.eerc.berkeley.edu ; Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley
GRUE	http://www.emil-gruenbaer.de
EQES	http://www.eqe.com/revamp/turkey2.htm
SEIS	http://www-seismo.hannover.bgr.de
KOER	http://www.koeri.boun.edu.tr/earthqk/earthquake.htm
NGDC	National Geophysical Data Center: Earthquake Strong Motion 3-Volume CD-ROM Collection; info@ngdc.noaa.gov
NRWF	http://www.fm.nrw.de

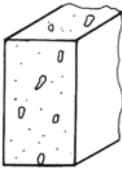
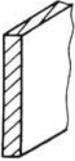
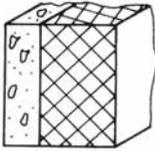
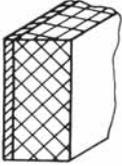
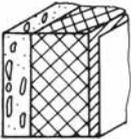
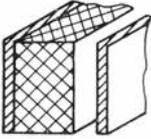
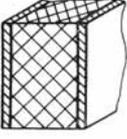
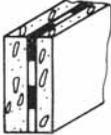
Anhang A

Übersicht der Ausbildungen von Behälterelementen nach [HAMPE80]

A.1 Darstellung verschiedener Bodenaufbautypen

einschaliger Bodenaufbau		typisches Lagergut
	Beton	Wasser (Trink- & Brauchwasser) Öl
	Metall	Wasser (Trink- & Brauchwasser) Öl
	Metallmembran Dämmschicht Beton	LNG
zweischaliger Bodenaufbau		typisches Lagergut
	Beton innen Dichtungsschicht Beton außen	Wasser (Trink- & Brauchwasser)
	Metall Dämmschicht Dichtungsschicht Beton	LNG

A.2 Darstellung verschiedener Wandaufbautypen

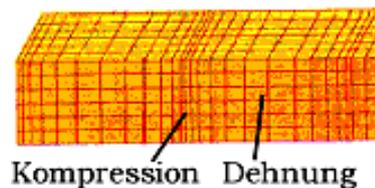
einschaliger Wandaufbau		typisches Lagergut
	Beton	Wasser (Trink- & Brauchwasser) Öl
	Metall	Wasser Gas Öl
	Beton Dämmschicht Metallmembran	LNG
	Metall Dämmschicht Metallmembran	LNG
zweischaliger Wandaufbau		typisches Lagergut
	Beton Dämmschicht Metall	LNG
	Metall Dämmschicht Metallmembran Metall	LNG
	Stahl Dämmschicht Metall	LNG
	Beton Dämmschicht Metall	Öl

Anhang B

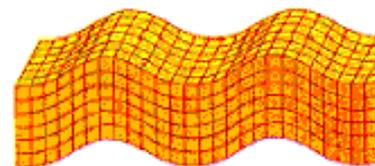
Raumwellen

Die Raumwellen gehen direkt vom Hypozentrum aus und bewegen sich im Erdinneren. Die Primärwelle (P-Welle) ist die vom Seismographen zuerst aufgezeichnete Welle und pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit von 6.0 bis 13.0 km/s fort. Ihre Bewegung verläuft in Ausbreitungsrichtung mit ständiger Komprimierung und Dehnung. Da sie sich in jedem Medium ausbreiten kann, tritt sie auch in die Luft über, wodurch das für ein Erdbeben übliche Donnern ausgelöst wird. Die zweite Raumwelle heißt Sekundär- oder Scherwelle. Sie besitzt etwa die halbe Geschwindigkeit einer P-Welle, hat dafür aber eine größere Amplitude und schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Sie ist daher hauptsächlich für Bauschäden verantwortlich. Bei Registrierung der schnelleren P-Welle wird durch ein Frühwarnsystem versucht die Zufuhr von Gas und Strom automatisch zu stoppen, um die Auswirkungen der zerstörerischen S-Welle zu reduzieren. Durch die zeitliche Differenz der beiden Wellenarten kann die Entfernung des Seismographen zum Hypozentrum berechnet werden. Durch die Auswertung mehrerer Seismographen an unterschiedlichen Orten, kann das Zentrum des Bebens bestimmt werden.

P-Welle



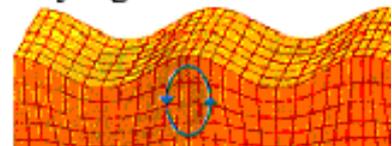
S-Welle Scherwelle



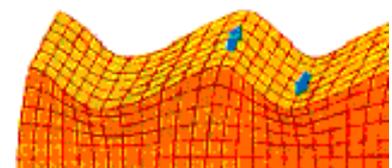
Oberflächenwellen

Oberflächenwellen entstehen an der Erdoberfläche oder an Schichtgrenzen, wenn dort die Raumwellen auftreffen. Die RAYLEIGH-Welle wird wegen ihrer elliptischen, vertikalen Schwingung und ihrer geringen Geschwindigkeit bei Erdbeben als rollende, schaukelnde Bewegung des Untergrundes wahrgenommen. Die LOVE-Welle verformt das Gestein in horizontaler Richtung und erzeugt eine Hin- und Herbewegung des Untergrundes quer zur Ausbreitungsrichtung und ist daher nach den S-Wellen die zerstörerischste Welle bei einem Erdbeben.

Rayleigh-Welle



Love-Welle



Anhang C

Matrizen Darstellung der Diskretisierung für das Flüssigkeitselement

Für eine bessere Verständlichkeit der in Kapitel 5.2.3 aufgestellten diskreten Gleichungen werden die benutzten Größen in Matrizenform dargestellt.

Die Diskretisierung der Verformungsgröße

$$\mathbf{u}_i = \sum_k^{\text{Knoten}} \Omega_k(r, s, t) \hat{\mathbf{u}}_i^k$$

und die daraus folgende Diskretisierung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{u}_i|_j = \mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_m \Gamma_{ij}^m = \sum_k [\Omega_{k,j} \hat{\mathbf{u}}_i^k - \Omega_k \hat{\mathbf{u}}_m^k \Gamma_{ij}^m]$$

ergeben unter Berücksichtigung der partiellen Ableitungen der Formfunktionen

$$\Omega_{k,j} = \frac{\partial \Omega_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \Omega_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \Omega_k}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta^j}$$

für die Programmierung in Matrizenform die folgende Darstellung:

A) Verschiebungsfunktion

$$\underline{\mathbf{u}}_{(3 \times 1)} = \underline{\mathbf{\Omega}}_{(3 \times 24)} \underline{\hat{\mathbf{u}}}_{(24 \times 1)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 & \dots & \Omega_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_1 & 0 & \dots & 0 & \Omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_1 & \dots & 0 & 0 & \Omega_2 & \dots & \Omega_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2^1 \\ \hat{\mathbf{u}}_3^1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{u}}_1^2 \\ \hat{\mathbf{u}}_2^2 \\ \hat{\mathbf{u}}_3^2 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{u}}_1^8 \\ \hat{\mathbf{u}}_2^8 \\ \hat{\mathbf{u}}_3^8 \end{bmatrix}$$

B) Deformationsgradient

$$\underline{u}_{,i(9x1)} = \underline{u}|_{i(9x1)} = \underline{\tilde{B}}_{(9x24)} \hat{\underline{u}}_{(24x1)}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_1|_1 \\ \underline{u}_1|_2 \\ \underline{u}_1|_3 \\ \underline{u}_2|_1 \\ \underline{u}_2|_2 \\ \underline{u}_2|_3 \\ \underline{u}_3|_1 \\ \underline{u}_3|_2 \\ \underline{u}_3|_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{1,1} - \Omega_1 \Gamma_{11}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{11}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{11}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{11}^3 \\ \Omega_{1,2} - \Omega_1 \Gamma_{12}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{12}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{12}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{12}^3 \\ \Omega_{1,3} - \Omega_1 \Gamma_{13}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{13}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{13}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{13}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{21}^1 & \Omega_{1,1} - \Omega_1 \Gamma_{21}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{21}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{21}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{22}^1 & \Omega_{1,2} - \Omega_1 \Gamma_{22}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{22}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{22}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{23}^1 & \Omega_{1,3} - \Omega_1 \Gamma_{23}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{23}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{23}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{31}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{31}^2 & \Omega_{1,1} - \Omega_1 \Gamma_{31}^3 & \dots & \Omega_{8,1} - \Omega_8 \Gamma_{31}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{32}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{32}^2 & \Omega_{1,2} - \Omega_1 \Gamma_{32}^3 & \dots & \Omega_{8,2} - \Omega_8 \Gamma_{32}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{33}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{33}^2 & \Omega_{1,3} - \Omega_1 \Gamma_{33}^3 & \dots & \Omega_{8,3} - \Omega_8 \Gamma_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1^1 \\ \hat{u}_2^1 \\ \hat{u}_3^1 \\ \hat{u}_1^2 \\ \hat{u}_2^2 \\ \hat{u}_3^2 \\ \vdots \\ \hat{u}_3^8 \end{bmatrix}$$

C) Transponierte Form des Deformationsgradienten

$$\underline{u}_{,j(9x1)} = \underline{u}|_{j(9x1)} = \underline{\tilde{B}}_{(9x24)} \hat{\underline{u}}_{(24x1)}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_1|_1 \\ \underline{u}_2|_1 \\ \underline{u}_3|_1 \\ \underline{u}_1|_2 \\ \underline{u}_2|_2 \\ \underline{u}_3|_3 \\ \underline{u}_1|_3 \\ \underline{u}_2|_3 \\ \underline{u}_3|_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{1,1} - \Omega_1 \Gamma_{11}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{11}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{11}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{11}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{21}^1 & \Omega_{1,1} - \Omega_1 \Gamma_{21}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{21}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{21}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{31}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{31}^2 & \Omega_{1,1} - \Omega_1 \Gamma_{31}^3 & \dots & \Omega_{8,1} - \Omega_8 \Gamma_{31}^3 \\ \Omega_{1,2} - \Omega_1 \Gamma_{12}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{12}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{12}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{12}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{22}^1 & \Omega_{1,2} - \Omega_1 \Gamma_{22}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{22}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{22}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{32}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{32}^2 & \Omega_{1,2} - \Omega_1 \Gamma_{32}^3 & \dots & \Omega_{8,2} - \Omega_8 \Gamma_{32}^3 \\ \Omega_{1,3} - \Omega_1 \Gamma_{13}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{13}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{13}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{13}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{23}^1 & \Omega_{1,3} - \Omega_1 \Gamma_{23}^2 & -\Omega_1 \Gamma_{23}^3 & \dots & -\Omega_8 \Gamma_{23}^3 \\ -\Omega_1 \Gamma_{33}^1 & -\Omega_1 \Gamma_{33}^2 & \Omega_{1,3} - \Omega_1 \Gamma_{33}^3 & \dots & \Omega_{8,3} - \Omega_8 \Gamma_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1^1 \\ \hat{u}_2^1 \\ \hat{u}_3^1 \\ \hat{u}_1^2 \\ \hat{u}_2^2 \\ \hat{u}_3^2 \\ \vdots \\ \hat{u}_3^8 \end{bmatrix}$$

D) Klassischer Verzerrungstensor und Dilatation

$$\underline{\varepsilon}_{(9x1)} = \frac{1}{2} (\underline{\tilde{B}} + \underline{\hat{B}})_{(9x24)} \hat{\underline{u}}_{(24x1)} = \underline{B}_{\text{eps}(9x24)} \hat{\underline{u}}_{(24x1)}$$

$$\underline{e} = \underline{B}_{(1x24)} \hat{\underline{u}}_{(24x1)}$$

$$\underline{B}_{(1x24)} = [\underline{g}^{11} \quad \underline{g}^{12} \quad \underline{g}^{13} \quad \underline{g}^{21} \quad \underline{g}^{22} \quad \underline{g}^{23} \quad \underline{g}^{31} \quad \underline{g}^{32} \quad \underline{g}^{33}] \underline{B}_{\text{eps}(9x24)}$$

E) Rotationstensor und zugehöriger Spannungstensor

$$\underline{\omega}_{(9 \times 1)} = \frac{1}{2} (\underline{\tilde{B}} - \underline{\hat{B}})_{(9 \times 24)} \underline{\hat{u}}_{(24 \times 1)} = \underline{B}_{\text{rot}(9 \times 24)} \underline{\hat{u}}_{(24 \times 1)}$$

$$\underline{\sigma}_{\text{rot}(9 \times 1)} = \underline{K}_{\text{rot}(9 \times 9)} \underline{B}_{\text{rot}(9 \times 24)} \underline{\hat{u}}_{(24 \times 1)}$$

$$\underline{K}_{\text{rot}} = \underline{K}_{\text{rot}} \begin{bmatrix} \underline{g}^{11} \underline{g}^{11} & \underline{g}^{11} \underline{g}^{12} & \underline{g}^{11} \underline{g}^{13} & \underline{g}^{12} \underline{g}^{11} & \dots & \underline{g}^{13} \underline{g}^{13} \\ \underline{g}^{11} \underline{g}^{21} & \underline{g}^{11} \underline{g}^{22} & & & & \underline{g}^{13} \underline{g}^{23} \\ \underline{g}^{11} \underline{g}^{31} & & & & & \vdots \\ \underline{g}^{21} \underline{g}^{11} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \underline{g}^{31} \underline{g}^{31} & \dots & & & & \underline{g}^{33} \underline{g}^{33} \end{bmatrix}$$

F) Beschleunigung und Trägheitskräfte

$$\underline{\ddot{u}}_{(3 \times 1)} = \underline{\Omega}_{(3 \times 24)} \underline{\hat{u}}_{(24 \times 1)}$$

$$\underline{F}_{(3 \times 1)} = \underline{\rho}_{(3 \times 3)} \underline{\Omega}_{(3 \times 24)} \underline{\hat{u}}_{(24 \times 1)}$$

$$\underline{\rho} = \rho \begin{bmatrix} \underline{g}^{11} & \underline{g}^{12} & \underline{g}^{13} \\ \underline{g}^{21} & \underline{g}^{22} & \underline{g}^{23} \\ \underline{g}^{31} & \underline{g}^{32} & \underline{g}^{33} \end{bmatrix}$$

G) Oberflächenverschiebungsanteile

$$\underline{u}_{\text{g}(3 \times 1)} = \underline{\Omega}_{\text{g}(3 \times 24)} \underline{\hat{u}}_{(24 \times 1)}$$

Die Oberflächensteifigkeitsanteile benötigen eine besondere Betrachtung, da sie nur durch die Verschiebungen in Gravitationsrichtung definiert sind. Das bedeutet, dass man in einer Vorberechnung die Verschiebungsanteile durch gegebene Winkelbeziehungen in die Gravitationsrichtung umrechnen muss. Ein einfacher Fall bilden die Zylinderkoordinaten. Unter der Voraussetzung, dass die Höhenrichtung z der Koordinate θ^3 entspricht führt dies zu der nebenstehenden Matrizenform.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_{\text{g}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \Omega_1 & \vdots & 0 & 0 & \Omega_2 & \vdots \end{bmatrix} \dots \Omega_8 \begin{bmatrix} \hat{u}_1^1 \\ \hat{u}_2^1 \\ \hat{u}_3^1 \\ \vdots \\ \hat{u}_1^2 \\ \hat{u}_2^2 \\ \hat{u}_3^2 \\ \vdots \\ \hat{u}_1^8 \\ \hat{u}_2^8 \\ \hat{u}_3^8 \end{bmatrix}$$

H) Oberflächenspannungsanteile

$$\underline{p}_{\text{g}(3 \times 1)} = \underline{\gamma}_{(3 \times 3)} \underline{\Omega}_{\text{g}(3 \times 24)} \underline{\hat{u}}_{(24 \times 1)}$$

$$\underline{\gamma} = \gamma \begin{bmatrix} \underline{g}^{11} & \underline{g}^{12} & \underline{g}^{13} \\ \underline{g}^{21} & \underline{g}^{22} & \underline{g}^{23} \\ \underline{g}^{31} & \underline{g}^{32} & \underline{g}^{33} \end{bmatrix}$$

Anhang D

Analytische Berechnung und Tabellen zu Beispiel 8.1

Für die in Kapitel 8.1.4 vorgestellten analytischen Ergebnisse einer dynamischen Berechnung infolge horizontaler Erdbewegungsanregung werden im Folgenden die Berechnungsgrundlagen gegeben. Die Angaben beziehen sich auf die Berechnung der vertikalen Wasseroberflächenbewegung und auf das Umsturzmoment mit dem Verfahren nach HOUSNER sowie den Normvorschriften API 650 und EC 8. Diese Berechnungen sind für den Beispieletank 8.1 ausgewertet, und die Ergebnisse sind in Tabellen D.1 bis D.3 wiedergegeben. Da sich das so berechnete Umsturzmoment auf die Theorie eines äquivalenten Ersatzstabmodelles bezieht, wie in Kapitel 2 vorgestellt, wird dieses Moment M über die Spannungsbeziehung

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

in eine axiale Membranspannung der Tankschale umgerechnet, um eine Vergleichbarkeit mit den experimentellen und numerischen Ergebnissen zu bieten. Das Widerstandsmoment für den in Beispiel 8.1 berechneten Tank ist mit

$$W = \frac{\pi D_m^2 h}{4} = \frac{\pi \cdot 3.66^2 \cdot 0.002}{4} = 0.0211 \text{ m}^3$$

bestimmt worden.

Weiterhin sind in Abschnitt D.4 die analytischen statischen Ergebnisse aus Kapitel 8.1.3 zusammengestellt.

In Abschnitt D.5 sind die Akzelerogramme und die Antwortspektren der untersuchten Beben El Centro, Parkfield und Pacoima Dam aus Kapitel 8.1.4 angegeben.

D.1 Berechnungen nach HOUSNER

Bezeichnung	Formel	Zahlenwerte
maximale Bodenbeschleunigung	\ddot{u}_B	0.5g
Schwappfrequenz	$\omega = \sqrt{\frac{1.84 \cdot 9.81}{R[m]} \cdot \tanh(1.84 \frac{H}{R})}$	3.0 rad/s
impulsiver Hebelarm h_i	$h_i = \frac{3}{8} \cdot H$	0.57 m
impulsive Ersatzlast P_i	$P_i = \ddot{u}_B \cdot m_w \cdot \left[\frac{\tanh(\sqrt{3} \cdot \frac{R}{H})}{\sqrt{3} \cdot \frac{R}{H}} \right]$	37.2 kN
konvektiver Hebelarm h_k	$h_k = H \cdot \left[1 - \frac{\cosh(1.84 \frac{H}{R}) - 1}{1.84 \frac{H}{R} \cdot \sinh(1.84 \frac{H}{R})} \right]$	1.47 m
Spektrale Geschwindigkeit	S_v (El Centro) S_v (Parkfield) S_v (Pacoima Dam)	0.8 m/s 0.09 m/s 0.22 m/s
Winkel	$\theta_h = 1.534 \cdot \frac{S_v}{\omega \cdot R} \cdot \tanh(1.84 \cdot \frac{H}{R}) = S_v \cdot 0.254$	
konvektive Ersatzlast P_k	$P_k = 1.2 \cdot m_w \cdot 0.318 \cdot \frac{R}{H} \cdot \tanh(1.84 \cdot \frac{H}{R}) \cdot g \cdot \theta_h$ $= 16.94 \cdot S_v$	13.55 kN 1.52 kN 3.72 kN
Schwappwelle d_{\max}	$d_{\max} = \frac{0.408 \cdot R \cdot \coth(1.84 \cdot \frac{H}{R})}{\frac{g}{\omega^2 \cdot \theta_h \cdot R} - 1} = \frac{0.82}{2.345/S_v - 1}$	42.4 cm 3.3 cm 8.5 cm
Umsturzmoment M	$M = P_k \cdot h_k + P_i \cdot h_i = 37.2 \cdot 0.57 + P_k \cdot 1.47$	41.1 kNm 23.4 kNm 26.6 kNm

Tabelle D.1: Berechnung nach HOUSNER

D.2 Analytische Berechnung nach dem API 650

Der API 650 gibt für die Erdbebenintensität einer Region seismische Koeffizienten, die die Auswirkungen des Bebens beschreiben. Alternativ lässt der API, analog zur Beschreibung nach HOUSNER, die Beschreibung eines Erdbebens über das zugehörige Antwortspektrum zu. Damit können die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Beben in die Berechnung des Umsturzmomentes einfließen, welches sich durch folgende Formel bestimmen lässt:

$$M = \max[\ddot{u}_B; S_a(\omega_1, \xi = 2\%)] \cdot (W_S \cdot X_S + W_1 \cdot X_1) + S_a(\omega_1, \xi = 0.5\%) \cdot W_2 \cdot X_2$$

Die hierfür nötigen Angaben sind der Tabelle D.2 zu entnehmen. Angaben zur vertikalen Wellenbewegung werden im API 650 nicht gegeben.

Bezeichnung	Formel	Zahlenwerte
erste Schwappeigenfrequenz mit $k = 0.6$ aus Bild D.1	$\omega_1 = \frac{2\pi}{k \cdot \sqrt{\frac{D(m)}{0.305}}}$	3.02 rad/s
spektraler Beschleunigungswert	S_a	2.4 m/s ² (El Centro) 0.27 m/s ² (Parkfield) 0.66 m/s ² (Pacoima Dam)
gesamte Wassermasse	W_T	16.3 to
Wasserhöhe	H	1.52 m
Masse der Tankwand	W_S	$W_S \approx 0.3$ to
Schwerpunktshöhe der Tankwand	X_S	$X_S \approx 0.9$ m
impulsive Wassermasse aus Bild D.2	W_1	$W_1 \approx 0.5 \cdot 16.3$ to = 8.15 to
Schwerpunktshöhe der impulsiven Tankmasse aus Bild D.3	X_1	$X_1 \approx 0.39 \cdot 1.52$ m = 0.59 m
konvektive Wassermasse aus Bild D.2	W_2	$W_2 \approx 0.5 \cdot 16.3$ to = 8.15 to
Schwerpunktshöhe der konvektiven Tankmasse aus Bild D.3	X_2	$X_2 \approx 0.59 \cdot 1.52$ m = 0.90 m
Umsturzmoment $M = 0.5 \cdot 9.81 \cdot 5$ tom + $S_a \cdot 7.3$ tom	M	42.0 kNm (El Centro) 26.5 kNm (Parkfield) 29.3 kNm (Pacoima Dam)

Tabelle D.2: Berechnung nach API 650

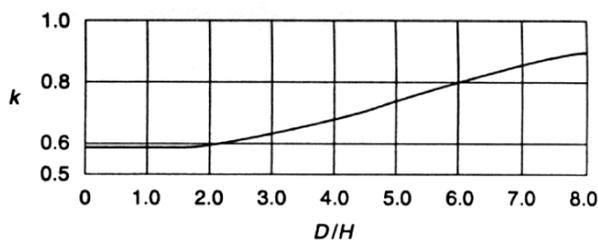


Bild D.1: Kennzahl für die Frequenzbestimmung [API650]

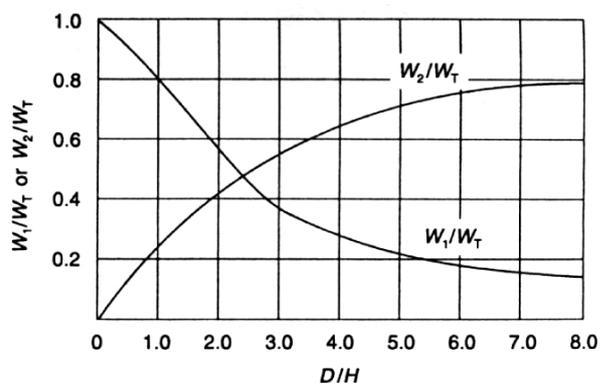


Bild D.2: Bestimmung der Wassermassen [API650]

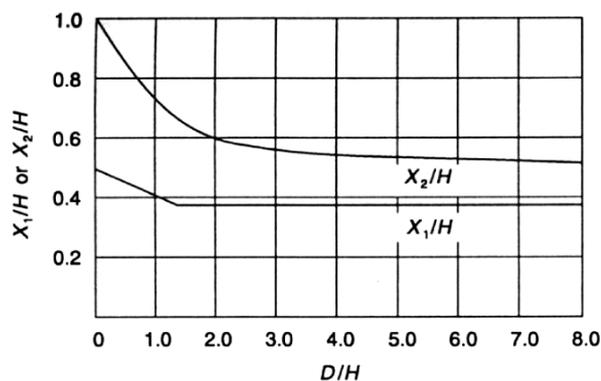


Bild D.3: Bestimmung der Hebelarme [API650]

D.3 Analytische Berechnung nach EC 8

Für die Berechnungen nach EC 8 wird ein normalisiertes, elastisches Antwortspektrum aus der Vornorm ENV 1998-1-1: 1994 Paragraph 4.2 benötigt, das in Bild D.4 angegeben ist.

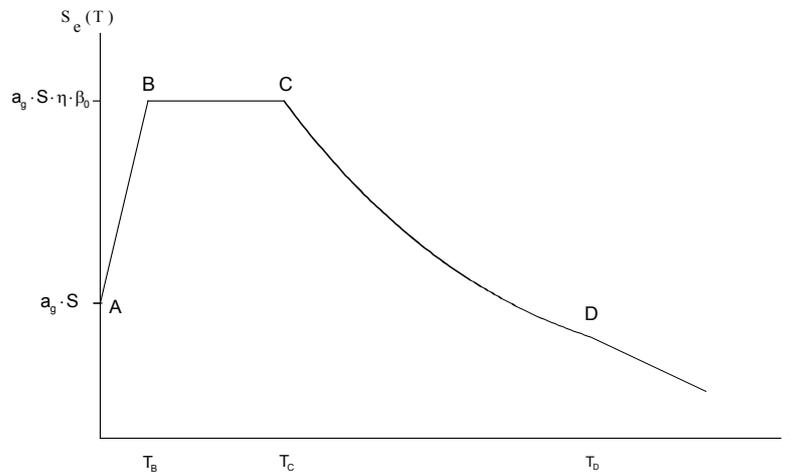


Bild D.4: Elastisches Antwortspektrum [EC8]

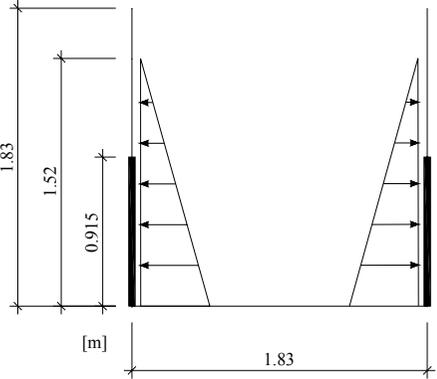
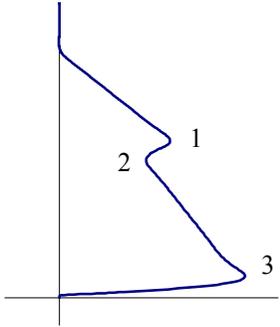
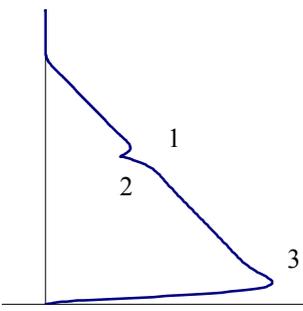
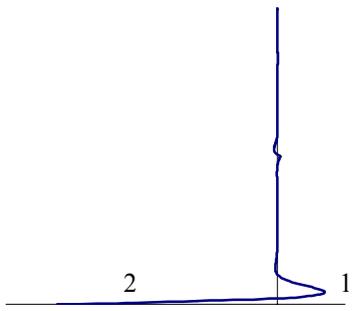
Aus diesem Spektrum wird in Abhängigkeit der maximalen Bodenbeschleunigung, des Bodenfaktors S_s und der Dämpfung die zugehörige Ordinate S_e abgelesen. Alle relevanten Daten sind in Tabelle D.3 angegeben.

Bezeichnung	Formel	Werte
Eigenkreisfrequenz	$\omega^2 = \frac{1.84 \cdot 9.81}{R[m]} \cdot \tanh(1.84 \frac{H}{R})$	3.0 rad/s
Schwingzeit	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	2.09 s
Bodenkennwert	S_s für Bodenklasse A	1.0
Zeitgrenzen des elastischen Antwortspektrums	T_B T_C T_D	0.1 s 0.4 s 3.0 s
maximale Bodenbeschleunigung	$a_g = \ddot{u}_B$	0.5g
Dämpfungskorrekturfaktor	$\eta = \sqrt{\frac{7}{2 + \xi}} \geq 0.7$	1.5
Ordinate des elastischen Spektrums	$S_e(T)$	0.36
Schwappwelle	$d_{\max} = 0.84 \cdot R \cdot S_e(T)$	55.0 cm

Tabelle D.3: Berechnung nach EC 8

Da nur die maximale Bebenbeschleunigung in die Berechnung eingeht, sind die vertikale Wasseroberflächenbewegung für alle drei Beben identisch.

D.4 Statische Berechnung

System	Radialverschiebung	Ringkraft	Biegemoment
			
<p>Ausgezeichnete Punkte</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>3</p>	<p>Verschiebung w_r [cm]</p> <p>$w_r(0.97 \text{ m}) = 0.0202$ $w_r(0.85 \text{ m}) = 0.0159$ $w_r(0.14 \text{ m}) = 0.0339$</p>	<p>Ringkraft n_ϕ [kN/m]</p> <p>$n_\phi(0.97 \text{ m}) = 9.680$ $n_\phi(0.92 \text{ m}) = 8.494$ $n_\phi(0.14 \text{ m}) = 25.930$</p>	<p>Moment m_v [kNm/m]</p> <p>$m_v(0.07 \text{ m}) = 0.003$ $m_v(0.00 \text{ m}) = -0.016$</p>

D.5 Bebenkenndaten

	<p>Beschleunigungszeitschrieb a in $[m/s^2]$ t in $[s]$</p>	<p>Antwortspektrum Dämpfungsgrad $\xi = 1\% = 0.01$ S_a in $[m/s^2]$, S_v in $[m/s]$ T in $[s]$</p>
<p>El Centro</p>		
<p>Parkfield</p>		
<p>Pacoima Dam</p>		

