

**Beitrag zur Weiterentwicklung der zuverlässigkeitstechnischen
Sensitivitäts- und Ausfallanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation**



**BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL**

Von der Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik der
Bergischen Universität Wuppertal
zur Erlangung des akademischen Grades

- Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) -
genehmigte Dissertation

von

Fabian Plinke, Master of Science (Safety Engineering)

aus

Hannover.

Gutachter:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Arno Meyna

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Dietrich Wolf

Tag der mündlichen Prüfung:

18.12.2015

D 468

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20160129-100235-2

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3A468-20160129-100235-2>]

Für meine Familie

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeiten als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet „Sicherheitstheorie und Verkehrstechnik“ und ab 2013 als Angestellter der „Institut für Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmanagement GmbH (kurz: IQZ GmbH).

Während der gesamten Entstehungszeit dieser Arbeit wurde ich von meinem Doktorvater Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Arno Meyna betreut. Abgesehen von der Möglichkeit diese Arbeit überhaupt zu erstellen, möchte ich mich bei Herrn Prof. Meyna für die gesamte Zeit in seinem Team und seine allumfassende Unterstützung sehr bedanken. Bei allen Tätigkeiten, von der Lehre über diverse Forschungsprojekte bis hin zu den alltäglichen Herausforderungen des universitären Lebens, wurde ich immer in allen Bereichen zu 100% gefördert und unterstützt. Ohne dies wäre die Entstehung dieser Arbeit nicht möglich gewesen. Hierfür noch einmal meinen herzlichsten Dank.

Bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Dietrich Wolf möchte ich mich für die Erstellung des zweiten Gutachtens und die Hinweise bzgl. der Ergänzung dieser Arbeit bedanken.

Meinen Kollegen und Freunden bedanke ich mich für die vielen Ratschläge sowie für die gemeinsame Zeit die wir in den letzten Jahren zusammen verbracht haben. Mit einem super Team sind Herausforderungen einfacher lösbar und macht die Arbeit an schwierigen Themen erst möglich.

Der größte Dank folgt, wie üblich, zum Schluss.

Dieser Dank gilt meiner Familie, der diese Arbeit gewidmet ist.

Über alle Lebensphasen hinweg, habe ich von meiner Familie immer grenzenlos den Rückhalt und die Unterstützung bekommen, die meinen Werdegang und somit auch diese Arbeit ermöglicht haben.

„Reichen die Wurzeln tief, so gedeihen die Zweige gut.“ (chinesisches Sprichwort)

Kurzfassung

Bedingt durch immer höheren Grad an Komplexität und Vernetzung technischer Systeme steigen die Anforderungen an Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalysen. Die klassischen, analytischen Methoden der Zuverlässigkeitstheorie sind bei modernen System häufig nicht oder nur begrenzt anwendbar.

Zusätzlich zu den strukturellen Eigenschaften eines technischen Systems ist zudem die reale Nutzung und Belastung entsprechender Einheiten von großer Bedeutung. Für eine ganzheitliche und realitätsnahe Bewertung der Zuverlässigkeit ist somit auch dieser Einfluss von großer Bedeutung.

Ausgehend von drei Grundebenen der Zuverlässigkeits- und Sensitivitätsanalyse, der strukturellen, funktionalen und analytischen Ebene, wird in diese Arbeit die Nutzungs- und Belastungsanalyse als vierte Ebene aufgenommen.

Zur Verknüpfung dieser Ebenen wurde in dieser Arbeit durch einen Methodenvergleich eine Methodik ermittelt, mit der sich alle vier Ebenen valide ermitteln lassen.

Die Monte-Carlo-Simulation (MCS), als computergestützte Simulationsmethode, ist für alle Ebenen geeignet und in der Praxis umsetzbar.

Diese Arbeit beschreibt die Anwendung der MCS auf allen vier Ebenen und führt für die Nutzungs- und Belastungsanalyse entsprechende Formalismen zur direkten und indirekten Ermittlung der Einflüsse ein.

Aufgeteilt in die direkte und indirekte Belastungsanalyse wird weiterhin die allgemeingültige Anwendbarkeit der Formalismen ermittelt. Während bei der direkten Belastungsanalyse die Anwendung mittels gängiger Berechnungen aus dem Bereich der Zuverlässigkeitstheorie erfolgt, ist bei der indirekten Belastungsanalyse eine Transformation in unterschiedliche mathematische Bildbereiche erforderlich.

Abschließend bewertet die Arbeit die vorgestellten neuen Ansätze und das Integrationskonzept der Monte-Carlo-Simulation auf allen vier Ebenen der Zuverlässigkeits-, Sicherheits- und Belastungsanalyse.

Abstract

Due to a rising degree of both, the complexity and the cross linking of technical systems, the related requirements regarding reliability and safety analysis have been increasing significantly. Thus, analytical state of the art methods of reliability engineering can often not or only partially be used to analyze modern systems.

In addition to the structural characteristics of a given technical system, its actual usage behaviour and load are of major interest, as the impact of those factors is crucial for a holistic and realistic evaluation of its reliability. Hence, based on the three typical levels of reliability and safety analysis, i.e. the structural, the functional and the analytical level, a fourth level focusing on usage and stress will be implemented in this dissertation.

To begin with, this work will compare several methods, and, based on this, derive a new method that can determine all four levels in a valid manner.

The Monte-Carlo-Simulation (MCS), as a computational simulation method, is suitable for all four analysis levels mentioned above and furthermore applicable in practice.

The applicability of the MCS on all four levels is described and necessary formalisms for the direct and indirect determination of potential influences are introduced implementing the usage and stress analysis suggested in this work.

Alongside the division into a direct and indirect stress analysis, the general applicability of the mathematical formalisms is illustrated. Whereas the direct stress analysis is based on general analytical methods of reliability engineering, a transformation into different mathematical ranges is essential regarding the indirect stress analysis.

Finally, the approaches introduced in this work and the integration concept using the MCS on all four levels regarding the reliability, safety and stress analysis are evaluated.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit	4
3	Monte-Carlo-Simulation zur Sensitivitätsanalyse	11
3.1	Methodenvergleich für realitätsnahe Sensitivitätsanalysen	12
3.2	Anwendung der Monte-Carlo-Simulation auf die Ebenen der Zuverlässigkeitsanalytik	19
3.3	Strukturelle Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation	22
3.4	Funktionale Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation.....	28
3.5	Analytische Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation	38
4	Belastungsanalysen und deren Modellbildung	51
4.1	Deduktive und induktive Modellbildung	51
4.2	Direkte und indirekte Belastungsanalyse.....	55
5	Ein direkter Ansatz zur Belastungsanalyse über die Dichtefunktion	57
5.1	Theorie des Ansatzes.....	57
5.2	Schrittfolge.....	59
5.3	Berücksichtigung von Wichtungen.....	63
5.4	Modellvalidierung.....	64
5.4.1	Testdatensatz.....	65
5.4.2	Analytische Rückführung des Testdatensatzes in Einzelbelastungen.....	67
5.4.3	Simulierte Rückführung des Testdatensatzes in Einzelbelastungen	69
5.5	Zwischenfazit und Diskussion.....	73
6	Ein indirekter Ansatz zur Belastungsanalyse über eine Belastungsfunktion	74
6.1	Ansatz über die Verteilungsdichte	74
6.2	Ansatz über die Ausfallrate.....	77
6.3	Ansatz über die Verteilungsfunktion	78
6.3.1	Schrittfolge	78
6.3.2	Erzeugung der Summe der Belastungsunterschiede	79

6.3.3	Definition und Formulierung neuer Belastungskenngrößen für die indirekte Belastungsanalyse	83
6.3.4	Aufteilung in Einzelbelastungsunterschiede mittels unterschiedlicher Transformationsverfahren	84
6.3.4.1	Anwendung der Fourier-Transformierten	92
6.3.4.2	Anwendung der Laplace-Transformierten	98
6.3.4.3	Anwendung der z-Transformation	102
6.3.5	Anwendungsmöglichkeiten.....	105
7	Zusammenfassung und Ausblick	107
8	Literatur und eigene Veröffentlichungen	111
A	Anhang.....	122
A.1	Abkürzungsverzeichnis	122
A.2	Symbolverzeichnis.....	123
A.3	Parameter für lineare Kongruenzgeneratoren	126

1 Einleitung

Bedingt durch immer komplexere Systeme mit einem hohen Vernetzungsgrad, z.B. in der Automobilindustrie, werden Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalysen immer komplexer. Hinzu kommt ein immer weiter ansteigender Spezialisierungsgrad einzelner Komponenten und Baugruppen. Dies führt in Kombination eines allgemein hohen Zeit- und Kostendrucks während der Entwicklung solcher Systeme zu einer Veränderung der Anforderungen für Zuverlässigkeits-, Sicherheits- und Belastungsanalysen in der Praxis.

In der Regel werden für diese Analysen, im Bereich der Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalyse, Felddaten herangezogen, die anhand von Vorgängerkomponenten oder –baugruppen ermittelt wurden. Diese Felddaten (erhoben durch Wartungen, Beanstandungen oder sonstige Möglichkeiten der Fahrzeugkommunikation) stehen, z.B. im Bereich der Automobilindustrie, in einem immer höheren Maße zur Verfügung. Dies betrifft sowohl die Qualität als auch den Umfang der ermittelten Daten. So sind immer häufiger nicht nur allgemeine Betriebsdaten sondern auch detaillierte Systeminformationen verfügbar.

Ziel dieser Arbeit ist es, neue Ansätze vorzustellen, mit denen auch Felddaten zur Belastungsanalyse genutzt werden können und parallel eine Methodik zu entwickeln, mit der der Bereich der zuverlässigkeitstechnischen Sensitivitäts- und Belastungsanalyse ganzheitlich und praxisnah durchgeführt werden kann. Hierzu werden sowohl analytische Verfahren als auch Simulationsverfahren, insbesondere die Monte-Carlo-Simulation, erläutert und angewendet.

Zu Beginn der Arbeit wird in Kapitel 2 die Notwendigkeit einer ganzheitlichen Zuverlässigkeits-, Sicherheits- und Belastungsanalyse anhand eines kurzen Beispiels aus dem Bereich der Automobilindustrie erläutert. Zusätzlich werden die drei Grundebenen der Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse definiert und erläutert. Als Neuerung werden diese drei Ebenen um die Ebene der Belastungsanalyse erweitert und ebenfalls kurz vorgestellt.

Anschließend an die allgemeinen Erläuterungen in der Problemstellung und Zielsetzung widmet sich Kapitel 3 den Methoden der Zuverlässigkeitstheorie, mit denen diese Aufgabenstellungen gelöst werden können. Nach einem Vergleich der in der

Praxis gängigen Methoden der Zuverlässigkeitstheorie und einer Bewertung ihrer Tauglichkeit für die praxisnahe Anwendung anhand speziell definierter Kriterien wird im Folgenden die Monte-Carlo-Simulation als computergestütztes Simulationsverfahren vorgestellt und auf die drei Grundebenen der zuverlässigkeitstechnischen Sensitivitätsanalyse angewandt. Hierbei zeigt sich, dass die Simulation auf allen drei Ebenen als Alternative zur analytischen Berechnung geeignet ist und sich anhand einfacher Schrittfolgen auch unkompliziert anwenden lässt.

Zur Beschreibung der neuen vierten Ebene, der Nutzungs- und Belastungsanalyse, werden in Kapitel 4 die unterschiedlichen Herangehensweisen im Bereich der Belastungsanalyse vorgestellt. Zur aktuellen Vorgehensweise, der induktiven Belastungsanalyse, wird ein Ansatz zur deduktiven Belastungsanalyse aufgezeigt und im Weiteren in einen direkten und einen indirekten Ansatz zur deduktiven Belastungsanalyse aufgeteilt. Der Ansatz, Einzelbelastungen mittels eines deduktiven Vorgehens zu ermitteln, ist hierbei neu und wird daher auf einer allgemeinen Ebene vorgestellt.

Es folgt die Vertiefung der in Kapitel 4 vorgestellten Ansätze. Kapitel 5 beschreibt die Anwendung der indirekten deduktiven Belastungsanalyse. Hierzu wird der Formalismus dieser Analyseart beschrieben und anschließend durch ein Beispiel analytisch und mittels Monte-Carlo-Simulation validiert. Der indirekte Ansatz beschreibt, wie aus einer Belastungssummenfunktion Einzelbelastungen extrahiert werden können. Es muss beachtet werden, dass die Anwendung dieses Ansatzes die Unabhängigkeit der Belastungen voraussetzt. Somit werden in Kapitel 5, neben der Beschreibung der Anwendung, auch Randbedingungen zur Nutzbarkeit des Ansatzes aufgezeigt.

Kapitel 6 befasst sich im Anschluss mit der indirekten deduktiven Belastungsanalyse. Hierzu wird wiederum ein Formalismus aufgestellt und auf spezielle Randbedingungen, die für diese neue Analyseart gelten, eingegangen. Im Weiteren werden verschiedene Ansätze zur Ermittlung einer Belastungsfunktion, ausgehend von den klassischen Zuverlässigkeitskenngrößen, aufgezeigt. Nach der Bewertung dieser Ansätze erfolgt die Umsetzung der indirekten deduktiven Belastungsanalyse und Validierung anhand eines Beispiels. Aufgrund der Komplexität dieser Berechnungen werden in diesem Kapitel zusätzlich unterschiedliche mathematische Transformati-

onsverfahren (Fourier-, Laplace- und z-Transformation) vorgestellt und deren Anwendbarkeit im Bereich der Belastungsanalyse geprüft und verglichen. Die Diskretisierung der Funktionen zur numerischen Lösung der Belastungsanalyse findet hierbei anstatt der Monte-Carlo-Simulation mittels der z-Transformation statt.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung sowie einem Ausblick (Kapitel 7). Ein ausführliches Literaturverzeichnis sowie eine Aufstellung eigener Veröffentlichungen enthält Kapitel 8.

Zuletzt befinden sich im Anhang weiterführende Grundlagen zur Monte-Carlo-Simulation und den mathematischen Transformationsverfahren, die im Haupttext nicht weiter erläutert werden konnten, sowie ein Verzeichnis der verwendeten Symbole und Abkürzungen.

2 Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit

Moderne technische Systeme setzen sich bekanntlich aus einer Vielzahl von einzelnen Komponenten zusammen, die - vernetzt mit anderen Systemen - komplexe Funktionen erfüllen. So besteht z.B. ein modernes regeneratives Bremssystem im Kraftfahrzeug nicht mehr nur aus den Komponenten, die für das eigentliche Abbremsen des Fahrzeugs benötigt werden. Vielmehr setzt sich aus dem eigentlichen Bremssystem in Kombination mit Elementen der Motorsteuerung, Energieversorgung, Bordsensorik, etc. ein Fahrerassistenzsystem zusammen, welches bei einem Bremsvorgang alle Systeme steuert und das Fahrzeug abbremst [Bos 10].

Bis hin zum „intelligent car“, welches das autonome Fahren ermöglichen soll, sind so auf Gesamtfahrzeugebene fast alle elektronischen Systeme miteinander vernetzt und erfüllen so die Vielzahl an komplexen Sicherheits- und Komfortfunktionen. Eine allgemeine schematische Darstellung dieser Vernetzung ist in Bild 2-1 visualisiert.

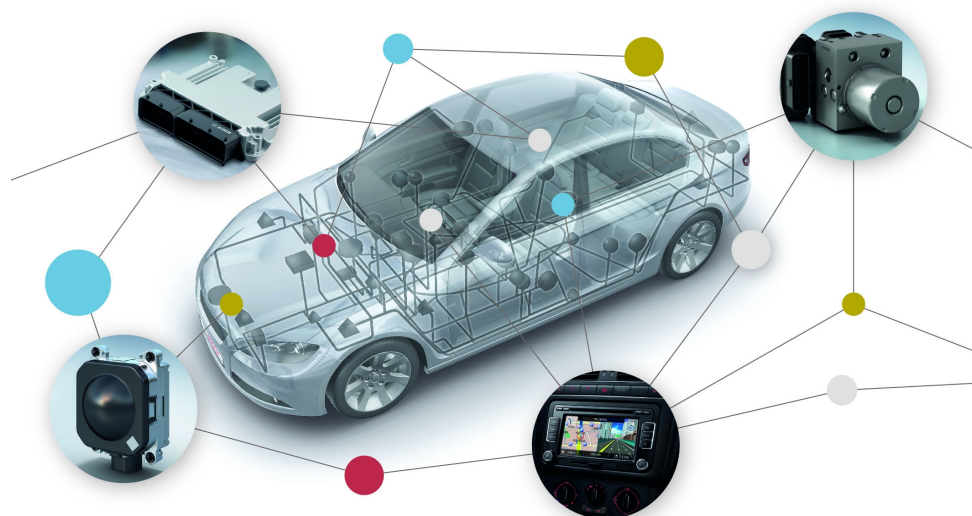


Bild 2-1: Vernetzung der Systeme im Kraftfahrzeug [Bos 04]

Der Aufwand einer Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse steigt durch die zunehmende Vernetzung enorm, da es keine oder nur wenige unabhängige Baugruppen im Fahrzeug gibt und Daten von mehreren Systemen oder Subsystemen vorliegen müssen, um eine umfassende Betrachtung vorzunehmen. Zudem interessieren neben der Grundzuverlässigkeit eines Gesamtsystems, gegeben durch die Ausfall-

bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit, immer mehr auch die Funktionalität und Verfügbarkeit eines Systems inklusive dessen Subsystemen und deren Funktionen.

Bedingt durch die Vernetzung technischer Systeme sowie der Bestrebung der größtmöglichen Kostenersparnis bei der Entwicklung und Produktion neuer Systeme, werden klassische Redundanzsysteme wie z.B. hot- and cold-standby teilweise durch Abschalt- und Degradierungsstrategien ersetzt. Die funktionalen Zusammenhänge dieser Strategien können nur unter Berücksichtigung unterschiedlicher Baugruppen im Fahrzeug abgebildet werden. So kann z.B. in einem Hybrid- oder Elektrofahrzeug ein Ausfall im konventionellen ESP-Bremssystem teilweise durch den Antriebsstrang in seiner Funktion als Generator ausgeglichen werden. Inwieweit ein solcher Degradierungszustand als sicherheitskritisch oder –unkritisch einzustufen ist, hängt von dem Gesamtfahrzeugdesign ab. Bei einer dementsprechenden Analyse müssten so, neben den Komponenten z.B. des konventionellen Bremssystems, auch die Komponenten des Antriebsstrangs, des Motorsteuergeräts und anderer Antriebskomponenten zur Bestimmung der Funktionalität „sicheres Abbremsen“ mit betrachtet werden. Es besteht somit also ein Unterschied zwischen der Zuverlässigkeit des Bremssystems und der Funktion „sicheres Abbremsen“.

Neben diesem Aspekt ist auch die Umsetzungsart einer Funktion im Fahrzeug von Bedeutung. Waren es früher hauptsächlich mechanische oder hydraulische Komponenten, die eine Funktion umgesetzt haben, so sind heute an fast allen Funktionen und Aktionen im Fahrzeug elektronische Komponenten und Steuergeräte beteiligt, die die Aktoren steuern und regeln. Der Anteil und die Anzahl an elektronischen Komponenten sind zudem weiter stark steigend, und ohne elektronische Unterstützung sind in modernen Fahrzeugen zum Teil selbst sicherheitstechnische Grundfunktionen wie z.B. die Bremskraftverteilung nicht mehr gewährleistet [Bos 10].

Eine Zuverlässigkeitsanalyse für solche Systeme kann auf unterschiedlichen Ebenen durchgeführt werden. Auf der *Strukturebene* ist die jeweilige Komponente in die Systemstruktur eingebunden. Auf diese Art kann die Zuverlässigkeit des Systems leicht durch die Analyse der Struktur, z.B. durch ein Blockschaltbild oder einen Fehlerbaum, dargestellt und berechnet werden [Mey 10]. Dieser Ansatz basiert in der Regel auf der Unterscheidung des Systemstatus in funktionsfähig und ausgefallen.

Eine Erweiterung der Strukturebene stellt die *Funktionsebene* dar. Aufgrund der Tatsache, dass viele Funktionen unter Beteiligung mehrerer Systeme umgesetzt

werden, ist eine Beschreibung einzelner Subsysteme auf der Strukturebene oftmals nicht ausreichend. Ebenso muss der Ausfall einer bestimmten Komponente eines technischen Systems, bei entsprechender Architektur, nicht automatisch einen vollständigen Systemausfall implizieren. Durch spezielle Abschaltstrategien oder degradierte Zustände können Funktionen auch nach einem Komponentenausfall weiter verfügbar sein oder in degradierter Form weiter zur Verfügung stehen. Die Beschreibung dieser Zusammenhänge geschieht auf der Funktionsebene. Auf dieser Ebene ist das Grundparadigma die Funktion und nicht das System. Die Darstellungsart dieser Ebene kann z.B.: durch ein Markov-Modell erfolgen. Die hier beschriebenen Zustände und Übergänge sind in vielen Fällen für die Darstellung einer komplexen Funktionsstruktur mit Rückfallebenen und Abschaltstrategien geeignet. Neben dieser Darstellung ist auch die Verwendung der Blockschaltbilder (analog zur Strukturebene) möglich. Gerade bei logischen Strukturen ist diese Darstellung häufig verständlicher. Die Funktionsebene ermöglicht somit eine vertiefte Analyse. Neben der Grundunterscheidung funktionsfähig oder ausgefallen ist mit dieser Ebene auch eine Unterscheidung der Funktionsfähigkeit, z.B. voll funktionsfähig, eingeschränkt funktionsfähig oder Notbetrieb, möglich.

Für eine detaillierte Analyse ist dies, gerade bei elektronischen Systemen, die neben ihrer Hardware auch aus Software bestehen, oftmals nicht ausreichend. Neben den physikalischen Einflüssen sind bei diesen Komponenten auch elektrotechnische Zusammenhänge besonders zu beachten. So ist z.B. die Bootzeit eines Computers nicht immer exakt gleich. Die exakte Bootzeit hängt vom Status der elektronischen Bauteile zu einem bestimmten Zeitpunkt ab. So kann z.B. der Füllstand eines Speichers die Lesezeit beeinflussen, oder ein Spannungsverhältnis kann minimal variieren. Ergebnis solcher Einflüsse ist, dass z.B. eine elektronische Komponente ihre Funktion nicht erfüllt. Die Analyse dieser Zusammenhänge ist über mathematische Funktionen möglich und kann im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse bewertet werden [Han 11].

Somit kommt zu der Struktur- und Funktionsebene noch eine *analytische Ebene* hinzu, auf der sich über entsprechende mathematische Zusammenhänge die Funktionsfähigkeit eines Systems in Abhängigkeit des Status von elektronischen Komponenten bestimmen lässt. Auf dieser Ebene wird nun zusätzlich zu funktionsfähig und ausgefallen auch die momentane Betriebsfähigkeit geprüft. So kann sich ein System, wie im obigen kurzen Beispiel erläutert, auch außerhalb seiner Betriebsspe-

zifikationen aufhalten ohne einen Defekt zu haben. Die Rückkehr zu den vorgesehenen Spezifikationen führt nun zur Wiederherstellung der Betriebsfähigkeit, ohne dass an der Komponente oder an dem System etwas verändert wurde.

Nachfolgend zeigt Bild 2-2 in schematischer Darstellung die zuvor beschriebenen Zuverlässigkeitsanalyseebenen.

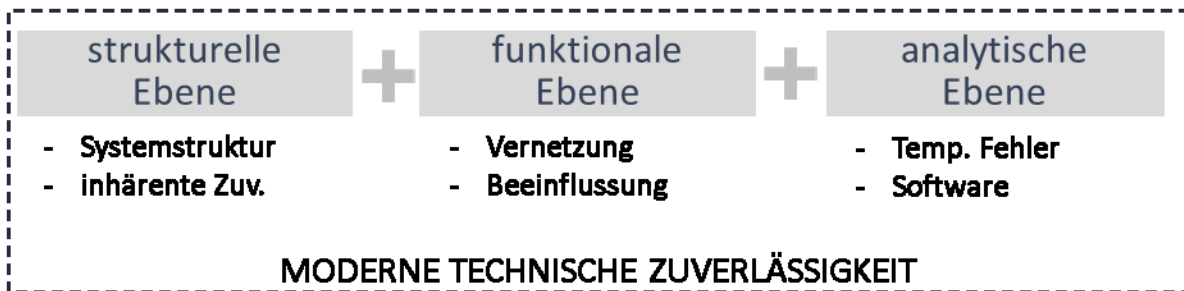


Bild 2-2: Schematische Darstellung der Zuverlässigkeitsanalyseebenen

Die Methoden und Modelle der Zuverlässigkeitstheorie, die bei den vorstehend kurz erläuterten drei Ebenen zum Einsatz kommen, sind eng mit der Entwicklung der Zuverlässigkeitstheorie selbst verknüpft und lassen sich auf eine Vielzahl von Problemstellungen anwenden (siehe u.a. [Mey 10], [Bör 06] und [Ber 04]).

Für ein System mit vernetzten Subsystemen, zeitlichen Abhängigkeiten, einer Vielzahl von Funktionen und Rückfallebenen oder dynamischen Systemänderungen sind diese Methoden und Modelle allerdings oft entweder nicht oder nur stark eingeschränkt anwendbar. Dies ist durch komplexe mathematische Terme bedingt, deren Lösung oftmals nicht eindeutig bestimmbar ist.

Aufgrund der in den letzten Jahren zur Verfügung stehenden Rechnertechnologie gewinnt das wissenschaftliche Rechnen (scientific computing), z.B.: die Simulationswissenschaft, in der Zuverlässigkeitstheorie immer weiter an Bedeutung. Eine erste Zielsetzung dieser Arbeit besteht deshalb darin, die Monte-Carlo-Simulation (MCS) systematisch und beispielhaft auf die zuvor charakterisierten Ebenen zur Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalyse entsprechend aufzubereiten (siehe Kapitel 3).

Für eine realitätsnahe und ganzheitliche Zuverlässigkeitsanalyse ist allerdings auch die *Nutzungs- und Belastungsebene* als vierte Ebene von großer Bedeutung und aktueller Forschungsgegenstand der Zuverlässigkeitstheorie. Als weiterführende Literatur empfiehlt sich an dieser Stelle der Tagungsband der 26. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2013 [TTZ 13] mit dem Schwerpunktthema der induktiven

Nutzungs- und Belastungsanalyse. Wertvolle Beiträge liefern hier u.a. Bertsche, Hanselka und Schubert. So wird beispielsweise kein System im Kraftfahrzeug von allen Fahrern identisch genutzt oder belastet. Diese Nutzungs- und Belastungsunterschiede haben allerdings logischerweise einen sehr starken Einfluss auf die Zuverlässigkeit eines Fahrzeuges oder speziell eines mechatronischen Systems. Dies wirkt sich nicht nur auf die Lebensdauer eines Systems aus, sondern auch auf die Verfügbarkeit von Funktionen, die Leistung des Systems oder die Reparatur- und Wartungsbedürftigkeit. Während der frühen Entwicklungsphasen neuer Produkte wird der Einfluss unterschiedlicher Nutzer und Märkte meist nicht spezifisch im Systemdesign berücksichtigt. Dies führt u.a. zu unterschiedlichen Lebensdauern in einzelnen Märkten, verbunden mit erheblichen Anforderungen an das Garantie-, Gewährleistungs- und Ersatzteilmanagement [Bra 11].

Die Nutzungs- und Belastungsebene erweitert somit die in Bild 2-2 dargestellten Ebenen um eine weitere Stufe, die entsprechende Einflüsse in die Zuverlässigkeitsanalyse integriert. Die schematische Darstellung des Bildes 2-2 wird daraufhin, entsprechend Bild 2-3, erweitert.

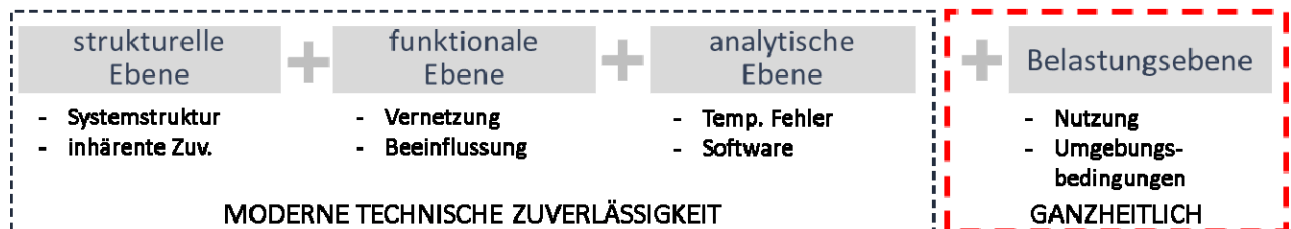


Bild 2-3: Schematische Darstellung der vier Zuverlässigkeitsanalyseebenen

Die Analyse und Bewertung von Belastungseinflüssen geschieht im Normalfall durch Labortests während der Entwicklung von technischen Systemen, oder durch frühe Testfahrten mit Prototypen, die speziellen Belastungsszenarien ausgesetzt werden. Im Rahmen der immer weiter steigenden Möglichkeiten der Datenspeicherung im Kraftfahrzeug - auch in späteren Serienreihen - wächst das Interesse an einer Belastungsanalyse auf Basis von Felddaten. Der eindeutige Vorteil einer Felddatenauswertung zur Bestimmung des Einflusses einzelner Belastungen besteht in den realen, durch die Fahrer generierten, Daten. In Labortests und Erprobungsfahrten werden zumeist extreme Belastungen generiert und geprüft. Eine Transformation auf die spätere tatsächliche Belastung während der Nutzung ist nur in Ansätzen möglich [Vog 03]. Ziel dieser Tests ist häufig die Raffung der Belastung zur

Prognose der Lebensdauer im Feld. Die somit entstehende „Überlastung“ gibt Auskunft über die Einsatzfähigkeit eines Systems unter extremen, nicht aber unter realen Bedingungen. Für Fragestellungen bezüglich der Zuverlässigkeit und deren Prognose unter realen Belastungen sind diese Test- und Prüfmethode somit nur bedingt einsetzbar und auch in der Quantität für eine Zuverlässigkeitsanalyse nicht ausreichend.

Eine weitere, von Feld- und Labordaten unabhängige, Möglichkeit zur Bestimmung des Einflusses einzelner Belastungen auf ein System ist die Anwendung spezifischer theoretischer Modelle zur Berechnung des Einflusses von einzelnen Belastungen auf das Ausfallverhalten. Diese Berechnungsmodelle stammen meist aus Teilbereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Als Beispiel sei hier das Weibull-Arrhenius-Modell genannt, welches neben den Parametern der Weibull-Verteilung auch den Einfluss der Temperatur auf ein System zur Bestimmung des zeitlichen Ausfallverhaltens berücksichtigt [Hau 07]. Die Anwendung dieser Modelle beinhaltet einige Vor- und Nachteile gegenüber empirischen Analysen. Wesentlich ist, dass zur Berücksichtigung aller Belastungseinflüsse eine Vielzahl von Einzelmodellen zum Einsatz kommen müssten, die in Summe sowohl praktisch als auch theoretisch nicht mehr zu lösen sind. Somit sind die theoretischen Modelle zur Entwicklung und Dimensionierung von Bauteilen in den ersten Konstruktionsphasen unabdingbar, für die spätere Qualitätsuntersuchung allerdings weniger geeignet.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist somit die Aufstellung einer neuen Methodik zur felddatenbasierten Belastungsanalyse für die vierte Ebene (Bild 2-3) der Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalyse. Dabei erfolgt die Validierung und Verifizierung der Modelle und theoretischen Ansätze der deduktiven und induktiven Modellbildung sowie der direkten und indirekten Belastungsanalyse wiederum mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation.

In dieser Arbeit wird der Begriff „Belastung“, im Gegensatz zur klassischen physikalisch-technischen Belastung des Maschinenbaus und Bauingenieurwesens adressiert durch das Fachgebiet der Betriebsfestigkeit als Querschnittswissenschaft zur Ermittlung der Lebensdauer technischer Komponenten und Systeme, als „zuverlässigkeitstechnische Belastung“, substituiert durch die Analyse von Felddausfällen ohne direkten Bezug zu den physikalischen Belastungsparametern, charakterisiert.

Bild 2-4 zeigt hierzu in einer Grobdarstellung die unterschiedlichen Ansätze der Belastungsanalyse im Bereich der Betriebsfestigkeit (links) und der Ausfallanalyse (rechts).

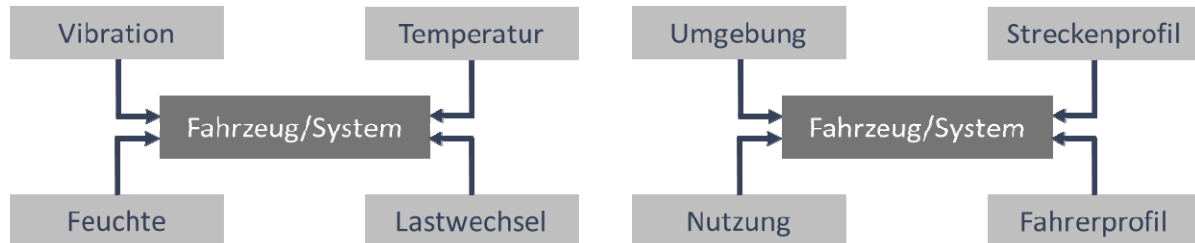


Bild 2-4: Grobdarstellung einiger Einflussgrößen im Maschinenbau (links) und der Zuverlässigkeitstechnik (rechts)

Wie aus Bild 2-4 ersichtlich, sind die direkten Belastungsparameter aus der Analyse der Betriebsfestigkeit abzuleiten und somit nicht Teil dieser Arbeit.

Die Standardmodelle dieser Analyseform (Strength-Stress-Analyse, Wöhlerkurven, HALT/HASS-Modelle, etc.) finden sich u.a. in [Wit 15], [Köh 12] und [Hai 06].

3 Monte-Carlo-Simulation zur Sensitivitätsanalyse

Basierend auf der Problemstellung und Zielsetzung dieser Arbeit wird in diesem Kapitel die Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation für die strukturelle, funktionale und analytische Zuverlässigkeitsebene und deren Analyse entsprechend Bild 2-2 beschrieben. Da die Monte-Carlo-Simulation nur eine Methode im Bereich der Zuverlässigkeitstechnik darstellt, mit denen Analysen dieser Art durchgeführt werden können, erfolgt zunächst ein allgemeiner Methodenvergleich und die Begründung für die Verwendung der MCS insbesondere in Hinblick auf die nachfolgende Belastungsebene.

Grundlegend gilt, dass Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalysen mittels Monte-Carlo-Methoden nicht neu sind, sondern schon seit den 50er Jahren angewendet und ständig weiterentwickelt wurden. Hierzu sind zahlreiche Publikationen erschienen. Eine gewisse Standardisierung erfolgte mit der Richtlinie „VDI 4008 – Blatt 6 Monte-Carlo-Simulation“ im Jahr 1999 als Leitfaden zur Ermittlung von Zuverlässigkeitsmerkmalen technischer Systeme [VDI 99].

Insofern ist die Idee über Zufallsexperimente die Zuverlässigkeit technischer Systeme zu bewerten nicht Kern dieser Arbeit.

Vielmehr liegt das Ziel dieser Arbeit in der Anwendung der MCS zur Lösung gezielter Fragestellungen im Bereich der Zuverlässigkeit. Zu diesem Zweck werden in den folgenden Unterkapiteln Algorithmen entwickelt, mit denen unterschiedliche Formen von Sensitivitäten technischer Systeme mittels MCS ermittelt werden können.

Diese speziellen Anwendungsfälle, in Anlehnung an die zuvor charakterisierten Ebenen (Bild 2-3), beziehen sich nicht auf den Begriff der Sensitivität im Sinne des Maschinenbaus sondern im Sinne der Zuverlässigkeitstheorie (siehe hierzu Erich Pieruschka, einem der Väter der modernen stochastischen Zuverlässigkeitstheorie, [Pie 63]).

D.h. unter dem Begriff der Sensitivität wird hier nicht die Bestimmung des Einflusses spezieller Belastungsparameter im Sinne der Betriebsfestigkeit auf Komponenten und Systeme verstanden, sondern die Ermittlung der Auswirkungen des Ausfalls unterschiedlicher Komponenten auf das Gesamtsystem. Die Eingangsgrößen sind somit durch Lebensdauerverteilungen der einzelnen Komponenten gegeben, die durch Zufallsexperimente verknüpft und in einen Systemkontext gebracht werden.

Hierdurch entsteht gemäß den Gesetzen der Monte-Carlo-Simulation (siehe Kapitel 3.2) eine Gesamtausfallwahrscheinlichkeit die nun wiederum rückwirkend auf den Einfluss einzelner Komponenten hin geprüft und bewertet werden kann. Dies geschieht in den Kapiteln 3.3 ff auf unterschiedlichen Ebenen (Bild 2-3).

3.1 Methodenvergleich für realitätsnahe Sensitivitätsanalysen

Eine zentrale Frage der Zuverlässigkeitsanalytik ist die Frage der zu verwendenden Methode. Während es bei Einzelfragestellungen bezüglich der Zuverlässigkeitseigenschaften eines einzelnen Bauteils oder einer Bauteilgruppe diverse qualitative und quantitative Möglichkeiten gibt die Zuverlässigkeit zu bewerten, ist es bei ganzheitlichen Fragestellungen (die im Vordergrund dieser Arbeit stehen), in denen zum Beispiel die Gesamtzuverlässigkeit eines ganzen Systems auf den zuvor definierten Ebenen bestimmt werden soll, schwierig, eine geeignete Methode zu finden.

Für die Fragestellungen dieser Arbeit ist es dennoch erforderlich, eine Methode der Zuverlässigkeitstheorie auszuwählen, die in allen Ebenen der Zuverlässigkeitsanalyse einsetzbar ist.

Zur Bewertung der Methoden und Analyseverfahren werden die folgenden Anforderungskriterien definiert:

Anwendbarkeit auf komplexe Systeme:

Das wichtigste Kriterium ist die Anwendbarkeit auf komplexe Systeme. Da moderne Systeme aus einer Vielzahl von Komponenten bestehen und – besonders bei elektronischen Komponenten – einen hohen Vernetzungsgrad besitzen, ist eine klare Abgrenzung eines Systems zur Erfüllung einer Funktion nicht immer möglich. Um dennoch die Zuverlässigkeit bzw. Sicherheit eines Systems bestimmen zu können, müssen alle Komponenten und Baugruppen in die Analyse einbezogen werden. Die Bewertung der Methoden bezieht sich auf die Möglichkeit, auch komplexe Systeme mit der jeweiligen Methode vollständig untersuchen zu können. Dies schließt auch unterschiedliche Redundanzstrukturen wie z.B. mvn-Verknüpfungen, Standby-Verknüpfungen, etc. ein.

Strukturelle Sensitivität:

Auf Basis der strukturellen Sensitivität können die allgemeinen Zuverlässigkeitskenngrößen bestimmt werden. Sie ist die Basis für tiefere Analyseebenen. Die Bewertung der jeweiligen Methode bezieht sich auf die Möglichkeit, die o.g. Zuverlässigkeitskenngrößen abzuleiten.

Funktionale Sensitivität:

Die Bewertung der funktionalen Sensitivität wird in modernen elektronischen und mechatronischen Systemen immer wichtiger. Wie bereits in der Problemstellung und Zielsetzung (Kapitel 2) erwähnt, steigt die Funktionsbreite neuer Systeme immer weiter an. Dies wird zum einen durch Software ermöglicht, deren Zuverlässigkeit hier nicht bestimmt werden soll, zum anderen aber auch durch intelligente Vernetzung unterschiedlicher Systeme. Aufgrund diverser Rückfallebenen ist die Bestimmung der strukturellen Sensitivität zur Beantwortung der Frage, ob ein System ausgefallen ist oder nicht, oftmals nicht ausreichend. Vielmehr interessieren der aktuelle Funktionsstatus und die detaillierte Einsatzbereitschaft. Um diese bestimmen zu können, sind auch zeitliche Faktoren und Abhängigkeiten zu beachten. Je nachdem, in welcher Reihenfolge Bauteile versagen, können sich zu einem bestimmten Zeitpunkt unterschiedliche Funktionalitäten ergeben. Die Methoden werden in Hinsicht ihrer Möglichkeit, die Verfügbarkeit einzelner Funktionen zu bestimmen, bewertet.

Analytische Sensitivität:

Die exakte Ausführung einer Funktion zählt zu den erweiterten Fragestellungen im Bereich der Zuverlässigkeit und Sicherheit. Aufgrund einer hohen Anzahl an Softwareprozessen, die, abhängig vom aktuellen Systemstatus, die Rechenleistung eines Mikrocontrollers oder Prozessors beeinträchtigen können, kann auch die Ausführungszeit einzelner elektronischer Kommandos variieren. So kann es zu einem „temporärem“ Funktionsausfall kommen, obwohl keine Komponente real ausgefallen ist und das System normal funktioniert.

Da die analytische Sensitivität meist durch mathematische Algorithmen bestimmt wird, ist die Möglichkeit, freie mathematische Ausdrücke zu berücksichtigen, für die Bewertung in diesem Punkt relevant.

Empirische und diskrete Verteilungsfunktionen:

Neben den einzelnen Ebenen der Sensitivitätsanalyse ist auch der mögliche Detaillierungsgrad der einzelnen Methoden interessant. So ist die Fähigkeit, unterschiedliche Verteilungsfunktionen zu verwenden, für eine realitätsnahe Untersuchung der Zuverlässigkeit eines Systems von großer Bedeutung. Parameter zur Beschreibung des Ausfallverhaltens einer Komponente müssen nicht zwingend in stetiger Form definiert sein. Auch sollte es möglich sein, diskrete Parameter und Verteilungsfunktionen für die Bestimmung der Zuverlässigkeit eines Systems zugrunde zu legen.

Aggregierbarkeit:

Für einzelne Fragestellungen ist die Aggregierbarkeit einer Methode mit anderen Analyseverfahren notwendig. Ein Kriterium für die Bewertung der Aggregierbarkeit ist die Komplexität des Ansatzes. Generell gilt, je komplexer die Analytik einer Methode, umso schwieriger die Aggregation mit anderen Methoden. So sind neben Fragestellungen im Bereich der Zuverlässigkeit auch Fragestellungen z.B. aus dem Bereich der Wirtschaftswissenschaften interessant, wenn es z.B. darum geht, den monetären Einfluss eines Fehlerbildes bei einem bestimmten Produkt auf dessen Erlös zu bewerten.

Rückverfolgbarkeit:

Eine Kernanforderung an ein Analyseverfahren ist bekanntlich deren Rückverfolgbarkeit mit einer umfassenden Dokumentation. In der Dokumentation geht es neben der Beschreibung der durchgeführten Analysen auch um die spätere Rekonstruktion und einer eventuellen Applikation. Je schlechter die Rückverfolgbarkeit einer Methode in Hinsicht auf die Verständlichkeit ist, umso eher geht Wissen nach Abschluss verloren, und eine erneute Anwendung oder Prüfung wird erheblich beschwert. Analog zur Aggregierbarkeit ist auch bei der Rückverfolgbarkeit die Komplexität eines Ansatzes von großer Bedeutung. Je komplexer sich eine Methode mathematisch gestaltet, umso schwieriger ist es, einzelne Ergebnisse zu rekonstruieren.

Nachvollziehbarkeit:

Die Nachvollziehbarkeit einer Methode ist im Kern vergleichbar mit der Verständlichkeit der durchgeführten Berechnungen. Wichtig ist, dass die Ergebnisse, die eine

Zuverlässigkeitsuntersuchung liefert, detailliert nachvollzogen werden können. Zum einen zur nachfolgenden Verwendung und Bewertung der Ergebnisse und zur Ableitung geeigneter Maßnahmen zur Optimierung und zum anderen auch zur Handhabung einer Methode bei komplexen technischen Sachverhalten. Auch steigert eine hohe Nachvollziehbarkeit die Einsetzbarkeit in der Routine. Nach der Entwicklung und einer exemplarischen Anwendung eines Zuverlässigkeitsmodells muss dieses meist in den Qualitätssicherungsprozess eines Unternehmens implementiert werden. Hier müssen auch Anwender, die nicht über ein tiefes Methodenverständnis verfügen, diese korrekt und sicher verwenden können. Über das Kriterium der Nachvollziehbarkeit werden die Methoden hinsichtlich dieser Anforderungen bewertet.

Die Einteilung der zu untersuchenden Methoden erfolgt nach folgendem Schema (Bild 3-1).

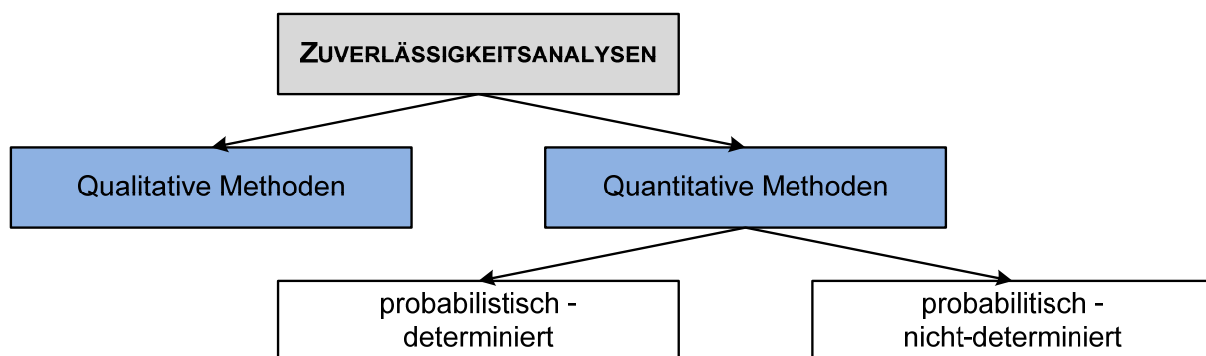


Bild 3-1: Einteilung der Methoden zur Bestimmung der Zuverlässigkeit

Grundsätzlich wird im Bereich der Zuverlässigkeitstechnik bekanntlich zwischen den qualitativen und quantitativen Analysemethoden unterschieden. Hierbei sind die quantitativen Methoden grundsätzlich zu bevorzugen, um eine mathematisch und datentechnisch fundierte Analyse der Zuverlässigkeit und deren Bewertung zu ermöglichen.

Bei den quantitativen Methoden wird in dieser Arbeit zusätzlich zwischen den probabilistisch-determinierten und den probabilistisch-nicht-determinierten Methoden (z.B. Simulation) unterschieden.

Obwohl sich die Methoden in ihren Modellen grundsätzlich deterministischer Ansätzen bedienen, ist das spätere Ergebnis der Berechnungen grundsätzlich

probabilistischer Natur und unterliegt somit dem Probabilismus als Indeterminismus¹, wenn auch mit deterministischem Grundgedanken [Pla 14a]. Dies liegt an der Verwendung von Zufallsvariablen für die zugrunde gelegten Parameter. So kann aus den Wahrscheinlichkeitsaussagen der Zuverlässigkeitsanalytik nicht auf das Versagen eines einzelnen Bauteils oder einer Baugruppe, einschließlich System, zurückgeschlossen werden.

Durch die Entwicklung computerbasierter – teils intelligenter – Algorithmen muss diese Einteilung allerdings detailliert werden.

So wird in dieser Arbeit wie in der Informatik grundsätzlich üblich, zwischen den determinierten und nicht-determinierten Methoden unterschieden. Eine Methode ist dann determiniert, wenn der gleiche Input einer mathematischen Funktion immer zu demselben Ergebnis führt (kurz: „gleiche Eingabe, gleiche Ausgabe“). Dies trifft auf alle Methoden zu, die sich keinerlei Zufallszahlen oder anderer, nicht durch einen festen Algorithmus definierten, Zufallsgrößen bedienen.

Zu den nicht-determinierten Methoden zählen somit computerbasierende Methoden, deren Funktionsweise auf Zufallsereignissen basieren oder ihre Struktur nach einem pseudo-intelligenten Muster dynamisch verändern (z.B. Neuronale Netze).

Nachfolgende Tabelle 3-1 zeigt einen Vergleich der gegenwärtig in der industriellen Praxis verwendeten Methoden, bewertet anhand der zuvor zugrunde gelegten Anforderungen. Spezielle Methoden wie z.B. Petri-Netze, Soft Computing (wie evolutionäre Algorithmen und Graphen), etc. wurden dabei nicht berücksichtigt.

Die Bewertung in den nachfolgenden Kategorien von „--“ bis „++“ erfolgt dabei subjektiv in Hinsicht auf die Verwendbarkeit der in Kapitel 2 definierten Ebenen.

¹ Unvorhersagbarkeit von Ereignissen; eine Aussage über die Zukunft ist im Gegensatz zum Determinismus (Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung) nur über eine stochastische Modellbildung möglich.

Methoden		Anforderungen									
		Anwendbarkeit auf komplexe Systemen	Strukturelle Sensitivität	Funktionale Sensitivität	Analytische Sensitivität	Emp. u. disk. Verteilungsfunktionen	Aggregierbarkeit	Rückverfolgbarkeit	Nachvollziehbarkeit		
Qualitative Methoden											
FMEA	+	0	+	--	--	+	0	++	+	0	++
Fehlerbaumanalyse (qualitativ)	0	+	+	--	--	+	0	++	+	++	+
Determinierte Methoden											
Systemstrukturen	0	++	0	--	--	0	0	++	+	++	+
Fehlerbaumanalyse (quantitativ)	0	++	0	--	--	0	0	++	+	++	++
Stetige Markov-Prozesse	0	+	+	-	-	+	0	+	+	0	0
Semi-Markov-Prozesse	+	+	+	-	-	+	0	+	0	0	-
Fuzzy-Logik	0	+	+	--	--	+	0	+	0	-	0
Nicht-determinierte Methoden											
Monte-Carlo-Simulation	+	+	++	+	+	++	0	+	++	0	++
Neuronale-Netze	+	+	+	++	++	+	0	+	0	-	-

Tabelle 3-1: Vergleich der gegenwärtig in der industriellen Praxis eingesetzten Methoden zur Sensitivitätsanalyse

Die Auswertung in Tabelle 3-1 zeigt, dass die qualitativen Methoden große Schwächen im Bereich der Flexibilität haben. Dieses macht sie für eine ganzheitliche Analyse unbrauchbar. Bei den determinierten Methoden ist zwischen den grundlegenden Methoden, der Systemstrukturanalyse und den Fehlerbäumen, und den Markov-Modellen und der Fuzzy-Logik zu unterscheiden. Die grundlegenden Methoden zeichnen sich durch eine gute Praxistauglichkeit aus. Diese wird durch die Zusammenfassung aus der Aggregierbarkeit, der Rückverfolgbarkeit und der Nachvollziehbarkeit begründet. Dafür sind sie durch ihre Grundstruktur in der Regel nur für anwendungsbezogene Fragestellungen einsetzbar. Eine direkte Analyse mathematischer Zusammenhänge ist nicht möglich. Die Markov-Prozesse sind in ihren Anwendungsmöglichkeiten vielseitiger, allerdings ist die Verwendbarkeit, bedingt durch sehr komplexe Terme (z.B. stochastische Differentialgleichungen), die bei der Anwendung der Markov-Prozessen und Verwandten entstehen, begrenzt. Hinzu kommt, dass der Zustandsraum sehr schnell „explodiert“.

Die nicht-determinierten Modelle sind in Bezug auf die hier gestellten Anforderungen sehr flexibel einsetzbar. Da die eigentlichen Berechnungen bei dieser Art von Methoden nicht in komplexen Termen, sondern in der Wiederholung von einfachen Termen liegen, ist auch die Anwendbarkeit grundsätzlich flexibel. Die künstlichen neuronalen Netze besitzen allerdings den Nachteil, dass aufgrund des Einsatzes einer Vorstufe von künstlicher Intelligenz, abgebildet durch unterschiedliche Lernalgorithmen [Meyb 03], die Berechnungen nicht nachvollziehbar sind und ein Lernalgorithmus bei mehrmaliger Anwendung nicht in einem Ergebnis konvergiert.

Die Anwendung der Monte-Carlo-Simulation erweist sich hingegen als sehr geeignet; die Nachvollziehbarkeit ist hier sehr hoch, da die Zufallszahlen, die zur Erzeugung der Ergebnisse benötigt werden, durch den Einsatz von Pseudozufallszahlengeneratoren jederzeit reproduziert werden können.

Auch die zuvor zugrunde gelegten anderen Anforderungen werden von der Monte-Carlo-Simulation in hohem Maße erfüllt. Die Wahl der Verteilungsfunktionen, die allen Berechnungen als Basis dienen, ist annähernd beliebig, und es können speziell auch unscharfe – meist diskrete oder qualitative – Informationen verarbeitet werden. Dies macht die Simulation universell einsetzbar. Allerdings haben Simulationsmethoden bekanntlich generell den Nachteil, dass es sich bei den erzielten Ergebnissen immer nur um einen Schätzer des eigentlichen analytischen Ergebnisses handelt. Dieser Nachteil muss durch eine sorgfältige Wahl des Zufallszahlengenerators, einer

geeigneten Simulationsumgebung und einer hinreichenden Zahl an Simulationsdurchläufen und Nutzung von Varianzreduzierenden Methoden, in den Auswirkungen begrenzt werden. Weitere Ausführungen hierzu finden sich u.a. in [Zio 13], [Pli 11] und [Hau 07].

3.2 Anwendung der Monte-Carlo-Simulation auf die Ebenen der Zuverlässigkeitsanalytik

Eine kurze Einführung

Die Monte-Carlo-Simulation (MCS) ist bekanntlich eine computergestützte Simulationsmethode basierend auf Zufallsereignissen. Ziel ist die Schätzung und Umgehung mathematischer Ausdrücke durch das Verwenden von Zufallsexperimenten.

Die Nutzung solcher Zufallsereignisse lässt sich bis in das Jahr 1777 zurückverfolgen, in dem der französische Naturwissenschaftler Buffon durch das sogenannte Nadelexperiment die Wahrscheinlichkeit p abschätzte, dass eine Nadel einer definierten Länge l gleichzeitig zwei parallele Holzplanken mit der Breite b berührt. Laplace zeigte 1886, dass sich mit dem Experiment von Buffon ein Schätzer der Kreiszahl π ableiten lässt. Nach Laplace gilt

$$\pi \approx \frac{2 \cdot l}{p \cdot b} = \frac{2 \cdot l \cdot N}{b \cdot n} \quad (3-1)$$

mit

n = Anzahl der Nadeln, die zwei Holzplanken treffen und

N = Anzahl aller Nadeln auf den Holzplanken.

Im Jahr 1908 verwendete der englische Mathematiker W. S. Gosset (der unter dem Pseudonym „Student“ publizierte) Zufallsereignisse zur Bestimmung des Korrelationskoeffizienten der Student-Verteilung (t-Verteilung) [Mey 10].

Die moderne Nutzung der Monte-Carlo-Simulation geht auf die Wissenschaftler Fermi, von Neumann und Ulam zurück, die die MCS im Rahmen der Entwicklung der Atombombe (Manhattan Project) zur Lösung eines sechs-dimensionalen Integrals nutzten. Dies war die vermutlich erste Anwendung, bei der das Versuch-und-Irrtum-Prinzip aufgrund der verheerenden Wirkungen von Atombombentests nicht angewendet werden konnte.

Heutzutage wird die MCS in vielen Wissenschaftsdisziplinen zur Abschätzung der Lösung komplexer mathematischer Gleichungen und Algorithmen genutzt. Aufgrund der immer weiter steigenden Rechenleistung moderner Computersysteme nehmen die Anwendungsmöglichkeiten der MCS immer mehr zu. Zu Beginn des digitalen Zeitalters war die MCS, bedingt durch ihre hohe Anzahl an Simulationsdurchläufen und den damit verbundenen hohen Anforderungen an die Rechenleistung, nur in großen Rechenzentren bzw. an Großrechneranlagen möglich. Heutzutage ist die MCS in ausreichender Qualität in fast jedem modernen Computersystem implementiert und nutzbar. Aus diesem Grund steigt auch die Bedeutung der MCS in der Industrie und der praktischen Anwendung zur Lösung komplexer Probleme.

Jede MCS basiert auf Zufallsereignissen, die durch einen Zufallszahlengenerator erzeugt werden. Diese Generatoren können in zwei grundlegende Klassen unterteilt werden: Reale Zufallszahlengeneratoren und sogenannte Pseudo-Zufallszahlengeneratoren. Reale Zufallszahlengeneratoren erzeugen die Zufallszahlen anhand von vollständig zufälligen Ereignissen und können nicht reproduziert werden. Zu den realen Zufallszahlengeneratoren zählen physikalische Prozesse, wie z.B. der Kernzerfall eines radioaktiven Nuklids oder aber auch einfaches „manuelles“ Würfeln. Nur diese Art von Zufallszahlen ist vollkommen zufällig und im eigentlichen Sinne für die MCS geeignet. Im Gegensatz zu den realen Zufallszahlengeneratoren werden für computergestützte Simulationen Generatoren verwendet, die auf mathematischen Algorithmen basieren. Diese Pseudo-Zufallszahlengeneratoren (im Folgenden allgemein als Zufallszahlengeneratoren bezeichnet), ermöglichen es, in einer sehr kurzen Zeit eine sehr große Anzahl an Zufallszahlen zu erzeugen, die jederzeit durch den Algorithmus reproduzierbar sind. Grundsätzlich gilt, dass Zufallszahlengeneratoren, die auf einem mathematischen Algorithmus basieren, immer nur eine begrenzte Anzahl von Zufallszahlen erzeugen können [Dub 00].

Neben der Effizienz des eingesetzten Zufallszahlengenerators ist auch dessen Qualität von sehr großer Bedeutung. Diese ist vom verwendeten Algorithmus, der die Zufallszahlen generiert, abhängig. Hier gilt es in erster Linie, Muster (auch Hyper-ebenen genannt) bei der Generierung der Zufallszahlen zu vermeiden, die die Zufälligkeit der erzeugten Zahlen negativ beeinflussen.

Ist der Einfluss eines Musters in Bezug auf die Eigenschaften der durchzuführenden Simulation relevant, so sind die späteren Ergebnisse der Simulation nicht mehr zu

verwenden. Eine Gefahr besteht darin, die auftretenden Muster nicht zu erkennen und somit fälschlicherweise einem Ergebnis einer MCS zu vertrauen.

Die einzige Möglichkeit, dies zu vermeiden, ist die Anwendung von Testbatterien zu Zufallszahlengeneratoren. Diese führen eine Vielzahl von Tests durch und bewerten die Zufälligkeit eines Generators mittels sogenannten p-Values. Die Tests ergeben jedoch keine endgültige Aussage, ob ein Zufallszahlengenerator für eine bestimmte Simulation geeignet ist. Es gibt keinen, auf mathematischen Algorithmen basierenden, Zufallszahlengenerator, der nicht ab einer bestimmten Dimension Hyperebenen erzeugt. Weitere Ausführungen zu dem Thema der Qualität und der Effizienz von Zufallszahlengeneratoren finden sich u.a. in [Pli 10], [Leq 08], [Dub 00] und [Gen 98]. In dieser Arbeit werden Zufallszahlengeneratoren verwendet, die der Klasse der linearen Kongruenzgeneratoren (LCG) angehören.

Die gleichverteilt zwischen 0 und 1 erzeugten Zufallszahlen ξ werden nach $LCG(m, a, c, x_0)$ durch

$$\xi_i = \frac{(a \cdot x_{i-1} + c) \bmod m}{m} = \frac{(a \cdot x_{i-1} + c) - \left\lfloor \frac{a \cdot x_{i-1} + c}{m} \right\rfloor m}{m} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3-2)$$

mit

$m = \text{Modul mit } m \in \mathbb{N}^+$,

$a = \text{Multiplikator mit } a \in \{1, \dots, m-1\}$,

$c = \text{Inkrement } c \in \{1, \dots, m-1\}$,

$x_0 = \text{Startwert mit } x_0 \in \{1, \dots, m-1\}$

und

$n = \text{Anzahl der zu bildenden Zufallszahlen } n \in \{1, \dots, m-1\}$

erzeugt.

Beispiele für geeignete Parameter für die linearen Kongruenzgeneratoren sowie ein Vergleich weiterer Zufallszahlengeneratoren von, in der Industrie gängiger, Anwendersoftware sind im Anhang gegeben.

Die Ergebnisse der MCS liegen somit durch eine hohe Anzahl von zufälligen Ereignissen vor. Diese sind für weitere Berechnungen nicht direkt nutzbar, da sie nur graphisch und nicht analytisch ausgewertet werden können. Für die Anwendung in der Zuverlässigkeitstechnik ist es daher zwingend erforderlich, im Anschluss an die Simulation die Ergebnisse bestmöglich an eine Verteilungsfunktion anzupassen. Die angepassten Verteilungen können dann wiederum wie die Ergebnisse der analyti-

schen Methoden genutzt werden. Weitere Anwendungen zur MCS sind u.a. in [Ave 13], [Zio 13] und [Hau 07] publiziert.

3.3 Strukturelle Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation

Für die erste Ebene, d.h. der strukturellen Sensitivitätsanalyse (siehe Kapitel 2) gilt es nun, mittels MCS die grundlegenden Zuverlässigkeitskenngrößen zu ermitteln.

Dies basiert auf der Grundlage der Systemstrukturen und verwendet anstelle der bekannten Gleichungen zur Bestimmung der Zuverlässigkeitskenngrößen (siehe [Mey 10]) die logischen Verknüpfungen von Bauteilen. Diese Verknüpfungen werden bei der MCS über Zufallsexperimente hinreichend oft wiederholt (n =Anzahl der Simulationsdurchläufe) und im Anschluss nach ihren Ausfallzeitpunkten sortiert, wodurch sich die Schätzer für die Zuverlässigkeitskenngrößen ableiten lassen. Die Schrittfolge ist in Bild 3-2 exemplarisch dargestellt.

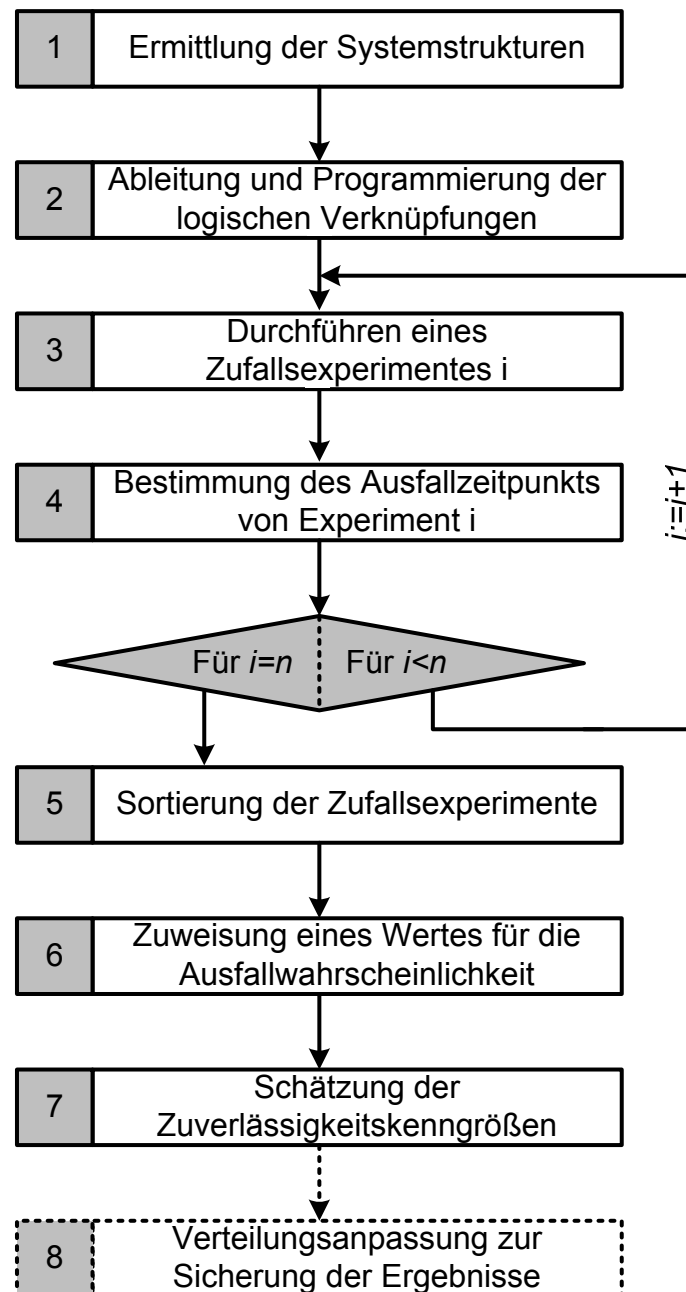


Bild 3-2: MCS für strukturelle Sensitivitätsanalysen

Für die Umwandlung der Systemstrukturen (Schritt 2) werden die in Tabelle 3-2 genannten logischen Verknüpfungen und Operatoren verwendet. Als Referenz dient die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ als Komplement der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$.

Tabelle 3-2: Umwandlung der Systemstrukturen in logische Verknüpfungen und Operatoren

Anordnung	$R(t)$	MCS-Operator
Seriell	$R_{seriell}(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t)$	UND (\wedge) $> t$
Parallel	$R_{parallel}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i(t))$	ODER (\vee) $> t$
mvn	$R_{mvn}(t) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \cdot p^k(t) \cdot (1-p(t))^{n-k}$	$N(t_a > t) > m$
Standby	$R_{Standby}(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}$	$\sum_{a=1}^n t_a > t$

mit: t_a = Ausfallzeitpunkt

Aus diesem Schritt folgt die Aussage, ob ein System bis zum Zeitpunkt t ausgefallen ist oder nicht. Zur Bestimmung des Ausfallzeitpunktes des Gesamtsystems (Schritt 4) sind die Ausfallzeitpunkte der einzelnen Komponenten zu einem Ausfallzeitpunkt für das Gesamtsystem zu verarbeiten. Diese Beziehungen sind in Tabelle 3-3 dargestellt.

Tabelle 3-3: Bestimmung der Ausfallzeitpunkte der Systemstrukturen

Anordnung	Ausfallzeitpunkt
Seriell	$t_{a,seriell} = \text{Min}[t_{a,Kom1}, t_{a,Kom2}, \dots, t_{a,Komn}]$
Parallel	$t_{a,parallel} = \text{Max}[t_{a,Kom1}, t_{a,Kom2}, \dots, t_{a,Komn}]$
mvn	$t_{a,mvn} = t_{Kom, n-m+1}$
Standby	$t_{a,Standby} = \sum_{i=1}^n t_{Kom i}$

mit: $t_{a,Komi}$ = Ausfallzeitpunkt einer Komponente $\forall i = 1, \dots, n$

Nach der Sortierung der Systemausfallzeitpunkte der einzelnen Simulationen (Schritt 5) wird nun jedem $t_{a,system}$ der Wert für die Ausfallwahrscheinlichkeit als Schätzer, die bekanntlich mit einer Tilde versehen werden, durch

$$\tilde{F}(t) \approx \frac{\text{Anzahl der bis } t \text{ ausgefallenen Systeme}}{\text{Anzahl aller Simulationen}} = \frac{i}{n} \quad (3-3)$$

zugewiesen (Schritt 6).

So entstehen Wertepaare der Form $(t_{a, System}, \tilde{F}(t)) = \left(t_{a, System}, \frac{i}{n} \right)$ mit $t_{a, System, i} \leq t_{a, System, i+1}$,

aus denen nun die Zuverlässigkeitskenngrößen bis zum Zeitpunkt t , sowie deren Verlauf abgeleitet werden können. Der Nachteil der MCS, dass die Ergebnisse nicht durch mathematische Funktionen sondern durch Simulationspunkte gegeben sind, wird im letzten Schritt 8 durch die Anpassung an zugrunde gelegte Verteilungsfunktionen ausgeglichen. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass, neben der Ungenauigkeit des Simulationsverfahren (Stichwort: Schätzer), auch eine Ungenauigkeit über die angepasste Funktion folgt. In welcher Form dies relevant ist, muss durch den Anwender entschieden werden.

Als Anwendung für eine Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation wird im Folgenden ein simples Beispiel mit den oben beschriebenen gängigen logischen Verknüpfungen zuverlässigkeitstechnisch bewertet. Gegeben ist ein System mit Struktur nach Bild 3-3.

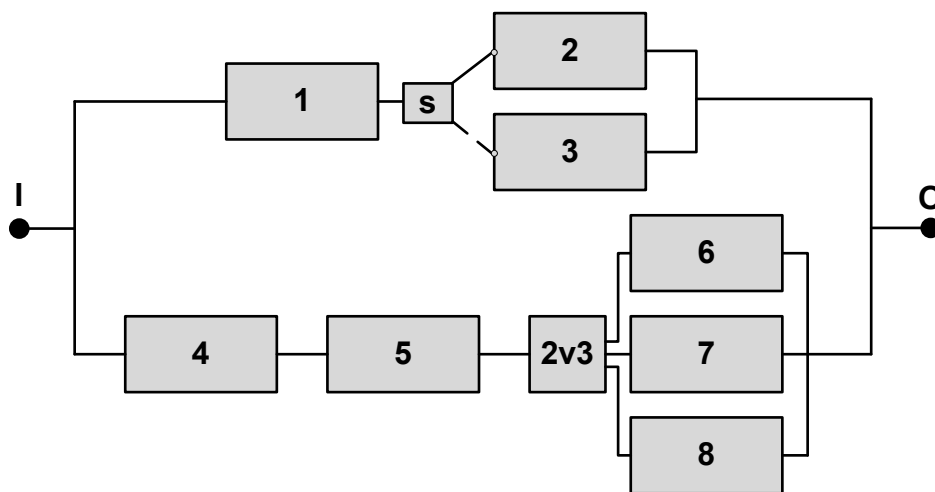


Bild 3-3: Systemstruktur eines einfachen Systems, s=Schalter

Die Komponenten K_i besitzen ein identisches exponentiell-verteiltes Ausfallverhalten mit $\lambda_i = 5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{h}$ für $i = 1, \dots, 8$, d.h. $p_i = e^{-\lambda_i t}$ als Überlebenswahrscheinlichkeit. Der Schalter s des eingebetteten Standby-Systems sowie der Mehrheitsentscheider des 2v3-Systems seien absolut zuverlässig.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ des Systems lässt sich analytisch einfach mittels der Gleichung

$$F(t) = 1 - \left(1 - \left(1 - p_1 \cdot p_{Standby}\right) \cdot \left(1 - p_4 \cdot p_5 \cdot \left(p_{6,7} + p_{6,8} + p_{7,8} - 2 \cdot p_{6,7,8}\right)\right)\right) \quad (3-4)$$

mit

$$p_{Standby} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda_i \cdot t)^k}{k!} \text{ und}$$

$n = 2$ (Anzahl der Komponenten der Standby-Schaltung) .

bestimmen. Neben der analytischen Auswertung der Gleichung (3-4) ist in Bild 3-4 auch das Ergebnis einer MCS mit $n = 10.000$ Simulationsdurchläufen dargestellt. Aufgrund der Einfachheit des Systems und der verhältnismäßig geringen Anzahl an Durchläufen, beträgt die Rechenzeit unter einer Sekunde (*Wolfram Mathematica*© 10, Intel® Core™ i5-2430 @2.40Ghz auf 32-bit, Mono-Core, *Microsoft Windows 7 Professional* ©) .

Für den Verlauf von $F(t)$ ergeben sich die in Bild 3-4 dargestellten Graphiken.

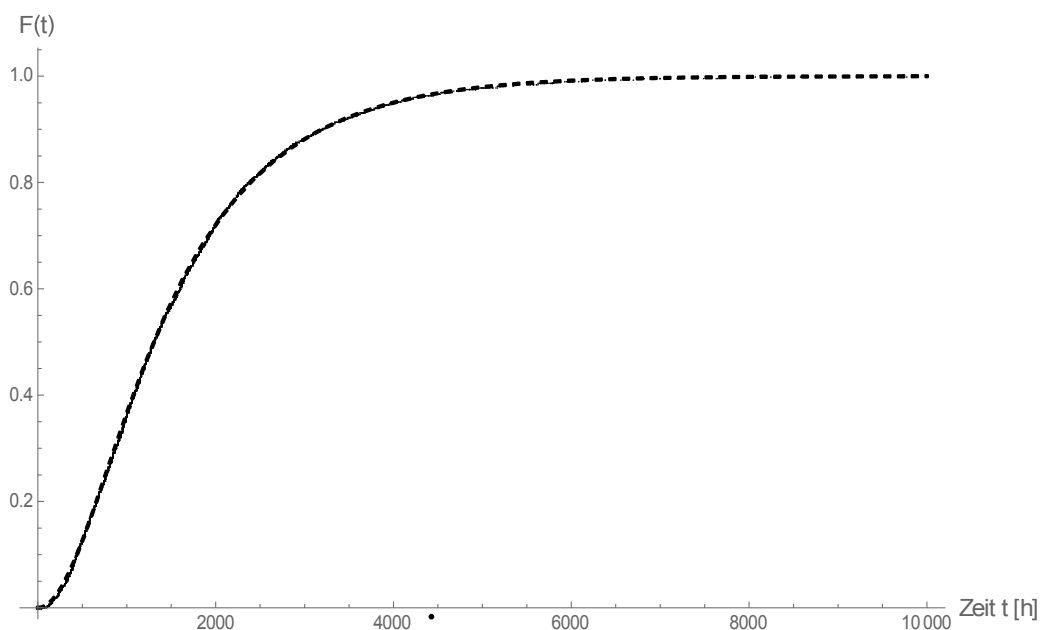


Bild 3-4: Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$

Wie aus Bild 3-4 ersichtlich, sind die Verläufe der analytisch ermittelten Ausfallwahrscheinlichkeit und der durch Monte-Carlo-Simulation ermittelten nahezu identisch. Bei einer höheren Anzahl von Simulationsdurchläufen ist im Verlauf kein Unterschied mehr feststellbar. Neben der Tatsache, dass die Analyse über die MCS den Weg über die Gleichung (3-4) erspart – auch wenn durch die Simulation „nur“ ein Schätzer gebildet wird – können die Ergebnisse der MCS aufgrund ihrer Güte nun auch für weitere Untersuchungen bezüglich des Ausfallverhaltens des Systems verwendet werden.

Beispielhaft für solche Auswertungen wird im Folgenden untersucht, welche Komponenten in welchem Verhältnis für einen Systemausfall in letzter Instanz verantwortlich (Bild 3-5) sind, und wie sich die Wahrscheinlichkeiten für diese Ausfälle im Verlauf verhalten (Bild 3-6). Auswertungen dieser Art werden auch im Bereich der Fehlerbaumanalyse über die Ermittlung der strukturellen Importanz durchgeführt. Diese Kenngröße ist allerdings nicht immer analytisch berechenbar. Aus diesem Grund ist die Anwendung der MCS bei komplexen Systemen sinnvoll.

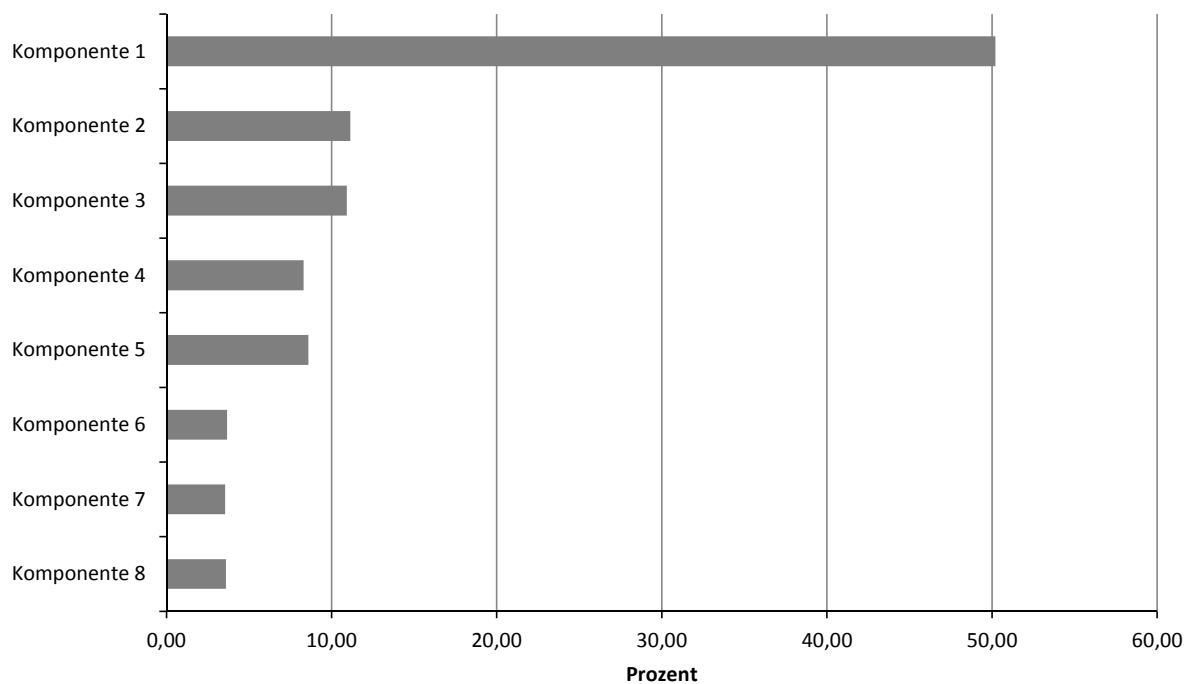


Bild 3-5: Verhältnis der Systemausfälle bedingt durch den Ausfall einer Komponente K_i

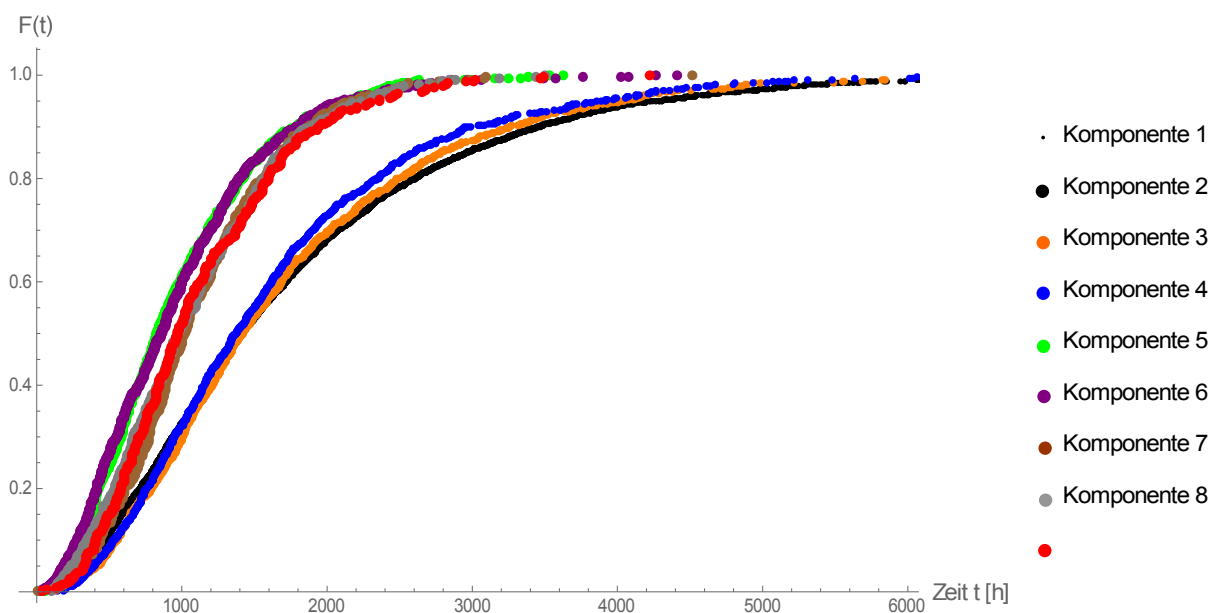


Bild 3-6: Verlauf der Systemausfälle verursacht durch den Ausfall einer Komponente K_i

Wie anhand des Beispiels und den dargestellten Ergebnissen zu erkennen ist, ist die Analyse mittels MCS im Vergleich zu den analytischen Berechnungen sehr exakt, und es können mit geringem Aufwand eine Vielzahl von weiteren Untersuchungen durchgeführt werden.

So ist z.B. in Bild 3-6 sehr gut zu erkennen, wie die Systemausfallwahrscheinlichkeit für die beiden Pfade des Parallelsystems (vgl. Bild 3-3) verläuft. Während die Komponenten 4-8, angeordnet im unteren Pfad, nach vergleichsweise kurzer Zeit einen Systemausfall verursachen, verläuft die Kurve der Komponenten 1-3, angeordnet im oberen Pfad, deutlich flacher. So sind die Systemausfälle bedingt durch die Komponenten 1-3 (Bild 3-5) mit ca. 70% der Gesamtausfälle zwar deutlich höher als die Quote der Systemausfälle bedingt durch die Komponenten 4-8, dafür treten sie erst zu einem späteren Zeitpunkt ein. Kombinierte Analysen dieser Art ermöglichen somit eine Vielzahl von Aussagen bezüglich der Zuverlässigkeit oder Folgen von Ausfällen von Komponenten in Bezug auf ihre Redundanzstrukturen.

3.4 Funktionale Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation

Für praxisnahe Zuverlässigkeitsbewertungen ist oftmals eine genaue Betrachtung des Ausfallverhaltens einzelner Funktionen eines Systems, im Sinne einer funktionalen Sensitivitätsanalyse, von großer Bedeutung. Eine funktionale Sensitivitätsanalyse verfolgt dementsprechend das Ziel, die - zuvor definierten - einzelnen Funktionen eines Systems zuverlässigkeitstechnisch zu bewerten. Aufgrund der stetig zunehmenden Komplexität mechatronischer Systeme und Funktionszusammenhängen ist eine mathematische Beurteilung des Ausfallverhaltens mit Hilfe der analytischen Methoden der Zuverlässigkeitstheorie oft problematisch.

Wie nachfolgend dargestellt, ermöglicht in diesem Zusammenhang die MCS eine effiziente, detaillierte und besonders praxisnahe Untersuchung.

Der Ablauf einer funktionalen Sensitivitätsanalyse (dargestellt in Bild 3-7) orientiert sich an der Schrittfolge der strukturellen Sensitivitätsanalyse (siehe Bild 3-2), ist allerdings um weitere Schritte (rot umrandet) erweitert.

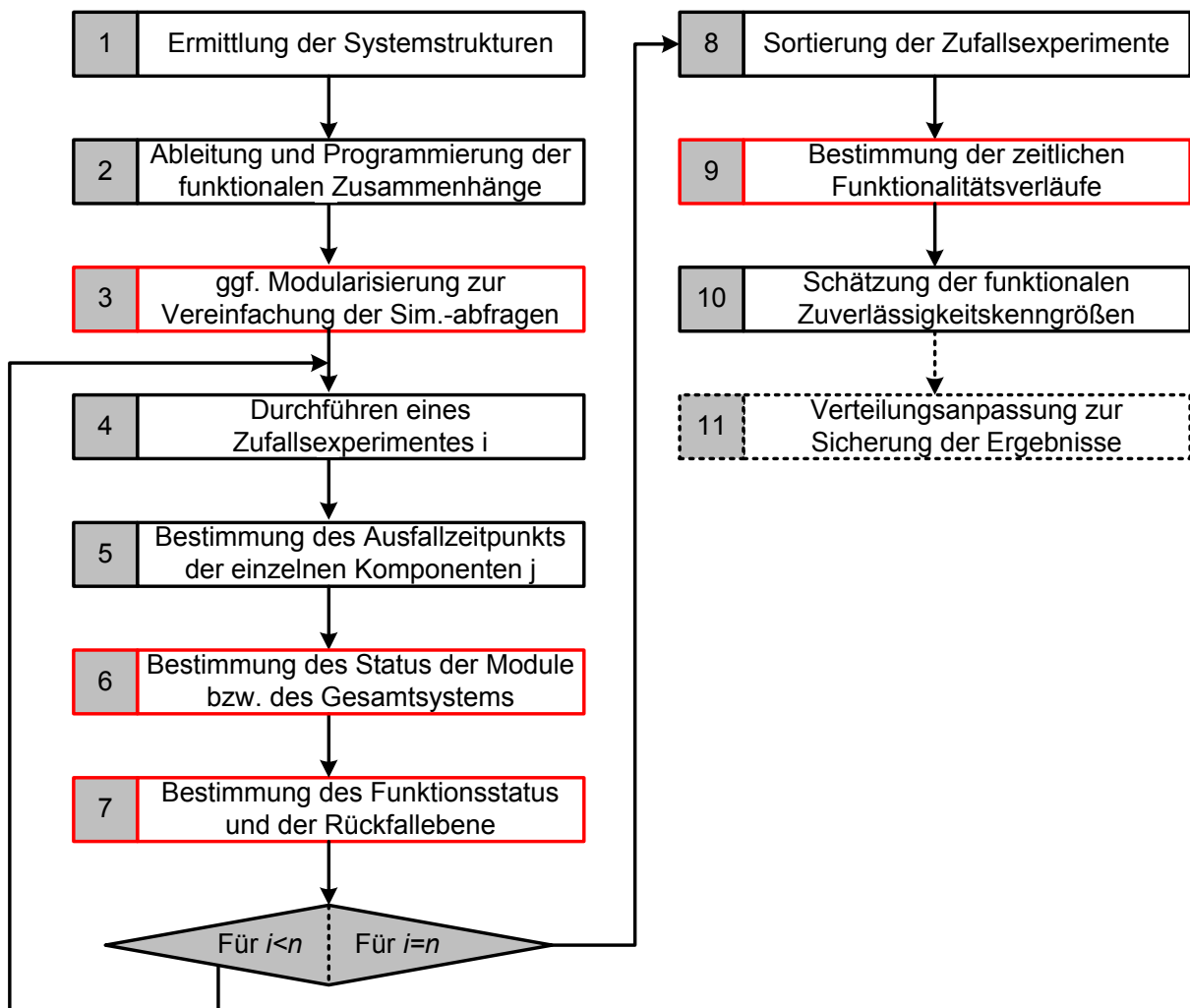


Bild 3-7: Schrittfolge mittels MCS für funktionale Sensitivitätsanalysen

Wie aus Bild 3-7 hervorgeht, besteht der Unterschied zur strukturellen Analyse in der Aufteilung des Systems in einzelne Module. In diesen Modulen werden die funktionalen Zusammenhänge anhand der Systemstruktur dargestellt (Schritte 2 und 3). Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode besteht darin, dass auch exakte Kombinationen von Komponenten in der Simulation berücksichtigt werden können (Schritte 5 bis 7). Dies ist wichtig, da es oftmals nicht nur auf Einzelfehler in beliebigen sondern in speziellen Kombinationszusammenhängen ankommt. So können einzelne Fehlermodi, die auch sehr selten auftreten können, bestimmt und deren Einfluss auf die Gesamtfunktionalität ermittelt werden. Zudem können zeitliche Faktoren berücksichtigt werden, die oftmals darüber entscheiden, ob ein Fehler sicherheitskritisch ist oder nicht.

In Bezug auf Bremssysteme bedeutet dies zum Beispiel, dass ein Fehler im Monitoring einer Komponente, wenn er vor dem eigentlichen Komponentenfehler auftritt, zu einer gefährlichen Situation führt, da der Fahrer im Falle eines tatsächlichen Funkti-

onsausfalls nicht mehr gewarnt werden kann. Ein klassisches Beispiel ist der Ausfall einer Warnlampe (z.B. ABS) vor dem Ausfall des ABS. Zwar beeinflusst die zeitliche Unterscheidung in diesem Fall die Ausfallwahrscheinlichkeit nicht, wohl aber die potentiellen Folgen eines Systemausfalls. Gerade bei Fehlern, die sehr selten auftreten, kann so dennoch die Zuverlässigkeit eines Systems inklusive aller Fehlermodi bestimmt werden.

Als Beispiel für die funktionale Sensitivitätsanalyse wird ein Bremssystem aus [Alt 09] verwendet. Untersucht wird ein Bremssystem mit II-Aufteilung ohne elektronische Komponenten. Die besondere Eignung dieses Beispiels ist dadurch gegeben, dass nachvollziehbar einzelne Fehlermodi untersucht werden können, die teilweise nur mittels MCS lösbar sind und somit die Notwendigkeit einer nicht-analytischen Betrachtung erforderlich macht.

Die Untersuchung betrifft die unmittelbar sicherheitskritischen Funktionen. Bei einfachen Bremssystemen bedeutet dies, dass untersucht wird, wie viele Räder gebremst werden. Bei voller Funktionalität ist davon auszugehen, dass alle vier Räder gebremst werden. Die Bremskraftverteilung wird dabei nicht berücksichtigt. Es ergeben sich die in Tabelle 3-4 dargestellten Ausfallbeschreibungen.

Tabelle 3-4: Fehlerhafte Betriebszustände nach [Alt 09]

Nr.	Ausfallbeschreibung	Komponentenausfall
1	Genau ein Rad ungebremst	- genau 1v4 Radbremsen defekt
2	Genau ein Rad pro Achse ungebremst	- genau 1v2 Radbremsen an jeder Achse defekt
3	Genau beide Räder einer Achse ungebremst	<ul style="list-style-type: none"> - Ausfall eines Kreises im THZ oder - Ausfall genau 1v2 Bremsleitungen vom THZ zur HU oder - Ausfall der Bremsleitungen (eine oder beide) eines Kreises von der HU bis zu den Bremsschläuchen oder - Ausfall der Bremsschläuche (eine oder beide) eines Bremskreises oder - Jeweils beide Radbremsen einer Achse defekt
4	Genau drei Räder ungebremst	- Jede mögliche Kombination des Falles 1 mit den Fällen 2 und 3

5	Alle Räder ungebremst	<ul style="list-style-type: none"> - Pedal defekt - THZ defekt - Beide Bremsleitungen vom THZ zur HU defekt - Mindestens eine Bremsleitung von der HU bis zu den Bremsschläuchen pro Bremskreis defekt - Mindestens ein Bremsschlauch pro Bremskreis defekt - Alle vier Radbremsen defekt
---	-----------------------	---

Aus dieser Beschreibung leitet sich das in Bild 3-8 gegebene Blockschaltbild ab.

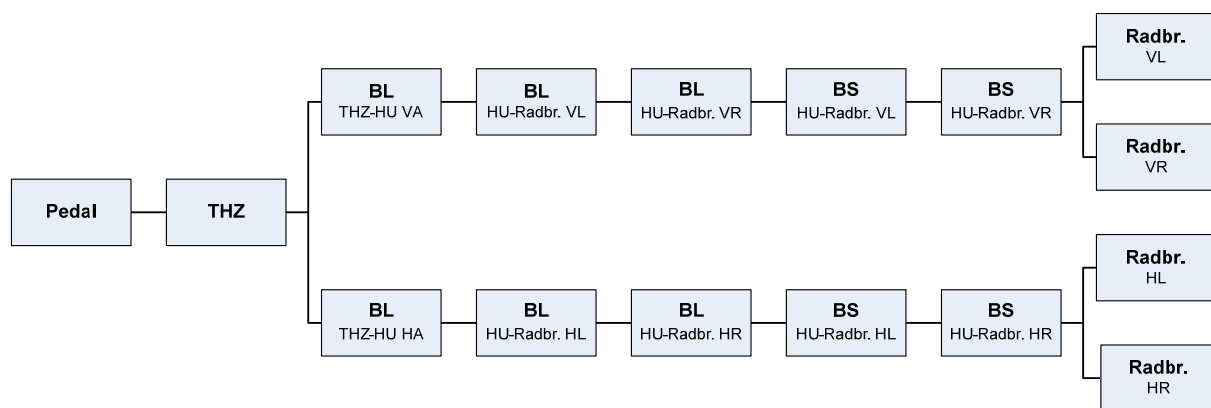


Bild 3-8: Blockschaltbild zur Ermittlung der Betriebszustände des Bremssystems nach [Alt 09]

Abkürzungen:

THZ = Tandemhauptbremszylinder

HU = Hydraulic Unit

BL = Bremsleitung

BS = Bremsschlauch

VA = Vorderachse

HA = Hinterachse

VL = Vorderachse linkes Rad

VR = Vorderachse rechtes Rad

HL = Hinterachse linkes Rad

HR = Hinterachse rechtes Rad

Radbr. = Radbremse

Die analytische Berechnung wird wiederum aus [Alt 09] entnommen und dient als Vergleichsgrundlage für die Ergebnisse der MCS (siehe Tabelle 3-5).

Tabelle 3-5: Weibull-Parameter der Komponenten nach [Alt 09]; Maßeinheit: Jahr

Komponente	α	β
Pedal	$1 \cdot 10^{-9}$	1
THZ	$9,45 \cdot 10^{-4}$	0,644
Bremsleitung	$3 \cdot 10^{-6}$	1
Bremsschlauch	$3 \cdot 10^{-6}$	1
Radbremse	$4,78 \cdot 10^{-5}$	1

Für die Betriebszustände entsprechend Tabelle 3-4 ergeben sich folgende Ausfallwahrscheinlichkeiten $q_{Nr.i}$ (ohne Zwischenrechen Schritte) mit $i = 1, \dots, 5$. :

Fall 1:

$$q_{Nr.1} = \binom{4}{1} q_{Radbremse} \cdot (1 - q_{Radbremse})^3 = 4 \cdot q_{Radbremse} (1 - q_{Radbremse})^3 . \quad (3-5)$$

Fall 2:

$$q_{Nr.2} = \left(\binom{2}{1} q_{Radbremse} \cdot (1 - q_{Radbremse}) \right)^2 = 4 \cdot q_{Radbremse}^2 (1 - q_{Radbremse})^2 . \quad (3-6)$$

Fall 3:

$$q_{Nr.3} = 1 - (1 - k_{THZ;1Kreis} \cdot q_{THZ}) \cdot (1 - q_{Nr.3;BL_THZ-HU}) \cdot (1 - q_{Nr.3;BL_HU-Radbr.}) \cdot (1 - q_{Nr.3;Bremsschlauch}) \cdot (1 - q_{Nr.3;Radbr.}) \quad (3-7)$$

mit

$$q_{Nr.3;BL_THZ-HU} = \binom{2}{1} q_{BL_THZ-HU} (1 - q_{BL_THZ-HU}) = 2 \cdot q_{BL_THZ-HU} (1 - q_{BL_THZ-HU}) ,$$

$$q_{Nr.3;BL_HU-Radbr.} = 4 \cdot q_{BL_HU-Radbr.} - 10 \cdot q_{BL_HU-Radbr.}^2 + 8 \cdot q_{BL_HU-Radbr.}^3 - 2 \cdot q_{BL_HU-Radbr.}^4 ,$$

$$q_{Nr.3;Bremsschlauch} = 4 \cdot q_{Bremsschlauch} - 10 \cdot q_{Bremsschlauch}^2 + 8 \cdot q_{Bremsschlauch}^3 - 2 \cdot q_{Bremsschlauch}^4 ,$$

$$q_{Nr.3;Radbr.} = \binom{2}{1} q_{Radbr.}^2 (1 - q_{Radbr.}^2) = 2 \cdot q_{Radbr.}^2 (1 - q_{Radbr.}^2) \text{ und}$$

$$k_{THZ;1Kreis} = 0,51$$

mit k = Korrekturfaktor zur genaueren Analyse der Ausfallursache .

Fall 4:

Aufgrund des hohen analytischen Aufwands, gegeben durch alle möglichen Kombinationen der Fälle 1 in Kombination mit den Fällen 2 und 3, ist keine analytische Berechnung mehr möglich. Dieser Fall kann nur numerisch bzw. über eine Simulation quantifiziert werden.

Fall 5:

$$q_{Nr.5} = 1 - p_{Pedal} \cdot p_{THZ;Nr.5} \cdot \left[1 - (1 - p_{BL}^3 \cdot p_{Bremssschlauch}^2 \cdot (1 - q_{Radbremse}^2)) \right]^2 \quad (3-8)$$

mit

$$p_{THZ;Nr.5} = 1 - k_{THZ;2Kreis} \cdot q_{THZ}$$

und

$$k_{THZ;2Kreis} = 0,03 .$$

Die funktionale Sensitivitätsanalyse wird nachfolgend unter Zugrundelegung der in Bild 3-7 gegebenen Schrittfolge durchgeführt. Basis ist die Analyse in [Pli 11]. Nach Anwendung der Schritte 2 und 3 ergibt sich folgendes Blockschaltbild (Bild 3-9).

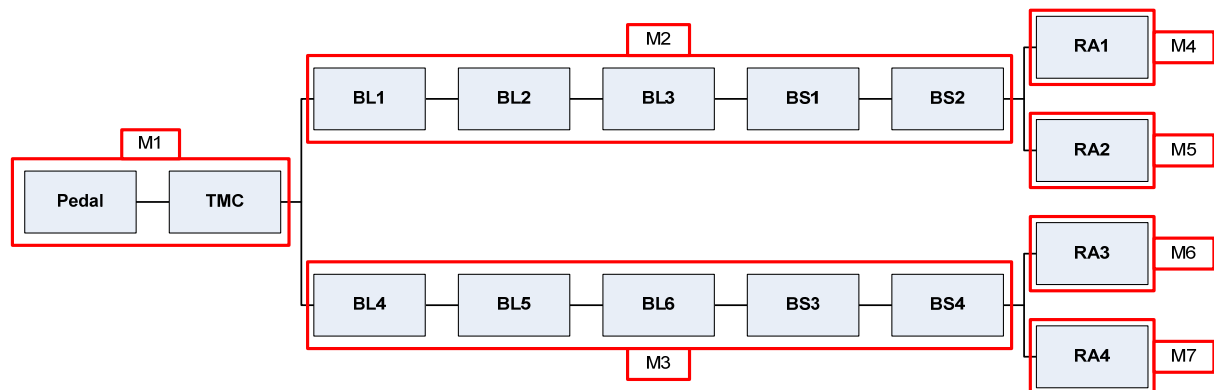


Bild 3-9: Modularisiertes Blockschaltbild des Bremssystems

Für die Module, die sich aus der Darstellung in Bild 3-9 ergeben, werden nun in den Schritten 4 und 5 Zufallsereignisse und in jedem Simulationsdurchlauf die Ausfallzeitpunkte aller Einzelkomponenten erzeugt. In Schritt 6 wird anschließend für die einzelnen Durchgänge der funktionale Status der einzelnen Module als Indikatorvariable ermittelt.

Es gilt folgende Indikatornotation:

$$M_i = \begin{cases} 1 & \text{Modul } i \text{ ist funktionsfähig} \\ 0 & \text{Modul } i \text{ ist ausgefallen} \end{cases} \quad (3-9)$$

mit

$i = 1, \dots, 7$ (Negativlogik) .

Die einzelnen Module fallen entsprechend folgender Notation aus:

$$\begin{aligned} M1 = 0 & , \text{ wenn } (t_{Pedal} \vee t_{THZ}) < t , \\ M2 = 0 & , \text{ wenn } (t_{BL1} \vee t_{BL2} \vee t_{BL3} \vee t_{BS1} \vee t_{BS2}) < t , \\ M3 = 0 & , \text{ wenn } (t_{BL4} \vee t_{BL5} \vee t_{BL6} \vee t_{BS3} \vee t_{BS4}) < t , \\ M4 = 0 & , \text{ wenn } t_{RA1} < t , \\ M5 = 0 & , \text{ wenn } t_{RA2} < t , \\ M6 = 0 & , \text{ wenn } t_{RA3} < t \end{aligned} \quad (3-10)$$

und

$$M7 = 0 , \text{ wenn } t_{RA4} < t .$$

Nun gilt es gemäß Schritt 7 der MCS für funktionale Sensitivitätsanalysen für jeden Simulationsdurchlauf den Betriebszustand (Fall 1 bis 5) festzulegen. Dabei erfolgt die Festlegung über eine Boolesche Modellbildung.

Der Fall 1 tritt ein, wenn:

$$\begin{aligned} (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge \overline{M4} \wedge M5 \wedge M6 \wedge M7) = 1 \vee \\ (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge M4 \wedge \overline{M5} \wedge M6 \wedge M7) = 1 \vee \\ (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge M4 \wedge M5 \wedge \overline{M6} \wedge M7) = 1 \vee \\ (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge M4 \wedge M5 \wedge M6 \wedge \overline{M7}) = 1 . \end{aligned} \quad (3-11)$$

Dies ist immer dann der Fall, wenn eine der Radbremsen ausfällt und alle anderen Komponenten und Leitungen bis dahin noch funktionsfähig sind.

Der Fall 2 tritt ein, wenn:

$$\begin{aligned}
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge \overline{M4} \wedge M5 \wedge \overline{M6} \wedge M7) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge \overline{M4} \wedge M5 \wedge M6 \wedge \overline{M7}) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge M4 \wedge \overline{M5} \wedge \overline{M6} \wedge M7) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge M4 \wedge \overline{M5} \wedge M6 \wedge \overline{M7}) &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3-12}$$

Der Fall 3 tritt ein, wenn:

$$\begin{aligned}
 (M1 \wedge \overline{M2} \wedge M3 \wedge M6 \wedge M7) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge \overline{M3} \wedge M4 \wedge M5) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge \overline{M4} \wedge \overline{M5} \wedge M6 \wedge M7) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge M4 \wedge M5 \wedge \overline{M6} \wedge \overline{M7}) &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3-13}$$

In diesem Fall müssen nicht alle Module durch die Simulation abgefragt werden. In der ersten Bedingung ist nach dem Ausfall von Modul 2 das Funktionieren oder Nicht-Funktionieren der Module 4 und 5 irrelevant, da sie im Modul direkt nachgeschaltet sind. Ebenso verhält es sich mit der zweiten Bedingung und den Modulen 3, 6 und 7 vice versa.

Der Fall 4 tritt ein, wenn:

$$\begin{aligned}
 (M1 \wedge \overline{M2} \wedge M3 \wedge \overline{M6} \wedge M7) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge \overline{M2} \wedge M3 \wedge M6 \wedge \overline{M7}) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge \overline{M3} \wedge \overline{M4} \wedge M5) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge \overline{M3} \wedge M4 \wedge \overline{M5}) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge M4 \wedge \overline{M5} \wedge \overline{M6} \wedge \overline{M7}) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge \overline{M4} \wedge M5 \wedge \overline{M6} \wedge \overline{M7}) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge \overline{M4} \wedge \overline{M5} \wedge M6 \wedge \overline{M7}) &= 1 \vee \\
 (M1 \wedge M2 \wedge M3 \wedge \overline{M4} \wedge \overline{M5} \wedge \overline{M6} \wedge M7) &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3-14}$$

Fall 4 ist entsprechend der Notation verhältnismäßig komplex. Hier werden die Fehlerkombinationen aus den Fällen 1 und 2 sowie 1 und 3 abgebildet, welche dazu führen, dass genau drei Räder ungebremst sind. Eine analytische Lösung für Fall 4 ist nicht möglich.

Der Fall 5 tritt ein, wenn:

$$(M1) = 0 \vee$$

$$(M2 \wedge M3) = 0 \vee$$

$$(M4 \wedge M5 \wedge M6 \wedge M7) = 0 \vee \quad (3-15)$$

$$(M2 \wedge M6 \wedge M7) = 0 \vee$$

$$(M3 \wedge M4 \wedge M5) = 0 .$$

Der Fall 5 charakterisiert den Totalausfall des Bremssystems. Da das Funktionieren oder Nicht-Funktionieren nachgeschalteter Komponenten bei einem Totalausfall irrelevant ist, müssen, wie auch in den obigen Fällen, nicht alle Komponenten abgefragt werden.

Für $n=1.000.000$ gewichtete Simulationsdurchläufe – Simulationsdauer ca. 4min – ergeben sich für $t = 15 \text{ Jahre}$ die folgenden Ausfallwahrscheinlichkeiten (Tabelle 3-6).

Tabelle 3-6: Simulationsergebnis für $n=1.000.000$ Simulationsdurchläufe [Pli 11]

Fall Nr.	Analytisches Ergebnis F(15 J.)	Simulationsergebnis F(15 J.)
1	$2,860 \cdot 10^{-3}$	$2,790 \cdot 10^{-3}$
2	$2,051 \cdot 10^{-6}$	$2,020 \cdot 10^{-6}$
3	$3,202 \cdot 10^{-3}$	$3,200 \cdot 10^{-3}$
4	nicht vorhanden	$5,600 \cdot 10^{-7}$
5	$1,622 \cdot 10^{-4}$	$1,640 \cdot 10^{-4}$

Die Verläufe der Ausfallwahrscheinlichkeiten sind in den Bildern 3-10 bis 3-12 dargestellt.

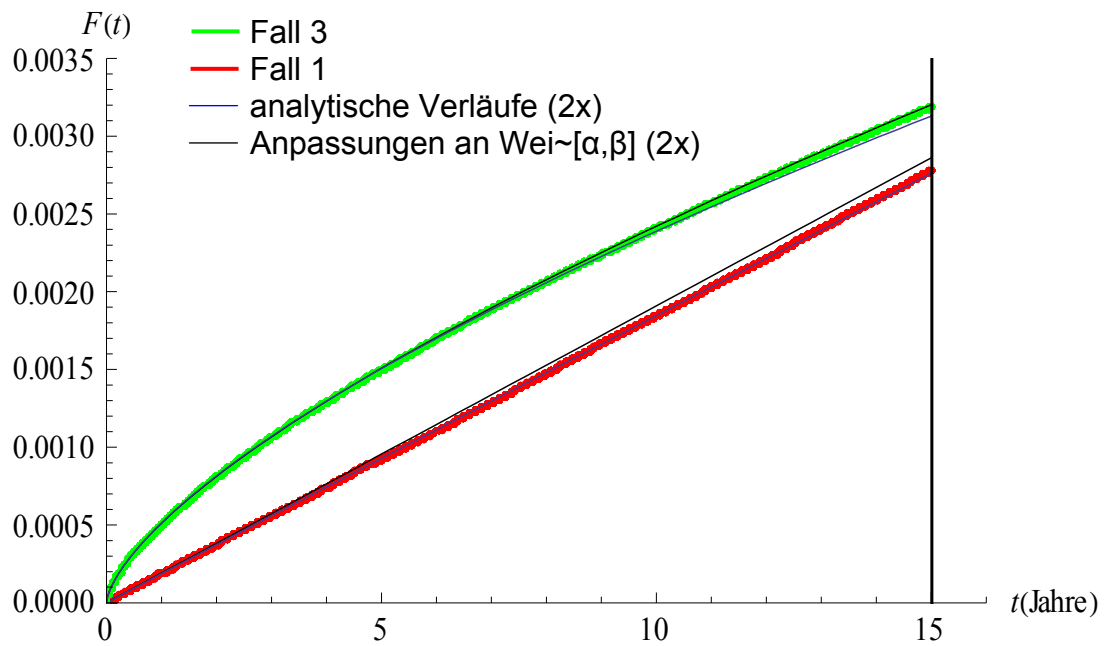


Bild 3-10: Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeiten für die Fälle 1 und 3 [Pli 11]

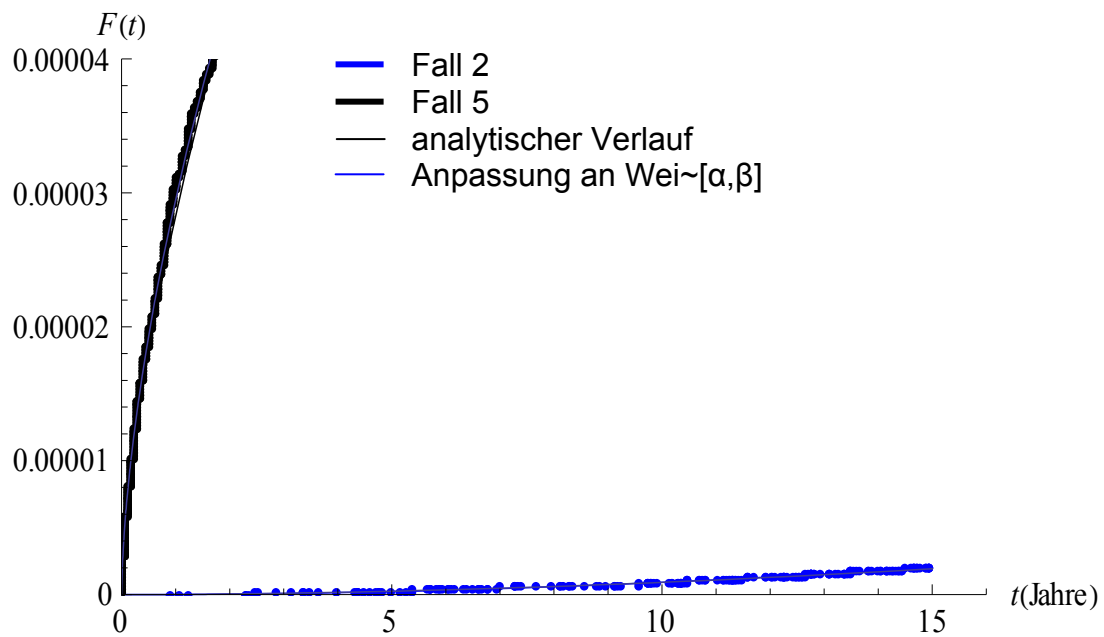


Bild 3-11: Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeiten für die Fälle 2 und 5 [Pli 11]

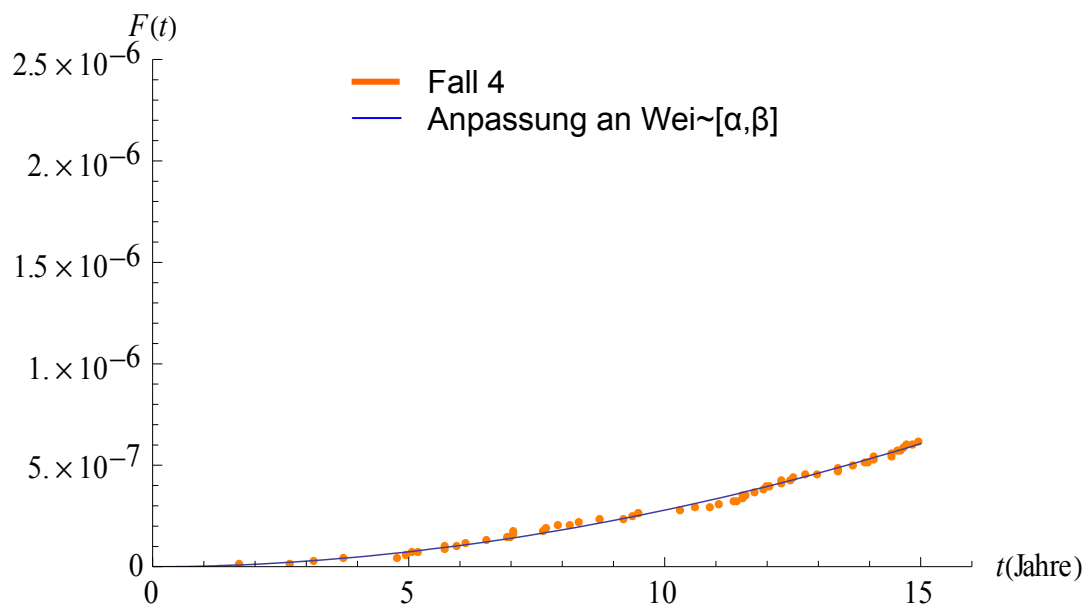


Bild 3-12 : Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeiten für den Fall 4 [Pli 11]

Wie aus der Tabelle 3-6 und den Bildern 3-10 bis 3-12 ersichtlich, sind die Ergebnisse der MCS annähernd identisch mit denen der analytischen Berechnungen. Zudem zeigt sich die sehr gute Eignung der Weibull-Verteilung zur Anpassung und Weiterverwendung der Ergebnisse. Durch diese Anpassung ist es nicht erforderlich, die großen Datenmengen, die zur Darstellung der MCS erforderlich sind, in weitere Analysen einfließen zu lassen.

Mittels MCS konnte auch für den Fall 4 eine Ausfallwahrscheinlichkeit samt Verlauf ermittelt werden. Dabei ist der Aufwand für die Analyse als sehr gering einzuschätzen.

Weitere Anwendungen zur Nutzung der MCS für funktionale Sensitivitätsanalysen siehe u.a. [Ave 13], [Zio 13] und [Pli 11].

3.5 Analytische Sensitivitätsanalyse mittels Monte-Carlo-Simulation

Wie in Kapitel 2 beschrieben, sind neben strukturellen und funktionalen Untersuchungen auch analytische Sensitivitätsanalysen von großer Bedeutung. Hierdurch können Fragestellungen aus Bereichen, in denen lediglich analytische Zusammenhänge und Abhängigkeiten herrschen, betrachtet werden. Diese kommen z.B. aus den Gebieten der Produktionsprozesse, Toleranzmanagement und Softwarezuverlässigkeit.

Das Vorgehen der MCS für analytische Sensitivitäten unterscheidet sich in großen Teilen von den Vorgehensweisen von den anderen, in dieser Arbeit beschriebenen Anwendungen der MCS. So entfallen die Schritte über logische Verknüpfungen aus den Systemstrukturen, dafür werden die per Simulation generierten Daten für jeden Durchlauf in den jeweiligen mathematischen Zusammenhang eingefügt und berechnet.

Diese Art der Nutzung der MCS eignet sich besonders für analytische Terme wie z.B. komplexe Integrale oder Differentialgleichungen, die nicht oder nur schwer lösbar sind. Anwendungsfelder im Bereich der Ingenieurwissenschaften sind u.a. in der Thermo- und Strömungsdynamik, Elektrotechnik, Mechanik (insb. CAD und FEM) und in Produktionsprozessen (z.B. nicht-lineare Toleranzanalysen) gegeben.

Die Schrittfolge der analytischen Sensitivitätsanalyse mittels MCS ergibt sich aus Bild 3-13.

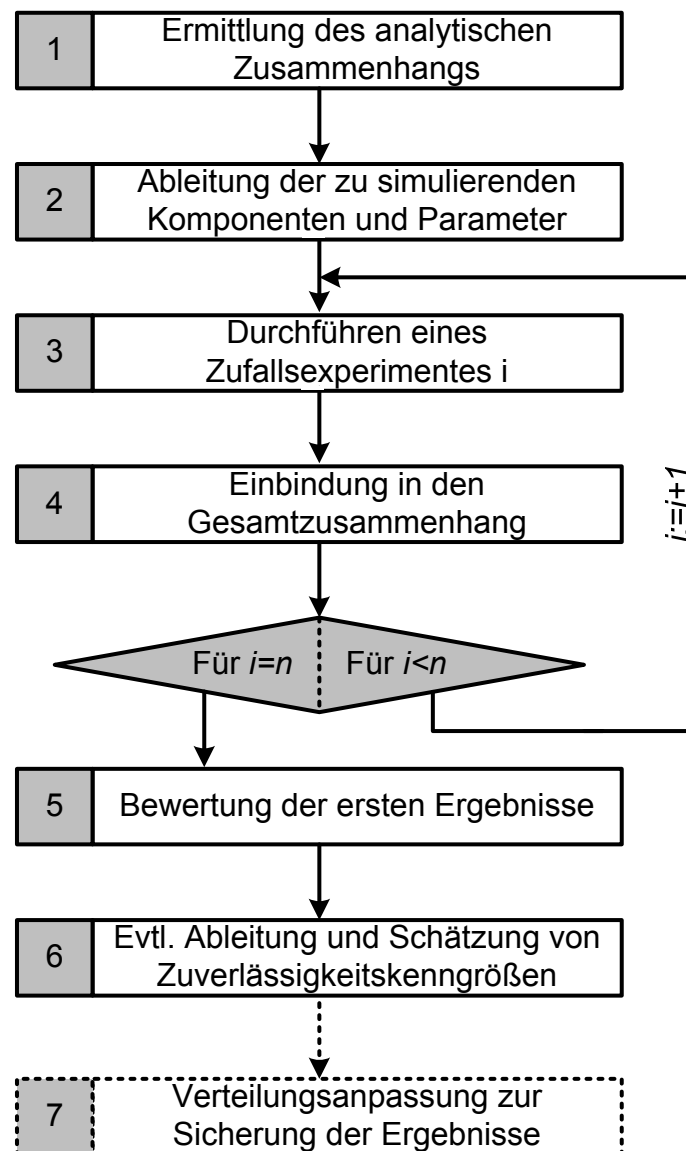


Bild 3-13: Schrittfolge der analytischen Sensitivitätsanalyse mittels MCS

Ein Beispiel für die Validierung und Verifizierung der oben beschriebenen Anwendung der MCS ist aus [Pli 10] entnommen und wird im Folgenden kurz dargestellt.

Untersucht wird ein Mikrocontroller, der bei Anliegen einer Resetspannung einen Neustart durchführt. In der in Bild 3-14 dargestellten Schaltzeichnung ist die einfache Resetschaltung für einen Mikrocontroller (μC) aufgezeigt.

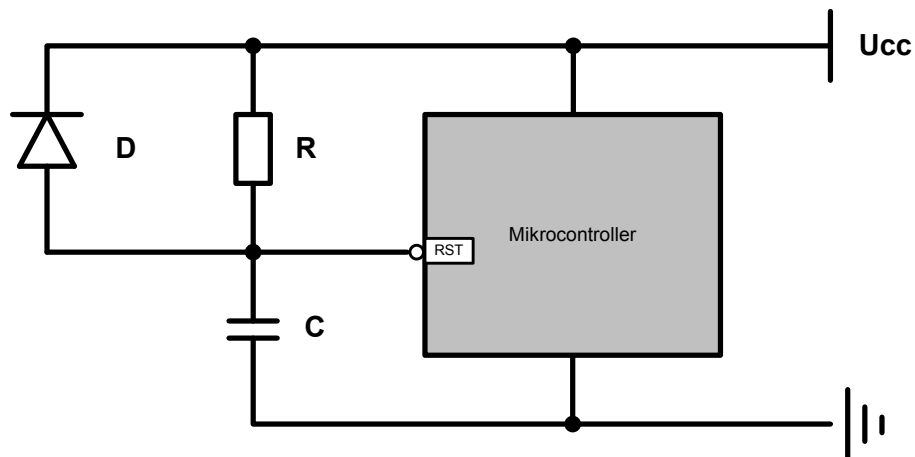


Bild 3-14: Schaltzeichen der Resetschaltung des μC mit Sicherungsdiode [Pli 10]

Die interessierende Größe ist die Zeit t , die der Mikrocontroller bei der oben gegebenen Anordnung zum Reset braucht. t ergibt sich für eine ideale Spannungsquelle durch die Umformung folgender Gleichung:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{U_{\text{reset}} \cdot C \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{C} = U_{\text{reset}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \rightarrow t = -R \cdot C \cdot \ln\left(1 - \frac{U_{\text{reset}}}{U(t)}\right) \quad (3-16)$$

mit:

$Q(t)$ = Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t ,

U_{reset} = Resetspannung,

$U(t) = U_{\text{cc}}$ = Netzspannung,

C = Kapazität des Kondensators,

und

R = Elektrischer Widerstand .

Die Diode D dient zum Schutz des Mikrocontrollers bei spontanem Spannungsausfall und ist für die Ermittlung der Bootzeit irrelevant.

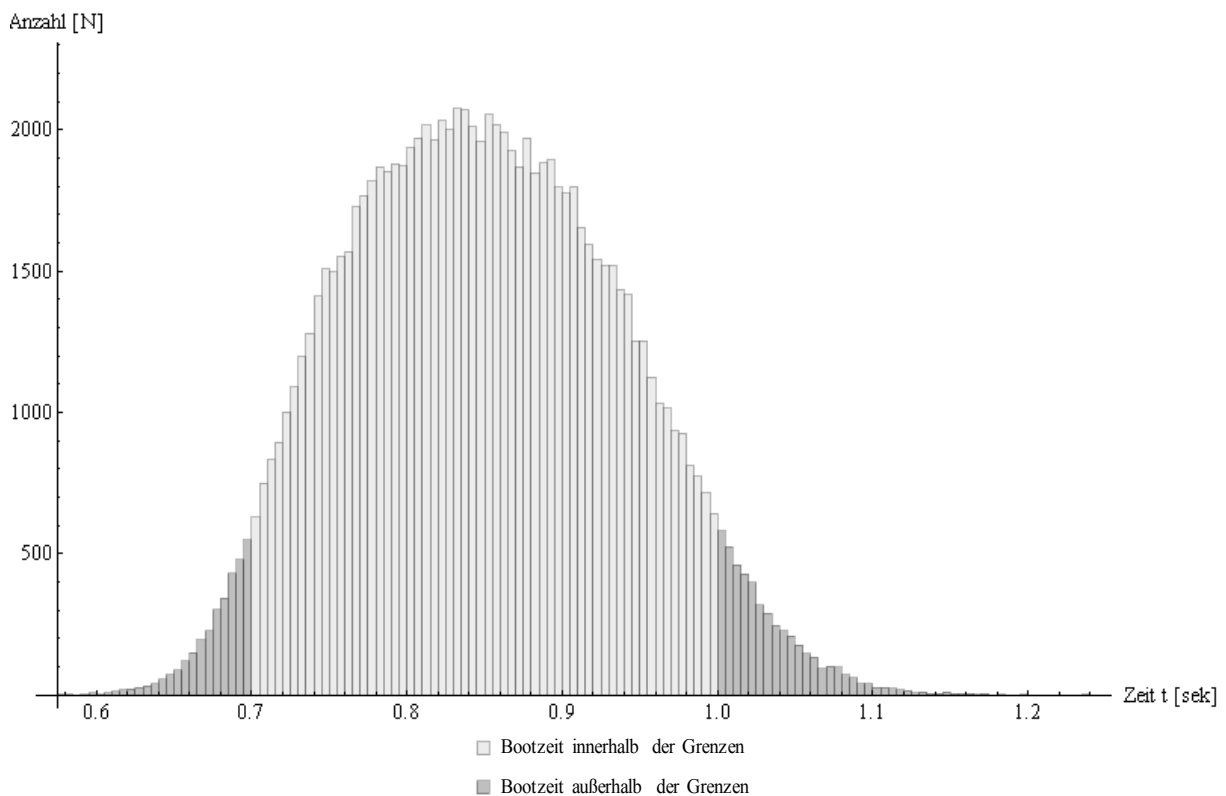
Bedingt durch angenommene Produktionsschwankungen sowie äußere Einflüsse beim Betrieb des Controllers sind die Werte der einzelnen Spannungen und Komponenten nicht immer konstant.

Die Werte schwanken innerhalb der in Tabelle 3-7 beschriebenen Verteilungsfunktionen.

Tabelle 3-7: Verteilung der Eingangsvariablen für das μC -Beispiel [Pli 10]

Variable	Verteilung	Mittelwert	Standardabweichung
U_{reset}	Normalverteilung	2,5 V	0,1 V
U_{cc}	Normalverteilung	5,5 V	0,1 V
Variable	Verteilung	Minimum	Maximum
R	Dreieckverteilung (symmetrisch)	$7,7 \cdot 10^{-4} \Omega$	$8,3 \cdot 10^{-4} \Omega$
C	Gleichverteilung	$1,5 \cdot 10^{-5} F$	$2,0 \cdot 10^{-5} F$

Für $n = 100.000$ Simulationsdurchläufe ergibt sich mittels MCS folgende Auftretenswahrscheinlichkeit (Bild 3-15).

**Bild 3-15: Simulationsergebnis der Bootzeit des Mikrocontrollers**

Aus der Simulation mit obigen Parametern ergibt sich, dass prozentual 91,82% der Bootvorgänge innerhalb der Toleranzgrenzen stattfanden; 3,25% der Vorgänge in weniger als 0,7 sek. abgeschlossen waren und 4,85% mehr als 1,0 sek. zum Neustart benötigten.

Interessant sind nun besonders die Vorgänge, die außerhalb der definierten Toleranz liegen. Über die MCS lassen sich hier die einzelnen Variablen vergleichen.

Hierzu werden die Simulationsdurchläufe, deren Ergebnis außerhalb der Toleranz liegen, isoliert betrachtet. Anschließend werden die einzelnen, gefilterten Parameter mit der ursprünglichen Eingangsverteilung des jeweiligen Parameters verglichen. Dieser Vergleich wird als Maß für die Sensitivität der Variable auf die Bootzeit des Mikrocontrollers verwendet (siehe Bild 3-16 bis 3-21).

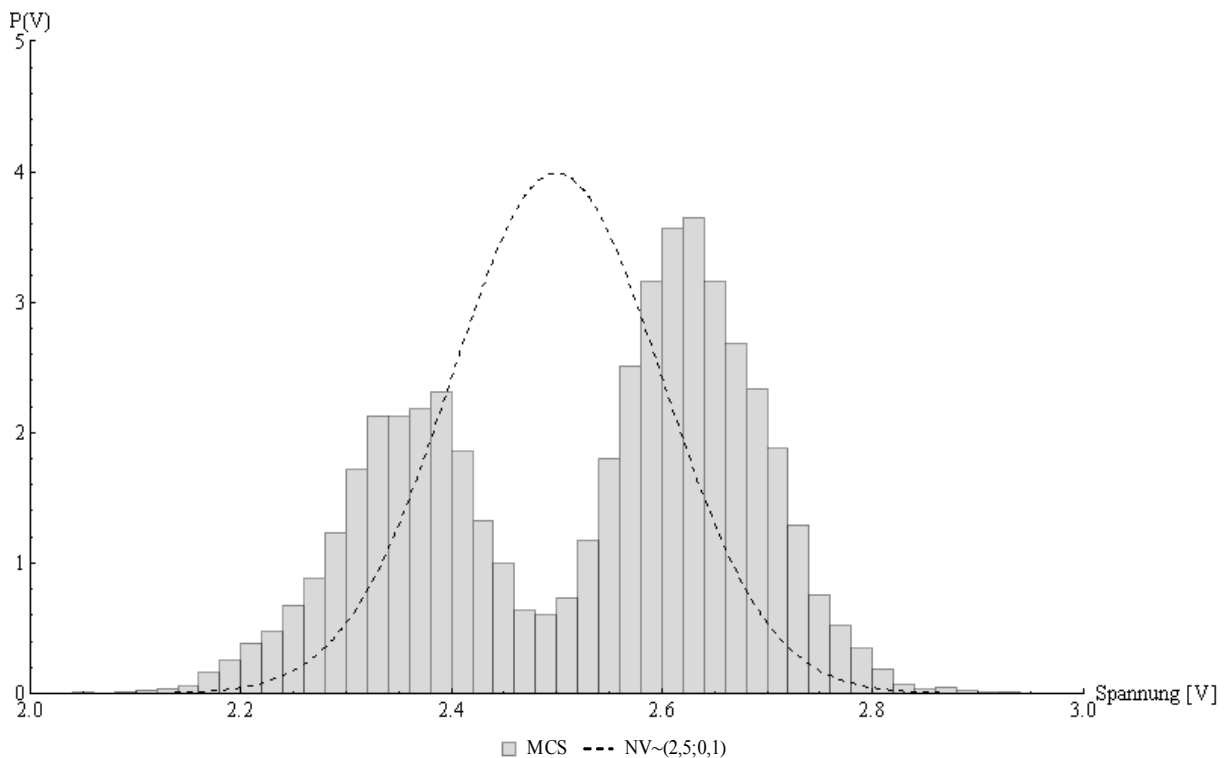


Bild 3-16: Verteilung der Spannung U_{reset} für Simulationsdurchläufe außerhalb der Toleranz

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Werte der Spannung U_{reset} für Simulationsdurchläufe, die außerhalb der Toleranz liegen, nicht mehr ihrer Ursprungsverteilung folgen. Der Verlauf der Kurve lässt die Hypothese zu, dass sich die Spannung aus zwei Normalverteilungen zusammensetzt und sich in der Mitte überschneidet. Es liegt der Schluss nahe, dass es sich um eine Normalverteilung für Simulationsdurchläufe unterhalb der Toleranzgrenze und eine zweite für Simulationsdurchläufe oberhalb der Toleranz handelt. Aufgrund des analytischen Zusammenhangs ist zu vermuten, dass die rechte der beiden potenziellen Normalverteilungen die Spannung der Simulationsdurchläufe oberhalb der Toleranzgrenze und die linke Normalverteilung vice versa den Bereich unterhalb der Toleranzgrenze abbildet. Die nachfolgenden Bilder 3-17 und 3-18 unterstützen diese Aussage.

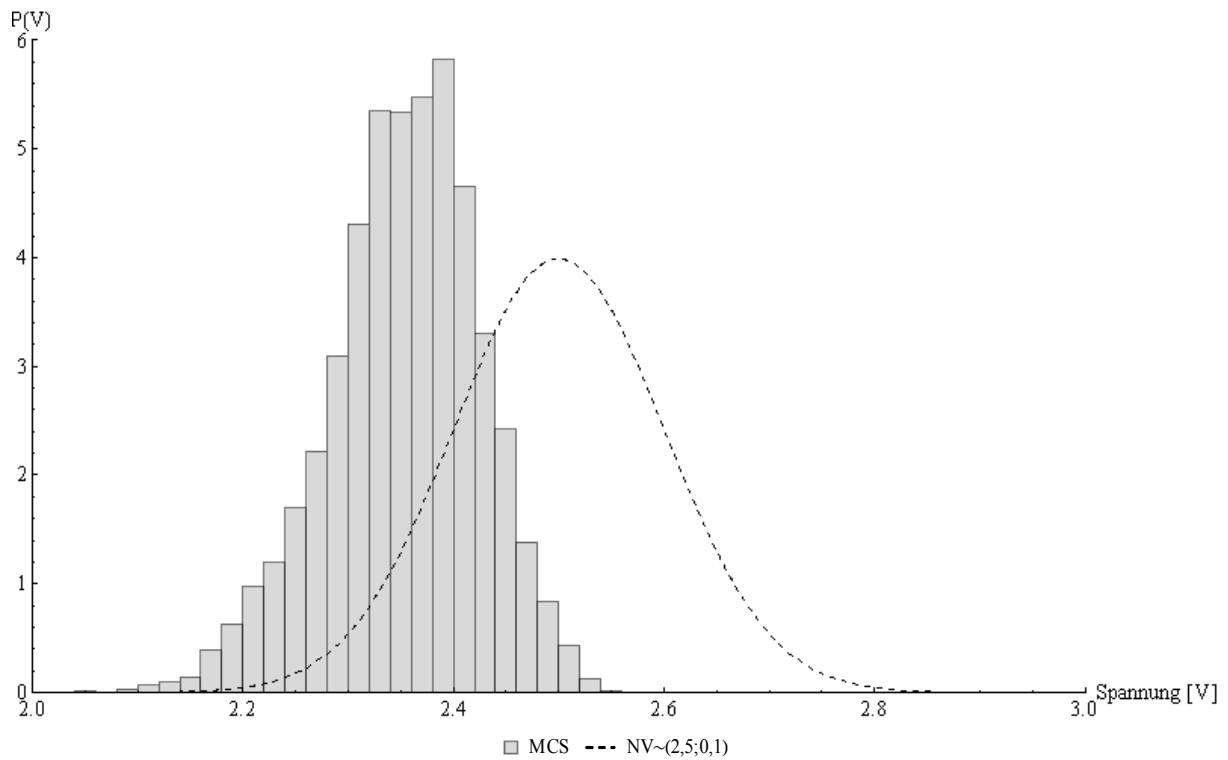


Bild 3-17: Verteilung der Spannung U_{reset} für Simulationen unterhalb der Toleranz

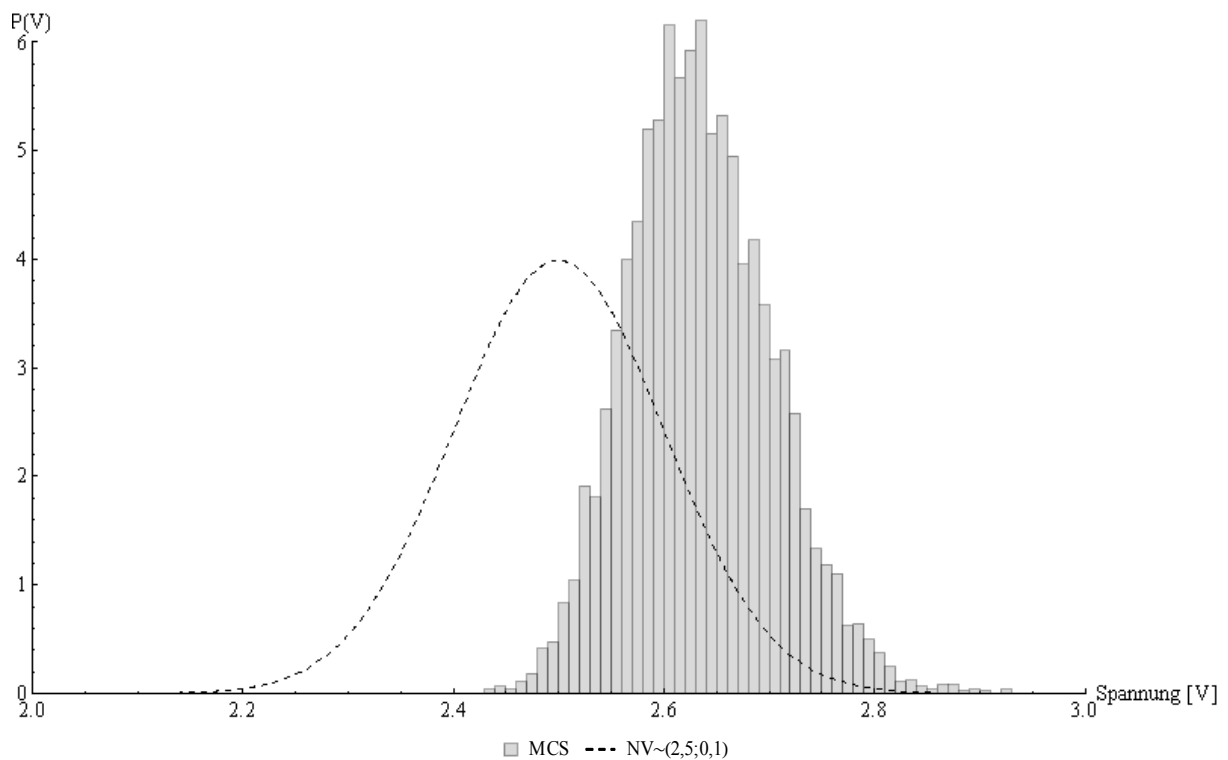


Bild 3-18: Verteilung der Spannung U_{reset} für Simulationen oberhalb der Toleranz

Die obigen Bilder zeigen sehr klar, dass die Bootzeit, unter Berücksichtigung der hier gegebenen Variablen und deren Verteilungen, in relevantem Maße von der Re-

setspannung abhängt. Auch die Vermutung, dass eine Resetspannung, die den Mittelwert der Verteilung von 2,5V unterschreitet und mit einer verhältnismäßig kurzen Bootzeit einhergeht (vice versa), wird anhand der Grafiken deutlich.

Bei der Betrachtung der gefilterten Simulationsdurchläufe der Versorgungsspannung ist festzustellen, dass die ursprüngliche Funktion fast vollständig von den ausgewählten Durchläufen getroffen wird. In erster Instanz lässt dies die Vermutung zu, dass die Versorgungsspannung mit den in Tabelle 3-7 gegebenen Abweichungen einen verhältnismäßig geringen Einfluss auf das Einhalten der Gesamttoleranz hat. Um dies zu verifizieren, werden auch für diesen Parameter in zweiter Instanz die Toleranzunter- und -überschreitungen in den Bildern 3-19 bis 3-21 getrennt voneinander betrachtet.

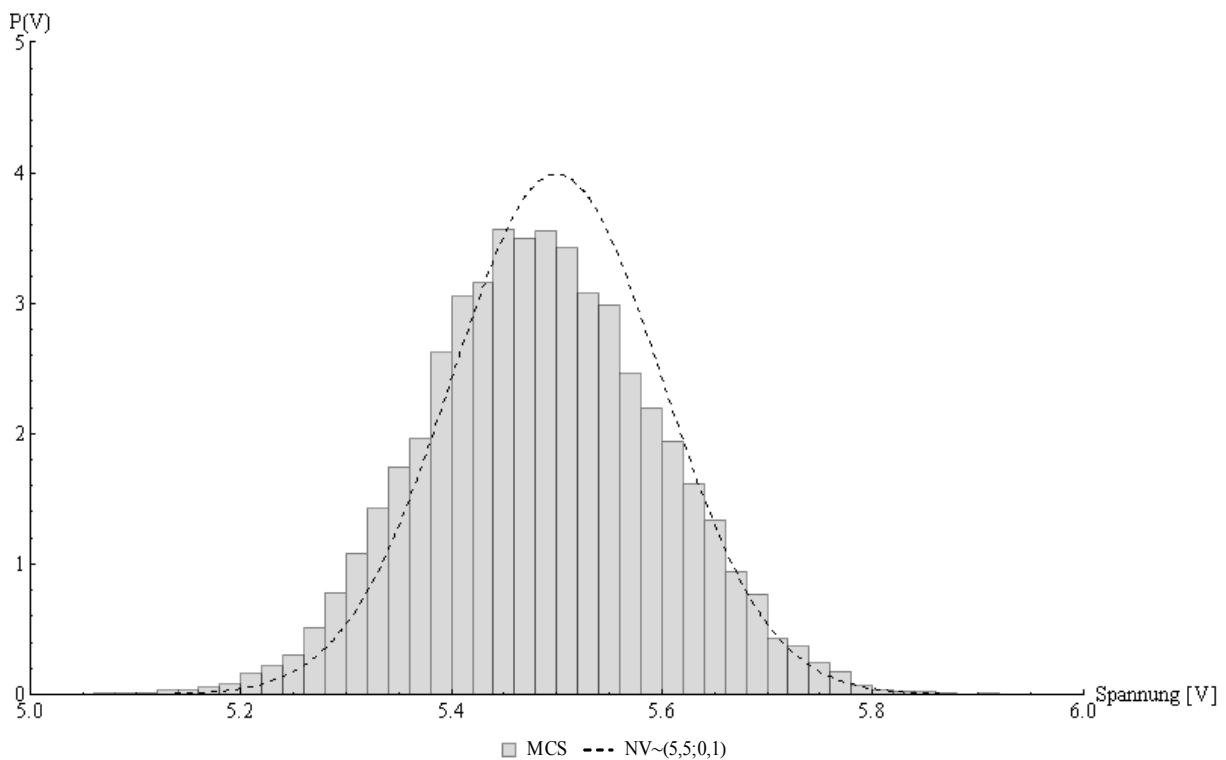


Bild 3-19: Verteilung der Spannung U_{cc} für Simulationsdurchläufe außerhalb der Toleranz

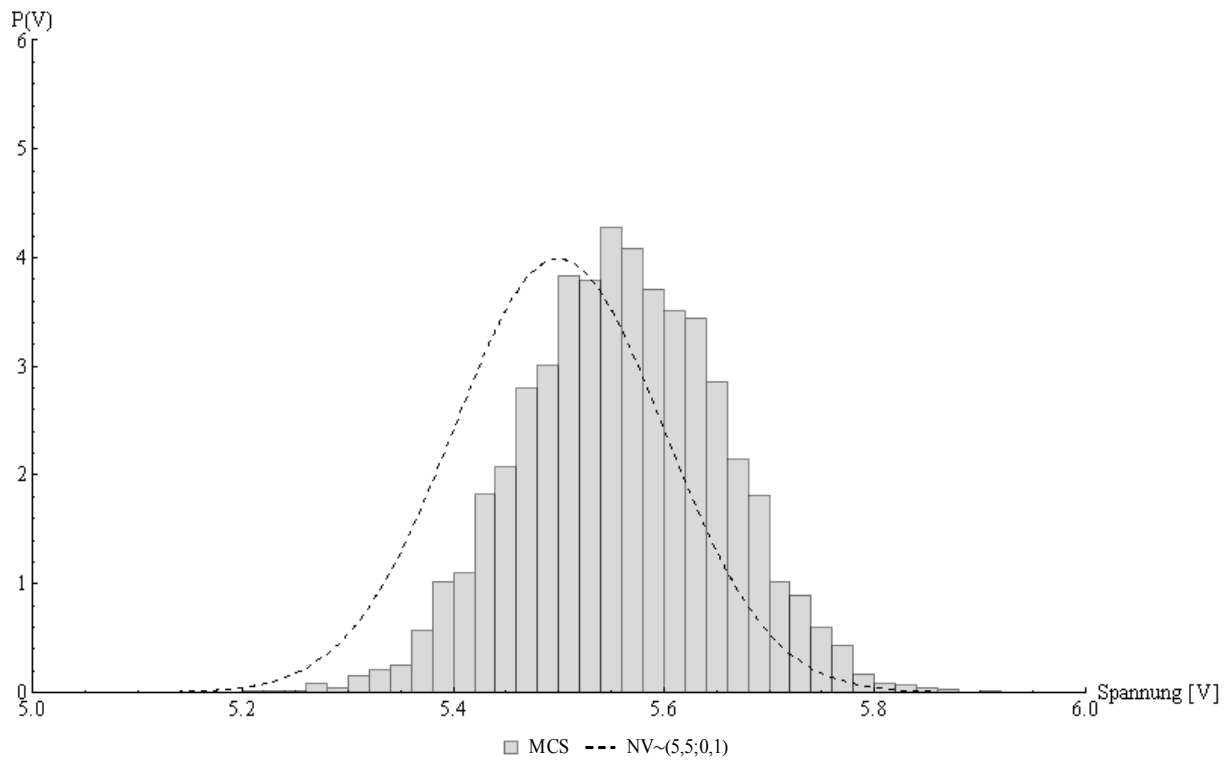


Bild 3-20: Verteilung der Spannung U_{cc} für Simulationdurchläufe unterhalb der Toleranz

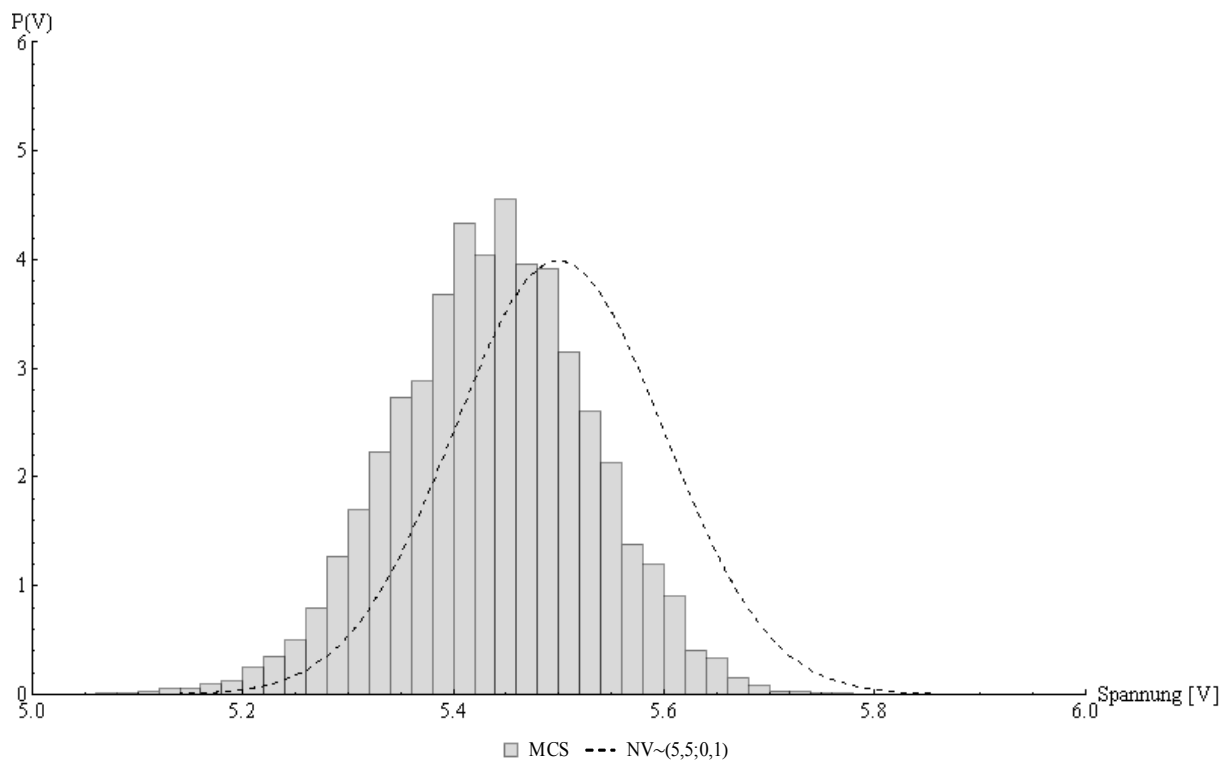


Bild 3-21: Verteilung der Spannung U_{cc} für Simulationdurchläufe oberhalb der Toleranz

Die zweite Analyse der ausgewählten Simulationdurchläufe zeigt, dass sich die Funktionen im Verhältnis zur Originalfunktion nur leicht verschieben. Die Tatsache, dass eine hohe Versorgungsspannung tendenziell zu niedrigeren Bootzeiten führt

(Bild 3-20) und vice versa, ist durch die oben angegebene Formel zur Bestimmung der Bootzeit logisch und somit korrekt. Im folgenden Bild 3-22 wird nun der Einfluss des Widerstandes R auf die Bootzeit betrachtet.

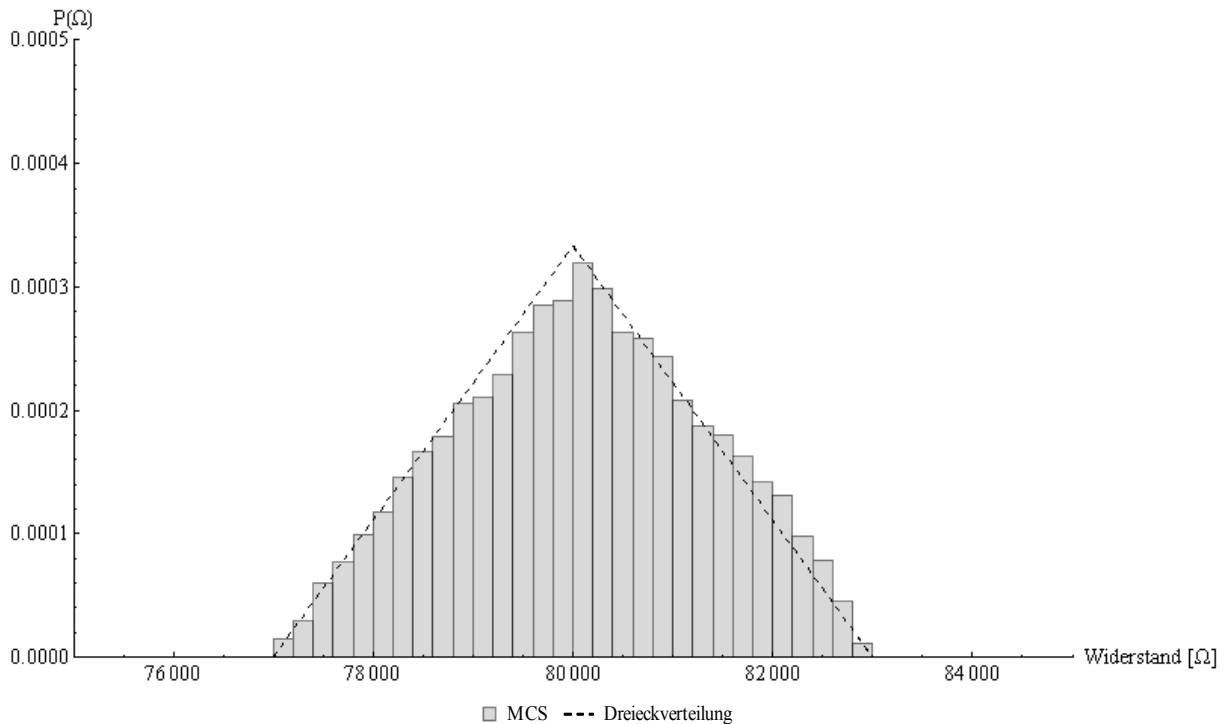


Bild 3-22: Verteilung des Widerstandes R für Simulationsdurchläufe außerhalb der Toleranz

Die Verteilung des Widerstandes R für die Simulationsdurchläufe, deren Bootzeit außerhalb der Toleranz liegt, ist annähernd perfekt getroffen. Da sich der Einfluss auf die Gesamtbootzeit in der Toleranzunterscheidung nach obigen Beispielen minimiert, wird hier auf die Darstellungen der zusätzlichen Grafiken verzichtet.

Die folgenden Bilder 2-23 bis 2-25 betrachten nun die Verteilung der simulierten Kapazität C.

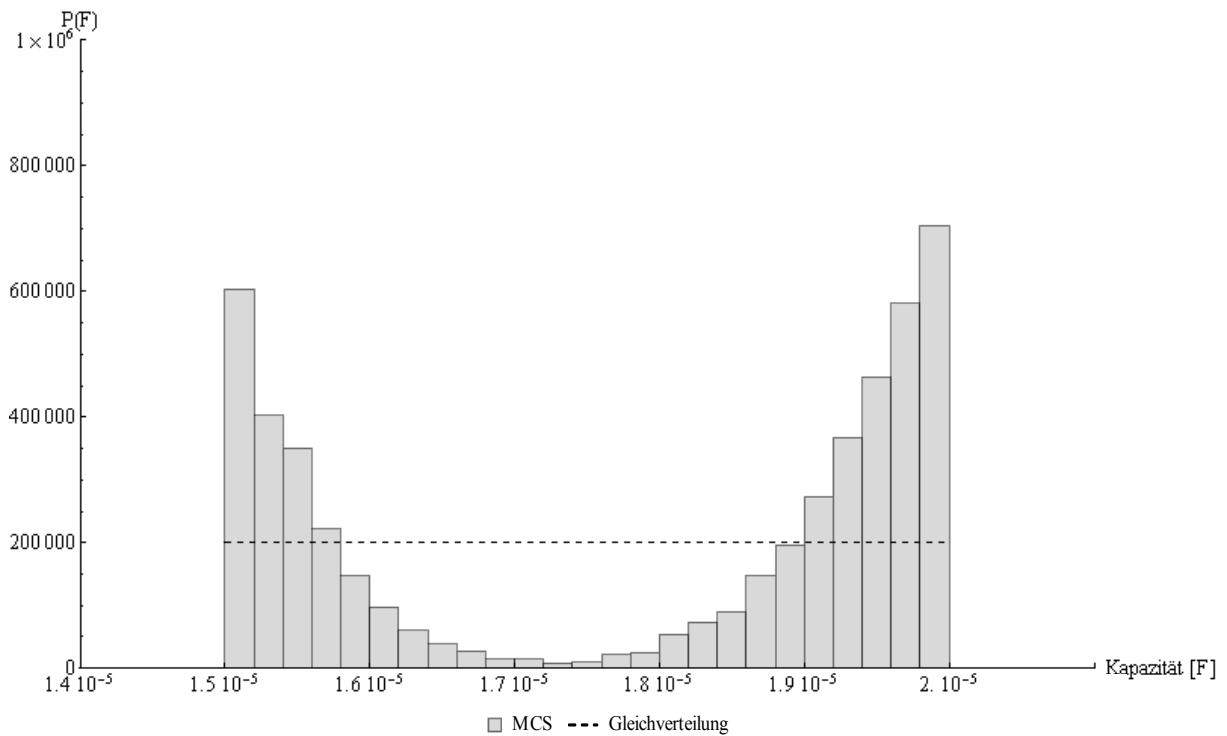


Bild 3-23: Verteilung der Kapazität C für Simulationen außerhalb der Toleranz

Im Gegensatz zum Widerstand ist der Einfluss der Kapazität C des eingesetzten Kondensators sehr gravierend. Die zugrunde gelegte Gleichverteilung ist nicht mehr erkennbar. Gemäß dem Verlauf der gefilterten Simulationen und der Formel zur Bestimmung der Bootzeit ist zu vermuten, dass eine hohe Kapazität mit einer langen Bootzeit verbunden ist und umgekehrt. Die Bilder 3-24 und 3-25 veranschaulichen dies.

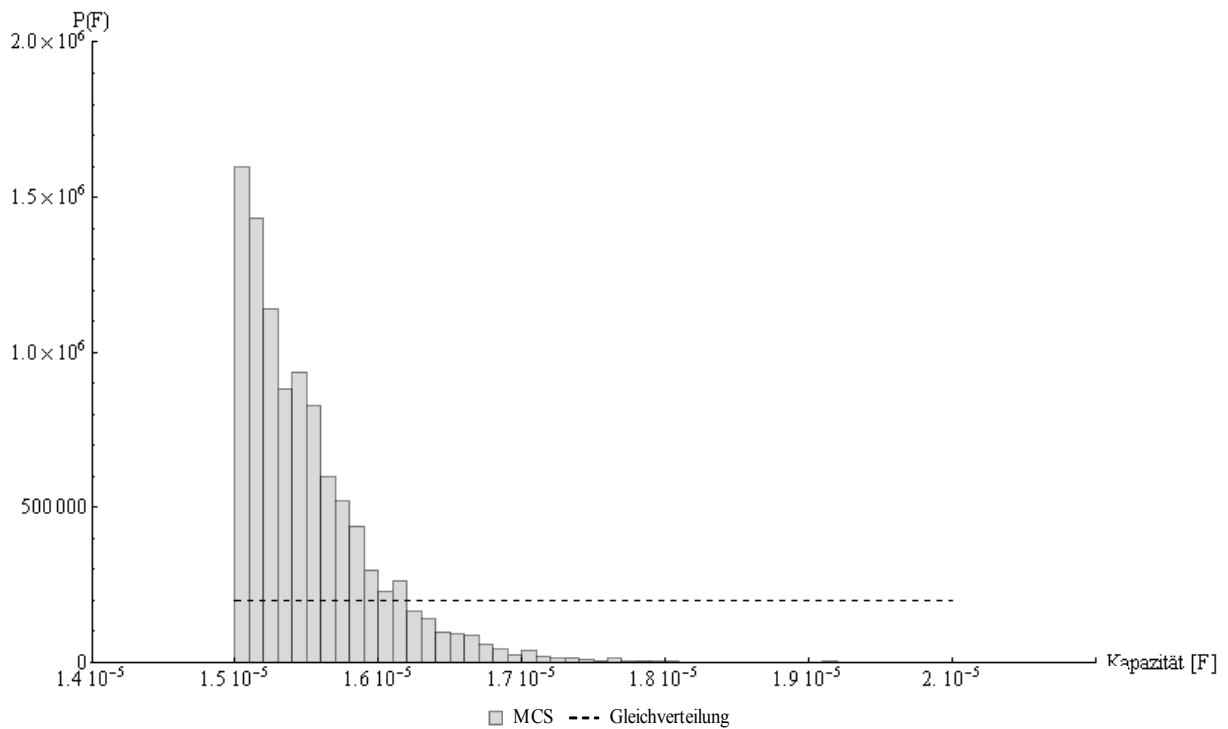


Bild 3-24: Verteilung der Kapazität C für Simulationsdurchläufe unterhalb der Toleranz

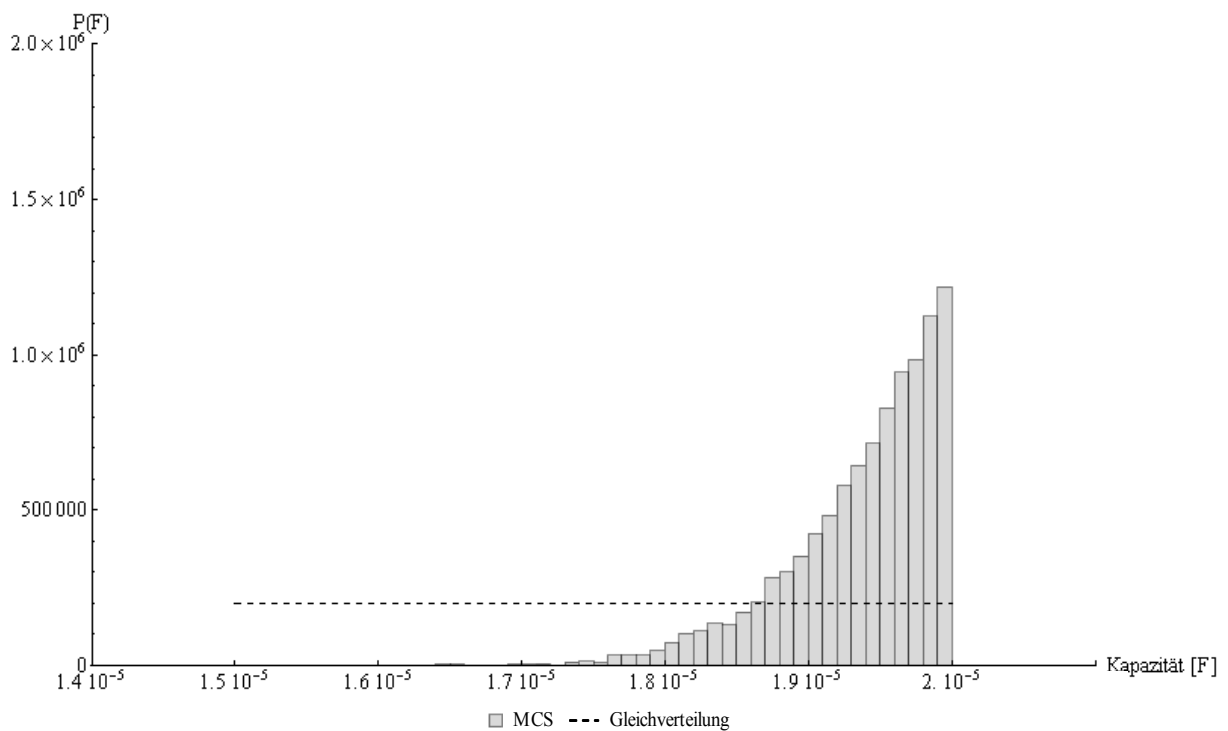


Bild 3-25: Verteilung der Kapazität C für Simulationsdurchläufe oberhalb der Toleranz

Der Einfluss der Kapazität C ist hier verhältnismäßig hoch. Die Kapazitäten, die zu einem Unter- bzw. Überschreiten der Toleranzgrenzen führen, beginnen erst in der Region des Mittelwertes der Gleichverteilung von $C = 1,75 \cdot 10^{-5} F$ und setzen sich

dann exponentiell bis zur oberen Grenze der Parameterabweichung von $C = 2,0 \cdot 10^{-5} F$ fort.

Im Anschluss an die Sensitivitätsanalysen für die zuvor definierten unterschiedlichen Ebenen gilt es nun entsprechend der Zielsetzung der Arbeit die Belastungen der Komponenten und Baugruppen, die als relevant für ein System- oder Funktionsversagen ermittelt wurden, als vierte Ebene genauer zu untersuchen. Hierzu gilt es auf der Grundlage der drei Ebenen des Kapitels 3 neue Ansätze und Methoden – wiederum unter Nutzung der MCS- zu entwickeln und für praktische Anwendungen zu validieren und verifizieren.

4 Belastungsanalysen und deren Modellbildung

Das folgende Kapitel widmet sich einer kurzen allgemeinen Beschreibung der deduktiven und induktiven Modellbildung dargestellt in Form zweier unterschiedlicher Ansätze.

4.1 Deduktive und induktive Modellbildung

Die grundsätzliche Einteilung der Belastungsmodelle erfolgt in deduktiv und induktiv. Für den Bereich der Sicherheitstechnik gilt die Terminologie aus dem Bereich der kerntechnischen Sicherheits- und Risikoforschung, die deduktive Methoden als solche festlegen, die von einer allgemeinen Betrachtung hin zu einer speziellen Sequenz führen [BMF 80]. Dies steht im Widerspruch zur klassischen (philosophischen) Definition nach Aristoteles, nach der der Schluss vom Allgemeinen auf das Spezielle als Deduktion betrachtet wird. Generell sind Unterschiede zur philosophischen Definition in den Naturwissenschaften nicht ungewöhnlich, so ist z.B. auch das mathematische Beweisverfahren der (vollständigen) Induktion philosophisch eine deduktive Methode.

Speziell im Bereich der Belastungsanalysen sind induktive Modelle der Stand von Wissenschaft und Forschung. Hierzu finden sich eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle, die alle auf einzelne Belastungen spezifiziert sind z.B. [Gau 10], [Hau 07] und [Nel 90].

Induktion bedeutet hierbei, dass die Einflüsse einzelner Belastungen auf ein Gesamtsystem über spezielle mathematische Zusammenhänge aggregiert werden, um auf die Gesamtbelastung zu schließen. Dies bringt, wie in Kapitel 2 beschrieben, die Aufgabe mit sich, für jede einzelne Belastung einen eindeutigen mathematischen Zusammenhang, meistens gegeben durch komplexe Berechnungsmodelle, in Bezug auf das Ausfallverhalten eines Systems herzustellen und anzuwenden. Eine realitätsnahe Untersuchung unter Berücksichtigung vieler unterschiedlicher Belastungsgrößen ist so kaum möglich. Zudem ist eine Auswertung dieser Einflüsse nur anhand von Labor- und Testdaten möglich, die unter exakt genormten bzw. einheitlichen Testbedingungen erhoben wurden. Die Nutzung von Felddaten ist bei induktiven Modellen nur bedingt möglich. Ebenso eignen sich induktive Modelle zur Entwicklung einzelner Komponenten in Hinblick auf eine Bestimmung der Systemauslegung in Bezug auf potenzielle Einzelbelastungen. So kann ein Steuergerät im

Fahrzeug z.B. auf seine Festigkeit in Bezug auf Temperaturhübe oder Vibrationseigenschaften hin geprüft und während der Entwicklung bewertet werden.

Unter der Prämisse, dass die Anzahl von Einzelbelastungen, die auf ein System wirken, als endlich angesehen und die Summe der Belastungen als ein in sich geschlossenes System betrachtet werden kann, ist allerdings auch ein deduktiver Ansatz zur Belastungsanalyse möglich, in der die Gesamtbelastung, die auf ein System einwirkt, in Einzelbelastungen unterteilt werden kann. Abzüglich der Einzelbelastungen bleibt die inhärente Zuverlässigkeit des Systems, gegeben durch die logische Anordnung einer Komponente oder eines Teilsystems innerhalb eines Verbundes, als Fundament bestehen. Dargestellt über die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Systems $F(t)$ bzw. einer Komponente $F_i(t)$ ergibt sich so eine Gesamtausfallwahrscheinlichkeit $F_{Ges}(t)$, die sich in den Anteil der Ausfallwahrscheinlichkeit bezogen auf die Summe der Belastungen $F_B(t)$ und einer inhärenten Ausfallwahrscheinlichkeit $F_J(t)$ aufteilt (siehe Bild 4-1).

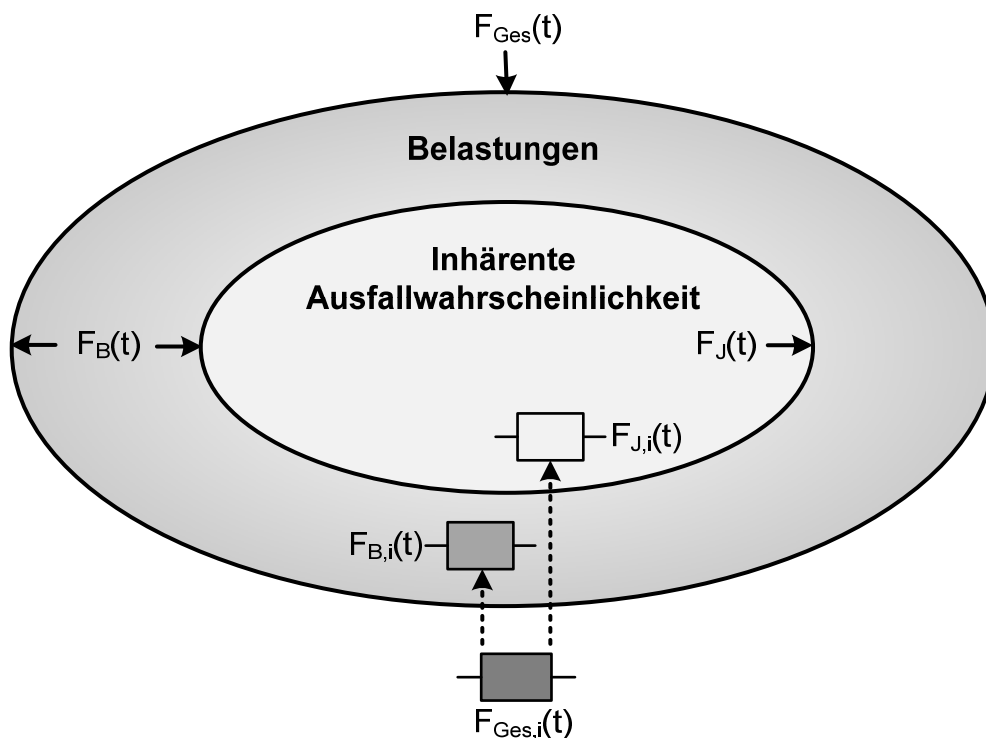


Bild 4-1: Aufteilung der Gesamtausfallwahrscheinlichkeit

Davon ausgehend, dass die inhärente Ausfallwahrscheinlichkeit auch für komplexe Systeme und unterschiedliche Analyseebenen (siehe Kapitel 3) ermittelt werden kann, ist nun die Aufteilung der Gesamtbelastung in Einzelbelastungen interessant.

Diese werden in verschiedenen Zwischenschritten, gemäß dem Prinzip der Deduktion, immer weiter unterteilt (siehe Bild 4-2).

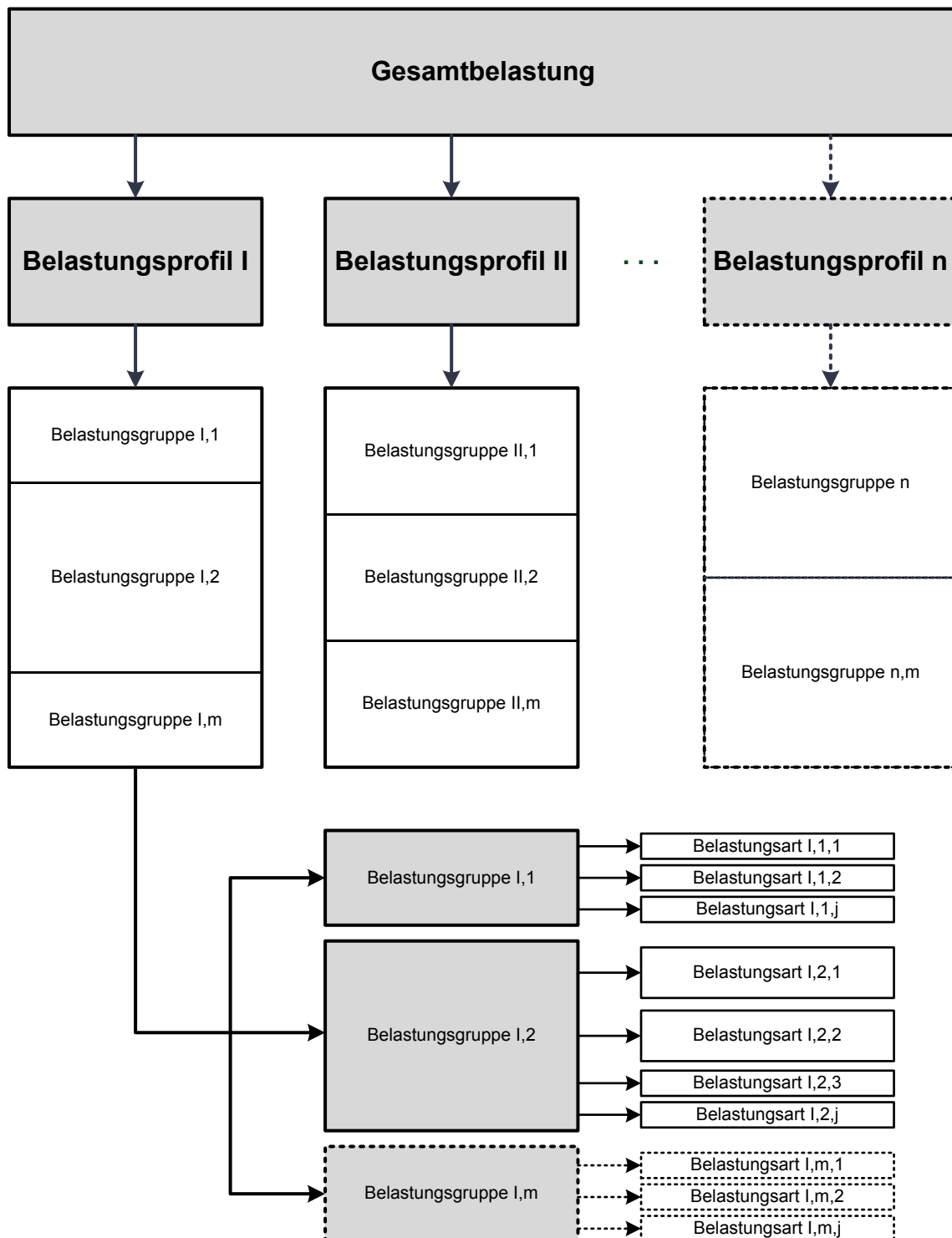


Bild 4-2: Unterteilung der Gesamtbelastung in Einzelbelastungen

Die Unterteilung erfolgt hierbei in Anlehnung an **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** 1 in den folgenden Kategorien:

Belastungsart

Die Belastungsarten sind die unterste Kategorie der Unterteilungen und stellen die Einzelbelastungen dar. Diese können u.a. mechanische, chemische oder elektrische Belastungen sein, die durch ein individuelles Nutzungsverhalten geprägt sind. Beispiele für Belastungsarten sind u.a. Temperatur, Feuchtigkeit, magnetische und elektrische Felder, Umwelteinflüsse (z.B. Staub) und Nutzungshäufigkeit.

Belastungsgruppe

In Belastungsgruppen sind die Belastungsarten organisiert. Die einzelnen Gruppen unterscheiden sich nach den Kategorien der Belastungen. Beispiele für unterschiedliche Belastungsgruppen sind u.a. Umgebungsbedingungen und Streckenprofile.

Belastungsprofil

In Abhängigkeit der Einsatzbedingungen und –umgebungen sind technische Systeme unterschiedlichen Belastungsprofilen ausgesetzt. Diese unterscheiden sich in der Aufteilung der einzelnen Belastungsgruppen. Beispiele für unterschiedliche Belastungsprofile können z.B. unterschiedliche Nutzungseigenschaften wie Viel- oder Wenigfahrer und Klimafaktoren sein. Das Belastungsprofil steht nicht im Gegensatz zu den Belastungsgruppen, sondern definiert nur die Ausprägung der einzelnen Gruppen in Bezug auf die Zusammensetzung der Gesamtbelastung.

Ein wesentliches Ziel des neuen *deduktiven* Ansatzes (siehe Kapitel 6) ist die Integration von Felddaten in das analytische Modell. Wie in Kapitel 2 erläutert, werden in modernen Fahrzeugen eine Vielzahl von Daten fahrzeugbezogen mitgeschrieben und können durch Werkstätten während Wartungs- oder Reparaturaufenthalten ausgelesen werden. Diese Möglichkeit bezieht sich nicht nur auf generelle Fahrzeugdaten, sondern auch auf Subsystemdaten. So können gezielt Daten einzelner Systeme geloggt und ausgewertet werden, solange diese nicht mit den heutigen Bestimmungen zum Datenschutz kollidieren. Diese zusätzlichen Daten ermöglichen es, Belastungsprofile zu erstellen und zu differenzieren. Auch die Ableitung der dazugehörigen Belastungsgruppen und –arten ist anhand der Fahrzeugdaten möglich. Besonders durch den Einsatz von Datenschreibern, die nicht nur in Versuchs- und Testfahrzeugen sondern auch in Serienfahrzeugen verbaut werden können, steigt die Anzahl und Qualität der Daten stetig. Die Profile, die aus realen Felddaten gene-

riert werden können, stellen zwingend die realen Belastungen im Feld durch alle Nutzer dar. Bis zur Einführung dieser Datenschreiber in Serienfahrzeuge war dies nur für Testfahrzeuge und entsprechende Fahrer möglich. Die Bestimmung der Profile erfolgt dann nach klassischen Ansätzen durch Filtern einzelner interessierender Parameter wie die Nutzungsregion und -häufigkeit, die Anzahl der Bremsungen pro km, die Anzahl der Startvorgänge, usw.

Je nachdem, ob Felddaten in Form von Ausfall- oder Nutzungsdaten abgelegt werden, ist eine unterschiedliche Aufbereitung erforderlich.

Während Ausfalldaten einer Komponente meist durch eine Konvertierung des Reparatur- und Erstzulassungsdatums in einem Zeitbereich zur Herleitung der Ausfallwahrscheinlichkeit genutzt werden, kann bei Nutzungsdaten direkt aus der Anzahl der Nutzungsvorgänge eine Funktion abgeleitet werden.

Nach der Erhebung folgt die eigentliche Modellbildung zur Verwendung der Daten zur Bestimmung des Einflusses der unterschiedlichen Belastungsarten und -gruppen.

Hierzu werden im Folgenden mehrere Ansätze aufgestellt, diskutiert und bewertet.

4.2 Direkte und indirekte Belastungsanalyse

Eine grundlegende Fragestellung der Belastungsanalyse ist die, ob direkte oder indirekte Belastungen zu quantifizieren sind. In dieser Arbeit werden diese Begriffe wie folgt definiert:

Direkte Belastungsanalyse

Die direkte oder auch absolute Belastungsanalyse bezieht sich auf die Quantifizierung des Einflusses konkreter Belastungsarten oder -gruppen auf das Gesamtausfallverhalten. Diese werden direkt aus den Ausfalldichten $f_i(t)$ der Baugruppen hergeleitet und nicht über eine Zwischenfunktion substituiert oder transformiert. Ergebnis der direkten Belastungsanalyse ist der Anteil der Belastung i auf das Gesamtausfallverhalten. Ziel ist die Extraktion möglichst vieler unterschiedlicher Belastungsarten im Rahmen einer Systemanalyse.

Ein Anwendungsfall dieser Analyseart ist gegeben, wenn die einzelnen Belastungsarten oder -gruppen direkt vorliegen und nicht durch unterschiedliche Nutzungs- oder Belastungsprofile abgeleitet werden müssen. Wenn möglich, ist diese Art der

Belastungsanalyse zu bevorzugen, da sie unmittelbar auf den Einfluss einzelner Faktoren auf das Gesamtsystem schließen lässt.

Indirekte Belastungsanalyse

Die indirekte oder auch „relative“ Belastungsanalyse behandelt die Quantifizierung von Belastungsunterschieden unterschiedlicher Nutzungs- oder Belastungsprofile. Anders als bei der direkten Belastungsanalyse ist das Ergebnis dieser Methode nicht die Bestimmung des absoluten Einflusses einzelner Belastungen auf das Gesamtsystem. Das Ergebnis der indirekten Belastungsanalyse ist eine Deltafunktion – im Folgenden Belastungsfunktion $B(t)$ genannt – zweier oder mehrerer unterschiedlicher Nutzungs- oder Belastungsprofile jeweils identischer technischer Systeme. Ziel dieser Analyseart ist es, Aussagen über den Gesamteinfluss von unterschiedlichen Profilen nach Tabelle 2-1 zu erhalten.

Ein Anwendungsfall ist gegeben, wenn die einzelnen Belastungen nicht in Ihrer Ausprägung aufgeteilt werden können, sondern lediglich als Summe von Informationen vorliegen. Über die Aufteilung der Belastungsfunktion in Einzelbelastungen können ferner Aussagen über den Einfluss einzelner oder gruppierter Belastungen im relativen Verhältnis zu einer anderen Gruppe gebildet werden.

Weitere Möglichkeiten der Anwendung des indirekten Ansatzes werden in Abschnitt 5.5 beschrieben.

5 Ein direkter Ansatz zur Belastungsanalyse über die Dichtefunktion

Im folgenden Kapitel wird ein erster direkter Ansatz zur Ableitung des Einflusses einzelner Belastungsarten oder –gruppen hergeleitet und dargestellt. Die Basis dieses Ansatzes beruht auf einer allgemeinen Verteilungsdichte, die in die jeweiligen Dichten der Einzelbelastungen aufgeteilt wird. Zudem wird auf die Berücksichtigung von Wichtungen einzelner Belastungen eingegangen. Es folgt abschließend eine Zusammenfassung der Ergebnisse und eine Darstellung der Anwendungsmöglichkeiten.

5.1 Theorie des Ansatzes

Die Integration von Felddaten in die Belastungsanalyse gestaltet sich in der Praxis häufig schwierig, da Felddaten in unterschiedlicher Qualität vorliegen. Eine Grundinformation, die für jede Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalyse benötigt wird, ist eine Information über die Nutzung des Systems zum Ausfallzeitpunkt. Diese kann als Zeit- oder Weginformation oder aber durch andere Nutzungs- oder Belastungsgrößen z.B. Anzahl der Betätigungen bis zum Ausfall gegeben sein. Allein aus diesen Informationen lassen sich alle gängigen Zuverlässigkeitskenngrößen bilden, aus denen dann wiederum ein einfaches Ausfallbild erzeugt werden kann. Eine gängige Darstellung dieses Ausfallbildes ist die Dichtefunktion $f(t)$. In $f(t)$ ist nun der Mix aller Belastungen enthalten, die auf ein System wirken. In dieser Grundinformation ist allerdings in der Regel nicht enthalten, aufgrund welcher Belastung ein System ausgefallen ist. Wäre diese Information gegeben, ließen sich auf induktivem Wege einzelne Teilausfalldichten $f_{\text{Belastung}}(i, t)$ bilden, wobei i die jeweilige spezielle Belastung darstellt. So könnten, unter der Annahme, dass der Ausfall ausschließlich auf den Auswirkungen der Belastung i basiert, alle Belastungen voneinander getrennt betrachtet werden. Sind alle Ausfälle durch eine Funktion $f_{\text{Belastung}}(i, t)$ abgebildet, so ergibt sich

$$f(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f_{\text{Belastung}}(i, t) \quad (5-1)$$

mit $f(t)$ als Gesamtausfalldichte. Der Faktor n (Anzahl aller Teilbelastungsfunktionen

i) sorgt hier für die Sicherstellung der Bedingung $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$.

D.h. in Gleichung (5-6) muss, bedingt durch $\sum_{i=1}^n f_{Belastung}(i, t)$ unter der Annahme dass

$\int_0^{\infty} f_{Belastung}(i, t) dt = 1$ der Faktor $\frac{1}{n}$ hinzugefügt werden. Eine Beachtung von Überlap-

pungen von $f_{Belastung}(i, t)$ und $f_{Belastung}(i+1, t)$ in t muss nicht vorgenommen werden, da die Werte nur additiv und nicht multiplikativ verknüpft werden.

Folgerichtig enthält nun $f(t)$ die Summe der Auswirkungen aller Belastungen.

Wichtig ist, dass die Teilausfalldichten bei einer Addition nicht (methodisch) seriell oder parallel verknüpft werden. Diese Annahmen werden bei vielen sicherheits- und zuverlässigkeitstechnischen Betrachtungen vorausgesetzt, um die Berechnungen zu vereinfachen. Beide Verknüpfungen sind bei einer Belastungsanalyse jedoch nicht zulässig.

Eine serielle Verknüpfung würde implizieren dass $f(t) = \text{Min}[f_{Belastung}(i, t) \forall i = 1, \dots, n]$

gilt, während eine parallele Verknüpfung $f(t) = \text{Max}[f_{Belastung}(i, t) \forall i = 1, \dots, n]$ zur Folge

hat. Für das Ausfallbild eines technischen Systems bedeuten diese Zusammenhänge, dass ein System immer nur aufgrund der „stärksten“ (seriell) oder „schwächsten“ (parallel) Belastung ausfallen kann. Das Zusammenspiel von unterschiedlichen Belastungen setzt allerdings voraus, dass ein Ausfall zufällig, bedingt durch eine spezielle Belastung erfolgen kann. So ist $f(t) = \text{Random}[f_{Belastung}(i, t) \forall i = 1, \dots, n]$. Etwas Wichtungen zur Beeinflussung der randomisierten Funktion werden in Abschnitt 5.3 erläutert.

Ausgehend vom deduktiven Ansatz lässt sich eine Belastungsanalyse, ausgehend von den o.g. Grundinformationen, nun genau umgekehrt herleiten.

Für die Extraktion der Belastung j aus allen Belastungen i gilt somit:

$$f_{Belastung}(j, t) = f(t) - \sum_{i=1, i \neq j}^n f_{Belastung}(i, t) \quad . \quad (5-2)$$

Für die Ermittlung der überbleibenden Belastungen ergibt sich:

$$f_{Belastung}(\bar{j}, t) = f(t) - f_{Belastung}(j, t) \quad (5-3)$$

mit

$\bar{j} = \text{Ausschluss der Belastung } j \quad .$

Für den iterativen Ansatz gilt $j = \sum_{i=1}^n \text{Belastung}_i$.

Der iterative Ansatz entspricht hierbei dem praktischen Anwendungsfall, indem Schritt für Schritt je eine Belastung aus der Summe der Belastungen extrahiert wird. Der verbliebene Rest wird dann wiederum erneut extrahiert (vgl. Bild 5-1).

5.2 Schrittfolge

Die Schrittfolge zur deduktiven Belastungsanalyse kann durch folgendes Bild 5-1 vereinfacht dargestellt werden.

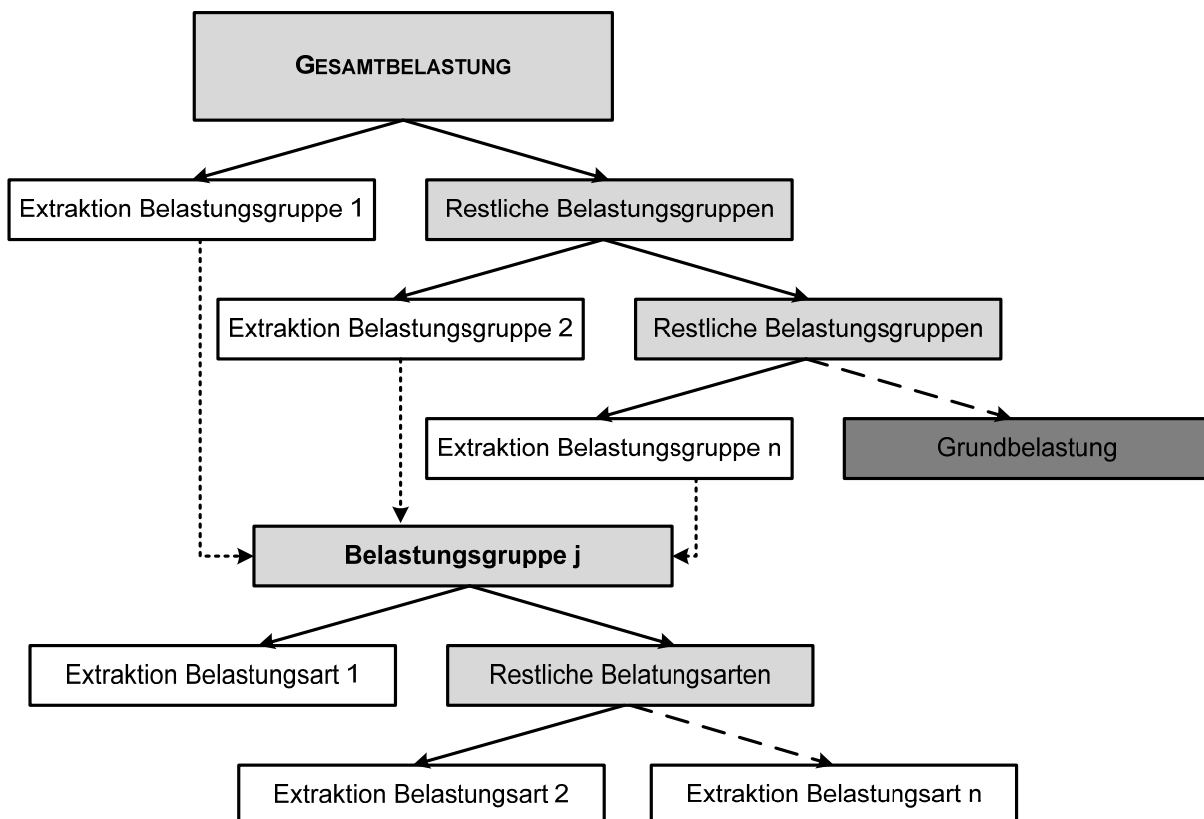


Bild 5-1: Schrittfolge der direkten Belastungsanalyse

Ausgangspunkt der direkten Belastungsanalyse ist die Gesamtbelastung in Form von Felddaten. Diese Felddaten werden im Rahmen einer vorgeschalteten Datenanalyse erhoben. Hierfür können, je nach Datenverfügbarkeit, Daten von Vertragswerkstätten oder anderen Institutionen, die über detaillierte Felddaten verfügen, verwendet werden. Als minimale Grundvoraussetzung gilt für die Daten, dass die Zeit bzw. Wegstrecke im Feld bis zum Ausfall enthalten sind.

Für die Analysen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, sind jedoch weitere Daten wie

- Informationen zum Datenstand (Reparatur-, Meldeverzögerungen)
- Informationen zur Produktversion (Change-Management)
- Informationen zur Nutzung (Nutzungsland)
- Detaillierte Fahrzeuginformation (Fahrzeugtyp, Motorisierung)
- Detaillierte Fehlerinformation (Fehlerort, Fehlerart, Fehlertyp)
- Weitere Informationen zur Belastung (Anzahl bzw. Dauer der Nutzung)

erforderlich.

Aus diesen Daten können nun über Verfahren zur Bestimmung des Verteilungstyps (Chi-Quadrat-Anpassungstest, Kolmogorov-Smirnov-Test, etc.) sowie Parameterschätzverfahren (Maximum-Likelihood-Methode, Methode der kleinsten Quadrate, etc.) die Verteilungsfunktionen zur Bestimmung der Verteilung der Gesamtbelastung und der Einzelbelastungen generiert werden [Mey 10]. Zusätzlich ist es möglich über die Monte-Carlo-Methoden (siehe Kapitel 3) künstliche Datensätze zu erzeugen und diese im Anschluss über die o.g. Methoden und Verfahren in Verteilungsfunktionen zu transformieren. Eine direkte Verwendung der Rohdaten in diskreter Form ist für diesen Ansatz nicht möglich.

Zur Verwendung eignen sich besonders die, in der Zuverlässigkeitstechnik gängigen, Exponential- und Weibull-Verteilungen, sowie die Normal- und Log-Normal-Verteilung.

Je nach Verfügbarkeit und Güte der Daten und Information bezüglich der Belastungen können dann aus der Gesamtbelastung die direkten Belastungsarten oder Belastungsgruppen entsprechend extrahiert werden (siehe Bild 5-1).

Interessant ist hierbei die theoretisch verbleibende Grundbelastung. Diese Grundbelastung stellt die in Bild 4-1 dargestellte inhärente Ausfallwahrscheinlichkeit dar; diese wirkt per Definition ohne spezielle Belastung aufgrund der funktionalen Zusammenhänge. Das Ziel ist eine direkte Belastungsanalyse bis zur Quantifizierung der Grundbelastung. Da dies allerdings aufgrund mangelnder Datenlage meist nicht möglich ist, ist die praktische Anwendung eher in den Einzelextraktionen auf einem hohen Level zu sehen.

Für die Anwendbarkeit des Ansatzes gelten zwei grundlegende Bedingungen:

Bedingung 1: Voraussetzungen an die Analysedaten

Grundlegend ist die Frage, für welche Systeme eine Datenlage existiert, für die der in diesem Kapitel vorgestellte Ansatz sinnvoll eingesetzt werden kann.

Ist eine Datenlage ausreichend detailliert und vollständig, so dass Schädigungsparameter direkt abgeleitet werden können, so ist die Nutzung ist iterativen Ansatzes nur bedingt sinnvoll. In diesen Fällen kann eine retrospektive Analyse auf allgemeiner Ebene zur Validierung der Belastungsfunktion verwendet werden.

Anders ist es in Fällen, in denen eine Datenlage auf einem Level vorhanden ist, aus dem sich nicht direkt Schädigungsparameter oder einzelne Ausfallmechanismen isolieren lassen.

In diesen Fällen – für die der iterative Ansatz konzipiert ist – können die Belastungen entsprechend Bild 5-1 vom verfügbaren (allgemeinen) Level heruntergebrochen werden.

Im Folgenden werden drei Beispiele für potenzielle Anwendungsfälle kurz beschrieben.

Anwendungsfall 1: Unterschiedliche Baugruppen innerhalb eines Systems

In vielen Fällen werden Felddaten nur auf Systemebene erhoben, z.B. bei einem Anbausteuergerät eines elektronischen Bremssystems. Dies besteht in den meisten Fällen aus einer Hydraulikeinheit mit entsprechenden Ventilen und Anschlüssen und einem elektronischen Steuergerät [Bos 10]. Oftmals wird bei Felddaten nur ein Fehlerort erhoben. Eine Unterscheidung in Elektronik und Hydraulik ist nicht möglich. In den Fehlerdaten sind allerdings beide Ausfallmechanismen enthalten. Wird von der Unabhängigkeit zwischen hydraulischen und elektronischen Fehlern ausgegangen, ist der Ansatz der deduktiven Belastungsanalyse anwendbar und beide Fehlermechanismen können isoliert werden. Gemäß den gängigen Annahmen für elektronische und mechanische Fehler [Mey 10] müssten sich idealer Weise ein Früh- und ein Spätausfallverhalten isolieren lassen.

Dieser Anwendungsfall beinhaltet demnach auch Analysen, in denen komplett voneinander getrennte Systeme in Felddaten zusammengefasst werden (z.B. Fahrwerk und Einspritzpumpe eines PKW). Diese Fälle treten in der Regel selten auf, sind allerdings z.B. bei Zulieferern, die keinen Zugriff auf Originaldaten haben, sondern nur einen kleinen Ausschnitt einsehen können, zum Teil gegeben.

Anwendungsfall 2: Unterschiedliche Gewichtung von Fehlerbildern.

Dieser Anwendungsfall ist eine Untergruppe des ersten Falles. Wird davon ausgegangen, dass elektronische Fehler, geprägt durch ein Frühausfallverhalten, vor den mechanischen bzw. hydraulischen Fehler eintreten, kann davon ausgegangen werden, dass die elektronischen Fehler in den Felddaten überrepräsentiert sind. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn ein Anbausteuergerät, unabhängig vom aufgetretenen Fehler, komplett getauscht wird und nicht die tatsächlich ausgefallenen Baugruppen ersetzt werden. Für diese Anwendungsfälle müssen die sichtbaren Fehlerbilder gewichtet werden. Ein Vorgehen zur Umsetzung dieser Gewichtung ist im folgenden Abschnitt 5.3 gegeben.

Die Gewichtung ist in diesem Fall sehr wichtig, da in dem beschriebenen Szenario davon auszugehen ist, dass sich auf lange Zeit das Fehlerbild umkehrt und gemäß der Badewannenkurve das Fehlerbild der mechanischen Ausfälle immer dominanter wird. Eventuell ist dann auch ein Korrelationseffekt zu berücksichtigen. Dieser kann entstehen, wenn spät getauschte Teile wieder mit einem Frühausfallverhalten beginnen (was zu erwarten ist).

Anwendungsfall 3: Kombinierte Fehlermechanismen (z.B. unterschiedliche Märkte)

Ein weiterer Anwendungsfall ist in kombinierten Fehlermechanismen z.B. durch unterschiedliche Märkte gegeben. Gleiche Baugruppen und Systeme, welche in unterschiedlichen Märkten genutzt werden, unterliegen unterschiedlichen Belastungen (z.B. wechselnde klimatische Verhältnisse). Sind diese für die aufgetretenen Fehler relevant, so zeigen sich in der Praxis unterschiedliche Fehlerbilder. Diese können, bei bekannten Fehlermechanismen in den einzelnen Märkten wiederum durch den hier vorgestellten Ansatz analysiert werden. Einige Beispiele für solche Effekte sind zum Beispiel Systeme (z.B. Fahrzeuge) die primär entweder in sehr kalten oder heißen Regionen genutzt bzw. vorwiegend auf unterschiedlichen Straßenbelägen (z.B. Asphalt, Schotter, Feld) bewegt werden.

Bedingung 2: Unabhängigkeit von Belastungen

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass die Belastungsarten voneinander getrennt betrachtet werden müssen. Für die Anwendung dieses Ansatzes in der Praxis bedeutet dies, dass die Belastungen vollkommen unabhängig voneinander sein müssen. In der Regel ist dies allerdings nicht der Fall.

So korrelieren z.B. physikalische Belastungen sehr häufig miteinander. Allerdings können auch Belastungen unterschiedlicher Gruppen in Wechselwirkung miteinander stehen. Die Analyse der Korrelationen unterschiedlicher Belastungen wird durch die Ermittlung von (induktiven) Lastkollektiven im Sinne der Betriebsfestigkeit durchgeführt. Diese Betrachtung ist jedoch explizit nicht Teil dieser Arbeit. Dennoch gibt es auch in der Praxis zahlreiche Anwendungsfälle, in denen von einer Unabhängigkeit unterschiedlicher Belastungen ausgegangen werden kann. So sind in vielen Fällen die Belastungen, die zu einem Frühausfallverhalten eines Systems beitragen von den Belastungen, die zu einem Verschleiß- oder Spätausfallverhalten führen, voneinander unabhängig, da sie unterschiedliche Fehlermechanismen besitzen.

Für die Anwendung des iterativen Ansatzes bedeutet es, dass vor der Nutzung des Ansatzes die Unabhängigkeit der Belastungen durch Expertenwissen (z.B. auf elektronischer und mechanischer Ebene) verifiziert werden muss. Können Einzelbelastungen in Gruppen zusammengefasst werden, so ist im Anschluss zu prüfen, ob die so definierten Belastungsgruppen voneinander unabhängig sind. Auf diese Weise ist es möglich, den Ansatz auf einer höheren Ebene (siehe Bild 5-1) durchzuführen.

Dasselbe gilt auch für Komponenten die in nicht-seriellen Redundanzstrukturen angeordnet sind. Auch hier kann durch den Ausfall einer bestimmten Komponente die Last, die auf andere Komponenten einwirkt, steigen. In diesem Fall sind die Fehlermechanismen unter Normlast von denen unter Überlast getrennt voneinander zu betrachten.

Die vorstehend aufgestellten Bedingungen verdeutlichen, dass der iterative Ansatz dieser Arbeit seine Anwendbarkeit im Speziellen und nicht im Allgemeinen hat. Für Anwendungsfälle die außerhalb der Bedingungen liegen, sind die bewährten Methoden der Zuverlässigkeitstheorie oder der Betriebsfestigkeit im Rahmen von mechanischen Belastungsanalysen (u.a. Interferenztheorie), die nicht Teil dieser Arbeit sind, zu bevorzugen.

5.3 Berücksichtigung von Wichtungen

Die zuvor dargestellten Zusammenhänge (siehe Abschnitt 5-1 und 5-2) beziehen sich auf die Verwendung mehrerer Belastungsarten oder –gruppen, die jeweils ungewichtet in die direkte Belastungsanalyse eingehen. Sind die einzelnen Belastungen i

durch die gleiche Ausprägung gekennzeichnet, so ist eine anschließende Extraktion der gewichteten Belastung erforderlich.

Dies verdeutlicht die Betrachtung der Flächeninhalte der Dichte.

Per Definition ist $\int_0^{\infty} f_{\text{Belastung}}(i,t) dt = 1$ für alle i . Ein Ausfall ergibt sich nach Abschnitt 5.1

durch die zufällige Auswahl einer Belastung gemäß ihrer Ausprägung. So ist z.B. im einfachen Fall zweier Belastungen i und j für die gilt $f_{\text{Belastung}}(i,t) \neq f_{\text{Belastung}}(j,t)$ leicht ersichtlich, dass die Auswahl $f(t) = \text{Random}[f_{\text{Belastung}}(i,t), f_{\text{Belastung}}(j,t)]$ zu je 50% aus i und j erfolgen wird.

Ist allerdings von einer höheren Wichtung ω_i einer einzelnen Belastung i in Bezug auf die Gesamtbelastungen auszugehen (oder soll eine höhere Wichtung angenommen werden), muss die Extraktion dahingehend erweitert werden.

Für die Extraktion der gewichteten Belastung j gilt dann:

$$f_{\text{Belastung}}(j,t) = \frac{1}{\omega_j} \cdot \left(\frac{f(t)}{\omega_{\text{Ges}}} - \sum_{i=1, i \neq j}^n \omega_i \cdot f_{\text{Belastung}}(i,t) \right) \quad (5-4)$$

Somit ergibt sich die Bestimmung der restlichen Belastungen aus:

$$f_{\text{Belastung}}(\bar{j},t) = \frac{f(t)}{\omega_{\text{Ges}}} - \omega_i \cdot f_{\text{Belastung}}(j,t) \quad (5-5)$$

mit

$$\bar{j} = \text{Ausschluss der Belastung } j \quad .$$

Für die Iteration gilt nun

$$j = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \text{Belastung } i \quad (5-6)$$

Hierbei ist es nicht relevant, ob lediglich eine oder eine Gruppe von Belastungen gewichtet werden soll, oder ob alle Belastungen gleichermaßen oder unterschiedlich gewichtet werden. Findet eine korrelierte Gewichtung z.B. durch $\omega_2 = \frac{1}{2} \omega_1$ statt, so muss in der Schrittfolge der Extraktionen Belastung 1 vor Belastung 2 extrahiert werden.

5.4 Modellvalidierung

Zur Validierung der in den Abschnitten 5.1 bis 5.3 erläuterten Vorgehensweise und aufgestellten Gleichungssysteme zur direkten Belastungsanalyse und unter Berück-

sichtigung von Wichtungsfaktoren wird nachfolgend ein theoretischer Testdatensatz erstellt mit dem Ziel, typische Ausfallszenarien wie Frühausfälle, Verschleiß und Nutzerverhalten zu modellieren. Dabei erfolgt die Aufteilung der Gleichungen für den Testdatensatz induktiv und deren Lösungen deduktiv.

5.4.1 Testdatensatz

Wie zuvor erläutert, orientieren sich die zugrunde gelegten Gleichungssysteme des theoretischen Datensatzes am typischen Ausfallverhalten technischer Einheiten und an dem Nutzerverhalten, welches zusätzlich entsprechend gewichtet wurde (siehe Tabelle 5-1).

Tabelle 5-1: Einzelbelastungen und deren Verteilungsfunktionen [Einheit: 1/Jahr] als Testdatensatz (β = Formparameter, T_i^* = char. Lebensdauer, μ = Mittelwert, σ = Standardabweichung, λ = Ausfallrate)

BELASTUNG	VERTEILUNGSTYP	PARAMETER 1	PARAMETER 2	WICHTUNG
I	Weibull-Vert.	$\beta_1 = 0,8$	$T_1^* = 3a$	3
II	Weibull-Vert.	$\beta_2 = 1,2$	$T_2^* = 6a$	5
III	Exponentialvert.	$\lambda = 0.1a$	---	1
IV	Normalvert.	$\mu = 10a$	$\sigma = 3$	0,5

Entsprechend den zugrunde gelegten Verteilungsfunktionen und Wichtungen folgt für die Ausfalldichte

$$f(t) = \omega_1 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} + \omega_2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} + \omega_3 \cdot t^{\beta_1-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_1^*} \right)^{\beta_1}} + \omega_4 \cdot t^{\beta_2-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_2^*} \right)^{\beta_2}} \quad (5-7)$$

und für die Ausfallrate

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\omega_1 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} + \omega_2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} + \omega_3 \cdot t^{\beta_1-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_1^*} \right)^{\beta_1}} + \omega_4 \cdot t^{\beta_2-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_2^*} \right)^{\beta_2}}}{\int_t^{\infty} \left(\omega_1 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \tau} + \omega_2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau-\mu}{\sigma} \right)^2} + \omega_3 \cdot \tau^{\beta_1-1} \cdot e^{-\left(\frac{\tau}{T_1^*} \right)^{\beta_1}} + \omega_4 \cdot \tau^{\beta_2-1} \cdot e^{-\left(\frac{\tau}{T_2^*} \right)^{\beta_2}} \right) d\tau} \quad (5-8)$$

die nachfolgend in den Bildern 5-2 und 5-3 dargestellt sind.

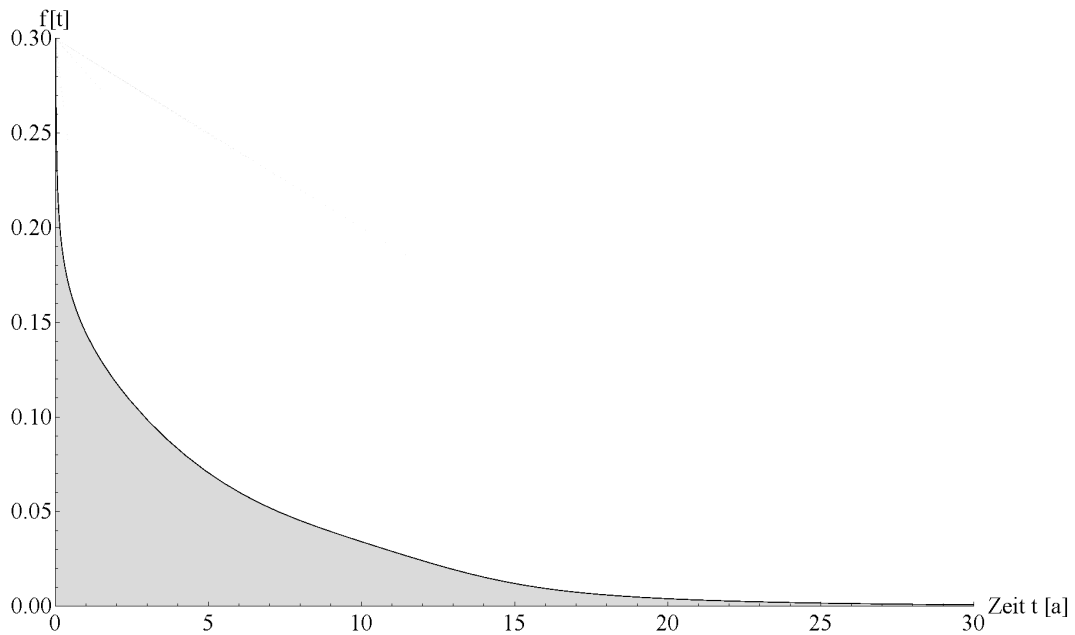


Bild 5-2: Ausfalldichte des Testdatensatzes

Die Darstellung der Ausfalldichte zeigt, dass die Identifikation einzelner Belastungen optisch nur bedingt möglich ist. So ist zum Beispiel die Belastungsart IV (Normalverteilung) in der Ausfalldichte nicht erkennbar. Eine sinnvolle zweite Darstellung des Ausfallverhaltens ist über die Ausfallrate gegeben, als bedingte Zuverlässigkeitskenngröße sind in dieser Darstellung (Bild 5-3) weitere Eigenschaften des Ausfallverhaltens erkennbar. Es wird allerdings darauf hingewiesen, dass auch diese Darstellung nicht alle Ausfallverhalten optisch erkennbar macht.

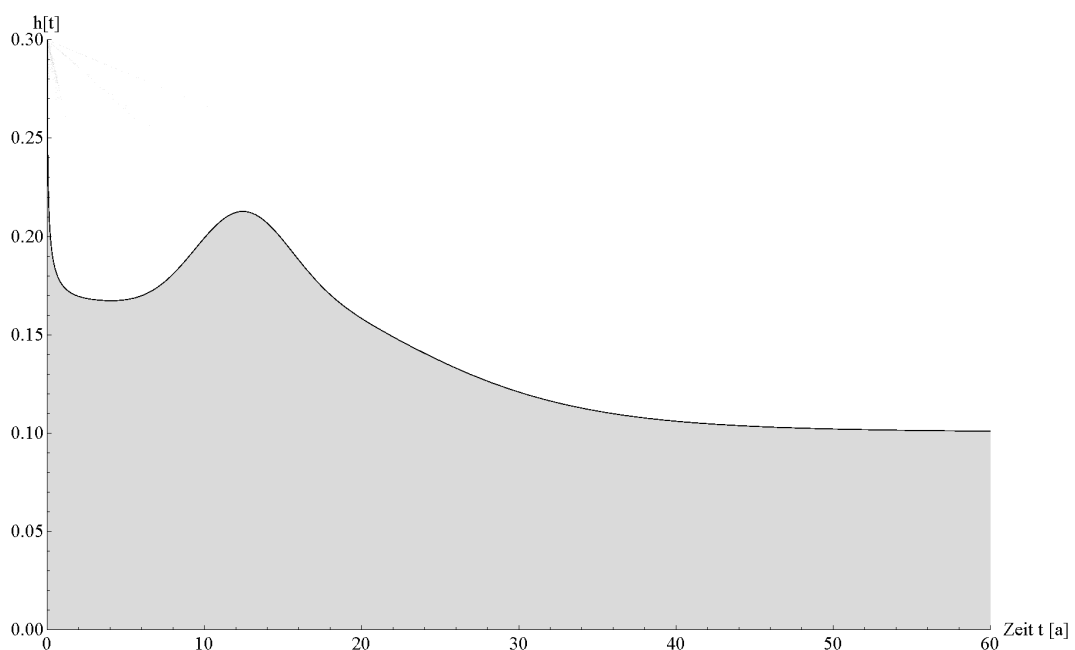


Bild 5-3: Ausfallrate des Testdatensatzes

Wie aus Bild 5-3 ersichtlich, ist das Ausfallverhalten des beispielhaft zugrunde gelegten technischen Systems durch ein Frühausfallverhalten geprägt, welches sich nach ca. $t = 1 \text{ Jahr}$ deutlich abschwächt. Im Anschluss folgt ein Anstieg der Ausfallrate, bedingt durch ein angenommenes Nutzerverhalten, welches in späten Ausfällen resultiert. Im Anschluss daran flacht die Ausfallrate ab, bis sie ab ca. 35 Jahren einen konstanten Verlauf annimmt. Die Ausfalldichte ist zu diesem Zeitpunkt annähernd null.

5.4.2 Analytische Rückführung des Testdatensatzes in Einzelbelastungen

Im Anwendungsfall liegt in der Regel nach einer entsprechenden Datenanalyse das gesamte Ausfallverhalten einer Baugruppe oder eines technischen Systems in Form einer funktionalen Zuverlässigkeitskenngröße vor. Für den in der Praxis tätigen Zuverlässigkeitsingenieur stellt sich dann die wichtige Frage nach dem Einfluss einer bestimmten Belastung auf das Ausfallverhalten, um so entsprechende Maßnahmen zu deren Reduzierung einzuleiten. Unter dieser Prämisse erfolgt die Teilkomponentenanalyse in Verbindung mit einer Filterung der entsprechenden Fehlerbilder, die dann zu einem bestimmten Verteilungstyp führt.

Im Rahmen der Modellierung besteht nunmehr die Aufgabe darin, den Einfluss der zuvor zugrunde gelegten Verteilungstypen entsprechend Tabelle 5-1 deduktiv zu bestimmen.

Schritt 1:

Eliminierung der Belastung I (Frühausfälle, gefilterte Daten entsprechen ca. 30% der Gesamtmenge $\omega = 3$) und Bestimmung der Dichtefunktion. Mit Gleichung (5-5) folgt

$$f_{\text{Belastung}}(\bar{1}, t) = \frac{f(t)}{\omega_{\text{Ges}}} - (\omega_1 \cdot f_{\text{Belastung}}(1, t)) = t^{\beta_2 - 1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T_2}\right)^{\beta_2}} + \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} + \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad (5-9)$$

Die Anwendung der vorstehenden Gleichung und deren graphische Darstellung (Bild 5-4) visualisieren den Einfluss der Belastungsart I gekennzeichnet durch Frühausfälle.

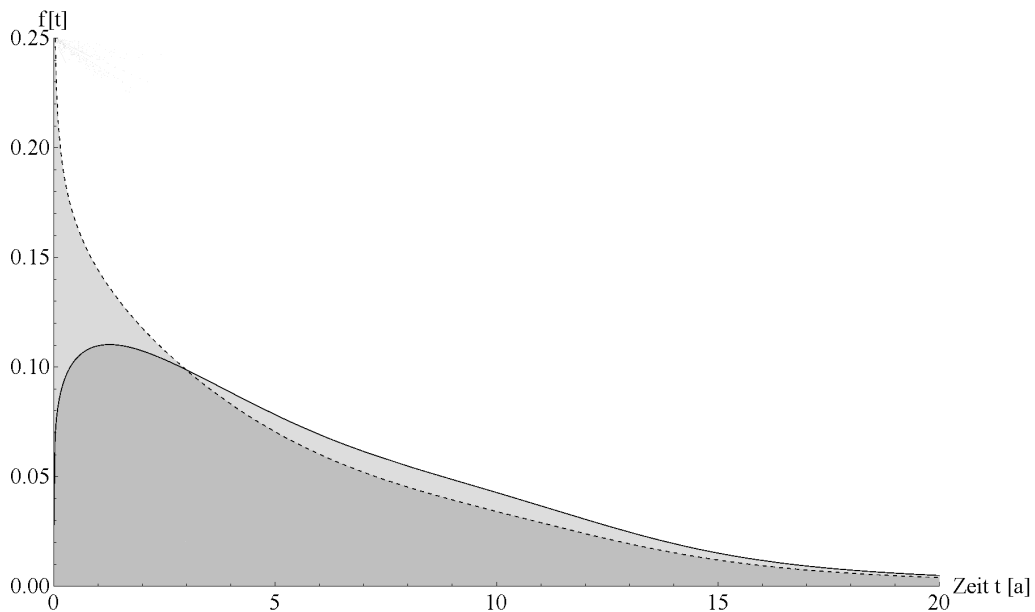


Bild 5-4 Gesamtdichtefunktion (gestrichelt) und verbleibende Restdichtefunktion ohne Belastung I

Schritt 2:

Im Anschluss an die Extraktion der Frühausfälle (Belastung I) wird nun in einem weiteren Schritt Belastungsart II extrahiert. Die Belastungsart II charakterisiert ein mögliches Verschleißbild mit einer Wichtung von $\omega_2 = 5$ (siehe Tabelle 5-1).

Analog zur Extraktion der Belastung I folgt aus Gleichung (5-5)

$$f_{\text{Belastung}}(\bar{1}; 2, t) = f_{\text{Belastung}}(\bar{1}, t) - (\omega_2 \cdot f_{\text{Belastung}}(2, t)) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} + \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad (5-10)$$

mit der graphischen Darstellung in Bild 5-5.

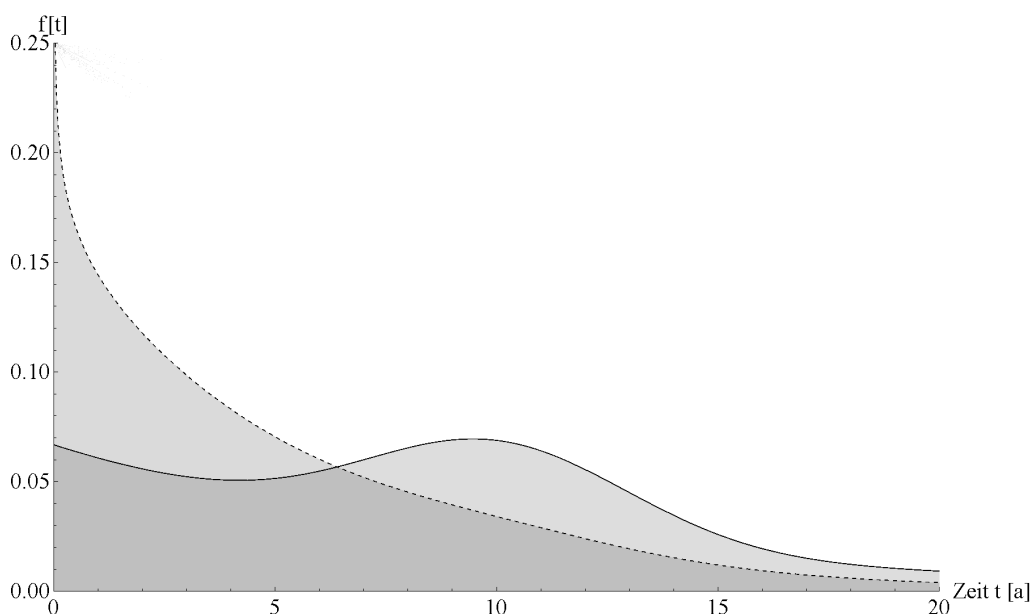


Bild 5-5 Gesamtdichtefunktion (gestrichelt) und verbleibende Restdichtefunktion ohne die Belastungen I und II

Schritt 3:

Nach der Eliminierung der Belastungsarten I und II wird nun in einem weiteren Schritt die Belastungsart III, die als Fehlermodi ein zufälliges Ausfallverhalten charakterisiert, extrahiert.

Es folgt aus der Gleichung (5-5)

$$f_{\text{Belastung}}(\overline{1;2;3}, t) = f_{\text{Belastung}}(\overline{1;2}, t) - (\omega_3 \cdot f_{\text{Belastung}}(3, t)) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} = f_{\text{Belastung}}(4, t) \quad (5-11)$$

In Bild 5-6 ist nun die nach drei Extraktionen gewonnene Belastung IV nach obiger Gleichung dargestellt.

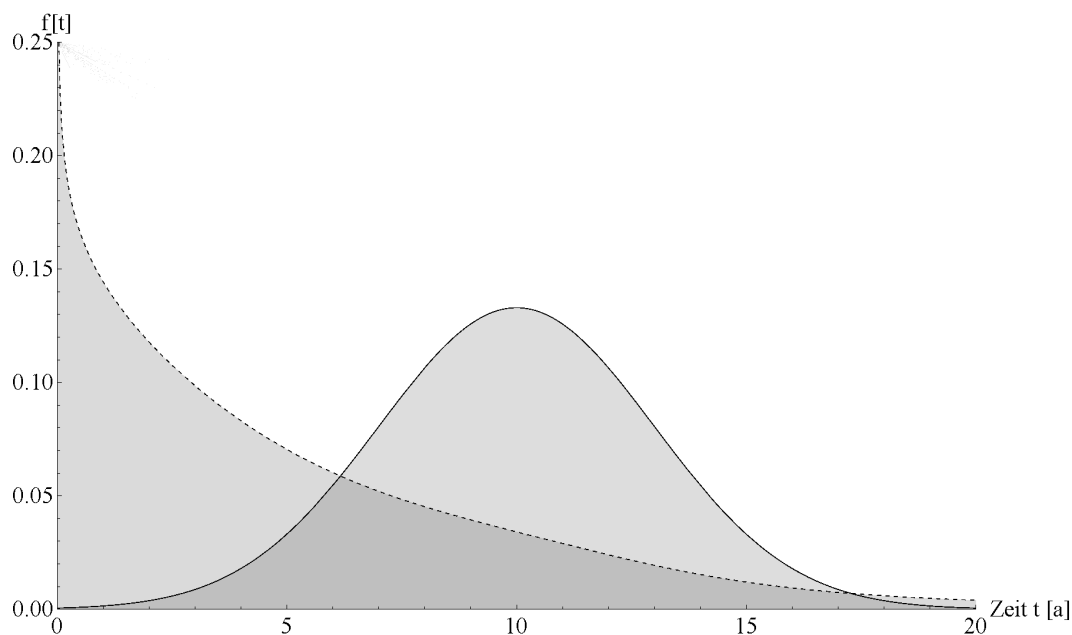


Bild 5-6 Gesamtdichtefunktion (gestrichelt) und verbleibende Belastung IV

Anhand der Modellvalidierung der direkten Belastungsanalyse konnte gezeigt werden, dass es prinzipiell durchführbar ist, Einzelbelastungsfunktionen schrittweise zu extrahieren.

Dabei ist es möglich, den Einfluss auf das Ausfallverhalten einer oder mehrerer Belastungsarten auf eine Einheit zu bestimmen und Maßnahmen zu deren Eliminierung einzuleiten.

5.4.3 Simulierte Rückführung des Testdatensatzes in Einzelbelastungen

Neben dem analytischen Verfahren zur direkten Belastungsanalyse steht auch die Rückführung der Gesamtbelastungen in Einzelbelastungen mittels MCS zur Verfügung. Wie in Kapitel 3 bereits erwähnt, ist gerade bei komplexen Zusammenhängen

eine Lösung über eine Simulation oftmals eine praktikablere Lösung als der Weg über analytische Berechnungen.

Im folgenden Abschnitt wird der Testdatensatz aus Abschnitt 5.4.1 (siehe Tabelle 5-1) durch Anwendung der MCS in die Einzelbelastungen zurückgeführt. Wie auch beim analytischen Ansatz gilt die Schrittfolge aus Bild 5-1.

Die Simulation wird für $N = 100.000$ Simulationsdurchläufe durchgeführt. Dies entspricht einer Rechenzeit von ca. 10sek. .

Für die Ausfalldichte des Testdatensatzes (Bild 5-2), nunmehr abgebildet durch simulierte Ereignisse folgt die Darstellung in Bild 5-7.

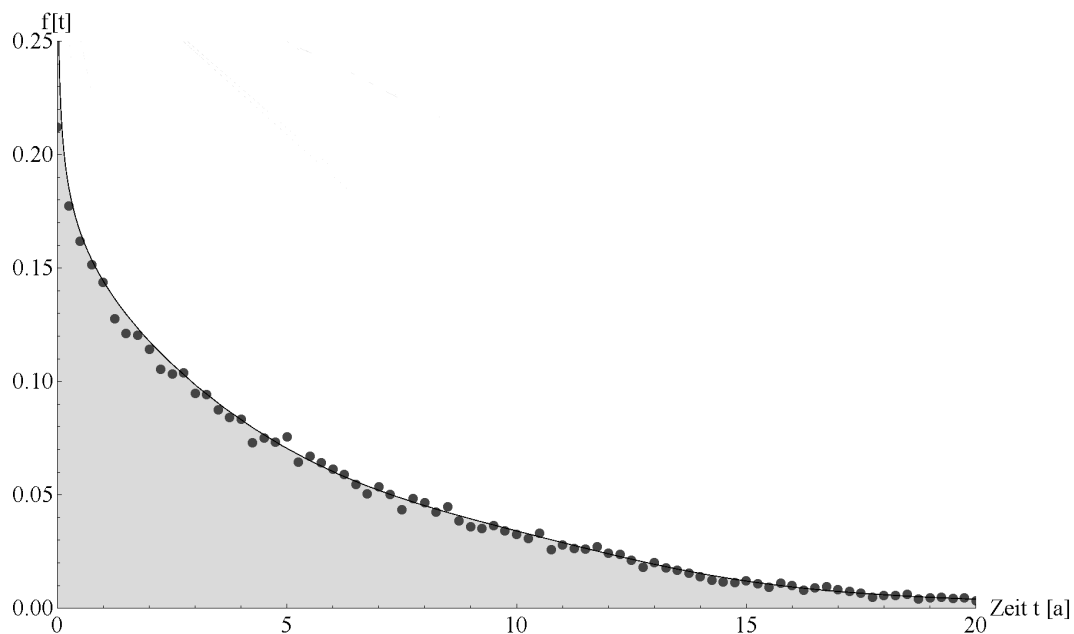


Bild 5-7: Ausfalldichte des Testdatensatzes mittels MCS

Die Punkte stellen die simulierten Ereignisse in 0,5er Schritten dar. Diese Klassierung wurde aufgrund einer besseren graphischen Darstellbarkeit gewählt. Für eine reine Ergebnissimulation ist die Darstellungsart nicht relevant.

Die Extraktion wird bei der Anwendung der MCS in derselben Reihenfolge wie in Abschnitt 5.4.2 durchgeführt. Die Reihenfolge ist demnach:

1. Extraktion der Datensätze mit einem charakteristischen Frühausfallverhalten (Belastungsart I),
2. Extraktion der Datensätze mit einem charakteristischen Verschleißausfallverhalten (Belastungsart II),
3. Extraktion der Datensätze mit einem zufälligen Ausfallverhalten (Belastungsart III) und

4. Überprüfung der verbleibenden Belastungsart IV, welche normalverteilte Ausfälle beinhaltet.

Die graphischen Ergebnisse der Simulation sind in den Bildern 5-8 bis 5-10 zu sehen. Ausgehend von der simulierten Gesamtausfalldichte (siehe Bild 5-7) wird nun die jeweilige Belastungsart, gegeben durch ihre Verteilungsfunktion, simuliert und die entsprechend simulativ generierten Ausfälle von der Menge der Gesamtausfälle abgezogen.

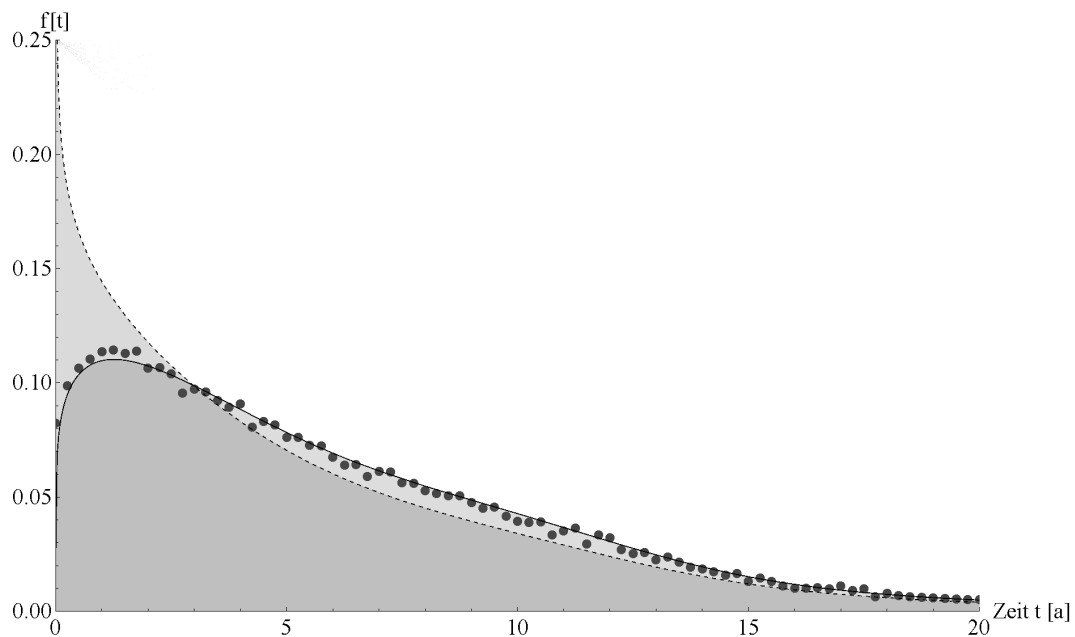


Bild 5-8: Gesamtdichtefunktion (gestrichelt) und verbleibende simulierte Restdichtefunktion ohne Belastung I

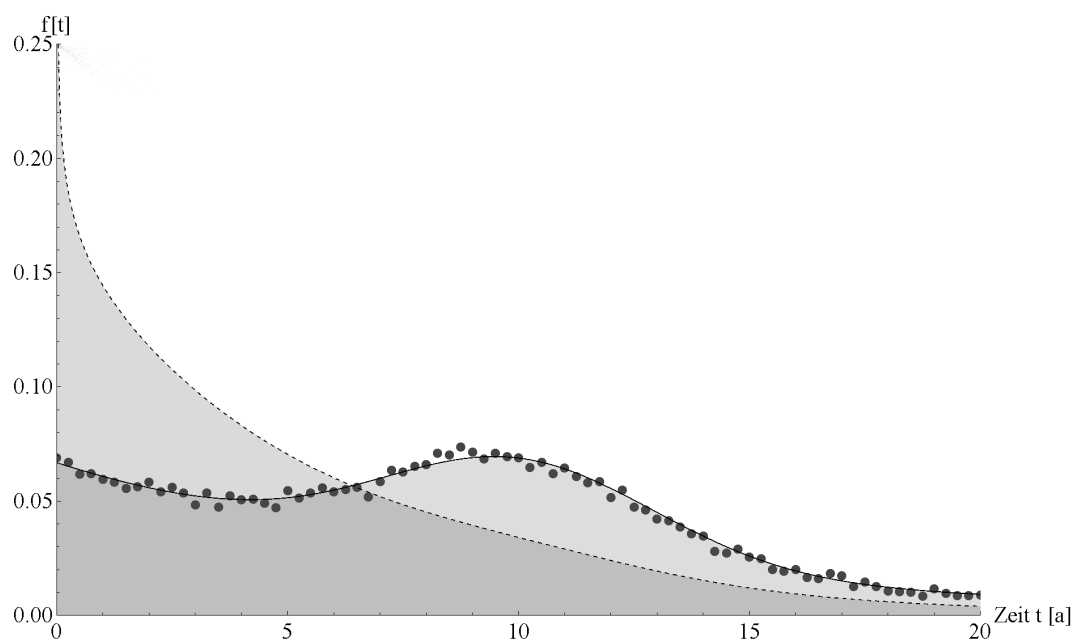


Bild 5-9: Gesamtdichtefunktion (gestrichelt) und verbleibende simulierte Restdichtefunktion ohne Belastung I und II

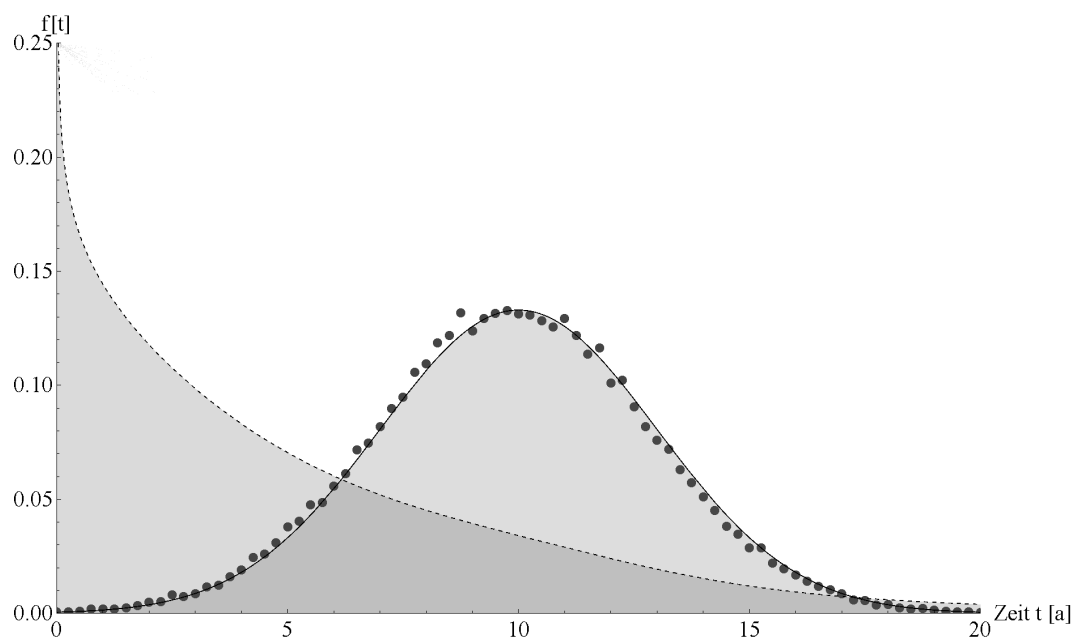


Bild 5-10: Gesamtdichtefunktion (gestrichelt) und verbleibende simulierte Belastung IV

Die Validierung des Testdatensatzes mittels Monte-Carlo-Simulation zeigt, dass auch auf der vierten Analyseebene (vergleiche Bild 2-3) eine MCS zur Ermittlung eines Schätzers für die Nutzungs- und Belastungsanalyse, auch unter Berücksichtigung spezieller Wichtungen sehr effizient und einfach, durchgeführt werden kann.

5.5 Zwischenfazit und Diskussion

Die in diesem Kapitel dargestellte Methode der direkten Belastungsanalyse zeigt, dass ein deduktiver Ansatz zur Beschreibung des Ausfallverhaltens unter der Berücksichtigung von Vorwissen sowohl analytisch als auch mittels Monte-Carlo-Simulation möglich ist. Invers zur induktiven Belastungsanalyse, bei der das benötigte Vorwissen iterativ - meist durch Labor- und Feldtests - bestimmt wird, muss bei deduktiven Analysen das Vorwissen rückwirkend durch Teildatenanalysen gewonnen werden. Die hierfür verwendeten Felddaten sind daher möglichst detailliert zu erheben und zu verwenden, um so einzelne Fehlerbilder oder Belastungsgruppen ermitteln zu können. Sind diese Daten nicht oder nur teilweise vorhanden, können die Ergebnisse aus den unterschiedlichen Analyseebenen der Monte-Carlo-Simulation (siehe Kapitel 3) hier eine große Hilfe beim Einstieg in die Belastungsanalyse darstellen. Gerade bei wenig Wissen über die Zusammensetzung des Ausfallverhaltens sind Simulationsmethoden zur Rekonstruktion der Ausfälle eine große Hilfe. Auch können hierüber, wie in Kapitel 3 gezeigt, auch Wichtungen abgeleitet und durch unterschiedliche Simulationsparameter miteinander verglichen werden.

Zusätzlich zur deduktiven Felddatenanalyse ist auch ein Vergleich mit den Test- und Prüfdaten interessant, die bei der Systementwicklung zur Abschätzung der Belastung erhoben wurden. Unter der Prämisse, dass mit dem hier vorgestellten Ansatz Korrelationen unter den Belastungen nicht expliziert quantifiziert, sondern gruppiert isoliert werden müssen, ist eine Untersuchung, ob eine Belastung in ihrem Verteilungstyp im Labor bzw. Test und im Feld ähnlich ist, erforderlich. Eine solche Vermischung von Test-, Prüf- und Felddaten über Raffungsfaktoren zur Umwandlung der unterschiedlichen Datenformen ineinander ist in [Vog 03] vorgestellt. Bei vorhandenem Detailwissen über ein spezielles Subsystem lässt sich hier ein weiterführender Ansatz entwickeln.

6 Ein indirekter Ansatz zur Belastungsanalyse über eine Belastungsfunktion

Im folgenden Kapitel werden Ansätze unterschiedlicher mathematischer Herangehensweisen zur indirekten Belastungsanalyse entwickelt und vorgestellt. Anders als bei der direkten Belastungsanalyse werden im indirekten Fall die Belastungen nicht absolut aus der Ausfallfunktion der Komponenten abgeleitet, sondern es werden die Belastungsunterschiede zwischen unterschiedlichen Nutzungsprofilen bestimmt. Diese Analyseform ist immer dann zu bevorzugen, wenn aus den Ausfalldaten keine eindeutigen Belastungsarten oder -gruppen abgeleitet werden können. Dennoch können aus dem Nutzungsverhalten Rückschlüsse auf den relativen Einfluss der Belastungen gewonnen werden. Zu beachten ist, dass es sich bei dem Vergleich der unterschiedlichen Nutzer (z.B. Märkte, Fahrertypen (vgl. Tabelle 2-2)) jeweils um dasselbe System handeln muss, welches betrachtet wird. Diese Randbedingung stellt sicher, dass die Fehlermodi nicht von Unterschieden in der Systemauslegung oder –architektur abhängig sind.

Eine erste Analyse hierzu wurde bereits in [Pli 10] veröffentlicht und anhand von Datensätzen im Rahmen eines DFG-Forschungsprojektes vorgestellt. Hierzu wurden unterschiedliche Fahrertypen in Wenig-, Normal- und Vielfahrer klassifiziert und die Belastungsunterschiede zwischen diesen Gruppen quantitativ ermittelt.

6.1 Ansatz über die Verteilungsdichte

Der erste indirekte Ansatz befasst sich mit der Ableitung der Belastungsunterschiede einer Komponente aus den Ausfalldichten $f_1(t)$ und $f_2(t)$ zweier unterschiedlich beanspruchter aber gleicher Systeme. Ausgehend von der Überlegung, dass die Ausfalldichte als Ableitung der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ nach der Zeit die Häufigkeit der Ausfälle zu einem Zeitpunkt t widerspiegelt, kann die Hypothese aufgestellt werden, dass ein Belastungsunterschied $B(t)$ den Wert der positiven Differenz der beiden Ausfalldichten zu einem Zeitpunkt t hat. Es gilt dann:

$$B(t) = |f_1(t) - f_2(t)| . \quad (6-1)$$

Dieser Zusammenhang impliziert, dass zwei Komponenten, die identischen Belastungen ausgesetzt sind, eine identische Ausfalldichte haben und somit

$$B(t) = 0 \text{ für } f_1(t) = f_2(t) \quad (6-2)$$

ist. Wird nun angenommen, dass eine Komponente stärker belastet wird als eine andere, so wäre der Einfluss der Belastung zum Zeitpunkt t durch die Unterschiede in der Ausfalldichte quantifizierbar.

Somit ist dann

$$B(t) > 0$$

mit

$$f_1(t) \neq f_2(t) \text{ und } f_1(t) > f_2(t) \quad (6-3)$$

oder

$$B(t) < 0$$

$$\text{mit } f_1(t) \neq f_2(t) \text{ und } f_2(t) > f_1(t) . \quad (6-4)$$

Dieser einfache Zusammenhang ist allerdings aufgrund der jeweils zweiten Bedingung, dass $f_1(t) > f_2(t)$ oder $f_2(t) > f_1(t)$ ist, theoretisch und praktisch nicht möglich.

Der Nachweis hierzu lautet wie folgt:

Gemäß der Definition der Ausfalldichte im Sinne einer Lebensdauerfunktion ist

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \text{ mit der Eigenschaft}$$

$$f(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

$$f(t) \geq 0 \text{ für } t \geq 0 \quad (6-5)$$

und

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$$

[Mey 10] .

Wenn nun aber beide Ausfalldichten $f_1(t)$ und $f_2(t)$ die Eigenschaft $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$ be-

sitzen und $f_1(t) \neq f_2(t)$ gilt, dann können die Fälle $f_1(t) > f_2(t)$ oder $f_2(t) > f_1(t)$ nicht existieren. Wäre dem so, müsste eine Ausfalldichte eine Fläche ungleich 1 besitzen. Bildlich gesprochen kann eine Funktion $f_2(t)$ unter den gegebenen Randbedingungen nicht vollständig innerhalb einer Funktion $f_1(t)$ liegen.

Bild 6-1 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

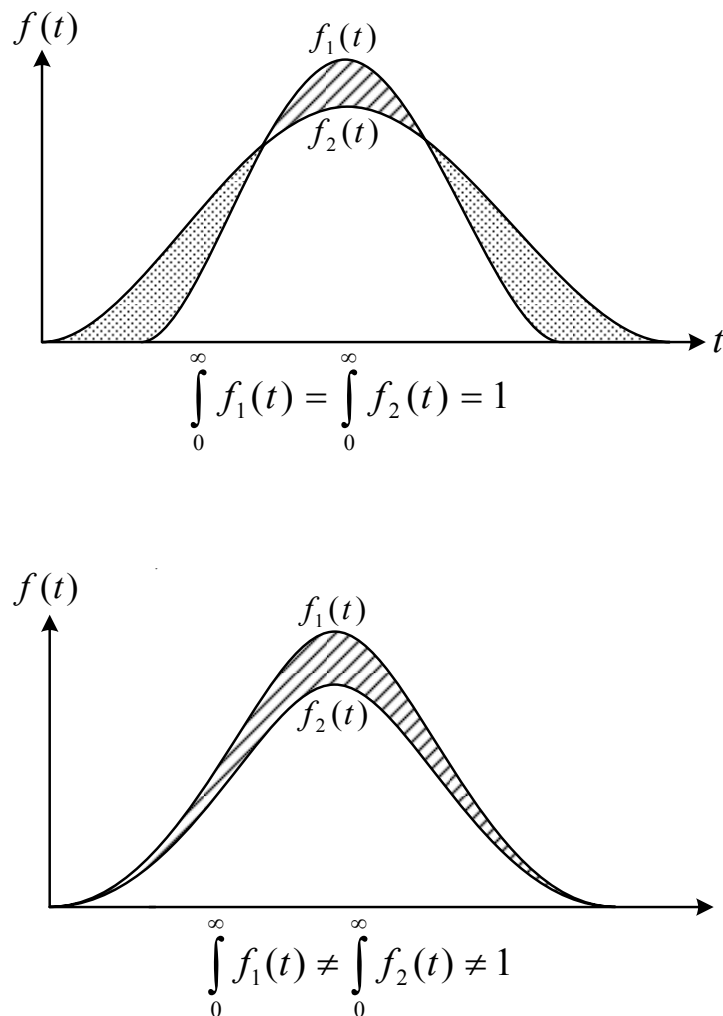


Bild 6-1: Darstellung der Schnittmenge von Dichtefunktionen

In Bild 6-1 sind im oberen Diagramm zwei normalverteilte Dichtefunktionen im Sinne von Lebensdauerverteilungen gegeben. Da die Funktionen ungleich sind, müssen nach obiger Definition sowohl Bereiche existieren, in denen $f_1(t) > f_2(t)$ ist als auch Bereiche, in denen $f_2(t) > f_1(t)$ ist. Eine hieraus abgeleitete Belastungsfunktion $B(t) = f_1(t) - f_2(t)$ besitzt somit auch Bereiche, in denen $B(t) < 0$ ist. Unter der Prämisse, dass eine negative Belastung ausgeschlossen ist, kann $B(t)$ um den Betrag erweitert werden. Ist nun $B(t) = |f_1(t) - f_2(t)|$, gehen die Informationen der spezifischen Belastungen von $f_1(t)$ und $f_2(t)$ durch den Betrag verloren. Somit können aus diesen Beziehungen keine quantitativen Belastungsinformationen gebildet werden. In Bild 6-1 ist nun entweder $f_1(t)$ oder $f_2(t)$ keine Dichtefunktion im Sinne einer Lebensdauerverteilung. Somit entfällt hier die Möglichkeit weiterer Berechnungen.

Der Ansatz des direkten Vergleiches unterschiedlicher Ausfalldichten zur Bildung einer Belastungsfunktion ist somit nicht weiter praktikabel.

6.2 Ansatz über die Ausfallrate

Aus den Erkenntnissen des vorherigen Abschnitts folgt der Schluss, anstatt der Ausfalldichte die Ausfallrate unterschiedlich belasteter Komponenten zur Bildung einer Belastungsfunktion zu verwenden.

Die Ausfallrate ist als bedingte Wahrscheinlichkeit über

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (6-6)$$

definiert. Die Ausfallrate in einem Intervall $t + \Delta t$ setzt somit das Überleben einer Einheit bis zum Zeitpunkt t voraus.

Weiterhin gilt $\int_0^{\infty} h(t) dt = \infty$.

[Mey 10].

Untersucht wird nun, ob eine Belastungsfunktion $B(t)$ durch die Differenz unterschiedlicher Ausfallraten nach

$$B(t) = h_1(t) - h_2(t) \quad (6-7)$$

mit $h_1(t) > h_2(t)$ für alle $t \geq 0$

gebildet werden kann.

Am Beispiel der Ausfallrate der Exponentialverteilung lässt sich die Idee der Ableitung von $B(t)$ aus unterschiedlichen Ausfallraten einfach herleiten. Es ist:

$$h(t) = \frac{1}{1-F(t)} \cdot \frac{dF(t)}{dt} = \frac{1}{1-e^{-\lambda t}} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} = \lambda = \text{konst. für } t \geq 0 \quad (6-8)$$

Nun ist für $\lambda_1 > \lambda_2$ die Belastungsfunktion $B(t)$ nach obiger Gleichung d.h.

$$B(t) = \lambda_1 - \lambda_2 = \text{konst.} \quad (6-9)$$

Somit wird hier eine konstante Belastung durch $B(t)$ impliziert. Aufgrund der fehlenden Konvergenz gegen einen festen Wert ist die Differenz der Ausfallrate als Belastungskenngröße allerdings nicht geeignet. Die fehlende Konvergenz leitet sich aus der Tatsache ab, dass die Ausfallrate zwar eine Zuverlässigkeitskenngröße, aber keine klassische Wahrscheinlichkeitsgröße ist. Dies ist dadurch begründet, dass es sich bei der Ausfallrate, wie bereits erwähnt, um eine bedingte Wahrscheinlichkeit

handelt. Die Betrachtung der Ausfallrate als Wahrscheinlichkeit $P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t)$ ($T =$ Zufallsvariable) verdeutlicht, dass diese Kenngröße von der Überlebenswahrscheinlichkeit einer Komponente abhängt. So kann die Ausfallrate für einige, in der Zuverlässigkeitstechnik gängige, Verteilungsfunktionen gegen $\lim_{R(t) \rightarrow 0} h(t) = \infty$ streben. Dies führt jedoch zu nicht normierbaren Werten, welche auch nicht durch weitere Umformungen transformierbar sind. Insofern scheidet auch dieser Ansatz zur Bestimmung einer Belastungsfunktion aus.

6.3 Ansatz über die Verteilungsfunktion

Basierend auf den Erkenntnissen aus den Abschnitten 6.1 und 6.2 wird in diesem Abschnitt eine neue Methode zur indirekten Belastungsanalyse, basierend auf einer Verteilungsfunktion zur Ermittlung der Belastungsunterschiede, hergeleitet und begründet.

6.3.1 Schrittfolge

Der folgende Ansatz befasst sich mit der Ermittlung einer normierten Funktion zur Erfassung der Gesamtbelastungsunterschiede zweier (nahezu) identischer Einheiten unter Berücksichtigung unterschiedlicher Nutzungs- und Belastungsparameter (Belastungsprofile, siehe Bild 6-2). Ziel ist es, nach der Aufstellung einer solchen Funktion, diese in Einzelbelastungen zu unterteilen und so nach und nach den Einfluss der einzelnen Belastungsunterscheide auf das Ausfallverhalten der Gesamtbelastung zu extrahieren. Hierbei liegt die besondere Schwierigkeit in der Aufteilung der Verteilungsfunktionen. Während die Integration in Form einer Induktion mehrerer Funktionen ineinander über verschiedene mathematische Wege in den meisten Fällen relativ einfach erfolgen kann, ist die Extraktion einer mathematischen Funktion aus einer anderen ungleich schwieriger. Hierzu wird die Methode der inversen Faltung auf die Funktion der Summe der Belastungsunterschiede angewendet. Hierbei ist es erforderlich, dass die zu extrahierende Funktion in ihrem Typ bekannt ist. Sobald die Extraktion einer Belastungsgruppe erfolgreich durchgeführt wurde, ist die verbliebene Funktion die neue Teilsumme ohne die extrahierte Belastungsgruppe. Theoretisch können so, bei perfekter Datenlage und Systemkenntnis, sukzessive alle einzelnen Belastungsarten extrahiert und bewertet werden. Dieses ist jedoch momentan, aufgrund zu geringer Datenbasen, noch nicht möglich. Auch können in

der Praxis die Belastungsprofile auf Gesamtfahrzeugebene aus demselben Grund nicht so detailliert aufgeteilt werden, wie es theoretisch möglich wäre. In dieser Arbeit wird der indirekte Ansatz zur Quantifizierung der Belastungsunterschiede entsprechend der Schrittfolge des Bildes 6-2 theoretisch hergeleitet und seine Anwendung beschrieben.

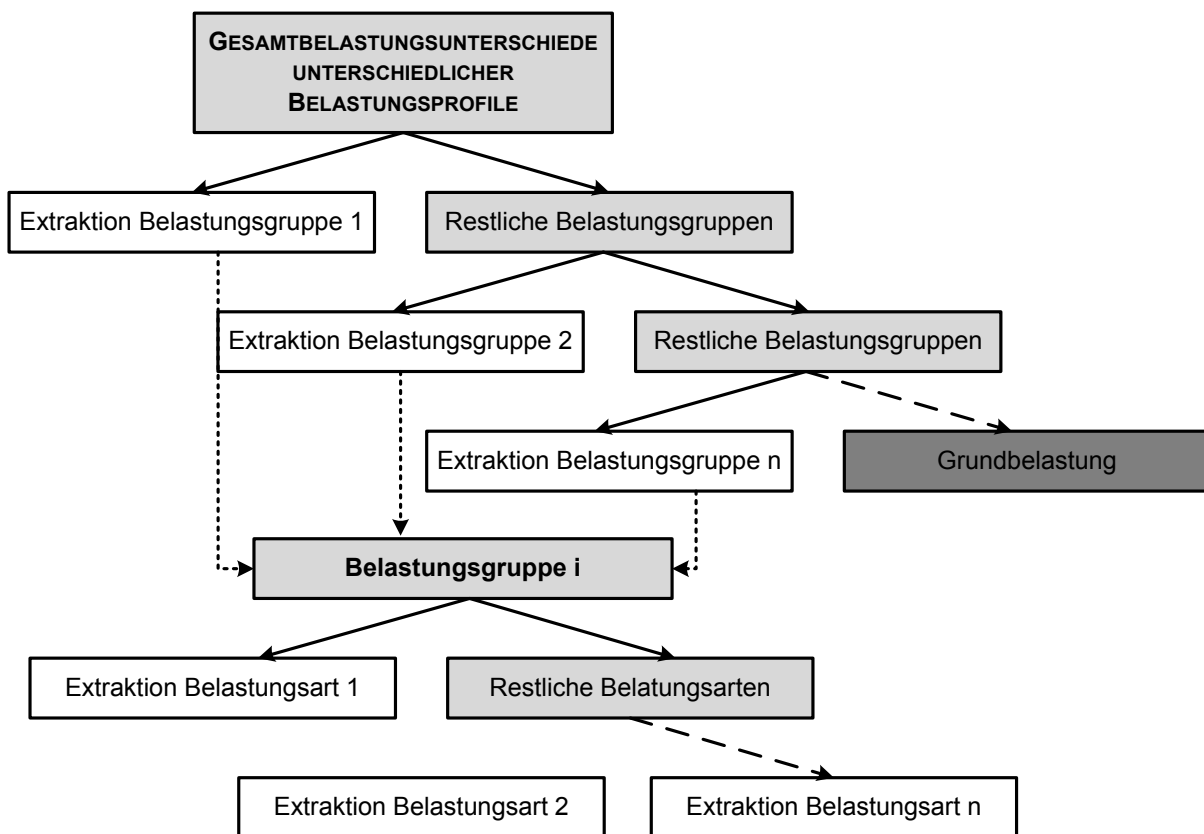


Bild 6-2: Schrittfolge zur Extraktion des Einflusses der Einzelbelastungsunterschiede

6.3.2 Erzeugung der Summe der Belastungsunterschiede

Der erste Schritt beinhaltet die Erzeugung der Belastungsunterschiede. Basierend auf den Erkenntnissen der Abschnitte 6.1 und 6.2 wird nun der Ansatz verfolgt, die Summe der Belastungsunterschiede aus den Ausfallwahrscheinlichkeiten unterschiedlicher Fahrerprofile zu erzeugen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ ist dabei aufgrund ihrer Randbedingungen für diese Erzeugung geeignet.

Es gilt:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (6-10)$$

mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(T \leq t) = 1$$

wobei $F(t)$ bekanntlich vom Ursprung als stetig steigende oder gleiche Funktion mit

$$\int_0^{\infty} F(t) dt = \infty \text{ definiert ist.}$$

Somit folgt $\int_0^{\infty} F(t) dt = \infty$. Diese Eigenschaft führt nun wiederum dazu, dass, im Ge-

gensatz zur Ausfalldichte (siehe Bild 6-1), für zwei Ausfallwahrscheinlichkeiten $F_1(t)$ und $F_2(t)$ der Fall $F_1(t) \geq F_2(t)$ für alle $t \geq 0$ existieren kann (siehe Bild 6-3). Dies ermöglicht die Bildung einer ersten Belastungsfunktion $B(t)$.

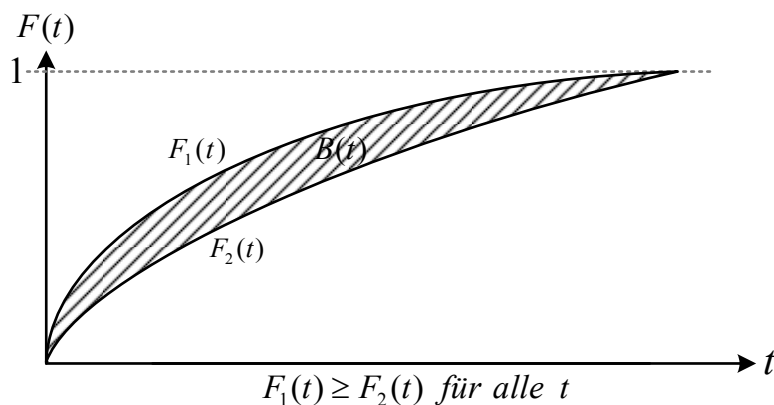


Bild 6-3: Darstellung der Belastungsfunktion B(t)

Diese Belastungsfunktion $B(t)$ ist vollständig gegeben durch:

$$B(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ F_1(t) - F_2(t) & 0 \leq t < t_{\max} \\ 0 & t \geq t_{\max} \end{cases} \quad (6-11)$$

Der Zeitpunkt t_{\max} sei hierbei der Zeitpunkt t , an dem zum ersten Mal $F_1(t) = F_2(t) = 1$ ist. Aus der Bedingung $F_1(t) \geq F_2(t)$ ergibt sich nun $B(t) \geq 0$ für $0 \leq t < t_{\max}$. Negative Werte sind ausgeschlossen. Somit wird in den meisten Fällen eine Funktion erzeugt, die in ihrem Verlauf einer in den Nullpunkt verschobenen Normal- oder Log-Normal-Verteilung ähnelt (Bild 6-4). Ausnahmen sind Fälle, in denen spezielle Fehlerbilder

bei nur einem Belastungsprofil kurzfristig zu einem Anstieg der Ausfallwahrscheinlichkeit führen.

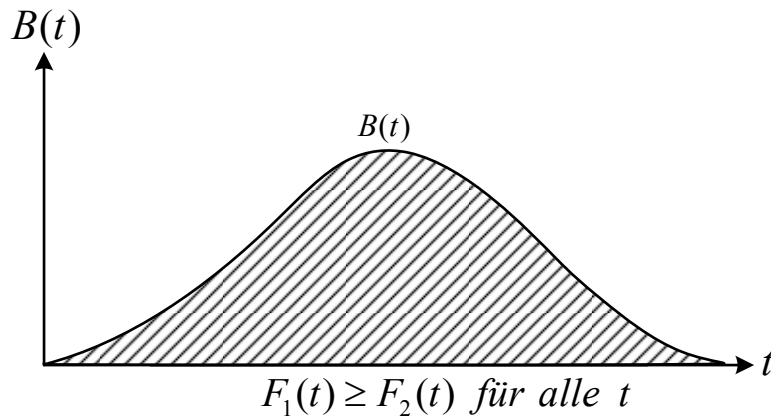


Bild 6-4: Darstellung der Belastungsfunktion B(t)

Für $B(t)$ gilt nun, dass der Wert des Integrals $\int_0^{\infty} B(t) dt$ nicht gegen einen bestimmten

Wert konvergiert. Sind die Unterschiede in den verwendeten Belastungsprofilen $F_1(t)$ und $F_2(t)$ sehr groß, so ergibt sich auch eine große Fläche für $B(t)$. Sind die Unterschiede sehr gering oder im Extrem $F_1(t) = F_2(t)$, so wird der Wert des obigen Integrals sehr klein oder sogar null (siehe Bild 6-5). Dies bedeutet, dass sich der

Wert des Integrals $\int_0^{\infty} B(t) dt$ als Maß für die Bestimmung der Auswirkung der extrahierten Belastungsunterschiede auf das Gesamtausfallverhalten eignet.

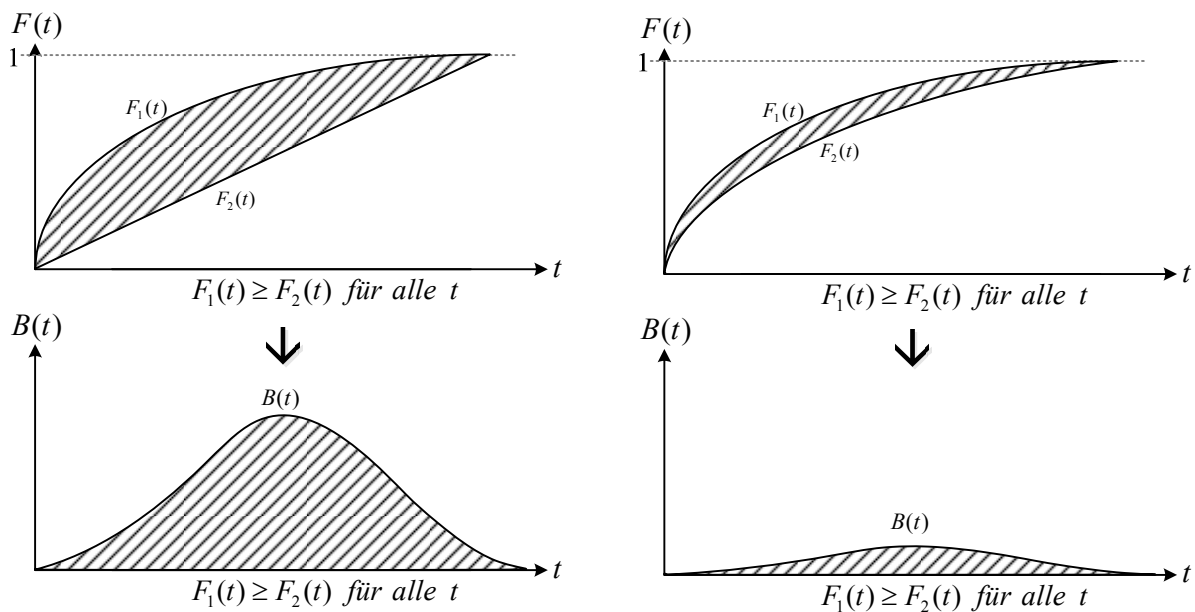


Bild 6-5: Unterschiedliche Ausprägungen der Belastungsfunktion B(t)

Aus dieser Beziehung folgt auch, dass es sich bei der Belastungsfunktion $B(t)$ nicht um eine Funktion im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsfunktion handelt. Auch wenn dies optisch den Anschein haben mag, ist eine der Grundbedingungen einer Lebensdauervertelung $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$ für $B(t)$ nicht erfüllt. Somit kann diese Funktion nicht weiter in spezielle Verteilungsfunktionen aufgeteilt werden. Um dies dennoch zu ermöglichen, wird die Funktion $B(t)$ durch die Einführung eines Belastungsfaktors in eine Belastungsfunktion $b(t)$ transformiert, die durch diese einfache Transformation eine Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellt.

Mit Hilfe der einfachen Beziehung:

$$1 = \kappa \cdot \int_0^{\infty} B(t) dt \rightarrow \kappa = \frac{1}{\int_0^{\infty} B(t) dt} \quad (6-12)$$

mit $\kappa = \text{Belastungskorrekturfaktor}$

folgt

$$b(t) = \kappa \cdot B(t) \quad (6-13)$$

Die so gebildete, neue Belastungsfunktion $b(t)$ kann nun zur deduktiven Aufteilung von Einzelbelastungsfunktionen gemäß Bild 6-2 verwendet werden. Zusätzlich ist auch der Belastungskorrekturfaktor κ von Interesse. Mit diesem kann bereits ein erstes Maß zur Quantifizierung des Einflusses der Belastungen im Verhältnis zu den verwendeten Belastungsprofilen gebildet werden. Der Korrekturfaktor ist ein direktes Maß für den Flächenunterschied der Belastungsfunktion und der Referenzfläche einer Dichtefunktion im Sinne einer Lebensdauervertelung. κ verläuft hierbei asymptotisch zum Ursprung. Hierbei ist auf der x-Achse die Differenz der Parameter der zu vergleichenden Nutzerprofile aufgetragen. Sind diese identisch, ist κ nicht definiert. Je mehr sich die Nutzerprofile voneinander unterscheiden, umso größer wird die Fläche der Belastungsfunktion $B(t)$ und κ antiproportional geringer. In Bild 6-6 ist der Verlauf von κ exemplarisch für die Belastungsfunktion zweier Exponentialvertelungen dargestellt.

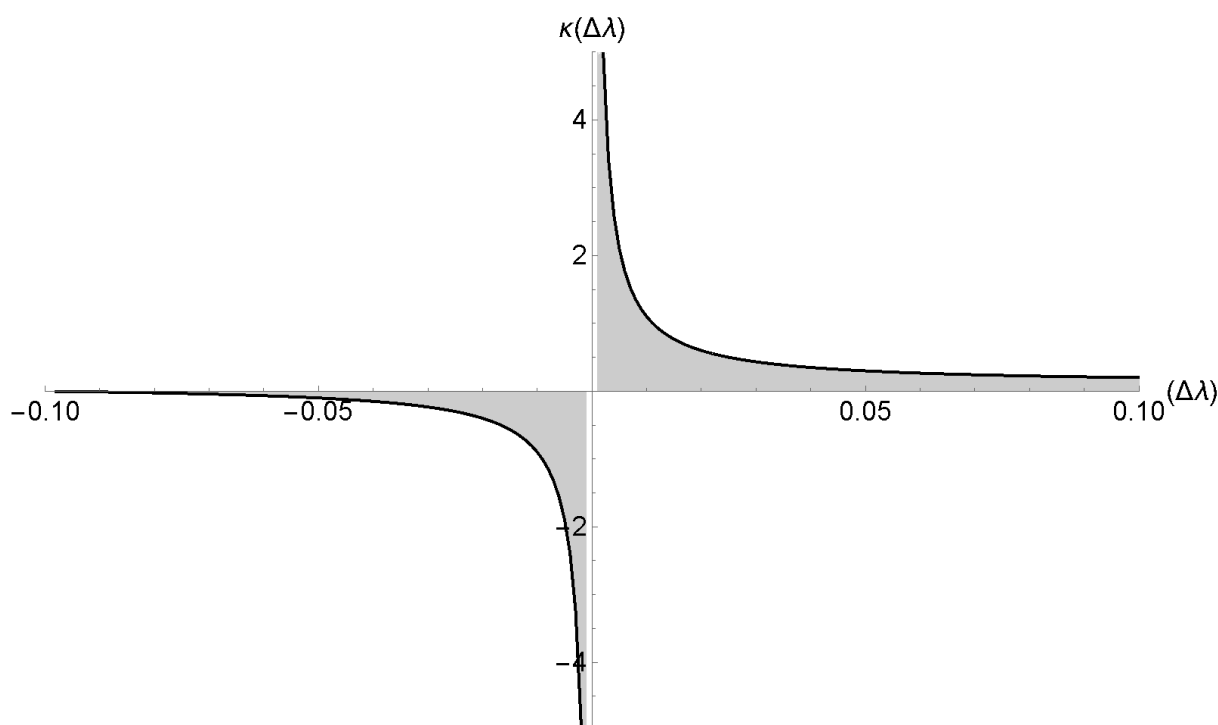


Bild 6-6: Verlauf von κ für die Belastungsfunktion durch zwei Exponentialverteilungen

Wie in Bild 6-6 ersichtlich, verläuft κ asymptotisch mit der Eigenschaft

$$\lim_{\substack{\Delta\lambda \rightarrow \infty \\ \Delta\lambda \rightarrow -\infty}} \kappa = 0 \text{ mit } \Delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (6-14)$$

Eine direkte Verknüpfung von κ mit einer qualitativen Eigenschaft, z.B. geringer, mittlerer oder hoher Belastungsunterschied, ist nicht möglich. Der Grund hierfür sind die asymptotischen Eigenschaften, die sich je nach Art der verwendeten Verteilungsfunktionen, sehr stark voneinander unterscheiden. So kann bei der Betrachtung der Belastungsunterschiede zweier Exponentialverteilungen der Wert für κ andere absolute Werte annehmen als für zwei Normalverteilungen. Das Streben gegen null ist jedoch davon nicht betroffen.

6.3.3 Definition und Formulierung neuer Belastungskenngrößen für die indirekte Belastungsanalyse

Gleichung (6-3) zeigt, dass die in Abschnitt 6.3.2 definierte Belastungsfunktion $b(t)$ den Eigenschaften einer Dichtefunktion im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsfunktion entspricht. Die so formulierte Belastungsdichtefunktion $f_{\text{Belastung}}(t) = b(t)$ kann somit nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie in weitere Belastungskenngrößen transformiert werden [Mey 10].

Für die Belastungswahrscheinlichkeit $F_{Belastung}(t)$ gilt analog zu den Zuverlässigkeits- und Sicherheitskenngrößen nun:

$$F_{Belastung}(t) = \int_0^t f_{Belastung}(\tau) d\tau . \quad (6-15)$$

Die Aufstellung einer Komplementärfunktion $R_{Belastung}(t) = 1 - F_{Belastung}(t)$ als Analogon zur Überlebenswahrscheinlichkeit bei den klassischen Zuverlässigkeitskenngrößen ist hier nicht sinnvoll.

Im Weiteren ergibt sich die Belastungsrate $h_{Belastung}(t)$ wie folgt:

$$h_{Belastung}(t) = \frac{f_{Belastung}(t)}{\int_0^t f_{Belastung}(\tau) d\tau} . \quad (6-16)$$

Unter Voraussetzung der obigen Gleichungen lässt sich nun bekanntlich auch der Erwartungswert der Belastungsfunktion $E_{Belastung}(T)$ bestimmen. Es gilt:

$$E_{Belastung}(T) = \int_0^{\infty} \left(1 - \int_0^t f_{Belastung}(\tau) d\tau \right) dt . \quad (6-17)$$

Die Definition der neuen Belastungskenngrößen ermöglicht eine vereinheitlichte Notation und Bewertung von Belastungen in Analogie zur Bewertung zuverlässigkeitstechnischer und sicherheitsrelevanter Kriterien. Es bleibt dennoch zu beachten, dass, wie oben bereits erwähnt, nur die relative Belastung zwischen zwei Nutzungs- bzw. Belastungsarten ermittelt wird. Die hier definierten Kenngrößen besitzen somit einen relativen Bezug. Zudem gilt die in Gleichung (6-11) definierte Randbedingung zur Erzeugung der ursprünglichen Belastungsfunktion $B(t)$. Es kann zusammenfassend daher eher von einem Satz „spezieller Belastungskenngrößen“ gesprochen werden, da eine allgemeine Anwendung ohne Berücksichtigung von Randbedingungen nicht möglich ist.

6.3.4 Aufteilung in Einzelbelastungsunterschiede mittels unterschiedlicher Transformationsverfahren

Der Kern der indirekten Belastungsanalyse ist die Aufteilung der Belastungsdichtefunktion $f_{Belastung}(t)$ in die Einzelbelastungsunterschiede. Aufgrund der Tatsache, dass $f_{Belastung}(t)$ über die Differenz der Ausfallwahrscheinlichkeiten gebildet wird, können

aus dieser Funktion die Belastungen nicht direkt abgeleitet werden. Auch aus dem Verlauf von $f_{\text{Belastung}}(t)$ lassen sich aufgrund oben genannter Bedingungen $f_{\text{Belastung}}(t \leq 0) = 0$, $f_{\text{Belastung}}(t > 0) \geq 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{\text{Belastung}}(t) = 0$ keine direkten Belastungen durch Bildung einer Differenz ableiten. Der Verlauf muss immer einer Glockenkurve ähneln (siehe Bild 6-5). Somit können bei einer direkten Betrachtung (Differenz der Gesamtbelastungsfunktion und einzelnen Verteilungsfunktionen) keine Verteilungsfunktionen, auch nicht unter Anwendung einer Gewichtung, extrahiert werden. Daher muss ein anderer Ansatz zur Aufteilung gefunden werden. Hierzu ist es hilfreich, die zugrunde gelegten Daten in Hinsicht auf ihre Eigenschaften hin zu prüfen:

Da es sich bei den ausgewerteten Ausfallwahrscheinlichkeiten in der Basis um Feld-daten handelt, gilt immer, dass in $f_{\text{Belastung}}(t)$ alle einwirkenden Belastungen auf ein System enthalten sind. So müssen also auch alle enthaltenen Verteilungsfunktionen, sofern sich Belastungsunterschiede durch sie darstellen lassen, enthalten sein. Diese Funktion der Belastungsunterschiede ist somit die Summe der Einzelbelastungsunterschiede.

Die Zielsetzung des indirekten Ansatzes besteht nun darin, aus der bekannten und empirisch ermittelten Gesamtausfalldichte $f_{\text{Belastung}}(t)$ unter Nutzung von Vorwissen, gegeben durch eine bestimmte und bekannte Ausfalldichte, mittels inverser Faltung durch Extraktion die verbleibende (gesuchte) Ausfalldichte zu bestimmen (Bild 6-2). Zum besseren Verständnis der inversen Faltung wird nachfolgend zunächst komprimiert der allgemeine Begriff der Faltung kurz erläutert.

Mathematischer Begriff der Faltung und Korrelation

In der Funktionsanalyse wird bekanntlich mittels Faltung (Konvolution) zweier Funktionen f und g mittels des sogenannten Faltungsoperators $*$ d.h. $f * g$ eine dritte Funktion h gebildet. Die Faltung kann demnach als Produkt von Funktionen angesehen werden (Gleichung 6-18).

Bekanntlich stellt die Faltung ein probates Mittel zur Beschreibung zahlreicher physikalischer Vorgänge, besonders in der Nachrichtentechnik (Signalverarbeitung), dar. Auch in der Zuverlässigkeitstheorie wird die Faltung genutzt. So kann beispielsweise die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Standby-Systems bestehend z.B. aus zwei Einheiten über die Verteilungsdichte der Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen $T = T_1 + T_2$ durch das Faltungsintegral $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ bestimmt werden.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass bei Lebensdauerverteilungen, die per Definition auf der positiven Zeitachse definiert sind, die Faltung im Laplace-Bereich durch das Produkt gebildet werden kann, was rechentechnisch vorteilhaft ist [Mey 10].

Hinweis: Die im Folgenden verwendete Notation orientiert sich an der üblichen Schreibweise der Mathematik. Die Notation steht z.T. im Widerspruch zu der Notation der Zuverlässigkeitstheorie. So bezeichnet z.B. $h(t)$ keine Ausfallrate und $f(t)$ ist nicht zwingend die Dichteverteilung einer Verteilungsfunktion. Zudem wird die abhängige Variable für die allgemeine Anwendung auf x geändert. Dies verdeutlicht die allgemeine Anwendbarkeit der Belastungsanalyse unabhängig von der Bezugsgröße Zeit.

Die Faltung $h(x)$ zweier unabhängiger stetiger Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ wird allgemein über das Faltungsintegral

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(x - z) dz \quad (6-18)$$

ermittelt.

Die Faltung beinhaltet dabei folgende Schritte [Bri 95]:

1. *Spiegelung:* Durch $g(-x)$ wird die Funktion h an der x -Achse gespiegelt.
2. *Verschiebung:* Die Laufvariable x verschiebt nun $g(-x)$ um x .
3. *Multiplikation:* Die nun verschobene Funktion $g(x - z)$ wird mit $f(z)$ multipliziert.
4. *Integration:* Die Fläche der Multiplikation ist nun der gesuchte Wert des Faltungsintegrals zum Punkt x .

Speziell in Hinsicht auf Anwendungen im Bereich der Belastungsanalyse ist der Begriff der *Korrelation* nicht mit seiner Bedeutung in der Mathematik zu verwechseln. Im Rahmen einer Belastungsanalyse beschreibt der Begriff der Korrelation die Wechselwirkungen bzw. Abhängigkeiten mehrerer Belastungen untereinander.

Im Bereich der Mathematik ist die Korrelation eine Funktion, die in Analogie zur Faltung steht. Die Korrelation $h(x)$ zweier stetiger Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ wird über

$$h(t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(x+z) dz \quad (6-19)$$

gebildet. Dieser Term unterscheidet sich lediglich durch $(x+z)$ von dem Term der mathematischen Faltung $(x-z)$. In Anlehnung an die Schritte der Faltung (siehe oben) fehlt somit nur der erste Schritt der Spiegelung der Funktion $g(x)$ an der x-Achse. Das Ergebnis ist dann dasselbe wie beim Faltungsintegral, nur ist die Korrelationsfunktion $h(t)$ stets um den Mittelpunkt verschoben.

Interessant ist nun, welche verschiedenen Elemente von unterschiedlichen Verteilungsfunktionen in $b(t)$ enthalten sind und wie diese extrahiert werden können.

Im Rahmen einer praxisnahen indirekten Belastungsanalyse möge die Belastungsdichtefunktion $b(t)$ vorliegen. Diese muss nun, unter der Voraussetzung, dass sie theoretisch bereits die gefaltete Basis $h(t)$ besitzt, invers gefaltet werden, um so die Einzelbelastungen zu extrahieren $h(t) := b(t)$.

Hier ergibt sich die Herausforderung, diese Vorgaben mathematisch umzusetzen. Die inverse Faltung (auch Dekonvolution genannt) ist ein Problem in der Mathematik, welches sich mit der Bildung inverser Faltungsprodukte beschäftigt.

In der Theorie beschreibt sie das Problem, dass aus der Summe einer verschobenen integrierten Funktion die Einzelterme nicht mehr rekonstruiert werden können. Während bei nicht verschobenen und integrierten Funktionen multiplikative Umformungen durch Division reversibel sind, sind bei den Faltungsoperatoren die Informationen über die Zusammensetzung verloren gegangen. Ausnahmen sind Faltungen von Funktionen mit sogenannten Sprungfunktionen (z.B. Dirac-Funktionen), die in ihrem Kern auf einem Punkt basieren und daher auch durch inverse Faltung reversibel sind.

Als Beispiel dient ein Zusammenhang aus dem Hauptanwendungsgebiet der Dekonvolution, der Signalverarbeitung. Hier werden Bilddaten, die in Rohformaten vorliegen, mit bestimmten Verfahren verändert. Diese Verfahren (z.B. Filter, Farbcodierungen, Rauschalgorithmen div. Art) lassen sich, auch unter dem Wissen, welche Algorithmen verwendet wurden, im Nachhinein nicht mehr rekonstruieren (Bild 6-7).

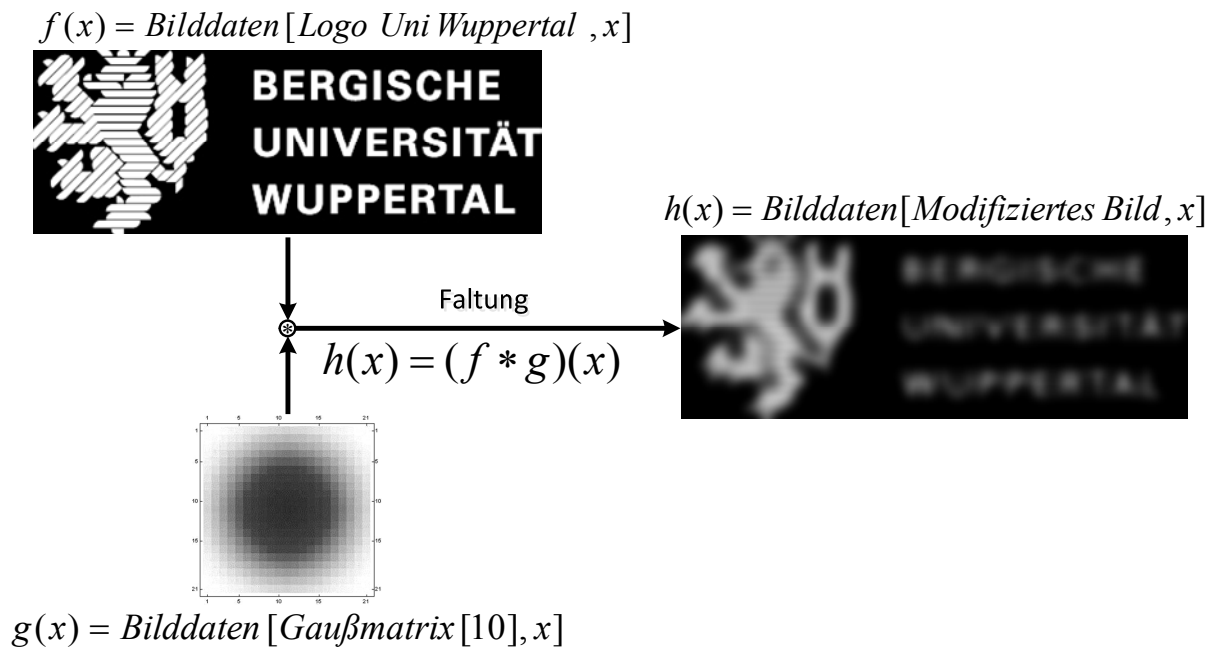


Bild 6-7: Beispiel einer Faltung einer Grafik mit einer bekannten Unschärfe.

Quelle: <http://www.grafik.uni-wuppertal.de/startseite-grafikdesign/logo-und-siegelform.html>

[01.11.2014]

In dem Moment der Faltung sind in der Summenfunktion $h(x)$ durch die schrittweise Überlagerung von $g(x)$ die eindeutigen Informationen aus $f(x)$ verloren gegangen (siehe Bild 6-8).

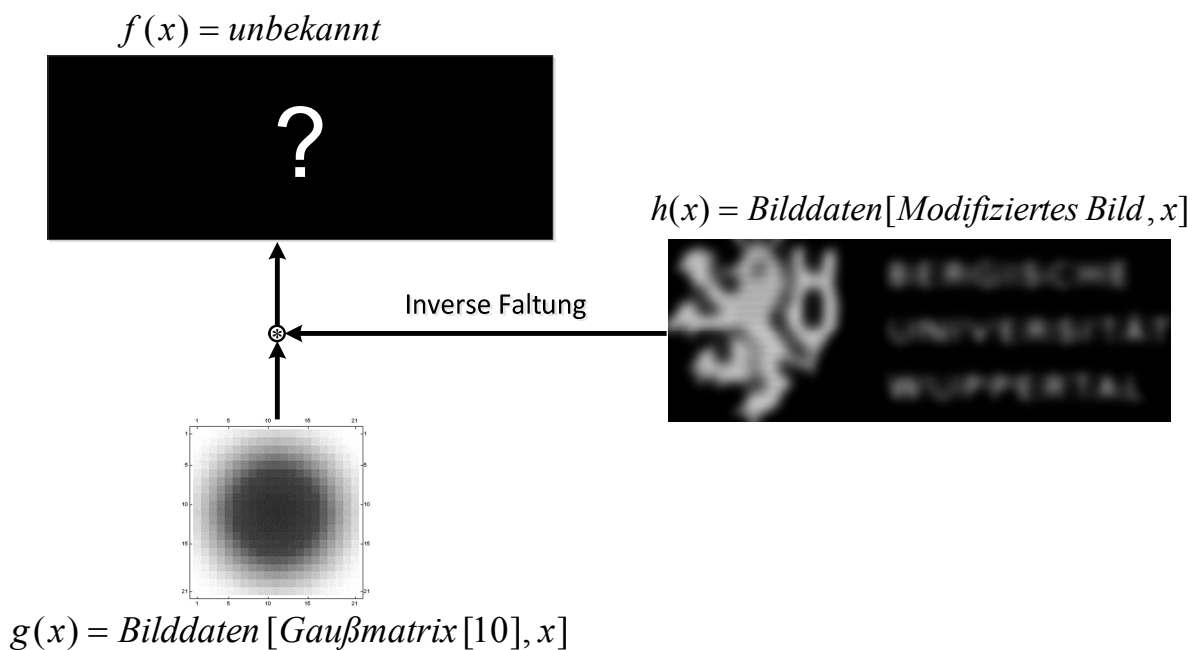


Bild 6-8: Versuch der inversen Faltung

Eine Rekonstruktion der Bilddaten von $f(x)$ ist nicht mehr möglich. Es sei darauf hingewiesen, dass es im Bereich der inversen Faltung, insbesondere in der Grafikbearbeitung, eine Vielzahl an Methoden und speziellen Algorithmen gibt, die Lösungen approximieren [Vet 02]. Die Originalfunktion kann dennoch nicht mehr hergestellt werden. Somit ist die beliebte Nachschärfung von Kameraaufnahmen in vielen Filmen, die im Anschluss ein gestochen scharfes Bild ergeben, eher als Fiktion zu werten, selbst wenn der Komprimierungsalgorithmus des verwendeten Video-Codes bekannt ist.

Auch in der „einfachen Mathematik“ gehen Informationen durch Addition verloren. So ist z.B. $4+1=5$, und die 4 und die 1 lassen sich auch leicht isolieren. Ist allerdings nur die Summe 5 und die Tatsache, dass einer der beiden Summanden eine 1 war, bekannt, lässt sich nicht auf die 4 als Zahl schließen. Der Wert 4 ist zwar eindeutig, aber die Information, ob es 4, $\sqrt{16}$, 2^2 , ... oder eine andere Form des Wertes 4 war, welche zu 1 addiert wurde, ist im Nachhinein verloren. Aus ergebnisorientierter Sicht mag diese Fragestellung zwar irrelevant sein, im Rahmen von angewandten Betrachtungen ist jedoch die exakte Form eines Wertes von Interesse.

Eine (Teil-) Lösung für dieses Problem stellt in Hinsicht auf die Anwendung auf Verteilungsfunktionen die Transformation der Berechnung aus dem Zeitbereich in andere Bereiche dar. In unterschiedlichen stetigen oder diskreten Bildbereichen lässt sich die Faltung mitsamt ihren Schritten in einfache Rechenoperationen umwandeln. Eine inverse Transformation aus diesem Bereich heraus stellt dann die gesuchte Lösung im Zeitbereich dar. Eine Schrittfolge der Anwendung dieser Idee für die indirekte Belastungsanalyse ist in Bild 6-9 als inverse Faltung dargestellt. Die Art der Darstellung wurde aus [Bri 95] entnommen und orientiert sich an dem stetigen Anwendungsfall. Für diskrete Analysen gilt sie allerdings ebenso.

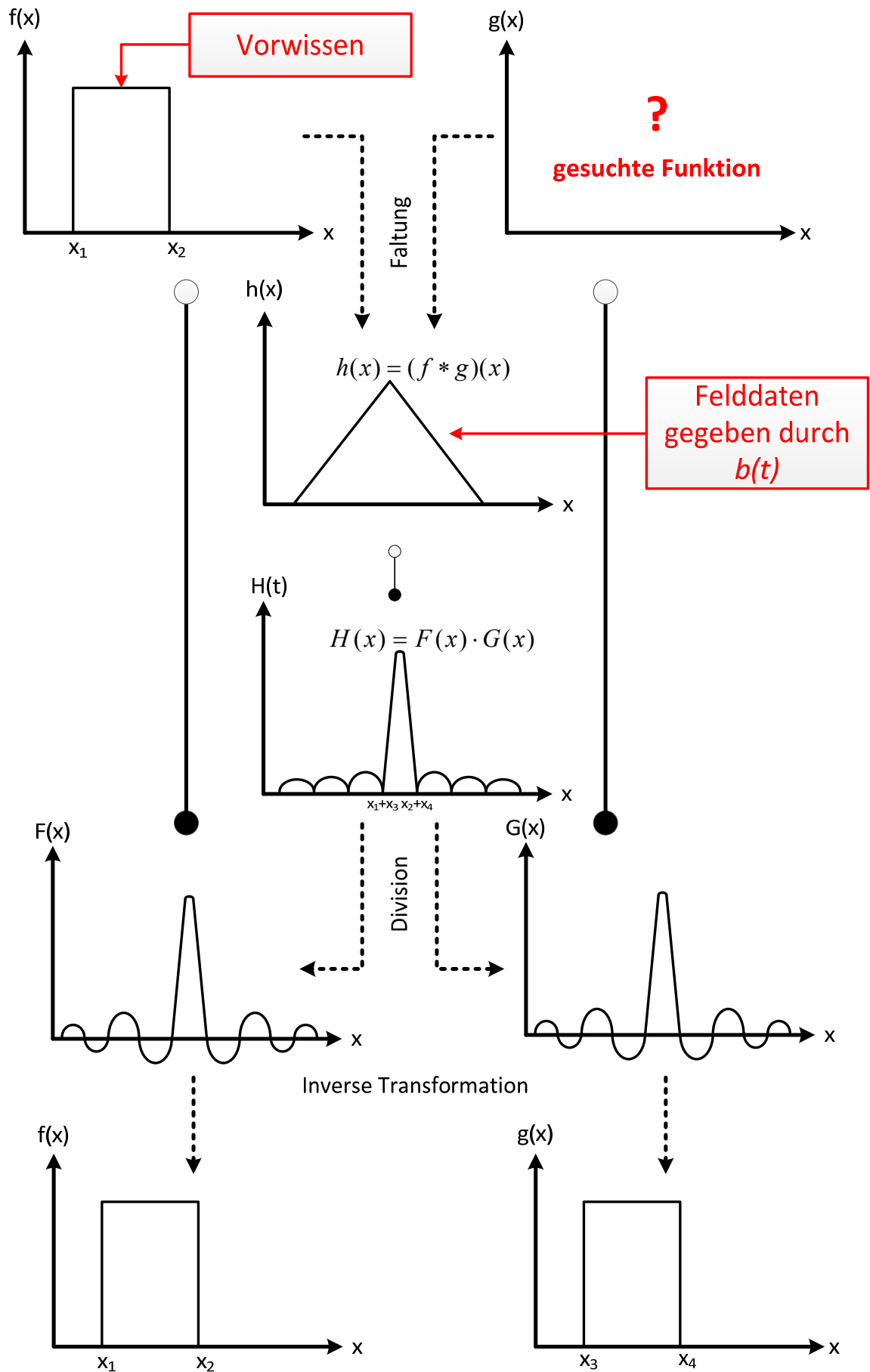


Bild 6-9: Schaubild der Transformationslösung zur indirekten Belastungsanalyse [Bri 95]

Zur Substitution der inversen Faltung wird die Belastungsdichtefunktion $b(t)$, in der allgemeinen Darstellung von Bild 6-9 durch $h(x)$ abgebildet und in einem Bildbereich transformiert. In den jeweiligen Bildbereichen ist das Faltungsprodukt nun das Ergebnis einer Multiplikation und nicht das einer Faltung. Es gilt für die in den folgenden Abschnitten dargestellten Formulierungen das Faltungstheorem nach:

$$f(x) * g(x) \circ \longrightarrow \bullet F(x) \cdot G(x) \quad (6-20)$$

mit

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(x) \text{ und } \mathcal{F}(g(x)) = G(x) .$$

\mathcal{F} bezeichnet hier die jeweilige Transformierte der einzelnen Funktionen.

Bedingt durch das Faltungstheorem gilt nun im Bildbereich:

$$H(x) = F(x) \cdot G(x) \rightarrow F(x) = \frac{H(x)}{G(x)} \quad (6-21)$$

und vice versa für $G(x)$.

Die inverse Faltung, die, wie in Bild 6-9 dargestellt, das Ziel hat, eine der beiden Faltungsfunktionen zu rekonstruieren, kann so vermieden werden.

Die Division im Bildbereich ist einfach durchführbar. Dennoch ist diese Lösung (auch wenn sie als allgemeine Lösung für das inverse Faltungsproblem gilt) nicht immer anwendbar. So ist die darauf folgende und zwingend notwendige inverse Transformation aus dem Bild- in den Zeitbereich teils nicht oder nur schwer bestimmbar.

Dies liegt an den jeweiligen Transformationseigenschaften der einzelnen Bereiche.

In den folgenden Abschnitten werden die Fourier-, Laplace-, und die z-Transformation, mit dem Ziel eine reale Belastungsfunktion $b(t)$ in Einzelbelastungen zu zerlegen, beschrieben.

Die Verwendung der z-Transformation stellt hierbei die Diskretisierung der Problemstellung dar. Die Diskretisierung stellt ein Analogon zur Monte-Carlo-Simulation her. Mittels Simulation werden, wie in den vorherigen Kapiteln bereits mehrfach beschrieben, zufällige Ereignisse erzeugt, die dann diskret verrechnet werden. Die z-Transformation verwendet, umgesetzt durch eine Abtastfunktion, ebenfalls diskrete Werte, die dann weiterverarbeitet werden. Eine Simulation der unterschiedlichen Faltungsfunktionen ist somit nicht erforderlich. Die allgemeine Vorgehensweise dieser Arbeit, analytische Ansätze mittels Simulation zu vereinfachen und zu valide Schätzer zu entwickeln, ist daher auch hier allgemein gültig.

Im Anwendungsfall folgt nachfolgend für jeweils zwei unabhängige Verteilungsfunktionen eine Validierung. Der Ablauf erfolgt wiederum entsprechend Bild 6-9. Dabei werden die zwei Verteilungsfunktionen in beiden Bereichen miteinander gefaltet. Zum einen durch das klassische Faltungsintegral im Zeitbereich und zum anderen durch Multiplikation im Bildbereich. Ist eine der beiden (oder beide) Operationen erfolgreich, wird im Anschluss die Summenfunktion im jeweiligen Bildbereich durch die bekannte Belastungsfunktion dividiert und invers transformiert.

Die in den folgenden Abschnitten verwendeten Grundformeln, Randbedingungen und Umformungen der Transformationen stammen aus [Web 12] und [Bri 95].

6.3.4.1 Anwendung der Fourier-Transformierten

Als erstes Transformationsverfahren wird nachfolgend die Fourier-Transformation zugrunde gelegt. Wie vorstehend erwähnt, kann die Fourier-Transformation als allgemeine Lösung des inversen Faltungsproblems herangezogen werden. Die Anwendungsmöglichkeiten der Fourier-Transformierten sind bekanntlich extrem vielfältig. Als gängige Transformation findet sie im Bereich der Elektrotechnik, speziell in der Signalverarbeitung, breite Anwendung. Die Fourier-Transformation wird jedoch auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie angewandt. Hier ist die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable die Fourier-Transformierte ihrer Verteilungsfunktion [Bri 95]. Generell dient die Fourier-Transformation, wie auch die in dieser Arbeit zugrunde gelegten anderen Transformationen, vorwiegend zur Vereinfachung von Rechenoperationen.

Grundsätzlich ist bei der Fourier-Transformation zwischen periodischen und nicht-periodischen Funktionen zu unterscheiden. Die periodischen Funktionen werden mit der Fourier-Reihenentwicklung berechnet, die ein Spezialfall der Fourier-Transformation darstellt [Bri 95]. Allerdings können auch nicht periodische Funktionen, wie sie im Bereich der Zuverlässigkeitstheorie vorliegen, mit der Fourier-Transformation entsprechend umgewandelt werden.

Für die Transformation gilt:

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad . \quad (6-22)$$

Die Variable f der Fourier-Transformierten verdeutlicht hier die Transformation vom Zeitbereich t in eine Frequenz f .

Für die inverse Transformation gilt dann:

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi f t} dt \quad (6-23)$$

Sind beide Gleichungen erfüllt, gelten $h(t)$ und $H(f)$ als Transformationspaar

$$h(t) \circ \bullet H(f) \quad (6-24)$$

Nun ist die Existenz eines Transformationspaares für die verwendeten Funktionen zu prüfen (die Diskussion, für welche Funktionen nach der Funktionstheorie Fourier-Transformierte existieren, wird an dieser Stelle nicht durchgeführt).

Für die hier beschriebenen Anwendungsfälle wird lediglich eine Grundbedingung vorausgesetzt.

Bedingung: Ist $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ absolut integrierbar, dann existiert deren Fourier-Transformierte $F(t)$ und erfüllt die Bedingungen der inversen Fourier-Transformation.

Die vorstehende Bedingung ist für jede Verteilungsdichte im Sinne einer Lebensdauerfunktion bekanntlich und wie bereits mehrfach erwähnt durch $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$ erfüllt. Dies gilt auch für die Belastungsfunktion $b(t)$ (siehe Gleichung (6-13)).

Neben dieser Grundbedingung gibt es auch für weitere Funktionen entsprechende Transformierte. Ausführungen hierzu finden sich u.a. in [Bri 95].

Die Existenz eines Transformationspaares zur Anwendung der Fourier-Transformation bei der indirekten Belastungsanalyse lässt allerdings nicht auf die praktische (rechentechnische) Durchführung der inversen Fourier-Transformation schließen.

Bedingt durch die Division der Summenfunktionen mit einer der Eingangsfunktionen z.B.

$$F(f) = \frac{H(f)}{G(f)}, \text{ ist } f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(f)) \text{ oftmals nicht ohne komplexe Hilfsfunktionen}$$

bestimmbar. Auch moderne CA-Systeme (Computer-Algebra-Systeme) bieten nicht die Möglichkeit für alle $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(f))$ Lösungen zu generieren. Entsprechend des Anspruches der indirekten Belastungsanalyse und deren Anwendbarkeit werden

somit mehrere gängige Kombinationen auf Ihre inverse Transformierbarkeit hin überprüft und bewertet.

Das generelle Vorgehen ist in Abschnitt 6.3.3. beschrieben. Hierzu folgt ein einfaches Beispiel.

Beispiel:

Zur Erzeugung zweier einfacher Nutzerprofile werden zwei Exponentialverteilungen zugrunde gelegt:

Es sei

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{ mit } \lambda_1 = 0.15 \frac{1}{a} \text{ und } G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_2 t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{ mit } \lambda_2 = 0.10 \frac{1}{a} . \quad (6-25)$$

Die aus diesen Funktionen generierte Belastungsfunktion $b(t)$ ergibt sich nach der Differenz der Verteilungsfunktionen $B(t) = F(t) - G(t)$ und

$$\kappa = \frac{1}{\int_0^{\infty} B(t) dt} = \frac{1}{\int_0^{\infty} (F(t) - G(t)) dt} = \frac{1}{\int_0^{\infty} -e^{-0.10t} + e^{-0.15t} dt} = 0.3 \quad (6-26)$$

nun über $b(t) = \kappa \cdot B(t)$ (Bild 6-10)

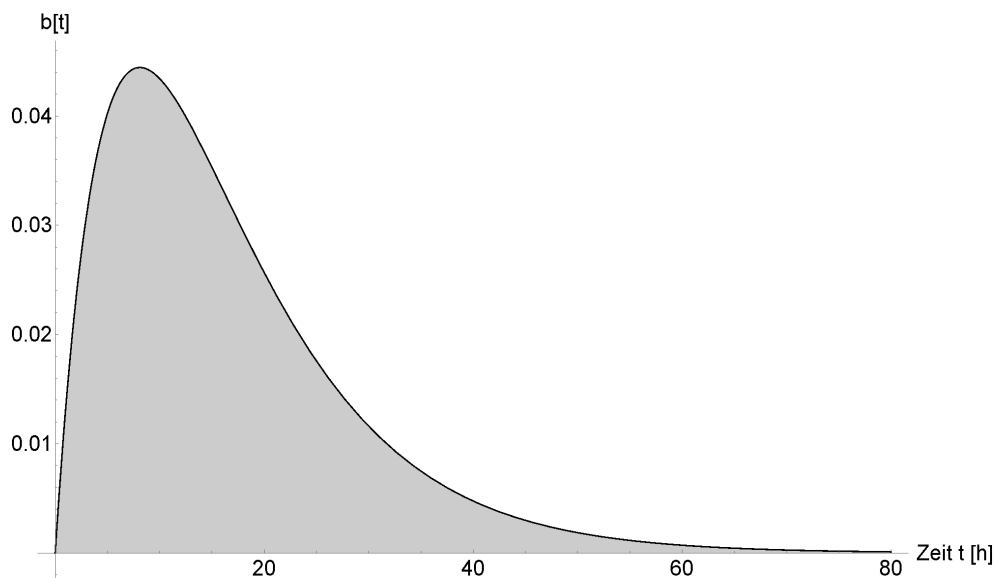


Bild 6-10: Belastungsdichte der unterschiedlichen Nutzerprofile

Die Transformation in den Bildbereich durch die Fourier-Transformation liefert:

$$b(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (-e^{-0.10t} + e^{-0.15t}) \cdot \kappa \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{0.00598413}{0.015 - (0 + 0.25j) \cdot f - f^2} . \quad (6-27)$$

Zur Ermittlung der inversen Eingangsfunktionen im Fourierbereich werden nun zwei Divisionen durchgeführt. Durch die inverse Fourier-Transformation können im An-

schluss die in diesem Beispiel gegebenen Testverteilungen wieder aus $b(t)$ rekonstruiert werden.

Für die inverse Eingangsfunktion $fInv(f)$ folgt

$$fInv(t) = \mathcal{F}^{-1}(f(f)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{b(f)}{g(f)}\right). \quad (6-28)$$

Die inverse der Eingangsfunktion g , $gInv(f)$ ist nun analog

$$gInv(t) = \mathcal{F}^{-1}(g(f)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{b(f)}{f(f)}\right) \quad (6-29)$$

jeweils mit

$$f(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{0 + 0.0598413 \mathbf{j}}{(0 + 0.15 \mathbf{j}) + 1 \cdot f} \quad (6-30)$$

und

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2\pi} \cdot (\mathbf{j} + 10f)}. \quad (6-31)$$

Ist nun $\int_0^{\infty} fInv(t) dt \neq 1$ oder $\int_0^{\infty} gInv(t) dt \neq 1$, so wird zur Ermittlung der zugehörigen

Verteilungsfunktion erneut ein Korrekturfaktor κ_f bzw. κ_g analog zu κ nach

$1 = \kappa_f \cdot \int_0^{\infty} fInv(t) dt$ und $f(t) = \kappa_f \cdot fInv(t)$ und vice versa für $gInv(t)$ und κ_g gebildet.

Nach Anwendung der inversen Transformation folgt für $fInv(t)$ und $gInv(t)$:

$$fInv(t) = 0.375994 \cdot e^{-0.15t} \cdot \theta(t) \quad (6-32)$$

und

$$gInv(t) = (1.73932 \cdot 10^{-16} e^{-0.15t} + 0.250663 e^{-0.1t}) \cdot \theta(t) \quad (6-33)$$

mit

$$\theta(t) = \text{Heaviside-Theta-Funktion}(t).$$

Die Art der Ergebnisdarstellung zeigt, dass es mittels der oben beschriebenen und eingesetzten CAS nicht möglich ist, die Originalfunktion wieder zu ermitteln. Der Verlauf der ermittelten Funktionen $fInv(t)$ und $gInv(t)$ ist nahezu identisch mit denen der Originalfunktionen $f(t)$ und $g(t)$.

Es ist allerdings zu beachten, dass, wie oben beschrieben, eine der beiden Eingangsverteilungen bekannt sein muss, um die Division im Bildbereich durchführen zu

können. Zur Herleitung dieser Funktionen können u.a. die Methoden aus Kapitel 3 verwendet werden.

Das obige Beispiel zeigt die Verwendung unterschiedlicher Exponentialverteilungen für die indirekte Belastungsanalyse. Im Folgenden sind die Ergebnisse der Anwendungsmöglichkeiten weiterer, in der Zuverlässigkeitstechnik gebräuchlicher, Verteilungsfunktionen dargestellt. Hierzu wurde jeweils aus einer Kombination zweier Verteilungsfunktionen eine Belastungsfunktion nach obigem Beispiel generiert und geprüft, ob die Rekonstruktion über eine Fourier-Transformation möglich ist. Tabelle 6-1 zeigt die Ergebnisse dieser Betrachtungen.

Die Tabelle beinhaltet folgende Fragestellungen:

1. *Faltung*: Faltung zweier Verteilungsfunktionen $h(x) = (f * g)(x)$. Test: Ist die Faltung innerhalb der Parametervariationen möglich?
2. *Transformation*: Kann die gefaltete Funktion $h(x)$ in verwertbarer Form in den gewählten Bildbereich übertragen werden?
3. Inverse $fInv(x)$: Lässt sich der Quotient zur Bestimmung der Inversen von $f(x)$ bilden und im Zeitbereich über inverse Transformation rekonstruieren?
4. Inverse $gInv(x)$: Lässt sich der Quotient zur Bestimmung der Inversen von $g(x)$ bilden und im Zeitbereich über inverse Transformation rekonstruieren?

Da diese Berechnungen, speziell die inversen Transformationen, nicht ohne Hilfe eines CAS (CAS=Computer-Algebra-System) erfolgen kann, wird hier ein solches eingesetzt. Die Berechnungen erfolgen mit *Wolfram Mathematica*© der Fa. Wolfram Research in der Version 10. Als Randbedingung gilt eine Rechendauer von jeweils 180 sek. pro Berechnung. Die verwendete Rechenhardware beinhaltet einen Intel® Core™ i5-2430 @2.40Ghz auf 32-bit, die Berechnungen erfolgen Mono-Core. Das verwendete Betriebssystem ist *Microsoft Windows 7 Professional* ©. Die Art der Ausgabe der jeweiligen Ergebnisse ist kein Bewertungskriterium. Dieses ist von Bedeutung, da die formeltechnische Darstellung der Ergebnisse nach der inversen Fourier-Transformationen, aufgrund einer Vielzahl spezieller Annäherungs- und Deltafunktionen, nicht mehr nachvollziehbar ist. Für dieses und die folgenden Abschnitte bezüglich der Transformationen gilt, dass diese Ergebnisse nicht dauerhaft von Bestand sein müssen. Beeinflusst

durch Rechenleistung und die verwendeten Algorithmen des CAS ist es denkbar, dass sich zukünftig weitere Lösungen finden lassen. Auch existieren eine Reihe von Veröffentlichungen, die sich mit einzelnen Fragestellungen der inversen Transformation auseinandersetzen [Ver 02], [Bri 95] und [Jan 84]. Eine Einbeziehung und Untersuchung dieser Vielzahl von Veröffentlichungen wurde für diese Arbeit nicht durchgeführt.

Tabelle 6-1: Kombinationsmöglichkeiten der Fourier-Transformation

Fourier-Transformation												
f(x) \ g(x)	Rechteck		Dreieck		Normal		Log-Normal		Exponential		Weibull	
Rechteck	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	O	O	X	X	X	O
Dreieck			X	X	X	X	X	O	X	X	X	X
			X	X	X	X	O	O	X	X	X	O
Normal					X	X	O	O	X	X	O	O
					X	X	O	O	X	X	O	O
Log-Normal							O	O	X	O	O	O
							O	O	O	O	O	O
Exponential									X	X	O	X
									X	X	O	O
Weibull											O	O
											O	O

Faltung	Inverse f(x)
Transformation	Inverse g(x)

Wie aus Tabelle 6-1 zu entnehmen, ist die Fourier-Transformation innerhalb ihrer Rahmenbedingungen nicht für alle Kombinationen der gängigen Verteilungsfunktionen der Zuverlässigkeitstheorie durchführbar. Ein Ausschlusskriterium bei der Anwendung der Fourier-Transformation ist die Verwendung der Log-Normalverteilung. Diese stellt im eigentlichen Sinne bereits eine Transformation dar, da der Logarithmus schon als Transformation für x verwendet wird. Im Anschluss an die Logarithmierung des Terms ist es nicht möglich, weitere Frequenzen an die Belastungsfunktion zu approximieren. Eine weitere Einschränkung besteht bei der

Verwendung der Weibull-Verteilung. Auch hier kann mittels der Fourier-Transformation die Inverse der Verteilung nicht ermittelt werden. Eine Begründung hierfür ist die Formanpassung durch den Parameter β . Mittels der gängigen trigonometrischen Funktionen und ihren Adaptionen lässt sich keine Frequenz an eine geformte Exponentialverteilung (Unterschied: Exponential- und Weibull-Verteilung) anpassen.

Generell zeigt bereits das vorstehende einfache Beispiel in diesem Abschnitt (Durchführung der Fourier-Transformation und deren Invertierung), dass die Originalfunktionen durch komplexe mathematische Näherungen wiedergegeben werden. Die Möglichkeit des CAS, eine Näherung an die Originalfunktion zu entwickeln, entscheidet hier darüber, ob eine Lösung existiert oder nicht.

Für die weiteren Verteilungen (Rechteck-, Dreieck-, Normal- und Exponentialverteilung) konnten hingegen die normalen und inversen Transformationen erfolgreich gebildet werden.

6.3.4.2 Anwendung der Laplace-Transformierten

Als zweite stetige Transformation wird im folgenden Abschnitt die Laplace-Transformation auf ihre Anwendbarkeit bei der indirekten Belastungsanalyse geprüft. Diese Transformation wird bekanntlich, wie die Fourier-Transformation, ebenfalls in vielen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Bereichen eingesetzt. Das Hauptanwendungsgebiet außerhalb der Mathematik liegt auch hier im Bereich der Elektrotechnik. Mit der Laplace-Transformation werden u.a. die Kennwerte elektrischer Schaltungen berechnet. Entwickelt wurde sie jedoch durch Pierre Simon Marquis de Laplace durch Studien zur Wahrscheinlichkeitsrechnung [Bri 95]. Somit unterscheidet sich die Nutzung der klassischen von der modernen Laplace-Transformation.

Im Bereich der Zuverlässigkeitstheorie ist die Laplace-Transformation u.a. durch ihre Anwendung bei homogenen stetigen Markov-Prozessen bekannt [Mey 10]. Die Ermittlung der stationären Zuverlässigkeits- und Sicherheitskenngrößen erfolgt hier aufgrund der Grenzwertsätze der Laplace-Transformation vollständig im Laplace-Bereich (Bildbereich). Für zeitabhängige Berechnungen ist eine Rücktransformation in den Zeitbereich erforderlich. Dies geschieht für einfache Gleichungssysteme mittels Partialbruchzerlegung.

Vom theoretischen Ansatz aus unterscheidet sich die Laplace-Transformation im Wesentlichen von der Fourier-Transformation dadurch, dass im Rahmen von Laplace-Transformationen nur kausale Zeitfunktionen untersucht werden.

Eine Funktion $f(t)$ ist dann eine kausale Zeitfunktion wenn gilt $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Diese Bedingung passt sehr gut in den Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie, da alle hier untersuchten Zusammenhänge ebenfalls durch kausale Funktionen beschrieben werden. Die abhängige Variable kann hierbei natürlich variieren und ist per Definition nicht auf die Zeit beschränkt.

Die allgemeine Formel der Bildfunktion der Laplace-Transformation ist bekanntlich durch:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (6-34)$$

gegeben (symbolische Schreibweise $f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s)$).

Zur Existenz der Laplace-Transformierten ist nachfolgend zu beachten:

Es existiert eine Laplace-Transformierte $F(s)$ einer Zeitfunktion $f(t)$, wenn diese nicht schneller ansteigt als eine Exponentialfunktion. Dies ist an die Konvergenz des Laplace-Integrals

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\sigma t} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \quad (6-35)$$

geknüpft. Diese ist immer dann gegeben, wenn

$$g(t) = f(t) \cdot e^{-\sigma t}$$

absolut integrierbar ist.

Eine weitere Besonderheit ist der Eindeutigkeitsatz der Laplace-Transformation, der die Existenz einer bestimmten Funktion im Bildbereich bei unterschiedlichen Funktionen im Zeitbereich beschreibt. Da die Bedingungen für einen nicht-eindeutigen Fall im Bereich der angewandten Zuverlässigkeitstheorie jedoch ohne Bedeutung sind, wird dieser Satz im Folgenden nicht näher ausgeführt.

Zur Vervollständigung des Transformationspaares

$$f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s) \quad (6-36)$$

ergibt sich die inverse Laplace-Transformation zu

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \cdot e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega \quad . \quad (6-37)$$

In analoger Anwendung der Schritte entsprechend Abschnitt 6.3.4.1 ergibt sich für die Anwendungsmöglichkeiten der Verteilungsfunktionen mittels Laplace-Transformation auf die indirekte Belastungsanalyse die Matrix entsprechend Tabelle 6-2.

Tabelle 6-2: Kombinationsmöglichkeiten der Laplace-Transformation

Laplace-Transformation												
f(x) \ g(x)	Rechteck		Dreieck		Normal		Log-Normal		Exponential		Weibull	
Rechteck	X	X	X	X	X	O	X	O	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	O	O	O	X	X	X	O
Dreieck			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
			X	X	X	O	X	X	X	X	X	O
Normal					X	O	O	O	X	O	O	O
					X	O	O	O	X	X	O	O
Log-Normal							O	O	X	X	O	X
							O	O	X	X	O	O
Exponential									X	X	O	X
									X	X	O	O
Weibull											O	O
											O	O

Faltung	Inverse f(x)
Transformation	Inverse g(x)

Die Kombinationsmöglichkeiten der Laplace-Transformation ähneln der der Fourier-Transformation. Mit den Ausnahmen, dass sich mittels der Laplace-Transformation für einzelne Kombinationen Lösungen möglich sind, die mit der Fourier-Transformation nicht zu berechnen waren. Dies ist für die Kombinationen Dreieckverteilung/Log-Normalverteilung und für die Kombination Normal-/Exponentialverteilung der Fall.

Werden nun die Kombinationsmöglichkeiten der beiden stetigen Transformationsmethoden (Fourier-/Laplace) zusammengefasst, so ergibt sich Tabelle 6-3.

Tabelle 6-3: Kombination der stetigen Anwendungsmöglichkeiten

stetige Kombination (Fourier- / Laplace-Transformation)												
f(x) \ g(x)	Rechteck		Dreieck		Normal		Log-Normal		Exponential		Weibull	
Rechteck	X	X	X	X	X	F	X	○	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	F	○	○	X	X	X	○
Dreieck			X	X	X	X	X	L	X	X	X	X
			X	X	X	F	L	L	X	X	X	○
Normal					X	F	○	○	X	F	○	○
					X	F	○	○	X	X	○	○
Log-Normal							○	○	X	L	○	L
							○	○	L	L	○	○
Exponential									X	X	○	X
									X	X	○	○
Weibull											○	○
											○	○

Faltung	Inverse f(x)
Transformation	Inverse g(x)

Für die obige Tabelle gilt folgende Nomenklatur:

- X = Mit beiden Verfahren lösbar
- F = Nur mittels Fourier-Transformation lösbar
- L = Nur mittels Laplace-Transformation lösbar
- ○ = Mit beiden Verfahren nicht lösbar.

Es zeigt sich die unbefriedigende Situation, dass einige der in der Zuverlässigkeitstheorie gängigen Kombinationen bei der indirekten Belastungsanalyse nicht betrachtet werden können. Auch in Hinblick auf die Schrittfolge zur Extraktion des Einflusses der Einzelbelastungsunterschiede (siehe Bild 6-2) ist diese Einschränkung mit einem praxisorientierten Anspruch nicht vereinbar.

Aus diesem Grund wird in dem folgenden Abschnitt mit der z-Transformation ein Verfahren aus dem Bereich der diskreten Transformation, die eine diskrete Lösung zulässt, vorgestellt.

6.3.4.3 Anwendung der z-Transformation

Eine kurze Einführung

Die z-Transformation ist eine Methode zur diskreten Transformation einer zeitkausalen Funktion. Sie ist bekanntlich das diskrete Gegenstück der Laplace-Transformation.

Zur Verwendung dieser Transformationsart werden die bisher stetig verwendeten Verteilungsfunktionen diskretisiert. Dies erfolgt durch

$$x(t)|_{t=kT} = x(kT) \quad (6-38)$$

Hierbei ist T die Abtastrate, mit der stetige Stützstellen gebildet werden und k der Laufindex $k = 0, 1, 2, \dots, n$ (siehe Bild 6-11).

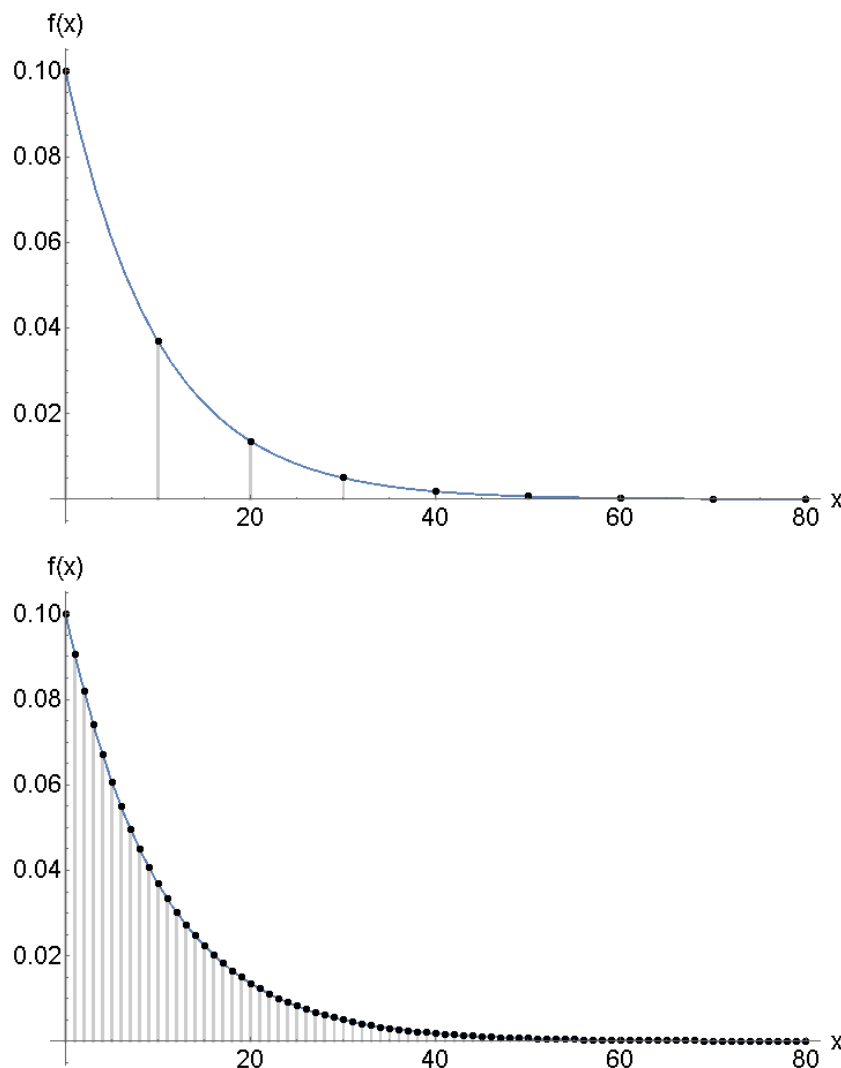


Bild 6-11: Darstellung zweier diskreter Funktionen mit $T=10$ (oben) und $T=1$ (unten)

Die Darstellung zeigt einen der wesentlichen Eigenschaften der diskretisierten Verteilungsfunktionen. Nur bei einer geeigneten Abtastrate T lässt sich eine Funktion diskret valide abbilden, bei einem zu geringen T ist der Informationsverlust der Diskretisierung zu hoch. Dies gilt auch für alle darauf folgenden Transformationen. Eine allgemeine Aussage, wie hoch die Abtastrate sein muss, um eine Funktion für anschließende Berechnungen nutzen zu können, existiert nicht. Ähnlich wie bei der Anzahl der Simulationsdurchläufe bei einer Monte-Carlo-Simulation, ist diese Größe entweder durch individuelle Expertise oder spezielle numerische Optimierungsverfahren bestimmbar. Für die Auswertungen in diesem Abschnitt wurde die Abtastrate für alle diskreten Funktionen mit $T = 0,1$ festgelegt. Somit wird jede ganzzahlige Einheit durch 10 Stützstellen abgebildet. Diese Bedingung wird hier als ausreichend angesehen, um zu prüfen, ob eine inverse Transformation erfolgreich ist oder nicht.

Im Anschluss daran wird mittels einer Verteilungsanpassung gezeigt, wie die Funktionen wieder in den stetigen Bereich zu überführen sind. Dies vereinfacht die Interpretation und Dokumentation der Ergebnisse. Allerdings müssen dann auch die Varianzen der angepassten stetigen zur ermittelten diskreten Funktion mitbetrachtet werden.

Analogien zur Monte-Carlo-Simulation

Die obigen Ausführungen können direkt mit den Eigenschaften der Monte-Carlo-Simulation verglichen werden.

Die Anzahl der Simulationsdurchläufe, die als ein wesentlicher Faktor für die Güte des Schätzers verantwortlich ist (siehe Kapitel 3) kann hier auf die Wahl der Abtastrate übertragen werden. Beide Parameter definieren die Genauigkeit der folgenden Simulation bzw. z-Transformation. Somit verwenden beide Methoden diskrete Werte, um die jeweiligen analytischen Vorgänge zu „umgehen“ und auf numerischem Wege einen Schätzer zu ermitteln. Wie auch bei der MCS muss auch nach der z-Transformation, wie oben bereits erwähnt, eine Verteilungsanpassung zur Weiterverarbeitung der Ergebnisse durchgeführt werden.

Anwendung der z-Transformation

Die Transformation vom Zeit- in den Bildbereich der z-Transformation für die Folge $\{f(x)\}$ ergibt sich aus:

$$\mathcal{Z}\{f(x)\} = F(z) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \cdot z^{-x} . \quad (6-39)$$

Wie üblich, wird im diskreten Fall das stetige Integral durch eine diskrete Summe ersetzt. Die Bildfunktion $F(z)$ ist somit lediglich eine mit z multiplizierte Summe der einzelnen Elemente $f(x)$.

Trotz der einfachen Umformung gelten für die z -Transformation ähnliche Sätze wie für die Fourier- und Laplace-Transformation. Diese werden hier jedoch diskretisiert. Es gilt ebenfalls der in diesem Zusammenhang sehr wichtige Faltungssatz:

$$(f * g)[x] \circ \bullet X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (6-40)$$

mit dem Faltungsprodukt (diskretes Analogon zum Faltungsintegral)

$$(f * g)[x] = \sum_{i=0}^{\infty} f[i] \cdot g[x-i] . \quad (6-41)$$

Somit kann auch hier die inverse Faltung durch eine Division im Bildbereich ersetzt werden und anschließend über eine inverse z -Transformation zurück transformiert werden.

Für die inverse z -Transformation gilt:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F[z]\} = f[x] = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint F(z) \cdot z^{x-1} dz . \quad (6-42)$$

In der Praxis wird diese Form in der Regel nicht verwendet. Vielmehr werden die Korrespondenztabelle zur z -Transformation verwendet, um ähnlich wie bei den Korrespondenztabelle der Laplace- oder Fourier-Transformation, die inverse Transformation zu vereinfachen. Für Bildfunktionen $F[z]$ die nicht in den Korrespondenztabelle enthalten sind, können dann, u.a. durch Anwendung der Partialbruchzerlegung, entsprechende Rücktransformationen durchgeführt werden. [Bri 95].

Mittels der z -Transformation lassen sich alle getesteten Verteilungsfunktionen und deren Kombinationen diskret darstellen und zurück transformieren. Der Vollständigkeit halber ist dies in Tabelle 6-4 angegeben.

Tabelle 6-4: Kombination der z-Transformation

z-Transformation													
f(x) \ g(x)	Rechteck		Dreieck		Normal		Log-Normal		Exponential		Weibull		
Rechteck	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Dreieck			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Normal					X	X	X	X	X	X	X	X	X
					X	X	X	X	X	X	X	X	X
Log-Normal							X	X	X	X	X	X	X
							X	X	X	X	X	X	X
Exponential									X	X	X	X	X
									X	X	X	X	X
Weibull												X	X
												X	X

diskrete Faltung	diskrete Inverse f(x)
dis. Trans- formation	diskrete Inverse g(x)

Somit ist die diskrete Lösung eine empfehlenswerte anwendbare Alternative zu den stetigen Transformationsverfahren. Aufgrund der oben erwähnten Informationsverluste und der benötigten individuellen Anpassungen ist allerdings eine stetige Berechnung, wenn möglich, zu bevorzugen.

6.3.5 Anwendungsmöglichkeiten

Ausgehend von der Basis des Gedankens der Faltung und der inversen Faltung sind im Bereich der Zuverlässigkeits- und Sicherheitstechnik auch andere Anwendungsmöglichkeiten der obigen Ansätze möglich.

Wird die Faltung zur Darstellung mehrdimensionaler Zusammenhänge als zweidimensionale Funktion interpretiert, so sind Anwendungen auch für mehrdimensionale Gebiete möglich. Diese werden meistens in n-Dimensionen dargestellt und mit einer Vielzahl von abhängigen Variablen induktiv berechnet. Sind allerdings von

einem System nur die Summe seiner Eigenschaften und eine Teileigenschaft bekannt, ist auch hier eine deduktive Betrachtung denkbar. Eine abstrakt beschriebene Möglichkeit wäre z.B. im Bereich der Windenergieanlagen. Hier sind unterschiedliche Parameter für die Summe der erzeugten Leistung relevant. Neben der Windrichtung und der Intensität an einem Standort, sind auch Temperatur, Höhe, Niederschläge und weitere Einflussparameter relevant. Zu diesen Umgebungsbedingungen kommen technische Parameter, wie die Abmaße der Flügel, der Wirkungsgrad der verwendeten Generatoren und Softwareeinflüsse wie z.B. eine Ein- und Abschaltstrategie hinzu. Ist nun ein Windrad an einem Standort bereits am Netz, ist die Summe aller Einflüsse in seiner erzeugten Leistung sichtbar. Wird nun ein neuer Standort geplant, so kann neben den induktiven Simulationsmethoden auch ein deduktiver Ansatz gewählt werden. Hier wird die Summe der erzeugten Leistung in Teilfunktionen wie Umwelt- und technische Einflüsse invers aufgeteilt. Dadurch können Informationen für einen neuen Standort abgeleitet werden, für den nicht alle Informationen verfügbar sind.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit ist der Vergleich von unterschiedlichen Systemauslegungen bei einzelnen bekannten Einflüssen. In den in dieser Arbeit gezeigten Berechnungen war eine Prämisse, dass identische Systeme untersucht werden. Dies vereinfacht die Herleitung und das Verständnis der obigen Darstellungen. Nun ist es aber auch möglich, Systeme unterschiedlicher Dimensionierungen zu überprüfen. Wenn es jedoch identische Einflüsse auf charakteristische Eigenschaften der Systeme gibt (nicht nur Ausfälle), dann ist es interessant, die jeweiligen „Restfunktionen“ zu betrachten.

D.h. ein zukünftiges Ziel sollte es deshalb sein, deduktive Analysen auch in anderen Bereichen zu adaptieren. Speziell die Möglichkeit der Nutzung von Felddaten kann so weiter erhöht werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Technische Systeme sind während ihres Betriebes einer Vielzahl von Einflüssen und Belastungen ausgesetzt. Die klassischen Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanalysen betrachten die Systeme auf struktureller Ebene. In Kombination mit dynamischen Verfahren können so verschiedene Ausfallmodelle und Zuverlässigkeitsverläufe berechnet werden.

Ausgehend von den drei Grundebenen (strukturelle-, funktionale und analytische Sensitivitätsanalyse) wurde in dieser Arbeit eine vierte Ebene hinzugefügt. Die Belastungs- und Nutzungsanalyse erlaubt hierbei den Zusammenschluss der strukturellen, funktionalen und analytischen Betrachtung, kombiniert mit dem Einfluss der Nutzungs- und Belastungsintensität. Gemäß der Zielsetzung der Arbeit, eine Methodik zu ermitteln, die alle vier Ebenen der Zuverlässigkeits-, Sicherheits- und Belastungsanalyse abdeckt, wurde ein allgemeiner Methodenvergleich unterschiedlicher Analyseverfahren im Bereich der Sicherheits- und Zuverlässigkeitstechnik durchgeführt. Ziel war die Identifizierung einer Methode, mit der unterschiedliche Berechnungen auf unterschiedlichen Ebenen, möglichst unabhängig von deren Komplexität, durchgeführt werden können. Als Ergebnis dieses Vergleichs stellte sich heraus, dass die Monte-Carlo-Simulation, als nicht-determiniertes Simulationsverfahren, von ihren Eigenschaften her eine Vielzahl der gestellten Bedingungen zufriedenstellend erfüllt.

Im Anschluss wurde die Monte-Carlo-Simulation für Sensitivitätsanalysen auf unterschiedlichen Ebenen durchgeführt. Auf struktureller Ebene zeigte sich besonders die Vereinfachung der Simulation bei der Betrachtung komplexer Systemstrukturen, die nicht nur aus Serien- und/oder Parallelverbänden bestehen. Über die Substitution der mathematischen Ausdrücke durch logische Abfragen ist es möglich, die interessierenden Zuverlässigkeitskenngrößen auch für komplexe Systeme mit einer Vielzahl von Komponenten zu bestimmen.

Neben der strukturellen Betrachtung wurde auch eine funktionale Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Diese Betrachtung, auf Funktionen und nicht auf die Struktur ausgerichtet, gewinnt immer mehr an Bedeutung. Die Begründung hierfür liegt nicht nur in der immer weiter steigenden Vernetzung nicht nur der Systeme, sondern auch der Funktionen untereinander. Diese werden z.T. gleichzeitig von unterschiedlichen Teilsystemen umgesetzt. Hierbei sind besonders quantifizierte Kombinationen unter-

schiedlicher Faktoren von Bedeutung. Diese können mittels der Monte-Carlo-Simulation berücksichtigt und ausgewertet werden. Dies ist einer der Hauptvorteile der Simulationsmethoden gegenüber den analytischen Verfahren.

Zum Abschluss der Zusammenführung der Methoden wurde ebenfalls über Monte-Carlo-Simulation gezeigt, dass auch analytische Zusammenhänge technischer Systeme einfach umgesetzt werden können. Ein Hauptanwendungsgebiet ist hierbei die Analyse von elektronischen oder auch Softwareeigenschaften. Gerade bei sicherheitskritischen Anwendungen ist dies von besonderer Bedeutung, um auch temporäre Zeiten der Nichtverfügbarkeit zu betrachten. Neben der reinen Zeitanalyse wurden die beteiligten Hardwarekomponenten ebenfalls auf ihre Wichtigkeit in Bezug auf ein Nichtfunktionieren einzelner Funktionen oder des Gesamtsystems überprüft.

Aufbauend auf den Simulationsergebnissen der strukturellen, funktionalen und analytischen Ebene wurde im Anschluss eine vierte Ebene zur ganzheitlichen Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalyse hinzugefügt.

So wurde in dieser Arbeit zusätzlich zu diesen Untersuchungen, die bekanntlich die Grundlage für realitätsnahe Zuverlässigkeitsanalyse bilden, auch der Einfluss der Nutzungs- und Belastungsintensität quantitativ bewertet.

Bedingt durch die Tatsache, dass ohne großen technischen Aufwand immer mehr Betriebsdaten moderner Systeme erfasst werden können, stehen immer mehr Felddaten zur Verfügung, die bisher nur zu einem kleinen Teil nutzbar sind. Felddaten sind besonders interessant, weil sie die tatsächlichen Einflüsse, die auf ein System während des Betriebes wirken, summiert beinhalten. Dies ist im Gegensatz zu Labor- und Testdaten zu sehen, bei denen immer nur eine eingeschränkte Summe der realen Belastungen und Einflüssen dargestellt werden können. Ziel ist es also, die vorhandenen Felddaten effektiver zu nutzen.

In dieser Arbeit wurde hierzu erstmals ein deduktiver Ansatz für Belastungsanalysen entwickelt und in den Grundzügen definiert und formuliert. Während Informationen zur Belastung einer Komponente meist aus Labor- und Testläufen induktiv, also von einzelnen Effekten ausgehend, gewonnen werden, wurde nun versucht, aus den Gesamteinflüssen (gegeben durch die Felddaten) auf einzelne Belastungsgruppen oder -arten zu schließen. Hierzu wurden die deduktiven Methoden in direkte und indirekte Ansätze aufgeteilt. Die direkte Methode basiert auf dem Grundsatz, dass eine Dichtefunktion, die aus Felddaten gebildet wird, alle Belastungen enthält. Unter der Bedingung der Unabhängigkeit dieser Belastungen können nun einzelne

Verteilungsfunktionen aus dieser Gesamtfunktion extrahiert werden. Das Vorgehen dieses direkten Verfahrens wurde hergeleitet und an einem Beispiel analytisch und mittels Simulation demonstriert.

Im Anschluss an die direkten Verfahren wurde im darauffolgenden Kapitel ein Ansatz hergeleitet, der sich mit der indirekten Belastungsanalyse beschäftigt. Hier war es nicht das Ziel, direkt auf Belastungsarten oder -gruppen zu schließen, sondern lediglich auf die Unterschiede der Einflüsse der Belastungen. Somit können identische Systeme unterschiedlicher Nutzerprofile über ihre Felddaten miteinander verglichen werden. Der Grundgedanke ist hier, dass sich die Unterschiede im Ausfallverhalten zweier identischer Systeme nur durch unterschiedliche Belastungen zusammensetzen. Da bei dem indirekten Ansatz mit einer Differenzfunktion gerechnet wurde, musste die Aufteilung in Einzelbelastungen auf anderem Wege als bei dem direkten Ansatz erfolgen. Bedingt durch die Tatsache, dass die hierbei entstehenden Differenzfunktionen die ursprünglichen Verteilungsfunktionen nicht direkt enthalten, muss die Funktion in ihre relativen Bestandteile zerlegt werden. Die Zerlegung geschieht mittels der inversen Transformation, ausgehend von unterschiedlichen Bildbereichen. Eine Umformung des Faltungsintegrals im Zeitbereich ist daher nicht erforderlich (und mathematisch auch nicht ohne weiteres möglich).

Ergebnis ist hier, dass die in der Zuverlässigkeits- und Sicherheitstechnik gängigen Verteilungsfunktionen nur zum Teil durch stetige Transformationen zurück transformiert werden können. Die im Anschluss durchgeführte z- Transformation stellte eine Lösung dieses Problems auf diskreter Ebene dar. Die z-Transformation ist hierbei ein Analogon zur Monte-Carlo-Simulation. Sowohl die Simulation als auch die z-Transformation diskretisieren bekanntlich die stetigen Funktionen, so dass anstatt mit deren Formalismus mit numerischen Stützstellen gerechnet werden kann.

Es ist bei dieser Arbeit zu beachten, dass sie lediglich erste Ansätze einer ganzheitlichen Zuverlässigkeitsuntersuchung und einer deduktiven Belastungsanalyse formuliert. Die hier gezeigten Verfahren müssen weiter optimiert und vereinfacht werden, um sie in der Praxis mit vertretbarem Aufwand anwenden zu können. Einheitliche Felddaten für ausreichend lange Zeiträume stehen zurzeit nur vereinzelt zur Verfügung.

Mit zunehmenden Daten steigen die oben beschriebenen Anwendungsmöglichkeiten jedoch immer weiter an. Zudem können, bei Verbesserung der Datenlage, die Belastungsarten, -profile und -gruppen genauer abgegrenzt und analysiert werden. Gelingt

dies, so können für neue Systeme und Produkte, basierend auf detaillierten und individuell zusammengesetzten Belastungsprofilen realitätsnahe Belastungsanalysen durchgeführt werden. Eine solche Möglichkeit wäre für die industrielle Praxis in der technischen Entwicklung, Erprobung und Nutzungsphase von großem Wert.

In Anlehnung an diesen Gedanken ist auch der Aufbau einer Belastungsdatenbank denkbar. Kombiniert mit der theoretischen Weiterentwicklung der hier vorgestellten Ansätze und einer Verallgemeinerung der aufgestellten Belastungskenngrößen ist es so möglich, eine neue Basis für künftige Forschungsgegenstände im Bereich der Zuverlässigkeitstheorie zu schaffen.

Ebenfalls ist eine Integration künstlicher neuronaler Netze (KNN) möglich. Mit Hilfe der KNN können z.B. bei einer Vielzahl an vorhandenen Belastungsarten, Vorfiltrierungen durchgeführt werden, die den Aufwand der Folgeberechnungen und -transformationen deutlich einschränken.

8 Literatur und eigene Veröffentlichungen

- [Alt 09] Althaus, D.: *Ein praxisorientierter empirischer Ansatz zur Bestimmung des Ausfallverhaltens konventioneller Bremssysteme in Personenkraftwagen*. Dissertation, Bergische Universität Wuppertal, 2009.
urn:nbn:de:hbz:468-20090324
- [Ave 13] Ave, T; Zio, E.; Baraldi, P., Flage R.: *Uncertainty in risk assessment. The representation and treatment of uncertainties by probabilistic and non-probabilistic methods*. 2013, Wiley Verlag, Weinheim.
ISBN: 978-1-11-848958-1
- [Bac 08] Backhaus, K.: *Multivariate Analysemethoden. Eine anwendungsorientierte Einführung*. 12., vollständig überarb. Aufl., 2012, Springer-Verlag, Berlin.
ISBN: 978-3-54-085044-1
- [Bar 78] Barlow, R.E.; Proschan, F.: *Statistische Theorie der Zuverlässigkeit (Statistical theory of reliability and life testing)*. 1978, Thun, Frankfurt am Main.
ISBN: 3-87-144444-8
- [Ber 04] Bertsche, B.; Lechner, G.: *Zuverlässigkeit im Fahrzeug und Maschinenbau: Ermittlung von Bauteil- und Systemzuverlässigkeiten (VDI-Buch)*. 3. überarb. u. erw. Aufl., 2004, Springer-Verlag, Berlin.
ISBN: 978-3-54-020871-6
- [Bér 11] Béringuer, C.; Grall, A. et. aL.: *Advances in safety, reliability and risk management. Proceedings of the European safety and reliability conference*, 2011, CRC Press, Boca Raton (Florida).
ISBN: 978-0-41-568379-1
- [BMF 80] Der Bundesminister für Forschung und Technologie: *Deutsche Risiko-studie Kernkraftwerke. Eine Untersuchung zu dem durch Störfälle in Kernkraftwerken verursachten Risiko*; 2., unveränd. Aufl, 1980, Verl. TÜV Rheinland, Köln.
ISBN: 3-92-105967-4

- [Bör 06] Börcsök, J.: *Funktionale Sicherheit. Grundzüge sicherheitstechnischer Systeme*. 2006, Hüthig Praxisverlag, Heidelberg.
ISBN: 978-3-77-852985-0
- [Bos 04] Robert Bosch GmbH (2004): zu Presse-Information RF00197.
Pressebild-Nr.: 1-UBK-19183.
Online verfügbar unter <http://www.boschpresse.de/presseforum/details.htm?txtID=6246>, zuletzt aktualisiert am 31.10.2004.
- [Bos 10] Robert Bosch GmbH: *Bosch Autoelektrik und Autoelektronik: Bordnetze, Sensoren und elektronische Systeme. Bosch Autoelektrik und Autoelektronik: Bordnetze, Sensoren und elektronische Systeme*. 5., vollständig überarb. und erw. Aufl. , 2010, Vieweg-Verlag, Wiesbaden.
ISBN: 3-83-481274-9
- [Bra 11] Braasch, A.: *Zuverlässigkeitsprognosemodelle im Bereich der mobilen Telekommunikation*. Dissertation, Bergische Universität Wuppertal, 2011.
urn:nbn:de:hbz: 468-20110707-105136-5
- [Bri 95] Brigham, E.O.: *FFT. Schnelle Fourier-Transformation ; mit 8 Tabellen, 27 Beispielen und 123 Aufgaben*. 6., korrigierte Aufl., 1995, Oldenbourg-Verlag, München, Wien.
ISBN: 3-48-623177-4
- [Dub 00] Dubi, A.: *Monte Carlo Applications in Systems Engineering*. 2000, Wiley-Verlag, Weinheim.
ISBN: 978-0-47-198172-5
- [Fre 94] Freeman, J. A.: *Simulating neural networks with Mathematica*. 1994, Addison-Wesley, Hallbergmoos.
ISBN: 0-20-156629-x
- [Gau 10] Gausemeier, J. (Hg.): *Frühzeitige Zuverlässigkeitsanalyse mechatronischer Systeme*. 2010, Hanser-Verlag, München, Wien.
ISBN: 978-3-44-642127-1

- [Gen 98] Gentle, J.: *Random Number Generation and Monte-Carlo-Methods*. Springer-Verlag, New York, 1998.
ISBN: 978-0-38-700178-4
- [Hai 06] Haibach, E.: *Betriebsfestigkeit – Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
ISBN: 978-3-54-029363-7
- [Hal 14] Haller, S.: *Beitrag zur Stichprobenziehung defekter Bauteile im Rahmen der technischen Zuverlässigkeitsanalyse in der Nutzungsphase am Beispiel der Automobilindustrie* (Dissertation). 2014, Shaker-Verlag, Aachen; Erschienen in: *Berichte aus der Zuverlässigkeitsanalytik und Risikoforschung*. Hrsg. Bracke, S., Wuppertal.
ISBN: 978-3-84-402758-7
- [Han 11] Han, S.-O.: *Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse als Beitrag zur Bewertung der Zuverlässigkeit adaptronischer Struktursysteme*. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2011.
urn:nbn:de:tuda-tuprints-25987
- [Hau 07] Hauschild, J.: *Beitrag zur Modellierung stochastischer Prozesse in der Sicherheits- und Zuverlässigkeitstechnik mittels Monte-Carlo-Simulation unter Berücksichtigung dynamischer Systemänderungen*. Dissertation, Bergische Universität Wuppertal.
urn:nbn:de:hbz:468-20070741, 2011.
- [Hei 69] Heinz, K.: *Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen: Mathematisch-statistische Untersuchungen zur Erlang-Verteilung*. Vieweg+Teubner Verlag; Auflage: 1969, 1969
ISBN: 978-3-66-306379-7
- [Jan 84] Jansson, P.A.: *Deconvolution. With applications in spectroscopy*. 1984, Academic Press, New York.
ISBN: 0-12-380220-2
- [Köh 12] Köhler, M.: *Zählverfahren und Lastannahme in der Betriebsfestigkeit*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.
ISBN: 978-3-64-213164-6

- [Leq 08] L'Ecuyer P., Owen, A.B.: *Monte-Carlo and Quasi-Monte-Carlo-Methods 2008*. 2008, Springer-Verlag, Berlin.
ISBN: 978-3-64-204106-8
- [Mar 02] Marseguerra, M.; Zio, E.: *Basics of the Monte Carlo method with application to system reliability*. 2002, LiLoLe-Verlag, Hagen.
ISBN: 3-93-444706-6
- [Mei 09] Meister, A. (2009): Deconvolution problems in nonparametric statistics. 2009, Springer-Verlag (Lecture notes in statistics, 193), Berlin.
ISBN: 978-3-54-087556-7
- [Mey 10] Meyna, A.; Pauli, B.: *Taschenbuch der Zuverlässigkeitstechnik. Quantitative Bewertungsverfahren*. 2., überarb. und erw. Aufl. , 2010, Hanser-Verlag (Praxisreihe Qualitätswissen), München, Wien.
ISBN: 978-3-44-641966-7
- [Mey 82] Meyna, Arno: Einführung in die Sicherheitstheorie. Sicherheitstechnische Analyseverfahren. 1982, Hanser-Verlag, München, Wien.
ISBN: 3-44-613581-2
- [Meyb 03] Meyer, Matthias: *Methoden zur Analyse von Garantiedaten für die Sicherheits- und Zuverlässigkeitsprognose von Komponenten und Baugruppen im Kraftfahrzeug*. Dissertation, Bergische Universität Wuppertal.
urn:nbn:de:hbz:468-20040138, 2003.
- [Nel 90] Nelson, W.: *Accelerated testing. Statistical models, test plans, and data analyses*. 1990, Wiley-Verlag, New York.
ISBN: 0-47-152277-5
- [Neu 12] Neubauer, A.: *DFT - Diskrete Fourier-Transformation. Elementare Einführung*. 2012, Springer-Verlag, Bonn.
ISBN: 978-3-83-481996-3

- [Nus 81] Nussbaumer, H. J.: *Fast Fourier transform and convolution algorithms*. 1981, Springer-Verlag (Springer series in information sciences, 2), Berlin, New York.
ISBN: 0-38-710159-4
- [Pie 63] Pieruschka, E.: *Principles of Reliability*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
ISBN: 978-0-13-709899-6
- [Pla 14a] Planck, M.: *Dynamische und statistische Gesetzmäßigkeit*. Rede gehalten bei der Feier zum Gedächtnis des Stifters der Berliner Friedrich-Wilhelm-Universität. 03.08.1914, Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1914.
- [Pli 10] Plinke, F.; Braasch, A.; Althaus, D.; Meyna, A.: Monte-Carlo-Methods for non-linear tolerance chains: a case study. ESREL Annual Conference 2010, Rhodes (Greece). Veröffentlicht in: Ale, B.; Papazoglou, I.; Zio, E.: *Reliability, Risk and Safety*. Routledge Chapman & Hall; Auflage: 1 Cdr, 2010.
ISBN: 978-0-41-560427-7
- [Pli 11] Plinke, F.; Braasch, A.; Althaus, D.; Meyna, A.: *Anwendung der Monte-Carlo-Simulation zur Bestimmung der Zuverlässigkeit komplexer Systeme in der frühen Entwicklungsphase basierend auf Blockschaltbildern am Beispiel eines Bremssystems*. 25. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2011, Leonberg. Veröffentlicht in: *Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte*, VDI-Berichte 2146, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2011.
ISBN 978- 3-18-092146-4
- [Rei 10] Reif, K.: *Bremsen Und Bremsregelsysteme*. 2010, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden.
ISBN: 978-3-83-481311-4
- [SAE 87] Society of Automotive Engineers: *Automotive electronics reliability handbook*. 1987, Society of Automotive Engineers , Warrendale, PA.
ISBN: 0-89-883009-5

- [Sho 68] Shoomann, M. L.: *Probabilistic Reliability: an engineering approach*. 1. Aufl. 1 Band.. 1968, McGraw-Hill Book Company, New York.
ISBN: 07-057015-9
- [Ste 13] Steenbergen R. D. J. M., van Gelder P. H. A. J. M., Miraglia, S.; Ton, A. C. W. M. : *Safety, Reliability and Risk Management*. 2013, CRC Press, Boca Raton (Florida).
ISBN: 978-1-13-800123-7
- [Sun 09] Sundt, B.; Vernic, R.: *Recursions for convolutions and compound distributions with insurance applications*. Springer-Verlag (EAA lecture notes), 2009, Berlin, Heidelberg.
ISBN: 978-3-54-092899-7
- [Tol 89] Tolimieri, R.; An, M.; Lu, C.: *Algorithms for discrete fourier transform and convolution*. 1989, Springer-Verlag, New York.
ISBN: 0-38-797118-1
- [TTZ 11] Fachtagung Technische Zuverlässigkeit (2011): Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte; 25. Fachtagung; Tagung Leonberg bei Stuttgart, 11. und 12. Mai 2011. Nichtred. Manuskriptdr. Düsseldorf: VDI-Verl. (VDI-Berichte, 2146).
ISBN: 978-3-18-092146-4
- [TTZ 13] Fachtagung Technische Zuverlässigkeit (2013): Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte. 26. Fachtagung; Tagung Leonberg bei Stuttgart, 23. und 24. April 2013. Nichtred. Manuskriptdr. Düsseldorf: VDI-Verl. (VDI-Berichte, 2210).
ISBN: 978-3-18-092210-2
- [VDI 99] VDI-Richtlinie: VDI 4008 Blatt 6 Monte-Carlo-Simulation. VDI-Fachbereich Zuverlässigkeit, 1999.
ICS: 21.020
- [Vet 02] Vetterling, W. T.: *Numerical recipes in C++ 2. ed.* .2002, Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.].
ISBN: 0-52-175034-2

- [Vog 03] Vogt, M.: *Schädigungsgrad von Kfz-Komponenten mit spontanem Ausfallmechanismus*. 2003, ATZ-Automobiltechnische Zeitschrift. Ausgabe 10/2003, Springer-Verlag, Berlin.
ISSN: 00012785
- [Web 12] Weber, H.; Ulrich, H.: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 9. Auflage, 2012, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.
ISBN: 978-3-83-480560-7
- [Win 09] Winner, H. (Hg.): *Handbuch Fahrerassistenzsysteme. Grundlagen, Komponenten und Systeme für aktive Sicherheit und Komfort; mit 45 Tabellen*. 1. Aufl. 2009, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden.
ISBN: 978-3-83-480287-3
- [Wit 15] Wittel, H.: *Roloff / Matek – Maschinenelemente*. 22. Auflage, Springer-Fachmedien-Verlag, Wiesbaden, 2015.
ISBN: 978-3-65-809082-1
- [Wra 10] Wratil, P.; Kieviet, M.: *Sicherheitstechnik für Komponenten und Systeme*. 2., neu bearb. Aufl. , 2010, VDE-Verlag. Berlin, Offenbach.
ISBN: 978-3-80-073276-0
- [Zio 13] Zio, E.: *The Monte Carlo simulation method for system reliability and risk analysis*. 2013, Springer-Verlag (Springer series in reliability engineering), London.
ISBN: 978-1-44-714587-5

Inhalte, Anlehnungen und Zitate aus vergangenen, eigenen Veröffentlichungen sind innerhalb dieser Arbeit nicht explizit gekennzeichnet.

NR.	JAHR	AUTOREN	TITEL / VERÖFFENTLICHUNGSDATEN
1	2010	Meyna, A.; Althaus, D.; Braasch, A.; Plinke, F.; Schlummer, M.:	<i>Zuverlässigkeit elektronischer Systeme im Kraftfahrzeug.</i> BUW Output Nr. 3/Sommersemester 2010. Forschungsmagazin der Bergischen Universität Wuppertal, 2010.
2	2010	Plinke, F.; Braasch, A.; Althaus, D.; Meyna, A.:	<i>Monte-Carlo-Methods for non-linear tolerance chains: a case study.</i> ESREL Annual Conference 2010, Rhodes (Greece). Veröffentlicht in: Ale, B.; Papazoglou, I.; Zio, E.: Reliability, Risk and Safety. Routledge Chapman & Hall; Auflage: 1 Cdr, 2010. ISBN: 978-0-41560-4277
3	2011	Geveler, J.; Meyna, A.; Hunscher, H.; Braasch, A.; Plinke, F.:	<i>Untersuchung von ABS - Spuren Teil 1.</i> VKU - Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik, Heft-Nr. 02/2011, Jahrgang 19, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden. ISSN: 0724-2050 20034
4	2011	Geveler, J.; Meyna, A.; Hunscher, H.; Braasch, A.; Plinke, F.:	<i>Untersuchung von ABS - Spuren Teil 2.</i> VKU - Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik, Heft-Nr. 03/2011, Jahrgang 19, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden. ISSN: 0724-2050 20034
5	2011	Geveler, J.; Meyna, A.; Hunscher, H.; Braasch, A.; Plinke, F.:	<i>Untersuchung von ABS - Spuren Teil 3.</i> VKU - Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik, Heft-Nr. 04/2011, Jahrgang 19, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden. ISSN: 0724-2050 20034
6	2011	Althaus, D.; Schlummer, M.; Plinke, F.; Meyna, A.:	<i>Felddatenbasierte Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalysen am Beispiel von Bremssystemen.</i> 25. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2011, Leonberg. Veröffentlicht in: Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte, VDI-Berichte 2146, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2011.

ISBN 978- 3-18-092146-4

- 7 2011 Plinke, F.; Braasch, A.; Althaus, D.; Meyna, A.: *Anwendung der Monte-Carlo-Simulation zur Bestimmung der Zuverlässigkeit komplexer Systeme in der frühen Entwicklungsphase basierend auf Blockschaltbildern am Beispiel eines Bremssystems.*
25. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2011, Leonberg.
Veröffentlicht in: Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte, VDI-Berichte 2146, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2011,
ISBN 978- 3-18-092146-4
-
- 8 2011 Plinke, F.; Braasch, A.; Althaus, D.; Meyna, A.: *Estimation of non-linear tolerance chains with the Monte-carlo-method illustrated by an example from circuit boards.*
IESM 2011 Conference, Metz (France).
Veröffentlicht in: Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IE-SM'2011), pages 1008 -- 1019, Metz, France. École nationale d'ingénieurs de Metz (ENIM), International Institute for Innovation, Industrial Engineering and Entrepreneurship (I4e2).
ISBN 978-2-9600532-3-4
-
- 9 2011 Braasch, A.; Plinke, F.; Althaus, D.; Meyna, A.: *Reliability Prognosis for Mobile Phones: A Case Study.*
ESREL Annual Conference 2011, Troyes (France).
Veröffentlicht in: Advances in Safety, Reliability and Risk Management, Taylor & Francis Group, London.
ISBN 978-0-415-68379-1
-
- 10 2012 Plinke, F.; Schlummer, M.; Braasch, A.; Meyna, A.: *Reliability analysis with the Monte-Carlo-Method for complex systems in an early phase of development.*
ESREL Annual Conference 2012, Helsinki (Finland).
Veröffentlicht in: 11th International Probabilistic Safety Assessment and Management Conference and the Annual European Safety and Reliability Conference 2012 (PSAM11&ESREL 2012), Curran Associates. Inc., New York, 2012.
ISBN: 978-1-62276-436-5
-

-
- 11 2013 Plinke, F.;
Günnel, C.;
Meyna, A.: *Ein neuer theoretischer Ansatz zur Zuverlässigkeitsprognose mechatronischer Systeme im Kraftfahrzeug unter Berücksichtigung von Nutzungsprofilen und unterschiedlichen Belastungen.*
26. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2013, Leonberg.
Veröffentlicht in: Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte, VDI-Berichte 2210, VDI-Verlag, Düsseldorf,
ISBN: 978-3-18092-210-2
-
- 12 2013 Plinke, F.;
Günnel, C.;
Althaus, D.;
Meyna, A.: *Methodical approach for analysing different stress factors by means of different usage behaviour on the basis of field data.*
ESREL Annual Conference 2013, Amsterdam (Netherlands).
Veröffentlicht in: Safety, Reliability and Risk Analysis: Beyond the Horizon, Routledge Chapman & Hall, London, 2013.
ISBN: 978-1-13800-1237
-
- 13 2013 Guennel, C.;
Schlummer, M.;
Plinke, F.;
Meyna, A.;
Moedden, H.: *EN ISO 13849-1 – New quantitative requirements for Functional Safety in the machine tool industry.*
ESREL Annual Conference 2013, Amsterdam (Netherlands).
Veröffentlicht in: Safety, Reliability and Risk Analysis: Beyond the Horizon, Routledge Chapman & Hall, London, 2013.
ISBN: 978-1-13800-1237
-
- 14 2014 Plinke, F.;
Althaus, D.;
Braasch, A.;
Meyna, A.: *Combination of technological and economical risk assessment using the Monte-Carlo-Simulation*
ESREL Annual Conference 2014, Wroclaw (Poland).
Veröffentlicht in: Safety and Reliability: Methodology and Applications – Nowakowski et al. (Eds), Taylor&Francis Group, London, 2014
ISBN: 978-1-138-02681-0
-
- 15 2015 Hauschild, J.;
Althaus, D.;
Plinke F.: *Simulation technischer und betriebswirtschaftlicher Risiken bei Instandhaltungsverträgen im Bereich der Windenergie.*
27. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2015, Leonberg.
Vortrag angenommen: Tagung findet vom 20-21.05.2015 in Leonberg statt.
-

-
- 16 2015 Michalski, J.;
Haller, S.;
Plinke, F.: *Überführung von Schätzmethoden unter Berücksichtigung unterschiedlicher nicht-parametrischer Punktschätzer.*
27. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2015, Leonberg.
Vortrag angenommen: Tagung findet vom 20-21.05.2015 in Leonberg statt.
-

A Anhang

A.1 Abkürzungsverzeichnis

ABS	Anti-Blockier-System
BL	Bremsleitung
BS	Bremsschlauch
CAD	Computer-Aided-Design
CAS	Computer-Algebra-Software
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
ESP	Elektronisches Stabilitätsprogramm
FEM	Finite-Elemente-Methode
HA	Hinterachse
HL	Hinterachse linkes Rad
HR	Hinterachse rechtes Rad
HU	Hydraulic Unit
LCG	Linear-Congruential-Generator
MCS	Monte-Carlo-Simulation
THZ	Tandemhauptzylinder
VA	Vorderachse
VL	Vorderachse linkes Rad
VR	Vorderachse rechtes Rad
μ C	Mikrocontroller

A.2 Symbolverzeichnis

Kapitel 3

π	Kreiszahl
l	Länge einer Nadel
b	Breite der Planken
n	Anzahl der Nadeln die gleichzeitig zwei Holzplanken treffen
N	Anzahl aller Nadeln
ξ_i	Zufallszahl, gleichverteilt zwischen 0 und 1
m	Modul des LCG
a	Multiplikator des LCG
c	Inkrement des LCG
x_0	Startwert des LCG
$F(t)$	Ausfallwahrscheinlichkeit nach t
$R(t)$	Überlebenswahrscheinlichkeit nach t
$q_i(t)$	Ausfallwahrscheinlichkeit einer Komponente i nach t
$p_i(t)$	Überlebenswahrscheinlichkeit einer Komponente i nach t
t_a	Ausfallzeitpunkt a des Systems
$Min[...]$	Minimalwert der Menge [...]
$Max[...]$	Maximalwert der Menge [...]
$\tilde{F}(t)$	Schätzer der Ausfallwahrscheinlichkeit nach t
λ_i	Ausfallrate der Komponente i
$q_{Nr.x}$	Ausfallwahrscheinlichkeit der Funktion x
M_i	Funktionsstatus des Moduls i
\bar{M}_i	Ausgefallenes Modul i

Kapitel 4

$F_j(t)$	Inhärente Ausfallwahrscheinlichkeit nach t
$F_i(t)$	Ausfallwahrscheinlichkeit einer Komponente i nach t
$F_{ges}(t)$	Gesamtausfallwahrscheinlichkeit eines Systems nach t
$F_B(t)$	Ausfallwahrscheinlichkeit aufgrund Belastung nach t

Kapitel 5

$f_{Belastung}(i,t)$	Ausfalldichte der Komponente/n i zum Zeitpunkt t
$f_{Belastung}(\bar{i},t)$	Ausfalldichte ohne die Komponente/n i zum Zeitpunkt t
$Random[...]$	Zufallswert der Menge [...]
ω_i	Wichtungsfaktor der Belastungsfunktion i
β	Formparameter der Weibull-Verteilung
T^*	Charakteristische Lebensdauer der Weibull-Verteilung
μ	Mittelwert der Normalverteilung
σ	Standardabweichung der Normalverteilung
λ	Ausfallrate der Exponentialverteilung

Kapitel 6 – Mathematische Transformationsregeln

$f(x),g(x)$	Faltungsfunktion ohne spez. Einheit
$h(x)$	Summenfunktion ohne spez. Einheit
$b(x)$	Belastungsfunktion ohne spez. Einheit
θ	Heaviside-Theta-Funktion
\mathcal{F}	Fourier-Transformierte
\mathcal{L}	Laplace-Transformierte
\mathcal{Z}	z-Transformierte

Kapitel 6 – Anwendung auf die Zuverlässigkeitstheorie

$b(t)$	Belastungsfunktion
$B(t)$	Belastungsfunktion (kumuliert)
$F_{Belastung}(t)$	Belastungswahrscheinlichkeit nach t
$f_{Belastung}(t)$	Belastungsdichte zum Zeitpunkt t
$h_{Belastung}(t)$	Belastungsrate nach t
$E_{Belastung}(T)$	Erwartungswert der Belastung nach T
κ	Korrekturfaktor der Belastungsfunktion bei der indirekten Belastungsanalyse
$f_{Inv}(t), g_{Inv}(t)$	Rücktransformierte der Originalfunktion $f(t)$ bzw. $g(t)$

A.3 Parameter für lineare Kongruenzgeneratoren

Wie in Kapitel 3 erläutert, ist die Wahl der Zufallszahlengeneratoren für die Monte-Carlo-Simulation von großer Bedeutung. Hier ist zum einen die Periodenlänge von Bedeutung als auch das Hyperebenenverhalten.

Bedingt durch die Tatsache, dass in der Zuverlässigkeitstheorie keine realen Zufallszahlengeneratoren sondern Pseudo-Zufallszahlengeneratoren eingesetzt werden, ist die Bewertung der eingesetzten Zufallszahlen von großer Bedeutung.

Für die Pseudo-Zufallszahlengeneratoren gilt, dass diese niemals rein zufällig sein können. Die Bewertung, wie zufällig die Zahlen der jeweiligen Generatoren sind, kann über Testbatterien computergestützt ermittelt werden. Hierfür gilt die TestU01-Batterie (TestU01=Test-Uniform-0-1) als state-of-the-art Testwerkzeug [Leq 08]. Auf drei unterschiedlicheren Ebenen werden hier mit diversen Tests die Zufallszahlen auf ihre gleichmäßige Verteilung hin überprüft. Die kleinste Batterie „SmallCrush“ verfügt über 15 Tests. Die mittlere Batterie „Crush“ über 96 Tests und die „BigCrush“-Batterie über 106 Tests.

In der folgenden Tabelle A.3-1 sind unterschiedliche Zufallszahlengeneratoren durch die unterschiedlichen TestU01-Batterien geprüft worden. In den Spalten der Batterien ist jeweils die Anzahl der Tests angegeben, durch die der entsprechende Pseudo-Zufallszahlengenerator durchgefallen ist.

In zwei Blöcken wurden lineare Kongruenzgeneratoren mit unterschiedlichen Parametern aus [Leq 08] mit Pseudo-Zufallszahlengeneratoren aus weit verbreiteter Mathematiksoftware und Tabellenkalkulationsprogrammen verglichen.

Tabelle A.3-1: Vergleich unterschiedlicher Zufallszahlengeneratoren mittels TestU01

Anwendung	Generator	SmallCrush	Crush	BigCrush
LCG-standard	$LCG(2^{31} - 1, 16807, 0)$	3	42	---
LCG-standard	$LCG(2^{31} - 1, 39373, 0)$	3	42	---
LCG-standard	$LCG(2^{31} - 1, 48271, 0)$	3	42	---
LCG-standard	$LCG(2^{31} - 1, 69621, 0)$	3	42	---

Vergleich mit Generatoren in weitverbreiteter Software bzw. Programmiersprachen:

Anwendung	Generator	SmallCrush	Crush	BigCrush
RANDU-IBM 1968	$LCG(2^{31}, 65539, 0)$	14	96	---
Excel 97	$LCG(2^{24}, 16598013, 12820163)$	14	96	---
Excel 2003	Wichmann-Hill 1982	1	12	22
R	MT-19937-98	0	2	2
Mathematica-SWB	---	1	15	---
Matlab	$LCG(10^{12} - 11, 427419669081, 0)$	0	5	8
L'Ecuyer	CLCG4	0	0	0
	KISS 99	0	0	0

Aus Tabelle A.3-1 geht hervor, dass sich die Qualität der Zufallszahlengeneratoren, die in heutiger Anwendungssoftware eingesetzt werden, stark erhöht hat. Trotzdem bleibt der Rechenaufwand ein Kriterium für die Wahl der Generatoren, so ist z.B. der in Mathematica eingesetzte Generator nicht ideal (nach aktuellem Stand der Technik), bietet dafür allerdings eine hohe Geschwindigkeit bei der Generierung.

Für die gängigen Anwendungsfälle, sind die oben angegebenen LCG-standard Zufallszahlengeneratoren ausreichend, da sie über eine Periodenlänge von $2^{31} - 2$ verfügen und wenig anfällig für Hyperebenen sind.