

**Eine Theorie für Mehrkomponentenkontinua und ihre
Transformation in eine Stabtheorie mit Anwendung auf den
menschlichen Oberschenkelknochen**

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor – Ingenieur
des Fachbereiches Bauingenieurwesen
der Bergischen Universität – Gesamthochschule Wuppertal

von

Dipl.-Ing. Andreas Kayser
aus Bad Kreuznach

Wuppertal 2000

Dissertation eingereicht am: 17.05.2000

Tag der mündlichen Prüfung: 30.06.2000

Gutachter: Prof. em. Dr.-Ing. F. H. Schroeder
Prof. Dr.-Ing. D. Hoeborn

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehr- und Forschungsgebiet für Mechanik des Fachbereichs für Bauingenieurwesen der Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. em. Dr.-Ing. F. H. Schroeder danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, die stets vorhandene Diskussionsbereitschaft mit den vielen wertvollen Ratschlägen und die Übernahme des Referates.

Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Hoeborn für die Übernahme des Korreferates sowie für die hilfreichen fachlichen Gespräche.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Zahlten danke ich für das entgegengebrachte Verständnis und die Diskussionsbereitschaft.

Ebenso bedanke ich mich bei allen Kollegen am Lehrgebiet für die freundliche Atmosphäre und die angenehme Zusammenarbeit. Insbesondere möchte ich meinem ehemaligen Kollegen Herrn Dr.-Ing. H. M. Giese für die Unterstützung meinen besten Dank aussprechen. Herrn Dipl.-Ing. L. Jedenat und Herrn cand.-Ing. L. Heinen danke ich ebenfalls für ihre Hilfsbereitschaft.

Für Sayena

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Ziel der Arbeit	2
2 Biomechanische Beschreibung des menschlichen Femurs	5
2.1 Anatomie und Osteologie des Femurs	5
2.2 Physikalische Eigenschaften von Knochengewebe	11
2.2.1 Materialeigenschaften des kortikalen Knochens	13
2.2.2 Materialeigenschaften des spongiösen Knochens	17
2.3 Physikalische Eigenschaften des Knochenmarks und der Knochenflüssigkeiten	20
3 Theorie der porösen Medien	23
3.1 Beschreibung von porösen Medien als Mehrkomponentenkontinua	23
3.2 Kinematik des Mehrkomponentenkontinuums	27
3.2.1 Allgemeine Betrachtungsweisen	27
3.2.2 Kinematische Beschreibung mit LAGRANGEkoordinaten nur für den Feststoff	28
3.3 Erhaltungsgleichungen des Mehrkomponentenkontinuums	35
3.3.1 Massenerhaltung	35
3.3.2 Impulserhaltung	37
3.3.3 Drallerhaltung	39
3.3.4 Energieerhaltung	40
3.4 Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik	44
3.5 Erläuterungen zur konstitutiven Theorie	47
3.6 Das Zweikomponentenkontinuum	50
3.6.1 Zusammenstellung der Grundgleichungen	50
3.6.2 Konstitutive Theorie des Zweikomponentenkontinuums	53
3.6.2.1 Auswahl der Prozeßvariablen	53
3.6.2.2 Thermodynamische Restriktionen	55

3.6.2.3 Konstitutive Betrachtung in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts	59
3.6.3 Die thermoelastischen Stoffgleichungen	70
3.6.3.1 Konstitutive Gleichung für die Spannung des Feststoffes	70
3.6.3.2 Konstitutive Gleichung für die Spannung der Flüssigkeit	72
3.6.3.3 Wärmeleitungsgleichung für das Mehrkomponentenkontinuum	73
3.6.4 Bemerkungen zur Lösung der thermodynamischen Zustandsgleichungen	76
4 Transformation der Bewegungsgleichungen des Zweikomponentenkontinuums in eindimensionale Gleichungen mit Hilfe von Hypothesen	81
4.1 Einleitende Bemerkungen	81
4.2 Kinematik des geraden Stabes mit Flüssigkeit	81
4.3 Belastung des Stabes durch Interaktionskräfte	85
4.4 Die konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen des Feststoffes	87
4.5 Die eindimensionalen Bewegungsgleichungen des Feststoffes	89
4.6 Die eindimensionalen Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit	91
4.7 Die Bestimmungsgleichungen für den Stab mit Flüssigkeit	95
5 Ein Lösungsverfahren für den Stab mit Flüssigkeit bei longitudinaler Bewegung	97
5.1 Formulierung des Problems	97
5.2 Das Lösungsverfahren	99
5.3 Ein Sonderfall bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte	107
6 Anwendungsbeispiel	113
6.1 Modellbeschreibung	113
6.2 Berechnungen für eine sprungartige Belastung	115
6.3 Berechnungen für eine zeitveränderliche Belastung	118
6.4 Diskussion der Ergebnisse	122
7 Zusammenfassung und Ausblick	125
A Anhang	129
A.1 Definition der in der Medizin üblichen Bezugsebenen und Richtungen	129
A.2 Die GREENschen Verzerrungen des Mehrkomponentenkontinuums	130
A.3 Nichtlineare Beschleunigung der Flüssigkeit	131
Literaturverzeichnis	133

Symbolverzeichnis

Koordinatensysteme

x^1, x^2, x^3	raumfeste kartesische Koordinaten
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	zugehörige orthogonale Einheitsvektoren
$\theta^1, \theta^2, \theta^3$	körperfeste krummlinige Koordinaten

Allgemeine Bezeichnungen

(\dots)	Augenblickszustand, z.B. \mathbf{r}, \mathbf{g}_i
$(\dots)^+$	Ausgangszustand, z.B. $\mathbf{r}^+, \mathbf{g}_i^+$
$(\dots)^c$	Bezeichnung des Stoffes $c = \text{I, II, ...}$ bzw. $c = \text{s, f}$ für Feststoff (solid) und Flüssigkeit (fluid), z.B. $\mathbf{r}^c, \mathbf{r}^s, \mathbf{r}^f$
$(\dots)^{\cdot c}$	materielle Zeitableitung bei festgehaltenen Koordinaten des Stoffes c
$(\dots)_{,t}$	partielle Zeitableitung
$(\dots)_{,i}$	partielle Ableitung nach θ^i
$(\dots) _i$	kovariante Ableitung nach θ^i

Lateinische Bezeichnungen

\mathbf{a}_i	Basisvektoren auf der Stabachse
\mathbf{b}^k	Beschleunigung des Stoffes c
\mathbf{c}^k	Relativgeschwindigkeit des Stoffes c
c_v	spezifische Wärmefunktion bei konstantem Volumen
d	Direktor
E	Elastizitätsmodul
dF	Flächenelement des Kontrollvolumens
$d\mathbf{F}^c$	Flächenelement des Stoffes c

dV	Volumenelement des Kontrollvolumens
$d\overset{c}{V}$	Volumenelement des Stoffes c
D	Dissipation
E^{ikrs}	Elastizitätstensor
$\overset{c}{f}$	spezifische freie HELMHOLTZsche Energie
$F, F_{22}, F_{\Omega\Omega}$ etc.	Flächenwerte der Stabtheorie
g	Determinante der Metrik
\mathbf{g}_i	Basisvektoren im Punkt P des Körpers
$\mathbf{g}_{ik}, \mathbf{g}^{ik}$	Metriktensoren
$\overset{c}{G}$	LAMÈsche Konstante (Schubmodul)
$\overset{c}{h}^k$	Wärmefluß pro Fläche
$\overset{c}{K}$	LAMÈsche Konstante
\tilde{K}	Kompressionsmodul der Flüssigkeit
$\overset{c}{m}$	Masse des Stoffes c
\mathbf{m}	Streckenmomente des Stabes
\mathbf{m}_T	Rotationsträgheit des Stabes
$\Delta\mathbf{m}$	Interaktionsmomentenvektor des Stabes
\mathbf{M}	Schnittmomentenvektor
$\Delta\overset{c}{M}_s$	Drallkopplungsvektor
$\overset{c}{n}$	Volumenanteil des Stoffes c
\mathbf{N}	Schnittkraftvektor
N	Normalkraft
\mathbf{q}	Streckenlast des Stabes
\mathbf{q}_T	Massenträgheit des Stabes
$\Delta\mathbf{q}$	Interaktionskraftvektor des Stabes
Q	thermische Arbeit
Q_2, Q_3	Querkräfte
$\overset{c}{Q}^k$	Volumenkraft
$\Delta\overset{c}{Q}^k$	Interaktionskraft
\mathbf{r}	Ortsvektor zum Punkt P

r^c	spezifische Wärmequelle
\mathbf{R}	Ortsvektor der Stabachse
s^c	spezifische Entropie des Stoffes c
\mathbf{S}	Direktor des Stabquerschnittes
T^c	Temperatur des Stoffes c
T	Temperatur des Gemisches in Feststoffkoordinaten
u	spezifische innere Energie
Δu	Kontaktenergie
\mathbf{u}	verwölbungsbedingter Verschiebungsvektor
$v^k{}^c$	Geschwindigkeitskomponente des Stoffes c
\mathbf{w}^c	Verschiebungsvektor des Stoffes c
$\Delta \mathbf{w}^c$	relativer Verschiebungsvektor
$\bar{\mathbf{w}}$	Verschiebungsvektor der Stabachse
W	mechanische Arbeit
$W_{\Delta Q}$	Arbeit der Interaktionskräfte
$W_{\Delta p}$	Energiezuwachs aus Massenaustauschprozessen

Griechische Bezeichnungen

α_T	Entropiekopplungskoeffizient
α_T^c	Wärmeausdehnungskoeffizient des Stoffes c
α_v	Diffusionskoeffizient
β_T	Wärmeleitfähigkeit des Gemisches
β_v	Thermodiffusionskoeffizient
γ_{ik}^c	GREENScher Verzerrungstensor
δ_i^k	KRONECKER-Delta
ϵ^{ikm}	Permutationstensor
Λ	LAGRANGEScher Multiplikator
μ^f	Scherviskosität der Flüssigkeit
$\lambda + \frac{2}{3}\mu^f$	Volumenviskosität der Flüssigkeit

ξ_n	LEHRsches Dämpfungsmaß
ρ^c	partiale Dichte des Stoffes c bezogen auf das Kontrollvolumen dV
ρ_R^c	wahre Dichte des Stoffes c
$\tau^{ik,c}$	partieller Spannungstensor (CAUCHY) des Stoffes c
$\tau_R^{ik,c}$	wahrer Spannungstensor des Stoffes c
φ_i	Verdrehung des Stabquerschnittes
ϕ	Volumenporosität
ω_n	Eigenkreisfrequenz
Ω	Einheitsverwölbung (auf den Schwerpunkt bezogen)

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Röhrenknochen der unteren Extremitäten des menschlichen Bewegungsapparates sind äußeren Belastungen unterworfen, die sowohl im Hinblick auf die Häufigkeit als auch auf die Belastungsstärke eine hohe Anforderung an die Struktur darstellen. Relativ leicht können die äußeren Belastungen den physiologisch zulässigen Bereich verlassen und in extremen Situationen (Sport, Unfall) Größenordnungen erreichen, die die Funktionstüchtigkeit beeinträchtigen oder zu Schäden führen. Aber auch der gegensätzliche Fall eines belastungsfreien Bewegungsapparates führt zu einer Beeinträchtigung der Funktionsfähigkeit infolge eines Knochen- und Muskelabbaus, was aus den Erfahrungen mit bettlägerigen Personen oder eines längeren Aufenthaltes in der Schwerelosigkeit bekannt ist.

Der Röhrenknochen übernimmt eine stützende Funktion des menschlichen Körpers, stellt jedoch im Gegensatz zu technischen Tragwerken eine lebende Struktur dar, die sich optimal dem äußeren Belastungszustand anpassen kann und Eigenschaften besitzt, schädigende Einflüsse zu minimieren. Im Gegensatz zu den in der Regel überdimensionierten technischen Bauteilen besitzen die Röhrenknochen, die eine optimale Leichtbaukonstruktion darstellen, keine großen Sicherheitsreserven. Die Beanspruchung des Knochengewebes, das mechanische und dynamische Verhalten sowie langfristige biophysikalische und biochemische Reaktionen (funktionale Adaptivität) sind besonders aus der Sicht der Orthopädie und Prothetik von Interesse. Ebenso ist eine biomechanische Beschreibung des Knochens zur Beurteilung von krankheitsbedingten Strukturveränderung, wie z.B. die Osteoporose, erforderlich.

Die biomechanischen Eigenschaften des Knochens werden in dieser Arbeit anhand des Oberschenkelknochens (Femur) erläutert. Der Knochen stellt eine äußerst komplizierte Struktur dar, die nicht nur auf makroskopischer Ebene durch inhomogene und anisotrope Eigenschaften, sondern auch im mikroskopischen Bereich durch die Porosität und verschiedene Stoffe (Flüssigkeiten und Knochenmark) mit stark differierenden Eigenschaften beschrieben werden kann. Eine Berücksichtigung der Knochenflüssigkeiten ist in zweierlei Hinsicht notwendig. Zum einen übernimmt die viskose Knochenflüssigkeit bei großen Dehnungsgeschwindigkeiten eine unterstützende Wirkung auf den Knochen. Vor allem in den Gelenkbereichen, die eine hohe Porosität besitzen, trägt eine Kompression des sehr viskosen Knochenmarks infolge stoßartiger Belastungen zu einer Entlastung des Knochengewebes und zu einer Dämpfung

schädlicher Spannungsspitzen bei. Dieser sogenannte hydraulische Effekt ist in der Literatur vielfach aber auch widersprüchlich dokumentiert worden. Zum anderen kommt der Flüssigkeit auch bei den Umbauprozessen und der Knochenneubildung eine bedeutende Rolle zu. Es ist zwar bekannt, daß zur Aufrechterhaltung der Knochenumbauprozesse eine Druckbelastung notwendig ist und der Einfluß einer dynamischen Belastung von Bedeutung ist, jedoch ist noch nicht hinreichend genau geklärt, welche mechanosensorischen Aspekte für die Prozesse verantwortlich sind. Es ist davon auszugehen, daß der Druckgradient der Flüssigkeit in dem mikroskopisch porösen Knochengewebe die Umbauprozesse steuert.

Die komplexe Struktur des Knochens macht es nahezu unmöglich ein physikalisches Modell zu entwickeln, das allen Effekten Rechnung trägt. Somit sind nur Teilaspekte zu betrachten und Vereinfachungen z.B. durch eine Homogenisierung oder isotrope Materialgesetze einzuführen. Schon aus Gründen fehlender oder unzureichender Informationen über die Materialeigenschaften ist es sinnvoll, die konstitutiven Beziehungen auf einfache Fälle mit wenigen Parametern zu reduzieren.

Um das Verhalten der porösen Knochenstruktur mit einer Flüssigkeit bei dynamischen Belastungen analysieren und verstehen zu können, ist die Entwicklung überschaubarer Modelle erforderlich. Diese sind - auch im Hinblick auf eine thermodynamisch verträgliche Formulierung von Materialgesetzen - aus einer allgemeinen Theorie auf der Grundlage der Mehrkomponentenkontinua zu entwickeln.

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel der Arbeit ist somit die Entwicklung einer auf den Grundsätzen der Mechanik und Thermodynamik basierenden Theorie für das poröse Medium Knochen, die es erlaubt widerspruchsfreie konstitutive Beziehungen für die Stoffkomponenten aufzustellen. Das aus der Theorie der Mehrkomponentenkontinua hergeleitete allgemeine räumliche Gleichungssystem ist sehr komplex und stellt einen zu hohen Aufwand an die Lösung dar, so daß eine Reduktion auf ein eindimensionales System in Stabkoordinaten notwendig ist. Für einen Sonderfall des Stabmodells aus einem Feststoff und einer Flüssigkeit wird eine analytische Lösung hergeleitet und die Anwendung am Beispiel eines stoßartig belasteten Femurs aufgezeigt.

Dazu wird zunächst im Kapitel 2 die Anatomie und Osteologie menschlicher Röhrenknochen am Beispiel des Femurs beschrieben, wobei besonders auf den mikroskopischen Aufbau der porösen Knochenstruktur unter dem Gesichtspunkt eines Mehrkomponentenkontinuums eingegangen wird. Eine umfangreiche Literaturrecherche soll helfen, einen möglichst umfassenden Überblick über die Materialeigenschaften des menschlichen Knochens, deren experimen-

telle Bestimmung sowie über den aktuellen Forschungsstand zu erhalten. Da der Knochen schon lange Gegenstand biomechanischer Untersuchungen ist, sind unterschiedliche Forschungszweige entstanden, die sich zum einen mit der Beschreibung von Materialgesetzen für elastisches oder viskoelastisches Verhalten, der Anwendung experimenteller Verfahren (z.B. Ultraschall- und Nanomeßtechnik), der Bruchmechanik und zum anderen auch mit den Knochenumbauprozessen befassen. In letzter Zeit ist verstärkt der Einfluß der Knochenflüssigkeiten auf diese Prozesse aber auch auf strukturmechanische Effekte untersucht worden. Hier soll vornehmlich auf die elastomechanische Beschreibung des Knochens und der Flüssigkeit eingegangen werden.

Die Theorie zur Beschreibung des porösen Mediums wird im Kapitel 3 auf der Grundlage der Mischungstheorie und einer thermodynamisch fundierten konstitutiven Betrachtung im Tensorkalkül formuliert. Zunächst wird die Kinematik an einem allgemeinen Mehrkomponentenkontinuum mit Hilfe einer LAGRANGESchen Betrachtungsweise für den Feststoff und der Beschreibung der Flüssigkeit über die Relativkinematik hergeleitet. Daraufhin werden die Erhaltungssätze für die Masse, den Impuls, den Drall und die Energie mit Hilfe des EULERSchen Schnittprinzips für ein Volumenelement formuliert. Die Basis der konstitutiven Theorie stellt die Entropieungleichung dar, die für das Mehrkomponentenkontinuum unter Berücksichtigung spezieller Forderungen für ein Medium mit unmischbaren Komponenten, hergeleitet wird. Hierzu wird das Konzept der Volumenanteile eingeführt, mit dem eine Zwangsbedingung aufgrund der Unmischbarkeit der Stoffkomponenten verbunden ist.

Die Entwicklung von konstitutiven Beziehungen anhand der sich aus der Entropieungleichung ergebenden Restriktionen wird anschließend an einem speziellen Zweikomponentenkontinuum aus einem Feststoff und einer Flüssigkeit in der Nähe des sogenannten thermodynamischen Gleichgewichts fortgesetzt. Es werden Stoffgleichungen für die Spannungen des Feststoffes und der Flüssigkeit, für die Interaktionskräfte der beiden Komponenten, die Wärmeleitungsgleichung für das gesamte Kontinuum und eine Bestimmungsgleichung für die Volumenanteile aufgestellt.

Das geschlossene räumliche Problem wird im Kapitel 4 mit Hilfe von Hypothesen auf ein eindimensionales Differentialgleichungssystem in Stabkoordinaten transformiert. Während dazu für den Feststoff die Hypothesen aus der klassischen Stabtheorie nach BERNOULLI, DE ST. VENANT und WAGNER ihre Anwendung finden, werden die Gleichungen für die Flüssigkeit mit Hilfe geeigneter Ansatzfunktionen für die Relativverschiebungen mit der Methode nach GALERKIN hergeleitet.

Für den Sonderfall einer ausschließlich longitudinalen Bewegung der beiden Stoffkomponenten wird in Kapitel 5 ein Lösungsverfahren für das Anfangswert-Randwertproblem vorge-

stellt. Bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte kann zusätzlich eine spezielle analytische Lösung des Problems formuliert werden.

Im Kapitel 6 folgt daraufhin die Anwendung des Lösungsverfahrens auf ein Stabmodell des Femurs, welches longitudinal mit einer Druckbelastung beaufschlagt wird. Parameterstudien für eine Sprung- und eine Impulsbelastung sollen den Einfluß der Porosität und des Diffusionskoeffizienten auf den Feststoff und die Flüssigkeit aufzeigen. Die Abhängigkeit der Bewegungsantwort von der Belastungsgeschwindigkeit bzw. -frequenz wird anhand unterschiedlicher Impulsdauern sowie anhand einer Frequenzbereichsdarstellung für eine harmonische Anregung gezeigt.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick ab.

2 Biomechanische Beschreibung des menschlichen Femurs

2.1 Anatomie und Osteologie des Femurs

Das Femur, der größte Röhrenknochen des menschlichen Körpers, läßt sich **anatomisch** in drei Bereiche einteilen (siehe Bild 2.1). Der Schaftbereich, die sogenannte Diaphyse, stellt den mittleren Teil des Röhrenknochens dar, der durch das proximale und distale Gelenkende (Epiphysen) begrenzt wird. Die Übergangsbereiche zwischen der Diaphyse und den Epiphysen werden als Metaphyse bezeichnet. Zur Beschreibung der auf den menschlichen Körper bezogenen Richtungen und Bezugsebenen dienen die in der Medizin üblichen Bezeichnungen, die im Anhang A.1 erläutert werden.

Die Diaphyse des Femurs stellt einen in der Sagittalebene leicht gekrümmten Hohlstab mit einer variierenden Querschnittsform und –größe dar, dessen Flächenwerte im mittleren Bereich annähernd konstant sind und zu den Gelenkenden hin zunehmen. Zusätzlich verändert sich die Richtung der Hauptträgheitsachsen des Knochenquerschnittes entlang der Knochenachse. Eine leistenförmige Verdickung, die Linea aspera, verläuft auf der dorsalen Seite des Schaftbereiches (Corpus ossis femoris) zwischen den Gelenkenden und stellt eine zusätzliche Versteifung dar.

An dem proximalen Ende des Femurschaftes schließt der Schenkelhals unter einem Winkel von ca. $125^\circ (\pm 5^\circ)$ zur Diaphysenachse an [RAUBER 1987], der am Ende in den kugelförmigen Gelenkkopf (Caput ossis femoris) des Hüftgelenkes übergeht. Der Schenkelhals (Collum ossis femoris), dessen Querschnitt sich zum Femurschaft hin aufweitet, ist mit mehreren Verknöcherungen und Erhebungen versehen, die als Ansätze für die Sehnen und Muskeln dienen. Dabei kommt den lateral und medial am Schenkelhals ansetzenden Höckern (Trochanter major und Trochanter minor) eine besondere Bedeutung zu, da sie als Knochenhebel bei der Einleitung der Muskelkräfte dienen.

Das distale Ende des Femurs wird von den Kondylen (Condylus medialis / lateralis) gebildet, die beiden Rollhügel des Kniegelenkes. Die medial und lateral oberhalb der Kondylen ansetzenden Erhebungen (Epikondylen) stellen wiederum Sehnenansätze dar.

Die anatomische Achse des Femurs verläuft nicht vertikal, sondern nimmt mit der Traglinie, die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten des Gelenkkopfes und der Kniegelenkachse, einen Winkel von 5 bis 7° ein.

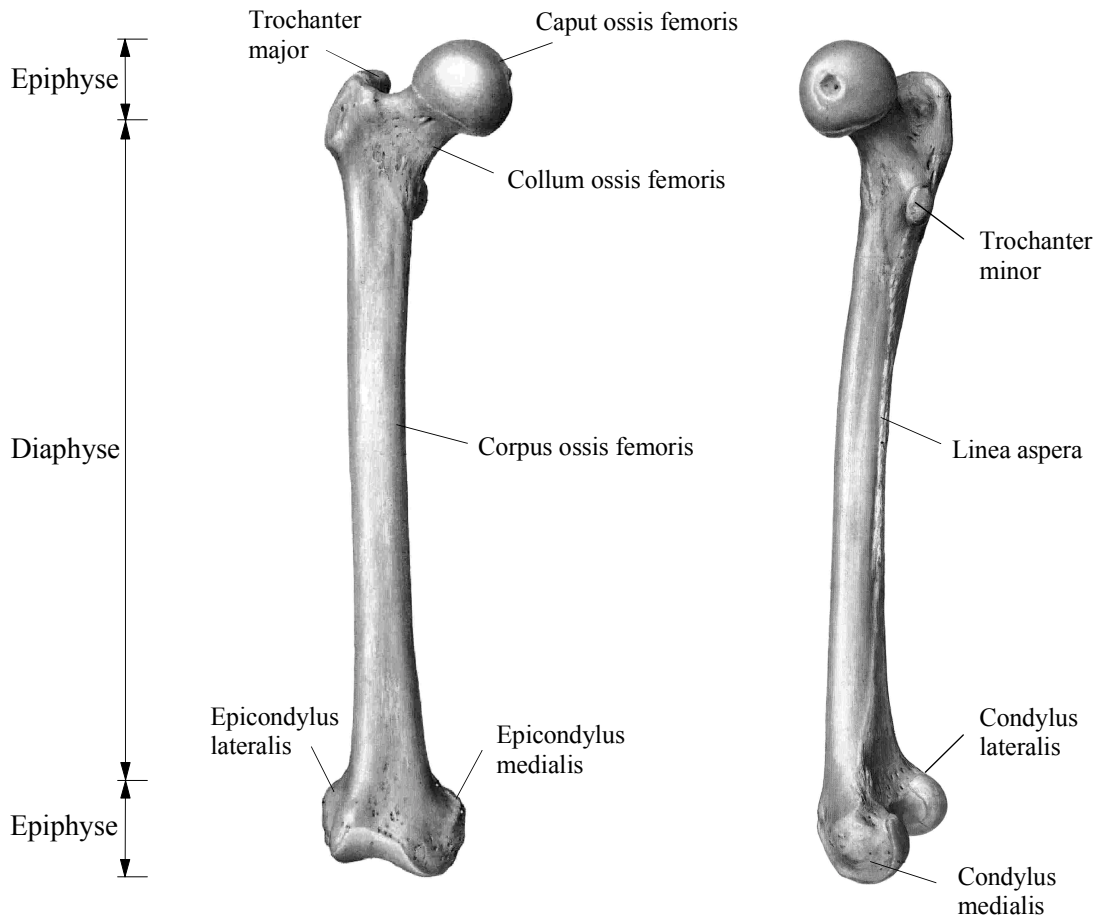


Bild 2.1: Rechtes Femur: a) von frontal, b) von medial

Der menschliche Knochen besteht im makroskopischen Sinn aus zwei Bauarten von Knochengewebe, dessen Struktur später noch genauer beschrieben wird (**Osteologie**). Der kompakte, feste kortikale Knochen (Kortikalis oder Kompakta) tritt vorzugsweise an der Oberfläche auf, während der schwammartig aufgelockerte spongiöse Knochen (Spongiosa) das Innere formt und die Kortikalis gegenüber eingeleiteter Kräfte abstützt. Während das Innere der meisten Knochen vollständig mit Spongiosa ausgefüllt ist, befindet sich diese Gewebeart bei den Röhrenknochen, wie dem Femur, nur im Bereich der Epiphysen. Der von Knochengewebe freie Markraum ist hingegen mit Fettmark ausgefüllt. Die in der Diaphyse

sehr dicke kortikale Knochenschicht nimmt zu den Epiphysen hin ab und geht in den Gelenkbereichen fließend in die Spongiosa über, die dort das ganze Volumen einnimmt (Bild 2.2).

Abgesehen von den Gelenkflächen ist der Knochen auf seiner Außenseite von einer dünnen gefäß- und nervenführenden Knochenhaut, dem Periost, überzogen, die für die Ernährung und Knochenbildung zuständig ist. Im Inneren wird diese Aufgabe von einer Zellschicht, dem Endost, übernommen, welches die Kortikalis zum Markraum hin abgrenzt und die Spongiosastrabekel umhüllt.



Bild 2.2: Längsschnitt durch das proximale Femur

Der spongiöse und der kortikale Knochen werden aufgrund ihres schichtartigen Aufbaus beide als Lamellenknochen bezeichnet, besitzen aber sehr unterschiedliche Bauformen, die nachfolgend anhand ihres mikroskopischen Aufbaus genauer erläutert werden.

Die Lamellenschichten (3 – 7 μm dick), aus denen sich beide Knochenarten zusammensetzen, bestehen aus anorganischen Bestandteilen (Grundsubstanz, Mineralkristalle) und organischen Bestandteilen (Kollagenfasern), wobei erstere für die Festigkeit und letztere für die Elastizität verantwortlich sind [RAUBER 1987]. In den Lamellen sind die Kollagenfasern – ähnlich eines

Verbundwerkstoffes – mit paralleler Orientierung in die Grundsubstanz eingelagert (siehe auch Bild 2.3). Die Ausrichtung der Kollagenfasern kann über mehrere Lamellen alternierend verlaufen, so daß die Fasern in zwei benachbarten Schichten annähernd senkrecht zueinander liegen.

Der **spongiöse** Knochen ist eine inhomogene und anisotrope Struktur, die in Form von kleinen Stäben und Platten (Dicke der Trabekel ca. 0.2 mm) ein Tragwerk bildet und somit eine bezüglich der Masse und der Belastbarkeit optimierte Struktur darstellt. Die einzelnen Trabekel bestehen aus Lamellenfragmenten, die in der Regel parallel geschichtet sind. Die Spongiosa besitzt die Eigenschaft, sich an äußere Belastungen anzupassen, wodurch eine optimierte Anordnung der Trabekel entsteht, die den Zug- und Drucktrajektorien für einen gemittelten Belastungszustand entspricht (siehe Bild 2.2). Bei einer Veränderung der Belastung über einen längeren Zeitraum (z.B. infolge einer Verletzung oder einer Prothese) ist durch Anlagerung und Umbauprozesse von Knochenmaterial eine Verstärkung sowie Neuorientierung der Trabekel möglich.

Der Zwischenraum des Trabekelwerks ist mit dem für die Versorgung des Knochens erforderlichen roten und gelben Knochenmark ausgefüllt. Die Volumenporosität der Spongiosa, die örtlich variiert und bis zu 80 % [MARTIN 1984] beträgt, übt einen großen Einfluß auf die Festigkeit und Elastizität der Knochenstruktur aus.

Während die Struktur der Spongiosa aus Lamellenfragmenten besteht, lassen sich bei **kortikalem** Knochen drei verschiedene Formen des Lamellenbaus unterscheiden: Osteone, Schaltlamellen und Generallamellen. Den größten Teil der Kortikalis nehmen die sogenannten Osteone (oder HAVERS-Systeme) ein, eine konzentrische Anordnung von bis zu 20 Lamellenschalen, die einen Hohlzylinder mit einem Außendurchmesser von 250 bis 350 μm bilden [RAUBER 1987] (Bild 2.3). Die von den Osteonen gebildeten sogenannten HAVERSSchen Kanäle (Durchmesser ca. 50 μm) sind mit Knochenflüssigkeit gefüllt und enthalten ein oder zwei Kapillare sowie Nervenfasern. Durch eine Aufspaltung dieser Kanäle entstehen Querverbindungen, die als VOLKMANNsche Kanäle bezeichnet werden. Die Orientierung der Osteone richtet sich nach der Lage der HAVERSSchen Gefäße, die vorzugsweise parallel zur Knochenachse, häufig aber auch wendelförmig verlaufen. In [PETRYL 1996] wird die Ausrichtung der Osteone mit den Hautspannungsrichtungen begründet, wobei Druck- bzw. Biegespannungen zu einer longitudinalen und eine zusätzliche Torsionsbeanspruchung zu einer wendelförmigen Orientierung führen. Während eine Abgrenzung der Osteone im Knochenquerschnitt möglich ist, lassen sie sich aufgrund ihrer U-förmigen Aufzweigungen nur schwer in der Länge als Baueinheit abgrenzen. Somit sind in der Literatur unterschiedliche Längenangaben von 0.5 bis 20 mm [COWIN 1990, PIDAPARTI 1992] zu finden. Die Anzahl und Verteilung der Osteone variiert stark (Femur Mitte: 5000, Tibia: 500 pro Querschnitt), wobei größere Osteone mei-

stens marknah und kleinere peripher anzutreffen sind. Hierdurch wird auch die Porosität beeinflusst, die trotz der kompakten Bauform des Knochens Werte bis zu 15 % [SCHAFFLER 1988] erreicht.

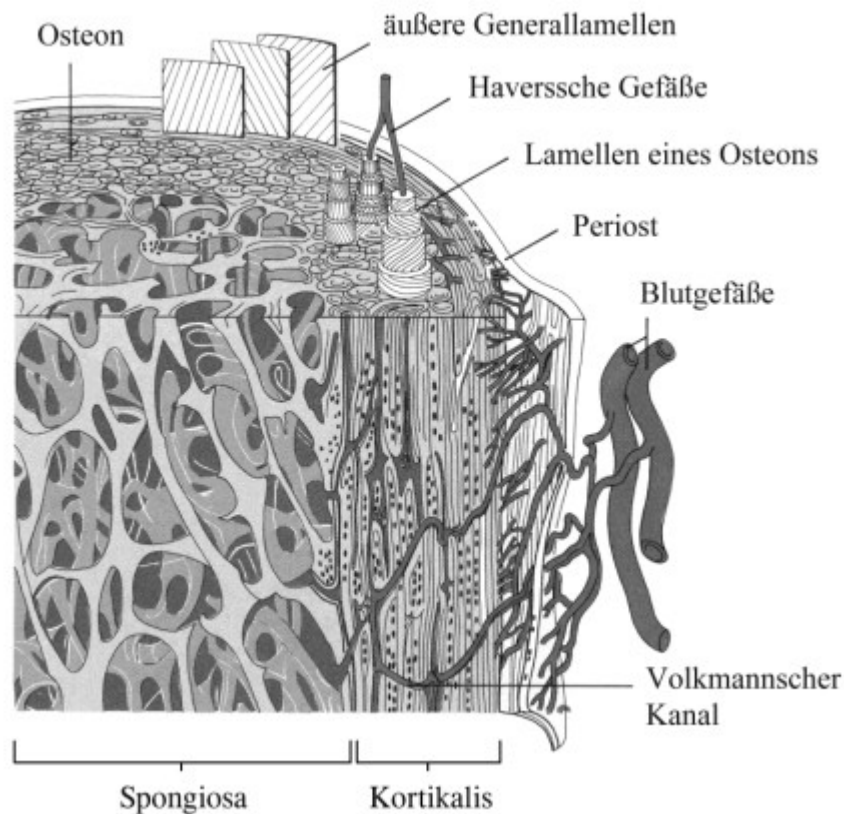


Bild 2.3: Konstruktiver Aufbau des Knochens

Abhängig von dem Steigungswinkel der Kollagenfasern in den Lamellen lassen sich flach- und steilgewinkelte Osteone mit im Extremfall transversaler oder longitudinaler Faserausrichtung unterscheiden. Neben der Steigung der Fasern hat aber auch die Menge der Fasern in den Lamellen einen Einfluß auf die Festigkeitseigenschaften.

Die Zwischenräume der Osteone sind mit sogenannten Schaltlamellen ausgefüllt. Diese entstehen nach einem inneren Umbau des Knochens aus übriggebliebenen Bruchstücken alter, teilweise abgebauter Osteone. Nach außen wird die Kortikalis durch mehrere parallele Lamellenschichten abgegrenzt, die als äußere Generallamellen bezeichnet werden.

In Bild 2.4 ist der mikroskopische Aufbau eines Osteons dargestellt [PLATZER 1991]. In der lamellenartigen Schichtung sind einzelne Hohlräume (Lakunen) zu erkennen, die über ein feines Netz von Kanälchen (Canaliculi) miteinander und dem HAVERSschen Kanal verbunden

sind. Das flüssigkeitsgefüllte Gefäßsystem dient dem Stoffaustausch zwischen den HAVERSchen Gefäßen und den umliegenden Lamellen. Die Lakunen beherbergen die für den Stoffwechsel verantwortlichen und den Umbauprozess beeinflussenden Knochenzellen, die Osteozyten.

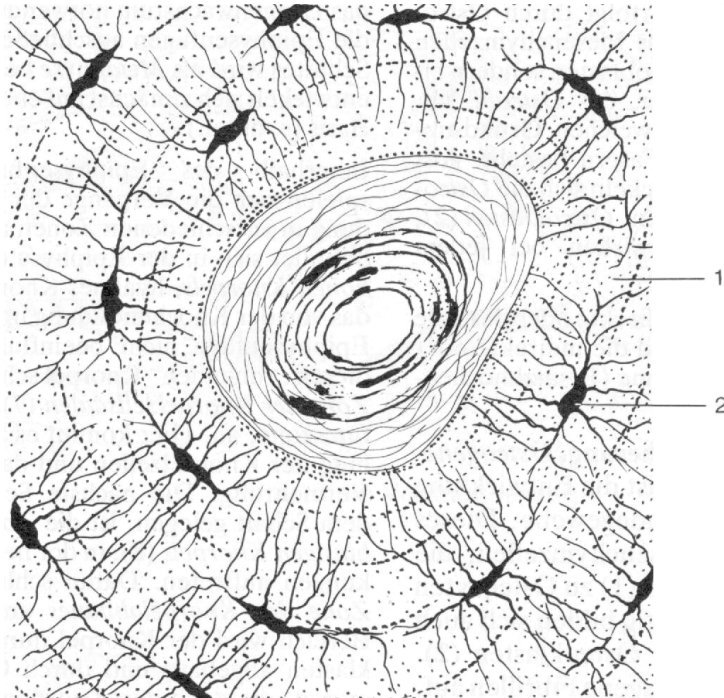


Bild 2.4: Querschnitt eines Osteons (1: Lamellen, 2: Lakunen mit Zytoplasmafortsätzen)

Kortikaler und spongiöser Knochen sind ständig Umbauprozessen unterworfen, die als Reaktion auf Belastungsänderungen oder äußere Einflüsse zu Festigkeits-, Dichte- oder Porositätsänderungen führen. Dabei spielen drei Arten von Knochenzellen eine wichtige Rolle. Die Osteoblasten sind für die Knochenbildung zuständig und befinden sich überall dort, wo Wachstums- oder Heilungsprozesse stattfinden. Hingegen sind die Osteoklasten für den Abbau von Knochensubstanz verantwortlich. Die Versorgung der Knochenzellen wird von den Osteozyten, die sich aus den Osteoblasten bilden und in den Lakunen der Lamellen eingelagert sind, übernommen. Die Nährstoffversorgung ist durch den Flüssigkeitstransport über das umfangreiche Netz von Kanälchen in den Osteonen gewährleistet. Auf diesem Weg findet ebenfalls die Kommunikation zwischen den Osteozyten und den Osteoblasten statt, wodurch der Umbauprozess des Knochens kontrolliert wird. Dieser wird durch eine äußere Belastung des Knochens und der somit hervorgerufenen Flüssigkeitsbewegung beeinflusst. Nach [COWIN 1999] ist davon auszugehen, dass der belastungssensitive Prozess durch den Gradienten des Porenflüssigkeitsdrucks gesteuert wird.

Die An- und Abbauvorgänge hängen vornehmlich von der Belastung des Knochens, aber auch vom Alter, Gesundheit und äußerlichen Einflüssen ab, wobei das System Knochen mit einem Minimum an materiellem Aufwand eine optimale Anpassung an den Belastungszustand erzielt. Die Umbauvorgänge des Knochens, die unter dem Begriff „funktionale Adaptivität“ in [PAUWELS 1965, COWIN 1976/81/86/90, WENG 1997, JACOBS 1997] beschrieben werden, spielen sich in großen Zeiträumen von Monaten und Jahren ab, die hier jedoch nicht betrachtet werden sollen.

Die physikalischen Eigenschaften des Knochengewebes werden nachfolgend am Femur, teilweise auch an der Tibia (Schienbeinknochen) erläutert.

2.2 Physikalische Eigenschaften von Knochengewebe

Der Knochen besitzt aufgrund seiner im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Struktur ein äußerst komplexes Materialverhalten, was sich in der Abhängigkeit der Materialkennwerte, wie z.B. der Bruchfestigkeit oder des Elastizitätstensors, von sehr vielen Faktoren widerspiegelt. Somit ist von einem zum Teil erheblichen Einfluß der Knochenart, der Mikrostruktur, der Dichte, dem Mineralisierungsgrad, der Porosität, des Flüssigkeitsgehalts, aber auch vom Alter und dem gesundheitlichen Zustand des Gewebes auszugehen.

Da Knochengewebe schon längere Zeit Gegenstand biomechanischer Untersuchungen ist, steht eine Vielzahl an Materialdaten zur Verfügung, die jedoch eine große Streubreite aufweisen. Dieses liegt zum einen an den individuellen Eigenschaften des Gewebes, zum anderen an der Vorgabe vereinfachter Modellbeschreibungen, wie z.B. linear-elastisches, homogenes und isotropes Materialverhalten. Erschwerend kommt hinzu, daß die Versuche an unterschiedlichen Probenkörpern und unter häufig nicht klar definierten Versuchsbedingungen durchgeführt wurden.

In den letzten zwei Jahrzehnten sind aufwendigere Materialmodelle, die anisotrope, inhomogene aber auch viskoelastische Eigenschaften beschreiben, verstärkt betrachtet und meßtechnisch realisiert worden. Somit stehen insbesondere Daten zur Verfügung, die orthotropes oder transversal isotropes Verhalten wiedergeben. Aufgrund der Inhomogenität und Anisotropie hängen die Versuchsergebnisse in besonderem Maße von der Probengröße und –form ab [CHOI 1990, LINDE 1992], was den Vergleich der auf der Basis unterschiedlicher Probenkörper erzielten Versuchsergebnisse erschwert.

Der Knochen stellt im technischen Sinn nicht nur einen Verbundwerkstoff dar, sondern besitzt auch die für ein Mehrkomponentenkontinuum typischen Eigenschaften, womit neben dem

Knochengewebe auch die Porenflüssigkeit und das Knochenmark von Bedeutung sind. Bei großen Dehnungsgeschwindigkeiten kommen Kopplungseffekte dieser Komponenten, wie z.B. eine „hydraulische Steifigkeitserhöhung“, zum Tragen, deren Auswirkungen jedoch noch nicht zufriedenstellend beschrieben wurden.

Bei der Untersuchung von Knochengewebe sind Messungen *in vivo* und *in vitro* zu unterscheiden. Da *in-vivo*-Messungen am lebenden Organismus stattfinden, wurden aufgrund der schwierigen meßtechnischen Umsetzung und ethischer Bedenken nur wenig Daten veröffentlicht, die vorwiegend auf Tierversuchen basieren. Die *in-vitro*-Messungen werden hingegen am extrahierten Knochen durchgeführt, also am toten Gewebe. Da sich der Knochen in diesem Zustand verändert hat, sind bei der Beurteilung von Messungen der postmortale Zeitpunkt sowie die Konservierungsart der Proben von Bedeutung, wozu in vielen Berichten nur unzureichend Angaben gemacht werden. In [YAMADA 1970] sind diese Einflüsse untersucht worden, wobei z.B. festgestellt wurde, daß ein präparierter, trockener Knochen einen ca. 10 - 15 % höheren Elastizitätsmodul als ein frischer Knochen besitzt.

Die Festigkeitskennwerte basieren in der Regel auf einachsigen Versuchen (Zug- oder Druckversuch), während zu mehrachsigen Belastungsfällen kaum Informationen vorhanden sind. Die in [KEAVENY 1993] zitierte Untersuchung propagiert z.B. für einen Schub-Zug-Versuch eine geringere Schubfestigkeit als für einen reinen Schubversuch.

Neben den Standardversuchen bietet das Ultraschallverfahren eine weitere Möglichkeit zur Ermittlung der Materialdaten, mit dem über die Messung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit auf die Elastizitätskennwerte geschlossen werden kann. Bei vielen Untersuchungen wurde jedoch ein homogenes Einphasenmaterial zugrunde gelegt, obwohl der Knochen aus verschiedenen festen und flüssigen Stoffen mit unterschiedlichen Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten besteht [WILMANSKI 1996]. Neben den klassischen Kompressions- und Scherwellen tritt bei Mehrphasenkörpern eine zusätzliche Longitudinalwelle auf, deren Eigenschaften für biomechanische Untersuchungen noch nicht genutzt wurden.

In zunehmenden Maße werden Materialeigenschaften an Knochenproben von mikroskopischer Größenordnung gemessen. In [TURNER 1999] sind z.B. die elastischen Eigenschaften von kortikalen und spongiösen Knochen mit einem mikroskopischen Ultraschallverfahren (Meßbereich: 30-60 μm) und einem sogenannten „Nano-Druckversuch“ (Meßbereich: 1-5 μm) bestimmt worden.

Im folgenden werden die Materialeigenschaften für den kortikalen und den spongiösen Knochen sowie für die Flüssigkeiten quantitativ erläutert.

2.2.1 Materialeigenschaften des kortikalen Knochens

Der kortikale Knochen, der mit seiner faserverstärkten Struktur auch einen Verbundwerkstoff darstellt, besitzt Materialeigenschaften mit einer ausgeprägten Anisotropie. Diese werden häufig auf einfache Materialgesetze reduziert, wie orthotropes, transversal isotropes oder isotropes Materialverhalten. Es hat sich herausgestellt, daß das transversal isotrope Materialgesetz mit 5 Stoffkonstanten eine effektive und ausreichend genaue Beschreibung der Diaphyse langer Röhrenknochen darstellt. Dabei besitzt der Knochen aufgrund der Anordnung der Osteone die höchste Steifigkeit in longitudinaler Richtung, während die nahezu gleichen Elastizitätsmoduln in radialer und tangentialer Richtung zu der Annahme einer Isotropie in der Querschnittsebene führen.

In vielen Untersuchungen wurde das Knochengewebe zunächst als **isotropes** Material betrachtet [DEMPSTER 1952, EVANS 1973, SEDLIN 1966, YAMADA 1970] und Materialkonstanten bestimmt, die teilweise erheblich voneinander abweichen. Für den Elastizitätsmodul sind z.B. Werte mit einer Streubreite von ca. $E=6$ bis 26 GPa zu finden, deren Ursachen vor allem in den unterschiedlichen Probenkörpern und Ausgangsbedingungen der Versuche liegen. Die aufgeführten Materialgrößen stellen homogenisierte Ersatzkennwerte für die inhomogene poröse Struktur dar, womit die Probengröße einen entscheidenden Einfluß besitzt, was von [CHOI 1990] untersucht wurde. Dabei ergaben sich für Probenkörper mit Abmessungen von der Größenordnung eines Osteons bis zu einem Millimeter Elastizitätsmoduln von $E=5.5$ bis 14.9 GPa.

Für einen im Sinne der Kontinuumsmechanik ausreichend großen Probenkörper und Betrachtung der Materialeigenschaften in longitudinaler Richtung des Röhrenknochens sind gesicherte Werte von $E=14.2$ GPa [EVANS 1951] bis $E=17.9$ GPa [REILLY 1974] anzugeben. In [CHOI 1990] wird ein aus mehreren veröffentlichten Daten gemittelter Elastizitätsmodul von $E=16$ GPa vorgeschlagen.

Eine ausführliche Untersuchung der anisotropen Materialeigenschaften wurde mit den Arbeiten von [ASHMAN 1984, REILLY 1975, KATZ 1987, EVANS 1973] durchgeführt, die für den kortikalen Knochen die **orthotropen** Elastizitätskennwerte ermittelten. In Tabelle 2.1 sind die mit der Ultraschallmethode gemessenen Elastizitäts-, Schubmoduln und Querkontraktionszahlen aus [ASHMAN 1984] angegeben, die mit dem Wertebereich anderer Autoren gut übereinstimmen. Die Richtungen sind hier über die folgenden Indizes definiert: 1 = longitudinal, 2 = radial, 3 = tangential. Für die Elastizitätskonstanten gilt die qualitative Beziehung $E_1 > E_3 > E_2$, wobei der größte Elastizitätsmodul E_1 aus der Orientierung der Osteone in Knochenlängsrichtung folgt. Der Unterschied zwischen den Werten in radialer und tangentialer Richtung wird mit der vorwiegend radialen Orientierung der VOLKMANNschen Kanäle begründet.

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
20.0	12.0	13.4	5.61	6.23	4.53	0.222	0.235	0.376

Tabelle 2.1: Orthotrope Materialdaten für kortikales Knochengewebe des Femurs [ASHMAN 1984]

Da die Werte in tangentialer und radialer Richtung annähernd gleich groß sind, kann der Knochen auch durch ein **transversal isotropes** Materialgesetz beschrieben werden (Tabelle 2.2). Die von [REILLY 1975] gemessenen Daten beruhen auf Untersuchungen am feuchten Knochen (Alter 19 bis 80 Jahre) bei Dehnungsgeschwindigkeiten von 0.02 bis 0.05 s⁻¹.

E_1 [GPa]	$E_2 = E_3$ [GPa]	$G_{12} = G_{13}$ [GPa]	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}
17.0	11.5	3.28	0.46	0.58

Tabelle 2.2: Transversal isotrope Materialdaten für kortikales Knochengewebe des Femurs [REILLY 1975]

Von einigen Autoren [KUMMER 1972, NATALI 1989] ist die Abhängigkeit der Elastizitäts- und Festigkeitseigenschaften von der Entnahmestelle der Probe bezüglich der Knochenlänge und der Querschnittsebene untersucht worden. Somit können im proximalen Drittel des Femurs, wo die Biegespannungen besonders groß sind, höhere Festigkeitswerte des Gewebes festgestellt werden. In Bild 2.5 sind z.B. die Inhomogenitäten anhand der Verteilung des Elastizitätsmoduls über dem Umfang eines Querschnitts der Tibia für verschiedene Altersgruppen dargestellt. Aufgrund des physiologischen Belastungszustandes (Biegebeanspruchung in der Sagittalebene) ist die Steifigkeit des Knochens in dem ventralen Bereich 1 mit der sich verringernden Querschnittsbreite erhöht. Der Elastizitätsmodul unterliegt innerhalb einer Querschnittsebene großen Schwankungen von bis zu 40 %.

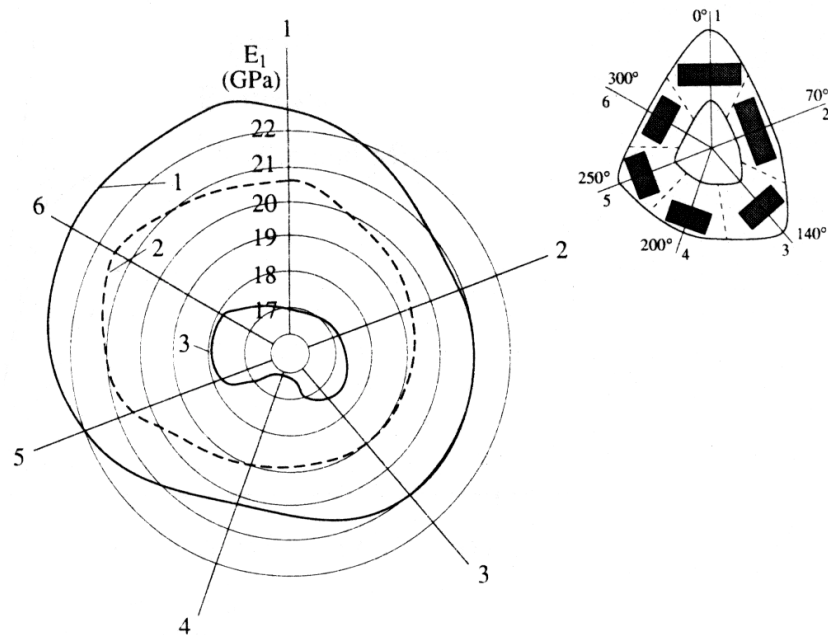


Bild 2.5: Verteilung des Elastizitätsmoduls (longitudinal) über dem Querschnitt der Tibia für unterschiedliche Altersgruppen: 25-34 Jahre (1), 35-59 (2), 60-95 (3), [NATALI 1989]

Die ortsabhängigen Materialeigenschaften können mit der Dichte- und Porositätsverteilung des kortikalen Knochens in Verbindung gebracht werden. Für den **Elastizitätsmodul** werden von [SCHAFFLER 1988] Regressionsgleichungen in Abhängigkeit von den Parametern Volumenporosität ϕ bzw. Strukturdichte ρ (scheinbare Dichte, Verhältnis von Knochenmasse zum Gesamtvolumen der Struktur) angegeben:

$$E = 3.66 \phi^{-0.55} \text{ GPa} \tag{2.1}$$

$$E = 0.09 \rho^{7.4} \text{ GPa}$$

Einen Vergleich unterschiedlicher Funktionen für den Elastizitätsmodul zeigt Bild 2.6. Hierin beschreibt (b) eine hypothetische Funktion, die den Untersuchungsergebnissen (a) eines Rinderfemurs [SCHAFFLER 1988], (c) eines Schädelknochens [MCELHANEY 1970] und (d) eines kortikalen Knochens verschiedener Säugetiere [CURREY 1988] gegenübergestellt ist.

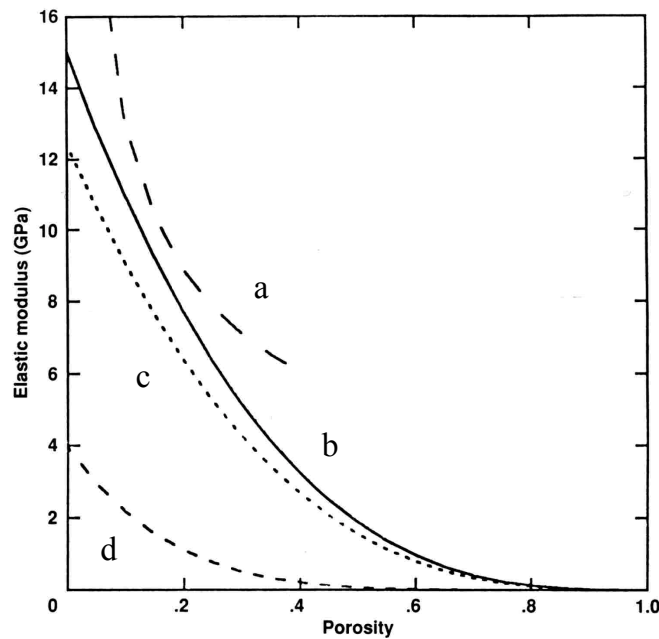


Bild 2.6: Elastizitätsmodul als Funktion der Porosität [MARTIN 1991]

Sind Informationen über die Geometrie der Mikrostruktur und Materialeigenschaften der Bausteine des Knochengewebes (Grundsubstanz, Kollagenfibrillen etc.) bekannt, so können mit Hilfe von Homogenisierungsmethoden die anisotropen Eigenschaften des Knochens simuliert werden. In [CROLET 1993 und AOU BIZA 1996] werden die orthotropen Materialdaten auf der Basis eines Modells berechnet, das die Mikrostruktur der Osteone sowie die HAVERSSchen Kanäle abbildet.

Die **Bruchfestigkeit** weist eine ähnlich hohe Streubreite auf wie die Elastizitätskonstanten und nimmt nach [REILLY 1974] für ein isotropes Material einen Wertebereich von $\sigma_B^Z = 107$ bis 146 MPa für Zugproben und von $\sigma_B^D = 156$ bis 215 MPa für Druckproben an. Unter Vorgabe einer transversalen Isotropie werden in Tabelle 2.3 Werte für die Bruchfestigkeit in longitudinaler und radialer Richtung aus unterschiedlichen Quellen angegeben.

	longitudinal		radial	
	σ_B^Z [MPa]	σ_B^D [MPa]	σ_B^Z [MPa]	σ_B^D [MPa]
REILLY 1975	135	205	53	131
COWIN 1981	132	187	58	132

Tabelle 2.3: Bruchfestigkeit des Femurs in longitudinaler und radialer Richtung

Die viskoelastischen Eigenschaften des Knochengewebes drücken sich durch eine Zunahme der Steifigkeit und der Bruchfestigkeit mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit aus, was anhand der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Bild 2.7 ersichtlich ist. Dabei variiert der Elastizitätsmodul von 15.4 GPa bei 0.001 s^{-1} bis 40 GPa bei 1500 s^{-1} . Während die Dehnungsgeschwindigkeiten bei einer physiologischen Belastung in einem Bereich von ca. 0.001 s^{-1} (langsames Gehen) bis 0.01 s^{-1} (Laufen) liegen, beschreiben Werte über 1 s^{-1} einen starken Aufprall oder Sturz. Die Bruchfestigkeit, die ebenfalls mit der Zunahme der Dehnungsgeschwindigkeit ansteigt, wird von [CARTER 1983] mit der Gleichung

$$\sigma_B^Z = 147 \dot{\epsilon}^{0.055} \text{ MPa} \quad (2.2)$$

für eine Zugbeanspruchung beschrieben.

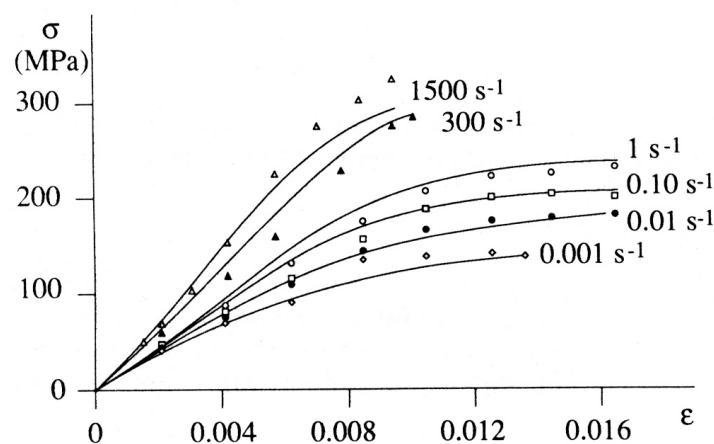


Bild 2.7: Spannungs-Dehnungs-Beziehung (Druckbelastung) des Femurs bei unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten [NATALI 1989]

2.2.2 Materialeigenschaften des spongiösen Knochens

Die Eigenschaften des spongiösen Knochens weisen aufgrund der schwammartigen Struktur eine große Abhängigkeit von der Porosität aber auch von dem mikroskopischen Aufbau, d.h. der Form und Orientierung der Trabekel, auf. Während der kortikale Knochen überwiegend durch die Knochenmatrix beschrieben wird, wird das Volumen der Spongiosa hauptsächlich durch die Porenstruktur geprägt. Eine quantitative Beschreibung der porösen Struktur kann durch eine stereologische Betrachtung erfolgen, mit der z.B. die Flächenverhältnisse von Poren zur Knochenmatrix in einer beliebigen Querschnittsfläche bestimmt werden. In [MARTIN 1984] wird gezeigt, daß das Verhältnis der durch einen Schnitt vorgegebenen Porenfläche zur gesamten Schnittfläche der Volumenporosität entspricht, ungeachtet einer Anisotropie.

Mit einem anderen stereologischen Maß, dem sogenannten Gewebetensor kann eine Beziehung zwischen den anisotropen Materialeigenschaften der Spongiosa und der Mikrostruktur hergestellt werden [WHITEHOUSE 1974, COWIN 1990/91]. Hierzu wird über bildverarbeitende Verfahren aus einem Knochenquerschnitt ein Längenmaß $L(\Theta)$ mit Hilfe von parallel orientierten Referenzlinien ermittelt, welches die mittlere Überdeckungslänge der Linien mit der vom Knochengewebe gefüllten Fläche beschreibt (Bild 2.8a). Wird der Steigungswinkel Θ der Referenzlinien verändert, so beschreibt die Parameterdarstellung der Größe $1/L^2(\Theta)$ eine Ellipse (Bild 2.8b). In [HARRIGAN 1984] wird gezeigt, daß die Vermessung der räumlichen Struktur zu einem Ellipsoid führt, dessen Hauptachsen die Hauptrichtungen der Trabekelorientierung und dessen Eigenwerte die Stärke der Struktur in den zugehörigen Richtungen wiedergeben. Die mathematische Beschreibung des Ellipsoids erfolgt über einen positiv definiten Tensor zweiter Stufe \mathbf{M} , dessen Koeffizienten als Funktionen des Winkels Θ aus drei orthogonalen Projektionsflächen des Ellipsoids hergeleitet werden. Mit diesem Tensor wird dann der Gewebetensor $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1/2}$ berechnet.

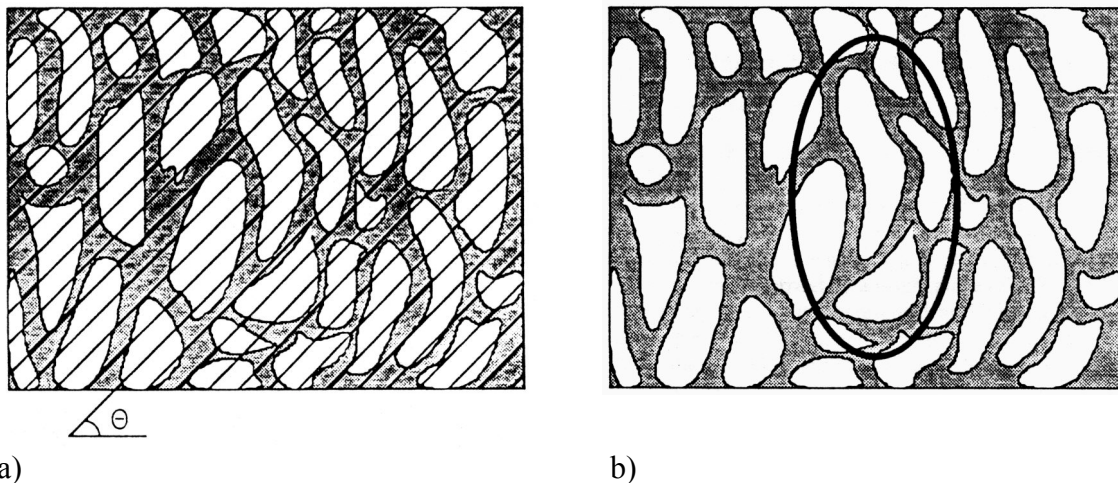


Bild 2.8: a) Referenzlinien über einen Querschnitt des spongiösen Knochens, b) Darstellung des stereologischen Maßes als Ellipse

Die konstitutive Beziehung für die Spannung wird über das HOOKEsche Gesetz

$$\tau^{ik} = \tilde{\mathbf{E}}^{ikrs}(\rho, \mathbf{H}) \gamma_{rs} \quad (2.3)$$

beschrieben, wobei der Elastizitätstensor $\tilde{\mathbf{E}}$ von der Strukturdichte ρ und dem Gewebetensor \mathbf{H} abhängt. Da das eigentliche Knochenmaterial als isotrop angenommen wird, wird die Anisotropie allein durch den Gewebetensor, also durch die Porenstruktur, beschrieben. In [TURNER 1990] werden Koeffizienten des Gewebetensors für ein Rinderfemur und eine menschliche Tibia hergeleitet und hiermit die Stoffgleichungen formuliert.

Eine Erkenntnis der Untersuchungen am spongiösen Knochen ist, daß sowohl die Festigkeit als auch der Elastizitätsmodul vorwiegend von der Strukturdichte abhängig sind [KEAVENY 1993, ASHMAN 1987, RHO 1993], die sich aus dem Produkt des Volumenanteils des Knochenfeststoffes, der zwischen 5 und 60 % liegt, und der realen Dichte der Trabekel ($1.6 \text{ bis } 2.0 \text{ g/cm}^3$) berechnet. Die Strukturdichte, die im folgenden lediglich als Dichte bezeichnet wird, liegt in einem typischen Bereich von ca. $0.1 \text{ bis } 0.8 \text{ g/cm}^3$.

Die große Streubreite der Dichte bzw. der Porosität führt zu den weit streuenden Werten für den Elastizitätsmodul und die Festigkeit der Spongiosa. Für den Elastizitätsmodul einzelner Trabekel sind Werte von $1.3 \text{ bis } 5.3 \text{ GPa}$ gemessen worden [COWIN 1991].

In der Literatur sind verschiedene Funktionen zur Beschreibung des Elastizitätsmoduls zu finden, die eine quadratische oder kubische Abhängigkeit von der Dichte beschreiben (Bild 2.9). Die von [CARTER 1977] aufgestellte Beziehung, in der Daten der Spongiosa und Kortikalis vom Menschen und vom Rind berücksichtigt wurden, beschreibt zusätzlich eine Abhängigkeit von der Dehnungsgeschwindigkeit:

$$E = 3790 \dot{\epsilon}^{0.06} \rho^3 \text{ GPa} \quad (2.4)$$

In [RICE 1988] wird für den Elastizitätsmodul des spongiösen Knochens von Menschen und Rindern eine quadratische Abhängigkeit von der Dichte angegeben.

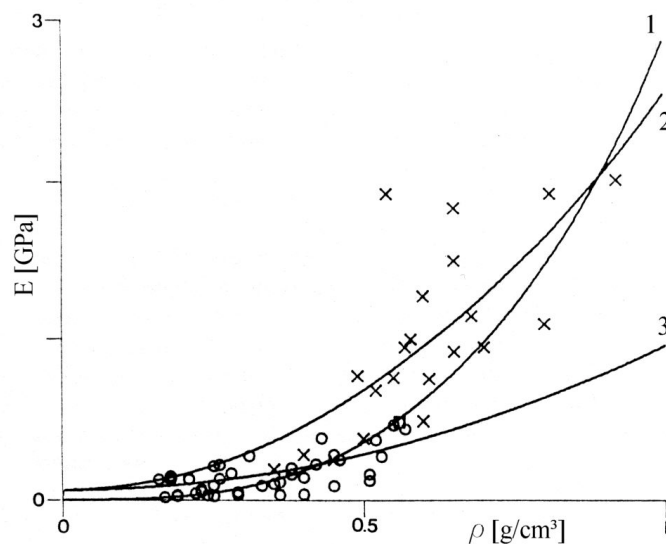


Bild 2.9: Elastizitätsmodul (Druck) in Abhängigkeit von der Strukturdichte, $\dot{\epsilon} = 0.01$ [COWIN 1991]: (1) CARTER 1977 und (2) RICE 1988 für Rinder, (3) RICE 1988 für Menschen

Die Bruchfestigkeit in longitudinaler Richtung des Knochens läßt sich ebenfalls als Funktion der Dehnungsgeschwindigkeit und der Dichte beschreiben [COWIN 1991]:

$$\sigma_B^D = 68 \dot{\epsilon}^{0.06} \rho^2 \text{ MPa} \quad (2.5)$$

Die elastischen Eigenschaften des Knochens sind immer im Hinblick auf die Porosität zu sehen, womit der Volumenanteil der Knochenmatrix am Gesamtvolumen, aber auch der Einfluß der die Poren füllenden Flüssigkeiten und des Knochenmarks berücksichtigt werden.

2.3 Physikalische Eigenschaften des Knochenmarks und der Knochenflüssigkeiten

Der Einfluß, den das Knochenmark im spongiösen und die Porenflüssigkeiten im kortikalen Knochengewebe auf die mechanischen Eigenschaften der gesamten Struktur ausüben, ist noch nicht ausreichend erforscht. In [OCHOA 1991] wurde an einem Kaninchen-Femur durch eine Bohrung der hydraulische Effekt des Knochenmarks eliminiert und eine Verringerung der dynamischen Steifigkeit des Femurkopfes um 30 % gemessen. [CARTER 1977] stellte anhand von Druckversuchen an spongiösen Knochen von Rindern und Menschen nur eine geringe Erhöhung der Festigkeit und des Elastizitätsmoduls mit Zunahme der Dehnungsgeschwindigkeit fest. Ein signifikanter Einfluß des Knochenmarks wurde erst bei einer höheren Dehnungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon}=10 \text{ s}^{-1}$ beobachtet (Bild 2.10), die oberhalb des physiologischen Bereiches liegt. Nach [KAFKA 1993] übernimmt das Knochenmark bei großen Dehnungsgeschwindigkeiten eine stützende und somit für das Knochengewebe entlastende Wirkung. Unter der Annahme, daß kein Blut über die Gefäße aus dem Knochen austritt (z.B. infolge einer Muskelkontraktion) kann sich ein hydrostatischer Druck aufbauen, der zu einer Steifigkeitserhöhung führt. Ein großer Einfluß der Flüssigkeit im Knochengewebe wurde auch anhand einer Simulation gesunder und geschädigter Wirbelkörper in [MEROI 1994] beobachtet, die unter anderem den durch eine Kompression der Wirbel hervorgerufenen Flüssigkeitsstrom beschreibt.

Die Knochenflüssigkeiten beeinflussen nicht nur die elastischen Eigenschaften des Knochens sondern spielen auch eine wichtige Rolle bei der Nährstoffversorgung und bei Knochenumbauprozessen. Um die Flüssigkeitsbewegung auf mikroskopischer Ebene beschreiben zu können, kann nicht mehr von einer homogenen Porenverteilung und einem einheitlichen Fluid für den gesamten Knochen ausgegangen werden, es ist vielmehr, abhängig von den unterschiedlichen viskosen Eigenschaften (Extrazellularflüssigkeit, Blut etc.), eine differenziertere Betrachtungsweise der Flüssigkeiten erforderlich [COWIN 1999]. Der Einfluß der Knochenflüs-

sigkeit ist jedoch immer im Zusammenhang mit der charakteristischen Porengröße des diese umschließenden Gewebes zu sehen.

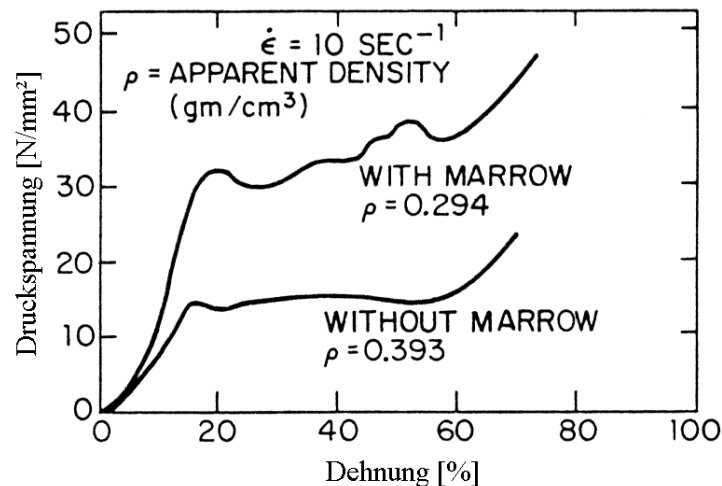


Bild 2.10: Spannungs-Dehnungs-Beziehung für spongiösen Knochen bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 10 \text{ s}^{-1}$ mit und ohne Knochenmark [CARTER 1977]

Im Knochen sind vier typische Porenbereiche zu unterscheiden, deren Porengrößen um mehrere Potenzen variieren. Dabei ist die intertrabekuläre Porosität im spongiösen Knochen mit charakteristischen Abmessungen bis zu 1 mm die größte. Die drei übrigen Porenbereiche ergeben sich aus der mikroskopischen Struktur des kortikalen Knochens. Die kleinste Porosität der Kollagen-Apatit-Matrix ist von untergeordneter Bedeutung, da die Flüssigkeit an die Gewebematrix gebunden ist und als Teil der Struktur betrachtet werden kann. Somit werden im kortikalen Knochen maßgeblich zwei Porenbereiche unterschieden, nämlich zum einen die durch die HAVERSSchen und VOLKMANNschen Kanäle vorgegebene sogenannte vaskuläre Porosität und zum anderen die durch die wesentlich kleineren Lakunen und das diese umgebende feine Netz aus Kanälchen gebildete lakunar-canaliculare Porosität (siehe auch Bild 2.4). Obwohl die Knochenflüssigkeiten in beiden Porenbereichen annähernd die gleiche Viskosität besitzen, ergeben sich aufgrund der verschiedenen Permeabilitätskoeffizienten unterschiedliche Eigenschaften für den Knochen.

Der Porendruck in den HAVERSSchen und VOLKMANNschen Kanälen mit der charakteristischen Porengröße von bis zu 50 μm ist nach [COWIN 1999] ein bis zwei Größenordnungen kleiner als der Porendruck in dem lakunar-canalicularen Bereich, der eine Porengröße von ca. 0.1 μm besitzt. Für den Flüssigkeitsdruck in den HAVERSSchen Kanälen kann als Kriterium der Blutdruck in den Gefäßen (40 – 60 mm Hg) angegeben werden, der nicht überschritten werden darf, um ein Kollabieren dieser auszuschließen. Hingegen kann das Gewebe mit der kleineren charakteristischen Porengröße aufgrund der langsameren Relaxation der Poren-

flüssigkeit einen höheren Druck infolge einer mechanischen Belastung aufnehmen. Diese Bereiche stehen mit den HAVERSSchen Kanälen, die als Reservoir dienen, im Flüssigkeitsaustausch.

Im Gegensatz zum kortikalen Knochen ist der spongiöse Knochen durch eine sehr viel höhere charakteristische Porengröße und mehreren Flüssigkeiten mit sehr unterschiedlichen Viskositäten (Mark, Fett, Blutgefäße) gekennzeichnet, die ein bis zwei Größenordnungen höher sind als die der Knochenflüssigkeit. Dementsprechend ist auch mit einer kürzeren Relaxationszeit und einem geringeren Druck zu rechnen. Aufgrund des hohen Porenvolumens kann jedoch dem viskoelastischen Einfluß des Knochenmarks eine erhöhte Bedeutung zukommen.

Der Kompressionsmodul der Knochenflüssigkeit beträgt in etwa ein Sechstel des Wertes für Knochen und wird näherungsweise mit $\tilde{K} = 2.3 \text{ GPa}$ für salzhaltiges Wasser angenommen. Während bei weichen Geweben (Knorpel etc.) die Gewebematrix und die Porenflüssigkeit einen annähernd gleichen Kompressionsmodul besitzen und somit die Annahme eines inkompressiblen Körpers gerechtfertigt erscheint, kann dieses für den Knochen nicht vorausgesetzt werden und würde zu Fehlern bei der Ermittlung des Flüssigkeitsdruckes führen.

In Tabelle 2.4 sind die für die Simulationsrechnung einzelner Osteone und Knochenmodelle von [COWIN 1999] vorgeschlagenen Werte für die Volumenanteile, Permeabilitäten, Viskositäten und Relaxationszeiten der beiden zuvor erläuterten Porenbereiche angegeben. Die dem Relaxationsprozeß zugrunde gelegten charakteristischen Längen entsprechen für die vaskuläre Porosität der Dicke des kortikalen Knochens (ca. 1 cm) und für die lakunare Porosität dem Radius eines Osteons mit ca. 100 μm . Die unterschiedlichen Relaxationszeiten besagen, daß in den HAVERSSchen Kanälen eine Druckspitze 1000 mal schneller abgebaut werden kann als in den Lakunen und Kanälchen. Die übrigen Materialkennwerte sind über die gemessene Relaxationszeit des Porendruckes abgeschätzt worden, da die viskosen Eigenschaften der Flüssigkeiten und die Permeabilität bisher noch nicht experimentell ermittelt wurden.

Bereiche unterschiedlicher Porengröße	Volumenanteil [%]	Permeabilität $k \text{ [m}^2\text{]}$	Viskosität $\mu \text{ [Pa s]}$	Relaxationszeit $\tau \text{ [ms]}$
Vasculare Porosität	4.0	$6.36 \cdot 10^{-13}$	10^{-3}	$1.36 \cdot 10^{-3}$
Lakunar-canaliculare Porosität	5.0	$1.47 \cdot 10^{-20}$	10^{-3}	4.9

Tabelle 2.4: Porosität und viskose Materialkennwerte in Bereichen unterschiedlicher charakteristischer Porengrößen

3 Theorie der porösen Medien

3.1 Beschreibung von porösen Medien als Mehrkomponentenkontinua

In der klassischen Theorie der Mehrkomponentenkontinua (Mischungstheorie) wird von einem Ersatzkörper ausgegangen, bei dem die einzelnen Stoffkomponenten über ein definiertes Kontrollvolumen „verschmiert“ werden (Bild 3.1). Diese Vorstellungsweise beinhaltet, daß alle Komponenten über ein Volumenelement statistisch verteilt sind und das gesamte Volumen gleichzeitig einnehmen. Alle physikalischen Größen, wie die Verschiebungen, Spannungen, Dichten etc., sind im Bezug auf das gesamte Volumenelement definiert und stellen somit einen statistischen Mittelwert dar. Mit diesen Feldgrößen werden die Erhaltungsgleichungen und konstitutiven Gleichungen für jede Komponente des Mischungskörpers aufgestellt. Die hieraus zu berechnenden Zustands- und Feldgrößen, wie z.B. die Dichten oder Spannungen, stellen jedoch partielle makroskopische Größen und nicht die realen Werte dar.

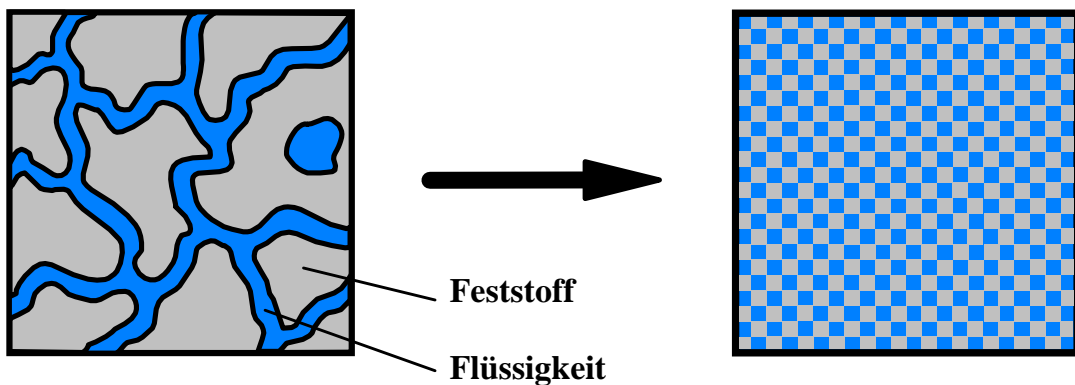


Bild 3.1: Schematische Betrachtung des porösen Mediums als homogenes Mehrkomponentenkontinuum

Mehrkomponentenkontinua, wie poröse Medien, bestehen hingegen aus sich voneinander abgrenzenden Komponenten, die also unmischbar sind. Im Gegensatz zur klassischen Mischungstheorie sind somit zusätzliche Feldgrößen erforderlich, die Informationen zur „inneren Struktur“ eines Volumenelementes liefern. Während die Erhaltungsgleichungen poröser Medien in derselben Weise wie in der klassischen Theorie über die Partialgrößen formuliert

werden, sind für die neuen Feldgrößen jedoch zusätzliche Beziehungen einzuführen und diese in der konstitutiven Theorie zu berücksichtigen. Für diese Größen können z.B. die Volumen- und Flächenanteile der Komponenten am gemeinsamen Kontrollvolumen gewählt werden, mit denen der innere Aufbau des Kontinuums (Mikrostruktur) auf makroskopischer Ebene beschrieben wird. Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, neben den partialen Zustandsgrößen auch die realen physikalischen Größen (z.B. die wirklichen Spannungen) zu bestimmen. Als Kontrollvolumen dV kann z.B. das durch den Porenkörper des Feststoffes definierte Gesamtvolumen gewählt werden.

Zur „mikroskopischen Beschreibung“ des Mehrkomponentenkontinuums, welches im folgenden vereinfacht als Gemisch bezeichnet wird, werden die Volumenanteile $\overset{c}{n}$ der Komponenten $c = I, II, \dots, k$ als stetige Funktionen über den gesamten Körper angenommen und mit den Teilvolumina $d\overset{c}{V}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \overset{c}{n} &= \overset{c}{n}(\theta^i, t) \\ &= \frac{d\overset{c}{V}}{dV} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aus der Berechnung des Gesamtvolumens über die Summe der Teilvolumina ergibt sich die folgende Bedingung für die Volumenanteile:

$$\sum_c \overset{c}{n} = 1 \quad (3.2)$$

Während die Volumenanteile $\overset{c}{n}(\theta^i, t)$ zur Zeit t unbekannte Funktionen darstellen, sind die Volumenanteile im Ausgangszustand $\overset{c}{n}_0$ als bekannt vorauszusetzen. Hierfür gilt ebenfalls die oben angeschriebene Bedingungsgleichung. Diese Gleichung stellt eine in der konstitutiven Theorie zu berücksichtigende Zwangsbedingung dar, da sich die Volumenanteile nicht unabhängig voneinander verändern können.

Ein Gemisch, für das die Bedingung (3.2) zutrifft, wird als gesättigtes Gemisch bezeichnet. In der Literatur sind auch Definitionen für die Volumenanteile mit der Summe kleiner eins anzutreffen, die ein ungesättigtes Gemisch beschreiben. Dabei werden nur der Feststoff und die Flüssigkeit als Komponenten des Gemisches betrachtet und ein eventuell gasgefüllter Zwischenraum als leer angenommen. Diese Formulierung ist jedoch für viele Anwendungen nicht ausreichend, da das Gas in der Regel nicht vernachlässigbar ist.

Entsprechend der Beziehung für die Volumenanteile (3.1) kann für das Verhältnis des Flächenanteils einer Komponente $d\overset{c}{F}$ zu der gesamten Seitenfläche des Kontrollvolumens dF

nach dem DELESSESchen Prinzip, ausgehend von einer statistischen Modellbildung und einer homogenen Porenverteilung [EHLERS 1989], derselbe Ansatz gewählt werden:

$$d\overset{c}{F} = \overset{c}{n} dF \quad (3.3)$$

Da die physikalischen Größen, wie z.B. die Partialdichte $\overset{c}{\rho}$ oder die partialen Spannungen $\overset{c}{\tau}^{ik}$, auf die Geometrie des gesamten Volumenelementes bezogen sind, stellen diese nicht die realen Größen der einzelnen Stoffkomponenten dar. Diese müssen vielmehr über die Volumenverhältnisse aus den Partialgrößen berechnet werden. Für die Beziehung zwischen realer Dichte $\overset{c}{\rho}_R$ und der Partialdichte $\overset{c}{\rho}$ der Komponente c gilt mit der Teilmasse

$$d\overset{c}{m} = \overset{c}{\rho} dV = \overset{c}{\rho}_R d\overset{c}{V} \quad (3.4)$$

und (3.1) der folgende Zusammenhang:

$$\overset{c}{\rho} = \overset{c}{n} \overset{c}{\rho}_R \quad (3.5)$$

Hiermit wird über die reale Dichte eine mikroskopische Eigenschaft in die makroskopische Betrachtungsweise übernommen, nämlich die Kompressibilität bzw. Inkompressibilität eines Stoffes.

Für die Spannungen kann mit (3.3) eine entsprechende Beziehung formuliert werden:

$$\overset{c}{\tau}^{ik} = \overset{c}{n} \overset{c}{\tau}_R^{ik} \quad (3.6)$$

Im Rahmen dieser Modellbildung wird von einer statistischen Verteilung der Stoffe über dem Kontrollvolumen ausgegangen, so daß durch die Einführung der Volumenanteile keine Informationen über anisotrope Eigenschaften, wie eine richtungsabhängige Permeabilität, Elastizität oder Wärmeleitfähigkeit, zur Verfügung stehen. Die Berücksichtigung einer möglichen Anisotropie ist vielmehr über die Formulierung der konstitutiven Gleichungen durchzuführen.

Durch die Erweiterung der unbekannt Grundvariablen (Partialdichte $\overset{c}{\rho}$, Verschiebung $\overset{c}{w}^k$ und Temperatur $\overset{c}{T}$) auf die zusätzliche Beschreibung der Volumenanteile $\overset{c}{n}$ wird das Problem statisch unbestimmt, da für ein Gemisch mit k Stoffkomponenten den $6 \cdot k - 1$ unbekannt Grundvariablen nur $5 \cdot k$ Erhaltungsgleichungen gegenüberstehen (k Massen-, $3 \cdot k$ Impuls- und k Energieerhaltungsgleichungen). Dabei ist zu beachten, daß wegen der Bedingung (3.2) nur $k-1$ unabhängige Funktionen für die Volumenanteile zu verwenden sind. Die fehlenden

Bestimmungsgleichungen können auf zwei unterschiedlichen Wegen entweder über zusätzliche konstitutive Beziehungen oder über zusätzliche Differentialgleichungen in Form von Erhaltungs- oder Evolutionsgleichungen formuliert werden. Die Entwicklung von Funktionen für die Volumenanteile gestaltet sich jedoch schwierig, da diese Größen von mikroskopischen Eigenschaften abhängen, die in einer kontinuumsmechanischen Formulierung unberücksichtigt bleiben.

In [BOWEN 1982, EHLERS 1989] wird zur Herleitung der Bestimmungsgleichungen für die Volumenanteile eine zusätzliche Feldgröße eingeführt, die die materielle Zeitableitung der Volumenanteile $(\overset{c}{n})$ beschreibt und die aus (3.2) hervorgehenden Bedingungen erfüllen muß:

$$\sum_c (\overset{c}{n})_i = 0 \quad , \quad \sum_c \overset{c}{n}_{,k} = 0 \quad (3.7)$$

Der Klammerausdruck mit dem Index I bedeutet, daß die materielle Zeitableitung bei festgehaltenen Koordinaten des hier gewählten Stoffes I durchzuführen ist. Für diese Größen sollen Bestimmungsgleichungen gefunden werden, die eine Ermittlung der unbekanntenen Volumenanteile $\overset{c}{n}$ unter Berücksichtigung der aus dem 2. Hauptsatz resultierenden Restriktionen ermöglichen. Ein konstitutiver Ansatz bleibt bei [EHLERS 1989] jedoch aus; vielmehr wird ein Gemisch betrachtet, welches aus inkompressiblen Komponenten besteht, so daß für diese keine Feldgrößen $(\overset{c}{n})'$ erforderlich sind. [BOWEN 1982] formuliert für die zusätzlichen Feldgrößen $(\overset{c}{n})'$, die von den Grundvariablen, wie Verschiebungen, Temperatur etc., aber auch von den Volumenanteilen abhängen, Evolutionsgleichungen.

Eine konstitutive Herleitung der Volumenanteile auf der Grundlage mikroskopischer Größen wird in [BLUHM 1997, DE BOER 1996] vorgestellt. Hierbei wird eine semi-mikroskopische Betrachtungsweise gewählt, bei der die Verformung der lokalen Konfiguration jeder Komponente über einen „realistischen Deformationsgradienten“ beschrieben wird. Da dieser Gradient nicht integrierbar ist, wird ein zweiter partieller Deformationsgradient gefunden, mit dem nach Multiplikation ein integrierbarer Deformationsgradient erzeugt wird. Mit diesem werden daraufhin die konstitutiven Gleichungen für die Volumenanteile hergeleitet.

In [GOODMAN 1972] wird die zweite Vorgehensweise gewählt und entsprechend der Impulserhaltung eine zusätzliche Gleichgewichtsbedingung („balance of equilibrated force“), jedoch mit einer unklaren physikalischen Bedeutung, eingeführt. Basierend auf dieser Vorgehensweise zur Beschreibung der Mikrostruktur werden von [PASSMAN 1984] korrigierte Modelle vorgestellt.

In [WILMANSKI 1995/96] wird für die Porosität eine Differentialgleichung entsprechend der Massenerhaltung aufgestellt, die die Änderung der Porosität über einen Zuflußvektor sowie

eine Quelle beschreibt. Anstelle der Volumenanteile der Komponenten wird die Porosität eingeführt, die über das Volumen des Feststoffes $d\overset{s}{V}$ definiert ist:

$$\phi = 1 - \frac{d\overset{s}{V}}{dV} \quad (3.8)$$

[GRAY 1998] wählt eine andere mikroskopische Beschreibungsweise des Gemisches, in der das Kontrollvolumen in reale Teilvolumina aufgeteilt wird, die durch Kontaktflächen und -linien miteinander in Verbindung stehen. Für jede Komponente werden Erhaltungsgleichungen für das Teilvolumen und zusätzlich für die Kontaktflächen und -linien formuliert. Über Mittelungsverfahren gelingt die Übertragung der mikroskopischen in die makroskopische Betrachtungsweise, in der die Erhaltungsgleichungen und konstitutiven Gleichungen unter anderem in Abhängigkeit von geometrischen Parametern zur Beschreibung der Mikrostruktur hergeleitet werden.

Da die meßtechnische Bestimmung derartiger Parameter aufgrund der Komplexität der meisten porösen Strukturen nahezu aussichtslos erscheint, wird eine einfachere, auf konstitutiven Überlegungen basierende Vorgehensweise gewählt, bei der eine exakte Beschreibung der Mikrostruktur nicht erforderlich ist.

3.2 Kinematik des Mehrkomponentenkontinuums

3.2.1 Allgemeine Betrachtungsweisen

Zur Beschreibung der Kinematik des Mehrkomponentenkontinuums sind geeignete Koordinaten einzuführen, die auf der Grundlage der LAGRANGESchen oder der EULERSchen Betrachtungsweise formuliert werden können. Gebräuchliche Vorgehensweisen sind die Beschreibung der Kinematik jeder einzelnen Stoffkomponente nur mit LAGRANGE- oder EULERkoordinaten. Es ist aber auch eine „gemischte Betrachtungsweise“ möglich, die eine ausgewählte Komponente (z.B. Feststoff) mit LAGRANGEkoordinaten beschreibt und die übrigen Komponenten mit Relativkoordinaten bezüglich der ausgewählten Komponente. Bevor diese Betrachtungsweise erläutert wird, soll kurz auf die Verwendung von LAGRANGE- und EULERkoordinaten eingegangen werden [SCHROEDER 1981].

In der LAGRANGESchen Betrachtungsweise wird das Kontinuum im Ausgangszustand zur Zeit t_0 durch raumfeste Koordinaten beschrieben. Unter Vorgabe dieser Koordinaten als Funktion unabhängiger Parameter $\overset{+}{x}^k = \overset{+}{x}^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ sind alle Komponenten des Kontinuums durch

Koordinatenlinien θ^i ausgemessen, wodurch auch die Form eines Volumenelementes $d\overset{+}{V}$ bekannt ist. Nach einer Verformung des Körpers sind die Komponenten aus dem Volumenelement ausgetreten und nehmen unterschiedliche Positionen $\overset{\circ}{P}$ im verformten Körper ein. Dabei wird der verformte Zustand jeder Komponente c durch die materiellen (körperfesten) Koordinatenlinien θ^i , dessen Lage sich zum raumfesten Koordinatensystem geändert hat, und die Zeit t beschrieben: $\overset{c}{x}^k = \overset{c}{x}^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t)$. Die Verschiebungen der Komponenten werden sinnvollerweise auf die Basisvektoren $\overset{+}{g}_i$ des Volumenelementes im Ausgangszustand bezogen.

In der EULERSchen Betrachtungsweise wird hingegen der Raum durch die Vorgabe der Koordinaten $x^k = x^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ ausgemessen, womit die Geometrie des Körpers im Augenblickszustand zur Zeit t bekannt ist. In das verformte Volumenelement dV sind die Komponenten c von unterschiedlichen Punkten des Ausgangszustandes eingeflossen, deren Ortsvektoren von den EULERkoordinaten θ^i und der Zeit t abhängen. Zur Beschreibung des Bewegungszustandes werden die Verschiebungen der einzelnen Komponenten auf die Basisvektoren $\overset{+}{g}_i$ des verformten Körpers bezogen.

Die EULERSche Betrachtungsweise führt auf lineare Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitsfelder, aber nichtlineare Gleichungen für die Verschiebungen. Da die nichtlinearen Differentialgleichungen schwer lösbar sind, eignet sich die Formulierung in EULERkoordinaten nicht für die Ermittlung der Verschiebungen. Hierzu ist die Beschreibung in LAGRANGEkoordinaten besser geeignet. Desweiteren sind mit der EULERSchen Betrachtungsweise die Randbedingungen schwierig zu beschreiben, da sich der Körper durch den von Koordinatenlinien θ^i ausgemessenen Raum bewegt und sich somit seine Randbedingungen über der Zeit ändern. Mit der LAGRANGESchen Beschreibung lassen sich die Randbedingungen hingegen besser formulieren. Zur Aufstellung der Erhaltungsgleichungen soll das Schnittprinzip am verformten Körper angewendet werden, womit eine EULERSche Betrachtungsweise der sich relativ zum Feststoff bewegenden Komponenten vorzuziehen ist, die eine bessere Formulierung der Interaktionskräfte zwischen den Komponenten ermöglicht. Um die Vorteile beider Vorgehensweisen zu nutzen, bietet es sich an, eine Kombination der beiden Betrachtungsweisen zur Beschreibung der Kinematik eines Mehrkomponentenkontinuums zu formulieren, wie sie nachfolgend erläutert wird.

3.2.2 Kinematische Beschreibung mit LAGRANGEkoordinaten nur für den Feststoff

Im folgenden wird eine Betrachtungsweise gewählt, in der der Bewegungszustand durch die materiellen Koordinaten θ^i des Stoffes I (hier: Feststoff) beschrieben wird [SCHROEDER

1976]. Die Bewegungen der übrigen Komponenten werden über die Relativbewegung zum Feststoff ebenfalls auf dessen Koordinaten bezogen. Die modifizierte LAGRANGESche Betrachtungsweise hat den Vorteil, daß die Verschiebungen aller Stoffkomponenten verfolgt werden können und die Stoffgesetze sich einfacher formulieren lassen.

In Bild 3.2 ist das Mehrkomponentenkontinuum, welches hier exemplarisch aus den Stoffen I, II und III besteht, im Ausgangs- und Augenblickszustand zur Zeit t_0 bzw. t dargestellt. Das unverformte Kontinuum ist unter Vorgabe des Ortsvektors zum Punkt $\overset{\dagger}{P}$

$$\overset{\dagger}{\mathbf{r}} = \overset{\dagger}{x}^k \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad \overset{\dagger}{x}^k = \overset{\dagger}{x}^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (3.9)$$

durch die LAGRANGESchen Koordinaten θ^i ausgemessen, da die raumfesten kartesischen Koordinaten $\overset{\dagger}{x}^k$ als Funktionen der Parameter θ^i dargestellt sind. In der Gleichung ist dabei die EINSTEINSche Summationskonvention verwendet worden, womit über gegenständige Indizes

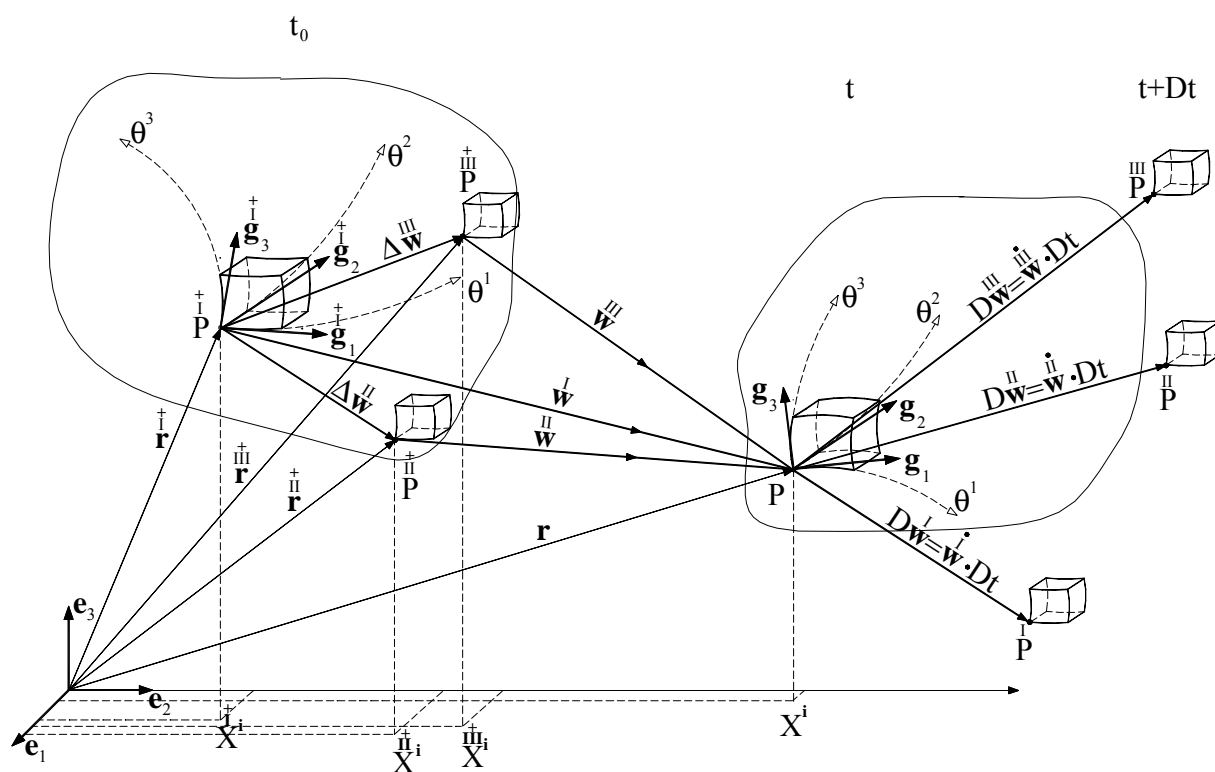


Bild 3.2: Mehrkomponentenkontinuum im Ausgangszustand t_0 und in den Augenblickszuständen t und $t + Dt$

mit $k = 1, 2, 3$ zu summieren ist. Durch die Beschreibung des Körpers mit Koordinatenlinien ist auch das Volumenelement im Punkt $\overset{\dagger}{P}$, welches von diesen gebildet wird, bekannt. Die Kantenvektoren des Volumenelementes entsprechen den Basisvektoren bzw. Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien θ^i :

$$\overset{\dagger}{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \overset{\dagger}{\mathbf{r}}}{\partial \theta^i} = \overset{\dagger}{\mathbf{r}}_{,i} \quad (3.10)$$

Das Volumenelement $d\overset{\dagger}{V}$ läßt sich mit Hilfe der Determinante $\overset{\dagger}{g} = \det \overset{\dagger}{g}_{ik}$ und der bekannten Maßzahlen $\overset{\dagger}{g}_{ik} = \overset{\dagger}{g}_i \cdot \overset{\dagger}{g}_k$ wie folgt bestimmen:

$$d\overset{\dagger}{V} = \sqrt{\overset{\dagger}{g}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (3.11)$$

Die Gesamtmasse des Volumenelementes $d\overset{\dagger}{V}$ mit bekannter Geometrie ergibt sich aus den Massen der Stoffe $c = \text{I, II, III}$ zu

$$d\overset{\dagger}{m} = (\overset{\text{I}}{\rho}_0 + \overset{\text{II}}{\rho}_0 + \overset{\text{III}}{\rho}_0) d\overset{\dagger}{V}, \quad (3.12)$$

wobei die Dichten $\overset{\text{c}}{\rho}_0$ im Ausgangszustand gegeben sind.

Im Augenblickszustand wird der verformte Körper durch den Ortsvektor \mathbf{r} des Punktes P in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten des Stoffes I und der Zeit t beschrieben:

$$\overset{\text{I}}{\mathbf{r}} = \overset{\text{I}}{x}^k \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad \overset{\text{I}}{x}^k = \overset{\text{I}}{x}^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) \quad (3.13)$$

Zur Formulierung der Erhaltungsgleichungen wird im Punkt P ein Volumenelement herausgeschnitten, welches durch die Koordinatenlinien θ^i gebildet wird. Die Kantenvektoren des verformten Volumenelementes folgen aus der Beziehung (3.13) zu:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i} = \mathbf{r}_{,i} \quad (3.14)$$

In dieses Volumenelement dV fließen von den Punkten $\overset{\dagger}{P}, \overset{\dagger}{P}, \overset{\dagger}{P}$ des unverformten Kontinuums die Massen der Stoffe I, II und III ein, womit sich die Gesamtmasse im Punkt P zu

$$dm = (\rho^I + \rho^{II} + \rho^{III}) dV \quad (3.15)$$

ergibt. Hierin sind die Dichten $\overset{\circ}{\rho}$ der Stoffe c unbekannte Größen. Das Volumen dV läßt sich jedoch mit Hilfe der Determinante $g = \det g_{ik}$ und der Maßzahlen $g_{ik} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k$ des verformten Körpers bestimmen:

$$dV = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (3.16)$$

Die Lage der unbekanntenen Punkte $\overset{\dagger}{P}, \overset{\dagger}{P}, \overset{\dagger}{P}$ ist nach Bild 3.2 durch die Vektoren $\overset{I}{\mathbf{w}}, \overset{II}{\Delta \mathbf{w}}, \overset{III}{\Delta \mathbf{w}}$ bezogen auf den bekannten Punkt $\overset{\dagger}{P}$ festgelegt:

$$\begin{aligned} \overset{I}{\mathbf{w}} &= \overset{I}{w}^k \overset{\dagger}{\mathbf{g}}_k & \overset{I}{w}^k &= \overset{I}{w}^k(\theta^i, t) \\ \overset{II}{\Delta \mathbf{w}} &= \overset{II}{\Delta w}^k \overset{\dagger}{\mathbf{g}}_k & \text{mit} & \quad \overset{II}{\Delta w}^k = \overset{II}{\Delta w}^k(\theta^i, t) \\ \overset{III}{\Delta \mathbf{w}} &= \overset{III}{\Delta w}^k \overset{\dagger}{\mathbf{g}}_k & \overset{III}{\Delta w}^k &= \overset{III}{\Delta w}^k(\theta^i, t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hierin sind die Verschiebungskomponenten von den materiellen Koordinaten $\overset{\dagger}{x}^i$ des Punktes $\overset{\dagger}{P}$ und der Zeit t abhängig. Durch die Beziehungen (3.17) ist die Kinematik des Mehrkomponentenkontinuums vollständig beschrieben, wobei die materiellen Koordinaten des Stoffes I als unabhängige Variablen gewählt wurden.

Mit Rücksicht auf die noch zu bildenden Zeitableitungen werden anstelle der Unbekannten $\overset{II}{\Delta \mathbf{w}}, \overset{III}{\Delta \mathbf{w}}$ die unbekanntenen Verschiebungsvektoren $\overset{II}{\mathbf{w}}, \overset{III}{\mathbf{w}}$ der materiellen Punkte $\overset{\dagger}{P}, \overset{\dagger}{P}$ eingeführt:

$$\begin{aligned} \overset{II}{\mathbf{w}} &= \overset{I}{\mathbf{w}} - \overset{II}{\Delta \mathbf{w}} = (\overset{I}{w}^k - \overset{II}{\Delta w}^k) \overset{\dagger}{\mathbf{g}}_k \\ \overset{III}{\mathbf{w}} &= \overset{I}{\mathbf{w}} - \overset{III}{\Delta \mathbf{w}} = (\overset{I}{w}^k - \overset{III}{\Delta w}^k) \overset{\dagger}{\mathbf{g}}_k \end{aligned} \quad (3.18)$$

Somit können die Verschiebungen $\overset{c}{\mathbf{w}}$ der Stoffe I, II, III auf die Basisvektoren $\overset{\dagger}{\mathbf{g}}^k$ des Stoffes I bezogen werden:

$$\overset{c}{\mathbf{w}} = \overset{c}{w}^k(\theta^i, t) \overset{\dagger}{\mathbf{g}}_k \quad c = \text{I, II, III} \quad (3.19)$$

Die noch unbekanntenen Dichten $\overset{c}{\rho}$ der Stoffe I, II, III werden ebenfalls in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten des Stoffes I und der Zeit t formuliert.

Es können auch die materiellen Koordinaten eines anderen Stoffes (z.B. $\overset{\dagger}{x}^k$ oder $\overset{\dagger\dagger}{x}^k$) als unabhängige Veränderliche gewählt und die Feldgrößen $\overset{c}{\rho}$ und $\overset{c}{\mathbf{w}}$ hierdurch beschrieben werden. Die Wahl der Komponente I ist schon aus der physikalischen Anschauung heraus sinnvoll, da der Feststoff den Kontrollraum beschreibt, durch den sich die anderen Komponenten (Flüssigkeiten und Gase) relativ bewegen.

Zur Herleitung der Geschwindigkeiten der einzelnen Stoffe im Augenblickszustand werden die jeweiligen Verschiebungen $D\overset{c}{\mathbf{w}} = \overset{c}{\dot{\mathbf{w}}}(t)Dt$ der Stoffe zu den Punkten $\overset{c}{P}$ ($c = \text{I, II, III}$) betrachtet. Die materiellen Zeitableitungen $\overset{c}{\dot{\mathbf{w}}}$ der von den Koordinaten $\overset{1}{x}^i$ abhängigen Verschiebungsfunktionen sind über die implizite Differentiation zu finden, wenn die Koordinaten des Stoffes I als Funktion von $\overset{\text{II}}{x}^i$ und $\overset{\text{III}}{x}^i$ angenommen werden.

Für die einzelnen Stoffe erhält man die materiellen Zeitableitungen der Verschiebungen zu:

$$\begin{aligned} \overset{\text{I}}{\dot{\mathbf{w}}} &= \overset{\text{I}}{\mathbf{w}}_{,t} \\ \overset{\text{II}}{\dot{\mathbf{w}}} &= \overset{\text{II}}{\mathbf{w}}_{,t} + \overset{\text{II}}{\mathbf{w}}_{,k} \overset{\text{II}}{c}^k & \text{mit} & \quad \overset{\text{II}}{c}^k = \left(\frac{D\theta^k}{Dt} \right)_{\text{II}} \\ \overset{\text{III}}{\dot{\mathbf{w}}} &= \overset{\text{III}}{\mathbf{w}}_{,t} + \overset{\text{III}}{\mathbf{w}}_{,k} \overset{\text{III}}{c}^k & & \quad \overset{\text{III}}{c}^k = \left(\frac{D\theta^k}{Dt} \right)_{\text{III}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Klammer mit Index besagt, daß die Zeitableitung bei festgehaltenen Koordinaten des angegebenen Stoffes durchzuführen ist. Entsprechend der Vorgehensweise für die materielle Zeitableitung der Verschiebungsvektoren werden auch die Zeitableitungen der Verschiebungskomponenten und die anderer Feldgrößen, wie z.B. der Dichte, bestimmt, auf dessen Darstellung hier verzichtet wird.

Die in (3.20) noch unbekannt konvektiven Anteile $\overset{\text{II}}{c}^k$ und $\overset{\text{III}}{c}^k$, die nur bei Mehrkomponentenkontinua auftreten, sind im folgenden durch die Verschiebungen $\overset{c}{\mathbf{w}}$ auszudrücken. Hierzu wird zunächst die materielle Zeitableitung der Ortsvektoren $(\overset{\text{II}}{\mathbf{r}})^\cdot$ und $(\overset{\text{III}}{\mathbf{r}})^\cdot$ betrachtet, die im Ausgangszustand gleich Null sind:

$$(\overset{\text{II}}{\mathbf{r}})^\cdot = \overset{\text{II}}{\mathbf{r}}_{,t} + \overset{\text{II}}{\mathbf{r}}_{,k} \overset{\text{II}}{c}^k = 0 \quad (3.21)$$

$$(\overset{\text{III}}{\mathbf{r}})^\cdot = \overset{\text{III}}{\mathbf{r}}_{,t} + \overset{\text{III}}{\mathbf{r}}_{,k} \overset{\text{III}}{c}^k = 0$$

Da die Ortsableitungen $\overset{c}{\mathbf{r}}_{,k}$ die Basisvektoren $\overset{c}{\mathbf{g}}_k$ in den materiellen Punkten $\overset{c}{P}$ darstellen ($c = \text{II}, \text{III}$), folgt aus (3.21):

$$\overset{\text{II}}{c}^k \overset{\text{II}}{\mathbf{g}}_k = -\overset{\text{II}}{\mathbf{r}}_{,t} \quad (3.22)$$

$$\overset{\text{III}}{c}^k \overset{\text{III}}{\mathbf{g}}_k = -\overset{\text{III}}{\mathbf{r}}_{,t}$$

Hierin sind die unbekannt $\overset{\text{II}}{c}^k$, $\overset{\text{III}}{c}^k$ die negativen Komponenten der Relativgeschwindigkeiten $\overset{\text{II}}{\mathbf{r}}_{,t}$, $\overset{\text{III}}{\mathbf{r}}_{,t}$ der materiellen Punkte $\overset{\text{II}}{P}$, $\overset{\text{III}}{P}$ gegenüber $\overset{\text{I}}{P}$. Um die konvektiven Anteile $\overset{c}{c}^k$ durch die Verschiebungen auszudrücken, werden die folgenden Ausdrücke für die Ortsvektoren in (3.22) eingesetzt:

$$\overset{\text{II}}{\mathbf{r}} = \overset{\text{I}}{\mathbf{r}} + \overset{\text{I}}{\mathbf{w}} - \overset{\text{II}}{\mathbf{w}} \quad (3.23)$$

$$\overset{\text{III}}{\mathbf{r}} = \overset{\text{I}}{\mathbf{r}} + \overset{\text{I}}{\mathbf{w}} - \overset{\text{III}}{\mathbf{w}}$$

Unter Berücksichtigung der erforderlichen partiellen Ableitungen $\overset{c}{\mathbf{g}}_k = \overset{c}{\mathbf{r}}_{,k}$ und $\overset{c}{\mathbf{r}}_{,t}$ der Gleichung (3.23) läßt sich (3.22) in Komponenten der Basisvektoren $\overset{\text{I}}{\mathbf{g}}_m$ schreiben:

$$\overset{\text{II}}{c}^k \left(\delta_k^m - \overset{\text{II}}{w}^m|_k + \overset{\text{I}}{w}^m|_k \right) = \overset{\text{II}}{w}^m_{,t} - \overset{\text{I}}{w}^m_{,t} \quad (3.24)$$

$$\overset{\text{III}}{c}^k \left(\delta_k^m - \overset{\text{III}}{w}^m|_k + \overset{\text{I}}{w}^m|_k \right) = \overset{\text{III}}{w}^m_{,t} - \overset{\text{I}}{w}^m_{,t}$$

Mit diesem linearen Gleichungssystem können die gesuchten Größen $\overset{\text{II}}{c}^k, \overset{\text{III}}{c}^k$ durch die Verschiebungen ausgedrückt werden.

Werden kleine Verformungen angenommen, so können die Ortsableitung gegenüber der Eins in der Klammer vernachlässigt werden, so daß das Gleichungssystem entkoppelt wird und die konvektiven Anteile sich direkt aus den Geschwindigkeitsdifferenzen ergeben. Die materiellen Zeitableitungen der Verschiebungen nach (3.20) lauten somit:

$$\begin{aligned} \overset{\text{I}}{w} &= \overset{\text{I}}{w}_{,t} \\ \overset{\text{II}}{w} &\cong \overset{\text{II}}{w}_{,t} + \overset{\text{II}}{w}_{,k} (\overset{\text{II}}{w}^k_{,t} - \overset{\text{I}}{w}^k_{,t}) \\ \overset{\text{III}}{w} &\cong \overset{\text{III}}{w}_{,t} + \overset{\text{III}}{w}_{,k} (\overset{\text{III}}{w}^k_{,t} - \overset{\text{I}}{w}^k_{,t}) \end{aligned} \quad (3.25a)$$

Bei einer linearen Theorie entfallen die nichtlinearen konvektiven Anteile, so daß die materiellen Zeitableitungen näherungsweise durch die partiellen Zeitableitungen ausgedrückt werden können:

$$\overset{\text{c}}{w} \cong \overset{\text{c}}{w}_{,t} \quad c = \text{I, II, III} \quad (3.25b)$$

Entsprechende Beziehungen gelten auch für andere Feldgrößen, wie z.B. die Dichten und Volumenanteile der Stoffkomponenten.

3.3 Erhaltungsgleichungen des Mehrkomponentenkontinuums

Im folgenden werden die Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls, den Drall und die Energie des Mehrkomponentenkontinuums am herausgeschnittenen Volumenelement in lokaler Form hergeleitet.

3.3.1 Massenerhaltung

In dem verformten Volumenelement im Augenblickszustand zur Zeit t (siehe auch Bild 3.2) befinden sich die Stoffe $c = I, II, III, \dots$ mit den Teilmassen

$$d\dot{m}^c = \dot{\rho}^c dV. \quad (3.26)$$

Die partialen Dichten $\dot{\rho}^c$ stellen hier die über das Volumenelement dV „verschmierten“ Dichten der Stoffe dar, die über die in Kapitel 3.1 erläuterten Volumenanteile mit den realen Dichten verknüpft sind. Da die Dichten $\dot{\rho}^c$ auf das gemeinsame Volumenelement bezogen sind, können diese superponiert werden und ergeben somit eine gemittelte Dichte des Mischungskörpers:

$$\dot{\rho} = \sum_c \dot{\rho}^c \quad (3.27)$$

Die Massenerhaltung des Gemisches kann unter Berücksichtigung der Definition (3.27) und einer gedachten mittleren Verformungsgeschwindigkeit analog zum Einkomponentenkontinuum formuliert werden:

$$d\dot{m} = (\dot{\rho} dV)^\cdot = 0 \quad (3.28)$$

Während von der Erhaltung der Gesamtmasse des Gemisches ausgegangen wird, können sich die Massen der einzelnen Komponenten nach einer Verschiebung des Volumenelementes jedoch verändern. Der zeitliche Massenzuwachs einer Komponente $d\dot{m}^c$, der durch chemische Reaktionen oder Massenaustauschprozesse zwischen den Stoffen hervorgerufen wird, lautet:

$$d\dot{m}^c = \Delta \dot{\rho}^c dV \quad (3.29)$$

Hierin sind $\Delta \rho^c$ unbekannte lokale Massenquellen, die durch geeignete Stoffgesetze in Abhängigkeit chemischer und physikalischer Zustandsgrößen formuliert werden müssen.

Unter Berücksichtigung der materiellen Zeitableitung des Volumens dV

$$(dV)_c \dot{=} \dot{w}^k|_k dV = \dot{v}^k|_k dV \quad (3.30)$$

und der Definition der Geschwindigkeitskomponente $\dot{v}^k \equiv \dot{w}^k$ kann die Gleichung (3.26) bei festgehaltenen materiellen Koordinaten der Komponente c zeitlich differenziert werden:

$$d\dot{m} = \left(\dot{\rho} + \rho \dot{v}^k|_k \right) dV \quad (3.31)$$

Aus (3.29) und (3.31) folgt daraufhin die Massenerhaltung für die Komponente c :

$$\dot{\rho} + \rho \dot{v}^k|_k = \Delta \rho^c \quad (3.32)$$

Finden chemische Reaktionen oder Massenaustauschprozesse nur im Inneren des Körpers statt, so muß die Summe aller Massenquellen gleich Null sein:

$$\sum_c \Delta \rho^c = 0 \quad (3.33)$$

Mit dieser Nebenbedingung für die Massenquellen (3.33) folgt aus der Summation von (3.32) über alle Komponenten c unter Beachtung der mittleren Dichte und Verzerrungsgeschwindigkeit die Massenerhaltung auch für das Gemisch in Analogie zum Einkomponentenkontinuum.

Wird (3.32) über das Gesamtvolumen integriert und der Integralsatz von GREEN angewendet, erhält man die Massenerhaltung für die Komponente c in globaler Form:

$$\int_{\mathfrak{R}} \dot{\rho} dV + \int_{\mathbf{F}} \rho \dot{w}^k dF_k = \int_{\mathfrak{R}} \Delta \rho^c dV \quad (3.34)$$

3.3.2 Impulserhaltung

Um die Impulserhaltungsgleichungen für ein Mehrkomponentenkontinuum herzuleiten, muß zunächst der Begriff der Spannungen formuliert werden. Hierzu wird beispielhaft die Schnittfläche dF_1 des verformten Volumenelementes, die durch die Basisvektoren \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 gebildet wird, im Augenblickszustand betrachtet. Die auf diese Fläche wirkende Schnittkraft $d\mathbf{p}^1$ kann wie folgt über die Spannungen der einzelnen Komponenten dargestellt werden:

$$d\mathbf{p}^1 = \sum_c \tau^{1k} \mathbf{g}_k dF_1 \quad (3.35)$$

Die CAUCHY-Spannungen $\tau^{ik} \mathbf{g}_k$ sind hier auf die gesamte Seitenfläche $dF_1 = \sqrt{g} \theta^2 \theta^3$ des verformten Volumenelementes bezogen, so daß sie im Sinne eines Makromodells die Mittelwerte der tatsächlich auftretenden Spannungen wiedergeben. Entsprechendes gilt auch für die an den Flächen dF_2 und dF_3 angreifenden Kräfte $d\mathbf{p}^2$ und $d\mathbf{p}^3$. Sollen die Spannungen auf die wirklichen Teilflächen der Komponenten bezogen werden, sind zusätzliche Größen notwendig, die das Verhältnis der Teilflächen zur Gesamtfläche beschreiben. Zur Umrechnung können, wie in Kapitel 3.1 beschrieben, die Volumenanteile herangezogen werden.

Durch die Wahl einer gemeinsamen Bezugsfläche sowie gemeinsamer Basisvektoren können die partialen Spannungen superponiert werden:

$$\tau^{ik} = \sum_c \tau^{ik} \quad (3.36)$$

Die Volumenkräfte der einzelnen Komponenten werden auf das Volumenelement dV und die gemeinsamen Basisvektoren im Augenblickszustand \mathbf{g}_k bezogen. Für die Summe der Volumenkräfte folgt somit:

$$Q^k = \sum_c \dot{Q}^k \quad (3.37)$$

Zur Herleitung der Impulserhaltung werden aus dem betrachteten Volumenelement im verformten Augenblickszustand die einzelnen Komponenten c herausgeschnitten, wobei jeweils „Porenkörper“ für die einzelnen Stoffe entstehen. In Bild 3.3 ist beispielhaft der Porenkörper der Komponente I mit allen angreifenden Kräften dargestellt. Neben den Schnittkräften $\tau^{ik} \mathbf{g}_k dF_1$ (der Übersicht halber nur an den Flächen dF_1) und den Volumenkräften $\dot{Q}^k \mathbf{g}_k dV$ treten zusätzlich

noch Interaktionskräfte $\Delta \overset{c}{Q}^k \mathbf{g}_k dV$ auf, die durch den inneren Schnitt in dem Mehrkomponentenkontinuum entstehen.

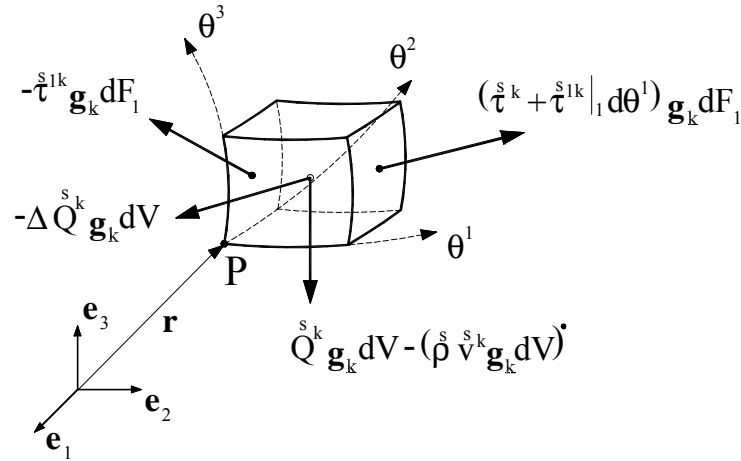


Bild 3.3: Herausgeschnittener Porenkörper des Stoffes I (Schnittkräfte exemplarisch nur an dF_1)

Die Bewegungsgleichung für den herausgeschnittenen Porenkörper der Komponente c lautet entsprechend der klassischen Kontinuumsmechanik in allgemeiner Form:

$$\left(\overset{c}{\tau}^{ik} |_{i} \mathbf{g}_k + \overset{c}{Q}^k \mathbf{g}_k - \Delta \overset{c}{Q}^k \mathbf{g}_k \right) dV = \left(\overset{c}{\rho} \overset{c}{v}^k \mathbf{g}_k dV \right) \quad (3.38)$$

Unter Berücksichtigung der Massenerhaltung (3.32) in der materiellen Zeitableitung der Bewegungsgröße der Gleichung (3.38) und der Beschleunigung der Komponente c

$$\overset{c}{b}^k \mathbf{g}_k = \overset{c}{\dot{v}}^k \mathbf{g}_k + \overset{c}{v}^m |_{m} \overset{c}{v}^k \mathbf{g}_k \quad (3.39)$$

kann die Impulserhaltung in folgender Form angegeben werden:

$$\overset{c}{\tau}^{ik} |_{i} + \overset{c}{Q}^k - \overset{c}{\rho} \overset{c}{b}^k - \Delta \overset{c}{\rho} \overset{c}{v}^k = \Delta \overset{c}{Q}^k \quad (3.40)$$

Die Interaktionskräfte $\Delta \overset{c}{Q}^k$ stellen hier innere Schnittkräfte dar, die durch die Relativverschiebung der Komponenten entstehen und - wie später noch gezeigt wird - viskose Kräfte darstellen. Diese Kräfte müssen sich in der Summe aufheben, womit sich die folgende Nebenbedingung ergibt:

$$\sum_c \Delta \overset{c}{Q}^k = 0 \quad (3.41)$$

Hierin besteht die Interaktionskraft $\Delta \overset{c}{Q}^k$ des Porenkörpers c aus mehreren Anteilen, die sich aus den Schnittkräften dieses Körpers mit den übrigen Komponenten des Kontinuums ergeben. Für die Komponenten I, II, III eines 3-Komponentengemisches ergeben sich beispielhaft die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Delta \overset{I}{Q}^k &= \Delta \overset{I-II}{Q}^k + \Delta \overset{I-III}{Q}^k \\ \Delta \overset{II}{Q}^k &= \Delta \overset{II-I}{Q}^k + \Delta \overset{II-III}{Q}^k \\ \Delta \overset{III}{Q}^k &= \Delta \overset{III-I}{Q}^k + \Delta \overset{III-II}{Q}^k \end{aligned} \quad (3.42)$$

Da aufgrund des Prinzips „actio = reactio“ die paarweise zugeordneten Kräfte entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, z.B. $\Delta \overset{I-II}{Q}^k = -\Delta \overset{II-I}{Q}^k$, ist auch die Nebenbedingung (3.41) erfüllt, wie man nach Einsetzen der Beziehung (3.42) in (3.41) leicht prüfen kann.

Die Superposition der Gleichung (3.40) über alle Komponenten führt unter Beachtung der Nebenbedingung (3.41) und der Beziehung (3.36), (3.37) sowie einer aus der Bewegungsgröße der Gleichung (3.38) resultierenden mittleren Beschleunigung auf die Impulserhaltung des Gemisches entsprechend der Darstellung eines Einkomponentenkontinuums.

Auf die Darstellung der Impulserhaltung in globaler Form soll verzichtet werden, da sich hieraus keine neuen Informationen ergeben.

3.3.3 Drallerhaltung

Die Betrachtung des Momentengleichgewichts am verformten Volumenelement führt auf die Drallerhaltungsgleichung. Wird durch einen inneren Schnitt die Komponente c aus dem Volumenelement herausgetrennt, so kann an dem entstandenen Porenkörper das Momentengleichgewicht für diese Komponente angeschrieben werden:

$$\overset{c}{\tau}^{\text{ik}} \in_{\text{iks}} = \Delta \overset{c}{M}_s \quad (3.43)$$

Hierin sind \in_{iks} der schiefsymmetrische Permutationstensor und $\Delta \overset{c}{M}_s$ der Drallkopplungsvektor, der die Momente aus den Kontaktkräften zwischen den Komponenten darstellt. Ebenso wie die

Impulserhaltung, muß auch die Drallerhaltung von dem gesamten Gemisch entsprechend der eines Einkomponentenkontinuums erfüllt werden, womit sich die folgende Nebenbedingung ergibt:

$$\sum_c \Delta \overset{c}{M}_s = 0 \quad (3.44)$$

Diese Forderung besagt, daß der Spannungstensor des Gemisches symmetrisch ist, während die partialen Spannungen der einzelnen Komponenten auch schiefsymmetrisch sein können. Die Momente $\Delta \overset{c}{M}_s$ sind wie die Spannungen unbekannte Größen, für die geeignete Stoffgesetze formuliert werden müssen. Im folgenden wird jedoch keine Drallkopplung zwischen den Komponenten angenommen, so daß die folgende Forderung gilt:

$$\Delta \overset{c}{M}_s = 0 \quad (3.45)$$

Aus der Drallerhaltung (3.43) folgt mit dieser Bedingung die Symmetrie der partialen Spannungstensoren:

$$\overset{c}{\tau}^{ik} = \overset{c}{\tau}^{ki} \quad (3.46)$$

Durch die Annahme einer Symmetrie der partialen Spannungstensoren reduzieren sich die erforderlichen Erhaltungsgleichungen um die nicht mehr benötigten Drallerhaltungsgleichungen.

3.3.4 Energieerhaltung

Die Volumenelemente dV des Mehrkomponentenkontinuums stellen für sich thermodynamische Systeme dar, die im gegenseitigen Wärme- und Arbeitsaustausch stehen. Der Energieerhaltungssatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) besagt, daß der zeitliche Zuwachs der inneren Energie gleich dem zeitlichen Zuwachs der mechanischen Arbeit der angreifenden Spannungen und der Interaktionskräfte plus der von außen über die Seitenflächen des Porenvolumens einfließenden Wärmemenge und der eingepprägten Wärmequelle plus der Energie aus dem Massenzuwachs sowie der Kontaktenergie ist.

Wie bei den zuvor hergeleiteten Erhaltungsgleichungen soll auch hier von der lokalen Betrachtungsweise ausgegangen werden und die Energieerhaltung für ein Volumenelement formuliert werden. Für die Stoffkomponente c ergibt sich der zeitliche Zuwachs der inneren Energie zu:

$$\left(\overset{\circ}{u} \overset{\circ}{\rho} dV \right) Dt = \delta \overset{\circ}{W} + \delta \overset{\circ}{Q} + \delta \overset{\circ}{W}_{\Delta Q} + \delta \overset{\circ}{W}_{\Delta p} + \delta \Delta \overset{\circ}{u} \quad (3.47)$$

Hierin sind $\overset{\circ}{u}$ die spezifische innere Energie pro Masse $\overset{\circ}{\rho} dV$, $\delta \overset{\circ}{W}$ die äußere mechanische Arbeit aller Kräfte am Volumenelement, $\delta \overset{\circ}{Q}$ die thermische Arbeit aus den Wärmeströmen über die Seitenflächen und aus der eingepprägten Wärmequelle, $\delta \overset{\circ}{W}_{\Delta Q}$ die Arbeit der Interaktionskräfte, $\delta \overset{\circ}{W}_{\Delta p}$ der Energiezuwachs infolge Massenaustauschprozesse und $\delta \Delta \overset{\circ}{u}$ die Kontaktenergien, die über die Seitenflächen des Teilkörpers einfließen. Die in Bild 3.4 dargestellten Augenblickszustände des Volumenelementes zu den Zeiten t und $t + Dt$ sollen die Herleitung des Energieerhaltungssatzes veranschaulichen. Zur Beschreibung der mechanischen Arbeit sind am Volumenelement zur Zeit t für die Stoffkomponente $c = I$ alle Volumenkräfte und die äußeren Kräfte exemplarisch nur an den Flächen dF_1 angetragen. Anhand des nach der Zeit $t + Dt$ aus dem Volumen dV ausgetretenen Stoffes I wird der Energiezustand erläutert. Hierbei sind wiederum aus Übersichtsgründen die Wärmeströme exemplarisch nur an den Flächen dF_1 dargestellt.

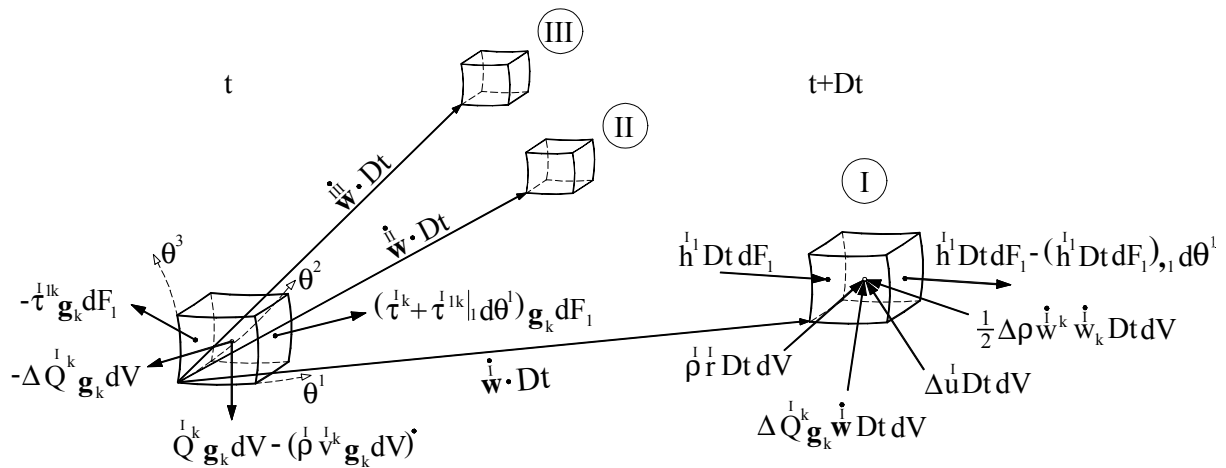


Bild 3.4: Volumenelement im Augenblickszustand t mit Volumenkräften und Schnittkräften (exemplarisch nur an den Flächen dF_1) des Stoffes I und Porenkörper I zur Zeit $t + Dt$ mit Energiezuwächsen und Wärmestrom

Im folgenden werden die einzelnen Energieterme der Erhaltungsgleichung (3.47) beschrieben. Die mechanische Arbeit aller am Volumenelement angreifenden äußeren Kräfte, die entlang der Verschiebung $\overset{\circ}{w} dV$ geleistet wird, ergibt sich unter Berücksichtigung der Impulserhaltung (3.40) zu:

$$\delta \overset{\circ}{W} = \overset{\circ}{\tau}^{ik} \mathbf{g}_k \overset{\circ}{w}_{,i} Dt dV \quad (3.48)$$

Die thermische Arbeit aus den Wärmeströmen \dot{h}^k , die zur Zeit $t + Dt$ über die Seitenflächen in das Volumen hineinfließen, sowie aus der eingepägten massenspezifischen Wärmequelle \dot{r} lautet:

$$\delta \dot{Q} = \dot{\rho} \dot{r} Dt dV - \dot{h}^k|_k Dt dV \quad (3.49)$$

Die Interaktionskräfte $\Delta \dot{Q}^k$ des herausgeschnittenen Porenkörpers c mit den übrigen Stoffkomponenten erzeugen über den Verschiebungsweg $\dot{w}^k Dt$ die mechanische Arbeit

$$\delta \dot{W}_{\Delta Q} = \Delta \dot{Q}^k \dot{w}^k Dt dV, \quad (3.50)$$

die als Reibungsarbeit gedeutet werden kann. Werden Massenaustauschprozesse zugelassen, dann wird die innere Energie der Komponenten c durch die kinetische Energie des Massenzuwachses $\Delta \dot{\rho}$ erhöht:

$$\delta \dot{W}_{\Delta \rho} = \frac{1}{2} \Delta \dot{\rho} \dot{w}^k \dot{w}^k Dt dV \quad (3.51)$$

Ein weiterer Austauschprozeß der Stoffkomponenten wird durch die Kontaktenergie beschrieben, die sich aus dem Energiezuwachs des Volumenelementes pro Zeit und Volumen $\Delta \dot{u}$ ergibt:

$$\delta \Delta \dot{u} = \Delta \dot{u} Dt dV \quad (3.52)$$

Neben den klassischen Energietermen ist die Erhaltungsgleichung bei Mehrkomponentenkontinua durch zusätzliche Terme erweitert, die die Austauschprozesse von innerer Energie und Masse sowie die Reibungsarbeit der Interaktionskräfte zwischen den Komponenten beschreiben.

Bevor die endgültige Energieerhaltung angeschrieben wird, sind noch die Verzerrungsmaße einzuführen, die sich aus der Herleitung der äußeren mechanischen Arbeit (3.48) von selbst ergeben. Wird die Verschiebung \dot{w} über die Ortsvektoren der Punkte \dot{P} und \dot{P} beschrieben, gelingt die Darstellung der Ortsableitungen der Verschiebungen mit Hilfe der Basisvektoren \mathbf{g}_i :

$$\begin{aligned} \dot{w}_{,k} &= (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}^+)_k \\ &= \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_k^+ \end{aligned} \quad (3.53)$$

Mit der materiellen Zeitableitung des Basisvektors $(\mathbf{g}_i)_c$ bei festgehaltenen Koordinaten des Stoffes c und Beachtung der Symmetrie des Tensors folgt somit für die Verformungsgröße in (3.48)

$$\mathbf{g}_k \dot{\mathbf{w}}_{,i} = \mathbf{g}_k (\mathbf{g}_i)_c = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{ik})_c = \dot{\gamma}_{ik} \quad , \quad (3.54)$$

die dem GREENSchen Verzerrungsmaß entspricht. Im Anhang A.2 sind die Verzerrungen in Abhängigkeit der Verschiebungen für die einzelnen Stoffkomponenten hergeleitet.

Zusätzlich wird in Gleichung (3.47) der Term für die innere Energie unter Berücksichtigung der Massenerhaltung (3.32) wie folgt umgeformt:

$$\left(\dot{\rho}^c dV \right) Dt = \left(\dot{\rho}^c + \dot{\rho}^c \Delta \right) dV dDt \quad (3.55)$$

Nach Einsetzen von (3.48) bis (3.55) in (3.47) und Division durch das Volumen dV und die Zeit Dt folgt die Energieerhaltung in lokaler Form:

$$\dot{\rho}^c \dot{u} = -\Delta \rho^c \left(u - \frac{1}{2} v^k v_k \right) + \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ki} + \Delta Q^k v_k + \rho^c r - \dot{h}^k |_{,k} + \Delta u \quad (3.56)$$

Hierin beschreiben insbesondere der erste Term auf der rechten Seite den Energiezuwachs infolge von Massenaustauschprozessen und der dritte Term die Arbeit der Interaktionskräfte, die beim Durchdringen der Komponenten geleistet wird.

Werden die Energien aller Komponenten aufaddiert, so erhält man die Energieerhaltung für das Gemisch, wobei die Energiezuwächse der folgenden Nebenbedingung genügen müssen:

$$\sum_c \Delta u = 0 \quad (3.57)$$

Nachfolgend wird die Energieerhaltung beispielhaft für ein Gemisch mit 3 Komponenten angegeben:

$$\sum_{c=1}^{\text{III}} \rho^c \dot{u} = \sum_{c=1}^{\text{III}} \left\{ -\Delta \rho^c \left(\dot{u} - \frac{1}{2} \dot{v}^k \dot{v}_k \right) + \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ki} + \rho^c \dot{r} - \dot{h}^k \Big|_k \right\} \quad (3.58)$$

$$+ \Delta \bar{Q}^{I-II} \left(\dot{v}_k - \dot{v}_k \right) + \Delta \bar{Q}^{I-III} \left(\dot{v}_k - \dot{v}_k \right) + \Delta \bar{Q}^{II-III} \left(\dot{v}_k - \dot{v}_k \right)$$

Die Arbeit der Interaktionskräfte ist von den Differenzen der Geschwindigkeiten abhängig, womit auch die Forderung erfüllt ist, daß nur bei einer Relativbewegung der Komponenten eine Arbeit entsteht, die anschaulich der Reibungsarbeit entspricht.

3.4 Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Der Umwandlungsprozeß von Arbeit in Wärme und umgekehrt kann mit dem Energieerhaltungssatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) nur teilweise gelöst werden. Damit Prozesse, die zwar nach dem 1. Hauptsatz möglich sind, aber in der Natur nicht vorkommen, ausgeschlossen werden, muß jeder Prozeß zusätzlich den 2. Hauptsatz erfüllen. Dieser besagt, daß die Entropieänderung im Inneren des Porenvolumens immer größer aber mindestens gleich der Summe der Entropieflüsse aus den Wärmeströmen über die Seitenflächen und der Entropie der eingepprägten Wärmequelle ist. Die Entropiegleichung wird zunächst entsprechend der klassischen Formulierung für ein Einkomponentenkontinuum hergeleitet und dann auf das Mehrkomponentenkontinuum übertragen.

Die Entropiegleichung geht aus zwei physikalischen Erkenntnissen nach CLAUSIUS und DUHEM hervor, die durch den 1. Hauptsatz nicht berücksichtigt werden [SCHROEDER 1987]. Zum einen kann Wärme nur in Richtung abfallender Temperaturen fließen, so daß das Produkt aus dem Wärmefluß pro Fläche h^k und dem Temperaturgradienten $T_{,k}$ immer negativ ist:

$$h^k T_{,k} \leq 0 \quad (3.59)$$

Zum anderen kann die durch eine mechanische Arbeit erzeugte Wärme nicht vollständig in mechanische Arbeit zurückgewandelt werden. Der erzeugte Zuwachs der Wärmemenge δQ , der die Arbeit einer ungeordneten Bewegung der Atome beschreibt, wird von CLAUSIUS durch eine gedachte geordnete thermische Arbeit $T \delta S$ ersetzt, mit der Entropie S als neue Zustandsgröße. Hiermit wird die Forderung, daß die thermische Arbeit immer größer als die zugeführte Wärmemenge ist, in der nachstehenden Ungleichung formuliert:

$$\rho r - \dot{h}^k \Big|_k \leq \rho \dot{s} T \quad (3.60)$$

Das Gleichheitszeichen steht dabei für einen reversiblen Prozeß. In der Gleichung sind die eingepägte Wärmequelle r und die spezifische Entropie s pro Massenelement definiert.

Aus den beiden Bedingungen (3.59) und (3.60) folgt die Entropiegleichung für das Einkomponentenkontinuum nach MEIXNER zu

$$\rho \frac{r}{T} - \left(\frac{\dot{h}^k}{T} \right) \Big|_k \leq \rho \dot{s} . \quad (3.61)$$

Die für ein Einkomponentenkontinuum formulierte Entropiegleichung muß bei Gemischen für jede Stoffkomponente in entsprechender Weise formuliert werden. Dabei ist jedoch abweichend von der spezifischen Entropie in (3.61) die materielle Zeitableitung der Entropie $S = \int \rho s \, dV$ in der Form zu berücksichtigen, daß dem Entropiefluß infolge Massenaustauschprozessen Rechnung getragen wird.

Nach heutigem Kenntnisstand ist die Entropieforderung angewandt auf jede einzelne Komponente zwar eine hinreichende Bedingung, aber eine zu strenge Formulierung, die zu Einschränkungen beim späteren Aufstellen der konstitutiven Gleichungen führt. Hingegen ist eine gemeinsame Entropiegleichung aller Komponenten eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Dissipationsvorgängen innerhalb des Gemisches.

Für das Gemisch ergibt sich die Entropiegleichung aus der Summe der Entropieänderungen (3.61) aller Komponenten $c = I, II, \dots$ in globaler Form:

$$\sum_c \int_{\mathfrak{R}} \left\{ \rho^c \frac{r^c}{T} - \left(\frac{\dot{h}^k}{T} \right) \Big|_k \right\} dV \leq \sum_c \left(\int_{\mathfrak{R}} \rho^c \dot{s}^c dV \right) \quad (3.62)$$

Nach Umformung der kovarianten Ableitung und Berücksichtigung der Massenerhaltung (3.32) wird die Entropiegleichung in folgende lokale Form überführt:

$$\sum_c \left(\rho^c \frac{r^c}{T} - \frac{\dot{h}^k}{T} \Big|_k + \dot{h}^k \frac{\dot{T}^c}{T^2} \right) \leq \sum_c \left(\Delta \rho^c \dot{s}^c + \rho^c \dot{s}^c \right) \quad (3.63)$$

Um die homogene Entropiegleichung zu erhalten, werden die Wärmequellen \dot{r}^c in (3.63) durch den Energieausdruck (3.56) ersetzt sowie die spezifische innere Energie \dot{u}^c durch die spezifische freie HELMHOLTZsche Energie \dot{f}^c

$$\dot{u}^c = \dot{f}^c + s^c \dot{T}^c \quad (3.64)$$

beschrieben. Die spezifischen Größen beziehen sich wiederum auf ein Massenelement.

Somit folgt aus (3.63) für die Entropiegleichung des Gemisches:

$$\sum_c \frac{1}{\dot{T}^c} \left\{ -\dot{\rho}^c \left(\dot{f}^c + s^c \dot{T}^c \right) - \Delta \dot{\rho}^c \left(\dot{f}^c - \frac{1}{2} \dot{v}^k \dot{v}_k \right) + \dot{\tau}^{ik} \dot{\gamma}_{ki} - \frac{\dot{h}^k \dot{T}_{,k}^c}{\dot{T}^c} + \Delta \dot{Q}^k \dot{v}_k + \Delta \dot{u}^c \right\} \geq 0 \quad (3.65)$$

Eine Vereinfachung der Entropiegleichung kann durch die Vorgabe eines einheitlichen Temperaturfeldes für alle Komponenten des Gemisches erreicht werden, was für die Beschreibung vieler Prozesse auch gerechtfertigt erscheint. Hierdurch können die unbekanntenen Energiezuwächse $\Delta \dot{u}^c$ aufgrund der Beziehung (3.57) eliminiert werden und man erhält die Entropiegleichung für $\dot{T}^c = T$ hier beispielhaft für ein 3-Komponentenkontinuum zu:

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^{\text{III}} \left\{ -\dot{\rho}^c \left(\dot{f}^c + s^c \dot{T}^c \right) - \Delta \dot{\rho}^c \left(\dot{f}^c - \frac{1}{2} \dot{v}^k \dot{v}_k \right) + \dot{\tau}^{ik} \dot{\gamma}_{ki} - \frac{\dot{h}^k \dot{T}_{,k}^c}{\dot{T}^c} \right\} \\ & + \Delta \dot{Q}^k \left(\dot{v}_k^{\text{I-II}} - \dot{v}_k^{\text{II}} \right) + \Delta \dot{Q}^k \left(\dot{v}_k^{\text{I-III}} - \dot{v}_k^{\text{III}} \right) + \Delta \dot{Q}^k \left(\dot{v}_k^{\text{II-III}} - \dot{v}_k^{\text{III}} \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Eine Vereinfachung der Entropiegleichung unter Verwendung der Beziehung (3.57) ist nur bei einer einheitlichen Temperatur T für alle Komponenten des Gemisches möglich, was in [SCHROEDER 1984] nicht beachtet wurde.

Die Annahme einer gemeinsamen Temperatur führt auch zu einer Vereinfachung bei der Ermittlung der Wärmeleitungsgleichung aus der Energieerhaltung. Während bei der Vorgabe unterschiedlicher Temperaturen \dot{T}^c aus jeder partialen Energiebilanz eine Wärmeleitungsgleichung zu ermitteln ist, die über die Energiezuwächse $\Delta \dot{u}^c$ gekoppelt sind, läßt sich bei einer gemeinsamen Temperatur $\dot{T}^c = T$ die Wärmeleitungsgleichung direkt aus der Energiebilanz des Gemisches bestimmen. Auch sind keine konstitutiven Gleichungen für die Energiezuwächse erforderlich.

Im Gegensatz zur konventionellen Mischungstheorie, bei der alle Stoffe über das Kontrollvolumen verschmiert werden und dieses gleichzeitig einnehmen, werden bei porösen Medien die Stoffe als unmischbar angenommen. Da die Volumenanteile der Komponenten sich nicht unabhängig voneinander verändern können, ist die aus dem Konzept der Volumenanteile resultierende Zwangsbedingung (3.7)₁ in der Entropiegleichung zu berücksichtigen. Somit kann der mit einem LAGRANGESchen Multiplikator \tilde{E} versehene Ausdruck

$$\Lambda \left\{ \dot{\tilde{n}} + \sum_{c=II} \left(\dot{\tilde{n}} - \dot{\tilde{n}}_{,k} (\tilde{v}_k - \tilde{v}_k^I) \right) \right\} = 0 \quad (3.67)$$

der Entropiegleichung hinzugefügt werden, ohne dessen Wert zu verändern. Die in (3.67) zusätzlich enthaltenen konvektiven Anteile in dem Summenausdruck ergeben sich aufgrund der materiellen Zeitableitung der Volumenanteile bei festgehaltenen Koordinaten des Stoffes I.

3.5 Erläuterungen zur konstitutiven Theorie

In den vorherigen Kapiteln sind für ein allgemeines Mehrkomponentenkontinuum die Erhaltungsgleichungen hergeleitet worden, die im Rahmen der Kontinuumsmechanik als Grundlage zur Beschreibung beliebiger mechanischer und thermischer Zustände dienen. Das Verhalten des Kontinuums unter Vorgabe eines beliebigen Zustandes ist jedoch von seinen Materialeigenschaften abhängig, womit zusätzliche Gleichungen erforderlich sind, die über die konstitutive Theorie ermittelt werden. Dieses ist auch zwingend notwendig, da die Anzahl der Erhaltungsgleichungen nicht zur Berechnung der eingeführten Feldgrößen ausreicht. Zur vollständigen Beschreibung des Kontinuums sind somit konstitutive Gleichungen für alle mechanischen und thermodynamischen Feldgrößen erforderlich, die sich unter Vorgabe des Bewegungs- und Temperaturzustandes nicht direkt aus den Erhaltungsgleichungen ergeben.

Der mechanische und thermische Zustand des Mehrkomponentenkontinuums werden durch die Dichten, die Verschiebungen, die Temperaturen und die Volumenanteile der einzelnen Komponenten, die sogenannten Grundvariablen $\mathcal{G} = \{ \rho^c, w^k, T^c, \tilde{n}^c \}$, beschrieben. Hierbei sind über das Konzept der Volumenanteile die Größen \tilde{n}^c als weitere Grundvariablen eingeführt worden, womit zusätzliche Gleichungen zur Bestimmung dieser aufgestellt werden müssen, da weniger Erhaltungsgleichungen als unbekannte Grundvariablen vorhanden sind. Um ein mathematisch bestimmtes System zu erhalten, sind die fehlenden Gleichungen, wie in Kapitel 3.1 erläutert, über Erhaltungs-, Evolutions- oder konstitutive Gleichungen für die Volumenanteile zu formulieren.

Die Erhaltungsgleichungen sowie die Zwangsbedingung aus dem Konzept der Volumenanteile sind jedoch nicht als direkte Funktionen der Grundvariablen aufgestellt worden, sondern enthalten allgemein die folgenden unbekanntenen Feldgrößen:

$$\mathcal{F} = \left\{ \overset{c}{f}, \overset{c}{s}, \overset{c}{\tau}^{ik}, \overset{c}{h}^k, \Delta \overset{c}{Q}^k, \Delta \overset{c}{u}, \Delta \overset{c}{\rho}, \overset{c}{n} \right\} \quad (3.68)$$

Somit sind konstitutive Gleichungen für die freie HELMHOLTZsche Energie $\overset{c}{f}$, die Entropie $\overset{c}{s}$, den Spannungstensor $\overset{c}{\sigma}^{ik}$, den Wärmefluß $\overset{c}{h}^k$, die Änderung der Volumenanteile $\overset{c}{n}$ jeder Komponente sowie für die Kontaktkräfte $\Delta \overset{c}{Q}^k$, den Massenaustausch $\overset{c}{\dot{A}}\overset{c}{n}$ und den Energiezuwachs $\Delta \overset{c}{u}$ als interaktive Größen aufzustellen. Die durch Fernwirkung eingeprägten Größen der Volumenkräfte $\overset{c}{Q}^k = \overset{c}{\rho} b_G^k$ (\mathbf{b}_G : Erdbeschleunigung) und der Wärmequelle $\overset{c}{r}$ können als bekannt vorausgesetzt werden und sind in den Feldgrößen \mathcal{F} somit nicht enthalten. Aufgrund der angenommenen Symmetrie der partialen Spannungstensoren (3.46) entfällt ebenfalls der Drallkopplungstensor $\overset{c}{\dot{A}}\overset{c}{M}_k$.

Bei der Aufstellung geeigneter konstitutiver Beziehungen sind neben Schwierigkeiten bei der mathematischen Formulierung von teilweise sehr komplexen Materialeigenschaften auch die Prinzipien der Thermodynamik zu beachten. Das bedeutet, daß die konstitutiven Gleichungen den aus der Entropiegleichung folgenden thermodynamischen Restriktionen genügen müssen. Dabei ist die Auswahl geeigneter Prozeßvariablen, die sich aus den Grundvariablen und deren zeitlichen und örtlichen Ableitungen ergeben, von besonderer Bedeutung. Die Aufstellung der konstitutiven Gleichungen in Abhängigkeit einer gemeinsamen Menge von Prozeßvariablen (Prinzip der Äquipräsenz) erfolgt somit nicht willkürlich, sondern nach einem durch die thermodynamischen Prinzipien vorgegebenen Schema. Die Schwierigkeit bei der Entwicklung der konstitutiven Gleichungen liegt jedoch in einer geeigneten Auswahl der Prozeßvariablen, um bestimmten Materialeigenschaften (z.B. viskos, elastisch-plastisch, inkompressibel etc.) gerecht zu werden. Hierbei sind im Gegensatz zu Einkomponentenkontinua konstitutive Gleichungen nicht nur für die einzelnen Komponenten, sondern auch für die Koppelmechanismen (Massen-, Impuls- und Energieaustausch) und für die zeitliche Änderung der Volumenanteile herzuleiten.

Unter der allgemeinen Annahme eines Gemisches mit elastischen oder viskosen Stoffen, unterschiedlichen Temperaturen sowie Massenaustauschprozessen sind die Stoffgleichungen $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{P})$ in Abhängigkeit der folgenden Prozeßvariablen aufzustellen:

$$\mathcal{P} = \left\{ \overset{c}{T}, \overset{c}{T}_{,k}, \overset{c}{\gamma}_{ik}, \overset{\dot{c}}{\gamma}_{ik}, \overset{c}{\rho}, \overset{c}{\rho}_{,k}, \overset{a}{n}, \overset{a}{n}_{,k}, \overset{I}{v}_k - \overset{II}{v}_k, \overset{I}{v}_k - \overset{III}{v}_k, \overset{II}{v}_k - \overset{III}{v}_k, \dots \right\} \quad (3.69)$$

mit $c = I, II, III, \dots$

$a = II, III, \dots$

Da die Prozeßvariablen voneinander unabhängig sein müssen, sind für die Volumenanteile und deren örtlichen Ableitungen wegen (3.2) nur $a = II, III, \dots$ Variablen anzugeben. Durch die Einführung des GREENSchen Verzerrungsmaßes sowie der Geschwindigkeitsdifferenzen ist auch die materielle Objektivität der Prozeßvariablen gewährleistet. Mit diesen Prozeßvariablen können elastische sowie viskose Stoffverhalten, aber auch Effekte wie Massenaustausch und der Energiezuwachs von Komponenten mit unterschiedlichen Temperaturen beschrieben werden.

Für einige Problemstellungen, wie z.B. die Beschreibung elasto-plastischen Materialverhaltens, ist es erforderlich, weitere Prozeßvariablen zuzulassen [EHLERS 1989]. Da die Menge an Variablen ohnehin schon zu einem großen Aufwand bei der Entwicklung der konstitutiven Gleichungen führt, ist es sinnvoll, Vereinfachungen im Rahmen der konstitutiven Theorie vorzunehmen. So kann z.B. unter der Vorgabe einer einheitlichen Temperatur für alle Komponenten die materielle Zeitableitung der Temperatur unmittelbar aus der Energieerhaltung des Gemisches bestimmt werden und die Ermittlung der Energiezuwächse $\overset{c}{\Delta u}$ entfällt somit. Eine weitere Vereinfachung ist durch das Ausschließen von Massenaustauschprozessen möglich, womit die Variablen für die Dichte und deren Ortsableitung nicht mehr benötigt werden.

Die größte Vereinfachung der konstitutiven Theorie bewirkt hingegen die Inkompressibilitätsbedingung für einzelne oder alle Komponenten, womit keine Bestimmungsgleichungen für die entsprechenden Feldgrößen $\overset{c}{n}$ zu entwickelt sind. Eine solche Annahme kann bei einigen porösen Medien auch gerechtfertigt sein, wenn der Feststoff und die als kompressibel anzunehmende Flüssigkeit annähernd gleiche Elastizitätseigenschaften haben (z.B. Knorpelgewebe).

Die Anwendung der konstitutiven Theorie und die Herleitung der Stoffgleichungen werden im folgenden Kapitel anhand eines Zweikomponentenkontinuums zur Beschreibung des Knochenfeststoffes mit einer Flüssigkeit erläutert.

3.6 Das Zweikomponentenkontinuum

3.6.1 Zusammenstellung der Grundgleichungen

Im folgenden wird ein Zweikomponentenkontinuum, bestehend aus einem elastischen Feststoff und einer viskosen Flüssigkeit ($c = s$ bzw. f), betrachtet. Zur Vereinfachung der Rechnung werden ein einheitliches Temperaturfeld für alle Komponenten $\overset{s}{T} = \overset{f}{T} = T$, welches über die Koordinaten des Feststoffes definiert ist, angenommen sowie Massenaustauschprozesse ausgeschlossen. Es wird bei der Herleitung allgemein von kompressiblen Stoffen ausgegangen, wobei aber auch auf Gemische mit inkompressiblen Komponenten eingegangen wird. Nachfolgend werden für diese Vorgaben das Konzept der Volumenanteile, die Erhaltungsgleichungen sowie die Entropiegleichung zusammengefaßt.

Aus dem **Konzept der Volumenanteile** ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\overset{s}{n} + \overset{f}{n} = 1 \quad , \quad \overset{c}{\rho} = \overset{c}{n} \overset{c}{\rho}_R \quad (3.70)$$

$$(\overset{s}{n} + \overset{f}{n})\dot{}_s = 0 \quad , \quad \overset{s}{n}_{,k} + \overset{f}{n}_{,k} = 0 \quad (3.71)$$

Der Klammerausdruck mit Index bezeichnet die materielle Zeitableitung bei festgehaltenen Koordinaten des Feststoffs.

Die **Massen-, Impuls- und Energieerhaltung** für die einzelnen Komponenten ($c = s, f$) sowie die aus dem Gemisch resultierenden Nebenbedingungen sind nachfolgend aufgeführt. Dabei ergibt sich die Massenerhaltung aus (3.32) mit Einführung der GREENSchen Verzerrungsgeschwindigkeit nach (3.54). Die Impulserhaltung und die aus dem Gemisch resultierende Nebenbedingung sind über (3.40) bis (3.42) definiert. Aus den Beziehungen (3.56) und (3.57) folgen die Energieerhaltung sowie die zugehörige Nebenbedingung. Die Drallerhaltung entfällt, da die Symmetrie der partialen Spannungstensoren vorausgesetzt wurde. Die Erhaltungsgleichungen und Nebenbedingungen lauten somit:

$$\dot{\overset{c}{\rho}} + \overset{c}{\rho} \overset{c}{\gamma}_k^k = 0 \quad (3.72)$$

$$\overset{c}{\tau}^{ik}|_i + \overset{c}{Q}^k - \overset{c}{\rho} \overset{c}{b}^k = \Delta \overset{c}{Q}^k \quad (3.73)$$

$$\text{mit} \quad \Delta \overset{s}{Q}^k + \Delta \overset{f}{Q}^k = 0 \quad (3.74)$$

$$\rho^c \dot{u}^c - \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ki} - \Delta Q^k v_k + \dot{h}^k|_k - \rho^c r^c = \Delta \dot{u}^c \quad (3.75)$$

$$\text{mit} \quad \Delta \dot{u}^s + \Delta \dot{u}^f = 0 \quad (3.76)$$

Wegen $\dot{T}^s = \dot{T}^f = \dot{T}$ kann die Energieerhaltung des Gemisches zur Ermittlung der Wärmeleitungsgleichung verwendet werden. Aus (3.75) folgt mit Einführung der freien HELMHOLTZschen Energie (3.64) und unter Berücksichtigung von $\Delta Q^k = -\Delta \dot{Q}^k$ aus (3.74) sowie den materiellen Zeitableitungen der Temperatur

$$\begin{aligned} (T)_s &= \dot{T} \\ (T)_f &= \dot{T} - T_{,k} (v_k^s - v_k^f) \end{aligned} \quad (3.77)$$

die Energieerhaltungsgleichung für das Gemisch:

$$\begin{aligned} &\rho^s (\dot{f}^s + \dot{s}^s T + \dot{s}^s \dot{T}) + \rho^f (\dot{f}^f + \dot{s}^f T + \dot{s}^f \dot{T}) - \rho^f T_{,k} (v_k^s - v_k^f) \\ &- \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ki} - \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ki} - \Delta Q^k (v_k^s - v_k^f) + \dot{h}^k|_k + \dot{h}^k|_k - \rho^s r^s - \rho^f r^f = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Aufgrund der Unmischbarkeit der Komponenten ist die folgende Zwangsbedingung nach (3.71)₁ bzw. in der Form (3.67) der Energieerhaltungsgleichung und der Entropieungleichung zuzufügen:

$$\Lambda (\dot{n}^s + \dot{n}^f - \dot{n}_{,k} (v_k^s - v_k^f)) = 0 \quad (3.79)$$

Die **Entropieungleichung** ergibt sich für das Zweikomponentenkontinuum aus (3.66) unter Hinzufügen der oben aufgeführten Zwangsbedingung:

$$\begin{aligned} &-\rho^s (\dot{f}^s + \dot{s}^s \dot{T}) - \rho^f (\dot{f}^f + \dot{s}^f \dot{T}) + \rho^f T_{,k} (v_k^s - v_k^f) + \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ki} + \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ki} \\ &+ \Delta Q^k (v_k^s - v_k^f) - (\dot{h}^k|_k + \dot{h}^k|_k) \frac{T_{,k}}{T} + \Lambda (\dot{n}^s + \dot{n}^f - \dot{n}_{,k} (v_k^s - v_k^f)) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Besteht das Gemisch aus inkompressiblen Komponenten, so vereinfacht sich die Zwangsbedingung unter Berücksichtigung der Massenerhaltung (3.72), die mit (3.70)₂ und der Bedingung für die Inkompressibilität $\dot{\rho}_R = 0$ wie folgt formuliert werden kann:

$$\dot{\bar{n}} + \bar{n} \dot{\gamma}_k^k = 0 \quad (3.81)$$

Werden die aus (3.81) folgenden Beziehungen für die materiellen Zeitableitungen der Volumenanteile in die Nebenbedingung (3.71)₁ eingesetzt, erhält man die Zwangsbedingung in der Form

$$\Lambda \left(\bar{n} \dot{\gamma}_k^k + \bar{n} \dot{\gamma}_k^k + \bar{n}_{,k} (\dot{v}_k^f - \dot{v}_k^s) \right) = 0 \quad , \quad (3.82)$$

die der Entropiegleichung (3.66) hinzuaddiert werden muß. Hiermit ergibt sich die Entropiegleichung für das inkompressible Gemisch zu:

$$\begin{aligned} & -\rho^s (\dot{f} + \dot{s} \dot{T}) - \rho^f (\dot{f} + \dot{s} \dot{T}) + \rho^s T_{,k} (\dot{v}_k^s - \dot{v}_k^f) + (\tau^{ik} + \Lambda \bar{n} \delta^{ik}) \dot{\gamma}_{ki}^s + (\tau^{ik} + \Lambda \bar{n} \delta^{ik}) \dot{\gamma}_{ki}^f \\ & + (\Delta Q^k - \Lambda \bar{n}_{,k}) (\dot{v}_k^s - \dot{v}_k^f) - (\bar{h}^k|_k + \bar{h}^k|_k) \frac{T_{,k}}{T} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Die Spannungen bzw. die Interaktionskraft und die Terme mit dem freien Parameter Λ , der als Porendruck zu deuten ist, können zu den sogenannten Extragrößen bzw. wirksamen Spannungen [TRUESDELL 1965] zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} \tau_E^{ik} &= \tau^{ik} + \Lambda \bar{n} \delta^{ik} \\ \tau_E^{ik} &= \tau^{ik} + \Lambda \bar{n} \delta^{ik} \\ \Delta Q_E^k &= \Delta Q^k - \Lambda \bar{n}_{,k} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Wird von einem Gemisch mit ausschließlich inkompressiblen Komponenten ausgegangen, dann sind die konstitutiven Gleichungen statt für die Spannungen τ^{ik} und die Interaktionskraft ΔQ^k für die Extragrößen (3.84) zu entwickeln.

3.6.2 Konstitutive Theorie des Zweikomponentenkontinuums

3.6.2.1 Auswahl der Prozeßvariablen

Der mechanische und thermodynamische Zustand des Zweikomponentenkontinuums ist mit den 10 Grundvariablen $\mathbf{G} = \{\rho^s, \rho^f, \bar{w}^s, \bar{w}^f, T, \bar{n}\}$ vollständig beschrieben. Da jedoch nur neun Erhaltungsgleichungen (3.72), (3.73), (3.78) zur Verfügung stehen, ist eine weitere Gleichung erforderlich, um eine geschlossene Lösung des Problems zu ermöglichen. Hierzu wird eine Bestimmungsgleichung für den Volumenanteil \bar{n}^f aufgestellt, die über eine konstitutive Gleichung, eine Erhaltungs- oder eine Evolutionsgleichung (siehe Kapitel 3.1) formuliert werden kann.

In den Erhaltungsgleichungen sind noch weitere unbekannte Feldgrößen enthalten, für die konstitutive Gleichungen formuliert werden müssen. Aufgrund der Vorgabe einer einheitlichen Temperatur und dem Ausschluß von Massenaustauschprozessen sind für die Energiezuwächse $\Delta \dot{u}^c$ und die Massenzuwächse $\Delta \dot{\rho}^c$ der allgemeinen Feldgrößen (3.68) keine konstitutiven Gleichungen erforderlich. Ebenfalls entfallen hier die Größen $\Delta \dot{Q}^k$ und $\dot{\bar{n}}^f$, da diese aufgrund der Nebenbedingungen (3.74) und (3.71)₁ von den entsprechenden Größen der jeweilig anderen Komponente abhängen. Die durch Fernwirkung hervorgerufenen Größen \dot{Q}^k und $\dot{\bar{r}}^c$ sowie die Dichten und Volumenanteile im Ausgangszustand $\dot{\rho}_0^c$ und $\dot{\bar{n}}_0^c$ werden als bekannt vorausgesetzt. Somit sind die nachfolgend aufgeführten **Feldgrößen** zu beschreiben:

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{matrix} \dot{f}^s, \dot{f}^f, \dot{s}^s, \dot{s}^f, \dot{\tau}^{ik}, \dot{\tau}^{ik}, \Delta \dot{Q}^k, \dot{h}^k, \dot{h}^k, \dot{\bar{n}}^f \end{matrix} \right\} \quad (3.85)$$

Die in \mathbf{F} enthaltenen Feldgrößen sind als Funktionen der gemeinsamen **Prozeßvariablen** \mathbf{P} zu formulieren:

$$\mathbf{P} = \left\{ T, T_{,k}, \gamma_{ik}^s, \gamma_{ik}^f, \dot{\gamma}_{ik}^f, \dot{\gamma}_{ik}^f, \dot{\gamma}_{ik}^f, \dot{\bar{n}}^f, \dot{\bar{n}}_{,k}^f, \dot{v}_k^s - \dot{v}_k^f \right\} \quad (3.86)$$

Hierin ist das Temperaturfeld T über die Koordinaten des Feststoffes definiert. Aufgrund der Isotropiegruppe für Fluide ist die Invariante $\dot{\gamma}_{ik}^f$ eingeführt worden, die auch äquivalent durch die Dichte $\dot{\rho}^f$ ersetzt werden kann. Zusätzlich ist die Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{ik}^f$ in dem

ρ^c sind in \mathbf{P} nicht enthalten, diese sind vielmehr durch die Verzerrungen γ_{ik}^c und die Dichten im Ausgangszustand ρ_0^c zu bestimmen. Die Beschreibung des Volumenanteils n^f ist hingegen erforderlich, da das Gemisch kompressible Stoffe enthält. Statt dem Volumenanteil n^f , der im Fall eines Zweikomponentenkörpers der Porosität entspricht, hätte auch der Parameter n^s gewählt werden können. Mit dem Parametersatz (3.86) ist die Unabhängigkeit der Prozeßvariablen sowie die materielle Objektivität gewährleistet.

Werden Gemische mit inkompressiblen Komponenten betrachtet, sind die Feldgrößen \mathbf{F} und die Prozeßvariablen \mathbf{P} zu modifizieren. Dieses wird im folgenden beispielhaft an den beiden Sonderfällen inkompressibler Feststoff / kompressible Flüssigkeit sowie inkompressibler Feststoff / inkompressible Flüssigkeit erläutert.

Im ersten Fall ist die Zeitableitung des Volumenanteils des Feststoffes \dot{n}^s über (3.81) durch die Verzerrungsgeschwindigkeiten definiert. Mit (3.71)₁ ergibt sich somit eine Bestimmungsgleichung für \dot{n}^f , womit keine konstitutiven Gleichungen für die Zeitableitungen der Volumenanteile erforderlich sind. Außerdem kann aus (3.81) der Volumenanteil n^s in Abhängigkeit von dem Volumenanteil im Ausgangszustand n_0^s und der Determinante der Maßzahlen $g = \det g_{ik}$ über die Beziehung $n^s = n_0^s \sqrt{g^+} / \sqrt{g^-}$ berechnet werden. Hiermit sind auch der Volumenanteil n^f entsprechend (3.70)₁ sowie dessen Ortsableitung $n_{,k}^f$ bekannt, womit diese Größen aus dem Prozeßvariablensatz zu streichen sind. Die Feldgrößen und die Prozeßvariablen lauten somit:

$$\mathbf{F} = \left\{ f^s, f^f, s^s, s^f, \tau^{ik}, \tau^{ik}, \Delta Q^k, h^k, h^k \right\} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{P} = \left\{ T, T_{,k}, \gamma_{ik}^s, \gamma_k^f, \dot{\gamma}_{ik}^f, v_k^s, v_k^f \right\}$$

Im zweiten Fall entfällt zusätzlich die Prozeßvariable γ_k^f , da sie über den Volumenanteil n^f bzw. n^s definiert und somit von der Volumendehnung γ_k^s abhängig ist. Da die Zwangsbedingung in der Form (3.82) der Entropiegleichung hinzugefügt wird, können somit die Spannungen als sogenannte Extrapannungen in Abhängigkeit des LAGRANGESchen Multiplikators Λ angegeben werden. Dementsprechend ergeben sich die folgenden Feldgrößen und Prozeßvariablen:

$$\mathbf{F} = \left\{ \overset{s}{f}, \overset{f}{f}, \overset{s}{s}, \overset{f}{s}, \overset{s}{\tau}^{\text{ik}} + \Lambda \overset{s}{n} \delta^{\text{ik}}, \overset{f}{\tau}^{\text{ik}} + \Lambda \overset{f}{n} \delta^{\text{ik}}, \Delta \overset{s}{Q}^k - \Lambda \overset{f}{n}_{,k}, \overset{s}{h}^k, \overset{f}{h}^k \right\} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{P} = \left\{ T, T_{,k}, \overset{s}{\gamma}_{\text{ik}}, \overset{f}{\gamma}_{\text{ik}}, \overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k \right\}$$

Nachfolgend werden die thermodynamischen Restriktionen für das Gemisch mit zwei kompressiblen Stoffkomponenten hergeleitet.

3.6.2.2 Thermodynamische Restriktionen

Bevor die konstitutiven Gleichungen aufgestellt werden können, sind Restriktionen, die sich unter Berücksichtigung der gewählten Prozeßvariablen (3.86) aus der Entropieungleichung ergeben, zu formulieren. Zunächst werden die materiellen Zeitableitungen der freien HELMHOLTZschen Energien gebildet:

$$\begin{aligned} \overset{s}{\dot{f}} &= \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial T} \overset{s}{\dot{T}} + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial T_{,k}} \overset{s}{\dot{T}}_{,k} + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{\gamma}_{\text{ik}}} \overset{s}{\dot{\gamma}}_{\text{ik}} + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{f}{\gamma}_k^{\text{k}}} \left(\overset{f}{\dot{\gamma}}_k^{\text{k}} \right)_s + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{f}{\gamma}_{\text{ik}}} \left(\overset{f}{\dot{\gamma}}_{\text{ik}} \right)_s \\ &+ \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{f}{n}} \left(\overset{f}{\dot{n}} \right)_s + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{f}{n}_{,k}} \left(\overset{f}{\dot{n}}_{,k} \right)_s + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial (\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k)} \left(\overset{s}{\dot{v}}_k - \overset{f}{\dot{v}}_k \right)_s \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \overset{f}{\dot{f}} &= \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial T} \left(\overset{f}{\dot{T}} \right)_f + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial T_{,k}} \left(\overset{f}{\dot{T}}_{,k} \right)_f + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \overset{s}{\gamma}_{\text{ik}}} \left(\overset{s}{\dot{\gamma}}_{\text{ik}} \right)_f + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \overset{f}{\gamma}_k^{\text{k}}} \overset{f}{\dot{\gamma}}_k^{\text{k}} + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \overset{f}{\gamma}_{\text{ik}}} \overset{f}{\dot{\gamma}}_{\text{ik}} \\ &+ \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \overset{f}{n}} \overset{f}{\dot{n}} + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \overset{f}{n}_{,k}} \overset{f}{\dot{n}}_{,k} + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial (\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k)} \left(\overset{s}{\dot{v}}_k - \overset{f}{\dot{v}}_k \right)_f \end{aligned}$$

Die mit einer Klammer und Index versehenen Terme stellen die Zeitableitungen bei festgehaltenen materiellen Koordinaten des anderen Stoffes dar. Die benötigten Zeitableitungen lauten:

$$\begin{aligned} \left(\overset{f}{\dot{\gamma}}_k^{\text{k}} \right)_s &= \overset{f}{\dot{\gamma}}_k^{\text{k}} - \overset{f}{\dot{\gamma}}_{k,m}^{\text{k}} (\overset{f}{v}^m - \overset{s}{v}^m) \\ \left(\overset{f}{\dot{\gamma}}_{\text{ik}} \right)_s &= \overset{f}{\dot{\gamma}}_{\text{ik}} - \overset{f}{\dot{\gamma}}_{\text{ik},m} (\overset{f}{v}^m - \overset{s}{v}^m) \\ \left(\overset{f}{\dot{n}} \right)_s &= \overset{f}{\dot{n}} - \overset{f}{\dot{n}}_{,m} (\overset{f}{v}^m - \overset{s}{v}^m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n}_{\triangleright k})_s^f &= \dot{\mathbf{n}}_{\triangleright k} - \mathbf{n}_{\triangleright km}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) \\
(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k)_s^f &= \dot{\mathbf{v}}_k - \dot{\mathbf{v}}_k + \mathbf{v}_{k \triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) = \dot{\mathbf{v}}_k - \dot{\mathbf{v}}_k + \dot{\gamma}_{ki}^f (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i) \\
(\mathbf{T})_f &= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_{\triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) \\
(\mathbf{T}_{\triangleright k})_f &= \dot{\mathbf{T}}_{\triangleright k} - \mathbf{T}_{\triangleright km}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) \\
(\gamma_{ik})_f &= \dot{\gamma}_{ik} - \gamma_{ik \triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) \\
(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k)_f^s &= \dot{\mathbf{v}}_k - \dot{\mathbf{v}}_k - \mathbf{v}_{k \triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) = \dot{\mathbf{v}}_k - \dot{\mathbf{v}}_k + \dot{\gamma}_{ki}^s (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Nach Einsetzen von (3.89) und (3.90) in (3.80) folgt die Entropiegleichung für das Gemisch:

$$\begin{aligned}
& -\rho^s \left\{ \frac{\partial f^s}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial f^s}{\partial \mathbf{T}_{\triangleright k}} \dot{\mathbf{T}}_{\triangleright k} + \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}} \dot{\gamma}_{ik} + \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_k^k} \dot{\gamma}_k^k - \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{k \triangleright m}^f} \gamma_{k \triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) + \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}^f} \ddot{\gamma}_{ik}^f \right. \\
& - \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}^f} \dot{\gamma}_{ik \triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) + \frac{\partial f^s}{\partial \mathbf{n}} \dot{\mathbf{n}} - \frac{\partial f^s}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}_{\triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) + \frac{\partial f^s}{\partial \mathbf{n}_{\triangleright k}} \dot{\mathbf{n}}_{\triangleright k} - \frac{\partial f^s}{\partial \mathbf{n}_{\triangleright k}} \mathbf{n}_{\triangleright km}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) \\
& \left. + \frac{\partial f^s}{\partial (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k)} (\dot{\mathbf{v}}_k - \dot{\mathbf{v}}_k) + \frac{\partial f^s}{\partial (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k)} \dot{\gamma}_{ik}^f (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i) + s \dot{\mathbf{T}} \right\} \\
& -\rho^f \left\{ \frac{\partial f^f}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial f^f}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{T}_{\triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) + \frac{\partial f^f}{\partial \mathbf{T}_{\triangleright k}} \dot{\mathbf{T}}_{\triangleright k} - \frac{\partial f^f}{\partial \mathbf{T}_{\triangleright k}} \mathbf{T}_{\triangleright km}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) + \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_{ik}^s} \dot{\gamma}_{ik}^s \right. \\
& - \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_{ik}^s} \dot{\gamma}_{ik \triangleright m}^s (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) + \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_k^k} \dot{\gamma}_k^k + \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_{ik}^f} \ddot{\gamma}_{ik}^f + \frac{\partial f^f}{\partial \mathbf{n}} \dot{\mathbf{n}} + \frac{\partial f^f}{\partial \mathbf{n}_{\triangleright k}} \dot{\mathbf{n}}_{\triangleright k} + \frac{\partial f^f}{\partial (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k)} (\dot{\mathbf{v}}_k - \dot{\mathbf{v}}_k) \\
& \left. + \frac{\partial f^f}{\partial (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k)} \dot{\gamma}_{ik}^s (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i) + s \dot{\mathbf{T}} - s \mathbf{T}_{\triangleright m}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^m) \right\} \\
& + \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ik}^s + \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ik}^f + \Delta Q^k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k) - (\mathbf{h}^k + \mathbf{h}^k) \frac{\mathbf{T}_{\triangleright k}}{\mathbf{T}} + \Lambda \left(\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}} - \mathbf{n}_{\triangleright k}^f (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k) \right) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.91}$$

In den Prozeßvariablen \mathbf{P} nach (3.86) sind die Größen $\{ \dot{T}; \dot{T}_{,k}; T_{,km}; \dot{\gamma}_{ik}^s; \dot{\gamma}_{ik}^f; \dot{\gamma}_{ik,m}^s; \dot{\gamma}_{ik,m}^f; \dot{\gamma}_{ik,m}^f; \dot{n}; n_{,k}; n_{,km}; (\dot{v}_k - v_k) \}$ nicht enthalten. Die Entropiegleichung kann für beliebige Werte dieser freien Parameter daher nur erfüllt sein, wenn die Faktoren vor diesen verschwinden oder bestimmte Symmetrieeigenschaften erfüllen. Es ergeben sich somit die folgenden Restriktionen:

$$\begin{aligned}
\dot{T}: \quad & \rho^s \left(\frac{\partial f^s}{\partial T} + s \right) + \rho^f \left(\frac{\partial f^f}{\partial T} + s \right) = 0 \\
\dot{T}_{,k}: \quad & \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial T_{,k}} + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial T_{,k}} = 0 \\
T_{,km}: \quad & \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial T_{,k}} (v^m - v^m) = -\rho^f \frac{\partial f^f}{\partial T_{,m}} (v^k - v^k) \\
\dot{\gamma}_{ik}^s: \quad & -\rho^s \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}^s} - \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_{ik}^s} - \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial (v_k - v_k)} (v^i - v^i) + \tau^{ik} = 0 \\
\dot{\gamma}_{ik}^f: \quad & \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}^f} + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_{ik}^f} = 0 \\
\dot{\gamma}_{ik,m}^s: \quad & \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_{ik}^s} (v^m - v^m) = 0 \\
\dot{\gamma}_{k,m}^k: \quad & \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_k^k} (v^m - v^m) = 0 \\
\dot{\gamma}_{ik,m}^f: \quad & \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}^f} (v^m - v^m) = 0 \\
\dot{n}: \quad & \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial n} + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial n} - \Lambda = 0 \\
\dot{n}_{,k}: \quad & \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial n_{,k}} + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial n_{,k}} = 0 \\
\dot{n}_{,km}: \quad & \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial n_{,k}} (v^m - v^m) = -\rho^s \frac{\partial f^s}{\partial n_{,m}} (v^k - v^k)
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\dot{v}_k^i - \dot{v}_k^s: \quad \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial (v_k^s - v_k^f)} + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial (v_k^s - v_k^f)} = 0$$

Während die meisten Restriktionen direkt aus der Entropiegleichung folgen, sind für die Beziehungen (3.92)₃ und (3.92)₁₁ Symmetrie- und Antimetrieigenschaften auszunutzen. Somit ergeben sich aus der Symmetrie der Tensoren $T_{,km}$ und $n_{,km}^f$ die offensichtlichen Eigenschaften von (3.92)_{3,11}. Die Restriktionen (3.92)₅ und (3.92)₈ führen auf die Unabhängigkeit der freien HELMHOLTZschen Energien f^s, f^f von der Prozeßvariablen γ_{ik}^i . Desweiteren besteht bezüglich der Verzerrungen keine Kopplung der freien HELMHOLTZschen Energien, da diese entsprechend (3.92)_{6,7} von den Prozeßvariablen des jeweilig anderen Stoffes unabhängig sind. Die freien HELMHOLTZschen Energien sind somit nicht von allen Parametern abhängig:

$$f^s = f^s(T, T_{,k}, \gamma_{ik}^s, n, n_{,k}, v_k^s - v_k^f) \quad (3.93)$$

$$f^f = f^f(T, T_{,k}, \gamma_k^k, n, n_{,k}, v_k^s - v_k^f)$$

Aus den Restriktionen (3.92)₁ und (3.92)₄ ergeben sich die Bedingungen zur Berechnung der Entropien s^s, s^f und des Spannungstensors τ^{ik} :

$$\rho^s s^s + \rho^f s^f = -\rho^s \frac{\partial f^s}{\partial T} - \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial T} \quad (3.94)$$

$$\tau^{ik} = \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}^s} + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial (v_k^s - v_k^f)} (v^i - v^s) \quad (3.95)$$

Die Beziehung (3.92)₉ liefert eine Bestimmungsgleichung für den LAGRANGESche Multiplikator Λ .

Unter Berücksichtigung der Restriktionen (3.92) folgt aus (3.91) die Restentropiegleichung:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial^s \mathbf{f}^f}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}_{,k} (\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^k) - \rho \frac{\partial^s \mathbf{f}^f}{\partial (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k)} \dot{\mathbf{f}}_{ik} (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i) \\
& + \rho \frac{\partial^f \mathbf{f}^f}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{T}_{,k} (\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^k) - \rho \frac{\partial^f \mathbf{f}^f}{\partial \gamma_k^k} \dot{\gamma}_k^k + \rho^s \mathbf{T}_{,k} (\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^k) \\
& + \tau^{ik} \dot{\gamma}_{ik}^f + \Delta Q^k (\mathbf{v}_k^s - \mathbf{v}_k^f) - (\mathbf{h}^k + \mathbf{h}^k) \frac{\mathbf{T}_{,k}}{\mathbf{T}} \\
& + \Lambda (\dot{\mathbf{n}} - \mathbf{n}_{,k} (\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^k)) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Die Zeitableitung des Volumenanteils $\dot{\mathbf{n}}$ ist hier als unbekannte Feldfunktion in Abhängigkeit der Prozeßvariablen \mathbf{P} anzusehen. Nach kurzer Umformung und Verwendung der Beziehungen (3.92)₉ und (3.92)₁₂ lautet die Restentropiegleichung:

$$\begin{aligned}
D = & \mathbf{T}_{,k} \left(\rho \left(\frac{\partial^f \mathbf{f}^f}{\partial \mathbf{T}} + \mathbf{s} \right) (\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^k) - (\mathbf{h}^k + \mathbf{h}^k) \frac{1}{\mathbf{T}} \right) \\
& + (\mathbf{v}_k^s - \mathbf{v}_k^f) \left(\Delta Q^k + \rho \frac{\partial^f \mathbf{f}^f}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}_{,k} \right) \\
& + \dot{\gamma}_{ik}^f \left(\tau^{ik} - \rho \frac{\partial^f \mathbf{f}^f}{\partial \gamma_m^m} \mathbf{g}_{ik}^f - \rho \frac{\partial^f \mathbf{f}^f}{\partial (\mathbf{v}_k^s - \mathbf{v}_k^f)} (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^i) \right) \\
& + \dot{\mathbf{n}} \left(\rho \frac{\partial^s \mathbf{f}^f}{\partial \mathbf{n}} + \rho \frac{\partial^f \mathbf{f}^f}{\partial \mathbf{n}} \right) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Die vier Terme in (3.97) beschreiben die Dissipation infolge des Entropie- und Wärmefflusses, der Diffusion, der Viskosität der Flüssigkeit und der Porositätsänderung.

3.6.2.3 Konstitutive Betrachtung in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts

Im folgenden sollen die thermodynamischen Zustände in der Nähe des sogenannten thermodynamischen Gleichgewichts betrachtet werden, siehe hierzu [BOWEN 1982, EHLERS 1989]. Das **thermodynamische Gleichgewicht**, in dem die Entropiegleichung (Dissipation) ein Minimum annimmt, ist hier durch die folgenden Prozeßvariablen definiert:

$$\mathbf{P}_0 = \left\{ T, T_{,k} = 0, \gamma_{ik}^s, \gamma_{ik}^f, \dot{\gamma}_{ik}^f = 0, n_0^f, n_{,k}^f, v_k^s - v_k^f = 0 \right\} \quad (3.98)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht verschwinden somit der Temperaturgradient, die Verzerrungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit sowie die Relativgeschwindigkeit. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß die Ableitung der Summe der freien HELMHOLTZschen Energien nach dem Volumenanteil n^f zu Null wird und die zweite Ableitung für ein lokales Minimum der Entropiegleichung einen positiven Wert annimmt [BOWEN 1982]:

$$\frac{\partial}{\partial n^f} \left(\rho^s f^s + \rho^f f^f \right)_{n=n_0^f} = 0 \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(\rho^s f^s + \rho^f f^f \right)_{n=n_0^f} > 0$$

Es ist ersichtlich, daß die Entropiegleichung (3.97) für den Parametersatz \mathbf{P}_0 gleich Null ist:

$$D(\mathbf{P}_0) = 0 \quad (3.100)$$

Um Zustände im thermodynamischen Gleichgewicht zu betrachten, werden die Variationen des Temperaturgradienten, der Geschwindigkeitsdifferenzen und der Verzerrungsgeschwindigkeit sowie die Abweichung des Volumenanteils vom Gleichgewichtszustand eingeführt:

$$\begin{aligned} T_{,k} &= \varepsilon a_k \\ v_k^s - v_k^f &= \varepsilon b_k \\ \dot{\gamma}_{ik}^f &= \varepsilon c_{ik} \\ n - n_0^f &= \varepsilon d \end{aligned} \quad (3.101)$$

Hierin sind ε und d beliebige Skalare, a_k und b_k beliebige Vektoren und c_{ik} ein beliebiger Tensor.

Mit den Beziehungen (3.101) ergeben sich die Prozeßvariablen wie folgt:

$$\bar{\mathbf{P}} = \left\{ T, \varepsilon a_k, \gamma_{ik}^s, \gamma_k^f, \varepsilon c_{ik}, n_0 + \varepsilon d, n_{>k}^f, \varepsilon b_k \right\} \quad (3.102)$$

Die Bedingungen für ein lokales Minimum der Entropiegleichung sind:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} D(\bar{\mathbf{P}})|_{\varepsilon=0} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} D(\bar{\mathbf{P}})|_{\varepsilon=0} &> 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

Einsetzen der Prozeßvariablen $\bar{\mathbf{P}}$ in (3.97) führt auf die Entropiegleichung in folgender Form:

$$D(\bar{\mathbf{P}}) = -\frac{1}{T} \varepsilon a_k q^k(\bar{\mathbf{P}}) + \varepsilon b_k k^k(\bar{\mathbf{P}}) + \varepsilon c_{ik} l^{ik}(\bar{\mathbf{P}}) + \Lambda(\bar{\mathbf{P}}) m(\bar{\mathbf{P}}) \geq 0 \quad (3.104)$$

mit

$$\begin{aligned} q^k(\bar{\mathbf{P}}) &= \overset{s}{h}^k + \overset{f}{h}^k - T \rho \left(\frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial T} + s \right) (\overset{s}{v}^k - \overset{f}{v}^k) \\ k^k(\bar{\mathbf{P}}) &= \Delta \overset{s}{Q}^k + \rho \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \mathbf{n}} \overset{f}{n}_{>k} \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$l^{ik}(\bar{\mathbf{P}}) = \overset{f}{\tau}^{ik} - \rho \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \gamma_m^m} \overset{+}{g}^{ik} - \rho \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial (\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k)} (\overset{s}{v}^i - \overset{f}{v}^i)$$

$$m(\bar{\mathbf{P}}) = \overset{s}{n}$$

Die Ableitung von (3.104) nach ε für das thermodynamische Gleichgewicht lautet

$$\frac{d}{d\varepsilon} D(\bar{\mathbf{P}})|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{T} a_k q^k(\mathbf{P}_0) + b_k k^k(\mathbf{P}_0) + c_{ik} l^{ik}(\mathbf{P}_0) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} m(\mathbf{P}_0) = 0, \quad (3.106)$$

wobei die Ableitung im letzten Term mit (3.92)₉ und (3.101)₄ folgendermaßen formuliert werden kann:

$$\left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}^2} \left(\rho^s \mathbf{f}^s + \rho^f \mathbf{f}^f \right)_{\mathbb{P}_0} d \quad (3.107)$$

Für beliebige a_k , b_k , c_{ik} , d ist (3.106) erfüllt, wenn die einzelnen Terme q^k , k^k , l^{ik} und m verschwinden, womit sich die nachstehenden Bedingungen ergeben:

$$\left(\mathbf{h}^s + \mathbf{h}^f \right)_{P=\mathbb{P}_0} = 0 \quad (3.108)$$

$$\left(\Delta Q^s + \rho^f \frac{\partial \mathbf{f}^f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}_{,k} \right)_{P=\mathbb{P}_0} = 0 \quad (3.109)$$

$$\left(\tau^{ik} - \rho^f \frac{\partial \mathbf{f}^f}{\partial \gamma_m^m} \cdot \mathbf{g}^{ik} \right)_{P=\mathbb{P}_0} = 0 \quad (3.110)$$

$$m|_{P=\mathbb{P}_0} = \dot{\mathbf{n}}|_{P=\mathbb{P}_0} = 0 \quad (3.111)$$

Der tiefgestellte Index \mathbb{P}_0 bedeutet, daß die Feldgrößen von dem Parametersatz \mathbb{P}_0 im thermodynamischen Gleichgewicht abhängig sind.

Um die Feldgrößen für einen Zustand in der **Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts** zu beschreiben, werden die Größen in einen Gleichgewichts- und in einen Nichtgleichgewichtsanteil zerlegt. Für eine Funktion $\overset{\circ}{F}$ aus \mathbf{F} gilt allgemein

$$\overset{\circ}{F}(\mathbf{P}) = \overset{\circ}{F}_0(\mathbb{P}_0) + \overset{\circ}{F}_N(\mathbf{P}) \quad (3.112)$$

mit der Forderung, daß

$$\overset{\circ}{F}_N(\mathbb{P}_0) = 0 \quad (3.113)$$

Für die Dissipationsgleichung D folgt mit der entsprechenden additiven Zerlegung

$$D(\mathbf{P}) = D_0(\mathbb{P}_0) + D_N(\mathbf{P}) \quad (3.114)$$

daß die nachstehenden Größen verschwinden:

$$\begin{aligned} D_0(\mathbf{P}_0) &= 0 \\ D_N(\mathbf{P}_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Somit wird die Restentropieungleichung nur durch den Nichtgleichgewichtsanteil beschrieben:

$$D_N(\mathbf{P}) = -\frac{T_{,k}}{T} q_N^k(\mathbf{P}) + (\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k) k_N^k(\mathbf{P}) + \overset{\dot{f}}{\gamma}_{ik} l_N^{ik}(\mathbf{P}) + \Lambda_N(\mathbf{P}) m_N(\mathbf{P}) \geq 0 \quad (3.116)$$

Da nur kleine Temperaturgradienten, Differenzgeschwindigkeiten und Verzerrungsgeschwindigkeiten betrachtet werden, können die Nichtgleichgewichtsanteile q_N^k , k_N^k , l_N^{ik} , Λ_N und m_N in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts linearisiert werden. Hierzu werden die Feldgrößen nach den Variablen $T_{,k}$, $\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k$ und $\overset{\dot{f}}{\gamma}_{ik}$ in einer TAYLORreihe entwickelt und die nichtlinearen Terme gestrichen. Aufgrund der Vorgabe isotropen Materialverhaltens ist die Entwicklung nach $\overset{f}{n} - \overset{f}{n}_0$ nur für den Dissipationsanteil m_N erforderlich.

Für q_N^k ergibt sich:

$$q_N^k(\mathbf{P}) = q_N^k(\mathbf{P}_0) + \left. \frac{\partial q_N^k}{\partial T_{,i}} \right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0} T_{,i} + \left. \frac{\partial q_N^k}{\partial (\overset{s}{v}_i - \overset{f}{v}_i)} \right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0} (\overset{s}{v}_i - \overset{f}{v}_i) + \left. \frac{\partial q_N^k}{\partial \overset{\dot{f}}{\gamma}_{im}} \right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0} \overset{\dot{f}}{\gamma}_{im} \quad (3.117)$$

Mit $q_N^k(\mathbf{P}_0) = 0$ folgt hieraus

$$q_N^k(\mathbf{P}) = -Q_T^{ki} T_{,i} + Q_v^{ki} (\overset{s}{v}_i - \overset{f}{v}_i) - Q_\gamma^{kim} \overset{\dot{f}}{\gamma}_{im} \quad (3.118)$$

mit den Tensorcomponenten, die unter Berücksichtigung der materiellen Objektivität folgende isotrope Form annehmen:

$$\begin{aligned}
Q_T^{ki} &= - \left. \frac{\partial q_N^k}{\partial T_{,i}} \right|_{P=P_0} = \beta_T \delta^{ki} \\
Q_v^{ki} &= \left. \frac{\partial q_N^k}{\partial (v_i - v_i)} \right|_{P=P_0} = \beta_v \delta^{ki} \\
Q_\gamma^{kim} &= - \left. \frac{\partial q_N^k}{\partial \dot{\gamma}_{im}} \right|_{P=P_0} = \beta_\gamma \epsilon^{kim}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\epsilon^{kim} \dot{\gamma}_{im} = 0, \tag{3.120}$$

die besagt, daß der dem symmetrischen Tensor $\dot{\gamma}_{im}$ zugeordnete axiale Vektor verschwindet, erhält man aus (3.118):

$$q_N^k(\mathbf{P}) = -\beta_T T_{,k} + \beta_v (v^k - v^k) \tag{3.121}$$

Eine entsprechende Beziehung ergibt sich für

$$k_N^k(\mathbf{P}) = -K_T^{ki} T_{,i} + K_v^{ki} (v_i - v_i) - K_\gamma^{kim} \dot{\gamma}_{im} \tag{3.122}$$

mit

$$\begin{aligned}
K_T^{ki} &= - \left. \frac{\partial k_N^k}{\partial T_{,i}} \right|_{P=P_0} = \alpha_T \delta^{ki} \\
K_v^{ki} &= \left. \frac{\partial k_N^k}{\partial (v_i - v_i)} \right|_{P=P_0} = \alpha_v \delta^{ki} \\
K_\gamma^{kim} &= - \left. \frac{\partial k_N^k}{\partial \dot{\gamma}_{im}} \right|_{P=P_0} = \alpha_\gamma \epsilon^{kim} = 0.
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Aus (3.122) folgt somit:

$$k_N^k(\mathbf{P}) = -\alpha_T T_{,k} + \alpha_v (\dot{v}^k - \dot{v}^k) \quad (3.124)$$

Für den letzten Term gilt

$$l_N^{ik}(\mathbf{P}) = L_T^{ikm} T_{,m} + L_v^{ikm} (\dot{v}_m^s - \dot{v}_m^f) + L_\gamma^{ikmn} \dot{\gamma}_{mn} \quad (3.125)$$

mit

$$\begin{aligned} L_T^{ikm} &= \left. \frac{\partial l_N^{ik}}{\partial T_{,m}} \right|_{P=P_0} = \eta_T \epsilon^{ikm} = 0 \\ L_v^{ikm} &= \left. \frac{\partial l_N^{ik}}{\partial (\dot{v}_m^s - \dot{v}_m^f)} \right|_{P=P_0} = \eta_v \epsilon^{ikm} = 0 \\ L_\gamma^{ikmn} &= \left. \frac{\partial l_N^{ik}}{\partial \dot{\gamma}_{mn}} \right|_{P=P_0} = \eta_\gamma \delta^{im} \delta^{kn} + \eta_{\bar{\gamma}} \delta^{ik} \delta^{mn} + \eta_{\tilde{\gamma}} \delta^{in} \delta^{km} \end{aligned} \quad (3.126)$$

unter Vorgabe isotroper Ansätze. Aufgrund der Symmetrie von $\dot{\gamma}_{ik}$ kann (3.126)₃ wie folgt geschrieben werden:

$$L_\gamma^{ikmn} = 2 \mu^f \delta^{im} \delta^{kn} + \hat{\lambda}^f \delta^{ik} \delta^{mn} \quad (3.127)$$

mit

$$\begin{aligned} \mu^f &= \frac{1}{2} (\eta_\gamma + \eta_{\tilde{\gamma}}) \\ \hat{\lambda}^f &= \eta_{\bar{\gamma}} \end{aligned} \quad (3.128)$$

Hiermit ergibt sich aus (3.125) schließlich:

$$l_N^{ik}(\mathbf{P}) = 2 \mu^f \dot{\gamma}_{ik} + \hat{\lambda}^f \dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^k \quad (3.129)$$

Die Skalarfelder Λ_N und m_N in dem letzten Term der Dissipationsgleichung sind ebenfalls über eine TAYLORreihe zu linearisieren:

$$\begin{aligned}\Lambda_N(\mathbf{P}) &= \left. \frac{\partial \Lambda_N}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0} (\mathbf{n}-\mathbf{n}_0) \\ &= \psi (\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)\end{aligned}\tag{3.130}$$

$$\begin{aligned}m_N(\mathbf{P}) &= \left. \frac{\partial m_N}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0} (\mathbf{n}-\mathbf{n}_0) \\ &= \kappa (\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)\end{aligned}\tag{3.131}$$

Hierbei sind wiederum die Gleichgewichtsanteile $\Lambda_N(\mathbf{P}_0)$, $m_N(\mathbf{P}_0)$ entsprechend (3.111) und (3.99)₁ gleich Null. Eine Entwicklung von m_N und Λ_N nach den übrigen Variablen ist nicht erforderlich, da die entsprechenden Terme aufgrund isotroper Ansätze für das thermodynamische Gleichgewicht Null sind.

Die skalare Größe ψ ist aufgrund der Beziehung (3.99)₂ positiv definiert:

$$\psi = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}^2} \left(\rho^s \mathbf{f}^s + \rho^f \mathbf{f}^f \right)_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0} > 0\tag{3.132}$$

Damit das Produkt aus κ und ψ und somit der entsprechende Dissipationsterm immer positiv sind, wird der Ansatz

$$m_N = M \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\rho^s \mathbf{f}^s + \rho^f \mathbf{f}^f \right)\tag{3.133}$$

mit $M = M(\mathbf{P}) > 0$

eingeführt, der nach Linearisierung und Koeffizientenvergleich mit (3.131) die folgende Beziehung für den Faktor κ liefert:

$$\kappa = M(\mathbf{P}_0) \psi(\mathbf{P}_0)\tag{3.134}$$

Der Kehrwert von κ wird auch als sogenannte Relaxationszeit des Porendrucks bezeichnet [BOWEN 1982]. Aufgrund der sich aus dem thermodynamischen Gleichgewicht ergebenden Bedingungen ist der Materialparameter positiv definiert. In [WILMANSKI 1996] wird die Porenrelaxation mit einer Neuordnung des realen Feststoffmaterials im Volumenelement infolge einer mikroskopischen Deformation (Kompressibilität, Mikrobewegung) erklärt, die zu einer Änderung der Volumenanteile führt.

Aus (3.116) erhält man nach Einsetzen von (3.121), (3.124), (3.129), (3.130), (3.131) und (3.134) die Dissipationsfunktion:

$$\begin{aligned}
D_N(\mathbf{P}) = & \frac{T_{,k}}{T} \beta_T T_{,k} - \frac{T_{,k}}{T} \beta_v (\dot{v}^k - \dot{v}^k) \\
& - (\dot{v}_k - \dot{v}_k) \alpha_T T_{,k} + (\dot{v}_k - \dot{v}_k) \alpha_v (\dot{v}^k - \dot{v}^k) \\
& + \dot{\gamma}_{ik} \left(2\mu \dot{\gamma}_{ik} + \lambda \dot{\gamma}_m^m \dot{g}^{ik} \right) \\
& + \frac{\kappa^2}{M} (\dot{n} - \dot{n}_0)^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Nach kurzer Umformung folgt hieraus unter Verwendung des Deviators der Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{ik}^D = \dot{\gamma}_{ik} - \frac{1}{3} \dot{\gamma}_m^m \dot{g}^{ik}$:

$$\begin{aligned}
D_N(\mathbf{P}) = & \frac{1}{T} \beta_T T_{,k} T_{,k} + \alpha_v (\dot{v}_k - \dot{v}_k) (\dot{v}^k - \dot{v}^k) - \left(\frac{1}{T} \beta_v + \alpha_T \right) T_{,k} (\dot{v}^k - \dot{v}^k) \\
& + 2\mu \dot{\gamma}_{ik}^D \dot{\gamma}_{ik}^D + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \left(\dot{\gamma}_k^k \right)^2 + \frac{\kappa^2}{M} (\dot{n} - \dot{n}_0)^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.136}$$

Die einzelnen Terme der Dissipationsgleichung beschreiben die Verluste (volumenspezifische Leistung) infolge des Wärmeflusses, der Diffusion, der Thermodiffusion, der Scher- und Volumenviskosität der Flüssigkeit sowie der Porositätsänderung.

Aus der Dissipationsgleichung (3.136) können die folgenden Restriktionen für die Materialparameter β_T , β_v , α_T , α_v , μ und $\lambda + \frac{2}{3} \mu$ (Wärmeleitfähigkeit des Gemisches, Thermodiffusionskoeffizient, Entropiekopplung, Diffusionskoeffizient, Scherviskosität, Volumenviskosität) gewonnen werden:

$$\beta_T \geq 0, \quad \alpha_v \geq 0, \quad \beta_v = -\alpha_T T, \quad \mu \geq 0, \quad \lambda + \frac{2}{3} \mu \geq 0 \tag{3.137}$$

Es ist zu beachten, daß diese Parameter Funktionen der Prozeßvariablen im thermodynamischen Gleichgewicht \mathbf{P}_0 sind. Der Diffusionskoeffizient α_v kann über den Quotienten aus der Viskosität und der spezifischen Permeabilität bestimmt werden. Es ist anzumerken, daß die Vorgabe einer isotropen Permeabilität bzw. Diffusion nicht zwingend notwendig ist; es kann auch eine Anisotropie in (3.122) angenommen werden, siehe [KUBIC 1986].

Im folgenden werden die **konstitutiven Beziehungen** für Zustände in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts angegeben.

Die konstitutive Beziehung für die Spannung des Feststoffes ist der Gleichung (3.95) zu entnehmen:

$$\tau_{ik}^s = \rho^s \frac{\partial f^s}{\partial \gamma_{ik}} + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial (v_k^s - v_k^f)} (v_i^f - v_i^s) \quad (3.138)$$

Für den Spannungstensor der Flüssigkeit folgt aus (3.105)₃ und (3.129) die konstitutive Beziehung:

$$\tau_{ik}^f = \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial \gamma_m^f} g_{ik}^+ + 2\mu^f \dot{\gamma}_{ik}^f + \lambda^f \dot{\gamma}_m^f g_{ik}^+ + \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial (v_k^s - v_k^f)} (v_i^s - v_i^f) \quad (3.139)$$

Aus (3.105)₂ und (3.124) ergibt sich eine Beziehung für die Interaktionskraft:

$$\Delta Q^s_k = -\alpha_T T_{,k} + \alpha_v (v^s_k - v^f_k) - \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial n} n_{,k} \quad (3.140)$$

Nach Einsetzen von (3.121) in (3.105)₁ erhält man für die Summe der Wärmeflüsse:

$$\dot{h}^s_k + \dot{h}^f_k = -\beta_T T_{,k} + \beta_v (v^s_k - v^f_k) + T \rho^f \left(\frac{\partial f^f}{\partial T} + s^f \right) (v^s_k - v^f_k) \quad (3.141)$$

Um für die Entropien konstitutive Beziehungen zu erhalten, wird die Gleichung (3.141) für das thermodynamische Gleichgewicht angeschrieben, wobei die Wärmeflüsse verschwinden, wenn der Temperaturgradient zu Null wird. Die sich somit unter Berücksichtigung von (3.137)₃ ergebende Beziehung

$$\rho^f \left(\frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial T} + \overset{f}{s} \right) = -\frac{\beta_v}{T} = \alpha_T \quad (3.142)$$

liefert mit (3.94) die Bestimmungsgleichungen für die Entropien:

$$\begin{aligned} \rho^f \overset{f}{s} &= -\rho^f \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial T} + \alpha_T \\ \rho^s \overset{s}{s} &= -\rho^s \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial T} - \alpha_T \end{aligned} \quad (3.143)$$

Hierin bewirkt α_T eine Kopplung der Entropien beider Stoffkomponenten.

Die Bestimmungsgleichung für die zeitliche Änderung der Volumenanteile der Flüssigkeit ergibt sich nach Einsetzen von (3.131) in (3.71)₁ zu:

$$\dot{\overset{f}{n}} + \kappa \overset{f}{n} - \overset{f}{n}_{,k} (\overset{f}{v}^k - \overset{s}{v}^k) = \kappa \overset{f}{n}_0 \quad (3.144)$$

Zur **Vereinfachung der konstitutiven Theorie** werden einige Annahmen getroffen. Zum einen soll von einer geringen Kopplung der Entropien ausgegangen und näherungsweise $\alpha_T = 0$ gesetzt werden. Hieraus folgt mit (3.137)₃ somit auch $\beta_v = 0$, womit die sogenannte Thermodiffusion vernachlässigt wird. Zum anderen kann unter Beachtung der Restriktionen (3.92)_{3,10,11,12} und der sich hieraus ergebenden Symmetrie- und Antimetrieigenschaften für das thermodynamische Gleichgewicht ein vereinfachter Ansatz für die freien HELMHOLTZschen Energien eingeführt werden. Somit sind die freien HELMHOLTZschen Energien $\overset{c}{f}$ von der Differenzgeschwindigkeit $\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k$, dem Temperaturgradienten $T_{,k}$ und der Porositätsänderung $\overset{f}{n}_{,k}$ unabhängig, was für einen Zustand in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts gerechtfertigt erscheint.

Mit diesen Überlegungen ergeben sich aus (3.138) bis (3.143) die folgenden konstitutiven Beziehungen für die Spannungen der beiden Komponenten, die Interaktionskraft, den Wärmefluß des Gemisches sowie die Entropien:

$$\overset{s}{\tau}_{ik} = \rho^s \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \gamma_{ik}} \quad (3.145)$$

$$\tau^{ik} = \rho \frac{\partial f}{\partial \gamma_m^m} g^{+ik} + 2\mu \dot{\gamma}^{ik} + \lambda \dot{\gamma}_m^m g^{+ik} \quad (3.146)$$

$$\Delta Q^k = \alpha_v (v^k - v^k) - \rho \frac{\partial f}{\partial n} n_{,k} \quad (3.147)$$

$$\dot{h}^k + \dot{h}^k = -\beta_T T_{,k} \quad (3.148)$$

$$\dot{s} = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad \dot{s} = -\frac{\partial f}{\partial T} \quad (3.149)$$

Aufgrund der Definition der Interaktionskräfte $\Delta \overset{c}{Q}^k$ als Druckkräfte entspricht (3.147) wegen $\Delta \overset{s}{Q}^k = -\Delta \overset{f}{Q}^k$ der auf die Flüssigkeit wirkenden Zugkraft. Zur Herleitung der thermoelastischen Stoffgleichungen werden im nachfolgenden Kapitel die hier getroffenen Vereinfachungen der konstitutiven Theorie zugrunde gelegt.

3.6.3 Die thermoelastischen Stoffgleichungen

3.6.3.1 Konstitutive Gleichung für die Spannung des Feststoffes

Mit den zuvor gemachten Annahmen ist die freie HELMHOLTZsche Energie $\overset{s}{f} = \overset{s}{f}(\overset{s}{\gamma}_{ik}, T, \overset{f}{n})$ für ein isotropes Kontinuum von den Invarianten des Verzerrungstensors, der Temperatur und der Porosität abhängig. Ein spezieller Ansatz kann über die Aufspaltung der freien HELMHOLTZschen Energie in zwei von der Temperatur und der Verzerrung abhängige Funktionen formuliert werden, wobei letztere zusätzlich vom Quadrat der Porositätsänderung abhängig ist:

$$\overset{s}{f} = \overset{s}{f}_0(\overset{s}{S}_1, \overset{s}{S}_2, \overset{s}{S}_3, T) + \frac{1}{2} \overset{s}{f}_1(\overset{s}{S}_1, \overset{s}{S}_2, \overset{s}{S}_3, T) (\overset{f}{n} - \overset{f}{n}_0)^2 \quad (3.150a)$$

Mit diesem Ansatz werden auch die Bedingungen für das thermodynamische Gleichgewicht (3.99)_{1,2} befriedigt.

Da ein lineares Stoffgesetz hergeleitet werden soll, kann auf den zweiten Term in (3.150a) verzichtet werden und die freie HELMHOLTZsche Energie nimmt die folgende bekannte Form an:

$$\overset{s}{f} = \overset{s}{f}(\overset{s}{S}_1, \overset{s}{S}_2, \overset{s}{S}_3, T) \quad (3.150b)$$

Dabei sind die Invarianten in Abhängigkeit der gemischtvarianten Verzerrungen definiert:

$$\begin{aligned} \overset{s}{S}_1 &= \gamma_k^k \\ \overset{s}{S}_2 &= \frac{1}{2}(\gamma_n^m \gamma_m^n - \overset{s}{S}_1^2) \\ \overset{s}{S}_3 &= \frac{1}{3}\gamma_n^m \gamma_s^n \gamma_m^s - \overset{s}{S}_1 \overset{s}{S}_2 - \frac{1}{3}\overset{s}{S}_1^3 \end{aligned} \quad (3.151)$$

Nach Einsetzen von (3.150b) in (3.145), Umformung der kovarianten Verzerrungen mit Hilfe der Maßzahlen g^{mk} und Anwendung der Kettenregel folgt:

$$\tau^{ik} = \rho \left(\frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_1} \frac{\partial \overset{s}{S}_1}{\partial \gamma_i^m} + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_2} \frac{\partial \overset{s}{S}_2}{\partial \gamma_i^m} + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_3} \frac{\partial \overset{s}{S}_3}{\partial \gamma_i^m} \right) g^{mk} \quad (3.152)$$

Mit den Ableitungen der Invarianten und Sortieren nach Potenzen von γ_m^i lautet das Stoffgesetz für den Feststoff:

$$\tau^{ik} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(a_0 \delta_m^i + a_1 \gamma_m^i + a_2 \gamma_m^n \gamma_n^i \right) g^{mk} \quad (3.153)$$

Hierin sind die Koeffizienten folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_1} - \overset{s}{S}_1 \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_2} - \overset{s}{S}_2 \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_3} \\ a_1 &= \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_2} - \overset{s}{S}_1 \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_3} \\ a_2 &= \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \overset{s}{S}_3} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Die Koeffizienten hängen somit von der bekannten freien HELMHOLTZsche Energie ab und sind nicht frei wählbar.

Im folgenden soll ein lineares isotropes Stoffgesetz formuliert werden. Hierzu muß der Koeffizient $\overset{s}{a}_2$ in (3.153) verschwinden, was unter Berücksichtigung von (3.154) nur der Fall ist, wenn die freie HELMHOLTZsche Energie von der Invarianten $\overset{s}{s}_3$ unabhängig ist. Zusätzlich müssen die übrigen Koeffizienten $\overset{s}{a}_0$, $\overset{s}{a}_1$ so gewählt werden, daß die Stoffgleichung (3.153) linear in $\overset{s}{\gamma}_k^i$ und T ist. Diese lauten somit:

$$\begin{aligned}\overset{s}{a}_0 &= \overset{s}{K} \overset{s}{S}_1 - \overset{s}{\alpha}_T (T - T_0) \\ \overset{s}{a}_1 &= 2 \overset{s}{G}\end{aligned}\tag{3.155}$$

Hiermit folgt die lineare thermoelastische Stoffgleichung für den Feststoff:

$$\overset{s}{\tau}^{ik} = \frac{\overset{s}{\rho}}{\rho_0} \left(\overset{s}{K} \overset{s}{\gamma}_n^i \delta_m^i + 2 \overset{s}{G} \overset{s}{\gamma}_m^i - \overset{s}{\alpha}_T (T - T_0) \delta_m^i \right) \overset{+}{g}^{mk}\tag{3.156}$$

Hierin sind die LAMÉschen Stoffkonstanten $\overset{s}{K}$, $\overset{s}{G}$ sowie der Wärmeausdehnungskoeffizient $\overset{s}{\alpha}_T$ des Feststoffes bekannt.

3.6.3.2 Konstitutive Gleichung für die Spannung der Flüssigkeit

Die konstitutive Beziehung für eine NEWTONSche Flüssigkeit mit linearer Abhängigkeit des elastischen Spannungsanteils von den Invarianten $\overset{f}{\gamma}_m^i$ und T ist der Gleichung (3.146) zu entnehmen:

$$\overset{f}{\tau}^{ik} = \overset{f}{\rho} \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \overset{f}{\gamma}_m^i} \overset{+}{g}^{ik} + 2 \overset{f}{\mu} \overset{f}{\dot{\gamma}}^{ik} + \overset{f}{\lambda} \overset{f}{\dot{\gamma}}_m^i \overset{+}{g}^{ik}\tag{3.157}$$

Mit einem geeigneten Ansatz für die freie HELMHOLTZsche Energie $\overset{f}{f}$ ergibt sich die folgende Ableitung:

$$\frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \overset{f}{\gamma}_m^i} = \frac{1}{\overset{f}{\rho}_0} \left(\overset{f}{K} \overset{f}{\gamma}_m^i - \overset{f}{\alpha}_T (T - T_0) \right)\tag{3.158}$$

Aus (3.157) folgt hiermit die konstitutive Beziehung für die Flüssigkeit:

$$\tau^{ik} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\overset{f}{K} \overset{f}{\gamma}_m^m - \overset{f}{\alpha}_T (T - T_0) \right) \overset{+}{g}^{ik} + 2 \overset{f}{\mu} \overset{\dot{f}}{\gamma}^{ik} + \overset{f}{\lambda} \overset{\dot{f}}{\gamma}_k^k \overset{+}{g}^{ik} \quad (3.159)$$

Die Volumendehnung wird häufig über die Dichteänderung in der konstitutiven Gleichung beschrieben. Für die Invariante kann der nachstehende Zusammenhang (Näherung über Reihenentwicklung) verwendet werden:

$$\begin{aligned} \overset{f}{\gamma}_m^m &= - \ln \frac{\rho}{\rho_0} \\ &\approx 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned} \quad (3.160)$$

In der konstitutiven Gleichung sind der Kompressionsmodul $\overset{f}{K}$, der Wärmeausdehnungskoeffizient $\overset{f}{\alpha}_T$ und die Scher- und Volumenviskosität $\overset{f}{\mu}$, $\overset{f}{\lambda} + \frac{2}{3}\overset{f}{\mu}$ der Flüssigkeit gegeben.

3.6.3.3 Wärmeleitungsgleichung für das Mehrkomponentenkontinuum

Zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung wird von der Energieerhaltung des Gemisches (3.78) unter Hinzufügen der Nebenbedingung (3.79) ausgegangen:

$$\begin{aligned} & - \rho \left(\overset{\dot{s}}{f} + \overset{\dot{s}}{s} T + \overset{\dot{s}}{s} \dot{T} \right) - \rho \left(\overset{\dot{f}}{f} + \overset{\dot{f}}{s} T + \overset{\dot{f}}{s} \dot{T} \right) + \rho \overset{f}{s} T_{,k} (\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k) \\ & + \overset{s}{\tau}^{ik} \overset{\dot{s}}{\gamma}_{ki} + \overset{f}{\tau}^{ik} \overset{\dot{f}}{\gamma}_{ki} - \Delta \overset{s}{Q}^k (\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k) - \overset{s}{h}^k |_{,k} - \overset{f}{h}^k |_{,k} + \rho \overset{s}{r} + \rho \overset{f}{r} \\ & + \Lambda \left(\overset{\dot{s}}{n} + \overset{\dot{f}}{n} - \overset{f}{n}_{,k} (\overset{f}{v}_k - \overset{s}{v}_k) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.161)$$

Um die in (3.161) enthaltenen Zeitableitungen der freien HELMHOLTZschen Energien und der Entropien zu bestimmen, werden die im Abschnitt 3.6.2.3 getroffenen Annahmen zur Vereinfachung der konstitutiven Theorie verwendet und die Thermodiffusion ($\alpha_T = \beta_v = 0$) ausgeschlossen. Unter der Vorgabe, daß die freien HELMHOLTZschen Energien nur von T , $\overset{c}{\gamma}_{ik}$ und $\overset{f}{n}$ abhängig sind, folgen die Ableitungen für diese und mit (3.149) für die Entropien:

$$\begin{aligned}
\dot{\overset{s}{f}} &= \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial \gamma_{ik}} \dot{\gamma}_{ik} + \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial n} \dot{n} - \frac{\partial \overset{s}{f}}{\partial n_{,k}} \dot{n}_{,k} (\overset{f}{v}^k - \overset{s}{v}^k) \\
\dot{\overset{f}{f}} &= \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial T} T_{,k} (\overset{s}{v}^k - \overset{f}{v}^k) + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial \gamma_k^k} \dot{\gamma}_k^k + \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial n} \dot{n} \\
\dot{\overset{s}{s}} &= -\frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T \partial \gamma_{ik}} \dot{\gamma}_{ik} - \frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T \partial n} \dot{n} + \frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T \partial n_{,k}} \dot{n}_{,k} (\overset{f}{v}^k - \overset{s}{v}^k) \\
\dot{\overset{f}{s}} &= -\frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T^2} T_{,k} (\overset{s}{v}^k - \overset{f}{v}^k) - \frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T \partial \gamma_k^k} \dot{\gamma}_k^k - \frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T \partial n} \dot{n}
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Nach Einsetzen dieser Zeitableitungen in (3.161) und Verwendung der Beziehungen (3.149), (3.145), (3.146), (3.92)9, (3.130) und (3.131) kann die Energieerhaltung in nachstehender Form angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&\dot{T} \left(\rho \frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T^2} + \rho \frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T^2} \right) T - T_{,k} \rho \frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T^2} T (\overset{s}{v}^k - \overset{f}{v}^k) \\
&+ \gamma_{ik} \rho \frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T \partial \gamma_{ik}} T + \gamma_{ik} \rho \frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T \partial \gamma_m^m} \mathbf{g}^{ik} T + \gamma_{ik} (2\mu \gamma^{ik} + \lambda \gamma_m^m \mathbf{g}^{ik}) \\
&+ \dot{n} \left(\rho \frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T \partial n} + \rho \frac{\partial^2 \overset{f}{f}}{\partial T \partial n} \right) T + n_{,k} \left(\rho \frac{\partial \overset{f}{f}}{\partial n} + \rho \frac{\partial^2 \overset{s}{f}}{\partial T \partial n} T \right) (\overset{s}{v}^k - \overset{f}{v}^k) \\
&+ \dot{n} \Lambda + \alpha_v (\overset{s}{v}_k - \overset{f}{v}_k) (\overset{s}{v}^k - \overset{f}{v}^k) - \mathbf{h}^k|_k - \mathbf{h}^k|_k + \rho r + \rho r = 0
\end{aligned} \tag{3.163}$$

Mit dem folgenden Ansatz für die freie HELMHOLTZsche Energie

$$\overset{c}{f} = \overset{c}{f}_0(T, \gamma_{ik}) + \frac{1}{2} \overset{c}{f}_1(\gamma_{ik}) (\overset{f}{n} - \overset{f}{n}_0)^2 \tag{3.164}$$

wird eine Entkopplung der Porositätsänderung von der Temperatur erzielt, womit die gemischten Ableitungen in der dritten Zeile von (3.163) eliminiert werden. Mit der Einführung

der spezifischen Wärmefunktion bei konstantem Volumen entsprechend der klassischen Kontinuumsmechanik

$$\dot{c}_v^c = T \left(\frac{\partial s^c}{\partial T} \right)_V = -T \frac{\partial^2 f^c}{\partial T^2} \quad c = s, f \quad (3.165)$$

sowie Verwendung von (3.131), (3.132) und (3.134) kann die Energieerhaltung umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \dot{T} \left(\rho^s c_v^s + \rho^f c_v^f \right) - T_{,k} \rho^s c_v^f (v^k - v^k) + \dot{\gamma}_{ik}^s \rho^s \frac{\partial^2 f^s}{\partial T \partial \gamma_{ik}^s} T \\ & + \dot{\gamma}_{ik}^f \rho^f \frac{\partial^2 f^f}{\partial T \partial \gamma_m^m} g^{ik} T + \dot{\gamma}_{ik}^f (2\mu^f \dot{\gamma}_{ik}^f + \lambda^f \dot{\gamma}_m^m g^{ik}) + n_{,k}^f \rho^f \frac{\partial f^f}{\partial n} (v^k - v^k) \\ & + \frac{\kappa^2}{M} (n - n_0)^2 + \alpha_v (v_k^s - v_k^f) (v^k - v^k) - h^k|_k - h^k|_k + \rho^s r + \rho^f r = 0 \end{aligned} \quad (3.166)$$

Sind die freien HELMHOLTZschen Energien linear von T abhängig, dann verschwinden die Wärmefunktionen, womit nur der stationäre thermische Zustand beschrieben wird. Mit den isotropen Ansätzen für die Thermoelastizitätstensoren

$$\rho^s \frac{\partial^2 f^s}{\partial T \partial \gamma_{ik}^s} = \alpha_T^s \delta^{ik} \quad , \quad \rho^f \frac{\partial^2 f^f}{\partial T \partial \gamma_m^m} = \alpha_T^f \delta^{ik} \quad (3.167)$$

und der Beziehung (3.148) ergibt sich dann die Wärmeleitungsgleichung:

$$\dot{\gamma}_{ik}^s \alpha_T^s \delta^{ik} T + \dot{\gamma}_{ik}^f \alpha_T^f \delta^{ik} T + D_1 + D_2 + D_3 + \rho^s r + \rho^f r = -(\beta_T T_{,k})_{,k} \quad (3.168)$$

Hierin sind die auf der Viskosität der Flüssigkeit, der Porositätsänderung und der Reibungsarbeit der Interaktionskräfte basierenden Dissipationsterme definiert:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \dot{\gamma}_{ik}^f (2\mu \dot{\gamma}_{ik}^f + \lambda \dot{\gamma}_m^f \delta^{ik}) \\
D_2 &= \dot{n}_{,k}^f \rho \frac{\partial f}{\partial n} (v^k - v^k) + \frac{\kappa^2}{M} (n - n_0)^2 \\
D_3 &= \alpha_v (v_k^s - v_k^f) (v^k - v^k)
\end{aligned} \tag{3.169}$$

Die Beziehung (3.168) enthält als Sonderfall die FOURIERSche Wärmeleitungsgleichung, wenn die Koppelterme zwischen Temperatur und Verzerrungsgeschwindigkeit sowie die Dissipationsterme D_i vernachlässigt werden.

3.6.4 Bemerkungen zur Lösung der thermodynamischen Zustandsgleichungen

Der thermodynamische Zustand des Zweikomponentenkontinuums wird durch die zehn Grundvariablen G , die von den Raumkoordinaten θ^i und der Zeit t abhängen, vollständig beschrieben. Zur Lösung stehen ebenso viele Zustandsgleichungen zur Verfügung, die sich aus den Erhaltungsgleichungen (3.72) bis (3.76) und dem Konzept der Volumenanteile (3.71)₁ unter Verwendung der konstitutiven Beziehungen für die Feldgrößen ergeben. Die Zustandsgleichungen werden im folgenden noch einmal zusammengestellt.

Aus der Massen- und Impulserhaltung ergeben sich die Beziehungen:

$$\dot{\rho}^s + \rho^s \dot{\gamma}_k^s = 0 \tag{3.170}$$

$$\dot{\rho}^f + \rho^f \dot{\gamma}_k^f = 0$$

$$\tau^{ik}(G)|_i + Q^k - \rho^s b^k = \Delta Q^k(G) \tag{3.171}$$

$$\tau^{ik}(G)|_i + Q^k - \rho^f b^k = -\Delta Q^k(G)$$

In den Gleichungen (3.171) ist dabei die Beziehung (3.74) für die Interaktionskräfte verwendet worden. Die Funktionen $\tau^{ik}(G)$, $\tau^{ik}(G)$ und $\Delta Q^k(G)$ deuten an, daß hierfür die

entsprechenden konstitutiven Gleichungen (3.156), (3.159) und (3.147) einzusetzen sind. Werden noch die Verzerrungen durch die Verschiebungen ausgedrückt, erhält man ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem in den unbekannt Grundvariablen G .

Die aus den zuvor getroffenen Vereinfachungen resultierenden konstitutiven Beziehungen für die Spannungen und die Interaktionskraft werden ebenfalls noch einmal zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \tau^{ik} &= \frac{\rho}{\rho_0} \left(K \gamma_n^s \delta_m^i + 2G \gamma_m^s \delta_m^i - \alpha_T (T - T_0) \delta_m^i \right) g^{mk} \\ \tau^{ik} &= \frac{\rho}{\rho_0} \left(K \gamma_m^f - \alpha_T (T - T_0) \right) g^{ik} + 2\mu \gamma^{ik} + \lambda \gamma_k^f g^{ik} \end{aligned} \quad (3.172)$$

$$\Delta Q^k = \alpha_v (v^k - v^k)$$

Der Einfluß einer Temperaturänderung des Kontinuums wird über die Energieerhaltung des Gemisches (3.78) erfaßt. Für den hier angenommenen Fall eines einheitlichen Temperaturfeldes T für beide Stoffkomponenten wurde aus der Energieerhaltung unter Verwendung der konstitutiven Ansätze für die Wärmeströme \dot{h} , die Entropien \dot{s} und die freien HELMHOLTZschen Energien \dot{f} die Wärmeleitungsgleichung zur Berechnung der Temperatur gewonnen:

$$\left(\dot{\gamma}_{ik}^s \alpha_T \delta^{ik} + \dot{\gamma}_{ik}^f \alpha_T \delta^{ik} \right) T + D + \rho^s r + \rho^f r = -(\beta_T T_{,k})_{,k} \quad (3.173)$$

Hierin sind die in (3.169) beschriebenen Dissipationsterme $D = D_1 + D_2 + D_3$ zusammengefaßt worden.

Mit der zeitlichen Änderung der Volumenanteile des Feststoffes

$$\dot{n} = \kappa (n - n_0) \quad \text{mit} \quad \kappa = M(\mathbf{P}_0) \psi(\mathbf{P}_0) \quad (3.174)$$

folgt aus (3.71)₁ die Bestimmungsgleichung für die Porosität n :

$$\dot{n} + \kappa (n - n_0) - n_{,k} (v^k - v^k) = 0 \quad (3.175)$$

Wird für κ eine geeignete konstitutive Beziehung $\kappa = \kappa(G)$ eingesetzt, so erhält man eine Differentialgleichung in den unbekannt Grundvariablen G .

Mit den Zustandsgleichungen (3.170), (3.171), (3.173) und (3.175) stehen ebenso viele Bestimmungsgleichungen wie unbekannt Grundvariablen zur Verfügung, das Gleichungssystem ist somit mathematisch bestimmt und kann mit gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen gelöst werden.

Als mechanische Randbedingungen werden an den Oberflächen der Stoffe entweder die Verschiebungen oder die Oberflächenkräfte vorgegeben:

$$\begin{aligned} \overset{s}{w}^k \Big|_{R_1} &= \overset{s}{W}^k & \overset{f}{w}^k \Big|_{R_1} &= \overset{f}{W}^k \\ \overset{s}{\tau}^{ik} n_k \Big|_{R_2} &= \overset{s}{p}^i & \overset{f}{\tau}^{ik} n_k \Big|_{R_2} &= \overset{f}{p}^i \end{aligned} \quad (3.176)$$

Die thermischen Randbedingungen sind durch die Wärmeflüsse oder die Temperatur des Gemisches an der Oberfläche definiert:

$$\overset{s}{h}^k n_k \Big|_{R_3} = \overset{s}{H}^k \quad \overset{f}{h}^k n_k \Big|_{R_3} = \overset{f}{H}^k \quad T \Big|_{R_3} = T_R \quad (3.177)$$

Die Anfangsbedingungen werden über den Verschiebungs- und Geschwindigkeitszustand zur Zeit $t = 0$ beschrieben:

$$\begin{aligned} \overset{s}{w}^k \Big|_{t=0} &= \overset{s}{W}_0^k & \overset{f}{w}^k \Big|_{t=0} &= \overset{f}{W}_0^k \\ \dot{\overset{s}{w}}^k \Big|_{t=0} &= \dot{\overset{s}{W}}_0^k & \dot{\overset{f}{w}}^k \Big|_{t=0} &= \dot{\overset{f}{W}}_0^k \end{aligned} \quad (3.178)$$

Die Lösung des Gleichungssystems kann theoretisch mit geeigneten Ansatzfunktionen für die Grundvariablen $\{\overset{s}{w}^k, \overset{f}{w}^k, T, n\}$ über Näherungsverfahren, wie die Methode der gewichteten Residuen (GALERKIN), die Variationsrechnung (RAYLEIGH-RITZ) etc., gefunden werden. Eine exakte dreidimensionale Berechnung des Knochens, z.B. mit der FE-Methode, scheint jedoch nicht angebracht zu sein, da zum einen die komplizierte Struktur des Knochens einen fast unüberwindlichen Aufwand an die Modellierung darstellt und zum anderen aufgrund unzureichender Informationen bezüglich der Materialeigenschaften eine Verifikation der Ergebnisse gar nicht möglich ist. Somit verlangt eine konsequente Analyse der Systemeigenschaften zunächst die Beschreibung einfacher überschaubarer Modelle. Dieses ist auch im Hinblick auf

die Entwicklung von Materialgesetzen und die experimentelle Bestimmung der unbekannt Materialparameter erforderlich.

Eine Vereinfachung des Gleichungssystems kann, abhängig von der betrachteten geometrischen Struktur (z.B. schalenförmiger Rand des Femurkopfes oder lange Röhrenknochen), durch die Verwendung von Schalen- oder Stabkoordinaten erzielt werden. Im nächsten Kapitel wird für den hier betrachteten stabförmigen Schaftbereich des Femurs mit geeigneten Hypothesen eine Reduktion des allgemeinen dreidimensionalen Problems auf Stabkoordinaten durchgeführt und somit ein eindimensionales Differentialgleichungssystem gewonnen.

4 Transformation der Bewegungsgleichungen des Zweikomponentenkontinuums in eindimensionale Gleichungen mit Hilfe von Hypothesen

4.1 Einleitende Bemerkungen

Die Bewegungsgleichungen der beiden Komponenten Feststoff und Flüssigkeit sollen im folgenden durch Stabkoordinaten beschrieben und mit Hilfe geeigneter Hypothesen auf eindimensionale Differentialgleichungen reduziert werden. Mit Rücksicht auf den Umfang der Arbeit und Beschränkung auf die wesentlichen Grundgedanken werden einige Vereinfachungen eingeführt. Somit wird im folgenden der Knochen als gerader Stab mit einem idealen Fluid unter kleinen Verformungen betrachtet, was zu einer linearen Theorie führt. Zusätzlich wird von einem isothermen Zustand ausgegangen sowie eine konstante Porosität vorausgesetzt.

Während die Bewegung des Feststoffes mit der klassischen Stabtheorie unter Verwendung der Hypothesen von BERNOULLI, DE ST. VENANT und WAGNER beschrieben wird, ist aufgrund einer Relativbewegung der Flüssigkeit gegenüber dem Feststoff in allen Richtungen die Anwendung der Hypothesen vom Ebenbleiben des Querschnittes und der Erhaltung der Formtreue nicht mehr möglich. Über geeignete Ansatzfunktionen für die Relativverschiebung der Flüssigkeit wird mit Hilfe des Verfahrens von GALERKIN (Prinzip der virtuellen Arbeit) eine Reduktion der Bewegungsgleichungen auf partielle Differentialgleichungen in Abhängigkeit der Stabachsenkoordinate und der Zeit erreicht.

4.2 Kinematik des geraden Stabes mit Flüssigkeit

Zur Herleitung der Kinematik ist in Bild 4.1 der Stab im Ausgangszustand t_0 und im Augenblickszustand zur Zeit t dargestellt. Die Geometrie des Stabes (Feststoff) wird im unverformten Zustand durch den Ortsvektor $\overset{+}{\mathbf{R}}$ der Stabachse im Schwerpunkt und den Direktor $\overset{+}{\mathbf{d}}$ beschrieben, der auf die Basisvektoren $\overset{+}{\mathbf{a}}_1, \overset{+}{\mathbf{a}}_2, \overset{+}{\mathbf{a}}_3$ der Stabachse bezogen ist. Diese stellen kartesische Einheitsvektoren dar, wobei $\overset{+}{\mathbf{a}}_1$ in Richtung der Stabachse orientiert ist und $\overset{+}{\mathbf{a}}_1, \overset{+}{\mathbf{a}}_2$

den Stabquerschnitt aufspannen. Die Basisvektoren in einem beliebigen Punkt $\overset{+}{P}$ sind im Fall des geraden Stabes identisch mit denen der Stabachse.

Nach der Zeit t hat sich der Punkt $\overset{+}{P}$ bei gleichen Parameterwerten $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ nach P verschoben, der durch den Direktor \mathbf{d} und die Verwölbung \mathbf{u} , bezogen auf die verdrehte Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, dargestellt wird. In diesem Augenblickszustand fließt die Flüssigkeit in das durch die Feststoffkinematen vorgegebene Volumenelement in P ein. Die Verschiebung $\tilde{\mathbf{w}}$ von dem unbekanntem Punkt $\tilde{\overset{+}{P}}$ der Flüssigkeit im Ausgangszustand zum Punkt P im Augenblickszustand wird entsprechend den Erläuterungen in Kapitel 3.2.2 mit Hilfe des Vektors $\Delta\tilde{\mathbf{w}}$ auf die unverformte Basis $\overset{+}{\mathbf{a}}_i$ bezogen.

Die Unterscheidung der Feststoff- und Flüssigkeitskinematen erfolgt durch eine aufgesetzte Tilde für letztere. Im folgenden braucht aufgrund der orthonormalen Basisvektoren nicht zwischen der ko- und kontravarianten Darstellungsweise unterschieden zu werden, womit nur tiefgestellte Indizes verwendet werden.

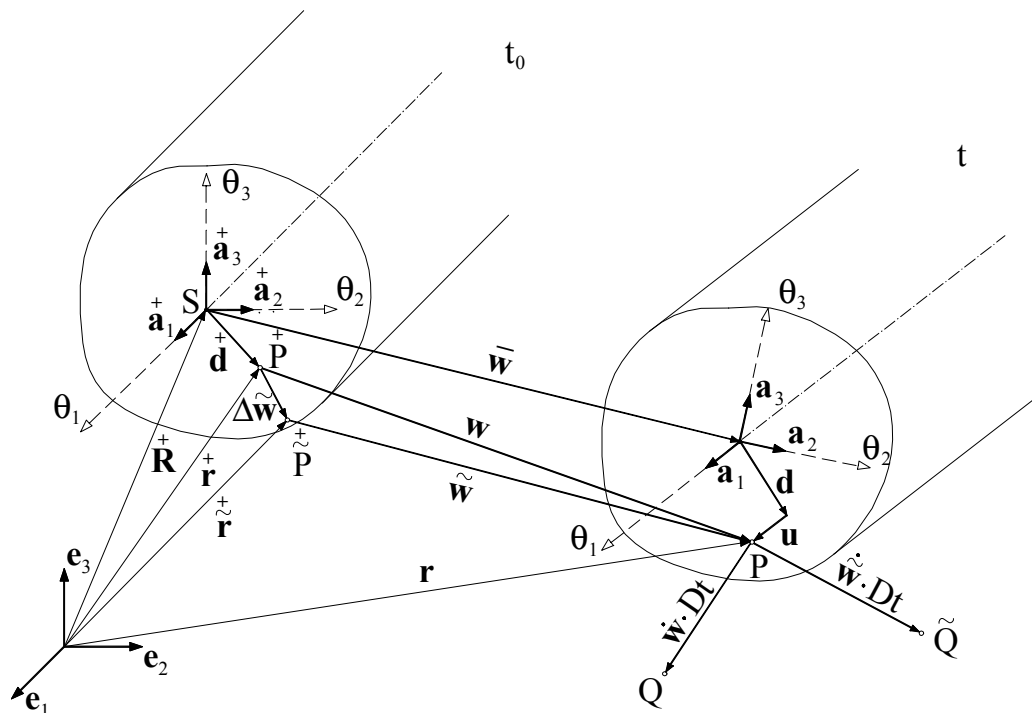


Bild 4.1: Stab im Ausgangszustand t_0 und im Augenblickszustand t

Die Verschiebung des **Feststoffes** $\overset{+}{P}$ im Stabraum setzt sich aus einer Verschiebung der Stabachse $\bar{\mathbf{w}}(\theta_1, t)$, einer Verdrehung des Stabquerschnittes $\varphi(\theta_1, t)$ und einer Verwölbung

$\mathbf{u}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$ zusammen. Unter Vorgabe kleiner Verformungen werden die linearisierten Beziehungen, die auf die unverformten Basisvektoren bezogen sind, angegeben:

$$\mathbf{w}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) = \bar{\mathbf{w}}(\theta_1, t) + \boldsymbol{\varphi}(\theta_1, t) \times \bar{\mathbf{d}}(\theta_2, \theta_3) + \mathbf{u}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}(\theta_1, t) &= \bar{w}_1^+ \mathbf{a}_1^+ + \bar{w}_2^+ \mathbf{a}_2^+ + \bar{w}_3^+ \mathbf{a}_3^+ \\ \boldsymbol{\varphi}(\theta_1, t) &= \varphi_1^+ \mathbf{a}_1^+ - \bar{w}'_3 \mathbf{a}_2^+ + \bar{w}'_2 \mathbf{a}_3^+ \\ \bar{\mathbf{d}}(\theta_2, \theta_3) &= \theta_2^+ \mathbf{a}_2^+ + \theta_3^+ \mathbf{a}_3^+ \\ \mathbf{u}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) &= \Omega(\theta_2, \theta_3) \varphi_1^+ \mathbf{a}_1^+ \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dabei wurden in (4.1)₃ die Hypothesen von BERNOULLI und DE ST. VENANT und in (4.1)₅ die Hypothese von WAGNER berücksichtigt. In (4.1)₅ ist die Einheitsverwölbung $\Omega(\theta_2, \theta_3)$ als bekannt vorauszusetzen. Die Ableitung nach der Koordinate θ_1 ist mit einem hochgestellten Strich gekennzeichnet: $\frac{d}{d\theta_1}(\dots) = (\dots)'$.

Die Geschwindigkeit des Feststoffes im Punkt P berechnet sich aus der materiellen Zeitableitung des zugehörigen Ortsvektors $(\mathbf{r})_s'$ und setzt sich aus der Translationsgeschwindigkeit $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ des Schwerpunktes, der Rotationsgeschwindigkeit des Stabquerschnittes $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ und der Verwölbungsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}$ zusammen. Für kleine Verformungen gelten die folgenden linearen Beziehungen mit Bezug auf die unverformte Basis:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv \dot{\bar{\mathbf{w}}}(\theta_1, t) \\ &= \dot{\bar{\mathbf{w}}}(\theta_1, t) + \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\theta_1, t) \times \bar{\mathbf{d}}(\theta_2, \theta_3) + \dot{\mathbf{u}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{w}}}(\theta_1, t) &= \dot{\bar{w}}_1^+ \mathbf{a}_1^+ + \dot{\bar{w}}_2^+ \mathbf{a}_2^+ + \dot{\bar{w}}_3^+ \mathbf{a}_3^+ \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\theta_1, t) &= \dot{\varphi}_1^+ \mathbf{a}_1^+ - \dot{\bar{w}}'_3 \mathbf{a}_2^+ + \dot{\bar{w}}'_2 \mathbf{a}_3^+ \\ \dot{\mathbf{u}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) &= \Omega(\theta_2, \theta_3) \dot{\varphi}_1^+ \mathbf{a}_1^+ \end{aligned}$$

Aus der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit (4.2) folgt die Beschleunigung des Feststoffes

$$\mathbf{b} \equiv \ddot{\bar{\mathbf{w}}}(\theta_1, t) \quad (4.3)$$

und lautet in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{w}}_1 &= \ddot{\tilde{w}}_1 - \ddot{\tilde{w}}'_2 \theta_2 - \ddot{\tilde{w}}'_3 \theta_3 + \Omega(\theta_2, \theta_3) \ddot{\phi}'_1 \\ \ddot{\tilde{w}}_2 &= \ddot{\tilde{w}}_2 - \ddot{\phi}_1 \theta_3 \\ \ddot{\tilde{w}}_3 &= \ddot{\tilde{w}}_3 + \ddot{\phi}_1 \theta_2\end{aligned}\quad (4.4)$$

Die **Flüssigkeitsbewegung** soll aufgrund einer anschaulicheren physikalischen Interpretation und besseren Formulierung der Randbedingungen über die Relativkinematik zum Feststoff beschrieben werden. Die Relativverschiebung der Flüssigkeit entspricht hier dem negativen Verschiebungsvektor im Ausgangszustand $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{rel}} = -\Delta\tilde{\mathbf{w}}$ (siehe Bild 4.1) und kann somit auf die unverformte Basis \mathbf{a}_i^+ bezogen werden:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{rel}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) = \tilde{w}_{\text{rel}1} \mathbf{a}_1^+ + \tilde{w}_{\text{rel}2} \mathbf{a}_2^+ + \tilde{w}_{\text{rel}3} \mathbf{a}_3^+ \quad (4.5)$$

Die Absolutverschiebung der Flüssigkeit läßt sich mit dem Verschiebungsvektor des Feststoffes \mathbf{w} berechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}} &= (w_i - \Delta\tilde{w}_i) \mathbf{a}_i^+ \\ \text{mit } \Delta\tilde{w}_i &= -\tilde{w}_{\text{rel}i}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Die Verschiebungskomponenten $\tilde{w}_{\text{rel}i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$ sind unbekannte Funktionen, die keinen ebenen Querschnitt, wie bei der Hypothese von BERNOULLI, beschreiben. Für diese sind mit später noch zu erläuternden Randbedingungen geeignete Ansätze zu finden.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit folgt aus der materiellen Zeitableitung des Ortsvektors im Augenblickszustand $(\mathbf{r})_f^*$ und lautet entsprechend den Erläuterungen in Kapitel 3.3.2 mit den Gleichungen (3.20)₂ und (3.24)₁:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}} &\equiv (\dot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{w}})_f^* = \dot{\tilde{\mathbf{w}}} \\ &= \tilde{w}_{,t} + \tilde{w}_{,k} \tilde{\mathbf{c}}_k\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\text{mit } \tilde{\mathbf{c}}_k = (\delta_{mk} - \tilde{w}_{\text{rel}m>k})^{-1} \tilde{w}_{\text{rel}m>t}$$

Zusätzlich wird die Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeit im Augenblickszustand definiert:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{rel}} \equiv \dot{\tilde{\mathbf{w}}} - \dot{\mathbf{w}} = \tilde{w}_{\text{rel} > t} + (\mathbf{w} + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{rel}})_{,k} \tilde{\mathbf{c}}_k \quad (4.8)$$

Die Beschleunigung der Flüssigkeit ergibt sich aus der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit (4.7):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}} \equiv \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= (\tilde{\mathbf{w}}_{,t} + \tilde{\mathbf{w}}_{,k} \tilde{\mathbf{c}}_k)' \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_{,tt} + 2\tilde{\mathbf{w}}_{,tk} \tilde{\mathbf{c}}_k + \tilde{\mathbf{w}}_{,km} \tilde{\mathbf{c}}_k \tilde{\mathbf{c}}_m + \tilde{\mathbf{w}}_{,k} \tilde{\mathbf{c}}_{k,t} + \tilde{\mathbf{w}}_{,k} \tilde{\mathbf{c}}_{k,m} \tilde{\mathbf{c}}_m\end{aligned}\quad (4.9)$$

Nach Einsetzen von (4.4), (4.6) und (4.7)₂ lauten die Beschleunigungen in Komponentenschreibweise bezogen auf die unverformte Basis \mathbf{a}_i^+ :

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= \ddot{\tilde{w}}_1 - \ddot{\tilde{w}}'_2 \theta_2 - \ddot{\tilde{w}}'_3 \theta_3 + \Omega(\theta_2, \theta_3) \dot{\tilde{\varphi}}'_1 + \tilde{w}_{rel1,tt} + \Delta\tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 &= \ddot{\tilde{w}}_2 - \dot{\tilde{\varphi}}_1 \theta_3 + \tilde{w}_{rel2,tt} + \Delta\tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 &= \ddot{\tilde{w}}_3 + \dot{\tilde{\varphi}}_1 \theta_2 + \tilde{w}_{rel3,tt} + \Delta\tilde{b}_3\end{aligned}\quad (4.10)$$

Hierin entsprechen die materiellen Zeitableitungen des Feststoffes den partiellen Zeitableitungen: $(...)' = (...)'_{,t}$. Der letzte Term in den Beschleunigungskomponenten $\Delta\tilde{b}_i$ enthält gemischte Produkte aus den Feststoff- und Flüssigkeitskinematen sowie weitere Terme höherer Ordnung (u.a. Zentrifugal- und CORIOLIS-Beschleunigung). Die gemischten Produkte können auch bei kleinen Feststoffverformungen bedeutsam sein, wenn die Flüssigkeitgeschwindigkeit groß ist. Im Anhang A.3 sind die Beschleunigungskomponenten mit diesen Termen aufgeführt.

Die Relativbeschleunigung

$$\tilde{\mathbf{b}}_{rel} \equiv \tilde{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{w}} \quad (4.11)$$

wird später bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die Flüssigkeit benötigt.

4.3 Belastung des Stabes durch Interaktionskräfte

Die aus der Bewegung der Flüssigkeit resultierenden Trägheitskräfte werden über die Interaktionskräfte zwischen den viskos gekoppelten Komponenten auf den Feststoff übertragen. Diese über den Stabquerschnitt resultierenden Kräfte werden sinnvollerweise auf die Stabach-

se bezogen und sind in der klassischen Stabtheorie als äußere Streckenkräfte und -momente zu deuten (siehe Bild 4.2):

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{q} &= -\int_F \Delta \tilde{\mathbf{Q}} \, dF \\ \Delta \mathbf{m} &= -\int_F \mathbf{d} \times \Delta \tilde{\mathbf{Q}} \, dF\end{aligned}\tag{4.12}$$

Mit der konstitutiven Gleichung für die Interaktionskraft $\Delta \tilde{\mathbf{Q}}$ entsprechend (3.172)₃ lauten die auf die Gesamtfläche bezogenen Komponenten der Streckenlasten:

$$\begin{aligned}\Delta q_1 &= -\int_F \alpha_v \tilde{v}_{rel1} \, dF &= \int_F (\tilde{\rho} \tilde{b}_1 - \tilde{\tau}_{11,1}) \, dF \\ \Delta q_2 &= -\int_F \alpha_v \tilde{v}_{rel2} \, dF &= \int_F \tilde{\rho} \tilde{b}_2 \, dF \\ \Delta q_3 &= -\int_F \alpha_v \tilde{v}_{rel3} \, dF &= \int_F \tilde{\rho} \tilde{b}_3 \, dF \\ \Delta m_1 &= -\int_F \alpha_v (\theta_2 \tilde{v}_{rel3} - \theta_3 \tilde{v}_{rel2}) \, dF &= \int_F (\theta_2 \tilde{\rho} \tilde{b}_3 - \theta_3 \tilde{\rho} \tilde{b}_2) \, dF \\ \Delta m_2 &= -\int_F \alpha_v \theta_3 \tilde{v}_{rel1} \, dF &= \int_F \theta_3 (\tilde{\rho} \tilde{b}_1 - \tilde{\tau}_{11,1}) \, dF \\ \Delta m_3 &= \int_F \alpha_v \theta_2 \tilde{v}_{rel1} \, dF &= -\int_F \theta_2 (\tilde{\rho} \tilde{b}_1 - \tilde{\tau}_{11,1}) \, dF\end{aligned}\tag{4.13}$$

Zur Deutung der Interaktionsterme können die Koppelterme in den Feststoffgleichungen unter Vorgabe einer idealen Flüssigkeit entsprechend der rechten Integralausdrücke in (4.13) durch die Flüssigkeitskräfte ausgedrückt werden. Diese Darstellung dient jedoch nur der Anschauung, für eine weitere Rechnung ist diese Form nicht geeignet. In den Gleichungen (4.13)_{2,3} sind die Spannungszuwächse $\tilde{\tau}_{22,2}$ und $\tilde{\tau}_{33,3}$ nicht enthalten, da aufgrund der angenommenen Randbedingung, daß keine Flüssigkeit über die Außenseite aus dem Querschnitt austreten kann, die gesamte Trägheitskraft der Flüssigkeit im integralen Mittel auf das in Querrichtung starre Stabelement übertragen wird. In Stablängsrichtung kann hingegen ein Teil der Trägheitskraft über die Verformung der Flüssigkeit aufgenommen und z.B. über die Stirnseiten des Stabes abgetragen werden. Somit hat die Stabverformung einen Einfluß auf die Flüssigkeitsbewegung in Längsrichtung und den Spannungszustand der Flüssigkeit.

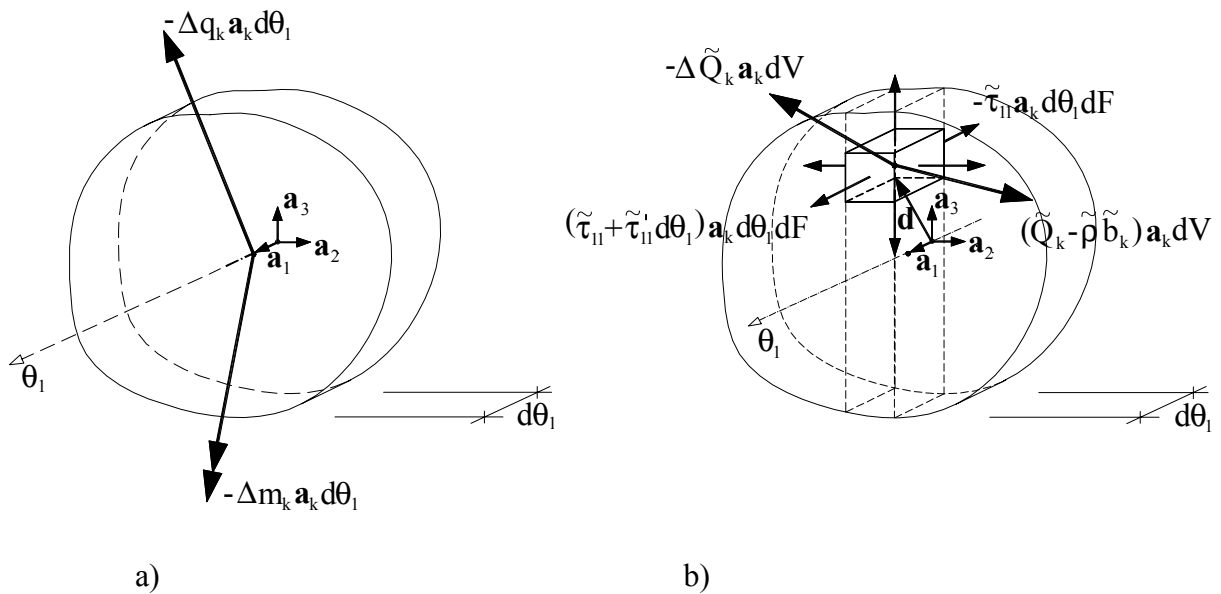


Bild 4.2: Definition der Interaktionskräfte a) am Stabelement des Feststoffes (ohne Schnittgrößen) und b) am Volumenelement der Flüssigkeit

4.4 Die konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen des Feststoffes

Die konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen des Feststoffes können über die zeitliche Änderung der Formänderungsarbeit aus dem räumlichen Kontinuum hergeleitet werden. Nachfolgend werden die Schnittgrößen für den geraden Stab unter Verwendung der Hypothesen von BERNOULLI, DE ST. VENANT und WAGNER zusammengefasst. Eine ausführliche Herleitung, insbesondere in krummlinigen Koordinaten und in COSSERAT-Kinematen, ist den Arbeiten von [SCHROEDER 1982], [HOEBORN 1988] und [FISCHER 1994] zu entnehmen.

Die Komponenten der Schnittgrößen wirken in den aus Bild 4.3 (Kapitel 4.5) ersichtlichen Koordinatenrichtungen und lauten bei Vorgabe eines Hauptachsensystems wie folgt:

$$\begin{aligned}
 N &= EF \bar{w}'_1 \\
 M_1 &= GI_t \varphi'_1 - (EF_{\Omega\Omega} \varphi''_1)' + (\theta_{3D} EF_{22} \bar{w}''_2 - \theta_{2D} EF_{33} \bar{w}''_3)' - M_{\Omega} \\
 M_2 &= -EF_{33} \bar{w}''_3 - \theta_{2D} EF_{33} \varphi''_1 \\
 M_3 &= EF_{22} \bar{w}''_2 - \theta_{3D} EF_{22} \varphi''_1
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

In dem Torsionsmoment M_1 beschreibt der erste Term die DE ST. VENANTSche Torsion. Die beiden nachfolgenden Terme entstehen aus der sekundären Schubspannung und stellen die Wölbkrafttorsion und die Kopplung zwischen Biegung und Drillung abhängig von der Lage des Drillruhepunktes dar. Der letzte Term in (4.14)₂ beschreibt das Bimoment aus einer gegebenen Streckenlängskraft $n(\theta_1)$:

$$M_{\Omega} = \oint_s n(\theta_1) \Omega(\theta_2, \theta_3) ds \quad (4.15)$$

Die Lage des Drillruhepunktes $(\theta_{2D}, \theta_{3D})$ und das Torsionsträgheitsmoment I_t lassen sich aus den im Anschluß aufgeführten Flächenwerten berechnen:

$$\theta_{2D} = -\frac{F_{\Omega 3}}{F_{33}}, \quad \theta_{3D} = \frac{F_{\Omega 2}}{F_{22}} \quad (4.16)$$

$$I_t = F_{22} + F_{33} + F_{2\Omega,3} - F_{3\Omega,2} \quad (4.17)$$

Die Flächenwerte sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} F &= \int_F dF \\ F_{22} &= \int_F \theta_2 \theta_2 dF & F_{33} &= \int_F \theta_3 \theta_3 dF \\ F_{\Omega\Omega} &= \int_F \Omega \Omega dF & & \\ F_{\Omega 2} &= \int_F \Omega \theta_2 dF & F_{\Omega 3} &= \int_F \Omega \theta_3 dF \\ F_{2\Omega,3} &= \int_F \theta_2 \Omega_{,3} dF & F_{3\Omega,2} &= \int_F \theta_3 \Omega_{,2} dF \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aufgrund der verwendeten Hypothesen von BERNOULLI und DE ST. VENANT sind nur 4 Kinematoren zur Beschreibung des verformten Zustandes notwendig, denen 6 Gleichgewichtsbedingungen gegenüberstehen. Damit das Problem mathematisch bestimmt ist, werden neben den vier unbekanntenen Kinematoren $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \varphi_1$ die beiden Querkräfte Q_2, Q_3 , für die keine konstitutiven Beziehungen existieren, als Unbekannte eingeführt. Die Bewegungsgleichungen werden für diese Kinematoren im folgenden Kapitel hergeleitet.

4.5 Die eindimensionalen Bewegungsgleichungen des Feststoffes

In Bild 4.3 ist das Stabelement des freigeschnittenen Feststoffes mit allen angreifenden Kräften im verformten Zustand zur Zeit t dargestellt.

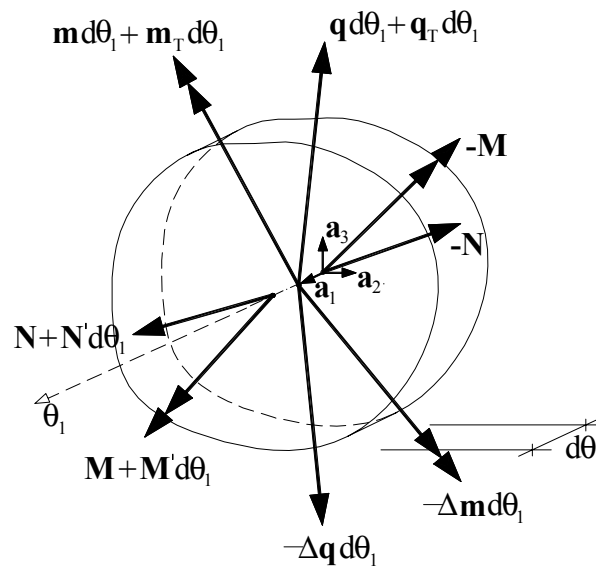


Bild 4.3: Stabelement des Feststoffes im Augenblickszustand zur Zeit t

Da kleine Verformungen betrachtet werden, können das Kräfte- und das Momentengleichgewicht näherungsweise in den unverformten Basisvektoren \mathbf{a}_i^+ angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' + \mathbf{q} + \mathbf{q}_T &= \Delta \mathbf{q} \\ \mathbf{M}' + \mathbf{a}_1^+ \times \mathbf{N} + \mathbf{m} + \mathbf{m}_T &= \Delta \mathbf{m} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hierin sind die folgenden Schnittgrößen, Streckenlasten, Trägheitsanteile und Interaktionsterme enthalten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= N \mathbf{a}_1^+ + Q_2 \mathbf{a}_2^+ + Q_3 \mathbf{a}_3^+ \\
\mathbf{M} &= M_1 \mathbf{a}_1^+ + M_2 \mathbf{a}_2^+ + M_3 \mathbf{a}_3^+ \\
\mathbf{q} &= q_1 \mathbf{a}_1^+ + q_2 \mathbf{a}_2^+ + q_3 \mathbf{a}_3^+ \\
\mathbf{m} &= m_1 \mathbf{a}_1^+ + m_2 \mathbf{a}_2^+ + m_3 \mathbf{a}_3^+ \\
\mathbf{q}_T &= -\mu \ddot{\bar{w}}_1 \mathbf{a}_1^+ - \mu \ddot{\bar{w}}_2 \mathbf{a}_2^+ - \mu \ddot{\bar{w}}_3 \mathbf{a}_3^+ \\
\mathbf{m}_T &= -\Theta_1 \ddot{\phi}_1 \mathbf{a}_1^+ - \Theta_2 \ddot{\phi}_2 \mathbf{a}_2^+ - \Theta_3 \ddot{\phi}_3 \mathbf{a}_3^+ \\
\Delta \mathbf{q} &= \Delta q_1 \mathbf{a}_1^+ + \Delta q_2 \mathbf{a}_2^+ + \Delta q_3 \mathbf{a}_3^+ \\
\Delta \mathbf{m} &= \Delta m_1 \mathbf{a}_1^+ + \Delta m_2 \mathbf{a}_2^+ + \Delta m_3 \mathbf{a}_3^+
\end{aligned} \tag{4.20}$$

In (4.20) sind die Massenbelegung $\mu = \rho_0 F$ und die auf die Schwerpunkthauptachsen bezogenen Massenträgheitsmomente Θ_i pro Länge gegeben. Die Gleichungen (4.19) entsprechen den herkömmlichen Bewegungsgleichungen der Stabtheorie, jedoch um die Interaktionsterme auf der rechten Seite erweitert. In den Streckenlasten \mathbf{q} und \mathbf{m} können neben den äußeren Belastungen auch die Volumenkräfte des Feststoffes enthalten sein. Die unterstrichelten Trägheitsterme in (4.20)₆ werden in der Regel weggelassen, da sie von geringem Einfluß sind.

Die auf die unverformte Basis bezogenen sechs Komponenten der Gleichgewichtsbeziehungen (4.19) lauten somit:

$$\begin{aligned}
N' + q_1 - \mu \ddot{\bar{w}}_1 &= \Delta q_1 \\
Q_2' + q_2 - \mu \ddot{\bar{w}}_2 &= \Delta q_2 \\
Q_3' + q_3 - \mu \ddot{\bar{w}}_3 &= \Delta q_3 \\
M_1' + m_1 - \Theta_1 \ddot{\phi}_1 &= \Delta m_1 \\
M_2' - Q_3 + m_2 &= \Delta m_2 \\
M_3' + Q_2 + m_3 &= \Delta m_3
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Da die Querkräfte zu den unbekanntem Variablen zählen, sind die Gleichungen (4.21)_{5,6} nach Q_2, Q_3 aufzulösen und in (4.21)_{2,3} einzusetzen, um diese zu eliminieren. Es ergeben sich unter Berücksichtigung der konstitutiven Beziehungen (4.14) somit vier Bestimmungsgleichungen für die unbekanntem Kinematen $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \phi_1$ des Feststoffes:

$$\begin{aligned}
(EF \bar{w}'_1)' + q_1 - \mu \ddot{\bar{w}}_1 &= \Delta q_1 \\
-(EF_{22} \bar{w}''_2)'' - (\theta_{3D} EF_{22} \varphi''_1)'' + q_2 - m'_3 - \mu \ddot{\bar{w}}_2 &= \Delta q_2 + \Delta m'_3 \\
-(EF_{33} \bar{w}''_3)'' - (\theta_{2D} EF_{33} \varphi''_1)'' + q_3 + m'_2 - \mu \ddot{\bar{w}}_3 &= \Delta q_3 + \Delta m'_2 \\
(GI_t \varphi'_1)' - (EF_{\Omega\Omega} \varphi''_1)'' + (\theta_{3D} EF_{22} \bar{w}''_2 - \theta_{2D} EF_{33} \bar{w}''_3)'' - M'_\Omega + m_1 - \Theta_1 \ddot{\phi}_1 &= \Delta m_1
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Die auf der rechten Seite von (4.22) stehenden Interaktionsterme Δq_i und Δm_i bewirken eine Kopplung mit den Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit.

4.6 Die eindimensionalen Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit

Die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit sollen mit Hilfe der Methode von GALERKIN, entsprechend dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen, auf eindimensionale Differentialgleichungen in Stabkoordinaten reduziert werden. Hierzu werden für die Relativverschiebungen Ansätze in der Form eines Separationsansatzes gemacht, mit einer von der Stabkoordinate θ_1 und der Zeit t abhängigen Koeffizientenfunktion und einer ausschließlich von den Querschnittskordinaten θ_2, θ_3 abhängigen Vergleichsfunktion, die die wesentlichen Randbedingungen und die Bewegungsgleichung im gewichteten Mittel erfüllt:

$$\tilde{w}_{rel\ i} = \sum_n \tilde{w}_{rel\ i}^n(\theta_1, t) \tilde{\tilde{w}}_{rel\ i}^n(\theta_2, \theta_3) \tag{4.23}$$

Während der erste Term $\tilde{w}_{rel\ i}^n$ die noch offenen Koeffizientenfunktionen darstellt, ist für den zweiten Term $\tilde{\tilde{w}}_{rel\ i}^n$ ein Potenzreihenansatz in den Querschnittskordinaten zu formulieren. Ein möglicher Ansatz für die Vergleichsfunktionen, der die Randbedingungen erfüllt, wird nachfolgend beispielhaft vorgegeben. Für die Ansatzfunktion in longitudinaler Richtung $\tilde{w}_{rel\ 1}$ wird ein linearer und in den Querrichtungen $\tilde{w}_{rel\ 2}, \tilde{w}_{rel\ 3}$ ein kubischer Ansatz in den Koordinaten θ_2 und θ_3 gewählt:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{rel1} &= \tilde{w}_{rel1}^1(\theta_1, t) + \tilde{w}_{rel1}^2(\theta_1, t) \theta_2 + \tilde{w}_{rel1}^3(\theta_1, t) \theta_3 \\
\tilde{w}_{rel2} &= \tilde{w}_{rel2}^1(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \\
&\quad + \tilde{w}_{rel2}^2(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \theta^2 \\
&\quad + \tilde{w}_{rel2}^3(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \theta^3 \\
&\quad + \tilde{w}_{rel2}^4(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \theta^2 \theta^3 \\
\tilde{w}_{rel3} &= \tilde{w}_{rel3}^1(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \\
&\quad + \tilde{w}_{rel3}^2(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \theta^2 \\
&\quad + \tilde{w}_{rel3}^3(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \theta^3 \\
&\quad + \tilde{w}_{rel3}^4(\theta_1, t) (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_3 - \bar{\theta}_3)(\theta_3 - \bar{\theta}_3) \theta^2 \theta^3
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Die Relativverschiebungen in Querrichtung sind an den oberen und unteren Rändern $\bar{\theta}_2(s)$, $\bar{\theta}_2(s)$, $\bar{\theta}_3(s)$, $\bar{\theta}_3(s)$ des Stabquerschnittes Null und erfüllen somit die Forderung, daß keine Flüssigkeit aus der Oberfläche des Stabes austreten darf. Für die Bewegung in Längsrichtung sind hier noch keine Einschränkungen erforderlich, erst bei der Lösung der Differentialgleichungen sind Randbedingungen an den Stirnflächen des Stabes zu formulieren. Die Ansatzfunktionen können beliebig durch zusätzliche Terme erweitert werden, z.B. um auch einer exzentrischen Flüssigkeitsströmung durch den Stabquerschnitt zu genügen, was jedoch den Rechenaufwand stark erhöht.

Zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizientenfunktionen werden die Ansätze (4.23) in die Bewegungsgleichungen (3.171)₂ eingesetzt, mit jeweils einer Vergleichsfunktion $\tilde{w}_{rel i}^m$ multipliziert und über das Volumen integriert. Es ergeben sich somit ebenso viele Bestimmungsgleichungen wie Koeffizientenfunktionen:

$$\begin{aligned}
\int_V \tilde{L}_1[\tilde{w}] \tilde{w}_{rel1}^m dV &= 0 & m = 1, 2 \dots n_1 \\
\int_V \tilde{L}_2[\tilde{w}] \tilde{w}_{rel2}^m dV &= 0 & m = 1, 2 \dots n_2 \\
\int_V \tilde{L}_3[\tilde{w}] \tilde{w}_{rel3}^m dV &= 0 & m = 1, 2 \dots n_3
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Der Operator $\tilde{L}_i[\tilde{\mathbf{w}}]$ deutet darauf hin, daß die Ansatzfunktionen unter Verwendung der konstitutiven Beziehungen in die Bewegungsgleichung der Flüssigkeit eingesetzt wurden. Dabei ist zu beachten, daß auch die Bewegungsgrößen des Feststoffes mit in die Gleichungen eingehen und somit eine Kopplung hervorrufen.

Mit den oben vorgeschlagenen Ansatzfunktionen ergeben sich somit entsprechend der n_i ($i = 1, 2, 3$) unbekanntenen Koeffizientenfunktionen elf Bestimmungsgleichungen.

Nach Einsetzen der Bewegungsgleichung (3.171)₂ in (4.25) unter Berücksichtigung der konstitutiven Beziehungen für eine ideale Flüssigkeit und für die Interaktionskräfte

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{kk} &= (3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \tilde{\gamma}_{kk} \\ &= 3\tilde{K} \tilde{\gamma}_{kk}\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\Delta\tilde{Q}_k = \alpha_v \tilde{v}_{rel k}\tag{4.27}$$

folgen die Integralausdrücke zu:

$$\begin{aligned}\int_V (\tilde{K} \tilde{\gamma}_{kk \succ i} - \tilde{Q}_i - \tilde{\rho} \tilde{b}_i - \alpha_v \tilde{v}_{rel i}) \tilde{w}_{rel i}^m dV &= 0 \quad m = 1, 2 \dots n_i \\ \text{mit } \tilde{\gamma}_{kk} &= (\mathbf{w}_k + \tilde{\mathbf{w}}_{rel k})_{\succ k} \\ \tilde{b}_i &= \ddot{\mathbf{w}}_i + \tilde{\mathbf{b}}_{rel i}\end{aligned}\tag{4.28}$$

Die Volumendehnung $\tilde{\gamma}_{kk}$ berechnet sich aus der Verschiebung des Feststoffes (4.1) und der Relativverschiebung der Flüssigkeit (4.23). Ebenso läßt sich auch die Absolutbeschleunigung entsprechend (4.10) aus einer Feststoffkinemate und einem Relativanteil zusammensetzen. Für die Relativgeschwindigkeit und –beschleunigung werden Ansätze in der entsprechenden Form der Relativverschiebung (4.23) eingeführt.

Unter Vorgabe eines konstanten Querschnittes und homogener Materialeigenschaften ergeben sich nach längerer Rechnung die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
& \tilde{K} \left(\bar{w}''_1 F_{1m} - \bar{w}'''_2 F_{1m} - \bar{w}'''_3 F_{1m} + \varphi'''_1 F_{1m} + \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{w}''_{rel1} F_{1m} + \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{w}'_{rel2} F_{1m} + \sum_{n=1}^{n_3} \tilde{w}'_{rel3} F_{1m} \right) \\
& + \tilde{Q}_1 F_{1m} - \tilde{\rho} \left(\ddot{w}_1 F_{1m} - \ddot{w}'_2 F_{1m} - \ddot{w}'_3 F_{1m} + \dot{\varphi}'_1 F_{1m} + \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{b}_{rel1} F_{1m} \right) = \alpha_v \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{v}_{rel1} F_{1m} \quad m = 1, 2 \dots n_1 \\
& \tilde{K} \left(-\bar{w}''_2 F_{2m} + \varphi''_1 F_{2m} + \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{w}'_{rel1} F_{2m} + \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{w}_{rel2} F_{2m} + \sum_{n=1}^{n_3} \tilde{w}_{rel3} F_{2m} \right) \\
& + \tilde{Q}_2 F_{2m} - \tilde{\rho} \left(\ddot{w}_2 F_{2m} - \ddot{\varphi}_1 F_{2m} + \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{b}_{rel2} F_{2m} \right) = \alpha_v \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{v}_{rel2} F_{2m} \quad m = 1, 2 \dots n_2 \\
& \tilde{K} \left(-\bar{w}''_3 F_{3m} + \varphi''_1 F_{3m} + \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{w}'_{rel1} F_{3m} + \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{w}_{rel2} F_{3m} + \sum_{n=1}^{n_3} \tilde{w}_{rel3} F_{3m} \right) \\
& + \tilde{Q}_3 F_{3m} - \tilde{\rho} \left(\ddot{w}_3 F_{3m} + \ddot{\varphi}_1 F_{3m} + \sum_{n=1}^{n_3} \tilde{b}_{rel3} F_{3m} \right) = \alpha_v \sum_{n=1}^{n_3} \tilde{v}_{rel3} F_{3m} \quad m = 1, 2 \dots n_3
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Hierin sind die folgenden Flächenwerte definiert:

$$\begin{aligned}
\overset{0}{F}_{1m} &= \int_F \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{0}{F}_{2m} &= \int_F \overset{m}{\tilde{w}}_{rel2} dF & \overset{0}{F}_{3m} &= \int_F \overset{m}{\tilde{w}}_{rel3} dF \\
\overset{02}{F}_{1m} &= \int_F \theta_2 \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{02}{F}_{3m} &= \int_F \theta_2 \overset{m}{\tilde{w}}_{rel3} dF \\
\overset{03}{F}_{1m} &= \int_F \theta_3 \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{03}{F}_{2m} &= \int_F \theta_3 \overset{m}{\tilde{w}}_{rel2} dF \\
\overset{0\Omega}{F}_{1m} &= \int_F \Omega \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{0\Omega}{F}_{1m} &= \int_F \Omega_{,2} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{0\Omega}{F}_{1m} &= \int_F \Omega_{,3} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF \\
\overset{1n}{F}_{1m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel1} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{1n}{F}_{2m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel1 \rightarrow 2} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel2} dF & \overset{1n}{F}_{3m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel1 \rightarrow 3} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel3} dF \\
\overset{2n}{F}_{1m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel2 \rightarrow 2} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{2n}{F}_{2m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel2 \rightarrow 22} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel2} dF & \overset{2n}{F}_{3m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel2 \rightarrow 23} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel3} dF \\
\overset{3n}{F}_{1m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel3 \rightarrow 3} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel1} dF & \overset{3n}{F}_{2m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel3 \rightarrow 32} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel2} dF & \overset{3n}{F}_{3m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel3 \rightarrow 33} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel3} dF \\
\overset{4n}{F}_{1m} &= \overset{1n}{F}_{1m} & \overset{4n}{F}_{2m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel2} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel2} dF & \overset{4n}{F}_{3m} &= \int_F \overset{n}{\tilde{w}}_{rel3} \overset{m}{\tilde{w}}_{rel3} dF
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Der Kompressionsmodul der Flüssigkeit \tilde{K} und der Diffusionskoeffizient α_v sind über den Stabquerschnitt als konstant angenommen worden.

4.7 Die Bestimmungsgleichungen für den Stab mit Flüssigkeit

Aufgrund der Kopplung der beiden Stoffkomponenten setzt sich das für die Ermittlung der unbekannt Kinematen und Koeffizientenfunktionen zu lösende Gleichungssystem aus den nachfolgend zusammengestellten Feststoffgleichungen und den in (4.29) aufgeführten Flüssigkeitsgleichungen zusammen.

Um die Bestimmungsgleichungen für die Feststoffkinematen zu erhalten, sind zunächst die Interaktionsterme (4.13) mit Hilfe der Ansatzfunktionen der Flüssigkeit (4.23) zu formulieren:

$$\begin{aligned}
 \Delta q_i &= -\alpha_v \sum_n \tilde{v}_{rel\ i}^n \int_F \tilde{v}_{rel\ i}^n dF & i = 1, 2, 3 \\
 \Delta m_1 &= -\alpha_v \sum_n \tilde{v}_{rel\ 3}^n \int_F \theta_2 \tilde{v}_{rel\ 3}^n dF + \alpha_v \sum_n \tilde{v}_{rel\ 2}^n \int_F \theta_3 \tilde{v}_{rel\ 2}^n dF \\
 \Delta m_2 &= -\alpha_v \sum_n \tilde{v}_{rel\ 1}^n \int_F \theta_3 \tilde{v}_{rel\ 1}^n dF \\
 \Delta m_3 &= \alpha_v \sum_n \tilde{v}_{rel\ 1}^n \int_F \theta_2 \tilde{v}_{rel\ 1}^n dF
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für die Feststoffkinematen ergeben sich nach Einsetzen von (4.31) in die Bewegungsgleichungen (4.22):

$$\begin{aligned}
 (EF \bar{w}'_1)' + q_1 - \mu \ddot{w}_1 &= -\alpha_v \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{v}_{rel\ 1}^n F_{1n}^0 \\
 -(EF_{22} \bar{w}''_2)'' - (\theta_{3D} EF_{22} \varphi''_1)'' + q_2 - m'_3 - \mu \ddot{w}_2 &= -\alpha_v \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{v}_{rel\ 2}^n F_{2n}^0 + \alpha_v \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{v}'_{rel\ 1} F_{1n}^{02} \\
 -(EF_{33} \bar{w}''_3)'' - (\theta_{2D} EF_{33} \varphi''_1)'' + q_3 + m'_2 - \mu \ddot{w}_3 &= -\alpha_v \sum_{n=1}^{n_3} \tilde{v}_{rel\ 3}^n F_{3n}^0 - \alpha_v \sum_{n=1}^{n_1} \tilde{v}'_{rel\ 1} F_{1n}^{03} \tag{4.32} \\
 (GI_t \varphi'_1)' - (EF_{\Omega\Omega} \varphi''_1)'' + (\theta_{3D} EF_{22} \bar{w}''_2 - \theta_{2D} EF_{33} \bar{w}''_3)'' - M'_\Omega + m_1 - \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 &= \\
 = -\alpha_v \sum_{n=1}^{n_3} \tilde{v}_{rel\ 3}^n F_{3n}^{02} + \alpha_v \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{v}_{rel\ 2}^n F_{2n}^{03}
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.29) und (4.32) ergeben ein vollständiges Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannt Feststoffkinematen und Koeffizientenfunktionen der Flüssigkeit. An-

hand der folgenden matriziellen Darstellung dieses Gleichungssystems soll nun die „Struktur“ sowie mögliche Reduktionen auf einfachere Modelle aufgezeigt werden.

Mit dem gesuchten Verschiebungsvektor aus den 4 Feststoffkinematiken und den $\sum_{i=1}^3 n_i$ Koeffizientenfunktionen der Flüssigkeit

$$\tilde{\mathbf{w}} = \left\{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \varphi_1, \tilde{w}_{rel 1}^{m_1}, \tilde{w}_{rel 2}^{m_2}, \tilde{w}_{rel 3}^{m_3} \right\} \quad \text{mit } m_i = 1, 2 \dots n_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.33)$$

und unter Berücksichtigung ausschließlich linearer Terme in den Flüssigkeitgeschwindigkeiten und –beschleunigungen (4.8) und (4.10) lautet das Gleichungssystem wie folgt:

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\tilde{\mathbf{w}}} + \mathbf{M}_2 \dot{\tilde{\mathbf{w}}} + \mathbf{D}_1 \dot{\tilde{\mathbf{w}}} + \mathbf{D}_2 \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{w}}' + \mathbf{K}_3 \tilde{\mathbf{w}}'' + \mathbf{K}_4 \tilde{\mathbf{w}}''' + \mathbf{K}_5 \tilde{\mathbf{w}}'''' = \mathbf{R} \quad (4.34)$$

Die Matrizen dieses Gleichungssystems, die im allgemeinen nicht symmetrisch sind und die Materialkonstanten und Flächenwerte enthalten, werden nicht im einzelnen angegeben, sondern können über die Gleichungen (4.29) und (4.32) ermittelt werden.

Wird eine ausschließlich longitudinale Verschiebung des Feststoffes angenommen und nur die für eine symmetrische Flüssigkeitsströmung über den Querschnitt relevanten Koeffizientenfunktionen zugelassen, so vereinfacht sich das Gleichungssystem maßgebend:

$$\mathbf{M} \ddot{\tilde{\mathbf{w}}} + \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} + \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{w}}' + \mathbf{K}_3 \tilde{\mathbf{w}}'' = \mathbf{R} \quad (4.35)$$

mit dem unbekanntem Verschiebungsvektor

$$\tilde{\mathbf{w}} = \left\{ \bar{w}_1, \tilde{w}_{rel 1}^1, \tilde{w}_{rel 2}^2, \tilde{w}_{rel 3}^3 \right\} \quad (4.36)$$

Die äußere Anregung des Stabes erfolgt entweder über die in dem Vektor \mathbf{R} enthaltenen Streckenlasten des Feststoffes oder über zeitveränderliche Randbedingungen.

5 Ein Lösungsverfahren für den Stab mit Flüssigkeit bei longitudinaler Bewegung

5.1 Formulierung des Problems

Im folgenden wird das Lösungsverfahren an einem vereinfachten Modell des Knochens mit ausschließlich longitudinaler Bewegung der beiden Komponenten Feststoff und Flüssigkeit beschrieben. Dieser Betrachtungsweise liegt die Vorstellung zugrunde, daß der Knochen mit einer Vielzahl von longitudinal orientierten und homogen über den Stabquerschnitt verteilten Kanälen versehen ist, die die Knochenflüssigkeit enthalten. Hieraus ergibt sich unter Vorgabe homogener und isotroper Materialeigenschaften ein Modell aus zwei über Interaktionskräfte gekoppelten Stäben.

Da nur die longitudinale Bewegung betrachtet wird, kann im folgenden auf die Indizierung der Richtungen verzichtet werden, so daß für die Absolutverschiebung des Feststoffes und die Relativverschiebung der Flüssigkeit die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} u(\theta_1, t) &\equiv \bar{w}_1(\theta_1, t) \\ \tilde{u}_{\text{rel}}(\theta_1, t) &\equiv \tilde{w}_{\text{rel}1}(\theta_1, t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Neben den Verformungen werden auch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen linear angenommen, so daß zwischen partieller und materieller Zeitableitung nicht unterschieden werden braucht:

$$\begin{aligned} \dot{u}(\theta_1, t) &\equiv \bar{v}_1(\theta_1, t) \\ \dot{\tilde{u}}_{\text{rel}}(\theta_1, t) &\equiv \tilde{v}_{\text{rel}1}(\theta_1, t) \\ \ddot{u}(\theta_1, t) &\equiv \bar{b}_1(\theta_1, t) \\ \ddot{\tilde{u}}_{\text{rel}}(\theta_1, t) &\equiv \tilde{b}_{\text{rel}1}(\theta_1, t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Bewegungsgleichungen (4.32)₁ und (4.29)₁ reduzieren sich in diesem Fall auf:

$$\begin{aligned}
 N' + q + q_T &= \Delta q \\
 \tilde{N}' + \tilde{q} + \tilde{q}_T &= -\Delta q
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Hierin sind die Stoffgleichungen für die Schnittgrößen und die Interaktionskraft

$$\begin{aligned}
 N &= EF u' \\
 \tilde{N} &= \tilde{K}F(u' + \tilde{u}'_{\text{rel}}) \\
 \Delta q &= -\alpha_v F \tilde{u}'_{\text{rel}} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

die Trägheitskräfte

$$\begin{aligned}
 q_T &= -\rho F \ddot{u} \\
 \tilde{q}_T &= -\tilde{\rho} F(\ddot{u} + \ddot{\tilde{u}}_{\text{rel}})
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

sowie die Streckenlasten (Eigengewicht, äußere Last) q, \tilde{q} in longitudinaler Richtung enthalten. Die Fläche F beschreibt den gesamten Stabquerschnitt und setzt sich aus den Teilflächen der beiden Stoffkomponenten zusammen, deren Verhältnis über die Volumenanteile bzw. Porosität definiert ist. Die Stoffkonstanten E, \tilde{K} und die Dichten $\rho, \tilde{\rho}$ sind auf die Gesamtfläche bezogene Größen, die über die Volumenanteile mit den realen Werten zusammenhängen (z.B.: $E = n E_R, \rho = n \rho_R$ mit $n = 1 - \tilde{n}$).

Die Randbedingungen sind an den Stabenden $\bar{\theta}_1, \bar{\bar{\theta}}_1$ entweder durch die Verschiebungen U bzw. \tilde{U}_{rel} oder durch die äußeren Belastungen P bzw. \tilde{P} vorgegeben:

$$\begin{aligned}
 u|_{\bar{\theta}_1} &= U & \tilde{u}_{\text{rel}}|_{\bar{\theta}_1} &= \tilde{U}_{\text{rel}} \\
 N|_{\bar{\theta}_1} &= P & \tilde{N}|_{\bar{\theta}_1} &= \tilde{P}
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Die Anfangsbedingungen sind durch die Vorgabe des Verschiebungs- und Geschwindigkeitszustandes im gesamten Bereich zur Zeit $t = 0$ bekannt:

$$\begin{aligned}
 u|_{t=0} &= U_0 & \tilde{u}_{\text{rel}}|_{t=0} &= \tilde{U}_{\text{rel}0} \\
 \dot{u}|_{t=0} &= \dot{U}_0 & \dot{\tilde{u}}_{\text{rel}}|_{t=0} &= \dot{\tilde{U}}_{\text{rel}0}
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Hiermit ist das vorliegende Anfangswert-Randwert-Problem vollständig beschrieben. Ein Lösungsverfahren für dieses Problem wird im nachfolgenden Kapitel beschrieben.

5.2 Das Lösungsverfahren

Der Lösung des beschriebenen Problems wird das Lösungsverfahren nach KANTOROWITSCH zugrunde gelegt (siehe [HOEBORN 1981]), jedoch im Hinblick auf die Berücksichtigung von Trägheitskräften und der Lösung eines Schwingungsproblems modifiziert. Zusätzlich wird der Bewegungszustand der Flüssigkeit durch die Relativverschiebung beschrieben. Für die Verschiebungen werden die folgenden **Lösungsansätze** gewählt:

$$\begin{aligned} u &= u_0(\theta_1, t) + \sum_n u_n(\theta_1) f_n(t) \\ \tilde{u}_{\text{rel}} &= \tilde{u}_{\text{rel}0}(\theta_1, t) + \sum_n \tilde{u}_{\text{rel}n}(\theta_1) f_n(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Absolutverschiebung der Flüssigkeit ergibt sich zu $\tilde{u} = u + \tilde{u}_{\text{rel}}$. Aufgrund der vorhandenen Kopplung werden die unbekannt Zeitfunktionen $f_n(t)$ für die beiden Komponenten in gleicher Weise angenommen. Es ist zu bemerken, daß eine Phasenverschiebung der Schwingungsantworten beider Stoffe auch bei gleichen Zeitfunktionen durch die Annahme komplexer Ortsfunktionen beschrieben werden kann.

In (5.8) sind $u_0, \tilde{u}_{\text{rel}0}$ Orts-Zeit-Funktionen, die die **inhomogenen Differentialgleichungen** ohne die Interaktionskräfte

$$\begin{aligned} \overset{0}{\dot{N}}' + q + \overset{0}{q}_T &= 0 \\ \overset{0}{\tilde{N}}' + \tilde{q} + \overset{0}{\tilde{q}}_T &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \overset{0}{N} &= EF u'_0 \\ \overset{0}{\tilde{N}} &= \tilde{K}F(u'_0 + \tilde{u}'_{\text{rel}0}) \\ \overset{0}{q}_T &= -\rho F \ddot{u}_0 \\ \overset{0}{\tilde{q}}_T &= -\tilde{\rho} F(\ddot{u}_0 + \ddot{\tilde{u}}_{\text{rel}0}) \end{aligned}$$

und alle Randbedingungen an den beiden Stabenden $\bar{\theta}_1, \bar{\bar{\theta}}_1$ befriedigen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_0 \Big|_{\bar{\theta}_1} &= \overset{0}{\mathbf{U}} & \tilde{\mathbf{u}}_{\text{rel}0} \Big|_{\bar{\theta}_1} &= \overset{0}{\tilde{\mathbf{U}}}_{\text{rel}} \\
\overset{0}{\mathbf{N}} \Big|_{\bar{\theta}_1} &= \overset{0}{\mathbf{P}} & \overset{0}{\tilde{\mathbf{N}}} \Big|_{\bar{\theta}_1} &= \overset{0}{\tilde{\mathbf{P}}}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Größen $\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{rel}n}$ sind linear unabhängige Vergleichsfunktionen, welche die **homogenen Diffusionsdifferentialgleichungen** einschließlich der Interaktionskräfte

$$\begin{aligned}
\overset{h}{\mathbf{N}'} + \overset{h}{\mathbf{q}}_T &= \Delta \overset{h}{\mathbf{q}} \\
\overset{h}{\tilde{\mathbf{N}}}' + \overset{h}{\tilde{\mathbf{q}}}_T &= -\Delta \overset{h}{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } \overset{h}{\mathbf{N}} &= \text{EF} \sum_n \mathbf{u}'_n f_n(t) \\
\overset{h}{\tilde{\mathbf{N}}} &= \tilde{\text{KF}} \sum_n (\mathbf{u}'_n + \tilde{\mathbf{u}}'_{\text{rel}n}) f_n(t) \\
\overset{h}{\mathbf{q}}_T &= -\rho F \sum_n \mathbf{u}_n \ddot{f}_n(t) \\
\overset{h}{\tilde{\mathbf{q}}}_T &= -\tilde{\rho} F \sum_n (\mathbf{u}_n + \tilde{\mathbf{u}}_{\text{rel}n}) \ddot{f}_n(t) \\
\Delta \overset{h}{\mathbf{q}} &= -\alpha_v F \sum_n \tilde{\mathbf{u}}_{\text{rel}n} \dot{f}_n(t)
\end{aligned}$$

und die homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_n \Big|_{\bar{\theta}_1} &= 0 & \tilde{\mathbf{u}}_{\text{rel}n} \Big|_{\bar{\theta}_1} &= 0 \\
\overset{h}{\mathbf{N}} \Big|_{\bar{\theta}_1} &= 0 & \overset{h}{\tilde{\mathbf{N}}} \Big|_{\bar{\theta}_1} &= 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

befriedigen.

Der gesamte Lösungsansatz (5.8) muß die Bewegungsgleichung (5.3) und die Anfangsbedingungen (5.7) im gewichteten Mittel befriedigen. Zur Bestimmung der unbekanntenen Zeitfunktionen $f_n(t)$ ist der Ansatz (5.8) in (5.3) einzusetzen, die Gleichung für den Feststoff mit \mathbf{u}_m und die Gleichung für die Flüssigkeit mit $\tilde{\mathbf{u}}_m = \mathbf{u}_m + \tilde{\mathbf{u}}_{\text{rel}m}$ zu multiplizieren und über die Stablänge zu integrieren. Für die beiden Stoffkomponenten folgen unter Berücksichtigung der inhomogenen Differentialgleichung (5.9) die virtuellen Arbeiten zu:

$$\begin{aligned}
& \sum_n E F \int_1 u''_n u_m d\theta_1 \dot{f}_n - \sum_n \rho F \int_1 u_n u_m d\theta_1 \ddot{f}_n = \\
& = - \sum_n \alpha_v F \int_1 \tilde{u}_{rel n} u_m d\theta_1 \dot{f}_n - \alpha_v F \int_1 \tilde{u}_{rel 0} u_m d\theta_1
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_n \tilde{K} F \int_1 (u_n + \tilde{u}_{rel n})'' (u_m + \tilde{u}_{rel m}) d\theta_1 \dot{f}_n - \sum_n \tilde{\rho} F \int_1 (u_n + \tilde{u}_{rel n}) (u_m + \tilde{u}_{rel m}) d\theta_1 \ddot{f}_n = \\
& = \sum_n \alpha_v F \int_1 \tilde{u}_{rel n} (u_m + \tilde{u}_{rel m}) d\theta_1 \dot{f}_n + \alpha_v F \int_1 \tilde{u}_{rel 0} (u_m + \tilde{u}_{rel m}) d\theta_1
\end{aligned}$$

Die Stoffkonstanten und die Fläche sind über die Stablänge konstant angenommen worden. Werden die beiden so erhaltenen Gleichungen addiert und durch die Fläche geteilt, folgt die Beziehung:

$$\begin{aligned}
& \sum_n (E A_{nm} + \tilde{K} (A_{nm} + \tilde{A}_{nm} + B_{nm} + \tilde{B}_{nm})) \dot{f}_n \\
& - \sum_n (\rho C_{nm} + \tilde{\rho} (C_{nm} + \tilde{C}_{nm} + D_{nm} + \tilde{D}_{nm})) \ddot{f}_n = \sum_n \alpha_v \tilde{D}_{nm} \dot{f}_n + \alpha_v \tilde{d}_m
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Hierin sind die folgenden Integralwerte definiert:

$$\begin{aligned}
A_{nm} &= \int_1 u''_n u_m d\theta_1 & \tilde{A}_{nm} &= \int_1 u''_n \tilde{u}_{rel m} d\theta_1 \\
B_{nm} &= \int_1 \tilde{u}''_{rel n} u_m d\theta_1 & \tilde{B}_{nm} &= \int_1 \tilde{u}''_{rel n} \tilde{u}_{rel m} d\theta_1 \\
C_{nm} &= \int_1 u_n u_m d\theta_1 & \tilde{C}_{nm} &= \int_1 u_n \tilde{u}_{rel m} d\theta_1 \\
D_{nm} &= \int_1 \tilde{u}_{rel n} u_m d\theta_1 & \tilde{D}_{nm} &= \int_1 \tilde{u}_{rel n} \tilde{u}_{rel m} d\theta_1 \\
\tilde{d}_m &= \int_1 \tilde{u}_{rel 0} \tilde{u}_{rel m} d\theta_1
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Um die **Anfangsbedingungen** im gewichteten Mittel zu befriedigen, wird der Ansatz (5.8) in (5.7) eingesetzt. Die Flüssigkeitsbewegung ist jedoch über die Absolutverschiebungen darzustellen, da sich nur hierdurch symmetrische Koeffizienten ergeben und die Ausnutzung von Orthogonalitätsbedingungen ermöglicht wird. Die Anfangsbedingungen lauten somit:

$$u_0(\theta_1, 0) + \sum_n u_n(\theta_1) f_n(0) = U_0 \quad (5.16)$$

$$u_0(\theta_1, 0) + \tilde{u}_{rel0}(\theta_1, 0) + \sum_n (u_n(\theta_1) + \tilde{u}_{reln}(\theta_1)) f_n(0) = U_0 + \tilde{U}_{rel0}$$

$$\dot{u}_0(\theta_1, 0) + \sum_n u_n(\theta_1) \dot{f}_n(0) = \dot{U}_0 \quad (5.17)$$

$$\dot{u}_0(\theta_1, 0) + \dot{\tilde{u}}_{rel0}(\theta_1, 0) + \sum_n (u_n(\theta_1) + \tilde{u}_{reln}(\theta_1)) \dot{f}_n(0) = \dot{U}_0 + \dot{\tilde{U}}_{rel0}$$

Zur Berechnung der virtuellen Arbeit werden die Anfangsbedingungen (5.16)₁ und (5.16)₂ mit den jeweiligen Trägheitskräften

$$q_{Tm} = \rho F \omega_m^2 u_m \quad (5.18)$$

$$\tilde{q}_{Tm} = \tilde{\rho} F \omega_m^2 (u_m + \tilde{u}_{relm})$$

multipliziert, in denen bereits der Ansatz $f_m(t) = e^{-j\omega_m t}$ berücksichtigt wurde. Nach der Integration der beiden Gleichungen über die Stablänge und Addition dieser folgt die Bedingungsgleichung für die Anfangsverschiebung:

$$\begin{aligned} & \rho \overset{0}{a}_m + \tilde{\rho} (\overset{0}{a}_m + \overset{0}{\tilde{a}}_m + \overset{0}{b}_m + \overset{0}{\tilde{b}}_m) + \sum_n (\rho C_{nm} + \tilde{\rho} (C_{nm} + \tilde{C}_{nm} + D_{nm} + \tilde{D}_{nm})) f_n(0) = \\ & = \rho A_m + \tilde{\rho} (A_m + \tilde{A}_m + B_m + \tilde{B}_m) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Für die Anfangsgeschwindigkeit (5.17) ergibt sich entsprechend der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \rho \overset{\dot{0}}{a}_m + \tilde{\rho} (\overset{\dot{0}}{a}_m + \overset{\dot{0}}{\tilde{a}}_m + \overset{\dot{0}}{b}_m + \overset{\dot{0}}{\tilde{b}}_m) + \sum_n (\rho C_{nm} + \tilde{\rho} (C_{nm} + \tilde{C}_{nm} + D_{nm} + \tilde{D}_{nm})) \dot{f}_n(0) = \\ & = \rho \dot{A}_m + \tilde{\rho} (\dot{A}_m + \dot{\tilde{A}}_m + \dot{B}_m + \dot{\tilde{B}}_m) \end{aligned} \quad (5.20)$$

In diesen Gleichungen sind die folgenden Integralwerte enthalten:

$$\begin{aligned}
\overset{0}{a}_m &= \int_1 u_0(t=0) u_m d\theta_1 & \overset{0}{\tilde{a}}_m &= \int_1 u_0(t=0) \tilde{u}_{rel\,m} d\theta_1 \\
\overset{0}{b}_m &= \int_1 \tilde{u}_{rel\,0}(t=0) u_m d\theta_1 & \overset{0}{\tilde{b}}_m &= \int_1 \tilde{u}_{rel\,0}(t=0) \tilde{u}_{rel\,m} d\theta_1 \\
A_m &= \int_1 U_0 u_m d\theta_1 & \tilde{A}_m &= \int_1 U_0 \tilde{u}_{rel\,m} d\theta_1 \\
B_m &= \int_1 \tilde{U}_{rel\,0} u_m d\theta_1 & \tilde{B}_m &= \int_1 \tilde{U}_{rel\,0} \tilde{u}_{rel\,m} d\theta_1
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Mit der Einführung weiterer Abkürzungen werden die Differentialgleichung (5.14) und die Anfangsbedingungen (5.19) und (5.20) nochmals vereinfacht:

$$-\sum_n \alpha_{nm} \ddot{f}_n(t) - \sum_n \beta_{nm} \dot{f}_n(t) = \sum_n \gamma_{nm} \dot{f}_n(t) + \dot{q}_m(t) \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\overset{0}{p}_m + \sum_n \beta_{nm} f_n(0) &= s_m \\
\overset{\dot{}}{p}_m + \sum_n \beta_{nm} \dot{f}_n(0) &= \dot{s}_m
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Hierin sind die folgenden Abkürzungen definiert:

$$\begin{aligned}
\alpha_{nm} &= -E A_{nm} - \tilde{K} (A_{nm} + \tilde{A}_{nm} + B_{nm} + \tilde{B}_{nm}) \\
\beta_{nm} &= \rho C_{nm} + \tilde{\rho} (C_{nm} + \tilde{C}_{nm} + D_{nm} + \tilde{D}_{nm}) \\
\gamma_{nm} &= \alpha_v \tilde{D}_{nm} \\
q_m &= \alpha_v \tilde{d}_m \\
\overset{0}{p}_m &= \rho \overset{0}{a}_m + \tilde{\rho} (\overset{0}{a}_m + \overset{0}{\tilde{a}}_m + \overset{0}{b}_m + \overset{0}{\tilde{b}}_m) \\
s_m &= \rho A_m + \tilde{\rho} (A_m + \tilde{A}_m + B_m + \tilde{B}_m)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Es ist anzumerken, daß α_{nm} aufgrund des Vorzeichenwechsels bei der Ausführung der partiellen Integration in (5.15)₁₋₄ positiv definit ist.

Zur Bestimmung der unbekanntenen Zeitfunktionen $f_n(t)$ ergeben sich aus (5.22) und (5.23) für $m = 1, 2, \dots, n$ somit n gekoppelte Differentialgleichungen sowie jeweils n algebraische Gleichungen für die Anfangsbedingungen $f_n(0)$ und $\dot{f}_n(0)$.

Um das Gleichungssystem zu entkoppeln, sind zunächst die Symmetrieeigenschaften der Integralwerte auszunutzen und daraufhin mit speziellen Forderungen an die Vergleichsfunktionen $u_n, \tilde{u}_{rel,n}$ die Orthogonalitätsbedingungen zu formulieren.

Nach Anwendung des GREENSchen Integralsatzes auf die Integralwerte A_{nm} und \tilde{B}_{nm} in (5.15) folgt unter Beachtung der Randbedingungen deren Symmetrie und Selbstadjungiertheit: $A_{nm} = A_{mn}$ bzw. $\tilde{B}_{nm} = \tilde{B}_{mn}$. Wird die Beziehung $B_{nm} = \tilde{A}_{mn}$ in (5.24)₁ berücksichtigt, ergibt sich aufgrund der Symmetrie des daraus folgenden Ausdrucks $\tilde{A}_{nm} + \tilde{A}_{mn}$ auch die Symmetrie und Selbstadjungiertheit von α_{nm} :

$$\alpha_{nm} = \alpha_{mn} \quad (5.25)$$

Nach entsprechender Vorgehensweise folgt, daß auch (5.24)₂ selbstadjungiert ist:

$$\beta_{nm} = \beta_{mn} \quad (5.26)$$

Die Symmetrie von \tilde{D}_{nm} in (5.15) führt zudem auf die Beziehung:

$$\gamma_{nm} = \gamma_{mn} \quad (5.27)$$

Zur Herleitung der **Orthogonalitätsbedingungen** wird neben den in (5.11) und (5.12) formulierten Forderungen für die Vergleichsfunktionen $u_n, \tilde{u}_{rel,n}$ die Annahme reeller Eigenformen getroffen. Hierzu ist es erforderlich, die allgemeine Dämpfung γ_{nm} in einen die RAYLEIGHdämpfung beschreibenden Anteil $\check{\gamma}_{nm}$ (Linearkombination aus massen- und steifigkeitsproportionalen Termen) und in einen Restterm $\hat{\gamma}_{nm}$ aufzuspalten:

$$\gamma_{nm} = \check{\gamma}_{nm} + \hat{\gamma}_{nm} \quad (5.28)$$

Unter Vorgabe der RAYLEIGHdämpfung kann das Gleichungssystem (5.22) orthogonalisiert werden. Der Restterm wird, multipliziert mit der aktuellen Geschwindigkeit, als zusätzliche „äußere Kraft“ auf der rechten Seite berücksichtigt. Auf das Lösungsverfahren wird später noch eingegangen.

Zur Ermittlung der Orthogonalitätsbedingungen werden die Lösungsansätze $u = \sum_n u_n e^{-j\omega_n t}$ bzw. $\tilde{u}_{rel} = \sum_n \tilde{u}_{rel,n} e^{-j\omega_n t}$ in (5.11)_{1,2} eingesetzt und entsprechend der oben geschilderten Vorgehensweise die virtuelle Arbeit gebildet, was auf die Beziehung

$$\sum_n \alpha_{nm} - \sum_n \beta_{nm} \omega_n^2 = 0 \quad (5.29)$$

führt. Das Vertauschen der Indizes n und m in (5.29) liefert zusätzlich die Beziehung:

$$\sum_n \alpha_{mn} - \sum_n \beta_{mn} \omega_m^2 = 0 \quad (5.30)$$

Werden die beiden Gleichungen subtrahiert, folgen

$$\beta_{nm} (\omega_n^2 - \omega_m^2) = 0 \quad (5.31)$$

und hieraus unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften die Orthogonalitätsbedingungen:

$$\beta_{nm} = 0 \quad n \neq m \quad (5.32)$$

Aus (5.29) folgt dann mit (5.32) auch:

$$\alpha_{nm} = 0 \quad n \neq m \quad (5.33)$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingungen kann das Gleichungssystem (5.22) entkoppelt werden. Es folgt jeweils eine Bestimmungsgleichung für die unbekanntenen Zeitfunktionen $f_n(t)$:

$$-\alpha_{nn} f_n(t) - \beta_{nn} \ddot{f}_n(t) = \tilde{\gamma}_{nn} \dot{f}_n(t) + \dot{q}_n(t) \quad (5.34)$$

Die Gleichung (5.34) wird hier noch in die allgemeine Darstellungsform überführt:

$$\ddot{f}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{f}_n + \omega_n^2 f_n = -\frac{\dot{q}_n}{\beta_{nn}} \quad (5.35)$$

mit

$$\xi_n = \frac{\tilde{\gamma}_{nn}}{2\omega_n \beta_{nn}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\alpha_{nn}}{\beta_{nn}}}$$

Die Anfangsbedingungen ergeben sich unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung (5.32) in den Gleichungen (5.23) zu:

$$\begin{aligned} f_n(0) &= \frac{s_n}{\beta_{nn}} - \frac{p_n}{\beta_{nn}} \\ \dot{f}_n(0) &= \frac{\dot{s}_n}{\beta_{nn}} - \frac{\dot{p}_n}{\beta_{nn}} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (5.35) lautet unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (5.36) für die beiden Fälle einer unter- und einer überkritischen Dämpfung bekanntlich:

$$\begin{aligned} f_n &= e^{-\xi_n \omega_n t} \left(\frac{\dot{f}_n(0) + f_n(0) \xi_n \omega_n}{\omega_{Dn}} \sin(\omega_{Dn} t) + f_n(0) \cos(\omega_{Dn} t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\beta_{nn} \omega_{Dn}} \int_0^t -\dot{q}_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin(\omega_{Dn} (t-\tau)) d\tau \quad \xi < 1 \\ & \\ f_n &= e^{-\xi_n \omega_n t} \left(\frac{\dot{f}_n(0) + f_n(0) \xi_n \omega_n}{\hat{\omega}_{Dn}} \sinh(\hat{\omega}_{Dn} t) + f_n(0) \cosh(\hat{\omega}_{Dn} t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\beta_{nn} \hat{\omega}_{Dn}} \int_0^t -\dot{q}_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin(\hat{\omega}_{Dn} (t-\tau)) d\tau \quad \xi > 1 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Hierin ist die gedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_{Dn} = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n$ und der Wert $\hat{\omega}_{Dn} = \sqrt{\xi^2-1} \omega_n$ definiert.

Während der erste Term der Lösung aufgrund der Dämpfung mit der Zeit abklingt, beschreibt der zweite Term die Schwingungsanregung durch die Größe $\dot{q}_n(t)$, die aus der Geschwindigkeitsdifferenz der inhomogenen Lösungen von (5.9) resultiert und den Kopplungseffekt durch die Interaktionskräfte beinhaltet.

Die Gesamtlösungen für die beiden Komponenten Feststoff und Flüssigkeit folgen nach Einsetzen der Zeitfunktion (5.37) in die Verschiebungsansätze (5.8), auf deren Darstellung hier verzichtet wird.

In (5.35) ist $\check{\gamma}_{nn}$ die neu eingeführte RAYLEIGHdämpfung, die über die Proportionalitätskonstanten an die gegebene Dämpfung γ_{nn} anzupassen ist:

$$\tilde{\gamma}_{nm} = a \alpha_{nm} + b \beta_{nm} \quad (5.38)$$

Der Restterm der Dämpfung

$$\hat{\gamma}_{nm} = \gamma_{nm} - \tilde{\gamma}_{nm} \quad (5.39)$$

kann über die im folgenden beschriebene iterative Vorgehensweise berücksichtigt werden.

Zunächst wird die Gleichung (5.35) in einem ersten Schritt $i=1$ unter Vorgabe der RAYLEIGHDämpfung $\tilde{\gamma}_{nm}$ gelöst und die Geschwindigkeit $\dot{f}_n^{(1)}(t)$ berechnet. Der Dämpfungsterm $\hat{\gamma}_{nm}$ wird daraufhin mit dieser Geschwindigkeit multipliziert und als zusätzliche Kraft auf die rechte Seite der Bestimmungsgleichung geschrieben:

$$\ddot{f}_n^{(i+1)} + 2\xi_n \omega_n \dot{f}_n^{(i+1)} + \omega_n^2 f_n^{(i+1)} = -\frac{\dot{q}_n}{\beta_{nm}} - \sum_m \frac{\hat{\gamma}_{nm}}{\beta_{nm}} \dot{f}_m^{(i)}(t) \quad (5.40)$$

Für das modifizierte Gleichungssystem wird im nächsten Schritt eine neue Schwingungsantwort $\dot{f}_n^{(i+1)}(t)$ entsprechend (5.37) ermittelt, mit der wieder die rechte Seite über die Dämpfungskraft korrigiert wird und so fort. Die Berechnung wird solange fortgesetzt, bis die Lösung die vorgegebene Genauigkeit erreicht.

5.3 Ein Sonderfall bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte

Werden die Trägheitskräfte in den Gleichungen (5.3) vernachlässigt, läßt sich entsprechend der vorherigen Vorgehensweise eine exakte analytische Lösung finden. Für das hier betrachtete gekoppelte Gleichungssystem

$$N' + q = \Delta q \quad (5.41)$$

$$\tilde{N}' + \tilde{q} = -\Delta q$$

wird der gleiche Lösungsansatz (5.8) gewählt. Die Herleitung folgt dem in Kapitel 5.2 beschriebenen Lösungsweg und kann somit kurz gehalten werden. Mit den für das nachfolgende Anwendungsbeispiel gewählten Randbedingungen

$$\mathbf{u} \Big|_{\theta_1=0} = 0 \quad \tilde{\mathbf{u}}_{\text{rel}} \Big|_{\theta_1=0} = 0 \quad (5.42)$$

$$N \Big|_{\theta_1=1} = P \quad \tilde{N} \Big|_{\theta_1=1} = 0$$

und Vernachlässigung der Streckenlasten ($q = 0, \tilde{q} = 0$) lautet die Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichungen ohne Kopplung:

$$\begin{aligned} u_0(\theta_1, t) &= \frac{P(t)}{EF} \theta_1 \\ \tilde{u}_0(\theta_1, t) &= \frac{\tilde{P}(t)}{\tilde{K}F} \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Während bei dem allgemeinen Problem aus Kapitel 5.2 die Schwierigkeit darin bestand, die homogene Lösung bzw. die hierzu notwendigen Vergleichsfunktionen aus dem partiellen Differentialgleichungssystem zu bestimmen, können diese für den hier betrachteten Sonderfall aus einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung ermittelt werden. Diese wird durch die Addition der beiden **homogenen** Gleichungen (entsprechend (5.11) ohne Trägheitsterme)

$$\begin{aligned} EF u''_n &= -\alpha_v F \tilde{u}_{\text{rel}n} \\ \tilde{K}F (u_n + \tilde{u}_{\text{rel}n})'' &= \alpha_v F \tilde{u}_{\text{rel}n} \end{aligned} \quad (5.44)$$

gebildet:

$$\tilde{K} (u_n + \tilde{u}_{\text{rel}n})'' = -E u''_n \quad (5.45)$$

Nach der Integration von (5.45) ergibt sich folgende Beziehung

$$\tilde{u}_{\text{rel}n} = -\left(\frac{E}{\tilde{K}} + 1\right) u_n + d_{1n} \theta_1 + d_{2n} \quad (5.46)$$

die in (5.44)₁ eingesetzt und unter Berücksichtigung des Ansatzes $f_n(t) = e^{-\lambda_n t}$ zu der Bestimmungsgleichung für die Vergleichsfunktionen u_n führt:

$$u''_n + \alpha_v \lambda \frac{E + \tilde{K}}{E \tilde{K}} u_n = \frac{\alpha_v \lambda}{E} (d_{1n} \theta_1 + d_{2n}) \quad (5.47)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (5.47) lautet bekanntlich

$$u_n = c_{1n} \sin(\mu \theta_1) + c_{2n} \cos(\mu \theta_1) + \frac{\tilde{K}}{E + \tilde{K}} (d_{1n} \theta_1 + d_{2n}) \quad (5.48)$$

$$\text{mit } \mu = \sqrt{\alpha_v \lambda \frac{E + \tilde{K}}{E \tilde{K}}},$$

und die Lösung für die Vergleichsfunktionen der Flüssigkeit folgt hiermit zu:

$$\tilde{u}_{\text{rel}n} = -\frac{E + \tilde{K}}{\tilde{K}} (c_{1n} \sin(\mu \theta_1) + c_{2n} \cos(\mu \theta_1)) \quad (5.49)$$

Mit den homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_n(0) &= 0 & \tilde{u}_{\text{rel}n}(0) &= 0 \\ N_n(l) &= 0 & \tilde{N}_n(l) &= 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

folgt unmittelbar $c_{2n} = d_{2n} = 0$ und damit

$$\begin{aligned} c_{1n} \mu \cos(\mu l) + \frac{\tilde{K}}{E + \tilde{K}} d_{1n} l &= 0 \\ -\frac{E + \tilde{K}}{\tilde{K}} c_{1n} \mu \cos(\mu l) &= 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

Die Linearkombination der beiden Gleichungen liefert $d_{1n} = 0$. Eine nichttriviale Lösung des homogenen Gleichungssystems ist somit nur für $\cos(\mu l) = 0$ vorhanden, woraus sich die folgenden Eigenwerte ergeben:

$$\mu = \frac{2n-1}{2 \cdot l} \pi \quad (5.52)$$

Die **Vergleichsfunktionen** für den Feststoff und die Flüssigkeit folgen hiermit aus (5.48) und (5.49):

$$\begin{aligned}
 u_n &= c_{1n} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2 \cdot l} \theta_1\right) \\
 \tilde{u}_{\text{rel}n} &= -c_{1n} \frac{E + \tilde{K}}{\tilde{K}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2 \cdot l} \theta_1\right)
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Zur Berechnung der unbekanntenen Zeitfunktionen $f_n(t)$ werden aus den Gleichgewichtsbedingungen (5.44) über die virtuellen Arbeiten die Bestimmungsgleichungen äquivalent zu (5.14) aufgestellt:

$$\sum_n (E A_{nm} + \tilde{K} (A_{nm} + \tilde{A}_{nm} + B_{nm} + \tilde{B}_{nm})) f_n = \sum_n \alpha_v \tilde{D}_{nm} \dot{f}_n + \alpha_v \tilde{d}_m \tag{5.54}$$

Die hierin enthaltenen Integralwerte wurden bereits in (5.15) erklärt.

Die in Kapitel 5.2 beschriebenen Symmetrieeigenschaften gelten ohne Einschränkungen und führen zu den Orthogonalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 A_{nm} &= 0 \\
 A_{nm} + \tilde{A}_{nm} + B_{nm} + \tilde{B}_{nm} &= 0 \quad \text{für } n \neq m \\
 \tilde{D}_{nm} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Hiermit läßt sich das Gleichungssystem entkoppeln und liefert mit den Abkürzungen (5.24) die **n Bestimmungsgleichungen für die Zeitfunktionen**:

$$\dot{f}_n + \zeta_n f_n = -\frac{\dot{q}_n}{\gamma_{nn}} \quad \text{mit} \quad \zeta_n = \frac{\alpha_{nn}}{\gamma_{nn}} \tag{5.56}$$

Die Anfangsbedingungen werden für den betrachteten Sonderfall ausschließlich durch die Verschiebungen der beiden Komponenten zur Zeit $t = 0$ vorgegeben:

$$\begin{aligned}
 u|_{t=0} &= U_0 \\
 \tilde{u}_{\text{rel}}|_{t=0} &= \tilde{U}_{\text{rel}0}
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Zur Bildung der virtuellen Arbeit werden die Anfangsbedingungen über die Absolutverschiebungen dargestellt und mit den jeweiligen Verschiebungen u_m und $u_m + \tilde{u}_{\text{rel}m}$ multipliziert. Die beiden Gleichungen werden daraufhin über θ_1 integriert und addiert (entsprechend der

Herleitung von (5.23)₁). Werden die virtuellen Verschiebungen vertauscht, ergibt sich eine weitere Gleichung. Nach Subtraktion dieser Gleichung von der ersten folgen unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbedingungen die Zeitfunktionen der Anfangsbedingungen:

$$f_n(0) = \frac{\alpha_v \tilde{B}_n}{\gamma_{nn}} - \frac{q_n(0)}{\gamma_{nn}} \quad (5.58)$$

Die **Lösung** der Differentialgleichung (5.56) lautet unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (5.58) bekanntlich:

$$f_n(t) = -\frac{q_n(t)}{\gamma_{nn}} + \frac{\alpha_v \tilde{B}_n}{\gamma_{nn}} e^{-\zeta_n t} + \frac{\zeta_n}{\gamma_{nn}} e^{-\zeta_n t} \int_0^t q_n(\tau) e^{\zeta_n \tau} d\tau \quad (5.59)$$

Wird der Stab mit einer zeitlich konstanten Last beaufschlagt, die zur Zeit $t = 0$ sprunghaft aufgebracht wird, dann ist q_n ebenfalls konstant und die Lösung kann in die folgende einfache Form überführt werden:

$$f_n(t) = \left(\frac{\alpha_v \tilde{B}_n}{\gamma_{nn}} - \frac{q_n(t)}{\gamma_{nn}} \right) e^{-\zeta_n t} \quad (5.60)$$

Die Verschiebungen des Feststoffes und der Flüssigkeit sind aus dem Lösungsansatz (5.8) nach Einsetzen der Zeit- und Vergleichsfunktionen zu berechnen, auf dessen Darstellung hier verzichtet wird.

Zur Betrachtung der Lösung im Fall einer harmonischen Anregung ist es sinnvoll, die Bestimmungsgleichung für die Zeitfunktionen f_n in den **Frequenzbereich** zu transformieren. Mit den Ansätzen für die Zeitfunktion und den Interaktionsterm

$$f_n(t) = F_n e^{j\Omega t} \quad (5.61)$$

$$q_n(t) = Q_n e^{j\Omega t}$$

folgt aus (5.56) über die FOURIERtransformation die Bestimmungsgleichung im Frequenzbereich:

$$F_n(\Omega) = -\frac{j\Omega(\zeta_n - j\Omega)}{\zeta_n^2 + \Omega^2} \frac{Q_n}{\gamma_{nn}} \quad (5.62)$$

Hierin ergibt sich für den Interaktionsterm mit der für das nachfolgende Beispiel getroffenen Annahme, daß die äußere Belastung mit der Amplitude \hat{P} nur auf den Feststoff wirkt, der Ausdruck

$$Q_n = \frac{\hat{P}}{E} \alpha_v \int_1 \theta_1 \tilde{u}_{\text{rel.m}} d\theta_1 . \quad (5.63)$$

Die Gesamtlösungen für die Verschiebungen der beiden Stoffkomponenten berechnen sich aus der Transformation der Gleichungen (5.8) und lauten mit der FOURIERtransformation der inhomogenen Lösungen (5.43) $U_0(\Omega)$ und $\tilde{U}_0(\Omega)$:

$$\begin{aligned} U(\theta_1, \Omega) &= U_0(\theta_1, \Omega) + \sum_n u_n(\theta_1) F_n(\Omega) \\ \tilde{U}(\theta_1, \Omega) &= \tilde{U}_0(\theta_1, \Omega) + \sum_n \tilde{u}_n(\theta_1) F_n(\Omega) \end{aligned} \quad (5.64)$$

Die Ausdrücke U_0 , \tilde{U}_0 und F_n sind komplexe Funktionen und stellen das Übertragungsverhalten des Systems bei einer harmonischen Belastung abhängig von der Anregungsfrequenz dar.

6 Anwendungsbeispiel

6.1 Modellbeschreibung

Dynamische Untersuchungen des Femurs im Vorfeld haben gezeigt, daß sowohl bei einer physiologischen Belastung (Gehen: ca. 1 Hz) als auch bei einer Impulsbelastung infolge sportlicher Tätigkeiten oder eines Unfalls (Impulsdauer bis ca. 5 ms) die Trägheitskräfte vernachlässigbar sind, da sich die „Anregungsfrequenz“ bei Betrachtung von Stablängsschwingungen weit im unterkritischen Bereich befindet. Somit werden im folgenden die Verformungen und Spannungen des Knochenmodells mit Hilfe der in Kapitel 5.3 hergeleiteten Lösung zunächst für eine quasistatische Belastung mit einer Sprungfunktion und darauffolgend für eine dynamische Belastung mit einer Impulsanregung sowie einer harmonischen Anregung berechnet. Die Untersuchungen sollen unter anderem einen Aufschluß über den Einfluß der Porosität und des Diffusionskoeffizienten der Knochenstruktur auf die Verformungscharakteristik geben. Die erforderlichen Berechnungsroutinen sind mit dem symbolischen und numerischen Gleichungslöser MATHCAD erstellt worden.

Der Oberschenkelknochen (Femur) wird als gerader Stab aus einem Feststoffgewebe und einer Flüssigkeit betrachtet, der am unteren Ende fest eingespannt ist und an seinem freien Ende mit der Belastung $P(t)$ beaufschlagt wird (siehe Bild 6.1). Die Last P wirkt dabei nur auf den Feststoff. Die Porenflüssigkeit kann bei einer Belastung des Knochens aus diesem austreten, was in dem Stabmodell durch die Randbedingung $\tilde{N}(l) = 0$ am oberen Stabende beschrieben wird.

Für die Länge des Stabes wird die Abmessung des stabförmigen Schaftbereich des Femurs (Diaphyse) mit $l = 40\text{cm}$ gewählt. Die ringförmige Querschnittsfläche des Röhrenknochens wird näherungsweise über der Stablänge als konstant angenommen und mit einem mittleren Wert von $F = 4.4\text{cm}^2$ beschrieben. Das Flächenverhältnis zwischen Feststoff und Flüssigkeit entspricht dem Volumenverhältnis bzw. der Porosität, die sich, wie im Kapitel 2 erläutert, hauptsächlich aus den Anteilen des vaskularen (HAVERSSche Kanäle) und des lakunaren Porenvolumens (Lakunen und Canaliculi) zusammensetzt. Hier werden die beiden Bereiche unterschiedlicher Porenstrukturen näherungsweise zu einer einheitlichen, homogen verteilten Porosität zusammengefaßt, die $\tilde{n} = 10\%$ beträgt.

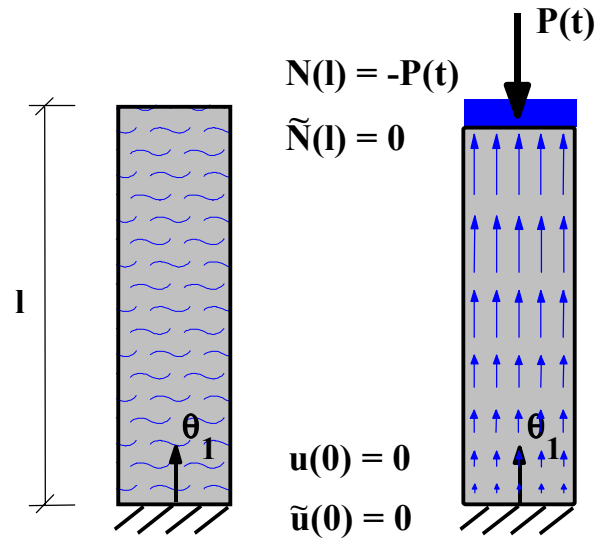


Bild 6.1: Stabmodell für den Knochen mit Randbedingungen im unverformten und verformten Zustand

Die elastischen Eigenschaften der Struktur werden durch den eindimensionalen Steifemodul E des Knochenfeststoffes und den Kompressionsmodul der Flüssigkeit \tilde{K} beschrieben. Diese auf die Gesamtfläche bezogenen Elastizitätswerte werden anhand der Volumenanteile aus den wirklichen (realen) Werten berechnet. Für den kortikalen Knochen wird nach Angaben von [MAK 1997, COWIN 1999] der reale Elastizitätsmodul $E_R = 16 \text{ GPa}$ gewählt und für die Flüssigkeit der Kompressionsmodul von salzhaltigem Wasser mit $\tilde{K}_R = 2.3 \text{ GPa}$ zugrunde gelegt. Somit ergeben sich die für die Rechnung erforderlichen Elastizitätswerte zu $E = E_R (1 - \tilde{n}) = 14.4 \text{ GPa}$ und $\tilde{K} = \tilde{K}_R \tilde{n} = 0.25 \text{ GPa}$.

Der Diffusionskoeffizient $\alpha_v = \tilde{\eta}/k$ hängt zum einen von der Viskosität der Flüssigkeit $\tilde{\eta}$ und zum anderen von der Permeabilität k ab, die allein durch die Porenstruktur beschrieben wird. Für die Viskosität wird der Wert von salzhaltigem Wasser mit $\tilde{\eta} = 10^{-3} \text{ kg/ms}$ angenommen. Aufgrund der hier verwendeten Modellbeschreibung sind Daten zur spezifischen Permeabilität aus der Literatur nur eingeschränkt übertragbar, da dieser Größe aufgrund der Diffusionslänge des gesamten Stabes hier eine andere Bedeutung zukommt. Basierend auf den Untersuchungen verschiedener Gewebe und Porenstrukturen von [COWIN 1999, LAI 1980, MAK 1997] und einer Ähnlichkeitsbetrachtung der unterschiedlichen Diffusionslängen wird $\alpha_v = 5 \cdot 10^7 \text{ Ns/m}^4$ gewählt.

Den folgenden Berechnungen für die verschiedenen Belastungsfunktionen wird eine maximale Druckbelastung von $P = 8000 \text{ N}$ zugrunde gelegt, die einer physiologischen Beanspruchung des Femurs (z.B. beim Springen) entspricht [SUBKE 1997].

6.2 Berechnungen für eine sprungartige Belastung

Anhand einer quasistatischen Belastung des Knochens mit einer Heaviside-Sprungfunktion werden im folgenden die Einflüsse der Porosität und des Diffusionswiderstandes erläutert. Hierzu wird die Lösung (5.60) verwendet, die für den Sonderfall einer zeitunabhängigen Belastung mit der Sprungfunktion in Kapitel 5.3 beschrieben wurde.

Im Bild 6.2 sind die Verschiebungen des Feststoffes und der Flüssigkeit am oberen Stabende $\theta_1 = 1$ über der Zeit aufgetragen. Beide Stoffe erfahren nach der Lastaufbringung zur Zeit $t = 0^+$ die gleiche Anfangsverschiebung von $u(0^+) = \tilde{u}(0^+) = -0.49$ mm. Während sich der Feststoff nur noch wenig in Belastungsrichtung verschiebt, entspannt sich die komprimierte Flüssigkeit und nähert sich asymptotisch dem unverformten Ausgangszustand an.

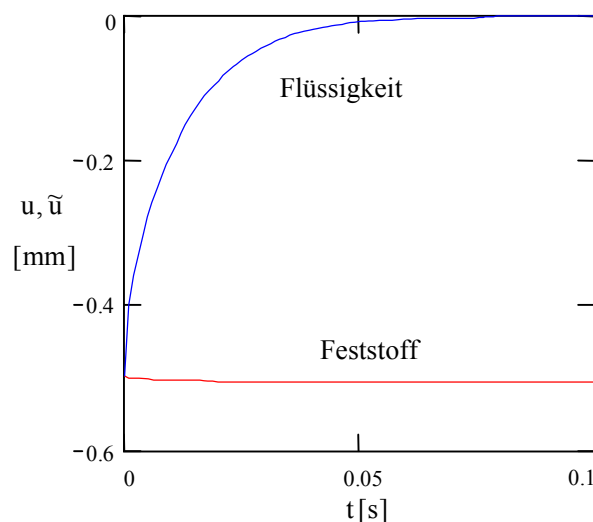


Bild 6.2: Verschiebungen von Feststoff und Flüssigkeit infolge einer sprungartig aufgebrachtten Druckbelastung

Die Geschwindigkeit mit der die Flüssigkeit aus dem porösen Medium austritt hängt vor allem von der Porosität und dem Diffusionskoeffizienten ab (siehe Bild 6.3 und 6.5). Zur Beschreibung derartiger Entspannungsprozesse von Flüssigkeiten wird allgemein die Relaxationszeit eingeführt, die der Zeitspanne entspricht, in der der Flüssigkeitsdruck näherungsweise wieder den Ausgangszustand erreicht. Die Bedeutung dieser Größe wird deutlich, wenn die Struktur einer dynamischen Belastung (siehe Kapitel 6.4) unterworfen wird, die zu einer höheren Verformungsgeschwindigkeit führt als die von der Flüssigkeit benötigte Relaxationszeit. Hierdurch wird das Austreten der Flüssigkeit aus dem Porenkörper behindert, womit sich ein Druck in den Poren aufbaut, der unter anderem eine unterstützende Wirkung auf das Feststoffgewebe ausübt und die Gesamtsteifigkeit des Knochens etwas erhöht. Der Effekt

eines Zuwachses des Porendrucks bei einer charakteristischen Frequenz kann mit dem aus der Regelungstechnik bekannten Hochpaßfilter beschrieben werden, wobei die sogenannte Eckfrequenz dem Kehrwert der Relaxationszeit entspricht.

Die Abhängigkeit der Verschiebungen am oberen Stabende $\theta_1 = 1$ beider Komponenten von der Porosität ist den Bildern 6.3 und 6.4 zu entnehmen. Mit Zunahme der Porosität ($\tilde{n} = 5\%$, 10% und 20%) nimmt die Steigung der Flüssigkeitskurve zu, das heißt, daß der spannungsfreie Ausgangszustand in einer kürzeren Zeit erreicht wird. Die Feststoffverformung nimmt wegen der reduzierten Gesamtsteifigkeit der Struktur etwas zu, da sich das Flächenverhältnis äquivalent zur Porosität verändert.

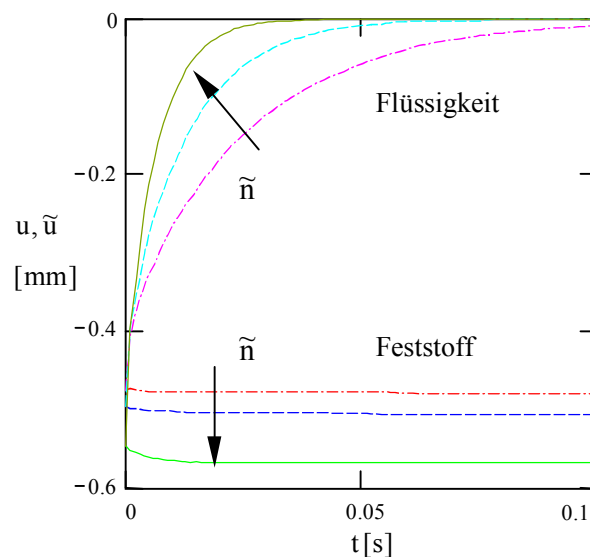


Bild 6.3: Verschiebung des Feststoffes und der Flüssigkeit für verschiedene Porositäten $\tilde{n} = 5\%$, 10% und 20%

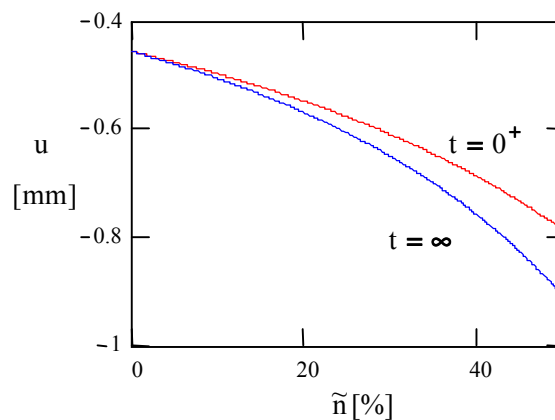


Bild 6.4: Verschiebung des Feststoffes zur Zeit $t = 0^+$ und $t = \infty$ über der Porosität

Das Relaxationsverhalten der Porenflüssigkeit ist vor allem von dem Diffusionskoeffizienten abhängig, was anhand der Verschiebungs- und Spannungs-Zeit-Funktionen am oberen Stabende $\theta_1 = 1$ in den Bildern 6.5 und 6.6 veranschaulicht wird. Mit der Zunahme des Diffusionswiderstandes verlangsamt sich folglich der Relaxationsprozeß und die Flüssigkeit erreicht deutlich später den belastungsfreien Ausgangszustand. Hieraus resultiert eine unterstützende Wirkung auf den Feststoff kurz nach der Lastaufbringung, was sich in der Spannungs-Zeit-Funktion (Bild 6.6) niederschlägt. Die zu erkennende Abnahme der Steigung im Spannungsverlauf mit Zunahme des Diffusionskoeffizienten ist besonders bei einer zeitveränderlichen Anregung von Bedeutung (siehe Kapitel 6.3).

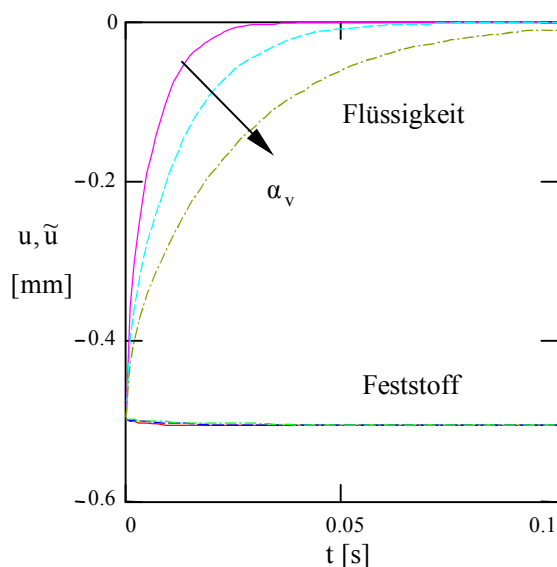


Bild 6.5: Verschiebungen des Feststoffes und der Flüssigkeit über der Zeit für unterschiedliche Diffusionskoeffizienten ($\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ Ns/m}^4$)

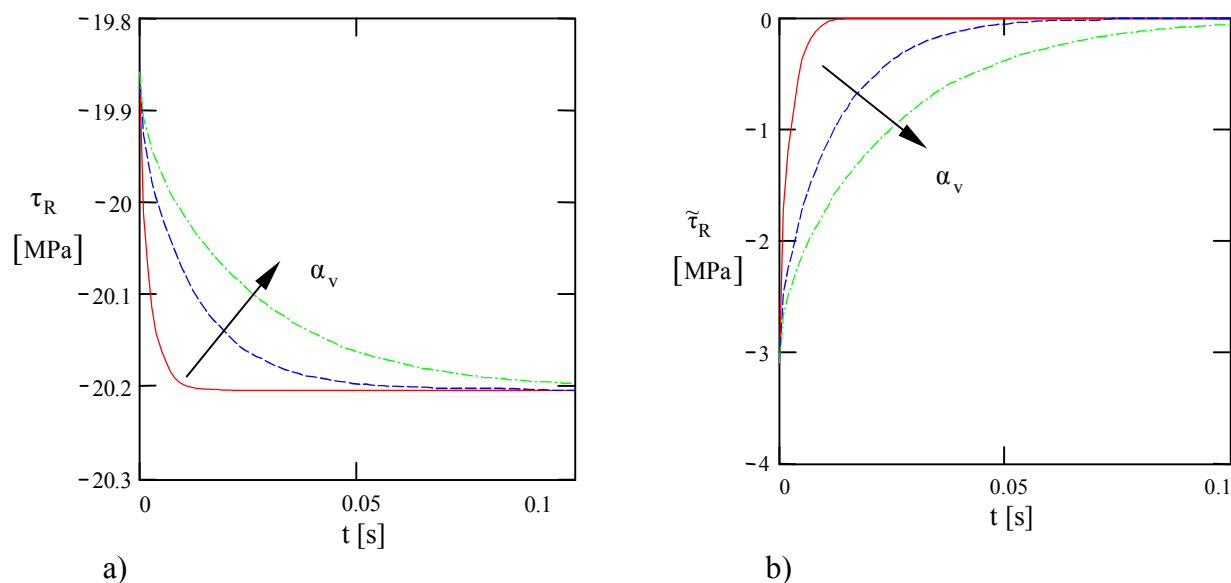


Bild 6.6: Reale Normalspannungen des a) Feststoffes und b) der Flüssigkeit über der Zeit für unterschiedliche Diffusionskoeffizienten ($\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ Ns/m}^4$)

6.3 Berechnungen für eine zeitveränderliche Belastung

Nachfolgend werden die Struktureigenschaften anhand zeitveränderlicher Druckbelastungen mit einem Sinusimpuls sowie einer harmonischen Anregung untersucht. Hierzu wird die in Kapitel 5.3 beschriebene allgemeine Lösung (5.59) bzw. (5.62) verwendet.

In den Bildern 6.7 sind für eine **Impulsanregung** mit der Impulsdauer $\Delta T = 50$ bzw. 5 ms (äquivalent einer halben Sinusperiode mit $f = 10$ bzw. 100 Hz) die Verschiebungen des Feststoffes und der Flüssigkeit am oberen Stabende $\theta_1 = 1$ über der Zeit aufgetragen. Die durch die viskosen Interaktionskräfte hervorgerufene Kopplung führt zu einer zeitlichen Verzögerung der Flüssigkeitsbewegung. Nach der Entlastung fließt die durch die Kompression herausgedrückte Flüssigkeit wieder in den Knochen zurück.

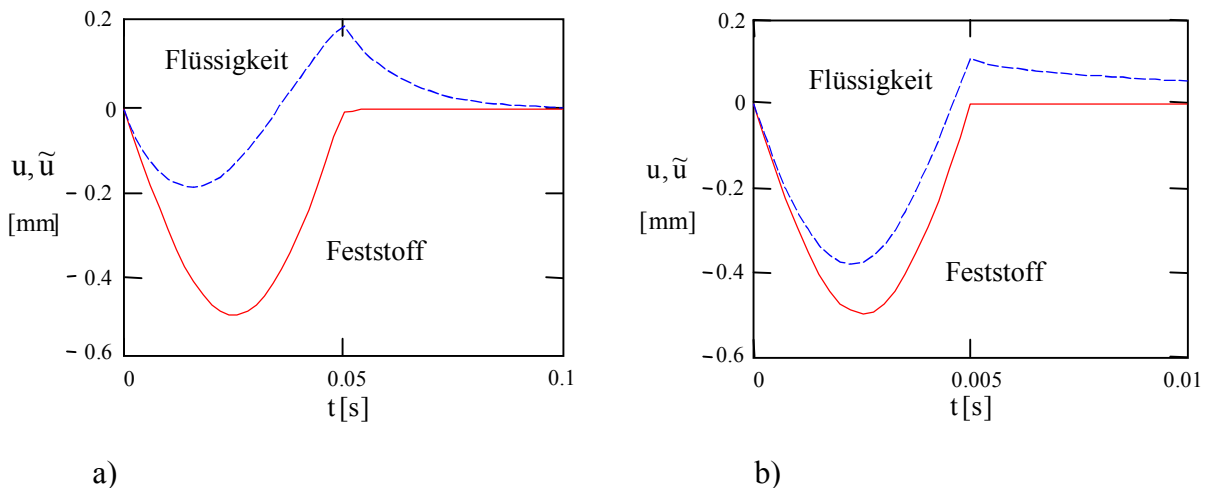


Bild 6.7: Verschiebungen infolge einer Belastung mit einem Sinusimpuls der Impulsdauer a) $\Delta T = 50$ ms und b) $\Delta T = 5$ ms

Der Einfluß des Diffusionskoeffizienten wird in den Bildern 6.8 und 6.9 anhand der Verschiebungs-Zeit- und der Verschiebungs-Orts-Funktionen dokumentiert, die für die beiden Impulsdauern $\Delta T = 50$ und 5 ms dargestellt sind. Mit der Zunahme des Diffusionswiderstandes und somit der Interaktionskräfte nähert sich die Flüssigkeitsverschiebung der Verformung des Feststoffes an.

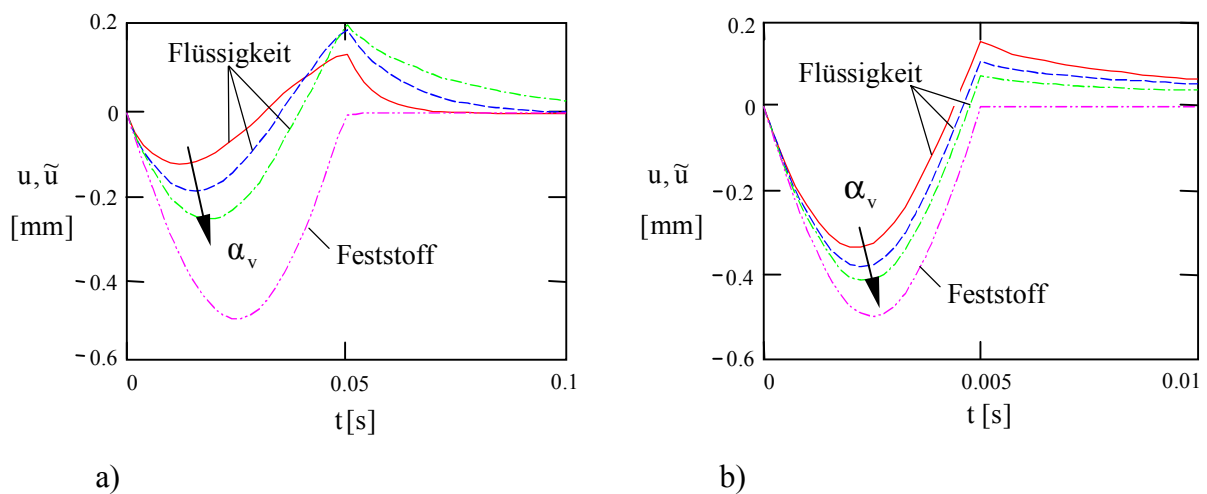


Bild 6.8: Verschiebungs-Zeit-Funktionen für unterschiedliche Diffusionskoeffizienten ($\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ Ns/m}^4$), Impulsdauer: a) $\Delta T = 50 \text{ ms}$ und b) $\Delta T = 5 \text{ ms}$

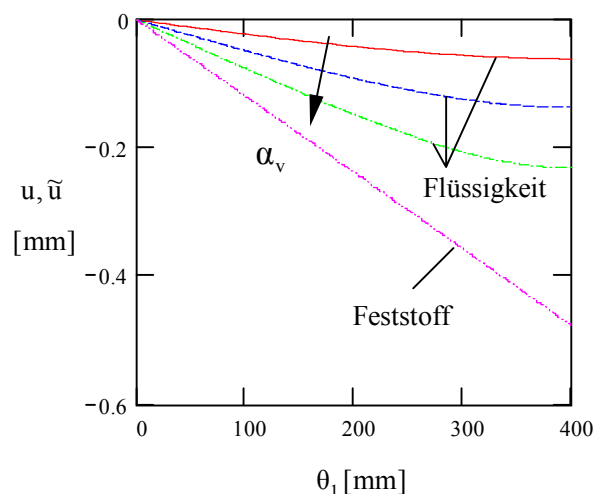


Bild 6.9: Verschiebungs-Orts-Funktionen (Impulsdauer $\Delta T = 0.05$) zur Zeit $t = 0.025 \text{ s}$ für unterschiedliche Diffusionskoeffizienten ($\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ Ns/m}^4$)

In den Bildern 6.10 und 6.11 sind die realen Spannungen der beiden Komponenten für eine Anregung mit der Impulsdauer $\Delta T = 5 \text{ ms}$ sowie im letzteren auch mit $\Delta T = 50 \text{ ms}$ dargestellt. Abhängig von der Belastungsgeschwindigkeit, bzw. antiproportional zur Impulsdauer, wird ein Teil der auf den Stab wirkenden Last von der Flüssigkeit getragen, womit eine unterstützende Wirkung auf das Knochengewebe entsteht. Diese ist aufgrund der niedrigen Porosität sehr gering, so daß die Variation des Diffusionskoeffizienten in dem hier betrachteten Bereich keinen nennenswerten Einfluß aufzeigt. Für eine größere Porosität von 70 %, wie sie im Bereich der Epiphysen anzutreffen ist, ist die entlastende Wirkung auf das Knochengewebe im Bild 6.12 dargestellt.

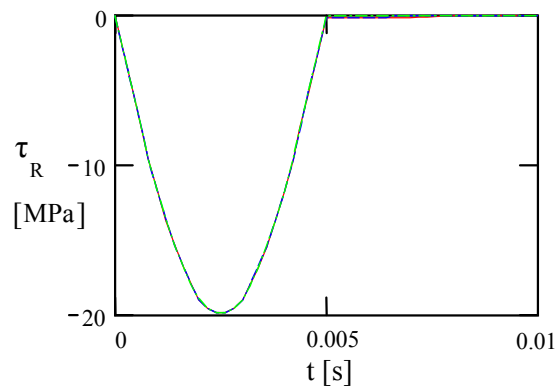


Bild 6.10: Spannung des Feststoffes infolge eines Sinusimpulses mit der Impulsdauer $\Delta T = 5$ ms (Variation α_v ohne nennenswerten Einfluß)

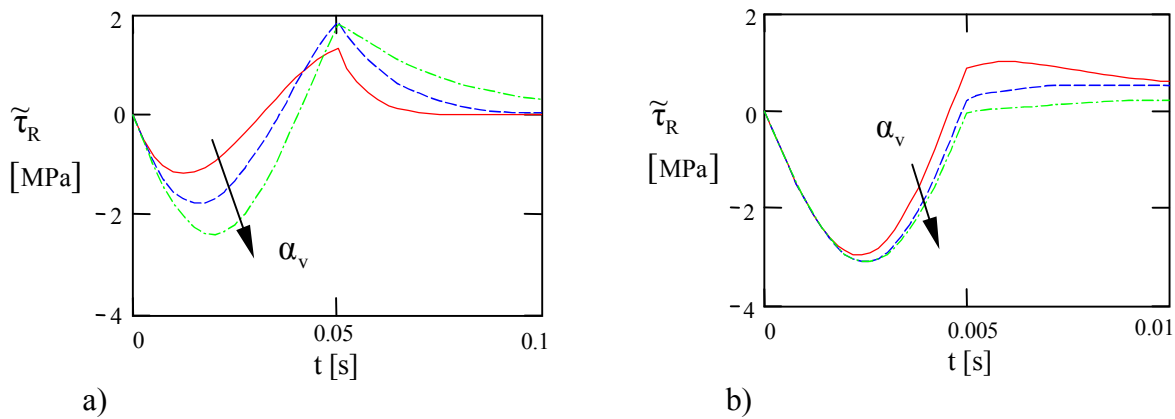


Bild 6.11: Spannung der Flüssigkeit infolge eines Sinusimpulses mit der Impulsdauer a) $\Delta T = 50$ ms und b) $\Delta T = 5$ ms ($\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ N s/m}^4$)

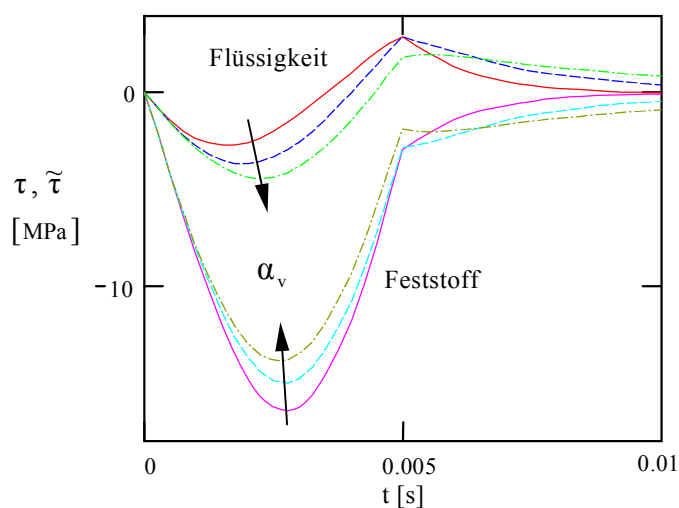


Bild 6.12: Bezogene Spannungen des Feststoffes und der Flüssigkeit infolge eines Sinusimpulses mit der Impulsdauer $\Delta T = 5$ ms für eine Porosität von $\tilde{n} = 70\%$ ($\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ N s/m}^4$)

Die Relativverschiebung der Flüssigkeit am oberen Rand des Stabes ist in Bild 6.13 für verschiedene Diffusionskoeffizienten über der Zeit aufgetragen.

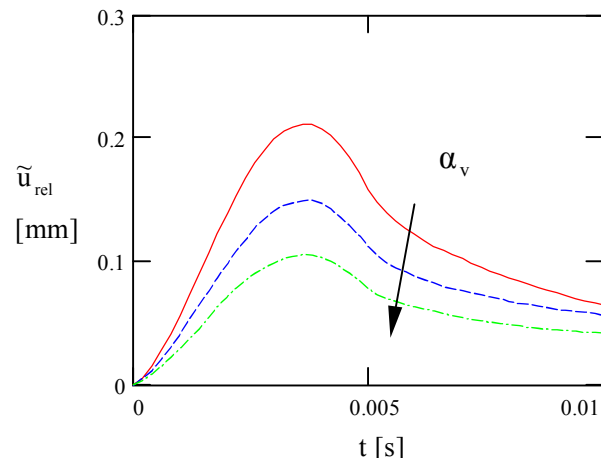


Bild 6.13: Relativverschiebung der Flüssigkeit bei $\theta_1 = 1$ (Impulsdauer $\Delta T = 0.005$ s) für unterschiedliche Diffusionskoeffizienten ($\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ Ns/m}^4$)

Das Übertragungsverhalten für eine **harmonische** Belastung des Knochens ist im Bild 6.14 anhand der Verschiebungen der Flüssigkeit über der Anregungsfrequenz in doppelt logarithmischer Darstellung zu sehen. Hierzu wurde die Bewegungsgleichung in den Frequenzbereich transformiert (siehe Gleichung (5.64)).

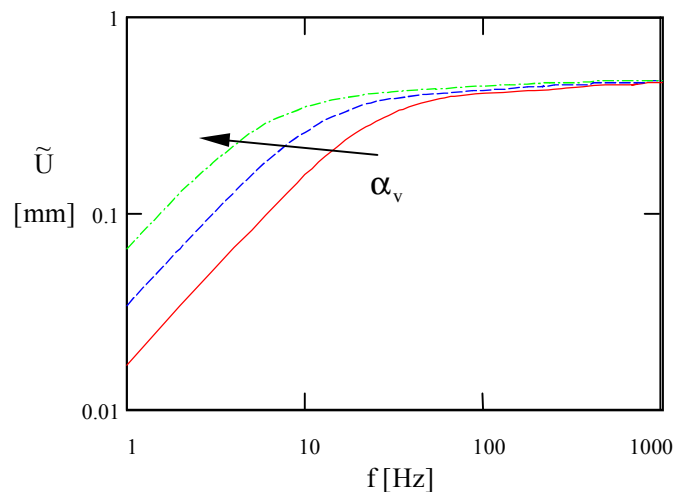


Bild 6.14: Übertragungsfunktionen der Flüssigkeitsverschiebung für die Diffusionskoeffizienten $\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8 \text{ Ns/m}^4$ im doppelt-logarithmischen Maßstab

Der Kurvenverlauf zeigt die Eigenschaften des beschriebenen Hochpaßfilters. Die Eckfrequenz - graphisch durch den Schnittpunkt der Tangenten an die beiden linearen Bereiche einer

Kurve definiert – verschiebt sich mit der Zunahme des Diffusionswiderstandes zu niedrigeren Frequenzen. Eine entsprechende Charakteristik weisen auch die Flüssigkeitsspannungen auf, auf dessen Darstellung hier verzichtet wird. Wie auch die Verschiebungen nehmen die Spannungen der Flüssigkeit mit steigender Belastungsgeschwindigkeit bis zur Eckfrequenz zu und tragen bei hohen Anregungsfrequenzen zu einer Entlastung des Knochenfeststoffes bei. Die entlastende Wirkung ist bei Knochengewebe mit einer hohen Porosität, wie die Spongiosa, von Bedeutung. Spannungen mit einer hohen Frequenz werden durch den Kopplungseffekt mit der Flüssigkeit somit „herausgefiltert“.

Für einen Knochen mit einer Porosität von 70 % sind die Verschiebungen und Spannungen des Feststoffes und der Flüssigkeit in dem Bild 6.15 über der Frequenz dargestellt. Zur Verdeutlichung der entlastenden Wirkung auf den Knochenfeststoff, sind die Verschiebungen und Spannungen linear über dem Logarithmus der Frequenz aufgetragen.

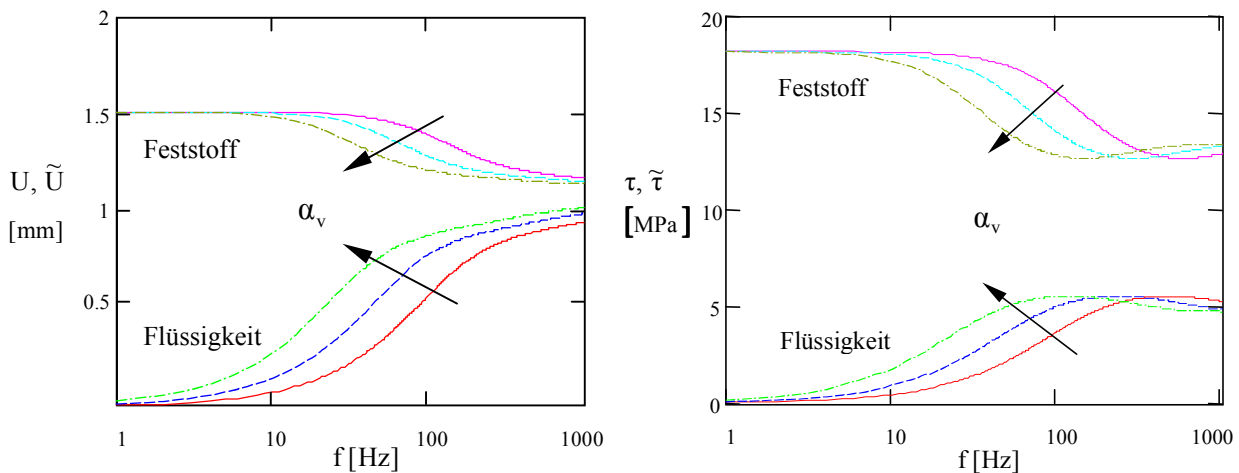


Bild 6.15: Übertragungsfunktionen der Verschiebungen und der Spannungen von spongiösem Knochen ($\tilde{n} = 70\%$) für die Diffusionskoeffizienten $\alpha_v = 2.5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7$ und $10^8 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^4}$

6.4 Diskussion der Ergebnisse

Die Untersuchungen an dem Stabmodell des Knochens haben gezeigt, daß trotz der vereinfachten Modellabbildung einige interessante Effekte des realen Knochens gut wiedergegeben werden konnten. Zum einen ist bei einer zeitveränderlichen Belastung eine erhöhte Zunahme des Porenflüssigkeitsdruckes zu verzeichnen, wenn bei zunehmender Anregungsfrequenz eine Relaxation des Flüssigkeitsdruckes erschwert wird. Zum anderen trägt dieser Effekt durch die Interaktionskräfte zu einer, wenn auch geringen, Entlastung des Knochenfeststoffes bei. Die

Reduktion der Feststoffspannungen ist jedoch wesentlich von der Porosität und dem Diffusionskoeffizienten abhängig und kann bei einem großen Porenvolumen, wie z.B. im spongiösen Knochen, bedeutsam werden. Für den Diffusionskoeffizienten sind aufgrund der komplexen Knochenstruktur und Schwierigkeiten bei der experimentellen Bestimmung keine gesicherten Daten vorhanden und somit eine große Streubreite möglich. Die Variation des Diffusionskoeffizienten bei den Berechnungen hat den Einfluß der Kopplung beider Stoffe aufgezeigt.

Die Flüssigkeitsbewegung ruft zudem durch die viskosen Interaktionskräfte eine Dämpfung hervor, die große Belastungsspitzen infolge stoßartiger Belastungen abschwächt und somit die Entstehung von Schäden in dem Knochengewebe reduziert. Dieser Dämpfungseffekt ist in den volumigen Gelenkköpfen (Epiphysen) des Femurs mit einer sehr hohen Porosität (Spongiosa: bis zu 70 %) besonders ausgeprägt.

Der Porenflüssigkeitsdruck ist auch für die Beschreibung knochenspezifischer Wachstums- und Umbauprozesse von Bedeutung. Der mit dem Modell ermittelte maximale Porendruck beträgt für die gewählte Belastung ca. 3 kPa für eine Porosität von 10 % bzw. ca. 5 kPa für eine Porosität von 70 % und liegt in dem Bereich des vascularen Porendrucks, wie er z.B. in [COWIN 1999] angegeben wird. Eine Differenzierung des Flüssigkeitsdruckes entsprechend der vascularen und lakunaren Porenstrukturen ist mit diesem Modell jedoch nicht möglich.

Es ist aber anzumerken, daß für eine Untersuchung mikroskopischer Vorgänge, wie sie in der genannten Literatur an einzelnen Osteonen beschrieben werden, das Stabmodell ebenfalls verwendet werden kann. Hiermit kann z.B. die Flüssigkeitsbewegung in der aus Lakunen und Kanälen (Canaliculi) gebildeten Porenstruktur eines einzelnen Osteons beschrieben werden, welches ebenfalls eine stabförmige Struktur darstellt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein mechanisches Modell zur Beschreibung der Eigenschaften des Oberschenkelknochens (Femur) als poröses Medium basierend auf der Theorie der Mehrkomponentenkontinua entwickelt.

Anhand einer umfangreichen Literaturrecherche wurden zunächst die Materialeigenschaften des Knochengewebes und der Knochenflüssigkeiten aufgezeigt sowie ein Überblick über den aktuellen Forschungsstand gegeben. Es hat sich dabei gezeigt, daß dem mikroskopischen Aufbau der porösen Knochenstruktur und dem Einfluß der Flüssigkeiten eine besondere Bedeutung zukommen.

Die Kinematik des Mehrkomponentenkontinuums wurde über eine LAGRANGESche Betrachtungsweise für den Feststoff und die Beschreibung der übrigen Komponenten in Relativkoordinaten formuliert. Zur Herleitung einer konstitutiven Theorie für das Mehrkomponentenkontinuum war eine in sich widerspruchsfreie Formulierung der Erhaltungsgleichungen und der konstitutiven Beziehungen erforderlich. Dabei wurde das Konzept der Volumenanteile berücksichtigt, welches aufgrund der Unmischbarkeit der Stoffkomponenten eine Zwangsbedingung in der konstitutiven Theorie darstellt. Die konstitutiven Gleichungen wurden für ausgewählte Prozeßvariablen aus den Restriktionen der Entropieungleichung entwickelt, womit der 2. Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt war. Für ein Zweikomponentenkontinuum aus einem Feststoff und einer Flüssigkeit wurden die konstitutiven Gleichungen für die Spannungen der Stoffkomponenten, die Interaktionskräfte, den Wärmefluß des Gemisches und die Volumenanteile für einen Zustand in der Nähe des sogenannten thermodynamischen Gleichgewichts hergeleitet. Das allgemeine räumliche Problem ist mathematisch bestimmt und kann mit den entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen theoretisch gelöst werden. Aufgrund der enormen Komplexität des Modells war jedoch eine Vereinfachung des Differentialgleichungssystems erforderlich.

Mit Hilfe der bekannten Hypothesen der Stabtheorie (BERNOULLI, DE ST. VENANT, WAGNER) für den Feststoff und einer speziellen Hypothese für die Flüssigkeit wurde eine Reduktion auf ein eindimensionales Gleichungssystem in Stabkoordinaten erreicht. Die Reduktion der räumlichen Flüssigkeitsbewegung erfolgte dabei mit geeigneten Ansatzfunktionen für die Relativverschiebungen über die Methode der virtuellen Arbeit nach GALERKIN.

Für den Sonderfall einer ausschließlich longitudinalen Bewegung der beiden Stoffkomponenten wurde ein Lösungsverfahren für das Anfangswert-Randwert-Problem vorgestellt. Unter

Vernachlässigung der Trägheitskräfte konnte zusätzlich eine spezielle analytische Lösung des Problems formuliert werden.

Die Anwendung des Lösungsverfahrens erfolgte an einem Stabmodell des Femurs, welches mit einer zeitveränderlichen Druckbelastung beaufschlagt wurde. Parameterstudien für eine Sprung- und eine Impulsbelastung zeigten den Einfluß der Porosität und des Diffusionskoeffizienten auf den Feststoff und die Flüssigkeit. Der Einfluß der Parameter auf die Feststoffspannungen machte sich dabei erst bei einer höheren Porosität, wie sie z.B. durch den spongiösen Knochen vorgegeben ist, stark bemerkbar. Der maximale Porenflüssigkeitsdruck zeigte hingegen eine große Abhängigkeit vor allem von dem Diffusionskoeffizienten. Hierdurch wurde auch die Relaxationszeit des Flüssigkeitsdruckes und somit die Abhängigkeit von der Erregerfrequenz bzw. der Impulsdauer beeinflusst, womit der Knochen die Eigenschaften eines Hochpaßfilters annimmt und hochfrequente schädliche Spannungsspitzen durch die unterstützende Wirkung der Flüssigkeit herausfiltert. Diese Eigenschaften sind von dem spongiösen, markhaltigen Knochengewebe der Gelenkbereiche mit einer Porosität von bis zu 70 % bekannt.

Das in dieser Arbeit entwickelte Modell und die durchgeführten Untersuchungen liefern eine Grundlage für weitere Forschungsziele zur biomechanischen Beschreibung des Knochens.

Somit kann das allgemeine Modell durch komplexere Materialgesetze erweitert werden, die unter anderem anisotrope Eigenschaften der einzelnen Stoffe und der Koppelmechanismen beschreiben. Jedoch ist zu bemerken, daß insbesondere für die Kopplungsgrößen, wie dem Diffusionskoeffizienten, aufgrund meßtechnischer Hürden nur unzureichend Informationen vorhanden sind.

Die infolge der Diffusion entstehenden Interaktionskräfte üben nicht nur einen Einfluß auf die Spannungen der beiden Stoffkomponenten aus, sondern bewirken eine Dämpfung der Knochenbewegung bei einer stoßartigen Belastung. Dieser Dämpfungseffekt wird noch verstärkt, wenn neben den viskosen Interaktionskräften in einem erweiterten Stabmodell die viskosen Eigenschaften der Knochenflüssigkeit berücksichtigt werden. Aber auch eine komplexere Flüssigkeitsströmung durch den Knochen (z.B. zusätzlich in Querrichtung zur Stabachse) trägt hierzu bei.

Die Kenntnis über die Druckverteilung der Porenflüssigkeit ist auch für das Verständnis mechanosensorischer Aspekte der Knochenumbauprozesse von Interesse. Hierzu müßte jedoch mit dem allgemeinen Stabmodell die Druckverteilung der Porenflüssigkeit unter Vorgabe geeigneter Ansatzfunktionen für die Flüssigkeitsbewegung in der Querschnittsebene bestimmt werden. Mit der Vorgabe z.B. eines rotationssymmetrischen Stabmodells sind somit Ansatzfunktionen für die Flüssigkeitsbewegung in longitudinaler und radialer Richtung abhängig

von den Querschnittskordinaten erforderlich. Dieses Modell ist vor allem durch die jeweiligen Orientierungen der HAVERSSchen und VOLKMANNschen Kanäle in dem kortikalen Knochen motiviert.

Das Stabmodell eignet sich nicht nur zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften des gesamten Röhrenknochens, sondern kann auch für die mikroskopische Baueinheit des kortikalen Knochengewebes, das Osteon, herangezogen werden, da dieses ebenfalls einen stabförmigen Aufbau besitzt.

A Anhang

A.1 Definition der in der Medizin üblichen Bezugsebenen und Richtungen

Im folgenden werden die in der Medizin üblichen Bezugsebenen und Richtungen erläutert. In der Abbildung 1 sind die drei Hauptebenen mit Transversal-, Frontal- und Medianebene bezeichnet. Eine zur Medianebene parallele Fläche heißt Sagittalebene. Entsprechend sind die Richtungen bezogen auf den menschlichen Körper der Darstellung zu entnehmen.

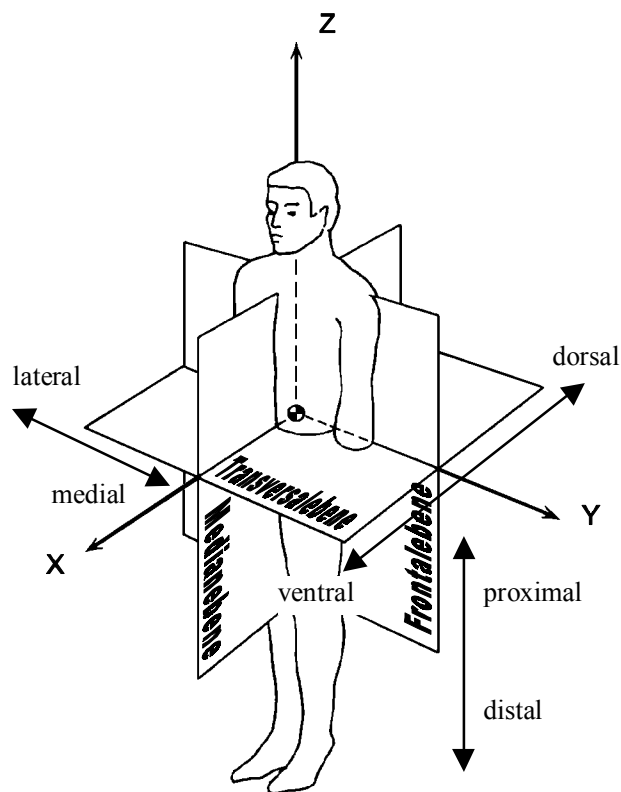


Abbildung 1: Definition der Bezugsebenen und Richtungen des menschlichen Körpers

A.2 Die GREENSchen Verzerrungen des Mehrkomponentenkontinuums

Die in den Stoffgleichungen benötigten Verzerrungen $\overset{c}{\gamma}_{ik}$ werden im folgenden durch die Verschiebungskomponenten der Stoffe c beschrieben. Über die materielle Integration der Verzerrungsgeschwindigkeiten folgt:

$$\overset{c}{\gamma}_{ik} = \frac{1}{2} \int_t (\mathbf{g}_{ik})_c \cdot dt = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_{ik} - \overset{+}{\mathbf{g}}_{ik} \right) \quad (\text{A.1})$$

Während sich die Maßzahlen $\overset{+}{\mathbf{g}}_{ik}$ aus den bekannten Basisvektoren des Körpers im Ausgangszustand ergeben, sind die übrigen Maßzahlen \mathbf{g}_{ik} , $\overset{II}{\mathbf{g}}_{ik}$, $\overset{III}{\mathbf{g}}_{ik}$ von den Verschiebungen abhängig. Im einzelnen erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ik} &= \left(\overset{+}{\mathbf{r}} + \overset{I}{\mathbf{w}} \right)_i \left(\overset{+}{\mathbf{r}} + \overset{I}{\mathbf{w}} \right)_k \\ &= \overset{+}{\mathbf{g}}_{ik} + \overset{I}{w}_i |_{k} + \overset{I}{w}_k |_{i} + \overset{I}{w}^m |_{i} \overset{I}{w}_m |_{k} \\ \overset{II}{\mathbf{g}}_{ik} &= \left(\overset{+}{\mathbf{r}} + \overset{I}{\mathbf{w}} - \overset{II}{\mathbf{w}} \right)_i \left(\overset{+}{\mathbf{r}} + \overset{I}{\mathbf{w}} - \overset{II}{\mathbf{w}} \right)_k \\ &= \overset{+}{\mathbf{g}}_{ik} + \overset{I}{w}_i |_{k} - \overset{II}{w}_i |_{k} + \overset{I}{w}_k |_{i} - \overset{II}{w}_k |_{i} + \left(\overset{I}{w}^m |_{i} - \overset{II}{w}^m |_{i} \right) \left(\overset{I}{w}_m |_{k} - \overset{II}{w}_m |_{k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \overset{III}{\mathbf{g}}_{ik} &= \left(\overset{+}{\mathbf{r}} + \overset{I}{\mathbf{w}} - \overset{III}{\mathbf{w}} \right)_i \left(\overset{+}{\mathbf{r}} + \overset{I}{\mathbf{w}} - \overset{III}{\mathbf{w}} \right)_k \\ &= \overset{+}{\mathbf{g}}_{ik} + \overset{I}{w}_i |_{k} - \overset{III}{w}_i |_{k} + \overset{I}{w}_k |_{i} - \overset{III}{w}_k |_{i} + \left(\overset{I}{w}^m |_{i} - \overset{III}{w}^m |_{i} \right) \left(\overset{I}{w}_m |_{k} - \overset{III}{w}_m |_{k} \right) \end{aligned}$$

Die Verzerrungen ergeben sich nach Einsetzen von (A.2) in (A.1) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ik}^I &= \frac{1}{2} \left(\overset{I}{w}_i|_k + \overset{I}{w}_k|i + \overset{I}{w}^m|i \overset{I}{w}_m|_k \right) \\
 \gamma_{ik}^{II} &= \frac{1}{2} \left(\overset{II}{w}_i|_k + \overset{II}{w}_k|i + \overset{I}{w}^m|i \overset{II}{w}_m|_k + \overset{II}{w}^m|i \overset{I}{w}_m|_k - \overset{II}{w}^m|i \overset{II}{w}_m|_k \right) \\
 \gamma_{ik}^{III} &= \frac{1}{2} \left(\overset{III}{w}_i|_k + \overset{III}{w}_k|i + \overset{I}{w}^m|i \overset{III}{w}_m|_k + \overset{III}{w}^m|i \overset{I}{w}_m|_k - \overset{III}{w}^m|i \overset{III}{w}_m|_k \right)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Während (A.3)₁ das bekannte GREENSche Verzerrungsmaß darstellt, sind die restlichen Verzerrungen $\gamma_{ik}^{II}, \gamma_{ik}^{III}$ von den Verschiebungen $\overset{I}{w}_i$ abhängig, wodurch eine Kopplung der Verzerrungen in den nichtlinearen Gliedern entsteht.

A.3 Nichtlineare Beschleunigung der Flüssigkeit

Die Beschleunigungskomponenten der Flüssigkeit inklusive gemischter Produkte aus Feststoffkinematiken und Relativgeschwindigkeit werden nachfolgend aufgeführt. Neben den Ortsableitungen nach θ_1 (hochgestellter Strich) kommen hier die Ableitungen nach den anderen Koordinaten θ_2, θ_3 hinzu, die mit einem Komma vor dem entsprechenden Index gekennzeichnet sind.

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_1 &= \ddot{w}_{s1} - \dot{w}'_{s3} \theta^3 - \dot{w}'_{s2} \theta^2 + \Omega(\theta^2, \theta^3) \dot{\phi}'_1 + \dot{\tilde{v}}_{rel1} \\
 &+ \tilde{v}_{rel1} (\dot{w}'_{s1} - \dot{w}''_{s3} \theta^3 - \dot{w}''_{s2} \theta^2 + \Omega(\theta^2, \theta^3) \dot{\phi}''_1 + \tilde{v}'_{rel1} \\
 &\quad - w''_{s2} \tilde{v}_{rel2} - w'_{s2} \tilde{v}'_{rel2} - w''_{s3} \tilde{v}_{rel3} - w'_{s3} \tilde{v}'_{rel3} \\
 &\quad + w'_{s2} \tilde{v}_{rel1 \triangleright 2} - w'_{s3} \tilde{v}_{rel1 \triangleright 3}) \\
 &+ \tilde{v}_{rel2} (-\dot{w}'_{s2} + \Omega(\theta^2, \theta^3)_{,2} \dot{\phi}'_1 + \tilde{v}_{rel1 \triangleright 2} - w'_{s2} \tilde{v}_{rel2 \triangleright 2} - w'_{s3} \tilde{v}_{rel3 \triangleright 2} \\
 &\quad - w'_{s2} \tilde{v}'_{rel1} - \phi_1 \tilde{v}_{rel1 \triangleright 3}) \\
 &+ \tilde{v}_{rel3} (-\dot{w}'_{s3} + \Omega(\theta^2, \theta^3)_{,3} \dot{\phi}'_1 + \tilde{v}_{rel1 \triangleright 3} - w'_{s2} \tilde{v}_{rel2 \triangleright 3} - w'_{s3} \tilde{v}_{rel3 \triangleright 3} \\
 &\quad - w'_{s3} \tilde{v}'_{rel1} - \phi_1 \tilde{v}_{rel1 \triangleright 2}) \\
 &- \dot{\tilde{v}}'_{rel2} w'_{s2} - \dot{\tilde{v}}'_{rel3} w'_{s3} + \text{T.h.O.}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{b}}_2 &= \ddot{w}_{s2} - \ddot{\phi}_1 \theta^3 + \dot{\tilde{v}}_{rel2} \\
&+ \tilde{v}_{rel1} (2 \dot{w}'_{s2} - \dot{\phi}'_1 \theta^3 + \tilde{v}'_{rel2} + \underbrace{w''_{s2} \tilde{v}_{rel1}}_{\text{CORIOLIS}} \\
&\quad + w'_{s2} \tilde{v}'_{rel1} - \phi'_1 \tilde{v}_{rel3} - \phi_1 \tilde{v}'_{rel3} + w'_{s2} \tilde{v}_{rel2 \rightarrow 2} + w'_{s3} \tilde{v}_{rel2 \rightarrow 3}) \\
&+ \tilde{v}_{rel2} (\tilde{v}_{rel2 \rightarrow 2} + w'_{s2} \tilde{v}_{rel1 \rightarrow 2} - \phi_1 \tilde{v}_{rel3 \rightarrow 2} - w'_{s2} \tilde{v}'_{rel2} + \phi_1 \tilde{v}_{rel2 \rightarrow 3}) \\
&+ \tilde{v}_{rel3} (\dot{\phi}_1 + \tilde{v}_{rel2 \rightarrow 3} + w'_{s2} \tilde{v}_{rel1 \rightarrow 3} - \phi_1 \tilde{v}_{rel3 \rightarrow 3} - w'_{s3} \tilde{v}'_{rel2} - \phi_1 \tilde{v}_{rel2 \rightarrow 2}) \\
&+ \dot{\tilde{v}}_{rel1} w'_{s2} - \dot{\tilde{v}}_{rel3} \phi_1 + \text{T.h.O.}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{b}}_3 &= \ddot{w}_{s3} + \ddot{\phi}_1 \theta^2 + \dot{\tilde{v}}_{rel3} \\
&+ \tilde{v}_{rel1} (2 \dot{w}'_{s3} + \dot{\phi}'_1 \theta^2 + \tilde{v}'_{rel3} + \underbrace{w''_{s3} \tilde{v}_{rel1}}_{\text{CORIOLIS}} \\
&\quad + w'_{s3} \tilde{v}'_{rel1} + \phi'_1 \tilde{v}_{rel2} + \phi_1 \tilde{v}'_{rel2} + w'_{s2} \tilde{v}_{rel3 \rightarrow 2} + w'_{s3} \tilde{v}_{rel3 \rightarrow 3}) \\
&+ \tilde{v}_{rel2} (\dot{\phi}_1 - \tilde{v}_{rel3 \rightarrow 2} + w'_{s3} \tilde{v}_{rel1 \rightarrow 2} + \phi_1 \tilde{v}_{rel2 \rightarrow 2} - w'_{s2} \tilde{v}'_{rel3} + \phi_1 \tilde{v}_{rel3 \rightarrow 3}) \\
&+ \tilde{v}_{rel3} (\tilde{v}_{rel3 \rightarrow 3} + w'_{s3} \tilde{v}_{rel1 \rightarrow 3} + \phi_1 \tilde{v}_{rel2 \rightarrow 3} - w'_{s3} \tilde{v}'_{rel3} - \phi_1 \tilde{v}_{rel3 \rightarrow 2}) \\
&+ \dot{\tilde{v}}_{rel1} w'_{s3} + \dot{\tilde{v}}_{rel2} \phi_1 + \text{T.h.O.}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Die unterstrichelten Terme stellen die CORIOLISbeschleunigungen, die unterschlängelten Terme die Zentrifugalbeschleunigungen dar. Die Terme höherer Ordnung resultieren ausschließlich aus der Verdrillung und der Verwölbung.

Literaturverzeichnis

- [1] AOUBIZA, B.; CROLET, J. M.; MEUNIER, A. (1996): On the mechanical characterization of compact bone structure using the homogenization theory. *J. Biomechanics*, Vol. 29, No. 12, 1539-1547
- [2] ASHMAN, R. B.; CORIN, J. D.; TURNER, C. H. (1987): Elastic properties of cancellous bone: Measurement by an ultrasonic technique. *J. Biomechanics*, Vol. 20, No. 10, 979-986
- [3] ASHMAN, R. B.; COWIN, S. C.; VAN BUSKIRK, W. C.; RICE, J. C. (1984): A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone. *J. Biomechanics*, Vol. 17, No. 5, 349-361
- [4] BLUHM, J. (1997): A consistent model for saturated and empty porous media. Habilitation, Fachbereich Bauwesen, Universität-Gesamthochschule Essen
- [5] BOWEN, R. M. (1982): Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Engineering Science*, Vol. 20, No. 6, 697-735
- [6] CARTER, D. R.; CALLER, W. E. (1983): Cycle-dependent and time-dependent bone fracture with repeated loading. *J. Biomechanical Engineering*, Vol. 105, 166-170
- [7] CARTER, D. R.; HAYES, W. C. (1977): The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure. *J. Bone and Joint Surgery*, Vol. 59-A, No.7, 954-962
- [8] CHOI, K.; KUHN, J. L.; CIARELLI, M. J.; GOLDSTEIN, S. A. (1990): The elastic moduli of human subchondral, trabecular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus. *J. Biomechanics*, Vol. 23, No. 11, 1103-1113
- [9] COWIN, S. C. (1981): Continuum models of the adaptation of bone to stress. In: COWIN, S. C., *Mechanical properties of bone*, ASME, The American Society of Mechanical Engineers, AMD, Vol. 45, 193-210
- [10] COWIN, S. C. (1986): Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *J. of Biomech. Engineering*, Vol. 108, 83-88
- [11] COWIN, S. C. (1990): Structural adaptation of bone. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 43, No. 5, Part 2, 126-133
- [12] COWIN, S. C. (1991): The mechanical properties of cancellous bone. In: *Bone Mechanics*, CRC Press, Inc. (New York), 129-158

- [13] COWIN, S. C. (1999): Bone poroelasticity. *J. Biomechanics*, Vol. 32, 217-238
- [14] Cowin, S. C.; HEGEDUS, D. H. (1976): Bone remodeling I: Theory of adaptive elasticity. *J. Elasticity*, Vol. 6, No. 3, 319-326
- [15] CROLET, J. M.; AOUNIZ, B.; MEUNIER, A. (1993): Compact bone: Numerical simulation of mechanical characteristics. *J. Biomechanics*, Vol. 26, No. 6, 677-687
- [16] CURREY, J. D. (1988): The effect of porosity and mineral contents on the young's modulus of elasticity of compact bone. *J. Biomechanics*, Vol. 21, No. 2, 131-139
- [17] DE BOER, R. (1996): Highlights in the historical development of porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. *ASME, Appl. Mech. Rev.*, Vol. 49, No. 4, 201-262
- [18] DEMPSTER, W. T.; LIDDICOAT, R.T. (1952): Compact bone as a non-isotropic material. *Am. J. Anatomy*, Vol. 91, No. 3, 331-362
- [19] EHLERS, W. (1989): Poröse Medien, ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. Habilitation, Fachbereich Bauwesen, Universität-Gesamthochschule Essen
- [20] EVANS, F. G. (1973): *Mechanical properties of bones*. Charles C. Publisher, Springfield, Illinois, USA
- [21] EVANS, F. G.; LEBOW, M. (1951): Regional differences in some of the physical properties of the human femur. *J. appl. Physiol.*, Vol. 3, 563-572
- [22] FISCHER, O. (1994): Formulierung und Lösung nichtlinearer kinetischer Stabilitätsgleichungen für gekrümmte und verwundenen Stäbe, Dissertation, Universität der Bundeswehr München
- [23] GOODMAN, M. A.; COWIN, S. C. (1972): A continuum theory for granular materials. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 44, 249-266
- [24] Gray, W. G. (1998): Elements of systematic procedure for the derivation of macroscale conservation equation for multiphase flow in porous media. CISM, Udine, July 1998
- [25] Harrigan, T. P.; Mann, R. W. (1984): Characterisation of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor. *J. Material Science*, Vol. 19, 761-767
- [26] HOEBORN, D. (1981): Eine Konsolidationstheorie für bindige Böden auf der Grundlage eines Zweikomponentenkontinuums. Dissertation, Universität-GH Wuppertal
- [27] HOEBORN, D. (1988): Eine Stabtheorie endlicher Verschiebungen und Verdrehungen mit Cosserat-Kinematen. Habilitation, Universität-GH Wuppertal

- [28] JACOBS, C. R.; SIMO, J. C.; BEAUPRE, G. S.; CARTER, D. R. (1997): Adaptive bone remodeling incorporating simultaneous density and anisotropy considerations. *J. Biomechanics*, Vol. 30, No. 6, 603-613
- [29] KAFKA, V. (1993): On hydraulic strengthening of bones. *J. Biomechanics*, Vol. 26, No. 6, 761-762
- [30] KATZ, J. L. (1987): The elastic anisotropy of bone. *J. Biomechanics*, Vol. 20, Nos. 11/12, 1063-1070
- [31] KEAVENY, T. M.; HAYES, W. C. (1993): A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone. *Transactions of the ASME, J. Biomechanical Engineering*, Vol. 115, 534-543
- [32] KUBIC, J. (1986): A macroscopic description of geometrical pore structure of porous solid. *Int. J. Engineering Science*, Vol. 24, No. 6, 971-980
- [33] KUMMER, B. K. F. (1972): Biomechanics of bone: Mechanical properties, functional structure, functional adaptation. In: *Biomechanics. Its foundations and objectives*, Fung, Y. C. et al., 237-271, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- [34] LINDE, F.; HVID, I.; MADSEN, F. (1992): The effect of specimen geometry on the mechanical behavior of trabecular bone specimens. *J. Biomechanics*, Vol. 25, No. 4, 359-368
- [35] MARTIN, R. B. (1984): Porosity and specific surface of bone. *CRC Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Vol. 10, No. 3, 179-222
- [36] MARTIN, R. B. (1991): Determinations of the mechanical properties of bones. *J. Biomechanics*, Vol. 24, Suppl. 1, 79-88
- [37] MC ELHANEY, J.; ALEM, N.; ROBERTS, V. (1970): A porous block model for cancellous bones. *ASME Paper*, No. 70-WA1BHF-2
- [38] MEROI, E. A.; NATALI, A. N.; SCHREFLER, B. A. (1994): A poroelastic approach to the analysis of spinal motion segment. in: *Proc. International Symposium on Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering*, Swansea (UK)
- [39] NATALI, A. N.; MEROI, E. A. (1989): A review of the biomechanical properties of bone as a material. *J. Biomed. Eng.*, Vol. 11, 266-276
- [40] NUNZIATO, J. W.; PASSMAN, S. L. (1981): A multiphase mixture theory for fluid-saturated granular materials. In: *Mechanics of structured media*. Selvadurai, A.P.S. (ed.), Elsevier, Amsterdam, 243-254
- [41] OCHOA, J. A.; SANDERS, A. P.; HECK, D. A.; HILLBERRY, B. M. (1991): Stiffening of the femoral head due to intertrabecular fluid and intraosseous pressure. *J. Biomech. Engineering*, Vol. 113, 259-262

- [42] PASSMAN, S. L.; NUNZIATO, J. W.; WALSH, E. K. (1984): A theory of multiphase mixture. In: Rational thermodynamics. Truesdell, C. (ed.), Mc Graw-Hill, New York, 286-325
- [43] PAUWELS, F. (1965): Gesammelte Abhandlung zur funktionalen Anatomie des Bewegungsapparates. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin
- [44] PETRTÝL, M.; HERT, J.; FIALA, P. (1996): Spatial organization of the haversian bone in man. *J. Biomechanics*, Vol. 29, No. 2, 161-169
- [45] PIDAPARTI, R. M. V.; BURR, D. B. (1992): Collagen fiber orientation and geometry effects on the mechanical properties of secondary osteons. *J. Biomechanics*, Vol. 25, No. 8, 869-880
- [46] PLATZER, W. (1991): Taschenbuch der Anatomie. Bewegungsapparat. Bd. 1, Georg Thieme Verlag, Stuttgart, New York
- [47] RAUBER, KOPSCH (1987): Anatomie des Menschen. Band I: Bewegungsapparat. Hrsg. von H. Leonhardt u.a., Georg Thieme Verlag, Stuttgart, New York
- [48] REILLY, D. T.; BURSTEIN, A.H. (1974): The mechanical properties of cortical bone. *J. Bone and Joint Surgery*, Vol. 56-A, No. 5, 1001-1021
- [49] REILLY, D. T.; BURSTEIN, A.H. (1975): The elastic and ultimate properties of compact bone tissue. *J. Biomechanics*, Vol. 8, 393-405
- [50] RHO, Y. J.; ASHMAN, R. B.; TURNER, C. H. (1993): Young's modulus of trabecular and cortical bone material: Ultrasonic and microtensile measurements. *J. Biomechanics*, Vol. 26, No. 2, 111-119
- [51] RICE, J. C.; COWIN, S. C.; BOWMAN, J. A. (1988): On the dependence of the elasticity and strength of cancellous bone on apparent density. *J. Biomechanics*, Vol. 21, No. 2, 155-168
- [52] SCHAFFLER, M. B.; BURR, D.B. (1988): Stiffness of compact bone: Effects of porosity and density. *J. Biomechanics*, Vol. 21, No. 1, 13-16
- [53] SCHROEDER. F. H. (1976): Kontinuumsmechanik der Mehrkomponentenkontinua. Universität Hannover (auszugsweise in: HOEBORN 1981)
- [54] SCHROEDER. F. H. (1981): Erhaltungssätze und Stoffgleichungen der Kontinuumsmechanik. Seminarvorträge, Forschungsbericht F81/1, Universität-GH Wuppertal
- [55] SCHROEDER. F. H. (1984): Diffusion theory of mixtures. Proc. 18th Israel Conf. Mechanical Engineering, *Isr. J. Technology*, Vol. 22, 98-112
- [56] SCHROEDER. F. H. (1987): Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik und thermodynamisch erlaubte Stoffgleichungen. Seminarvorträge, Universität-GH Wuppertal

- [57] SCHROEDER, F. H.; HOEBORN, D. (1972): Tensorrechnung für Ingenieure. Eigenverlag
- [58] SEDLIN, E. D.; HIRSCH, C. (1966): Factors affecting the determination of the physical properties of human femoral compact bone. *Acta Orthop. Scandinavica*, 37, 29-48
- [59] TRUESDELL, C.; NOLL, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics. In S. Flügge (ed.): *Handbuch der Physik*, Bd. III/3, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- [60] TURNER, C. H.; COWIN, S. C.; RHO, J. Y.; ASHMAN, R. B.; RICE, J. C. (1990): The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone. *J. Biomechanics*, Vol. 23, No. 6, 549-561
- [61] TURNER, C. H.; RHO, J. Y.; TAKANO, Y.; TSUI, T. Y.; PHARR, G. M. (1999): The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar: results from two microscopic measurement techniques. *J. Biomechanics*, Vol. 32, 437-441
- [62] WENG, S. (1997): Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen. Dissertation, Ruhr-Universität, Bochum
- [63] WHITEHOUSE, W. J. (1974): The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone. *J. Microscopy*, Vol. 101, 153-168
- [64] WILMANSKI, K. (1995): Lagrangean model of two-phase porous material. *J. Non-Equilibrium Thermodynamics*, Vol. 20, No. 1, 50-77
- [65] WILMANSKI, K. (1996a): Dynamics of porous materials under large deformations and changing porosity. in: Batra, M. F. Beahly (eds.), *Contemporary Research in the Mechan. and Math. of Materials*, 343-356, CIMNE, Barcelona
- [66] WILMANSKI, K. (1996b): Porous media at finite strains: The new model with the balance equation for porosity. *Arch. Mech.*, Vol. 48, No. 4, 591-628
- [67] YAMADA, H. (1970): *Strength of biological materials*. Robert E. Krieger Publishing, Huntington, New York